



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**EFFECTOS DE LA DISTRIBUCIÓN INICIAL
DE MASA EN MODELOS SENCILLOS DE
FORMACIÓN PLANETARIA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

IRVING ENRIQUE REYNA NOLASCO



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. LUIS BENET FERNÁNDEZ
2014**

CIUDAD UNIVERSITARIA, D. F.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del alumno:

Irving Enrique Reyna Nolasco
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Física
30626521-7

Jurado:

Presidente:

Dr. David Philip Sanders (FC-UNAM)

Vocal:

Dra. Bárbara Selén Pichardo Silva (IA-UNAM)

Secretario (Tutor):

Dr. Luis Benet Fernández (ICF-UNAM)

Suplente:

Dr. Alberto Flandes (IG-UNAM)

Suplente:

Dr. Frederic Masset (ICF-UNAM)

EFECTOS DE LA DISTRIBUCIÓN
INICIAL DE MASA
EN MODELOS SENCILLOS DE
FORMACIÓN PLANETARIA

Irving Enrique Reyna Nolasco

Resumen

En este trabajo se realiza un análisis estadístico de resultados que se obtuvieron a partir de simulaciones computacionales de formación planetaria en un modelo sencillo de acreción, introducido en [1] y [2]. Se modificó este modelo para estudiar la formación de sistemas planetarios a partir de un disco de acreción con una distribución inicial de masa no homogénea y para la simulación de anillos planetarios durante el proceso de acreción.

Partiendo de este modelo, se implementa un mecanismo de acreción tipo *oligárquico* [2] en el estudio de dos casos: un sistema planetario con su estrella central y un sistema de lunas y anillos orbitando alrededor de un planeta. Para estas simulaciones, se utilizan los parámetros de masa y momento angular del Sistema Solar y el Sistema de Saturno con lunas y anillos.

Se estudia el efecto de cambiar la distribución inicial de masa en las condiciones iniciales, para lo cual se utilizaron distribuciones iniciales del tipo $\rho = a^\gamma$. Adicionalmente se varía la excentricidad máxima inicial de los discos de acreción. Se describen los ensambles de sistemas formados y se analizan las distribuciones de masa de éstos, mediante un ajuste a una ley de potencias.

Índice general

Introducción	1
0.1. Plan de la tesis	5
1. Modelo sencillo de acreción planetaria	7
1.1. Formación planetaria	8
1.2. Modelo simplificado de acreción planetaria.	9
1.2.1. Mecanismos de acreción	17
1.3. Simulaciones computacionales	20
2. Formación con una distribución inicial homogénea de masa.	27
2.1. Formación de sistemas: Sistema Solar y el sistema de Saturno. . .	28
3. Distribución inicial de masa con una ley de potencia <i>positiva</i>.	33
3.1. Formación de sistemas: caso del Sistema Solar	33
3.2. Formación de sistemas: caso de Saturno y sus lunas	40
4. Distribución inicial de masa con una ley de potencia <i>negativa</i>.	47
4.1. Formación de sistemas: caso del Sistema Solar	47
4.2. Formación de sistemas: caso de Saturno y sus lunas.	55
4.3. Distribuciones iniciales de mas: síntesis y conclusiones	65
5. Variación de la excentricidad inicial.	69

Conclusiones	83
Anexo A	86
Anexo B	89
Anexo C	92
Agradecimientos	95

.....

Introducción

Motivar el estudio de los sistemas planetarios, y en particular de su formación no resulta complicado, pues ello involucra preguntas fundamentales que se ha hecho la humanidad desde sus orígenes, tales como: ¿cuál es el origen del Sistema Solar?, ¿cómo se formó la Tierra?, ¿existen más sistemas planetarios como el nuestro? o ¿qué características universales poseen estos sistemas entre sí?.

Kant y Laplace en el siglo XVII [3] trataron de responder algunas de estas interrogantes, y en realidad lo que realizaron a través de sus trabajos, fue sentar las bases de las actuales teorías de formación planetaria, al argumentar en esencia que el Sistema Solar se formó a partir de un disco de material que giraba alrededor del Sol. Lo que hoy se sabe, es que el origen de un disco protoplanetario o de acreción¹ es parte de la formación de una estrella y que al final de su evolución este disco es el origen de sistemas planetarios [4].

El descubrimiento de planetas orbitando alrededor de una estrella central ha sido uno de los mayores alcances de la astronomía en los últimos años. El estudio de la formación de los sistemas planetarios se ha visto impulsado en mayor medida, debido al descubrimiento de más de 1160 sistemas extrasolares², que en conjunto contienen un total de 1849 planetas³. En la figura 1 se muestran los diagramas de masa y excentricidad de los exoplanetas⁴ descubiertos hasta noviembre

¹Crecimiento por adición de materia.

²Sistema planetario fuera del Sistema Solar.

³Cifra actualizada a noviembre de 2014 (*fuentes: <http://exoplanet.eu>*).

⁴Planetas que orbitan fuera del Sistema Solar.

de 2014.

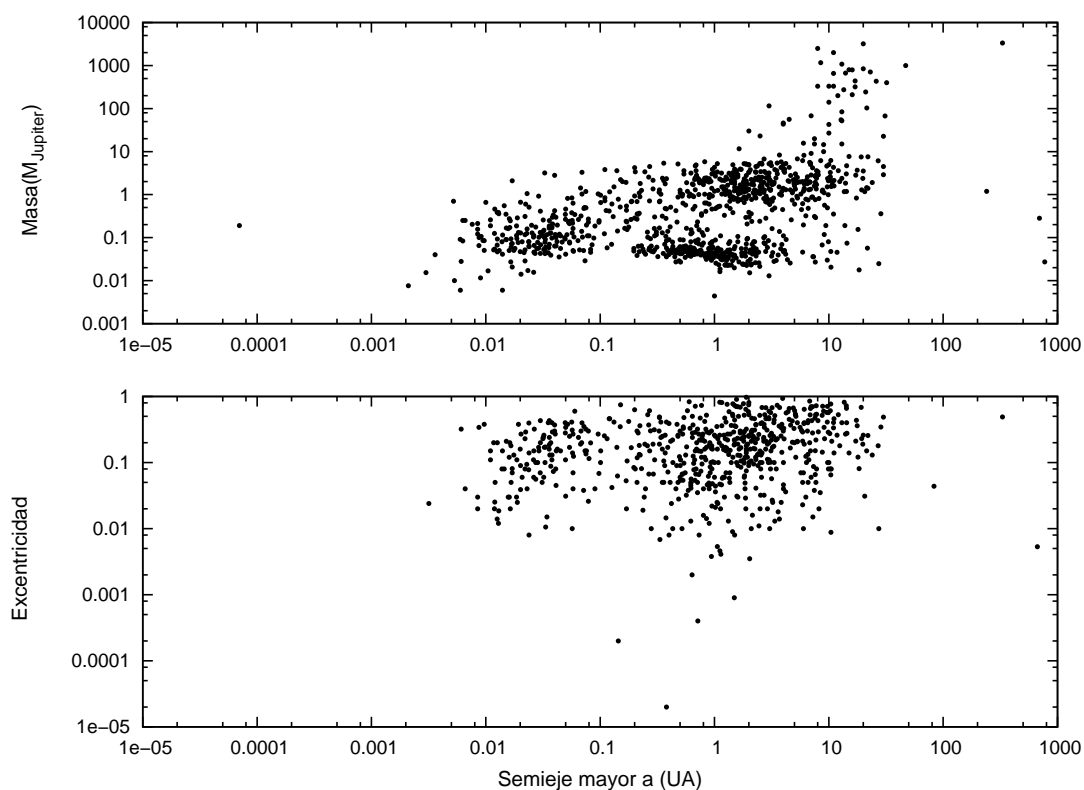


Figura 1: Diagramas de masa y excentricidad de los exoplanetas descubiertos, en función de la distancia a la estrella que orbitan. Los datos están actualizados a noviembre de 2014.

De forma paralela a los descubrimientos de nuevos sistemas de exoplanetas, el estudio y la observación de discos protoplanetarios alrededor de estrellas jóvenes permite un mejor entendimiento de las primeras etapas de formación estelar y de la formación planetaria.

Los discos protoplanetarios poseen un estado con una temperatura menor a la estrella central. Esto además de su continuo enfriamiento, provoca una emisión de radiación que es detectable desde la Tierra [5]. El descubrimiento del primer disco protoplanetario se remonta a 1983, cuando fue descubierto por el satélite

IRAS un disco protoplanetario que rodea a una estrella joven. En noviembre de 2014 en el observatorio ALMA (Atacama Large Millimeter/submillimeter Array por sus siglas en inglés) en Chile fue tomada la imagen del disco protoplanetario que se muestra en la figura 2. En esta imagen se observa con una resolución nunca antes lograda la estructura de un disco protoplanetario que rodea a la estrella HL Tauri, situada a una distancia de 450 años luz⁵ de la Tierra en la constelación de Tauro⁶.

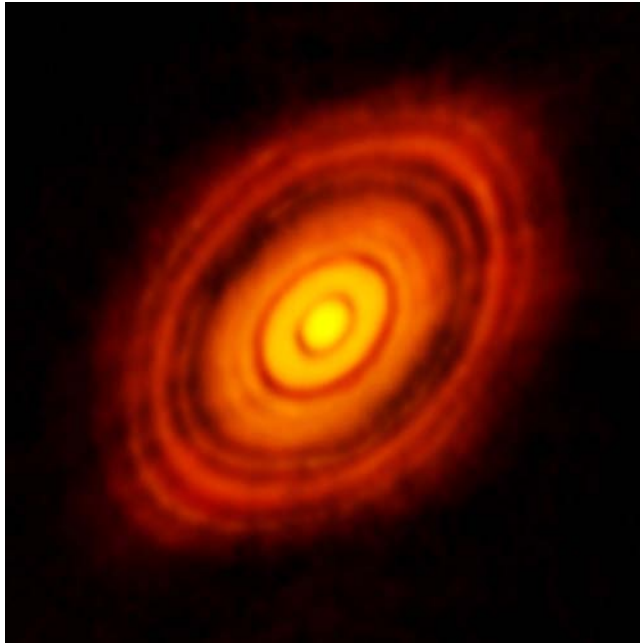


Figura 2: Imagen tomada por el observatorio ALMA. Muestra el disco protoplanetario que rodea a la estrella joven HL Tauri. Estas nuevas observaciones ALMA revelan subestructuras dentro del disco que nunca se han visto antes e incluso muestran las posiciones posibles de planetas que se forman en las zonas oscuras dentro del sistema. Crédito: ALMA.

Hoy en día se sabe que los discos protoplanetarios están formados por gas

⁵1 año luz $\sim 9.46 \times 10^{12}$ km.

⁶Fuente: <http://www.almaobservatory.org>.

y polvo [6], que evoluciona mediante diversos mecanismos para formar aglomerados de mayor tamaño como *rocas* (orden de metros), *planetesimales* (10km) o *protoplanetas* (100km-1000km). Con la hipótesis de un disco formado de planetesimales que acretan para formar objetos de mayor tamaño, los objetos muy pequeños que hoy observamos en el espacio, como asteroides, anillos o cometas, adquieren relevancia, pues se pueden considerar *remanentes* de los procesos que dieron origen a los sistemas planetarios.

El origen de los satélites regulares⁷, se ha comparado directamente con la formación de sistemas planetarios, de tal modo que sistemas formados por un planeta y sus lunas pueden ser vistos como un sistema con una estrella central, alrededor de la cual orbitan planetas. Es posible considerar que en un inicio estos satélites se formaron a partir de una nube de gas y polvo en la cual procesos físicos similares a los involucrados en la formación planetaria dieron origen a su sistema [7] [8].

Esta perspectiva resulta convincente en los sistemas que conforman los planetas gigantes y sus lunas regulares en el Sistema Solar. Éste es el caso de Júpiter y Saturno. En ambos casos se piensa que su formación involucra mecanismos similares a los descritos en el caso de la formación de un sistema planetario [8].

Es importante destacar que la aparición de los satélites regulares está vinculada a una etapa temprana en la formación del sistema planetario y del mismo planeta central. De esta forma la dinámica descrita después de los procesos de su formación corresponde a una dinámica temprana del sistema planeta y satélites. Desde esta visión, la etapa final de formación de los satélites regulares puede representar condiciones iniciales para una etapa posterior. En una siguiente etapa, los satélites regulares primordiales pueden intercambiar materia sólida con cuerpos externos, pueden ser perturbados por otros objetos como satélites irregulares⁸ o incluso ser dispersados hacia el exterior del sistema [9].

La cantidad de exoplanetas descubiertos representa un número considerable para realizar comparaciones estadísticas con diversos modelos teóricos. Aunado

⁷Satélites cuyo origen tiene lugar en el mismo proceso de formación del planeta que orbitan.

⁸Satélites *capturados* por el planeta que orbitan, generalmente con órbitas retrogradas y/o muy excéntricas.

a esto, los avances computacionales han brindado la posibilidad de hacer cálculos extensos de los modelos que buscan sentar las bases de los procesos de formación planetaria. Sin embargo, el desconocimiento de las condiciones iniciales representa una dificultad para la obtención de características particulares de los sistemas planetarios.

En este trabajo, se presentan los resultados que se obtuvieron basados en modificaciones realizadas a un modelo sencillo de formación planetaria introducido en [1]. Dentro de este modelo, la conservación del momento angular total del sistema de planetesimales que interaccionan gravitacionalmente permite calcular las dimensiones del disco protoplanetario. La sencillez del modelo permite hacer un estudio estadístico de las características físicas de los sistemas simulados a partir de un número suficiente de datos. Este modelo no pretende explicar detalladamente la formación de sistemas planetarios, pero sí ayudar a entender las configuraciones de las etapas tempranas de los sistemas planetarios que se observan en el Universo [2].

Las modificaciones que se hacen al modelo comprenden principalmente la forma en la que se distribuye la masa inicial dentro del disco protoplanetario y la implementación de una región que representa anillos planetarios durante la formación de un sistema planetario. Con estas modificaciones se implementaron simulaciones basadas en los datos del Sistema Solar y el sistema de Saturno con sus lunas y sus anillos.

0.1. Plan de la tesis

En el capítulo 1 se explica el modelo de formación planetaria que se utilizó, así como el modo en el que se implementa un mecanismo de crecimiento *oligárquico*, el cual es el mecanismo que incluye todos los efectos estudiados en el modelo sencillo de formación planetaria. Este tipo de crecimiento se utilizó en todos los resultados que se muestran en este trabajo.

En el capítulo 2, se presentan los resultados de formación planetaria a partir de un disco de acreción con la masa inicial distribuida homogéneamente. Con las

modificaciones realizadas a la distribución de la masa inicial en el disco protoplanetario se hace un estudio estadístico de los resultados de formación de sistemas planetarios, a partir de discos de acreción cuya masa inicial se distribuyó de forma no homogénea con una densidad de masa que sigue una ley de potencias (capítulos 3 y 4). Finalmente, se estudia la variación de algunas condiciones iniciales del disco protoplanetario para estas distribuciones de masa inicial no homogénea (capítulo 5).

CAPÍTULO 1

Modelo sencillo de acreción planetaria

Si se parte de una hipótesis de formación de un disco protoplanetario, la pregunta esencial que se tiene que contestar es: ¿cómo se forman los planetas a partir de este disco?. La respuesta a esta pregunta ha conducido entre otras a la propuesta de una serie de modelos [1] [10], que están basados en la colisión inelástica entre planetesimales para la formación de objetos de mayor tamaño. Sin embargo, existe una serie de limitaciones y características físicas que los modelos tienen que implementar para que dichos procesos se lleven a cabo. Entender la formación planetaria requiere entender en parte, cómo es que los mecanismos de acreción operan entre planetesimales.

En la primera parte de este capítulo se presenta un marco general de la formación planetaria a partir de un disco de acreción. Posteriormente se describe de forma breve el modelo sencillo de acreción introducido en [1], a partir del cual se realizaron las implementaciones necesarias para las simulaciones de formación planetaria que se llevaron a cabo en este trabajo.

1.1. Formación planetaria

En el estudio de la formación planetaria, se conoce actualmente un modelo general que describe la formación de sistemas planetarios que tienen como origen un disco de acreción. Este modelo se puede dividir en diferentes etapas [4]. La etapa inicial comprende la formación de la estrella central del sistema planetario. Este proceso se caracteriza por el colapso gravitacional de una nube molecular, lo cual da lugar a la protoestrella central y a la vez a un disco circundante a ésta, llamado *disco protoplanetario o de acreción*. Este disco está constituido por el material que no se deposita en la protoestrella debido a la conservación del momento angular total del sistema [6][5] [11].

Estos discos usualmente se modelan por simplificación del problema con simetría radial y con distribuciones continuas, a pesar de que poseen una estructura vertical y que probablemente contienen discontinuidades [12]. El desconocimiento de las condiciones iniciales y aspectos evolutivos de los discos protoplanetarios, así como simplificaciones en los modelos, representan una debilidad para obtener las distribuciones y características particulares de los sistemas que se observan actualmente.

En etapas tempranas de la evolución de un disco, objetos como las rocas o el polvo poseen una dinámica acoplada al gas [4]. En la siguiente etapa, el material del disco se enfría y algunos materiales se condensan. Posteriormente, el polvo y las rocas se aglomeran para formar objetos más grandes, los cuales se conocen generalmente como *planetesimales* [4]. Las observaciones sugieren que la escala de tiempo en la que se forman estos objetos es muy corta comparada con el tiempo de vida del disco protoplanetario [6].

Los planetesimales poseen un movimiento independiente del gas; este movimiento se aproxima a un movimiento alrededor de orbitas keplerianas coplanares¹; de esta forma, su dinámica se puede aproximar al considerar un problema de N -cuerpos. Los planetesimales son una conexión natural entre los cuerpos pe-

¹Trayectorias de objetos que se mueven en un mismo plano, estas trayectorias satisfacen las leyes de Kepler.

queños que se observan en etapas tempranas y los protoplanetas [5]. Una vez que se forman objetos con tamaño del orden de kilómetros como los planetesimales, las interacciones en el disco están dominadas por la atracción gravitacional. En los modelos de formación planetaria, usualmente se considera como condición inicial un disco compuesto por cuerpos de este tamaño. Estos planetesimales interactúan de acuerdo a una serie de consideraciones físicas, en las cuales la colisión por pares es el mecanismo fundamental de crecimiento [5][13].

La última etapa se caracteriza por la presencia de protoplanetas que se formaron a partir de los planetesimales. Los protoplanetas tienen masas del orden de la masa terrestre y pueden acoplarse al gas del disco via interacción gravitacional. En esta etapa los protoplanetas interactúan gravitacionalmente entre sí y con otros objetos, pueden acretar entre ellos o con otros objetos del sistema, sufrir procesos de migración o incluso recibir materia del exterior [6].

1.2. Modelo simplificado de acreción planetaria.

En [1] y [2], se plantea un modelo sencillo de acreción planetaria que está basado en un modelo previo introducido por J. Laskar en [10]. El modelo de Laskar es un modelo estadístico de formación planetaria a partir de un disco constituido de planetesimales que interactúan gravitacionalmente. La acreción consiste en colisiones completamente inelásticas donde se conserva el momento lineal y la masa. Laskar obtiene una expresión para la distribución espacial de masa $m(a)$ en función de una densidad de masa inicial arbitraria $\rho(a)$ y de una constante conocida como déficit de momento angular o AMD² por sus siglas en inglés, así como expresiones para los semiejes mayores en función del número de planeta. Con lo anterior, este modelo permite estudiar propiedades estadísticas de los sistemas planetarios formados.

En [1] y [2] se analizan de forma estadística configuraciones finales de sistemas planetarios. Los mecanismos de acreción que se utilizan, involucran una

²Esta cantidad se define más adelante dentro de este capítulo

serie de adiciones al modelo original de Laskar. Dentro de estas contribuciones se encuentran: la implementación de la difusión caótica en los momentos angulares de los planetesimales; el condicionar la acreción a colisiones poco energéticas; la implementación de probabilidades de acreción que dependen de la masa de los planetesimales; así como la consideración del momento angular total como la cantidad representativa del sistema [2]. En esta sección se describe de forma general este modelo, así el mecanismo de acreción utilizado en las simulaciones de los resultados que en este trabajo se presentan.

El modelo [1] describe la dinámica de un sistema de N -partículas que giran en órbitas keplerianas coplanares alrededor de una masa central m_o . El hamiltoniano de las $N + 1$ partículas, en el sistema de referencia inercial del centro de masa, se escribe como:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \frac{|\vec{w}_i|^2}{m_i} - G \sum_{0 \leq i < j}^N \frac{m_i m_j}{|\vec{u}_i - \vec{u}_j|}. \quad (1.1)$$

donde \vec{u}_i es el vector posición de cada partícula de masa m_i y \vec{w}_i es el momento lineal dado por $\vec{w}_i = m_i \frac{d\vec{u}_i}{dt}$

Si se reescribe el hamiltoniano, utilizando las variables canónicas astrocéntricas r_i y p_i definidas por:

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= \vec{w}_i; & \vec{r}_0 &= \vec{u}_0, & \vec{r}_i &= \vec{u}_i - \vec{u}_0, & i &\neq 0, \\ \vec{p}_0 &= \vec{w}_0 + \vec{w}_1 + \dots + \vec{w}_N; & \vec{p}_i &= \vec{w}_i, & i &\neq 0, \end{aligned}$$

. el hamiltoniano se puede escribir como

$$H = H_0 + H_1, \quad (1.2)$$

donde

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{|p_i|^2}{m_i} - G \sum_{i=1}^N \frac{m_i m_o}{|\vec{r}_i|}, \quad (1.3)$$

y

$$H_1 = \frac{1}{2m_0} \left| \sum_{i=1}^N p_i \right|^2 - G \sum_{0 < i < j}^N \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}. \quad (1.4)$$

Aquí, el término H_o representa el hamiltoniano de N partículas keplerianas (m_i) independientes (planetesimales) que interactúan con una estrella central (m_0) en el origen, con $m_0 \gg m_i$. H_1 describe interacciones gravitacionales entre estas partículas e incluye un término que acopla los sus momentos lineales. El término H_1 también se puede considerar como pequeñas alteraciones a H_0 , por lo que da origen a un comportamiento típicamente caótico que modifica las órbitas keplerianas [2].

El modelo de acreción está basado en la colisión inelástica de un par de planetesimales, que dan origen a una nueva partícula. En cada colisión se conserva la masa, el momento lineal y el momento angular. El momento angular de una partícula que se mueve en una órbita kepleriana sólo posee una componente perpendicular al plano de la órbita, la cual está dada por $l = m \sqrt{\mu a (1 - e^2)}$, donde $\mu = G m_o$. El momento angular de todo el sistema (disco de planetesimales) está definido por

$$L = \sum_{i=1}^N l_i = \sum_{i=1}^N m_i \sqrt{\mu a_i (1 - e_i^2)}. \quad (1.5)$$

La energía total de cada partícula kepleriana está dada por

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} - \mu \frac{m}{r} = -\mu \frac{m}{2a}. \quad (1.6)$$

Dado que los eventos de acreción se tratan de colisiones inelásticas, la energía mecánica no se conserva. En particular, si partimos de la conservación de la masa en cada colisión, se observa que la energía potencial se conserva, de modo que la no-conservación de la energía mecánica se debe a la energía cinética. Si se considera la acreción de dos masas m_1 y m_2 que forman una masa m_3 ; el cambio en la energía cinética se expresa como

$$\delta\epsilon = \frac{p_3^2}{2m_3} - \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{p_1^2}{2m_1}, \quad (1.7)$$

donde: $p_3 = p_1 + p_2$ y $m_3 = m_1 + m_2$ ³, entonces, se puede mostrar [2] a partir de la conservación del momento lineal que el cambio total en la energía mecánica está dado por⁴

$$\delta\epsilon = -\frac{(m_2p_1 - m_1p_2)^2}{2m_1m_2m_3} < 0. \quad (1.8)$$

De la ecuación anterior se observa que la energía del sistema decrece en cada colisión de planetesimales [1] [14].

En el modelo se asume que si dos órbitas se intersectan, después de un tiempo suficientemente largo los planetesimales colisionan y por ende, acretarán [2]. Dos planetesimales que se mueven en órbitas elípticas con un foco en común acretarán, si sus trayectorias se intersectan en al menos un punto. Esto se reduce a pedir que el pericentro⁵ de una partícula con semieje mayor a_1 sea menor o igual al

³De estas relaciones se deriva la conservación del momento angular $L_3 = L_1 + L_2$.

⁴Demostación en el anexo A.

