



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

GENERACIÓN Y ANÁLISIS DE LUZ LÁSER ESTRUCTURADA  
EMPLEANDO FASES CÚBICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

VIRIDIANA CARMONA SOSA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. PEDRO ANTONIO QUINTO SU



CIUDAD DE MÉXICO

NOVIEMBRE, 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Generación y análisis de luz láser estructurada empleando fases cúbicas

por

Viridiana Carmona Sosa

Tesis presentada para obtener el título de

Físico

en la

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Ciudad de México. Noviembre, 2014

## Hoja de datos del jurado

1. Datos de la alumna

Carmona

Sosa

Viridiana

55 24 30 97 63

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

409092426

2. Datos del tutor

Dr Pedro Antonio

Quinto

Su

3. Datos del sinodal 1

Dra

Rocío

Jáuregui

Renaud

4. Datos del sinodal 2

Dr

Neil Charles

Bruce

Davidson

5. Datos del sinodal 3

Dr

Juan Arnaldo

Hernández

Cordero

6. Datos del sinodal 4

Dr

Víctor Manuel

Velázquez

Aguilar

7. Datos del trabajo escrito

Generación y análisis de luz láser estructurada  
empleando fases cúbicas

64 p.

2014

*La rayuela se juega con una piedrita que hay que empujar con la punta del zapato. Ingredientes: una acera, una piedrita, un zapato, y un bello dibujo con tiza, preferentemente de colores. En lo alto está el Cielo, abajo está la Tierra, es muy difícil llegar con la piedrita al Cielo, casi siempre se calcula mal y la piedra sale del dibujo. Poco a poco, sin embargo, se va adquiriendo la habilidad necesaria para salvar las diferentes casillas (rayuela caracol, rayuela rectangular, rayuela de fantasía poco usada) y un día se aprende a salir de la Tierra y remontar la piedrita hasta el Cielo, hasta entrar en el Cielo (Et tous nos amours, sollozó Emmanule boca abajo), lo malo es que justamente a esa altura casi nadie ha aprendido a remontar la piedrita hasta el cielo, se acaba de golpe la infancia y se cae en las novelas, en la angustia al divino cohete, en la especulación de otro Cielo al que también hay que aprender a llegar. Y porque se ha salido de la infancia (Je n'oublierai pas le temps des cerises, pataleó Emmanuèle en el suelo) se olvida que para llegar al Cielo se necesitan, como ingredientes, una piedrita y la punta del zapato... RAYUELA, JULIO CORTÁZAR*

# Agradecimientos

A mi madre que con su amor, sus desvelos y su paciencia ha contribuido a ser quien soy.

A mi padre que aunque ha sido poco el tiempo, sin él no habría podido impulsarme a llegar en donde estoy.

A mis hermanos, Huri y Paquito, que hicieron de mi infancia un tiempo y un espacio felices.

A mi Cucho adorado, por acompañarnos en la carrera y por tantos descubrimientos.

A Miguelito, por aparecerte en nuestras vidas.

A todos y cada uno de mis amigos de la facultad.

Gracias a Pedro por tus consejos y llamadas de atención.

# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>I Motivación</b>   | <b>1</b>  |
| <b>II Marco teórico</b>   | <b>5</b>  |
| <b>1. Introducción</b>  | <b>6</b>  |
| 1.1. Breve historia de la difracción . . . . .                                | 6         |
| 1.2. Ecuación de onda . . . . .   | 8         |
| 1.3. Haz Gaussiano: una solución a la ecuación de onda paraxial . . . . .     | 11        |
| 1.4. Haz Bessel . . . . .   | 11        |
| 1.5. Haz Airy de energía finita en 1-Dimensión . . . . .                      | 15        |
| 1.5.1. Haz Airy de energía finita en 2-Dimensiones . . . . .                  | 20        |
| 1.6. Generación de haces Airy (fase cúbica) . . . . .                         | 21        |
| 1.7. Fases cúbicas simétricas . . . . .                                       | 21        |
| <b>2. Micromanipulación</b>   | <b>23</b> |
| 2.1. Pinzas ópticas . . . . .   | 23        |
| 2.2. Micromanipulación con trampas holográficas . . . . .                     | 28        |
| 2.3. Micromanipulación con haces adifraccionales y luz estructurada . . . . . | 30        |
| <b>III Generación de luz estructurada en el laboratorio</b>                   | <b>33</b> |
| <b>3. Observación experimental de un haz Airy y un haz Airy simétrico</b>     | <b>34</b> |
| 3.1. Introducción . . . . .   | 34        |

|  |           |
|--|-----------|
| 3.2. Generación en el laboratorio de un haz Airy y un haz Airy simétrico . . . . . | 35        |
| 3.3. Observaciones en 1 y 2 dimensiones . . . . .                                  | 39        |
| 3.4. Resultados . . . . .  | 39        |
| 3.5. Observación de un haz Airy simétrico . . . . .                                | 43        |
| <b>4. Manipulación de micropartículas utilizando una haz Airy simétrico</b>        | <b>46</b> |
| 4.1. Introducción . . . . .  | 46        |
| 4.2. Montaje experimental y resultados . . . . .                                   | 47        |
| 4.3. Implicaciones . . . . .   | 49        |
| <b>IV Discusión y conclusiones</b>   | <b>52</b> |
| <b>5. Discusión y conclusiones</b>   | <b>53</b> |
| <b>A. Hologramas y transformada de Fourier</b>                                     | <b>57</b> |

# Generación y análisis de luz láser estructurada empleando fases cúbicas

por

Viridiana Carmona Sosa

## Resumen

Uno de los temas que han tenido mayor revuelo en la física en los últimos años ha sido hallar aquellas soluciones a la ecuación de onda que ofrecen peculiares características como resistencia al cambio en su perfil transversal al propagarse, auto-reconstrucción y, como consecuencia, están compuestas de energía infinita, entre otras. En la óptica, éstas soluciones reciben el nombre de haces adifraccionales y sólo es posible realizarlos al emplear una función atenuadora, quizá el caso más conocido es el denominado haz Bessel, observado y estudiado por primera vez por Durnin et al. que también lo predijo.

Otro de los casos más representativos de los haces adifraccionales es el haz Airy que fue mencionado por primera vez en 1979, año en que Berry y Balazs demostraron teóricamente que la solución a la ecuación de Schrödinger, al describir una partícula libre de fuerzas, es una función de onda Airy que no muestra esparcimiento.

En la presente tesis se realiza la observación de un haz Airy de energía finita en dos dimensiones (2D) con la finalidad de comprobar la trayectoria parabólica de su lóbulo central al propagarse una distancia de  $10\text{ mm}$ . Además se observa y mide la deflexión del lóbulo central tanto en la dirección  $x$  y  $y$ , a lo largo de la misma distancia de propagación.

La principal característica de la fase de un haz Airy es que contiene términos a la tercera potencia, esto se debe a la función Airy misma. Al realizar una modificación en el argumento de la fase, como consecuencia el perfil de intensidad del haz se verá alterado.

La segunda parte del presente trabajo de investigación consiste en explorar el haz que se genera al considerar el valor absoluto de las coordenadas en el argumento de la fase del haz Airy de energía finita. Como resultado de este drástico cambio en la fase resulta un haz completamente desconocido que se ha denominado haz Airy simétrico. Además de observar la estructura de este haz, se le hace interactuar con partículas de un tamaño  $R = 0.3\ \mu\text{m}$  de material dieléctrico.

Los resultados en la parte de la tesis correspondientes al haz Airy de energía finita fueron insuficientes para lograr una comprobación satisfactoria de las características predichas y establecidas por Siviloglou y Christodoulides en 2007; mientras que las observaciones realizadas en la segunda parte, relacionada con el haz Airy simétrico, fueron exitosas puesto que logramos demostrar su uso en el área de las pinzas ópticas así como generar estructuras en tres dimensiones (3D).

# Parte I

# Motivación

Este trabajo de investigación surgió debido al interés producido por las peculiares características de los haces Airy, motivando la realización de los mismos de manera experimental. Una de las propiedades más importantes de estos haces es la trayectoria curvilínea que describe el lóbulo central al propagarse, es por ello que gran cantidad de experimentos y aplicaciones se han generado explotando esta característica.

Recientemente un haz Airy fue descrito por Siviloglou y Christodoulides, ellos generaron en 2007 lo que denominaron haz Airy de energía finita [1], el cual habían simulado ése mismo año [2]. Aunque ésta no fue la primera vez que se exploraba la naturaleza del haz Airy, ya que existen dos estudios previos: la primer mención sobre éste haz tiene lugar en el libro *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, Vol. 3 de los autores L. D. Landau y E. M. Lifshitz publicado en la década de los 50s, siendo el haz Airy la solución a la ecuación de Schrödinger para un campo externo homogéneo [3]; el otro antecedente ocurrió en 1979, cuando Sir Michael V. Berry y Nandor L. Balazs predijeron teóricamente que la solución a la ecuación de Schrödinger para el caso de una partícula libre de fuerzas corresponde a una onda Airy que no sufre difracción al propagarse [4]. El estudio del perfil del haz Airy forma parte de una teoría que tuvo un gran desarrollo a mediados de los años 70s, cuando comenzó a cuestionarse la formación natural de líneas brillantes de luz, o mejor conocidas como *cáusticas*, para explicar este fenómeno fue necesario introducir conceptos de topología en la óptica además de aplicar la teoría de catástrofes introducida por Thom (1969, 1972) y luego desarrollada por Arnold (1975) <sup>1</sup>. El nombre de la teoría mencionada es *Catastrophe Optics* donde Michael Berry realizó importantes aportes sobre el estudio de cáusticas al observar los patrones que se producen al enfocar luz a través de una gota de agua [5].

Utilizando como base los experimentos realizados en 2007 por Siviloglou y Christodoulides se analizará la propagación de un haz Airy en dos dimensiones, también se desarrolla la caracterización de dicho haz.

Además se pretende estudiar un nuevo tipo de luz estructurada cuyo origen está en realizar una modificación a la ecuación de fase cúbica bien conocida de un haz Airy, y con esto aprovechar las características de encontradas para producir estructuras o arreglos de micropartículas en 3 dimensiones.

---

<sup>1</sup>Para una descripción más detallada de Teoría de Catástrofes aplicada a la óptica, consultar el libro *Natural Focusing and Fine Structure of Light* de J. F. Nye.

Los principales objetivos de este trabajo de tesis son:

1. Realizar un estudio y caracterización de los haces Airy generados por un modulador espacial de luz (SLM por sus siglas en inglés),
2. Modificando la ecuación para la fase de un haz Airy convencional, se generará otro tipo de luz estructurada nunca antes producida, motivo por el cual el estudio de la misma es de principal importancia para encontrar posibles aplicaciones dentro del campo de la micromanipulación óptica.

En en el primer capítulo de esta tesis, se desarrolla una breve historia sobre el fenómeno de difracción, con ello se plantea la teoría ondulatoria de la luz. Partiendo de la ecuación de onda, analizamos algunas de las distintas soluciones existentes de la misma así como algunas de sus características principales y con ello diferenciar aquellas soluciones que presentan el fenómeno de adifraccionalidad de las que no. Una de las soluciones que no presentan difracción al propagarse es el haz Airy, principal objeto de estudio de este trabajo de investigación. Las singulares características que posee el haz Airy también son descritas en este capítulo. Además se expone brevemente el método de generación de estos haces utilizando fases cúbicas. Cabe mencionar que al modificar la expresión matemática para generar la fase cúbica aplicando un valor absoluto, se produce otro tipo de haz que denominaremos *haz Airy simétrico*, este haz no tiene la peculiaridad de mantenerse sin difracción al propagarse, sin embargo la distribución de intensidad tanto en la dirección transversal como en la de propagación ofrece una estructura cuyas aplicaciones serán exploradas más adelante.

Luego, en el segundo capítulo, se presentan las bases de la micromanipulación usando haces ópticos. Una vez establecidas las condiciones para generar el atrapamiento de partículas micro o nanométricas, se describe el uso de haces adifraccionales (principalmente haces Bessel y haces Airy) en esta área, para ello tomaremos de la literatura algunos casos representativos con el objeto de mostrar algunas de sus características así como proporcionar un ejemplo de aplicación de estas fuentes de luz.

Una vez establecido el marco teórico, en el capítulo tercero se realiza una detallada descripción sobre la generación en el laboratorio de los haces Airy de energía finita. Se analizan los casos tanto en una dimensión como en dos dimensiones, teniendo como principal objetivo

estudiar la propagación de dicho haz para caracterizarlo. Además, se explora la realización de los haces Airy simétricos ya mencionados anteriormente.

En el capítulo cuarto se profundiza en el estudio de los haces Airy simétricos con la finalidad de demostrar su uso para manipular micropartículas en arreglos que dependen del plano focal en el que se encuentre el haz. También se discute la posible generación de estructuras de partículas utilizando estos haces, ésto debido a la compleja distribución o configuración de la intensidad en este tipo de haz Airy.

Finalmente, en el capítulo quinto se realiza una discusión sobre los resultados obtenidos y se presentan las conclusiones correspondientes.

## Parte II

# Marco teórico

# Capítulo 1

## Introducción

*Entonces no había ni gente, ni animales, ni árboles, ni piedras, ni nada.  
Todo era un erial desolado y sin límites. Encima de las llanuras el espacio  
yacía inmóvil; en tanto que, sobre el caos, descansaba la inmensidad del mar.*  
— ERMILIO ABREU GÓMEZ, *Las Leyendas del Popol Vuh* (1977)

### 1.1. Breve historia de la difracción

La primer persona en utilizar el término *difracción* (proveniente del latín *diffringere* que significa “romperse en pedazos”) fue Francesco Maria Grimaldi (1618-1663) en el Colegio Jesuita en Bolonia, cuando observó bandas de luz dentro de la sombra de una barra iluminada por una fuente pequeña [6]. La difracción es un fenómeno propio de todos los tipos de campos ondulatorios y se presenta siempre que las ondas se encuentran con un obstáculo en su trayectoria. El resultado de esta obstrucción es la desviación de las ondas alrededor de pequeños objetos o diminutas aberturas. Es importante mencionar que cuando la longitud de onda es comparable a las dimensiones del obstáculo, los efectos de la difracción son visiblemente más apreciables que en los casos en los que no se cumple esta condición.

En el caso especial de la luz, la difracción ha sido bien estudiada a lo largo de varios siglos. Entre las situaciones más conocidas podemos encontrar los casos en los que se utiliza como obstáculo ya sea una sola rendija, múltiples rendijas (rejilla), una abertura circular, una abertura con geometría cualquiera así como el caso de la propagación de un láser. En éste último, la forma en la que el perfil de un rayo láser cambia al propagarse se encuentra determinado por la difracción. A la salida del láser hay un espejo que funciona como apertura, y en consecuencia

la forma del haz estará determinada por las dimensiones de la misma. Por lo tanto el haz divergerá más rápido conforme las dimensiones del espejo de salida se vuelvan más pequeñas.

Como se ha dicho, la difracción se presentará irremediamente en los fenómenos ondulatorios, esto nos lleva a formular la pregunta: ¿es posible reducir al mínimo la aparición de la difracción? A continuación mencionamos brevemente algunos estudios realizados respecto a este tema.

Con el objeto de reducir en lo posible el efecto de la difracción en los sistemas ópticos G. Toraldo di Francia propone en su artículo “Super gain Antennas and Optical Resolving Power” de 1952, atacar el problema de la misma manera que se resuelve el caso de las antenas de microondas conocidas como *super-gain antennas*, con esto Toraldo demuestra la existencia de pupilas con *super-resolución*, es decir, pupilas de tamaño finito y que tienen un poder de resolución mayor que una pupila normal [7]. Toraldo continuó con su investigación en este campo involucrando conceptos de teoría de la información para mejorar el poder de resolución [8].

Claramente el efecto de la difracción sobre los fenómenos y sistemas ópticos ha generado gran cantidad de ideas para lograr la reducción de la misma. Debido a que los pulsos y los láseres están compuestos de ondas viajando en diferentes direcciones, fácilmente se produce un ensanchamiento espacial gradual en los mismos. Este efecto es un factor que perjudica áreas de la óptica aplicada en la que es muy importante mantener invariante el patrón transversal del haz o pulso, por mencionar algunas tenemos formación de imágenes [9], comunicaciones en espacio libre [10], litografía óptica [11].

Por ende comenzó la búsqueda y el estudio de nuevas fuentes de luz que ofrecieran un perfil de intensidad constante a lo largo de su propagación. Las denominadas *ondas localizadas*, o conocidas también como *ondas adifraccionales*, son capaces de oponerse al efecto de la difracción durante una distancia considerable en el espacio libre. Este tipo de soluciones a la ecuación de onda fue predicho teóricamente hace mucho tiempo [12, 13], sin embargo el estudio y realización experimental de estas soluciones comenzó en la década de los 80 [14].

Con la finalidad de introducirnos en el desarrollo teórico de estas ondas adifraccionales, es necesario hablar brevemente de la ecuación de onda.

## 1.2. Ecuación de onda

La luz es un fenómeno ondulatorio cuyo comportamiento es descrito por la ecuación de onda. Por este motivo profundizaremos en el desarrollo tanto de la ecuación de onda como en las expresiones que surgen de la misma al considerar algunas aproximaciones. Cabe mencionar que la notación implementada en esta sección proviene del libro *Fundamentals of photonics* [15].

Una onda de luz puede describirse matemáticamente por una función real que depende tanto de la posición  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  como del tiempo  $t$ , dicha función recibe el nombre de *función de onda*. Si denotamos a la función de onda por  $u(\mathbf{r}, t)$ , que en este caso puede asociarse a cualquiera de las componentes del campo electromagnético, entonces debe satisfacer la ecuación de onda,

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1-1)$$

donde el símbolo  $\nabla^2$  es el operador Laplaciano,  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ . Entonces, cualquier función que satisfaga la ecuación 1-1 corresponde a un fenómeno ondulatorio.

