



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**INGENIERIA ELECTRICA – CONTROL**

DETECCIÓN E IDENTIFICACIÓN DE FALLAS SECUENCIALES EN DUCTOS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
JORGE LUIS ROJAS ALBINO

TUTOR  
MARÍA CRISTINA VERDE RODARTE, INSTITUTO DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. ENERO 2015



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. BENÍTEZ PÉREZ HÉCTOR  
Secretario: DR. ÁLVAREZ ICAZA LONGORIA LUIS A.  
1<sup>er</sup> Vocal: DRA. VERDE RODARTE MARÍA CRISTINA  
2° Vocal: DRA. TORRES ORTIZ FLOR LIZETH  
3° Vocal: M. I. CARRERA MÉNDEZ ROLANDO

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
INSTITUTO DE INGENIERIA (UNAM)

**TUTOR DE TESIS:**

DRA. MARÍA CRISTINA VERDE RODARTE

---

**FIRMA**

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Sistemas de monitoreo y diagnóstico . . . . .	3
1.1.1	Antecedentes . . . . .	3
1.1.2	Monitoreo . . . . .	3
1.1.3	Detección . . . . .	4
1.2	Caso de estudio . . . . .	5
1.3	Estado del arte . . . . .	5
1.4	Objetivo y resultados del trabajo . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Modelo mínimo del flujo en un ducto</b>	<b>9</b>
2.1	Modelo del fluido . . . . .	9
2.2	Modelo equivalente de entrada a salida . . . . .	12
2.3	Caso de fuga aguas abajo con respecto a $z_e$ . . . . .	13
2.3.1	Subsistema a1 . . . . .	13
2.3.2	Subsistema a2 . . . . .	14
2.4	Caso de fugas aguas arriba con respecto a $z_e$ . . . . .	15
2.4.1	Subsistema b1 . . . . .	15
2.4.2	Subsistema b2 . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Detector de primera fuga</b>	<b>17</b>
3.1	Principio de operación . . . . .	17
3.2	Escenario sin fuga . . . . .	18
3.2.1	Aproximación de la primera fuga . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Estimación de parámetros y esquema de funcionamiento</b>	<b>21</b>
4.1	Escenario primera fuga . . . . .	21
4.2	Escenario segunda fuga . . . . .	23
4.3	Esquema de funcionamiento . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>27</b>
5.1	Caso aguas abajo . . . . .	27
5.2	Caso aguas arriba . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>39</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>42</b>

<b>A Filtro de Kalman extendido (EKF)</b>	<b>43</b>
A.1 Teoría . . . . .	43
A.2 Escenario fugas aguas abajo . . . . .	44
A.2.1 Detectores . . . . .	44
A.2.2 Estimadores maestros . . . . .	45
A.2.3 Estimadores esclavos . . . . .	46
A.3 Escenario fugas aguas arriba . . . . .	47
A.3.1 Detectores . . . . .	47
A.3.2 Estimadores maestros . . . . .	48
A.3.3 Estimadores esclavos . . . . .	48
<b>B Códigos implementados en el simulador</b>	<b>51</b>
B.1 Modelo dinámico . . . . .	51
B.2 Detectores . . . . .	52
B.3 Estimadores maestros . . . . .	54
B.4 Estimadores esclavos . . . . .	56

# 1 Introducción

Se sabe que actualmente los sistemas de control tienen un gran tamaño y complejidad, esto a causa del gran desarrollo y avance tecnológico que se ha dado en los últimos años. Esto se puede notar en situaciones comunes como en el caso de un automóvil, en el que se pueden encontrar diversos sistemas de control y monitoreo, todos ellos concentrados en varias computadoras que realizan diversas tareas, que han permitido una mejora continua en la eficiencia de los motores y disminución de contaminantes. Otro ejemplo es una central eléctrica, en la cual se envían más de mil datos por minuto a la computadora encargada del control. Tomando en cuenta el alto número que han tomado los sistemas de control en los procesos, es inconcebible pensar que algunos de los dispositivos que lo integran no lleguen a fallar (Verde *et al.*, 2013), ya sea por daños de fabricación en los sensores, la degradación de los mismo por el paso del tiempo, el efecto de fenómenos naturales o por causas externas que no fueron consideradas en el diseño. Además, las fallas no se limitan solamente a los sensores, pueden ocurrir en actuadores o en el mismo proceso al cambiar las condiciones de operación, lo que provoca que los sistemas dejen de funcionar o en algunos casos sufran descomposturas.

En el paso de los años han ocurrido algunas catástrofes industriales que han causado un gran impacto histórico por las dimensiones de los daños, las grandes pérdidas económicas y las muertes ocasionadas, como en 1986 el caso de la planta nuclear en Chernobyl, donde al realizar pruebas de fallas en el suministro eléctrico detonaron un aumento súbito de potencia en uno de los reactores lo que terminó provocando la explosión del hidrógeno acumulado en su interior, cuyas consecuencias implicaron 3 millones de personas enfermas, 150 mil kilómetros cuadrados con presencia de radiación y 4 mil muertos; otro caso es el ocurrido en el golfo de México en 2010, cuando un incendio en una plataforma petrolera de la compañía British Petroleum causó cientos de muertes de animales marinos y el derrame de crudo sobre el mar más grande registrado y donde los científicos aseguran que el ecosistema afectado no se ha recuperado aún; un caso más reciente, el que se presentó en Fukushima en 2011, donde un terremoto produjo un tsunami con olas de 15 metros que inundaron la planta, facilitando que se produjera una cascada de fallas en diversos sistemas que culminaron en el fallo del sistema de refrigeración de los reactores, que derivaron en altos niveles de radioactividad en la región y daños económicos valorados entre 87 mil y 166 mil millones de euros. En consecuencia, se ha visto la necesidad de exigir medidas de regulación y seguridad, usando tecnologías modernas, para tratar de evitar daños a la sociedad y el medio ambiente.

En una escala menor, las fallas en sistemas se presentan con mucha frecuencia debido a la falta de mantenimiento, o el sabotaje de los mismos; cuando se tiene el monitoreo de las variables del sistema es posible observar que, en el momento que se presenta una falla, en las variables se sobrepasan los valores característicos de operación. Como consecuencia, es posible identificar cuando se produce una falla y actuar con rapidez para evitar catástrofes mayores.

Como consecuencia, surge la necesidad de mejorar y especificar nuevas características en el diseño de los

sistemas de control automático para disminuir accidentes y evitar problemas mayores. Si bien, la tarea de un sistema de control es garantizar un buen desempeño y la eficiencia del proceso y si a esto se le adiciona la tarea de mejorar la seguridad en el funcionamiento del proceso, se tendría un sistema mucho más confiable preparado para detectar desperfectos que se puedan presentar a lo largo de su vida útil. Cabe mencionar que los sistemas de control modernos ayudan a prevenir condiciones anormales de operaciones disminuyendo el riesgo, mas no lo excluyen.

Las diversas condiciones de trabajo de un proceso o servicio, descritas en los párrafos anteriores, evidencian la necesidad de desarrollar métodos sistemáticos de diagnóstico y control tolerante a fallas. Para tomar medidas precautorias sobre los sistemas, a lo largo de los años han surgido diferentes métodos basados en el concepto de redundancia. Uno en particular, conocido como redundancia física, el cual como su nombre lo indica, consiste en duplicar o triplicar algunos sensores, actuadores, o incluso algunas partes del proceso mismo. Estos elementos permiten, por medio de la comparación del funcionamiento, tomar decisiones sobre la presencia de fallas y sobre posibles acciones correctivas, y con base en esta información mantener la operación normal o segura. Por ejemplo, si en un ducto se instalan 2 bombas y se detecta que alguna de ellas falla, la otra bomba puede sustituirla manteniendo el proceso en operación, si sustituye completamente a la primer bomba y es de las mismas características puede mantener la operación normal, pero, si es de menor capacidad o se trata de una bomba de respaldo, podría darse el caso que solo mantenga al proceso en funcionamiento sin lograr la operación normal pero evitando el paro total del proceso. De la misma manera, al colocar varios sensores para medir una sola variable y comparando las mediciones de los mismos, es posible detectar cuando falla alguno de ellos. Este tipo de métodos son bastante confiables y permiten una respuesta rápida para la corrección de posibles fallas, y que en general se aplican a partes muy específicas de los sistemas donde se llevan a cabo aplicaciones de alto riesgo o involucran peligro para los operadores, usuarios, población o el medio ambiente. Por ejemplo, en el caso de los alerones de un avión, se utilizan tres tipos de actuadores (hidráulicos, neumáticos, eléctricos) para realizar la misma función, subir y bajar dichos alerones, y se mantenga control sobre el avión en caso de que ocurra alguna falla sobre dichos actuadores. Obviamente este tipo de metodología es una solución muy costosa y aumenta las dimensiones físicas del sistema, lo cual no siempre es posible.

Se tuvieron que desarrollar por la necesidad de evitar las desventajas antes descritas. A principios de la década de los setenta fue introducido el concepto de **redundancia analítica**, el cual está basado en el uso de modelos que describan el comportamiento del proceso, que sólo pueden obtenerse con un conocimiento profundo del mismo, no solo es importante en condiciones normales de funcionamiento, sino también en condiciones de falla. En particular, el conocimiento de la dinámica de los fenómenos para la interpretación correcta del estado del proceso, ya que este puede ser la consecuencia de un evento ocurrido mucho tiempo atrás. Dichos modelos pueden presentarse como:

**Modelos matemáticos:** Uno o varios modelos matemáticos, en el sentido clásico de modelos usados en teoría de control y ciencias de la computación para representar sistemas dinámicos.

**Modelos de señales:** Uno o varios modelos de señales, donde el comportamiento de las señales del proceso se obtiene a partir de datos históricos y experimentos realizados que caracterizan el proceso.

Con la obtención de modelos analíticos surgieron técnicas para el desarrollo de algoritmos, que se implementaron en sistemas de monitoreo y diagnóstico, los cuales se describen de manera más profunda a continuación.

## 1.1 Sistemas de monitoreo y diagnóstico

### 1.1.1 Antecedentes

En los años setenta surgieron sistemas de protección simples implementados por *software* en aplicaciones aeroespaciales y de ingeniería de procesos, lo cuales pueden considerarse como los ancestros de los sistemas de monitoreo y supervisión actuales. Las primeras contribuciones en los años setenta sobre métodos de detección basados en modelos tuvieron como aplicación principal la industria aeroespacial. En Willsky y Jones (1976) se describe que usando un filtro de Kalman-Bucy (Kalman y Bucy, 1960) podían detectarse y estimarse los cambios provocados por fallos en los componentes de vehículos capaces de realizar maniobras abruptas. En los años ochenta, la madurez de la teoría de control, el empuje del área de inteligencia artificial, el desarrollo de la instrumentación y el bajo costo de los dispositivos digitales, impulsaron la búsqueda de técnicas de diagnóstico, abriendo la opciones de los algoritmos que se podrían implementar y el tipo de aplicaciones, que incluyeron sistemas mecánicos, redes de distribución, la industria del transporte en sus diversas opciones, por mencionar algunas. En este contexto, surgen diversos marcos de referencia para plantear y resolver de forma sistemática y metódica los sistemas de diagnóstico, que se clasifican en tres grandes grupos de métodos según se basen en: datos históricos, modelos cualitativos o modelos cuantitativos de los procesos.

Apoyándose en herramientas de teoría estadística, de manera natural, grupos de académicos se dieron a la tarea de explotar la cantidad de datos históricos que se tenían de muchos procesos para generar métodos generales de diagnóstico basados en funciones de correlaciones, clasificaciones de estadística de patrones, etc., en paralelo con los métodos estadísticos, se empezó a usar el **filtro de Kalman** (Kalman, 1960) y el máximo de verosimilitud generalizado para diagnóstico.

Desde los años setenta, el interés de la comunidad de control automático por los problemas de diagnóstico se manifestó aprovechando herramientas consolidadas basadas en modelos analíticos, como son el diseño de observadores y los métodos de identificación. La idea de reemplazar la redundancia física por analítica fue propuesta por Beard (1971) en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) lo cual llevo al diseño de filtros sensibles a ciertas fallas, en este marco de referencia se propusieron tres herramientas básicas; la idea de usar un observador para generar señales representativas de las fallas de los instrumentos, el generar directamente relaciones redundantes a partir de las mediciones de un sistema, y buscar las desviaciones de estos en condiciones de falla vía identificación de parámetros (Isermann, 1993).

### 1.1.2 Monitoreo

Es indispensable que los sistemas ejecuten las funciones asignadas correctamente y que tengan la capacidad de avisar oportunamente cuando éstas no puedan realizarse. Además, los sistemas deben ser concebidos de manera que soporten condiciones no previstas y errores humanos, prohibiendo las acciones cuyas consecuencias pudieran ser peligrosas. Este hecho dio lugar al concepto de **monitoreo** de procesos, el cual se asocia con la capacidad de distinguir de manera permanente un comportamiento anormal e indicar este hecho. El monitoreo puede realizarse de diversas formas, una opción consiste en disponer de seres humanos que vigilen el estado de la instalación, como los operadores de una central eléctrica o los pilotos de una aeronave, lo cual, en general, puede sustituirse por la opción de vigilar de manera automática los sistemas, puede existir un punto intermedio donde se lleve a cabo la colaboración entre operadores y funciones programadas en el sistema de control automático.

De manera paralela al diseño técnico detallado de una instalación y el propio proceso, se lleva a cabo un



análisis de riesgo y de seguridad, cuyo objetivo es estudiar de manera sistemática todas las causas de posibles eventos no deseados en el sistema, como lo pueden ser: válvulas bloqueadas, sensores que suministran valores erróneos, cortos circuitos, fugas, etc., y deducir de estos la peor serie de eventos que podrían provocarse para preparar planes de contingencia y monitoreo, estableciendo un compromiso entre riesgo y costo.

A nivel operación, la seguridad se concibe como un monitoreo permanente en línea de las variables más importantes del proceso durante su funcionamiento, esto con la capacidad de distinguir cuando el proceso no opera de acuerdo con lo previsto, entender lo que ocurre y, de ser posible, determinar la causa inicial de los registros y observaciones anormales, así como tomar acciones necesarias para regresar a un funcionamiento normal o al menos seguro.

Por tanto, un sistema de control confiable debe incluir tareas continuas de monitoreo para estar en condiciones de actuar ante emergencias y condiciones imprevistas. Así, la automatización integrada y moderna debe mantener un funcionamiento global del proceso, no sólo con un desempeño satisfactorio cuando éste opera en condiciones nominales, sino también en los diversos modos de funcionamiento incluyendo condiciones de falla, arranque y paro.

### 1.1.3 Detección

Es claro que un sistema de monitoreo tiene por objetivo recabar información del proceso en todo tiempo posible, el uso apropiado de esta información para distinguir entre un modo de funcionamiento normal o un modo de falla, lo realiza un sistema de detección, el cual puede estar diseñado empleando diferentes técnicas, siempre con el objetivo de alertar de manera rápida sobre el funcionamiento anormal del proceso, y poder tomar decisiones que minimicen las consecuencias de la falla.

Las alarmas, en el contexto de diagnóstico, se consideran eventos discretos, que se activan cuando una variable o una función de ella sobrepasa ciertos límites de operación y son la información más usada para el monitoreo. Cuando el operador controla una instalación a partir de las señales de alarmas, se habla de un control basado en umbrales, donde para cada variable se define un umbral que delimita el intervalo de valores aceptables y permitidos. En el momento que alguna salga del umbral, ya sea por un valor demasiado alto o demasiado bajo, se genera una alarma. El objetivo de esta visualización es atraer la atención del operador y concentrar la supervisión en la variable fuera del intervalo normal de operación, deducir la causa y actuar en consecuencia.

Es importante saber que el manejo de un proceso complejo sólo con alarmas es difícil y poco eficiente, y solamente es conveniente en casos simples y cuando el proceso opera en modo de regulación, no durante los cambios del punto de funcionamiento o los paros y arranques. Otra desventaja del monitoreo de un proceso a partir únicamente de alarmas es que se asume, en la mayoría de los casos, que las variables del proceso son independientes entre sí, lo cual no es cierto, muchas de ellas tienen una relación de influencia y secuencia en la producción de ciertos fenómenos físicos.

Otra forma utilizada para detectar el momento cuando se presenta una falla es a partir de la redundancia de información analítica y de la incoherencia de un modelo en condiciones de falla, información que se conoce como relaciones redundantes analíticas (RRA). En otras palabras, una RRA es una expresión obtenida a partir del modelo nominal, que únicamente depende de variables medibles y cuya evaluación genera un indicador de falla llamado residuo. Por analogía con las señales de alarma y para simplificar el diagnóstico, se acostumbra usar el valor cero para el residuo en ausencia de fallas y un valor diferente de cero para el caso contrario.

El diseño de las relaciones de redundancia o los generadores de residuos a partir de modelos es una tarea que requiere de herramientas de análisis de sistemas, pues no se trata sencillamente de comparar una variable

simulada con una salida medida, sino que el residuo se genera combinando varios elementos del vector de entradas y salidas. Este enfoque demanda el desarrollo de modelos matemáticos que representen en forma compacta los diferentes comportamientos de un proceso ante fallas, lo cual exige el procesamiento eficiente de la información.

## 1.2 Caso de estudio

Para el caso particular de este trabajo se trabaja sobre un ducto recto sin tomas laterales, en el cual sólo se tienen sensores de flujo y presión en los extremos del mismo. La motivación para trabajar sobre un ducto se describe a continuación:

Existen aproximadamente 70 mil kilómetros de ductos sólo para el uso de derivados del petróleo en el país, esto es consecuencia de que es el medio de transporte para fluidos más barato, eficiente y seguro, además de que el mantenimiento que requieren es mínimo.

Como cualquier tipo de sistema está sujeto a sufrir fallas, las cuales pueden aparecer en bombas, en sensores o en la propia tubería. Este trabajo estará enfocado en la detección e identificación de fugas, que pueden ser causadas por fenómenos naturales, una mala instalación, la degradación del ducto por el paso de los años, accidentes cercanos, o en los últimos años por fugas provocadas (tomas clandestinas), principalmente en el caso de ductos que transportan derivados del petróleo o fluidos con alto valor económico.

Cuando existe una fuga, esta provoca diversos problemas como la pérdida económica por el fluido derramado, el daño ecológico que existe en la región y en algunos casos que cabe resaltar, peligro para la población cuando los fluidos transportados son inflamables o dañinos para la salud.

Por estas razones, el tema de ubicar fugas sobre un ducto ha llamado la atención en la comunidad de detección de fallas, lo cual ha generado muchos resultados a lo largo de los años, algunos descritos más adelante. En particular, este trabajo pretende desarrollar un método recursivo capaz de estimar los parámetros de la  $n$ -sima fuga a partir del conocimiento de los parámetros equivalentes de las  $n - 1$  fugas, con la condición de que las fugas aparezcan de manera secuencial.

## 1.3 Estado del arte

Como se mencionó anteriormente, este trabajo aborda el tema de detección e identificación de fallas sobre un ducto, en particular el tipo de fallas que se quieren detectar e identificar son fugas. El tema de ubicar fugas sobre un ducto no es nuevo en la comunidad de detección de fallas, ha sido ampliamente estudiado desde el punto de vista del método de balance de masas, el cual es idóneo para los sensores que se tienen instalados en la mayoría de los ductos, sensores de flujo y presión en los extremos, ya que es fácil calcular el gasto másico que circula por el ducto y reconocer el momento en que se presenta una fuga ya que existe un desbalance entre el gasto másico de entrada y de salida.

