



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

INSTITUTO DE GEOFÍSICA

INTERACCIÓN FLUIDO-SÓLIDO EN FORMAS AXISIMÉTRICAS CERRADAS MEDIANTE EL MÉTODO DE TREFFTZ

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA TIERRA

PRESENTA:

RODRIGO SALVADOR DE NEGRI LEIVA

TUTOR

Dr. Francisco José Sánchez Sesma, Instituto de Ingeniería, UNAM

JURADO

Dr. Alejandra Arciniega Ceballos, Instituto de Geofísica, UNAM

Presidente

Dr. Denis Legrand, Instituto de Geofísica, UNAM

Vocal

Dr. Francisco José Sánchez Sesma, Instituto de Ingeniería, UNAM

Secretario

Dr. Víctor Manuel Cruz Atienza, Instituto de Geofísica, UNAM

Suplente

Dra. Úrsula Iturrarán Viveros, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM

Suplente

MEXICO, D.F., ENERO DE 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicado a mi familia, que me enseñó la belleza de lo simple.

“ - Explicar, querer explicar hechos del espíritu mediante geodésicas es como querer extirpar una angustia con tenazas de dentista.”

Ernesto Sábato. *Abbadón el Exterminador.*

Resumen

Interacción fluido-sólido en formas axisimétricas cerradas mediante el método de Trefftz

por Rodrigo Salvador DE NEGRI LEIVA

Se implementó el método de Trefftz indirecto con una formulación de colocación para simular la propagación de ondas dentro y fuera formas axisimétricas cerradas. En este sistema fluido-sólido, el fluido es pensado como un magma confinado por un medio elástico homogéneo infinito que representa la roca que lo rodea. El propósito de este modelo de asociar el comportamiento de las ondas con las características mecánicas y geoméricas del sistema fluido-sólido acoplado. La fuente se asume centrada en el eje de simetría, radiando ondas esféricas de presión.

El campo refractado dentro del fluido y las ondas difractadas en el medio confinante se construyen como combinaciones lineales de soluciones particulares. Las soluciones particulares satisfacen las ecuaciones que gobiernan la región a la que se asocian, y son ajustadas mediante condiciones de frontera, formando familias de funciones T-completas (Trefftz completas). Dentro del fluido dichas soluciones son ondas esféricas estacionarias suaves en sus orígenes, satisfaciendo la ecuación de onda. En la región sólida elástica el campo es construido con monopolos y dipolos para las ondas P y dipolos esferoidales para las ondas SV, satisfaciendo la ecuación de Navier, y respetando la condición de irradiación de Sommerfeld. Para obtener los coeficientes indeterminados de las expansiones en base a las familias T-completas, se imponen condiciones de frontera en la interfaz fluido-sólido (esfuerzos transversales nulos, continuidad de esfuerzos normales y desplazamientos) que son satisfechas en el sentido de mínimos cuadrados. La solución es obtenida en el dominio de la frecuencia y la fuente temporal puede ser introducida usando análisis de Fourier.

Se reprodujo la solución analítica para una región fluida esférica con fuente centrada, validando el método para futuras aplicaciones. Se resolvieron casos para dos tipos de geometrías (esférica y cilíndrica) y cambiando la posición de la fuente (centrada y descentrada), comparándose los resultados en función de dichas características. Se exploraron diferentes casos en función de las propiedades de ambos medios.

Los modelos calculados resolvieron de forma satisfactoria la interacción fluido-sólido en cada caso, abriendo un campo de estudio en base al método implementado. Las soluciones encontradas complementan modelos que no toman en cuenta las implicancias geométricas y de la fuente a la hora de calcular las seales generadas. Pese a la simplicidad de la formulación, los resultados muestran una rica variedad de comportamientos. Gracias a la generalidad del planteamiento semianalítico empleado, puede ser útil para comprender la dinámica de los conductos volcánicos a partir de las señales observadas, así como un sinnúmero de aplicaciones en diversas áreas que involucren el fenómeno de la interacción fluido-sólido.

Agradecimientos

A México, por brindarme educación pública, gratuita y de calidad.

Al Conacyt, por entregarme una beca que me permitió desarrollar mi trabajo en paz durante mi estadía.

A la UNAM, en particular al Instituto de Geofísica y al Instituto de Ingeniería, por financiar los congresos en los que participé, y otorgarme un espacio de trabajo.

Al Dr. Francisco José Sánchez Sesma, por la mano que siempre me tendió, por su candidez y optimismo, por su abnegado trabajo, por enseñarme ciencia, filosofía, artes e idiomas. En definitiva, por ser un ejemplo de vida, un científico que dignifica la labor.

A los académicos que tuve el privilegio de conocer, en especial a los integrantes de mi jurado: Dra. Alejandra Arciniega, Dra. Úrsula Iturrarán, Dr. Denis Legrand, y Dr. Víctor Cruz, que enriquecieron tremendamente mi trabajo de tesis, desde el día en que no sabía siquiera en dónde acabaría.

A los funcionarios del Instituto de Geofísica por su imprescindible labor, en especial a la Lic. Araceli Chamán, quién me ayudó a la distancia a postular a la maestría en momentos de grandes incertidumbres, y luego respondió cada una de mis preguntas a lo largo de mis estudios.

A Altaír, Héctor y Raquel, quiénes nos recibieron con los brazos abiertos.

A Natalia, mi entrañable compañera, con quién he soñado, realizado, y visto crecer un proyecto que nunca hubiera imaginado.

Índice general

Resumen	III
Agradecimientos	IV
Contenidos	V
0. Introducción	1
1. El Método de Trefftz	3
1.1. El Método de Trefftz	3
1.2. El método de Trefftz actual	4
1.2.1. Método indirecto	5
1.2.2. Método de Colocación	6
1.2.3. Descomposición por medio de Valores Singulares (SVD) y factor de amortiguación de Marquardt	7
2. Interacción fluido-sólido en una forma cerrada axisimétrica arbitraria	11
2.1. Ecuaciones gobernantes	12
2.1.1. Región R_1 : fluido no viscoso	12
2.1.2. Región R_2 : sólido elástico	15
2.2. Extendiendo la familia T-completa	17
2.3. Condiciones de Frontera	23
2.3.1. Continuidad de desplazamientos normales	23
2.3.2. Continuidad de tracciones normales	24
2.4. Tracciones trasnversales nulas	24
2.5. Sistema de ecuaciones	25
3. Validación	27
4. Resultados	37
4.1. Esfera	38
4.2. Cilindro	39
4.2.1. Fuente centrada	39
4.2.2. Fuente en $z = 1.8 a$	40
5. Conclusiones	51

A. Fuente monopolar elástica	53
A.1. Desplazamientos en términos de funciones de onda generalizadas	53
A.2. Esfuerzos en términos de los elementos vectoriales	54
A.3. Transformación de Coordenadas	56
B. Pulso de Berlage	59
C. Software usado y breves acotaciones	61
Bibliografía	63

Capítulo 0

Introducción

Los métodos usados para calcular sismogramas sintéticos – es decir, generados a partir de modelos teóricos – son muy variados. Éstos se concentran mayormente en métodos de “Elementos Finitos”, gracias a la posibilidad de incluir medios heterogéneos de manera relativamente sencilla [16]. Sin embargo, estos métodos aunque son ideales para estudiar problemas altamente complejos, exigen un gran esfuerzo de cálculo. Los métodos de colocación se presentan como una alternativa que ha permitido obtener buenos resultados con bajo costo de cálculo. En particular, el método desarrollado por E. Trefftz en 1928 ha permitido desarrollar una rama de métodos de colocación que han podido ser aplicados a diversos problemas de interés en sismología [12] [3] [14], permitiendo incluso el desarrollo de métodos híbridos, tal como el método de Trefftz de Elementos Finitos para modelos elastoplásticos [10].

En la actualidad existe una considerable gama de métodos de colocación derivados del método de Trefftz para resolver ecuaciones diferenciales. En primer lugar, es posible clasificarlos como *Directos* e *Indirectos* [6] [5], considerándose la propuesta original de Trefftz como indirecta. Dentro de los métodos indirectos, se aproxima la solución del problema mediante la superposición de funciones que satisfacen la ecuación gobernante (soluciones particulares). De esta forma se determinan los parámetros (coeficientes) a través de las condiciones de frontera, generalmente por medio de la colocación, mínimos cuadrados o el método de Galerkin. En la formulación directa, en cambio, se obtiene una expresión residual para las ecuaciones gobernantes tomando las funciones que satisfacen dicha ecuación como funciones de peso, para luego plantear ecuaciones integrales por medio de las condiciones de frontera, discretizadas al igual que el método de elementos de frontera.

En el presente trabajo, se plantea una variante indirecta del método de Trefftz con una formulación de colocación [6]. Este se usa para resolver el problema de la interacción de una inclusión fluida en un medio elástico homogéneo, la cual es excitada por una fuente esférica en su interior. Se asume que la forma de la inclusión es simétrica con respecto al eje vertical, y que la

fuente explosiva está sobre el eje de simetría. Esto permite plantear una expansión de funciones azimutalmente simétricas, más sencilla que otras familias de funciones usadas para resolver problemas en tres dimensiones [13]. Mediante el estudio de este problema, se busca abrir un campo de aplicaciones del método de Trefftz que no ha sido explorado, validando así su uso para la comprensión de fenómenos axisimétricos de todo tipo.

La modelación de la interacción de inclusiones ¹ fluidas en un sólido elástico ha sido de interés en diversas áreas de las ciencias de la Tierra. Se presenta en una amplia gama de fenómenos naturales, como puede ser el fenómeno de la fuente sísmica relacionada con la generación de señales en volcanes [15], hasta la modelación considerando la topografía del mismo [8]. Con este objetivo, se hace uso de la solución analítica de una inclusión fluida esférica para validar el cálculo de la solución aproximada, encontrándose que el problema está bien resuelto en varios escenarios. Finalmente, se calculan tres casos de interés sin solución analítica, obteniéndose resultados que permiten observar los efectos en frecuencia y tiempo de la geometría y la posición de la fuente.

¹Es importante aclarar que con inclusión nos referimos a una región cerrada, no necesariamente de pequeño tamaño como se podría interpretar en geología.

Capítulo 1

El Método de Trefftz

1.1. El Método de Trefftz

En 1928 E. Trefftz¹ sugirió una forma de construir una serie de límites inferiores $I(v_n)$ (sin probar convergencia) para la integral de Dirichlet

$$I(u) = \iint_R (u_x^2 + u_y^2) \, dx \, dy, \quad (1.1)$$

con $u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$ y $u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}$, conectada con el sistema

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & \text{en } R, \\ u = \varphi(s) & \text{sobre } \partial R. \end{cases} \quad (1.2)$$

donde R es la región interior cerrada y ∂R el contorno en el que se imponen las condiciones de frontera (Figura 1.1).

Para ello, propuso una serie de funciones armónicas v_i usada para aproximar la solución del sistema. Esta serie debe ser *relativamente completa* en R , en el sentido de que si la suma

$$u_n = \sum_{i=1}^n a_i v_i \quad (1.3)$$

puede ser construída para aproximar arbitrariamente a una función harmónica junto con sus derivadas de manera arbitrariamente cercana en R , entonces cada a_i puede ser determinado de tal forma que $u_n \rightarrow u^*$ uniformemente en cada región cerrada incluída completamente en R , siendo u^* la función que minimiza la Integral de Dirichlet (1.1).

¹E. Trefftz, *Mathematische Annalen*, vol. 100 (1928) , pp. 503-521

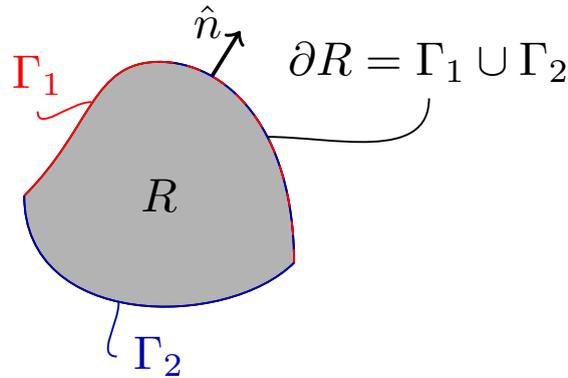


FIGURA 1.1: Región cerrada R , definida por el contorno $\partial R = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Los contornos Γ_1 y Γ_2 pueden ser disjuntos o superponerse.

Para determinar los coeficientes a_i , se considera la integral de Dirichlet (1.1) aplicada a la diferencia $u - u_n$ en R ,

$$I(u - u_n) \equiv \iint_R [\nabla(u - u_n)]^2 dA. \quad (1.4)$$

Se determina entonces cada a_j del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial I}{\partial a_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (1.5)$$

obteniéndose,

$$\frac{\partial I(u - u_n)}{\partial a_j} = -2 \int_C (u - u_n) \frac{dv_j}{dn} ds, \quad (1.6)$$

con n la normal al contorno ∂R (Figura 1.1).

Ahora bien, para ser un mínimo debe cumplirse que

$$\int_C (u - u_n) \frac{dv_j}{dn} ds = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (1.7)$$

lo que es equivalente a

$$\int_C (\varphi - \sum_{i=1}^n a_i v_i) \frac{dv_j}{dn} ds = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.8)$$

Pudiéndose determinar los coeficientes a_i a partir del sistema de ecuaciones en (1.8).

1.2. El método de Trefftz actual

En la actualidad existe una gran gama de métodos numéricos derivados del método de Trefftz, categorizados por lo general en dos ramas: directos e indirectos. Consideraremos así que el método de Trefftz original (sección 1.1) pertenece a la categoría de indirectos, aproximando la

solución del problema por medio de una suma finita de funciones T-completas ²; pero no siendo necesariamente soluciones fundamentales del problema.

El presente trabajo se avoca a una subcategoría del método indirecto de Trefftz, calculando por medio de la formulación derivada del método de colocación la solución aproximada al problema. Existen, además, otras posibilidades que no son abordadas – como el uso del método de Galerkin o variacional – pero se prefirió usar el método de colocación (sección 1.2.2) pues permite calcular rápidamente la solución con un planteamiento muy sencillo de desarrollar.

1.2.1. Método indirecto

El sistema que queremos resolver es de la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u &= f, & \text{en } R \\ u &= g_1, & \text{sobre } \Gamma_1 \\ \mathcal{B}u &= g_2, & \text{sobre } \Gamma_2\end{aligned}\tag{1.9}$$

con \mathcal{L} un operador diferencial elíptico, $\mathcal{B} = p \frac{\partial}{\partial n}$ ó $p \frac{\partial}{\partial n} + \alpha$, representando las condiciones de frontera de Neumann y Robin, respectivamente. Además $\Gamma_1 \subseteq \partial R$ y $\Gamma_2 \subseteq \partial R$, con R el dominio en el cual queremos resolver el sistema (Figura 1.1).

En el método de Trefftz indirecto, la solución u es aproximada en un punto arbitrario P como la superposición de funciones T-completas,

$$\begin{aligned}u(P) &\simeq \tilde{u}(P) = a_1 \tilde{u}_1 + a_2 \tilde{u}_2 + \dots + a_N \tilde{u}_N \\ &= \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{u}}(P)\end{aligned}\tag{1.10}$$

donde N es el número de funciones T-completas, y $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}^T$ denota al vector de parámetros no conocido.

Los residuos se pueden expresar como sigue:

$$\begin{aligned}P \in \Gamma_1 : R_1 &\equiv \tilde{u} - g_1 = \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{u}}(P) - g_1(P) \neq 0 \\ P \in \Gamma_2 : R_2 &\equiv \mathcal{B}\tilde{u} - g_2 = \mathbf{a}^T \mathcal{B}\tilde{\mathbf{u}}(P) - g_2(P) \neq 0.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Luego, los parámetros indeterminados \mathbf{a} se calculan al minimizar simultáneamente los residuos por medio de la colocación, mínimos cuadrados, el método de Galerkin u otros.

² Funciones T-completas enfatizando que se usan para aproximar la solución por medio del método de Trefftz

1.2.2. Método de Colocación

En el método de colocación se discretiza la frontera estableciendo puntos de colocación, P_i , forzando en cada punto al residuo a ser cero (Figura 1.2). La ecuación (1.11) entonces queda:

$$\begin{aligned} P_i \in \Gamma_1 : R_1(P_i) &= \tilde{\mathbf{u}}(P_i)\mathbf{a}^T - g_1(P_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, M_1) \\ P_i \in \Gamma_2 : R_2(P_i) &= \mathcal{B}\tilde{\mathbf{u}}(P_i)\mathbf{a}^T - g_2(P_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, M_2) \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde M_1 y M_2 son los números de puntos de colocación ubicados en Γ_1 y Γ_2 , respectivamente.

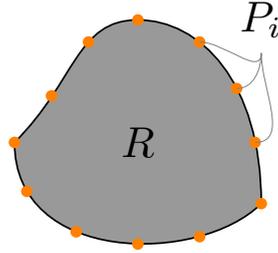


FIGURA 1.2: Región cerrada R , definida por el contorno ∂R . En naranja se ejemplifican los puntos de colocación.

Reescribiendo la ecuación anterior de forma matricial, tenemos que:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1N} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2N} \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ u_{M_1 1} & u_{M_1 2} & \cdots & u_{M_1 N} \\ q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1N} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2N} \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ q_{M_2 1} & q_{M_2 2} & \cdots & q_{M_2 N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ \vdots \\ g_{1M_1} \\ g_{21} \\ g_{22} \\ \vdots \\ g_{2M_2} \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

o equivalentemente,

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (1.14)$$

donde $g_1(P_i) \equiv g_{1i}$, $g_2(P_i) \equiv g_{2i}$, $\tilde{u}_j(P_i) \equiv u_{ij}$ y $\mathcal{B}\tilde{u}_j(P_i) \equiv q_{ij}$.

La matriz \mathbf{K} es de tamaño $M \times N$ ($M = M_1 + M_2$). De este modo, si $M = N$ el sistema se puede resolver directamente, pero si $M > N$ debemos usar algún otro método como mínimos cuadrados o descomposición SVD (*Singular Value Decomposition*).

En el presente trabajo se usó el método SVD incluyendo el uso del factor de amortiguación de Marquardt para obtener los valores de los parámetros $\{a_i\}$ buscados.

1.2.3. Descomposición por medio de Valores Singulares (SVD) y factor de amortiguación de Marquardt

En nuestro caso, el sistema de ecuaciones 1.14 será por lo general sobredeterminado, es decir, tal que la matriz \mathbf{K} de dimensión $M \times N$ tiene $M > N$. Este sistema se forma a partir de las condiciones de frontera en cada punto de la discretización de la misma, teniendo dimensiones que dependerán del número de puntos discretizados (M). A su vez M será directamente proporcional a la frecuencia que se esté resolviendo, e inversamente proporcional a las velocidades de propagación de los medios. Probablemente debido a problemas de escala y similitud entre ecuaciones planteadas a lo largo de la frontera discretizada, hemos de lidiar con una matriz \mathbf{K} que será *mal condicionada*. Una matriz \mathbf{K} se dice que será mal condicionada si el *número de condición* definido por [20],

$$\text{Cond}(\mathbf{K}) = \lambda_1/\lambda_n, \quad (1.15)$$

donde $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ son los valores singulares de \mathbf{K} ; es “grande”, es decir, $\text{Cond}(\mathbf{K}) \gg 1$. Esto implica que la solución aproximada será altamente sensible a pequeñas perturbaciones en los valores de \mathbf{K} , potenciándose errores numéricos que no podemos controlar a lo largo del proceso de cálculo de la solución buscada.

El proceso usual de solución de un sistema sobredeterminado es mediante las *ecuaciones normales*, es decir, se resuelve

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (1.16)$$

premultiplicando la ecuación anterior por la transpuesta³ \mathbf{K}^T , representando la matriz adjunta de \mathbf{K} . Luego (1.16) queda

$$\mathbf{K}^T\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{K}^T\mathbf{f}. \quad (1.17)$$

El sistema de ecuaciones formado por (1.17) es conocido como las *ecuaciones normales*. La matriz $\mathbf{K}^T\mathbf{K}$ es cuadrada y simétrica, teniendo inversa en caso de que no sea singular. Así, este sistema se resuelve premultiplicando (1.17) por $(\mathbf{K}^T\mathbf{K})^{-1}$, quedando

$$\mathbf{a} = (\mathbf{K}^T\mathbf{K})^{-1}\mathbf{K}^T\mathbf{f}. \quad (1.18)$$

Ahora bien, el número de condición del sistema (1.17), será el asociado a la matriz $\mathbf{K}^T\mathbf{K}$, es decir

$$\text{Cond}(\mathbf{K}^T\mathbf{K}) = (\text{Cond}(\mathbf{K}))^2 \quad (1.19)$$

pues sabemos que $\text{Cond}(\mathbf{K}^T) = \text{Cond}(\mathbf{K})$. Vemos entonces que si \mathbf{K} de por sí es una matriz mal condicionada, $\mathbf{K}^T\mathbf{K}$ será aún peor. Es por esto que, con la idea de usar un método robusto para sistemas mal condicionados, se implementó el algoritmo desarrollado por Golub y Reisch en

³Si los elementos de \mathbf{K} son complejos, \mathbf{K}^T es la transpuesta conjugada, conocida como adjunta de \mathbf{K}

1970 [7] llamado *Singular Value Decomposition (SVD)* o Descomposición por medio de Valores Singulares.

El método *SVD* factoriza la matriz \mathbf{K} como el producto de tres matrices:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T, \quad (1.20)$$

donde \mathbf{U} es una matriz unitaria $M \times N$ que contiene N vectores propios \mathbf{v}_i que son solución del sistema

$$\mathbf{K}\mathbf{K}^T \mathbf{v}_i = \lambda_i^2 \mathbf{v}_i, \quad (1.21)$$

\mathbf{V} una matriz diagonal $N \times N$ cuyas columnas contienen los vectores propios w_i que satisfacen

$$\mathbf{K}^T \mathbf{K} \mathbf{w}_i = \lambda_i^2 \mathbf{w}_i, \quad (1.22)$$

y $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz diagonal $N \times N$ conteniendo los a lo más N valores no singulares $+\lambda_i$ de $\mathbf{K}^T \mathbf{K}$.

