



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE POSGRADO EN ASTROFÍSICA

Instituto de Astronomía (Instituto de Ciencias Nucleares)

FORMACIÓN DE OBJETOS COMPACTOS EN FRIEDMANN

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

PRESENTA  
CARLOS FERNANDO VERGARA CERVANTES

TUTORES O TUTOR  
DR. DARÍO NÚÑEZ ZÚÑIGA, INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MÉXICO, D. F. ENERO (2015)



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

---

# Contenido

---

<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>1 Modelos homogéneos e isotrópicos</b>	<b>9</b>
1.1 Dinámica de un fluido perfecto sin presión en Cosmología . . . . .	9
1.1.1 Ecuación de continuidad . . . . .	10
1.1.2 Ecuación de aceleración . . . . .	10
1.1.3 Soluciones Newtonianas . . . . .	11
1.2 De la cosmología Newtoniana a la relativista . . . . .	13
1.2.1 Las ecuaciones de Einstein y la evolución cósmica . . . . .	14
1.2.2 Las ecuaciones de Friedmann . . . . .	16
1.2.3 Tiempo conforme y soluciones relativistas . . . . .	17
<b>2 Aproximación clásica de perturbaciones en Cosmología</b>	<b>19</b>
2.1 Ecuaciones básicas para el estudio no relativista . . . . .	19
2.2 Inestabilidades gravitacionales . . . . .	21
2.2.1 Teoría de Jeans . . . . .	22
2.3 Inestabilidades en un universo en expansión . . . . .	23
2.3.1 Perturbaciones adiabáticas . . . . .	25
2.4 Densidad crítica para el colapso gravitacional . . . . .	27
<b>3 Inestabilidades Gravitacionales en Relatividad General</b>	<b>29</b>
3.1 Perturbaciones de variables invariantes de norma . . . . .	30
3.1.1 Clasificación de perturbaciones . . . . .	30
3.1.2 Transformaciones de norma y variables invariantes de norma	32
3.1.3 Sistemas coordenados . . . . .	34
3.1.4 Ecuaciones para las perturbaciones cosmológicas . . . . .	35
3.2 Perturbaciones hidrodinámicas . . . . .	37
3.2.1 Perturbaciones escalares . . . . .	37
<b>4 Formulación 3+1 de Relatividad General</b>	<b>41</b>
4.1 Formalismo 3+1 . . . . .	42
4.2 Las ecuaciones perturbadas . . . . .	48

4.3	Datos iniciales para distintas distribuciones de materia . . . . .	50
4.3.1	Caso de un fluido perfecto sin presión . . . . .	50
4.3.2	Campo escalar real. Caso $\lambda = 0$ . . . . .	53
4.3.3	Campo escalar real. Caso $\lambda \neq 0$ . . . . .	54
4.3.4	Estrellas de bosones . . . . .	55
<b>5</b>	<b>El código numérico OllinSphere2</b>	<b>59</b>
5.1	Descarga y estructura del directorio OllinSphere2 . . . . .	60
5.2	Compilación y ejecución del código numérico . . . . .	61
5.2.1	Compilación . . . . .	61
5.2.2	Corridas . . . . .	62
5.3	Archivos de parámetros . . . . .	62
5.4	Archivos de salida . . . . .	63
5.5	El espacio-tiempo . . . . .	65
5.6	Materia. Tensor de energía-momento . . . . .	65
5.7	Malla numérica . . . . .	65
5.8	Regularización . . . . .	66
5.8.1	Condiciones de simetría en el origen . . . . .	66
5.8.2	Planitud local en el origen . . . . .	66
5.9	Métodos numéricos empleados por el código . . . . .	66
5.9.1	Integración . . . . .	66
5.9.2	Diferenciación espacial . . . . .	67
5.10	Editando el código . . . . .	67
5.10.1	Agregando parámetros . . . . .	67
5.10.2	Agregando arreglos . . . . .	68
5.10.3	Agregando rutinas . . . . .	69
5.10.4	CVS . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Evoluciones numéricas para distintas distribuciones de materia</b>	<b>73</b>
6.1	Valores iniciales para perturbaciones esféricas . . . . .	74
6.1.1	Evoluciones numéricas para un universo homogéneo . . . . .	74
6.1.2	Fluido perfecto sin presión . . . . .	74
6.1.3	Campo escalar real. Caso $\lambda = 0$ . . . . .	76
6.2	Valores iniciales para perturbaciones gaussianas . . . . .	78
6.2.1	Campo escalar real . . . . .	78
6.2.2	Campo escalar complejo . . . . .	78
6.2.3	Discusiones . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Gráficas</b>	<b>83</b>
<b>8</b>	<b>Referencias</b>	<b>97</b>

Proyecto de Tesis de Maestría: Formación de  
objetos compactos en Friedmann

Carlos Fernando Vergara Cervantes

November 14, 2014



---

## Resumen

---

Mi proyecto de tesis consiste en el estudio de la formación de estructura en un Universo de Friedmann. En el estudio, utilizo la manera usual de describir a la formación de estructura utilizada en Astronomía, iniciando con la ecuación de Jeans y terminando con el desarrollo de formación de estructura desde el punto de vista de Relatividad General; a partir de pequeñas perturbaciones se alcanza la formación de estructura, realizando el todo el análisis en el marco de las ecuaciones de Einstein. No sólo me interesa la comparación usual entre la descripción de polvo y la de fluido perfecto en Relatividad General, sino utilizar el hecho de que esta teoría permite el estudio de materia distinta al fluido, como es el caso de campo escalar.

En la parte de Relatividad General, se resuelven las ecuaciones de Einstein en un Universo de Friedmann de fondo, homogéneo con pequeñas perturbaciones, todo en simetría esférica, así como las ecuaciones de campo correspondientes en el espacio curvo, utilizando el código OllinSphere2. De este modo, se hace la evolución numérica de datos iniciales correspondientes a escenarios cosmológicos con simetría esférica, así como la exploración de un pulso que funcione como la semilla que dé paso a la formación de estructura.

Considero distintas situaciones para las evoluciones numéricas: distribuciones iniciales de materia que son homogéneas, así como otras que no son completamente homogéneas. El trabajo se enfoca en el caso en el que la materia es descrita por un fluido perfecto sin presión así como en el caso en el que la materia es descrita por un campo escalar, real y complejo, con y sin término de autointeracción, basado en trabajos similares [S. Seidel]. Los resultados obtenidos, hacen énfasis en que ambos tipos de materia son capaces de formar estructura, y que es posible seguir las evoluciones numéricas más allá del régimen lineal. Asimismo, se está investigando la formación de objetos compactos: estructura para el fluido, oscilaciones para el campo escalar real y estrellas de bosones para el campo escalar complejo, así como agujeros negros en los tres casos, para ciertos valores de los parámetros.





---

## Introducción

---

La información obtenida a partir de la radiación cósmica de fondo, nos dice que el Universo fue muy homogéneo e isotrópico durante la época de recombinación (véase fig. 1). Sin embargo, al día de hoy vemos que el Universo tiene una estructura no lineal bien desarrollada. Esta estructura toma la forma de galaxias y cúmulos de galaxias localmente, mientras que a grandes escalas toma la forma de filamentos y vacíos. Esto implica que el principio cosmológico no es del todo exacto. Es obvio que éste falla a escala del Sistema Solar, del Grupo Local e incluso a la escala de súper cúmulos. Son estas inhomogeneidades las que caracterizan la estructura no lineal bien desarrollada del Universo. Aunado a los estudios recientes de campo profundo (alto corrimiento al rojo) que muestran que, las inhomogeneidades en la distribución de densidad, promediada a escala de megaparsecs, permanecen muy pequeñas, ( $\delta\rho/\rho \ll 1$ ).

Para explicar cómo se desarrollaron estas estructuras no lineales a partir de pequeñas inhomogeneidades, se utiliza la teoría de inestabilidades gravitacionales. Su descripción ayuda a saber si el crecimiento de las inhomogeneidades, en un Universo en expansión, es capaz de formar la estructura no lineal observada hoy en día, partiendo de pequeñas inhomogeneidades presentes en la época de recombinación (como se ve en la fig.2). Dentro del régimen Newtoniano, se emplean las simulaciones de N-cuerpos que permiten reproducir la evolución de las inhomogeneidades hasta la época actual. Como por ejemplo, GADGET. Este tipo de códigos evolucionan fluidos autogravitantes no colisionales, así como también gases colisionales, suavizados por partículas hidrodinámicas, cuyas simulaciones pueden ser seguidas con detenimiento hasta el régimen no lineal. Existen ocasiones, sin embargo, en las que se debe hacer un análisis completo, utilizando Relatividad General, de la evolución de las inestabilidades gravitacionales. Por ejemplo, cuando no es válido dar una descripción de la materia en términos de partículas clásicas.

Cuando ya no se puede realizar una descripción en términos de física clásica, se pasa al tratamiento relativista. Si bien dentro de este régimen la interpretación física puede verse opacada por tratar de comprender sus matemáticas complicadas, en contraste con en el caso Newtoniano, las ecuaciones ya no se diferencian por la presencia de un término perturbativo y uno no perturbativo,

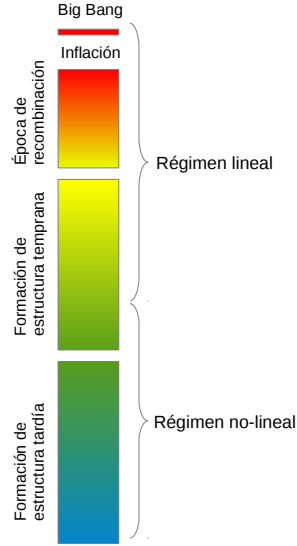


Figure 1: Generalización del problema de formación de estructura. Es posible llevar a cabo evoluciones numéricas utilizando Relatividad General que abarquen tanto el régimen lineal como el no lineal.

sino que se tiene un tratamiento completo sin tener que requerir el cambio de la descripción de la distribución de materia que se esté empleando. De modo que se puede seguir la evolución de las ecuaciones dentro del régimen no lineal tanto para polvo como para campo escalar, que es parte fundamental de este trabajo. Sin embargo, el problema principal encontrado dentro de esta teoría consiste en la elección del sistema coordenado usado para describir las perturbaciones (condición de norma). A diferencia del Universo homogéneo e isotrópico, no hay coordenadas preferenciales para hacer un análisis de las perturbaciones, donde el sistema coordenado se encuentra fijo por las propiedades de la simetría del fondo.

En base a esta breve descripción del marco general del problema, el desarrollo de mi trabajo se lleva a cabo de la siguiente manera; comienza con una introducción a los principios básicos de cinemática y dinámica de un universo homogéneo e isotrópico en expansión, dado por las ecuaciones de Friedmann. Para después introducirse en el tratamiento Newtoniano de perturbaciones escalares utilizado en astronomía. Este consiste en perturbar primero las ecuaciones de Euler dentro del régimen no relativista hasta llegar al criterio de Jeans dentro de un contexto astronómico. Esto quiere decir que los resultados derivados a partir de esta teoría clásica, son aplicables a materia no relativista a escalas

que no excedan el horizonte de Hubble, dado aproximadamente por la distancia hasta la cual la luz llegaría sin la expansión del espacio a un tiempo específico. Por lo que, este primer tratamiento se realiza en un Universo sin expansión. Posteriormente se pasa al estudio de inestabilidades gravitacionales usando Relatividad General. En principio el tratamiento de la evolución de las pequeñas perturbaciones es directo en este régimen; las perturbaciones en la métrica del espacio-tiempo se encuentran relacionadas con la perturbación de densidad a través de las ecuaciones de campo de Einstein, mientras que la evolución de las perturbaciones en el contenido de materia se siguen de la conservación de energía-momento. No obstante, tratar de resolver a las ecuaciones de Einstein tal y como se encuentran planteadas, parece a todas luces el camino incorrecto a seguir, más que nada porque son altamente no lineales y se encuentran acopladas. Es por esto que primero debe hacerse la formulación de valor inicial de Relatividad General, reescribiendo el espacio-tiempo como la evolución del espacio en el tiempo. Aún si en esta formulación las ecuaciones no se encuentran planteadas de una forma numéricamente estable, se puede pasar después a una segunda formulación para obtener un sistema completo de ecuaciones hiperbólicas, adecuadas para ser resueltas numéricamente. Con esto, el siguiente paso consiste en probar el código numérico con el que se va a trabajar llevando a cabo evoluciones numéricas de las soluciones analíticas que son bien conocidas, como el caso de un fondo homogéneo e isotrópico. Finalmente se implementa el código numérico, planteando a los campos de materia de fluido perfecto sin presión y de campo escalar que van ser resueltos numéricamente, para llevar a cabo el análisis de la formación de objetos compactos.

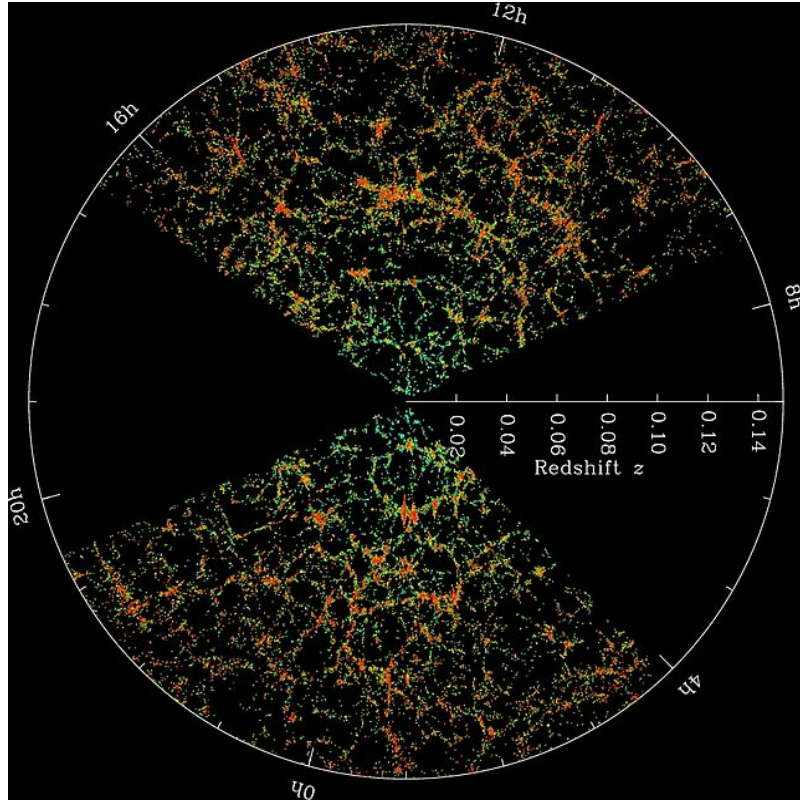


Figure 2: Mapeo de aproximadamente 50,000 galaxias del Sloan Digital Sky Survey Early Release Data dentro de 600Mpc para galaxias rojas luminosas y 1Gpc para el survey principal. En esta figura se ven de manera obvia los filamentos y voids en el Universo.

# Capítulo 1

---

## Modelos homogéneos e isotrópicos

---

Como ya se comentó en la introducción, antes que nada, es necesario tratar las ecuaciones de Friedmann, que gobiernan la tasa de expansión del espacio en un universo homogéneo e isotrópico. Como sabemos, las ecuaciones de Friedmann pueden resolverse de manera exacta para ciertos casos. Debido a esto, a lo largo del siguiente capítulo se hará un repaso de aspectos importantes sobre Cosmología, enfocándonos principalmente en el caso de fluido perfecto sin presión. El tratamiento que se sigue en los siguientes tres capítulos es muy similar al que se encuentra en textos como V. Mukhanov[8], M. Longair[9] y H. Mo[10], de modo que si el lector ya se encuentra familiarizado con dichos textos, puede pasarlos de forma más rápida.

### 1.1 Dinámica de un fluido perfecto sin presión en Cosmología

Primero se considerará un universo homogéneo e isotrópico en expansión lleno de 'polvo', un eufemismo para materia cuya presión  $p$  es despreciable en comparación con su densidad de energía total  $\rho$  (en Cosmología, los términos 'polvo' y 'materia' se utilizan indistintamente para representar partículas no relativistas). Escogiendo un punto arbitrario como el origen y considerando una esfera en expansión en ese origen con radio  $R(t) = a(t)\zeta_{com}$ , donde  $\zeta_{com}$  es una constante de integración para este capítulo solamente. Si la gravedad es débil y el radio lo suficientemente pequeño para que la velocidad de las partículas dentro de la esfera, relativo con el origen, sea más pequeña que la velocidad de la luz, la expansión puede ser descrita por la gravedad Newtoniana (se asume que no hay un efecto neto sobre una partícula dentro de la esfera, debido a que la materia que se encuentra fuera es cero, una premisa justificada por el teorema de Birkhoff en Relatividad General).

### 1.1.1 Ecuación de continuidad

La masa total  $M$  dentro de la esfera es conservada. Por lo que, la densidad de energía debido a la masa de las partículas comóviles es

$$\rho(t) = \frac{M}{(4\pi/3)R^3(t)} = \rho_0 \left( \frac{a_0}{a(t)} \right)^3, \quad (1.1)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad de energía en el momento en el que el factor de escala es igual a  $a_0$ . Es conveniente reescribir la ley de conservación en forma diferencial. Derivando la ec. (1.1) respecto al tiempo, se obtiene

$$\dot{\rho}(t) = -3\rho_0 \left( \frac{a_0}{a(t)} \right)^3 \frac{\dot{a}}{a} = -3H\rho(t), \quad (1.2)$$

donde se define la Esta ecuación es el caso particular de la ecuación de continuidad no-relativista para la dinámica de fluidos,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho v), \quad (1.3)$$

si se toma  $\rho(x, t) = \rho(t)$  y se hace  $v = H(t)r$ , en relación con la ley de Hubble, donde  $H(t)$  es el parámetro de Hubble. Tomando la ecuación de continuidad y asumiendo condiciones iniciales de homogeneidad, se sigue directamente que la única distribución de velocidad que mantiene la evolución de la homogeneidad en el tiempo es la ley de Hubble:  $v = H(t)r$ . La ley de Hubble relaciona la velocidad de recesión debida a la expansión del espacio y la distancia a un objeto; la conexión entre el corrimiento al rojo y la distancia es fundamental para relacionar la ley de Hubble con las observaciones.

### 1.1.2 Ecuación de aceleración

La materia bariónica es gravitacionalmente atractiva, de modo que ocasiona que la expansión del universo se desacelere. Para derivar la ecuación de evolución para el factor de escala, se considera una partícula prueba de masa  $m$  en la superficie de una esfera, la distancia  $R(t)$  desde el origen. Como establece el segundo teorema de Newton (J. Binney [15]), asumiendo que la materia que se encuentra fuera de la esfera no ejerce una fuerza gravitacional sobre la partícula de prueba, la única fuerza que actúa es debida a la masa  $M$  de todas las partículas dentro de la esfera. Por esto, la ecuación de fuerza toma la forma conocida,

$$m\ddot{R} = -\frac{GmM}{R^2} = -\frac{4\pi}{3}Gm\frac{M}{(4\pi/3)R^3}R. \quad (1.4)$$

Utilizando la expresión para la densidad de energía en la ec. (1.1) y sustituyendo  $R(t) = a(t)\zeta_{com}$ , se obtiene

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\rho a. \quad (1.5)$$

## 1.1. DINÁMICA DE UN FLUIDO PERFECTO SIN PRESIÓN EN COSMOLOGÍA11

La masa de la partícula prueba y el tamaño comóvil de la esfera  $\zeta_{com}$  se quitaron en la última ecuación resultante. La ec. (1.2) y la ec. (1.5) son las ecuaciones que determinan la evolución de  $a(t)$  y  $\rho(t)$  (como se verá más adelante). Coinciden de forma exacta con las correspondientes ecuaciones para polvo ( $p = 0$ ) de Relatividad General. En este límite, el caso relativista se reduce exactamente al caso Newtoniano y, por tanto, no es necesario realizar correcciones.

### 1.1.3 Soluciones Newtonianas

La ecuación para el factor de escala se obtiene al sustituir la expresión para la densidad de energía de la ec. 1.1 en la ecuación de aceleración de la ec. 1.5:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0\frac{a_0^3}{a^2}. \quad (1.6)$$

Multiplicando esta última ecuación por  $\dot{a}$  e integrando, se tiene que

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 + V(a) = E, \quad (1.7)$$

donde  $E$  es la constante de integración y

$$V(a) = -\frac{4\pi G\rho_0 a_0^3}{3a}. \quad (1.8)$$

La ec. (1.7) es idéntica a la ecuación de conservación de energía. En el caso de un universo dominado por polvo, una expansión por siempre o un eventual recolapso dependerá del signo de  $E$ . La normalización del factor  $a$  no tiene significado invariante dentro de la gravedad Newtoniana y puede reescalarsse por un factor arbitrario. Por tanto, sólo el signo de  $E$  tiene un significado relevante. Reescribiendo la ec. (1.7) como

$$H^2 - \frac{2E}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (1.9)$$

vemos que el signo de  $E$  es determinado por la relación entre el parámetro de Hubble, que determina la energía cinética de la expansión y la densidad de masa, que define la energía potencial.

Por un lado, la velocidad de expansión, como es establecida por el parámetro de Hubble, ha sido bien medida observacionalmente, mientras que la densidad de masa ha sido determinada de forma deficiente durante el último siglo. Por lo que históricamente, la distinción entre el escape y la captura gravitacional, tradicionalmente es más común trabajar con una densidad crítica que con una velocidad crítica. Haciendo  $E = 0$  en la ec. 1.9, se obtiene

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (1.10)$$

La densidad crítica decrece con el tiempo ya que  $H$  es decreciente, aunque el término de 'densidad crítica' es comunmente utilizado para referirse a su valor

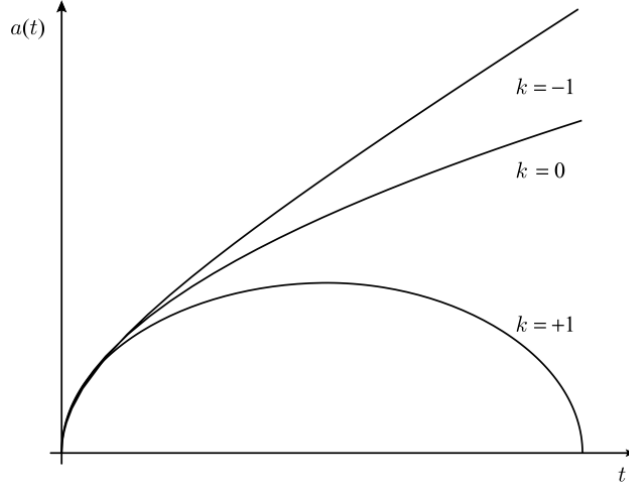


Figure 1.1: Dinámica de los modelos clásicos de Friedmann con  $\Omega_\Lambda = 0$  caracterizada por el parámetro de densidad  $\Omega_0 = \rho_0/\rho_{cr}$ . Si  $k = +1$  ( $\Omega_0 > 1$ ), el Universo se colapsa a  $a = 0 (= a_0)$  como se muestra; si  $k = -1$  ( $\Omega_0 < 1$ ), el Universo se expande a infinito y tiene una velocidad finita de expansión a medida que  $a$  tiende al infinito. En el caso  $k = 0$  ( $\Omega_0 = 1$ ),  $a = (t/t_0)^{2/3}$  donde  $t_0 = (2/3)H_0^{-1}$ . El eje temporal esta dado en términos del tiempo adimensional  $H_0 t$ . En la época presente  $a = 1$  y en la ilustración, las tres curvas tienen la misma pendiente de 1 en  $a = 1$ , correspondiendo a un valor fijo para la constante de Hubble de  $H_0$  al tiempo  $t_0$ . Si  $t_0$  corresponde a la época presente del Universo, entonces  $H_0 t_0 = 1$  para  $\Omega_0 = 0$ ,  $H_0 t_0 = 2/3$  para  $\Omega_0 = 1$  y  $H_0 t_0 = 0.57$  para  $\Omega_0 = 2$ .

actual. Expresando  $E$  en términos de la densidad de energía  $\rho(t)$  y la constante de Hubble  $H(t)$ , se tiene

$$E = \frac{4\pi G}{3} a^2 \rho_{cr} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{cr}} \right) = \frac{4\pi G}{3} a^2 \rho_{cr} [1 - \Omega(t)], \quad (1.11)$$

donde a

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_{cr}(t)}, \quad (1.12)$$

se le conoce como el parámetro cosmológico. Generalmente,  $\Omega$  varía con el tiempo, pero, como el signo de  $E$  es fijo, la diferencia  $1 - \Omega(t)$  no cambia de signo. Por lo que, al medir el valor actual del parámetro cosmológico,  $\Omega_0 \equiv \Omega(t_0)$ , se puede determinar el signo de  $E$ .

El signo de  $E$  determina la curvatura espacial del universo en Relatividad General. En particular, la curvatura espacial tiene el signo opuesto de  $E$ . Por lo que en un universo dominado por polvo, hay una conexión directa entre la razón de la densidad de energía y la densidad crítica, la curvatura espacial y



la evolución futura del universo. Si  $\Omega_0 = \rho_0/\rho_{cr,0} > 1$ , entonces  $E < 0$  y la curvatura espacial es positiva (universo cerrado). En este caso el factor de escala alcanza un valor máximo y el Universo se recolapsa, como se muestra en la figura. Cuando  $\Omega_0 < 1$ ,  $E$  es positiva, la curvatura espacial es negativa (universo abierto, véase fig. 1.1) y el universo se expande de forma hiperbólica. El caso especial de  $\Omega = 1$ , o  $E = 0$ , corresponde a la expansión parabólica y espacial plana (universo plano, véase fig. 1.1). Para ambos casos, el universo se expande por siempre a una tasa no decreciente (véase fig. 1.1). En todos los casos, al extrapolar hacia el pasado, hacia un 'principio', lleva hacia una 'singularidad inicial', donde el factor de escala toma un valor cercano al cero y la tasa de expansión diverge junto con la de densidad de energía.

## 1.2 De la cosmología Newtoniana a la relativista

La teoría de Relatividad General nos lleva a una teoría matemática del universo de forma consistente, mientras que la teoría Newtoniana no lo hace, sobretodo, cuando se requiere describir procesos astrofísicos en el que las velocidades de las partículas son cercanas a la de la luz. Las ecuaciones de Einstein muestran que la geometría del espacio tiempo, descrita por Riemann, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, queda determinada por la distribución de materia-energía presente en ese espacio. El espacio-tiempo se ve afectado en la presencia de materia, curvándose con su presencia. De este modo, la materia le dice al espacio cómo curvarse y, por medio de las geodésicas, el espacio le dice a la materia, cómo moverse.

Además, la Relatividad General puede describir el movimiento de materia de partículas relativistas que tienen presión arbitraria. Se sabe que la radiación, que tiene una presión igual a un tercio de su densidad de energía, dominó el Universo durante los primeros 100,000 años después del Big Bang (V. Mukhanov[8]). Adicionalmente, la evidencia sugiere que la mayor parte de la densidad de energía al día de hoy tiene presión negativa. Para entender del todo estas épocas es necesario ir más allá de la teoría Newtoniana y abordar la teoría completa relativista. Por lo que se tienen que abordar espacios-tiempo que puedan ser utilizados para describir un universo homogéneo e isotrópico.

La suposición de que nuestro universo es homogéneo e isotrópico significa que su evolución puede ser representada como una secuencia en el tiempo de un espacio de hipersuperficies de tres dimensiones, donde cada una es homogénea e isotrópica. Estas hipersuperficies son la elección natural de superficies de tiempo constante. Por homogeneidad, las condiciones físicas son las mismas en cada punto de las hipersuperficies dadas. Por isotropía, las condiciones físicas son idénticas en todas las direcciones dentro de la hipersuperficie cuando se ven desde un punto dado sobre la misma. La isotropía en cada punto automáticamente obliga a tener homogeneidad. Sin embargo, la homogeneidad no necesariamente implica isotropía.

