



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INVESTIGACIÓN ACERCA DE LA NATURALEZA FÍSICA
DE LA ONDA DE DE BROGLIE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
FÍSICO

P R E S E N T A

ROSALÍO ALEJANDRO REYES REYES

ASESORA

DRA. ANA MARIA CETTO KRAMIS

CIUDAD UNIVERSITARIA, 2015



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Índice general	II
Introducción	IV
1. La mecánica ondulatoria	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Génesis de la teoría de de Broglie	3
1.2.1. La onda fase	4
1.2.2. ¿Está la dinámica de la partícula contenida en la onda ψ ?	6
1.2.3. La partícula cargada en un campo eléctrico	7
1.2.4. La estabilidad del átomo de Bohr	8
1.2.5. La difracción de partículas	9
1.2.6. Acerca de la cuantización	9
1.3. Antecedentes de la nueva mecánica	10
1.4. La onda piloto	12
1.4.1. La partícula en un campo constante	13
1.4.2. La partícula en un campo variable	15
1.4.3. La nueva mecánica desde el formalismo de Lagrange	15
1.4.4. Sistema de partículas	16
1.4.5. Significado de la onda continua Ψ	17
1.5. La mecánica ondulatoria después de 1930	19
1.5.1. Teoría relativista	21
1.5.2. Nueva interpretación de la función de onda	22
1.5.3. El sistema de partículas	23
Bibliografía	24
2. Las gotas caminantes	26
2.1. Inicios	26
2.2. Reflexión por una pared	29
2.2.1. Posible explicación al comportamiento observado	30
2.3. Órbitas cuantizadas	31
2.4. Efecto túnel en gotas caminantes	33
2.5. La difracción por una y dos rendijas	36
2.5.1. El modelo riguroso de las gotas caminantes	38
2.5.2. Notable analogía con la mecánica cuántica	39

2.6. Interacción de dos gotas	42
2.6.1. Explicación por medio del modelo BA	42
2.7. El corral circular	43
2.8. Las gotas caminantes y la teoría de de Broglie	44
Bibliografía	46
3. Interpretación realista de la teoría de de Broglie	48
3.1. La estocasticidad en la mecánica cuántica	49
3.2. La electrodinámica estocástica lineal	49
3.2.1. La ley de Planck	50
3.2.2. El fenómeno periódico interno	52
3.2.3. La onda fase	52
3.3. Equivalencia del principio de Maupertuis y el principio de Fermat	54
3.4. La teoría de la doble solución	55
3.4.1. La ecuación de Schrödinger	56
3.5. La difracción de electrones	57
3.6. El pozo infinito y el átomo de Bohr	58
Bibliografía	61
Resumen y conclusiones	63
A. La mecánica de una partícula	65
A.1. Las ecuaciones de Lagrange	65
A.2. Las ecuaciones canónicas	66
A.3. Mecánica Relativista	67
A.3.1. Partícula libre	67
A.3.2. Partícula en un campo electromagnético	68
A.4. Algunas relaciones que satisface la acción	69
A.4.1. Relación entre el momento y la acción	69
A.4.2. La acción y la función Hamiltoniana	69
A.5. La ecuación de Jacobi	70
A.5.1. Como encontrar las ecuaciones de movimiento a partir de la ecuación de Jacobi	70

Introducción

Dos conceptos saturan la física, partícula y onda. La partícula se concibe como un ente que al viajar por el espacio deja una traza muy bien definida, su trayectoria. La trayectoria de la partícula puede representarse en el espacio de tres dimensiones como una curva continua — en el sentido más simple — que con suerte se puede estudiar con ayuda del cálculo. Por su parte, la onda se concibe como la propagación de una perturbación en un medio —bien puede ser el vacío—, es decir, viaja expandiéndose hacia todas partes. Así, el desplazamiento de una partícula no es compatible con la propagación de una onda. Mientras la primera está bien definida por un punto en el espacio, la segunda no está localizada. En general la partícula está asociada a «cosas» que tienen la propiedad llamada masa y que poseen cierto volumen, a las que podemos llamar materia. Por el contrario, lo que se propaga en forma de onda es la energía. Por ejemplo, en una cuerda vibrante lo que viaja es la energía; aunque la cuerda se ve oscilar de arriba abajo, ninguna porción suya cambia su posición horizontal —la cuerda no se recorre sobre sí misma—. Ya que sólo se conocen cosas que tienen masa y cosas que no (agua, aire, tierra, luz, etc) podríamos decir que dos tipos de movimientos se ejecutan en la naturaleza, el de partícula y el de onda.

Con el surgimiento de la mecánica cuántica surge un nuevo concepto, onda-partícula. Este término se usa para caracterizar a cosas que tienen la capacidad de comportarse algunas veces como partícula, y otras como onda. Los distintos tipos de movimiento siguen siendo excluyentes, pues se presentan de manera separada. No podemos decir entonces que es un nuevo tipo de movimiento, a esto mejor llamaremos *el comportamiento ondulatorio de la materia o comportamiento dual*. Por ejemplo, cuando perturbamos el movimiento libre de una partícula masiva, ésta puede reaccionar como si fuera un fenómeno extendido, pero al observarla “se colapsa” en un punto, según la interpretación usual; que es lo que se observa experimentalmente. Si lo que se perturba es un conjunto de partículas (un haz), cada una de ellas puede reaccionar como si fuera una onda. Sin embargo, al observarlas vemos un conjunto de puntos bien definidos, que se distribuyen como si una onda determinara sus posiciones. Según la interpretación usual de la teoría, el comportamiento ondulatorio de la materia es intrínseco a ésta, e íntimamente relacionado con su masa. En las partículas materiales muy masivas (con masa varios cientos de veces la de un átomo, por ejemplo) su capacidad de reaccionar como onda disminuye, razón por la cual la concepción de la materia como partícula puntual es suficiente para describirla. Esta interpretación de los resultados llevó a los fundadores de la mecánica cuántica a fuertes debates que jamás concluyeron, y hoy siguen en pequeñas escalas. El enfriamiento del tema se debe al éxito de la teoría al momento de predecir y explicar el proceder de la materia. *La dualidad* no es única de las partículas materiales. La luz, considerada energía y descrita anteriormente como onda, muestra comportamientos fácilmente explicable en

términos de partículas sin masa. Aunque, es preciso mencionar, su comportamiento siempre ha sido tema de debate. Newton por ejemplo, creía que la luz debía desplazarse como partícula, ya que su naturaleza era corpuscular. Sin embargo, en la misma época, Huygens desarrollo de manera exitosa la teoría ondulatoria de la luz. El tiempo dio la razón a este último, y Maxwell mostró de manera distinguible que la luz era un tipo de onda de las que él había estudiado, las ondas electromagnéticas. Si bien es cierto que el comportamiento ondulatorio de la luz se mantiene — las ideas de Newton fueron insostenibles, pues precedían resultados erróneos— y puede explicar muchos resultados, existen fenómenos, como el efecto fotoeléctrico, que admiten una explicación en los términos corpusculares.

El comportamiento corpuscular de la luz proviene de un resultado importantísimo de la teoría de la relatividad, en conjunto con las nuevas ideas de cuantización propuestas por Planck. En 1905, Einstein concibe la luz formada por corpúsculos de energía (cuantos), múltiplos enteros de cierta cantidad fundamental. Como resultado, logra escribir el momento de cada cuanto en términos de la onda electromagnética que describe al haz de luz. En un golpe de genialidad, de Broglie (1924) propone extender estas ideas al caso de partículas materiales; sorprendiendo a todos, predice la difracción de partículas, observada anteriormente sólo en fenómenos ondulatorios como la luz.

Dentro de la teoría clásica siempre se ha relacionado la masa y la energía, pues se asocia a la materia cierta cantidad de energía en virtud de su movimiento (*energía cinética*) y en virtud de su posición dentro de un campo de fuerzas que le afecte (*energía potencial*). Einstein, resultado de su gran genialidad, fue más allá, y mostró que la masa era equivalente a la energía; estableciendo este resultado por medio de argumentos simples y compatibles con las observaciones experimentales, por lo mismo, sólidos. Es natural pensar, en línea con el primer párrafo, que el movimiento ondulatorio de alguna manera es equivalente al movimiento de partícula. Albergado bajo estas ideas, de Broglie propone asociar a toda partícula una onda, cuya naturaleza no pudo determinar, que guíe su movimiento. La mala interpretación de esto llevó al concepto de dualidad asociado a la materia. Pues no es lo mismo decir que la materia está guiada por una onda, que decir que la materia tanto es onda como es partícula. El objetivo principal de este trabajo es buscar la naturaleza física de la onda de de Broglie, y encontrar una explicación satisfactoria del comportamiento dual que deje claro qué sucede cuando una partícula microscópica se desplace. Como se verá, diferenciar los dos tipos de movimiento, según el primer párrafo, es consistente aún con la mecánica cuántica.

En el primer capítulo se estudiarán las ideas de de Broglie, desde sus inicios hasta su consolidación. Se podrá apreciar los avances y, desde mi punto de vista, los retrocesos que de Broglie dio a lo largo de su vida en la investigación de la teoría de los cuantos. Quedará claro que diferenciar los dos tipos de movimientos no es un capricho personal, sino una forma de entender la materia de manera sensata y consistente, sin recurrir a argumentos como los citados en el párrafo segundo.

Se ha escrito un capítulo intermedio (capítulo 2) que permite intuir la ruta a seguir en la búsqueda de la naturaleza física de la onda de Broglie. En este capítulo se describen una serie de experimentos macroscópicos que reproducen resultados análogos a los del “mundo cuántico”, cuya interpretación en los términos de dualidad no tiene razón de ser. Aparte, estos experimentos nos proveen una imagen única y sugerente de las ideas de de Broglie. Si bien es cierto que los resultados no le competen a la mecánica cuántica, si nos muestran que el comportamiento cuántico (por ejemplo la difracción de partículas) no es

único de las “micropartículas”.

Lo anterior estrecha el camino y nos conduce a buscar una interpretación realista de la onda de de Broglie (tema del capítulo 3) que a la vez, por supuesto, reproduzca los resultados experimentales. Para ello se necesitará considerar la electrodinámica estocástica lineal (EDEL), que con su hipótesis de la existencia de un campo de radiación fluctuante, permite entender el comportamiento ondulatorio de la materia como un resultado de la interacción con éste. Al final de este capítulo quedará claro, si se acepta la formulación de la EDEL, que la materia a toda escala se mantiene como partícula, pero en las dimensiones atómicas su trayectoria se complica al grado de volverse imposible “seguir su trayectoria”.

El porqué sólo dos tipos de movimientos se ejecutan en la naturaleza es algo que no estaremos en condiciones de responder, tampoco porqué materia y energía se propagan de manera distintas.

Capítulo 1

La mecánica ondulatoria

La mecánica ondulatoria es una teoría propuesta por L. de Broglie, que asocia a toda partícula una onda cuya fase juega un papel importante en su dinámica. La teoría evolucionó desde sugerir la existencia de un fenómeno periódico asociado a toda partícula, hasta una dinámica formal regida por una onda. En su primer etapa, la mecánica propuesta por de Broglie trató de recuperar la noción de partícula definida en el espacio por medio de lo que llamó la onda guía.

A continuación se presenta un breve estudio de la teoría, donde se mencionan los resultados más importantes con fin de resaltar su valor, y sobre todo, resaltar hechos que conduzcan a una interpretación física de la onda de de Broglie.

1.1. Antecedentes

A finales del siglo XIX, cuando se creía que la física había llegado a su punto cumbre, dos problemas fundamentales surgieron. Explicar el espectro de energías del cuerpo negro y explicar porque no es posible observar el marco de referencia del éter.

El problema del cuerpo negro es un problema viejo que surge de estudiar la radiación térmica emitida por objetos calientes. Medir el espectro de energías de éste fue un problema planteado por Kirchhoff; junto a la medición experimental vinieron las explicaciones teóricas. Es bien sabido que los primeros intentos para explicar el espectro del cuerpo negro fueron fallidos. Aquí iremos directo a la solución de Planck, que fue un pilar en la teoría de de Broglie.

Planck abordó el estudio del cuerpo negro desde el punto de vista de la termodinámica. Consideró al cuerpo negro como una cavidad cuyas paredes estaban formadas por osciladores armónicos en equilibrio con la radiación —Kirchhoff había demostrado que el espectro era independiente de la naturaleza de las paredes—. En resumen, quería encontrar la entropía del sistema para luego aplicar el principio de máxima entropía, que determina el estado de equilibrio. Sólo como comentario, Planck siguió las ideas de Boltzmann, a pesar que dudaba aún de la existencia del átomo.

Bajo las suposiciones anteriores la energía media de los osciladores es proporcional a la densidad espectral del campo encerrado en la cavidad,

$$\bar{E} = \frac{\pi^2 c^3}{\omega^2} \rho(\omega, T). \quad (1.1)$$

En realidad los resultados arrojan la energía promediada en el tiempo. No obstante, siguiendo a Boltzmann, Planck propuso que la energía promedio en un periodo del oscilador era igual a la energía promedio de un ensamble de osciladores dentro del mismo campo de radiación (esto es llamado el principio ergódico). Al considerar el ensamble se obtiene que el número de microestados $N(E)$ en un macroestado en equilibrio a temperatura T es

$$N(E) = N_0 e^{-\beta E}, \quad (1.2)$$

donde $\beta = 1/k_B$ es el factor de Boltzmann. La energía media del ensamble es

$$\bar{E} = \frac{\int_0^\infty E e^{-\beta E} dE}{\int_0^\infty e^{-\beta E} dE}. \quad (1.3)$$

Este es el punto fundamental de la derivación. Se había demostrado con anticipación (Rayleigh-Jeans) que $\bar{E} = k_B T$. Pero esto conduce a resultados erróneos. La propuesta de Planck fue considerar que la energía de los osciladores únicamente podía tomar valores múltiplos enteros de una energía básica,

$$E_n = nE_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.4)$$

entonces la integral (1.3) se transforma en la suma

$$\bar{E} = \frac{\sum_0^\infty nE_0 e^{-\beta E_0 n}}{\sum_0^\infty e^{-\beta E_0 n}} = \frac{E_0 \sum_0^\infty n (e^{-\beta E_0})^n}{\sum_0^\infty (e^{-\beta E_0})^n}, \quad (1.5)$$

de manera que

$$\bar{E} = \frac{E_1}{e^{\beta E_1} - 1}. \quad (1.6)$$

Al sustituir (1.6) en la ecuación (1.1) obtiene el espectro encontrado experimentalmente. Además, al tomar

$$E_1 = h\nu, \quad (1.7)$$

donde h es una constante universal llamada constante de Planck, reescribió la ecuación (1.6) de la forma

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}. \quad (1.8)$$

Junto con la ecuación (1.1) Planck ajustó excelentemente el espectro obtenido de manera experimental.

Los resultados de Planck, a pesar de lo útil, no daban una idea intuitiva de lo que sucedía dentro del cuerpo negro; a la fecha en que obtuvo la ecuación (1.8) nadie daba una explicación convincente del significado de la ecuación (1.7). Lo único que Planck pudo decir es que la cuantización se refería al intercambio de energía entre los osciladores del cuerpo negro y la radiación dentro de la cavidad. No fue hasta 1905 cuando el problema dio un giro drástico. Einstein mostró que la cuantización de la energía de los osciladores podía explicarse fácilmente si se consideraba que el campo de radiación estaba formado por paquetes de energía $E = h\nu$, llamados posteriormente fotones. La propuesta de Einstein confrontaba las ideas ondulatorias del campo electromagnético, aceptadas en su tiempo;

a la vez traía de nueva cuenta la idea de una estructura corpuscular de la luz, propuesta hacía mucho tiempo atrás por Newton, aunque no en esos términos.

De esa manera la ecuación (1.7) se interpretó diciendo que los osciladores absorbían un número entero de fotones del campo de radiación; una nueva teoría cuántica de la radiación fue requerida. Pronto Einstein mostró que los cuantos del campo de radiación portaban momento lineal. En efecto, al considerar al fotón de energía $h\nu$ como una partícula sin masa obtuvo

$$E = h\nu = cp, \quad (1.9)$$

en la ecuación anterior utilizó la ecuación relativista $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ —la teoría de la relatividad fue el otro pilar en que de Broglie se apoyó; un resultado importante de esta teoría nos dice que una partícula en reposo tiene una energía $E = mc^2$ en virtud de su masa—. Einstein también mostró que el momento tiene dirección paralela a la propagación de la correspondiente onda electromagnética asociada a la radiación, específicamente,

$$\vec{p} = \frac{h\nu}{c} \hat{\mathbf{k}} = \frac{h}{\lambda} \hat{\mathbf{k}} = \hbar \vec{k}, \quad (1.10)$$

donde $\hbar = h/(2\pi)$ y $\lambda = c/\nu$ es la longitud de la onda electromagnética. Es importante notar que la radiación electromagnética concebida de manera corpuscular está de acuerdo con la descripción ondulatoria de ésta, pues la teoría electromagnética deriva que el momento transportado por una onda plana de energía E es $\vec{p} = \hat{\mathbf{k}}E/c$. Estos resultados dieron origen a lo que hoy llaman la naturaleza dual de la luz, concepto muy importante en el desarrollo de las ideas de de Broglie.

Uno de los grandes triunfos de la teoría cuántica de la radiación fue la explicación sencilla del efecto fotoeléctrico, simplemente analizando el choque fotón-electrón. No tiene caso describir el análisis detallado del problema.

1.2. Génesis de la teoría de de Broglie

En 1924 Louis-Victor de Broglie publica su tesis doctoral titulada “Recherches sur la théorie des quanta” manifestando inicialmente una inquietud por la disputa que generaba la naturaleza de la luz: ¿es onda o partícula? Para él, el hecho que la concepción corpuscular y ondulatoria de la luz reaparecieran en distintas épocas no era más que una aparente contradicción que sugería una síntesis que abarcara ambas ideas.

De Broglie en su intento de síntesis propuso generalizar la dualidad onda-corpúsculo a toda partícula existente en el universo. Ya fuera masiva o no, el comportamiento dual debía mantenerse. Para ello relacionó dos importantes ecuaciones para la energía, $E = m_0c^2$ y $E = h\nu_0$, la primera relativista, y la última la hipótesis de Planck.

El paso fundamental dado por de Broglie fue proponer que a cualquier cuerpo de masa m_0 se le puede asociar una frecuencia $\nu_0 = m_0c^2/h$; resultado de eso fue la existencia de una onda que guía la trayectoria de la partícula pero de la cual se desconoce su naturaleza, al grado de considerarla hoy día ficticia o sólo un artificio matemático. Esta es la razón de ser del siguiente trabajo; ¿es realmente la frecuencia de de Broglie un artificio matemático, o algo vibra en la partícula? A primera vista se puede apuntar que la respuesta puede encontrarse a partir de otra pregunta: ya que la frecuencia ν_0 surge de la igualdad Einstein-Planck (las correspondientes fórmulas para la energía) ¿qué significa igualar la fórmula

para la energía de Einstein con la fórmula de la energía de Planck? Antes de seguir con esto es preciso mostrar el desarrollo de las ideas de de Broglie.

1.2.1. La onda fase

Hemos hablado ya de la frecuencia

$$\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h}$$

que representa un fenómeno periódico interno en los cuerpos materiales, de naturaleza desconocida. Bien, esta frecuencia cumple con los principios relativistas, de manera que si el cuerpo al que se le asoció la frecuencia ν_0 se mueve a velocidad v respecto a nuestro marco fijo (marco del laboratorio), la frecuencia que mediremos será afectada por el factor $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, entonces

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{m_0 c^2}{h}. \quad (1.11)$$

Sin embargo, no olvidemos la dilatación del tiempo, por la cual mediremos

$$\nu_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{m_0 c^2}{h}. \quad (1.12)$$

Como resultado, las ecuaciones anteriores se relacionan de la forma:

$$\nu_1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \nu. \quad (1.13)$$

Este resultado inquietó sobremanera a de Broglie, y su interpretación jugará un rol muy importante en su teoría. ¿Cómo es posible que una misma frecuencia se observe con dos valores distintos? ¿es realmente la misma? Resolvió la aparente contradicción proponiendo lo que llamó el teorema de armonía de fases, en el cual propuso interpretar la frecuencia ν_1 como la frecuencia ν_0 bajo efectos relativista, y la frecuencia ν como la frecuencia de una onda que se propaga a velocidad $V = c/\beta$ y que, como se verá luego, acompaña a la partícula. De Broglie la llamó *onda fase*, aquí le llamaremos onda ψ . El nombre dado por de Broglie se origina de la siguiente propiedad:

Supongamos que al tiempo cero el fenómeno periódico se encuentra en fase con la onda ψ , entonces al tiempo t se tendrá

$$\text{fase vib} = 2\pi\nu \frac{x}{v} \quad \text{que es la fase del fenómeno periódico, y}$$

$$\text{fase } \psi = 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{v}\right) = 2\pi\nu \left(\frac{x}{v} - \frac{x}{V}\right) = 2\pi\nu \frac{x}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad \text{la fase de la onda } \psi,$$

luego,

$$\text{fase } \psi = \text{fase vib} \times \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad (1.14)$$

es decir, el fenómeno periódico se mantiene en fase con la onda ψ (ver (1.13)). Esto también resuelve el problema que salta a la vista rápidamente, concerniente a la velocidad de propagación mayor a c ; se resuelve al interpretar ψ como una onda moduladora del fenómeno periódico, es decir, no transporta energía, entonces no está en contradicción con los postulados de la relatividad especial. Es preciso remarcar que la armonía de fases a la vez nos dice que la onda ψ contiene toda la información respecto al fenómeno periódico interno.

Bien, si se ha propuesto la existencia de una onda, ψ , podemos encontrar su longitud de onda. Recordemos que el momento de la partícula y su energía están dadas por:

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

entonces

$$p = \frac{h\nu}{c^2} v,$$

lo cual implica que $\nu = \frac{p}{h} V$, y como $V = \lambda\nu$, se tiene finalmente

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (1.15)$$

Todo esto es muy extraño. Se ha propuesto que toda partícula posee “un reloj interno”, como le llamó de Broglie al fenómeno de frecuencia ν_0 . Ese reloj sufre los efectos de la dilatación del tiempo y a la vez, surge una onda que modula esa vibración. Entonces, ¿ ψ no es más que una onda ficticia que surge como un efecto relativista? no, todo depende de la naturaleza del fenómeno periódico interno, si constituye una vibración real, la onda que surge se debe a los efectos relativistas sobre la vibración, que aunque no coincide con las observaciones del marco propio, pueden considerarse reales en el marco del laboratorio. Notemos también que el momento está en función de la longitud de onda; el momento se define para partículas localizadas, así se definió y así se concibe, ¿qué quiere decir que el momento de la partícula este en función de una onda (y más aún ficticia)? Recordemos que este resultado se acepta en la mecánica cuántica.

