



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNCIONES DE ESTRUCTURA Y  
CONTENIDO DE ESPÍN DEL PROTÓN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
FÍSICO

PRESENTA:  
MILLÁN RAMOS BENJAMÍN

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. ROELOF BIJKER



2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## 1.Datos del alumno

Apellido paterno	Millán
Apellido materno	Ramos
Nombre	Benjamín
Teléfono	044 55 4401 2478
Universidad Nacional Autónoma de México	
Facultad de Ciencias	
Carrera	Física
Número de cuenta	409095647

## 2.Datos del tutor

Grado	Doctor
Nombre	Roelof
Apellido paterno	Bijker
Apellido materno	Bijker

## 3.Datos del sinodal 1

Grado	Doctor
Nombre	Rodolfo Patricio
Apellido paterno	Martínez
Apellido materno	y Romero

## 4.Datos del sinodal 2

Grado	Doctor
Nombre	Andrés
Apellido paterno	Sandoval
Apellido materno	Espinosa

## 5.Datos del sinodal 3

Grado	Doctor
Nombre	Erick Leonardo
Apellido paterno	Patiño
Apellido materno	Jaidar

## 6.Datos del sinodal 4

Grado	Doctor
Nombre	Peter Otto
Apellido paterno	Hess
Apellido materno	Bechstedt

## 7.Datos del trabajo escrito

Título	Funciones de estructura y contenido de espín del protón
Número de páginas	52 p
Año	2014

## Agradecimientos

Quiero agradecer con mucho cariño a toda mi familia, a mis padres y a mis hermanos, por todo su cariño y palabras de apoyo durante mis estudios de Licenciatura. Quiero mencionar que las enseñanzas y consejos de mis padres han formado una voluntad en mí tal que me ha hecho posible llegar a este punto, por ello y por mucho más, ¡Gracias!

También quiero agradecer a la Facultad de Ciencias, no solo porque en ella he aprendido mucho académicamente, si no también porque es única en ambiente y jactitud!, llena de situaciones y personalidades inverosímiles. En ella he tenido la suerte de hacer amigos y verdaderos amigos, con los que he compartido las alegrías y tristezas de la vida estudiantil, y quiero agradecer en especial a Omar, Hector, Alan, Pedro, Lupita, Javitt, Amilcar y a Gustavo, a quienes les debo admiración y cariño.

Quiero agradecer al Dr. Roelof Bijker por todo su apoyo, tiempo y gran paciencia. Porque todas sus enseñanzas alentaron mi pasión por la Física. También gracias por sus consejos y consideración en todas mis actividades académicas como estudiante.

Por último quiero agradecer a la Universidad Nacional Autónoma de México por la oportunidad que me ha brindado para estudiar una licenciatura. También quiero agradecer el apoyo que me brindó al realizar mi tesis mediante la beca de los proyectos PAPIIT-DGAPA IN113711 y IN 107314.



# Índice general

<b>1. Motivación.</b>	<b>7</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>9</b>
2.1. Modelo de Quarks . . . . .	9
2.2. Quarks y antiquarks . . . . .	9
2.3. Bariones . . . . .	11
2.3.1. Diagramas de Young y coordenadas de Jacobi. . . . .	12
2.3.2. Simetrizador y antisimetrizador. . . . .	13
2.3.3. Espín . . . . .	17
2.3.4. Octete de Bariones . . . . .	17
2.3.5. Decuplete de bariones . . . . .	18
2.4. Mesones . . . . .	19
2.4.1. Función de onda de sabor . . . . .	21
2.4.2. Espín . . . . .	23
<b>3. Extensiones del modelo de quarks</b>	<b>25</b>
3.1. Modelo de la Nube Mesónica . . . . .	25
3.2. Modelo de quarks Unquenched . . . . .	27
<b>4. Cálculo de elementos de matriz</b>	<b>31</b>
<b>5. Resultados</b>	<b>37</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>49</b>
<b>7. Bibliografía</b>	<b>51</b>



# Capítulo 1

## Motivación.

El modelo de quarks constituyentes, QCM por sus siglas en inglés, ha sido exitoso como un mecanismo teórico que proporciona información en general de las propiedades de las partículas subatómicas. Este modelo propone que las partículas como bariones y mesones tienen estructura, es decir están constituidas por otras, llamadas quarks, las cuales interactúan entre sí mediante bosones mediadores conocidos como gluones. Las propiedades de los bariones y mesones se deben a las propiedades e interacción de los quarks constituyentes [1][2].

Los quarks y gluones son los constituyentes de las partículas que interactúan de manera fuerte, es decir, los hadrones y la teoría que describe dicha interacción es la Cromodinámica Cuántica, QCD por sus siglas en inglés. Sin embargo, resolver las ecuaciones de QCD para un sistema de varios cuerpos, aún en nuestros días, sigue siendo difícil. Como solución alternativa se han propuesto diferentes modelos hadrónicos como el modelo de solitones, quarks quirales  $\chi$ QM y variantes del modelo de quarks.

Como ya se mencionó, en el QCM las propiedades de los hadrones se deben a la interacción de sus quarks constituyentes. Sin embargo existe fuerte evidencia sobre la existencia de grados de libertad adicionales a los quarks de valencia, como lo son configuraciones quark antiquark en la función de onda de los hadrones, las cuales pueden contribuir a las propiedades de los hadrones. A primera instancia se podría pensar que la distribución de estas configuraciones quark antiquark es simétrica en sabor, es decir, que no contribuye a las propiedades del protón. Sin embargo se ha encontrado una notable asimetría entre  $\bar{d}$  y  $\bar{u}$  en el mar del protón. La asimetría de sabor en el protón se puede expresar con la integral de Gottfried de la siguiente manera:

$$S_G = \int_0^1 \frac{F_2^p(x) - F_2^n(x)}{x} dx = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \int_0^1 [\bar{d}_p(x) - \bar{u}_p(x)] dx = \frac{1}{3} [1 - 2\mathcal{A}(p)]$$

donde  $F_2^p(x)$  y  $F_2^n(x)$  son las funciones de estructura electromagnética del protón y neutrón respectivamente, y  $x$  es la variable de Bjorken que mide la fracción de momento del protón que llevan los quarks.



Para estudiar la estructura interna del protón experimentalmente se recurre a la dispersión inelástica profunda, DIS por sus siglas en inglés, de leptones la cual es conocida por ser una herramienta muy útil en este caso. La violación a la suma de Gottfried observada por NMC [3] es

$$S_G = \int_0^1 \frac{F_2^p(x) - F_2^n(x)}{x} dx = 0.24 \pm 0.016 \quad (1.1)$$

lo cual indica una asimetría de sabor en el mar del protón. Análisis recientes de datos obtenidos en procesos Drell-Yan confirman la asimetría [4].

Otro resultado que es evidencia de la presencia de configuraciones quark antiquark tiene que ver con la estructura del espín del protón, hay experimentos en los que se ha medido el primer momento  $I_p$  de la función de estructura del protón, como consecuencia de los resultados obtenidos la predicción teórica de la contribución de los quarks al espín del protón es pequeña,  $\Delta\Sigma \approx 0$ . Este resultado está en contradicción con el modelo de quarks no relativista, el cual asume que la contribución de los quarks extraños a  $I_p$  es nula ( $\Delta s = 0$ ). Es decir, el análisis de las mediciones experimentales implican  $\Delta s \neq 0$ . Estos resultados en conjunto,  $\Delta\Sigma \approx 0$  y  $\Delta s \neq 0$ , son conocidos como la crisis de espín. El valor actual de  $\Delta\Sigma$  es  $0.330 \pm 0.011(\text{theo}) \pm 0.025(\text{exp}) \pm 0.028(\text{evol})$  de la colaboración de HERMES[5] y  $0.33 \pm 0.03 \pm 0.05$  de la colaboración de COMPASS[6].

En esta tesis se investiga la contribución de estos quarks del mar al espín en el protón y posteriormente se hace un análisis de las contribuciones a las reglas de suma de los quarks del mar al resto de los bariones del octete, para estudiar la contribución de los quarks del mar se consideran fluctuaciones del tipo barión-mesón, estos acoplamiento consisten en la creación de un par de partículas, un barión y un mesón, ambos virtuales, tales que se conservan los números cuánticos del barión en cuestión, en el presente estudio solo se incluyen los acoplamiento entre los bariones del octete y decuplete con el octete de mesones pseudoescalares.

En el siguiente capítulo se presenta el marco teórico que involucra el modelo de quarks, seguido de una introducción al modelo de la nube mesónica, MCM por sus siglas en inglés, y el Modelos quarks “unquenched”, UQM por sus siglas en inglés. En el cuarto capítulo se expone el procedimiento realizado para calcular los elementos de matriz tanto en MCM como en UQM. Y por último se presenta una discusión de los resultados obtenidos y se hace un análisis comparativo entre los diferentes modelos y otros trabajos.

# Capítulo 2

## Introducción

### 2.1. Modelo de Quarks

Con la aparición de los aceleradores de partículas en los años 50's fue posible realizar experimentos en los que se encontraron muchas partículas “extrañas”, puesto que algunas de éstas ya habían sido detectadas al estudiar los rayos cósmicos; se les denominó extrañas no solo porque su masa era grande, si no también porque eran producidas en  $10^{-23}$  segundos y decaían alrededor de  $10^{-10}$  segundos; esto sugirió que el mecanismo de producción es totalmente diferente de aquel que rige su desintegración. En 1953 Gell-Mann y Nishijima propusieron asignarle a cada partícula un nuevo número cuántico, la extrañeza, la cuál se conserva en cualquier interacción fuerte, pero no en una interacción débil [7]. En 1961 Gell-Mann y Ne'eman introdujeron de manera independiente el “camino del octete”, para clasificar los bariones y mesones en patrones geométricos de acuerdo con la carga y la extrañeza[8]. Sin embargo ¿Por qué los hadrones se pueden clasificar en estos arreglos?. En 1964 Gell-Mann y Zweig de manera independiente propusieron que todos los hadrones estaban compuestos de partículas más elementales a las que Gell-Mann llamó “quarks”, los cuales formaban un triplete  $u$ ,  $d$  y  $s$ , según esta hipótesis todo barión está compuesto de tres quarks y los mesones de un quark y un antiquark[9]. Posteriormente se descubrieron los quarks  $c$ ,  $b$  y  $t$ . La descripción de las propiedades de los hadrones que solo consideran la parte del mínimo contenido de quarks ligeros, es decir  $u$ ,  $d$  y  $s$  es generalmente llamada Modelo de Quarks.

### 2.2. Quarks y antiquarks

La Cromodinámica cuántica (QCD) es la teoría de las interacciones fuertes. QCD es una teoría de campo cuántica y sus constituyentes son el conjunto de fermiones, los quarks, y los bosones, los gluones[10]. Las partículas que interactúan de manera fuerte, los hadrones, son estados ligados de quarks y gluones. Como se cree el color está permanente confinado, la mayoría de los números cuánticos de las partículas de interacción fuerte se deben a los números cuánticos de los quarks y antiquarks que las constituyen.

Los quarks son partículas de interacción fuerte, son fermiones, es decir, con espín  $S=\frac{1}{2}$  y un número cuántico llamado carga de color, la cual puede ser r(rojo), b(azul) y g(verde); todo barión y mesón es de color blanco, entonces, cada quark constituyente de un barión debe ser de un color diferente, a la combinación  $rgb$  se le denomina color blanco.

El grupo de simetría que envuelve los grados de libertad considerados en el modelo de quarks consiste de las álgebras espín-sabor y de color.

$$G_{sfc} = SU_{sf}(6) \otimes SU_c(3), \quad (2.1)$$

donde  $SU(3)_c$  describe las transformaciones unitarias entre los tres diferentes colores; el algebra de espín sabor se puede descomponer en

$$SU_{sf}(6) \supset SU_f(3) \otimes SU_s(2), \quad (2.2)$$

donde el un grupo de simetría  $SU(3)_f$  describe la transformaciones entre los tres diferentes sabores y  $SU(2)_s$  entre los dos estados de espín de los quarks. El álgebra de sabor puede descomponerse en

$$SU_f(3) \supset SU_I(2) \otimes U_Y(1), \quad (2.3)$$

donde I denota el isospín y Y la hipercarga de los quarks.

Los estados ligados de quarks pueden identificarse según su isoespín I,  $I_3$  e hipercarga.

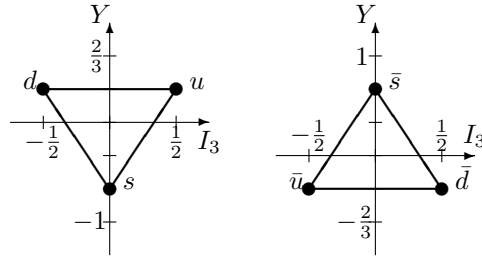


Figura 2.1: Diagramas de peso de los 3 quarks y 3 antiquarks.

La carga eléctrica está dada por la relación de Gell-Mann-Nijishima:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} = I_3 + \frac{B + S}{2}, \quad (2.4)$$

donde B es el número bariónico y s es la extrañeza.

A los quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$  se les conoce como ligeros pues sus masas están entre 2 y 100MeV [19], estos forman un triplete. Poseen número bariónico  $B=1/3$  y espín y paridad  $S^P = 1/2$ ; los números cuánticos de los quarks ligeros y sus antiquarks están dados en la tabla 2.1.

Cuadro 2.1: Números cuánticos de los quarks y antiquarks.

	$B$	$S^P$	$I$	$I_3$	$S$	$Y$	$Q$
$u$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$d$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$s$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}^+$	0	0	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\bar{u}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$\bar{d}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\bar{s}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}^-$	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

## 2.3. Bariones

Los bariones son fermiones con número bariónico  $B=1$ , son estados de tres quarks,  $qqq$  la función de onda de un barión tiene varios componentes; la parte espacial que describe la posición de los 3 quarks que lo componen; la parte de espín que representa el espín de los quarks; la componente de sabor indica que combinación de  $u$ ,  $d$  y  $s$  está involucrada y el término de color especifica el color de los quarks.

$$|qqq\rangle_A = |color\rangle_A \times |espacio, espín, sabor\rangle_S \quad (2.5)$$

donde los subíndices S y A indican simetría o antisimetría.

Debemos mencionar como se acoplan los tres estados de quarks  $qqq$  para conocer cuantos estados independientes se tienen, entonces, el producto directo  $q \otimes q \otimes q$ , donde cada elemento  $q$  pertenece a la representación fundamental de  $SU_f(3)$ , se puede expresar como una suma directa de distintas representaciones de acuerdo a sus propiedades de simetría en 27 combinaciones independientes

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10_S \oplus 8_M \oplus 8_M \oplus 1_A \quad (2.6)$$

Con el propósito de que la formulación del modelo estándar sea consistente con el principio de Pauli en 1964 O. W. Greenberg [11] y M.Han y Y. Nambu[12] propusieron que no sólo se tienen 3 sabores de quarks, si no que además cada uno de ellos posee color, la función de onda de color debe ser antisimétrica ya que si se utiliza sólo el sabor y espín se obtiene una función simétrica, de esta manera, introduciendo el color la función total es asimétrica, la cual es característica de todo fermión. Como ya se mencionó anteriormente hay tres diferentes cargas de color rojo(r), azul(b) y verde(g). La función de onda de color es:

$$\psi_A(color) = \frac{1}{\sqrt{6}}(rgb - grb + gbr - bgr + brg - rbg) \quad (2.7)$$

Los estados multiquark  $qqq$  y  $qq$  deben tener combinación de color del tipo  $rbg$  o permutaciones y  $r\bar{r}$ ,  $b\bar{b}$  y  $g\bar{g}$ . A esta combinación de carga de color se le conoce como color blanco, como no

se permiten estados multiquarks con otras cargas de color que las mencionadas anteriormente se dice que los quarks están confinados, por esa razón no es posible observar un quark aislado, además que el color no se manifiesta en los observables de las partículas físicas.