Para los casos en que tenemos un sistema sobredeterminado, es decir $M > N$, la inversa de \mathbf{K} no existe en el sentido usual. Es por esto que la descomposición (1.20) sugiere el uso de la inversa de Lanczos

$$\mathbf{K}_L^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{U}^T \quad (1.23)$$

para resolver la ecuación 1.14, de modo que

$$\mathbf{a} = \mathbf{K}_L^{-1} \mathbf{f}. \quad (1.24)$$

Es importante notar que

$$\text{Cond}(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T) = \text{Cond}(\mathbf{K}), \quad (1.25)$$

lo que permite obtener los parámetros $\{a_i\}$ de manera mucho más robusta que utilizando ecuaciones normales.

Aún usando el método *SVD*, si el mal condicionamiento de \mathbf{K} es excesivo, no evitaremos tener una solución que se vea fuertemente afectada por errores de representación numérica. Este efecto lo podemos ver analizando la matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}^{-1}$, compuesta por elementos de la forma $1/\lambda_i$ con $i = 1, \dots, N$, pues si $\lambda_i \ll 1$ pueden generarse errores debidos a la limitada capacidad de representación que se tiene en la realidad. Para suavizar los efectos de estas posibles singularidades⁴ de la matriz \mathbf{K}_L^{-1} hacemos uso del factor de Marquardt (1963). En consecuencia,

⁴Referidas a singularidades aproximadas, debidas a errores de representación, no necesariamente singularidades propiamente tales.

redefinimos $\mathbf{\Lambda}^{-1}$ como

$$\mathbf{\Lambda}^{-1} = \text{diag} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j^2 + \beta} \right), \quad (1.26)$$

en donde β es un escalar conocido como el factor de Marquardt, siendo un valor real diferente de cero. Este valor es determinado *a priori*, de forma que no modifique notoriamente la solución, dependiendo de los valores singulares.

Finalmente, combinando el método *SVD* con el uso del factor de Marquardt, se puede calcular la solución aproximada del sistema (1.16) de manera robusta. Cabe mencionar que existe un sinnúmero de posibles estrategias para resolver este sistema [20] [18], siendo una de ellas la *descomposición QR* de Householder, con una eficiencia mayor al método *SVD* usado y con el mismo número de condición; pero dado que lidiamos con números de condición grandes, esto implicará que el rango de la matriz que queremos resolver es deficiente ($\text{rango}(\mathbf{K}) < n$), siendo el método *SVD* el más apropiado [20].

Capítulo 2

Interacción fluido-sólido en una forma cerrada axisimétrica arbitraria

A continuación, plantearemos de una forma general el problema al que se avoca este trabajo, para luego desarrollar casos particulares que son de interés.

Como muestra la Figura 2.1, buscaremos la solución de la interacción fluido-sólido que genera una fuente S sobre el eje z en una geometría axialmente simétrica. El espacio, entonces, será dividido en dos regiones: (1) la región R_1 , que se supondrá como un fluido no viscoso y (2) la región R_2 , que será un espacio elástico homogéneo.

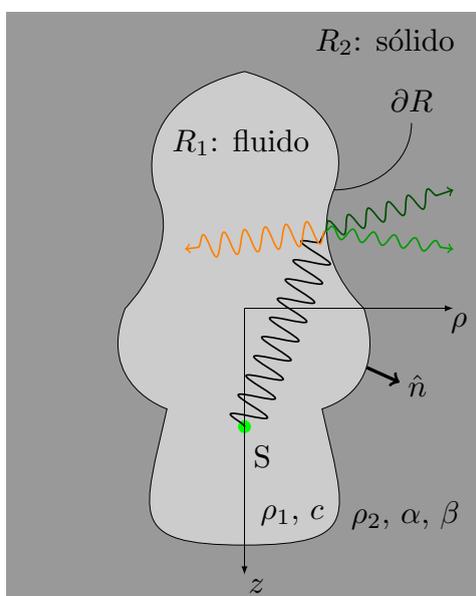


FIGURA 2.1: Cavidad axisimétrica llena de un fluido no viscoso (R_1), rodeada por un medio elástico homogéneo (R_2). En color verde (de aquí en adelante) se señala por medio de un punto la posición de la fuente. La normal es definida hacia afuera de la inclusión fluida (\hat{n}). Las densidades de cada medio se definen por sus subíndices. La velocidad de propagación en el fluido se define como c , mientras que las velocidades de la onda P y S como α y β , respectivamente. Se señalan en colores naranja, verde claro y verde oscuro las ondas P refractada, S transmitida y P transmitida, respectivamente.

2.1. Ecuaciones gobernantes

Sabemos que para cada región habrán ecuaciones que gobernarán la interacción fluido-sólido en la frontera (∂R) debido a la excitación dada por la fuente S . Estas ecuaciones se trabajarán en el dominio de la frecuencia, lo que simplifica considerablemente el tratamiento de las mismas.

Es importante notar que para ambas regiones se tomará en cuenta una atenuación *Kelviniana*, es decir, redefiniremos las velocidades de propagación (ec. (2.1)) de las ondas por medio de una constante Q conocida como “factor de calidad”. Esto implicará que el sistema no resonará en el tiempo de manera indefinida, atenuándose las ondas con la propagación.

$$v \mapsto v \cdot \left(1 - \frac{i}{2Q}\right)^{-1} \quad (2.1)$$

Primero se establecerán las ecuaciones que gobiernan cada región. Para esto, notamos que la simetría axial del problema nos sugiere usar coordenadas cilíndricas (r, φ, z) ; pero sin necesidad de tomar en cuenta φ , pues azimutalmente la respuesta será simétrica. Por ello, la solución al problema en cada región dependerá únicamente de r y z .

2.1.1. Región R_1 : fluido no viscoso

Como muestra la Figura 2.2, se determina el campo de presión dentro del fluido sin tomar en cuenta la región elástica R_2 . Para ello, se divide el campo total $p(\mathbf{x}; \omega)$ en dos partes:

(A) Campo incidente $\acute{p}(\mathbf{x}; \omega)$, siendo la solución a la ecuación diferencial no homogénea

$$(\nabla^2 + k_f^2) \acute{p}(\mathbf{x}; \omega) = -S(\omega)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^s) \quad (2.2)$$

donde $S(\omega)$ es la amplitud de la fuente explosiva, $k_f = \omega/c$, con c la velocidad de propagación de las ondas en el fluido, $\omega = 2\pi f$ la frecuencia angular y \mathbf{x}^s la posición de la fuente.

De esta forma, el campo incidente será la función de Green tridimensional de la ecuación no homogénea de Helmholtz, G , ponderada por la amplitud $S(\omega)$,

$$\acute{p}(\mathbf{x}; \omega) = S(\omega)G(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s; \omega) = S(\omega)\frac{e^{-ik_f R}}{4\pi R} \quad (2.3)$$

donde

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}^s; \omega) = \frac{e^{-ik_f |\mathbf{x} - \mathbf{x}^s|}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}^s|} \quad (2.4)$$

y $R = \sqrt{r^2 + (z - z^s)^2}$, debido a que la fuente la ubicaremos siempre en $r = 0$

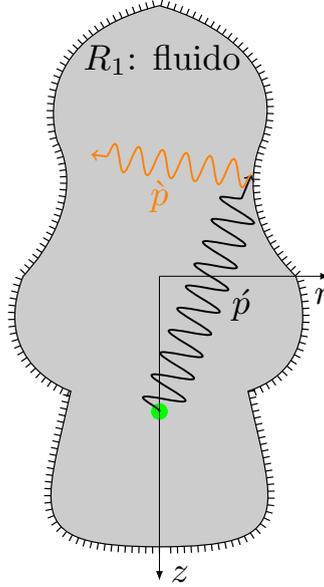


FIGURA 2.2: Región interior (R_1). En negro se ejemplifica un frente de onda de presión, $\dot{p}(\mathbf{x}; \omega)$, que es generado en la posición de la fuente; siendo \mathbf{x} y ω la posición dentro del fluido y la frecuencia angular, respectivamente. En un punto verde se ejemplifica la posición de la fuente; mientras que en naranja se destaca el frente de onda reflejado, $\dot{p}(\mathbf{x}; \omega)$, generado por la interacción fluido-sólido.

- (B) Campo reflejado $\dot{p}(\mathbf{x}; \omega)$, siendo construido como una suma finita de funciones que cumplan con la ecuación homogénea –ecuación de Helmholtz– en el fluido

$$(\nabla^2 + k_f^2) f(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.5)$$

Al resolver la ecuación anterior por medio del método de separación de variables en el espacio, se puede obtener que una solución particular es

$$f^j(\mathbf{x}) = j_0(k_f R^j) = \frac{\sin(k_f R^j)}{k_f R^j} \quad (2.6)$$

con $R^j = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^j|$, donde \mathbf{x}^j es la posición desde donde $f^j(\cdot)$ guarda simetría esférica, y $j_0(\cdot)$ la función esférica de Bessel de orden cero. Es importante notar que llamamos a $j_0(\cdot)$ *solución particular* para distinguir la diferencia entre esta solución de la ecuación (2.5) y la solución del campo de presiones reflejado total dentro del fluido. Es aquí cuando estamos usando el concepto de funciones T-completas, en el sentido de que construimos una solución aproximada dentro del fluido por medio de una suma finita de soluciones que satisfacen la ecuación gobernante dentro de él (sección 1.2.1).

Luego, podemos expresar el campo refractado total en R_1 como

$$\dot{p}(\mathbf{x}; \omega) = \sum_{j=1}^N A^j \frac{\sin(k_f R^j)}{k_f R^j}. \quad (2.7)$$

Es decir, una suma finita ponderada por coeficientes desconocidos A^j . Ahora bien, para conservar la simetría axial con respecto a z , escogemos la posición \mathbf{x}^j de cada una de estas soluciones particulares sobre el eje z , es decir

$$R^j = \sqrt{r^2 + (z - z^j)^2}, \quad (2.8)$$

por lo que la solución aproximada para el campo reflejado interior será $\dot{p}(\mathbf{x}; \omega) \equiv \dot{p}(r, z; \omega)$. La elección de los puntos $\mathbf{x}^j = (0, z^j)$ es arbitraria, por lo que se estableció que éstos cubriesen el eje z en la región R_1 de forma equidistante (ver Figura 2.3).

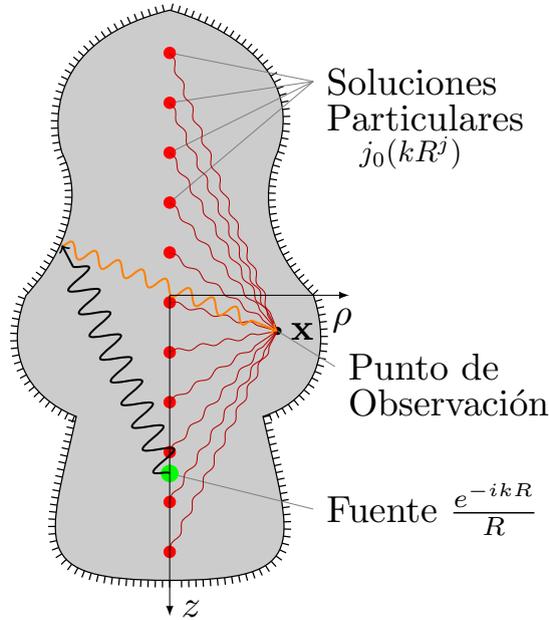


FIGURA 2.3: Región interior (R_1). Se muestra un esquema de posición de las soluciones particulares (rojo), y la fuente (verde); representándose una onda refractada como la contribución de cada solución particular.

Finalmente, el campo total dentro de R_1 será

$$p(r, z; \omega) = \underbrace{S(\omega) \frac{e^{-ik_f R}}{R}}_{\dot{p}} + \sum_{j=1}^N \underbrace{A^j \frac{\sin k_f R^j}{k_f R^j}}_{\dot{p}}, \quad (2.9)$$

donde se definen $R = \sqrt{r^2 + (z - z^s)^2}$, $R^j = \sqrt{r^2 + (z - z^j)^2}$, y N es el número de soluciones particulares. Así, \dot{p} y \dot{p} representan la fuente y las ondas refractadas dentro del fluido, respectivamente.

2.1.2. Región R_2 : sólido elástico

Para la región R_2 , debemos expresar el campo transmitido de esfuerzos y desplazamientos (Figura 2.4). Para ello expresaremos dichos campos mediante la superposición de las contribuciones de un número finito de fuerzas puntuales sobre el eje z . Cada una de estas fuerzas tiene un polo en $z = 0$, por lo que se distribuirán convenientemente en R_1 , quedando fuera de la región de interés. Es importante notar que cada fuerza es en cierto sentido una fuente, pues genera un campo que se propaga hacia el infinito; esto permitirá cumplir las condiciones de irradiación debido a la interacción con el fluido generado por la fuente “real” (S) y las ondas refractadas.

Para cada una de las fuerzas, la ecuación gobernante para los desplazamientos es la ecuación de onda de Navier en frecuencia [19],

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \rho\omega^2\mathbf{u} = -\mathbb{I}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S). \quad (2.10)$$

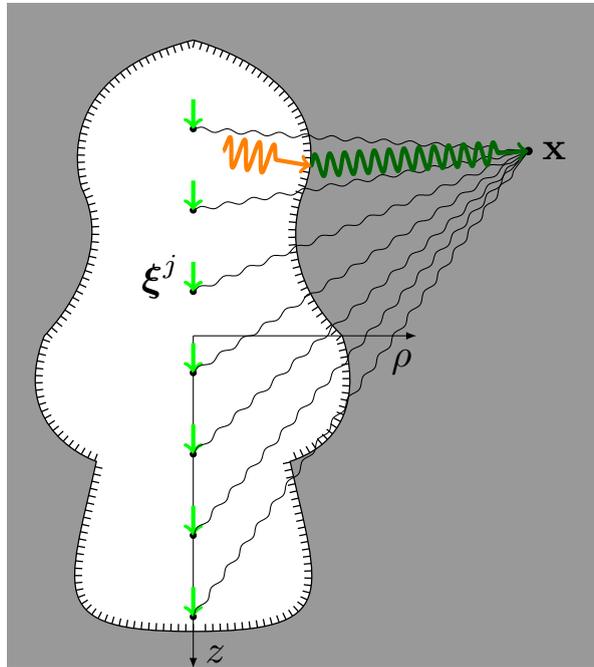


FIGURA 2.4: Región interior (R_2). Se muestra un esquema de posición de las soluciones particulares, representadas por flechas en la dirección de cada fuerza puntual (verde). La suma de todas las soluciones particulares será el campo total recibido en una posición \mathbf{x} en R_2 .

La solución de esta ecuación es una función de Green conocida como la solución de Stokes [14],

$$G_{ij}(\mathbf{x}, \xi; \omega) = \frac{1}{4\pi\mu r} [f_2\delta_{ij} + (f_1 - f_2)\gamma_i\gamma_j] \equiv G_{ij}(r; \omega), \quad (2.11)$$

donde i y j son las proyecciones del vector de desplazamiento y la fuerza puntual aplicada, respectivamente. Si llamamos ξ a la posición de la fuerza y \mathbf{x} al punto de observación, tenemos

que

$$\begin{aligned}\gamma_i &= \frac{x_j - \xi_j}{r} \\ r^2 &= (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Además, se definen [14] f_1 y f_2 como

$$f_1 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left[1 - i \frac{2}{qr} - \frac{2}{(qr)^2} \right] e^{-iqr} + \left[i \frac{2}{kr} + \frac{2}{(kr)^2} \right] e^{-ikr} \quad (2.13)$$

$$f_2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left[i \frac{1}{qr} + \frac{1}{(qr)^2} \right] e^{-iqr} + \left[1 - i \frac{1}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-ikr}, \quad (2.14)$$

con $k = \omega/\beta$ y $q = \omega/\alpha$.

Notamos ahora que podemos separar tanto f_1 como f_2 en partes dependientes de q (onda P), o de k (onda S):

$$f_1^P = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left[1 - i \frac{2}{qr} - \frac{2}{(qr)^2} \right] e^{-iqr} \quad (2.15)$$

$$f_1^S = \left[i \frac{2}{kr} + \frac{2}{(kr)^2} \right] e^{-ikr} \quad (2.16)$$

$$f_2^P = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left[i \frac{1}{qr} + \frac{1}{(qr)^2} \right] e^{-iqr} \quad (2.17)$$

$$f_2^S = \left[1 - i \frac{1}{kr} - \frac{1}{(kr)^2} \right] e^{-ikr}. \quad (2.18)$$

Entonces, podemos redefinir (2.11) usando la notación anterior:

$$\begin{aligned}G_{ij}(r; \omega) &= \frac{1}{4\pi\mu r} \underbrace{[f_2^P \delta_{ij} + [f_1^P - f_2^P] \gamma_i \gamma_j]}_{\text{Onda P}} + \underbrace{[f_2^S \delta_{ij} + [f_1^S - f_2^S] \gamma_i \gamma_j]}_{\text{Onda S}} \\ &= G_{ij}^P(r; \omega) + G_{ij}^S(r; \omega).\end{aligned}\quad (2.19)$$

Esto nos permitirá separar los coeficientes para las partes P y S cuando expandamos la solución elástica del problema.

También tenemos una expresión para las tracciones de Green [14],

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi r^2} [(g_1 - g_2 - 2g_3) \gamma_i \gamma_j \gamma_k n_k + g_3 \gamma_i n_j + g_2 \gamma_j n_i + g_3 \gamma_k n_k \delta_{ij}] \quad (2.20)$$

con

$$g_j = \underbrace{\left[kr A_{1j} + B_{1j} + \frac{C_{1j}}{kr} + \frac{D_{1j}}{(kr)^2} \right] e^{-ikr}}_{\text{Onda S}} + \underbrace{\left[kr A_{2j} + B_{2j} + \frac{C_{2j}}{kr} + \frac{D_{2j}}{(kr)^2} \right] e^{-iqr}}_{\text{Onda P}}, \quad (2.21)$$

siendo conocidos los valores de A_{lj} , B_{lj} , C_{lj} , D_{lj} (Tabla 2.1) con $l = 1, 2$ y $j = 1, 2, 3$. Luego,

$$T_{ij} = T_{ij}^P(r; \omega) + T_{ij}^S(r; \omega). \quad (2.22)$$

Como muestra la Figura 2.4, para representar los campos de desplazamientos y tracciones en R_2 localizaremos sobre el eje z , en la región R_1 , un número finito M de soluciones particulares que representen desplazamientos (G_{ij}) o tracciones (T_{ij}) dirigidos en z . De esta forma, el campo transmitido de desplazamientos en R_2 será el siguiente:

$$u_i = \sum_{j=1}^M (B^{P,j} G_{iz}^P(r^j; \omega) + B^{S,j} G_{iz}^S(r^j; \omega)). \quad (2.23)$$

Análogamente el campo transmitido de tracciones será el siguiente:

$$t_i = \sum_{j=1}^M (B^{P,j} T_{iz}^P(r^j; \omega) + B^{S,j} T_{iz}^S(r^j; \omega)), \quad (2.24)$$

donde $r^j = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^j\|$ la distancia de fuente j -ésima a observador, y T_{iz} la componente i de la tracción de Green generada por una fuerza en dirección z .

	j		
	1	2	3
A_{1j}	0	0	$-i$
A_{2j}	$-i\beta/\alpha$	$i(2\beta^3/\alpha^3 - \beta/\alpha)$	0
B_{1j}	4	-2	-3
B_{2j}	$-4\beta^2/\alpha^2 - 1$	$4\beta^2/\alpha^2 - 1$	$2\beta^2/\alpha^2$
C_{1j}	$-i12$	$i6$	$i6$
C_{2j}	$i12\beta/\alpha$	$-i6\beta/\alpha$	$-i6\beta/\alpha$
D_{1j}	-12	6	6
D_{2j}	12	-6	-6

TABLA 2.1: Coeficientes de la ecuación (2.21)

2.2. Extendiendo la familia T-completa

Hasta aquí, hemos construído una familia de funciones para representar el campo de desplazamientos en R_2 con base en la idea de que la superposición de los desplazamientos generados por varias fuerzas puntuales, aplicadas sobre el eje de simetría, podrá aproximar los desplazamientos resultantes de la interacción fluido-sólido.

Teniendo en cuenta los patrones de irradiación de la parte P y la parte S mostrados en las Figuras 2.5 y 2.6, podemos observar que es posible mejorar la representación en el espacio de

diferentes geometrías, si incluimos una base que posea simetría esférica. Esto nos permitirá, más adelante, representar un problema ideal esférico y asegurar que este tipo de geometrías estén bien representadas.

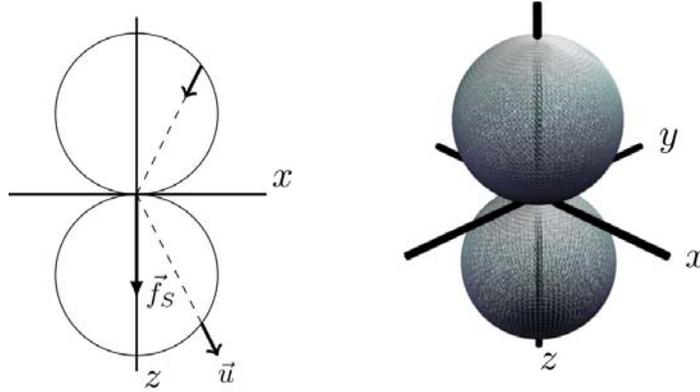


FIGURA 2.5: Patrón de radiación para la onda P debida a una fuerza puntual sobre z , \vec{f}_S . A la izquierda se ve la sección transversal del patrón en un plano que contiene a la fuerza, mostrando la fuerza y las direcciones de polarización. A la derecha se ve el patrón de radiación tridimensional. Las flecha al centro de la figura de la izquierda representa la fuerza, mientras que las flechas sobre el perímetro las direcciones de polarización

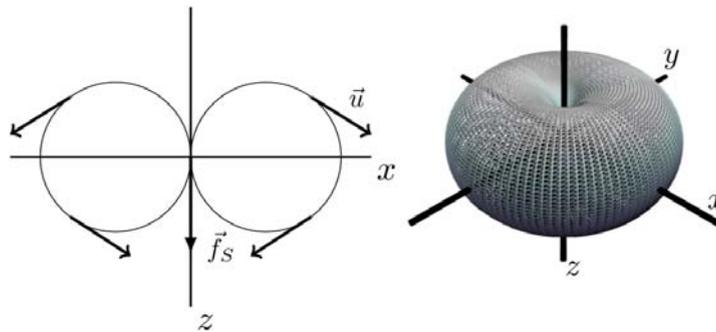


FIGURA 2.6: El patrón de radiación para ondas S debido a una fuerza puntual, \vec{f}_S , análogo a la figura 2.5.