### 1.2.1 Las ecuaciones de Einstein y la evolución cósmica

La única manera de preservar la homogeneidad y la isotropía del espacio es, permitiendo que la escala de curvatura, caracterizada por  $a$ , sea dependiente del tiempo. De esta forma el factor de escala  $a(t)$  describe completamente la evolución del tiempo de un universo homogéneo e isotrópico. En la teoría relativista, no hay tiempo absoluto y las distancias espaciales no son invariantes con respecto a transformaciones de coordenadas. Más bien, el intervalo de espacio-tiempo infinitesimal entre los eventos es invariante. Existen, sin embargo, sistemas coordenados de preferencia en donde las simetrías del universo se manifiestan de forma explícita. En un sistema coordenado conveniente, el intervalo toma la forma

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \equiv g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.13)$$

donde  $g_{\alpha\beta}$  es la métrica el espacio-tiempo  $x^\alpha \equiv (t, r, \theta, \phi)$  son las coordenadas de los eventos. En este trabajo se utiliza la convención de suma usual sobre los índices repetidos

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \equiv \Sigma_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (1.14)$$

Se eligió que los índices griegos corran de 0 a 3 con el índice 0 reservado para la coordenada temporal. Los índices latinos corren sobre las coordenadas espaciales, como es usual en la mayoría de los textos,  $i, j, \dots = 1, 2, 3$ . Las coordenadas espaciales introducidas arriba son comóviles, es decir, cada objeto con velocidad peculiar cero tienen coordenadas constantes  $r, \theta, \phi$ . Más aún, la coordenada  $t$  es el tiempo propio medido por un observador comóvil. La distancia entre dos observadores comóviles en un momento particular de tiempo es

$$\int \sqrt{-ds^2_{t=cte}} \propto a(t), \quad (1.15)$$

y por tanto, incrementa o disminuye en proporción con el factor de escala,  $a(t)$ . En Relatividad General, las variables dinámicas que caracterizan el campo gravitacional son las componentes de la métricas  $g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$  y obedecen las ecuaciones de Einstein

$$G_\beta^\alpha \equiv R_\beta^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\beta^\alpha R - \Lambda \delta_\beta^\alpha = 8\pi G T_\beta^\alpha, \quad (1.16)$$

aclarando que se está tomando  $c = 1$  y que para este trabajo se considerará  $\Lambda = 0$  dentro de la formulación 3+1 que se verá más adelante, arriba

$$R_\beta^\alpha = g^{\alpha\gamma} \left( \frac{\partial \Gamma_{\gamma\beta}^\delta}{\partial x^\delta} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\delta}^\beta}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\delta \Gamma_{\delta\sigma}^\sigma - \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\delta \right), \quad (1.17)$$

es el tensor de Ricci expresado en términos del inverso de la métrica  $g^{\alpha\gamma}$  definido por  $g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha\beta}$  y los símbolos de Christoffel,

$$\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left( \frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\delta} \right). \quad (1.18)$$

El símbolo  $\delta_{\beta}^{\alpha}$  denota el tensor unitario, igual a 1 cuando  $\alpha = \beta$  y 0 en cualquier otro caso;  $R = R_{\alpha}^{\alpha}$  es el escalar de curvatura y  $\Lambda = \text{const.}$  es el término cosmológico. La materia es incorporada a las ecuaciones de Einstein a través del tensor de energía momento,  $T_{\beta}^{\alpha}$ . El tensor es simétrico y es determinado por la condición de que las ecuaciones:

$$\partial T^{\alpha\beta} / \partial x^{\beta} = 0 \quad (1.19)$$

deban coincidir con las ecuaciones de movimiento de materia en el espacio-tiempo de Minkowski. Para generalizar el espacio-tiempo curvo, la derivada parcial se sustituye por una derivada covariante, por lo que las ecuaciones de movimiento se modifican como:

$$T_{;\beta}^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} T^{\gamma\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\beta} T^{\alpha\gamma} = 0 \quad (1.20)$$

donde los términos de  $\gamma$  cuentan como el campo gravitacional. Nótese que que en Relatividad General estas ecuaciones no necesitan ser postuladas de forma separada. Las ecuaciones se siguen de las ecuaciones de Einstein como consecuencia de las identidades de Bianchi que satisfacen el tensor de Einstein

$$G_{\beta;\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (1.21)$$

A grandes escalas, la materia puede ser aproximada (no siempre) como un fluido perfecto caracterizado por la densidad de energía  $\rho$ , presión  $p$  y la 4-velocidad  $u^{alpha}$ . Su tensor de energía momento se encuentra dado

$$T_{\beta}^{\alpha} = (\rho + p)u^{\alpha}u_{\beta} + p\delta_{\beta}^{\alpha} \quad (1.22)$$

donde la ecuación de estado  $p = p(\rho)$  depende de las propiedades de la materia que deben de ser especificadas. Por ejemplo, para un universo compuesto de gas-ultrarelativista, la ecuación de estado es  $p = \rho/3$ .

Un ejemplo importante de materia y en el cual recae la importancia de este trabajo es el del campo escalar  $\phi$  con potencial  $V(\phi)$ . En este caso, el tensor de energía momento está dado por la expresión

$$T_{\beta}^{\alpha} = \phi^{;\alpha}\phi_{;\beta} - \left( \frac{1}{2}\phi^{;\gamma}\phi_{;\gamma} - V(\phi) \right) \delta_{\beta}^{\alpha} \quad (1.23)$$

donde

$$\phi_{;\beta} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}}, \quad \phi^{;\alpha} \equiv g^{\alpha\gamma}\phi_{;\gamma} \quad (1.24)$$

de las ecuaciones de movimiento se sigue que, para el campo escalar, se obtiene la ecuación de Klein-Gordon,

$$\phi^{;\alpha}_{;\alpha} + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0. \quad (1.25)$$

Si  $\phi^{;\gamma}\phi_{;\gamma} > 0$ , el tensor de energía momento para un campo escalar puede ser reescrito en la forma de fluido perfecto de la ec. 1.22 definiendo

$$\rho \equiv \frac{1}{2}\phi^{;\gamma}\phi_{;\gamma} + V(\phi), \quad p \equiv \phi^{;\gamma}\phi_{;\gamma} - V(\phi), \quad u^{\alpha} \equiv \phi^{;\alpha} / \sqrt{\phi^{;\gamma}\phi_{;\gamma}}, \quad (1.26)$$

en particular asumiendo que el campo es homogéneo ( $\partial\phi/\partial x^i = 0$ ), se tiene

$$\rho \equiv \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad p \equiv \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (1.27)$$

Para un campo escalar, la razón  $w = p/\rho$  es en general, dependiente del tiempo. Además,  $w$  se encuentra acotado por abajo de  $-1$  para cualquier potencial positivo  $V$  y la condición de dominio de energía débil  $\rho + p \geq 0$ , se satisface. Sin embargo, la condición de dominio de energía fuerte,  $\rho + 3p \geq 0$ , puede ser fácilmente violada por un campo escalar. Por ejemplo, si un potencial  $V(\phi)$  tiene un mínimo local en algún punto  $\phi_0$ , entonces  $\phi(t) = \phi_0$  es una solución de las ecuaciones de campo escalar, para las cuales  $p = -\rho = -V(\phi_0)$ . En lo que corresponde a las ecuaciones de Einstein, el tensor de energía momento asociado es

$$T_{\beta}^{\alpha} = V(\phi_0)\delta_{\beta}^{\alpha}, \quad (1.28)$$

imita el término de la constante cosmológica

$$\Lambda = 8\pi G V(\phi_0). \quad (1.29)$$

Por lo que el término de constante cosmológica puede ser interpretado siempre como la contribución de la energía del vacío a las ecuaciones de Einstein y de ahora en adelante tomará el valor  $\Lambda = 0$  en la ec. 1.16. Es necesario aclarar que, no resulta conveniente ver al campo escalar como un fluido, ya que corresponden a perfiles de materia completamente distintos. Desde el punto de vista de materia oscura como campo escalar, la materia oscura se comporta más como una onda que como una partícula (véase Jae-Weon Lee [21]).

### 1.2.2 Las ecuaciones de Friedmann

Para encontrar las versiones relativistas de la ec. 1.2, la ec. 1.4 y la ec. 1.9 se debe de sustituir la métrica de la ec. 4.36 y el tensor de energía-momento de la ec. 1.23 en las ecuaciones de Einstein 1.16. Las ecuaciones resultantes son las ecuaciones de Friedmann, que determinan las dos funciones incógnitas  $a(t)$  y  $\rho(t)$ . A continuación se muestra cómo la ec. 1.2 y la ec. 1.4 se deben modificar.

Si la presión  $p$  dentro de una esfera de volumen  $V$  es significativa, entonces la energía total,  $E = \rho V$ , no se conserva porque la presión es significativa y realiza un trabajo,  $-pdV$ . De la primera ley de la termodinámica, este trabajo debe de ser igual al cambio en la energía total:  $dE = -pdV$ . Como  $V \propto a^3$ , se puede reescribir la ecuación como

$$d\rho = -3(\rho + p)d\ln a, \quad (1.30)$$

que de forma equivalente es

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p). \quad (1.31)$$

Esta última ecuación es la nueva versión de la ec. 1.2 y resulta ser la ecuación de conservación de energía,  $T_{0;\alpha}^{\alpha} = 0$ , en un universo homogéneo e isotrópico. La

ecuación de aceleración también es modificada para materia con la presión no despreciable ya que, de acuerdo a Relatividad General, la fuerza del potencial gravitacional depende no sólo de la densidad de energía sino también de la presión. La ec. 1.4 corresponde a la primera ecuación de Friedmann

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G(\rho + 3p)a, \quad (1.32)$$

Multiplicando la ec.1.32 por  $\dot{a}$  y utilizando la ec.1.31 para expresar  $p$  en términos de  $\rho$ ,  $\dot{\rho}$  y  $H$  e integrando, se obtiene la segunda ecuación de Friedmann

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho. \quad (1.33)$$

Esta ecuación es similar a la mostrada anteriormente en la ec. 1.33 con  $k = -2E$ , pero la ec. 1.33 se aplica a una ecuación de estado arbitraria. Sin embargo,  $k$  no es simplemente una constante de integración, es decir  $k = \pm 1$  o  $0$ . Para  $k = \pm 1$ , la magnitud del factor de escala  $a$  tiene una interpretación geométrica asociada al radio de curvatura. Combinando la ec.1.31 y la ec.1.33, se deriva la también útil relación

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p) + \frac{k}{a^2}. \quad (1.34)$$

Por lo que, en Relatividad General, el valor del parámetro cosmológico,  $\Omega \equiv \rho/\rho_{cr}$ , determina la curvatura. Si  $\Omega > 1$ , el universo es cerrado y tiene la geometría de una esfera en tres dimensiones ( $k = +1$ );  $\Omega = 1$  corresponde a un universo plano ( $k = 0$ ); y en el caso de  $\Omega < 1$ , el universo es abierto y tiene una geometría hiperbólica ( $k = -1$ ). La combinación de la ec. 1.33 y cualquiera de las leyes de conservación de la ec. 1.31 o la ec. 1.32 de aceleración, complementada por la ecuación de estado  $p = p(\rho)$ , conforma un sistema completo de ecuaciones que determina las dos funciones incógnitas  $a(t)$  y  $\rho(t)$ . Las soluciones, y por ende la evolución del universo depende no solamente de la geometría sino también de la ecuación de estado.

Para concluir se reitera que, dentro de las distinciones entre la teoría clásica y la relativista; como bien se sabe, el tratamiento Newtoniano es incompleto: sólo es válido para materia sin presión a escalas pequeñas, donde las velocidades relativistas debidas a la expansión son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Dentro de la Cosmología Newtoniana, la geometría espacial es siempre plana y en consecuencia, el factor de escala no tiene interpretación geométrica. En contraste, la Relatividad General, provee una descripción completa y auto-consistente que permite describir la materia relativista con una ecuación de estado. Esta teoría es aplicable arbitrariamente a grandes escalas. El contenido de materia determina la geometría del universo y, si  $k = \pm 1, 0$ , el factor de escala se interpreta geoméricamente como el radio de curvatura.

### 1.2.3 Tiempo conforme y soluciones relativistas

Para encontrar las soluciones de las ecuaciones de Friedmann, a veces es conveniente (como se verá en las evoluciones numéricas) reemplazar el tiempo físico  $t$

con el tiempo conforme  $\eta$  que, en términos de la distancia comóvil, corresponde al tiempo transcurrido desde el Big Bang multiplicado por la velocidad de la luz, definido como,

$$\eta \equiv \int \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.35)$$

de modo que  $dt = a(\eta)d\eta$ , la ec. 1.33 puede reescribirse como

$$a'^2 + ka^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^4, \quad (1.36)$$

donde la prima denota la derivada con respecto a  $\eta$ . Si ahora se deriva con respecto a  $\eta$  y se utiliza la ec.1.30, se obtiene

$$a'' + ka = \frac{4\pi G}{3}(\rho - 3p)a^3. \quad (1.37)$$

Esta última ecuación corresponde a la traza de las ecuaciones de Einstein. Como ejemplo útil, se encontrará la solución analítica para un universo lleno de polvo.

En el caso de polvo,  $p = 0$ , la expresión de lado derecho de 1.37 es constante y las soluciones de esta ecuación están dadas por

$$a(\eta) = a_m \begin{cases} (\cosh \eta - 1), & k = -1 \\ \eta^2, & k = 0 \\ (1 - \cos \eta), & k = +1 \end{cases} \quad (1.38)$$

## Capítulo 2

---

# Aproximación clásica de perturbaciones en Cosmología

---

En este capítulo se considerará una inestabilidad gravitacional en la teoría de Newton. Los resultados derivados en esta teoría son aplicables solamente a materia no relativista, a escalas tales que no excedan el horizonte de Hubble. El tratamiento se llevará de la siguiente forma: primero, se verá qué tan rápido pueden crecer las pequeñas inhomogeneidades en un Universo en expansión (dado por la teoría de Jeans). El objetivo es determinar qué tipos de perturbaciones pueden existir en un medio homogéneo e isotrópico y qué métodos se requieren seguir para analizarlos, de modo que se pueda obtener un entendimiento sólido sobre el comportamiento de las perturbaciones. En un segundo paso, se considerarán perturbaciones lineales en un Universo en expansión, con el fin de saber qué tan inestable puede ser un universo dominado por materia. Para finalizar, se derivan algunas soluciones exactas que describen el comportamiento de las perturbaciones dentro del régimen no lineal. En base a estas soluciones, es posible explicar las características generales de la distribución de materia a escalas no lineales.

### 2.1 Ecuaciones básicas para el estudio no relativista

A escalas cosmológicas la materia puede ser descrita como un fluido perfecto; para cualquier momento y tiempo puede ser completamente caracterizado por la distribución de densidad  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , la entropía por unidad de masa  $s(\mathbf{x}, t)$ , y el campo vectorial de velocidad  $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ . Estas cantidades satisfacen las ecuaciones hidrodinámicas, por lo que se desglosará brevemente su derivación.

*Ecuación de continuidad.* Considerando un elemento de volumen fijo  $\Delta V$  en coordenadas Eulerianas, la tasa de cambio de su masa puede escribirse de la

forma;

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_{\Delta V} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV. \quad (2.1)$$

Por el otro lado, la tasa es completamente determinada por el flujo de materia a través de la superficie que rodea el volumen;

$$\frac{dM(t)}{dt} = - \oint \rho \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = - \int_{\Delta V} \nabla(\rho \mathbf{V}) dV. \quad (2.2)$$

Ambas expresiones son consistentes sí y sólo sí

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0. \quad (2.3)$$

*Ecuaciones de Euler.* La aceleración  $\mathbf{g}$  de un elemento de masa pequeño  $\Delta M$  está determinado por la fuerza gravitacional

$$\mathbf{F}_{gr} = -\Delta M \cdot \nabla \phi, \quad (2.4)$$

donde  $\phi$  es el potencial gravitacional, y por la presión  $p$  se tiene que;

$$\mathbf{F}_{pr} = - \oint p \cdot d\boldsymbol{\sigma} = - \int \nabla p dV \approx -\nabla p \cdot \Delta V, \quad (2.5)$$

con

$$\mathbf{g} \equiv \frac{dV(\mathbf{x}(t), t)}{dt} = \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right)_x + \frac{dx^i(t)}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}. \quad (2.6)$$

La ley de Newton

$$\Delta M \cdot \mathbf{g} = \mathbf{F}_{gr} + \mathbf{F}_{pr} \quad (2.7)$$

convierte las ecuaciones de Euler de la siguiente manera

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \phi = 0. \quad (2.8)$$

*Conservación de entropía.* Despreciando el término de disipación, la entropía de un elemento de materia es conservado (se aclara que, sólo en este capítulo y el siguiente,  $S$  corresponde a la entropía, más adelante tomará otro significado físico);

$$\frac{dS(\mathbf{x}(t), t)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) S = 0. \quad (2.9)$$

*Ecuación de Poisson.* Para terminar, la ecuación que determina el potencial gravitacional;

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad (2.10)$$

La ecuación ec. (2.3) y las ecs. (2.8)-(2.10) conforman junto con la ecuación de estado

$$p = p(\rho, S), \quad (2.11)$$



un conjunto de siete ecuaciones que, en principio, ayudan a determinar las siete funciones indefinidas  $\rho, \mathbf{V}, S, \phi, p$ . Debe hacerse notar que solamente las primeras cinco ecuaciones poseen la primera derivada temporal. Por lo tanto, la solución más general de estas ecuaciones deberá depender de cinco constantes de integración que en este caso son funciones arbitrarias de las coordenadas espaciales  $\mathbf{x}$ . Las ecuaciones hidrodinámicas no son lineales y en general no es sencillo encontrar sus soluciones. Sin embargo, para estudiar el comportamiento de pequeñas perturbaciones alrededor de un fondo homogéneo e isotrópico, es apropiado linealizarlas.

## 2.2 Inestabilidades gravitacionales

Para entender la formación de estrellas y planetas, Jeans demostró la existencia de una inestabilidad importante en la evolución de nubes de gas. Esta inestabilidad, conocida ahora como la *inestabilidad de Jeans*, ha funcionado como piedra angular del modelo estándar del origen de las galaxias y la estructura a gran escala.

Jeans demostró que, empezando a partir de un fluido homogéneo e isotrópico, las pequeñas fluctuaciones en la densidad  $\delta\rho$  y la velocidad  $\delta v$ , pueden evolucionar con el tiempo. Sus cálculos los realizó en el contexto de un fluido estático de fondo; la expansión del Universo no era conocida en ese entonces, pero no es relevante para la formación de estrellas y planetas. En particular, mostró que las fluctuaciones de densidad pueden crecer en el tiempo si el efecto estabilizador de la presión es menor que la tendencia de una fluctuación autogravitante a colapsarse. Lo cual es de esperarse, como la gravedad es una fuerza atractiva, a medida que las fuerzas de presión puedan tomarse como nulas, se espera que una región sobredensa acrete material de sus alrededores, convirtiéndose aún más densa. Entre más densa se encuentre, más material acretará, resultando en una inestabilidad que tarde o temprano ocasiona el colapso de una fluctuación en un objeto gravitacionalmente ligado. El criterio simple que se necesita para decidir si una fluctuación crecerá con el tiempo es que, la longitud de una fluctuación sea más grande que la *longitud de Jeans*,  $\lambda_J$ , para el fluido. Antes de calcular la longitud de Jeans con detalle, primero se hace una aproximación simple para demostrar su importancia física.

Suponiendo que, para un momento dado, existe una inhomogeneidad de radio  $\lambda$  que contiene una pequeña fluctuación de densidad  $\delta\rho > 0$  de masa  $M$  y densidad media  $\rho$ . La fluctuación crecerá (en el sentido que  $\delta\rho/\rho$  incrementa) si la fuerza autogravitante por unidad de masa,  $F_{gr}$ , excede la fuerza que se le opone por unidad de masa surgida por la presión,  $F_{pr}$ :

$$F_{gr} \simeq \frac{GM}{\lambda^2} \simeq \frac{G\rho\lambda^3}{\lambda^2} > F_{pr} \simeq \frac{p\lambda^2}{\rho\lambda^3} \simeq \frac{v_s^2}{\lambda}. \quad (2.12)$$

donde  $v_s$  es la velocidad del sonido, esta relación implica que el crecimiento ocurre si  $\lambda > v_s(G\rho)^{-1/2}$ . Esto establece la existencia de la longitud de Jeans

$\lambda_J \simeq v_s (G\rho)^{-1/2}$ . Escencialmente el mismo resultado puede ser obtenido requiriendo que la energía gravitacional por unidad de masa de la esfera  $U$ , sea mayor que la energía cinética del movimiento térmico del gas, por unidad de masa,  $E_T$ .

$$U \simeq \frac{G\rho\lambda^3}{\lambda} > E_T \simeq v_s^2, \quad (2.13)$$

o requiriendo que el tiempo de caída libre,  $\tau_{ff}$  sea menor que el tiempo hidrodinámico,  $\tau_h$ ,

$$\tau_{ff} \simeq \frac{1}{(G\rho)^{1/2}} < \tau_h \simeq \frac{\lambda}{v_s}, \quad (2.14)$$

cuando las condiciones de la ec. 2.13 y de la ec. 2.14 no se satisfacen, las fuerzas de presión dentro de las perturbaciones son mayores que la autogravedad y entonces la perturbación se propaga como una onda acústica con longitud de onda  $\lambda$  a una velocidad  $v_s$ .

### 2.2.1 Teoría de Jeans

Para esta sección se considera un universo estático que no se está expandiendo, suponiendo que el fondo es isótropico y homogéneo con densidad de materia constante e independiente del tiempo:  $\rho_0(\mathbf{x}, t) = \text{const}$ . Si bien esta suposición es contradictoria con las ecuaciones de hidrodinámica, es cierto que la densidad de energía permanece igual sólo si la materia se encuentra en reposo y si la fuerza gravitacional,  $F \propto \nabla\phi$ , se anula. Sin embargo, sucede que la ecuación de Poisson  $\Delta\phi = 4\pi G\rho_0$  no se satisface. Esta inconsistencia puede ser evadida si consideramos un Universo estático de Einstein, donde la fuerza gravitacional de la materia es compensada por la fuerza 'antigravitacional' de una constante cosmológica elegida de forma adecuada.

Al perturbar ligeramente la distribución de materia, se tiene que;

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{x}, t), \quad (2.15a)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0 + \delta\phi(\mathbf{x}), \quad (2.15b)$$

$$V(\mathbf{x}, t) = V_0 + \delta v(\mathbf{x}, t), \quad (2.15c)$$

$$S(\mathbf{x}, t) = S_0 + \delta S(\mathbf{x}, t), \quad (2.15d)$$

donde  $\delta\rho \ll \rho_0$ . La presión se encuentra dada por;

$$p(\mathbf{x}, t) = p(\rho_0 + \delta\rho, S_0 + \delta S) = p_0 + \delta p(\mathbf{x}, t), \quad (2.16)$$

en la aproximación lineal la perturbación  $\delta p$  se puede expresar en términos de la densidad de energía y de las perturbaciones de entropía de la forma;

$$\delta p = c_s^2 \delta\rho + \sigma \delta S \quad (2.17)$$

aquí,  $c_s^2 \equiv (\partial p / \partial S)_\rho$ . Para materia no relativista ( $p \equiv \rho$ ), la velocidad del sonido así como las velocidades  $\delta v$  son mucho menores que la de la velocidad de

la luz. Sustituyendo las ecuaciones 2.15a y 2.17 en las ecuaciones 2.3,2.8-2.10 y despreciando los términos que no son lineales en las perturbaciones, se obtiene;

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla (\delta \mathbf{v}) = 0, \quad (2.18a)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \delta \rho + \frac{\sigma}{\rho_0} \nabla \delta S + \nabla \delta \phi = 0, \quad (2.18b)$$

$$\frac{\partial \delta S}{\partial t} = 0, \quad (2.18c)$$

$$\nabla^2 \delta \phi = 4\pi G \delta \rho \quad (2.18d)$$

la ecuación tiene una solución más general, dada por

$$\delta S(\mathbf{x}, t) = \delta S(\mathbf{x}). \quad (2.19)$$

La ec. (2.18c) establece que la entropía es una función independiente del tiempo, arbitraria de las coordenadas espaciales. Tomando la divergencia de la ec. (2.18b) y utilizando las ecuaciones de continuidad y de Poisson para expresar  $\nabla \delta v$  y  $\nabla \delta \phi$  en términos de  $\delta \rho$ , se obtiene;

$$\frac{\partial^2 \delta \rho}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \delta \rho - 4\pi G \rho_0 \delta \rho = \sigma \nabla^2 \delta S(\mathbf{x}) \quad (2.20)$$

Así, tenemos un ecuación lineal para  $\delta \rho$ , donde la perturbación de entropía funciona como una fuente dada.

## 2.3 Inestabilidades en un universo en expansión

En un Universo homogéneo e isotrópico que se encuentra expandiéndose, la densidad de energía de fondo es una función del tiempo, y las velocidades del fondo obedecen la ley de Hubble;

$$\rho = \rho_0(t), \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 = H(t) \cdot \mathbf{x} \quad (2.21)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ec. (2.3), se obtiene la muy conocida expresión

$$\dot{\rho}_0 + 3H\rho_0 = 0, \quad (2.22)$$

que establece que la masa total de la materia que no es relativista se conserva. La divergencia de las ecuaciones de Euler junto con la ecuación de Poisson lleva a las ecuaciones de Friedmann como se explicó en el desarrollo del capítulo anterior;

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0. \quad (2.23)$$

*Perturbaciones.* Despreciando las perturbaciones de la entropía y sustituyendo las expresiones

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{x}, t), \quad (2.24)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \delta\mathbf{v}, \quad (2.25)$$

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi, \quad (2.26)$$

$$p = p_0 + \delta p = p_0 + c_s^2 \delta\rho \quad (2.27)$$

para introducirlas en la ec. 2.3, la ec. 2.8 y 2.10, se deriva el siguiente conjunto de ecuaciones linealizadas para pequeñas perturbaciones;

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \nabla \delta\mathbf{v} + \nabla(\delta\rho \cdot \mathbf{V}_0) = 0, \quad (2.28a)$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \delta\mathbf{v} + (\delta\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + \frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \delta\rho + \nabla \delta\phi = 0, \quad (2.28b)$$

$$\Delta \delta\phi = 4\pi G \delta\rho. \quad (2.28c)$$

La velocidad de Hubble  $\mathbf{V}_0$  depende explícitamente de  $\mathbf{x}$  por lo que la transformada de Fourier con respecto a las coordenadas Eulerianas  $\mathbf{x}$  no reduce las ecuaciones a un sistema desacoplado de ecuaciones ordinarias. Esta es la razón por la que es más conveniente utilizar coordenadas lagrangianas (comóviles con el flujo de Hubble)  $\mathbf{q}$ , que se encuentran relacionadas con las coordenadas Eulerianas de la forma;

$$\mathbf{x} = a(t) \mathbf{q} \quad (2.29)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala. La derivada parcial con respecto al tiempo tomado en la coordenada constante  $\mathbf{x}$  es diferente de la derivada parcial tomada en la coordenada constante  $\mathbf{q}$ . Para una función genérica  $f(\mathbf{x}, t)$  se tiene que

$$\left( \frac{\partial f(\mathbf{x} = a\mathbf{q}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{q}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \dot{a} q^i \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_t \quad (2.30)$$

por lo que

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{q}} - (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \quad (2.31)$$

Las derivadas espaciales se encuentran relacionadas de la forma

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{q}} \quad (2.32)$$

Utilizando estas derivadas en 2.28a-2.28c introduciendo la amplitud fraccional de las perturbaciones de densidad  $\delta \equiv \delta\rho/\rho_0$ , se obtiene que

$$\left( \frac{\partial \delta}{\partial t} \right) + \frac{1}{a} \nabla \delta\mathbf{v} = 0 \quad (2.33)$$

$$\left( \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} \right) + H \delta\mathbf{v} + \frac{c_s^2}{a} \nabla \delta + \frac{1}{a} \nabla \delta\phi = 0 \quad (2.34)$$

$$\nabla\delta\phi = 4\pi Ga^2\rho_0\delta \quad (2.35)$$

donde  $\nabla \equiv \nabla_{\mathbf{v}}$  y  $\delta$  son las derivadas con respecto a las coordenadas Lagrangianas  $\mathbf{v}$  y las derivadas som tomadas a  $\mathbf{v}$  constante. Para derivar 2.33 se utilizó la ecuación 2.22 para el fondo fondo, tomando en cuenta que  $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{v}_0 = 3H$  y  $(\delta\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{V}_0 = H\delta\mathbf{v}$ . Tomando la divergencia de la ecuación 2.34 y utilizando la ecuación la ecuación de continuidad y de Poisson para expresar  $\nabla\delta\mathbf{v}$  y  $\nabla\delta\phi$  en términos de  $\delta$ , se deriva la siguiente ecuación

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2}\nabla^2\delta - 4\pi G\rho_0\delta = 0 \quad (2.36)$$

que describe la inestabilidad gravitacional en un Universo en expansión.

### 2.3.1 Perturbaciones adiabáticas

Tomando la transformada de Fourier de la ecuación 2.36 con respecto a las coordenadas comóviles  $\mathbf{v}$ , se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$\ddot{\delta}_{\mathbf{k}} + 2H\dot{\delta}_{\mathbf{k}} + \left( \frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G\rho_0 \right) \delta_{\mathbf{k}} = 0 \quad (2.37)$$

para cada modo de Fourier  $\delta = \delta_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{k})$ . El comportamiento de cada perturbación depende fuertemente de su tamaño espacial; la longitud crítica es la longitud de Jeans

$$\lambda_J^{fis} = \frac{2\pi a}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} \quad (2.38)$$

arriba  $\lambda^{fis}$  es la longitud de onda física (que puede corresponder a una longitud física con unidades dadas), relacionada con la longitud comóvil  $\lambda = 2\pi/k$  a través de  $\lambda^{fis} = a \cdot \lambda$ . En un Universo plano, dominado por materia  $\rho_0 = (6\pi Gt^2)^{-1}$  por tanto

$$\lambda_J^{fis} \sim c_s t \quad (2.39)$$

es decir, la longitud de Jeans es del orden del horizonte de sonido. A veces en lugar de la longitud de Jeans, se utiliza la masa de Jeans, definida por  $M_J \equiv \rho_0(\lambda_J^{fis})^3$ . Las perturbaciones de escalas mucho menores que la longitud de Jeans ( $\lambda \ll \lambda_J$ ) son las ondas de sonido. Si  $c_s$  cambia de forma adiabática, entonces la solución de 2.37 es

$$\delta_{\mathbf{k}} \propto \frac{1}{\sqrt{c_s a}} \exp\left(\pm k \int \frac{c_s dt}{a}\right) \quad (2.40)$$

A escalas mucho mayores que la escala de Jeans ( $\lambda \gg \lambda_J$ ), la gravedad domina y se puede despreciar el término  $k$  en 2.37. Por lo que una de las soluciones es simplemente proporcional a la constante de Hubble  $H(t)$ . De hecho, sustituyendo  $\delta_d = H(t)$  en 2.37, donde se toma  $c_s^2 k^2 = 0$ , la ecuación resultante coincide con la derivada temporal de la ecuación de Friedmann 2.23. Nótese que  $\delta_d = H(t)$  es la solución de decaimiento de la ecuación de perturbación ( $H$

decrece con el tiempo) en un Universo dominado por materia con una curvatura arbitraria.