Entre las principales contribuciones del tema se encuentran la propuesta por (Billman y Isermann, 1987) en la que desarrollan un observador de estados adaptable no lineal y una técnica de correlación para la localización y detección de fugas pequeñas sobre un ducto, presentan resultados en simulación y experimentos para un ducto que transporta gas y líquido. Otra contribución importante fue la presentada por (Verde, 2001), en la cual, se desarrolla una técnica donde se considera que un conjunto de fugas se encuentran distribuidas a lo largo del ducto, donde la detección de la fuga se logra obteniendo un conjunto de residuos generados por un banco de observadores con entrada desconocida los cuales son robustos sobre una fuga y sensibles a las demás,

es decir, la detección se obtenía observando el comportamiento de los residuos. El residuo que se mantuviera alrededor del origen mostraba que la fuga se encontraba cerca de dicha sección. De igual forma en (Torres *et al.*, 2012) se presenta un método basado en un esquema de observadores de alta ganancia que, de forma similar al trabajo de (Verde, 2001), genera un residuo capaz de encontrar la región en la que se encontraba la fuga, y posteriormente un observador dedicado para estimar la posición y el coeficiente de descarga asociados a la fuga, todo esto validado con datos de un ducto que transporta LPG (liquid petroleum gas). En (Moustafa *et al.*, 2012) se propone un método que basado en el filtro de Kalman que localiza una fuga escaneando desde el nodo de entrada hasta el nodo de salida para encontrar el nodo cuyo residuo sea mínimo, reportando resultados en simulación.

Las técnicas mencionadas anteriormente resuelven el escenario con una sola fuga, cada uno de ellos con diferentes propuestas y condiciones para que se pueda dar la identificación. Es importante mencionar que si una segunda fuga se genera sobre el sistema, todos los métodos generan resultados erróneos en la identificación. El caso de múltiples fugas o al menos dos fugas, ya sea simultáneas o secuenciales se discuten a continuación.

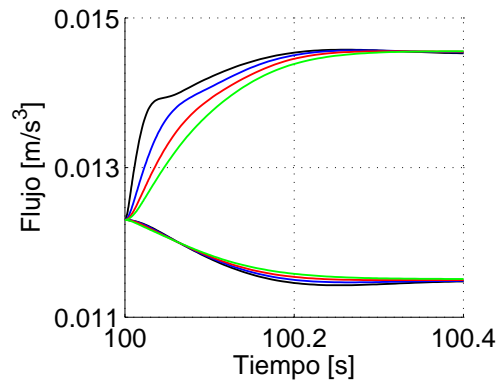
En (Jiménez y Verde, 2011) se encuentra una forma de distinguir el escenario de una o dos fugas simultáneas, donde se inyecta una señal auxiliar periódica mediante una válvula, para posteriormente realizar un análisis de la frecuencia y amplitud del residuo generado. Se comprueba que existe diferente comportamiento para ambos casos y que es posible distinguir uno de otro. En el caso propuesto por (Negrete y Verde, 2012) se reporta la obtención de los flujos de fuga para dos fugas secuenciales utilizando modos deslizantes, siempre y cuando se conozca o se tenga un aproximado de la posición de las fugas, validando los resultados en simulación y con datos de un ducto piloto. Y en (Verde *et al.*, 2014) se describe un método para identificar la posición de dos fugas simultáneas, capturando el transitorio del efecto de las fugas en los flujos de entrada y salida, y posteriormente obteniendo una familia de modelos parametrizados que describen todos los escenarios de dos fugas. Realizando una equivalencia es posible reducir la dimensión del modelo respecto a los parámetros desconocidos, reduciendo de cuatro parámetros desconocidos a dos, donde la estimación de los parámetros se lleva a cabo fuera de línea minimizando el error cuadrático entre los datos obtenidos y los escenarios de fugas propuestos.

El problema de dos fugas simultáneas puede entenderse de una mejor manera al observar el efecto transitorio provocado por una familia de fugas como se observa en la Figura 1.1, donde es claro, como cada una de las respuestas durante el tiempo transitorio es diferente, y se pueden distinguir los diferentes casos mientras que durante el tiempo estacionario los flujos convergen a un mismo valor, esto debido a que la combinación de las posiciones de las fugas junto con el flujo de cada una de ellas tienen los mismo parámetros equivalentes. Este caso particular ejemplifica de manera clara por qué es necesario realizar un análisis durante la respuesta transitoria del sistema, lo que en la práctica carece de aplicabilidad, debido al bajo ancho de banda que tienen los sensores.

Entonces, el problema de encontrar una sola fuga sobre un ducto, está resuelto con una gran diversidad de métodos y técnicas reportadas, pero el problema de múltiples fugas sigue abierto, con un gran campo de investigación.

## 1.4 Objetivo y resultados del trabajo

En particular, este trabajo ataca el caso de fugas múltiples sobre un ducto, con la suposición de que las fugas se presenten de manera secuencial y suficientemente espaciadas en tiempo, lo cual en general se apega a la realidad. Esta restricción se definirá de manera más formal a lo largo del trabajo, con el objetivo de encontrar



**Fig 1.1** Caso dos fugas simultaneas, diferentes escenarios con misma posición equivalente (50 m)

los parámetros reales asociados a cada una de las fugas que se presenten.

Para concluir con la introducción se menciona el alcance de este trabajo, en el que se propone un esquema de estimadores paramétricos que funcionan en conjunto, capaces de estimar los parámetros asociados a la presencia de una fuga (posición, flujo de fuga), con la fortaleza de que una vez estimados los parámetros de una fuga es posible identificar los parámetros de una nueva fuga que se presente, con un tiempo determinado para la estimación de los parámetros de la nueva fuga. Una vez obtenidos los parámetros de la última fuga se realiza la estimación de parámetros equivalentes de todas las fugas presentes para representar su efecto como una sola, e iniciar un proceso iterativo para  $n$  fugas que se puedan presentar sobre el ducto.

El diseño del esquema considera la condición de que las fugas sólo pueden aparecer de manera secuencial y suficientemente espaciadas unas de otras para que los estimadores puedan converger a los parámetros reales, todos los estimadores se realizaron basados en la teoría del filtro extendido de Kalman. Finalmente se presentan resultados en simulación para validar su funcionamiento.



## 2 Modelo mínimo del flujo en un ducto

En este capítulo se abordará el tema de cómo está descrito en la literatura el modelo matemático del fluido sobre un ducto. El modelo se describe por un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales (EDP), se utiliza una aproximación para poder obtener un modelo de parámetros concentrados y posteriormente qué condiciones fueron necesarias para determinar la dimensión del modelo con el que se trabajó.

### 2.1 Modelo del fluido

Considerando un ducto de longitud  $L$ , en el cual se asume que la distribución de velocidad es uniforme, de área transversal y la densidad del fluido constantes, el modelo dinámico de un fluido incompresible está descrito por las ecuaciones diferenciales parciales de movimiento y continuidad (2.1 - 2.2) presentadas en (Chaudhry, 1979)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial z} + \mu Q|Q| = 0, \quad (2.1)$$

$$b^2 \frac{\partial Q}{\partial z} + gA \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (2.2)$$

donde  $H$  es la carga de presión en  $m$ ,  $Q$  es el flujo en  $m^3/s$ ,  $z$  es la coordenada de la distancia en  $m$ ,  $t$  es la coordenada del tiempo en  $s$ ,  $g$  es la aceleración gravitatoria en  $m/s^2$ ,  $A$  es el área de la sección transversal en  $m^2$ ,  $b$  es la velocidad de onda en el fluido en  $m/s$ , y  $\mu = f/2DA$  es una función de los coeficientes de fricción ( $f$ ).

Como no existe una solución analítica para las funciones (2.1 y 2.2), se han usado varios métodos para encontrar una aproximación de parámetros concentrados, donde es necesario definir las condiciones de frontera para la discretización, se ha demostrado que cuando aparece una fuga, esta introduce por lo menos una ecuación más en las ecuaciones que gobiernan la dinámica del fluido (2.1 y 2.2), lo cual genera un gran problema, ya que es necesario conocer con antelación el número de fugas que se presentarán sobre el ducto para obtener un modelo que represente de manera adecuada la dinámica del fluido en el modelo discretizado. De acuerdo con (Wylie y Streeter, 1978), se ve que cada que aparece una nueva fuga se incrementa el número de variables de estado de la forma  $2n + 1$ , donde  $n$  es el número de fugas. Con esto se tiene una idea de la dimensión mínima para un modelo dinámico discretizado. Como este trabajo plantea dar solución al caso de  $n$  fugas secuenciales, el modelo dinámico necesario sería de  $2n + 1$  ecuaciones, lo cual presenta un caso difícil de definir.

Es posible considerar como método inicial tres fugas, donde, apoyados en las ecuaciones de equivalencia propuestas por (Korbicz *et al.*, 2004), se demuestra la existencia de una equivalencia entre los modelos de múltiples fugas y los modelos de una sola fuga en estado estacionario de la respuesta del mismo. Con lo anterior se generará un modelo discretizado de siete ecuaciones diferenciales a partir de las cuales se pretende mostrar la potencialidad del método para  $n$  fugas, lo cual se desarrollará en la sección siguiente.

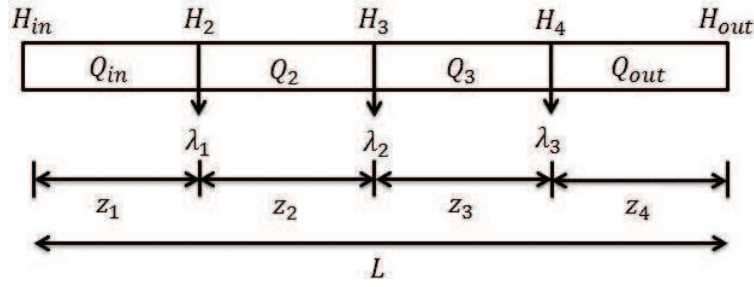


Fig 2.1 Definición de variables

Se utilizarán tres fugas arbitrariamente como se muestra en la Figura 2.1, colocadas en los puntos  $p_1 = z_1$ ,  $p_2 = z_1 + z_2$  y  $p_3 = z_1 + z_2 + z_3$  del ducto con flujos de fuga

$$Q|_{f_i} = \lambda_i \sqrt{H|_{f_i}} \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

respectivamente, donde cada una de ellas producirá una discontinuidad en el sistema (2.1 y 2.2).  $\lambda_i$  es el coeficiente de descarga de cada una de las fugas que está ligado al tamaño del orificio.

Para la discretización del modelo es necesario definir las condiciones de frontera de la forma:

$$Q_{f_i-\epsilon}^b = Q_{f_i+\epsilon}^a + Q_{f_i} \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

donde  $\epsilon \rightarrow 0$  y  $Q_{f_i-\epsilon}^b$  y  $Q_{f_i+\epsilon}^a$  son los flujos en el ducto antes y después de la posición de la fuga.

Para el caso de la discretización del modelo se han utilizado diversos métodos (Polyanin y Zaitsev, 2014), en este caso se utiliza la aproximación espacial de la demanda

$$\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \simeq \frac{v_{z_{k+1}}(t) - v_{z_k}(t)}{\Delta z_k}$$

donde  $v(z, t)$  corresponde con las variables de flujo y presión en (2.1 y 2.2) y  $\Delta z_k$  se asocia con la discretización espacial en los puntos  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  antes descritos. El flujo se asume constante en cada una de las secciones. Las variables, de acuerdo con la discretización, se muestran en la Figura 2.1, donde la longitud del ducto  $L$  satisface la expresión (2.5), siempre y cuando se cumpla que  $z_1, z_2, z_3, z_4 > 0$ , además, mientras la fuga no se haya presentado las dimensiones de las secciones son arbitrarias.

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = L \quad (2.5)$$

Con las condiciones anteriores definidas y aplicando la aproximación de la derivada parcial, se obtiene el modelo dinámico aproximado que gobierna la dinámica sobre el fluido en el ducto, cuyas expresiones se presentan

en un modelo de espacio de estados

$$\dot{Q}_{in} = \frac{a_1}{z_1}(H_{in} - H_2) - \mu Q_{in}|Q_{in}| \quad (2.6)$$

$$\dot{H}_2 = \frac{a_2}{z_1}(Q_{in} - Q_2 - \lambda_1\sqrt{H_2})$$

$$\dot{Q}_2 = \frac{a_1}{z_2}(H_2 - H_3) - \mu Q_2|Q_2|$$

$$\dot{H}_3 = \frac{a_2}{z_2}(Q_2 - Q_3 - \lambda_2\sqrt{H_3})$$

$$\dot{Q}_3 = \frac{a_1}{z_3}(H_3 - H_4) - \mu Q_3|Q_3|,$$

$$\dot{H}_4 = \frac{a_2}{z_3}(Q_3 - Q_{out} - \lambda_3\sqrt{H_4})$$

$$\dot{Q}_{out} = \frac{a_1}{z_4}(H_4 - H_{out}) - \mu Q_{out}|Q_{out}|, \quad (2.7)$$

dónde:

$H_{in}, H_{out}$	Cargas de presión a la entrada y la salida del ducto en $m$ .
$H_i$	Carga de presión en la posición de la fuga $i = 1, 2, 3$ ; en $m$
$Q_i$	Flujos en las secciones $i = 2, 3$ ; en $m^3/s$
$z_i$	Posiciones relativas de las fugas $i = 1, 2, 3$ ; en $m$
$\lambda_i$	Coefficiente de descarga asociado al tamaño del orificio $i = 1, 2, 3$ .

con constantes,

$$a_1 = gA, \quad a_2 = \frac{b^2}{gA}, \quad \mu = \frac{f}{2DA}$$

que representan los parámetros físicos del ducto y del medio en que se encuentra el ducto,

$g$	Aceleración gravitatoria en $m/s^2$
$A$	Área transversal del ducto en $m^2$
$D$	Diámetro del ducto en $m$
$b$	Velocidad de la onda de presión en $m/s$
$f$	Coefficiente de fricción constante

$z_4$  siempre puede ser expresada en función de la posición de las fugas despejando de (2.5), se tiene

$$z_4 = L - (z_1 + z_2 + z_3).$$

Es importante mencionar que se desconocen los parámetros asociados a cada una de las fugas, es decir, posiciones  $z_i$  y parámetros  $\lambda_i$ ; el interés de este trabajo es estimar dichos parámetros cuando una fuga se presenta, de igual forma se estima el flujo de fuga calculado con la expresión

$$Q_{fi} = \lambda_i\sqrt{H_i}. \quad (2.8)$$

Para abordar el problema arriba planteado, se propone explotar el modelo equivalente que representa el efecto de  $n$  fugas como una sola mediante parámetros equivalentes, lo cual permitirá reducir el orden del modelo dinámico discretizado, lo anterior mediante un análisis de entrada a salida del mismo, que se presentará en la sección siguiente.



## 2.2 Modelo equivalente de entrada a salida

Como se mencionó en la introducción, Korbicz *et al.* (2004) presentaron las expresiones (2.9) a (2.11) las cuales permiten, en estado estacionario, reducir el efecto de las  $n$  fugas presentes a una equivalente, por medio de reducciones de cada dos fugas a una,

$$\bar{Q}_e = \lambda_e \sqrt{\bar{H}_{2e}} = \sum_{i=1}^2 \bar{Q}_{fi} = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \sqrt{\bar{H}_{i+1}} \quad (2.9)$$

$$z_e \left( \frac{\bar{Q}_e}{\bar{Q}_{out}} \right) (2\bar{Q}_{out} + \bar{Q}_e) = z_1 \left( \frac{\bar{Q}_{f1}}{\bar{Q}_{out}} \right) (2\bar{Q}_{out} + \bar{Q}_{f1} + 2\bar{Q}_{f2}) + (z_1 + z_2) \left( \frac{\bar{Q}_{f2}}{\bar{Q}_{out}} \right) (2\bar{Q}_{out} + \bar{Q}_{f2}) \quad (2.10)$$

$$z_e \bar{Q}_e \approx z_1 \bar{Q}_{f1} + (z_1 + z_2) \bar{Q}_{f2} \quad (2.11)$$

donde la barra denota que se trata de las variables en el estado estacionario, con  $z_e$  y  $\lambda_e$  como los parámetros equivalentes de una fuga. La ecuación (2.11) es una aproximación de (2.10), entonces, el modelo equivalente propuesto de las tres fugas (2.6) y (2.7), puede estar descrito por un modelo con dos fugas, agrupando el flujo de las primeras dos fugas  $Q_{f1}$  y  $Q_{f2}$  en  $Q_{eq}$  utilizando la ecuación (2.9), y de igual forma para las posiciones  $z_1$  y  $z_2$  en  $z_e$  con cualquiera de las ecuaciones (2.10) ó (2.11), el flujo y la posición de la tercera fuga

$$\begin{aligned} Q_{f3} &= Q_l \\ \lambda_3 \sqrt{H_3} &= \lambda_l \sqrt{H_{3e}}; \\ z_3 &= z_l \end{aligned}$$

donde  $H_{3e}$  es una presión virtual del modelo equivalente. A lo largo de todo el desarrollo el subíndice  $l$ , hace referencia a la *ultima* fuga o en inglés *last one* y el subíndice  $e$  denotará equivalencia. Por lo tanto, cualquier modelo con múltiples fugas puede ser descompuesto en un modelo de dos fugas de la forma

$$\dot{Q}_{in} = \frac{a_1}{z_e} (H_{in} - H_{2e}) - \mu Q_{in} |Q_{in}|, \quad (2.12)$$

$$\dot{H}_{2e} = \frac{a_2}{z_e} (Q_{in} - Q_{2e} - \lambda_e \sqrt{H_{2e}}), \quad (2.13)$$

$$\dot{Q}_{2e} = \frac{a_1}{z_l} (H_{2e} - H_{3e}) - \mu Q_{2e} |Q_{2e}|, \quad (2.14)$$

$$\dot{H}_{3e} = \frac{a_2}{z_l} (Q_{2e} - Q_{out} - \lambda_l \sqrt{H_{3e}}), \quad (2.15)$$

$$\dot{Q}_{out} = \frac{a_1}{z_{3e}} (H_{3e} - H_{out}) - \mu Q_{out} |Q_{out}|, \quad (2.16)$$

con la restricción estática

$$z_e + z_l + z_{3e} = L, \quad (2.17)$$

con esto, el ducto puede representarse esquemáticamente como se muestra en la Figura 2.2, y los flujos de fuga se pueden describir

$$Q_{fe} = \lambda_e \sqrt{H_{2e}}, \quad (2.18)$$

para el caso equivalente, y para el caso de la última fuga

$$Q_{fl} = \lambda_l \sqrt{H_{3e}}. \quad (2.19)$$

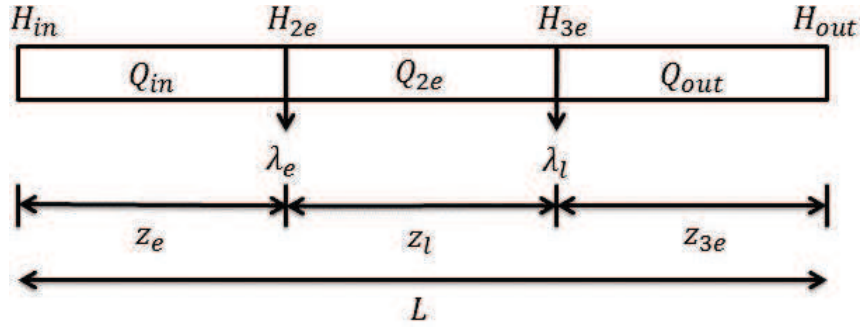


Fig 2.2 Esquema del modelo del ducto equivalente

Donde, para dar claridad, se menciona que los flujos medidos son  $y = [Q_{in}, Q_{out}]^T$ , y las presiones que se asocian con las condiciones de frontera del sistema en EDP o entradas al sistema  $u = [H_{in}, H_{out}]^T$ , son las variables que se consideran medibles sobre el sistema dinámico, las cuales pueden apreciarse de igual forma en la Figura 2.2.

Con el modelo que representa la dinámica de  $n$  fugas propuesto se puede pasar a los métodos utilizados para la detección e identificación de las fugas y parámetros asociados a las mismas, lo cual se describirá en las secciones siguientes.