⁵Pericentro, periaastro ó periapsis, mínima distancia entre un punto de una trayectoria elíptica y su centro.

apocentro⁶ de la partícula con semieje mayor a_2 , esta condición se expresa como

$$a_2(1 - e_2) \leq a_1(1 + e_1). \quad (1.9)$$

Una vez que se cumple esta condición, se calculan los puntos de intersección de estas dos elipses. Los nuevos parámetros iniciales del planetesimal se obtienen de la conservación de la masa, momento angular y del cambio de energía de la ecuación (1.8) [1].

En cada evento de acreción se implementan las perturbaciones debidas a H_1 , por medio de un intercambio de momento angular, a través de un movimiento browniano tipo caminata aleatoria [2]. Este mecanismo conserva el momento angular de todo el sistema y sólo actúa en pares de planetesimales que no participan en la acreción. Durante este proceso se ven afectados los planetesimales solamente en sus excentricidades. Esta aproximación del comportamiento perturbativo de H_1 como una difusión caótica en las excentricidades de las órbitas de planetesimales en ausencia de colisión, es válida al considerar tiempos largos e ignorar las resonancias⁷ de movimiento medio, a lo cual se le conoce como *límite secular*⁸.

El AMD

Una magnitud que utiliza Laskar en [10] es el *déficit de momento angular* o *AMD* por sus siglas en inglés. El AMD se define como la diferencia entre el momento angular de una partícula de masa m que se mueve en una órbita elíptica con semieje mayor a y excentricidad e , y el momento angular de la misma partícula pero moviéndose en una órbita circular, de modo que el AMD es una medida del grado de circularidad de un sistema planetario promedio [1]; el AMD de un sistema de N partículas que se mueven en el mismo plano se define de la siguiente

⁶Apocentro, apoastro ó apoapsis, máxima distancia de un punto de una trayectoria elíptica y su centro

⁷La resonancia entre las órbitas de dos cuerpos se da cuando la razón de sus periodos orbitales es una fracción de números enteros.

⁸El límite secular considera que las perturbaciones no afectan los semiejes mayores de las órbitas.

forma:

$$AMD = \sum_{i=1}^N \Delta_i = \sum_{i=1}^N m_i \sqrt{\mu a_i} \left(1 - \sqrt{1 - e_i^2}\right). \quad (1.10)$$

Esta cantidad disminuye debido a la pérdida de energía en cada evento de acreción [1]. En medida que el AMD disminuye, la probabilidad de intersección de las órbitas decrece [2]; por lo tanto el número de colisiones es cada vez menor. De esta manera, durante cada evento de acreción el sistema se *circulariza* y aumentan de masa los planetesimales. Este proceso continúa hasta que ya no es posible ninguna colisión. En consecuencia, si el AMD de un sistema planetario es tal que sus órbitas no se cruzan, se dice que el sistema es AMD estable y el valor del AMD en el cual esto ocurre se denota por AMD_e . Este criterio de estabilidad sólo es válido al considerar el límite secular.

El AMD es un parámetro físico que no se mantiene constante a lo largo del proceso de acreción y en realidad puede tomar valores a lo largo de un intervalo ancho; por lo tanto, esta cantidad no es una propiedad de un sistema planetario [1]. Durante un proceso de formación planetaria si se ajusta el AMD_e a un AMD final fijo, haciendo órbitas más excentricas, no se garantiza la conservación del momento angular total del sistema [2].

De acuerdo a las consideraciones anteriores, este modelo de acreción planetaria toma al momento angular L y a la masa M totales del sistema (disco protoplanetario), como los parámetros físicos característicos de cada sistema planetario. En este modelo, el momento angular total L se conserva y es una cantidad conocida durante la evolución del disco protoplanetario.

Configuración del disco protoplanetario inicial.

El momento angular total L es el parámetro principal del disco protoplanetario inicial [1]. Esta cantidad se establece en las condiciones iniciales de acuerdo

al sistema que se vaya a simular. Las dimensiones del disco, y en particular, cada una de las propiedades que se le asignan a cada planetesimal, como excentricidad, masa y semieje mayor, son tales, que la suma de los momentos angulares de todas los planetesimales es igual al momento angular total del sistema. Tomando el momento angular de cada partícula, así como las distribuciones iniciales de masa y excentricidad, cuando el número de partículas N tiende a infinito se suman estas cantidades y se normaliza a L . Por consiguiente, los parámetros iniciales del disco protoplanetario que son la excentricidad máxima e_{\max} , el semieje mayor mínimo a_{\min} y el semieje mayor máximo a_{\max} quedan definidos por

$$L = \int_0^{e_{\max}} \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} \rho(a)\phi(e) \sqrt{\mu a(1 - e^2)} da de. \quad (1.11)$$

La integral (1.11) se puede calcular una vez que se establezcan las distribuciones de masa y excentricidad iniciales. Para la distribución de la masa, se toma una relación de la forma

$$\rho(a) = a^\gamma. \quad (1.12)$$

Laskar utiliza [10] una ley de este tipo (1.12), y obtiene expresiones para los semiejes mayores en función del número de planeta n ; también obtiene una relación entre la masa y el semieje mayor a que sigue una ley de potencia. Dentro de la literatura, los perfiles de densidad inicial de discos protoplanetarios más utilizados son aquellos que siguen una ley de potencia [?]. En consideración con esto, se decide tomar una densidad de masa inicial del tipo de la ecuación 1.12, para distribuir la masa en el disco protoplanetario. Para asignar valores a γ , se sigue un criterio de dimensiones que puede tomar el disco en comparación con las dimensiones que se observan en los casos estudiados, estos valores se detallan en las siguientes secciones.

resolviendo se obtiene la siguiente expresión para el momento angular total en términos de e_{\max} , a_{\max} , a_{\min} y γ :

$$L = \frac{(\gamma + 1)M \sqrt{\mu}}{2\gamma + 3} \frac{a_{\max}^{\gamma+3/2} - a_{\min}^{\gamma+3/2}}{a_{\max}^{\gamma+1} - a_{\min}^{\gamma+1}} \left(\sqrt{1 - e_{\max}^2} + \frac{\sin^{-1} e_{\max}}{e_{\max}} \right). \quad (1.13)$$

La ecuación (1.13) define restricciones de los valores que pueden tomar las variables. En el caso de e_{\max} sólo puede tomar valores entre 0 y 1, ya que el semieje mayor mínimo a_{\min} debe ser mayor al radio de la estrella central y menor que el valor de a_{\max} . De acuerdo a la ecuación anterior, una vez que se establece la distribución inicial de masa dada por el valor de γ y determinando el resto de los parámetros iniciales, es posible encontrar una solución para a_{\max} .

Para establecer el disco protoplanetario inicial, además de fijar las condiciones iniciales γ , a_{\min} y e_{\max} , se deben de fijar los valores atribuidos de la masa total M y el momento angular total L del sistema conocido; con lo anterior se obtiene la siguiente ecuación para a_{\max} que depende de γ :

$$c_2 a_{\max}^{\gamma+1} - c_1 a_{\max}^{\gamma+3/2} - c_3 = 0, \quad (1.14)$$

donde

$$c_1 = \frac{(\gamma + 1)M \sqrt{\mu}}{2\gamma + 3}, \quad (1.15)$$

$$c_2 = \frac{L}{\sqrt{1 - e_{\max}^2} + \frac{\sin^{-1} e_{\max}}{e_{\max}}}, \quad (1.16)$$

$$c_3 = c_2 a_{\min}^{\gamma+1} - c_1 a_{\min}^{\gamma+3/2}. \quad (1.17)$$

Una vez que se asigna un valor para γ en las ecuaciones anteriores, se puede obtener un valor de a_{\max} . Con lo anterior quedan establecidos los intervalos $[a_{\min}, a_{\max}]$ y $[0, e_{\max}]$, de los cuales se escogen los valores de e y a para asignar las condiciones iniciales de cada una de las N partículas que conforman el disco.

En resumen, con los parámetros de momento angular y masa totales del sistema además de los parámetros iniciales e_{\max} , a_{\min} y cada distribución de masa inicial dada por el valor de γ , se obtiene un valor de a_{\max} calculado mediante la ecuación (1.14).

1.2.1. Mecanismos de acreción

El modelo de acreción estudiado en las secciones anteriores describe el tipo de crecimiento que llamaremos crecimiento *ordenado* [1]. Es importante destacar que en este tipo de crecimiento no intervienen los efectos provocados por la velocidad de los planetesimales, ni los efectos gravitacionales, con lo cual todos los planetesimales poseen la misma probabilidad de acretar.

El tipo de acreción que se utilizó en este trabajo para las simulaciones, se conoce como mecanismo de acreción *oligárquico* [2]. Este mecanismo de acreción involucra más restricciones físicas en comparación con el *ordenado*, razón por la que se utilizó en este trabajo. El crecimiento oligárquico utiliza como base el crecimiento ordenado, pero además combina dos restricciones físicas a la acreción. La primera involucra un efecto gravitacional, en el cual la probabilidad de acreción depende de la masa de los planetesimales. La segunda es un mecanismo de *selección de velocidades*, en el que se toman en cuenta los efectos de las velocidades relativas entre los planetesimales. A continuación se describe la implementación de estas restricciones.

En las etapas iniciales de los procesos de acreción, es aceptado que la velocidad de acreción de los planetesimales es proporcional a su masa; en otras palabras, el efecto gravitacional de los planetesimales más masivos provoca que éstos crezcan más rápido [19].

En general, todo proceso de acreción está gobernado, en parte, por la atrac-

ción gravitacional. Con esto, uno espera que en un conjunto de planetesimales, las masas mayores tengan un crecimiento mayor, debido a que su atracción gravitacional es más grande. Por lo tanto, masas mayores tienen una mayor probabilidad de acreción que las masas menores. Este fenómeno es parecido a un crecimiento tipo *runaway growth* o *crecimiento desbocado* [2].

El efecto del crecimiento desbocado se incluye en el modelo; en cada evento de acreción se define una frecuencia relativa de acreción C_i que es función de las masas de los planetesimales. Esta probabilidad de acreción esta dada por,

$$C_i = \frac{m_i}{M} \quad (1.18)$$

donde m_i es la masa de una partícula en el disco protoplanetario y M es la masa total del disco.

En la implementación, se elige al azar una variable entre 0 y 1; del conjunto de protoplanetas tales que C_i , es mayor que la variable escogida, se elige al azar uno para su acreción, digamos el k -ésimo protoplaneta. Con esto, se espera que en cada evento de acreción se promueva la acreción de las partículas más masivas. Una vez que haya un evento de acreción, la acreción se implementa considerando al planetesimal más cercano respecto al semieje mayor.

El modelo de crecimiento desbocado tiene límites; a pesar de que las primeras fases del proceso de acreción están dominadas por el crecimiento desbocado, en las siguientes etapas, una vez que los protoplanetas hayan adquirido una masa de alrededor de 100 veces la de un planetesimal, los efectos de la velocidad relativa entre protoplanetas aumentan [19]. Con esto, después de una etapa temprana, se tiene un crecimiento condicionado, tanto al efecto de las velocidades relativas, como al efecto gravitacional.

Safronov en [20], discute sus resultados referentes a las velocidades relativas entre los planetesimales. El criterio de Safronov dice que dos masas pueden acretar si la velocidad relativa entre ellas es menor a su velocidad de escape. Este mecanismo de acreción representa una restricción al crecimiento ordenado y

combinado con el crecimiento desbocado, da lugar a un crecimiento de tipo *oligárquico*. De acuerdo a lo anterior, el criterio de Safronov se puede denotar de la siguiente manera

$$|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = v_{rel} < v_{esc}. \quad (1.19)$$

Esta condición se reduce a que la energía potencial gravitacional del sistema binario debe ser mayor a la energía cinética. La velocidad de escape está dada por⁹

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{6\mu\eta^3}{r_{min}}}, \quad (1.20)$$

donde $\eta = \left(\frac{m_1+m_2}{3m_o}\right)^{1/3}$.

En este modelo se toma por simplicidad r_{min} como el *radio de Hill*¹⁰ promedio entre planetesimales de acuerdo a la expresión

$$r_{min} = \frac{r_{1H} + r_{2H}}{2}. \quad (1.21)$$

En este modelo, este mecanismo condiciona la acreción a los puntos de intersección de las órbitas, en las cuales la velocidad relativa es mínima. Con esto, se eliminan las colisiones elásticas y aquellas en las que se podrían fragmentar los cuerpos. Conocidas las velocidades v_1 y v_2 , en el punto de intersección de la órbita, es posible conocer el cambio en la energía (1.8) y en consecuencia la energía de la nueva partícula y el nuevo semieje mayor a_3 . A este mecanismo que combina el efecto gravitacional y el efecto de las velocidades de los planetesimales, se

⁹Demostración en el anexo A.

¹⁰El radio de Hill define la esfera de influencia gravitacional de un cuerpo que orbita alrededor de otro de masa mucho mayor.

conoce como *oligárquico* [19] [21]. La evolución del disco protoplanetario bajo el régimen del crecimiento oligárquico posee tiempos de formación comparables a los tiempos de crecimiento desbocado y suficientes para formar a los planetas jovianos [19].

1.3. Simulaciones computacionales

En base al modelo descrito en las secciones anteriores, se realizan las modificaciones computacionales necesarias para implementar la formación planetaria a partir de discos con una distribución no-homogénea de masa; en particular se desea una distribución con un comportamiento de acuerdo a la ecuación (1.12). Adicional a esta distribución inicial de masa, las implementaciones computacionales que se hacen al modelo también involucran el estudio del comportamiento de una región de anillos planetarios (caso de Saturno). A continuación se describe la forma en la que esto se simula.

Condiciones iniciales del disco protoplanetario

Los discos protoplanetarios que se utilizan en las simulaciones contienen inicialmente 10000 planetesimales. Al disco se le asignan los valores del momento angular total L y masa total M del Sistema Solar¹¹, o del sistema de Saturno con lunas¹² y anillos¹³. Las unidades utilizadas para cada uno de los casos tratados son: M_{\odot} (masa solar) y UA (unidad astronómica) para el Sistema Solar, y M_{Sat} (masa de Saturno) y a_{Tit} (semieje mayor de Titán) para el caso del sistema de Saturno.

¹¹Se considera la masa y momento angular sólo de los planetas. Los datos se encuentran en el anexo B

¹²Se considera el momento angular y masa de las lunas: *Pan, Daphnis, Atlas, Prometheus, Pandora, Epimetheus, Janus, Mimas, Enceladus, Tethys, Calypso, Telesto, Dione, Helene, Rhea, Titán e Hiperion*. Los datos se encuentran en el anexo B.

¹³Se consideran sólo los anillos principales (anillos A,B,C y D). Los datos se encuentran en el anexo B.

La masa del disco protoplanetario que se utiliza para el Sistema Solar es $M_{s-solar} = 1.34157 \times 10^{-3} M_{\odot}$, y para el sistema de Saturno es $M_{s-sat} = 2.4405 \times 10^{-4} M_{Sat}$. El momento angular que resulta para el Sistema Solar es:¹⁴ $L_{s-solar} = 2.2214 \times 10^{-2} \frac{M_{\odot}(UA)^2}{T_{terrestre}}$ mientras que para el Sistema de Saturno $L_{s-sat} = 1.5142 \times 10^{-3} \frac{M_{Sat}a_{Tit}^2}{T_{Tit}}$. De esta manera la masa de cada planetesimal (m_p) tiene una masa inicial igual a $m_p = \frac{M_{s-solar}}{10000} = 1.34157 \times 10^{-7} M_{\odot}$ para el caso del Sistema Solar y de $m_p = \frac{M_{s-saturno}}{10000} = 2.4405 \times 10^{-8} M_{Sat}$ para el caso del sistema de Saturno.

Para el valor del semeje mayor mínimo se escogen en el caso del Sistema Solar $a_{min} = 0.2 UA$ y para el sistema de Saturno $a_{min} = 0.05475 a_{Tit}$. Se realizaron simulaciones con distintos valores de la excentricidad máxima inicial e_{max} , estos valores fueron: 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4. Los valores que se utilizaron para γ fueron: $-0.9, -0.75, -0.5, 0, 0.5, 1$ y 2 . Como parte del criterio que se toma para asignar estos valores, se consideran los resultados de a_{max} que se obtienen al tomar cada valor de γ para resolver la ecuación (1.12). Los valores de a_{max} que se calcularon en función de γ y de e_{max} para ambos sistemas se encuentran en el anexo C.

Para establecer la distribución inicial de la masa se elabora un generador de números aleatorios, cuya distribución de probabilidad tenga la forma de la ecuación (1.12). Una vez establecidos los valores de a_{min} y e_{max} , esta distribución se construye desde 0 hasta a_{max} . Con esta distribución, a cada una de las partículas que forman el disco protoplanetario se le asigna un valor de semeje mayor a , que se encuentre en el intervalo $[a_{min}, a_{max}]$. Las excentricidades de las órbitas toman valores iniciales aleatorios distribuidos homogéneamente en el intervalo $[0, e_{max}]$. En la figura 1.1 se muestran ejemplos de las distribuciones iniciales de masa que se utilizaron para $\gamma > 0$ y $\gamma \leq 0$ de acuerdo a (1.12). En esta figura se grafica la distribución para $\gamma = 0$, que corresponde a una distribución homogénea de masa.

¹⁴ $T_{terrestre}$ es el periodo de la Tierra alrededor del Sol, T_{Tit} es el periodo de Titán alrededor de Saturno. Note que de acuerdo a las unidades utilizadas de la tercera ley de Kepler el valor de la constante de Gravitación es $G = 4\pi^2$ en ambos sistemas.

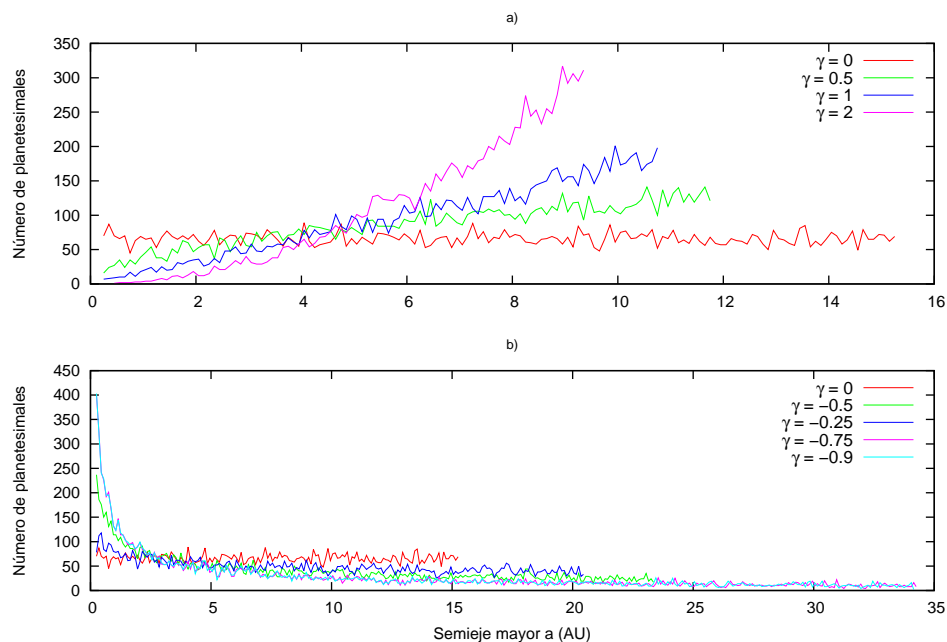


Figura 1.1: Distribuciones de masa iniciales para (a) $\gamma > 0$ y (b) $\gamma \leq 0$ utilizadas en las simulaciones numéricas. Estas distribuciones corresponden a los datos del Sistema Solar. Para el sistema de Saturno la forma de estas distribuciones es similar, sólo sufre un cambio en la escala del semieje mayor.

En la figura 1.2 se muestra un diagrama X-Y de un disco protoplanetario inicial con una distribución para $\gamma = 0.5$. Una vez que en el disco protoplanetario cada una de las partículas tienen sus condiciones iniciales (a, e y m), se eligen partículas al azar e inicia el proceso de acreción siguiendo las reglas descritas en la sección 1.2.

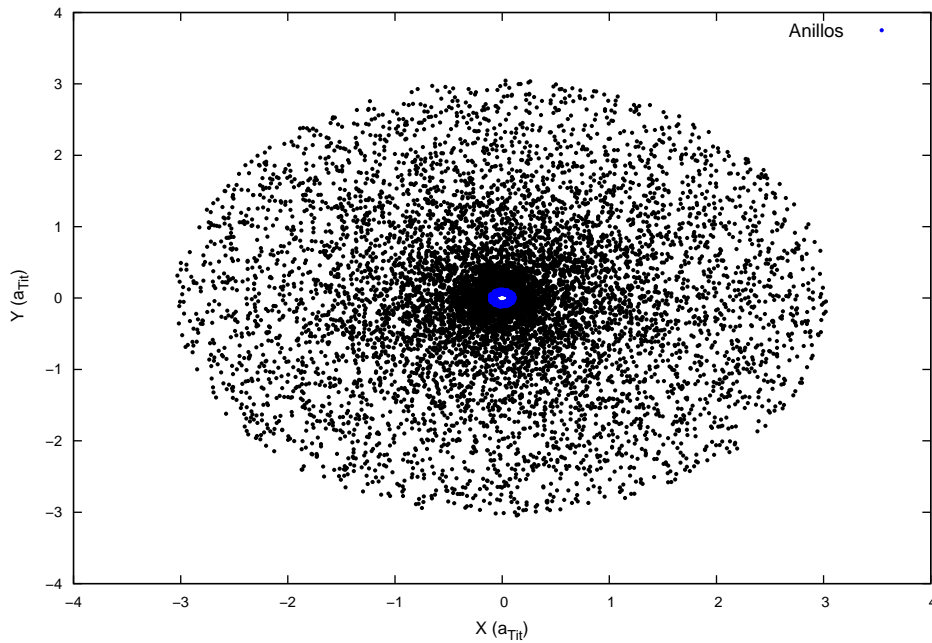


Figura 1.2: Posición inicial de 10000 planetesimales que simulan un disco protoplanetario. Los datos con los que se formó corresponden a los datos del sistema de Saturno; en color azul se observa la región de los anillos planetarios. Los ángulos de posición y de rotación de las órbitas se tomaron aleatoriamente. La excentricidad inicial máxima para este disco es $e_{\max} = 0.1$. El semieje mayor mínimo y el valor de γ son $a_{\min} = 0.054754a_{\text{Tit}}$ y $\gamma = 0.5$.

Simulación de los anillos planetarios

Para el sistema de Saturno se incluyen en las simulaciones los anillos planetarios. Para esto se implementa un mecanismo mediante el cual se mantienen sin eventos de acreción las partículas que se sitúan dentro del disco inicial con un semieje mayor entre a_{\min} y el *límite de Roche* (l_R). El límite de Roche es la distancia mínima que puede soportar un objeto que mantiene su estructura únicamente por su propia gravedad.

En el caso de este sistema, el límite de Roche corresponde a un valor de $l_R = 0.111943 a_{\text{Tit}}$ ¹⁵. Las partículas situadas en esta región simularán las partículas en los anillos. A estas partículas no se les impide el intercambio de momento angular con el resto de las partículas del disco. Con esto, es posible entonces, que en cada evento de acreción alguna partícula en la región de los anillos intercambie momento angular con alguna otra del disco, de acuerdo al mecanismo descrito en la sección 1.2.

En la figura 1.2 se muestra un diagrama de posición X-Y de 10000 planetesimales en el disco protoplanetario inicial. Este figura corresponde al caso del sistema de Saturno, en ésta, se observan la región de anillos en la parte interior del diagrama.

El proceso de acreción continua hasta que ningún planetesimal puede acretar con otro, es decir, el sistema se ha circularizado lo suficiente para que ninguna órbita se intersecte con otra. En este punto del proceso de formación planetaria, el sistema ha alcanzado estabilidad en el sentido *AMD* [2].

¹⁵Radio externo del anillo A.