Generalicemos (1.15) para la onda en el espacio-tiempo, es decir

$$P = hL,$$

donde L es el 4-vector de una onda que se propaga con velocidad V [1.16],

$$L = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{V}{c}, \hat{n} \right),$$

\hat{n} un vector unitario en la dirección de propagación. Entonces para ψ

$$P = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) = \frac{h}{\lambda} \left(\frac{V}{c}, \hat{n} \right) = h \left(\frac{\nu}{c}, \frac{\hat{n}}{\lambda} \right),$$

de manera que

$$P_\mu P^\mu = (m_0 c^2)^2 = h^2 \left(\frac{v^2}{c^2} \right) = h^2 \left(\frac{\omega^2}{(2\pi c)^2} - \left(\frac{k}{2\pi} \right)^2 \right).$$

De lo anterior se obtiene

$$\omega^2 = (2\pi c)^2 \left(\frac{m_0 c^2}{h} \right)^2 + c^2 k^2, \quad (1.16)$$

una relación de dispersión para la onda ψ . Se sigue que

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c^2}{V} = v, \quad (1.17)$$

que demuestra la propiedad anunciada anteriormente: la onda ψ viaja con la partícula, o bien, la velocidad de transporte de energía de la partícula, dada por la velocidad de grupo de la onda ψ , es igual a la velocidad de la partícula.

Antes de continuar recordemos dos hechos conocidos:

1. Según la relación de Einstein $E = m_0 c^2$, a toda partícula de masa m_0 se le asocia una energía $m_0 c^2$. De manera que hablar de propagación de una partícula es lo mismo que hablar de la propagación de su energía asociada.
2. La propagación de la energía de una onda se da en la dirección de sus rayos,

que aunado a los resultados de la ecuación (1.17), llevó a de Broglie por nuevos senderos.

1.2.2. ¿Está la dinámica de la partícula contenida en la onda ψ ?

La respuesta a la pregunta del título se puede buscar de la siguiente manera. Consideremos la onda ψ con fase ϕ . Procediendo como en la dinámica clásica, tomemos $d\phi$ un invariante (análogo a ds) que cumpla el principio de mínima acción

$$\delta \Phi = \int d\phi = 0.$$

Ya que $d\phi$ es invariante, se cumple

$$d\phi = 2\pi w_\mu dx^\mu.$$

Buscando $d\phi$ de la manera usual:

$$d\phi = \omega dt - k dl, \quad (1.18)$$

con $dl = |d\vec{x}| \cos(\angle \vec{k}, d\vec{x})$.

Expandiendo $w_\mu dx^\mu$ e igualando a (1.18) se obtiene

$$w_4 = \frac{\nu}{c}, \quad \vec{w} = \frac{\nu}{V} (\alpha, \beta, \gamma),$$

donde α, β, γ son los cosenos directores (No confundir con $\beta = v/c$, ni γ el factor de Lorentz).

De esta manera, el principio de Hamilton para la onda ψ se reduce a

$$\delta \int_P^Q w_\mu dx^\mu = 0.$$

Si $w_4 = \text{cte}$

$$\delta \int_A^B w_i dx^i = \delta \int_A^B \sum_i w_i dx^i = \delta \int_A^B \frac{\nu}{V} dl = 0, \quad (1.19)$$

se obtiene el principio de Fermat (última expresión).

De la relación entre el momento de la partícula y la longitud de onda de ψ se sigue que

$$\delta \int_A^B \frac{\nu}{V} dl = \delta \int_A^B \frac{1}{\lambda} dl = \delta \int_A^B \frac{p}{h} = \frac{1}{h} \delta \int_A^B mvd l = 0, \quad (1.20)$$

la partícula satisface el principio de Maupertuis (última expresión). Nótese que partiendo del principio de Fermat aplicado a ψ , se ha llegado al principio de Maupertuis aplicado a la partícula, y viceversa. O en palabras de de Broglie [1.3]:

El principio de Fermat aplicado a la onda fase es el mismo que el principio de Maupertuis aplicado al movimiento del cuerpo; las posibles trayectorias dinámicas del cuerpo en movimiento son idénticos a los posibles rayos de la onda.

La respuesta inicial ha sido respondida: la trayectoria de la partícula esta determinada por la onda fase. De manera que ésta no sólo acompaña a la partícula, si no que determina su trayectoria.

Cabe mencionar que al encontrar éste resultado, de Broglie propuso reemplazar la primera ley de Newton por la equivalencia entre el principio de Fermat y el principio de Maupertuis.

No cabe duda que la propuesta de de Broglie es muy interesante, la dinámica de una partícula está contenida en una onda. En estos tiempos en los que se dice que no existen las trayectorias, este no es un resultado que sorprenda, pero recordemos la noción que se tiene en la física clásica de la dinámica de una partícula: una curva continua, una trayectoria. Como se verá adelante, de Broglie no sólo intenta sintetizar los conceptos de onda y partícula, trata de regresar la vieja noción de dinámica a la mecánica de los cuantos. Desafortunadamente, la teoría no tuvo un desenlace acorde a sus ideas iniciales.

1.2.3. La partícula cargada en un campo eléctrico

Obtengamos un poco de información de la onda ψ para una partícula cargada en un campo eléctrico de potencial U . La igualdad de energías Einstein-Planck es para este caso

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + eU = h\nu, \quad (1.21)$$

y como el momento generalizado es $p_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, según se ve en el apéndice A. Siguiendo a de Broglie, la equivalencia Fermat-Maupertuis implica

$$\frac{1}{h} \sum_1^3 p_i dq_i = \frac{1}{h} \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} dl = \frac{\nu}{V} dl,$$

de manera que

$$V = \frac{c}{\beta} \left(1 + \frac{eU \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m_0 c^2} \right) = \frac{c}{\beta} \frac{E}{E - eU}, \quad (1.22)$$

donde $\beta = v/c$.

Se esperaba que ψ se viera afectada por el campo, porque sino la partícula cargada no se vería afectada, lo cual es falso. Se ha encontrado que la velocidad de propagación depende del potencial U . La onda se propaga hacia todas partes, de manera que si concebimos la interacción de la partícula con el campo debido a la carga, debemos aceptar que la carga, y la masa, son propiedades esparcidas sobre la onda. Lo cual implica, bajo esta concepción, que si la onda tiene realidad física, en un espacio de 3 dimensiones, la carga y la masa deberán estar también esparcidas en el espacio. De esa manera razonó de Broglie en sus primeros trabajos, sin embargo logra corregir esas ideas confusas al proponer la doble solución, que se describirá adelante.

La ecuación (1.22) es muy importante, junto con la ecuación (1.21), fueron el punto de partida para que Schrödinger obtuviera su ecuación de onda.

1.2.4. La estabilidad del átomo de Bohr

Para el tiempo en que de Broglie publicó su teoría, ya se conocía la mecánica cuántica primitiva de Bohr, en particular se sabía ya que las órbitas estables según el modelo de Bohr satisfacían

$$m_0 c^2 r^2 = n \frac{h}{2\pi}, \quad \text{con } n \text{ entero.} \quad (1.23)$$

Sommerfeld había generalizado este resultado a

$$\oint p_i dq_i = n_i h, \quad n_i \text{ entero,}$$

y Einstein había propuesto la condición de cuantización invariante ante cambios de coordenadas

$$\oint \sum_1^3 p_i dq_i = nh. \quad (1.24)$$

Notemos que el integrando de (1.24) es el principio de Maupertuis. Por la equivalencia con el principio de Fermat se tiene que

$$\oint m_0 \nu dl = nh,$$

y como ν es constante, la integral no es más que el perímetro de la órbita, es decir

$$2\pi r m_0 \nu = nh,$$

o bien en términos de ω (recordemos que $\nu = r\omega$)

$$m_0 \omega r^2 = n\hbar, \quad (1.25)$$

donde \hbar es $h/2\pi$.

Esta fórmula se enseña desde los primeros curso de mecánica cuántica, y se explica diciendo que las órbitas estables son aquellas cuya longitud es múltiplo entero de la onda de de Broglie, pero jamás se explica que es la onda de de Broglie. De hecho, de Broglie mismo fue el primero en interpretar los resultados como la *condición de resonancia*: consideró la trayectoria del electrón en torno al núcleo como un canal que se cierra en si mismo, de profundidad variable. El régimen estacionario es aquel en que la longitud del canal esta en resonancia con la longitud de onda,

$$l = n\lambda.$$

De (1.15) se sigue que para bajas velocidades y trayectorias circulares

$$2\pi r = l = \frac{nm_0v}{h},$$

es decir

$$m_0\omega r^2 = n\hbar. \quad (1.26)$$

Sobre este resultado de Broglie escribió [1.3]:

Este bello resultado, cuya demostración es inmediata si se admite [la existencia de la onda fase], constituye la mejor justificación que podemos dar para atacar el problema de la interpretación de los cuantos.

No cabe duda que era la más inmediata demostración, pero aún queda la duda sobre que pasa con la emisión de una carga acelerada. Si la onda de de Broglie realmente resuelve la estabilidad del átomo, debe explicar también que pasó con la emisión de una carga acelerada, ¿realmente cambia toda la física a nivel atómico?

1.2.5. La difracción de partículas

Se dice [1.1] que en la defensa de su tesis doctoral, J. Perrin preguntó a de Broglie si sus ideas conducían a un fenómeno de interferencia de partículas. De Broglie respondió que sí, y planteó el problema de interferencia de electrones por cristales. Un año después, Davisson y Germer probaron experimentalmente que los electrones se difractan. Un hecho que hasta antes de de Broglie, era inesperado.

Einstein en 1925 mostró que las fluctuaciones asociadas a la estadística de Bose-Einstein contenía dos términos, uno que podía ser entendido en términos de partículas y otro en términos de onda. Concluyó que la parte ondulatoria podía ser explicada con las *ondas de materia* de de Broglie, y además propuso que un gas molecular podía difractarse cuando pasara por una rendija de anchura suficientemente pequeña. ¿Acaso es totalmente errónea la propuesta de de Broglie?

1.2.6. Acerca de la cuantización

Al explicar el átomo de Bohr se pisó un terreno totalmente cuántico. Ahora bien, a no ser por que se dijo que la ν_0 proviene de igualar la ecuación de energía de Einstein con la de Planck, no se sabría nada acerca de ésta. Lo que se quiere resaltar es que se pudo haber

partido postulando la existencia del fenómeno ondulatorio y de ahí en adelante seguir los mismos pasos. Procediendo así, se hubieran logrado explicar las órbitas cuantizadas de Bohr sin necesidad de requerir de una cuantización previa; todo se reduce a un problema de armonía de fases. Si así se hubiera procedido, entonces, al momento de preguntar cual es la naturaleza de la onda de de Broglie tendríamos que dirigirnos, no al desarrollo de la teoría, sino al punto fundamental: la frecuencia ν_0 , ¿de donde se puede obtener la ν_0 ? En estos momentos tendría que entrar la hipótesis de Planck, y se diría: aceptemos la fórmula de Planck, entonces la frecuencia ν_0 proviene de igualar esta ecuación con la ecuación para la energía de Einstein, y continuar los mismos pasos.

Pero la fórmula de Planck aún no nos da la física que queremos. No sugiere nada con respecto a la onda de de Broglie ni nada con respecto al reloj interno. ¿Qué hay mas allá de esa fórmula? Si la cuantización de Planck se pudo hacer emerger de otro postulado, es ahí donde hay que buscar el carácter de la onda de materia.

1.3. Antecedentes de la nueva mecánica

Ahora podemos preguntarnos no que significan los postulados de de Broglie sino, ¿qué andaba buscando? Sin duda uno podría decir que buscaba una teoría para los cuantos, al igual que uno podría decir que Einstein quería explicar las transformaciones de Lorentz. Luego vemos que en realidad lo que Einstein quería era una teoría en la que las leyes de la física fueran las mismas en cualquier marco de referencia. Pues bien, lo que de Broglie quería era construir una teoría en el cual el concepto de partícula no fuera algo completamente distinto al concepto de onda, si no mas bien, partes del mismo esquema. Él mencionó más de una vez que buscaba una teoría en la cual la mecánica clásica fuera un límite, como lo es la óptica geométrica a la teoría de Fresnel. De esta idea, se aprecia, no fue pionero, los esfuerzos vienen desde Bernoulli, pasando por Hamilton y Jacobi.

En el apéndice A se muestra que cuando un sistema es conservativo la ecuación de Jacobi se reduce a la ecuación de Hamilton

$$H(p_i, \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q_i}) = E,$$

es decir

$$\frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial z} \right)^2 \right) = E.$$

\mathcal{S}_0 es la acción del sistema. Su solución completa es

$$\mathcal{S}_0 = \sqrt{2m_0 E} \left(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z \right), \quad (1.27)$$

donde α, β, γ son los cosenos directores, que satisfacen $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. Entonces las trayectorias están dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial \alpha} = \sqrt{2m_0 E} \left(x - \frac{\alpha z}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} \right) = a \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial \beta} = \sqrt{2m_0 E} \left(y - \frac{\alpha z}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} \right) = b, \quad (1.29)$$

y los momentos son

$$p_i = m_0 v_i = m_0 \alpha_i v = \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial x} = \sqrt{2m_0 E} \alpha_i, \quad \alpha_i \in \{\alpha, \beta\},$$

de manera que la ecuación (1.27) se puede reescribir como

$$\mathcal{S}_0 = m_0 v \left(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \right). \quad (1.30)$$

El movimiento a lo largo de la trayectoria está dado por

$$\frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial E} = \frac{m_0}{\sqrt{2m_0 E}} \left(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \right) = t - t_0. \quad (1.31)$$

Por otra parte, la propagación de una onda está dada por

$$\nabla^2 \psi + \frac{4\pi^2 n^2 \nu^2}{V_0^2} \psi = 0,$$

cuya solución es

$$\psi = a \exp \left[2\pi i \nu \left(t - \frac{n}{V_0} \left(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z \right) \right) \right] \quad (1.32)$$

cuando el índice de refracción n es constante¹. La *fase de la onda* es

$$\varphi = \nu \left[t - \frac{n}{V_0} \left(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z \right) \right], \quad (1.33)$$

y podemos definir φ_0 como

$$\varphi_0 = \frac{n\nu}{V_0} \left(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z \right) = \frac{1}{\lambda} \left(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z \right), \quad (1.34)$$

con λ la longitud de onda.

Bien, sin ánimos de hartar con las mismas ecuaciones, sino con el de poner en claro las cosas, escribamos la acción \mathcal{S} de la partícula que tratamos, con el término dependiente del tiempo, y la fase de la onda que se estudia,

$$\mathcal{S} = Et - m_0 v \left(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z \right) \quad (1.35a)$$

$$\varphi = \nu t - \frac{1}{\lambda} \left(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z \right), \quad (1.35b)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= m_0 v \left(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z \right) \\ \varphi_0 &= \frac{1}{\lambda} \left(\alpha x + \beta y + \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} z \right). \end{aligned}$$

¹A esta solución se le llama la aproximación de la óptica geométrica, se considera que la longitud de onda se mantiene constante en el espacio. Cuando n varía, λ varía, entonces la solución debe ser una superposición de ondas que puedan describir la complicada variación de λ

Las ecuaciones (1.35) son casi idénticas, de hecho la partícula se desplaza en la misma dirección que la onda se propaga. Esto sugiere una unificación onda-partícula asociando una onda al movimiento de la partícula bajo las relaciones

$$E = A\nu \quad \text{y} \quad mv = A\frac{1}{\lambda}, \quad (1.36)$$

con A una constante con unidades $\frac{kg \cdot m^2}{s^2} = J \cdot s$, de acción.

¿Cual es el valor de A ? Es claro que la primer ecuación en (1.36) es bastante parecida a la ecuación de Planck. Ese es el punto de partida de de Broglie, él tomó $A = h$ y construyó toda una teoría. El punto importante aquí es precisamente que la h sigue siendo una hipótesis. Eso sugiere, nuevamente, que la búsqueda de una interpretación física a esa onda que de Broglie propone no debe encaminarse sobre la propia mecánica ondulatoria. La búsqueda debe ir, como ya se dijo, por la hipótesis de Planck, por que es de ahí donde surge la h , en una forma “más sugerente”, que contiene “el misterio de la cuántica”. Para de Broglie toda la dinámica recaía en la onda ψ , cuya fase es $\varphi = \frac{S}{h}$, y la mecánica clásica sólo era una aproximación cuando la propagación de ψ podía ser descrita por la óptica geométrica ².

1.4. La onda piloto

En 1927, de Broglie presenta el desenlace de sus ideas iniciales. Desarrolla una teoría que representa a las partículas como una singularidad dentro de un fenómeno ondulatorio extendido. La nueva mecánica requiere de dos ondas, una que representa a la partícula y que posee una singularidad, y otra que describe la dinámica de un ensamble de realizaciones de la partícula. Aquí se describe el artículo “La mecánica ondulatoria en la estructura atómica de la materia y la radiación” [1.4], que es el más importante sobre esta etapa de su teoría, y uno de los pocos. Dicho sea de paso, después de 1927, de Broglie se “alejó” de sus ideas iniciales y se apegó a las de la mecánica cuántica.

Para el caso de una partícula libre, él propone que una partícula de masa m_0 se mueve en el espacio bajo la guía de una onda u cuya propagación satisface la ecuación:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4\pi^2 \nu_0^2}{c^2} u, \quad (1.37)$$

donde $\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h}$.

De Broglie busca soluciones del tipo

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) \cos \frac{2\pi \nu_0}{h} \varphi, \quad (1.38)$$

donde $\varphi = \frac{h\nu_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c^2} \right)$. Sustituyendo (1.38) en (1.37), encuentra que

$$\square f = \nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

²Recordemos, de la nota 1, que la φ resultó ser (1.33) por la aproximación de la óptica geométrica.

Al admitir una simetría esférica para f obtiene, en un marco donde la partícula se mueve sobre el eje z , la expresión

$$u(x, y, z, t) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z-vt)^2}{1-\beta^2}}} \cos \frac{2\pi}{h} \varphi. \quad (1.39)$$

La solución puede escribirse simplemente como

$$u = f(x, y, z - vt) \cos \frac{2\pi}{h} \varphi.$$

A continuación de Broglie considera una nube de puntos, sin interacción mutua, con la misma velocidad \vec{v} , cuyas fases φ son las mismas, entonces el fenómeno global se representa por la función

$$U(x, y, z, t) = \left[\sum_i f_i(x, y, z - vt) \right] \cos \frac{2\pi}{h} \varphi. \quad (1.40)$$

Además, nota que la ecuación (1.37) admite una solución continua de la forma

$$\Psi(x, y, z, t) = a \cos \frac{2\pi}{h} \varphi. \quad (1.41)$$

la cual, según dice, corresponde a una solución singular de (1.38). Ya que la amplitud a en (1.41) es arbitraria, de Broglie la elige de manera que

$$\rho = Ka^2, \quad (1.42)$$

con K constante y ρ la densidad de partículas en la nube. Entonces (1.41) da la densidad de la nube de puntos y para una sola partícula con velocidad conocida, $a^2 d\tau$ mide la probabilidad de la partícula de encontrarse en el elemento de volumen $d\tau$.

1.4.1. La partícula en un campo constante

De Broglie asumió que la partícula en un campo derivable de potencial $V(x, y, z)$ estaba guiada por una onda que es solución de la ecuación:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\pi i}{h} \frac{V}{c} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2} \left(m_0^2 c^2 - \frac{V^2}{c^2} \right) = 0. \quad (1.43)$$

Al considerar la partícula inicialmente en un región R_0 libre del campo, y en un instante adentrarse a la región R con $V \neq 0$, de Broglie asume la solución general compleja de (1.38). Separa la parte real de la imaginaria, y obtiene dos ecuaciones acopladas. Al considerar

$$\varphi(x, y, z, t) = Et - \varphi_0(x, y, z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = E = h\nu, \quad \text{y} \quad \square \varphi = \nabla^2 \varphi$$

de Broglie escribió una de ellas como

$$\frac{1}{f} \square f = \frac{4\pi^2}{h^2} \left[\|\nabla \varphi_0\|^2 - \frac{1}{c^2} (E - V) + m_0 c^2 \right], \quad (1.44)$$

y hace notar que si el término $\frac{1}{f}\square f$ se desprecia, la ecuación se reduce a la de Jacobi. Además muestra que la velocidad con que se mueve la singularidad es

$$\vec{v} = \frac{c^2 \nabla \varphi_0}{E - V}, \quad (1.45)$$

que en la aproximación no relativista se reduce a

$$\vec{v} = \frac{1}{m_0} \nabla \varphi_0.$$

De nuevo, de Broglie vuelve a considerar una nube de partículas sin interacción mutua, con velocidad dada por (1.45) y misma fase φ_0 . La densidad de partículas (independiente del tiempo) debe satisfacer la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

Como en el caso anterior, propone que la nube se representa por una función continua de la forma

$$\Psi(x, y, z, t) = a \cos \frac{2\pi}{h} \varphi'(x, y, z, t) = a \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{1}{h} \varphi'_0(x, y, z) \right), \quad (1.46)$$

donde $\nu = \nu_0 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Al sustituir en (1.43) la ecuación (1.46) en forma compleja, vuelve a obtener dos ecuaciones; una de ellas la reescribe de la forma

$$\frac{1}{a} \nabla a = \frac{4\pi^2}{h^2} \left[\|\nabla \varphi'_0\|^2 - \frac{1}{c^2} (h\nu - V)^2 + m_0 c^2 \right]. \quad (1.47)$$

Remarca que esta ecuación, al despreciar el término izquierdo, se reduce a la ecuación de Jacobi, y en esos casos $\varphi_0 = \varphi'_0$. El paso importante fue proponer la siguiente hipótesis:

$$\frac{1}{a} \nabla a = \frac{1}{f} \square f. \quad (1.48)$$

Esto es lo que de Broglie llamó el postulado de *la doble solución*, porque implicaba la existencia de dos soluciones sinusoidales de la ecuación (1.43) que tienen la misma fase, una se comporta como una singularidad puntual, y la otra, como una amplitud continua.

Notando que la cantidad $\frac{\rho}{a^2(E-V)}$ permanece constante durante el movimiento del ensamble, concluye que

$$\rho(x, y, z) = K a^2(x, y, z) \left(1 - \frac{V(x, y, z)}{W} \right), \quad (1.49)$$

en el límite para bajas velocidades se reduce a

$$\rho(x, y, z) = K a^2(x, y, z). \quad (1.50)$$

Ahora bien, si en realidad la nube de partículas se considera como un conjunto de repeticiones de la misma partícula (un ensamble), entonces la probabilidad de encontrar a la partícula en un elemento de volumen $d\tau$ es

$$\rho(x, y, z) d\tau. \quad (1.51)$$

Además, remarca, las trayectorias están dadas también por la onda continua Ψ , ya que éstas son ortogonales a las superficies de igual fase.