### 2.3.1. Diagramas de Young y coordenadas de Jacobi.

Para construir a función de onda de sabor tenemos que usar los diagramas de Young, los cuales son una colección de  $n$  cajas distribuidas en  $n$  renglones, con  $\lambda_1$  cajas en el primer renglón,  $\lambda_2$  en el segundo y así sucesivamente hasta tener  $\lambda_n$  en el  $n$ -ésimo renglón, donde  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  son un conjunto de números positivos y son una partición de un número entero  $n$  tal que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n &= n \end{aligned} \quad (2.8)$$

por ejemplo el diagrama [211] tiene dos elementos en el primer renglón y 1 en el segundo y tercer renglón.

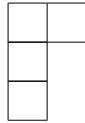
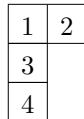
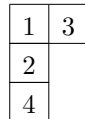


Figura 2.2: Diagrama de Young [211]

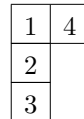
Ahora, si llenamos las  $n$  cajas de un diagrama de Young con los elementos  $1, 2, \dots, n$  en cualquier orden usando solamente una vez cada elemento tenemos lo que se conoce como una tabla de Young. Hay  $n!$  maneras de llenar las cajas. Una tabla estándar de Young es aquella en la que todos los elementos están ordenados ascendentemente al leer de izquierda a derecha en un renglón así como de arriba abajo en una columna. Cada tabla de Young representa un proceso particular de simetrización o antisimetrización de  $n$  índices. Tenemos simetría bajo permutaciones en el mismo renglón y antisimetría en la misma columna.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.3: Diagrama de Young.

Una tabla de Young estándar se dice que es *normal* si todos sus elementos aparecen en orden cuando se leen sucesivamente de izquierda a derecha en todos los renglones y uno tras

otro de arriba abajo. Por ejemplo la figura 2.3a es un diagrama de Young normal. De un diagrama normal pueden obtenerse todos los diagramas estándar si se consideran las permutaciones apropiadas. Por ejemplo la figura 2.3b puede obtenerse de 2.3a usando la transposición (23), y 2.3c de 2.3a con la permutación (243) la cual se lee: primero se intercambia la posición entre los elementos 2 y 4 y después entre el nuevo elemento en la posición 4 y el elemento en la posición 3.

### 2.3.2. Simetrizador y antisimetrizador.

Para un sistema de partículas idénticas el Hamiltoniano es invariante bajo permutaciones de partículas. En una permutación se intercambian todas las coordenadas (posición, espín, etc.) de una partícula con las de la otra partícula. Consideremos  $1, 2, \dots, n$  las coordenadas de  $1, 2, \dots, n$  partículas respectivamente. Entonces si  $\psi(1, 2, \dots, n)$  es una eigenfunción de algún eigenvalor  $E$  dado, toda transformación del tipo  $i \rightarrow a_i$  dada por el operador[13]

$$P_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

sobre  $\psi(1, 2, \dots, n)$  resulta en

$$P_a \psi = \psi(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

donde  $P_a \psi$  es otra eigenfunción con el mismo eigenvalor  $E$  si  $H$  es invariante bajo permutaciones de partículas. La mecánica cuántica requiere funciones simétricas para los bosones y funciones antisimétricas para los fermiones. La cuales pueden ser construidas usando el operador de simetrización  $\mathcal{S}$  y el operador de antisimetrización  $\mathcal{A}$  los cuales se definen como:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{n!} \sum_P P \qquad \mathcal{A} = \frac{1}{n!} \sum_P (-1)^{n-k} P \qquad (2.9)$$

donde  $k$  es el número de ciclos. En ambos operadores la suma se extiende sobre todos los  $n!$  elementos de  $P$  del grupo simétrico  $S_n$ , donde  $S_n$  es un grupo cuyos elementos son todas las permutaciones de  $n$  símbolos de un conjunto  $X$  de  $n$  elementos. Además tiene las siguientes propiedades

$$P\mathcal{S} = \mathcal{S}P = \mathcal{S}, \qquad P\mathcal{A} = \mathcal{A}P = (-1)^{n-k} \mathcal{A} \text{ para cualquier } P \in S_n \qquad (2.10)$$

es decir, estos operadores conmutan con todos los elementos de  $S_n$ . También actúan como operadores proyectores y por lo tanto satisfacen

$$\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}, \qquad \mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \qquad (2.11)$$

Es conveniente introducir la siguiente notación,  $\mathcal{S}_{1,2,\dots,n}$  y  $\mathcal{A}_{1,2,\dots,n}$ , donde los subíndices  $1, 2, \dots, n$  especifican las partículas sobre las cuales los operadores actúan. Ahora, consideremos primero el caso con  $n = 2$ , es decir, un estado de dos partículas

$$\psi_N = u(1)d(2) \qquad (2.12)$$

donde  $u$  y  $d$  son estados de una partícula y ortonormales entre sí. El simetrizador

$$\mathcal{S}_{12} = \frac{1}{2}(e + P_{12}) \quad (2.13)$$

proyecta la parte simétrica de  $\psi_N$ :

$$\psi^S = \mathcal{S}_{12}\psi_N = \frac{1}{2} [u(1)d(2) + d(1)u(2)] \quad (2.14)$$

y el antisimetrizador

$$\mathcal{A}_{12} = \frac{1}{2}(e - P_{12}) \quad (2.15)$$

proyecta la parte antisimétrica de  $\psi_N$

$$\psi^A = \mathcal{A}_{12}\psi_N = \frac{1}{2} [u(1)d(2) - d(1)u(2)] \quad (2.16)$$

Entonces, considerando estados individuales de partículas  $u$  y  $d$  se puede construir el estado  $u(1)u(2)$  o  $d(1)d(2)$  los cuales son simétricos. Se tienen 4 estados linealmente independientes de los cuales tres son simétricos y 1 es antisimétrico. A los tres estados simétricos les corresponde el mismo diagrama de Young:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{cases} u(1)u(2) \\ \frac{1}{2} [u(1)d(2) + u(2)d(1)] \\ d(1)d(2) \end{cases}$$

y para el estado antisimétrico se tiene

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \frac{1}{2} [u(1)d(2) - u(2)d(1)]$$

Es decir, dos cajas en un renglón corresponden a un estado simétrico y dos en una columna corresponden a uno antisimétrico. Si se quieren considerar 3 partículas la situación se complica porque pueden aparecer estados de simetría mixta.

Para ilustrar lo discutido anteriormente consideremos el estado un estado multiquark  $qqq$ , el cual es el que nos interesa en la formulación del modelo estándar,;

$$\phi_N = u(1)d(2)s(3) \quad (2.17)$$

donde asumimos que las funciones  $u, d$  y  $s$  son funciones ortonormales. Nótese que al realizar permutaciones en los estados  $u, d$  y  $s$  obtenemos  $3!$  funciones linealmente independientes, las cuales pueden ser recombinadas para obtener otras 6 funciones que también son linealmente independientes. Primero consideremos las funciones simétrica  $\phi^S$  y antisimétrica  $\phi^A$ :

$$\begin{aligned}\phi^S &= \mathcal{S}_{123}uds = \frac{1}{3!} (e + P_{12} + P_{13} + P_{23} + P_{123} + P_{132})uds \\ &= \frac{1}{3!} (uds + dus + sdu + usd + dsu + sud)\end{aligned}\quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}\phi^A &= \mathcal{A}_{123}uds = \frac{1}{3!} (e - P_{12} - P_{13} - P_{23} + P_{123} + P_{132})uds \\ &= \frac{1}{3!} (uds - dus - sdu - usd + dsu + sud)\end{aligned}\quad (2.19)$$

donde el operador  $\mathcal{S}_{123}$  es una generalización del operador  $\mathcal{S}_{12}$  a 3 elementos,  $\mathcal{S}_{123}$  indica todas las permutaciones cíclicas posibles entre los elementos  $u$ ,  $d$  y  $s$ , por ejemplo el término  $P_{123}$  indica que  $d$  tomo el lugar de  $u$ ,  $s$  el de  $d$  y  $u$  el de  $s$ , análogamente para el operador  $\mathcal{A}_{123}$ .

Para construir las otras cuatro funciones con simetría mixta partimos de 2.17 y la simetizamos con respecto a dos partículas, después la antisimetrizamos con respecto a otras 2 partículas, donde una partícula es común a la operación anterior. Es conveniente empezar con las siguientes funciones:

$$\phi_1 = \mathcal{A}_{13}\mathcal{S}_{12}\psi_N \quad (2.20)$$

$$\phi_2 = \mathcal{A}_{23}\mathcal{S}_{12}\psi_N \quad (2.21)$$

$$\phi_3 = \mathcal{S}_{13}\mathcal{A}_{12}\psi_N \quad (2.22)$$

$$\phi_4 = \mathcal{S}_{23}\mathcal{A}_{12}\psi_N \quad (2.23)$$

Nótese que  $\phi_1$  y  $\phi_2$  forman un espacio invariante y que:

$$\begin{aligned}(12)\phi_1 &= \phi_2; & (13)\phi_1 &= -\phi_1 \\ (12)\phi_2 &= \phi_1; & (13)\phi_2 &= \phi_2 - \phi_1\end{aligned}$$

de igual manera  $\phi_3$  y  $\phi_4$  forman un espacio invariante para el cual se obtienen relaciones similares; podemos ver que por construcción

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \langle \phi_1, \phi_4 \rangle = \langle \phi_2, \phi_3 \rangle = \langle \phi_2, \phi_4 \rangle = 0 \quad (2.24)$$

$$(2.25)$$

pero

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle \neq 0, \quad \langle \phi_3, \phi_4 \rangle \neq 0 \quad (2.26)$$

por lo cual ninguna base es ortogonal. Sin embargo la suma y la diferencia

$$\phi'_1 \sim \phi_1 + \phi_2 \quad (2.27)$$

$$\phi'_2 \sim \phi_1 - \phi_2 \quad (2.28)$$

producen dos funciones ortogonales. También

$$\phi'_3 \sim \phi_3 + \phi_4 \quad (2.29)$$

$$\phi'_4 \sim \phi_3 - \phi_4 \quad (2.30)$$



son ortogonales entre sí. Las funciones anteriores normalizadas tiene la siguiente forma

$$\phi'_1 = -\frac{1}{\sqrt{12}}(2uds + 2dus - sdu - sud - usd - dsu) \quad (2.31)$$

$$\phi'_2 = -\frac{1}{2}(usd + dsu - sdu - sud) \quad (2.32)$$

$$\phi'_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(2uds - 2dus + sdu - sud - usd - dsu) \quad (2.33)$$

$$\phi'_4 = \frac{1}{2}(-sdu + sud + usd - dsu) \quad (2.34)$$

las cuales también son ortogonales con  $\phi^S$  y  $\phi^A$ . De esta manera tenemos 6 funciones que son linealmente independientes.

La acción de cualquier elemento de  $S_3$  en  $\phi'_1$  o  $\phi'_4$  es la misma acción de  $S_3$  en la coordenada interna  $\lambda$ , y cualquier elemento de  $S_3$  actúa sobre  $\phi'_2$  o  $\phi'_3$  de igual manera que sobre la coordenada interna  $\rho$ . A las coordenadas  $\lambda$  y  $\rho$  se les conoce como coordenadas internas de Jacobi, las cuales se definen utilizando los vectores posición de las tres partículas en cuestión

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ \lambda &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_3) \end{aligned}$$

Por esto suele hacerse el cambio de notación

$$\begin{pmatrix} \phi^\lambda \\ \phi^\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \phi^\lambda \\ \phi^\rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi'_4 \\ \phi'_3 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Entonces, para construir las componentes  $\rho$  y  $\lambda$  de las función de onda de un barión, basta con considerar el contenido de sabor y seguir el procedimiento anterior, por ejemplo, un protón está conformado por dos quarks  $u$  y uno  $d$ , por lo cual  $\phi_N = \phi_p = uud$ , utilizando las ecuaciones 2.23 y 2.35 tenemos

$$\begin{aligned} \phi_p^\lambda &= \phi'_1 = \mathcal{N}_\lambda (\phi_1 + \phi_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}(2uud - duu - udu) \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \phi_p^\rho &= \phi'_2 = \mathcal{N}_\rho (\phi_1 - \phi_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(udu - duu) \end{aligned} \quad (2.37)$$

donde  $\mathcal{N}_\lambda = \sqrt{\frac{2}{3}}$  y  $\mathcal{N}_\rho = \sqrt{2}$  son los factores de normalización respectivamente. De igual manera se pueden obtener las componentes  $\rho$  y  $\lambda$  de los demás bariones. Nótese que  $\phi_p^\lambda$  y  $\phi_p^\rho$  tienen la misma forma que las coordenadas  $\rho$  y  $\lambda$ .

### 2.3.3. Espín

Para construir las funciones de onda de espín  $\chi$  de igual manera que en la sección anterior debemos considerar dos casos ya que los espines pueden acoplarse en  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{3}{2}$ . La función de onda de un barión con espín  $S = \frac{1}{2}$  es de simetría mixta, por lo cual tenemos las funciones  $\chi^\rho$  y  $\chi^\lambda$ . Para construir dichas funciones tomemos de ejemplo  $\phi_p^\rho$  y  $\phi_p^\lambda$  y realicemos la sustitución

$$u \rightarrow \uparrow \quad d \rightarrow \downarrow \quad (2.38)$$

donde  $\uparrow$  y  $\downarrow$  son estados de partículas con espín  $S = \frac{1}{2}$  y proyección  $S_z = \frac{1}{2}$  o  $S_z = -\frac{1}{2}$ , respectivamente. Entonces los estado de tres partículas de simetría mixta con espín  $S = \frac{1}{2}$  y  $S_z = \frac{1}{2}$  son

$$\begin{aligned} \chi_{\frac{1}{2}}^\lambda &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2 \uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) \\ \chi_{\frac{1}{2}}^\rho &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \end{aligned}$$

y los estados con espín  $S = \frac{1}{2}$  y  $S_z = -\frac{1}{2}$  pueden obtenerse aplicando el operador  $S_-$  a las ecuaciones 2.39, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} \chi_{-\frac{1}{2}}^\lambda &= \frac{1}{\sqrt{6}} (-2 \downarrow\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow\downarrow + \downarrow\uparrow\downarrow) \\ \chi_{-\frac{1}{2}}^\rho &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow\downarrow\downarrow - \downarrow\uparrow\downarrow) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Otra manera de que el producto  $\phi\chi$  sea simétrico es que tanto  $\phi$  como  $\chi$  sean simétricas. En este caso  $\chi$  debe ser un estado con espín  $S = \frac{3}{2}$  con proyección  $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$  o  $-\frac{3}{2}$ , los cuales se obtiene a partir del estado con  $S_z = \frac{3}{2}$  aplicando el operador  $S_-$ , de esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} \chi_{\frac{3}{2}}^S &= |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle \\ \chi_{\frac{1}{2}}^S &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle) \uparrow \\ \chi_{-\frac{1}{2}}^S &= \frac{1}{\sqrt{3}} (|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle) \\ \chi_{-\frac{3}{2}}^S &= |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned} \quad (2.40)$$

### 2.3.4. Octete de Bariones

Considerando la representación fundamental de  $SU(3)$  ( $u, d, s$ ) y combinándola con la de  $SU(2)$  ( $\uparrow\downarrow$ ) se puede construir una representación fundamental de  $SU(6)$   $u \uparrow, d \uparrow, s \uparrow, u \downarrow, d \downarrow, s \downarrow$ . Físicamente los grados de libertad en el modelo de quarks intrínseco son multiplicados por los del espín. Realizando un procedimiento análogo con el cual se obtuvo la ecuación 2.37 podemos obtener la función de onda de sabor para los bariones del octete, y los resultados se muestran en la siguiente tabla

Cuadro 2.2: Estados de simetría mixta de tres quarks en los bariones del octete  $J^P = \frac{1}{2}^+$ .