Desde una perspectiva clásica, podemos aproximar el campo transmitido de cada solución particular para el desplazamiento como una combinación lineal de la familia completa de funciones de onda de la forma

$$u_r = \sum A_{nm} y_1^P P_n^m f_m + \sum B_{nm} y_1^S P_n^m f_m \quad (2.25)$$

$$u_\theta = \sum A_{nm} y_3^P Q_n^m f_m + \sum B_{nm} y_3^S Q_n^m f_m + \sum C_{nm} y_1^T \frac{P_n^m}{\sin \theta} m f_m \operatorname{sig} \quad (2.26)$$

$$u_\phi = \sum A_{nm} y_3^P \frac{P_n^m}{\sin \theta} m g_m \operatorname{sig} + \sum B_{nm} y_3^S \frac{P_n^m}{\sin \theta} m g_m \operatorname{sig} + \sum C_{nm} (-y_1^T) Q_n^m g_m \quad (2.27)$$

donde A_{nm} , B_{nm} y C_{nm} son coeficientes por determinar, y siendo

$$\sum \equiv \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \quad (2.28)$$

$$y_1^P \equiv \frac{1}{r} [n\zeta_n(qr) - qr\zeta_{n+1}(qr)] \quad (2.29)$$

$$y_1^S \equiv \frac{1}{r} [-n(n+1)\zeta_n(kr)] \quad (2.30)$$

$$y_3^P \equiv \frac{1}{r}\zeta_n(qr) \quad (2.31)$$

$$y_3^S \equiv \frac{1}{r} [-(n+1)\zeta_n(kr) + kr\zeta_{n+1}(kr)] \quad (2.32)$$

$$y_1^T \equiv \frac{1}{r} [kr\zeta_n(kr)] \quad (2.33)$$

$$P_n^m \equiv P_n^m(\cos \theta) \quad (2.34)$$

$$Q_n^m \equiv \frac{d}{d\theta} \{P_n^m(\cos \theta)\} \quad (2.35)$$

$$f_m \equiv \begin{cases} \cos m\phi & \text{caso } P, S \\ \sin m\phi & \text{caso } T \end{cases} \quad (2.36)$$

$$g_m \equiv \begin{cases} \sin m\phi & \text{caso } P, S \\ \cos m\phi & \text{caso } T \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\text{sig} \equiv \begin{cases} 1 & \text{caso } P, S \\ -1 & \text{caso } T \end{cases} \quad (2.38)$$

donde $q = \omega/\alpha$, $k = \omega/\beta$ y ζ_n es una función radial solución de la ecuación esférica de Bessel. Los superíndices P , S y T se refieren a las ondas P , S esferoidales (o SV) y a las ondas S toroidales (o SH), respectivamente.

La función radial, ζ_n , dependerá de las condiciones de frontera que se tengan,

$$\zeta_n(\cdot) = \begin{cases} j_n(\cdot) & \text{función esférica de Bessel de primera especie y orden } n \\ h_n^{(1,2)}(\cdot) & \text{función esférica de Hankel de primera o segunda especie y orden } n \end{cases} \quad (2.39)$$

En el caso de una región abierta como R_2 , en la que las ondas deberán cumplir el principio de radiación de Sommerfeld [23], la familia de funciones adecuada es $\{h_n^{(2)}\}$. La familia $\{j_n\}$ serviría para representar una región cerrada, donde existirían ondas atrapadas viajando en ambos sentidos de propagación; el que no es nuestro caso, pues buscamos ampliar la familia T-completa para la región elástica (R_2).

Para la finalidad de este trabajo, sólo nos interesa obtener una expresión con simetría azimutal, es decir, $m = 0$. Esto simplifica las expresiones para el desplazamiento de manera significativa, pues este depende únicamente de r y θ , sin producir ondas SH .

Reescribiendo (2.25) y (2.26) usando la función esférica de Hankel de segunda especie y orden n ,

$$u_r = \sum_{n=0}^N A_n \frac{1}{r} \left[h_n^{(2)}(qr) - qr h_{n+1}^{(2)}(qr) \right] P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^N B_n \frac{1}{r} \left[-n(n+1) h_n^{(2)}(kr) \right] P_n(\cos \theta) \quad (2.40)$$

$$u_\theta = \sum_{n=0}^N A_n \frac{1}{r} h_n^{(2)}(qr) \frac{d}{d\theta} \{P_n(\cos \theta)\} + \sum_{n=0}^N B_n \frac{1}{r} \left[-(n+1) h_n^{(2)}(kr) + kr h_{n+1}^{(2)}(kr) \right] \frac{d}{d\theta} \{P_n(\cos \theta)\} \quad (2.41)$$

siendo A_n y B_n los coeficientes indeterminados A_{nm} y B_{nm} con $m = 0$.

Además, dado que $m = 0$, tendremos que

$$u_\phi = 0. \quad (2.42)$$

Si tomamos en cuenta sólo los términos hasta $N = 1$, obtenemos

$$u_r = A_0 \frac{1}{r} \left[h_0^{(2)}(qr) - qr h_1^{(2)}(qr) \right] + \left\{ A_1 q h_1^{(2)'}(qr) - B_1 \frac{2}{r} h_1^{(2)}(kr) \right\} \cos \theta \quad (2.43)$$

$$u_\theta = - \left\{ A_1 \frac{1}{r} h_1^{(2)}(qr) + B_1 \frac{1}{r} \left[-2 h_1^{(2)}(kr) + kr h_2^{(2)}(kr) \right] \right\} \sin \theta \quad (2.44)$$

De aquí en adelante, mostraremos que las ecuaciones (2.42) y (2.43) son una generalización de la solución de Stokes (2.11) usada, infiriéndose que existe un término que podemos añadir a la familia T-completa.

Considerando las funciones esféricas de Hankel,

$$h_0^{(2)}(z) = \frac{i}{z} e^{-iz} \quad (2.45)$$

$$h_1^{(2)}(z) = i \left[\frac{i}{z} + \frac{1}{z^2} \right] e^{-iz} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} h_2^{(2)}(z) &= \left[i \left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{z^2} \right] e^{-iz} \\ &= \left[3i \left(\frac{i}{z^2} + \frac{1}{z^3} \right) - \frac{i}{z} \right] e^{-iz}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

si reescribimos f_1 y f_2 (ecuaciones 2.13 y 2.14, respectivamente) en función de funciones esféricas de Hankel, veremos que las expresiones anteriores son muy similares a las expresiones de la función de Green de la ecuación de Navier en frecuencia (2.11).

$$f_1 = -ikr \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 h_1^{(2)'}(qr) + \frac{2}{kr} h_1^{(2)}(kr) \right] \quad (2.48)$$

$$f_2 = -ikr \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^3 \frac{1}{qr} h_1^{(2)}(qr) + \frac{2}{kr} h_1^{(2)}(kr) - h_2^{(2)}(kr) \right]. \quad (2.49)$$

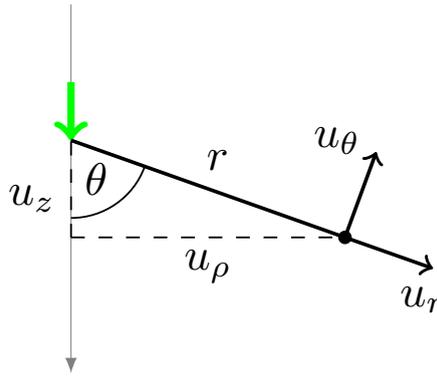


FIGURA 2.7: Relación geométrica entre los desplazamientos.

Para cambiar a coordenadas esféricas hacemos uso de la Figura 2.7, representando sus análogos u_r y u_θ de la siguiente forma:

$$u_r = u_\rho \sin \theta + u_z \cos \theta \quad (2.50)$$

$$u_\theta = u_\rho \cos \theta - u_z \sin \theta \quad (2.51)$$

Reescribiendo (2.11) con las expresiones anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned} G_{rz}(r; \omega) &= G_{\rho z}(r; \omega) \sin \theta + G_{zz}(r; \omega) \cos \theta \\ &= \frac{1}{4\pi\mu r} [(f_1 - f_2) \gamma_\rho \gamma_z] \sin \theta + \frac{1}{4\pi\mu r} [f_2 + (f_1 - f_2) \gamma_z^2] \cos \theta \\ &= \frac{1}{4\pi\mu r} [f_1 \sin^2 \theta \cos \theta + f_2 (-\sin^2 \theta \cos \theta) + f_1 \cos^3 \theta + f_2 (1 - \cos^2 \theta) \cos \theta] \\ &= \frac{1}{4\pi\mu r} f_1 \cos \theta \end{aligned} \quad (2.52)$$

con $\gamma_\rho = \sin \theta$ y $\gamma_z = \cos \theta$, siendo los cosenos directores en ρ y z , respectivamente. Notamos que el subíndice de la función de Green, rz , se refiere a que tenemos la proyección en r (coordenadas esféricas) de una fuerza dirigida en dirección z (coordenadas cilíndricas).

Análogamente podemos obtener que

$$G_{\theta z}(r; \omega) = -\frac{1}{4\pi\mu r} f_2 \sin \theta. \quad (2.53)$$

Reemplazando (2.48) y (2.49) en (2.52) y (2.53), respectivamente, tenemos que

$$G_{rz}(r; \omega) = -\frac{ik}{4\pi\mu} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 h_1^{(2)'}(qr) + \frac{2}{kr} h_1^{(2)}(kr) \right] \cos \theta \quad (2.54)$$

$$G_{\theta z}(r; \omega) = \frac{ik}{4\pi\mu} \left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 \frac{1}{qr} h_1^{(2)}(qr) + \frac{2}{kr} h_1^{(2)}(kr) - h_2^{(2)}(kr) \right] \sin \theta. \quad (2.55)$$

Así, vemos finalmente que si definimos

$$A_1 = -\frac{i}{4\pi\mu} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \quad (2.56)$$

$$B_1 = \frac{i}{4\pi\mu} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2, \quad (2.57)$$

las componentes ρ y z de la función de Green son precisamente correspondientes a las expresiones (2.43) y (2.44), tras tomar $m = 0$ y $n = 1$ de las expansiones en coordenadas esféricas (2.25) y (2.26). Esto nos lleva a concluir que, si añadimos el término considerando $m = 0$ y $n = 0$, obtendremos una familia de funciones más completa (en el sentido de Trefftz) que incluya los casos radialmente simétricos. La derivación de las expresiones para esta familia, que llamamos “fuente monopolar elástica”, se pueden encontrar en el Apéndice A.

Añadiendo los términos resultantes de los desplazamientos y esfuerzos generados por la fuente monopolar elástica a las expresiones (2.23) y (2.24), obtenemos una nueva familia de funciones más completa que la anterior.

$$u_i = \sum_{j=1}^M (B^{P,j} G_{iz}^P(\omega; r^j) + B^{S,j} G_{iz}^S(\omega; r^j) + C^j u_i^0) \quad (2.58)$$

$$t_i = \sum_{j=1}^M (B^{P,j} T_{iz}^P(\omega; r^j) + B^{S,j} T_{iz}^S(\omega; r^j) + C^j t_i^0), \quad (2.59)$$

donde u_i^0 y t_i^0 representan los desplazamientos y las tracciones generados por la fuente monopolar. Para recalcar la analogía con las expresiones (2.43) y (2.44), notamos que los términos ponderados por A_1 son aquellos que ahora se identifican con $B^{P,j}$; los ponderados por B_2 , con $B^{S,j}$; y los ponderados por A_0 con C^j . Las tracciones se derivaron directamente de las expresiones para los esfuerzos que se encuentran en el Apéndice A.

2.3. Condiciones de Frontera

Las interacción fluido-sólido impone tres tipos de condiciones de frontera: (i) que los desplazamientos sean continuos a lo largo de ella, (ii) que las tracciones normales sean iguales al negativo de la presión, y (iii) que las tracciones transversales sobre la interfaz sean nulas.

2.3.1. Continuidad de desplazamientos normales

Definiendo la normal a ∂R como $\mathbf{n} = n_i \hat{x}_i$, la condición de continuidad de desplazamientos normales en la frontera es:

$$u_i^{R_1} n_i \Big|_{\partial R} = u_j^{R_2} n_j \Big|_{\partial R}, \quad (2.60)$$

con los superíndices R_1 y R_2 simbolizando la familia T-completa en la que se expanden los desplazamientos correspondientes. Se usan la notación de Einstein para expresar implícitamente la suma sobre los subíndices con $i = 1, 2, 3$.

Sabemos que en R_1

$$u_i^{R_1} = \frac{1}{\rho_1 \omega^2} \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (2.61)$$

Luego (2.60) equivale a

$$\frac{1}{\rho_1 \omega^2} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ p_0 \frac{e^{-ik_f R}}{R} + \sum_{j=1}^N A^j \frac{\sin k_f R^j}{k_f R^j} \right\} = \sum_{l=1}^M \left(B^{P,l} G_{iz}^P(r^l; \omega) + B^{S,l} G_{iz}^S(r^l; \omega) + C^l u_i^0(r^l; \omega) \right) n_i, \quad (2.62)$$

con $\partial/\partial n \equiv (\partial/\partial x_i) n_i$.

Reordenando términos obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1 \omega^2} \sum_{j=1}^N A^j \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\sin k_f R^j}{k_f R^j} \right\} - \sum_{l=1}^M B^{P,l} G_{iz}^P(r^l; \omega) n_i \\ - \sum_{l=1}^M B^{S,l} G_{iz}^S(r^l; \omega) n_i - \sum_{l=1}^M C^l u_i^0(r^l; \omega) n_i = - \frac{1}{\rho_1 \omega^2} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ p_0 \frac{e^{-ik_f R}}{R} \right\}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Notando que

$$\frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\sin k_f R^j}{k_f R^j} \right\} = \frac{1}{R^j} \left[\cos k_f R^j - \frac{\sin k_f R^j}{k_f R^j} \right] \left[\frac{\rho}{R^j} n_\rho + \frac{z - z^j}{R^j} n_z \right] \quad (2.64)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{e^{-ik_f R}}{R} \right\} = - \frac{1 + ik_f R}{R^2} e^{-ik_f R} \left\{ \frac{\rho}{R} n_\rho + \frac{z - z^s}{R} n_z \right\}, \quad (2.65)$$

reescribimos (2.63), obteniendo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_1 \omega^2} \sum_{j=1}^N A^j \frac{1}{R^j} \left[\cos k_f R^j - \frac{\sin k_f R^j}{k_f R^j} \right] \left[\frac{\rho}{R^j} n_\rho + \frac{z - z^j}{R^j} n_z \right] \\ & - \sum_{l=1}^M B^{P,l} G_{iz}^P(r^l; \omega) n_i - \sum_{l=1}^M B^{S,l} G_{iz}^S(r^l; \omega) n_i - \sum_{l=1}^M C^l u_i^0(r^l; \omega) n_i \\ & = \frac{1 + ik_f R}{\rho_1 \omega^2 R^2} \left\{ \frac{\rho}{R} n_\rho + \frac{z - z^s}{R} n_z \right\} p_0 e^{-ik_f R}. \quad (2.66) \end{aligned}$$

2.3.2. Continuidad de tracciones normales

Sabemos que la componente normal de la tracción debe ser igual al negativo de la presión a lo largo de las paredes del cilindro, es decir

$$t_i n_i = -p. \quad (2.67)$$

Desarrollando la ecuación (2.67) mediante las expresiones (2.9) y (2.23), llegamos a la expresión

$$\sum_{j=1}^N A^j \frac{\sin k_f R^j}{k_f R^j} + \sum_{l=1}^M B^{S,l} T_{iz}^P(r^l; \omega) n_i + \sum_{l=1}^M B^{S,l} T_{iz}^S(r^l; \omega) n_i + \sum_{l=1}^M C^l t_i^0(r^l; \omega) n_i = -p_0 \frac{e^{-ik_f R}}{R} \quad (2.68)$$

2.4. Tracciones trasversales nulas

La condición que implica que las tracciones trasversales sean nulas es

$$t_\rho n_z - t_z n_\rho = 0. \quad (2.69)$$

Desarrollando la ecuación anterior mediante (2.24), tenemos que:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^M B^{P,l} [T_{\rho z}^P(r^l; \omega) n_z - T_{zz}^P(r^l; \omega) n_\rho] + \sum_{l=1}^M B^{S,l} [T_{\rho z}^S(r^l; \omega) n_z - T_{zz}^S(r^l; \omega) n_\rho] \\ & + \sum_{l=1}^M C^l [t_\rho^0(r^l; \omega) n_z - t_z^0(r^l; \omega) n_\rho] = 0 \quad (2.70) \end{aligned}$$

2.5. Sistema de ecuaciones

Para resolver el problema de una inclusión fluida axisimétrica en z en un espacio elástico homogéneo, usaremos una formulación de Colocación (sección 1.2.2), construyéndose un sistema lineal de ecuaciones para los coeficientes desconocidos A^i , $B^{P,i}$, $B^{S,i}$ y C^i . Usando las ecuaciones (2.66), (2.68) y (2.70), se obtiene un sistema de tamaño $L \times (N + 3M)$, con L el número de puntos de colocación en la frontera ∂R , N el número de soluciones particulares para R_1 , y M el número de soluciones particulares R_2 . Este sistema es, entonces, de la forma:

$$\begin{array}{c}
 L \\
 L \\
 L
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 N \\
 M \\
 M \\
 M
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left(F_{11} \mid G^P \mid G^S \mid u^0 \right) \\
 \left(F_{21} \mid T^P \mid T^S \mid t^0 \right) \\
 \left(0 \mid T^P \mid T^S \mid t^0 \right)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 3L \times (N + 3M)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} A \\ B^P \\ B^S \\ C \end{array} \right)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 1 \\
 L \\
 L \\
 L
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left(\begin{array}{c} F_{12} \\ F_{22} \\ 0 \end{array} \right)
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 3L \times 1
 \end{array}
 \quad (2.71)$$

Es decir, $\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$, con \mathbf{K} de dimensión $3L \times (N + 3M)$, siendo resuelto por medio del el método SVD, como se explica en la sección 1.2.3.

Capítulo 3

Validación

El método propuesto es novedoso en cuanto a la familia T-completa y su aplicación. Por este motivo es necesario comprender sus limitaciones y potencialidades para luego obtener resultados que posean validez.

Con este objetivo, se hizo uso de la solución analítica de un problema clásico; compuesto por una cavidad esférica con cierto fluido no viscoso y una fuente centrada explosiva, rodeada por un espacio elástico homogéneo (Figura 3.1).

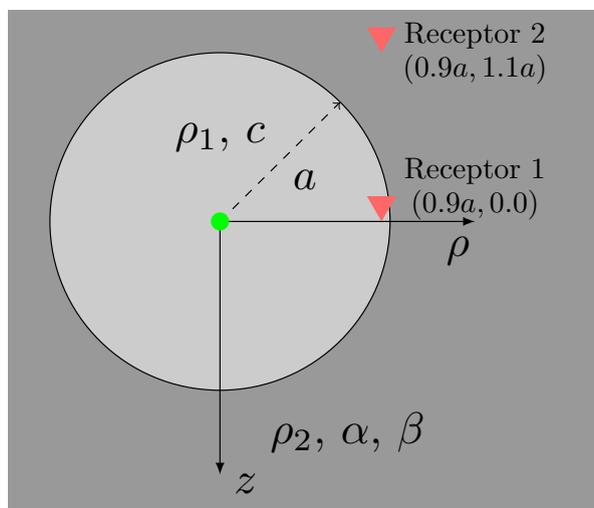


FIGURA 3.1: Esfera fluida inmersa en un espacio elástico homogéneo. En triángulos rojos se señalan las posiciones de los receptores donde se calculan las funciones de transferencia, con $a = 0.1$ [m] el radio de la esfera. Las densidades del fluido y del sólido son ρ_1 y ρ_2 , respectivamente. Las velocidades de propagación de las ondas de presión en el fluido, la onda P y la onda S en el sólido son c , α y β , respectivamente.

Para tener una noción de los distintos escenarios posibles, se hizo una comparativa entre la función de transferencia analítica para la presión (fluido) o la tracción (sólido) [21] [22] y la función aproximada correspondiente planteada en el Capítulo 2 (ecuaciones (2.9) y (2.59)), usando

distintos parámetros para los medios. La combinación de estos parámetros se basó en cinco distintos tipos de medios (ver Tabla 3.1), calculándose cuatro posibles casos característicos resumidos en la Tabla 3.2.

Medios fluidos		
	ρ [kg/m ³]	c [m/s]
Agua	1.0×10^3	1.5×10^3
Lodo	1.5×10^3	1.65×10^3
Magma	2.8×10^3	2.0×10^3

Medios sólidos			
	ρ [kg/m ³]	α [m/s]	β [m/s]
Roca 1	3.0×10^3	6.0×10^3	3.0×10^3
Roca 2	2.8×10^3	3.5×10^3	1.9×10^3

TABLA 3.1: Valores característicos para los medios calculados.

	ρ_1 [kg/m ³]	c [m/s]	ρ_1/ρ_2	c/α	c/β
Caso 1	1.0	1.5	0.333	0.25	0.5
Caso 2	1.5	1.65	0.5	0.275	0.55
Caso 3	2.8	2.0	0.933	0.333	0.666
Caso 4	2.8	2.0	1.0	0.571	1.053

TABLA 3.2: Casos usados para validar el método implementado. Se varían las propiedades de los medios y se comparan los resultados con la solución analítica.

