



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS**  
**INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS**

**ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO Y ROBUSTEZ DEL  
BUSCADOR INFOTÁCTICO ANTE INCERTIDUMBRE EN LOS  
PARÁMETROS DE LA SEÑAL**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**PRESENTA:**  
**DAVID AARÓN VELASCO ROMERO**

**TUTOR PRINCIPAL:**  
**DR. HERNÁN LARRALDE RIDAURA**  
**INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS**

**MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR:**

**DR. FRÉDÉRIC SYLVAIN MASSET**  
**INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS**

**DR. CARLOS VILLARREAL LUJÁN**  
**INSTITUTO DE FÍSICA**

**CUERNAVACA, MORELOS - DICIEMBRE 2014**



## RESUMEN

---

En este trabajo se estudia el comportamiento cualitativo y cuantitativo del buscador guiado por infotaxis, así como la robustez de la estrategia infotáctica ante incertidumbre en la tasa con la que se emiten partículas. El agente infotático es un buscador con la tarea de encontrar y arriar a la posición de una fuente emisora de partículas de cierta sustancia. Este buscador cuenta con el conocimiento del comportamiento promedio de la pluma de partículas emitida por la fuente. Utilizando este comportamiento promedio y siendo capaz de detectar partículas, el agente construye un mapa con probabilidades sobre la desconocida posición de la fuente. El objetivo del agente a cada paso es adquirir información sobre la posición de la fuente, haciendo así cada vez más confiable el mapa probabilístico, permitiéndole así guiarse hasta la posición de la fuente. El primer buscador infotático es cocebido con la capacidad de reconocer a la fuente en su primer arriro a la posición de ésta, siendo así capaz de eliminar cada posición visitada del grupo de posibles posiciones de la fuente. El buscador infotático ciego es entonces el buscador sin la capacidad de reconocer a la fuente en su primer arriro, teniendo así que reconocer a la fuente mediante la información recolectada en su mapa probabilístico. Presentamos también un buscador híbrido, que terminará su recorrido al primer arriro a la posición de la fuente, pero como el ciego, sin la capacidad de eliminar las posiciones visitadas del abanico de posibilidades para la posición de la fuente. Tras enfentrar a los tres buscadores a las mismas condiciones y realizar vastas simulaciones, observamos la gran ventaja proporcionada por la capacidad de reconocer la fuente y emplear esta información nulificando la probabilidad de cada posición visitada. Observamos que la inclusión de viento perjudica los tiempos de búsqueda del ciego mientras que beneficia los del buscador estándar. Por último analizamos la robustez de estos buscadores ante una incorrecta tasa de emisión supuesta por éstos, observando una gran robustez del buscador estándar, que siguió presentando una efectividad del 100 % inclusive ante un error del 75 % en la tasa de emisión. Por lo contrario, el buscador ciego mostró una limitada robustez a errores en esta tasa de emisión, a pesar de esto sigue siendo una excelente opción de tener certidumbre sobre el comportamiento de la fuente.



## AGRADECIMIENTOS

---

A mi madre Marcela, a mi hermana Arianne y a mi padre Anselmo por su apoyo incondicional.

A todos mis familiares, encabezados por mi abuelita e incluyendo a Natatxa.

A mi tutor, el Dr. Hernán Larralde por aceptarme como su alumno y dirigirme a lo largo de este trabajo.

Al Dr. Frédéric Masset por su constante y siempre útil ayuda.

Al Dr. Antonio Juárez por brindarme su apoyo cuando más lo necesitaba.

A Adriana y a Carlos que siempre estuvieron para apoyarme.

A mis amigos Ricardo, Héctor, Luisana, Adrian, César, Diego, Roberto, Moises, Paulino, Paco y Mayra.

Al Instituto de Ciencias Físicas de la UNAM.

Por último al apoyo económico del CONACyT y el proyecto “Redes y sistemas fuera del equilibrio” IN109111 DGAPA-UNAM.



# ÍNDICE GENERAL

---

1	INTRODUCCIÓN	1
2	MARCO TEÓRICO	3
2.1	Probabilidad e Información	3
2.1.1	Teoría de Probabilidad	3
2.1.2	Teoría de información	6
2.1.3	Entropía de Shannon	8
2.2	Difusión y Caminante aleatorio	9
2.2.1	Leyes de Fick	9
2.2.2	Caminata de Pearson en $2 - D$ con viento	10
2.3	Concentración y flujo de partículas	12
2.3.1	Ecuación de difusión y advección	12
2.3.2	Solución a la ecuación de difusión y advección	13
2.3.3	Solución para la tasa de detecciones	16
2.3.4	Longitud de correlación	20
2.4	Infotaxis	21
2.4.1	El buscador infotáctico	21
2.4.2	Infotaxis para varios agentes	26
2.4.3	El buscador ciego	27
2.4.4	El buscador híbrido	28
3	ANTECEDENTES	29
3.1	Comportamiento	29
3.1.1	Infotaxis como una estrategia para búsqueda sin gradientes	29
3.1.2	Persiguiendo información para buscar en ambientes aleatorios	29
3.1.3	Efectividad y robustez de un robot infotáctico en condiciones diluidas	30
3.1.4	Fluctuaciones inducidas geoméricamente en búsquedas olfatorias para dominios acotados	30
4	METODOLOGÍA	33
4.1	Implementación	33
4.1.1	Detección de Partículas	34
4.1.2	Mapa de probabilidades y toma de decisiones	35
4.1.3	Varios agentes	36
4.1.4	Buscadores ciego y semiciego	37
4.2	Datos a recabar	38
4.2.1	Visualización de la distribución de probabilidades	38
4.2.2	Dirección del movimiento	38

5	RESULTADOS Y ANÁLISIS	39
5.1	Comportamiento	39
5.1.1	Mapa de colores y comportamiento sin viento	39
5.1.2	Lo que el viento trajo	42
5.1.3	Geometría del primer paso	44
5.1.4	Espirales	45
5.2	Resultados	47
5.2.1	Los tres mosqueteros	48
5.2.2	Robustez de los buscadores	52
6	CONCLUSIONES	57
	BIBLIOGRAFÍA	59

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1	Sistema de comunación. Tal y como se muestra en [23].	7
Figura 2	Caminata de Pearson. Caminante con pasos de longitud $\ell$ en dirección aleatoria.	10
Figura 3	División del plano en casillas de lado $2a$ .	21
Figura 4	Pluma de partículas. La fuente está caracterizada por el punto rojo, mientras que las partículas por los puntos pequeños. El color de los puntos va de blanco a negro denotando el tiempo que ha transcurrido desde su emisión. El color en las casillas representa el número de partículas en éstas, yendo de 0 a 11 como lo muestra la barra de color. Las partículas se difunden sobre la malla y sufren el efecto de un viento constante hacia la derecha, vemos entonces que la concentración de partículas disminuye al alejarse de la fuente.	22
Figura 5	Representación del plano. El plano está dividido en casillas de lado $2a$ donde $a$ es el radio del agente. Las casillas de este mapa están representadas por la coordenada de su esquina inferior.	33
Figura 6	Simulación de la detección de partículas a partir de la distribución poissoniana de la tasa de detección. Para el primer paso se extrajo $p_1$ que resulto menor que $P(0)$ por tanto se realizaron cero detecciones. Para el segundo paso $p_2$ fue mayor que $P(0)$ pero menor que $P(1)$ , dejando entonces una detección. Para el último paso fue hasta el valor $m$ que $P(m)$ fue mayor que $p_3$ , así que se realizaron $m$ detecciones.	34
Figura 7	Distribución de probabilidades para la posición de la fuente en el primer paso del agente. El buscador está colocado en la posición $(9,9)$ de una malla de $19 \times 19$ , la escala de color va de cero hasta el valor máximo en la probabilidad de tener a la fuente para ese paso. Para las tres imágenes se tiene viento cero y no se realizan detecciones, siendo la longitud de correlación $\lambda = 3, 5, 10$ de izquierda a derecha y de arriba a abajo respectivamente.	39
Figura 8	Distribución de probabilidades para la posición de la fuente en el primer paso del agente realizando detecciones. Se tiene $\lambda = 5$ y al buscador en la posición $(9,9)$ , observando 1 partícula en la imagen izquierda y 2 partículas en la imagen derecha.	40

- Figura 9 Efecto del recorrido del agente en el mapa de probabilidades para  $\lambda = 5$ . El agente comienza su recorrido en la posición  $(9, 9)$ , sin realizar detecciones disminuye la probabilidad asociada a las posiciones cercanas a su movimiento (imagen izquierda). Al realizar detección (posición  $(0, 2)$  en la imagen derecha) el mapa de probabilidades cambia drásticamente, reflejando las pocas posiciones capaces de generar la detección realizada y a su vez no generar detección en las anteriores posiciones visitadas. 41
- Figura 10 Visualización del mapa de probabilidades y del trazo del agente a 6 distintos tiempos para el conjunto de parámetros  $R = 2, \tau = 100, D = 1$  y  $V = 1$ . La malla tiene un tamaño de  $40 \times 40$ , la posición inicial del agente es  $(20, 0)$  mientras que la fuente se encuentra en el centro de la casilla  $(20, 30)$ . La escala de color va de cero hasta el máximo en la distribución de probabilidades para cada paso, el recorrido del agente se muestra con el trazo blanco mientras que los puntos magentas muestran las posiciones en las que se realizó detección. En el pie de cada imagen se muestra la posición del agente y las partículas observadas en ese paso. 43
- Figura 11 Cuatro forrajeos para los parámetros  $R = 2, \tau = 100, D = 1$  y  $V = 1$ , en una malla de  $40 \times 40$  el agente comienza en  $(20, 0)$  y la fuente está en el centro de la casilla  $(20, 30)$ . La diferencia entre los cuatro forrajeos es la semilla con la que se inicializa el generador de números pseudoaleatorios. Las imágenes muestran el paso previo a dar con la posición de la fuente, el número de pasos fue 134, 98, 76 y 78 mientras que las detecciones totales 20, 20, 23 y 23 para las imágenes superior izquierda, superior derecha, inferior izquierda e inferior derecha respectivamente. 44
- Figura 12 Geometría del primer movimiento para  $R = 2.4, \tau = 2500, D = 1$  y  $V = 0$  para una malla de  $100 \times 100$ . La imagen de la izquierda muestra la dirección del movimiento del agente para toda posición inicial, correspondiendo derecha, izquierda, arriba y abajo a los colores verde, rojo, naranja y azul respectivamente. La gráfica de la derecha nos muestra el cambio esperado en la entropía para la posición elegida en cada punto inicial. El primer paso del agente es determinista y está influenciado por la interacción entre atractores (regiones más azules) y un repulsor (región roja). 45

- Figura 13 Cambio en la geometría del primer movimiento ante detecciones para los valores  $R = 2.4$ ,  $\tau = 2500$ ,  $D = 1$  y  $V = 0$  en una malla de  $100 \times 100$ . La primera fila nos muestra el caso para cero detecciones mientras que la segunda fila no muestra el caso para una detección. Los puntos blancos muestran la posición  $(50, 10)$  que la figura 8 de [21] presenta un comportamiento bimodal para el índice de similaridad. En dicho trabajo la fuente se encuentra en el centro del mapa, así que en ausencia de detecciones el buscador se mueve hacia la posición de la fuente (asciende) mientras que al realizar detección se aleja de esta (desciende). Las imágenes de la derecha muestran el cambio esperado en la entropía, donde podemos ver que al realizarse detección en el primer paso el repulsor central desplaza a los atractores hacia las esquinas del mapa. Esto resulta en una reducción para las regiones que promueven el movimiento hacia el centro del mapa. 46
- Figura 14 Recorrido en espiral para los parámetros  $R = 1$ ,  $\tau = 1$ ,  $D = 1$  y  $V = 0$  en una malla de  $50 \times 50$  con la fuente en el centro de la casilla  $(25, 25)$  y las posiciones iniciales  $(0, 0)$  y  $(1, 2)$  para las imágenes izquierda y derecha, respectivamente. El recorrido en espiral se puede formar solo iniciando en posiciones cercanas a las esquinas del mapa. 47
- Figura 15 Recorrido del buscador para  $\lambda = 2$  y 18 en una malla de  $50 \times 50$  (primeras dos filas) y para  $\lambda = 18$  en una malla de  $200 \times 200$ . El buscador comienza en la posición  $(0, 0)$  para los tres casos. Vemos que para  $\lambda = 2$  el cambio en la distribución de probabilidades permite una región de alta probabilidad en el centro, dejando la creación de un recorrido en espiral. Para  $\lambda = 18$  en la malla de  $50 \times 50$  el cambio impide la formación de la región con altas probabilidades y por tanto no se logra el recorrido espiral. Aumentando el mapa a  $200 \times 200$  el cambio es ahora pequeño en relación con el tamaño de la malla permitiendo la región central de probabilidades altas y generando de nuevo un recorrido espiral. 48
- Figura 16 Comparación de los tres buscadores frente a distintos valores del viento. El buscador inicia en  $i = 15$ , cada punto de la gráfica representa el promedio de 2000 realizaciones. 49

- Figura 17 Respuesta del buscador ciego en toda posición inicial frente a distintos valores del viento (primera fila  $V = 0$ , segunda fila  $V = 0.5$  y tercera fila  $V = 2.0$ ) y distinto umbral en la entropía (primera columna  $S < 0.0001$  y segunda columna  $S < 0.01$ ). La escala de color representa el tiempo promedio de búsqueda sobre las 1000 realizaciones en cada punto. En el encabezado de cada imagen se muestra el tiempo promedio de búsqueda sobre todas las posiciones. Vemos una consistente reducción del tiempo promedio de búsqueda al aumentar el umbral en la entropía de 0.0001 a 0.01, mientras que la efectividad se conserva por encima del 99.9 50
- Figura 18 Respuesta de los tres buscadores en toda posición inicial frente a distintos valores del viento (primera fila  $V = 0$ , segunda fila  $V = 0.5$  y tercera fila  $V = 2.0$ ). La escala de color representa el tiempo promedio de búsqueda sobre las 1000 realizaciones en cada punto. En el encabezado de cada imagen se muestra el tiempo promedio de búsqueda sobre todas las posiciones. 51
- Figura 19 Robustez del buscador ciego ante incorrecta  $R$ . En el recuadro de las imágenes de la derecha se muestra la tasa de emisión supuesta por el agente: subestimada( $R = 1.5, 1.7$ ), correcta( $R = 2$ ) y sobreestimada( $R = 2.3, 2.5$ ) para tres valores en el límite inferior de la entropía. 53
- Figura 20 Robustez del buscador semiciego ante incorrecta  $R$ . En el recuadro de las imágenes de la derecha se muestra la tasa de emisión supuesta por el agente: subestimada( $R = 1.5, 1.7$ ), correcta( $R = 2$ ) y sobreestimada( $R = 2.3, 2.5$ ) para tres valores en el límite inferior de la entropía. 54
- Figura 21 Robustez del buscador vidente ante incorrecta  $R$ . En el recuadro de las imágenes de la derecha se muestra la tasa de emisión supuesta por el agente: subestimada( $R = 1.5, 1.7$ ), correcta( $R = 2$ ) y sobreestimada( $R = 2.3, 2.5$ ) para tres valores en el límite inferior de la entropía. 54
- Figura 22 Mapa de la robustez del vidente ante error del 50% en  $R = 2$ . Las filas corresponden a los vientos  $V = 0.0, 0.5$  y  $2.0$  de forma descendente. 55
- Figura 23 Mapa de la robustez del vidente ante error del 75% en  $R = 2$ . Las filas corresponden a los vientos  $V = 0.0, 0.5$  y  $2.0$  de forma descendente. 56

## INTRODUCCIÓN

---

En la naturaleza existe una variedad de organismos capaces de utilizar guías olfatorias como medio de localización de alimento o pareja. Estas estrategias muestran ser altamente eficaces y eficientes, y por tanto genera interés entenderlas [9, 26] y emplearlas en problemas similares de búsqueda [15, 17, 18, 22].

Las bacterias como la *Escherichia coli* [4, 6] son guiadas por cambios en la concentración de sustancias nutrientes hasta regiones de abundancia en estos nutrientes. Esta estrategia de búsqueda es conocida como quimiotaxis y representa una estrategia confiable y eficiente en condiciones que permitan la medición de gradientes en la concentración de la sustancia guía para tiempos cortos y distancias cortas [5, 13].

Animales e insectos en sus búsquedas olfatorias, enfrentan condiciones distintas a las experimentadas por las bacterias quimiotácticas. Para estos, las señales emitidas por la fuente (alimento o pareja) son escasas y dispersas, formando parches aleatorios. En estas condiciones la medición de gradientes en la concentración solo es posible para tiempos largos y distancias grandes, haciendo poco eficiente la quimiotaxis. Sin embargo, tanto animales como insectos son capaces de superar estas adversidades y son altamente eficientes en la búsqueda de pareja o alimento. Debe de existir entonces una estrategia viable para estas condiciones.

La infotaxis se basa en la adquisición de información, en concreto, en maximizar la ganancia de información sobre la desconocida posición del objetivo buscado. El comportamiento de la pluma de señales emitidas por el objetivo es modelado mediante una ecuación de difusión y advección. La solución a esta ecuación proporciona el comportamiento promedio de la pluma formada por las señales y permite generar una distribución de probabilidades sobre la posición de la fuente que a su vez permite medir y acumular información sobre la posición del objetivo.

El método infotáctico ha sido probado en distintos escenarios mostrando ser eficaz, eficiente e inclusive robusto, sin embargo, existe poco detalle sobre su comportamiento y sobre la extensión de su robustez [16, 18, 21, 25].

El objetivo de este trabajo es conocer con mayor detalle el comportamiento emergente del método infotáctico, así como la robustez de éste ante incertidumbre en la tasa con la que es emitida la sustancia guía, así como encontrar una estrategia para afrontar esta incertidumbre.



## MARCO TEÓRICO

---

Para poder abordar el algoritmo de infotaxis, primero será necesario tratar varios temas. Dada la distinta naturaleza de las herramientas utilizadas en infotaxis, procederemos a dividir estos temas en tres secciones principales.

La primera sección tratará los elementos de probabilidad e información, en la segunda sección veremos el fenómeno difusivo y la descripción de un caminante aleatorio que utilizaremos para crear la fuente de partículas, en la tercera sección se presenta la ecuación de difusión y advección, su solución y la solución al flujo de partículas, de modo que nos proporcionen una descripción estadística del comportamiento de la fuente.

### 2.1 PROBABILIDAD E INFORMACIÓN

#### 2.1.1 *Teoría de Probabilidad*

Para un experimento con distintos posibles resultados, el espacio de muestreo representa el conjunto de estos resultados. Para el lanzamiento de una moneda con posibles resultados cara o cruz, el espacio de muestreo  $\Omega$  consiste de estos dos resultados:

$$\Omega = \{cara, cruz\}.$$

Para cada resultado se debe tener precisamente un elemento en el espacio de muestreo.

Un “evento” relacionado a un experimento corresponde a una pregunta sobre el experimento con respuesta de sí ó no, y representa un subconjunto de  $\Omega$ . Por ejemplo, consideremos el lanzamiento de un dado, el espacio de muestreo es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ahora, “¿El resultado es par?” podría ser la pregunta para el posible resultado de nuestro experimento. El subconjunto correspondiente a la respuesta “sí” es

$$A = \{2, 4, 6\},$$

mientras que para la respuesta “no” tenemos el subconjunto

$$B = \{1, 3, 5\}.$$

Entonces un evento consiste de una colección de elementos del espacio de muestreo, o bien un subconjunto de  $\Omega$ . Así el evento  $A$  ocurre cuando el resultado del experimento corresponde a uno de los elementos de  $A$ .

En la interpretación frecuentista, la probabilidad  $P(A)$  de ocurrencia para el evento  $A$  representa la fracción de ocurrencias para el evento  $A$  en una serie larga de repeticiones independientes del experimento, donde esta probabilidad tiende, al aumentar el número de repeticiones, a la fracción de elementos del espacio de muestreo que pertenecen a  $A$  [2].

En el experimento de lanzar una moneda tenemos dos posibles resultados, la moneda se dice justa si ningún lado tiene mayor oportunidad de ocurrir. Para este caso la probabilidad de ocurrencia para cada lado es  $\frac{1}{2}$ , esto dado que  $\Omega$  consiste de dos elementos, y tanto el evento de observar cara como el de observar cruz consisten de un elemento. Es claro entonces que para el experimento de lanzar un dado imparcial, los seis lados tienen probabilidad  $\frac{1}{6}$  de ocurrir. Ahora si consideramos el evento  $A$  de resultado par en el lanzamiento el cual consiste de tres de los seis elementos que componen  $\Omega$ , su probabilidad de ocurrencia es de  $\frac{3}{6}$  o bien  $\frac{1}{2}$ . La suma de las probabilidades sobre todos los elementos de  $\Omega$  es igual a la unidad.

Consideremos ahora el experimento de lanzar una moneda justa dos veces, nuestro espacio de muestreo es

$$\Omega = \{cara\ cara, cara\ cruz, cruz\ cara, cruz\ cruz\}.$$

Busquemos el evento de obtener por lo menos una cara

$$A = \{cara\ cara, cara\ cruz, cruz\ cara\},$$

y el evento de tener cruz en el primer lanzamiento

$$B = \{cruz\ cara, cruz\ cruz\}.$$

¿Cuál es la probabilidad de obtener cruz en el primer lanzamiento si ocurrió el evento  $A$ ? En otras palabras, queremos saber cuál es la probabilidad de ocurrencia de  $B$  dada la ocurrencia de  $A$ . Si observamos los elementos del evento  $A$ , vemos que solo uno de ellos cumple con la descripción del evento  $B$ , entonces si se dio el evento  $A$ , la probabilidad de que también  $B$  ocurriera es la fracción de elementos de  $A$  que pertenecen a  $B$ . En este caso dicha probabilidad es  $\frac{1}{3}$ .

A esta probabilidad se le llama probabilidad condicional, y se define como

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \tag{2.1}$$

donde  $P(A \cap B)$  es la probabilidad de la ocurrencia del evento descrito por los elementos que comparten  $A$  y  $B$ , o bien la probabilidad de la intersección de estos dos eventos, y  $P(A)$  debe ser mayor a cero para que la probabilidad condicional esté definida.

Para el ejemplo propuesto anteriormente, el evento asociado a la intersección es

$$A \cap B = \{\text{cruz cara}\},$$

entonces su probabilidad es  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ , mientras que  $P(A) = \frac{3}{4}$  y por tanto tenemos que  $P(B|A) = \frac{1}{3}$ , que es el mismo resultado obtenido con anterioridad. La probabilidad condicional nos proporciona la probabilidad de ocurrencia de un evento considerando la ocurrencia del otro.

Tenemos también que  $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ , entonces  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$  y sustituyendo en (2.1) obtenemos

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}. \quad (2.2)$$

Considerando la familia de eventos  $\{B_1, B_2, \dots, B_N\}$  mutuamente excluyentes (no comparten elementos) y cuya unión es  $\Omega$ , podemos construir cualquier evento  $A$  a partir de la unión de sus intersecciones con dicha familia:

$$A = \sum_n A \cap B_n,$$

de esta forma tenemos podemos definir la probabilidad marginal como

$$P(A) = \sum_n P(A \cap B_n) = \sum_n P(A|B_n)P(B_n). \quad (2.3)$$

Podemos ahora sustituir (2.3) en (2.2) y así obtener

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{\sum_m P(A|B_m)P(B_m)}. \quad (2.4)$$

Vemos entonces que podemos obtener las probabilidades de la familia de eventos  $\{B_1, B_2, \dots, B_N\}$  condicionadas a  $A$  si conocemos las probabilidades condicionales individuales de los elementos de  $A$  representadas por  $P(A|B_m)$  [2].