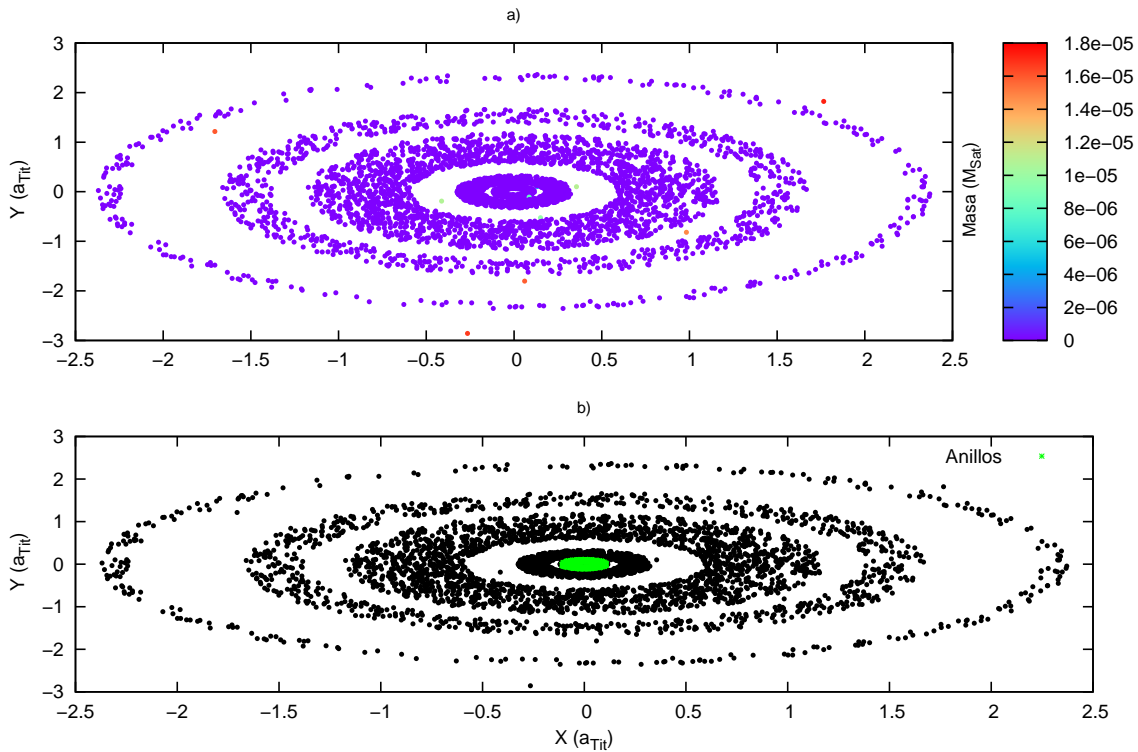


Figura 1.3: Posición de planetesimales un estado intermedio de formación planetaria. El disco protoplanetario contiene un total de 4780 partículas. Este sistema corresponde al caso de Saturno. En la figura a) se observan algunos anillos formados de planetesimales que no han acrecido. De igual forma se observan franjas vacías donde se han formado objetos de mayor masa. En la parte central de la figura b) se observa la región de los anillos planetarios. Los ángulos de rotación y posición de las órbitas se tomaron aleatoriamente. Las condiciones iniciales son $e_{\max} = 0.1$, $a_{\min} = 0.054754a_{Tit}$ y $\gamma = 0.5$.

CAPÍTULO 2

Formación de sistemas planetarios con una distribución inicial homogénea de masa

En este capítulo se presentan los resultados que se obtuvieron de las simulaciones de formación de sistemas planetarios con una distribución de masa inicial homogénea. Se estudiaron dos casos: una estrella central con planetas orbitándola y un sistema de un planeta con anillos y lunas. Para estas simulaciones se utilizaron los parámetros del Sistema Solar y el Sistema de Saturno con sus lunas y anillos. Las simulaciones de acreción se realizaron por medio de un mecanismo de crecimiento tipo oligárquico. Para estas simulaciones se utilizó la distribución inicial descrita en la ecuación (1.12) con el valor de $\gamma = 0$. La excentricidad inicial máxima que se utilizó fue $e_{\max} = 0.1$.

2.1. Formación de sistemas: Sistema Solar y el sistema de Saturno.

Se simularon ensambles constituidos de 1000 sistema planetarios para los casos estudiados. En la figura 2.1 se muestran los diagramas de masa y excentricidad de los resultados obtenidos para el Sistema Solar. En el diagrama de masa, es notable la presencia de una franja densa en la cual se acumulan la mayor parte de los planetas. Esta franja es creciente hasta que alcanza un valor máximo donde se ubican los planetas más masivos. A partir de esta distancia aparece una franja vertical decreciente que representa el borde del ensamble; en esta franja se acumulan los últimos planetas de los sistemas. En este diagrama de masa contra semieje mayor, sobresale una región que llamaremos *prohibida*, en la cual no se forman planetas con masas pequeñas en un intervalo del semieje mayor. Esta región está delimitada en la parte superior por la franja creciente de planetas que es característica de este diagrama.

En el diagrama de excentricidades de la figura 2.1, se observa que los planetas más cercanos a la estrella tienen las mayores excentricidades del ensamble. Estos planetas con el menor semieje mayor corresponden también a los menos masivos que aparecen en el diagrama. Para este ensamble la mayor excentricidad que se obtiene es $e = 0.4041$, el cual se encuentra en $a = 0.2$ y la masa de este planeta es $m = 1.21 \times 10^{-6} M_{\odot}$. Por otro lado, los planetas más masivos poseen las excentricidades menores y son aquellos que se encuentran más alejados sobre la franja creciente del diagrama de masa. Por ejemplo, la menor excentricidad es $e = 2.7232 \times 10^{-3}$, este planeta tiene un semieje mayor de $a = 14.34 \text{ UA}$ y su masa es $m = 1.71 \times 10^{-4} M_{\odot}$.

En la figura 2.2 se muestran los resultados de las simulaciones para el caso del sistema de Saturno con sus lunas y anillos. A pesar de que las escalas son distintas, es clara la similitud en la forma de estos diagramas con las correspondientes al Sistema Solar. Al igual que en el caso del Sistema Solar, la distribución final de masa tiene las mismas características, es decir, el diagrama posee una franja cre-

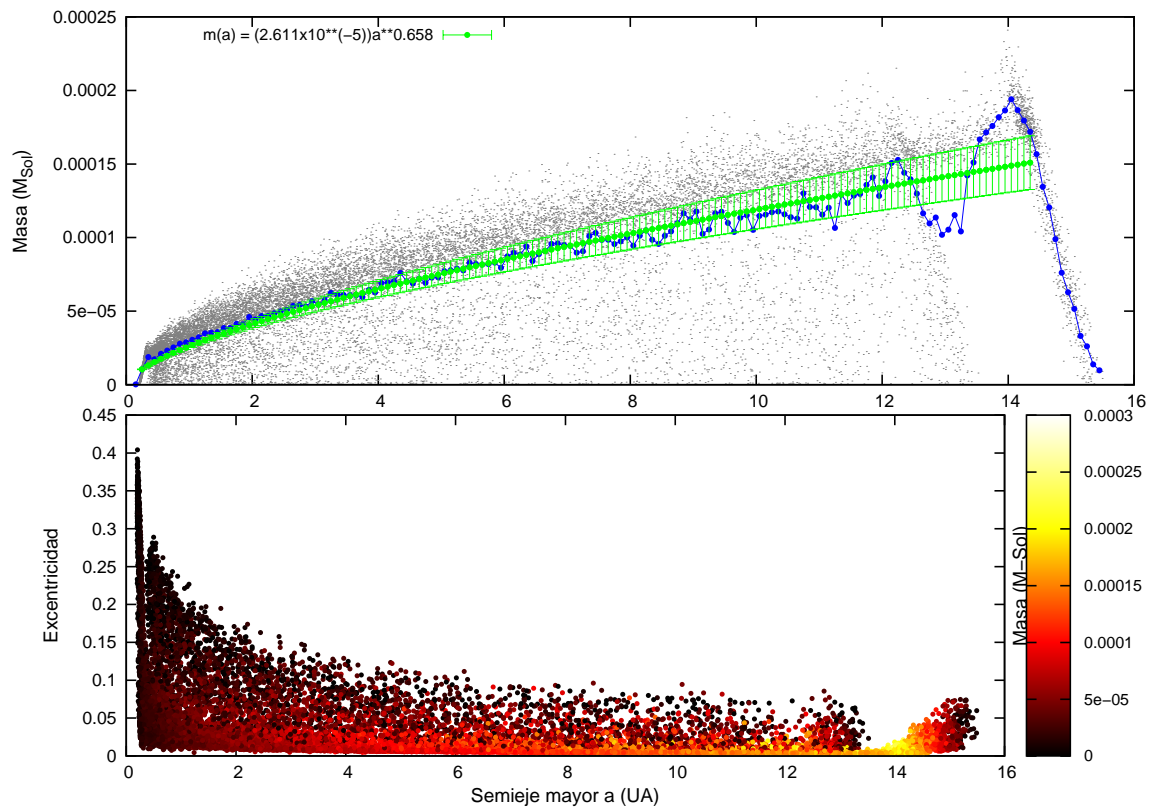


Figura 2.1: Masa y excentricidad de sistemas formados con los parámetros del Sistema de Solar, con una distribución inicial homogénea $\gamma = 0$ y $e_{\text{max}} = 0.1$. En color azul se grafica el valor promedio de masa. Se grafica la línea de ajuste en color verde con barras de error.

ciente donde se concentran la mayor cantidad de lunas (o planetas) formadas, así como una región prohibida donde no se forman lunas. El diagrama de excentricidades para el sistema de Saturno difiere con la que corresponde al Sistema Solar, ya que en este diagrama se hace visible la presencia de partículas en la región de los anillos planetarios, situación que no ocurre en el diagrama de masa. Los anillos planetarios, de acuerdo a la figura 2.2, están conformados por las partículas que poseen las excentricidades mayores de los sistemas; las excentricidades menores, al igual que para el Sistema Solar, corresponden a los planetas con mayor masa, los cuales se encuentran más alejados.

El promedio del número de lunas formadas por sistema para este tipo de distribución inicial es $\bar{n} = 16.52 \pm 1.14$, mientras que para el caso del Sistema Solar el promedio de planetas formados por sistema es $\bar{n} = 18.87 \pm 1.16$. La masa promedio en los anillos para este ensamble es $\bar{m} = 5.7 \times 10^{-6} \pm 3.8 \times 10^{-7} M_{\text{Sat}}$, que representa un total de 234 planetesimales orbitando en esa región.

La curva de la masa promedio en del diagrama de masa contra semieje mayor, en ambos casos, se ajusta a una ley de potencias similar. En las figuras 2.1 y 2.2 los puntos en color verde representan el promedio de la masa en un intervalo sobre el semieje mayor y la línea en color amarillo corresponde al ajuste a una ley de potencias para estos puntos. El ajuste para ambos casos provee una potencia muy parecida: el ajuste a los puntos en el caso del Sistema Solar da $m(a) \sim a^{0.65}$ y para el sistema de Saturno el resultado del ajuste es $m(a) \sim a^{0.68}$. Al seguir ambos casos una ley de potencias similar, se puede inferir que la forma del ensamble final de masa para estos casos sigue una ley que es independiente de la escala.

En ambos casos estudiados, se preserva una correlación entre las masas y sus respectivas excentricidades: las mayores masas se mueven en las órbitas menos excéntricas y más alejadas de la estrella central, mientras que las menores masas que se ubican más cerca de la estrella son las que poseen excentricidades más grandes. Este comportamiento se ha observado para otros mecanismos de crecimiento, además del crecimiento tipo oligárquico [1].

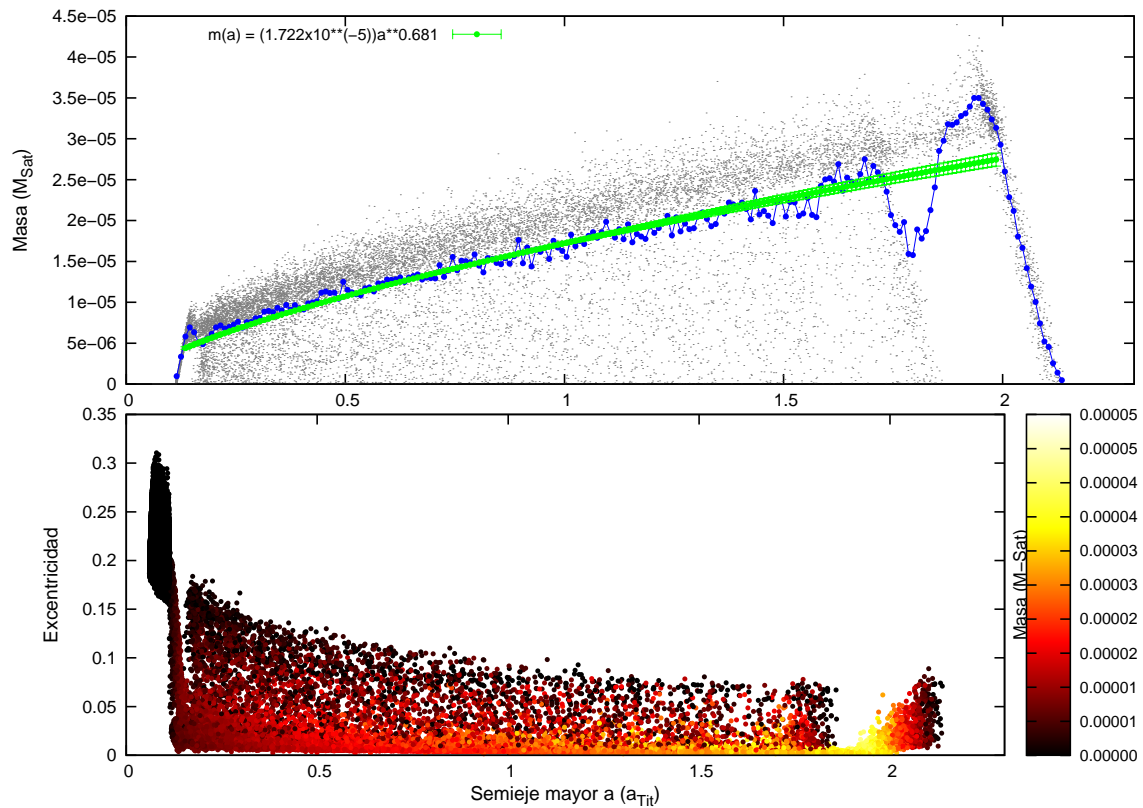


Figura 2.2: Masa y excentricidad de lunas y anillos simulados con los parámetros del Sistema de Saturno, con una distribución inicial homogénea $\gamma = 0$ y $e_{max} = 0.1$. En color azul se grafica el valor promedio de masa. Se grafica la línea de ajuste en color verde con barras de error.

CAPÍTULO 3

Distribución inicial de masa con una ley de potencia positiva

En este capítulo se analiza la formación de sistemas mediante una distribución inicial de masa no-homogénea que se comporta de acuerdo a la ecuación 1.12. Las distribuciones iniciales de masa que se utilizaron para construir los discos de planetesimales están dadas por los valores $\gamma = 0.5, 1.0$ y 2.0 . Se utilizaron discos compuestos por un total de 10000 planetesimales. Para cada caso se consideró un ensamble de 1000 sistemas simulados para las gráficas de distribuciones de masa y excentricidad que se presentan.

3.1. Formación de sistemas: caso del Sistema Solar

En las siguientes gráficas se presentan los resultados que corresponden a los sistemas planetarios formados a partir de las condiciones iniciales dadas por el Sistema Solar. La excentricidad inicial máxima que se utilizó en el disco de acreción fue de $e_{\max} = 0.1$, y el valor del semieje mayor mínimo fue de $a_{\min} =$

0.2 UA.

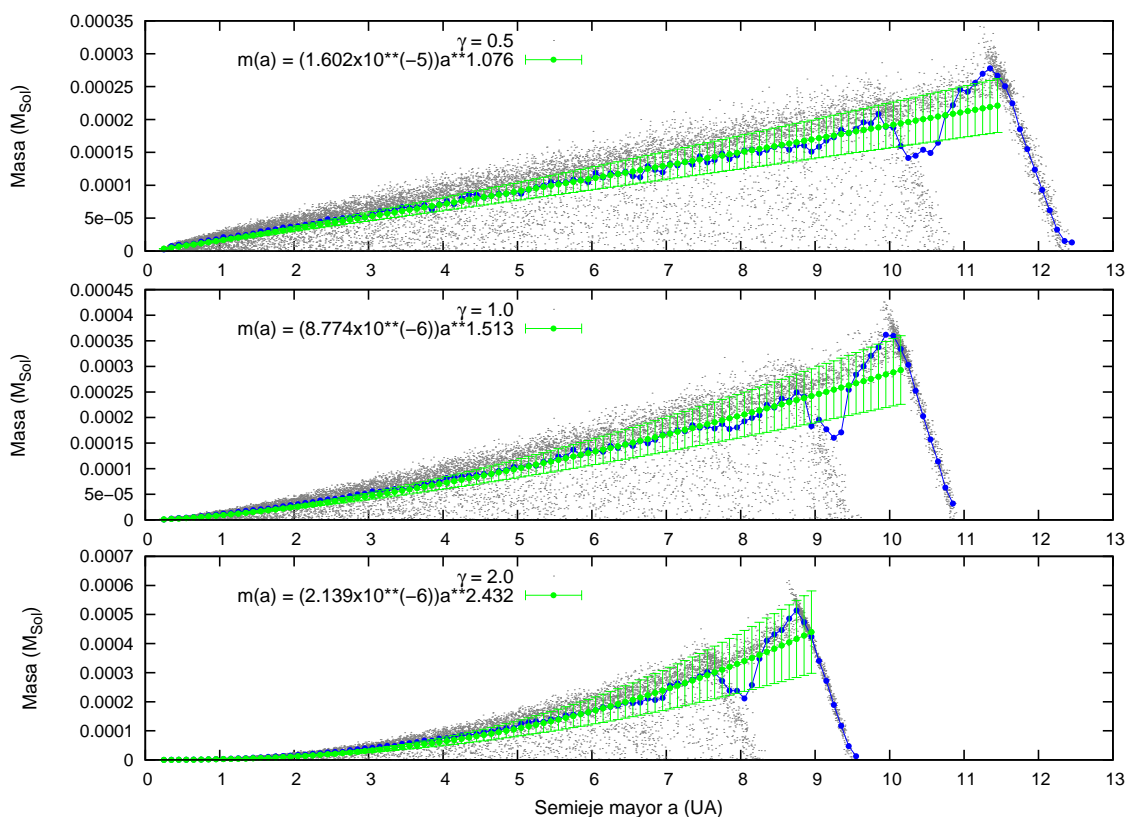


Figura 3.1: Diagramas de masa para $\gamma > 0$ correspondientes a 1000 sistemas simulados con los datos del Sistema Solar. Las condiciones iniciales para este caso fueron $e_{\max} = 0.1$ y $a_{\min} = 0.2 \text{ UA}$. En color azul se grafican los puntos del valor promedio de masa en un intervalo del semieje mayor a , la línea verde representa el ajuste mediante una ley de potencia a estos puntos.

De acuerdo a lo que se observa en las figuras 3.1 y 3.2, típicamente la formación de sistemas planetarios dada por el mecanismo de crecimiento oligárquico favorece la presencia de planetas en una franja superior. Esta franja es creciente con la distancia a la estrella central, lo que es independiente de los valores de γ que se utilizaron. En cada uno de los casos se observa la presencia, justo antes del

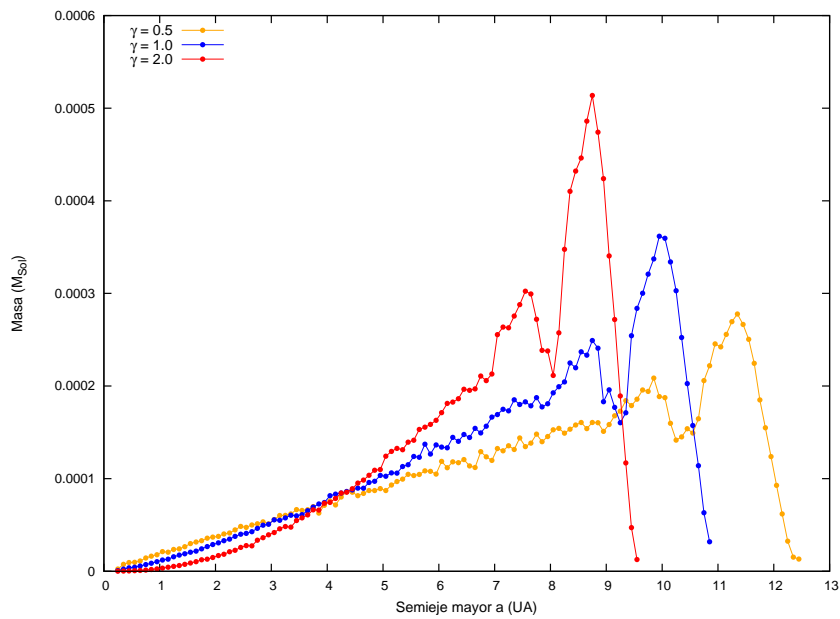


Figura 3.2: Curvas promedio de los diagramas de masa de la figura 3.1. Cada uno de los puntos es el promedio de la masa en un intervalo de semieje mayor a . Se muestran tres casos para $\gamma > 0$.

último planeta, de una zona prohibida donde no se forman planetas. Al igual que en el caso para una distribución homogénea, dicha zona está delimitada a la derecha por los últimos planetas de cada sistema. Observemos también que existe una zona densa de puntos que corresponde a los últimos planetas de cada sistema y a los más masivos. El ajuste a una ley de potencia realizado para estos casos resulta en un aumento en el valor de la potencia, como consecuencia del incremento en la masa de los planetas formados.

En la figura 3.1 al aumentar el valor de γ , el último planeta de cada sistema planetario sigue una tendencia a formarse con un menor semieje mayor, es decir, se forma cada vez más cercano al Sol. De forma contraria, el primer planeta de cada sistema tiende a alejarse de la estrella central. Como consecuencia de esto, es claro que los sistemas se forman en regiones cada vez menores al aumentar el valor de γ . El comportamiento anterior, al aumentar γ , está acompañado de una disminución en el número de planetas en cada sistema: mientras que para $\gamma = 0$ se tiene que el promedio de planetas es $\bar{n} = 18.87 \pm 1.16$, para $\gamma = 2$ el promedio es de $\bar{n} = 13.59 \pm 0.97$. Lo anterior tiene como consecuencia que la masa de los planetas formados se incremente al aumentar el valor de gamma, por ejemplo para $\gamma = 0$ el promedio de la mayor masa en cada sistema es $m = 1.76 \times 10^{-4} \pm 1.44 \times 10^{-5} M_{\odot}$ mientras que con $\gamma = 2$, esta masa alcanza un valor de $m = 3.25 \times 10^{-4} \pm 3.14 \times 10^{-5} M_{\odot}$.

En la figura 3.3 se muestra el histograma de número de planetas para los distintos valores de γ . En este histograma es notorio que al cambiar la distribución para valores de γ mayores, la densidad de planetas crece al final de las distribuciones y disminuye la cantidad de planetas cercanos a la estrella. Esto ocurre a la vez que la configuración final de los sistemas planetarios ocupa una región menor, es decir el semieje máximo decrece a medida que aumenta el valor de γ . El tamaño y ubicación de los picos en cada uno de los histogramas, no son fluctuaciones estadísticas y esencialmente dependen del valor de γ . Con estas observaciones, es claro que al aumentar la densidad inicial de partículas en la región más alejada se promueve la acreción en estas zonas, lo que provoca un aumento considerable en la masa de los planetas más alejados de la distribución.

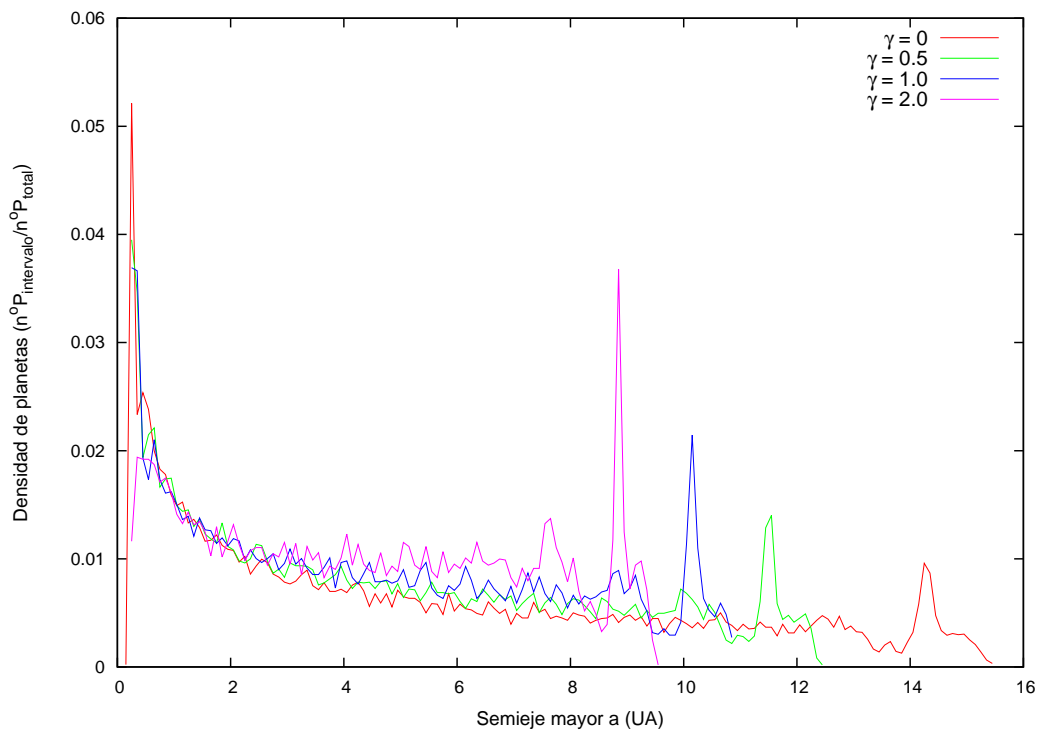


Figura 3.3: Histograma de planetas para el Sistema Solar de los ensambles de 1000 sistemas simulados para distintos valores de $\gamma \geq 0$ con $e_{\text{max}} = 0.1$. En cada caso aparecen picos en ciertas zonas de los histograma; estos picos de densidad no son fluctuaciones y dependen del valor de γ .