Un objeto fundamental en la teoría ondulatoria de la luz es una onda monocromática, la principal característica de esta onda es que la dependencia del tiempo viene dada de forma armónica, como se muestra a continuación

$$u(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \cos [2\pi\nu t + \varphi(\mathbf{r})] \quad (1-2)$$

donde  $a(\mathbf{r})$  es la amplitud,  $\varphi(\mathbf{r})$  es la fase,  $\nu$  se denomina la frecuencia y, finalmente,  $\omega = 2\pi\nu$  adquiere el nombre de frecuencia angular.

Generalmente tanto la amplitud como la fase son funciones que dependen de la posición, sin embargo, la función de onda depende armónicamente del tiempo con la frecuencia  $\nu$  en todas las posiciones.

En muchas situaciones se ha comprobado que representar a las ondas armónicas en notación compleja resulta más conveniente que hacerlo como funciones reales, siendo así, la forma compleja de la función de onda está dada por

$$U(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}) \exp [i\varphi(\mathbf{r})] \exp (i2\pi\nu t) , \quad (1-3)$$

y con esto podemos obtener la función  $u(\mathbf{r}, t)$  como una parte de la forma compleja de la función de onda, es decir,

$$u(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{U(\mathbf{r}, t)\}. \quad (1-4)$$

La función  $U(\mathbf{r}, t)$  es conocida como la *función de onda compleja* y describe una onda de manera completa ya que al considerar únicamente a la función de onda  $u(\mathbf{r}, t)$  estamos perdiendo la información contenida en la parte imaginaria de una función más general. Al igual que  $u(\mathbf{r}, t)$ , la función de onda compleja debe satisfacer la ecuación de onda,

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0. \quad (1-5)$$

Ahora bien, si la ecuación 1-3 la expresamos como el producto de una función que depende solamente de la posición por otra función dependiente únicamente del tiempo, obtenemos

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) \exp(i2\pi\nu t), \quad (1-6)$$

entonces podemos denominar al factor independiente del tiempo  $U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) \exp[i\varphi(\mathbf{r})]$  como *amplitud compleja*. La función de onda compleja  $U(\mathbf{r}, t)$  se representa gráficamente por un fasor rotando con velocidad angular  $\omega = 2\pi\nu$  radianes/s. El valor inicial que adquiere para  $t = 0$  es la amplitud compleja  $U(\mathbf{r})$ .

Ahora que hemos reescrito la función de onda compleja, si sustituimos la ecuación 1-6 en 1-5, obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) + k^2 U(\mathbf{r}) = 0, \quad (1-7)$$

que es la *ecuación de Helmholtz*, donde  $k = 2\pi\nu/c = \omega/c$  es una cantidad denominada el *número de onda*.

Cabe mencionar que, cuando las normales a los frentes de onda son rayos paraxiales, entonces se dice que tenemos una onda paraxial. Hay varias formas de construir una onda paraxial, una de ellas consiste en comenzar con una onda plana  $A \exp(-ikz)$ , que se puede ver como la onda portadora y modificar o modular su envolvente compleja  $A$ , si hacemos de ésta una función que varía muy lentamente con la posición, es decir, tendríamos  $A(\mathbf{r})$ , con lo que la amplitud

compleja de la onda modulada se convierte en:

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})\exp(-ikz). \quad (1-8)$$

La variación de  $A(\mathbf{r})$  con respecto a la posición debe ser de manera suave dentro de la distancia comprendida en una longitud de onda  $\lambda = 2\pi/k$ , de este modo la onda mantiene de forma aproximada su naturaleza intrínseca de onda plana.

Para que la expresión de la onda paraxial 1-8 satisfaga la ecuación de Helmholtz 1-7, además es necesario que la envolvente compleja  $A(\mathbf{r})$  sea solución de otra ecuación diferencial parcial que se obtiene al sustituir 1-8 en 1-7. La suposición que realizamos antes, de forzar que  $A(\mathbf{r})$  varíe lentamente con respecto a  $z$  implica que en un espacio del orden de  $\lambda$ , es decir,  $\Delta z = \lambda$ , el incremento  $\Delta A$  es mucho más pequeño que  $A$  misma; o, matemáticamente,  $\Delta A \ll A$ . Sabemos que  $A$  es una función compleja, pero la desigualdad anterior es válida para las magnitudes de la parte imaginaria y la parte real por separado. Ya que  $\Delta A = (\partial A/\partial z)\Delta z = (\partial A/\partial z)\lambda$ , se sigue que  $\partial A/\partial z \ll A/\lambda = Ak/2\pi$ , y por lo tanto

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA. \quad (1-9)$$

De manera similar, la derivada  $\partial A/\partial z$  varía lentamente en un intervalo equivalente a  $\lambda$ , de modo que  $\partial^2 A/\partial z^2 \ll k \partial A/\partial z$ , y por consiguiente

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k^2 A. \quad (1-10)$$

Al sustituir 1-8 en 1-7 y considerando que  $\partial^2 A/\partial z^2$  es despreciable en comparación con  $k \partial A/\partial z$  o con  $k^2 A$ , obtenemos la **ecuación paraxial de Helmholtz**

$$\nabla_T^2 A - i2k \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (1-11)$$

donde  $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  es el operador Laplaciano transversal.

La ecuación 1-11 es la aproximación de la ecuación de Helmholtz cuando se considera una variación suave en la envolvente. Además, es una ecuación diferencial que se asemeja a la ecuación de Shrödinger en la mecánica cuántica.

### 1.3. Haz Gaussiano: una solución a la ecuación de onda paraxial

El concepto de *haz* se acuña a una solución monocromática de la ecuación de onda, con una localización transversal de su campo.

Una de las soluciones más simples a la ecuación paraxial de Helmholtz es la onda paraboloidal para la cual

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{z} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right), \quad \rho^2 = x^2 + y^2 \quad (1-12)$$

donde  $A_1$  es una constante. La onda paraboloidal es la aproximación paraxial de la onda esférica cuando se considera que  $x$  y  $y$  son mucho más pequeños que  $z$ .

Otra solución a la ecuación paraxial de Helmholtz es el denominado *haz Gaussiano*. Este haz se obtiene de la onda paraboloidal mediante una transformación bastante simple. Debido a que la envolvente compleja de la onda paraboloidal 1-12 es solución a la ecuación paraxial de Helmholtz, entonces una versión desplazada de la misma, con  $z - \xi$  sustituyendo  $z$  donde  $\xi$  es una constante,

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left[-ik \frac{\rho^2}{2q(z)}\right], \quad q(z) = z - \xi, \quad (1-13)$$

también será solución. Esto representa una onda paraboloidal cuyo centro está cerca del punto  $z = \xi$  en lugar de  $z = 0$ .

Sea  $\xi$  una constante compleja y además consideremos que  $1/q(z) = 1/(z + iz_0)$  se puede reescribir en términos de sus partes real e imaginaria, si definimos dos nuevas funciones reales  $R(z)$  y  $W(z)$ , relacionadas respectivamente con cada parte, entonces obtendremos la expresión para la amplitud compleja  $U(\mathbf{r})$  del haz Gaussiano

$$U(\mathbf{r}) = \frac{W_0}{W(z)} \exp\left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-jkz - jk \frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)\right] \quad (1-14)$$

### 1.4. Haz Bessel

En la búsqueda de soluciones a la ecuación de Helmholtz, es natural explorar la posible existencia de ondas con frentes de onda planos pero con distribuciones de intensidad no uniformes

en el plano transversal. Si consideramos una onda cuya amplitud compleja es de la forma

$$U(\mathbf{r}) = A(x, y)e^{-i\beta z}. \quad (1-15)$$

Para que esta onda pueda satisfacer la ecuación de Helmholtz 1-7, entonces  $A(x, y)$  debe ser solución a la ecuación

$$\nabla_T^2 A + k_T^2 = 0, \quad (1-16)$$

donde  $k_T^2 + \beta^2 = k^2$  y  $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  es el operador Laplaciano transversal. La ecuación 1-16, que se conoce como la ecuación de Helmholtz en dos dimensiones, puede resolverse usando el método de separación de variables. Si empleamos coordenadas polares:  $x = \rho \cos(\phi)$ ,  $y = \rho \sin(\phi)$ , el resultado para  $A$  es

$$A(x, y) = A_m J_m(k_T \rho) e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1-17)$$

siendo  $J_m(\cdot)$  la función de Bessel de primera especie y orden  $m$ , y  $A_m$  es una constante. Las soluciones de la ecuación 1-17 que son singulares en  $\rho = 0$  no están incluidas.

Para  $m = 0$ , la onda tiene una amplitud compleja

$$U(\mathbf{r}) = A_0 J_0(k_T \rho) e^{-i\beta z} \quad (1-18)$$

y por lo tanto tiene frentes de onda planos. Las normales a los frentes de onda son todas paralelas al eje  $z$ . La distribución de intensidad  $I(\rho, \phi, z) = |A_0|^2 J_0^2(k_T \rho)$  tiene una simetría circular, varía conforme lo hace  $\rho$ , y es independiente de  $z$ , así que la potencia óptica no se dispersa. Esta onda recibe el nombre de **Haz Bessel**.

Ahora que hemos obtenido las expresiones de la amplitud compleja tanto para un haz Gaussiano y un haz Bessel, es bastante interesante realizar una comparación entre las diversas características que poseen estos dos haces, por ello a continuación se presenta una breve discusión, tomada del artículo *Localized waves: a historical and scientific introduction* [14], respecto a la misma.

El haz gaussiano es el tipo de haz más común que se conoce, su nombre se deriva del hecho que su perfil transversal está descrito por una función gaussiana. Todos los haces comunes sufren

los efectos de la difracción, lo que estropea la forma transversal de su campo, ensanchándose progresivamente durante su propagación. Para tener una noción de este hecho notemos que, el ancho transversal de un haz gaussiano se duplica cuando se ha propagado una distancia  $z_{dif} = \sqrt{3}\pi(\Delta\rho_0)^2/\lambda_0$ , donde  $\Delta\rho_0$  es el ancho inicial del haz y  $\lambda_0$  su longitud de onda. Fácilmente puede verificarse que un haz gaussiano con una apertura transversal inicial del orden de su longitud de onda duplicará su ancho luego de haberse propagado una distancia equivalente a unas cuantas longitudes de onda.

La teoría apuntaba a que el único tipo de onda que se encontraba libre de difracción era la onda plana, ya que, de existir, no sufriría ningún cambio transversal al propagarse. Sin embargo, algunos autores han demostrado que la onda plana no es el único caso existente. Por ejemplo, en 1941 Straton [12] obtuvo una solución monocromática a la ecuación de onda cuyo perfil transversal estaba concentrado en la vecindad de su eje de propagación y estaba representado por una función Bessel. Ya hemos presentado esta solución, y tiene la peculiaridad de no verse afectado por la difracción ya que no se presentan cambios en su forma transversal al propagarse. En la ref. [13] se demostró más tarde que la ecuación de onda pertenece a un conjunto de una clase de ecuaciones que admite como soluciones ondas que se propagan sin distorsiones. Lamentablemente cualquier tema relacionado con esta rama de investigación pasó desapercibida durante mucho tiempo. En el caso de Straton era complicado realizar algún experimento que comprobase la existencia de los haces Bessel debido a que esta solución contiene energía infinita (al igual que la onda plana). Por lo mismo, el problema a atacar fue investigar qué pasaría en el caso de un haz Bessel ideal cuando se ve truncado por una apertura transversal finita.

Fue hasta el año de 1987 que una innovadora respuesta se dio a este problema. La solución al hecho de que los haces Bessel tuvieran una cantidad infinita de energía fue expuesta en el experimento ahora ya famoso de Durnin *et al.* [16] en el que se mostró que un haz Bessel no-ideal, con longitud de onda  $\lambda_0 = 0.6328 \mu m$  y spot<sup>1</sup> central de  $\Delta\rho_0 = 59 \mu m$ , al pasar a través de una apertura con radio  $R = 3.5 mm$  es capaz de propagarse cerca de  $85 cm$  manteniendo el mismo perfil de intensidad en esta distancia sin cambio alguno, esto considerando la región transversal que rodea el máximo de intensidad central, o dicho de otro modo, en  $\rho \ll R$ . Con esto se demostró experimentalmente que el máximo de intensidad transversal (así como el campo en

---

<sup>1</sup>En el caso de un haz Bessel entenderemos por spot central a aquella distancia, a lo largo del eje de propagación  $\rho = 0$ , para la cual se da el primer cero de la función Bessel que caracteriza el perfil transversal del mismo.

los alrededores del mismo) no presentan ningún cambio notorio en su forma a lo largo de una gran distancia. Para hacer aún más claro lo sorprendente de este hecho, analicemos qué ocurre en la misma situación para un haz común: en el caso de un haz gaussiano con la misma longitud de onda, y con un spot central<sup>2</sup> de  $\Delta\rho_0 = 59 \mu m$ , al hacerlo pasar a través de una apertura del mismo radio  $R = 3.5 mm$ , éste duplica su ancho transversal luego de haberse propagado  $3 cm$ , y luego de  $6 cm$  la intensidad de este haz ha disminuido por un factor de 10. Por lo tanto, en la misma situación, un haz Bessel puede viajar, sin deformaciones considerables, una distancia 28 veces más grande que aquella para el haz gaussiano.

Esta peculiar propiedad se debe a que los campos de intensidad transversal asociados con los anillos que constituyen la estructura (transversal) del haz Bessel, cuando se difractan, terminan llevando a cabo una *reconstrucción* del haz mismo, a lo largo de una gran distancia (profundidad de campo). Todo esto se debe al espectro del haz Bessel, número de onda y frecuencia, como se explica en la referencia [17]. Es importante notar que, teniendo un haz Bessel y un haz gaussiano (ambos con el mismo valor de spot  $\Delta\rho_0$ , que pasan por la misma apertura de radio  $R$  en el plano  $z = 0$ , y con la misma energía  $E$ ) el porcentaje de la energía total  $E$  contenida dentro la región del máximo o pico central, es decir, la región correspondiente a  $0 \leq \rho \leq \Delta\rho_0$  es más pequeña para el haz Bessel que para el gaussiano. Esta distribución de energía tan diferente en el plano transversal es la causante de la reconstrucción del pico central del haz Bessel al haberse propagado distancias muy lejanas de la fuente, o incluso luego de pasar un obstáculo de dimensiones más pequeñas que la apertura [18].

Una vez iniciada la investigación en este campo, a los haces Bessel le siguieron otro tipo de soluciones a la ecuación de onda con la misma propiedad de ser adifraccionales, entre estas nuevas formas de luz se encuentran los haces Airy, tema central de este trabajo de investigación y en el cual profundizaremos en el siguiente capítulo.

Otra manera de denominar a los haces adifraccionales es campos escalares invariantes ideales, éstos haces están representados matemáticamente por las soluciones a la ecuación de Helmholtz 1-7 que cumplen la propiedad de ser separables y que además tienen simetría cilíndrica. Se sabe [19] que existen cuatro familias fundamentales de funciones que se relacionan con los cuatro sistemas de coordenadas cilíndricos para los cuales la ecuación de onda reducida es sepa-

---

<sup>2</sup>Para un haz gaussiano, definiremos el spot central como aquella distancia a lo largo del eje  $\rho = 0$  para la cual su intensidad transversal haya decaído por un factor de  $1/e$ .

rable: ondas planas para simetría cartesiana, funciones Bessel para simetría circular-cilíndrica, funciones Mathieu y Weber para simetría elíptico-cilíndrica y parabólica-cilíndrica respectivamente.

A pesar de que cada campo invariante es solución en un sistema de coordenadas distinto, hay varias características que mantienen en común. En primer lugar, todos son generados a partir de una apropiada superposición cónica de ondas planas, aún más importante, como resultado de su naturaleza invariante, todas las soluciones conocidas transportan energía infinita. Claramente, en el laboratorio todos estos haces adifraccionales son regularmente truncados empleando una función de apertura y como consecuencia la difracción aparece a lo largo de su propagación. A pesar de esta circunstancia, si las medidas de la geometría de la apertura que limita la energía son mucho más grandes que las características espaciales de los campos invariantes en propagación ideales, entonces el proceso de difracción tiende a retardarse sobre la distancia de propagación y gracias a ello, para fines prácticos esos haces se denominan adifraccionales, como ya lo hemos mencionado.

En resumen, algunas de las principales características que presentan los haces adifraccionales son: contienen energía infinita, puede autoreconstruirse una distancia posterior a haber atravesado un obstáculo y además tienen momento angular.

Ahora que nos hemos introducido en el tema de los haces adifraccionales, podemos comenzar a explorar la teoría detrás de los haces Airy.

## 1.5. Haz Airy de energía finita en 1-Dimensión

Hasta ahora se han mencionado las tres soluciones de la ecuación de Helmholtz que tienen en común la simetría cilíndrica y cuyo espectro angular forma un cono, y además una solución a la ecuación paraxial: el haz Gaussiano, mas, existe otra solución bajo éste régimen: los denominados *haces Airy*.

Los primeros indicios sobre los haces Airy se conocen desde hace 35 años, época en la que Berry y Balazs [4] hicieron un importante descubrimiento dentro del campo de la mecánica cuántica: de manera teórica demostraron que la ecuación de Schrödinger que describe una partícula libre de fuerzas tiene como solución una función de onda tipo Airy no propagante.

La más notable característica de esta solución Airy es la capacidad de acelerarse libremente incluso en la ausencia de un potencial externo, también cabe destacar que esta función de onda es única en una dimensión (1D) en el sentido de ser la única solución no trivial (además de la onda plana) que se mantiene invariante con el tiempo. Aunque este no es el único antecedente, ya que en el libro *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, Vol. 3 de los autores L. D. Landau y E. M Lifshitz publicado en inglés en 1958, se obtiene que el haz Airy es la solución a la ecuación de Schrödinger para un campo externo homogéneo [3]; además es importante mencionar que durante muchos años se desarrolló la teoría conocida como *Catastrophe Optics* la cual se basa en teoría de catástrofes para explicar la formación de cáustica, que son líneas luminosas en las cuales convergen al menos dos rayos de luz, dando lugar al fenómeno conocido como enfocamiento natural [20]. Cabe mencionar que Michael Berry realizó importantes contribuciones a esta teoría generar patrones de difracción que se asemejan al perfil de intensidad de un haz Airy simplemente usando una gota de agua para enfocar luz [5].