1.4.2. La partícula en un campo variable

Para este caso, de Broglie procede como antes. La ecuación correspondiente a un electrón en un potencial escalar $V(x, y, z, t)$ y un potencial vectorial $\vec{A}(x, y, z, t)$ es

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\pi i e V}{h c^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{4\pi i e}{h c} \vec{A} \cdot \nabla u - \frac{4\pi^2}{h^2} \left[m_0 c^2 - \frac{e^2}{c^2} (V^2 - A^2) \right] = 0. \quad (1.52)$$

Otra vez propone la solución en forma compleja con singularidad y obtiene dos ecuaciones, de las cuales, una se reduce a la ecuación de Jacobi para la partícula en un campo variable, si se desprecia el término $\frac{1}{f} \square f$. Encuentra que la singularidad se desplaza a velocidad

$$\vec{v} = \frac{c^2 \vec{p}}{\dot{\varphi} - eV}, \quad (1.53)$$

que en el límite no relativista se reduce a

$$\vec{v} = \frac{1}{m_0} \vec{p}. \quad (1.54)$$

Donde \vec{p} es el momento de la partícula definida como

$$\vec{p} = - \left(\nabla \varphi + \frac{e}{c} \vec{A} \right).$$

Al considerar el ensamble³ y aplicar la hipótesis de la doble solución, concluye que

$$\rho(x, y, z, t) = \frac{K}{E} a^2(x, y, z, t) (\dot{\varphi} - eV) = K' a^2 (\dot{\varphi} - eV), \quad (1.55)$$

y remarca que, cuando la energía cinética es despreciable en comparación con la energía interna $m_0 c^2$, entonces se puede considerar la densidad del ensamble como proporcional al cuadro de la amplitud de Ψ . Entonces, la probabilidad de encontrar a la partícula en un elemento de volumen $d\tau$ es $\rho(x, y, z, t) d\tau$.

1.4.3. La nueva mecánica desde el formalismo de Lagrange

Con base a la ecuación análoga a (1.44) para el caso del campo variable, de Broglie nota que la ecuación de Jacobi puede recobrase normalmente si se atribuye una masa

$$M_0(x, y, z, t) = \sqrt{m_0^2 - \frac{h^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\square a}{a}}, \quad (1.56)$$

a una partícula móvil. Él se da cuenta que negar el término $\frac{\square f}{f}$ o $\frac{\square a}{a}$, es equivalente a tomar h infinitamente pequeña.

Bajo la asunción de M_0 y la lagrangiana

$$\mathcal{L} = -M_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - V$$

³Ya no una nube de partículas, sino un ensamble correspondiente a una partícula

se pueden obtener las ecuaciones anteriores de la manera usual en mecánica clásica.

Por ejemplo, el momento de la partícula resulta ser

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = \frac{M_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.57)$$

y la energía es

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + V, \quad (1.58)$$

Las ecuaciones anteriores se obtienen a la vez de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = E, \quad \text{y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p_i, \quad (1.59)$$

de manera que la ecuación de Jacobi es

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - V \right)^2 - \|\nabla \varphi\|^2 = M_0 c^2, \quad (1.60)$$

idéntica a la ecuación (1.47). Se vio arriba que de aquí se puede obtener la ecuación $\vec{v} = \frac{1}{m_0} \nabla \varphi$, que es, como ya se dijo, la velocidad de la singularidad.

En la aproximación no relativista, al escribir $M_0(x, y, z, t) = m_0 + \epsilon(x, y, z, t)$, la lagrangiana se puede escribir de la forma

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 - \epsilon c^2 - V. \quad (1.61)$$

De manera que el movimiento toma lugar en un espacio con un potencial adicional ϵc^2 . Éste potencial adicional, a primer orden y a bajas velocidades, es de la forma:

$$\epsilon c^2 = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\square a}{a} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\nabla^2 a}{a} \quad (1.62)$$

1.4.4. Sistema de partículas

Para simplificar el problema del sistema de partículas, de Broglie consideró el caso de dos puntos materiales. Bajo las mismas concepciones, supone a las partículas como singularidades inmersas en un fenómeno ondulatorio. El sistema debe satisfacer las ecuaciones

$$\square u_1 + \frac{4\pi i}{h} \frac{V_1}{c^2} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2} \left(m_1^2 c^2 - \frac{V_1}{c^2} \right) u_1 = 0, \quad (1.63a)$$

$$\square u_2 + \frac{4\pi i}{h} \frac{V_2}{c^2} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{4\pi^2}{h^2} \left(m_2^2 c^2 - \frac{V_2}{c^2} \right) u_2 = 0, \quad (1.63b)$$

con potenciales

$$V_1 = V(|\vec{x} - \vec{x}_2|) \quad \text{y} \quad V_2 = V(|\vec{x} - \vec{x}_1|),$$

es decir, el mismo potencial $V(x, y, z)$ evaluado en las posiciones de las partículas, \vec{x}_1 y \vec{x}_2 .

El problema se reduce a encontrar una solución que tenga una singularidad y cumpla con las ecuaciones (1.63), pero ese es un gran problema, matemático. En vez de intentar resolverlo, de Broglie recuerda que en mecánica clásica no relativista es posible encontrar una “acción” $\mathcal{S}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, tal que, los momentos de cada partícula están dado por:

$$m_1 \vec{v}_1 = -\nabla_1 \mathcal{S} \quad \text{y} \quad m_2 \vec{v}_2 = -\nabla_2 \mathcal{S}. \quad (1.64)$$

Se pregunta, ¿se puede encontrar en la nueva mecánica una función φ que cumpla lo mismo? en caso de ser cierto: ¿si se resolviera el sistema (1.63), las singularidades podrían satisfacer la ecuación (1.64) para la misma función $\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$? Con esto intenta rodear el problema de resolver el sistema de ecuaciones diferenciales. Identifica φ con la fase de una solución continua $\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$ de la ecuación

$$\sum_{i=1}^2 \frac{-\hbar^2}{2m_i} \nabla_i^2 u + Vu = Eu. \quad (1.65)$$

De Broglie toma esta ecuación como la generalización de la ecuación (1.52). Concluye que la función φ genera el movimiento de las singularidades. De manera que resolver la ecuación (1.65) es un medio efectivo de obtener los movimientos de las singularidades sin tener que resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (1.63) en el espacio de 3 dimensiones.

Notemos que (1.65) es la ecuación de Schrödinger para un sistema de partículas. No obstante, la interpretación es distinta. Schrödinger aceptó la existencia de una onda continua, en el espacio de configuración, que arroja información únicamente en términos probabilísticos. Bajo esta interpretación, las trayectorias dejan de existir. Además, la onda no puede ser real, por que se propaga en un espacio de $3N$ dimensiones. Este punto fue criticado por de Broglie, notaba una incongruencia al hablar del espacio de configuración de partículas que no están bien definidas; si no podemos hablar de sus coordenadas, ¿tiene sentido hablar del espacio formado por éstas? Por su parte, creía firmemente en la existencia de las trayectorias, y por eso propone la onda con singularidad, la que tiene realidad física. Luego, al plantear el problema en la forma (1.63), está considerando el problema del sistema de N partículas como un sistema con N ondas con singularidades en el espacio de 3 dimensiones. Pero la dificultad de resolver lleva a considerar la aproximación (1.65), cuya solución, a pesar de propagarse en el espacio 3D, no presenta incongruencias, por que las partículas están bien localizadas “dentro de las singularidades”.

1.4.5. Significado de la onda continua Ψ

La onda Ψ , como ya se notó, juega un papel muy importante en la teoría de de Broglie. Uno, Ψ resulta ser una onda piloto, de hecho, la mecánica de de Broglie es conocida como *la teoría de la onda piloto* u onda guía. El término se origina de la ecuación (1.53), a la cual se le llama *la ecuación de guianza*:

$$\vec{v} = -c^2 \frac{\nabla\varphi + \frac{e}{c}\vec{A}}{\dot{\varphi} - eV}.$$

En palabras de de Broglie [1.4]

La formula [(1.53)] determina completamente el movimiento de los corpúsculos tan pronto como uno de su posición en el instante inicial. En otras palabras, la función φ , justo como la función de Jacobi [la acción \mathcal{S}], de la cual es generalización, determina toda clase de movimientos, y para conocer cual de esos movimientos se describe en realidad, basta conocer la posición inicial.

Dos, cuando no se conoce la posición inicial, Ψ adquiere el carácter de *onda de probabilidad*, por que la probabilidad de que la partícula esté presente en el elemento de volumen $d\tau$ está dado por la ecuación

$$\rho d\tau = Ka^2 (\dot{\varphi} - eV) d\tau. \quad (1.66)$$

En resumen, (1.53) y (1.66) son las ecuaciones fundamentales de la mecánica de de Broglie. La primera tiene la virtud de regresar el concepto de partícula bien definida, y por supuesto de trayectoria, a la teoría de los cuantos.

En la aproximación no relativista las ecuaciones anteriores se simplifican a

$$\vec{v} = -\frac{1}{m_0} \left(\nabla\varphi + \frac{e}{c}\vec{A} \right) \quad \text{y} \quad \rho d\tau = cte \cdot a^2 d\tau. \quad (1.67)$$

De manera que la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica es sólo la aproximación no relativista de la mecánica de de Broglie; la interpretación de Born puede seguir adoptándose, pero sólo como aproximación a bajas velocidades.

Sistema de partículas

Conocer el carácter físico de la onda Ψ en un sistema de partículas contiene un problema que de Broglie no pudo eliminar. Antes de mencionarlo recordemos que él argumentó que podía usar la onda Ψ en el espacio de 3D porque consideraba a las partículas bien definidas. Bien, de Broglie se daba cuenta que al tratar de representar físicamente la evolución de un sistema de N partículas, se debe, como se dijo arriba, considerar la propagación de N ondas en el espacio 3D, cada una de las cuales está determinada por la acción de las N-1 restantes partículas del sistema. Sin embargo, los estados del conjunto de partículas puede describirse también por un punto en el espacio de configuración, de manera que se puede intentar relacionar el movimiento de este punto representativo inmerso en un espacio 3N dimensiones, con una onda que se propaga en el mismo espacio. Esta onda es totalmente ficticia pero juega el papel que juega la onda Ψ en el caso de una sola partícula, para el punto representativo, en la aproximación no relativista. Es decir, es la onda guía y la onda de probabilidad.

Supongamos que el sistema de N puntos tienen las siguientes coordenadas rectangulares:

$$x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots, x_1^N, x_2^N, x_3^N.$$

Entonces para el punto representativo en el espacio de configuración cada una de las 3N componentes de su velocidad está dada por

$$v_{x_i^k} = -\frac{1}{m_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i^k}, \quad (1.68)$$

ya que posee una onda piloto Ψ con fase φ , en el mismo espacio.

Por el carácter de onda probabilística de Ψ , la probabilidad de encontrar al punto representativo en un elemento de volumen del espacio de configuración es

$$\rho d\tau = cte a^2 d\tau. \quad (1.69)$$

Es decir, las ecuaciones (1.68) y (1.69) en el espacio de configuración son las equivalentes a las ecuaciones (1.67) en el espacio de 3 dimensiones.

1.5. La mecánica ondulatoria después de 1930

Después del congreso de Solvay de 1927, de Broglie abandonó parcialmente su teoría, en parte por las dificultades matemáticas que se le presentaron, pero sobre todo, por el éxito de la ecuación de Schrödinger. En esta etapa de su trabajo de Broglie dejó un lado la onda con singularidad en la teoría de la onda guía y la onda con amplitud continua la interpretó a la manera de Born.

Partió aceptando que a toda partícula le corresponde una frecuencia ν_0 tal que su energía es $E = h\nu_0$, y su dinámica está contenida en una onda monocromática ψ , con ecuación de propagación

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{4\pi m_0^2 c^2}{h^2} \psi. \quad (1.70)$$

De manera que para una partícula libre y una onda sinusoidal⁴ se tiene

$$\nabla^2 \psi + \frac{4\pi^2 \nu^2}{c^2} n\psi = 0, \quad (1.71)$$

donde $n = \sqrt{1 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}}$ y ν es la frecuencia de la onda ψ . Notemos que al suponer la existencia ψ , el vacío se comporta como si tuviera un índice de refracción n distinto de uno.

De las suposiciones principales puede obtenerse que $p = \frac{\lambda}{h} = \frac{nh\nu}{c}$, el momento de la partícula en función de la longitud de onda que ya conocíamos.

También derivó los siguientes resultados ya conocidos:

- El principio de mínima acción de Maupertuis aplicado a la partícula es equivalente al principio de Fermat aplicado a la onda guía.

Basta notar que $d\mathcal{S}_0 = p_x dx + p_y dy + p_z dz$, y como se vio en el apéndice A el principio de Maupertuis es el principio de mínima acción aplicado a la *acción reducida*

$$\int d\mathcal{S}_0 = \int p_i dx^i = \int \frac{nh\nu}{c} (\alpha x + \beta y + \gamma z) = \int d\varphi = \frac{h\nu}{c} \int n dl,$$

lo que demuestra lo deseado, ya que el principio de Fermat es un principio variacional aplicado a la fase. Esto nos dice que la posible trayectoria de una partícula coincide con uno de los rayos de la onda.

⁴Supongamos $\psi = \cos 2\pi\varphi = \cos 2\pi \frac{\mathcal{S}}{h}$, entonces

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 4\pi^2 \frac{E^2}{h^2} \psi = 4\pi^2 \nu^2 \psi$$

donde se ha empleado $E = h\nu$

- La ecuación de la óptica geométrica coincide con la ecuación de Jacobi.
- La velocidad de la partícula es la misma que la velocidad de grupo de las ondas asociadas.

Para el caso de una partícula en un potencial V , el índice de refracción lo escribió de la forma

$$n = \sqrt{\left(1 - \frac{V}{h\nu}\right)^2 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}} = \sqrt{\frac{2(E - V(x, y, z))}{mc^2}},$$

de manera que la ecuación de onda resulta ser ⁵

$$\nabla^2\psi + \frac{2m(E - V(x, y, z))}{\hbar^2}\psi = 0, \quad (1.72)$$

esta ecuación es la ecuación de Schrödinger para una partícula en un potencial V ; de Broglie redujo su teoría a la mecánica cuántica. Para la partícula en un campo dependiente del tiempo se obtiene⁶

$$\nabla^2\psi - \frac{2m}{\hbar^2}V\psi = \frac{2im}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \quad (1.73)$$

⁵El movimiento de la partícula en un campo corresponde a la propagación de una onda moviéndose en un medio cuyo índice de refracción cambia de un punto a otro, como se aprecia en el valor de n . En este caso la longitud de onda toma el valor

$$\lambda(x, y, z) = \frac{h}{\sqrt{2m(E - V(x, y, z))}},$$

que se obtiene por a través de la ecuación $\varphi_0 = S_0/h$, ya que para el caso de la partícula en un potencial V la acción reducida satisface

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2 = 2m(E - V(x, y, z)),$$

y para la onda en un medio con índice de refracción variable se tiene

$$\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2(x, y, z)}.$$

Al sustituir el valor de λ en la ecuación

$$\nabla^2\psi + \frac{4\pi^2}{\lambda(x, y, z)}\psi = 0,$$

que es equivalente a la ecuación (1.70), se obtiene la ecuación propuesta por de Broglie para la partícula en un potencial V .

⁶El movimiento de la partícula en un campo dependiente del tiempo se considera equivalente a una onda propagándose en un medio de índice de refracción dependiente del tiempo y el espacio. Esto conduce a considerar en lugar de una onda monocromática, un tren de ondas, formado por superposición de ondas monocromáticas. La ecuación propuesta por de Broglie, que puede ser deducida de la ecuación relativista de Klein-Gordon en un potencial V dependiente del tiempo, tiene una solución ψ formada por un tren de ondas, que se reduce a la ecuación (1.72) para una onda monocromática de frecuencia E/h .

1.5.1. Teoría relativista

Para obtener de una manera sencilla la ecuación de propagación de la onda ψ con correcciones relativistas primero hay que importar el uso de operadores en mecánica cuántica a la mecánica ondulatoria. Si en la ecuación de Hamilton

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z, t)$$

sustituimos

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{por} \quad p_x, \text{ etc} \quad (1.74)$$

entonces obtenemos el operador Hamiltoniano

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{-\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(x, y, z, t) \quad (1.75)$$

que aplicado a la onda ψ arroja la ecuación (1.73)⁷.

Por otra parte, notemos que la ecuación de Jacobi en mecánica clásica se puede obtener al sustituir $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}$ por E y $-\nabla \mathcal{S}$ por p , es decir aplicar los operadores “clásicos” de energía $\hat{E} = \frac{\partial}{\partial t}$ y de momento $\hat{p}_i = -\frac{\partial}{\partial x_i}$ a \mathcal{S} en la ecuación $E = p^2/2m$. Mas aún, la ecuación de Jacobi relativista se obtiene por el mismo procedimiento aplicado a la ecuación

$$\frac{E^2}{c^2} = m_0^2 c^2 + p^2.$$

Entonces podemos obtener la ecuación de propagación relativista al aplicar los operadores cuánticos

$$\hat{E} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{y} \quad \hat{p} = i\hbar \nabla$$

a la ecuación anterior para la energía. El resultado es

$$\square \psi + \frac{m_0 c^2}{\hbar^2} \psi = 0 \quad (1.76)$$

la ecuación de onda de la mecánica ondulatoria relativista para una partícula libre.

El caso de la partícula en un campo F , derivable de un potencia V , se obtiene de la misma manera. El resultado es

$$\square \psi - \frac{2ie}{\hbar} \frac{eV}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{2ie}{\hbar} \frac{e}{c} \sum_{x,y,z} A_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{\hbar^2} \left(m_0 c^2 - \frac{e^2}{c^2} (V^2 - A^2) \right) \psi = 0. \quad (1.77)$$

⁷Recordemos que en mecánica cuántica la ecuación de Schrödinger se escribe comunmente como

$$\hat{\mathcal{H}}\psi = \hat{E}\psi,$$

donde $\hat{E} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$

1.5.2. Nueva interpretación de la función de onda

En línea con la interpretación probabilística de la ecuación de onda, de Broglie postuló el *principio de interferencia o de localización* en su teoría [1.6]:

El cuadrado del módulo de la función ψ mide en todo punto y para todo instante la probabilidad de la presencia de partículas cuando se observa en un punto y un instante.

Ya que la ψ es compleja, se escribirá de forma natural como $\Psi = a \exp\left(\frac{i}{\hbar}\varphi\right)$, luego

$$a^2 = \Psi^* \Psi = |\Psi|^2,$$

donde Ψ^* es la compleja conjugada de la función Ψ .

Justificó esta interpretación apoyándose en la similitud de la ecuación anterior con la intensidad de la luz en la teoría clásica y la nueva concepción fotónica de la luz. En la teoría electromagnética se define la intensidad de la luz como el cuadrado de su amplitud (la luz como onda), y se acepta que mide la cantidad de luz que puede ser capturada en un instante y un punto. Con estas asunciones pueden explicarse las franjas de interferencia.

Sin embargo, bajo las nuevas concepciones de la luz, el tratamiento anterior se vuelve probabilístico. En 1908, Taylor realizó un experimento en el que a través de filtros logró bajar la intensidad de un haz de luz para luego hacerla pasar por una rendija. Bajó la intensidad a tal punto, que afirmaba que por la rendija pasaba sólo un fotón. La posición final del fotón se conocía cuando impactaba contra una pantalla susceptible al efecto fotoeléctrico; después de un largo rato obtuvo un patrón de interferencia idéntico al clásico. Para de Broglie, el experimento conducía a un efecto probabilístico, en donde la intensidad de la luz mide la probabilidad de que un fotón produzca un efecto observable en el espacio. La difracción de electrones por cristales, bordes y rendijas, donde se había corroborado la validez de la relación $\lambda = h/p$ eran una base sólida para establecer el principio a las partículas.

Bastaba una modificación más para que las cosas marcharan bien: la normalización de la función de onda, es decir que se cumpla

$$\int |\Psi|^2 d\tau = 1 \tag{1.78}$$

sobre todo el espacio. Bajo este cambio el principio de interferencia decía [1.6]:

La probabilidad de que una observación permita la localización de una partícula cuya función de onda normalizada es $\Psi(x, y, z, t)$, en un elemento de volumen $d\tau$, en el instante t , es igual a la expresión:

$$\Psi^*(x, y, z, t) \Psi(x, y, z, t) = |\Psi(x, y, z, t)|^2 d\tau \tag{1.79}$$

En base a (1.79), de Broglie estableció una densidad de corriente, que representa la variación de la probabilidad en el tiempo, de la forma

$$\rho(x, y, z, t) = |\Psi|^2, \tag{1.80}$$

cuya velocidad se asume es

$$v = \frac{1}{|\Psi|^2} \frac{\hbar^2}{2mi} (\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi) = -\frac{1}{m} \nabla \varphi. \quad (1.81)$$

Con la ayuda de la expresión

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*)$$

se obtiene que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad (1.82)$$

es decir, ρ satisface la ecuación de continuidad, lo que significa que la densidad de corriente se conserva en el tiempo, luego $\int |\Psi|^2 d\tau$ también se conserva, por lo tanto la normalización de Ψ se mantiene en el tiempo, es de carácter permanente.