Dado un conjunto de parámetros  $\Theta$ , la función  $L(\Theta|X)$  representa la verosimilitud de que estos parámetros estén asociados al conjunto de resultados  $X$ , y es equivalente a

la probabilidad condicional  $P(X|\Theta)$  [12]. Entonces la probabilidad  $P(\Theta_n|X)$  de tener el conjunto de parámetros  $\Theta_n$  dado el conjunto de resultados  $X$  es

$$P(\Theta_n|X) = \frac{P(X|\Theta_n)P(\Theta_n)}{\sum_m P(X|\Theta_m)P(\Theta_m)} = \frac{L(\Theta|X)P(\Theta_n)}{\sum_m L(\Theta|X)P(\Theta_m)}. \quad (2.5)$$

A partir del espacio de muestreo  $\Omega$  correspondiente a un experimento, una variable aleatoria  $X$  representa el conjunto de valores  $\{x_1, \dots, x_n\}$  resultantes de una función de los elementos  $\omega_1, \dots, \omega_m$  de  $\Omega$  [2]. Volviendo al ejemplo del doble lanzamiento de una moneda, una variable aleatoria relacionada al experimento es el número de caras del elemento de  $\Omega$ . Tenemos  $\Omega = \{cara\ cara, cara\ cruz, cruz\ cara, cruz\ cruz\}$ , entonces los valores de la variable aleatoria son  $X = \{0, 1, 2\}$  donde  $X = 1$  está asociado a dos elementos de  $\Omega$  y por tanto su probabilidad es la suma de las probabilidades de ambos elementos.

Si la variable aleatoria  $X$  representa un continuo de valores, entonces la probabilidad de que el valor observado esté en el intervalo  $(a, b)$  está dada por

$$P(a < x < b) = \int_b^a P(x)dx$$

donde ahora  $P(x)$  es la densidad de probabilidad, y el producto  $P(x)dx$  representa la probabilidad de que  $x$  caiga en el intervalo infinitesimal  $(x, x + dx)$ . El valor esperado de una variable aleatoria se define como

$$\langle x \rangle = \int xP(x)dx$$

para el caso continuo, mientras que para una variable aleatoria discreta

$$\langle x \rangle = \sum xP(x).$$

Entonces para cualquier función de  $f(x)$  de la variable aleatoria  $X$  tenemos que

$$\langle f(x) \rangle = \int f(x)P(x)dx$$

representa el valor esperado de la función  $f(x)$  [2].

### 2.1.2 Teoría de información

Consideremos el sistema de comunicación descrito en la figura 1, donde se busca transmitir una mensaje desde una fuente hasta un destino [1]. El mensaje debe ser codificado para poder ser transmitido eficientemente por un canal susceptible a ruido, y después decodificado para ser recibido por el destinatario. El ruido provoca errores en el mensaje

recibido, de modo que el trabajo del codificador es codificar el mensaje a una señal que dada la naturaleza del canal y del ruido, minimice la probabilidad de error en el mensaje recibido.

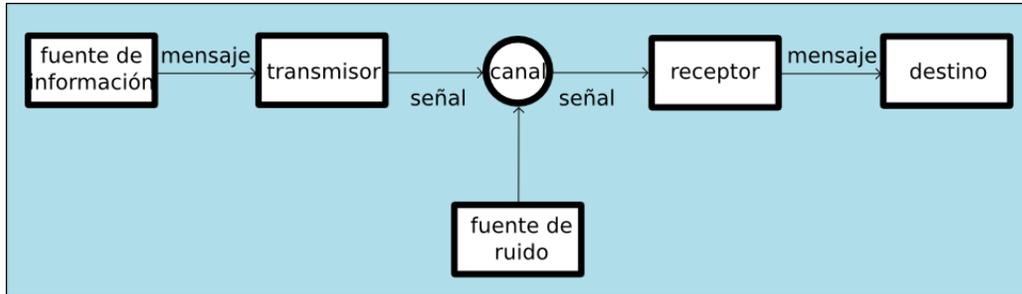


Figura 1: Sistema de comunación. Tal y como se muestra en [23].

Supongamos que el mensaje a enviar es uno de los valores de la variable aleatoria  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  y que cada uno de estos valores tiene probabilidad  $P(X) = \{p_1, \dots, p_n\}$  de ser el mensaje enviado, donde

$$p_i \geq 0, \sum_{i=1}^N p_i = 1.$$

Tratemos de construir la función  $h(p_i)$  que denote la incertidumbre que se tiene sobre recibir el mensaje  $x_i$ . Si sabemos que el mensaje a enviarse es  $x_i$ , entonces no existe incertidumbre, tampoco existe cuando sabemos que  $x_i$  no será enviado, por tanto necesitamos  $h(1) = h(0) = 0$ . La incertidumbre existe una vez que la probabilidad  $p_i$  relacionada al mensaje  $x_i$  sea distinta a uno y a cero.

Ahora definamos  $H(X)$  como la incertidumbre promedio de  $X$

$$H(X) = \sum_{i=1}^n p_i h(p_i)$$

y pasemos a imponer requerimientos a esta función de forma que cumpla con lo esperado de una incertidumbre. Pensemos en una moneda justa y un dado sin cargar, intuitivamente la incertidumbre para el lanzamiento del dado debe ser mayor que la del lanzamiento de la moneda. Entonces necesitamos que para una variable aleatoria  $X$  con  $n$  posibles valores equiprobables  $P(X) = \{1/n, \dots, 1/n\}$ , la función  $f(n) = H(1/n, \dots, 1/n)$  cumpla con

$$f(n) > f(m) \Leftrightarrow n > m (n, m = 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

Para la segunda condición a  $H(X)$  supongamos que nuestro mensaje consta de una pareja  $XY$  de variables aleatorias independientes, donde  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  con  $P(X) = \{1/n, \dots, 1/n\}$  y  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$  con  $P(Y) = \{1/m, \dots, 1/m\}$ , la incertidumbre promedio del mensaje debe estar dada por  $f(nm)$ . Si se revela el valor de  $Y$  esperamos que la incertidumbre se reduzca a  $f(n)$  dada la independencia de  $X$  y  $Y$ , de modo que requerimos

$$f(nm) = f(n) + f(m) \Leftrightarrow P(X, Y) = P(X)P(Y). \quad (2.7)$$

Para la tercera condición tomemos  $X = \{0, 1, 2\}$  con  $P(X) = \{1/2, 1/4, 1/4\}$  y supongamos que primero queremos saber si el mensaje es  $X = 0$ , lo cual equivale a dividir  $X$  en los subconjuntos  $A = \{0\}$  y  $B = \{1, 2\}$ , ambos con probabilidad de un medio. La incertidumbre promedio asociada a saber en qué subconjunto está el mensaje es  $H(1/2, 1/2)$ . Si sabemos que el mensaje está en  $A$ , sabemos con certeza que  $X = 0$  y por tanto  $H(A) = H(1) = 0$ , si el mensaje está en  $B$  tenemos dos posibles valores equiprobables entonces  $H(B) = H(1/2, 1/2)$ . De esta forma la incertidumbre de saber el valor de  $X$  se puede descomponer en

$$H(X) = H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}H(1) + \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

En general, la descomposición de la incertidumbre promedio es

$$\begin{aligned} H(X) &= H[(p_1 + p_2 + \dots + p_m), (p_{m+1} + \dots + p_n)] + \\ &+ (p_1 + \dots + p_m) H\left(\frac{p_1}{(p_1 + \dots + p_m)}, \dots, \frac{p_m}{(p_1 + \dots + p_m)}\right) + \\ &+ (p_{m+1} + \dots + p_n) H\left(\frac{p_{m+1}}{(p_{m+1} + \dots + p_n)}, \dots, \frac{p_n}{(p_{m+1} + \dots + p_n)}\right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Como cuarta condición requerimos que  $H(p, 1-p)$  sea una función continua de  $p \in (0, 1)$  con máximo en  $p = 1-p$  y de valor cero para  $p = 1$  ó  $p = 0$  [12].

La única función que cumple estas cuatro condiciones es

$$H(X) = -C \sum_i^n p_i \log(p_i). \quad (2.9)$$

### 2.1.3 Entropía de Shannon

La entropía de Shannon [23] nos proporciona una medida de la incertidumbre asociada a eventos sobre los cuales sólo conocemos su probabilidad de ocurrencia. Consideremos el lanzamiento de una moneda justa, si ambos lados tienen la misma probabilidad de

ocurrir, no tenemos entonces información alguna para predecir con certidumbre el lado que aparecerá en la realización del experimento, entonces la incertidumbre asociada a este resultado es máxima. Ahora, si la moneda estuviese cargada de modo que siempre saliese el mismo lado, sabríamos con certeza el resultado de un lanzamiento y por tanto no habría incertidumbre.

Si tenemos una variable aleatoria  $A$  con un conjunto de posibles valores  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , con probabilidad de ocurrencia  $P(A)$ ; la entropía de Shannon para esta variable aleatoria está descrita por

$$S = - \sum_i^n P(a_i) \log(P(a_i)). \quad (2.10)$$

En el contexto de información, cada posible valor de  $A$  representa un mensaje. La información contenida por este mensaje está descrita por la entropía. La entropía es máxima cuando todos los valores tienen la misma probabilidad de ocurrir ( $P(A) = 1/n$ )

$$S = - \sum_i^n \left(\frac{1}{n}\right) \log\left(\frac{1}{n}\right) = -\log\left(\frac{1}{n}\right) = \log(n).$$

Esto significa que la información contenida en el mensaje también es máxima, y por tanto es mínima la información que tenemos sobre  $A$ . A medida que reducimos la entropía logramos obtener información, dejando así menos información a recolectar del mensaje. Una vez que recolectamos toda la información disponible, el mensaje deja de contener información y es entonces cuando conocemos con certeza el resultado de  $A$ . En términos de probabilidad, esto significa que sólo un valor de  $A$  tiene probabilidad de ocurrir distinta a cero y por tanto igual a uno. Para dicha distribución  $S = -\ln(1) = 0$ . Entonces la entropía va de un máximo  $\log(n)$  hasta un mínimo 0, o de total incertidumbre a certeza total respectivamente.

Como vemos en (2.10), la entropía de Shannon depende del número  $n$  de valores posibles de la variable  $A$ , tal y como en la mecánica estadística la entropía depende del número de estados posibles del sistema [7]. La entropía crece con  $n$ , lo cual se entiende perfectamente considerando que al tener más eventos posibles, la incertidumbre del resultado aumenta, o en términos de información, el mensaje porta más información.

## 2.2 DIFUSIÓN Y CAMINANTE ALEATORIO

### 2.2.1 Leyes de Fick

Mediante las leyes de Fick podemos describir el fenómeno de difusión en la propagación de partículas [8]. En 1855, Fick proporcionó la primera descripción cuantitativa del fenómeno difusivo basándose en la descripción matemática desarrollada por Fourier en 1822 para transporte de calor. La primera Ley de Fick establece que las partículas fluyen

de lugares de alta concentración a lugares de baja concentración, y que este flujo tiene magnitud proporcional al gradiente de la concentración. Esta Ley se expresa como

$$J = -D\nabla C, \quad (2.11)$$

donde  $J$  es el flujo de una sustancia y representa la cantidad de esta sustancia que fluye a través de un area por unidad de tiempo;  $D$  es llamado el coeficiente de difusión; y  $C$  es la concentración de la sustancia en el espacio.

La segunda ley de Fick nos describe el cambio que sufre la concentración en el tiempo y se escribe como

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \cdot J = \nabla \cdot (D\nabla C). \quad (2.12)$$

Utilizando estas dos leyes obtenemos la ecuación de conservación de masa para el proceso de difusión también conocida como ecuación de difusión

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C. \quad (2.13)$$

La primera Ley de Fick tiene sus analogas en la Ley de Fourier para el transporte de calor, la Ley de Ohm para la conducción eléctrica y la Ley de Newton Law para la viscosidad.

### 2.2.2 Caminata de Pearson en 2 – D con viento

La caminata aleatoria propuesta por Karl Pearson en [19] consta de pasos de tamaño  $\ell$ , cada paso se realiza en dirección aleatoria. La caminata se realiza sobre el plano  $(x, y)$ , tal y como muestra la figura 2.

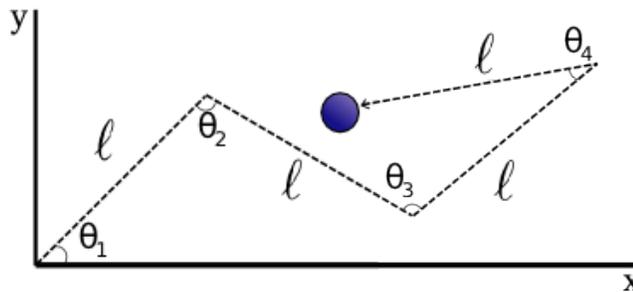


Figura 2: Caminata de Pearson. Caminante con pasos de longitud  $\ell$  en dirección aleatoria.

Tenemos una partícula que da pasos de tamaño  $\ell$  en dirección aleatoria, el intervalo de tiempo entre cada paso está dado por  $\Delta t$ .

$$\begin{aligned}x_{t+\Delta t} &= x_t + \ell \cos(\theta_t) \\y_{t+\Delta t} &= y_t + \ell \sin(\theta_t).\end{aligned}$$

Si agregamos a este comportamiento un viento constante  $V$  en dirección descendente tendremos

$$\begin{aligned}x_{t+\Delta t} &= x_t + \ell \cos(\theta_t) \\y_{t+\Delta t} &= y_t + \ell \sin(\theta_t) - V\Delta t.\end{aligned}\tag{2.14}$$

La probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición  $(x, y)$  al tiempo  $t + \Delta t$  se puede obtener a partir de la probabilidad de haber estado a una distancia  $\ell$  de esta posición a un paso anterior ( $t$ ) por la probabilidad de dar el paso en la dirección de la posición  $(x, y)$ . Tenemos entonces

$$P(x, y; t + \Delta t) = \int P(x - \ell \cos(\theta), y - \ell \sin(\theta) + V\Delta t; t) P(\theta) d(\theta)\tag{2.15}$$

donde  $\theta$  está distribuido uniformemente entre 0 y  $2\pi$ . Partiendo de esta probabilidad podemos pasar ahora a obtener la ecuación de difusión de manera similar a lo realizado en [27].

Hacemos expansión en serie de Taylor alrededor de  $\ell \cos(\theta)$  para  $x$  y alrededor de  $\ell \sin(\theta) + V\Delta t$  para  $y$ , dejando sólo los términos que contengan derivada hasta segundo orden tenemos

$$\begin{aligned}P(x - \ell \cos(\theta), y - \ell \sin(\theta) + V\Delta t; t) &\approx P(x, y; t) - \ell \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial x} P(x, y; t) \\&+ \frac{\ell^2 \cos^2(\theta)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, y; t) - (\ell \sin \theta - V\Delta t) \frac{\partial}{\partial y} P(x, y; t) \\&+ \frac{\ell^2 \sin^2 \theta - 2\ell \sin \theta V\Delta t + V^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(x, y; t) \\&+ (\ell^2 \cos \theta \sin \theta - \ell \cos \theta V\Delta t) \frac{\partial^2}{\partial xy} P(x, y; t).\end{aligned}$$

Ahora podemos sustituir esto en la ecuación (2.15), donde tomando en cuenta que en el intervalo entre 0 y  $2\pi$  el valor esperado de  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  y  $\cos \theta \sin \theta$  es cero, y que el valor esperado de  $\cos^2 \theta$  y  $\sin^2 \theta$  es  $1/2$ , termina por quedarnos

$$\begin{aligned}P(x, y; t + \Delta t) &= P(x, y; t) + \frac{\ell^2}{4} \left( \frac{\partial^2 P(x, y; t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, y; t)}{\partial y^2} \right) \\&+ V\Delta t \frac{\partial}{\partial y} P(x, y; t) + \frac{V^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(x, y; t).\end{aligned}$$

Podemos reescribir esta ecuación como

$$\begin{aligned} \frac{P(x, y; t + \Delta t) - P(x, y; t)}{\Delta t} &= \frac{\ell^2}{4\Delta t} \nabla^2 P(x; t) + V \frac{\partial}{\partial y} P(x, y; t) \\ &+ \frac{V^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} P(x, y; t) \end{aligned}$$

Ahora es posible definir  $D = \ell^2/(4\Delta t)$  como el coeficiente de difusión, y tomando el límite en el que  $\Delta t$  tienda a cero, obtenemos

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(x, y; t + \Delta t) - P(x, y; t)}{\Delta t} = D \nabla^2 P(x, y) + V \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}, \quad (2.16)$$

así que la probabilidad  $P(x, y)$  cumple con la siguiente ecuación

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial t} = D \nabla^2 P(x, y) + V \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \quad (2.17)$$

que es la ecuación de difusión y advección que describe el movimiento de nuestras partículas.

## 2.3 CONCENTRACIÓN Y FLUJO DE PARTÍCULAS

### 2.3.1 Ecuación de difusión y advección

Mediante la ecuación de difusión y advección podemos describir la concentración de partículas en el medio. En general, la ecuación es de la forma

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla C) - \nabla \cdot (\mathbf{V} C) + R$$

Donde  $C$  es la concentración de partículas,  $D$  es el coeficiente de difusión,  $\mathbf{V}$  es la velocidad promedio de un fluido dentro del cual se mueven las partículas, y  $R$  describe ya sea fuentes o sumideros de partículas. Nuestro modelo está constituido por una fuente que emite partículas con tasa  $R$ , donde las partículas tienen un tiempo de vida finito  $\tau$  y el movimiento de éstas esta descrito por una constante de difusión isotrópica  $D$  y un viento constante  $V$  ( $\mathbf{V} = (0, -V)$ ). Tenemos entonces la siguiente ecuación

$$\frac{\partial C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)) - \nabla \cdot (\mathbf{V} C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)) - \frac{C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\tau} + R \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (2.18)$$

El tercer término del lado derecho representa la tasa de muerte para las partículas, y el último término corresponde a la fuente, representada por la tasa de emisión  $R$  para la

posición  $\mathbf{r}_0$  de la fuente.

La velocidad del viento es constante y solo tiene componente en el eje  $y$ , por lo cual

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)) = -V \frac{\partial C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\partial y}.$$

Las partículas se difunden de forma isotrópica, por tanto, podemos reducir el término para la difusión como

$$\nabla \cdot (D\nabla C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)) = D\nabla^2 C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0).$$

Podemos entonces reescribir nuestra ecuación como

$$\frac{\partial C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\partial t} = D\nabla^2 C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) + V \frac{\partial C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\partial y} - \frac{C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\tau} + R\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (2.19)$$

### 2.3.2 Solución a la ecuación de difusión y advección

Procedemos ahora a resolver la ecuación de difusión y advección para el estado estacionario ( $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$ ). Podemos sumar y restar  $\frac{V^2}{4D}C$  a (2.19), escribir el laplaciano de forma explícita y así recomodar la ecuación como

$$0 = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{V\partial C}{D\partial y} + \frac{V^2}{4D^2}C \right] - \left( \frac{V^2}{4D} + \frac{1}{\tau} \right) C + R\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (2.20)$$

Veamos ahora que

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{V\partial C}{D\partial y} + \frac{V^2}{4D^2}C = e^{-\frac{Vy}{2D}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( e^{\frac{Vy}{2D}} C \right), \quad (2.21)$$

entonces, sustituyendo (2.21) en (2.20) y multiplicando por el término  $e^{\frac{Vy}{2D}}$  obtenemos

$$0 = D e^{\frac{Vy}{2D}} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( e^{\frac{Vy}{2D}} C \right) - \left( \frac{V^2}{4D} + \frac{1}{\tau} \right) e^{\frac{Vy}{2D}} C + R e^{\frac{Vy}{2D}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Ahora podemos definir  $C' = e^{\frac{Vy}{2D}} C$  y  $\alpha^2 = \left( \frac{V^2}{4D^2} + \frac{1}{D\tau} \right)$ , con lo que la ecuación se reduce a

$$0 = \nabla^2 C' - \alpha^2 C' + \frac{R}{D} e^{\frac{Vy_0}{2D}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (2.22)$$

donde en el último término del lado derecho hemos escrito  $y_0$  dado que ese término solo es distinto de cero para la posición de la fuente  $(x_0, y_0)$ . Aprovechando la invarianza ante traslaciones del laplaciano, podemos realizar un cambio de coordenadas de modo que nos facilite encontrar la solución a nuestra ecuación, entonces nuestro nuevo vector de posición será  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  dejandonos así

$$0 = \nabla^2 C' - \alpha^2 C' + \frac{R}{D} e^{\frac{Vy_0}{2D}} \delta(\mathbf{r}'),$$

la concentración es ahora función de las coordenadas  $x'$  y  $y'$  lo cual podemos representar como  $C'(\mathbf{r}') = C'(x', y')$ . Escribamos cada parte de la ecuación como una transformada inversa de Fourier. Primero para la concentración se tiene

$$C'(x', y') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{C}'(k_x, k_y) e^{i\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}} dk_x dk_y, \quad (2.23)$$

entonces podemos escribir el laplaciano de la concentración como

$$\nabla^2 C' = \frac{i^2}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (k_x^2 + k_y^2) \hat{C}' e^{i\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}} dk_x dk_y.$$

Mientras que para la función delta de Dirac tenemos

$$\delta(\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}} dk_x dk_y,$$

con lo que podemos reescribir la ecuación como

$$0 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -(k_x^2 + k_y^2 + \alpha^2) \hat{C}' + \frac{R}{D} e^{\frac{Vy_0}{2D}} \right] e^{i\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}} dk_x dk_y.$$

Para que se cumpla la igualdad, el integrando debe ser igual a cero, entonces podemos despejar la transformada de Fourier de  $C'$  a partir de igualar el integrando a cero:

$$\hat{C}'(k_x, k_y) = \frac{\frac{R}{D} e^{\frac{Vy_0}{2D}}}{(k_x^2 + k_y^2 + \alpha^2)}.$$

Sustituimos este resultado en (2.23) para obtener así

$$C'(x', y') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{R}{D} e^{\frac{Vy_0}{2D}}}{(k_x^2 + k_y^2 + \alpha^2)} e^{i\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}} dk_x dk_y,$$

donde, con la finalidad de facilitar la integración, podemos utilizar la sustitución

$$\left(k_x^2 + k_y^2 + \alpha^2\right)^{-1} = \int_0^\infty e^{-(k_x^2 + k_y^2 + \alpha^2)\xi} d\xi,$$

y así poder escribir la concentración como

$$C'(x', y') = \frac{R}{D} e^{\frac{V_{y0}}{2D}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(k_x^2 + k_y^2 + \alpha^2)\xi + i\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k}} dk_x dk_y d\xi.$$

El producto punto en la exponencial es  $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{k} = x'k_x + y'k_y$ , con lo cual tenemos  $-k_x^2\xi + ix'k_x$ , a lo cual solo le falta el término  $x'^2/4\xi$  para completar el binomio cuadrado siguiente

$$-k_x^2\xi + ix'k_x + \frac{x'^2}{4\xi} = \left(ik_x\sqrt{\xi} + \frac{x'}{2\sqrt{\xi}}\right)^2,$$

y de forma similar para  $k_y$  y  $y'$ . Así que podemos expresar la solución como

$$C'(x', y') = \frac{R}{D} e^{\frac{V_{y0}}{2D}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{\left(ik_x\sqrt{\xi} + \frac{x'}{2\sqrt{\xi}}\right)^2} e^{\left(ik_y\sqrt{\xi} + \frac{y'}{2\sqrt{\xi}}\right)^2} e^{-\frac{(x'^2 + y'^2)}{4\xi} - \xi\alpha^2} dk_x dk_y d\xi.$$

Tenemos dos funciones gaussianas  $f(x) = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  para las cuales

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \sigma\sqrt{2\pi},$$

vemos que para nuestras funciones  $\sigma = \sqrt{2\xi}$ , por lo que nuestra solución se reduce a

$$C' = \frac{R}{D} e^{\frac{V_{y0}}{2D}} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} e^{-\frac{(x'^2 + y'^2)}{4\xi} - \xi\alpha^2} d\xi = \frac{R}{D} e^{\frac{V_{y0}}{2D}} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} e^{-\frac{r'^2}{4\xi} - \xi\alpha^2} d\xi.$$

Una de las formas integrales para expresar la función modificada de Bessel  $K_0$  [10] es

$$K_0(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t - \frac{z^2}{4t}} \frac{dt}{t},$$

entonces, tomando  $\xi\alpha^2 = \eta$ , vemos que nuestra integral es  $K_0(r'\alpha)$ , dejandonos así

$$C' = \frac{R}{2\pi D} e^{\frac{V_{y0}}{2D}} K_0(\alpha r'). \quad (2.24)$$

Ahora podemos escribir la solución para  $C = e^{-\frac{V_{y0}}{2D}} C'$ , con lo que tenemos que la concentración de partículas para la posición  $\mathbf{r}$  dada una fuente en la posición  $\mathbf{r}_0$  está dada por

$$C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{R}{2\pi D} e^{-\frac{V(y-y_0)}{2D}} K_0(\alpha|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|). \quad (2.25)$$

## 2.3.3 Solución para la tasa de detecciones

Ya que conocemos la solución a la ecuación de difusión y advección, queremos encontrar la tasa de partículas detectadas para una circunferencia de radio  $a$  centrada en la posición  $\mathbf{r}$ . Queremos que esta circunferencia se comporte como un sumidero, de modo que busquemos solo contar las partículas que hayan pasado o se encuentren por vez primera en esta circunferencia para cierto intervalo temporal. Podemos tratar el plano donde se encuentran las partículas como una red discreta, donde cada casilla de esta red es un cuadrado de lado  $2a$ , así tenemos como tarea encontrar la densidad de probabilidad del primer arribo de una partícula a la posición  $\mathbf{r}$  de esta red en un tiempo  $t$ .