En resumen los diferentes casos tratan de ejemplificar los siguientes escenarios:

Caso 1: corresponde al caso donde el medio fluido es agua y el medio sólido es “Roca 1”, siendo un símil de roca basáltica. Figuras 3.2, 3.3 y 3.4.

Caso 2: el medio fluido se puede pensar como un lodo, siendo más denso que el agua, mientras que el medio sólido es el mismo (Roca 1). Figuras 3.5, 3.6 y 3.7.

Caso 3: esta vez el medio fluido se vuelve a cambiar, correspondiendo a un magma tipo basáltico, mientras que el sólido no se varía (Roca 1). Figuras 3.8, 3.9 y 3.10.

Caso 4: se cambia el medio sólido, teniendo la misma densidad que el magma contenido y velocidades de propagación tales que $\beta < c < \alpha$. El fluido se mantiene como un magma de tipo basáltico. Figuras 3.11, 3.12 y 3.13.

Es importante notar que los casos 1 y 2 buscan considerar casos de alto contraste de densidad; mientras que los casos 3 y 4 representan la interacción de un magma basáltico rodeado por una roca de similar densidad (p. ej. Nishimura, 2003) siendo casos de bajo contraste de densidad.

La comparativa se tomó en dos puntos característicos, llamados “Receptor 1” y “Receptor 2”, como se puede ver en la Figura 3.1. Las posiciones de dichos puntos de observación se

establecieron de forma que uno de ellos (Receptor 1) se encontrase en la región que contiene el fluido, mientras que el otro (Receptor 2) en el sólido. Luego se calcularon las funciones de transferencia en ambas regiones, lo que permitió probar ambas familias T-completas.

Se seleccionaron las figuras que muestran la presión y la tracción, dado que los desplazamientos son derivados de estas expresiones, comportándose de manera similar en relación a los valores analíticos. Luego se calculó el error porcentual con respecto a la función analítica para ambos casos.

Las frecuencias de corte f_{max} se determinaron en función de la frecuencia fundamental de un oscilador esférico de radio a calculada por Kubotera (1974) [1],

$$f_0 = \frac{4.4}{2\pi} \frac{c}{a}, \quad (3.1)$$

con c la velocidad de propagación de las ondas en el fluido. De este modo, la frecuencia de corte la aproximaremos a

$$f_{max} = 10f_0 \sim 7 \frac{c}{a}. \quad (3.2)$$

Alcanzando rangos que permiten observar varias frecuencias de resonancia.

Como se puede apreciar en todas las figuras 3.4, 3.7, 3.10 y 3.13, la solución aproximada tiende a empeorar en frecuencias cercanas a cero, donde esperamos que la función de transferencia diverja, implicando que los errores se amplifiquen considerablemente. Ahora bien, basta alcanzar frecuencias un poco mayores a 0 [Hz] para que la solución calculada tenga un error porcentual no mayor al 15 % en el peor de los casos, considerándose en general que la solución aproximada se acerca suficientemente bien la solución analítica. Otro aspecto notable es que el mejor caso representado es el Caso 4 (Figuras 3.11 y 3.12), con un error porcentual no mayor al 4 %; siendo la velocidad de propagación de las ondas en el fluido subsónica con respecto a la velocidad de las ondas P en el sólido, pero supersónica con respecto a la velocidad de las ondas S . Este caso es de mucho interés, pues se presenta en ciertas interacciones de magma con el material confinante.

Se concluye a partir de las comparativas que la solución está bien representada y permite extender el cálculo de funciones de transferencia a otros tipos de geometrías axisimétricas. Para obtener resultados confiables se seleccionará el mejor caso, cuando $\beta < c < \alpha$ y $\rho_1/\rho_2 = 0.933$, para luego aproximar la función de transferencia y finalmente obtener resultados en tiempo.

Figuras

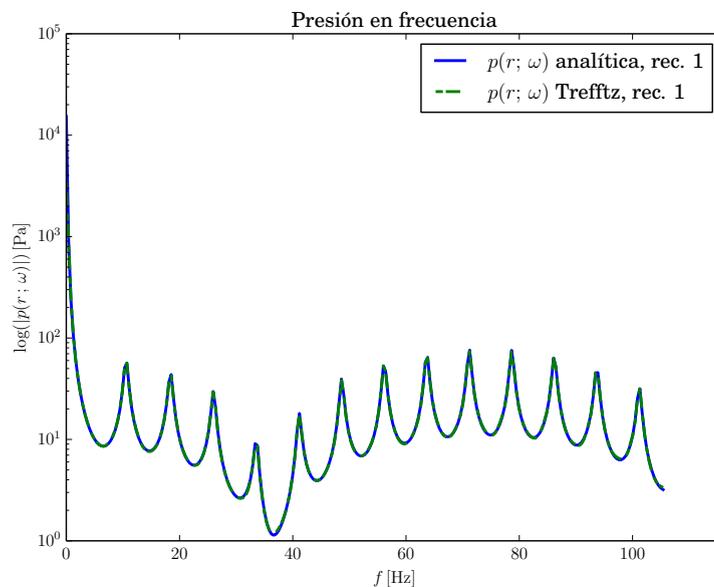


FIGURA 3.2: **Caso 1.** Presión en el receptor 1. Contraste de propiedades correspondiente a agua-Roca 1 (Tabla 3.2). En azul se presenta la solución analítica. En una línea entrecortada verde se presenta la solución aproximada.

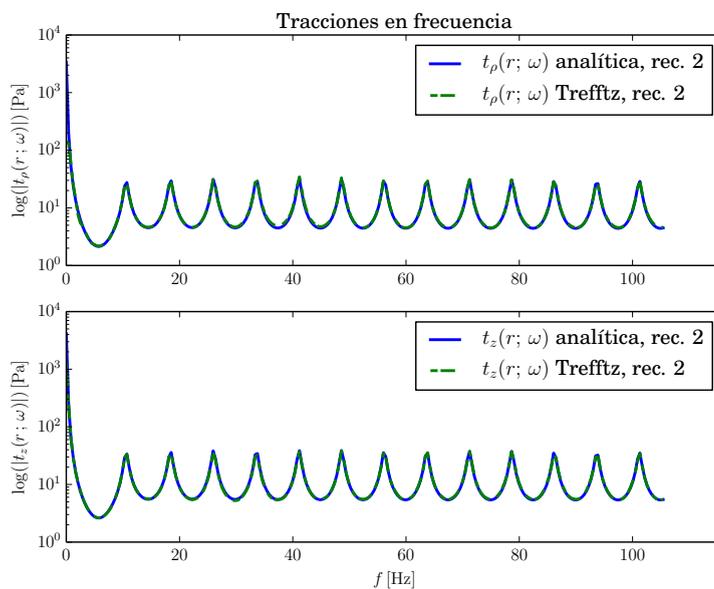


FIGURA 3.3: **Caso 1.** Componentes de la tracción en el receptor 2. Contraste de propiedades correspondiente al de agua-Roca 1 (Tabla 3.2). Se considera la proyección de la tracción sobre una superficie esférica. En azul se presenta la solución analítica. En una línea verde entrecortada la solución aproximada.

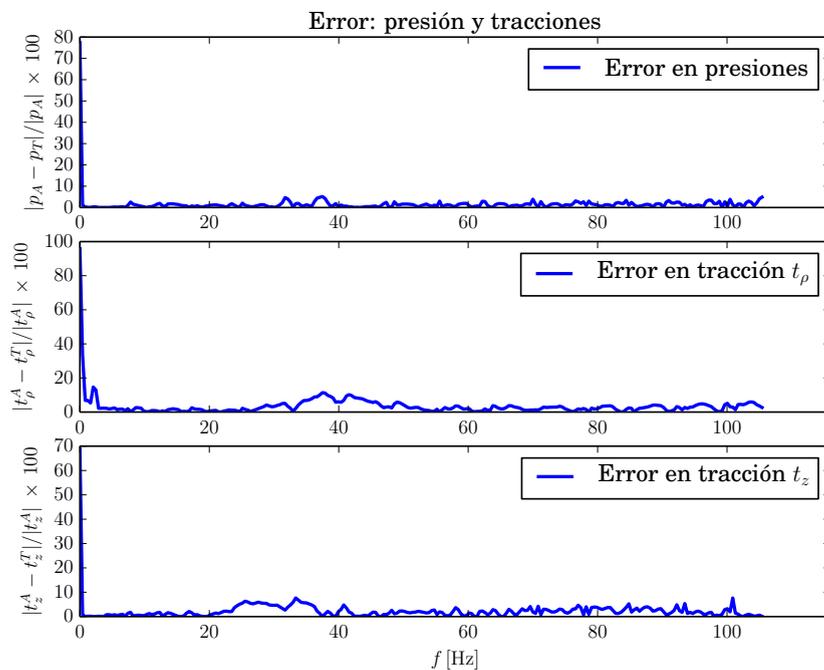


FIGURA 3.4: **Caso 1.** Error porcentual para la presión (receptor 1) y las componentes de la tracción (receptor 2). Contraste de propiedades correspondiente al de agua-Roca 1 (Tabla 3.2).

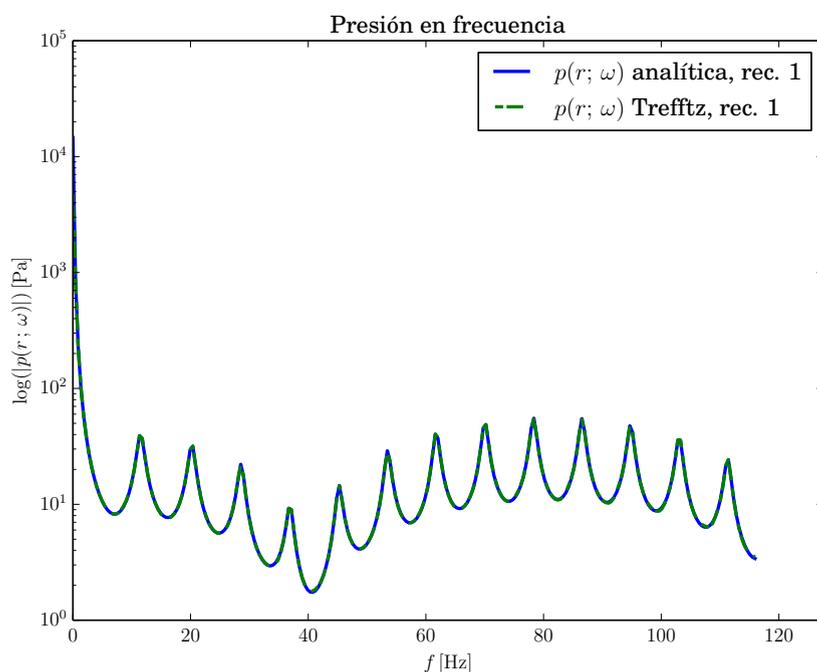


FIGURA 3.5: **Caso 2.** Presión en el receptor 1. Contraste de propiedades correspondiente al de lodo-Roca 1 (Tabla 3.2). En azul se presenta la solución analítica. En una línea entrecortada verde se presenta la solución aproximada.

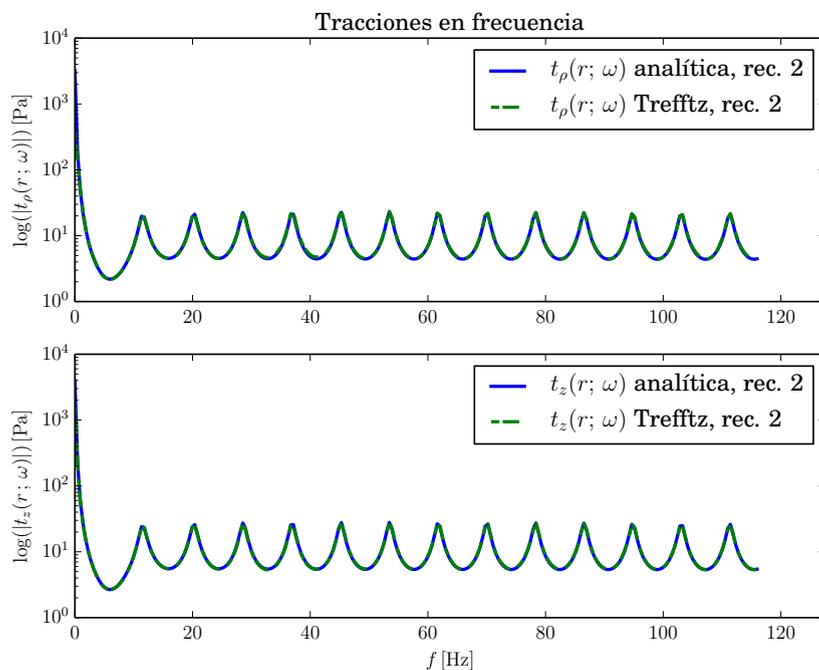


FIGURA 3.6: **Caso 2.** Componentes de la tracción en el receptor 2. Contraste de propiedades correspondiente al de lodo-Roca1 (Tabla 3.2). Se considera la proyección de la tracción sobre una superficie esférica. En azul se presenta la solución analítica. En una línea verde entrecortada la solución aproximada.

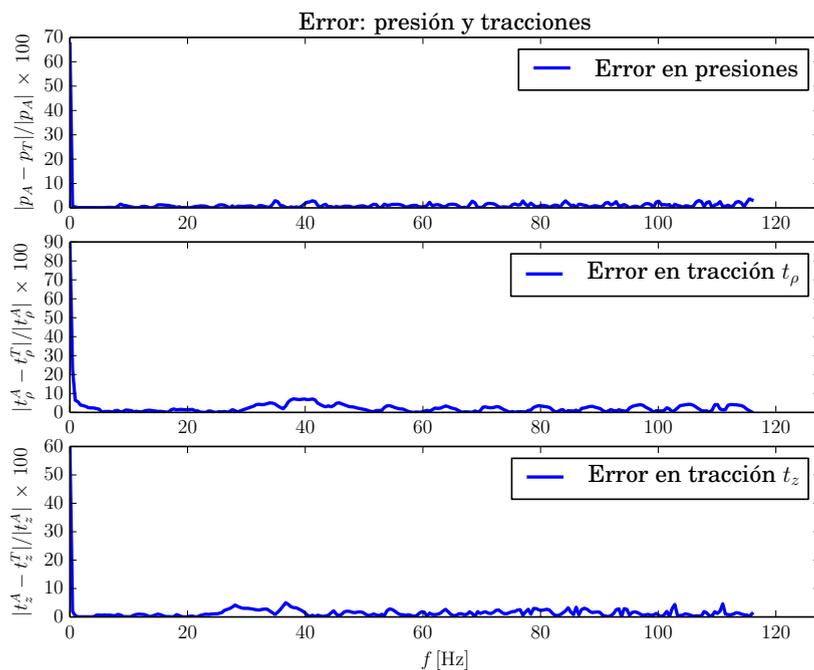


FIGURA 3.7: **Caso 2.** Error porcentual para la presión (receptor 1) y las componentes de la tracción (receptor 2). Contraste de propiedades correspondiente al de lodo-Roca 1 (Tabla 3.2).

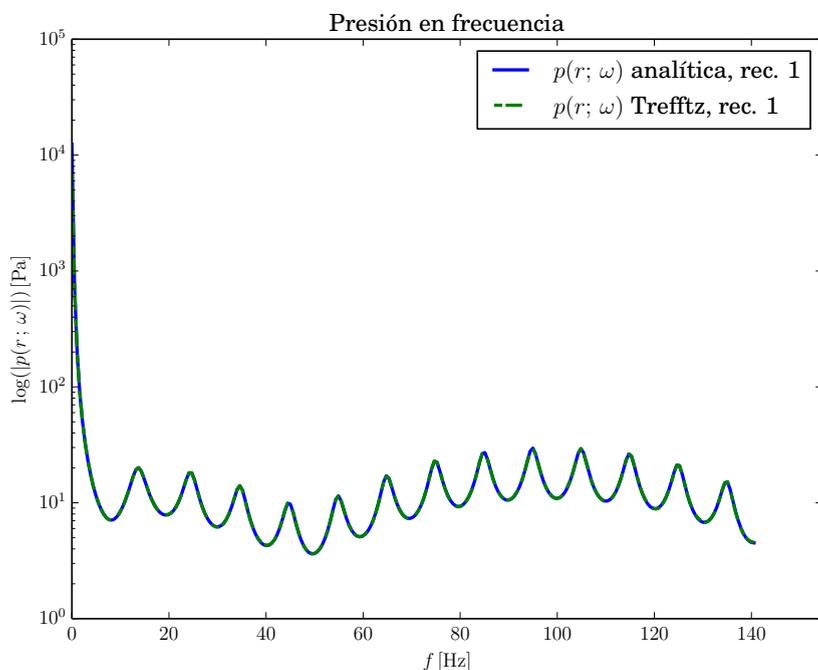


FIGURA 3.8: **Caso 3.** Presión en el receptor 1. Contraste de propiedades correspondiente al de magma-Roca 1 (Tabla 3.2). En azul se presenta la solución analítica. En una línea entrecortada verde se presenta la solución aproximada.

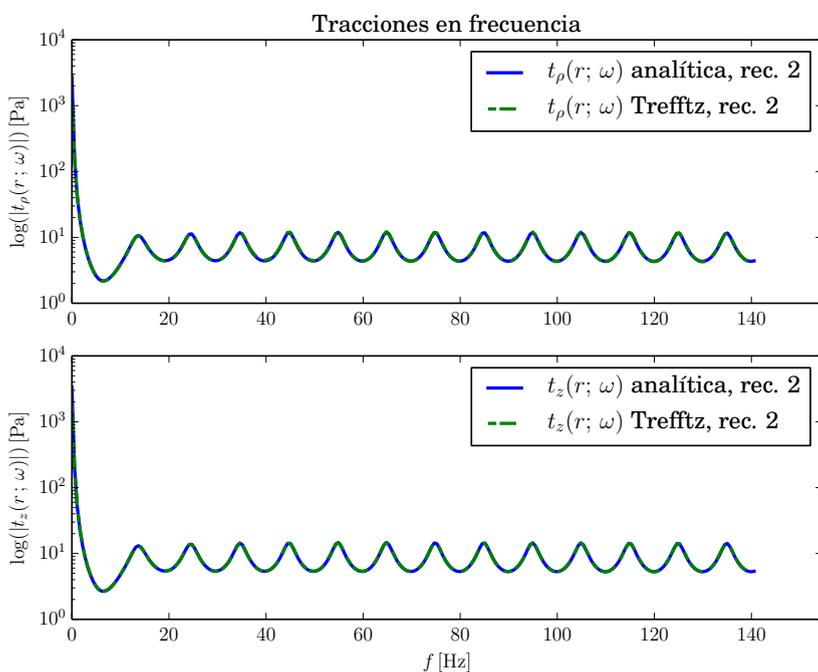


FIGURA 3.9: **Caso 3.** Componentes de la tracción en el receptor 2. Contraste de propiedades correspondiente al de magma-Roca 1 (Tabla 3.2). Se considera la proyección de la tracción sobre una superficie esférica. En azul se presenta la solución analítica. En una línea verde entrecortada la solución aproximada.

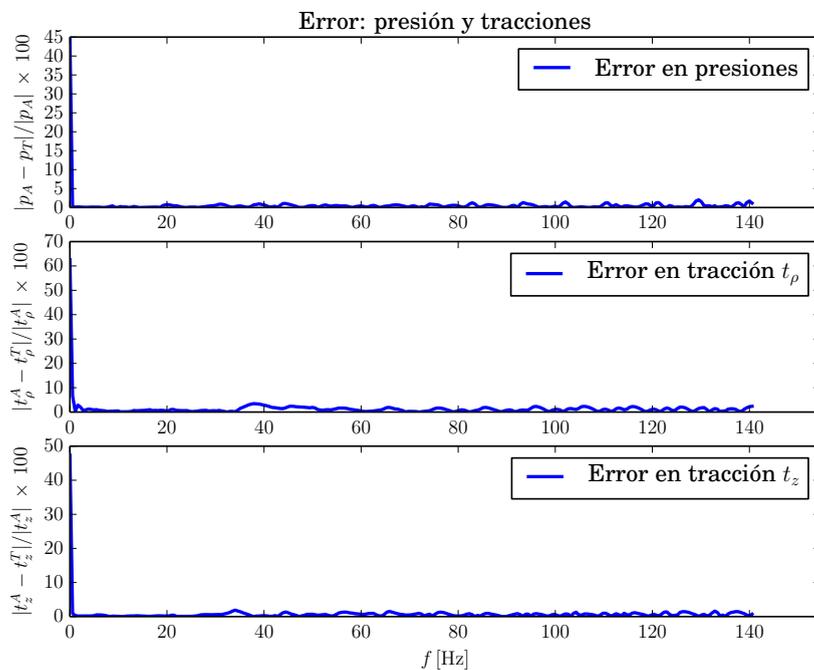


FIGURA 3.10: **Caso 3.** Error porcentual para la presión (receptor 1) y las componentes de la tracción (receptor 2). Contraste de propiedades correspondiente al de magma-Roca 1 (Tabla 3.2).