1.5.3. El sistema de partículas

El tratamiento del sistema de partículas es análogo al descrito en la onda piloto, tomando en cuanto sólo la onda continua. Propone la ecuación (1.65). La diferencia radica en la interpretación de la función. De Broglie vuelve a considerar el principio de interferencia para el caso de varias partículas:

Si el estado de un sistema de partículas se representa en el espacio de configuración por la función de onda $\Psi(x_1, \dots, z_N, t)$, la probabilidad que una observación permita la localización de puntos del sistema, al tiempo t , en el elemento de volumen del espacio de configuración $d\tau$ es:

$$|\Psi(x_1, \dots, z_N, t)|^2 d\tau. \quad (1.83)$$

Se entiende que Ψ está normalizada. Además, la normalización se mantiene, ya que puede encontrarse una ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^N \nabla \cdot (\rho v_k) = 0. \quad (1.84)$$

Bibliografía

- [1.1] BACIAGALUPPI, G., AND VALENTINI, A. *Quantum theory at the Crossroads*. Cambridge University Press, 2009.
- [1.2] DE BROGLIE, L. *An Introduction to The Study of Wave Mechanics*. Methuen and CO. LTD. Versión en inglés por H. T. Flint.
- [1.3] DE BROGLIE, L. *Recherches sur la théorie des quanta*. PhD thesis, Universidad de la Sorbona, 1924. Versión en inglés (por Kracklauer), y la original en francés.
- [1.4] DE BROGLIE, L. La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement. *Le Journal de Physique et le Radium* (1927).
- [1.5] DE BROGLIE, L. The wave nature of the electron, 1929. Nobel Lecture.
- [1.6] DE BROGLIE, L. *Non-linear Wave Mechanics, A Causal Interpretation*. Elsevier, 1960. Versión en inglés por A. J. Knodel y J. C. Miller.
- [1.7] DE BROGLIE, L. The reinterpretation of wave mechanics. *Foundations of Physics* (1970).
- [1.8] DE BROGLIE, L. Interpretation of quantum mechanics by the double solution theory, 1987.
- [1.9] DE BROGLIE, L. L'interprétation de mécanique ondulatoire à l'aide d'ondes à régions singulières. *arXiv:1005.4534v1* (2010). Traducción al inglés de D. Karanth.
- [1.10] DE BROGLIE, L., AND ANDRADE E SILVA, J. *The Current Interpretation of Wave Mechanics, A Critical Study*. Elsevier.
- [1.11] DE BROGLIE LOUIS. *Heisenberg's Uncertainties and the Probabilistic Interpretation of Wave Mechanics, with Critical Notes of the Author*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [1.12] DINER, S., LOCHAK, G., AND F., S., Eds. *The Wave-Particle Dualism, A Tribute to Louis de Broglie on his 90th Brithday*. Kluwer Academic Publisher, 1984.
- [1.13] LANDAU, L., AND LIFSHITZ, E. *Mecánica*. Reverté, 1965. Segunda edición.
- [1.14] LANDAU, L., AND LIFSHITZ, E. *Teoría Clásica de los Campos*. Reverté, 1992. Segunda edición.

- [1.15] PERRIN, J. Waves and quanta, 1923. Nota de L. de Broglie presentada por Jean Perrin.
- [1.16] RINDLER, W. *Relativity: Special, General, and Cosmological*. Oxford University Press, 2001.

Capítulo 2

Las gotas caminantes

2.1. Inicios

Hace poco más de una década Couder, Protière, Fort y Boudaoud, mostraron que pequeñas gotas pueden rebotar *indefinidamente*¹ sobre una celda vibrante. Lo sorprendente del experimento es que las gotas muestran interacciones no locales semejantes al comportamiento cuántico.

Las gotas pueden desplazarse en línea recta, atraerse, repelerse, orbitar mutuamente, y el punto principal: presentan comportamientos análogos a los exhibidos en la difracción por una y dos rendijas, al efecto túnel y a la cuantización de los niveles de energía. Todo a escala macroscópica.

El dispositivo experimental se puede apreciar en la figura 2.1. Consta de una charola colocada sobre un vibrador vertical. La charola contiene aceite de silicón. Cuando ésta se somete a una oscilación vertical de cierta amplitud se forma un patrón de ondas estacionarias sobre la superficie. Estas ondas son conocidas como ondas de Faraday (fig. 2.2), y se presentan, en general, cuando una celda que contiene algún fluido se hace vibrar paraméricamente en forma sinusoidal. A esta vibración se le conoce como forzamiento paramétrico, ya que la superficie líquida se ve afectada por una “gravedad efectiva” que es igual a la suma de la aceleración paramétrica y el valor de g . Si la aceleración paramétrica es de la forma $\gamma = \gamma_m \cos \omega_0 t$, las ondas de Faraday se observan a partir un valor límite de γ_F llamado el umbral de Faraday, es decir, sobre la superficie se forma un patrón de ondas estacionarias para $\gamma_m > \gamma_F$; debajo de γ_F la superficie aún es plana. Las ondas de Faraday tiene la propiedad de ser un sub-harmónico de la vibración vertical, pues poseen una frecuencia que es igual a la mitad de la frecuencia de la vibración.

El grupo de Couder hace acelerar sinusoidalmente cerca, pero debajo del umbral de Faraday, a la charola con aceite de silicón, luego pican la superficie con aguja de diámetro adecuado para sacar una gota de la superficie –según el diámetro de la aguja es el diámetro de la gota–. La gota en lugar de mezclarse con el aceite a su caída, comienza a rebotar sobre la superficie. Según los autores del experimento, la coalescencia se evita por la capa de aire que existe entre la gota y la superficie. A pesar de que γ_m está debajo de γ_F , el rebote de la gota resulta ser también un sub-harmónico de la vibración horizontal, pues choca con la superficie líquida solamente una vez en dos periodos de la oscilación (fig. 2.3). La

¹Rebotan días enteros, que para fines prácticos se considera indefinidamente.

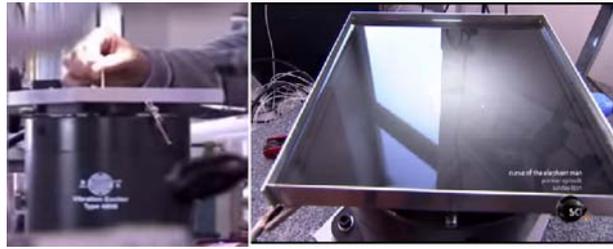


Figura 2.1: Dispositivo experimental para producir gotas caminantes

onda generada sobre la superficie debido al choque resulta ser una “onda de Faraday”, es decir, una onda que tiene una frecuencia igual a un medio de la frecuencia de la oscilación. Bajo ciertos valores de γ_m esta onda es fuertemente amortiguada, sin embargo a partir de un cierto valor característico γ_W las ondas emitidas en rebotes anteriores “sobreviven” hasta rebotes posteriores, existe un acoplamiento entre las gotas y su onda —que en realidad es la superposición de las ondas anteriores— de tal forma que la gota comienza a “caminar”, es decir, se desplaza horizontalmente a velocidad V_W constante, siempre acompañada por su onda. Es evidente el parecido entre estos experimentos y las ideas de de Broglie, en la teoría de la onda piloto. Ya que los comportamientos también son semejantes, como se verá adelante, es importante remarcar los hechos que puedan sugerir que sucede físicamente “con de Broglie”. En resumen, el régimen de la *gota caminante*, está entre $\gamma_W \leq \gamma_m < \gamma_F$.

No obstante que el experimento se aprecia muy sencillo, las condiciones bajo las que se realiza son bastante específicas. Debe existir un acoplamiento gota-vibración vertical, onda vibración vertical y gota-onda. Aquí, tan pronto, ya tenemos el primer punto; este acoplamiento es equivalente al acoplamiento de la onda fase con el fenómeno periódico interno, la armonía de fases. Si la equivalencia es verdadera, la onda que rodea a la gota debe contener la información dinámica de ésta; debe ser su onda guía. En efecto, en el acoplamiento gota-onda lo que sucede es que la gota cae sistemáticamente delante del frente de las ondas emitidas anteriormente, y el choque le cede impulso horizontal (fig. 2.5). De manera que si la onda se deforma, la trayectoria de la gota se modificará también. Junto al primer punto tenemos el segundo, la vibración de la charola (mejor dicho, el rebote de la gota debido a la vibración de la charola) es el equivalente al reloj interno de las partículas. No está de más decir que sin la vibración de la charola no hay gota caminante; así como sin el reloj interno en las partículas no hay onda guía. Sin embargo, en el caso macroscópico es evidente que el fenómeno periódico interno es una vibración “común y corriente”, ¿podemos, quizá aun con temor, contemplar lo mismo en el caso de de Broglie?... que sean las gotas las que den la respuesta.

La velocidad de la onda incrementa de la forma $V_W \propto (\gamma_m - \gamma_W)^{1/2}$, sin embargo la relación no se cumple para todo el intervalo (γ_W, γ_F) , muy cerca de γ_F la velocidad se satura a casi un décimo de la velocidad de fase de la onda de Faraday. Al superar γ_F , el patrón de ondas estacionarias se forma sobre la superficie y la gota se mezcla con el aceite de la charola.

La onda de la gota se amortigua en un tiempo típico τ , el cual diverge cerca del umbral de Faraday como $\tau \propto |\gamma_m - \gamma_m^F|^{-1}$. A partir del valor de τ se pueden definir dos tipos de “memoria”. Lejos del umbral de Faraday τ toma valores pequeños, las ondas son

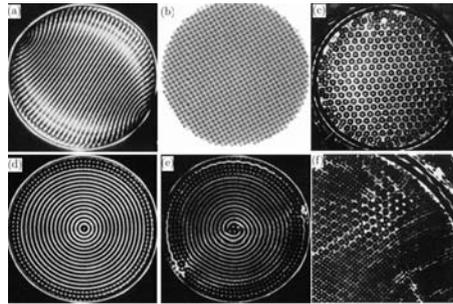


Figura 2.2: Diversos patrones de ondas estacionarias, llamadas ondas de Faraday, pues fue él quien las describió por primera vez en 1831, pueden encontrarse sobre una charola vibrante que contenga algún fluido. No es posible, aún, determinar el patrón de ondas que se obtendrán dadas las condiciones a las que se realizará el experimento, ya que depende de diversos parámetros, como la viscosidad del fluido, densidad, tensión superficial, profundidad, etc. Lo que comúnmente se hace es encontrar una relación entre los parámetros del fluido y las ondas estacionarias. En la imagen, tomada de [2.14], puede observarse algunos patrones formados:(a) lineal, (b) cuadrado, (c) hexagonal, (d) circular concéntrico, (e) espiral, (f) coexistencia de cuadrado y hexagonal

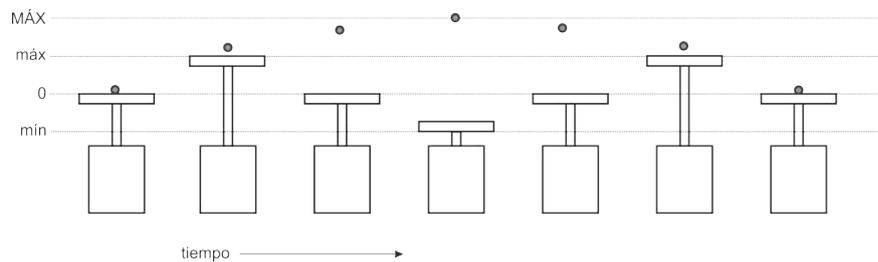


Figura 2.3: En el acoplamiento de la gota con la vibración de la charola, la gota toca una sola vez la superficie en dos periodos de vibración. Aquí, mín representa la posición más baja de la charola, máx la mas alta, y MÁX la posición más alta de la gota.

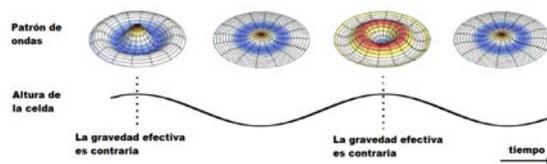


Figura 2.4: En el acoplamiento de la onda con la vibración vertical cuando la cresta de la onda está en su punto más alto, la charola comienza a ser acelerada hacia abajo, pronunciando la amplitud de la onda. Tomada de [2.3]

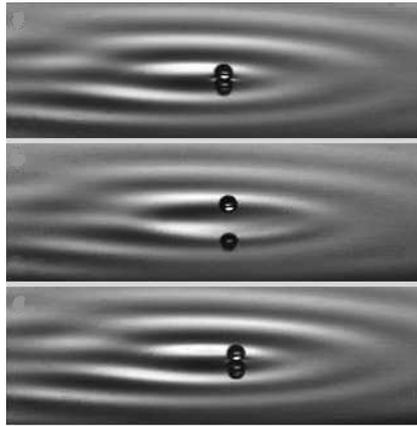


Figura 2.5: Movimiento horizontal de las gotas, debido a la interacción con la onda de Faraday producida por el rebote de la gota con la superficie líquida. La imagen se ha tomado de [2.4]

fuertemente amortiguadas, entonces la información de varios choques anteriores se pierde. A esto se le llama el régimen de memoria de corto plazo. Cerca del umbral de Faraday τ es muy grande y el paquete que rodea a la gota es la superposición de ondas emitidas en pasos lejanos, éste es el régimen de memoria de largo plazo.

2.2. Reflexión por una pared

Cuando una gota caminante se acerca a las paredes de las celdas, es reflejada, pero no como una bola billar, sino que se desvía gradualmente antes de llegar a la pared. La gota se aproxima a la pared a una distancia del orden de la longitud de onda de Faraday, sin embargo sabe de su existencia desde mucho antes; ya se dijo muchas veces: su onda es el resultado de la superposición de ondas que emitió en el pasado, que probablemente ya fueron reflejadas por la pared. Como mencionan los autores del experimento [2.5], la gota caminante evita obstáculos como lo hace el murciélago, con la diferencia que la gota, no tiene un cerebro para procesar la información, sino que sigue ciertas reglas, leyes físicas.

La figura 2.6 muestra una fotografía estroboscópica, se aprecia de manera clara que la gota no choca directamente con las paredes de la celda. Por medio de esta fotografía, Couder et al, han podido conocer la velocidad de la gota, ortogonal a la pared deflectora, V_{\perp} . Al graficar V_{\perp}^2 con respecto a $1/r$, la inversa de la distancia a la frontera, han encontrado comportamientos lineales cerca de la frontera, antes y después de la reflexión. Obtienen dos ramas, con pendientes diferentes; cada rama se ajusta por

$$V_{\perp}^2 = V_0^2 - \frac{B}{r}, \quad (2.1)$$

con $-B$, la pendiente de cada rama. Al extrapolar el ajuste al caso $1/r = 0$, es decir, a grandes distancias de la pared, la rama correspondiente al movimiento hacia la pared da una velocidad igual a la que se mide experimentalmente.

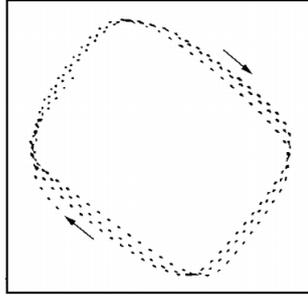


Figura 2.6: Fotografía estroboscópica de la trayectoria de la gota cuando es reflejada por las paredes de la celda [2.2].

2.2.1. Posible explicación al comportamiento observado

Brady y Anderson [2.2, 2.3] han sugerido una explicación al comportamiento observado. Parten de preguntarse ¿Qué forma tiene la ecuación para la fuerza que repele a la gota?. Dada la dependencia de V_{\perp}^2 según el inverso de la distancia, la fuerza debe ser inversamente proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, como en la fuerza de Coulomb. Guiados por esto último, Brady y Anderson señalan que la fuerza es análoga a la que experimentan burbujas de gas dentro un líquido cuando se aplica una vibración ultrasónica. Con la vibración, las burbujas se expanden y se contraen, generando un flujo radial oscilatorio. En el punto equidistante a dos burbujas, los flujos se suman y la presión disminuye, generando una atracción cuyo valor es

$$F = -\rho \frac{Q_1 Q_2}{4\pi r^2}, \quad (2.2)$$

donde Q_1 y Q_2 son los flujos generados por cada burbuja. La fuerza de atracción hace que las burbujas se unan y suban a la superficie.

La ecuación (2.2), puede reescribirse de la forma

$$F = \alpha \frac{\mathfrak{b}c}{r^2}, \quad (2.3)$$

donde α y \mathfrak{b} son constantes que dependen del experimento. Es importante remarcar que el valor de \mathfrak{b} es

$$\mathfrak{b} = \frac{mc^2}{\omega}, \quad (2.4)$$

donde $m = \frac{1}{2}m_b$ es la masa inercial desplazada por las burbujas, que es aproximadamente igual a un medio de la masa desplazada por su volumen, m_b .

La ecuación para la fuerza descrita, es notablemente parecida a la fuerza de repulsión entre electrones

$$F = \alpha \frac{\hbar c}{r^2}, \quad (2.5)$$

con α la constante de estructura fina y

$$\hbar = \frac{mc^2}{\omega}, \quad (2.6)$$

hasta en la definición de \mathfrak{b} y \hbar , y en que ambas son constantes de movimiento —en el caso de las burbujas, una vez fija las condiciones del líquido—. Las diferencias, por supuesto,

tampoco faltan; en el primer caso la masa es la masa desplazada por la burbuja (la burbuja en sí no tiene masa), y en el segundo es la masa del electrón.

Estas fórmulas se mantienen para el caso de las gotas caminante; el flujo es el generado por el rebote y se refuerza por los rebotes sucesivos, generando una fuerza análoga a (2.2), con signo contrario y un factor extra debido al refuerzo; también hay que remarcar que la definición de m es ahora la masa inercial que arrastra la onda, esto sugiere que el momento que adquiere la gota es el momento que porta la onda. Otro punto, puede suceder que la partícula, en la teoría de de Broglie, adquiera momento directamente de su onda guía; por eso el momento de la partícula se escribe en términos ondulatorios. La hipótesis es buena, ajusta la dependencia de V_{\perp}^2 con respecto a $1/r$. Por ejemplo, cuando la frecuencia de rebote de la gota es de 25 Hz y la gota tiene un radio de 0.35 mm, un factor extra aproximadamente 5 en la ecuación (2.2), genera la rama superior en la gráfica de V_{\perp}^2 .

2.3. Órbitas cuantizadas

En otro experimento el grupo de Couder se guió en la similitud entre de las ecuaciones del electromagnetismo y la mecánica de fluidos. La fuerza asociada a una carga q moviéndose a velocidad \vec{V} en un campo magnético homogéneo \vec{B} es

$$\vec{F}_B = q \left(\vec{V} \times \vec{B} \right).$$

Y en un sistema que rota a velocidad Ω , la fuerza de Coriolis que experimenta una masa m a velocidad \vec{V} es

$$\vec{F}_{\Omega} = -m \left(\vec{V} \times 2\Omega \right).$$

Clásicamente, ambas fuerzas generan movimientos orbitantes en planos ortogonales a \vec{B} o $\vec{\Omega}$. En campos magnéticos las órbitas tiene un radio (radio de Larmor)

$$\rho_L = \frac{mv}{qB} \quad (2.7)$$

y un periodo (de Larmor) $\tau = m/qB$. Por su parte, en un sistema rotante una partícula se mueve sobre un círculo de radio (de Coriolis)

$$R_C = \frac{V}{2\Omega}, \quad (2.8)$$

con un periodo (de Coriolis) $T_C = 1/2\Omega$. El factor 2Ω se llama vorticidad y se debe a la rotación del sistema.

En el nuevo experimento la celda, ahora circular, gira con velocidad angular Ω en torno a su centro. Entonces la celda vibra verticalmente y rota. El sistema se sintoniza cerca del inicio de la inestabilidad de Faraday. Si no gira se tiene una gota caminante común. Cuando gira, la gota experimenta una fuerza de Coriolis y el patrón de ondas se curva. En el marco del laboratorio, la gota describe una trayectoria epicicloidal, y en el marco que rota junto al sistema la trayectoria es una órbita circular de radio R y velocidad angular Ω_R^{exp} . La velocidad de la gota se mantiene cercana a V_W aunque la velocidad de rotación aumente. Sin embargo, el radio R de la órbita decrece. Correspondientes a la memoria de corto y largo plazo existen dos comportamientos.

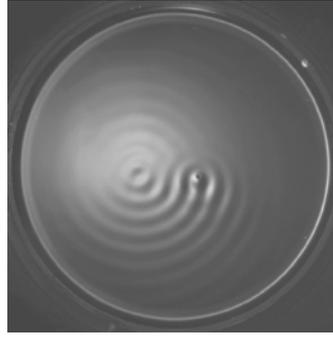


Figura 2.7: Efecto de la fuerza de Coriolis sobre la gota caminante. Tomado de [2.16]

El primero (memoria de corto plazo): la gota se mueve sobre una órbita cuyo radio se ajusta bien por

$$R_C^{\text{exp}} = a \frac{V_W}{2\Omega}, \quad (2.9)$$

donde a es una constante que depende de las propiedades físicas del aceite.

El segundo (memoria de largo plazo): conforme Ω incrementa, el radio de la órbita sufre abruptas transiciones entre sucesivas mesetas inclinadas, fig 2.12, a la vez que la velocidad de la gota disminuye. En cada meseta, el campo de la onda exhibe una coherencia global, ver figura 2.7, que excede el tamaño de la órbita.

Siguiendo la analogía con el campo magnético, y notando que cuando se cuantiza la trayectoria de una carga en un campo \vec{B} por los niveles llamados de Landau, surgen radios de Larmor discretizados, cuyos valores son

$$\frac{\rho_n}{\lambda_{dB}} = \sqrt{1/\pi} \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{m}{qB} \frac{V}{\lambda_{dB}}}, \quad (2.10)$$

donde λ_{dB} es la longitud de onda de de Broglie. Y las órbitas de Landau coinciden con las clásicas cuando:

$$\rho_n = \frac{1}{\pi} \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda_{dB}. \quad (2.11)$$

A continuación Couder y su grupo dan un paso fundamental; asumen que la longitud de onda de de Broglie juega el rol de la longitud de onda de Faraday y ajustan la dependencia de los radios por

$$\frac{R_n}{\lambda_F} = b \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2\Omega} \frac{V_W}{\lambda_F}}, \quad (2.12)$$

encontrando un notable ajuste, como se puede ver en la figura 2.8. Más aun, las órbitas continuas coinciden con las cuánticas cuando

$$R_n^0 = \frac{b^2}{a} \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda_F \quad (2.13)$$

Este experimento muestra que la analogía entre las gotas y el mundo cuántico es bastante fuerte, pues la onda que rodea a la gota es la que confiere la dinámica a la partícula, y su longitud de onda juega el mismo papel de la longitud de onda de de Broglie, en ecuaciones semejantes. Mismo fenómeno, mismas ecuaciones.

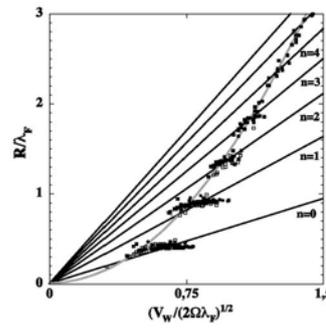


Figura 2.8: Los radios resultan “cuantizados”. Sólo toma valores dentro de la meseta de puntos, que muestran saltos abruptos. Las líneas rectas son los ajustes por (2.12). Tomado de [2.16]

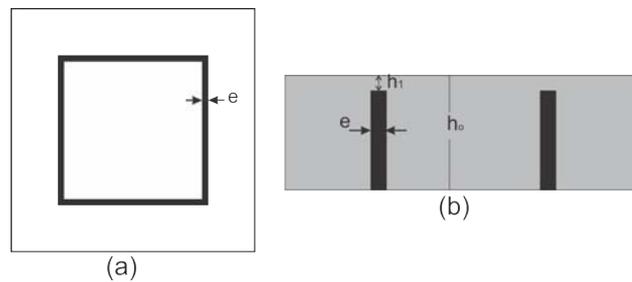


Figura 2.9: El pozo en el que es encerrada la gota tiene paredes cuyo grosor es e . La altura de la capa de aceite es h_0 y la altura de las paredes del pozo es h_1 .