Barión	$ (\lambda, \mu)I, I_3, Y\rangle$	$ \phi^\lambda\rangle$	$ \phi^\rho\rangle$
p	$ (1, 1)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 uud\rangle -  udu\rangle -  duu\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( udu\rangle -  duu\rangle)$
n	$ (1, 1)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}( udd\rangle +  dud\rangle - 2 ddu\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( udd\rangle -  dud\rangle)$
$\Sigma^+$	$ (1, 1)1, 1, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}( usu\rangle +  suu\rangle - 2 uus\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( suu\rangle -  usu\rangle)$
$\Sigma^0$	$ (1, 1)1, 0, 0\rangle$	$-\frac{1}{\sqrt{12}}(2 uds\rangle + 2 dus\rangle -  sdu\rangle -  sud\rangle -  usd\rangle -  dsu\rangle)$	$\frac{1}{2}( sdu\rangle +  sud\rangle -  usd\rangle -  dsu\rangle)$
$\Sigma^-$	$ (1, 1)1, -1, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}( dsd\rangle +  sdd\rangle - 2 dds\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( sdd\rangle -  dsd\rangle)$
$\Lambda^0$	$ (1, 1)0, 0, 0\rangle$	$\frac{1}{2}( sud\rangle -  sdu\rangle +  usd\rangle -  dsu\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(2 uds\rangle - 2 dus\rangle +  sdu\rangle -  sud\rangle +  usd\rangle -  dsu\rangle)$
$\Xi^0$	$ (1, 1)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 ssu\rangle -  uss\rangle -  sus\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( sus\rangle -  uss\rangle)$
$\Xi^-$	$ (1, 1)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(2 ssd\rangle -  dss\rangle -  sds\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( sds\rangle -  dss\rangle)$

donde las etiquetas  $\lambda$  y  $\mu$  también sirven para clasificar los diferentes estados, solo que se refieren a las dimensión de la representación.

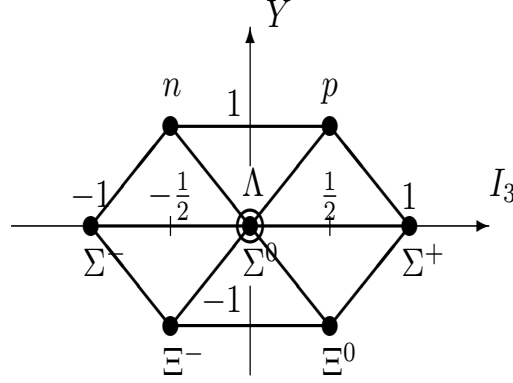
La parte espacial de la función de onda total es simétrica ya que no se consideran efectos debido a un movimiento angular, es decir tenemos que  $l=0$ . La función de onda total de un barión debe ser simétrica, pero el producto entre la función de onda del sabor y espín  $\psi\chi$  debe ser simétrico de tal manera que el producto de estas dos funciones es

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^\lambda \chi^\lambda + \psi^\rho \chi^\rho) \quad (2.41)$$

Los ocho bariones con espín  $\frac{1}{2}$  pueden clasificarse según su hipercarga  $Y$  y proyección de isoespín  $I_3$ , es decir en un diagrama de peso, el cual se muestra en la figura 2.4

### 2.3.5. Decuplete de bariones

Hasta este punto se han construido las funciones de sabor del octete de bariones, por lo tanto proseguimos a construir las del decuplete de bariones, recordemos que ahora tenemos estados totalmente simétricos con espín  $S = \frac{3}{2}$ , por lo que la función de onda sabor-espín es

Figura 2.4: Octete de bariones con  $J^P = S^P = \frac{1}{2}^+$ 

$$\Psi = \psi^S \chi^S \quad (2.42)$$

donde  $\chi^S$  se definió en la ecuación 2.40 y  $\psi^S$  puede calcularse con el operador  $\mathcal{P}$  definido en 2.9. Por ejemplo, consideremos el caso particular de un barión compuesto por dos quarks  $u$  y uno  $s$ , entonces utilizando el operador  $\mathcal{P}$  tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{123}uus &= \frac{1}{3!} (e + P_{12} + P_{13} + P_{23} + P_{123} + P_{132}) uus \\ &= \frac{1}{3} (uus + usu + suu) \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$(2.44)$$

Se pueden construir los demás estados simétricos considerando el contenido de sabor de cada barión y aplicando el operador  $\mathcal{P}$ . los resultado se muestran en la tabla 2.3

De igual manera que en el caso del octete los bariones del decuplete pueden clasificarse según su hipercarga  $Y$  y proyección de isoespín  $I_3$  el diagrama de peso del decuplete de bariones se muestra en la figura 2.5.

## 2.4. Mesones

Los mesones son estados ligados  $q\bar{q}$  de quarks  $q$  y antiquarks  $\bar{q}$  (los sabores de  $q$  y  $\bar{q}$  pueden ser diferentes), en el modelo de quarks tienen número bariónico  $B=0$ . Si el momento angular orbital del estado  $q\bar{q}$  es  $l$ , entonces la paridad  $P$  es  $(-1)^{l+1}$ . El espín del mesón  $J$  está dado por la relación  $|l - S| \leq J \leq |l + S|$ , donde  $S$  es 0 (los espines de los quarks son antiparalelos) o 1 (espines paralelos). La conjugación de carga, o C-parity  $C = (-1)^{l+S}$ , es definida solo para los estados  $q\bar{q}$  hechos de quarks y sus mismos antiquarks.

Los mesones son clasificados en multipletes  $J^{PC}$ . Si  $S=0$  tenemos que  $CP=-1$  entonces para  $l=0$  tenemos estados con  $J^{CP} = 0^{-+}$  y se conocen como mesones son pseudoescalares,

Cuadro 2.3: Funciones de onda de sabor simétricas de los bariones del decuplete  $J^P = \frac{3}{2}^+$ .

Barión	$(\lambda, \mu)I, I_3, Y\rangle$	$ \phi^S\rangle$
$\Delta^{++}$	$ (3, 0)\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\rangle$	$ uuu\rangle$
$\Delta^+$	$ (3, 0)\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( uud\rangle +  udu\rangle +  duu\rangle)$
$\Delta^0$	$ (3, 0)\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( ddu\rangle +  dud\rangle +  udd\rangle)$
$\Delta^-$	$ (3, 0)\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 1\rangle$	$ ddd\rangle$
$\Sigma^{*+}$	$ (3, 0)1, 1, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( uus\rangle +  usu\rangle +  suu\rangle)$
$\Sigma^{*0}$	$ (3, 0)1, 0, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}( uds\rangle +  dus\rangle +  usd\rangle +  sud\rangle +  sdu\rangle +  dsu\rangle)$
$\Sigma^{*-}$	$ (3, 0)1, -1, 0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( dds\rangle +  dsd\rangle +  sdd\rangle)$
$\Xi^{*0}$	$ (3, 0)\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( uss\rangle +  sus\rangle +  ssu\rangle)$
$\Xi^{*-}$	$ (3, 0)\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{3}}( dss\rangle +  sds\rangle +  ssd\rangle)$
$\Omega^-$	$ (3, 0)0, 0, -2\rangle$	$ sss\rangle$

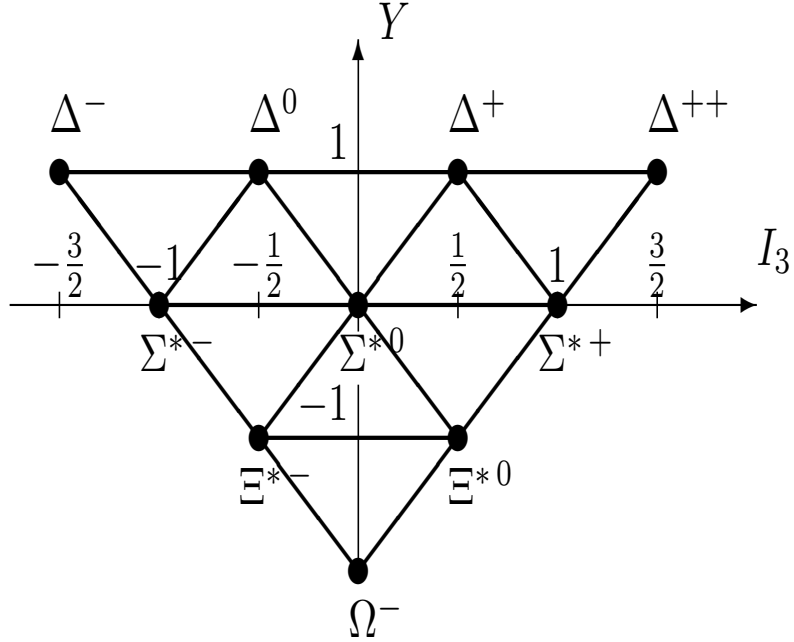
aquellos con  $l=1$  se conocen como mesones axiales  $1^{+-}$ . Ahora, si  $S=1$  y  $l=0$  entonces tenemos mesones vectoriales  $1^{-}$ , si  $l=1$  tenemos estados escalares  $0^{++}$ , axiales  $1^{++}$  y tensoriales  $2^{++}$ . Los estados con  $P = (-1)^J$  deben tener  $S=1$  y por lo tanto,  $CP=+1$ . Entonces los mesones con paridad-espín natural y  $CP=-1$  ( $0^{+-}$ ,  $1^{-+}$ ,  $2^{+-}$ , etc) están prohibidos en el modelo  $q\bar{q}$ .

Recordemos que la parte de color de la función de onda es diferente a la de los bariones, ya que tenemos un estado  $q\bar{q}$  y como se debe cumplir que el color de cualquier estado es blanco tenemos

$$\psi_c = \frac{1}{\sqrt{3}} (r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g}) \quad (2.45)$$

También debemos mencionar que como se tiene tres sabores y dos proyecciones de espín en los estados ligados  $q\bar{q}$  tenemos 18 estados de sabor independientes, es decir

$$3 \oplus \bar{3} = 8 \oplus 1 \quad (2.46)$$

Figura 2.5: Decuplete de bariones con  $J^P = S^P = \frac{3}{2}^+$ 

Por lo que tenemos un octete de mesones pseudoescalares  $J = S = 0$  y otro de mesones vectoriales  $J = S = 1$ , con sus correspondientes singuletes.

### 2.4.1. Función de onda de sabor

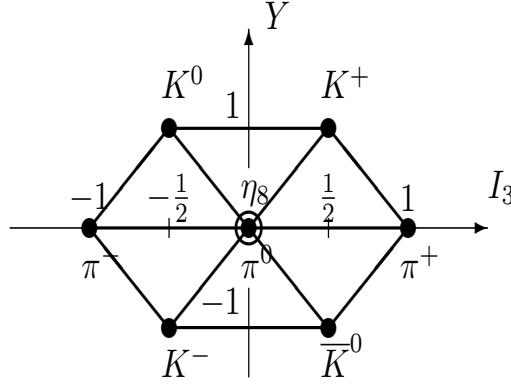
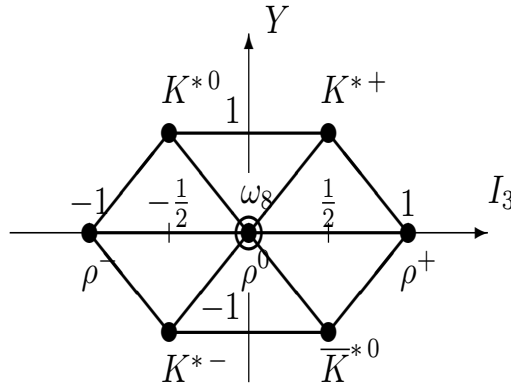
Primero consideremos el caso de  $SU(2)$  donde los estados  $q\bar{q}$  están compuestos por los multipletes  $(u, d)$  o  $(\bar{d}, -\bar{u})$  y acoplan su isoespín en 1 o 0, las combinaciones neutrales serán  $u\bar{u}$  y  $d\bar{d}$ . El estado con  $I = 1, I_3 = 0$  es

$$|I = 1, I_3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}| -u\bar{u} + d\bar{d}\rangle \quad (2.47)$$

y el estado ortogonal es

$$|I = 0, I_3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u\bar{u} + d\bar{d}\rangle \quad (2.48)$$

Al generalizar a  $SU(3)$  noté que  $s$  y  $\bar{s}$  tienen  $I = 0$ , por lo tanto solo se pueden incluir pares  $s\bar{s}$  en el estado  $u\bar{u} + d\bar{d}$  y no en  $-u\bar{u} + d\bar{d}$ , por lo que tenemos que los estados independientes son  $u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}$ ,  $-u\bar{u} + d\bar{d}$  y  $u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}$ , los cuales frecuentemente se denotan

Figura 2.6: Octete de mesones pseudoescalares con  $J^P = S^P = 0^-$ Figura 2.7: Octete de mesones vectoriales con  $J^P = S^P = 1^-$ 

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2}}| -u\bar{u} + d\bar{d} \rangle &\rightarrow \pi^0 \rho^0 \\
 \frac{1}{\sqrt{6}}| u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s} \rangle &\rightarrow \eta_8, \omega_8 \\
 \frac{1}{\sqrt{3}}| u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} \rangle &\rightarrow \eta_1, \omega_1
 \end{aligned}
 \tag{2.49}$$

Se debe tener cuidado al etiquetar los estados  $q\bar{q}$  en  $SU(3)$ . El estado  $u\bar{d}$  puede ser

$$\phi_S = |u(1)\bar{d}(2) + \bar{d}(1)u(2)\rangle
 \tag{2.50}$$

o

$$\phi_A = |u(1)\bar{d}(2) - \bar{d}(1)u(2)\rangle
 \tag{2.51}$$

donde los subíndices denotan la simetría al intercambiar las etiquetas 1 y 2. Estos dos estados se distinguen por su paridad  $G$  ( $G = Ce^{i\pi T_2}$ ). Con  $T_2 = \frac{1}{2}\tau_2$ ,  $C$  el operador conjugación de carga y  $\tau_2$  la matriz de Pauli  $\sigma_2$ , de tal manera que

$$G = Ci\tau_2 = C \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces se tiene las siguientes transformaciones

$$u \xrightarrow{G} \bar{d} \xrightarrow{G} -u; \quad d \xrightarrow{G} -\bar{u} \xrightarrow{G} -d$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} G\phi_S &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-\bar{d}u - u\bar{d}) \equiv -\phi_S \\ G\phi_A &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-\bar{d}u - u\bar{d}) \equiv +\phi_A \end{aligned} \tag{2.52}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \phi_S &\rightarrow G = -1(\pi^+) \\ \phi_A &\rightarrow G = +1(\rho^+) \end{aligned} \tag{2.53}$$

De igual manera para los estados neutrales

$$\begin{aligned} \phi_S &: \frac{1}{2} \|(d\bar{d} - u\bar{u}) + (\bar{d}d - \bar{u}u)\rangle = \pi^0 \\ \phi_A &: \frac{1}{2} \|(d\bar{d} - u\bar{u}) - (\bar{d}d - \bar{u}u)\rangle = \rho^0 \end{aligned} \tag{2.54}$$

los cuales son eigenestados de la conjugación de carga

$$C\phi_S^0 = +\phi_S^0, \quad C\phi_A^0 = -\phi_A^0 \tag{2.55}$$

Las funciones de onda de los mesones pueden verse en la tabla 2.4 y están relacionadas por los operadores  $I_{\pm}$ ,  $V_{\pm}$  y  $U_{\pm}$ , es decir dado un estado se pueden construir todo los demás utilizando estos operadores, entonces podemos decir que los estados listados en la tabla 2.4 son eigenfunciones de  $I_{\pm}$ ,  $V_{\pm}$ .

### 2.4.2. Espín

Denotemos la función de onda de espín por  $\chi_S$  o  $\chi_A$ , donde los subíndices indican las propiedades de simetría. Combinando con las funciones de onda de sabor tenemos las siguientes posibilidades para las propiedades de simetría de  $\phi\chi$  ante el intercambio de las etiquetas 1 y 2

$$\begin{aligned} \text{Simétrico :} & \quad \phi_S\chi_S, & \quad \phi_A\chi_A \\ \text{Antisimétrico :} & \quad \phi_S\chi_A, & \quad \phi_A\chi_S \end{aligned} \tag{2.56}$$



Cuadro 2.4: Estados de sabor y sus permutaciones para mesones pseudoescalares y vectoriales que contienen quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ .