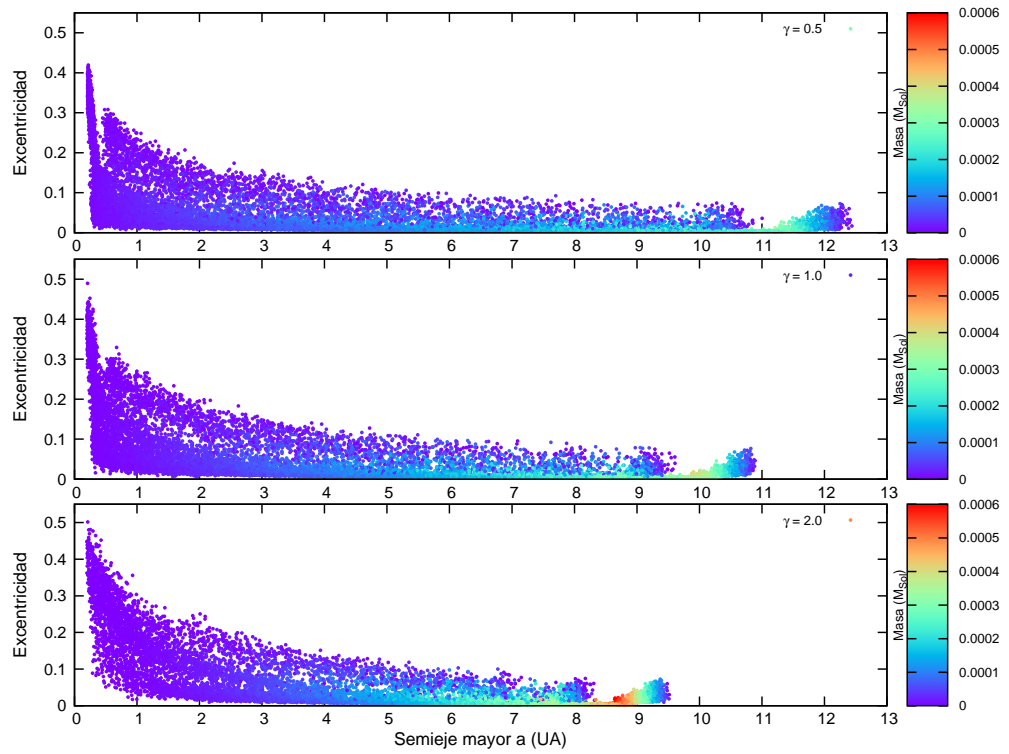


Figura 3.4: Diagramas de excentricidades para los datos del Sistema Solar. Los ensambles corresponden a distintos valores de $\gamma > 0$ con $e_{\max} = 0.1$ y $a_{\min} = 0.2 \text{ UA}$. En la barra lateral se muestra la escala de masa en unidades de M_{\odot}

La figura 3.4 muestra las excentricidades en función del semieje mayor. En ésta, se observa que los planetas con excentricidades mayores se sitúan más cercanos a la estrella central. Estos planetas que a la vez son los primeros planetas de cada sistema forman una región densa, para distancias menores a $1 UA$. En cada gráfica, a lo largo del ensamble se presenta una mayor acumulación de planetas con excentricidades menores; estos planetas forman una franja, la cual decrece al aumentar el semieje mayor. Por lo tanto, la excentricidad es menor para los planetas que se encuentran más alejados. De esta forma y en relación a la escala de masa, los planetas más masivos poseen las excentricidades menores del ensamble, mientras que los planetas menos masivos, que en este caso se encuentran más cercanos a la estrella, tienen las excentricidades más grandes .

Conforme aumenta el valor de γ , se observa que se incrementan las excentricidades de los sistemas. Para el valor de $\gamma = 0$, la mayor excentricidad es $e = 0.404$, este planeta se ubica en $a = 0.204 UA$; para $\gamma = 2$, la excentricidad mayor es $e = 0.5$ situado a una distancia de $a = 0.21UA$. La franja densa de planetas con los menores semiejes mayores que aparece en el diagrama para γ igual a 0, disminuye en densidad para valores mayores de γ ; esto se debe a que al aumentar este parámetro se forman cada vez menos planetas en las regiones cercanas a la estrella.

Los planetas que se forman cercanos a la estrella, al igual que el resto de los planetas, poseen una excentricidad cada vez mayor. Esta misma situación ocurre a distancias más alejadas de la estrella. Al tomar valores de γ mayores, la franja formada por las excentricidades aumenta, favoreciendo excentricidades más grandes en todos los planetas, incluso en aquellos que se encuentran más alejados. Si se considera todo el ensamble, los planetas más alejados son los que poseen las excentricidades más pequeñas. Para $\gamma = 0.5$ se tiene que en promedio el planeta mayor de cada sistema se ubica en $a = 11.14 \pm 0.52$, tiene una excentricidad de $e = 0.0058 \pm 0.0041$, mientras que en el caso $\gamma = 2$, este planeta se ubica en $a = 8.66 \pm 0.29$ con una excentricidad de $e = 0.0063 \pm 0.0055$.

3.2. Formación de sistemas: caso de Saturno y sus lunas

En esta sección se presentan los resultados para los ensambles de sistemas formados con los parámetros iniciales del sistema de Saturno con sus anillos y lunas. Se utilizaron las mismas distribuciones iniciales de masa con valor positivo de γ que en el caso del Sistema Solar. La excentricidad máxima inicial fue de $e_{\max} = 0.1$. Para este sistema, el valor mínimo del semieje mayor fue $a_{\min} = 0.05475 a_{\text{Tit}}$.

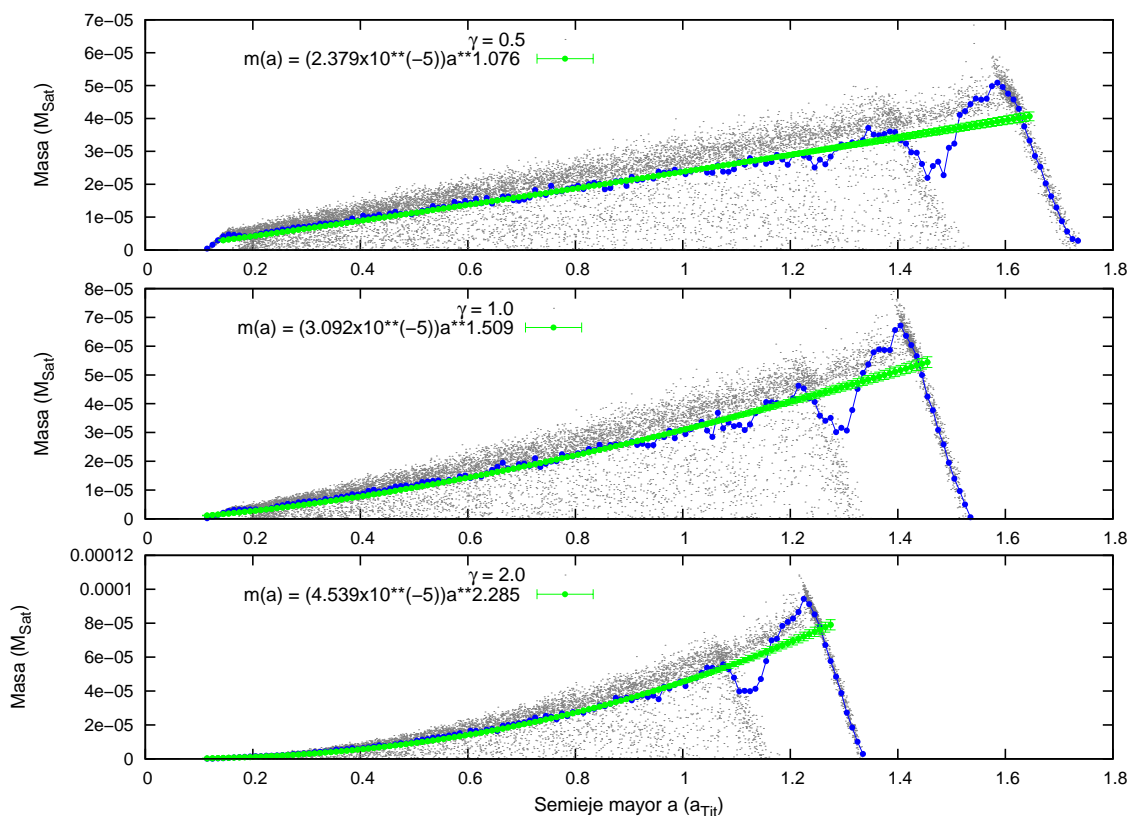


Figura 3.5: Diagramas de masa para el Sistema de Saturno con lunas y anillos. Se utilizaron distintos valores de $\gamma > 0$ con $e_{\max} = 0.1$. En color verde se grafican los puntos del valor promedio de masa en un intervalo del semieje a , la línea amarilla representa el ajuste mediante una ley de potencias a estos puntos.

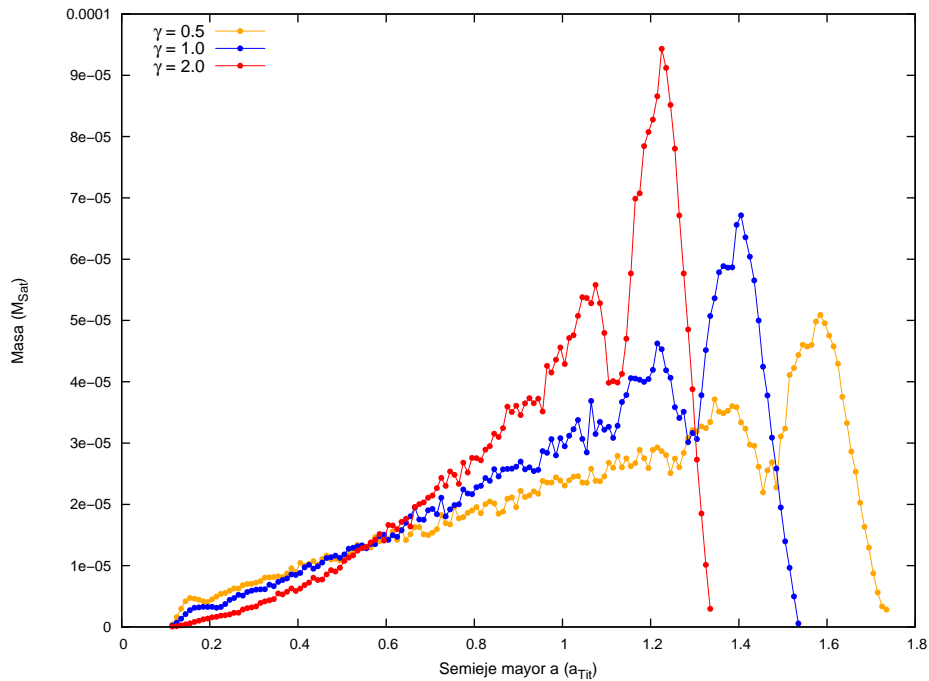


Figura 3.6: Curvas promedio de los diagramas de masa de la figura 3.5. Cada uno de los puntos es el promedio de la masa en un intervalo de semejanza mayor a . Se muestran los tres casos para $\gamma > 0$.

Los diagramas de masa de los sistemas formados con los parámetros del sistema de Saturno para valores de $\gamma > 0$, se muestran en la figura 3.5. La forma en la que se distribuye la masa en esencia es la misma que se observa para el caso del Sistema Solar. Los diagramas de masa poseen una franja superior creciente donde se acumulan la mayor cantidad de satélites, una región prohibida en la parte más alejada del ensamble, así como una franja vertical de satélites en el borde más alejado del diagrama que en su parte superior se sitúan los satélites más masivos del ensamble. Una diferencia notable con respecto al caso del Sistema Solar es la aparición de una segunda zona en la cual no se forman satélites. Esta región es más visible para el caso $\gamma=0.5$, y se ubica al inicio de la franja creciente del diagrama, en la zona más cercana al planeta central. Al igual que para el caso del Sistema Solar, para cada uno de los diagramas, el exponente del ajuste a una ley de potencias, se incrementa al aumentar el valor de gamma. Comparando los

valores arrojados de los ajustes correspondientes a distintos valores de γ , se observa una clara similitud en el valor de las potencias, al compararlas con las que se obtuvieron para el Sistema Solar, con excepción del caso $\gamma = 2.0$.

Para este sistema, también se varió el valor de γ en las simulaciones, para obtener distintas distribuciones iniciales de masa. En las gráficas de la figuras 3.5 y 3.6, se observa que al incrementarse el valor de γ el comportamiento es similar al ya descrito en el caso anterior, es decir, hay aumento en la masa de los satélites, así como una disminución en la región donde se forman los sistemas, provocados por el cambio en la distribución inicial de masa. Al cambiar la distribución inicial de masa, se presenta una disminución en la densidad de satélites cercanos al planeta. Esto provoca que la primera zona prohibida desaparezca conforme aumenta el valor de γ .

Las partículas que simulan la presencia de anillos orbitando alrededor del planeta, se pueden observar en las gráficas de la figura 3.4. En estas gráficas se muestran los diagramas de excentricidad para los sistemas simulados. En los diagramas de masa estas partículas no son visibles debido al valor tan pequeño de su masa ($\sim m_{plane}$). En cada una de las gráficas, se observa al inicio del diagrama, una franja densa que contiene las partículas de los anillos. Esta región se extiende en promedio desde $6.30 \times 10^{-2} \pm 0.00087 a_{Tit}$ que es donde aparece la primera partícula de los anillos para $\gamma = 0$, hasta $0.1119 a_{Tit}$, el límite de Roche. Las partículas en la región de los anillos, como se muestra en las gráficas, son las partículas que poseen las excentricidades mayores del ensamble de sistemas. Este hecho se debe en mayor medida a que las partículas en los anillos no acretan, por consiguiente en cada evento de acreción están expuestas a intercambiar momento angular con el resto de las partículas del disco, de tal modo que este intercambio es mayor en estas partículas, lo que se ve reflejado en las excentricidades que adquieren al final de la formación del sistema.

Posterior a la región de anillos, en los diagramas de excentricidades aparece una franja delgada que se extiende de forma vertical hasta los valores de excentricidades más pequeños; estos satélites ocupan la primera posición de su respectivo sistema en el ensamble. Para distancias mayores, la distribución de excentrici-

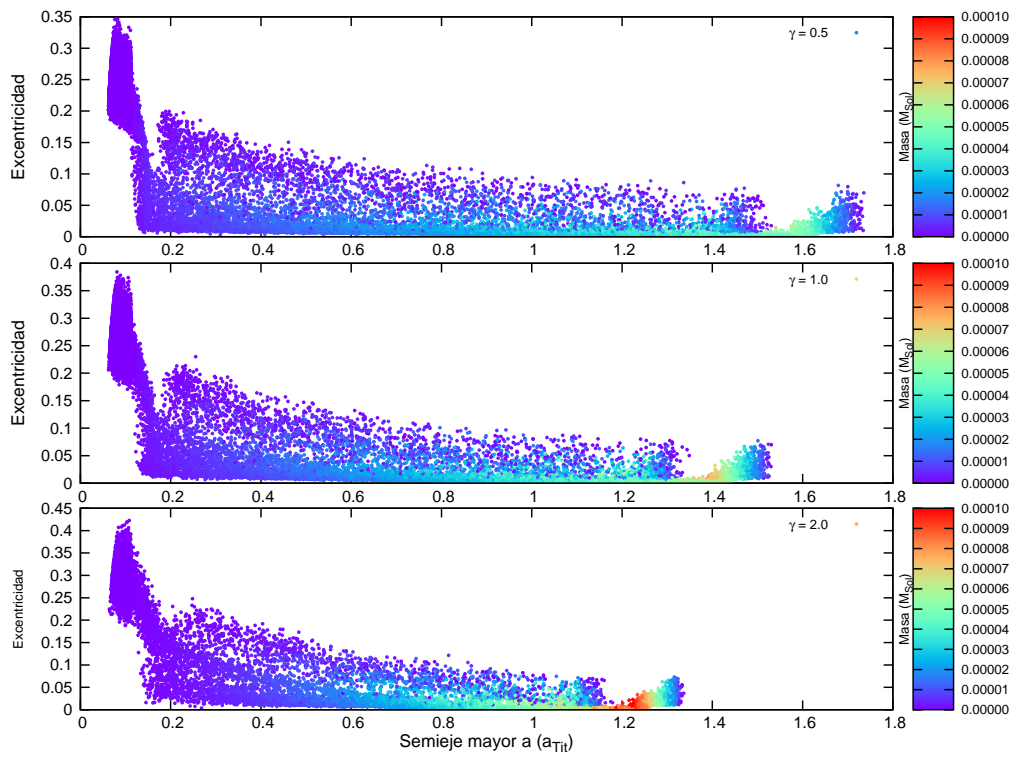


Figura 3.7: Diagramas de excentricidad para los parámetros del sistema de Saturno. Se presentan distintos valores de $\gamma > 0$. La excentricidad máxima inicial es $e_{\max} = 0.1$. En la barra lateral se muestra la escala de masa en unidades de M_{Sat}

dades corresponde a una franja que disminuye en grosor a medida que aumenta la distancia, esta franja al igual que para el caso del Sistema Solar, presenta una mayor densidad en las excentricidades menores.

En las gráficas para $\gamma = 0, 0.5$ y 1 , es visible la zona prohibida después de los primeros satélites. Esta zona, al igual que en los diagramas de masa, se hace menos clara cuando se aumenta el valor de γ . Cuando esto ocurre, aumentan los valores de las excentricidades para todo el ensamble, incluidas las partículas en los anillos. Se puede ver que para una distribución homogénea $\gamma = 0$ las excentricidades máximas en los anillos alcanzan valores cercanos a 0.3 , mientras que para $\gamma = 2$, estos valores se aproximan a 0.4 . Lo anterior se observa con más claridad en la figura 3.8.

La cantidad de partículas simuladas en los anillos disminuye al incrementar el valor de γ . Esto se ve reflejado en la masa total final de los anillos. Recordemos que cada una de estas partículas tiene la masa de uno de los 10000 planetesimales que se originan en el inicio de la simulación (para el sistema de Saturno cada uno de los planetesimales tiene una masa de $2.44 \times 10^{-8} M_{\text{Sat}}$). El cambio en la distribución inicial de masa no sólo tiene consecuencia en la cantidad de partículas que aparecen en la región de los anillos, sino también en la forma en la que estas partículas se distribuyen dentro de esta región, tal y como se observa en la figura 3.9. En los histogramas para las partículas en los anillos (figura 3.9), es evidente que el cambiar la distribución para valores mayores de γ , favorece la aparición de una mayor cantidad de partículas cercanas al límite de Roche y una disminución de partículas al inicio de la distribución. Lo anterior provoca además que la región de los anillos decrezca con el aumento de γ .

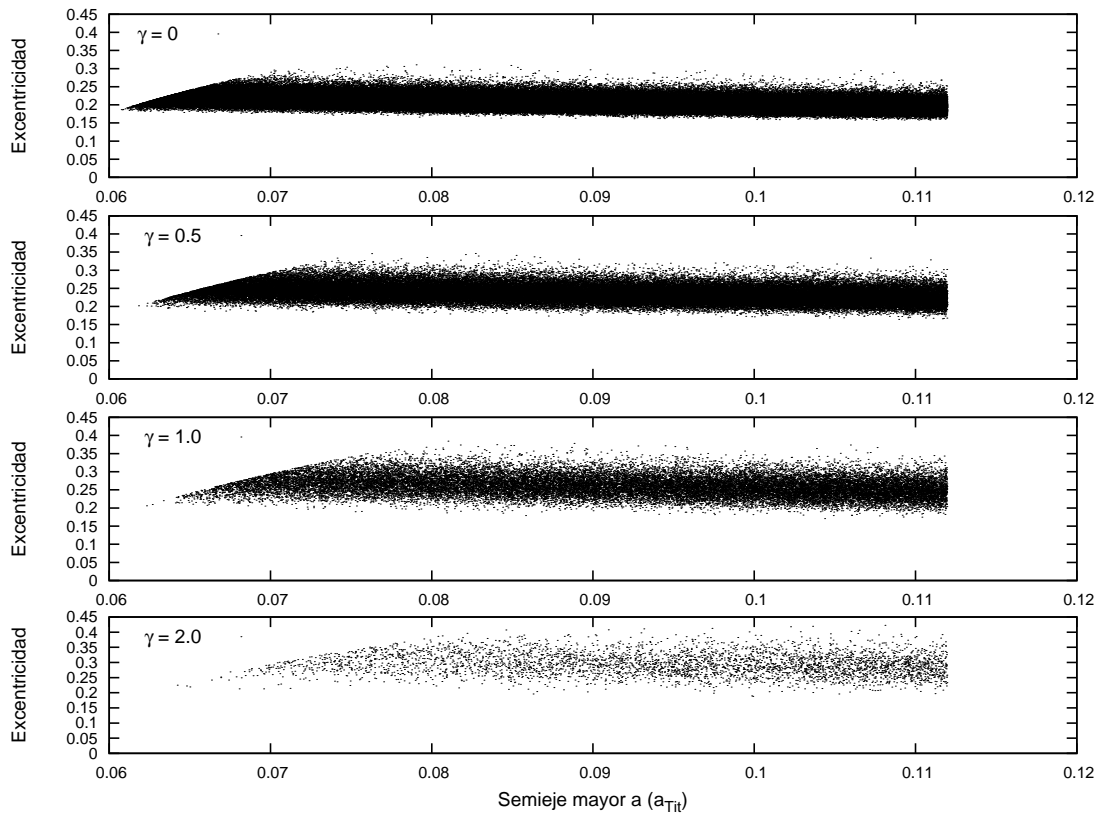


Figura 3.8: Diagramas de excentricidad de las partículas en la región de los anillos planetarios de los resultados obtenidos de 1000 sistemas simulados para distintos valores de $\gamma \geq 0$, para el Sistema de Saturno con $e_{\max} = 0.1$.

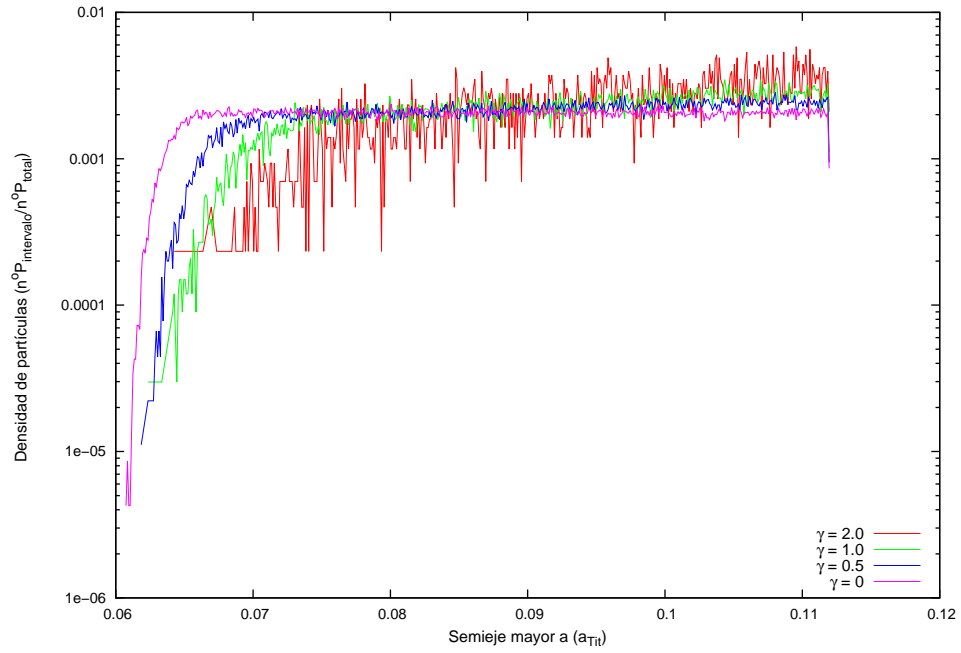


Figura 3.9: Histograma de las partículas en los anillos planetarios de Saturno que aparecen en los 1000 sistemas simulados para distintos valores de γ .

