



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

RECURSOS DE ACCESO ABIERTO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS
MATEMÁTICAS EN EL NIVEL SUPERIOR

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

ACTUARIO

PRESENTA:

JOSÉ EDUARDO ORTEGA GARCÍA

ASESOR:

DRA. MARÍA DEL CARMEN GONZÁLEZ VIDEGARAY

ENERO 2015



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS:

Quiero agradecer de manera especial a mi padre, por ser mi ejemplo a seguir y a mi madre por ser la estrella que con su sensibilidad me guio en mi camino; a mis hermanas por su apoyo y cariño incondicional.

Agradezco profundamente a la Doctora MariCarmen González Videgaray por alentarme a realizar esta investigación. Porque este trabajo está dedicado también a todos mis maestros y compañeros que además de estar en mi camino, nunca dejaron de creer en mí.

RECURSOS DE ACCESO ABIERTO PARA LA ENSEÑANZA
DE LAS MATEMÁTICAS EN EL NIVEL SUPERIOR

Resumen.....	1
Introducción	2
Metodología.....	5
Descripción.....	11
Aprende Matemáticas.....	11
Descartes.....	17
Famous Curves Applets.....	22
GapMinder	24
GeoGebra	27
Gráficas matemáticas de Google	30
Khan Academy.....	33
Math 2 Me.....	36
Maxima.....	38
MIT Mathlets.....	48
Number Empire.....	50
PhET Interactive Simulations.....	57
Rice Virtual Lab in Statistics	60
Uson	64
Videos de OCW.....	68
Virtual Laboratories in Probability and Statistics	70
Visual Calculus.....	73
Web Interface for Statistics Education.....	76
Wiris	79
Wolfram Alpha	83
Investigación de campo.....	90
Resultados de la investigación	92
Conclusiones	127
Referencias.....	132

Resumen

La enseñanza de las Matemáticas en el nivel superior siempre ha sido un reto, tanto en las licenciaturas propias del área como fuera de ellas e inclusive en los posgrados. En particular existen problemas en la enseñanza de la Estadística, que hoy en día es asignatura obligatoria en casi todas las disciplinas. Hay diversas iniciativas para generar y usar recursos tecnológicos que apoyen el aprendizaje de las Matemáticas. La creación de la Web 2.0, HTML5, el desarrollo de los sistemas de álgebra computacional (CAS) los sitios colaborativos y el movimiento de acceso abierto (*open access*) brindan en la actualidad posibilidades valiosas para apoyar la enseñanza tradicional. Sin embargo, existen pocos estudios con un panorama acerca de esta gama de apoyos para el aprendizaje de las Matemáticas en el nivel superior ya que aún no se implementan como un medio constante en el apoyo a las matemáticas. Por lo anterior, en este trabajo se efectuó una revisión sistemática de algunos recursos libres y gratuitos que se encuentran en Internet para el apoyo de la enseñanza de las Matemáticas en el nivel superior. Para efectuar esta revisión se construyó un perfil de búsqueda booleano. Se seleccionaron 14 sitios Web que cumplían con una serie de atributos. Los recursos se clasificaron según su forma de presentación; según los tópicos que cubren y de acuerdo con el idioma en que se ofrecen. La mayoría (6) son simulaciones interactivas basadas en Java o Javascript. El sitio que cubre más tópicos (12) está conformado por los videos de OpenCourseware del Massachusetts Institute of Technology, gran parte de los recursos (9) está únicamente en inglés.

Palabras Clave: Web 2.0, visualización, simulación, applet, video.

Introducción

Las matemáticas siempre han sido una ciencia que ha ido de la mano con el hombre, de ella se ha valido para sus constantes progresos y su desarrollo ha exigido el uso constante de elementos de apoyo que han ido modificando según las nuevas necesidades tanto para su aprendizaje y desarrollo teórico como en la práctica en la vida real.

En particular existen problemas en la enseñanza del Álgebra, el Cálculo y la Estadística, que hoy en día suelen ser asignaturas obligatorias en casi todas las disciplinas.

Por esta razón, en el mundo han surgido diversas iniciativas para generar y usar recursos tecnológicos que apoyen el aprendizaje de las Matemáticas. Muchas de estas iniciativas se basan en el uso de la tecnología, particularmente en el uso de la computadora, las hojas de cálculo, el software y ahora Internet. Parece haber un vínculo natural entre la enseñanza de las Matemáticas y el uso de la tecnología (Pierce *et al.*, 2007) que probablemente se remonta al uso de las calculadoras o aún más atrás con objetos como el ábaco.

Con forme han ido avanzando las tecnologías y la creatividad se han ido desarrollando constantemente una infinidad de nuevas y mejores herramientas de apoyo, cuya elaboración y uso han ido desde lo más rústico y sencillo hasta lo más elaborado y complejo; que han ido sustituyendo a sus antecesores con forme se van desarrollando de una manera en la cual su uso sea cada vez más fácil y práctico.

Por otro lado, la creación de la Web ha convertido a la computadora en un medio eficiente de comunicación y la ha acercado a usuarios de todos tipos y edades ya que han ayudado en la agilización de la difusión de información y en el caso del apoyo a las matemáticas no se ha quedado atrás. Pero parece ser que en este ramo no ha mostrado el mismo éxito que en otras disciplinas, quizás se debe a que en su aprendizaje se requiere tanto del entendimiento de la teoría como de sus aplicaciones prácticas, lo cual va más allá de la lectura de los libros o resúmenes propios de la materia; como consecuencia de esto, se pretende que a través de la web se consigan elementos más interactivos que permitan llevar de la mano el entendimiento como el manejo de las habilidades matemáticas, por lo que su desarrollo y difusión no han sido tarea fácil.

A través de la web se encuentran una infinidad de herramientas de apoyo para la enseñanza y aprendizaje de las diversas áreas de las Matemáticas, las cuales se espera que brinden una ayuda didáctica e interactiva, que es el fin propio de las todas las ciencias (la aplicación del conocimiento a lo práctico y a la vida real), que van desde herramientas que realizan las operaciones básicas hasta la elaboración de cálculos complejos; o en otro caso que brinden una explicación más dinámica de los temas y ya no de manera tan rígida como lo encontramos en los libros meramente teóricos.

En particular la Web 2.0 promueve la creación de recursos y la colaboración en Internet, mientras que los *applets*¹ de Java y Javascript han facilitado el desarrollo de simulaciones interactivas. Los sistemas de álgebra computacional (*computer algebra systems* o CAS) se han perfeccionado y resultan sumamente eficientes, inclusive dentro de dispositivos móviles, como es el caso de WolframAlpha. El advenimiento del HTML5 favorece el manejo de gráficas interactivas dentro de los navegadores de Internet. Esto incluye la generación de ecuaciones matemáticas dentro del navegador (Google, 2012b) así como la posibilidad de animar series de tiempo (Google, 2012a). Además, el movimiento de acceso abierto (*open access*) en la red ha ocasionado que algunas instituciones y organismos pongan sus materiales educativos a disposición de la humanidad, sin restricción alguna, como es el caso del OpenCourseWare (OCW) del Massachusetts Institute of Technology (MIT), que ofrece videos de clases con excelentes profesores para asignaturas completas (véase: <http://ocw.mit.edu/index.htm>). Otro ejemplo notable es el de KhanAcademy que está constituido por una importante biblioteca de videos de corta duración sobre distintos temas de Matemáticas, además de ejercicios, evaluaciones y posibilidades de dar seguimiento a los estudiantes acerca de su avance (véase: www.khanacademy.org). Uno más es el caso de Webcast de la Universidad de California que ofrece una gama de vídeos donde... el único detalle es que requiere la instalación de iTunes en la computadora.

Como consecuencia, se tienen más elementos cuya aportación al aprendizaje se da de manera más dinámica y menos rígida como se suele mostrar en los libros meramente teóricos e inclusive en la elaboración de los ejercicios.

Si bien muchos de estos recursos están en inglés, existen avances en cuanto a su traducción o subtítulo en español y los traductores automáticos facilitan su uso en otros idiomas. También se observa que los planes de estudio tienden a propiciar que los alumnos adquieran el idioma inglés durante su formación universitaria.

Todo lo anterior representa nuevas posibilidades para la enseñanza de las matemáticas en el nivel superior que obligan a repensar las estrategias instruccionales y probablemente los actuales contenidos curriculares. Por ejemplo, gran parte de los temarios tradicionales de Matemáticas se abocan a aprender procedimientos algebraicos que hoy en día son realizados de manera eficiente por los CAS. Esto sugiere que tal vez la enseñanza deba reorientarse a desarrollar en el estudiante competencias para la solución de problemas con ayuda de los sistemas actuales y ya no solo la mecanización de los procedimientos tradicionales, sino entender la aplicación de dichos procesos a la vida real.

Asimismo, la disponibilidad de videos explicativos de distintos procedimientos matemáticos que el alumno puede ver a la velocidad que desee, tantas veces como quiera y cuando quiera, hace pensar que tal vez el papel del profesor tradicional deberá modificarse en un futuro próximo, aunque es un hecho que su desempeño está muy lejos de ser sustituido. La existencia de simulaciones que

¹ Una Applet es un aplicación de un programa para dispositivos digitales que sirve que realizar una tarea en específico

facilitan la interpretación de conceptos abstractos puede favorecer el aprendizaje autodirigido o ser un elemento útil que el docente pudiera incorporar a su presentación de clase.

Todo ello exige evaluar las estrategias de enseñanza-aprendizaje actuales para proponer opciones novedosas y creativas que ayuden a muchos estudiantes a superar con facilidad la ansiedad que suelen generar las clases de Matemáticas en el nivel superior y que, al mismo tiempo, promuevan un aprendizaje lúdico y grato para aquellos que de manera natural disfrutan con esta área.

El uso de estas herramientas se considera que aún están muy lejos de sustituir al maestro, sin embargo deben de considerarse como elementos de apoyo en el aprendizaje autodidáctico de los alumnos; ya que cada vez se requiere del dominio más óptimo de los conocimientos sin que requieran un uso mayor de tiempo, esto se debe a que los conocimientos que son requeridos de manera obligatoria a nivel profesional aumentan y seguirán aumentando.

De aquí que sea indispensable contar con un panorama acerca de los recursos que actualmente ofrece Internet para apoyar la enseñanza de las matemáticas en el nivel superior. Este panorama será una primera etapa que dará lugar a investigaciones posteriores sobre la difusión de estos recursos y el uso que se les da en la práctica docente.

Nuestro trabajo toma como base dos artículos relevantes. El primero, elaborado por Crowe y Zand(2000), es el tercero de una serie y tuvo como objetivo clasificar recursos de Internet para las matemáticas de nivel licenciatura. Por supuesto, al haber sido elaborado hace más de diez años amerita una actualización. El segundo es un estudio muy reciente de Marshall *et al.*(2012) que efectúa una revisión de la forma en que se integran los CAS a la enseñanza universitaria. En esta investigación los autores concluyen que ya no tiene sentido preguntarse si debe o no permitirse el uso de los CAS en las clases de matemáticas de la educación superior y que los profesores deben al menos investigar cómo están modificando el aprendizaje estas tecnologías, ya sea que se usen de forma directa o indirecta.

El propósito de nuestro estudio es detectar los principales recursos con acceso libre que ofrece Internet para el aprendizaje de las matemáticas en el nivel superior y ponerlo al alcance de docentes y alumnos. En particular nos abocamos a aquellos que consideramos pueden modificar la forma de enseñar, aprender y usar las matemáticas. También se realiza una clasificación de los recursos según su presentación técnica, los tópicos que abordan y el idioma en que se ofrecen.

Metodología

Perfil de búsqueda

Para hacer la selección de los recursos Web que presentamos en este trabajo se hizo una búsqueda en Google con las palabras clave: (online OR Web OR digital OR Internet OR computer) AND (learning OR teaching OR instruction OR knowledge) AND (math OR algebra OR calculus OR “differentialequations” OR statistics OR geometry), así como algunas variantes en español y en inglés.

A partir de este perfil de búsqueda se eligieron aquellos sitios Web que contaban con los siguientes atributos:

- Tener un propósito educativo o ser útiles con este fin.
- Ofrecer un contenido matemático que corresponde al nivel superior (licenciatura).
- Ser de acceso libre y gratuito.
- Estar diseñados para usarse dentro del navegador Web.
- Carecer de anuncios comerciales o que éstos fuesen mínimos.
- Estar en idioma español, en inglés o en ambos.

Asimismo, se descartaron aquellos sitios que presentaban únicamente texto, tales como libros electrónicos, apuntes o diapositivas.

Clasificación

Se hizo una breve descripción de cada recurso y el conjunto se categorizó de acuerdo con:

1. Su presentación técnica, es decir, el tipo de recurso ofrecido. En este aspecto se conformaron cuatro categorías: a) CAS; b) simulaciones interactivas; c) visualizaciones gráficas; d) videos.
2. Los tópicos que cubre, mismos que se encuentran desglosados en el cuadro 3.
3. El idioma en que se presenta: a) todo el contenido está en español; b) algunos contenidos en español y otros en inglés; c) todo el contenido está en inglés.

Resultados y análisis

Se localizaron 20 recursos que cumplen con las características señaladas. El cuadro 1 muestra una breve descripción de cada uno de ellos, así como la dirección electrónica en la que se ubican. Los recursos se presentan en orden alfabético.

Cuadro 1: Descripción de los recursos Web seleccionados.

<i>Recurso Web</i>	<i>Dirección</i>	<i>Descripción</i>
1. Aprende matemáticas	http://www.aprendematematicas.org.mx/autores/titular/index.html	Recopilación de ligas a sitios que contienen información y applets relacionados con Ingeniería de Sistemas y Enseñanza de las Matemáticas.
2. Descartes	http://recursostic.educacion.es/descartes/web/	Materiales y herramientas para confeccionar páginas interactivas de Matemáticas.
3. Famous Curves Aplets	http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Java/index.html	Muestra una lista en aplicaciones java de las graficas más conocidas en la Geometría
4. GapMinder	http://www.gapminder.org	Visualizador de estadísticas descriptivas reales internacionales, con un sentido social.
5. GeoGebra	http://www.geogebra.org/cms/	Visualizador de ecuaciones y procedimientos matemáticos.
6. Gráficas matemáticas de Google	www.google.com	Visualizador de ecuaciones en el plano dentro del navegador Web.
7. KhanAcademy	http://www.khanacademy.org/	Videos explicativos y plataforma de apoyo y seguimiento al aprendizaje de matemáticas y otros temas.
8. Maxima	http://maxima.sourceforge.net/es/	Sistema de Algebra Computacional para la manipulación de de expresiones simbólicas y numéricas en HTML5
9. Math 2 me	http://www.math2me.com/	Videos explicativos de matemáticas en español.

<i>Recurso Web</i>	<i>Dirección</i>	<i>Descripción</i>
10. MIT Mathlets	http://math.mit.edu/mathlets/	<i>Applets</i> de Java para aprender ecuaciones diferenciales.
11. NumberEmpire	http://es.numberempire.com/	Sistema de algebra computacional (CAS). Visualizador de procedimientos matemáticos, incluye una gran variedad de temas.
12. PhETInteractiveSimulations	http://phet.colorado.edu/	Simulaciones interactivas para el aprendizaje de Matemáticas, Física, Química y Biología.
13. Rice Virtual Lab in Statistics	http://onlinestatbook.com/rvls.html	Libro electrónico, curso multimedia, simulaciones, estudios de caso, sobre Estadística.
14. USON	http://www.mat.USON.mx/eduardo/calculo1/	Contiene applets en java para resolver ejercicios y problemas de Cálculo
15. Videos de OCW	http://ocw.mit.edu/index.htm	Videos de clases completas de profesores del Massachusetts Institute of Technology.
16. Virtual Laboratories in Probability and Statistics	http://www.math.uah.edu/stat/	Libro electrónico y <i>applets</i> con tecnología de HTML5 que explican conceptos de Probabilidad y Estadística.
17. Visual Calculus	http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/	Módulos con LiveMath, Javascript y Flash que presentan temas de Cálculo.
18. Web Interface for Statistics Education	http://wise.cgu.edu/	Tutoriales interactivos con applets de Java para aprender Estadística
19. Wiris	http://www.wiris.net/educa.madrid.org/wiris/es/index.html	Sistema de Álgebra Computacional (CAS). Visualizador en la plataforma Moodle de procedimientos algebraicos y de cálculo, así como de programación.
20. WolframAlpha	http://www.wolframalpha.com/	Motor de conocimiento computacional. Sistema de Álgebra Computacional (CAS). Incluye una gran variedad de temas.

En el cuadro 2 puede verse que la mayoría (8) son simulaciones interactivas, seguidas por los CAS (7).

Cuadro 2: Clasificación de los recursos por tipo.

<i>Recurso</i>	<i>CAS</i>	<i>Simulación interactiva</i>	<i>Visualización gráfica</i>	<i>Video</i>
Aprende matemáticas		X		
Descartes	X			
Famous Curves Aplets			X	
GapMinder			X	
GeoGebra	X			
Gráficas matemáticas de Google	X			
KhanAcademy				X
Maxima	X			
Math 2 me				X
MIT Mathlets		X		
Number Empire	X			
PhETInteractiveSimulations		X		
Rice Virtual Lab in Statistics		X		
USON		X		
Videos de OCW				X
Virtual Laboratories in Probability and Statistics		X		
Visual Calculus		X		
Web Interface for Statistics Education		X		
Wiris	X			
WolframAlpha	X			

En el cuadro 3 resulta evidente que los sitios que cubren más tópicos son OCW (12), Wiris y WolframAlpha (8) y KhanAcademyy NumberEmpire (7). A su vez, los tópicos con más recursos son Geometría Analítica (12) y Estadística (11), Cálculo (10), Álgebra (9), Ecuaciones Diferenciales(8) y Probabilidad con 7 recursos.

Cuadro 3: Clasificación de los recursos por tópicos que se cubren.

Recurso	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Aprende matemáticas		X		X	X	X	X			X			
Descartes Famous	X					X	X	X					X
curves apleets													
GapMinder							X						
GeoGebra						X							
Gráficas matemáticas de Google	X						X						
KhanAcademy							X						
Maxima	X	X		X	X	X	X						X
Math 2 me	X		X	X	X		X						
MIT Mathlets	X						X	X					X
Number Empire	X		X	X	X	X	X						X
PhETInteractiveSimulations					X								
Rice Virtual Lab in Statistics						X	X						
Videos de OCW						X							
USON	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X
Virtual Laboratories in Probability and Statistics				X									
Visual Calculus						X							X
Web Interface for Statistics Education				X									
Wiris					X								
Wolfram Alpha	X	X		X		X	X						X
	X	X	X	X	X	X	X						X

1. Álgebra; 2. Álgebra Lineal; 3. Análisis Numérico; 4. Cálculo; 5. Ecuaciones Diferenciales; 6. Estadística; 7. Geometría Analítica; 8. Matemáticas Aplicadas; 9. Matemáticas Discretas; 10. Matemáticas para Ciencias de la Computación; 11. Modelos y Simulación; 12. Optimización Combinatoria; 13. Probabilidad.

La mayor parte de los recursos (10) están en inglés pero existen iniciativas en español (cuadro 4).

Cuadro 4: Clasificación de los recursos según el idioma en que se ofrecen.

<i>Recurso</i>	<i>Totalmente en español</i>	<i>Español/Inglés</i>	<i>Totalmente en inglés</i>
Aprende matemáticas		X	
Descartes	X		
Famous curves apleets			X
GapMinder			X
GeoGebra		X	
Gráficas matemáticas de Google			X
KhanAcademy			X
Maxima		X	
Math 2 me	X		
MIT Mathlets			X
Derivatives		X	
PhETInteractiveSimulations		X	
Rice Virtual Lab in Statistics			X
USON	X		
Videos de OCW		X	
Virtual Laboratories in Probability and Statistics			X
Visual Calculus			X
Web Interface for Statistics Education			X
Wiris	X		
Wolfram Alpha			X

Descripción

Al haber encontrado las herramientas de apoyo que han mostrado ser útiles en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a nivel superior es importante conocer la manera en la que se puede trabajar con ellas y saber en qué momentos podrán ser de utilidad. Por ello en esta sección se mostrará de manera breve el modo en el que se emplea cada una de las herramientas para estar más familiarizados con ellas.

Aprende Matemáticas

Descripción: Se trata de un sitio en el cual se han recopilado una amplia colección de ligas (enlaces) de applets, libros electrónicos de diversos autores títulos y temas principalmente sobre ramas de las matemáticas. Es un sitio que puede ser utilizado tanto para maestros como para alumnos de todos los niveles educativos, ya que su función principal de dicho proyecto es la difusión y aprendizaje.

El sitio está enfocado a temas de matemáticas, sistemas y programación principalmente, la sección de las ligas que son de interés para esta investigación viene organizadas de la siguiente manera:

- Matemáticas
- Fractales
- Programación
- Enseñanza de las Ciencias usando Tecnología

De las cuales se les dará la mayor importancia a las secciones de Matemáticas y Enseñanza las Ciencias usando Tecnología, ya que son las que se enfocan a los diversos temas de las Áreas matemáticas.

Nota: Este sitio puede ser que sufra cambios en la organización de sus enlaces hacia las aplicaciones web o en el orden en las que se encuentren. Como lo advierte su propio creador, está en constante cambio por la infinidad de sitios potenciales que pueden ser agregados, por ejemplo, el hecho de que pueden surgir nuevas aplicaciones que antes no existían o desaparezcan aplicaciones; por lo que los usuarios deberán tomar en cuenta que en un futuro quizás no se presente de las misma manera que en la que se explica en esta investigación.

Modo de uso:

Su uso es muy intuitivo, ya que la página Web muestra una categorización bastante sencilla para su uso. En lo que se tendría que prestar una atención más específica por parte del usuario es la forma de trabajo de cada liga; ya que como se mencionó antes, es una colección en constante crecimiento de diversos sitios Web donde cada uno tiene su propia forma de trabajo e interacción. En esta

investigación se centrará solamente en el uso de applets y ligas de matemáticas, descartando los libros electrónicos o similares.

Ejemplos

Ejemplo 1: Álgebra Lineal

Hasta el momento con pocas aplicaciones en esta área, existe una liga en particular que dice “Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales (paso a paso)”.

Como su nombre lo dice, resuelve sistemas de ecuaciones diferenciales de n incógnitas por n ecuaciones ($n \times n$) paso por paso. Realiza el procedimiento usando el Método de Eliminación Gaussiana por lo que hay una interacción pero también se asegura el completo entendimiento del proceso completo por parte del usuario. Desde el inicio la aplicación requiere que se indique el número de incógnitas (y por ende el número de ecuaciones, para fines de este ejercicio serán 3).

The screenshot shows a web application titled "Solve Linear Equation Systems Step by Step". It includes a copyright notice "© 2002 by Karl Hahn" and "version 1.3". A logo for "KCT Karl's Calc Tutor" is visible in the top right corner. The main heading is "Using Gaussian Elimination". Below this, it says "You will be solving linear n equations in n unknowns" with a "Read Me" button. A form asks "How many equations? (2 to 7)" with an input field containing "3" and a "Go" button. At the bottom, there is a link "Return to referring page".

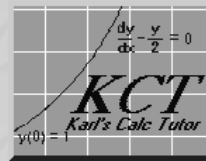
Figura 1 Resolución de Sistemas de Ecuaciones

Se da click en el botón de “GO” y solicitará cuales son los coeficientes del sistema de ecuaciones; el cual será:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Solve Linear Equation Systems Step by Step

© 2002 by Karl Hahn version 1.3



Using Gaussian Elimination

Input the coefficients for your 3 equations

$$3 \text{ [input]} X + 2 \text{ [input]} Y + 1 \text{ [input]} Z = 1 \text{ [input]}$$

$$2 \text{ [input]} X + 2 \text{ [input]} Y + 4 \text{ [input]} Z = -2 \text{ [input]}$$

$$-1 \text{ [input]} X + 1/2 \text{ [input]} Y + -1 \text{ [input]} Z = 0 \text{ [input]}$$

[Return to referring page](#)

Figura 2 Introducción de los coeficientes

Y ahora únicamente se va presionando el botón de “GO” y mostrará paso a paso como se resuelve dando una breve explicación, hasta llegar al valor de cada incógnita, como lo muestra la siguiente figura:

Doing forward-elimination phase: column 1 of 3
 Found the first row that has nonzero in column 1

$$\begin{array}{rclcrcl}
 3.0000 & X & + & 2.0000 & Y & + & & Z & = & 1.0000 \\
 2.0000 & X & + & 2.0000 & Y & + & 4.0000 & Z & = & -2.0000 \\
 & - & X & + & & Y & - & & Z & = & 0.0000
 \end{array}$$

Go

Doing forward-elimination phase: column 1 of 3
 Divided entire row 1 by 3.0000
 Now subtract 2.0000 times row 1 from row 2

$$\begin{array}{rclcrcl}
 & X & + & 0.6667 & Y & + & 0.3333 & Z & = & 0.3333 \\
 2.0000 & X & + & 2.0000 & Y & + & 4.0000 & Z & = & -2.0000 \\
 & - & X & + & & Y & - & & Z & = & 0.0000
 \end{array}$$

Go



Doing back-elimination phase: column 2
 Subtract 0.6667 times row 2 from row 1

$$\begin{array}{rclcrcl}
 X & + & 0.6667 & Y & & = & 0.5926 \\
 & & & Y & & = & -0.1111 \\
 & & & & Z & = & -0.7778
 \end{array}$$

Go

Figura 3 Resolución paso por paso del sistema de ecuaciones

Ejemplo 2: Ecuaciones Diferenciales

Para este ejercicio se utilizará la liga “Ecuaciones Diferenciales Interactivas”, que se encuentra en la sección de “Matemáticas”. Esta liga lleva a un sitio llamado “Interactive Differential Equations” el cual trata sobre una serie de applets, la mayoría de manera gráfica, la resolución de diversas subdivisiones de las ecuaciones diferenciales.

Hay que dirigirse a la sección II (Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden- 14. Transformada de Laplace) en la que se encuentra la aplicación b. Laplace: Transformada.

En ella se puede ver que muestra dos opciones gráficas ya que se trata de una Transformada de Laplace Bilateral (la transformada y su inversa), con la opción de escoger el operador $f(t)$ entre una serie de funciones que nos muestra. Se escogerá el operador $f(t) = e^{at} \sin bt$, donde a y b son escalares dentro de cierto rango respectivamente el cual se puede ir modificando como se desee (dicho rango lo delimita la misma applet).

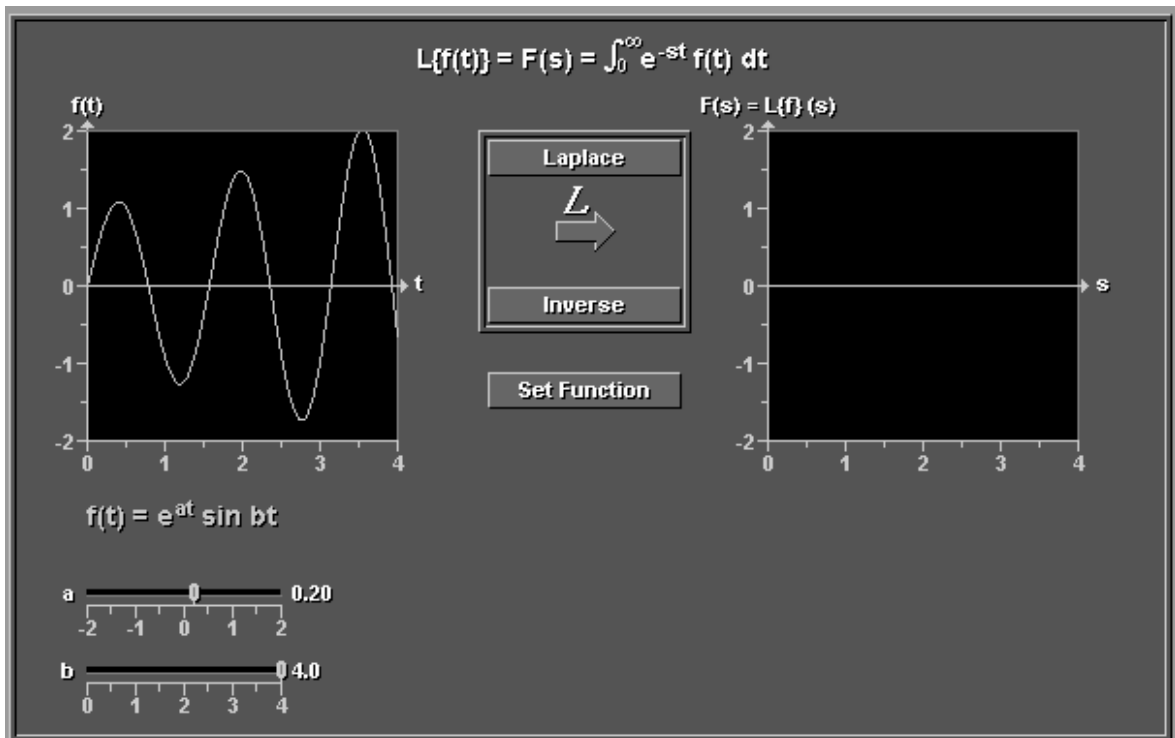


Figura 4 Transformada de Laplace

Si se desea ver cómo se comporta la inversa de Laplace, basta con pulsar el botón de “Inverse”, donde también se puede escoger algún operador $F(s)$ y el valor de los escalares del respectivo operador. Para este ejemplo se optó por la misma función, pero se modificaron los valores escalares.

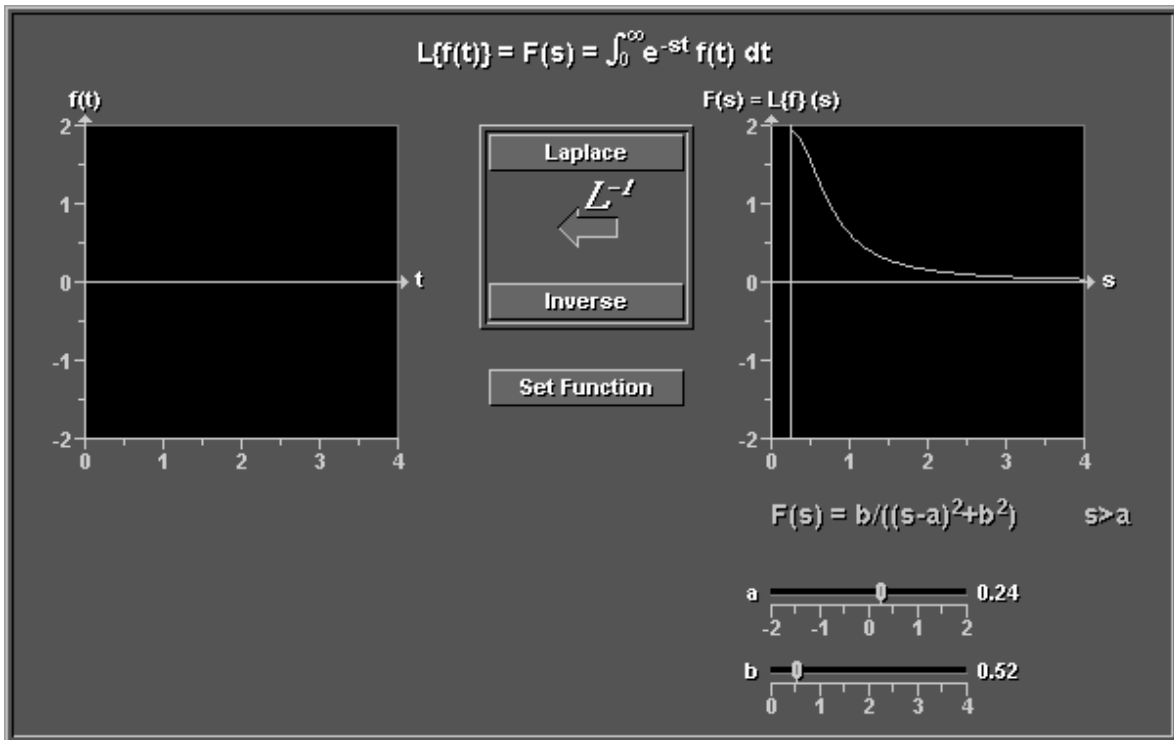


Figura 5 Inversa de la Transformada de Laplace

Más información: dentro del mismo sitio <http://www.aprendematematicas.org.mx> podemos encontrar mucha información al respecto.

Datos generales del software

Autor: Efraín Soto Apolinar, Jorge Romero Ortiz, Eliud Quintero Rodríguez, et. Al.

País de origen: México

Sitio Web: <http://www.aprendematematicas.org.mx/autores/titular/ligas.html>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Matemáticas

Palabras clave de esta herramienta: ligas, enlaces, applets, matemáticas, fractales programación, educación, aprendizaje.

Descartes

Descripción: Se trata de un proyecto de educación que abarca todos los niveles de educación realizado en España. Es un sitio de internet enfocado a los profesores de matemáticas que desean incluir como parte de los métodos de enseñanza a las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación). En este sitio se pueden desarrollar aplicaciones interactivas de cualquier tema en matemáticas que quedan guardadas dentro del mismo sitio de internet.

Al tratarse de un sitio para maestros no significa que los alumnos no puedan usarlo, al contrario, su objetivo es que los alumnos utilicen dichas aplicaciones ya elaboradas para poder adquirir los conocimientos según les sean requeridos o como otra alternativa, para quienes deseen conocer y aprovechar dichos recursos por su propia cuenta.

Descartes cuenta con secciones para los profesores, para los alumnos y para el desarrollo de aplicaciones nuevas.

En esta página ya existen aplicaciones y simulaciones interactivas de diversos temas, aunque no cubre todos los tópicos existentes de matemáticas, ya que como se mencionó antes, van siendo realizados con forme son requeridas. Para quienes deseen desarrollar alguna nueva aplicación pueden hacerlo, ya que cuenta con un apartado para ello; lo único que requieren es un poco de conocimiento en programación y realizar un pequeño curso en el que vienen las instrucciones de las condiciones para elaborarlo.

También cuenta con versiones descargables para trabajar con las aplicaciones en la computadora y no depender de internet, pero en esta investigación solo se enfocará a la versión Web.

Modo de uso: Dicho sitio Web cuenta con muchos apartados y secciones dentro del sitio, por lo que solo se enfocara a los que corresponden a esta investigación. Desde la página de inicio las secciones que corresponden a las aplicaciones interactivas son:

- U. Didácticas: Se trata de un libro interactivo.
- Aplicaciones: Es una serie de materiales interactivos organizadas por temas
- Miscelánea: Se trata de simulaciones interactivas de diversos temas, no cuentan con un orden específico ni por temas.
- Edad: como su nombre lo dice, están organizadas de acuerdo a la edad del usuario.
- Discurso: Se trata de lecciones interactivas donde combinan cierta aplicación con procedimientos.
- Proyecto Canales: aplicaciones para niños de primaria.
- Proyecto PI: cuenta con simulaciones que asemejan el uso en un pizarrón.

Todas las simulaciones aportan un apoyo al nivel superior excepto la sección de Proyecto Canales.

Finalmente en la sección de ENLACES es un sitio en el que se puede encontrar una amplia gama de otros sitios interactivos de matemáticas.

Ejemplos

Ejemplo 1: Álgebra

Determinantes

En esta sección se da una muestra interactiva de las operaciones con determinantes, explicando de manera escrita las propiedades de cada operación e incluyendo una serie de ejemplos interactivos.

Para acceder a estas simulaciones se puede tener acceso desde la página de inicio de Descartes, se escoge la pestaña Álgebra y de ahí hay dirigirse a la pestaña de Álgebra Lineal.

El mismo tema está organizado por los subtemas y cada uno de ellos posee una aplicación que muestra ejemplos en los que el usuario puede ir modificando las características de las matrices.

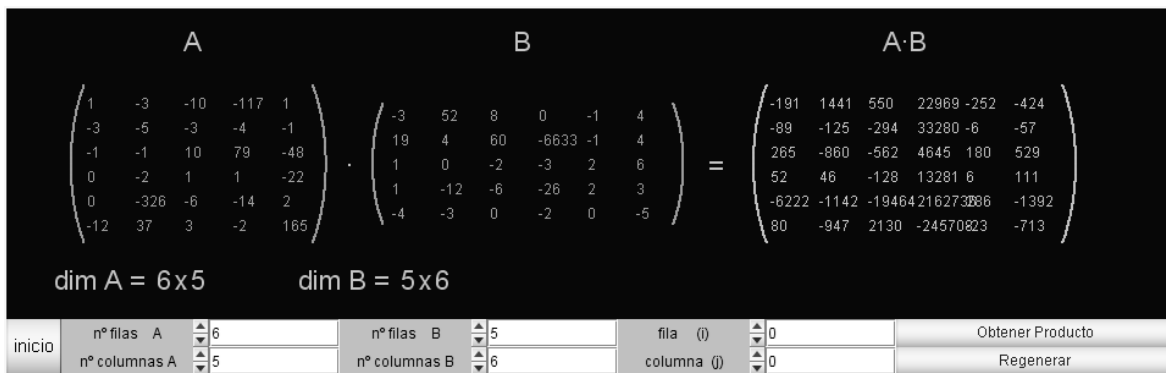


Figura 6 Multiplicación de matrices en Descartes

*Para dar una muestra de dicha interacción, dentro de la misma aplicación de multiplicación de matrices se puede reducir el número de filas de la matriz B y el simulador indicará que no se puede efectuar dicha multiplicación.

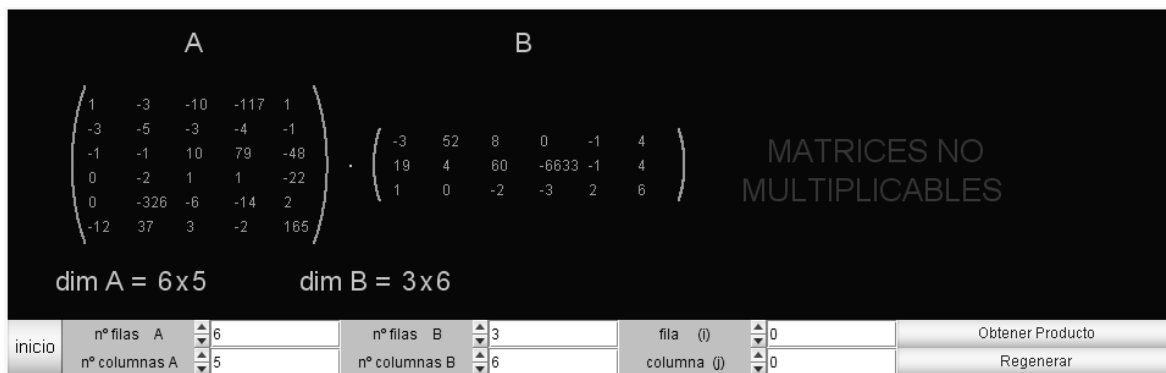


Figura 7 Cambio de número de filas en la matriz B

Haciendo la comparación de las dos imágenes, se puede observar que la matriz A es exactamente la misma, mientras que en la matriz B tiene menos columnas, con lo que la simulación indica que no se puede realizar la operación.

Ejemplo 2: Matemáticas Aplicadas

Cálculo de raíces por iteraciones

En este ejemplo se muestra de manera gráfica la obtención de la raíz cúbica de cualquier número. Para ello desde la misma sección de "Aplicaciones" hay que dirigirse al apartado de "Matemáticas aplicadas" y se escoge la pestaña de "Matemática iterativa" y por último "Cálculo de raíces"

Dicho ejercicio trata sobre la aproximación a la raíz cúbica de un número por medio de una estimación inicial, el algoritmo y el cálculo numérico ya lo realiza por sí sola la aplicación, lo que se pretende es que el usuario interactúe con los parámetros de la estimación que son:

- El número que se desea encontrar su raíz (a).
- El número de iteraciones que se tienen que realizar (n).
- Y el número desde el cual se inicia la iteración (x_0).

Para este caso se escogió el número 7 para encontrar su raíz cúbica, con $x_0 = 4$, la aplicación nos indica que $\sqrt[3]{7} = 1.912931182772$.

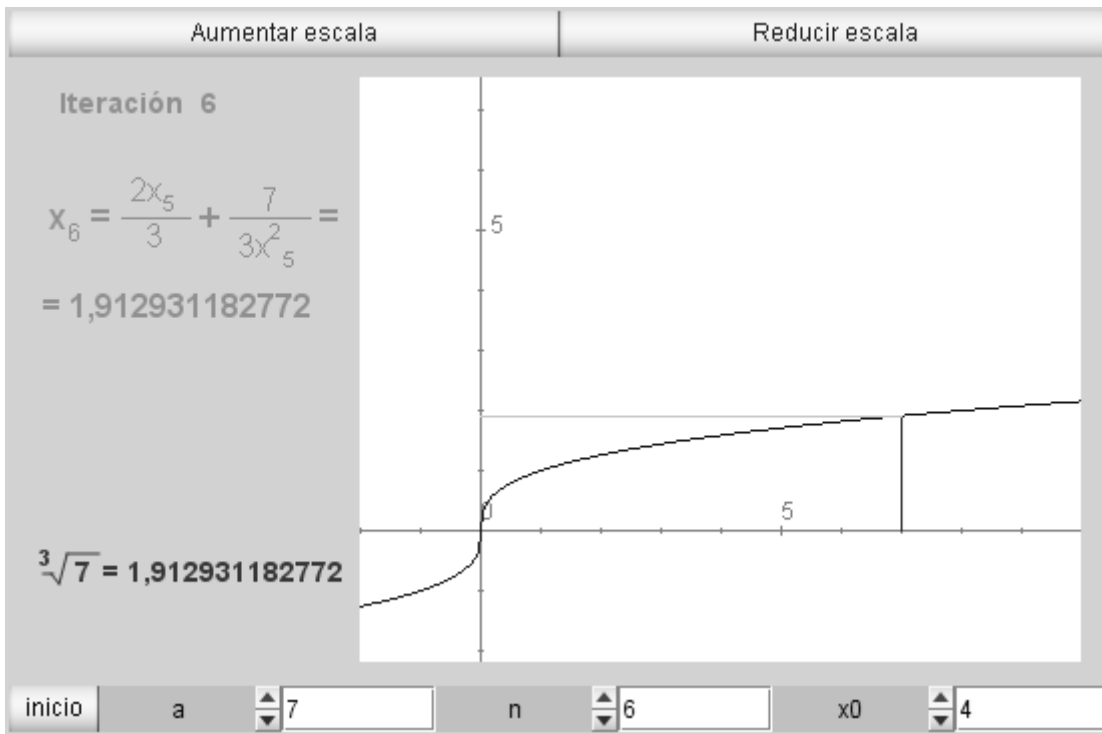


Figura 8 Aplicación para raíces cúbicas con Descartes

Al realizar la simulación se observa que se llega a una aproximación de 7 decimales en la sexta iteración, y no solo eso, sino que es idéntica en todos los decimales a la mostrada en la raíz cúbica mostrada en la parte inferior.

Ejemplo 3: Probabilidad

Tamaño de una muestra

Para este ejemplo se escogió una aplicación en la que combina conceptos escritos y ejemplos en simulaciones interactivas (similar al primer ejemplo). Para acceder a dicho tema, nuevamente desde la sección de “Aplicaciones” hay que dirigirse hacia la sección “Estadística y Probabilidad” de ahí a “Inferencia Estadística”, “Muestreo de Poblaciones” y finalmente en “Tamaño de la muestra”.

Es una herramienta bastante útil cuando se requiere conocer la muestra de alguna población ya sea finita o infinita. A esta aplicación solo se necesita indicar el tamaño de nuestra población y el margen de error.

Para mostrar la diferencia que puede encontrar entre ambos tipos de población se mostrara el resultado arrojado en ambos casos conservando el mismo porcentaje de error que será del 5%.

créditos	ERROR (%)	5.00	config	créditos	ERROR (%)	5.00	config
TIPO POBLACIÓN: FINITA				TIPO POBLACIÓN: INFINITA			
TAMAÑO MUESTRA: 383				TAMAÑO MUESTRA: 385			
inició	POBLACION	99999	limpiar	inició	POBLACION	200000	limpiar

Figura 9 Muestra de una población finita e infinita en Descartes

Como se puede ver en la figura, en una población finita (menos de 100,000 elementos) da una muestra de 383, mientras que en una población infinita da una muestra de 385.

