



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Posgrado en Ciencias Físicas

INVARIANTE DE ERMAKOV Y ESTADOS COHERENTES GENERALIZADOS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS FÍSICAS

PRESENTA:
HANS CRUZ PRADO

DR. OCTAVIO HÉCTOR CASTAÑOS GARZA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

DR. PIER ACHILLE MELLO PICCO
INSTITUTO DE FÍSICA, UNAM

DR. RAMÓN LÓPEZ PEÑA
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES, UNAM

MÉXICO, D. F. ENERO 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

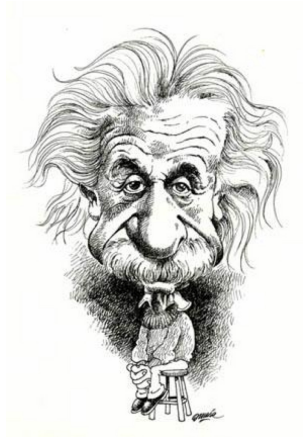
Índice general	2
Agradecimientos	3
Resumen	5
Abstract	7
Introducción	9
1. Invariante de Ermakov en la Mecánica clásica	14
1.1. Invariante de Ermakov	15
1.2. Sistemas Hamiltonianos	24
1.3. Oscilador paramétrico con frecuencia dependiente del tiempo	28
1.3.1. Frecuencia lineal	28
1.3.2. Frecuencia en términos de un polinomio cuadrático	32
1.3.3. Frecuencia no-polinomial	36
1.4. Invariantes complejos	41
2. Invariante de Ermakov en la Mecánica Cuántica	46
2.1. Esquema de Schrödinger	47
2.1.1. Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo	50
2.2. Esquema de Heisenberg	51
2.3. Evolución temporal de las varianzas y la función correlación	58
2.4. Propagador	61
2.5. Solución de la ecuación de Ermakov y operadores invariantes lineales.	63
2.6. Función de Wigner	67
2.6.1. Función de Wigner del oscilador paramétrico	68
2.6.2. Función de Wigner mediante los operadores de ascenso y descenso	72
2.7. Formulación hidrodinámica de la Mecánica Cuántica	75
2.7.1. Estados estacionarios	77
2.7.2. Oscilador paramétrico	79
2.7.3. Ecuación de Riccati	82

3. Oscilador paramétrico en mecánica cuántica	88
3.1. Oscilador armónico	89
3.2. Cambio repentino de frecuencia.	95
3.2.1. Probabilidad de transición $ \langle\langle\beta \alpha\rangle_t ^2$	98
3.3. Cambio de frecuencia mediante una fuerza de restauración lineal	101
3.3.1. Probabilidad de transición $ \langle\langle\beta \alpha\rangle_t ^2$	104
3.4. Cambio de frecuencia mediante una fuerza de restauración no-polinomial	107
3.5. Probabilidad de transición $ \langle\langle\beta \alpha\rangle_t ^2$	109
3.6. Sistemas cuánticos con disipación	110
Conclusiones	114
A. Partícula cargada bajo la acción de un campo electromagnético dependiente del tiempo con simetría axial	118
B. Cálculo de operadores invariantes lineales	120
C. Trampa de Paul	125
C.1. Trampas de iones	125
C.2. Ecuación de Mathieu.	128
D. Transiciones de probabilidad entre estados de Fock para el oscilador paramétrico	133

Agradecimientos

El presente trabajo de tesis es el resultado de muchas personas que a lo largo de este período de mi vida han estado presentes y han aportado de diferentes formas algo al trabajo y al autor.

A quienes siempre les estaré agradecido, por la tesis y por la vida, es a mis padres y hermanas ya que han sido una gran familia pues aunque no tienen certeza de que es lo que hago siempre han confiado en mi trabajo. Por otra parte, quisiera agradecer a mi tutor el Dr. Octavio Castaños por el aprendizaje que me ha dejado en cada seminario y sobre todo agradecer su preocupación por continuar mis estudios en la Física y por convertirse en un amigo. Finalmente, me queda agradecer a mis amigos; esas personas con las cuales uno es más libre y que sin su presencia sería imposible realizar cualquier objetivo, gracias a todos.



Resumen

Se realiza una investigación sobre el invariante de Ermakov y sus usos para el estudio de la dinámica de sistemas de oscilador paramétrico clásicos y cuánticos. Mediante las relaciones que establece el invariable de Ermakov con las soluciones de las ecuaciones diferenciales de Newton, Ermakov y Riccati demostramos que es posible describir la dinámica de sistemas clásicos y cuánticos si se conoce la solución de cualquiera de las ecuaciones antes mencionadas. Se demuestra, para la teoría cuántica, que las soluciones de la ecuación de Ermakov y de Riccati así como el invariante de Ermakov están relacionados con cantidades físicas relevantes del problema. Finalmente, se encuentra que es posible aplicar el formalismo cuántico de invariante de Ermakov, desarrollado en la tesis, a sistemas cuánticos con disipación.

Abstract

This thesis is an investigation about the Ermakov invariant and its application in the description of the dynamics for classical and quantum systems. By means of the relations among the Ermakov invariant and the Newton equation, Ermakov equation and Riccati equation, for the parametric oscillator, we show that with the knowledge of the solution of any of these equations then it is possible to obtain a complete description of the dynamics in either quantum or classical mechanics. We prove in quantum mechanics theory that the solutions of Ermakov equation, the solution of Riccati equation and the Ermakov invariant are related with relevant physical quantities of the problem. Finally, we make evident that the quantum theory of Ermakov invariant developed in this thesis can be applied to quantum systems that incorporate dissipation.

Introducción

El trabajo de tesis tiene el propósito de estudiar sistemas abiertos (o disipativos) por su reciente importancia tanto en aspectos fundamentales del formalismo de la mecánica cuántica como por sus aplicaciones en muchas áreas de la física. Como por ejemplo, en física nuclear para explicar el amortiguamiento de los modos colectivos en colisiones inelásticas [1], en información cuántica para la generación dinámica de enredamiento se ha considerado la evolución de combinaciones de paquetes gaussianos, con disipación [2], y en el amortiguamiento de un oscilador armónico utilizando el formalismo de Lindblad [3]. Recientemente se han establecido procesos de información cuántica que están basados en la evolución de combinaciones de estados gaussianos, operaciones gaussianas y mediciones gaussianas. Estos procesos son de utilidad en: computación cuántica, criptografía cuántica y teleportación cuántica [4].

Esencialmente los estudios de sistemas abiertos que incorporan aspectos disipativos están basados en tres diferentes esquemas de trabajo:

1. Ecuaciones fenomenológicas (tipo ecuación de Langevin, ecuación de Focker-Planck).
2. Formulación de la ecuación maestra [3, 5].
3. Modificaciones de las ecuaciones de movimiento en la mecánica clásica y cuántica [6, 7, 8, 9] (basada en ecuaciones de movimiento no-lineales y transformaciones no-canónicas o no-unitarias).

Estamos interesados principalmente en la última línea de investigación. En ésta se introduce un término de difusión en la ecuación de continuidad, que da lugar a una ecuación de Schrödinger no-lineal que acepta soluciones de paquetes gaussianos normalizables [9, 10, 11]. La ecuación de Schrödinger no-lineal tiene la ventaja de describir a las cantidades físicas relevantes del paquete en forma apropiada; esto no sucede con otros procedimientos, por ejemplo, en la aproximación de Caldirola-Kanai en donde se tiene que ser cuidadoso con la interpretación de su correspondiente función de onda para evitar inconsistencias (principalmente que se viola la relación de incertidumbre de Heisenberg) [10].

La descripción de sistemas disipativos vía la ecuación no-lineal de Schrödinger admite la construcción del invariante de Ermakov. La determinación de este invariante es suficiente para tener una descripción completa de la dinámica de paquetes gaussianos (o una superposición de estos), aún cuando los sistemas incluyan dependencia temporal [9, 10, 11, 12]. Estas propiedades de la ecuación no-lineal de Schrödinger nos motivaron a realizar la investigación que se presenta en la tesis.

La importancia del invariante de Ermakov en la descripción de sistemas abiertos, nos motivó a realizar una revisión de los sistemas de Ermakov en sistemas clásicos y cuánticos. En este trabajo de tesis se estudian sistemas dinámicos tanto en mecánica clásica como en mecánica cuántica, sin incluir disipación, y usando el invariante de Ermakov y sus múltiples relaciones con ecuaciones diferenciales no-lineales. Por sus aplicaciones en el estudio del movimiento de iones en trampas de Paul, o de Hamiltonianos de interés en óptica cuántica restringimos el estudio a sistemas cuadráticos en las posiciones y momentos (o equivalentemente las cuadraturas del campo electromagnético).

Se realiza el estudio con la intención de posteriormente extender, de forma clara y sencilla, el formalismo que se desarrolla en este trabajo, a sistemas que incluyen disipación. En este sentido, el trabajo de tesis es una exhaustiva búsqueda de relaciones entre las propiedades físicas del sistema de oscilador paramétrico y las propiedades del invariante de Ermakov. La tesis conjunta una serie de resultados novedosos (unos recopilados y otros deducidos) en sistemas Hamiltonianos dependientes del tiempo.

En la sección 1.1 se introduce al lector en el formalismo del invariante de Ermakov por medio de la teoría de ecuaciones diferenciales. Mostramos cómo el invariante de Ermakov permite relacionar las soluciones de la ecuación de Newton del oscilador paramétrico con las ecuaciones diferenciales no-lineales de Ermakov y Riccati. En la sección se establecen las ecuaciones en las que se basa la presente investigación y se muestran las relaciones que existen entre ellas.

En la sección 1.2 se introduce el invariante de Ermakov en la formulación Hamiltoniana de la mecánica clásica, se demuestra que es un invariante dinámico, y se determinan nuevas coordenadas canónicas del tipo ángulo-acción en donde el nuevo momento es el invariante. Por lo tanto, es posible encontrar la función generadora de estas nuevas coordenadas canónicas.

En el segundo capítulo, el invariante de Ermakov cuántico se usa para encontrar la evolución temporal de paquetes gaussianos en el oscilador paramétrico. Se pretende demostrar: 1) que dado el invariante de Ermakov es posible obtener una descripción completa de la dinámica del sistema, y 2) que las ecuaciones diferenciales no-lineales de Ermakov y de Riccati auxilian en el cálculo de las cantidades físicas relevantes del sistema. Estos propósitos se plantean de tal forma que su extensión a sistemas disipativos es directa y clara. Primero se estudia la evolución temporal de un paquete gaussiano mediante el esquema de Schrödinger [12], encontrando que para determinar la función de onda solución de la ecuación de Schrödinger en forma explícita es necesario conocer la solución de la ecuación de Newton, o la solución de la ecuación de Ermakov, o la solución de la ecuación de Riccati.

Se demuestra también que el operador de Ermakov puede ser factorizado en términos de operadores bosónicos de ascenso $\hat{A}^\dagger(t)$ y descenso $\hat{A}(t)$ [13]. Esta factorización permite establecer que los estados de Fock (asociados a $\hat{A}^\dagger(t)\hat{A}(t)$) son eigenestados del operador de Ermakov, y también que es posible construir un estado coherente generalizado. Para concluir la sección 2.2, demostramos que las funciones de onda asociadas a los estados de Fock y el estado coherente generalizado son soluciones de la ecuación de Schrödinger del sistema.

Encontramos que las varianzas de posición y momento, al igual que la función de correlación, están directamente relacionadas con las soluciones de la ecuación de Ermakov. Para un estado gaussiano general, se obtiene que las varianzas y la función de correlación forman un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas equivalente a una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden para $\sigma_q^2(t)$. Entonces es directo mostrar que la desviación estándar $\sigma_q(t)$ satisface la

ecuación de Ermakov.

La evolución temporal de un estado arbitrario, bajo la acción del oscilador paramétrico, se determina mediante el propagador del sistema. Para encontrarlo se usan los operadores bosónicos que factorizan al operador de Ermakov, los cuales definen un par de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden para el propagador, y que pueden ser resueltas de forma sencilla. Se muestra que el propagador resultante es una función dependiente de $\rho(t)$: solución de la ecuación de Ermakov.

La dinámica de una gran variedad de sistemas cuánticos puede visualizarse conociendo su cuasi-distribución de probabilidad en el espacio fase, comúnmente conocida como función de Wigner. Además, desde el punto de vista teórico, la manera más apropiada de conocer la conexión entre la física cuántica y la física clásica es usando la función de Wigner ya que es la representación cuántica que más se asemeja a la descripción clásica del espacio fase. Se revisan, en el trabajo de tesis, las propiedades más importantes de la función de Wigner, y se calcula su expresión para el oscilador paramétrico. Se obtiene que la función de Wigner para los estados de Fock y los estados coherentes dependen solamente del valor del invariante de Ermakov.

Para concluir el estudio del oscilador paramétrico en la mecánica cuántica, realizamos una breve revisión bibliográfica de la formulación hidrodinámica de la mecánica cuántica. Mediante esta formulación analizamos los sistemas de oscilador paramétrico, donde se propone como distribución inicial a la distribución normal, obteniéndose de manera directa que la evolución de esta distribución está directamente relacionada con las soluciones de las ecuaciones de Newton y de Ermakov. Por otra parte, en analogía con la formulación hidrodinámica de la mecánica cuántica, se propone la función de onda $\psi(q; t) = N e^{\frac{i}{\hbar} F(q, t)}$, donde $F(q, t)$ es una función compleja y N una constante de normalización. De esta manera, substituyendo la función de onda en la ecuación de Schrödinger se obtiene la ecuación cuántica de Hamilton-Jacobi para la función $F(q, t)$, y se demuestra que las soluciones de la ecuación parcial antes mencionada están directamente relacionadas con las soluciones de las ecuaciones de Newton y de Riccati.

En el último capítulo usamos los métodos desarrollados para estudiar el problema asociado a un operador Hamiltoniano dependiente del tiempo, $\hat{H}(t)$, que inicialmente toma la forma

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{q}^2,$$

y después de un tiempo $T = t - t_0$, está descrito por

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_1^2 \hat{q}^2.$$

Se considera primero que el cambio entre los Hamiltonianos se realiza en forma instantánea, posteriormente se considera el caso donde el cambio es debido a una frecuencia con dependencia temporal de tipo lineal, y por último el caso donde el cambio de la frecuencia se realiza de forma no-polinomial. En todos los casos se estudio la evolución temporal de un estado coherente $|\alpha\rangle$ mediante la solución de la ecuación de Ermakov correspondiente. Estas soluciones permiten calcular fácilmente los valores esperados de los operadores de posición y momento, así como sus varianzas y su función de correlación. Adicionalmente, se obtienen las distribuciones de probabilidad, y la función de Wigner. También se determina la fidelidad, $|\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t|^2$, del estado coherente evolucionado con el estado coherente del hamiltoniano \hat{H}_1 , que denotamos por $|\beta\rangle$.

Finalmente, se describe en forma breve la manera de extender la teoría del invariante de Ermakov a sistemas cuánticos que incluyen disipación. Para incluir disipación en los sistemas cuánticos se introduce un término de difusión en la ecuación de continuidad, lo anterior implica obtener una ecuación de Schrödinger no-lineal para la función de onda de la densidad de probabilidad. Se puede demostrar que la solución analítica de la ecuación de Schrödinger no-lineal es un paquete gaussiano normalizable. Este paquete gaussiano se escribe en términos de funciones dependientes del tiempo que forman un sistema de Ermakov. Entonces tenemos funciones que satisfacen las ecuaciones de Newton, Ermakov y Riccati; de tal manera que es posible utilizar los resultados de la tesis.

Bibliografía

- [1] A. Sandulescu, H. Scutaru, *Ann. of Phys.*,173 (1987), 277-317.
- [2] A. Isar, *Physica Scripta*, T160 (2014) 014019.
- [3] G. Lindblad, *Commun. Math. Phys.* 48, 119(1976).
- [4] C. Weedbrook, S. Pirandola, R. García-Patrón, N. Cerf, T. C. Ralph, J. Shapiro, and S. Lloyd. *Rev. Mod. Phys.* 84 (2012) 621.
- [5] A. Kossakowski, *Rep. Math. Phys.* 3, 247 (1972).
- [6] P. Caldirola, *Nuovo Cimento* 183 (1941) 93;
E. Kanai, *Prog. Theor. Phys.* 3 (1948) 440.
- [7] K. Albrecht, *Phys. Lett. B* 56 (1975) 127.
- [8] R.W. Hasse, *J. Math. Phys.* 16 (1975) 2005.
- [9] D. Schuch, k-Mand Chung, and H. Hartmann, *J. Math. Phys.* 24 (1983)1652;
D. Schuch, K-Mand Chung, and H. Hartmann, *J. Math. Phys.* 25 (1984) 3086;
D. Schuch D and K-Mand Chung, *Int. J. Quantum Chem.* 29 (1986) 1561.
- [10] D. Schuch 2011 Latinamerican School of Physics: XL ELAF AIP Conf.Proc.1334 (2011) 291-340.
- [11] D. Schuch, *J. Math. Phys.* 48 (2007), 122701;
D. Schuch, *J. of Phys.: Conference Series* 380 (2012) 012009.
- [12] D. Schuch, *SIGMA* 4 (2008), 043.
- [13] O. Castaños, D. Schuch, O. Rosas-Ortiz, *J. Phys. A: Mathematical and Theoretical*, 46 (2013) 075304 (20pp)

Invariante de Ermakov en la Mecánica clásica

En este capítulo se establece el invariante de Ermakov que relaciona las soluciones de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden. La primera es lineal y describe la ecuación de Newton del oscilador armónico unidimensional con frecuencia dependiente del tiempo, que llamaremos oscilador paramétrico, y la segunda es no-lineal y se le conoce con el nombre de ecuación de Ermakov. Este conjunto de ecuaciones se llama sistema de Ermakov [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Se demuestra que usando el invariante de Ermakov y dos soluciones independientes del oscilador paramétrico es posible obtener la solución más general de la ecuación de Ermakov, ver (1.5). Esta solución se conoce en la literatura como la propiedad de superposición no-lineal de sistemas de Ermakov [1, 3, 4, 5]. Al mismo tiempo se tiene que dada una solución arbitraria de la ecuación de Ermakov es posible obtener la solución del oscilador paramétrico [1, 7].

Adicionalmente, notamos que la ecuación de Newton del oscilador paramétrico se puede transformar en una ecuación de Riccati: $\dot{z} + z^2 + \omega^2(t) = 0$, mediante la transformación

$$x(t) = x_0 \exp \left\{ \int_0^t z(\tau) d\tau \right\}.$$

Por lo tanto, se concluye que una solución de la ecuación de Riccati permite también obtener una solución del oscilador paramétrico y/o de Ermakov, ver (1.15).

Continuamos el estudio mostrando que en el formalismo de la mecánica Hamiltoniana es posible definir nuevas variables canónicas donde el nuevo momento es el invariante de Ermakov; además, se determina la función generadora de estas nuevas coordenadas canónicas [5]

Posteriormente, se determinan las soluciones de la ecuación de Newton, Ermakov y Riccati para el oscilador paramétrico en los siguientes casos: 1) frecuencia lineal en el tiempo, 2) frecuencia en términos de un polinomio cuadrático y 3) una frecuencia no-polinomial.

Al final del capítulo, las soluciones de las ecuaciones diferenciales de Newton, Ermakov y Riccati, para el oscilador paramétrico, en variables complejas se relacionan con la existencia de un invariante de tipo Ermakov.

1.1. Invariante de Ermakov

Consideremos la ecuación diferencial para un oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0. \quad (1.1)$$

Ahora introducimos una ecuación diferencial no lineal dada por

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{\rho^3}, \quad (1.2)$$

conocida como ecuación de Ermakov la cual cómo se mostrara más adelante sirve como ecuación auxiliar para obtener las soluciones de la ecuación de Newton (1.1). Ambas ecuaciones definen una clase de invariantes I , dados por

$$I = \frac{1}{2} \left[(\rho\dot{x} - \dot{\rho}x)^2 + \left(\frac{x}{\rho} \right)^2 \right]. \quad (1.3)$$

Para mostrar que I es un invariante temporal, despejamos $\omega^2(t)$ de la ecuación (1.1) y la sustituimos en (1.2) entonces queda la expresión

$$\ddot{\rho} - \frac{\ddot{x}}{x}\rho = \frac{1}{\rho^3}.$$

Multiplicando la ecuación anterior por x y simplificando obtenemos

$$\frac{d}{dt} (x\dot{\rho} - \dot{x}\rho) = \frac{x}{\rho^3},$$

si ahora multiplicamos por $x\dot{\rho} - \dot{x}\rho$ de ambos lados de la expresión se tiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x\dot{\rho} - \dot{x}\rho)^2 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{\rho} \right)^2,$$

de donde se concluye que I es un invariante temporal, conocido como el invariante de Ermakov. En 1880, Dmitri Ivanovich Ermakov fue el primero en hallar el invariante (1.3) del sistema de ecuaciones (1.1) y (1.2), ver [1, 2].

Solución $x(t)$ implica solución $\rho(t)$

El invariante de Ermakov permite relacionar las soluciones de la ecuación de Ermakov con las soluciones de oscilador armónico paramétrico. Supongamos que conocemos las soluciones linealmente independientes de la ecuación (1.1) denotadas por $u(t)$ y $v(t)$; entonces ambas satisfacen que

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[(\rho\dot{u} - \dot{\rho}u)^2 + \left(\frac{u}{\rho} \right)^2 \right], \quad I_2 = \frac{1}{2} \left[(\rho\dot{v} - \dot{\rho}v)^2 + \left(\frac{v}{\rho} \right)^2 \right].$$

Eliminando $\dot{\rho}(t)$ de los invariantes I_1 e I_2 , encontramos que

$$v\sqrt{2I_1 - \frac{u^2}{\rho^2}} - u\sqrt{2I_2 - \frac{v^2}{\rho^2}} = W\rho,$$

donde W denota el wronskiano de $u(t)$ y $v(t)$, definido como $W\{u(t), v(t)\} = u(t)v'(t) - v(t)u'(t)$. A partir de la ecuación anterior, es posible encontrar para $\rho(t)$ la ecuación algebraica

$$W^4\rho^4 - 4W^2(I_1v^2 + I_2u^2)\rho^2 + 4(I_1v^2 - I_2u^2)^2 + 4W^2u^2v^2 = 0, \quad (1.4)$$

cuya solución es

$$\rho(t) = \pm \frac{1}{W} \left[2I_2u^2(t) + 2I_1v^2(t) \pm 2\sqrt{4I_1I_2 - W^2u(t)v(t)} \right]^{1/2}. \quad (1.5)$$

Este resultado ha sido demostrado frecuentemente en la literatura y se conoce como la propiedad de superposición no-lineal de sistemas de Ermakov [3, 4, 5]. Por lo tanto, con ayuda de los invariantes y las soluciones linealmente independientes de la ecuación de Newton del oscilador paramétrico, se construye la solución a la ecuación de Ermakov. Es importante notar que las cantidades I_1 e I_2 pueden ser determinadas estableciendo las condiciones iniciales que satisface $\rho(t)$, es decir, sea $\rho(t_0) \equiv \rho_0$, $\dot{\rho}(t_0) \equiv \dot{\rho}_0$. Entonces de la definición del invariante I , es inmediato que

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[(\rho_0\dot{u}(0) - \dot{\rho}_0u(0))^2 + \left(\frac{u(0)}{\rho_0} \right)^2 \right], \quad (1.6)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[(\rho_0\dot{v}(0) - \dot{\rho}_0v(0))^2 + \left(\frac{v(0)}{\rho_0} \right)^2 \right]. \quad (1.7)$$

Solución $\rho(t)$ implica solución $x(t)$

Ermakov demuestra como relacionar las soluciones de la ecuación (1.2) con las soluciones de la ecuación de Newton [1]. Sea $\rho(t)$ una solución arbitraria de la ecuación de Ermakov, y consideramos por simplicidad $I = 0$ en (1.3); entonces tenemos que

$$\rho\dot{x} - \dot{\rho}x = \pm i \frac{x}{\rho},$$

que escrita en forma de variables separables toma la forma

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\rho}{\rho} \pm i \frac{dt}{\rho^2}.$$

Integrando la expresión anterior obtenemos

$$\ln x = \ln \rho \pm i \int^t \frac{d\tau}{\rho^2};$$

por consiguiente, es inmediato que la solución más general de la ecuación del oscilador paramétrico es

$$x(t) = A\rho(t) \exp \left\{ i \int^t \frac{d\tau}{\rho^2(\tau)} \right\} + B\rho(t) \exp \left\{ -i \int^t \frac{d\tau}{\rho^2(\tau)} \right\}, \quad (1.8)$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Sea $x(t=0) \equiv x_0$ y $\dot{x}(t=0) \equiv v_0$; entonces podemos encontrar que las constantes de integración están dadas por

$$A = \frac{x_0}{2} \left(i\dot{\rho}_0 + \frac{1}{\rho_0} \right) - \frac{iv_0}{2} \rho_0, \quad (1.9)$$

$$B = \frac{iv_0}{2} \rho_0 - \frac{x_0}{2} \left(i\dot{\rho}_0 - \frac{1}{\rho_0} \right). \quad (1.10)$$

Es posible obtener la expresión (1.8) sin ayuda del invariable de Ermakov, mediante el siguiente procedimiento [7]: consideramos la ecuación de Newton para el oscilador paramétrico y proponemos como solución $x(t) = Q(t)\rho(t)$, con $\rho(t)$ solución de la ecuación de Ermakov. Entonces substituyendo esta solución llegamos a la ecuación equivalente

$$\ddot{Q}\rho + 2\dot{Q}\dot{\rho} + Q(\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho) = 0.$$

Como ρ satisface la ecuación de Ermakov, se tiene

$$\ddot{Q}\rho + 2\dot{Q}\dot{\rho} + \frac{Q}{\rho^3} = 0.$$

Ahora se propone el cambio de variable $T = \int^t \frac{d\tau}{\rho^2(\tau)}$, con lo cual encontramos la ecuación equivalente

$$\frac{d^2Q}{dT^2} + Q = 0,$$

que corresponde a la ecuación del oscilador armónico con frecuencia unidad y su solución es

$$Q(T) = Ae^{iT} + Be^{-iT}.$$

Por lo tanto la solución del oscilador paramétrico puede escribirse como sigue:

$$x(t) = A\rho(t)e^{iT} + B\rho(t)e^{-iT},$$

que es idéntica a la ecuación (1.8).

Solución $\rho(t)$ implica solución $z(t)$

Se ha demostrado, ver por ejemplo [8], que también podemos relacionar al sistema de Ermakov con una ecuación de Riccati. Para esto, primero relacionamos la ecuación de Newton del oscilador paramétrico con la ecuación de Riccati. Consideramos la ecuación de Riccati, dada por

$$\dot{z} + z^2 + \omega^2(t) = 0, \quad (1.11)$$

con $z(t)$ una función compleja. Entonces, bajo la transformación

$$z = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \quad (1.12)$$

es directo probar que la ecuación de Riccati se convierte en

$$\ddot{\lambda} + \omega^2(t)\lambda = 0, \quad (1.13)$$

que corresponde a la ecuación del oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo. Es importante mencionar que en general las soluciones de la ecuación de Riccati son funciones complejas por lo tanto la ecuación diferencial (1.13) también tiene soluciones complejas. También es fácil mostrar que si proponemos la solución

$$\lambda(t) = \exp \left\{ \int^t z(\tau) d\tau \right\}, \quad (1.14)$$

para la ecuación de Newton compleja, obtenemos entonces la ecuación de Riccati (1.11). De lo anterior se concluye que la ecuación de Riccati sirve como una ecuación auxiliar para hallar soluciones de la ecuación de Newton compleja (1.13) y viceversa. Utilizando la transformación (1.12) junto con la solución (1.8) es posible escribir la solución de la ecuación de Riccati en términos de una solución arbitraria de la ecuación de Ermakov, esto es,

$$z(t) = \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \pm \frac{i}{\rho^2(t)}, \quad (1.15)$$

donde el signo $+$ corresponde a $A = 0$ y el signo $-$ corresponde a $B = 0$. De esta manera, la ecuación de Riccati se puede usar como una ecuación auxiliar para hallar las soluciones del sistema de Ermakov formado por (1.1) y (1.2). Generalmente para obtener una solución de la ecuación de Riccati se propone la solución $z(t) = \tilde{z}(t) + v(t)$ donde $\tilde{z}(t)$ denota una solución particular de la ecuación de Riccati; de esta forma la ecuación de Riccati se transforma en una ecuación de Bernoulli para $v(t)$ dada por

$$\dot{v} + 2\tilde{z}(t)v + v^2 = 0.$$

Además, esta última ecuación puede ser transformada a una ecuación lineal, mediante la transformación $v(t) = \kappa(t)^{-1}$, con lo cual se llega a la ecuación:

$$\dot{\kappa} - 2\tilde{z}(t)\kappa = 1.$$

Los resultados anteriores se encuentran resumidos en la Figura 1.1, donde mostramos como se relacionan las ecuaciones de Newton real y compleja, la ecuación diferencial de Ermakov y la ecuación de Riccati.

$$\begin{array}{ccc}
 \dot{z} + z^2 + \omega^2(t) = 0 & \xleftrightarrow{z = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}} & \ddot{\lambda} + \omega^2(t)\lambda = 0 \\
 \uparrow z = \frac{\dot{\rho}}{\rho} \pm \frac{i}{\rho^2} & & \downarrow \Re\{\lambda\} \\
 \ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{\rho^3} & \xleftrightarrow{I} & \ddot{x} + \omega^2(t)x = 0
 \end{array}$$

Figura 1.1: Relación entre las ecuaciones del oscilador paramétrico, la ecuación de Ermakov y la ecuación de Riccati.

Para ejemplificar cómo se relacionan las soluciones de las ecuaciones diferenciales de la Fig. 1.1, usamos el caso más simple, que corresponde al de un oscilador armónico con frecuencia

constante, ω_0 . Para este caso podemos considerar las soluciones linealmente independientes de la ecuación de Newton $u(t) = \cos \omega_0 t$ y $v(t) = \sin \omega_0 t$; por lo tanto, mediante (1.5), (1.6) y (1.7), tenemos que la solución de la ecuación de Ermakov se escribe

$$\rho(t) = \pm \frac{1}{\omega_0} \left[\omega_0^2 \rho_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \left(\dot{\rho}_0^2 + \frac{1}{\rho_0^2} \right) \sin^2 \omega_0 t \pm 2\omega_0 \rho_0 \dot{\rho}_0 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t \right]^{1/2}, \quad (1.16)$$

y su primera derivada toma la forma

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{\omega_0 \rho(t)} \left[\frac{1}{2} \left(\dot{\rho}_0^2 + \frac{1}{\rho_0^2} - \omega_0^2 \rho_0^2 \right) \sin 2\omega_0 t \pm \omega_0 \rho_0 \dot{\rho}_0 \cos 2\omega_0 t \right], \quad (1.17)$$

donde dependiendo del valor que elijamos para ρ_0 y $\dot{\rho}_0$ se determina los signos en $\rho(t)$ y $\dot{\rho}(t)$. En la Fig 1.2 encontramos la forma de $\rho(t)$ y $\dot{\rho}(t)$ para el oscilador armónico con frecuencia $\omega_0 = 1$, y condiciones iniciales $\rho_0 = 1$ y $\dot{\rho}_0 = 1$. Notamos que las soluciones de Ermakov son funciones periódicas cuya amplitud es constante en el tiempo.

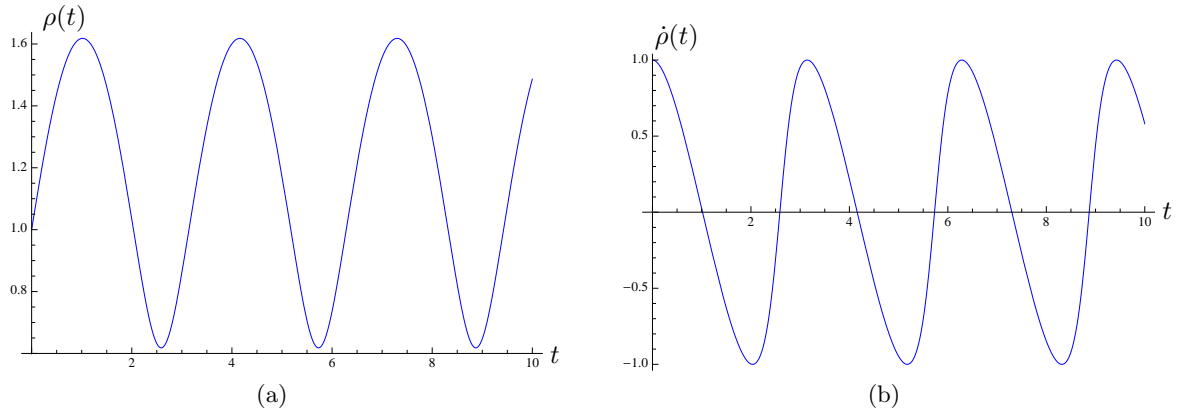


Figura 1.2: Gráficas de la función $\rho(t)$, inciso (a), y su derivada $\dot{\rho}(t)$, inciso (b), para el oscilador paramétrico con frecuencia constante $\omega_0 = 1$, donde se consideran las condiciones iniciales $\rho_0 = 1$ y $\dot{\rho}_0 = 1$.

Por otra parte, podemos determinar las curvas en el espacio fase¹ de la ecuación de Ermakov, que están dadas por el sistema de ecuaciones

$$\dot{\rho} = \alpha \quad (1.18)$$

$$\dot{\alpha} = -\omega_0^2 \rho + \frac{1}{\rho^3}. \quad (1.19)$$

Este sistema de ecuaciones de primer orden es equivalente a la ecuación de Ermakov. Con ayuda de programas especializados, tal como Mathematica, es posible visualizar las curvas integrales del campo vectorial $(\rho(t), \dot{\rho}(t))$ en el espacio fase. En el caso $\omega_0 = 1$ las curvas integrales se

¹El espacio fase al cual nos referimos es el que se define en la teoría de ecuaciones diferenciales que está dado por la función solución y su primera derivada.

muestran en la Fig. 1.3 y describen órbitas alrededor de un punto fijo. Cada curva integral corresponde a una condición inicial diferente; así debido a que las curvas $(\rho(t), \dot{\rho}(t))$ describen órbitas en el espacio fase, entonces $\rho(t)$ y $\dot{\rho}(t)$ se tratan de funciones periódicas. La curva integral en color rojo en la Fig. 1.3 corresponde a la solución cuya condición inicial es $(\rho_0 = 1, \dot{\rho}_0 = 1)$, es decir, el caso considerado en las gráficas de $\rho(t)$ y $\dot{\rho}(t)$ en función del tiempo en Fig. 1.2.

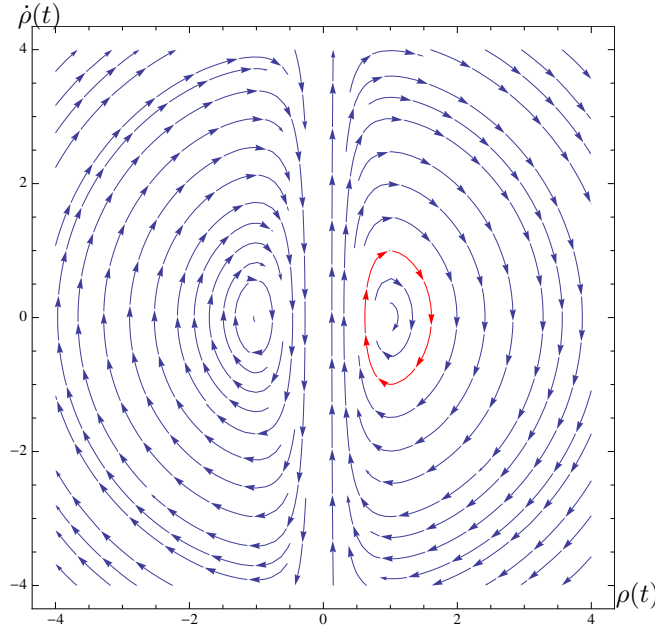


Figura 1.3: Campo vectorial en el espacio fase de la ecuación de Ermakov para el oscilador paramétrico con frecuencia constante, donde se considero $\omega_0 = 1$.

Del sistema de ecuaciones diferenciales (1.18) y (1.19) se muestra que los puntos singulares² de este sistema están dados por

$$(\rho(t), \dot{\rho}(t)) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{\omega_0}}, 0 \right).$$

En el espacio fase, Fig. 1.3, estos puntos singulares son el centro de las órbitas que forman las curva integrales, además es inmediato que estos dos puntos son soluciones triviales de la ecuación de Ermakov, que se obtienen al considerar en (1.16) y (1.17) las condiciones iniciales $\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{\omega_0}}$ y $\dot{\rho}_0 = 0$.

También conocemos las soluciones de la ecuación de Riccati mediante las soluciones de la ecuación de Ermakov, ver (1.15),

$$z(t) = \frac{1}{\omega \rho^2(t)} \left[\frac{1}{2} \left(\dot{\rho}_0^2 + \frac{1}{\rho_0^2} - \omega^2 \rho_0^2 \right) \sin 2\omega t \pm \omega \rho_0 \dot{\rho}_0 \cos 2\omega t \pm i\omega \right]. \quad (1.20)$$

²Dado un sistema de ecuaciones diferencial de primero orden $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x})$, con $\vec{x} \in R^n$. Si suponemos que la función vectorial $f(\vec{x})$ se hace cero en $\vec{x} = \vec{a}$, entonces decimos que \vec{a} es un punto singular de la ecuación diferencial.

La Fig. 1.4a muestra la parte real, mientras que la Fig. 1.4b la parte imaginaria de la solución de la ecuación de Riccati, para $\omega_0 = 1$ y con condición inicial $\Re\{z(0)\} = 1$ y $\Im\{z(0)\} = 1$.

Para conocer el comportamiento de las curvas integrales de la ecuación de Riccati en el espacio complejo consideramos $z(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$. Entonces, substituyendo esto en (1.11), y separando la parte real de la imaginaria, llegamos al sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \beta^2 - \alpha^2 - \omega_0^2, \\ \dot{\beta} &= -2\alpha\beta,\end{aligned}$$

donde la primera ecuación corresponde a la parte real de la ecuación de Riccati y la segunda a la parte imaginaria. Del sistema anterior podemos encontrar que los puntos singulares están dados por

$$(\alpha, \beta) = (0, \pm\omega_0).$$

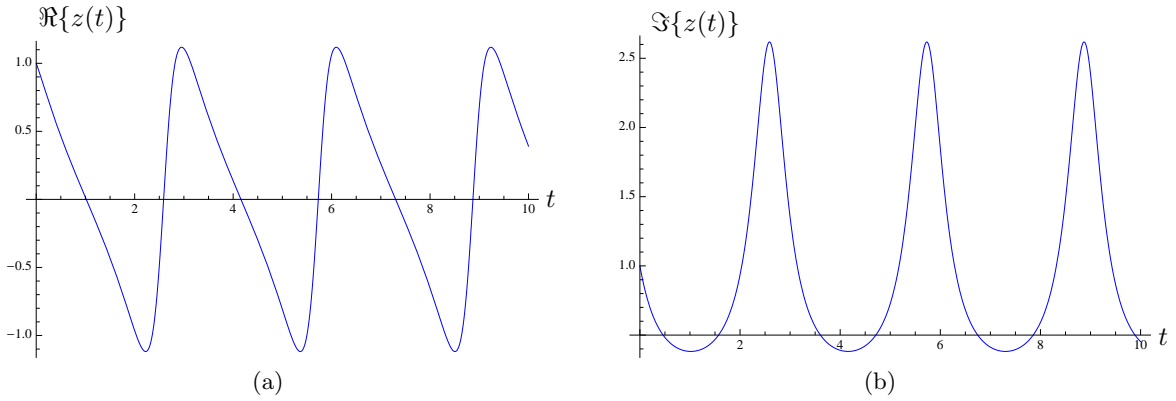


Figura 1.4: Gráficas de la parte real, inciso (a), e imaginaria, inciso (b), de la solución de la ecuación de Riccati, para la frecuencia $\omega_0 = 1$ y con condición inicial $\Re\{z(0)\} = 1$ y $\Im\{z(0)\} = 1$

En la Fig. 1.5, tenemos representadas las curvas integrales de $z(t)$ para el caso $\omega_0 = 1$; podemos notar que las curvas son órbitas alrededor de los puntos singulares, por lo tanto esto implica que $\Re\{z(t)\}$ y $\Im\{z(t)\}$ serán funciones periódicas. En particular tenemos que la curva en rojo corresponde a la solución con condiciones iniciales $\Re\{z(0)\} = 1$ e $\Im\{z(0)\} = 1$.

Siguiendo el esquema de la Fig. 1.1 lo que hemos realizado hasta ahora es que mediante las soluciones $x(t)$ obtenemos la solución de la ecuación de Ermakov $\rho(t)$ y con estas últimas tenemos la solución $z(t)$. Ahora dada una solución arbitraria de la ecuación de Ermakov hallaremos la solución del oscilador armónico. Debido a que la solución que elijamos es arbitraria, podemos considerar la solución trivial que corresponde a los puntos singulares, es decir,

$$\rho(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{\omega}}, \quad \dot{\rho}(t) = 0.$$

Substituyendo esta solución en (1.8) se consigue la solución

$$x(t) = \tilde{A}e^{i\omega t} + \tilde{B}e^{-i\omega t},$$

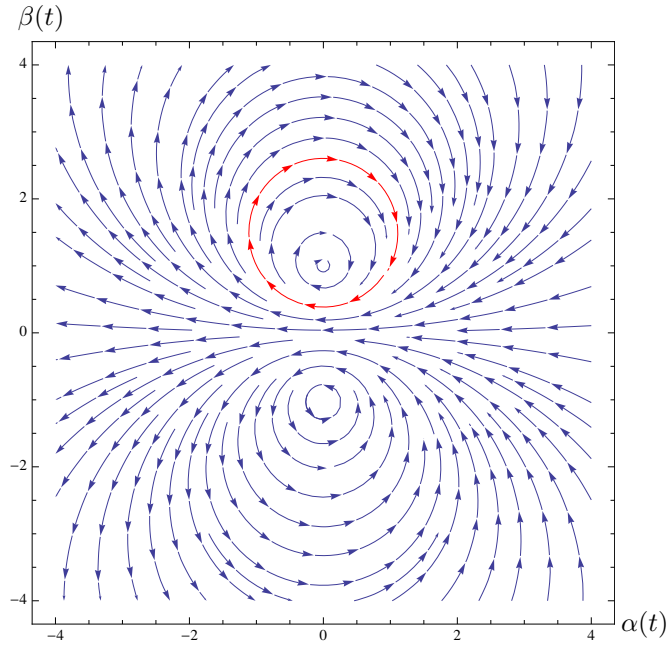


Figura 1.5: Curvas integrales correspondientes a la ecuación de Riccati para el oscilador paramétrico con frecuencia constante, donde hemos considerado $\omega_0 = 1$.

donde

$$\tilde{A} = \frac{x_0}{2} - \frac{iv_0}{2\omega_0}$$

y

$$\tilde{B} = \frac{x_0}{2} + \frac{iv_0}{2\omega_0}.$$

Es importante mencionar que podemos elegir otra solución de $\rho(t)$ diferente a las soluciones triviales, con lo cual tendremos soluciones para el oscilador armónico cuya expresión algebraica es más complicada; sin embargo, no ganamos información física relevante del problema.

Por último, para completar el esquema de la Fig. 1.1 es posible encontrar soluciones de la ecuación de Newton compleja por medio de la solución trivial de la ecuación de Riccati $z(t) = \pm i\omega_0$ usando la relación (1.14).

En muchos casos las ecuaciones de movimiento incluyen términos de amortiguamiento proporcionales a la velocidad; por este motivo mostramos que toda ecuación lineal de segundo orden puede ser llevada a un sistema de Ermakov. Sea la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0. \quad (1.21)$$

Proponemos la solución

$$y(t) = x(t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int^t a(\tau) d\tau \right\}, \quad (1.22)$$

que al sustituirla en (1.21) permite obtener una ecuación equivalente para $x(t)$, dada por

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0, \quad (1.23)$$

donde la frecuencia angular está dada por la expresión

$$\omega^2(t) = b(t) - \frac{1}{4}a^2(t) - \frac{1}{2}\dot{a}(t). \quad (1.24)$$

Así, junto con la ecuación diferencial de Ermakov, formamos el sistema de Ermakov y entonces podemos aplicar el formalismo desarrollado previamente. Podemos obtener el invariante del sistema en términos de las soluciones de (1.21). Esto se logra substituyendo

$$x(t) = y(t) \exp \left\{ \frac{1}{2} \int^t a(\tau) d\tau \right\}$$

en I definido en (1.3). Si realizamos la substitución mencionada, encontramos que el invariante de Ermakov toma la forma

$$I = \frac{1}{2} \left[\left(\rho \dot{y} - \dot{\rho} y + \frac{1}{2} \rho y a(t) \right)^2 + \left(\frac{y}{\rho} \right)^2 \right] \exp \left\{ \int^t a(\tau) d\tau \right\}. \quad (1.25)$$

Ahora, si consideramos

$$\xi(t) = \rho(t) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int^t a(\tau) d\tau \right\}, \quad (1.26)$$

y substituímos en la ecuación de Ermakov, es fácil mostrar que $\xi(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\ddot{\xi} + a(t)\dot{\xi} + b(t)\xi = \frac{\exp \left\{ -2 \int^t a(\tau) d\tau \right\}}{\xi^3}. \quad (1.27)$$

Entonces tenemos que las ecuaciones diferenciales para $\xi(t)$ y $y(t)$ forman un sistema del tipo Ermakov, donde el invariante para este sistema se obtiene substituyendo (1.26) en (1.25)

$$I = \frac{1}{2} \left[\left(\xi \dot{y} - \dot{\xi} y \right)^2 \exp \left\{ 2 \int^t a(\tau) d\tau \right\} + \left(\frac{y}{\xi} \right)^2 \right]. \quad (1.28)$$

Como ejemplo sencillo podemos considerar el oscilador armónico amortiguado, cuya ecuación de movimiento es

$$\ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega_0^2 y = 0, \quad (1.29)$$

para este caso la solución (1.22), se expresa como

$$y(t) = x(t) e^{-ht}, \quad (1.30)$$

que al substituir en la ecuación del oscilador armónico amortiguado resulta la ecuación

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1.31)$$

donde $\omega^2 = \omega_0^2 - h^2$. Entonces recuperamos el sistema de Ermakov para el oscilador paramétrico con frecuencia constante. Como hicimos anteriormente, si elegimos la solución particular trivial $\rho = \pm\omega^{-1/2}$, entonces para $h^2 < \omega_0^2$ tenemos que ω es real y las soluciones para $x(t)$ son $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Por lo tanto, la solución de (1.29) es

$$y(t) = e^{-ht} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = K e^{-ht} \cos(\omega t + \alpha), \quad (1.32)$$

donde las constantes A y B , o K y α , están determinadas por las condiciones iniciales. Además para este caso el nuevo sistema está dado por:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 2h\dot{y} + \omega_0^2 y &= 0, \\ \ddot{\xi} + 2h\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi &= \frac{e^{-4ht}}{\zeta^3}, \end{aligned}$$

cuyo invariante será:

$$I = \frac{1}{2} \left[\left(\xi \dot{y} - \dot{\xi} y \right)^2 e^{4ht} + \left(\frac{y}{\xi} \right)^2 \right].$$

Por lo tanto, hemos mostrado que toda ecuación diferencial ordinaria de segundo orden puede ser llevada a un sistema de Ermakov y tiene asociado un invariante.

1.2. Sistemas Hamiltonianos

Consideremos el sistema clásico descrito por la función Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2(t) q^2, \quad (1.33)$$

donde q es una coordenada canónica, p el momento conjugado y $\omega(t)$ es una función arbitraria que depende del tiempo. Así, para el oscilador armónico dependiente del tiempo existe un invariante exacto $I(q, p, t)$ de la forma

$$I(q, p, t) = \frac{1}{2m} \left[(\rho(t)p - m\dot{\rho}(t)q)^2 + \left(\frac{mq}{\rho(t)} \right)^2 \right], \quad (1.34)$$

donde $\rho(t)$ es una función del tiempo que satisface la ecuación

$$\ddot{\rho}(t) + \omega^2(t)\rho(t) = \frac{1}{\rho^3(t)}. \quad (1.35)$$

Las ecuaciones (1.34) y (1.35) definen una clase de invariantes ya que ρ puede ser cualquier solución a la ecuación (1.35).