Esta solución se pudo haber obtenido haciendo el siguiente desarrollo; tanto la densidad de energía de fondo  $\rho_0(t)$  como la densidad de energía desplazada en el tiempo un parámetro  $\tau$ ,  $\rho_0(t + \tau)$ , donde  $\tau = \text{const.}$ , satisfacen la ec. (2.22) y la ec. (2.23). Utilizando la expresión 2.22 para expresar  $H$  en términos de  $\rho_0$  y sustituyendo el resultado obtenido en la ec. 2.23, se obtiene una ecuación para  $\rho_0(t)$  en donde el tiempo no aparece explícitamente. Por lo tanto, la solución es invariante bajo traslaciones en la coordenada temporal. Para valores pequeños de  $\tau$ , la solución desplazada en el tiempo  $\rho_0(t + \tau)$  puede ser considerada como una perturbación del fondo  $\rho_0(t)$  con una amplitud de

$$\delta_d = \frac{\rho_0(t + \tau) - \rho_0(t)}{\rho_0 \tau(t)} \approx \frac{\dot{\rho}_0 \tau}{\rho_0} \propto H(t) \quad (2.41)$$

Una vez que se conoce la solución de la ecuación diferencial de segundo orden,  $\delta_d$ , entonces las otras soluciones independientes,  $\delta_i$  pueden encontrarse fácilmente con ayuda del Wronskiano,

$$W \equiv \dot{\delta}_d \delta_i - \delta_d \dot{\delta}_i \quad (2.42)$$

Tomando la derivada del Wronskiano y utilizando 2.37 para expresar  $\ddot{\delta}$  en términos de  $\dot{\delta}$  y  $\delta$ , encontramos que  $W$  satisface la ecuación

$$\dot{W} = -2HW \quad (2.43)$$

que tiene por solución

$$W \equiv \dot{\delta}_d \delta_i - \delta_d \dot{\delta}_i = \frac{C}{a^2} \quad (2.44)$$

donde  $C$  es una constante de integración. Sustituyendo la solución  $\delta_i = \delta_d f(t)$  en 2.44, se obtiene la ecuación para  $f$  que es integrada de la forma

$$f = -C \int \frac{dt}{a^2 \delta_d^2} \quad (2.45)$$

Por lo que la solución más general de la ec. (2.37) es

$$\delta = C_1 H \int \frac{dt}{a^2 H^2} + C_2 H \quad (2.46)$$

En un Universo plano dominado por materia,  $a \propto t^{2/3}$  y  $H \propto t^{-1}$ . En este caso, se tiene

$$\delta = C_1 t^{2/3} + C_2 t^{-1} \quad (2.47)$$

Por tanto, en un Universo en expansión, la inestabilidad gravitacional es mucho menos eficiente y la amplitud de la perturbación incrementa sólo como potencia del tiempo. En el caso del un Universo plano dominado por materia, el modo de crecimiento es proporcional al factor de escala. Por lo que, si se quieren obtener inhomogeneidades grandes ( $\delta \gtrsim 1$ ) al día de hoy, se tiene que asumir que a épocas tempranas (por ejemplo a un valor del corrimiento al rojo de  $z = 1000$ ) las inhomogeneidades ya eran sustanciales ( $\delta \gtrsim 10^{-3}$ ). Esto impone constricciones fuertes en el espectro inicial de las perturbaciones.

## 2.4 Densidad crítica para el colapso gravitacional

Como ya se había comentado en la introducción, muchos objetos presentes en la época actual del Universo, ya sean galaxias o cúmulos de galaxias, tienen densidades con órdenes de magnitud mayores que la densidad promedio del Universo. Por lo que estos objetos se encuentran en el régimen altamente no-lineal, donde  $\delta\rho \gg 1$ . Por lo que para llevar una descripción completa de la formación de estructura en el Universo, se tiene que ir más allá del crecimiento de perturbaciones dentro del régimen lineal o en el régimen cuasi-lineal, para pasar al colapso gravitacional de las sobredensidades en el régimen no-lineal. En esta breve sección, se ve el colapso no-lineal de una distribución de densidad. Bajo suposiciones sencillas sobre la simetría del sistema, se pueden construir modelos analíticos. A pesar de que no se espera que este tipo de modelos arroje descripciones precisas del problema no-lineal real, éstos proveen una visión de los procesos que se encuentran involucrados.

Por simplicidad se supone que a una época inicial, se tiene una perturbación con un perfil *top-hat* de radio  $R$  (las ecuaciones de evolución que se desarrollan aplican a cada cáscara esférica del perfil genérico). De acuerdo con los teoremas de Newton que hacen referencia a distribuciones de masa esférica, el universo fuera de la perturbación continúa evolucionando como un universo con densidad crítica, y una región perturbada evoluciona de forma independientemente del comportamiento de la región exterior, comportándose como un universo cerrado con parámetro de densidad  $\Omega(z)$ . Escribiendo el radio como  $r = R_{loc}(t)$  donde  $a_{loc}$  es el factor de escala local, la solución de la ecuación de Friedmann con  $k = 1$  se escribe como

$$\frac{a_{loc}(t)}{a_{max}} = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta), \quad \frac{t}{t_{max}} = \frac{1}{\pi}(\theta - \sin \theta), \quad (2.48)$$

donde el desarrollo sobre el ángulo  $\theta$  corre de 0 a  $2\pi$ . El subíndice *max* indica la época de máxima expansión para la región perturbada.

Para el estudio del régimen lineal, se necesita el parámetro de expansión para segundo orden,

$$\frac{a_{loc}(t)}{a_{max}} \simeq \frac{\theta^2}{48} - \frac{\theta^4}{48}, \quad \frac{t}{t_{max}} \simeq \frac{1}{\pi} \left( \frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^5}{120} \right). \quad (2.49)$$

Combinando los resultados se obtiene el factor de escala linealizado, dado por

$$\frac{a_{lin}(t)}{a_{max}} = \frac{1}{4} \left( 6\pi \frac{t}{t_{max}} \right)^{2/3} \left[ 1 - \frac{1}{20} \left( 6\pi \frac{t}{t_{max}} \right)^{2/3} \right]. \quad (2.50)$$

Esta expresión es de gran importancia. Si se ignora el término dentro de los paréntesis cuadrados, esta ecuación da la expansión del fondo para un universo espacialmente plano. Si se incluyen ambos términos, arroja la expresión para la teoría lineal para el crecimiento de una perturbación. La evolución no-lineal

completa está dada por la solución paramétrica anterior. Debe notarse que  $a_{max}$  es el máximo valor del factor de escala de la solución completa, y que los tres modelos son normalizados al mismo factor de escala a tiempos tempranos cuando la perturbación es pequeña.

Una característica interesante en la evolución de la perturbación completa es el punto de retorno, que ocurre cuando se alcanza la máxima expansión en  $\theta = \pi$ . Hasta ese punto la expansión del universo ha sido dominante sobre el colapso gravitacional y el tamaño físico continúa creciendo (claro que el tamaño comóvil siempre se encuentra decreciendo). Suponiendo que se sigue utilizando la expresión lineal, como se está asumiendo que la materia es la que domina en esta época, la densidad de energía en los modelos siempre tiene la forma  $a^{-3}$ . El contraste de densidad lineal se encuentra dado por,

$$1 + \delta_{lin} = \frac{a_{fondo}^3}{a_{lin}^3}, \quad (2.51)$$

donde  $a_{fondo}$  es la evolución del fondo dada por el truncamiento de orden más bajo en la ec. 2.50. Sustituyendo las expresiones anteriores y linealizando de nueva cuenta se obtiene,

$$\delta_{lin} = \frac{3}{20} \left( 6\pi \frac{t}{t_{max}} \right)^{2/3}, \quad (2.52)$$

de modo que, en el punto de retorno, el colapso procede a la fase de expansión, y el objeto colapsa en el punto  $t = 2t_{max}$ . Para este tiempo, el contraste de densidad de la teoría lineal es,

$$\delta_{lin}^{col} = \frac{3}{20} (12\pi)^{2/3} = 1.686 \quad (2.53)$$

Entonces, el contraste de densidad lineal toma un valor alrededor de 1.7, que corresponde a la época de un colapso gravitacional completo, de una perturbación esféricamente simétrica. La evolución para los tres factores de escala dados por la evolución del fondo, el colapso no-lineal completo y la evolución linealizada, se encuentran en la fig. 1.1 del capítulo anterior.



## Capítulo 3

---

### Inestabilidades Gravitacionales en Relatividad General

---

El análisis Newtoniano de inestabilidades gravitacionales tiene sus limitaciones. Claramente falla para perturbaciones a escalas mayores que el radio de Hubble. Para el caso de un fluido relativista se tienen que emplear Relatividad General para ambos tipos de perturbaciones, de longitud de onda corta y de longitud de onda larga. Esta teoría nos da una descripción para cualquier tipo de materia a cualquier tipo de escala. Desafortunadamente, las interpretaciones físicas de los resultados obtenidos es comunmente menos transparente que en la contraparte clásica. El principal problema consiste en la libertad de elección de las coordenadas utilizadas para describir las perturbaciones. A diferencia con el universo homogéneo e isotrópico, donde el sistema coordenado preferible es fijo por la simetría y las propiedades del fondo, no hay sistema de coordenadas preferencial para analizar las perturbaciones. La libertad en la elección de coordenadas, o libertad de norma (gauge freedom), conlleva a la aparición de modos de perturbaciones ficticias. Estos modos ficticios no describen inhomogeneidades reales, sino que reflejan las propiedades del sistema coordenado empleado.

Para mostrar este punto, considerando un Universo homogéneo e isotrópico, donde  $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(t)$ . En Relatividad General cualquier sistema coordenado es permitido, y en principio se puede decidir utilizar un nuevo tiempo coordenado  $\tilde{t}$ , relacionado con el tiempo 'viejo',  $t$ , a través de la transformación  $\tilde{t} = t + \delta t(\mathbf{x})$ . Así la densidad de energía  $\tilde{\rho}(\tilde{t}, \mathbf{x}) \equiv \rho(t(\tilde{t}, \mathbf{x}))$  en la hipersuperficie  $\tilde{t} = \text{const.}$  depende, en general, en las coordenadas espaciales  $\mathbf{x}$ . Suponiendo que  $\delta t \ll t$ , se tiene

$$\rho(t) = \rho(\tilde{t} - \delta t(\mathbf{x}, t)) \simeq \rho(\tilde{t}) - \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta t \equiv \rho(\tilde{t}) + \delta \rho(\mathbf{x}, \tilde{t}). \quad (3.1)$$

El primer término de la derecha se interpreta como la densidad de energía en el nuevo sistema coordenado, mientras que el segundo describe una perturbación lineal. Esta perturbación no es física y es debida completamente a la elección del nuevo tiempo 'perturbado'. Así que se pueden producir perturbaciones ficticias

simplemente con perturbar las coordenadas. Más aún, se puede remover la perturbación 'real' en la densidad de energía escogiendo las hipersuperficies de tiempo constante de forma que sean igual que las hipersuperficies de energía constante: en este caso  $\delta\rho = 0$  a pesar de la presencia de inhomogeneidades reales.

Para resolver los modos de perturbaciones ficticias y reales en Relatividad General, es necesario tener un conjunto completo de variables. Para ser preciso se necesitan ambos tipos de perturbaciones de campos de materia y perturbaciones métricas.

En este capítulo se van a introducir las variables invariantes de norma, las cuales no dependen de una elección particular de las coordenadas y tienen una interpretación física clara. Se aplica el formalismo desarrollado para estudiar el comportamiento de perturbaciones relativistas en algunos casos de interés. Para simplificar un poco el desarrollo, se considera un Universo espacialmente plano. La generalización de los resultados obtenidos en universos que no sean planos es bastante sencillo.

### 3.1 Perturbaciones de variables invariantes de norma

Las inhomogeneidades en la distribución de masa inducen perturbaciones métricas que pueden descomponerse en partes irreducibles. En la aproximación lineal distintos tipos de perturbaciones evolucionan de forma independiente por lo que pueden ser analizadas de manera separada. En esta sección se clasifican las perturbaciones métricas, luego se determina como se transforman bajo transformaciones generales de coordenadas y finalmente se construyen las variables invariantes de norma.

#### 3.1.1 Clasificación de perturbaciones

La métrica de un universo plano de Friedmann con pequeñas perturbaciones puede escribirse como

$$ds^2 = \left( {}^{(0)}g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}(x^\gamma) \right) dx^\alpha dx^\beta, \quad (3.2)$$

donde  $|\delta g_{\alpha\beta}| \ll |{}^{(0)}g_{\alpha\beta}|$ . Utilizando el tiempo conforme,  $\eta$ , la métrica de fondo se convierte en

$${}^{(0)}g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = a^2(\eta) (d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j). \quad (3.3)$$

Las perturbaciones métricas  $\delta g_{\alpha\beta}$  puede ser categorizada en tres tipos distintos: perturbaciones *escalares*, *vectoriales* y *tensoriales*. Esta clasificación se basa en las propiedades de simetría del fondo homogéneo e isotrópico, que a un momento dado del tiempo es invariante con respecto al grupo de rotaciones y traslaciones. La componente  $\delta g_{00}$  se comporta como un escalar bajo estas rotaciones y por tano

$$\delta g_{00} = 2a^2\phi, \quad (3.4)$$

### 3.1. PERTURBACIONES DE VARIABLES INVARIANTES DE NORMA 31

donde  $\phi$  es un 3-escalar.

Las componentes del espacio-tiempo  $\delta g_{0i}$  se pueden descomponer en la suma del gradiente espacial de algún escalar  $B$  y un vector  $S_i$  con divergencia nula:

$$\delta g_{0i} = a^2 (B_{,i} + S_i). \quad (3.5)$$

Arriba, la coma con el índice denota la derivada con respecto a la derivada espacial, es decir,  $B_{,i} = \partial B / \partial x^i$ . El vector  $S_i$  satisface la constricción  $S^i_{,i} = 0$  y así tiene dos componente independientes. Los índices espaciales se suben y se bajan con la métrica identidad  $\delta_{ij}$  y se asume nuevamente que la suma se lleva a cabo sobre índices repetidos.

De forma similar, la componente  $\delta g_{ij}$ , que se comporta como un tensor bajo 3 rotaciones, puede escribirse como la suma de las partes irreducibles:

$$\delta_{ij} = a^2 (2\psi\delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{i,j} + F_{j,i} + h_{ij}), \quad (3.6)$$

en esta expresión  $\psi$  y  $E$  son funciones escalares, el vector  $F_i$  tiene divergencia cero ( $F^i_{,i} = 0$ ) y el 3-tensor  $h_{ij}$  satisface las constricciones:

$$h^i_i = 0, \quad h^i_{j,i} = 0, \quad (3.7)$$

es decir, no tiene traza y es transverso. Contando el número de funciones independientes utilizadas para formar  $\delta g_{\alpha\beta}$ , de modo que se tienen cuatro funciones para las perturbaciones escalares, cuatro funciones para las perturbaciones vectoriales (dos 3-vectores con una sola constricción cada uno) y dos funciones para las perturbaciones tensoriales (un 3-tensor simétrico que tiene seis componentes independientes y hay cuatro constricciones). Por lo tanto se tienen diez funciones en total. Este número coincide con el número de componentes independientes de  $\delta g_{\alpha\beta}$ .

Las *perturbaciones escalares* se caracterizan por cuatro funciones escalares  $\phi, \psi, B, E$ . Son inducidas por las inhomogeneidades de densidad de energía. Estas perturbaciones son más importantes debido a que exhiben inestabilidad gravitacional y podrían conducir a la formación de estructura en el Universo.

Las *perturbaciones vectoriales* son descritas por los dos vectores  $S_i$  y  $F_i$  y se relacionan con el movimiento rotacional del fluido. Como en la teoría Newtoniana, decaen rápidamente y no son de mucho interés en Cosmología.

Las *perturbaciones tensoriales*  $h_{ij}$  no tienen analogía con la teoría Newtoniana. Describen las *ondas gravitacionales*, que son grados de libertad del campo gravitacional por sí mismo. En la aproximación lineal las ondas gravitacionales no inducen perturbaciones en el fluido perfecto.

El trabajo tiene mayor énfasis en perturbaciones escalares debido a su simplicidad, por lo que no nos involucramos en las perturbaciones vectoriales y tensoriales, salvo alguna mención breve como se ha hecho hasta ahora.

### 3.1.2 Transformaciones de norma y variables invariantes de norma

Considerando la transformación de coordenadas

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha, \quad (3.8)$$

donde  $\xi^\alpha$  son funciones infinitesimalmente pequeñas del espacio y tiempo. En un punto dado de la variedad del espacio-tiempo el tensor métrico en el sistema coordenado  $\tilde{x}$  puede ser calculado utilizando la ley de transformación usual;

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^\beta} g_{\gamma\delta}(x^\rho) \approx^{(0)} g_{\alpha\beta}(x^\rho) + \delta g_{\alpha\beta} -^{(0)} g_{\alpha\delta} \xi_{,\beta}^\delta -^{(0)} g_{\gamma\beta} \xi_{,\alpha}^\gamma, \quad (3.9)$$

donde se mantienen los términos lineales en  $\delta g$  y  $\xi$ . En las nuevas coordenadas  $\tilde{x}$  la métrica puede dividirse en una parte con el fondo y otra con la perturbación,

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\beta) \equiv^{(0)} g_{\alpha\beta}(\tilde{x}) + \delta \tilde{g}_{\alpha\beta}, \quad (3.10)$$

donde  $^{(0)}g_{\alpha\beta}$  es la métrica de Friedmann dada por la ec. 3.3, que ahora depende de  $\tilde{x}$ . Comparando las expresiones de la ec. 3.9 y la ec. 3.10 y tomando en cuenta que

$$^{(0)}g_{\alpha\beta}(x^\rho) \approx^{(0)} g_{\alpha\beta}(\tilde{x}^\rho) -^{(0)} g_{\alpha\beta,\gamma} \xi^\gamma, \quad (3.11)$$

se infiere la ley de transformación de norma:

$$\delta g_{\alpha\beta} \rightarrow \delta \tilde{g}_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta} -^{(0)} g_{\alpha\beta,\gamma} \xi^\gamma -^{(0)} g_{\gamma\beta} \xi_{,\alpha}^\gamma -^{(0)} g_{\alpha\delta} \xi_{,\beta}^\delta. \quad (3.12)$$

Escribiendo las componentes espaciales del vector infinitesimal  $\xi^\alpha \equiv (\xi^0, \xi^i)$  como

$$\xi^i = \xi_{\perp}^i + \zeta^i, \quad (3.13)$$

donde  $\xi_{\perp}^i$  es un 3-vector con divergencia cero ( $\xi_{\perp,i}^i = 0$ ) y  $\zeta$  es una función escalar. Como en un Universo de Friedmann  $^{(0)}g_{00} = a^2(\eta)$  y  $^{(0)}g_{ij} = -a^2(\eta) \delta_{ij}$ , se obtiene de la ec. (3.12) que,

$$\delta \tilde{g}_{00} = \delta g_{00} - 2a (a\xi^0)', \quad (3.14a)$$

$$\delta \tilde{g}_{0i} = \delta g_{0i} - a^2 \left[ \xi_{\perp,i}' + (\zeta' - \xi^0)_{,i} \right], \quad (3.14b)$$

$$\delta \tilde{g}_{ij} = \delta g_{ij} - a^2 \left[ 2 \frac{a'}{a} \delta_{ij} \xi^0 + 2\zeta_{,ij} + (\xi_{\perp,i,j} + \xi_{\perp,j,i})_{,i} \right], \quad (3.14c)$$

$$(3.14d)$$

donde  $\xi_{\perp,i} \equiv \xi_{\perp}^i$  y la prima denota la derivada con respecto al tiempo conforme  $\eta$ . Combinando estos resultados con las ecs. 3.4-3.6, se derivan las leyes de transformación para distintos tipos de transformación.

Para *perturbaciones escalares* la métrica toma la forma,

$$ds^2 = a^2 \left[ (1 + 2\phi) d\eta^2 + 2B_{,i} dx^i d\eta - ((1 - 2\xi) \delta_{ij} - 2E_{,ij}) dx^i dx^j \right]. \quad (3.15)$$

### 3.1. PERTURBACIONES DE VARIABLES INVARIANTES DE NORMA 33

Bajo un cambio de coordenadas se tiene

$$\phi \rightarrow \tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{a} (a\xi^0), \quad (3.16a)$$

$$\psi \rightarrow \tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a} \psi^0, \quad (3.16b)$$

$$B \rightarrow \tilde{B} = B + \zeta' - \xi^0, \quad (3.16c)$$

$$E \rightarrow \tilde{E} = E + \zeta. \quad (3.16d)$$

Por tanto, solamente  $\xi^0$  y  $\zeta$  contribuyen a la transformación de perturbaciones escalares, eligiéndolas de manera apropiada se puede hacer que dos de las cuatro ecuaciones  $\phi, \xi, B, E$  se hagan cero. Las combinaciones más simples de invariantes de norma de estas funciones, que abarcan el espacio de dos dimensiones de perturbaciones físicas, son

$$\Phi \equiv \phi - \frac{1}{a} [a(B - E')]', \quad (3.17)$$

$$\Psi \equiv \psi + \frac{a'}{a} (B - E') \quad (3.18)$$

Y no cambian bajo transformaciones de coordenadas, si  $\Phi$  y  $\Psi$  se hacen cero en un sistema coordenado en particular, se harán cero en cualquier sistema coordenado. Esto significa que se puede hacer distinción entre inhomogeneidades físicas y perturbaciones ficticias; si tanto  $\Phi$  como  $\Psi$  son iguales a cero, entonces las perturbaciones métricas (si se encuentran presentes) son ficticias y pueden ser removidas por un cambio de coordenadas.

Se pueden construir tantas variables invariantes de norma como se desee, dado que cualquier combinación de  $\Phi$  y  $\Psi$  también será invariante de norma.

*Perturbaciones vectoriales.* Para perturbaciones vectoriales, la métrica se encuentra dada por

$$ds^2 = a^2 [d\eta^2 + 2S_i dx^i d\eta - (\delta_{ij} - F_{i,j} - F_{j,i}) dx^i dx^j] \quad (3.19)$$

con la transformación de las variables  $S_i$  y  $F_i$  como

$$S_i \rightarrow \tilde{S}_i = S_i + \zeta'_{\perp i}, \quad (3.20)$$

$$F_i \rightarrow \tilde{F}_i = F_i + \xi'_{\perp i}. \quad (3.21)$$

De modo que

$$\bar{V}_i = S_i - F'_i, \quad (3.22)$$

es invariante de norma. Sólo dos de las cuatro funciones independientes  $S_i, F_i$  caracterizan las perturbaciones físicas; las otras dos reflejan la libertad de coordenadas. Las variables de la última ecuación generan un espacio de dos dimensiones de perturbaciones físicas y describen movimientos rotacionales.

*Perturbaciones tensoriales.* En este caso

$$ds^2 = a^2 [d\eta^2 - (\delta_{ij} - h_{ij}) dx^i dx^j], \quad (3.23)$$

y  $h_{ij}$  no cambia bajo transformaciones de coordenadas. En este caso se describen las ondas gravitacionales con una norma invariante.

### 3.1.3 Sistemas coordenados

La libertad de norma tiene su mayor manifestación en perturbaciones escalares. Se puede utilizar para imponer dos condiciones en las funciones  $\phi, \psi, B, E, \delta\rho$  y en el potencial de perturbaciones de velocidad  $\delta u_{\parallel i} = \phi_{,i}$ . Esto es posible debido a que se tiene la libertad para elegir las dos funciones  $\xi^0$  y  $\zeta$ . Imponer las condiciones de norma es equivalente a fijar la clase del sistema coordenado. A continuación se consideran varios tipos de norma. Se muestra como conociendo la solución para variables invariantes de norma se pueden calcular las perturbaciones métricas y de densidad en cualquier sistema coordenado particular de manera un tanto sencilla.

*Norma (conforme-Newtoniana) Longitudinal.* La norma longitudinal es definida por la condiciones  $B_l = E_l = 0$ . De la ec. 3.16a, se sigue que estas condiciones fijan el sistema coordenado de manera única. De hecho la condición  $E_l = 0$  se viola para cualquier  $\zeta \neq 0$ , y usando este resultado se ve que cualquier transformación con  $\xi^0 \neq 0$  deshace la condición  $B_l = 0$ . Por lo que no hay libertad de coordenadas que preserve  $B_l = E_l = 0$ . En el sistema coordenado correspondiente la métrica toma la forma

$$ds^2 = a^2 [(1 + 2\phi_l) d\eta^2 - (1 - 2\psi_l) \delta_{ij} dx^i dx^j]. \quad (3.24)$$

Si la parte espacial del tensor de energía momento es diagonal, es decir,  $\delta T_j^i \propto \delta_j^i$ , se tiene que  $\phi_l = \psi_l$  y sólo queda una variable que caracteriza las perturbaciones métricas escalares. La variable  $\phi_l$  es una generalización del potencial Newtoniano, que explica el por qué del nombre 'conforme Newtoniano' para este sistema coordenado. Como puede verse de la ec (3.17) y de la variable invariante de norma

$$\bar{\delta\rho} = \delta\rho - \rho'_0 (B - E') \quad (3.25)$$

que caracteriza las perturbaciones de densidad. Así como también, tomando en cuenta que la 4-velocidad de un fluido en un Universo homogéneo es  ${}^{(0)}u_\alpha = (a, 0, 0, 0)$

$$\bar{\delta u}_0 = \delta u_0 - [a(B - E')]', \quad \bar{\delta u}_i = \delta u_i - a(B - E')_{,i} \quad (3.26)$$

son variables invariantes de norma para las componente covariantes de las perturbaciones de velocidad  $\delta u_\alpha$ . Las variables independientes de norma tienen una interpretación física sencilla: son amplitudes de la métrica, densidad y perturbaciones de densidad en el sistema coordenado conforme, en particular,  $\Phi = \phi_l, \Psi = \psi_l$

*Norma Síncrona.* Las coordenadas síncronas, donde  $\delta g_{0\alpha}$ , corresponden a la elección  $\phi_S = 0, B_S = 0$ . Esto no arregla las coordenadas de forma única, existen toda una clase de sistemas coordenados con el mismo tipo de norma. De la ec. 3.16a, se sigue que, si las condiciones  $\phi_S = 0, B_S = 0$  se satisfacen en algún sistema coordenado  $x^\alpha \equiv (\eta, \mathbf{x})$ , entonces también se satisfecerán en otro sistema coordenado  $\tilde{x}^\alpha$ , relacionado con  $x^\alpha$  mediante

$$\tilde{\eta} = \eta + \frac{C_1}{a}, \quad \tilde{x}^i = x + C_{1,i} \int \frac{d\eta}{a} + C_{2,i} \quad (3.27)$$

donde  $C_1 \equiv C_1(x^j)$  y  $C_2 \equiv C_2(x^j)$  son funciones arbitrarias de las coordenadas espaciales. Esta libertad de coordenadas conlleva a la aparición de modos de norma que no son físicos, que proveen de una interpretación difícil de los resultados, especialmente a escalas mayores que el radio de Hubble.

Si se conoce la solución para las perturbaciones en términos de las variables invariantes de norma, o equivalentemente, en el sistema coordenado conforme, entonces el comportamiento de las perturbaciones en el sistema coordenado sincrónico pueden ser determinado sencillamente sin la necesidad de resolver las ecuaciones de Einstein nuevamente. Utilizando las definiciones de la ec. 3.17 se tiene

$$\Phi = \frac{1}{a} [aE'_S], \quad \Psi = \psi_s - \frac{a'}{a} E'_s. \quad (3.28)$$

Estas dos ecuaciones pueden resolverse facilmente para expresar  $\psi_s$  y  $E_S$  en términos de potenciales invariantes de norma:

$$E_S = \int \frac{1}{a} \left( \int^\eta a\Phi d\tilde{\eta} \right) d\eta, \quad \psi_s = \Psi_S + \frac{a'}{a^2} \int a\Phi d\eta \quad (3.29)$$

Las perturbaciones de densidad de energía son

$$\delta\rho_S = \bar{\delta\rho} - \frac{\rho'_0}{a} \int a\Phi d\eta \quad (3.30)$$

Las constantes de integración que surgen de estas ecuaciones corresponden a modos ficticios que no son físicos.

### 3.1.4 Ecuaciones para las perturbaciones cosmológicas

Para derivar las ecuaciones para las perturbaciones se necesita linealizar las ecuaciones de Einstein

$$G_\beta^\alpha \equiv R_\beta^\alpha - \frac{1}{2} \delta_\beta^\alpha R = 8\pi G T_\beta^\alpha, \quad (3.31)$$

para pequeñas perturbaciones en un Universo de Friedmann. El cálculo del tensor de Einstein para la métrica de fondo 3.3 tiene como resultado

$${}^{(0)}G_0^0 = \frac{3H^2}{a^2}, \quad {}^{(0)}G_i^0 = 0, \quad {}^{(0)}G_j^i = \frac{1}{a^2} (2H' + H^2) \delta_{ij} \quad (3.32)$$

donde  $H \equiv a'/a$ . Para satisfacer las ecuaciones de Einstein de fondo, el tensor de energía momento para materia,  ${}^{(0)}T_\beta^\alpha$ , debe de tener las siguientes propiedades de simetría:

$${}^{(0)}T_i^0 = 0, \quad {}^{(0)}T_j^i \propto \delta_{ij} \quad (3.33)$$

Para una métrica con pequeñas perturbaciones, el Tensor de Einstein puede ser escrito de la siguiente forma  $G_\beta^\alpha = {}^{(0)}G_\beta^\alpha + \delta G_\beta^\alpha + \dots$ , donde  $\delta G_\beta^\alpha$  denota términos lineales en las fluctuaciones métricas. El tensor de energía-momento puede partirse de manera similar y las ecuaciones linealizadas para perturbaciones son

$$\delta G_\beta^\alpha = 8\pi G \delta T_\beta^\alpha \quad (3.34)$$

Ni  $\delta G_\beta^\alpha$  ni  $\delta T_\beta^\alpha$  son invariantes de norma. Combinándolas con las perturbaciones métricas, sin embargo, se pueden construir las cantidades invariantes de norma correspondientes. Las leyes de transformación para  $\delta T^{alpha}lpha_\beta$

$$\begin{aligned}\overline{\delta T}_0^0 &= \delta T_0^0 - \left( {}^{(0)}T_0^0 \right)' (B - E'), \\ \overline{\delta T}_i^0 &= \delta T_i^0 - \left( {}^{(0)}T_0^0 - {}^{(0)}T_k^k/3 \right) (B - E')_{,i}, \\ \overline{\delta T}_j^i &= \delta T_j^i - \left( {}^{(0)}T_j^i \right)' (B - E'),\end{aligned}\tag{3.35}$$

donde  $T_k^k$  es la traza de las componentes espaciales, son invariantes de norma. También construyendo

$$\overline{\delta G}_0^0 = \delta G_0^0 - \left( {}^{(0)}G_0^0 \right)' (B - E'), \text{ etc.}\tag{3.36}$$

y reescribiendo la ec. 3.34

$$\overline{\delta G}_\beta^\alpha = 8\pi G \overline{\delta T}_{beta}^\alpha.\tag{3.37}$$

Las componentes de  $\overline{\delta T}_\beta^\alpha$  puede descomponerse en una parte escalar, vectorial y tensorial; cada pedazo contribuye solamente a la evolución de la perturbación correspondiente.