La probabilidad  $P_t(\mathbf{r}|0)$  de que una partícula que parte del origen llegue a la posición  $\mathbf{r}$  al tiempo  $t$ , es la probabilidad de que ésta haya llegado por vez primera en un momento anterior, por la probabilidad de haber regresado en el intervalo restante de tiempo. Entonces para cualquier posición

$$P_t(\mathbf{r}|0) = \delta(\mathbf{r})\delta(t) + \sum_{t'=0}^t f_{t'}(\mathbf{r})P_{t-t'}(\mathbf{r}|\mathbf{r}),$$

donde  $f_t(\mathbf{r})$  es la probabilidad de primer arribo y  $P_{t-t'}(\mathbf{r}|\mathbf{r})$  representa la probabilidad de regresar en el intervalo  $t - t'$ . La probabilidad de regreso es la misma para cualquier posición, por tanto podemos tomar la probabilidad de regresar al origen, dejando así

$$P_t(\mathbf{r}|0) = \delta(\mathbf{r})\delta(t) + \sum_{t'=0}^t f_{t'}(\mathbf{r})P_{t-t'}(0|0). \quad (2.26)$$

Multipliquemos ambos lados de la ecuación por  $z^t$  y sumemos sobre los valores de  $t$  desde cero hasta infinito

$$\sum_{t=0}^{\infty} z^t P_t(\mathbf{r}|0) = \sum_{t=0}^{\infty} z^t \delta(\mathbf{r}-0)\delta(t-0) + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{t'=0}^t z^t f_{t'}(\mathbf{r})P_{t-t'}(0|0).$$

Las sumas sobre  $t'$  desde cero hasta infinito y sobre  $t$  desde  $t'$  hasta infinito, toman los mismos elementos que las sumas sobre  $t$  de cero a infinito y sobre  $t'$  de cero a  $t$ . Con esto tenemos

$$\sum_{t=0}^{\infty} z^t P_t(\mathbf{r}|0) = \sum_{t=0}^{\infty} z^t \delta(\mathbf{r}-0)\delta(t-0) + \sum_{t'=0}^{\infty} \sum_{t=t'}^{\infty} z^t f_{t'}(\mathbf{r})P_{t-t'}(0|0). \quad (2.27)$$

Para el segundo término del lado derecho, podemos descomponer  $z^t$  en  $z^{t-t'}z^{t'}$  y tomar  $t'' = t - t'$  de modo que nos quedemos con

$$\sum_{t=0}^{\infty} z^t P_t(\mathbf{r}|0) = \sum_{t=0}^{\infty} z^t \delta(\mathbf{r}-0)\delta(t-0) + \sum_{t'=0}^{\infty} \sum_{t''=0}^{\infty} z^{t'} f_{t'}(\mathbf{r})z^{t''} P_{t''}(0|0).$$

La transformada  $Z$  se define como

$$\tilde{F}(z) = \sum_{t=0}^{\infty} z^t F(t), \quad (2.28)$$

Para  $F(t) = \delta(t)$  se tiene  $\tilde{F}(z) = 1$ . Vemos que todos los términos de (2.27) expresan una transformada  $Z$ , así que podemos escribir

$$\tilde{P}_z(\mathbf{r}|0) = \delta(\mathbf{r}) + \tilde{f}_z(\mathbf{r})\tilde{P}_z(0|0),$$

que para  $r \neq 0$  se reduce a

$$\tilde{P}_z(\mathbf{r}|0) = \tilde{f}_z(\mathbf{r})\tilde{P}_z(0|0).$$

Tenemos entonces que en el espacio  $Z$ , la probabilidad de primer arribo se escribe como

$$\tilde{f}_z(\mathbf{r}) = \frac{\tilde{P}_z(\mathbf{r}|0)}{\tilde{P}_z(0|0)}. \quad (2.29)$$

Necesitamos ahora conocer  $\tilde{P}_z(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ , para esto, recurramos a la ecuación de difusión y advección para una sola partícula

$$\frac{\partial c'}{\partial t} = D\nabla^2 c' - \left( \frac{V^2}{4D} + \frac{1}{\tau} \right) c', \quad c' = e^{\frac{Vy}{2D}} c.$$

La solución a esta ecuación representa la densidad de probabilidad de observar una partícula en una región  $dr$  alrededor de la posición  $\mathbf{r}$  para un tiempo  $t$ . Hasta ahora habíamos tratado con pasos discretos de tiempo, ahora pasemos a considerar la transformación  $z = e^{-st}$  así como pasos infinitesimales  $dt$ . Entonces, en lugar de la transformada  $z$  tenemos la transformada de Laplace que se define como

$$\tilde{F}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt, \quad (2.30)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación de difusión y advección por  $\exp(-st)$  e integrando sobre  $t$  desde cero hasta infinito tenemos

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial c'}{\partial t} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} D\nabla^2 c' dt - \int_0^{\infty} e^{-st} \left( \frac{V^2}{4D} + \frac{1}{\tau} \right) c' dt.$$

Haciendo uso de la transformada de Laplace tenemos que

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial F(t)}{\partial t} dt = s\tilde{F} - F(0),$$

donde en nuestro caso

$$c'_{t=0} = e^{\frac{Vy}{2D}} \delta(\mathbf{r}) = e^{\frac{Vy_0}{2D}} \delta(\mathbf{r}).$$

Con esto rescribimos la ecuación como

$$0 = D\nabla^2 \hat{c}' - \left( s + \frac{V^2}{4D} + \frac{1}{\tau} \right) \hat{c}' + e^{\frac{Vy_0}{2D}} \delta(\mathbf{r}),$$

que tiene la misma forma que la ecuación de difusión y advección resuelta anteriormente, por tanto tiene la misma solución:

$$\tilde{c}' = \frac{1}{2\pi D} e^{\frac{Vy_0}{2D}} K_0 \left( r' \sqrt{s + \frac{V^2}{4D} + \frac{1}{\tau}} \right).$$

Hemos encontrado entonces la transformada de Laplace para la densidad de probabilidad  $P_t(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ , representada por

$$\tilde{P}_s(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = e^{\frac{-Vy}{2D}} \hat{c}' = \frac{1}{2\pi D} e^{\frac{-V(y-y_0)}{2D}} K_0 \left( |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \sqrt{s + \frac{V^2}{4D} + \frac{1}{\tau}} \right). \quad (2.31)$$

Vemos entonces que la densidad de probabilidad transformada para el retorno  $\tilde{P}_s(0|0)$  implica evaluar  $K_0(0)$  lo cual diverge y por tanto tenemos que buscar otra forma de obtener la probabilidad de retorno. Ahora, lo que nos interesa es conocer la tasa de detecciones para un disco de radio  $a$ , así que podemos integrar esta densidad de probabilidad sobre éste disco centrado en el origen, obteniendo así para la probabilidad de detección en un radio  $a$  a partir del origen

$$\tilde{P}_s(0 < r < a) = \int_{circ} \tilde{P}_s(\mathbf{r}|0) d\mathbf{r} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{-Vy}{2D}}}{2\pi D} K_0 \left( r \sqrt{s + \frac{V^2}{4D} + \frac{1}{\tau}} \right) r dr d\theta. \quad (2.32)$$

Para  $s = 0$  tenemos para esta probabilidad

$$\tilde{P}_0(0 < r < a) = \frac{1}{2\pi D} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{\frac{-Vr \sin \theta}{2D}} K_0(ar) r dr d\theta. \quad (2.33)$$

donde ya hemos tomado en cuenta que  $y = r \sin \theta$ . Podemos realizar la expansión de la exponencial y enfocarnos en la integral sobre  $\theta$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left( 1 - \frac{V}{2D} r \sin \theta + \frac{V^2}{4D^2} r^2 \sin^2 \theta - \frac{V^3}{8D^3} r^3 \sin^3 \theta + \dots \right) d\theta \\ = 2\pi + \frac{V^2 \pi}{4D^2} r^2 + \frac{3V^4 \pi}{64D^4} r^4 + \dots, \end{aligned}$$

los términos de potencia impar para  $\sin \theta$  desaparecen al integrarse sobre el intervalo  $(0, 2\pi)$ . Así nos queda

$$\tilde{P}_0(0 < r < a) = \frac{1}{2\pi D} \int_0^a \left( 2\pi r + \frac{V^2 \pi}{4D^2} r^3 + \frac{3V^4 \pi}{64D^4} r^5 + \dots \right) K_0(\alpha r) dr.$$

Si consideramos un radio suficientemente pequeño como para que  $r^n K_0(\alpha r)$  para  $n > 1$  converja a cero, podemos aproximar la probabilidad a

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(0 < r < a) &\approx \frac{1}{D} \int_0^a r K_0(\alpha r) dr = -\frac{r}{\alpha D} K_1(\alpha r) \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{\alpha D} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon K_1(\alpha \varepsilon) - a K_1(\alpha a) \right] \\ &= \frac{1}{\alpha^2 D} [1 - a \alpha K_1(\alpha a)]. \end{aligned}$$

Debemos ahora obtener la probabilidad de detectar una partícula en un radio  $a$  para cualquier otro punto. Pero para esta tarea podemos tomar en cuenta que para un radio  $a$  pequeño, la densidad de probabilidad para  $\mathbf{r}$  representa el valor medio para la circunferencia de radio  $a$ . Entonces, podemos escribir la probabilidad de detectar una partícula dentro un radio  $a$  alrededor de la posición  $\mathbf{r}$  como

$$\tilde{P}_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \approx \frac{a^2}{2D} e^{-\frac{V(y-y_0)}{2D}} K_0(\alpha |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$$

Con lo que la probabilidad de primer arribo para un disco de radio  $a$  centrado en  $\mathbf{r}$  es

$$\tilde{f}_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{\frac{a^2}{2D} e^{-\frac{V(y-y_0)}{2D}} K_0(\alpha |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)}{\frac{1}{\alpha^2 D} [1 - a \alpha K_1(\alpha a)]}.$$

La tasa de detección de partículas a  $t$  está dada por la probabilidad de primer arribo de toda partícula emitida en cualquier momento anterior a  $t$

$$R_t(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = R \int_{-\infty}^t f_t(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) dt.$$

Entonces tenemos que la tasa de detección para el disco de interés a cualquier tiempo, está dada por el producto de la tasa de emisión y la transformada de la probabilidad de primer arribo

$$R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = R \int_0^\infty f_{t'}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) dt' = R f_{s=0}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$$

Podemos finalmente escribir la tasa de detección como

$$R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{R(\alpha a)^2 e^{-\frac{V(y-y_0)}{2D}} K_0(\alpha|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{2[1 - \alpha a K_1(\alpha a)]} \quad (2.34)$$

que es distinta a la solución empleada en [25]. Considerando un producto  $\alpha a$  pequeño podemos aproximar  $\alpha a K_1(\alpha a) \approx 1 + (\frac{1}{2})(\alpha a)^2 \ln \alpha a$ , con lo que podemos reescribir la tasa de detección como

$$R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \approx \frac{R(\alpha a)^2 e^{-\frac{V(y-y_0)}{2D}} K_0(\alpha|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{2\left[1 - 1 - (\frac{1}{2})(\alpha a)^2 \ln(\alpha a)\right]} = \frac{R e^{-\frac{V(y-y_0)}{2D}} K_0(\alpha|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)}{\ln(1/\alpha a)} \quad (2.35)$$

que es la solución propuesta por M. Vergassola en [25]. Esta última adquiere valores negativos para parámetros que cumplan con  $\alpha a > 1$ , mientras que la solución presentada en este trabajo exhibe valores por encima de la tasa de emisión en ese mismo rango de parámetros. Los resultados mostrados en este trabajo fueron obtenidos usando la solución (2.34).

#### 2.3.4 Longitud de correlación

Hasta ahora habíamos tratado con la variable  $\alpha$  por comodidad en los cálculos, pero será importante hacer la transición al inverso de esta variable. Entonces definamos la longitud de correlación como

$$\lambda = \alpha^{-1} = \sqrt{\frac{D\tau}{1 + \frac{V^2\tau}{4D}}}. \quad (2.36)$$

La distancia promedio que recorren las partículas en su tiempo de vida es

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{4D\tau + V^2\tau^2}, \quad (2.37)$$

vemos que la longitud de correlación en ausencia de viento se reduce a  $\lambda = \sqrt{D\tau}$  que es proporcional a la longitud media que recorren las partículas durante su tiempo de vida. La longitud de correlación proporciona entonces un estimado de la distancia media que recorren las partículas, dando así también un estimado del alcance de la pluma de partículas.

## 2.4 INFOTAXIS

### 2.4.1 El buscador infotáctico

Tenemos un agente buscando el punto de emisión de cierto tipo de partículas, y estas partículas son las únicas señales disponibles que tiene el agente para guiarse hasta la fuente. Ahora, supongamos que la fuente se encuentra en un plano de tamaño finito. Podemos idealizar al agente como una circunferencia de radio  $a$ , permitiendo dividir el plano en casillas cuadradas con lados de longitud  $2a$  (ver figura 3).

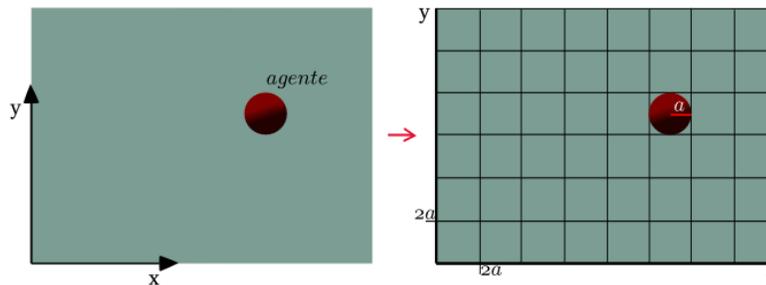


Figura 3: División del plano en casillas de lado  $2a$ .

La fuente se encuentra en una de estas casillas, y emite partículas que se desplazan por el plano. Por efecto difusivo las partículas se dispersen y por tanto, la concentración de partículas disminuye al alejarnos de la fuente (ver figura 4). De esta forma un gradiente en la densidad de concentración de partículas le permite al agente saber si se está acercando o alejando de la fuente. Pero si consideramos que la concentración de partículas es baja, de modo que sean escasas las posiciones en las que se observan partículas, el agente recorrerá muchas casillas sin observar señales, siendo ineficiente guiarse usando gradientes de concentración.

Si bien no podemos detectar gradientes debido a la baja concentración de partículas, el hecho es que el número de partículas disminuye rápidamente al retirarnos del punto de emisión, así que la probabilidad de realizar detecciones también disminuye al aumentar la distancia. Y es esta probabilidad la herramienta usada en infotaxis [25] para recolectar información que le permita al buscador localizar la posición de la fuente.

Ahora necesitamos estimar la probabilidad de observar partículas en cualquier posición a partir de una cierta casilla emisora. Supongamos que tenemos los medios para conocer el número de partículas que genera la fuente por unidad de tiempo, y que conocemos el tiempo promedio de vida de estas partículas hasta el momento de volverse indetectables por el agente. También supongamos que conocemos la tasa a la que se dispersan las partículas, y si existe un viento (una corriente que dispersa a las partículas en una dirección preferencial), supongamos que lo podemos caracterizar por un viento constante, y elijamos nuestro marco de referencia de forma que este viento sea siempre descendente.

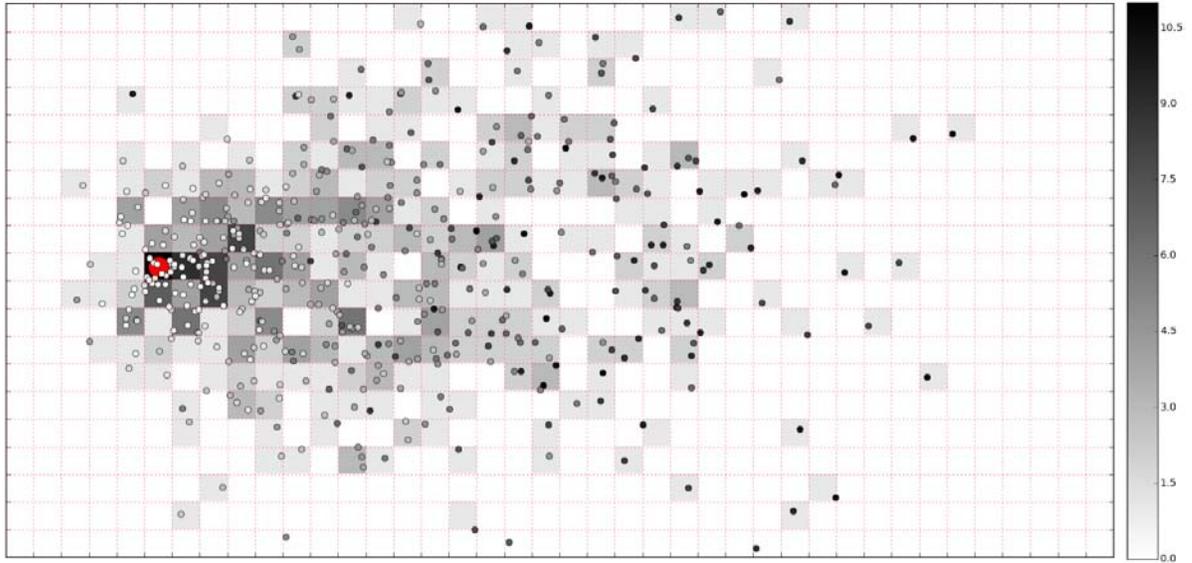


Figura 4: Pluma de partículas. La fuente está caracterizada por el punto rojo, mientras que las partículas por los puntos pequeños. El color de los puntos va de blanco a negro denotando el tiempo que ha transcurrido desde su emisión. El color en las casillas representa el número de partículas en éstas, yendo de 0 a 11 como lo muestra la barra de color. Las partículas se difunden sobre la malla y sufren el efecto de un viento constante hacia la derecha, vemos entonces que la concentración de partículas disminuye al alejarse de la fuente.

El comportamiento de la fuente (supuesto por el agente), será proporcionado por un modelo de partículas emitidas por una fuente con tasa de emisión  $R$ , las partículas tienen un tiempo finito de vida  $\tau$  y se encuentran en un medio con difusión isotrópica  $D$ , donde existe advección generada por un viento promedio  $V$ . Entonces el modelo está descrito por la siguiente ecuación de difusión y advección

$$\frac{\partial C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\partial t} = D\nabla^2 C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) + V\frac{\partial C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\partial y} - \frac{C(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}{\tau} + R\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

A partir de la solución a esta ecuación es posible obtener la función  $R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$  que representa el número promedio de partículas a observar en la posición  $\mathbf{r}$  dada una fuente en  $\mathbf{r}_0$ .