2.4. Efecto túnel en gotas caminantes

Se ha visto que cuando una gota caminante se acerca a las paredes de la charola es repelida como si equidistante a la pared existiera una carga imaginaria de signo contrario. ¿Qué pasaría si la gota se acercara a la pared con mayor velocidad? Si las paredes de la celda son notablemente más altas que la amplitud de la onda, de manera que la onda no cruce las paredes, es decir, no se derrame líquido de la charola, pues la gota simplemente se va a acercar más y más, en el límite quizás choque con la pared y rebote, o lo más seguro, se mezcle con el líquido.

Con el fin de observar lo que realmente sucede cuando una gota caminante se encuentra inmersa en un pozo, el grupo de Couder ha encerrado una gota entre paredes ligeramente más bajas que la capa de aceite. La gota caminante puede subsistir en capas de aceite tanto de altura h_0 como de altura h_1 , donde h_0 es la altura de la capa de aceite desde el fondo de la charola y h_1 es la altura desde la parte superior de la pared (fig. 2.9). No obstante, los rangos de amplitud de oscilación γ_m son distintos en ambos casos. Si el inicio para la gota caminante en la capa h_0 es $\gamma_W(h_0)$ y el inicio de la gota caminante en la capa h_1 es $\gamma_W(h_1) - \gamma_W(h_0)$ es menor que $\gamma_W(h_1)$ cuando $h_0 < h_1$ — entonces la gota sólo puede existir dentro del pozo. Al menos eso es lo que debería suceder.

Cuando la pared es “infinitamente” ancha, por ejemplo que se extienda hasta las paredes de la celda, entonces el patrón se amortigua exponencialmente, y la gota se mueve como en la figura 2.6. ¿Qué pasa si la pared es lo suficientemente delgada, de tal forma que la onda no se amortigüe y salga del pozo? por ejemplo como en la figura 2.10. Lo que

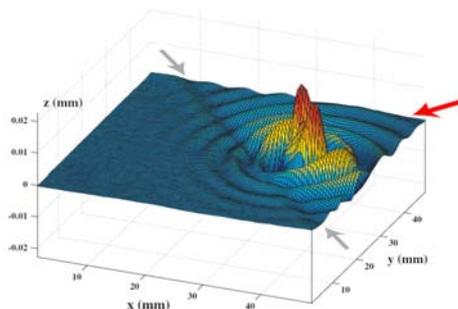


Figura 2.10: Patrón de ondas que se observa cuando la gota se acerca a la pared. La flecha roja muestra la dirección de la gota y las flechas grises señalan la ubicación de la pared. La gota no cruza la pared, pero su onda sí, aunque tanto su amplitud como el tiempo en que se amortigua cae rápidamente. Tomado de [2.8]

sucede es que la onda transmitida tiene menor longitud de onda y menor amplitud. Es una onda más débil, pero que sí influye en la trayectoria de la gota. La cual se vuelve más compleja en cada rebote hasta que algunas veces logra incidir normal a la pared y sale del pozo.

La figura 2.11 muestra las trayectorias de una gota dependiendo la anchura de las paredes del pozo o de la velocidad de la gota. Lo que se observa es que entre más delgada sea la anchura, o entre más veloz sea la gota, más oportunidades tiene de salir del pozo. Si se colocan n gotas en el pozo, y si cada una sale después de N rebotes —en general distintos en cada paso— entonces la probabilidad de salir del pozo, $P = 1/\langle N \rangle$, aumenta conforme aumenta la velocidad de la gota en forma exponencial, según se aprecia en la figura 2.12a. Por el contrario P disminuye, también exponencialmente, conforme el grosor de las paredes aumenta, fig. 2.12b.

Para conocer la dependencia que tiene la probabilidad de salir con respecto al ángulo de incidencia con la pared, el grupo de Couder ha realizado el experimento acorralando totalmente una gota en una región en forma de rombo, y en la diagonal menor han colocado una pequeña pared que permite el traspaso de la gota. Después de realizar n veces el experimento, el escape de la gota —de una mitad del rombo a la otra— sigue siendo aleatorio, y el comportamiento de la probabilidad sigue comportándose como en 2.12. Es necesario remarcar que en esta geometría la incidencia de la gota sobre la pared es siempre normal. Lo que si se nota es que algunas veces —aleatorio— la gota viaja desde el vértice del rombo hasta la pared en línea recta, es en ese caso cuando eventualmente la gota cruza la barrera. Puede decirse, la gota cruza la barrera cuando el momento que le cede su onda siempre tiene la misma dirección.

Este experimento es el análogo al tunelamiento de partículas en la mecánica cuántica. Sin embargo, emplear la palabra tunelamiento, o efecto túnel, es totalmente innecesario y quizás sin sentido en este caso, porque lo que realmente hace la gota es saltar la pared del pozo gracias a la energía que le cede su onda. No hay nada extraño aquí. No es cierto que no tiene la energía necesaria para saltar la pared; en general no lo tiene, pero en casos especiales el acoplamiento con su onda y con la vibración vertical es tal que la energía final de la gota es mayor que la necesaria para escapar.

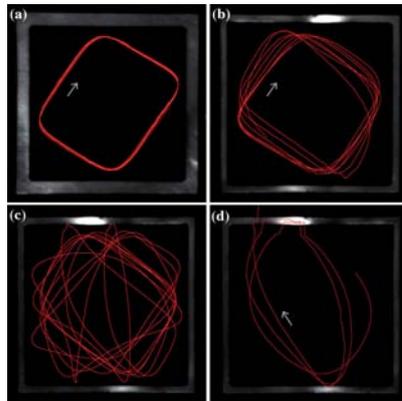


Figura 2.11: (a) Trayectoria que sigue una gota encerrada en un pozo de paredes infinitas. (b) Si la pared se vuelve finita pare lo suficientemente ancha para que la su onda no se trasmita, entonces la gota sólo modifica su trayectoria, se vuelve un poco caótica. Al hacer la pared más delgada, o al aumentar la velocidad de la gota, su trayectoria ya no sigue ningún patrón y algunas veces (muy escasas) puede salir del pozo. (c) Si la pared es muy delgada o si la velocidad de la gota es muy grande, entonces la gota sale fácilmente del pozo. Tomado de [2.8]

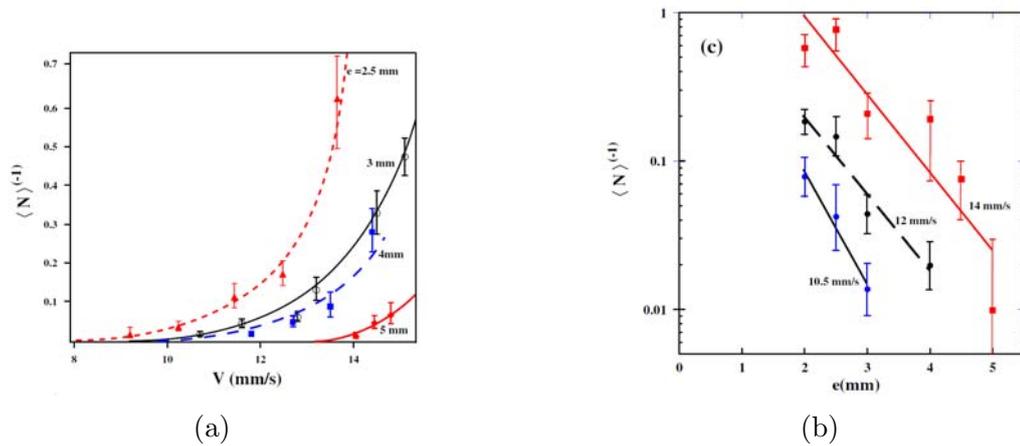


Figura 2.12: (a) Dependencia de la probabilidad de salir del pozo con respecto a la velocidad de la gota. La figura muestra comportamientos para distintos grosores de las paredes. Puede apreciarse la exactitud del ajuste. (b) La probabilidad de salir del pozo decae exponencialmente conforme el grosor de las paredes aumenta, el gráfico muestra un ajuste logarítmico. Tomado de [2.8]

2.5. La difracción por una y dos rendijas

¿Qué es lo que hizo famoso a de Broglie? sin duda no fue su teoría en sí, sino la predicción de la difracción de electrones (razón por la que ganó el premio Nobel). Pues resulta que las gotas caminantes también se difractan al pasar por una o dos rendijas; como en el caso del electrón, esto no quiere decir que las gotas se desparraman formando un patrón de difracción al chocar con una pantalla. Lo que sucede es que después de hacer pasar muchas gotas emerge un patrón de difracción en la distribución.

El grupo de Couder efectuó un bonito experimento de difracción, en el cual las rendijas se forman con tiras de altura menor a la capa de aceite, fig. 2.13. Si las gotas van en dirección a las tiras, éstas rebotan como rebotan las gotas caminantes al encontrarse con paredes, sin contacto físico. Pero, si las gotas van en dirección de las rendijas, cruzan, comportándose caóticamente al encontrarse justo entre las tiras. No obstante, sus ondas se deforman y sufren como ondas que son, la difracción.

Por las características macroscópicas del experimento se puede medir con suficiente exactitud el punto de incidencia de la gota cuando pasa a través de la rendija y el ángulo que forma su trayectoria con la recta horizontal de las tiras (fig. 2.16), y se ha observado que gotas bajo las mismas condiciones, se desvían en ángulos distintos. Sin embargo, al observar su comportamiento estadístico –125 realizaciones– se obtienen histogramas de su distribución con respecto al ángulo de desviación. Los picos del histograma se ajustan muy bien al patrón de amplitud de difracción de la onda que rodea a la gota, fig.2.14 y 2.15.

Para el caso de una rendija el ajuste se da por

$$f(\alpha) = A \left| \frac{\sin(\pi L \sin(\frac{\alpha}{\lambda_F}))}{\pi L \sin(\frac{\alpha}{\lambda_F})} \right|, \quad (2.14)$$

donde α es el ángulo de desviación definido en la figura 2.16.

Para el caso de dos rendijas los picos se determinan por

$$f(\alpha) = A \left| \frac{\sin\left(\pi L \sin \frac{\alpha}{\lambda_F}\right)}{\pi L \sin \frac{\alpha}{\lambda_F}} \cos\left(\pi d \sin \frac{\alpha}{\lambda_F}\right) \right|, \quad (2.15)$$

donde d es la distancia entre las partes centrales de las rendijas.

Es preciso remarcar que en el caso de la doble rendija la gota pasa únicamente por una de las rendijas, sólo su onda es la que interfiere con la dos. Esto es otro punto a favor de que las gotas son un buen modelo para las ideas de de Broglie, pues en ningún momento (ni siquiera tiene sentido) se dice que la gota se comporta como una onda, es la onda la que se difracta, y al deformarse afecta la dinámica de la partícula. Esto es el análogo a la equivalencia Maupertuis-Fermat, que es reminiscencia de la armonía de fases. Esto se refuerza con lo sucedido en el problema del “efecto tunel”, la trayectoria más probable de la gota es aquella donde el momento cedido por la onda va en la misma dirección. En el caso de la difracción corresponde a los rayos de la onda.

El grupo de Couder remarca una gran diferencia con la mecánica cuántica. Aquí el sistema es disipativo, sólo que la aceleración paramétrica vertical lo oculta. Habría que preguntarles ¿no era el átomo de hidrógeno un sistema disipativo antes de Bohr?.

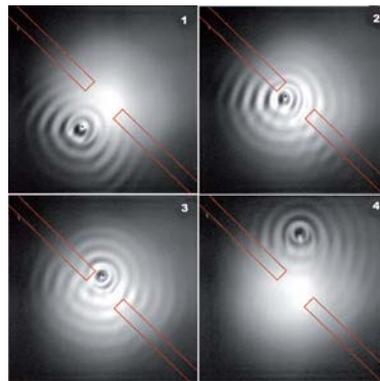


Figura 2.13: Difracción de una gota caminante por una rendija. La imagen 1 es antes de cruzar la rendija, y la 4 después del paso por la rendija, cuando la desviación ha sido efectuada. Imagen tomada de [2.5]

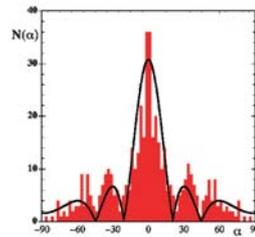


Figura 2.14: Histograma obtenido después de que pasan 125 gotas a través de las rendijas. Imagen tomada de [2.6]

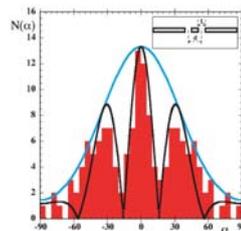


Figura 2.15: Histograma obtenido después de que 75 gotas pasan por la doble rendija. Imagen tomada de [2.6]

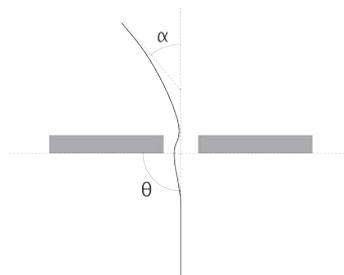


Figura 2.16: Trayectoria de una gota. Definición de α y θ .

Además dicen que en este experimento la trayectoria de la partícula, a pesar de ser caótica, puede apreciarse. Y en la mecánica cuántica la trayectoria es algo que no se considera. ¿No era este el objetivo de de Broglie, regresar el concepto de trayectoria a la física de las partículas microscópicas?

2.5.1. El modelo riguroso de las gotas caminantes

Describir con exactitud el acoplamiento de la gota con la onda es un problema difícil; se llega al punto en que se sabe que la teoría es buena, pero resulta prácticamente imposible de aplicar a un caso particular por lo complejo. Molaček y Bush han desarrollado un modelo (modelo MB) para las gotas caminantes que toma en cuenta, lo más posible, la interacción con la vibración vertical y con la onda generada. El resultado es un modelo engorroso, no muestra para nada la analogía con la mecánica cuántica, y sobre todo en nuestro caso, con la mecánica ondulatoria, que se ha apreciado en los experimentos; sólo se aplica para modelar la gota caminante “libre”; puede incluso predecir el inicio del régimen caminante, es decir el valor de γ_W . Más abajo se describirá otro modelo, más superficial, que se enfocan no en la vibración vertical, sino únicamente en la onda que genera. De manera paradójica, este último modelo conduce a ecuaciones semejantes a las de la mecánica cuántica. Que también son semejantes a las ecuaciones de la onda continua en la teoría de la onda piloto.

Se dice paradójicamente porque se acepta que las ecuaciones de la mecánica cuántica describen complementamente a las partículas, y con las gotas caminantes es evidente que sólo es una aproximación. A continuación se citan las ecuaciones que describen la dinámica vertical y horizontal de la gota y la superficie de la onda en el modelo MB.

Definiendo z como la posición vertical de la gota, — de manera que si $z = 0$ entonces la gota está en contacto con la superficie— se tiene que

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -mg^*(t), \quad \text{cuando la gota está en vuelo, y} \quad (2.16a)$$

$$\left(1 + \frac{c_3}{\ln^2 \left| \frac{c_1 R_0}{z-h} \right|}\right) m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu R_0 c_2(\nu)}{3 \ln \left| \frac{c_1 R_0}{z-h} \right|} \left(\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial t}\right) + \frac{2\pi\sigma(z-h)}{\ln \left| \frac{c_1 R_0}{z-h} \right|} = -mg^*(t) \quad \text{en otro caso,} \quad (2.16b)$$

donde c_i son parámetros libres, μ es el coeficiente de viscosidad dinámico, R_0 es el radio, σ es la tensión superficial de la gota y $g^* = g + \gamma \sin(2\pi\nu_0 t)$ es la gravedad efectiva en el marco de celda.

La onda sobre la superficie se calcula por la superposición de los rebotes previos, es decir

$$h(x, t) = \sum_{n_1} N h_0(x, x_n, t, t_n), \quad (2.17)$$

donde h_0 es cada una de las ondas generadas anteriormente,

$$h_0(x, x_n, t, t_n) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k_F R_0}{3k_F^2 R_0^2 + B_0} \frac{R_0 k_C^2 \mu_e^{1/2}}{\sigma} \left[\int F_N(t') \sin(\pi\nu t') \right] \quad (2.18)$$

$$\times \frac{H(t)}{\sqrt{t-t_n}} \exp \left[(\gamma/\gamma_F - 1) \frac{t-t_n}{T_d} \right] J_0(k_C(x-x_n)), \quad (2.19)$$

donde F_N es la fuerza de reacción que ejerce la superficie sobre la gota, y

$$x_n = \frac{\int_{t_C} F_N(t')x(t')dt'}{\int_{t_C} F_N(t')dt'}, \quad t_n = \frac{\int_{t_C} F_N(t')tdt'}{\int_{t_C} F_N(t')dt'} \quad (2.20)$$

el promedio pesado sobre F_N , de x y t , en el tiempo de contacto con la superficie, t_C .

Finalmente, la dinámica horizontal es ajusta a

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + D(t) \frac{\partial x}{\partial t} = -h_x F_n, \quad (2.21)$$

donde $D(t) = C\sqrt{\rho R_0/\sigma}F_N(t) + 6\pi R_0\mu_a$, que es el arrastre promedio de la gota sobre la superficie.

2.5.2. Notable analogía con la mecánica cuántica

El modelo de Brady y Anderson

El siguiente modelo, desarrollado por R. Brady y R. Anderson (modelo BA), es muy sencillo, porque sólo se centra en la onda generada por la gota. El razonamiento es el mismo que guió a de Broglie (equivalencia Maupertuis-Fermat): si una onda viaja con la gota, su dinámica está contenida en la propagación de la onda. El resultado sin duda es análogo al caso cuántico, no es posible decir la trayectoria que seguirá la gota, pero el modelo si puede decir en donde es más seguro encontrarla.

Claro está que la altura, h , sobre la superficie líquida debida a la onda está determinada por la ecuación

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0, \quad (2.22)$$

con c la velocidad de propagación de la onda. La solución, como se aprecia en la figura 2.5, debe tener simetría circular, por lo tanto:

$$h = -h_0 \cos(\omega_0 t) J_0 \left(\frac{\omega_0 r}{c} \right). \quad (2.23)$$

donde h_0 es la altura máxima de la cresta, y J_0 es la función de Bessel de primer especie, de orden cero.

Para que la onda se desplace con la gota, como se aprecia en los experimentos, es posible aplicar un boost a la solución (2.23). Dicho “boost hidrodinámico” es análogo al boost de Lorentz

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (2.24)$$

$$y' = y \quad (2.25)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (2.26)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.27)$$

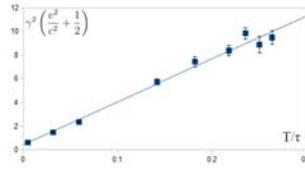


Figura 2.17: Comparación entre el modelo de Brady y Anderson y los experimentos de Couder et al. Imagen tomada de [2.2]

nuevamente c es la velocidad de propagación de la onda, y en este caso v es la velocidad con que el paquete de ondas se desplaza, $v < c$. Claramente se requiere sea igual a la velocidad de la gota.

Aplicado el boost, el ente onda-partícula se describe por

$$h' = \cos(\omega_0 t') J_0\left(\frac{\omega_0 r'}{c}\right), \quad r'^2 = x'^2 + y'^2. \quad (2.28)$$

Esta solución, al igual que en el caso relativista trae consigo una contracción de longitudes por un $1/\gamma$, y una dilatación del tiempo por un factor γ . Pero en el experimento la gota no se ve afectada por tales efectos, sólo por la aceleración paramétrica. Entonces hay que contrarrestarlos, cosa fácil, porque si $h'(x', y', t')$ satisface la ecuación de ondas, también lo hace $h = h'(\alpha x', \alpha y', \alpha t')$, y al elegir $\alpha = \gamma$, el problema se resuelve, y la onda asociada a la gota caminante resulta ser

$$h = -h_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\gamma^2 \omega_0 v}{c^2} \Delta x\right) J_0\left(\frac{\omega_0 r''}{c}\right). \quad (2.29)$$

Con fines de comparar el modelo, Brady y Anderson, han notado que las gotas satisfacen la relación

$$\gamma^2 \left(\frac{v^2}{c^2}\right) \propto T \quad (2.30)$$

donde T es el periodo de rebote de la gota. Al compararlo con los resultados experimentales obtienen el notable ajuste de la fig. 2.17

La difracción de gotas según el modelo BA

La difracción de las gotas caminantes bajo el modelo BA puede ser descrita por la función h . El término correspondiente a la función de Bessel sólo confiere la simetría circular que se aprecia en los experimentos, y al aplicar el boost su comportamiento es el mismo. Sin embargo, el término sinusoidal $\cos(-\omega_0 t)$ se transforma en una onda plana, y es la que se difracta al pasar por las rendijas. Recordemos que al aplicar el boost a $\psi = \cos(-\omega_0 t)$, suponiendo que se propaga en una dimensión, por simplicidad, se obtiene

$$\psi = \cos(-\omega_0 t'') = \cos\left[-\omega_0 \gamma^2 \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\right] = \cos\left[\frac{\omega_0 \gamma^2 v}{c^2} x - \omega_0 \gamma^2 t\right].$$

Escribirlo de la forma usual $\psi = \cos(kx - \omega t)$ implica

$$k = \frac{\omega_0 \gamma^2 v}{c^2} \quad \text{y} \quad \omega = \omega_0 \gamma^2, \quad (2.31)$$

entonces la longitud de onda de ψ es

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c^2}{\omega_0 \gamma^2 v} = \frac{2\pi \hbar}{p} = \frac{b}{p}, \quad (2.32)$$

donde $b = 2\pi \hbar$ y p es el momento de la onda. La ecuación 2.32 es idéntica a la longitud de onda de de Broglie, pero b en lugar de h . Además si se puede hablar de que la onda ψ guía a la gota; su difracción predice un primer mínimo de amplitud a 30° , y en los experimentos se encuentra entre 30° y 35° .

El paso a la ecuación tipo Schrödinger

De la ecuación (2.23) y (2.22) se encuentra que ψ satisface

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega_0 \psi, \quad (2.33)$$

cuando la gota es estacionaria. Ahora bien, la ecuación que debe satisfacer ψ cuando la gota se desplaza a velocidad v debe ser invariante bajo las transformaciones de Lorentz, como lo es (2.22). Esta ecuación, se sabe, debe ser una ecuación tipo Klein-Gordon, con el factor c igual a la velocidad de propagación de onda.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi = \omega_0^2 \psi. \quad (2.34)$$

Además puede definirse una “energía” E :

$$E = \hbar \omega = b \nu, \quad (2.35)$$

que implica las relaciones, junto con (2.31),

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \omega_0^2 \quad (2.36)$$

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4. \quad (2.37)$$

Retomando la ecuación (2.34), y proponiendo una solución “a bajas velocidades”, con respecto a c , de la forma

$$\psi = \exp(-i\omega t) \psi', \quad (2.38)$$

se obtiene

$$i\hbar \frac{\partial^2 \psi'}{\partial t^2} = -\frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla^2 \psi' + V \psi', \quad (2.39)$$

que tiene un claro parecido a la ecuación de Schrödinger; la única diferencia es la \hbar en lugar de la \hbar . Obtener una ecuación de continuidad para $\rho = |\psi'|^2$ es fácil, al escribir la ecuación (2.39) para $|\psi'|$ y definir la velocidad $\vec{v} = -i \frac{\hbar}{m} \frac{\nabla \psi}{\psi}$, y comparar con la ecuación de continuidad.