Para mostrar que $I(q, p, t)$ es un invariante temporal, usamos que

$$\frac{dI}{dt} = \{I, H\} + \frac{\partial I}{\partial t}.$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
\{I, H\} &= \frac{\partial I}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial I}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q}, \\
&= -\rho(t)\dot{\rho}(t)\frac{p^2}{m} + \rho(t)\dot{\rho}(t)m\omega^2(t)q^2 + \dot{\rho}^2(t)qp \\
&\quad + \left(\frac{1}{\rho^3(t)} - \rho(t)\omega^2(t)\right)qp\rho(t), \\
&= -\rho(t)\dot{\rho}(t)\frac{p^2}{m} + \rho(t)\dot{\rho}(t)m\omega^2(t)q^2 + (\dot{\rho}^2(t) + \ddot{\rho}(t)\rho(t))qp,
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial t} &= \rho(t)\dot{\rho}(t)\frac{p^2}{m} + \left(\ddot{\rho}(t) - \frac{1}{\rho^3(t)}\right)m\dot{\rho}(t)q^2 - (\dot{\rho}^2(t) + \ddot{\rho}(t)\rho(t))qp, \\
&= \rho(t)\dot{\rho}(t)\frac{p^2}{m} - \rho(t)\dot{\rho}(t)m\omega^2(t)q^2 - (\dot{\rho}^2(t) + \ddot{\rho}(t)\rho(t))qp,
\end{aligned}$$

de donde se concluye

$$\frac{dI}{dt} = 0.$$

En mecánica clásica a la cantidad $I(q, p, t)$ se le suele denominar primera integral dependiente del tiempo, debido a que $I(q, p, t)$ es constante a lo largo de las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{p}{m} \\
\dot{p} &= -m\omega^2(t)q.
\end{aligned}$$

El primero en obtener el invariante de Ermakov para el oscilador paramétrico en la formulación Hamiltoniana fue Ralph Lewis [5]. El cual interesado en la dinámica de una partícula cargada inmersa en un campo electromagnético variable de simetría axial [11], ver apéndice A, demostró que este problema se encontraba descrito por las ecuaciones del oscilador paramétrico. Por consiguiente, trató de obtener un invariante para obtener la dinámica del sistema. Entonces, empleando el método de Kruskal [9]; que consiste en efectuar un desarrollo asintótico en términos de un parámetro pequeño, obtuvo que para un sistema Hamiltoniano de oscilador paramétrico es posible hallar un invariante en términos de la integral de acción y el parámetro. Así, por medio de este método, encontró que el primer término de la serie del invariante era justamente (1.34) y que los demás términos eran cero³. Adicionalmente, Lewis determinó también nuevas coordenadas canónicas en las que el nuevo momento es el invariante [5], esto es,

$$\begin{aligned}
Q &= \phi = \arctan\left(\rho^2(t)\left[\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} - \frac{p}{mq}\right]\right), \\
P &= I = \frac{1}{2m}\left[(\rho(t)p - m\dot{\rho}(t)q)^2 + \left(\frac{mq}{\rho(t)}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

³El interesado en esta deducción puede recurrir a [5, 9, 11].

Es posible mostrar que los paréntesis de Poisson para Q y P satisfacen $\{Q, P\} = 1$, para cualquier $\rho(t)$, ¡incluso si $\rho(t)$ no satisface la ecuación de Ermakov! De forma inversa es directo mostrar que

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m}} \rho(t) \cos Q, \quad (1.36)$$

$$p = \sqrt{2mP} \left(\dot{\rho}(t) \cos Q - \frac{1}{\rho(t)} \sin Q \right), \quad (1.37)$$

donde se satisface $\{q, p\} = 1$.

Esta transformación de coordenadas es generada por la función generatriz $F(Q; q, t)$, definida por

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial F}{\partial q}, \\ P &= -\frac{\partial F}{\partial Q}, \\ H' &= H + \frac{\partial F}{\partial t}, \end{aligned}$$

donde H' es el Hamiltoniano en las nuevas coordenadas. Entonces se encuentra que la función generatriz y el nuevo Hamiltoniano están dados como sigue:

$$\begin{aligned} F(Q, q, t) &= -\frac{mq^2}{2\rho^2(t)} (\tan Q - \rho(t)\dot{\rho}(t)), \\ H' &= \frac{P}{\rho^2(t)}. \end{aligned}$$

Con este nuevo Hamiltoniano las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{Q}(t) = \frac{\partial H'}{\partial P} = \frac{1}{\rho^2(t)}, \quad \dot{P}(t) = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que la evolución temporal, de estas nuevas coordenadas, son

$$Q(t) = \phi(t) = \int^t \frac{d\tau}{\rho^2(\tau)}, \quad P = P_0,$$

con P_0 una constante. Si conocemos la solución de la ecuación de Ermakov, podemos encontrar la evolución temporal de las coordenadas (Q, P) . Por consiguiente, mediante las transformaciones (1.36) y (1.37) encontramos las coordenadas originales (q, p) . Ahora es inmediato ver que $Q(t=0) = 0$; entonces tenemos

$$q_0 = \sqrt{\frac{2P_0}{m}} \rho_0, \quad (1.38)$$

$$p_0 = \sqrt{2mP_0} \dot{\rho}_0. \quad (1.39)$$

Por lo tanto, tenemos una relación entre las condiciones iniciales de las coordenadas (q_0, p_0) y las condiciones iniciales de la ecuación de Ermakov $(\rho_0, \dot{\rho}_0)$.

Como caso particular, consideramos el Hamiltoniano del oscilador armónico con frecuencia constante ω_0 ; entonces la solución de la ecuación de Ermakov para este caso ya ha sido calculada y se encuentra dada en la expresión (1.16), junto con la primera derivada $\dot{\rho}(t)$ en (1.17). Entonces para determinar las coordenadas canónicas $q(t)$ y $p(t)$, solo necesitamos conocer la coordenada $Q(t)$. Así es fácil obtener

$$Q(t) = \phi(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\rho^2(\tau)} = \arctan\left(\rho_0\dot{\rho}_0 + \left[\dot{\rho}_0^2 + \frac{1}{\rho_0^2}\right] \frac{\tan \omega_0 t}{\omega_0}\right) - \arctan(\rho_0\dot{\rho}_0).$$

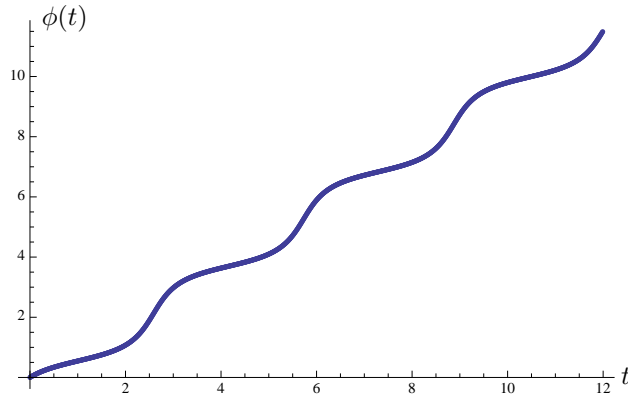


Figura 1.6: Gráfica del ángulo $\phi(t)$ para las condiciones iniciales $\rho_0 = 1$ y $\dot{\rho}_0 = 1$, donde hemos considerado $m = 1$ y $\omega_0 = 1$.

En la Fig. 1.6 se muestra la gráfica del ángulo $\phi(t)$, para las condiciones iniciales $\rho_0 = 1$ y $\dot{\rho}_0 = 1$, la cual es una función creciente en el tiempo. Ahora, mediante (1.36) y (1.37) encontramos

$$q(t) = \pm \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2P_0}{m}} \left[\omega_0^2 \rho_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \left(\dot{\rho}_0^2 + \frac{1}{\rho_0^2} \right) \sin^2 \omega_0 t \pm 2\omega_0 \rho_0 \dot{\rho}_0 \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t \right]^{1/2} \\ \times \cos \left(\arctan \left(\rho_0 \dot{\rho}_0 + \left[\dot{\rho}_0^2 + \frac{1}{\rho_0^2} \right] \frac{\tan \omega_0 t}{\omega_0} \right) - \arctan(\rho_0 \dot{\rho}_0) \right),$$

$$p(t) = \frac{\sqrt{2mP_0}}{\rho(t)} \left[\left(\left[\dot{\rho}_0^2 + \frac{1}{\rho_0^2} - \omega_0^2 \rho_0^2 \right] \frac{\sin 2\omega_0 t}{2\omega_0} \pm \rho_0 \dot{\rho}_0 \cos 2\omega_0 t \right) \right. \\ \times \cos \left(\arctan \left(\rho_0 \dot{\rho}_0 + \left[\dot{\rho}_0^2 + \frac{1}{\rho_0^2} \right] \frac{\tan \omega_0 t}{\omega_0} \right) - \arctan(\rho_0 \dot{\rho}_0) \right) \\ \left. - \sin \left(\arctan \left(\rho_0 \dot{\rho}_0 + \left[\dot{\rho}_0^2 + \frac{1}{\rho_0^2} \right] \frac{\tan \omega_0 t}{\omega_0} \right) - \arctan(\rho_0 \dot{\rho}_0) \right) \right].$$

Es inmediato observar que las coordenadas canónicas descritas a partir de $\rho(t)$ son sumamente más complejas que las que se obtienen por medio de los métodos convencionales. Considerar el caso particular: $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{\omega_0}}$ se obtiene

$$q(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega_0}} \cos \omega_0 t, \quad p(t) = -\sqrt{2m\omega_0 P_0} \sin \omega_0 t,$$

donde estas soluciones tienen las condiciones iniciales $q_0 = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega_0}}$ y $p_0 = 0$.

1.3. Oscilador paramétrico con frecuencia dependiente del tiempo

En esta sección determinamos las soluciones de la ecuación de Newton, la ecuación de Ermakov y la ecuación de Riccati para tres sistemas de oscilador paramétrico con frecuencias:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(\nu t + 1),$$

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(\nu^2 t^2 + \mu t + 1),$$

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 + \frac{\omega^2}{1 + e^{-2kt}}.$$

Para esto obtendremos primero las soluciones de la ecuación de Newton y con ellas calculamos las soluciones $\rho(t)$ y $z(t)$. Además caracterizamos, en cada uno de los casos, el comportamiento de nuestras soluciones por medio de ejemplos.

1.3.1. Frecuencia lineal

Consideramos un oscilador paramétrico con una frecuencia dependiente del tiempo dada por $\omega^2(t) = \omega_0^2(\nu t + 1)$, donde ω_0 y ν representan dos frecuencias arbitrarias. Es posible determinar la solución de la ecuación de Newton de este sistema, si consideramos el cambio de variable

$$\tau = -\left(\frac{\omega_0}{\nu}\right)^{2/3}(\nu t + 1),$$

con lo cual se llega a la ecuación diferencial de las funciones de Airy:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - \tau x = 0,$$

cuyas soluciones linealmente independientes se denotan de la forma siguiente: $Ai(\tau)$ y $Bi(\tau)$ [10]. Por lo tanto, la solución de la ecuación del oscilador paramétrico es

$$x(t) = C_1 Ai(\tau) + C_2 Bi(\tau), \quad (1.40)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración, que se determinan mediante las condiciones iniciales. Esto es, sea $x(t=0) \equiv x_0$ y $\dot{x}(t=0) \equiv v_0$; por consiguiente,

$$C_1 = \pi \left(x_0 Bi'(\tau_0) + \frac{v_0}{(\omega_0^2 \nu)^{1/3}} Bi(\tau_0) \right),$$

$$C_2 = -\pi \left(x_0 Ai'(\tau_0) + \frac{v_0}{(\omega_0^2 \nu)^{1/3}} Ai(\tau_0) \right),$$

con $\tau_0 = \tau(t = t_0)^4$.

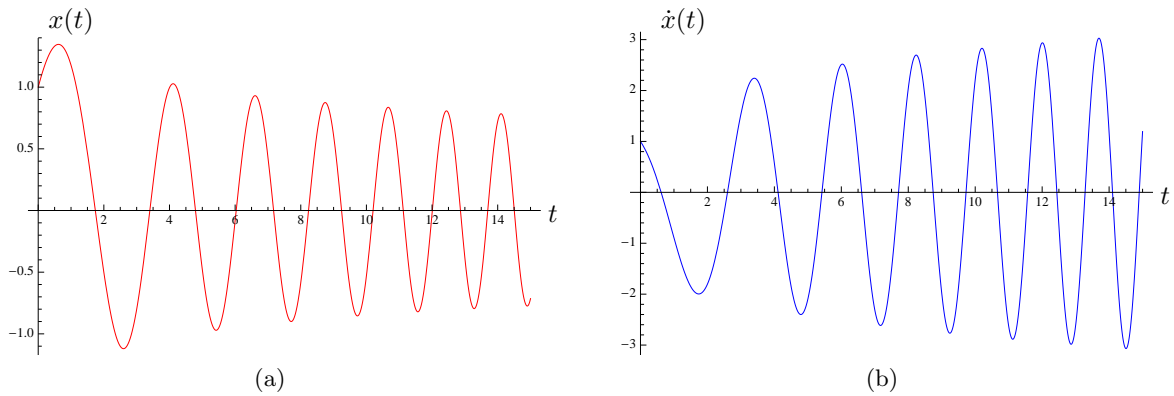


Figura 1.7: Gráficas de la solución del oscilador paramétrico con frecuencia $\omega^2(t) = \omega_0^2(\nu t + 1)$. En el inciso (a) encontramos la gráfica de la solución $x(t)$, mientras en el inciso (b) tenemos las gráficas de la velocidad $\dot{x}(t)$; hemos considerado $\omega_0 = 1$, $\nu = 1$ y las condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $v_0 = 1$.

El comportamiento de las soluciones $x(t)$ es oscilatorio. Como ejemplo de este comportamiento tenemos el caso considerado en la Fig. 1.7, donde tomamos las frecuencias $\omega_0 = 1$, $\nu = 1$ y las condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $v_0 = 1$. En la figura encontramos que: la solución $x(t)$ oscila con una amplitud que va disminuyendo en el tiempo, mientras que la velocidad $\dot{x}(t)$ presenta oscilaciones donde la amplitud aumenta con el tiempo: es decir, el desplazamiento de la partícula bajo este potencial disminuye, mientras que la velocidad a la que vibra aumenta.

La curva paramétrica $(x(t), \dot{x}(t))$ del espacio fase se muestra en la Fig. 1.8a. El movimiento de la partícula en la curva es siempre en el sentido de las manecillas del reloj, así cuando la velocidad es positiva ($\dot{x} > 0$), ésta corresponde a un incremento de la posición $x(t)$, y cuando la velocidad sea negativa ($\dot{x} < 0$) corresponde a un decrecimiento en $x(t)$. Siguiendo este razonamiento y notando que la curva paramétrica se hace más estrecha, observamos que la amplitud de $x(t)$ va disminuyendo mientras que la velocidad aumenta.

Comparando la curva $(x(t), \dot{x}(t))$ con el espacio fase del oscilador armónico con frecuencia ω_0 , notamos que ambas curvas son muy diferentes, ver Fig. 1.8b. Aunque, es claro que si consideramos a $\nu \ll 1$ las curvas integrales de estos sistemas serán muy parecidos en un intervalo de tiempo.

⁴Para obtener las expresiones de C_1 y C_2 hemos empleado que el wronskiano de las funciones de Airy es una constante, esto es $W\{Ai(\tau), Bi(\tau)\} = \pi^{-1}$ [10].

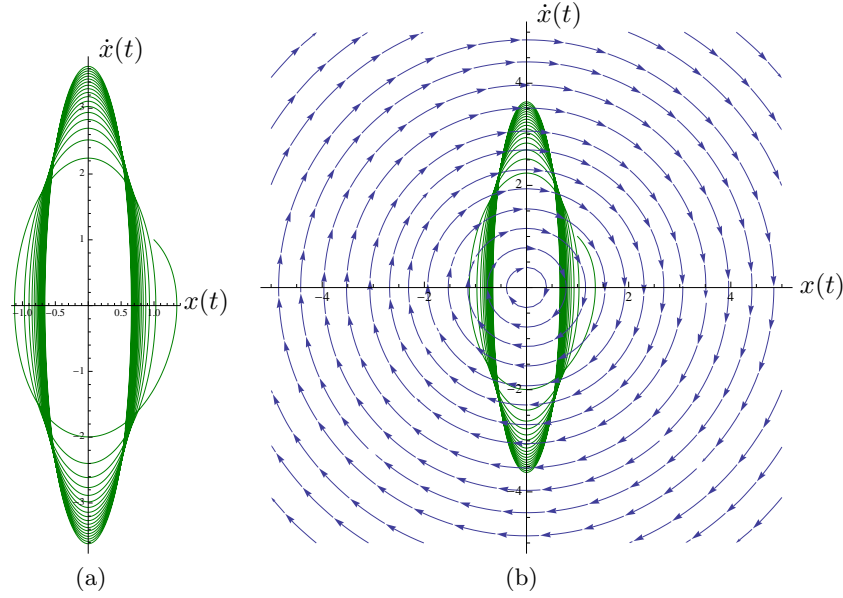


Figura 1.8: (a): Curva paramétrica $(x(t), \dot{x}(t))$. (b) Superposición del espacio fase del oscilador armónico con frecuencia ω_0 y la curva integral en (a).

Ahora con las soluciones linealmente independientes $u(t) = Ai(\tau)$ y $v(t) = Bi(\tau)$ obtenemos la solución de la ecuación de Ermakov para este sistema, usando (1.5), esto es⁵,

$$\rho(t) = \pm \frac{\pi}{(\omega_0^2 \nu)^{1/3}} \left[2I_2 Ai^2(\tau) + 2I_1 Bi^2(\tau) \pm 2\sqrt{4I_1 I_2 - \frac{(\omega_0^2 \nu)^{2/3}}{\pi^2} Ai(\tau) Bi(\tau)} \right]^{1/2}, \quad (1.41)$$

mientras que la primer derivada de $\rho(t)$ está determinada por la expresión

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & -\frac{\pi^2}{(\omega_0^2 \nu)^{1/3}} \frac{1}{\rho(t)} \left[2I_2 Ai(\tau) Ai'(\tau) + 2I_1 Bi(\tau) Bi'(\tau) \right. \\ & \left. \pm \sqrt{4I_1 I_2 - \frac{(\omega_0^2 \nu)^{2/3}}{\pi^2} (Ai'(\tau) Bi(\tau) + Ai(\tau) Bi'(\tau))} \right]. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Las constantes I_1 e I_2 están dadas por las condiciones iniciales ρ_0 y $\dot{\rho}_0$, mediante las expresiones

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{1}{2} \left[\left((\omega_0^2 \nu)^{1/3} \rho_0 Ai'(\tau_0) + \dot{\rho}_0 Ai(\tau_0) \right)^2 + \left(\frac{Ai(\tau_0)}{\rho_0} \right)^2 \right], \\ I_2 = & \frac{1}{2} \left[\left((\omega_0^2 \nu)^{1/3} \rho_0 Bi'(\tau_0) + \dot{\rho}_0 Bi(\tau_0) \right)^2 + \left(\frac{Bi(\tau_0)}{\rho_0} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

⁵Para obtener el siguiente resultado usamos nuevamente que el wronskiano $W\{Ai(\tau), Bi(\tau)\} = \pi^{-1}$.

Por lo tanto, dadas las condiciones iniciales, se conoce la solución completa del sistema. Es importante mencionar que la elección del signo en $\rho(t)$ y $\dot{\rho}(t)$ se define de las condiciones iniciales. Un caso específico del comportamiento de la función $\rho(t)$ y de su derivada se muestra en la Fig. 1.9, donde consideramos las frecuencias $\omega_0 = 1$ y $\nu = 1$ junto con las condiciones iniciales $\rho_0 = 1$, $\dot{\rho}_0 = 0$.

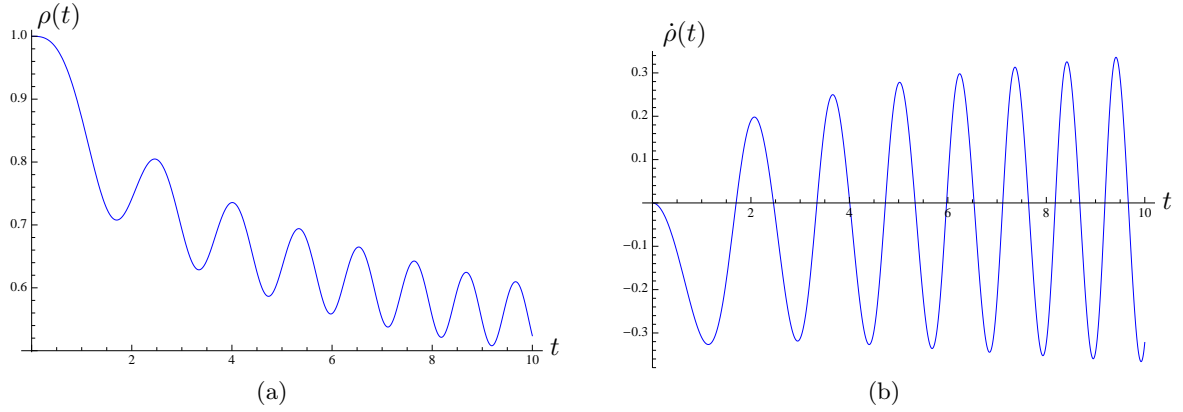


Figura 1.9: Gráfica de la solución de la ecuación de Ermakov $\rho(t)$ y su derivada $\dot{\rho}(t)$, para el oscilador paramétrico con frecuencia $\omega^2(t) = \omega_0^2(\nu t + 1)$, donde se considero $\omega_0 = 1$, $\nu = 1$ y las condiciones iniciales $\rho_0 = 1$, $\dot{\rho}_0 = 0$.

Finalmente dadas las soluciones de Ermakov obtenemos las soluciones de la ecuación de Riccati, usando (1.15)

$$\Re\{z(t)\} = -\frac{\pi^2}{(\omega_0^2\nu)^{1/3}} \frac{1}{\rho^2(t)} \left[2I_2 Ai(\tau) Ai'(\tau) + 2I_1 Bi(\tau) Bi'(\tau) \pm \sqrt{4I_1 I_2 - \frac{(\omega_0^2\nu)^{2/3}}{\pi^2} (Ai'(\tau) Bi(\tau) + Ai(\tau) Bi'(\tau))} \right], \quad (1.43)$$

$$\Im\{z(t)\} = \frac{(\omega_0^2\nu)^{2/3}}{\pi^2} \left[2I_2 Ai^2(\tau) + 2I_1 Bi^2(\tau) \pm 2\sqrt{4I_1 I_2 - \frac{(\omega_0^2\nu)^{2/3}}{\pi^2} Ai(\tau) Bi(\tau)} \right]^{-1}. \quad (1.44)$$

La forma de la parte real $\Re\{z(t)\}$ e imaginaria $\Im\{z(t)\}$, se encuentran graficadas en la Fig. 1.10, para los parámetros $\omega_0 = 1$, $\nu = 1$ y las condiciones iniciales $\Re\{z(0)\} = 0$ y $\Im\{z(0)\} = 1$.

Encontramos las curvas paramétricas $(\rho(t), \dot{\rho}(t))$ y $(\Re\{z(t)\}, \Im\{z(t)\})$ en Fig 1.11. Estas curvas se mueven en el sentido de las manecillas del reloj conforme el tiempo aumenta. Comparadas con los espacios vectoriales en Fig. 1.3 y Fig. 1.5 notamos que son muy distintas; serán muy parecidas en un intervalo de tiempo solamente sí se considera a $\nu \ll 1$.

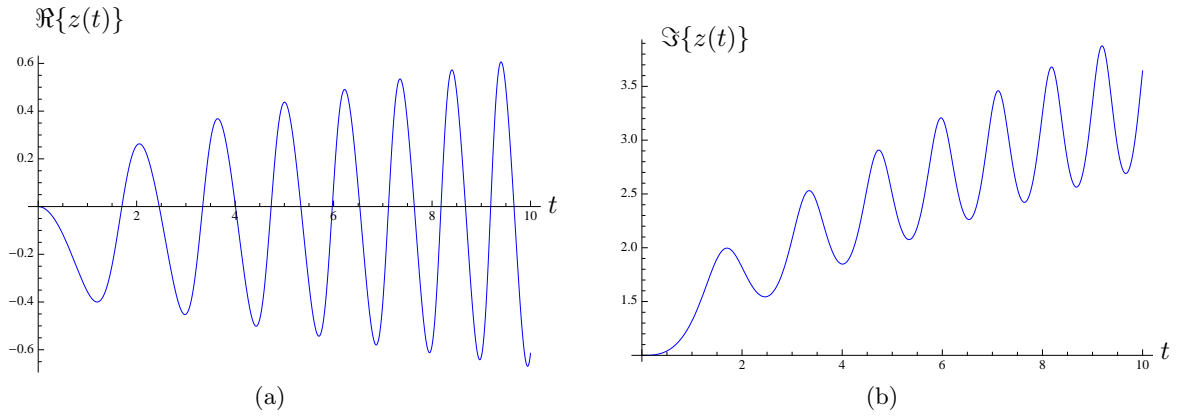


Figura 1.10: Gráfica de la parte real e imaginaria de la solución a la ecuación de Riccati $z(t)$, para el oscilador paramétrico con frecuencia $\omega^2 = \omega_0^2(\nu t + 1)$. Se usaron los valores $\omega_0 = 1$, $\nu = 1$ y las condiciones iniciales $\Re\{z(0)\} = 0$ y $\Im\{z(0)\} = 1$.

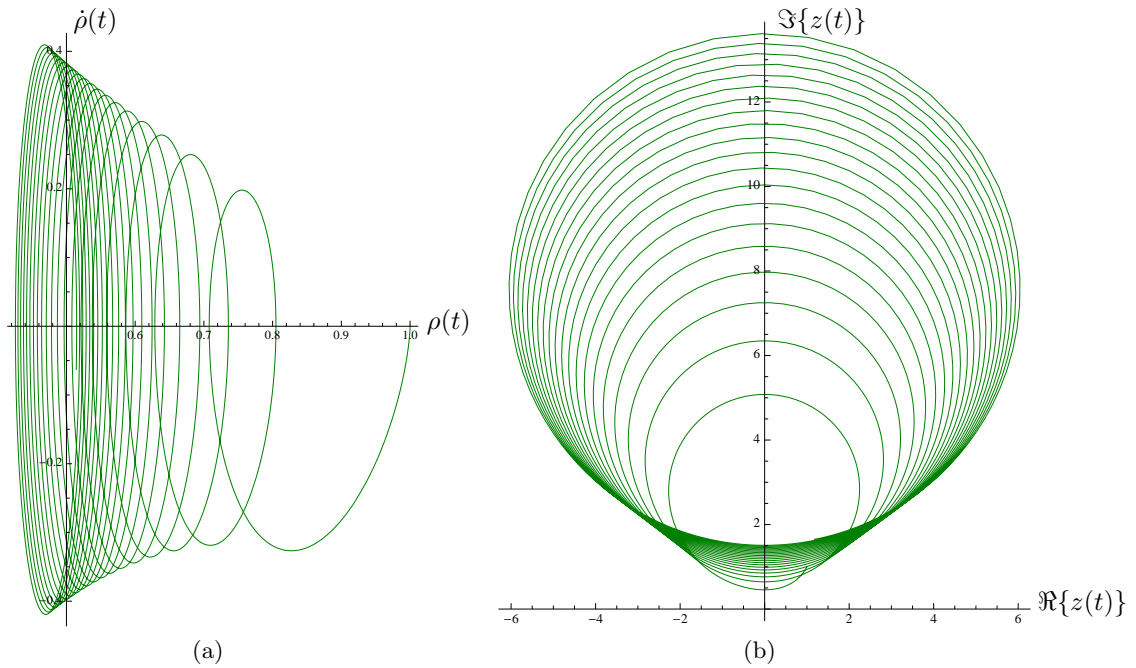


Figura 1.11: Gráficas de las curvas paramétricas: (a) $(\rho(t), \dot{\rho}(t))$ y (b) $(\Re\{z(t)\}, \Im\{z(t)\})$.

1.3.2. Frecuencia en términos de un polinomio cuadrático

Consideremos un oscilador paramétrico con frecuencia $\omega^2(t) = \omega_0^2(\nu^2 t^2 + \mu t + 1)$, donde ω_0 , ν y μ son frecuencias constantes arbitrarias. Entonces, la ecuación de movimiento está dada por

$$\ddot{x} + \omega_0^2(\nu^2 t^2 + \mu t + 1)x = 0. \tag{1.45}$$

Para resolver la ecuación, completamos cuadrados y realizamos el cambio de variable $y = t + \frac{\mu}{2\nu^2}$ con lo cual obtenemos la ecuación equivalente

$$\frac{d^2x}{dy^2} + \left[\omega_0^2 \nu^2 y^2 + \omega_0^2 \left(1 - \frac{\mu^2}{4\nu^2} \right) \right] x = 0.$$

Realizamos otro cambio de variable $\tau = \sqrt{2i\omega_0\nu} y$, dando lugar a la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \left(\frac{1}{4}\tau^2 + s \right) x = 0, \quad (1.46)$$

donde definimos

$$s = \frac{i\omega_0}{2\nu} \left(1 - \frac{\mu^2}{4\nu^2} \right).$$

Antes de continuar, es importante notar que por la forma de la ecuación diferencial entonces dada la solución $x(s, \tau)$ las funciones $x(s, -\tau)$, $x(-s, i\tau)$ y $x(-s, -i\tau)$ también son soluciones de la ecuación diferencial. Las soluciones de la ecuación diferencial (1.46) son las funciones cilíndrico parabólicas, $D_s(\tau)$ [10]. Entonces tenemos

$$x(s, \tau) = C_1 D_{s-\frac{1}{2}}(\tau) + C_2 D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau), \quad (1.47)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración, que determinamos por medio de las condiciones iniciales. Sea $x_0 \equiv x(s, \tau_0)$ y $v_0 \equiv \dot{x}(s, \tau_0)$, donde $\tau_0 = \tau(t=0)$, entonces es fácil encontrar que

$$C_1 = \frac{q_0 i D'_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0) - \frac{v_0}{\sqrt{2i\omega_0\nu}} D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0)}{W \left\{ D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0), D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0) \right\}},$$

$$C_2 = -\frac{q_0 D'_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0) - \frac{v_0}{\sqrt{2i\omega_0\nu}} D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0)}{W \left\{ D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0), D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0) \right\}},$$

con $W \left\{ D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0), D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0) \right\}$ el wronskiano entre las funciones $D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0)$ y $D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0)$, que puede ser calculado mediante programas especializados.

Para mostrar el comportamiento de las soluciones, en la Fig. 1.12a se muestra la gráfica de $x(t)$ y en la Fig. 1.12b la gráfica de la velocidad, $\dot{x}(t)$; en las gráficas se consideran las condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $v_0 = 0$ y se usan los parámetros $\omega_0 = 1$, $\nu = 1$ y $\mu = 1$. Notamos que las soluciones oscilan en el tiempo y su amplitud va disminuyendo rápidamente. Además, conforme la amplitud de $x(t)$ disminuye su velocidad aumenta; de hecho, si comparamos las soluciones obtenidas, con las soluciones del oscilador paramétrico con frecuencia $\omega^2(t) = \omega_0^2(\nu t + 1)$, es fácil notar que en este caso la frecuencia de oscilación es mayor y que la amplitud decrece más rápido; sin embargo, la forma de las soluciones es muy similar. De esto se puede concluir que la forma de las curvas paramétricas $(x(t), \dot{x}(t))$ de este sistema serán muy similares a las presentadas en Fig. 1.8, con la diferencia que la curva gira a mayor velocidad y se vuelve estrecha más rápido.

Continuaremos nuestra discusión encontrando las soluciones de la ecuación de Ermakov que están dadas en términos de las soluciones linealmente independientes $D_{s-\frac{1}{2}}(\tau)$ y $D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau)$.

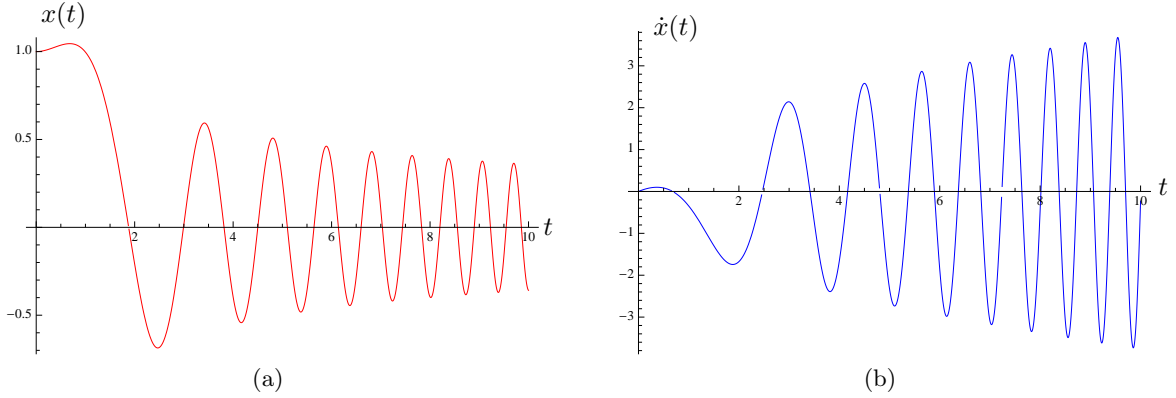


Figura 1.12: Gráfica de las solución $x(t)$ y su primer derivada $\dot{x}(t)$ para el oscilador paramétrico con frecuencia $\omega^2(t) = \omega_0^2(\nu^2 t^2 + \mu t + 1)$, donde se han considerado las condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $v_0 = 0$, con los parámetros $\omega_0 = 1$, $\nu = 1$, $\mu = 1$.

Mediante el resultado (1.5), tenemos que la solución de la ecuación de Ermakov es

$$\rho(t) = \pm \frac{1}{W} \left[2I_2 D_{s-\frac{1}{2}}^2(\tau) + 2I_1 D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau) \pm 2\sqrt{4I_1 I_2 - W^2} D_{s-\frac{1}{2}}(\tau) D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau) \right]^{1/2}, \quad (1.48)$$

donde

$$W = \sqrt{2i\omega_0\nu} W \left\{ D_{s-\frac{1}{2}}(\tau), D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau) \right\},$$

y las constante son

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{2i\omega_0\nu} \rho_0 D'_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0) - \dot{\rho}_0 D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0) \right)^2 + \left(\frac{D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0)}{\rho_0} \right)^2 \right],$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[\left(i\sqrt{2i\omega_0\nu} \rho_0 D'_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0) - \dot{\rho}_0 D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0) \right)^2 + \left(\frac{D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0)}{\rho_0} \right)^2 \right].$$

Además tenemos que la primera derivada de $\rho(t)$ es

$$\dot{\rho}(t) = \frac{\sqrt{2i\omega_0\nu}}{W^2 \rho(t)} \left(2I_2 D_{s-\frac{1}{2}}(\tau) D'_{s-\frac{1}{2}}(\tau) + 2iI_1 D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau) D'_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau) \right. \\ \left. \pm \sqrt{4I_1 I_2 - W^2} \left[D'_{s-\frac{1}{2}}(\tau) D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau) + i D_{s-\frac{1}{2}}(\tau) D'_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau) \right] \right). \quad (1.49)$$

La forma de la solución a la ecuación de Ermakov se muestra en la Fig. 1.13a, mientras en la Fig. 1.13b se grafica su primera derivada; las soluciones se han obtenido considerando las condiciones iniciales $\rho_0 = 1$ y $\dot{\rho}_0 = 0$, y usando las frecuencias $\omega_0 = 1$, $\nu = 1$, $\mu = 1$.

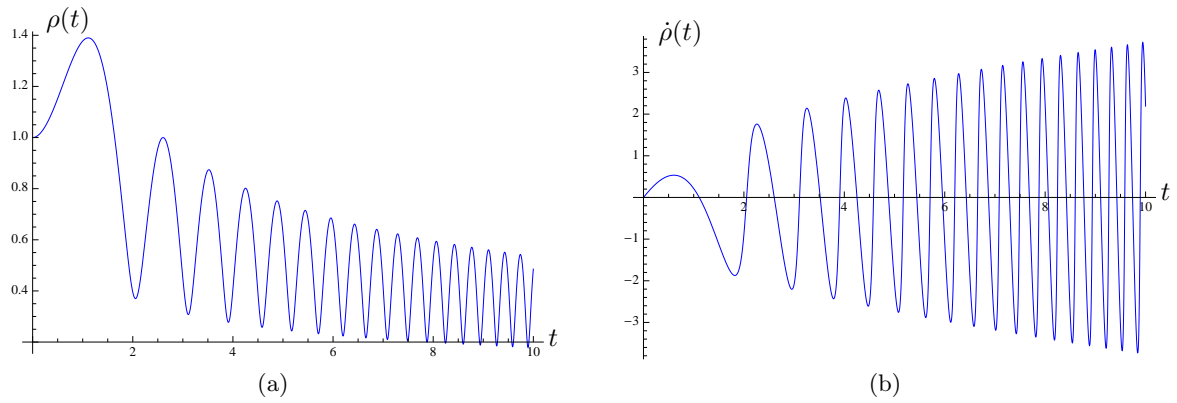


Figura 1.13: Gráfica de las solución $\rho(t)$ y la primera derivada $\dot{\rho}(t)$ de la ecuación de Ermakov con frecuencia $\omega^2(t) = \omega_0^2(\nu^2 t^2 + \mu t + 1)$, donde se han considerado las condiciones iniciales $\rho_0 = 1$ y $\dot{\rho}_0 = 0$, con los parámetros $\omega_0 = 1$, $\nu = 1$, $\mu = 1$.

Por último, es inmediato encontrar la solución de la ecuación de Riccati del sistema a través de la expresión

$$z(t) = \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} + \frac{i}{\rho^2(t)}.$$

Las gráficas de la parte real e imaginaria de la solución $z(t)$ se muestran en la Figura 1.14, con las condiciones iniciales $\Re\{z(0)\} = 0$, $\Im\{z(0)\} = 1$ y los parámetros $\omega_0 = 1$, $\nu = 1$ y $\mu = 1$. Las gráficas de las curvas paramétricas $(\rho(t), \dot{\rho}(t))$ y $(\Re\{z(t)\}, \Im\{z(t)\})$ son similares a las presentadas en Fig. 1.11, con la diferencia que para este caso las curvas giran a mayor velocidad.

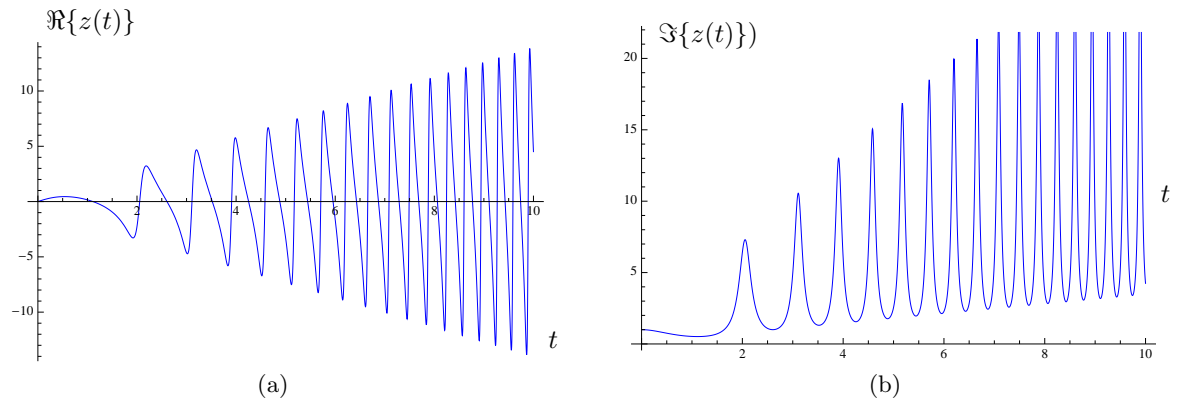


Figura 1.14: Gráfica de las solución a la ecuación de Riccati con frecuencia $\omega^2(t) = \omega_0^2(\nu^2 t^2 + \mu t + 1)$. En la figura (a) encontramos la forma de la parte real de la función $z(t)$ con condición inicial $\Re\{z(0)\} = 0$, mientras en la figura (b) tenemos la grafica de la parte imaginaria de $z(t)$ con condición inicial $\Im\{z(0)\} = 1$. En ambos casos se considero las frecuencias $\omega_0 = 1$, $\nu = 1$ y $\mu = 1$.

1.3.3. Frecuencia no-polinomial

Estudiamos un oscilador paramétrico que en $t \rightarrow -\infty$ tiene una frecuencia ω_0 y cerca de $t = 0$ cambia suavemente a una frecuencia $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}$. Para simular esta dependencia consideramos la función dependiente del tiempo

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 + \frac{\omega_1^2}{1 + e^{-2kt}}, \quad (1.50)$$

donde el parámetro k es constante y siempre positivo. De esta forma $\omega^2(t)$ tiende a una función escalón cuando $k \rightarrow \infty$, y para $k \rightarrow 0$ obtenemos la ecuación del oscilador armónico. En la Fig. 1.15 se exhibe la forma de la función $\omega^2(t)$ con los parámetros $\omega_0^2 = 0.5$ y $\omega_1^2 = 0.5$. Se consideran los casos: $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ y $k = 4$, notando que conforme aumentamos el valor de k la función $\omega^2(t)$ tiende a la función escalón.

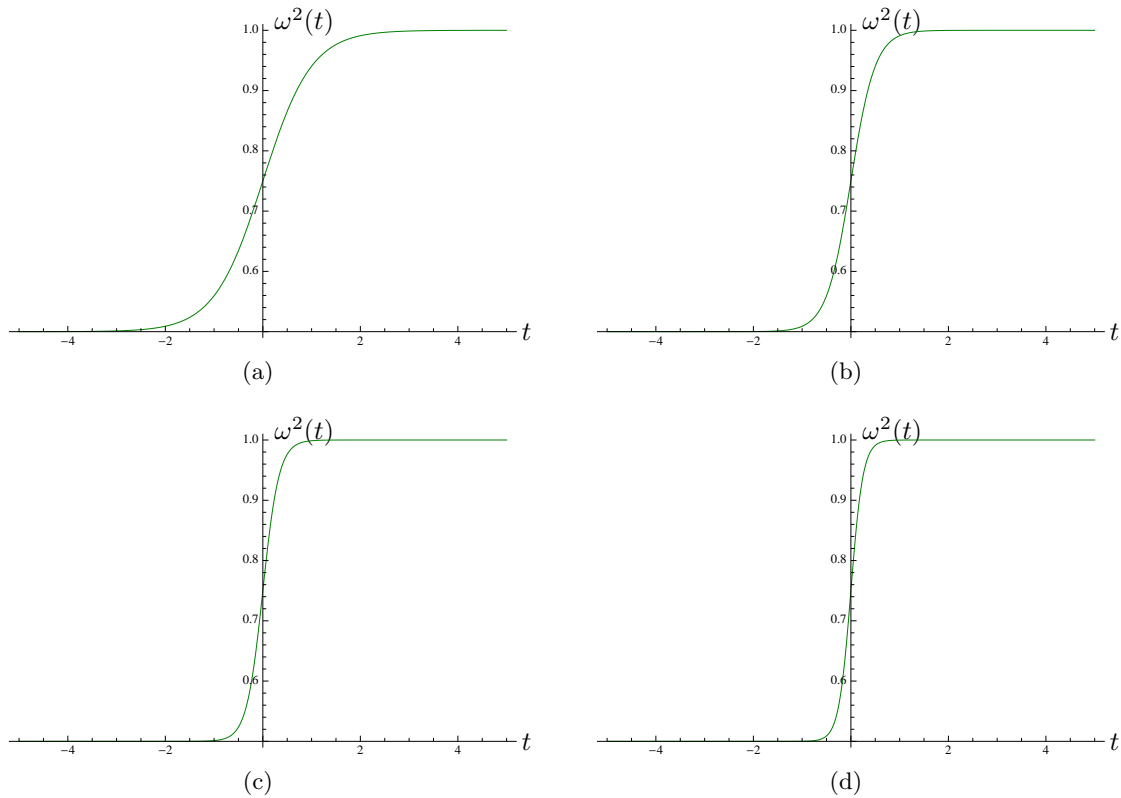


Figura 1.15: Gráficas de la función $\omega^2(t)$ para las frecuencias $\omega_0^2 = 0.5$ y $\omega_1^2 = 0.5$, donde se ha considerado los casos: (a) $k = 1$, (b) $k = 2$, (c) $k = 3$ y (d) $k = 4$.

La ecuación de Newton para este sistema está dada por

$$\ddot{x} + \left(\omega_0^2 + \frac{\omega_1^2}{1 + e^{-2kt}} \right) x = 0. \quad (1.51)$$

Para resolver esta ecuación diferencial realizamos el procedimiento siguiente:

1. Proponemos que la solución sea de la forma $x(t) = y(t)e^{i\omega_0 t}$, de tal manera que $y(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + 2i\omega_0 \dot{y} + \frac{\omega_1^2}{1 + e^{-2kt}} y = 0.$$

2. Se efectúa el cambio de variable $\tau = -e^{2kt}$, resultando

$$\tau(1 - \tau) \frac{d^2 y}{d\tau^2} + \left[1 + \frac{i\omega_0}{k} - \left(1 + \frac{i\omega_0}{k} \right) \tau \right] \frac{dy}{d\tau} - \frac{\omega_1^2}{4k^2} y = 0.$$

3. Finalmente se hace la identificación

$$\begin{aligned} a &= \frac{i\omega_0}{2k} + i \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_0^2}}{2k}, \\ b &= \frac{i\omega_0}{2k} - i \frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_0^2}}{2k}, \\ c &= 1 + \frac{i\omega_0}{k}, \end{aligned}$$

de tal manera que obtenemos la ecuación diferencial de la función hipergeométrica de Gauss:

$$\tau(1 - \tau) \frac{d^2 y}{d\tau^2} + [c - (a + b + 1) \tau] \frac{dy}{d\tau} - aby = 0;$$

cuyas soluciones se denotan por ${}_2F_1(a, b; c; \tau)$ y son conocidas como funciones hipergeométricas de Gauss y definidas en: [10].

Por lo tanto, la solución de la ecuación de Newton del sistema es $x(t) = e^{i\omega_0 t} {}_2F_1(a, b; c; \tau(t))$. Para construir la segunda solución linealmente independiente basta considerar el complejo conjugado $x^*(t)$. Así, la solución general del sistema es

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} {}_2F_1(a, b; c; \tau(t)) + C_2 e^{-i\omega_0 t} {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t)), \quad (1.52)$$

donde C_1 y C_2 son integrales de movimiento determinadas por las condiciones iniciales. Sea $x_0 \equiv x(t = t_0)$ y $v_0 \equiv \dot{x}(t = t_0)$; de tal manera que

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[x_0 e^{-i\omega_0 t_0} \left(i\omega_0 {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0)) + 2ke^{2kt_0} {}_2F_1'(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0)) \right) \right. \\ &\quad \left. + v_0 e^{-i\omega_0 t_0} {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0)) \right] \times \left[2i\omega_0 {}_2F_1(a, b; c; \tau(t_0)) {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0)) \right. \\ &\quad \left. + 2ke^{2kt_0} W \{ {}_2F_1(a, b; c; \tau(t_0)), {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0)) \} \right]^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \left[x_0 e^{i\omega_0 t_0} \left(i\omega_0 {}_2F_1(a, b; c; \tau(t_0)) - 2ke^{2kt_0} {}_2F_1'(a, b; c; \tau(t_0)) \right) \right. \\ &\quad \left. - v_0 e^{i\omega_0 t_0} {}_2F_1(a, b; c; \tau(t_0)) \right] \times \left[2i\omega_0 {}_2F_1(a, b; c; \tau(t_0)) {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0)) \right. \\ &\quad \left. + 2ke^{2kt_0} W \{ {}_2F_1(a, b; c; \tau(t_0)), {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0)) \} \right]^{-1}, \end{aligned}$$

donde $W \{ {}_2F_1(a, b; c; \tau(t_0)), {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0)) \}$ representa el wronskiano entre ${}_2F_1(a, b; c; \tau(t_0))$ y ${}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0))$. La forma de la solución se muestra en la Fig. 1.16; donde hemos considerado $\omega_0^2 = 0.5$, $\omega_1^2 = 0.5$ y $k = 1$, junto con las condiciones iniciales $x(t_0 = -20) = x_0 = 1$ y $\dot{x}(t_0 = -20) = v_0 = 0$. Se observa un cambio continuo en la oscilación de la partícula al tiempo $t = 0$; además, al cambiar de frecuencia la amplitud disminuye mientras su velocidad aumenta. Adicionalmente, se nota que después de $t = 0$ disminuye la longitud de onda en ambos casos.