Mesón pseudoescalar(vectorial)	Función de onda de sabor
$K^+(K^{+*})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{s} \mp \bar{s}u)$
$K^0(K^{0*})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{s} \mp \bar{s}d)$
$K^-(K^{-*})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{u} \pm \bar{u}s)$
$\bar{K}^0(\bar{K}^{0*})$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(s\bar{d} \mp \bar{d}s)$
$\pi^+(\rho^+)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{d} \mp \bar{d}u)$
$\pi^-(\rho^-)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(d\bar{u} \pm \bar{u}d)$
$\pi^0(\rho^0)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}[(d\bar{d} - u\bar{u}) \pm (\bar{d}d - \bar{u}u)]$
$\eta_8^0(\omega_8^0)$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}[(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \pm (\bar{u}u - \bar{d}d - 2\bar{s}s)]$
$\eta_1^0(\omega_1^0)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}[(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \pm (\bar{u}u - \bar{d}d + \bar{s}s)]$

Claramente los sistemas  $0^-, 1^-$  corresponden a las combinaciones totalmente antisimétricas ya que para los eigenestados de conjugación de carga neutrales se tiene

$$\begin{aligned}\phi_S \chi_A &= |C = +, S = 0\rangle \sim \pi^0 \\ \phi_A \chi_S &= |C = -, S = 1\rangle \sim \rho^0\end{aligned}\tag{2.57}$$

Entonces los estados de espín-sabor para los mesones son

$$\begin{aligned}\phi_i^S &| \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\rangle \\ \phi_i^A &| \uparrow\uparrow\rangle, \quad \phi_i^A | \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)\rangle, \quad \phi_i^A | \downarrow\downarrow\rangle\end{aligned}\tag{2.58}$$

donde los estados  $i=0$  (singlete),  $i=1 \dots 8$  (octete) están listados en la tabla 2.4.

## Capítulo 3

# Extensiones del modelo de quarks

El modelo de quarks es una herramienta muy útil y confiable, sin embargo no explica todo lo que se observa en el mundo subatómico. Por ejemplo, se ha detectado un exceso de quarks  $\bar{d}$  en comparación con quarks  $\bar{u}$  en el protón, este fenómeno se conoce como la asimetría de sabor. Esto llevó a proponer nuevos modelos, los cuales son extensiones del modelo de quarks, entre ellos se tiene al Modelo de la Nube Mesónica, MCM por sus siglas en inglés y al Modelo de Quarks Unquenched (UQM, por sus siglas en inglés).

### 3.1. Modelo de la Nube Mesónica

En este modelo se sigue considerando que los bariones están compuestos de tres quarks, los quarks de valencia, pero se propone que el barión fluctúa entre el estado con tres quarks de valencia  $qqq$  y configuraciones de cinco quarks  $qqq - q\bar{q}$  del tipo barión-mesón que involucran los quarks del mar. En este trabajo se consideran los bariones del octete o decuplete en combinación con los mesones pseudoescalares del octete[14].

Para ilustrar el modelo consideremos un nucleón, en cuya la función de onda consideraremos fluctuaciones del tipo  $N\pi$  y  $\Delta\pi$ .

$$|\Psi_N\rangle = \mathcal{N}_N \left\{ |N\rangle + a_{N \rightarrow N\pi} |N\pi\rangle + b_{N \rightarrow \Delta\pi} |\Delta\pi\rangle \right\} \quad (3.1)$$

donde se han introducido los coeficientes de peso  $a_{N \rightarrow N\pi}$  y  $b_{N \rightarrow \Delta\pi}$  y  $\mathcal{N}$  es un coeficiente de normalización, que en este caso es:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{1 + a_{N \rightarrow N\pi}^2 + b_{N \rightarrow \Delta\pi}^2}}$$

En general, se pueden tener diferentes configuraciones  $|B_8 M_8\rangle$  y  $|B_{10} M_8\rangle$ , por cada término adicional en la función de onda tiene un coeficiente asociado  $a_{B \rightarrow B_8 M_8}$  o  $b_{B \rightarrow B_{10} M_8}$  según sea el caso.

Para construir explícitamente la función de onda sabor-espín primero se deben calcular los coeficientes de acoplamiento (coeficientes de Clebsch-Gordan) de isospín, entonces para los acoplamiento  $|N\pi\rangle$  y  $|\Delta\pi\rangle$  de la ecuación 3.1 tenemos:

$$|\Psi_p\rangle = \mathcal{N}_N \left\{ |p\rangle + a_{N \rightarrow N\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |p\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |n\pi^+\rangle \right) + b_{N \rightarrow \Delta\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta^{++}\pi^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta^+\pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta^0\pi^+\rangle \right) \right\} \quad (3.2)$$

después para construir la parte de espín de la función de onda del protón con  $J = M = \frac{1}{2}$ , donde  $\vec{J} = \vec{J}_p + \vec{l}$ , se considera el momento angular relativo entre barión-mesón. Como se deben conservar paridad y momento angular se tiene  $l = 1$  con  $m = 0, 1$  para fluctuaciones  $|N\pi\rangle$  y en el caso de los acoplamientos  $|\Delta\pi\rangle$  tenemos  $l = 1$  con  $m = -1, 0, 1$ ; por ejemplo para  $|p\pi^0\rangle$   $J = M = \frac{1}{2}$  tenemos:

$$\begin{aligned} |p\pi^0, J = M = \frac{1}{2}\rangle &= \sum_{m_p, m} \langle \frac{1}{2} m_p l = 1, m | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle |p_{m_p} \pi^0\rangle_{1m} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} |p_{\frac{1}{2}} \pi^0\rangle_{10} - \sqrt{\frac{2}{3}} |p_{-\frac{1}{2}} \pi^0\rangle_{11} \end{aligned}$$

y en el caso del término  $|\Delta^{++}\pi^-\rangle$  tenemos:

$$\begin{aligned} |\Delta^{++}\pi^-, J = M = \frac{1}{2}\rangle &= \sum_{m_{\Delta^{++}}, m} \langle \frac{3}{2} m_{\Delta^{++}} l = 1, m | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle |\Delta^{++}\pi^-\rangle_{1m} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta_{\frac{3}{2}}^{++}\pi^-\rangle_{1,-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta_{\frac{1}{2}}^{++}\pi^-\rangle_{1,0} + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta_{-\frac{1}{2}}^{++}\pi^-\rangle_{1,1} \end{aligned}$$

Repetiendo el procedimiento anterior para todos los términos de la ecuación 3.3 tenemos:

$$\begin{aligned} |\Psi_p \frac{1}{2}\rangle &= \mathcal{N}_N \left\{ |p_{\frac{1}{2}}\rangle + \frac{a_{N \rightarrow N\pi}}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |p_{\frac{1}{2}} \pi^0\rangle_{10} - \sqrt{\frac{2}{3}} |p_{-\frac{1}{2}} \pi^0\rangle_{11} \right) \right. \\ &\quad - \sqrt{\frac{2}{3}} a_{N \rightarrow N\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |n_{\frac{1}{2}} \pi^+\rangle_{10} - \sqrt{\frac{2}{3}} |n_{-\frac{1}{2}} \pi^+\rangle_{11} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} b_{N \rightarrow \Delta\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta_{\frac{3}{2}}^{++}\pi^-\rangle_{1,-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta_{\frac{1}{2}}^{++}\pi^-\rangle_{1,0} + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta_{-\frac{1}{2}}^{++}\pi^-\rangle_{1,1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} b_{N \rightarrow \Delta\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta_{\frac{3}{2}}^+\pi^0\rangle_{1,-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta_{\frac{1}{2}}^+\pi^0\rangle_{1,0} + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta_{-\frac{1}{2}}^+\pi^0\rangle_{1,1} \right) \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{6}} b_{N \rightarrow \Delta\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta_{\frac{3}{2}}^0\pi^+\rangle_{1,-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta_{\frac{1}{2}}^0\pi^+\rangle_{1,0} + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta_{-\frac{1}{2}}^0\pi^+\rangle_{1,1} \right) \right\} \end{aligned}$$

Se ha de mencionar que las fluctuaciones permitidas son aquellas que conservan todos los números cuánticos del barión en cuestión, es decir, la carga, isospín, espín, extrañeza, etc.

Entonces para un barión del octete  $|B_8\rangle$  las fluctuaciones permitidas del tipo  $|B_8 M_8\rangle$  son:

$$\begin{array}{c} 8 \\ \left( \begin{array}{c} N \\ \Sigma \\ \Lambda \\ \Xi \end{array} \right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 8 \otimes 8 \\ \left( \begin{array}{cccc} N\pi & N\eta & \Sigma K & \Lambda K \\ N\bar{K} & \Sigma\pi & \Lambda\eta & N\eta & \Xi K \\ N\bar{K} & \Sigma\pi & \Lambda\eta & \Xi K \\ \Sigma\bar{K} & \Lambda\bar{K} & \Xi\pi & \Xi\eta \end{array} \right) \end{array}$$

y las del tipo  $|B_{10} M_8\rangle$  son:

$$\begin{array}{c} 8 \\ \left( \begin{array}{c} N \\ \Sigma \\ \Lambda \\ \Xi \end{array} \right) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 10 \otimes 8 \\ \left( \begin{array}{cccc} \Delta\pi & \Sigma^* K & & \\ \Delta\bar{K} & \Sigma^*\pi & \Sigma^*\eta & \Xi^* K \\ & \Sigma^*\pi & \Xi^* K & \\ \Sigma^*\bar{K} & \Xi^*\pi & \Xi^*\eta & \Omega K \end{array} \right) \end{array}$$

### 3.2. Modelo de quarks Unquenched

El modelo de quarks “unquenched” es una extensión del modelo de quarks se basa en un modelo  ${}^3P_0$  para la creación de un par  $q\bar{q}$ , en el cual los pares quark-antiquark con números cuánticos del vacío son incluidos como una perturbación[15][16][17]. El mecanismo de creación del par se incluye a nivel de árbol y los diagramas de un loop son calculados sumando sobre el conjunto completo de estados intermediarios bariones-mesones. Bajo estas condiciones, la función de onda del barión consiste de una configuración de tres quarks de orden cero  $|A\rangle$  más la suma de todas las posibles componentes de Fock de mayor grado debidas a la creación de  ${}^3P_0$  pares de quark-antiquark.

$$\begin{aligned} |\Psi_A\rangle = \mathcal{N}_a \left\{ |A\rangle + \sum_{BC J_b J_c J_{bc} l} \int d\vec{K}_0 k_0^2 dk_0 |BC, (J_b J_c) J_{bc}, l; J_a M_a; \vec{K}_0 k_0\rangle \right. \\ \left. \times \frac{\langle BC, (J_b J_c) J_{bc}, l; J_a M_a; \vec{K}_0 k_0 | T^\dagger | A \rangle}{m_a - E_b(k_0) - E_c(k_0)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Donde A denota el barión inicial, B y C representan el barión y mesón intermediario, y  $m_a$ ,  $E_b(k_0) = \sqrt{m_b^2 + k_0^2}$  y  $E_c(k_0) = \sqrt{m_c^2 + k_0^2}$  son las respectivas energías calculadas en el sistema de referencia del barión inicial A,  $\vec{k}_0$  y  $l$  son el momento radial relativo y el momento angular orbital de B y C, y  $J_a$  es el momento angular total  $\vec{J}_a = \vec{J}_b + \vec{J}_c + \vec{l}$ . El operador  $T^\dagger$  crea un par quark-antiquark en el estado  ${}^3P_0$  con los números cuánticos del vacío: L=S=1 y J=0.

$$\begin{aligned} T^\dagger = -3\gamma \int d\vec{p}_4 d\vec{p}_5 \delta(\vec{p}_4 + \vec{p}_5) C_{45} F_{45} e^{-\alpha_d^2 (\vec{p}_4 + \vec{p}_5)^2 / 8} \\ [\chi_{45} \times (\vec{p}_4 + \vec{p}_5)]_0^{(0)} b_4^\dagger(\vec{p}_4) d_5^\dagger(\vec{p}_5). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Donde  $b_4^\dagger(\vec{p}_4)$  y  $d_5^\dagger(\vec{p}_5)$  son los operadores de creación de un quark y un antiquark con momento  $\vec{p}_4$  y  $\vec{p}_5$ , respectivamente. El par quark-antiquark está caracterizado por las funciones

de onda  $C_{45}$  y  $F_{45}$ , es decir un singulete de color y uno de sabor respectivamente, la función de onda de un triplete de espín  $\chi_{45}$  con  $S=1$  y un armónico esférico sólido  $\vec{p}_4 + \vec{p}_5$  que indican que es quark y antiquark están en función de onda relativa  $P$ . El operador  $T^\dagger$  crea un par de quarks con un tamaño efectivo, entonces el punto de creación del par es atenuado por un factor gaussiano cuya anchura está dada por  $\alpha_d$ .

La amplitud de transición de  ${}^3P_0$  puede expresarse como[18]:

$$\langle BC, (J_b J_c) J_{bc}, l; J_a M_a; \vec{K}_0 k_0 | T^\dagger | A \rangle = \delta(\vec{K}_0) M_{A \rightarrow BC}(k_0) \quad (3.5)$$

donde el factor  $\delta(\vec{K}_0)$  es una consecuencia de la conservación del momento en el sistema de referencia de A. El factor de normalización puede calcularse de

$$1 = \mathcal{N}_a^2 \left( 1 + \sum_{BC J_b J_c J_{bc} l} \int k_0^2 dk_0 \frac{|M_{A \rightarrow BC}(k_0)|^2}{[m_a - E_b(k_0) - E_c(k_0)]^2} \right) \quad (3.6)$$

en donde se ha utilizado

$$\int d\vec{K}_0 |\langle BC, (J_b J_c) J_{bc}, l; J_a M_a; \vec{K}_0 k_0 | T^\dagger | A \rangle|^2 = |M_{A \rightarrow BC}(k_0)|^2 \quad (3.7)$$

La amplitud de transición de  ${}^3P_0$  a  $M_{A \rightarrow BC}(k_0)$  fue derivada de la base de un oscilador armónico por Roberts & silvestre-Brac. La expresión general para la amplitud de transición puede escribirse como:

$$M_{A \rightarrow BC}(k_0) = 6\gamma\theta_{A \rightarrow BC}\epsilon(l_{\lambda_b}, l_c, L_{bc}, l, l_{\lambda_a}, L, k_0) \quad (3.8)$$

donde  $\theta_{A \rightarrow BC}$  contiene la dependencia de la parte de color-espín-sabor y  $\epsilon(l_{\lambda_b}, l_c, L_{bc}, l, l_{\lambda_a}, L, k_0)$  representa la contribución orbital o radial.

Para el caso especial en que los bariones y mesones pseudoescalares están en su estado base el momento angular orbital es nulo  $l_{\lambda_b} = l_{\lambda_a} = l_c = L_{bc} = 0$  y por lo tanto  $J_a = S_a$ ,  $J_b = S_b$ ,  $J_c = S_c = 0$  y  $J_{bc} = S_{bc} = J_b$ . Debido a la conservación del momento angular orbital y de la paridad tenemos que el momento angular orbital relativo entre el barión B y el mesón C es igual a  $l = 1 = L$ . Como consecuencia, la expresión general para la transición de amplitud  ${}^3P_0$  se simplifica considerablemente. En primer lugar tenemos que la parte de color-espín-sabor  $\theta_{A \rightarrow BC}$  se reduce a

$$\theta_{A \rightarrow BC} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2J_b + 1}{2}} (-1)^{J_\rho + J_a - \frac{1}{2}} \left\{ \begin{matrix} J_a & 1 & J_b \\ \frac{1}{2} & J_\rho & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \mathcal{F}_{A \rightarrow BC} \quad (3.9)$$

donde  $J_\rho$  es el momento angular total de los primeros quarks. El coeficiente  $\mathcal{F}_{A \rightarrow BC}$  contiene los acoplamientos de sabor. A continuación se presentan los coeficientes de color-espín-sabor para el caso de estado base de los bariones del octete acoplados con mesones pseudoescalares.

