

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

LICENCIATURA EN FÍSICA

UNA PERSPECTIVA DE RELATIVIDAD
GENERAL EN EL ESTUDIO DE LOS
CONDENSADOS DE BOSE - EINSTEIN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

Físico

PRESENTA

URIEL ELINOS CALDERON

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Darío Núñez Zúñiga

2014

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Sinodales:

Presidente: José Ignacio Jiménez Mier y Terán

Vocal: Erick Leonardo Patiño Jaidar

Secretario: Darío Núñez Zúñiga

Suplente: Fernando Ramírez Martínez

Suplente: Juan Carlos Degollado Daza

Índice general

1. Introducción	3
2. Materia Oscura	7
2.1. Evidencias de su existencia y distribución	8
2.2. Candidatos de materia oscura	20
3. Campo Escalar	23
3.1. Estados resonantes	27
3.2. Densidad del campo escalar	28
4. Condensados de Bose-Einstein	33
4.1. Gas de Bose no interactuante	34
4.2. Propiedades termodinámicas	35
4.3. Ecuacion de Gross-Pitaevskii	35
4.4. Adimensionalizacion de la ecuacion de Gross-Pitaevskii	39
4.5. Gross-Pitaevskii en simetria esferica	40
4.6. Aproximación de Thomas-Fermi	43
5. Analogía entre la ecuación de Klein-Gordon en espacio curvo y Gross-Pitaevskii	45
6. Solución numerica	49
7. Conclusiones	59

Capítulo 1

Introducción

A principios del siglo XX tras una serie de observaciones acerca de las curvas de rotación de las galaxias así como de lentes gravitacionales, se dió pie a generar la idea de algún tipo de materia que influía gravitacionalmente en el comportamiento de los objetos, sin embargo, no podía ser detectada por los instrumentos de medición, es por esto que se le llamó materia oscura. A lo largo del tiempo las mediciones del comportamiento de los cuerpos celestes, aunado a que existe evidencia científica que verifica que es correcta la Teoría de la Relatividad General ([1], [2]) que explica su accionar, han hecho que el postulado de existencia de este tipo de materia se haya mantenido y ganado credibilidad dentro de una fracción de la comunidad científica a pesar de que aún no hay evidencia empírica de su existencia. Al buscar información sobre su naturaleza se han propuesto diversos candidatos para ella [3], yendo desde campo escalar hasta un tipo más exótico de partículas.

Dentro de estas propuestas se han hecho diversas hipótesis acerca de su comportamiento, algunos creen que se comporta como polvo, como una colección de partículas, como fluido, etc. Una de estas propuestas es la de campo escalar, el cual, en trabajos recientes se ha demostrado que presenta una ventaja sobre las demás descripciones, que se ahondará más adelante.

En esta serie de hipótesis puede verse que una distribución de campo escalar en un fondo curvo con simetría esférica tiene similitud matemática con una ecuación que describe un tipo distinto de sistemas, los condensados de Bose-Einstein ([4], [5]). El principal interés de esta similitud es que estos últimos, aunque inicialmente predichos por la teoría, hoy en día pueden ser producidos en el laboratorio [6], además de que presentan características peculiares como superfluidez y vorticidad. El hecho de que sean sistemas controlados en laboratorios da la posibilidad de probar las predicciones realizadas por la teoría.

Un campo escalar es un campo asociado a partículas de espín nulo, este campo es utilizado en cosmología como candidato a representar energía o materia oscura; la primera surge como una energía que produzca una presión en el Universo que explique la expansión de este de manera acelerada, ya que intuitivamente éste debería estar colapsando o en todo caso desacelerándose debido

a la gravedad, por ser una interacción atractora. En lo que respecta a la materia oscura, se conoce poco acerca de su naturaleza aunque se sabe que debe interactuar débilmente con el resto de la materia y consigo misma. También este campo ha sido empleado para representar algunos campos cuánticos como campos de bosones en los cuales su representación requiere partículas masivas de baja interacción [7]. Estos campos también pueden dar lugar a configuraciones autogravitantes llamadas estrellas de bosones.

Sin embargo una de las preguntas centrales acerca de si el campo escalar puede representar a la materia oscura u otros objetos como los antes mencionados es el hecho de que parecería que en el centro de las galaxias existen hoyos negros supermasivos, dado lo cual, para que estos campos sean factibles deberían de poder sobrevivir en dicho entorno por tiempos muy grandes, de orden cosmológico. Este hecho llevo a muchos investigadores a ahondar en ese tema, algunos argumentando que la acreción se llevaría acabo de manera rápida mientras que otros sostenían la idea de que sería de manera muy lenta. Inicialmente se creería que no sería posible dados los teoremas de “no pelos”, sin embargo, hay trabajos ([8],[9]) en los que se han llegado a encontrar estados de dichas configuraciones que pueden llegar a permanecer en dicho entorno por tiempos cosmológicos, y por tanto, supone posible que represente a la materia oscura. El teorema antes mencionado postula que las soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell, que son las que acoplan gravitación y electromagnetismo dentro de relatividad general, pueden ser completamente caracterizadas por sólo tres parámetros observables, masa, carga eléctrica y momento angular, y por tanto, el resto de los componentes de los que está hecho el hoyo negro o lo que circunda en él desaparece tras el horizonte de eventos, por lo que se vuelve inaccesible para observadores externos [10].

Este campo escalar es descrito por la ecuación de Klein-Gordon ([11], [12]), la cual tomando un fondo curvo, generalmente Schwarzschild, y resolverla se pueden encontrar configuraciones de campo escalar que tengan como comportamiento en infinito un decaimiento, para lo cual se requieren condiciones de frontera específicas como ondas salientes hacia infinito y ondas entrantes en el horizonte.

Con esas condiciones y ciertos valores de la masa del campo escalar se pueden llegar a configuraciones de larga duración. En estos estados existen frecuencias para las cuales la amplitud dentro del pozo de potencial externo que se esta usando toma valores grandes respecto a las amplitudes cercanas al horizonte del hoyo negro ([8], [9]).

Por otra parte se encuentra la ecuación de Gross-Pitaevskii, la cual es una aproximación de campo medio que nos describe a los condensados de Bose-Einstein que son sistemas que fueron predichos por Satyendra Nath Bose y Albert Einstein en la década de 1920's, usando la estadística de Bose para un gas de átomos no interactuantes, atrapados en una caja y a bajas temperaturas [13].

En estos sistemas, bajo una cierta temperatura y densidad, una fracción del total de partículas se llega a encontrar en el estado cuántico de mínima energía que se puede ocupar.

De ambas ecuaciones tenemos que la de Klein-Gordon es de segundo orden en el tiempo y espacio, mientras que la de Gross Pitaevskii es de primer orden en el tiempo y segundo orden en el espacio. Sin embargo utilizando en ambas una solución de la forma $\psi(r, t) = e^{i\alpha t} \phi(r)$ se puede llegar a que ambas tienen una gran similitud desde el punto de vista matemático ya que de tal forma son ecuaciones tipo Schrodinger con segundas derivadas en el espacio, un término referente a un potencial externo, un término con algo de la forma $\rho = \phi\phi^*$ igualados a una constante por la función en cuestión. Por otra parte el hecho de que una de ellas surja de la Mecánica cuántica (G-P) y la otra venga de la Relatividad General, hace suponer entre ellas una serie de posibles incompatibilidades. Dentro de éstas se encuentran la constante que aparece multiplicando a la función del lado derecho del signo igual, por una parte en K-G es un frecuencia mientras que en GP nos representa el potencial químico del sistema que denota la cantidad de partículas en él [13]; sin embargo la más representativa es aquella referente a la temperatura ya que para GP juega un papel muy importante dado que aquel estado en el que todas las partículas se encuentran en el estado base, el cual es el que precisamente representa esta ecuación, se requieren temperaturas suficientemente bajas, mientras que en la ecuación de K-G ese parámetro no se toma en cuenta y peor aún, no juega un papel importante en la Relatividad General.

De esta manera, resulta interesante explorar la analogía debido a que uno de los sistemas descritos, los condensados de Bose, son generados en los laboratorios, por lo que se les puede extraer mucha información acerca de su dinámica y respuesta ante ciertas situaciones, además de que presentan comportamientos peculiares. Por otra parte el sistema descrito por Klein-Gordon en este caso es a macro escala y en principio ubicado cercano al centro de alguna galaxia que es en donde se supone que podría encontrarse un hoyo negro, y por tanto, de difícil manejo para su estudio.

Otra de las motivaciones para ahondar en la analogía es una aproximación hecha al resolver la ecuación de Gross-Pitaevskii, llamada aproximación de Thomas-Fermi ([14], [15]), usada por los grupos que se dedican a estudiar estos sistemas y que representa un buen acercamiento a la descripción de ellos; básicamente consiste en omitir el término cinético de la ecuación, con lo que queda una ecuación algebraica y es por lo tanto mucho más fácil de resolver. Esta aproximación es útil en sistemas de muchas partículas, y suponiendo que éstas se encuentran en una nube, a una cierta distancia de la frontera de ésta. Resultaría interesante ver si esta aproximación pudiera ser utilizada en el sistema descrito por Klein-Gordon.

El objetivo de la tesis es hacer una revisión bibliográfica de ambos sistemas antes mencionados, compararlos y analizar hasta qué punto es compatible la analogía. Otro de los objetivos es realizar una simulación numérica de la solución de la ecuación Gross-Pitaevskii y compararla con la solución dada por la aproximación de Thomas-Fermi, esto con la finalidad de ver que tan buena es esta última.

Capítulo 2

Materia Oscura

En general las mediciones que tomamos de nuestro Universo vienen de las señales luminosas que provienen de él (materia luminosa), y de esta manera obtenemos información acerca de su comportamiento; es por esto que uno pensaría que es la única que existe, sin embargo hoy se sabe que este tipo de materia es aproximadamente el uno por ciento del total de materia y energía que compone al Universo. El resto es materia-energía que se infiere sólo por la influencia gravitacional que tiene sobre la materia visible [3].

El término de “materia oscura” fue acuñado por Fritz Zwicky en 1933, quien estudiaba el cúmulo Coma y notó que las velocidades relativas entre las galaxias en el cúmulo eran demasiado grandes como para que pudieran mantenerse juntas por la atracción gravitacional de la materia visible, y por tanto, debería haber algo más que las mantuviera juntas. Esta y otras evidencias indirectas, algunas de las cuales se mencionarán a continuación, han contribuido a reforzar la idea de este tipo de materia.

Estas evidencias [3] han sido recolectadas principalmente a lo largo del último siglo. Entre ellas se encuentra la planitud a escalas pequeñas de las curvas de rotación en las galaxias espirales, así como la ausencia de la “caída Kepleriana”, ambas muestras fuertes de que hay masa no visible en estos objetos. De igual manera se obtienen resultados parecidos al estudiar la velocidad de dispersión en galaxias enanas, llegando en algunos casos a la conclusión de que hay $10^2 - 10^3$ más masa de la que se le puede atribuir a su luminosidad.

Otra de estas evidencias [3] es la emisión de rayos X en grandes galaxias elípticas y cúmulos de galaxias. Estas galaxias grandes contienen atmósferas de gas caliente que parecería que está en equilibrio, de igual manera el espacio intergaláctico en los cúmulos tienen este tipo de gas con temperaturas del orden de diez millones de grados, emitiendo rayos X por radiación de frenado. Estudiando la distribución y temperatura de este gas es posible medir el potencial gravitacional del cúmulo, por lo que es una manera indirecta de ponderar la masa total del cúmulo. Con este método se obtiene que la masa total es cinco veces mayor a la inferida por las galaxias y el gas que podemos detectar [3].

Aunado a esto, otra evidencia [3] de la existencia de materia oscura son las

lentes gravitacionales combinado con las técnica de rayos X, ya que estudiando la localización de los bariones (por medios de rayos X) junto con la localización del potencial gravitacional (por medio de lentes gravitatorias) se obtienen indicadores de su presencia y de su naturaleza poco disipadora. Cabe mencionar que su presencia también juega un papel importante en la formación de estructura en el Universo.

El problema de la materia oscura es parecido al de los llamados planetas o estrellas invisibles, que en su momento fueron inferidos debido a su influencia en el comportamiento de aquellos objetos de su alrededor, uno de estos casos fue el de Neptuno, que fue propuesto debido al movimiento anómalo de Urano y posteriormente detectado. Sin embargo también existe el caso del llamado planeta Vulcano, que se propuso para explicar el extraño movimiento de Mercurio, pero que tras el paso del tiempo y la publicación de la Teoría de la Relatividad General de Einstein se pudo explicar el movimiento de este último y por tanto, la inexistencia de este planeta propuesto. De igual manera al observar el comportamiento de algunos objetos astrofísicos como galaxias, que parecería ser diferente a lo esperado, se podría estar indicando la presencia de grandes cantidades de materia que no podemos ver, sin embargo, al igual que el caso de Mercurio podría ser que nuestro entendimiento de las leyes de gravitación no sea el completo.

2.1. Evidencias de su existencia y distribución

Dentro de las principales evidencias de su existencia se encuentran las curvas de rotación de los objetos en las galaxias, en particular, en la Vía Láctea. Realizando un análisis simple del problema recordemos que en mecánica clásica para que un objeto se encuentre moviéndose en una órbita circular debe existir un balance de fuerzas, en el caso de objetos en el Universo estas son generalmente la fuerza gravitacional y la fuerza centrípeta, esto es

$$F_g = G \frac{m M(r)}{r^2} = m \frac{v_t^2}{r} = F_c, \quad (2.1)$$

con m la masa del cuerpo que gira, $M(r)$ la distribución de materia, y v_t la velocidad tangencial de rotación. De esta manera podemos obtener una relación entre la masa que genera la atracción gravitacional y la velocidad:

$$G \frac{M(r)}{r} = v_t^2, \quad (2.2)$$

de esta relación se pueden conocer datos acerca de la velocidad tanto como de la distribución de materia en las galaxias. También se sabe que la materia está mayormente concentrada cerca de su centro y va disminuyendo su densidad conforme se aleja de éste. Una buena representación de este perfil de densidad puede ser dado por una función decreciente, un buen modelo es dado por la

densidad de Plummer [16]

$$\rho_{\text{Plummer}} = \frac{3 M_0}{4 \pi b^3} \left(1 + \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right)^{-\frac{5}{2}}, \quad (2.3)$$

donde M_0 es una constante con unidades de masa y b otra constante con unidades de distancia. Éste presenta su máximo valor cuando $r = 0$ y decae rápidamente conforme el radio va incrementándose. Posteriormente, cuando el parámetro toma el valor $r = b$, la densidad sigue decreciendo pero a una tasa de cambio mucho menor acercándose asintóticamente a cero conforme $r \rightarrow \infty$. Un ejemplo de este perfil para ciertas unidades dadas se muestra en la figura ??.

Dado el perfil de densidades es posible obtener la masa total integrándolo en una esfera, esto es

$$M = \int \rho r^2 dr, \quad (2.4)$$

que tras realizarlo para el caso específico del perfil de Plummer, la masa total resultante es

$$M_{\text{Pl}} = M_0 \frac{\left(\frac{r}{b} \right)^3}{\left(1 + \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.5)$$

Esta expresión tiene una gráfica como la que se muestra en la siguiente figura. Nótese que es monótonamente creciente y para $r > 4$ su valor se comienza a estabilizar.

Ahora, como se mencionó anteriormente, dada la masa podemos obtener el perfil de velocidades de rotación, para lo cual se utilizará la siguiente expresión que se obtiene de sustituir M_{Pl} en la expresión para la velocidad

$$v_{t\text{Pl}} = \sqrt{\frac{G M_0}{b^3}} \frac{r}{\left(1 + \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right)^{\frac{3}{4}}}, \quad (2.6)$$

la cuál, al graficarla para tener una idea de su comportamiento, observamos que tiene el aspecto mostrado en la figura de abajo. El perfil crece rápidamente hasta un máximo en $r = \sqrt{2}$ para después de caer conforme $r \rightarrow \infty$

Ya con la gráfica dada por dicho perfil es interesante comparar con los datos del perfil observado, con lo que se puede apreciar que tienen distintos comportamientos (fig. ??).

Dada la diferencia entre lo predicho y lo observado se tienen diversas posibilidades para intentar reproducirlo. Como ya se mencionó, una de las posibilidades radicaría en cambiar las leyes de gravitación conocidas, en este caso dentro de mecánica clásica sería modificar la Ley de la Gravitación Universal, pero dado que ésta nos ha brindado una buena descripción de la dinámica de los cuerpos a nivel del sistema solar, la otra opción sería tomarla como correcta y ver que parámetros se necesitarían para reproducir lo observado. Dicho lo anterior, la alternativa es considerar una mayor cantidad de materia aunque no se pueda ver, pero que si afecta gravitacionalmente la dinámica de los demás cuerpos.