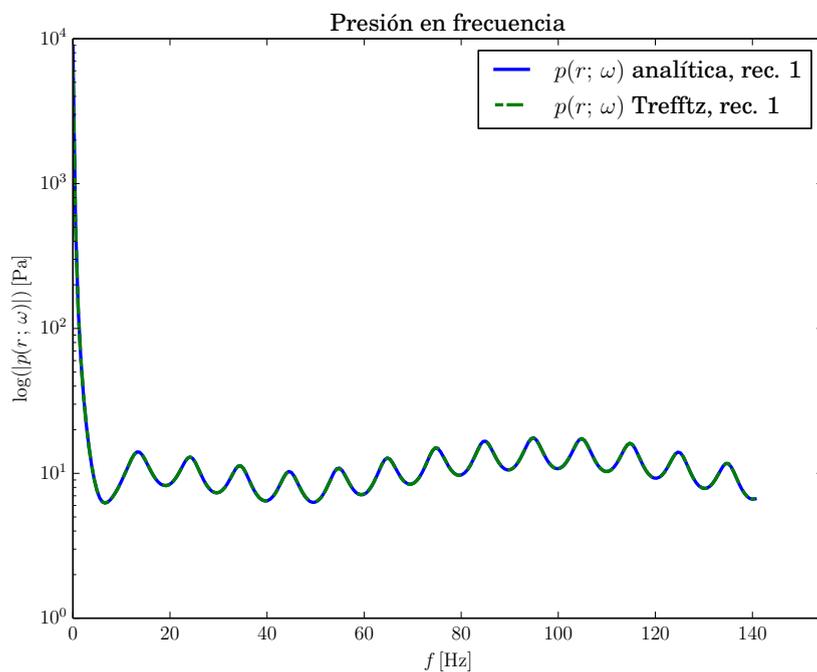


FIGURA 3.11: **Caso 4.** Presión en el receptor 1. Contraste de propiedades correspondiente al de magma-Roca 2 (Tabla 3.2). En azul se presenta la solución analítica. En una línea entrecortada verde se presenta la solución aproximada.

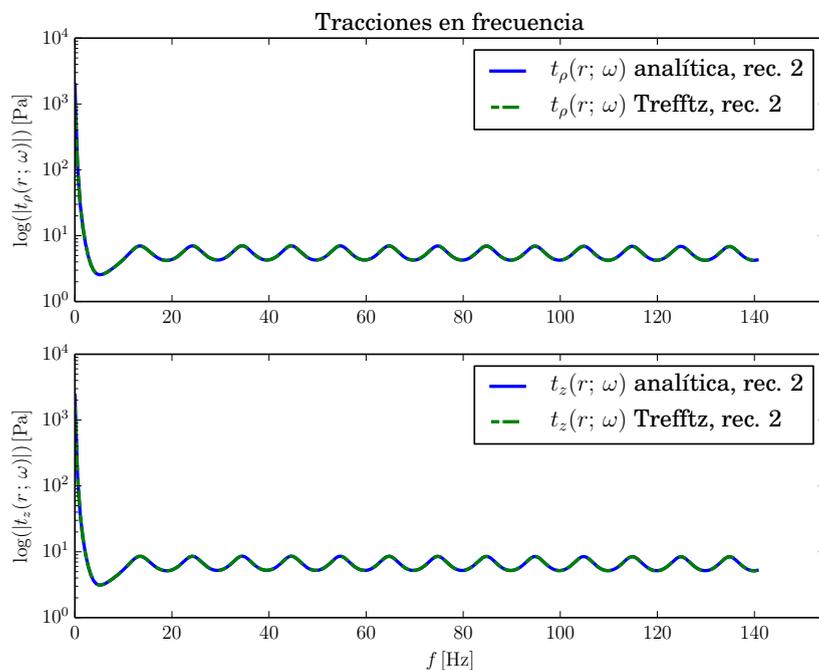


FIGURA 3.12: **Caso 4.** Componentes de la tracción. Contraste de propiedades correspondiente al de magma-Roca 2 (Tabla 3.2). Se considera la proyección de la tracción sobre una superficie esférica. En azul se presenta la solución analítica. En una línea verde entrecortada la solución aproximada.

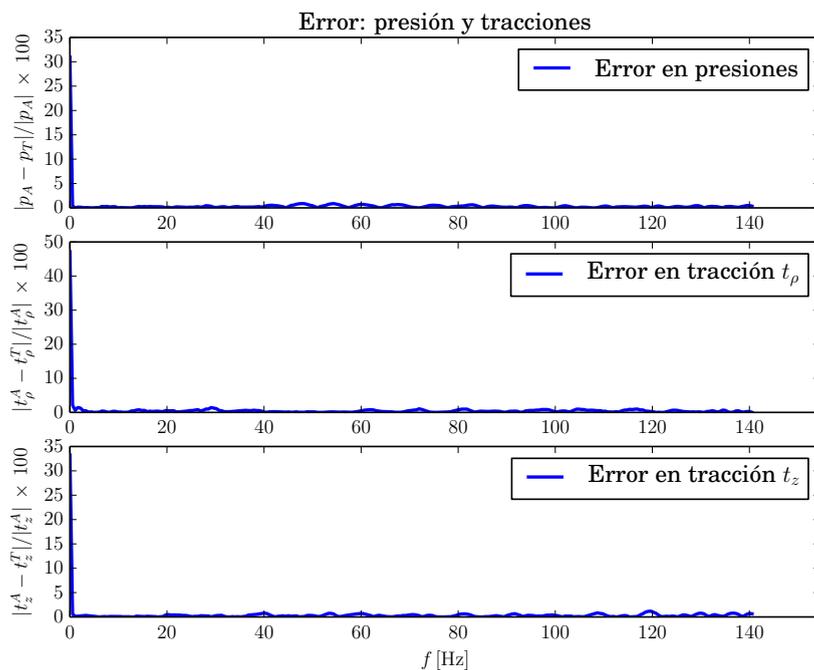


FIGURA 3.13: **Caso 4.** Error porcentual para la presión (receptor 1) y las componentes de la tracción (receptor 2). Contraste de propiedades correspondiente al de magma-Roca 2 (Tabla 3.2).

Capítulo 4

Resultados

En este trabajo en particular, pensando en la gama de posibilidades que son de interés, se calcularon las funciones de transferencia y las respuestas en tiempo de dos diferentes geometrías:

1. Una esfera con la fuente en $z = 0.2 a$, con radio $a = 0.1$ [m].
2. Un cilindro de radio $a = 0.1$ [m] y largo $6 a$. Las tapas se modelaron de forma esférica, con radio a , para suavizar la geometría. Se calcularon los casos de fuente centrada ($z = 0$) y descentrada ($z = 1.8 a$).

Teóricamente el modelo no tiene restricciones mientras se respete la simetría, pero es conveniente iniciar con geometrías suaves para tener una base de referencia para comparar con casos de geometrías más complejas.

A pesar de las consideraciones de simetría que simplifican el problema, se puede extraer información valiosa sobre el efecto que tendrá, por ejemplo, el situar la fuente en $z \neq 0$. Por otro lado, una geometría axisimétrica, tal como un cilindro que posea o no variaciones en su diámetro, permite analizar casos de interés en diversas áreas de la modelación de problemas elastodinámicos.

Una vez escogidos los parámetros esenciales (densidades y velocidades de propagación, correspondientes al Caso 4) con base en la comparación con el modelo analítico de la esfera, podemos resolver casos de mayor complejidad.

Es importante notar que, luego de calcular los coeficientes de las distintas familias T-completas, podemos realizar un gran número de pruebas a través del cálculo del campo de desplazamientos o tracciones asociadas. En otras palabras, tendremos la solución aproximada del problema en el espacio, por lo que las posibilidades de estudiarla son muy variadas. En particular, para obtener los contornos mostrados y los mapas de campos vectoriales, se calcularon los valores de

la función de transferencia para cada región en una malla de 1800 puntos (60×30) manteniendo la proporción del área que se quiso graficar.

Para los resultados en el tiempo se usó un pulso de Berlage [2], asegurando causalidad y permitiendo establecer en frecuencia un espectro centrado en 10 [Hz] (ver apéndice B).

4.1. Esfera

Como se puede apreciar en las figuras 4.1 y 4.2, se graficó el movimiento de partícula y los correspondientes sismogramas sintéticos para una línea de 16 receptores puestos de forma vertical, pasando por las regiones fluida y sólida. Se aprecia ostensiblemente el efecto que genera una fuente no centrada, teniendo los desplazamientos en dicho caso un desfase que genera un movimiento elíptico progrado o retrógrado, dependiendo de la posición del receptor en función de la fuente ($z = 0$ o bien $z = 0.2a$).

El caso de la esfera tiene mucha importancia debido a que es sencillo intuir el comportamiento que tendrá, por ejemplo, el posicionar la fuente ya no en $z = 0$, sino en un valor tal que $|z| < a$. En particular, al posicionar la fuente en $z = 0.2a$, esperamos que el efecto de la asimetría de la excitación implique amplificaciones en frecuencia mayores en $z > 0$, pero manteniendo la influencia de la forma esférica. Asimismo, en tiempo debemos ver el acoplamiento de los frentes de onda que se refractan dentro de las paredes de la esfera, produciendo un efecto de movimiento no alineado con la dirección a la fuente; es decir, un desfase entre las proyecciones en ρ y en z de los desplazamientos.

En las figuras 4.3, 4.4 y 4.5; se muestran seis *snapshots* compuestos por el módulo de las funciones de transferencia en el espacio de la presión y tracción (ecuaciones 2.9 y 2.59), la respuesta en el tiempo y los desplazamientos en tiempo de forma vectorial, respectivamente. Si bien existe cierta “saturación” en el espectro de las funciones de transferencia cerca de la fuente, perdiéndose la resolución el sólido, se puede ver claramente el efecto que tiene la fuente descentrada, generando zonas de amplificación no simétricas en z que se vuelven cada vez más complejas a medida que la frecuencia aumenta. Es muy interesante ver cómo a frecuencias altas las zonas de amplificación se comportan como armónicos esféricos en el sólido, pero influídos por la excentricidad de la fuente. En tiempo se aprecia de forma clara la propagación de los frentes de onda, especialmente en el caso de los desplazamientos (Figura 4.5), donde se ve la complejidad del campo generado en la interacción fluido-sólido, generándose frentes de onda que comienzan en la parte superior para luego propagarse hacia el polo opuesto de la esfera.

4.2. Cilindro

Se modeló un cilindro con tapas de forma esférica manteniendo los mismos parámetros del medio que fueron usados para la esfera. Se escogieron tapas esféricas para suavizar el efecto que producen las variaciones abruptas de la geometría teniendo en cuenta, además, que es más natural una tapa curva que una completamente plana, probablemente siendo la forma real similar a una catenaria. El largo del cilindro se supuso como $3a$ para poder observar el efecto tanto de las tapas esféricas como de las paredes.

Dado que este caso no ha sido explorado anteriormente, se calculó la respuesta del mismo cilindro, pero variando la posición de la fuente. El primer caso representa el efecto de una fuente centrada, $z = 0$, esperándose que exista simetría con respecto a dicho punto. En el segundo caso la fuente se ubica en $z = 1.8a$, por lo que se debe perder la simetría con respecto a $z = 0$, mostrándose en frecuencia el efecto de zonas de amplificación en la tapa más cercana a la fuente; y en tiempo, la generación de frentes de onda desde la misma zona.

4.2.1. Fuente centrada

Las funciones de transferencia en el espacio (Figura 4.6) reflejan la simetría esperada en torno a la fuente. Como es de esperar, en la región R_1 las amplificaciones son muy altas cerca de la fuente, volviéndose patrones más complejos al aumentar la frecuencia al igual que en la esfera. Es interesante observar cómo en la región R_2 se mantiene la simetría con respecto a $z = 0$, pero el efecto de la geometría de las paredes y las tapas se refleja generando zonas de amplificación dirigidas desde las tapas en dirección al eje z y desde la pared cercana a la fuente hacia el eje ρ ; pero también “zonas de sombra” que se intercalan con las anteriores. Las amplitudes de las funciones de transferencia contrastan en un orden de magnitud entre ambas regiones, mostrando que la mayor parte de la energía que produce la fuente es contenida en el fluido, como es de esperarse al no poseer rigidez.

La propagación de ondas de presión y tracción (Figura 4.7) muestra claramente los efectos en tiempo de la geometría, produciendo ondas que asemejan esferoides al verse afectados los frentes originalmente esféricos por la interacción con el sólido a lo largo de una geometría diferente. Como esperamos a partir de las amplificaciones que vimos en frecuencia, existen zonas de sombra intercaladas con zonas de amplificaciones considerables a partir de la interfaz cercana a la fuente y en las tapas, siendo las últimas verdaderos amplificadores al concentrar los frentes de onda para luego emitirlos hacia el sólido. Por otro lado, el campo de desplazamientos (Figura 4.8) en tiempo muestra ondas de alta complejidad emanando del cilindro, con efectos torsionales en el sólido que seguramente se deben a la geometría.

4.2.2. Fuente en $z = 1.8 a$

Las amplitudes en frecuencia (Figura 4.9) se ven dramáticamente influenciadas por el cambio en la posición de la fuente. Esto se aprecia claramente en la región R_1 , pues debido a la posición de la fuente se generan zonas de amplitudes altamente antisimétricas. Si se mira con detalle, las mayores amplificaciones en este caso son de ~ 100 [Pa], siendo muy similares a las obtenidas en la esfera. Esto se puede interpretar como el efecto del acercamiento de la fuente a la tapa superior, que tiene forma esférica, ya que condensa el efecto de la fuente en dicha zona. En la región R_2 , se ve el efecto de la posición de la fuente en la pérdida de simetría de las diferentes zonas de amplitudes. Además, se aprecia una direccionalidad de los contornos, probablemente debida a la fuente. Las amplitudes se mantienen dentro de los mismos valores para el caso anterior, mostrando una vez más que la energía que es transmitida depende principalmente de las propiedades de los medios, no así de la fuente.

Las presiones y tracciones en tiempo (Figura 4.10) son consecuencia directa de las amplitudes en frecuencia, mostrando los efectos de situar la fuente en un extremo. Es interesante notar cómo la geometría de la tapa cercana a la fuente le permite al frente de presión mantener su geometría esférica, viéndose luego el efecto del alargamiento de la geometría, y nuevamente mostrando cómo la tapa inferior logra generar frentes de onda en dirección a z . También se puede ver a lo largo de la pared frentes de onda que viajan por la interfaz con una amplificación mayor en el sólido, dando a entender que estamos en presencia de ondas superficiales; lo que está en acuerdo con las propiedades de los medios, pensadas de forma que este fenómeno se manifieste ($\beta < c < \alpha$).

El campo de desplazamientos (Figura 4.11) es de particular belleza, pues permite apreciar el efecto de la tapa esférica superior en ambas regiones, produciendo desplazamientos que se propagan de forma muy similar a los producidos por la esfera, pero perdiendo dicha forma en las zonas más alejadas de la misma. Es así una mezcla de ambos campos para luego ser casi nulo en la tapa inferior.

Figuras

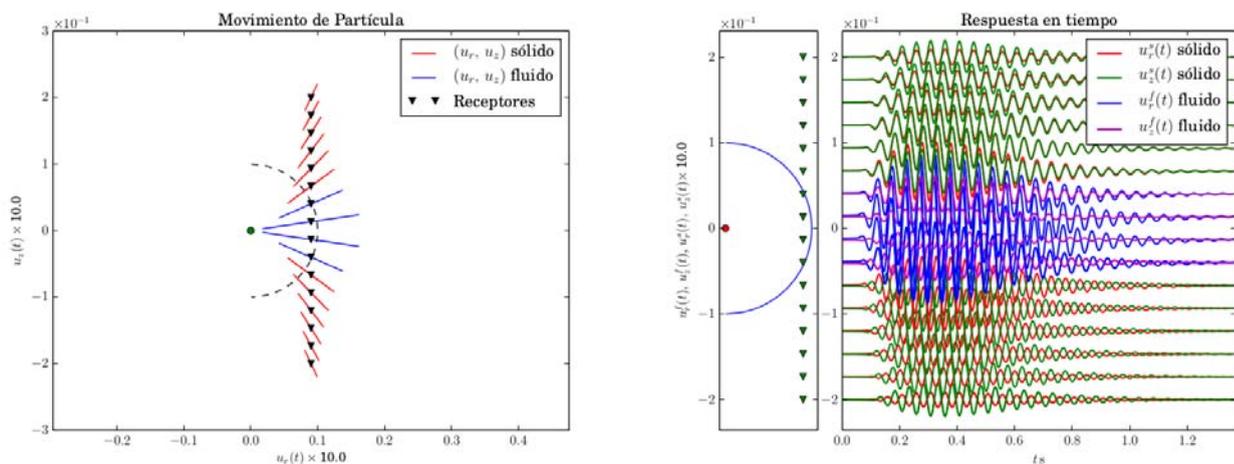


FIGURA 4.1: **Lado izquierdo:** movimiento de partícula para una fuente centrada en $z = 0$ (punto verde). Se puede apreciar que los desplazamientos se restringen casi exclusivamente sobre la dirección a la fuente. **Lado derecho:** sismogramas sintéticos para los mismos receptores.

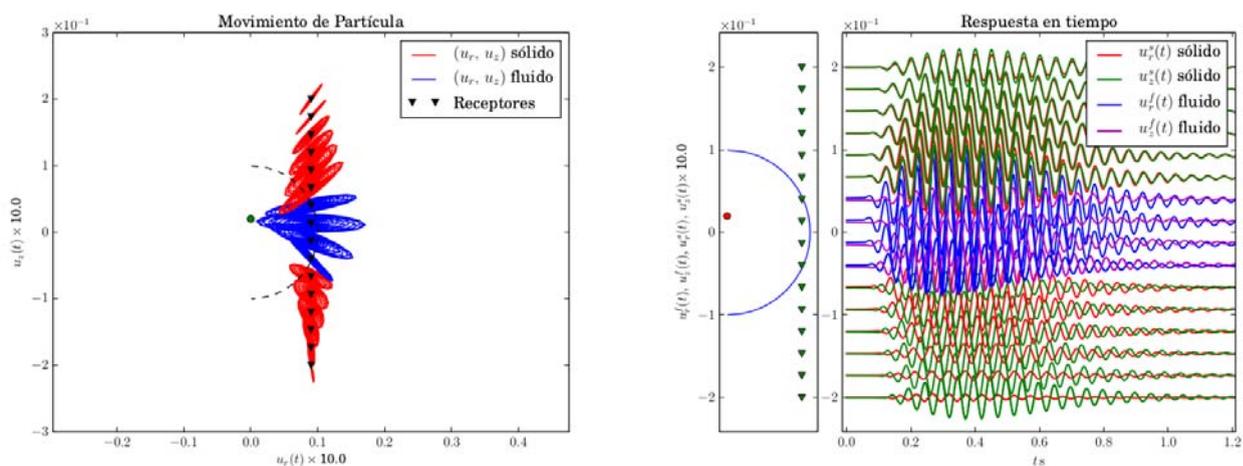


FIGURA 4.2: **Lado izquierdo:** movimiento de partícula para una fuente en $z = 0.2a$ (punto verde). Se aprecia el efecto de la fuente no centrada en el desfase de las proyecciones en r y en z . **Lado derecho:** sismogramas sintéticos para los mismos receptores.

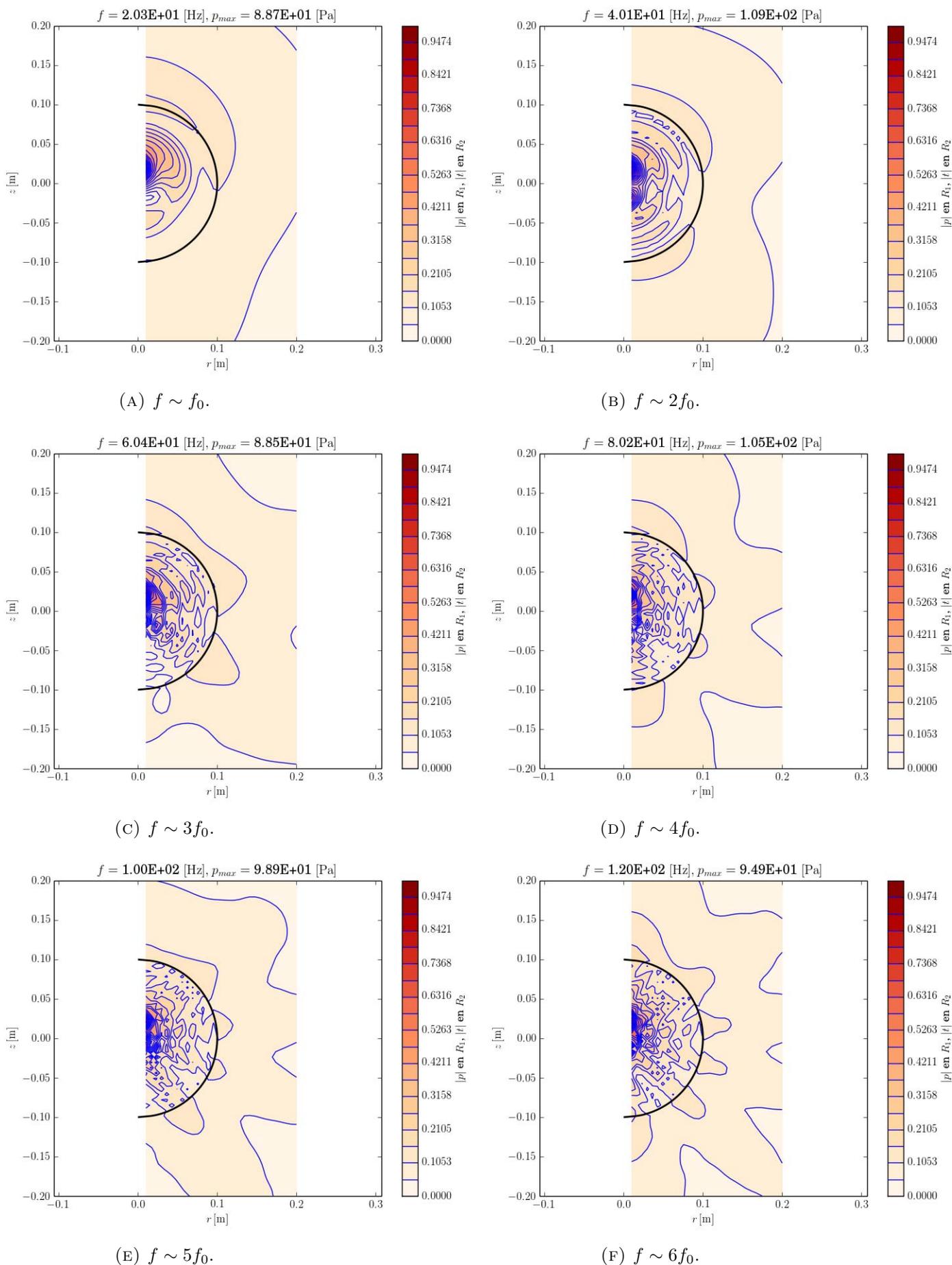


FIGURA 4.3: Valores absolutos de las funciones de transferencia para seis frecuencias características. La frecuencia f_0 se aproxima a c/a , coincidiendo con la frecuencia en la que se centra el espectro de la fuente (ver Apéndice B). Para la región R_1 se muestra el valor de la presión, mientras que para la región R_2 el valor de la tracción total.