### 2.3 Caso de fuga aguas abajo con respecto a $z_e$

Como las fugas se asumen que se presentarán de manera secuencial y a la derecha o “aguas abajo” de la posición de la fuga equivalente ( $z_e$ ), se puede utilizar el método propuesto por (Verde, 2005) donde desacoplan los efectos de los parámetros  $\lambda_e$  y  $\lambda_l$  en subsistemas, cada uno insensible del otro, con lo que se espera lograr detectar y estimar cada uno de los parámetros de las fugas. En esta sección se presentan las transformaciones de los estados propuestas, y la descripción de las características de cada subsistema.

#### 2.3.1 Subsistema a1

La primera transformación de los estados de la forma

$$x_{a1} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{in} \\ H_{2e} \\ z_l Q_{2e} + z_{3e} Q_{out} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

del modelo (2.12-2.16) con inyección de  $Q_{out} = y_2$  y remarcando el hecho que

$$z_{3e} = L - (z_e + z_l)$$

se genera el subsistema de la forma

$$\dot{x}_{a1} = A_{a1}(z_e, z_l)x_{a1} + B_{a1}(z_e)u + \Phi_{a1}(x_{a1}, y_2, z_e, z_l, \lambda_e), \quad (2.21)$$

$$y_{a1} = C_{a1}x_{a1}, \quad (2.22)$$

donde

$$A_{a1}(z_e, z_l) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_1}{z_e} & 0 \\ \frac{a_2}{z_e} & 0 & -\frac{a_2}{z_e z_l} \\ 0 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, B_{a1}(z_e) = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{z_e} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}, \Phi_{a1} = \begin{bmatrix} -\mu x_{11} |x_{11}| \\ \frac{a_2 \lambda_e \sqrt{x_{12}}}{z_e} \\ -\mu (z_{3e} y_2^2 + \frac{(x_{13} - z_{3e} y_2)^2}{z_l}) \end{bmatrix}, C_{a1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuyas principales características son:

- Insensible al parámetro  $\lambda_l$  provocado por la última fuga
- Detectabilidad de la fuga **equivalente**

Con lo que, este subsistema permite:

- Generar un residuo ( $r_{a1}$ ) para la fuga **equivalente** independientemente de los valores  $z$  asignados,
- Estimar el coeficiente de descarga  $\lambda_e$ , si el vector  $z$  es conocido o estimado.

### 2.3.2 Subsistema a2

Por simetría del modelo (2.12-2.16), la transformación complementaria de la forma:

$$x_{a2} = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_e Q_{in} + z_l Q_{2e} \\ H_{3e} \\ Q_{out} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

con inyección de  $Q_{in} = y_1$ , se genera el subsistema de la forma

$$\dot{x}_{a2} = A_{a2}(z_e, z_l)x_{a2} + B_{a2}(z_e, z_l)u + \Phi_{a2}(x_{a2}, y_1, z_e, z_l, \lambda_l), \quad (2.24)$$

$$y_{a2} = C_{a2}x_{a2}, \quad (2.25)$$

donde

$$A_{a2}(z_e, z_l) = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & 0 \\ \frac{a_2}{z_l^2} & 0 & -\frac{a_2}{z_l} \\ 0 & \frac{a_1}{z_{3e}} & 0 \end{bmatrix}, B_{a2}(z_e, z_l) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_1}{z_{3e}} \end{bmatrix}, \Phi_{a2} = \begin{bmatrix} -\mu (z_e y_1^2 + \frac{(x_{21} - z_e y_1)^2}{z_l}) \\ -\frac{a_2}{z_l^2} (z_e y_1 + \lambda_l \sqrt{x_{22}}) \\ -\mu x_{23} |x_{23}| \end{bmatrix}, C_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

cuyas principales características son:

- Insensible al parámetro  $\lambda_e$  provocado por la fuga equivalente.
- Detectabilidad de la **última** fuga en el tiempo transitorio, mientras esté presente la fuga equivalente,

Con lo que, este subsistema permite:

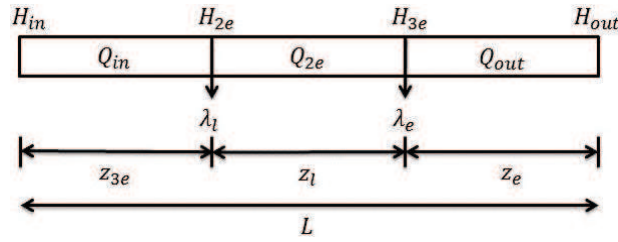
- Generar un residuo ( $r_{a2}$ ) para la **última** fuga,
- Además, en el caso que se no se haya presentado la última fuga puede usarse para estimar el vector  $z$ , con la condición estática para el caso de una sola fuga

$$SR := z_e + z_l = L - z_{3e} \quad (2.26)$$

Una vez definidos los subsistemas en los que se desacopla el efecto de los parámetros  $\lambda$  en cada uno de ellos, es posible proponer una estrategia que indique el momento en que se presenta una fuga sobre el ducto.

## 2.4 Caso de fugas aguas arriba con respecto a $z_e$

Hasta el momento se ha considerado que las fugas aparecen a la derecha de fuga equivalente ( $z_e$ ) o como se le conoce en el área de hidráulica “aguas abajo” de la fuga equivalente, esta condición no es una limitante para el método, pues para resolver el caso cuando una fuga aparezca a la izquierda o “aguas arriba” de la anterior es posible detectarla e identificarla usando un modelo simétrico o espejo, de forma que se analice al ducto en sentido contrario. En la Figura 2.3 se muestra que las posiciones de las fugas están invertidas con relación a las mostradas en la Figura 2.2,



**Fig 2.3** Ducto con fugas a la izquierda de la anterior

y el cambio en las variables del sistema, quedan de la forma en el modelo dinámico aproximado

$$\dot{Q}_{in} = \frac{a_1}{z_{3e}}(H_{in} - H_{2e}) - \mu Q_{in}|Q_{in}|, \quad (2.27)$$

$$\dot{H}_{2e} = \frac{a_2}{z_l}(Q_{in} - Q_{2e} - \lambda_l \sqrt{H_{2e}}), \quad (2.28)$$

$$\dot{Q}_{2e} = \frac{a_1}{z_l}(H_{2e} - H_{3e}) - \mu Q_{2e}|Q_{2e}|, \quad (2.29)$$

$$\dot{H}_{3e} = \frac{a_2}{z_e}(Q_{2e} - Q_{out} - \lambda_e \sqrt{H_{3e}}), \quad (2.30)$$

$$\dot{Q}_{out} = \frac{a_1}{z_e}(H_{3e} - H_{out}) - \mu Q_{out}|Q_{out}|. \quad (2.31)$$

recordando que se cumple la misma condición estática para la distancia

$$L = z_e + z_l + z_{3e}. \quad (2.32)$$

Las ecuaciones del modelo anterior, al que nos referiremos como modelo izquierdo, son similares casi idénticas a las del modelo (2.12-2.16), por lo cual es posible desarrollar transformaciones parecidas, donde se busca desacoplar el efecto de los coeficientes de descarga provocados por cada una de las fugas, las transformaciones propuestas se describen a continuación.

### 2.4.1 Subsistema b1

Para el primer subsistema se tiene

$$x_{b1} = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{3e}Q_{in} + z_l Q_{2e} \\ H_{3e} \\ Q_{out} \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

con inyección del parámetro medido  $Q_{in} = y_1$ , y el vector de entradas  $u = [Q_{in}, Q_{out}]^T$ ,

$$\dot{x}_{b1} = A_{b1}(z_e, z_l)x_{b1} + B_{b1}(z_e)u + \Phi_{b1}(x_{b1}, y_1, z_e, z_l, \lambda_e), \quad (2.34)$$

$$y_{b1} = C_{b1}x_{b1}, \quad (2.35)$$

donde

$$A_{b1}(z_e, z_l) = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & 0 \\ \frac{a_2}{z_l^2} & 0 & -\frac{a_2}{z_l} \\ 0 & \frac{a_1}{z_e} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{b1}(z_e) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_1}{z_e} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{b1} = \begin{bmatrix} -\mu(z_{3e}y_1^2 + \frac{(x_{11}-z_{3e}y_1)^2}{z_l}) \\ -\frac{a_2}{z_l^2}(z_{3e}y_1 + z_l\lambda_e\sqrt{x_{12}}) \\ -\mu x_{13}|x_{13}| \end{bmatrix}, \quad C_{b1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 2.4.2 Subsistema b2

Por simetría del modelo se propone la transformación

$$x_{b2} = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{in} \\ H_{2e} \\ z_l Q_{2e} + z_e Q_{out} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

con inyección de  $Q_{out} = y_2$ , y el vector de entradas  $u = [Q_{in}, Q_{out}]^T$  se genera el subsistema de la forma

$$\dot{x}_{b2} = A_{b2}(z_e, z_l)x_{b2} + B_{b2}(z_e, z_l)u + \Phi_{b2}(x_{b2}, y_2, z_e, z_l, \lambda_l), \quad (2.37)$$

$$y_{b2} = C_{b2}x_{b2}, \quad (2.38)$$

donde

$$A_{b2}(z_e, z_l) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_1}{z_{3e}} & 0 \\ \frac{a_2}{z_{3e}} & 0 & -\frac{a_2}{z_l z_{3e}} \\ 0 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{b2}(z_e, z_l) = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{z_{3e}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{b2} = \begin{bmatrix} -\mu x_{21}|x_{21}| \\ \frac{a_2}{z_{3e}} \left( -\frac{y_2 z_e}{z_l} + \lambda_l \sqrt{x_{22}} \right) \\ -\mu \left( z_e y_2 + \frac{(x_{23} - z_e y_2)^2}{z_l} \right) \end{bmatrix}, \quad C_{b2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los subsistemas para el caso aguas arriba tienen las mismas propiedades que los subsistemas para el caso aguas abajo, con esto se tienen dos subsistemas para cada caso que describen correctamente la dinámica para  $n$  fugas con parámetros equivalentes que aparezcan aguas arriba o aguas abajo de la posición equivalente ( $z_e$ ) de la fuga anterior.

Para concluir el capítulo es importante remarcar que, hasta el momento, se definió la dimensión mínima de un modelo equivalente que puede representar el efecto de  $n$  fugas separándolas en dos, una equivalente para las  $n - 1$  fugas y la  $n$ -ésima, última o en inglés "*last one*", una vez definido dicho modelo, se logró obtener dos subsistemas donde la gran importancia de cada uno de ellos es el desacoplamiento de los parámetros  $\lambda_e$  y  $\lambda_l$ , lo cual será vital para la propuesta de los detectores y estimadores que se presenta en los capítulos siguientes.

## 3 Detector de primera fuga

En este capítulo se muestra el desarrollo del detector para la primera fuga, de manera genérica se describe sobre los subsistemas **a1** y **a2**, pero el desarrollo aplica para ambos casos, por lo que se trabaja con el estado  $x_1$  y  $x_2$  sin pérdida de generalidad.

### 3.1 Principio de operación

Cuando el ducto opera en condiciones nominales o sin fuga, los coeficientes de descarga  $\lambda_e = \lambda_l = 0$  y los parámetros asociados a las posiciones de las fugas  $z_e, z_l, z_{3e}$  pueden tomar cualquier valor, siempre y cuando no se viole la condición estática de la distancia del ducto (2.5), y todas ellas siempre sean mayores a cero. Con esto, en principio se cumple que el flujo a la entrada del ducto  $Q_{in}$  debe ser igual al flujo de salida del ducto  $Q_{out}$ , y en el momento en que se presenta una fuga los flujos de entrada y salida son diferentes ( $Q_{in} \neq Q_{out}$ ), debido a que se presenta un flujo de fuga  $Q_{fe}$  desconocido. Para conocer el momento en que la fuga se presenta se propuso un método bastante utilizado en la comunidad de detección de fugas, el diseño de un residuo  $r$  que indica cuando se presenta este fenómeno. Un residuo tiene la siguiente estructura:

$$r = x - \hat{x} \quad (3.1)$$

donde  $x$  es una variable o parámetro real que se conoce o se tiene una medición y  $\hat{x}$  es un parámetro o variable que se estima, el método de estimación puede ser cualquier método conocido o reportado en la literatura, en este trabajo se utilizaron como estimadores dinámicos la teoría basada en el **filtro extendido de Kalman** (Reif *et al.*, 1998) o **EKF** por sus siglas en inglés. A pesar de que el EKF no es un estimador óptimo aun así es muy utilizado con esta función y por sus ventajas como la continua adaptación de las ganancias en el tiempo y la robustez ante perturbaciones externas. Pero tiene una desventaja que sólo es válido en una localidad cercana al punto de operación.

Se decidió utilizar un EKF, pues, como se mostró al obtener los dos subsistemas con parámetros desacoplados, los parámetros asociados a cada fuga no se presentan de una forma sencilla en los modelos como para obtener un regresor y aplicar la teoría de estimación de parámetros. Se observa en (2.21-2.22) y (2.24-2.25) que los parámetros asociados a la posición  $z_e$  y  $z_l$  se presentan en los denominadores y numeradores, lo que dificulta la factorización del parámetro, por lo que se consideró que la forma más sencilla para estimar los parámetros era realizar un observador que permitiera explotar la cualidad de funcionar como estimador.

En el apéndice A se describe la teoría necesaria para el diseño de los observadores o estimadores de parámetros, así como el diseño de los mismos.

Para la detección de las fugas fue necesario en primera instancia trabajar con los modelos nominales o sin falla, para que los residuos generados mantengan este comportamiento en particular, y al presentarse una falla los residuos se alteren permitiendo así, obtener un indicador de que la falla está presente.

## 3.2 Escenario sin fuga

Como se mencionó anteriormente, se considera que las fugas aparecen de manera secuencial; con esto en mente, se puede analizar a los subsistemas en condición sin fuga (nominal, sin falla) y posteriormente con una fuga para determinar si un residuo puede indicarnos el momento en que se presenta la fuga.

Recordando los subsistemas (2.21-2.22) y (2.24-2.25) y analizándolos cuando todavía no se presenta una fuga, con  $z_{3e} = L - (z_e + z_l)$ , se tiene

$$\dot{x}_1 = A_1(z_e, z_l)x_1 + B_1(z_e)u + \Phi_1(x_1, y_2, z_e, z_l, 0), \quad (3.2)$$

$$y_1 = C_1x_1, \quad (3.3)$$

y para el subsistema 2

$$\dot{x}_2 = A_2(z_e, z_l)x_2 + B_2(z_e, z_l)u + \Phi_2(x_2, y_1, z_e, z_l, 0), \quad (3.4)$$

$$y_2 = C_2x_2, \quad (3.5)$$

donde las únicas variables desconocidas son  $z_e$  y  $z_l$  en ambos subsistemas. Como se mencionó anteriormente, mientras las fugas no se hayan presentado  $\lambda_e = \lambda_l = 0$  y los parámetros  $z_e, z_l$  asociados a las posiciones pueden tomar cualquier valor mientras cumplan con las condiciones impuestas previamente, esto quiere decir que la salida  $y_1$  y  $y_2$  serán exactamente iguales a las mediciones  $Q_{in}$  y  $Q_{out}$  respectivamente.

Con esto en mente se desarrollaron observadores basados en EKF para el subsistema 1 y 2 sin condición de fuga, generando observadores de la forma

$$\dot{\hat{x}}_1 = A_1(z_e, z_l)\hat{x}_1 + B_1(z_e)u + \Phi_1(\hat{x}_1, y_2, z_e, z_l) + K_1(Q_{in} - \hat{y}_1) \quad (3.6)$$

$$\hat{y}_{d1} = C_1\hat{x}_1 \quad (3.7)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = A_2(z_e, z_l)\hat{x}_2 + B_2(z_e, z_l)u + \Phi_2(\hat{x}_2, y_1, z_e, z_l) + K_2(Q_{out} - \hat{y}_2) \quad (3.8)$$

$$\hat{y}_{d2} = C_2\hat{x}_2 \quad (3.9)$$

con esto es posible pensar en residuos de la forma

$$r_1 = Q_{in} - \hat{y}_{d1} \quad (3.10)$$

$$r_2 = Q_{out} - \hat{y}_{d2} \quad (3.11)$$

donde dichos residuos tendrán las siguientes caracterizas

- Si  $\lambda_e = \lambda_l = 0$  para cualquier valor de  $z_e$  y  $z_l$ ,  $r_1 = r_2 = 0$ .
- Si  $\lambda_e \neq 0$  para cualquier valor de  $z_e$  y  $z_l$ ,  $r_1 \neq 0$ .
- Si  $\lambda_l \neq 0$  para cualquier valor de  $z_e$  y  $z_l$ ,  $r_2 \neq 0$ .

Con estos residuos caracterizados puede conocerse el momento en que se presenta una fuga al verificar su comportamiento. Como se mencionó anteriormente, los estimadores que se pretenden utilizar sólo son válidos en una localidad cercana al punto de operación, entonces es necesario que al iniciar dichos estimadores, se encuentren con condiciones iniciales cercanas al punto de operación, en este caso, cercanas a la posición de la primera fuga equivalente  $z_e$ , con lo anterior se desarrolló un aproximador de la posición de la primera fuga, que se describe en la siguiente sección.

### 3.2.1 Aproximación de la primera fuga

Como el modelo propuesto (2.12-2.16) representa la dinámica de dos fugas sobre el ducto y en los subsistemas de igual forma, al presentarse la primera fuga ( $\lambda_e \neq 0$ ) el parámetro  $\lambda_l$  aún permanece en cero, lo que provoca que el parámetro  $z_l$  pueda tomar cualquier valor en la región de operación. Como se quiere encontrar un valor aproximado para  $z_e$ , se consideró fijar  $z_l$  dándole un valor “*arbitrario*”, el cual se definió como una región de búsqueda  $SR$ , por sus siglas en inglés, de tal forma que el ducto se secciona virtualmente como se muestra en la Figura 3.1, en dicha región se considera que la primera fuga puede aparecer y es en la cual permanecerá de igual forma la fuga equivalente.

Entonces, definiendo el parámetro  $SR$ , se generará una nueva restricción estática para el caso de una sola fuga o una fuga equivalente.

$$SR := z_e + z_l = L - z_{3e}. \quad (3.12)$$

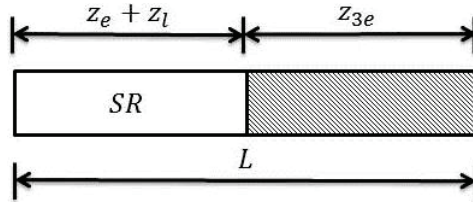


Fig 3.1 Región de búsqueda

Recordando que la primera fuga sólo puede aparecer dentro de la región de búsqueda definida por  $SR$  se utilizó un método igualmente presentado en (Verde, 2005) para la detección de una fuga. En donde se utiliza el detector 2 (3.9) que es insensible al parámetro  $\lambda_e$  y sensible a los cambios en  $z_e$  al presentarse la fuga, puede moverse arbitrariamente a  $z_e$  siempre y cuando cumpla con la restricción impuesta por la región de búsqueda ( $SR = z_e + z_l$ ), entonces si se varia  $\bar{z}_e$  en un intervalo  $(0, SR)$  (idealmente) de forma periódica (señal sinusoidal, triangular, etc.), el comportamiento del residuo generado por este detector al presentarse la fuga, debería ser periódico y cruzando por cero en el momento que  $\bar{z}_e$  tome el valor real de  $z_e$ . Con base en este método se diseñó un detector y un aproximador para la primera fuga que se describe a continuación.