El grupo conformado por Georgios Siviloglou, John Broky, Aristide Dogariu, y Demetrios Christodoulides del Centro para Investigación y Educación en Óptica y Lasers (CREOL por sus siglas en inglés) en la Universidad de Florida Central fue el primero en realizar observaciones experimentales de haces adifraccionales Airy [1] en 2007.

La descripción teórica y experimental que sigue a continuación se basa en la investigación desarrollada por Siviloglou et al. [1, 2] para generar haces Airy.

Para comenzar, tomemos la ecuación de Helmholtz en una dimensión para luego considerar que la amplitud de nuestro campo es una función de la posición que varía lentamente en una distancia comparable a la longitud de onda, es decir, vamos a aplicar la aproximación paraxial, entonces obtenemos la expresión para la ecuación paraxial normalizada:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial s^2} = 0, \quad (1-19)$$

donde  $s = x/x_0$  representa una coordenada transversal adimensional, mientras que  $x_0$  es una constante arbitraria que sirve para escalar,  $\xi = z/kx_0^2$  es la distancia de propagación normalizada (con respecto al rango de Rayleigh<sup>3</sup>) y  $k = 2\pi n/\lambda_0$  es el número de onda de la onda óptica

---

<sup>3</sup>Es la distancia medida en la dirección de propagación de un haz que va desde la cintura hasta la posición en la cual el área de la sección transversal se ha duplicado.

empleada.

Como se mencionó antes la forma más cercana a un haz adifraccional ideal son aquellos haces denominados pseudo-adifraccionales, en este caso se estudiarán los haces Airy de energía finita, y esto se hace considerando que nuestro campo decae exponencialmente:

$$\phi(s, \xi = 0) = \text{Ai}(s)\exp(as) \quad (1-20)$$

utilizando esta expresión como nuestra condición inicial a la entrada del sistema. En la ecuación (1-20) el factor de decaimiento  $a$  es una constante positiva que nos permite garantizar un hecho importante: la cola infinita del haz Airy decae a mayor velocidad en un intervalo de distancia más pequeño, es decir que con esto es posible la realización física de este campo invariante. Es importante señalar que la rama positiva de la función Airy decae de forma considerablemente muy rápida, con lo cual se garantiza que la función en la ecuación (1-20) tenga convergencia.

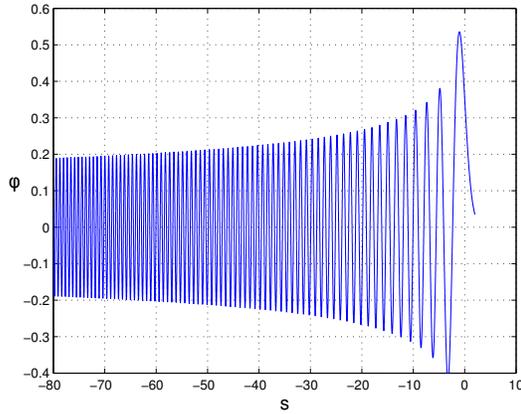
Al truncar la función Airy con una función exponencial se predice teóricamente que se puede realizar un haz Airy de energía finita. La importancia de la función exponencial en la ecuación 1-20 queda claramente expuesta en la Figura 1-1, la cual nos permite comparar el perfil de intensidad de un haz empleando únicamente la función Airy (cuya dificultad es que contiene energía infinita) con el perfil de intensidad de una haz Airy con función exponencial o truncado.

Ahora bien, partiendo de nuestra condición inicial establecida por la ecuación (1-20) y resolviendo la ecuación de Helmholtz directamente, se obtiene que la solución estará dada por:

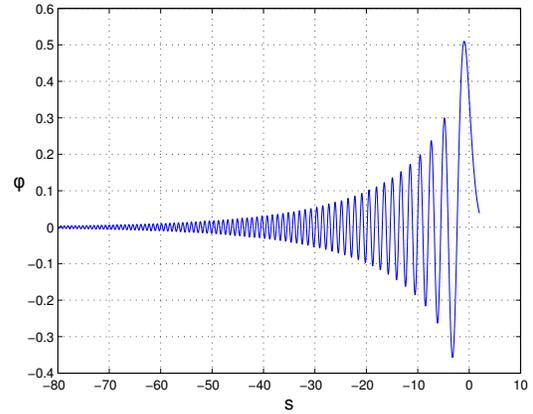
$$\begin{aligned} \phi(x, z) = & \text{Ai} \left[ \frac{x}{x_0} - \left( \frac{z}{2kx_0^2} \right)^2 + \frac{iaz}{kx_0^2} \right] \\ & \times \exp \left[ \frac{ax}{x_0} - \left( \frac{az^2}{2k^2x_0^4} \right) + i \left( \frac{a^2z}{2kx_0^2} \right) - i \left( \frac{z^3}{12k^3x_0^6} \right) + i \left( \frac{xz}{2kx_0^3} \right) \right], \end{aligned} \quad (1-21)$$

o reescribiendo en términos de las cantidades normalizadas:

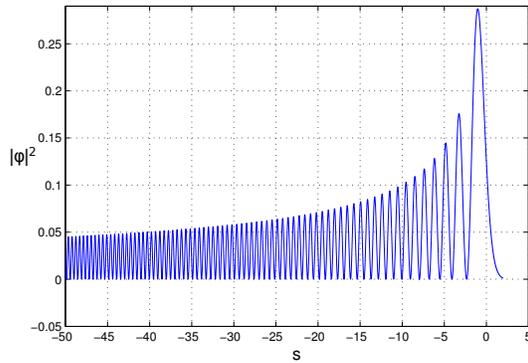
$$\begin{aligned} \phi(s, \xi) = & \text{Ai} \left[ s - \left( \frac{\xi}{2} \right)^2 + ia\xi \right] \\ & \times \exp \left[ as - \left( \frac{a\xi^2}{2} \right) - i \left( \frac{\xi^3}{12} \right) + i \left( \frac{a^2\xi}{2} \right) + i \left( \frac{s\xi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1-22)$$



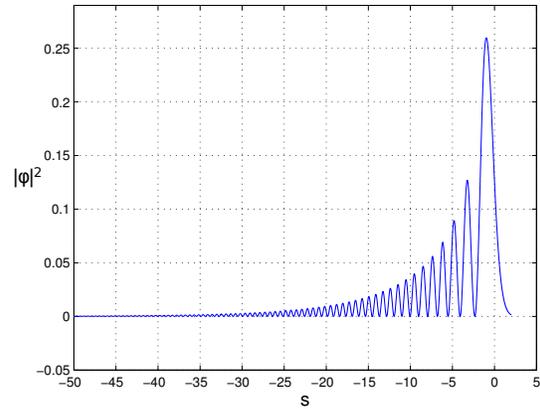
(a) Función Airy



(b) Función Airy truncada



(c) Intensidad de la función Airy



(d) Intensidad de la función Airy truncada

Figura 1-1: Función Airy

Respecto a esta solución vale la pena recalcar y analizar a mayor detalle la expresión misma así como las importantes implicaciones que contiene.

Primero notemos que en el límite en el que  $a = 0$ , la solución dada por la ecuación 1-22 se reduce a la expresión para la función de onda sin dispersión proporcionada por Berry y Balazs [4].

Además el argumento real de la función de Airy es la ecuación de una parábola, es decir, escrito en términos de la coordenada transversal  $x$  y de la coordenada de propagación  $z$  tenemos que se relacionan por  $\frac{x}{x_0} = \frac{z^2}{2k^2 x_0^4}$ . Esta condición es la que nos permite asegurar que la trayectoria que los lóbulos del haz Airy seguirán al propagarse es de tipo parabólica.

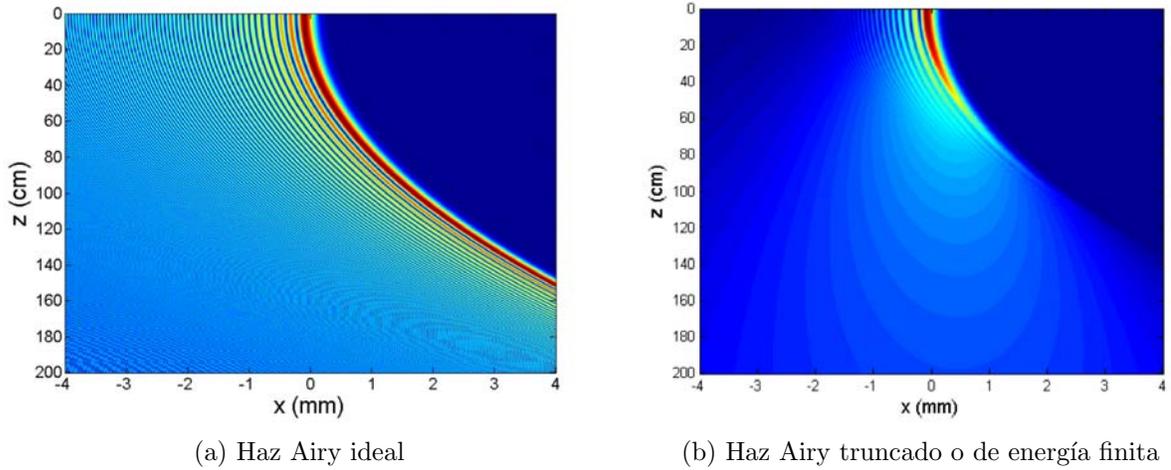


Figura 1-2: Simulaciones

La figura 1-2 (b) es una simulación de la dinámica de propagación de una haz Airy truncado cuando  $a = 0.05$ ,  $x_0 = 100\mu m$  y para un valor de  $\lambda = 500nm$ . Como se alcanza a apreciar al comparar las figuras 1-2 (b) y 1-2 (a), para valores de  $a$  tales que  $0 < a \ll 1$  el haz aún exhibe todas las propiedades interesantes de un haz Airy ideal, es decir, se mantiene sin cambios en el perfil de propagación a lo largo de una distancia considerable hasta el punto en el que la difracción aparece, además se aprecia que la trayectoria parabólica del haz se sigue manteniendo.

Otro aspecto que es de primera importancia es conocer la forma que tendrá el espectro de Fourier de este haz. Para el haz Airy se obtiene que está dado por la expresión siguiente (en el espacio  $K$  normalizado):

$$\Phi_0(K) = \exp(-aK^2) \exp\left(\frac{i}{3}(K^3 - 3a^2K - ia^3)\right) \quad (1-23)$$

En la ecuación (1-23) se aprecian dos peculiaridades: en primera que la amplitud va como  $K^2$ , y en segundo lugar, que la fase es proporcional al cubo de  $K$ . Habrá que tener muy presentes estas características del espectro de Fourier del haz Airy. Se profundizará en la importancia de estas características más adelante en esta introducción.

### 1.5.1. Haz Airy de energía finita en 2-Dimensiones

La generalización a dos dimensiones, de los resultados mencionados en la sección anterior, se puede realizar fácilmente. En este caso hay que pedir como condición inicial que la envolvente del campo, es decir para  $z = 0$ , esté dada por

$$\phi(x, y, z = 0) = \text{Ai}\left(\frac{x}{x_0}\right) \text{Ai}\left(\frac{y}{y_0}\right) \exp\left[\left(\frac{x}{w_1}\right) + \left(\frac{y}{w_2}\right)\right]. \quad (1-24)$$

En dos dimensiones la solución para  $z \neq 0$  estaría dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \text{Ai}\left[\frac{x}{x_0} - \left(\frac{z}{2kx_0^2}\right)^2 + \frac{iz}{w_1kx_0^2}\right] \\ & \times \exp\left[\frac{x}{w_1x_0} - \left(\frac{z^2}{2w_1k^2x_0^4}\right) + i\left(\frac{z}{2w_1^2kx_0^2}\right) - i\left(\frac{z^3}{12k^3x_0^6}\right) + i\left(\frac{xz}{2kx_0^3}\right)\right] \\ & \times \text{Ai}\left[\frac{y}{y_0} - \left(\frac{z}{2ky_0^2}\right)^2 + \frac{iz}{w_2ky_0^2}\right] \\ & \times \exp\left[\frac{y}{w_2y_0} - \left(\frac{z^2}{2w_2k^2y_0^4}\right) + i\left(\frac{z}{2w_2^2ky_0^2}\right) - i\left(\frac{z^3}{12k^3y_0^6}\right) + i\left(\frac{yz}{2ky_0^3}\right)\right]. \end{aligned} \quad (1-25)$$

Cabe destacar que, siempre que los valores de  $x_0$  y  $y_0$  sean iguales (también  $w_1$  y  $w_2$  deben cumplir esta condición), la trayectoria que seguirá el lóbulo central tendrá una inclinación de  $45^\circ$  respecto a la horizontal.

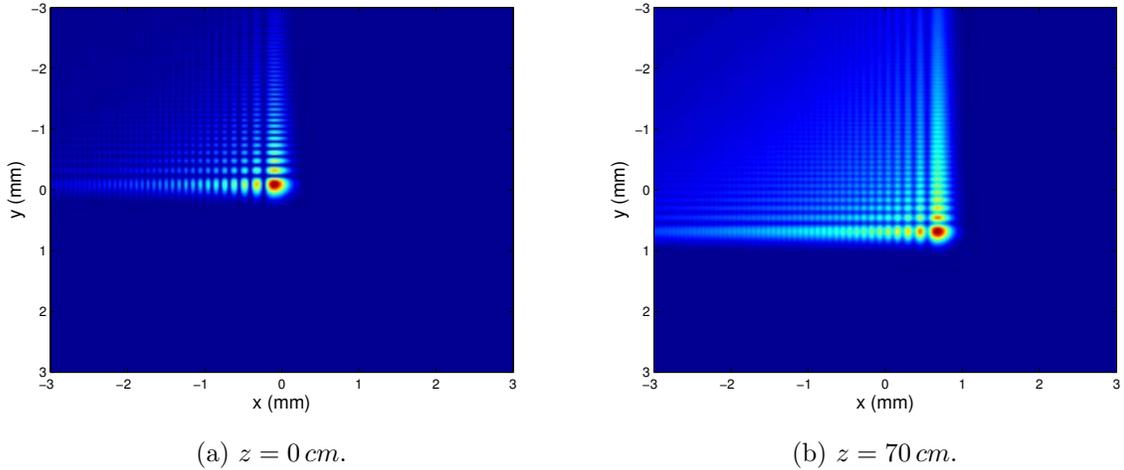


Figura 1-3: Simulaciones del perfil de un haz Airy en dos dimensiones, se comparan los planos correspondientes a las distancias de propagación (a)  $z = 0 \text{ cm}$  y (b)  $z = 70 \text{ cm}$ .

El perfil de intensidad se muestra en la figura 1-3. Observemos que es bastante notorio el desvanecimiento de la intensidad conforme los lóbulos laterales se separan mayor distancia del lóbulo central además, al propagarse una distancia de 70 cm, la mayor parte de la intensidad del haz se va acumulando en el lóbulo central que, desde un inicio, muestra la mayor concentración de intensidad del haz.

## 1.6. Generación de haces Airy (fase cúbica)

Una vez que hemos expuesto las bases teóricas para la realización de los haces Airy, analizemos con mayor detalle las implicaciones de la ecuación 1-23

$$\Phi_0(k) = \exp(-aK^2)\exp\left(\frac{i}{3}(K^3 - 3a^2K - ia^3)\right) \quad (1-26)$$

notemos que el primer término de la expresión está relacionado con la amplitud de una onda, en este caso particular observamos que es la ecuación para una función gaussiana; además, debemos destacar que en la fase la máxima potencia que presenta la frecuencia es de tipo cúbico.

De este modo el método que se emplea para generar haces Airy consiste de utilizar máscaras cúbicas iluminadas por un haz Gaussiano para luego hacer pasar la luz reflejada por la máscara a través de una lente, que representa una transformada de Fourier<sup>4</sup>, y así obtener un haz Airy luego de una distancia equivalente al doble de la distancia focal de la lente.

El método mencionado fue empleado por Siviloglou et al. [1] para generar por primera vez los haces Airy y ofrece amplias facilidades para realizar estudios detallados de estos haces de luz.

## 1.7. Fases cúbicas simétricas

Como ya mencionamos, en el caso de un haz Airy de energía finita la fase es proporcional al cubo de la coordenada transversal en cuestión. Pero, al modificar esta fase utilizando el valor absoluto de la coordenada al cubo se genera un nuevo haz.

Supongamos que la forma de la fase ahora estará dada por la siguiente expresión:

---

<sup>4</sup>Para mayores detalles respecto a este tema, consultar el Apéndice A.

$$\varphi(k_x, k_y) = \exp [i (|k_x|^3 + |k_y|^3)]. \quad (1-27)$$

En este caso se generará un haz con una estructura completamente diferente a la que ya conocemos del haz Airy. Al hacer esta modificación, este haz, que denominaremos *Airy simétrico* por motivos expuestos más adelante, deja de ser adifraccional a costa de tener una configuración piramidal respecto a la dirección de propagación.

Otra manera de concebir estos haces Airy simétricos es que son la interferencia entre las colas de 4 haces Airy de energía finita ubicados en las esquinas de un cuadrado. Recientemente se ha propuesto que los haces Airy simétricos son resultado de una superposición simétrica de funciones especiales Airy incompletas [21].

## Capítulo 2

# Micromanipulación

### 2.1. Pinzas ópticas

La concepción de usar luz para atrapar objetos tiene su origen en la presión de radiación. Por el año de 1609 Johannes Kepler (bien conocido por establecer las 3 leyes que modelan el movimiento planetario) expone la posibilidad de hacer un viaje espacial de la Tierra a la Luna usando únicamente luz, este pensamiento se fundamentaba en el comportamiento que había observado en las colas de los cometas: éstas siempre apuntaban en la dirección opuesta al Sol, lo que indicaba la existencia de una especie de presión de radiación ejercida por el Sol. Para la época de Kepler el mover materia sólo usando luz parecía formar parte una historia de ciencia ficción, hecho que hoy en día se ha convertido en una realidad.