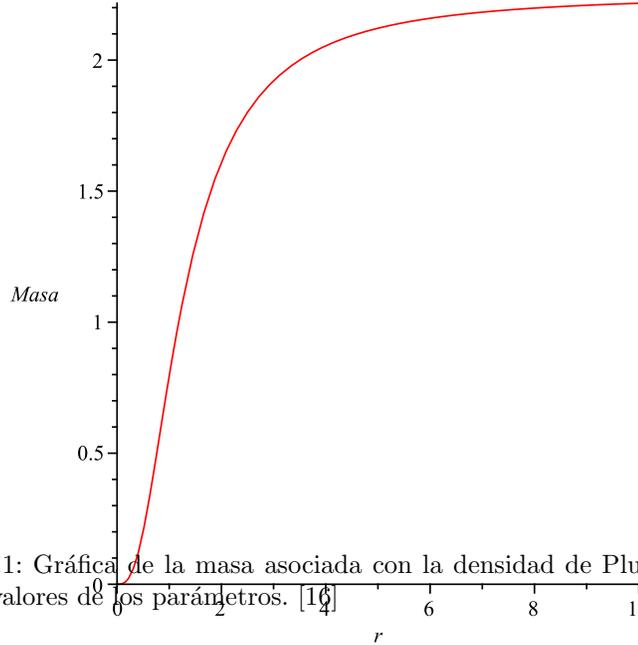


Figura 2.1: Gráfica de la masa asociada con la densidad de Plummer, con los mismos valores de los parámetros. [16]

Para obtener esa distribución de masa primero notemos que una representación adecuada del perfil de velocidades observado está dado por la siguiente expresión:

$$v^2 = v_{\text{term}}^2 \frac{r^2}{(r_c + \sqrt{r_c^2 + r^2})^2}, \quad (2.7)$$

con v_{term} la velocidad a la que tiende dicho perfil para radios grandes y r_c es un radio característico de cada galaxia. Un ejemplo de la gráfica de esta función se muestra en la figura ???. En ella podemos notar que la velocidad incrementa de manera rápida para radios pequeños y conforme este aumenta, la velocidad comienza a adquirir un valor más estable.

Con esta información ahora podemos inferir como debería ser la distribución de masa necesaria para que ese sea el perfil de velocidades, con lo que obtenemos

$$M = \frac{v_{\text{term}}^2}{G} \frac{r^3}{(r_c + \sqrt{r_c^2 + r^2})^2}, \quad (2.8)$$

el cual tiene una gráfica como la que se muestra a continuación

Notemos que esta distribución tiene un comportamiento distinto al descrito por la masa visible. De esta manera esta diferencia de masas es una de las evidencias más fuertes de la existencia de la materia oscura.

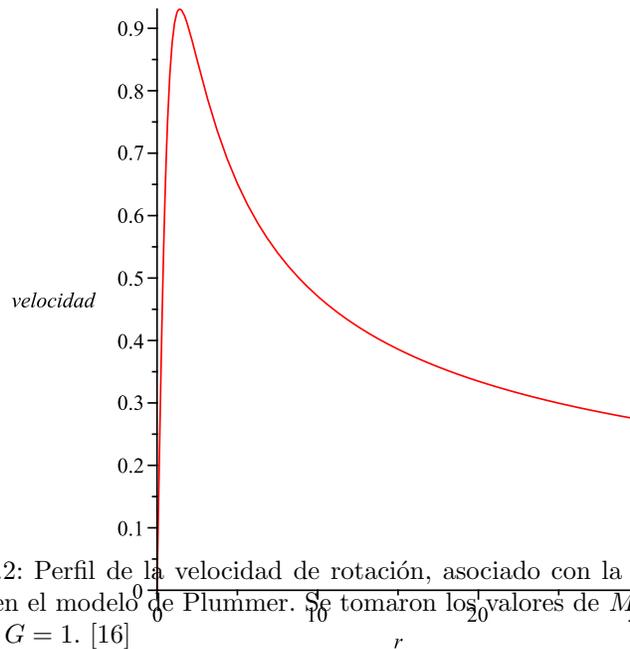


Figura 2.2: Perfil de la velocidad de rotación, asociado con la distribución de materia en el modelo de Plummer. Se tomaron los valores de $M_0 = 2,25$, $b = 1$, así como $G = 1$. [16]

Enseguida se mostrará una gráfica en donde se muestran las gráficas del perfil de masas entre la visible, la total y la oscura.

Como se hizo notar, la materia oscura puede ser inferida utilizando sólo gravitación newtoniana aunque al utilizar Relatividad General el resultado se mantiene y más aún, esta última predice su existencia en mayor cantidad de fenómenos cosmológicos, algunos de los cuales se mencionarán más adelante.

Por otra parte, ahondando más en las evidencias antes mencionadas comenzaremos por hablar de eventos en la vecindad de nuestro sistema solar. En 1922 Kapteyn [17] estudió los movimientos verticales (fuera del plano de la galaxia) de todas las estrellas conocidas cercanas al plano galáctico para determinar la aceleración de la materia. Él llegó a la conclusión de que la densidad espacial era suficiente para explicar los movimientos verticales, sin embargo posteriormente Jeans [18] (1923) reanalizando los resultados de Kapteyn encontró que era necesaria más masa para explicar el movimiento de las estrellas. Tiempo después (1932) Oort [19] corroboró lo encontrado por Jeans y al valor de materia oscura encontrado por él se le llamo "límite Oort"[3].

También en 1933 Zwicky [20] midió las velocidades radiales de ocho galaxias del cúmulo Coma, encontrando inesperadamente una velocidad de dispersión muy grande $\simeq 1200km/s$. Aplicando el teorema del Virial notó que mucha

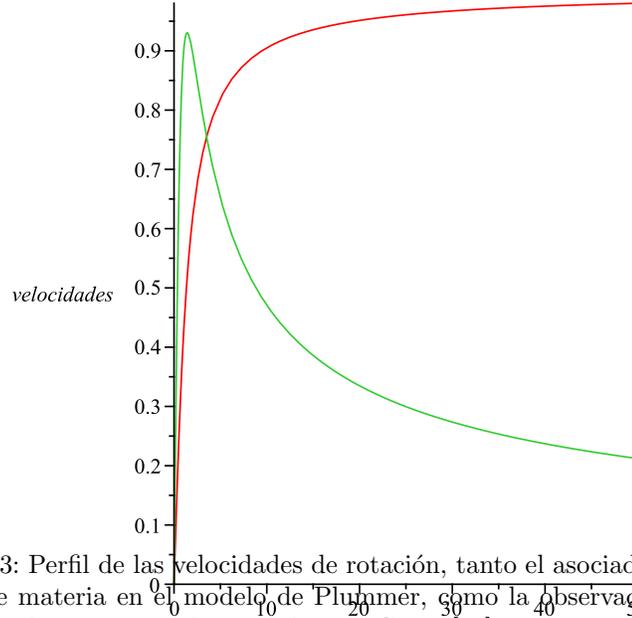


Figura 2.3: Perfil de las velocidades de rotación, tanto el asociado con la distribución de materia en el modelo de Plummer, como la observada. Se tomaron los valores de $M_0 = 2,25$, $b = 1$, así como $G = 1$ [16].

más materia de la que se veía era necesaria para que el cúmulo conservara su estructura.

Como ya se mencionó, otra evidencia de su existencia se encuentra en la planitud de las curvas de rotación en galaxias. Rubin y Ford observaron en 1970 las velocidades de rotación de la Vía Láctea, superiores a 20kpc [21]. Si este sistema se encontrara en equilibrio virial su velocidad circular estaría dada por $v_c = GM/r$, donde M es la masa a un radio dado; lo anterior implica que $v_c \propto 1/r$, que es conocido como caída Kepleriana. Sin embargo no se encontró este tipo de comportamiento sugerido por la distribución de materia visible, en su lugar encontraron una curva de rotación plana. De esta manera, si v_c es constante, eso indicaría que $M \propto r$, más allá de la materia que se detecta, y por tanto, que existe una gran cantidad de materia que no observamos y que es la responsable de dicho comportamiento de las curvas de rotación. Esto también sugeriría un halo de materia oscura esférico que va creciendo con el radio de esta [3].

En lo que respecta a la emisión de rayos X, su primera detección fue alrededor de M87 [22] en Virgo, en Coma y Perseo. Se tiene que para un sistema esférico en equilibrio hidrostático su masa esta dada por

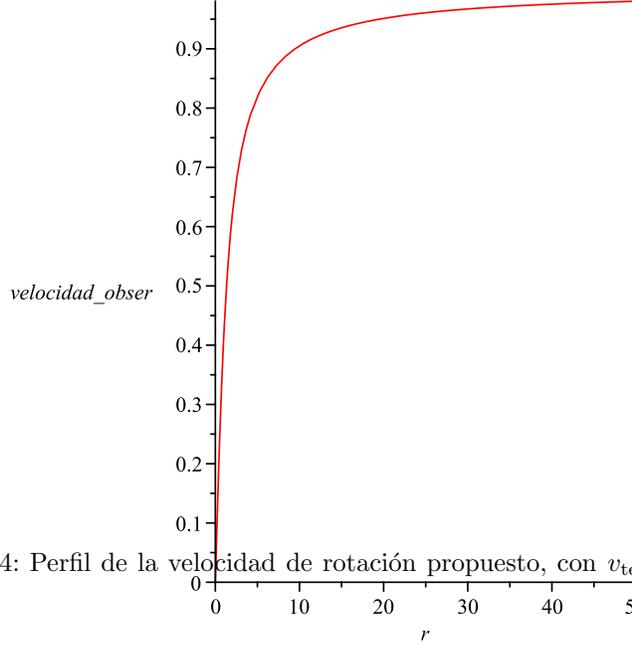


Figura 2.4: Perfil de la velocidad de rotación propuesto, con $v_{\text{term}} = 1, r_c = 1$ [16].

$$M(r) = \frac{kT}{\mu m_H G} r \left(\frac{d \ln \rho_{gas}}{d \ln r} - \frac{d \ln T}{d \ln r} \right), \quad (2.9)$$

en donde k es la constante de Boltzmann, T la temperatura, μ el peso molecular del gas y m_H es la masa de protones. La ρ_{gas} se obtiene mediante el modelo β que es para una nube esférica de gas isotérmica en equilibrio hidrostático y esta dada por

$$\rho_{gas} = \rho_0 / [1 + (r/R_c)^2]^{3\beta/2}, \quad (2.10)$$

en la que R_c y β se obtienen mediante el análisis de rayos X, con lo que finalmente es posible obtener la masa total del sistema. Al realizar dicho procedimiento se encontró que las galaxias elípticas tenían mucha mayor cantidad de masa de la visible, de igual manera se obtiene la misma conclusión de pequeños grupos y cúmulos de galaxias.

La deflexión de los rayos luminosos cuando pasan por un campo gravitacional, mejor conocido como “lensing” o lentes gravitacionales, también es una prueba de la existencia de materia oscura [3]. Este fenómeno fue inicialmente predicho mediante la mecánica newtoniana por von Soldner [23] y posteriormente recalculado con relatividad general por Einstein([1], [2]), el cuál era del

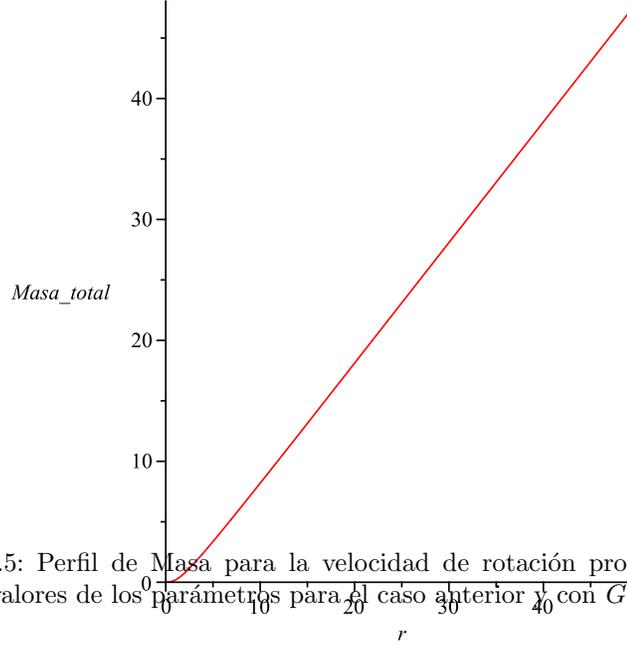


Figura 2.5: Perfil de Masa para la velocidad de rotación propuesta, con los mismos valores de los parámetros para el caso anterior y con $G_{50} = 1$ [16].

doble de la magnitud predicha por el primero. Dependiendo de la magnitud del campo gravitacional al que están sujetos los fotones estos lentes pueden ser clasificados en fuerte, débil y micro. Las lentes fuertes son producidas por un campo gravitacional intenso y causa la deflexión de la luz en grandes ángulos; como resultado la fuente original de luz se ve como un anillo o segmentos de arco alrededor del objeto que genera el campo. En lo que respecta a las lentes débiles, la deflexión se da en ángulos pequeños y se suele utilizar para obtener características de los halos galácticos. Por su parte, las microlentes se dan cuando el objeto que genera la lente es muy pequeño y sólo se observa un incremento en el brillo del objeto sobre el que actúa la lente.

Entrando en el formalismo de las lentes, sabemos que las trayectorias de los fotones estan dadas por geodésicas nulas. Utilizando la solución de Schwarzschild [10]

$$ds^2 = c^2(1 + 2\Phi/c^2)dt^2 - (1 - 2\Phi/c^2)dl^2, \quad (2.11)$$

con $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, siendo c la velocidad dela luz y Φ el potencial gravitacional de la masa [3]. De esta manera obtenemos que

$$dt = 1/c \sqrt{\frac{1 - 2\Phi/c^2}{1 + 2\Phi/c^2}} dl \simeq 1/c(1 + 2\Phi/c^2)dl. \quad (2.12)$$

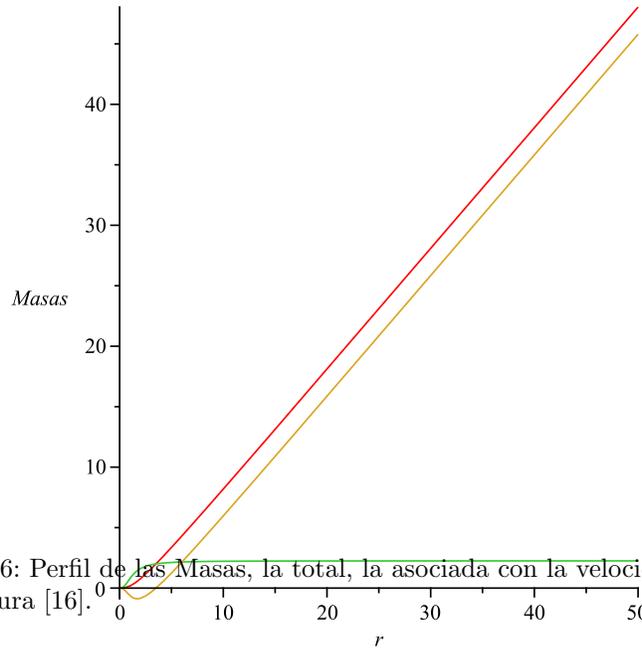


Figura 2.6: Perfil de las Masas, la total, la asociada con la velocidad propuesta y la oscura [16].

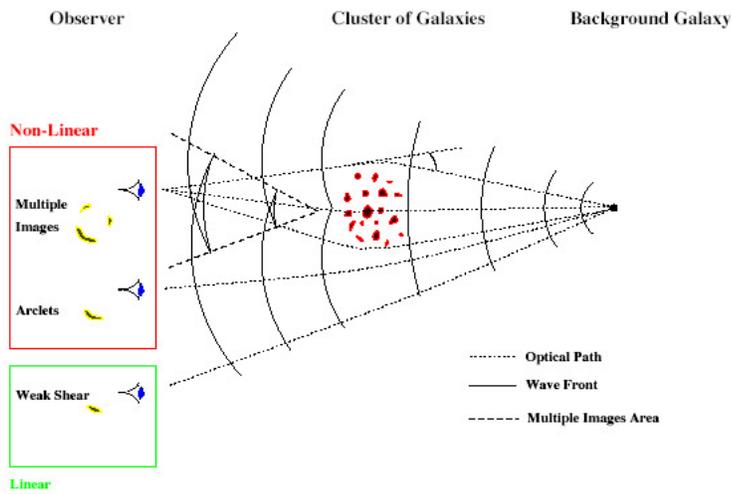


Figura 2.7: Lente gravitacional en cúmulos de galaxias [3].