Más información

Datos generales del software

Autor: Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (España), Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) a través de la Facultad de Ciencias.

País de origen: España, México

Sitio Web: <http://recursostic.educacion.es/descartes/Web/>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Álgebra, Estadística, Geometría Analítica, Matemáticas Aplicadas, Probabilidad.

Palabras clave de esta herramienta: TIC (Tecnologías de la Información), aplicaciones, simulaciones interactivas, libro interactivo.

Famous Curves Applets

Descripción: Es un catálogo de las 56 gráficas en R^2 más comunes en el mundo de la Geometría Analítica, tanto en coordenadas paramétricas como en coordenadas polares, muestra la ecuación general y su respectiva gráfica, los usuarios ya no necesitan introducir la gráfica por ellos mismos. El objetivo de este sitio Web es que los usuarios interactúen con las características de dichas funciones, donde ellos puedan modificar los parámetros y observar los cambios que sufren las gráficas de las funciones así como los elementos propios de ellas.

Es un sitio pensado para quienes ya conocen dichas funciones, o desean saber el diseño o forma que tienen, para poder estudiar más a fondo las características que poseen. El sitio ofrece la característica de omitir los pasos de graficar funciones o ecuaciones que ya son conocidas o que son muy comunes, por eso se recomienda que se utilice para quienes ya están familiarizados con este tipo de funciones o deseen conocer otras.

Es una herramienta muy sencilla debido a su característica en particular de ser un catálogo interactivo.

El sitio Web no solo se limita a las gráficas de las ecuaciones, sino que ofrece una amplia gama de información acerca de las matemáticas a través de las diferentes civilizaciones que han existido a lo largo de la historia, glosarios con las definiciones de conceptos matemáticos, fichas bibliográficas de los matemáticos de la historia y líneas de tiempo entre otras variantes. Lo cual ofrece una oportunidad hacia la cultura matemática.

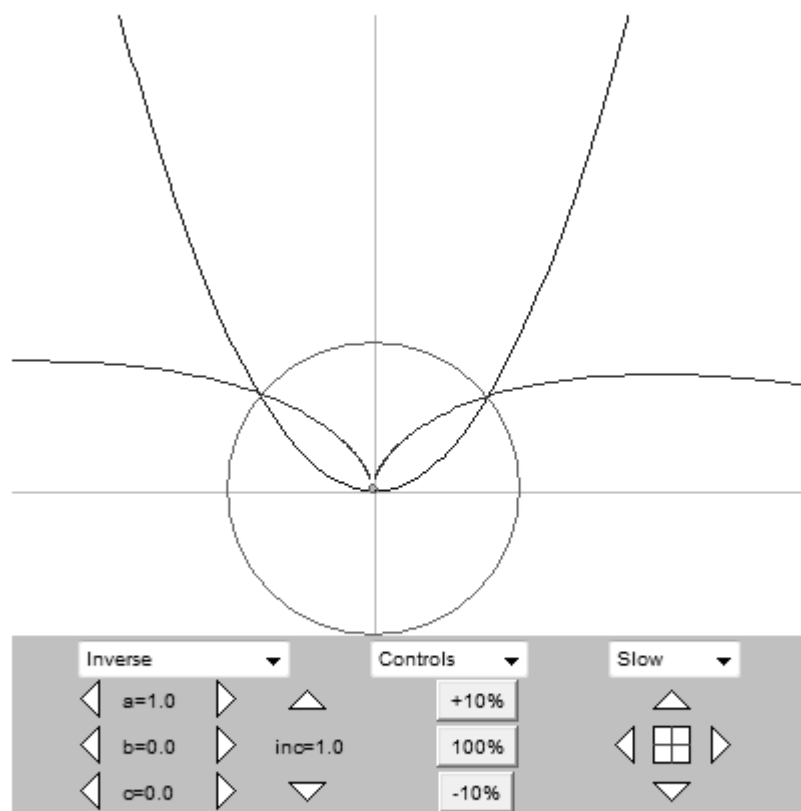
Modo de uso: La forma en la que se puede usar también es muy sencilla e intuitiva, pero por cualquier duda que se pueda presentar en el usuario, posee una breve explicación del tipo de función que es y una sección con las posibles características con las que se pueden interactuar.

Ejemplos:

Ejemplo 1: Parábola

De la lista que ofrece el sitio Web, se tomará la más común y conocida de entre todas las funciones, la parábola. Se puede observar que coloca la curva de manera predeterminada, debajo de ella muestra un cuadro de opciones con las que se puede modificar la gráfica, por ejemplo: aumentar o disminuir el valor de alguna de las variables de la ecuación, elegir la inversa, aumentar la visión de la pantalla, mover la pantalla para observar una zona en particular. En este caso se graficó la inversa, en la primer sección de opciones se escoge "Inverse", después se puede colocarse en cualquier punto del plano, pero para fines prácticos del ejemplo se colocará el origen; se formara una circunferencia y de su centro se dibujará la inversa de la ecuación.

Parabola



Cartesian equation:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Figura 10 Parábola y Circunferencia en Famous Curves Applets

Datos generales del software

Autor: John J O'Connor y Edmund F Robertson

País de origen: Reino Unido

Sitio Web: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Java/index.html>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Geometría Analítica

Palabras clave de esta herramienta: geometría, gráfica, función, coordenada, paramétrica, polar.

GapMinder

Descripción: Se trata de una herramienta dedicada en su totalidad a la aplicación de la estadística a situaciones reales en todo el mundo como son crecimientos demográficos, enfermedades, alimentación, etc. Brinda una serie de secciones que son gráficas interactivas y que van mostrando el cambio en el comportamiento de los datos desde 1800, lo cual brinda una gran ayuda al momento de estudiar el comportamiento de las variables desde el punto de vista de la estadística. No se trata de un sitio dedicado a la resolución de problemas teóricos de la estadística, sino de la aplicación directa en los sucesos medibles del mundo.

Este sitio Web nació como una fundación con el fin de dar a conocer las principales estadísticas estudiándolas en todo el mundo, a base de las estadísticas brindadas por los mismos países, por lo que se puede estar seguro de que son datos reales y confiables. Pero poco a poco se fue transformando en un recurso a nivel mundial y al alcance de todos. Su principal función es con fines pedagógicos y didácticos sobre las cifras de cada país en todos los ámbitos posibles.

Ofrece varias secciones muy bien catalogadas, muestra un aplicación de **gráficas interactivas, bases de datos, secciones para profesores, material descargable, videos** sobre cómo se han ido modificando los objetos de estudio traducidos en datos estadísticos (religión, desnutrición, natalidad, mortandad, etc.) así como de las correlaciones que pueden tener entre dichas variables; dichos videos que ofrecen subtítulos en todos los idiomas en caso de no saber inglés. Además cuenta con una versión instalable y gratuita que no requiere conexión a internet para poder usar las bases de datos que ofrece en la Web.

Modo de uso: Para poder usarlo no se requiere estudiar largos tutoriales, ya que no es un sistema computacional, aunque la sección de “Gapminder World” posee una pequeña sección para saber cómo aprovechar al máximo las gráficas dinámicas tanto en un formato en PDF y un video en el que se puede ver todas las formas para aprovecharlo al máximo.

Ejemplos

Ejemplo 1: Gráficas

Hay que dirigirse a la pestaña “Gapminder Mundial” (o “Gapminder World”). Se mostrará cómo se distribuyó la expectativa de muerte de los niños entre 0 a 5 años de edad contra los ingresos por persona en el año 2000. Solo hay que seleccionar de la barra vertical la opción “Child mortality (0-5 years old dying per 1,000 born)” y en la barra horizontal “Income per person(GDP/capita, PPP\$ inflation-adjusted)” y en la barra de tiempo se selecciona “2000”, incluso la misma pantalla muestra el año en el que se encuentra. Los círculos de colores representan a cada uno de los países y las regiones son mostradas por los colores. Si se desea, también se puede obtener la base de datos, ver algún país en específico y su desarrollo a lo largo de 2000 años.

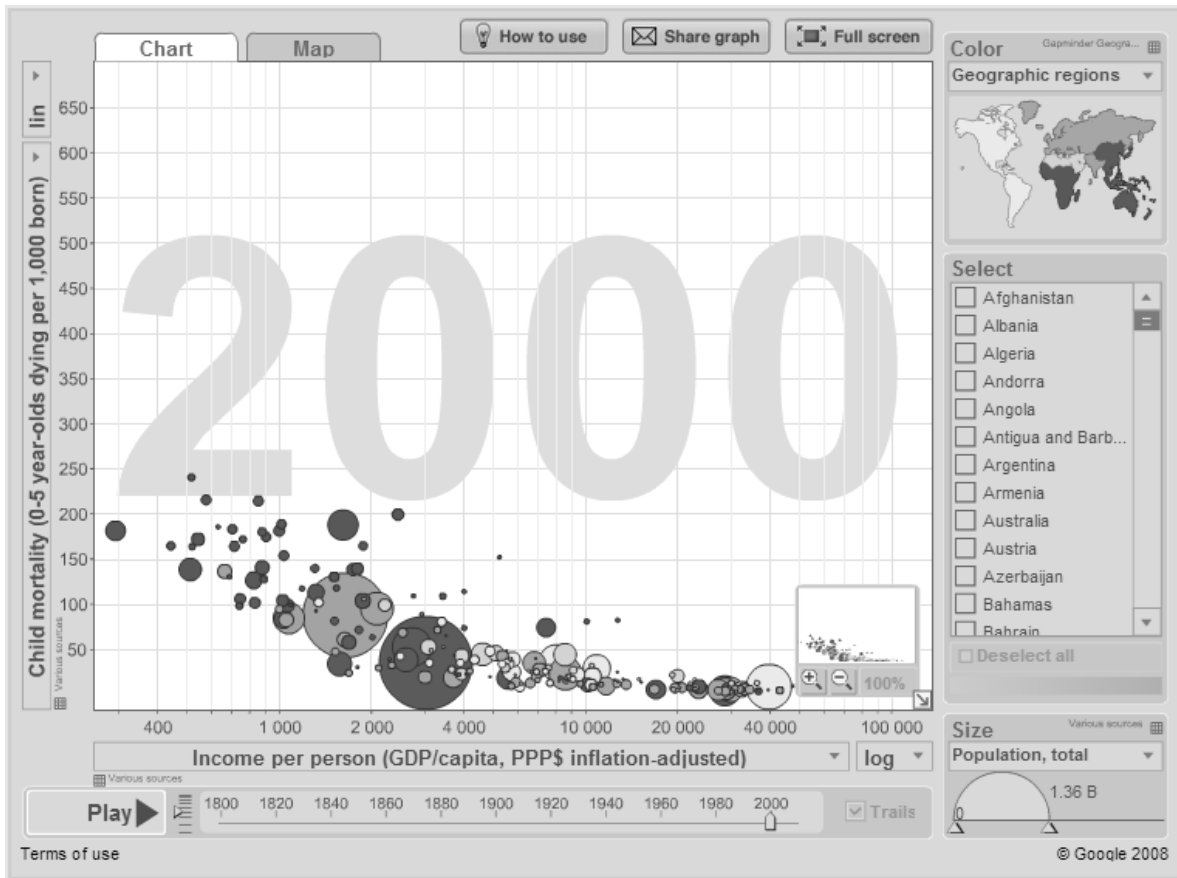


Figura 11 Gráficos interactivos de Gapminder

Ejemplo 2: Vídeos

El video que se toma para este ejemplo es la correlación de los hijos que se tiene por mujer con respecto a su religión, en el vídeo se puede observar una manera de trabajar con dicha información reproducida por Gapminder, los videos contienen subtítulos (en este caso en español), suelen ser cortos pero con gran contenido explicativo.

Religions and babies



Figura 12 Videos sobre la correlación entre religión y nacimiento de bebés

Más información: Existe mucha información acerca de este sitio Web en internet incluso la encontramos en YouTube; no existe un solo sitio en específico, aunque si una gran variedad de enlaces donde dan referencia de esta herramienta tan útil.

Datos generales del software

Autor: Gapminder Foundation- Hans Rosling

País de origen: Suecia

Sitio Web: <http://www.gapminder.org>

Categoría: software libre para Estadística

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Estadística

Palabras clave de esta herramienta: gráficas, estadística, variables, correlación, interacción, bases de datos.

GeoGebra

Descripción: Se trata de un software (CAS) de múltiples plataformas para matemáticas que abarca todos los niveles de estudio de educación, desde primaria hasta universidad. Ofrece varias representaciones de vista de los objetos para los usuarios, vista gráfica, vista algebraica, simbólica, estadística y organización en tablas y planillas y hojas de datos, estas últimas vinculadas de manera dinámica. Su desarrollo permite a los usuarios tener una herramienta muy potente, pero al contrario de lo que se espere su modo de uso es muy sencillo.

Modo de uso: Es muy sencillo, tanto para las vistas gráficas, algebraicas, además esta herramienta ofrece la posibilidad de crear imágenes para la impresión de guías de trabajo o páginas de Web interactivas. Para ello hay varios sitios donde puedes tener acceso a diversos tutoriales, como son video-tutoriales en *YouTube*: <http://www.youtube.com/geogebrachannel> o en un formato más tradicional en el sitio: http://www.geogebra.org/help/geogebraquickstart_es.pdf

Ejemplos

Ejemplo 1: Tangente a una curva

Se realizará un ejercicio de geometría para trazar de manera gráfica las tangentes de una circunferencia respecto a un punto.

Abriendo la aplicación en línea del software, muestra desde un inicio la vista algebraica y la gráfica, todo se introduce en la barra de “Entrada”, donde se escriben las siguientes instrucciones:

El punto central de la circunferencia que se escribe como: $A = (0,0)$. Para determinar el radio es $B = (3,0)$; y para que realice el trazo *circunferencia [A,B]*.

Como se puede ver, la lógica que maneja es muy sencilla e intuitiva, pero para poder realizar cualquier ejercicio que se desee se recomienda ver los tutoriales.

Después se crea otro punto $C = (5,4)$, uniéndolo al centro de A con una línea que se llamará “s” $s = \text{segmento [A, C]}$ y se buscará su punto medio de dicha línea con $D = \text{Puntomedio[s]}$, nuevamente se creará otra circunferencia cuyo centro será D $d = \text{Circunferencia [D, C]}$. Ahora para poder hacer pasar las líneas que serán las tangentes con respecto al punto C primero se crean las intersecciones con *Interseca [c, d]* y finalmente se crean las líneas que pasaran por estos tres puntos con *Recta [C, E]* y *Recta [C, F]*.

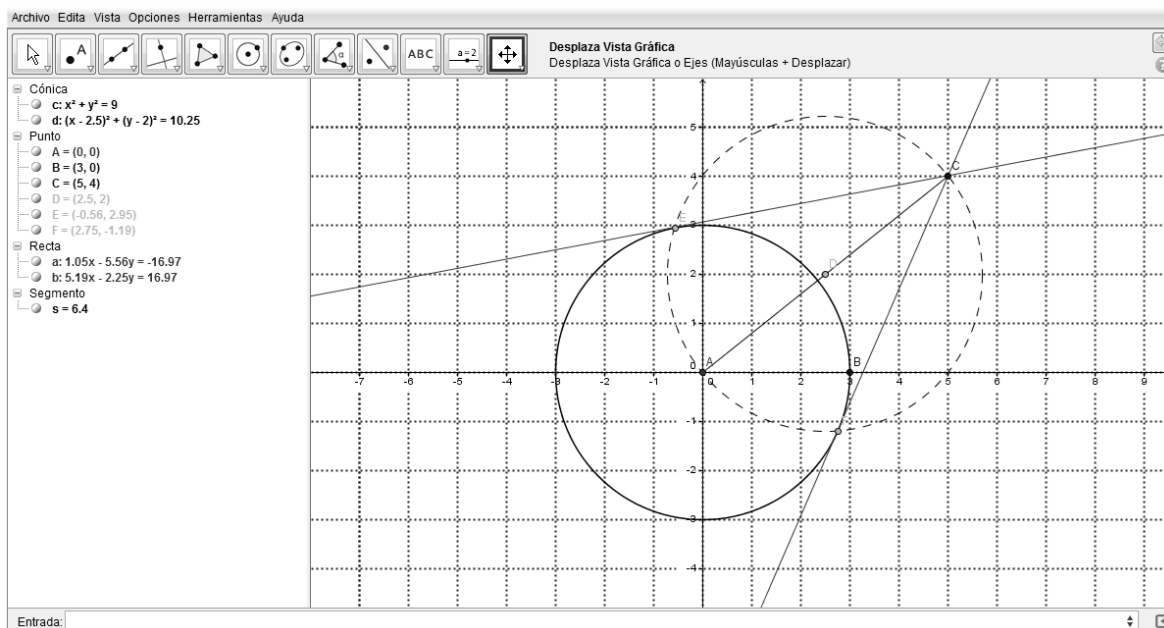


Figura 13 Tangentes de una Circunferencia

Ejemplo 2: Punto de inflexión de una curva

Ahora se presenta un ejercicio de cálculo, encontrar el punto de inflexión de una función.

Para ello primero se introduce la función, en este caso será $0.5x^3 + 2x^2 + 0.2x - 1$; en Geogebra se introduce $f(x)=0.5x^3+2x^2+0.2x-1$, después se sacarán las raíces con la instrucción $R=raíces(f)$. Para dar una aplicación de los diversos botones rápidos que contiene, se puede obtener gráficamente las tangentes con el botón de rectas y la opción "Tangentes", hay que colocarse sobre el máximo y mínimo local. Por último se le da la instrucción $I=Puntodeinflexion[f]$ y automáticamente creará el punto intermedio entre el máximo y el mínimo.

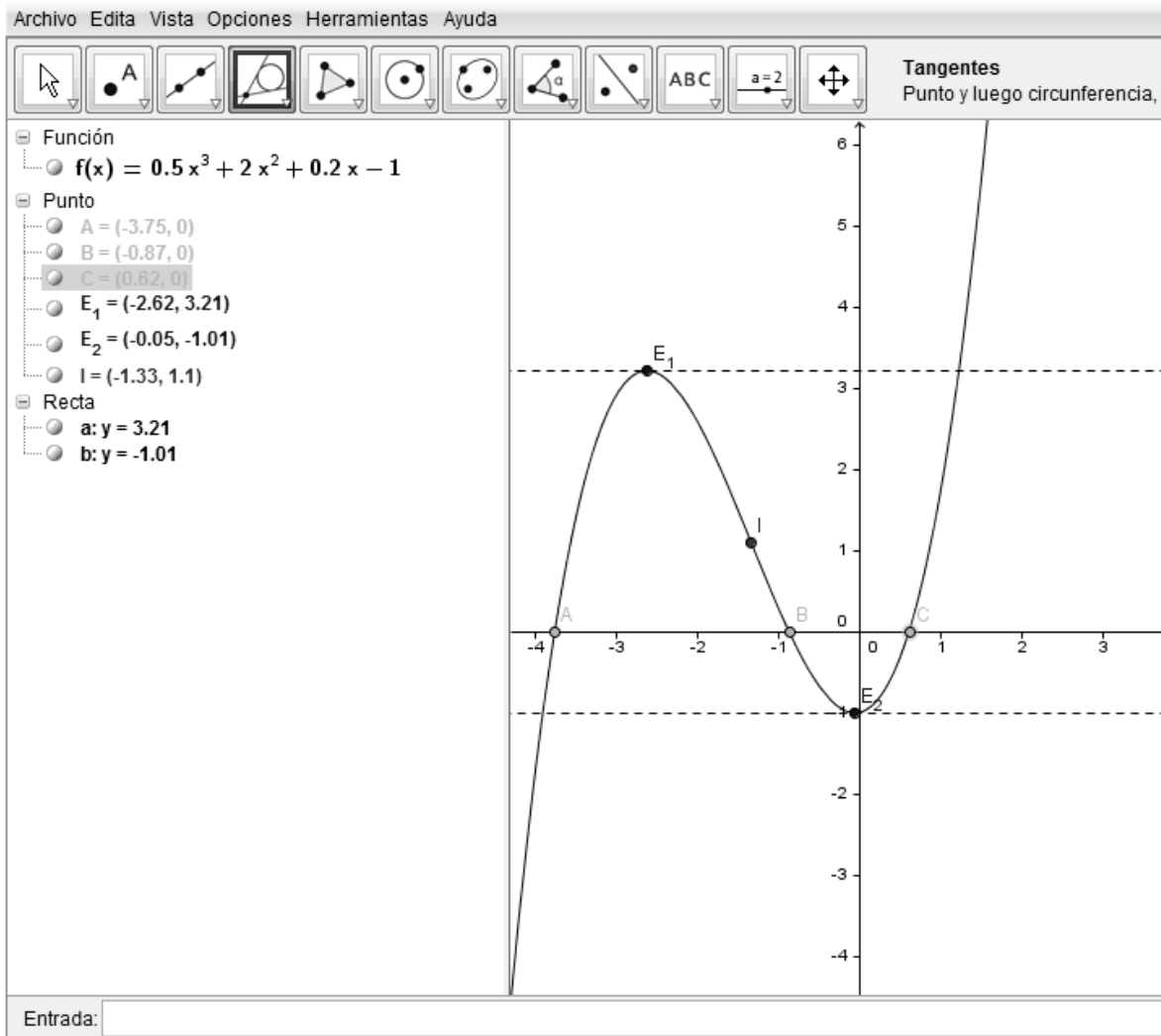


Figura 14 Punto de inflexión de una Curva

Más información

Podemos encontrar más acerca de este CAS en <http://www.geogebra.org/cms/>; o en la sección de “Trayectoria” en la propia página de inicio del sitio.

Datos generales del software

Autor: Markus Hohenwarter, **Zsolt Lavicza**, Michael Borchers, et al.

País de origen: Europa

Sitio Web: <http://www.geogebra.org/cms/>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Geometría, Álgebra, Cálculo

Palabras clave de esta herramienta: CAS, múltiples plataformas, vista gráfica, vista algebraica; simbólica; estadística, planillas, hojas de datos.

Gráficas matemáticas de Google

Descripción: Esta applet es de las más sencillas mostradas en esta investigación. Se pueden realizar gráficos tanto en R^2 como en R^3 . Es bastante útil para graficar funciones rápidamente cuando no se cuenta con algún software o simplemente se desea realizar alguna gráfica de manera inmediata.

No por tratarse de ser una aplicación de fácil acceso y con un diseño tan amigable para el usuario significa que tenga muy poco alcance, por el contrario, con ella se puede realizar gráficos de funciones tanto paramétricas como polares, se puede graficar más de una función dentro de la misma planilla. En el caso de las gráficas en R^3 se pueden girar, ver profundidades y densidades a través de tonalidades de colores.

El desarrollador de esta herramienta es uno de los buscadores en internet más usados en el mundo, Google Inc. y como consecuencia es de muy fácil acceso.

Modo de uso: La manera de emplear esta aplicación es una de las más sencillas, solo es necesario colocar en la barra del buscador, la función que se desea graficar (tal como se hace normalmente para buscar información en la Web) y aparecerá en una ventana gráfica inmediata a la barra de búsqueda en la que se muestra la gráfica de la función.

Ejemplos

Ejemplo 1: Función

Para este ejemplo vamos a mostrar tanto la forma más básica de usar esta herramienta, como la combinación de factores y funciones. Se graficará la función $y = x^2 - 2x + 2$ y restringir el intervalo de $(-3,3)$. Además se incluirá la función $\sqrt{|x|}$.

En la barra del buscador se escribire **x^2-2x+2 from -3 to 3, $\text{sqrt}(\text{abs}(x))$** ; no importa si se escribe con mayúsculas o minúsculos, ya que no hace distinción.

Gráfico de x^2-2x+2 , $\text{sqrt}(\text{abs}(x))$

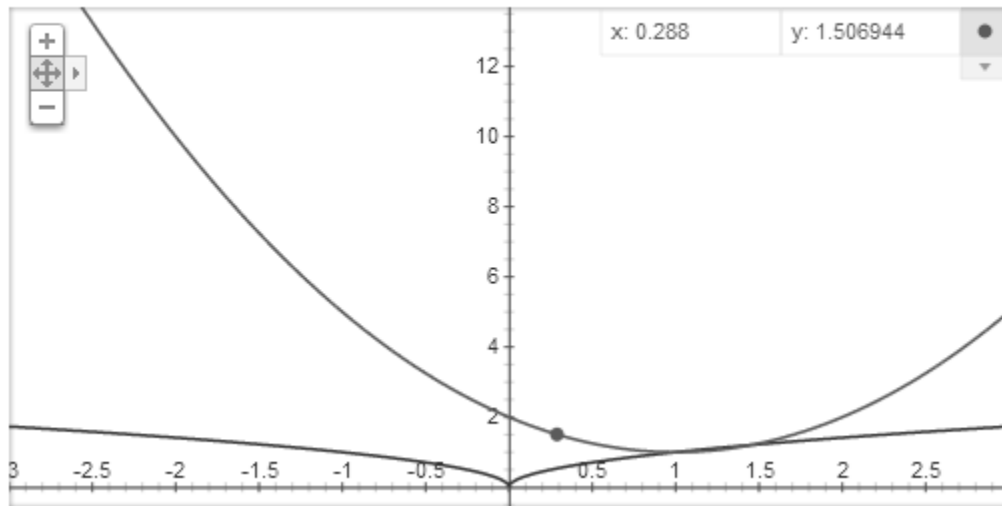


Figura 15 Gráficas en Google

Ejemplo 2: Gráficos en R^3

Para este caso vamos a graficar una función que muestre el alcance de las gráficas de tres variables. La función es $\sqrt{x^2 + y^2} + 3 \cos \sqrt{x^2 + y^2} + 5$ $(-20,20)$, como en el ejemplo anterior se escribe en el buscador **sqrt(x*x+y*y)+3*cos(sqrt(x*x+y*y))+5 from -20 to 20**

Gráfico de $\sqrt{x^2+y^2}+3*\cos(\sqrt{x^2+y^2})+5$

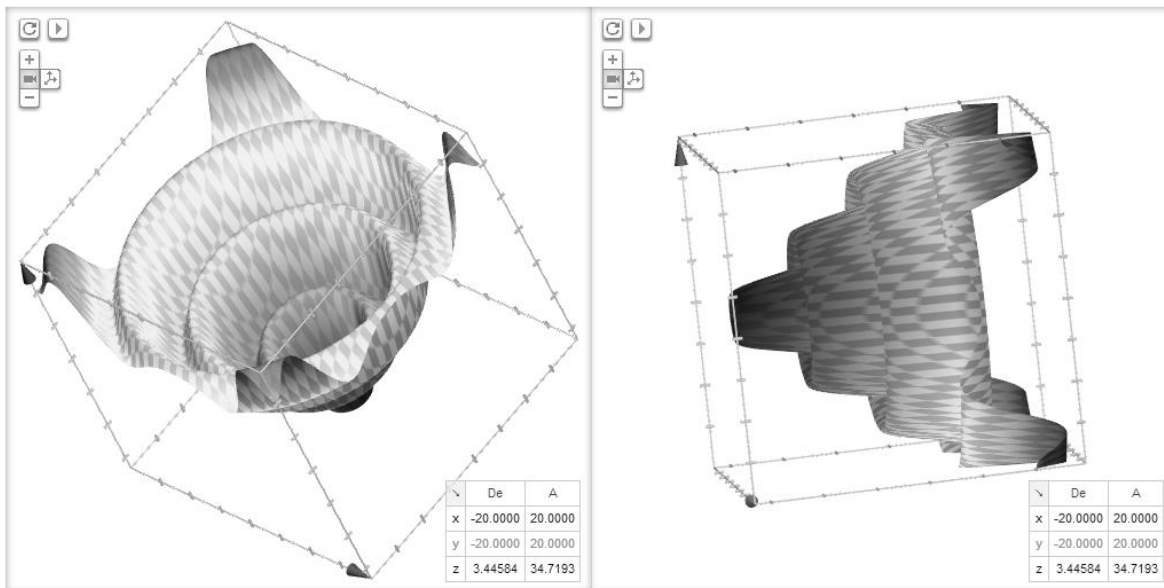


Figura 16 Función de tres variables vista desde 2 diferentes ángulos

Más información

En internet puedes encontrar muchos sitios que pueden proporcionar nueva información de esta herramienta, solo basta escribir en la barra del buscador “gráficas matemáticas de google”, incluso encontraras vídeo tutoriales bastante útiles para utilizar el graficador.

Datos generales del software

Autor: Google Inc.

País de origen: Estados Unidos

Sitio Web: www.google.com

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Matemáticas

Palabras clave de esta herramienta: gráficas, buscador, R^2 , R^3 , tres variables, funciones.

Khan Academy

Descripción: Es un sitio Web dedicado a la formación de matemáticas principalmente, así como de otras disciplinas como son las ciencias (biología, física, química, astronomía), economía y finanzas y humanidades. Se creó con el fin de que sea una herramienta de aprendizaje o apoyo en el aprendizaje, enseñanza o asesoría tanto para estudiantes, tutores, padres o quien desee usarlo.

Es un sitio Web dedicado a la enseñanza a través de vídeos explicativos de las áreas antes mencionadas (aunque esta investigación solo se enfoca en las relacionadas con las matemáticas), están en inglés pero contiene subtítulos; por desgracia no todos están subtitulados, por lo que es necesario tener conocimientos previos del idioma inglés.

Aunque se enfoca principalmente en vídeos, también posee una sección de ejercicios interactivos en los que pueden comprobar su aprendizaje.

Modo de uso: Su uso es muy sencillo, ya que basta con escribir en la sección de “Buscar” del sitio el vídeo del tema que se desea reproducir, o bien los ejercicios que se quieran resolver. También se puede acceder a ambas categorías desde la sección “LEARN” (APRENDER en inglés).

Ejemplos:

Ejemplo 1: Álgebra Lineal

Para el ejemplo se mostrará como son los ejercicios interactivos de Khan Academy, simplemente hay que escribir en “Buscar” “multiplicación de matrices por un escalar” finalmente hay que dirigirse a la sección de ejercicio que ofrece el sitio.

Ya en él, existe una sección en el ejercicio solicitando que se dé la respuesta y de resolverlo mal, ofrece una serie de consejos para corregirlo, con lo que se obtiene una retroalimentación del mismo.

The screenshot shows an interactive exercise interface. On the left is a sidebar with navigation icons and labels: "Multiplicando una matriz por un vector", "Multiplicando una matriz por otra", "Multiplicando una matriz por otra", "Operaciones definidas e indefinidas en matrices", "Operaciones definidas e indefinidas en matrices", and "Multiplicación de matrices (parte 1)".

The main content area displays the following:

- Matrix $D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$
- Vector $w = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$
- Question: "¿Qué es Dw ?"
- Text: "Como D tiene dimensiones (2×3) y w tiene dimensiones (3×1) , la matriz solución tendrá dimensiones (2×1) ."
- Equation: $Dw = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix}$
- Text: "Para encontrar el elemento en cualquier fila i , columna j de la matriz solución, multiplica los elementos en la fila i de la primera matriz, D , con los elementos correspondientes en la columna j de la segunda matriz, w , y suma los productos."
- Text: "Así, para encontrar el elemento en la fila 1, columna 1 de la matriz solución, primero multiplica el primer elemento en la fila 1 de D con el primer elemento en la columna 1 de w , después multiplica el segundo elemento en la fila 1 de D con el segundo elemento en la columna 1 de w , y así sucesivamente. Suma los productos."
- Equation: $[3 \cdot -1 + -2 \cdot -1 + 4 \cdot -2]$

The right-hand panel contains:

- A "Respuesta" section with a grid where the number "3" is entered in the top-left cell.
- A "Comprobar respuesta" button.
- A "Siguiente pista (0 restantes)" button.
- A section titled "¿Estancado? Observa este video." with a video player showing a thumbnail for "Multiplicación de una matriz".
- A small caption below the video: "Multiplicando una matriz por otra".

Figura 17 Multiplicación de Matrices por un vector con su explicación

Ejemplo 2: Probabilidad

Debido a que se trata de un sitio Web de vídeos, solo mostrará un ejemplo en el que se engloba el uso de éste, se ve en la imagen la reproducción de un vídeo que explica el Error tipo 1 en estadística.

The image shows a YouTube video player interface. On the left is a navigation menu with the following items: 'PRUEBA DE HIPÓTESIS CON UNA MUESTRA', 'Prueba de la hipótesis y valores p', 'Pruebas de una y dos colas', 'Errores de tipo 1', 'El estadístico Z vs. el estadístico T', 'Prueba de hipótesis en muestras pequeñas', 'Intervalo de confianza de la estadística T', and 'Prueba de hipótesis de proporción en muestras grandes'. The video title is 'Errores de tipo 1' and the video content shows a normal distribution curve with a shaded area under the tail labeled 'rechazado' and '0.5% probabilidad'. Handwritten text above the graph reads 'error Tipo I: Rechazar H_0 a pesar de que sea verdadero.' and 'Asumimos H_0 verdadero'. The video player interface includes a progress bar at 2:41 / 3:26, a 'YouTube' logo, and a '177 de 750' view count.

Figura 18 Vídeo "Error tipo 1"

Más información: Dentro de la misma página de Khan Academy se puede encontrar más contenido referente al sitio.

Datos generales del software

Autor: Salman Khan

País de origen: Estados Unidos

Sitio Web: <http://www.khanacademy.org/>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Matemáticas, Álgebra, Álgebra Lineal, Cálculo, Ecuaciones Diferenciales, Estadística, Geometría Analítica, Probabilidad.

Palabras clave de esta herramienta: ciencias, economía, finanzas, humanidades, videos explicativos, aprendizaje, ejercicios interactivos.

Math 2 Me

Descripción: Es un sitio que ofrece videos explicativos como una asesoría desde Primaria hasta Universidad. Ofrece apoyo desde la Aritmética hasta el Cálculo. Se trata de un proyecto realizado por mexicanos, por lo que se está completamente en español si ningún tipo de traducción o edición en otro idioma

Los videos tiene una duración en promedio de 5 minutos, en ellos se dan explicaciones claras y precisas de los temas por expertos en cada tema, las explicaciones se dan de una manera generalizada, por lo que hay que estar conscientes de que no abarcan subdivisiones muy específicas; para ello el sitio Web se sirve de un portal de dudas directas para los usuarios por medio de las redes sociales a las cuales se puede acceder directamente en la página Web.

Modo de uso: Al tratarse de un sitio Web enfocado totalmente a la reproducción de videos explicativos la dinámica es muy sencilla, aunque cabe mencionar que se encuentra bien organizado. En la cuestión de clasificación de videos, se encuentran catalogados en 5 categorías, de las cuales solo son de interés 4: Calculadora, Errores, Apps y Uso de las mates.

En cada una de ellas, como sus nombres lo dice se enfocan en:

- Calculadora, ofrece explicaciones de las diversas funciones y resoluciones que podemos efectuar en las calculadoras científicas modernas.
- Errores, son las más comunes equivocaciones que llegamos a cometer al momento de realizar los métodos matemáticos.
- Apps, el modo de uso del sitio Web para tablets y smartphones.
- Uso de las mates, nos da una muestra audiovisual de las aplicaciones a situaciones en la vida real de las matemáticas.

Ejemplos:

Por tratarse de una herramienta enfocada al 100% a vídeos explicativos sin ninguna interacción más que reproducir el vídeo cuantas veces sea necesario solo se mostrará la manera general de acceder a la reproducción de los mismos.

Ejemplo 1: Desde la página de inicio del sitio Web se encuentran las categorías del lado derecho, por lo que se puede escoger desde ahí el ramo deseado, para este ejemplo se escogerá el ramo de “Estadística”, de ahí se observa que una vez más esta subdividido en otros temas, para este caso se toma el que lleva por título “Medidas de tendencia central”.

Para regresar al inicio del sitio Web se puede hacer dando clic al ícono de “math||me” que se encuentra en la esquina superior izquierda.

The screenshot shows the Math||me website interface. At the top left is the logo "math||me". Below it is a search bar with "Google™ Búsqueda personalizada" and a "Buscar videos" button. A navigation menu includes "Currícula", "Calculadora", "Errores", "Música", "Apps", and "Uso de las mates". Below the menu, there are dropdown menus for "Inicio > Estadística" and "Medidas de tendencia central [2/7]". Navigation links for "< Anterior: Clasificación de la estadística" and "Siguiente: Media aritmética (promedio) >" are visible. The main content is a video player showing handwritten text on a chalkboard:

Medidas de tendencia central
 Por orden de importancia

- Media aritmética $\rightarrow \bar{X}$
- Mediana $\rightarrow \tilde{X}$
- Moda $\rightarrow \hat{X}$

The video player includes a play button, a progress bar at 1:28 / 1:44, and various control icons. A watermark "sesorias de Matemáticas" and the Math||me logo are also present in the video frame.

Figura 19 Vídeo explicativo en Math||me

Más información: Para dudas en específico o temas que deseen poder ver en el sitio solo basta con enviar un mensaje desde el sitio Web en la sección "Contáctanos", que se encuentra en la esquina superior derecha.

Datos generales del software

Autor: José Alejandro Andalón Estrada, Maria González Sánchez, David Zabala Rios, Andres Lara.

País de origen: México

Sitio Web: <http://www.math2me.com/>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java, Flash

Áreas que puede apoyar: Probabilidad, Estadística, Geometría Analítica, Cálculo, Álgebra,

Palabras clave de esta herramienta: video, explicación, reproducción, cálculo, aplicación, calculadora, errores, uso de las mates.

Maxima

Descripción: Se trata de un CAS (Sistema de Álgebra Computacional), es un motor de cálculo simbólico, es decir, cuenta con una gran cantidad de funciones para poder realizar operaciones simbólicas por lo que no se limita a la resolución de problemas numéricos. Dentro de este recurso se abarcan diversos campos como son polinomios, matrices, funciones racionales, integración, derivación, manejo de gráficos en 2D y 3D, expansión en series de potencias y de Fourier, entre otras funcionalidades.

Dado que funciona bajo comandos de programación, posee una sintaxis propia, así que su uso está enfocado en su mayoría para el nivel superior, por lo que es una herramienta bastante completa y muy útil para la resolución de ejercicios de alta complejidad.

Así como otros recursos mostrados, Maxima cuenta con su versión descargable e instalable para el ordenador y la que se puede usar directamente en la Web (como en el caso de GeoGebra). En esta investigación solo se abordará la versión Web.

Modo de uso:

Su uso es mucho más elaborado comparado con el de otros recursos Web descritos en esta investigación, por lo que se requiere estudiar más a detalle los códigos de programación, ya que su manipulación requiere del uso de funciones más estrictas. No por ello significa que sea más complicado, ya que existen una amplia gama de manuales que explican paso a paso y por secciones como utilizar Maxima; uno de ellos son un conjunto de video-tutoriales en el sitio: <http://vimeo.com/channels/maximajaj>, o en el sitio: <http://www.telefonica.net/Web2/biomates/maxima/max.pdf> que ofrece un instructivo en un formato más tradicional.

Nota: Durante la elaboración de esta investigación se encontró que el software de Maxima en línea estaba fuera de servicio por tiempo indefinido, por lo que se advierte que hay recursos que pueden fallar en algún momento, ya que se encuentran directamente en línea.

Ejemplos

Ejemplo 1: Álgebra

Se resolverá un sistema de ecuaciones lineales dada la matriz A y los vectores \vec{b} y \vec{x}

$$A = \begin{pmatrix} 51230 & 45452 & 33228 \\ -1854 & 18783 & -996 \\ -26702 & -47580 & -12515 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \vec{b} = \begin{pmatrix} 241818 \\ 32724 \\ -159407 \end{pmatrix}$$

Para ello, primero se comprobará si es posible la solución de dicho sistema si cumple la siguiente condición:

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) = n$$

Ahora hay que dirigirse a la plataforma de Maxima que se encuentra en la sección Algebra-introducir matriz, tanto en filas y columnas se introduce en número "3" y en nombre se escribe "A", dado que se trata de la matriz A; se introducen los valores de dicha matriz y por último se da clic en el botón de "Aceptar".

De igual manera se procede a introducir el vector \vec{b} en Maxima con sus características correspondientes.

Ahora se crea la matriz ampliada de Ab con la instrucción $Ab:\text{addcol}(A,b)$; y "Ctrl+Shift+Enter"

Nota: para ejecutar cualquier instrucción hay que oprimir siempre "Ctrl+Shift+Enter".


```

Archivo  Editar  Cellda  Maxima  Ecuaciones  Álgebra  Análisis  Simplificar  Gráficos  Numérico  Ayuda
[
  (%i1) A: matrix(
    [51230,45452,33228],
    [-1854,18783,-996],
    [-26702,-47580,-12515]
  );
  (%o1) [ 51230  45452  33228
         -1854  18783  -996
         -26702 -47580 -12515 ]

[
  (%i2) b: matrix(
    [241818],
    [32724],
    [-159407]
  );
  (%o2) [ 241818
         32724
        -159407 ]

[
  (%i3) Ab: addcol(A,b);
  (%o3) [ 51230  45452  33228  241818
         -1854  18783  -996   32724
         -26702 -47580 -12515 -159407 ]

```

Figura 20 Captura de Matriz A, Vector b y matriz aumentada en Maxima

Una vez introducidas las matrices a usar, se obtiene su rango mediante los comandos $rank(A)$; y $rank(Ab)$;

```

Archivo  Editar  Cellda  Maxima  Ecuaciones  Álgebra  Análisis  Simplificar  Gráficos  Numérico  Ayuda
[
  (%i6) rank(A);
  (%o6) 3

[
  (%i7) rank(Ab);
  (%o7) 3

```

Figura 21 Rangos de la matriz A y de la matriz aumentada Ab

Como los rangos son iguales el sistema tiene solución y es única. Por lo que ahora se pasará a buscar los valores que resuelven dicho sistema.

Para ello se despeja el vector de incógnitas \vec{x} mediante:

$$A\vec{x} = \vec{b} \leftrightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Se puede obtener la inversa de A con la función de potencia de Maxima, pero el propósito es mostrar los alcances que tiene como software, así que se resolverá por medio de la función inversa que posee: eso se realiza mediante el comando `invA:invert(A)`; finalmente solo resta multiplicar las matrices $A^{-1}\vec{b}$ para obtener los valores, eso se obtiene con el comando `invA.b`; con lo que se obtiene el vector:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

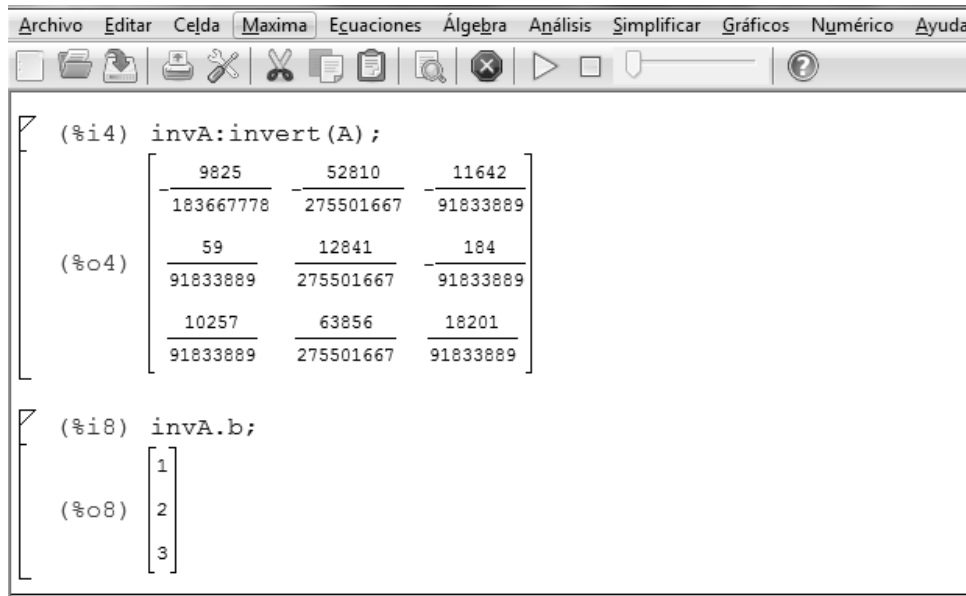


Figura 22 Matriz inversa de A y valores del vector x

Otra manera de resolverla es directamente dirigiéndonos a la sección de *Ecuaciones-Resolver sistema lineal*, solo pide el número de ecuaciones por lo que se le indica que es “3” y se procede a introducir las ecuaciones manualmente.