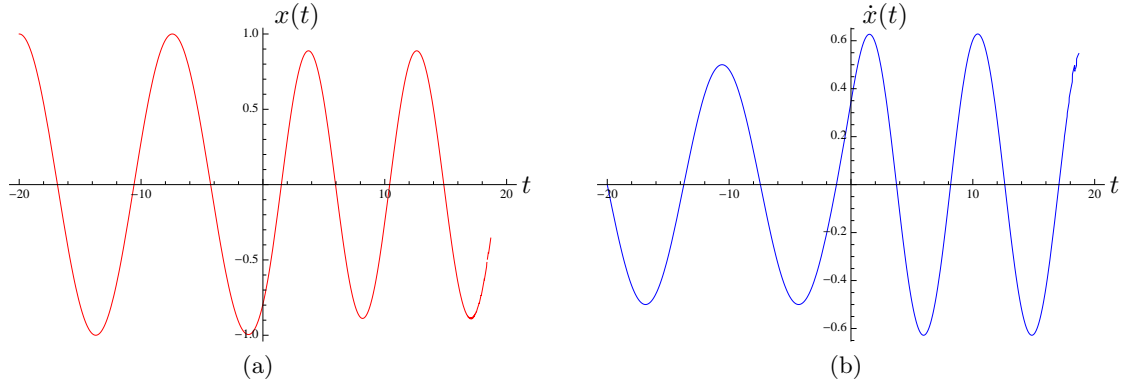


Figura 1.16: Se muestra la solución $x(t)$ y su primera derivada $\dot{x}(t)$, donde se han elegido los parámetros $\omega_0^2 = 0.5$, $\omega_1^2 = 0.5$ y $k = 1$ y las condiciones iniciales $x(t = -20) = x_0 = 1$ y $\dot{x}(t = -20) = v_0 = 0$.

Por otra parte, en Fig. 1.17a se muestra la curva paramétrica $(x(t), \dot{x}(t))$. Esta curva inicia describiendo la elipse asociada a la curva integral del oscilador armónico con frecuencia ω_0 y termina en la curva integral asociada al oscilador armónico con frecuencia ω ; además, el movimiento descrito siempre ocurre en el sentido de las manecillas del reloj.

Lo antes mencionado se muestra en forma gráfica en Fig. 1.17b y Fig. 1.17c. En Fig. 1.17b se ha sobrepuesto en la gráfica 1.17a con el espacio fase de un oscilador armónico con frecuencia ω_0 ; entonces, se nota cómo la curva descrita a tiempos menores de cero se asemejan con las curvas integrales del oscilador armónico con frecuencia ω_0 . En 1.17c hemos superpuesto en 1.17a el espacio fase de un oscilador con frecuencia $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}$; vemos entonces que para tiempos mayores de cero la solución tiende a comportarse como una solución del oscilador armónico con frecuencia ω . Por lo tanto, la curva integral del sistema cambia de forma continua soluciones del oscilador armónico con frecuencia ω_0 en soluciones de un oscilador armónico con frecuencia ω .

De manera similar a como se procedió en los casos previos, consideramos las soluciones linealmente independientes: $u(t) = e^{i\omega_0 t} {}_2F_1(a, b; c; \tau(t))$ y $v(t) = e^{-i\omega_0 t} {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t))$; entonces substituyendo estas en (1.5) tenemos que $\rho(t)$, para este sistema, está dada por

$$\rho(t) = \pm \frac{1}{W} \left[2I_2 e^{2i\omega_0 t} {}_2F_1^2(a, b; c; \tau(t)) + 2I_1 e^{-2i\omega_0 t} {}_2F_1^2(a^*, b^*; c^*; \tau(t)) \right. \\ \left. \pm 2\sqrt{4I_1 I_2 - W^2} {}_2F_1(a, b; c; \tau(t)) {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t)) \right]^{1/2}, \quad (1.53)$$

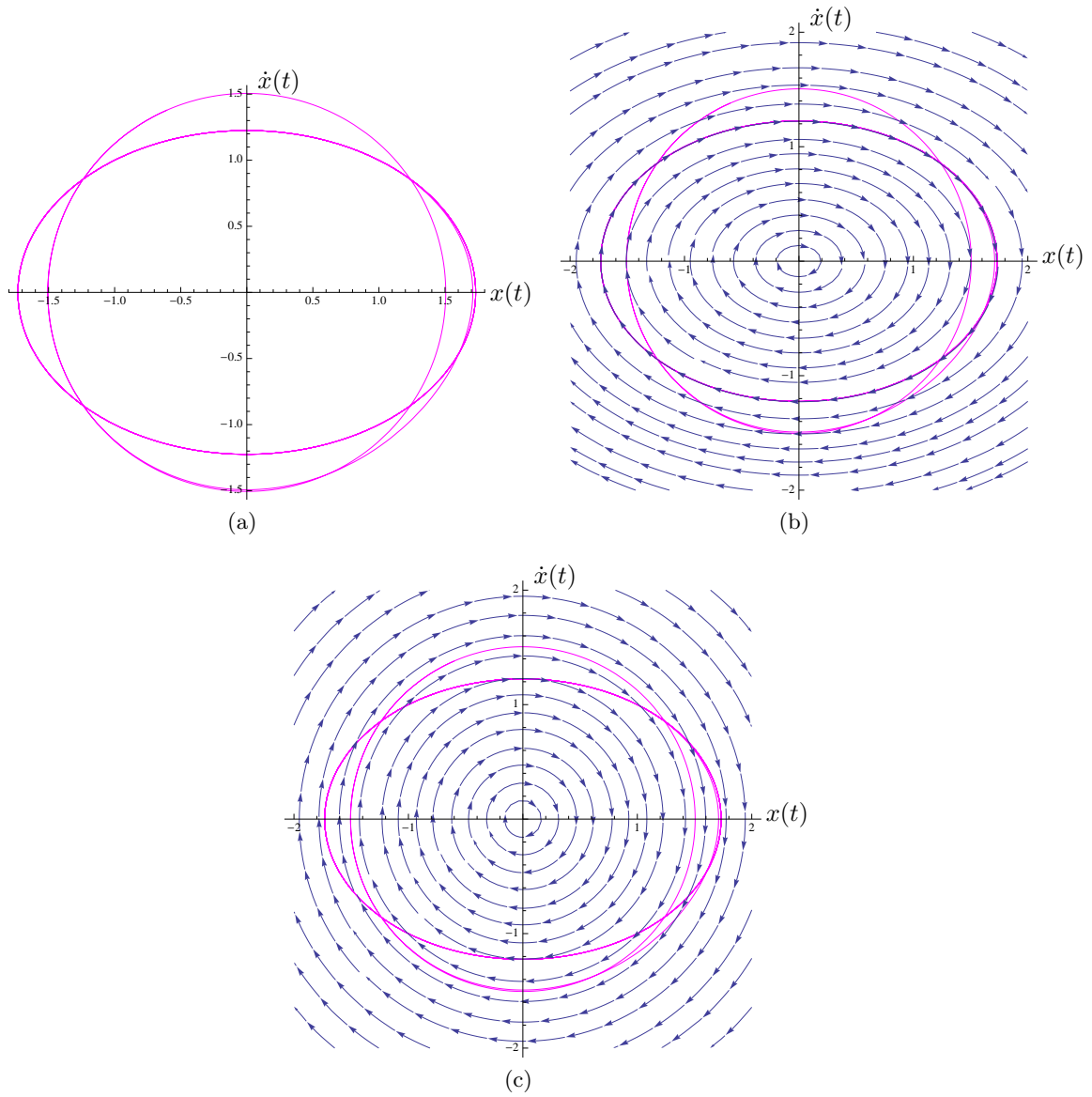


Figura 1.17: (a) Gráfica de las soluciones de Figura 1.16 en el espacio fase. (b) Superposición de la gráfica (a) y el espacio fase del oscilador armónico con frecuencia ω_0 . (c) Superposición de la gráfica (a) y el espacio fase del oscilador armónico con frecuencia $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2$.

donde el wronskiano toma la forma

$$\begin{aligned}
 W &= -2i\omega_0 {}_2F_1(a, b; c; \tau(t_0)) {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0)) \\
 &\quad - 2ke^{2kt_0} W \{ {}_2F_1(a, b; c; \tau(t_0)), {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0)) \}.
 \end{aligned}$$

Los invariantes de Ermakov se determinan de las condiciones iniciales de $\rho(t)$, esto es,

$$I_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\rho_0 e^{i\omega_0 t_0} \left[i\omega_0 {}_2F_1(a, b; c; \tau(t_0)) - 2ke^{2kt_0} {}_2F_1'(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0)) \right] - \dot{\rho}_0 e^{i\omega_0 t_0} {}_2F_1(a, b; c; \tau(t_0)) \right)^2 + \left(\frac{e^{i\omega_0 t_0} {}_2F_1(a, b; c; \tau(t_0))}{\rho_0} \right)^2 \right],$$

e

$$I_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\rho_0 e^{-i\omega_0 t_0} \left[-i\omega_0 {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0)) - 2ke^{2kt_0} {}_2F_1'(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0)) \right] - \dot{\rho}_0 e^{i\omega_0 t_0} {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t_0)) \right)^2 + \left(\frac{e^{i\omega_0 t_0} {}_2F_1(a, b; c; \tau(t_0))}{\rho_0} \right)^2 \right].$$

Además, encontramos que la primera derivada de $\rho(t)$ es

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & \frac{1}{W^2 \rho(t)} \left[2I_2 e^{2i\omega_0 t} \left(i\omega_0 {}_2F_1^2(a, b; c; \tau(t)) - 2ke^{2kt} {}_2F_1(a, b; c; \tau(t)) {}_2F_1'(a, b; c; \tau(t)) \right) \right. \\ & + 2I_1 e^{-2i\omega_0 t} \left(-i\omega_0 {}_2F_1^2(a^*, b^*; c^*; \tau(t)) - 2ke^{2kt} {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t)) {}_2F_1'(a^*, b^*; c^*; \tau(t)) \right) \\ & \pm \sqrt{4I_1 I_2 - W^2} \left(-2ke^{2kt} {}_2F_1'(a, b; c; \tau(t)) {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau(t)) \right. \\ & \left. \left. - 2ke^{2kt} {}_2F_1(a, b; c; \tau(t)) {}_2F_1'(a^*, b^*; c^*; \tau(t)) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Como ejemplo, consideramos el caso donde $\omega_0^2 = 0.5$, $\omega_1^2 = 0.5$ y $k = 1$, junto con las condiciones iniciales $\rho_0 = \rho(t = -20) = 1$ y $\dot{\rho}_0 = \dot{\rho}(t = -20) = 0$; el comportamiento de $\rho(t)$ y $\dot{\rho}(t)$, está descrito en la Fig. 1.18.

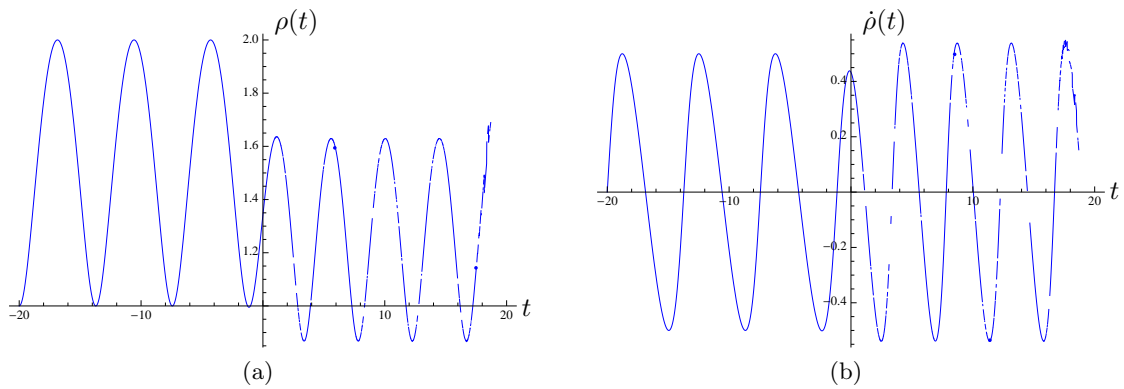


Figura 1.18: Gráfica de la solución de la ecuación de Ermakov $\rho(t)$ y de su primera derivada $\dot{\rho}(t)$, donde se han elegido los parámetros $\omega_0^2 = 0.5$, $\omega_1^2 = 0.5$, $k = 1$ y condiciones iniciales $\rho(t = -20) = \rho_0 = 1$ y $\dot{\rho}(t = -20) = \dot{\rho}_0 = 0$.

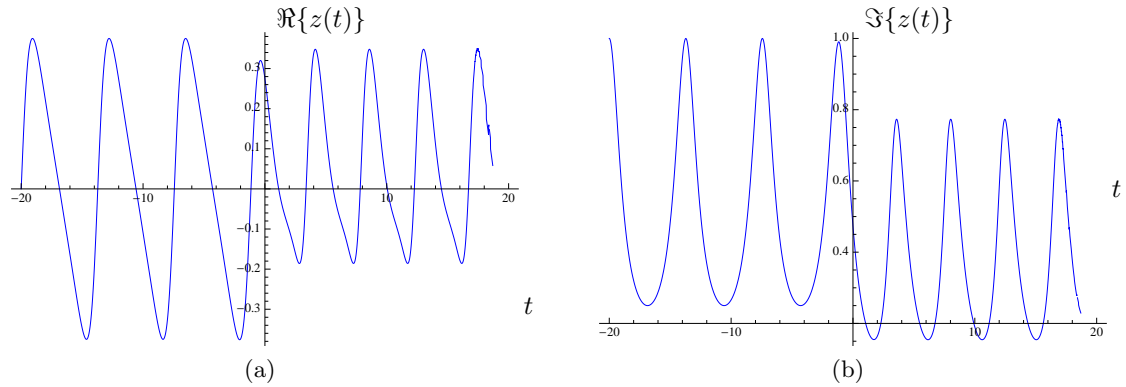


Figura 1.19: Se muestran las partes real $\Re\{z(t)\}$ e imaginaria $\Im\{z(t)\}$ de la solución de la ecuación de Riccati para el sistema. Se usan los parámetros $\omega_0^2 = 0.5$, $\omega_1^2 = 0.5$, $k = 1$ y las condiciones iniciales $\Re\{z(t = -20)\} = 0$ y $\Im\{z(t = -20)\} = 1$.

La solución de la ecuación de Riccati está determinada por $\rho(t)$, $\dot{\rho}(t)$, y la relación (1.11). En Fig. 1.19 se muestra la solución de la ecuación de Riccati para los parámetros considerado anteriormente además de $\Re\{z(t = -20)\} = 0$ y $\Im\{z(t = -20)\} = 1$.

Por último, mostramos de forma gráfica mediante la Fig. 1.20 cómo la solución $\rho(t)$ va de las soluciones de la ecuación de Ermakov con frecuencia ω_0 en soluciones de la ecuación de Ermakov con frecuencia $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_1^2}$. Por otra parte, encontramos en Fig. 1.21 que las soluciones de la ecuación de Riccati tienen un comportamiento similar, esto es, la solución $z(t)$ va de las soluciones de la ecuación de Riccati con frecuencia ω_0 en soluciones de la ecuación de Riccati con frecuencia ω .

1.4. Invariantes complejos

En esta sección, se generaliza el invariante de Ermakov para relacionar un sistema de ecuaciones diferenciales en variables complejas. Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales se escribe

$$\ddot{\lambda} + \omega^2(t)\lambda = 0, \quad (1.55)$$

$$\ddot{\eta} + \omega^2(t)\eta = \frac{1}{\eta^3}, \quad (1.56)$$

$$\dot{z} + z^2 + \omega^2(t) = 0, \quad (1.57)$$

donde $\lambda(t)$, $\eta(t)$ y $z(t)$ son funciones complejas que dependen del tiempo. Usando los procedimientos descritos en secciones anteriores es fácil mostrar que el invariante I está dado por

$$I = \frac{1}{2} \left[\left(\eta \dot{\lambda} - \dot{\eta} \lambda \right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\eta} \right)^2 \right], \quad (1.58)$$

y relaciona soluciones de (1.55) con soluciones de (1.56), es decir,

$$\eta(t) = \pm \frac{1}{W} \left[2I_2 \lambda^2(t) + 2I_1 \lambda^{*2}(t) \pm 2\sqrt{4I_1 I_2 - W^2} \lambda(t) \lambda^*(t) \right]^{1/2},$$

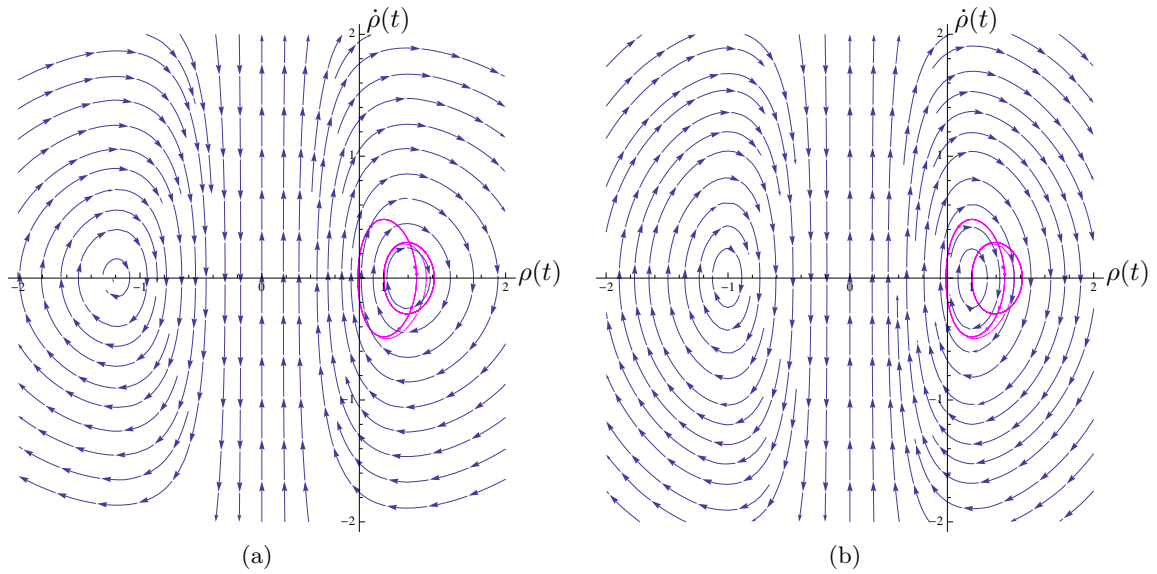


Figura 1.20: Superposición de la solución de la ecuación de Ermakov con: (a) el espacio fase de la ecuación de Ermakov con frecuencia ω_0 y (b) con el espacio fase de la ecuación de Ermakov con frecuencia $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2$.

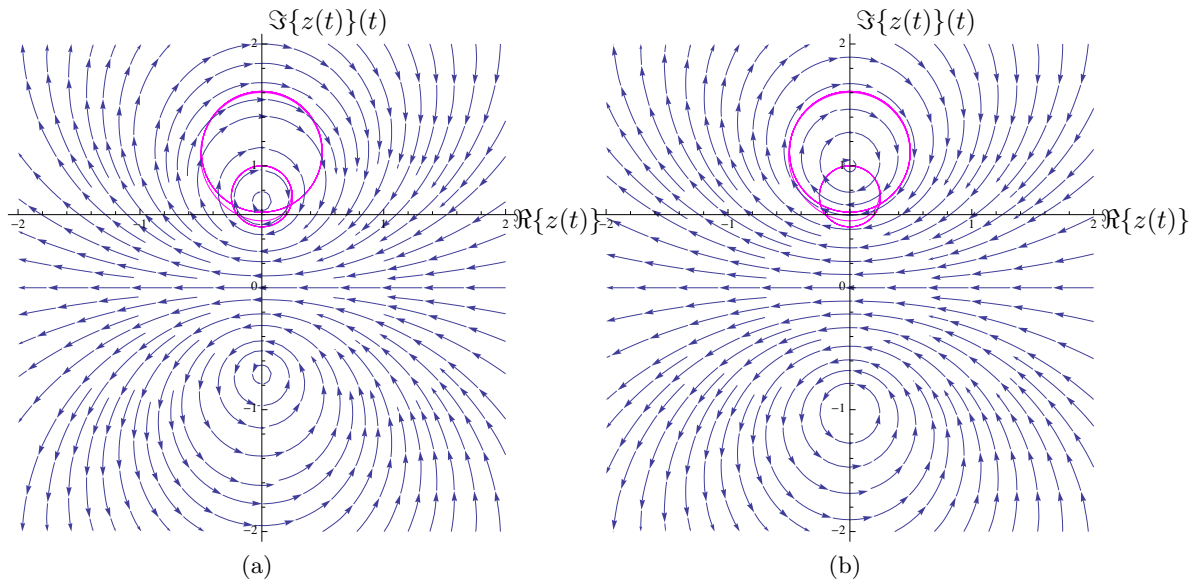


Figura 1.21: Superposición de la solución de la ecuación de Riccati con: (a) el espacio fase de la ecuación de Riccati con frecuencia ω_0 y (b) con el espacio fase de la ecuación de Riccati con frecuencia $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2$.

donde $\lambda(t)$ es una solución arbitraria, W denota el wronskiano entre las funciones $\lambda(t)$ y $\lambda^*(t)$ y los invariantes I_1 e I_2 están determinados por las condiciones iniciales $\eta(t = 0) \equiv \eta_0$,

$\dot{\eta}(t=0) \equiv \dot{\eta}_0$, $\lambda(t=0) \equiv \lambda_0$ y $\dot{\lambda}(t=0) \equiv \dot{\lambda}_0$.

Si $\eta(t)$ es una solución arbitraria de (1.56), considerando $I = 0$, así la solución de (1.55) está dada por

$$\lambda(t) = A\eta(t) \exp \left\{ i \int^t \frac{d\tau}{\eta^2(\tau)} \right\} + B\eta(t) \exp \left\{ -i \int^t \frac{d\tau}{\eta^2(\tau)} \right\},$$

con A y B constantes de integración.

Soluciones de la ecuaciones (1.55), también se relacionan con las soluciones de (1.57) mediante la transformación

$$z(t) = \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)},$$

o despejando $\lambda(t)$ con

$$\lambda(t) = \exp \left\{ \int^t z(\tau) d\tau \right\}.$$

Finalmente notamos que el invariante I también relaciona soluciones de la ecuación de Ermakov con soluciones de la ecuación de Riccati. Para mostrar la afirmación anterior sustituimos en el invariante I a $\lambda(t) = \exp \left\{ \int^t z(\tau) d\tau \right\}$ y $\dot{\lambda}(t) = z(t) \exp \left\{ \int^t z(\tau) d\tau \right\}$,

$$I = \frac{1}{2} \left[(\dot{\eta} - z\eta)^2 + \frac{1}{\eta^2} \right] \exp \left\{ 2 \int^t z(\tau) d\tau \right\}. \quad (1.59)$$

Por lo tanto, dada una solución arbitraria $z(t)$ de la ecuación de Riccati se obtiene una solución compleja de la ecuación de Ermakov

$$\begin{aligned} \eta(t) = & \pm \frac{1}{\tilde{W}} \left[2I_2 \exp \left\{ 2 \int^t z(\tau) d\tau \right\} + 2I_1 \exp \left\{ 2 \int^t z^*(\tau) d\tau \right\} \right. \\ & \left. \pm 2\sqrt{4I_1I_2 - \tilde{W}^2} \exp \left\{ \int^t [z(\tau) + z^*(\tau)] d\tau \right\} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

donde \tilde{W} denota el wronskiano entre las funciones $\exp \left\{ \int^t z(\tau) d\tau \right\}$ y $\exp \left\{ \int^t z^*(\tau) d\tau \right\}$, y ahora con los invariantes I_1 e I_2 determinados por las condiciones iniciales $\eta(t=0) \equiv \eta_0$, $\dot{\eta}(t=0) \equiv \dot{\eta}_0$, $z(t=0) \equiv z_0$ y $\dot{z}(t=0) \equiv \dot{z}_0$.

Si consideramos una solución arbitraria $\eta(t)$ de (1.56) e $I = 0$ encontramos

$$z(t) = \tilde{A} \frac{\alpha(t)}{\dot{\alpha}(t)} + \tilde{B} \frac{i}{\alpha^2(t)},$$

donde \tilde{A} y \tilde{B} son constantes de integración.

Por lo tanto, las soluciones de las ecuaciones diferenciales (1.55), (1.56) y (1.57) se encuentran relacionadas, como se muestra gráficamente en la Fig. 1.22.

Es importante notar que a diferencia de secciones anteriores estamos considerando que la solución de la ecuación de Ermakov puede ser compleja, esto es importante pues es lo que permite

$$\begin{array}{ccc}
 & \ddot{\eta} + \omega^2(t)\eta = \frac{1}{\eta^3} & \\
 & \swarrow I & \searrow I \\
 \dot{z} + z^2 + \omega^2(t) = 0 & \xleftrightarrow[\lambda = e^{\int z(\tau)d\tau}]{z = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}} & \ddot{\lambda} + \omega^2(t)\lambda = 0
 \end{array}$$

Figura 1.22: Mediante el invariante de Ermakov I es posible relacionar las soluciones de la ecuación de Ermakov con las soluciones de la ecuación del oscilador paramétrico y con las soluciones de la ecuación de Riccati.

relacionar $\eta(t)$ con $z(t)$. Además las soluciones complejas $\eta(t)$ y las reales $\rho(t)$ de la ecuación de Ermakov están relacionadas pues si la parte imaginaria de $\eta(t)$ es cero entonces $\eta(t) = \rho(t)$. También tenemos que si $x(t)$ son las soluciones reales de la ecuación de Newton del oscilador paramétrico, entonces tenemos que $x(t) = \Re\{\lambda(t)\}$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \dot{z} + z^2 + \omega^2(t) = 0 & \\
 & \swarrow I & \searrow z = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \\
 \ddot{\eta} + \omega^2(t)\eta = \frac{1}{\eta^3} & \xleftrightarrow{I} & \ddot{\lambda} + \omega^2(t)\lambda = 0 \\
 \Im\{\eta(t)\} = 0 \downarrow & & \downarrow \Re\{\lambda(t)\} \\
 \ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{\rho^3} & \xleftrightarrow{I_E} & \ddot{x} + \omega^2(t)x = 0
 \end{array}$$

Figura 1.23: Relación entre las soluciones complejas $z(t)$, $\eta(t)$ y $\lambda(t)$ con las soluciones reales $\rho(t)$ y $x(t)$, donde I_E es el invariante de Ermakov real.

Lo antes mencionado puede ilustrarse en forma gráfica en Fig. 1.23, donde tenemos el sistema de ecuaciones con solución compleja $z(t)$, $\lambda(t)$ y $\eta(t)$, y mostramos como se relacionan con las soluciones reales $\rho(t)$ y $x(t)$. Adicionalmente tenemos el invariante entre $\rho(t)$ y $x(t)$, que denotamos por I_E , que tiene valores reales.

En mecánica clásica sólo nos interesan las soluciones reales de la ecuación de Newton. Sin embargo, en mecánica cuántica este no es el caso, pues la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es una ecuación de tipo oscilador paramétrico donde se intercambia la variable tiempo por la variable posición. En estos casos los invariantes complejos pueden ser de gran utilidad.

Bibliografía

- [1] V. P. Ermakov: Second-Order Differential Equations: Conditions of Complete Integrality, Translated from Russian by A.O. Harin under redaction by P.G.L Leach. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 2 (2008), 123-145.
- [2] P. G. L. Leach, K. Andriopoulos: The Ermakov Equation a Comentary. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 2 (2008), 146-157.
- [3] P. G. L. Leach and K. Andriopoulos: An Invariant for The Doubly Generalized Classical Ermakov-Pinney System and its Quantal Equivalent, *Phys. Scripta* 77 (2008), 015002.
- [4] E. Pinney: The Nonlinear Diferential Equation $y'' + p(x)y + cy^{-3} = 0$, *Proc. Am. Math. Soc.* 1 (1950), 681.
- [5] H. R. Lewis, Jr: Class of Exact Invariant for Classical and Quantum Time-Dependent Harmonic Oscillators. *Journal of Mathematical Physics*, volume 9, number 11, (1968) 1976-1986.
- [6] F. Haas, J. Goedert: On the Hamiltonian Structure of Ermakov Systems. *J. Phys. A: Math. Gen* 29 (1966), 4083-4092.
- [7] R. S. Kaushal: Classical and Quantum Mechanics of Non-Central Potentials. A Survey of Two-Dimensional Systems. Ed. Springer-Verlag, India 1998.
- [8] D. Schuch 2011 Latinamerican School of Physics: XL ELAF AIP Conf.Proc.1334 (2011) 291-340.
- [9] M. Kruskal: Asymptotic Theory of Hamiltonian and Other Systems with All Solutions Nearly Periodic. *Journal of mathematical physics*, volume 3, number 4, (1962) 806-828.
- [10] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, (1954)
- [11] H. R. Lewis, Jr.: Motion of a Time-Dependent Harmonic Oscillator, and of A Charged Particle in a Class of Time-Dependent, Axially Symmetric Electromagnetic Field, *Physical Review*, volume 172, number 5, (1969) 1313-1315.

Invariante de Ermakov en la Mecánica Cuántica

En este capítulo se muestra el uso del invariante de Ermakov para encontrar la evolución temporal de estados del oscilador paramétrico en mecánica cuántica. Primero, mediante el esquema de Schrödinger se obtiene la evolución temporal de un paquete gaussiano [1, 2], encontrando que para determinar la función de onda solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en forma explícita es necesario conocer la solución de la ecuación de Newton (1.1) o la solución de la ecuación de Ermakov (1.2), o la solución de la ecuación de Riccati (1.11). Mostramos que las soluciones de la ecuación de Ermakov y su primera derivada están relacionadas con las varianzas y la función de correlación de un paquete de onda gaussiano mediante las expresiones

$$\sigma_q^2(t) = \frac{\hbar\rho^2(t)}{2m}, \quad \sigma_p^2(t) = \frac{m\hbar}{2} \left(\dot{\rho}^2(t) + \frac{1}{\rho^2(t)} \right), \quad \sigma_{qp}(t) = \frac{\hbar}{2} \dot{\rho}(t)\rho(t).$$

Mediante el esquema de Heisenberg mostramos que el operador de Ermakov dado por

$$\hat{I} = \frac{1}{2m\hbar} \left[(\rho(t)\hat{p} - \dot{\rho}(t)\hat{q})^2 + \left(\frac{m\dot{q}}{\rho(t)} \right)^2 \right]$$

es un invariante temporal [4, 5]. Posteriormente, se resuelve la ecuación de eigenvalores del operador de Ermakov. Esto se logra factorizando \hat{I} en la forma $\hat{I} = \hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{\hbar}{2}$, donde \hat{A} y \hat{A}^\dagger son operadores bosónicos de ascenso y descenso [3, 5]. Se encuentra que los eigenestados del operador de Ermakov son estados de Fock, denotados por $|n, t\rangle$, de donde es posible también construir el estado coherente generalizado $|\alpha, t\rangle$ [7, 9]. Para concluir, demostramos que las funciones de onda $\psi_n(q, t) = \langle q|n, t\rangle$ y $\psi_\alpha(q, t) = \langle q|\alpha, t\rangle$ son soluciones de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo del sistema [9].

Se determina el propagador del oscilador paramétrico por medio de los operadores de ascenso y descenso, \hat{A}^\dagger y \hat{A} [9]. Se relacionan los invariantes lineales de Dodonov-Malkin-Man'ko-Trifonov con el operador invariante de Ermakov. Mediante esta relación se demuestra nuevamente la

propiedad de superposición no-lineal de sistemas de Ermakov y se escribe en términos de los valores iniciales de las varianzas y la función de correlación.

Usando las funciones de onda solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para el oscilador paramétrico, encontramos la función de Wigner y mostramos que el invariante de Ermakov determina la forma de esta distribución de probabilidad en el espacio fase.

Finalmente, mostramos que mediante la formulación hidrodinámica de la mecánica cuántica [12, 14, 15, 16, 17] se puede obtener un sistema de Ermakov, esto es, la ecuación de Ermakov y la ecuación de Newton para el oscilador paramétrico. Usando esta misma formulación mostramos que el problema se resuelve si hallamos las soluciones de la ecuación de Riccati o de la ecuación de Newton del oscilador paramétrico.

2.1. Esquema de Schrödinger

Iniciamos nuestro estudio considerando la evolución temporal de una paquete gaussiano en un sistema de oscilador paramétrico. Basados en el trabajo de D. Shuch, ver [1, 2], obtenemos el comportamiento de la evolución temporal de un paquete gaussiano.

Consideramos el operador Hamiltoniano de un oscilador armónico dependiente del tiempo

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)\hat{q}^2,$$

que tiene aplicaciones en diversos campos de la física. Para estudiar la dinámica del sistema usamos la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en la representación de posición,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)q^2 \right) \psi(q, t), \quad (2.1)$$

y proponemos como solución analítica el paquete gaussiano [1, 2]

$$\psi(q, t) = N(t) \exp \left\{ i \left[y(t)(q - \langle q \rangle_t)^2 + \frac{1}{\hbar} \langle p \rangle_t (q - \langle q \rangle_t) \right] \right\}. \quad (2.2)$$

La función $N(t)$ es una función que solamente dependen del tiempo y cuyas unidades deben ser inversas a las unidades de posición, $[N(t)] = [q]^{-1}$. Las funciones $\langle q \rangle_t$ y $\langle p \rangle_t$ son los valores esperados del operador de posición y momento, respectivamente. Las trayectorias de estas cantidades, debido al teorema de Ehrenfest, corresponden a las trayectorias clásicas; por lo tanto, satisfacen las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d^2 \langle q \rangle_t}{dt^2} + \omega^2(t) \langle q \rangle_t = 0, \quad (2.3)$$

$$\langle p \rangle_t = m \frac{d \langle q \rangle_t}{dt}. \quad (2.4)$$

Para que el argumento de la exponencial del paquete gaussiano sea adimensional, $y(t)$ debe tener unidades inversas a las unidades de posición al cuadrado, $[y(t)] = [q]^{-2}$. Además, como $y(t)$ puede ser una función compleja dependiente del tiempo, la denotamos por $y(t) = y_r(t) + iy_i(t)$.

Substituyendo el paquete gaussiano (2.2) en la ecuación (2.1) y comparando términos en potencias de q encontramos las ecuaciones diferenciales que determinan las funciones $y(t)$ y $N(t)$. La ecuación diferencial para $y(t)$ está dada por la ecuación de Riccati

$$\frac{2\hbar}{m}\dot{y}(t) + \left(\frac{2\hbar}{m}y(t)\right)^2 + \omega^2(t) = 0, \quad (2.5)$$

mientras que para la función $N(t)$ tenemos que

$$\frac{d \ln N(t)}{dt} = \frac{i}{2\hbar} \frac{d}{dt} (\langle p \rangle_t \langle q \rangle_t) - \frac{\hbar}{m} y(t). \quad (2.6)$$

La ecuación (2.5) puede ser separada en sus partes real e imaginaria,

$$\frac{2\hbar}{m}\dot{y}_r(t) + \left(\frac{2\hbar}{m}y_r(t)\right)^2 - \left(\frac{2\hbar}{m}y_i(t)\right)^2 + \omega^2(t) = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{2\hbar}{m}\dot{y}_i(t) + 2\left(\frac{2\hbar}{m}y_i(t)\right)\left(\frac{2\hbar}{m}y_r(t)\right) = 0, \quad (2.8)$$

respectivamente. Despejando $y_r(t)$ de (2.8), substituyéndola en (2.7) y definiendo la función

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{m}{2\hbar y_i(t)}},$$

se encuentra la ecuación diferencial para $\rho(t)$

$$\ddot{\rho}(t) + \omega^2(t)\rho(t) = \frac{1}{\rho^3(t)}, \quad (2.9)$$

que identificamos con la ecuación de Ermakov. Las unidades de la función $\rho(t)$ son $[\rho(t)] = \sqrt{[t]}$, donde $[t]$ denota las unidades del tiempo. La función $y(t)$ puede escribirse en términos de $\rho(t)$ como

$$\frac{2\hbar}{m}y(t) = \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} + \frac{i}{\rho^2(t)}. \quad (2.10)$$

Por lo tanto, para encontrar la función $y(t)$ podemos ya sea resolver la ecuación de Riccati (2.5) o resolver la ecuación de Ermakov (2.9). Notamos que las ecuaciones (2.3) y (2.9) forman un sistema de Ermakov; entonces existe el invariante cuadrático

$$I = \frac{1}{2m\hbar} \left[(\langle p \rangle_t \rho(t) - m \langle q \rangle_t \dot{\rho}(t))^2 + \left(\frac{m \langle q \rangle_t}{\rho(t)} \right)^2 \right]. \quad (2.11)$$

También a la función $N(t)$ es posible expresarla en términos de $\rho(t)$. Al substituir $y(t)$ de (2.10) en la ecuación diferencial para $N(t)$, (2.6), e integrando; se obtiene

$$N(t) = \frac{N_0}{\sqrt{\rho(t)}} \exp \left\{ \frac{i}{2\hbar} \langle p \rangle_t \langle q \rangle_t - \frac{i}{2} \int \frac{dt}{\rho^2(t)} \right\},$$

donde N_0 es la constante de normalización. Así la función de onda, ya normalizada, que es solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo del oscilador paramétrico toma la forma

$$\begin{aligned} \psi(q, t) = & \left(\frac{m}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\rho(t)}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} (q - \langle q \rangle_t)^2 \left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} + \frac{i}{\rho^2(t)} \right) \right. \\ & \left. + \frac{i}{\hbar} \langle p \rangle_t (q - \langle q \rangle_t) + \frac{i}{2\hbar} \langle p \rangle_t \langle q \rangle_t - \frac{i}{2} \int \frac{dt}{\rho^2(t)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

A continuación mostramos que la solución de la ecuación de Schrödinger puede escribirse en términos de la función compleja $\lambda(t)$, que se define por

$$\frac{2\hbar}{m} y(t) = \frac{2\hbar}{m} y_r(t) + i \frac{2\hbar}{m} y_i(t) = \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)},$$

de tal manera que la transformación convierte a la ecuación de Ricatti (2.5) en una ecuación lineal, esto es,

$$\ddot{\lambda}(t) + \omega^2(t)\lambda(t) = 0.$$

Por consiguiente, se concluye que $\lambda(t)$ satisface la ecuación clásica de movimiento del problema. Además utilizando (2.10) es inmediato que podemos expresar $\lambda(t)$, en términos de $\rho(t)$, es decir,

$$\lambda(t) = \rho(t) e^{i \int \frac{dt}{\rho^2(t)}}.$$

Por lo tanto, la función de onda solución también puede escribirse como

$$\psi(q, t) = \left(\frac{m}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\lambda(t)}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \right) (q - \langle q \rangle_t)^2 + \frac{i}{\hbar} \langle p \rangle_t (q - \langle q \rangle_t) + \frac{i}{2\hbar} \langle p \rangle_t \langle q \rangle_t \right\}.$$

La función de onda en la representación de momento se obtiene mediante la trasformada de Fourier

$$\tilde{\psi}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ipq}{\hbar}} \psi(q, t) dq.$$

Realizando la integral y simplificando, encontramos

$$\tilde{\psi}(p, t) = \left(\frac{1}{\pi\hbar m}\right)^{1/4} \left(\frac{i}{\dot{\lambda}(t)}\right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar m} \left(\frac{\lambda(t)}{\dot{\lambda}(t)} \right) (p - \langle p \rangle_t)^2 - \frac{i}{\hbar} \langle q \rangle_t (p - \langle p \rangle_t) - \frac{i}{2\hbar} \langle p \rangle_t \langle q \rangle_t \right\}.$$

Entonces, tenemos que las distribuciones de probabilidad en la representación de posición y de momento se expresan como

$$\begin{aligned} |\psi(q, t)|^2 &= \sqrt{\frac{m}{\pi\hbar}} \frac{1}{\rho(t)} \exp \left\{ -\frac{m}{\hbar\rho(t)} (q - \langle q \rangle_t)^2 \right\}, \\ |\tilde{\psi}(p, t)|^2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar m \left(\dot{\rho}^2(t) + \frac{1}{\rho^2(t)} \right)}} \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar m \left(\dot{\rho}^2(t) + \frac{1}{\rho^2(t)} \right)} (p - \langle p \rangle_t)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Hemos encontrado la solución formal a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para el oscilador paramétrico, tanto en la representación de posición como en la representación de momento, donde las distribuciones de probabilidad en ambas representaciones son paquetes gaussianos, cuyo centros siguen las trayectorias clásicas del problema. Además, de las distribuciones normales encontramos que sus varianzas están dadas por

$$\sigma_q^2(t) = \frac{\hbar \rho^2(t)}{2m}, \quad (2.13)$$

y

$$\sigma_p^2(t) = \frac{m\hbar}{2} \left(\dot{\rho}^2(t) + \frac{1}{\rho^2(t)} \right). \quad (2.14)$$

Así, para un sistema dado, es necesario resolver la ecuación de Ermakov o Riccati y obtener expresiones explícitas de la función $\rho(t)$. Es importante destacar que el comportamiento de las fluctuaciones también están determinadas por $\rho(t)$.

2.1.1. Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

Consideremos el movimiento de una partícula de masa m , en una dimensión, bajo la acción de un potencial $V(q)$; entonces la ecuación de Schrödinger está dada por

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right) \Psi(q, t).$$

Nos ocupamos en obtener los estados estacionarios. Sea E la energía del estado estacionario; entonces tenemos

$$\Psi(q, t) = \psi(q) e^{-\frac{iEt}{\hbar}},$$

donde la función $\psi(q)$ es una solución de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right) \psi(q) = E\psi(q).$$

Expresamos esta última ecuación de forma simplificada:

$$\psi'' + k^2(q)\psi = 0, \quad (2.15)$$

con

$$k^2(q) = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(q)).$$

Si consideramos el caso dispersivo¹, es decir $k \geq 0$ encontramos que la ecuación de Hill, dada por (2.15), puede formar un sistema de Ermakov con la ecuación

$$\eta'' + k^2(q)\eta = \frac{1}{\eta^3}. \quad (2.16)$$

¹Para el caso de estados estacionarios tenemos que utilizar una formulación de la mecánica cuántica con Hamiltonianos no-Hermiticos, no considerados en este trabajo.

Esta ecuación diferencial se conoce en la literatura como ecuación de Milne. Por lo tanto, se tiene un sistema de Ermakov formado con las ecuaciones de Milne y Hill [4]. Cuyas soluciones se encuentran relacionadas por medio del invariante

$$I = \frac{1}{2} \left[(\psi\eta' + \psi'\eta)^2 + \left(\frac{\psi}{\eta} \right)^2 \right].$$

Es importante mencionar que las soluciones de (2.15) y (2.16) son en general complejas. Entonces el invariante de este sistema toma valores complejos. Además, podemos relacionar la ecuación de estados estacionarios con la ecuación de Riccati

$$z' + z^2 + k^2(q) = 0, \quad (2.17)$$

esto es, aplicando a (2.15) la transformación $z = \frac{\psi'}{\psi}$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \eta'' + k^2(q)\eta = \frac{1}{\eta^3} & \\
 \swarrow I & & \searrow I \\
 z' + z^2 + k^2(q) = 0 & \xleftrightarrow[\psi = e^{\int z(q')dq'}]{z = \frac{\psi'}{\psi}} & \psi'' + k^2(q)\psi = 0
 \end{array}$$

Figura 2.1: Mediante el invariante de Ermakov I es posible relacionar las soluciones de la ecuación de Ermakov con las soluciones de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo y con las soluciones de la ecuación de Riccati.

Por lo tanto, hemos mostrado que para encontrar el estado estacionario de un sistema cuántico tenemos la posibilidad ya sea de hallar la solución de la ecuación de Schrödinger estacionaria, o de encontrar las soluciones de la ecuación de Milne, o las soluciones de la ecuación de Riccati, ver Figura 2.1.

2.2. Esquema de Heisenberg

En esta sección se define el operador de Ermakov, ver [4, 5]. Mostramos que este operador puede ser factorizado en términos de operadores bosónicos del tipo ascenso y descenso, [3, 5]. De este último resultado es directo demostrar que los eigenestados del operador de Ermakov son estados de Fock [3] y construir el estado coherente generalizado del sistema [9].

El operador de Ermakov está definido por

$$\hat{I} = \frac{1}{2m\hbar} \left[(\rho(t)\hat{p}(t) - m\dot{\rho}(t)\hat{q}(t))^2 + \left(\frac{m\dot{q}(t)}{\rho(t)} \right)^2 \right],$$

el cual es un operador adimensional² y es un invariante temporal del oscilador paramétrico, ver

²En la literatura, frecuentemente se utiliza con unidades de acción, que implicaría cancelar la \hbar que aparece en el denominador de la función del operador de Ermakov.

[4, 5], si y sólo si la función real $\rho(t)$ satisface la ecuación de Ermakov

$$\ddot{\rho}(t) + \omega^2(t)\rho(t) = \frac{1}{\rho^3(t)}.$$

Para mostrar la afirmación anterior calculamos

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{I}}{dt} &= \frac{1}{2m\hbar} \left[2\rho(t)\dot{\rho}(t)\hat{p}^2(t) + \rho^2(t)\frac{d\hat{p}^2}{dt} - m(\dot{\rho}^2(t) + \rho(t)\ddot{\rho}(t))(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) \right. \\ &\quad - m\rho(t)\dot{\rho}(t) \left(\frac{d\hat{q}}{dt}\hat{p} + \hat{q}\frac{d\hat{p}}{dt} + \frac{d\hat{p}}{dt}\hat{q} + \hat{p}\frac{d\hat{q}}{dt} \right) + m^2 \left(\dot{\rho}^2(t) + \frac{1}{\rho^2(t)} \right) \frac{d\hat{q}^2}{dt} \\ &\quad \left. + 2m^2\dot{\rho}(t) \left(\ddot{\rho}(t) - \frac{1}{\rho^3(t)} \right) \hat{q}^2 \right]. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento de los operadores de posición y momento para el oscilador paramétrico están determinados por

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \frac{\hat{p}}{m}, \quad \frac{d\hat{p}}{dt} = -m\omega^2(t)\hat{q} \quad (2.18)$$

y las ecuaciones de movimiento de los operadores cuadráticos en posición y momento son

$$\frac{d\hat{q}^2}{dt} = \frac{1}{m}(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}), \quad \frac{d\hat{p}^2}{dt} = -m\omega^2(t)(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}).$$

Substituyendo los resultados anteriores en la derivada temporal del invariante, y simplificando obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{I}}{dt} &= \frac{1}{2m\hbar} \left[2m^2\dot{\rho}(t)\hat{q}^2 \left(\ddot{\rho}(t) + \omega^2(t)\rho(t) - \frac{1}{\rho^3(t)} \right) \right. \\ &\quad \left. - m\rho(t) \left(\ddot{\rho}(t) + \omega^2(t)\rho(t) - \frac{1}{\rho^3(t)} \right) (\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) \right]. \end{aligned}$$

Es claro que si $\rho(t)$ satisface la ecuación de Ermakov, tenemos que

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = 0, \quad (2.19)$$

es decir, \hat{I} es un operador invariante y su valor esperado es una constante de movimiento [9].

Hemos mostrado que el operador de Ermakov \hat{I} es un operador invariante. Ahora calculamos sus eigenestados y eigenvalores. Cabe recalcar que los eigenvalores del operador deberán ser independientes del tiempo; ésto debido a que \hat{I} es un operador invariante. Posteriormente mostraremos que estos eigenestados escritos en la representación de posición son funciones de onda solución a la ecuación de Schrödinger del oscilador paramétrico.

Para determinar los eigenestados introducimos operadores, ver [3, 5],

$$\hat{A} = \frac{e^{i\phi(t)}}{\sqrt{2m\hbar}} \left[\frac{m\hat{q}(t)}{\rho(t)} + i(\rho(t)\hat{p}(t) - m\dot{\rho}(t)\hat{q}(t)) \right], \quad (2.20)$$

y

$$\hat{A}^\dagger = \frac{e^{-i\phi(t)}}{\sqrt{2m\hbar}} \left[\frac{m\hat{q}(t)}{\rho(t)} - i(\rho(t)\hat{p}(t) - m\dot{\rho}(t)\hat{q}(t)) \right]. \quad (2.21)$$

donde $\phi(t)$ es una fase que sólo depende del tiempo. Es directo mostrar que \hat{I} puede escribirse en la forma

$$\hat{I} = \hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2}.$$

También es directo demostrar que el conjunto de operadores $\{\hat{A}, \hat{A}^\dagger, \hat{A}^\dagger \hat{A}, \hat{1}\}$, donde $\hat{1}$ representa el operador identidad, obedecen las reglas de conmutación

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{A}^\dagger] &= \hat{1}, & [\hat{A}, \hat{1}] &= 0, & [\hat{A}^\dagger, \hat{1}] &= 0, \\ [\hat{A}^\dagger \hat{A}, \hat{A}^\dagger] &= \hat{A}^\dagger, & [\hat{A}^\dagger \hat{A}, \hat{A}] &= -\hat{A}, & [\hat{A}^\dagger \hat{A}, \hat{1}] &= 0. \end{aligned}$$

Este conjunto de operadores forman un álgebra de Lie, denotada por h_4 , ver [7], a la cual le corresponde el grupo de Lie llamado grupo de Heisenberg-Weyl H_4 . El espacio de Hilbert para el grupo H_4 está dado por el conjunto de estados que denotamos por $\{|n, t\rangle | n \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$, los cuales satisfacen

$$\hat{A}^\dagger \hat{A} |n, t\rangle = n |n, t\rangle, \quad \hat{A} |n, t\rangle = \sqrt{n} |n-1, t\rangle, \quad \hat{A}^\dagger |n, t\rangle = \sqrt{n+1} |n+1, t\rangle$$

y están determinados por

$$|n, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{A}^\dagger \right)^n |0, t\rangle,$$

donde $|0, t\rangle$ es el estado vacío del sistema, el cual satisface que $\hat{A} |0, t\rangle = 0$. Por lo tanto, los eigenestados del operador \hat{I} son los estados de Fock $|n, t\rangle$ y sus eigenvalores están dados por $n + \frac{1}{2}$.