Coeficientes color-espín-sabor para acoplamientos  $A \rightarrow B_8 + C_8$

$$\begin{pmatrix} N \\ \Sigma \\ \Lambda \\ \Xi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} N\pi & N\eta & \Sigma K & \Lambda K \\ N\bar{K} & \Sigma\pi & \Lambda\pi & \Sigma\eta \\ N\bar{K} & \Sigma\pi & \Lambda\eta & \Xi K \\ \Sigma\bar{K} & \Lambda\bar{K} & \Xi\pi & \Xi\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18\sqrt{3}} & -\frac{1}{18\sqrt{3}} & \frac{1}{18\sqrt{3}} & -\frac{1}{6\sqrt{3}} \\ \frac{1}{27\sqrt{2}} & -\frac{2\sqrt{2}}{27} & -\frac{1}{9\sqrt{3}} & -\frac{1}{9\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3\sqrt{6}} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9\sqrt{3}} & -\frac{1}{9\sqrt{6}} \\ -\frac{5}{18\sqrt{3}} & -\frac{1}{18\sqrt{3}} & \frac{1}{18\sqrt{3}} & -\frac{1}{6\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \\ 5 \\ 27\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Coeficientes color-espín-sabor para acoplamientos  $A \rightarrow B_{10} + C_8$

$$\begin{pmatrix} N \\ \Sigma \\ \Lambda \\ \Xi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta\pi & \Sigma^* K & & \\ \Delta\bar{K} & \Sigma\pi & \Sigma\eta & \Xi^* K \\ \Sigma^*\pi & \Sigma^*\pi & \Xi^* K & \\ \Sigma^*\pi & \Xi^*\pi & \Xi^*\eta & \Omega K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} & \\ \frac{4}{27} & -\frac{2}{27} & -\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} & \frac{2}{27} \\ & -\frac{\sqrt{2}}{9} & \frac{2}{9\sqrt{3}} & \\ \frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} & \frac{2}{9\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

En segundo lugar, la contribución espacial se simplifica a

$$\begin{aligned} \epsilon(k_0) &= -\frac{1}{2} \left( \frac{9\alpha_b^4 \alpha_c^2}{\pi} \right)^{3/4} \frac{4\alpha_b^2 + \alpha_c^2}{(3\alpha_b^2 + \alpha_c^2 + \alpha_d^2)^{5/2}} k_0 e^{-F^2 k_0^2} \\ F^2 &= \frac{\alpha_b^2(12b^2 + 5\alpha_c^2) + \alpha_d^2(20\alpha_b^2 + 3\alpha_c^2)}{24(3\alpha_b^2 + \alpha_c^2 + \alpha_d^2)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

En este modelo son necesarias las funciones de onda de oscilador armónico, las cuales son caracterizadas por parámetros de oscilación  $\alpha$ , podemos ver que tanto  $\epsilon(k_8)$  como  $F^2$  son dependientes de estos parámetros, sin embargo, solo se necesita uno para los bariones  $\alpha_a = \alpha_b$  y otro para los mesones  $\alpha_c$ .

Para ilustrar el modelo, consideremos la función de onda de un nucleón solo con fluctuaciones del tipo barión-pión

$$\begin{aligned} |\psi_N\rangle &= \mathcal{N} \left[ |N\rangle + 6\gamma \int d\vec{K}_0 k_0^2 dk_0 \delta(\vec{K}_0) \right. \\ &\quad \times \left\{ -\frac{15}{18\sqrt{3}} \frac{\epsilon(k_0)}{m_N - E_N(k_0) - E_\pi(k_0)} |N\pi; \vec{K}_0 k_0\rangle \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} \frac{\epsilon(k_0)}{m_N - E_\Delta(k_0) - E_\pi(k_0)} |\Delta\pi; \vec{K}_0 k_0\rangle \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.11)$$



## Capítulo 4

# Cálculo de elementos de matriz

La construcción de las funciones de onda explícitas en el MCM se deben considerar los acoplamiento de isospín y espín de las fluctuaciones con los del barión en cuestión, además que se deben conservar todo los demás números cuánticos, como la carga y extrañeza. Considerando el octete y decuplete de bariones en conjunto con el octete de mesones pseudoescalares se tienen diferentes acoplamientos para cada barión. Para el caso del protón, las fluctuaciones permitidas son del tipo  $N\pi$ ,  $N\eta$ ,  $\Sigma K$ ,  $\Lambda K$  y  $\Delta\pi$ ,  $\Sigma^* K$ . Primero, tomemos en cuenta el acoplamiento de isospín del protón con el de la fluctuación, por ejemplo,  $N\pi$ , para la cual se tienen dos acoplamientos permitidos  $p\pi^0$  y  $n\pi^+$ , recordemos el protón tiene  $I = I_3 = +\frac{1}{2}$ , entonces

$$\begin{aligned}\langle p\pi^0|p\rangle &= \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2}, 1 0 | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \langle n\pi^+|p\rangle &= \langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, 1 1 | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}\end{aligned}\quad (4.1)$$

estos coeficientes de acoplamiento son los coeficientes de Clebsch-Gordan, para cada acoplamiento se tiene un coeficiente, por lo que la función de onda del protón considerando las fluctuaciones anteriormente mencionadas es

$$\begin{aligned}|\psi_p\rangle &= \mathcal{N} \left\{ |p\rangle + a_{N\rightarrow N\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |p\pi^0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |n\pi^+\rangle \right) + a_{N\rightarrow \Sigma K} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^+ K^0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\Sigma^0 K^+\rangle \right) \right. \\ &\quad + a_{N\rightarrow \Lambda K} |\Lambda K^+\rangle + a_{N\rightarrow N\eta} |p\eta\rangle + b_{N\rightarrow \Delta\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta^{++}\pi^-\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta^+\pi^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta^0\pi^+\rangle \right) \\ &\quad \left. + b_{N\rightarrow \Sigma^* K} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma^{*+} K^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma^{*0} K^+\rangle \right) \right\}\end{aligned}\quad (4.2)$$

Recordemos que en el MCM estamos considerando la presencia de una nube piónica alrededor del núcleo, es decir que el barión en cuestión fluctúa en otro barión B más un mesón C de tal manera que se conserven los números cuánticos del barión A. En la función de onda los términos  $|BC\rangle$  pueden generar un momento angular el cual contribuye al espín total del barión, entonces el momento angular debido a estos sistemas  $|BC\rangle$  está dado por



$$\vec{J}_{BC} = \vec{J}_B + \vec{J}_C + \vec{l} \quad (4.3)$$

donde  $\vec{J}_B$  y  $\vec{J}_C$  son los momentos angulares de B y C respectivamente y  $\vec{l}$  es el momento angular orbital entre B y C. Suponiendo que tanto B como C están en su estado base  $\vec{J}_B = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  dependiendo si se habla de un barión del octete o el decuplete respectivamente y ya que solo consideramos mesones pseudoescalares  $\vec{J}_C = 0$ . Además se debe conservar la paridad  $P_A = P_B P_C (-1)^l$ , si el barión A pertenece al octete de bariones entonces  $P_A = +1$  y dado que tanto los bariones del octete y el decuplete tienen paridad  $+1$ , entonces  $P_B = +1$  y como solo se consideran mesones pseudoescalares  $P_C = -1$  por lo que  $\vec{l} = 1$ , entonces para el caso del  $|p\pi^0\rangle$  tenemos

$$\begin{aligned} |p\pi^0; J = M = \frac{1}{2}\rangle &= \sum_{m m_p} \langle \frac{1}{2} m_p 1 m | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle |p m_p, \pi^0; l = 1, m\rangle \\ &= \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 0 | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle |p \frac{1}{2}, \pi^0; 1 0\rangle + \langle \frac{1}{2} -\frac{1}{2} 1 0 | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle |p -\frac{1}{2}, \pi^0; 1 1\rangle \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} |p \frac{1}{2}, \pi^0; 1 0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |p -\frac{1}{2}, \pi^0; 1 1\rangle \end{aligned} \quad (4.4)$$

usualmente se hará uso de la siguiente notación

$$|p\pi^0; J = M = \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |p_{\frac{1}{2}} \pi^0\rangle_{1,0} - \sqrt{\frac{2}{3}} |p_{-\frac{1}{2}} \pi^0\rangle_{1,1} \quad (4.5)$$

de la misma manera se pueden calcular los coeficientes para las demás fluctuaciones, resultando así que la función de onda espín-sabor del protón es:

$$\begin{aligned}
|\Psi_{p, \frac{1}{2}}\rangle = \mathcal{N}_N & \left\{ |p_{\frac{1}{2}}\rangle + \frac{a_{N \rightarrow N\pi}}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |p_{\frac{1}{2}} \pi^0\rangle_{10} - \sqrt{\frac{2}{3}} |p_{-\frac{1}{2}} \pi^0\rangle_{11} \right) \right. \\
& - \sqrt{\frac{2}{3}} a_{N \rightarrow N\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |n_{\frac{1}{2}} \pi^+\rangle_{10} - \sqrt{\frac{2}{3}} |n_{-\frac{1}{2}} \pi^+\rangle_{11} \right) \\
& + a_{N \rightarrow \Sigma K} \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma_{\frac{1}{2}}^+ K^0\rangle_{10} - \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma_{-\frac{1}{2}}^+ K^0\rangle_{11} \right) \\
& - a_{N \rightarrow \Sigma K} \sqrt{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma_{\frac{1}{2}}^0 K^+\rangle_{10} - \sqrt{\frac{2}{3}} |\Sigma_{-\frac{1}{2}}^0 K^+\rangle_{11} \right) \\
& + a_{N \rightarrow \Lambda K} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |\Lambda_{\frac{1}{2}}^0 K^+\rangle_{10} - \sqrt{\frac{2}{3}} |\Lambda_{-\frac{1}{2}}^0 K^+\rangle_{11} \right) \\
& + a_{N \rightarrow N\eta} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} |p_{\frac{1}{2}} \eta\rangle_{10} - \sqrt{\frac{2}{3}} |p_{-\frac{1}{2}} \eta\rangle_{11} \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} b_{N \rightarrow \Delta\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta_{\frac{3}{2}}^{++} \pi^-\rangle_{1,-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta_{\frac{1}{2}}^{++} \pi^-\rangle_{10} + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta_{-\frac{1}{2}}^{++} \pi^-\rangle_{11} \right) \\
& - \frac{1}{\sqrt{3}} b_{N \rightarrow \Delta\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta_{\frac{3}{2}}^+ \pi^0\rangle_{1,-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta_{\frac{1}{2}}^+ \pi^0\rangle_{10} + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta_{-\frac{1}{2}}^+ \pi^0\rangle_{11} \right) \\
& + \frac{1}{\sqrt{6}} b_{N \rightarrow \Delta\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Delta_{\frac{3}{2}}^0 \pi^+\rangle_{1,-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Delta_{\frac{1}{2}}^0 \pi^+\rangle_{10} + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Delta_{-\frac{1}{2}}^0 \pi^+\rangle_{11} \right) \\
& + \sqrt{\frac{2}{3}} b_{N \rightarrow \Sigma^* K} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Sigma_{\frac{3}{2}}^{*+} K^0\rangle_{1,-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma_{\frac{1}{2}}^{*+} K^0\rangle_{10} + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Sigma_{-\frac{1}{2}}^{*+} K^0\rangle_{11} \right) \\
& \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} b_{N \rightarrow \Sigma^* K} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |\Sigma_{\frac{3}{2}}^{*0} K^+\rangle_{1,-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} |\Sigma_{\frac{1}{2}}^{*0} K^+\rangle_{10} + \frac{1}{\sqrt{6}} |\Sigma_{-\frac{1}{2}}^{*0} K^+\rangle_{11} \right) \right\} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

donde, en este caso  $\mathcal{N}_N$  es

$$\mathcal{N}_N = \frac{1}{\sqrt{1 + a_{N \rightarrow N\pi}^2 + a_{N \rightarrow \Sigma K}^2 + a_{N \rightarrow \Lambda K}^2 + a_{N \rightarrow N\eta}^2 + b_{N \rightarrow \Delta\pi}^2 + b_{N \rightarrow \Sigma^* K}^2}} \quad (4.7)$$

Calculando el contenido de sabor de la función de onda del protón obtenemos las siguientes

expresiones:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_p | \Delta u | \Psi_p \rangle &= \mathcal{N}_N \left\{ \frac{4}{3} - \frac{2}{27} a_{N\pi}^2 + \frac{35}{27} b_{\Delta\pi}^2 + \frac{16\sqrt{2}}{27} a_{N\pi} b_{\Delta\pi} - \frac{10}{27} a_{\Sigma K}^2 - \frac{4}{9} a_{N\eta}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{9} a_{\Sigma K} a_{\Lambda K} + \frac{4\sqrt{2}}{9} a_{\Lambda K} b_{\Sigma^* K} + \frac{25}{27} b_{\Sigma^* K}^2 + \frac{20\sqrt{2}}{27} a_{\Sigma K} b_{\Sigma^* K} \right\} \\
\langle \Psi_p | \Delta d | \Psi_p \rangle &= \mathcal{N}_N \left\{ -\frac{1}{3} - \frac{7}{27} a_{N\pi}^2 + \frac{10}{27} b_{\Delta\pi}^2 - \frac{16\sqrt{2}}{27} a_{N\pi} b_{\Delta\pi} - \frac{2}{27} a_{\Sigma K}^2 + \frac{1}{9} a_{N\eta}^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{9} a_{\Sigma K} a_{\Lambda K} - \frac{4\sqrt{2}}{9} a_{\Lambda K} b_{\Sigma^* K} + \frac{5}{27} b_{\Sigma^* K}^2 + \frac{4\sqrt{2}}{27} a_{\Sigma K} b_{\Sigma^* K} \right\} \\
\langle \Psi_p | \Delta s | \Psi_p \rangle &= \mathcal{N}_N \left\{ \frac{1}{9} a_{\Sigma K}^2 - \frac{1}{3} a_{\Lambda K}^2 + \frac{5}{9} b_{\Sigma^* K}^2 - \frac{8\sqrt{2}}{9} a_{\Sigma K} b_{\Sigma^* K} \right\} \tag{4.8}
\end{aligned}$$

donde las cargas axiales  $\Delta q$ , con  $q = u, d$  y  $s$ , denotan la fracción del espín del protón con la que contribuyen los quarks.