CAPÍTULO 4

Distribución inicial de masa con una ley de potencia negativa

En este capítulo se presentan los resultados de las simulaciones de sistemas planetarios para distribuciones iniciales de masa en las cuales el valor de γ es negativo. Los valores para γ que se utilizaron fueron: -0.25 , -0.5 , -0.75 y -0.9 . Las gráficas de estas distribuciones iniciales se muestran en la figura 1.1. Los diagramas que se muestran en este capítulo contienen un total de 1000 sistemas planetarios simulados. Las condiciones iniciales de excentricidad máxima y semieje mayor mínimo son las mismas que se han utilizado para ambos casos en capítulos anteriores.

4.1. Formación de sistemas: caso del Sistema Solar

El mecanismo de acreción oligárquico, para el caso de γ negativa, determina una distribución final de masa con características similares a las que se obtienen con distribuciones iniciales de masa para γ positiva, tal y como se aprecia en

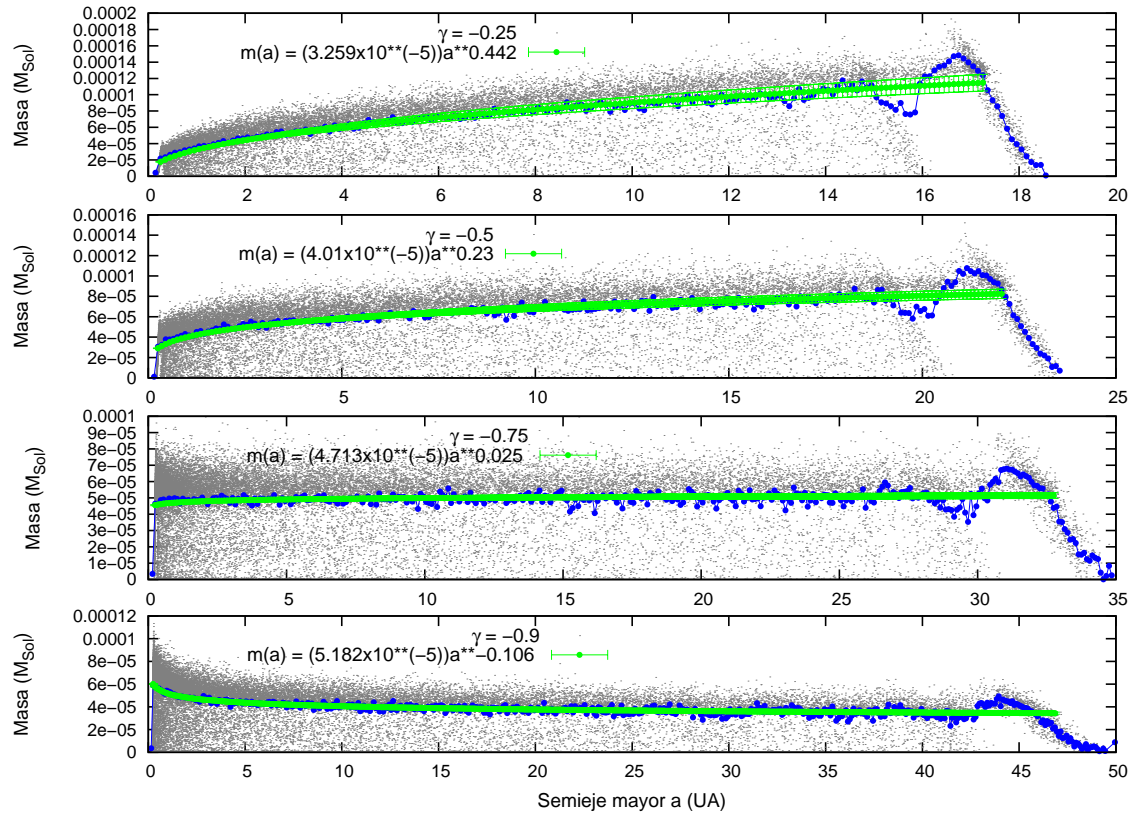


Figura 4.1: Diagrama de masa para los sistemas planetarios que corresponden a los simulados con los parámetros del Sistema Solar . Se utilizan distintos valores de iniciales de $\gamma < 0$, $e_{\text{max}} = 0.1$ y $a_{\text{min}} = 0.2$. En color verde se grafican los puntos del valor promedio de masa en un intervalo del semieje mayor. La línea amarilla representa el ajuste a una ley de potencias para estos puntos.

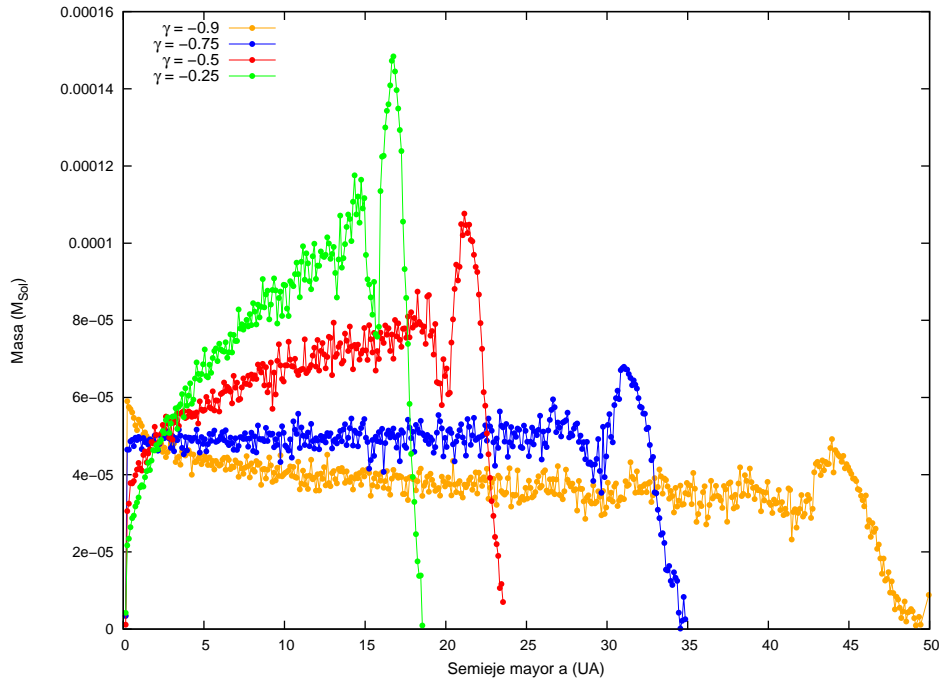


Figura 4.2: Curvas promedio de los diagramas de masa de la figura 4.1. Cada uno de los puntos es el promedio de la masa en un intervalo de semieje mayor a . Se muestran los tres casos para $\gamma < 0$.

las figuras 4.1 y 4.2. En cada una de las gráficas se observa la zona prohibida de formación de planetas, la cual se sitúa justo antes del borde de los últimos planetas, lo que es igual que en las distribuciones para $\gamma > 0$. En cada gráfica, es notorio un aumento en la región que ocupan los sistemas planetarios, a medida que γ es más negativa. Como consecuencia de esto, el último planeta de cada sistema se aleja más de la estrella central. En comparación con las gráficas que corresponden a distribuciones con gammas positivas, si se toman los valores de los semiejes mayores más grandes, se puede ver que éstos se incrementan cuando γ disminuye. Si observamos para el valor de $\gamma = -0.75$, se tiene que el planeta más alejado se encuentra en $a = 32.53 \pm 0.83 \text{ UA}$, este valor es tres veces más grande que el encontrado para $\gamma = 1$ que corresponde a $a = 10.32 \pm 0.24 \text{ UA}$.

Una característica relevante de los sistemas formados con distribuciones iniciales de masa con potencias negativas, es que la densidad mayor de planetas se ubica en las regiones más cercanas a la estrella. En el histograma del ensamble (figura 4.4) se muestra un pico en cada curva que contiene a los planetas con los semiejes mayores más pequeños de los sistemas. Al igual que para los valores positivos de γ , aparece un segundo pico en la parte final del histograma que representa la zona donde se forman los planetas de mayor masa. La posición y el tamaño de estos picos característicos de los histogramas dependen del valor de γ . Estas regiones de ocurrencia para la formación de planetas no son fluctuaciones de los histogramas, aparecen para los valores positivos y negativos de γ .

Cuando decrece el valor de γ como se observa en la figura 4.4, disminuye la densidad de planetas formados en la parte final de los ensambles. A medida que esto ocurre, los planetas más masivos de cada sistema se forman en regiones cada vez más cercanas a la estrella. Para el caso de los sistemas con una distribución inicial con $\gamma = -0.9$, los planetas más cercanos a la estrella (primer y segundo planeta de cada sistema) conforman también los planetas más masivos de su respectivo sistema. Por ejemplo, para los sistemas formados con $\gamma = -0.5$, se tiene que en promedio la mayor masa se ubica en $a = 17.5 \pm 4.48 \text{ UA}$ y el planeta más alejado en promedio tiene un semieje de $a = 22.18 \pm 0.55 \text{ UA}$. En cambio, para el ensamble de $\gamma = -0.9$ los planetas más alejados se encuentran en promedio en

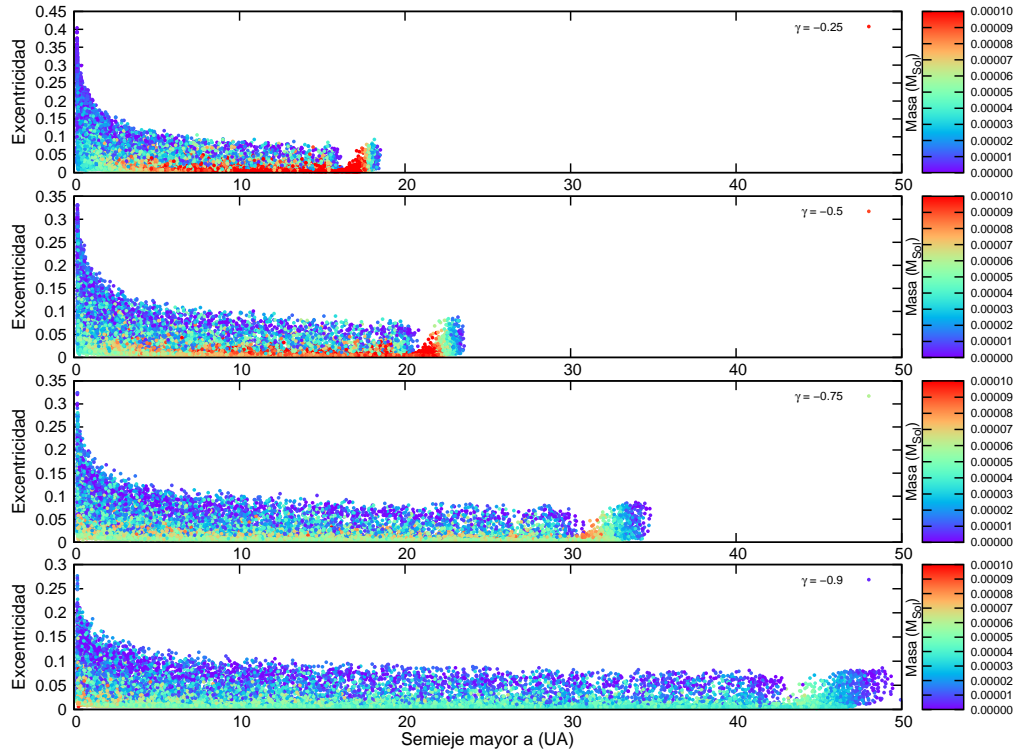


Figura 4.3: Diagrama de excentricidades de los sistemas que corresponden a simulaciones con los parámetros del Sistema Solar. Se muestran distintos valores de $\gamma < 0$, con excentricidad inicial máxima $e_{\max} = 0.1$ y $a_{\min} = 0.2$. En la parte derecha de la figura se muestra la escala de color de masa en unidades de la masa del sol.

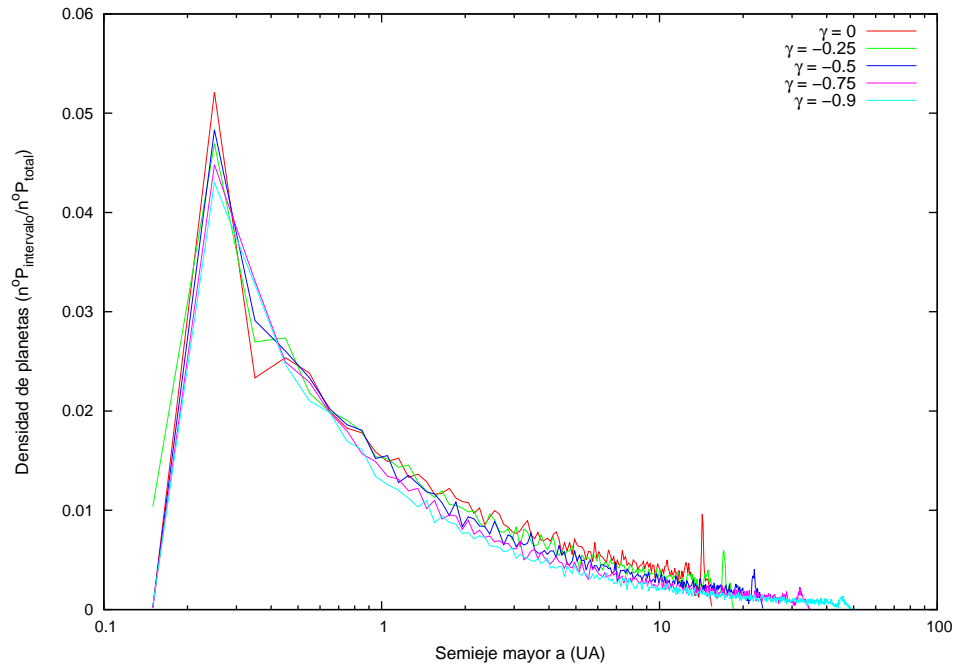


Figura 4.4: Histograma de número de planetas formados para el caso del Sistema Solar. Se muestran distintos valores de $\gamma \leq 0$ con $e_{\text{max}} = 0.1$. Los picos del histograma, representan lugares de ocurrencia para la formación de planetas, estos picos no son fluctuaciones, su ubicación y tamaño depende del valor de γ .

$a = 45.95 \pm 1.24 \text{ UA}$ y los planetas más masivos tienen un semieje promedio de $a = 0.71 \pm 1.29 \text{ UA}$.

Las excentricidades de los planetas que se observan en los diagramas, no se modifican en forma con respecto a lo que se obtiene con $\gamma > 0$. Se mantiene una mayor densidad en las excentricidades más pequeñas, mientras que las excentricidades mayores las poseen los planetas más cercanos a la estrella. Se mantiene la tendencia de las excentricidades a disminuir con valores de γ cada vez más negativos. Por lo tanto, las excentricidades menores del total de sistemas simulados aparecen con las distribuciones iniciales para $\gamma = -0.9$. En este valor de γ se tiene que la excentricidad menor es $e_{men} = 1.652e-3$ y la mayor es de $e_{may} = 0.276$, en cambio en el ensamble para $\gamma = -0.25$ estos valores aumentan a $e_{men} = 2.8924886 \times 10^{-3}$ y $e_{may} = 0.404$.

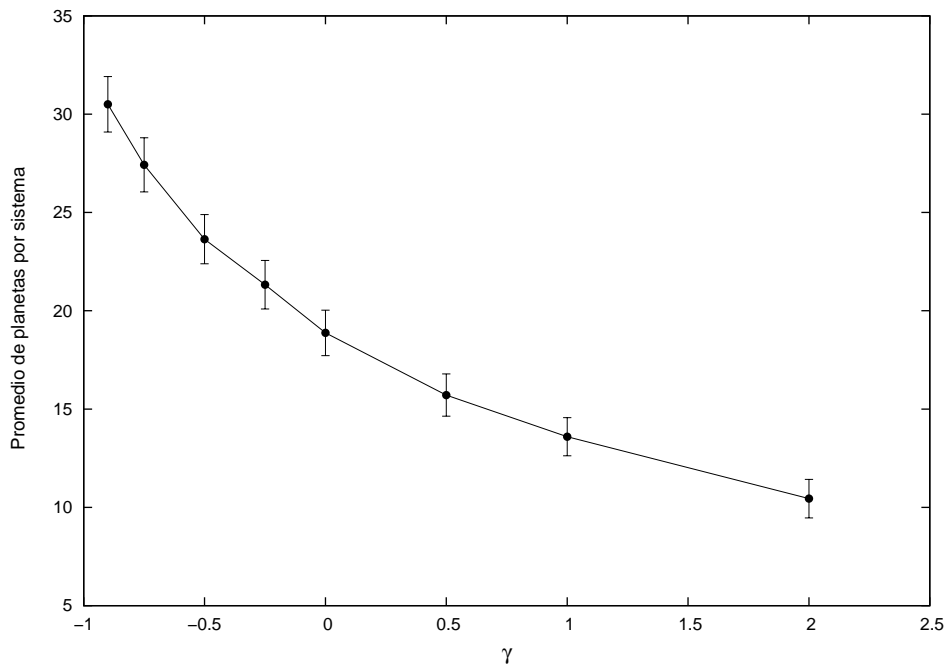


Figura 4.5: Promedio de planetas formados para el Sistema Solar con distintos valores iniciales de γ , para una excentricidad inicial de $e_{max} = 0.1$ y semieje mayor mínimo de $a_{min} = 0.2$.

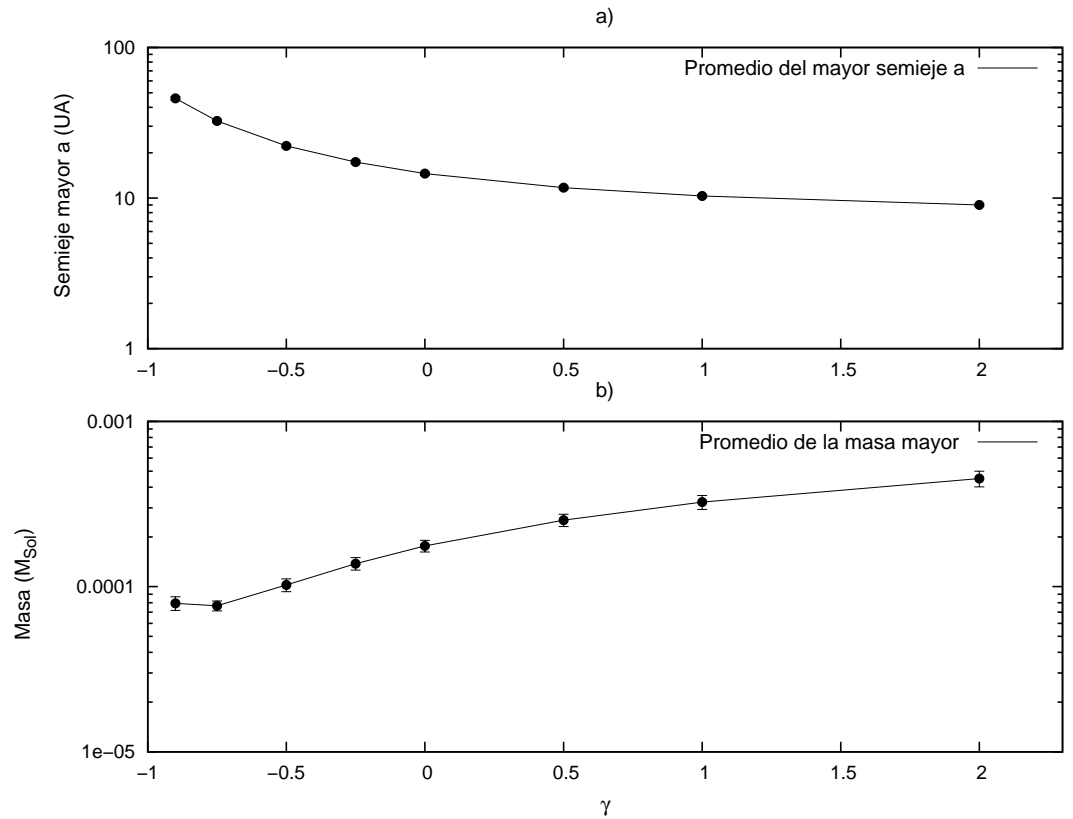


Figura 4.6: Ambas gráficas corresponden al ensamble de 1000 sistemas para los parámetros del Sistema Solar. a) Promedio de la ubicación del planeta más alejado de cada sistema en función del valor de γ . b) Promedio del valor de la mayor masa de cada sistema en función del valor de γ .

Este proceso de formación de planetas más masivos y más cercanos a la estrella central, está acompañado de un crecimiento en la región que ocupan los sistemas. De la misma manera, la cantidad de planetas formados que ocupan esta región se incrementa en cada sistema; ésto se observa en las gráficas de la figura 4.5. Para el valor más pequeño de γ ($\gamma = -0.9$) se obtiene la mayor cantidad promedio de planetas formados por sistema, que es $\bar{n} = 30.5 \pm 1.4$. Para este ensamble se forman también los sistemas más extensos, ya que los planetas más alejados tienen un semieje mayor promedio de $a = 45.95 \pm 1.24 UA$. Las cantidades anteriores decrecen conforme se toman valores cada vez más grandes de γ hasta llegar a $\gamma = 2$, para el que el promedio de planetas formados en cada sistema es de $\bar{n} = 10.4 \pm 0.9$ y los planetas más alejados se forman a una distancia de la estrella de $a = 8.9 \pm 0.2 UA$.

El aumento en la cantidad de planetas que se forman al tomar un valor de γ más pequeño, induce la formación de planetas de menor masa. Si nos fijamos en un planeta característico de cada sistema, por ejemplo el planeta con mayor masa, se observa que para sistemas con mayor cantidad de planetas, el valor de ésta masa característica disminuye. En la figura 4.6(a) se grafica la masa mayor promedio de los ensambles en función del valor de γ . En esta gráfica se observa el comportamiento descrito, en el cual, cuando se toma un valor de γ menor aparecen más planetas y como resultado las masas disminuyen. La observación anterior es consecuencia directa de la conservación del momento angular, ya que como ésta cantidad se conserva, cuando se incrementa la cantidad de planetas formados, la masa de éstos tiende a disminuir.

4.2. Formación de sistemas: caso de Saturno y sus lunas.

En esta sección se muestran los resultados para las simulaciones con los parámetros del sistema de Saturno con lunas y anillos. Para este sistema las condiciones iniciales son las mismas que en los casos anteriores. Los resultados para los diagramas de masa se muestran en la figura 4.7.