*Perturbaciones escalares.* La parte izquierda en la ec. (3.37) es invariante de norma y depende solamente de las perturbaciones métricas. Por lo que puede expresarse completamente en términos de los potenciales  $\Phi$  y  $\Psi$ . El cálculo directo de  $\overline{\delta G}_\beta^\alpha$  para la métrica de la ec. (3.15) nos da las ecuaciones:

$$\nabla \Psi - 3H (\Psi' + H\Phi) = 4\pi G a^2 \overline{\delta T}_0^0,\tag{3.38a}$$

$$(\Psi' + H\Phi)_{,i} = 4\pi G a^2 \overline{\delta T}_i^0,\tag{3.38b}$$

$$\begin{aligned}\left[ \Psi'' + H(2\Psi + \Phi)' + (2H' + H^2)\Phi + \frac{1}{2}\Delta(\Phi - \Psi) \right] \delta_{ij} \\ - \frac{1}{2}(\Phi - \Psi)_{,ij} = -4\pi G a^2 \overline{\delta T}_j^i,\end{aligned}\tag{3.38c}$$

Las ecuaciones de arriba se derivaron sin tomar en cuenta ninguna condición de norma y son arbitrarias en cualquier sistema coordenado. Para obtener la forma explícita de las ecuaciones para las perturbaciones métricas en un sistema coordenado particular, se tienen que expresar  $\Phi$  y  $\Psi$  en las ecs. (3.38a)-(3.38c) a través de estas perturbaciones. Por ejemplo, en el sistema coordenado síncrono, se utilizarían las expresiones en la ec (3.28).

Las ecuaciones para las perturbaciones métricas en el sistema coordenado conforme coincide con las ecs. (3.38a)-(3.38c). Por lo que los cálculos en estas coordenadas son idénticos a los términos de los potenciales invariantes de norma, con la ventaja de que no se necesita llevar  $B$  y  $E$  a través de ecuaciones intermedias.



## 3.2 Perturbaciones hidrodinámicas

Considerando un fluido con tensor de energía momento

$$T_{\beta}^{\alpha} = (\rho + p) u^{\alpha} u_{\beta} + p \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (3.39)$$

Las perturbaciones invariantes de norma, definidas en la ec.3.35 pueden ser escritas como,

$$\overline{\delta T}_0^0 = \overline{\delta \rho}, \quad \overline{\delta T}_i^0 = \frac{1}{a} (\rho_0 + p_0) (\overline{\delta u}_{\parallel i} + \delta u_{\perp i}), \quad \overline{\delta T}_j^i = \overline{\delta p} \delta_j^i \quad (3.40)$$

donde  $\overline{\delta \rho} = \delta \rho - \rho'_0 (B - E')$ ,  $\overline{\delta u}_{\parallel i}$  y  $\overline{\delta p}$  son definidas en referencia. El único término, que contribuye a las perturbaciones vectoriales es proporcional a  $\delta u_{\perp i}$ ; los demás términos tienen la misma forma estructural que las perturbaciones métricas escalares.

### 3.2.1 Perturbaciones escalares

Como  $\delta T_j^i = 0$  para  $i \neq j$ , la ec. (3.38c) se reduce a

$$(\Phi - \Psi)_{,ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (3.41)$$

La única solución consistente con  $\Phi$  y  $\Psi$  siendo perturbaciones es  $\Psi = \Phi$ . Entonces al sustituir la ec. (3.40) en las ecs. (3.38a)-(3.38c), se puede llegar al siguiente conjunto de ecuaciones para las perturbaciones escalares:

$$\Delta \Phi - 3H(\Phi' + 3H\Phi) = 4\pi G a^2 \overline{\delta \rho}, \quad (3.42)$$

$$(a\Phi)'_{,i} = 4\pi G a^2 (\rho_0 + p_0) \overline{\delta u}_{\parallel i}, \quad (3.43)$$

$$\Phi'' + 3H\Phi' + (2H' + H^2)\Phi = 4\pi G a^2 \overline{\delta p} \quad (3.44)$$

En un Universo que no se encuentra en expansión  $H = 0$ , y la primera ecuación coincide con la ecuación de Poisson usual para el potencial gravitacional. En un Universo en expansión, el segundo y tercer término en el lado izquierdo en la ec. (3.42) son suprimidos en escalas sub-Hubble por un factor  $\sim \lambda/H^{-1}$ , y por tanto pueden ser suprimidos. Por lo que la ec. 3.42 generaliza la ecuación de Poisson y ayuda a interpretar  $\Phi$  como una generalización del potencial gravitacional Newtoniano. Es de notar que, a escalas menores que el radio de Hubble, la ec. (3.42) puede ser aplicada incluso a inhomogeneidades no-lineales, debido a que requiere solamente que  $|\Phi| \ll 1$  pero no necesariamente  $|\delta\rho/\rho_0| \ll 1$ . De la ec. (3.43) se sigue que la derivada temporal de  $(a\Phi)'$  sirve como velocidad potencial.

Dado  $p(\rho, S)$ , las fluctuaciones de presión  $\overline{\delta p}$  pueden ser expresadas en términos de la densidad de energía y de las perturbaciones de entropía,

$$\overline{\delta p} = c_S^2 \overline{\delta \rho} + \tau \delta S \quad (3.45)$$

donde  $c_S^2 \equiv (\partial p / \partial \rho)_S$  es el cuadrado de la velocidad del sonido y  $\tau \equiv (\partial p / \partial S)_\rho$ . Tomando esto en cuenta y combinando la ec. (3.42) y la ec. (3.44), se obtiene la forma cerrada de la ecuación del potencial gravitacional

$$\Phi'' + 3(1 + c_S^2)H\Phi' - c_S^2\Delta\Phi + (2H' + (1 + 3c_S^2)H^2)\Phi = 4\pi G a^2 \tau \delta S \quad (3.46)$$

A continuación se comienzan a buscar las soluciones exactas de esta ecuación en dos casos particulares: (a) para materia no-relativista con sin presión y (b) para fluido relativista con ecuación de estado constante  $p = w\rho$ . Para después analizar el comportamiento de perturbaciones adiabáticas ( $\delta S = 0$ ) para una ecuación general de estado  $p(\rho)$ .

*Materia no-relativista* ( $p=0$ ) En un Universo dominado por polvo  $a \propto \eta^2$  y  $H = 2/\eta$ . En este caso la ec. (3.46) se simplifica a,

$$\Phi'' + \frac{6}{\eta}\Phi' = 0, \quad (3.47)$$

y tiene la solución

$$\Phi = C_1(\mathbf{x}) + \frac{C_2(\mathbf{x})}{\eta^5}, \quad (3.48)$$

donde  $C_1(\mathbf{x})$  y  $C_2(\mathbf{x})$  son funciones arbitrarias de las coordenadas espaciales comóviles. De la ec. (3.42) se encuentran las perturbaciones de densidad invariantes de norma

$$\frac{\bar{\delta\rho}}{\rho_0} = \frac{1}{6} \left[ (\Delta C_1 \eta^2 - 12C_1) + (\Delta C_2 \eta^2 + 18C_2) \frac{1}{\eta^5} \right]. \quad (3.49)$$

El modo no-decayente del potencial gravitacional,  $C_1$ , permanece constante sin importar el tamaño relativo de la longitud de escala de la inhomogeneidad, relativa al radio de Hubble. El comportamiento de las perturbaciones de densidad, sin embargo, depende crucialmente de la escala.

Considerando una perturbación en forma de onda plana con número de onda comóvil  $k \equiv |\mathbf{k}|$ , para la cual  $C_{1,2} \propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})$ . Si la escala física  $\lambda_{fis} \sim a/k$  es mucho mayor que la escala de Hubble  $H^{-1} \sim a\eta$  o, de forma equivalente,  $k\eta \ll 1s$ , llevando a,

$$\frac{\bar{\delta\rho}}{\rho_0} \simeq -2C_1 + \frac{3C_2}{\eta^5}. \quad (3.50)$$

Ignorando en término de decaimiento, la relación entre las fluctuaciones de densidad y el potencial a escalas de superhorizontes se vuelve  $\bar{\delta\rho}/\rho_0 \simeq -2\Phi$ .

Para perturbaciones de onda corta con  $k\eta \gg 1$ , se tiene

$$\frac{\bar{\delta\rho}}{\rho_0} \simeq -\frac{k^2}{6} (C_1\eta^2 + C_2\eta^{-3}) = \tilde{C}_1 t^{2/3} + \tilde{C}_2 t^{-1}, \quad (3.51)$$

que concuerda con el resultado Newtoniano de referencia.

Con esta sección se termina la primera parte de los resultados analíticos para el estudio de un universo dominado por un fluido perfecto sin presión. Por lo

que sólo falta revisar la formulación que permita plantear de forma numérica las ecuaciones necesarias para llevar a cabo la evolución de distribuciones de materia en el marco de las ecuaciones de Einstein, para posteriormente pasar a la herramienta numérica empleada en este trabajo.



## Capítulo 4

---

### Formulación 3+1 de Relatividad General

---

Cada solución de las ecuaciones de Einstein abarca la historia completa del Universo, no sólo consisten en un instante de cómo eran las cosas, sino todo un espacio-tiempo: abarcan el estado de la materia y la geometría en todos lados en cada momento en ese Universo particular. Con esto, la teoría de Einstein parece distinguirse de la mayoría de las teorías físicas, que especifican ecuaciones de evolución para sistemas físicos. Si el sistema se encuentra en un cierto estado a un momento dado, las leyes de la física permiten extrapolar su pasado o su futuro. Para las ecuaciones de Einstein, pareciera que hay diferencias sutiles en comparación con otros campos. Es decir, son auto-interactuantes (esto es, son altamente no lineales incluso en la ausencia de otros campos); son invariantes ante difeomorfismos. Entonces de manera burda, para obtener una solución única, se necesita introducir una métrica del fondo fijo así como condiciones de norma. Finalmente, la métrica determina la estructura del espacio-tiempo, por lo tanto, el dominio de dependencia para cualquier conjunto de datos iniciales, y así, la región donde una solución específica no será definida a priori, sino a posteriori.

Existe, sin embargo, una manera de reformular las ecuaciones de Einstein para superar estos problemas. Primero, siempre existe la manera de reescribir el espacio-tiempo como la evolución del espacio en el tiempo. Una versión temprana de esta idea se debe a Dirac, pero una forma más sencilla se atribuye a R. Arnowitt, S. Deser y C. Misner, por lo que se le denomina el formalismo ADM. En esta formulación, también conocida como aproximación '3+1', el espacio-tiempo se parte en tres hipersuperficies de tres dimensiones con métrica interior sumergida en el espacio-tiempo con curvatura exterior. Estas dos cantidades son las variables dinámicas en la formulación Hamiltoniana que traza la evolución de las hipersuperficies en el tiempo.

Con esta partición del espacio-tiempo, es posible establecer la formulación de valor inicial de Relatividad General. Lo que involucra la introducción de datos iniciales que no pueden ser especificados de manera arbitraria sino que necesitan satisfacer ecuaciones de constricción específicas. Tal como sucede

con otras ecuaciones diferenciales, es posible probar la existencia y unicidad de dichas ecuaciones. Es decir, existe un espacio-tiempo único donde hay una solución a las ecuaciones de Einstein, que es globalmente hiperbólico, donde la variedad es una superficie de Cauchy (todos los eventos pasados tienen influencia en la variedad y todos los eventos futuros son influenciados por lo que sucede en la variedad) y tiene una métrica específica interna y una curvatura extrínseca (véase Misner [22]).

La formulación de valor inicial con su partición en 3+1 es la base de relatividad numérica, y es la que se lleva a cabo de forma más común. Esta intenta simular la evolución de espacio-tiempos utilizando simulaciones computacionales. Sin embargo, hay diferencias significantes con la simulación de otras ecuaciones físicas de evolución. Lo que hace a la Relatividad Numérica particularmente difícil, principalmente por el hecho de los objetos dinámicos que se están evolucionando incluyen al espacio y al tiempo por sí mismo (por lo que no existe un fondo fijo con cual compararlos, como por ejemplo, si se tratara de ondas gravitacionales), así como por la existencia de singularidades (que, cuando se permite que ocurran dentro de una porción de espacio-tiempo simulado, conllevan a valores grandísimos de forma arbitraria que tendrían que ser representados en un modelo computacional).

Con este resumen se introduce cualitativamente parte del desarrollo que se llevará a cabo a continuación. En este capítulo se revisará la formulación 3+1 de Relatividad General, así como también se presentará la formulación 'BSSN' implementada en el código numérico OllinSphere2 para el caso particular de simetría esférica. Esta segunda formulación cambia la estructura de las ecuaciones con tal de obtener un problema de valores iniciales bien definido que sea adecuado para las evoluciones numéricas. El desarrollo se basa en el realizado por M. Alcubierre[1] y J. Torres[15]. Será hasta el siguiente capítulo cuando se haga la descripción del código numérico OllinSphere2, pero en este capítulo se abordarán los distintos casos de distribuciones de materia que se utilizaron a lo largo del trabajo. Se describen los escenarios cosmológicos, especialmente para el caso de un universo dominado por un fluido perfecto sin presión y un campo escalar real oscilante y un campo escalares complejo o estrella de bosones.

## 4.1 Formalismo 3+1

Para llevar a cabo el análisis del comportamiento no-lineal de perturbaciones cosmológicas en un Universo de Friedmann, es necesario reformular las ecuaciones de Einstein como un conjunto de ecuaciones de evolución de un problema asociado a un valor inicial. Una forma común de llevar ésto a cabo es a través de la formulación 3+1 planteada por Arnowitt, Dessler y Misner, mejor conocida como formulación de ADM-York de relatividad general. Donde el espacio-tiempo es foliado en hipersuperficies espaciales de tiempo constante,

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.1)$$

donde  $\alpha$  corresponde a la función de lapso,  $\beta_i$  al vector de 'shift' o de desplazamiento y  $\gamma_{ij}$  al tensor métrico de las hipersuperficies espaciales. Todas las cantidades anteriores son funciones espaciales de las coordenadas espaciales  $x^i$  y del tiempo  $t$ . Los índices se pueden subir y bajar con ayuda del tensor métrico,  $\beta^i = \gamma^{ij}\beta_j$ , con  $\gamma^{ij}\gamma_{jk} := \delta_k^i$ . Las cantidades dinámicas son, la métrica de las hipersuperficies espaciales,  $\gamma_{ij}$ , y el tensor curvatura extrínseca de las hipersuperficies. El lapso  $\alpha$  y el vector de cambio  $\beta_i$  competen a las funciones de norma asociadas con la libertad de elección del sistema coordenado. La elección de estas variables permite reescribir las ecuaciones de Einstein como un sistema de ecuaciones de evolución.

Las ecuaciones de constricción se obtienen al proyectar uno de los índices a lo largo de la dirección normal a la hipersuperficie espacial y otro en la dirección tangente, se denominan ecuaciones de constricción Hamiltoniana y de momento

$$\mathcal{H} := \frac{1}{2} (R + K^2 - K_{ij}K^{ij}) - 8\pi\rho = 0, \quad (4.2a)$$

$$M^i := \nabla_j (K^{ij} - \gamma^{ij}K) - 8\pi j^i = 0. \quad (4.2b)$$

Estas expresiones no contienen coordenadas temporales. Donde  $R := \gamma^{ij}R_{ij}$  es la traza del tensor de Ricci, asociado con  $K := \gamma^{ij}K_{ij}$  es la traza de la curvatura extrínseca y  $\nabla_i$  es la derivada covariante. Además  $\rho$  y  $j^i$  son las densidades de energía y momento respectivamente.

$$\rho := n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}, \quad (4.3a)$$

$$j^i := -P^{i\mu} n^\nu T_{\mu\nu}. \quad (4.3b)$$

Estas definiciones son expresadas en términos del tensor de energía momento,  $T_{\mu\nu}$  con  $n^\mu = (1/\alpha)(1, -\beta^i)$ , el vector normal a las hipersuperficies espaciales de tiempo constante, y  $P_\mu^\nu \equiv \delta_\mu^\nu + n_\mu n^\nu$  el vector de proyección. La dinámica del campo gravitacional se obtiene cuando se proyectan las ecuaciones de Einstein en las hipersuperficies espaciales. Junto con la definición de curvatura extrínseca, la evolución de las cantidades está dada por

$$\partial_t \gamma_{ij} - L_{\bar{\beta}} \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} \quad (4.4a)$$

$$\partial_t K_{ij} - L_{\bar{\beta}} K_{ij} = -\nabla_i \nabla_j \alpha + \alpha (R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ij} K_j^k) \quad (4.4b)$$

$$+ 4\pi [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}] \quad (4.4c)$$

Arriba,  $L_{\bar{\beta}}$  es la derivada de Lie a lo largo de la dirección del vector de desplazamiento. La derivada de Lie evalúa un el cambio de un campo tensorial (ya sea un campo escalar o vectorial), a lo largo del flujo de otro campo vectorial. Por otra parte,  $S_{ij}$  es el tensor de esfuerzos medido por los observadores Eulerianos

$$S_{ij} \equiv P_i^\alpha P_j^\beta T_{\alpha\beta} \quad (4.5)$$

con  $S \equiv \gamma^{ij}S_{ij}$  su traza. La ec. 4.2 y las ec. 4.4 deben completarse con las euaciones de evolución para los campos de materia y las funciones de norma, así

como un conjunto apropiado de valores iniciales compatible con las condiciones de constricción y de frontera.

Básicamente se necesita resolver el sistema de ecuaciones de arriba para obtener la evolución en el tiempo del espacio-tiempo, sin embargo, sucede que el sistema de ecuaciones es numéricamente inestable, lo que lo hace impráctico. Se ha hecho un gran esfuerzo en esta área para reformular el sistema de ecuaciones de evolución introduciendo, ya sean campos o modificando las ecuaciones de evolución al agregar términos proporcionales a las constricciones, con el fin de hacerlas estables.

El código numérico OllinSphere emplea la formulación Baumgarte-Shapiro-Shibata-Nakamura (BSSN) (véase M. Shibata [23] y T. Baumgarte [24]) adaptada a sistemas coordenados curvilíneos, que, resultan en una formulación fuertemente hiperbólica y bien planteada de las ecuaciones de evolución en formulación 3+1. En particular se verá el caso en simetría esférica para esta re-formulación y será expuesto sin tanto detalle. Se comienza con la descomposición conforme del tensor métrico espacial y que es usual en este tipo de códigos numéricos,

$$\gamma := e^{4\chi} \hat{\gamma}_{ij}, \quad \chi \equiv \ln \psi := \frac{1}{12} \ln \left( \frac{\gamma}{\hat{\gamma}} \right) \quad (4.6)$$

El factor conforme  $\chi$  introducido relaciona el elemento de volumen físico con el conforme, el cual se asume que toma inicialmente el valor para un espacio plano. Se ha definido el determinante de los dos tensores métricos espaciales, el físico  $\gamma := \det(\gamma_{ij})$  y el conforme,  $\hat{\gamma} := \det(\hat{\gamma}_{ij})$ . También es conveniente introducir un tensor conforme de curvatura extrínseca sin traza,

$$\hat{A}_{ij} := e^{-4\chi} \left( K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right) \quad (4.7)$$

y la combinación de los símbolos de Christoffel, al que se le denominará 'vector de conexión' y tiene la forma

$$\hat{\Delta}^i := \hat{\gamma}^{mn} (\hat{\Gamma}_{mn}^i - \hat{\Gamma}_{mn}^i) \quad (4.8)$$

El acento o 'sombrero' en la ec. 4.8 hace referencia a alguna métrica arbitraria que, por simplicidad, puede tomarse plana. Nótese que a pesar de que ni  $\hat{\Gamma}_{mn}^i$  ni  $\hat{\Gamma}_{mn}^i$  son realmente tensores, su diferencia sí corresponde a un tensor, de modo que  $\hat{\Delta}^i$  introducido arriba, es en realidad un vector. En la formulación BSSN,  $\hat{\Delta}^i$ , se considera una variable dinámica independiente, y su definición arriba es tratada como una constricción.

Para el caso de simetría esférica, las ecuaciones de arriba se simplifican de manera considerable. En este caso siempre es posible encontrar un sistema coordenado donde el tensor métrico de las hipersuperficies espaciales tome la forma

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = e^{4\chi} (\hat{\gamma}_{\parallel} dr^2 + \hat{\gamma}_{\perp} r^2 d\Omega^2) \quad (4.9)$$

Con esta elección, el vector de conexión  $\hat{\Delta}^i$  solamente tiene la componente radial distinta de cero,  $\hat{\Delta}^i = (\hat{\Delta}^r, 0, 0)$ . La condición sin traza del tensor  $\hat{A}_{ij}$  junto



con la simetría esférica, garantiza que  $\hat{A}_r^r = -2\hat{A}_\theta^\theta = -2\hat{A}_\phi^\phi := \hat{A}_\parallel$ . Las cantidades dinámicas  $\chi, \hat{\gamma}_\parallel, \hat{\gamma}_\perp, \hat{\Delta}^r$  y  $\hat{A}_\parallel$ , así como la traza de la curvatura extrínseca  $K$ , son funciones solamente del tiempo y de la coordenada radial  $r$ . Aunque el código numérico no imponen ninguna condición de norma en particular, es conveniente fijar el vector de desplazamiento igual a cero, es decir,  $\beta^i = 0$ , para las evoluciones numéricas que se realizaron en este trabajo. En términos de las nuevas variables, las ecuaciones de constricción Hamiltoniana y de momento se reescriben como

$$\mathcal{H} := R - \frac{3}{2}\hat{A}_\parallel^2 + \frac{2}{3}K^2 - 16\pi\rho = 0 \quad (4.10a)$$

$$M^r := \partial_r \hat{A}_\parallel - \frac{2}{3}\partial_r K + 6\hat{A}_\parallel \partial_r \xi + \frac{3}{2}\hat{A}_\parallel \left( \frac{2}{r} + \frac{\partial_r \hat{\gamma}_\perp}{\hat{\gamma}_\perp} \right) - 8\pi j^r = 0 \quad (4.10b)$$

Mientras que para las ecuaciones de evolución se obtiene que

$$\partial_t \chi = -\frac{1}{6}\alpha K, \quad (4.11)$$

$$\partial_t \hat{\gamma}_\parallel = -2\alpha \hat{\gamma}_\parallel \hat{A}_\parallel, \quad (4.12)$$

$$\partial_t \hat{\gamma}_\perp = \alpha \hat{\gamma}_\perp \hat{A}_\parallel, \quad (4.13)$$

$$\partial_t K = -\nabla^2 \alpha + \frac{1}{6}\alpha(9\hat{A}_\parallel^2 + 2K^2) + 4\pi\alpha(\rho + S_\parallel + 2S_\perp), \quad (4.14)$$

$$\partial_t \hat{A}_\parallel = -\left( \nabla^r \nabla_r \alpha - \frac{1}{3}\nabla^2 \alpha \right) + \alpha \left( R_r^r - \frac{1}{3}R \right) + \alpha K \hat{A}_\parallel - 16\pi\alpha(S_\parallel - S_\perp), \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{\Delta}^r &= -\frac{2}{\hat{\gamma}_\parallel} \partial_r (\alpha \hat{A}_\parallel) + 2\alpha \hat{A}_\parallel \left( \hat{\Delta}^r - \frac{3}{r\hat{\gamma}_\perp} \right) \\ &+ \frac{\alpha\xi}{\hat{\gamma}_\parallel} \left[ \partial_r \hat{A}_\parallel - \frac{2}{3}\partial_r K + 6\hat{A}_\parallel \partial_r \chi + \frac{3}{2}\hat{A}_\parallel \left( \frac{2}{r} + \frac{\partial_r \hat{\gamma}_\perp}{\hat{\gamma}_\perp} \right) - 8\pi j_r \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para simplificar la notación se introdujo  $S_\parallel := S_r^r$ , y  $S_\perp := S_\theta^\theta = S_\phi^\phi$ , con densidad de momento  $j_i = (j_r, 0, 0)$ . En las ecuaciones de arriba  $\hat{\nabla}$  es la derivada covariante adaptada a la métrica conforme, mientras que  $\xi$  es una constante arbitraria, a la cual se le asigna el valor de  $\xi > 1/2$  para que el sistema sea fuertemente hiperbólico.

Es necesario establecer la condición de norma de las foliaciones (recordando que se esta tomando al vector de desplazamiento como cero). La elección más sencilla sería tomar un lapso constante,  $\alpha = 1$ , que corresponde a la condición síncrona utilizada en cosmología. En ese caso las coordenadas se mueven de forma comóvil con la expansión del Universo, con la función de tiempo  $t$  que representa el tiempo propio medido por los observadores comóviles. Es bien sabido que, de manera general, para casos de colapso gravitacional u objetos compactos, se elige el lapso comunmente conocido como partición geodésica (del inglés, geodesic slicing), que tiende a enfocarse en coordenadas lineales que

conlleven a singularidades coordenadas que pueden estropear las simulaciones. Por lo que es importante elegir de forma adecuada la función de lapso, para distribuciones de materia no triviales.

Mejor aún, se debe extender el análisis al considerar una foliación más general debida a Bona-Masso[17];

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K, \quad f(\alpha) > 0. \quad (4.17)$$

Las propiedades de esta foliación dependen de la elección de la función  $f(\alpha)$ ; al elegir  $f = 0$  se tiene el caso de partición geodésica, es decir, la condición de norma síncrona. El nombre se refiere al hecho de que la aceleración propia de los observadores de Euler se hace cero para valores constantes de  $\alpha$ , esto implica que los observadores de Euler sigan geodésicas temporaloides. Tomar  $f = 1$  es equivalente a pedir al que el tiempo coordenado sea una función armónica del espacio-tiempo y se le conoce como la 'partición armónica' (del inglés, harmonic slicing). Al escoger  $f = 2/\alpha$  se tiene la foliación '1 + log', que utilizada de forma frecuente en evoluciones de agujeros negros.