Ahora tenemos una tasa media de detección, y queremos conocer la probabilidad de observar  $n$  partículas para una posición  $r$  en un intervalo fijo de tiempo  $\Delta t$ . Dado que no cambia el comportamiento de la fuente, y tampoco cambian las condiciones del medio durante la búsqueda, la probabilidad de realizar detecciones es independiente del tiempo. Entonces tenemos una distribución de probabilidad de Poisson, donde la probabilidad de la ocurrencia de ciertos eventos, para un intervalo fijo de tiempo y un intervalo espacial fijo, tiene una tasa media de ocurrencia conocida e independiente del tiempo. Entonces nuestra probabilidad de realizar  $n$  detecciones en  $\mathbf{r}$  estando la fuente en  $\mathbf{r}_0$  es

$$P_n(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)^n e^{-R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}}{n!}.$$

Así, la probabilidad de no detectar partícula alguna ( $n = 0$ ), está dada por

$$P_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = e^{-R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}.$$

Entonces, si se observan  $n$  partículas en la posición  $\mathbf{r}$ , podemos obtener la probabilidad de que este evento fuese generado por una fuente en una posición  $\mathbf{r}_0$ . Consideremos que el agente visita las posiciones  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  y  $\mathbf{r}_3$ , y que en este recorrido solo en la posición  $\mathbf{r}_2$  logró realizar una detección. La probabilidad de que esta serie de eventos fuese generada dado que el punto de emisión es  $\mathbf{r}_0$ , es entonces el producto de las probabilidades de cada evento:

$$P_0(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_0)P_1(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}_0)P_0(\mathbf{r}_3|\mathbf{r}_0) = e^{-R(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_0)}R(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}_0)e^{-R(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}_0)}e^{-R(\mathbf{r}_3|\mathbf{r}_0)}.$$

Dado que los eventos ocurridos debieron ser generados por una casilla emisora, la suma de las probabilidades sobre todas las casillas del plano debe ser igual a la unidad. Para asegurar esto, necesitamos normalizar la distribución de probabilidades para esta serie de eventos. En general, para cualquier serie de eventos tendríamos para la probabilidad de su ocurrencia

$$P_{n_1, \dots, n_t}(\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_t\}|\mathbf{r}_0) = \frac{R^{n_1}(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_0)e^{-R(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_0)} \dots R^{n_t}(\mathbf{r}_t|\mathbf{r}_0)e^{-R(\mathbf{r}_t|\mathbf{r}_0)}}{n_1! \dots n_t!}.$$

Llamaremos "trazo" a la serie de posiciones con sus respectivos tiempos y número de partículas observadas, lo caracterizaremos por  $T_t$ . Así, dado un trazo, la verosimilitud de que éste fuera generado por una fuente en  $\mathbf{r}_0$  es

$$L(\mathbf{r}_0|T_t) = \prod_{i=0}^t \left( \frac{e^{-R(\mathbf{r}_i|\mathbf{r}_0)} R^{n_i}(\mathbf{r}_i|\mathbf{r}_0)}{n_i!} \right),$$

donde el subíndice  $i$  corre sobre los saltos discretos de tiempo  $\Delta t$ , y  $n_i$  representa el número de partículas observadas en ese intervalo de tiempo. Esta es la verosimilitud de una fuente en  $\mathbf{r}_0$  dado el trazo  $T_t$  y es equivalente a la probabilidad  $P(T_t|\mathbf{r}_0)$  de observar el trazo  $T_t$  si tenemos la fuente en  $\mathbf{r}_0$ . Entonces, la probabilidad de tener a la fuente en  $\mathbf{r}_0$  dado el trazo  $T_t$  es

$$P_t(\mathbf{r}_0|T_t) = \frac{P(T_t|\mathbf{r}_0)P_0(\mathbf{r}_0)}{\sum_{\mathbf{r}_0} P(T_t|\mathbf{r}_0)P_0(\mathbf{r}_0)} = \frac{L(\mathbf{r}_0|T_t)P_0(\mathbf{r}_0)}{\sum_{\mathbf{r}_0} L(\mathbf{r}_0|T_t)P_0(\mathbf{r}_0)}.$$

Pero dado que a  $t = 0$  todas las posiciones tienen la misma probabilidad de poseer a la fuente, entonces la probabilidad marginal  $P_0(\mathbf{r}_0)$  desaparece de la ecuación anterior dejándonos así

$$P_t(\mathbf{r}_0) = \frac{L_{\mathbf{r}_0}(T_t)}{\sum_{\mathbf{r}_0} L_{\mathbf{r}_0}(T_t)} = \frac{\prod_{i=0}^t \left( e^{-R(\mathbf{r}_i|\mathbf{r}_0)} R^{n_i}(\mathbf{r}_i|\mathbf{r}_0) \right)}{\sum_{\mathbf{r}_0} \prod_{i=0}^t \left( e^{-R(\mathbf{r}_i|\mathbf{r}_0)} R^{n_i}(\mathbf{r}_i|\mathbf{r}_0) \right)}.$$

Observando la ecuación para la verosimilitud, vemos que

$$L_{\mathbf{r}_0}(T_t) = L_{\mathbf{r}_0}(T_0) L_{\mathbf{r}_0}(T_{\Delta t}) \dots L_{\mathbf{r}_0}(T_{t-\Delta t}) \frac{e^{-R(\mathbf{r}_t|\mathbf{r}_0)} R^{n_t}(\mathbf{r}_t|\mathbf{r}_0)}{n_t!}.$$

Con lo que la verosimilitud a  $t + \Delta t$  se actualiza a partir de la verosimilitud al tiempo  $t$  como

$$L_{\mathbf{r}_0}(T_{t+\Delta t}) = L_{\mathbf{r}_0}(T_t) \frac{e^{-R(\mathbf{r}_{t+\Delta t}|\mathbf{r}_0)} R^{n_{t+\Delta t}}(\mathbf{r}_{t+\Delta t}|\mathbf{r}_0)}{n_{t+\Delta t}!},$$

De la misma forma entonces, la distribución de probabilidad al tiempo  $t + \Delta t$  se puede escribir como

$$P_{t+\Delta t}(\mathbf{r}_0) = \frac{P_t(\mathbf{r}_0) e^{-R(\mathbf{r}_{t+\Delta t}|\mathbf{r}_0)} R^n(\mathbf{r}_{t+\Delta t}|\mathbf{r}_0)}{Z_{t+\Delta t}}, \quad (2.38)$$

donde  $Z_{t+\Delta t}$  es la constante de normalización y  $n$  es el número de partículas observadas en el intervalo entre  $t$  y  $t + \Delta t$ . Podemos considerar esta distribución de probabilidades como un mapa hacia la fuente, un mapa que se vuelve más confiable al ir adquiriendo información.

A  $t = 0$ , cada posición de la malla (en la que segmentamos el plano), tiene la misma probabilidad de albergar a la fuente. Cada posición visitada hasta antes de encontrar la fuente, adquiere probabilidad cero de poseerla. Por tanto, una vez el agente adquiere una posición dentro de la malla y ésta no es la posición de la fuente, la probabilidad de que esta posición contenga a la fuente se vuelve cero. Ya modificada la probabilidad de esta posición, se prosigue a actualizar mapa de acuerdo a el número de partículas observadas en esa posición.

Ahora que tenemos el mapa actualizado, y por tanto tenemos nueva información sobre el paradero de la fuente, es necesario decidir el siguiente paso del agente. El algoritmo de infotaxis consiste en la recolección de información, así que con el fin de recabar la mayor información posible, el agente habrá de elegir, la posición que maximice la ganancia local de información. Esto es, el agente elegirá entre moverse o permanecer en su posición mediante la estimación de la ganancia esperada de información, siendo la casilla con mayor ganancia esperada, su posición a elegir.

Necesitamos entonces un medio para estimar la información a recolectar. Consideremos al trazo observado como un mensaje de la fuente, enviado al agente para informarle de su paradero. La entropía de Shannon [23] permite medir la información contenida en un mensaje, mientras menor sea la entropía mayor es la porción determinada del mensaje. La posición de la fuente  $r_0$  representa una variable aleatoria discreta con posibles valores  $\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ , donde  $N$  es el número de casillas en el plano. A partir de la distribución de probabilidad  $P(r_0)$ , podemos obtener la entropía de Shannon asociada a la posición de la fuente

$$S = - \sum_{\mathbf{r}_0}^N P_t(\mathbf{r}_0) \ln (P_t(\mathbf{r}_0)).$$

Esta entropía nos permite estimar la incertidumbre de la posición de la fuente. Como se mencionó anteriormente, a  $t = 0$  todas las posiciones del mapa tienen la misma probabilidad de poseer a la fuente, así que el mapa no contiene información alguna sobre la posición de la fuente. La entropía asociada al mapa es entonces

$$S = - \sum_{\mathbf{r}_0}^N \frac{\ln(1/N)}{N} = \ln(N).$$

Cuando se adquiere información, disminuye la incertidumbre asociada a la posición buscada. De esta forma, al ir recolectando información, el mapa se vuelve más confiable. El mapa se completará una vez se tenga determinada la posición de la fuente. Que la posición de la fuente esté determinada, implica que exceptuando una posición, todas tienen probabilidad cero de tener a la fuente, y que la excepción tiene probabilidad igual a la unidad. Con esto la entropía del mapa completo es

$$S = -\ln(1) = 0,$$

por tanto, el objetivo final del agente será reducir la entropía hasta cero. Ahora, el objetivo del agente a cada paso, es elegir dentro de las posibles posiciones a elegir, la cual maximice la reducción de entropía. El número de posibles posiciones dependerá de la geometría de la malla y estará reducida en las fronteras. En este trabajo se tiene una malla cuadrada, y se le permite al agente moverse entre sus primeras 4 vecinas o permanecer en su posición, de modo que se le presentan un máximo de 5 opciones, que se verán reducidas a 4 ó 3 si se encuentra en una frontera o en una esquina respectivamente.

Para cada paso realizado el agente puede o no encontrar la fuente, hay múltiples escenarios posibles una vez que éste falla en encontrarla. Cada escenario está asociado al número de partículas que observa, por tanto, cada uno tiene distinta probabilidad de ocurrir. De esta forma, el cambio esperado en la entropía para el posible movimiento de la posición  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{r}'$  está dado por

$$\Delta S(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}') = -P_t(\mathbf{r}')S + (1 - P_t(\mathbf{r}')) \left[ \sum_n \rho_n(\mathbf{r}') \Delta S_n \right]. \quad (2.39)$$

El primer término del lado derecho es un término “explotativo”. Este término considera el posible éxito en encontrar la fuente para la posición  $\mathbf{r}'$ , por tanto, el cambio en la entropía es  $S$  (dado que si se encuentra a la fuente, la entropía se desvanece). La finalidad de este término es promover la elección de la posición con mayor probabilidad de albergar a la fuente. El segundo término presenta una combinación “explorativa” y explotativa: este término contempla no encontrarla al siguiente paso y por tanto se le da el peso  $1 - P_t(\mathbf{r}')$ . En esta parte se consideran los posibles escenarios para posición  $\mathbf{r}'$ . El cambio  $\Delta S_n$ , representa la diferencia de incertidumbre entre el mapa del futuro escenario caracterizado por el encuentro de  $n$  partículas, y la incertidumbre del mapa actual. Cada escenario está ponderado por la probabilidad de su ocurrencia  $\rho_n(\mathbf{r}')$ . Para construir esta distribución de probabilidades, necesitamos obtener el promedio sobre  $\mathbf{r}_0$  de señales esperadas a observarse en  $\mathbf{r}'$ , escrita como

$$h(\mathbf{r}') = \Delta t \sum_{\mathbf{r}_0} P_t(\mathbf{r}_0) R(\mathbf{r}'|\mathbf{r}_0). \quad (2.40)$$

Utilizando este promedio, podemos construir la distribución de probabilidad para la ocurrencia de los escenarios descritos por el encuentro de  $n$  partículas

$$\rho_n(\mathbf{r}') = \frac{h(\mathbf{r}')^n e^{-h(\mathbf{r}')}}{n!}. \quad (2.41)$$

El agente elegirá entonces, la posición para la cual la reducción en la entropía sea mayor. Una vez el agente se coloque en dicha posición el mapa volverá a actualizarse con la información adquirida por el agente en esta posición.

Partiendo de esto, la estrategia propuesta es la exploración en una primera instancia, para así adquirir información sobre las posibles posiciones de la fuente y en segunda instancia realizar la “explotación” de esta información para dirigirse hacia la posición estimada de la fuente. La función para el cambio esperado en la entropía representa un ejemplo de lo que en el “Aprendizaje Reforzado” se conoce como función premiante [24]. La información representa el premio para el agente y por tanto el objetivo de este es acumular la mayor información posible a cada paso. El compromiso entre una estrategia explotativa y una explorativa es recurrente en el area del Aprendizaje Reforzado.

#### 2.4.2 Infotaxis para varios agentes

Una extensión al método de búsqueda basado en infotaxis fue desarrollado por J-B. Masson [16]. En esta extensión introduce búsquedas realizadas por varios agentes, los cuales “cooperan” con el objetivo de encontrar a la fuente. La cooperación de estos agentes es llevada a cabo al compartir un mapa de probabilidades común, esto es, un mapa que es actualizado con la información acumulada por cada uno de los agentes:

$$P_{t+\Delta t}(\mathbf{r}_0) = \frac{P_t(\mathbf{r}_0) \prod_{i=0}^N e^{-J(\mathbf{r}_i|\mathbf{r}_0)} J^{n_i}(\mathbf{r}_i|\mathbf{r}_0)}{Z_{t+\Delta t}}, \quad (2.42)$$

donde  $N$  es el número de agentes que realizan la búsqueda y  $n_i$  es el número de partículas observadas por el  $i$ ésimo agente durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Con este nuevo mapa compartido, tenemos dos alternativas para la toma de decisiones. Para la primera alternativa se calcula para cada agente (tal y como se realiza para un agente) la ganancia esperada de información para los posibles movimientos individuales a realizarse al siguiente paso:

$$\Delta S(\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}'_i) = -P_t(\mathbf{r}'_i)S + (1 - P_t(\mathbf{r}'_i)) \left[ \sum_n \rho_n(\mathbf{r}'_i) \Delta S_n \right]. \quad (2.43)$$

Cada agente escoge entonces, a partir de la información recolectada por el grupo completo de agentes, la posición para la cual la reducción en la entropía sea mayor, considerando sólo el efecto de su movimiento en la entropía. Esta alternativa representa una cooperación parcial entre agentes, dado que si bien comparten información, la toma de decisiones se hace de manera individual.

La segunda alternativa se basa en una cooperación total. La elección de las posiciones para este caso se realizará conjuntamente, esto es, se elegirá el conjunto de  $N$  posiciones para el cual la reducción de entropía sea mayor:

$$\Delta S(\{\mathbf{r}_i\} \rightarrow \{\mathbf{r}'_i\}) = -P^*_t(\{\mathbf{r}'_i\})S + (1 - P^*_t(\{\mathbf{r}'_i\})) \left[ \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_N} \Delta S_{\{n_i\}} \prod_{j=1}^N \rho_{n_j}(\mathbf{r}'_j) \right]. \quad (2.44)$$

donde la probabilidad necesaria para realizar el cálculo de la ganancia de información esperada es la probabilidad de que la fuente sea encontrada por uno de los agentes mientras los demás fracasan en encontrarla

$$P^*_t(\mathbf{r}'_i) = \sum_{j=1}^N \left[ P_t(\mathbf{r}'_j) \prod_{k \neq j} (1 - P_t(\mathbf{r}'_k)) \right]. \quad (2.45)$$

Si bien, este método ofrece una mayor reducción a la entropía a cada paso, el número de configuraciones para las cuales se necesita calcular el cambio en la entropía va como  $5^N$ , mientras que para la primera alternativa, al solo preocuparnos por el cambio en la entropía generado por movimientos individuales, los cambios a calcular van como  $5N$ .

### 2.4.3 El buscador ciego

En el contexto biológico, el buscador infotático descrito anteriormente puede ser considerado con sentidos olfatorio y visual, esto es, la detección de partículas es una habilidad olfatoria, mientras que la capacidad de reconocer a la fuente en un primer encuentro es considerada como un estímulo visual, tal y como un insecto macho guiado

por feromonas es capaz distinguir a la hembra una vez establece contacto visual con ésta.

El buscador “ciego” fue propuesto en [20] para enfrentar el problema de la detección de focos de infección para plagas en plantíos de forma no invasiva. Gracias a la detección de componentes volátiles organicos (VOCs) [28] emitidos por las plantas, es posible distinguir la presencia de la enfermedad en la planta y de esta forma implementar el algoritmo infotático.

Para los casos de búsqueda en los que no sea posible reconocer el foco de emisión a simple vista, se dependerá entonces totalmente de la detección de partículas. Todas estas búsquedas se vuelven por tanto puramente “olfatorias”.

Volviendo al algoritmo de infotaxis, tenemos ahora que para el buscador ciego (o puramente olfatorio) cada posición visitada sigue siendo una posible posición de la fuente, y por tanto deberá ahora de modificarse (en lugar de anularse) la probabilidad de poseer la fuente en cada posición visitada. Hacer esto implica suponer que la fuente se encuentra en la posición ocupada por el agente, de modo que es necesario obtener la tasa esperada de detección en esta posición suponiendo que ahí es donde se encuentra la fuente. No es posible utilizar la solución  $R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$  dado que diverge en el origen, pareciera que estuviésemos en un predicamento, pero de hecho esta tasa de detección es la más sencilla de obtener dado que es simplemente la tasa de emisión  $R$ , la tasa de partículas que visitan por vez primera la posición de la fuente, es la tasa de partículas emitidas por ésta.

Dada la incapacidad de distinguir a la fuente con solo llegar a su posición, la búsqueda ahora habrá de terminar una vez que se considere determinada la posición de la fuente. Es posible realizar esto al poner una cota inferior al valor de la entropía tal que consideremos tener suficiente certeza sobre la posición de la fuente como para poner fin a la búsqueda de la fuente.

#### 2.4.4 *El buscador híbrido*

Con la motivación de corroborar la ventaja que debiese proporcionar distinguir visualmente a la fuente y utilizar esta información en la actualización del mapa de probabilidades, se buscó implementar un buscador que fuese capaz de distinguir la fuente al estar en su posición, pero sin nulificar la probabilidad de las posiciones visitadas durante su recorrido. Tenemos entonces un buscador que es capaz de distinguir la fuente pero elige como estrategia no utilizar esta información, un híbrido entre el ciego y el vidente, un “semiciego”.

## ANTECEDENTES

---

### 3.1 COMPORTAMIENTO

#### 3.1.1 *Infotaxis como una estrategia para búsqueda sin gradientes*

El artículo [25] representa la introducción del algoritmo “Infotaxis”, así como la primera descripción del comportamiento exhibido por un buscador infotáctico. Desde este trabajo se hace notar la simetría radial de la función  $R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$  en ausencia de viento, provocando que el buscador ante la ausencia de detecciones, genere recorridos en forma espiral.

Desde este trabajo se observa cómo al aumentar la información recolectada, la dirección hacia la fuente emerge como la preferencial, guiando al agente hasta ella.

En presencia de viento, distinguen varias fases alternantes en el movimiento del agente; una fase de movimiento directo contra viento, una fase de movimiento de costado al viento e inclusive movimiento en la dirección del viento. Observando esto, terminan por notar la similitud entre este comportamiento y el movimiento exhibido por las polillas macho ante una pluma de feromonas emitida por la hembra [11, 14].

En esta misma primera introducción a infotaxis presentan un análisis cuantitativo del algoritmo, presentando la respuesta de este ante la distancia inicial a la fuente. Para probar la robustez del algoritmo ante variaciones en el modelo, expusieron el algoritmo ante una pluma de partículas extraída experimentalmente.

#### 3.1.2 *Persiguiendo información para buscar en ambientes aleatorios*

En [16] se vuelve a mencionar la simetría polar presente en ausencia de viento y que solo se puede romper al percibir detecciones. Mientras aumenta el número de detecciones, la dirección hacia la fuente se presenta en el mapa probabilístico permitiendo que esta información sea usada para guiar al agente hasta la fuente.

Para probar la robustez del algoritmo, presentan la respuesta del mismo ante una incorrecta estimación de los parámetros de la fuente. En la figura 5 de [16] proporcionan una gráfica para el tiempo de búsqueda promedio del agente cómo función de la distancia entre la fuente y la posición inicial del agente, esto para una sobreestimación de la longitud de correlación  $\lambda_{incorrecta} = 2\lambda$  y una subestimación  $\lambda_{incorrecta} = \lambda/2$ . Terminan por observar que aunque el algoritmo es menos eficaz para estos casos, sigue siendo muy efectivo y nunca falla en encontrar a la fuente.

Dentro de este mismo artículo se introduce la extensión del algoritmo para varios agentes. Con la finalidad de determinar la efectividad de la cooperación entre agentes,

presentaron el escalamiento del tiempo de búsqueda con el número de agentes para una nula cooperación, para cooperación parcial y por último cooperación total. La figura 6 de ese trabajo, se presenta la gráfica para el escalamiento del tiempo promedio de búsqueda ante el número de agentes para distintas distancias iniciales.

Observan que la cooperación parcial representa una gran mejora ante la nula cooperación, mientras que si bien la cooperación total es mejor que la cooperación parcial, la mejora no es tan grande como la observada entre las dos anteriores. La cooperación total presenta mejores resultados que la cooperación parcial, pero el costo de cómputo es mucho más elevado que el requerido para cooperación parcial, yendo de un conjunto con  $5N$  opciones por turno para el caso de cooperación parcial a  $N^5$  para cooperación total. Entonces mientras que la cooperación parcial es una evidente mejora con respecto a la nula cooperación (tanto por los tiempos de búsqueda como por la reducción en uso de memoria al ir de  $N$  mapas a un mapa), la cooperación total no representa una mejora sustancial, dejándonos con la cooperación parcial como la estrategia a elegir.

Cabe resaltar que en [25] y en [16] se usó la solución aproximada al flujo de partículas (2.35) para simular la fuente, donde la detección de partículas se lleva a cabo con la distribución de Poisson para  $R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ .

### 3.1.3 Efectividad y robustez de un robot infotáctico en condiciones diluidas

Una implementación particularmente interesante de infotaxis es presentada en [18], donde un robot mediante el uso de un sensor de temperatura es capaz de realizar detecciones en la pluma emitida por una fuente de calor. En este artículo reportan por vez primera una búsqueda fallida del agente. En una de 21 simulaciones que realizaron el robot llegó a perderse. Adjudicaron este resultado a un elevado número de detecciones que provocaron que el agente considerara haber encontrado la fuente, y por tanto la explotación de la información lo persuadió de permanecer en su posición.

Este mismo grupo realizó un trabajo empleando un robot quimiotáctico [15]. El robot era guiado por un gradiente en la concentración medida entre dos sensores, simulando la función de una nariz. Para condiciones similares a las enfrentadas por el buscador infotáctico, un gradiente en la concentración podía ser extraído para movimiento lento del robot, esto es  $2.5\text{cm/s}$ , y para un área de  $2.9\text{m}^2$  alrededor de la fuente. En cambio en la implementación del robot infotáctico se logró expandir el área de búsqueda a  $20\text{m}^2$  y una velocidad de  $14\text{cm/s}$  para el movimiento del robot. Estos resultados muestran la superioridad del modelo infotáctico ante plumas diluidas.

### 3.1.4 Fluctuaciones inducidas geoméricamente en búsquedas olfatorias para dominios acotados

Otro análisis interesante sobre el algoritmo es la geometría que presenta la toma de decisión inicial del agente dependiendo de la posición de partida y de los valores de los

parámetros. El primer movimiento del buscador es determinista y la dirección de este movimiento depende de la elección de los parámetros, la posición inicial del buscador, el tamaño del mapa y la geometría tanto del mapa como de las casillas en la que este se divide [20]. Las fronteras tienen un efecto reflejante que promueve el movimiento hacia el centro del mapa, y por tanto en ausencia de fronteras el movimiento del agente sería preferencialmente lejos del centro, haciendo así la infotaxis poco efectiva para búsquedas sin fronteras.



## METODOLOGÍA

### 4.1 IMPLEMENTACIÓN

Para poder realizar la simulación computacional, es necesario discretizar temporal y espacialmente el movimiento del agente buscador. La actualización del mapa de probabilidades y la toma de decisiones deben realizarse a cada paso del agente. Entonces el paso temporal  $\Delta t$  será el correspondiente al tiempo que tarda el agente de pasar de su posición a una de sus primeras vecinas, por comodidad podemos simplemente igualarlo a la unidad.

Eligiremos que nuestro espacio sea un plano delimitado por  $0 \leq x \leq N - 1$  y  $0 \leq y \leq M - 1$  ( $N$  y  $M$  son números naturales), así podemos representar la posición del agente con la coordenada de la esquina inferior izquierda de la casilla que está ocupando. La posición del agente estará dada por la pareja de enteros  $i$  y  $j$  (ver figura 5), mientras que la posición de la fuente estará dada por la pareja de reales  $(x_0, y_0)$ .

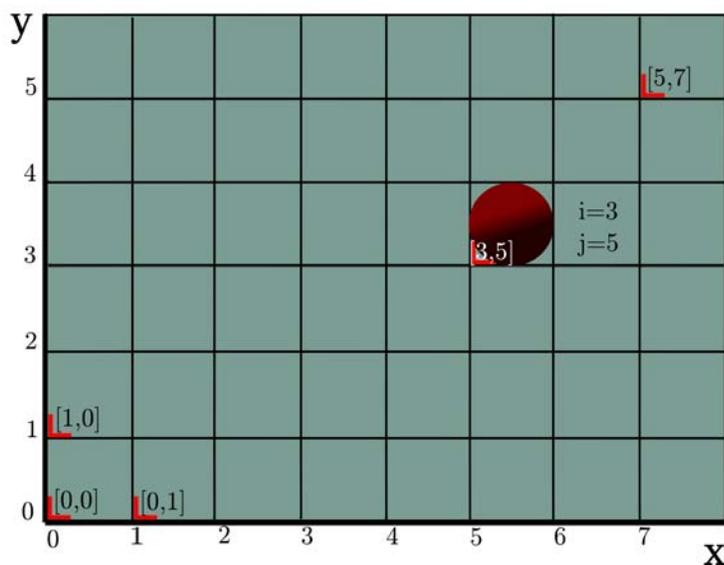


Figura 5: Representación del plano. El plano está dividido en casillas de lado  $2a$  donde  $a$  es el radio del agente. Las casillas de este mapa están representadas por la coordenada de su esquina inferior.