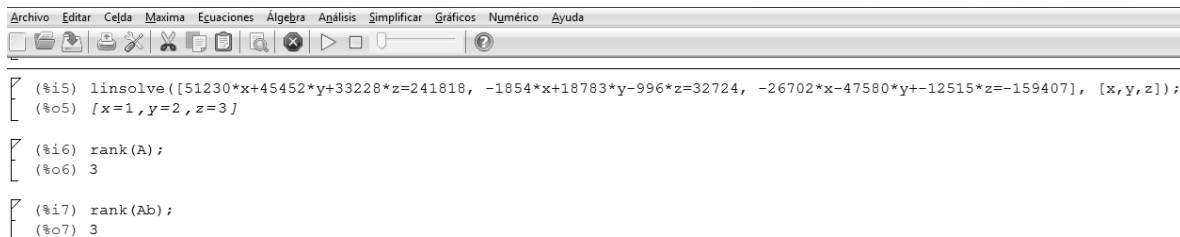


Figura 23 Solución de sistema lineal con comandos de Maxima

Finalmente se ve que da el mismo resultado, por lo que se puede comprobar que ambos métodos son correctos.

Ejemplo 2: Análisis Numérico

En este ejemplo se resolverá por el Método de Newton la aproximación a una posible solución de una ecuación, pero también mostrando el alcance gráfico que posee Maxima.

Se comienza con la ecuación $f(x) = e^{-x} - x = 0$ de la cual se buscará aproximar a una solución en el intervalo $[0,1]$ para eso se parte del punto $p_0 = 0.5$; en máxima simplemente se escribe el comando `p0:0.5`.

Ahora se coloca la tangente de $f(x)$ en p_0 , $m_0(x) = f(p_0) + f'(x - p_0)$

Para poder introducir y resolver dicha tangente en Maxima se escribirán los siguientes comandos:

`f(x):=%e^(-x)-x;` (recordando que al terminar cada comando hay que presionar la combinación de `ctrl+Shift+enter` para que imprima cada ecuación que se introduzca).

Después se guardan en la variable `df` la derivada de $f(x)$ de la siguiente manera: `df:diff(f(x),x);` y “`ctrl+Shift+enter`” para ver la derivada.

Luego se sustituye el valor de p_0 en $f(x)$; guardando e imprimiendo de la siguiente manera: `dp0:df,x=p0;`

Una vez que ya se obtuvo la derivada y el valor respecto a p_0 se guarda en Maxima tal cual como se expresa la ecuación $m_0(x)$ de la siguiente manera: `m0(x):=f(p0)+dp0*(x-p0)`

```

(%i2) p0:0.5;
(%o2) 0.5

(%i3) f(x):=%e^(-x)-x;
(%o3) f(x):=%e-x-x

(%i4) df:diff(f(x),x);
(%o4) -%e-x-1

(%i5) dp0:df,x=p0;
(%o5) -1.606530659712633

(%i13) m0(x):=f(p0)+dp0*(x-p0);
(%o13) m0(x):=f(p0)+dp0(x-p0)

```

Figura 24 Método de Newton en Máxima

Para poder apreciar de manera gráfica en Maxima hay que dirigirse a *Gráficos* -> *Gráficos2D* -> en expresiones se escribe $f(x)$, $m_0(x)$; recordando que la variable x va de 0 a 1; por último en opciones se escoge *set zeroaxis*.

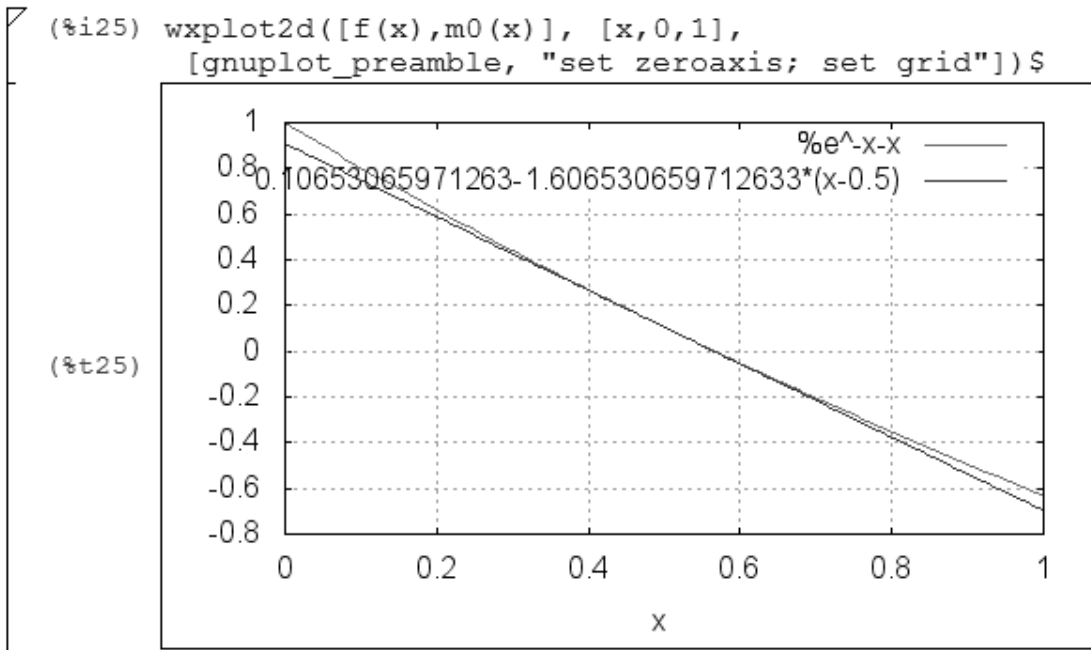


Figura 25 Gráficas de las funciones $f(x)$ y $m_0(x)$

Como se puede observar en la gráfica ambas rectas cortan al eje de las abscisas en puntos muy cercanos.

Se procede a calcular el punto $p_1 = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$, pero ahora con la tangente en $p_1 = m_1(x) = f(p_1) + f'(p_1)(x - p_1)$

En esta ocasión hay que introducir y guardar el punto p_1 ; $p1:p0-f(p0)/dp0$;

De la misma manera se introduce la derivada de p_1 ; $dp1:df,x=p1$;

Se calcula la recta m_1 ; $m1(x):=f(p1)+dp1*(x-p1)$;

Y por último se grafica de la misma manera, al recordar que en esta ocasión son las funciones $f(x)$ y $m_1(x)$.

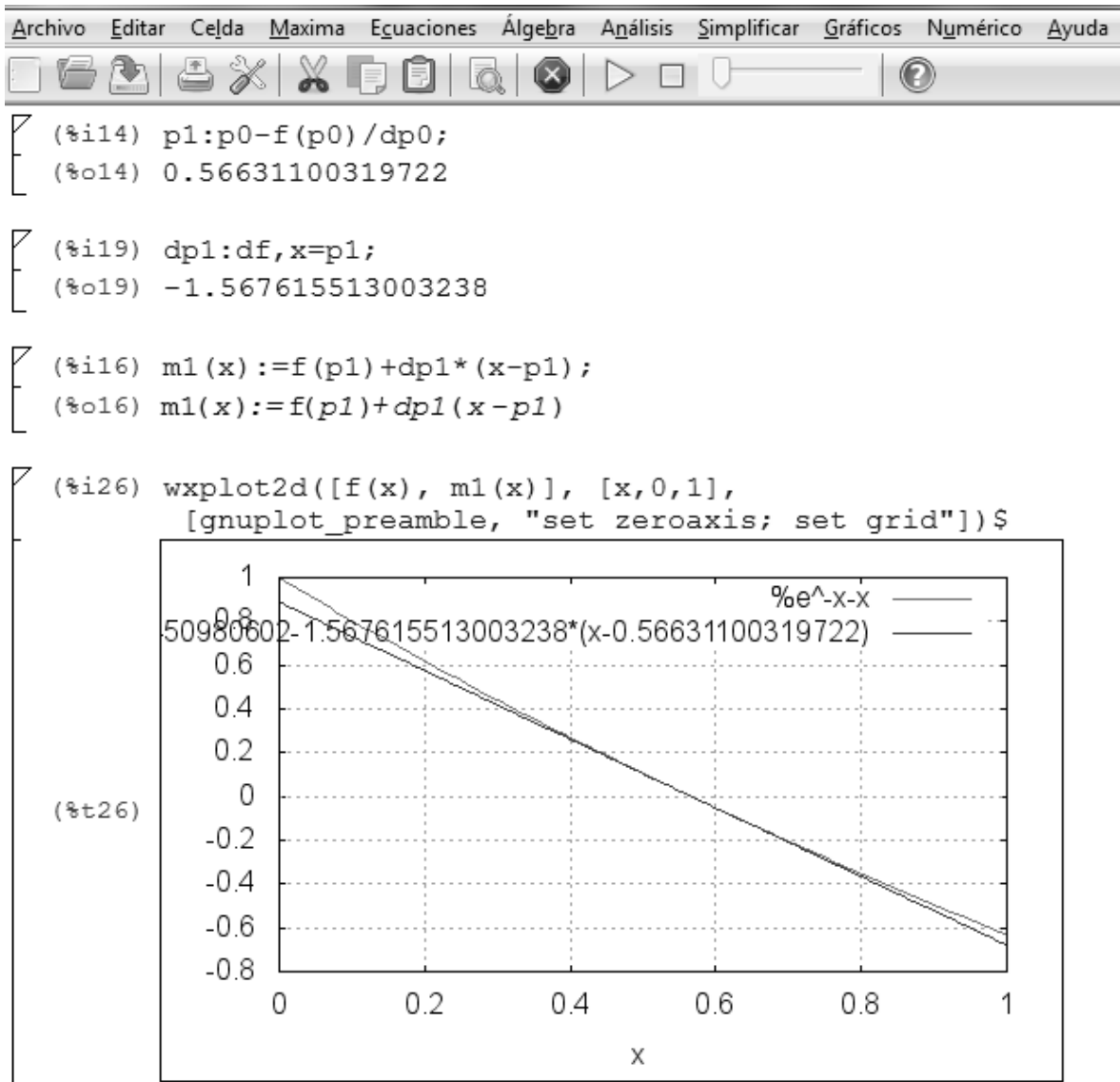


Figura 26 Primera iteración del método de Newton con representación gráfica

Ejemplo 3: Ecuaciones Diferenciales

Se resolverá una ecuación diferencial ordinaria de primer orden; la ecuación a resolver será $Vc'(t) = F - Qc - kVc^2$

En Maxima hay que introducirla y la guardarla en *ec1* de la siguiente manera *ec1:V*'diff(c,t,1)=F-Q*c-k*V*c**2;* en este caso el "1" hace referencia a que es la primera derivada, además de que la coma sencilla (',') es importante colocarlo al trabajar con diferenciales.

Para poder resolverla la sintaxis es *sol1:ode2(ec1,c,t);*

Dado que al resolverlo hay que definir si se trata de un valor positivo o negativo, Maxima también está configurado para resolver esta incógnita, inmediatamente pregunta si es positivo o negativo (también puede preguntar si es cero), para ello basta con colocar "p" si es positivo o "n" si es negativo, según sea el caso; para fines de este ejemplo se le atribuye que es positivo.

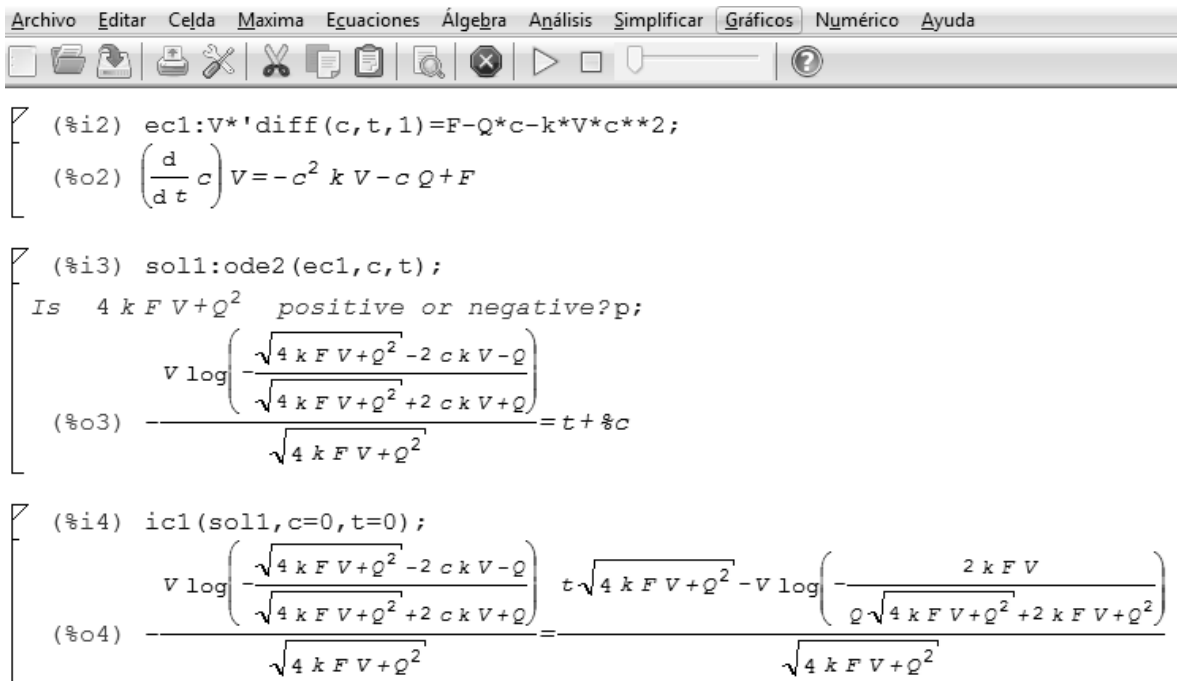


Figura 27 Resolución y condiciones iniciales de una ecuación diferencial en Maxima

Ahora se busca la constante de integración indicando las condiciones iniciales, para ellos se le asigna a "c" y "t" que son 0 con el comando: *ic1(sol1,c=0,t=0);*

Como cualquier ecuación, hay que simplificarla, para ello se despeja c, se realiza dirigiéndose a *Ecuaciones -> Resolver -> Incógnita c*. Si se desea simplificarla se realiza desde *Simplificar -> Simplificar expresión*.

Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

(%i5) solve([%], [c]);

$$(\%o5) [c = \frac{\sqrt{4kFV+Q^2} \left(F e^{\frac{t\sqrt{4kFV+Q^2}}{V}} - F \right) + Q \left(F e^{\frac{t\sqrt{4kFV+Q^2}}{V}} - F \right)}{kV \left(2F e^{\frac{t\sqrt{4kFV+Q^2}}{V}} + 2F \right) + Q\sqrt{4kFV+Q^2} e^{\frac{t\sqrt{4kFV+Q^2}}{V}} + Q^2 e^{\frac{t\sqrt{4kFV+Q^2}}{V}}}]$$

(%i6) ratsimp(%);

$$(\%o6) [c = \frac{\sqrt{4kFV+Q^2} \left(F e^{\frac{t\sqrt{4kFV+Q^2}}{V}} - F \right) + FQ e^{\frac{t\sqrt{4kFV+Q^2}}{V}} - FQ}{Q\sqrt{4kFV+Q^2} e^{\frac{t\sqrt{4kFV+Q^2}}{V}} + (2kFV+Q^2) e^{\frac{t\sqrt{4kFV+Q^2}}{V}} + 2kFV}]$$

Figura 28 Despeje de la ecuación respecto de C y simplificación

Más información: Dentro de la misma página de Maxima, se puede encontrar una gran cantidad de información complementaria, basta con ingresar a la sección de “Documentos”; o en <http://wxmaxima.sourceforge.net/wiki/index.php/Tutorials>

También se puede encontrar muchos elementos de apoyo tanto en manuales pdf como video-tutoriales en internet.

Datos generales del software

Autor: Instituto de Tecnología de Massachusetts, William F. Schelter

País de origen: Estados Unidos

Sitio Web: <http://maxima.sourceforge.net/es/>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Álgebra, Análisis Numérico, Cálculo, Ecuaciones Diferenciales, Geometría Analítica

Palabras clave de esta herramienta: motor de cálculo simbólico, series de potencia, comandos de programación, sintaxis propia, ecuaciones lineales, matriz, vectores, funciones, gráficas, variables, despejes, simplificación.

MIT Mathlets

Descripción: Se trata de una serie de applets dedicadas en su totalidad a aplicaciones de ingeniería. En total son 47 aplicaciones en el sitio Web con las que se pueden interactuar y aprender las utilidades que pueden generarse con las ecuaciones diferenciales.

El sitio Web solo se enfoca en aplicaciones, no proporciona nada de teoría ni métodos algebraicos, resolución de problemas de cálculo o representaciones matemáticas; simple y sencillamente se enfoca en gráficos interactivos de dichas ecuaciones, incluso algunas de ellas cuentan con sonidos con los que también pueden interactuar. Es más para dar una muestra gráfica de las opciones que proporcionan los desarrolladores de la página.

No por tratarse de aplicaciones gráficas únicamente significa que sea menos útil o menos importante, sino que compensa el déficit de elaborar manualmente la gráfica y así poder estudiar el comportamiento de las gráficas de diversas ecuaciones (además de sus posibles derivadas o integrales) de manera inmediata al ofrecer la opción de modificar o cambiar algún elemento que sería muy lento o tedioso si se quisiera realizar a mano o a lápiz y papel.

Nota: En todas las applets ya vienen determinadas ciertas características como funciones o valores que no se pueden modificar, por lo que en su mayoría solo tiene un fin didáctico y de aprendizaje, más no como calculadoras o graficadoras.

Modo de uso: La manera en la que se puede usar es muy sencilla, contiene tres secciones útiles para todo tipo de usuario: “APPLETS”, “COURSES” y “ACTIVITIES”.

La sección APPLETS es una lista de todas las aplicaciones en java que contiene el sitio Web, las cuales se pueden abrir en una ventana aparte en el ordenador o usar solamente alguna en específico; está última ofrece una breve explicación de cada applet.

La sección COURSES, es solo una forma más desplegada de la sección anterior, la única diferencia que muestra son los temas del curso en los que se utilizan dichas aplicaciones.

Por último la sección ACTIVITIES, es una lista de ejercicios a resolver con los que puedes poner en práctica tus conocimientos en la materia y de los que puedes apoyarte una vez más de dichas applets.

Ejemplos

Ejemplo 1: Trayectoria de una rueda

Esta aplicación muestra el recorrido de un vector sobre una circunferencia que se va desplazando sobre un eje de coordenadas. En esta aplicación se pueden variar los valores que modifican el tamaño de la circunferencia, el tamaño del vector e incluso detener el recorrido en algún punto en específico del plano. Para este ejemplo se modificarán los siguientes valores:

$a = 1$, es la distancia del radio de la circunferencia

$b = 4.0$, es el valor constante que multiplica dentro de la ecuaciones X, Y.

θ , es el valor de π que corresponde al círculo unitario usado en las ecuaciones X, Y.

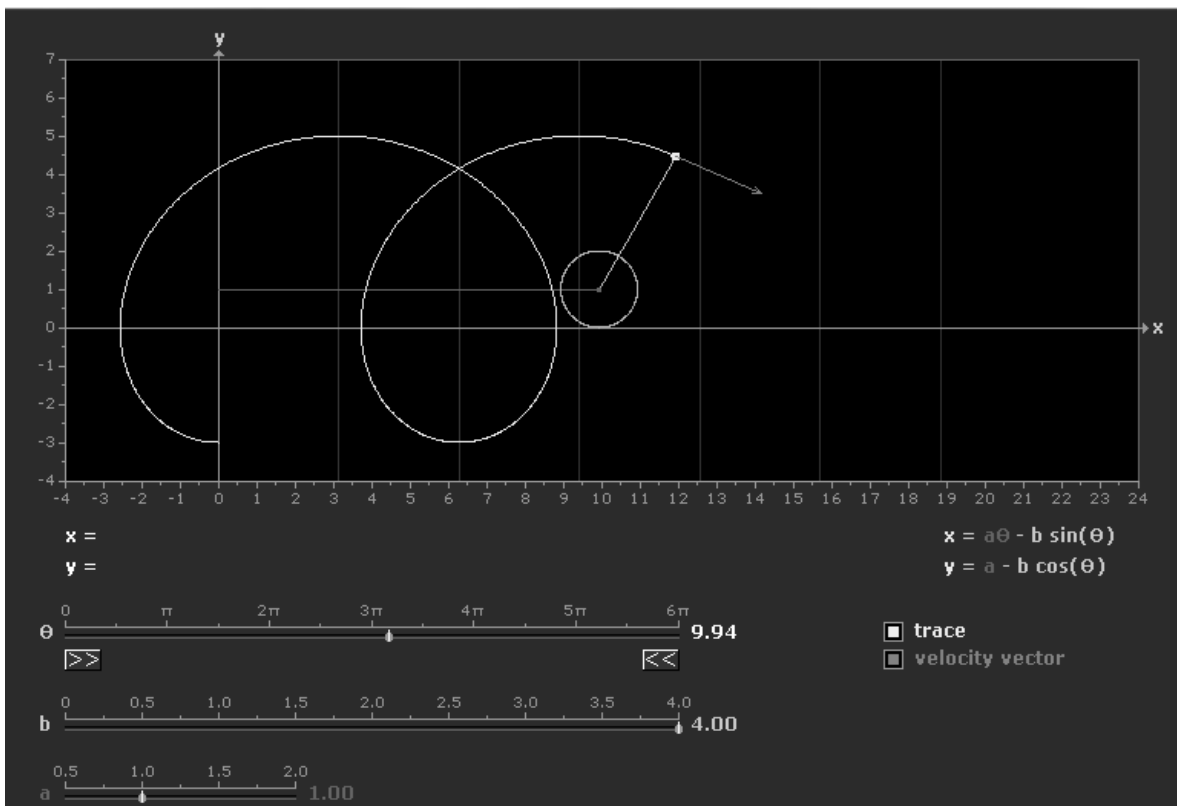


Figura 29 Aplicación de la Trayectoria del Vector (Wheel)

Ejemplo 2: Polinomio de Taylor

Esta aplicación ofrece de entre una lista de funciones, como son aproximadas en algún punto a una secuencia de polinomios. Permite incluso modificar el grado exponencial del polinomio para poder interactuar con la aplicación y ver cuál es su valor aproximado.

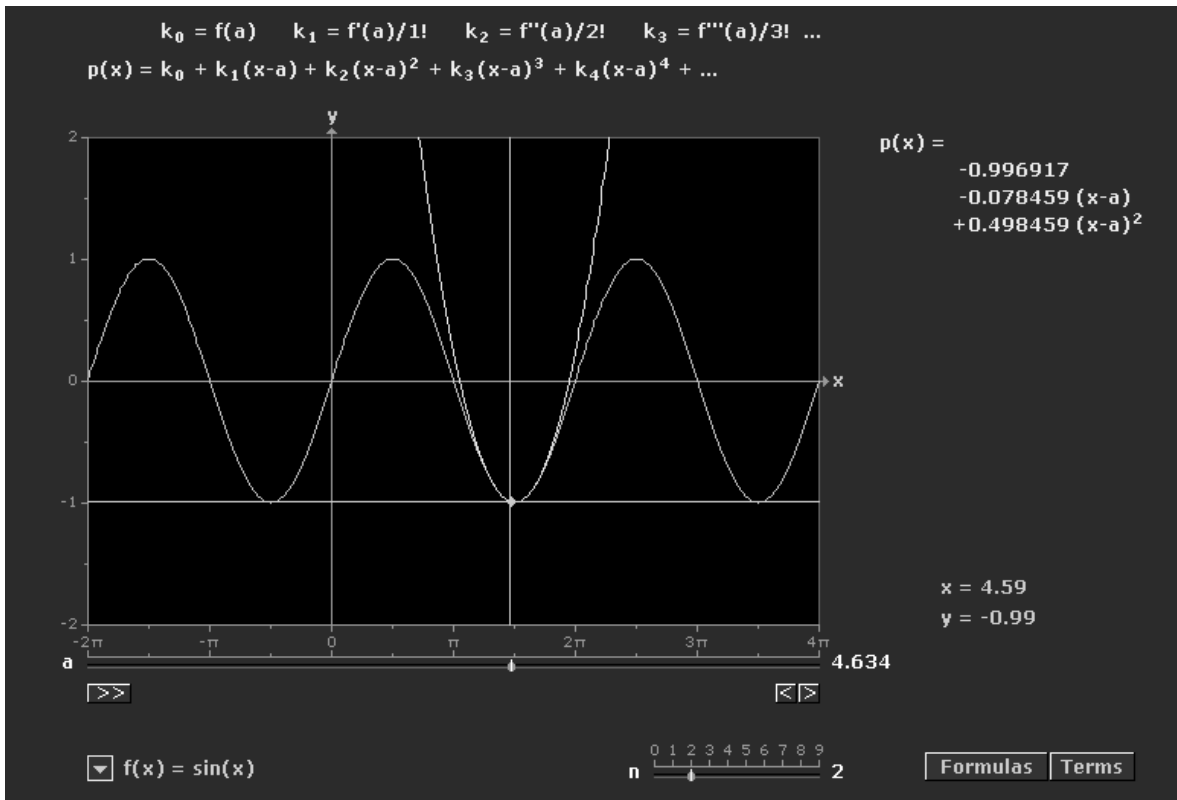


Figura 30 Applet para Polinomio de Taylor

Datos generales del software

Autor: d'Arbeloff Fund for Excellence in Education.

País de origen: Estados Unidos

Sitio Web: <http://math.mit.edu/mathlets/>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Matemáticas (Ecuaciones Diferenciales)

Palabras clave de esta herramienta: ecuaciones diferenciales, aplicación, gráficas, interacción, derivada, integral.

Number Empire

Descripción General: Se trata de un Sistema de Algebra Computacional (CAS) para quienes ya poseen conocimientos previos de cálculo y geometría. Es un software muy potente para el cálculo matemático avanzado; se centra en la resolución de variables, expresiones algebraicas, ecuaciones, funciones y matrices; no solo de manera numérica sino también de manera simbólica. También tiene capacidades de calculadora científica, puede representar funciones gráficas en dos y tres dimensiones tanto en coordenadas paramétricas como polares. Al final incluye una sección de LaTeX (editor de textos matemáticos) en la que puedes ver el código fuente de la operación que decidiste realizar.

Con esto, permite tener tres perspectivas distintas: numérica, algebraica y gráfica, con lo que se tiene una visión más amplia de lo que estamos haciendo.

Modo de uso:

Su uso no resulta complicado de manejar, ya que únicamente se escribe la función en la cual se quiere trabajar y desplegará el resultado.

Desde la página de inicio se puede apreciar la lista de temas a los que se puede acceder, al igual que el idioma que se desee trabajar.

El Imperio del Número

Herramientas matemáticas

Calculadora de Derivadas	Calculadoras de formas 2D
Calculadora de Integrales	Calculadoras de formas 3D
Integración definida	Números primos
Calculadora de límites	Factorizador de Números
Calculadora de Series	Números de Fibonacci
Resolver ecuaciones	Números de Bernoulli
Simplificador de Expresiones	Números de Euler
Factorizar expresión	Los números complejos
Calculador de Expresiones	Calculadora de factoriales
Función inversa	Función Gamma
Series de Taylor	Calculadora combinatoria
Calculadora de matrices	Calculadora de Fracciones
Aritmética de matrices	Calculadora Estadística
Calculadora gráfica	Editor de ecuaciones LaTeX

Propiedades de los números

Introduzca un número entero $\leq 10^{12}$

Búsquedas Matemáticas

Google™ Búsqueda personalizada

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,
3.14159265358979323846264338327

1 - 524287 524288 - 1048575

Figura 31: Empire Number

Ejemplos

Ejemplo 1: Integrales

Se escoge la opción de “Calculadora de Integrales” y en la barra la función a calcular que esta justamente abajo se escribe la función deseada:

$$\int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx$$

Claro que al tratarse de un software la sintaxis debe ser: $x/(x^2+x+1)$. También ofrece la opción de poder calcular el valor numérico de dicha integral si así se desea, en la parte de abajo, hay un pequeño recuadro en el que se puede dar algún valor numérico a “x”.

Además de que nos proporciona una breve explicación de lo que puede realizar en esa sección.

En la parte de **Mostrar Ayuda** muestra las especificaciones necesarias en la sintaxis para un mejor uso de esta herramienta y evitar errores de sintaxis con los que podría arrojar resultados equívocos.

Más abajo se encuentran unos cuantos ejemplos didácticos que dan una idea del tipo de ejercicios que se pueden realizar así como su sintaxis dentro del CAS.

Integral de $x/(x^2+x+1)$ por x:
 $(\sqrt{3} \cdot \log(x^2+x+1) - 2 \cdot \operatorname{atan}((2x+1)/\sqrt{3})) / (2 \cdot \sqrt{3})$

$$\int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx = \frac{\sqrt{3} \log(x^2 + x + 1) - 2 \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{2\sqrt{3}}$$

Atención: log - logaritmo natural
Dibujar Editar Directo
Valor en

Calculadora de Integrales

Introduzca una función a integrar:

$x/(x^2+x+1)$

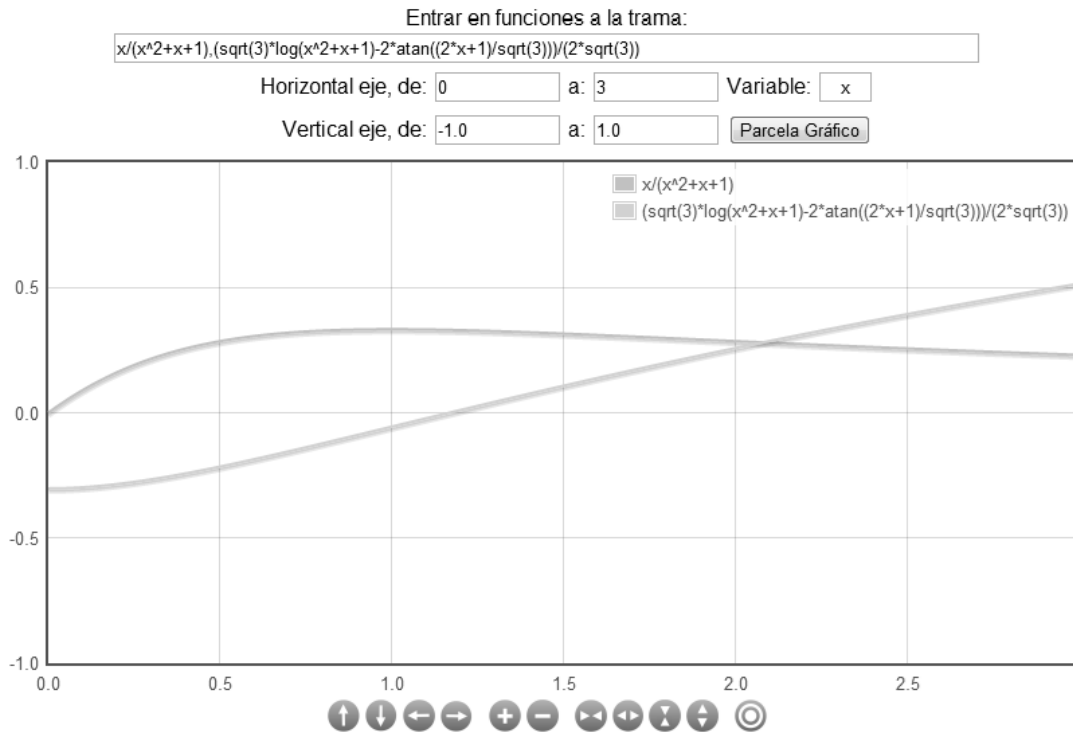
Variable: [Mostrar ayuda](#)

Figura 32: Calculadora de Integrales

Una vez que se ha introducido la función deseada, en la parte a arriba muestra una manera más amena para visualizar lo que se esta haciendo, así como su resultado directamente (sin pasos intermedios). Justo debajo de la función muestra dos pequeñas secciones

Dibujar: que muestra la función graficada

Calculadora gráfica



[Directo](#) [Mostrar ayuda](#)

calculadora gráfica (gráfico herramienta plotter) dibuja gráficas de las funciones. Para dibujar un gráfico de especificar las funciones separados por comas, Rangos X y Y del área de gráficos y el botón 'Parcela grafo de prensa.

Figura 33: Gráficas de la función y la integral

Como todos los software para graficar, muestra la gráfica de la función original y de la nueva función que se obtuvo, con diversas opciones, desde cambiar la función a graficar, añadir más funciones, mover los rangos de los ejes y respecto a que variable graficar. Así mismo muestra unos botones con los que se puede manipular la visión de la gráfica dependiendo de lo que sea requerido, si se desea subir o bajar los ejes, acercar o alejar el campo visual.

Editar: Esta sección muestra la sintaxis que se utiliza como editor de ecuaciones (se trata de LaTeX), con el que se puede hacer modificaciones en el formato de escritura.

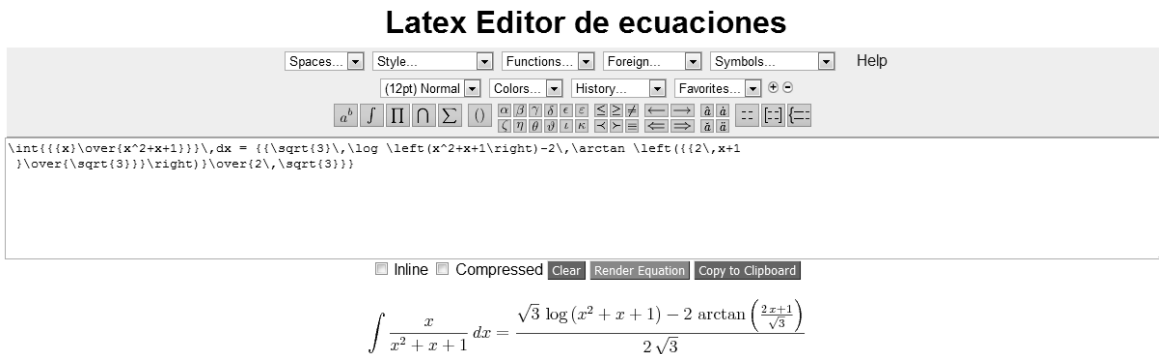


Figura 34: Editor de ecuaciones LaTeX

Ejemplo 2: Calculadora de Límites

En este caso se calculará el límite de una función que se aproxima del lado positivo pero ahora se realizará para saber cuál es su valor numérico cuando $x = 4$, por lo que se seleccionará la opción “Calculadora de Límites”, nuevamente se introduce la función deseada, en este caso:

$$\left(\frac{\cos x}{\cos(2x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Hay que recordar que en la barra de función introducimos de la siguiente manera

$$(((\cos(x))/(\cos(2*x))))^{(1/x^2)}$$

Recordando de valuar x en 4 y seleccionando en “Tipo de límite” “más”, para que calcule cuando x se aproxima a cero por la derecha.

Función $\left(\frac{\cos(x)}{\cos(2x)}\right)^{1/x^2}$
Lim $f_{x \rightarrow +4} = e^{\log(\cos(4)/\cos(8))/16}$

$$\lim_{x \rightarrow +4} \left(\frac{\cos x}{\cos(2x)} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\log\left(\frac{\cos 4}{\cos 8}\right)}{16}}$$

Atención: log - logaritmo natural

[Editar](#) [Directo](#)

Calculadora de límites

Escriba una función para calcular el límite:

Límite de la variable: Calcular en: Tipo de límite [Mostrar ayuda](#)

Calculadora de Límites. Calcula un límite de una función con respecto a una variable en un punto dado. Los límites unilaterales y bilaterales están soportados. El punto en el que límite se calcula puede ser especificado por un número o mediante una expresión simple.

Ejemplo: $\% pi / 4$. El cálculo de límites positivos (*inf*), negativos (*minf*) e infinitos (*infinito*) complejos también son soportados.

Figura 35: Calculadora de Límites

Ejemplo 3: Calculadora de matrices

Como en el caso anterior se selecciona “Calculadora de Matrices” y simplemente se colocan los valores de nuestra matriz en la barra “Entrar en la matriz A” como normalmente se hace a lápiz y papel, sin ningún tipo de formato especial, lo cual es muy práctico, ya que permite trabajar de manera más rápida y sencilla.

En este caso se introduce la matriz:

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 5 & 62 \\ 7 & 6 & 9 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Una vez introducida la matriz, se observan las opciones a las que se pueden acceder con esta aplicación, así que solo se tienen que escoger las opciones con las que se deseen trabajar, en este caso se selecciona “Matriz inversa”, “Matriz triangular”, “Valores propios” y “A²”.

Matrix A

7	8	5	62
7	6	9	8
3	2	5	4
2	0	4	1

Inverse of A

0.044643	0.888393	-2.84375	1.5
-0.035714	-0.160714	1.125	-1
-0.026786	-0.433036	1.406250	-0.5
0.017857	-0.044643	0.062500	0

A²

244	114	380	580
134	110	166	526
58	46	74	226
28	24	34	141

Gaussian triangularization of A

2	0	4	1
0	12	-10	9
0	0	8	12
0	0	0	448

Eigenvalues of A

(0 * %i - 7.291336, 0 * %i + 0.975067, 2.798396 * %i , 22.517874 * %i)

Figura 36: Calculadora de Matrices

Nota: Solo puede calcular matrices numéricas, no calcula valores simbólicos ni letras.

Datos generales del software

Autor: Vitalii Vanovschi

País de origen: Estados Unidos

Sitio Web: <http://es.numberempire.com/>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: matemáticas (cálculo, geometría analítica, álgebra)

Palabras clave de esta herramienta: función, calculadora, gráficas, integrales, determinante.

PhET Interactive Simulations

Descripción: Es un sitio Web cuyo contenido trata única y exclusivamente de simulaciones interactivas para estudiantes y maestros para diversos temas desde primaria hasta universidad. Como se ha mencionado antes abarca Física, Química, Biología además de Matemáticas, pero solo se abordarán las herramientas que abarcan las Matemáticas. Dentro de estas simulaciones se pueden encontrar de dos tipos: las libres de uso en internet y las que son descargables que pueden ser usadas en el ordenador sin requerir el uso de internet ni tener acceso a la página de internet. Una vez más, dado el objetivo de esta investigación, se descartaron las simulaciones que son descargables (si los usuarios desean y pueden usar estas simulaciones, pueden hacerlo).

Debido al diseño que muestra es perfecto para exposiciones o presentaciones que pueden llegar a realizar tanto maestros como alumnos.

Modo de uso: Es uno de los más sencillos de realizar para los usuarios, aunque no por eso es menos útil, basta con dirigirse a la sección "On Line" en la parte inferior de la página. Cada una de las simulaciones trae consigo una breve explicación de cómo usarlas.

Ejemplos:

Ejemplo 1: Se realizará un ejercicio de probabilidad, el histograma de una serie de pelotas que caen, al observar su histograma se verá que se comporta como una distribución Binomial. En esta simulación –como en muchas–, se pueden modificar las características que muestra, claro no todas, sino las que dicha aplicación permita para poder interactuar y observar los resultados que arroja al realizar dichas modificaciones. Se dejará tal cual como están las "hileras" que son el número de rejillas por las que pasarán las pelotas; y la "p" que es el lugar donde vendrían cayendo dichas pelotas; después se presiona "Empezar". Se puede observar que la mayoría se van concentrando a la mitad del histograma, como es de esperarse.

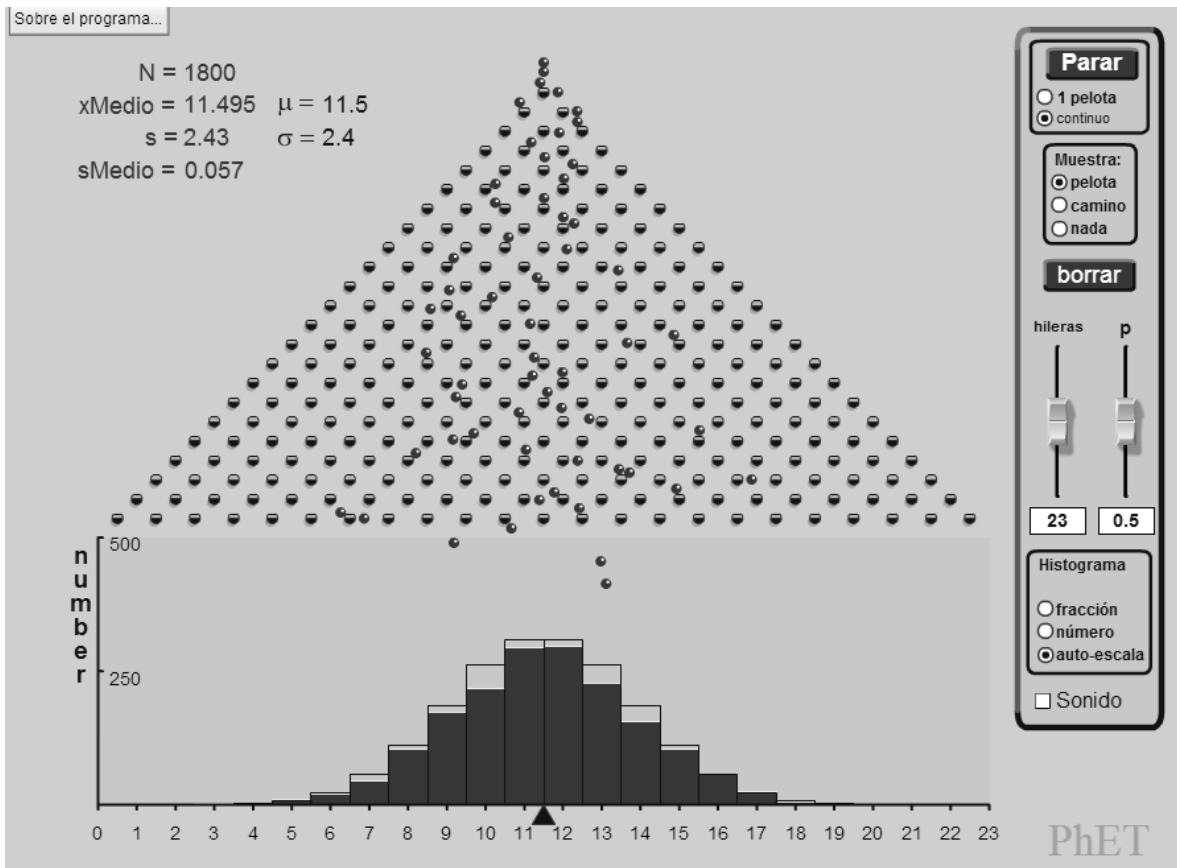


Figura 37 Histograma de una Distribución Binomial

Ejemplo 2: Para poder realizar sumas de vectores, es necesario acceder a la simulación de la misma manera que en el ejemplo anterior, solo que en esta ocasión a la que lleva por nombre “Adición de Vectores”, también ofrece la opción de insertar una hoja cuadriculada lo que permite obtener mayor precisión. Solo basta con colocar los vectores que se necesitan o se deseen en la parte de la gráfica deseada, ya colocados se puede escoger alguno de los tres estilos que ofrece, para este ejemplo se escogió el “Estilo 2”, se decidió mostrar la suma total de manera gráfica; pero desde un principio la simulación muestra los resultados numéricos de dicha suma.