La similitud de los resultados con el caso de los parámetros del Sistema Solar

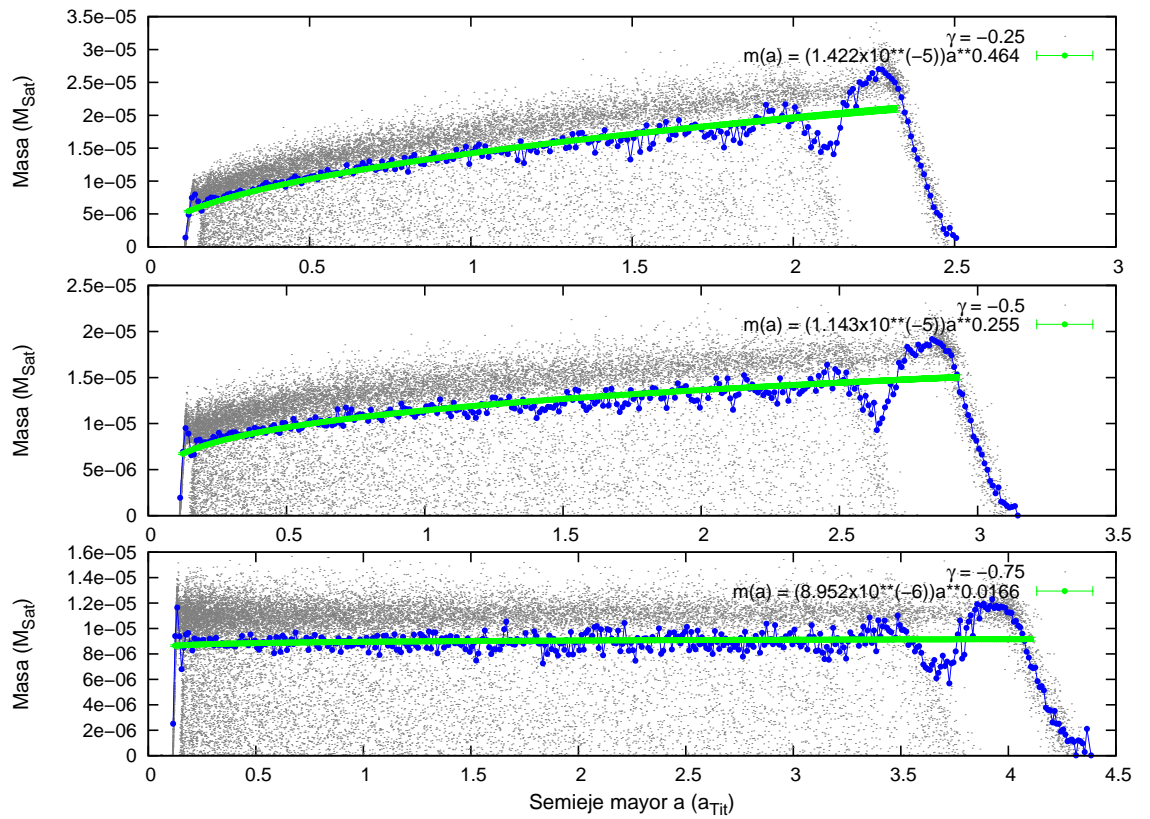


Figura 4.7: Diagramas de masa, para 1000 sistemas simulados con los parámetros iniciales del sistema de Saturno, Se grafican valores distintos de $\gamma < 0$, con $e_{max} = 0.1$ y $a_{min} = 0.0547 a_{Tit}$.

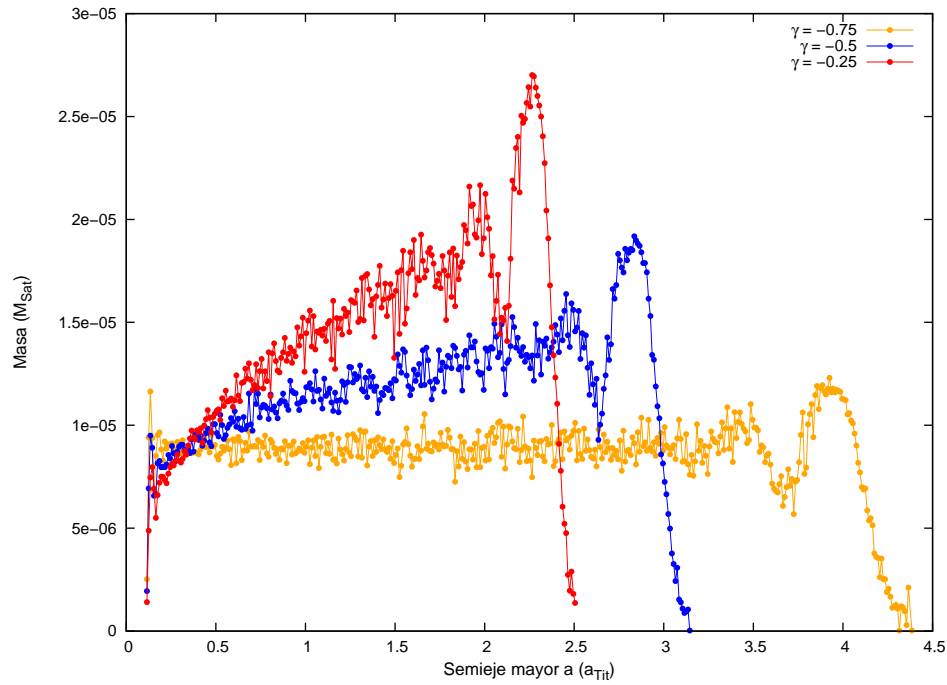


Figura 4.8: Curvas promedio de los diagramas de masa de la figura 3.1. Cada uno de los puntos es el promedio de la masa en un intervalo de semieje mayor a . Se muestran los tres casos para $\gamma < 0$.

son evidentes, ya que la forma característica de los diagramas de masa y excentricidad tienen el mismo comportamiento en ambos casos. De igual forma, el cambio en el número de lunas formadas, la aparición de los satélites más masivos cerca del planeta, así como el crecimiento en la longitud ocupada por los sistemas, se mantienen para el sistema de Saturno al variar distintos valores de $\gamma < 0$. En las figuras 4.7 y 4.8, se observa que el promedio de lunas en los sistemas simulados como función del valor de γ decrece para γ más positiva. En ésta gráfica la mayor cantidad de lunas que se obtienen corresponde al valor de $\gamma = -0.75$, para el que el promedio de lunas es $\bar{n} = 24.6 \pm 1.3$. Cuando se toman valores mayores de γ la desviación estándar decrece, al igual que el promedio de planetas formados, por lo que para $\gamma = 2$ se obtiene que $\bar{n} = 9.48 \pm 0.96$, que corresponde a la menor cantidad de lunas formadas con $e_{\max} = 0.1$.

De los ajustes realizados en ambos sistemas (Sistema Solar y Saturno) en los diagramas de masa por medio de una ley de potencia, en los casos en los que se trata de la misma distribución inicial de masa, se obtuvieron resultados similares en el valor la potencia. Lo anterior se cumple para los valores de $\gamma = 0, 0.5, 1, -0.25, -0.5$ y es precisamente para $\gamma = 0$ el caso para el cual las leyes de potencia son más parecidas. Por el contrario para los valores grandes de γ (en valor absoluto) como 2 y -0.75, si se comparan las leyes de potencia para el caso del Sistema Solar y el sistema de lunas de Saturno, los resultados no son cercanos.

Una distribución inicial de masa con una ley de potencia negativa además de condicionar la formación de más lunas y en particular de una cantidad mayor cerca de la estrella, ocasiona que la masa contenida en la región de los anillos aumente. El aumento se debe a la forma que toma la distribución cuando γ adquiere un valor negativo. Esto provoca la acumulación de una mayor cantidad de planetesimales en esta región, lo que tiene como consecuencia que la masa de los anillos se incremente. En la figura 4.10 se muestra la masa de los anillos promedio en función del valor de γ . En esta gráfica el valor mínimo de la masa en los anillos se alcanza en $\gamma = 2$ para el cual $m = 1.06 \times 10^{-7} \pm 5.044 \times 10^{-8} M_{\text{Sat}}$ y el valor máximo en $\gamma = -0.75$ con $m = 2.09 \times 10^{-5} \pm 7.2 \times 10^{-7} M_{\text{Sat}}$.

La forma en la que se distribuye la masa dentro de la región de los anillos

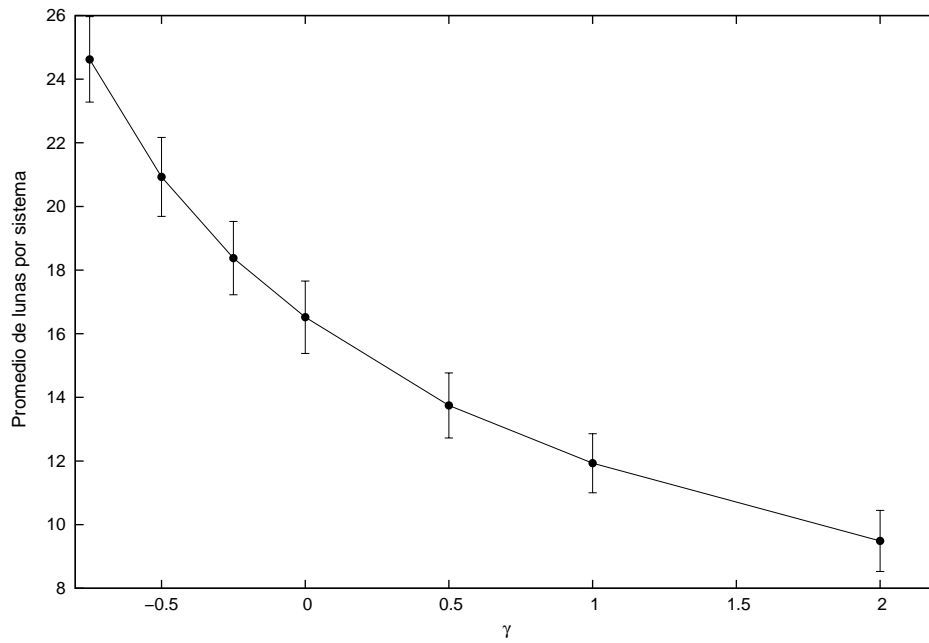


Figura 4.9: Promedio de lunas formadas por sistema para los parámetros del sistema de Saturno con distintos valores de γ .

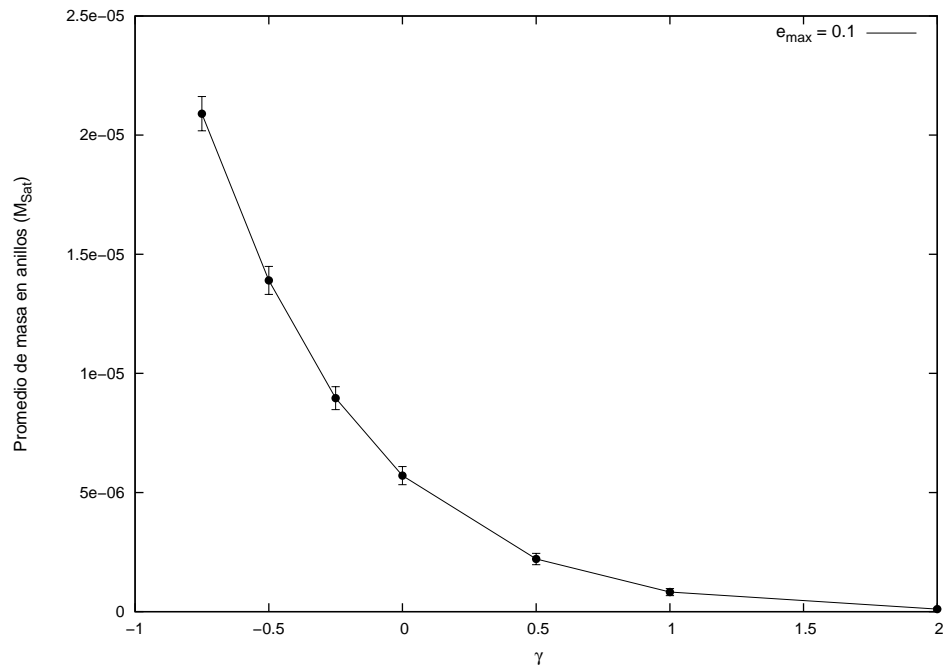


Figura 4.10: Masa total en los anillos planetarios de Saturno, para distintos valores de γ . La excentricidad inicial del disco de acreción es $e_{\text{max}} = 0.1$ con $a_{\text{min}} = 0.05475 a_{\text{Tit}}$.

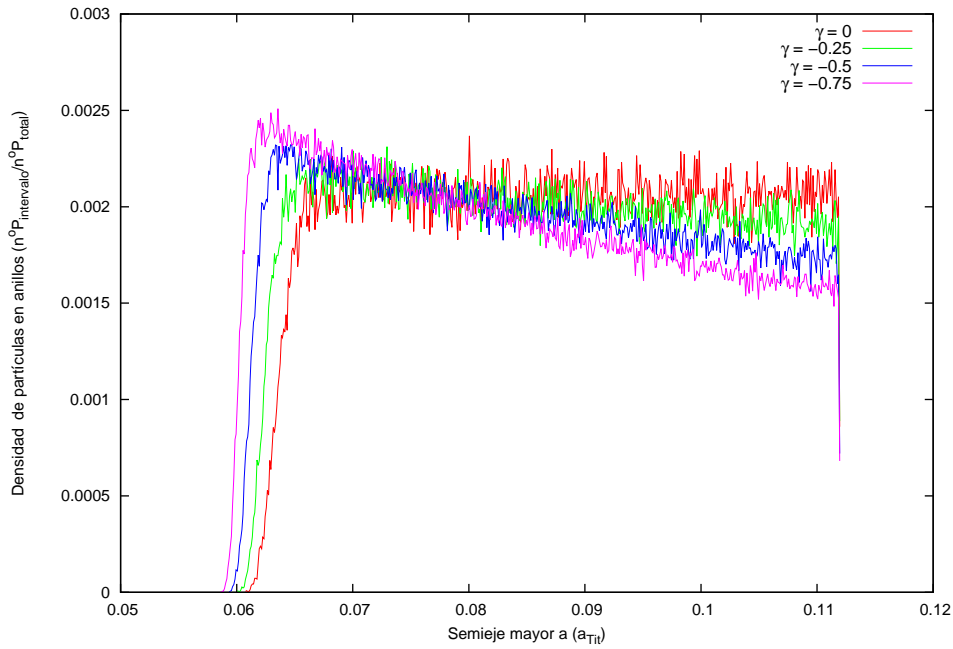


Figura 4.11: Histograma de las partículas en la región de los anillos planetarios de Saturno, simuladas para distintos valores de γ con $e_{\text{max}} = 0.1$ y $a_{\text{min}} = 0.05475 a_{\text{Tit}}$.

también se ve modificada, respecto a las distribuciones iniciales con potencias positivas. En la figura 4.12, los histogramas de masa para los anillos tienen un comportamiento *contrario* a lo que se observa en los valores positivos de γ . Cuando la potencia γ es más negativa, la presencia de partículas aumenta a distancias cercanas al planeta y a medida en que las partículas se alejan del planeta, la densidad dentro de los anillos disminuye.

La distancia a la cual aparecen las primeras partículas del anillo en los sistemas formados, es una consecuencia también de la distribución y del ajuste en la excentricidad de las órbitas de los planetesimales en el proceso de intercambio aleatorio de momento angular. En un principio, se construye el disco protoplanetario desde a_{\min} hasta a_{\max} , donde a_{\min} en el caso de Saturno es $a_{\min} = 0.05475 a_{\text{Tit}}$, sin embargo cierta cantidad de masa se *pierde* durante la acreción, debido al ajuste que se hace para la conservación del momento angular. El ajuste en las excentricidades provoca que cierta cantidad de planetesimales *caigan hacia el planeta* al acercarse una distancia menor a a_{\min} y por lo tanto, que las partículas de los anillos no se sitúen desde a_{\min} hasta l_R . En el histograma 4.12 se pueden observar las distancias desde la estrella central a las que se encuentra la primera partícula de los anillos como función del valor γ .

Dado que la partícula más cercana al planeta en la región de los anillos aparece cada vez más alejada del planeta, de la gráfica 4.12 se infiere que el ancho de la región ocupada por los anillos decrece conforme se toman valores de γ más grandes. Esto resulta intuitivo, ya que la densidad de partículas cercanas a la estrella central disminuye, lo que causa que aparezcan menos partículas formadas al inicio del diagrama de masa o en este caso dentro de los anillos. Al haber menos partículas cerca de a_{\min} y en cambio más partículas alejadas del planeta, resulta en una menor pérdida de masa durante la formación de los sistemas pero también en una disminución en el ancho ocupado por los anillos.

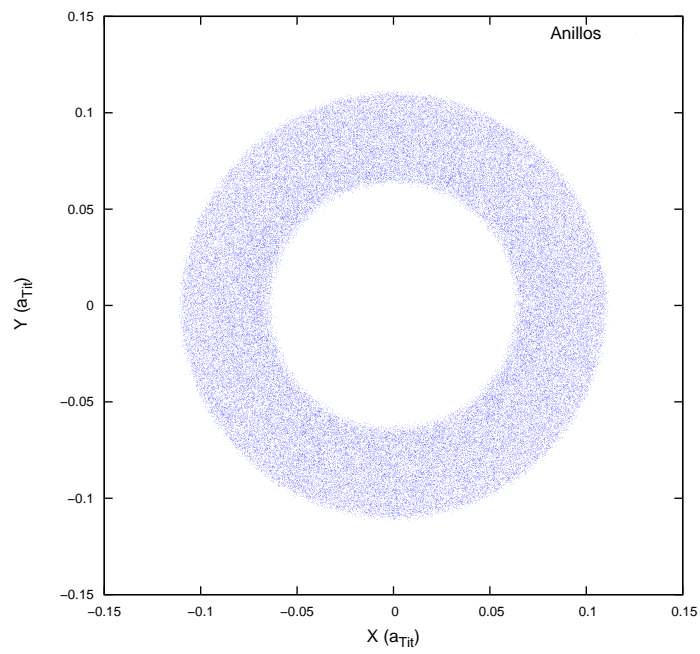


Figura 4.12: Posición final de los anillos para el caso $\gamma = 0.5$ y $e_{\max} = 0.1$.

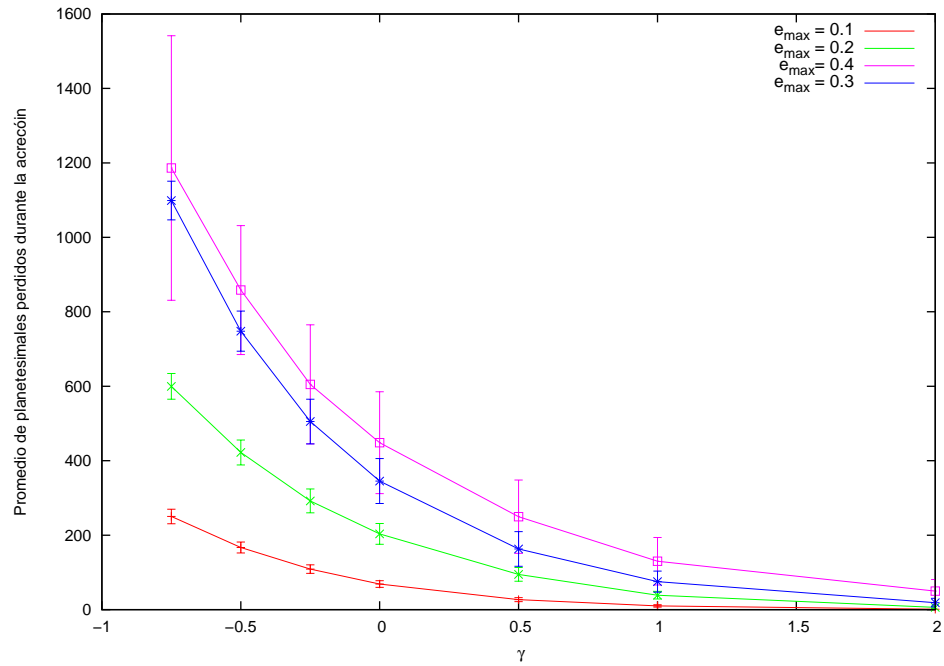


Figura 4.13: Gráfica de la cantidad de planetesimales *perdidos* durante el proceso de formación planetaria, para distintos valores de γ variando la excentricidad máxima inicial del disco de acreción.

4.3. Distribuciones iniciales de mas: síntesis y conclusiones

La implementación de distintas distribuciones iniciales de masa permite modificar la densidad de partículas disponibles para acreción en distintas regiones del disco protoplanetario. Esto induce cambios en la cantidad de planetas o lunas que tienen los sistemas finales, lo que a la vez se ve reflejado en la masa que éstos adquieren al final de su acreción.

El momento angular total de un sistema para una distribución inicial, dado por la ecuación (1.13), determina el tamaño del disco protoplanetario inicial. Al resolverse esta ecuación se obtiene un valor para a_{\max} a partir de las condiciones iniciales previamente establecidas; ésta ecuación al mismo tiempo determina de forma indirecta una longitud máxima para el semieje mayor de los planetas que se forman. Cuando se toman valores de γ más pequeños o más negativos, aumenta la densidad de planetas a distancias cercanas de la estrella o planeta central. El aumento en el número de planetas con semiejes pequeños se debe a la pendiente negativa de la distribución inicial de masa. Este incremento de la densidad en regiones cercanas a la estrella está acompañado de un aumento en el valor para a_{\max} , y como resultado, aparecen planetesimales con semiejes más grandes cuando γ es más negativa.

Cuando el disco protoplanetario posee una extensión mayor o menor dependiendo del valor de γ , provoca que la densidad de los planetesimales distribuidos entre a_{\min} y a_{\max} cambie en distintas regiones. Para γ negativa se tiene que los discos protoplanetarios son más extensos, lo que, sumado a que la densidad de planetas disminuye considerablemente para distancias alejadas, resulta en regiones con una densidad de planetesimales muy pequeña. Regiones donde la densidad es menor, tiene como consecuencia una disminución en los eventos de acreción, lo que provoca un incremento en la cantidad de planetas formados. Como consecuencia de los casos estudiados, se observa que el número de planetas o lunas finales, así como la distancia a la que se sitúan los planetas más alejados de los sistemas aumenta, cuando se toman valores de γ menores.

La disminución del número de planetas formados y el aumento en la masa perdida para γ cada vez mayores, tienen como resultado que la masa de los planetas o lunas aumente. Por lo tanto al comparar las mayores masas de los ensambles para distintas distribuciones, se observa que las mayores masas se forman en las distribuciones iniciales con $\gamma = 2$, que es precisamente el ensamble con la menor cantidad de planetas formados de las simulaciones que se realizaron para este trabajo.

La distancia a la que se forman los planetas con las masas más grandes dentro de los ensambles es también consecuencia de las densidades iniciales de planetesimales. Esto se debe principalmente a que hay una relación entre la región donde se forman estos planetas masivos, con las regiones donde inicialmente hay una mayor densidad de planetesimales. Para γ positiva, la mayor densidad inicial de planetesimales se presenta en las distancias más alejadas de la estrella, y es en esta región donde aparecen los planetas más masivos. El caso contrario ocurre con las distribuciones iniciales para $\gamma < 0$, donde la densidad mayor de planetesimales se encuentra en las regiones cercanas a la estrella, lo que provoca que las mayores masas se formen a una distancia cada vez más cercana a la estrella central.

Independiente del valor que tome γ , en los histogramas de los planetas se observan dos zonas en las cuales se forman la mayor cantidad de planetas o lunas, una al inicio del histograma, es decir, para planetas con el semieje mayor más pequeño y otra zona al final del histograma. La densidad en estos picos del histograma se modifica al cambiar el valor de γ . Cuando γ es más negativa se forman más planetas cercanos a la estrella, caso contrario a lo que ocurre con gammas positivas, donde crece el número de planetas formados en las distancias más lejanas de la estrella.

Al cambiar las distribuciones iniciales para el caso del sistema de Saturno, los resultados son consistentes con los procesos antes descritos para el Sistema Solar. Para este caso, se implementó en la simulación una región en la cual no existieran procesos de acreción entre planetesimales, con el propósito de simular la presencia de anillos planetarios durante la formación planetaria. De acuerdo a lo anterior, la masa de los anillos está determinada entonces, por el tipo de distribución de masa

inicial usada. Una forma donde la distribución inicial tenga una densidad mayor en áreas cercanas al planeta provee una mayor masa, y por lo tanto, entre menor es el valor de γ , mayor es la masa que se obtiene dentro de la región de los anillos.

Los diagramas de excentricidades que se obtienen en ambos casos tienen el mismo comportamiento. Todos los diagramas muestran una mayor densidad de planetas o lunas con valores pequeños de excentricidad, a excepción de las distancias cercanas a la estrella, donde la cantidad de planetas con las excentricidades más grandes se incrementa; estos planetas generalmente representan el primer o segundo planeta de su respectivo sistema. En el caso del sistema de Saturno, las partículas que representan los anillos tienen la mayor excentricidad de cada sistema simulado. Al aumentar el valor de γ la excentricidad de los planetas también aumenta como consecuencia del incremento en los eventos de acreción.