## 4.1.1 Detección de Partículas

Utilizando la tasa  $R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$  podemos simular la detección de partículas a partir de la distribución de Poisson

$$P_n(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \frac{R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)^n e^{-R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)}}{n!},$$

que proporciona la probabilidad de observar  $n$  partículas. La probabilidad de observar  $n$  o menos detecciones es

$$P(n) = \sum_{n'=0}^n P_{n'}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0).$$

A cada paso del agente podemos elegir un número  $p$  uniformemente distribuido en  $[0, 1)$ , que al comparar con la probabilidad  $P(n)$ , nos permita obtener el número de partículas  $n = 0, 1, 2, \dots, m$  a observar en este paso. Vamos a considerar que si  $P(n) < p$  se habrá de detectar al menos  $n$  partículas, entonces el primer valor de  $n$  que cumpla con  $P(n) > p$  será el número de partículas a detectar en ese paso.

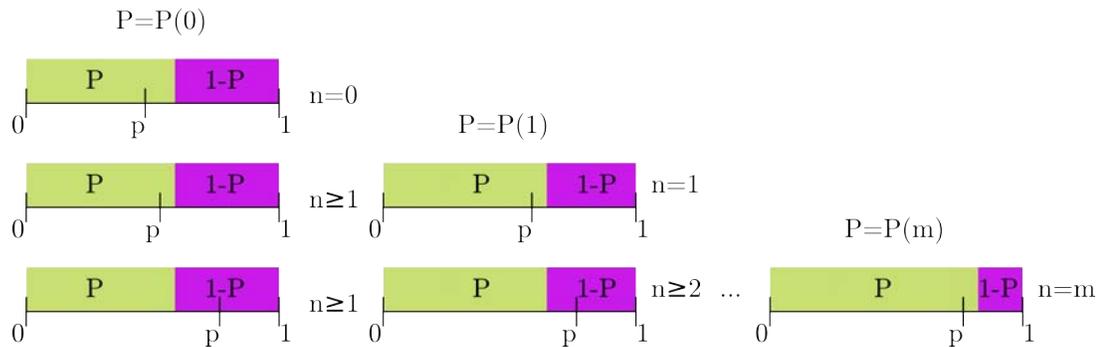


Figura 6: Simulación de la detección de partículas a partir de la distribución poissoniana de la tasa de detección. Para el primer paso se extrajo  $p_1$  que resultó menor que  $P(0)$  por tanto se realizaron cero detecciones. Para el segundo paso  $p_2$  fue mayor que  $P(0)$  pero menor que  $P(1)$ , dejando entonces una detección. Para el último paso fue hasta el valor  $m$  que  $P(m)$  fue mayor que  $p_3$ , así que se realizaron  $m$  detecciones.

Mediante una función generadora de números pseudo-aleatorios con distribución uniforme en  $[0, 1)$ , podemos extraer a cada intervalo  $\Delta t$  el valor  $p$  que nos permita determinar el número de detecciones a realizar en la posición  $\mathbf{r}$ . El algoritmo se puede escribir de la siguiente forma:

La figura 6 muestra una visualización del funcionamiento del algoritmo. Habrá de repetirse este algoritmo desde el primer paso para cada movimiento del agente.

1. Extraemos un número  $p$  pseudo-aleatorio distribuido uniformemente en  $[0, 1)$ .
2. Comenzamos por ver si se realizará detección, por tanto iniciamos con  $n = 0$ .
3. Calculamos la probabilidad de tener  $n$  o menos detecciones.
4. Si  $P(n) < p$  entonces se realizarán al menos  $n + 1$  detecciones y por tanto pasamos al paso 3 tomando  $n = n + 1$ .  
De lo contrario hemos determinado el número de detecciones  $n$  a realizarse en la posición  $\mathbf{r}$  al tiempo  $t$ .

Cuadro 1: Algoritmo para la detección de partículas

#### 4.1.2 Mapa de probabilidades y toma de decisiones

Ahora es momento de crear el mapa de probabilidades para así proceder a implementar el algoritmo de infotaxis. El mapa habrá de ser representado por una matriz de  $N \times M$  ( $N$  filas y  $M$  columnas), donde el elemento  $[i, j]$  en esta matriz contiene el valor de la probabilidad asignada a la casilla  $(i, j)$  del plano. En primera instancia el mapa es equiprobable, así que para cada elemento de la matriz tenemos una probabilidad  $P(i, j) = 1/(N \times M)$ . Siendo ésta nuestra distribución de probabilidad a priori, podemos pasar a actualizar la distribución con la posición  $(i, j)$  y el número de partículas observadas  $n$  mediante el uso la ecuación (2.38).

Una vez que tenemos el mapa actualizado, procedemos a obtener su entropía. Ahora debemos obtener las posibles posiciones a elegir en el siguiente movimiento. Tomando como  $N_p$  al número de posibles posiciones a ocupar en el siguiente paso, elegimos guardar estas posiciones en un arreglo bidimensional que nos permita guardar las  $N_p$  parejas. Podemos ahora iterar sobre los renglones de este arreglo para calcular el cambio esperado en la entropía de cada posición.

Para cada posible posición  $(i', j')$  se calcula primero el número esperado de detecciones  $h(i', j')$  dado por (2.40). Ya que tenemos distintos escenarios para cada posición dados por el número de partículas que suponemos se observan, es necesario también iterar sobre el número de detecciones  $n$  que suponemos se observan en la posible futura posición  $(i', j')$ . Los escenarios con  $n$  mayor a  $2R$  tienen una probabilidad muy baja de ocurrencia y por tanto podemos acotar el número supuesto de detecciones a  $n = 0, \dots, \leq 2R$ .

Teniendo una posición  $(i', j')$  y el número  $n$  de detecciones supuestas, pasamos a obtener la probabilidad de ocurrencia  $\rho_n(i', j')$  para este evento, dada por la ecuación (2.41). El siguiente paso es modificar una copia del mapa actual con este posible futuro evento  $(i', j', n)$ , de modo que podamos calcular la entropía de este posible mapa, y así

obtener el cambio en la entropía con respecto al mapa actual. Ya que tenemos tanto el cambio de entropía posible  $\Delta S_n(i', j')$  como la probabilidad de este cambio  $\rho_n(i', j')$ , entonces podemos obtener el producto de estos dos resultados y sumando este producto para cada valor  $n$ , podemos obtener el promedio sobre  $n$  para el cambio en la entropía de la posible nueva posición  $(i', j')$ , dado por  $\sum_n \rho_n(i', j') \Delta S_n$ .

Tenemos disponibles todos los elementos necesarios para obtener el cambio esperado en la entropía dado por (2.39). No solo debemos calcular el cambio esperado en la entropía, también debemos obtener la posición para la cual este cambio represente la mayor reducción (entre los  $N_p$  cambios calculados), es indispensable guardar al menos el valor máximo durante la iteración sobre  $N_p$ . Podemos guardar en un arreglo unidimensional de tamaño  $N_p$ , el valor de  $\Delta S((i, j) \rightarrow (i', j'))$ , y así obtener a cada iteración de las  $N_p$  posibles posiciones, la posición con mayor reducción esperada en la entropía hasta esa iteración, obteniendo así tras realizar las  $N_p$  iteraciones la posición con máxima reducción esperada en entropía, y por tanto la posición a visitar al siguiente paso.

Ahora que hemos definido como se realizará la toma de decisiones a cada paso del agente, habrá de repetirse este procedimiento hasta encontrar la posición de la fuente. Realizamos así una iteración sobre el número de pasos que nos permita repetir este procedimiento hasta que se cumpla  $i < x_0 < i + 1$  y  $j < y_0 < j + 1$ , una vez que se cumpla este par de condiciones la simulación se finaliza.

#### 4.1.3 *Varios agentes*

Para pasar al caso de varios agentes, primero consideremos que los agentes están sincronizados, de modo que realizan su movimiento en orden. Podemos simular nuestro grupo de agentes con una matriz de  $3 \times A$  (donde  $A$  es el número de agentes buscadores) para guardar en cada fila de esta matriz un vector  $(i, j, n)$  asociado a un agente. Entonces podemos iterar sobre los renglones de esta matriz para realizar la detección de partículas de cada agente, actualizar el mapa y por último realizar la toma ordenada de decisiones.

En el algoritmo para un agente nos aseguramos de eliminar cualquier partícula detectada, entonces podemos evitar en la implementación de varios agentes, que más de uno detecte una misma partícula, evitando así producir información errónea.

Tenemos que pasar a actualizar el mapa de probabilidades que tendrá que ser modificado por cada uno de los agentes, pero primero debemos de asegurarnos de no duplicar información. Si varios agentes se encuentran en una misma posición la información recabada debería ser la misma que la de un solo agente, entonces podemos evitar repetir información de dos formas: La primera sería asegurándonos de solo contemplar lo visto por un agente, siendo el primero en la posición multipoblada el que se tome en cuenta, esto dado que sólo el primer agente en la posición es capaz de hacer detecciones y por tanto es el que recaba la información correcta. La otra forma es evitar que los agentes

visiten la misma posición, lo cual se puede lograr viendo si la posición a elegir no ha sido ya elegida por un agente en ese mismo turno. En nuestro algoritmo implementamos ambos métodos, considerando que existe la posibilidad de que uno o más agentes se queden sin la opción de elegir una casilla vacía.

Ahora sí podemos actualizar el mapa, en la ecuación (2.42), notamos que para pasar del algoritmo para un agente al de varios, basta con iterar la actualización sobre las distintas posiciones ocupadas en el turno y las detecciones realizadas para cada una. El cálculo de la entropía es el mismo que para un agente.

Para la toma de decisiones se debe obtener para cada agente sus posibles posiciones y calcular el cambio esperado en la información en cada posición. Dado que estamos implementando la cooperación parcial, el cambio en la entropía se calcula para cada agente por separado, contemplando solamente su posible movimiento. El mapa común se modifica con la información de todos, pero la copia de este solo se modifica con la información individual para cada agente. Entonces tenemos que iterar el proceso de toma de decisiones para un agente partiendo en cada iteración del mapa actual.

Como dijimos anteriormente, para evitar perder agentes, podemos ver si la posición elegida fue ya elegida por un agente para este turno, claro está que el primer agente en elegir no tendrá que realizar este proceso.

#### 4.1.4 *Buscadores ciego y semiciego*

Para poder implementar el buscador ciego, es necesario usar la tasa de detecciones en la posición de la fuente. Esta tasa se usará para actualizar la posición visitada y para proporcionar detecciones en la posición de la fuente (si es que se emplea el generador de Poisson).

La actualización de la posición ocupada se hará utilizando la tasa  $R$ , para cualquier otra posición se utilizará la solución  $R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ . De igual forma, para simular la detección de partículas en la posición de la fuente se utilizará  $R$  en el algoritmo descrito en la sección 4.1.1, utilizando  $R(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$  para las demás posiciones.

La búsqueda para el ciego termina una vez que la entropía pasa cierto umbral, en este trabajo se utilizó un valor de 0.0001 como umbral para la entropía, esto es, una vez que la entropía adquiere un valor por debajo de 0.0001, se considera como finalizada la búsqueda. Se tomó este umbral al observar que para umbrales más grandes se tenía baja eficacia mientras que para umbrales más pequeños los tiempos de búsqueda aumentaban sin mejorar la eficacia.

Para el buscador semiciego la búsqueda termina al llegar a la posición de la fuente, así que no es necesario simular la detección de partículas para esta posición, solo será necesario actualizar la posición ocupada con la tasa  $R$ .

## 4.2 DATOS A RECABAR

### 4.2.1 *Visualización de la distribución de probabilidades*

Procedemos a realizar la impresión en un archivo de datos que contenga el mapa de probabilidades para cada turno, esto de forma que nos auxilie a entender el comportamiento del agente. Mediante la librería matplotlib del lenguaje de programación python, realizamos las gráficas en escala de colores para una interpretación cualitativa del mapa, que nos permitiera de cierta forma ver el criterio del agente. Cada imagen se complementó con el recorrido del agente y las posiciones con detecciones, de modo que nos permitiera entender de mejor forma la actualización de la distribución de probabilidad.

### 4.2.2 *Dirección del movimiento*

Con la finalidad de observar la dependencia del movimiento respecto a los parámetros elegidos ( $R$ ,  $\tau$ ,  $D$  y  $V$ ) y la posición inicial del agente, nos dimos la tarea de recolectar para cada paso del agente la dirección de su movimiento (*norte*, *sur*, *este*, *oeste*) o bien si permaneció en su posición. Mediante esta información se pudieron replicar las imágenes sobre la geometría inicial del movimiento del agente reportadas por [20].

## RESULTADOS Y ANÁLISIS

### 5.1 COMPORTAMIENTO

#### 5.1.1 Mapa de colores y comportamiento sin viento

Con la finalidad de un mejor entendimiento sobre el comportamiento del buscador infotático, se utilizó un mapa en escala de colores que facilitara la visualización de la distribución de probabilidades sobre la desconocida posición de la fuente. Es necesario aclarar que al graficar la distribución de probabilidad, la escala de colores es distinta para cada paso, acomodándose al valor máximo en la distribución de probabilidad para cada paso del agente (la probabilidad mínima es siempre 0).

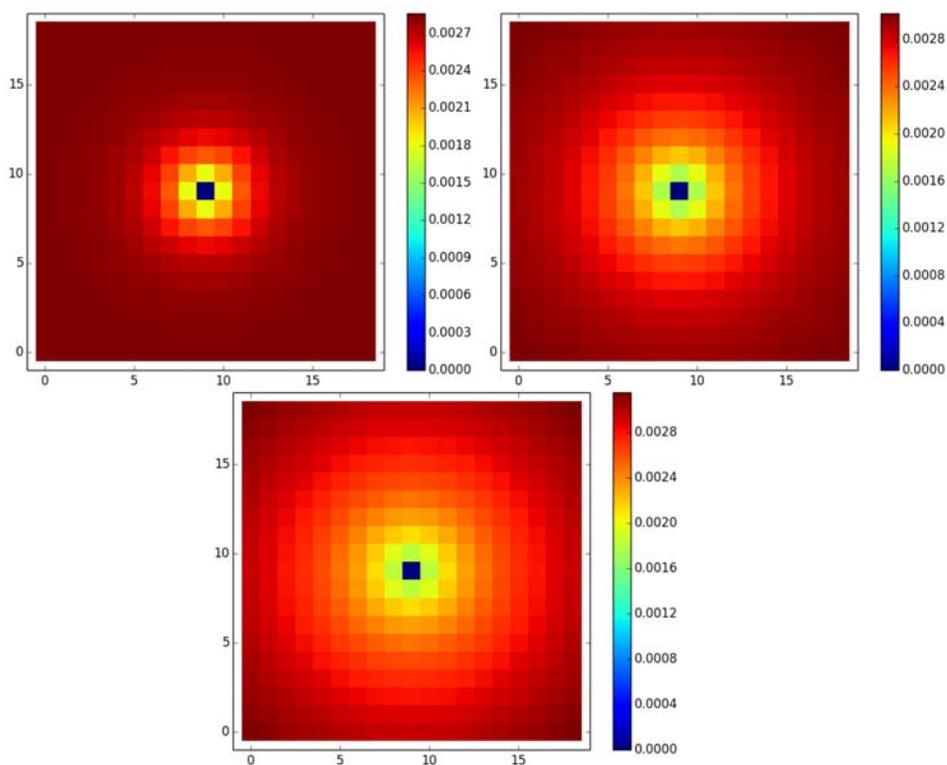


Figura 7: Distribución de probabilidades para la posición de la fuente en el primer paso del agente. El buscador está colocado en la posición (9,9) de una malla de  $19 \times 19$ , la escala de color va de cero hasta el valor máximo en la probabilidad de tener a la fuente para ese paso. Para las tres imágenes se tiene viento cero y no se realizan detecciones, siendo la longitud de correlación  $\lambda = 3, 5, 10$  de izquierda a derecha y de arriba a abajo respectivamente.

La razón para ajustar la escala de color al valor máximo de probabilidad del paso a graficar fue observar poco detalle tomando el intervalo completo de  $(0, 1)$ .

Las gráficas en la figura 7 muestran la primera actualización de la distribución de probabilidades con la información de la posición inicial del agente. Las casillas que se encuentran dentro cierto radio alrededor de la posición del agente, son las posiciones consideradas capaces de proporcionar detecciones en caso de albergar a la fuente, al no realizarse detección en la posición inicial, se disminuye la probabilidad asociada a dichas posiciones. Es posible apreciar una relación directa entre el radio de efecto causado por la información recolectada y la longitud de correlación. La longitud de correlación en ausencia de viento es  $\lambda = \sqrt{D\tau}$  y es un medio de la distancia promedio que recorren las partículas antes de morir, por tanto, aumentar  $\lambda$  implica aumentar el radio en el cual la fuente descrita debe ser capaz de proporcionar detecciones a un buscador, dando así sentido a observar un aumento en la región modificada del mapa probabilístico.

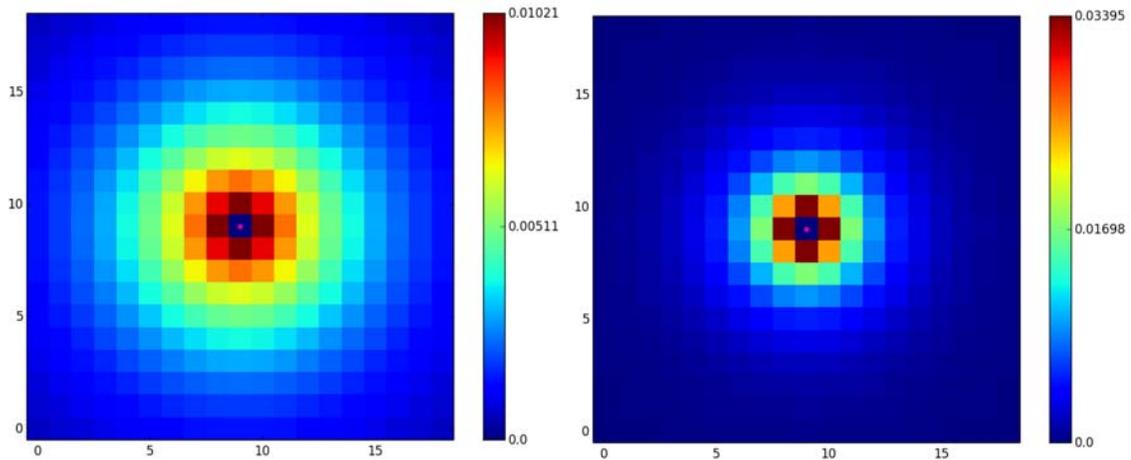


Figura 8: Distribución de probabilidades para la posición de la fuente en el primer paso del agente realizando detecciones. Se tiene  $\lambda = 5$  y al buscador en la posición  $(9, 9)$ , observando 1 partícula en la imagen izquierda y 2 partículas en la imagen derecha.

Ahora consideremos detecciones en la posición inicial, donde al no haber viento, las partículas detectadas pueden provenir de cualquier dirección. Entonces, dada la longitud de correlación, son solo las posiciones dentro de cierto radio alrededor del agente las que deben ser capaces de generar estas detecciones. Por tanto, el mapa de probabilidades debe reflejar esto, creando un círculo de altas probabilidades centrado en la posición del agente. Tal y como se observa la figura 8, el radio de efecto dependerá ahora también del número de detecciones realizadas. La concentración de partículas disminuye con la distancia a la fuente, de esta forma aumentar el número de detecciones genera un sentido de cercanía a la fuente, haciendo así que la distribución de probabilidades se concentre en una vecindad más pequeña en torno al agente (ver figura 8).

Ahora procedamos a ver el efecto del trazo del agente en el mapa de probabilidades. Vemos en la figura 9 que al avanzar el agente sobre el plano y no detectar partículas,

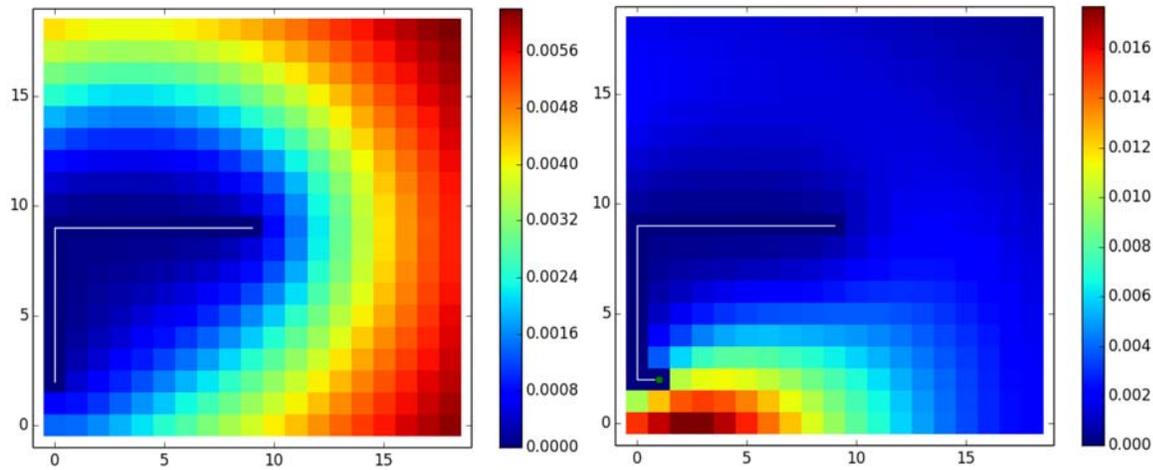


Figura 9: Efecto del recorrido del agente en el mapa de probabilidades para  $\lambda = 5$ . El agente comienza su recorrido en la posición  $(9, 9)$ , sin realizar detecciones disminuye la probabilidad asociada a las posiciones cercanas a su movimiento (imagen izquierda). Al realizar detección (posición  $(0, 2)$  en la imagen derecha) el mapa de probabilidades cambia drásticamente, reflejando las pocas posiciones capaces de generar la detección realizada y a su vez no generar detección en las anteriores posiciones visitadas.

éste deja una estela de bajos valores en la probabilidad de tener a la fuente. La detección de partículas implica un cambio abrupto en la distribución de probabilidades ya que favorece en gran manera una pequeña región de posiciones, resultando esta región como la más probable de albergar a la fuente. Claro está que el efecto de una detección depende de la historia del agente.

El objetivo del agente es reducir la entropía, ya sea hasta cero al encontrar a la fuente o simplemente reducirla ganando información. De esta forma en el escenario de no encontrar a la fuente y no observar partículas, éste buscará moverse a posiciones que le permitan reducción de la probabilidad (de tener a la fuente) en el mayor número de casillas posibles, lo cuál resulta en una mayor reducción de la entropía. Al observar partículas la distribución de probabilidades se redistribuye dejando solo un pequeño número de posiciones con alta probabilidad de tener a la fuente, entonces el agente premiará la posición que genere acumulación de la probabilidad en el menor número de casillas, siendo esto lo que proporciona una mayor reducción a la entropía en caso de ver partículas.

El acuerdo entre los posibles escenarios se puede entender de mejor forma cerca de la frontera. Cerca de la frontera, moverse hacia el centro implica una mejor opción en el caso de no ver partículas, posibilitando la reducción en la probabilidad de más casillas. En el caso con detecciones, la mejor opción es aproximarse a la frontera y reducir el número de casillas con alta probabilidad de tener la fuente. El buscador teminará por elegir la posición que represente la mejor ganancia en promedio para estos distintos escenarios.