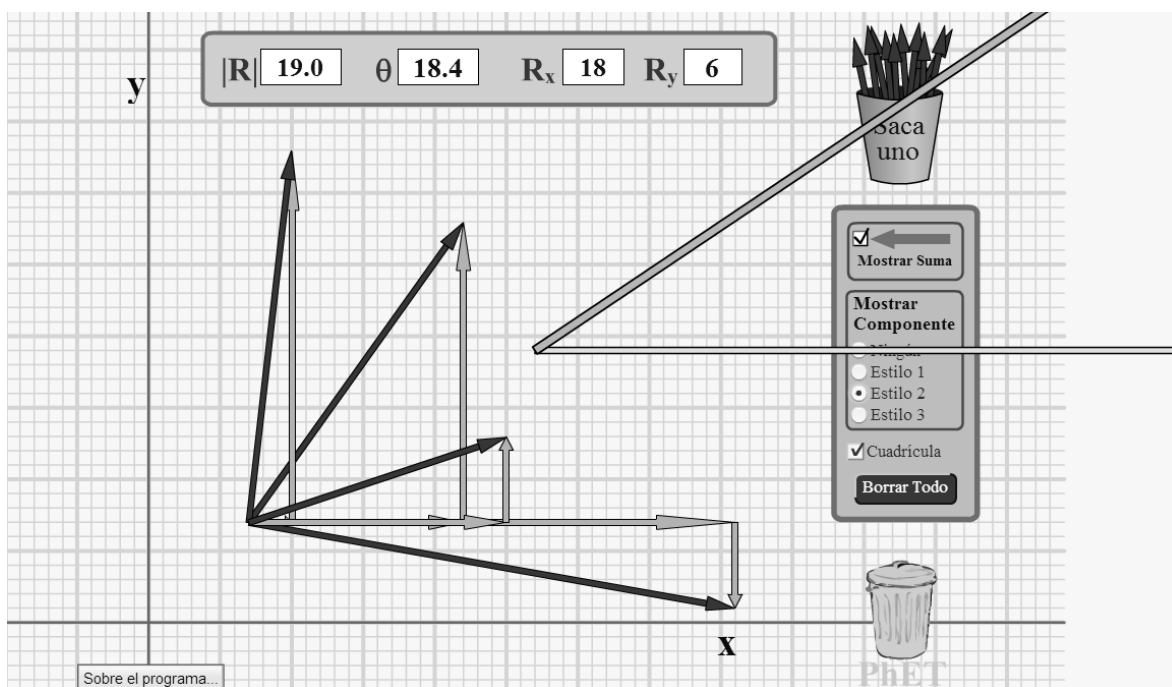


Figura 38 Simulación de Suma de Vectores

Datos generales del software

Autor: Universidad de Colorado

País de origen: Estados Unidos

Sitio Web: <http://phet.colorado.edu/>

Categoría: software libre para Matemáticas, Física, Química, Biología

Requerimientos: Java, Flash

Áreas que puede apoyar: Probabilidad, Geometría.

Palabras clave de esta herramienta: simulación, interacción, aplicación, vector, probabilidad

Rice Virtual Lab in Statistics

Descripción: Es un sitio multimedia dedicado completamente a la Estadística Descriptiva e Inferencial, contiene una lista enriquecida con elementos útiles para este fin, desde libros electrónicos, aplicaciones java, simuladores, estudios de caso y un laboratorio virtual (hay secciones que no se pueden traducir dentro de la plataforma). Se puede describir como un curso completo de Estadística en el que puedes ir avanzando a tu propio ritmo e ir practicando y evaluándote con las secciones de ejercicios propuestos en cada sección.

En primera instancia ofrece de manera organizada y esquematizada mediante hipervínculos los temas y subtemas que ofrece; estos hipervínculos muestran un resumen pequeño pero importante de la teoría a emplear.

Las siguientes secciones se tratan de aplicaciones en java nuevamente para cada tema, por lo que se puede abordar tema por tema o en alguna sección en particular. La segunda sección es un curso interactivo, incluye un apartado de preguntas para cada tema que te permite evaluar tu aprendizaje. La tercera sección se trata de simulaciones en las que puedes ir interactuando e introduciendo tus propios datos para poder resolver ejercicios y problemas más allá de las que ofrece el software.

Los estudios de caso son problemas más cercanos a la vida real, mostrando todo el procedimiento a seguir para cada tema y su interpretación, incluso alternativas de uso de otras aplicaciones de softwares especializados en estadística (JMP, SAS, SPSS).

El laboratorio de análisis consiste en una aplicación en java en la cual se pueden realizar tareas y ejercicios que incluye una serie completa de métodos gráficos como son histogramas y cuantiles, puedes introducir tus propias bases o tomar las que el software te ofrece.

Nota: Algunas aplicaciones ya tienen ciertos parámetros predeterminados (como población, hipótesis nula, etc.), por lo que solo son para un fin pedagógico, en caso de que el usuario desee usarlo bajo otros parámetros no podrá hacerlo.

Modo de uso: No es muy complicado el manejo de dichas applets que componen a este sitio Web, para eso cada sección contiene un instructivo que se puede traducir al español, con lo que puedes ir de la mano y a tu propio ritmo.

Ejemplos

Ejemplo 1: Prueba de Demostración de una Distribución

Se realizará un ejercicio de una applet del curso interactivo, considerando un ejercicio en el que se aplique la prueba de una Chi-cuadrada (recordando que esta prueba se realiza para frecuencias independientes) a un número de elementos de una población, nivel de confianza, y prueba de hipótesis nula, predeterminados por la applet.

Para realizarlo hay que dirigirse desde la página de inicio del software a Online Statistics: An Interactive Multimeida Course of Study, OnlineStatBook, Try Version

2.0, Testing Distributions (en la parte derecha de la pantalla en la sección de OnlineStatBook Simulations), Run the simulation.

Test of Deviation

Actual Distribution	From a Normal Distribution			From a Uniform Distribution		
	Expected	Observed	$(E-O)^2/E$	Expected	Observed	$(E-O)^2/E$
<input checked="" type="radio"/> Normal	2.3			10		
	4.4			10		
	9.2			10		
<input type="radio"/> Uniform	15.0			10		
	19.1			10		
	19.1			10		
	15.0			10		
	9.2			10		
	4.4			10		
	2.3			10		
Sums:	100			100		

Figura 39 Prueba de Demostración de una Distribución

Se puede ver que brinda la opción de aplicar la prueba entre una distribución Normal y una distribución Uniforme, muestra que hará el ejercicio entre valores esperados y observados. Al correr la simulación con el botón “Sample” (Muestra) sobre la Normal se obtienen los siguientes resultados:

Test of Deviation

Actual Distribution	From a Normal Distribution			From a Uniform Distribution		
	Expected	Observed	$(E-O)^2/E$	Expected	Observed	$(E-O)^2/E$
<input checked="" type="radio"/> Normal	2.3	4	1.26	10	4	3.60
	4.4	5	0.08	10	5	2.50
	9.2	8	0.16	10	8	0.40
<input type="radio"/> Uniform	15.0	12	0.60	10	12	0.40
	19.1	22	0.44	10	22	14.40
	19.1	22	0.44	10	22	14.40
	15.0	15	0.00	10	15	2.50
	9.2	7	0.53	10	7	0.90
	4.4	4	0.04	10	4	3.60
	2.3	1	0.73	10	1	8.10
Sums:	100	100	4.27	100	100	50.80
	Chi Square = 4.27, df = 9 p = 0.893			Chi Square = 50.80, df = 9 p < 0.001		

Figura 40 aplicación de prueba de distribución sobre la Normal

Los resultados que muestra son los valores observados, suma de frecuencias observadas, Chi-cuadrada, grados de libertad (df) prueba de hipótesis, para

ambas distribuciones y el resultado que nos arroja sobre la prueba de hipótesis nula para el caso de la distribución uniforme es falsa.

Ejemplo 2: Analisis Lab

Se mostrará con un ejemplo de algunas aplicaciones que maneja el “Laboratorio de Análisis”. Como ejemplo se tomará una de las bases de datos predeterminadas. Para eso hay que dirigirse a *Analisis Lab* que se encuentra en la página de inicio del software.

En *Data Library*, se escogé de las varias opciones que muestra, *RVLS_case_studies*; que contiene varias bases de datos de donde se puede escoger para realizar ejercicios estadísticos. En *Dataset* se escogerá el caso de *strength*, inmediatamente muestra en el cuadro blanco de la derecha las definiciones de las variables que componen este caso; en variable dependiente e independiente podrá variar dependiendo de lo que se quiera analizar (para el ejemplo se tomará GRIP –apretón- como variable dependiente y ARM –brazo- como variable independiente). Se puede observar como da a escoger de todas las opciones realizables para este ejercicio.

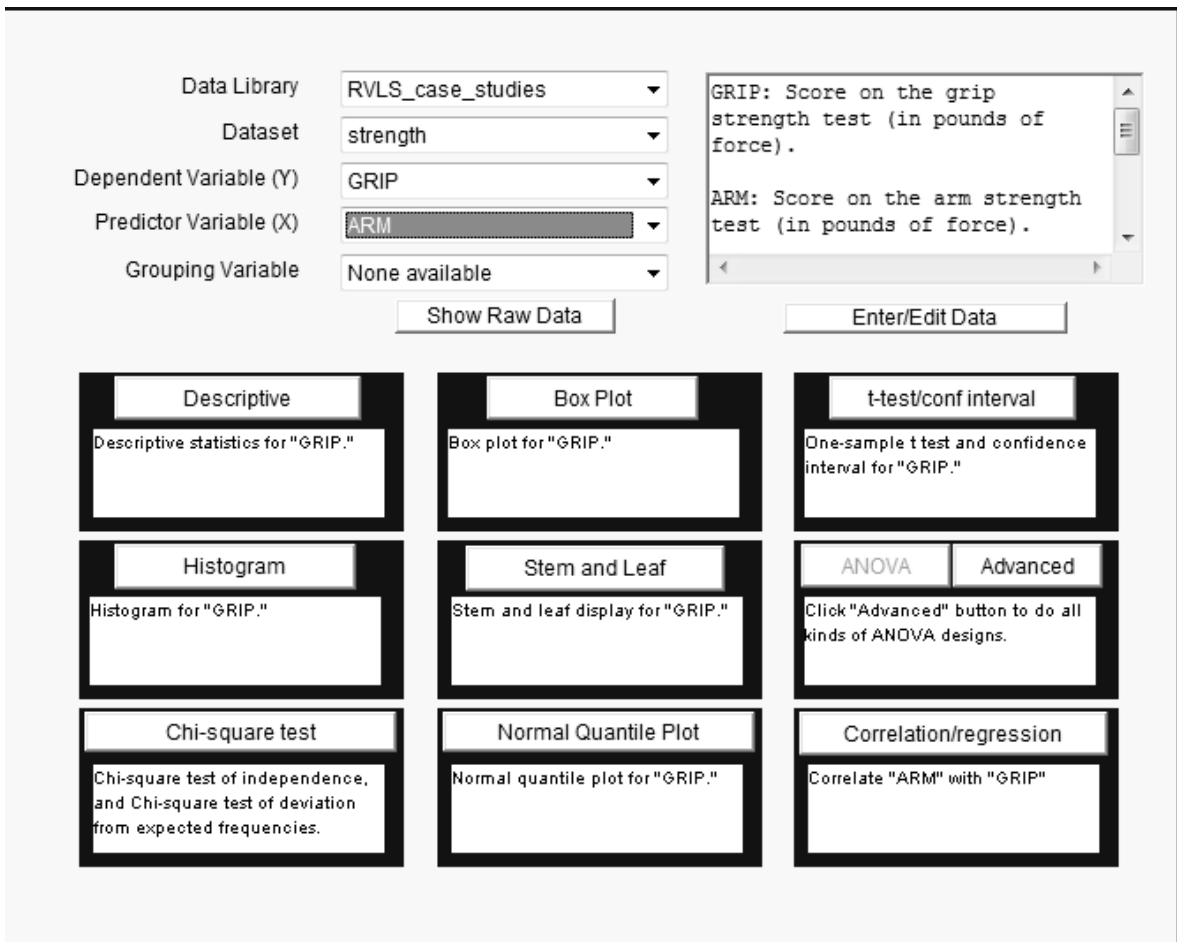


Figura 41 Ejercicio de Analisis Lab

Para este caso se seleccionó Estadística Descriptiva, Diagrama de Caja y Cuantiles (Figura 42), Gráfica de Dispersión e Intervalos de Confianza (Figura 43), Histograma y Análisis Residual (Figura 44).

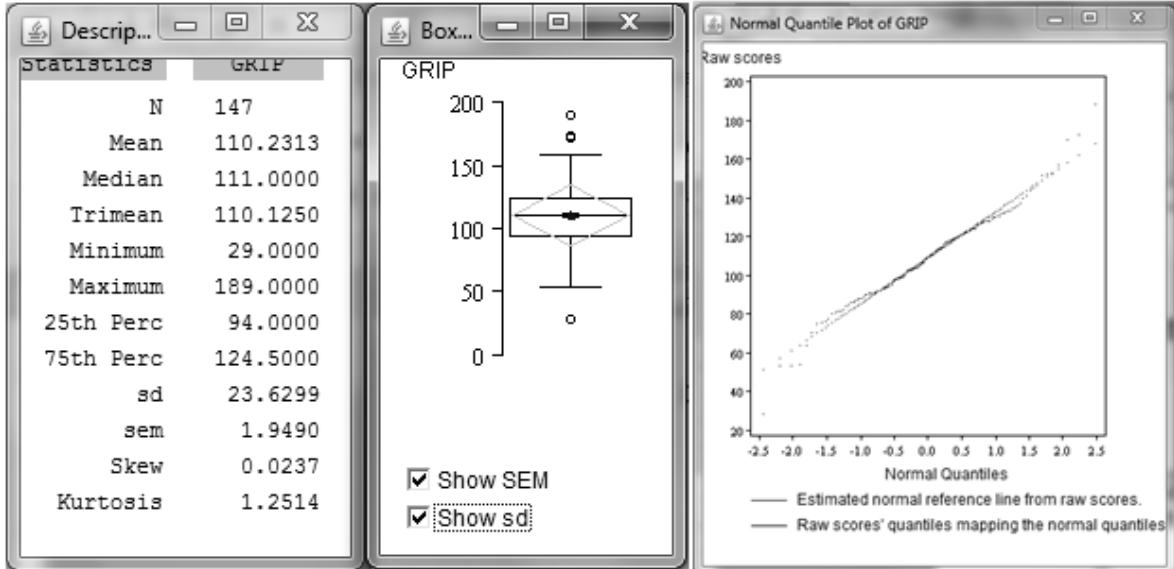


Figura 41 Estadística Descriptiva, Diagrama de Caja y Cuantiles

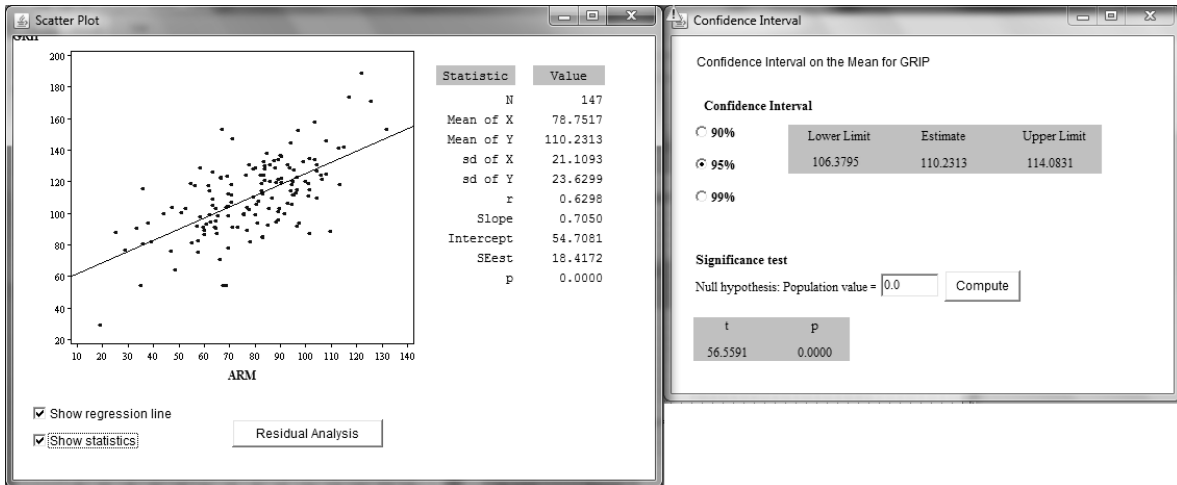


Figura 42 Gráfica de Dispersión e Intervalos de Confianza

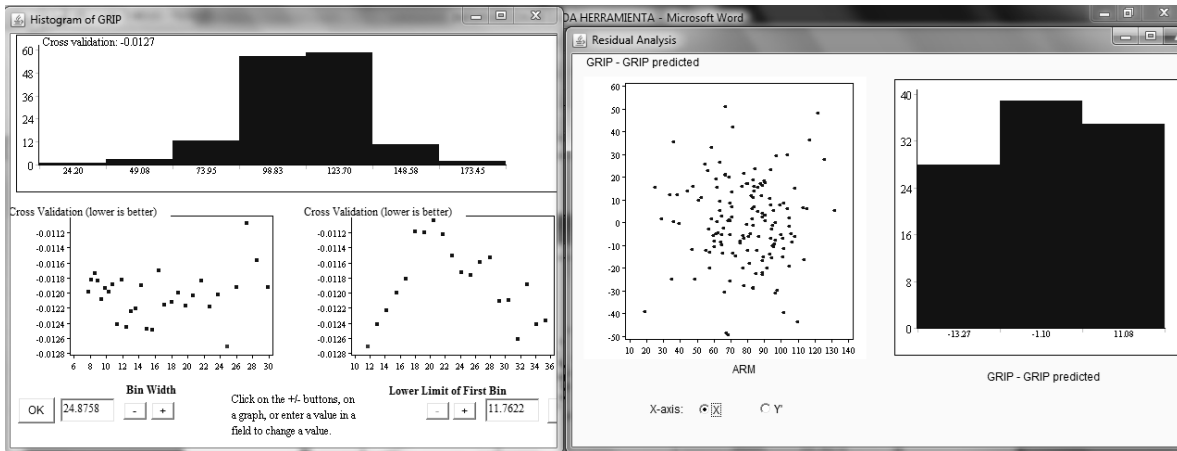


Figura 43 Histograma y Análisis Residual

Datos generales del software

Autor: David M. Lane

País de origen: Estados Unidos

Sitio Web: <http://onlinestatbook.com/rvls.html>

Categoría: software libre para Estadística

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Estadística

Palabras clave de esta herramienta: distribución, simulación, laboratorio virtual, estudio de caso, curso en línea, estadística descriptiva, inferencial.

Uson

Descripción: Se trata de un sitio Web creada para fines didácticos y de aprendizaje de cálculo, su elaboración es bastante útil sobre todo para quienes estudian ingenierías. Esta elaborada con diversas herramientas diseñadas con Descartes (esta herramienta se explicó al principio de este capítulo) y diversas aplicaciones en java bastante útiles para resolver derivadas, integrales, ecuaciones diferenciales, gráficos y sus aplicaciones en ejercicios dinámicos. Se enfoca en el desarrollo y resolución de ejercicios, al igual que en el aprendizaje y aplicación de términos y teoría de una manera más amable e interactiva. Contiene diversas secciones, cada una de ellas se enfoca en cierto tipo de recursos en específico, se dividen en tres secciones que servirán en esta investigación: *Applets*, *Herramientas* y *Cabri Web*. Todas ellas como su nombre lo indica sirven para la resolución y aplicación de problemas.

Nota: Existen un par de secciones a las cuales no se puede tener acceso o se salen del objetivo de estudio, por lo que serán omitidas y solo se enfocará en las

secciones útiles a esta investigación. Dichas secciones que se descartaran son: Temario, Ejercicios, Winplot y Cálculo II.

Modo de uso: La manera de usarlo es muy simple e intuitiva, no es necesario conocer lenguajes de programación para poder utilizarlo, tampoco se requiere la consulta de manuales o sitios Web alternos. Su uso es muy sencillo y directo, basta con entrar en cada sección y escoger la herramienta más adecuada para cada problema; cada una de dichas aplicaciones contiene una pequeña sección de ayuda.

Ejemplos

Ejemplo 1: Graficando $f(x) = a \sin x + b \cos x$

¿Cuántas veces no hemos trabajado con el seno y el coseno? De esas ocasiones, ¿cuántas veces hemos interactuado con las gráficas de ambas identidades trigonométricas? Para poder ver un ejemplo nos dirigiremos a Herramientas, Herramientas en Línea, Applets de Cálculo (ahí escogemos de toda la lista disponible) Graficando $f(x)=a \sin x + b \cos x$

Lo primero que veremos es una pequeña introducción de cómo se representa gráficamente esta función

La figura muestra la idea de la construcción de la función $y = a \sin x + b \cos x$ La $\angle OAP$ ángulo es siempre 90 grados. Cuando la $\angle OAP$ figura rota cerca del origen, la coordenada y del punto P representa la función.

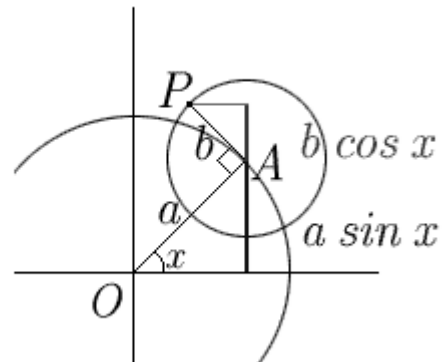
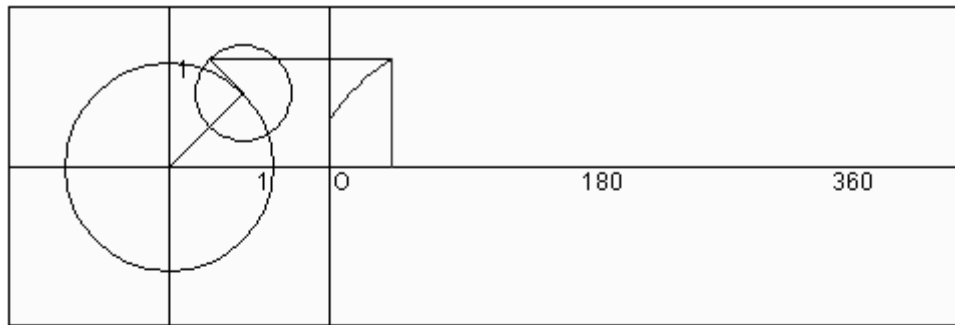


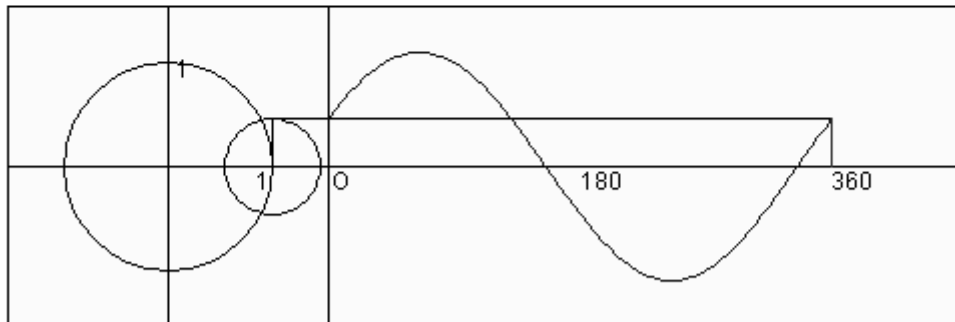
Figura 44 Introducción de la función

A continuación se ve la applet en la que se puede modificar los parámetros a graficar, se eleva el valor de x a 45° (botón con el signo de +), se aumentará de tamaño de A y B y damos en "Draw", con lo que se puede observar como grafica la función de manera más dinámica, para poder ver cómo se comporta dicha gráfica al modificar sus parámetros.



Draw + - a+ a- b+ b- init

(C)1997-2000 IES



Draw + - a+ a- b+ b- init

(C)1997-2000 IES

Figura 45 Applet graficando la función

Ejemplo 2: Sumas de Reimann

Para poder ver cómo se van formando las sumas de Reimann y los valores que da para cada subsuma nos dirigimos a Cálculo II, Applets, Sumas de Reimann.

En esta aplicación se podrá a través de varios pasos visualizar como se generan dichas sumas, en F se colocará la función x^2 , en N se colocará 12 (que serán las subdivisiones de la curva), en B se escribirá 1.1 (valor en el eje de las ordenadas); vamos a ir avanzando en el botón Paso, al terminar tenemos las sumas superiores en inferiores en la curva.

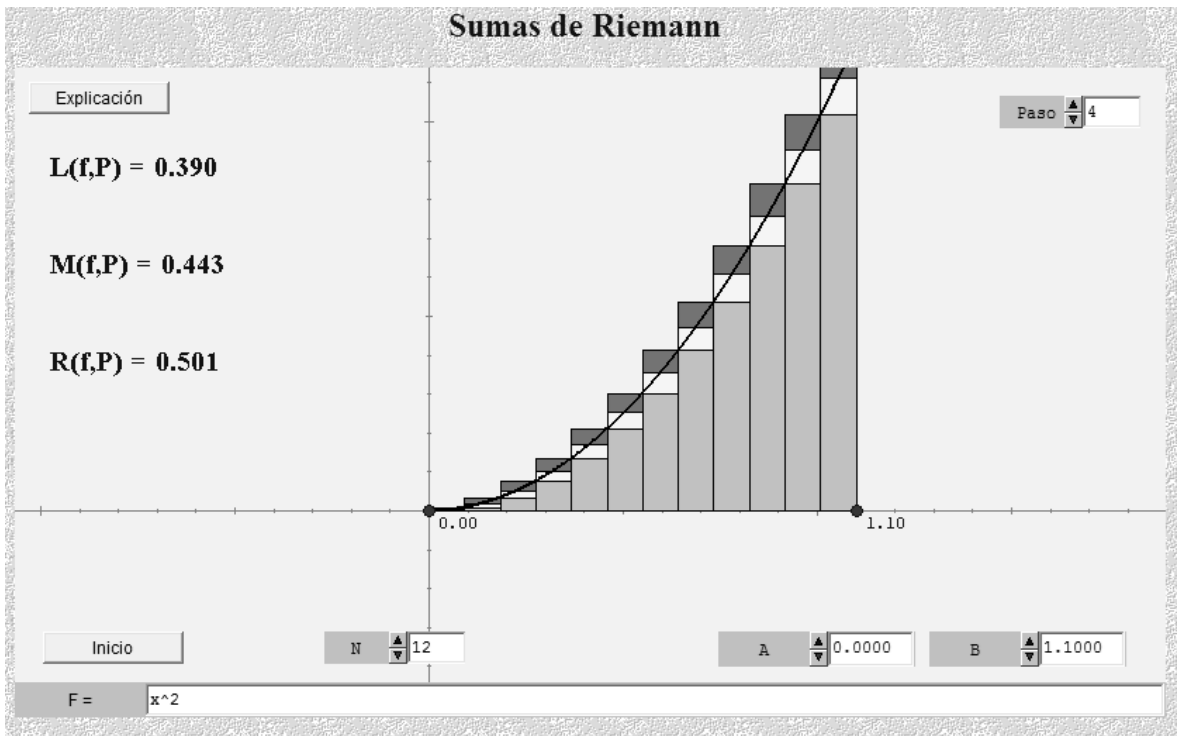


Figura 46 Sumas de Reimann

Datos generales del software

Autor: Eduardo Tellechea Armente

País de origen: México

Sitio Web: <http://www.mat.USON.mx/eduardo/calculo1/>

Categoría: software libre para Matemáticas, Applets(Cálculo)

Requerimientos: Java, Descartes

Áreas que puede apoyar: Cálculo Diferencial en Integral

Palabras clave de esta herramienta: cálculo, diferencial, derivada, límite.

Videos de OCW

Descripción: Se trata del último recurso de esta investigación sobre videos explicativos.

Es un amplio catálogo de videos con pocos minutos de duración, cada uno de ellos en los cuales explican temas de Álgebra, Álgebra Lineal, Análisis Numérico, Cálculo, Ecuaciones Diferenciales, Estadística, Matemáticas Aplicadas, Matemáticas Discretas, Matemáticas para Ciencias de la Computación, Modelos y Simulación, Optimización Combinatoria, Probabilidad de una manera más didáctica.

Lo que se puede observar en los videos son las clases tal cual como son en el "Open Courseware Massachusetts Institute of Technology" (MIT por sus siglas en inglés), por lo que se puede observar los ejemplos y explicaciones como las podemos obtener de un docente en el aula. La ventaja que presenta al ser videos es que pueden repetirlos una y otra vez, o dirigirse a un punto en específico del video, al igual que los pueden consultar en cualquier momento y avanzar al ritmo del usuario.

El sitio Web también cuenta con elementos de apoyo como son apuntes, ejercicios y exámenes en formato escrito, pero por no cumplir con las características de simulación o interacción simultánea con el usuario no se tomarán en cuenta para esta investigación.

Nota: La mayoría de los videos se encuentran completamente en inglés aún sin subtítulos.

Modo de uso: Por tratarse únicamente de videos no es necesaria una extensa explicación sobre cómo funciona, basta con dirigirse a la pestaña de "View All Courses" en la sección "FEATURED COURSES" y seleccionar de entre la lista el o los videos que se requieran consultar.

Ejemplo

Al ser únicamente vídeos solo se mostrará como ejemplo la imagen del vídeo de representación geométrica de la derivada.

Lecture Videos and Notes

Video Excerpts



» Clip 1: Introduction to 18.01 (3 min)
» Accompanying Notes (PDF)

From Lecture 1 of 18.01 Single Variable Calculus, Fall 2006

» Clip 2: Geometric Interpretation of Differentiation (5 min)
» Accompanying Notes (PDF)

Figura 47 Vídeo de OCW

Más información: Podemos encontrar más información sobre el sitio Web dentro de la misma página <http://ocw.mit.edu/index.htm>

Datos generales del software

Autor: Massachusetts Institute of Technology

País de origen: Estados Unidos

Sitio Web: <http://ocw.mit.edu/index.htm>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Matemáticas, Álgebra, Álgebra Lineal, Análisis Numérico, Cálculo, Ecuaciones Diferenciales, Estadística, Matemáticas Aplicadas, Matemáticas Discretas, Matemáticas para Ciencias de la Computación, Modelos y Simulación, Optimización Combinatoria, Probabilidad

Palabras clave de esta herramienta: vídeo, OpenCourseWare, repetir, aula, inglés.

Virtual Laboratories in Probability and Statistics

Descripción: Es un sitio Web especializado en el aprendizaje de probabilidad y estadística. Fue realizado con la colaboración de catedráticos, fundaciones y asociaciones, así que quien lo use puede estar seguro que es un sitio serio y altamente recomendable para su uso.

En ella podemos encontrar los temas por capítulo de un modo similar al que encontraríamos en un libro que abarca desde los conjuntos hasta el movimiento browniano. También contiene applets, conjuntos de datos reales, teoría, bibliografías y enlaces externos en los que podemos encontrar elementos complementarios a los que ofrece el sitio Web.

Modo de uso: Antes que nada, cabe mencionar que el mismo sitio desde su página de inicio ofrece una explicación de los requisitos a considerar para poder funcionar adecuadamente. Aun así no se requiere descargar absolutamente nada.

Pasando este detalle, el sitio se puede catalogar en “Applets, Bibliografías de Objetos, Apuntes biográficos, y fichas de los autores de dichos temas y teorías”. Como se mencionó antes dado que está organizado a manera de un libro, podemos ir de tema en tema, mediante los links de cada sección, incluso dentro de los temas desarrollados hay más enlaces que nos llevan a fichas explicativas de temas o definiciones requeridas para entender la sección en la que se está trabajando en ese momento. También incluye ejercicios a desarrollar y por supuesto las applets correspondientes.

Ejemplos

Ejemplo 1: Comenzaremos con un ejemplo muy sencillo, sin embargo es la base para entender toda esta rama de las matemáticas: se trata de los conjuntos. Se trata de una applet para entender la teoría con un ejemplo básico, pero que abarca todas las situaciones posibles del caso de dos subconjuntos en un espacio. Hay varias maneras de acceder a dicha herramienta:

Desde la página de inicio, Biblioteca de objetos, Applet Venn Diagram.

Desde la página de inicio, Cimientos/Foundations, Sets, bajando a lo largo de la explicación del tema aparece la applet de nombre “subprograma de Diagrama de Venn/ Venn diagram applet” que está en rojo.

Desde la página de inicio, Cimientos/Foundations, “subprograma de Diagrama de Venn/ Venn diagram applet” que está en rojo. , etc.

Una vez que se haya abierto la subpantalla escogemos el caso que deseemos, para este ejemplo se seleccionará $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ que nos da:

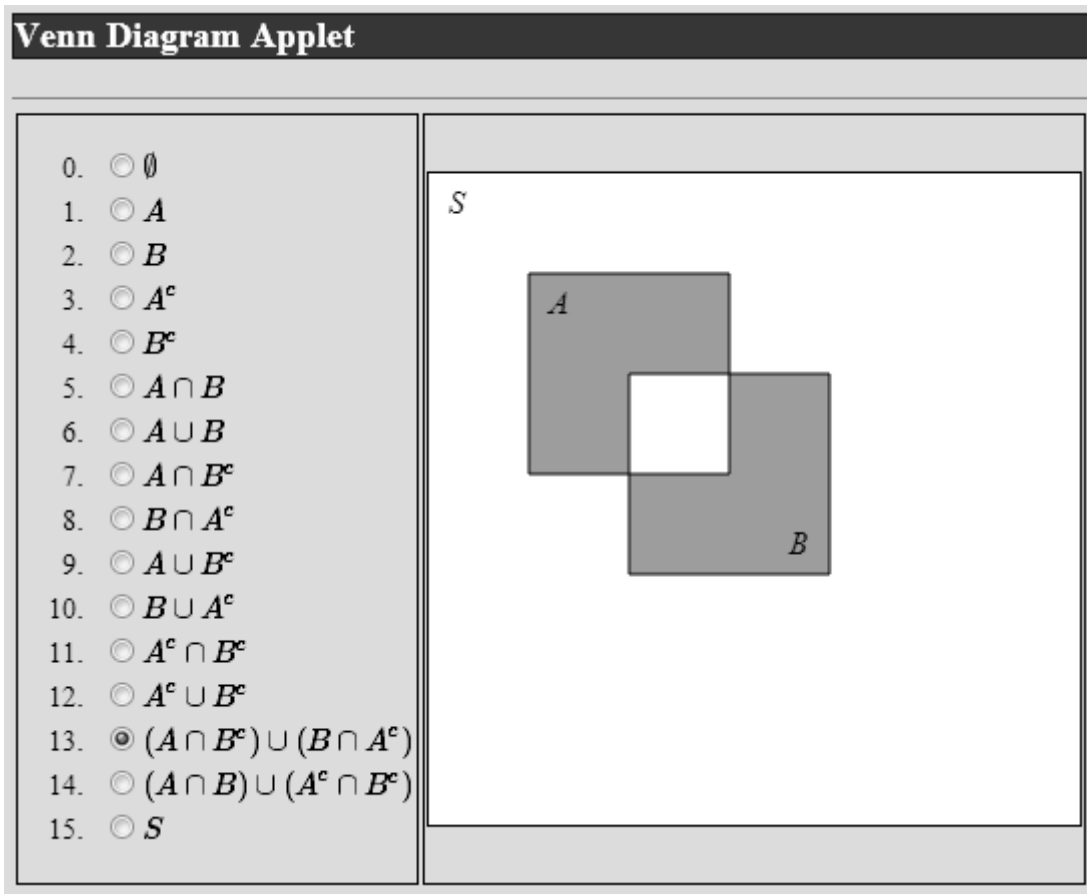


Figura 48 Applet diagrama de Venn

Ejemplo 2: Movimiento Browniano

A continuación se mostrará la applet que muestra el movimiento browniano estándar (ya que éste se subdivide en muchos casos). Para este caso, nos muestra el comportamiento de una partícula que se distribuye como una Normal $[0, t]$. Podemos ver los movimientos uno a uno, o si lo deseamos todos ellos continuos. En este ejemplo, paramos el proceso hasta 1000.

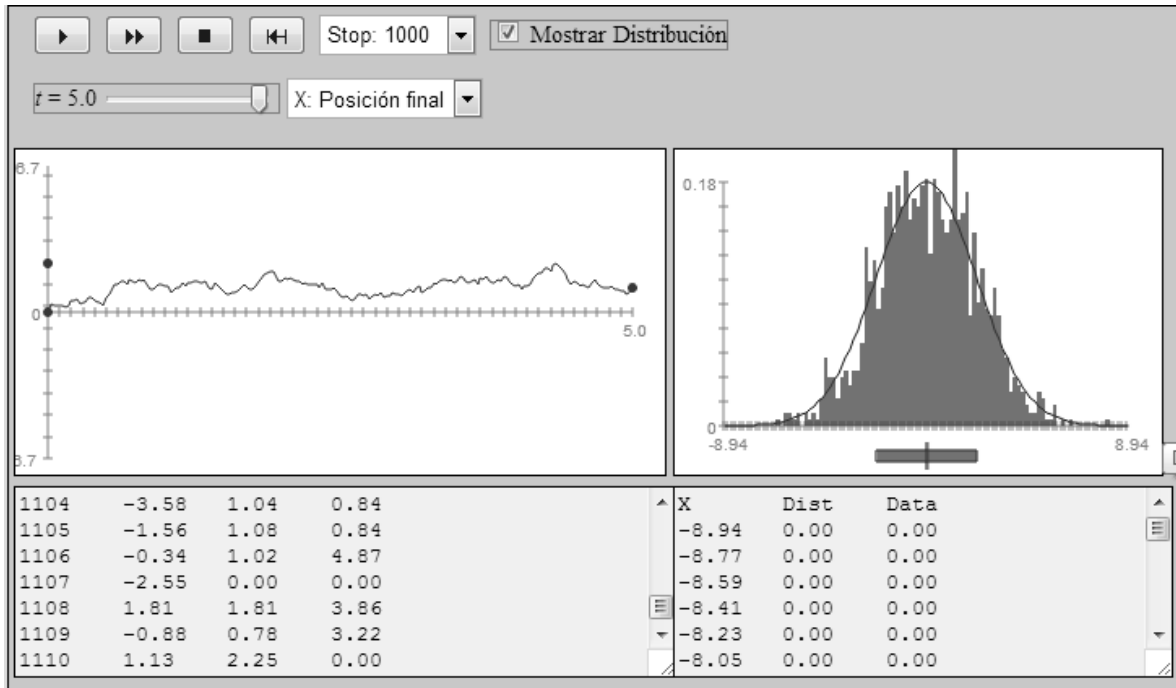


Figura 49 Movimiento Browniano Estándar

Más información: Directamente en la página en la sección “Información del proyecto” o en la sección de “Feedback/Retroalimentación” (destinada a ponerse en contacto directamente con los colaboradores) que se encuentra al inicio del sitio Web.

Datos generales del software

Autor: National Science Foundation

País de origen: Estados Unidos

Sitio Web: <http://www.math.uah.edu/stat/>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Probabilidad y Estadística

Palabras clave de esta herramienta: applet, probabilidad, estadística, fichas explicativas.

Visual Calculus

Descripción: Se trata de un sitio Web enfocado en su totalidad al aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral, abarcando todos los niveles desde temas introductorios (Pre-cálculo) hasta Series de Potencia de una manera mucho más interactiva que va más allá de simplemente la lectura de viñetas o libros electrónicos. Ofrece de manera dinámica explicaciones de los diversos temas, contando con una organización bastante sencilla además de que muestra de manera resumida y clara sobre los conceptos más importantes para su aprendizaje. Es una página de internet creada para la consulta de información sobre cálculo.

Es una buena opción para quienes gustan de la adquisición de conocimientos de manera autodidacta, ya que no se trata de una calculadora o de una lista de ejercicios y problemas por resolver, sino de un sitio en el que puedes ir aprendiendo y entendiendo la teoría y práctica de cada tema ofreciendo explicaciones precisas paso a paso así como gráficos interactivos, los cuales se pueden consultar y repetir las veces que sea necesario.

Nota: Al momento de realizar la investigación, se encontró que por el momento las secciones donde incluye el uso de programa LiveMath tiene errores o no ha sido actualizada, por lo que se omite el uso de ese programa; al igual que la sección How? en la sección de Información en la página de inicio. Por lo demás cualquier aplicación o sección en la página Web funciona perfectamente y sirve a los fines para los que fueron diseñados.

Modo de uso: Su modo de uso es muy sencillo, no se requieren conocimientos previos de programación ni ningún tipo de sintaxis. Cada sección contiene por sí mismo tutoriales por cada tema que lo componen que muestra el modo de aprendizaje. Además como elementos complementarios ofrece pequeños tutoriales de diversos programas computacionales y de calculadoras especializadas para quienes gusten puedan profundizar en otro tipo de herramientas matemáticas bastante útiles.

Ejemplos

Ejemplo 1: Centros de masas

Supongamos que queremos estudiar los centros de masa, pues en la página principal nos dirigimos al tema “Aplicaciones de la Integral”, de ahí buscamos el subtítulo “Momentos y centros de Masa” y damos clic a “Tutorial”. En esta sección buscamos la parte que corresponde a centros de masa y escogemos cualquiera una de las aplicaciones que deseemos. Veremos cómo nos lleva de la mano con la explicación simulada del tema, con gráficos interactivos y haciendo énfasis en los detalles que sean necesarios.

Definition. Let T be a flat plate with uniform density ρ which is defined as the area between two continuous functions $y = f(x)$ and $y = g(x)$ with $f(x) \geq g(x)$ for all x in $[a, b]$.

The moment of T with respect to the y -axis is

$$M_y = \int_a^b \rho x [f(x) - g(x)] dx$$

The moment of T with respect to the x -axis is

$$M_x = \int_a^b \frac{\rho}{2} \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx$$

The center of mass of the system is

$$\left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M} \right)$$

where

$$M = \int_a^b \rho [f(x) - g(x)] dx$$

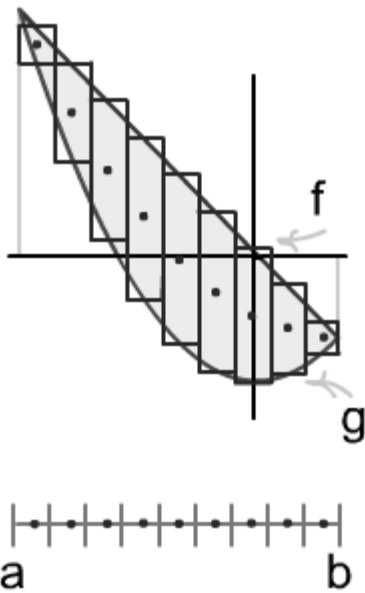
is the mass of T .

• Discussion [\[Using Flash\]](#) [\[Using Java\]](#)

Figura 50 Definición de centro de masas

The center of mass of the i^{th} rectangle is
 $(x_i, [f(x_i) + g(x_i)]/2)$.

The mass of the rectangle is $\rho [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x$.



The moment of the i^{th} rectangle about the y -axis is $\rho [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x \cdot x_i$

The sum of the moments of the rectangles about the y -axis is

$$\sum_{i=1}^n \rho x_i [f(x_i) - g(x_i)] \Delta x$$

CONTINUE

Figura 51 Explicación dinámica de centros de masas

Ejemplo 2: Polinomio de Taylor

En este caso hay que dirigirse a “Series y secuencias”, de ahí a “Series de Potencia” y por último buscamos “Polinomio de Taylor”; como en el ejemplo anterior ingresamos a “Tutorial”, se puede ver que primero muestra el Teorema por lo que en la aplicación mostrará la explicación y el desarrollo de dicho teorema.

Visual Calculus

Taylor Polynomials

◀ Back Help | Objectiv

Theorem. Suppose that

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

is a power series such that the radius of convergence is $r > 0$ then

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Discussion [\[Using Flash\]](#) [\[Using Java\]](#)

Figura 51 Teorema Polinomio de Taylor

Given $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n$, show that $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

Differentiating,

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(x - c)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x - c)^{n-1}$$

Taking the second derivative

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(n-1)(x - c)^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x - c)^{n-2}$$

Evaluating, $f''(c) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(c - c)^{n-2} = a_2 \cdot 2 \cdot 1$

Solving for a_2 , we get

$$a_2 = \frac{f''(c)}{2 \cdot 1}$$

CONTINUE

Click contin

Figura 52 Demostración de Polinomio de Taylor

Más información:

Para cualquier duda o aclaración del modo de uso del software lo podemos encontrar en la sección de “Información” que se encuentra al final de la página de inicio, o sino directamente en el siguiente link:<http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/help/index.html>

Datos generales del software

Autor: Lawrence S. Husch

País de origen: Estados Unidos

Sitio Web: <http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/>

Categoría: módulos libres para Cálculo

Requerimientos: Java, Flash

Áreas que puede apoyar: Cálculo Diferencial en Integral

Palabras clave de esta herramienta: cálculo, límite, continuidad, derivada, serie, integral, LiveMath.

Web Interface for Statistics Education

Descripción: Es un sitio Web para la enseñanza y el aprendizaje enfocado en su totalidad a estadística, pero no a la estadística teórica, sino a la aplicación de toda esta área en la vida real, enfocándose a situaciones sociales. Ofrece una amplia gama de ejercicios interactivos así como de explicaciones propias de cada tema, lo cual permite ir de la mano en el uso del software. Los temas que ofrece van desde los temas introductorios de la estadística hasta los más complejos problemas de toma de decisiones.