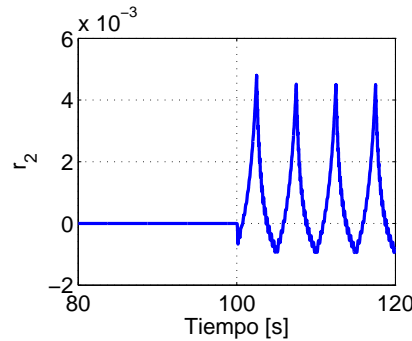


Fig 3.2 Comportamiento del residuo  $r_2$  periódico ante una fuga en la posición  $z_1 = 50 m$

En la Figura 3.2 se observa el comportamiento del residuo antes de la primera fuga y cuando esta se presenta a los 100 s, si  $\bar{z}_e$  se varia de forma periódica, en particular con forma triangular en la región de búsqueda  $(0, SR)$ ,



es importante mencionar que  $z_e$  no puede tomar los valores extremos y de hecho, no puede tomar valores cercanos a los extremos, esto por la forma en que el parámetro asociado a la posición  $z_e$  se encuentra en el modelo dinámico (2.12-2.16) y por consecuencia los parámetros  $z_e$  y  $z_l$  que se encuentra en los denominadores, si estos toman valores cercanos a cero ó a la frontera virtual propuesta  $SR$  los modelos se indeterminan, por lo que se definen las constantes  $\varepsilon_a$  y  $\varepsilon_b$  que determinan los puntos máximos y mínimos en los que se puede detectar una fuga.

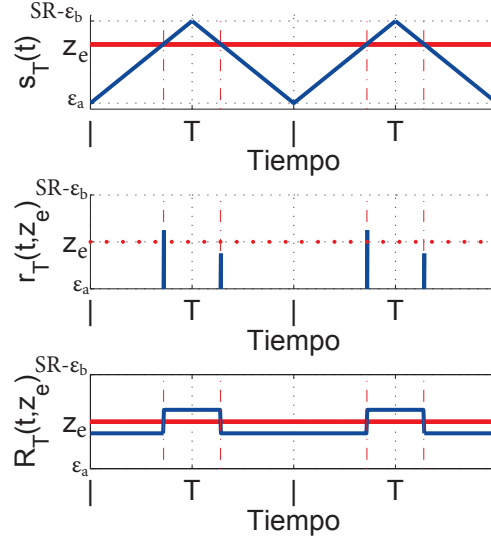


Fig 3.3 Señales asociadas al evaluador del residuo  $R_T(t, z_e)$

Retomando el caso en que se varia  $\bar{z}_e$  en el intervalo  $(\varepsilon_a, SR - \varepsilon_b)$  de forma triangular, como se muestra en la Figura 3.3, se observa en la gráfica superior correspondiente a la señal  $s_T(t)$  donde, en color azul se muestra el barrido de la señal  $\bar{z}_e$ , y en color rojo la posición real de  $z_e$ , se observa como se cruzan dos veces por periodo, el momento del cruce es cuando la señal de barrido  $\bar{z}_e$  toma el valor real de la posición, en ese mismo instante el residuo generado por  $r_2$  tiene el mismo comportamiento (idealmente), es decir, cruza por cero, con esto es posible obtener impulsos en el momento que se dan los cruces realizando la operación

$$r_T(z_e) = s_T \delta(r_2)$$

donde  $\delta(\cdot)$  es la función impulso,  $r_T(z_e)$  genera un tren de impulsos en el momento de los cruces por cero del residuo  $r_2$  y al multiplicarlo por la señal triangular con que se barre la región de búsqueda  $\bar{z}_e$  se obtiene la señal  $r_T(t, z_e)$ , que es un tren de impulsos de magnitud aproximada al valor real de la fuga  $z_e$ . Si dicha señal se retiene en su último valor hasta que se presente otro, se genera un tren de pulsos como se muestra en la señal  $R_T(t, z_e)$  el cual presenta un comportamiento periódico, y se propone obtener el valor  $RMS$  de ésta señal, cuyo resultado es un evaluador del residuo y genera una posición aproximada que servirá como condición inicial para los estimadores en  $\hat{z}_e(0)$ .

Con esto se resuelve el problema para la condición inicial para el punto de operación  $(\hat{z}_e(0), \hat{\lambda}_e(0))$ , tomando los valores  $(z_{eRMS}, 0)$  sólo queda cómo proponer una forma precisa de la estimación de los parámetros  $\hat{z}_e$  y  $\hat{\lambda}_e(0)$ , la cual se describe en el capítulo siguiente.

## 4 Estimación de parámetros y esquema de funcionamiento

Como se tiene una condición inicial cercana al punto de operación con el método de diagnóstico propuesto en el Capítulo 3, entonces se puede diseñar un estimador con el estado aumentado para los parámetros  $\hat{z}_e$  y  $\hat{\lambda}_e$ , con los que se creará un sistema de funcionamiento Maestro-Eslavo que se describe en la parte final del capítulo.

### 4.1 Escenario primera fuga

Con la restricción estática para la región de búsqueda (3.12), retomando los subsistemas (2.21-2.22) y (2.24-2.25) y sustituyendo en los subsistemas

$$z_l = SR - z_e \quad (4.1)$$

se tiene que, para el subsistema 1

$$\dot{x}_1 = A_1(z_e)x_1 + B_1(z_e)u + \Phi_1(x_1, y_2, z_e, \lambda_e) \quad (4.2)$$

$$y_1 = C_1x_1 \quad (4.3)$$

y para el subsistema 2

$$\dot{x}_2 = A_2(z_e)x_2 + B_2(z_e)u + \Phi_2(x_2, y_1, z_e, 0) \quad (4.4)$$

$$y_2 = C_2x_2 \quad (4.5)$$

donde es claro que el subsistema (4.2-4.3) sólo depende de los parámetros desconocidos  $z_e$  y  $\lambda_e$  y el subsistema (4.4-4.5) solo depende de  $z_e$ .

En este momento se puede observar claramente la potencialidad de desacoplar el efecto de los parámetros  $\lambda_e$  y  $\lambda_l$  en los subsistemas, se observa claramente que el único parámetro desconocido en el subsistema (4.4-4.5) es  $z_e$ , el cual para ser estimado y agregarse a los estados del subsistema (4.4-4.5) con dinámica constante y generar el subsistema con el estado aumentado de la forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{z}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2(z_e)x_2 + B_2(z_e)u + \Phi_2(x_2, z_e, y_1, 0) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ z_e \end{bmatrix} = C_2x_2, \quad (4.7)$$

si se diseña un observador basado en el EKF para el sistema (4.6 y 4.7), se obtendrá

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{z}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2(\hat{z}_e)\hat{x}_2 + B_2(\hat{z}_e)u + \Phi_2(\hat{x}_2, \hat{z}_e, y_1) + K_{21}(Q_{out} - \hat{y}_2) \\ K_{22}(Q_{out} - \hat{y}_2) \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\hat{y}_{m2} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{z}_e \end{bmatrix} = C_2 \hat{x}_2 \quad (4.9)$$

que permite obtener un estimado del parámetro  $\hat{z}_e$ , donde el vector de ganancias está definido por  $\bar{K}_{m2} = [K_{21}, K_{22}]^T$ , y el error de salida se define como  $e_{m2} = Q_{out} - \hat{y}_{m2}$ .

Entonces se tiene el valor estimado para  $\hat{z}_e$  el cual si se inyecta como una entrada sobre el subsistema (4.2-4.3)  $u_3 = \hat{z}_e$  sólo se tiene un parámetro desconocido  $\lambda_e$  y si se realiza el mismo procedimiento que en el caso anterior se obtiene el subsistema con el estado aumentado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{\lambda}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(u_3)x_1 + B_1(u_3)u + \Phi_1(x_1, u_3, y_2, \lambda_e) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda_e \end{bmatrix} = C_1 x_1, \quad (4.11)$$

de igual forma se diseña un observador basado en el EKF para el subsistema (4.10 y 4.11)

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{\lambda}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(u_3)\hat{x}_1 + B_1(u_3)u + \Phi_1(\hat{x}_1, u_3, y_2, \hat{\lambda}_e) + K_{11}(Q_{in} - \hat{y}_1) \\ K_{12}(Q_{in} - \hat{y}_1) \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\hat{y}_{m1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{\lambda}_e \end{bmatrix} = C_1 \hat{x}_1, \quad (4.13)$$

donde se obtiene un estimado del parámetro  $\hat{\lambda}_e$ , cuyo vector de ganancias  $\bar{K}_{m1} = [K_{11}, K_{12}]^T$ , y el error de salida se define como  $e_{m1} = Q_{in} - \hat{y}_{m1}$ .

Con lo propuesto anteriormente es posible estimar los parámetros para una o múltiples fugas con parámetros equivalentes ( $\hat{z}_e, \hat{\lambda}_e$ ), dichos estimadores serán nombrados como estimadores **maestros**, ya que estiman los parámetros equivalentes. Como se mencionó anteriormente, para garantizar la convergencia es necesario que los estados inicien en una localidad cercana al punto de operación, lo cual se garantiza con las siguientes aproximaciones para los siguientes estados.

Recordado que se tiene un valor aproximado de la posición de la fuga ( $z_{eRMS}$ ), es posible obtener las condiciones iniciales de los otros estados para el estimador maestro del parámetro  $\hat{z}_e$ , de la forma

$$\hat{x}_2 = \begin{bmatrix} \hat{x}_{21} \\ \hat{x}_{22} \\ \hat{x}_{23} \\ \hat{x}_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_e \hat{Q}_{in} + z_l \hat{Q}_{2e} \\ \hat{H}_{3e} \\ \hat{Q}_{out} \\ \hat{z}_e \end{bmatrix}; \quad x_2(0) = \begin{bmatrix} z_{eRMS} Q_{in} + (SR - z_{eRMS}) Q_{out} \\ \frac{(SR - z_{eRMS})(H_{out} - H_{in})}{L} + H_{in} \\ Q_{out} \\ z_{eRMS} \end{bmatrix}.$$

donde se considera que el flujo  $\hat{Q}_{2e} \approx Q_{out}$ , la posición  $z_l \approx (SR - z_{eRMS})$  y el cabezal de presión  $\hat{H}_{3e}$  se pueden aproximar con un punto sobre la recta de la caída de presión de entrada a salida ( $H_{out} - H_{in}$ ) en la posición de la fuga ( $SR - z_{eRMS}$ ), todas las consideraciones anteriores en el momento que se presenta la fuga. Y para el

estimador maestro del parámetro  $\hat{\lambda}_e$  se consideran como condiciones iniciales,

$$\hat{x}_1 = \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} \\ \hat{x}_{12} \\ \hat{x}_{13} \\ \hat{x}_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{in} \\ \hat{H}_{2e} \\ z_l \hat{Q}_{2e} + z_{3e} \hat{Q}_{out} \\ \hat{\lambda}_e \end{bmatrix}; \quad x_1(0) = \begin{bmatrix} Q_{in} \\ \frac{z_{eRMS}(H_{out} - H_{in})}{L} + H_{in} \\ Q_{out}(L - z_{eRMS}) \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde, de igual forma, el cabezal de presión  $\hat{H}_{2e}$  se puede aproximar por el punto sobre la recta de la caída de presión de entrada a salida en la posición aproximada de la fuga ( $z_{eRMS}$ ), y como se considera que  $\lambda_l = 0$ , por lo que el flujo de fuga  $Q_l = 0$ , entonces el flujo de la sección después de la fuga debe ser igual al flujo de salida  $Q_{e2} = Q_{out}$ .

Definidas las condiciones iniciales, se puede considerar que los estimadores maestros iniciarán suficientemente cerca del punto de operación y así garantizar la convergencia a los parámetros reales.

Como hasta el momento se pueden obtener los parámetros de  $n$  fugas como equivalentes, es necesario para conocer los parámetros reales de las  $n$  fugas, estimar los parámetros de la última fuga que se presente respecto a los equivalentes, para después encontrar los valores relativos reales de la posición de cada una de las fugas sobre el ducto.

## 4.2 Escenario segunda fuga

Recapitulando lo que se ha logrado hasta el momento

- Se tiene un detector que indica el momento en que la primera fuga se presenta analizando el residuo  $r_2 \neq 0$ .
- Se obtuvo un primer aproximado de la posición de la fuga  $z_{eRMS}$ .
- Se estimaron los parámetros asociados a la primera fuga ( $\hat{z}_e, \hat{\lambda}_e$ )

Entonces, cuando se presente la segunda fuga, se pueden retomar los subsistemas 1 y 2 (2.21-2.25), donde, si se definen como entradas a los parámetros previamente estimados de la forma  $u_3 = \hat{z}_e$  y  $u_4 = \hat{\lambda}_e$ , el primer subsistema queda de la forma

$$\dot{x}_1 = A_1(u_e, z_l)x_1 + B_1(u_3)u + \Phi_1(x_1, y_2, u_3, z_l, u_4), \quad (4.14)$$

$$y_1 = C_1 x_1, \quad (4.15)$$

donde, el único parámetro desconocido sobre este sistema es el parámetro asociado a la posición de la nueva fuga  $z_l$ , y si se amplía el estado con el parámetro desconocido y con dinámica constante, como en el caso de los estimadores maestros, se tiene que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{z}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(u_e, z_l)x_1 + B_1(u_3)u + \Phi_1(x_1, y_2, u_3, z_l, u_4) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ z_l \end{bmatrix} = C_1 x_1, \quad (4.17)$$

y de la misma forma si se diseña un observador basado en el EKF, se obtendrá el estimador para el parámetro  $\hat{z}_l$  con la estructura

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{z}}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(u_e, \hat{z}_l)\hat{x}_1 + B_1(u_3)u + \Phi_1(\hat{x}_1, y_2, u_3, \hat{z}_l, u_4) + K_{11}(Q_{in} - \hat{y}_1) \\ K_{12}(Q_{in} - \hat{y}_1) \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

$$\hat{y}_{e1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{z}_l \end{bmatrix} = C_1\hat{x}_1, \quad (4.19)$$

cuyo vector de ganancias  $\bar{K}_{e1} = [K_{11}, K_{12}]^T$  se diseña con la teoría mencionada en el apéndice A, y el error de salida estará definido como  $e_{e1} = Q_{in} - \hat{y}_{e1}$ .

Con esto, se puede definir como una nueva entrada el parámetro previamente estimado  $u_5 = \hat{z}_l$  y analizando el segundo subsistema y sustituyendo los parámetros previamente estimados se tiene que

$$\dot{x}_2 = A_2(u_3, u_5)x_2 + B_2(u_3, u_5)u + \Phi_2(x_2, y_1, u_3, u_5, \lambda_l) \quad (4.20)$$

$$y_2 = C_2x_2, \quad (4.21)$$

de forma análoga, este subsistema sólo depende del parámetro desconocido  $\lambda_l$ , y siguiendo el método de construcción para los estimadores de parámetros, se genera el subsistema con el estado aumentado  $\lambda_l$  con dinámica constante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{\lambda}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2(u_3, u_5)x_2 + B_2(u_3, u_5)u + \Phi_2(x_2, y_1, u_3, u_5, \lambda_l) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ \lambda_l \end{bmatrix} = C_2x_2, \quad (4.23)$$

y diseñando el un observador basado en el EKF, se obtendrá el estimador para el parámetro  $\hat{\lambda}_l$ , con la estructura

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{\lambda}}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2(u_3, u_5)\hat{x}_2 + B_2(u_3, u_5)u + \Phi_2(\hat{x}_2, y_1, u_3, u_5, \hat{\lambda}_l) + K_{21}(Q_{out} - \hat{y}_2) \\ K_{22}(Q_{out} - \hat{y}_2) \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$$\hat{y}_{e2} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{\lambda}_l \end{bmatrix} = C_2\hat{x}_2, \quad (4.25)$$

y de igual forma el vector de ganancias  $\bar{K}_{e2} = [K_{21}, K_{22}]^T$  se diseña con la teoría mencionada en el apéndice A, y el error de salida estará definido como  $e_{e2} = Q_{out} - \hat{y}_{e2}$ .

Con esto se tiene otro par de estimadores que se nombraran **esclavos**, que son capaces de estimar los parámetros de la segunda fuga, cuando esta aparezca, siempre y cuando previamente se tengan identificados los parámetros de la primera fuga.

El problema de condiciones iniciales para este caso se resolvió usando el mismo valor de los estados que se tienen en los estimadores maestros antes de iniciar el funcionamiento de los estimadores esclavos, para el caso de  $\lambda_l(0) = 0$  y para  $z_l(0) = SR - \hat{z}_e$ , con lo cual se garantiza que iniciarán cerca del punto de operación antes de que aparezca la segunda fuga.

## 4.3 Esquema de funcionamiento

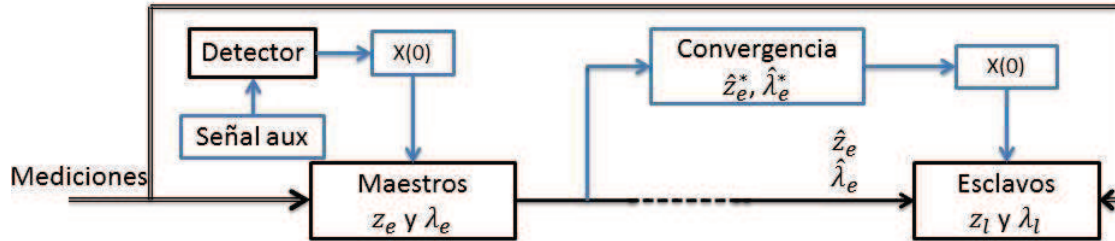


Fig 4.1 Esquema de funcionamiento para 2 fugas secuenciales

Hasta el momento se tienen dos detectores de fugas, de los cuales sólo se utiliza el detector que genera el residuo  $r_2$  para detectar y aproximar la primera fuga, y cuatro estimadores de parámetros, dos maestros para identificar múltiples fugas con parámetros equivalentes y un par de estimadores esclavos para estimar los parámetros de la última fuga que se presenta.

En la Figura 4.1 se presenta un primer esquema de funcionamiento y puesta en marcha para los detectores y estimadores que se describe a continuación

1. El bloque detector es el primero en encender con su señal auxiliar para generar la señal  $\bar{z}_e$  y aproximar la posición de la primera fuga ( $z_{eRMS}$ ) una vez que esta se presenta.
2. Una vez calculada la posición aproximada de la primera fuga se calculan las condiciones iniciales para los estimadores maestros y se manda una señal para activarlos.
3. Los estimadores maestros inician el proceso de identificación de los parámetros asociados a la primera fuga  $\hat{z}_e$  y  $\hat{\lambda}_e$ .
4. Una vez que se logra la convergencia de los parámetros de la primera fuga, se calculan las condiciones iniciales para los estimadores esclavos y estos se ponen en funcionamiento.
5. Al presentarse la segunda fuga los estimadores esclavos inician la estimación de los parámetros  $\hat{z}_l$  y  $\hat{\lambda}_l$ .

Existe un problema con este esquema de funcionamiento, el cual se genera en los estimadores esclavos, ya que al presentarse la segunda fuga, los estimadores maestros comienzan a converger a los parámetros equivalentes de dos fugas, estos al inyectarse como entradas a los estimadores esclavos tiene como consecuencia que dichos estimadores no realicen ninguna estimación, ya que el efecto de las dos fugas se absorbe por los parámetros equivalentes.

La solución se presenta en el esquema mostrado en la Figura 4.2, donde se introduce un bloque de retardo sobre las señales de los parámetros estimados equivalentes  $\hat{z}_e$  y  $\hat{\lambda}_e$ .