### 5.1.2 *Lo que el viento trajo*

Pasemos a ver el efecto que tiene el viento en la actualización del mapa. La secuencia de imágenes de la figura 10 nos muestra un corrimiento ascendente del ya mencionado círculo inicial de posiciones con bajas probabilidades de tener la fuente. Esto se debe al comportamiento esperado con viento, donde las partículas se desplazan preferencialmente de manera descendente, haciendo poco probable el observar partículas emitidas en casillas a la altura de la posición del agente o por debajo de ésta misma.

La inclusión del viento limita las regiones capaces de generar detecciones haciendo así más guiado el movimiento del agente al detectar partículas. Al realizar detecciones y por tanto generar regiones con altas probabilidades de contener a la fuente, la búsqueda de información guía al agente hacia estas regiones. Durante el recorrido hacia estas regiones se modifica (aún en ausencia de detecciones) el mapa de probabilidades delimitando, dividiendo o cambiando totalmente estas regiones de alta probabilidad tal y como lo vemos en las imágenes de la figura 10.

Las detecciones pueden ser un arma de dos filos, el número de detecciones así como las posiciones de éstas son elementales para la construcción de la posible posición de la fuente. La figura 11 nos muestra cuatro distintos recorridos para un mismo conjunto de parámetros  $\{R, \tau, D, V\}$ . La diferencia entre estos cuatro recorridos es la semilla con la que se inicializa el generador de números pseudo-aleatorios para la detección de partículas, posibilitando así un distinto número de detecciones realizadas entre cada recorrido. Estas imágenes nos muestran la guía proporcionada por la incursión de viento en el ambiente. El agente es capaz de dar con la fuente aún cuando la certidumbre sobre la posición de la fuente es baja. De estos cuatro recorridos el primero es el único en el cual el agente considera que la probabilidad de encontrar la fuente en la posición correcta por encima del 50%, observando en dos de estos recorridos probabilidades para la posición correcta por debajo del 15%. Vemos que aún un mapa probabilístico incompleto permite al agente guiarse hacia la región adecuada posibilitando el encuentro de la fuente.

En los cuatro recorridos podemos ver que la detección de partículas genera un movimiento contra viento, y que la ausencia de detecciones durante este ascenso, genera que el agente explore de manera transversal al viento. Observar más detecciones de las esperadas fuerza al agente a sobreexplorar la vecindad donde ocurrieron estas detecciones, esto al considerar que está cerca de su objetivo. Esta sobre exploración se alterna con la exploración amplia al dejar de detectar y volver a detectar partículas.

Este comportamiento es similar al mostrado por las polillas macho atraídas por feromonas, las cuales hacen movimientos contra viento en presencia de detecciones, al dejar de presenciar detecciones, consideran haber perdido la pluma y realizan movimientos transversales buscando encontrar de nueva cuenta el trazo para así realizar otro ascenso contra viento [3, 11, 14].

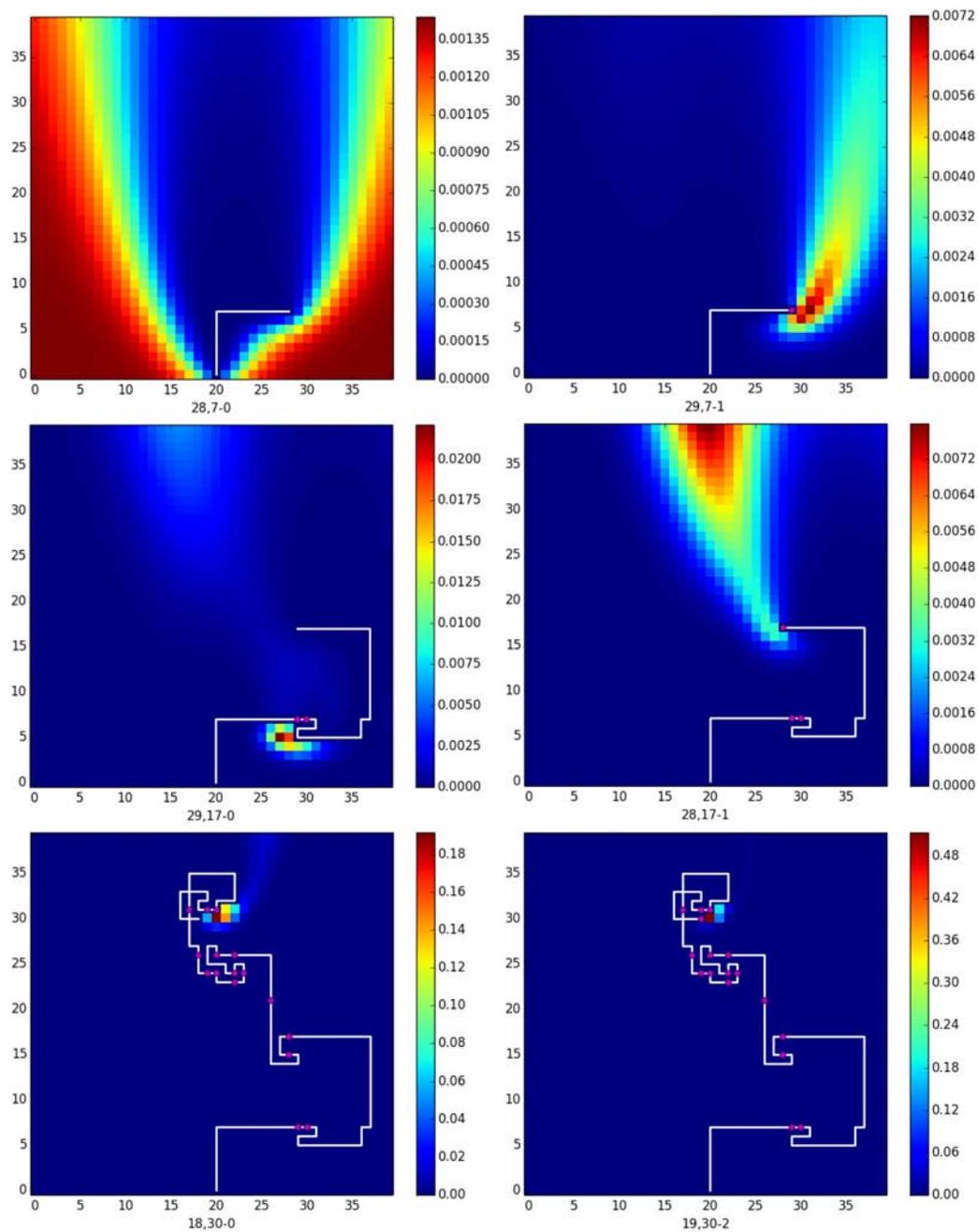


Figura 10: Visualización del mapa de probabilidades y del trazo del agente a 6 distintos tiempos para el conjunto de parámetros  $R = 2$ ,  $\tau = 100$ ,  $D = 1$  y  $V = 1$ . La malla tiene un tamaño de  $40 \times 40$ , la posición inicial del agente es  $(20, 0)$  mientras que la fuente se encuentra en el centro de la casilla  $(20, 30)$ . La escala de color va de cero hasta el máximo en la distribución de probabilidades para cada paso, el recorrido del agente se muestra con el trazo blanco mientras que los puntos magentas muestran las posiciones en las que se realizó detección. En el pie de cada imagen se muestra la posición del agente y las partículas observadas en ese paso.

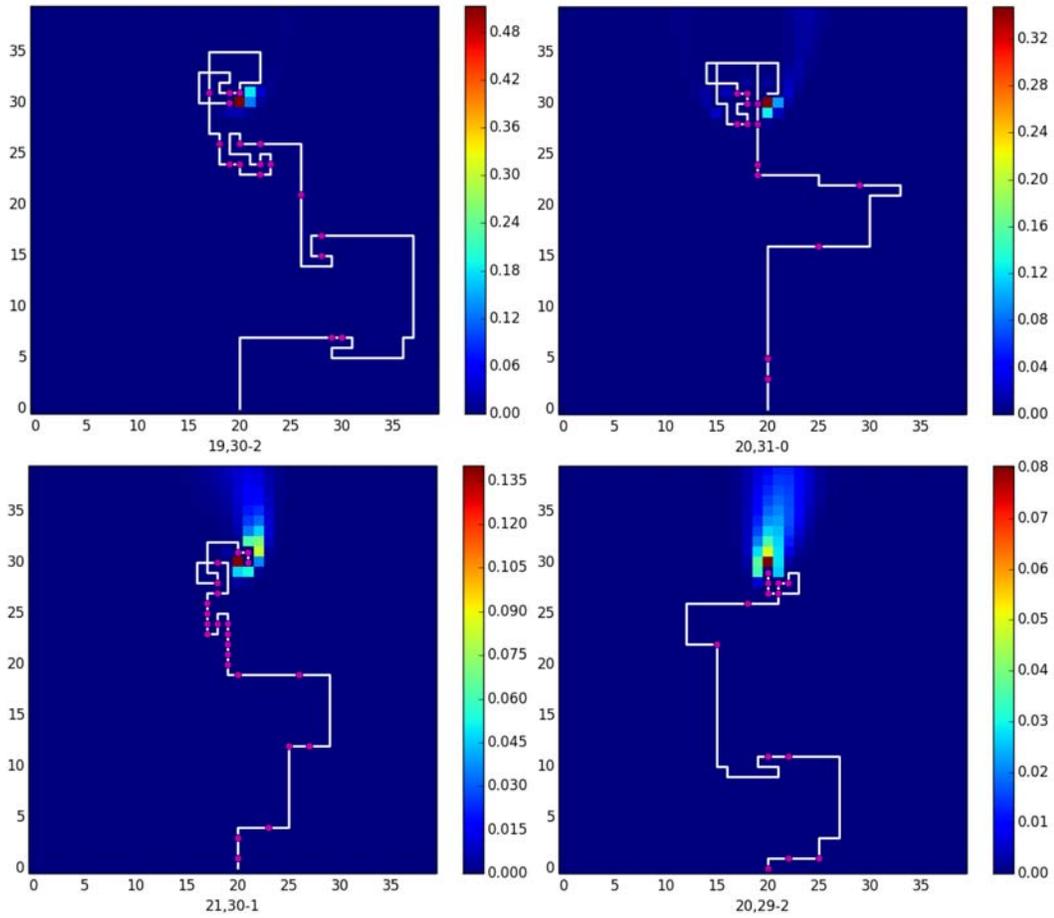


Figura 11: Cuatro forrajesos para los parámetros  $R = 2$ ,  $\tau = 100$ ,  $D = 1$  y  $V = 1$ , en una malla de  $40 \times 40$  el agente comienza en  $(20,0)$  y la fuente está en el centro de la casilla  $(20,30)$ . La diferencia entre los cuatro forrajesos es la semilla con la que se inicializa el generador de números seudoraleatorios. Las imágenes muestran el paso previo a dar con la posición de la fuente, el número de pasos fue 134, 98, 76 y 78 mientras que las detecciones totales 20, 20, 23 y 23 para las imágenes superior izquierda, superior derecha, inferior izquierda e inferior derecha respectivamente.

### 5.1.3 Geometría del primer paso

El recorrido del agente no está únicamente influenciado por el número de detecciones realizadas, el lugar y el momento de éstas, la posición inicial tiene un efecto determinante en el recorrido del agente. La dirección del primer paso presenta una geometría compleja dentro del mapa, en la figura 12 podemos apreciar esta geometría así como el mapa de colores para el cambio promedio esperado en la entropía de la posición elegida en cada posición inicial.

La región central del mapa promueve alejarse del centro del mapa, mientras que en la vecindad de las fronteras se privilegia el movimiento al centro del mapa. En el mapa del cambio promedio esperado en la entropía podemos observar que el centro se comporta como un repulsor, también vemos cuatro regiones que se comportan como atractores del

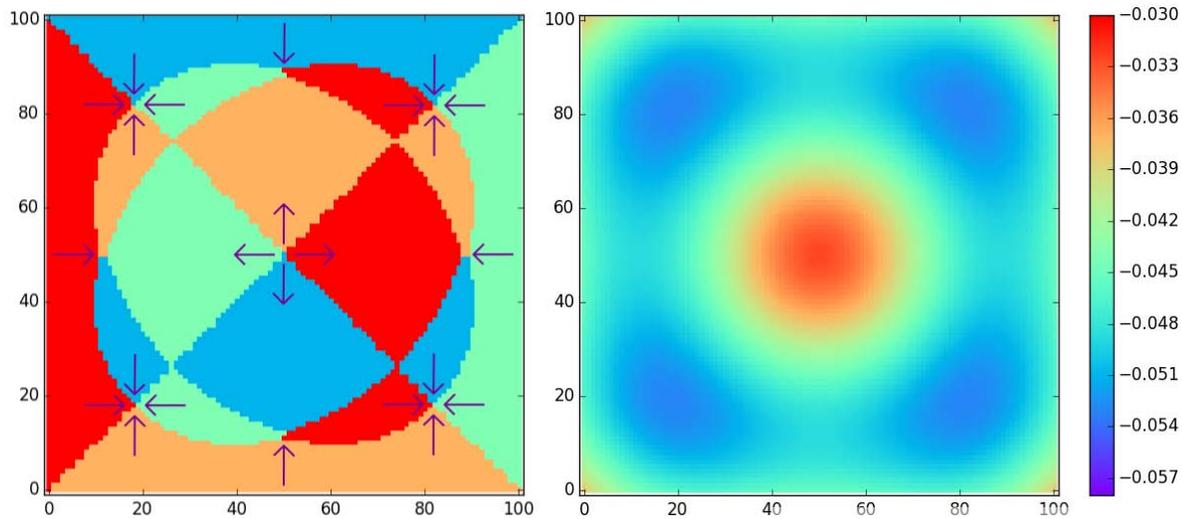


Figura 12: Geometría del primer movimiento para  $R = 2.4$ ,  $\tau = 2500$ ,  $D = 1$  y  $V = 0$  para una malla de  $100 \times 100$ . La imagen de la izquierda muestra la dirección del movimiento del agente para toda posición inicial, correspondiendo derecha, izquierda, arriba y abajo a los colores verde, rojo, naranja y azul respectivamente. La gráfica de la derecha nos muestra el cambio esperado en la entropía para la posición elegida en cada punto inicial. El primer paso del agente es determinista y está influenciado por la interacción entre atractores (regiones más azules) y un repulsor (región roja).

movimiento.

Como se mencionó con anterioridad, en [20] se observó que para una fuente colocada en el centro del mapa, las posiciones sobre los ejes que se encuentran dentro de la región que promueve el movimiento hacia el centro, pero cercanos a la separatriz entre regiones, exhiben una distribución bimodal para el tiempo promedio de búsqueda, bimodalidad que implica dos comportamientos distintos. Si observamos el efecto que tiene una detección en la geometría del primer paso (ver figura 13), vemos que precisamente estas posiciones que en ausencia de detecciones promueven el movimiento hacia el centro, para el caso de detección generan un movimiento hacia la frontera, exhibiendo así dos comportamientos distintos y con esto dando sentido a la bimodalidad observada.

#### 5.1.4 Espirales

Anteriormente se habló del recorrido en espiral que puede mostrar el buscador en ausencia tanto de detecciones como de viento. Decimos “puede”, porque lograr esta geometría depende de la posición de partida, de la longitud de correlación  $\lambda$  y del tamaño de la malla. Como ya vimos, la geometría del movimiento inicial del agente es compleja y lleva a comportamientos distintos en el recorrido. La figura 14 nos muestra dos espirales para el conjunto de parámetros  $\{R = 1, \tau = 1, D = 1, V = 0\}$ , donde la única diferencia es la posición inicial. Podemos ver que la posición inicial del segundo recorrido es también una posición visitada en el primero siendo de hecho la cuarta

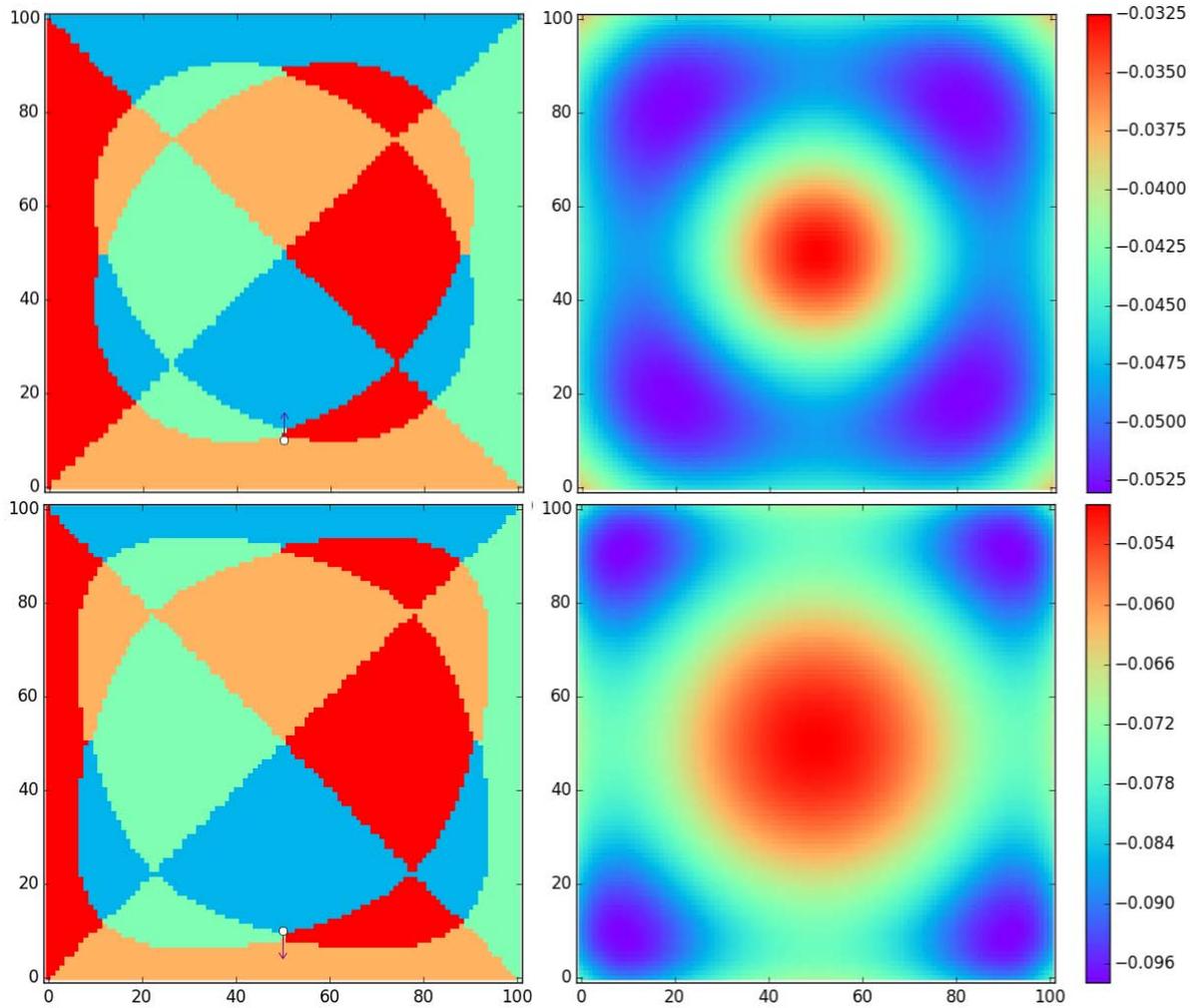


Figura 13: Cambio en la geometría del primer movimiento ante detecciones para los valores  $R = 2.4$ ,  $\tau = 2500$ ,  $D = 1$  y  $V = 0$  en una malla de  $100 \times 100$ . La primera fila nos muestra el caso para cero detecciones mientras que la segunda fila no muestra el caso para una detección. Los puntos blancos muestran la posición  $(50, 10)$  que la figura 8 de [21] presenta un comportamiento bimodal para el índice de similitud. En dicho trabajo la fuente se encuentra en el centro del mapa, así que en ausencia de detecciones el buscador se mueve hacia la posición de la fuente (asciende) mientras que al realizar detección se aleja de esta (desciende). Las imágenes de la derecha muestran el cambio esperado en la entropía, donde podemos ver que al realizarse detección en el primer paso el repulsor central desplaza a los atractores hacia las esquinas del mapa. Esto resulta en una reducción para las regiones que promueven el movimiento hacia el centro del mapa.

posición del trazo, aún así observamos que la siguiente posición visitada a partir de ésta es diferente entre ambos trazos.

El recorrido en espiral solo tiene cabida comenzando el recorrido en posiciones cercanas a las esquinas de nuestro plano, en las cuales se promueve el movimiento a lo largo de las fronteras. Para una combinación adecuada de longitud de correlación y

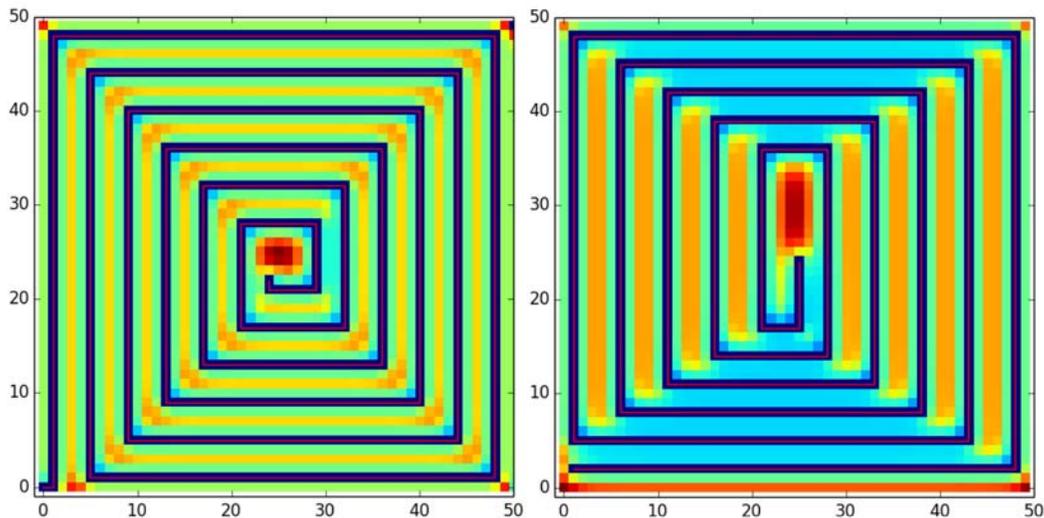


Figura 14: Recorrido en espiral para los parámetros  $R = 1$ ,  $\tau = 1$ ,  $D = 1$  y  $V = 0$  en una malla de  $50 \times 50$  con la fuente en el centro de la casilla  $(25, 25)$  y las posiciones iniciales  $(0, 0)$  y  $(1, 2)$  para las imágenes izquierda y derecha, respectivamente. El recorrido en espiral se puede formar solo iniciando en posiciones cercanas a las esquinas del mapa.

tamaño de la malla, el efecto del trazo en el mapa de probabilidades emula también una espiral y permite conservar una región de alta probabilidad en el centro de la malla. La existencia de esta región facilita la continuidad de este comportamiento hasta cerrar la espiral. En la la figura 15 vemos que para  $\lambda = 18$  el cambio de la distribución en una malla de  $50 \times 50$  es demasiado drástico como para permitir realizar la espiral. El radio de alcance para reducir probabilidades es tan grande que cubre el centro sin siquiera haber dado la primer vuelta de la espiral. Para una malla de  $200 \times 200$  la longitud  $\lambda = 18$  no implica un cambio tan pronunciado, la tercera secuencia presenta la misma longitud de correlación que en la segunda, simplemente para una malla lo suficientemente grande como para que el efecto del trazo en la probabilidad y permite conservar una región de alta probabilidad en el centro que permite a su vez el recorrido en espiral. La formación de espirales también depende entonces de la relación entre longitud de correlación y el tamaño de la malla.