Mediante los operadores de creación y aniquilación, podemos encontrar los estados coherentes generalizados [7, 9]³:

- Los estados coherentes generalizados, que designaremos por $|\alpha, t\rangle$, son eigenestados del operador \hat{A} con eigenvalor α

$$\hat{A} |\alpha, t\rangle = \alpha |\alpha, t\rangle,$$

donde α es un número complejo.

³Es importante mencionar que las propiedades siguientes se satisfacen solamente para el grupo de Heisenberg-Weyl. Para otros grupos, si se satisface una de estas propiedades no necesariamente se satisfacen las otras dos.

- El estado coherente $|\alpha, t\rangle$, se obtiene al aplicar el operador de desplazamiento $\hat{D}(\alpha)$ al estado vacío

$$|\alpha, t\rangle = \hat{D}(\alpha)|0, t\rangle$$

donde el operador de desplazamiento esta definido por

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{A}^\dagger - \alpha^*\hat{A}}.$$

- El estado coherente $|\alpha, t\rangle$ es el estado cuántico que minimiza la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson, es decir,

$$\sigma_q^2(t)\sigma_p^2(t) - \sigma_{qp}^2(t) = \frac{\hbar^2}{4}$$

donde $\sigma_{qp}(t)$ representa la función de correlación definida como

$$\sigma_{qp}^2(t) = \frac{1}{2}\langle\{\hat{q}, \hat{p}\}\rangle - \langle\hat{q}\rangle\langle\hat{p}\rangle.$$

Es importante mostrar que \hat{A} y \hat{A}^\dagger son operadores invariantes del sistema; para demostrarlo se calcula la derivada temporal

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}}{dt} &= \frac{e^{i\phi(t)}}{\sqrt{2m\hbar}} \left[i\dot{\phi}(t) \left\{ \left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) m\hat{q} + i\rho(t)\hat{p} \right\} + \left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) m \frac{d\hat{q}}{dt} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho^2(t)} + i\ddot{\rho}(t) \right) m\hat{q} + i\rho(t)\hat{p} + i\rho(t) \frac{d\hat{p}}{dt} \right]. \end{aligned}$$

Substituyendo (2.18) y agrupando términos de \hat{q} y \hat{p} queda

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}}{dt} &= \frac{e^{i\phi(t)}}{\sqrt{2m\hbar}} \left[\left\{ i\dot{\phi}(t) \left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) - \left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho^2(t)} + i\ddot{\rho}(t) \right) - i\rho(t)\omega^2(t) \right\} m\hat{q} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{\rho(t)} - \dot{\phi}(t)\rho(t) \right\} \hat{p} \right]. \end{aligned}$$

Por último, usando la ecuación de Ermakov que satisface la función $\rho(t)$ se obtiene

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{e^{i\phi(t)}}{\sqrt{2m\hbar}} \left[\left\{ i\dot{\phi}(t) \left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) - \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho^2(t)} - \frac{i}{\rho^3(t)} \right\} m\hat{q} + \left\{ \frac{1}{\rho(t)} - \dot{\phi}(t)\rho(t) \right\} \hat{p} \right].$$

Por lo tanto, si escogemos $\dot{\phi} = \frac{1}{\rho^2}$, se tiene que $\frac{d\hat{A}}{dt} = 0$. Entonces, \hat{A} es un operador invariante si y sólo si

$$\phi(t) = \int^t \frac{d\tau}{\rho^2(\tau)}. \quad (2.22)$$

En forma similar se demuestra que el operador \hat{A}^\dagger es un operador invariante si satisface la misma condición. Es importante notar que tenemos tantos operadores $\hat{A}(t)$ y $\hat{A}^\dagger(t)$ como soluciones

de la ecuación de Ermakov $\rho(t)$, es decir, hemos construido una familia infinita de operadores invariante $\hat{A}(t)$ y $\hat{A}^\dagger(t)$.

Ahora calculamos los eigenestados del operador de Ermakov en la representación de posición. Primero encontramos la función de onda del estado base mediante la relación:

$$\langle q|\hat{A}|0, t\rangle = 0, \quad (2.23)$$

la cual en la representación de posición define una ecuación diferencial lineal para la función de onda del estado vacío

$$\frac{\partial\psi_0(q, t)}{\partial q} = \frac{imq}{\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} + \frac{i}{\rho^2(t)} \right) \psi_0(q, t), \quad (2.24)$$

con solución

$$\psi_0(q, t) = N(t) \exp \left\{ \frac{imq^2}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} + \frac{i}{\rho^2(t)} \right) + i\delta(t) \right\}, \quad (2.25)$$

donde $\delta(t)$ y $N(t)$ son funciones arbitrarias que solamente dependen del tiempo. Normalizando la función de onda se obtiene

$$\psi_0(q, t) = \left(\frac{m}{\hbar\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\rho(t)}} \exp \left\{ \frac{imq^2}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} + \frac{i}{\rho^2(t)} \right) + i\delta(t) \right\}. \quad (2.26)$$

Dada la función de onda $\psi_0(q, t)$ podemos preguntar si es solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Entonces, substituyendo la función de onda en la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial\psi_0(q, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{2} m\omega^2(t)q^2 \right) \psi_0(q, t),$$

es inmediato que el lado izquierdo toma la forma

$$i\hbar \frac{\partial\psi_0(q, t)}{\partial t} = \left[-\frac{i\hbar}{2} \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} - \frac{mq^2}{2} \left(\frac{\ddot{\rho}(t)}{\rho(t)} - \frac{\dot{\rho}^2(t)}{\rho^2(t)} - 2i \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho^3(t)} \right) - \hbar\dot{\delta}(t) \right] \psi_0(q, t),$$

mientras el lado derecho se escribe como

$$\hat{H}\psi_0(q, t) = \left[\frac{mq^2}{2} \left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} + \frac{i}{\rho^2(t)} \right)^2 - \frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} + \frac{i}{\rho^2(t)} \right) + \frac{1}{2} m\omega^2(t)q^2 \right] \psi_0(q, t).$$

Igualando términos en q^2 y términos independientes de q , encontramos que $\psi_0(q, t)$ es solución a la ecuación de Schrödinger si y sólo si $\rho(t)$ satisface la ecuación de Ermakov y sí

$$\delta(t) = -\frac{1}{2}\phi(t),$$

con $\phi(t)$ dada en (2.22).

Como $\psi_0(q, t)$ es solución a la ecuación de Schrödinger y \hat{A}^\dagger es un operador invariante, entonces $\hat{A}^\dagger\psi_0(q, t)$ también es solución a la ecuación de Schrödinger. De hecho para cualquier n en los naturales tendremos que $(\hat{A}^\dagger)^n\psi_0(q, t)$ será una solución a la ecuación de Schrödinger [9].

Por lo tanto, de la definición de los estados de Fock y del estado coherente generalizado, es inmediato que también son solución a la ecuación de Schrödinger.

Así, ya que hemos mostrado que los estados de Fock y el estado coherente generalizado son soluciones del oscilador paramétrico, nos daremos a la tarea de escribir sus respectivas funciones de onda en la representación de posición. Iniciamos calculando el estado coherente generalizado del problema mediante el estado vacío y el operador de desplazamiento. Usando la identidad de Baker-Campbell-Hausdorff, es fácil encontrar

$$|\alpha, t\rangle = \hat{D}(\alpha)|0, t\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha \hat{A}^\dagger} |0, t\rangle,$$

entonces

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(q, t) &= e^{-|\alpha|^2/2} \langle q | e^{\alpha \hat{A}^\dagger} |0, t\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2} \langle q | e^{\frac{\alpha e^{-i\phi(t)}}{\sqrt{2m\hbar}} \left[\frac{m\hat{q}(t)}{\rho(t)} - i(\rho(t)\hat{p}(t) - m\dot{\rho}(t)\hat{q}(t)) \right]} |0, t\rangle. \end{aligned}$$

Usando nuevamente la identidad de Baker-Campbell-Hausdorff y simplificando obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(q, t) &= \exp \left\{ -\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{\alpha^2}{4} e^{-2i\phi(t)} (1 + i\dot{\rho}(t)\rho(t)) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{m}{2\hbar}} \frac{q\alpha e^{-i\phi(t)}}{\rho(t)} (1 + i\dot{\rho}(t)\rho(t)) \right\} \psi_0 \left(q - \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} \alpha e^{-i\phi(t)} \rho(t) \right) \end{aligned}$$

que corresponde a la función de onda del estado coherente generalizado. Mediante este estado coherente generalizado, calculamos las funciones de onda en la representación de posición de los estados de Fock, usando el resultado

$$\psi_n(q, t) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{d^n}{d\alpha^n} \left[e^{|\alpha|^2/2} \psi_\alpha(q, t) \right] \Big|_{\alpha=0}. \quad (2.27)$$

Para usar la identidad anterior, recordamos la forma de la función generadora de los polinomios de Hermite, ver [8],

$$e^{2xz - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n.$$

Entonces, identificando en la expresión de $\psi_\alpha(q, t)$

$$z = \frac{\alpha e^{-i\phi(t)}}{\sqrt{2}}, \quad x = \sqrt{\frac{m}{\hbar}} \frac{q}{\rho(t)},$$

el estado coherente puede escribirse en términos de los polinomios de Hermite

$$\psi_\alpha(q, t) = \psi_0(q, t) e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n \left(\sqrt{\frac{m}{\hbar}} \frac{q}{\rho(t)} \right)}{n!} \left(\frac{\alpha e^{-i\phi(t)}}{\sqrt{2}} \right)^n. \quad (2.28)$$

Substituyendo (2.28) en (2.27) se obtiene

$$\psi_n(q, t) = \frac{\psi_0(q, t)}{\sqrt{n!}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} H_m \left(\sqrt{\frac{m}{\hbar}} \frac{q}{\rho(t)} \right) \left(\frac{e^{-i\phi(t)}}{\sqrt{2}} \right)^m \frac{d^n \alpha^m}{d\alpha^n} \Big|_{\alpha=0}.$$

Como

$$\frac{d^n \alpha^m}{d\alpha^n} \Big|_{\alpha=0} = m! \delta_{mn},$$

los estados de Fock en la representación de posición son

$$\psi_n(q, t) = \frac{\psi_0(q, t)}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{\frac{m}{\hbar}} \frac{q}{\rho(t)} \right) e^{-in\phi}. \quad (2.29)$$

En el esquema de Schrödinger encontramos la función de onda solución a la ecuación de Schrödinger con forma de un paquete gaussiano. En esta sección también obtenemos las funciones de onda solución a la ecuación de Schrödinger con forma de paquetes gaussianos, tales como el estado vacío y el estado coherente. Entonces, podemos comparar los resultados de ambas secciones, pues si identificamos $\lambda(t) = \rho(t) e^{i \int \frac{dt}{\rho^2(t)}}$ en las expresiones para las funciones de onda $\psi_0(q, t)$ y $\psi_\alpha(q, t)$, tenemos que el estado vacío se expresa como

$$\psi_0(q, t) = \left(\frac{m}{\hbar\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\lambda(t)}} \exp \left\{ \frac{imq^2}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \right) \right\}$$

mientras el estado coherente toma la forma

$$\psi_\alpha(q, t) = \left(\frac{m}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{\lambda(t)} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \right) (q - \langle q \rangle_t)^2 + \frac{i}{\hbar} \langle p \rangle_t (q - \langle q \rangle_t) + \frac{i}{2\hbar} \langle p \rangle_t \langle q \rangle_t \right\}$$

donde los valores esperados de los operadores de posición y momento para el estado coherente son

$$\langle \alpha | q | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m}} \rho(t) (\alpha_r \cos \phi + \alpha_i \sin \phi), \quad (2.30)$$

$$\langle \alpha | p | \alpha \rangle = \sqrt{2m\hbar} \left[\dot{\rho}(t) (\alpha_r \cos \phi(t) + \alpha_i \sin \phi(t)) - \frac{1}{\rho(t)} (\alpha_r \sin \phi(t) - \alpha_i \cos \phi(t)) \right], \quad (2.31)$$

con $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ y recordamos que $\phi(t) = \int \frac{dt}{\rho^2(t)}$. Adicionalmente, con ayuda de los valores esperados, podemos encontrar que el término de correlación para el estado coherente generalizado toma la forma

$$\sigma_{qp}(t) = \frac{1}{2} \langle \{\hat{q}, \hat{p}\} \rangle - \langle q \rangle \langle p \rangle = \frac{\hbar}{2} \dot{\rho}(t) \rho(t).$$

2.3. Evolución temporal de las varianzas y la función correlación

A continuación estudiamos la evolución temporal, en un oscilador paramétrico, tanto de las varianzas $\sigma_q^2(t)$ y $\sigma_p^2(t)$ como de la correlación $\sigma_{qp}(t)$. Además, se establece la relación de estas cantidades con la ecuación de Ermakov y sus soluciones.

Por definición $\sigma_q^2(t) = \langle q^2 \rangle_t - \langle q \rangle_t^2$, entonces

$$\frac{d\sigma_q^2(t)}{dt} = \frac{d\langle q^2 \rangle_t}{dt} - 2\langle q \rangle_t \frac{d\langle q \rangle_t}{dt}. \quad (2.32)$$

Es fácil mostrar que para el oscilador paramétrico se obtiene

$$\frac{d\langle q \rangle_t}{dt} = \frac{\langle p \rangle_t}{m}, \quad \frac{d\langle q^2 \rangle_t}{dt} = \frac{1}{m} \langle qp + pq \rangle_t; \quad (2.33)$$

por lo tanto, la ecuación (2.32), se expresa como

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_q^2(t)}{dt} &= \frac{2}{m} \left(\frac{1}{2} \langle qp + pq \rangle_t - \langle q \rangle_t \langle p \rangle_t \right), \\ &= \frac{2}{m} \sigma_{qp}(t). \end{aligned} \quad (2.34)$$

De forma análoga; pero ahora usando las identidades

$$\frac{d\langle p \rangle_t}{dt} = -m\omega^2(t) \langle q \rangle_t, \quad \frac{d\langle p^2 \rangle_t}{dt} = -m\omega^2(t) \langle qp + pq \rangle_t, \quad (2.35)$$

es posible mostrar que

$$\frac{d\sigma_p^2(t)}{dt} = -2m\omega^2(t) \sigma_{qp}(t). \quad (2.36)$$

Finalmente, se obtiene la evolución de la función de correlación $\sigma_{qp}(t)$

$$\frac{d\sigma_{qp}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle qp + pq \rangle_t - \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \langle p \rangle_t - \langle q \rangle_t \frac{d\langle p \rangle_t}{dt}.$$

Substituyendo el resultado

$$\frac{d}{dt} \langle qp + pq \rangle_t = 4\omega^2(t) \langle q^2 \rangle_t \langle p^2 \rangle_t,$$

junto con las expresiones (2.33) y (2.35), obtenemos

$$\frac{d\sigma_{qp}(t)}{dt} = \frac{\sigma_p^2(t)}{m} - m\omega^2(t) \sigma_q^2(t). \quad (2.37)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (2.34), (2.36) y (2.37) forman un sistema de ecuaciones diferenciales lineales y acopladas que describen la dinámica de las varianzas $\sigma_q^2(t)$, $\sigma_p^2(t)$ y la función de correlación $\sigma_{qp}(t)$.

Ahora, mostramos que este sistema de ecuaciones tiene un invariante temporal. Para esto, de la ecuación (2.34) tenemos que

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{2\sigma_{qp}(t)} \frac{d\sigma_q^2(t)}{dt},$$

mientras que de la ecuación (2.36) resulta

$$m\omega^2(t) = -\frac{1}{2\sigma_{qp}(t)} \frac{d\sigma_p^2(t)}{dt}.$$

Substituyendo ambos resultados en (2.37) obtenemos

$$2\sigma_{qp}(t) \frac{d\sigma_{qp}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (\sigma_q^2(t)\sigma_p^2(t)),$$

es decir,

$$\frac{d}{dt} (\sigma_q^2(t)\sigma_p^2(t) - \sigma_{qp}^2(t)) = 0.$$

Por consiguiente, hemos mostrado que el sistema de ecuaciones diferenciales lineales definido por las varianzas y la función de correlación para el oscilador paramétrico tiene un invariante temporal I_p dado por

$$I_p = \sigma_q^2(t)\sigma_p^2(t) - \sigma_{qp}^2(t),$$

que debe satisfacer que $I_p \geq \hbar^2/4$.

El sistema de ecuaciones diferenciales (2.34), (2.36) y (2.37) lo podemos escribir de forma equivalente como una ecuación diferencial lineal de tercer grado para la variable $\sigma_q^2(t)$. Para obtener esta ecuación de tercer grado, derivamos con respecto al tiempo la ecuación (2.34) de donde se obtiene que

$$\frac{d^2\sigma_q^2(t)}{dt^2} = \frac{2}{m} \frac{d\sigma_{qp}(t)}{dt}.$$

Substituyendo ahora (2.37) en la expresión anterior tenemos

$$\frac{d^2\sigma_q^2(t)}{dt^2} = \frac{2\sigma_p^2(t)}{m^2} - 2\omega^2(t)\sigma_q^2(t).$$

Derivando la expresión anterior con respecto al tiempo

$$\frac{d^3\sigma_q^2(t)}{dt^3} = \frac{2}{m^2} \frac{d\sigma_p^2(t)}{dt} - 4\omega(t) \frac{d\omega(t)}{dt} \sigma_q^2(t) - 2\omega^2(t) \frac{d\sigma_q^2(t)}{dt},$$

de donde, usando las ecuaciones (2.34) y (2.36), es directo que

$$\frac{d\sigma_p^2(t)}{dt} = -m^2\omega^2(t) \frac{d\sigma_q^2(t)}{dt}.$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial de tercer grado para la varianza $\sigma_q^2(t)$ está dada por

$$\frac{d^3\sigma_q^2(t)}{dt^3} + 4\omega^2(t) \frac{d\sigma_q^2(t)}{dt} + 4\omega(t) \frac{d\omega(t)}{dt} \sigma_q^2(t) = 0. \quad (2.38)$$

A esta ecuación diferencial se le conoce como la forma normal de una ecuación de tercer orden provista de máxima simetría; además se ha demostrado que toda ecuación diferencial ordinaria de tercer orden lineal o linearizable puede ser transformada en esta ecuación [6]. Ahora mostraremos que la varianza $\sigma_q^2(t)$ está relacionada con la solución de la ecuación de Ermakov $\rho(t)$ mediante la expresión

$$\sigma_q^2(t) = \frac{\hbar\rho^2(t)}{2m}. \quad (2.39)$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_q^2(t)}{dt} &= \frac{\hbar}{m}\dot{\rho}(t)\rho(t), \\ \frac{d^3\sigma_q^2(t)}{dt^3} &= \frac{\hbar}{m}(\ddot{\rho}(t)\rho(t) + 3\dot{\rho}(t)\dot{\rho}(t)). \end{aligned}$$

Substituyendo los resultados anteriores en (2.38) y reagrupando términos encontramos que

$$\frac{d}{dt} [\rho(t) (\ddot{\rho}(t) + \omega^2(t)\rho(t))] + 2\dot{\rho}(t) (\ddot{\rho}(t) + \omega^2(t)\rho(t)) = 0,$$

como $\rho(t)$ satisface la ecuación de Ermakov, al substituir la expresión obtenemos la igualdad

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\rho^2(t)} \right] + \frac{2\dot{\rho}(t)}{\rho^3(t)} = 0.$$

Hemos demostrado que sin importar la forma de la función de onda considerada la varianza de la posición evoluciona en el tiempo por medio de la expresión (2.39). Además, si substituímos (2.39) en la expresión (2.33), encontramos que la evolución temporal de la función de correlación es

$$\sigma_{qp}(t) = \frac{\hbar}{2}\dot{\rho}(t)\rho(t); \quad (2.40)$$

y si substituímos (2.39) y (2.40) en (2.37), es fácil obtener que la evolución temporal de la varianza del momento $\sigma_p^2(t)$ está determinada por

$$\sigma_p^2(t) = \frac{m\hbar}{2} \left(\dot{\rho}^2(t) + \frac{1}{\rho^2(t)} \right). \quad (2.41)$$

Así, se demostró que: la evolución temporal de las varianzas en posición y momento, al igual que la función de correlación de un paquete arbitrario, moviéndose bajo la influencia de un oscilador paramétrico, están descritas por las soluciones de la ecuación de Ermakov. Adicionalmente, obtuvimos que la desviación estándar $\sigma_q(t)$ esta determinada por la ecuación de Ermakov

$$\frac{d^2\sigma_q}{dt^2} + \omega^2(t)\sigma_q = \frac{\hbar^2}{4m^2\sigma_q^3}.$$

Por consiguiente, se puede concluir que la ecuación de Ermakov describe la dinámica de cantidades fundamentales en la descripción de sistemas cuánticos.

Ahora si desarrollamos los cuadrados del invariante (2.11) tenemos que

$$\begin{aligned} I(q, p; t) &= \frac{m}{2\hbar} \left(\dot{\rho}^2(t) + \frac{1}{\rho^2(t)} \right) \langle q \rangle_t^2 - \frac{\rho(t)\dot{\rho}(t)}{\hbar} \langle q \rangle_t \langle p \rangle_t + \frac{\rho^2(t)}{2m\hbar} \langle p \rangle_t^2 \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \sigma_p^2(t) \langle q \rangle_t^2 - \frac{2}{\hbar^2} \sigma_{qp}(t) \langle q \rangle_t \langle p \rangle_t + \frac{1}{\hbar^2} \sigma_q^2(t) \langle p \rangle_t^2; \end{aligned}$$

esto mediante las expresiones (2.39), (2.40) y (2.41). Así, es fácil encontrar que el invariante de Ermakov puede escribirse como

$$I = \frac{1}{\hbar^2} (\langle q \rangle_t, \langle p \rangle_t) \begin{pmatrix} \sigma_p^2(t) & -\sigma_{qp}(t) \\ -\sigma_{qp}(t) & \sigma_q^2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle q \rangle_t \\ \langle p \rangle_t \end{pmatrix}.$$

Definimos la matriz de covarianza de las variables q y p , y utilizando el invariante I_p encontramos su inversa

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_q^2(t) & \sigma_{qp}(t) \\ \sigma_{qp}(t) & \sigma_p^2(t) \end{pmatrix}, \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{I_p} \begin{pmatrix} \sigma_p^2(t) & -\sigma_{qp}(t) \\ -\sigma_{qp}(t) & \sigma_q^2(t) \end{pmatrix}.$$

que permite escribir el invariante de Ermakov de la siguiente manera

$$I = \frac{I_p}{\hbar^2} (\langle q \rangle_t, \langle p \rangle_t) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \langle q \rangle_t \\ \langle p \rangle_t \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

y el correspondiente operador de Ermakov como

$$\hat{I} = \frac{I_p}{\hbar^2} (\hat{q}, \hat{p}) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

2.4. Propagador

Para encontrar la evolución de un paquete con condiciones iniciales arbitrarias se usa el propagador. Entonces, dado un estado inicial $\psi(q_0, t_0)$, la evolución temporal de éste bajo la acción de un Hamiltoniano, está definida por

$$\psi(q, t) = \int dq_0 K(q, t; q_0, t_0) \psi(q_0, t_0), \quad (2.44)$$

donde $K(q, t; q_0, t_0)$ es el propagador del sistema. Para poder determinar la forma del propagador usamos el hecho que [9, 10]: si $\hat{S}(t)$ es un operador invariante, entonces debe ocurrir que los valores esperados satisfacen:

$$\langle \psi(t) | \hat{S}(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | \hat{S}(0) | \psi(0) \rangle,$$

lo cual implica que

$$\hat{U}^\dagger(t) \hat{S}(t) \hat{U}(t) = \hat{S}(0).$$

Multiplicando por el operador $\hat{U}(t)$, del lado izquierdo, se obtiene la ecuación

$$\hat{S}(t) \hat{U}(t) = \hat{U}(t) \hat{S}(0).$$

Escribimos la expresión anterior con $\hat{S}(t) = \hat{A}(t)$ en la representación de posición, entonces tenemos que

$$\langle q|\hat{A}(t)\hat{U}(t)|q'\rangle = \frac{e^{i\phi(t)}}{\sqrt{2m\hbar}} \left[\left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) mq + \hbar\rho(t) \frac{\partial}{\partial q} \right] K(q, q'; t)$$

y que

$$\langle q|\hat{U}(t)\hat{A}(0)|q'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar}} \left[\left(\frac{1}{\rho_0} - i\dot{\rho}_0 \right) mq' - \hbar\rho_0 \frac{\partial}{\partial q'} \right] K(q, q'; t).$$

Igualando las expresiones anteriores obtenemos una ecuación diferencial parcial para el propagador,

$$e^{i\phi(t)} \left[\left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) mq + \hbar\rho(t) \frac{\partial}{\partial q} \right] K(q, q'; t) = \left[\left(\frac{1}{\rho_0} - i\dot{\rho}_0 \right) mq' - \hbar\rho_0 \frac{\partial}{\partial q'} \right] K(q, q'; t). \quad (2.45)$$

Si realizamos el mismo cálculo para $\hat{S}(t) = \hat{A}^\dagger(t)$, obtenemos una segunda ecuación diferencial parcial para el propagador, esta es

$$e^{-i\phi(t)} \left[\left(\frac{1}{\rho(t)} + i\dot{\rho}(t) \right) mq - \hbar\rho(t) \frac{\partial}{\partial q} \right] K(q, q'; t) = \left[\left(\frac{1}{\rho_0} + i\dot{\rho}_0 \right) mq' + \hbar\rho_0 \frac{\partial}{\partial q'} \right] K(q, q'; t). \quad (2.46)$$

Por lo tanto, $K(q, q'; t)$ debe satisfacer ambas expresiones. Para obtener la solución de este sistema de ecuaciones diferenciales parciales, sumamos las ecuaciones (2.45) y (2.46), dando como resultado una ecuación desacoplada dada por

$$\frac{\partial K(q, q'; t)}{\partial q} = \left[\frac{im}{\hbar} \left(\frac{\cot \phi(t)}{\rho^2(t)} + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \right) q - \frac{imq'}{\hbar\rho_0\rho(t) \sin \phi(t)} \right] K(q, q'; t).$$

Integrando la expresión anterior encontramos que el propagador es

$$K(q, q'; t) = k(q', t) \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left[\left(\frac{\cot \psi(t)}{\rho^2(t)} + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \right) q^2 - \frac{2qq'}{\rho_0\rho(t) \sin \phi(t)} \right] \right\},$$

donde $k(q', t)$ es una función sólo de q' y el tiempo. Para determinar esta función basta substituir la solución $K(q, q'; t)$ ya sea en (2.45) o en (2.46). Si substituímos en (2.45) y reducimos tenemos la ecuación diferencial parcial para $k(q', t)$ dada por

$$\frac{\partial k(q', t)}{\partial q'} = \left[\frac{im}{\hbar} \left(\frac{\cot \phi(t)}{\rho_0^2} - \frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0} \right) q' \right] k(q', t),$$

cuya solución es

$$k(q', t) = N(t) \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left(\frac{\cot \phi(t)}{\rho_0^2} - \frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0} \right) q'^2 \right\},$$

donde $N(t)$ es una función del tiempo. Por lo tanto el propagador del sistema está dado por

$$K(q, q'; t) = N(t) \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left[\left(\frac{\cot \phi(t)}{\rho(t)} + \dot{\rho}(t) \right) \frac{q^2}{\rho(t)} - \frac{2qq'}{\rho_0\rho(t) \sin \phi(t)} + \left(\frac{\cot \phi(t)}{\rho_0} - \dot{\rho}_0 \right) \frac{q'^2}{\rho_0} \right] \right\}.$$

Para determinar la función $N(t)$ usamos la condición que en $t = 0$, el propagador es una función delta de Dirac

$$K(q, q'; 0) = \delta(q - q').$$

Así si sustituimos $t = \epsilon$, donde ϵ es lo suficientemente pequeño, entonces es fácil mostrar que

$$K(q, q', \epsilon) \approx N(\epsilon) \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar\rho_0\rho(\epsilon) \sin \phi(\epsilon)} (q - q')^2 \right\}.$$

La ecuación anterior se puede comparar con la secuencia de funciones normalizadas

$$\delta_n(q - q') = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(q-q')^2},$$

con n en los naturales, tal que la secuencias de integrales tiene el límite [8].

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(q - q') f(q) dq = f(q').$$

Entonces obtenemos las relaciones

$$n^2 = \frac{m}{2i\hbar\rho_0\rho(\epsilon) \sin \phi(\epsilon)},$$

y

$$N(\epsilon) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\rho_0\rho(\epsilon) \sin \phi(\epsilon)}}.$$

Con lo cual se concluye que

$$N(t) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\rho_0\rho(t) \sin \phi(t)}}.$$

La expresión general del propagador para un oscilador paramétrico es

$$\begin{aligned} K(q, q'; t) = & \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\rho_0\rho(t) \sin \phi(t)}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left[\left(\frac{\cot \phi(t)}{\rho(t)} + \dot{\rho}(t) \right) \frac{q^2}{\rho(t)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2qq'}{\rho_0\rho(t) \sin \phi(t)} + \left(\frac{\cot \phi(t)}{\rho_0} - \dot{\rho}_0 \right) \frac{q'^2}{\rho_0} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Es importante destacar que debido a que tenemos una familia infinita de operadores invariantes $\hat{A}(t)$ y $\hat{A}^\dagger(t)$, entonces es inmediato que la forma del propagador no es única ya que depende de la función solución $\rho(t)$ de la ecuación de Ermakov que se elige.

2.5. Solución de la ecuación de Ermakov y operadores invariantes lineales.

En las secciones anteriores hemos mostrado que la dinámica de un sistema de oscilador armónico con frecuencia variable, en mecánica cuántica, se encuentra completamente descrita

por la función $\rho(t)$. Ahora, ya hemos mostrado que la función compleja solución de la ecuación de Newton del oscilador paramétrico está relacionada con la solución de la ecuación de Ermakov mediante la expresión $\lambda(t) = \rho(t)e^{i \int \frac{dt}{\rho^2(t)}}$. Es inmediato entonces que

$$\rho(t) = \sqrt{\lambda_r^2(t) + \lambda_i^2(t)}$$

donde $\lambda_r(t)$ y $\lambda_i(t)$ son la parte real e imaginaria de $\lambda(t)$, respectivamente.

Ahora, del Capítulo 1, sabemos que si conocemos la solución clásica del problema conocemos la solución de la ecuación de Ermakov. En esta sección haremos algo diferente, pues mediante operadores invariantes lineales encontramos la solución de la ecuación de Ermakov.

En general, dado el Hamiltoniano cuadrático en posición y momento

$$\hat{H} = \frac{1}{2}a(t)\hat{p}^2 + \frac{1}{2}b(t)(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p}) + \frac{1}{2}c(t)\hat{q}^2 + f(t)\hat{p} + g(t)\hat{q}. \quad (2.48)$$

Se puede definir a \hat{S} como el operador invariante, del Hamiltoniano descrito por (2.48), dado por

$$\hat{S} = \lambda(t)\hat{q} + \beta(t)\hat{p} + \gamma(t).$$

Se puede mostrar que por ser \hat{S} un operador invariante, las funciones $\lambda(t)$, $\beta(t)$ y $\gamma(t)$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= c(t)\beta(t) - b(t)\lambda(t), \\ \dot{\beta}(t) &= b(t)\beta(t) - a(t)\lambda(t), \\ \dot{\gamma}(t) &= g(t)\beta(t) - f(t)\lambda(t). \end{aligned}$$

donde para determinar las funciones mencionadas se deben fijar las condiciones iniciales. Por ejemplo, si consideramos dos operadores invariantes que denotamos por $\hat{Q}(t)$ y $\hat{P}(t)$ tales que $\hat{Q}(0) = \hat{q}$ y $\hat{P}(0) = \hat{p}$, esto implica que

$$\begin{aligned} \lambda_1(t=0) &= 1, & \beta_1(t=0) &= 0; & \gamma_1(t=0) &= 0 \\ \lambda_2(t=0) &= 0, & \beta_2(t=0) &= 1; & \gamma_2(t=0) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, para nuestros propósitos, consideramos los operadores invariantes

$$\begin{aligned} \hat{Q}(t) &= \lambda_1(t)\hat{q} + \beta_1(t)\hat{p} + \gamma_1(t), \\ \hat{P}(t) &= \lambda_2(t)\hat{q} + \beta_2(t)\hat{p} + \gamma_2(t), \end{aligned}$$

con condición inicial arbitraria. En forma matricial esto es

$$\begin{pmatrix} \hat{Q}(t) \\ \hat{P}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & \beta_1(t) \\ \lambda_2(t) & \beta_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}.$$

Si calculamos el conmutador de $\hat{Q}(t)$ con $\hat{P}(t)$ obtenemos

$$\left[\hat{Q}(t), \hat{P}(t) \right] = i\hbar(\lambda_1(t)\beta_2(t) - \beta_1(t)\lambda_2(t));$$

entonces si demandamos que $[\hat{Q}(t), \hat{P}(t)] = i\hbar$, tenemos la condición⁴

$$\lambda_1(t)\beta_2(t) - \beta_1(t)\lambda_2(t) = 1.$$

para todo tiempo.

Ahora, consideramos los operadores lineales complejos $\hat{A}(t)$ y $\hat{A}^\dagger(t)$ definidos como:

$$\hat{A}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{Q}(t)}{l_q} + i \frac{\hat{P}(t)}{l_p} \right), \quad \hat{A}^\dagger(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\hat{Q}(t)}{l_q} - i \frac{\hat{P}(t)}{l_p} \right),$$

donde l_q y l_p son cantidades constantes que dependen de las variables del problema y que tienen dimensiones de posición y momento, respectivamente; entonces son tales que $l_q l_p = \hbar$. Es importante mencionar que los operadores \hat{A} y \hat{A}^\dagger son invariantes pues provienen de la combinación lineal de dos operadores invariantes. En términos de los operadores \hat{q} y \hat{p} queda que:

$$\begin{pmatrix} \hat{A}(t) \\ \hat{A}^\dagger(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1(t)}{l_q} + i \frac{\lambda_2(t)}{l_p} & \frac{\beta_1(t)}{l_q} + i \frac{\beta_2(t)}{l_p} \\ \frac{\lambda_1(t)}{l_q} - i \frac{\lambda_2(t)}{l_p} & \frac{\beta_1(t)}{l_q} - i \frac{\beta_2(t)}{l_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix}.$$

Estos operadores invariantes, así definidos, satisfacen la relación de conmutación

$$[\hat{A}(t), \hat{A}^\dagger(t)] = 1,$$

lo cual implica que corresponden a operadores del ascenso y descenso que podemos usar para determinar los estados de Fock y estados coherentes generalizados [9].

Para el caso del oscilador paramétrico tenemos que los operadores $\hat{Q}(t)$ y $\hat{P}(t)$ tienen la forma

$$\begin{pmatrix} \hat{Q}(t) \\ \hat{P}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & \beta_1(t) \\ \lambda_2(t) & \beta_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

donde las funciones satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= m\omega^2(t)\beta(t), \\ \dot{\beta}(t) &= -\frac{1}{m}\lambda(t). \end{aligned}$$

Este sistema es equivalente a la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{\beta}(t) + \omega^2(t)\beta(t) = 0, \quad (2.50)$$

que corresponde a la solución ecuación clásica de movimiento del oscilador paramétrico. Entonces, a partir de estos operadores invariantes podemos obtener los operadores de ascenso y descenso que por supuesto deben ser equivalentes a (2.20) y (2.21). Además, usando los operadores invariantes \hat{Q} y \hat{P} , de (2.49), podemos escribir el operador invariante más general posible, cuadrático en \hat{q} y \hat{p} , como

$$A^2\hat{Q}^2 + B^2\hat{P}^2 + C(\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}),$$

⁴Implica que se tiene una transformación unitaria dependiente del tiempo entre los operadores (\hat{Q}, \hat{P}) y (\hat{q}, \hat{p}) .

donde A , B y C son constantes arbitrarias. Esto implica que este invariante es proporcional al operador de Ermakov, esto es,

$$\hat{I} = \frac{1}{2} \left[A^2 \hat{Q}^2 + B^2 \hat{P}^2 + C (\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}) \right].$$

Esta última ecuación nos permite conocer la solución de la ecuación de Ermakov, pues substituyendo las constantes de movimiento e igualando los términos en \hat{q} , \hat{p} , $\hat{q}\hat{p}$ y $\hat{p}\hat{q}$, se encuentra que

$$\rho(t) = \pm \sqrt{m\hbar} \left[A^2 \beta_1^2(t) + B^2 \beta_2^2(t) + 2C \beta_1(t) \beta_2(t) \right]^{1/2},$$

con

$$C = \pm \sqrt{A^2 B^2 - \frac{1}{\hbar^2}}.$$

Ahora podemos determinar el valor de las constantes A y B , mediante el valor de las desviaciones cuadráticas medias al tiempo $t = 0$. Entonces usando los resultados (2.39) y (2.41) es posible mostrar que

$$A^2 = \frac{2}{\hbar^2} \sigma_{p_0}^2, \quad B^2 = \frac{2}{\hbar^2} \sigma_{q_0}^2,$$

donde definimos $\sigma_{q_0}^2 \equiv \sigma_p^2(t=0)$ y $\sigma_{p_0}^2 \equiv \sigma_q^2(t=0)$. Por lo tanto, encontramos que la solución a la ecuación de Ermakov es

$$\rho(t) = \pm \sqrt{2m} \left[\frac{1}{\hbar} (\sigma_{p_0}^2 \beta_1^2(t) + \sigma_{q_0}^2 \beta_2^2(t)) \pm \sqrt{\frac{4}{\hbar^2} \sigma_{q_0}^2 \sigma_{p_0}^2 - 1} \beta_1(t) \beta_2(t) \right]^{1/2}.$$

Es importante notar que en todo el formalismo se consideró a $\rho(t)$ como una función real entonces debe cumplirse

$$\frac{4}{\hbar} \sigma_{q_0}^2 \sigma_{p_0}^2 - 1 \geq 0,$$

es decir que

$$\sigma_{q_0}^2 \sigma_{p_0}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4},$$

que es la conocida relación de incertidumbre de Heisenberg.

Por último, usando el invariante

$$\sigma_q^2(t) \sigma_p^2(t) - \sigma_{qp}^2(t) = I_p = \frac{\hbar^2}{4},$$

tenemos que

$$\frac{2}{\hbar} \sigma_{q_0 p_0} = \pm \sqrt{\frac{4}{\hbar^2} \sigma_{q_0}^2 \sigma_{p_0}^2 - 1}.$$

Por lo tanto la solución a la ecuación de Ermakov es

$$\rho(t) = \pm \sqrt{\frac{2m}{\hbar} (\sigma_{p_0}^2 \beta_1^2(t) + \sigma_{q_0}^2 \beta_2^2(t) + 2\sigma_{q_0 p_0} \beta_1(t) \beta_2(t))}. \quad (2.51)$$

El resultado anterior permite expresar la varianza en términos de las soluciones clásicas del problema, las varianzas y correlaciones iniciales, esto es,

$$\sigma_q^2(t) = \sigma_{p_0}^2 \beta_1^2(t) + \sigma_{q_0}^2 \beta_2^2(t) + 2\sigma_{q_0 p_0} \beta_1(t) \beta_2(t). \quad (2.52)$$

2.6. Función de Wigner

El estudio de la transición entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica es de gran interés para físicos tanto teóricos como experimentales. Desde el punto de vista experimental, es importante el estudio de un átomo o ión confinado en una trampa, por ejemplo, una trampa de Paul. Desde el punto de vista teórico, la mejor manera de encontrar una conexión entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica es por medio de espacio fase, esto es el uso de la función de Wigner que es la representación cuántica que más se asemeja a la descripción clásica de espacio fase.

La función de Wigner en la representación de posición está dada por

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle q + \frac{x}{2} | \hat{\rho} | q - \frac{x}{2} \rangle e^{-ipx/\hbar}, \quad (2.53)$$

donde $\hat{\rho}$ es la matriz de densidad. Esta función fue propuesta por E. P. Wigner en 1932, en el trabajo: "On the quantum mechanical corrections to thermodynamical equilibrium" sin ninguna explicación. Algunas de las propiedades más importantes de la función de Wigner, son las siguientes [11]:

1. $W(q, p)$ es una función real.
2. $W(q, p)$ satisface que las marginales proveen las distribuciones de probabilidad en la representación de posición y momento

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp W(q, p) = |\psi(q)|^2, \quad (2.54)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq W(q, p) = |\psi(p)|^2. \quad (2.55)$$

Por lo tanto, integrando en las dos variables se garantiza que está normalizada la función de Wigner

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp W(q, p) = 1. \quad (2.56)$$

3. $W(q, p)$ es invariante bajo la transformaciones de Galileo, es decir si

$$\psi(q) \rightarrow \psi(q + a),$$

entonces

$$W(q, p) \rightarrow W(q + a, p). \quad (2.57)$$

Si remplazamos

$$\psi(q) \rightarrow e^{ip'q/\hbar} \psi(q),$$

entonces se tiene

$$W(q, p) \rightarrow W(q, p + p'). \quad (2.58)$$

4. $W(q, p)$ es invariante con respecto a reflexiones temporales y espaciales, es decir, si

$$\psi(q) \rightarrow \psi(-q),$$

entonces

$$W(q, p) \rightarrow W(-q, -p). \quad (2.59)$$

Por la invarianza temporal de un sistema

$$\psi(q) \rightarrow \psi^*(q), \quad (2.60)$$

se tiene que

$$W(q, p) \rightarrow W(q, -p). \quad (2.61)$$

5. Sean $A(q, p)$ y $B(q, p)$ funciones clásicas correspondientes a los operadores cuánticos \hat{A} y \hat{B} definidas como

$$A(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle q + \frac{x}{2} | \hat{A} | q - \frac{x}{2} \rangle e^{-ipx/\hbar} \quad (2.62)$$

y

$$B(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle q + \frac{x}{2} | \hat{B} | q - \frac{x}{2} \rangle e^{-ipx/\hbar}, \quad (2.63)$$

entonces

$$Tr(\hat{A}\hat{B}) = 2\pi\hbar \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dp A(q, p) B(q, p). \quad (2.64)$$

6. La evolución temporal de la función de Wigner bajo la acción del operador Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(\hat{q}), \quad (2.65)$$

está gobernada por la ecuación

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{dU(q)}{dq} \frac{\partial}{\partial p} \right) W(q, p; t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^l}{(2l+1)!} \frac{d^{2l+1}U(q)}{dq^{2l+1}} \frac{\partial^{2l+1}}{\partial p^{2l+1}} W(q, p; t). \quad (2.66)$$

2.6.1. Función de Wigner del oscilador paramétrico

Ahora calculamos la función de Wigner del oscilador paramétrico para un estado puro. Usando la definición (2.53) y la función de onda (2.12), encontramos que la función de Wigner del oscilador paramétrico está dada por [2]

$$W_{\alpha}(q, p; t) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp \left\{ -\frac{1}{m\hbar} \left[(\rho(t)(p - \langle p \rangle_t) - m\dot{\rho}(t)(q - \langle q \rangle_t))^2 + \left(\frac{m(q - \langle q \rangle_t)}{\rho(t)} \right)^2 \right] \right\}. \quad (2.67)$$

Notemos que el argumento de la exponencial tiene la forma del invariante clásico (1.34), es decir

$$I(q, p; t) = \frac{1}{2m} \left[(p\rho(t) - m\dot{\rho}(t))^2 + \left(\frac{mq}{\rho(t)} \right)^2 \right]$$

donde las coordenadas canónicas q y p se transforman mediante

$$\begin{aligned} q &\longrightarrow q - \langle q \rangle_t, \\ p &\longrightarrow p - \langle p \rangle_t. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que la función de Wigner para el estado coherente generalizado es

$$W_\alpha(q, p; t) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} I(q - \langle q \rangle_t, p - \langle p \rangle_t; t) \right\}; \quad (2.68)$$

además, para el estado vacío que corresponde a $\langle q \rangle_t = 0$ y $\langle p \rangle_t = 0$, la función de Wigner es

$$W_0(q, p; t) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} I(q, p; t) \right\}. \quad (2.69)$$

Para los estados de Fock generalizados tenemos que la función de Wigner está dada por

$$W_n(q, p; t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n^* \left(q - \frac{x}{2}, t \right) \psi_n \left(q + \frac{x}{2}, t \right) e^{-ipx/\hbar},$$

donde $\psi_n(q, t)$ están dadas en (2.29). Substituyendo las funciones de onda en la integral y reduciendo términos tenemos que

$$\begin{aligned} W_n(q, p; t) &= \frac{m}{\pi\hbar} \frac{1}{2^n n! \rho(t)} \frac{1}{2\pi\hbar} \exp \left\{ -\frac{mq^2}{\hbar\rho^2(t)} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} dx H_n \left(\sqrt{\frac{m}{\hbar}} \frac{q + x/2}{\rho(t)} \right) H_n \left(\sqrt{\frac{m}{\hbar}} \frac{q - x/2}{\rho(t)} \right) \\ &\times \exp \left\{ -\frac{mx^2}{4\hbar\rho^2(t)} - \left(p - \frac{mq\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \right) \frac{ix}{\hbar} \right\}. \end{aligned}$$

Ahora, completamos cuadrados del argumento de la exponencial, esto es,

$$-\frac{mx^2}{4\hbar\rho^2(t)} - \left(p - \frac{mq\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} \right) \frac{ix}{\hbar} = - \left(\sqrt{\frac{m}{\hbar}} \frac{x}{2\rho(t)} + \frac{i}{\sqrt{m\hbar}} (p\rho(t) - mq\dot{\rho}(t)) \right)^2 - \frac{1}{m\hbar} (p\rho(t) - mq\dot{\rho}(t))^2$$

y realizamos el cambio de variable

$$\xi = \sqrt{\frac{m}{\hbar}} \frac{x}{2\rho(t)} + \frac{i}{\sqrt{m\hbar}} (p\rho(t) - mq\dot{\rho}(t)).$$

Con esto la función de Wigner toma la forma

$$\begin{aligned} W_n(q, p; t) &= \frac{1}{\pi\hbar} e^{-\frac{2}{\hbar} I(q, p)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n \left(\xi + \sqrt{\frac{m}{\hbar}} \frac{q}{\rho(t)} - \frac{i}{\sqrt{m\hbar}} (p\rho(t) - mq\dot{\rho}(t)) \right) \\ &H_n \left(-\xi + \sqrt{\frac{m}{\hbar}} \frac{q}{\rho(t)} + \frac{i}{\sqrt{m\hbar}} (p\rho(t) - mq\dot{\rho}(t)) \right). \end{aligned}$$

Usando el resultado $H_n(-\xi) = (-1)^n H_n(\xi)$, tenemos que

$$\begin{aligned} W_n(q, p; t) &= \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} e^{-\frac{2}{\hbar} I(q, p; t)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n \left(\xi + \sqrt{\frac{m}{\hbar}} \frac{q}{\rho(t)} - \frac{i}{\sqrt{m\hbar}} (p\rho(t) - mq\dot{\rho}(t)) \right) \\ &H_n \left(\xi - \sqrt{\frac{m}{\hbar}} \frac{q}{\rho(t)} - \frac{i}{\sqrt{m\hbar}} (p\rho(t) - mq\dot{\rho}(t)) \right). \end{aligned}$$

Finalmente usando la relación [8]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^n n!} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n(\xi + \xi_1) H_n(\xi + \xi_2) = L_n(-2\xi_1\xi_2),$$

donde L_m denota el polinomio de Laguerre de orden m , es fácil probar que

$$\xi_1\xi_2 = -\frac{2}{\hbar}I(q, p; t),$$

con lo que resulta que la función de Wigner para los estados de Fock generalizados está dada por:

$$W_n(q, p; t) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} e^{-\frac{2}{\hbar}I(q, p; t)} L_n\left(\frac{4}{\hbar}I(q, p; t)\right). \quad (2.70)$$

Por lo tanto, tenemos que la función de Wigner tanto de los estados de Fock generalizados así como del estado coherente generalizado dependen del invariante clásico (1.34), como se muestra en la Tabla 2.1.