Esta herramienta no solo se centra en la resolución de ejercicios, sino que su objetivo es la asimilación y el entendimiento más profundo de los alcances de la estadística inferencial, más allá de ser una herramienta de apoyo, sirve como medio didáctico de aprendizaje, ya que quien desee aprender estadística, puede ir de la mano con este sitio Web de manera autodidacta.

Además, maximiza su potencial en la red ofreciendo artículos relacionados a temas estadísticos así como links a sitios de internet, como son tutoriales de softwares, libros electrónicos, calculadoras, recursos, guías, descargas en Excel (aunque dados las condiciones mostradas en la introducción solo trabajaremos en las actividades en línea que ofrece); incluso cuenta con una sección donde puedes introducir tu propia lista de datos para ejercicios personalizados.

Modo de uso

La página está dividida en secciones de los temas que aborda, están organizados de manera simple e inclusive con imágenes para entender mejor de que trata cada tema. Lo tutoriales los podemos encontrar dentro de la página: <http://wise.cgu.edu/tutor.asp>

Ejemplos

Ejemplo 1: Distribución muestral de la media

Pensemos que queremos ver cómo se comporta una distribución Normal con media 500 y error estándar 100, con una en una muestra de 100.

$$N \sim (\mu = 500; \sigma = 100), \quad N = 100$$

Al tomar los parámetros ya que en esta applet, solo nos permite introducirle esos valores a la Normal (también nos da a escoger entre una Uniforme y una Binomial), las muestras están entre 2, 5, 25 y 100.

La cual proporciona la forma gráfica y sus características a escoger:

- Entre si queremos realizar la muestra una por una, o que realice 100 de una sola vez.
- La población que es objeto de estudio.
- La distribución muestral de la media.
- La probabilidad de la media obtenida.

Todas ellas con la posibilidad de mostrarlas o no según deseemos. Cada una de ellas mostradas con colores diferentes para poder identificarlas.

Por último nos muestra los resultados de las simulaciones realizadas, son El número de muestras realizadas, Error estándar de la media, Última media y Probabilidad de cola izquierda (estas dos últimas solo las visualiza cuando realizamos las muestras una por una)

WISE distribución muestral de la media Applet

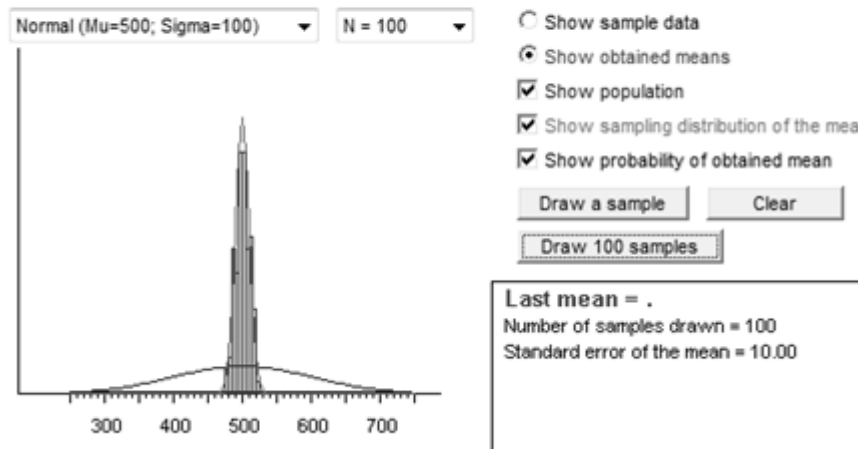


Figura 53 Applet de la distribución de la media muestral

Ejemplo 2: Hipótesis nula (H_0) y alternativa (H_1)

Para este ejemplo vamos a considerar una muestra extraída de 25 elementos al azar que cumplen con cierta característica, donde queremos saber si la media de esa población es de 500 con la muestra extraída de una población de 1000. Con una desviación estándar de 100 y con una confianza de 0.05.

Al introducir los datos correspondientes en el software, simularemos el proceso cuantas veces sean necesarias, según el problema que deseemos resolver, en este caso, se reprodujo 25 veces, con lo que los resultados se muestran en la Figura 54.

WISE Hipótesis Applet Pruebas

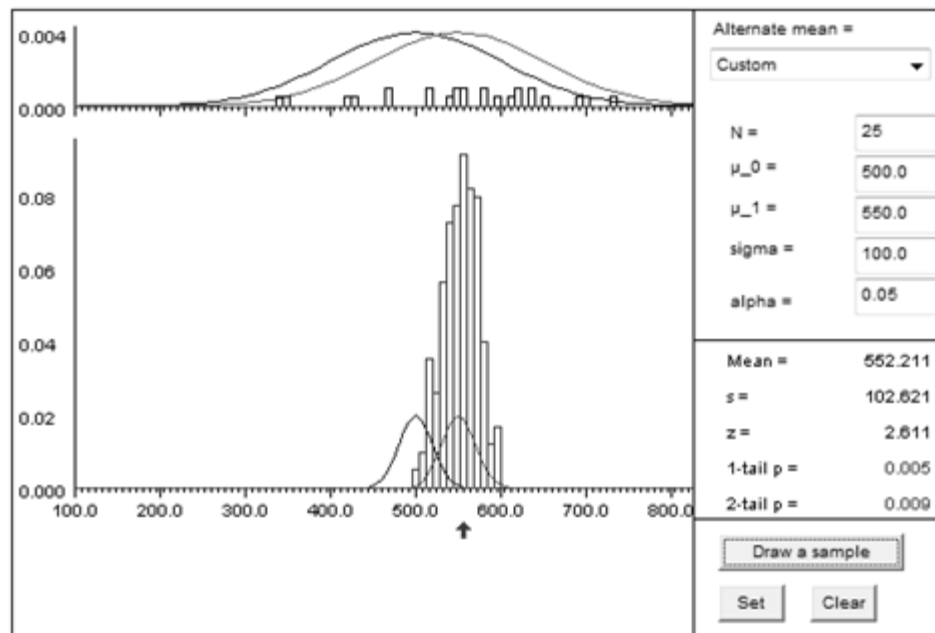


Figura 54 Pruebas de Hipótesis

Más información:

En el mismo sitio, en la página de inicio se encuentra una liga con un tutorial mejorado, o lo podemos encontrar directamente en: <http://wise.cgu.edu/power/>

Datos generales del software

Autor: Dr. Dale E. Berger

País de origen: Estados Unidos

Sitio Web: <http://wise.cgu.edu/>

Categoría: software libre para Estadística

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Matemáticas (Estadística)

Palabras clave de esta herramienta: estadística, muestra, normal, inferencia, distribución.

Wiris

Descripción: Se trata de una calculadora Web (CAS) con una finalidad educativa y de aprendizaje para diversos tipos de problemas, inclusive de programación (este último de manera muy sencilla e introductoria). Incluye una serie de botones con los que puedes ir interactuando y diseñando dependiendo de la clase de problema que se requiera resolver. Más que introducir códigos, comandos o el necesitar introducir los datos, se van creando los logaritmos de manera visual.

Es un editor científico que es un programa de cálculo simbólico, ya que es capaz de trabajar con fórmulas matemáticas. Es de gran utilidad en álgebra, derivadas, funciones, geometría analítica del espacio, integrales, números y programación lineal. Es un sitio Web que permite trabajar de un modo muy exacto y aproximado con números naturales, enteros, racionales, reales e incluso con complejos. Opera polinomios y fracciones algebraicas. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. Opera con matrices y calcula determinantes. Representa curvas en el plano. Dibuja curvas y superficies en el espacio, grafica en 2D y 3D. Calcula límites, derivadas e integrales.

Esta calculadora también cuenta con una versión descargable, aunque en esta investigación solo se enfocará a la versión en línea.

Modo de uso: Su modo de uso es muy sencillo solo basta con ir presionando los distintos botones de los cálculos que requerimos realizar. Para poder ver todo el alcance que tiene dicha herramienta podemos acceder a su tutorial en el siguiente enlace: <http://www.wiris.net/cegepoutaouais.qc.ca/wiris/manual/es/>. O desde la página de inicio de Wiris podemos dirigirnos a la sección "MANUAL".

Ejemplos

Ejemplo 1: Álgebra Lineal

Para este ejemplo se determinará si el siguiente sistema de ecuaciones es linealmente independiente o no con Wiris:

$$\alpha + \gamma = 0$$

$$\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0$$

$$3\beta + 3\gamma = 0$$

En el sitio Wiris nos colocamos en el editor para comenzar a introducir los elementos de la siguiente manera:

$$u=[1,0,1]$$

y presionamos el botón de igual (=) que aparece al final, o presionamos “Ctrl” + “Enter”.

De la misma manera introducimos los siguientes vectores:

$$v=[1,2,2]$$

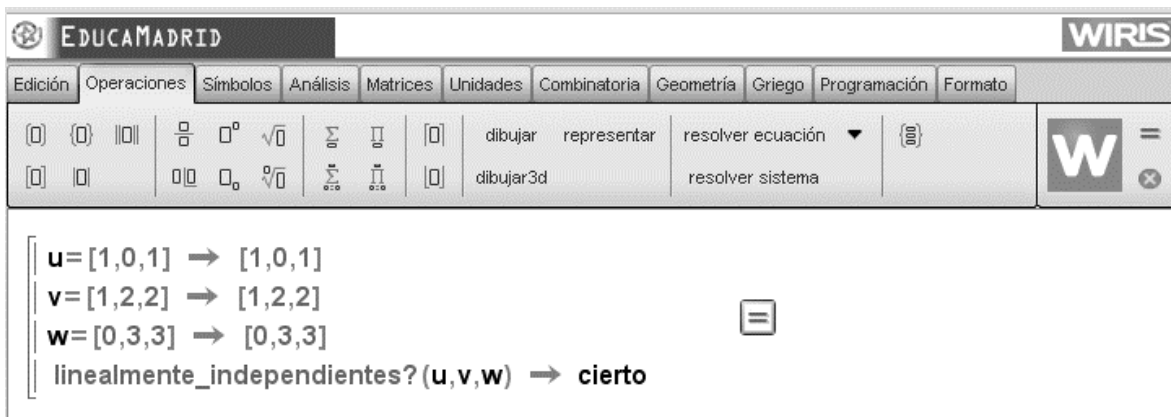
$$w=[3,0,3]$$

Recordando presionar el botón de igual en cada vector.

Ahora escribimos en comando

“linealmente_independiente?(u,v,w)” y “Ctrl” + “Enter”

Nos arrojará “cierto” o “falso” según sea el caso, para este ejemplo nos arrojó “cierto”, por lo que nuestro sistema de ecuaciones es linealmente independiente.



The screenshot shows the WIRIS software interface. At the top, there is a navigation bar with tabs for 'Edición', 'Operaciones', 'Símbolos', 'Análisis', 'Matrices', 'Unidades', 'Combinatoria', 'Geometría', 'Griego', 'Programación', and 'Formato'. Below this is a toolbar with various mathematical symbols and functions. The main workspace contains the following text:

```
u = [1,0,1] → [1,0,1]
v = [1,2,2] → [1,2,2]
w = [0,3,3] → [0,3,3]
linealmente_independientes?(u,v,w) → cierto
```

Figura 55 Independencia Lineal con Wiris

Ejemplo 2: Cálculo

Ahora vamos a ver si una función converge o no cuando la hacemos tender a infinito.

Para ello, Wiris posee un comando propio para realizarlo, el cual es: “convergente?”, así que escribimos dicho comando para realizar el cálculo. Ahora nos vamos a la pestaña de Operaciones, y escogemos el botón de “Parentésis ()” y dentro del paréntesis escogemos el botón de “Suma”, nuestra suma correrá desde 1 hasta infinito, en este caso en Wiris nos dirigimos a la pestaña “Símbolos” y escogemos el infinito que tiene signo positivo. Introducimos la función:

$$\frac{n}{n^5 + 1}$$

Finalmente presionamos el botón = de Wiris (o “Ctrl”+“Enter”). Responderá “Cierto” o “Falso” según sea el caso, para el ejemplo nos dio “Cierto”.

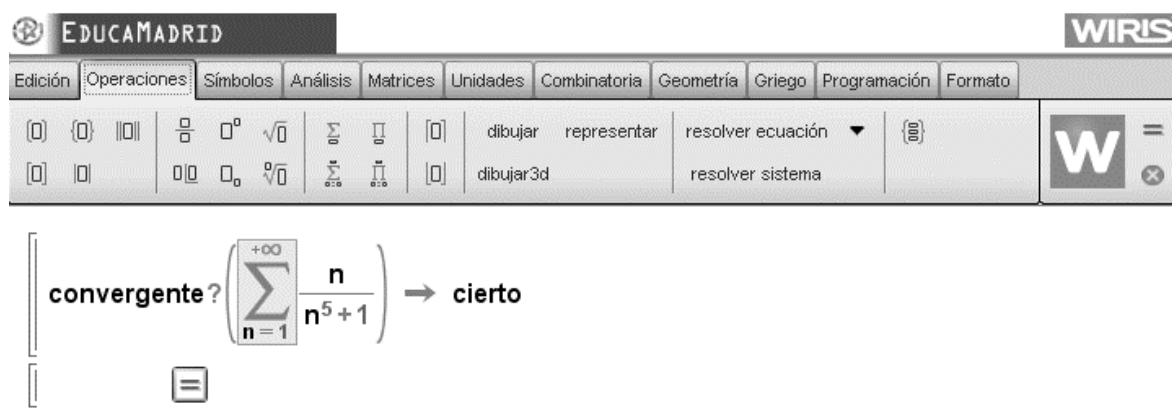


Figura 45 Convergencia de una función en Wiris

Ejemplo 3: Estadística

Por último se realizará la recta de regresión y su gráfica de una muestra de datos.

Los vectores con los que se trabajará serán:

$$X = \{2,3,5,7,8\}$$

$$Y = \{14,20,32,42,44\}$$

Tal cual como está escritos se introducen en Wiris, con la diferencia de que las llaves { } las podemos escribir directamente o tomarlas del botón en la pestaña de “Operaciones”. Al terminar cada vector presionamos “=” para que se introduzcan en el sitio Web. Al igual que en los ejemplos anteriores, existe un comando específico para realizar este cálculo, el cual es “recta_de_regresión()” por lo que escribimos en una nueva línea:

r=recta_de_regresión(X,Y)

Presionamos “=” y nos dará como resultado la recta de regresión.

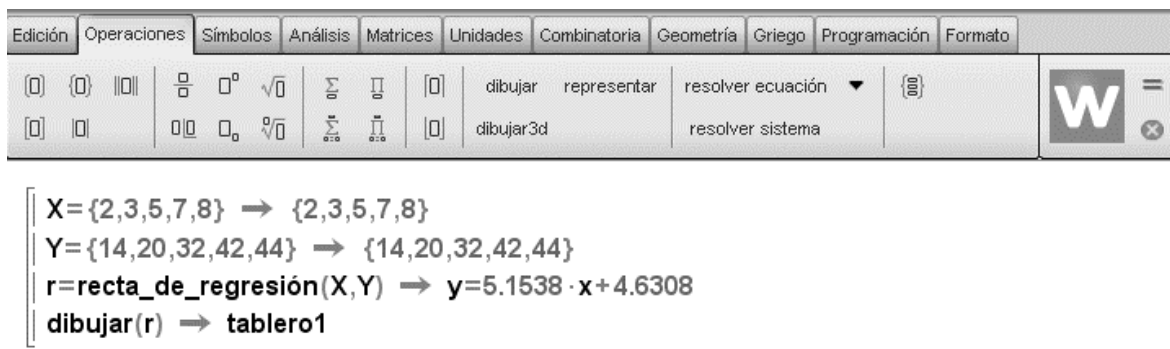


Figura 46 Obtención de la ecuación de la recta de regresión

Por último escribimos “dibujar (r)” y nos abrirá en una segunda ventana en la cual veremos la gráfica de la recta de regresión.

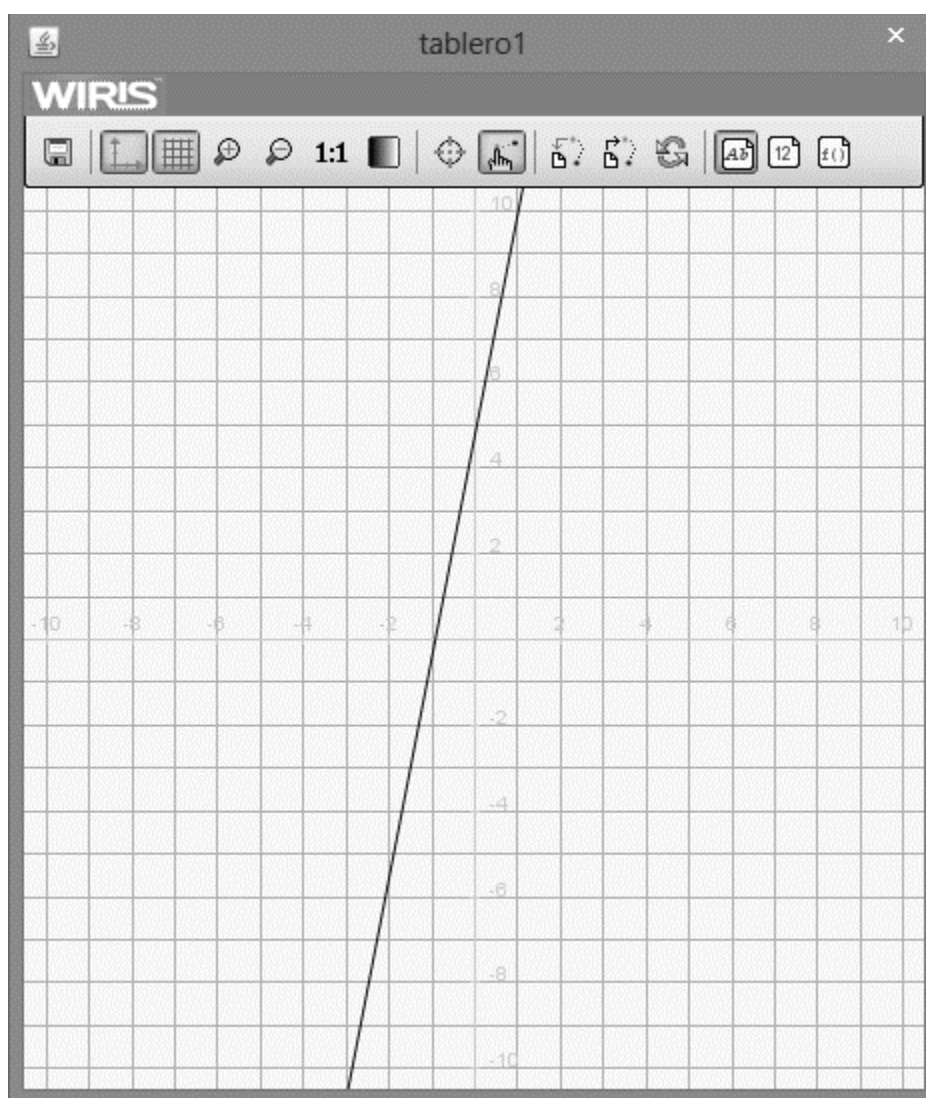


Figura 47 Gráfica de la Recta de Regresión

Más información

En internet existe un amplio catálogo de sitios Web en los que se puede obtener una extensa gama de información respecto a este sitio, así como manuales y guías.

Datos generales del software

Autor: Empresa Maths For More (M4M)

País de origen: España

Sitio Web: <http://www.wiris.net/educa.madrid.org/wiris/es/index.html>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Matemáticas, Álgebra; 2. Álgebra Lineal, Cálculo, Ecuaciones Diferenciales, Estadística, Geometría Analítica, Probabilidad.

Palabras clave de esta herramienta: análisis, botón/botones, comando(s), editor científico, logaritmo(s), matrices, combinatoria, geometría, pestaña(s).

Wolfram Alpha

Descripción: Se trata de un Motor de conocimiento computacional. Es un CAS (Sistema de Álgebra Computacional) que contiene una amplia gama temas y opciones y casos para realizar cálculos de alta complejidad, inclusive grafica, contiene también un amplio catálogo de conversión de medidas; al igual que proporciona los principales características digitales de imágenes e impresiones así como un buscador de respuestas extraída de una base de datos estructurados. Las consultas y procesamientos de cálculos también se hacen en un campo de texto, pero en este se procesan las respuestas y visualizaciones adecuadas de manera dinámica. Sintetiza conocimientos avanzados a través de inferencias partiendo de un pequeño conjunto de información básica. Incluye imágenes, audio y formatos científicos, médicos y matemáticos especializados para un análisis automático. Otras características incluyen un teclado extendido, descargas de datos y la capacidad de personalizar y guardar resultados gráficos y tabulares.

Su forma de uso está bastante categorizada y su forma de introducción de los elementos a calcular es bastante intuitiva; muy similar a los estándares usados en programación. Como muestra introductoria, la página de inicio muestra una serie de ejemplos de manera dinámica para familiarizarse con su uso.

Nota: A diferencia de otros sitios en los que existe la posibilidad de que puedan fallar, Wolfram Alpha es totalmente confiable en todos los sentidos.

Modo de uso: La manera en la que se puede trabajar con este sitio Web es muy sencilla, basta con colocar en el panel de texto ya sea algún cálculo o conversión que se desee realizar; o escribiendo la palabra de algún concepto o respuesta que se esté queriendo conocer.

Nota: el modo de trabajo del Wolfram Alpha es en inglés, por lo que los conceptos, respuestas, explicaciones serán arrojadas en inglés, así como los cálculos que se deseen realizar tendrán que ser introducidos en inglés.

Ejemplos

Ejemplo 1: Álgebra Lineal

Para este ejemplo se extraerán el vector propio de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Desde la misma barra de introducción de los problemas podemos dirigirnos al botón de “Examples” de color anaranjado, o bien desde la sección “EXAMPLES”, que está en la barra superior de la página Web. De ahí nos dirigimos a Mathematics –ALGEBRA – MATRICES & LINEAL ALGEBRA; en esta sección buscamos EIGENVALUES & EIGENVECTORS, ahí podemos observar cómo se introducen los datos y la forma de escribir el cálculo que se quiere realizar, en este caso se desea obtener el vector propio. Por lo que en Wolfram Alpha escribiremos:

eigenvectors {{2,-1,-3,7},{2,2,1,3},{3,2,7,7},{3,4,2,1}}

Por último damos clic en el símbolo de igual de color anaranjado al final de nuestra operación.

eigenvectors $\{\{2,-1,-3,7\},\{2,2,1,3\},\{3,2,7,7\},\{3,4,2,1\}\}$



Examples Random

Input:

$$\text{Eigenvectors} \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Results:

More digits

$$v_1 \approx (-0.532481, 0.746406, 3.33859, 1.)$$

$$v_2 \approx (-5.21627, 0.482523, 9.45294, 1.)$$

$$v_3 \approx (-1.37939, 0.00499522, -0.269473, 1.)$$

$$v_4 \approx (-3.36369, 2.52197, -0.296099, 1.)$$

Corresponding eigenvalues:

Exact forms

More digits

$$\lambda_1 \approx 9.06536$$

$$\lambda_2 \approx 6.18716$$

$$\lambda_3 \approx -3.65714$$

$$\lambda_4 \approx 0.404632$$

Figura 49 Vector Propio de una matriz en Wolfram Alpha

Ejemplo 2: Análisis Numérico

Para este ejemplo calcularemos usando el Método de Newton para encontrar la raíz de la siguiente función,

$$e^x - \sin x = 0$$

Al igual que el ejemplo anterior entramos desde Examples – CALCULUS & ANALYSIS – NUMERICAL ANALYSIS – NUMERICAL ROOT FINDING, ahí optamos por cualquier opción dentro del Método de Newton, en este caso optaremos por la que dice: “using Newton's method solve”. Los resultados se muestran en las siguientes imágenes:

The image shows a screenshot of the WolframAlpha interface. At the top, the WolframAlpha logo is displayed with the tagline "computational knowledge engine". Below the logo is a search bar containing the text "using Newton's method solve e^x-sin x = 0". Below the search bar, there are several icons and the text "Examples Random".

The main content area is divided into several sections:

- Input interpretation:** This section shows the input "solve" followed by the equation $e^x - \sin(x) = 0$, then "using Newton's method", and finally "to machine precision".
- Result:** This section displays the numerical solution $x = -3.183063011933364$ and notes that it is "(using starting point of $x_0 = -3.1$)".
- Symbolic form of Newton iteration:** This section shows the iterative formula $x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - \sin(x_n)}{e^{x_n} - \cos(x_n)}$ and $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, where $f(x) = e^x - \sin(x)$ and $f'(x) = e^x - \cos(x)$. A "Hide details" button is located to the right of this section.

Figura 60 Método de Newton en Wolfram Alpha

$$x_0 = -3.1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{e^{x_0} - \sin(x_0)}{e^{x_0} - \cos(x_0)}$$

$$x_1 = -3.1 - (0.0829641)$$

$$x_1 = -3.18296$$

$$x_2 = x_1 - \frac{e^{x_1} - \sin(x_1)}{e^{x_1} - \cos(x_1)}$$

$$x_2 = -3.18296 - (0.0000988639)$$

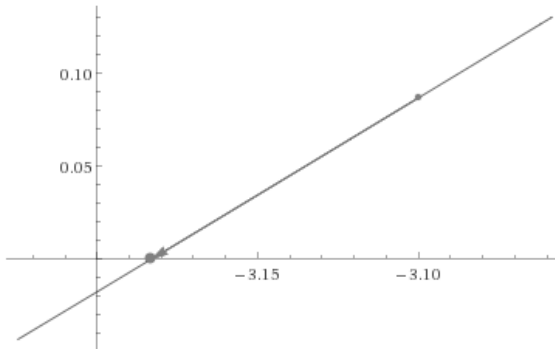
$$x_2 = -3.18306$$

$$x_3 = x_2 - \frac{e^{x_2} - \sin(x_2)}{e^{x_2} - \cos(x_2)}$$

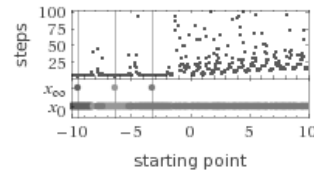
$$x_3 = -3.18306 - (3.89112 \times 10^{-10})$$

$$x_3 = -3.18306$$

Iteration diagram:

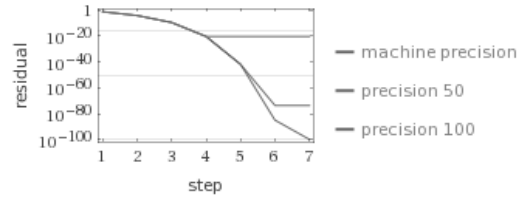


Convergence by starting point diagram:



(color indicates final value, x_∞ , converged to)

Convergence rates:



(using starting point of $x_0 = -3.1$)

precision	steps
machine precision	3
50 digits	5
100 digits	6

Figura 61 Pasos del Método de Newton y gráficas de la función

Higher-order Newton iterations:

3rd-order iteration (Householder's iteration):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{(e^{x_n} + \sin(x_n))(e^{x_n} - \sin(x_n))^2}{2(e^{x_n} - \cos(x_n))^3} + \frac{\sin(x_n) - e^{x_n}}{e^{x_n} - \cos(x_n)}$$

$$x_{n+1} = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2 f'(x_n)^3} + x_n$$

where $f(x) = e^x - \sin(x)$

$$f'(x) = e^x - \cos(x)$$

$$f''(x) = e^x + \sin(x)$$

step	x
0	-3.1000000000000000
1	-3.182975579620785
2	-3.183063011933259
3	-3.183063011933364
4	-3.183063011933364

4th order iteration:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{(\sin(x_n) - e^{x_n})^3 (\cos(2x_n) - 2(e^{2x_n} + 3e^{x_n} \sin(x_n) + 1))}{6(e^{x_n} - \cos(x_n))^5} + \frac{\sin(x_n) - e^{x_n}}{e^{x_n} - \cos(x_n)} + \frac{(e^{x_n} - \sin(x_n))^2 (e^{x_n} + \sin(x_n))}{2(e^{x_n} - \cos(x_n))^3}$$

$$x_{n+1} = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2 f'(x_n)^3} - \frac{f(x_n)^3 \left(\frac{3 f''(x_n)^2}{f'(x_n)^4} - \frac{f^{(3)}(x_n)}{f'(x_n)^3} \right)}{6 f'(x_n)} + x_n$$

where $f(x) = e^x - \sin(x)$

$$f'(x) = e^x - \cos(x)$$

$$f''(x) = e^x + \sin(x)$$

$$f^{(3)}(x) = e^x + \cos(x)$$

step	x
0	-3.1000000000000000
1	-3.183062544954764
2	-3.183063011933364
3	-3.183063011933364

Figura 62 Iteraciones y resultados del Método de Newton

Para este ejercicio el resultado es $x = -3.183063011933364$.

Cómo se puede observar en las imágenes anteriores, ofrece resultados bastante completos el sitio Wolfram Alpha, mostrando no solo el resultado sino el procedimiento llevado a cabo y las gráficas (cuando es el caso).

Ejemplo 3: Probabilidad

Para este ejemplo vamos a sacar la desviación estándar de una T-Student con 10 grados de libertad.

Una vez más nos dirigimos a Examples – Statistics & Data Analysis - STATISTICAL DISTRIBUTIONS, en la sección CONTINUOUS DISTRIBUTIONS nos dirigimos a la desviación estándar de una T-Student

The image shows a screenshot of the Wolfram Alpha website. At the top, the search bar contains the text "standard deviation of Student t, 10 degrees of freedom". Below the search bar, the input is broken down into four parts: "standard deviation", "Student's t distribution", "degrees of freedom", and "v = 10". The result section shows the mathematical expression $\frac{\sqrt{5}}{2} \approx$ followed by a long decimal number: 1.1180339887498948482045868343656381177203091798057628621357448622705260462818902449707207204189391137. At the bottom of the result section, it says "Computed by Wolfram Mathematica" and there is a "Download page" button.

Figura 63 Desviación estándar de una T-Student

Como se puede observar el sitio Web puede realizar cualquier tipo de cálculos, en este caso nos da el valor numérico

$$\sigma = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.118033$$

Más información

En internet existe un amplio catálogo de sitios Web en los que se puede obtener una extensa gama de información respecto a este sitio, así como manuales y guías, como son los sitios:
<http://www.youtube.com/user/WolframAlpha><http://wolframalpha0.blogspot.mx/>

Datos generales del software

Autor: Wolfram Research Company

País de origen: Estados Unidos

Sitio Web: <http://www.wolframalpha.com/>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Matemáticas, Física, Diseño, Química, álgebra, geometría analítica, cálculo, trigonometría, Estadística,

Palabras clave de esta herramienta: motor de conocimiento computacional, CAS, cálculos, gráficas, medidas, buscador.

Investigación de campo

Después de encontrarse las herramientas que cumplían con los requisitos postulados al inicio de la investigación, los cuales se vuelven a recalcar en esta sección y son:

- Tener un propósito educativo o ser útiles con este fin.
- Ofrecer un contenido matemático que corresponde al nivel superior (licenciatura).
- Ser de acceso libre y gratuito.
- Estar diseñados para usarse dentro del navegador Web.
- Carecer de anuncios comerciales o que éstos fuesen mínimos.
- Estar en idioma español, en inglés o en ambos.

Se realizó una investigación de campo la cual consistió en aplicar un cuestionario tanto a alumnos como profesores de las carreras de Actuaría, Ingeniería Civil y Matemáticas Aplicadas y Computación; de la FES-Acatlán de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) del ciclo escolar que comprendió de Septiembre a Diciembre del 2012, Semestre 2012-1.

La cantidad de alumnos totales inscritos del periodo escolar fueron los siguientes:

- Actuaría: 1,061
- Ingeniería Civil: 1,048
- MAC: 1,470

Con estos datos se buscó estimar la muestra de encuestas razonable a aplicar en cada una de las tres carreras. El objetivo era tener la mayor confianza posible, pero también que la cantidad de trabajo de captura que no fuera tan excesiva. Se comenzó considerando una distribución normal con media 0 y varianza 1, con 95% de confianza y 5% de margen de error, los primeros resultados arrojados fueron:

- Actuaría: 282
- Ingeniería Civil: 281
- MAC: 305

Se consideró que fueron un número excesivo de encuestas por lo que se realizó una nueva estimación cambiando al 6% en el intervalo de confianza, con lo cual quedaron:

- Actuaría: 213
- Ingeniería Civil: 213
- MAC: 226

Al ver que seguían siendo una muestra relativamente grande respecto al total de alumnos se consideró realizar una vez más con 90% de confianza y 6% de margen de error, con los que resultó:

- Actuaría: 160
- Ingeniería Civil: 160
- MAC: 167

Al ver que no era mucho la modificación del intervalo de confianza y el margen de error, pero se conseguía una muestra más aceptable de encuestas a realizar se tomó como muestra final este conjunto de cifras.

Para el caso de los maestros únicamente se consideró realizar 20 encuestas al azar en cada carrera.

La cantidad total de maestros en cada carrera son los siguientes:

- Actuaría: 82
- Ingeniería Civil: 104
- MAC: 99

Dando un total de 285 maestros que conformaron las tres carreras en el Semestre 2012-1.

Se tomaron en cuenta solo los recursos Web más importantes, se consideraron las que cubrieran una cantidad considerable de tópicos, las más dinámicas e interactivas. Del total de 20 recursos de esta investigación se incluyeron en la encuesta 15, los cuales son: Descartes, GapMinder, GeoGebra, Khan Academy, Math 2 me, Maxima, MIT Mathlets, Number Empire, PhET Interactive Simulations, Rice Virtual Lab in Statistics, Videos de OCW, Virtual Probability Lab, Web Interface for Statistics Education, Wiris y Wolfram Alpha.

Las categorías que consideraron evaluar en la encuesta fueron 4:

- No lo conozco
- Se para que sirve pero no lo he usado
- Lo he usado de vez en cuando
- Lo uso con frecuencia

Estas categorías nos permiten construir un panorama acerca de qué recursos son los más conocidos y usados por alumnos y profesores.

Además se añadió una sección en la que podían incluir si conocían alguna herramienta que pudiera entrar dentro de la investigación.

Dentro de los resultados arrojados en las encuestas se mostraron diversas reacciones por parte de los alumnos de sorpresa y descontento al existir este tipo de herramientas y que no las conocieran aún; entre otras respuestas proporcionadas estaban en las que no las conocían porque en ninguna materia y/o

maestro se las pide o se las enseñan. Algo que no se esperaba fue que sirvió de medio de difusión para dar a conocer dichas herramientas.

En el caso de las herramientas adicionales proporcionadas por los alumnos parece que no les quedaban completamente claro las categorías de "libres y en la red", ya que proporcionaban herramientas que necesitaban ser instaladas, o eran calculadoras con un formato físico y convencional, o páginas Web que solo eran de lectura.

En los resultados ofrecidos por los profesores parece ser que tienen una mayor noción de dichas herramientas comparado con los alumnos; aunque esto último no se vio mejor reflejado en las herramientas que pudieron proporcionar los profesores; unos cuantos profesores proporcionaban programas que requerían de un software de instalación en el ordenador y que no eran libres (es decir, exigen de la compra de una licencia para poder ser instalados), siendo que la encuesta claramente solicitaba que fueran "libres y en la red" por lo cual se intuye que añadían los que conocían con la esperanza de demostrar que no desconocían del tema. Otra reacción importante reflejada era que se sentían como si estuvieran siendo evaluados. Aun así los profesores terminaron siendo los que proporcionaron más herramientas a esta investigación.

Por otra parte las respuestas de algunos profesores en las encuestas mostraban inquietud más que sorpresa respecto a si eran herramientas aprobadas por la universidad o algún consejo educativo; al igual que sí se encontraban en alguna página Web de nivel superior.

Resultados de la investigación

Al igual que se explica cómo se llevó a cabo la investigación, también se mostrarán los resultados en datos y gráficas obtenidos en la realización de las encuestas.

A continuación se muestran por carrera a manera de comparación entre alumnos y maestros los resultados de cada herramienta.

Actuaría

En el caso de Descartes los profesores lo conocen, pero no lo usan; los alumnos en general no lo conocen, sólo unos cuantos lo usan (*Figura 64*)

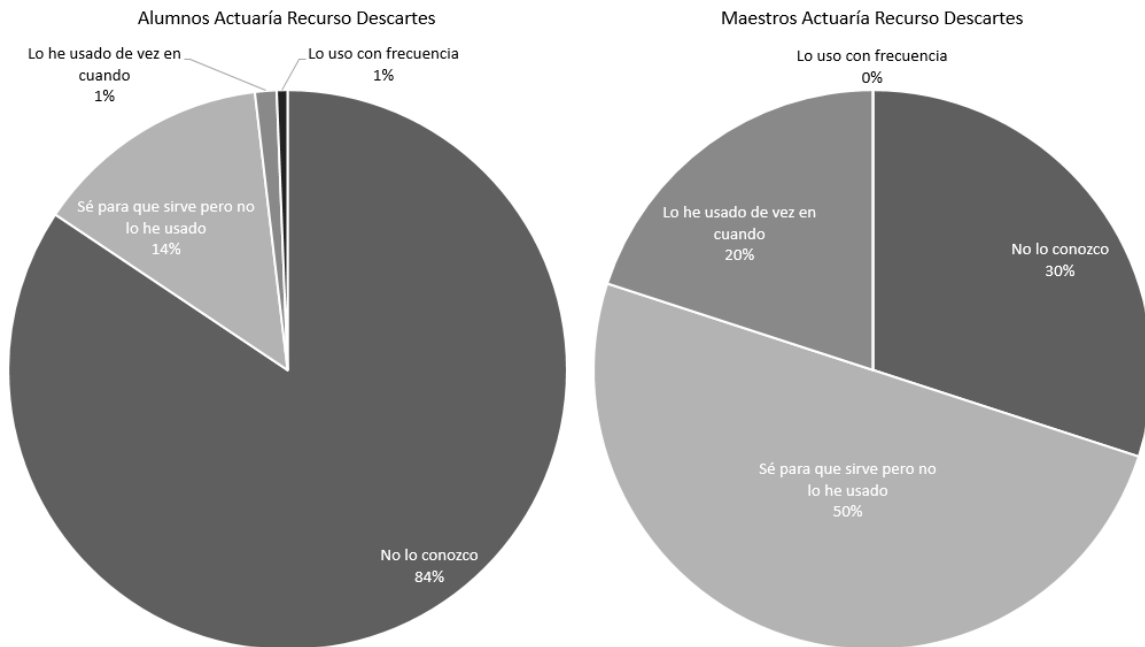


Figura 64 Comparación Actuaría Descartes

Para la herramienta GapMinder aunque la mayoría de los alumnos no la conocen, irónicamente son quienes más la han usado en comparación con los profesores que nunca la han usado (*Figura 65*)

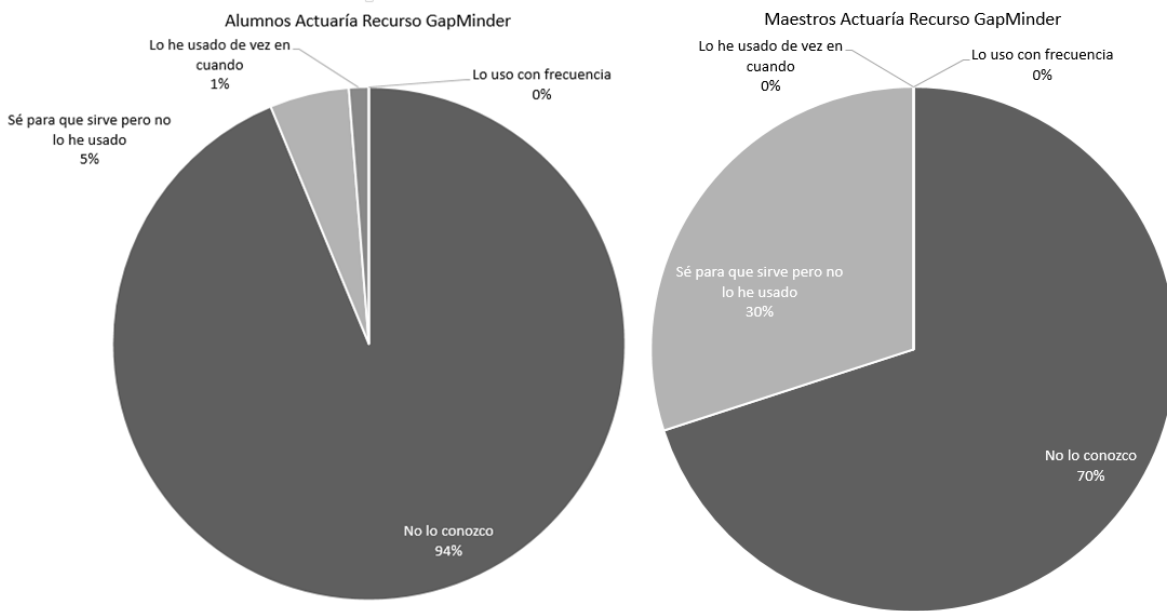


Figura 65 Comparación Actuaría GapMinder

Para el caso de GeoGebra parece ser que los maestros lo conocen más que los alumnos; pero ¿si lo usan los maestros por qué los alumnos no lo conocen? (Figura 66)

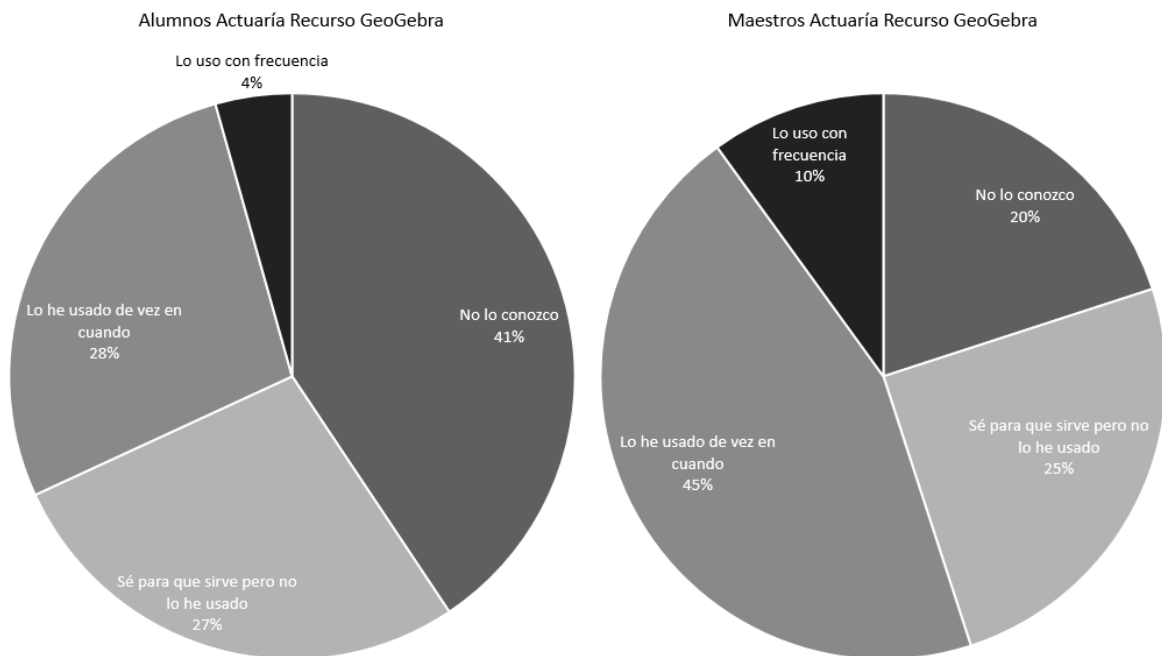


Figura 66 Comparación Actuaría GeoGebra

Respecto a Kahn Academy son los maestros son quienes más conocen y consultan los vídeos (Figura 67)