De acuerdo con el principio de Fermat, los fotones solo siguen caminos con extrema propagación del tiempo, con lo que éstos son estacionarios bajo ciertas variaciones de dt , por lo que

$$ct = \int (1 - 2\Phi/c^2) dl, \quad (2.13)$$

que corresponde a un haz de luz propagándose en un medio transparente con índice de refracción

$$n = (1 - 2\Phi/c^2). \quad (2.14)$$

Aplicando el principio de Fermat obtenemos que el ángulo de deflexión está dado como

$$\alpha = -2/c^2 \int_S \Delta_{\perp} \Phi dl, \quad (2.15)$$

que es la expresión dada para lentes pequeñas. Una expresión más general para este ángulo dada en relatividad general [24] es

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 \xi}. \quad (2.16)$$

Este ángulo también puede ser escrito como

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int d^2 \xi' \Sigma(\vec{\xi}) \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}'}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2}, \quad (2.17)$$

en donde

$$\Sigma(\vec{\xi}) \equiv \int dz \rho(\xi_1, \xi_2, z) \quad (2.18)$$

es la densidad superficial de masa, llamada la densidad proyectada en un plano ortogonal al rayo de luz. Se muestra un esquema sobre la notación en la figura ???. En ella se muestran los planos de la fuente luminosa, la lente y el observador, así como las distancias entre ellos. También aparecen ángulos como el que subtende el objeto real hacia el observador (β) y el subtendido por el objeto modificado por la lente.

La ecuación del lente conectando la posición real de la fuente $\vec{\beta}$ con la posición angular $\vec{\theta}$ a la cual el observador la ve, está dada como

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \frac{D_{ds}}{D_s} \hat{\alpha}(D_d \vec{\theta}) \equiv \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}). \quad (2.19)$$

Para el caso de $\beta = 0$ en la ecuación anterior, así como usando $\vec{\xi} = D_d \vec{\theta}$ se obtiene el radio angular del anillo de Einstein

$$\theta_E = \alpha \frac{D_{ds}}{D_s}, \quad (2.20)$$

teniendo masa

$$M_E = \theta_E^2 \frac{c^2}{4G} \frac{D_d D_s}{D_s}. \quad (2.21)$$

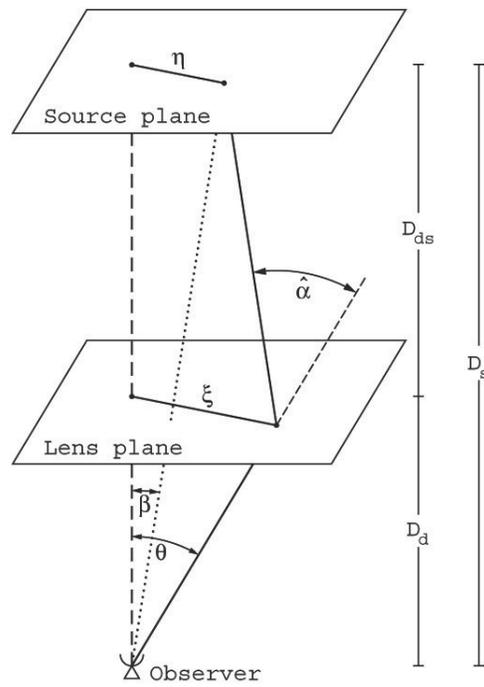


Figura 2.8: Esquema sobre notación de lentes gravitacionales [3].

Imágenes múltiples pueden aparecer si la ecuación tiene más soluciones. La posibilidad de que estas aparezcan puede ser cuantificada mediante la convergencia, definida como

$$\kappa(\vec{\theta}) = \frac{\Sigma(D_d\vec{\theta})}{\Sigma_{cr}}, \quad (2.22)$$

en la cual Σ_{cr} es la densidad superficial crítica dada [3] por

$$\Sigma_{cr} = \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_s}{D_d D_{ds}}. \quad (2.23)$$

Con la expresión anterior, si $\kappa \geq 1$, la lente gravitacional genera imágenes múltiples. El ángulo de deflexión también puede verse en términos de la convergencia de la siguiente manera

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2\theta' \kappa(\vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2} \quad (2.24)$$

y puede ser escrito como el gradiente de un potencial bidimensional $\vec{\alpha} = \nabla\Psi$, con Ψ que cumpla que $\nabla^2\Psi(\vec{\theta}) = 2\kappa(\vec{\theta})$. Este potencial queda definido como

$$\Psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int d^2\theta' \kappa(\vec{\theta}') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'|. \quad (2.25)$$

Los efectos de las lentes gravitacionales sobre las imágenes son diversos, cambiar su tamaño, forma, etc. La matriz jacobiana que describe esta distorsión en el régimen lineal esta dada como

$$A(\vec{\theta}) = \frac{\partial\vec{\beta}}{\partial\vec{\theta}} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial^2\Psi(\vec{\theta})}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \right) \quad (2.26)$$

que finalmente nos queda como la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

donde $\gamma \equiv \gamma_1 + i\gamma_2 = |\gamma|e^{2i\phi}$ son las componentes del “corte” o “shear” .

Tras saber la deformación hecha por estas lentes, podemos notar que éstas transforman circunferencias en elipses con ejes

$$a = 1/(1 - \kappa - \gamma) \quad (2.28)$$

$$b = 1/(1 - \kappa + \gamma). \quad (2.29)$$

Ahora definiremos la elipticidad como

$$\epsilon = \frac{1 - b/a}{1 + b/a} e^{2i\phi} \quad (2.30)$$

$$\chi = \frac{1 - (b/a)^2}{1 + (b/a)^2} e^{2i\phi} \quad (2.31)$$

$$\epsilon = \frac{\chi}{1 + (1 - |\chi^2|)^{1/2}} e^{2i\phi} \quad (2.32)$$

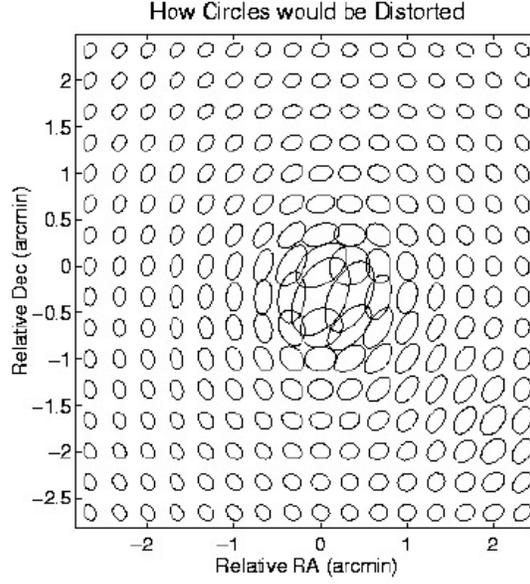


Figura 2.9: Distorsión de círculos por lentes gravitacionales [3].

para tener una idea de que tan deformada es la imagen, también se definirá la “shear” reducida como

$$|g| = |\epsilon| = \frac{|\gamma|}{1 + (1 - \kappa)}. \quad (2.33)$$

que nos ayudará a la caracterización de las lentes.

Como ya vimos, las lentes fuertes están definidas como $\kappa \leq 1$, así como el régimen de lente débil se caracteriza por $\kappa \ll 1, \gamma \ll 1$ y $g^2 \simeq 0$.

Como ya se mencionó, las lentes débiles ayudan a estimar la masa o el perfil de densidades de una estructura. Si se escribe el “shear” en parte tangencial γ_t y normal γ_χ

$$\gamma = \gamma_t + \gamma_\chi \quad (2.34)$$

y si tomamos que para una lente circular la parte normal es despreciable y la tangencial es

$$\langle \gamma_t \rangle \equiv \frac{\bar{\Sigma}(R) - \Sigma(R)}{\Sigma(R)_c(R)} \quad (2.35)$$

con la densidad principal proyectada en el interior del radio R , dada por

$$\bar{\Sigma}(R) = 2 \int_0^R x \Sigma(x) dx = \frac{M(R)}{4\pi R^2} \quad (2.36)$$

y $R = \theta D_d$. De esta manera la distribución de materia oscura es obtenida ajustando la “shear” observada con el perfil de densidad elegido con 2 parámetros libres.

Como ya se dijo anteriormente, la lente gravitacional actúa como una transformación de coordenadas que distorsiona las imágenes que se encuentran por detrás del objeto que está en primer plano. La transformación puede dividirse en dos, el término de convergencia y el “shear” o distorsión tangencial. Para medir el alineamiento tangencial es necesario medir las elipticidades de las galaxias que se encuentran por detrás y construir un estimado estadístico de su alineamiento. El problema de esto radica en que las galaxias no son precisamente circulares, por lo que ya tienen una elipticidad asociada y, por tanto, las mediciones incluyen la elipticidad intrínseca y la generada por la lente. Aún así nos da una idea, ajustando con las mediciones, de la cantidad de masa faltante para reproducir las observaciones.

Siguiendo, también si se combinan estas lentes con la detección de rayos X, uno puede utilizar la colisión de cúmulos para obtener información acerca de la naturaleza de la materia oscura. En estas colisiones el gas caliente que formará la materia bariónica en el cúmulo se encuentra desacelerado mientras que las galaxias en los cúmulos siguen en trayectorias balísticas [25]. Estas lentes gravitacionales nos muestran que la mayoría de masa total se mueve en trayectorias balísticas, lo que indica que la autointeracción de la materia oscura es débil.

Por otra parte también es posible conocer su distribución en las galaxias y existen varios métodos para inferirla. Para galaxias espirales uno de ellos es mediante el ajuste de parámetros en un modelo. Escribiendo la velocidad de rotación de la galaxia de la siguiente forma

$$V_{tot}^2 = V_{disk,*}^2 + V_{HI}^2 + V_{halo}^2 + (V_{bulge}^2) \quad (2.37)$$

donde $V_{disk,*}$ es la velocidad del disco estelar y es obtenido por fotometría, V_{HI} es obtenido por observaciones de radio de una línea de HI y V_{halo} es modelado por un perfil teórico de densidad, entre ellos se encuentra el perfil Navarro-Frenk-White [26] y el perfil Einasto [27] entre otros. Sin tomar en cuenta V_{bulge} tenemos tres parámetros libres para la V_{tot} , la masa del disco, la densidad central del halo y radio del núcleo que se obtendrán del mejor ajuste a los datos.

Otras formas de obtener una idea de su distribución es mediante los métodos de discos máximo y mínimo. De este análisis se obtiene que las galaxias más pequeñas son más densas y poseen una mayor cantidad de materia oscura.

Además, los grupos y cúmulos de galaxias son los objetos más grandes ligados gravitacionalmente conocidos en el Universo. Estudios sobre ellos han revelado una gran cantidad de medio intergaláctico, el cual es gas caliente que emite rayos X. En estos conjuntos se ha encontrado que solo el 5% de la masa total se encuentra formando las galaxias, el 10% aproximadamente gas caliente que emite rayos X y el resto probablemente materia oscura.

2.2. Candidatos de materia oscura

Tras discutir acerca de las evidencias que indican la existencia de la materia oscura, ahora lo que sigue es saber de qué está compuesta. Hasta el día de

hoy no se sabe con certeza cuales son sus componentes, sin embargo existen algunas conclusiones que dan una idea de qué características deberían tener estas partículas o componentes. Comparando las proporciones de He con H en el Universo hoy en día con la cantidad de materia bariónica presente en la fase caliente, cuando la mayor cantidad del He fue producido, así como con información obtenida de la radiación cósmica de fondo, se puede saber la aportación bariónica a la densidad del Universo $\Omega_B = 0,0456 \pm 0,0016$ y la de materia oscura es $\Omega_M = 0,227 \pm 0,014$. De esta manera se abandona la idea de que ésta sea de naturaleza bariónica.

Dentro de las características que debe cumplir un candidato de materia oscura se encuentran las siguientes:

1. Debe ser de naturaleza no-bariónica.
2. Estable.
3. No tener carga ni color, es decir, débilmente interactuante.
4. Su abundancia debe ser compatible con las observaciones y no puede ser caliente, es decir relativista.

Dentro de las propuestas encontramos partículas como neutrinos estériles que presentan ciertas características distintas como menor interacción con el resto de los componentes del modelo estándar que los neutrinos usuales, etc.

Otro de los candidatos para los componentes de la materia oscura se encuentran los llamados WIMPs (Weakly interacting massive particles), que son partículas hipotéticas, las cuales, tienen una interacción con otras partículas similar a la que tienen los neutrinos pero cuya masa en reposo es mayor a la de los bariones. Las partículas más discutidas que podrían ser WIMPs son las que se encuentran en el marco de la supersimetría (SUSY), en la que cada fermion del modelo estándar tiene asociado un boson "superpartner" viceversa. De esta manera cada partículas del modelo estandar tiene su "superpartner".

A pesar de esto no existe evidencia experimental convincente de este tipo de partículas, lo que implica que sus energías en reposo se encuentran más allá de la energías utilizadas en los aceleradores. Las masas de los superpartners se cree que fueron generados por un rompimiento de simetría en el Universo temprano; eventualmente las partículas decayeron y dieron productos más ligeros, algunos de los cuales se aniquilaron hasta que sólo un superpartner masivo quedó, el más ligero de estas partículas supersimétricas (lightest supersymmetric particle, LSP). Es esta partícula la que cumpliría con las características deseadas para ser el WIMP. Dentro de estos candidatos a LSP se encuentra el neutralino, cuya densidad sólo depende del proceso de aniquilación de pares, y que podría atravesar el Universo si su energía en reposo es alta.

Este tipo de partículas (WIMPs) no tienen velocidades relativistas y se cree puedan ser encontradas en pozos de potencial gravitacional y se espera que eventualmente uno se disperse con alguno de los núcleos localizados en los laboratorios terrestres. Aunque hay laboratorios dedicados a detectar este tipo de

dispersiones, esto se ve obstaculizado debido a la baja frecuencia de este tipo de eventos y las bajas energías que indican el evento.

Existen también propuestas de partículas supermasivas llamados “Wimpzillas”, su motivación son emisiones de rayos cósmicos muy energéticos de fuentes distantes, ya que estos rayos deberían ser producidos por aniquilación o decaimiento de partículas súper masivas de materia oscura.

Una posibilidad alterna son partículas ligeras escalares, que permiten tener masas más pequeñas y presentan características que ayudan a explicar diversas observaciones, en el siguiente capítulo se ahondará más en este tipo de candidato.

A pesar de las diversas opciones, el modelo más aceptado es el Λ CDM [28]. Este modelo incluye a Λ , la constante cosmológica como un término de energía oscura que explica la expansión acelerada del Universo, junto con ella se encuentra en el modelo la materia oscura fría CDM , que no se mueve a altas velocidades, a formación de estructura se ve beneficiada y es útil para explicar el aspecto del Universo tal cual hoy se observa. Cabe mencionar que este modelo es congruente con diversas observaciones, entre las que se encuentran la estructura y existencia de la radiación cósmica de fondo, la cantidad de H y He en el Universo, la estructura a gran escala de las galaxias y, como ya se mencionó, la expansión acelerada del Universo.

Capítulo 3

Campo Escalar

El campo escalar juega un papel importante en diversas ramas de la física, una de ellas es la cosmología en donde, como ya se mencionó, puede ser utilizado para representar la energía y materia oscura. Comenzó a ser tratado como candidato de este tipo de materia ya que el modelo más aceptado actualmente Λ CDM, a pesar de tener buenos resultados compatibles con algunas observaciones como la radiación cósmica de fondo de microondas, que ayuda al entendimiento de la isotropía del Universo a gran escala, tenía problemas a escala galáctica como en el perfil de densidades en los halos galácticos [3]. Otro problema de esta teoría está en la formación de estructura ya que predice menos galaxias de las esperadas. Así como estas, se encontraron otras inconsistencias en este modelo de manera que se empezaron a explorar otras posibilidades, entre ellas al campo escalar. Este modelo propone que la materia oscura esta compuesta por partículas ultra ligeras $m \sim 10^{-22}eV$, y que estos halos son distribuciones de estas partículas. En este modelo las galaxias se formarían al mismo tiempo y de la misma manera, lo que explicaría de alguna manera porqué éstas son tan similares. Dado lo anterior, con el campo escalar se lograrían halos galácticos bien formados a redshifts más grandes que en Λ CDM. De esta manera este modelo sólo necesita un parámetro, la masa del campo escalar, para ajustar varios resultados como [29]:

1. La evolución de las densidades cosmológicas.
2. Los picos acústicos de fondo cósmico de microondas.
3. El campo escalar tiene un límite natural, por lo que la subestructura en los cúmulos de las galaxias se daría de forma natural.
4. Las curvas de rotación de grandes galaxias.

Estos halos de materia oscura se cree que se encuentran permeando al Universo por lo que deben coexistir con todos los objetos en él de una manera “estable”, ya que de otra manera no estarían ahí. Un objeto peculiar en el Universo y que es importante saber cómo reaccionarían distribuciones de campo

escalar ante su presencia son los hoyos negros, ya que se cree se encuentran en el centro de las galaxias ([29]).