## 5.2 RESULTADOS

Los resultados presentados en esta sección fueron obtenidos para un un tamaño de  $30 \times 30$ , donde la fuente se colocó en la coordenada  $(15.5, 15.5)$  (en el centro de la casilla  $15, 15$ ). El conjunto de parámetros empleados fue  $\{a = 0.5, D = 1, R = 2, \tau = 100\}$ , cambiando el viento, la posición inicial del agente y la tasa de emisión supuesta por el agente. Cada simulación consta de 1000 repeticiones.

Para los buscadores ciego y semiciego, se consideraron exitosas las búsquedas que terminaron dentro las primeras ocho posiciones vecinas a la posición de la fuente.

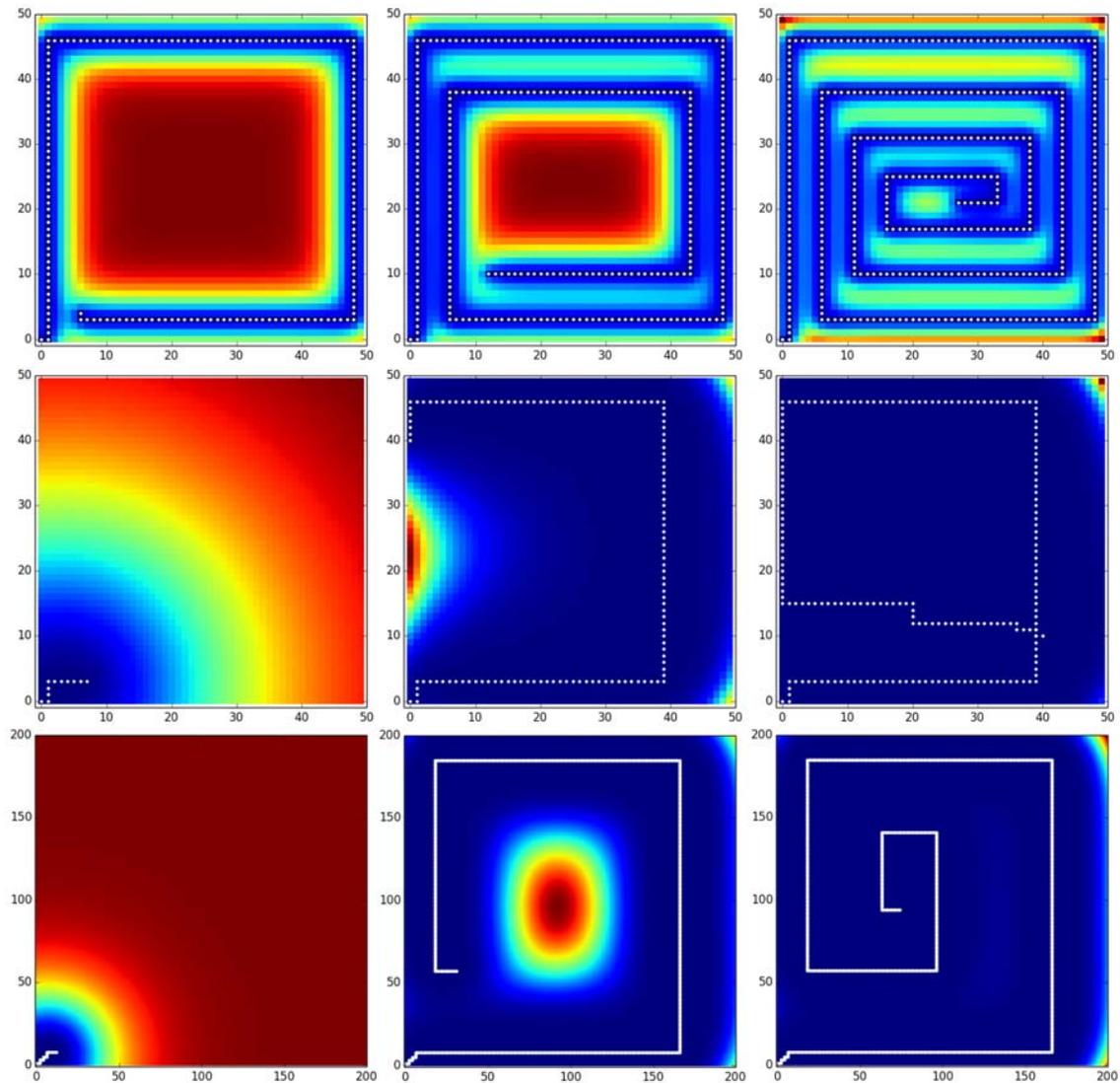


Figura 15: Recorrido del buscador para  $\lambda = 2$  y 18 en una malla de  $50 \times 50$  (primeras dos filas) y para  $\lambda = 18$  en una malla de  $200 \times 200$ . El buscador comienza en la posición  $(0, 0)$  para los tres casos. Vemos que para  $\lambda = 2$  el cambio en la distribución de probabilidades permite una región de alta probabilidad en el centro, dejando la creación de un recorrido en espiral. Para  $\lambda = 18$  en la malla de  $50 \times 50$  el cambio impide la formación de la región con altas probabilidades y por tanto no se logra el recorrido espiral. Aumentando el mapa a  $200 \times 200$  el cambio es ahora pequeño en relación con el tamaño de la malla permitiendo la región central de probabilidades altas y generando de nuevo un recorrido espiral.

### 5.2.1 Los tres mosqueteros

Pasemos a observar el desempeño de los tres distintos métodos de búsqueda. Como se mencionó anteriormente, esperamos que la información extra que posee el buscador vidente sea una ventaja sobre los otros dos y no un obstáculo al generar discontinuidad en el mapa de probabilidades. La figura 16 nos muestra el tiempo promedio de búsqueda

con tres distintos valores del viento ante distinta altura inicial del agente. Estas tres gráficas muestran una clara ventaja del vidente y del semiciego sobre el ciego, y muestran superioridad del vidente sobre el semiciego en la mayoría de los puntos. Tanto para el ciego como para el semiciego, se realizaron las simulaciones para tres valores del límite inferior en la entropía, vemos entonces que el semiciego prácticamente no se ve afectado por los distintos umbrales mientras que el ciego claramente se ve beneficiado en aumentar el umbral en la entropía mostrando reducción en el tiempo promedio de búsqueda sin disminuir su efectividad.

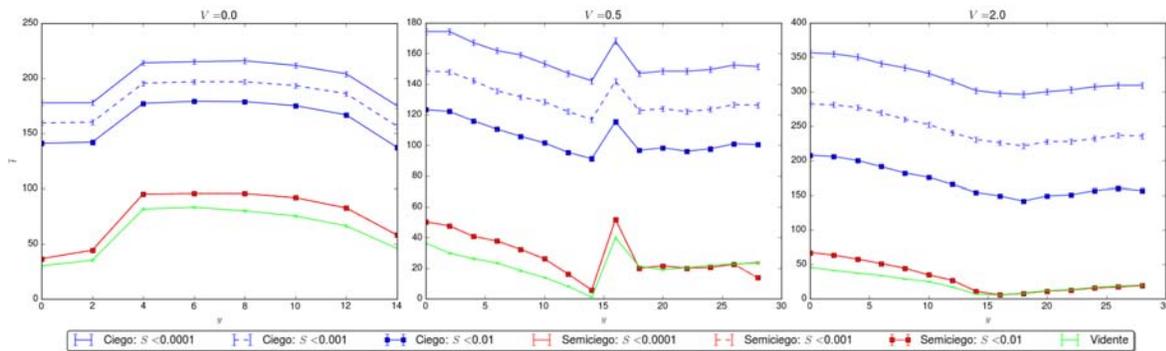


Figura 16: Comparación de los tres buscadores frente a distintos valores del viento. El buscador inicia en  $i = 15$ , cada punto de la gráfica representa el promedio de 2000 realizaciones.

Considerando insuficiente esta información nos dimos a la tarea de ver la respuesta de los buscadores para todas las posiciones iniciales. La figura 17 nos muestra en escala de color, el tiempo promedio de búsqueda  $\bar{t}$  para las 1000 realizaciones en cada punto de la malla como punto inicial del forrajeo. El encabezado de cada mapa muestra el tiempo promedio  $\langle t \rangle$  sobre todos los puntos del mapa, representado entonces el tiempo promedio de búsqueda para cualquier posición inicial. Los mapas presentados en la figura 17 sugieren que para un conocimiento completo de los parámetros de la fuente, basta con reducir la incertidumbre sobre la posición de la fuente a 0.01 para tener una efectividad del 99.9 en encontrar a la fuente, teniendo la ventaja de un tiempo promedio menor que para umbrales más pequeños.

En estas seis imágenes del ciego, es posible ver que para viento de  $V = 0.5$  se observa el menor tiempo promedio de los tres casos, siendo el caso para  $V = 2.0$  el de mayor tiempo. Si observamos ahora la figura 18 podemos ver que tanto para el vidente como para el semiciego se puede observar reducción en el tiempo promedio de búsqueda al incrementar la velocidad del viento. Este comportamiento se debe a la guía proporcionada con la presencia de viento. El recorrido del agente es más guiado en presencia de viento pero la tasa de adquisición de información en la posición de la fuente reduce al aumentar el viento. Mientras más grande sea la velocidad del viento, el recorrido de la partículas se enfoca sobre una estrecha región inferior a la posición de la fuente, entonces la tasa de detecciones en la posición inferior a la de la fuente se vuelve más cercana a la tasa de emisión. Esta similitud a la tasa de la posición de la fuente es la que genera

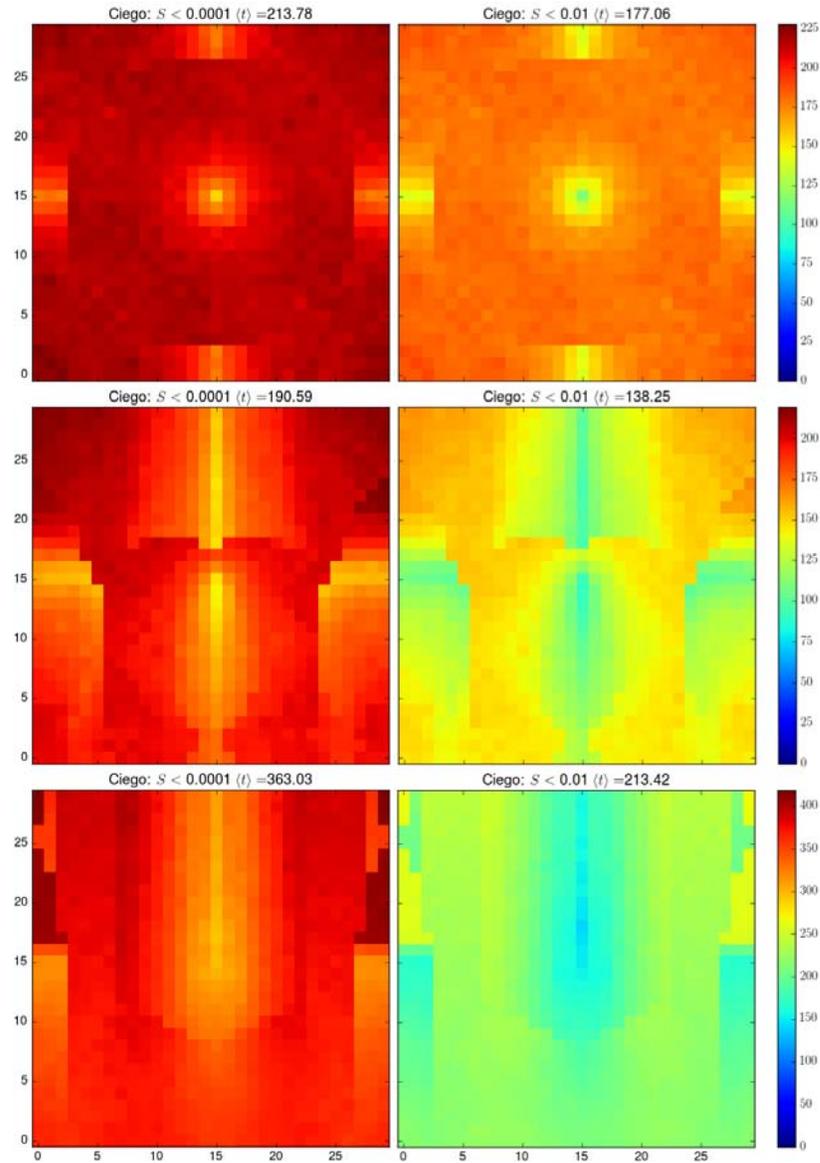


Figura 17: Respuesta del buscador ciego en toda posición inicial frente a distintos valores del viento (primera fila  $V = 0$ , segunda fila  $V = 0.5$  y tercera fila  $V = 2.0$ ) y distinto umbral en la entropía (primera columna  $S < 0.0001$  y segunda columna  $S < 0.01$ ). La escala de color representa el tiempo promedio de búsqueda sobre las 1000 realizaciones en cada punto. En el encabezado de cada imagen se muestra el tiempo promedio de búsqueda sobre todas las posiciones. Vemos una consistente reducción del tiempo promedio de búsqueda al aumentar el umbral en la entropía de 0.0001 a 0.01, mientras que la efectividad se conserva por encima del 99.9

que aún cuando el agente ciego esté en la posición de la fuente considere altamente probable que las detecciones que observe en esta posición sea generadas por la posición superior a ésta, haciendo así más lenta la adquisición de información. Entonces para vientos pequeños la reducción en el tiempo de llegada a la posición de la fuente (gracias a la guía del viento), es mayor que el aumento en el tiempo que pasa en la posición de la

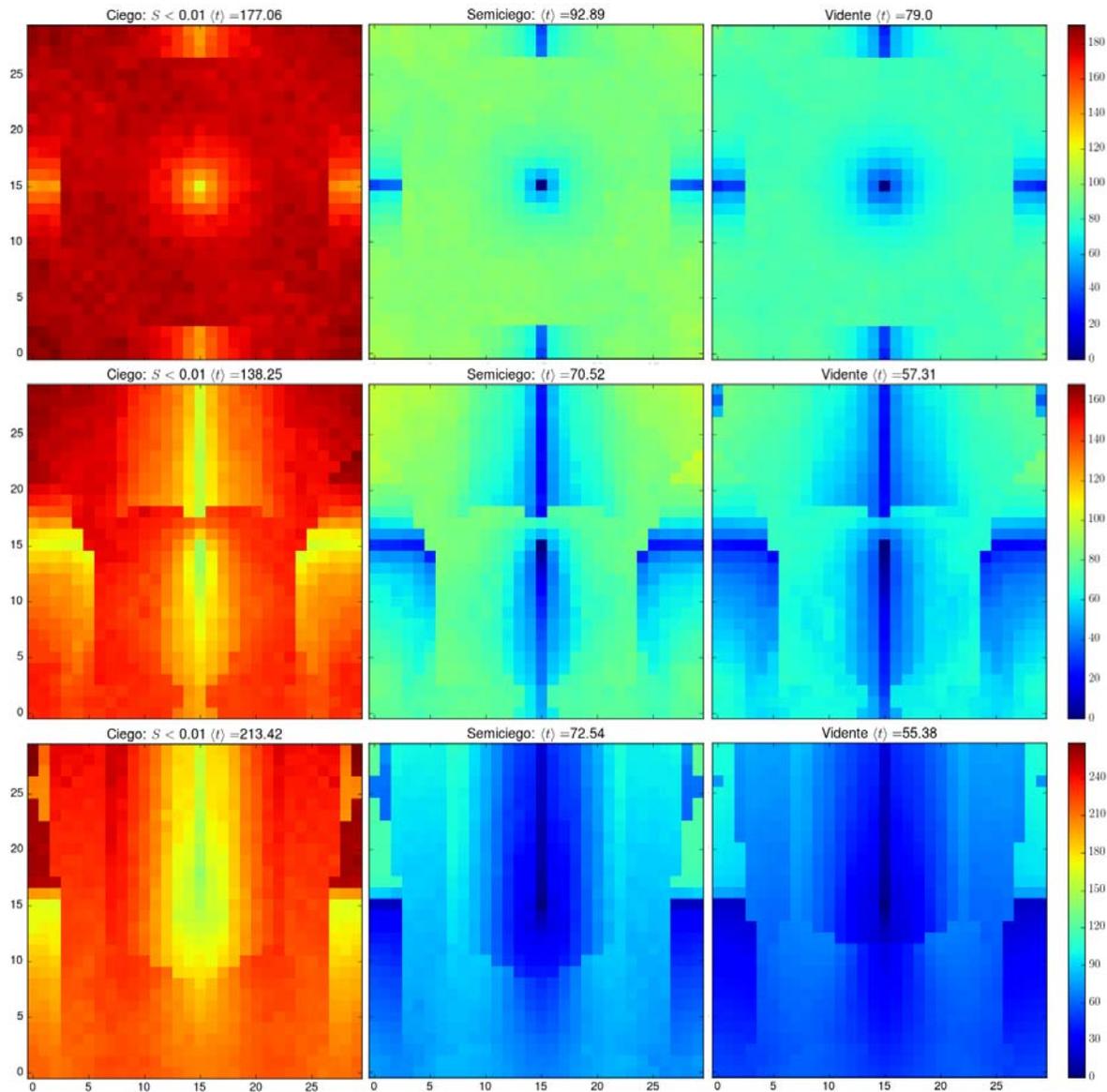


Figura 18: Respuesta de los tres buscadores en toda posición inicial frente a distintos valores del viento (primera fila  $V = 0$ , segunda fila  $V = 0.5$  y tercera fila  $V = 2.0$ ). La escala de color representa el tiempo promedio de búsqueda sobre las 1000 realizaciones en cada punto. En el encabezado de cada imagen se muestra el tiempo promedio de búsqueda sobre todas las posiciones.

fuente hasta convencerse de haberla encontrado. Para vientos mayores cómo es el caso de  $V = 2.0$ , el tiempo extra que tarda en reconocer la fuente es mayor que el tiempo ganado en arriar, mostrando por tanto un mayor tiempo de búsqueda que para el caso de  $V = 0.0$  y  $0.5$ .

En la figura 18 también es posible distinguir la superioridad del vidente sobre el semiciego, lo cuál nos permite concluir la ventaja proporcionada en distinguir a la fuente

y utilizar esta información.

Es importante también mencionar que el tiempo promedio de búsqueda para el caminante aleatorio es de 2000 y 1000 pasos para blanco de una y nueve posiciones, respectivamente, podemos notar entonces el eficiente comportamiento de los tres buscadores ante un conocimiento correcto de los parámetros de la fuente.

### 5.2.2 Robustez de los buscadores

Resulta de fundamental interés probar la robustez del algoritmo ante errores en los parámetros supuestos del comportamiento de la pluma. Si consideramos conocer la sustancia emitida por la fuente, es factible conocer la tasa de vida de las partículas así como la difusión de las partículas en el medio. También podemos considerar llegar a contar con los medios para obtener la velocidad promedio del viento, conociendo así con certidumbre tres de nuestros cuatro parámetros. Es el cuarto parámetro, la tasa de emisión  $R$  en la que nos enfocamos, al considerar factible desconocer el tamaño de la fuente y por tanto la tasa con la que emite partículas. Es por esta razón que nos dimos a la tarea de ver la respuesta de los buscadores frente a errores para la tasa de emisión supuesta.

Comenzamos por analizar la robustez del agente ciego ante errores de  $\pm 15\%$  y  $\pm 25\%$  en la estimación de la tasa de emisión. Podemos observar claramente una reducción en la efectividad del agente al sobreestimar la tasa de emisión, y que este efecto aumenta con el viento. Los recorridos fallidos en el caso de sobreestimar se debe a que se excedió el tiempo límite propuesto para la búsqueda (3,600 pasos), al sobreestimar la tasa de emisión le es más difícil al agente reconocer la fuente. Si a esto le agregamos la tardanza en la adquisición de información añadida por el viento, es fácil entender la poca eficacia del ciego al sobreestimar en presencia de viento. Podemos ver que aumentar el límite inferior en la entropía, ayuda tanto a reducir el tiempo en la sobreestimación como a aumentar la efectividad de los forrajeos. Cabe aclarar que para estas gráficas se tomó un blanco de 9 posiciones (la posición de la fuente y sus primeras y segundas vecinas), de esta forma para la subestimación de  $R$  se logró mantener una efectividad del 100% al aumentar el umbral de incertidumbre hasta 0.01. Cuando se subestima, el buscador se enfrenta ante varias posiciones capaces de cumplir con la tasa de emisión supuesta, siendo así susceptible a hacer un incorrecto diagnóstico de la posición de la fuente.

Procedamos ahora a observar el comportamiento del semiciego (ver figura 20). Cómo era de esperarse, contrario al ciego, el semiciego no se ve afectado por la sobreestimación (para errores pequeños). Esto se debe a que el semiciego es capaz de detener su recorrido al arribar a la posición de la fuente, evitando el largo tiempo que pasa el ciego en reconocerla. En la subestimación presenta el semiciego su peor comportamiento, al subestimar la tasa de emisión el semiciego es susceptible a dedicar más tiempo observando posiciones con comportamiento cercano al esperado, aumentando así su tiempo promedio de búsqueda.

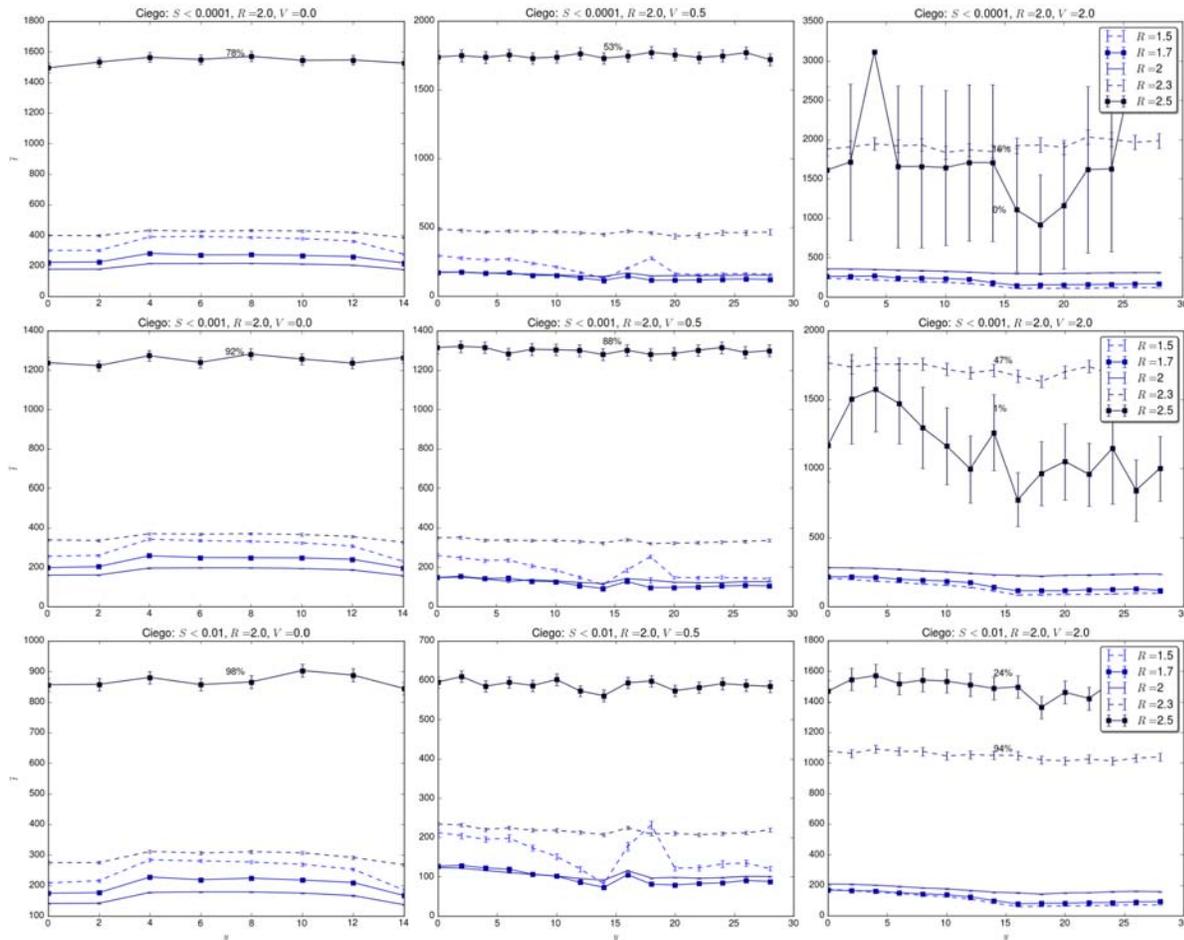


Figura 19: Robustez del buscador ciego ante incorrecta  $R$ . En el recuadro de las imágenes de la derecha se muestra la tasa de emisión supuesta por el agente: subestimada ( $R = 1.5, 1.7$ ), correcta ( $R = 2$ ) y sobreestimada ( $R = 2.3, 2.5$ ) para tres valores en el límite inferior de la entropía.