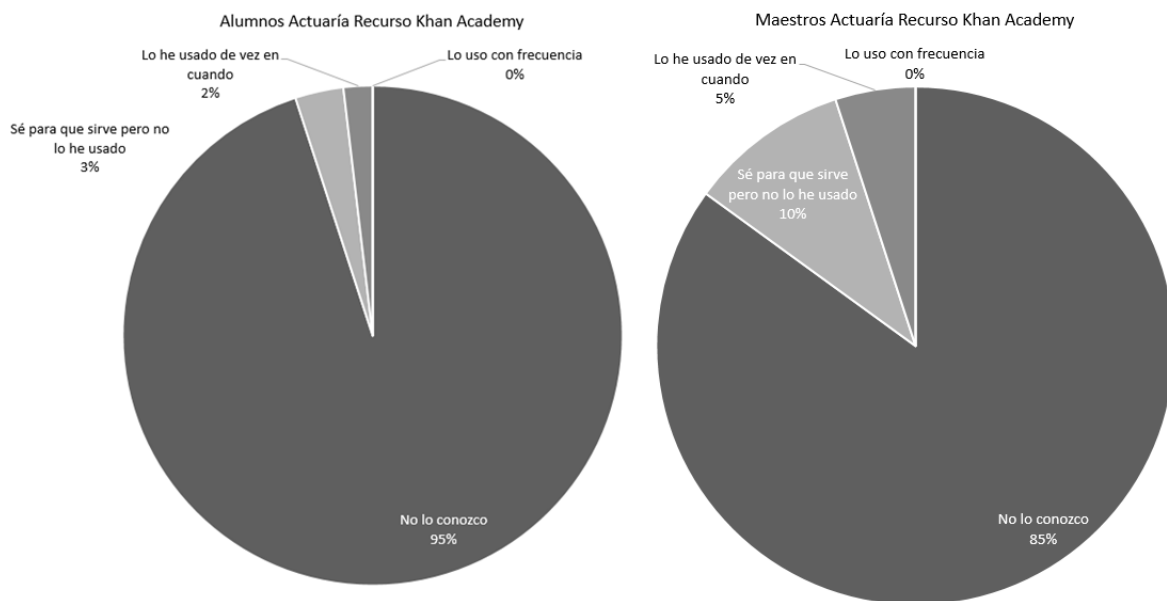


Figura 67 Comparación Actuaría KhanAcademy

En el caso de Math 2 Me los maestros son quienes más conocen dichos vídeos y son quienes más los han consultado (Figura 68)

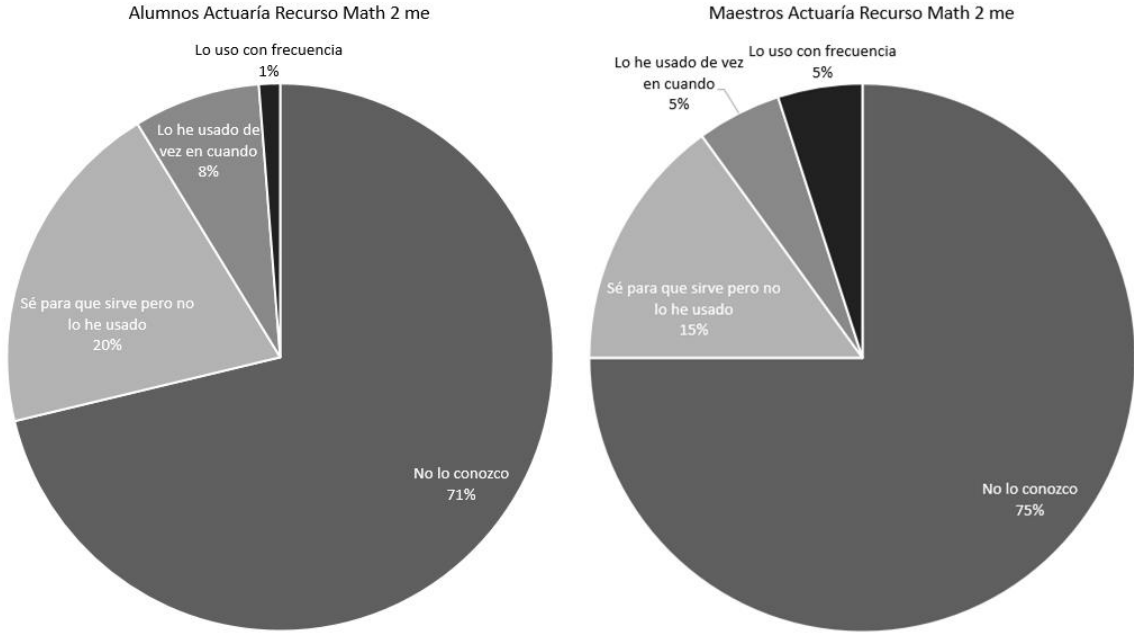


Figura 68 Comparación Actuaría Math 2 Me

Para el caso de la herramienta Maxima son los maestros quienes la conocen y usan más comparado con los alumnos (Figura 69)

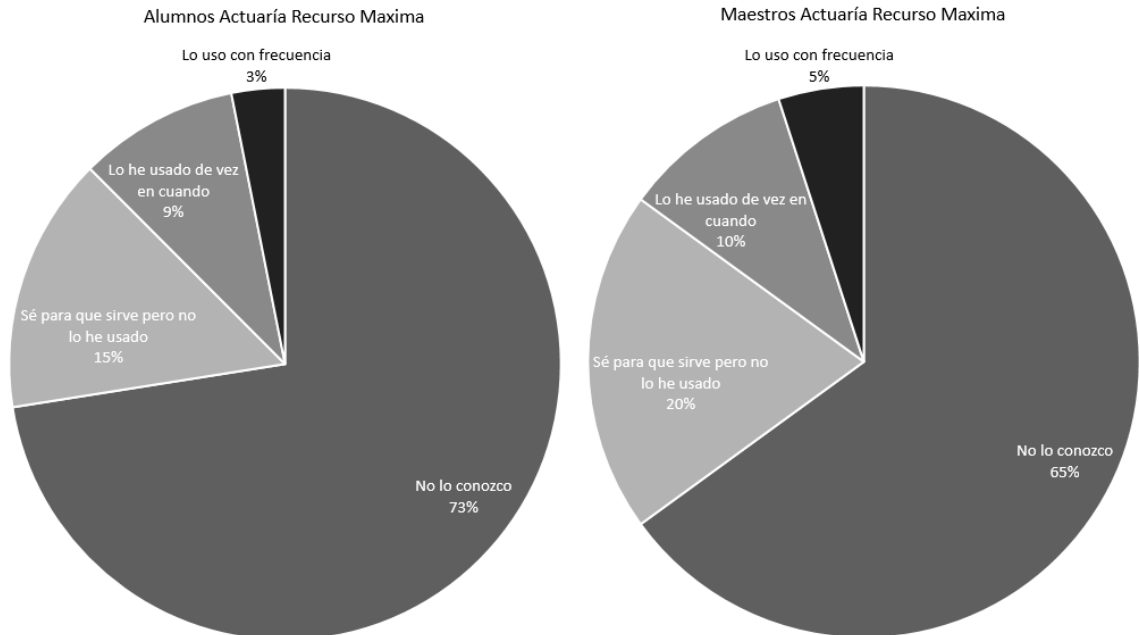


Figura 69 Comparación Actuaría Maxima

Con la herramienta MIT Mathlets los maestros son quienes tienen una mayor noción de ella, al contrario de los alumnos que casi no la conocen (Figura 70)

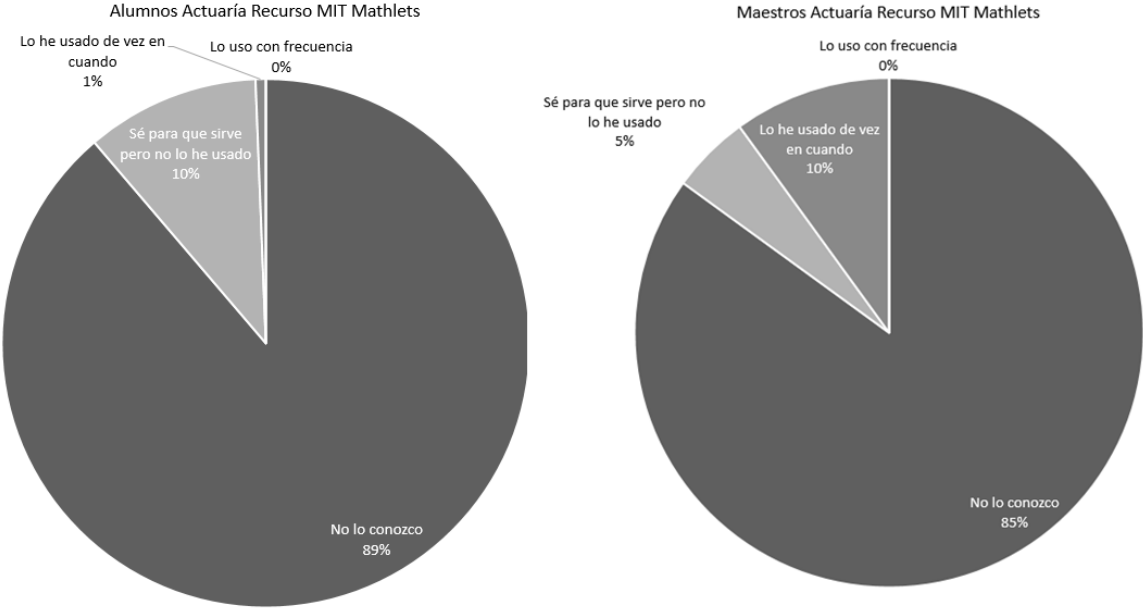


Figura 7 Comparación Actuaría MIT Mathles

Para el caso de NumberEmpire parece ser que los profesores conocen más esta herramienta aunque casi no hacen uso de ella (Figura 71)

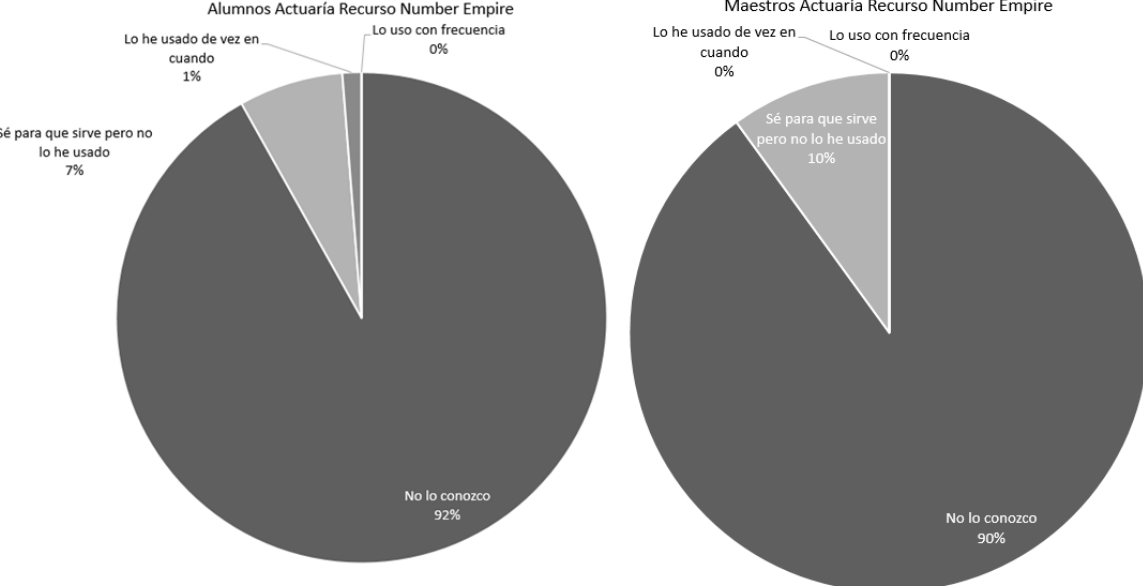


Figura 71 Comparación Actuaría NumberEmpire

En lo que respecta a PheTInteractiveSimulations son los alumnos quienes conocen más esta herramienta (Figura 72)

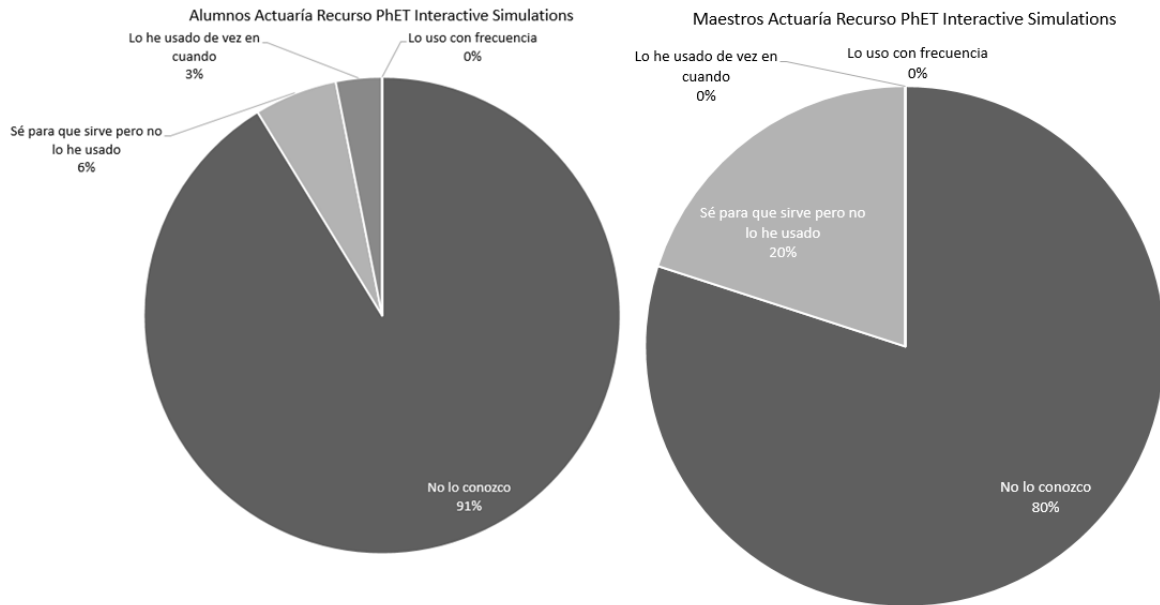


Figura 73 Comparación Actuaría Phet Interactive Simulations

En lo que corresponde a Rice Virtual Lab in Statistics se muestra que los alumnos hacen más uso de dicho sitio Web que los maestros (Figura 74)

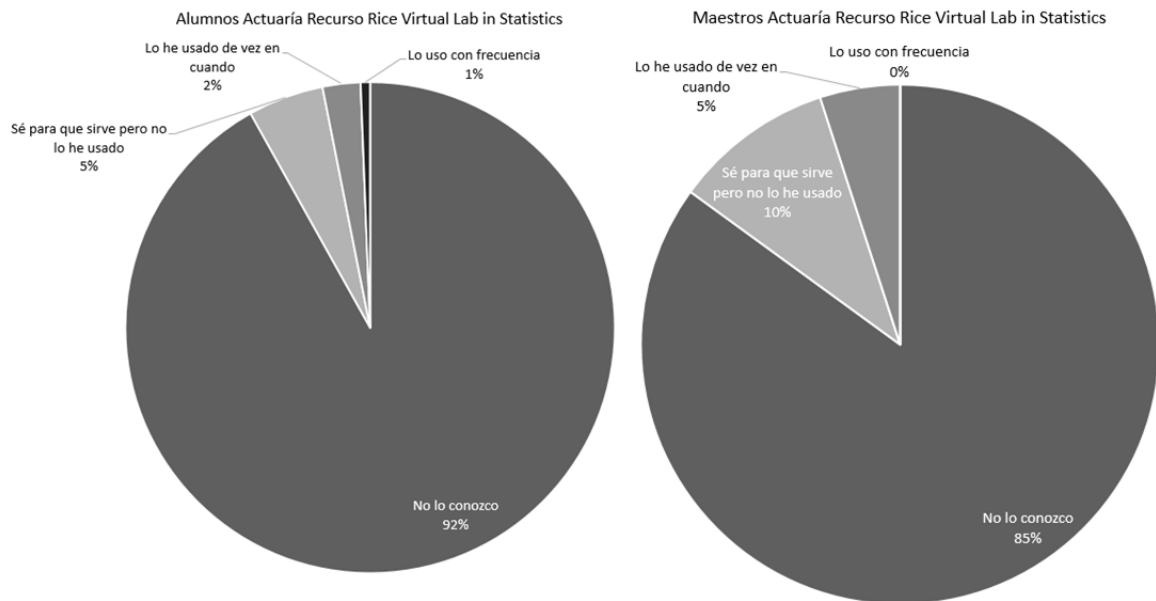


Figura 748 Comparación Actuaría Rice Virtual Lab in Statistics

En el caso de Vídeos de OCW, puede verse claramente que los maestros son quienes los consultan más (Figura 75)

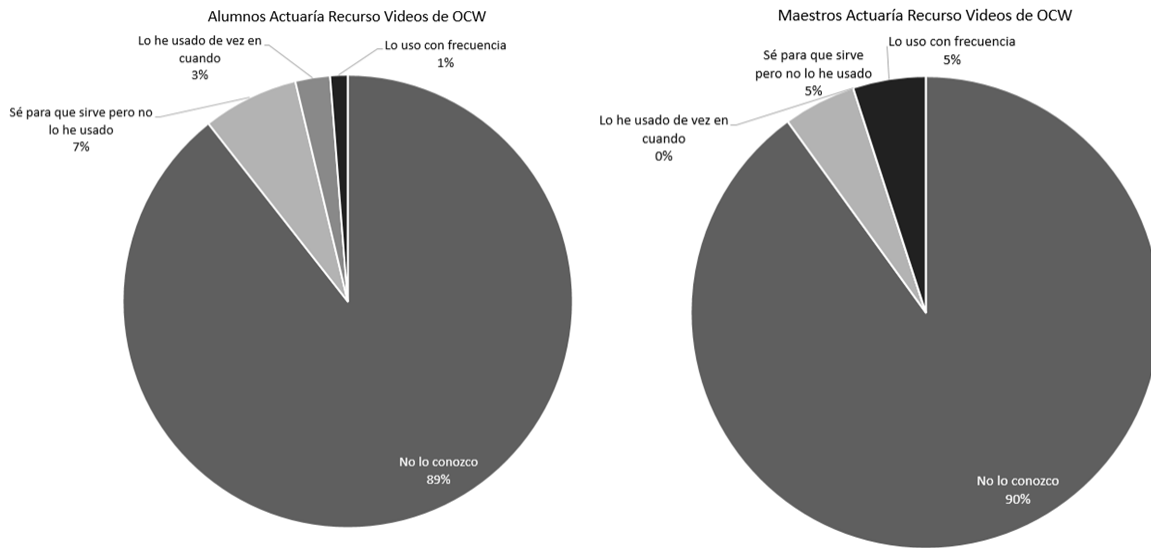


Figura 75 Comparación Actuaría Vídeos de OCW

En el caso de Virtual ProbabilityLab se puede observar que son los alumnos quienes más conocen y usan esta herramienta (Figura 76)

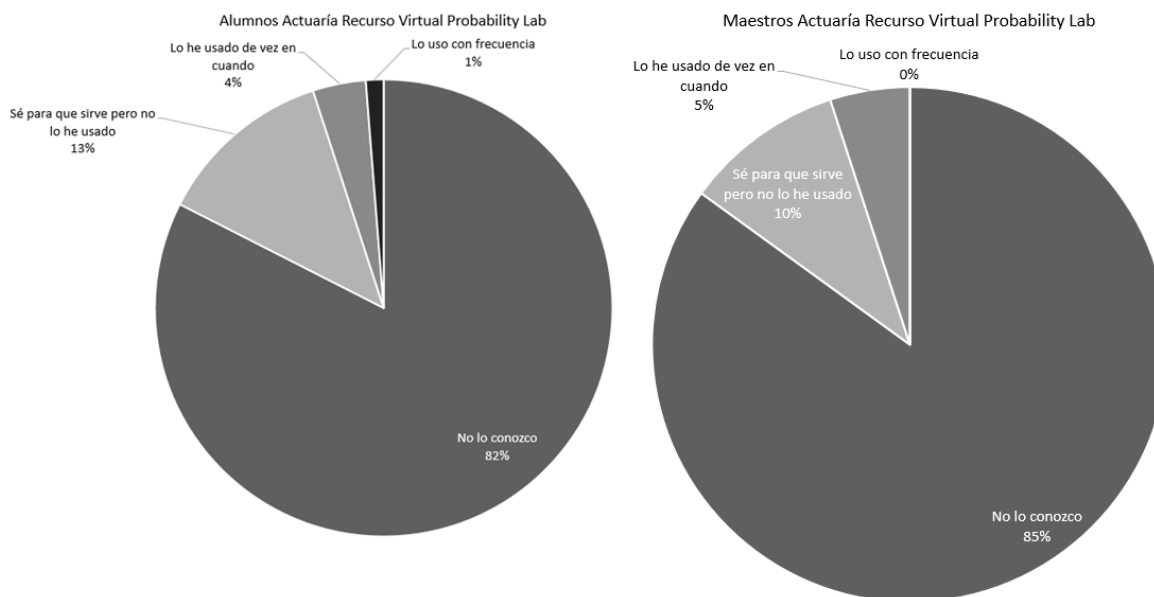


Figura 76 Comparación Actuaría Virtual ProbabilityLab

Respeto al sitio Web Interface for Statistics Education es evidente que son los alumnos quienes lo conocen y usan más (Figura 077)

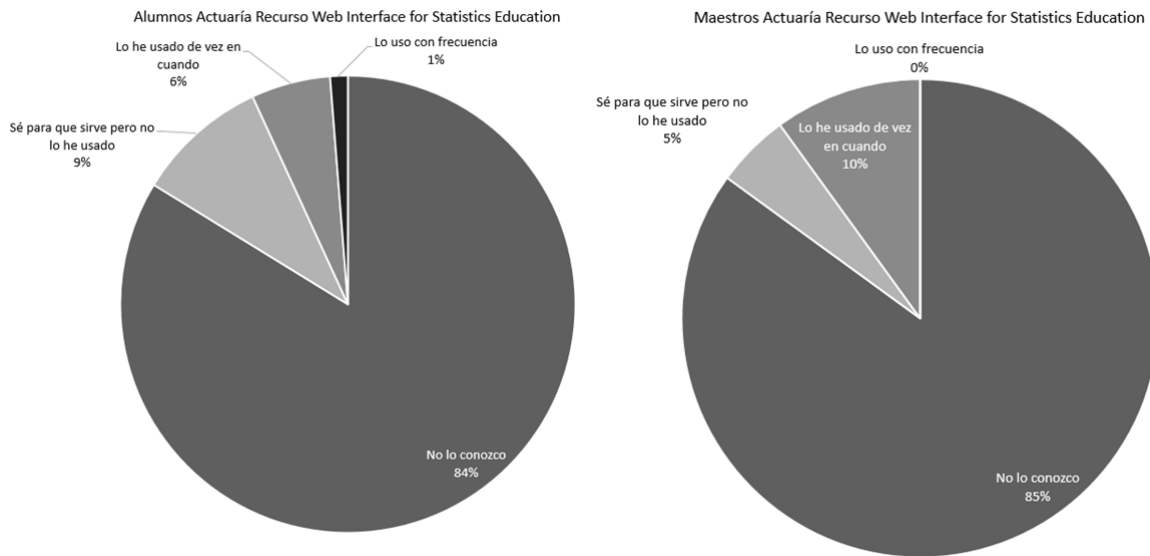


Figura 077 Comparación Actuaría Web Interface of Statistics Educaion

Para el software Wiris se puede observar que son los alumnos quienes lo han utilizado más, aunque son los profesores quienes lo conocen más (Figura 078)

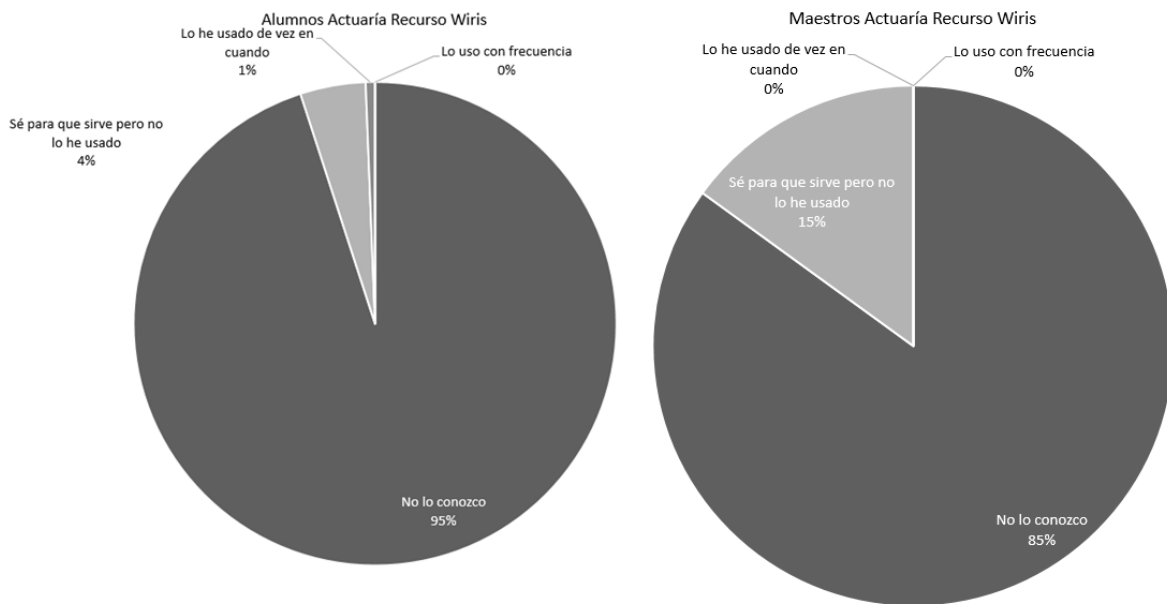


Figura 078 Comparación Actuaría Wiris

Para el caso de WolframAlpha es más que evidente que los alumnos conocen y hacen un mayor uso del software que los maestros (Figura 079)

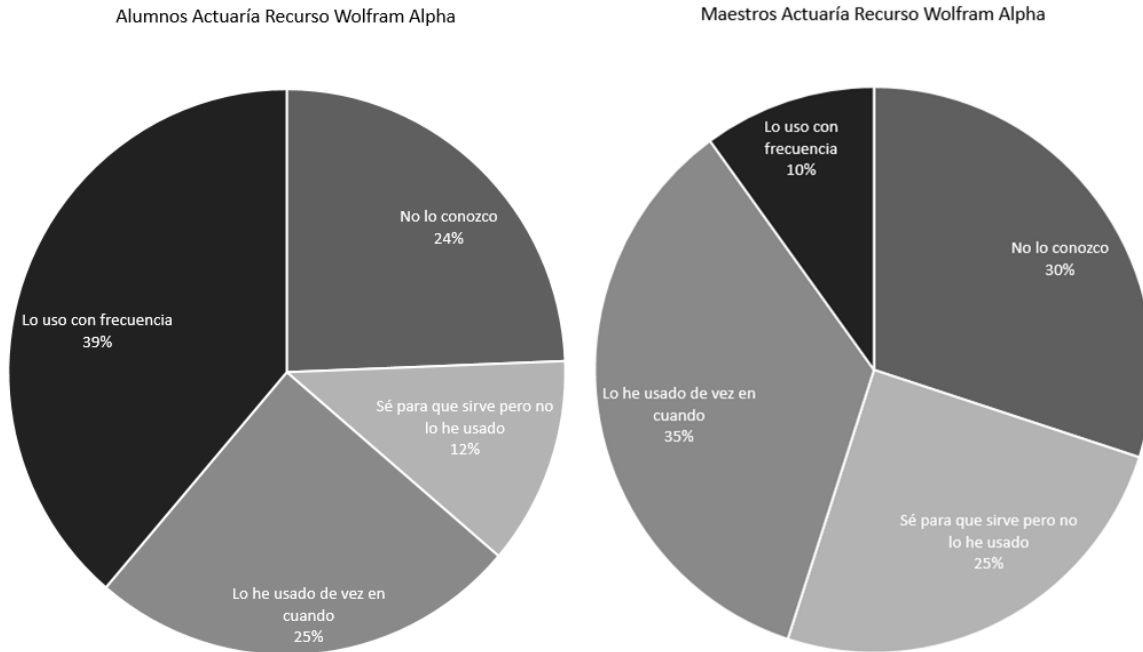


Figura 079 Comparación Actuaría WolframAlpha

En particular esta herramienta cabe destacar que es la única en la que los alumnos lo conocen mucho más que los maestros, por lo que vale la pena darle más enfoque. Quizás se deba a la familiarización de los jóvenes hacia las nuevas tecnologías que surgen durante su etapa de estudio y la facilidad entre compañeros de clase el dar a conocer una herramienta útil y práctica. Hay que recordar que existe una versión descargable e instalable en el ordenador para Wolfram Alpha (aunque no es la única); lo que existe la posibilidad de que un alumno que la haya conocido, la muestre a sus compañeros y sea motivo de difusión y uso sin necesidad de notificar a los maestros del conocimiento de dicha herramienta.

Resultados de Actuaría

En la carrera de Actuaría en la mayoría de los casos los maestros son quienes más conocen los recursos Web de esta investigación.

Ingeniería Civil

Para el caso de la herramienta Descartes, es muy claro que son los maestros quienes conocen y utilizan más el software comparado con los alumnos (Figura 080)

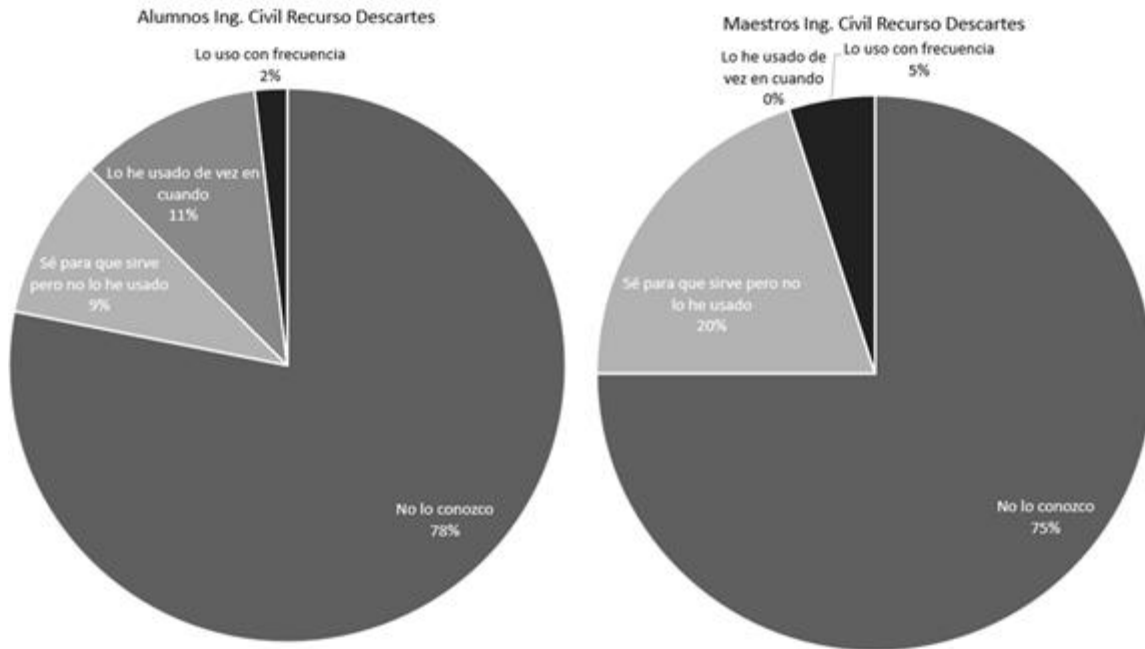


Figura 080 Comparación Ing. Civil Descartes

Respecto al sitio GapMinder se muestra que los alumnos lo conocen y usan más comparado con los maestros (Figura 081)

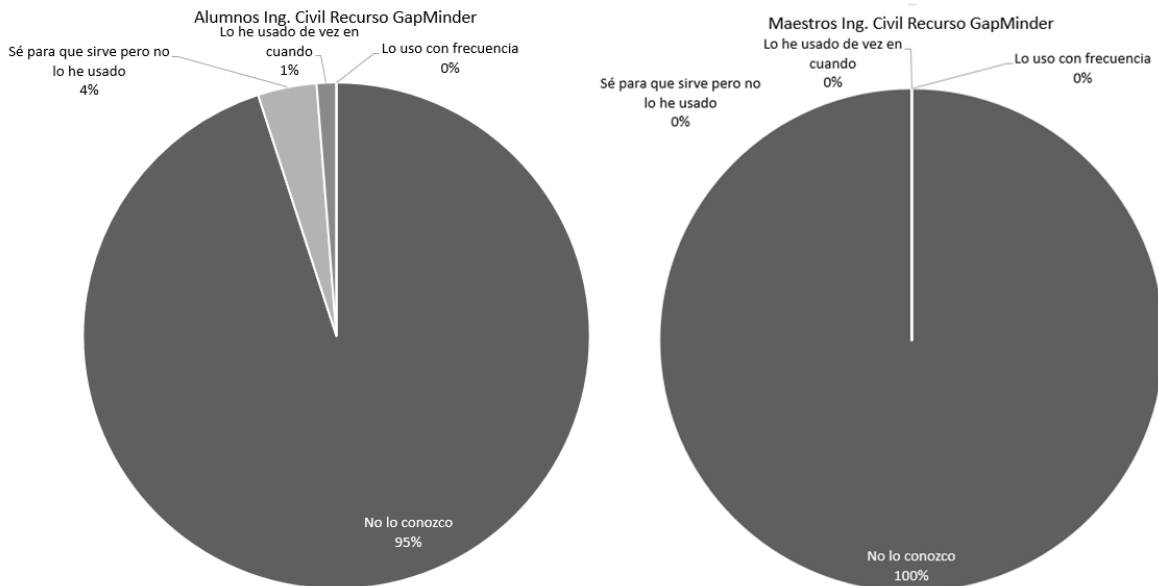


Figura 081 Comparación Ing. Civil GapMinder

En lo que respecta al software GeoGebra los maestros conocen más de esta herramienta en comparación con los alumnos (Figura 082)

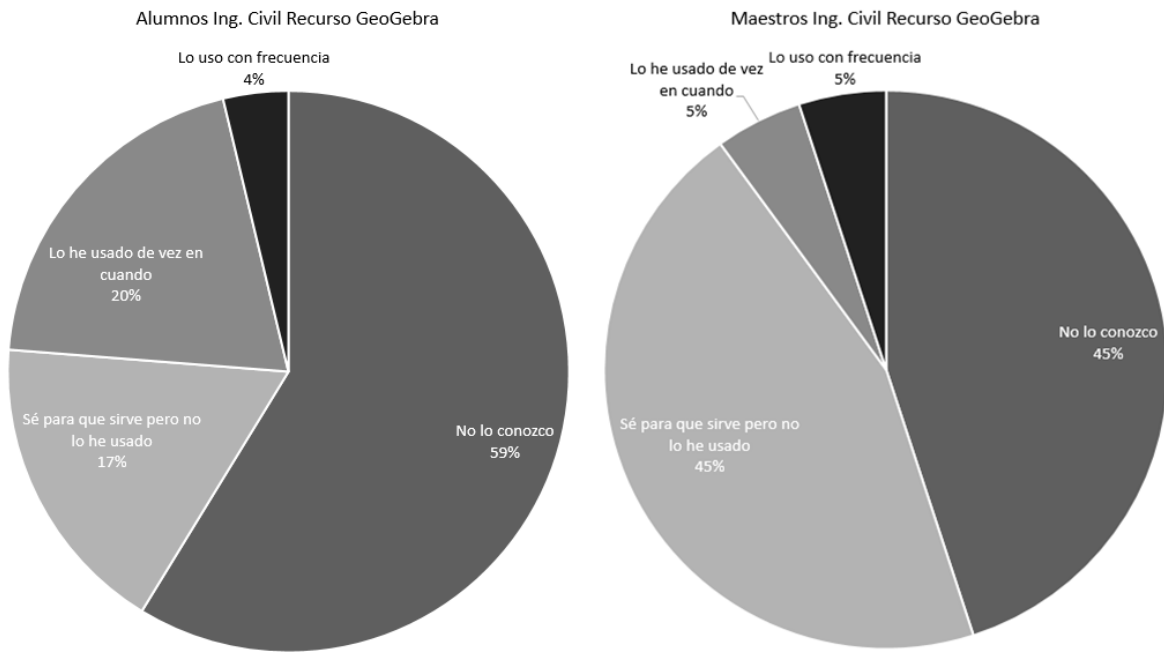


Figura 082 Comparación Ing. Civil Geogebra

Para el caso de KhanAcademy, los alumnos son quienes por una diminuta diferencia conocen más los vídeos de este sitio Web comparado con los maestros que casi no lo conocen (Figura 083)

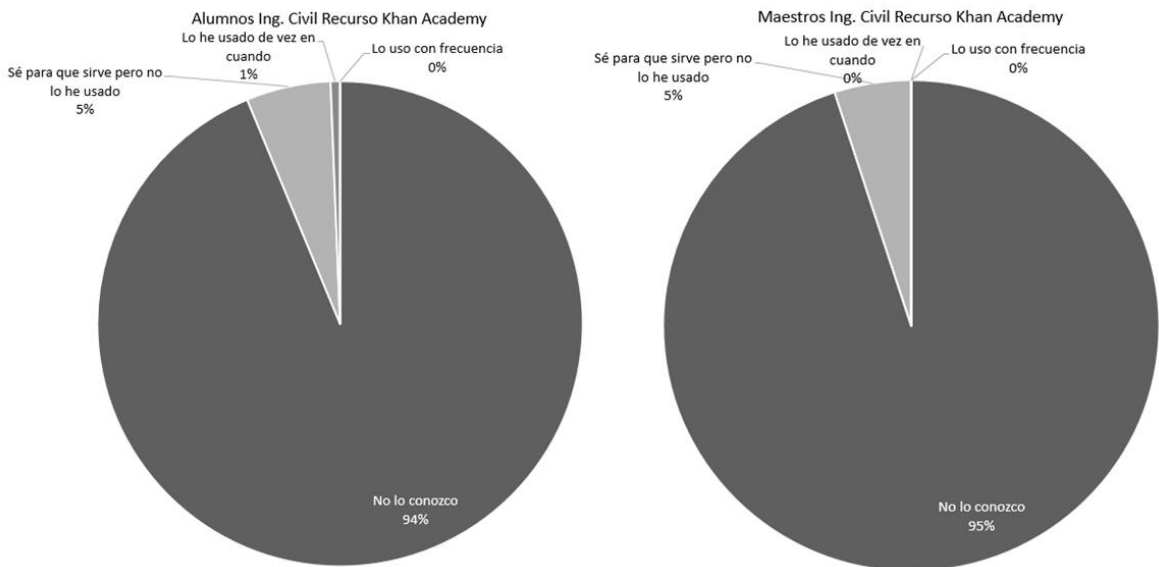


Figura 083 Comparación Ing. Civil KhanAcademy

En lo que corresponde a Math 2 Me, son los alumnos quienes hacen mayor uso de los vídeos que los maestros, que lo conocen muy poco (Figura 084)

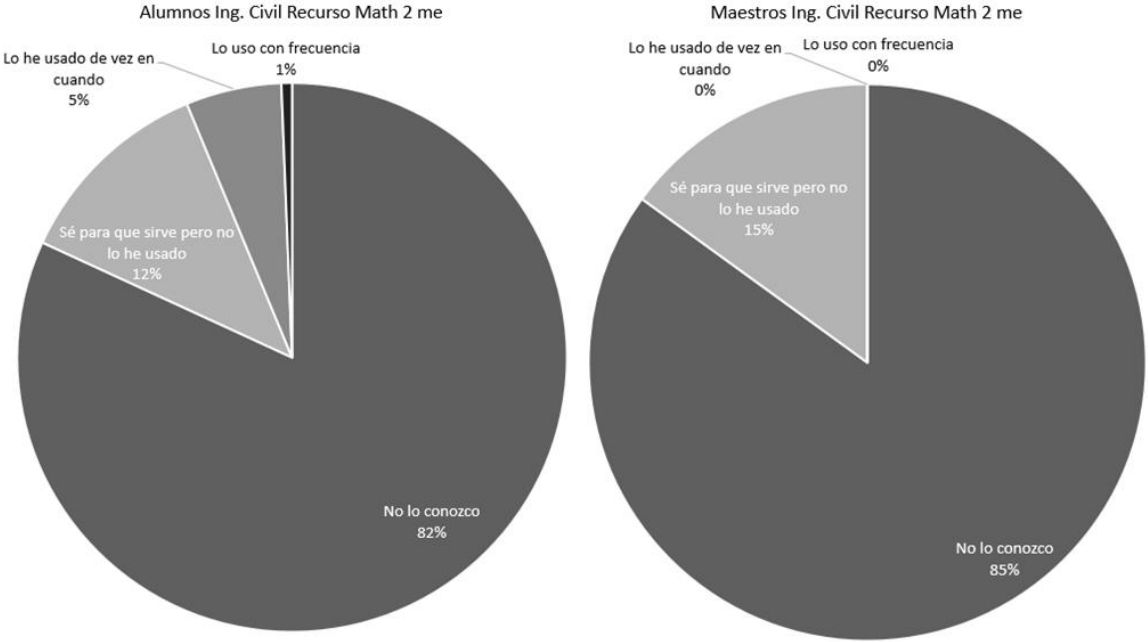


Figura 084 Comparación Ing. civil Math 2 Me

Con respecto a Maxima, es muy evidente que los alumnos saben más del software que los maestros, que no conocen muy poco del mismo (Figura 085)

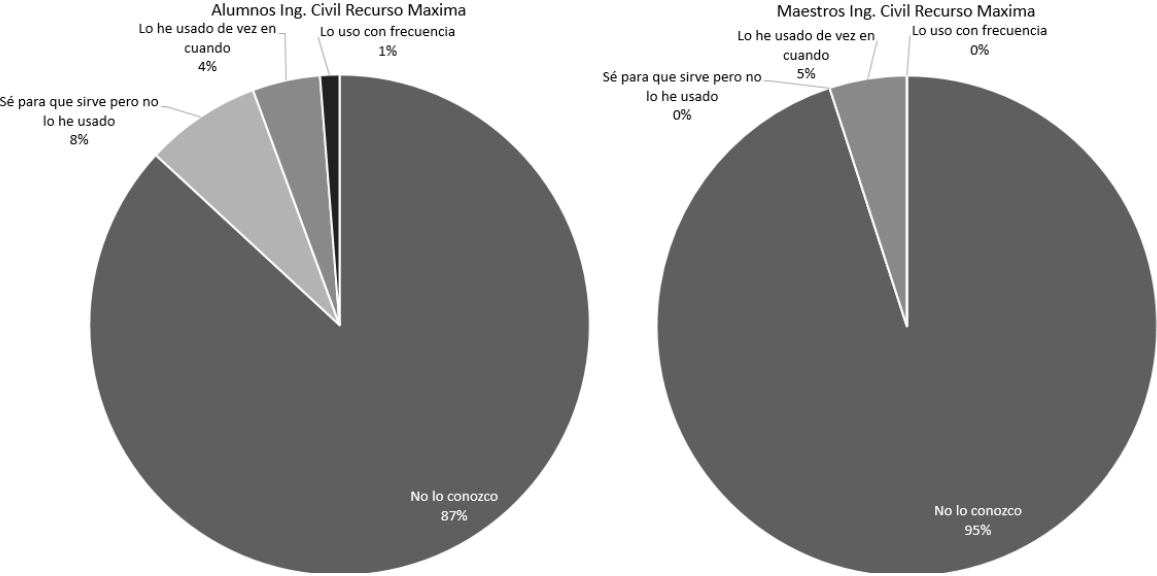


Figura 085 Comparación Ing. civil Maxima

Para la herramienta MIT Mathlets, se muestra que los alumnos la conocen y utilizan más que los maestros (Figura 086)