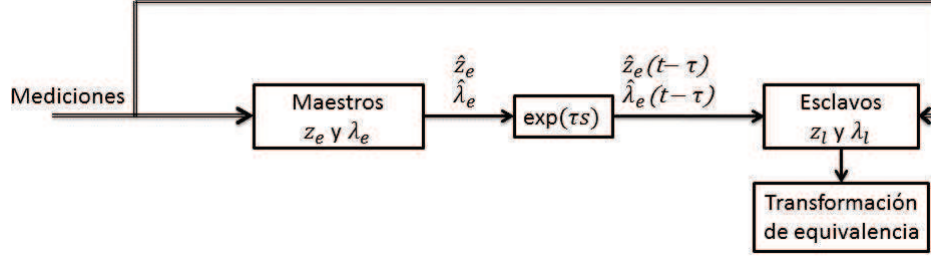


Fig 4.2 Esquema de funcionamiento general para tres o más fugas

Las señales retardadas en el tiempo que se obtienen a la salida de este bloque  $\hat{z}_e(t-\tau)$  y  $\hat{\lambda}_e(t-\tau)$ , donde  $\tau$  es el tiempo del retardo, tienen la función de que en el momento que se presente una nueva fuga, los estimadores esclavos tienen un tiempo  $\tau$  para realizar la estimación de los parámetros de dicha fuga ( $\hat{z}_l$ ,  $\hat{\lambda}_l$ ) antes de que se introduzcan los parámetros equivalentes de las dos fugas.

La gran ventaja de proponer un esquema de este tipo con un bloque de retardo, es que el método puede funcionar de manera iterativa para  $n$  fugas secuenciales, y así obtener los parámetros de las  $n$  fugas respecto a los parámetros equivalentes, que posteriormente puede encontrarse los valores reales sobre el ducto con las ecuaciones (2.9-2.11).

Como complemento para identificar el momento en que los estimadores esclavos se encuentran activos por la presencia de una nueva fuga, se diseñó un detector basado en el subsistema uno (2.21 y 2.22), que al diseñar un observador basado en un EKF, se obtiene

$$\dot{\hat{x}}_1 = A_1(z_e, z_l)\hat{x}_1 + B_1(z_e)u + \Phi_1(\hat{x}_1, y_2, z_e, z_l + \lambda_e) + K_1(Q_{in} - \hat{y}_1) \quad (4.26)$$

$$\hat{y}_{d1} = C_1\hat{x}_1 \quad (4.27)$$

donde se pueden inyectar como entradas los parámetros estimados con retardo previamente obtenidos de los estimadores maestros ( $\hat{z}_e$  y  $\hat{\lambda}_e$ ), provocando que el único parámetro desconocido sea el parámetro  $z_l$ , y si se realiza un barrido con una señal periódica  $\bar{z}_l$ , se generara un residuo

$$r_{d1} = Q_{in} - \hat{y}_{d1} \quad (4.28)$$

el cual permanecerá en cero mientras no se presente una nueva fuga, y se mantendrá diferente de cero mientras dure el tiempo de retardo  $\tau$ . Como la única función que se quiere para el residuo (4.28) es indicar el momento de la presencia de una nueva fuga y el término de la misma, se le definió un comportamiento booleano de tal forma que tome un valor unitario mientras los estimadores esclavos traten de converger a los parámetros estimados y un valor cero en caso de que no se haya presentado ninguna fuga.

El esquema propuesto se validó mediante simulaciones, las cuales se presentan en el capítulo siguiente.

## 5 Resultados

El esquema general propuesto en el capítulo anterior se validó mediante simulaciones con el software matemático *MATLAB* (MATLAB R2008, 2008), en particular, sobre el simulador *simulink*, donde se implementaron los modelos matemáticos que describen la dinámica del fluido sobre el ducto con tres fugas y con los parámetros del ducto piloto que se encuentra en el Instituto de Ingeniería. Estos parámetros se presentan en la tabla 5.1; los resultados obtenidos se presentan y describen a lo largo de este capítulo.

**Tabla 5.1** Parámetros

$H_1 = 11 \text{ m}$	$H_2 = 6 \text{ m}$	$L = 200 \text{ m}$	$g = 9.81 \text{ m/s}^2$	$\epsilon_a = 10$	$\omega_{aux} = 0.4\pi \text{ rad/s}$
$SR = 160 \text{ m}$	$D = 0.1 \text{ m}$	$b = 1250 \text{ m/s}$	$f = 0.02$	$\epsilon_b = 10$	-

donde  $\omega_{aux}$  es la frecuencia de la señal triangular utilizada como señal auxiliar para el detector.

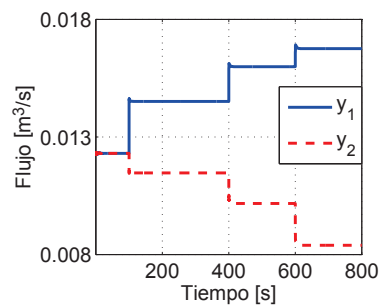
### 5.1 Caso aguas abajo

Se simularon tres fugas secuenciales con las siguientes características

- $z_1 = 50 \text{ m}$ ,  $\lambda_1 = 0.001$  en un tiempo de  $100 \text{ s}$
- $z_2 = 30 \text{ m}$ ,  $\lambda_2 = 0.001$  en un tiempo de  $400 \text{ s}$
- $z_3 = 40 \text{ m}$ ,  $\lambda_3 = 0.001$  en un tiempo de  $600 \text{ s}$

las fugas se simularon para el caso que se presenta aguas abajo de la anterior, en la sección siguiente se presenta el caso aguas arriba.

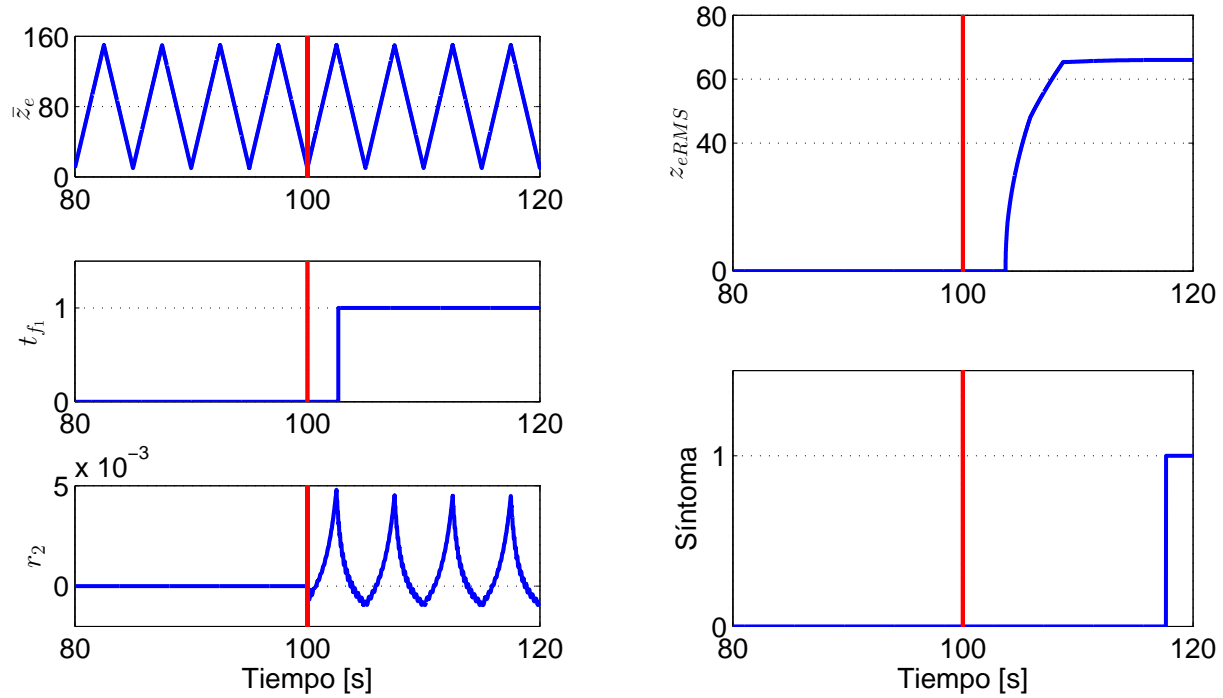
En la Figura 5.1 se observan el comportamiento de las señales medidas  $Q_{in} = y_1$  y  $Q_{out} = y_2$  del ducto, se observa como en el tiempo que se presenta una fuga, los flujos medidos sufren un cambio abrupto



**Fig 5.1** Salidas medidas



En la Figura 5.2 **a)** se observa de arriba hacia abajo, la forma de la señal auxiliar  $\bar{z}_e$ , la señal de la detección de la fuga, necesaria para activar el proceso en la simulación de la aproximación de la posición  $z_{eRMS}$  descrita en la sección 3.2.1, y finalmente el residuo  $r_2$  (3.11); en la Figura 5.2 **b)** el valor aproximado obtenido para  $z_{eRMS}$ , y la señal del síntoma que da por terminada la etapa de detección, que es la señal que da comienzo al cálculo de las condiciones iniciales para el estimador maestro, como se describe en la sección 4.2.



(a) Señal auxiliar y señal de detección de la fuga residuo  $r_2$ .

(b) Aproximación de la posición de fuga  $z_{eRMS}$  y señal del síntoma

Fig 5.2 Señales del proceso de detección

La señal auxiliar está activa desde que la simulación inicia, se desactiva en el momento que la señal del síntoma se activa. El aproximado de la posición de la primera fuga  $z_{eRMS}$ , converge a un valor cercano al real, condición necesaria para garantizar la convergencia de los estimadores maestros. Finalmente la señal del síntoma se activa una vez transcurridos ciertos periodos de la señal auxiliar, esto con la finalidad de obtener un buen aproximado para la condición inicial y no perder mucho tiempo en dicha aproximación. Se observa que la etapa de la detección tiene una duración de aproximadamente 20 s y sólo se realiza al presentarse la primera fuga.

En la Figura 5.3 **a)**, **b)** y **c)** se observa la convergencia de los parámetros estimados por los estimadores maestros ( $\hat{z}_e, \hat{\lambda}_e, \hat{Q}_e$ ), y que en el momento en que se presenta una nueva fuga, los parámetros se reajustan a un nuevo valor equivalente que satisface las relaciones de equivalencia mostradas en (2.9-2.11). Es importante mencionar que el flujo de fuga  $Q_e$  se obtiene por la expresión  $Q_e = \lambda_e \sqrt{H_{2e}}$ , y en este caso se estima por medio de la expresión  $\hat{Q}_e = \hat{\lambda}_e \sqrt{\hat{x}_{12}}$ , donde  $\hat{x}_{12}$  es el segundo estado observado del estimador maestro para  $\hat{\lambda}_e$  (4.12 y 4.13).

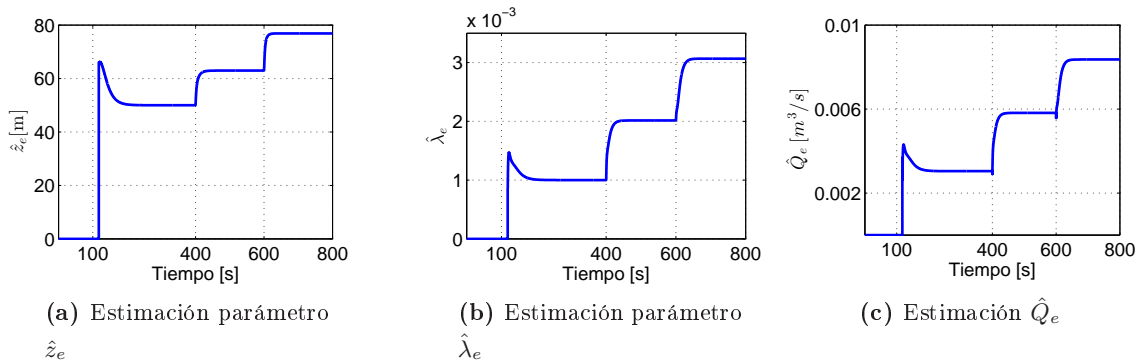


Fig 5.3 Señales obtenidas de los estimadores maestros

En la Figura 5.3 **a)** se muestra la señal  $\hat{z}_e$  asociada a la posición equivalente de las fugas, obtenida por el estimador maestro (4.8-4.9), y para el parámetro  $\hat{\lambda}_e$  obtenido por el estimador maestro (4.8-4.9) mostrado en la misma Figura en el inciso **b)**.

En la Figura 5.4 **a)** y **b)** se observa la dinámica de las ganancias en los estimadores maestros, y como en los primeros instantes existe un transitorio de gran magnitud debido a la aproximación de las condiciones iniciales. Posteriormente permanecen en un valor constante hasta el momento en que se presenta una nueva fuga.

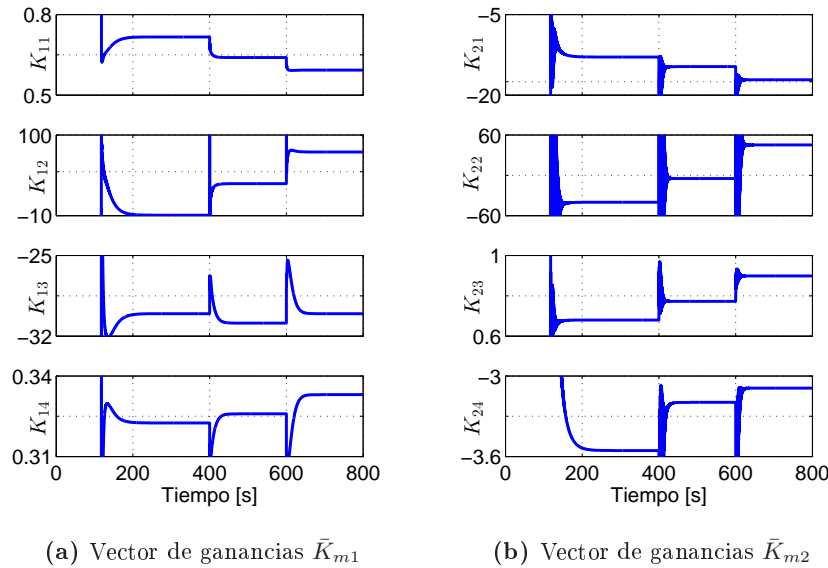


Fig 5.4 Ajuste de ganancias de los estimadores maestros

En la Figura 5.5 **a)** se observa la señal obtenida por el estimador esclavo (4.18 y 4.19) para el parámetro  $\hat{z}_l$  junto con la señal retrasada  $z_e(t - \tau)$ , en la Figura 5.5 **b)** se presenta la señal estimada para el parámetro  $\hat{\lambda}_l$ , y finalmente en la Figura 5.5 **c)** se muestra el flujo  $\hat{Q}_l$  calculado en cada nueva fuga. Debajo de cada gráfica se presenta la *señal de interpretación* (S.Int.) generada por el residuo (4.28). Es importante mencionar que el efecto transitorio al encender por primera vez los estimadores esclavos tiene un efecto tanto en el ajuste de las ganancias como en la señal de interpretación.

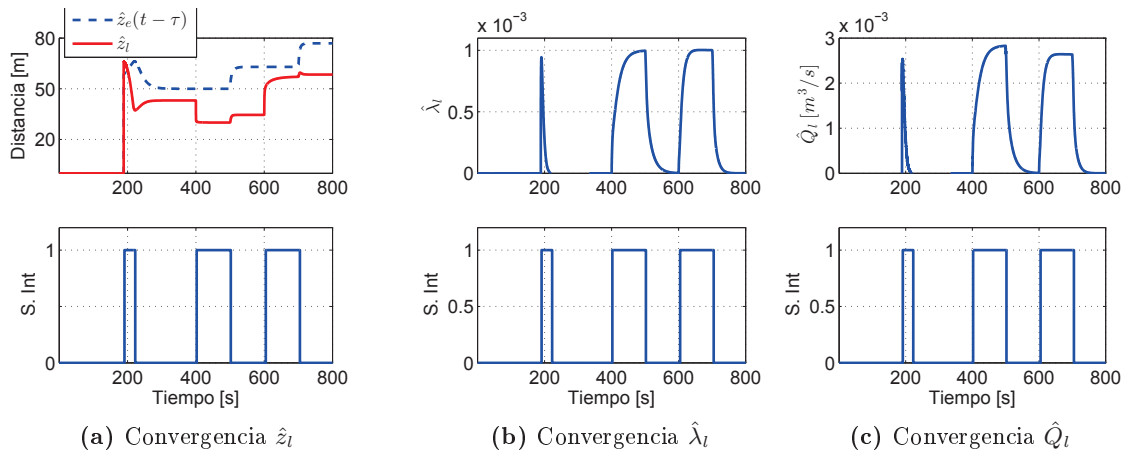


Fig 5.5 Señales obtenidas de los estimadores esclavos

En la Figura 5.6 a) y b) se muestra la dinámica de las ganancias de los estimadores esclavos,  $\bar{K}_{e1}$  y  $\bar{K}_{e2}$ , se observa cómo al igual que las ganancias de los estimadores maestros se ajustan conforme se presentan las fugas.

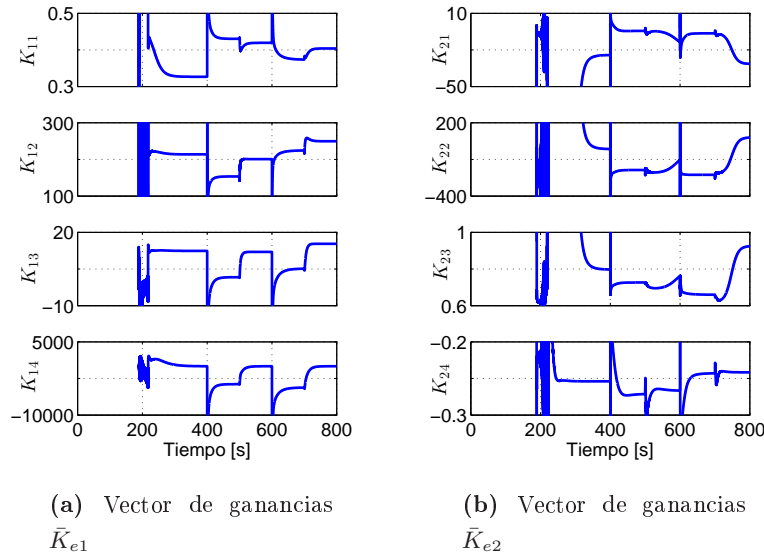


Fig 5.6 Ajuste de ganancias de los estimadores esclavos

Los valores finales a los que convergen los parámetros estimados de las fugas, se muestran en la tabla 5.2, los valores mostrados en dicha tabla son los valores finales antes de que la señal de interpretación cambie de estado.

**Tabla 5.2** Valores estimados

	$\hat{z}_e$ m	$\hat{Q}_e$ m <sup>3</sup> /s (10 <sup>-3</sup> )	$\hat{\lambda}_e$ u (10 <sup>-3</sup> )	$z_l$ m	$Q_l$ m <sup>3</sup> /s (10 <sup>-3</sup> )	$\hat{\lambda}_l$ u (10 <sup>-3</sup> )
$f_1$	50	3.043	1	-	-	-
$f_2$	62.961	5.818	2.014	30	2.818	9.97
$f_3$	76.879	8.354	3.066	57.19	2.588	1.001

Para confirmar que los valores estimados y calculados son los correctos, se puede aplicar las ecuaciones de equivalencia para los flujos (2.9), para el escenario donde se presenta la segunda fuga, donde  $Q_{f1} = Q_e(f_1)$  y  $Q_{f2} = Q_l(f_2)$ , entonces,

$$\begin{aligned} 5.818(10^{-3}) &= Q_e(f_1) + Q_l(f_2), \\ 5.818(10^{-3}) &\approx 5.861(10^{-3}), \end{aligned}$$

donde el error  $|e| = 0.73\%$ , y para el caso de la posición equivalente se despeja  $z_e$  de la ecuación 2.10, donde  $z_1 = z_e(f_1)$ ,  $z_2 = z_l(f_2)$ , entonces se tiene la ecuación

$$z_e = \left( \frac{\bar{Q}_{out}}{2\bar{Q}_{out}\bar{Q}_e + \bar{Q}_e^2} \right) \left[ z_1 \left( \frac{\bar{Q}_{f1}}{\bar{Q}_{out}} \right) (2\bar{Q}_{f2} + \bar{Q}_{f1}) + (z_1 + z_2) \left( \bar{Q}_{f2} \left( 2 + \frac{\bar{Q}_{f2}}{\bar{Q}_{out}} \right) \right) \right],$$

$$62.961 \approx 63.32,$$

que genera un error  $|e| = 0.57\%$ . De igual forma puede usarse la expresión aproximada para obtener la posición (2.11) obteniendo un resultado

$$62.961 \approx 64.9,$$

generando un error  $|e| = 3.07\%$ . Con esto se observa que los errores entre los parámetros estimados equivalentes y los parámetros estimados de cada fuga cumplen con las relaciones de equivalencia, arrojando errores que son producto de la precisión de las mediciones.