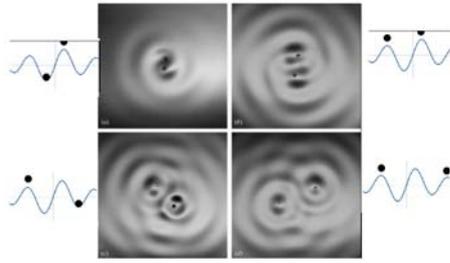


Figura 2.18: Las gotas pueden orbitar ya sea se encuentran en fase o antifase, dependiendo si caen en un valle o una cresta de la función J_1 .

2.6. Interacción de dos gotas

Cuando dos caminantes se encuentran sobre la misma celda inevitablemente interactúan. Sin embargo, la interacción no implica ningún contacto, sino sólo deflexión de las trayectorias horizontales. La interacción se da a través de sus ondas.

La mínima distancia de acercamiento entre las gotas, determina si las gotas se atraen o se repelen. Cuando se atraen, se comportan como un sistema binario de estrellas, que orbitan alrededor de su centro de masa. Los diámetros de las órbitas toman valores discretos distintos dependiendo de la frecuencia de vibración. Los diámetros de los órbitas son ligeramente más pequeños que n veces la longitud de onda de Faraday.

$$d_n^{\text{orb}} = (n - \epsilon) \lambda_F, \quad (2.40)$$

con n entero, cuando las gotas rebotan en fase, y

$$d_n^{\text{orb}} = \left(n + \frac{1}{2} - \epsilon\right) \lambda_F \quad (2.41)$$

cuando rebotan en antifase. Si d_n no toma ninguno de los valores anteriores, las gotas se repelen.

2.6.1. Explicación por medio del modelo BA

Para describir la interacción de dos gotas, Brady y Anderson han considerado soluciones en coordenadas circulares, (r, θ) , de la ecuación de onda, del tipo

$$h_m = h_0 \cos(\omega_0 t - m\theta) J_m(k_r r), \quad (2.42)$$

donde J_m es una función de Bessel de primer tipo, de orden m , y $\omega_0 = ck_r$. Entonces el patrón de ondas observados se puede aproximar por

$$h \approx h_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\Omega t - \theta) J_1(k_r r). \quad (2.43)$$

Dependiendo si el rebote es en fase o antifase, las gotas aterrizan en las crestas, o en una cresta y una depresión de la función J_1 , respectivamente, como se ve en la figura 2.18.

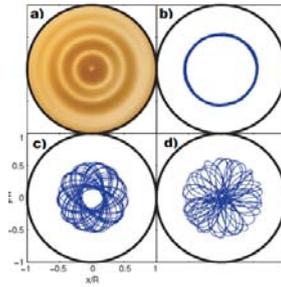


Figura 2.19: a) Onda de Faraday (estacionaria) que se forma arriba del umbral de Faraday γ_F . b) Trayectoria de la gota en el régimen de memoria de corto plazo. c), d) Conforme la memoria de trayectoria crece, la trayectoria de la gota se vuelve epicicloidal cuyo radio del círculo directriz decrece. Imagen tomada de [2.12]

2.7. El corral circular

El grupo de Couder ha acorralado la gota caminante en un pozo circular, y han seguido su trayectoria durante mucho tiempo. Si la gota se encuentra en el régimen de memoria de corto plazo, su trayectoria es simplemente un círculo “de cierto grosor”, conforme el sistema se sintoniza al régimen de memoria de largo plazo su trayectoria se vuelve epicicloidal, de tal manera que el radio de la circunferencia directriz disminuye conforme la memoria crece (fig. 2.19). Una vez que el sistema alcanza la mayor memoria de trayectoria, el comportamiento es prácticamente errático y azaroso —tanto la trayectoria como la velocidad—, y su onda se deforma totalmente (fig. 2.20). Sin embargo, análogo al caso de la difracción por rendijas, un patrón de distribución de posiciones emerge después de seguir la gota por mucho tiempo. Un hecho importante es que la posición de la gota con respecto al centro del corral, es decir, su posición radial, puede ajustarse por la función $|J_0(k_F r)|$, con $k_F = 2\pi/\lambda_F$. La importancia del ajuste radica en el hecho que la amplitud del patrón de distribución puede encontrarse por medio de una ecuación diferencial lineal. En este caso la ecuación de ondas en una geometría circular, y su solución es un modo de la cavidad, justo como sucede con el electrón en un corral cuántico. Pero este ajuste sólo nos dice la posición en la que es más probable encontrar a la gota, nada nos puede decir de su trayectoria; se observan anillos de mayor amplitud, pero eso no significa que la gota camina formando círculos. Lo que sucede es que la velocidad de las gotas, que está correlacionada con la posición, disminuye en ciertos radios, los radios de mayor amplitud de probabilidad; entonces la gota pasa más tiempo en la vecindad de esos radios, pero no necesariamente gira en círculos (fig. 2.21).

Es evidente, en este experimento, que el ajuste lineal sólo describe el comportamiento estadístico. Es decir, una teoría ondulatoria lineal para la gota es incompleta. No puede describir las trayectorias, sin embargo eso no significa que no existe, están ahí, pero son muy complejas y difíciles de calcular. La misma onda que genera la gota ya no es una simple onda circular.

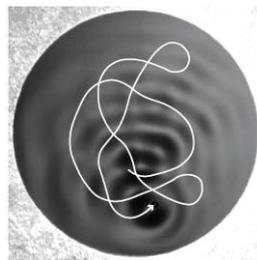


Figura 2.20: Cuando el sistema alcanza la máxima memoria de largo plazo, el comportamiento es errático, y la onda se deforma totalmente. Imagen tomada de [2.12]

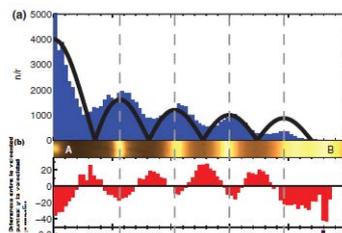


Figura 2.21: a) La posición de la partícula con respecto al centro del corral puede ajustarse por una función que es solución de una ecuación diferencial lineal, la ecuación de ondas en una región circular. b) Se puede apreciar que la velocidad de la gota está correlacionada con su posición, al parecer la gota gusta pasar más tiempo en radios que corresponden con los máximos de probabilidad de amplitud, y aborrece ciertos radios que al final corresponden a los de menor amplitud. Imagen tomada de [2.12]

2.8. Las gotas caminantes y la teoría de de Broglie

Antes de 1900 nadie se hubiera sorprendido de los experimentos realizados por el grupo de Couder — a no ser del espectáculo de ver gotitas saltando sobre una superficie líquida, y ejecutando curiosos comportamientos—. Nada tiene de raro que en la interacción de una partícula con una onda, la partícula adquiera propiedades de la onda —el término dualidad es innecesario—. Dado que la mecánica cuántica se cimentó sobre bases poco intuitivas, al hablar de comportamiento ondulatorio, se acepta implícitamente que se habla de partículas microscópicas y que la física de éstas es radicalmente distinta a la de las partículas macroscópicas.

Después de los experimentos de Couder podemos decir que ésto no es meramente cierto. Nadie niega que ninguna h aparece con las gotas caminantes, ni ningún otra constante universal; pero el comportamiento ondulatorio estadístico y la cuantización espacial, son claramente una muestra que los fenómenos cuánticos son sólo el resultado del acoplamiento sostenido de un fenómeno ondulatorio con partículas. Esto sin duda nos sugiere que la onda de de Broglie es real, y es el reflejo de que las partículas materiales están constantemente interactuando con algún tipo de onda. Ahora la cuestión está en saber que tipo de onda es —esto es diferente de decir que la onda de de Broglie es de naturaleza desconocida, porque esto último implica que ni siquiera se sabe si es una onda real, o es sólo es ficticia.

El tipo de onda que debe considerarse salta a la vista rápidamente si se recuerda que la dinámica que queremos debe estar descrita en el espacio vacío —desprovisto no sólo de materia, sino también de energía—. Las únicas ondas, hasta ahora, que conocemos se

propagan en el vacío son las electromagnéticas. El camino que hay de aquí a obtener los resultados de de Broglie parece aún bastante lejano. Es precisamente lo que se abordará en el siguiente capítulo. Se puede dar un paso más si notamos que el estado base de la gota caminante, en el régimen $\gamma_m < \gamma_W$, es decir, cuando la gota rebota sobre el mismo punto, corresponde con el estado base de las partículas en mecánica cuántica. Ambos tienen energía de punto cero, pero en el primer caso se debe a la vibración de la charola, y en el segundo se dice que porque existe el campo de vacío, el campo de punto cero. Puestas así las cosas, es claro que las ondas electromagnéticas que buscamos deben corresponder con este campo de fondo. No tememos guiarnos por la analogía, porque como hemos visto, no sólo corresponden a las mismas observaciones experimentales, sino a las mismas ecuaciones, cuyas variables juegan el mismo rol.

A pesar de lo anterior se verá que las primeras ideas de considerar ondas electromagnéticas no fueron tan directas como aquí parece. Esto se debe a que se creía que el comportamiento cuántico era único de las partículas microscópicas. Como se verá en el siguiente capítulo, al igual que las gotas caminantes, un acoplamiento específico de ondas con partículas debe acontecer para que se genere el comportamiento cuántico.

Antes de continuar es preciso considerar la siguiente cuestión: para el caso del electrón, y en general de las partículas cargadas, considerar la interacción con ondas electromagnéticas parece sensato, pero ¿qué pasa con las partículas neutras? En realidad ésta es una pregunta ya hecha por otros, y la respuesta tentativa considera el desarrollo dipolar de las partículas neutras.

Finalmente, por lo dicho arriba, podría decirse que de existir otros tipos de ondas que se propaguen en el vacío — por ejemplo, si se demuestra que existen las ondas gravitacionales — un nuevo tipo de comportamiento ondulatorio de la materia podría ser observado. Por supuesto, esto es sólo una especulación. Lo más sensato es probar con ondas electromagnéticas y ver que las cosas encajan.

Bibliografía

- [2.1] BLANCHETTE, F., AND BIGIONI, T. Partial coalescence of drops at liquid interface. *Nature Publishing Group* (2006).
- [2.2] BRADY, R., AND ANDERSON, R. Analogue physics, a student's guide to waves in an ideal fluid. Notas no publicadas, versión 2013.
- [2.3] BRADY, R., AND ANDERSON, R. Why bouncing droplets are a pretty good model of quantum mechanics. *arXiv:1401.4356v1* (2014).
- [2.4] COUDER, Y., ET AL. Walking and orbiting droplets. *Nature* (2005).
- [2.5] COUDER, Y., ET AL. Walking droplets, a form of wave-particle duality at macroscopic scale? *Euro Physics News* (2010).
- [2.6] COUDER, Y., AND FORT, E. Single-particle diffraction and interference at a macroscopic scale. *Phys. Rev. Lett.* (2006).
- [2.7] EDDI, A., ET AL. Information stores in faradays waves: the origin if a path memory. *J. Fluid Mech.* (2011).
- [2.8] EDDI, A., FORT, E., ET AL. Unpredictable tunneling of a classical wave-particle association. *Phys. Rev. Lett.* (2009).
- [2.9] FORT, E., AND COUDER, Y. Trajectory eigenmodes of an orbitating wave source.
- [2.10] FORT, E., ET AL. Path-memory induced quantization of classical orbits. *PNAS* (2010).
- [2.11] HARRIS, D. M., ET AL. Wavelike statistics from pilot-wave dynamics in a circular corral. *Phys. Rev. Lett.* (2013).
- [2.12] HARRIS M., D., AND BUSH W., J. W. The pilot-wave dynamics of walking droplets. *Physics of fluids, AIP* (2013).
- [2.13] MOLÁČEK, J., AND BUSH, J. W. M. Drops walking on a vibrating bath: towards a hydrodynamic pilot-wave theory. *J. Fluid Mech.* (2013).
- [2.14] ORPHEE, J., ET AL. Faraday waves, one dimensional study, 2011.
- [2.15] OZA U., A., ET AL. A trajectory equation for walking droplets: hydrodynamic pilot-wave theory. *J. Fluid Mech.* (2013).

- [2.16] OZA U., A., ET AL. Pilot-wave dynamics in a rotating frame: on the emergence of orbital quantization. *J. Fluid Mech.* (2014).

Capítulo 3

Interpretación realista de la teoría de de Broglie

En el primer capítulo se mencionó varias veces que la búsqueda de la naturaleza física de la onda de de Broglie debe encaminarse más allá de la hipótesis de Planck. La mecánica ondulatoria eleva el fenómeno periódico interno a hipótesis fundamental, pero no explica ni que vibra, ni porqué. No obstante, conduce a la cuantización y al comportamiento ondulatorio de la materia. En este capítulo veremos una forma de abordar el problema desde una interpretación realista.

En el segundo capítulo se mencionó que el comportamiento ondulatorio podría surgir del acoplamiento entre un campo de fondo y la materia que se encuentra en interacción con éste; sólo se conjetura, en vista de los experimentos de Couder y las ecuaciones análogas a las de la mecánica cuántica. Se ha mencionado que el campo de fondo que sugieren los experimentos de la gota es el campo de punto cero, que se considera un campo virtual en la mecánica cuántica. No sería pérdida de tiempo probar esta hipótesis y elevar las fluctuaciones del vacío a un fenómeno real y buscar si éste puede explicar no sólo al comportamiento ondulatorio de la materia, sino la cuantización de cantidades como la energía — la energía como una cantidad abstracta—. Bien, si todo es cierto esta hipótesis debe conllevar a la fórmula de Planck para el cuerpo negro, que es un pilar fundamental en la teoría de de Broglie. La idea ha sido probada con éxito dentro del marco de la teoría llamada la electrodinámica estocástica (EDE), a la vez superada por la electrodinámica estocástica lineal (EDEL); sin embargo, la existencia real del campo de fondo no fue intuida por medio de los experimentos de Couder, la EDEL ha sido desarrollada con mucha anterioridad.

Como se dijo en la introducción al primer capítulo, Planck se vio en la necesidad de postular que los osciladores que constituyen las paredes del cuerpo negro intercambian energía con la radiación interior sólo en múltiplos enteros del valor $h\nu$. Sin embargo encontraba esta idea inaceptable, oscura. Posteriormente propuso (1912) que la energía de los modos de oscilación podrían estar entre los intervalos continuos $[0, h\nu)$, $[0, 2h\nu)$... $[0, nh\nu)$, etc, y que el estado de equilibrio podría alcanzarse por transiciones entre esos intervalos. Notemos que la energía promedio del primer intervalo es $\frac{1}{2}h\nu$, el del segundo es $h\nu + \frac{1}{2}h\nu$, etc; es decir, la ecuación (1.8) debe desplazarse bajo la nueva hipótesis por $\frac{1}{2}h\nu$:

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} + \frac{1}{2}h\nu. \quad (3.1)$$

Esta ecuación casi idéntica a la del primer capítulo, conduce a un hecho importante, a temperatura $T = 0$, cuando se supone que cesa todo movimiento, existe un remanente de energía: la energía de punto cero (epc). Al inicio la epc sólo se ligó a la energía de los osciladores, no a los modos del campo de radiación. Nernst (1916) argumentó que el término extra debía incluirse en ambos casos, porque no existe diferencia entre los modos de oscilación de los osciladores y del campo si al interactuar alcanzan el equilibrio térmico. Entonces dijo, debe existir un campo de fondo electromagnético fluctuante, el campo de punto cero, que llena el espacio vacío. Nernst consideró que esta campo podría ser el responsable de la estabilidad atómica; el electrón si radía, pero el cpc le cede la energía perdida. En general sugirió que el cpc podría ser el responsable de la cuantización.

3.1. La estocasticidad en la mecánica cuántica

Poco después de la publicación de la ecuación de Schrödinger, saltó a la vista la afinidad de esta ecuación con la que describe el proceso de difusión en mecánica estocástica clásica —que describe procesos como el movimiento browniano—, la ecuación de Fokker-Planck. Posteriormente, R. Fürth mostró que el coeficiente de difusión, D , en la ecuación de Fokker-Planck, relativo al movimiento cuántico de una partícula de masa m debía ser escrito como $D = \hbar/(2m)$. Además notó que la restricción sobre la exactitud con que pueden ser medidas las posiciones x y las velocidades v debía mantenerse también en el caso cuántico. Entonces las respectivas incertidumbres Δx y Δv debían satisfacer la desigualdad $\Delta x \cdot \Delta v \geq D$, que es justamente la desigualdad de Heisenberg. Sobre estas bases, Fényes derivó la ecuación de Schrödinger dentro del marco matemático de los procesos estocásticos Brown-Marcovianos.

En 1966, E. Nelson desarrolla la mecánica estocástica y L. de la Peña (1969) la mecánica cuántica estocástica donde consideran la partícula como un sistema estocástico. Este tratamiento permite derivar la ecuación de Schrödinger bajo la interpretación de ensamble. Es decir, que la función de onda describe en realidad un ensamble de partículas. De ahí que la descripción no se refiera a la trayectoria de una partícula. A pesar de sus logros, estas teorías no permiten conocer que genera el comportamiento estocástico, ni permite entender sucesos como la cuantización de las órbitas atómicas.

3.2. La electrodinámica estocástica lineal

La electrodinámica estocástica lineal es el paso siguiente a la mecánica cuántica estocástica. La EDEL explica el comportamiento estocástico de un corpúsculo argumentando que éste interactúa con un campo de radiación estocástico (cpc) de fondo, que materializa el campo de punto cero cuántico. El cpc se considera que tiene una energía media $\frac{1}{2}\hbar\omega$ por modo normal, y densidad espectral $\hbar\omega^3/2\pi^2c^3$. La EDEL busca explicar el comportamiento cuántico como resultado de la interacción de la materia con el cpc.

La ecuación de movimiento de una partícula de masa m y carga e sujeta a un fuerza $\vec{f}(\vec{x})$ inmersa dentro del cpc está dada por la ecuación de Abraham-Lorentz,

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) + m\tau\dddot{\vec{x}} + e\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t). \quad (3.2)$$

donde $\tau = 2e^2/3mc^3$, y el término $m\tau\ddot{\vec{x}}$ considera la fuerza debida a la reacción de radiación. Los campos $\vec{E}(\vec{x}, t)$ y $\vec{B}(\vec{x}, t)$ son las componentes eléctricas y magnéticas del cpc, por lo tanto deben ser representadas por variables estocásticas. La ecuación (3.2) es una ecuación prácticamente irresoluble, razón por la que se considera la aproximación no relativista y la de onda larga; la primera consiste en despreciar la fuerza magnética en comparación con la eléctrica, la segunda considera que el campo eléctrico no varía espacialmente, porque los modos del campo que son relevantes en la dinámica de la partícula tienen longitud de onda mucho mayor que las dimensiones del movimiento. Bajo estas aproximación (3.2) se reescribe como

$$m\dot{\vec{x}} = \vec{p}, \quad \dot{\vec{p}} = \vec{f}(\vec{x}, t) + m\tau\ddot{\vec{x}} + e\vec{E}(t). \quad (3.3)$$

Al final de cuentas, resolver la ecuación anterior no nos da la verdadera trayectoria de la partícula, por que no conocemos las condiciones iniciales exactas de los modos del cpc. L. de la Peña et al proponen estudiar un ensamble de partículas que se rigen por una ecuación generalizada de Fokker-Planck. Los resultados son satisfactorios, pues logran recuperar las ecuaciones de la mecánica cuántica. Sin embargo, lo importante de la EDEL aquí es que la teoría puede obtener la ley de Planck sin usar argumento alguno de cuantización de energía. Si no se necesita la relación $E = h\nu$, entonces debe existir otra ruta, que no sea igualando la fórmula de Planck y de Einstein para la energía, para obtener el fenómeno periódico interno, y poder reinterpretar las ideas de de Broglie como un resultado de la interacción de la materia con el campo de fondo.

3.2.1. La ley de Planck

Ahora vamos a ver como, sin argumentos de cuantización, se pueden obtener las fórmulas (3.1) y (1.8). Bien, consideremos la radiación dentro del cuerpo negro en equilibrio termodinámico a temperatura T . Los modos monocromáticos de frecuencia ω del campo de radiación se pueden considerar como osciladores armónicos de la misma frecuencia [3.12]. Para el caso del oscilador, la función Hamiltoniana está dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2), \quad (3.4)$$

donde p y q son el momento y la posición de la partícula oscilante. En el caso de los modos del campo, la hamiltoniana tiene la misma forma, pero H representa su energía, y p y q son sus cuadraturas.

Al considerar un oscilador, se puede demostrar [3.12] a partir de un análisis termodinámico, que su energía media cumple la ley de Wien, es decir

$$U = \omega f\left(\frac{\omega}{T}\right), \quad (3.5)$$

con f una función no determinada por estos medios.

En el límite de las bajas temperaturas, $T = 0$, según (3.5) la energía media del oscilador es

$$\mathcal{E}_0 = U(0, \omega) = \omega f(\infty) = A\omega = \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad (3.6)$$

donde se ha considerado que A es el valor que toma f en el infinito. En los análisis clásicos, es decir, donde no se toma en cuenta la existencia del cpc, se toma arbitrariamente $A = 0$. Pero en este caso, ya sabemos de antemano que $U(0, \omega) = \frac{1}{2}\hbar\omega$ pues la energía media del oscilador de frecuencia ω debe corresponder con la energía media del modo del cpc de la misma frecuencia.