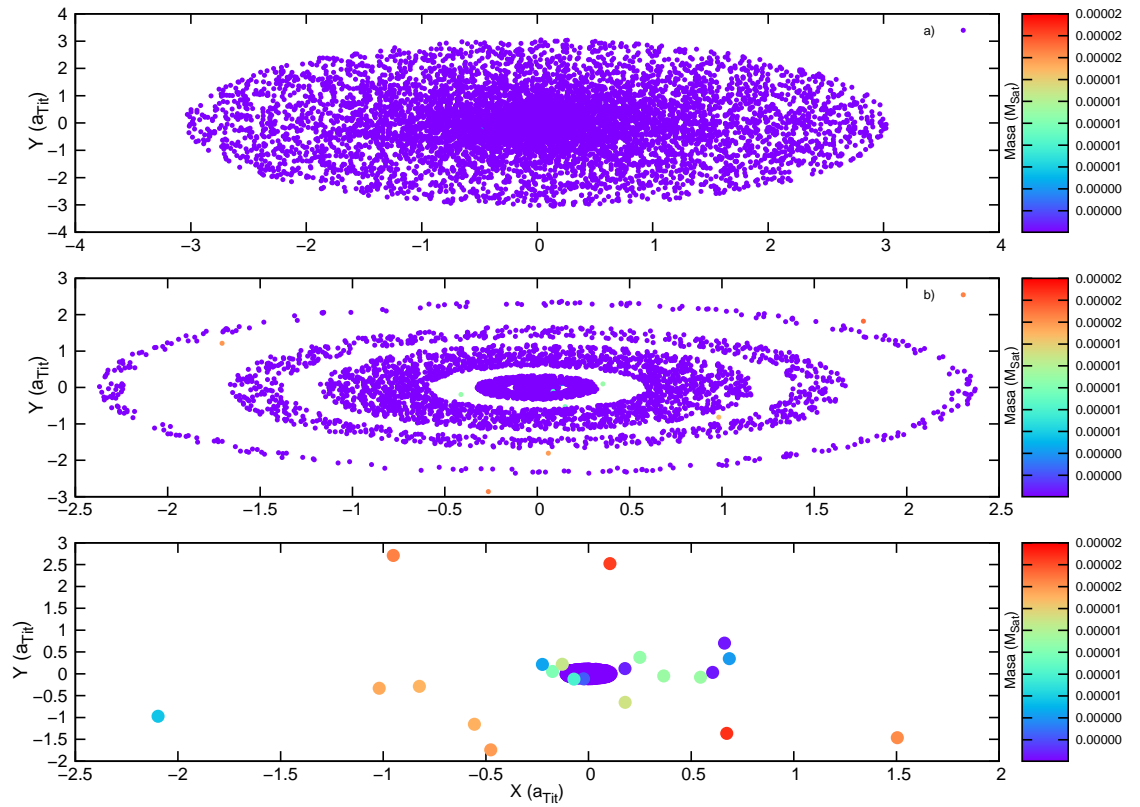


Figura 4.14: Posición de los planetesimales en diferentes estados de formación planetaria. Se usan los datos del sistema de Saturno. a) Posición inicial de los planetesimales en el disco protoplanetario. b) Estado intermedio de formación planetaria. c) Posición final de lunas en el sistema de Saturno. En la parte central del diagrama se observa la región de anillos.

CAPÍTULO 5

Variación de la excentricidad inicial para distintas distribuciones iniciales de masa

Una vez conocidos la masa M y el momento angular L de un sistema a simular, la creación del disco protoplanetario inicial involucra tres parámetros que en principio no están determinados en el modelo, a_{\min} , γ y e_{\max} . Sin embargo, se infiere de alguna consideración física o matemática el rango de valores o valores específicos plausibles que pueden tomar estos parámetros. En este capítulo se estudiarán los efectos que tiene cambiar e_{\max} sobre las distribuciones finales de masa y excentricidad, así como en la estructura del disco protoplanetario inicial, para los casos del Sistema Solar y del sistema de Saturno y sus lunas.

De acuerdo a la ecuación (1.14), al modificar la excentricidad máxima inicial, se modifican la extensión del disco protoplanetario, en particular al aumentar la excentricidad inicial, el semieje mayor máximo a_{\max} aumenta. Este resultado es

obvio cuando se piensa que el momento angular se mantiene constante en cada caso, pero las excentricidades se incrementan. Este resultado es predecible cuando se piensa que el momento angular se mantiene constante en cada caso, pero las excentricidades se incrementan.

En la figura 5.1 se muestran los diagramas de masa para el caso del Sistema Solar, para una distribución inicial dada por $\gamma = 2$. Cuando aumenta la excentricidad máxima inicial, se observa que la zona *prohibida*, característica del crecimiento oligárquico donde no se forman planetas crece, e incluso para $e_{\max} = 0.5$ la densidad de planetas disminuye considerablemente en toda la región central de la gráfica. Al observar el histograma de planetas de esta distribución (ver figura 5.2), es claro que al aumentar la excentricidad inicial a $e_{\max} = 0.2$ aparecen picos donde la densidad de planetas crece, es decir, hay regiones en las cuales la concentración de los planetas formados es mayor. Estos picos en los histogramas donde se forman los planetas, no son fluctuaciones estadísticas, en cambio persisten en el diagrama e incrementan su tamaño. Cuando aumenta la excentricidad, la cantidad de zonas donde se focalizan los planetas disminuyen como consecuencia de una disminución de los planetas. Para el caso $e_{\max} = 0.6$ se pueden distinguir solamente dos zonas de mayor densidad, una donde se encuentran los planetas más masivos y alejados de la estrella y otra de los planetas menos masivos cerca de ésta.

Las excentricidades finales de los planetas formados se modifican también al cambiar la excentricidad inicial. En la figura 5.3 se comparan los diagramas de excentricidades para distintos valores iniciales de e_{\max} . En cada gráfica se observa que los planetas más cercanos a la estrella, que son los menos masivos para $\gamma > 0$, continúan siendo los más excentricos conforme aumenta e_{\max} . De forma similar, los planetas que se localizan a mayor distancia, son los planetas más masivos y poseen las excentricidades menores de los sistemas. La fracción de momento angular con la que contribuyen los planetas masivos y alejados es mucho mayor, por lo que al conservarse el momento angular, la fracción de éste, con la cual contribuyen los planetas cerca de la estrella es menor, y por ende presentan las excentricidades mayores del ensamble. La excentricidad de los sistemas aumenta,

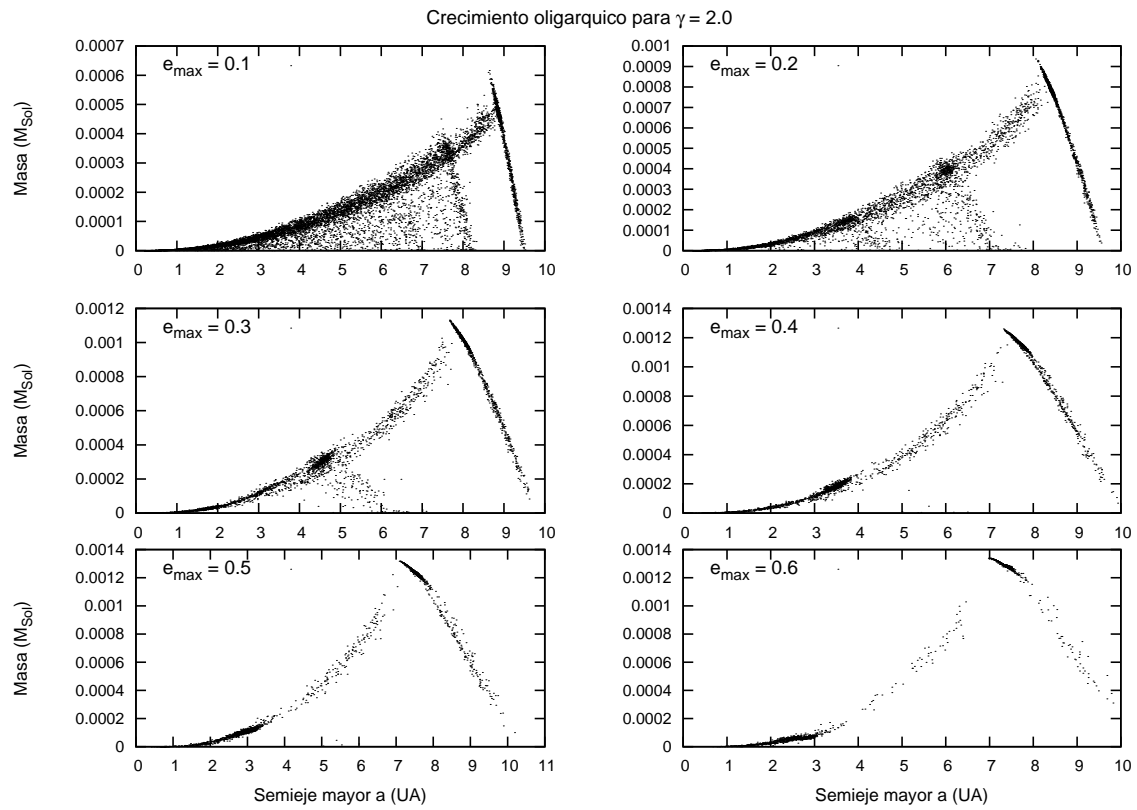


Figura 5.1: Diagramas de masa para una distribución inicial para $\gamma = 2.0$, variando la excentricidad máxima inicial (e_{max}) en el disco de acreción, para el caso de Sistema Solar.

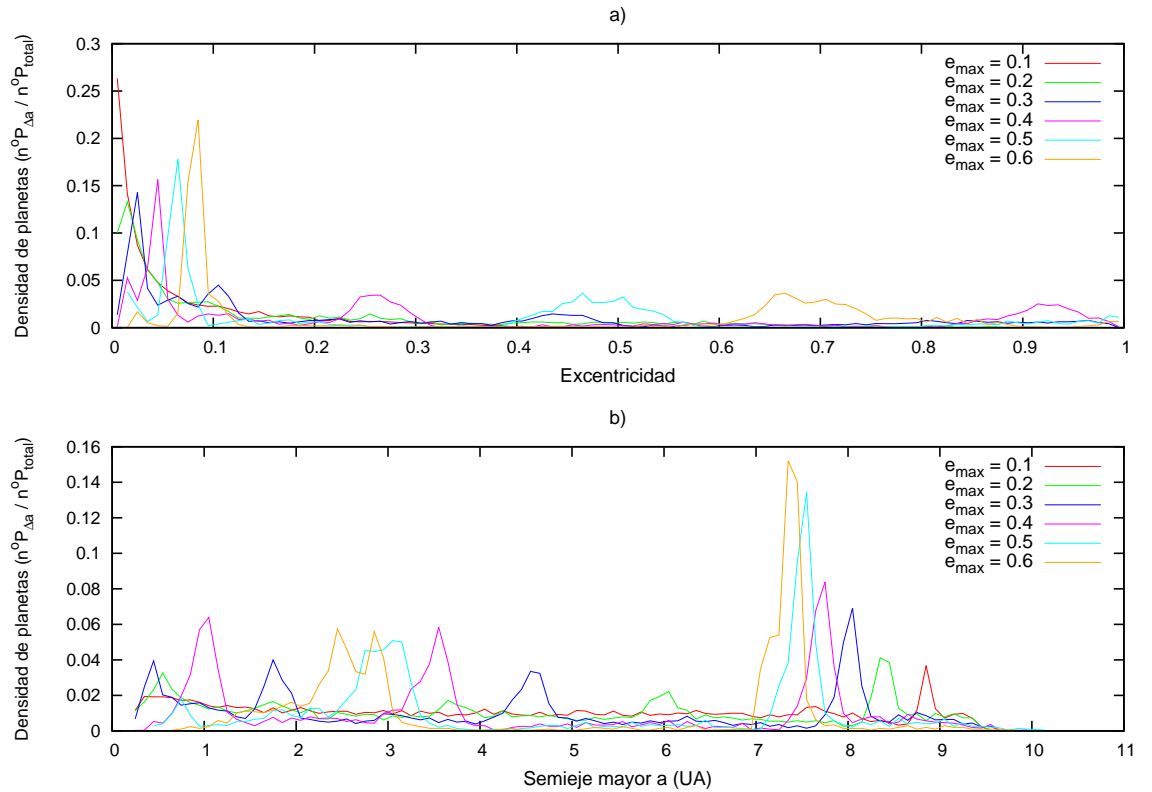


Figura 5.2: Histogramas del número de planetas simulados para el Sistema Solar variando la excentricidad inicial del disco de acreción para una distribución de masa con $\gamma = 2.0$. a) Histograma de excentricidad b) Histograma de posiciones.

si se comparan las excentricidades menores, vemos que para $e_{max} = 0.1$ la excentricidad menor es $e_{men} = 1.79 \times 10^{-3}$, para $e_{max} = 0.4$ es $e_{men} = 9.51 \times 10^{-3}$ y para $e_{max} = 0.6$ se tiene que es $e_{men} = 1.89 \times 10^{-2}$.

En los diagramas es clara la disminución en el número de planetas formados conforme aumenta la excentricidad máxima inicial del disco, y como consecuencia las masas de los satélites aumentan considerablemente. Por ejemplo, para $e_{max} = 0.1$, el promedio del planeta con la mayor masa por sistema es $m = 4.51 \times 10^{-4} \pm 4.92 \times 10^{-5} M_{\odot}$, mientras que para la misma distribución ini-

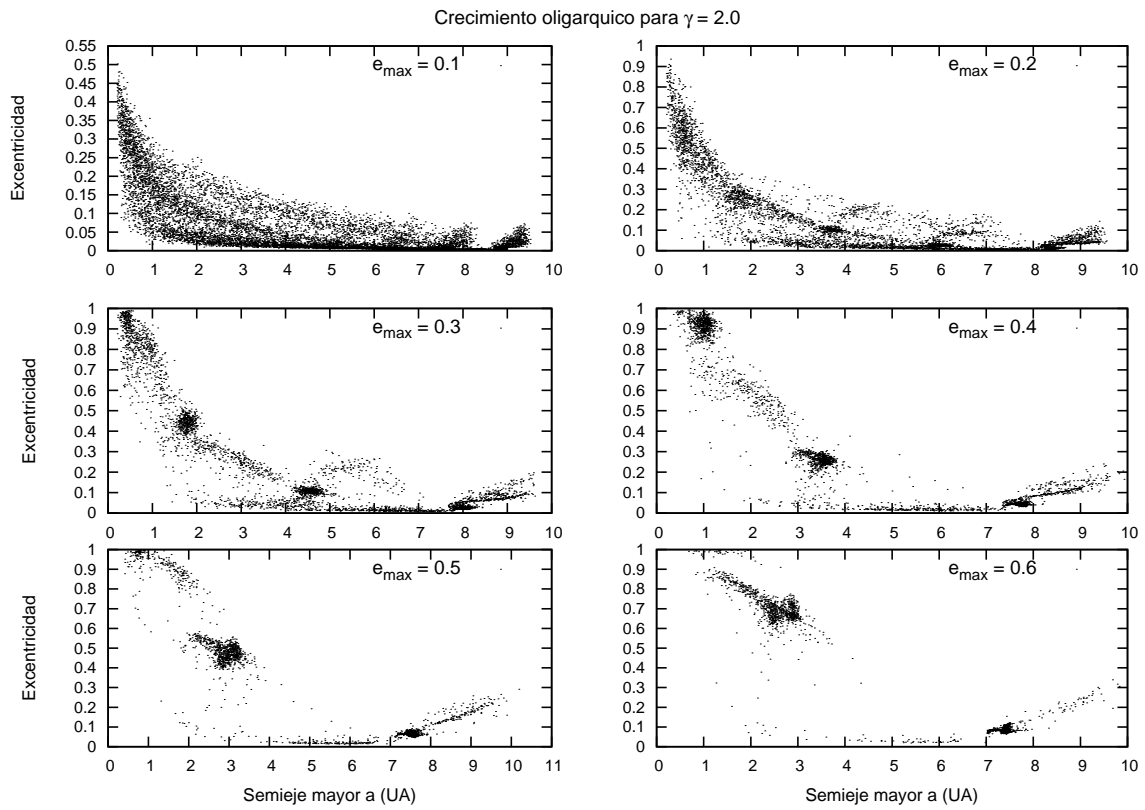


Figura 5.3: Diagramas de excentricidad para una distribución inicial para $\gamma = 2.0$, variando la excentricidad máxima inicial en el disco de acreción. Se utilizaron los datos del Sistema Solar.

cial pero con $e_{\max} = 0.4$ se tiene que éste promedio es $m = 1.2631e-3 \pm 1.0580e-4 M_{Sol}$.

En la figura 5.4 se muestra la gráfica del número de planetas formados en función de la excentricidad máxima inicial. En promedio, el número máximo de planetas simulados es $\bar{n} = 10.44 \pm 0.98$ que corresponde a $e_{\max} = 0.1$, esta cantidad disminuye al igual que la desviación estándar para e_{\max} mayores; por lo que para $e_{\max} = 0.6$ se tiene que $\bar{n} = 2.04 \pm 0.19$. El número de planetas formados se incrementa para valores menores de γ , como es el caso de $\gamma = -0.9$ que se observa en la gráfica.

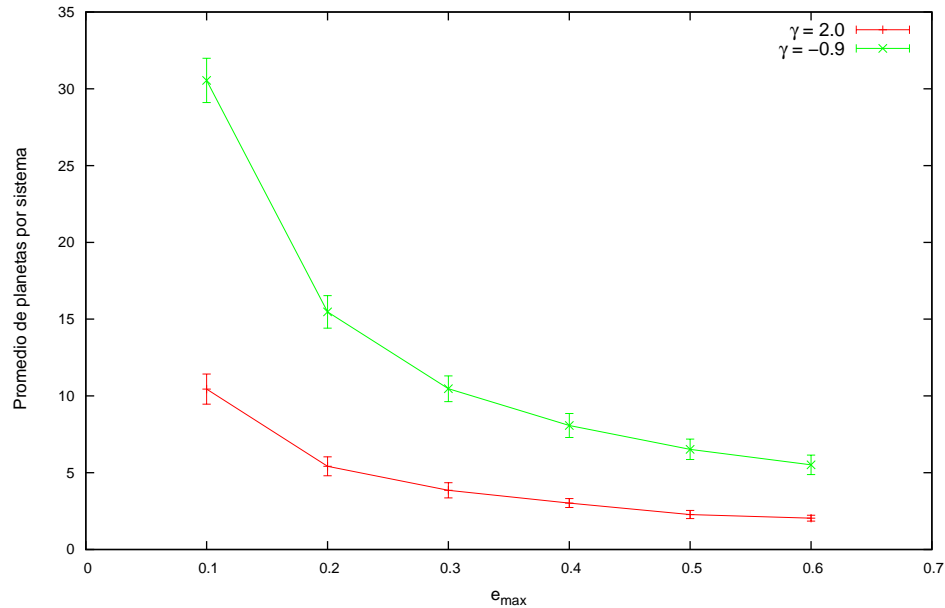


Figura 5.4: Promedio las planetas formados por sistema, en función de la excentricidad máxima inicial en el disco de acreción, para dos distribuciones iniciales de masa $\gamma = -0.9$ y $\gamma = 2.0$ para el caso del Sistema Solar.

De acuerdo con las figuras 5.5 y 5.1, al incrementar la excentricidad máxima inicial, el disco protoplanetario aumenta de tamaño. Al haber una mayor excentri-

cidad y un mayor cruce de órbitas, aumenta el número de colisiones en el sistema, lo que conlleva a una reducción del número de planetas formados y a su respectivo incremento en masa. Con lo anterior, el estado final del sistema ocupa una longitud en promedio menor a la del disco protoplanetario. Este hecho se ve reflejado en el histograma de número de planetas. Al aumentar e_{\max} , el pico de densidad de planetas situados lejos de la estrella central disminuye respecto al semieje mayor máximo, en cambio los planetas más cercanos a la estrella que representan los primeros planetas de sus sistemas, se alejan de la estrella.

En el caso del sistema de Saturno y sus lunas, se varió la excentricidad máxima inicial para la distribución inicial de masa dada por $\gamma = -0.5$. El mecanismo implementado para distribuir masa entre a_{\min} y el límite de Roche para la simulación de anillos y además evitar la acreción de estas partículas se conservó para estas simulaciones.

Los diagramas de masa que se obtuvieron para estas simulaciones se muestran en la figura 5.5. En cada una de las gráficas, conforme aumenta la excentricidad inicial se observa un incremento en la zona prohibida para los satélites formados en la parte final del diagrama. Aunado a esto, también crece al inicio del diagrama una región de menor tamaño donde no aparecen lunas, justo después de una primer franja donde se localizan las primeras lunas de cada sistema. Estas franjas que se abren en los diagramas son un efecto de la disminución en el número de satélites en los sistemas, provocado por el incremento en la acreción de planetesimales; lo anterior hace menos probable encontrar masas pequeñas lejos del planeta, cuando aumenta e_{\max} .

Al incrementarse la masa de las lunas formadas en cada sistema, las leyes de potencia que resultan de los ajustes de la figura 5.5 cambian cuando aumenta el valor de la excentricidad máxima inicial, en particular, se incrementa la potencia que se obtiene de los ajustes. De acuerdo a lo mostrado en los capítulos anteriores, se infiere entonces que para este modelo se puede hablar de una misma ley de potencias para la distribución de planetas, siempre que las condiciones iniciales de excentricidad y distribución inicial de masa sean iguales, y en particular con un valor de γ cercano a la distribución homogénea.

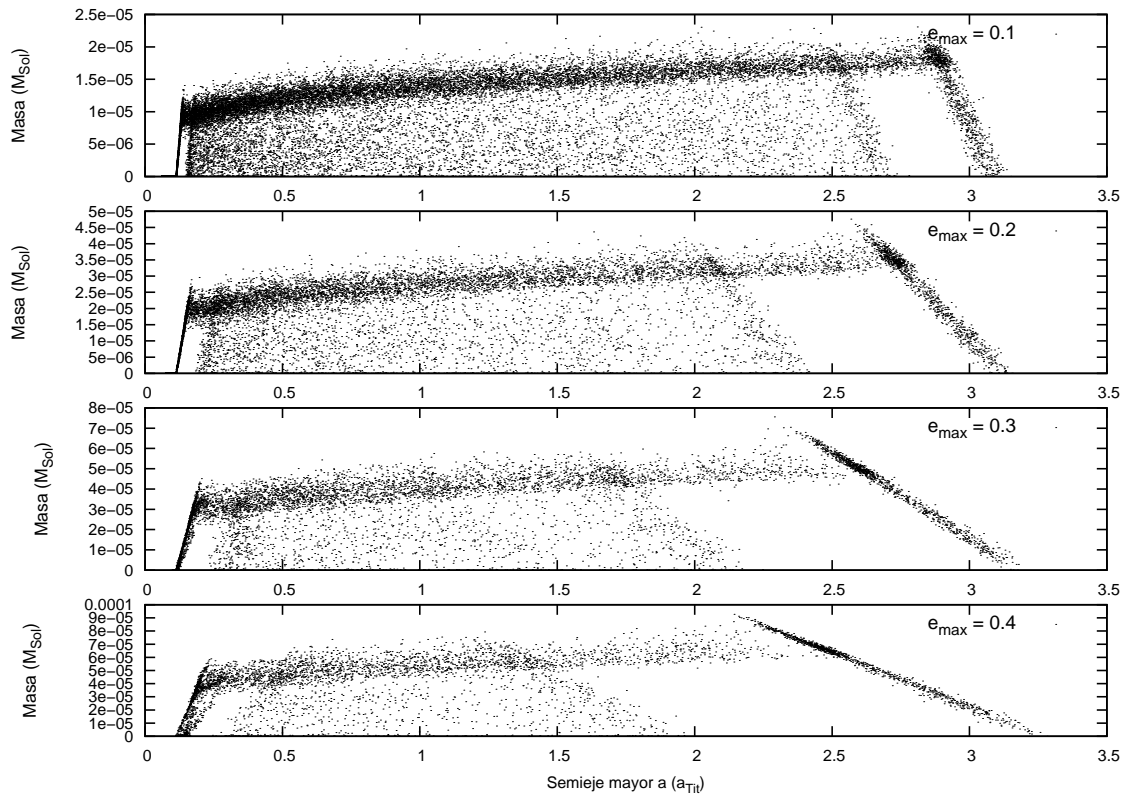


Figura 5.5: Diagrama de masa para distintos valores de excentricidad máxima en el disco de acreción, para ensambles simulados a partir de una distribución inicial para $\gamma = -0.5$, con los parámetros de Saturno.