La figura 21 nos muestra la respuesta del vidente ante subestimación y sobreestimación en la tasa de emisión. Podemos ver que el vidente es mucho más robusto que los otros dos buscadores, y por tanto lo pondremos a prueba ante mayor error. Podemos apreciar que aún cuando los tiempos de búsqueda son modificados por el error en  $R$ , tanto para el semiciego como para el vidente, éstos siguen siendo muy buenos tiempos (comparados con el caminante aleatorio), y en ninguna realización se falla en encontrar el objetivo. Aunque el ciego muestra ser el menos robusto de estos tres, los tiempos presentados son bastante satisfactorios considerando su gran desventaja.

Ahora veamos el desempeño del vidente ante errores del 50% y 75% tal como lo muestran las figuras 22 y 23 respectivamente. Vemos que tanto para el 50% como para el 75% de error, la subestimación parece ser mejor estrategia que la sobreestimación para ausencia de viento y surge como mejor estrategia la sobreestimación al aumentar el

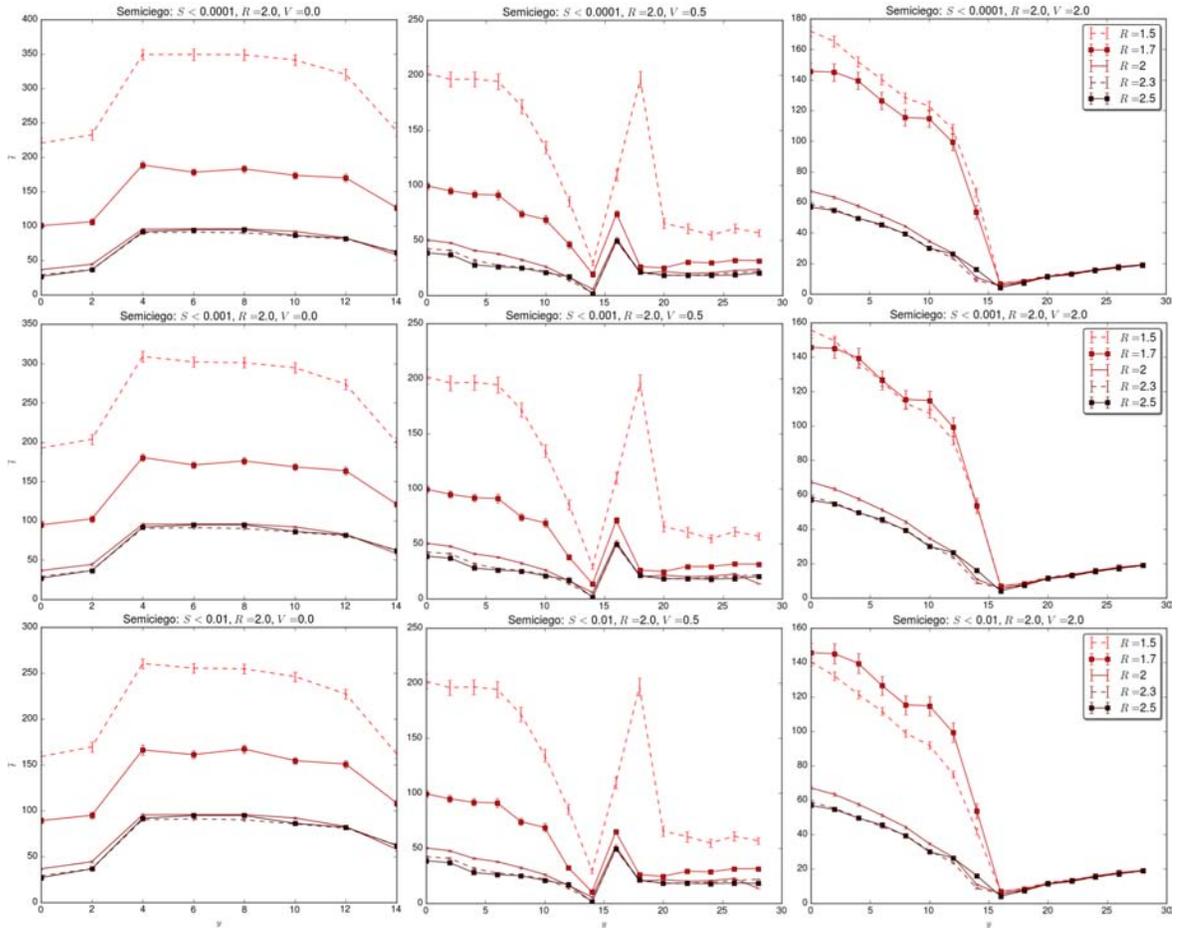


Figura 20: Robustez del buscador semiciego ante incorrecta  $R$ . En el recuadro de las imágenes de la derecha se muestra la tasa de emisión supuesta por el agente: subestimada ( $R = 1.5, 1.7$ ), correcta ( $R = 2$ ) y sobreestimada ( $R = 2.3, 2.5$ ) para tres valores en el límite inferior de la entropía.

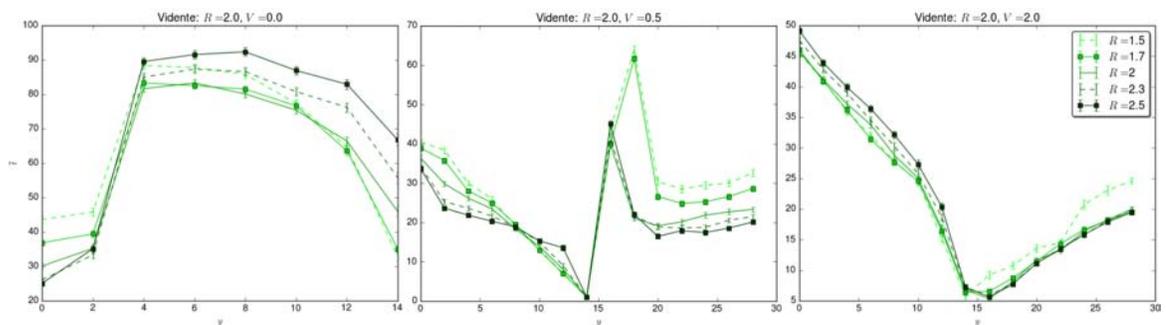


Figura 21: Robustez del buscador vidente ante incorrecta  $R$ . En el recuadro de las imágenes de la derecha se muestra la tasa de emisión supuesta por el agente: subestimada ( $R = 1.5, 1.7$ ), correcta ( $R = 2$ ) y sobreestimada ( $R = 2.3, 2.5$ ) para tres valores en el límite inferior de la entropía.

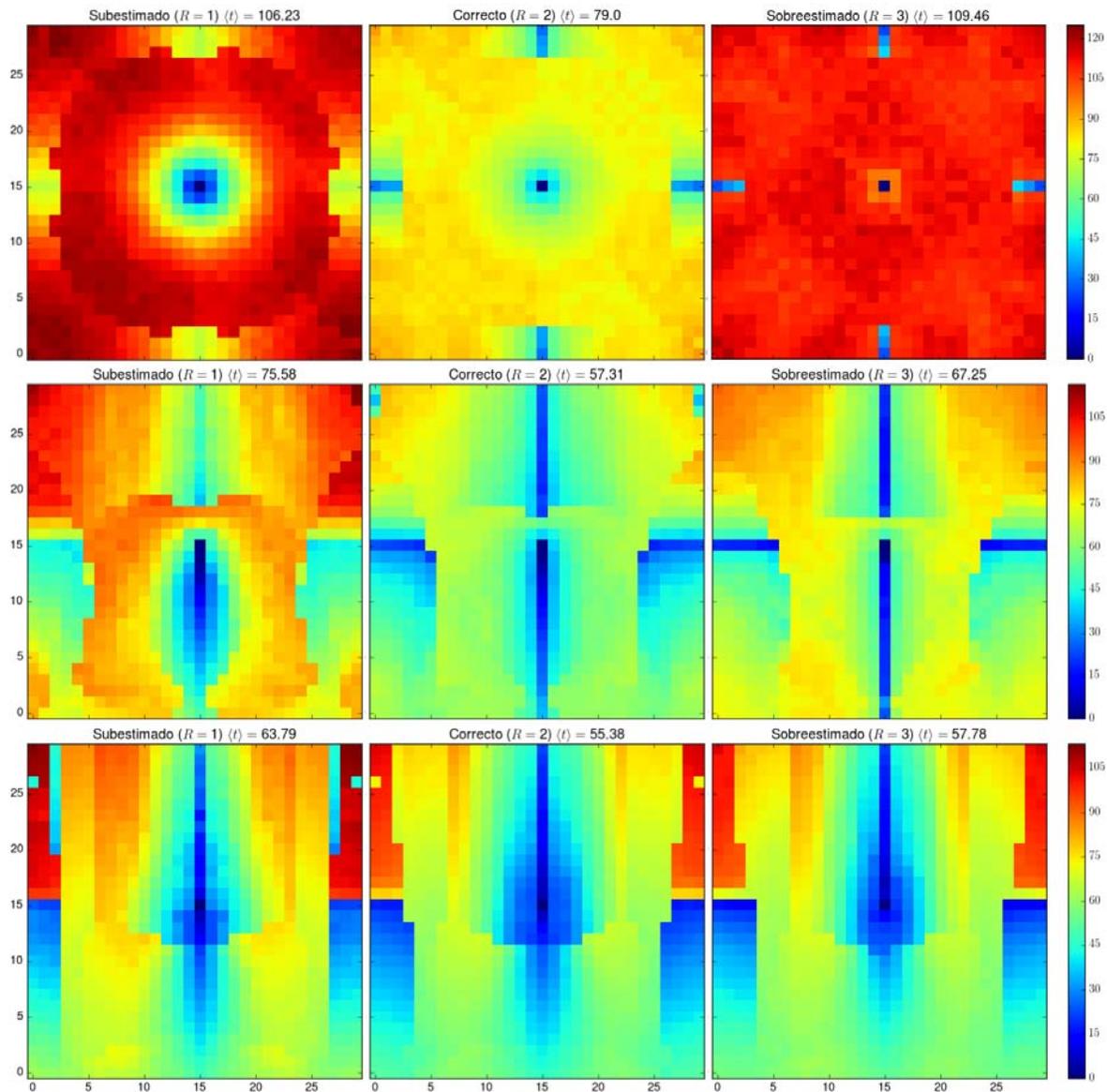


Figura 22: Mapa de la robustez del vidente ante error del 50% en  $R = 2$ . Las filas corresponden a los vientos  $V = 0.0, 0.5$  y  $2.0$  de forma descendente.

viento.

Es posible apreciar una consistente mejora en el tiempos de búsqueda al aumentar la velocidad del viento, vemos entonces que la guía proporcionada por el viento se sigue presentando aun ante errores en la estimación de la tasa de emisión, e inclusive ayuda a mejorar la robustez del buscador.

En estas últimas 18 gráficas presentadas para el vidente, el tiempo promedio máximo de búsqueda para una posición no logró exceder los 200 pasos, quedando así todas las posiciones por lo menos 10 veces por debajo del tiempo del caminante aleatorio.

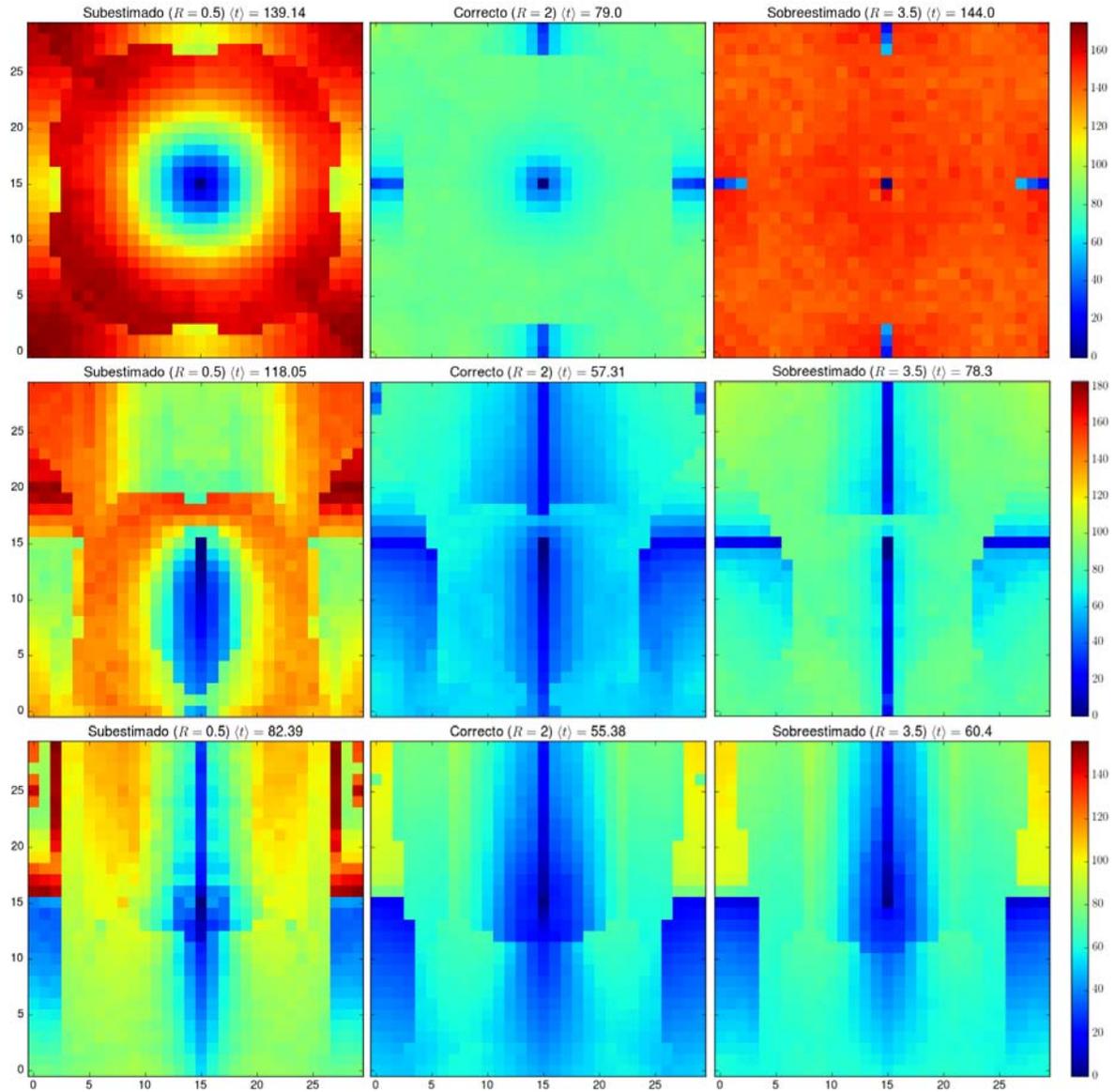


Figura 23: Mapa de la robustez del vidente ante error del 75% en  $R = 2$ . Las filas corresponden a los vientos  $V = 0.0, 0.5$  y  $2.0$  de forma descendente.

## CONCLUSIONES

---

El algoritmo infotáctico ha demostrado tener un complejo comportamiento, sin embargo termina por ser un comportamiento efectivo y eficiente. El buscador guiado por adquisición de información termina por ser una gran opción para la pluma “diluida” de partículas.

Hemos visto que toda información contribuye al algoritmo, distinguir a la fuente y utilizar esto en la actualización del mapa genera una consistente ayuda para el buscador. La introducción de viento también genera nueva información al reducir el abánico de posiciones a buscar.

El buscador ciego nos da muestra de la gran capacidad de infotaxis al presentar tiempos de búsqueda muy por debajo de un caminante aleatorio aún siendo incapaz de detener su recorrido al simplemente arriar a la fuente. Pero también nos muestra los límites del algoritmo al ver una pobre respuesta ante la sobreestimación en la tasa de emisión.

El agente vidente ha demostrado un excelente comportamiento y una gran robustez ante la mala estimación de la tasa de emisión, robustez que aumenta con la presencia de viento. Los tiempos mostrados por el vidente siguieron siendo un orden de magnitud menor que los del caminante aleatorio aún con errores del 75 % en la tasa de emisión dejándonos satisfechos con su accionar.

Terminamos por observar dependencia en la presencia de viento para la elección de la estrategia adecuada ante la incertidumbre en  $R$ . La sobreestimación termina siendo la opción a elegir en presencia de viento, mientras que la subestimación siendo la mejor opción en ausencia de viento.

Queda como trabajo pendiente la implementación de varios agente con cooperación parcial ante errores en la tasa de detección. Para este trabajo se planea buscar una buena estrategia con la cual afrontar incertidumbre en la tasa de emisión.

Otra trabajo pendiente es pasar nuestro código al lenguaje CUDA. Esto nos permitirá paralelizar el cálculo de la distribución de probabilidades, de forma que disminuya considerablemente los tiempos de simulación y nos permita emplear mallas más grandes, y mayor número de repeticiones.

Un último interés es programar estrategias basadas en los distintos modelos quimotácticos, y comparar el desempeño de estas estrategias y el de infotaxis en distintas condiciones del medio, probando los límites e intersecciones entre estrategias.



## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] Robert B. Ash. *Information Theory*. Dover Publications, 1990. (Citado en la página 6.)
- [2] Robert B. Ash. *Basic Probability Theory*. Dover Publications, 2008. (Citado en las páginas 4, 5, y 6.)
- [3] T. C. Baker, M. A. Willis, K. F. Haynes, and P.L. Phelan. A pulsed cloud of sex pheromone elicits upwind flight in male moths. *Physiological Entomology*, 10:257–265, 1985. (Citado en la página 42.)
- [4] Howard C. Berg and Douglas A. Brown. Chemotaxis in *Escherichia coli* analysed by three-dimensional tracking. *Nature*, 239:500–504, 1972. (Citado en la página 1.)
- [5] Howard C. Berg and Edward M. Purcell. Physics of chemoreception. *Biophysical Journal*, 20:193–219, 1977. (Citado en la página 1.)
- [6] Douglas A. Brown and Howard C. Berg. Temporal stimulation of chemotaxis in *Escherichia coli*. *PNAS*, 71:1388–1392, 1974. (Citado en la página 1.)
- [7] Herbert B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. John Wiley and Sons, 1985. (Citado en la página 9.)
- [8] J. Crank. *The Mathematics of Diffusion*. Clarendon Press, Oxford, 1975. (Citado en la página 9.)
- [9] Simon Benhamou Edward A. Codling, Michael J. Plank. Random walk models in biology. *JOURNAL OF THE ROYAL SOCIETY Interface*, 5:813–834, 2008. (Citado en la página 1.)
- [10] I. M. Ryzhik I. S. Gradshteyn. *Table of integrals, series, and products*. Elsevier, 2007. (Citado en la página 15.)
- [11] Ring T. Cardé John Murlis, J. S. Elkinton. Odor plumes and how insects use them. *Annual Reviews of Entomology*, 37:505–532, 1992. (Citado en las páginas 29 y 42.)
- [12] David J. C. Mackay. *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*. Cambridge University Press, 2003. (Citado en las páginas 6 y 8.)
- [13] Robert M. MacNab and D. E. Koshland Jr. The gradient-sensing mechanism in bacterial chemotaxis. *PNAS*, 69:2509–2512, 1972. (Citado en la página 1.)
- [14] Agenor Mafra-Neto and Ring T. Cardé. Fine-scale structure of pheromone plumes modulates upwind orientation of flying moths. *Nature*, 369:142–144, 1994. (Citado en las páginas 29 y 42.)

- [15] D. Martínez, O. Rachel, and E. Hugues. A biomimetic robot for tracking specific odors in turbulent plumes. *Autonomous Robots*, 20:185–195, 2006. (Citado en las páginas 1 y 30.)
- [16] J-B. Masson, M. Bailly Bechet, and M. Vergassola. Chasing information to search in random environments. *JOURNAL OF PHYSICS A: MATHEMATICAL AND THEORETICAL*, 42 434009, 2009. (Citado en las páginas 1, 26, 29, y 30.)
- [17] Jean-Baptiste. Masson. Olfactory searches with limited space perception. *PNAS*, 110:11261–11266, 2013. (Citado en la página 1.)
- [18] Eduardo Martin Moraud and Dominique Martinez. Effectiveness and robustness of robot infotaxis for searching in dilute conditions. *Frontiers in Neurorobotics*, 4:Article 1, 2010. (Citado en las páginas 1 y 30.)
- [19] K. Pearson and Rayleigh. The problem of the random walk. *Nature*, 72, 1905. (Citado en la página 10.)
- [20] Juan Duque Rodríguez, Pilar Barreiro, David Gómez-Ullate, and Carlos Mejía-Monasterio. Robustness of infotaxis with respect to variations and limited knowledge of the propagation of volatile organic compounds. 2013. (Citado en las páginas 28, 31, 38, y 45.)
- [21] Juan Duque Rodríguez, David Gómez-Ullate, and Carlos Mejía-Monasterio. Geometry-induced fluctuations of olfactory searches in bounded domains. *Physical Review E*, 89:042145, 2014. (Citado en las páginas xi, 1, y 46.)
- [22] R. Andrew Russell, Alireza Bab-Hadiashar, Rod L. Shepherd, and Gordon G. Wallace. A comparison of reactive robot chemotaxis algorithms. *Robotics and Autonomous Systems*, 45:83–97, 2003. (Citado en la página 1.)
- [23] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 623–656, 1948. (Citado en las páginas ix, 7, 8, y 25.)
- [24] R. S. Sutton and A. G. Barto. *Reinforcement Learning: An Introduction*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1998. (Citado en la página 26.)
- [25] M. Vergassola, E. Villermaux, and Boris I. Shraiman. Infotaxis as a strategy for searching without gradients. *Nature*, 445:406–409, 2007. (Citado en las páginas 1, 20, 21, 29, y 30.)
- [26] Neil J. Vickers. Mechanisms of animal navigation in odor plumes. *Biological Bulletin*, 198:203–212, 2000. (Citado en la página 1.)
- [27] G.H. Weiss. *Aspects and applications of the random walk*. North-Holland, 1994. (Citado en la página 11.)
- [28] Z. Zhang and G. Li. A review of advances and new developments in the analysis of biological volatile organic compounds. *Microchemical Journal*, 95:127–139, 2010. (Citado en la página 28.)