A una escala macroscópica, el uso de la luz sobre los objetos para modificar su estado de movimiento resulta poco funcional, por el contrario, para objetos de tamaño microscópico los efectos de la luz para manipular y ordenar han adquirido un gran interés. La luz puede mover materia debido a que los fotones llevan impulso, o bien, si un fotón tiene longitud de onda  $\lambda$  entonces su momento será  $p = h/\lambda$  siendo  $h$  la constante de Planck. Por esta razón, si un átomo emite o absorbe un fotón, el momento de dicho átomo cambia según de las leyes de Newton. Análogamente, cuando una micropartícula refleja o refracta un haz de luz cambiando la dirección del haz, dicho objeto también experimenta una fuerza.

Cuando hacemos interactuar una partícula esférica transparente con una fuente de luz láser una parte de la luz es reflejada, otra es transmitida y también puede haber una parte pequeña

que sea absorbida para luego transformarse en calor. El resultado de estas fuerzas es la denominada *fuerza de esparcimiento* que surge del fenómeno de refracción del haz dentro de la partícula y tiene como resultado generar una fuerza en la dirección de propagación del haz. Hay otra fuerza que juega un papel fundamental en la pinzas ópticas, ésta adquiere el nombre de *fuerza de gradiente* que surge a partir del hecho de hay un gradiente de intensidad en la sección transversal del haz de luz, en otras palabras, la intensidad en el centro es máxima y disminuye progresivamente hacia las orillas, ésto produce que la partícula se sienta atraída hacia el centro del haz. Ambas fuerzas aparecen en la figura 2-1 y son el sustento del funcionamiento de las pinzas ópticas.

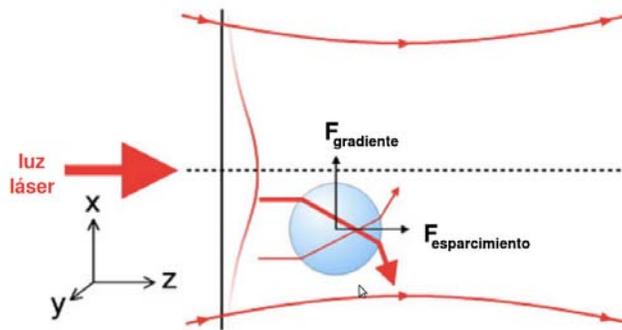


Figura 2-1: Esquema de las fuerzas de gradiente y de esparcimiento en el sistema partícula-haz láser.

Antes de continuar, es fundamental tener un previo manejo de los conceptos físico que rigen el comportamiento de un sistema partícula-luz. El análisis tanto físico como matemático de la fuerza que se genera de la interacción con luz depende de la relación entre la longitud de onda y el tamaño del objeto, con base en ello se distinguen claramente tres regímenes para tratar el sistema luz-partícula.

Cuando el tamaño de la microesfera tiene una magnitud mucho mayor que la longitud de onda de la luz utilizada para atrapar, las fuerzas ópticas sobre la micropartícula se pueden calcular utilizando la aproximación de rayos ópticos. En estos casos, la relación que frecuentemente se presenta es  $R > 10\lambda_0$  siendo  $R$  el radio de la esfera micrométrica y  $\lambda_0$  la longitud de onda del láser en el vacío. La figura 2-2 muestra un esquema de la configuración para este primer régimen de rayos ópticos.

El segundo régimen corresponde a la situación en la que el tamaño de la microesfera, que

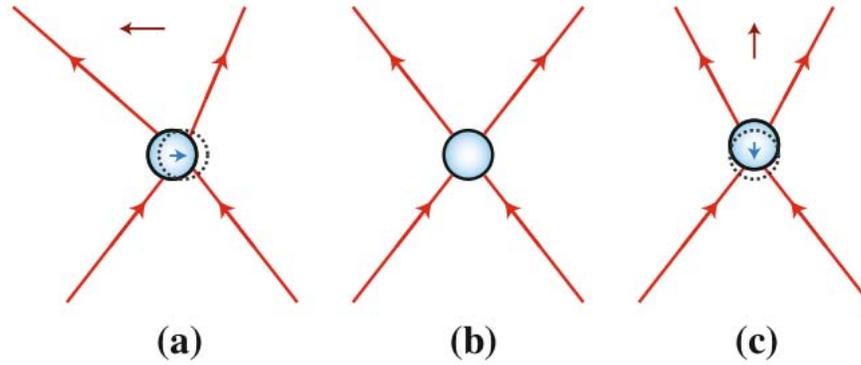


Figura 2-2: Esquema cualitativo del atrapamiento óptico de esferas dieléctricas. (a) Una fuerza se ejerce sobre la partícula cuando ésta tiene un desplazamiento lateral del foco. (b) No hay fuerza neta sobre la partícula cuando está atrapada en el foco. (c) Finalmente, al estar la partícula sobre la posición del foco, ésta experimenta una fuerza. Figura tomada de la referencia [22].

ahora puede ser de nanométrica, es mucho más pequeña que la longitud de onda de la luz láser que se emplea para atrapar, usualmente se cumple la relación  $R < \lambda_0/10$ , entonces la nanoesfera puede ser aproximada como un dipolo. Este régimen recibe el nombre de *aproximación de Rayleigh* y se debe a que las fuerzas ópticas sobre las nanoesfera pueden ser aproximadas analíticamente utilizando la teoría de la Dispersión de Rayleigh. Cabe mencionar que, por las dimensiones de las partículas utilizadas en nuestros experimentos, este es el régimen en el que nos encontramos y por lo mismo lo analizaremos ligeramente más a fondo que los otros dos.

Como ya se ha dicho, el objeto en cuestión puede considerarse a primera aproximación como un dipolo perfecto (figura 2-3) que, al momento de interactuar con un campo electromagnético experimentará una fuerza de Lorentz sobre sí mismo, esto a consecuencia del gradiente en la intensidad del campo eléctrico, la figura 2-4 muestra el esquema de una partícula siendo iluminada por un haz láser que se propaga en la dirección  $z$ . Debido a que el perfil del haz usado es de tipo Gaussiano, la fuerza deberá apuntar hacia el foco, esta fuerza tiene la siguiente expresión

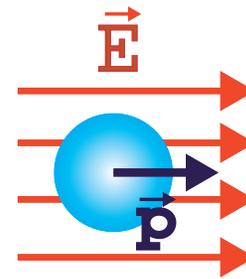


Figura 2-3: Caricatura de la generación de un dipolo que se induce en la partícula al estar en presencia de un campo eléctrico.

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{B} \quad (2-1)$$

donde  $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{E}$  es el dipolo inducido y  $\alpha$  es la polarizabilidad. Las pinzas ópticas son utilizadas la mayoría de las veces con un láser de onda continua tal que  $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = 0$ . Cuando está situación se cumple entonces el promedio temporal de la fuerza se convierte en

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{\alpha}{2} \nabla \langle \mathbf{E}^2 \rangle \quad (2-2)$$

en esta última expresión se aprecia que la fuerza es proporcional a la intensidad del haz que estemos usando.

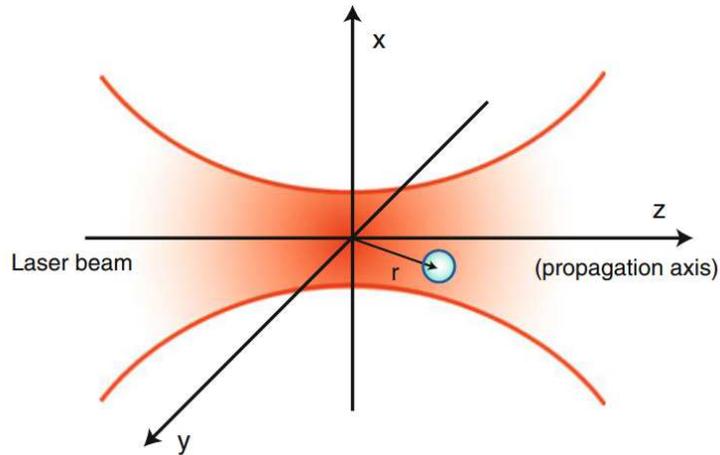


Figura 2-4: Esquema de una trampa nanométrica ubicada cerca del foco de un haz láser. Figura tomada de la referencia [22].

Ahora bien, en la mayoría de los experimentos con pinzas ópticas, el tamaño de las partículas dieléctricas es comparable con la longitud de onda de la luz láser utilizada, es decir,  $R \sim \lambda_0$ . En este caso, ni el régimen de rayos ópticos ni la aproximación de Rayleigh son apropiados para tratar el problema. El método más conveniente es utilizar la teoría electromagnética de la luz. Cuando se da el atrapamiento óptico en microesferas homogéneas e isotrópicas, se puede utilizar la teoría generalizada de Lorenz-Mie [22].

Es importante mencionar que fue en 1970 que Arthur Ashkin construyó las primeras trampas ópticas en los laboratorios Bell de AT&T, las cuales usaban la presión de radiación dirigida hacia

arriba proveniente de un flujo de fotones para contrarrestar el empuje producido por la fuerza de gravedad y por ende fueron llamadas “trampas por levitación”, mientras que las “trampas por dos haces” utilizan dos haces con direcciones contra-propagantes para atrapar partículas. Para el año de 1986 Ashkin y sus colegas notaron que la fuerza de gradiente era suficiente para atrapar pequeños objetos: usando solamente un haz fuertemente enfocado pudieron atrapar en las tres dimensiones una partícula transparente [23]. Y fue así como surgieron las *Pinzas Ópticas*.

En la figura 2-5 se muestra un esquema de las fuerzas que experimenta una partícula al interactuar con un campo óptico. La fuerza de resorte  $F_x$  que actúa sobre la partícula apunta hacia el centro de la trampa con una magnitud que es directamente proporcional, mediante la constante  $k_x$ , al desplazamiento  $d_x$  de la partícula apartir de la posición de equilibrio.

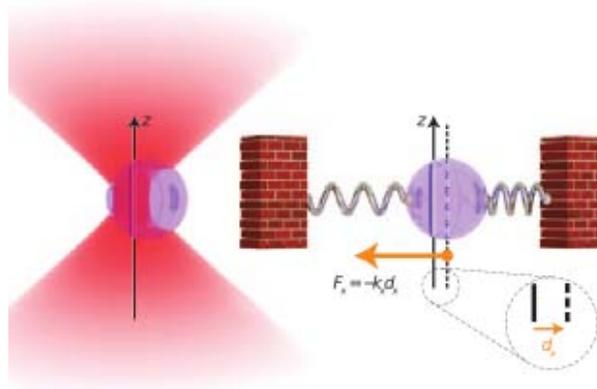


Figura 2-5: Una partícula confinada en un campo óptico se comporta como si estuviera bajo el efecto de un oscilador armónico.Figura tomada de la referencia [24]

Al tener una partícula transparente con un índice de refracción más alto que el índice del medio que le rodea, ésta se sentirá atraída hacia la región de máxima intensidad de un láser ubicado cerca de la misma. Es gracias a esta situación que las pinzas ópticas funcionan, más aún, al mover el foco del haz es posible transportar la partícula de un sitio a otro. Con esta herramienta miniatura es posible sujetar y mover muestras biológicas (que van desde decenas de nanómetros hasta decenas de micras) u objetos dieléctricos. A pesar de que las fuerzas de esparcimiento y de gradiente son del orden de picoNewtons ( $10^{-12}$  *Newtons*), al estar en un mundo microscópico, esta magnitud de fuerza es suficiente para confinar y manipular partículas micrométricas.

Para tener un panorama completo de las fuerzas que actúan sobre la partícula, es importante considerar la *fuerza de Stokes*. En la mayoría de los experimentos en los que se emplean pinzas ópticas es necesario colocar la muestra de micro-objetos en alguna solución líquida, por lo que al haber una interacción de la luz con la partícula el movimiento de ésta se verá alterado, experimentando una fuerza de arrastre de la forma  $F_r = 6\pi R\eta v$ . Además, por el tamaño del objeto, el estado de la partícula sufrirá cambios en su trayectoria debido al *movimiento browniano*.

Previamente se mencionó que Ashkin empleó un haz láser fuertemente enfocado, esto se hizo con el propósito de incrementar la magnitud de las fuerzas de gradiente. Es por ello que uno de los principales componentes del sistema óptico para pinzas ópticas es un objetivo de microscopio con un valor alto de apertura numérica<sup>1</sup>. Esta misma lente se usa para obtener la imagen del objeto atrapado.

A lo largo de casi tres décadas las pinzas ópticas han tenido un amplio campo de aplicación en experimentos que van desde el estudio de motores moléculares en biología hasta el análisis del movimiento de los condensados de Bose-Einstein en física. Las capacidades de una sola pinza óptica se han extendido gracias al progreso alcanzado en los últimos años, provocando la necesidad de ir más allá, por ello se inició la búsqueda de métodos que permitieran generar un gran número de trampas simultáneas. Estos desarrollos han conducido a un nuevo tipo de experimentos realizables.

A continuación mencionamos sólo algunos casos representativos de entre muchos más experimentos que se han llevado a cabo a partir del nacimiento de las pinzas ópticas.

## 2.2. Micromanipulación con trampas holográficas

Uno de los recientes avances tecnológicos y científicos más impresionantes en las pinzas ópticas es el poder crear arreglos de trampas ópticas en dos y tres dimensiones. Hay muchas maneras de llevar a cabo esta tarea.

Como ejemplo consideremos el caso de Yosuke Ogura *et al.* [25] de la Universidad de Osaka en Japón que en 2001 usaron una láser de cavidad vertical y emisión superficial para crear

---

<sup>1</sup>La apertura numérica, abreviada como A. N., es una medida del ángulo para el cual el haz se concentrará en el punto focal.

arreglos de trampas, lo que hacían era escanear un sólo haz láser sobre diferentes posiciones. Cada sitio representando una trampa es iluminado sólo un instante, a pesar de ello, la intensidad promedio del pozo de potencial es suficientemente fuerte como para atrapar un objeto microscópico siempre que el láser permanezca en cada trampa el tiempo suficiente como para contrarrestar los fenómenos provocados por la difusión de las partículas. No obstante, el enfoque actual más potente para la creación de trampas múltiples involucra el uso de elementos ópticos difractivos para llevar a cabo lo que se conocen como *pinzas ópticas holográficas*.

La forma tradicional de generar un holograma es haciendo interferir dos haces, uno denominado haz de referencia y el otro haz de imagen que ha sido reflejado desde algún objeto en 3D, entonces el holograma será el patrón de interferencia que se produce. El holograma contiene tanto la información de amplitud como de fase, lo que significa que iluminando el holograma con un haz de referencia, se genera una imagen en 3D idéntica al objeto inicial. Sin embargo, realmente no necesitamos el objeto original para crear el holograma, mientras sea posible calcular el patrón de interferencia que este objeto produciría estando presente.

Esto tiene una muy importante implicación: en lugar de tomar una fotografía en 3D (holograma) de un objeto que ya existe, podemos usar un holograma para crear algo que no existe, en este caso un arreglo de pinzas ópticas o trampas. Para llevar a cabo esta tarea necesitamos hacer uso de hologramas generados vía computadora. El proceso consistiría en comenzar con el patrón que queremos crear en el plano de las pinzas ópticas para luego trabajar en reversa y calcular el holograma que producirá este patrón cuando sea iluminado con un haz láser.

El diseño de los hologramas puede estar destinado a modular la amplitud y la fase del haz entrante o solamente una de dichas características. No obstante, los hologramas que sólo modulan la fase se han vuelto el tipo predilecto para crear trampas puesto que la fuerza de atrapamiento depende de la intensidad del láser y, en el otro tipo de holograma, al modular la amplitud una parte de la energía del haz incidente será desechada. Dufresne *et al.* [26] realizaron un algoritmo iterativo para calcular el patrón requerido. El patrón calculado mediante la modulación de la fase puede ser grabado sobre una placa de vidrio o sobre algún otro material transparente en relieve mediante técnicas litográficas.

Un claro ejemplo del uso y aplicación de trampas holográficas se muestra en la figura 2-6 en la cual se emplean pinzas ópticas holográficas de tipo dinámico [27]

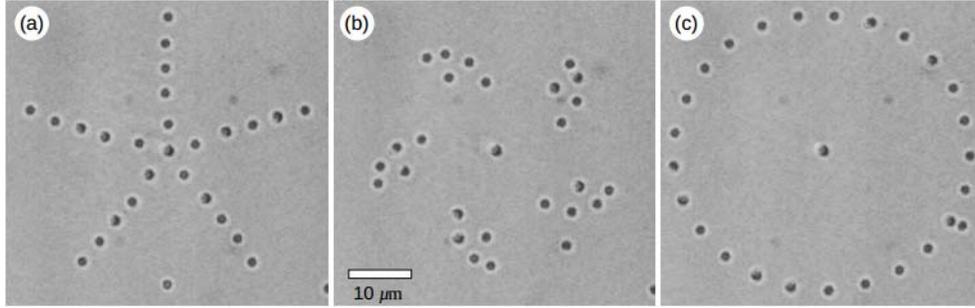


Figura 2-6: Fotografía de 26 esferas coloidales de silica (con  $0.99 \mu m$  de diámetro) que originalmente están en un arreglo de 5 ejes para luego transformarlo en un círculo usando pinzas ópticas holográficas dinámicas. (a) Configuración inicial; (b) arreglo luego de 16 pasos; (c) configuración final luego de 38 pasos. Figura tomada de la referencia [27].

### 2.3. Micromanipulación con haces adifraccionales y luz estructurada

Una de las múltiples aplicaciones que los haces adifraccionales han tenido es su uso en el campo de la manipulación óptica a escalas de micrómetros. A continuación describiremos brevemente algunos de los casos más importantes en este tema.

Como ya hemos mencionado primero se logró hacer una sola trampa, luego vinieron las trampas holográficas que permitieron generar más de una trampa al mismo tiempo, el siguiente paso en esta cadena de avances fue el utilizar luz estructurada.