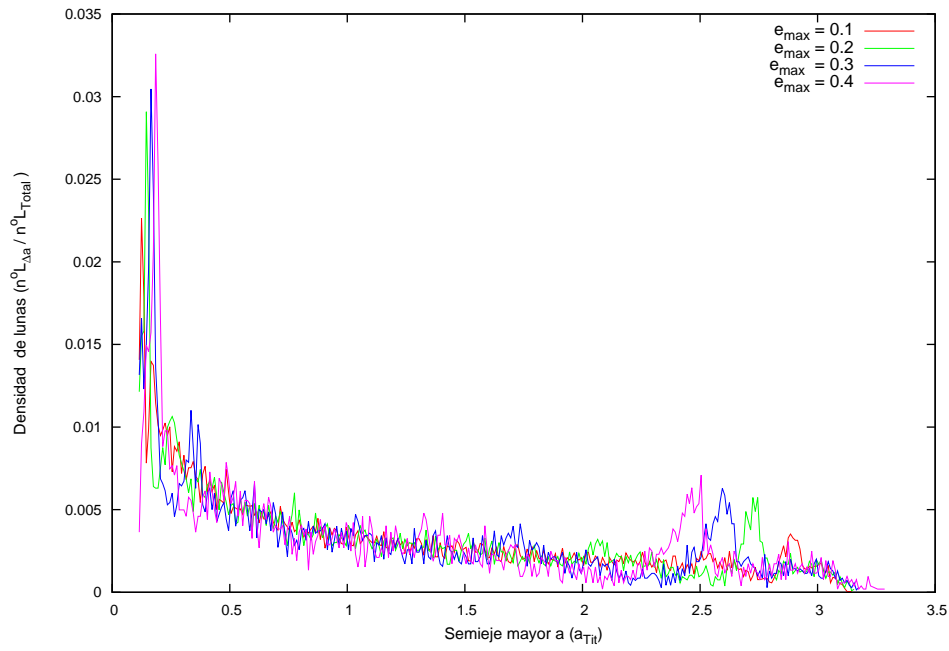


Figura 5.6: Histograma de las lunas formadas en los ensambles para el caso del sistema de Saturno variando la excentricidad máxima en el disco inicial, para una distribución de masa inicial dada por $\gamma = -0.5$.

La disminución en el número de lunas en cada sistema formado, al igual que en el caso para el Sistema Solar, se refleja en un aumento en la masa de las lunas que se forman. Para el caso $e_{\max} = 0.1$, el promedio de la mayor masa por sistema es $m_{may} = 1.86 \times 10^{-5} \pm 1.17 \times 10^{-6} M_{\text{Sat}}$ y para $e_{\max} = 0.4$ es $m_{may} = 6.80 \times 10^{-5} \pm 7.37 \times 10^{-6} M_{\text{Sat}}$. Las mayores masas en este caso se ubican desde la parte media del diagrama ($\sim 1.5 a_{\text{Tit}}$), hasta la parte final de éste. En la parte más alejada del cada ensamble, la franja vertical en donde se ubican las lunas más alejadas, se extiende y decrece su pendiente a medida que aumenta la masa de estas lunas. Cuando esto ocurre, la región con las lunas más masivas el ensamble se acerca al planeta, al mismo tiempo que la densidad de planetas en esta región se incrementa. Como se muestra en el histograma 5.5, el número de lunas cercanas al planeta forman una región densa, este pico de densidad en el histograma crece cuando se aumenta la excentricidad máxima inicial en el disco, y al contrario a lo que ocurre con los planetas más masivos, este pico se aleja del planeta.

Las excentricidades de las lunas formadas crece al igual que sus respectivas masas con el aumento de la excentricidad máxima inicial del disco. En las gráficas de la figura 5.7, las masas más cercanas al planeta en cada uno de los casos poseen las mayores excentricidades. En medida que aumenta la distancia al planeta las menores excentricidades se ven favorecidas, siendo las de las lunas más masivas, las menores excentricidades en cada uno de los casos. Al aumentar e_{\max} , la excentricidad de las lunas formadas en el borde final del diagrama se incrementa. Lo anterior es consecuencia de la conservación del momento angular. En el diagrama se observa que para $e_{\max} = 0.1$, la luna más alejada se encuentra a $3.15 UA$ y su órbita tiene una excentricidad de $e = 7.12 \times 10^{-2}$, mientras que para $e_{\max} = 0.4$ la luna más alejada esta en $a = 3.282 a_{\text{Tit}}$ y su excentricidad es $e = 0.2656$.

Durante el proceso de formación de un sistema, el mantener partículas en la región de los anillos sin acretar, pero con la posibilidad de intercambio de momento angular con otras partículas del disco, provoca que al aumentar los eventos de acreción, crezca el intercambio de momento angular entre ellas. Como consecuencia, el intercambio de momento angular de las partículas en la región de anillos

se incrementa al aumentar el valor de la excentricidad máxima inicial. Cuando este proceso se lleva acabo, el intercambio de momento angular de las partículas en los anillos, con cualquier otra partícula aleatoria en el disco, hace que aumente la probabilidad de que esta partícula *caiga* hacia el planeta, debido al aumento en su excentricidad. En la figura 5.7 se presenta el diagrama de excentricidad en la región de los anillos. En esta figura es notable la disminución en la cantidad de partículas en los anillos al aumentar la excentricidad inicial del disco, así como el aumento en la excentricidad de estas partículas, debido al intercambio de momento angular.

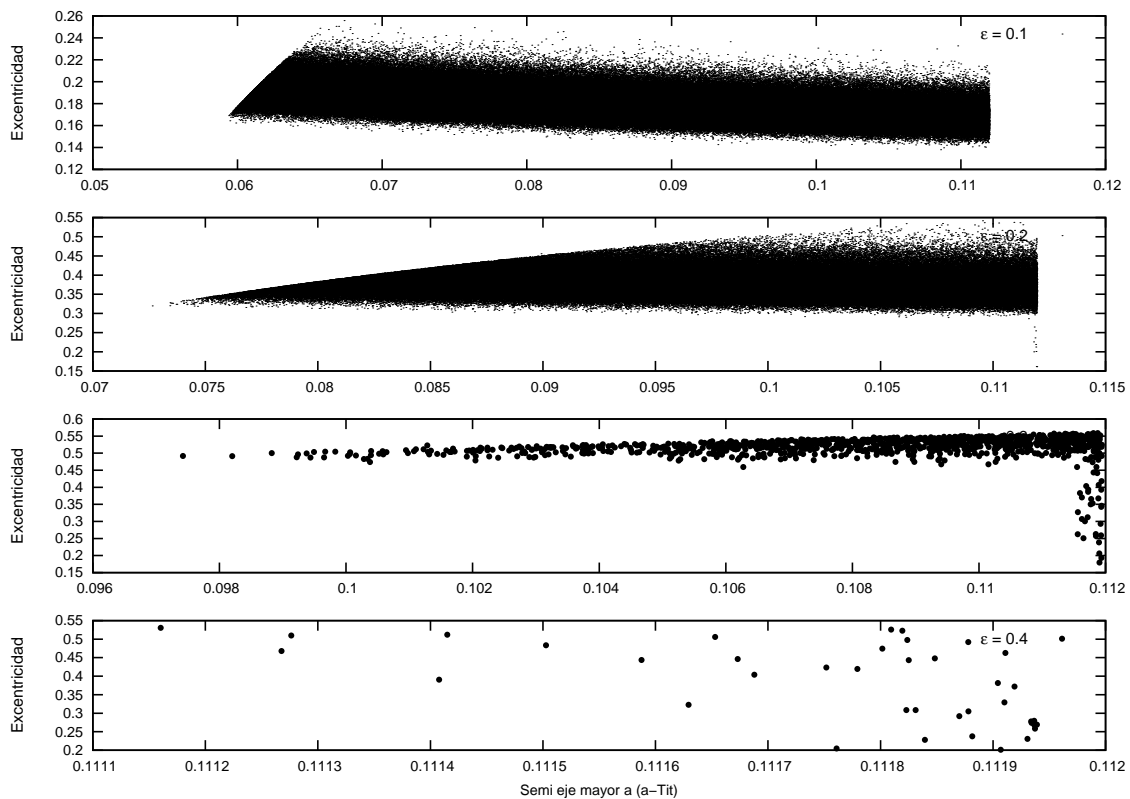


Figura 5.7: Diagramas de excentricidad en los anillos planetarios variando la excentricidad máxima en el disco inicial, para una distribución de masa inicial dada por $\gamma = -0.5$.

La relación entre la masa en los anillos, excentricidad inicial y distribución inicial, se observa en la figura 5.8. En ella, la masa en los anillos decrece conforme aumenta la excentricidad inicial, al igual que al aumentar el valor de γ . Lo anterior se puede atribuir a la densidad de planetesimales que se sitúan inicialmente en la zona de los anillos. En cambio, la disminución de la masa de los anillos al aumentar e_{\max} , es un efecto del aumento de los eventos de acreción en el disco. De acuerdo a estos resultados, se tiene que si se toma una excentricidad inicial máxima mayor a 0.2, las partículas en la región de los anillos desaparecen de los sistemas formados. Esto se debe al intercambio de momento angular que se impone y que sólo afecta a las partículas en sus excentricidades. La masa perdida de los sistemas al igual que la masa en los anillos decrece al aumentar el valor de γ , pero de forma contraria al aumentar la excentricidad inicial, la masa que se pierde también aumenta, lo cual es evidente al observar la disminución en la masa de los anillos.

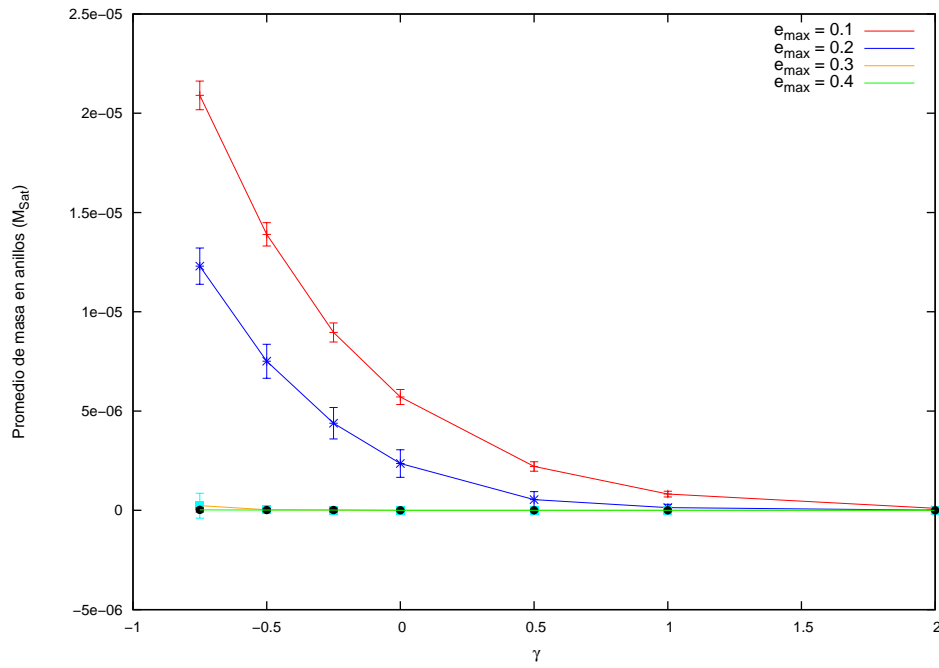


Figura 5.8: Promedio de la masa en los anillos en función del valor de γ , para distintos valores de excentricidad inicial máxima en el disco de acreción.

Conclusiones

En este trabajo se analizaron ensambles de planetas formados a partir de un disco de acreción con crecimiento oligárquico, basado en un modelo sencillo introducido en [1] y [10]. Partiendo de este modelo, se estudió la estadística de diferentes configuraciones iniciales, en particular se estudiaron ensambles con distintas distribuciones iniciales de masa así como distintas excentricidades máximas iniciales.

Este modelo se aplicó a dos sistemas, un sistema de una estrella central con planetas orbitándola y un sistema de un planeta con anillos y lunas. Para estos sistemas se utilizaron las condiciones iniciales de masa y momento angular correspondientes al Sistema Solar y el sistema de Saturno con lunas y anillos.

Los resultados de las simulaciones numéricas para el caso Sistema Solar y Saturno en los que se tienen las mismas distribuciones iniciales de masa y excentricidad inicial, mostraron que los diagramas de masa y excentricidad tienen una forma que es independiente de la escala, debido a que presentan las mismas características físicas y siguen leyes de potencia parecidas. Por lo tanto, la forma de los diagramas de masa y excentricidad muestran independencia a los valores iniciales de momento angular y masa, lo que es un rasgo de universalidad del modelo.

Al modificar las distribuciones iniciales de masa de la forma $\rho(a) \sim a^\gamma$, cambiando el valor de γ en este modelo, se observaron dos comportamientos relevantes en ambos casos: Para una distribución inicial de masa con una ley de potencia y valores positivos del exponente γ , los planetas con las masas más grandes se for-

man en la parte más alejada del sistema. Conforme disminuye el valor de γ , el número de planetas formados aumenta y los planetas más masivos aparecen cada vez más cercanos a la estrella, de tal forma que para el valor menor de γ que se utilizó en las simulaciones, se observan a los planetas más masivos situados en la posiciones más cercanas a la estrella. De acuerdo a lo anterior es posible encontrar ensambles de sistemas, en los cuales los planetas más masivos se formaron en la primera posición de su respectivo sistema para valores de γ menores a -0.5 .

Conforme se toman valores más pequeños de γ para la distribución inicial, las excentricidades de los sistemas aumentan, pero en todos los casos se mantiene una mayor densidad en las excentricidades menores. En todos los casos, los planetas más cercanos a la estrella o al planeta (en el caso de Saturno) poseen las excentricidades mayores y en medida que se forman más alejados, su excentricidad disminuye. Una característica común en todos los resultados, es la persistencia de excentricidades muy pequeñas en todos los sistemas simulados. El comportamiento de la excentricidad es similar en ambos sistemas estudiados.

Cuando se realizan comparaciones con los datos observados de los sistemas utilizados, se observa una limitación que radica en el número de planetesimales utilizado en el disco inicial: la masa de los planetesimales es mayor a la masa de algunas lunas consideradas para las simulaciones. De esto, no se espera obtener masas similares a la de los anillos o a los planetas o lunas que se observan en los sistemas reales. A pesar de esta limitante, las masas mayores obtenidas en los resultados son del mismo orden de las masas de Júpiter o Titán, esto para valores positivos de γ . De igual forma, si se observan los valores para el semieje mayor máximo para el caso del sistema de Saturno, se puede establecer que una distribución positiva de masa es más apropiada, de acuerdo a este modelo, para obtener sistemas con dimensiones de semieje mayor parecidas a las observadas. Para el Sistema Solar si se observan las dimensiones de los discos iniciales, de acuerdo a las distribuciones de masa iniciales, se puede decir que una distribución inicial para un valor negativo de γ está más cercana al valor del tamaño del sistema, sin embargo, si nos concentramos en el número de planetas finales y en la masa mayor del sistema, es más apropiado una distribución positiva para obtener resultados

más cercanos a los reales. La principal limitante de los modelos de formación planetaria es el desconocimiento de las condiciones iniciales de los sistemas que se estudian.

La característica principal de este modelo es su sencillez, la que permite el estudio estadístico de formación de sistemas, a partir de cinco parámetros, dos parámetros conocidos: masa M y momento angular L totales y tres parámetros que se escogen: semieje mayor mínimo (a_{\min}) y excentricidad máxima inicial (e_{\max}) y la distribución inicial de masa (γ). En base a esto, se pudo hacer un estudio de las características finales generales de los sistemas formados al variar algunas de éstos parámetros. Los resultados que se obtuvieron al cambiar la excentricidad máxima inicial del disco de acreción muestran que al aumentar e_{\max} , disminuye la cantidad de planetas o lunas formadas, y en particular, estos planetas se forman en regiones privilegiadas donde la densidad es mayor. Esto tiene como resultado que a la posición final y la excentricidad de los planetas que se formaron no varíen mucho a pesar del carácter estocástico de este modelo.

Con base en lo anterior, el estudio de la formación planetaria a partir de un disco con una distribución inicial de masa no-homogénea sugiere como un siguiente paso la implementación de distintas distribuciones de no-homogéneas de masa en distintas regiones dentro del disco inicial. En particular una densidad de masa dada por el perfil de una distribución normal sería interesante, ya que se puede pensar a esta distribución como una condición inicial específica para modelar un sistema parecido al Sistema Solar.

Anexo A

Demostración de la ecuación (1.8)

Partimos del cambio en la energía cinética dado por

$$\delta\epsilon = \frac{p_3^2}{2m_3} - \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{p_1^2}{2m_1}, \quad (1)$$

se toma $p_3 = p_1 + p_2$ en (1) y desarrollamos para obtener

$$\frac{p_2^2 + 2p_2p_1 + p_1^2}{2m_3} - \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{p_1^2}{2m_1}, \quad (2)$$

se utiliza el término $2m_1m_2m_3$ como factor común en (2) y se obtiene

$$\frac{p_2^2m_1m_2 + 2p_2p_1m_1m_2 + p_1^2m_1m_2 - p_2^2m_1m_3 - p_1^2m_2m_3}{2m_1m_2m_3}, \quad (3)$$

se sustituye el término $m_3 = m_1 + m_2$ en el denominador de la ecuación (3) y se

reduce la expresión para llegar a

$$\frac{-p_2^2 m_1^2 + 2p_2 p_1 m_1 m_2 - p_1^2 m_2^2}{2m_1 m_2 m_3}, \quad (4)$$

lo que conduce a la expresión deseada

$$\delta\epsilon = -\frac{(m_2 p_1 - m_1 p_2)^2}{2m_1 m_2 m_3} < 0. \quad (5)$$

Demostración de la ecuación(1.20),

Tomamos la energía de un sistema binario sujeto a un potencial gravitacional,

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{G(m_1 + m_2)}{r_{min}} = 0, \quad (6)$$

despejando v se obtiene

$$v = \sqrt{\frac{2G(m_1 + m_2)}{r_{min}}}, \quad (7)$$

sustituyendo $\eta = \left(\frac{m_1+m_2}{3m_o}\right)^{1/3}$ en la ecuación (7), obtenemos

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{6\mu\eta^3}{r_{min}}} \quad (8)$$

Anexo B

Datos astronómicos del Sistema Solar.

Sistema Solar				
<i>Planeta</i>	<i>Masa (M_{\odot})</i>	<i>Semieje mayor (UA)</i>	<i>Excentricidad</i>	<i>Momento angular</i>
Mercurio	1.66×10^{-7}	0.3871	0.2056	6.3508×10^{-7}
Venus	2.4479×10^{-6}	0.7233	6.7732×10^{-3}	1.3081×10^{-5}
Tierra	3.0036×10^{-6}	1.0	1.671×10^{-2}	1.887×10^{-5}
Marte	3.2273×10^{-7}	1.5236	9.3412×10^{-2}	2.492×10^{-6}
Júpiter	9.5464×10^{-4}	5.2034	4.839×10^{-2}	1.366×10^{-2}
Saturno	2.858×10^{-4}	9.537	5.415×10^{-2}	5.538×10^{-3}
Urano	4.366×10^{-5}	19.1913	4.7168×10^{-2}	1.2004×10^{-3}
Neptuno	5.15×10^{-5}	30.069	8.586×10^{-3}	1.7745×10^{-3}

Datos astronómicos utilizados para el Sistema de Saturno.

Sistema de Saturno				
<i>Luna</i>	<i>Masa (M_{Sat})</i>	<i>Semieje mayor (a_{Tit})</i>	<i>Excentricidad</i>	<i>Momento angular</i>
Pan	8.7957×10^{-12}	0.1093	0	1.8273×10^{-11}
Daphnis	1.7591×10^{-13}	0.112	0	3.6944×10^{-13}
Atlas	1.2314×10^{-11}	0.1126	0	2.597×10^{-11}
Prometheus	2.8146×10^{-10}	0.114	0.0024	5.9724×10^{-10}
Pandora	2.4628×10^{-10}	0.116	0.0042	5.2697×10^{-10}
Epimetheus	9.3234×10^{-10}	0.124	0.009	2.0622×10^{-9}
Janus	3.3424×10^{-9}	0.124	0.007	7.394×10^{-9}
Mimas	6.667×10^{-8}	0.1518	0.0202	1.632×10^{-7}
Enceladus	1.9×10^{-7}	0.1948	0.0045	5.2686×10^{-7}
Tethys	1.08715×10^{-6}	0.2412	0	3.3545×10^{-6}
Calypso	7.0365×10^{-12}	0.2412	0.001	2.1712×10^{-11}
Telesto	1.2314×10^{-11}	0.2412	0.001	3.7996×10^{-11}
Dione	1.935×10^{-6}	0.3089	0.0022	6.7572×10^{-6}
Helene	5.2774×10^{-11}	0.3089	0.005	1.8428×10^{-10}
Rhea	4.0636×10^{-6}	0.4314	0.001	1.6769×10^{-5}
Titán	2.3669×10^{-4}	1.0	0.0292	1.4865×10^{-3}
Hyperion	9.8512×10^{-9}	1.2122	0.1042	6.777×10^{-8}

Anillos		
<i>Anillo</i>	<i>Radio interior (a_{Tit})</i>	<i>Radio exterior (a_{Tit})</i>
D	0.054754	0.06098
C	0.0611	0.07529
B	0.075297	0.09623
A	0.099989	0.1119

Anexo C

Semieje mayor máximo (a_{max}) para los datos astronómicos del Sistema Solar y cada condición inicial de e_{max} y γ

a_{max} ((UA))				
$\gamma \setminus e_{max}$	0.1	0.2	0.3	0.4
2.0	9.48	9.58	9.75	9.99
1.0	10.88	10.99	11.18	11.46
0.5	11.83	12.47	12.69	13.01
0	15.32	15.48	15.75	16.16
-0.25	20.45	20.65	20.99	21.51
-0.5	23.35	23.61	24.06	24.72
-0.75	34.27	34.68	35.39	36.45
-0.9	48.24	48.88	49.98	51.61

Semieje mayor máximo (a_{max}) para los datos astronómicos del Sistema de Saturno y cada condición inicial de e_{max} y γ

$a_{max} (a_{Tit})$				
$\gamma \setminus e_{max}$	0.1	0.2	0.3	0.4
2.0	1.33	1.35	1.37	1.40
1.0	1.53	1.54	1.57	1.61
0.5	1.72	1.74	1.77	1.82
0	2.11	2.13	2.17	2.22
-0.25	2.45	2.48	2.53	2.59
-0.5	3.04	3.08	3.14	3.23
-0.75	4.17	4.22	4.31	4.45

Agradecimientos

...Agradezco el apoyo aportado por el proyecto PAPIIT IG-101113...

Bibliografía

- [1] C. Hernandez-Mena and L. Benet. Statistics and Universality in Simplified Models of Planetary Formation. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 412:95–106, 2011.
- [2] Hernández-Mena C. *Análisis estadístico en modelos sencillos de formación de sistemas planetarios*. UAEM, Cuernavaca Morelos, UAEM, 2012. Tesis Doctoral.
- [3] Laplace Pierre-Simon. *Exposición del sistema del mundo*. 1796.
- [4] P. Higgs. Planetary systems and the origins of life. *Cambridge Astrobiology*, -1, 2007.
- [5] M Ollivier. *Detection, Formation and Habitability of extra solar planets*. Planetary Systems. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [6] Armitage P.J. Lecture notes on the formation and early evolution of planetary systems. *eprint arXiv:astro-ph/0701485*, 2007.
- [7] R Canup and W. R. Ward. Formation of the Galilean satellites: conditions of accretion. *The Astronomical journal*, 124:3404–3423, 2002 December.
- [8] Yann Alibert, Christoph Mordasini, Willy Benz, and Christophe Winisdoerfer. Models of giant planet formation with migration and disc evolution. *Astron.Astrophys.*, 434:343–353, 2005.

- [9] Ignacio Mosqueira, Paul R. Estrada, and Diego Turrini. Planetesimals and Satellitesimals: Formation of the Satellite Systems. *Space Sci.Rev.*, 153:431–446, 2010.
- [10] J. Laskar. On the Spacing of Planetary Systems. *Phys.Rev.Lett.*, 84:3240–3243, 2000.
- [11] et. al Tilley, D. The formation of star clusters i. three dimensional simulations of hydrodynamic turbulence. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 353(3):769-788, 08-2004.
- [12] R Dvorak. *Chaos and Stability in Planetary Systems*. Springer, 2006.
- [13] Peter Goldreich and William R. Ward. The Formation of Planetesimals. *Astrophys.J.*, 183:1051–1062, 1973.
- [14] J. Laskar. Amd-stability and the spacing of planetary systems. *American Astronomical Society*, 32:1100, 2000.
- [15] Roman R. Rafikov. The Growth of planetary embryos: Orderly, runaway, or oligarchic? *Astron.J.*, 125:942, 2003.
- [16] V.S. Safronov and E.L. Ruskol. The protoplanetary cloud and its evolution. *Soviet Astronomy*, 1967.
- [17] Kokubo E. Ida S. Oligarchic growth of protoplanets. 178:131:171, 1998.