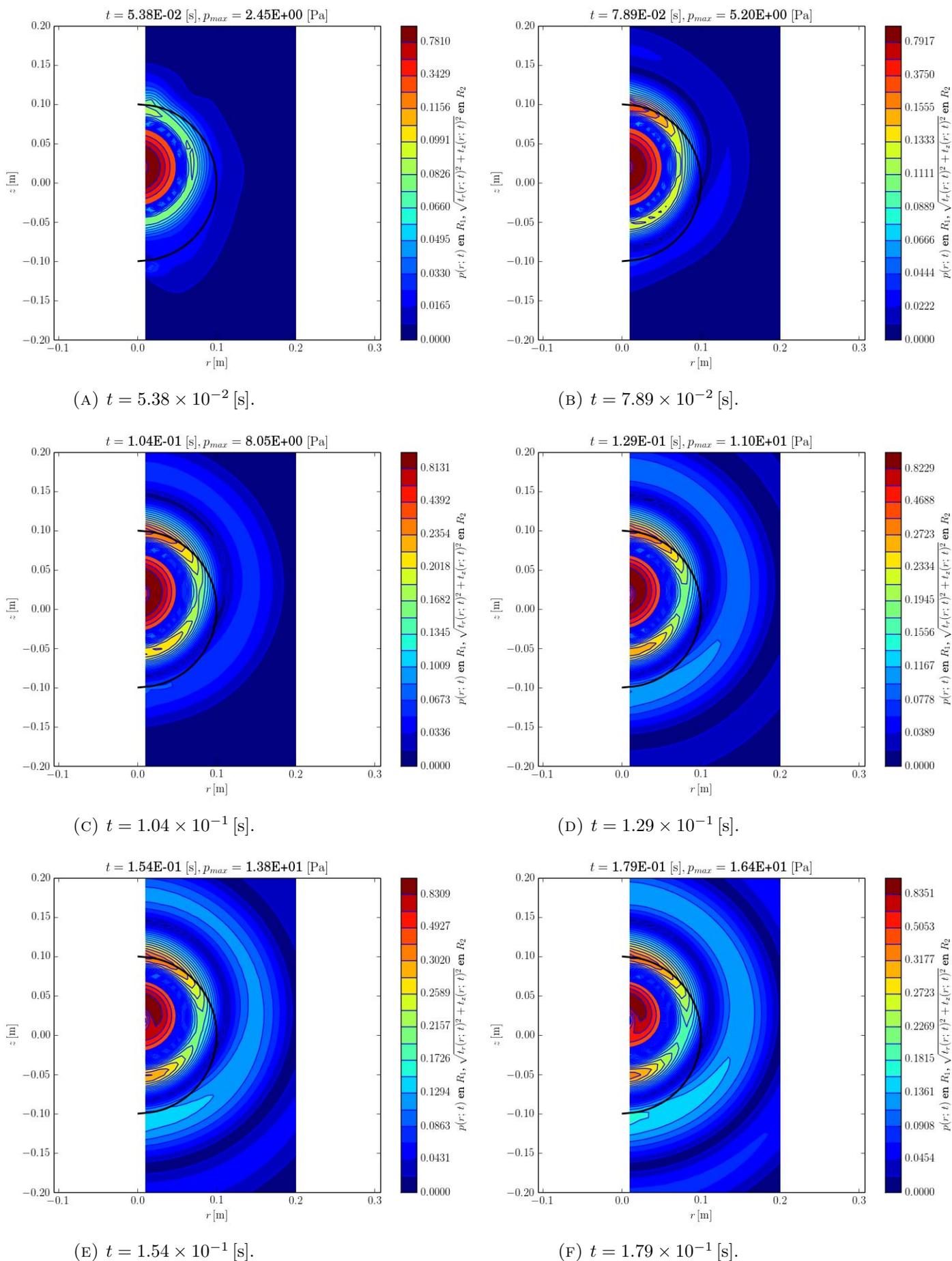
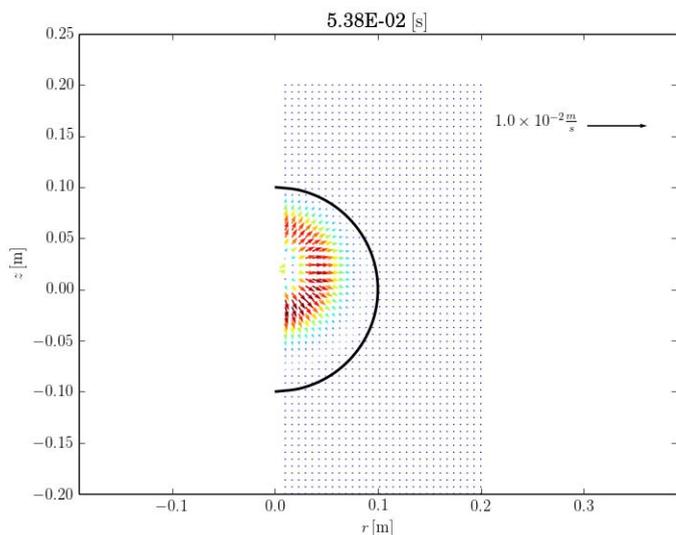
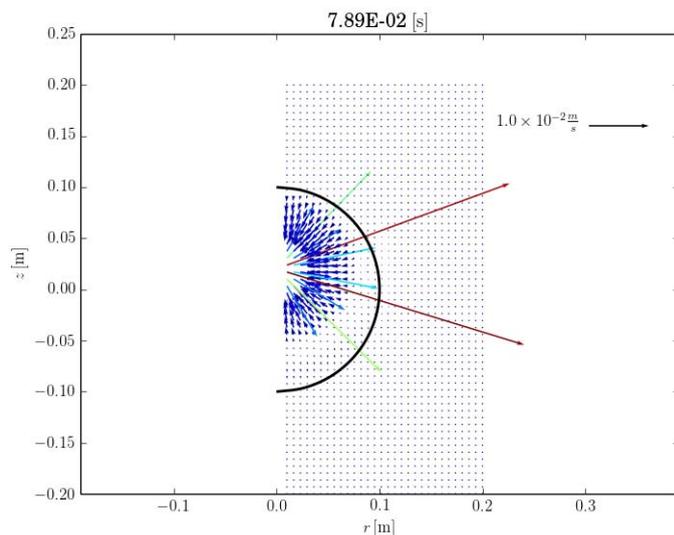


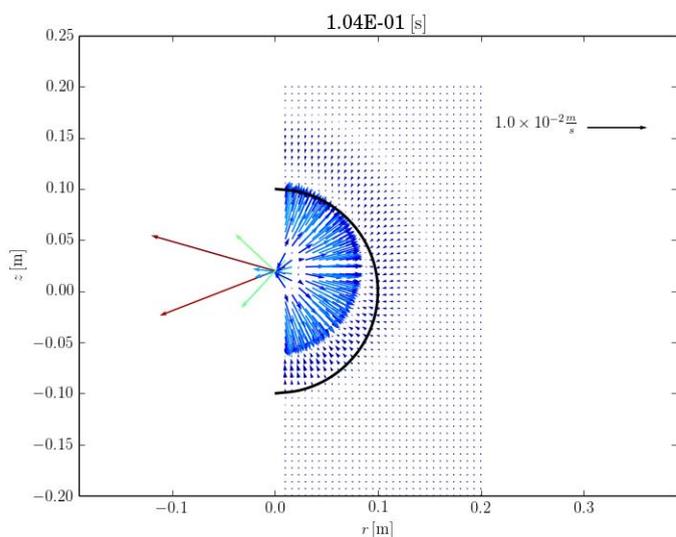
FIGURA 4.4: Frentes de onda para una serie de seis tiempos cercanos. Se puede apreciar la propagación de los frentes de onda y los efectos de la excentricidad de la fuente. En la región R_1 se muestra el valor absoluto de la presión, mientras que en la región R_2 el valor absoluto de la tracción.



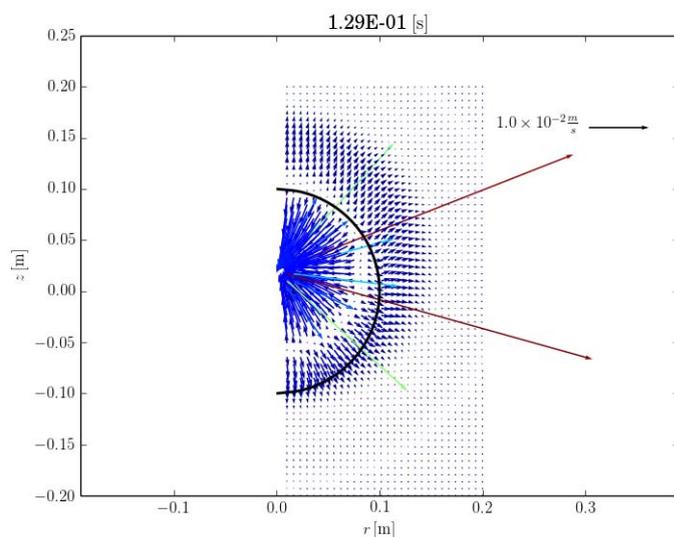
(A) $t = 5.38 \times 10^{-2}$ [s].



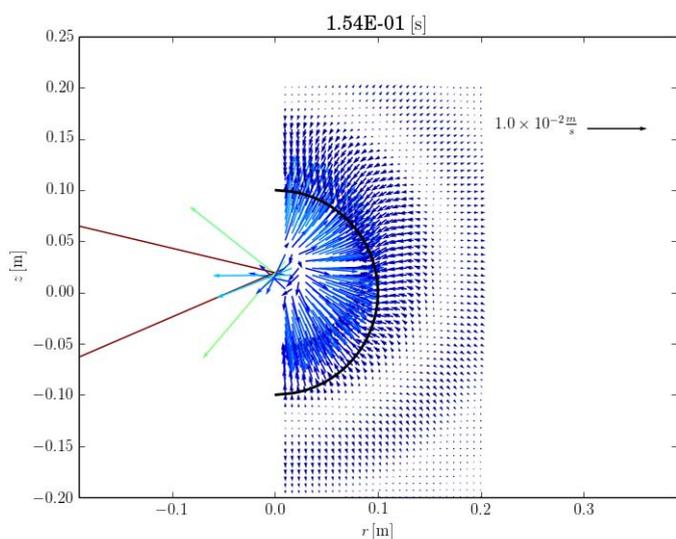
(B) $t = 7.89 \times 10^{-2}$ [s].



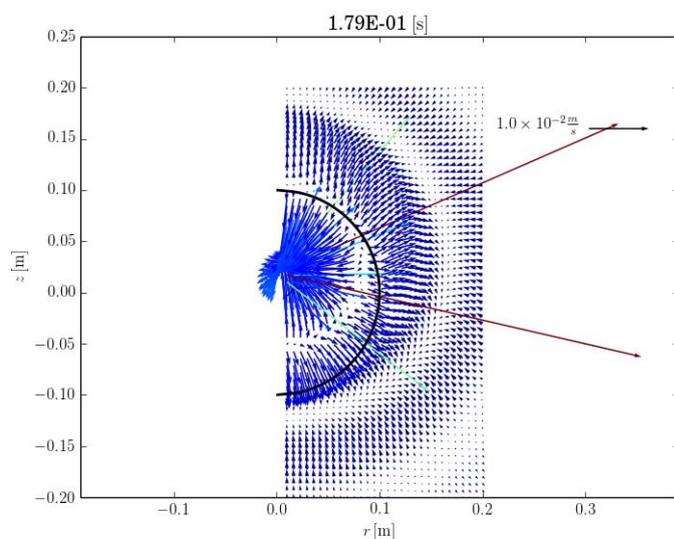
(C) $t = 1.04 \times 10^{-1}$ [s].



(D) $t = 1.29 \times 10^{-1}$ [s].



(E) $t = 1.54 \times 10^{-1}$ [s].



(F) $t = 1.79 \times 10^{-1}$ [s].

FIGURA 4.5: Campo de desplazamientos para una serie de seis tiempos cercanos. Se puede apreciar la propagación de los frentes de desplazamientos y los efectos de la excentricidad de la fuente.

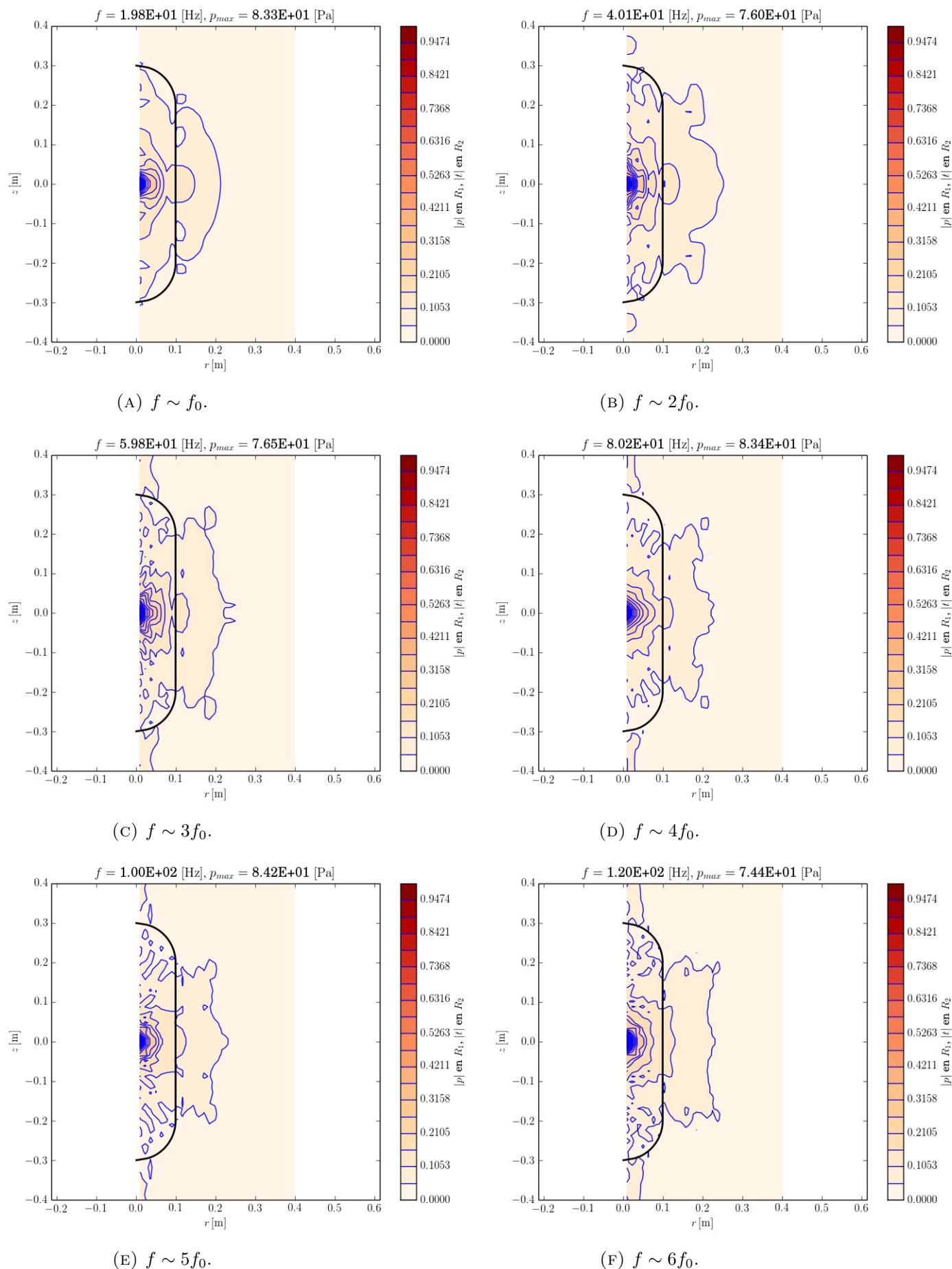


FIGURA 4.6: Valores absolutos de las funciones de transferencia para seis frecuencias características. La frecuencia f_0 se aproxima a c/a , coincidiendo con la frecuencia en la que se centra el espectro de la fuente (ver Apéndice B). Para la región R_1 se muestra el valor de la presión, mientras que para la región R_2 el valor de la tracción total. Fuente centrada.

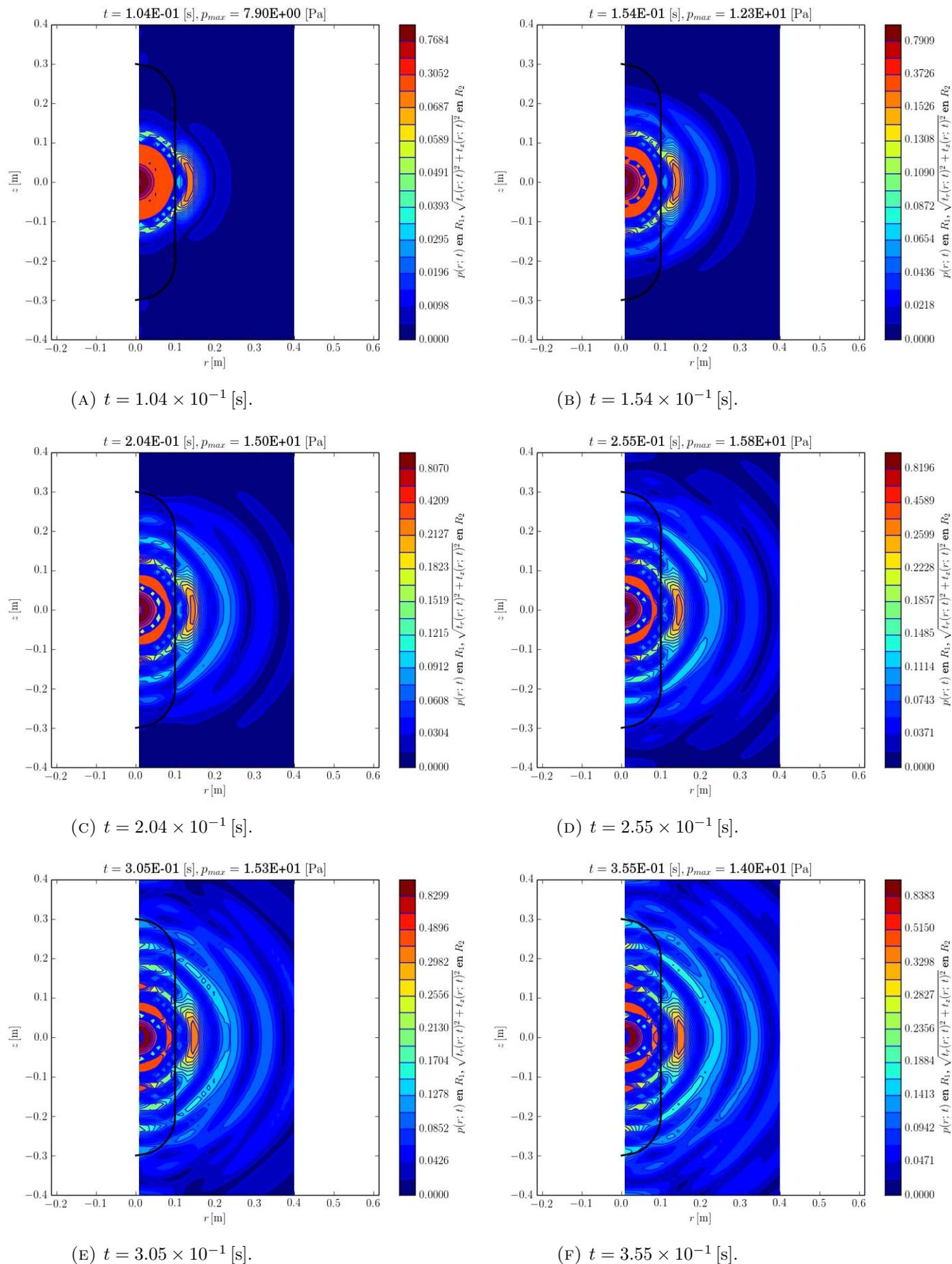


FIGURA 4.7: Frentes de onda para una serie de seis tiempos cercanos. Se puede apreciar la propagación de los frentes de onda y los efectos de la geometría. En la región R_1 se muestra el valor absoluto de la presión, mientras que en la la región R_2 el valor absoluto de la tracción. Fuente centrada.