Uno de los primeros casos más representativos es el de Paterson y su colegas que, en 2001, demostraron que al colocar microobjetos en un patrón de interferencia de un haz Laguerre-Gauss (LG) [28] y una onda plana éstos permanecen atrapados y más importante aún adquieren un movimiento de rotación [29]. Esta técnica no depende de las propiedades intrínsecas del objeto atrapado por lo que representa una importante contribución a la micromanipulación de objetos biológicos o compuestos de otros materiales que respondan a estímulos ópticos.

Ese mismo año, J. Arlt et al. [30] demostraron que es posible manipular objetos micrométricos (dentro de los cuales se encuentran especímenes biológicos) usando un haz Bessel de orden cero. Debido a que este haz es adifraccional, la trayectoria que describe el máximo central al propagarse es una línea focal de luz, al colocar partículas en esta línea se puede generar un apilamiento de las mismas. En el trabajo desarrollado en la Universidad de St. Andrews, lograron

apilar hasta nueve partículas de  $5 \mu m$  y también manipular esta cadena de partículas.

Luego, en el año 2002 Garcés Chávez et al. [31] lograron atrapar micropartículas en distintos planos separados cierta distancia, esto se consiguió sólo utilizando un haz adifraccional, y fue gracias a la peculiar característica de los haces Bessel para auto reconstruirse luego de cierta distancia al pasar por un obstáculo que bloquee la intensidad del campo. La figura 2-7 muestra el montaje experimental utilizado en este experimento.

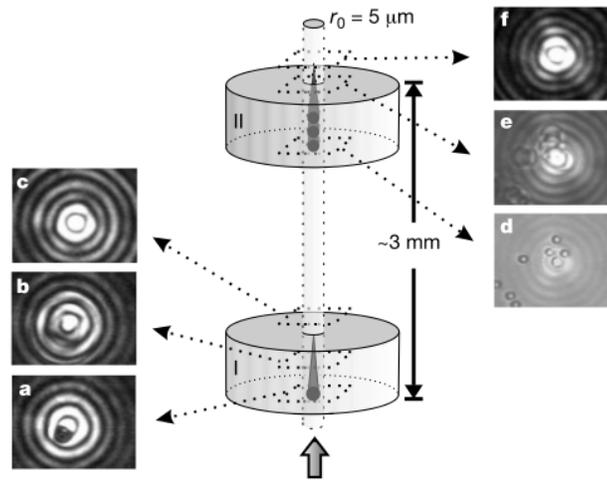


Figura 2-7: Montaje experimental de unas pinzas ópticas invertidas. La imagen central muestra el montaje para la manipulación de partículas cuya separación espacial es de unos 3 mm entre cada celda con  $100 \mu m$  de profundidad cada una. **a-f**, Cuadros de un video tomado de objetos capturados por un haz Bessel. Figura tomada de la referencia [31].

Este tipo de pinzas ópticas puede utilizarse para realizar estudios de manera simultánea sobre muestras biológicas o de coloides que se hayan preparado bajo las mismas condiciones, además representa una herramienta para mejorar el control en los dispositivos tipo “lab-on-a-chip”.

Pero el experimento que más nos interesa es el de Z. Zheng et al. [32] ya que el principal objetivo de dicho grupo fue explorar las capacidades del haz Airy para micromanipulación. Este grupo de investigación logró crear múltiples trampas en dos dimensiones para alcanzar el confinamiento de partículas y descubrieron que las trampas más estables existen en la vecindad de los lóbulos de intensidad principales de los haces Airy enfocados. La figura 2-8 muestra algunos de los arreglos de trampas logrados con esta técnica.

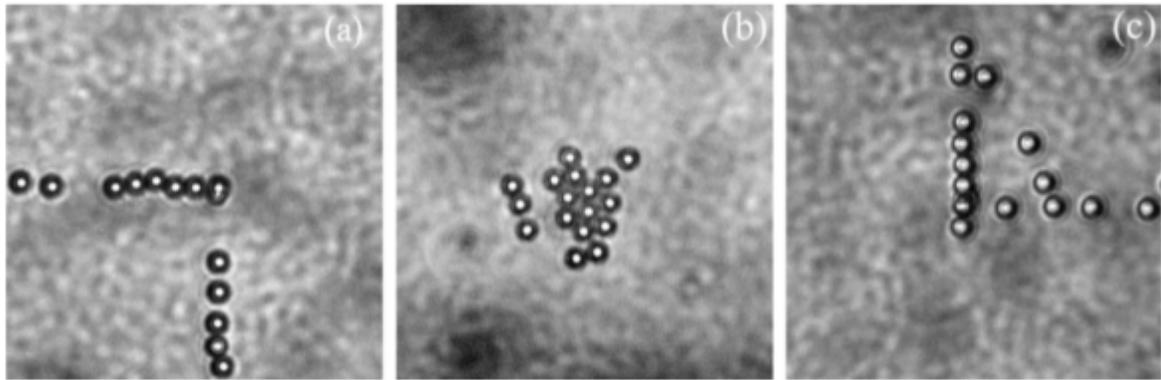


Figura 2-8: Imagen de partículas atrapadas en un haz Airy enfocado. El atrapamiento se da en planos transversales distintos: **(a)** antes del foco, **(b)** en el foco, y **(c)** luego de pasar el foco. Figura tomada de la referencia [32].

Además de los pocos casos mencionados en esta sección, existe una gran cantidad de métodos que se sirven de las propiedades de los haces adifraccionales para lograr configuraciones de trampas ópticas que hace unos años habrían resultado inimaginables. Como parte de este trabajo de tesis, investigaremos el uso de los haces Airy simétricos en el área de la micromanipulación óptica.

## Parte III

# Generación de luz estructurada en el laboratorio

## Capítulo 3

# Observación experimental de un haz Airy y un haz Airy simétrico

### 3.1. Introducción

En este capítulo se explica a detalle la producción de haces Airy. Además se presentan una serie de observaciones sobre haces Airy de energía finita o pseudo-adifraccional. A diferencia de los otros campos invariantes mencionados, los haces que estudiamos se pueden realizar en una dimensión (1D) y no resultan de una superposición cónica de ondas. Con los experimentos que realizamos y cuyos resultados presentamos a continuación confirmamos que, a pesar de que el haz Airy que se obtiene en el laboratorio no tiene energía infinita, es decir, se encuentra truncado por una función exponencial, éste aún mantiene las características de un haz adifraccional. El proceso de propagación en este caso es completamente coherente con la teoría.

Para el caso de un haz Airy simétrico también se describe el método experimental para la generación de los mismos. Además fue posible extraer varias fotografías de distintos planos de propagación que nos permiten apreciar la estructura piramidal que los caracteriza. En el capítulo siguiente se entrará en detalle respecto a las aplicaciones posibles de este nuevo y peculiar tipo de haz.

### 3.2. Generación en el laboratorio de un haz Airy y un haz Airy simétrico

Hemos mencionado que la transformada de Fourier  $\Phi_0(k_x)$  de la ecuación (1-23) tiene la forma:

$$\Phi_0(k) = \exp(-aK^2)\exp\left(\frac{i}{3}(K^3 - 3a^2K - ia^3)\right) \quad (3-1)$$

de donde fácilmente se puede inferir que el espectro angular de este haz Airy truncado es Gaussiano y también que una fase cúbica está involucrada (la cual resulta de la transformada de Fourier de la función Airy misma). Esta forma tan peculiar del espectro tiene implicaciones muy importantes para la realización experimental de la versión de energía finita del haz Airy. En otras palabras, este campo cuasi-invariante puede ser generado a partir de un haz Gaussiano empleando una transformada de Fourier, siempre y cuando se imponga como fase una fase cúbica.

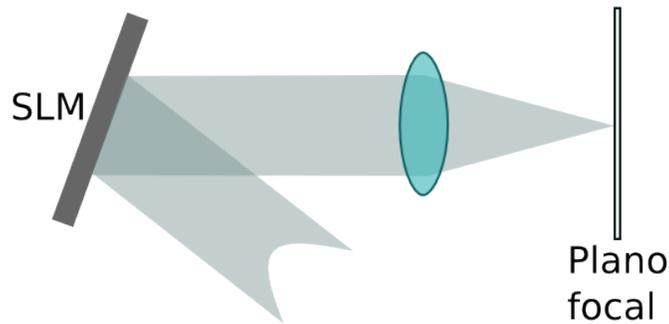


Figura 3-1: Simplificación del montaje experimental

La figura 3-1 muestra la versión simplificada del montaje experimental empleado para generar los haces Airy de energía finita. Como se aprecia primeramente tenemos un haz Gaussiano que incide en un modulador espacial de luz (SLM), en este último se se crea el holograma (mediante un programa de cómputo) que permite asignarle una fase cúbica a la luz que se refleje en la superficie del SLM, el siguiente paso es colocar una lente para enfocar el haz con la fase cúbica y así, aplicando la transformada de Fourier luego de una distancia igual a la distancia focal de la lente, obtener nuestro haz Airy.

Habiendo ya explicado a grandes rasgos la producción de estos haces, podemos comenzar

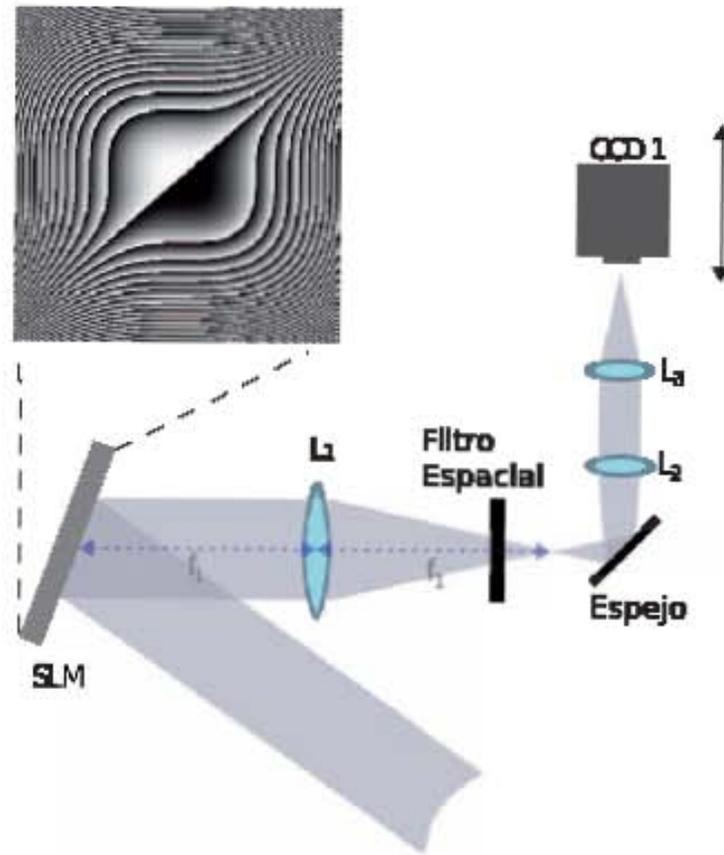


Figura 3-2: Representación grafica del montaje experimental para la observación de la propagación de un haz Airy.

a explorar los detalles del arreglo experimental completo. Para generar un haz Airy de energía finita en el laboratorio empleamos un láser que emite luz a  $975 \text{ nm}$  (previo a la interacción con el SLM, este haz es ensanchado mediante un sistema óptico de manera que ilumine completamente la pantalla del SLM), a continuación este haz expandido es reflejado desde la pantalla frontal del SLM que es controlado por una computadora. La función, en este caso, del SLM es imponer a la luz una fase cúbica que es la parte fundamental de producir un haz Airy. Con la finalidad de generar un haz Airy en dos dimensiones se coloca una lente convergente cuya distancia focal tiene un valor de  $f = 0.4 \text{ m}$  a una distancia  $f$  en frente del SLM. Luego del SLM, la transformada de Fourier del haz Gaussiano resultante (una vez que ha sido modulado por la fase cúbica) se obtiene a una distancia  $d = f = 0.4 \text{ m}$  detrás de la lente. Previo a la adquisición de fotografías, se coloca un diafragma para dejar pasar únicamente la parte del haz reflejado correspondiente al haz Airy, además implementamos un telescopio (lentes  $L_2$  y

$L_3$ ). Posterior a todo este arreglo, es en este punto que el haz Airy producido se captura en una cámara CCD, que ha sido previamente alineada y montada en un motor micrométrico. La dinámica de propagación de los haces generados se graba como una función de la distancia de propagación por medio de un dispositivo de traslación. El montaje experimental se muestra en la figura 3-2.

Como ya mencionamos, el SLM se emplea para asignarle una fase cúbica al haz Gaussiano que tenemos en principio. La figura 3-3 es la imagen que se obtiene directamente en el programa de Matlab y representa el arreglo que adquiere el cristal líquido del SLM para generar un haz Airy en dos dimensiones. Cabe señalar que la imagen se encuentra en escala de grises en la que el color blanco corresponde a  $2\pi$  radianes mientras que el color negro se encuentra asignado a la escala menor, es decir, 0 radianes.

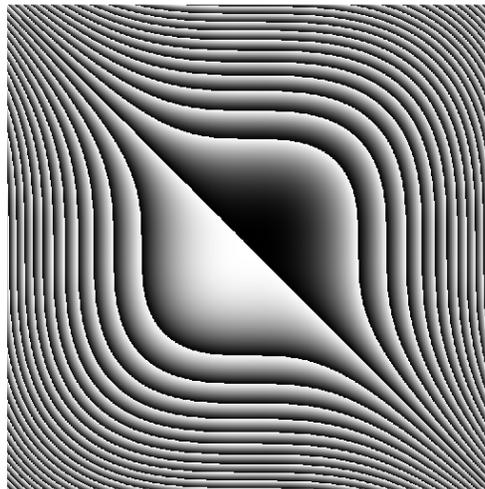


Figura 3-3: Imagen de la fase cúbica empleada para generar un haz Airy en 2 dimensiones. En el patrón de escalas de grises, el color negro corresponde a 0 radianes mientras que el blanco indica  $2\pi$  radianes.

El otro haz que estudiaremos será el haz Airy simétrico. La ecuación para la fase de este haz también contendrá términos cuya máxima potencia es cúbica mas, hay que enfatizar el hecho de que se considera el valor absoluto de la coordenadas  $x$  y  $y$ , tal como lo muestra la siguiente expresión:

$$\varphi(k_x, k_y) = \exp[i(|x|^3 + |y|^3)] \quad (3-2)$$

Ahora bien, el montaje experimental para observar la estructura de un haz Airy simétrico es igual al que se mostró en la figura 3-2 salvo la siguiente diferencia importante: la forma matemática del holograma cambia y por ello la geometría del mismo también lo hace. Análogamente al caso del haz Airy de energía finita, el holograma fue generado mediante un programa de Matlab.

La figura 3-4 es una imagen que se obtiene directamente del programa de cómputo para producir el holograma empleado en la generación de estos haces simétricos.

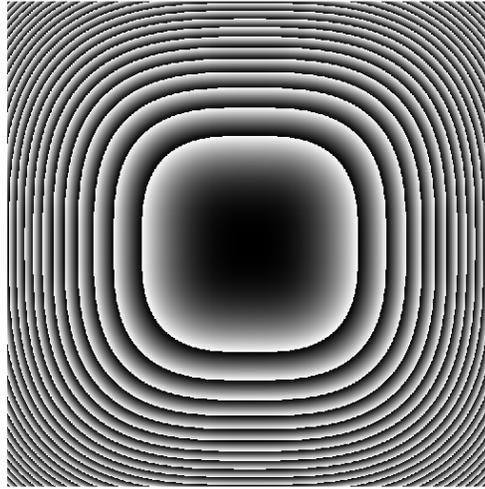


Figura 3-4: Holograma empleado para generar un haz Airy simétrico. Al igual que para el caso del haz Airy, en el patrón de escalas de grises, el color negro corresponde a 0 radianes mientras que el blanco indica  $2\pi$  radianes.

A diferencia del haz Airy normal, en el presente caso, para la adquisición de fotografías se aplicó otro método: dejando fija la cámara CCD, se agregó un término al argumento de la fase en el programa para generar el holograma, éste va encaminado hacia la exploración del haz en el área de las pinzas ópticas. En el siguiente capítulo se explicará con mayor detalle este procedimiento, por el momento basta con señalar que cada foto ha sido caracterizada mediante un parámetro que llamaremos **aa** que se encuentra relacionado con la distancia existente entre la zona más estrecha del haz y el plano de observación.

### 3.3. Observaciones en 1 y 2 dimensiones

En el experimento, el proceso para obtener las fotografías fue el siguiente: con la finalidad de asegurar que la deflexión del haz capturada en cada imagen no fuera resultado de una mala alineación de los instrumentos ópticos, primero se tomaron fotografías del haz sin colocar ninguna fase cúbica en el SLM, sólo se empleaba una fase de prisma para desplazar el primer orden que el modulador producía (esto debido a que es un punto muy intenso), luego se capturaba la imagen del haz Airy. Posteriormente, la cámara CCD (figura 3-2) se desplazaba una determinada distancia en el eje de propagación mediante un motor micrométrico eléctrico. Este procedimiento se repitió 11 veces.

En total se obtuvieron 22 fotografías de las cuales se seleccionaron únicamente 13, de éstas 11 corresponden a distintos planos del haz Airy en la dirección de propagación y 2 más que fueron tomadas en el plano inicial y en el plano final y cuyo objetivo es demostrar que el haz se mantuvo alineado a lo largo del experimento.

Finalmente, mediante un procesamiento de imágenes se extrae únicamente la región en la que se ubica nuestro haz Airy. Además, conociendo la conversión de pixeles a micras es posible determinar la escala en nuestras figuras.

### 3.4. Resultados

A continuación mostramos el conjunto de fotografías tomadas en distintos planos del haz Airy, esto con la finalidad de observar una de sus más importantes propiedades: su trayectoria parabólica. Además se estudia el desplazamiento del lóbulo central conforme el haz Airy se propaga a lo largo de 10 *mm*.