Ahora hay que encontrar la forma general de la energía media del oscilador a cualquier temperatura T . Una forma de hacerlo es considerando un ensamble de osciladores y estudiar la distribución estadística de la energía, es decir, buscando U de la forma usual en la mecánica estadística:

$$U = \langle \mathcal{E} \rangle = \int \mathcal{E}W(\mathcal{E})d\mathcal{E}, \quad (3.7)$$

donde $W(\mathcal{E})d\mathcal{E}$ es la probabilidad de que un miembro del ensamble se encuentre en un estado de energía entre \mathcal{E} y $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$,

$$W(\mathcal{E})d\mathcal{E} = \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)}g(\mathcal{E})e^{-\beta\mathcal{E}}d\mathcal{E}, \quad (3.8)$$

con \mathcal{Z} la función de partición igual a $\int g(\mathcal{E})e^{-\beta\mathcal{E}}d\mathcal{E}$, $g(\mathcal{E})$ una función de peso que representa la densidad de estados con energía \mathcal{E} , y β el factor de Boltzmann. En general, el valor medio de una función está dado por

$$\langle f(\mathcal{E}) \rangle = \int W(\mathcal{E})f(\mathcal{E})d\mathcal{E}. \quad (3.9)$$

El análisis que no toma en cuenta el cpc lleva a la equipartición de la energía, que ya se vio, da resultados no deseados. Al mismo tiempo conduce a que la varianza de la energía es

$$(\sigma_{\mathcal{E}}^2)_c = k_B T^2 C_\omega, \quad (3.10)$$

donde C_ω es la capacidad calorífica del oscilador, que se mantiene constante todo el tiempo. Entonces a temperatura cero, la varianza resulta ser cero. Esto quiere decir que el tratamiento clásico es un tratamiento que no da cabida a fluctuaciones no térmicas; no es compatible con la existencia del cpc.

La distribución W_S igual a [3.12]

$$W_S(\mathcal{E}) = \frac{1}{U}e^{-\frac{\mathcal{E}}{U}}, \quad (3.11)$$

si permite las fluctuaciones no térmicas, ya que cumple

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2 = U^2, \quad (3.12)$$

de manera que a $T = 0$,

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2|_0 = U(T = 0)^2 = \mathcal{E}_0^2. \quad (3.13)$$

Es claro que al tratamiento clásico sólo le falta el término a temperatura cero, es decir

$$\sigma_{\mathcal{E}}^2 = (\sigma_{\mathcal{E}}^2)_c + \mathcal{E}_0^2 \quad (3.14)$$

Por otra parte, ya que se cumple $(\sigma_{\mathcal{E}}^2)_c = -\frac{dU}{d\beta}$, se tiene que U satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dU}{d\beta} = \mathcal{E}_0^2 - U^2(\beta), \quad (3.15)$$

cuya solución es

$$U(\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} & \mathcal{E}_0 = 0 \\ \mathcal{E}_0 \coth \mathcal{E}_0 \beta & \mathcal{E}_0 \neq 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

que en efecto satisface, $U(T = 0) = \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$. Escribiendo la energía media del oscilador como la energía sin términos no térmicos U_T más la energía \mathcal{E}_0 se tiene que

$$U_T = \mathcal{E}_0 \coth \mathcal{E}_0 \beta - \mathcal{E}_0 = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}, \quad (3.17)$$

que es justamente la primer ecuación que dedujo Planck para la energía del oscilador armónico del cuerpo negro. La ecuación (3.1) corresponde a U .

3.2.2. El fenómeno periódico interno

En el capítulo primero se había hecho la pregunta importante: ¿qué significa igualar la fórmula de cuantización de la energía de Planck con la fórmula de Einstein para la energía? ahora que conocemos una ruta para llegar a la ley de Planck sin cuantización, podemos rodear la pregunta y al mismo tiempo encontrar una explicación real a la vibración interna de frecuencia ν_0 ; si esto se logra la respuesta debe surgir al final.

Según la EDEL, al estar la partícula dentro del cpc, éste le confiere un tamaño efectivo del orden de h/m_0c . Luego, la interacción de la partícula con las ondas del campo de longitud de onda más pequeña que este valor es despreciable. La reacción de radiación y la absorción de la energía perdida se equilibran, generando en la partícula una oscilación de alta frecuencia de valor $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = m_0c^2/\hbar$. Una aproximación burda a este resultado se puede obtener a partir de las desigualdades de Heisenberg, que también se cumplen en la EDEL. Tomando como radio efectivo de la partícula el valor de mínima dispersión de la posición, que se alcanza con el valor máximo de la dispersión del momento. Así,

$$(\text{radio efectivo})^2 \sim \frac{\hbar^2}{m_0^2 c^2}. \quad (3.18)$$

Ya que el fenómeno periódico interno da origen, en la teoría de de Broglie, a la onda fase al analizar el movimiento relativista de la partícula, vamos a seguir este camino con el fin de recuperar la onda fase dentro de la EDEL.

3.2.3. La onda fase

Consideremos una partícula cargada (un electrón por simplicidad) moviéndose velocidad v inmersa en el cpc. Consideremos también por simplicidad que el electrón interactúa únicamente con las componentes del campo de longitud ω_0 . En una dimensión estas componentes son dos ondas de frecuencia ω_0 viajando en las direcciones $+x$ y $-x$. En el marco del laboratorio las frecuencias se transforman en (Dice 1990)

$$\omega_+ = \gamma\omega_0(1 + \beta), \quad \omega_- = \gamma\omega_0(1 - \beta); \quad (3.19)$$

Las ecuaciones anteriores pueden reescribirse en términos de la frecuencia dilatada ω_A y el corrimiento Doppler ω_B ,

$$\omega_{\pm} = \omega_A \pm \omega_B, \quad \omega_A = \gamma\omega_0, \quad \omega_B = \gamma\beta\omega_0. \quad (3.20)$$

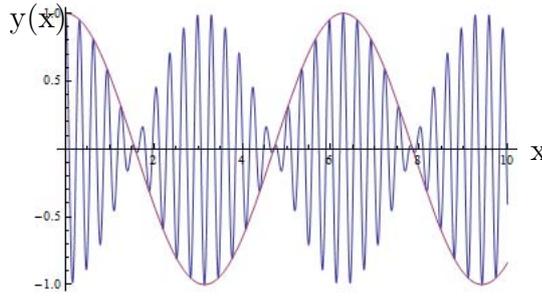


Figura 3.1: Gráfica de $\varphi_v(x, \text{cte})$ y la onda moduladora $\cos(k_B)$, con $k_A = 20$ y $k_B = 1$.

A partir de $\omega_B = \gamma\beta\omega_0 = 2\pi c \frac{mv}{h}$, puede definirse la longitud de onda

$$\lambda_B = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}, \quad (3.21)$$

con p el momento de la partícula; entonces

$$\omega_B = \frac{2\pi c}{\lambda_B}. \quad (3.22)$$

A la ecuación (3.20) le corresponde el número de onda

$$k_{\pm} = \gamma k_B \pm k_B, \quad k_B = \gamma\beta k_0. \quad (3.23)$$

En el marco propio de la partícula las ondas se suman, y ésta aprecia una onda estacionaria de longitud $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$. En el marco del laboratorio la superposición está dada por

$$\varphi_v(x, t) = e^{i(\omega_+ t - k_+ x + \theta_1)} + e^{i(\omega_- t - k_- x + \theta_2)} + \text{c.c.} \quad (3.24)$$

donde c.c representa el complejo conjugado de la expresión. φ puede reescribirse como

$$\varphi_v = 4 \cos(\omega_A t - k_B x + \theta_1) \cos(\omega_B t - k_A x + \theta_2). \quad (3.25)$$

Notemos que $t = \text{cte}$, $\varphi(x, t = \text{cte})$

$$\varphi(x, \text{cte}) = 4 \cos(k_B x - \theta_1) \cos(k_A x + \theta_2) \quad (3.26)$$

representa una oscilación espacial que es modulada por una onda de longitud $\lambda_B = \frac{2\pi}{k_B}$ (ya que $k_B < k_A$), fig 3.1. Por otro lado $x = \text{cte}$,

$$\varphi(\text{cte}, t) = 4 \cos(\omega_A t + \theta_1) \cos(\omega_B t + \theta_2), \quad (3.27)$$

implica que la onda de alta frecuencia es modulada por una onda de frecuencia $\omega_B = 2\pi/\lambda$, la frecuencia asociada a la longitud de onda de de Broglie.

Vamos a ver que φ_v cumple con todas las características de la onda de de Broglie. La energía relativista de la partícula es

$$\mathcal{E}^2 = m_0^2 c^4 + c^2 p^2, \quad (3.28)$$

la cual puede reescribirse en términos de ω_0 y ω_B como

$$\mathcal{E}^2 = \hbar^2 \omega_0^2 + \hbar^2 \omega_B^2 = \hbar^2 \omega_0^2 \gamma^2 = \hbar^2 \omega_A^2. \quad (3.29)$$

Luego,

$$\omega_A^2 = \omega_0^2 + \omega_B^2 = \omega_0^2 + c^2 k_B^2, \quad (3.30)$$

de manera que la velocidad de grupo de la onda de la onda φ_v es igual a

$$v_g = \frac{\partial \omega_A}{\partial k_B} = \frac{c^2 k_B}{\omega_A} = v, \quad (3.31)$$

la velocidad de la partícula. Y su velocidad de fase es

$$V = \frac{\omega_A}{k_B} = \frac{c^2}{v}. \quad (3.32)$$

Entonces podemos decir que φ_v es la onda propuesta por de Broglie, y representa la modulación de la onda formada por la superposición de ondas aleatorias de frecuencia ω_0 corridas por efecto Doppler. Hay que recalcar, que todo el tratamiento utilizado para derivar los resultados han sido totalmente relativistas, sin embargo, es claro que el fenómeno se mantiene aunque la partícula se mueva a bajas velocidades; el cpc está presente en todo momento. Bajo esta interpretación el fenómeno periódico interno de frecuencia ω_0 es realmente una vibración de alta frecuencia; la partícula que sufre este zarandeo se desacopla de las componentes del cpc de longitud de onda menor a la asociada a la vibración interna, aquí está la respuesta a la igualdad Planck-Einstein; la energía de la partícula es resultado del rápido movimiento debido a los modos del campo de frecuencia ω_0 , como dicen L. de la Peña et al [3.12] energía es igual a movimiento. La suma de las componentes del cpc de esta frecuencia, desde el marco del laboratorio, resulta ser la onda de de Broglie, ahora de naturaleza conocida: electromagnética.

3.3. Equivalencia del principio de Maupertuis y el principio de Fermat

La figura 3.1, y en general las ecuaciones (3.26) y (3.27) representan las armonías de fases que de Broglie probó cumplía la onda fase. Recordemos que la generalización de este resultado era la equivalencia del principio de Maupertuis con el principio de Fermat. Este último resultado da paso a la onda piloto, que guía a la partícula en la teoría de la doble solución. La equivalencia Maupertuis-Fermat se puede traer al marco de la EDEL de manera natural siguiendo los pasos de de Broglie. Sin embargo, la interpretación resulta diferente; resultado esperado desde el momento en que la onda de de Broglie no resultó ser una propiedad intrínseca de la partícula.

Bien, consideremos a la partícula en interacción con el cpc. La función lagrangiana de ésta debe considerar, evidentemente, la interacción selectiva con las componente del campo de fondo. Entonces, el momento de la partícula,

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}, \quad (3.33)$$

debe llevar impreso la huella del cpc, es decir, el momento derivado según la ecuación (3.33) debe coincidir con el valor encontrado anteriormente,

$$p_i = h/\lambda_B = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}. \quad (3.34)$$

El principio de Maupertuis aplicado a la partícula es

$$\delta \int \sum_i p_i dx_i = \delta \int p dl = \delta \int \frac{h}{\lambda_B} dl = 0. \quad (3.35)$$

La última expresión es el principio de Fermat aplicado a la onda formada por componentes del cpc. Podemos concluir, siguiendo a de Broglie:

El principio de Maupertuis aplicado a la partícula coincide con el principio de Fermat aplicado a las componentes del cpc de longitud λ_0 . Las posibles trayectorias de la partícula coincide con los posibles rayos de las componentes del cpc.

3.4. La teoría de la doble solución

No es posible aquí rescatar el principio de la doble solución tal como de Broglie lo planteó. Recordemos que él consideraba la onda u con una singularidad, que debía tener realidad física, y la onda Ψ con amplitud continua, que describía el ensamble de partículas, y que llamó onda guía. En términos realistas, considerar una onda que contenga una singularidad no suena apropiado. Decir que la partícula se encuentra dentro del radio λ_0 , dentro de un fenómeno oscilatorio de alta frecuencia es más aceptable.

Lo que a continuación se quiere mostrar es que la onda φ_v contiene la información que puede extraerse del principio de la doble solución:

- La posición puntual de la partícula existe, pero hay una dificultad matemática para conocerla porque la partícula sufre una vibración de alta frecuencia. No obstante, la aproximación dentro de un radio λ_0 puede encontrarse a partir de la primer componente de φ_v , según la propiedad (3.31) y la equivalencia Maupertuis-Fermat.
- La información del ensamble de partículas puede obtenerse también de este término, pues contiene la información espacial del campo con el que interactúa la partícula; en el caso de la difracción, contiene la información del campo de fondo difractado.
- El primer término de la onda φ_v , $\Phi = \cos(\omega_A t - k_B x + \theta_1)$, contiene la información dinámica de la partícula. Reescribiendo Φ de la forma

$$\cos 2\pi \left(\gamma \nu_0 t - \frac{\hat{n} \cdot \vec{x}}{\lambda_B} + \theta_1 \right) \quad (3.36)$$

vemos que la fase $\phi = \gamma \nu_0 t - \frac{\hat{n} \cdot \vec{x}}{\lambda_B} + \theta_1$ de la onda coincide con la acción \mathcal{S} en la teoría de Hamilton-Jacobi. Pues el momento de la partícula y la energía se puede obtener de la forma

$$p = -h \nabla \phi, \quad \mathcal{E} = h \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (3.37)$$

De Broglie interpretó estos resultados diciendo que la dinámica clásica era una aproximación a la mecánica ondulatoria como la óptica geométrica es una aproximación a la teoría electromagnética de Maxwell. Ahora la interpretación es distinta, la dinámica de la partícula puede aproximarse por el estudio electromagnético de las ondas que constituyen el cpc, hasta una aproximación en un radio λ_0 .

Así las cosas, podemos identificar el primer término de φ_v , como la onda continua de la teoría de la doble solución. Luego, Φ debe cumplir con la ecuación de Schrödinger, como de Broglie propuso. Es importante notar que Φ no es ya una onda real electromagnética, pues la onda real es φ_v .

3.4.1. La ecuación de Schrödinger

La onda Φ , recordemos, es una onda cuya velocidad de propagación es $V = c^2/v$ y velocidad de grupo v . Entonces puede ser descrita por la ecuación

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (3.38)$$

Ya que $\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\omega_A^2\Phi$, la ecuación (3.38) se convierte en

$$\nabla^2\Phi + \frac{\omega_0^2}{c^2} \gamma^2 v^2 \Phi = 0. \quad (3.39)$$

que es la misma ecuación a la presentada en el capítulo uno, (1.37), sin el término temporal.

Para el caso de la partícula dentro de un potencial V podemos partir de la ecuación de Klein-Gordon

$$\nabla^2\Phi + \frac{1}{\hbar^2 c^2} [(\mathcal{E} - V)^2 - m_0^2 c^4] \Phi = 0. \quad (3.40)$$

En el límite a bajas velocidades se transforma en

$$\nabla^2\Phi + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - V) \Phi = 0, \quad (3.41)$$

donde $E = p^2/2m + V$.

Ya que Φ es una onda moduladora espacial, queda claro que la ecuación de Schrödinger no describe en realidad a una partícula, sino no que da la forma que adquiere el campo de fondo en virtud de las condiciones de frontera impuestas, de ahí que sea necesario una interpretación de ensamble. Una analogía, bastante burda, de lo que se ha dicho es la siguiente: Supongamos que al campo de fondo como una sábana —cuyos hilos que la forman son cada una de las componentes de éste— que al confinarlo, es decir, al poner condiciones de frontera a la partícula —que sin duda son condiciones a las que se debe ajustar el campo de fondo— adquiere cierta forma, con canales bien definidos. Si sobre dicha sábana se hace rodar una pelota, ésta seguirá la trayectoria de los canales (los rayos del cpc), y la información que pueda dar el conocer la forma de la sábana nos dice muy poco cual será la posición final de la pelota. Sin embargo si nos dice como se distribuiría un haz de dichas pelotas.

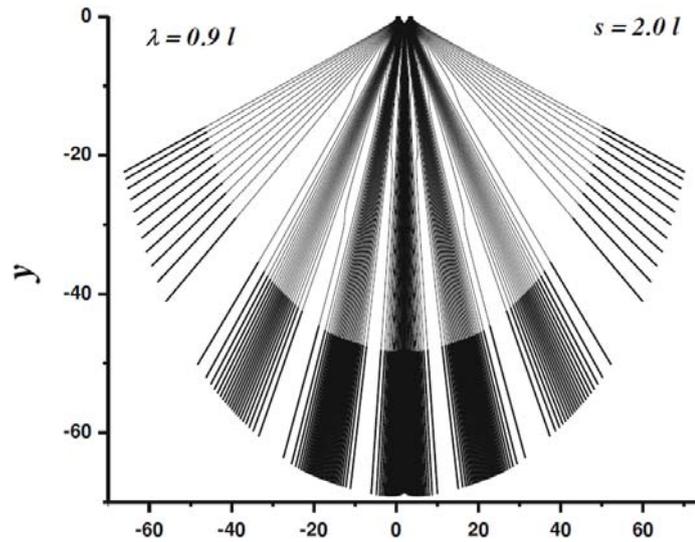


Figura 3.2: Trayectorias de un haz de partículas cuando atraviesa la doble rendija. Imagen tomada de [3.12]

3.5. La difracción de electrones

L. de la Peña et al, hacen notar que la relación (3.22) al reescribirse de la forma

$$\omega_B \lambda_B = 2\pi c, \quad (3.42)$$

representa una onda electromagnética que se propaga en el vacío, con longitud de onda de de Broglie y momento lineal

$$p_B = \frac{\hbar \omega_B}{c}. \quad (3.43)$$

Por otra parte, de la definición de ω_B se tiene que $\hbar \omega_B = cp$, luego

$$p = p_B, \quad (3.44)$$

el momento de la partícula es igual al momento de la onda. Esta relación permite escribir la longitud de onda de de Broglie sin mencionar en ningún momento a la partícula,

$$\lambda_B = \frac{h}{p_B}. \quad (3.45)$$

La transferencia de las propiedades ondulatorias a la materia se dan por medio de la igualdad (3.44).

J. Avendaño et al, al estudiar el problema de la doble rendija bajo los resultados anteriores, es decir, considerando un haz de electrones distribuidos uniformemente a lo largo del eje x , viajando en dirección y , seleccionados de tal manera que su momento sea del mismo orden que el momento de los modos del campo $\hbar \omega/c$, han podido obtener las posibles trayectorias de las partículas atravesando una doble rendija de anchura comparada con la longitud de onda de los modos del campo considerados, fig. 3.2. El cálculo de las trayectorias se basa en asumir que la fuerza que actúa sobre los electrones puede ser aproximado por la fuerza eléctrica $e\mathbf{E}$, con \mathbf{E} la componente eléctrica del campo.

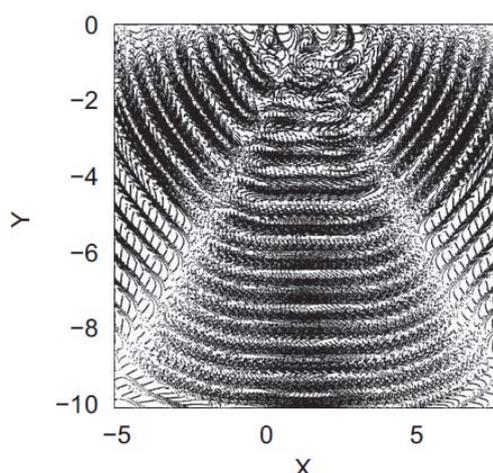


Figura 3.3: Patrón de difracción de las componente del cpc por una doble rendija, aproximadamente 200 000 modos del campo. Imagen tomada de [3.2]

Lo que es importante resaltar aquí, es que los resultados pueden interpretarse de manera clara por medio de la equivalencia Maupertuis-Fermat. Al calcular el patrón de difracción de aproximadamente 200 000 modos eléctricos del cpc por un par de rendijas, J. Avendaño et al, encuentran el patrón de la componente real E_x del campo eléctrico del cpc mostrado en la figura 3.3, es impresionante ver que el patrón es regular, a pesar de que el campo es estocástico. En la imagen, los rayos del cpc se aprecian claramente, no es de sorprender en este momento, por la equivalencia Maupertuis-Fermat, que las trayectorias de las partículas al pasar por la doble rendija coincide con los rayos del campo de fondo difractado.

El cálculo realizado por J. Avendaño et al es riguroso y totalmente clásico. Sin embargo, la explicación cualitativa y clara es por medio, como ya se dijo, de la equivalencia Maupertuis-Fermat.

3.6. El pozo infinito y el átomo de Bohr

La difracción de electrones muestra como surge la “cuantización del espacio” como una consecuencia de la difracción del cpc. Si se analiza el problema de una partícula encerrada dentro de un pozo de potencial de paredes infinitas, separadas por una distancia L , puede apreciarse el surgimiento de la “cuantización de la energía”. El estudio de este problema sigue muy de cerca las ideas de de Broglie, ahora que ya se sabe que el término Φ de la onda φ_v contiene la dinámica de la partícula.

En el equilibrio, la partícula sentirá el efecto del campo de fondo modificado por la presencia de las paredes. El caso estacionario debe ser aquel en el que el cpc adquiera también un patrón estacionario con nodos en la localización de las paredes. Esto es lo que de Broglie llamó la condición de resonancia (sección 1.2.4). La condición de resonancia aplicada Φ conduce a

$$L = \frac{1}{2}n\lambda_B, \quad (3.46)$$

y por la relación entre el momento de la partícula y la longitud de onda de las componentes

del cpc seleccionadas se obtiene que la energía de la partícula es

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2 \hbar^2}{8L^2 m^2}. \quad (3.47)$$

Este resultado muestra también la cuantización del momento de la partícula $p = \frac{n\hbar}{2L}$. Remarquemos, la cuantización es resultado de la condición de resonancia aplicada a las componentes del cpc.

La idea de la condición de resonancia puede aplicarse al problema de la partícula cargada describiendo una trayectoria cerrada. Recordemos que de Broglie explicó el átomo de Bohr de manera muy simple por medio de esta condición. La aplicación en nuestro caso es idéntica, en estos momentos estamos dentro de la teoría de de Broglie, bajo una interpretación diferente.