Con la finalidad de estudiar el comportamiento de distribuciones de este campo tomaremos en consideración a la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar masivo y no autointeractuante, la cual tiene la siguiente forma

$$(\square - \mu^2)\phi = 0 \quad (3.1)$$

en la que el operador D'Alembertiano esta dado por $\square = \left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\right) \partial_\mu (\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \partial_\nu)$, μ es la masa del campo escalar y ϕ es la función referente al campo escalar [8]. El primer término es asociado con la energía cinética del campo y el segundo es el referente al potencial al que está sujeto. De esta manera nos centraremos en analizar el caso de un fondo curvo, específicamente el de un hoyo negro de Schwarzschild, ya que es la forma más simple de este tipo de objeto y como ya se mencionó, resulta interesante debido a que se cree existen hoyos negros en el centro de las galaxias, además de que es una buena manera de comenzar. Este tipo de geometría tiene el siguiente elemento de línea ([30] ,[24])

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\Omega^2 \quad (3.2)$$

el cual es para cualquiera que tenga simetría esférica, en nuestro caso, con $F(r) = 1 - \frac{2M}{r}$.

Con la finalidad de observar cómo es que queda nuestra ecuación, primero notemos que nuestro operador D'Alembertiano con esta geometría toma el siguiente aspecto

$$\square\phi = \frac{1}{F}\phi_{,tt} + F\left(\phi_{,rr} + \frac{2}{r}\phi_{,r}\right) + F'\phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\square_{\theta\varphi}\phi \quad (3.3)$$

en donde el operador D'Alembertiano angular esta dado como sigue

$$\square_{\theta\varphi}\phi = \phi_{,\theta\theta} + \cot\theta\phi_{,\theta} + \phi_{,\varphi\varphi}. \quad (3.4)$$

Con el propósito de simplificar esta expresión haremos un par de sustituciones, la primera $\phi = \psi/r$, con lo que nuestro operador luce de una manera distinta al anterior, esto es

$$\square\phi = \frac{1}{rF}\left\{-\psi_{tt} + F\partial_r(F\partial_r)\psi - \frac{FF'\psi}{r} + \frac{F}{r^2}\square_{\theta\varphi}\psi\right\} \quad (3.5)$$

El siguiente cambio es con la finalidad de que el intervalo de r vaya de $(0, \infty)$ y por tanto, eliminar la singularidad en $r = 2M$. Definiendo unas coordenadas distintas (tortuga), que nos ayudarán a acercarnos de manera lenta al horizonte sin llegar a tocarlo, descritas de la siguiente manera $\partial_{r^*} = F\partial_r$, la expresión se puede reescribir como

$$\square\phi = \frac{1}{rF}\left\{-\psi_{,tt} + \partial_{r^*}^2\psi - \frac{FF'\psi}{r} + \frac{F}{r^2}\square_{\theta\varphi}\psi\right\} \quad (3.6)$$

Para ver como actúa este operador dado por el tipo de fondo curvo utilizado, propondremos una función solución del tipo

$$\phi(t, r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \sum_{l,m} \psi_{lm}(t, r) Y^{lm}(\theta, \varphi) \quad (3.7)$$

que tiene parte radial y parte angular (armónicos esféricos). En esta expresión, los índices de los armónicos esféricos $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ y $-l \leq m \leq l$.

Utilizando la métrica antes mencionada así como el tipo de solución propuesta se llega a un conjunto de ecuaciones de la siguiente forma

$$\square\phi = \frac{1}{rF} \sum_{lm} Y^{lm} \left\{ -\psi_{lm,tt} + \partial_{r^*}^2 \psi_{lm} - \frac{FF'\psi_{lm}}{r} - \frac{Fl(l+1)}{r^2} \psi \right\} - \mu^2 \sum_{lm} Y^{lm} \frac{\psi_{lm}}{r} = 0 \quad (3.8)$$

con $F(r) = 1 - \frac{2M}{r}$, las cuales hay que resolver para obtener información acerca de estas distribuciones de campo escalar. Cabe mencionar que para llegar al resultado anterior se substituyó la parte angular del laplaciano por su eigenvalor, esto es

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\partial Y^{lm}}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y^{lm}}{\partial\varphi^2} = -l(l+1) Y^{lm} \quad (3.9)$$

Nos interesa saber su comportamiento ya que, como se mencionó anteriormente, es importante analizar si es posible la coexistencia del campo escalar con este tipo de entorno. Si agrupamos términos y multiplicamos por un armónico esférico $Y^{l'm'}$, esto con la finalidad de eliminar las sumas, obtendremos

$$\square\phi = -\psi_{l'm',tt} + \partial_{r^*}^2 \psi_{l'm'} - F \left(\frac{F'}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \mu^2 \right) \psi_{l'm'} = 0 \quad (3.10)$$

Ahora, con la finalidad de estudiar los estados estacionarios, se descompuso la solución $\psi_{lm}(t, r)$ en parte espacial y temporal de la siguiente manera:

$$\psi_{lm}(t, r) = e^{i\omega t} \Phi_{lm}(r) \quad (3.11)$$

en donde, ω es una frecuencia real. Con esta sustitución a nuestra ecuación de Klein-Gordon le quitamos la dependencia temporal, de forma que nos quedamos con una ecuación en una variable que simplifica su análisis [8]. Tras dicho cambio la ecuación a resolver es

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + V_{eff}(r^*) \right] \Phi(r^*) = \omega^2 \Phi(r^*) \quad (3.12)$$

en donde $V_{eff} = F(r) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + \mu^2 \right)$.

Este potencial podemos reescribirlo de manera tal que dependa solo del producto de dos constantes importantes en el sistema y que nos ayude a visualizarlo de mejor manera. Para esto adimensionalizaremos r , por lo que definimos $x = r/M$. Con este cambio nuestro potencial efectivo toma el siguiente aspecto

$$V_{eff} = \left(1 - \frac{2M}{Mx} \right) \left(\frac{l(l+1)}{M^2 x^2} + \frac{2M}{M^3 x^3} + \mu^2 \right), \quad (3.13)$$

recordando que estamos trabajando con la geometría de Schwarzschild por lo que $F(r) = 1 - \frac{2M}{r}$. Si a esta ecuación se le factoriza $1/M^2$, este potencial tendrá la siguiente forma

$$V_{eff} = \frac{1}{M^2} \left(1 - \frac{2}{x}\right) \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{2}{x^3} + (M\mu)^2\right), \quad (3.14)$$

y dado que el factor mencionado es una constante, sólo escala nuestro potencial efectivo por lo que este potencial depende del producto de dos constantes, M la masa del hoyo negro y μ la masa del campo escalar.

Con este último cambio, la ecuación final adimensionalizada de Klein-Gordon toma el siguiente aspecto:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{2}{x}\right) \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \sigma^2\right)\right] \Phi = \bar{\omega}^2 \Phi, \quad (3.15)$$

en donde se utilizó que $\bar{\omega} = \omega M$ y que $\sigma = M\mu$. Esta expresión nos será de vital ayuda para la comparación con la ecuación de Gross-Pitaevskii.

Dependiendo de distintas combinaciones de ambas se pueden formar diversos tipos de potenciales y es de vital importancia la forma de éste, ya que dependiendo de ella veremos si tiene mínimos o máximos. En la figura ?? se muestran algunas gráficas del potencial efectivo para algunos valores de $M\mu$ y $l = 1$, sin hacer el cambio a coordenadas tortuga. El potencial efectivo está multiplicado por el factor que se muestra en la ecuación anterior M^2 .

Un mínimo en el potencial es importante ya que nos indicaría la existencia de estados ligados, y por tanto, la posibilidad de que parte del campo escalar permanezca en esa región de manera estable. De la gráfica anterior podemos ver como para $M\mu = 0,2$ aún no se forma ningún pozo de potencial; ya para el valor de este parámetro igual a 0.4 podemos ver la formación de un pozo y cómo al ir aumentando el valor de éste, el pozo va incrementando su profundidad hasta que aproximadamente por 0.46 el potencial comienza a desvanecerlo de nuevo. En la siguiente figura se mostrará la gráfica de diversos potenciales para distintos valores del parámetro $M\mu$ con $l = 1$ pero ahora en las coordenadas tortuga antes mencionadas.

De esta imagen podemos notar que tanto para valores de $M\mu$ igual a cero, como para superiores a 0.466 el potencial no presenta mínimo local. Entre estos valores comienza a presentar estos mínimos. Las zonas sombreadas indican los lugares en donde se encontrarían los estados ligados.

En lo que respecta al comportamiento asintótico de esta ecuación, podemos notar que este potencial, cuando $r^* \rightarrow \infty$ tiende a la constante μ y por tanto toma el siguiente aspecto

$$\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} \Phi(r^*) = -(\omega^2 - \mu^2) \Phi(r^*) \quad (3.16)$$

Esta ecuación tiene como solución general una combinación lineal de exponenciales, esto es

$$\Phi(r^*) = Ae^{ikr^*} + Be^{-ikr^*} \quad (3.17)$$

en donde A y B son constantes y $k = \sqrt{(\omega^2 - \mu^2)}$. Este tipo de soluciones dependen de qué valores tenga nuestra frecuencia ω , ya que si se encuentra en el intervalo $0 < \omega < \mu$, entonces k sería imaginaria por lo que nuestra solución sólo sería una combinación lineal de exponenciales reales, una creciente y otra decreciente. Si ahora $\mu < \omega$ entonces k es real, por lo que se mantiene la naturaleza imaginaria de las exponenciales de la solución anterior, lo que indica que su comportamiento es oscilatorio. Por otra parte, si $r^* \rightarrow -\infty$, entonces $r^* \rightarrow 2M$, por lo que $F(r) \rightarrow 0$ y entonces el potencial se anulará y nos quedará una ecuación a resolver de la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} \Phi(r^*) = -\omega^2 \Phi(r^*), \quad (3.18)$$

la cual tiene por solución una combinación lineal de exponenciales imaginarias

$$\Phi(r^*) = Ae^{i\omega r^*} + Be^{-i\omega r^*}. \quad (3.19)$$

Teniendo estas soluciones, para que sean soluciones físicas, con $0 < \omega < \mu$, la solución asintótica hacia infinito debe ser proporcional a una exponencial negativa para que decaiga, esto es $\Phi_{asint} = Ae^{-ikr^*}$ y la solución de la derecha deberán ser combinaciones como las mostradas en 3.17, aunque por ser soluciones oscilantes, la solución que viaja hacia la derecha deberá llevar un coeficiente de reflexión R . Las soluciones con frecuencias en el intervalo mencionado se mantienen de cierta forma alrededor del hoyo negro debido a que decaen cuando $r \rightarrow \infty$.

3.1. Estados resonantes

Analizando más a fondo el intervalo de frecuencias que se encuentran en $0 < \omega < \mu$, es posible encontrar estados resonantes en ellos, dependiendo de si el V_{eff} tiene o no un pozo de potencial [8]. Para el análisis de nuestro potencial efectivo y obtener los puntos críticos es necesario derivar la expresión de este. La expresión del potencial desarrollada es

$$V_{eff} = \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + \mu^2 - \frac{2Ml(l+1)}{r^3} - \frac{4M^2}{r^4} - \frac{2M\mu^2}{r}, \quad (3.20)$$

por lo que al derivarla respecto al radio obtendremos la siguiente expresión que igualaremos a cero para la obtención de un polinomio cuyas raíces serán los puntos críticos

$$\frac{\partial}{\partial r} V_{eff} = -\frac{2l(l+1)}{r^3} - \frac{6M}{r^4} + \frac{6Ml(l+1)}{r^4} + \frac{16M^2}{r^5} + \frac{2M\mu^2}{r^2}. \quad (3.21)$$

Simplificando la expresión anterior multiplicándola por un factor de $\left(\frac{r^5}{2}\right)$ obtenemos nuestro polinomio final, que es

$$M\mu^2 r^3 + 8M^2 - l(l+1)r^2 + 3M(l^2 + l - 1)r = 0. \quad (3.22)$$

Para el caso extremo de una partícula sin masa, esto es $\mu = 0$, nuestro polinomio se reduce a uno más simple, el cual nos da el valor de máximo como

$$r_{max} = \frac{3M}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{14l^2 + 14l + 9}{9l^2(l+1)^2}} - \frac{1}{2l(l+1)} \right), \quad (3.23)$$

el cual en el caso particular de $l \rightarrow \infty$, $r_{max} = 3M$. Esto nos indica que es la órbita estable más cercana al hoyo negro, todo lo que no tenga velocidad radial y se encuentre en una vecindad más cercana caerá eventualmente al hoyo.

Para casos más generales, el polinomio de 3.22 posee tres soluciones reales si se cumple que

$$(M\mu)^2 < -\frac{1}{32}(l^2+l-1)(l^2+l+1)^2 + \frac{1}{288}\sqrt{3(3l^4+6l^3+5l^2+2l+3)^3} \quad (3.24)$$

de las cuales una de ellas es negativa, por lo que no es física. De las dos restantes raíces una es el máximo y la otra el mínimo del potencial.

De esta manera, que existan estados resonantes depende de la frecuencia ω elegida, para la cual, hay algunas en las que la función tiene amplitudes grandes dentro del potencial y escapa de este lentamente. Se requiere que esta frecuencia se encuentre en el intervalo $0 < \omega^2 < \mu^2$ ya que eso garantiza que, como ya se mencionó, decaiga la solución en infinito y el campo escalar se mantenga en una vecindad del hoyo negro.

Dentro de los trabajos mencionados para estados resonantes ([8], [9]), lo que se pretende es que en la banda de resonancia cercana al horizonte haya una cantidad similar de modos entrantes como salientes de la misma magnitud para ir compensando la pérdida del campo, ya que en todo momento parte de este se irá cayendo al horizonte. Como puede suponerse, esta petición al sistema no es física debido a que quiere decir que del horizonte vendrá entrando campo hacia el pozo de potencial y eso no es posible.

Para las configuraciones que se mantengan circundando al hoyo negro se propone una solución estacionaria pero sin “tocar” al horizonte, esto es, se da como cero en el intervalo $(2M, 2M + \epsilon)$, para un $\epsilon > 0$ pequeño. De esta manera se tiene una solución estacionaria con una perturbación alrededor del horizonte, con lo que se puede estimar el valor del tiempo que tarda ésta en llegar al radio $r = 2M + \Delta$ con $\Delta > \epsilon$. Este tiempo está dado por $t_\epsilon(2M + \Delta) = 2M \ln(\Delta/\epsilon) + (\Delta - \epsilon)$ en el cual el segundo término es el dado en un espacio plano y el primero dado por la curvatura del espacio no trivial [24]. Con esta expresión y tomando en cuenta que $2M + \Delta$ puede ser del orden del tamaño de la distribución de campo escalar, uno puede estimar cuánto “tiempo de vida” podría tener el campo en esas condiciones.

3.2. Densidad del campo escalar

Para nuestro enfoque es de vital importancia observar cómo es que la densidad del campo escalar y su energía se comportan debido al cambio en el valor

de sus parámetros. Esto nos dará información acerca de su distribución y así sabremos si el campo acreta o puede mantenerse estable alrededor del hoyo negro. Esta densidad en Relatividad General está dada como una componente del tensor de energía-momento $-T_t^t$, del sistema en cuestión. En este caso, tenemos que para el campo escalar, su T_μ^ν esta dado por:

$$T_\nu^\mu = g^{\mu\lambda}\phi_{,\lambda}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu (g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} + 2V) \quad (3.25)$$

en donde el potencial V esta dado por:

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \lambda\phi^4 \quad (3.26)$$

con λ una constante, cabe mencionar que aquí ya no estamos trabajando con un campo escalar de prueba, esto es, ya estamos utilizando el término de auto interacción descrito por $\lambda\phi^4$. Este término implica que la distribución del campo no sólo estará sujeta al potencial externo, sino que ahora tendrá contribuciones de la interacciones generadas por el propio campo escalar.