Función de onda	Función de Wigner
$\psi_0(q, t)$	$W_0(q, p; t) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}I(q, p; t)\right\}$
$\psi_n(q, t)$	$W_n(q, p; t) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} e^{-\frac{2}{\hbar}I(q, p; t)} L_n\left(\frac{4}{\hbar}I(q, p; t)\right)$
$\psi_\alpha(q, t)$	$W_\alpha(q, p; t) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}I(q - \langle q \rangle_t, p - \langle p \rangle_t; t)\right\}$

Cuadro 2.1: Función de Wigner para el oscilador paramétrico de los estados de Fock generalizados y del estado coherente generalizado.

Para los estados de Fock la función de Wigner sólo depende de $I(q, p; t)$, por lo tanto $W_n(q, p; t)$ será constante a lo largo de las curvas que define el invariante en el espacio fase. Dichas curvas están definidas por

$$I(q, p; t) = \frac{m}{2} \left(\dot{\rho}^2(t) + \frac{1}{\rho^2(t)} \right) q^2 - \rho(t)\dot{\rho}(t)qp + \frac{\rho^2(t)}{2m}p^2,$$

donde hemos desarrollado los cuadrados del invariante. Para saber la forma que describe la ecuación anterior en el espacio fase usamos las características de las curvas cónicas.

Dada una curva cónica en el Plano x - y definida por la ecuación [8]

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

entonces

- La cónica es una elipse si $B^2 - 4AC < 0$,
- La cónica es una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$,
- La cónica es una parábola si $B^2 - 4AC = 0$.

Entonces identificando en el invariante de Ermakov los coeficientes,

$$A = \frac{m}{2} \left(\dot{\rho}^2(t) + \frac{1}{\rho^2(t)} \right), \quad B = -\rho(t)\dot{\rho}(t), \quad C = \frac{\rho^2(t)}{2m},$$

tenemos que $B^2 - 4AC = -1$, por lo tanto el invariante describe elipses en el espacio fase. Una observación interesante es que de las expresiones (2.39), (2.40) y (2.41), es fácil encontrar que

$$A = \frac{\sigma_p^2(t)}{\hbar}, \quad B = -\frac{2\sigma_{qp}(t)}{\hbar}, \quad C = \frac{\sigma_q^2(t)}{\hbar},$$

con lo cual queda que

$$B^2 - 4AC = \frac{4\sigma_{qp}^2(t)}{\hbar^2} - \frac{4\sigma_q^2(t)\sigma_p^2(t)}{\hbar^2} = -1.$$

Sin embargo, la expresión anterior es equivalente a escribir que

$$\sigma_q^2(t)\sigma_p^2(t) - \sigma_{qp}^2 = \frac{\hbar^2}{4}.$$

de donde se concluye que las curvas que describe el invariante clásico $I(q, p; t)$ en el espacio fase son elipses sí y sólo sí las varianzas en posición y momento junto con la función correlación minimizan la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson. Adicionalmente, podemos reescribir al invariante en términos de las varianzas y la corelación, esto es,

$$I = \frac{1}{\hbar}(q, p) \begin{pmatrix} \sigma_p^2(t) & -\sigma_{qp}(t) \\ -\sigma_{qp}(t) & \sigma_q^2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

que de forma más simple lo anterior se expresa como

$$I = \frac{I_p}{\hbar^2}(q, p) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

donde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_q^2(t) & \sigma_{qp}(t) \\ \sigma_{qp}(t) & \sigma_p^2(t) \end{pmatrix}.$$

Entonces vemos como el invariante de Ermakov nos relaciona las cantidades clásicas (q, p) con las cantidades cuánticas de la matriz de covarianza Σ .

Para terminar el estudio de las elipses que define el invariante en el espacio fase, cabe mencionar que dichas curvas no se encuentran fijas, pues se encuentran rotando un ángulo:

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{\sigma_q^2(t) - \sigma_p^2(t)}{2\sigma_{qp}(t)}$$

y cuyos ejes mayor y menor están dados por $\frac{I}{\lambda_1(t)}$, $\frac{I}{\lambda_2(t)}$, donde

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\hbar} (\sigma_q^2(t) + \sigma_p^2(t)) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\hbar^2} (\sigma_q^2(t) + \sigma_p^2(t))^2 - 1}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\hbar} (\sigma_q^2(t) + \sigma_p^2(t)) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\hbar^2} (\sigma_q^2(t) + \sigma_p^2(t))^2 - 1}.$$

Para seguir caracterizando las funciones de Wigner de los estados de Fock, vemos de la Tabla 2.1 que $W_n(q, p; t)$ dependen del polinomio de Laguerre L_n , el cual tiene n ceros. Por lo tanto, tenemos que la función de Wigner de estos estados tendrán valores positivos y negativo además que corta al plano fase n veces. Adicionalmente como $L_n(0) = 1$, entonces si el invariante es cero tenemos que

$$W_n(q, p; t) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar},$$

entonces la función de Wigner en el origen del espacio fase cambia de signo dependiendo si n es par o impar. Las características anteriores se pueden apreciar en Fig. 2.2 donde tenemos las gráficas de W_n como función del invariante, donde hemos considerado los casos $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Se puede apreciar cómo dependiendo de el valor de n tenemos el número de veces que la función de Wigner corta al eje, con lo cual se nota que la función puede tener valores positivos y negativos; además dependiendo si n es par o impar W_n en $I = 0$ será positivo o negativo.

Para el caso de la función de Wigner para el estado coherente, $W_\alpha(q, p; t)$, encontramos que esta función es positiva para todo tiempo, además como sólo depende del invariante

$$I(q - \langle q \rangle_t, p - \langle p \rangle_t; t);$$

entonces la función de Wigner será constante a lo largo de las curvas que describe este invariante. Dichas curvas se tratan de las elipses definidas por $I(q, p; t)$ pero desplazadas una cantidad $(\langle q \rangle_t, \langle p \rangle_t)$.

2.6.2. Función de Wigner mediante los operadores de ascenso y descenso

La función de Wigner del oscilador paramétrico puede determinarse mediante los operadores invariantes \hat{A} y \hat{A}^\dagger . Para esto consideremos la integral

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + x/2 | \hat{A} \hat{\rho} | q - x/2 \rangle e^{-ipx/\hbar} dx.$$

Sea $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ donde $|\alpha\rangle$ es eigenestado de \hat{A} , con eigenvalor α , entonces

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + x/2 | \hat{A} \hat{\rho} | q - x/2 \rangle e^{-ipx/\hbar} dx = \alpha W(q, p, t).$$

Por otra parte, el elemento de matrix $\langle q + x/2 | \hat{A} \hat{\rho} | q - x/2 \rangle$ está dado por

$$\frac{e^{i\phi(t)}}{\sqrt{2m\hbar}} \left[\left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) m(q + x/2) + \hbar\rho(t) \frac{\partial}{\partial(q + x/2)} \right] \langle q + x/2 | \hat{\rho} | q - x/2 \rangle,$$

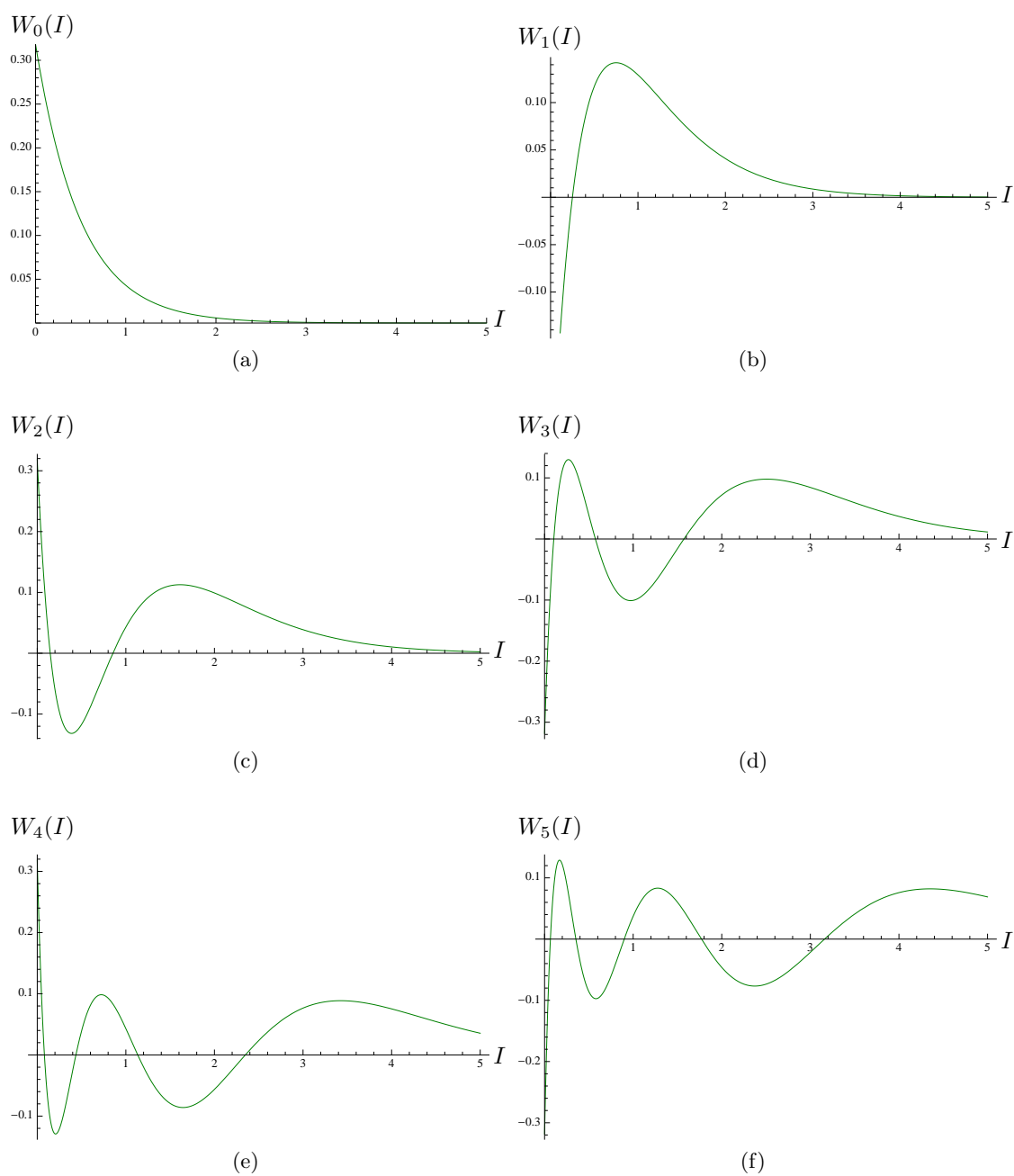


Figura 2.2: Función de Wigner $W_n(I)$ de los eigenestados del operador de Ermakov $|n\rangle$, como una función del invariante $I(q, p; t)$, donde hemos considerado los caso: (a) $n = 0$, (b) $n = 1$, (c) $n = 2$, (d) $n = 3$, (e) $n = 4$ y (f) $n = 5$. Para todos los casos consideramos $\hbar = 1$.

substituyendo

$$\frac{\partial}{\partial(a+x/2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial x},$$

el elemento de matriz, $\langle q + x/2 | \hat{A} \hat{\rho} | q - x/2 \rangle$, finalmente queda expresado como

$$\frac{e^{i\phi(t)}}{\sqrt{2m\hbar}} \left[\left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) m(q + x/2) + \hbar\rho(t) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \langle q + x/2 | \hat{\rho} | q - x/2 \rangle.$$

Si multiplicamos por $\frac{e^{-ipx/\hbar}}{2\pi\hbar}$ a la expresión anterior e integramos con respecto a x , entonces obtenemos

$$\frac{e^{i\phi(t)}}{\sqrt{2m\hbar}} \left[\left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) mq + \frac{\hbar\rho(t)}{2} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{im\hbar}{2} \left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) \frac{\partial}{\partial q} + i\rho p \right] W(q, p; t).$$

Por lo tanto, de los resultados anteriores encontramos que la función de Wigner debe satisfacer la ecuación de eigenvalores

$$\frac{e^{i\phi(t)}}{\sqrt{2m\hbar}} \left[\left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) mq + \frac{\hbar\rho(t)}{2} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{im\hbar}{2} \left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) \frac{\partial}{\partial q} + i\rho p \right] W(q, p; t) = \alpha W(q, p, t). \quad (2.71)$$

Si ahora consideramos la integral

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q + x/2 | \hat{\rho} \hat{A}^\dagger | q - x/2 \rangle e^{-ipx/\hbar} dx,$$

entonces de forma completamente análoga como se procedió anteriormente es posible encontrar otra ecuación de eigenvalores para $W(q, p; t)$, dada por

$$\frac{e^{-i\phi(t)}}{\sqrt{2m\hbar}} \left[\left(\frac{1}{\rho(t)} + i\dot{\rho}(t) \right) mq + \frac{\hbar\rho(t)}{2} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{im\hbar}{2} \left(\frac{1}{\rho(t)} + i\dot{\rho}(t) \right) \frac{\partial}{\partial q} - i\rho p \right] W(q, p; t) = \alpha^* W(q, p, t). \quad (2.72)$$

Para poder determinar la función de Wigner sólo necesitamos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (2.71) y (2.72). Para lograr esto, consideramos el cambio de variables

$$\zeta = \frac{e^{i\phi(t)}}{\sqrt{2m\hbar}} \left[\left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) mq + i\rho(t)p \right];$$

$$\zeta^* = \frac{e^{-i\phi(t)}}{\sqrt{2m\hbar}} \left[\left(\frac{1}{\rho(t)} + i\dot{\rho}(t) \right) mq - i\rho(t)p \right],$$

con lo que obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left(\zeta + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \right) W(\zeta, \zeta^*) = \alpha W(\zeta, \zeta^*);$$

$$\left(\zeta^* + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) W(\zeta, \zeta^*) = \alpha^* W(\zeta, \zeta^*).$$

La solución al sistema de ecuaciones anterior es simplemente

$$W(\zeta, \zeta^*) = N(t) \exp \{ 2\alpha\zeta^* + 2\alpha^*\zeta - 2\zeta\zeta^* \},$$

donde $N(t)$ es una función de normalización dependiente del tiempo. Finalmente regresando a las coordenadas originales y normalizando encontramos que la función de Wigner es

$$\begin{aligned}
W(q, p; t) = & \frac{1}{\pi\hbar} \exp \left\{ -\frac{m}{\hbar} \left(\frac{1}{\rho^2(t)} + \dot{\rho}^2(t) \right) q^2 + \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} \frac{q}{\rho(t)} (\alpha e^{-i\phi(t)} + \alpha^* e^{i\phi(t)}) \right. \\
& + \sqrt{\frac{2m}{\hbar}} i\dot{\rho}(t)q(\alpha e^{-i\phi} - \alpha^* e^{i\phi(t)}) - \frac{1}{\hbar m} \rho^2(t)p^2 + \sqrt{\frac{2}{m\hbar}} i\rho(t)p(\alpha^* e^{i\phi} - \alpha e^{-i\phi}) \\
& \left. + \frac{2}{\hbar} \dot{\rho}(t)\rho(t)qp - 2|\alpha|^2 \right\}. \tag{2.73}
\end{aligned}$$

Es posible llevar a la expresión anterior de la función de Wigner en la expresión (2.67) usando que

$$\langle \alpha | q | \alpha \rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m}} \rho(t) (\alpha_r \cos \phi + \alpha_i \sin \phi) \tag{2.74}$$

$$\langle \alpha | p | \alpha \rangle = \sqrt{2m\hbar} \left[\dot{\rho}(t) (\alpha_r \cos \phi(t) + \alpha_i \sin \phi(t)) - \frac{1}{\rho(t)} (\alpha_r \sin \phi(t) - \alpha_i \cos \phi(t)) \right] \tag{2.75}$$

lo cual permite corroborar nuestro resultado.

2.7. Formulación hidrodinámica de la Mecánica Cuántica

Para iniciar nuestro estudio mostramos cómo emerge el invariante de Ermakov en forma natural a partir de la dinámica de un paquete de ondas en la formulación hidrodinámica de la mecánica cuántica. En esta formulación se propone a la función de onda como⁵

$$\psi(q, t) = R(q, t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q, t) \right\} \tag{2.76}$$

donde tanto $R(q, t)$ como $S(q, t)$ son funciones de variable real. A la función $S(q, t)$ se le denomina función acción que tiene las unidades de \hbar . Substituyendo la función de onda propuesta en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en la representación de posición

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q, t) \right] \psi(q, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial t}. \tag{2.77}$$

y separando la parte real e imaginaria encontramos dos ecuaciones diferenciales parciales acopladas para $R(q, t)$ y $S(q, t)$ están dadas por

$$\frac{\partial R^2(q, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial q} \left[R^2(q, t) \frac{1}{m} \frac{\partial S(q, t)}{\partial q} \right], \tag{2.78}$$

y

$$-\frac{\partial S(q, t)}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S(q, t)}{\partial q} \right)^2 + V(q, t) + Q(q, t), \tag{2.79}$$

⁵En todo este capítulo consideramos sólo sistemas en una dimensión.

donde

$$Q(q, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{R(q, t)} \frac{\partial^2 R(q, t)}{\partial q^2}. \quad (2.80)$$

Estas dos ecuaciones son estrictamente equivalentes a la ecuación de Schrödinger. De hecho, la ecuación (2.78), corresponde a la ecuación de continuidad en mecánica cuántica, pues substituyendo la función de onda (2.76) en la ecuación del flujo de corriente (o corriente de probabilidad), dado por

$$j(q, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^*(q, t) \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial q} - \psi(q, t) \frac{\partial \psi^*(q, t)}{\partial q} \right],$$

se tiene que

$$j(q, t) = R^2(q, t) \frac{1}{m} \frac{\partial S(q, t)}{\partial q}.$$

Además, la densidad de probabilidad es $\rho(q, t) = R^2(q, t)$; por lo tanto, (2.78) toma la forma de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho(q, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(q, t)}{\partial q}. \quad (2.81)$$

El primero en deducir las ecuaciones (2.78) y (2.79) fue el físico alemán Erwin Madelung en 1926 [12].

Es importante mencionar las implicaciones del sistema de ecuaciones (2.78) y (2.79) en la aproximación clásica. Si consideramos la aproximación clásica, es decir, cuando hacemos $\hbar = 0$, (2.79) toma la forma

$$-\frac{\partial \tilde{S}(q, t)}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \tilde{S}(q, t)}{\partial q} \right)^2 + V(q, t),$$

que corresponde a la ecuación de Hamilton-Jacobi; por lo tanto, en este límite la función $S(q, t)$ se convierte en la función principal de Hamilton, que denominamos como $\tilde{S}(q, t)$. De tal manera que en la aproximación clásica $\psi(q, t)$ describe un fluido de partículas de masa m no-interactuantes y sujeto a un potencial $V(q, t)$: la densidad de probabilidad y la densidad de corriente de este fluido en cada punto del espacio son para todo tiempo, respectivamente, la densidad de probabilidad $\rho(q, t)$ y la corriente de probabilidad $j(q, t)$ de la partícula cuántica [13, 14]. Adicionalmente, como la ecuación de continuidad de este fluido se satisface, esto es, suficiente para mostrar que la velocidad del campo

$$v(q, t) = \frac{j(q, t)}{\rho(q, t)} = \frac{1}{m} \frac{\partial \tilde{S}(q, t)}{\partial q},$$

sigue las leyes de movimiento clásicas de un fluido [13]. Si substituímos la definición de la velocidad de campo en la ecuación de Hamilton-Jacobi se tiene

$$\frac{\partial \tilde{S}(q, t)}{\partial t} + \frac{mv^2(q, t)}{2} = -V(q, t).$$

Aplicando la derivada parcial con respecto a la posición de ambos lados de la ecuación queda

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v(q, t) \frac{\partial}{\partial q} \right) mv(q, t) = -\frac{\partial V(q, t)}{\partial q},$$

de donde se concluye que las partículas del fluido obedecen la ecuación de movimiento

$$m \frac{dv(q, t)}{dt} = - \frac{\partial V(q, t)}{\partial q}.$$

Después de la publicación de Madelung en 1926, no hubo mucho interés en la formulación hidrodinámica que proponía, hasta que en 1951 David Bohm publica un par de artículos, [15, 16], donde retoma las ecuaciones (2.78) y (2.79) con el objeto de dar una nueva interpretación a la mecánica cuántica diferente a la llamada interpretación de Copenhague. Así, Bohm define a $Q(t)$ como el potencial cuántico (en algunos libros se le suele llamar energía potencial cuántica [14]) y denomina a la ecuación (2.79) como una ecuación cuántica de Hamilton-Jacobi; entonces, debido a que se satisface la ecuación de continuidad en mecánica cuántica (2.81), es posible definir una velocidad de campo

$$v(q, t) = \frac{j(q, t)}{\varrho(q, t)} = \frac{1}{m} \frac{\partial S(q, t)}{\partial q}, \quad (2.82)$$

donde $j(q, t)$ y $\varrho(q, t)$ corresponden a la corriente de probabilidad y a la densidad de probabilidad respectivamente. A la velocidad anterior se le denomina la velocidad de campo del fluido de probabilidad [17]; además esta velocidad escrita en términos de la función de onda está dada por

$$v(q, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left[\frac{1}{\psi(q, t)} \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial q} - \frac{1}{\psi^*(q, t)} \frac{\partial \psi^*(q, t)}{\partial q} \right] = \frac{\hbar}{2mi} \frac{\partial}{\partial q} \left[\ln \left(\frac{\psi(q, t)}{\psi^*(q, t)} \right) \right].$$

Aplicando la derivada parcial con respecto a la posición en la ecuación cuántica de Hamilton-Jacobi y usando la identidad (2.82) es posible demostrar que cada elemento del campo sigue la ecuación de movimiento

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{\partial}{\partial q} [V(q, t) + Q(q, t)]. \quad (2.83)$$

Por lo tanto, vemos que la fuerza aplicada a lo largo de las trayectorias es la suma de una fuerza clásica debida a $V(q, t)$ y una contribución cuántica debida a $Q(q, t)$, a la ecuación anterior se le denomina ecuación cuántica de Newton. Entonces las tres ecuaciones fundamentales de la formulación hidrodinámica de la mecánica cuántica son: la ecuación de continuidad (2.78), la ecuación cuántica de Hamilton-Jacobi (2.79) y la ecuación cuántica de Newton (2.83).

Para concluir esta sección es importante mencionar que las ecuaciones obtenidas de la formulación hidrodinámica de la mecánica cuántica han generado una interpretación de la mecánica cuántica conocida como la interpretación de de Broglie-Bohm o la interpretación causal. Para los objetivos de esta tesis, no estamos interesados en discutir esta interpretación. Simplemente consideramos la formulación hidrodinámica como un método para encontrar la evolución temporal de sistemas cuánticos.

2.7.1. Estados estacionarios

En esta sección determinamos los estado estacionarios de una partícula de masa m , que se mueve en una dimensión, bajo la interacción de un potencial independiente del tiempo $V(q)$. Para este caso tenemos que la energía es una constante de movimiento y está dada por

$$E = - \frac{\partial S}{\partial t},$$

además, la densidad de probabilidad de los estados estacionarios son independientes del tiempo, entonces la función de onda es de la forma

$$\psi(q, t) = R(q) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(q, t) \right\}.$$

De lo anterior tenemos que las ecuaciones (2.78) y (2.79) quedan cómo

$$\frac{\partial}{\partial q} \left[R^2(q) \frac{1}{m} \frac{\partial S(q, t)}{\partial q} \right] = 0, \quad (2.84)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S(q, t)}{\partial q} \right)^2 - \frac{\hbar}{2m} \frac{1}{R(q)} \frac{\partial^2 R(q)}{\partial q^2} + V(q) = E. \quad (2.85)$$

Usualmente, se considera que $\frac{\partial S(q, t)}{\partial q} = 0$, para que se cumpla (2.84). Con esta condición tenemos que la ecuación (2.85) se convierte en la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial q^2} + V(q) \right) R(q) = ER(q).$$

Con esto además tenemos que tanto el flujo de probabilidad así como la velocidad del campo son cero. Sin embargo, esta no es la única posibilidad para satisfacer la ecuación (2.84), pues podemos considerar que [1, 2]:

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial q} = \frac{j_0}{R^2(q)},$$

donde j_0 es una constante. Para este caso la ecuación (2.85) toma la forma de la ecuación no lineal de Ermakov

$$\frac{\partial^2 R(q)}{\partial q^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(q)) R(q) = \frac{j_0^2}{\hbar^2 R^3(q)}.$$

Además, tenemos que el flujo de probabilidad es $j = j_0$ y la velocidad del campo es

$$v(q) = \frac{j_0}{mR^2(q)}.$$

Por lo que se tiene entonces un flujo constante en el tiempo y el fluido se mueve a velocidad constante. Así, encontramos que la fase para el estado estacionario es

$$S(q, t) = j_0 \int^q \frac{dq'}{R^2(q')} - Et.$$

La función de onda de un estado estacionario queda expresada solo en términos de la solución de la ecuación de Ermakov, esto es,

$$\psi(q, t) = R(q) \exp \left\{ \frac{ij_0}{\hbar} \int^q \frac{dq'}{R^2(q')} - \frac{iEt}{\hbar} \right\}.$$

2.7.2. Oscilador paramétrico

En esta sección usaremos las ecuaciones de la formulación hidrodinámica de la mecánica cuántica para encontrar la evolución de un paquete gaussiano bajo la acción de un Hamiltoniano de oscilador paramétrico cuántico. Como ya hemos mostrado, es necesario conocer la amplitud y la fase de la función de onda solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Para esto, proponemos a la densidad de probabilidad como la distribución gaussiana

$$\varrho(q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_q(t)} \exp \left\{ -\frac{(q - \langle q \rangle_t)^2}{2 \sigma_q^2(t)} \right\}, \quad (2.86)$$

donde $\sigma_q(t)$ representa la desviación estándar del paquete y $\langle q \rangle_t$ el valor esperado de la posición, además hemos supuesto que ambas cantidades son funciones del tiempo. Ya que hemos propuesto una densidad de probabilidad, es fácil calcular

$$\frac{\partial \varrho(q, t)}{\partial t} = \left(\frac{(q - \langle q \rangle_t)^2}{\sigma_q^3(t)} \frac{d\sigma_q(t)}{dt} + \frac{(q - \langle q \rangle_t)}{\sigma_q^2(t)} \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} - \frac{1}{\sigma_q(t)} \frac{d\sigma_q(t)}{dt} \right) \varrho(q, t)$$

y

$$\frac{\partial \varrho(q, t)}{\partial q} = -\frac{(q - \langle q \rangle_t)}{\sigma_q^2(t)} \varrho(q, t),$$

Substituyendo los resultados anteriores en la ecuación de continuidad (2.78) obtenemos una ecuación diferencial parcial para la velocidad de campo, $v(q, t) = \frac{1}{m} \frac{\partial S(q, t)}{\partial q}$, dada por

$$\frac{(q - \langle q \rangle_t)^2}{\sigma_q^3(t)} \frac{d\sigma_q(t)}{dt} + \frac{(q - \langle q \rangle_t)}{\sigma_q^2(t)} \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} - \frac{1}{\sigma_q(t)} \frac{d\sigma_q(t)}{dt} = \frac{(q - \langle q \rangle_t)}{\sigma_q^2(t)} v(q, t) - \frac{\partial v(q, t)}{\partial q}.$$

Por inspección notamos que la solución de la ecuación diferencial parcial anterior es de la forma

$$v(q, t) = \xi_1(t)(q - \langle q \rangle_t) + \xi_2(t).$$

Substituyendo esta solución es inmediato que

$$\xi_1(t) = \frac{1}{\sigma_q(t)} \frac{d\sigma_q(t)}{dt}, \quad \xi_2(t) = \frac{d\langle q \rangle_t}{dt}.$$

De esta forma tenemos que la velocidad de campo es

$$v(q, t) = \frac{(q - \langle q \rangle_t)}{\sigma_q(t)} \frac{d\sigma_q(t)}{dt} + \frac{d\langle q \rangle_t}{dt}. \quad (2.87)$$

Adicionalmente, dada $v(q, t)$ tenemos que la función acción $S(q, t)$ está determinada por

$$S(q, t) = \frac{m}{\sigma_q(t)} \left(\frac{q^2}{2} - q \langle q \rangle_t \right) \frac{d\sigma_q(t)}{dt} + m q \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} + s(t), \quad (2.88)$$

donde $s(t)$ es una función que sólo depende del tiempo. Aunque conocemos las expresiones de la velocidad de campo y la función de acción, éstas se encuentran en términos las funciones $\langle q \rangle_t$,

$\sigma_q(t)$ y $s(t)$, que son funciones que aún desconocemos. Para determinar estas funciones primero se substituye la solución que obtuvimos de $S(q, t)$ y $R(q, t) = \sqrt{\rho(q, r)}$ en la ecuación cuántica de Hamilton-Jacobi (2.79), posteriormente igualamos términos en potencias de q . Al igualar los términos que están multiplicados por q^2 encontramos que la desviación estándar debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\sigma(t)}{dt^2} + \omega^2(t)\sigma(t) = \frac{\hbar^2}{4m^2\sigma^3(t)}. \quad (2.89)$$

Al igualar los términos que se encuentran multiplicados por q encontramos que la ecuación diferencial que debe satisfacer el valor esperado de posición es:

$$\frac{d^2\langle q \rangle_t}{dt^2} + \omega^2(t)\langle q \rangle_t = 0. \quad (2.90)$$

Finamente de los términos independientes de q se tiene que $s(t)$ satisface

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\frac{m}{2} \left(\frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \right)^2 + m \frac{\langle q \rangle_t}{\sigma(t)} \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \frac{d\sigma_q(t)}{dt} - \frac{m}{2} \frac{\langle q \rangle_t^2}{\sigma_q^2(t)} \left(\frac{d\sigma_q(t)}{dt} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{8m} \frac{\langle q \rangle_t^2}{\sigma_q^4(t)} - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{1}{\sigma_q^2(t)}.$$

Antes de continuar, simplificamos la expresión para $\dot{s}(t)$ usado

$$\left(\frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} \left(\langle q \rangle_t \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \right) - \langle q \rangle_t \frac{d^2\langle q \rangle_t}{dt^2}.$$

Empleando ahora la ecuación diferencial (2.90), tenemos

$$\frac{d^2\langle q \rangle_t}{dt^2} = -\omega^2(t)\langle q \rangle_t;$$

de tal manera que

$$\left(\frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} \left(\langle q \rangle_t \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \right) + \omega^2(t)\langle q \rangle_t^2.$$

Por otra parte, tenemos que de la ecuación (2.89), la frecuencia está dada por

$$\omega^2(t) = \frac{\hbar^2}{4m^2\sigma_q^4(t)} - \frac{1}{\sigma_q(t)} \frac{d^2\sigma_q(t)}{dt^2}.$$

De lo anterior, finalmente encontramos que

$$\left(\frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} \left(\langle q \rangle_t \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \right) - \frac{\hbar^2}{4m^2} \frac{\langle q \rangle_t^2}{\sigma_q^4(t)} + \frac{\langle q \rangle_t^2}{\sigma_q(t)} \frac{d^2\sigma_q(t)}{dt^2}.$$

Si substituímos esta última en la expresión para $\dot{s}(t)$ y simplificando se llega a

$$\frac{ds(t)}{dt} = -\frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left(\langle q \rangle_t \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \right) + \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\langle q \rangle_t^2}{\sigma_q(t)} \frac{d\sigma_q(t)}{dt} \right) - \frac{\hbar^2}{4m} \frac{1}{\sigma_q^2(t)}.$$

Integrando tenemos

$$s(t) = -\frac{m}{2} \langle q \rangle_t \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} + \frac{m}{2} \frac{\langle q \rangle_t^2}{\sigma_q(t)} \frac{d\sigma_q(t)}{dt} - \frac{\hbar^2}{4m} \int^t \frac{d\tau}{\sigma_q^2(\tau)}. \quad (2.91)$$

Por lo tanto, la función de onda solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para el oscilador paramétrico es

$$\begin{aligned} \psi(q, t) &= \sqrt{\rho(q, t)} e^{\frac{i}{\hbar} S(q, t)} = \frac{1}{(2\pi\sigma_q(t))^{1/4}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\sigma}_q(t)}{\sigma_q(t)} + \frac{i\hbar}{2m} \frac{1}{\sigma_q^2(t)} \right) (q - \langle q \rangle_t)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{\hbar} \langle p \rangle_t (q - \langle q \rangle_t) + \frac{i}{2\hbar} \langle p \rangle_t \langle q \rangle_t - \frac{i\hbar}{4m} \int \frac{dt}{\sigma_q^2(t)} \right\}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

donde en la expresión anterior utilizamos la notación de Newton para denotar a las derivadas, además realizamos la substitución $m \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} = \langle p \rangle_t$. Es claro que la función de onda está completamente determinada si conocemos las soluciones de las ecuaciones (2.89) y (2.90). Es fácil notar que este par de ecuaciones forman un sistema de Ermakov, de hecho la ecuación (2.89) puede ser llevada a la ecuación (1.2) si proponemos $\sigma_q(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m} \rho(t)}$; entonces por ser un sistema de Ermakov tienen un invariante dado por

$$\tilde{I} = \frac{1}{2} \left[\left(\sigma(t) \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} - \langle q \rangle_t \frac{d\sigma(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{\hbar}{2m} \frac{\langle q \rangle_t}{\sigma(t)} \right)^2 \right]. \quad (2.93)$$

Así, es directo que usando el mismo formalismo que en Cap. 1 con ayuda del invariante tenemos que dado un par de soluciones linealmente independientes de la ecuación (2.90), que denominamos $u(t)$ y $v(t)$, entonces la solución de (2.89) toma la forma:

$$\sigma_q(t) = \pm \frac{1}{W} \left[2\tilde{I}_2 u^2(t) + 2\tilde{I}_1 v^2(t) \pm 2\sqrt{4\tilde{I}_1 \tilde{I}_2 - W^2} u(t)v(t) \right]^{1/2}, \quad (2.94)$$

donde W representa el Wronskiano entre $u(t)$ y $v(t)$, y donde

$$\tilde{I}_1 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{q_0} \dot{u}(0) - \dot{\sigma}_{q_0} u(0))^2 + \left(\frac{\hbar}{2m} \frac{u(0)}{\sigma_{q_0}} \right)^2 \right],$$

$$\tilde{I}_2 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{q_0} \dot{v}(0) - \dot{\sigma}_{q_0} v(0))^2 + \left(\frac{\hbar}{2m} \frac{v(0)}{\sigma_{q_0}} \right)^2 \right],$$

con $\sigma_q(t=0) \equiv \sigma_{q_0}$ y $\dot{\sigma}_q(t=0) \equiv \dot{\sigma}_{q_0}$. Por otra parte dada, una solución arbitraria de la ecuación (2.89) tenemos que

$$\langle q \rangle_t = A\sigma_q(t) \exp \left\{ \frac{i\hbar}{2m} \int^t \frac{d\tau}{\sigma_q^2(\tau)} \right\} + B\sigma_q(t) \exp \left\{ -\frac{i\hbar}{2m} \int^t \frac{d\tau}{\sigma_q^2(\tau)} \right\}, \quad (2.95)$$

donde las constantes de integración están dadas por

$$A = \frac{\langle q \rangle_0}{2} \left(i\dot{\sigma}_{q_0} - \frac{2m}{\hbar} \frac{1}{\sigma_{q_0}} \right) - \frac{i}{2} \langle v \rangle_0 \sigma_{q_0}$$

y

$$B = -\frac{\langle q \rangle_0}{2} \left(i\dot{\sigma}_{q_0} + \frac{2m}{\hbar} \frac{1}{\sigma_{q_0}} \right) + \frac{i}{2} \langle v \rangle_0 \sigma_{q_0}.$$

Por lo tanto, en el formalismo hidrodinámico de la mecánica cuántica encontramos, para el oscilador paramétrico, que la ecuación de Ermakov emerge de forma natural y no se emplea como una ecuación auxiliar como en el caso de la mecánica clásica, ya que es necesario conocer la solución de esta ecuación para tener completamente determinada la función de onda solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo.

2.7.3. Ecuación de Riccati

Como recordamos del capítulo anterior, sabemos que asociado a un sistema de Ermakov tenemos una ecuación de Riccati. Entonces, así como lo hicimos en el caso clásico podemos también encontrar la ecuación de Riccati asociada a (2.89) y (2.90). Sin embargo, mostramos ahora que la ecuación de Riccati, emerge de manera natural si planteamos el problema de la forma siguiente: proponemos como solución de la ecuación de Schrödinger la función de onda

$$\psi(q, t) = N e^{\frac{i}{\hbar} F(q, t)}, \quad (2.96)$$

donde $F(q, t)$ es ahora una función compleja que depende del tiempo y la posición, y con N una constante de normalización. Sustituyendo esta función de onda en la ecuación de Schrödinger (2.77) tenemos que $F(q, t)$ debe satisfacer

$$-\frac{\partial F(q, t)}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial F(q, t)}{\partial q} \right)^2 + V(q, t) + \tilde{Q}(q, t). \quad (2.97)$$

Entonces obtenemos que la ecuación que determina a la función $F(q, t)$ es la ecuación cuántica compleja de Hamilton-Jacobi y con potencial cuántico

$$\tilde{Q}(q, t) = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 F(q, t)}{\partial q^2}. \quad (2.98)$$

Es fácil demostrar que la ecuación (2.97) se reduce al sistema formado por (2.78) y (2.79), si consideramos que $F_r(q, t) = S(q, t)$ y $F_I(q, t) = -\hbar \ln(R(q, t)/N)$ y posteriormente separamos sus partes real e imaginaria. En analogía al formalismo hidrodinámico de la mecánica cuántica es posible definir la velocidad compleja

$$v_c(q, t) = \frac{1}{m} \frac{\partial F(q, t)}{\partial q}. \quad (2.99)$$

Esta velocidad en términos de la fase $S(q, t)$ y la amplitud $R(q, t)$ de la función de onda (2.76) se expresa como

$$v_c(q, t) = \frac{1}{m} \frac{\partial S(q, t)}{\partial q} - \frac{i\hbar}{m} \frac{1}{R} \frac{\partial R(q, t)}{\partial q},$$

o en términos de la función de onda tenemos que

$$v_c(q, t) = v_R(q, t) + v_I(q, t) = \frac{\hbar}{mi} \frac{1}{\psi(q, t)} \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial q},$$

donde

$$v_R(q, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left[\frac{1}{\psi(q, t)} \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial q} - \frac{1}{\psi^*(q, t)} \frac{\partial \psi^*(q, t)}{\partial q} \right]$$

y

$$v_I(q, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left[\frac{1}{\psi(q, t)} \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial q} + \frac{1}{\psi^*(q, t)} \frac{\partial \psi^*(q, t)}{\partial q} \right].$$

Ahora hay que mencionar que aunque se puede definir esta velocidad compleja no es posible encontrar una ecuación de Newton cuántica para $v_c(q, t)$ como en el caso de la formulación hidrodinámica. Por lo tanto, al proponer la función de onda (2.96) obtenemos solamente una ecuación diferencial parcial para $F(q, t)$. Esta ecuación contiene a la ecuación de continuidad y a la ecuación cuántica de Hamilton-Jacobi.

Si consideramos el caso estacionario, esto es, un potencial independiente del tiempo $V(q)$, tenemos que la velocidad compleja debe ser sólo función de la posición q . Entonces en este caso encontramos que

$$\frac{\partial F(q, t)}{\partial q} = mv_c(q),$$

donde integrando tenemos que la fase es

$$F(q, t) = m \int^q v_c(q') dq' + f(t),$$

donde $f(t)$ es una función sólo del tiempo. Substituyendo esta fase en la ecuación (2.97), tenemos que

$$-\frac{df}{dt} = \frac{1}{2}mv^2(q, t) - \frac{i\hbar}{2} \frac{dv(q)}{dq} + V(q),$$

por lo tanto $\frac{df}{dt}$ es igual a una constante que denominamos por $-E$, con lo cual $f(t) = -Et$. Por otra parte, nos queda una ecuación para $v(q)$ dada por

$$-\frac{i\hbar}{2} \frac{dv(q)}{dq} + \frac{1}{2}mv^2(q, t) + V(q) = E.$$

Proponemos la solución $v(q) = -\frac{i\hbar}{m}z(q)$, donde $z(q)$ es una función compleja dependiente de la posición, así la ecuación anterior se convierte en la ecuación de Riccati

$$\frac{dz}{dt} + z^2 + \frac{2m}{\hbar}(E - V(q)) = 0.$$

Encontramos que para estados estacionarios la función de onda solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo es

$$\psi(q, t) = N \exp \left\{ \int^q z(q') dq' - \frac{iEt}{\hbar} \right\}.$$

Para el oscilador paramétrico, tenemos que la ecuación diferencial parcial que determina a la fase $F(q, t)$ está dada por:

$$-\frac{\partial F(q, t)}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial F(q, t)}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2(t) q^2 - \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 F(q, t)}{\partial q^2}.$$

Por la forma que tiene el lado derecho de la ecuación anterior se deduce que la parcial de $F(q, t)$ con respecto a q debe expresarse en potencias de q , entonces proponemos

$$v_c(q, t) = \frac{1}{m} \frac{\partial F(q, t)}{\partial q} = z(t)(q - \langle q \rangle_t) + \frac{d\langle q \rangle_t}{dt}, \quad (2.100)$$

con $z(t)$ una función compleja dependiente del tiempo. Substituyendo esta velocidad en (2.99) e integrando encontramos que la fase está dada por

$$F(q, t) = mz(t) \left(\frac{q^2}{2} - q\langle q \rangle_t \right) + mq \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} + f(t), \quad (2.101)$$

donde $f(t)$ es una función dependiente del tiempo por determinar. Substituyendo la fase en la ecuación (2.97) podemos determinar a las funciones $z(t)$, $f(t)$ y $\langle q \rangle_t$, igualando términos en potencias de q . Igualando términos que se encuentran multiplicados por q^2 , obtenemos que $z(t)$ debe satisfacer al ecuación de Riccati

$$\frac{dz(t)}{dt} + z^2(t) + \omega^2(t) = 0. \quad (2.102)$$

Para los términos multiplicados por q obtenemos la ecuación diferencial de Newton para $\langle q \rangle_t$

$$\frac{d^2\langle q \rangle_t}{dt^2} + \omega^2(t)\langle q \rangle_t = 0.$$

Por último para los términos independientes de q encontramos que $f(t)$ satisface

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{m}{2} \left(\frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \right)^2 - \frac{m}{2} z^2(t) \langle q \rangle_t^2 + mz(t) \langle q \rangle_t \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} + \frac{i\hbar}{2} z(t).$$

Para simplificar la expresión anterior usamos

$$\left(\frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} \left(\langle q \rangle_t \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \right) - \langle q \rangle_t \frac{d^2\langle q \rangle_t}{dt^2}.$$

Pero de la ecuación de Newton tenemos que

$$\frac{d^2\langle q \rangle_t}{dt^2} = -\omega^2(t)\langle q \rangle_t,$$

así

$$\left(\frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} \left(\langle q \rangle_t \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} \right) + \omega^2(t)\langle q \rangle_t^2.$$

Por otra parte, de la ecuación de Riccati tenemos que

$$\omega^2(t) = -\dot{z}(t) - z^2(t),$$

por lo tanto

$$\left(\frac{d\langle q \rangle_t}{dt}\right)^2 = \frac{d}{dt} \left(\langle q \rangle_t \frac{d\langle q \rangle_t}{dt}\right) - \dot{z}(t)\langle q \rangle_t^2 - z^2(t)\langle q \rangle_t^2.$$

Substituyendo esto en la igualdad para $\dot{f}(t)$ y reduciendo resulta

$$\frac{df(t)}{dt} = -\frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left(\langle q \rangle_t \frac{d\langle q \rangle_t}{dt}\right) + \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (z(t)\langle q \rangle_t^2) + \frac{i\hbar}{2} z(t)$$

e integrando se obtiene

$$f(t) = -\frac{m}{2} \langle q \rangle_t \frac{d\langle q \rangle_t}{dt} + \frac{m}{2} z(t)\langle q \rangle_t^2 + \frac{i\hbar}{2} \int^t z(\tau) d\tau. \quad (2.103)$$

De todo lo anterior encontramos que la función de onda, ya normalizada, solución de la ecuación de Schrödinger para el oscilador paramétrico en términos de la solución de la ecuación de Riccati se expresa como

$$\psi(q, t) = \left(\frac{m}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} z(t)(q - \langle q \rangle_t)^2 + \frac{i}{\hbar} \langle p \rangle_t (q - \langle q \rangle_t) + \frac{i}{2\hbar} \langle p \rangle_t \langle q \rangle_t - \frac{1}{2} \int^t z(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.104)$$

Entonces mostramos que mediante este formalismo, podemos encontrar la solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo si conocemos la solución de la ecuación de Riccati y la solución de la ecuación de Newton del oscilador paramétrico.

Bibliografía

- [1] D. Schuch: Riccati and Ermakov Equations in Time-Dependent and Time-Independent Quantum Systems. *Symmetry, Integrability and Geometry. Methods and Applications*, SIG-MA 4 (2008), 043.
- [2] D. Schuch 2011 Latinamerican School of Physics: XL ELAF AIP Conf.Proc.1334 (2011) 291-340.
- [3] O. Casta nos, D. Schuch, O. Rosas-Ortiz: Generalized Coherent States for Time-Dependent and Nonlinear Hamiltonian Operators via Complex Riccati Equations. *Journal Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46 (2013) 075304 (20pp)
- [4] R. S. Kaushal: *Classical an Quantum Mechanics of Non Central Potentials. A Survey of Two-Dimensional Systems*. Ed. Springer-Verlag, India 1998.
- [5] H. R. Lewis, Jr: Class of Exact Invariant for Classical an Quantum Time-Depend Harmonic Oscillators. *Journal of mathematical physics*, volume 9, number 11, (1968) 1976-1986.
- [6] P. G. L. Leach, K. Andriopoulos: The Ermakov Equation a Commentary. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 2 (2008), 146-157.
- [7] R. Gilmore, D. H. Feng, W. Zhang: *Coherent States: Theory and Some Applications*. The American Physics Society, 1990.
- [8] Hans J. Weber, George B. Arfken: *Essential Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 2003.
- [9] Hans Cruz: *Estudio de Sistemas Hamiltonianos Dependientes del Tiempo*. Tesis para obtener el título de físico, UNAM, 2008.
- [10] V. V. Dodonov, I. A. Malkin and V. I. Man Oko: Integrals of Motion, Green Functions, and Coherent States of Dynamical Systems, *Int. J. Theor. Phys.* 14 (1975) 1, 37-54.
- [11] Wolfgang P. Scheleich: *Quantum Optics in Phase Space*, Ed. Wiley-VCH, Berlin 2001
- [12] V. E. Madelug: *Quantentheorie in Hydrodynamischer Form*. *Z.Physik*, 40, 322, (1926).
- [13] Albert Messiah: *Quantum Mechanics*.Dover Publications, 1958.
- [14] P.R. Holland: *The Quantum Theory of Motion*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

- [15] D. Bohm: A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables. I. Physical Review, volume 85, number 2, january 15, 1952.
- [16] D. Bohm: A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables. II. Physical Review, volume 85, number 2, january 15, 1952.
- [17] Robert E. Wyatt: Quantum dynamics with trajectories. Introduction to quantum hydrodynamics. Springer, Vol 28, 1999.

Oscilador paramétrico en mecánica cuántica

Se encuentra la evolución temporal del estado coherente $|\alpha\rangle$, de un oscilador armónico con frecuencias ω_0 , bajo la acción del oscilador armónico con frecuencia ω . Para realizar esto, mediante los operadores invariantes lineales encontramos la solución de la ecuación de Ermakov y usando los resultados del capítulo anterior obtenemos los valores esperados de posición y momento, calculamos sus varianzas, así como la función de correlación. Además, mostramos el comportamiento de las distribuciones de probabilidad en las representaciones de posición y momento.

Estudiamos el problema siguiente: sea el operador Hamiltoniano $\hat{H}(t)$, que inicialmente está dado por

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2\hat{q}^2.$$

Posteriormente de t_0 hasta t_1 la frecuencia cambia al valor final descrito por

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_1^2\hat{q}^2.$$

Se considera primero que el cambio entre los Hamiltonianos se realiza en forma instantánea y posteriormente se considera el caso cuando el cambio ocurre por medio de una frecuencia lineal en el tiempo, y por último cuando el cambio de frecuencia se realiza por medio de una frecuencia no-polinomial. En todos los casos anteriores estamos interesados en la evolución temporal de un estado coherente $|\alpha\rangle$, de un oscilador armónico con frecuencia ω_0 . Para cada caso, encontramos la forma de la solución a la ecuación de Ermakov correspondiente, lo cual nos permite evaluar los valores esperados de los operadores de posición y momento así como las varianzas de estos y su función de correlación. Además de la información anterior obtenemos las distribuciones de probabilidad en las representaciones de posición y momento, y la función de Wigner.