La condición de resonancia se escribe de la forma

$$l = n\lambda_B \quad (3.48)$$

donde $l = 2\pi r$ es el perímetro de la circunferencia que describe la partícula. Escribiendo λ_B en términos del momento de la partícula se obtiene la cuantización del momento angular

$$mvr = n\hbar. \quad (3.49)$$

La cuantización de la energía se sigue del resultado anterior

$$\mathcal{E}_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2 \hbar^2}{2mr}. \quad (3.50)$$

La ecuación para la cuantización del radio, ecuación (1.25), puede obtenerse de la siguiente manera: ya que la partícula gira regularmente sobre una circunferencia, puede definirse el periodo, τ_n y la frecuencia ω_n^{mec} de este movimiento regular. El periodo puede escribirse como

$$\tau_n = \frac{2\pi r}{v_n}, \quad (3.51)$$

donde v_n corresponde a la velocidad de la partícula cuando tiene la energía \mathcal{E}_n . De la ecuación (3.50) se obtiene que $v_n = \frac{n\hbar}{mr}$, sustituyendo en la ecuación para τ podemos encontrar la relación

$$\tau_n = \frac{\pi n \hbar}{\mathcal{E}_n}. \quad (3.52)$$

Definiendo ω_n^{mec} de tal forma que $\tau_n \omega_n^{\text{mec}} = 2\pi n$ se obtiene que

$$\omega_n^{\text{mec}} = \frac{2\mathcal{E}_n}{\hbar}, \quad \text{es decir} \quad \mathcal{E}_n = \frac{\hbar}{2} \omega_n^{\text{mec}}. \quad (3.53)$$

Luego,

$$p_n r = m v_n = m 2\pi r \frac{\omega_n^{\text{mec}}}{2\pi} r = n\hbar, \quad (3.54)$$

es decir,

$$m \omega_n^{\text{mec}} r^2 = n\hbar. \quad (3.55)$$

Que es justo la ecuación (1.25), pero aquí la frecuencia ω correspondiente a la onda fase ha cambiado por la frecuencia ω_n^{mec} correspondiente al movimiento periódico de la partícula sobre la circunferencia.

Por sustitución directa de $\lambda_{B_n} = h/p_n$ con p_n dado por (3.50) y el valor de ω_n^{mec} se puede demostrar que

$$\lambda_{B_n} \omega_n^{\text{mec}} = 2\pi v_n. \quad (3.56)$$

Esta relación define una onda sobre la circunferencia de frecuencia ω_n^{mec} y longitud de onda λ_{B_n} que se propaga a la velocidad de la partícula. En la teoría de de Broglie, la onda que se cierra sobre la circunferencia se propaga a velocidad $V_n = c^2/v_n$, y la fórmula de Bohr surge como la armonía de fases entre la onda y la vibración interna de la partícula. Esto está de acuerdo con la fórmula (3.56), ya que esta onda no es una onda real sino una relación que porta la información del acoplamiento partícula-cpc, la armonía de fases según de Broglie. De aquí podemos obtener la respuesta a una pregunta planteada en el primer capítulo, ¿que sucede con la radiación de una partícula acelerada, que de Broglie no consideró en su teoría? claramente sigue ahí, pero es compensada por el cpc. En realidad, en la EDEL esta pregunta no tiene razón de ser, desde el momento en que se considera el acoplamiento partícula-cpc, se está considerando ya la radiación debida al aceleramiento de la partícula; como ya se ha dicho podemos reinterpretar la armonía de fases propuesta por de Broglie como el régimen de equilibrio de la interacción partícula-cpc, y ahora sabemos que este equilibrio lleva al concepto de cuantización de la energía y el espacio. Dicha cuantización, es claro, no es real, es decir, el espacio no está físicamente cuantizado, parece tener esta propiedad porque las ondas, componentes del campo de fondo, necesitan “empatar” con las condiciones de frontera.

La regla de Bohr para la transición de estados se puede reescribir como

$$\omega_{nm} = \frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m}{h} = \frac{\omega_n^{\text{mec}} - \omega_m^{\text{mec}}}{2}. \quad (3.57)$$

En base a la nueva interpretación de la armonía de fases, puede decirse que los niveles en del átomo están en función de los estados de equilibrio del acoplamiento partícula-cpc.

Bibliografía

- [3.1] AVENDAÑO, J., AND DE LA PEÑA, L. Reordering if the ridge patterns of a stochastic electromagnetic field by diffraction due to an ideal slit. *Phys. Rev.* (2005).
- [3.2] AVENDAÑO, J., AND DE LA PEÑA, L. Matter diffraction through a double slit obtained by numerical simulation using a diffracted random electromagnetic field. *Elsevier* (2010).
- [3.3] DAVIDSON, M. Stochastic models of quantum mechanics- a perspective.
- [3.4] DE LA PEÑA, L. *Introducción a la Mecánica Cuántica*, tercera edición, 2010 ed. Fondo de Cultura Económica, 1979.
- [3.5] DE LA PEÑA AUERBACH, L., AND CETTO KRAMIS, A. M. Recent developments in linear stochastic electrodynamics. In *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations*.
- [3.6] DE LA PEÑA AUERBACH, L., AND CETTO KRAMIS, A. M. Teorías estocásticas de la mecánica cuántica. *Revista Mexicana de Física* (1990).
- [3.7] DE LA PEÑA AUERBACH, L., AND CETTO KRAMIS, A. M. *The Quantum Dice, An Introduction to Stochastic Electrodynamics*. Kluwer Academic Publisher, 1996.
- [3.8] DE LA PEÑA AUERBACH, L., AND CETTO KRAMIS, A. M. Planck's law as a consequence of the zeropoint radiation field. *Rev. Mex. Fís.* (2002).
- [3.9] DE LA PEÑA AUERBACH, L., AND CETTO KRAMIS, A. M. Contribution from stochastic electrodynamics to the understanding of quantum mechanics. *arXiv:quant-ph/0501011v2* (2005).
- [3.10] DE LA PEÑA AUERBACH, L., CETTO KRAMIS, A. M., AND VALDÉS HERNÁNDEZ, A. The zero-point field and the emergence of the quantum.
- [3.11] DE LA PEÑA AUERBACH, L., CETTO KRAMIS, A. M., AND VALDÉS HERNÁNDEZ, A. Atomic radiative corrections without qed: role of the zero-point field. *arXiv:1301.6200v1* (2013).
- [3.12] DE LA PEÑA AUERBACH, L., CETTO KRAMIS, A. M., AND VALDÉS HERNÁNDEZ, A. *The Emerging Quantum, The Physics Behind Quantum Mechanics*. Springer, 2014.

- [3.13] JEFFERS, S., AND LEHNERT, B. O., Eds. *Jean-Pierre Vigié and the Stochastic Interpretation of Quantum Mechanics*. Apeiton Montreal, 2000.
- [3.14] NELSON, E. Derivation of the schrodinger equation from newtonian mechanics. *Phys. Rev.* (1966).
- [3.15] PLANCK, M. On an improvement of wien's equation for the spectrum. *Dtsch. Phys. Ges* (1900). Traducción al inglés por D. ter Haar, 1967.
- [3.16] PLANCK, M. On the theory of the energy distribution law of the normal spectrum. *Dtsch. Phys. Ges* (1900). Traducción al inglés por D. ter Haar, 1967.
- [3.17] PLANCK, M. *The theory of Heat Radiation*. P. Blakiston's son and Co., 1914. Traducción al inglés por Morton Masius.
- [3.18] VALDÉS HERNÁNDEZ, A. *Investigación del origen del enredamiento cuántico desde la perspectiva de la Electrodinámica Estocástica Lineal*. PhD thesis, IF-UNAM, 2010.

Resumen y conclusiones

En el primer capítulo se describió la manera en que de Broglie introdujo el fenómeno periódico interno, de naturaleza desconocida, asociado a toda partícula masiva. Se vio que desde el marco del laboratorio, esta vibración se observa en fase con una onda, llamada inicialmente la onda fase, cuya velocidad de grupo es igual a la velocidad de la partícula. Así, la dinámica de la partícula pudo establecerse por medio de la onda fase. Este resultado se generalizó por medio de la equivalencia del principio de Maupertuis aplicado a la partícula con el principio de Fermat aplicado a la onda fase. El hecho que la onda fase se encontrara en armonía con la vibración interna, condujo a resultados como la cuantización de las órbitas en el modelo atómico de Bohr y al comportamiento ondulatorio de las partículas en la difracción de electrones.

La máxima generalización de la equivalencia Maupertuis-Fermat puede apreciarse en el marco de la teoría de la doble solución. Donde se considera que la partícula se encuentra embebida dentro una onda, de naturaleza desconocida, que matemáticamente posee una singularidad en su amplitud, en el punto que corresponde a la posición de la partícula. Según de Broglie, si se conocen con exactitud las condiciones iniciales de la partícula, esta “onda singular” define su trayectoria. Sin embargo, el estudio, mas sencillo matemáticamente, de un ensamble de partículas se puede desarrollar por medio de una onda continua cuya amplitud al cuadrado da la probabilidad de conocer la posición de una partícula del ensamble. La fase de esta onda, llamada piloto, coincide con la fase de la onda singular. A no ser por que la onda de de Broglie es de naturaleza desconocida, su existencia permite explicar el comportamiento cuántico de manera magistral.

En el capítulo dos se presentaron los experimentos desarrollados por el grupo encabezado por Couder. Estos experimentos nos llevaron a concluir que el comportamiento cuántico debe ser típico de los sistemas en que exista un acoplamiento sostenido entre partículas y ondas. En particular, nos dio la clave para buscar la naturaleza de la onda de de Broglie en la interacción de las partículas cargadas con ondas electromagnéticas.

En el capítulo tres, se mostró que la idea de que el comportamiento cuántico surge de la interacción de la materia con un campo electromagnético de fondo puede intuirse a través del tratamiento final de Planck al problema del cuerpo negro; donde se concluye que a temperatura cero los osciladores que constituyen las paredes del cuerpo negro poseen un remanente de energía $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Así, la EDEL considera que un campo de radiación estocástico (cpc) de energía $\frac{1}{2}\hbar\omega$ por modo, permea el espacio vacío. A partir de este postulado se vio que la interacción de las partículas cargadas con este campo de fondo, le confiere una oscilación de frecuencia $\omega_0 = 2\pi\nu_0$, justo con el valor propuesto por de Broglie para el fenómeno periódico interno. Al considerar que las partículas interactúan selectivamente con los modos del campo, cuya frecuencia es precisamente ω_0 , es decir, con longitud de onda es $2\pi c/\omega_0$, la EDEL identifica la onda de de Broglie con la superposición de estas

ondas, corridas por efecto Doppler, observadas desde el marco del laboratorio. Entonces, bajo esta interpretación, el fenómeno periódico interno asociado a las partículas es una medida del acoplamiento partícula-cpc, una oscilación espacial de alta frecuencia. La onda de Broglie es una onda electromagnética real, apreciada en el marco del laboratorio.

Con lo anterior, ha sido posible derivar la equivalencia Maupertuis-Fermat bajo una nueva interpretación: las posibles trayectorias de una partícula coinciden con los posibles rayos del cpc, cuya longitud de onda sea del orden de λ_0 . Esto permite explicar la difracción de electrones y entender el carácter estadístico del comportamiento ondulatorio. Lo que se difracta es el cpc, el patrón surge como resultado de la interacción de muchas partículas con el campo difractado.

También se ha podido identificar la onda continua (piloto) en la teoría de la doble solución con un término de la expresión matemática de la onda real observada en el marco del laboratorio. Esta onda satisface, en efecto, la ecuación de Schrödinger. Reconocer la onda piloto permite obtener las ecuaciones de guianza de la mecánica ondulatoria, es decir, permite obtener la trayectoria de una partícula en términos de la fase de la onda piloto, u obtener la dinámica de un ensamble de partículas. Finalmente se ha visto que exigir la condición de resonancia a la nueva onda piloto, conduce a la cuantización de los radios del modelo atómico de Bohr.

Podemos entonces dar por concluida la investigación de la naturaleza física de la onda de de Broglie, con la satisfacción de haber aprendido que existen otras rutas que permiten interpretar de manera realista la teoría de de Broglie, y que es posible entender la dualidad onda-partícula no como una propiedad intrínseca de la materia, observable sólo en el mundo microscópico, sino como resultado de una interacción real entre una onda (energía propagándose) y una partícula (puntual). La cuantización, efectivamente, es un problema de valores propios; generalización de la condición de resonancia.

Queda aún la duda del comportamiento corpuscular de la luz —que es energía—. Recordemos que de Broglie concibió la dualidad de la materia como una generalización de la dualidad de la luz. Ahora que ha sido “desenmarañado” el comportamiento dual de la materia, debe existir también una reinterpretación a la dualidad de la luz.

Así mismo, queda la duda si puede obtenerse el comportamiento ondulatorio de partículas debido a la interacción con algún otro tipo de onda que tenga la capacidad de propagarse en el vacío. Considero necesario mencionar que si existe la onda electromagnética como el modo de propagación de la interacción electromagnética, parece que debe ser necesario que existan las ondas correspondientes a las demás fuerzas fundamentales conocidas.

Apéndice A

La mecánica de una partícula

A.1. Las ecuaciones de Lagrange

En mecánica se considera a las partículas como un punto material. Su posición se define por medio del vector \mathbf{r} en un espacio euclideo. La velocidad se define como $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. En el caso general, en coordenada curvilíneas q_i , la velocidad es \dot{q}_i ¹.

Dada una partícula que en el instante t_0 se encuentra en $q^{(0)}$, y en t_1 se encuentra en $q^{(1)}$, el principio de mínima acción establece que existe $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, tal que el sistema se mueve entre las posiciones dadas de manera que se cumple

$$\delta \mathcal{S} = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt = 0, \quad (\text{A.1})$$

a \mathcal{S} se le llama la acción y a \mathcal{L} la función lagrangiana.

Las ecuaciones diferenciales que satisfacen (A.1) son llamadas las ecuaciones de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (\text{A.2})$$

y establecen las ecuaciones de movimiento de la partícula.

La función de Lagrange para una partícula en un potencial U es

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} m v^2 - U(q, t), \quad (\text{A.3})$$

La cantidad

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (\text{A.4})$$

es llamada el momento respecto a la coordenada q_i . Se encuentra que si q_i coincide con las coordenadas cartesianas entonces

$$p_1 = m\dot{x}, \quad p_2 = m\dot{y}, \quad p_3 = m\dot{z} \quad (\text{A.5})$$

Entendiendo la cantidad $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = F_i$ como una fuerza generalizada, las ecuaciones de Lagrange toman la forma

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i. \quad (\text{A.6})$$

¹El punto denota derivada con respecto al tiempo.

La cantidad

$$E = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (\text{A.7})$$

es llamada la energía de la partícula y es una cantidad conservada en sistemas cerrados debido a la homogeneidad del tiempo. Se encuentra que

$$E = T + U, \quad (\text{A.8})$$

donde T es la energía cinética.

Aplicando el principio de Hamilton a una partícula cuya energía es constante se obtiene

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L} + E) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i p_i \dot{q}_i dt = 0. \quad (\text{A.9})$$

Si el argumento de la última integral solo se evalúa en los estados A y B independientes del tiempo, pero cuya energía sea la misma para todas las trayectorias, entonces se tiene

$$\delta \int_A^B \sum_i p_i dq_i = 0 \quad (\text{A.10})$$

que es conocido como el principio de Maupertuis².

Ya que $\sum_i p_i dq_i = 2T$ y que $T = \frac{1}{2}mv^2$, entonces el principio de Maupertuis se reduce a

$$\delta \int_A^B m v dl = 0, \quad (\text{A.11})$$

donde dl elemento diferencial de la trayectoria.

A.2. Las ecuaciones canónicas

La transformación de Legendre de la lagrangiana es

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}, \quad (\text{A.12})$$

\mathcal{H} es llamada la función de Hamilton. Tomando la diferencial total de \mathcal{H} se llega a

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad (\text{A.13a})$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}. \quad (\text{A.13b})$$

²A la cantidad $\mathcal{S}_0 = \int_A^B \sum_i p_i dq_i$ se le conoce como acción abreviada, de manera que el principio de Maupertuis se reescribe como,

$$\delta \mathcal{S}_0 = 0,$$

un principio variacional de la acción abreviada.

Las ecuaciones (A.13) son llamadas ecuaciones de Hamilton o ecuaciones canónicas, y determinan, al igual que las ecuaciones de Lagrange, las ecuaciones de movimiento de la partícula. Si \mathcal{H} no depende explícitamente del tiempo, coincide con la energía del sistema.

Es claro, de (A.12), que la acción se puede escribir como

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} dt \right). \quad (\text{A.14})$$

De hecho, las ecuaciones (A.13) también se pueden encontrar a partir del principio de mínima energía

$$\delta \mathcal{S} = 0. \quad (\text{A.15})$$

A.3. Mecánica Relativista

A.3.1. Partícula libre

Como en el caso clásico, se considera a las partículas puntuales.

En mecánica relativista la acción se define como

$$\mathcal{S} = -m_0 c \int_a^b ds. \quad (\text{A.16})$$

También puede ser expresada como función del tiempo

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt, \quad (\text{A.17})$$

análogo a la mecánica clásica, \mathcal{L} es llamada la función de Lagrange o lagrangiana. Para la partícula libre

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (\text{A.18})$$

Nuevamente, el momento $\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}}$, así

$$\mathbf{p} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad (\text{A.19})$$

y la energía es

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (\text{A.20})$$

de manera que para una partícula en reposo

$$E = m_0 c^2. \quad (\text{A.21})$$

De (A.19) y (A.20) se obtiene que

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2. \quad (\text{A.22})$$

Escribiendo la energía como función del momento se puede definir la función de Hamilton como

$$\mathcal{H} = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \quad (\text{A.23})$$

A.3.2. Partícula en un campo electromagnético

La acción para una partícula en un campo electromagnético se puede escribir como

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left(-m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \right) dt, \quad (\text{A.24})$$

\mathbf{A} es el potencial vector y ϕ el potencial escalar. Se sigue que

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi. \quad (\text{A.25})$$

Si $U = -\frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + e\phi$, entonces

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U. \quad (\text{A.26})$$

Ya que el momento es la derivada de la lagrangiana con respecto a la velocidad, entonces aquí el momento generalizado es

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}, \quad (\text{A.27})$$

donde \mathbf{p} es el momento de la partícula libre.

Notemos que (A.24) puede reescribirse en la forma

$$\mathcal{S} = \int_P^Q (-m_0 c^2 - q\phi_\mu u^\mu) ds, \quad (\text{A.28})$$

con P y Q dos eventos en el espacio-tiempo, y

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -A_x, & u_1 &= -\frac{v_x}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \\ \phi_2 &= -A_y, & u_2 &= -\frac{v_y}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \\ \phi_3 &= -A_z, & u_3 &= -\frac{v_z}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \\ \phi_4 &= \frac{1}{c}\phi, & u_4 &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

El 4-momento para una partícula en un campo electromagnético es

$$J_i = -(p_i + \frac{e}{c} A_i) = -P_i; \quad J_4 = \frac{E}{c}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.30})$$

De manera que la acción se puede reescribir como

$$\mathcal{S} = \int_P^Q J_\mu dx^\mu. \quad (\text{A.31})$$

Si la energía es constante

$$\mathcal{S}_0 = \int_A^B J_i dx^i, \quad (\text{A.32})$$

se obtiene una “acción abreviada” (c.f. nota 2).

Las ecuaciones de movimiento están dadas por las ecuaciones de Lagrange. Para conocer la función Hamiltoniana basta enunciar la forma general de la ecuación (A.12)

$$\mathcal{H} = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} - \mathcal{L}. \quad (\text{A.33})$$

De donde se obtiene, con ayuda de (A.19) la expresión:

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2 c^2 + c^2 \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2} + e\phi. \quad (\text{A.34})$$

A.4. Algunas relaciones que satisface la acción

A.4.1. Relación entre el momento y la acción

Tomemos la acción como una función de su límite superior

$$\mathcal{S}(t) = \int_{t_0}^t \mathcal{L} dt. \quad (\text{A.35})$$

Su variación es

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_0}^t + \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt, \quad (\text{A.36})$$

y como la trayectoria real de una partícula satisface las ecuaciones de Lagrange entonces la ecuación anterior se reduce a

$$\delta \mathcal{S} = p(t) \delta q(t) - p(t_0) \delta q(t_0), \quad (\text{A.37})$$

donde se ha usado que (A.4). Ya que todas las trayectorias parten del mismo punto, $\delta q(t_0) = 0$, de manera que la ecuación anterior implica

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q} = p_i; \quad (\text{A.38})$$

la acción resulta ser función también de q .

A.4.2. La acción y la función Hamiltoniana

De la definición de acción se sigue que

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} = L \quad (\text{A.39})$$

y comparado con la diferencial total de \mathcal{S} como función de las coordenadas q_i se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = \mathcal{L} - \sum_i p_i \dot{q}_i \quad (\text{A.40})$$

es decir (ver (A.12))

$$\frac{\partial \mathcal{S}(q_i, t)}{\partial t} + \mathcal{H}(p_i, q_i, t) = 0 \quad (\text{A.41})$$

A.5. La ecuación de Jacobi

Para que la ecuación (A.41) no dependa de p , \mathcal{H} puede escribir en términos de (A.38), entonces (A.41) se reescribe como

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \mathcal{H}(q_i, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i}, t) = 0 \quad (\text{A.42})$$

cuya solución para $\mathcal{S}(q_i, t)$ nos da toda la información de la partícula. A esta ecuación se le conoce como ecuación de Jacobi o Hamilton-Jacobi.

Para el caso de la partícula relativista en un campo electromagnético la ecuación de Jacobi toma la forma

$$\left(\nabla \mathcal{S} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + e\phi \right)^2 + m^2 c^2 = 0. \quad (\text{A.43})$$

A.5.1. Como encontrar las ecuaciones de movimiento a partir de la ecuación de Jacobi

Supongamos que se ha encontrado una solución completa de la ecuación de Jacobi³ que en general tiene la forma

$$\mathcal{S} = f(t, q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s) + A \quad (\text{A.44})$$

para un sistema con s grados de libertad; las α y la A son constantes arbitrarias. Entonces las ecuaciones

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad (\text{A.45})$$

donde las β_i son nuevas constantes arbitrarias, definen las posibles trayectorias de una partícula. Los momentos se encuentran a partir de (A.38).

Si el sistema es conservativo, es decir, \mathcal{H} no depende del tiempo, entonces (A.44) toma la forma

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0(q) - Et, \quad (\text{A.46})$$

y la ecuación de Jacobi se reduce a la de Hamilton

$$H(q_i; \frac{\partial \mathcal{S}_0}{\partial q_i}) = E. \quad (\text{A.47})$$

Un resultado importante sobre el formalismo de Jacobi para partículas moviéndose en un campo constante es que: Las trayectorias de la misma clase, correspondientes a la misma integral completa son ortogonales a las curvas de nivel de \mathcal{S} . Se sigue de lo anterior que $p = \nabla \mathcal{S}$, es decir, la velocidad de la partícula es proporcional al gradiente de la acción.

³Una solución completa es aquella que tiene tantas constantes arbitrarias independientes como variables independientes existan. Una solución general es aquella que depende de una función arbitraria.