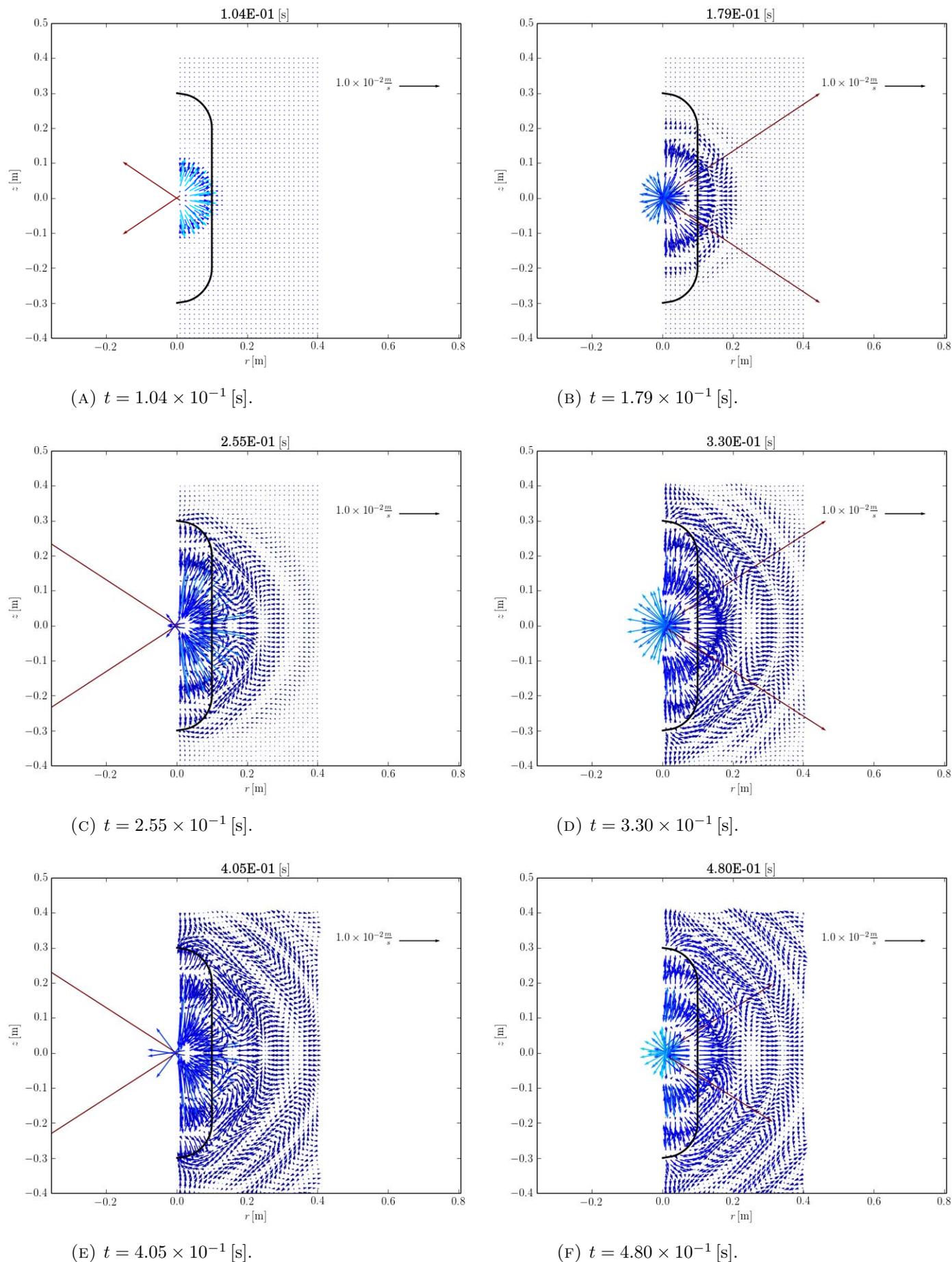


FIGURA 4.8: Campo de desplazamientos para una serie de seis tiempos cercanos. Es importante notar que los tiempos que se muestran en este caso difieren de la Figura para las presiones y tracciones, pues el intervalo entre cada *snapshot* es mayor, permitiendo ver los efectos de las tapas de forma más clara.

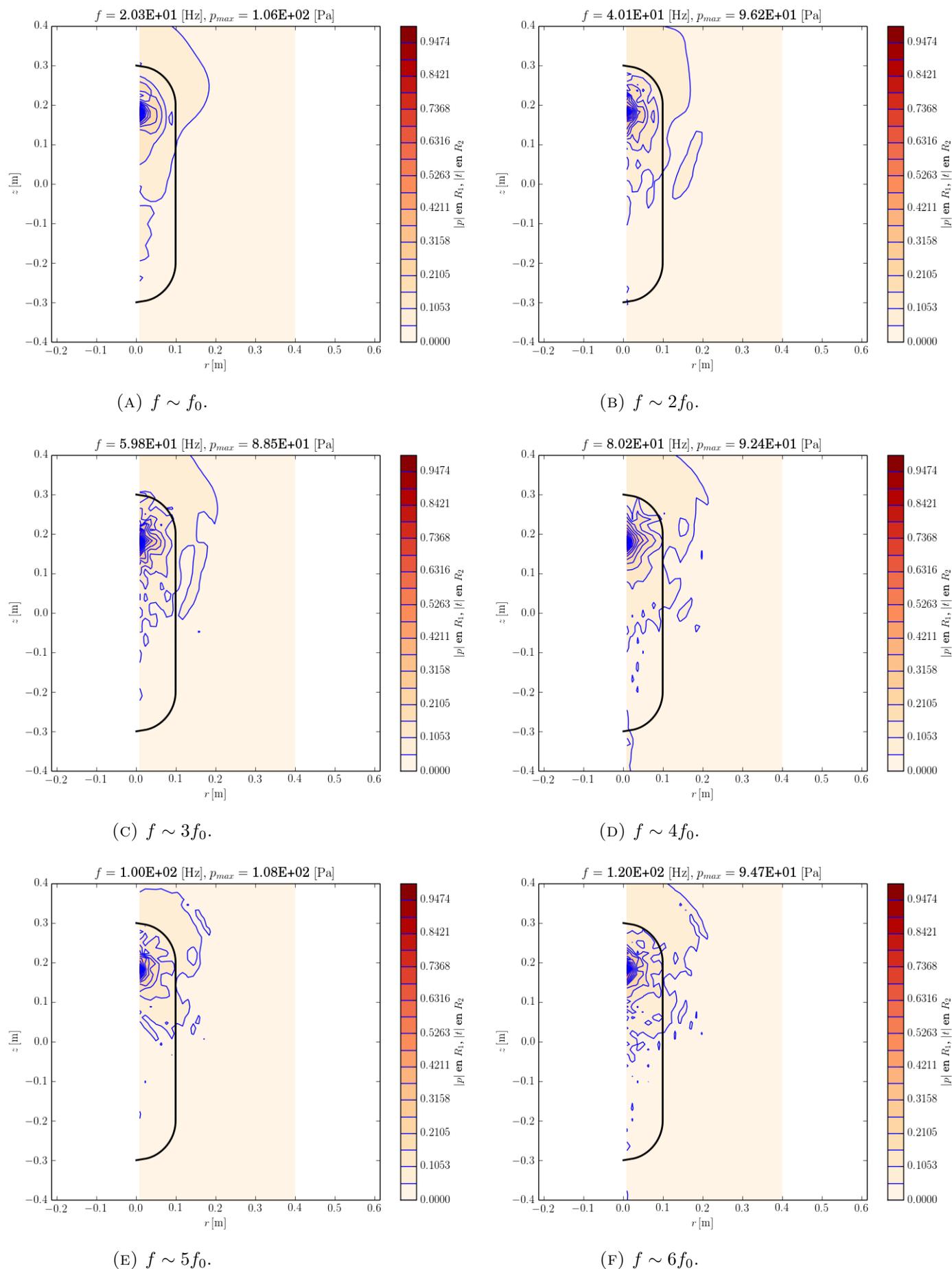


FIGURA 4.9: Valores absolutos de las funciones de transferencia para seis frecuencias características. La frecuencia f_0 se aproxima a c/a , coincidiendo con la frecuencia en la que se centra el espectro de la fuente (ver Apéndice B). Para la región R_1 se muestra el valor de la presión, mientras que para la región R_2 el valor de la tracción total. Fuente en $z = 0.18$ [m].

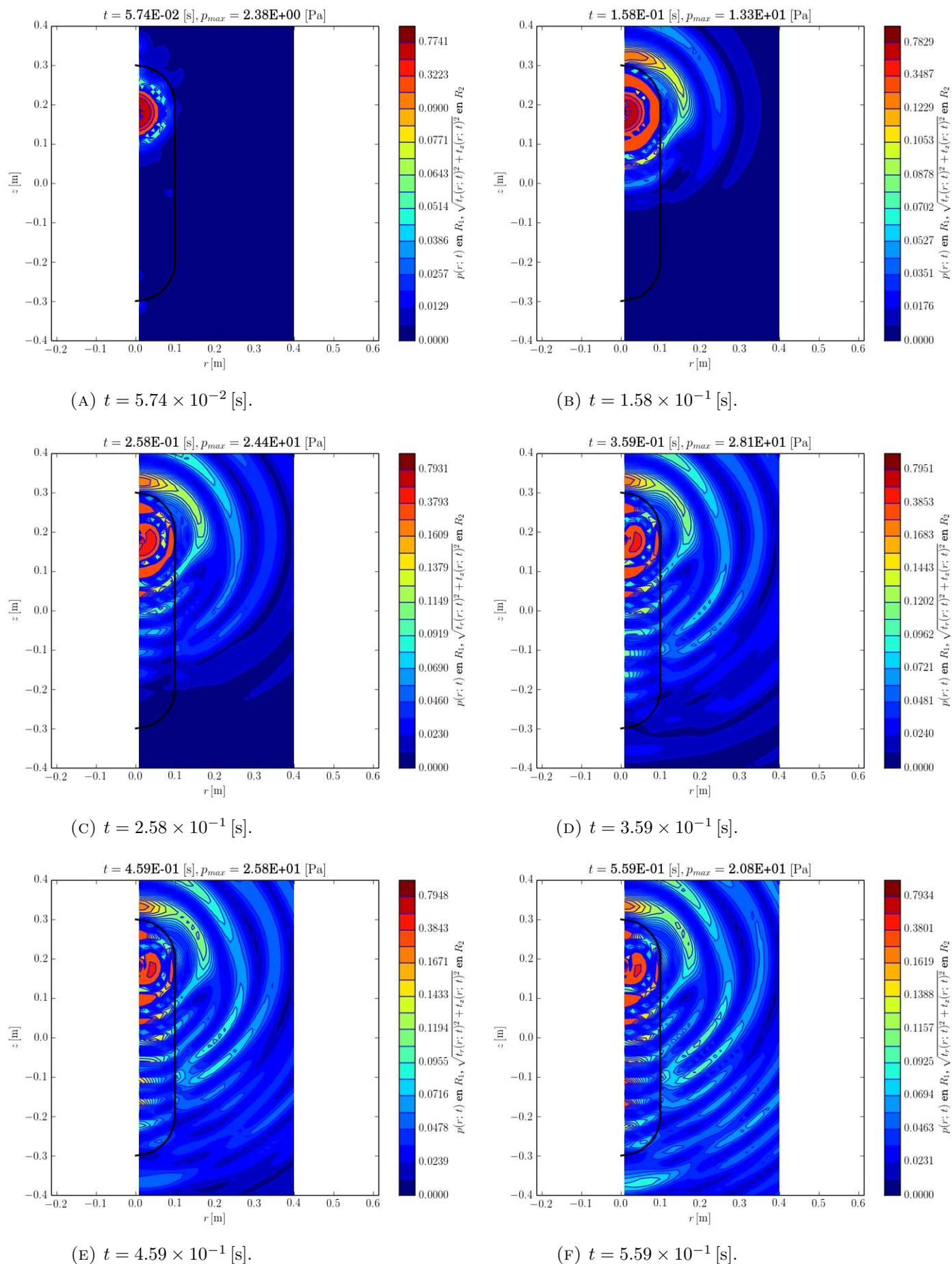


FIGURA 4.10: Frentes de onda para una serie de seis tiempos cercanos. Se puede apreciar la propagación de los frentes de onda y los efectos de la geometría. En la región R_1 se muestra el valor absoluto de la presión, mientras que en la la región R_2 el valor absoluto de la tracción. Fuente en $z = 0.18$ [m].

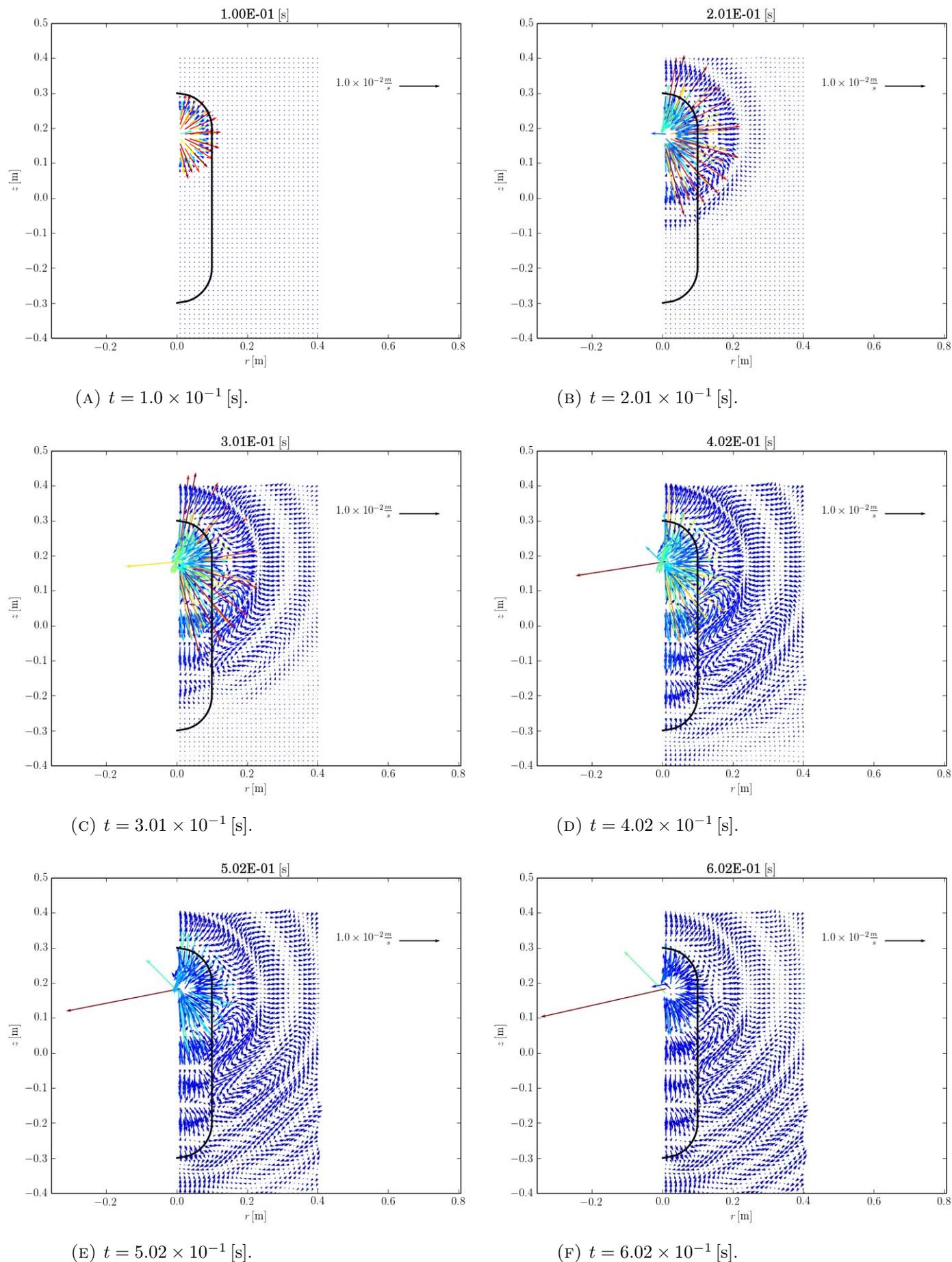


FIGURA 4.11: Campo de desplazamientos para una serie de seis tiempos cercanos. Es importante notar que los tiempos que se muestran en este caso difieren de la Figura para las presiones y tracciones, manteniendo el intervalo entre cada *snapshot*; pero siendo el primer tiempo más tardío, permitiendo ver los efectos de las tapas y la posición de la fuente de forma más clara. Fuente en $z = 0.18$ [m].

Capítulo 5

Conclusiones

Con base en el método de Trefftz indirecto desarrollado para casos elásticos, se propusieron dos familias de funciones T-completas para resolver el problema de una inclusión fluida axisimétrica en un medio elástico homogéneo en frecuencia. Dada la simetría del problema, las familias usadas fueron relativamente sencillas, conservando el número azimutal como cero tanto en el fluido como en el sólido. Para el fluido, se descompuso el campo de presiones en un término de fuente esférico y funciones de onda lisas; mientras que para el sólido el campo radiado fue representado por la suma de funciones de Green que son soluciones de la ecuación de Navier –o soluciones de Stokes–, separadas en parte P y S , más una familia de funciones llamada “monopolar elástica”, proveniente de la expansión del primer término de la base completa de funciones de onda en coordenadas esféricas.

Se validó el uso de las familias de funciones propuestas por medio de la comparación de la solución aproximada de una inclusión esférica con respecto a su solución analítica. De diferentes combinaciones de parámetros para los medios, se determinó el caso en el que es mejor resuelto el problema, mostrando que para todas las frecuencias de interés ($10c/a > f > c/a$ con c la velocidad de propagación de las ondas en el fluido y a el radio de la esfera) resolver el problema donde se presentan los efectos de la difracción en la interfaz fluido-sólido con un error menor al 4 %.

Se resolvieron tres ejemplos de importancia para el estudio de funciones de transferencia y respuestas en tiempo: una inclusión esférica con fuente descentrada, una inclusión cilíndrica con fuente centrada y una inclusión cilíndrica con fuente descentrada. Se calcularon las funciones de transferencia en el fluido y en el sólido para las presiones y tracciones, respectivamente; y sus respuestas en tiempo para presiones (fluido), tracciones (sólido) y desplazamientos (ambos), generadas por una fuente de tipo Berlage. Se obtuvieron resultados satisfactorios en todos los casos, pudiéndose observar los efectos de las geometrías y la posición de la fuente tanto en tiempo como en frecuencia.

El código usado fue creado en lenguaje Python, usando las librerías necesarias para resolver el sistema de ecuaciones por medio del método SVD (*Singular Value Decomposition*), entre otras. Gracias a la flexibilidad del lenguaje escogido, se creó una “Clase” (ver Apéndice C) que resuelve el problema de la inclusión de forma general, permitiendo usar el código como un laboratorio numérico. Se programaron las herramientas suficientes para resolver la interacción de cualquier inclusión axisimétrica con una fuente dentro de la misma sobre el eje de simetría, y luego revisar los resultados de forma directa: coeficientes, error, mal condicionamiento del sistema, funciones de transferencia tanto en una malla como en una línea y respuestas en el tiempo. Otro aspecto interesante es el uso de paralelización del cálculo de coeficientes indeterminados y funciones de transferencia, potenciando la rapidez inherente al método para resolver el problema. Además, se pudo implementar el uso directo de subrutinas en Fortran, como la que discretiza la frontera, aprovechando las bondades de ambos lenguajes de programación.

El método aplicado muestra ser robusto en cuanto a la teoría y la elección de las familias T-completas, pero al depender exclusivamente de la geometría donde se imponen las condiciones de frontera, requiere un desarrollo más acabado de las consecuencias de las distintas elecciones de su implementación en el algoritmo que se use. En este trabajo los criterios de discretización de la frontera fueron semi-empíricos: respetando la relación clásica que se establece entre distancias de puntos de colocación con respecto a la frecuencia, pero escogiendo los demás criterios en base a diferentes pruebas realizadas a lo largo de la investigación. Por este motivo, se decidió acotar el rango de resultados inicialmente propuesto, pues quedaron muchas áreas por explorar en cuanto a la discretización de las regiones y la implementación de la solución numérica.

Otro aspecto que cabe resaltar, es el uso del esquema de colocación para resolver el sistema de ecuaciones que se deriva de las condiciones de frontera. De los tres métodos clásicos (colocación, mínimos cuadrados y Galerkin), podríamos decir que es el más rápido y sencillo, pero a la vez el que genera más problemas con respecto al mal condicionamiento del sistema. Esto quiere decir que la solución calculada será muy sensible a los parámetros de los que depende, debido a errores numéricos de redondeo. Por este motivo, el uso del método SVD para resolver el sistema de ecuaciones, incluyendo el factor de Marquardt, fue de vital importancia para obtener resultados confiables. Ahora bien, resolver el problema de la inclusión fluida en un medio elástico por medio de otro esquema, como puede ser Galerkin, podría permitir obtener resultados sin este tipo de escollos, pero posiblemente aumentaría el costo de cálculo. En un futuro cercano, valdría la pena considerar el hacer un paralelo entre ambos esquemas para determinar su posible aplicación a problemas más complejos.

Una proyección a corto plazo es resolver el problema de Lamb, del cual se dispone una solución analítica, para determinar si la propuesta de una tercera región y la familia T-completa usada es satisfactoria. Así una vez establecida una superficie libre, se podría calcular la respuesta de inclusiones en superficie, problema que es de mucho interés en sismología.

Apéndice A

Fuente monopolar elástica

Pensando en la completez de la familia de funciones en la que queremos representar la solución del sólido, podemos agregar una familia de funciones análogas proveniente de la combinación $m = 0$ y $n = 0$ para las expresiones (2.25), (2.26) y (2.27). Estas funciones tendrán una simetría esférica, garantizando una buena representación de problemas de interacción fluido-sólido que posean geometrías de este tipo.

A.1. Desplazamientos en términos de funciones de onda generalizadas

Tomando las expresiones (2.25), (2.26) y (2.27), expandimos los desplazamientos para $m = 0$ y $n = 0$, obteniendo

$$u_r = A_{00}y_1^P(r)P_0(\cos\theta)f_0(\phi) + B_{00}y_1^S(r)P_0(\cos\theta)f_0(\phi) \quad (\text{A.1})$$

$$u_\theta = A_{00}y_3^P(r)\frac{\partial}{\partial\theta}\{P_0(\cos\theta)\}f_0(\phi) + B_{00}y_3^S(r)\frac{\partial}{\partial\theta}\{P_0(\cos\theta)\}f_0(\phi) \quad (\text{A.2})$$

$$u_\phi = C_{00}y_1^t(r)\frac{\partial}{\partial\theta}\{P_0(\cos\theta)\}g_0(\phi) \quad (\text{A.3})$$

Ahora bien, considerando $n = 0$ obtenemos

$$y_1^P(r) = \frac{1}{r} [n\xi_n(qr) - qr\xi_{n+1}(qr)] = \frac{1}{r} [-qrh_1^{(2)}(qr)] \quad (\text{A.4})$$

$$y_1^S(r) = \frac{1}{r} [-n(n+1)\xi_n(kr)] = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$y_1^t(r) = \frac{1}{r} [kr\xi_n(kr)] = \frac{1}{r} [krh_0^{(2)}(kr)] \quad (\text{A.6})$$

$$y_3^P(r) = \frac{1}{r}\xi_n(qr) = \frac{1}{r}h_0^{(2)}(qr) \quad (\text{A.7})$$

$$y_3^S(r) = \frac{1}{r} [-(n+1)\xi_n(kr) + kr\xi_{n+1}(kr)] = \frac{1}{r} [-h_0^{(2)}(kr) + krh_1^{(2)}(kr)] \quad (\text{A.8})$$

$$P_0(\cos \theta) = 1 \quad (\text{A.9})$$

$$f_0(\phi) = 1 \quad (\text{A.10})$$

$$g_0(\phi) = 0 \quad (\text{A.11})$$

podemos reescribir los desplazamientos como

$$u_r = -A_{00}qh_1^{(2)}(qr) \quad (\text{A.12})$$

$$u_\theta = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$u_\phi = 0 \quad (\text{A.14})$$

Es decir, para este término los desplazamientos serán únicamente radiales, teniendo simetría esférica.