De la misma manera como se ha construido la función de onda del protón  $|\Psi_p \frac{1}{2}\rangle$  se pueden construir las de todas las partículas del octete de bariones y calcular el contenido de sabor. Para el caso del neutrón tenemos las siguientes relaciones entre los elementos de matriz como consecuencia de la simetría de isoespín

$$\begin{aligned}
\langle \psi_n | \Delta u | \psi_n \rangle &= \langle \psi_p | \Delta d | \psi_p \rangle \\
\langle \psi_n | \Delta d | \psi_n \rangle &= \langle \psi_p | \Delta u | \psi_p \rangle \\
\langle \psi_n | \Delta s | \psi_n \rangle &= \langle \psi_p | \Delta s | \psi_p \rangle \tag{4.9}
\end{aligned}$$

para los hiperones  $\Sigma$  seguimos el mismo procedimiento. Se construye la función de onda del hiperon  $\Sigma^+$  y se derivan los elementos de matriz de  $\Delta q$  como

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\Sigma^+} | \Delta u | \Psi_{\Sigma^+} \rangle &= \mathcal{N}_\Sigma \left\{ \frac{4}{3} - \frac{1}{3} a_{\Sigma\pi}^2 - \frac{4}{9} a_{\Sigma\eta}^2 - \frac{4}{9} a_{N\bar{K}}^2 + \frac{1}{9} a_{\Xi K}^2 + \frac{55}{36} b_{\Delta\bar{K}}^2 + \frac{5}{6} b_{\Sigma^*\pi}^2 + \frac{5}{9} b_{\Xi^*K}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{10}{9} b_{\Sigma^*\eta}^2 + \frac{4}{3\sqrt{3}} a_{\Lambda\pi} b_{\Sigma^*\pi} + \frac{2\sqrt{2}}{3} a_{\Sigma\pi} b_{\Sigma^*\pi} + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} a_{\Lambda\pi} a_{\Sigma\pi} + \frac{8\sqrt{2}}{9} a_{\Sigma\eta} b_{\Sigma^*\eta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4\sqrt{2}}{9} a_{N\bar{K}} b_{\Delta\bar{K}} + \frac{8\sqrt{2}}{9} a_{\Xi K} b_{\Xi^*K} \right\} \\
\langle \Psi_{\Sigma^+} | \Delta d | \Psi_{\Sigma^+} \rangle &= \mathcal{N}_\Sigma \left\{ -\frac{1}{9} a_{\Sigma\pi}^2 + \frac{1}{9} a_{N\bar{K}}^2 + \frac{5}{36} b_{\Delta\bar{K}}^2 + \frac{5}{18} b_{\Sigma^*\pi}^2 - \frac{4}{3\sqrt{3}} a_{\Lambda\pi} b_{\Sigma^*\pi} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\sqrt{2}}{9} a_{\Sigma\pi} b_{\Sigma^*\pi} - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} a_{\Lambda\pi} a_{\Sigma\pi} - \frac{4\sqrt{2}}{9} a_{N\bar{K}} b_{\Delta\bar{K}} \right\} \\
\langle \Psi_{\Sigma^+} | \Delta s | \Psi_{\Sigma^+} \rangle &= \mathcal{N}_\Sigma \left\{ -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} a_{\Lambda\pi}^2 + \frac{1}{9} a_{\Sigma\pi}^2 + \frac{1}{9} a_{\Sigma\eta}^2 - \frac{4}{9} a_{\Xi K}^2 + \frac{5}{9} b_{\Sigma^*\pi}^2 + \frac{10}{9} b_{\Sigma^*K}^2 + \frac{5}{9} b_{\Sigma^*\eta}^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{8\sqrt{2}}{9} a_{\Sigma\pi} b_{\Sigma^*\pi} - \frac{8\sqrt{2}}{9} a_{\Sigma\eta} b_{\Sigma^*\eta} - \frac{8\sqrt{2}}{9} a_{\Xi K} b_{\Xi^*K} \right\} \tag{4.10}
\end{aligned}$$

entonces con las expresiones anteriores para el contenido de sabor de  $\Sigma^+$  podemos conocer las de  $\Sigma^-$ , es decir, usando la nuevamente la simetría de isoespín

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{\Sigma^-} | \Delta u | \psi_{\Sigma^-} \rangle &= \langle \psi_{\Sigma^+} | \Delta d | \psi_{\Sigma^+} \rangle \\
\langle \psi_{\Sigma^-} | \Delta d | \psi_{\Sigma^-} \rangle &= \langle \psi_{\Sigma^+} | \Delta u | \psi_{\Sigma^+} \rangle \\
\langle \psi_{\Sigma^-} | \Delta s | \psi_{\Sigma^-} \rangle &= \langle \psi_{\Sigma^+} | \Delta s | \psi_{\Sigma^+} \rangle
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Para  $\Sigma^0$  las relaciones de sabor con los bariones  $\Sigma$  es un poco diferentes a las anteriores, sin embargo tiene una forma general, de nuevo, usando la simetría de isoespín

$$\langle \psi_{\Sigma^0} | \Delta q | \psi_{\Sigma^0} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \psi_{\Sigma^+} | \Delta q | \psi_{\Sigma^+} \rangle + \langle \psi_{\Sigma^-} | \Delta q | \psi_{\Sigma^-} \rangle) \tag{4.12}$$

donde  $\Delta q = \Delta u, \Delta d, \Delta s$ . Para el barión  $\Lambda^0$  las expresiones para los elementos de matriz  $\Delta$  son

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\Lambda^0} | \Delta u | \Psi_{\Lambda^0} \rangle &= \mathcal{N}_{\Lambda} \left\{ -\frac{1}{6} a_{N\bar{K}}^2 - \frac{2}{9} a_{\Sigma\pi}^2 + \frac{1}{18} a_{\Xi K}^2 + \frac{5}{9} b_{\Sigma\pi}^2 + \frac{5}{18} b_{\Xi K}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{4\sqrt{2}}{9} a_{\Sigma\pi} b_{\Sigma\pi} + \frac{4\sqrt{2}}{9} a_{\Xi K} b_{\Xi K} \right\} \\
\langle \Psi_{\Lambda^0} | \Delta d | \Psi_{\Lambda^0} \rangle &= \mathcal{N}_{\Lambda} \left\{ -\frac{1}{6} a_{N\bar{K}}^2 - \frac{2}{9} a_{\Sigma\pi}^2 + \frac{1}{18} a_{\Xi K}^2 + \frac{5}{9} b_{\Sigma\pi}^2 + \frac{5}{18} b_{\Xi K}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{4\sqrt{2}}{9} a_{\Sigma\pi} b_{\Sigma\pi} + \frac{4\sqrt{2}}{9} a_{\Xi K} b_{\Xi K} \right\} \\
\langle \Psi_{\Lambda^0} | \Delta s | \Psi_{\Lambda^0} \rangle &= \mathcal{N}_{\Lambda} \left\{ 1 + \frac{1}{9} a_{\Sigma\pi}^2 - \frac{1}{3} a_{\Lambda\eta}^2 - \frac{4}{9} a_{\Xi K}^2 + \frac{5}{9} b_{\Sigma\pi}^2 + \frac{10}{9} b_{\Xi K}^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{8\sqrt{2}}{9} a_{\Sigma\pi} b_{\Sigma\pi} - \frac{8\sqrt{2}}{9} a_{\Xi K} b_{\Xi K} \right\}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Por último, la simetría de isoespín nos permite establecer relaciones en cuanto al contenido de sabor entre el barión  $\Xi^-$  y el barión  $\Xi^0$ , por lo que solo se presenta las expresiones explicitas del barión  $\Xi^0$

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{\Xi^0} | \Delta u | \Psi_{\Xi^0} \rangle &= \mathcal{N}_{\Xi} \left\{ -\frac{1}{3} - \frac{10}{27} a_{\Sigma\bar{K}}^2 + \frac{1}{27} a_{\Xi\pi}^2 + \frac{1}{9} a_{\Xi\eta}^2 + \frac{25}{27} b_{\Sigma^* \bar{K}}^2 + \frac{5}{27} b_{\Xi^* \pi}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{5}{9} b_{\Xi^* \eta}^2 + \frac{20\sqrt{2}}{27} a_{\Sigma\bar{K}} b_{\Sigma^* \bar{K}} + \frac{4\sqrt{2}}{9} a_{\Lambda\bar{K}} b_{\Sigma^* \bar{K}} + \frac{2}{9} a_{\Sigma\bar{K}} a_{\Lambda\bar{K}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{8\sqrt{2}}{27} a_{\Xi\pi} b_{\Xi^* \pi} + \frac{8\sqrt{2}}{9} a_{\Xi\eta} b_{\Xi^* \eta} \right\} \\
\langle \Psi_{\Xi^0} | \Delta d | \Psi_{\Xi^0} \rangle &= \mathcal{N}_{\Xi} \left\{ -\frac{2}{27} a_{\Sigma\bar{K}}^2 + \frac{2}{27} a_{\Xi\pi}^2 + \frac{5}{27} b_{\Sigma^* \bar{K}}^2 + \frac{10}{27} b_{\Xi^* \pi}^2 - \frac{2}{9} a_{\Sigma\bar{K}} a_{\Lambda\bar{K}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4\sqrt{2}}{27} a_{\Sigma\bar{K}} b_{\Sigma^* \bar{K}} - \frac{4\sqrt{2}}{9} a_{\Lambda\bar{K}} b_{\Sigma^* \bar{K}} + \frac{16\sqrt{2}}{27} a_{\Xi\pi} b_{\Xi^* \pi} \right\} \\
\langle \Psi_{\Xi^0} | \Delta s | \Psi_{\Xi^0} \rangle &= \mathcal{N}_{\Xi} \left\{ \frac{4}{3} + \frac{1}{9} a_{\Sigma\bar{K}}^2 - \frac{1}{3} a_{\Lambda\bar{K}}^2 - \frac{4}{9} a_{\Xi\pi}^2 - \frac{4}{9} a_{\Xi\eta}^2 + \frac{5}{9} b_{\Sigma^* \bar{K}}^2 + \frac{10}{9} b_{\Xi^* \pi}^2 + \frac{10}{9} b_{\Xi^* \eta}^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{5}{3} b_{\Omega K}^2 - \frac{8\sqrt{2}}{9} a_{\Sigma\bar{K}} b_{\Sigma^* \bar{K}} - \frac{8\sqrt{2}}{9} a_{\Xi\pi} b_{\Xi^* \pi} - \frac{8\sqrt{2}}{9} a_{\Xi\eta} b_{\Xi^* \eta} \right\}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

las relaciones de isoespín entre  $\Xi^-$  y  $\Xi^0$  son las siguientes

$$\begin{aligned}\langle \psi_{\Xi^-} | \Delta u | \psi_{\Xi^-} \rangle &= \langle \psi_{\Xi^0} | \Delta d | \psi_{\Xi^0} \rangle \\ \langle \psi_{\Xi^-} | \Delta d | \psi_{\Xi^-} \rangle &= \langle \psi_{\Xi^0} | \Delta u | \psi_{\Xi^0} \rangle \\ \langle \psi_{\Xi^-} | \Delta s | \psi_{\Xi^-} \rangle &= \langle \psi_{\Xi^0} | \Delta s | \psi_{\Xi^0} \rangle\end{aligned}\tag{4.15}$$

## Capítulo 5

# Resultados

Toda amplitud de una fluctuación del tipo  $8 \rightarrow 8 \otimes 8$  involucra una superposición lineal de un acoplamiento entre una parte simétrica  $8_1$  y otra antisimétrica  $8_2$ , este acoplamiento esta pesado por los factores  $g_1$  y  $g_2$ , los cuales pueden consultarse en las siguientes matrices[19]:

$$\begin{aligned}
 8_1 & \rightarrow 8 \otimes 8 \\
 \begin{pmatrix} N \\ \Sigma \\ \Lambda \\ \Xi \end{pmatrix} & \rightarrow \begin{pmatrix} N\pi & N\eta & \Sigma K & \Lambda K \\ N\bar{K} & \Sigma\pi & \Lambda\pi & \Sigma\eta & \Xi K \\ N\bar{K} & \Sigma\pi & \Lambda\eta & \Xi K \\ \Sigma\bar{K} & \Lambda\bar{K} & \Xi\pi & \Xi\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 9 & -1 & -9 & -1 \\ -6 & 0 & 4 & 4 & -6 \\ 2 & -12 & -4 & -2 \\ 9 & -1 & -9 & -1 \end{pmatrix}^{1/2}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
 8_2 & \rightarrow 8 \otimes 8 \\
 \begin{pmatrix} N \\ \Sigma \\ \Lambda \\ \Xi \end{pmatrix} & \rightarrow \begin{pmatrix} N\pi & N\eta & \Sigma K & \Lambda K \\ N\bar{K} & \Sigma\pi & \Lambda\pi & \Sigma\eta & \Xi K \\ N\bar{K} & \Sigma\pi & \Lambda\eta & \Xi K \\ \Sigma\bar{K} & \Lambda\bar{K} & \Xi\pi & \Xi\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}^{1/2}
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
 8 & \rightarrow 10 \otimes 8 \\
 \begin{pmatrix} N \\ \Sigma \\ \Lambda \\ \Xi \end{pmatrix} & \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta\pi & \Sigma^* K \\ \Delta\bar{K} & \Sigma^*\pi & \Sigma^*\eta & \Xi^* K \\ \Sigma^*\pi & \Xi^* K \\ \Sigma^*\bar{K} & \Xi^*\pi & \Xi^*\eta & \Omega K \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -12 & 3 \\ 8 & -2 & -3 & 2 \\ -9 & 6 \\ 3 & -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}^{1/2}
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Para calcular los coeficientes  $a$  y  $b$  en el MCM primero fijamos las variables independientes para el nucleón,  $a_{N \rightarrow N\pi}$  y  $b_{N \rightarrow \Delta\pi}$  y luego esuamos la simetría de sabor para determinar los

demás. Para los acoplamientos del nucleón tomamos en cuenta las relaciones dadas en las matrices 5.1 y 5.2, de tal manera que podemos escribir

$$\begin{aligned}
a_{N \rightarrow N\pi} &= \sqrt{\frac{9}{20}}g_1 + \frac{1}{2}g_2 \\
a_{N \rightarrow \Sigma K} &= -\sqrt{\frac{9}{20}}g_1 + \frac{1}{2}g_2 \\
a_{N \rightarrow N\eta} &= -\sqrt{\frac{1}{20}}g_1 + \frac{1}{2}g_2 \\
a_{N \rightarrow \Lambda K} &= -\sqrt{\frac{1}{20}}g_1 - \frac{1}{2}g_2
\end{aligned} \tag{5.4}$$

y de la matriz 5.3 podemos observar que las fluctuaciones del tipo  $\Delta\pi$  y  $\Sigma^*K$  están relacionadas como se muestra a continuación:

$$b_{N \rightarrow \Sigma^*K} = -\frac{1}{2}b_{N \rightarrow \Delta\pi} \tag{5.5}$$

Para encontrar el valor numérico de los coeficientes  $a$  es necesaria información adicional, entonces debemos considerar los acoplamientos D y F que aparecen en el lagrangiano de interacción:

$$\mathcal{L} = -\sqrt{2}DTr(\{\overline{B}B\}M) + \sqrt{2}FTr([\overline{B}B]M) \tag{5.6}$$

Donde M es la matriz del octete de mesones, B pertenece a la matriz de bariones y  $\overline{B}$  a su matriz adjunta; para los coeficientes D y F se tiene:

$$D = \frac{\sqrt{30}}{40}g_1, \quad F = \frac{\sqrt{6}}{24}g_2, \quad \frac{F}{D} = \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{g_2}{g_1} \tag{5.7}$$

Los coeficientes D y F se pueden determinar a partir de los decaimientos  $\beta$

$$\begin{aligned}
n &\rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e & F + D &= 1.2701 \\
\Sigma^- &\rightarrow n + e^- + \overline{\nu}_e & F - D &= -0.340
\end{aligned} \tag{5.8}$$

de las expresiones anteriores se tiene que  $D=0.805$  y  $F=0.465$ [19], posteriormente usaremos la razón  $F/D=0.578$ .