Hagamos la siguiente suposición: si asignamos el mismo valor para los parámetros de escala  $x_0$  y  $y_0$  en la ecuación 1-25 así como para los valores de los factores de truncamiento  $w_1$  y  $w_2$ , entonces el desplazamiento del lóbulo central se realizará a lo largo de una línea recta cuya inclinación corresponde a un ángulo de  $45^\circ$ . Este hecho puede rectificarse comparando las posiciones inicial y final, a lo largo de un desplazamiento de 10 *mm*, del lóbulo central. Dicho desplazamiento se aprecia claramente en la evolución en el espacio del perfil transversal de intensidad del haz Airy que se muestra en la figura 3-5.

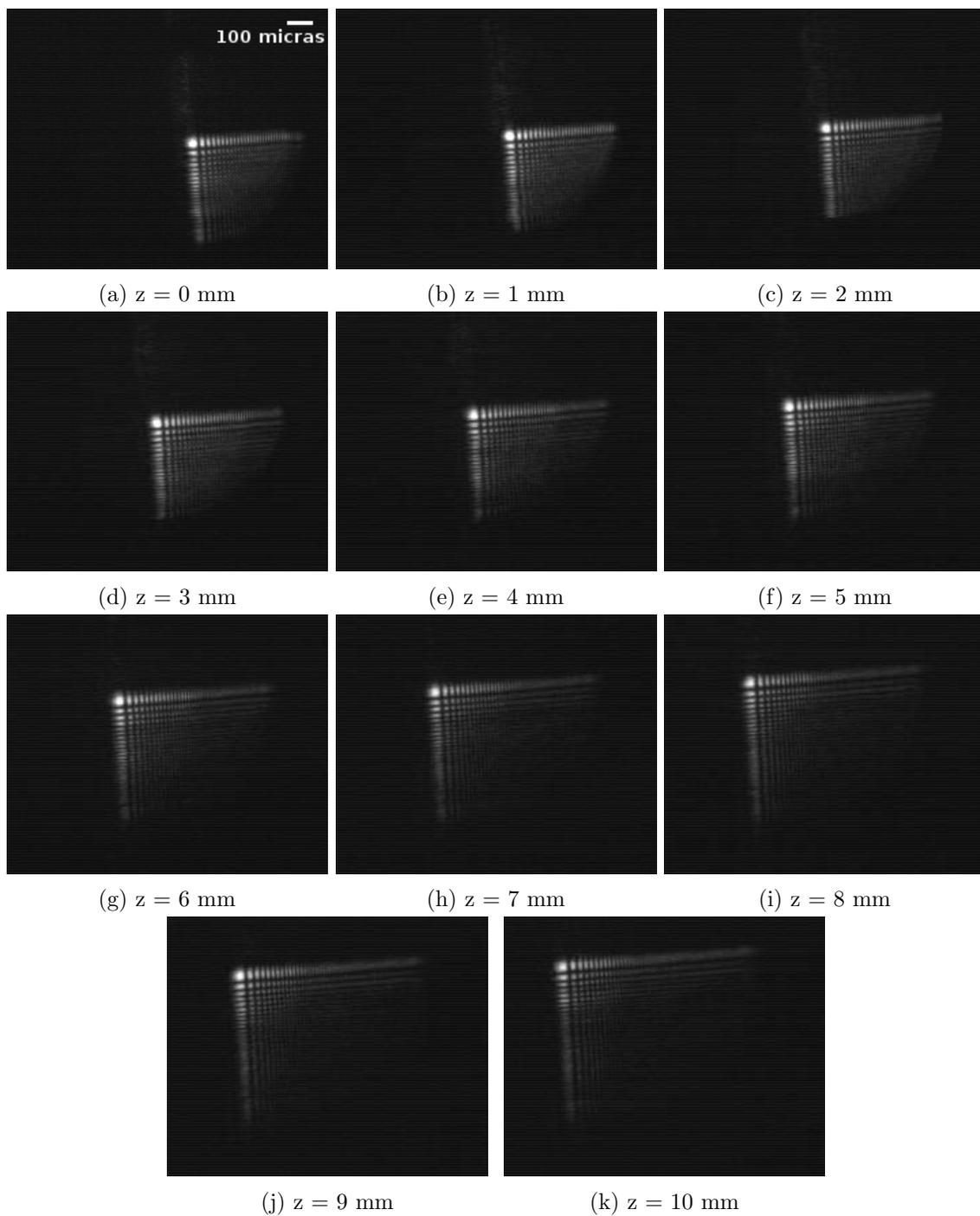


Figura 3-5: Planos transversales de la intensidad de un haz Airy de energía finita a distintos valores de la distancia de propagación  $z$ .

Es importante considerar que, al estar manejando distancias del orden de milímetros o incluso menores, en caso de tener algún elemento óptico con una mala calibración, esto puede afectar nuestras observaciones de manera que el desplazamiento sea producto de este error de alineación y no de una propiedad del haz Airy. Por ello además de las fotografías tomadas al perfil de intensidad del haz Airy se capturó el perfil del haz sin aplicar la fase cúbica, así se puede apreciar si la posición del haz cambia debido a un arreglo desalineado o por la deflexión del haz Airy. Con la figura 3-6 logramos demostrar cualitativamente que el orden proveniente del SLM no se ha desplazada a lo largo de la propagación del haz Airy, por lo tanto el desplazamiento de debe puramente a las propiedades del haz.

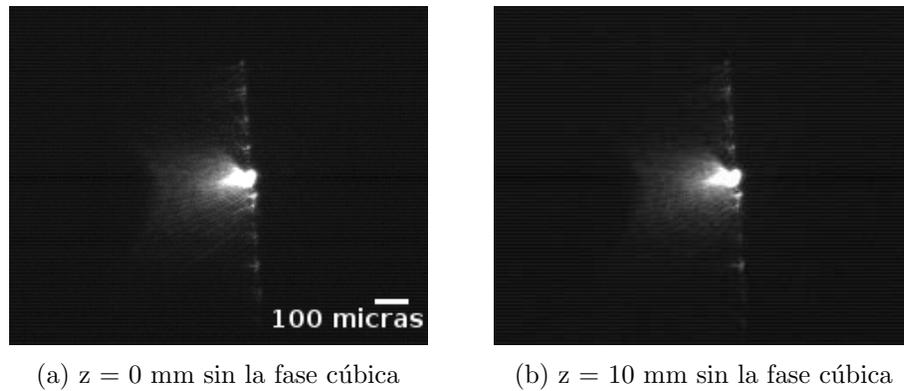


Figura 3-6: Fotografía del perfil de intensidad del haz al no considerar la fase cúbica. La comparación entre los cuadros a) y b) permite observar que el haz no sufrió desplazamiento alguno a lo largo de la propagación del mismo.

Una vez analizadas las fotografías, utilizando las posiciones del lóbulo central (los valores de las coordenadas  $x$  y  $y$  en términos de píxeles) se realiza una gráfica con dichos puntos para realizar un ajuste lineal y así determinar la pendiente de dicha recta. La gráfica 3-7 muestra el conjunto de datos con dicho ajuste.

La ecuación que se obtiene del ajuste lineal está dada por la expresión:

$$(0.661 \pm 0.003)x - (561.6 \pm 9.2)\mu m = y \quad (3-3)$$

de donde se distingue que el ángulo que forma la recta con la horizontal es de  $\theta = 33.46^\circ \pm 0.17^\circ$ .

Además tomamos la posición tanto en  $x$  y en  $y$  en función de la distancia de propagación  $z$  y se realiza otra gráfica, esto con la finalidad de apreciar la trayectoria parabólica del haz Airy.

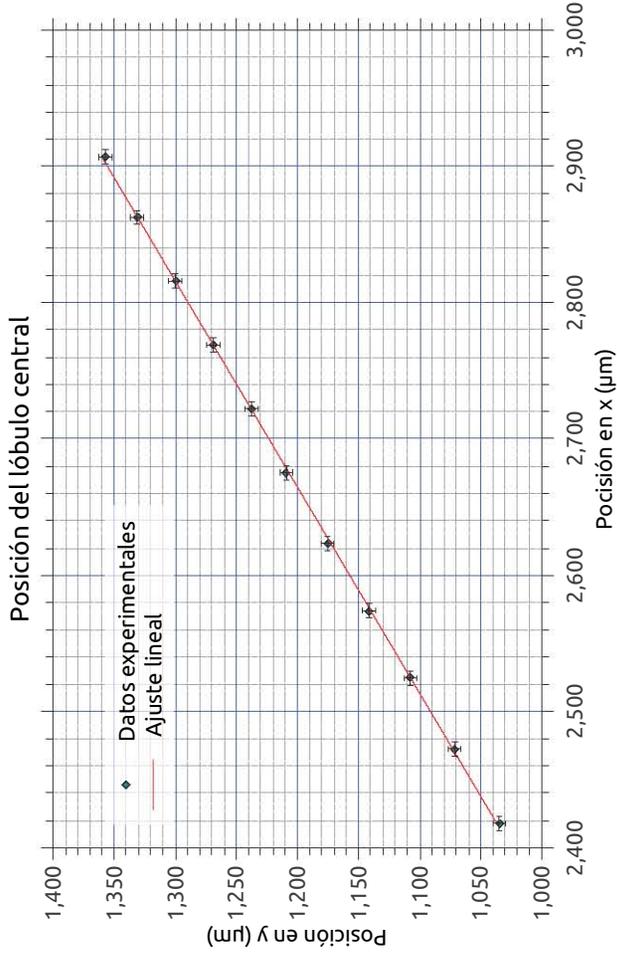


Figura 3-7: En la presente gráfica mostramos la posición en las coordenadas  $x$  y  $y$  del lóbulo central al propagarse. El punto má alejado del origen corresponde con el perfil de intensidad para  $z = 0mm$  mientras que el más cercano representa el perfil para  $z = 10mm$ .

A estos datos se les realiza un ajuste cuadrático.

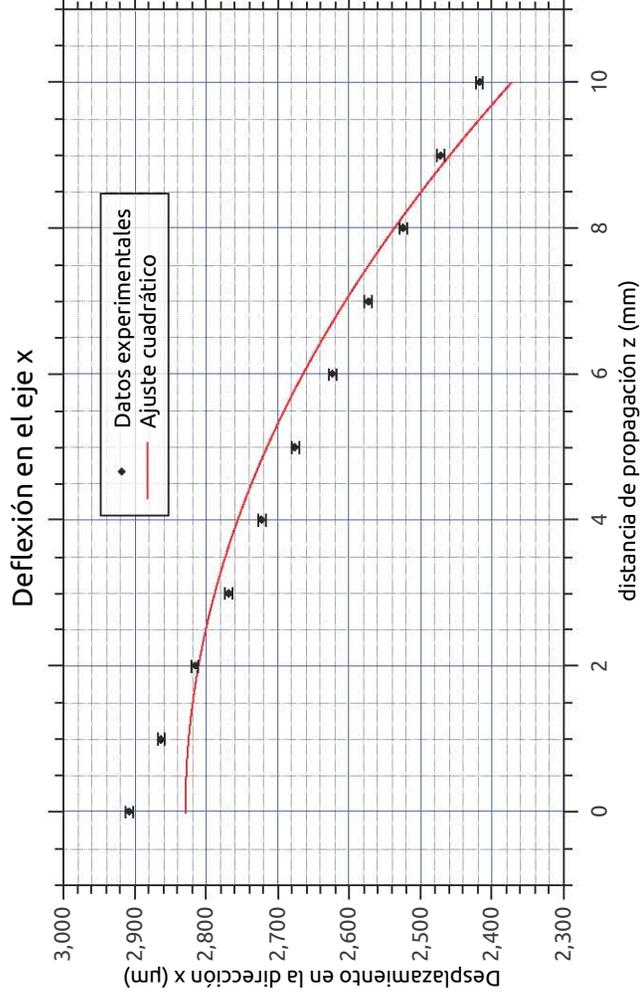


Figura 3-8: Datos experimentales y ajuste cuadrático de la deflexión de la dirección  $x$ .

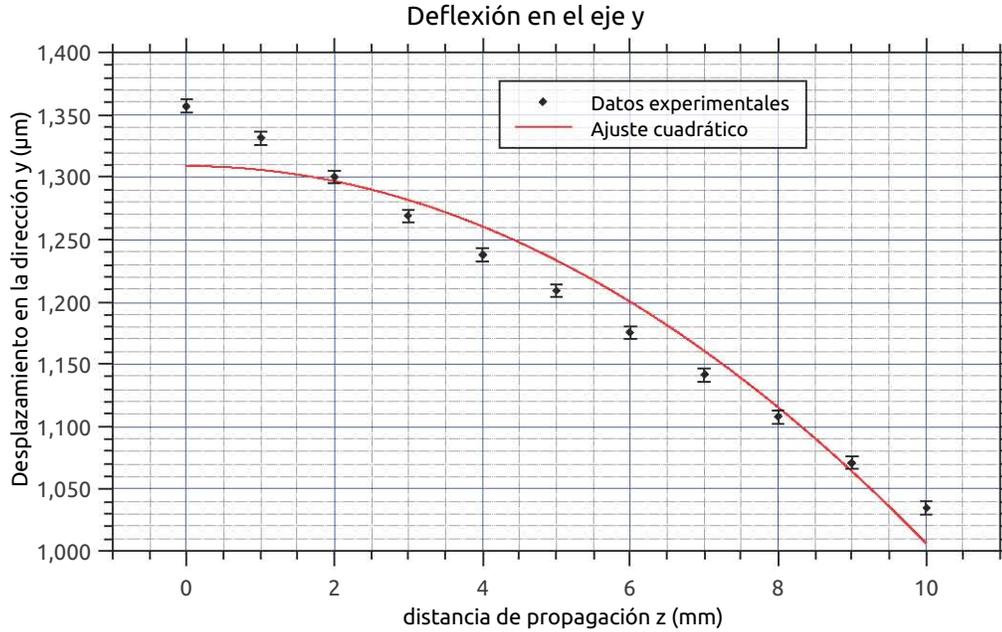


Figura 3-9: Se presentan los datos experimentales y ajuste cuadrático de la deflexión para la dirección  $y$ .

De las gráficas anteriores se deduce que la deflexión en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente, para una distancia de propagación de 10 mm, fue de  $488.8 \mu\text{m}$  y  $322.4 \mu\text{m}$ .

### 3.5. Observación de un haz Airy simétrico

Al modificar la fase del haz Airy normal obtenemos una fuente de luz estructurada a costa de perder todas las propiedades de un haz adifraccional, por ejemplo: su perfil de intensidad cambia en función de la distancia de propagación, si se coloca un obstáculo en el camino del haz éste no se reconstruye, entre otras.

El haz que estudiaremos a continuación está relacionado con el haz Airy únicamente por las fases de ambos, ya que éstas contienen términos a la tercera potencia, de ahí que en el nombre del mismo esté contenida la palabra *Airy*. Además el principal motivo por el que se le acuña el nombre de *simétrico* es debido a la geometría que presenta su perfil de intensidad transversal a lo largo de los distintos planos que se pueden observar. Esta estructura tiene importantes implicaciones en el área de la micromanipulación óptica.

Debido a la estructura que estos haces describen al propagarse es importante apuntar que

denominaremos como *spot central* a aquel plano en el que se presenta únicamente un lóbulo intenso y a partir del cual comienza a formarse la *pirámide* una vez que se incrementa la distancia entre el plano de observación y dicho punto.

Mediante el uso de una cámara CCD se obtuvieron las fotografías que se muestran en la figura 3-10, el primer cuadro corresponde al plano que se encuentra menos alejado al spot central mientras que en el último cuadro se presenta el plano más apartado del spot central. La cámara empleada señala un tamaño del pixel de  $4.65\ \mu m$ , por lo que el ancho de cada cuadro corresponde a una distancia de  $967.2\ \mu m$ .

Como se distingue claramente, este haz presenta una estructura de forma piramidal cuya base tiene una geometría cuadrada que se va expandiendo conforme se incrementa la distancia entre el spot central y el plano de observación. En el primer cuadro de la figura 3-10 se aprecia sólo un punto brillante, situación que cambia conforme la distancia entre el spot central y el plano de observación incrementa, ya que el número de regiones brillantes para el siguiente cuadro ahora corresponde a 5 para luego generar 9, y después 4 y finalmente 16. En el último cuadro se genera una mayor cantidad de puntos que no se distinguen con tanta claridad como los casos anteriores.