Es así como calculando la componente de nuestro interés con el potencial dado, esta tiene la forma

$$T_t^t = \frac{1}{2} \left(2g^{tt}\dot{\phi}\dot{\phi}^* - g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}^* + m^2\phi\phi^* + \lambda(\phi\phi^*)^2 \right) \quad (3.27)$$

en la cual, si desarrollamos el término $g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}^*$ tenemos que la expresión anterior puede ser escrita como:

$$= -\frac{1}{2} \left(g^{tt}\dot{\phi}\dot{\phi}^* + g^{rr}\phi'\phi'^* + m^2\phi\phi^* + \lambda(\phi\phi^*)^2 + \frac{1}{r^2}(\phi_{,\theta}\phi_{,\theta}^* + \frac{1}{\text{sen}^2}\phi_{,\varphi}\phi_{,\varphi}^*) \right) \quad (3.28)$$

Con el propósito de simplificar la expresión, si sustituimos una función con parte radial y angular de la forma $\phi = \sum_{l,m}\phi_{lm}(r)Y^{lm}(\theta,\varphi)$, la parte de derivadas angulares dentro del $-T_t^t$ toma la forma:

$$\phi_{,\theta}\phi_{,\theta}^* + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\phi_{,\varphi}\phi_{,\varphi}^* = \sum_{lm}\sum_{l'm'} \left\{ \phi_{lm}Y_{,\theta}^{lm}\phi_{l'm'}Y_{,\theta}^{l'm'} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\phi_{lm}Y_{,\varphi}^{lm}\phi_{l'm'}Y_{,\varphi}^{l'm'} \right\} \quad (3.29)$$

Como lo importante de obtener el $-T_t^t$ es su integral ya que nos proporciona la información acerca del cambio en la energía del sistema, veremos qué ocurre al integrar la parte angular de esta componente del tensor energía-momento.

$$\int \left(Y_{,\theta}^{lm}Y_{,\theta}^{l'm'} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}Y_{,\varphi}^{lm}Y_{,\varphi}^{l'm'} \right) d\Omega \quad (3.30)$$

A la expresión del integrando intentaremos verla de tal forma que el primer término sea completamente derivado respecto a θ y el segundo respecto a φ , es así que tendremos que restar los términos sobrantes como se muestra

$$\int \left[\left(Y_{,\theta}^{lm}Y_{,\theta}^{l'm'} \right)_{,\theta} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \left(Y_{,\varphi}^{lm}Y_{,\varphi}^{l'm'} \right)_{,\varphi} \right] d\Omega - \int \left[\left(Y_{,\theta\theta}^{lm} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}Y_{,\varphi\varphi}^{lm} \right) Y^{l'm'} \right] d\Omega \quad (3.31)$$

notemos que la segunda integral es casi la parte angular del operador laplaciano salvo por un término

$$\frac{1}{\text{sen}\theta} \left(\cos\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta} + \text{sen}\theta \frac{\partial^2 Y}{\partial\theta^2} \right) + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = -l(l+1)Y \quad (3.32)$$

aprovechando esto, sustituiremos por su valor propio más el término que falta

$$- \int (l(l+1)Y^{lm} + \cot\theta Y_{,\theta}^{lm}) Y^{l'm'} d\Omega \quad (3.33)$$

Ahora, nos gustaría que toda la parte angular fuera solamente sustituida por el eigenvalor $l(l+1)$, y por tanto, la suma de tres de los cuatro términos en 3.30 fuese cero, esto es

$$\int \left[\left(Y_{,\theta}^{lm} Y^{l'm'} \right)_{,\theta} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \left(Y_{,\varphi}^{lm} Y^{l'm'} \right)_{,\varphi} + \cot\theta Y_{,\theta}^{lm} Y^{l'm'} \right] d\Omega = 0 \quad (3.34)$$

Con ese propósito, podemos definir un campo vectorial F como

$$F = \left(Y_{,\theta}^{lm} Y^{l'm'}, \frac{Y_{,\varphi}^{lm} Y^{l'm'}}{\text{sen}\theta} \right) \quad (3.35)$$

con el cual al obtener su divergencia nos dará algo parecido a la expresión que andamos buscando

$$\nabla \cdot F = \cot\theta Y_{,\theta}^{lm} Y^{l'm'} + Y_{,\theta}^{lm} Y_{,\theta}^{l'm'} + \frac{1}{\text{sen}^2\theta} \left(Y_{,\varphi}^{lm} Y^{l'm'} \right)_{,\varphi} \quad (3.36)$$

y utilizando el Teorema de Gauss en dos dimensiones ([31]), obtenemos que la integral de esta divergencia tiene valor cero debido a que la frontera de la región es nula ya que es una esfera.

$$\int \int_R \nabla \cdot F dA = \oint_{\partial R} (F \cdot n) dl = 0 \quad (3.37)$$

De manera análoga podríamos utilizar el teorema de Stokes, el cual nos relaciona a una integral de una superficie con una integral de línea a lo largo de la frontera de la superficie

$$\int \int_S (\nabla \times F) \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot ds \quad (3.38)$$

para esto primero tomaremos a nuestra superficie S como una esfera de radio R con una parametrización estándar dada por

$$S(\theta, \varphi) = R(\cos\theta \cos\varphi, \text{sen}\theta \cos\varphi, \text{sen}\varphi) \quad (3.39)$$

de esta manera el término del integrando de la parte izquierda del teorema puede ser calculado y del cual se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla \times F \cdot N d\theta d\varphi &= R \cos\varphi (\cos^2\theta \cos\varphi F_3 + \cos\theta \cos\varphi \text{sen}\theta \partial_\theta F_3 \\ &\quad - \cos\theta \cos\varphi \partial_\varphi F_2 + \text{sen}\theta \cos\varphi \partial_\varphi F_1 - \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \partial_\theta F_1) \end{aligned} \quad (3.40)$$

en donde $N = \partial\theta S \times \partial\varphi S$ es el vector normal a la superficie y F_i , $i \in \{1, 2, 3\}$ son las componentes de un campo vectorial F .

Es así como podemos definir un campo vectorial dado por

$$F = \frac{R \operatorname{sen}\theta}{R \cos\varphi} \left(0, -\frac{Y^{lm} Y^{l'm'}}{\cos\varphi \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}, \frac{Y^{lm} Y^{l'm'}}{\cos\varphi \cos\theta \operatorname{sen}\theta} \right) \quad (3.41)$$

que al sustituirlo en la expresión 3.33, nos da como resultado

$$\int \int_S \left[\cot\theta Y^{lm} Y^{l'm'} + \left(Y^{lm} Y^{l'm'} \right)_{,\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \left(Y^{lm} Y^{l'm'} \right)_{,\varphi} \right] d\Omega = 0 \quad (3.42)$$

que es cero debido a que la superficie en la que lo estamos haciendo es una esfera y su frontera es nula.

De esta manera la parte angular se redujo al eigenvalor $l(l+1)$ y por tanto nuestra expresión de la densidad del campo escalar queda como

$$\rho_\phi = -\frac{1}{2} \left(g^{tt} \dot{\phi} \dot{\phi}^* + g^{rr} \phi' \phi'^* + m^2 \phi \phi^* + \lambda (\phi \phi^*)^2 + \frac{1}{r^2} \sum_{lm} \sum_{l'm'} \phi_{lm} \phi_{l'm'} (l(l+1)) \right). \quad (3.43)$$

Notemos que esta expresión incluye distintos términos que contribuyen a la energía, algunos de ellos son términos dinámicos, como los referentes a $\dot{\phi}$ y ϕ' , y otros que surgen del tipo de potencial que se está utilizando, entre estos el término de autointeracción. También es de notar que esta densidad de penderá de la geometría en que se encuentre la distribución del campo escalar ya que en los términos dinámicos antes mencionados influyen los coeficientes métricos.

Todo lo anterior se realizó para un campo escalar clásico que como ya se comentó, es un tipo de materia, es relativista y tiene comportamiento distinto al de un fluido.

Con este cálculo tenemos una idea de cómo está distribuida la densidad de campo escalar para una geometría dada en simetría esférica.

Capítulo 4

Condensados de Bose-Einstein

En el presente capítulo se introducirán conceptos básicos que describen a los condensados de Bose-Einstein, así como el formalismo de la ecuación que utilizaremos para describirlos.

Siguiendo los trabajos de Bose, Einstein consideró un sistema de bosones masivos no interactuantes ([4], [5]) y concluyó que bajo cierta temperatura y densidad, una fracción del total de partículas del sistema se encontrarían ocupando el estado cuántico de menor energía que una partícula pudiese ocupar. Los bosones son partículas de espín entero, además de que una función de onda de un sistema de bosones idénticos es simétrica bajo el intercambio entre partículas.

Dado que la temperatura juega un papel muy importante en este sistema, es de gran utilidad saber a que temperaturas se da dicho fenómeno. Una manera de tener un ponderado de la temperatura de transición de un BEC es mediante argumentos dimensionales, ya que las cantidades relevantes en un gas de partículas libres son la masa m , el número de densidad n y la constante de Planck \hbar . Dado lo cual, la única energía que puede formarse con dichas cantidades es $\hbar^2 n^{2/3}/m$, que dividida entre la constante de Boltzmann, obtenemos un estimado de la T_c :

$$T_c = C \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{mk}. \quad (4.1)$$

Por otra parte, una forma alterna de relacionar la temperatura de transición de un BEC con la densidad de partículas es mediante la comparación de la longitud de onda de De Broglie con la separación media entre las partículas del sistema, que es del orden de $n^{-1/3}$ [13]. Esta longitud de onda generalmente es definida como

$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mkT} \right)^{1/2}. \quad (4.2)$$

A altas temperaturas es muy pequeña y el sistema se comporta clásicamente; es por esto que el fenómeno de condensación se da cuando la temperatura es suficientemente baja para que λ_T sea comparable con $n^{-1/3}$. Si tenemos a N , el número de partículas del sistema, la densidad de este estará dada por $n = N/R^3$, en donde R es el radio de la nube del gas, y que es del orden de $(kT/m\omega_0^2)^{1/2}$, donde ω_0 es la frecuencia angular del movimiento de cada partícula dentro del potencial de atrapamiento.

Comparando λ_T con $n^{-1/3}$ y sustituyendo n en la expresión, tenemos que la temperatura de transición está dada por:

$$kT_c = C_1 \hbar \omega_0 N^{1/3}, \quad (4.3)$$

en donde C_1 es una constante. Experimentalmente son usadas frecuencias en las trampas del orden de 10^2 Hz , con lo que las frecuencias $\omega_0 \sim 10^3 \text{ s}^{-1}$ y el número de partículas se encuentra entre $10^4 - 10^7$ [32]. Con lo anterior se obtiene un ponderado de la temperatura de transición de un gas uniforme, que también son similares a aquellas en las que el gas se encuentra atrapado.

4.1. Gas de Bose no interactuante

Para un sistema de bosones no interactuantes y en equilibrio termodinámico se tiene que el número de ocupación del estado ν esta dado por [13]

$$f^0(\epsilon_\nu) = \frac{1}{e^{(\epsilon_\nu - \mu)/kT} - 1}, \quad (4.4)$$

en la que ϵ_ν denota la energía del estado de una partícula en el potencial en el que se encuentre y μ es el potencial químico que está determinado como una función del número de partículas N y la temperatura T con la condición de que el número total de partículas sea la suma de la ocupación de los niveles individuales con un potencial químico fijo.

Dada esta distribución, se tiene que a altas temperaturas, los efectos cuánticos son despreciables y se convierte en la distribución de Boltzmann.

$$f^0(\epsilon_\nu) \simeq e^{-(\epsilon_\nu - \mu)/kT}. \quad (4.5)$$

A estas temperaturas el potencial químico es mucho menor que la energía mínima. Conforme la temperatura va disminuyendo el valor del potencial químico comienza a ser importante y comparable con el de la energía mínima y el número de ocupación aumenta. Cuando el número de partículas en el estado base es considerable entonces el sistema tiene un condensado de Bose. Dependiendo del sistema, se tiene la función $g(\epsilon)$ es la densidad de estados en el intervalo $\epsilon - d\epsilon$, que nos ayuda a tener una idea de la cantidad de estados excitados. Dicha función varía como potencia de la energía.

$$g(\epsilon) = c_\alpha \epsilon^{\alpha-1}, \quad (4.6)$$

donde α es un valor que depende del tipo de sistema a considerar. Por ejemplo, para un gas en tres dimensiones confinado por paredes rígidas, $\alpha = 3/2$.

Ahora, para tener una expresión de T_c , tenemos que la temperatura de transición se define como la temperatura máxima a la que la ocupación macroscópica del estado base aparece. Y teniendo que el número de partículas en estados excitados esta dado por:

$$N_{ex} = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) f^0(\epsilon), \quad (4.7)$$

la cual toma su valor más alto con $\mu = 0$ y la T_c queda determinada por la condición de que el número total de partículas se encuentren en estados excitados, esto es:

$$N = C_\alpha (kT_c)^\alpha \int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} = C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) (kT_c)^\alpha, \quad (4.8)$$

en la cual se utilizó la variable adimensional $x = \epsilon/kT_c$, $\Gamma(\alpha)$ es la función gamma y $\zeta(\alpha) = \sum_{n=0}^\infty n^{-\alpha}$ es la función zeta de Riemann [13]. Con este resultado podemos tener una expresión explícita para la temperatura de transición. Nótese que el número de partículas en estados excitados no depende del número total de partículas por lo que sólo hablamos en términos de fracciones del N total.

4.2. Propiedades termodinámicas

Dado que cuando el sistema se encuentra en un condensado de Bose-Einstein el estado macroscópicamente ocupado no contribuye con la energía, es tomado como cero, y como por debajo de la T_c el potencial químico μ desaparece, entonces la energía interna del sistema es [13]

$$E = C_\alpha \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{\alpha-1} \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} = C_\alpha \Gamma(\alpha + 1) \zeta(\alpha + 1) (kT)^{\alpha+1}. \quad (4.9)$$

Con este resultado y dado que el calor específico es $C = \partial E / \partial T$ y que la entropía esta relacionada con el calor específico como $C = T \partial S / \partial T$, entonces tenemos que ambas propiedades están dadas por:

$$C = (\alpha + 1) \frac{E}{T} \quad (4.10)$$

$$S = \frac{C}{\alpha} = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \frac{E}{T} \quad (4.11)$$

4.3. Ecuacion de Gross-Pitaevskii

La ecuación de Gross-Pitaevskii describe las propiedades de un gas de Bose no uniforme cuando la longitud de dispersión a es mucho menor que el espaciamento entre partículas. Se sabe que a bajas energías, la interacción entre dos

partículas es constante en la representación de momentos y es $U_0 = 4\pi$, que en el espacio de coordenadas corresponde a una interacción de contacto $U_0\delta(r-r')$ [7].

Para un sistemas de bosones completamente en un condensado, los tenemos en el mismo estado cuántico, por lo que su función de onda puede ser escrita como:

$$\Psi(r_1, \dots, r_N) = \prod \phi(r_i). \quad (4.12)$$

en donde $\Psi(r_1, \dots, r_N)$ representa la función de onda de todo el sistema y las $\phi(r_i)$ representan las funciones de onda de cada bosón.

Dado lo cual tenemos que la interacción efectiva esta dada por U_0 y que el Hamiltoniano efectivo es:

$$H = \sum \left[\frac{p_i^2}{2m} + V(r_i) \right] + U_0 \sum \delta(r_i - r_j), \quad (4.13)$$

siendo $V(r)$ el potencial externo.

Sacando el valor esperado del hamiltoniano:

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = \int d^N r \prod \phi(r_i) \left(\sum \left[\frac{p_i^2}{2m} + V(r_i) \right] + U_0 \sum \delta(r_i - r_j) \right) \prod \phi(r_i), \quad (4.14)$$

es decir

$$= N \left(\int dr \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi(r)|^2 + V(r) |\phi(r)|^2 \right] \right) + \frac{N(N-1)}{2} \int dr_i dr_j U_0 \delta(r_i - r_j) \phi^*(r_i) \phi^*(r_j) \phi(r_i) \phi(r_j), \quad (4.15)$$

al simplificar, obtenemos que

$$\langle \Psi | H | \Psi \rangle = N \int dr \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi(r)|^2 + V(r) |\phi(r)|^2 + \frac{N-1}{2} U_0 |\phi(r)|^4 \right]. \quad (4.16)$$

Por lo que la energía del estado antes mencionado esta dada por:

$$E = N \int dr \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi(r)|^2 + V(r) |\phi(r)|^2 + \frac{N-1}{2} U_0 |\phi(r)|^4 \right] \quad (4.17)$$

Comenzando por considerar un gas de Bose uniforme. Además en un sistema uniforme de volumen V , la función de onda de una partícula en el estado base es $1/V^{1/2}$, por lo que la energía de interacción entre pares de partículas es U_0/V . Con lo que la energía de un sistema de N bosones en el mismo estado cuántico es esa cantidad multiplicada por el número de distintas formas de tomar pares de bosones. Teniendo que en esta aproximación la energía es:

$$E = \frac{N(N-1)}{2V} U_0 \approx \frac{1}{2} V n^2 U_0. \quad (4.18)$$

Ahora introduciendo el concepto de función de onda del condensado $\psi(r) = N^{1/2} \phi(r)$, la densidad de partículas esta dada por $n(r) = |\psi(r)|^2$ y despreciando

términos de orden (campo medio) $1/N$, la energía del sistema puede ser escrita como:

$$E = \int dr \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi(r)|^2 + V(r)|\psi(r)|^2 + \frac{1}{2}U_0|\psi(r)|^4 \right]. \quad (4.19)$$

Dado lo cual, minimizando la energía variando $\psi(r)$ y su complejo conjugado $\psi^*(r)$, manteniendo el número de partículas constante

$$N = \int dr |\psi(r)|^2. \quad (4.20)$$

Posteriormente con $\delta E - \mu\delta N = 0$ e introduciendo la variación $\psi(r) + \delta\psi(r)$ en la energía se tiene que

$$\delta E = \int dr \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi(r) + V(r)\psi(r) + U_0\psi(r)^2\psi(r)^* \right) \delta\psi(r)^* \quad (4.21)$$

$$\delta N = \int dr r (\psi(\delta\psi)^* + \psi^*\delta\psi + |\delta\psi|^2) \quad (4.22)$$

de tal manera obtenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2\psi(r) + V(r)\psi(r) + U_0|\psi(r)|^2\psi = \mu\psi(r) \quad (4.23)$$

que es la ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo, la cual tiene la estructura de una ecuación de Schrodinger en donde el potencial esta dado por la suma de un potencial externo y un términos no lineal $U_0|\psi(r)|^2$ que toma en cuenta el campo medio generado por otros bosones. En dicha ecuación el eigenvalor es el potencial químico μ y no la energía por partícula.