Para las configuraciones con las que se trabaja, la curvatura extrínseca adquiere un valor negativo lejos de las perturbaciones, de modo que la función de lapso (ec. 4.17) será monóticamente creciente dentro de esas regiones. Es necesario tener cierto control sobre este tipo de comportamiento, con el fin de asegurar que las simulaciones permanezcan estables. Por ejemplo, si se elige  $f(\alpha)$  constante, con  $f \leq 1/3$  la velocidad de la luz coordenada,  $v_c = \psi^4/\alpha^2$ , se mantiene menor que la unidad, lo que permite cumplir la condición de estabilidad de Courant. En el caso  $f = 1/3$  se recupera la 'partición temporal conforme',  $\alpha = \psi^2$  para las evoluciones homogéneas. Con tal de llevar a cabo las simulaciones es necesario encontrar el conjunto de valores iniciales que represente las distribuciones de materia que se tienen contempladas. Entonces, para cualquier condición de norma con vector de desplazamiento igual a cero ( $\beta^i = 0$ ), corresponde a

$$\rho(t = t_0, r) = \bar{\rho}_0, \quad (4.18a)$$

$$j_r(t = t_0, r) = 0, \quad (4.18b)$$

$$S_{\parallel}(t = t_0, r) = \bar{S}_{\parallel 0}, \quad (4.18c)$$

$$S_{\perp}(t = t_0, r) = \bar{S}_{\perp 0} = \bar{S}_{\parallel 0}, \quad (4.18d)$$

con  $\bar{\rho}_0$  y  $\bar{S}_{\parallel 0}$  constantes (nótese que las ecuaciones para los campos de materia pueden introducir algunas relaciones entre estas dos cantidades). De ahora en adelante, el subíndice cero hará referencia a los valores medidos en  $t = t_0$ , que hacen referencia al tiempo inicial, mientras que los barrados denotarán cantidades asociadas al fondo. Esta distinción es de reelevancia donde se trata la descripción de distribuciones de materia que no sean triviales. Las constricciones en las ecs. 4.2 pueden satisfacerse idénticamente en  $t = t_0$  si se elige

$$\bar{K}_0^2 = 24\pi\bar{\rho}_0, \quad \bar{R}_0 = \hat{A}_{\parallel 0} = 0. \quad (4.19)$$

Las componentes iniciales de la métrica  $\bar{\xi}_0, \hat{\gamma}_{\parallel 0}, \hat{\gamma}_{\perp 0}$  y  $\bar{\alpha}_0$  son constantes pero al final de cuentas arbitrarios. Sin pérdida de generalidad se puede fijar  $\bar{\xi}_0 = 0$ ,

es decir,  $\bar{\psi}_0 = 1$  y  $\hat{\gamma}_{\parallel 0} = \hat{\gamma}_{\perp 0} = \hat{\alpha}_0 = 1$ . La condición  $\bar{R}_0 = 0$  garantiza que las hipersuperficies espaciales en  $t = t_0$  sea plano, de modo que  $\hat{\Delta}_0^r = 0$ . Introduciendo los valores iniciales en las ecuaciones de evolución, se tiene que durante toda la evolución

$$\hat{\gamma}_{\parallel} = \hat{\gamma}_{\perp} = 1, \quad \hat{A}_{\parallel} = \hat{\Delta}^r = 0 \quad (4.20)$$

Las ecuaciones de campo de materia también deben ponerse como un sistema de primer orden en el tiempo, que debe resolverse de manera simultánea con las ecuaciones geométricas que se acaban de exponer. Por otra parte, el factor conforme, la traza de la curvatura extrínseca y la función de lapso deben satisfacer las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias;

$$\partial_t \bar{\chi} = -\frac{1}{6} \bar{\alpha} \bar{K} \quad (4.21a)$$

$$\partial_t \bar{K} = \frac{1}{3} \bar{\alpha} \bar{K}^2 + 4\pi \bar{\alpha} (\bar{\rho} + \bar{S}) \quad (4.21b)$$

$$\partial_t \bar{\alpha} = -\bar{\alpha}^2 f(\bar{\alpha}) \bar{K} \quad (4.21c)$$

junto con la ecuación de constricción Hamiltoniana (la constricción de momento resulta trivial)

$$\bar{K}^2 = 24\pi \bar{\rho} \quad (4.22)$$

donde  $\bar{\chi}$ ,  $\bar{K}$  y  $\bar{\alpha}$  son funciones del tiempo solamente. La traza del tensor de esfuerzos,  $\bar{S}$ , en este caso corresponde a  $\bar{S} = 3\bar{\rho}$ . Las ecs. (4.21) corresponden a las ecuaciones de Friedmann reescritas de distinta forma. Para poder de forma más clara la correspondencia, es conveniente tomar la función de tiempo comóvil,  $\tau = \int \bar{\alpha} dt$ , donde la evolución de la función de lapso se desacopla y las otras tres ecuaciones se simplifican a

$$\partial_{\tau} \bar{\chi} = -\frac{1}{6} \bar{K}, \quad (4.23)$$

$$\partial_{\tau} \bar{K} = \frac{1}{3} \bar{K}^2 + 4\pi (\bar{\rho} + \bar{S}), \quad (4.24)$$

$$\bar{K}^2 = 24\pi \bar{\rho}. \quad (4.25)$$

Utilizando el tiempo conforme,  $\eta = \int \bar{\alpha}/\bar{\psi}^2 dt$ , de las ecuaciones de arriba, se identifican el factor de escala  $a$  y el parámetro de Hubble  $H := \partial_{\tau} a/a$  en,

$$a = \bar{\psi}^2, \quad H = 2\partial_{\tau} \bar{\chi} = -\bar{K}/3 \quad (4.26)$$

Para tener valores iniciales que representen un universo en expansión es necesario que la traza de la curvatura extrínseca tenga un valor inicial,  $\bar{K}_0 = -3H_0 < 0$ . Para tener el sistema cerrado por completo, es necesario especificar también las ecuaciones de evolución de los campos de materia.

## 4.2 Las ecuaciones perturbadas

Dejando las simetrías del fondo isotrópico y homogéneo de lado, las ecs. 4.18 se pueden generalizar como

$$\rho(t = t_0, r) = \rho_0(r), \quad (4.27)$$

$$j_r(t = t_0, r) = j_{r0}(r), \quad (4.28)$$

$$S_{\parallel}(t = t_0, r) = S_{\parallel 0}(r), \quad (4.29)$$

$$S_{\perp}(t = t_0, r) = \bar{S}_{\perp 0}(r) \quad (4.30)$$

Considerando también que la densidad de momento se hace cero en  $t = t_0$ , es decir,  $j_0^r(r) = 0$ . Esta elección implica en particular que, la materia sigue la expansión uniforme para la rebanada inicial.

Para poder comparar las simulaciones numéricas empleando el código con los resultados analíticos (a orden lineal del estudio de perturbaciones), se consideró la evolución de datos iniciales que no son exactamente homogéneos e isotrópicos, pero que casi lo son. Se asume que para cualquier cantidad física  $f(t, r)$  evaluada en  $t = t_0$  siempre se puede escribir

$$f_0(r) = \bar{f}_0 + \delta f_0(r), \quad (4.31)$$

con  $\delta f_0(r) \ll \bar{f}_0$ . En las simulaciones realizadas, las funciones  $\delta f_0(r)$  son de soporte compacto dentro de una región finita  $r \in [0, L]$  de la hipersuperficie espacial en  $t = t_0$ , con el punto  $r = L$  dentro del dominio espacial. También se tomó a la frontera del dominio computacional lo suficientemente lejano de modo que la perturbación no la alcance durante la simulación. Por ello que se puede indentificar  $\bar{f}_0(r)$  en la frontera numérica.

Las constricciones de la ec. 4.2 y la ec. 4.10a se satisfacen aún en  $t = t_0$  si se elige una rebanada inicial con expansión constante  $K_0^2 = 24\pi\bar{\rho}_0$  y  $A_{\parallel 0} = 0$ , junto con,

$$R_0 - 16\pi(\delta\rho_0) = 0 \quad (4.32)$$

La perturbación en la densidad de energía,  $\delta\rho_0$ , implica que la hipersuperficie espacial inicial no puede ser plana. El escalar de Ricci toma la forma  $R = \hat{R}/\psi^4 - 8(\hat{\nabla}^2\psi)/\psi^5$ . Nuevamente se puede elegir que la métrica espacial sea conformemente plana inicialmente, de modo que  $\hat{\gamma}_{\parallel 0} = \hat{\gamma}_{\perp 0} = 1, \hat{\nabla}_0^r = 0$  Y  $\hat{R}_0 = 0$ . Para satisfacer la constricción Hamiltoniana se necesita resolver la siguiente ecuación elíptica para el factor conforme,

$$\hat{\nabla}^2\psi_0 + 2\pi(\delta\rho_0)\psi_0^5 = 0 \quad (4.33)$$

En simetría esférica se reduce a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Hay dos soluciones independientes de la ec. 4.33, sin embargo, la solución física se desprecia por la regularidad en el origen y el decaimiento asintótico hacia el valor de fondo,

$$\partial_r\psi_0(r = 0) = 0, \quad \psi_0(r \rightarrow \infty) = 1, \quad (4.34)$$

Se hace incapié en que, si la perturbación se hace cero en todos lados,  $\delta\rho_0(r) = 0$ , entonces  $\psi_0(r) = 1$  y se recupera el valor de fondo del factor conforme.

Para evaluar la perturbación  $\delta f(t, r)$  de una cantidad numérica dada, a cualquier tiempo  $t > t_0$  durante la evolución, se remueve el valor en la frontera del campo  $f(r)$ , donde el efecto de la inhomogeneidad no ha llegado aún. Claro que sólo esto sólo se puede realizar durante un periodo finito de tiempo a lo largo del tiempo de evolución.

Para comparar las simulaciones realizadas con el tratamiento cosmológico usual de perturbaciones lineales, el tensor métrico de un universo plano de Friedmann con pequeñas perturbaciones se parametriza de la forma

$$ds^2 = a^2 \left[ -(1 + 2\Phi)d\eta^2 - 2\partial_i B dx^i d\eta + (1 - 2\Psi - 2\partial_r^2 E)dr^2 + (1 - 2\Psi - (2/r)\partial_r E)r^2 d\Omega^2 \right] \quad (4.35)$$

Que es similar a la métrica mostrada en el cap. 1, sólo que ahora se utiliza una signatura distinta y un sistema coordenado adaptado a simetría esférica. Los campos  $\Phi, \Psi, B$  y  $E$  miden la desviación del espacio-tiempo con respecto a un universo plano homogéneo e isotrópico. Por otro lado, la métrica en el código numérico puede expresarse de la forma

$$ds^2 = a^2 \left[ -\frac{\psi^4}{a^2} d\eta^2 + \frac{\psi^4}{a^2} (\hat{\gamma}_{\parallel} dr^2 + \hat{\gamma}_{\perp} r^2 d\Omega^2) \right], \quad (4.36)$$

de nuevo, el tiempo conforme se relaciona con el que se utiliza en el código de la forma  $d\eta = \int (\bar{\alpha}/\bar{\psi}^2) dt$ . El factor de escala se identifica del fondo de la ec. 4.26. A primer orden, se encuentra el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\Phi = 2\delta\chi \quad (4.37a)$$

$$B = 0 \quad (4.37b)$$

$$\Psi = -\int^r \frac{dr_1}{2r_1} (\delta\hat{\gamma}_{\perp} - \delta\hat{\gamma}_{\parallel}) - \frac{1}{2}\delta\hat{\gamma}_{\perp} - 2\delta\chi \quad (4.37c)$$

$$E = \int^r r_2 dr_2 \int^{r_2} \frac{dr_1}{2r_1} (\delta\hat{\gamma}_{\perp} - \delta\hat{\gamma}_{\parallel}) \quad (4.37d)$$

Ya se había pedido que el vector de desplazamiento igual a cero, por esta razón  $B$  es igual a cero. Las constantes de integración en las ecs. 4.37 se fijan con el fin de tener valores regulares de  $\Psi$  y  $E$  que coincidan con el fondo homogéneo en la frontera.

Las perturbaciones en el tensor métrico como se definen en las ecs. 4.36 y 4.37 dependen de la elección particular de las coordenadas, de modo que no son invariantes bajo transformaciones de coordenadas. Sin embargo, siempre es posible definir in conjunto de funciones de norma con la forma

$$\Phi_{gauge} = \Phi - (1/a)[a(B - E')]', \quad (4.38)$$

$$\Psi_{gauge} = \Psi + H(B - E') \quad (4.39)$$

que no cambian bajo transformaciones de coordenadas. La prima denota la derivada con respecto al tiempo conforme y  $H := a'/a$ . Como no se consideran campos de materia que desarrollan tensiones anisotrópicas, se garantiza que  $\Phi_{gauge} = \Psi_{gauge}$ . El campo  $\Phi_{gauge}$  es análogo con el potencial gravitacional en la teoría no relativista y por eso se le conoce usualmente como el potencial gravitacional. Una expresión similar para una perturbación invariante de norma en la densidad de energía toma la forma.

$$\delta\rho_{gauge} = \delta\rho - \bar{\rho}'(B - E') \quad (4.40)$$

Las ecs. 4.38 y 4.40 son comunmente utilizadas para caracterizar perturbaciones cosmológicas de primer orden. No son triviales, ya que poseen derivadas con respecto al tiempo conforme por lo que pueden reescribirse en términos de las ecuaciones de evolución de forma explícita, a primer orden se tiene,

$$E' = \frac{3}{2}\bar{\psi}^2 \int_2^r r_2 dr_2 \int_2^r \frac{dr_1}{r_1} \hat{A}_{\parallel}, \quad (4.41a)$$

$$E'' = \frac{3}{2} \frac{\bar{\psi}^4}{\bar{\alpha}} \int_2^r r_2 dr_2 \int_2^{r_2} \frac{dr_1}{r_1} \left( \partial_t \hat{A}_{\parallel} - \frac{1}{3} \bar{\alpha} \bar{K} \hat{A}_{\parallel} \right) \quad (4.41b)$$

El código numérico OllinSphere2 evoluciona valores iniciales en términos de los campos dinámicos  $f(t, r)$ , y no distingue entre los valores de fondo,  $\bar{f}(t)$ , y las perturbaciones,  $\delta f(t, r)$ . Sin embargo, las definiciones de esta sección son necesarias para poder llevar a cabo comparaciones

## 4.3 Datos iniciales para distintas distribuciones de materia

### 4.3.1 Caso de un fluido perfecto sin presión

A gran escala la materia oscura suele describirse en términos de un fluido perfecto con la ecuación de estado  $p = 0$ , conocida como 'polvo'. El tensor de energía momento para un fluido perfecto sin presión toma la forma  $T_{\mu\nu} = \rho_{rep} u_{\mu} u_{\nu}$ , donde  $u_{\mu}$  es la cuatro-velocidad de los elementos de fluido y  $\rho_{rep} := T_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu}$  la densidad de energía medida por los observadores comóviles con el fluido. En general, la densidad de energía medida por los observadores en reposo con respecto al fluido, no coinciden con la densidad de energía medida por los observadores de Euler, de la ec. 4.3.

Para el caso de un universo dominado por polvo, existe una expresión analítica para el factor de escala como función del tiempo conforme, dada por

$$a(\eta) = a_0 \left( \frac{\eta}{\eta_{BB}} - 1 \right)^2 \quad (4.42)$$

### 4.3. DATOS INICIALES PARA DISTINTAS DISTRIBUCIONES DE MATERIA 51

así como para perturbaciones invariantes de norma en el tensor métrico, como ya se vió en el cap. 3,

$$\Phi_{gauge}(\eta, \vec{x}) = \Psi_{gauge}(\eta, \vec{x}) = C_1(\vec{x}) + C_2(\vec{x}) \left( \frac{\eta}{\eta_{BB} - 1} \right)^{-5}, \quad (4.43)$$

por otro lado el contraste de densidad,

$$\frac{\delta \rho_{gauge}}{\bar{\rho}}(\eta, \vec{x}) = \frac{1}{6} \left\{ [\Delta C_1(\vec{x})(\eta - \eta_{BB})^2 - 12C_1(\vec{x})] + [\Delta C_2(\vec{x})(\eta - \eta_{BB})^2 + 18C_2(\vec{x})] \left( \frac{\eta}{\eta_{BB} - 1} \right)^{-5} \right\}. \quad (4.44)$$

El origen al tiempo  $\eta = 0$  se escogió de forma arbitraria, con la singularidad en el origen de  $\eta = \eta_{BB} = -[3/(2\pi a_0^2 \bar{\rho})]^{1/2}$  con  $C_1(\vec{x})$  y  $C_2(\vec{x})$  dos funciones arbitrarias del espacio que sólo dependen de las perturbaciones iniciales. Para determinarlas, se evalúan los potenciales métricos con los datos iniciales y la derivada temporal junto con la evolución de la la siguiente ecuación

$$C_1(\vec{x}) = \Psi_{gauge}(0, \vec{x}) - \frac{\eta_{BB}}{5} \Psi'_{gauge}(0, \vec{x}), \quad (4.45a)$$

$$C_2(\vec{x}) = -\frac{\eta_{BB}}{5} \Psi'_{gauge}(0, \vec{x}). \quad (4.45b)$$

Los potenciales métricos permanecen constantes después de cierto tiempo, es decir,  $\Phi_{gauge} = \Psi_{gauge} C_1(\vec{x})$  mientras que el contraste en la densidad de energía crece en el tiempo a una tasa de  $r_H = 1/H = (\eta - \eta_{BB})/2$ .

Para llevar a cabo la integración numérica de las ecuaciones dinámicas en el tiempo para el fluido, el código numérico tiene implementado la formulación de Valencia de la hidrodinámica relativista, donde la evolución de las variables del fluido están dadas en términos de las cantidades conservadas,

$$D := \rho_{rep} W \quad (4.46a)$$

$$S := \rho_{rep} h W^2 v^i \quad (4.46b)$$

$$E := \rho_{rep} h W^2 - p - D \quad (4.46c)$$

En las expresiones de arriba,  $h := 1 + \epsilon + p/\rho_{mat}$  es la entalpía específica, con  $\rho_{mat}$  la densidad de masa en reposo y  $\epsilon$  la energía interna específica definida como  $\epsilon := \rho_{rep}/\rho_{mat} - 1$ . La nueva variable introducida  $W := -u^\mu n_\mu = \alpha u^0 = 1/\sqrt{1 - \gamma_{ij} v^i v^j}$ , que corresponde al factor de Lorentz asociado con la velocidad de los elementos de fluido  $v^i$  medidos por los observadores de Euler. Las cantidades conservadas tienen la siguiente interpretación;  $D$  es la masa densidad de masa en reposo medida por los observadores de Euler,  $S^i$  es la densidad de momento medida por los mismos observadores,  $E$  es la diferencia entre la densidad de energía total y la densidad de masa en reposo medida en el mismo marco Euleriano,  $E = \rho - D$ .

Para generalizar, se han definido las cantidades conservadas para el caso sin presión. Pero para el caso de polvo, se tiene  $p = 0$  y  $\rho_{mat} = \rho_{rep}$ , de modo que  $\epsilon = 0$  y  $h = 1$ , así que,

$$v^i = S^i/(E + D), \quad \rho_{rep} = D/W \quad (4.47)$$

En términos de las cantidades conservadas, la evolución de las ecuaciones para un fluido perfecto sin presión se pueden escribir de manera conservada como,

$$\partial_t D - L_{\bar{\beta}} D = -\nabla_k(\alpha D v^k) + \alpha K D, \quad (4.48a)$$

$$\partial_t S^i - L_{\bar{\beta}} S^i = -\nabla_k(\alpha S^i v^k) + \alpha K S^i - (E + D)\nabla^i \alpha \quad (4.48b)$$

$$\partial_t E - L_{\bar{\beta}} E = -\nabla_k(\alpha E v^k) + \alpha K E + (E + D)(\alpha v^m v^n K_{mn} - v^m \partial_k \alpha) \quad (4.48c)$$

Las fuentes para el campo gravitacional, la ec. (4.3) y la ec. (4.5), en términos de las nuevas variables toman la forma en este caso,

$$\rho = E + D \quad (4.49a)$$

$$j^i = S^i \quad (4.49b)$$

$$S_{ij} = v_i S_j \quad (4.49c)$$

el código numérico integra, en simetría esférica, estas ecuaciones en el tiempo junto con la integración del espacio-tiempo de forma simultánea. Mientras que la integración del espacio-tiempo se lleva a cabo utilizando el método de líneas, las ecuaciones para el fluido son integradas con métodos hidrodinámicos estándar con tal de lidiar con los choques que ocurren de forma usual.

Como ya se ha introducido anteriormente, las evoluciones se llevan a cabo con el vector de desplazamiento igual a cero y utilizando una condición de slicing de la familia Bona-Masso (recuérdese la ec. (4.17)). En particular se utilizó  $f = 0.3332$ , para obtener el caso en el que se reduce al slicing de tiempo conforme para una distribución homogénea. Se utilizó una malla con  $10^4$  puntos, con un espaciado de  $\delta r = 0.1$ . Para el caso de un fluido perfecto sin presión y con densidad de momento nula,  $\eta = \eta_0$ ,  $v^r(\eta\eta_0) = 0$ , los datos iniciales de las ecs. 4.18, se simplifican a,

$$\rho(\eta = \eta_0, r) = \rho_0(r), \quad (4.50a)$$

$$j^r(\eta = \eta_0, r) = 0, \quad (4.50b)$$

$$S_{\parallel}(\eta = \eta_0, r) = 0, \quad (4.50c)$$

$$S_{\perp}(\eta = \eta_0, r) = 0. \quad (4.50d)$$

Como  $v^r = 0$ , la densidad de energía coincide con la densidad de energía medida por los observadores comóviles con el fluido, de modo que,  $\rho_0(r) = \rho_{,r} ep(r) = D_0(r)$ ,  $S_0^r = E_0 = 0$ .

Una vez que el perfil de densidad  $\rho_0(r)$  se encuentra fijo y separado tanto en la parte de fondo como de perturbación,

$$\rho_0(r) = \bar{\rho}_0 + \delta\rho_0(r), \quad (4.51)$$

Sólo queda parametrizar la perturbación de densidad en la forma

$$\delta\rho_0(r) = \delta\rho_* \left(1 - \frac{11r^2}{3L^2}\right) \left[\left(1 - \frac{r}{L}\right) \left(1 + \frac{r}{L}\right)\right]^3 \quad (4.52)$$



cuando  $0 < r < L$  y  $\delta\rho_0(r) = 0$ . Aquí  $\delta\rho_*$  y  $L$  corresponden a la amplitud y a la longitud de escala de la perturbación inicial, respectivamente. Se eligió esta parametrización con tal de garantizar que  $\int_V \delta\rho_0(r) d^3\vec{x}$ . A medida que  $\delta\rho_* \ll \bar{\rho}_0$ , se debe de tener una evolución cosmológica descrita en términos de la teoría de perturbaciones lineales.

### 4.3.2 Campo escalar real. Caso $\lambda = 0$

Esta sección se presentan los fundamentos matemáticos necesarios para el estudio de un universo dominado por un campo escalar real masivo como materia, que satisface la ecuación de Klein-Gordon  $(\square - m^2)\phi = 0$ . Un campo escalar que oscila alrededor del mínimo del potencial, con una frecuencia mayor que la de la tasa de expansión del universo, ya ha sido considerado anteriormente como candidato de materia oscura en el Universo, como se ha discutido en M.Dine[18], T. Matos[18] y D. Marsh[19].

El tensor de energía momento asociado al campo escalar real sin término de autointeracción tiene la forma,

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + m^2\phi^2) \quad (4.53)$$

Hasta primer orden en  $H/m$  la densidad de energía de las oscilaciones es,  $\rho \sim 1/a^3$ , y  $a \sim \eta^2$ , mientras que las perturbaciones de orden lineal evolucionan como las del caso de fluido perfecto sin presión pero con un corte en el espectro de potencias en la escala de la longitud de onda de Compton de la partícula escalar,  $\lambda_{comp}^1/m$ .

Para poder probar los resultados provistos por el régimen lineal, se utiliza el código numérico no-lineal para evolucionar datos iniciales cosmológicos. De la misma forma como se realizó en el caso de un fluido perfecto sin presión, se alcanzó el régimen no lineal de la perturbaciones donde los métodos analíticos no funcionan. Dentro del régimen no lineal, los términos de tensión que no son nulos en el campo escalar hacen que las perturbaciones crezcan de forma más lenta que en el caso de fluido. La evolución numérica del campo escalar sin término de autointeracción se realiza reduciendo la ecuación de Klein-Gordon a primer orden, utilizando las siguientes variables;  $\Pi := n^\mu\partial_\mu\phi$  y  $\Theta_i := \partial_i\phi$ . Calculando se obtiene,

$$\partial_t\phi - L_{\vec{\beta}}\phi = \alpha\Pi, \quad (4.54a)$$

$$\partial_t\Theta - L_{\vec{\beta}}\Theta_i = \partial_i(\alpha\Pi), \quad (4.54b)$$

$$\partial_t\Pi - L_{\vec{\beta}}\Pi = \alpha\Pi K - \alpha m^2\phi + \nabla_i(\alpha\Theta^i) \quad (4.54c)$$

De igual forma que en el caso anterior, las ecuaciones se resuelven de forma simultánea con la integración del espacio-tiempo. en términos de las nuevas

variables también,

$$\rho = \frac{1}{2}(\Pi^2 + \Theta_m \Theta^m + m^2 \phi^2), \quad (4.55a)$$

$$j_i = -\Pi \Theta_i, \quad (4.55b)$$

$$S_{ij} = \Theta_i \Theta_j + \frac{1}{2}(\Pi^2 - \Theta_m \Theta^m - m^2 \phi^2) \gamma_{ij} \quad (4.55c)$$

De nueva cuenta se utilizó un vector de desplazamiento nulo, una función de lapso de Bona-Masso con  $f = 0.3332$  y una densidad de momento nula,  $j_{i0}$ ; en particular se eligió  $\Pi_0 = 0$ . Bajo estas suposiciones, los datos iniciales dados por las ecs. 4.18 adquieren la forma,

$$\rho(\eta = \eta_0, r) = \frac{1}{2}[(\Psi_0^{-2} \Theta_{r0})^2 + m^2 \phi_0^2], \quad (4.56a)$$

$$j_r(\eta = \eta_0, r) = 0, \quad (4.56b)$$

$$S_{\parallel}(\eta = \eta_0, r) = \frac{1}{2}[(\Psi_0^{-2} \Theta_{r0})^2 - m^2 \Phi_0^2], \quad (4.56c)$$

$$S_{\perp}(\eta = \eta_0, r) = \frac{1}{2}[-(\Psi_0^{-2} \Theta_{r0})^2 - m^2 \Phi_0^2] \quad (4.56d)$$

Para las configuraciones homogéneas e isotrópicas,  $\Theta_{r0} = 0$ , se recupera  $S_{\parallel 0} = S_{\perp 0}$ , como se espera de 4.18.

A diferencia del caso visto en la sección anterior, no se especifica el perfil de densidad inicial,  $\rho_0(r)$ , sino mas bien el campo escalar en  $\eta = \eta_0$ . En particular se considera la evolución de los datos iniciales de la forma

$$\phi_0(r) = \bar{\phi}_0 + \delta\phi_0(r) \quad (4.57)$$

con

$$\delta\phi_0(r) = \phi_* \left(1 - \frac{11r^2}{3L^2}\right) \left[\left(1 - \frac{r}{L}\right) \left(1 + \frac{r}{L}\right)\right]^3 \quad (4.58)$$

donde  $0 < r < L$  y  $\delta\phi_0(r) = 0$  para  $r > L$ . También se está pidiendo que la derivada temporal del campo escalar sea cero inicialmente,  $d\phi(\eta = \eta_0, r) = 0$ . El parámetro  $L$  representa la longitud de escala de la inhomogeneidad,  $\Phi_*$  mide la amplitud de la perturbación en el campo escalar, todo para  $\eta = \eta_0$ .

### 4.3.3 Campo escalar real. Caso $\lambda \neq 0$

Después de estudiar el caso de campo escalar real, se pasa al estudio completo considerando el término de autointeracción, por lo que ahora se tomará en cuenta un potencial de orden cuarto. En este caso, se agrega un término más al tensor de energía momento asociado a dicho campo,

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + m^2 \phi^2 + \lambda \phi^4) \quad (4.59)$$

El desarrollo es similar al del campo escalar complejo con término de autointeracción, por lo que el desarrollo se lleva a cabo en la sec. 4.3.4.

#### 4.3.4 Estrellas de bosones

Es importante resaltar que una de las implicaciones más importantes de física de partículas en cosmología y astrofísica es, que las partículas bosónicas pueden jugar un rol en la evolución y en la estructura del Universo (Seidel y Suan [11],[12]). Estudios de formación de galaxias así como de nucleosíntesis primordial indican que la materia oscura es posiblemente más abundante que la materia bariónica. Esta materia bosónica, como se ha venido comentando, se condensaría a través de algún tipo de inestabilidad de Jeans para formar objetos compactos gravitantes.

En un trabajo publicado en 1990, Seidel y Suan [11],[12] encontraron que existen configuraciones en equilibrio de campos escalares reales no-singulares y dependientes del tiempo. Estas configuraciones se atribuyen a estrellas oscilantes denominadas oscilaciones, que corresponden a las soluciones del sistema de ecuaciones de KG para campos escalares reales acoplados, y que se estudiaron en la sección anterior. Estas estrellas de bosones poseen configuraciones que corresponden a distintos niveles de excitación del campo escalar (distintos modos).

A diferencia de las soluciones estáticas de las ecuaciones de KG con campos escalares reales, la dependencia en el tiempo de estas configuraciones es fundamental para evitar las singularidades. Este caso de campo escalar real es ligeramente distinto al de campo escalar complejo, donde las ecuaciones de KG proveen las estrellas de bosones, que corresponden a soluciones no-singulares de un solitón con geometría estática, es decir, las componentes del campo complejo oscilan de tal manera que el tensor de energía momento es independiente del tiempo. La estabilidad de estas oscilaciones ha sido estudiada en distintos trabajos, véase el trabajo de Seidel y Suan [11],[12]. Este tipo de estudios es necesario por el posible rol que pueden tomar las oscilaciones tanto en cosmología como en astrofísica, donde el campo escalar se propone como candidato de materia oscura.

El trabajo que realicé tiene como objetivo complementar y expandir estudios anteriores sobre campo escalar real, principalmente debido a J. Torres [16], donde se lleva a cabo el análisis numérico de la evolución de las ecuaciones de KG (no directamente relacionado al de Seidel y Suan). El objetivo principal de mi proyecto consiste en determinar el papel que puede jugar el término de autointeracción en un potencial cuártico;

$$V(\Phi) = (m^2/2) \Phi^2 + (\lambda/4) \Phi^4 \quad (4.60)$$

para atacar el problema de la régimen no-lineal en la formación de estructura, donde la descripción de la materia en términos de campos es requerida.

A partir de las estrellas de bosones se puede obtener información sobre la anisotropía local y sus efectos. A medida que sea mayor el valor del término de autointeracción  $\lambda$ , menor será la anisotropía fraccional (valor escalar entre cero y uno que describe el grado de anisotropía). Es decir, las componentes radial

y tangencial de la presión serían distintas y no tendrían por qué llevar una dirección preferencial. Cambiar el término de autointeracción para una densidad central dada, provee una manera de variar la anisotropía de manera natural. A pesar de que no se está realizando un estudio específico sobre las anisotropías en mi trabajo, este tipo de estudios provee una motivación para añadir el término de autointeracción a las evoluciones.