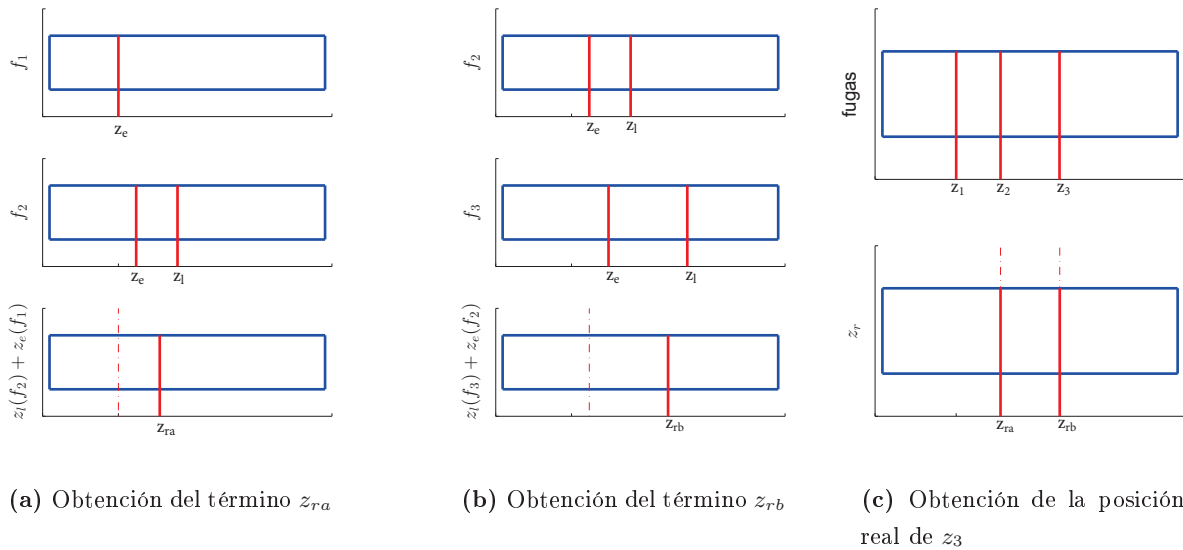
Se observa que a partir de la tercera fuga los valores estimados de los parámetros ( $\hat{z}_l, \hat{\lambda}_l, \hat{Q}_l$ ) son medidos respecto a los parámetros equivalentes y para encontrar las posiciones reales de las fugas sobre el ducto, se propone la ecuación (5.1), con la que es posible encontrar el valor real de la posición desde la tercer fuga; el término  $z_{ra}$  tiene por objetivo calcular la distancia del inicio del ducto a la posición de la fuga  $n-1$ , y el término  $z_{rb}$  calcula la distancia de inicio del ducto a la posición de la fuga  $n$  con lo que al restar dichas distancias se obtiene la posición real de la fuga  $n$  respecto a la fuga  $n-1$ . Esta ecuación es únicamente válida a partir de la fuga  $n = 3, 4, \dots$ ; en la Figura 5.7, se observa esquemáticamente el calculo de los términos  $z_{ra}$  y  $z_{rb}$  para el caso de tres fugas.

$$z_r(f_n) = \underbrace{(z_l(f_n) + z_e(f_{n-1}))}_{z_{rb}} - \underbrace{(z_l(f_{n-1}) + z_e(f_{n-2}))}_{z_{ra}} \quad (5.1)$$

donde  $f_n$  hace referencia a la fuga  $n$ -ésima. Para comprobar esta expresión con los parámetros estimados, se tiene que

$$\begin{aligned} z_r(f_3) &= (57.19 + 62.961) - (30 + 50) \\ &= 40.151 \end{aligned}$$

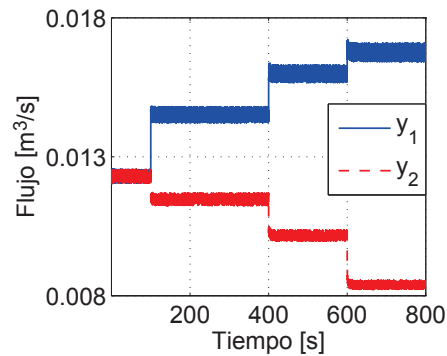
y el error entre la posición real (40 m) y la posición estimada es de  $|e| = 0.37\%$ , con lo cual se muestra que los estimadores maestros y esclavos convergen a los parámetros correctos.



**Fig 5.7** Obtención de la posición real  $z_3$  sobre el ducto

En la Figura 5.7 **a)** se presentan los esquemas de las secciones del ducto al presentarse una y dos fugas, donde dichas secciones estarán definidas por las estimaciones de  $\hat{z}_e$  y  $\hat{z}_l$ , además de mostrar gráficamente la sección generada por el término  $z_{ra}$ , en los esquemas **b)** se observan las secciones generadas por el escenario de dos y tres fugas y de igual forma la obtención del término  $z_{rb}$ , finalmente para corroborar lo propuesto en los esquemas **c)** se observa como coinciden los términos calculados con las posiciones reales de las fugas.

A continuación se presentan las mismas simulaciones con ruido 2% en las mediciones de flujos, cabe mencionar que se utilizaron las mismas matrices  $Q$  y  $R$  que se diseñaron para el sistema sin presencia de perturbaciones ni consideraciones de ruido, dichas matrices y el desarrollo para la obtención de los vectores de ganancias se muestra en el apéndice A.



**Fig 5.8** Salidas medidas

Resultado de los estimadores maestros.

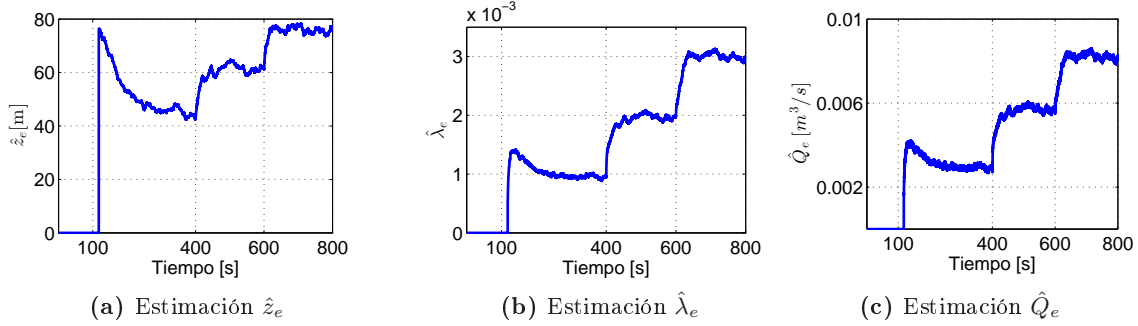


Fig 5.9 Señales obtenidas por los estimadores maestros

Resultados de los estimadores esclavos

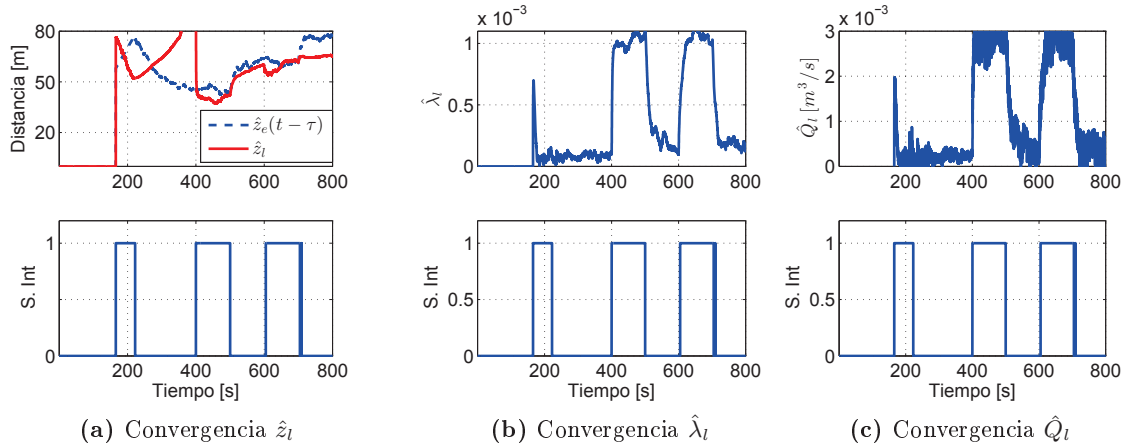


Fig 5.10 Señales obtenidas por los estimadores esclavos

Los valores mostrados en la tabla 5.3 corresponden al valor medio (\*) de los últimos 50 segundos antes de que se presente la fuga siguiente sobre los estimadores maestros, y los últimos 50 segundos antes de que la señal de interpretación se apague sobre los estimadores esclavos.

Tabla 5.3 Valores medios estimados con ruido 2%

	$\hat{z}_e^*$	$\hat{Q}_e^*$ ( $10^{-3}$ )	$\hat{\lambda}_e^*$ ( $10^{-3}$ )	$\hat{z}_l^*$	$\hat{Q}_l^*$ ( $10^{-3}$ )	$\hat{\lambda}_l^*$ ( $10^{-3}$ )
$f_1$	44.35	2.9	0.95	-	-	-
$f_2$	60.90	5.7	1.9	39.71	3.0	1.1
$f_3$	75.49	8.2	3.0	52.14	2.8	1.1

Se observa que para la estimación de los parámetros de las primeras 2 fugas existen errores con respecto al valor real, pero se tiene un estimado bastante cercano. Y para obtener la posición de la tercer fuga respecto a

la anterior se aplica la ecuación 5.1 que da el resultado

$$\begin{aligned} z_r(f_3) &= (62.14 + 60.90) - (39.71 + 44.35) \\ &= 38.98 \end{aligned}$$

y de igual forma en la posición para la tercer fuga, tiene un error, pero la estimación es bastante cercana al valor real.

## 5.2 Caso aguas arriba

Como en el caso anterior se simularan 3 fugas con las siguientes consideraciones

- $z_1 = 80 \text{ m}$ ,  $\lambda_1 = 0.001$  en un tiempo de 100 s
- $z_2 = 40 \text{ m}$ ,  $\lambda_2 = 0.001$  en un tiempo de 400 s
- $z_3 = 30 \text{ m}$ ,  $\lambda_3 = 0.001$  en un tiempo de 600 s

Las señales medidas son las mismas que en el caso anterior  $Q_{in} = y_1$  y  $Q_{out} = y_2$ , y de igual forma cuando se presenta una fuga existe un cambio abrupto en las señales medidas, como se muestra en la Figura 5.11,

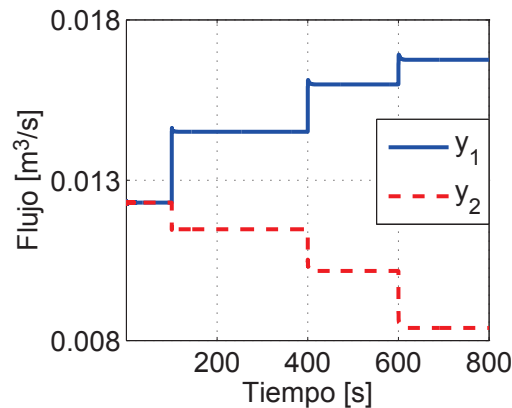


Fig 5.11 Salidas medidas

Los resultados obtenidos para el los estimadores maestros se muestran en la Figura 5.12 a), b) y c)

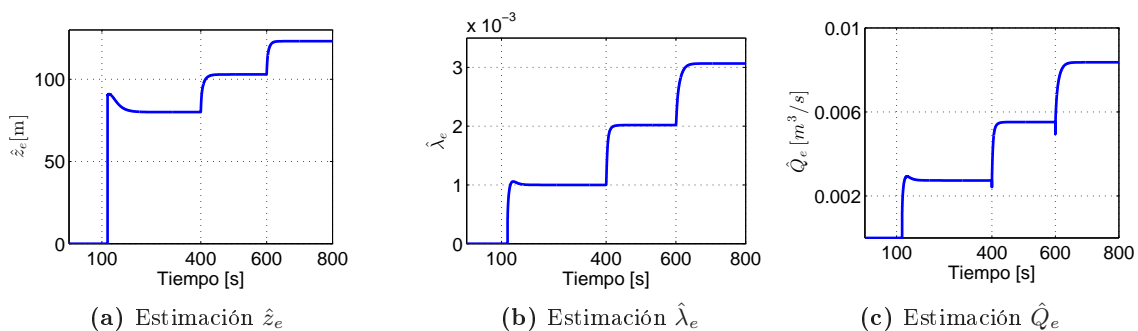


Fig 5.12 Señales obtenidas por los estimadores maestros

y los resultados obtenidos por los estimadores esclavos se muestran en 5.13 a), b), c),

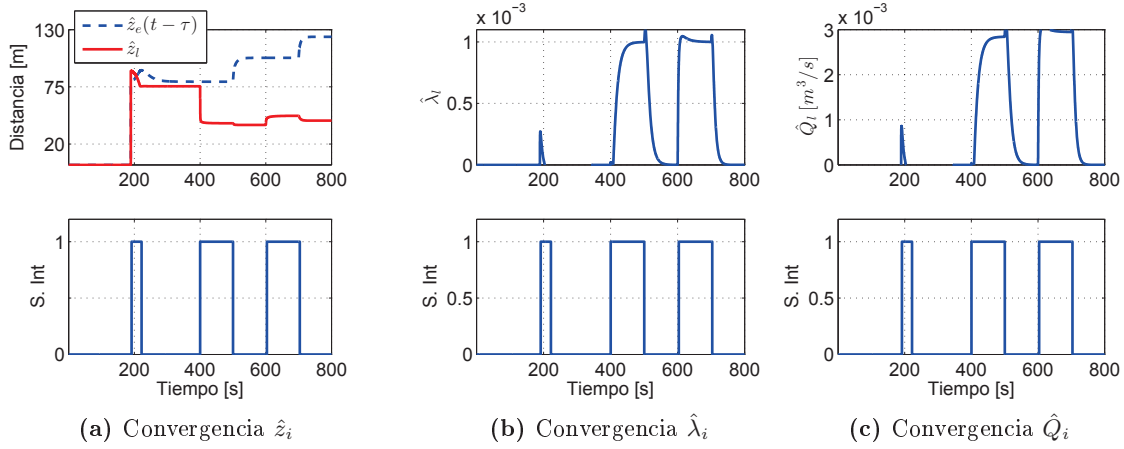


Fig 5.13 Señales obtenidas por los estimadores esclavos

Los resultados de los estimadores se registran en la tabla 5.4.

Tabla 5.4 Valores estimados

	$\hat{z}_e$	$\hat{Q}_e$ ( $10^{-3}$ )	$\hat{\lambda}_e$ ( $10^{-3}$ )	$z_l$	$Q_l$ ( $10^{-3}$ )	$\hat{\lambda}_l$ ( $10^{-3}$ )
$f_1$	80	2.735	1	-	-	-
$f_2$	102.91	5.818	2.018	40	2.842	9.987
$f_3$	123.12	8.360	3.066	47.19	2.948	1.001

y aplicando la ecuación (5.1) para encontrar la posición real de la fuga  $z_3$  sobre el ducto se tiene

$$z_r(f_3) = (47.19 + 102.91) - (40 + 80) = 30.1$$

se observa que se encuentra con bastante precisión la posición de la tercer fuga, de igual forma que se encontró en el caso de las fugas aguas abajo.

Finalmente se presentarán los resultados para el caso con ruido en la medición del 2% como se muestra en la Figura 5.14.



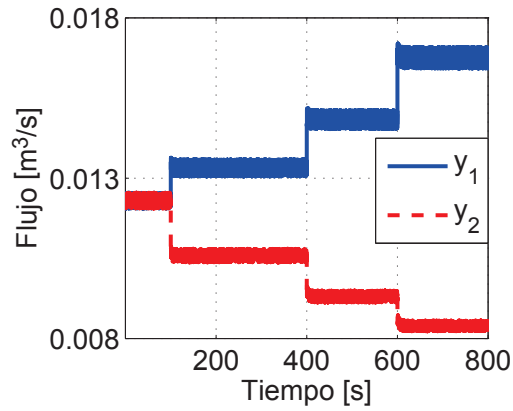


Fig 5.14 Salidas medidas

Los resultados obtenidos para el los estimadores maestros se muestran en la Figura 5.15 a), b) y c)

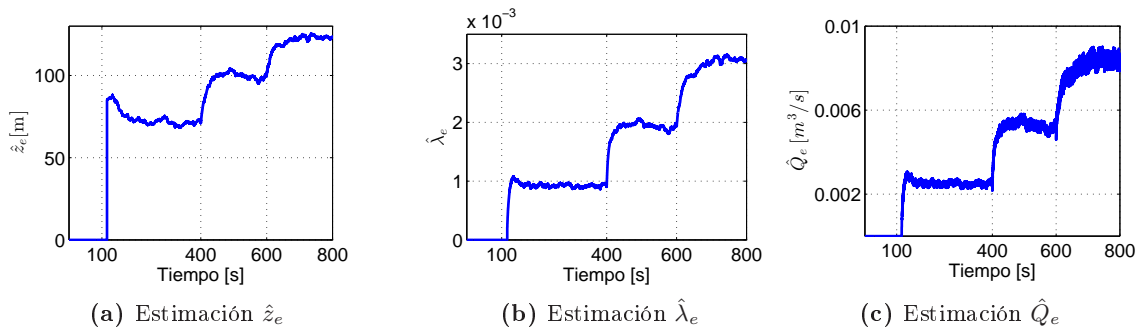


Fig 5.15 Señales obtenidas por los estimadores maestros

y los resultados obtenidos por los estimadores esclavos se muestran en 5.16 a), b), c),

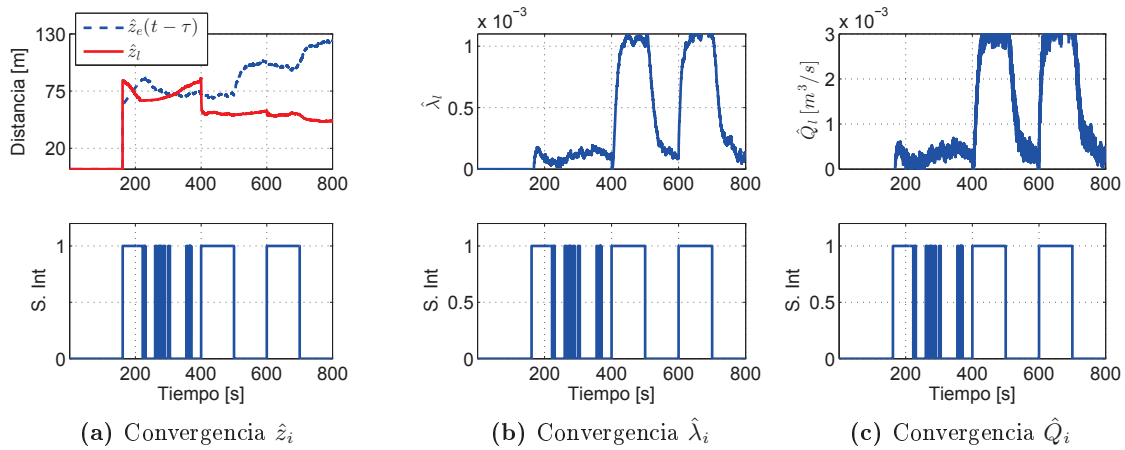


Fig 5.16 Señales obtenidas por los estimadores esclavos

Los valores mostrados en la tabla 5.5 corresponden al valor medio (\*) de los últimos 50 segundos antes de que se presente la fuga siguiente sobre los estimadores maestros, y los últimos 50 segundos antes de que la señal de interpretación se apague sobre los estimadores esclavos.