Como primer caso para ejemplificar una solución de esta ecuación consideremos el caso unidimensional para un condensado atrapado por una barrera infinita, que nos da un potencial que se anula para $x \geq 0$ y que es infinito para $x < 0$, para lo cual tenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U_0|\psi(x)|^2\psi(x) = \mu\psi(x). \quad (4.24)$$

En el caso de una distribución homogénea de materia se tiene que el potencial químico esta dado por $\mu = U_0|\psi|^2 = U_0n$ [13], con lo cual se obtiene:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -U_0(|\psi(x)|^2 - |\psi(x)|^2)\psi(x). \quad (4.25)$$

Ahora, suponiendo $\psi(x)$ real, tenemos que la ecuación anterior tiene por solución analítica:

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh(x/\sqrt{2}\xi), \quad (4.26)$$

en la que se utilizaron las condiciones de frontera $\psi(0) = 0$ y $\psi(\infty) = \psi_0$. En esta expresión ξ se refiere a la distancia sobre la cual la función de onda toma su máximo valor.

En el caso particular de un gas atrapado por un potencial de oscilador armónico tridimensional dado por:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2), \quad (4.27)$$

con ω_i las frecuencias del oscilador.

Ahora, tomando como función de prueba una de la forma:

$$\phi_0(r) = \frac{N^{1/2}}{\pi_{3/4}(b_1 b_2 b_3)^{1/2}} e^{-x^2/2b_1^2} e^{-y^2/2b_2^2} e^{-z^2/2b_3^2}, \quad (4.28)$$

con los b_i como parámetros de variación. Sustituyéndola en la expresión de la energía que se minimizó para la obtención de la ecuación de Gross-Pitaevskii se tiene:

$$E(b_1 b_2 b_3) = N \sum \hbar\omega_i \left(\frac{a_i^2}{4b_i^2} + \frac{b_i^2}{4a_i^2} \right) + \frac{N^2 U_0}{2(2\pi)^{3/2} b_1 b_2 b_3}. \quad (4.29)$$

Introduciendo las variables adimensionales $x_i = \frac{b_i}{a_i}$, en donde las a_i son las b_i para el caso de un gas sin interacciones entre partículas, y minimizando la expresión respecto a las nuevas variables, obtenemos

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_i \left(x_i^2 - \frac{1}{x_i^2} \right) - \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \frac{NU_0}{\bar{a}^3} \frac{1}{x_1 x_2 x_3} = 0, \quad (4.30)$$

con $\bar{a} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\bar{\omega}}}$. Para obtener dichos parámetros hay que resolver las ecuaciones, pero si se considera una nube muy grande, la energía de interacción es grande y pueden ser despreciados los términos de energía cinética que van como $\frac{1}{x_i^2}$, encontrando:

$$x_i^5 = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{Na}{\bar{a}} \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_i} \right)^{5/2} \quad (4.31)$$

o

$$b_i = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/10} \left(\frac{Na}{\bar{a}} \right)^{1/5} \frac{\bar{\omega}}{\omega_i} \bar{a} \quad (4.32)$$

De esta manera obtenemos que la energía por partícula es:

$$\frac{E}{N} = \frac{5}{4} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/5} \left(\frac{Na}{\bar{a}} \right)^{2/5} \hbar\bar{\omega}. \quad (4.33)$$

De acuerdo con expresión de energía obtenida y despreciando el término de energía cinética, esta es proporcional a $N^{2/5}$ y es $\left(\frac{Na}{\bar{a}} \right)^{2/5}$ veces mayor que la energía en ausencia de interacciones [13].

4.4. Adimensionalizacion de la ecuacion de Gross-Pitaevskii

En esta sección se mostrará la forma en la que se adimensionaliza la ecuación de Gross-Pitaevskii que tiene como principal finalidad un mejor manejo para su solución mediante métodos numéricos.

Como ya se mostró anteriormente, la ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo en una dimensión tiene la siguiente apariencia

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{ext}(r) + U_0|\psi(r)|^2\right)\psi(r) = \mu\psi(r) \quad (4.34)$$

Debido a que se busca que los términos queden con coeficientes adimensionales es necesario realizar unos cambios en las variables, de forma que las constantes carguen las unidades.

En lo que respecta al primer término, el operador $\frac{d^2}{dx^2}$ tiene dimensiones de $\frac{1}{L^2}$ en donde L es una constante con unidades de longitud, habitualmente se utiliza una longitud característica del sistema.

En nuestro caso, emplearemos un potencial de oscilador armónico $V_{ext}(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$. Como primer paso definiremos una coordenada adimensional dada por

$$x \equiv \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}r. \quad (4.35)$$

Notemos que $\frac{2m\omega}{\hbar}$ tiene dimensiones de $\frac{1}{L^2}$. También debemos resaltar que $U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ en donde a es la longitud de dispersión, característica del condensado.

Sustituyendo esta coordenada en nuestra expresión original así como el valor de U_0 , tenemos que nuestra ecuación toma el siguiente aspecto

$$\left[-\hbar\omega\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}\omega\hbar x^2 - \frac{4\pi\hbar^2|a|}{m}\psi^2(r)\right]\psi(r) = \mu\psi(r). \quad (4.36)$$

Por otro lado, analicemos el tercer término de nuestra ecuación, podemos ver que

$$\frac{4\pi\hbar^2|a|}{m}\psi^2(r) = \frac{|\Phi(x)|^2}{x^2}, \quad (4.37)$$

en el cual $|\Phi(x)| = 8\pi|a|r^2\psi^2(r)$ es adimensional también.

Finalmente sustituimos la expresión anterior y además todo lo multiplicamos por un factor de $\frac{1}{\hbar\omega}$ obtendremos nuestra ecuación de Gross-Pitaevskii adimensional

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{|\Phi(x)|^2}{x^2}\right]\Phi(x) = \beta\Phi(x) \quad (4.38)$$

en donde se definió $\beta = \frac{\mu}{\hbar\omega}$ una constante adimensional.

4.5. Gross-Pitaevskii en simetría esférica

Partiendo de la ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo, ahora veremos su desarrollo en tres dimensiones en coordenadas esféricas, que será de ayuda en nuestra analogía.

Inicialmente notemos que el laplaciano en coordenadas esféricas tiene la forma

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (4.39)$$

con lo que nuestra ecuación a tratar queda con el siguiente aspecto

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right] + V \phi + U_0 |\phi|^2 \phi = \mu \phi \quad (4.40)$$

Si ahora, como ya lo hemos hecho, introducimos $\phi = \sum_{l,m} \psi_{lm}(r) Y^{lm}(\theta, \varphi)$ podremos manipular con mayor facilidad algunos términos.

$$\begin{aligned} & \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\sum_{l,m} Y^{lm} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi_{lm}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \sum_{l,m} \psi_{lm} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y^{lm}}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \sum_{l,m} \psi_{lm} \frac{\partial^2 Y^{lm}}{\partial \varphi^2} \right] + V \sum_{l,m} \psi_{lm} Y^{lm} + U_0 \rho \sum_{l,m} \psi_{lm} Y^{lm} = \mu \sum_{l,m} \psi_{lm} Y^{lm} \quad (4.41) \end{aligned}$$

en el que $\rho = |\phi|^2$.

Para simplificar la expresión realizaremos algunos cambios, primero volvemos a realizar la sustitución del operador angular por su eigenvalor.

$$\frac{1}{\sin \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = -l(l+1)Y \quad (4.42)$$

además se multiplicará toda la ecuación por un armónico esférico $Y^{l'm'}$ para que nos quede una expresión para cada modo utilizando la ortogonalidad de estas funciones especiales, esto es

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \psi \right] + V \psi + U_0 \rho \psi = \mu \psi \quad (4.43)$$

Ya con esta expresión haremos un cambio de coordenadas cambiando la función a resolver $\psi_{lm} = \frac{u_{lm}}{r}$, esto con el propósito de deshacernos del término de primera derivada radial y así encontrar una mayor similitud con la ecuación de Klein-Gordon. De esta manera la ecuación toma el siguiente aspecto.

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dr^2} u - \frac{l(l+1)}{r^2} u \right] + V u + U_0 \rho u = \mu u \quad (4.44)$$

Dentro del mismo análisis de los términos de la ecuación veremos qué ocurre con el referente a ρ al realizar la expansión de ϕ en una parte radial y otra angular. Recordemos primero que ρ fue definido como $|\phi|^2$, por lo que

$$\rho = \left(\sum_{l,m} \psi_{lm} Y^{lm} \right) \left(\sum_{l',m'} \psi_{l'm'} Y^{l'm'} \right)^* \quad (4.45)$$

es así como al multiplicar los términos

$$\sum_{l,m} \sum_{l',m'} (\psi_{lm} \psi_{l'm'}^*) (Y^{lm} Y^{*l'm'}) \quad (4.46)$$

si se utiliza la ortogonalidad de los armónicos esféricos con lo que el segundo término de la expresión anterior da deltas que permiten eliminar una de las sumas (esto integrando sobre la esfera unitaria) y de esta manera podemos notar que este término se reduce sólo a la suma sobre los cuadrados de las partes radiales referentes a cada modo

$$\rho = \sum_{l,m} \psi_{lm}^2 \quad (4.47)$$

Este término introduce una dificultad en el análisis de Gross-Pitaevskii, esto es porque la ecuación a la que llegamos no tiene separados los modos ya que ρ contiene contribuciones de todas las demás componentes a pesar de que el resto de la expresión sólo refiere a uno de ellos.

Dentro del análisis de esta ecuación, generalmente se tienen dos posibilidades de simplificar su estudio ([33], [7]). Por una parte en el caso de que el condensado sea débilmente interactuante, se desprecia el término que posee la U_0 que es el de autointeracción por lo que la ecuación resultante a resolver es

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dr^2} u - \frac{l(l+1)}{r^2} u \right] + Vu = \mu u \quad (4.48)$$

Por otra parte, en el caso de tener un condensado fuertemente interactuante se suele despreciar el término referente a la energía cinética de las partículas, que es el de la segunda derivada espacial, de esta última simplificación se hablará más adelante y es llamada aproximación de Thomas-Fermi. Con esta aproximación, la ecuación a resolver es de carácter algebraico y es de la forma

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left[-\frac{l(l+1)}{r^2} u \right] + Vu + U_0 \rho u = \mu u \quad (4.49)$$

Finalmente podríamos adimensionalizar a la ecuación 4.49 con la finalidad de comparar con la versión adimensional de Klein-Gordon.

Al igual que cuando se adimensionalizó la ecuación de Klein-Gordon, definiremos una variable adimensional como $x = r/L$ con lo que el término de

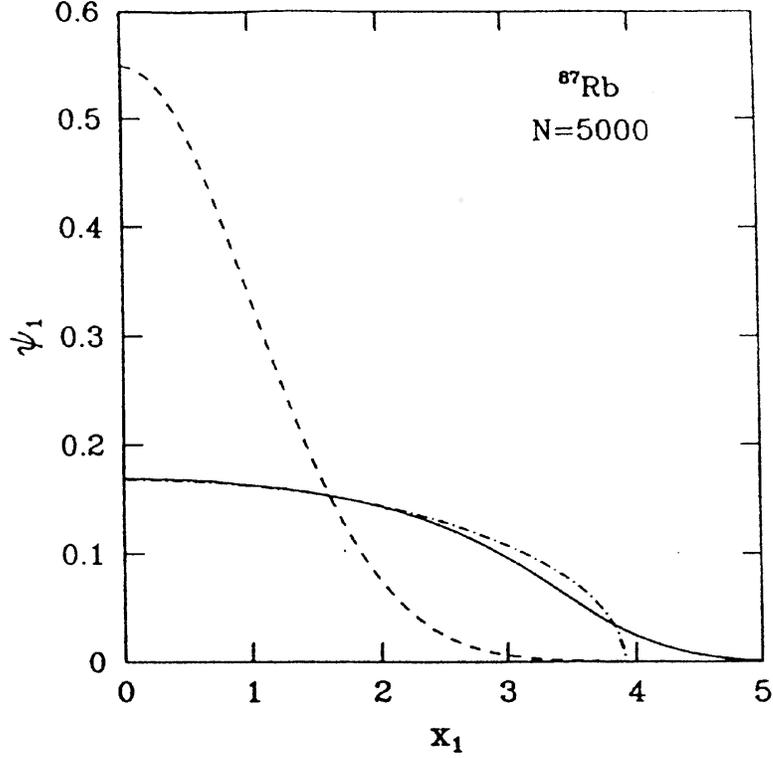


Figura 4.1: Comparación entre la solución numérica (línea continua), la aproximación de gas no interactuante (línea discontinua) y la aproximación de Thomas-Fermi (línea discontinua con puntos) [33].

segunda derivada tiene dimensiones de $1/L^2$. Si se multiplica por $\frac{2mL^2}{\hbar^2}$ nuestra expresión quedará como

$$-\frac{d^2}{dx^2}u + \frac{l(l+1)}{x^2}u + \frac{2mL^2}{\hbar^2}Vu + \frac{2mL^2}{\hbar^2}U_0\rho u = \frac{2mL^2}{\hbar^2}\mu u, \quad (4.50)$$

por lo que si definimos constantes adimensionales de la siguiente manera

$$\bar{V} = \frac{2mL^2}{\hbar^2}V \quad (4.51)$$

$$\epsilon = \frac{2mL^2}{\hbar^2}\mu \quad (4.52)$$

y definiendo que $\tilde{u} = u/L^{3/2}$ y $\gamma = \frac{2mL^2}{\hbar^2}U_0$, nuestra ecuación finalmente se verá como

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{l(l+1)}{x^2} + \bar{V} + \gamma\rho \right] u = \epsilon u, \quad (4.53)$$

que en el siguiente capítulo será de gran ayuda.

4.6. Aproximación de Thomas-Fermi

Cuando las nubes del gas son suficientemente grandes, y por tanto el número de átomos y sus interacciones repulsivas dominan el sistema, una expresión para el estado base puede ser obtenida despreciando el término de energía cinética de la ecuación de GP. Esto nos da:

$$[V(r) + U_0|\psi(r)|^2] \psi(r) = \mu\psi(r) \quad (4.54)$$

que tiene por solución:

$$n(r) = |\psi(r)|^2 = [\mu - V(r)]/U_0 \quad (4.55)$$

la cual aplica en la región en la que la parte de la derecha es positiva y por lo tanto, $\psi = 0$ fuera de dicha región. De tal manera tenemos que la frontera de la nube esta dada por:

$$V(r) = \mu \quad (4.56)$$

De esa aproximación podemos obtener la información de que la energía necesaria para agregar una partícula a cualquier punto de la nube es la misma donde quiera que se encuentre el punto.

Este método es muy útil debido a que para conocer la función solución en la región antes mencionada no es necesario resolver la ecuación diferencial, simplemente es despejar la función de nuestra ecuación algebraica ([7], [33]).

En el caso que hemos estado utilizando con un potencial de oscilador armónico, la densidad de número de nuestro condensado con esta aproximación esta dado por

$$\rho = \frac{\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}{U_0} \quad (4.57)$$

en donde se tomó $l = 0$ y $\rho = \psi\psi^*$. Dado lo anterior tenemos que la función solución es

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}{U_0}} \quad (4.58)$$

Es así que si conocemos la forma del potencial de atrapamiento y el valor del potencial químico, podemos conocer las dimensiones de nuestra nube. En el caso específico de un potencial de oscilador armónico anisotrópico.

$$R_i = \frac{2\mu}{m\omega_i^2} \quad (4.59)$$

que son las dimensiones de la nube en cada uno de sus ejes.