### Campo escalar complejo. Caso $\lambda = 0$

Pasando al análisis matemático, tomando el vector de desplazamiento,  $\beta = 0$ , en la ecuación de la métrica, como se ha venido haciendo, la ecuación de campo escalar se escribe de forma explícita en términos de las funciones métricas

$$-\frac{1}{\alpha^2} \left[ \ddot{\Phi} - \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \dot{\Phi} - \frac{\alpha\alpha'}{g^2} \Phi' \right] + \frac{1}{g^2} \left[ \Phi'' - \frac{g'}{g} \Phi' - \frac{g\dot{g}}{\alpha} \dot{\Phi} \right] + \frac{2\Phi'}{rg^2} - m^2\Phi = 0 \quad (4.61)$$

con la notación usual, las primas representan derivadas espaciales mientras que los puntos corresponden a las derivadas temporales. En esta primera sección sobre campos escalares, no se considerará el caso con término de autointeracción, por lo que para esta ecuación  $\lambda \neq 0$ . Como las funciones métricas son reales, tanto la parte real como la compleja de  $\Phi = \Phi_1(r, t) + i\Phi_2(r, t)$  satisfacen esta ecuación. En términos de  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ , la componente  $rr$  de la ecuación de Einstein es:

$$\alpha' = \frac{1}{2}\alpha \left[ \frac{g^2 - 1}{r} + 4\pi Gr \left( [(\Phi_1')^2 - g^2 m^2 \Phi_1^2 + (\Phi_2')^2 - g^2 m^2 \Phi_2^2] + \frac{g^2}{\alpha^2} (\dot{\Phi}_1^2 + \dot{\Phi}_2^2) \right) \right] \quad (4.62)$$

Esta ecuación de arriba, es una ecuación diferencial para la función de lapso,  $\alpha$ , que puede resolverse en cada rebanada una vez que las demás cantidades estén determinadas. La una ecuación diferencial ordinaria que tiene forma similar para la función radial de la métrica,  $g$ , es decir, la ecuación de constricción Hamiltoniana,  $G_{tt} - 8\pi GT_{tt} = 0$ ;

$$g' = \frac{1}{2} \left[ 4\pi G \left( g^3 r \frac{\dot{\Phi}_1^2 + \dot{\Phi}_2^2}{\alpha} + rg(\dot{\Phi}_1')^2 + rg(Phi_2')^2 + rg^3 m^2 (\Phi_2^2 + \Phi_1^2) \right) - \frac{g(g^2 - 1)}{r} \right] \quad (4.63)$$

Pero nuevamente, en lugar de resolver esta última ecuación para cada rebanada de  $g$ , que consume un tiempo computacional considerable, se utiliza la ecuación de constricción como una medida independiente de la precisión de la solución numérica. Se obtiene el desarrollo del tiempo de  $g(t, r)$ , utilizando la componente  $t, r$  de las ecuaciones de Einstein;

$$\dot{g} = 4\pi Grg(\dot{\Phi}_1\Phi_1' + \dot{\Phi}_2\Phi_2') \quad (4.64)$$

las ecuaciones 4.61, 4.62 y 4.64 forman un conjunto completo de ecuaciones para las variables que se quieren encontrar:  $\Phi_1, \Phi_2, \alpha$ , y,  $g$ .

**Campo escalar complejo. Caso  $\lambda \neq 0$** 

Un campo escalar complejo auto-gravitante en relatividad general es descrito por la acción;

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R - \int d^4x \left[ \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi^* \partial_\nu \Phi + \frac{1}{2} m^2 \Phi^* \Phi + \frac{1}{2} \lambda |\Phi|^4 \right) \right] \quad (4.65)$$

La ecuación de campo escalar obtenida a partir de la última ecuación

$$g^{\mu\nu} \phi_{,\mu\nu} - m^2 \phi - \lambda (\phi^* \phi) \phi = 0 \quad (4.66)$$

al tratarse de un campo escalar complejo,  $\phi = \phi_1(r, t) + i\phi_2(r, t)$ . La ecuación 4.65 junto con las ecuaciones de Einstein determinan por completo el campo escalar  $\phi(x, t)$ , así como la métrica. Es importante mencionar que, a diferencia de las estrellas ordinarias, no es necesario especificar una ecuación de estado, toda la información sobre las interacciones entre las partículas es provista directamente por la acción 4.65. Considerando nuevamente el elemento de línea simétricamente esférico de la ec. (4.1) con  $\alpha(r, t)$  la función de lapso. En ausencia del vector de shift  $\beta^i$ , esta forma de la métrica puede mantenerse para todo tiempo al elegir la condición de slicing armónica para el caso de campo escalar real y la condición de slicing maximal para el caso de campo escalar complejo. Este tipo de condición para el lapso requiere que el tensor de curvatura extrínseco,  $K_{ij}$ , sea cero,  $K_{\theta\theta} + K_{\phi\phi} = 0$ . La condición de slicing hace que el lapso decrezca rápidamente si se acerca a un horizonte aparente.

El campo escalar,  $\Phi$ , oscila con una frecuencia fija  $\omega_0$ ,

$$\Phi(t, r) = \Phi_0(r) \exp(-i\omega_0 t) \quad (4.67)$$

Sin embargo, las configuraciones de estrellas de bosones en equilibrio son aquellas en las que la métrica es independiente del tiempo. Utilizando unidades tales que  $c = \hbar = 1$  y que la constante gravitacional se expresa en términos de la masa de Planck:  $G = 1/m_{Pl}^2$ . En coordenadas adimensionales se tiene que;

$$r = mr, \quad t = \omega_0 t, \quad \sigma = \sqrt{4\pi G} \Phi, \quad \alpha = \frac{m}{\omega_0}, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{m^2 4\pi G}, \quad (4.68a)$$

así las ecuaciones de Einstein y KG bajo las condiciones mencionadas anteriormente son;

$$\sigma'_0 = \chi_1, \quad (4.69a)$$

$$\chi'_1 = - \left[ \frac{1}{r} + \frac{\gamma^2}{r} - r\gamma^2 \sigma_0^2 \right] \chi_1 - \left[ \frac{1}{\alpha^2} - 1 \right] \sigma_0 \gamma^2 + \Lambda (\gamma^2 \sigma_0^3), \quad (4.69b)$$

$$\gamma' = \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^3}{r} + r\gamma^3 \left( 1 + \frac{1}{\alpha^2} + r\gamma\chi_1^2 + \frac{1}{2} \Lambda (\gamma^3 r \sigma_0^4) \right), \quad (4.69c)$$

$$\alpha' = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha\gamma^2}{r} + \frac{r\gamma^2 \sigma_0^2}{\alpha} (1 - \alpha^2) + r\alpha\chi_1^2 - \frac{1}{2} \Lambda \gamma^2 \alpha r \sigma_0^4 \right], \quad (4.69d)$$

donde  $\sigma_0 = \Phi_0 \sqrt{4\pi G}$  y nuevamente la prima denota la derivada espacial y el punto denota la derivada temporal. En el origen se requiere que  $g(r=0) = 1$  mientras que otras cantidades son finitas en  $r=0$ . Las configuraciones obtenidas son soluciones en equilibrio de las ecuaciones de Einstein independientes del tiempo. Para que una solución represente una estrella aislada, se requiere que  $\sigma(r=\infty) = 0$ . Lo que equivale a tener un problema de eigenvalores. Para cada elección de  $\sigma(r=0)$ , las ecuaciones de arriba tienen solución solamente cuando  $\alpha(r=0)$  toma ciertos valores. Por ejemplo, distintos eigenvalores arrojan distinto número de nodos en la solución de  $\sigma(r=0)$ . Por supuesto que se pueden obtener distintas soluciones a partir de diferentes valores del parámetro  $\lambda$ . Eligiendo el siguiente conjunto de variables para construir la ecuaciones de evolución;

$$\psi_1 = r\sigma_1, \quad \psi_2 = r\sigma_2, \quad \pi_1 = \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \psi_1}{\partial t}, \quad \pi_2 = \frac{1}{\vartheta} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \quad (4.70)$$

donde  $\vartheta = \alpha/g$  y los subíndices de las funciones  $\psi_i$  corresponden a la parte real e imaginaria del campo escalar multiplicado por  $r$ . La ecuación de KG para el campo escalar se escribe de la forma:

$$\ddot{\pi}_i = \vartheta' \psi_i' + \vartheta \psi_i'' - \psi_i \left( \gamma \alpha + \frac{\vartheta'}{r} + \Lambda (\psi_1^2 + \psi_2^2) \right), \quad i = 1, 2 \quad (4.71)$$

$$\dot{\psi}_i = \vartheta \pi_i, \quad i = 1, 2 \quad (4.72)$$

La constricción Hamiltoniana queda de la forma

$$\frac{2\gamma'}{r\gamma^3} + \frac{\gamma^2 - 1}{r^2\gamma^2} - \frac{\pi_1^2 + \pi_2^2}{r^2\gamma^2} - \frac{\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2}{\gamma^2} - \left( \sigma_1^2 + \sigma_1'^2 \right) - \frac{\Lambda}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 = 0 \quad (4.73)$$

Esta última ecuación no es resuelta durante la evolución numérica, más bien corresponde a una ecuación de conservación dada por las ecuaciones de evolución. Se mantiene un seguimiento a esta ecuación de constricción ya que funciona como indicador de la precisión numérica de las simulaciones.

Una vez terminado el análisis numérico de los distintos escenarios que se van a enfrentar, se pasa a la herramienta computacional requerida para estudiar los escenarios cosmológicos que ya se han descrito. Es por eso que en el siguiente capítulo se hará un acercamiento a la estructura del código numérico OllinSphere2 para su implementación.

## Capítulo 5

---

### El código numérico OllinSphere2

---

La parte medular de mi trabajo consistió en el aprendizaje, implementación y mejora del código numérico OllinSphere2. El cual ya ha sido utilizado con anterioridad para abordar problemas que involucran la formación de estructura y la formación de objetos compactos autogravitantes con simetría esférica. Utilicé este código para estudiar la evolución cosmológica de distribuciones inhomogéneas de materia, también en simetría esférica. Es por esto que en esta primera parte, se aborda de forma detallada cómo iniciarse con el código numérico OllinSphere2. Partiendo desde su descarga hasta su ejecución. Haciendo mención de cada uno de los directorios que lo conforman, ya sea para: ver qué archivos pueden ser modificados durante la implementación del código, qué archivos contienen definidos distintos parámetros y variables y qué tipo de archivos son ejecutados durante cada corrida.

La formulación descrita en el capítulo pasado tiene la forma adecuada para llevar a cabo técnicas numéricas estándar, que son utilizadas usualmente en Relatividad Numérica. En el código numérico con el que se llevan a cabo las simulaciones, se discretiza los operadores de derivada espacial hasta cuarto orden con tal de utilizar el métodos de diferencias finitas, y se realiza la evolución en el tiempo utilizando el método de líneas con el método iterativo Crank-Nicholson (ICN) y el método de integración de cuarto orden debido Runge-Kutta. Naturalmente existe una singularidad asociada al origen en coordenadas esféricas, para tratarla se definen funciones sobre este punto que permiten establecer condiciones adecuadas.

Para encontrar un conjunto de valores iniciales adecuado, que resuelva las ecuaciones de constricción hasta un cierto un cierto error numérico de discretización, se emplean distintas técnicas que dependen del escenario al que se esté enfrentando. El procedimiento que sigue consiste en especificar los campos de materia y hacer suposiciones sobre la métrica y la curvatura extrínseca que simplifique las ecuaciones de constricción, para luego resolverlas para un número mínimo de funciones. Llevar a cabo esta tarea involucra un gasto considerado de tiempo computacional debido a que las constricciones son un conjunto de

ecuaciones diferenciales parciales elípticas altamente acopladas. Sin embargo, como se está tomando simetría esférica, se reducen a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que resultan más fáciles de resolver.

## 5.1 Descarga y estructura del directorio OllinSphere2

La forma más sencilla de obtener el código es descargándolo a partir del servidor CVS del grupo Ollin (`dulcinea.nucleares.unam.mx`). Con el fin de obtener un nombre de usuario y una contraseña para este servidor, es necesario contactar a José Manuel Torres (`jose.torres@nucleares.unam.mx`) o a Miguel Alcubierre (`malcubi@nucleares.unam.mx`), para obtener la autorización de descarga. Una vez conseguido un nombre de usuario y contraseña, lo primero que se debe de hacer es conectarse al repositorio, escribiendo en la terminal:

```
cvs -d :pserver:username@dulcinea.nucleares.unam.mx:/usr/local/ollincvs login
```

Después, se necesitará escribir la contraseña. Lo que sigue es descargar el código escribiendo:

```
cvs -d :pserver:username@dulcinea.nucleares.unam.mx:/usr/local/ollincvs
co Codes/OllinSphere2
```

Este comando creará en la computadora del usuario, un directorio con el nombre de `Codes` y dentro, el directorio `OllinSphere2`, que corresponde al directorio principal del código. Dentro de éste se encuentran los siguientes directorios:

<code>CVS</code>	Contiene información acerca de la raíz y servidor CVS.
<code>doc</code>	Contiene la documentación.
<code>exe</code>	Este directorio es creado durante la compilación y contiene el archivo ejecutable. También contiene una copia del archivos de parámetros encontrados en el directorio <code>par</code> (véase más abajo).
<code>objs</code>	Este directorio es creado durante la compilación y contiene todos los archivos de objetos y módulos.
<code>par</code>	Contiene ejemplos de archivos de parámetros.
<code>prl</code>	Contiene <i>perl scripts</i> utilizados durante la compilación para crear la subrutinas que manejan parámetros y arreglos.
<code>src</code>	Contiene los archivos fuente para todas las rutinas del código.

El directorio `src` se divide en una serie de subdirectorios con el fin de clasificar de la mejor manera las distintas rutinas. Estos subdirectorios son:



<code>CVS</code>	Contiene información sobre la raíz y servidor de CVS.
<code>auto</code>	Contiene archivos de Fortran que son automáticamente generados durante la compilación por los <i>perl scripts</i> . Estos archivos no deben de ser editados manualmente.
<code>base</code>	Contiene las rutinas que controlan la ejecución básica del código, incluyendo las declaraciones de los parámetros y los arreglos, rutinas de salida, los controladores de la evolución principal y rutinas genéricas para calcular derivadas, disipación, etc. El código numérico comienza su compilación desde la rutina <code>main.f90</code> , que se encuentra en este directorio.
<code>geometry</code>	Contiene rutinas relacionadas con datos iniciales, la evolución y el análisis de las variables geométricas del espacio-tiempo, incluyendo fuentes, condiciones de norma, constricciones, buscadores de horizontes, etc.
<code>matter</code>	Contiene rutinas relacionadas con los datos iniciales, la evolución y el análisis de los distintos modelos de materia, incluyendo una rutina genérica para calcular las variables básicas de materia y rutinas para evolucionar los campos escalares, campos eléctricos, fluidos, etc.

## 5.2 Compilación y ejecución del código numérico

El código se encuentra escrito en el lenguaje de programación, FORTRAN 90. Todas las subrutinas se localizan en archivos separados dentro del directorio `src` y sus subdirectorios.

### 5.2.1 Compilación

Para compilar, sólo basta con moverse dentro del directorio `OllinSphere2` y escribir:

```
make
```

Esta orden hará que los *perl scripts* se ejecuten para crear una serie de archivos en Fortran, generados de forma automática, que serán colocados dentro del directorio `src/auto`. Luego, compilará todas las rutinas en Fortran que pueda encontrar dentro de cualquier subdirectorio de `src` (intentará compilar cualquier archivo con la extensión `.f90`). Los archivos objeto resultantes, así como los archivos módulo serán colocados dentro del subdirectorio `objs`. Después, el makefile creará el directorio `exe` y lo colocará en el archivo final ejecutable `ollinsphere`. También copiará a este directorio todos los archivos de parámetros dentro del subdirectorio `par`.

Hasta este punto, el archivo Makefile puede utilizar los compiladores `g95`, `gfortran` o los compiladores Intel `ifc` (así como la nueva versión `ifort`). Si el usuario posee un compilador distinto a los mencionados, entonces el Makefile deberá que ser modificado. El Makefile tiene distintas aplicaciones que son útiles y que pueden ser enlistadas al escribir:

```
make help
```

### 5.2.2 Corridas

Para correr el código, es necesario encontrarse dentro del directorio `exe` y escribir desde la terminal:

```
./ollinsphere name.par
```

Donde `nombre.par` es el nombre del archivo de parámetros que se desee utilizar (en la siguiente sección se hablará un poco más sobre de estos archivos). De modo que el código leerá los datos del archivo de parámetros y con suerte (si son adecuados) imprimirá una ventana de salida en la pantalla. El código también creará un directorio de salida y escribirá archivos con datos en éste.

## 5.3 Archivos de parámetros

Durante cada corrida el código lee los valores de los parámetros de un *parfile*, con un nombre de la forma `nombre.par`, que tiene que ser especificado en la línea de comando después del ejecutable:

```
./ollinsphere nombre.par
```

Los datos en este archivo de parámetros pueden darse en cualquier orden, utilizando el formato:

```
parameter = valor
```

Los comentarios (cualquier texto escrito después del símbolo `#`) y líneas en blanco son ignorados durante cada corrida. Sólo se permite un parámetro por línea y sólo un valor es permitido por cada parámetro, con la excepción de los parámetros `outvars0D` y `outvars1D` que controlan qué arreglos tienen salidas y toman listas de los arreglos como valores, por ejemplo:

```
outvars0D = alpha,A,B
```

Los parámetros que no aparezcan en el archivo *parfile* toman los valores que hayan sido asignados por default dentro del archivo `param.f90`. Algunos ejemplos de archivos de parámetros pueden encontrarse en el subdirectorio `par`.

Es importante resaltar que si bien, Fortran no distingue entre sub y súper índices en los nombres de las variables, los nombres de los parámetros son leídos como cadenas, de modo que los sub y super índices son en realidad distintos. El nombre de los parámetros en el archivo de parámetros debe ser idéntico al que aparezca en el archivo `param.f90`.

## 5.4 Archivos de salida

Durante una corrida del código numérico, se creará un subdirectorio de salida cuyo nombre debe de especificarse en el archivo de parámetros. Luego, éste producirá una serie de archivos de salida con los datos de la corrida que son denominados archivos '0D' (con la extensión `*.t1`) y archivos '1D' (con extensión `*.r1`).

Los archivos 0D se refieren a cantidades escalares obtenidas a partir de los arreglos espaciales como función del tiempo. Estas cantidades escalares incluyen el máximo (`max`), el mínimo (`min`) y dos normas diferentes de los arreglos espaciales: el valor absoluto máximo (`nm1`) así como la media cuadrática (`nm2`). El código también arroja el valor de la variable dada en el origen (`r=0`) y la extrapolación de su valor en el infinito (`infty`).

Los archivos 1D contienen los arreglos espaciales completos a distintos tiempos. A pesar de que el código es unidimensional, estos archivos pueden convertirse bastantes grandes, así que es necesario tener cuidado.

Todos los archivos se encuentran escritos en ASCII y utilizan un formato adaptado a XGRAPH o YGRAPH, pero otros paquetes gráficos deberían de ser capaces de leerlos.

La salida es controlada por los siguientes parámetros (se exponen tal cual como se encuentran en un archivo `nombre.par`):

<code>directory</code>	Name of directory for output.
<code>Ninfo</code>	How often do we output information to screen?
<code>Noutput0D</code>	How often do we do 0D output?
<code>Noutput1D</code>	How often do we do 1D output?
<code>outvars0D</code>	Arrays that need 0D output (una lista separada por comas).
<code>outvars1D</code>	Arrays that need 1D output (una lista separada por comas).

Uno de los archivos de parámetros empleados para este trabajo tiene el siguiente aspecto:

```
# Test parameter file:
# Cosmological spacetime with scalar field dark matter, zero cosmological constant,
```

```

# no shift.

cosmic_run = .true. # Output for cosmological parameters
dr = 0.1          # grid spacing
dtfac = 0.5       # Courant parameter
adjuststep = .true.

Nr = 5000         # Number of grid points
Nt = 50000        # Number of time steps

slicing = harmonic # Type of slicing condition
gauge_f = 0.3332

integrator = rk4   # Type of integration method
order = two       # Order for spatial finite differencing

boundtype = flat  # Type of boundary condition

damp = 0.0
scalardiss = 0.01

idata = scalarDMbackground # Type of initial data

scalarpotential= phi2
scalar_bg_a0 = 0.01
scalar_mass = 1.0
complex_lambda = 0.00175

scalar_bg_pert = .true.

scalar_a0 = 0.002    # Amplitude of gaussian perturbation
scalar_r0 = 0.0      # Center of gaussian perturbation
scalar_s0 = 10.0     # Width of gaussian perturbation

ahfind = .true.     # Black Hole horizon finder

mattertype = scalar # Scalar Field

directory = scalar_field # Name of output directory

Ninfo = 100         # How often do we want to output information to screen?
Noutput0D = 1       # How often do we want 0D output?
Noutput1D = 160     # How often do we want 1D output?

outvars0D = alpha,phi,psi,A,B,trK,KTA,Deltar,lambda,Alambda,ham,mom,
rho,scalar_phi,scalar_pi,scalar_xi,mass,massint,rho_contrast

```

```
outvars1D = alpha,phi,psi,A,B,trK,KTA,Deltar,lambda,Alambda,ham,mom,
rho,scalar_phi,scalar_pi,scalar_xi,mass,massint,rho_contrast
```

## 5.5 El espacio-tiempo

La métrica del espacio-tiempo es definida como:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_r \beta^r) dt^2 + 2\beta_r dt dr + dl^2, \quad (5.1)$$

donde  $\alpha$  es la función de lapso y  $\beta^r$  es el vector de desplazamiento (que sólo tiene una componente radial), y donde  $\beta_r = A\beta^r$ .

En el código, la métrica espacial es parametrizada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} dl^2 &= \psi(r,t)^4 (A(r,t) dr^2 + r^2 B(r,t) d\Omega^2) \\ &= e^{4\psi(r,t)} (A(r,t) dr^2 + r^2 B(r,t) d\Omega^2), \end{aligned} \quad (5.2)$$

con  $d\Omega^2$  el elemento de ángulo sólido estándar y con  $\psi = e^\phi$  el factor conforme.

## 5.6 Materia. Tensor de energía-momento

Cuando se escriben las ecuaciones de Einstein en la forma 3+1, las componentes del tensor de energía momento que serán relevantes, son:

$$\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}, \quad (5.3)$$

$$j_i = -n^\mu P_i^\nu T_{\mu\nu}, \quad (5.4)$$

$$S_{ij} = P_i^\mu P_j^\nu T_{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

con  $n^\mu$  el vector unitario normal a las hipersuperficies espaciales de tiempo coordinado constante y  $P_{\mu\nu}$  el vector de proyección en estas hipersuperficies.

En el código numérico, estas cantidades son definidas incluso en el vacío (donde son iguales a cero), ya que ambas son requeridas en las ecuaciones de evolución y para el cálculo de las constricciones.

Si un usuario deseara añadir un nuevo modelo de materia, se necesita estar seguro de que se agreguen las expresiones apropiadas para estas cantidades en el archivo `src/matter/matter.f90`.

## 5.7 Malla numérica

Con el fin de evitar divisiones por cero en algunos términos, se fija el origen. Esto significa que no existen puntos de la malla en el origen. En lugar, el primer punto de la malla se encuentra en  $r = -dr/2$ , el segundo en  $r = +dr/2$  y así sucesivamente. Esto hace más sencillo aplicar condiciones de frontera simétricas, ya que, para una función par  $f$ , se puede tomar  $f(0) = f(1)$  y para funciones impares,  $f(0) = -f(1)$ . Nótese que se está trabajando con la regularidad del problema en  $r = 0$ , en la forma descrita en la siguiente Sección de regularización.

## 5.8 Regularización

Para espacio-tiempos regulares, se tiene que asegurar que las ecuaciones son regulares cerca de  $r = 0$ . Hay varias cosas importantes sobre la regularización de las ecuaciones de evolución en el origen:

### 5.8.1 Condiciones de simetría en el origen

Lo primero que se debe de tomar en cuenta es la simetría de las propiedades de distintas dinámicas variables en el origen. Como las variables deben de ser diferenciables en el origen, esto implica que las variables métricas deben comportarse como:

$$\alpha \sim \alpha^0 + \mathcal{O}(r^2) \quad (5.6)$$

$$\beta^r \sim \mathcal{O}(r) \quad (5.7)$$

$$\psi \sim \psi^0 + \mathcal{O}(r^2) \quad (5.8)$$

$$A \sim A^0 + \mathcal{O}(r^2) \quad (5.9)$$

$$B \sim B^0 + \mathcal{O}(r^2) \quad (5.10)$$

Al imponer estas condiciones en el origen, ahora sólo se necesita saber qué variables son pares o impares. Para llevar esto a la práctica, se fija el origen, esto significa que no existe un punto de la malla en el origen, en cambio, el primer punto de la malla se encuentra en  $r = -dr/2$ , el segundo se encuentra en  $r = dr/2$  y así sucesivamente. Esto hace más fácil aplicar condiciones de frontera simétricas, para una función par  $f$  se puede tomar  $f(0) = f(1)$  mientras que para una función impar  $f(0) = -f(1)$ .

### 5.8.2 Planitud local en el origen

Puede mostrarse que la planitud local implica que, para  $r$ 's pequeñas en las expansiones de arriba, se debe de tener que:

$$A^0 = B^0. \quad (5.11)$$

El problema con esto, es que ahora se tiene una condición de frontera. Las derivadas tanto de  $A$  y  $B$  deben hacerse cero en  $r = 0$ , además, ambas funciones deben de ser iguales, esto es, tres condiciones de frontera para dos cantidades (lo mismo sucede para  $K_A$  y  $K_B$ ).

## 5.9 Métodos numéricos empleados por el código

### 5.9.1 Integración

Para la integración del tiempo, el código emplea el método de líneas, donde el tiempo de integración y la diferenciación espacial son consideradas independientes una de la otra.

Para la evolución de las variables de campo, se puede utilizar uno de los dos siguientes métodos:

1. Método estándar de Runge-Kutta de orden cuarto.
2. Esquema Crank-Nicholson iterativo (ICN) de tres pasos. El esquema ICN para  $N$  iteraciones es definido de la siguiente manera, tomando  $S(f)$  como el término fuente de la ecuación de evolución:

$$f_0 = f(t), \quad (5.12)$$

$$f_{i+1} = f_0 + dt/2 S(f_i) \quad i \text{ de } 1 \text{ a } N-1, \quad (5.13)$$

$$f_N = f_0 + dt S(f_{N-1}), \quad (5.14)$$

$$f_t + dt = f_N \quad (5.15)$$

Esto es, se hacen  $N - 1$  y medio pasos, empezando siempre por  $f(t)$  pero evaluando el término fuente utilizando los resultados del paso previo. Finalmente, se hace un último paso, haciendo solamente 2 ( $N = 2$ ) pasos es suficiente para una precisión de segundo orden, pero se necesita hacer al menos 3 ( $N = 3$ ) para la estabilidad. El ICN es más bien un método robusto que puede ser aplicado a sistemas no-lineales de ecuaciones, pero que es disipativo.

La elección del método de integración es realizado a través del parámetro `integrator`, encontrado en el archivo `nombre.par`, puede tomar los valores `{rk4,icn}`.

## 5.9.2 Diferenciación espacial

Para diferenciación espacial se puede utilizar, ya sea la diferenciación de segundo orden o de cuarto orden. Cerca de las fronteras, la diferenciación se reduce siempre a segundo orden. La elección del orden de diferenciación es controlado por el parámetro `order` que puede tomar los valores `{two,four}`.

## 5.10 Editando el código

A continuación se muestran algunos detalles que se deben tomar en cuenta si se desea editar el código numérico y/o agregar nuevos parámetros, arreglos o rutinas. Se tomará como ejemplo algunas de las implementaciones realizadas para este trabajo.

### 5.10.1 Agregando parámetros

Todos los parámetros para el código numérico deben de ser declarados en el archivo de parámetros `src/param.f90`, utilizando el formato específico:

```
type :: name = value
```

Aquí `type` puede ser cualquiera de las variables estándar de FORTRAN: (`logical`, `integer`, `real`, `character`), `name` es el nombre del parámetro y `value` es un valor inicial por default que toma sentido para el código. Todos los parámetros deben de tener un valor por default, de otro modo el código no compilaría. Sólo un parámetro puede ser declarado por línea, ya que este archivo será leído durante el tiempo de compilación por un perl script que espera dicha estructura.

Como se trabajo específicamente con el potencial escalar de orden cuarto:  $V = m^2\phi^2 + \lambda\phi^4$ , es necesario agregar los parámetros adecuados que puedan llamar a rutinas específicas encontradas en otras secciones del código. Por lo que para el caso de un potencial de cuarto orden, debe agregarse:

```
character(1000) :: scalarpotential = "none"! range=(none,phi2,phi4)
```

Además, en el caso de campo escalar complejo, deben agregarse las definiciones de nuevos parámetros para la parte real y compleja de la amplitud del fondo y de la derivada temporal del fondo, junto con sus valores por default:

```
\item real(8) :: complexR_bg_a0 = 0.d0
\item real(8) :: complexI_bg_a0 = 0.d0
\item real(8) :: complexR_bgdot_a0 = 0.d0
\item real(8) :: complexI_bgdot_a0 = 0.d0
\item real(8) :: complex_pert_k0 = 0.d0
```

Otros parámetros también fueron incluidos, pero por brevedad no se exponen.

### 5.10.2 Agregando arreglos

Como el código numérico es un código 1D, trabaja con una serie de arreglos 1D que tienen todas las variables dinámicas y de análisis. Todos los arreglos deben de ser declarados en el archivo `src/arrays.f90`, utilizando un formato muy específico:

```
real(8), allocatable, dimension (:) :: arrayname
```

Para el caso de campo escalar complejo, se debe llevar la siguiente estructura para el campo, la derivada espacial  $\Xi = d\phi/dr$  y la derivada temporal  $\Pi = n^m d_m\phi$ :

```
REAL complex_phiR ! SYMMETRY = +1, INTENT = EVOLVE,
                   STORAGE = CONDITIONAL (contains(mattertype,"complex"))
REAL complex_phiI ! SYMMETRY = +1, INTENT = EVOLVE,
                   STORAGE = CONDITIONAL (contains(mattertype,"complex"))
REAL complex_xiR ! SYMMETRY = -1, INTENT = EVOLVE,
                  STORAGE = CONDITIONAL (contains(mattertype,"complex"))
```



```

REAL complex_xiI  ! SYMMETRY = -1, INTENT = EVOLVE,
                  STORAGE = CONDITIONAL (contains(mattertype,"complex"))

REAL complex_piR  ! SYMMETRY = +1, INTENT = EVOLVE,
                  STORAGE = CONDITIONAL (contains(mattertype,"complex"))
REAL complex_piI  ! SYMMETRY = +1, INTENT = EVOLVE,
                  STORAGE = CONDITIONAL (contains(mattertype,"complex"))

```

### 5.10.3 Agregando rutinas

Las rutinas deben agregarse directamente en uno de los subdirectorios de `src` con la extensión `.f90` (un nuevo usuario debe tratar de escoger el subdirectorio correcto, dependiendo del tipo de rutina que se esté añadiendo). No hay necesidad de modificar el Makefile, ya que éste automáticamente compila y enlaza todos los archivos con esa extensión que encuentre.