**Tabla 5.5** Valores medios estimados con ruido 2 %

	$\hat{z}_e^*$	$\hat{Q}_e^*$ ( $10^{-3}$ )	$\hat{\lambda}_e^*$ ( $10^{-3}$ )	$\hat{z}_l^*$	$\hat{Q}_l^*$ ( $10^{-3}$ )	$\hat{\lambda}_l^*$ ( $10^{-3}$ )
$f_1$	71.51	2.5	0.92	-	-	-
$f_2$	98.17	5.2	1.9	52.85	3.0	1.1
$f_3$	122.96	8.4	3.1	52.80	3.3	1.1

para encontrar la posición real de la tercer fuga, se aplica una vez más la expresión (5.1), y se obtiene

$$\begin{aligned} z_r(f_3) &= (52.8 + 98.17) - (52.85 + 71.51) \\ &= 26.61 \end{aligned}$$

Se observa que se tiene un error de cuatro metros con la posición real y cabe mencionar que la posición media estimada para la fuga dos y tres tiene prácticamente el mismo valor. Parecería que existe un error con la estimación, pero lo que realmente sucede es que la última fuga es muy cercana al borde de la región de búsqueda, lo cual, causa que el estimador responda un poco más lento y la estimación pierda precisión, efecto que se magnifica por la presencia de ruido en la medición; con todo y esta desventaja se observa que se obtuvieron resultados bastante cercanos a las posiciones reales.

Se escogieron en particular estas posiciones de fuga ya que representan los mismo puntos de fuga que en el caso en que se presentan aguas abajo de la fuga anterior, sólo que se presentan en sentido inverso, esto para ejemplificar que es posible identificar las mismas posiciones de las fugas sin importar el orden en que se presenten y sin importar si se presentan aguas arriba o aguas abajo, recordando que siempre y cuando estas aparezcan dentro de la región de búsqueda  $SR$ .

Se observa que el caso para múltiples fugas, tanto aguas abajo como aguas arriba está resuelto y se encontró una manera para identificar dónde se encuentra la fuga con base en la posición equivalente de las fugas.



## 6 Conclusiones

Se muestra un esquema para la detección de fugas secuenciales funcional, algo que no se había atacado en la literatura de diagnóstico de fugas. Se observó en las simulaciones la precisión del método con y sin ruido en la medición.

Es importante resaltar que la principal contribución de este trabajo es el esquema de detección e identificación de fallas secuenciales múltiples, pues como se mencionó en la introducción, el caso de detectar e identificar una sola fuga está resuelto y existen muchos métodos reportados para realizarlo. En este trabajo se utilizaron identificadores basados en el filtro de Kalman extendido por la facilidad de la implementación así como la robustez ante perturbaciones y ruido, además de la gran potencialidad de modificar las ganancias cada vez que una fuga se presenta.

También se atacó el problema de que las fugas se presenten aguas arriba de la anterior, resolviendo el problema de que las fugas puedan aparecer en cualquier parte del ducto.

Como trabajo pendiente queda probar el método sobre el sistema físico real y observar su comportamiento, además de plantear el caso de las fugas cuya posición relativa con respecto a  $z_e$  están indistintamente aguas arriba o aguas abajo, completando el problema real que las fugas aparezcan de manera arbitraria sin restricción. Otro aspecto importante que queda pendiente es el variar la región de búsqueda conforme los estimadores encuentran la posición de alguna fuga para modificar la restricción estática. Y el aspecto con mayor importancia por resolver es definir de manera analítica el tiempo  $\tau$  mínimo para los retardos en la señales de entrada de los estimadores esclavos, pues en este caso este tiempo determina la restricción de que tan espaciadas en el tiempo pueden aparecer las fugas sobre el ducto.

Otra cosa no menos importante es probar la convergencia dentro de la región de operación de manera analítica, pues sólo se consideró que los estimadores iniciaban suficientemente cerca del punto de operación pero no pudo obtenerse una formalización analítica que respaldara esta consideración.

Podría considerarse que en el caso con ruido en la medición el método pierde mucha precisión pero el efecto del ruido sobre la medición sobre los estimadores causa una gran variación en los estados, sin modificar el diseño de los estimadores, lo cual, podría resolverse de manera simple filtrando un poco la señal medida. En este caso se quiso ejemplificar que aun con un ruido sobre la medición, el método es capaz de identificar las fugas siempre y cuando estén suficientemente espaciadas en tiempo.



# Bibliografía

- Billman, L. y R. Isermann (1987). Leak detection methods for pipelines. *Automatica* **23**(3), 381–385.
- Chaudhry, M. C. (1979). *Applied hydraulic transients*. Von Nostrand Reinhold Co.
- Isermann, R. (1993). Fault diagnosis of machines via parameter estimation and knowledge processing. *Automatica* **29**, 815–835.
- Jiménez, L. y C. Verde (2011). Periodic residual for multileaks detection. En: *10th International Science and Technology Conference Diagnostics of Processes and Systems, Zamosc*. Poland.
- Kalman, R. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Basic Engineering* **82**, 34–45.
- Kalman, R. y R. S. Bucy (1960). New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering* **82**(D), 35–40.
- Korbicz, J., J. Kościelny, Z. Kowalczyk y W. Cholewa (2004). *Fault diagnosis. Models, Artificial Intelligence, Applications*. Springer-Verlag.
- MATLAB R2008 (2008). *Toolbox Control Systems*. Math-Works, Inc.. Natick, Massachusetts.
- Moustafa, K.A. F., Y. Kaik, S. Alda y F. Omar (2012). Leak localization in pipelines via computational pipeline monitoring. *Journal of Pressure Vessel Technology, ASME* **134**, 7 pages.
- Negrete, M. A. y C. Verde (2012). Multi-leaks reconstruction in pipelines by sliding mode observer. En: *8th IFAC Safeprocess2012*.
- Polyanin, A. D. y V. F. Zaitsev (2014). *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press.
- Reif, K., F. Sonnenmann y R. Unbehauen (1998). An ekb-based nonlinear observer with a prescribed degree of stability. *Automatica* **34**(9), 1119–1198.
- Torres, L., G. Besançon y D. Georges (2012). EKF-like observer with stability for a class of triangular nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*.
- Verde, C. (2001). Multi-leak detection and isolation in fluid pipelines. *Control Engineering Practice* **9**, 673–682.
- Verde, C. (2005). Accommodation of multi-leaks positions in a pipeline. *Control Engineering Practice* **13**, 1071–1078.

- Verde, C, L. Molina y L. Torres (2014). Parameterized transient model of a pipeline for multiple leaks location. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries* **29**, 177–185.
- Verde, C., S. Gentil y R. Morales (2013). *Monitoreo y Diagnóstico Automático de Fallas en sistemas dinámicos*. Trillas-UNAM.
- Willsky, A. S. y H. L. Jones (1976). A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems. *IEEE Trans. Automatic Control* **21**, 108–121.
- Wylie, E. B. y V. L. Streeter (1978). *Fluid Transient*. McGraw-Hill.

## A Filtro de Kalman extendido (EKF)

En este apéndice se muestra la teoría empleada para el diseño de los estimadores, así como los parámetros y el procedimiento realizado para el diseño y obtención del vector de ganancias de cada uno de los estimadores ocupados en este trabajo.

### A.1 Teoría

En particular en este trabajo se utilizó la teoría propuesta en (Reif *et al.*, 1998) donde se modifica ligeramente el diseño del EKF al agregar un parámetro  $\alpha$  que se describirá más adelante, considerando un sistema no lineal de la forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad (\text{A.1})$$

$$y(t) = h(x(t)), \quad (\text{A.2})$$

donde  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  es el vector de estado,  $u(t) \in \mathfrak{R}^p$  la entrada y  $y(t) \in \mathfrak{R}^m$  la salida. Las funciones no lineales  $f(\cdot, \cdot)$  y  $h(\cdot)$  de igual forma la entrada  $u(\cdot)$  se asumen continuas y al menos diferenciables una vez. Para el sistema (A.1-A.2) se puede construir un observador de la forma

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}(t), u(t)) + K(t)[y(t) - h(\hat{x}(t))] \quad (\text{A.3})$$

donde el estado estimado esta denotado por  $\hat{x}(t)$  y la matriz  $q \times m$  de ganancias  $K(t)$  es variable en el tiempo. Para calcular esta matriz de ganancias es necesario primero resolver la ecuación diferencial de Riccati

$$\dot{P} = (A(t) + \alpha I)P(t) + P(t)(A^T(t) + \alpha I) - P(t)C^T(t)R^{-1}C(t)P(t) + Q \quad (\text{A.4})$$

donde

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t), u(t)), \\ C(t) &= \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}(t)), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

con  $\alpha > 0$  y matrices positivas definidas para  $Q$  y  $R$ , y la matriz de ganancias se se obtiene a partir de

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}. \quad (\text{A.6})$$

Además, para definir el error de observación

$$f(x(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), u(t)) = A(t)(x(t) - \hat{x}(t)) + \varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t))$$



junto con

$$h(x(t)) - h(\hat{x}(t)) = C(t)(x(t) - \hat{x}(t)) + \chi(x(t), \hat{x}(t))$$

es claro que  $\varphi(x(t), \hat{x}(t), u(t))$  y  $\chi(x(t), \hat{x}(t))$  son términos de segundo orden o de orden superior en el error

$$e_x = x(t) - \hat{x}(t), \quad (\text{A.7})$$

con esto el error dinámico está compuesto de la forma

$$\dot{e}_x = [A(t) - K(t)C(t)]e_x + \varphi(x(t), \hat{x}(t), z(t)) - K(t)\chi(x(t), \hat{x}(t)), \quad (\text{A.8})$$

una vez definido el error dinámico, se puede dar paso a las siguientes definiciones que condicionan el tipo de convergencia del observador.

**Definición 1** La ecuación A.8 tiene un punto de equilibrio  $e_x(t) = 0$  y es exponencialmente estable si  $\varepsilon, \eta, \theta > 0$  son números positivos reales tal que

$$\|e_x(t)\| \leq \eta \|e_x(0)\| e^{-\theta t}, \quad (\text{A.9})$$

para todo tiempo  $t \geq 0$  y para cualquier solución de  $e_x(\cdot)$  de la ecuación A.8 en  $e_x(0) \in B_\varepsilon$  donde  $B_\varepsilon = \{v \in \mathbb{R}^q \mid \|v\| < \varepsilon\}$

**Definición 2** El observador dado por la ecuación (A.3) es un observador exponencial, si (A.5) tiene un punto de equilibrio exponencialmente estable en el origen.

**Nota** La definición de observador exponencial es muy similar a la *Definición 1*, las diferencias son que se restringe a la inyección de la salida lineal pero se permite una ganancia variable  $K(t)$  y se generaliza a una estabilidad local, en lugar de una global para la ecuación (A.8)

Las pruebas de estabilidad exponencial para el observador están reportadas en el artículo mencionado. Cabe señalar que el término  $\alpha$  que se muestra en la ecuación diferencial de Riccati (A.4) tiene por objetivo recorrer sobre el eje imaginario la referencia, lo que tiene por efecto directo en  $\theta$  que es el parámetro que determina el decaimiento exponencial del error dinámico, con esto, modificando  $\alpha$  puede establecerse por adelantado  $\theta$ , logrando un grado de libertad para la estabilidad y modificando el tiempo de convergencia.

## A.2 Escenario fugas aguas abajo

### A.2.1 Detectores

Para los detectores de fugas se diseñaron observadores basados en el filtro de Kalman extendido, como los propuestos en (3.6-3.9), donde es necesario obtener la matriz jacobiana  $A_i$  de los subsistemas 1 y 2 (2.21-2.25), las cuales son necesarias para el diseño de los EKF's, dichas matrices se presentan a continuación

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2\mu x_{11} & -\frac{a_1}{\hat{z}_e} & 0 \\ \frac{a_2}{\hat{z}_e} & -\frac{a_2 \lambda_e}{2\hat{z}_e \sqrt{x_{12}}} & -\frac{a_2}{\hat{z}_e \hat{z}_l} \\ 0 & a_1 & -\frac{\mu}{\hat{z}_e} (2x_{13} + 2y_2(\hat{z}_e - L + \bar{z}_l)) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

donde es necesario aclarar que  $\hat{z}_e$  es el valor estimado de la posición equivalente y  $\bar{z}_l$  la señal periódica con la que se barre el segundo tramo en búsqueda de una nueva fuga una vez estimada  $\hat{z}_e$ , recordando que el observador se utiliza como detector para la última fuga y que solo genera la señal de interpretación para observar cuando el segundo observador está puesto en funcionamiento. Para el observador del subsistema nominal 2

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\mu(2x_{21}-2y_1\bar{z}_e)}{SR-\bar{z}_e} & -a_1 & 0 \\ \frac{a_2}{(SR-\bar{z}_e)^2} & 0 & -\frac{a_2}{SR-\bar{z}_e} \\ 0 & \frac{a_1}{L-SR} & -2\mu x_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

donde  $\bar{z}_e$  es la señal periódica con que se rastrea la fuga en la región de búsqueda  $SR$ .

Una vez calculadas las matrices jacobianas, es necesario proponer las matrices de ponderación  $Q$  y  $R$  para resolver dinámicamente la ecuación diferencial de Riccati (A.4), las matrices  $Q$  y  $R$  para ambos casos se proponen con los valores

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}; \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

estas matrices junto la matriz identidad  $I$  de rango  $3 \times 3$ , y el parámetro  $\alpha = 0.01$  mismo que se utiliza en todos los casos y sintonizado en base a la respuesta de las simulaciones, estas matrices se utilizaron para implementar la ecuación diferencial de Riccati y obtener una respuesta en línea, cuya solución es una matriz  $P_i$  necesaria para el cálculo del vector de ganancias  $K_i$  definido de la forma

$$K_i = P_i C_i^T R_i^{-1}, \quad (\text{A.15})$$

es claro que la matriz  $P$  cambia con el tiempo y de la misma forma la matriz  $K_i$  se ajusta conforme cambian los parámetros del sistema o dicho de otra forma, cuando se presentan las fugas.

### A.2.2 Estimadores maestros

Para el estimador maestro de  $\lambda_e$ , se parte del subsistema (2.21) del cual se desconoce este parámetro, y el parámetro  $z_e$ ,  $z_e$  puede ser estimado con el subsistema (2.24). Como se mencionó en la sección 4.1 se aumenta el estado con el parámetro desconocido y se diseña un observador que tiene la forma (4.12-4.13), entonces, la matriz jacobiana  $A_1$  necesaria para el diseño, estará definida por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2\mu x_{11} & -\frac{a_1}{z_e} & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{z_e} & -\frac{a_2 \lambda_e}{z_e \sqrt{2x_{12}}} & -\frac{a_2}{z_e(SR-z_e)} & -\frac{a_2 \sqrt{x_{12}}}{z_1} \\ 0 & a_1 & -\frac{\mu(2x_{13}-2y_2(L-SR))}{(SR-z_e)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y la matriz  $C_1$  se mantiene de igual forma

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

las matrices  $R_1$  y  $Q_1$  para la ecuación diferencial de Riccati

$$R_1 = [1]; \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

y el parámetro  $\alpha_1 = 0.01$ , y la matriz  $I$  es la matriz identidad de  $4 \times 4$ , y de igual forma que en el caso de los detectores se implementó en línea la ecuación diferencial de Riccati (A.4), para obtener la matriz  $P_1$  y así obtener el vector de ganancias  $\bar{K}_{m1}$ , este proceso se repite de igual forma para el otro estimador maestro, los estimadores esclavos, y los estimadores maestros esclavos para el caso donde la fuga se presenta aguas arriba de la anterior, dicho esto, a continuación se presentaran las matrices jacobianas y de moderación en cada uno de los casos.

Para el estimador maestro de  $\hat{z}_e$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\mu(2x_{21}-2y_1z_e)}{SR-z_e} & -a_1 & 0 & \frac{2\mu y_1(x_{21}-y_1z_e)}{SR-z_e} - \frac{\mu(x_{21}-y_1z_e)^2}{(SR-z_e)^2} - \mu y_1^2 \\ \frac{a_2}{(SR-z_1)^2} & 0 & -\frac{a_2}{SR-z_e} & \frac{a_2\left(\frac{x_{21}-y_1z_e}{(SR-z_e)^2} - \frac{y_1}{SR-z_e}\right)}{SR-z_e} - \frac{a_2\left(x_{23} - \frac{(x_{21}-y_1z_e)}{(SR-z_e)}\right)}{(SR-z_e)^2} \\ 0 & \frac{a_1}{(L-SR)} & -2\mu x_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

y

$$C_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0],$$

las matrices  $R_2$  y  $Q_2$  para la ecuación diferencial de Riccati

$$R_2 = [1]; \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.5(10^6) \end{bmatrix},$$

y el parámetro  $\alpha_2 = 0.01$ , y la matriz  $I$  es la matriz identidad de rango  $4 \times 4$ .

Debido a que se tiene una mayor incertidumbre sobre el estado que se desea estimar, se definió un valor tan grande en relación a los otros elemento de la diagonal de la matriz  $Q$ , además tomando en cuenta que la estimación se realiza de manera coordinada con el esquema propuesto en el desarrollo de este trabajo, este valor fue ajustado en simulación para obtener la convergencia de ambos estimadores maestros, dicho procedimiento se repitió en el caso de los estimadores esclavos.