Finalmente obtenemos la probabilidad de transición $|\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t|^2$, que permite saber si el estado evolucionado $|\alpha\rangle_t$ se asemeja al estado coherente $|\beta\rangle$ del hamiltoniano \hat{H}_1 .

3.1. Oscilador armónico

Consideremos el Hamiltoniano del oscilador paramétrico con frecuencia contante ω :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2.$$

Para encontrar la solución de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo del sistema, se determina la solución de la ecuación de Ermakov correspondiente. De los resultados del Apéndice B, encontramos que los operadores invariantes lineales están dados por

$$\begin{pmatrix} \hat{Q}(t) \\ \hat{P}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\frac{1}{m\omega} \sin \omega t \\ m\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

siempre que el tiempo inicial $t_0 = 0$. Por lo tanto, empleando (2.51) se obtiene que la solución de la ecuación de Ermakov es

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar} \left(\frac{\sigma_{p_0}^2}{m^2\omega^2} \sin^2 \omega t + \sigma_{q_0}^2 \cos^2 \omega t - \frac{2\sigma_{q_0 p_0}}{m\omega} \cos \omega t \sin \omega t \right)}, \quad (3.2)$$

la primera derivada

$$\dot{\rho}(t) = \frac{2m}{\hbar\rho(t)} \left[\left(\frac{\sigma_{p_0}^2}{m^2\omega} - \omega\sigma_{q_0}^2 \right) \frac{\sin 2\omega t}{2} - \frac{\sigma_{q_0 p_0}}{m} \cos 2\omega t \right], \quad (3.3)$$

y la fase

$$\phi(t) = \arctan \left(\frac{2}{\hbar m \omega} [\sigma_{p_0}^2 \tan \omega t - m\omega\sigma_{q_0 p_0}] \right). \quad (3.4)$$

Para obtener la última expresión se ha empleado que el invariante de Poincaré, tiene el valor $I_P = \frac{\hbar^2}{4}$.

Como caso específico, y a lo largo del trabajo, consideramos que las varianzas de posición y momento así como la función de correlación en el tiempo inicial ($t_0 = 0$) corresponden a las del estado coherente $|\alpha\rangle$, es decir, $\sigma_{q_0}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$, $\sigma_{p_0}^2 = \frac{\hbar m \omega_0}{2}$ y $\sigma_{q_0 p_0} = 0$. Entonces se obtiene que la solución de la ecuación de Ermakov, su derivada, y de la fase se encuentran exhibidas en Fig. 3.1, donde $m = \hbar = \omega = 1$ y $\omega_0 = 0.5$. La forma analítica de estas cantidades están dadas por las expresiones

$$\rho(t) = \left[\frac{\omega_0}{\omega^2} \sin^2 \omega t + \frac{1}{\omega_0} \cos^2 \omega t \right]^{1/2}, \quad (3.5)$$

$$\dot{\rho}(t) = \frac{1}{\rho(t)} \left[\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right] \frac{\sin 2\omega t}{2}, \quad (3.6)$$

$$\phi(t) = \arctan \left(\frac{\omega_0}{\omega} \tan \omega t \right). \quad (3.7)$$

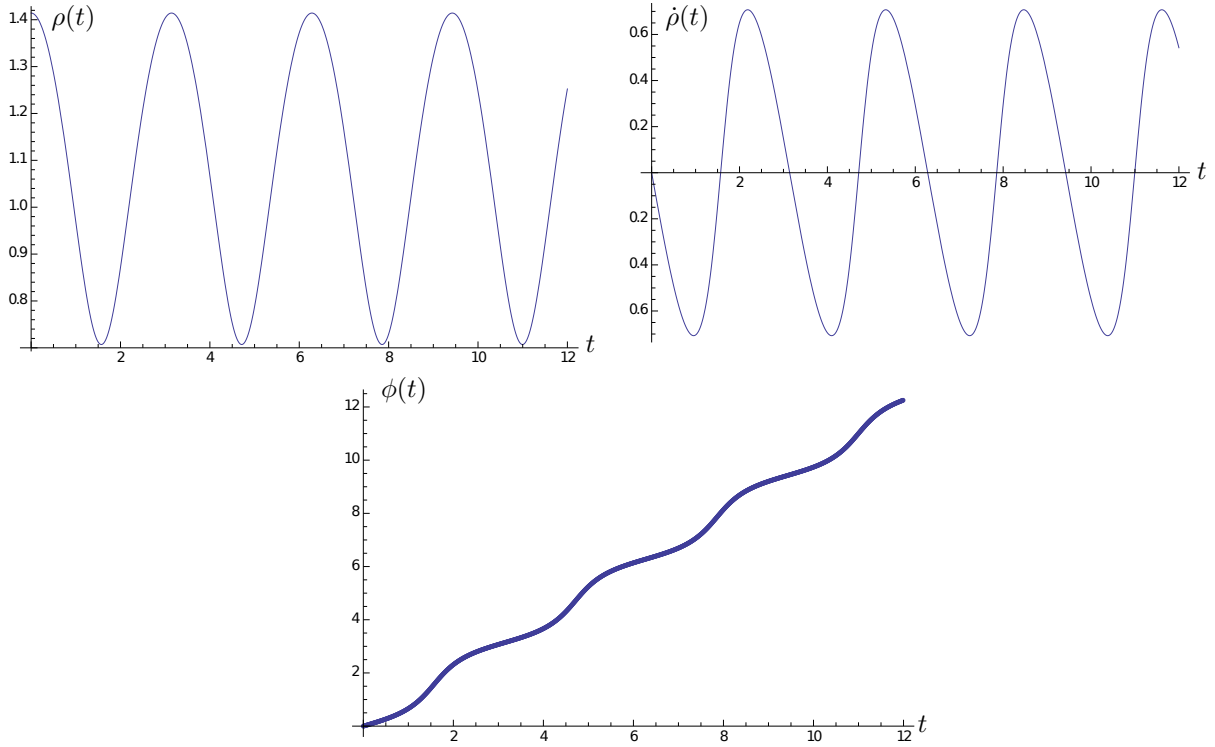


Figura 3.1: Gráficas de la funciones $\rho(t)$, $\dot{\rho}(t)$ y $\phi(t)$ donde $m = \hbar = \omega = 1$ y $\omega_0 = 0.5$.

Ahora, por medio de los resultados anteriores es posible calcular toda la información física relevante del sistema. Substituyendo (3.5), (3.6) y (3.7) en los resultados (2.30) y (2.31), obtenemos que el valor esperado de la posición es

$$\begin{aligned} \langle q \rangle_t = & \left[\frac{\omega_0}{\omega^2} \sin^2 \omega t + \frac{1}{\omega_0} \cos^2 \omega t \right]^{1/2} \left[\sqrt{\omega_0} \langle q \rangle_0 \cos \left(\arctan \left(\frac{\omega_0}{\omega} \tan \omega t \right) \right) \right. \\ & \left. + \frac{\langle p \rangle_0}{m \sqrt{\omega_0}} \sin \left(\arctan \left(\frac{\omega_0}{\omega} \tan \omega t \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

mientras el valor esperado del momento es

$$\begin{aligned} \langle p \rangle_t = & \left[\frac{\omega_0}{\omega^2} \sin^2 \omega t + \frac{1}{\omega_0} \cos^2 \omega t \right]^{-1/2} \left\{ \sqrt{\omega_0} m \langle q \rangle_0 \left[\left[\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right] \frac{\sin 2\omega t}{2} \cos \left(\arctan \left(\frac{\omega_0}{\omega} \tan \omega t \right) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin \left(\arctan \left(\frac{\omega_0}{\omega} \tan \omega t \right) \right) \right] + \frac{\langle p \rangle_0}{\sqrt{\omega_0}} \left[\left[\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right] \frac{\sin 2\omega t}{2} \sin \left(\arctan \left(\frac{\omega_0}{\omega} \tan \omega t \right) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos \left(\arctan \left(\frac{\omega_0}{\omega} \tan \omega t \right) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde para simplificar la expresión hemos empleado las relaciones

$$\langle q \rangle_0 = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}} \alpha_R, \quad \langle p \rangle_0 = \sqrt{2\hbar m\omega_0} \alpha_I,$$

con α_R y α_I corresponden a la parte real e imaginaria del complejo α . Los valores esperados que corresponden a considerar $m = \hbar = \omega = 1$ y $\omega_0 = 0.5$ y condiciones iniciales $\langle q \rangle_0 = 2$ y $\langle p \rangle_0 = 1$ se muestran en Fig. 3.2, donde encontramos que estas gráficas se comportan como las soluciones clásicas del sistema.

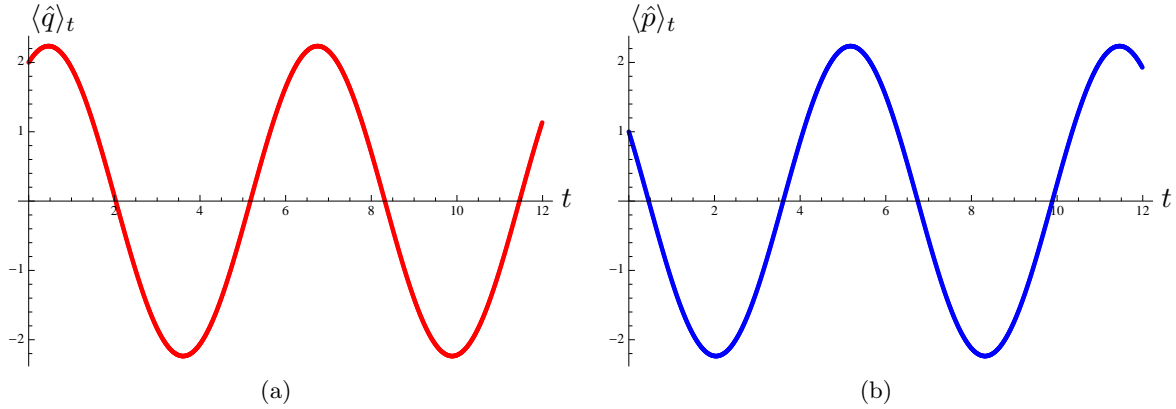


Figura 3.2: Gráficas de los valores esperados de posición y momento, $\langle q \rangle_t$ y $\langle p \rangle_t$, para $m = \hbar = \omega = 1$ y $\omega_0 = 0.5$, con condiciones iniciales $\langle q \rangle_0 = 2$ y $\langle p \rangle_0 = 1$.

Usando el esquema de Heisenberg es también posible encontrar la evolución temporal de los operadores de posición \hat{q} y de momento \hat{p} , y con ellos es inmediato encontrar que los valores esperados evolucionan mediante

$$\langle q \rangle_t = \langle \hat{q} \rangle_0 \cos \omega t + \frac{\langle \hat{p} \rangle_0}{m\omega} \sin \omega t,$$

$$\langle p \rangle_t = -m\omega \langle \hat{q} \rangle_0 \sin \omega t + \langle \hat{p} \rangle_0 \cos \omega t,$$

donde notamos que las expresiones son más simples, pero expresan exactamente el mismo comportamiento físico, así que es indiferente usar las expresiones dadas arriba o las dadas por las ecuaciones (3.8) y (3.9).

La evolución temporal de la varianza en posición es

$$\sigma_q^2(t) = \frac{\hbar \rho^2(t)}{2m} = \frac{\hbar}{2m\omega} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \sin^2 \omega t + \frac{\omega}{\omega_0} \cos^2 \omega t \right), \quad (3.10)$$

mientras que la varianza del momento está dada por

$$\sigma_p^2(t) = \frac{m\hbar}{2} \left(\dot{\rho}^2(t) + \frac{1}{\rho^2(t)} \right) = \frac{m\hbar\omega}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \cos^2 \omega t + \frac{\omega}{\omega_0} \sin^2 \omega t \right), \quad (3.11)$$

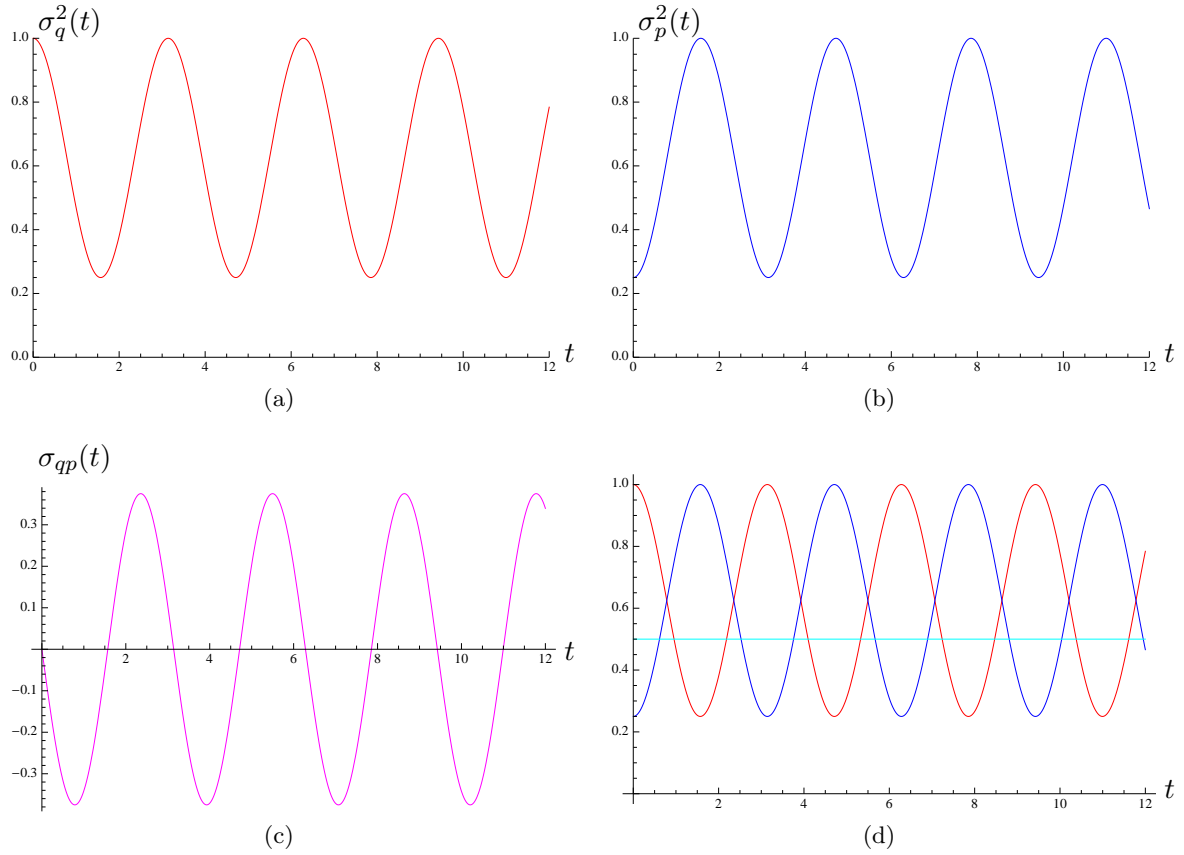


Figura 3.3: En la figura (a) encontramos la gráfica de la varianzas $\sigma_q^2(t)$, en la figura (b) tenemos la grafica para $\sigma_p^2(t)$, en la grafica en la figura (d) se encuentra la gráfica de la función correlación $\sigma_{qp}(t)$, en (c) tenemos las graficas $\sigma_q^2(t)$ y $\sigma_p^2(t)$. En todas las figuras hemos considerado $m = \hbar = \omega = 1$ y $\omega_0 = 0.5$.

y la función de correlación tiene la forma

$$\sigma_{qp}(t) = \frac{\hbar}{2} \dot{\rho}(t) \rho(t) = \frac{\hbar}{4} \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) \sin 2\omega t. \quad (3.12)$$

Observamos que las expresiones son independientes de los valores que pueda tener el complejo α , las varianzas se mantienen oscilando en el tiempo al igual que encontramos que la función de correlación es distinta de cero. Es importante notar que la única manera que las varianzas sean constantes y que la función de correlación sea cero, para todo tiempo, es considerando $\omega_0 = \omega$.

Las gráficas de $\sigma_q^2(t)$, $\sigma_p^2(t)$ y $\sigma_{qp}(t)$ para el caso considerado se muestran en las Figs. 3.3a, 3.3b y 3.3c, respectivamente. Podemos apreciar que estas funciones del tiempo se mantienen oscilando en forma periódica. En Fig. 3.3d, se exhiben las gráficas de $\sigma_q^2(t)$, $\sigma_p^2(t)$, además de una línea en color cian que delimita si el estado sufre compresión, es decir, si $\sigma_q^2(t)$ o $\sigma_p^2(t)$ tienen

valores por debajo de la línea entonces el estado es comprimido¹. Observemos que tanto para la varianza en posición como para la varianza en momento se tienen valores por debajo de la línea concluyéndose que el estado evolucionado sufre compresiones.

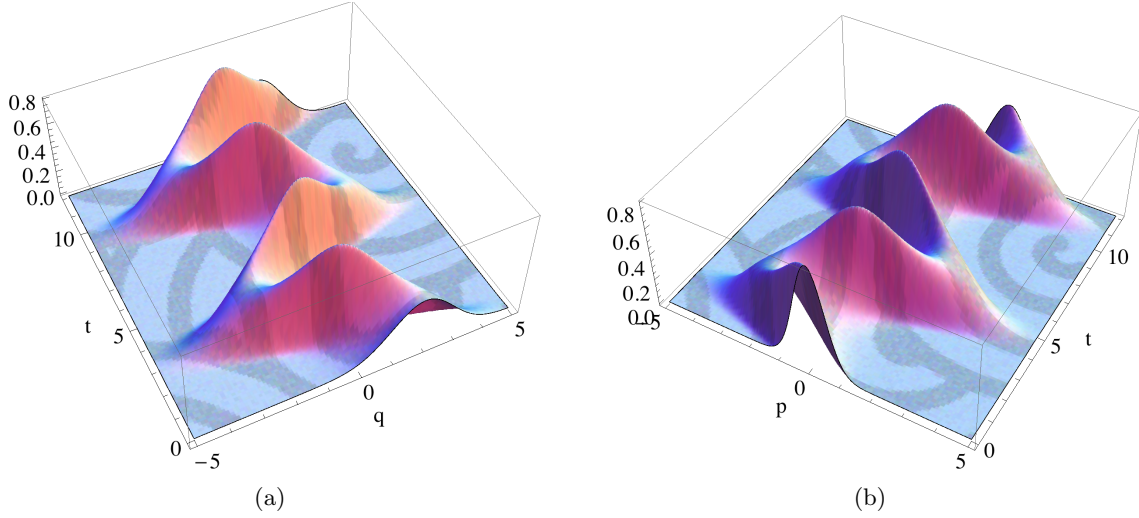


Figura 3.4: (a): Densidad de probabilidad en la representación de posición $|\psi(q, t)|^2$. (b): Densidad de probabilidad en la representación de momento $|\psi(p, t)|^2$. En ambas gráficas se considera $m = \hbar = \omega = 1$, $\omega_0 = 0.5$ y condiciones iniciales $\langle q \rangle_0 = 2$ y $\langle p \rangle_0 = 1$.

Las densidades de probabilidad se muestran en las Figs. 3.4. En la Fig. 3.4a tenemos la densidad de probabilidad en la representación de posición y en la Fig 3.4b la densidad de probabilidad en la representación de momento. Observamos que el centro del paquete, como debe ocurrir, sigue las trayectorias definidas por los valores esperados, y el ancho de las distribuciones varía en forma periódica presentando compresiones.

Por último, tenemos que substituyendo los valores esperados, las varianzas, así como la función de correlación en la expresión (2.68), podemos encontrar la forma de la función de Wigner del sistema. En la Fig. 3.5 se exhibe la gráfica de la distribución de Wigner en el espacio fase para diferentes tiempos. Así, como ya hemos mencionado en el capítulo anterior, la función de Wigner es una función que es constante en los contornos que define el invariante en el espacio fase. Esto implica que la distribución tenga la forma de una gaussiana, donde su máximo recorre una elipse definida por:

$$E = \frac{\langle p \rangle_t^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega \langle q \rangle_t^2, \quad (3.13)$$

mientras la distribución de Wigner se encuentra rotando.

También encontramos la evolución temporal de un estado de Fock $|n\rangle$, del Hamiltoniano de oscilador armónico con frecuencia constante ω_0 . Entonces, podemos encontrar la función de onda

¹El estado de un sistema se dice que es comprimido si una de las varianzas de sus observable, $\sigma_x^2(t)$ o $\sigma_p^2(t)$, satisfacen que $\sigma_x^2(t) < \frac{\hbar}{2}$.

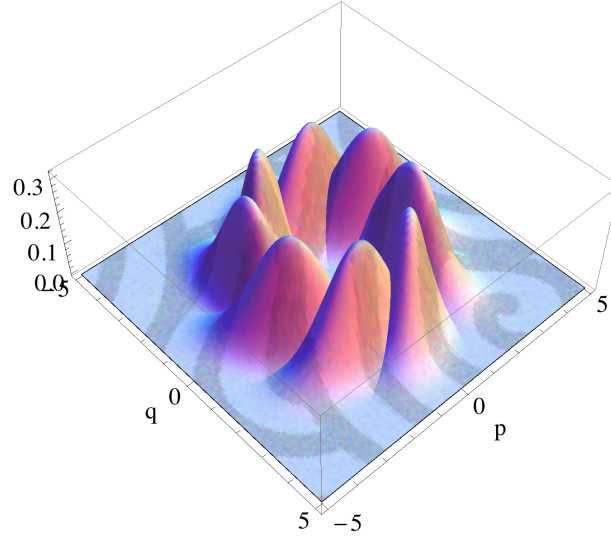


Figura 3.5: Función de Wigner para el oscilador armónico, con parameters $m = \hbar = \omega = 1$, donde el estado inicial es el estado coherente del oscilador armónico con frecuencias $\omega_0 = 0.5$. Los tiempos empleados en la figura son $t = 0, t = \pi/4, t = \pi/2, t = 5\pi/4, t = 3\pi/2, t = 7\pi/4, t = 2\pi$

en la representación de posición

$$\psi_n(q, t) = \frac{\psi_0(q, t)}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt{\frac{m}{\hbar}} \frac{q}{\rho(t)} \right) e^{-in\phi(t)}$$

donde $\psi_0(t)$ es la función de onda del estado base que está dada por:

$$\psi_0(q, t) = \left(\frac{m}{\hbar\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\rho(t)}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} + \frac{i}{\rho^2(t)} \right) q^2 - \frac{i}{2} \int^t \frac{d\tau}{\rho^2(\tau)} \right\}.$$

Entonces, la densidad de probabilidad del estado de Fock con $n = 2$ en la representación de posición se muestra en Fig. 3.6a, donde los parámetros son los mismos de los casos anteriores. Se observa que el ancho del paquete varía en forma periódica.

Por otra parte, podemos calcular también la función de Wigner de los estados de Fock por medio del invariante de Ermakov y la expresión:

$$W_n(q, p; t) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} e^{-\frac{2}{\hbar}I(q,p;t)} L_n \left(\frac{4}{\hbar}I(q, p; t) \right).$$

La gráfica de esta función de Wigner para el estado de Fock con $n = 2$ y tiempo $t=0$ se encuentra en Fig. 3.6b, donde observamos como esta probabilidad toma también valores negativos. Por otra parte, la función de Wigner para varios tiempos se tiene en Fig. 3.6c donde podemos apreciar que esta distribución se mantiene rotando en el espacio fase.

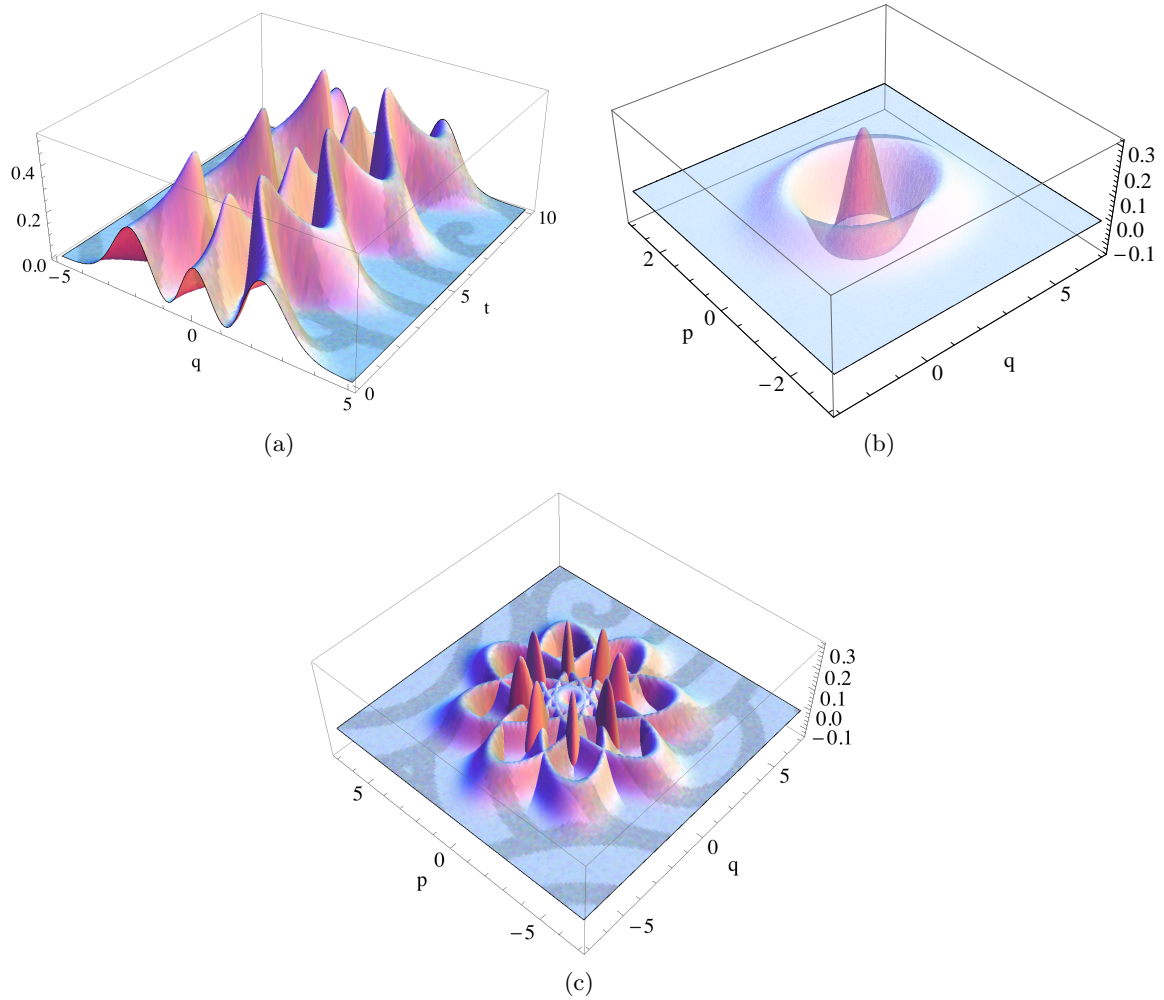


Figura 3.6: (a) Densidad de probabilidad en la representación de posición para el estado de Fock con $n = 2$. (b) Función de Wigner del estado de Fock con $n = 2$. (c) Función de Wigner del estado de Fock $n = 2$ para diferentes tiempos, los tiempos empleados en la figura son $t = 0$, $t = \pi/4$, $t = \pi/2$, $t = 5\pi/4$, $t = 3\pi/2$, $t = 7\pi/4$, $t = 2\pi$.

3.2. Cambio repentino de frecuencia.

Consideramos un Hamiltoniano \hat{H} , el cual cambia de forma continua de un valor inicial \hat{H}_0 , al tiempo t_0 , a cierto valor final \hat{H} al tiempo t_1 . Entonces el cambio se realiza en un tiempo $T = t_1 - t_0$. Introducimos la nueva variable

$$s = \frac{t - t_0}{T}$$

y denotamos $\hat{H}(s) = \hat{H}(t_0 + sT)$. De esta forma tenemos que

$$\hat{H}(t_0) = \hat{H}_0, \quad \hat{H}(t_1) = \hat{H}_1.$$

La evolución del sistema desde t_0 hasta t_1 depende solamente del parámetro T el cual mide la velocidad de cambio al pasar de \hat{H}_0 a \hat{H}_1 . Es conveniente escribir al operador de evolución temporal por:

$$\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}_T(s).$$

Ahora la ecuación integral del operador de evolución temporal escrita en términos del s , es

$$\hat{U}_T(s) = \hat{I} - \frac{iT}{\hbar} \int_0^s ds' \hat{H}(s) \hat{U}_T(s').$$

donde \hat{I} representa el operador identidad. Así para el cambio repentino, el cual corresponde a considerar que $T \rightarrow 0$, encontramos que

$$\lim_{T \rightarrow 0} \hat{U}_T(1) = \hat{I}.$$

Notemos que este importante resultado es independiente de los parámetros del sistema o de la forma en la cual cambia el Hamiltoniano de \hat{H}_0 a \hat{H}_1 .

Entonces en el esquema de Schödinger tenemos que para la función de onda

$$\psi(q, t) = \hat{U}(t, t_0) \psi(q, t_0),$$

así antes del cambio repentino,

$$\psi(q, t_1) = \hat{U}(t_1, t_0) \psi(q, t_0) = \hat{U}_T(s) \psi(q, t_0),$$

en el caso límite se tiene que

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} \psi(q, t_1) = \lim_{T \rightarrow 0} \hat{U}_T(s) \psi(q, t_0) = \psi(q, t_0).$$

Por lo tanto, obtenemos que en la aproximación repentina la función de onda se mantiene sin cambios, es decir, el estado final del sistema \hat{H}_0 será el estado inicial del sistema \hat{H}_1 .

Podemos aplicar lo anterior a un sistema de oscilador paramétrico cuya frecuencia esta determinada por:

$$\omega^2(t) = \begin{cases} \omega_0^2 & \text{para } t \leq 0, \\ \omega_1^2 & \text{para } t > 0. \end{cases}$$

Es decir, este sistema tiene un cambio repentino en $t = 0$ entre los Hamiltonianos

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{q}^2$$

y

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_1^2 \hat{q}^2$$

Ahora queremos encontrar la evolución del estado coherente del Hamiltoniano \hat{H}_0 , que denotamos por $|\alpha\rangle$, bajo la acción del Hamiltoniano. Así es fácil darse cuenta que la evolución de este estado para tiempos menores que cero esta dado por

$$|\alpha\rangle_{t \leq 0} = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 t} |\alpha\rangle = e^{-\frac{i\omega_0 t}{2}} |\alpha e^{-i\omega_0 t}\rangle.$$

Sabemos que el cambio repentino no modifica el estado en $t = 0$, esto es, que el estado inicial para \hat{H}_1 es el estado final de \hat{H}_0 . Por lo tanto, después de $t = 0$ la evolución del estado es

$$|\alpha\rangle_{t>0} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1 t}|\alpha\rangle.$$

Calcular $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1 t}|\alpha\rangle$ no es trivial. Sin embargo, este problema ya lo hemos resuelto por medio de las soluciones de la ecuación de Ermakov en la sección anterior. Por lo tanto, usando los resultados de la sección previa tenemos que el valor esperado del operador posición está dado por

$$\langle\hat{q}\rangle_t = \begin{cases} \langle\hat{q}\rangle_0 \cos \omega_0 t + \frac{\langle\hat{p}\rangle_0}{m\omega_0} \sin \omega_0 t & \text{para } t \leq 0, \\ \langle\hat{q}\rangle_0 \cos \omega_1 t + \frac{\langle\hat{p}\rangle_0}{m\omega_1} \sin \omega_1 t & \text{para } t > 0, \end{cases}$$

y el valor esperado el operador de momento es

$$\langle\hat{p}\rangle_t = \begin{cases} -m\omega_0\langle\hat{q}\rangle_0 \sin \omega_0 t + \langle\hat{p}\rangle_0 \cos \omega_0 t & \text{para } t \leq 0, \\ -m\omega_1\langle\hat{q}\rangle_0 \sin \omega_1 t + \langle\hat{p}\rangle_0 \cos \omega_1 t & \text{para } t > 0, \end{cases}$$

donde

$$\langle q \rangle_0 = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega_0}} \alpha_R, \quad \langle p \rangle_0 = \sqrt{2\hbar m\omega_0} \alpha_I.$$

con α_R y α_I denotando la parte real e imaginaria del complejo α . Adicionalmente, encontramos que las varianzas de posición, momento y la función de correlación son:

$$\sigma_q^2(t) = \begin{cases} \frac{\hbar}{2m\omega_0} & \text{para } t \leq 0, \\ \frac{\hbar}{2m\omega_1} \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \sin^2 \omega_1 t + \frac{\omega_1}{\omega_0} \cos^2 \omega_1 t \right) & \text{para } t > 0, \end{cases}$$

$$\sigma_p^2(t) = \begin{cases} \frac{\hbar m\omega_0}{2} & \text{para } t \leq 0, \\ \frac{\hbar m\omega_1}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} \cos^2 \omega_1 t + \frac{\omega_1}{\omega_0} \sin^2 \omega_1 t \right) & \text{para } t > 0, \end{cases}$$

$$\sigma_{qp}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t \leq 0, \\ \frac{\hbar}{4} \left(\frac{\omega_0}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) \sin 2\omega_1 t & \text{para } t > 0. \end{cases}$$

Podemos observar el comportamiento de estas cantidades, para tiempos mayores que cero, en las figuras de la sección anterior.

3.2.1. Probabilidad de transición $|\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t|^2$

En esta sección calculamos la probabilidad de transición entre estado coherentes de los Hamiltonianos \hat{H}_0 y \hat{H}_1 . Para esto denotamos por $|\beta\rangle$ al estado coherente del Hamiltoniano \hat{H}_1 y a $|\alpha\rangle_t$ al estado coherente del Hamiltoniano \hat{H}_0 evolucionado en \hat{H}_1 . Entonces la probabilidad de transición entre los estados coherentes es $|\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t|^2$. Es fácil encontrar que $\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t = e^{-i\omega_1 t/2} \langle\langle\beta e^{i\omega t}|\alpha\rangle_t$, donde en la representación de posición tenemos que

$$\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t = e^{-i\omega_1 t/2} \int_{-\infty}^{\infty} dq \psi_{\beta e^{i\omega t}}^*(q) \psi_{\alpha}(q).$$

Calcular esta integral es directo, pues las funciones de onda tienen forma de paquetes gaussianos; realizando esta integral resulta

$$\begin{aligned} \langle\langle\beta|\alpha\rangle_t &= e^{-i\omega_1 t/2} \sqrt{\frac{2\sqrt{\omega_0\omega_1}}{\omega_0 + \omega_1}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\right\} \\ &\times \exp\left\{\left(\frac{\omega_0}{\omega_1 + \omega_0} - \frac{1}{2}\right)\alpha^2 + 2\alpha\beta^* e^{-i\omega t} \frac{\sqrt{\omega_0\omega_1}}{\omega_0 + \omega_1} + \left(\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_0} - \frac{1}{2}\right)(\beta^* e^{-i\omega t})^2\right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, es directo encontrar la probabilidad de transición de la expresión anterior. Además, dado el parámetro complejo α del estado inicial es fácil encontrar que el valor mas probable para β es

$$\begin{pmatrix} \beta_R \\ \beta_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_0}} \cos \omega_1 t & \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}} \sin \omega_1 t \\ -\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_0}} \sin \omega_1 t & \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}} \cos \omega_1 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_R \\ \alpha_I \end{pmatrix},$$

donde para este valor de β la transición de probabilidad toma el valor

$$|\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t|^2 \Big|_{\beta_{max}} = \frac{2\sqrt{\omega_0\omega_1}}{\omega_0 + \omega_1}.$$

Por lo tanto, la distribución de probabilidad de transición se trata de una gaussiana en el espacio complejo, donde el máximo de la distribución se encuentra girando en una curva circular que satisface la ecuación

$$\beta_R^2 + \beta_I^2 = \frac{\omega_1}{\omega_0} \alpha_R^2 + \frac{\omega_0}{\omega_1} \alpha_I^2,$$

además, que este máximo tiene un valor constante en el tiempo. Como ejemplo, consideramos el caso en el que el estado inicial esta definido por el parámetro $\alpha = 1 + i$, donde $m = \hbar = \omega_1 = 1$ y $\omega_0 = 0.5$. Así la probabilidad de transición para diferentes tiempos se encuentra en la Fig. 3.7a, donde es posible notar que el centro del paquete se mueve en una trayectoria circular, además que el máximo tiene un valor constante. Por otra parte, tenemos que en la Fig. 3.7b, encontramos la trayectoria del máximo del paquete, donde este máximo tiene un valor de 0.942809.

En particular para este caso encontrar la probabilidad de transición entre estados de Fock es de gran importancia en física molecular, donde en esta área al traslape entre estado de Fock se le conoce como factores de Franck-Condon. Para encontrar la probabilidad de transición entre los estados de Fock evolucionado $|n\rangle_t$ y el estado de Fock $|n'\rangle$ de \hat{H}_1 , $|\langle\langle n'|n\rangle_t|^2$, tenemos que

$$\langle\langle n'|n\rangle_t = e^{-i\omega t(n'+1/2)} \langle\langle n'|n\rangle.$$

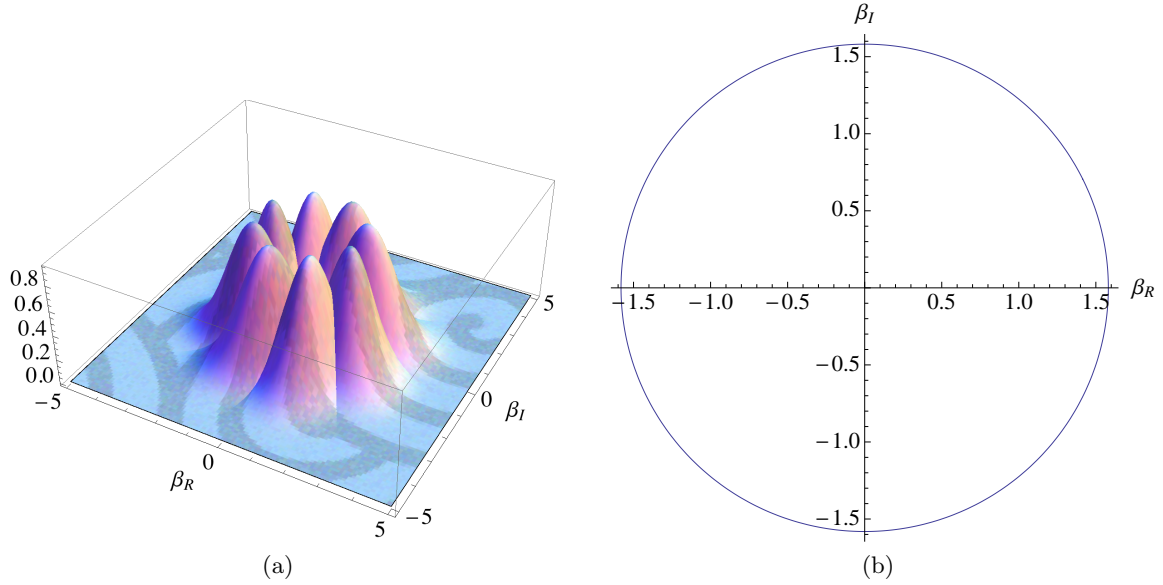


Figura 3.7: (a) Grafica de la transición de probabilidad para diferentes tiempos, los tiempos empleados en la figura son $t = 0$, $t = \pi/4$, $t = \pi/2$, $t = 5\pi/4$, $t = 3\pi/2$, $t = 7\pi/4$, $t = 2\pi$. (b) Movimiento del centro de la distribución, donde consideramos el parámetro $\alpha = 1 + i$, con $m = \hbar = \omega_1 = 1$ y $\omega_0 = 0.5$.

Por lo tanto basta con conocer el valor del traslape entre los estados de Fock, es decir $\langle\langle n'|n\rangle\rangle$. Este traslape formalmente se puede expresar usando la representación posición como

$$\langle\langle n'|n\rangle\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle\langle n'|q\rangle\rangle \langle q|n\rangle,$$

y substituyendo

$$\begin{aligned} \langle\langle n'|q\rangle\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^{n'} n'!}} \left(\frac{m\omega_1}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega_1}{2\hbar}q^2} H_{n'}\left(\sqrt{\frac{m\omega_1}{\hbar}}q\right), \\ \langle q|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}q^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}q\right), \end{aligned}$$

encontramos que el traslape está dado por

$$\begin{aligned} \langle\langle n'|n\rangle\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^{n'} n'!}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m}{\pi\hbar}\right)^{1/2} (\omega_1\omega_0)^{1/4} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp\left\{-\frac{mq^2}{2\hbar}(\omega_0 + \omega_1)\right\} H_{n'}\left(\sqrt{\frac{m\omega_1}{\hbar}}q\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}q\right), \end{aligned}$$

donde esta última integral se puede evaluar de forma numérica. Sin embargo, es posible evaluar este traslape de tal forma que se llega a una expresión exacta. Se ha demostrado, ver [3], que el traslape está dado por:

$$\langle\langle n'|n\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{H_{n'n}^{\mathbf{R}}(0,0)}{\sqrt{n'!n!}},$$

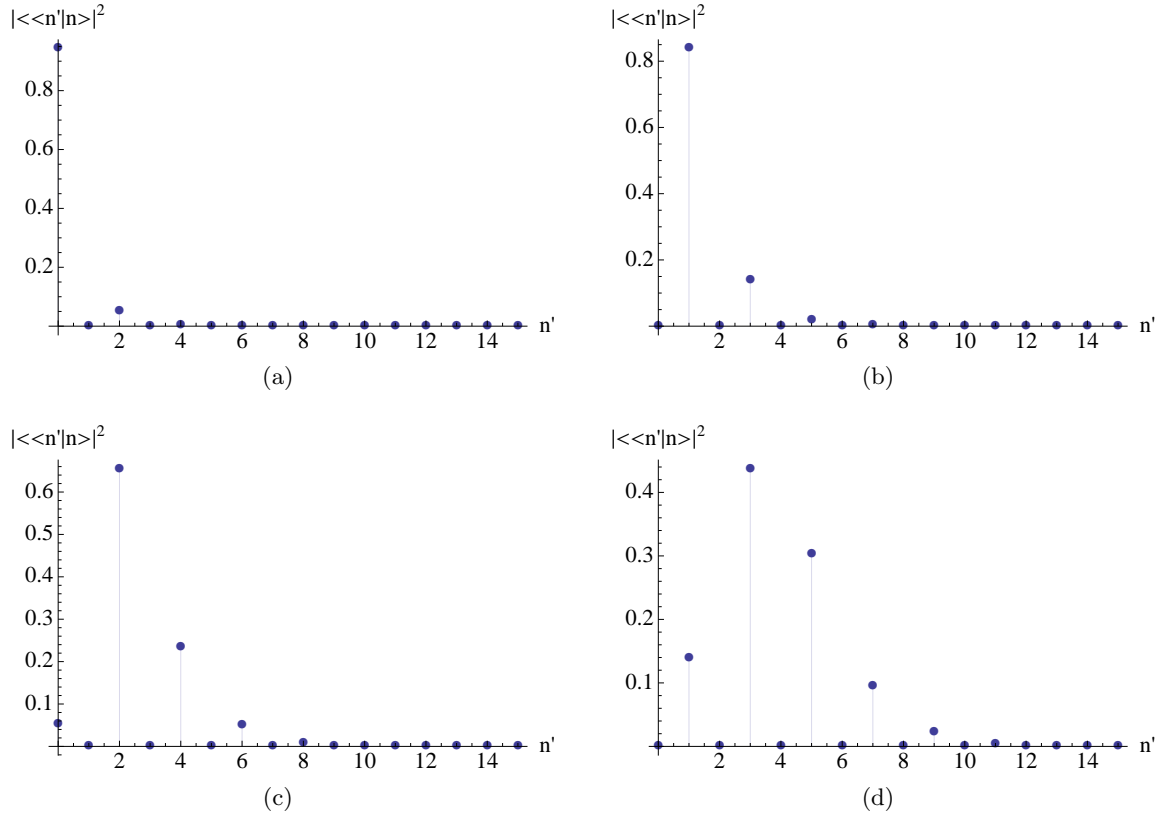


Figura 3.8: Probabilidades de transición entre los estados de Fock $|n\rangle$ y $|n'\rangle$, donde hemos considerado: (a) $n=0$, (b) $n=1$, (c) $n=2$, (d) $n=3$.

donde

$$\mathbf{R} = \frac{1}{u} \begin{pmatrix} v & -1 \\ -1 & -v \end{pmatrix}$$

con

$$u = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_0}} + \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}} \right), \quad v = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_0}} - \sqrt{\frac{\omega_0}{\omega_1}} \right).$$

Ademas, la función vectorial $H_{n'n}^{\mathbf{R}}(0,0)$ es una función de Hermite de dos dimensiones dada por

$$H_{n'n}^{\mathbf{R}}(0,0) = n'!n! \left(\frac{|v|}{2u} \right)^{\frac{n'+n}{2} \min(n',n)} \sum_{k=0}^{\min(n',n)} \frac{1}{(n'-k)!(n-k)!k!} \left(\frac{2}{|v|} \right)^k G(n'-k, n-k),$$

donde $G(n'-k, n-k)$ esta definida por

$$G(n'-k, n-k) = \begin{cases} H_{n-k}(0) \tilde{H}_{n'-k}(0) & \text{si } v > 0, \\ \tilde{H}_{n-k}(0) H_{n'-k}(0) & \text{si } v < 0, \end{cases}$$

con $H_n(ix) = i^n \tilde{H}_n(x)$. Así de lo anterior, tenemos finalmente que la probabilidad de transición buscada es

$$|\langle\langle n'|n\rangle\rangle|^2 = \frac{1}{u} \frac{[H_{n'n}^{\mathbf{R}}(0,0)]^2}{n!n!}.$$

Como ejemplos, consideramos el caso del estado de Fock inicial $|n\rangle$, para $n = 0, 1, 2, 3$. Así la probabilidad de transición a un estado $|n'\rangle$ esta dado en las Figs. : 3.8a, 3.8b, 3.8c, 3.8d, respectivamente. En el Apéndice D, podemos encontrar la probabilidad de transición entre estados de Fock para el oscilador paramétrico con frecuencia arbitraria.

3.3. Cambio de frecuencia mediante una fuerza de restauración lineal

Consideremos el Hamiltoniano de oscilador paramétrico con frecuencia

$$\omega^2(t) = \begin{cases} \omega_0^2 & \text{para } -\infty < t < 0, \\ \omega_0^2 \left(\frac{\nu}{T}t + 1\right) & \text{para } 0 \leq t \leq T, \\ \omega_0^2(\nu + 1) & \text{para } T \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

con ω_0^2 una frecuencia constante, ν una constante que modula la frecuencia final y T el tiempo que transcurre en realizarse el cambio de frecuencia. El comportamiento de esta frecuencia se encuentra exhibido en la Fig. 3.9, donde consideramos los parámetros $\omega_0 = 0.5$, $\nu = 3$ y $T = 5$. Es claro de la figura cómo cambia linealmente en el tiempo la frecuencia ω_0 a la frecuencia $\omega = \omega_0\sqrt{\nu + 1}$.

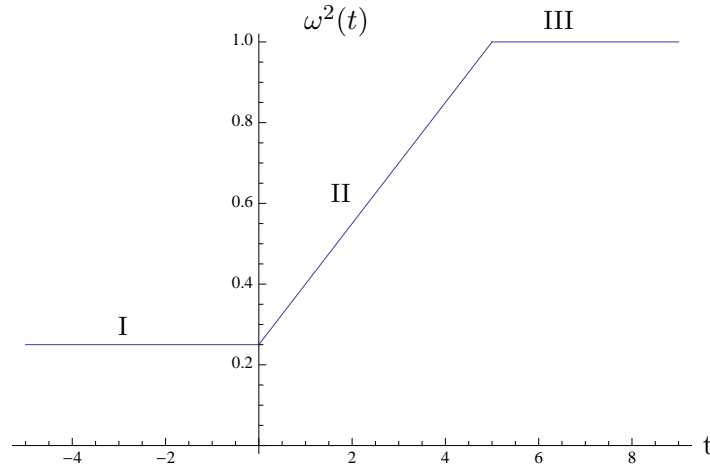


Figura 3.9: Gráfica de la frecuencia $\omega^2(t)$ donde se han considerado los parámetros $\omega_0 = 0.5$, $\nu = 3$ y $T = 5$.

Con este sistema, igual como se realizó en la sección previa, encontramos la evolución temporal del estado coherente $|\alpha\rangle$, que corresponde al estado coherente de un oscilador armónico

con frecuencia ω_0 .