Como todos los parámetros y arreglos son declarados en los archivos de módulo F90 `param.f90` y `arrays.f90`, si se desea que una nueva rutina los lea, se necesita agregar las siguientes dos líneas inmediatamente después del nombre de la rutina (antes de declarar cualquier variable).

```

use param
use arrays

```

Si se necesitan calcular derivadas, se puede agregar la línea:

```

use derivatives

```

Retomando el caso del potencial de cuarto orden, deben agregarse las siguientes rutinas, tanto para el caso real como para el complejo, dentro del archivo `potential.f90`:

```

if (contains(mattertype,"complex")) then
    :
else if (scalarpotential=="phi4") then
    if (complex_higgs) then
        scalar_V = -0.5d0*scalar_mass**2*(scalar_phi**2) &
            + 0.25d0*complex_lambda*(scalar_phi**2)**2
        scalar_VP = -scalar_mass**2*scalar_phi &
            + complex_lambda*scalar_phi*(scalar_phi**2)
    else
        scalar_V = 0.5d0*scalar_mass**2*(scalar_phi**2) &
            + 0.25d0*complex_lambda*(scalar_phi**2)**2
        scalar_VP = scalar_mass**2*scalar_phi &
            + complex_lambda*scalar_phi*(scalar_phi**2)
    end if
end if

```

```

end if
end if

if (contains(mattertype,"complex")) then
:
else if (complexpotential=="phi4") then
if (complex_higgs) then
complex_V = -0.5d0*complex_mass**2*(complex_phiR**2+complex_phiI**2) &
+ 0.25d0*complex_lambda*(complex_phiR**2+complex_phiI**2)**2
complex_VPR = -complex_mass**2*complex_phiR &
+ complex_lambda*complex_phiR*(complex_phiR**2+complex_phiI**2)
complex_VPI = -complex_mass**2*complex_phiI &
+ complex_lambda*complex_phiI*(complex_phiR**2+complex_phiI**2)
else
complex_V = 0.5d0*complex_mass**2*(complex_phiR**2+complex_phiI**2) &
+ 0.25d0*complex_lambda*(complex_phiR**2+complex_phiI**2)**2
complex_VPR = complex_mass**2*complex_phiR &
+ complex_lambda*complex_phiR*(complex_phiR**2+complex_phiI**2)
complex_VPI = complex_mass**2*complex_phiI &
+ complex_lambda*complex_phiI*(complex_phiR**2+complex_phiI**2)
end if
end if
end if

```

As como también se deben agregar las subrutinas del potencial a los archivos de datos iniciales, tanto para el caso real como para el complejo:

```

call potential
if (scalarpotential=="phi2") then
d_V = scalar_V - 0.5d0*scalar_mass**2*scalar_bg_a0**2
else if (scalarpotential=="phi4") then
d_V = scalar_V - 0.5d0*scalar_mass**2*scalar_bg_a0**2 &
- 0.25d0*complex_lambda*scalar_bg_a0**2
end if

```

```

call potential
if (complexpotential=="phi2") then
d_V = complex_V - 0.5d0*complex_mass**2* &
(complex_bg_phiR0**2+complex_bg_phiI0**2)
else if (complexpotential=="phi4") then
d_V = complex_V - 0.5d0*complex_mass**2* &
(complex_bg_phiR0**2+complex_bg_phiI0**2) &
- 0.25d0*complex_lambda* &
(complex_bg_phiR0**2+complex_bg_phiI0**2)**2
end ifs

```

Más aún, dentro de una de las subrutinas de datos iniciales para el caso complejo se debe de tomar como cero los parámetros iniciales para la derivada temporal:

```
complex_piR = 0.d0  
complex_piI = 0.d0
```

Finalmente debe de asegurarse que los cambios realizados sean leídos por el archivo que llama a los datos iniciales, `initial.f90`, que se encuentra dentro del directorio `base`.

#### 5.10.4 CVS

Las siglas CVS corresponden a 'Concurrent Versions System' y corresponde a un sistema para mantener diferentes versiones de un código que está siendo desarrollado por varias personas de forma bien organizada, al mantener una 'versión oficial' en un repositorio central para mantenerse al tanto de todas las más recientes actualizaciones del código.

Si un nuevo usuario del código `OllinSphere2` agrega nuevas rutinas al código que podrían ser útiles para otros usuarios, podría ser conveniente agregarlas al repositorio del CVS, por lo que se recomienda preguntar a José Manuel Torres ([jose.torres@nucleares.unam.mx](mailto:jose.torres@nucleares.unam.mx)) o a Miguel Alcubierre ([malcubi@nucleares.unam.mx](mailto:malcubi@nucleares.unam.mx)) para tener acceso al repositorio.



## Capítulo 6

---

### Evoluciones numéricas para distintas distribuciones de materia

---

Se han obtenido resultados satisfactorios a partir de las simulaciones numéricas sobre la evolución de un universo dominado ya sea por un campo escalar, real o complejo, con parámetro de autointeracción, masivo que satisface la ecuación de KG. Se obtuvo la formación de objetos compactos tanto para el campo escalar real como para el complejo, en ambos casos el término de autointeracción era distinto de cero, obviando su relevancia dentro de las evoluciones numéricas

Se llevaron a cabo evoluciones numéricas de datos cosmológicos iniciales, que se han comparado con casos ya conocidos (J. Torres [16]), como el de polvo. Tal como se ha mostrado previamente en trabajos similares y como se había anunciado en el resumen de este trabajo de tesis, se ha alcanzado el régimen no lineal de las perturbaciones donde las aproximaciones analíticas no funcionan. En general, uno de los principales resultados que se ha obtenido dentro de los resultados es que, las perturbaciones debidas al campo escalar crecen más lentamente que en el caso de polvo. Más aún al introducir el término de autointeracción es posible evitar el colapso esférico de la perturbación, pasando a un periodo de oscilación antes de ser diluida por la expansión.

A continuación se detallan los resultados obtenidos para cada una de las evoluciones numéricas realizadas para este trabajo. Se dan también, los datos iniciales introducidos en los archivos de parámetros para el código numérico (véase el cap. 5). Las figuras que se muestran más adelante (cap. 7), muestran las distintas evoluciones, dependiendo cada caso, de la densidad central o el contraste de densidad como función del tiempo conforme. En la mayoría de los casos se ha introducido una perturbación, que funciona como una 'semilla' que da lugar a la formación de estructura. Es importante señalar que la cada una de las corridas fue sometida a las pruebas de convergencia para corroborar que las soluciones numéricas son confiables y que no se vieron afectadas por los parámetros utilizados en el código numérico (es decir, el tamaño de la malla, la extensión espacial de la malla, el orden de las derivadas, etc.). De este modo, las simulaciones contienen, no sólo un significado matemático, sino también uno

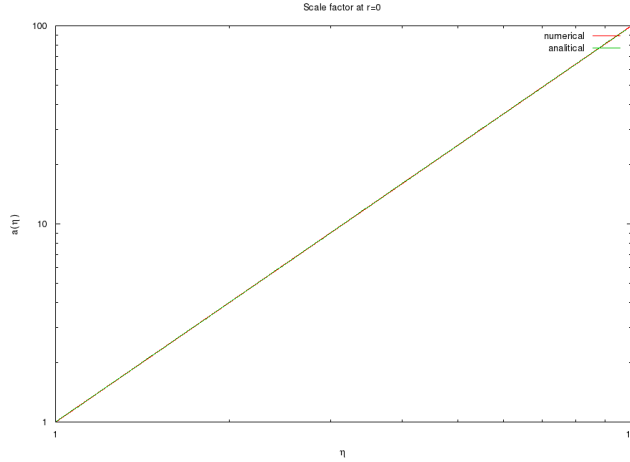


Figure 6.1: Evolución del factor de escala,  $a$ , como función del tiempo conforme,  $\eta$ , para un universo homogéneo e isotrópico dominado por un fluido perfecto sin presión. Como ya se mencionó, la evolución numérica se llevó a cabo con los siguientes parámetros  $\rho_0 = 5 \times 10^{-5}$ . Se muestra que tanto la evolución numérica (en rojo) como la analítica de la ec. 4.42 (en verde) coinciden.

físico. En particular se estuvo al tanto de la evolución del hamiltoniano y de la ecuación de momento, para estarse seguro de que mantengan el se que se satisfagan dichas constricciones.

## 6.1 Valores iniciales para perturbaciones esféricas

### 6.1.1 Evoluciones numéricas para un universo homogéneo

La fig. 6.1 que se muestra contiene la evolución numérica para el caso de un universo homogéneo con  $\rho_0 = 5 \times 10^{-5}$  y  $\delta\rho_* = 0$  para  $\eta_0 = 97.7205$ , así mismo se llevo a cabo la comparación de la evolución del factor de escala obtenido mediante el cálculo numérico contra la solución analítica de un universo de Friedmann, que se encuentra dado por la ec. (4.26). El resultado es preciso como se puede ver en la gráfica, donde el análisis numérico coincide a orden lineal con la evolución numérica y converge de manera consistente con la discretización del método de integración. De modo que la particular importancia de esta gráfica se debe a que funciona como parámetro de confianza para el resto de las evoluciones al utilizar el código OllinSphere2.

### 6.1.2 Fluido perfecto sin presión

Pasando ahora a un universo dominado por un un fluido perfecto sin presión con inhomogeneidades, en este caso la densidad inicial de fondo tiene un valor de

$\bar{\rho}_0 = 2.0 \times 10^{-6}$  con una amplitud de las inhomogeneidades de  $\delta\rho_* = 1.2 \times 10^{-8}$ . La longitud característica de la ec. (4.52) tiene un valor de  $L = 50$ . Los parámetros son especificados de tal manera de que las perturbaciones posean una escala de longitud dentro del radio de Hubble, así como para obtener un contraste de densidad que permita comparar las evoluciones numéricas con los resultados analíticos conseguidos dentro del régimen lineal.

En la fig. 7.1 se muestran los snapshots de la evolución de la función de norma del tensor métrico,  $\Phi_{gauge}$  y  $\Psi_{gauge}$ , a lo largo de la evolución calculada en términos de las funciones  $C_1(\vec{x})$  y  $C_2(\vec{x})$  especificados por los valores iniciales. Como se ve, a lo largo de la evolución los valores tanto para  $\Phi_{gauge}$  y  $\Psi_{gauge}$  coinciden numéricamente con el régimen lineal obtenido a predecido a partir de la teoría analítica. Para tiempo mayores que  $\eta = 400$  los potenciales alcanzan su valor límite dado por  $C_1(\vec{x})$ . Se debe mencionar que en la gráfica, se demuestra de forma satisfactoria la consistencia entre las evoluciones numéricas empleando Relatividad General con los resultados conocidos para pequeñas perturbaciones.

En la fig. 7.2 se grafica para los mismos valores iniciales, la evolución del contraste de densidad,  $\delta\rho_{gauge}/\rho$ , comparada contra el predicho en el régimen lineal. Como puede verse de la figura, el crecimiento del perfil de densidad coincide con la predicción obtenida de la teoría linealizada.

La fig. 7.3 y la fig. 7.4 corresponden a evoluciones numéricas similares a las mencionadas, pero para valores iniciales dados por  $\bar{\rho}_0 = 2.0 \times 10^{-6}$  con una amplitud de las inhomogeneidades de  $\delta\rho_* = 1.2 \times 10^{-7}$  y longitud característica de la ec.4.52 de  $L = 50$ . Estas figuras de las perturbaciones con mayor amplitud confirman que las evoluciones numéricas son consistentes con los resultados obtenidos a partir de pequeñas perturbaciones. El contraste en las inhomogeneidades en un universo dominado por polvo, se espera que crezca indefinidamente a medida que el universo se expande.

La fig. 7.5 corresponde al análisis numérico dentro del régimen no lineal para el valor central de los potenciales gravitacionales como función del tiempo. En esta ocasión se emplearon los siguientes valores iniciales; si bien los valores de fondo son los mismos, la amplitud de la perturbación es un orden de magnitud mayor, con  $\delta\rho_* = 6 \times 10^{-7}$ . A pesar de comportarse de manera similar a las corridas anteriores, surgen diferencias con las predicciones de la teoría lineal a medida que la evolución avanza en el tiempo. En esta gráfica, los potenciales gravitacionales no se aproximan al valor asintótico, sino que más bien alcanzan un punto de retorno donde siguen creciendo. En este caso, a pesar de que  $\Phi_{gauge}$  y  $\Psi_{gauge}$  continúan una evolución cercana, sus valores difieren ligeramente con el paso del tiempo. Este compartamiento distinto se debe a que las cantidades asociadas a la función de norma solamente son definidas en el régimen lineal. Este resultado es utilizado de forma común en las simulaciones de N-cuerpos, se parte con una evolución linealizada hasta un contraste de  $\sim 1.7$ . Como se vió en la sec. 2.4, el valor corresponde al obtenido a partir de modelos top-hat del colapso y corresponde al valor del contraste de energía de la evolución linealizada al tiempo en el que el modelo top-hat colapsa. De modo que la fig. 7.5 muestra la transición entre el régimen lineal y el no-lineal por debajo del valor mencionado, sin embargo la mayor parte de la formación de estructura se

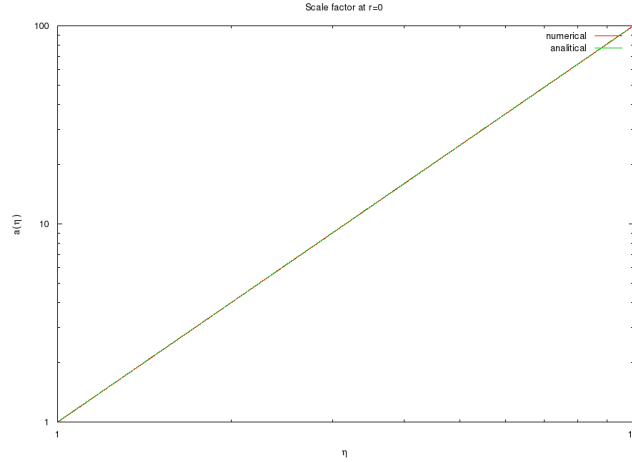


Figure 6.2: El factor de escala,  $a$ , como función del tiempo conforme,  $\eta$ , para un universo homogéneo e isotrópico dominado por un campo escalar real. Para esta corrida se han elegido los valores  $\phi_0 = 10^{-2}$  y  $\phi_* = 0$  con tal de obtener la misma configuración para el factor de escala al tiempo inicial como en la fig. 6.1. También se muestra la expresión analítica para el caso de un fluido perfecto sin presión,  $a \propto \eta^2$ . Ambas coinciden a tiempos tardíos, cuando el campo escalar comienza a oscilar cerca del mínimo de potencial. Debe notarse que el factor de escala del campo escalar muestra pequeñas oscilaciones.

lleva a cabo, de forma rápida, tempranamente en la evolución.

### 6.1.3 Campo escalar real. Caso $\lambda = 0$

Para las gráficas de campo escalar real con  $\lambda = 0$ , se hicieron corridas con  $m = 1.0$  y valores iniciales de  $\bar{\phi} = 10^{-2}$  y con una inhomogeneidad inicial de  $\phi_* = 0$  a  $\eta_0 = 97.7205$ . Se hicieron comparaciones con el caso analítico para el factor de escala de la solución de Friedmann para un universo dominado por un fluido perfecto sin presión,  $a = \eta^2$ , como se muestra en la gráfica 6.2. Es importante mencionar que para este resultado, son observables pequeñas oscilaciones que la solución analítica no presenta y que pudieran funcionar como referencia en observaciones.

Para estudiar de mejor forma el comportamiento de las inhomogeneidades, se hicieron dos simulaciones numéricas para las inhomogeneidades, las cuales, por ser de longitud de onda corta, no se espera que colapsen en agujeros negros al poseer amplitudes pequeñas (a diferencia de las perturbaciones gaussianas, como se verá más abajo). La gráf. 7.6 y la gráf. 7.7 muestran las evoluciones de las perturbaciones invariantes de norma y del contraste de densidad del campo escalar para distintos tiempos de la evolución, para los valores de  $\bar{\phi}_0 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\phi_* = 10^{-5}$  con una longitud de escala de  $L = 5$  y punto inicial de  $\eta_0 = 0$ .



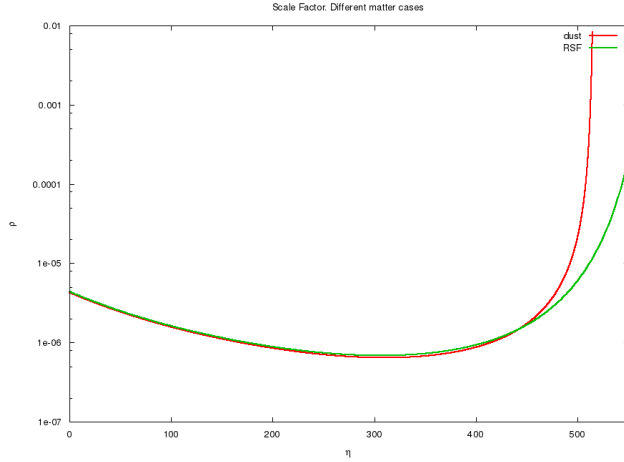


Figure 6.3: Evolución del valor central de la densidad para el caso de fluido perfecto sin presión y el de campo escalar real. En ambos casos el valor central de la densidad se desvía de la evolución homogénea, alcanzando un punto de regreso y alcanzando el colapso gravitacional.

En la fig. 7.6 se ve cómo la inhomogeneidad se dispersa con la evolución numérica en la función de norma.

Mientras que para la fig. 7.8 y la fig. 7.9 se muestra también las perturbaciones invariantes de norma y el contraste de densidad a distintos tiempos para un campo escalar con  $\bar{\phi}_0 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\phi_* = 10^{-5}$  pero con una amplitud de la inhomogeneidad de  $L = 150$ . En ambos casos se está llevando a cabo la comparación contra el valor linealizado predicho dentro del régimen lineal. Como se puede ver, en ambos casos, el crecimiento del perfil de densidad coincide con la predicción.

Para terminar con esta parte, se muestra la gráfica de la comparación entre los modelos de fondo, un fluido perfecto sin presión y el campo escalar real. Se emplearon los siguientes datos iniciales; para el polvo,  $\bar{\rho}_0 = 2.0 \times 10^{-6}$ ,  $\delta\rho_* = 2.38 \times 10^{-6}$ , por otro lado para el campo escalar,  $\bar{\phi}_0 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\phi_* = 9.611 \times 10^{-4}$ . En ambos casos  $L = 150$ . Debido a que se está comenzando en el régimen no lineal, los datos iniciales asociados al campo real, no deben de arrojar una distribución de densidad igual a la del caso de polvo, pero aún así para los valores dados, las configuraciones, además de tomar valores similares, son lo suficientemente buenas para la simulación.

## 6.2 Valores iniciales para perturbaciones gaussianas

### 6.2.1 Campo escalar real

Para el caso de un campo escalar real, se utilizaron los siguientes datos iniciales; una amplitud de  $\bar{\phi}_0 = 2.0 \times 10^{-3}$  y un número de onda central nulo,  $k_0 = 0$ . En esta parte las simulaciones se realizaron para un mismo grosor de la perturbación gaussiana de  $L = 10.0$ , un valor de fondo del campo escalar de  $\delta\bar{\phi}_0 = 1.0 \times 10^{-2}$  y una masa inicial de  $m = 1.0$ . El origen de coordenadas de la amplitud gaussiana fue de  $r_0 = 0.0$ . El parámetro de autointeracción se encuentra dentro del rango  $\lambda = [1.0 \times 10^{-3}, 2.0 \times 10^{-3}]$ , de la ec. (4.60) para el tensor de energía momento vemos que la razón entre la masa y el parámetro de autointeracción se puede escribir de la forma  $\lambda/m^2$ , por lo que el rango de selección de las amplitudes iniciales se encontró al realizar diversas simulaciones a partir de un conjunto de datos iniciales basados en este cociente, además también se consideraron en los parámetros de trabajos similares (Seidel y Suan [11] y [12]) sobre la formación de objetos compactos.

### 6.2.2 Campo escalar complejo

Por otro lado, para el caso de un campo escalar complejo, se utilizaron los siguientes datos iniciales; una perturbación gaussiana con una amplitud de  $\delta\phi_0 = 2.0 \times 10^{-4}$  y un número de onda central nulo,  $k_0 = 0$ , con grosor de  $L = 10.0$ . El valor de fondo del campo escalar es de  $\phi_0 = 1.0 \times 10^{-3}$ . Cada uno de los valores para los parámetros anteriores corresponde tanto para la parte real como para la imaginaria, así como para el fondo como para la perturbación inicial. La masa inicial de  $m = 1.0$ . El centro de la amplitud gaussiana fue de  $r_0 = 0.0$ . El parámetro de autointeracción se encuentra dentro del rango  $\lambda = [0.5 \times 10^{-4}, 1.5 \times 10^{-4}]$ , recordando nuevamente la ecuación 4.60 para el tensor de energía momento y la razón entre la masa y el parámetro de autointeracción. Es notable la reducción en un orden de magnitud tanto de la perturbación del fondo del campo escalar, como de la amplitud de la perturbación gaussiana para el caso complejo. Este se debe a que se está introduciendo la parte compleja tanto de la perturbación como del campo, lo que introduce un nuevo conjunto de iteraciones en el código, lo cual lo hace más sensible.

### 6.2.3 Discusiones

Los resultados obtenidos muestran que el campo escalar masivo, puede evitar ser diluido por la expansión del universo durante la evolución numérica, (véanse las figuras 7.10 y 7.14) e incluso oponerse al colapso. En contraste con el polvo que, una vez que entra al régimen no lineal comienza a crecer sin que nada lo pueda detener formando un agujero negro (debido a la modelación con simetría

esférica), como puede apreciarse en la fig. 7.11. Más aún, en el caso de campo escalar, real o complejo, con parámetro de autointeracción, se encontró un rango de datos iniciales donde la configuración de densidad oscila durante un periodo considerable de tiempo (véase fig. 7.15).

Es decir, después de que la configuración inicial de densidad se ve disminuida, ésta alcanza el punto de retorno para disminuirse y alcanzar un punto de retorno de nueva cuenta. El comportamiento se aprecia mejor en las gráficas de la densidad  $\rho$  en función de la coordenada radial (fig. 7.15), sobretodo para el caso complejo donde las oscilaciones son muy marcadas, a diferencia del real, donde el conteo de oscilaciones es reducido. El campo realiza esta peculiaridad justo cuando los términos inhomogéneos son relevantes, hasta que se disipa en la expansión. Lo que demuestra que el parámetro de autointeracción es relevante en la ecuación de energía momento para la formación de estructura. La oscilación encontrada en la simulación de la densidad, es similar a la de una estrella de bosones, donde el perfil de densidad crece y disminuye, aunque los pulsos no son idénticos entre sí, los hay con una magnitud considerada.

La Fig. 6.4 muestra al factor de escala  $a$  como función del tiempo conforme  $\eta$ , su comparación con el caso de polvo es similar para tiempos más avanzados, pero no idéntica. Las oscilaciones apenas perceptibles en el campo escalar real una vez que se encuentra oscilando alrededor del mínimo podrían ayudar a fijar propiedades de los parámetros cosmológicos observacionales. De modo que sirva como puente entre la cosmología teórica y la observacional.

Por otro lado, para el caso de campo escalar complejo, tal como en su contraparte real, se obtuvo la formación de estructura, que se opone a crecer indefinidamente. Partiendo de los parámetros iniciales del campo escalar real, se encontró el rango de valores que puede tomar al término de autointeracción, donde se lleva a cabo la formación de estructura. Incluso ocurren el mismo número de oscilaciones en el perfil de densidad que en el caso real. Sin embargo, las oscilaciones suceden con mucha menor frecuencia en un rango de tiempo de simulación mucho mayor. De la fig. 7.14 pueden contarse hasta cuatro oscilaciones, donde la última tarda mayor tiempo en disiparse. Esta característica del caso complejo se observa de igual forma para el conjunto de condiciones iniciales donde sólo se tiene un pulso gaussiano sumergido dentro del campo complejo como en la fig. 7.18, no se tiene de forma puntual la formación de estructura como en los casos anteriores que se han mostrado. La densidad comienza a disminuir mientras oscila pero el tiempo de simulación para que se disipe la 'semilla' inicial en la densidad es muy grande.

Sin embargo, es importante mencionar que los casos límite tanto en la masa como en el término de autointeracción no se encuentran completamente definidos. Por supuesto que bajo ninguna circunstancia debería recuperarse el caso real, tomando cuenta que no se puede perder de vista el término complejo en la ecuación del tensor de energía momento, ni que los valores para los parámetros complejos se encuentran completamente definidos en trabajos similares. Tanto para valores chicos como grandes de  $\lambda$ , con respecto al valor de los parámetros donde hay formación de estructura, se puede ob-

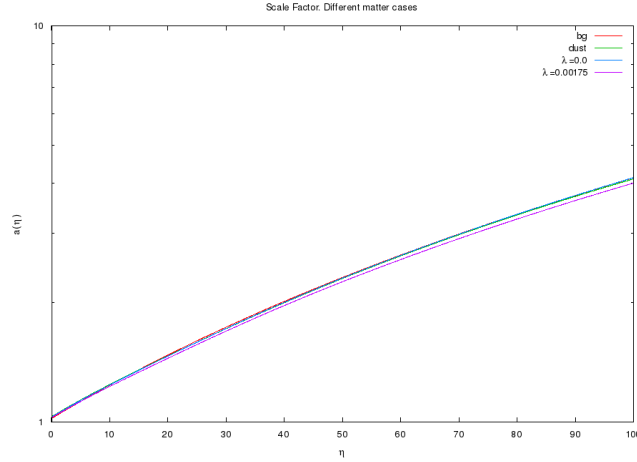


Figure 6.4: El factor de escala,  $a$ , como función del tiempo,  $\times$ , para el caso de una perturbación gaussiana. Se están graficando los siguientes casos: el fondo, polvo, campo escalar real con  $\lambda = 0$  y campo escalar real con  $\lambda \neq 0$ . Nótese como en el caso de campo escalar real con término de autointeracción, la aceleración del universo sucede de forma más lenta en relación con los demás casos (que siguen un comportamiento idéntico como ya fue mostrado anteriormente).

servar que para tiempos muy grandes de la simulación la densidad, a pesar de seguir tomando valores considerables, cuesta mayor trabajo disiparla más rápidamente. Además, las oscilaciones resultaron ser más sensibles a la variación de la masa. Teniendo en cuenta el cociente ya conocido  $\lambda/m^2$ , para un valor fijo de  $\lambda = 1.005 \times 10^{-4}$  la fig. 7.16 la masa se encuentra dentro del rango  $m = [0.5, 1.05]$ .

Al hacer una comparación entre el caso del polvo, campo escalar real y complejo, fig. 7.17, se ve más claramente que la perturbación inicial toma mucho mayor tiempo de simulación en disiparse para el caso complejo, a pesar de que la perturbación inicial del fondo y de la gaussiana son de valores más chicos. Una segunda característica del caso complejo en contra parte del caso de polvo y el real es la concavidad, es decir, a pesar de que en un principio la materia pareciera que comienza a colapsarse junto con el polvo, la pendiente cambia para dibujar la primera cresta de las oscilaciones, pero pareciera que tiene signo contrario al del caso real. Aún si el caso complejo domina la densidad, curiosamente, se obtuvo un comportamiento similar al real e incluso podrá envolverlo si se encontrara desplazado a la derecha.

Se ha trabajado con el código numérico relativista OllinSphere2 con distintos escenarios cosmológicos, para seguir la evolución de distintas distribuciones de materia esféricamente simétricas. Particularmente, el esfuerzo se concentró en el caso de campo escalar, ya sea real o complejo, con o sin término de autointer-

acción, que domina un Universo en expansión, y cuya evolución se sigue hasta el régimen no lineal. Se ha encontrado que, para inhomogeneidades pequeñas, las perturbaciones forman estructura justo cuando los términos lineales no son despreciables, evitando ser diluidas por la expansión del universo al llegar a un 'punto de retorno'. Cuando se toma en cuenta el término de autointeracción, se da la formación de un objeto que comienza a oscilar por un breve periodo de tiempo, dando importancia así al este término dentro de un rango de valores específico.

El caso de un fluido sin presión tiene solución analítica, por lo que es bien conocida su descripción de un universo homogéneo e isotrópico, de modo que he llevado a cabo su evolución numérica. A pesar de que, para el caso de campo escalar no hay resultados analíticos para comparar, sin embargo, para tiempos muy grandes, a diferencia del caso de polvo, el campo de materia comienza a oscilar. Si bien lo hace con una amplitud muy pequeña y es disipada por la expansión, estas oscilaciones podrían funcionar como indicadores en los parámetros cosmológicos observables. Las perturbaciones en un campo escalar con término de autointeracción poseen un límite de validez, donde  $\lambda$  toma valores dentro de un rango en el que se reducen al caso de polvo o se disipan en la expansión. Más aún, para valores iniciales con un potencial cuadrático ( $\lambda = 0$ ), la perturbación crece más rápido después de alcanzar el régimen no lineal, a diferencia del potencial cuártico, que permanece por más tiempo. El crecimiento ocurre de manera más lenta e incluso llega a 'formar' un objeto compacto por un brevísimo lapso de tiempo antes de ser diluida por la expansión.