Con las ecuaciones 5.7 podemos expresar los coeficientes asociados a las fluctuaciones  $\Sigma K$ ,  $\Lambda K$  y  $N\eta$  en términos de  $a_{N \rightarrow N\pi}$

$$\begin{aligned}
a_{N \rightarrow \Sigma K} &= \left[ \frac{-1 + \frac{F}{D}}{1 + \frac{F}{D}} \right] a_{N \rightarrow N\pi} \\
a_{N \rightarrow N\eta} &= \left[ \frac{-1 + 3\frac{F}{D}}{1 + \frac{F}{D}} \right] \frac{a_{N \rightarrow N\pi}}{3} \\
a_{N \rightarrow \Lambda K} &= \left[ \frac{-1 - 3\frac{F}{D}}{1 + \frac{F}{D}} \right] \frac{a_{N \rightarrow N\pi}}{3}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Entonces, conociendo los valores de  $a_{N \rightarrow N\pi}$  y  $b_{N \rightarrow \Delta\pi}$  en combinación con el valor de  $F/D$  determinado por los decaimientos beta podemos obtener un valor numérico de  $\Delta u$ ,  $\Delta d$  y  $\Delta s$ . El análisis realizado por W Chang y J. Peng[20] fija los valores de  $P(\bar{u})$  y  $P(\bar{d})$ , entonces primero tenemos que calcular las expresiones para  $P(\bar{u})$  y  $P(\bar{d})$ :

$$\begin{aligned} P(\bar{u}) &= N_N^2 \left\{ \frac{1}{6} a_{N \rightarrow N\pi}^2 + \frac{1}{6} a_{N \rightarrow N\eta}^2 + \frac{4}{6} b_{N \rightarrow \Delta\pi}^2 + \frac{2}{6} a_{N \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow N\eta} \right\} \\ P(\bar{d}) &= N_N^2 \left\{ \frac{5}{6} a_{N \rightarrow N\pi}^2 + \frac{1}{6} a_{N \rightarrow N\eta}^2 + \frac{2}{6} b_{N \rightarrow \Delta\pi}^2 - \frac{2}{6} a_{N \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow N\eta} \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$P(\bar{u})$  y  $P(\bar{d})$  se han determinado midiendo la distribución de  $\bar{d} - \bar{u}$  y  $\bar{d} - \bar{u} - s - \bar{s}$  en el protón [20], cuyos valores son:

$$P(\bar{u}) = 0.176 \quad P(\bar{d}) = 0.294 \quad (5.11)$$

Sustituyendo las expresiones de la ecuación 5.9 en 5.10 obtenemos:

$$\begin{aligned} P(\bar{u}) &= N_N^2 \frac{1}{6} \left\{ \left[ \frac{4+24F/D+36F^2/D^2}{9(1+F/D)^2} \right] a_{N \rightarrow N\pi}^2 + 4b_{N \rightarrow \Delta\pi}^2 \right\} \\ P(\bar{d}) &= N_N^2 \frac{1}{6} \left\{ \left[ \frac{52+72F/D+36F^2/D^2}{9(1+F/D)^2} \right] a_{N \rightarrow N\pi}^2 + 2b_{N \rightarrow \Delta\pi}^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde  $N_p^2$  en términos de  $F/D$  tiene la siguiente forma

$$N_N^2 = \frac{1}{1 + \frac{a_{N \rightarrow N\pi}^2}{9(1+F/D)^2} [20+36F^2/D^2] + \frac{5}{4} b_{N \rightarrow \Delta\pi}^2} \quad (5.13)$$

Observemos que la ecuación 5.12 y 5.11 en conjunto forman un sistema de dos ecuaciones de segundo grado con dos variables independientes,  $a_{N\pi}$  y  $b_{\Delta\pi}$ .

Considerando las expresiones de la ecuación 5.9 y 5.12 se tiene

$$\left[ \frac{20P(\bar{u}) - \frac{4}{6} + 6F^2/D^2(6P(\bar{u}) - 1) - 4F/D}{9(1+F/D)^2} \right] a_{N \rightarrow N\pi}^2 + \left( \frac{5}{4} P(\bar{u}) - \frac{4}{6} \right) b_{N \rightarrow \Delta\pi}^2 + P(\bar{u}) \quad (5.14)$$

$$\left[ \frac{20P(\bar{d}) - \frac{52}{6} + 6F^2/D^2(6P(\bar{d}) - 1) - 12F/D}{9(1+F/D)^2} \right] a_{N \rightarrow N\pi}^2 + \frac{22}{24} b_{N \rightarrow \Delta\pi}^2 + P(\bar{d}) \quad (5.15)$$

Entonces con las ecuaciones 5.14, 5.15 y los valores de  $P(\bar{u})$  y  $P(\bar{d})$  tenemos que  $a_{N \rightarrow N\pi}^2 = 0.846$  y  $b_{N \rightarrow \Delta\pi}^2 = 0.449$ . Sustituyendo los resultados anteriores en 5.9 y 5.5 se obtienen todos los coeficientes  $a$  y  $b$  presentes en la función de onda de los nucleones, así como de los hiperones  $\Sigma$ ,  $\Lambda$  y  $\Xi$ .

En el modelo de quarks unquenched el procedimiento para calcular los coeficientes  $a$  y  $b$  es mucho más sencillo, cada coeficiente se puede calcular resolviendo una integral, la cual depende del tipo de acoplamiento que se esté dando, por ejemplo si consideramos fluctuaciones solo del tipo  $N\pi$  y  $\Delta\pi$  tenemos las siguientes relaciones



$$\begin{aligned}
a_{N \rightarrow N\pi} &\rightarrow \int k_0^2 dk_0 \frac{|M_{N \rightarrow N\pi}(k_0)|^2}{\Delta E_{N\pi}^2(k_0)} \\
b_{N \rightarrow \Delta\pi} &\rightarrow \int k_0^2 dk_0 \frac{|M_{N \rightarrow \Delta\pi}(k_0)|^2}{\Delta E_{N\pi}^2(k_0)} \\
a_{N \rightarrow N\pi} b_{N \rightarrow \Delta\pi} &\rightarrow Re \left( \int k_0^2 dk_0 \frac{|M_{N \rightarrow N\pi}(k_0)|}{\Delta E_{N\pi}(k_0)} \frac{|M_{N \rightarrow \Delta\pi}(k_0)|}{\Delta E_{\Delta\pi}(k_0)} \right)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Se deben considerar relaciones parecidas a las de 5.16 para los coeficientes asociados a fluctuaciones del tipo  $\Sigma K$ ,  $\Lambda K$  y  $N\eta$ ; como se expuso en el capítulo 2 dichas integrales dependen de constantes como la masa de los bariones y mesones,  $F$  y  $\epsilon(k_0)$ , estas dos últimas dependen a su vez de las constantes  $\alpha$ , cuyos valores son  $\alpha_a^2 = \alpha_b^2 = 9.77$ ,  $\alpha_c^2 = 6.25$  y  $\alpha_c^2 = 0$ , el único parámetro por definir es  $\gamma^2$  [16].

Para encontrar el valor de  $\gamma$  se consideró la asimetría de sabor en el protón  $P(\bar{d}) - P(\bar{u}) = 0.118$ , es decir, tomando la diferencia entre las ecuaciones 5.10 se llega a la siguiente expresión

$$\Delta P = P(\bar{d}) - P(\bar{u}) = N_N^2 \left( \frac{2}{3} a_{N \rightarrow N\pi}^2 - \frac{1}{3} b_{N \rightarrow \Delta\pi}^2 - \frac{2}{3} a_{N \rightarrow N\pi} a_{N \rightarrow N\eta} \right) \tag{5.17}$$

donde  $N_N^2$  está dado por la ecuación 4.7, entonces de la expresión anterior se puede despejar  $\gamma^2$  y queda

$$\begin{aligned}
\gamma^2 &= \frac{-3\Delta P}{a_{N \rightarrow N\pi}^{2*} (3\Delta P - 2) + 3\Delta P (a_{N \rightarrow N\eta}^{2*} + a_{N \rightarrow \Sigma K}^{2*} + a_{N \rightarrow \Lambda K}^{2*} + b_{N \rightarrow \Sigma^* K}^{2*})} \\
&+ \frac{-3\Delta P}{b_{N \rightarrow \Delta\pi}^{2*} (3\Delta P + 1) + 2a_{N \rightarrow N\pi}^* a_{N \rightarrow N\eta}^*}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Entonces sustituyendo relaciones similares a las de 5.16 en la ecuación 5.18 tenemos que  $\gamma^2 = 49.92$ , el superíndice \* en los coeficientes denota que se ha factorizado  $\gamma$  de la integral. Nótese que las integrales dependen de los términos de energía  $E$ , y estos a su vez de las masas de los bariones y mesones involucrados [19], las cuales se tomaron como un promedio de las masas de los correspondientes multipletes, por ejemplo  $m_N$  es el promedio de las masas entre el protón y el neutrón.

Considerando el procedimiento expuesto anteriormente para el MCM y el UQM respectivamente tenemos los resultados para el nucleón mostrados en la siguiente tabla.

$N$		
	<i>MCM</i>	<i>UQM</i>
$a_{N \rightarrow N\pi}^2$	0.846	1.173
$a_{N \rightarrow \Sigma K}^2$	0.060	0.020
$a_{N \rightarrow N\eta}^2$	0.020	0.027
$a_{N \rightarrow \Lambda K}^2$	0.282	0.200
$b_{N \rightarrow \Delta\pi}^2$	0.449	0.806
$b_{N \rightarrow \Sigma^* K}^2$	0.112	0.124
$a_{N \rightarrow N\pi} b_{N \rightarrow \Delta\pi}$	0.617	0.961
$a_{N \rightarrow \Sigma K} a_{N \rightarrow \Lambda K}$	0.130	0.063
$a_{N \rightarrow \Sigma K} b_{N \rightarrow \Sigma^* K}$	0.082	0.049
$a_{N \rightarrow \Lambda K} b_{N \rightarrow \Sigma^* K}$	0.178	0.157

Con las matrices 5.1, 5.2 y 5.3 podemos escribir todos los coeficientes  $a_{B_8 M_8}$  y  $b_{B_{10} M_8}$  en términos de  $a_{N \rightarrow N\pi}$  y  $b_{N \rightarrow \Delta\pi}$ , los cuales se muestran en las siguientes tablas para los hiperones  $\Sigma$ ,  $\Lambda$  y  $\Xi$ , respectivamente

$\Sigma$		
	<i>MCM</i>	<i>UQM</i>
$a_{\Sigma \rightarrow N\bar{K}}^2$	0.040	0.037
$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma\pi}^2$	0.302	0.541
$a_{\Sigma \rightarrow \Lambda\pi}^2$	0.389	0.264
$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma\eta}^2$	0.151	0.118
$a_{\Sigma \rightarrow \Xi K}^2$	0.564	0.423
$b_{\Sigma \rightarrow \Delta\bar{K}}^2$	0.299	0.629
$b_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.075	0.170
$b_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta}^2$	0.112	0.172
$b_{\Sigma \rightarrow \Xi^* K}^2$	0.075	0.098
$a_{\Sigma \rightarrow N\bar{K}} b_{\Sigma \rightarrow \Delta\bar{K}}$	0.101	0.152
$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma\pi} b_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \pi}$	0.150	0.301
$a_{\Sigma \rightarrow \Lambda\pi} b_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \pi}$	0.106	0.207
$a_{\Sigma \rightarrow \Lambda\pi} a_{\Sigma \rightarrow \Sigma\pi}$	0.213	0.376
$a_{\Sigma \rightarrow \Sigma\eta} b_{\Sigma \rightarrow \Sigma^* \eta}$	0.130	0.142
$a_{\Sigma \rightarrow \Xi K} b_{\Sigma \rightarrow \Xi^* K}$	0.205	0.203

$\Lambda$		
	<i>MCM</i>	<i>UQM</i>
$a_{\Lambda \rightarrow N\bar{K}}^2$	0.564	0.805
$a_{\Lambda \rightarrow \Sigma\pi}^2$	0.453	0.486
$a_{\Lambda \rightarrow \Lambda\eta}^2$	0.151	0.116
$a_{\Lambda \rightarrow \Xi K}^2$	0.041	0.044
$b_{\Lambda \rightarrow \Sigma^* \pi}^2$	0.337	0.651
$b_{\Lambda \rightarrow \Xi^* K}^2$	0.225	0.262
$a_{\Lambda \rightarrow \Sigma\pi} b_{\Lambda \rightarrow \Sigma^* \pi}$	-0.390	-0.560
$a_{\Lambda \rightarrow \Xi K} b_{\Lambda \rightarrow \Xi^* K}$	-0.096	-0.108

$\Xi$		
	<i>MCM</i>	<i>UQM</i>
$a_{\Xi \rightarrow \Sigma \bar{K}}^2$	0.920	1.056
$a_{\Xi \rightarrow \Lambda \bar{K}}^2$	0.020	0.051
$a_{\Xi \rightarrow \Xi \pi}^2$	0.060	0.052
$a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta}^2$	0.282	0.272
$b_{\Xi \rightarrow \Sigma^* \bar{K}}^2$	0.112	0.230
$b_{\Xi \rightarrow \Xi^* \pi}^2$	0.112	0.248
$b_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta}^2$	0.112	0.170
$b_{\Xi \rightarrow \Omega K}^2$	0.225	0.293
$a_{\Xi \rightarrow \Sigma \bar{K}} b_{\Xi \rightarrow \Sigma^* \bar{K}}$	-0.308	-0.491
$a_{\Xi \rightarrow \Lambda \bar{K}} b_{\Xi \rightarrow \Sigma^* \bar{K}}$	-0.048	-0.107
$a_{\Xi \rightarrow \Xi \pi} b_{\Xi \rightarrow \Xi^* \pi}$	-0.082	-0.113
$a_{\Xi \rightarrow \Xi \eta} b_{\Xi \rightarrow \Xi^* \eta}$	-0.178	-0.215
$a_{\Xi \rightarrow \Lambda \bar{K}} a_{\Xi \rightarrow \Sigma \bar{K}}$	0.131	0.232

Conociendo los coeficientes para los bariones  $\Sigma$ ,  $\Lambda$  y  $\Xi$  se prosiguió a calcular el contenido de sabor utilizando las ecuaciones, 4.10, 4.13 y 4.14.

B	MCM			UQM		
	$\langle \Psi_B   \Delta u   \Psi_B \rangle$	$\langle \Psi_B   \Delta d   \Psi_B \rangle$	$\langle \Psi_B   \Delta s   \Psi_B \rangle$	$\langle \Psi_B   \Delta u   \Psi_B \rangle$	$\langle \Psi_B   \Delta d   \Psi_B \rangle$	$\langle \Psi_B   \Delta s   \Psi_B \rangle$
p	0.963	-0.364	-0.046	1.000	-0.365	-0.017
n	-0.364	0.963	-0.046	-0.365	1.000	-0.017
$\Sigma^+$	0.963	-0.046	-0.364	1.030	-0.053	-0.304
$\Sigma^0$	0.458	0.458	-0.364	0.488	0.488	-0.304
$\Sigma^-$	-0.046	0.963	-0.364	-0.053	1.030	-0.304
$\Lambda^0$	-0.090	-0.090	0.733	-0.067	-0.067	0.740
$\Xi^0$	-0.364	-0.046	0.963	-0.352	-0.036	1.008
$\Xi^-$	-0.046	-0.364	0.963	-0.036	-0.352	1.008

Cuadro 5.1: Contenido de sabor de los bariones del octete en el MCM y UQM

Para poder hacer una comparación entre los resultados obtenidos en ambos modelos debemos mencionar las consideraciones hechas al realizar los cálculos. En primer lugar debemos recalcar que en el MCM se deben fijar los coeficientes F y D de datos obtenidos experimentalmente en los decaimientos beta, posteriormente se utilizó información experimental en la probabilidad de encontrar quarks  $\bar{u}$  y  $\bar{d}$  en el protón, además que al considerar los factores isoescalares se hizo uso de la simetría de SU(3). Por otro lado en el UQM solo se necesita fijar el parámetro  $\gamma$ , lo cual se hizo al igual que en MCM considerando información experimental en la probabilidad de encontrar quarks  $\bar{u}$  y  $\bar{d}$  en el protón, y se consideró las un promedio de las masas en los multipletes, de esta manera se conserva la simetría de isoespín SU(2). A continuación se presenta una comparación de los resultados para el protón entre distintos modelos y los datos experimentales

Cuadro 5.2: Comparación de los resultados para el contenido sabor en el protón en distintos modelos y los datos experimentales.