### A.2.3 Estimadores esclavos

Las matrices jacobianas para el estimador del parámetro  $\hat{z}_l$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2\mu x_{11} & -\frac{a_1}{\hat{z}_e} & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{\hat{z}_e} & -\frac{a_2 \hat{\lambda}_e}{2\hat{z}_e \sqrt{x_{12}}} & -\frac{a_2}{z_l \hat{z}_e} & -\frac{a_2}{\hat{z}_e} \left( \frac{y_2}{z_l} - \frac{x_{13}+y_2(z_l-L+\hat{z}_e)}{z_l^2} \right) \\ 0 & a_1 & -\frac{\mu(2x_{13}+2y_2(z_l-L+\hat{z}_e))}{z_l} & \mu y_2^2 + \frac{\mu(x_{13}+y_2(z_l-L+\hat{z}_e))^2}{z_l^2} - \frac{2\mu y_2(x_{13}+y_2(z_l-L+\hat{z}_e))}{z_l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

las matrices  $Q_1$  y  $R_1$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}; \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.5(10^6) \end{bmatrix}.$$

Para el caso del estimador del parámetro  $\hat{\lambda}_l$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\mu(2x_{21}-2y_1\hat{z}_e)}{z_1} & -a_1 & 0 & 0 \\ \frac{a_2}{z_1^2} & -(a_2\lambda_l)/(2z_1\sqrt{x_{22}}) & -\frac{a_2}{z_1} & -\frac{a_2\sqrt{x_{22}}}{z_1} \\ 0 & -\frac{a_1}{z_1-L+\hat{z}_e} & -2\mu x_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

las matrices  $R_2$  y  $Q_2$  para la ecuación diferencial de Riccati

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}; \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

## A.3 Escenario fugas aguas arriba

### A.3.1 Detectores

Para los detectores de fugas 1 y 2 se tiene

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\mu(2x_{11}-2y_1(L-(\hat{z}_e+\bar{z}_l)))}{\bar{z}_l} & -a_1 & 0 \\ \frac{a_2}{\bar{z}_l^2} & -\frac{(a_2\hat{\lambda}_e)}{2\bar{z}_l\sqrt{x_{12}}} & -\frac{a_2}{\bar{z}_l} \\ 0 & \frac{a_1}{\bar{z}_e} & -2\mu x_{13} \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2\mu x_{21} & -\frac{a_1}{L-SR} & 0 \\ \frac{a_2}{L-SR} & 0, -\frac{a_2}{(L-SR)(SR-\bar{z}_e)} & \\ 0 & a_1 & -\frac{\mu(2x_{23}-2y_2\bar{z}_e)}{SR-\bar{z}_e} \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con las matrices  $Q$  y  $R$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}; \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{A.16}$$

### A.3.2 Estimadores maestros

Para el estimador del parámetro  $\hat{\lambda}_e$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{z_l}(2x_{11} + 2y_1(z_e - L + z_l)) & -a_1 & 0 & a_{14} \\ \frac{a_2}{z_l^2} & -\frac{a_2\lambda_e}{2z_l\sqrt{x_{12}}} & -\frac{a_2}{z_l} & a_{24} \\ 0 & \frac{a_1}{z_e} & -2\mu x_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

donde los términos

$$a_{14} = \mu y_1^2 + \frac{\mu(x_{11} + y_1(z_e - L + z_l))^2}{z_l^2} - \frac{2\mu y_1(x_{11} + y_1(z_e - L + z_l))}{z_l},$$

$$a_{24} = \frac{a_2 y_1 - a_2(x_{13} + \lambda_e \sqrt{x_{12}})}{z_l^2} - \frac{2(a_2(x_{11} + y_1(z_e - L + z_l)) - a_2 z_l(x_{13} + \lambda_e \sqrt{x_{12}}))}{z_l^3},$$

y recordando que  $z_l = SR - z_e$ , y las matrices  $Q$  y  $R$  para la ecuación diferencial de Riccati las matrices  $Q_1$  y  $R_1$

$$R_1 = [1]; \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.5(10^6) \end{bmatrix}.$$

Para el estimador del parámetro  $\hat{z}_e$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2\mu x_{21} & \frac{a_1}{z_e - L + z_l} & 0 & 0 \\ -\frac{a_2}{z_e - L + z_l} & \frac{a_2 \lambda_l}{2(z_e - L + z_l)\sqrt{x_{22}}} & \frac{a_2}{z_l(z_e - L + z_l)} & \frac{a_2 \sqrt{x_{22}}}{z_e - L + z_l} \\ 0 & a_1 & -\frac{\mu}{z_l}(2x_{23} - 2y_2 z_e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

las matrices  $R_2$  y  $Q_2$  para la ecuación diferencial de Riccati

$$R_2 = [1]; \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix},$$

### A.3.3 Estimadores esclavos

Para el estimador del parámetro  $\hat{z}_l$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{z_l}(2x_{11} + 2y_1(z_e - L + z_l)) & -a_1 & 0 & a_{14} \\ \frac{a_2}{z_l^2} & -\frac{a_2 \lambda_e}{2z_l \sqrt{x_{12}}} & -\frac{a_2}{z_l} & a_{24} \\ 0 & \frac{a_1}{z_e} & -2\mu x_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

donde

$$a_{14} = \mu y_1^2 + \frac{\mu}{z_l^2}(x_{11} + y_1(z_e - L + z_l))^2 - \frac{2\mu y_1}{z_l}(x_{11} + y_1(z_e - L + z_e)),$$

$$a_{24} = \frac{a_2 y_1 - a_2(x_{13} + \lambda_e \sqrt{x_{12}})}{z_l^2} - \frac{2(a_2(x_{11} + y_1(z_e - L + z_l)) - a_2 z_l(x_{13} + \lambda_e \sqrt{x_{12}}))}{z_l^3},$$

para la ecuación diferencial de Riccati se definen las matrices  $Q_1$  y  $R_1$

$$R_1 = [1]; \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.5(10^6) \end{bmatrix}.$$

Finalmente para el estimador del parámetro  $\hat{\lambda}_l$  se genera la matriz jacobiana

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2\mu x_{21} & \frac{a_1}{z_e - L + z_l} & 0 & 0 \\ -\frac{a_2}{z_e - L + z_l} & \frac{a_2 \lambda_l}{2\sqrt{x_{22}}(z_e - L + z_l)} & \frac{a_2}{z_l(z_e - L + z_l)} & \frac{a_2 \sqrt{x_{22}}}{z_e - L + z_l} \\ 0 & a_1 & -\frac{\mu(2x_{23} - 2y_2 z_l)}{z_l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

y las matrices  $R_2$  y  $Q_2$  para la ecuación diferencial de Riccati

$$R_2 = [1]; \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix},$$

Con estas matrices, se implementaron sobre el simulador para cada caso obteniendo el vector de ganancias  $\bar{K}_i$ , donde la condición inicial para la ecuación diferencial de Riccati para la matriz  $P$  se propuso como la identidad ( $P(0) = I$ ).



## B Códigos implementados en el simulador

En este apéndice se muestran los códigos diseñados en MATLAB para la simulación del modelo dinámico con tres fugas sobre el ducto (2.6-2.7), los códigos para los detectores, y finalmente los códigos para los estimadores maestros y esclavos.

Solo se presentan los códigos para el caso de fugas aguas abajo, ya que los códigos implementados para el caso aguas arriba es idéntico en estructura, solo con las consideraciones del modelo y sus respectivas matrices.

### B.1 Modelo dinámico

```

1  function [Q1p, H2p, Q2p, H3p, Q3p, H4p, Q4p] = ...
2  fcn (u1, u2, t, z1, z2, z3, Q1, H2, Q2, H3, Q3, H4, Q4)
3  % Parámetros
4  L=200;
5  D=0.1;
6  b=1250;
7  f=0.02;
8  % SR=100;
9  g=9.81;
10 A=pi*(D/2)^2;
11 mu=f/(2*D*A);
12 a1=g*A;
13 a2=b^2/(g*A);
14 z4=L-(z1+z2+z3);
15
16 % Tiempo de fugas
17 if t>100
18     lambda1=0.001;
19 else
20     lambda1=0;
21 end
22 if t>400
23     lambda2=0.001;
24 else
25     lambda2=0;

```



```

26 end
27 if t>600
28     lambda3=0.001;
29 else
30     lambda3=0;
31 end
32
33 % Modelo no lineal
34 Q1p=-mu*Q1^2+((a1*u1)/z1)-(H2*a1)/z1;
35 H2p=(a2*(-Q2+Q1-sqrt(abs(H2))*lambda1))/z1;
36 Q2p=-mu*Q2^2+(a1*(H2-H3))/z2;
37 H3p=(a2*(-Q3+Q2-lambda2*sqrt(abs(H3))))/z2;
38 Q3p=-mu*Q3^2-((a1*H4)/z3)+(H3*a1)/z3;
39 H4p=(a2*(-Q4+Q3-lambda3*sqrt(abs(H4))))/z3;
40 Q4p=-mu*Q4^2-((a1*u2)/z4)+(H4*a1)/z4;

```

## B.2 Detectores

```

1 function [xo11p,xo12p,xo13p,P1p,r1] =...
2 fcn(u1,u2,tr2,y1,y2,xo11,xo12,xo13,z1b,lambda1,P1)
3 % Parámetros
4 L=200;
5 D=0.1;
6 b=1250;
7 f=0.02;
8 g=9.81;
9 A=pi*(D/2)^2;
10 mu=f/(2*D*A);
11 a1=g*A;
12 a2=b^2/(g*A);
13 %Definición errores de seguimiento
14 r1=y1-xo11;
15 %Condiciones estáticas
16 z2b=tr2;
17 z3b=L-(z2b+z1b);
18 % Observador Kalman
19 A1=[ -2*mu*xo11,-a1/z1b,0;
20      a2/z1b,-(a2*lambda1)/(2*abs(xo12)^(1/2)*z1b),-a2/(z1b*z2b);
21      0,1,-(mu*(2*xo13 + 2*y2*(z1b - L + z2b)))/z2b];
22 %Matriz C1
23 C1=[1 0 0];
24 %Matrices R y Q Kalman
25 R1=1;

```

```

26 Q1=[1 0 0;
27     0 1 0;
28     0 0 1];
29 %Identidad
30 I=eye(3);
31 %Parámetro alpha
32 alpha1=0.01;
33 %Ecuación de Riccati
34 P1p=(A1 + alpha1*I)*P1 + P1*(A1'+alpha1*I) - P1*C1'*(inv(R1))*C1*P1+Q1;
35 %Vector de ganancias1
36 K1=P1*C1'*(inv(R1));
37 %Subsistema 2 observado
38 xo11p=(a1*(u1 - xo12))/z1b - mu*xo11^2 + K1(1)*r1;
39 xo12p=-a2*((xo13 - y2*z3b)/z2b - xo11 + ...
40 lambda1*sqrt(abs(xo12)))/z1b + K1(2)*r1;
41 xo13p=a1*xo12 - a1*u2 - mu*y2^2*z3b - (mu*(xo13 - y2*z3b)^2)/z2b + K1(3)*r1;
42
43 %Detector 2
44 function [xo21p,xo22p,xo23p,P2p,r2] = fcn(u1,u2,tr,SR,y1,y2,xo21,xo22,xo23,P2)
45 %Parámetros
46 L=200;
47 D=0.1;
48 b=1250;
49 f=0.02;
50 g=9.81;
51 A=pi*(D/2)^2;
52 mu=f/(2*D*A);
53 a1=g*A;
54 a2=b^2/(g*A);
55 %Definición errores de seguimiento
56 r2=y2-xo23;
57 %Condiciones estáticas
58 z1b=tr;
59 z2b=SR-z1b;
60 z3b=L-SR;
61 %Filtro de Kalman
62 A2 = [ -(mu*(2*xo21 - 2*y1*(SR - z2b)))/z2b,-a1,0;
63         a2/z2b^2,0,-a2/z2b;
64         0,a1/(L - SR),-2*mu*xo23 ];
65 C2=[0 0 1];
66 %Matrices R y Q Kalman
67 R2=1;

```

```

68 Q2=[1 0 0;
69      0 1 0;
70      0 0 1];
71 %Parámetro alpha
72 alpha2=.001;
73 I=eye(3);
74 %Ecuación de Riccati
75 P2p=(A2 + alpha2*I)*P2 + P2*(A2'+alpha2*I) - P2*C2'*(inv(R2))*C2*P2+Q2;
76 %Vector de ganancias1
77 K2=P2*C2'*(inv(R2));
78 % Subsistema 1 con z2=triangular
79 xo21p=a1*u1 -a1*xo22 -mu*y1^2*z1b -(mu*(xo21 - y1*z1b)^2)/z2b + K2(1)*r2;
80 xo22p=-(a2*(xo23 -(xo21 -y1*z1b)/z2b))/z2b + K2(2)*r2;
81 xo23p=-mu*xo23^2 -((a1*(u2 -xo22))/(z3b)) + K2(3)*r2;

```

### B.3 Estimadores maestros

```

1 %Estimador parámetro |lambda_e
2 function [xo21p, xo22p, xo23p, z1bp, es, xo11p, xo12p, xo13p, lambda1p, zs, tf1, Qfi, K1, K2]=
3 fcn(u1, u2, SR, y1, y2, xo21, xo22, xo23, xo11, xo12, xo13, lambda1, z1b, P1, P2)
4 % Parámetros
5 L=200;
6 D=0.1;
7 b=1250;
8 f=0.02;
9 g=9.81;
10 A=pi*(D/2)^2;
11 mu=f/(2*D*A);
12 a1=g*A;
13 a2=b^2/(g*A);
14 %Definición errores de seguimiento
15 e1=y1-xo11;
16 e2=y2-xo23;
17 %Condición estática
18 z2b=SR-z1b;
19 z3b=L-(z2b+z1b);
20 %Matriz A1
21 A1=[-2*mu*xo11, -a1/z1b, 0, 0;
22      a2/z1b, -(a2*lambda1)/(2*abs(xo12)^(1/2)*z1b), ...
23      -a2/(z1b*(SR - z1b)), -(a2*abs(xo12)^(1/2))/z1b;
24      0, a1, -(mu*(2*xo13 - 2*y2*(L - SR)))/(SR - z1b), 0;
25      0, 0, 0, 0];
26 %Matriz C1

```

```

27 C1=[1 0 0 0];
28 %Matrices R y Q Kalman
29 R1=1;
30 Q1=[1 0 0 0;
31     0 1 0 0;
32     0 0 1 0;
33     0 0 0 .1];
34 %Identidad
35 I=eye(4);
36 %Parámetro alpha
37 alpha1=0.01;
38 %Ecuación de Riccati
39 P1p=(A1 + alpha1*I)*P1 + P1*(A1'+alpha1*I) - P1*C1'*(inv(R1))*C1*P1+Q1;
40 %Vector de ganancias1
41 K1=P1*C1'*(inv(R1));
42 % Estimador 1 observado
43 xo11p=(a1*(u1 - xo12))/z1b - mu*xo11^2 + K1(1)*e1;
44 xo12p=-(a2*((xo13 - y2*z3b)/z2b - xo11 + ...
45 lambda1*sqrt(abs(xo12)) ))/z1b + K1(2)*e1;
46 xo13p=a1*xo12 - a1*u2 - mu*y2^2*z3b - (mu*(xo13 - y2*z3b)^2)/z2b + K1(3)*e1;
47 %Dinámicas aumentadas
48 lambda1p=K1(4)*e1;
49
50 %Kalman extendido subsistema estimador z_e
51 % Matriz A
52 A2=[ -(mu*(2*xo21 - 2*y1*z1b))/(SR - z1b), -a1, 0, ...
53       (2*mu*y1*(xo21 - y1*z1b))/(SR - z1b)...
54       - (mu*(xo21 - y1*z1b)^2)/(SR - z1b)^2 - mu*y1^2;
55       a2/(SR - z1b)^2, 0, -a2/(SR - z1b), (a2*((xo21 - y1*z1b)/(SR - z1b)^2 ...
56       - y1/(SR - z1b)))/(SR - z1b) - (a2*(xo23 - ...
57       (xo21 - y1*z1b)/(SR - z1b)))/(SR - z1b)^2;
58       0, a1/(L - SR), -2*mu*xo23, 0;
59       0, 0, 0, 0];
60 C2=[0 0 1 0];
61 %Matrices R y Q Kalman
62 R2=1;
63 Q2=[1 0 0 0;
64     0 1 0 0;
65     0 0 1 0;
66     0 0 0 8.5e6];
67 %Parámetro alpha
68 alpha2=.01;

```

```

69 %Ecuación Riccati
70 P2p=(A2 + alpha2*I)*P2 + P2*(A2'+alpha2*I) - P2*C2'*(inv(R2))*C2*P2+Q2;
71 %Vector de ganancias1
72 K2=P2*C2'*(inv(R2));
73 % Estimador 2 observado
74 xo21p=a1*u1 -a1*xo22 -mu*y1^2*z1b -(mu*(xo21 - y1*z1b)^2)/z2b +K2(1)*e2;
75 xo22p=-(a2*(xo23 -(xo21 -y1*z1b)/z2b))/z2b +K2(2)*e2;
76 xo23p=-mu*xo23^2 -((a1*(u2 -xo22))/(z3b)) +K2(3)*e2;
77 %Dinámica aumentada
78 z1bp=K2(4)*e2;
79 %Señal de convergencia
80 if abs(e1)<=1e-5 && abs(e2)<=1e-5
81     tf1=1;
82 else
83     tf1=0;
84 end
85 Qfi=lambda1*sqrt(abs(xo12));

```

#### B.4 Estimadores esclavos

```

1 function [xo21p,xo22p,xo23p,z2bp,es,xo11p,xo12p,xo13p,lambda2p,zs,Qf2,K1,K2] =
2 fcn(u1,u2,y1,y2,xo21,xo22,xo23,xo11,xo12,xo13,lambda1,lambda2,z1e,z2b,P1,P2)
3 % Parámetros
4 L=200;
5 D=0.1;
6 b=1250;
7 f=0.02;
8 g=9.81;
9 A=pi*(D/2)^2;
10 mu=f/(2*D*A);
11 a1=g*A;
12 a2=b^2/(g*A);
13 %Definición errores de seguimiento
14 e1=y1-xo11;
15 e2=y2-xo23;
16 %Condición estática
17 lambdaeq=lambda1;
18 zeq=z1e;
19 z1b=z1e;
20 z3b=L-(z2b+z1b);
21 %Matriz A1
22 A1=[ -2*mu*xo11, -a1/zeq, 0, 0;
23     a2/zeq, -(a2*lambdaeq)/(2*abs(xo12)^(1/2)*zeq), -a2/(z2b*zeq), ...

```

```

24         -(a2*(y2/z2b - (xo13 + y2*(z2b - L + zeq))/z2b^2))/zeq;
25     0, a1, -(mu*(2*xo13 + 2*y2*(z2b - L + zeq)))/z2b, ...
26     mu*y2^2 + (mu*(xo13 + y2*(z2b - L + zeq))^2)/z2b^2 ...
27     - (2*mu*y2*(xo13 + y2*(z2b - L + zeq)))/z2b;
28     0, 0, 0, 0];
29 %Matriz C1
30 C1=[1 0 0 0];
31 %Matrices R y Q Kalman
32 R1=1;
33 Q1=[1 0 0 0;
34     0 1 0 0;
35     0 0 1 0;
36     0 0 0 8.5e6];
37 %Identidad
38 I=eye(4);
39 %Parámetro alpha
40 alpha1=.01;
41 %Ecuación Riccati
42 P1p=(A1 + alpha1*I)*P1 + P1*(A1'+alpha1*I) - P1*C1'*(inv(R1))*C1*P1+Q1;
43 %Vector de ganancias1
44 K1=P1*C1'*(inv(R1));
45 %Estimador 1 observado
46 xo11p=(a1*(u1 - xo12))/z1b - mu*xo11^2 + K1(1)*e1;
47 xo12p=-(a2*((xo13 - y2*z3b)/z2b - xo11 + ...
48     lambda1*sqrt(abs(xo12)))/z1b + K1(2)*e1;
49 xo13p=a1*xo12 - a1*u2 - mu*y2^2*z3b - (mu*(xo13 - y2*z3b)^2)/z2b + K1(3)*e1;
50 %Dinámicas aumentadas
51 z2bp= K1(4)*e1;
52 %Kalman extendido estimador |lambda_l
53 % Matriz A
54 A2=[ -(mu*(2*xo21 - 2*y1*zeq))/z2b, -a1, 0, 0;
55     a2/z2b^2, -(a2*lambda2)/(2*abs(xo22)^(1/2)*z2b), -a2/z2b, ...
56     -(a2*abs(xo22)^(1/2))/z2b;
57     0,-a1/(z2b - L + zeq), -2*mu*xo23,0;
58     0,0,0,0];
59 C2=[0 0 1 0];
60 %Matrices R y Q Kalman
61 R2=1;
62 Q2=[1 0 0 0;
63     0 1 0 0;
64     0 0 1 0;
65     0 0 0 .05];

```

```

66 %Parámetro alpha
67 alpha2=.01;
68 %Ecuación Riccati
69 P2p=(A2 + alpha2*I)*P2 + P2*(A2'+alpha2*I) - P2*C2'*(inv(R2))*C2*P2+Q2;
70 %Vector de ganancias1
71 K2=P2*C2'*(inv(R2));
72 % Estimador 2 observado
73 xo21p=a1*u1 -a1*xo22 -mu*y1^2*z1b -(mu*(xo21 - y1*z1b)^2)/z2b + K2(1)*e2;
74 xo22p=-(a2*(xo23 + lambda2*sqrt(abs(xo22)) -(xo21 -y1*z1b)/z2b))/z2b +K2(2)*e2;
75 xo23p=-mu*xo23^2 -((a1*(u2 -xo22))/(z3b)) + K2(3)*e2;
76 %Dinámica aumentada
77 lambda2p= K2(4)*e2;
78 zs=[z1b;z2b];
79 es=[e1;e2];
80 Qf2=lambda2*sqrt(abs(xo22));

```