Tras hacer una revisión de algunas características de los condensados de Bose y posteriormente manipular la ecuación de Gross-Pitaevskii se encontró una expresión parecida a la de campo escalar en un fondo curvo con simetría esférica y que en el siguiente capítulo se abordará más en

Capítulo 5

Analogía entre la ecuación de Klein-Gordon en espacio curvo y Gross-Pitaevskii

En este capítulo nos centraremos en comparar las dos ecuaciones mencionadas en el presente trabajo, en especial sus versiones adimensionales y con simetría esférica. Hasta el momento se han descrito a las ecuaciones y los sistemas que describen cada uno por separado, pero como se mencionó anteriormente, ambas ecuaciones guardan una similitud matemática.

Para comenzar con nuestra comparación comenzaremos por recordar cuales son las ecuaciones de las cuales estamos hablando. La primera que se mencionó fue la de Klein-Gordon en Schwarzschild, adimensional, que es la siguiente:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_{eff} \right] \Phi = \bar{\omega}^2 \Phi, \quad (5.1)$$

con $V_{eff} = \left(1 - \frac{2}{x}\right) \left(\frac{l(l+1)}{x^2} + \frac{2}{x^3} + (M\mu)^2\right)$ y $\bar{\omega} = \omega M$.

Por su parte la ecuación de Gross-Pitaevskii en simetría esférica, adimensional se ve como sigue:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_{eff}^- + \gamma\rho \right] u = \epsilon u, \quad (5.2)$$

en donde $V_{eff}^- = \frac{l(l+1)}{x^2} + \bar{V}$ es el potencial de atrapamiento usado para confinar al gas y recordar que $\rho = \sum_{lm} \frac{u_{lm}^2}{r^2}$.

Como primer observación hemos de notar que son similares, sin embargo a la primera le falta un término no lineal para tener mayor similitud a la segunda. Este término es justamente el segundo término del potencial usado en la sección de Densidad de campo escalar, que es $V = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$. El segundo término de

este potencial al ingresar a la ecuación de Klein-Gordon lo hace como su derivada, por lo que la ecuación de Klein-Gordon con este término de autointeracción se ve como:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_{eff} + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\lambda\bar{\rho} \right] \Phi = \bar{\omega}^2 \Phi, \quad (5.3)$$

la cual tiene ya un aspecto casi idéntico al de la ecuación de Gross-Pitaevskii con simetría esférica, es importante hacer notar que tras los cambios que se realizaron en el desarrollo de la ecuación, $\bar{\rho} = \sum_{lm} \frac{\Phi_{lm}^2}{r^2}$. Sin embargo este término no se había introducido debido a que en el estudio del potencial, así como de los estados resonantes incrementa la dificultad en su estudio debido a que la ecuación no es ya para un solo modo, sino que comienza a mezclar contribuciones de éstos en cada ecuación para el modo correspondiente.

Ya teniendo ambas ecuaciones podemos ver que poseen un término de segunda derivada respecto a la posición, uno referente a un potencial de atrapamiento, un término no lineal asociado con la autointeracción entre las partículas y finalmente uno con un eigenvalor. Es interesante hacer notar que mientras que en Gross-Pitaevskii el potencial de atrapamiento es de naturaleza externa al sistema y puede tener diversas formas, el de la ecuación de Klein-Gordon surge directamente de la geometría del espacio tiempo y por tanto, es intrínseco al sistema. También el eigenvalor de Klein-Gordon es una frecuencia que puede ser de naturaleza compleja, mientras que para Gross-Pitaevskii es el potencial químico que tiene información acerca de la cantidad de partículas en el condensado.

A pesar de que matemáticamente presentan una gran similitud cabe resaltar que algunas tienen implicaciones más allá de lo que dice su expresión. Una muy importante en Gross-Pitaevskii es que esta es a temperatura cero, en la que todas las partículas del sistema se encuentran en el “estado condensado” y debido a que la temperatura en el marco de relatividad general, que es en el que se desarrolla Klein-Gordon, no esta precisamente bien definida, presenta una cierta complejidad la analogía. Cabe mencionar también que la ecuación de Klein-Gordon a la que se llega es para cada modo, exceptuando el término no lineal que, como ya se mencionó, mezcla contribuciones de distintos modos.

Por otra parte, para interpretar ciertos fenómenos observables en los condensados como la vorticidad, es necesario utilizar un formalismo de fluido, por lo que se le debería de considerar de igual manera al campo escalar aunque hoy en día se sabe que no lo es.

Debido a que como ya se mencionó el campo escalar tiene relevancia por ser un buen candidato a materia oscura, la analogía presenta su mayor atracción en el hecho de que los métodos utilizados para resolver Gross-Pitaevskii puedan ser empleados para resolver a Klein-Gordon. Dentro de estos métodos el más utilizado y que simplifica en demasía su solución es el de Thomas-Fermi que en el siguiente capítulo se analizará que tan buena es la aproximación comparada con la solución numérica de esta ecuación. Con esta aproximación, la ecuación se Klein-Gordon podría ser resuelta como:

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\omega} - V_{eff}}{\lambda}, \quad (5.4)$$

con $\bar{\rho} = \sum_{lm} \frac{\Phi_{lm}^2}{r^2}$.

Otra razón que incentiva la analogía es la comparación en ambos sistemas de sus observables, ya que los condensados de Bose pueden ser recreados en los laboratorios de la Tierra y se les mide una gran cantidad de variables para caracterizarlos, sin embargo nuestro otro sistema tiene como principal impedimento para su estudio la lejanía e imposibilidad de realizar mediciones en él. Dentro de estas observables en los condensados se encuentra la generación de modos de vorticidad y superfluidez.

Por otra parte a nivel numérico la diferencia entre ambas radica en la forma del potencial efectivo ya que para realizar su evolución con el método empleado en el presente trabajo, que se explicará en el siguiente capítulo, es necesario el comportamiento asintótico de la función solución así como la solución a la ecuación sin el término no lineal para tener una idea del valor inicial de la derivada de la función solución de la ecuación completa.

Capítulo 6

Solución numérica

En la presente tesis uno de los objetivos fundamentales se encontraba en resolver de manera numérica la ecuación de Gross-Pitaevskii ([34]). Este tipo de ecuación presentaba como principal dificultad su no linealidad por lo que la forma de resolverlas siguió un tipo especial de algoritmo que nos permitiera encontrar una solución.

A grandes rasgos el algoritmo se basa en encontrar de manera analítica el comportamiento asintótico de la ecuación a resolver ya que esto nos dará algo con que comparar la solución numérica de la ecuación. Para dicho propósito es necesario poner la ecuación a resolver de manera adimensional y de forma tal que el término no lineal se anule cuando $x \rightarrow \infty$. De esta manera se obtiene una solución para la ecuación, a la que también se le hará tender x a infinito; ya con la información anterior, el problema se reduce a determinar el valor de la derivada de la función solución en un cierto valor inicial, esto con un valor ya fijo de la función en el mismo punto, de forma tal que den el comportamiento inferido por la solución asintótica.

Dada la solución asintótica se obtiene su derivada, para ver el comportamiento de esta para x grandes. Ambas expresiones van multiplicadas por constantes; dichas constantes deben ser iguales, por lo que despejándolas de ambas e igualándolas obtenemos una ecuación que nos servirá para saber cuando hemos obtenido el valor correcto de la derivada de la función.

Al momento de programar se resolvió la ecuación no lineal en cuestión mediante el método de Runge-Kutta de segundo orden hasta un cierto valor en el que ya se podía considerar un x suficientemente grande como para poder compararse con el comportamiento asintótico. Para emplear este método se bajó de orden a la ecuación diferencial convirtiéndola en un sistema de dos ecuaciones de primer orden, esto es

$$\frac{\partial}{\partial r} u_1 = u_2 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} u_2 = \left(-\beta + \frac{1}{4}x^2 - \frac{|u_1^2(x)|}{x^2} \right) u_1 \quad (6.2)$$

en donde u_1 es la función solución y u_2 es la derivada de dicha función. Este método nos permitió obtener el valor de la función y de su derivada en cada iteración. Para el Runge Kutta se determina primero el intervalo en el cual se desea resolver la ecuación diferencial, posteriormente este se divide para que exista una “malla” para la que en los puntos de esta se calcule el valor de la función. En cada iteración se calculan un par de constantes que nos ayudan a calcular el valor de la solución en el siguiente punto. Entre más pequeña sea la malla, mayor la resolución encontrada en la solución.

Este método sigue el siguiente algoritmo:

$$k_1 = h \cdot v \quad (6.3)$$

$$l_1 = h \cdot f(x, v, t) \quad (6.4)$$

$$k_2 = h \cdot (v + l_1) \quad (6.5)$$

$$l_2 = h \cdot f(t + h, x + k_1, v + l_1) \quad (6.6)$$

En donde h es el tamaño de cada intervalo de la malla, t la variable independiente de la función, x es la función solución y v su derivada.

Posteriormente con estas constantes se calculan los valores de la función y su derivada como sigue:

$$x_{i+1} = x_i \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right) \quad (6.7)$$

$$v_{i+1} = v_i \left(\frac{l_1 + l_2}{2} \right) \quad (6.8)$$

con x y v la función solución y su derivada respectivamente. Posteriormente ambos valores eran introducidos en la ecuación que se obtuvo analíticamente de igualar las constantes; la solución a dicha ecuación fue obtenida mediante el método de la secante que arrojaba como resultado a su vez un valor de la derivada más cercano al buscado. Este método se utiliza para obtener raíces de funciones y tiene un algoritmo de la siguiente forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \quad (6.9)$$

en el que $f(x_n)$ y $f(x_{n-1})$ son los valores de la ecuación en x_n y x_{n-1} respectivamente, por lo que se requieren dos valores anteriores al punto en que se calculara el valor de la ecuación.

Posteriormente el valor que daba este método fue reintroducido al Runge-Kutta para volver a calcular el valor de la solución y su derivada en el x siguiente y así hasta que el método de la secante encontrara que la ecuación se satisfacía.

Después ya con el valor de la derivada en el punto inicial obtenido se “corría” por última vez el Runge-Kutta pero ahora mandando a un archivo todos los valores de la función en el intervalo establecido.

Ahora hablando en el caso particular de la solución de la ecuación de Gross-Pitaevskii, esta se puso de la siguiente forma,

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{|\Phi(x)|^2}{x^2} \right] \Phi(x) = \beta\Phi(x) \quad (6.10)$$

donde se tienen los siguientes parámetros adimensionales [34]

$$x \equiv \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} r \quad (6.11)$$

$$\Phi(x) \equiv \sqrt{8\pi|a|r} \psi(r) \quad (6.12)$$

$$\beta \equiv \frac{\mu}{\hbar\omega} \quad (6.13)$$

esto con el propósito, como ya se mencionó, de que el término no lineal se anule para x grandes.

Para obtener el comportamiento de la solución de dicha ecuación en infinito hice $x \rightarrow \infty$ y de esta manera la ecuación resultante es:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4}x^2 \right] \Phi(x) + \beta\Phi(x) = 0 \quad (6.14)$$

que tiene la forma de una ecuación diferencial cuyas soluciones son llamadas funciones parabólicas cilíndricas. Esta ecuación es de la forma general:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (ax^2 + bx + c)y = 0 \quad (6.15)$$

Nuestra ecuación pertenece a un caso particular de éstas, la cual posee soluciones reales

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{1}{4}x^2 + a \right) y = 0 \quad (6.16)$$

Esta ecuación tiene soluciones en serie de potencias, sin embargo en el caso particular de que $x \gg |a|$ su solución es

$$U(a, x) \sim e^{-\frac{1}{4}x^2} x^{-a-\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \frac{(a+\frac{1}{2})(a+\frac{3}{2})}{2x^2} + \frac{(a+\frac{1}{2})(a+\frac{3}{2})(a+\frac{5}{2})(a+\frac{7}{2})}{2 \cdot 4x^4} - \dots \right\} \quad (6.17)$$

la cual puede reducirse a una expresión más simple con lo antes mencionado $x \rightarrow \infty$ ya que se busca el comportamiento asintótico de la solución [35]. Con dada aproximación llegamos a que la solución es de la forma

$$U(a, x) = C_0 e^{-\frac{1}{4}x^2} x^{-a-\frac{1}{2}} \quad (6.18)$$

en donde C_0 es una constante a determinar. Regresando a las constantes de nuestro problema original, y reescribiendo la solución de una manera distinta, tenemos que

$$\Phi(x) = C_0 \exp\left(-\frac{1}{4}x^2 + \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \operatorname{In}(x)\right) \quad (6.19)$$

la cual es la que será utilizada en nuestro código. Como ya se mencionó anteriormente, es necesaria la derivada de esta solución para tener una segunda ecuación con la cual determinaremos la constante C_0 . Esta segunda ecuación esta dada por

$$\Phi'(x) = C'_0 \exp\left(-\frac{1}{4}x^2 + \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \operatorname{In}(x)\right) \cdot \left[-\frac{x}{2} + \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x}\right] \quad (6.20)$$

De ambas ecuaciones despejamos las constantes con lo cual obtenemos que están dadas por

$$C_0 = \Phi(x) \exp\left(\frac{1}{4}x^2 - \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \operatorname{In}(x)\right) \quad (6.21)$$

$$C'_0 = \Phi'(x) \exp\left(\frac{1}{4}x^2 - \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \operatorname{In}(x)\right) \cdot \left[-\frac{x}{2} + \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x}\right]^{-1} \quad (6.22)$$

con lo que al igualar las expresiones obtenemos la ecuación a resolver mediante el método de la secante.

$$C_0 - C'_0 = \left[\Phi(x) - \Phi'(x) \left(-\frac{x}{2} + \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x}\right)^{-1} \right] \cdot \exp\left(\frac{1}{4}x^2 - \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \operatorname{In}(x)\right) = 0. \quad (6.23)$$

A continuación se mostrará el código escrito en fortran 90 y se detallará como funciona:

```

program final

implicit none

real*8:: h, beta, f, g, k1, k2, l1, l2
integer:: i, j
real*8, dimension(0:10000):: u1, u2, r, w, phi, phid

open (1, file='gp55.dat', status= 'replace')
open (2, file='gp66.dat', status= 'replace')
h=1.4E-3
u2(0)=0.99
u1(0)=0.0
r(0)=1.0E-8
beta=1.2
w(0)=0.99
w(1)=0.991

```

En esta primera parte del programa se denota el tipo de variables a utilizar, dentro de ellas encontramos reales como algunas constantes que nos ayudarán en el Runge-Kutta, también hay enteros que básicamente se utilizan como la variable de conteo en las iteraciones de los métodos del programa. Finalmente en esta declaración de variables encontramos un tipo de variable que posee más de una entrada y que nos ayudará a registrar los valores de la función o de su derivada para cada punto de la malla utilizada. Es importante hacer notar que se le pone `*8` para definir las como variables de doble precisión ya que en cómputo científico juega un papel vital tener la mayor cantidad de decimales en el valor calculado pues en algunos casos, como el nuestro, la ecuación es altamente no lineal.

Posteriormente se abren un par de archivos en donde se guardarán los datos importantes generados en el programa. En esta primera sección también le damos valores iniciales a las variables. Algunos de estos valores deben ser puestos con cuidado como $u1$ y $u2$ que son respectivamente el valor de la función y el valor de su derivada. Otro valor importante es el de h que nos da el ancho de cada segmento de la malla utilizada y al mismo tiempo dependiendo de donde comenzamos, esto determinará la longitud del dominio en el que queremos resolver nuestra ecuación.