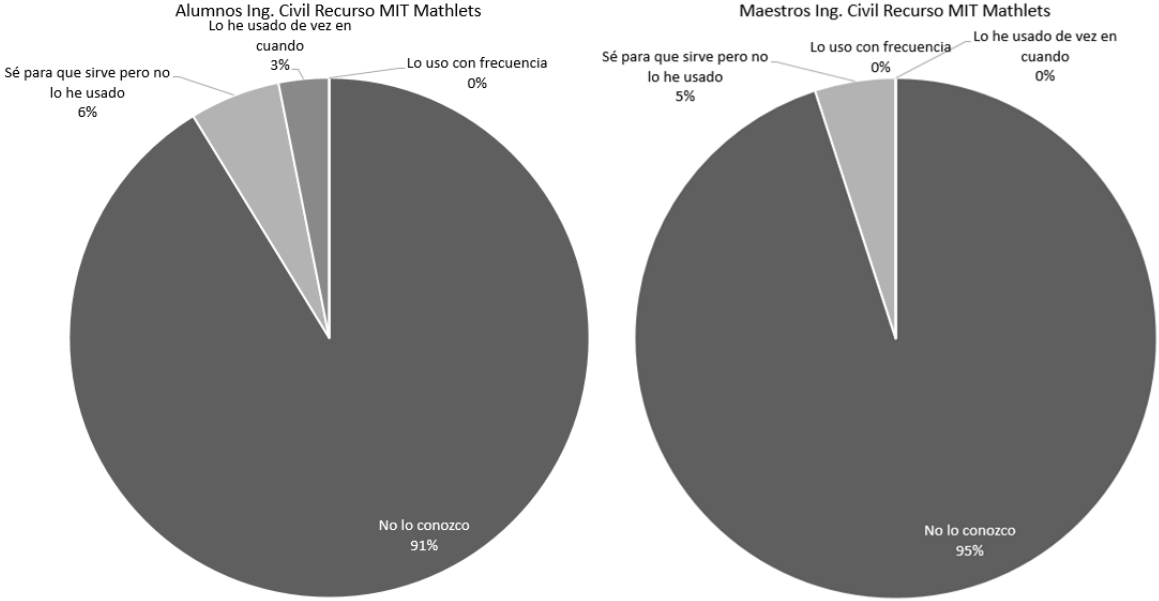


Figura 086 Comparación Ing. Civil MIT Mathles

Con respecto al recurso Number Empire, es utilizado y más conocido por los alumnos en comparación con los maestros que casi no lo conocen. (Figura 087)

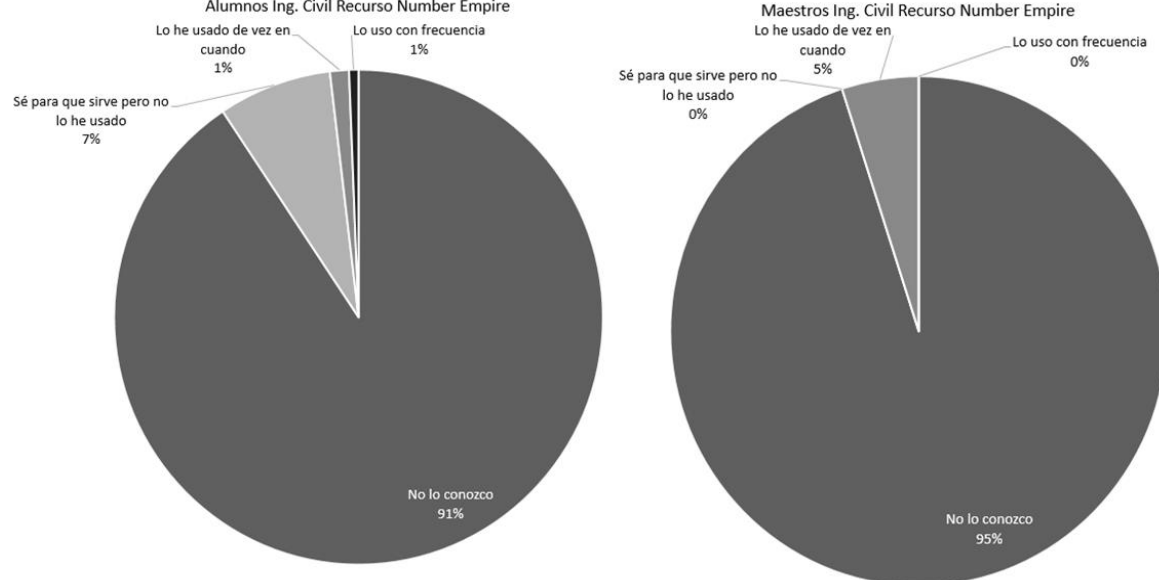


Figura 087 Comparación Ing. Civil Number Empire

En el caso del sitio PheT Interactive Simulations los alumnos son quienes más lo han utilizado aunque sea por muy poco, en comparación con los maestros que definitivamente no lo conocen (Figura 088)

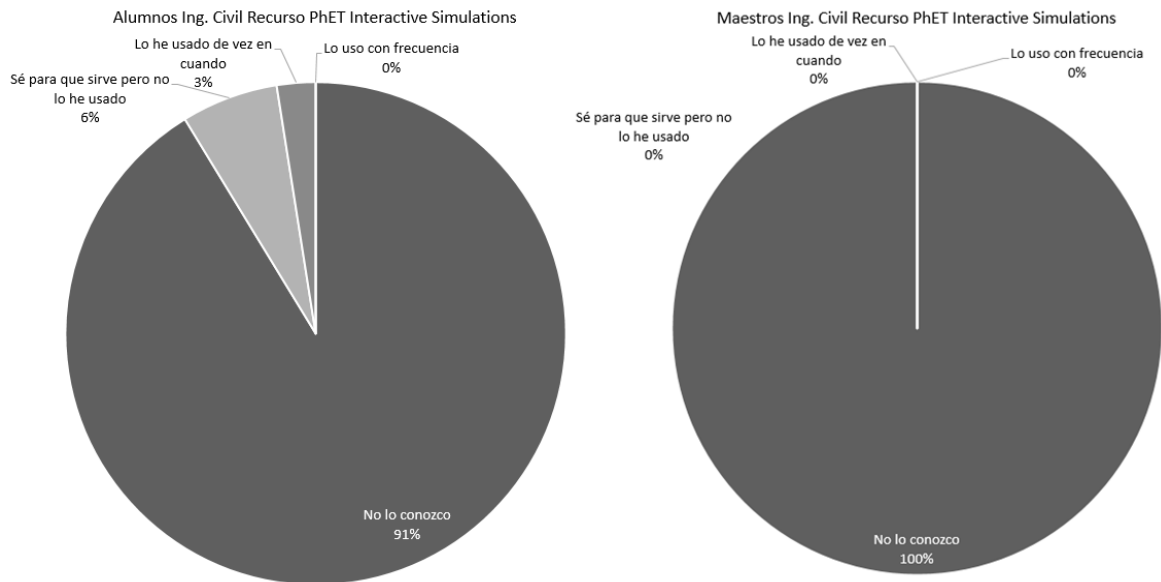


Figura 088 Comparación Ing. Civil PhET Interactive Simulations

En lo que respecta a la página Rice Virtual Lab in Statistics los alumnos muestran conocerlo y usarlo por una pequeña porción contrario al caso de los maestros que es casi nulo su conocimiento acerca de la página (Figura 890)

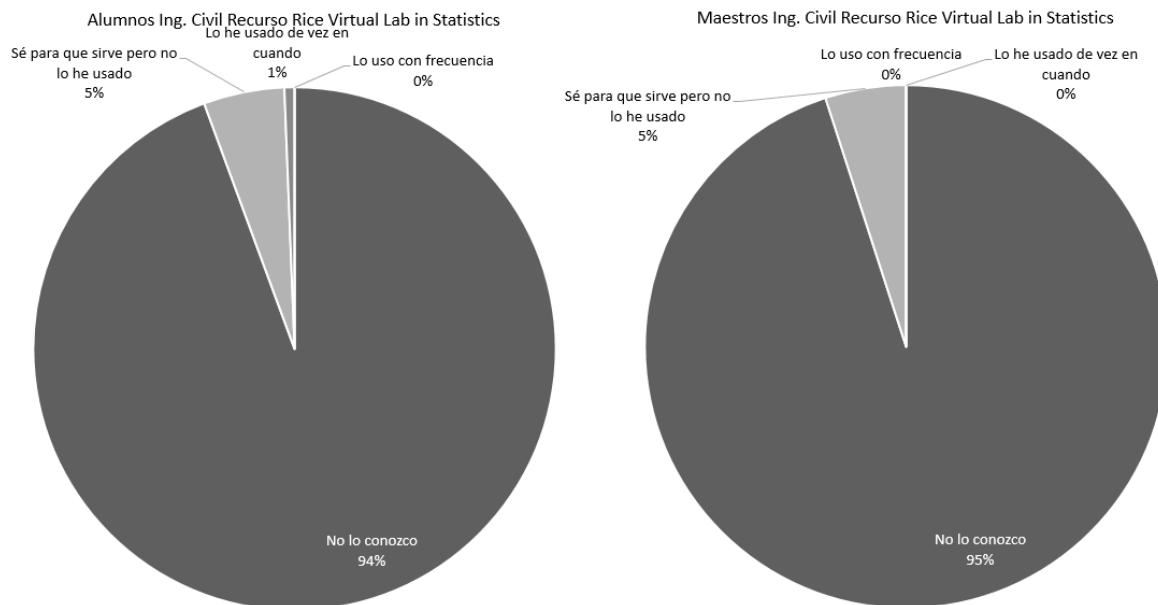


Figura 089 Comparación Ing. Civil Rice Virtual Lab in Statistics

En lo que corresponde a los Videos de OCW, los maestros son lo que más los consultan comparado con los alumnos quienes casi no los conocen (Figura 090)

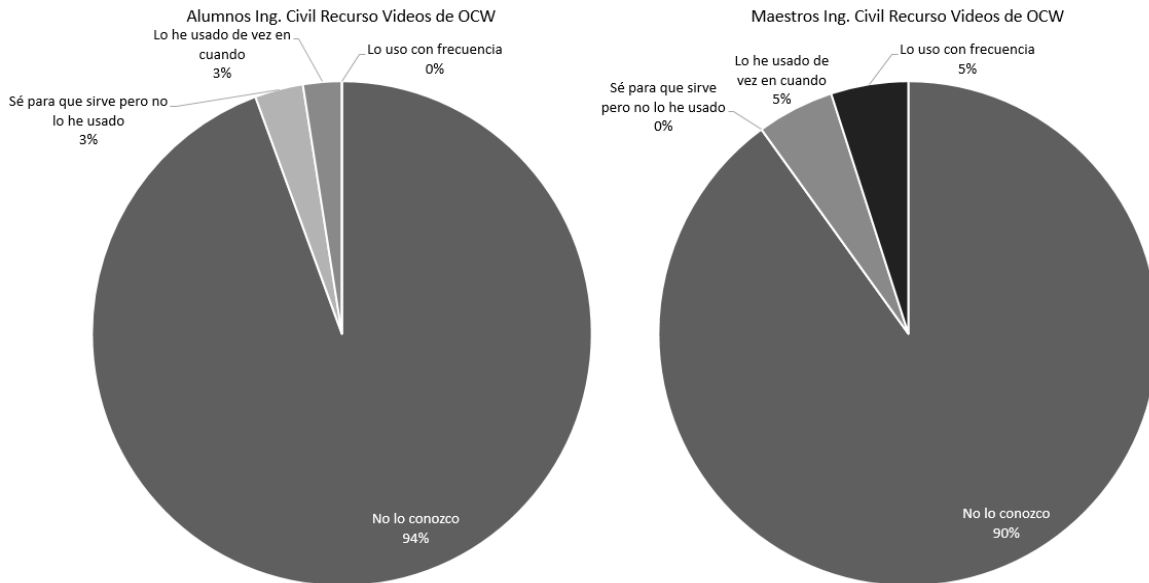


Figura 090 Comparación Ing. Civil Videos de OCW

Con respecto al recurso Virtual Probability Lab los alumnos muestran un mayor conocimiento del mismo en comparación con los maestros que casi no lo conocen (Figura 091)

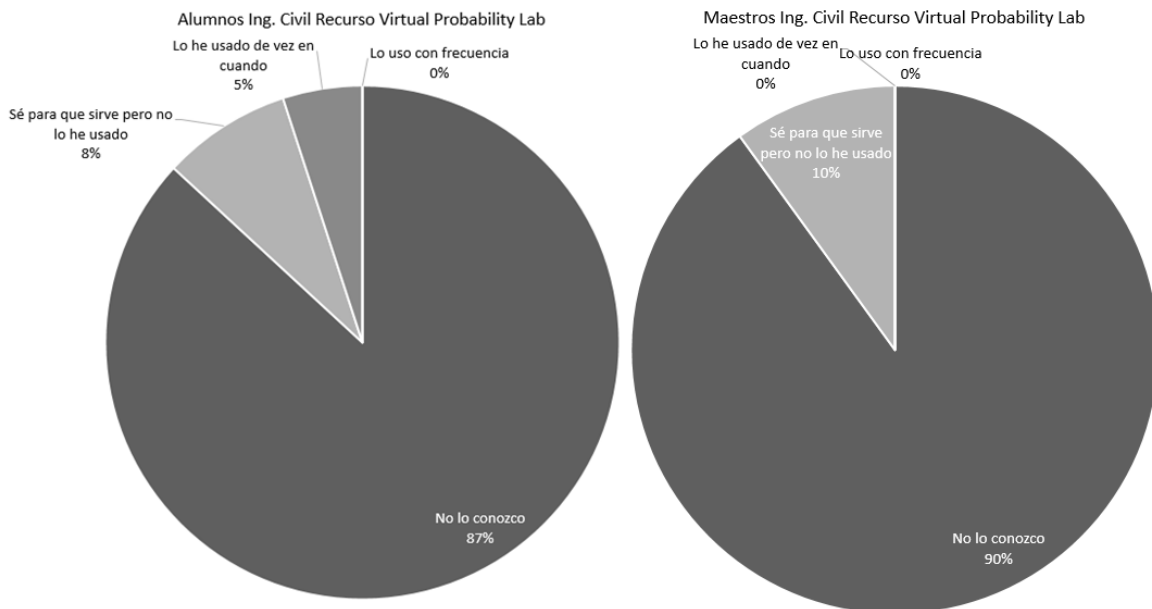


Figura 091 Comparación Ing. Civil Vitrual Probability Lab

En el caso de la herramienta Web Interface for Statistics Education los alumnos son quienes lo usan y conocen más en comparación con los maestros (Figura 092)

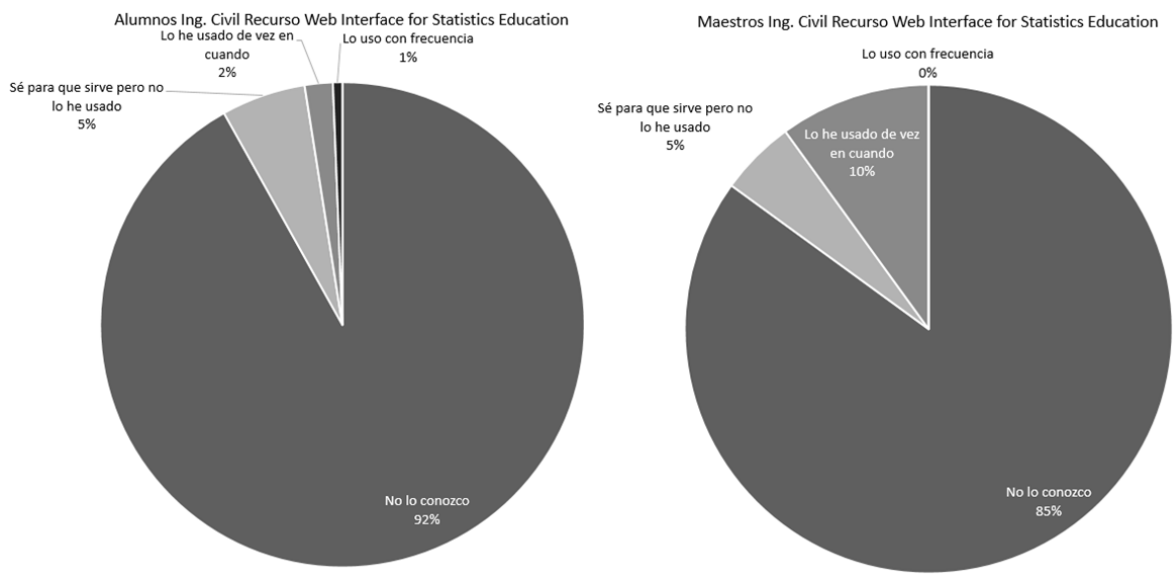


Figura 092 Comparación Ing. Civil Web Interface for Statistics Education

En lo que respecta al software Wiris, los alumnos conocen un poco más en comparación con los profesores, aunque es muy poco lo que lo utilizan (Figura 093)

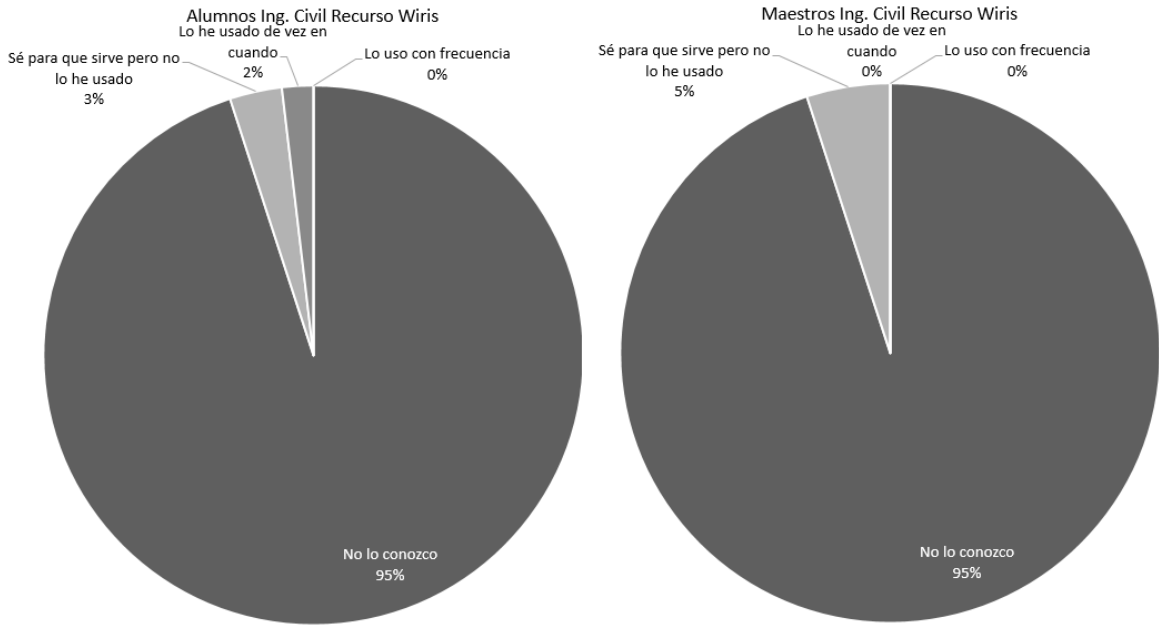


Figura 093 Comparación Ing. Civil Wiris

En el caso del software WolframAlpha, es muy evidente que los alumnos lo utilizan más en comparación con los maestros (Figura 094)

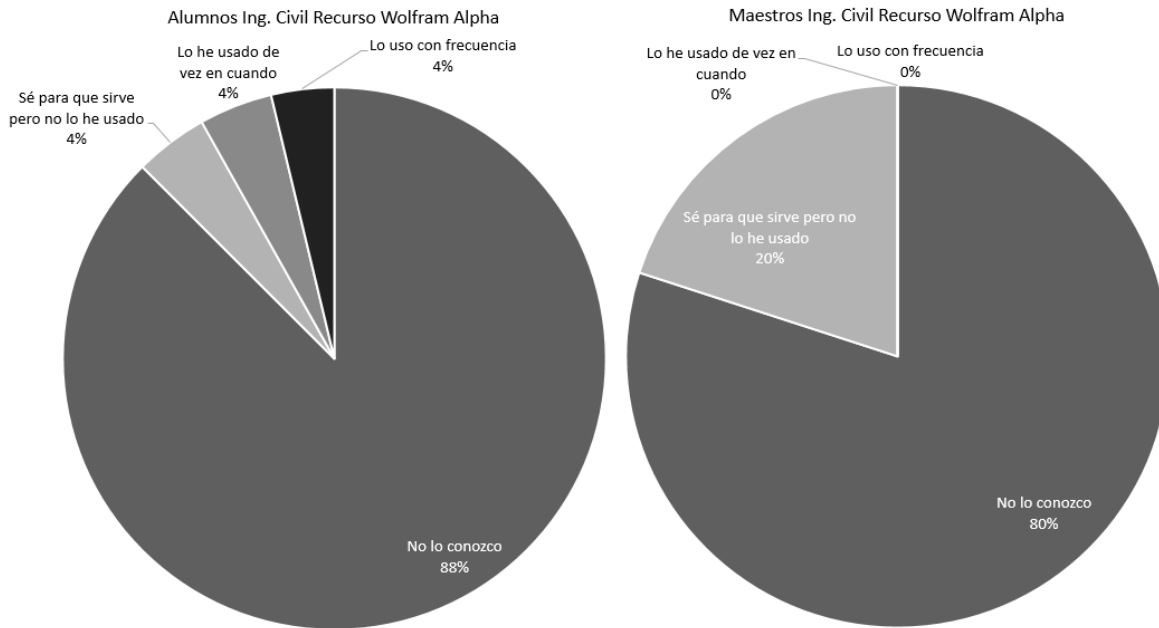


Figura 094 Comparación Ing. Civil WolframAlpha

Resultados de Ingeniería Civil

En la carrera de Ingeniería Civil en la mayoría de los casos son los alumnos quienes conocen y utilizan más los recursos Web enumerados en esta investigación.

Matemáticas Aplicadas y Computación (MAC)

En el caso del recurso Descartes, los maestros lo conocen más que los alumnos, aunque no lo utilizan, mientras que los alumnos aunque lo conocen menos lo utilizan más (Figura 0-31)

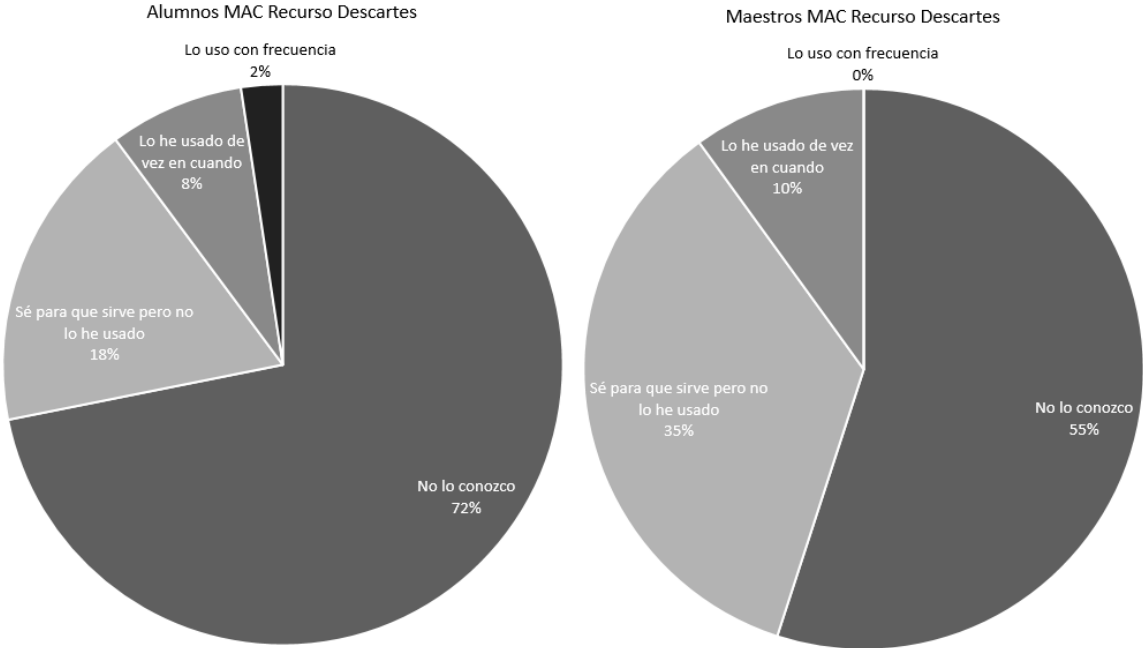


Figura 0-31 Comparación MAC Descartes

En lo que respecta al sitio GapMinder los alumnos que lo conocen menos que los profesores, lo utilizan más (Figura 0-32)

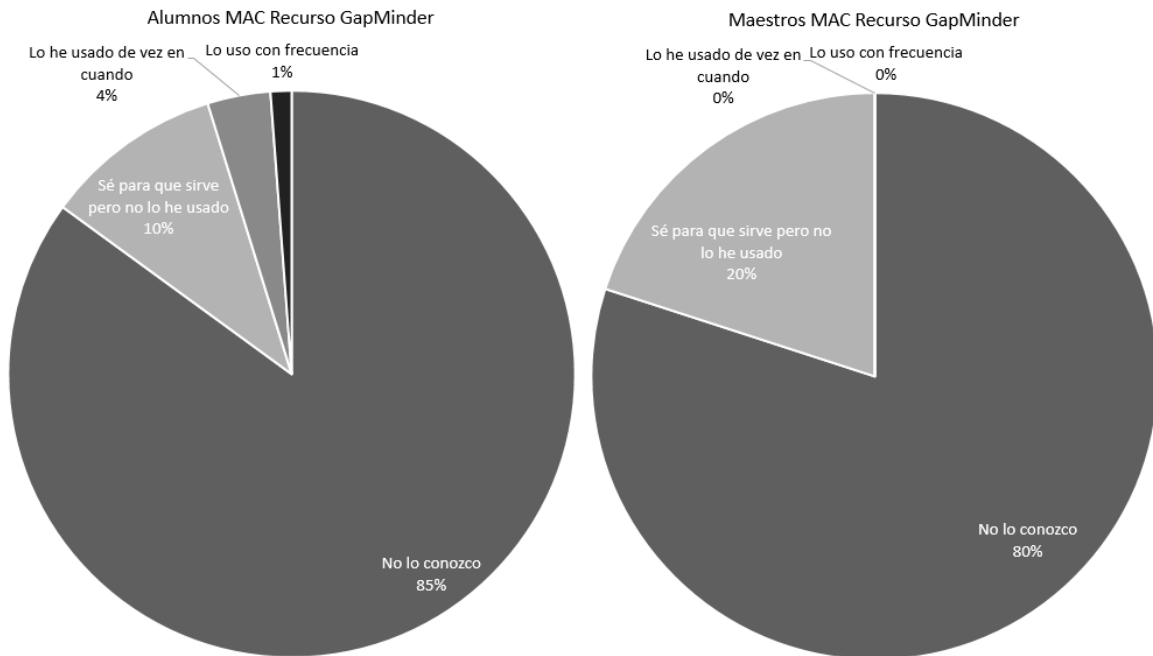


Figura 0-32 Comparación MAC GapMinder

Respecto a GeoGebra, los maestros tienen una mayor noción del software, pero los alumnos lo usan en mayor medida (Figura 0-33)

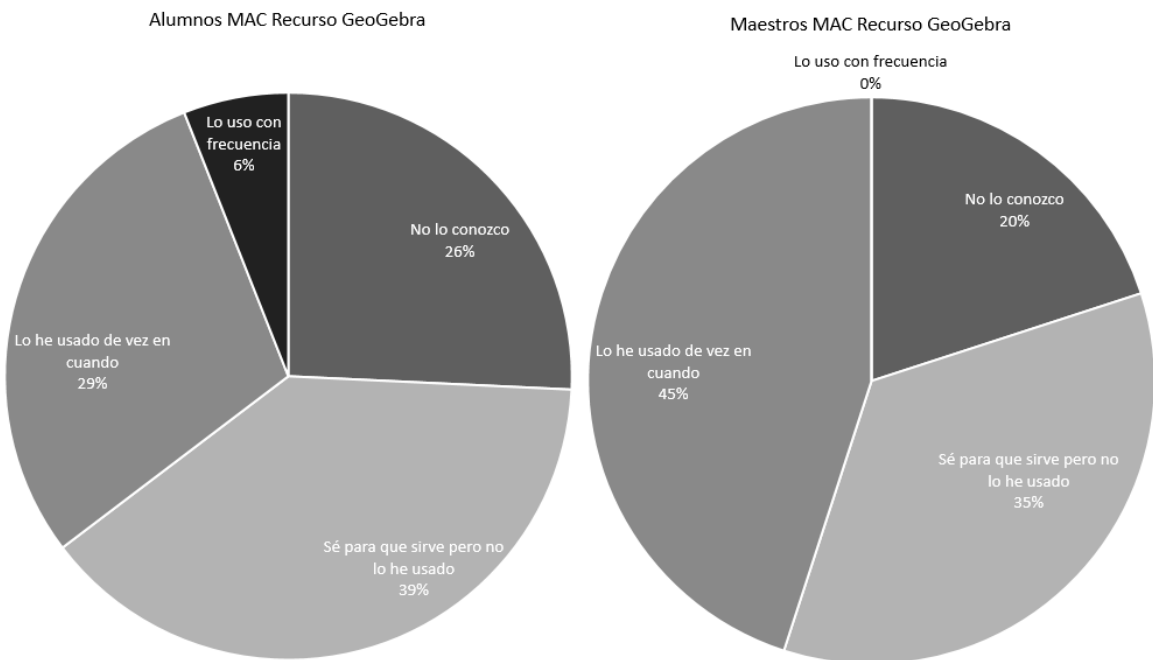


Figura 0-33 Comparación MAC GeoGebra

En lo que respecta a KhanAcademy, los alumnos son quienes conocen y consultan más los vídeos que los maestros (Figura 0-34)

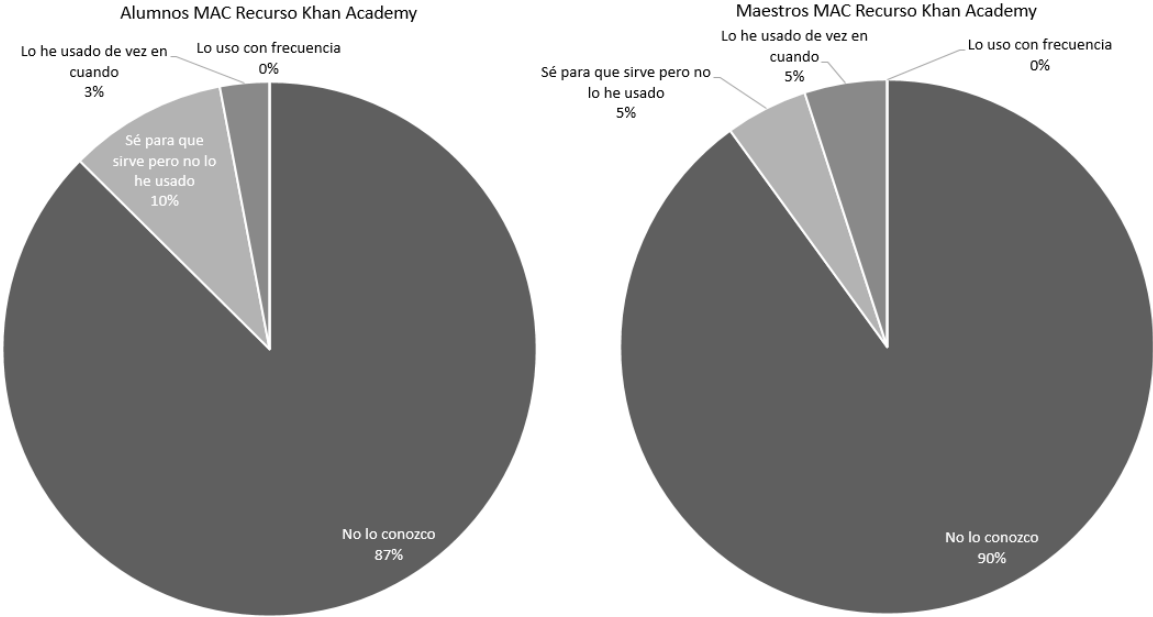


Figura 0-34 Comparación MAC KhanAcademy

Para el caso del sitio Math 2 Me los alumnos son quienes conocen y consultan más los vídeos que los maestros (Figura 0-35)

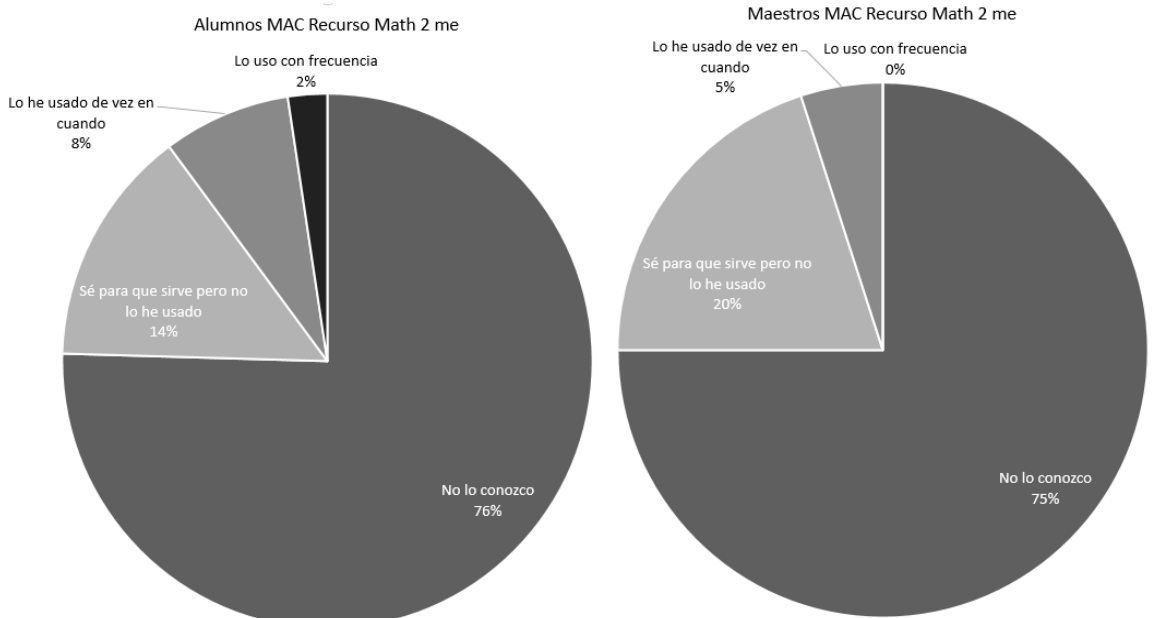


Figura 0-35 Comparación MAC Math 2 Me

Para la página de Maxima, es muy claro que los alumnos conocen más y usan con mayor frecuencia el software que los maestros (Figura 0-36)

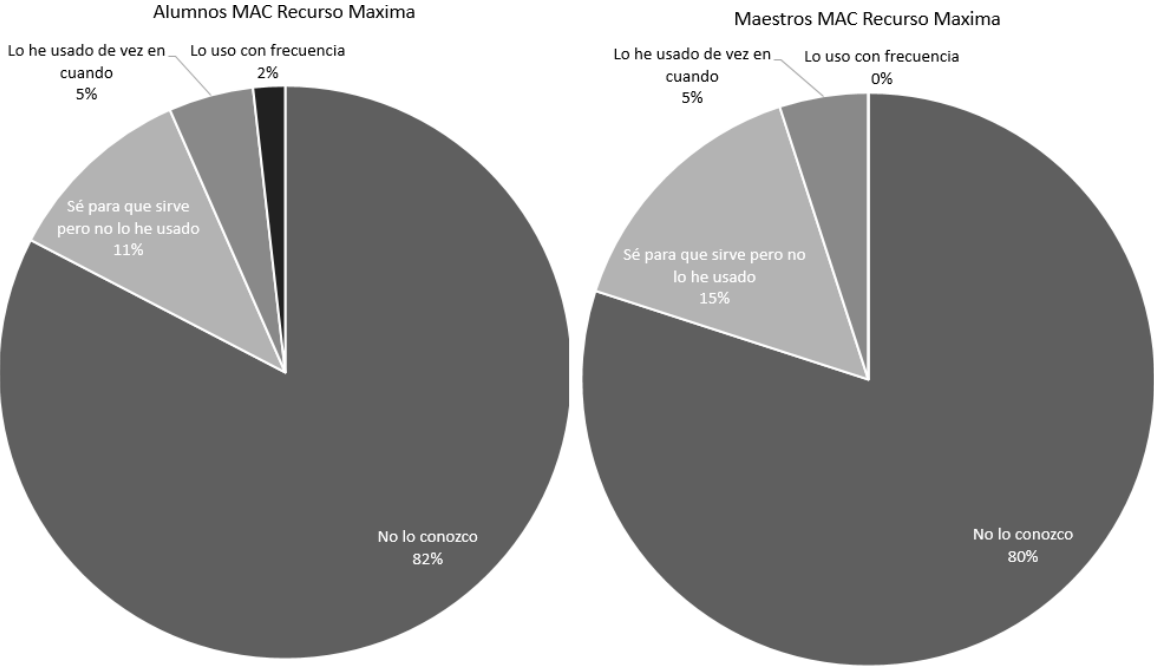


Figura 0-36 Comparación MAC Maxima

Respecto al sitio MIT Mathles los alumnos son quienes lo usan y conocen más comparado con los profesores (Figura 0-37)

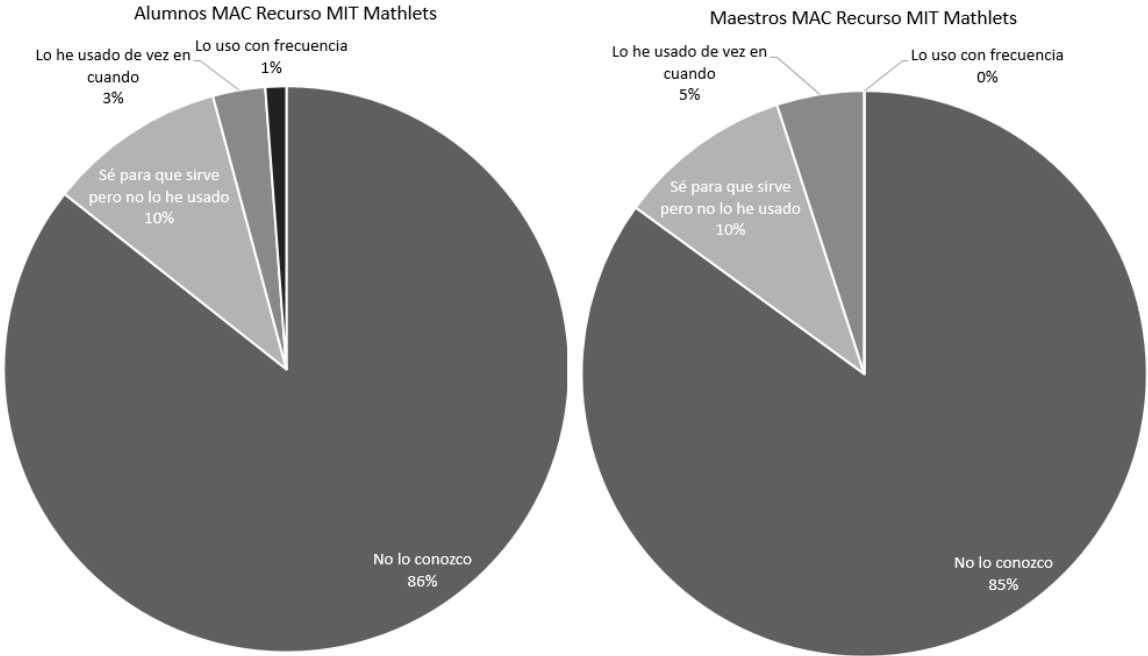


Figura 0-37 Comparación MAC MIT Mathlets

En lo que corresponde a NumberEmpire, quienes conocen y usan más son los alumnos en comparación con los maestros (Figura 0-38)

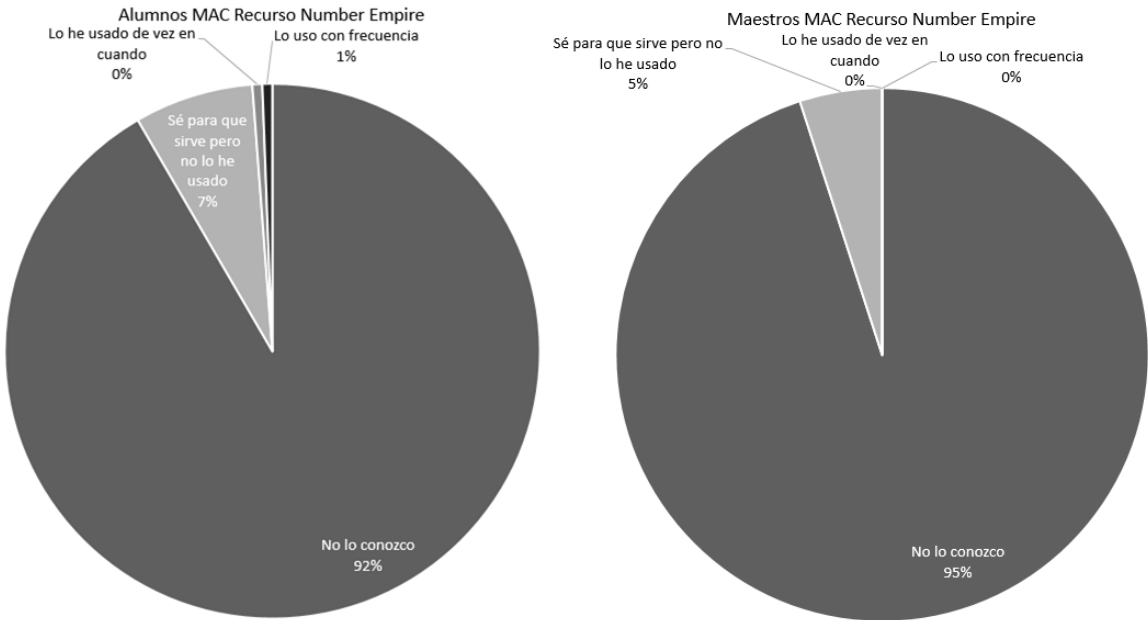


Figura 0-38 Comparación MAC NumberEmpire

En el caso de PheT Interactive Simulations los maestros son quienes conocen más el sitio Web comparado con los alumnos (Figura 0-39)

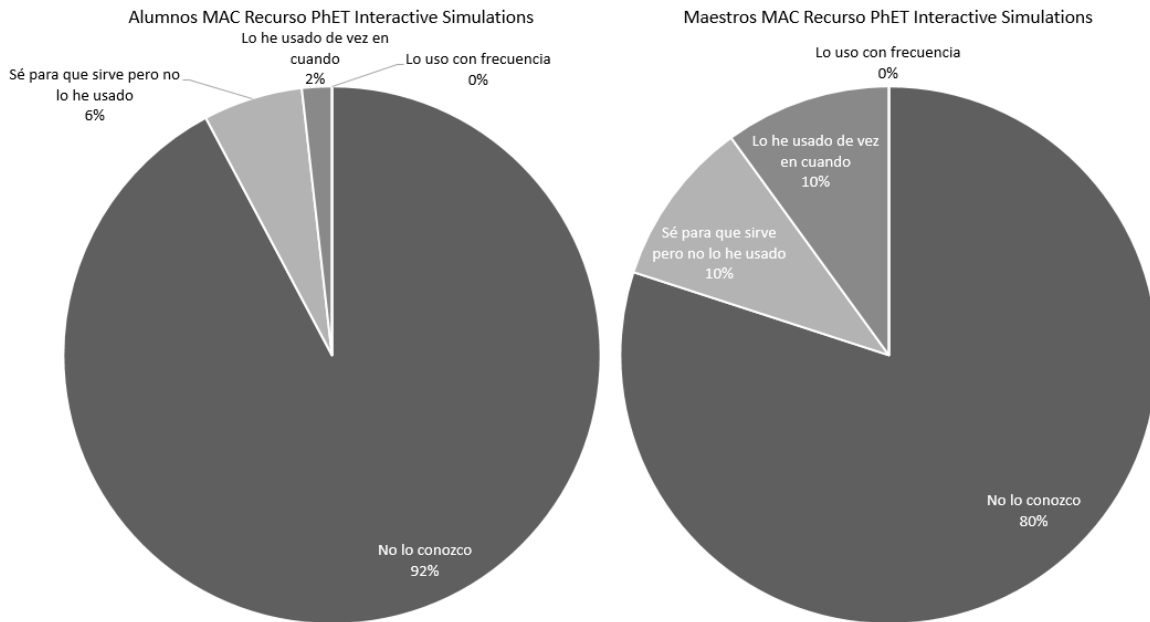


Figura 0-39 Comparación MAC PhETInteractiveSimulations

En lo que respecta a la herramienta Virtual Lab in Statistics es muy claro que los maestros son quienes lo conocen y utilizan más que los alumnos (Figura 0-40)