En el Apéndice B encontramos los operadores lineales del oscilador armónico con frecuencia constante y del oscilador paramétrico con frecuencia lineal en el tiempo. Usando estos resultados podemos construir a las funciones $\beta_1(t)$ y $\beta_2(t)$ del sistema. Esto se realiza simplemente uniendo las soluciones por medio de las condiciones iniciales. Realizando lo antes mencionado se obtiene

$$\beta_1(t) = \begin{cases} \beta_{1_I}(t) = -\frac{1}{m\omega_0} \sin \omega_0 t & \text{para } -\infty < t < 0, \\ \beta_{1_{II}}(t) = -\frac{T^{2/3}}{m\pi(\omega_0\nu)^{2/3}} [Bi(\tau_0)Ai(\tau) + Ai(\tau_0)Bi(\tau)] & \text{para } 0 \leq t \leq T, \\ \beta_{1_{III}}(t) = C_{11} \cos \omega t + C_{12} \sin \omega t & \text{para } T \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

$$\beta_2(t) = \begin{cases} \beta_{2_I}(t) = \cos \omega_0 t & \text{para } -\infty < t < 0, \\ \beta_{2_{II}}(t) = -\frac{1}{\pi} [Bi'(\tau_0)Ai(\tau) + Ai'(\tau_0)Bi(\tau)] & \text{para } 0 \leq t \leq T, \\ \beta_{2_{III}}(t) = C_{21} \cos \omega t + C_{22} \sin \omega t & \text{para } T \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

donde se han hecho las simplificaciones $\tau = -\left(\frac{\omega_0 T}{\nu}\right)^{2/3} \left(\frac{\nu}{T}t + 1\right)$, $\tau_0 = \tau(t=0)$ y las constantes de integración

$$\begin{aligned} C_{11} &= \beta_{1_{II}}(T) \cos \omega_0 T - \frac{\dot{\beta}_{1_{II}}(T)}{\omega_0} \sin \omega_0 T, \\ C_{12} &= \beta_{1_{II}}(T) \sin \omega_0 T + \frac{\dot{\beta}_{1_{II}}(T)}{\omega_0} \cos \omega_0 T, \\ C_{21} &= \beta_{2_{II}}(T) \cos \omega_0 T - \frac{\dot{\beta}_{2_{II}}(T)}{\omega_0} \sin \omega_0 T, \\ C_{22} &= \beta_{2_{II}}(T) \sin \omega_0 T + \frac{\dot{\beta}_{2_{II}}(T)}{\omega_0} \cos \omega_0 T. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ya podemos construir las soluciones de la ecuación de Ermakov substituyendo las soluciones $\beta_1(t)$ y $\beta_2(t)$ en (2.51), y las condiciones iniciales del estado inicial: $\sigma_{q_0}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$, $\sigma_{p_0}^2 = \frac{\hbar m\omega_0}{2}$ y $\sigma_{q_0 p_0} = 0$.

Así, las gráficas de la solución a la ecuación de Ermakov, su primera derivada y la fase se muestran en la Figura (3.10), donde consideramos los parámetros $\omega_0 = 0.5$, $T = 5$ y $\nu = 3$. En estas gráficas es claro ver que la solución inicia comportándose como solución de la ecuación de Ermakov con frecuencia ω_0 , es decir, $\frac{1}{\sqrt{\omega_0}}$; hasta finalmente comportarse como soluciones de la ecuación de Ermakov con frecuencia $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\nu + 1}$.

Ahora, dadas $\rho(t)$, $\dot{\rho}(t)$ y $\phi(t)$, podemos determinar los valores esperados de los operadores de posición y momento de este sistema. Se logra obtenerlos substituyendo esas cantidades en (2.30) y (2.31). Los valores esperados, en el caso que estamos considerando, se encuentran en la Fig. 3.11, donde observamos que las soluciones inician comportándose como soluciones del oscilador armónico con frecuencia ω_0 y se van transformando de forma continua en soluciones del oscilador con frecuencia ω_1 .

Adicionalmente, obtenemos la varianza de posición, la varianza del momento y la función de correlación usando las relaciones (2.39), (2.41) y (2.40). Las varianzas inician con un valores constantes y posteriormente se comportan de forma periódica, esto es posible apreciarlo en

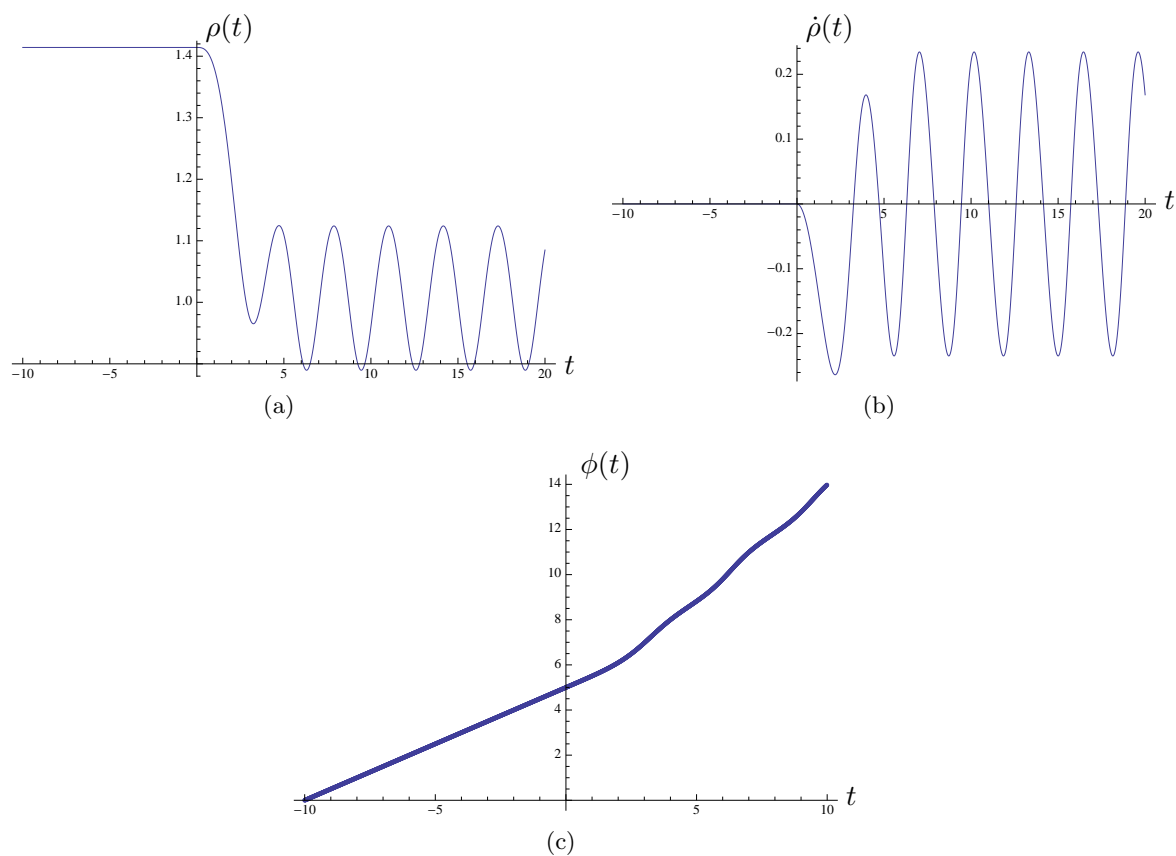


Figura 3.10: Gráfica de las solución $\rho(t)$, su primera derivada $\dot{\rho}(t)$ y la fase $\phi(t)$, donde se han considerado los parámetros $\omega_0 = 0.5$, $T = 5$ y $\nu = 3$.

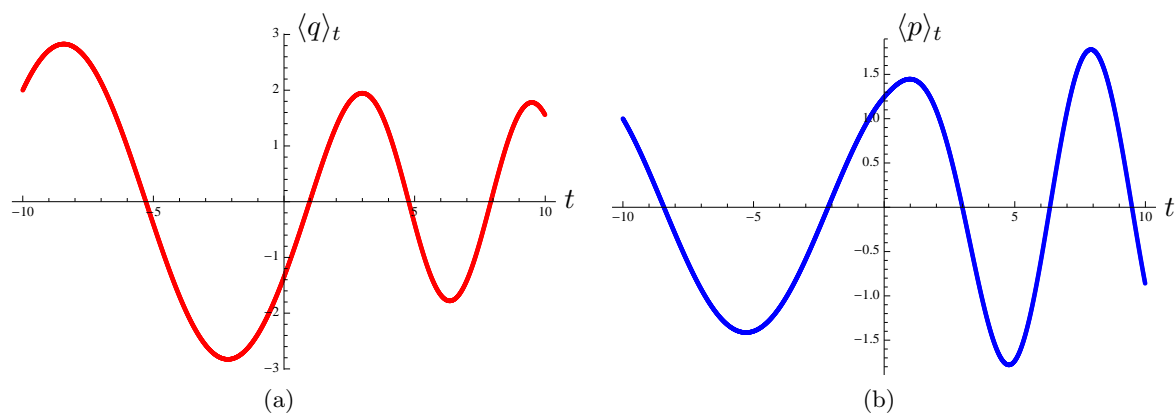


Figura 3.11: Gráficas de los valores esperados $\langle q \rangle_t$ y $\langle p \rangle_t$, para los valores $\omega_0 = 0.5$, $T = 5$ y $\nu = 3$.

Fig. 3.11a y Fig. 3.11b. Por otra parte, la función de correlación es una función que inicial en cero y posteriormente también toma un comportamiento periódico.

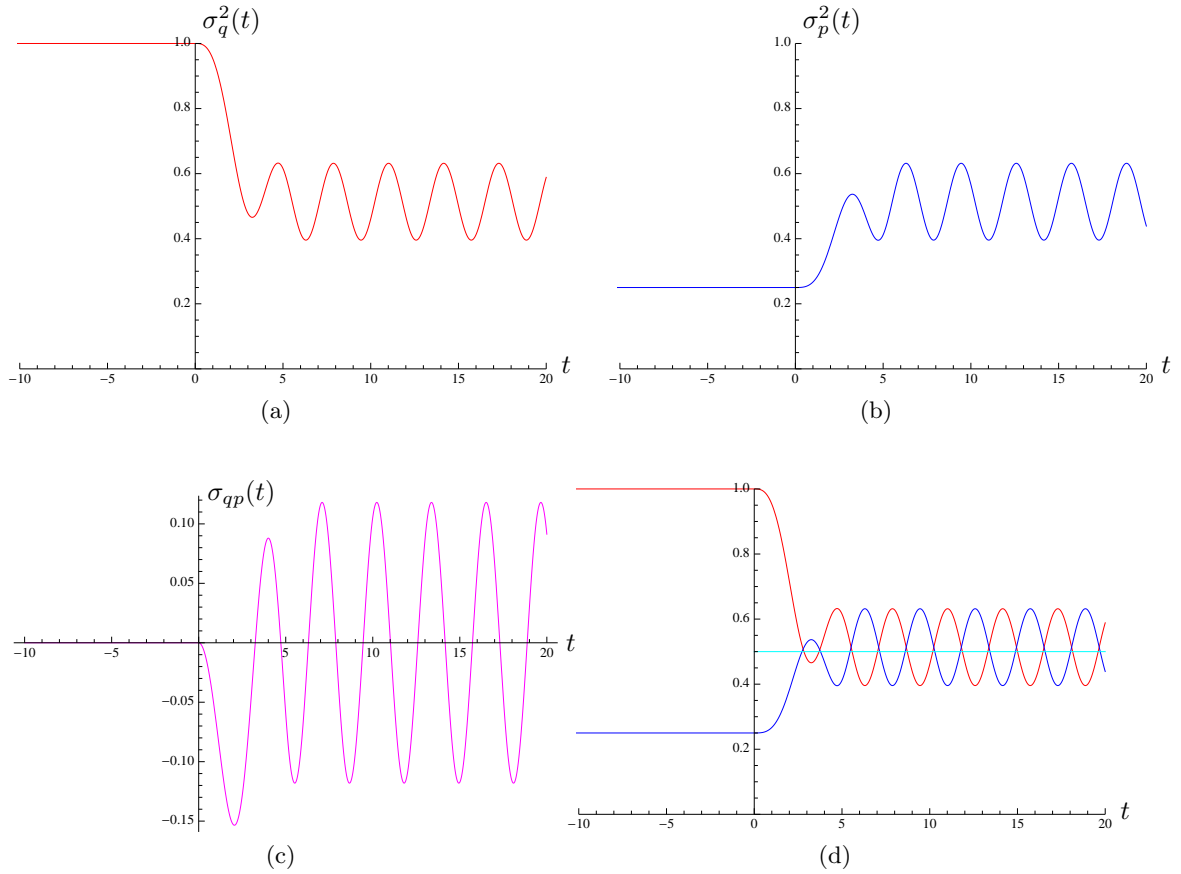


Figura 3.12: Gráficas de las varianzas $\sigma_q^2(t)$, $\sigma_p^2(t)$ y la función correlación $\sigma_{qp}(t)$ para los parámetros $\omega_0 = 0.5$, $T = 5$ y $\nu = 3$.

3.3.1. Probabilidad de transición $|\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t|^2$

Calculamos la probabilidad del estado coherente $|\alpha\rangle_t$ del oscilador con frecuencia constante ω_0 , con el estado coherente $|\beta\rangle$ del oscilador armónico con frecuencia $\omega_1 = \omega_0\sqrt{\nu+1}$. La probabilidad de transición está dada por $|\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t|^2$, entonces para calcular el traslape $\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t$,

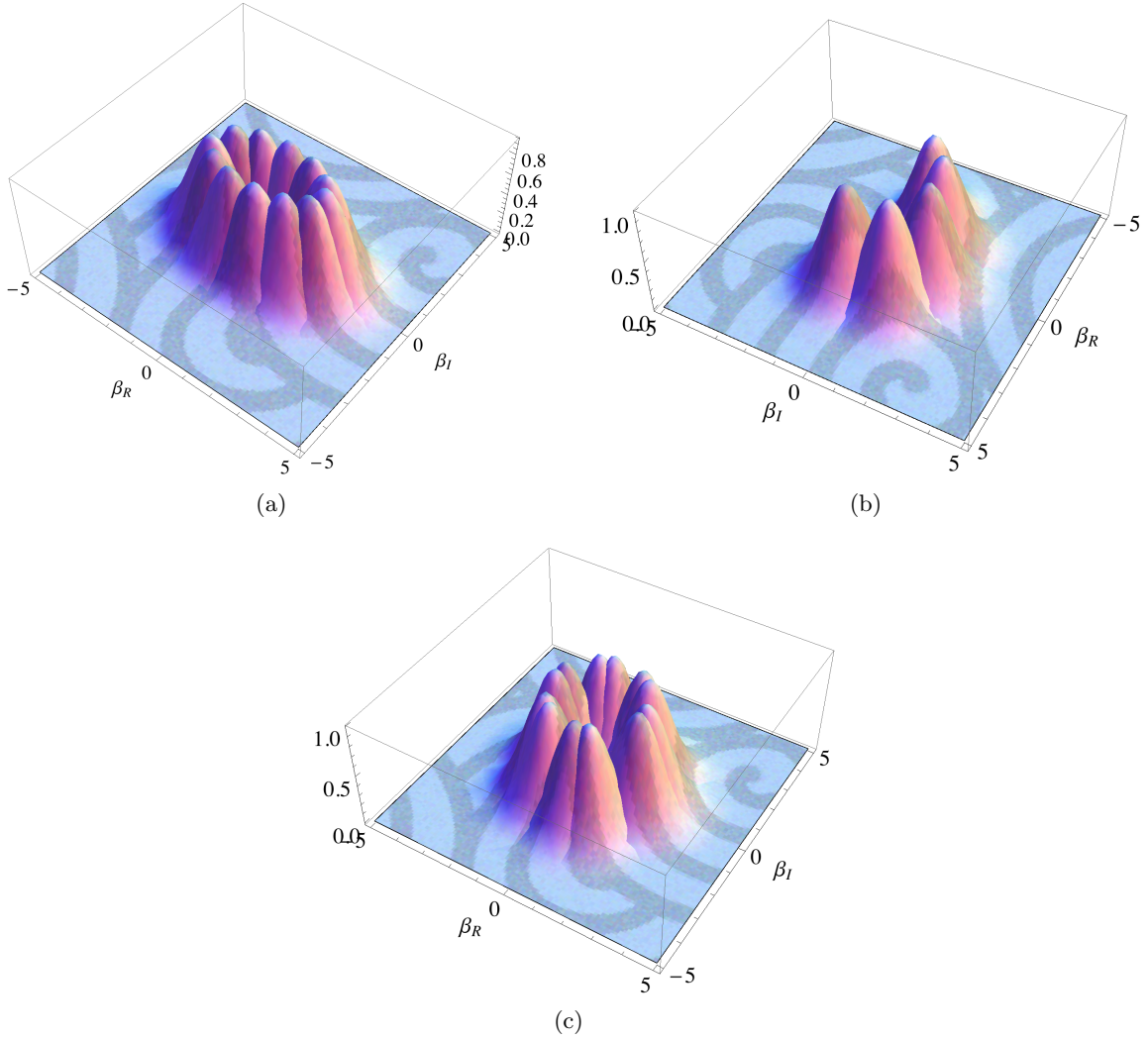


Figura 3.13: (a) Gráficas de la probabilidad de transición para diferentes tiempos, $t \leq 0$. (b) Gráficas de la probabilidad de transición para diferentes tiempos entre $0 < t \leq 5$. (c) Gráficas de la probabilidad de transición para diferentes tiempos $t > 5$. Las graficas anteriores fueron obtenidas considerando los parámetros $\omega_0 = 0.5$, $T=5$ y $\nu = 3$.

usamos la representación de posición para los estados coherentes. Así para este caso obtenemos

$$\begin{aligned}
 \langle\langle\beta|\alpha\rangle_t = & \omega^{1/4} \sqrt{\frac{2\rho(t)}{\omega\rho^2(t) + 1 - i\rho(t)\dot{\rho}(t)}} \exp \left\{ -\frac{\beta^{*2}}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \frac{im}{2\hbar} \langle q \rangle_t^2 \left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} + \frac{i}{\rho^2(t)} \right) \right. \\
 & - \frac{i}{2\hbar} \langle q \rangle_t \langle p \rangle_t - \frac{i\phi(t)}{2} + \frac{1}{\rho^2(t)\omega + 1 - i\dot{\rho}(t)\rho(t)} \\
 & \left. \times \left(\sqrt{\omega}\rho(t)\beta^* - i\sqrt{\frac{m}{2\hbar}} \langle q \rangle_t \left(\dot{\rho}(t) + \frac{i}{\rho(t)} \right) + \frac{i\rho(t)}{\sqrt{2m\hbar}} \langle p \rangle_t \right)^2 \right\}, \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

donde la función de onda $\psi_\alpha(q, t)$ esta definida por (2.12) y es directo calcular la probabilidad de transición $|\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t|^2$. Además, se puede mostrar que la probabilidad es máxima para

$$\beta_R = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \langle q \rangle_t, \quad \beta_I = \frac{\langle p \rangle_t}{\sqrt{2\hbar m\omega}}.$$

Notamos que el centro del paquete de la probabilidad de transición sigue las curvas paramétricas definidas del espacio fase clásico y sin dimensiones, $\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \langle q \rangle_t, \frac{\langle p \rangle_t}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\right)$. Adicionalmente si evaluamos esta β en $|\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t|^2$ encontramos que el valor máximo que alcanza la distribución es

$$|\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t|^2 \Big|_{\beta_{max}} = \frac{2\sqrt{\omega}\rho(t)}{\sqrt{(\omega\rho^2(t) + 1)^2 + \rho^2(t)\dot{\rho}^2(t)}},$$

donde el valor del máximo depende del tiempo y de la solución de la ecuación de Ermakov.

Para apreciar la evolución de la probabilidad de transición, consideramos el caso con $\omega_0 = 0.5$, $T = 5$ y $\nu = 3$. En Fig. 3.13a se tiene la gráfica de la probabilidad de transición a diferentes tiempos donde se han considerado $t \leq 0$; aquí notamos que para tiempos menores que cero la distribución se encuentra moviéndose en una elipse y todas con el mismo valor máximo. Posteriormente, se encuentran las gráficas de la distribución para tiempos entre $0 < t \leq 5$ en la Fig 3.13b, así vemos que la probabilidad conforme el tiempo avanza su valor máximo va en aumento. Finalmente, en Fig. 3.13c las gráficas de la distribución de probabilidad para tiempo $t > 5$; entonces la probabilidad de transición se mueve a través de otra elipse y su valor máximo es nuevamente constante en el tiempo.

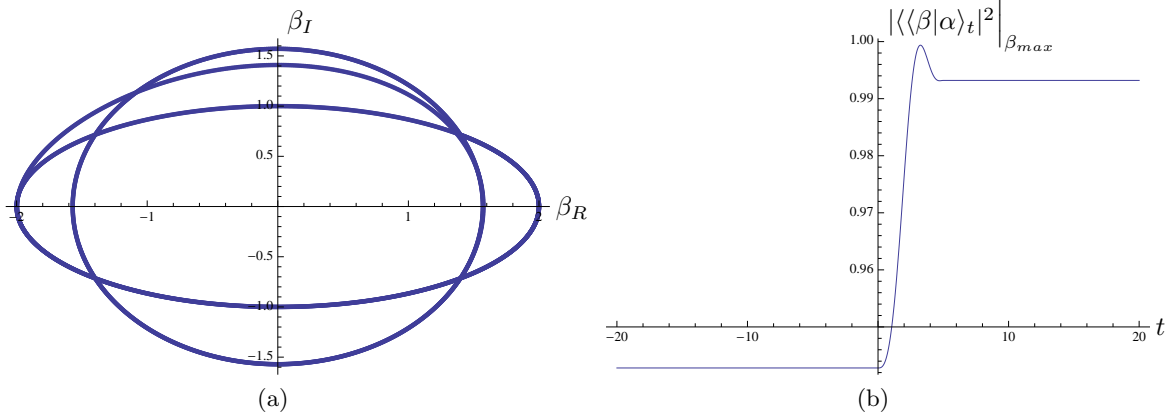


Figura 3.14: (a) Movimiento del centro del paquete de la probabilidad de transición. (b) Gráfica que muestra como varia el valor del máximo de la distribución en el tiempo. Las graficas anteriores fueron obtenidas considerando los parámetros $\omega_0 = 0.5$, $T=5$ y $\nu = 3$.

El movimiento del centro de la distribución de probabilidad se encuentra en Fig. 3.14a, donde encontramos una curva que esta definida por los puntos $\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \langle q \rangle_t, \frac{\langle p \rangle_t}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\right)$ donde la curva a tiempos menores que cero gira en la elipse más angosta, en el sentido de las manecillas del reloj, y en el intervalo de tiempo $t \in (0, 5)$ cambia su forma hasta convertirse en la segunda elipse.

Adicionalmente, la forma en que varía el valor máximo de la distribución se encuentra en Fig. 3.14b; aquí tenemos que antes de $t = 0$ el valor máximo es constante y tiene un valor de 0.942809, para el caso que estamos tratando, este valor aumenta en el intervalo temporal $(0, 5)$ en donde llega a un máximo de 0.999341 y después disminuye a y tomar un valor constante de 0.993198.

3.4. Cambio de frecuencia mediante una fuerza de restauración no-polinomial

Consideramos el Hamiltoniano de oscilador paramétrico, donde la frecuencias esta dada por:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 + \frac{\omega_1^2}{1 + e^{-2kt}}, \quad (3.15)$$

donde el parámetro k es constante y siempre positivo. Este caso ya ha sido estudiado en el capítulo primero en el caso clásico. Así se mostró que $\omega^2(t)$ es tal que tiende a una función escalón cuando k es lo suficientemente grande y para k cero obtenemos la ecuación del oscilador armónico, ver Fig. 1.15.

Entonces, a diferencia del caso previo, tenemos que el cambio en la frecuencia será de forma suave. Del los operadores invariantes lineales encontrados en el Apéndice B para este caso se tiene que

$$\beta_1(t) = C_{11}e^{i\omega_0 t} {}_2F_1(a, b; c; z(t)) + C_{21}e^{-i\omega_0 t} {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; z(t))$$

y

$$\beta_2(t) = C_{12}e^{i\omega_0 t} {}_2F_1(a, b; c; z(t)) + C_{22}e^{-i\omega_0 t} {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; z(t))$$

donde las constantes de integración C_{11} , C_{21} , C_{12} y C_{22} se encuentra definidas en el Apéndice B. Por lo tanto, por medio de la expresión

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar} (\sigma_{p_0}^2 \beta_1^2(t) + \sigma_{q_0}^2 \beta_2^2(t) + 2\sigma_{q_0 p_0} \beta_1(t)\beta_2(t))},$$

encontramos la solución de la ecuación de Ermakov, y con ello la información física relevante sobre la evolución temporal.

Entonces como en los casos anteriores nos interesamos en la evolución temporal del estado coherente $|\alpha\rangle$ del oscilador armónico con frecuencia ω_0 . Sea el tiempo inicial $t_0 = -20$, y supongamos que en este tiempo el estado coherente tiene el parámetro complejo $\alpha = 1+i$. Adicionalmente suponemos que la frecuencia inicial es $\omega_0 = 0.5$ y la frecuencia final es $\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2} = 1$.

Usando esta condición inicial, obtenemos las gráficas de la solución de la ecuación de Ermakov, su primera derivada y la fase que se muestran en las Figs. 3.15a, 3.15b y 3.15c, respectivamente. Así, el comportamiento de estas cantidades es esencialmente el mismo que en el caso del cambio de frecuencia mediante una fuerza de restauración lineal. Sin embargo, es importante hacer notar que para este caso la amplitud de oscilación es mucho menor que en el caso anterior.

Las gráficas de los valores esperados se encuentran en Fig. 3.16, donde notamos que existe un cambio de frecuencia y de amplitud en el movimiento. Notamos que las soluciones inicialmente se comportan como soluciones del oscilador con frecuencia ω_0 . Posteriormente, esto es después del tiempo cero, tienden a comportare como soluciones del oscilador con frecuencia $\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}$.

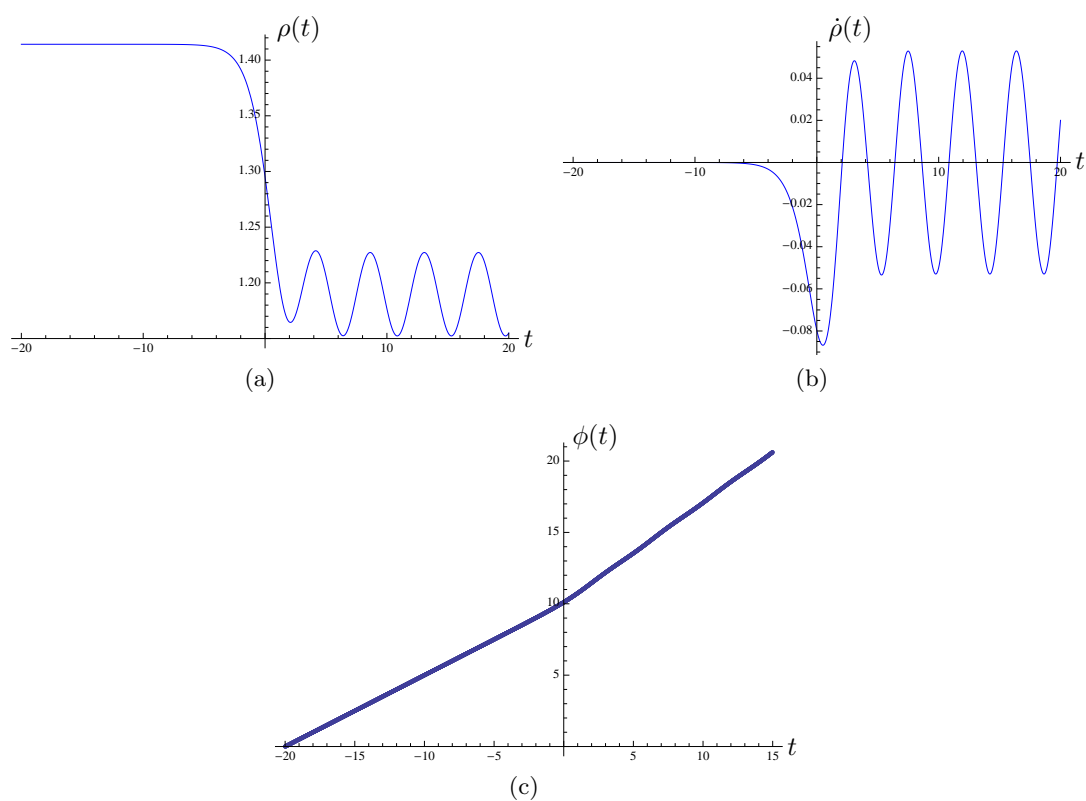


Figura 3.15: (a) Gráfica de la solución de Ermakov, (b) Gráfica de la primera derivada de $\rho(t)$, (c) Gráfica de la fase $\phi(t)$. En los tres casos se ha considerado $\omega_0 = 0.5$ y $\omega = 0.5$

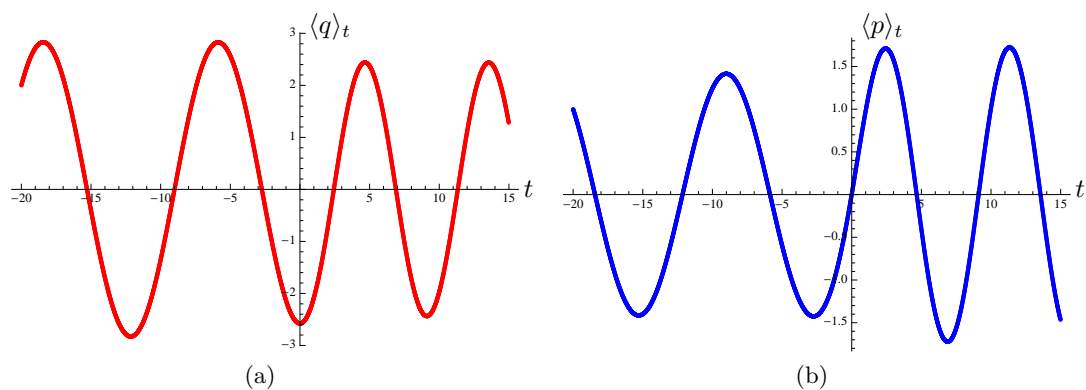


Figura 3.16: Gráficas de los valores esperados de posición y momento para el caso en que $\omega_0 = 0.5$ y $\omega = 0.5$.

Adicionalmente tenemos las gráficas de las varianzas en posición y en momento así como la función de correlación en la Fig 3.17, donde encontramos que para $t < 0$ las varianzas permanecen constantes y la correlación es cero. Sin embargo, al pasar por el tiempo cero todas estas

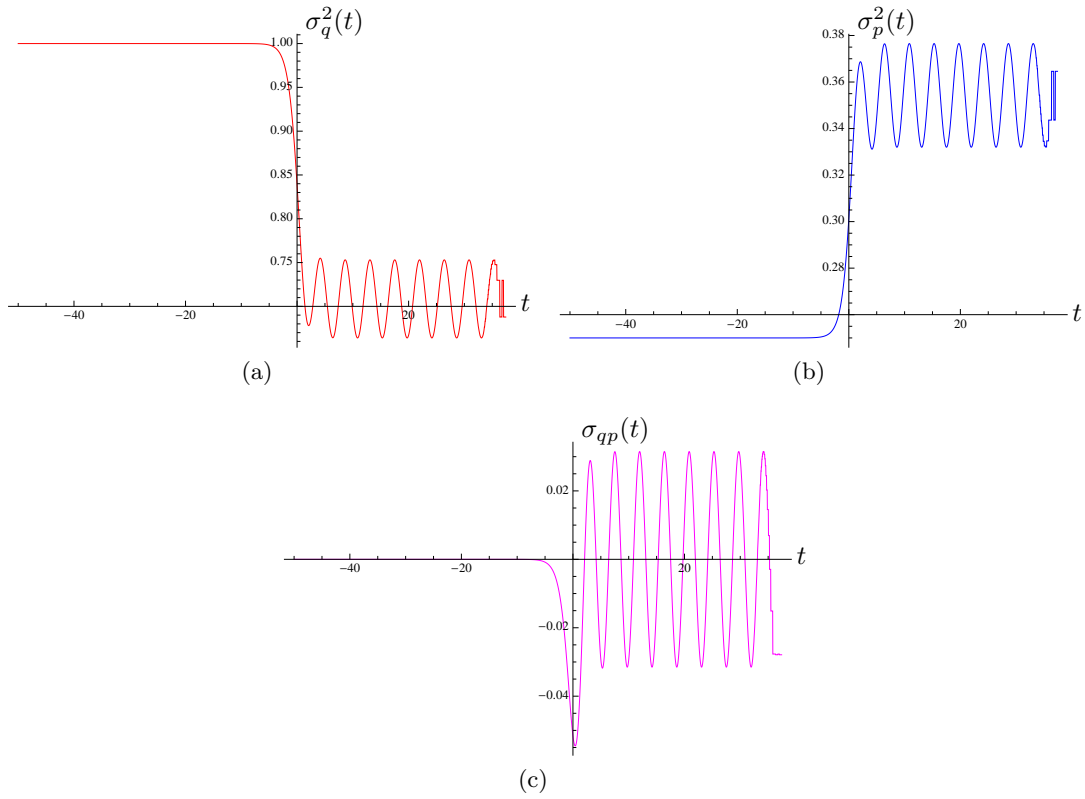


Figura 3.17: Gráficas de las varianzas (a) en posición y (b) de momento. (c) Gráfica en la cual tenemos juntas a las varianzas $\sigma_q^2(t)$ y $\sigma_p^2(t)$. (d) Gráfica de la función correlación.

cantidades adquieren un comportamiento oscilatorio y periódico donde es importante observar que la amplitud de estas oscilaciones es pequeña. Lo anterior permite notar que las variaciones en el ancho de las distribuciones varía de forma periódica, pero muy poco.

3.5. Probabilidad de transición $|\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t|^2$

La probabilidad de transición se calcula por medio el traslape (3.14), donde se substituye la solución de la ecuación de Ermakov y su primera derivada. Como se mencionó antes, el máximo corresponde a

$$\beta_R = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \langle q \rangle_t, \quad \beta_I = \frac{\langle p \rangle_t}{\sqrt{2\hbar m\omega}},$$

y el máximo valor es

$$|\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t|^2 \Big|_{\beta_{max}} = \frac{2\sqrt{\omega}\rho(t)}{\sqrt{(\omega\rho^2(t) + 1)^2 + \rho^2(t)\dot{\rho}^2(t)}}.$$

La gráfica de la trayectoria del máximo de la distribución de probabilidad para la transición se encuentra en Fig. 3.18a, todo esto para los parámetros $\omega_0^2 = 0.5$ y $\omega^2 = 0.5$. En la figura

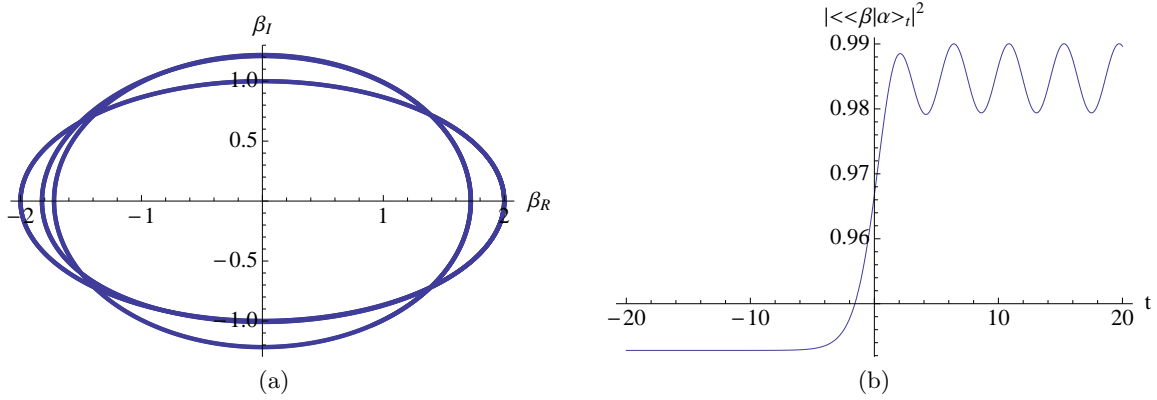


Figura 3.18: (a) Movimiento del centro del paquete de la probabilidad de transición. (b) Gráfica que muestra como varía el valor del máximo de la distribución en el tiempo. Las graficas anteriores fueron obtenidas considerando los parámetros $\omega_0^2 = 0.5$ y $\omega^2 = 0.5$.

notamos como las soluciones van de una elipse a otra. Por otra parte, en Fig. 3.18b graficamos los valores que adquiere el máximo en función del tiempo. Se observa que inicialmente toma un valor constante y en $t > 0$ el valor aumenta, para después cambiar de manera periódica.

3.6. Sistemas cuánticos con disipación

En esta última sección mostramos de forma breve como se extiende la teoría del invariante de Ermakov a sistemas cuánticos que incluyen disipación. Mediante la formulación hidrodinámica de la mecánica cuántica se introduce un término de difusión en la ecuación de continuidad para la distribución de probabilidad $\varrho(q, t) = \Psi(q, t)\Psi^\dagger(q, t)$, todo esto de acuerdo con la teoría de movimiento Browniano en mecánica clásica [4, 5, 6]; entonces, la ecuación de continuidad toma la forma de una ecuación de Fokker-Planck, también conocida como la ecuación de Smoluchowski, esto es,

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho(q, t) + \frac{\partial}{\partial q}[\varrho(q, t)v(q, t)] - D(t)\frac{\partial^2}{\partial q^2}\varrho(q, t) = 0 \quad (3.16)$$

donde $D(t)$ es el coeficiente de difusión, que a lo más puede depender del tiempo. La velocidad, de acuerdo con la formulación hidrodinámica, está definida por

$$v(q, t) = \frac{\hbar}{2im} \left[\frac{1}{\Psi(q, t)} \frac{\partial \Psi(q, t)}{\partial q} - \frac{1}{\Psi^*(q, t)} \frac{\partial \Psi^*(q, t)}{\partial q} \right].$$

Separar la ecuación (3.16) en dos ecuaciones conjugadas para $\Psi(q, t)$ y $\Psi^*(q, t)$, respectivamente, en general es imposible. Sin embargo, existe un caso particular para el cual esta separación se puede realizar, considerando que

$$-D(t)\frac{\partial^2}{\partial q^2}\varrho(q, t) = \gamma(\ln \varrho(q, t) - \langle \ln \varrho(q, t) \rangle).$$

El resultado anterior conduce a agregar un término complejo a la ecuación de Schrödinger para $\Psi(q, t)$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = (\hat{H}_L + \hat{W}) \Psi(q, t) = \hat{H}_{NL} \Psi(q, t), \quad (3.17)$$

donde $\hat{H}_L = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2(t) \hat{q}^2$ y con el término complejo dado por

$$\begin{aligned} W &= \gamma \frac{\hbar}{i} (\ln \Psi - \langle \ln \Psi \rangle), \\ &= \gamma \frac{\hbar}{2i} \left(\ln \frac{\Psi}{\Psi^*} - \left\langle \ln \frac{\Psi}{\Psi^*} \right\rangle \right) + \gamma \frac{\hbar}{2i} (\ln \varrho - \langle \ln \varrho \rangle), \\ &= W_R + iW_I. \end{aligned}$$

La ecuación no-lineal de Schrödinger (3.17) tiene como solución exacta un paquete gaussiano (normalizable) de la forma (2.2), es decir,

$$\psi(q, t) = N(t) \exp \left\{ i \left[y(t)(q - \langle q \rangle_t)^2 + \frac{1}{\hbar} \langle p \rangle_t (q - \langle q \rangle_t) \right] \right\}.$$

Entonces, introduciendo este paquete de onda en (3.17), la ecuación de movimiento del mínimo del paquete de onda sigue la trayectoria clásica definida por la ecuación de Newton

$$\frac{d^2 \langle q \rangle_t}{dt^2} + \gamma \frac{d \langle q \rangle_t}{dt} + \omega^2(t) \langle q \rangle_t = 0.$$

La ecuación no-lineal introduce un término lineal dependiente de la velocidad y el coeficiente de fricción γ . También se introduce un nuevo término en la ecuación de Riccati

$$\dot{z} + \gamma z + z^2 + \omega^2(t) = 0, \quad (3.18)$$

donde como en el caso conservativo definimos $z(t) = \frac{2\hbar}{m} y(t)$. Se puede relacionar la ecuación de Riccati (3.18) con una ecuación de Ermakov modificada, considerando la transformación

$$z(t) = \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)} - \frac{\gamma}{2} + \frac{i}{\rho^2(t)}, \quad (3.19)$$

en (3.18) obtenemos la ecuación de Ermakov

$$\ddot{\rho} + \left(\omega^2(t) - \frac{\gamma^2}{4} \right) \rho = \frac{1}{\rho^3}. \quad (3.20)$$

Así, la expresión (3.20) junto con la ecuación de Newton con disipación

$$\ddot{\xi} + \left(\omega^2(t) - \frac{\gamma^2}{4} \right) \xi = 0,$$

forman un sistema de Ermakov cuyo invariante dinámico es

$$I = \frac{m}{2\hbar} \left[(\dot{\xi}\rho - \xi\dot{\rho})^2 + \left(\frac{\xi}{\rho} \right)^2 \right].$$

De la misma forma que en el caso conservativo, se pueden determinar las varianzas y la función correlación en términos de $\rho(t)$ y $\dot{\rho}(t)$:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2(t) &= \frac{\hbar}{2m}\rho^2(t) \\ \sigma_p^2(t) &= \frac{m\hbar}{2} \left[\left(\dot{\rho}(t) - \frac{\gamma}{2}\rho(t) \right)^2 + \frac{1}{\rho^2(t)} \right], \\ \sigma_{xp}(t) &= \frac{\hbar}{2}\rho(t) \left(\dot{\rho}(t) - \frac{\gamma}{2}\rho(t) \right),\end{aligned}$$

donde es fácil probar que los resultados anteriores minimizan la relación de incertidumbre de Schrödinger-Robertson, es decir, que

$$\sigma_x^2(t)\sigma_p^2(t) - \sigma_{xp}^2(t) = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Por lo tanto, las evoluciones temporales de las varianzas y la función correlación están completamente determinadas por las soluciones de la ecuación (3.20).

En los problemas disipativos que admiten una solución gaussiana aparece el parámetro γ , que está determinado por el coeficiente de difusión $D(t)$ del modelo hidrodinámico considerado, ver (3.16). Por lo tanto, se requiere hacer una revisión bibliográfica de posibles modelos hidrodinámicos clásicos que incluyan el término disipativo, y entonces se tendrá la posibilidad de estudiar su análogo cuántico.

Bibliografía

- [1] Albert Messiah: Quantum Mechanics, Dover Publications, INC. Mineola, New York
- [2] D. F. Walls Gerard J. Milburn: Quantum optics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [3] O. Castaños, R. Lemus, R. López-Peña: A New Approach to Obtain the Non-Condon Factors in Closed Form for Two One-Dimensional Harmonic Oscillators. Journal of Molecular Spectroscopy, 241 (2007) 51-60, ELSELVIER.
- [4] D. Schuch, K-Mand Chung, and H. Hartmann, J. Math. Phys. 24 (1983)1652;
D. Schuch, K-Mand Chung, and H. Hartmann, J. Math. Phys. 25 (1984) 3086;
D. Schuch D and K-Mand Chung, Int. J. Quantum Chem. 29 (1986) 1561.
- [5] D. Schuch 2011 Latinamerican School of Physics: XL ELAF AIP Conf.Proc.1334 (2011) 291-340 (and references there in).
- [6] D. Schuch, J. Math. Phys. 48 (2007), 122701;
D. Schuch, J. of Phys.: Conference Series 380 (2012) 012009.

Conclusiones

En la tesis se ha realizado un estudio sobre el comportamiento de un oscilador paramétrico en mecánica clásica y en mecánica cuántica. En la descripción clásica encontramos que las soluciones de la ecuación de Newton del oscilador paramétrico se relacionan con soluciones de la ecuación de Ermakov vía el invariante de Ermakov. Se demostró que las soluciones de la ecuación de Ermakov permiten también conocer soluciones de la ecuación de Riccati, por medio de una transformación compleja (ver figura de abajo). Adicionalmente, se determinó la transformación que relaciona a la ecuación de Riccati con las soluciones de la ecuación compleja de Newton. Esto se resume en la figura siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 \dot{z} + z^2 + \omega^2(t) = 0 & \xleftrightarrow{z = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}} & \ddot{\lambda} + \omega^2(t)\lambda = 0 \\
 z = \frac{\dot{\rho}}{\rho} \pm \frac{i}{\rho^2} & \uparrow & \downarrow \Re\{\lambda\} \\
 \ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{\rho^3} & \xleftrightarrow{I} & \ddot{x} + \omega^2(t)x = 0
 \end{array}$$

Por otra parte, mostramos que en la formulación Hamiltoniana el invariante de Ermakov

$$I(q, p; t) = \frac{1}{2m} \left[(\rho(t)p - m\dot{\rho}(t)q)^2 + \left(\frac{mq}{\rho^2(t)} \right)^2 \right],$$

permite encontrar nuevas coordenadas canónicas del tipo ángulo acción, las cuales dan lugar a ecuaciones de movimiento cuya solución es trivial. Por lo tanto, lo anterior muestra que para encontrar la dinámica del oscilador paramétrico basta con conocer las soluciones de la ecuación no-lineal de Ermakov o las soluciones de la ecuación de Riccati. Esto establece una correspondencia entre ecuaciones diferenciales no-lineales con ecuaciones diferenciales lineales que permite tener un laboratorio de prueba de métodos para resolver ecuaciones diferenciales no-lineales.

Para la parte cuántica, obtuvimos que la evolución de un paquete gaussiano, en el esquema de Schrödinger está determinada por soluciones de la ecuación de Newton y soluciones de la ecuación de Riccati. Posteriormente con las relaciones encontradas en la teoría de ecuaciones diferenciales desarrolladas en el capítulo primero, se obtuvo que la dinámica del paquete gaussiano también puede ser determinada por medio de las soluciones de la ecuación de Ermakov. En el esquema de Heisenberg se estableció que el operador de Ermakov

$$\hat{I} = \frac{1}{2m\hbar} \left[(\rho(t)\hat{p} - m\dot{\rho}(t)\hat{q})^2 + \left(\frac{m\hat{q}}{\rho^2(t)} \right)^2 \right],$$

puede ser factorizado en términos de operadores de creación y aniquilación, que permiten definir estados de Fock, que son además estados solución de la ecuación de Schrödinger del oscilador paramétrico. Se mostró también cómo construir estados coherentes generalizados del sistema, concluyéndose que la dinámica está determinada por las soluciones de la ecuación de Ermakov. Sin embargo, se encontró que en el caso cuántico las soluciones de la ecuación de Ermakov tienen un significado físico relevante, pues éstas son directamente proporcionales a la varianza en posición; $\sigma_q^2(t)$ satisface la ecuación de Ermakov independientemente de la dependencia temporal de la frecuencia del oscilador paramétrico. Determinamos la varianza en momento y la función de correlación por medio de las soluciones de la ecuación de Ermakov y su primera derivada, esto es,

$$\begin{aligned}\sigma_q^2(t) &= \frac{\hbar}{2m}\rho(t), \\ \sigma_p^2(t) &= \frac{m\hbar}{2}\left(\dot{\rho}^2(t) + \frac{1}{\rho^2(t)}\right), \\ \sigma_{qp}(t) &= \frac{\hbar}{2}\rho(t)\dot{\rho}(t).\end{aligned}$$

Además, las expresiones anteriores permiten expresar al invariante de Ermakov de forma más elegante, esto es, mediante la matriz de covarianza Σ , y el invariante de Poincare I_p ; encontramos que

$$I = \frac{I_p}{\hbar^2}(\langle q \rangle_t, \langle p \rangle_t) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \langle q \rangle_t \\ \langle p \rangle_t \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

y entonces el correspondiente operador de Ermakov se escribe

$$\hat{I} = \frac{I_p}{\hbar^2}(\hat{q}, \hat{p}) \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Se está estudiando cómo extender estos resultados para sistemas Hamiltonianos con más grados de libertad y otros tipos de interacciones, en particular si tiene asociado un operador invariante cuadrático similar al invariante de Ermakov.

Se construyó el propagador en términos de $\rho(t)$, $\dot{\rho}(t)$ y la fase $\phi(t)$, obteniéndose una familia infinita de propagadores equivalentes, esto es, por cada solución de la ecuación de Ermakov con diferente condición inicial existe un propagador.