A.2. Esfuerzos en términos de los elementos vectoriales

Las expresiones para los esfuerzos con $m = 0$ y $n = 0$ son [9]:

$$\sigma_{rr} = A_{00}y_2^P(r)P_0(\cos \theta)f_0(\phi) + B_{00}y_2^S(r)P_0(\cos \theta)f_0(\phi) \quad (\text{A.15})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A_{00} [y_5^P(r) + y_6^P R_0(\theta)] f_0(\phi) + B_{00} [y_5^S(r) + y_6^S R_0(\theta)] f_0(\phi) + C_{00}y_3^t(r)S_0f_0(\phi) \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi\phi} = & A_{00} [y_5^P(r)P_0(\cos \theta) + y_6^P T_0(\theta)] f_0(\phi) \\ & + B_{00} [y_5^S(r)P_0(\cos \theta) + y_6^S T_0(\theta)] f_0(\phi) + C_{00}y_3^t(r)U_0(\theta)f_0(\phi) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\sigma_{\theta\phi} = A_{00}y_6^P(r)S_0(\theta)g_0(\phi) + B_{00}y_6^S(r)S_0(\theta)g_0(\phi) + C_{00}\frac{y_3^t(r)}{2}(-T_0 + S_0)g_0(\phi) \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\phi} = & A_{00}y_4^P(r)\frac{P_0(\cos\theta)}{\sin\theta}(-\text{sign } 0)g_0(\phi) \\ & + B_{00}y_4^S(r)\frac{P_0(\cos\theta)}{\sin\theta}(-\text{sign } 0)g_0(\phi) + C_{00}(-y_2^t(r))Q_0(\theta)g_0(\phi) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\sigma_{r\theta} = A_{00}y_4^P(r)Q_0(\theta)f_0(\phi) + B_{00}y_4^S(r)Q_0(\theta)f_0(\phi) + C_{00}y_2^t(r)\frac{P_0(\cos\theta)}{\sin\theta}f_0(\phi) \quad (\text{A.20})$$

Considerando que, con $n = 0$,

$$\begin{aligned} y_2^t(r) &= \frac{2\mu}{r^2} \left[\frac{1}{2}kr(n-1)\xi_n(kr) - \frac{1}{2}k^2r^2\xi_{n+1}(kr) \right] \\ &= -\frac{2\mu}{r^2} \left[\frac{1}{2}krh_0^{(2)}(kr) + \frac{1}{2}k^2r^2h_1^{(2)}(kr) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$y_3^t(r) = \frac{2\mu}{r^2} [kr\xi_n(kr)] = \frac{2\mu}{r^2} [krh_0^{(2)}(kr)] \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} y_2^P(r) &= \frac{2\mu}{r^2} \left[\left(n(n-1) - \frac{1}{2}k^2r^2 \right) \xi_n(qr) + 2qr\xi_{n+1}(qr) \right] \\ &= \frac{2\mu}{r^2} \left[-\frac{1}{2}k^2r^2h_0^{(2)}(qr) + 2qrh_1^{(2)}(qr) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} y_4^P(r) &= \frac{2\mu}{r^2} [(n-1)\xi_n(qr) - qr\xi_{n+1}(qr)] \\ &= \frac{2\mu}{r^2} [-h_0^{(2)}(qr) - qrh_1^{(2)}(qr)] \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} y_5^P(r) &= \frac{2\mu}{r^2} \left[\left(q^2r^2 - \frac{1}{2}k^2r^2 - n^2 \right) \xi_n(qr) - qr\xi_{n+1}(qr) \right] \\ &= \frac{2\mu}{r^2} \left[\left(q^2r^2 - \frac{1}{2}k^2r^2 \right) h_0^{(2)}(qr) - qrh_1^{(2)}(qr) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$y_6^P(r) = -\frac{2\mu}{r^2}\xi_n(qr) = -\frac{2\mu}{r^2}h_0^{(2)}(qr) \quad (\text{A.26})$$

$$y_2^S(r) = \frac{2\mu}{r^2} [-n(n+1)[(n-1)\xi_n(kr) - kr\xi_{n+1}(kr)]] = 0 \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} y_4^S(r) &= \frac{2\mu}{r^2} \left[-\left(n^2 - 1 - \frac{1}{2}k^2r^2 \right) \xi_n(kr) - kr\xi_{n+1}(kr) \right] \\ &= \frac{2\mu}{r^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2}k^2r^2 \right) h_0^{(2)}(kr) - krh_1^{(2)}(kr) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$y_5^S(r) = \frac{2\mu}{r^2} [n(n+1)[n\xi_n(kr) - kr\xi_{n+1}(kr)]] = 0 \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} y_6^S(r) &= -\frac{2\mu}{r^2} [-(n+1)\xi_n(kr) + kr\xi_{n+1}(kr)] \\ &= -\frac{2\mu}{r^2} [-h_0^{(2)}(kr) + krh_1^{(2)}(kr)] \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

y además que

$$P_0(\cos \theta) = 1 \quad (\text{A.31})$$

$$Q_0(\theta) = \frac{d}{d\theta} \{P_0(\cos \theta)\} = 0 \quad (\text{A.32})$$

$$R_0(\theta) = Q_0(\theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 0 \quad (\text{A.33})$$

$$S_0(\theta) = \frac{Q_0(\theta)}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} P_0(\cos \theta) \text{sig} \cdot 0 = 0 \quad (\text{A.34})$$

$$T_0(\theta) = \frac{d^2}{d\theta^2} \{P_0(\cos \theta)\} = 0 \quad (\text{A.35})$$

$$U_0(\theta) = \frac{Q_0(\theta)}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} P_0(\cos \theta) \text{sig} \cdot 0 = 0 \quad (\text{A.36})$$

los esfuerzos serán

$$\sigma_{rr} = A_{00} \frac{2\mu}{r^2} \left[-\frac{1}{2} k^2 r^2 h_0^{(2)}(qr) + 2qr h_1^{(2)}(qr) \right] \quad (\text{A.37})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A_{00} \frac{2\mu}{r^2} \left[\left(q^2 r^2 - \frac{1}{2} k^2 r^2 \right) h_0^{(2)}(qr) - qr h_1^{(2)}(qr) \right] \quad (\text{A.38})$$

$$\sigma_{\phi\phi} = A_{00} \frac{2\mu}{r^2} \left[\left(q^2 r^2 - \frac{1}{2} k^2 r^2 \right) h_0^{(2)}(qr) - qr h_1^{(2)}(qr) \right] \quad (\text{A.39})$$

$$\sigma_{\theta\phi} = 0 \quad (\text{A.40})$$

$$\sigma_{r\phi} = 0 \quad (\text{A.41})$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (\text{A.42})$$

A.3. Transformación de Coordenadas

Ya que las expresiones para los esfuerzos y desplazamientos son en coordenadas esféricas, necesitamos realizar un cambio de coordenadas para obtener sus equivalente en cilíndricas.

Sabemos que

$$u'_i = B_{ij} u_j \quad (\text{A.43})$$

con B_{ij} siendo la matriz de cambio de base¹, y la expresión primada el desplazamiento en la nueva base (cilíndricas). Por otro lado, para calcular los esfuerzos en la nueva base, debemos calcular

$$\sigma'_{ij} = B_{ik} B_{jl} \sigma_{kl} \quad (\text{A.44})$$

¹Usamos "base" en el sentido dado por el Álgebra Lineal, donde una base construye un espacio vectorial.

Luego, como en este caso

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \begin{bmatrix} \rho & z & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ z & -\rho & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

los desplazamientos y esfuerzos en coordenadas cilíndricas resultantes a partir de las expresiones en coordenadas esféricas son,

$$u_\rho = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} u_r \quad (\text{A.46})$$

$$u_z = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} u_r \quad (\text{A.47})$$

y

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{\rho^2}{\rho^2 + z^2} \sigma_{rr} + \frac{z^2}{\rho^2 + z^2} \sigma_{\theta\theta} \quad (\text{A.48})$$

$$\sigma_{zz} = \frac{z^2}{\rho^2 + z^2} \sigma_{rr} + \frac{\rho^2}{\rho^2 + z^2} \sigma_{\theta\theta} \quad (\text{A.49})$$

$$\sigma_{z\rho} = \frac{z\rho}{\rho^2 + z^2} \sigma_{rr} - \frac{z\rho}{\rho^2 + z^2} \sigma_{\theta\theta}. \quad (\text{A.50})$$

Dado que los demás términos de los esfuerzos son cero, podemos calcular las tracciones de manera sencilla,

$$t_\rho = \sigma_{\rho\rho} n_\rho + \sigma_{z\rho} n_z = \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 + z^2} \sigma_{rr} + \frac{z^2}{\rho^2 + z^2} \sigma_{\theta\theta} \right) n_\rho + \left(\frac{z\rho}{\rho^2 + z^2} \sigma_{rr} - \frac{z\rho}{\rho^2 + z^2} \sigma_{\theta\theta} \right) n_z \quad (\text{A.51})$$

$$t_z = \sigma_{\rho z} n_\rho + \sigma_{zz} n_z = \left(\frac{z\rho}{\rho^2 + z^2} \sigma_{rr} - \frac{z\rho}{\rho^2 + z^2} \sigma_{\theta\theta} \right) n_\rho + \left(\frac{z^2}{\rho^2 + z^2} \sigma_{rr} + \frac{\rho^2}{\rho^2 + z^2} \sigma_{\theta\theta} \right) n_z \quad (\text{A.52})$$

Apéndice B

Pulso de Berlage

El pulso de Berlage [2] es definido por la siguiente fórmula:

$$w(t) = AH(t)t^n e^{-\alpha t} \cos(2\pi f_0 t + \phi_0), \quad (\text{B.1})$$

donde $H(t)$ es la función escalón de Heaviside. La forma es controlada por cuatro parámetros ajustables: n , α , f_0 y ϕ_0 . El factor de decaimiento exponencial α y el exponente n son considerados constantes no negativas. Los parámetros f_0 y ϕ_0 corresponden a la frecuencia donde se centrará el espectro y la fase de las oscilaciones, respectivamente.

La transformada de Fourier de (B.1) puede ser calculada analíticamente, quedando:

$$W(f) = \frac{A\Gamma(n+1)}{2(i2\pi)^{n+1}} \left[\frac{e^{+i\phi_0}}{(f-F_1)^{n+1}} + \frac{e^{-i\phi_0}}{(f-F_2)^{n+1}} \right], \quad (\text{B.2})$$

donde

$$F_1 = +f_0 + i\frac{\alpha}{2\pi},$$

y

$$F_2 = -f_0 + i\frac{\alpha}{2\pi}.$$

La amplitud del espectro tiene un único máximo en la vecindad de f_0 y decae asintóticamente a cero para frecuencias mayores de orden $\sim f^{-(n+1)}$.

El pulso de Berlage tiene muchas bondades aparte de ser bien definida su forma en tiempo y frecuencia, como ser conocida explícitamente su función de densidad de energía y poderse usar como formas de onda de testeo para procesos de deconvolución. Sin embargo, para los alcances de este trabajo se aprovechó principalmente su cualidad de ser modelable fácilmente en tiempo, teniendo gran control sobre el tipo de fuente usada. El posible uso de sus demás propiedades queda por lo tanto para un futuro análisis.

Las propiedades de la fuente usadas en todas los cálculos de las respuestas en tiempo a lo largo de este trabajo fueron:

$$\begin{aligned} A &= 5.0 \times 10^1 \text{ [m]} \\ n &= 2.0 \\ \alpha &= 7.0 \text{ [s]} \\ f_0 &= 20.0 \text{ [Hz]} \\ \phi &= -\pi/2 \end{aligned} \tag{B.3}$$

La respuesta en tiempo y frecuencia para los valores usados en (B.3) se puede ver en la Figura B.1.

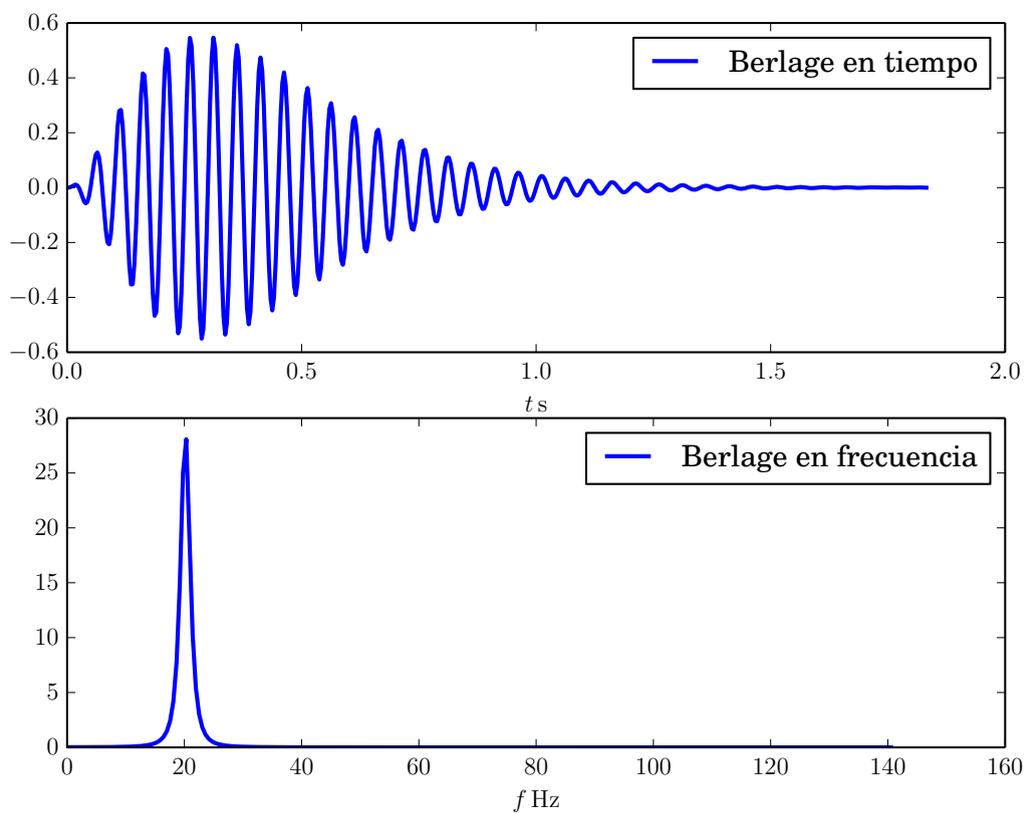


FIGURA B.1: Pulso de Berlage en tiempo y frecuencia. Los parámetro usados se muestran en B.3

Apéndice C

Software usado y breves acotaciones

A lo largo del desarrollo de esta tesis se trabajó puramente en base a las herramientas disponibles de *software libre*¹. Esto lo decidió de manera independiente el autor, pensando en la gran ventaja de la gratuidad y disponibilidad de todas las herramientas usadas, para permitir el trabajo en cooperación sin escollos económicos como el adquirir una licencia en particular.

Se decidió también trabajar en Ubuntu², que es un sistema operativo de libre descarga, usando los paquetes disponibles para el mismo en el área. Se escogió programar principalmente en Python y complementar el código principal con algunas subrutinas en Fortran que fueron usadas de forma directa mediante “f2py”³. Este programa permite crear módulos implementables en Python directamente, a partir de subrutinas hechas en Fortran, complementando las buenas características de ambos lenguajes de programación.

Al final del trabajo de investigación, se optó por concentrar todos los pedacitos de código usado mediante una “Clase”⁴, que en resumidas cuentas es una estructura que centraliza todas las funciones usadas para resolver el problema por partes (p. ej., calcular los coeficientes indeterminados, calcular las funciones de transferencia, calcular la respuesta en tiempo, etc.). Así, se logró generar un código que es portable y que puede ser fácilmente mejorado y debugado.

Existe una gran cantidad de documentación para Python⁵ disponible en internet, siendo otra gran ventaja para su uso en todo tipo de aplicaciones. Para este trabajo en particular se hizo uso de los módulos:

¹Ver “¿Qué es el software libre?” en <https://www.gnu.org/philosophy/free-sw.es.html>

²Ver <http://www.ubuntu.com>

³Ver <https://sysbio.ioc.ee/projects/f2py2e/usersguide/#the-smart-way>

⁴Ver <https://docs.python.org/2/tutorial/classes.html>

⁵Toda la información se puede encontrar en <https://docs.python.org>

- “scipy”, que contiene las herramientas necesarias para el análisis de Fourier y el uso de funciones de Bessel, entre otras;
- “numpy”, que permite realizar operaciones matriciales y proporciona las herramientas para resolver sistemas lineales, usadas para implementar el método *SVD* de forma directa;
- “pp”, que es un módulo creado para calcular en paralelo de manera muy sencilla⁶;
- y “matplotlib”, que contiene todas las herramientas necesarias para graficar los datos obtenidos.

Esto permitió trabajar de forma eficiente y centrar el trabajo de programación en los aspectos teóricos más que en problemas de implementación.

Es altamente recomendable tomar en cuenta las alternativas disponibles al software usado en ciencias (p. ej. Matlab) que son gratuitas y mantienen un desarrollo vertiginoso –como es Python–. A su vez, realizar el trabajo de programación bajo una plataforma basada en GNU/Linux –como es Ubuntu– es muy recomendable por la facilidad de instalación y uso de estas herramientas, al estar centralizadas a través de un centro de software.

⁶Ver <http://www.parallepython.com/>

Bibliografía

- [1] K. Aki, M. Fehler, and S. Das. Source mechanism of volcanic tremor: fluid-driven crack models and their application to the 1963 kilauea eruption. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 2:259–287, Noviembre 1977.
- [2] D. F. Aldridge. The Berlage wavelet. *Geophysics*, 55(11):1508–1511, Noviembre 1990.
- [3] M. A. Bravo and F. J. Sánchez-Sesma. Trefftz’s method for vibration of rigid plate. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(6):885–892, Junio 1987.
- [4] B. Chouet. Ground motion in the near field of a fluid-driven crack and its interpretation in the study of shallow volcanic tremor. *Journal of Geophysical Research*, 86(B7):5985–6016, Julio 1981.
- [5] I. Herrera. Trefftz method: a general theory. *Numerical Methods of Partial Differential Equations*, 16:561–580, Mayo 2000.
- [6] E. Kita and N. Kamiya. Trefftz method: an overview. *Advances in Engineering Software*, 24:3–12, 1995.
- [7] L. R. Lines and S. Treitel. A review of least-squares inversion and its applications to geophysical problems. *Geophysical Prospecting*, 32:159–186, Mayo 1984.
- [8] T. Nishimura and B. Chouet. A numerical simulation of magma motion, crustal deformation, and seismic radiation associated with volcanic eruptions. *Geophysics Journal International*, 153:699–718, Enero 2003.
- [9] L. E. Pérez Rocha. Difracción de ondas sísmicas por depósitos tridimensionales de suelos blandos. *Tesis para obtener el grado de Ingeniero Geofísico*, 1987. UNAM.
- [10] Q. Qin. Formulation of hybrid Trefftz finite element method for elastoplasticity. *Applied Mathematical Modelling*, 29:235–252, 2005.
- [11] F. J. Sánchez-Sesma, M. Bravo, and I. Herrera. Surface motion of topographical irregularities for incident P , SV , and rayleigh waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 75(1):263–269, Febrero 1983.

-
- [12] F. J. Sánchez-Sesma. Diffraction of elastic waves by three-dimensional surface irregularities. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 73(6):1621–1636, Diciembre 1983.
- [13] F. J. Sánchez-Sesma and M. Campillo. Diffraction of P , SV , and rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 81(6):2234–2253, Diciembre 1991.
- [14] F. J. Sánchez-Sesma and F. Luzón. Seismic response of three-dimensional alluvial valleys for incident P , S , and rayleigh waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 85:269–284, Febrero 1995.
- [15] K. Aki and P. G. Richards. *Quantitative Seismology*, chapter 4, 8. University Science Books, 2 edition, 2009.
- [16] J. E. Akin. *Finite Elements for Analysis and Design*, chapter 1. Academic Press, 1 edition, 1994.
- [17] G. B. Arfken and H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*, chapter 9, 10, 11. Elsevier Academic Press, 6 edition, 2005.
- [18] A. Björk. *Numerical Methods for Least Squares*, chapter 1, 2, 3, 4. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1 edition, 1996.
- [19] C. H. Chapman. *Fundamentals of Seismic Wave Propagation*, chapter 4, pages 112–118. Cambridge University Press, 2004.
- [20] B. N. Datta. *Numerical Linear Algebra and Applications*, chapter 2, 3, 5, 7. Cengage Learning, 1 edition, 1995.
- [21] A. C Eringen and E. S. Suhubi. *Elastodynamics*, volume 2, chapter 8, pages 772–812. Cambridge University Press, 1975.
- [22] C. Mow and Y. Pao. *The Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, chapter 3, 6. Rand, 1971.
- [23] A. Sommerfeld. *Partial Differential Equations in Physics*, chapter V, pages 188–200. Academic Press, 1949.
- [24] J. E. White. *Underground Sound. Application of Seismic Waves*, chapter 5. Elsevier, 1983.