## Capítulo 7

---

### Gráficas

---

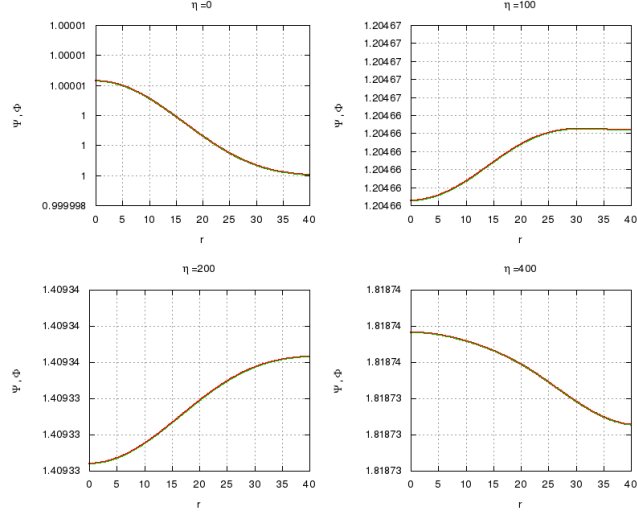


Figure 7.1: Instantáneas de las perturbaciones invariantes de norma en el tensor métrico,  $\Psi_{gauge}$  y  $\Phi_{gauge}$ , como función de la coordenada  $r$ . En este caso se eligieron los siguientes valores iniciales para la ec. 4.51 y la ec. 4.52, donde  $\bar{\rho} = 2.0 \times 10^{-6}$ ,  $\delta\rho_* = 1.2 \times 10^{-8}$  con  $L = 50$ . Se quiere mostrar que la solución obtenida analíticamente coincide con la evolución numérica de  $\Psi_{gauge}$  y  $\Phi_{gauge}$ .

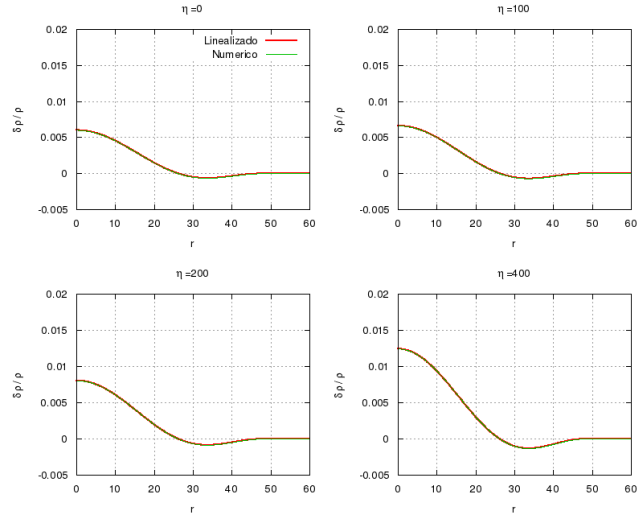


Figure 7.2: Instantáneas del contraste de densidad  $\delta\rho/\bar{\rho}$  para los mismos valores iniciales que en la fig. 7.1. Se muestran los resultados de la evolución numérica junto con la solución analítica.



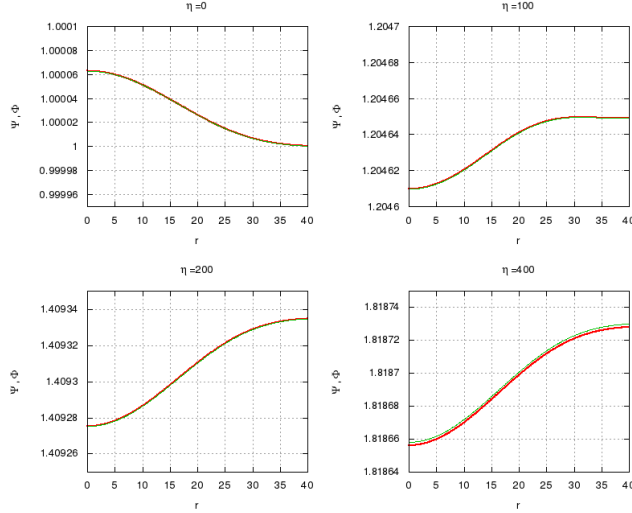


Figure 7.3: Similar a la fig 7.1, instantáneas de las perturbaciones invariantes de norma en el tensor métrico,  $\Psi_{gauge}$  y  $\Phi_{gauge}$ , como función de la coordenada  $r$ . En este caso se eligieron los siguientes valores iniciales;  $\bar{\rho} = 2.0 \times 10^{-6}$ ,  $\delta\rho_* = 1.2 \times 10^{-7}$  con  $L = 50$ .

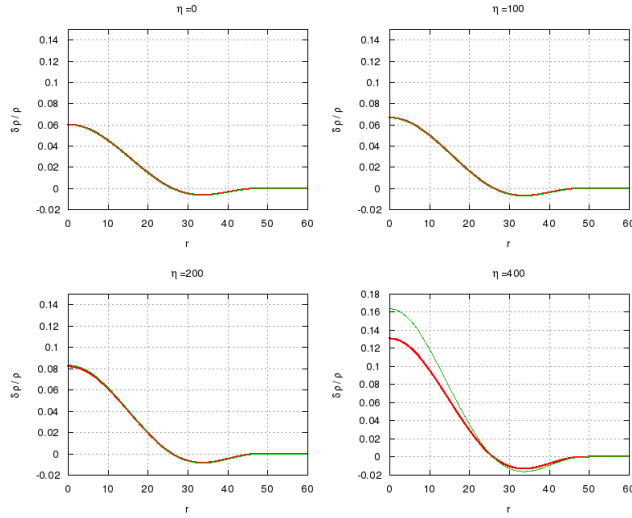


Figure 7.4: Similar a la fig. 7.2, instantáneas del contraste de densidad  $\delta\rho/\bar{\rho}$  para los mismos valores iniciales que en la fig. 7.3. Se muestran los resultados de la evolución numérica (en verde) junto con la solución analítica (en rojo). Para tiempos mayores a  $\eta \sim 200$ , los efectos no-lineales se vuelven relevantes.

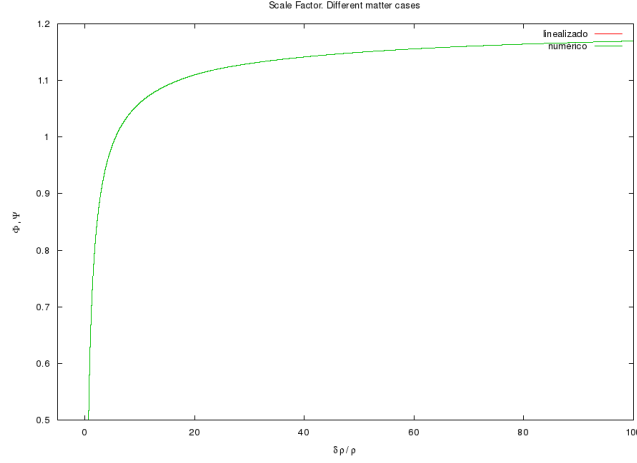


Figure 7.5: Valor central de los potenciales Newtonianos como función del contraste de densidad central. También se grafica la expresión de la teoría linealizada para observar el comportamiento antes del valor  $\sim 1.7$  considerado en las simulaciones de N-cuerpos con tal de hacer la transición al régimen no-lineal.

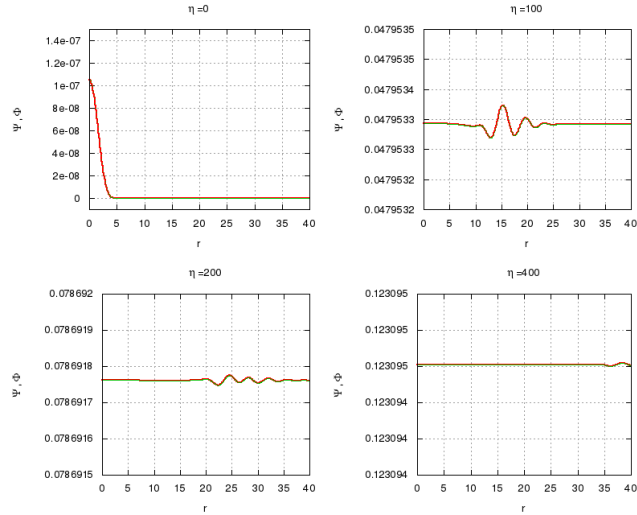


Figure 7.6: Instantáneas para las perturbaciones invariantes de norma en el tensor métrico,  $\Psi_{gauge}$  y  $\Psi_{gauge}$ , cuando se considera un campo escalar como materia en un universo en expansión. Los valores iniciales están dados por  $\bar{\phi}_0 = 2.0 \times 10^{-3}$ ,  $\delta\phi_* = 10^{-5}$  y  $L = 5$ . Para este caso, la inhomogeneidad está compuesta de modos de onda corta que se dispersan.

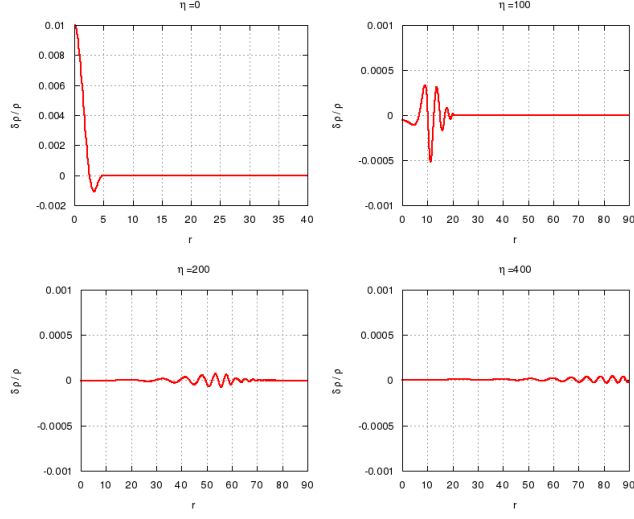


Figure 7.7: Instantáneas para el contraste de densidad,  $\delta\rho_{gauge}/\bar{\rho}$  para las mismas condiciones iniciales de la fig. 7.6.

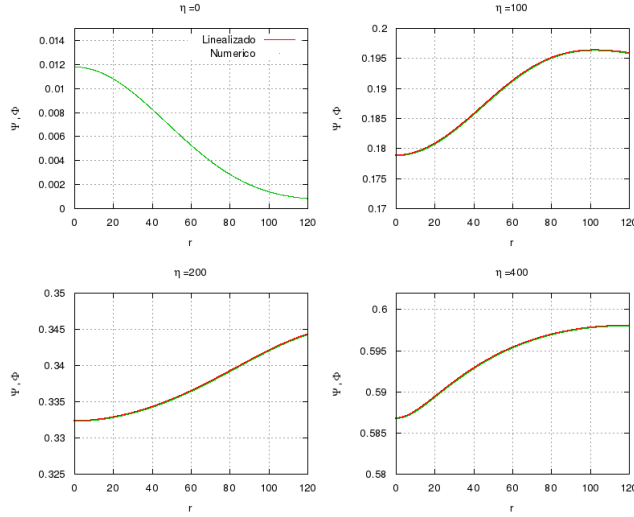


Figure 7.8: Instantáneas para las perturbaciones invariantes de norma en el tensor métrico,  $\Psi_{gauge}$  y  $\Phi_{gauge}$ , cuando se considera un campo escalar como materia en un universo en expansión. Los valores iniciales están dados por  $\bar{\phi}_0 = 2.0 \times 10^{-3}$ ,  $\delta\phi_* = 10^{-5}$  y  $L = 150$ . Se comparan los resultados numérico y la solución analítica de la teoría linealizada.

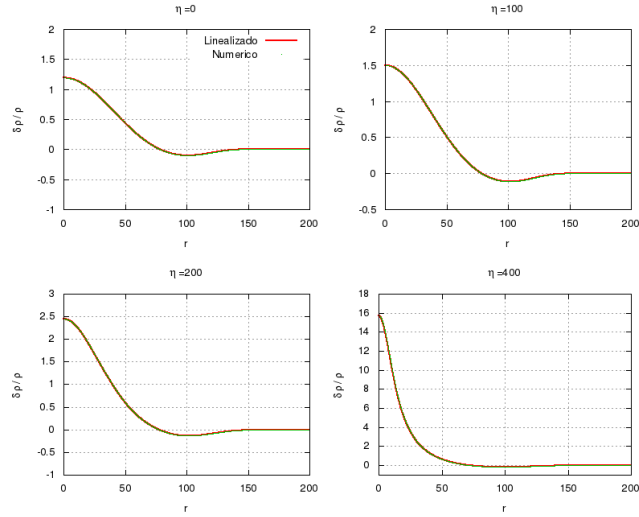


Figure 7.9: Instantáneas para el contraste de densidad,  $\delta\rho_{gauge}/\bar{\rho}_{gauge}$  para las mismas condiciones iniciales de la fig. 7.8.

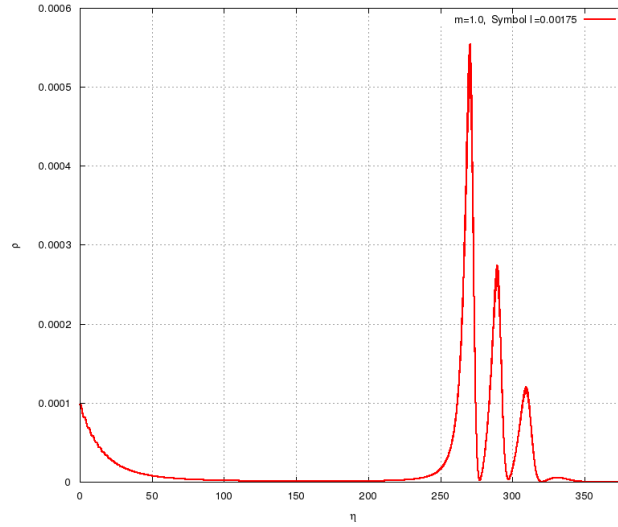


Figure 7.10: La densidad,  $\rho$ , como función del tiempo conforme,  $\eta$ , para un Universo en expansión. Se hace incapié en que el la relación  $\frac{\lambda}{m^2}$  no es despreciable en la ecuación para el potencial del campo escalar, como muestra la figura, la formación de estructura es posible después de entrar en el régimen no lineal. La materia se opone al colapso, formando un objeto compacto por un breve periodo de tiempo, como se mencionó que sucede con el polvo, y llega a oscilar durante un tiempo hasta que se disipa en la expansión del Universo.

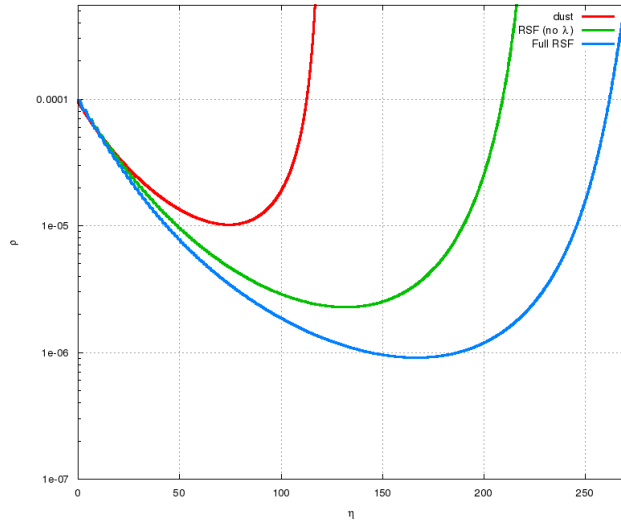


Figure 7.11: Comparación de la evolución del perfil de densidad para el caso de polvo (rojo) y campo escalar real con (verde) y sin término de autointeracción (azul). La simulación se ha realizado de tal manera que los valores iniciales coincidan, nótese que ambas configuraciones se ven disminuidas debido a la expansión del Universo. Los tres perfiles alcanzan el punto de retorno, pero el polvo lo alcanza más temprano para luego colapsarse en un agujero negro. Es el caso de campo escalar real con término de autointeracción el que logra mantenerse más tiempo durante la evolución (véase fig. 7.10), a diferencia del campo escalar real sin término de autointeracción, que sufre el mismo destino que el polvo.

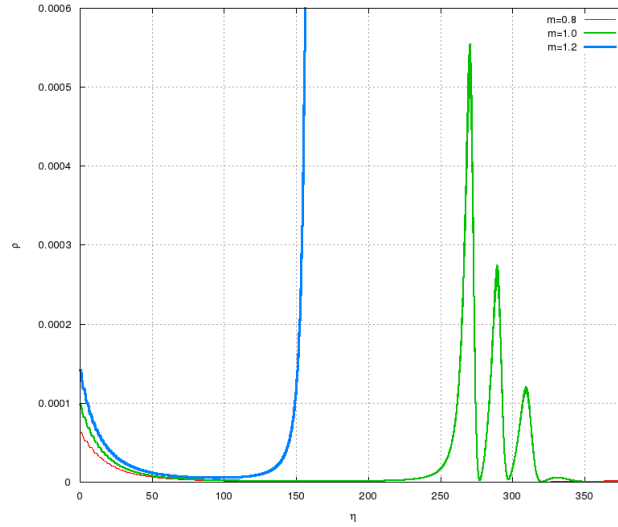


Figure 7.12: La densidad,  $\rho$ , como función del tiempo conforme,  $\eta$ , para un Universo en expansión. En esta figura se muestran evoluciones para distintas masas,  $m$ , pero mismo parámetro de autointeracción,  $\lambda$ , donde  $\phi_* = 0$  en  $\eta_0 = 1$  con  $K_0 = 6$ . Se hace incapié en que el las relación  $\frac{\lambda}{m^2}$  no es despreciable en la ecuación para el potencial del campo escalar, como se ve de la imagen se obtienen distintos escenarios: en azul la materia se colapsa hacia un agujero negro, en rojo el caso del oscilatón y en rojo, los términos inhomogéneos no resultan lo suficiente mente importantes para formar estructura y se disipa con el paso de tiempo.

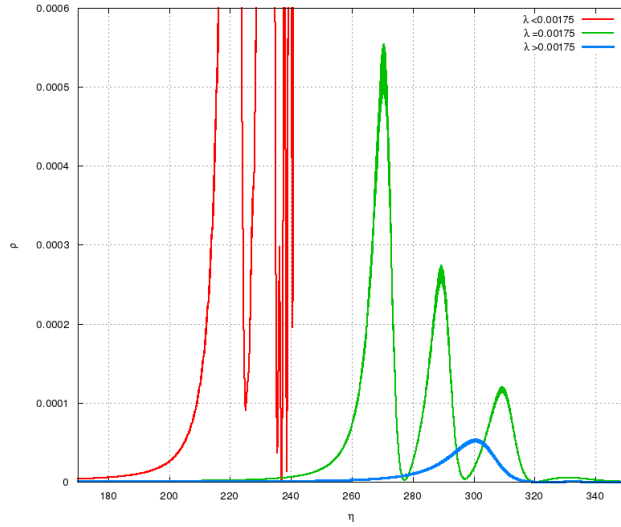


Figure 7.13: La densidad,  $\rho$ , como función del tiempo conforme,  $\eta$ , para un Universo en expansión. En esta figura se muestran evoluciones para distintos valores de lambda,  $\lambda$ , pero para un mismo valor de la masa,  $m$ , con valores iniciales de  $\phi_* = 0$  en  $\eta_0 \sim 1$  con  $K_0 = 6$ . Los distintos escenarios que se observan en la figura se pueden describir de la siguiente manera: en azul, para valores muy grandes de  $\lambda = 0.00175$  los términos inhomogéneos no resultan lo suficiente mente importantes para formar estructura, por lo que se disipan con el paso de tiempo. En verde, como ya se mencionó se tiene el caso de formación de estructura. Mientras que en rojo se obtienen el caso límite para estas condiciones iniciales de campo escalar. Para valores de lambda muy chicos, el término de autointeracción no afecta al campo, por lo que comienza a recuperarse el caso de polvo, la densidad comienza a crecer rápidamente.

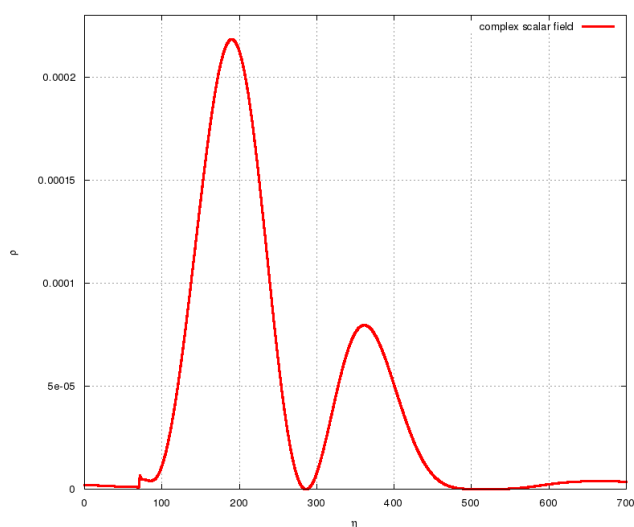


Figure 7.14: La densidad,  $\rho$ , como función del tiempo conforme,  $\eta$ , en un Universo en expansión. En esta figura se muestra el caso de un campo escalar complejo, de nueva cuenta se obtuvo la formación de estructura, pero a diferencia del caso de campo real, su disipación lleva a un mayor tiempo, y es más dominante durante la evolución de las soluciones de las ecuaciones. de nueva cuenta, la relación  $\lambda/m^2$  no es despreciable en la ecuación para el potencial del campo escalar.



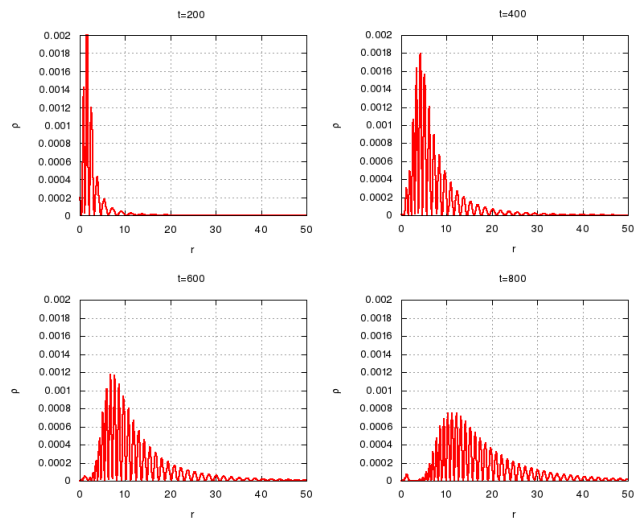


Figure 7.15: La densidad,  $\rho$ , como función de la coordenada radial,  $r$  para distintos tiempos, en un Universo en expansión. Aquí se aprecian con mayor detalle las oscilaciones en el campo escalar, que ocurren con mucho mayor frecuencia que en el caso real.

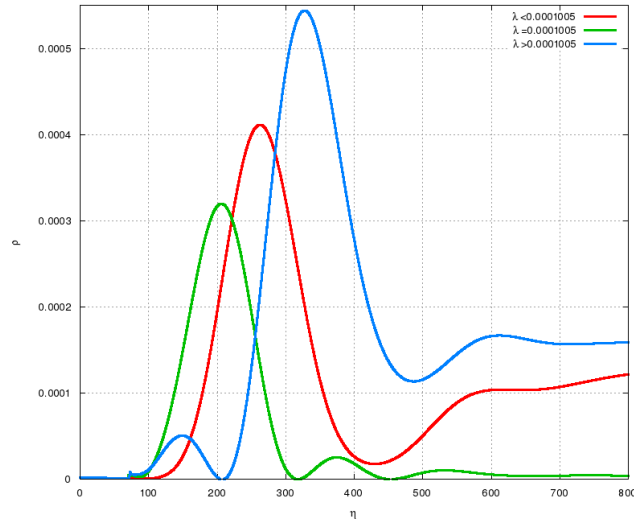


Figure 7.16: La densidad,  $\rho$ , como función del tiempo conforme,  $\eta$ , para un Universo en expansión. En esta figura se muestran evoluciones para distintos valores del término de autointeracción,  $\lambda$  pero con un mismo valor de masa inicial,  $m = 1.0$ , con  $\rho_* = 0$  en  $\eta_0 = 1$  y  $K_0 = 6$ . En verde, se muestra el perfil de densidad tomado a partir de las condiciones iniciales determinadas por el caso de campo escalar real. Las gráficas en color rojo y azul corresponden a las mismas condiciones iniciales que en el caso de la gráfica en verde, pero con una  $\lambda$  de menor y mayor valor respectivamente. Para ambos casos ya no es posible lograr que la densidad oscile de forma más marcada, y lleva aún más tiempo en disiparse.

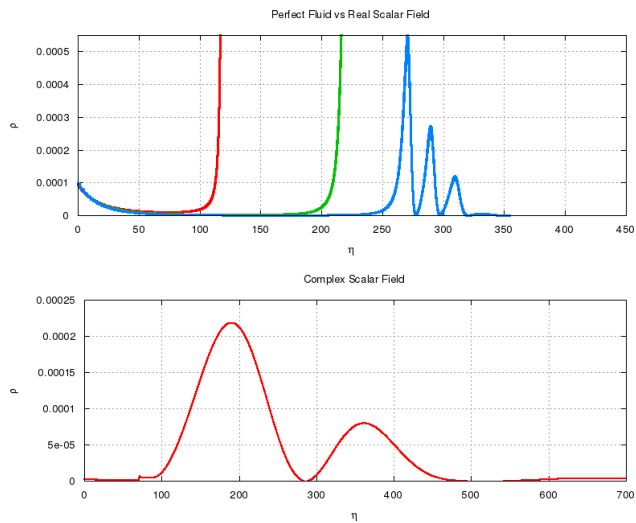


Figure 7.17: La densidad,  $\rho$ , como función del tiempo conforme,  $\eta$ , para un Universo en expansión. En esta figura se compara el caso de polvo contra los de campo escalar, real y complejo. La perturbación inicial para el caso complejo es menor en la perturbación como en el fondo.

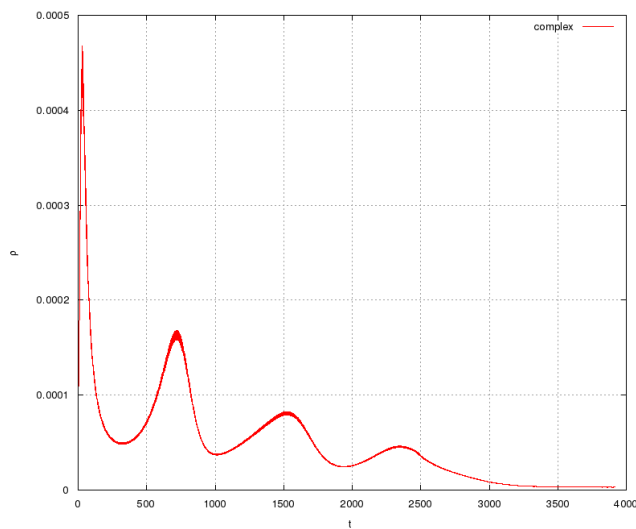


Figure 7.18: Oscilaciones encontradas al perturbar un campo escalar complejo. Se muestra la densidad  $\rho$  como función del tiempo conforme  $\eta$ . Después de haber entrado en el régimen no lineal, las inhomogeneidades se vuelven importantes. La oscilación después de comenzar tarda mucho mayor tiempo en disiparse que en el caso de campo escalar real, como puede verse en la escala de tiempo.



## Capítulo 8

---

### Referencias

---

- 1 M. Alcubierre, Introduction to 3 + 1 Numerical Relativity (Oxford Univ. Press, New York, 2008).
- 2 M. Alcubierre et al., Phys. Rev. D81, 124018 (2010).
- 3 M. Alcubierre and M. D. Mendez, Gen.Rel.Grav. 43, 2769 (2011).
- 4 T. W. Baumgarte and S. L. Shapiro, Phys. Rev. D59, 024007 (1998).
- 5 T. Matos and L. A. Urena-Lopez, Phys. Rev. D63, 063506 (2001).
- 6 R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, in Gravitation:An Introduction to Current Research, edited by L. Witten (John Wiley, New York, 1962), pp. 227265.
- 7 M. Alcubierre et al., Class. Quant. Grav. 20, 2883 (2003).
- 8 M. Longair, Galaxy Formation (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008).
- 9 H. Mo, F. Van den Bosch, S. White, Galaxy Formation and Evolution (Cambridge University Press, 2010)
- 10 V. Mukhanov, Physical Foundations of Cosmology (Cambridge University Press, 2005).
- 11 E. Seidel, W. Suan, Phys. Rev. D 42, 384
- 12 E. Seidel, W. Suan, /arXiv:gr-qc/9712064
- 13 A. Liddle and D. Lyth, Cosmological Inflation and Large-Scale Structure (Cambridge Univ. Press, 2000).
- 14 M. Alcubierre, Numerical Studies of  $\phi^2$  oscilatons, IP Address: 132.248.29.220
- 15 J. Binney and S. Tremaine, Galactic dynamics (Princeton Univ. Press, 2ed., 1994).

- 16 J. Torres, M. Alcubierre et al., First steps towards nonlinear structure formation in full general relativity.
- 17 C. Bona, J. Massó, E. Seidel, and J. Stela, Phys.Rev.Lett. 75, 600 (1995).
- 18 M. Dine y W. Fischler, Phys. Lett, B120, 137 (1983).
- 19 T. Matos and L. A. Urena-Lopez, Phys.Rev. D63,063506 (2001).
- 20 D. J. Marsh and P. G. Ferreira, Phys.Rev. D82, 103528 (2010).
- 21 Jae-Weon Lee and In-guy, Koh arXiv:hep-ph/9507385, (1995)
- 22 Misner, Thorne and Wheeler, Gravitation, sec.21.4-sec.21.7., (1962).
- 23 M. Shibata and T. Nakamura, Phys. Rev D52, 5428 (1995)
- 24 T. W. Baumgarte and S. Shapiro, Phys. Rev D59, 024007 (1998).