Posteriormente se calculó la cuasi-distribución de probabilidad de Wigner en el espacio fase del oscilador paramétrico, encontrando que para el estado coherente generalizado toma la forma

$$W(q, p; t) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}I(q - \langle q \rangle_t, p - \langle p \rangle_t; t)\right\},$$

mientras que para los estado de Fock se obtiene

$$W_n(q, p; t) = \frac{(-1)^n}{\pi\hbar} e^{-\frac{2}{\hbar}I(q, p; t)} L_n\left(\frac{4}{\hbar}I(q, p; t)\right).$$

Por lo tanto, la función de Wigner está completamente definida por medio del invariante de Ermakov, que además define la forma de la distribución. En general, se demostró que el invariante de Ermakov define elipses en el espacio fase, que se encuentran rotando, y cambiando el tamaño de sus ejes mayor y menor.

Mediante la formulación hidrodinámica de la mecánica cuántica para el oscilador paramétrico, se obtiene de forma directa que si la distribución inicial es una distribución gaussiana; entonces, el centro de la distribución obedece las ecuaciones clásicas de movimiento y la varianza obedece la ecuación no-lineal de Ermakov. Adicionalmente, encontramos que la evolución del paquete gaussiano está determinada por medio de la ecuaciones clásicas de movimiento y la ecuación no-lineal de Riccati; esto se logra definiendo una velocidad compleja que será estudiada en trabajos futuros.

Es importante mencionar que la teoría del invariante de Ermakov y la ecuación de Riccati que desarrollamos para el oscilador paramétrico es aplicable a sistemas estacionarios con potenciales dispersivos si preservamos el carácter Hermítico del Hamiltoniano o puede usarse para estados ligados si se utiliza una formulación de la mecánica cuántica con Hamiltonianos no-Hermíticos, así en las ecuaciones intercambiamos la variable tiempo por la variable posición, (ver figura), obteniéndose una relación entre las ecuaciones de Hill, de Milne y de Riccati.

$$\begin{array}{ccc}
 & \eta'' + k^2(q)\eta = \frac{1}{\eta^3} & \\
 \swarrow I & & \nwarrow I \\
 z' + z^2 + k^2(q) = 0 & \xleftrightarrow[\psi = e^{\int z(q')dq'}]{z = \frac{\psi'}{\psi}} & \psi'' + k^2(q)\psi = 0
 \end{array}$$

Lo anterior nos hace preguntarnos: ¿Es posible aplicar esta teoría en sistemas con condiciones a la frontera?

En general la dinámica de los sistemas de oscilador paramétrico tanto para los sistemas clásicos como para los sistemas cuánticos se obtiene de las soluciones de las ecuaciones de Newton, la de Ermakov, o la de Riccati. Sin embargo, es importante mencionar que en general resolver las ecuaciones no-lineales de Ermakov o de Riccati no es trivial debido a que son ecuaciones no-lineales en muchos casos llevan a sistemas dinámicos caóticos. Ahora, como ya mencionamos, conocer las soluciones de las ecuaciones clásicas permite conocer las soluciones de la ecuación de Ermakov, que en el caso cuántico permite encontrar de forma directa las varianzas y la función de correlación, construir el invariante de Ermakov y determinar el comportamiento de la función de Wigner. Por lo tanto, construir las soluciones de la ecuación de Ermakov nos simplifica la cantidad de cálculos que se tienen que hacer para obtener la información física del sistema.

Finalmente, en el último capítulo aplicamos la teoría desarrollada en sistemas cuánticos de oscilador paramétrico, con cambio de frecuencia de: ω_0 a ω . Usando las soluciones de la ecuación no-lineal de Ermakov, se encontró la dinámica del estado coherente del oscilador armónico con frecuencia ω_0 . Obtuvimos que los valores esperados siguen las trayectorias clásicas, y adicionalmente que dependiendo de la forma en las que se realice el cambio de frecuencia se relaciona con como evolucionan las varianzas y la función de correlación. Esto es, para un cambio repentino en la frecuencia encontramos que la varianza en posición y momento oscilan con una amplitud mayor en comparación a las amplitudes que se obtienen para los cambios lineal y no-polinomial,

de hecho el cambio polinomial es donde tenemos la amplitud más pequeña. Por otra parte encontramos que los sistemas después de realizar el cambio de frecuencia pueden presentar el fenómeno de compresión en sus varianzas.

En trabajo futuro se estudiará, con estos métodos, la dinámica del movimiento de una partícula cargada en una trampa de Paul, descrita en el Apéndice C, y en la que su comportamiento está determinado por un oscilador paramétrico. Creemos que es posible visualizar el comportamiento de la partícula, mediante la correspondiente función de Wigner, en forma más detallada que otros procedimientos y que pueda ser verificada experimentalmente. Esta búsqueda de resultados entre el invariante de Ermakov y las propiedades físicas de los sistemas pretende ser extendida a sistemas que incluyen disipación, vía la ecuación no-lineal de Schrödinger. Ésta admite la construcción de un invariante de Ermakov, y por lo tanto, todos los resultados obtenidos en la tesis son aplicables.

Partícula cargada bajo la acción de un campo electromagnético dependiente del tiempo con simetría axial

La aplicación que motivó a Lewis estudiar el oscilador paramétrico fue resolver el problema del movimiento de una partícula en un campo electromagnético dependiente del tiempo con simetría axial. Sea entonces una partícula de masa m y carga e que se mueve en un campo electromagnético con simetría axial, definido por el potencial vectorial

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2}B(t)\vec{k} \times \vec{r} \quad (\text{A.1})$$

y el potencial escalar

$$\phi(x, y, t) = \frac{e}{2mc^2}\eta(t)(x^2 + y^2), \quad (\text{A.2})$$

donde \vec{r} es el vector posición, \vec{k} es el vector unidad a lo largo del eje de simetría, que sin pérdida de generalidad elegimos el eje z . Denotamos por x y y a las coordenadas cartesianas perpendiculares al eje de simetría. $B(t)$ y $\eta(t)$ son funciones arbitrarias continuas del tiempo y c denota la velocidad de la luz. Además, el potencial $\phi(x, y, t)$ corresponde a una densidad de carga uniforme dependiente del tiempo dada por

$$\sigma(t) = -\frac{e}{2\pi mc^2}\eta(t). \quad (\text{A.3})$$

El campo eléctrico está descrito por

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\phi(x, y, t) + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}A(\vec{r}, t), \\ &= -\frac{e}{mc^2}\eta(t)(x\vec{i} + y\vec{j}) - \frac{1}{2c}\frac{dB(t)}{dt}\vec{k} \times \vec{r}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

y el campo magnético

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) = B(t)\vec{k}, \quad (\text{A.5})$$

donde \vec{i} y \vec{j} denotan vectores unitarios a lo largo de los ejes positivos x y y , tal que $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$. Debido a la simetría axial, el movimiento de la partícula está confinado al plano perpendicular al eje de simetría. Así, mediante la fuerza de Lorentz obtenemos las ecuaciones de movimiento de la partícula cargada

$$\ddot{x} = -\frac{e^2}{m^2 c^2} \eta(t)x + \frac{e}{2mc} \dot{B}(t)y + \frac{e}{mc} B(t)\dot{y}, \quad (\text{A.6})$$

$$\ddot{y} = -\frac{e^2}{m^2 c^2} \eta(t)y - \frac{e}{2mc} \dot{B}(t)x - \frac{e}{mc} B(t)\dot{x}. \quad (\text{A.7})$$

Este sistema de ecuaciones lo podemos relacionar con el oscilador paramétrico si consideramos $\xi(t) = x(t) + iy(t)$, entonces

$$\ddot{\xi} + \frac{ie}{mc} B(t)\dot{\xi} + \left(\frac{e^2}{m^2 c^2} \eta(t) + \frac{ie}{2mc} \dot{B}(t) \right) \xi = 0. \quad (\text{A.8})$$

Por último, proponemos la solución

$$\xi(t) = \zeta(t) \exp \left\{ -\frac{ie}{2mc} \int^t B(\tau) d\tau \right\} \quad (\text{A.9})$$

con lo cual obtenemos que $\zeta(t)$ debe satisfacer la ecuación del oscilador paramétrico

$$\ddot{\zeta} + \omega^2(t)\zeta = 0, \quad (\text{A.10})$$

con

$$\omega^2(t) = \frac{e^2}{m^2 c^2} \left(\frac{B^2(t)}{4} + \eta(t) \right). \quad (\text{A.11})$$

Por lo tanto, podemos formar un sistema de Ermakov y así tener la posibilidad de resolver la ecuación de Ermakov, la ecuación de Riccati o la ecuación del oscilador paramétrico, la que sea más conveniente.

Cálculo de operadores invariantes lineales

Como hemos mostrado en el Capítulo 2, si conocemos los operadores invariantes lineales \hat{Q} y \hat{P} del problema podemos determinar la solución de la ecuación de Ermakov que además se expresan en términos de la varianza de la posición, la varianza del momento y la función de correlación al tiempo $t = 0$. Por lo tanto, en esta sección obtenemos los operadores invariantes lineales de los sistemas que estudiamos en el trabajo.

Los operadores invariantes para el oscilador paramétrico se encuentran determinados por

$$\begin{pmatrix} \hat{Q}(t) \\ \hat{P}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & \beta_1(t) \\ \lambda_2(t) & \beta_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{q} \\ \hat{p} \end{pmatrix},$$

donde las funciones satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= m\omega^2(t)\beta(t), \\ \dot{\beta}(t) &= -\frac{1}{m}\lambda(t), \end{aligned}$$

que es equivalente a la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{\beta}(t) + \omega^2(t)\beta(t) = 0, \tag{B.1}$$

que corresponde a la ecuación de Newton del oscilador paramétrico. En el Capítulo 1, encontramos las soluciones de la ecuación de Newton para los casos que se muestran en la Tabla B.1, donde C_1 y C_2 son constantes de integración que se determinan de las condiciones iniciales.

Dadas las soluciones de las ecuaciones clásicas de movimiento, se determina los operadores invariantes lineales, y para cada caso se tiene

Frecuencia $\omega^2(t)$	Solución de la ecuación de Newton $\beta(t)$
ω_0^2	$C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$
$\omega_0^2(\nu t + 1)$	$C_1 Ai \left(- \left[\frac{\omega}{\nu} \right]^{2/3} (\nu t + 1) \right) + C_2 Bi \left(- \left[\frac{\omega}{\nu} \right]^{2/3} (\nu t + 1) \right)$
$\omega_0^2(\nu^2 t^2 + \mu t + 1)$	$C_1 D_{\frac{i\omega_0}{2\nu} \left(1 - \frac{\mu^2}{4\nu^2} \right) - \frac{1}{2}} \left(\sqrt{2i\omega_0\nu} \left(t + \frac{\mu}{2\nu^2} \right) \right)$ $+ C_2 D_{-\frac{i\omega_0}{2\nu} \left(1 - \frac{\mu^2}{4\nu^2} \right) - \frac{1}{2}} \left(i\sqrt{2i\omega_0\nu} \left(t + \frac{\mu}{2\nu^2} \right) \right)$
$\omega_0^2 + \frac{\omega_1^2}{1+e^{-2kt}}$	$C_1 {}_2F_1 \left(\frac{i\omega_0}{2k} + i\frac{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}}{2k}, \frac{i\omega_0}{2k} - i\frac{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}}{2k}; 1 + \frac{i\omega_0}{k}; -e^{2kt} \right)$ $+ C_2 {}_2F_1 \left(-\frac{i\omega_0}{2k} - i\frac{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}}{2k}, -\frac{i\omega_0}{2k} + i\frac{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}}{2k}; 1 - \frac{i\omega_0}{k}; -e^{2kt} \right)$

Cuadro B.1: Soluciones de la ecuación de Newton para el oscilador paramétrico, donde C_1 y C_2 son constantes de integración.

1. Oscilador paramétrico con frecuencia constante ω_0

$$\beta_1(t) = C_{11} \cos \omega_0 t + C_{12} \sin \omega_0 t, \quad (\text{B.2})$$

$$\lambda_1(t) = m\omega_0 [C_{11} \sin \omega_0 t - C_{12} \cos \omega_0 t], \quad (\text{B.3})$$

$$\beta_2(t) = C_{21} \cos \omega_0 t + C_{22} \sin \omega_0 t, \quad (\text{B.4})$$

$$\lambda_2(t) = m\omega_0 [C_{21} \sin \omega_0 t - C_{22} \cos \omega_0 t], \quad (\text{B.5})$$

donde las constantes de integración están dadas por

$$C_{11} = \beta_1(t_0) \cos \omega_0 t_0 + \frac{\lambda_1(t_0)}{m\omega_0} \sin \omega_0 t_0,$$

$$C_{12} = \beta_1(t_0) \sin \omega_0 t_0 - \frac{\lambda_1(t_0)}{m\omega_0} \cos \omega_0 t_0,$$

$$C_{21} = \beta_2(t_0) \cos \omega_0 t_0 + \frac{\lambda_2(t_0)}{m\omega_0} \sin \omega_0 t_0,$$

$$C_{22} = \beta_2(t_0) \sin \omega_0 t_0 - \frac{\lambda_2(t_0)}{m\omega_0} \cos \omega_0 t_0.$$

2. Oscilador paramétrico con frecuencia $\omega^2(\nu t + 1)$

$$\beta_1(t) = C_{11}Ai(\tau) + C_{12}Bi(\tau) \quad (\text{B.6})$$

$$\lambda_1(t) = m\omega_0^{2/3}\nu^{1/3} [C_{11}Ai'(\tau) + C_{12}Bi'(\tau)], \quad (\text{B.7})$$

$$\beta_2(t) = C_{21}Ai(\tau) + C_{22}Bi(\tau), \quad (\text{B.8})$$

$$\lambda_2(t) = m\omega_0^{2/3}\nu^{1/3} [C_{11}Ai'(\tau) + C_{12}Bi'(\tau)], \quad (\text{B.9})$$

donde para simplificar las expresiones definimos $\tau = -\left(\frac{\omega}{\nu}\right)^{2/3}(\nu t + 1)$, y las constantes de integración están dadas por

$$C_{11} = \frac{1}{\pi} \left(\beta_1(t_0)Bi'(\tau_0) - \frac{\lambda_1(t_0)}{m(\omega_0\nu)^{2/3}}Bi(\tau_0) \right),$$

$$C_{12} = \frac{1}{\pi} \left(\beta_1(t_0)Ai'(\tau_0) - \frac{\lambda_1(t_0)}{m(\omega_0\nu)^{2/3}}Ai(\tau_0) \right),$$

$$C_{21} = \frac{1}{\pi} \left(\beta_2(t_0)Bi'(\tau_0) - \frac{\lambda_2(t_0)}{m(\omega_0\nu)^{2/3}}Bi(\tau_0) \right),$$

$$C_{22} = \frac{1}{\pi} \left(\beta_2(t_0)Ai'(\tau_0) - \frac{\lambda_2(t_0)}{m(\omega_0\nu)^{2/3}}Ai(\tau_0) \right),$$

con $\tau_0 = \tau(t_0)$.

3. Oscilador paramétrico con frecuencia $\omega_0^2(\nu^2 t^2 + \mu t + 1)$

$$\beta_1(t) = C_{11}D_{s-\frac{1}{2}}(\tau) + C_{12}D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau), \quad (\text{B.10})$$

$$\lambda_1(t) = -m\sqrt{2i\omega_0\nu} \left[C_{11}D'_{s-\frac{1}{2}}(\tau) + iC_{12}D'_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau) \right], \quad (\text{B.11})$$

$$\beta_2(t) = C_{21}D_{s-\frac{1}{2}}(\tau) + C_{22}D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau), \quad (\text{B.12})$$

$$\lambda_2(t) = -m\sqrt{2i\omega_0\nu} \left[C_{21}D'_{s-\frac{1}{2}}(\tau) + iC_{22}D'_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau) \right], \quad (\text{B.13})$$

donde $s = \frac{i\omega_0}{2\nu} \left(1 - \frac{\mu^2}{4\nu^2}\right)$, y las constantes de integración están determinadas por

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{\beta_1(t_0) i D'_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0) + \frac{\lambda_1(t_0)}{m\sqrt{2i\omega_0\nu}} D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0)}{W \left\{ D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0), D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0) \right\}}, \\
C_{12} &= -\frac{\beta_1(t_0) D'_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0) + \frac{\lambda_1(t_0)}{m\sqrt{2i\omega_0\nu}} D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0)}{W \left\{ D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0), D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0) \right\}}, \\
C_{21} &= \frac{\beta_2(t_0) i D'_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0) + \frac{\lambda_2(t_0)}{m\sqrt{2i\omega_0\nu}} D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0)}{W \left\{ D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0), D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0) \right\}}, \\
C_{22} &= -\frac{\beta_2(t_0) D'_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0) + \frac{\lambda_2(t_0)}{m\sqrt{2i\omega_0\nu}} D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0)}{W \left\{ D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0), D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0) \right\}},
\end{aligned}$$

con $\tau_0 = \tau(t = t_0)$ y $W \left\{ D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0), D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0) \right\}$ el wronskiano entre $D_{s-\frac{1}{2}}(\tau_0)$ y $D_{-s-\frac{1}{2}}(i\tau_0)$.

4. Oscilador paramétrico con frecuencia $\omega_0^2 + \frac{\omega_1^2}{1+e^{-2kt}}$

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= -mC_{11}e^{i\omega_0 t} \left(i\omega_2 F_1(a, b; c; \tau) - 2ke^{2kt} F'(a, b; c; \tau) \right) \\
&\quad + mC_{21}e^{-i\omega_0 t} \left(i\omega_2 F_1(a^*, b^*; c^*; \tau) + 2ke^{2kt} F'(a^*, b^*; c^*; \tau) \right), \quad (\text{B.14})
\end{aligned}$$

$$\beta_1(t) = C_{11}e^{i\omega_0 t} {}_2F_1(a, b; c; \tau) + C_{21}e^{-i\omega_0 t} {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau), \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2(t) &= -mC_{12}e^{i\omega_0 t} \left(i\omega_2 F_1(a, b; c; \tau) - 2ke^{2kt} F'(a, b; c; \tau) \right) \\
&\quad + mC_{22}e^{-i\omega_0 t} \left(i\omega_2 F_1(a^*, b^*; c^*; \tau) + 2ke^{2kt} F'(a^*, b^*; c^*; \tau) \right), \quad (\text{B.16})
\end{aligned}$$

$$\beta_2(t) = C_{12}e^{i\omega_0 t} {}_2F_1(a, b; c; \tau) + C_{22}e^{-i\omega_0 t} {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau), \quad (\text{B.17})$$

donde las constantes de integración están dadas por

$$C_{11} = \left[\beta_1(t_0)e^{-i\omega_0 t_0} \left(i\omega_0 {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau_0) + 2ke^{2kt_0} {}_2F_1'(a^*, b^*; c^*; \tau_0) \right) - m\lambda_1(t_0)e^{-i\omega_0 t_0} {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau_0) \right] \times \left[2i\omega_0 {}_2F_1(a, b; c; \tau_0) {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau_0) + 2ke^{2kt_0} W \{ {}_2F_1(a, b; c; \tau_0), {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau_0) \} \right]^{-1},$$

$$C_{12} = \left[\beta_1(t_0)e^{i\omega_0 t_0} \left(i\omega_0 {}_2F_1(a, b; c; \tau_0) - 2ke^{2kt_0} {}_2F_1'(a, b; c; \tau_0) \right) + m\lambda_1(t_0)e^{i\omega_0 t_0} {}_2F_1(a, b; c; \tau_0) \right] \times \left[2i\omega_0 {}_2F_1(a, b; c; \tau_0) {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau_0) + 2ke^{2kt_0} W \{ {}_2F_1(a, b; c; \tau_0), {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau_0) \} \right]^{-1},$$

$$C_{21} = \left[\beta_2(t_0)e^{-i\omega_0 t_0} \left(i\omega_0 {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau_0) + 2ke^{2kt_0} {}_2F_1'(a^*, b^*; c^*; \tau_0) \right) - m\lambda_2(t_0)e^{-i\omega_0 t_0} {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau_0) \right] \times \left[2i\omega_0 {}_2F_1(a, b; c; \tau_0) {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau_0) + 2ke^{2kt_0} W \{ {}_2F_1(a, b; c; \tau_0), {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau_0) \} \right]^{-1},$$

$$C_{22} = \left[\beta_2(t_0)e^{i\omega_0 t_0} \left(i\omega_0 {}_2F_1(a, b; c; \tau_0) - 2ke^{2kt_0} {}_2F_1'(a, b; c; \tau_0) \right) + m\lambda_2(t_0)e^{i\omega_0 t_0} {}_2F_1(a, b; c; \tau_0) \right] \times \left[2i\omega_0 {}_2F_1(a, b; c; \tau_0) {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau_0) + 2ke^{2kt_0} W \{ {}_2F_1(a, b; c; \tau_0), {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau_0) \} \right]^{-1},$$

con $W \{ {}_2F_1(a, b; c; \tau_0), {}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau_0) \}$ define el wronskiano entre ${}_2F_1(a, b; c; \tau_0)$ y ${}_2F_1(a^*, b^*; c^*; \tau_0)$. Además, usamos que

$$a = \frac{i\omega_0}{2k} + i\frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_0^2}}{2k}, \quad b = \frac{i\omega_0}{2k} - i\frac{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_0^2}}{2k}, \quad c = 1 + \frac{i\omega_0}{k},$$

$\tau = -e^{2kt}$ y $\tau_0 = \tau(t_0)$. Para este último caso hemos dejado las condiciones iniciales en forma arbitraria.

Trampa de Paul

En este Apéndice se plantea el problema del movimiento de un ión confinado en una trampa. Atrapar un ión en una trampa por un período largo de tiempo ofrece numerosas posibilidades en la espectroscopía láser. Además, un ión atrapado representa un sistema único donde podemos corroborar conceptos fundamentales de mecánica cuántica como por ejemplo la dinámica del ión o los llamados saltos cuánticos que han sido un tema central en el desarrollo de la mecánica cuántica. Esto hace que los sistemas de un solo ión sean de gran interés tanto en las áreas experimentales como en las áreas teóricas de la física.

C.1. Trampas de iones

A diferencia de los átomos neutros, los iones pueden ser fácilmente influenciados por el campo electromagnético debido a que están cargados. Entonces, si deseamos que una partícula cargada se encuentra ligada a un eje o coordenadas espaciales, ésta debe estar sujeta a una fuerza que decrece linealmente con la distancia. En otras palabras, la partícula se debe mover en un potencial parabólico,

$$\Phi \sim ax^2 + by^2 + cz^2. \quad (\text{C.1})$$

La herramienta apropiada para atrapar a las partículas cargadas es mediante campos multipolares eléctricos o magnéticos. Consideramos un campo eléctrico cuadrupolar, entonces el potencial es cuadrático en las coordenadas cartesianas.

$$\Phi = \Phi_0 (ax^2 + by^2 + cz^2), \quad (\text{C.2})$$

substituyendo este potencial en la condición de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$, encontramos que a , b y c deben satisfacer que

$$a + b + c = 0. \quad (\text{C.3})$$

Existen dos maneras simples de satisfacer esta condición:

1. Consideramos $a = 1$, $b = 0$ y $c = -1$, obtenemos un campo en dos dimensiones

$$\Psi = \Phi_0 (x^2 - z^2). \quad (\text{C.4})$$

2. Consideramos $a = 1$, $b = 1$ y $c = -2$ entonces obtenemos un campo en tres dimensiones

$$\Psi = \Phi_0 (x^2 + y^2 - 2z^2). \quad (\text{C.5})$$

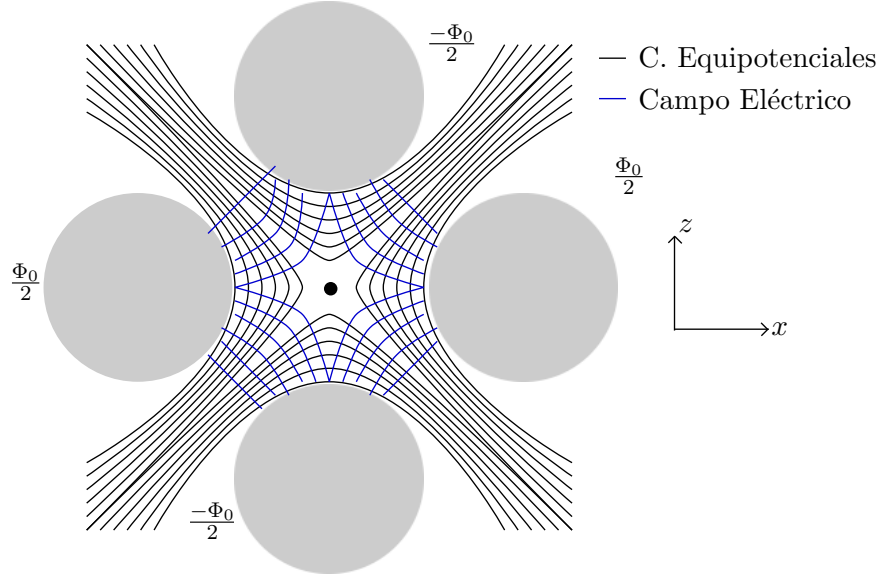


Figura C.1: Estructura donde los círculos representan los electrodos con potencial de $\pm\Phi_0/2$, a estas estructuras se les denomina filtros de masa, en las cuales es posible atrapar iones por intervalos cortos de tiempo.

La primera configuración puedes ser generada por cuatro electrodos cilíndricos (o también con electrodos hiperbólicos) alineados en la dirección y como se muestra en Fig. C.1. El potencial de los estectrodos es $\pm\Phi_0/2$, si se aplica un voltaje Φ_0 entre los pares de electrodos. Para esta primera configuración tenemos que el campo eléctrico es

$$E_x = -\Phi_0 x; \quad E_y = 0; \quad E_z = \Phi_0 z. \quad (\text{C.6})$$

Así, si inyectamos iones en la dirección y , entonces para este voltaje constante, los iones oscilaran armónicamente en la plano $x-y$ pero debido al cambio de signo del campo eléctrico, entonces la amplitud en la dirección z aumenta exponencialmente, por lo tanto la partícula choca con el electrodo.

Para la segunda configuración tridimensional, que se logra con dos electrodos hiperbólicos y un anillo hiperbólico como se muestra en la figura C.2, también tenemos el mismo problema al aplicar un potencial constante. Entonces el problema se resuelve aplicando un voltaje periódico. Si consideramos solamente el caso tridimensional, entonces usamos un potencial

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{U + V \cos(\omega t)}{r_0^2 + 2z_0^2} (x^2 + y^2 - 2z^2) \quad (\text{C.7})$$

donde U y V son las amplitudes de la corriente directa y alterna respectivamente, r_0 es el radio del anillo hiperbólico y $2z_0$ la distancia entre los electrodos hiperbólicos, ver figura C.2. Debido

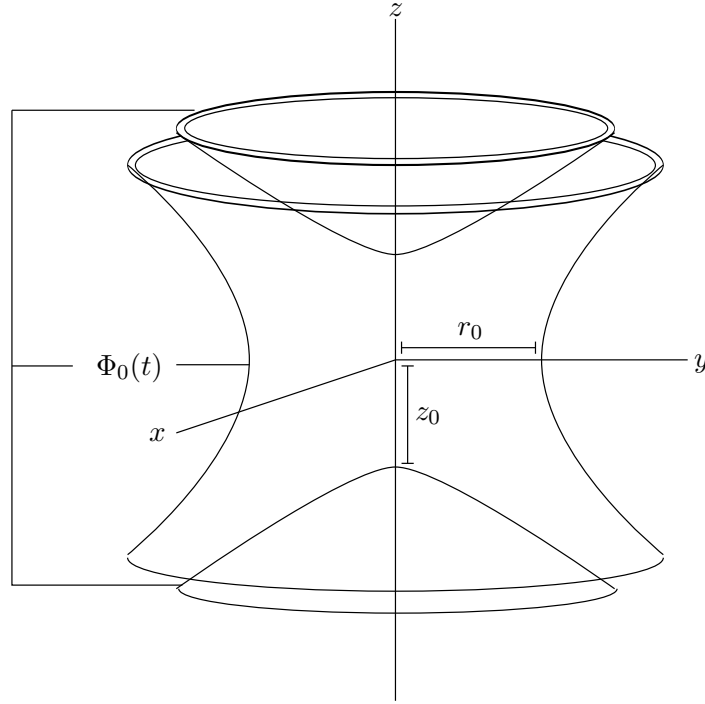


Figura C.2: Trampa de iones tridimensional, que consta de dos electrodos hiperbólicos y un anillo hiperbólico. Para mantener al ion confinado se le aplica un voltaje periódico $\Phi_0(t) = U + V \cos \omega t$.

al comportamiento periódico el signo de la fuerza eléctrica cambia y logra mantener al ion sin chocar con ningún electrodo por un período de tiempo más largo, en comparación con el voltaje constante.

A primera vista, se podría esperar que el término de la fuerza eléctrica dependiente del tiempo se cancele en un promedio temporal, pero esto solo sucede en campos homogéneo. Para campos inhomogéneos como el del cuadrupolo existen solo algunas zonas donde el promedio temporal de la fuerza sobre la partícula se cancela en consecuencia el ión queda confinado.

Para determinar estas zonas de estabilidad de la partícula escribimos la ecuación de movimiento clásica del ión en presencia del potencial (C.7) mediante la ecuación de movimiento:

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}, t), \quad (\text{C.8})$$

donde m y e son la masa y la carga del ión respectivamente. Substituyendo el potencial, en la ecuación de movimiento se tiene la ecuación diferencial

$$m\ddot{\vec{r}} + 2e\frac{U + V \cos(\omega t)}{r_0^2 + 2z_0^2}(x, y, -2z) = 0. \quad (\text{C.9})$$

Si hacemos el cambio de variable

$$\tau = \frac{\omega t}{2} \quad (\text{C.10})$$

y definimos

$$a = \frac{8eU}{m\omega^2(r_0^2 + 2z_0^2)}, \quad q = \frac{4eV}{m\omega^2(r_0^2 + 2z_0^2)} \quad (\text{C.11})$$

obtenemos las ecuaciones

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + [a + 2q \cos(2\tau)] x = 0, \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + [a + 2q \cos(2\tau)] y = 0, \quad (\text{C.13})$$

y

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} - 2[a + 2q \cos(2\tau)] z = 0. \quad (\text{C.14})$$

A esta clase de ecuaciones se les conoce como ecuación de Mathieu. Entonces, conociendo los puntos de estabilidad de la ecuación de Mathieu sabremos los puntos estables del ion en la trampa.

C.2. Ecuación de Mathieu.

La ecuación de Mathieu es una ecuación diferencial con coeficientes periódicos en el tiempo. Usando el teorema de Floquet [1], se muestra que la solución a la ecuación de Mathieu

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + [a - 2q \cos(2\tau)] x = 0, \quad (\text{C.15})$$

es de la forma

$$x(\tau) = Ae^{i\mu\tau}\phi(\tau) + Be^{-i\mu\tau}\phi(-\tau) \quad (\text{C.16})$$

donde A y B son constantes y

$$\phi(\tau) = \phi(\tau + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2in\tau} \quad (\text{C.17})$$

es una función periódica.

Entonces de las soluciones podemos notar que la estabilidad y la existencia de órbitas periódicas de las soluciones depende de μ . Si μ es real entonces el movimiento es estable, pues tenemos como resultado una órbita periódica. Sin embargo, si μ tiene una parte imaginaria la función $x(\tau)$ crece exponencialmente por lo tanto tenemos una solución inestable. Por lo tanto los parámetros a y q , que son proporcionales a los voltajes, determinan la estabilidad del movimiento.

Entonces, para determinar el orden de estabilidad de la ecuaciones de Mathieu, sustituimos la solución

$$x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(2n+\mu)\tau}, \quad (\text{C.18})$$

en la ecuación de Mathieu, obteniéndose

$$\sum_n \left\{ [a - (2n + \mu)^2] c_n e^{i(2n+\mu)\tau} - qc_n e^{i(2(n+1)+\mu)\tau} - qc_n e^{i(2(n-1)+\mu)\tau} \right\} = 0. \quad (\text{C.19})$$

Por lo tanto, para que se satisfaga la relación anterior se necesita que

$$[a - (2n + \mu)^2] c_n - q(c_{n-1} + c_{n+1}) = 0, \quad (\text{C.20})$$

es decir tenemos una relación de recurrencia para los coeficientes de la solución. La relación de recurrencia anterior se puede expresar como un sistema de ecuaciones lineales de dimensión infinita dado por:

$$\begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & -q & a - (-2 + \mu)^2 & -q & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \cdots & 0 & -q & a - \mu^2 & -q & 0 & \cdots & c_{-2} \\ \cdots & 0 & 0 & -q & a - (2 + \mu)^2 & -q & \cdots & c_{-1} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_0 \\ & & & & & & & c_1 \\ & & & & & & & c_2 \\ & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{C.21})$$

Además, para que el vector $\vec{c} = (\cdots, c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \cdots)$ no sea el vector trivial donde todas las entradas son cero, el determinante de la matriz debe ser cero, esto es

$$\begin{vmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & -q & a - (-2 + \mu)^2 & -q & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \cdots & 0 & -q & a - \mu^2 & -q & 0 & \cdots & \vdots \\ \cdots & 0 & 0 & -q & a - (2 + \mu)^2 & -q & \cdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & \ddots \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{C.22})$$

Por lo tanto, con el determinante anterior, conocido como determinante de Hill, obtenemos una ecuación característica para μ en términos de a y q . Es claro, que no es trivial evaluar este determinante, para valores a y q fijos, pues la matrix es de dimensión infinita. Sin embargo, en varios libros[2] [3] el determinante de Hill ha sido calculado de forma analítica y la condición para que el determinante sea cero se convierte en una ecuación altamente no lineal. En general debido a esta no linealidad de las ecuaciones, los exponentes característicos μ son obtenidos de forma numérica.

En Fig C.3 tenemos la gráfica de estabilidad para la trampa de Paul, en azul tenemos los valores de a y q para el cual la componente (x, y) es estable, mientras que en rojo tenemos los valores de a y b donde z es estable. Debido que en la trampa deseamos que tanto la solución $x(\tau) = y(\tau)$ como la solución $z(\tau)$ sean estables entonces debemos considerar los valores donde ambos diagramas se superponen.

Por lo tanto, conociendo el valor de μ , podemos hallar c_n y con ellos las soluciones de la ecuación de Mathieu [2]. Las soluciones linealmente independientes de la ecuación (C.15) se les denomina funciones de Mathieu y se representan como $ce_r(\tau, q)$ y $se_r(\tau, q)$ [4], por lo tanto la forma general de la solución es:

$$x(\tau) = c_1 ce_r(\tau, q) + c_2 se_r(\tau, q),$$

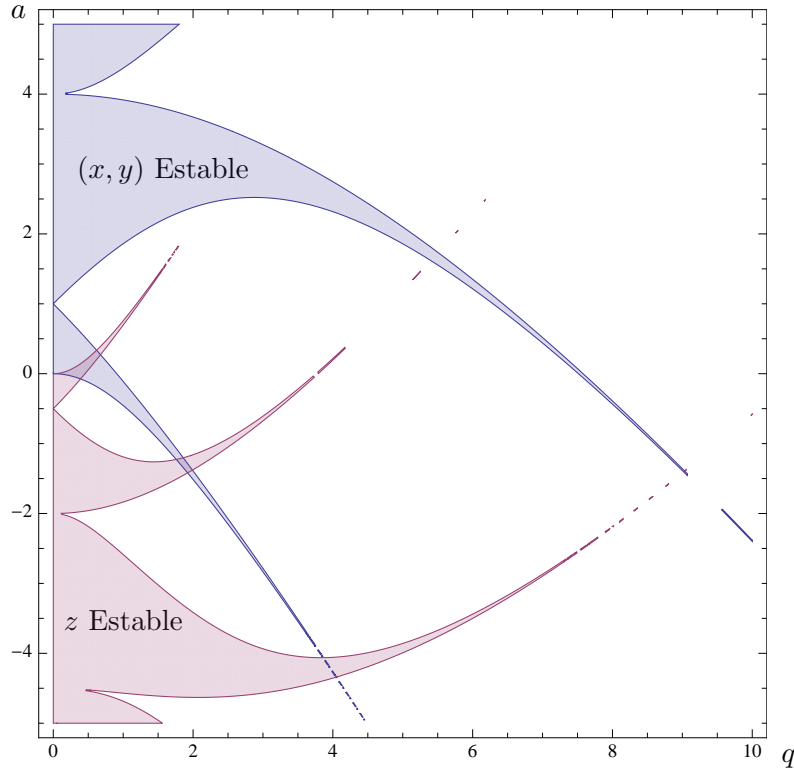


Figura C.3: Diagrama de estabilidad para la trampa de Paul, en coordenadas cilíndricas.

con c_1 y c_2 constantes que se determinan de las condiciones iniciales. Suponiendo que $x(\tau = \tau_0) = x_0$ y $x'(\tau = \tau_0) = v_{x_0}$, es fácil encontrar que

$$c_1 = \frac{x_0 se'_r(0, q) - v_{x_0} se_r(0, q)}{ce_r(0, q) se'_r(0, q) - se_r(0, q) ce'_r(0, q)} \quad (\text{C.23})$$

y

$$c_2 = \frac{v_0 ce_r(0, q) - x_0 ce'_r(0, q)}{ce_r(0, q) se'_r(0, q) - se_r(0, q) ce'_r(0, q)}. \quad (\text{C.24})$$

Para que la partícula se encuentre atrapada es necesario que las soluciones de la ecuación de movimiento sean estables. En la Fig. se encuentra la zona de estabilidad que comparten las coordenadas de movimiento $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$, que determinan los valores de a y q para los cuales la solución es estable.

Sin embargo, en la trampa de Paul los parámetros a y q , también se encuentran determinados por los valores de los potenciales U y V , pues tenemos que

$$a = \frac{2U}{V}q, \quad (\text{C.25})$$

A la línea que forma la ecuación (C.25) se le conoce como línea de operación. Por lo tanto, los valores de los parámetros a y q en la trampa estarán determinando la línea de operación y el

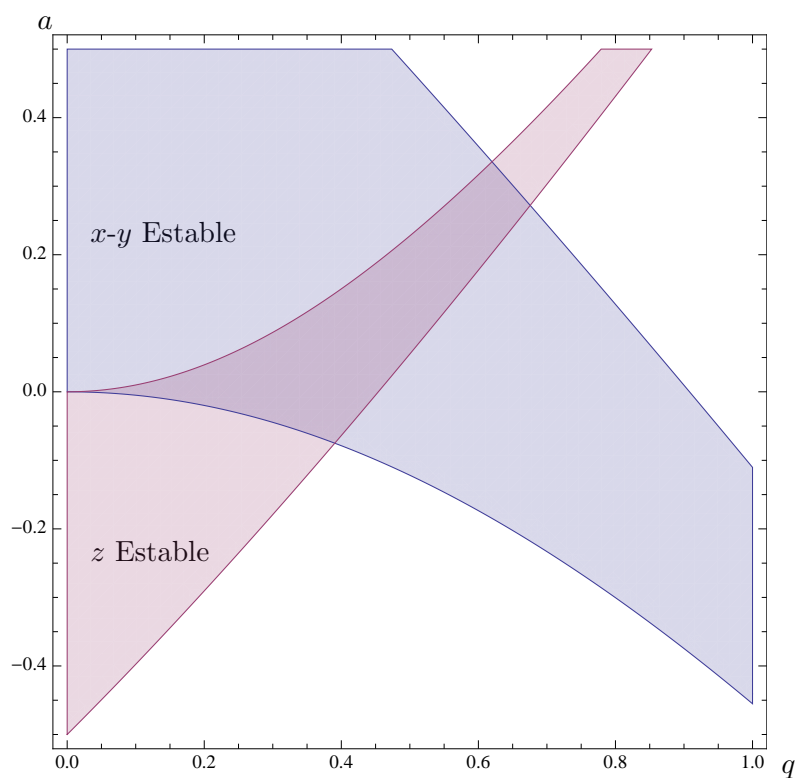


Figura C.4: Zona de estabilidad para la trampa de Paul.

diagrama de estabilidad. En Fig. C.5 se muestran diferentes líneas de operación definidas en (C.25).

Por lo tanto, la estabilidad de las soluciones en la trampa depende fuertemente de los valores de U y V .

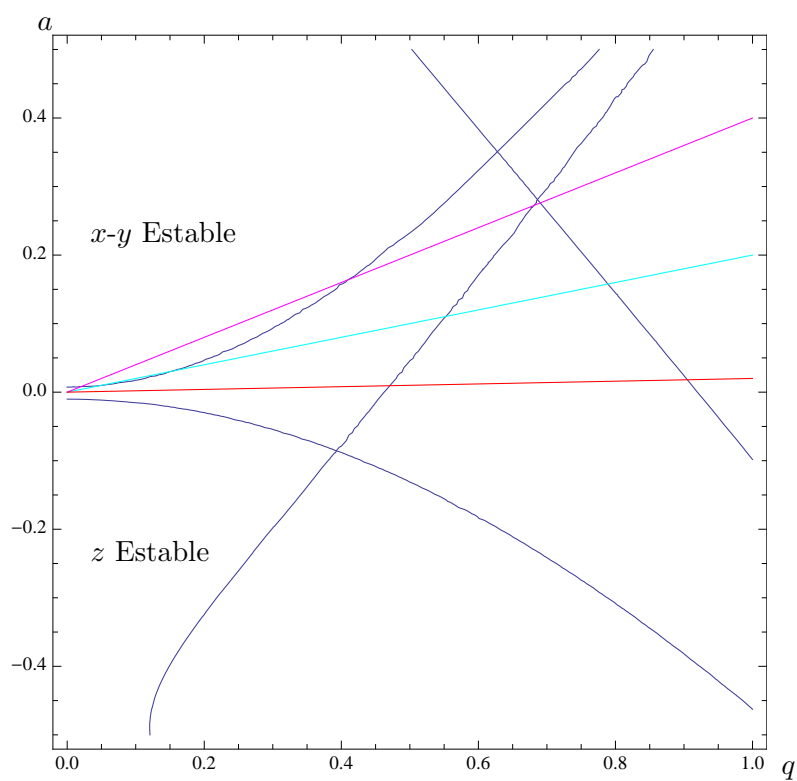


Figura C.5: Zona de estabilidad para la trampa de Paul y tres líneas de operación diferente.

Transiciones de probabilidad entre estados de Fock para el oscilador paramétrico

Se considera la probabilidad de transición entre estados de Fock, esto es, si el estado inicial del sistema es un estado de Fock del oscilador armónico con frecuencia ω_0 , denotado por $|n\rangle$ entonces desamos conocer cual es la probabilidad de que el estado evolucionado se convierta en un estado de Fock del oscilador armónico con frecuencia $\omega_1 = \omega_0\sqrt{\nu + 1}$, denotado por $|n'\rangle$.

Para encontrar la transición de probabilidad primero calculamos el traslape $\langle\langle n'|n\rangle\rangle_t$ siguiendo el procedimiento discutido en [3]: Calculamos el traslape $\langle\langle\beta|\alpha\rangle\rangle_t$,

$$\langle\langle\beta|\alpha\rangle\rangle_t = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2+|\beta|^2)}\langle\langle 0|e^{\beta^*\hat{a}}e^{\alpha\hat{A}^\dagger(t)}|0\rangle\rangle,$$

Para este sistema se tienen las constantes de movimiento

$$\begin{pmatrix} \hat{A}(t) \\ \hat{A}^\dagger(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v^* & u^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix}, \quad (\text{D.1})$$

donde por simplicidad definimos

$$u(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\omega}} \left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) + \sqrt{\omega}\rho(t) \right],$$

$$v(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\omega}} \left(\frac{1}{\rho(t)} - i\dot{\rho}(t) \right) - \sqrt{\omega}\rho(t) \right].$$

Además se puede mostrar que $|u(t)|^2 - |v(t)|^2 = 1$. Entonces con las relaciones anteriores y por medio de la relación de Glauber, $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$, se encuentra que:

$$e^{\beta^*\hat{a}}e^{\alpha\hat{A}^\dagger(t)} = \exp \left\{ \beta^*\hat{a}_\omega + \alpha\hat{A}^\dagger(t) + \frac{\beta^*\alpha}{2}u^* \right\}.$$

Usando nuevamente las relaciones (D.1) se encuentra que

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{1}{u(t)}\hat{A}(t) - \frac{v(t)}{u(t)}\hat{a}^\dagger, \\ \hat{A}^\dagger(t) &= \frac{1}{u(t)}\hat{a}^\dagger + \frac{v^*(t)}{u(t)}\hat{A}(t),\end{aligned}$$

por lo tanto obtenemos

$$e^{\beta^*\hat{a}}e^{\alpha\hat{A}^\dagger(t)} = \exp\left\{(\alpha - \beta^*v(t))\frac{\hat{a}^\dagger}{u(t)} + (\beta^* + \alpha v^*(t))\frac{\hat{A}(t)}{u(t)} + \frac{\beta^*\alpha}{2}u^*(t)\right\}.$$

Finalmente, empleando nuevamente la relación de Glauber, llegamos a

$$\begin{aligned}e^{\beta^*\hat{a}}e^{\alpha\hat{A}^\dagger(t)} &= \exp\left\{\frac{1}{u(t)}(\alpha - \beta^*v(t))\hat{a}^\dagger\right\} \exp\left\{\frac{1}{u(t)}(\beta^* + \alpha v^*(t))\hat{A}(t)\right\} \\ &\times \exp\left\{\frac{\beta^*\alpha}{2}u(t) + \frac{1}{2u(t)}(\alpha - \beta^*v(t))(\beta^* + \alpha v^*(t))\right\}.\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$e^{\frac{1}{u}(\beta^* + \alpha v^*)\hat{A}(t)}|0\rangle_t = |0\rangle_t, \quad \langle\langle 0|e^{\frac{1}{u}(\alpha - \beta^*v)\hat{a}^\dagger} = \langle\langle 0|,$$

encontramos que

$$\begin{aligned}\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t &= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}\langle\langle 0|0\rangle_t \exp\left\{\frac{\beta^*\alpha}{2}u + \frac{1}{2u}(\alpha - \beta^*v)(\beta^* + \alpha u)\right\} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}\langle\langle 0|0\rangle_t \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(-\frac{v^*}{u}\alpha^2 - \frac{2}{u}\alpha\beta^* + \frac{v}{u}\beta^{*2}\right)\right\} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}\langle\langle 0|0\rangle_t e^{-\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{c}}\mathbf{R}\mathbf{c}},\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{R} = \frac{1}{u}\begin{pmatrix} -v^* & -1 \\ -1 & v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta^* \end{pmatrix}.$$

Así de lo anterior obtenemos que

$$\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)}\langle\langle 0|0\rangle_t \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{*n'}\alpha^n}{n!n!} H_{nn'}^{\mathbf{R}}(\mathbf{0}).$$

Por otra parte sabemos que

$$\langle\langle\beta|\alpha\rangle_t = e^{-\frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{\beta^{*n'}\alpha^n}{\sqrt{n'n!}} \langle\langle n'|n\rangle_t,$$

entonces comparando las expresiones, es inmediato que el traslape de los estados de Fock resulta ser

$$\langle\langle n'|n\rangle_t = \langle\langle 0|0\rangle_t \frac{H_{nn'}^{\mathbf{R}}(\mathbf{0})}{\sqrt{n'n!}}. \quad (\text{D.2})$$

Además es fácil calcular de forma explícita a $\langle\langle 0|0\rangle\rangle$, esto es

$$\langle\langle 0|0\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{u(t)}},$$

por lo tanto llegamos a que

$$\langle\langle n'|n\rangle\rangle = \frac{1}{\sqrt{u(t)}} \frac{H_{nn'}^{\mathbf{R}}(\mathbf{0})}{\sqrt{n! n'}}.$$

con $H_{nn'}^{\mathbf{R}}(\mathbf{0})$ el polinomio de Hermite en dos dimensiones, ver [3], dado por:

$$H_{nn'}^{\mathbf{R}}(\mathbf{0}) = n!n'! \left(-\frac{v^*}{2u}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{v}{2u}\right)^{\frac{n'}{2}} \sum_{k=0}^{\min(n,n')} \frac{1}{(n-k)!(n'-k)!k!} \left(\frac{2}{i|v|}\right)^k H_{n-k}(0)H_{n'-k}(0).$$

Así la probabilidad de transición buscada es

$$|\langle\langle n'|n\rangle\rangle_{t>0}|^2 = \frac{1}{|u(t)|} \frac{|H_{nn'}^{\mathbf{R}}(\mathbf{0})|^2}{n! n'!}. \quad (\text{D.3})$$

Bibliografía

- [1] Ferdinand Verhulst: Nonlinear differential equations and dynamical system. Ed. Springer-Verlag, Berlin 2000.
- [2] E. T. Whittaker, G. N. Watson: A course of modern analysis., Cambridge university press, 1927.
- [3] Magnus, W. and Winkler, S. Hill's Equation. New York: Dover, 1979.
- [4] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, (1954)