Ahora lo que sigue es la parte de las iteraciones del métodos Runge-Kutta

```
do j= 1, 5000
  r(j)=r(j-1)+h

  k1= h*u2(j-1)
  l1= h*f(beta, r(j-1), u1(j-1))
  k2= h*(u2(j-1)+l1)
  l2= h*f(beta, r(j-1)+h, u1(j-1)+k1)

  u1(j)= u1(j-1)+((1.0/2.0)*(k1+k2))
  u2(j)= u2(j-1)+((1.0/2.0)*(l1+l2))

  write(1,*) r(j-1), u1(j-1), u2(j-1)
  if (u1(j)$ > $50) exit

end do
```

En esta sección empleamos un *do* para calcular el valor de la función solución y de su derivada en el intervalo dado. Primero se incrementa el valor de la variable independiente r , posteriormente se calculan las constantes que se muestran en las ecuaciones 6,3 – 6,6 para después obtener los valores de la solución como se muestra en 6,7 – 6,8. Después los valores de r , $u1$ y $u2$ son escritos en uno de los archivos que se abrieron en la sección anterior. Cabe mencionar que se puso un *if* en esta sección para el dado caso de que el valor de la solución ya haya divergido y por tanto, cortar la iteración y no perder tiempo de cómputo

en ella. También es importante recordar que lo que estamos comparando es el valor de la función y su derivada en el punto final de la malla con el comportamiento asintótico, es decir en el r_{final} , por lo que estos valores se guardarán en variables auxiliares. La siguiente parte se centra en el método de la secante que se muestra en la ecuación 6,9 en el que se obtienen las raíces de la ecuación 6,23.

```
w(i+1)=w(i)-(((w(i)-w(i-1)) / (g(phi(i),phid(i), r(5000),
beta)-g(phi(i-1),phid(i-1),
r(5000),beta))))*g(phi(i),phid(i),r(5000),beta))
```

```
u2(0)=w(i+1)
```

en él se utilizan los dos últimos valores de la función y su derivada en r_{final} . Aquí w es el valor inicial de la derivada que se le da al método Runge-Kutta y tras brindarle un valor, da uno más cercano a la raíz. En la última línea de esta sección se le da al valor inicial de la derivada ahora el valor obtenido por este método. La siguiente parte corresponde a repetir el Runge-Kutta pero ahora con el valor obtenido por el método que nos da el comportamiento asintótico deseado.

```
if (g(phi(i),phid(i),r(5000),beta)==g(phi(i-1),phid(i-1), r(5000),beta)) then
u2(0)=w(i)
do j= 1, 5000
    r(j)=r(j-1)+h

    k1= h*u2(j-1)
    l1= h*f(beta, r(j-1), u1(j-1))
    k2= h*(u2(j-1)+l1)
    l2= h*f(beta, r(j-1)+h, u1(j-1)+k1)

    u1(j)= u1(j-1)+((1.0/2.0)*(k1+k2))
    u2(j)= u2(j-1)+((1.0/2.0)*(l1+l2))

    write(2,*) r(j-1), u1(j-1), u2(j-1), u1(j-1)/r(j-1)
end do
```

Aquí se puede notar que antes del *do* que generará los valores finales de la solución, se encuentra un *if* en el que se comparan los valores arrojados por el método de la secante y de esta manera saber cuando se ha encontrado el comportamiento deseado y cortar las iteraciones del mismo.

Finalmente en la siguiente sección, que es la última, sólo se encuentran las definiciones de las funciones utilizadas tanto en el Runge-Kutta como en el método de la secante.

```
function f(beta, r, u1)
```

```

implicit none
real*8:: beta, r, u1, f

f= ( -beta + ( (1.0/4.0)*(r*r) ) - ( (u1*u1)/(r*r) ) ) * u1

end function f

function g(u1, u2, x, beta)
implicit none
real*8:: u1, u2, x, beta, g

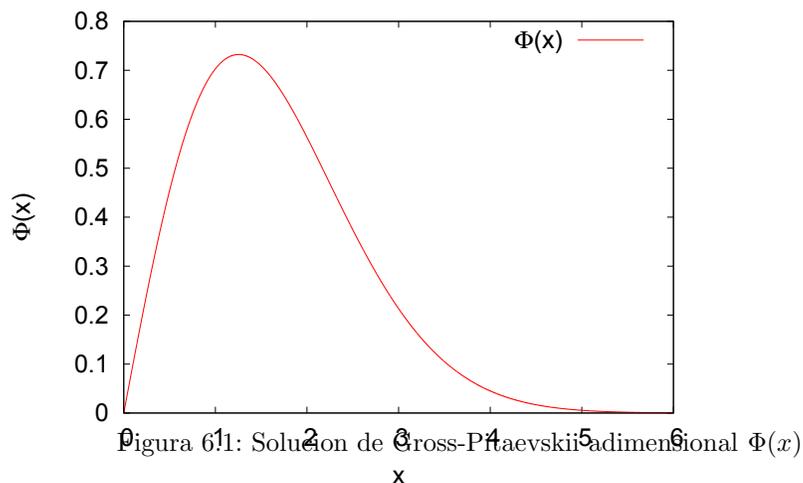
g= ( u1 - u2*( 1.0/ ( ((-1.0)*x/2.0) + ( beta - 1.0/2.0)* (1/x) ) ) ) )
* exp( (x*x)/4.0 - ( beta - 1.0/2.0)*log(x) ) )

end function g

```

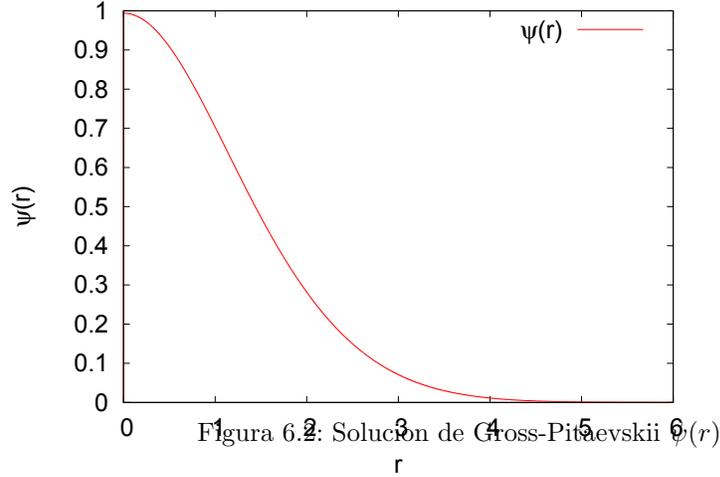
La primera es la ecuación 6,2 que se utiliza en el Runge- Kutta (f) y la segunda es la que utilizamos en el método de la secante que se muestra en la ecuación 6,23 (g).

Tras realizar el método descrito se obtuvo la función solución a la ecuación, esto es, $\Phi(x)$.



Esta gráfica presenta un máximo global y posteriormente comienza a decaer conforme x va creciendo. Posteriormente tras regresar a la función original $\psi(r)$, la solución obtenida es

De esta última gráfica podemos ver que básicamente se ubica en $r = 0$ y va decreciendo rápidamente conforme r va creciendo. Debido a que la densidad de



número en un condensado esta dada como $|\psi(r)|^2$, esto nos indica por la forma de figura anterior que la mayoría de las partículas del condensado se encuentran para r cercanas a cero que era lo esperado debido al tipo de potencial usado en la ecuación.

Podríamos comparar nuestra solución numérica con la aproximación de Thomas-Fermi. Esta aproximación se hará directamente de la ecuación adimensional que se utilizó para el método numérico por lo que tiene el siguiente aspecto:

$$\Phi(x) = \sqrt{\left|\frac{1}{4}x^4 - \beta x^2\right|}, \quad (6.24)$$

con lo que regresando a la función solución original $\psi(r)$, tenemos:

$$\psi(r) = C \frac{\Phi(x)}{x}, \quad (6.25)$$

con C una constante. A continuación se muestra la gráfica de comparación entre la solución numérica y la de Thomas-Fermi.

De la figura anterior podemos notar que la aproximación de Thomas-Fermi es una buena aproximación para x pequeños. Cabe mencionar que se esta graficando $\Phi(x)/x$ que no es precisamente $\psi(r)$ ya que revisando las constantes adimensionales definidas, lo graficado necesitaría ser multiplicado por la constante $\sqrt{m\omega/4\pi|a|\hbar}$ para serlo.

Para realizar algo análogo a este método para la ecuación de Klein-Gordon con el término de autointeracción se requiere conocer su comportamiento asintótico $x \rightarrow \infty$. Para esto se podría hacer un cierto acomodo y definir la función de manera parecida a como se hizo en Gross-Pitaevskii con lo que el término no

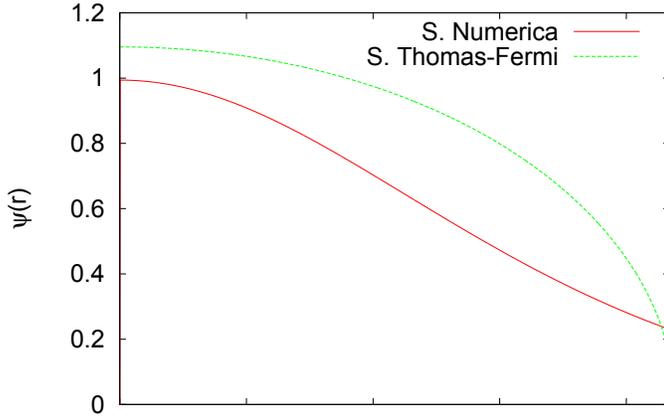


Figura 6.30 Comparación entre la solución numérica (línea roja) y la aproximación de Thomas-Fermi (línea verde).

lineal en ese límite se elimine y al hacer lo mismo con el potencial efectivo con lo que en este caso sería algo de la forma:

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \sigma^2 \right] \Phi = \bar{\omega}^2 \Phi, \quad (6.26)$$

que para que tenga convergencia en infinito se necesita que $\sigma^2 > \bar{\omega}^2$, de esta manera la solución asintótica sería una combinación lineal de exponenciales reales, y por conveniencia elegiríamos a la exponencial decreciente. Con esta solución y su derivada podríamos obtener una ecuación a la cual sacarle sus raíces mediante el método de la secante. Sin embargo lo complicado sería encontrar una solución analítica de la ecuación sin su término no lineal pero con el potencial efectivo completo; esto ayuda a darse una idea del valor inicial que se le da al método de derivada de la función solución para comenzar a buscar. Sin el valor antes mencionado el método diverge fácilmente por lo que es importante.

Capítulo 7

Conclusiones

Me gustaría comenzar con hacer notar que tras lo citado en esta tesis respecto al campo escalar, es una muy buena alternativa a representar la materia oscura debido sobre todo a su capacidad de permanecer durante tiempos largos, o en coexistencia de los hoyos negros, ya que por los datos actuales esta se encuentra en grandes halos intergalácticos y como ya se mencionó, se cree que en el centro de las galaxias se encuentran este tipo de objetos supermasivos. De esta manera resulta interesante explorar la similitud con otro tipo de sistemas, los condensados de Bose, que a diferencia del primer sistema, se puede recrear en la Tierra en condiciones controladas, lo que permite el estudio de su fenomenología en mayor detalle.

Dentro de las conclusiones de esta tesis podemos encontrar primeramente la gran similitud matemática que poseen las dos ecuaciones aquí presentadas. Aunque muy parecidas en su aspecto me gustaría recalcar que a mi juicio son cosas completamente distintas debido a que en la ecuación de Gross-Pitaevskii, por el hecho que surge de una formulación de la mecánica cuántica y física estadística, la temperatura juega un papel preponderante en la formación de este tipo de sistemas, los condensados de Bose. Prueba de lo mencionado es que justamente la ecuación de Gross-Pitaevskii describe a este tipo de sistemas a temperatura 0K, lo que implica que todas las partículas del sistema se encuentran en el estado condensado. Por otra parte la ecuación de Klein-Gordon dentro del marco de la Relatividad General, aunque se han hecho intentos dentro de esta teoría, hasta el momento no existe un parámetro similar a la temperatura. Otra diferencia física entre las expresiones matemáticas es la constante que acompaña a la función solución del lado derecho de la igualdad, por un lado la ecuación de Gross-Pitaevskii tiene a μ el potencial químico que es una medida de la cantidad de partículas del sistema, por otra parte en Klein-Gordon aparece una frecuencia ω que surge de estudiar los estados estacionarios y poco tiene que ver con una medida de la cantidad de campo escalar existente en el sistema.

En las motivaciones de explorar dicha similitud se encontraba la de explorar ciertos fenómenos curiosos que presentan los condensados de Bose, uno de ellos es la vorticidad, y es aquí donde surge otra discrepancia entre ambos sistemas.

Para el trato de la vorticidad en los condensados, se hace dentro del marco de mecánica de fluidos y en lo que respecta al campo escalar hay personas que los tratan como polvo y que sostienen que este componente no es precisamente un fluido por lo que manejarlo con los mismos conceptos resulta complicado. De esta manera es que creo que explorar los métodos en ambas ramas, tanto en cosmología como en física atómica es bueno, sin embargo los sistemas son en verdad diferentes y el hablar de condensados cosmológicos, como algunos autores lo hacen, me parece algo aventurado. Otra de estas diferencias es que en el sistema del condensado, el punto coordenado $r = 0$ es importante ya que, como se vió en la simulación, la mayor cantidad de las partículas se encuentran en una vecindad de él, por otra parte en Klein-Gordon con Schwarzschild, la zona coordenada que se estudia se encuentra en el intervalo $(2m, \infty)$ por lo que en sí ya representa un diferencia entre los sistemas estudiados. De esta manera la densidad del campo escalar tiene una distribución distinta, así como los potenciales de atrapamiento generados por la mera geometría del espacio-tiempo.

En lo que respecta a la simulación numérica aquí presentada, se enfrentó a diversos problemas debido a la alta no linealidad de la ecuación diferencial, es por esto que se tuvo que tener especial cuidado en la elección de las condiciones iniciales y se tuvo que emplear un “shooting”. Aun así el algoritmo presentado tiene diversas limitaciones debido a que el método de la secante que nos ayudó a encontrar las raíces de la ecuación auxiliar 5.21 suele diverger fácilmente si el “ansatz” inicial de la derivada no se encuentra cercano al que se busca. De los resultados de esta simulación pudimos encontrar que como se esperaba, la mayor cantidad de las partículas en el condensado se encuentran en el centro del potencial de atrapamiento, en este caso el de oscilador armónico que se utilizó. También su densidad decae considerablemente en cuanto se aleja de ese punto.

Al ver la solución tiene un comportamiento en concordancia a lo que predice la aproximación de Thomas-Fermi, con lo que podemos determinar que esta última es una buena forma de tener una idea del comportamiento de la función solución, de hecho para r pequeños ambas son muy parecidas. Con lo anterior, podríamos concluir que este método podría ser empleado para obtener una aproximación de la solución a la ecuación de Klein-Gordon en fondo curvo sin la necesidad de resolver la ecuación diferencial asociada. Sin embargo creo que se debe tener cuidado en la magnitud que se le da a λ y que brinda el “peso” del término no lineal en la ecuación, ya que en el caso de Gross-Pitaevskii el “peso” de este está dado por la magnitud de la longitud de dispersión que es característica del sistema.

Bibliografía

- [1] A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzungsber. 778 (1915).
- [2] A. Einstein, Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzungsber. 844 (1915).
- [3] A. D. Popolo, .
- [4] A. Einstein, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse (1924).
- [5] A. Einstein, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin), Physikalisch-mathematische Klasse (1925).
- [6] M. M. R. W. C. E. Anderson M. H., Ensher J. R. and C. E. A., (1995).
- [7] P. L. P. Dalfovo F., Giorgini S. and S. S., (1999).
- [8] J. Barranco *et al.*, Phys.Rev. **D84**, 083008 (2011).
- [9] J. Barranco *et al.*, Phys.Rev.Lett. **109**, 081102 (2012).
- [10] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Academic Press, San Francisco, 1973).
- [11] W. Gordon, Zeitschrift für Physik **40**, (1927).
- [12] O. Klein, Zeitschrift für Physik **37**, (1926).
- [13] C. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein condensation in dilute gases* (Cambridge University Press, ADDRESS, 2002).
- [14] L. H. Thomas, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (1927).
- [15] E. Fermi, (1927).
- [16] D. Nunez, *Notas del curso de Física Contemporanea* (PUBLISHER, ADDRESS, 2013).
- [17] J. Kapteyn, Astrophysical Journal (1922).
- [18] J. H. Jeans, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (1922).

- [19] J. H. Oort, Bulletin os Astronomical Institutes of the Netherlands (1932).
- [20] F. Zwicky, Helvetica Physica Acta (1933).
- [21] V. C. Rubin and W. K. J. Ford, Astrophysical Journal (1977).
- [22] E. T. Byram, C. T. A., and H. F. T. A., Science **152**, .
- [23] J. V. v. Soldner, Berliner Astronomisches Jahrbuch (1801).
- [24] J. B. Hartle, *Gravity: An introduction to Einstein's General Relativity* (Pearson Education, ADDRESS, 2003).
- [25] J. A. Tyson, R. A. Wenk, and F. Valdes, Astrophysical Journal (1990).
- [26] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White, The Astrophysical Journal (1996).
- [27] J. Einasto, Trudy Inst. Astrofiz. Alma-Ata (1965).
- [28] M. T. et al. (SDSS collaboration), Phys. Rev. (2004).
- [29] J. Magana, T. Matos, A. Suarez, and V. H. Robles, (2012).
- [30] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity* (Addison Wesley, San Francisco, 2004).
- [31] J. E. Marsden and A. J. Tromba, *Vector Calculus* (Pearson, Madrid, España, 2004).
- [32] M. H. Anderson *et al.*, Science (1995).
- [33] A. S. Parkins and W. D.F., (1997).
- [34] F. T. Gammal A. and T. L., (1999).
- [35] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover Books on Mathematics* (Dover Publications, ADDRESS, 2012).