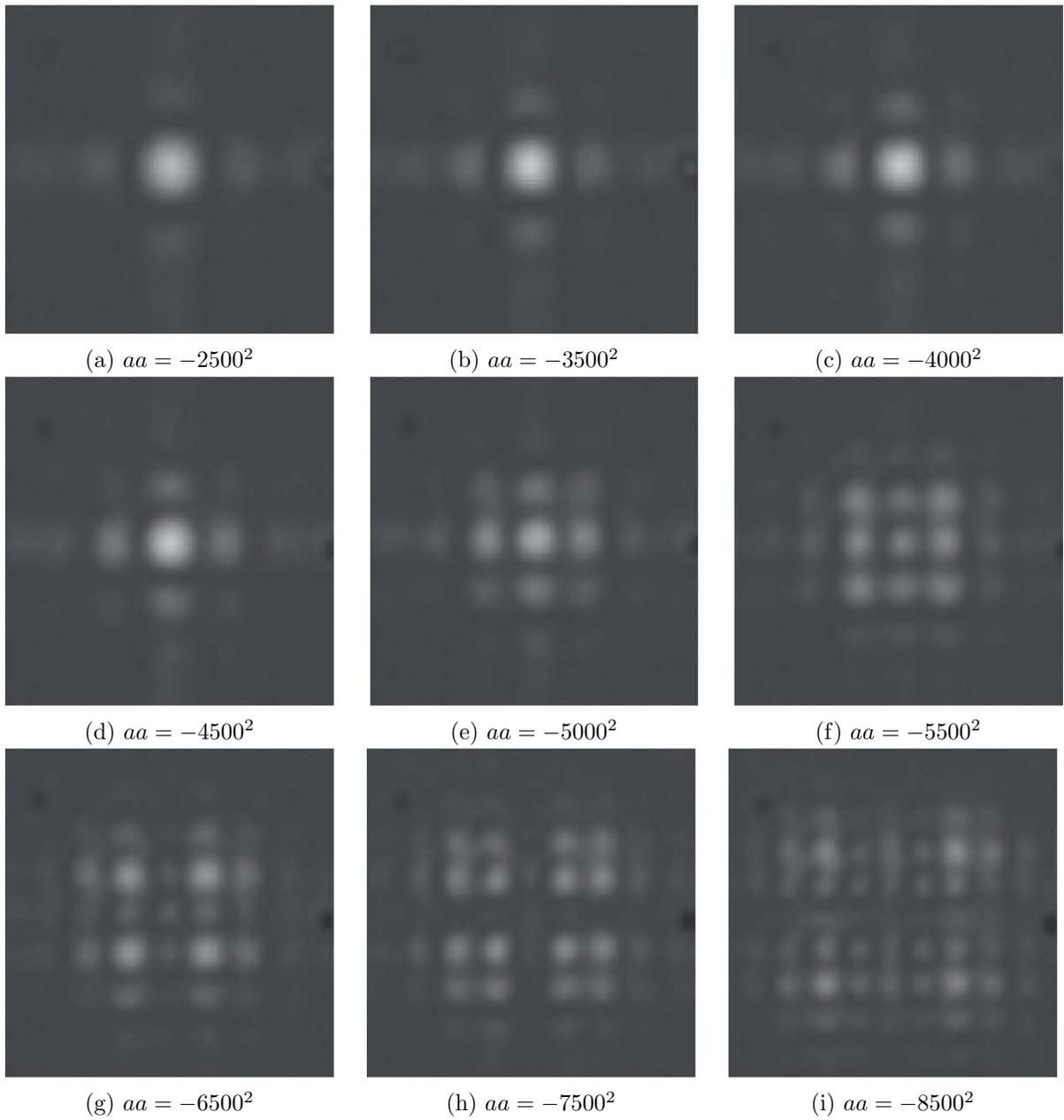


Figura 3-10: Perfiles de intensidad de un haz Airy simétrico para distintas distancias fuera de foco. El lado de cada cuadro mide  $967.2 \mu m$ .

## Capítulo 4

# Manipulación de micropartículas utilizando una haz Airy simétrico

### 4.1. Introducción

Una vez estudiado el caso de los haces Airy de energía finita, podemos comenzar la descripción de un tipo luz estructurada cuyo origen radica en la fase del haz Airy.

Como ya hemos descrito en el capítulo 1, al realizar una modificación a la fase que modula el haz Gaussiano usado en el experimento para generar haces Airy de energía finita, se produce un nuevo tipo de luz cuyo patrón transversal de intensidad sí cambia conforme se propaga, algo que no ocurre con el haz Airy normal. Esta peculiar propiedad da lugar a un arreglo de máximos y mínimos luminosos que están en función de la distancia existente (en la dirección de propagación) entre el plano de observación y el plano en el que este haz Airy simétrico es enfocado, es decir, el punto en el cual se presenta el spot central que adquiere una forma alargada antes de comenzar a desarrollar la pirámide.

Inicialmente se consideró que estos patrones de máximos luminosos observados en los planos transversales del haz, podrían utilizarse como arreglos de trampas ópticas. Por ello hicimos incidir el haz Airy simétrico sobre dos muestras con partículas de dos diámetros distintos.

Logramos observar que los haces Airy simétricos son capaces de atrapar micropartículas con  $R = 0.3 \mu m$ .

Algunas otras aplicaciones de este tipo de luz estructurada se discuten al final del presente

capítulo.

## 4.2. Montaje experimental y resultados

Para la generación del haz Airy simétrico se requiere de un arreglo experimental que se basa en el montaje que fue utilizado para el caso de un haz Airy normal. Además de todos los instrumentos empleados en la figura 3-2, es necesario agregar un sistema de pinzas ópticas para atrapar las micropartículas, es decir añadir un objetivo de microscopio de  $100\times$ , una fuente de iluminación, un condensador, un espejo dicróico así como una platina para colocar la muestra con las partículas en solución. La figura 4-1 muestra la configuración del sistema óptico empleado. Se utilizó el mismo láser de longitud de onda  $975\text{ nm}$ , y la intensidad de corriente del mismo se mantuvo en un intervalo entre  $250.00\text{ mA}$  y  $280.00\text{ mA}$ , donde la corriente más baja corresponde con al plano más cercano spot central y la corriente más alta se utilizó en el plano más alejado.

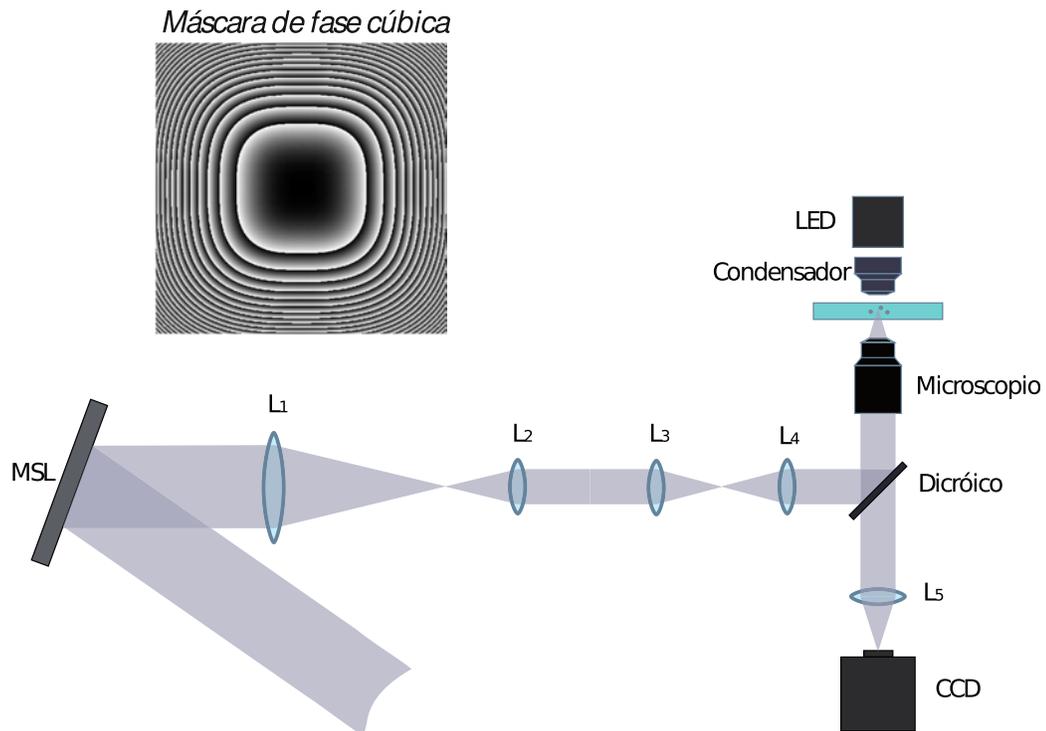


Figura 4-1: Esquema del montaje experimental utilizado para producir y observar la interacción entre el haz Airy estructurado y las partículas nanométricas.

Al utilizar el valor absoluto en la fase del haz Airy, éste pierde todas sus características de haz adifraccional, mas adquiere una estructura (que ya ha sido mostrada en el capítulo anterior) muy peculiar tanto en su dirección de propagación como en sus planos transversales.

La observación del haz Airy simétrico tuvo que desarrollarse utilizando otro método que el empleado en la sección 3.3 ya que, al momento de tener las partículas en interacción con éste haz, era de primera importancia disminuir cualquier movimiento brusco por parte de la muestra. Así, al modificar la posición del plano del haz agregando una fase de lente, el cambio en la ubicación de las micropartículas se ve ligeramente perturbado y de ninguna forma la transición de un máximo en el plano anterior se ve forzada por el movimiento al cambiar el plano de observación, lo cual sí podría ocurrir en caso de mover directamente la cámara CCD.

Para lograr una modificación en el plano de observación sin alterar la posición de la cámara CCD fue necesario realizar el siguiente procedimiento: mediante un programa de cómputo, se agregó un término cuadrático de la forma  $phase_{lens} = aa(k_x^2 + k_y^2)$  (que corresponde a la fase de una lente y donde el parámetro **aa** está relacionado con la distancia entre el spot central y el plano de observación) a la fase que contiene la suma de los valores absolutos de cada coordenada transversal. De esta manera se mantiene fija la cámara y, variando el parámetro **aa** se modifica el plano en el cual se pretende capturar la interacción del haz Airy simétrico con las partículas mediante la toma de un video.

Las partículas destinadas a interactuar con el haz Airy simétrico se colocaban en un contenedor cerrado cuyas dimensiones eran aproximadamente  $20 \times 5 mm$  y con una altura de unos cientos de micrómetros. El procedimiento para construir dicho contenedor se describe a continuación: primero se colocaban dos pedazos de cinta Scotch de doble cara sobre un portaobjetos de manera que existiera una separación de alrededor de 0.5 cm entre éstos, luego, el cubreobjetos se situaba sobre la cinta doble cara, tal como lo muestra la Figura 4-2. Una vez construido este canal, mediante una pipeta automática se hacía fluir el volumen de solución de partículas que fuera necesario para llenar el canal. Al lograr esto último, los extremos descubiertos del conducto eran sellados aplicando un poco de esmalte para uñas.

Es muy importante mencionar que, para obtener una muestra que funcionara apropiadamente, una vez que el esmalte se encontraba completamente seco la muestra se colocaba con el fondo hacia arriba, es decir con la cara expuesta del cubreobjetos hacia arriba, esto con el

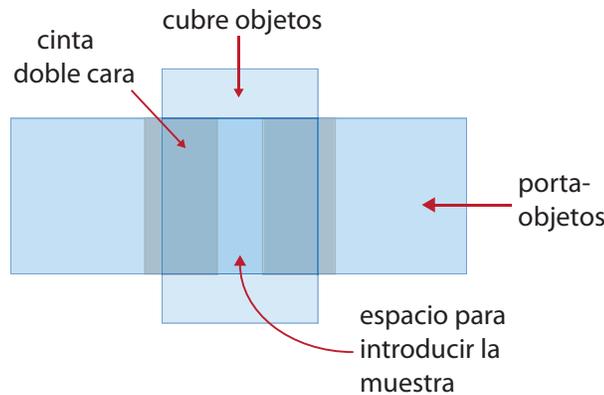


Figura 4-2: Esquema de la muestra empleada para hacer interactuar las partículas con el haz Airy simétrico.

objetivo de evitar el estancamiento de las partículas y que al colocar la muestra en la platina las partículas no estuvieran libres en la solución.

A continuación se muestran un conjunto de imágenes extraídas de un video en el que logramos manipular con este haz Airy simétrico un conjunto de partículas a la vez en distintos planos. Nótese que el haz es invisible en todos los cuadros, esto se debe al uso de un filtro que permitió absorber el haz Airy simétrico para sólo apreciar las estructuras de partículas.

### 4.3. Implicaciones

De las imágenes contenidas en la figura 4-3 se aprecia claramente que la estructura del haz Airy simétrico, antes observada en la figura 3-10, permite la manipulación de una o varias partículas al mismo tiempo.

Realicemos ahora una comparación entre los patrones observados en la figura 3-10 y los cuadros extraídos del archivo de video: los cuadros (a) y (b) en la figura 4-3 corresponden a momentos previos a la asignación de la fase cúbica al haz, se aprecia que ninguna partícula ha sido atrapada. Posteriormente en el cuadro (c) se observa que una partícula permanece fija en el centro del cuadro, es decir que en el spot central del haz es posible crear una sola trampa óptica. Los siguientes cuadros (d) y (e) corresponden al patrón que se muestra en la figura 3-10 (d), que está compuesto de 5 puntos de intensidad máxima distribuidos en forma de cruz. Posteriormente, los cuadros (f) y (g) muestran la geometría de un arreglo cuadrangular de 3

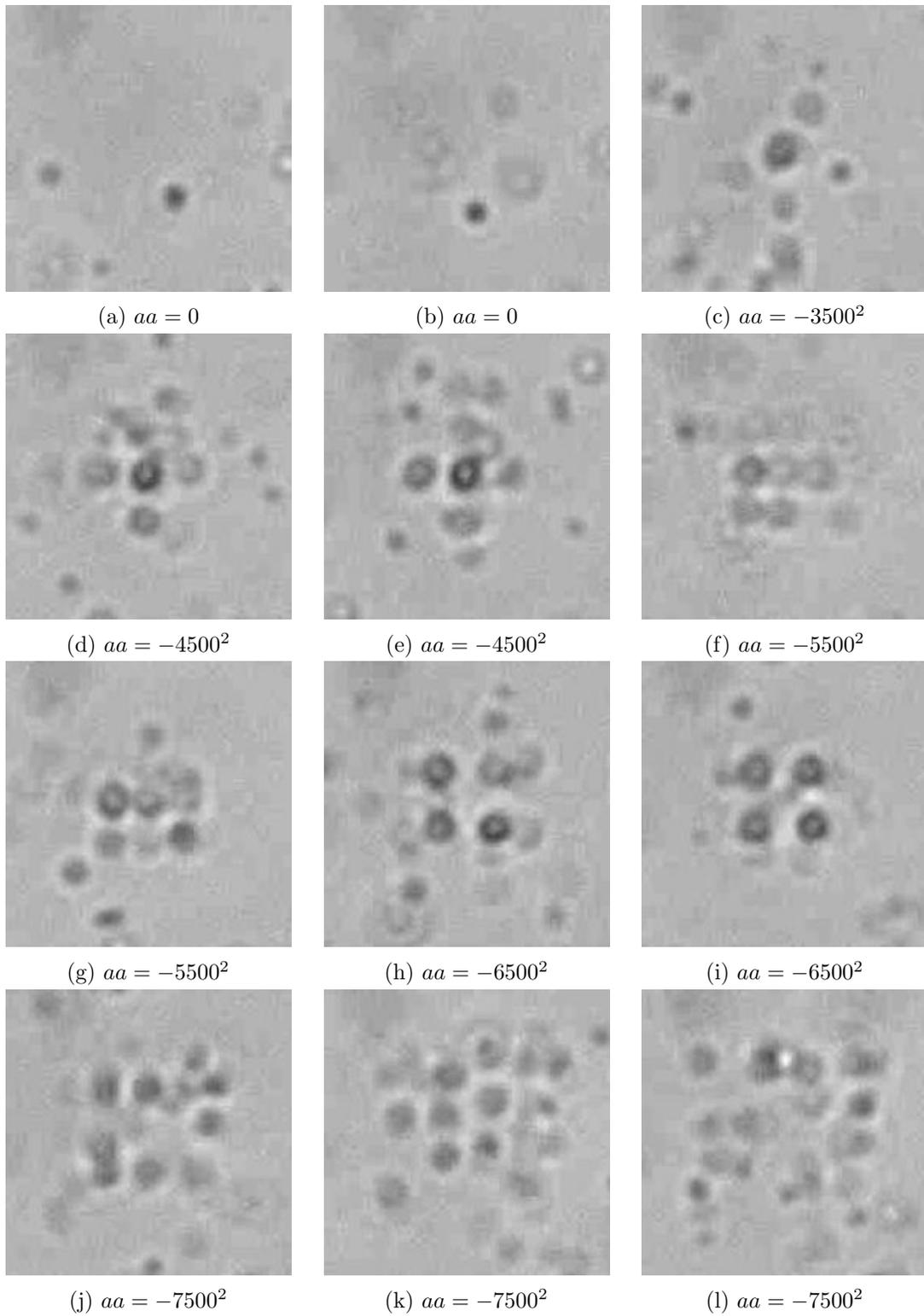


Figura 4-3: Planos de observación de un haz Airy simétrico. Como se aprecia, al ser menor el valor de  $aa$  nos ubicamos más lejos del spot central.

máximos de luz por lado, como el que se aprecia en la figura 3-10 (f), aunque en la figura 4-3 no se distinguen los 9 máximos es posible ver que al menos 6 partículas permanecen atrapadas en la parte inferior del cuadrado. El caso más notable es el que se muestra en los cuadros 4-3 (h) y (i) ya que se observan 4 partículas atrapadas de manera estable<sup>1</sup>, claramente este plano de observación corresponde con la figura 3-10 (g) donde hay 4 máximos predominantes cuya separación puede influir en la capacidad de atrapamiento de la estructura. Finalmente los cuadros (j) y (k) corresponderían a la figura 3-10 (h), pese a que el arreglo ya no es tan claro como en los caso anteriores se alcanzan a distinguir coincidencias. El cuadro final corresponde al momento en que la fase cúbica deja de tener efecto sobre el haz.

Como fue posible apreciar en la figura 3-10 el tamaño de los máximos en intensidad en cada plano va disminuyendo conforme incrementamos la distancia entre el spot central y el plano correspondiente, es por ello que la relación entre este tamaño y el diámetro de las partículas será un factor de primera importancia al intentar generar trampas ópticas.

---

<sup>1</sup>Entiéndase por estable al hecho de que el intervalo de tiempo en el cual las partículas se mantienen atrapadas es de por lo menos unos 7 segundos.

## Parte IV

# Discusión y conclusiones

## Capítulo 5

# Discusión y conclusiones

Los haces adifraccionales han representado una importante área de investigación en las últimas décadas. El uso de los mismos en la óptica aplicada ha logrado generar un gran avance en variadas ramas de la ciencia, tanto así que sus diversas aplicaciones están presentes tanto en campos como átomos fríos [34] así como en la rama de las telecomunicaciones [10].

Con el propósito de alcanzar una mayor comprensión del comportamiento de los haces adifraccionales, en especial de los haces Airy, es que se llevó a cabo esta tesis. A continuación exponemos una discusión así como las conclusiones que surgieron de realizar este trabajo de investigación.