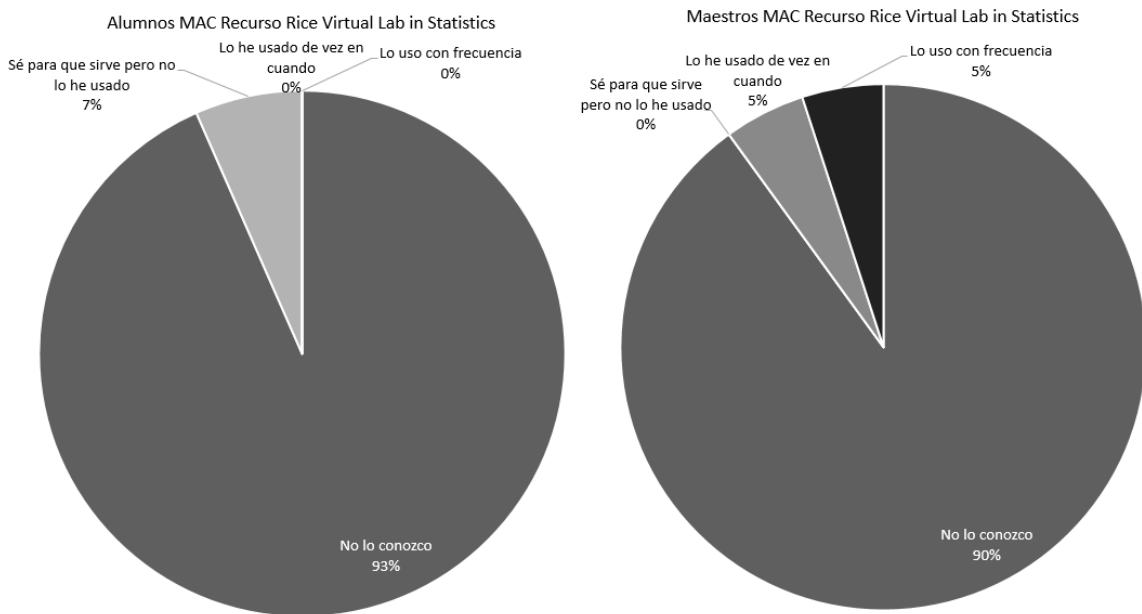


Figura 0-40 Comparación MAC Rice Virtual Lab in Statistics

Para el caso de los Vídeos de OCW es evidente que los maestros conocen y consultan más los vídeos que los alumnos (Figura 0-41)

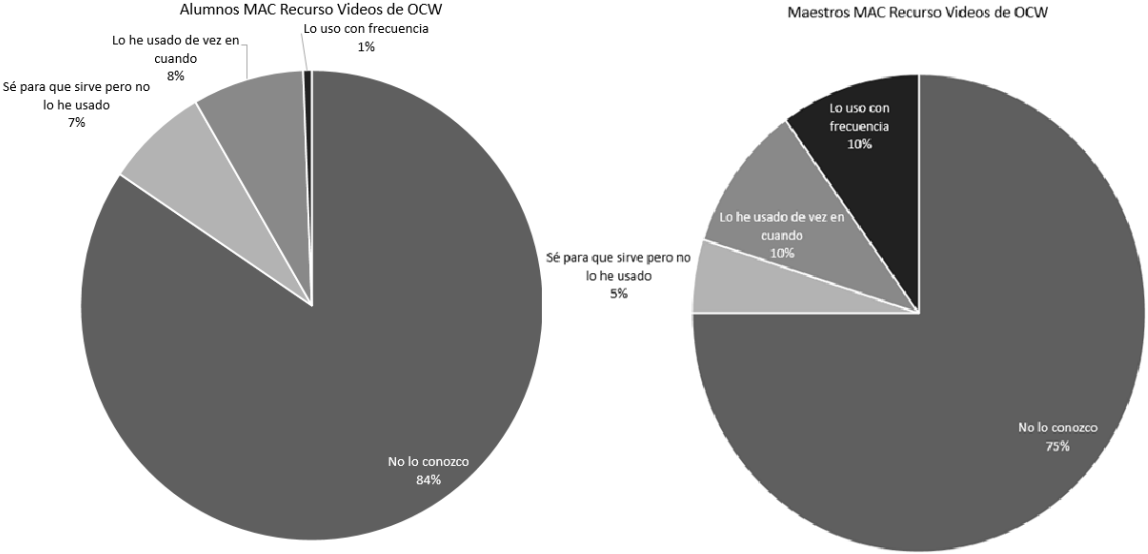


Figura 0-41 Comparación MAC Videos de OCW

Respecto a la herramienta Virtual ProbabilityLab los maestros conocen y utilizan más que los alumnos (Figura 0-42)

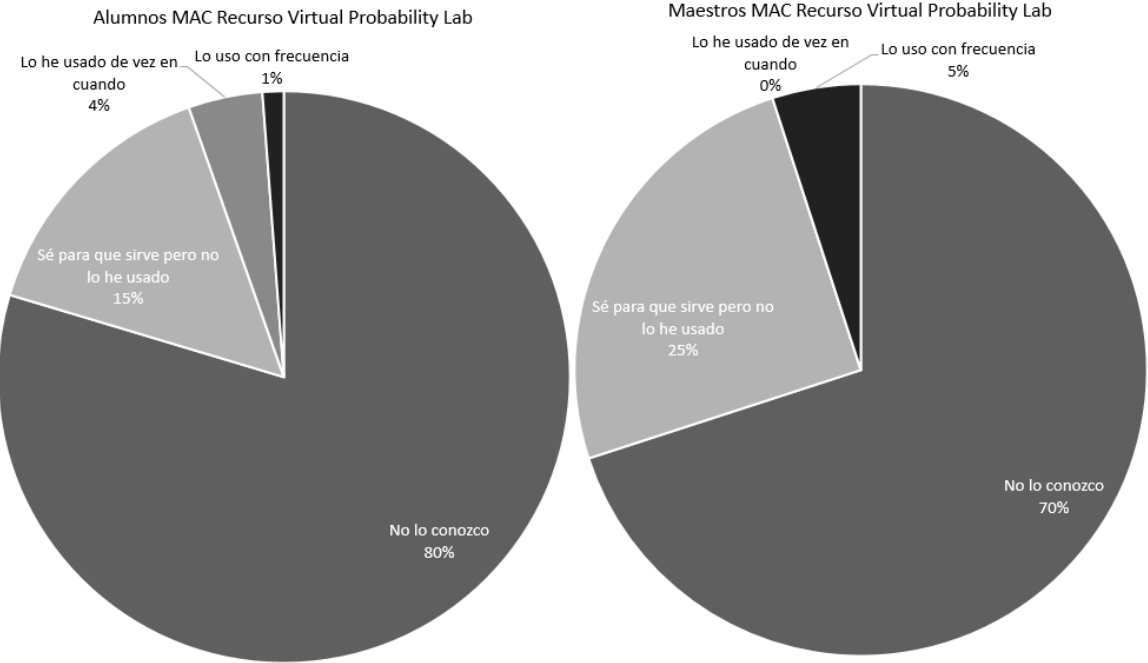


Figura 0-42 Comparación MAC Virtual Probability Lab

En el caso del recurso Web Interface of Statistics Education son los maestros quienes conocen y lo usan más comparado con los alumnos que casi no conocen (Figura 0-43)

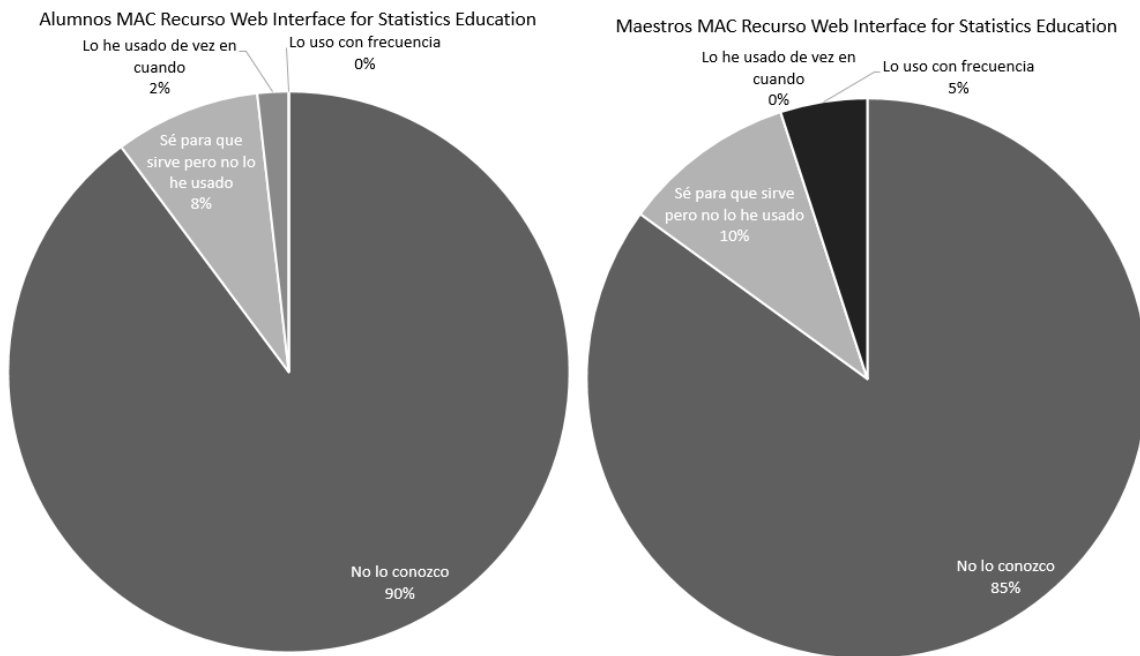


Figura 0-43 Comparación MAC Web Interface for Statistics Education

En lo que respecta a Wiris los alumnos, aunque es por muy poco, conocen más el software que los maestros (Figura 0-44)

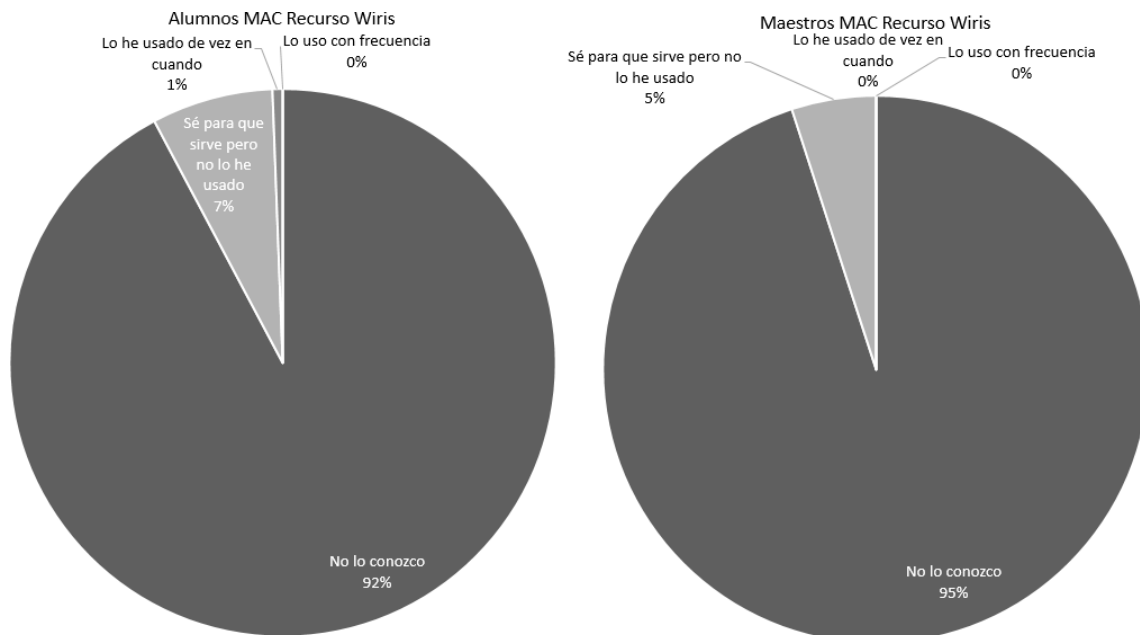


Figura 0-44 Comparación MAC Wiris

Respecto a WolframAlpha, es evidente que son los alumnos quienes conocen y utilizan más el software en comparación con los maestros. De todas las gráficas esta última esté, es el software que más conocen y utilizan tanto alumnos como maestros en la que sus gráficas están muy parejas (Figura 0-45)

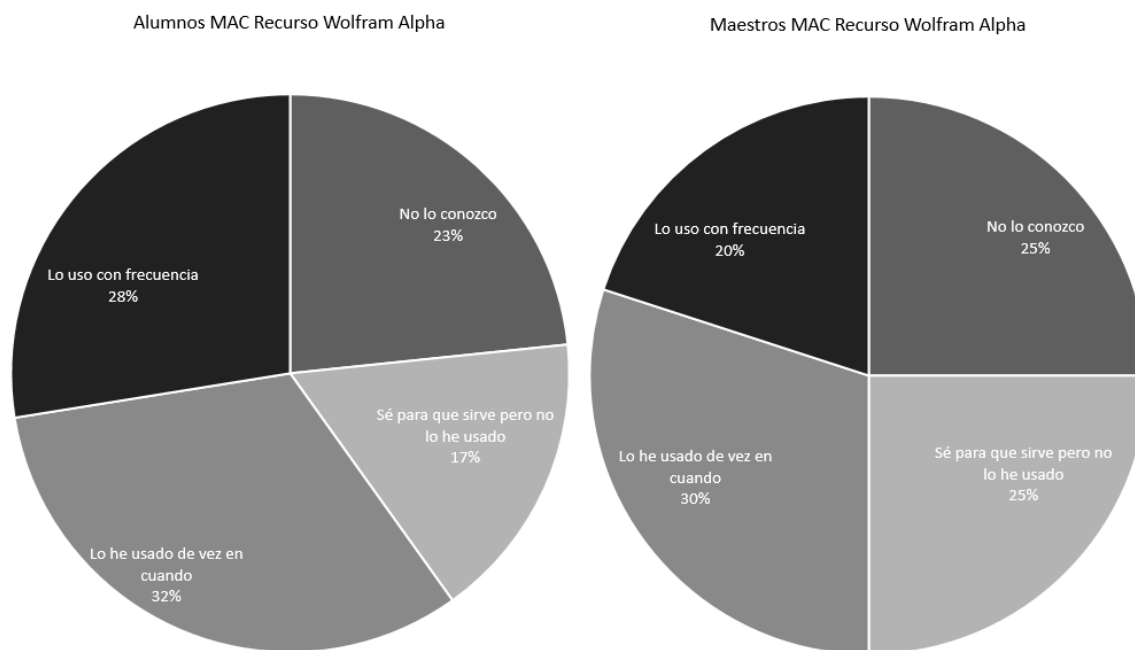


Figura 0-45 Comparación MAC WolframAlpha

Resultados de Matemáticas Aplicadas y Computación

En la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación tanto maestros como alumnos poseen una noción muy similar de los recursos enlistados en la investigación.

Recursos proporcionados en las encuestas.

Al momento de realizar la encuesta como parte de la misma se le solicitó tanto a alumnos como a los maestros que proporcionaran alguna herramienta libre y en la red en caso de que supieran de alguna. Como resultado se obtuvieron las siguientes herramientas Web:

- Meta-Calculator
- PHPSimplex

Meta-Calculator

Descripción: Se trata de una calculadora científica dentro de la Web, es decir, es un software que contiene las mismas aplicaciones que podríamos realizar con una calculadora científica convencional, solo que ésta tiene alcances para graficar, realizar operaciones con matrices, y realizar estadísticas; por lo que es más potente que una calculadora convencional y más sencilla que en el caso de algunos CAS.

Modo de uso: Su uso sencillo e intuitivo, desde que accedes al sitio Web vienen las secciones categorizadas por medio de botones y al acceder a cada categoría, estas mismas se encuentra subdivididas según sea lo que se necesite.

Ejemplos

Ejemplo 1: Gráficas

Vamos a realizar un gráfica en la que limitemos los valores en el eje de las X y que nos indique el área sobre la curva.

En la página Web de Meta-Calculator vamos a dirigirnos a la sección "Graphing Calculator", en ella podremos ver que podemos introducir hasta 7 ecuaciones a graficar así como indicar los límites en los ejes y las posibles características que podríamos introducir en una ecuación como son las identidades trigonométricas o los grados y radianes.

Para el ejemplo graficaremos la ecuación:

$$y = 2 \sin x - \cos 2x$$

En este caso queremos que nos indique el área sobre la curva así que en el software se introduce $y > 2 * \sin(x) - \cos(2x)$

Y para delimitar el eje de las X de -5 a 5 , por lo que lo indicamos en las casillas de la X mostradas al inferior de nuestra ecuación.

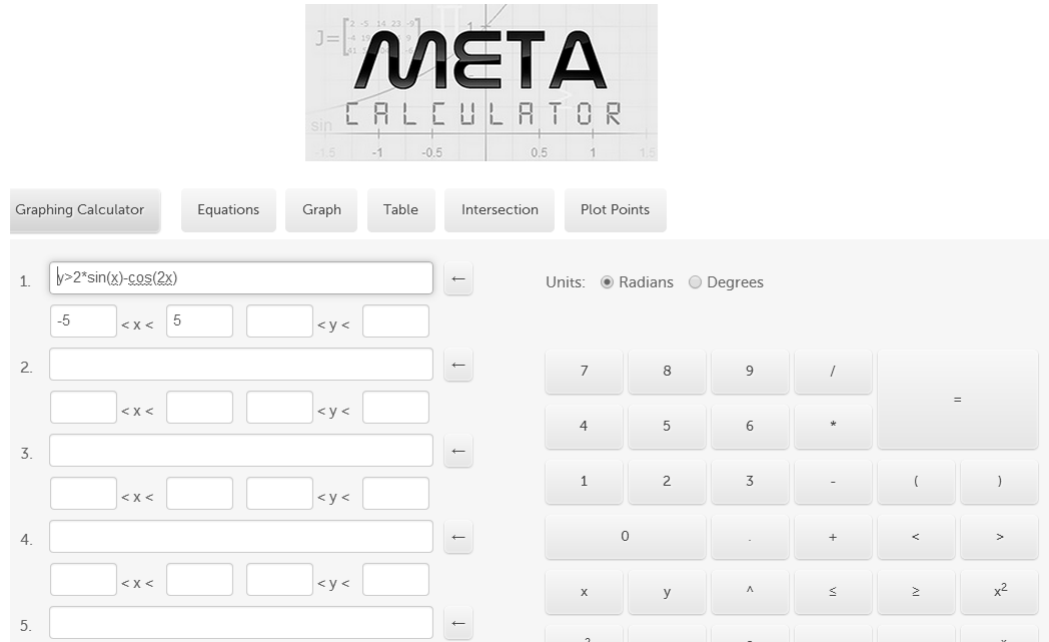


Figura 49 Introducción de la ecuación en Meta Calculator

Ahora solo basta con presionar el botón de "Graph" en la parte inferior de la página, con ello nos despliega la gráfica tal cual como la solicitamos:

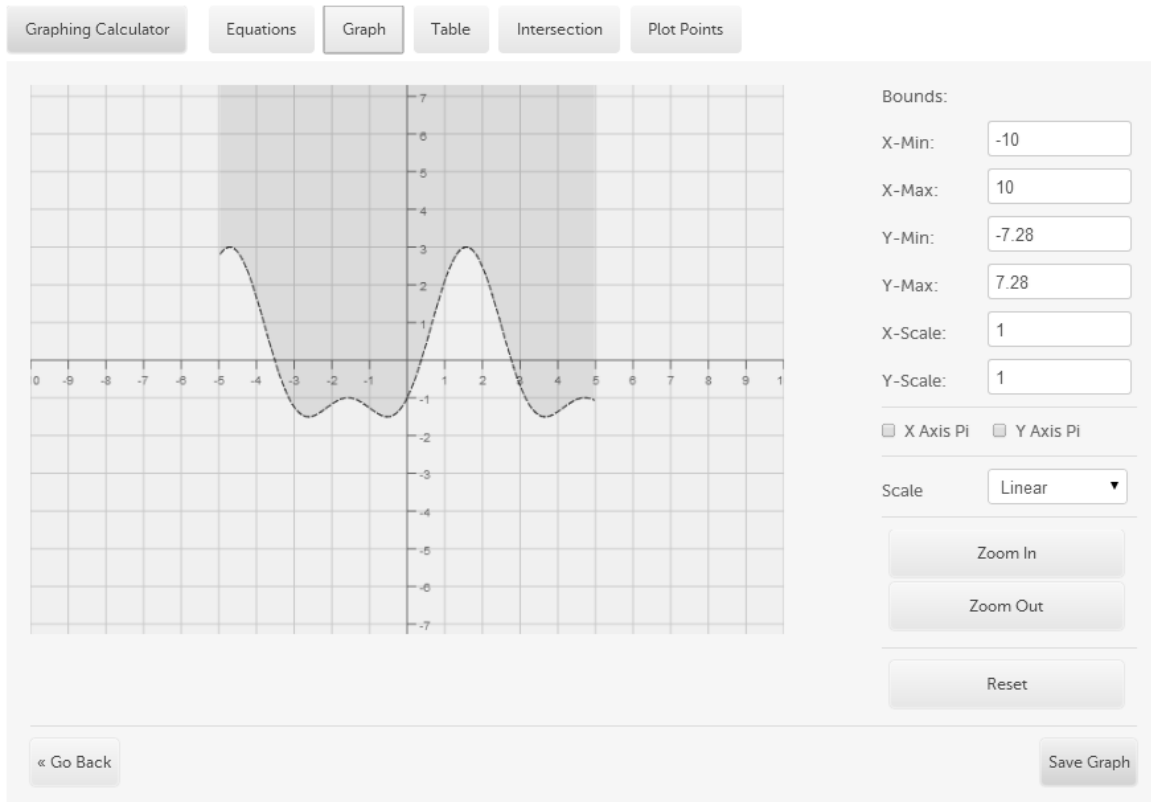


Figura 50 Gráfica en Meta Calculator

Ejemplo 2: Álgebra Lineal

En este ejemplo resolveremos la multiplicación de dos matrices de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

Para ello nos podemos acceder desde el botón de "Matrix Calculator"; en esa sección se pueden observar que está dividido para introducirle los coeficientes de hasta de dos matrices de 5x5 y en la parte inferior se encuentran todas las operaciones que se pueden realizar entre matrices.

Para el ejemplo las matrices serán:

$$A = \begin{cases} \frac{3}{5}x & -\frac{2}{3}y & +\frac{1}{2}z \\ \frac{5}{11}x & -\frac{3}{4}y & -\frac{2}{3}z \\ -\frac{2}{3}x & +\frac{3}{2}y & +\frac{4}{3}z \end{cases} \quad B = \begin{cases} \frac{6}{5}x & -\frac{4}{3}y & +\frac{9}{4}z \\ \frac{5}{6}x & -\frac{3}{7}y & -\frac{1}{5}z \\ \frac{4}{5}x & +\frac{3}{4}y & -\frac{3}{2}z \end{cases}$$

Figura 51 Matrices en Meta-Calculator

Para poder obtener el resultado solo basta con presionar el botón de la operación que se desee, en este caso, el de la multiplicación que es "AxB" y de inmediato bajo el título de "Result" se obtendrá la matriz resultante:

Figura 52 Resultado de multiplicar las matrices A y B en Met-Calculator

Más información: Dentro de la misma página podemos encontrar más ayuda e información en la sección de "Help" que se encuentra en la página de inicio del software.

Datos generales del software

Autor: Vernon Morris

País de origen: Estados Unidos

Sitio Web: <http://www.meta-calculator.com/online/>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Álgebra, Álgebra Lineal, Matemáticas, Geometría Analítica y Estadística.

Palabras clave de esta herramienta: calculadora científica, categorías, botones, matrices, estadísticas, gráficas.

PHPSimplex

Descripción: Es una pequeña herramienta que se enfoca única y exclusivamente en la Investigación de Operaciones, se encarga de resolver problemas de programación lineal; los puede resolver por medio del método simplex, el de dos fases y el gráfico. Además de ello incluye varias secciones de información donde puedes encontrar información de la materia, así como ejemplos, problemas y artículos relacionados y de interés de la materia.

Además de mostrar el resultado de cada problema también puede mostrar los pasos realizados del mismo. Este sitio Web posee secciones de información que solo son elementos de lectura por lo que no serán objeto de estudio en esta investigación aunque se le invita a cualquier usuario a consultar cualquier sección que considere le pueda servir.

Modo de uso: Su uso es sencillo ya que solo hay que indicar el número de variables y el número de restricciones que está compuesto el problema; el mismo software posee una estructura en la que se puede ver de manera dinámica en la cual solo debes colocar los valores de los coeficientes, si la función se va a maximizar o minimizar y el sentido de las desigualdades.

Ejemplos

Nota: Ya que este recurso solo realiza problemas de optimización lineal solo se realizará un ejemplo

Ejemplo: Para este ejemplo se minimizará la siguiente función:

$$\text{Minimizar } z = 10x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 10x_4 + 20x_5$$

con las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_6 + x_7 &\leq 5000 \\ 2x_4 + x_5 + x_6 &= 15000 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_5 + x_6 + 2x_7 &\geq 5000 \\ x_j &\geq 0 ; j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

Para poder acceder al recurso Web, basta con presionar "PHPSimplex", que se encuentra en la barra de herramientas del sitio Web o en el link que lleva el mismo nombre y se encuentra en la introducción del sitio Web.

Ya estando en la herramienta; pide que se le proporcione el método, las variables de decisión que componen el problema y cuántas restricciones vamos a tener.

PHPSimplex

Método:

¿Cuántas variables de decisión tiene el problema?

¿Cuántas restricciones?

Figura 53 Introducción de variables y restricciones en PHPSimplex

Inmediatamente al presionar el botón de "Continuar" el software pide introducir la función así como los coeficientes, sentido de la igualdad y valor de cada ecuación.

¿Cuál es el objetivo de la función?

Función: X₁ + X₂ + X₃ + X₄ + X₅ + X₆ + X₇

Restricciones:

X₁ + X₂ + X₃ + X₄ + X₅ + X₆ + X₇

X₁ + X₂ + X₃ + X₄ + X₅ + X₆ + X₇

X₁ + X₂ + X₃ + X₄ + X₅ + X₆ + X₇

Figura 54 Introducción de los valores de las funciones que componen el problema

El sitio Web ofrece dos opciones al presionar el botón "Continuar": seguir paso a paso la resolución del problema o parar directamente al resultado; para fines de esta investigación se pasará directamente al resultado, presionando el botón "Solución directa". Con ello mostrará la solución óptima al problema como se puede ver en la siguiente figura:

Mostrar resultados como fracciones.

Existe alguna solución posible para el problema, por lo que podemos pasar a la Fase II para calcularla.

La solución óptima es $Z = 50000$

$X_1 = 0$

$X_2 = 0$

$X_3 = 0$

$X_4 = 5000$

$X_5 = 0$

$X_6 = 5000$

$X_7 = 1 / 109951162776$

Figura 55 Resultado del problema en PHPSimplex

Datos generales del software

Autor: Daniel Izquierdo Granja, Juan José Ruiz Ruiz

País de origen: España

Sitio Web: <http://www.phpsimplex.com/>

Categoría: software libre para Matemáticas

Requerimientos: Java

Áreas que puede apoyar: Matemáticas, Investigación de Operaciones, Matemáticas Aplicadas, Matemáticas Discretas, Matemáticas para Ciencias de la Computación.

Palabras clave de esta herramienta: programación lineal, método simplex, método de dos Fases, método gráfico, maximizar, minimizar, desigualdades.

Con ello los primeros cuadros de clasificación mostrados en la introducción quedan de la siguiente manera:

Clasificación de los recursos por tipo.

<i>Recurso</i>	<i>CAS</i>	<i>Simulación interactiva</i>	<i>Visualización gráfica</i>	<i>Video</i>
Aprende matemáticas		X		
Descartes	X			
Famous Curves Apleets			X	
GapMinder			X	
GeoGebra	X			
Gráficas matemáticas de Google	X			
KhanAcademy				X
Maxima	X			
Math 2 me				X
Meta-Calculator	X			
MIT Mathlets		X		
NumberEmpire	X			
PhETInteractiveSimulations		X		
PHPSimplex	X			
Rice Virtual Lab in Statistics		X		
USON		X		
Videos de OCW				X
Virtual Laboratories in Probability and Statistics		X		
Visual Calculus		X		
Web Interface for Statistics Education		X		
Wiris	X			
WolframAlpha	X			

En el cuadro 3 resulta evidente que los sitios que cubren más tópicos son OCW (12), Wiris y WolframAlpha(8) y KhanAcademy NumberEmpire(7). A su vez, los tópicos con más recursos son Estadística (11) y Geometría Analítica (13) , Cálculo (10), Álgebra (9), Ecuaciones Diferenciales(8) y Probabilidad con 8 recursos.

Clasificación de los recursos por tópicos que se cubren.

<i>Recurso</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Aprende matemáticas		X		X	X	X	X			X			
Derivatives	X		X	X	X	X	X						X
Descartes	X					X	X	X					X
Famous curves apleets							X						
GapMinder						X							
GeoGebra	X						X						
Gráficas matemáticas de Google							X						
KhanAcademy	X	X		X	X	X	X						X
Maxima	X		X	X	X		X						
Math 2 me	X						X	X					X
Meta-Calculator		X					X	X					
MIT Mathlets					X								
PhET Interactive Simulations						X	X						
PHPSimplex								X	X	X			
Rice Virtual Lab in Statistics						X							
Videos de OCW	X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X
USON				X									
Virtual Laboratories in Probability and Statistics						X							X
Visual Calculus				X									
Web Interface for Statistics Education					X								
Wiris	X	X		X		X	X						X
Wolfram Alpha	X	X	X	X	X	X	X						X

1.Álgebra; 2. Álgebra Lineal; 3. Análisis Numérico; 4. Cálculo; 5. Ecuaciones Diferenciales; 6. Estadística; 7. Geometría Analítica; 8. Matemáticas Aplicadas; 9. Matemáticas Discretas; 10. Matemáticas para Ciencias de la Computación; 11. Modelos y Simulación; 12. Optimización Combinatoria; 13. Probabilidad.

La mayor parte de los recursos (11) están en inglés pero existen iniciativas en español.

Clasificación de los recursos según el idioma en que se ofrecen.

<i>Recurso</i>	<i>Totalmente en español</i>	<i>Español/Inglés</i>	<i>Totalmente en inglés</i>
Aprende matemáticas		X	
Descartes	X		
Famous curves apleets			X
GapMinder			X
GeoGebra		X	
Gráficas matemáticas de Google			X
KhanAcademy			X
Maxima		X	
Math 2 me	X		
Meta-Calculator			X
MIT Mathlets			X
Derivatives		X	
PhETInteractiveSimulations		X	
PHPSimplex		X	
Rice Virtual Lab in Statistics			X
USON	X		
Videos de OCW		X	
Virtual Laboratories in Probability and Statistics			X
Visual Calculus			X
Web Interface for Statistics Education			X
Wiris	X		
Wolfram Alpha			X

Conclusiones

Se localizaron 22 recursos Web (incluyendo las dos herramientas proporcionadas en las encuestas) para el aprendizaje de las Matemáticas en el nivel superior. La mayoría de ellos son simulaciones interactivas y CAS. Sin embargo, los sitios que ofrecen videos como OCW y KhanAcademy son los que ofrecen más tópicos. Los tópicos con mayor cobertura son Estadística y Geometría Analítica. Casi todos los recursos están en inglés.

Los hallazgos coinciden con el meta-análisis realizado por Sosa *et al.*(2011), y con Symanzik y Vukasinovic(2003), quienes consideran que el número alto de recursos para Estadística se debe en gran medida a la oferta de datos, calculadoras estadísticas, software y otras herramientas estadísticas en Internet. Probablemente también esté relacionado con el hecho de que muchas licenciaturas incluyen esta asignatura en su mapa curricular, tanto en México como en el extranjero.

Como se ha visto, existe un conjunto amplio, atractivo y variado de recursos libres que pueden apoyar el aprendizaje de las matemáticas, sobre todo en idioma inglés. Para aprovechar esta posibilidad es necesario incorporar este idioma a la educación superior en México o gestionar la traducción o subtítulo de la oferta actual.

Los resultados obtenidos son consistentes con estudios recientes que muestran que la instrucción matemática asistida por computadora y en particular por recursos Web favorece la creatividad (Aqda *et al.*, 2011), permite que el estudiante se aproxime a problemas reales (Arnold *et al.*, 2007), mejora el desempeño (Lopez-Morteo y López, 2007), facilita que el estudiante aprenda a su propio ritmo (Maag, 2004; Sosa *et al.*, 2011), brinda oportunidades de práctica (Sosa *et al.*, 2011). No hay todavía evidencias para afirmar que el uso de tecnología disminuya la ansiedad producida por las Matemáticas o *mathphobia*. Por otra parte, algunos docentes consideran que aprender a través de la computadora es una forma de “hacer trampa” (Maltby, 2001). Otros estudios hacen hincapié en el uso de hojas de cálculo para la enseñanza de Matemáticas (Nicoleta, 2011), lo cual podría considerarse como un recurso Web si se usa, por ejemplo, con Google Docs.

Cabe señalar que dentro de los resultados arrojados en las encuestas se mostraron diversas reacciones por parte de los alumnos de sorpresa y descontento al saber que ya existen este tipo de herramientas y que no las conocieran aún; entre otras respuestas proporcionadas por los mismos alumnos hacen la observación que no las conocían porque en ninguna materia y/o maestro se las pide o se las enseñan. Algo que no se esperaba fue que sirvió de medio de difusión para dar a conocer dichas herramientas.

Por otra parte las reacciones de los profesores ante las encuestas mostraban inquietud más que sorpresa, incluso hubo quién preguntó (dentro de los mismos maestros) si eran herramientas aprobadas por la universidad o algún consejo educativo; al igual que sí se encontrar en alguna página Web de nivel superior de la UNAM.

El uso de estas herramientas no pretende sustituir la labor de calcular, graficar, estimar, analizar, etc., en otras palabras la labor de pensar del alumno, sino agilizar el proceso y tener un mejor desarrollo de las cosas, el agilizar las operaciones automatizables, o mejorar el entendimiento de los desarrollos al tener herramientas en las que se puedan observar y comparar los resultados obtenidos con los esperados, dar pie a una mayor interpretación y entendimiento de la realización de los procesos que vaya más allá de solo lo aprendido en el salón de clases o a través de libros.

Estas nuevas herramientas no garantizan que se eleven los intereses de la comunidad estudiantil en general por las diversas ramas de las matemáticas, simplemente se muestran como nuevos elementos de apoyo en la docencia y en el aprendizaje; tampoco se espera un repentino aumento en la demanda de la enseñanza de las mismas, sino simplemente se pretende dar a conocer estas herramientas existentes y que son un hecho que seguirán surgiendo más de ellas, así como el aumento en los resultados de quienes se dedican tanto a la enseñanza como en el aprendizaje de esta ciencia y de quienes ya están interesados en ella. Es más una cuestión de aprovechar los nuevos recursos que ya existen, que nos pueden ser útiles y que pueden brindar una ayuda.

Parece evidente que cada vez hay más recursos tecnológicos pero esta misma abundancia incrementa la complejidad pedagógica para los docentes (Lavicza y Papp-Varga) y hace necesario contar con revisiones como la que aquí hacemos.

Considero que el inventario de recursos Web proporcionado aquí es seguramente incompleto y que habrá que continuar la investigación con perfiles de búsqueda más exhaustivos, así como el hecho de que seguirán surgiendo muchas más de ellas y nuevas en el futuro. Asimismo, es necesario estudiar la difusión y uso de estos recursos en la práctica docente de la enseñanza de las Matemáticas en el nivel superior.

Dentro de las encuestas se aportaron 3 herramientas que por diversas razones ya no fueron incluidas en esta investigación, las razones se enumeran a continuación:

- **StatGraphics online:** Es un CAS de estadística que actualmente ya no permite introducir valores externos o bases de datos más allá de los que incluye de manera predeterminada, ya que así no ofrece un aprendizaje ni interacción, ni tampoco muestra cómo es que realiza los cálculos de los ejercicios. Su sitio Web es http://www.statgraphics.com/statgraphics_online.htm
- **Mathics:** Es un CAS que ofrece ayuda en Álgebra, Álgebra Lineal, Cálculo, Ecuaciones Diferenciales, Geometría Analítica, Optimización Combinatoria, pero ya no existe el acceso al recurso en el sitio Web, la página ya no existe, y la versión instalable es muy complicada de instalar ya que hay muchos detalles a considerar según las características del ordenador en el que se desee trabajar. El sitio Web es <http://mathics.org/>

Este medio (al igual que otros como Maxima) son cambiantes por lo cual se requiere hacer revisiones con frecuencia, ya que algunos dejan de funcionar, algunos cambian y algunos nuevos surgen.

- **Sage:** Se trata de un recurso Web en el que para poder hacer uso de él hay que registrarse, y aun así cuando el usuario se registra no se logró encontrar algún elemento para el estudio y el aprendizaje de manera interactiva o mediante simulaciones. Únicamente se logró encontrar secciones para compartir proyectos, apuntes, libros, etc. El sitio Web es: <http://www.sagemath.org/>

Cabe destacar que es importante detectar las herramientas más estables, para dedicarles más tiempo que a las otras. Las más estables en esta investigación por fortuna son la inmensa mayoría:

GapMinder

GeoGebra

Gráficas matemáticas de Google

KhanAcademy

Math 2 me

Meta-Calculator

MIT Mathlets

Number Empire

PhET Interactive Simulations

PHPSimplex

Rice Virtual Lab in Statistics

Videos de OCW

Virtual Laboratories in Probability and Statistics

Web Interface for Statistics Education

Wiris

Wolfram Alpha

Como parte final de la conclusión se responde a una serie de preguntas que surgen a raíz del desarrollo de la investigación, al igual que por ser elementos nuevos que son una realidad y con ello se busca incorporar a la docencia.

¿Qué pienso de ellos?

Cómo se ha venido mencionado reiteradamente desde un principio en esta investigación, no se considera que sean un completo sustituto del maestro; sino un complemento que proporcione un mejor apoyo en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a nivel superior. Se trata de verlas como una herramienta de ayuda, no como el fin último de las matemáticas. Aunque brindan un gran respaldo, siguen careciendo del total de elementos para ser un completo sistema de formación docente; ya que solo cubren cierta necesidad por quien la crea en el momento, pero eso no significa que no sean útiles, ya que en verdad son de gran utilidad.

¿Qué pasará a futuro?

Considero que en el futuro este tipo de investigación es uno de los primeros pasos para hacer que poco a poco vayan tomando más presencia dentro de la docencia, pues ya son una realidad; pues el acceso que se tiene a ellas es muy sencillo por el uso cada vez mayor de las computadoras y el internet.

¿Qué sería conveniente?

Lo más conveniente es que tanto maestros como alumnos las vayan conociendo por igual. En el caso de los maestros se les debería de ir introduciendo en cómo funciona cada herramienta y observar en qué casos son de utilidad. En lo que respecta con los alumnos considero que podrían ir las conociendo a la par con las materias y con forme a los temas que lleven.

No se trata de verlos como el reemplazo de los maestros en el aula, sino como elementos de apoyo y ayuda en el que pueden confiar y respaldarse tanto maestros y alumnos.

¿Qué hacer para mejorar el aprendizaje de las matemáticas con estos recursos disponibles?

La manera de mejorar el aprendizaje de las matemáticas con estos recursos disponibles es un poco complicado ya que cada recurso tiene su propio "sistema de trabajo" (por llamarlo de alguna manera), ya que no es la misma manera de trabajar con videos explicativos que son CAS o con simulaciones interactivas. Considero que lo más óptimo sería comenzar con los videos explicativos como introducción o antesala previos al tema que se vaya a ver (en caso de que exista dicho video), como pueden ser los Videos de OCW, así como las herramientas que sean afines al caso (por ejemplo Visual Calculus); para las simulaciones interactivas como un medio de complementación con el tema, que sean usadas a la par con el tema que

se vea en ese momento (como puede ser Web Interface for Statistics Education o MIT Mathlets) y por último ya que se tiene noción del tema tener como respaldo el apoyo de los CAS o simulaciones interactivas como pueden ser Maxima, Wiris o WolframAlpha; solo que sin malinterpretar el hecho de verlas como herramientas de apoyo a considerarlas como los solucionadores de las tareas (en el caso de los alumnos). Está sería una posible dinámica de usar los recursos Web antes mencionados.

REFERENCIAS

- AQDA, M. F., HAMIDI, F. y RAHIMI, M. (2011). *The comparative effect of computer-aided instruction and traditional teaching on student's creativity in math classes*. *Procedia Computer Science*, 3: 266-270.
- ARNOLD, R., LANGHEINRICH, M. y HARTMANN, W. (2007). *InfoTraffic - Teaching Important Concepts of Computer Science and Math through Real-World Examples*. En ACM (Ed.), *SIGCSE'2007: Proceedings of the Thirty-Eighth SIGCSE Technical Symposium on Computer Science Education* (pp. 105-109).
- CROWE, D. y ZAND, H. (2000). *Computers and undergraduate mathematics 3: Internet resources*. *Computers & Education*, 35(2): 123-147.
- GOOGLE. (2012a). *Google Code | Google Chart Tools | Visualization: Motion Chart*. Fecha de consulta: 29 feb 2012, en: <<http://code.google.com/intl/es/apis/chart/interactive/docs/gallery/motionchart.html>>
- GOOGLE. (2012b). *Google code | Infographics | Mathematical Formulas*. Fecha de consulta: 28 feb 2012, en: <<http://code.google.com/intl/es/apis/chart/infographics/docs/formulas.html>>
- LAVICZA, Z. y PAPP-VARGA, Z. *Integrating GeoGebra into IWB-equipped teaching environments: preliminary results*. *Technology Pedagogy and Education*, 19(2): 245-252.
- LOPEZ-MORTEO, G. y LÓPEZ, G. (2007). *Computer support for learning mathematics: A learning environment based on recreational learning objects*. *Computers & Education*, 48(4): 618-641.
- MAAG, M. (2004). *The effectiveness of an interactive multimedia learning tool on nursing students' math knowledge and self-efficacy*. *Cin-Computers Informatics Nursing*, 22(1): 26-33.
- MALTBY, J. (2001). *Learning statistics by computer software is cheating*. *Journal of Computer Assisted Learning*, 17(3): 329-330.
- MARSHALL, N., BUTEAU, C., JARVIS, D. H. y LAVICZA, Z. (2012). *Do mathematicians integrate computer algebra systems in university teaching? Comparing a literature review to an international survey study*. *Computers & Education*, 58(1): 423-434.
- NICOLETA, S. (2011). *How Can Technology Improve Math Learning Process*. *Procedia. Social and Behavioral Sciences*, 11: 170-174.
- OFFER, J. y BOS, B. (2009). *The design and application of technology-based courses in the mathematics classroom*. *Computers & Education*, 53(4): 1133-1137.
- PIERCE, R., STACEY, K. y BARKATSAS, A. (2007). *A scale for monitoring **No se encuentran entradas de índice.** students attitudes to learning mathematics with technology*. *Computers & Education*, 48(2): 285-300.
- SOSA, G. W., BERGER, D. E., SAW, A. T. y MARY, J. C. (2011). *Effectiveness of Computer-Assisted Instruction in Statistics: A Meta-Analysis*. *Review of Educational Research*, 81(1): 97-128.

- SYMANZIK, J. y VUKASINOVIC, N. (2003). *Teaching experiences with a course on "Web-based statistics"*. American Statistician, 57(1): 46-50.
- TAN, C.-K., HARJI, M. B. y LAU, S.-H. (2011). *Fostering positive attitude in probability learning using graphing calculator*. Computers & Education, 57(3): 2011-2024.