Con base en el experimento realizado y expuesto en esta tesis, no hemos logrado corroborar que la trayectoria descrita por los lóbulos de intensidad del haz Airy al propagarse corresponden a los esperados en las predicciones iniciales, es decir que sigan una parábola. Como se aprecia en la figura 3-8 y 3-9 son sólo 2 o 3 puntos los que obedecen al comportamiento cuadrático del ajuste, mas esto no debe contradecir lo establecido en la teoría ya que, al comparar con los resultados obtenidos en el artículo *Observation of Accelerating Airy Beams* [1], el valor de la distancia de propagación a lo largo de la cual se realizan las observaciones del haz Airy es de 30 cm, obteniendo una deflexión de  $820 \mu\text{m}$ , mientras que, en nuestro caso, se obtuvo: para una distancia de propagación de 10 mm, fue de  $488.8 \mu\text{m}$  y  $322.4 \mu\text{m}$ . Claramente la distancia de propagación difiere por un orden de magnitud, con lo que no se alcanza a apreciar la naturaleza parabólica de la propagación del haz Airy.

Además, mediante el uso de las fotografías del perfil de intensidad del haz, que fueron

extraídas a lo largo de unos  $10\text{mm}$  se aprecia que el lóbulo principal proyecta una línea recta a  $\theta = 33.46^\circ \pm 0.17^\circ$  con respecto a la horizontal. El tomar las fotografías sin la fase cúbica al inicio y al final del experimento, es decir, en el plano correspondiente a  $z = 0\text{mm}$  y  $z = 10\text{mm}$  respectivamente, nos permite observar que, si bien, el orden cero del haz no se ve desviado sí se aprecia una desviación respecto a la vertical en los órdenes de difracción que forman una línea recta.

El motivo por el cual el ángulo obtenido no corresponde con el ángulo esperado de  $45^\circ$ , es principalmente debido una desviación ocasionada por el arreglo mismo. En la figura 3-6 se aprecia que la línea que es formada por los órdenes de difracción del SLM no forman una línea completamente vertical, de ahí que esto contribuya a modificar el valor de la pendiente de la recta.

Si bien el estudio que se realizó de los haces Airy no bastó para comprobar las características del mismo fue posible observar que el lóbulo central en definitiva sufre un desplazamiento a lo largo de la dirección de propagación.

Realizar un estudio más detallado de estos haces implica importantes contribuciones a distintos campos de la óptica. Como principales ejemplos del impacto que los haces Airy han tenido en la óptica aplicada en los últimos años tenemos la técnica llamada *optically mediated particle clearing* [35], y además un método para separar partículas o células entre distintos compartimientos micrométricos [36].

Por otro lado, en la parte correspondiente a la micromanipulación del haz Airy simétrico, los videos adquiridos al hacer interactuar el este haz con micropartículas nos ofrecieron una gran cantidad de fotografías para demostrar que la configuración transversal de la intensidad en estos haces permite generar arreglos de objetos dieléctricos microscópicos.

Si bien no se alcanza a definir un patrón o fórmula que defina la cantidad de lóbulos luminosos que se presentan en cada plano, puede apreciarse con extrema claridad que, para los casos estudiados, ocurre lo siguiente: en la figura 3-10 tenemos inicialmente un lóbulo intenso que correspondería al spot central del haz, en este caso las partículas se encuentran atraídas hacia el punto de mayor intensidad; luego se presentan cinco lóbulos de los cuales cuatro están ubicados en las puntas de una cruz (circunscrita en un cuadrado cuyo lado mide  $407.43 \mu\text{m}$ ) mientras que el último está en el centro de la misma, es muy notable que las partículas se mantienen

durante un intervalo de tiempo más largo en esta configuración que en el caso anterior; en el siguiente plano predomina la estructura del plano anterior pero en determinados lapsos del video se aprecia la estructura de nueve lóbulos que se mostraron en la figura 3-10(f); posteriormente, en la figura 3-10 (g), se distingue el siguiente patrón compuesto por cuatro lóbulos colocados en los vértices de un cuadrado (cuyo lado es más pequeño que el que circunscribe la cruz del segundo plano, ya que mide  $318.66 \mu\text{m}$ ) en esta configuración las partículas se mantienen más estables que en cualquiera de los planos anteriores; por último, los cuadros finales de la figura 4-3 no logran mostrar un patrón consistente a lo largo de un determinado intervalo de tiempo, a pesar de ello se distinguen algunas posiciones dominantes de la distribución de dieciséis lóbulos más pequeños y separados, tal como lo muestra la figura 3-10 (h).

Con base en la discusión anterior se concluye que en el haz Airy simétrico a mayor separación entre el spot central y el plano en el que las partículas son atrapadas, el tamaño de los máximos de intensidad va decreciendo, lo cual altera la efectividad de cada trampa para atrapar partículas, por ejemplo: si observamos el caso específico del plano final en la figura 3-10 notamos que este patrón se compone de 16 máximos de intensidad distribuidos de manera que se forman 4 cuadrados cuyos lados son 2 máximos, como ya se mencionó antes, éstos tienen un menor tamaño que el que se tiene en el patrón más estable, provocando que la dinámica de las partículas sea lo suficientemente inestable como para impedir que se aprecie un orden bien definido a la hora de atraparlas, además hay que considerar la intensidad de la corriente aplicada en el láser, es decir, que no fue lo suficientemente elevada como para generar la intensidad adecuada para que las fuerzas de gradiente y de esparcimiento atrapasen partículas.

También es importante señalar que esta distribución de intensidad transversal que varía en función de la distancia de propagación permite producir estructuras piramidales en 3 dimensiones, esto tiene importantes aportes en el estudio de formación de arreglos cristalinos.

Recientemente se demostró que se pueden confinar micropartículas en una estructura tridimensional [37] y que los haces Airy simétricos pueden describirse en términos de funciones de Airy incompletas [21].

De los experimentos realizados en el laboratorio podemos concluir que los haces Airy simétricos ofrecen una importante herramienta para la micromanipulación de partículas micrométricas, además de generar estructuras en 3 dimensiones de las mismas. Sin embargo, no es la primera

vez que estos haces son investigados [38],[39].

## Apéndice A

# Hologramas y transformada de Fourier

Para lograr un entendimiento más profundo del proceso de generación de haces estructurados mediante elementos difractivos es necesario recurrir a conceptos fundamentales como la transformada de Fourier para luego describir el funcionamiento de las denominadas pinzas ópticas holográficas.

A continuación recurriremos en gran parte al artículo ”*Computer-generated holographic optical tweezer arrays*” de David. G. Grier [26] para que el concepto de holograma quede más claro.

Consideremos un conjunto de pinzas ópticas, éste puede ser descrito por la distribución de intensidad de luz láser en el plano focal del objetivo de microscopio y que además denominaremos  $I^f(\boldsymbol{\rho})$ . El factor que determina dicho patrón de intensidad es el campo eléctrico de la luz incidente en el plano de entrada, tal y como se indica en la Figura A-1. Ahora, suponiendo que el plano de entrada se ha iluminado por un haz monocromático de longitud de onda  $\lambda$ , entonces el frente de onda en el plano de entrada,  $E^{in}(\mathbf{r})$ , tendrá la forma:

$$E^{in}(\mathbf{r}) = A^{in}(\mathbf{r}) \exp[i\Theta^{in}(\mathbf{r})] \quad (\text{A-1})$$

donde la amplitud,  $A^{in}(\mathbf{r})$ , y la fase,  $\Theta^{in}(\mathbf{r})$  son funciones valuadas en los reales. Análogamente, el campo eléctrico en el plano focal tiene la forma,

$$E^{fp}(\boldsymbol{\rho}) = A^{fp}(\boldsymbol{\rho}) \exp [i\Theta^{fp}(\boldsymbol{\rho})] \quad (\text{A-2})$$

de manera que  $I^{fp}(\boldsymbol{\rho}) = |E^{fp}(\boldsymbol{\rho})|^2 = |A^{fp}(\boldsymbol{\rho})|^2$ . Es bien sabido que estos campos (el de entrada y el que está en el plano focal) se encuentran relacionados mediante la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} E^{fp}(\boldsymbol{\rho}) &= \frac{k}{2\pi f} e^{i\theta(\boldsymbol{\rho})} \int d^2r E^{in}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\rho}/f} \\ &\equiv \mathcal{F}\{E^{in}(\mathbf{r})\} \end{aligned} \quad (\text{A-3})$$

$$\begin{aligned} E^{in}(\mathbf{r}) &= \frac{k}{2\pi f} \int d^2\rho e^{-i\theta(\boldsymbol{\rho})} E^{fp}(\boldsymbol{\rho}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\rho}/f} \\ &\equiv \mathcal{F}^{-1}\{E^{fp}(\boldsymbol{\rho})\} \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

donde  $f$  es la distancia focal de la lente y  $k = 2\pi/\lambda$  es el número de onda de la luz incidente. La fase adicional,  $\theta(\boldsymbol{\rho})$ , debida a la geometría de las lentes no contribuye al valor de  $I^f(\boldsymbol{\rho})$  y, sin pérdida de generalidad, puede ser ignorada.

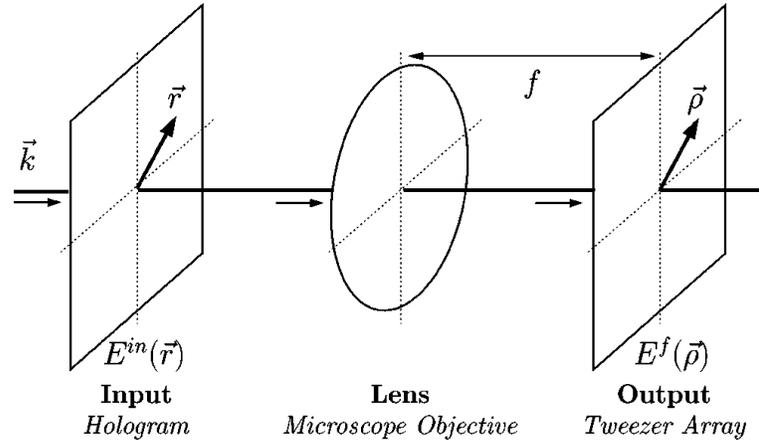


Figura A-1: Transformada de Fourier empleando una lente

Ahora bien, para obtener el frente de onda deseado en el plano focal del objetivo de microscopio es necesario introducir el frente de onda adecuado en el plano de entrada. La mayoría de los láseres, sin embargo, solamente proporcionan un frente de onda fijo,

$$E_0(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}) \exp [i\Theta_0(\mathbf{r})]. \quad (\text{A-5})$$

Moldear  $E_0(\mathbf{r})$  en  $E^{in}(\mathbf{r})$  implica que tanto la amplitud como la fase del plano de entrada deben sufrir algunas modificaciones. Al cambiar la amplitud con algún elemento óptico la potencia del haz se verá reducida puesto que la luz se esparce, provocando con ello que la eficiencia para lograr el atrapamiento disminuya. Afortunadamente, la capacidad de manipular y atrapar con luz recae en la intensidad del haz que estemos usando y no en su fase. Explotando esta cualidad se puede asumir que  $A^{in}(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r})$  y la parte que modularíamos es la fase del haz de entrada para obtener la configuración deseada de trampas.

# Bibliografía

- [1] G. A. Siviloglou, J. Broky, A. Gogariu, and D. N. Christodoulides, “*Observation of Accelerating Airy Beams*”, Physical Review Letters **99**, 213901 (2007).
- [2] G. A. Siviloglou and D. N. Christodoulides, “*Accelerating finite energy Airy beams*”, Optics Letters **32**, 979–981 (2007).
- [3] L. D. Landau and E. M Lifshitz, **Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory**, Vol. 3, Second Edition, revised and enlarged (Pergamon Press, 73–75, Great Britain, 1965).
- [4] M. V. Berry and N. L. Balazs, “*Non-spreading wave packets*”, American Journal of Physics **47**, 264–267 (1979).
- [5] M. V. Berry, “*Beyond Rainbow*”, Current Science **59**, 1175–1191 (1990).
- [6] E. Hecht, **Optics**, Fourth Edition (2002).
- [7] G. Toraldo di Francia, “*Super-Gain Antennas and Optical Resolving Power*”, II Nuovo Cimento **9**, 426–438 (1952).
- [8] G. Toraldo di Francia, “*Resolving Power and Information*”, Journal of The Optical Society **45**, 497–501 (1955).
- [9] J. W. Goodman, **Introduction to Fourier Optics**, Second Edition (McGraw-Hill; New York, 1996).
- [10] H. A. Willebrand and B. S. Ghuman, “*Fiber Optics Without Fiber*”, IEEE Spectrum **38**, 40–45 (2001).

- [11] S. Okazaki, “*Resolution limits of optical lithography*”, Journal of Vacuum Science and Technology B **9**, 2829–2833 (1991).
- [12] J. A. Straton, **Electromagnetic Theory**, p. 356 (McGraw-Hill; New York, 1941).
- [13] R. Courant and D. Hilbert, **Methods of Mathematical Physics**, vol. 2, p. 760 (J- Wiley; New York, 1966).
- [14] E. Recami, M. Zamboni-Rached, H. E. Hernandez-Figueroa, (2007, 16 de agosto). Localized waves: a historical and scientific introduction [<http://arxiv.org/>] de: <http://arxiv.org/abs/0708.1655>.
- [15] B. E. A. Saleh, M. C. Teich, **Fundamentals of photonics**, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc. (2007).
- [16] J. Durnin, J.J. Miceli, and J.H. Eberly, “*Diffraction-free beams*”, Physical Review Letters **58**, 1499–1501 (1987).
- [17] J. Durnin, “*Exact solutions for nondiffracting beams: I. The scalar theory*”, Journal of the Optical Society of America A **4**, 651–654 (1987).
- [18] Z. Bouchal, J. Wagner, and M. Chlup, “*Self-reconstruction of a distorted nondiffracting beam*”, Optics Communications **151**, 207–211 (1988).
- [19] W. Miller, “*Symmetry and Separation of Variables*”, PDF files: <http://www.ima.umn.edu/miller/separationofvariables.html> (1977).
- [20] J. F. Nye, **Natural Focusing and Fine Structure of Light**, First Edition (Institute of Physics Publishing, UK, 1999).
- [21] R. Jáuregui, and P. A. Quinto-Su, “*On the general properties of symmetric incomplete Airy beams*”, Journal of the Optical Society of America A **31**, 2484–2488 (2014).
- [22] T. Li, Fundamental Tests of Physics with Optically Trapped Microspheres [<http://www.springer.com>] de: <http://www.springer.com/978-1-4614-6030-5>.
- [23] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, J. E. Bjorkholm, and Steven Chu, “*Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles*”, Optics Letters **11**, 288–290 (1986).

- [24] K. Dholakia and T. Čižmár, “*Shaping the future of manipulation*”, Nature Photonics **5**, 335–342 (2011).
- [25] Y. Ogura, K. Kagawa, and J. Tanida, “*Optical manipulation of microscopic objects by means of vertical-cavity surface-emitting laser array sources*”, Applied Optics **40**, 5430–5435 (2001).
- [26] E. R. Dufresne, G. C. Spalding, M. T. Dearing, S. A. Sheets, and D. G. Grier, “*Computer-generated holographic optical tweezer arrays*”, Review of Scientific Instruments **72**, 1810–1816 (2001).
- [27] J.E. Curtis, B.A. Koss, and D.G. Grier, “*Dynamic holographic optical tweezers*”, Optics Communications **207**, 169–175 (2002).
- [28] H. He, M. E. J. Friese, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop, “*Direct Observation of Transfer of Angular Momentum to Absorptive Particles from a Laser Beam with a Phase Singularity*”, Physical Review Letters **75**, 826–8 (1995).
- [29] L. Paterson, M. P. MacDonald, J. Arlt, W. Sibbett, P. E. Bryant, K. Dholakia, “*Controlled Rotation of Optically Trapped Microscopic Particles*”, Science **292**, 912–914 (2001).
- [30] J. Arlt, V. Garcés-Chavez, W. Sibbett, K. Dholakia, “*Optical micromanipulation using a Bessel light beam*”, Optics Communications **197**, 239–245 (2001).
- [31] V. Garcés-Chávez, D. McGloin, H. Melville, W. Sibbett, and K. Dholakia, “*Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam*”, Nature **419**, 145–147 (2002).
- [32] Zhu Zheng, Bai-Fu Zhang, Hao Chen, Jianping Ding, and Hui-Tian Wang, “*Optical trapping with focused Airy beams*”, Applied Optics **50**, 7040–7046 (2011).
- [33] G. A. Siviloglou, J. Broky, A. Gogariu, and D. N. Christodoulides, “*Ballistic dynamics of airy beams*”, Optics Letters **33**, 207–209 (2008).
- [34] C. L. Hernández-Cedillo, S. Bermon, H. Hattermann, J. Fortágh, and R. Jáuregui, “*Scattering of dilute thermal atom clouds on optical Weber beams*”, Physical Review A **33**, 023404 (2013).

- [35] J. Baumgartl, M. Mazilu, and K. Dholakia, “*Optically mediated particle clearing using Airy wavepackets*”, *Nature Photonics* **2**, 675–678 (2008).
- [36] J. Baumgartl, G. M. Hannappel, D. J. Stevenson, D. Day, M. Gu, and K. Dholakia, “*Optical redistribution of microparticles and cells between microwells*”, *Lab on a Chip* **9**, 1334–1336 (2009).
- [37] P. A. Quinto-Su, and R. Jáuregui, “*Optical stacking of microparticles in a pyramidal structure created with a symmetric cubic fase*”, *Optics Express* **22**, 12283–12283 (2014).
- [38] Pablo Vaveliuk, Alberto Lencina, JoseA. Rodrigo, and Oscar Martinez Matos, “*Symmetric Airy beams*”, *Optics Letters* **39**, 2370–2373 (2014).
- [39] R. Jáuregui, and P. A. Quinto-Su, (2014, 28 de julio). Natural focusing of symmetric airy beams [<http://arxiv-web3.library.cornell.edu/>] de: <http://arxiv-web3.library.cornell.edu/abs/1407.7418>.