Protón	HERMES	MCM	UQM	CQM
$\Delta u$	0.842	0.963	1.000	$\frac{4}{3}$
$\Delta d$	-0.427	-0.364	-0.365	$-\frac{1}{3}$
$\Delta s$	-0.085	-0.046	-0.017	0

Dado que estamos estudiando el espín de cuerpos con estructura tenemos que estudiar el comportamiento de las funciones de estructura como las reglas de suma de Ellis-Jaffe y Bjorken. Las cuales pueden calcularse como

$$\begin{aligned}
 S_{EJ}^p &= \int_0^1 g_1^p(x) dx = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 (\Delta q)_p = \frac{1}{18} (4\Delta u + \Delta d + \Delta s)_p \\
 S_{EJ}^n &= \int_0^1 g_1^n(x) dx = \frac{1}{2} \sum_q e_q^2 (\Delta q)_n = \frac{1}{18} (4\Delta d + \Delta u + \Delta s)_p \\
 S_B &= \int_0^1 [g_1^p - g_1^n](x) dx = \frac{1}{6} (\Delta u - \Delta d)_p
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

donde  $e_q$  es la carga de los quarks, y se usó la simetría de isospín para obtener  $S_{EJ}^n$  en términos de los elementos de matriz del protón. Por ello presentamos la tabla 5.3, en ella reportamos los resultados para  $S_{EJ}$  de los bariones del octete en el MCM y UQM.

En un análisis parecido realizado por Holtmann, Szczurek y Speth[27] se reportan valores para  $S_{EJ}^p$  y  $S_{EJ}^n$ . Realizaron dos análisis, uno en el modelo SU(6) y otro en el modelo SU(3), en SU(6) los coeficientes F y D toman valores del modelo de quarks,  $F = \frac{2}{3}$  y  $D = 1$ , y en el SU(3) los coeficientes F y D se fijan con datos experimentales de los decaimientos  $\beta$ . En el caso del protón, véase la tabla 5.4, al comparar con los resultados de Holtmann SU(3), donde se reporta  $S_{EJ}^p = 0.169$ , tenemos una diferencia de aproximadamente el 13% en el MCM y del 18% en el UQM, sin embargo en ninguno de los casos estamos verdaderamente cerca de ajustar a los resultados experimentales del EMC y E142, a lo menos tenemos una diferencia del 40%. Por otro lado, para el neutrón tenemos que los resultados teóricos obtenidos difieren en 30% y 35% en el MCM y UQM respectivamente, y tampoco ajusta a los valores experimentales reportados por SMC, aunque cualitativamente son del orden.

Las discrepancias en los resultados se deben a las consideraciones tomadas para los diferentes modelos. En el trabajo de Holtmann se considera el Convolution Model aplicado a las funciones de estructura del nucleón visto como un sistema compuesto de mesones y bariones virtuales; con este modelo obtienen para la regla de suma de Gottfried  $S_G = 0.224$ , como consecuencia  $P(\bar{d}) - P(\bar{u}) = 0.158$ , el cual difiere en gran medida con el que se ha considerado en nuestro cálculo,  $P(\bar{d}) - P(\bar{u}) = 0.118$ , también al fijar los parámetros F y D de los resultados experimentales para los decaimientos  $\beta$  se introducen discrepancias, además que asumen la simetría

Cuadro 5.3: Resultados para la regla de suma de Ellis-Jaffe, en el CQM, MCM y UQM.

		CQM	MCM	UQM
$S_{EJ}^p$	$\frac{5}{18}$	0.278	0.191	0.201
$S_{EJ}^n$	0	0	-0.030	-0.027
$S_{EJ}^{\Sigma^+}$	$\frac{5}{18}$	0.278	0.191	0.209
$S_{EJ}^{\Sigma^0}$	$\frac{3}{18}$	0.167	0.107	0.119
$S_{EJ}^{\Sigma^-}$	$\frac{1}{18}$	0.056	0.023	0.028
$S_{EJ}^{\Xi^0}$	0	0	-0.030	-0.024
$S_{EJ}^{\Xi^-}$	$\frac{1}{18}$	0.056	0.023	0.028
$S_{EJ}^{\Lambda^0}$	$\frac{1}{18}$	0.056	0.016	0.022
$S_B$	$\frac{5}{18}$	0.278	0.221	0.228

de SU(3), la cual se mantiene en el MCM pero no en el UQM.

También podemos hacer un análisis de sobre los decaimientos  $\beta$ , ya que es posible expresar los decaimientos  $\beta$  en términos de  $\Delta q$  de los bariones[21][22][23]. Por el ejemplo, el decaimiento  $n \rightarrow p$  sucede a través de una corriente axial  $A = \bar{u}\gamma_\mu\gamma^5 d$  con la cual se cambia un quark  $u$  en  $d$ , es decir, tenemos  $\langle p|A|n\rangle = \langle p|\bar{u}\gamma_\mu\gamma^5 d|n\rangle$ , usando la simetría de isospín tenemos

$$\begin{aligned}\langle p|A|n\rangle &= \langle p|\bar{u}\gamma_\mu\gamma^5 d|n\rangle \\ \langle p|\bar{u}\gamma_\mu\gamma^5 d I_-|p\rangle &= \langle p|[\bar{u}\gamma_\mu\gamma^5 d, I_-]|p\rangle\end{aligned}\tag{5.20}$$

al evaluar el conmutador  $[\bar{u}\gamma_\mu\gamma^5 d, I_-]$  donde  $I_- = d^\dagger u$  obtenemos

$$[\bar{u}\gamma_\mu\gamma^5 d, I_-] = \bar{u}\gamma_\mu\gamma^5 u - \bar{d}\gamma_\mu\gamma^5 d\tag{5.21}$$

entonces

$$\langle p|A|n\rangle = (\Delta u - \Delta d)_p\tag{5.22}$$

de manera similar considerando la corriente axial A correspondiente se pueden expresar los otros decaimientos en términos de  $\Delta q$ .

Cuadro 5.4: Se muestran los valores de algunas reglas de suma para el protoón y neutrón los cuales se calcularon obtenidos en diferentes modelos, CQM, Holtmann SU(6) y SU(3) y algunos resultados experimentales.

	$S_{EJ}^p$	$S_{EJ}^n$	$S_B$	$\Delta\Sigma$
CQM	0.278	0	0.278	1
Holtmann SU(6)	0.233	-0.010	0.243	0.804
Holtmann SU(3)	0.169	-0.041	0.210	0.461
EMC	0.126	-	-	0.120
	$\pm 0.01 \pm 0.015$			$\pm 0.094 \pm 0.138$
E142	-	-0.22	0.146	0.57
		$\pm 0.011$	$\pm 0.021$	$\pm 0.11$
SMC	0.136	-	-	0.22
	$\pm 0.011 \pm 0.011$			$\pm 0.10 \pm 0.10$
E155	0.176	0.164		
	$\pm 0.008$	$\pm 0.008$		

Entonces considerando los resultados de contenido de sabor para ambos modelos obtenemos los resultados de la tabla 5.6. En el MCM se conserva SU(3), por lo cual podemos reescribir los elementos de matriz de los decaimientos en términos de los del protón, en la tabla 5.5 se muestran como están relacionados los decaimientos  $\beta$ . Sin embargo en el UQM solo se conserva SU(2) por lo que solo podemos obtener resultados para decaimientos entre los elementos de un mismo multiplete de isoespín.

Observamos que los resultados son parecidos, con diferencias de a lo mas 5%. Como ya se menciono anteriormente en el UQM solo se conserva la simetría de SU(2) por lo que se expresan los decaimientos de  $\Sigma \rightarrow A$ , con A algún barión, en términos de  $\Sigma^+$ , y  $\Xi^-$  en términos de  $\Xi^0$  y así se obtiene los resultados de la tabla anterior. Pero si utilizamos las relaciones de la tabla 5.5 en el UQM obtenemos los resultados de la tabla 5.7. Comparativamente los resultado en el MCM son muy parecidos a los de Holtmann SU(3), ya que en ambos casos se fijaron los coeficientes F y D con información experimental.

El objetivo de la tabla anterior es hacer una comparación entre los resultados para el UQM y  $UQM^*$ , de esta manera podemos realizar un análisis del rompimiento de la simetría SU(3), es decir la diferencia entre los dos resultados ilustra que tan fuerte es el rompimiento y según los cálculos es de apenas el 7% en las  $\Sigma$ 's y del 10% en el decaimiento  $\Xi^- \rightarrow \Xi^0$ . En el trabajo realizado por Holtmann se reportan para es decaimiento  $n \rightarrow p$  dos resultados, en el caso de SU(3) 1.257, con F=0.48 y D=0.91, y el en caso de SU(6) es 1.454 en ambos se consideran el octete de mesones pseudoescalares. Los valores usados de F y D son muy parecidos a los que se consideraron en nuestro análisis.

También queremos mencionar que si se calcula la probailidad  $P(\bar{d})$  y  $P(\bar{u})$  con los coeficien-

Cuadro 5.5: Elementos de matriz de los decaimientos beta de bariones octete ( $JP = \frac{1}{2}^+$ ), en términos de los 3 elementos de matriz diagonales e independientes del protón.

Decaimiento $\beta$	$(\Delta u)_p$	$(\Delta d)_p$	$(\Delta s)_p$
$\langle p\frac{1}{2} A n\frac{1}{2}\rangle$	1	-1	0
$\langle \Sigma^0\frac{1}{2} A \Sigma^-\frac{1}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\langle \Sigma^+\frac{1}{2} A \Sigma^0\frac{1}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\langle \Xi^0\frac{1}{2} A \Xi^-\frac{1}{2}\rangle$	0	1	-1
$\langle \Sigma^+\frac{1}{2} A \Lambda^0\frac{1}{2}\rangle$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\langle \Lambda^0\frac{1}{2} A \Sigma^-\frac{1}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\langle p\frac{1}{2} A \Sigma^0\frac{1}{2}\rangle$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\langle n\frac{1}{2} A \Sigma^-\frac{1}{2}\rangle$	0	1	-1
$\langle p\frac{1}{2} A \Lambda^0\frac{1}{2}\rangle$	$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\langle \Lambda^0\frac{1}{2} A \Xi^-\frac{1}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$
$\langle \Sigma^+\frac{1}{2} A \Xi^0\frac{1}{2}\rangle$	1	-1	0
$\langle \Sigma^0\frac{1}{2} A \Xi^-\frac{1}{2}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0

tes obtenidos en el UQM tenemos  $P(\bar{u}) = 0.278$  y  $P(\bar{d}) = 0.356$ , los valores son diferentes a los tomados en cuenta inicialmente, sin embargo la diferencia  $P(\bar{d}) - P(\bar{u})$  sigue siendo 0.118 y estos valores obtenidos son muy parecidos a los reportados en otro trabajo, también de W. Chang y J. Peng [31].

Por último al calcular  $\Delta\Sigma_p$  obtenemos dos resultados  $\Delta\Sigma_p^{MCM} = 0.553$  y  $\Delta\Sigma_p^{UQM} = 0.618$ , valores que aun se encuentran lejos del resultado experimental  $\Delta\Sigma_p^{exp} = 0.330 \pm 0.011(\text{theo}) \pm 0.025(\text{exp}) \pm 0.028(\text{evol})$ , pero, debemos mencionar que en el análisis de datos experimentales que se realiza para obtener  $\Delta\Sigma_p$  se supone la simetría de  $SU(3)$ , lo cual también se hizo en el MCM, sin embargo en el UQM esta simetría está rota, y esto se refleja en una mayor discrepancia entre  $\Delta\Sigma_p^{exp}$  y  $\Delta\Sigma_p^{UQM}$  que con  $\Delta\Sigma_p^{MCM}$ , se sabe que la simetría de  $SU(3)$  en el protón está rota, por lo que el valor experimental no representa exactamente el valor de  $\Delta\Sigma_p$ , aunque es un

Cuadro 5.6: Decaimientos  $\beta$  en los modelos MCM y UQM.

Decaimiento $\beta$	CQM	MCM	UQM	$SU(6)^{[27]}$	$SU(3)^{[27]}$	exp
$\langle p_{\frac{1}{2}}   A   n_{\frac{1}{2}} \rangle$	$\frac{5}{3}$	1.327	1.365	1.454	1.257	1.27
$\langle \Sigma^0_{\frac{1}{2}}   A   \Sigma^{-\frac{1}{2}} \rangle$	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	0.713	0.766			
$\langle \Sigma^{+\frac{1}{2}}   A   \Sigma^0_{\frac{1}{2}} \rangle$	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	0.713	0.766			
$\langle \Xi^0_{\frac{1}{2}}   A   \Xi^{-\frac{1}{2}} \rangle$	$-\frac{1}{3}$	-0.318	-0.316			
$\langle \Sigma^{+\frac{1}{2}}   A   \Lambda^0_{\frac{1}{2}} \rangle$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	-0.672				
$\langle \Lambda^0_{\frac{1}{2}}   A   \Sigma^{-\frac{1}{2}} \rangle$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	0.672		0.770	0.710	0.60
$\langle p_{\frac{1}{2}}   A   \Sigma^0_{\frac{1}{2}} \rangle$	$-\frac{1}{6}$	0.225				
$\langle n_{\frac{1}{2}}   A   \Sigma^{-\frac{1}{2}} \rangle$	$-\frac{1}{3}$	-0.318		0.320	0.400	0.340
$\langle p_{\frac{1}{2}}   A   \Lambda^0_{\frac{1}{2}} \rangle$	$\frac{3}{\sqrt{6}}$	0.954		-1.080	-0.870	0.879
$\langle \Lambda^0_{\frac{1}{2}}   A   \Xi^{-\frac{1}{2}} \rangle$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	0.282		0.380	0.400	0.31
$\langle \Sigma^{+\frac{1}{2}}   A   \Xi^0_{\frac{1}{2}} \rangle$	$\frac{5}{3}$	1.327		1.210		
$\langle \Sigma^0_{\frac{1}{2}}   A   \Xi^{-\frac{1}{2}} \rangle$	$\frac{5}{3\sqrt{2}}$	0.938				

Cuadro 5.7: Resultados para los decaimientos  $\beta$  en el MCM, UQM y  $UQM^*$ , el \* indica que se supuso se conserva la simetría de  $SU(3)$ .

Decaimiento $\beta$	CQM	MCM	UQM	$UQM^*$	exp
$\langle p_{\frac{1}{2}}   A   n_{\frac{1}{2}} \rangle$	$\frac{5}{3}$	1.327	1.365	1.365	1.27
$\langle \Sigma^0_{\frac{1}{2}}   A   \Sigma^{-\frac{1}{2}} \rangle$	$\frac{5}{\sqrt{23}}$	0.713	0.766	0.719	
$\langle \Sigma^{+\frac{1}{2}}   A   \Sigma^0_{\frac{1}{2}} \rangle$	$\frac{5}{\sqrt{23}}$	0.713	0.766	0.719	
$\langle \Xi^0_{\frac{1}{2}}   A   \Xi^{-\frac{1}{2}} \rangle$	$-\frac{1}{3}$	-0.318	-0.316	-0.348	



resultado aceptado. Pero no se descartan posibles contribuciones adicionales a las consideradas en este trabajo, por ejemplo los gluones, aunque no se ha obtenido un valor mas o menos fijo, en un trabajo reciente reportado por Florian [30] se concluyo que la contribución de los gluones  $\Delta G$  al espín del protón puede ser no nula, dado que tuvieron acceso a más resultados experimentales pudieron hacer un mejor análisis estadístico.

## Capítulo 6

# Conclusiones

En este trabajo se estudió inicialmente el espín del protón y después se extendió al resto de bariones del octete. Considerando dos extensiones del modelos de quarks constituyentes, el MCM y el UQM, se hizo un análisis de las contribuciones de los estados  $B_8M_8$  y  $B_{10}M_8$  al espín del protón, solo considerando el octete de mesones pseudoescalares en los acoplamientos. Se construyeron las funciones de onda para los bariones del octete considerando estas fluctuaciones en la nube mesónica; para poder realizar un análisis y por la naturaleza del MCM se impuso la simetría de sabor, también se usó información experimental de dos decaimientos  $\beta$ , los cuales son proporcionales a dos coeficientes, F y D, por lo cual los resultados están ajustados a los valores de estos coeficientes y se considera la asimetría de sabor  $P(\bar{d}) - P(\bar{u})$  en el protón.

Por otro lado en el UQM se conserva la simetría de isoespín, pero la de sabor no, y también se considera la asimetría de sabor  $P(\bar{d}) - P(\bar{u})$  para el análisis, notéase que no se hizo ningún ajuste a algún otro tipo de información experimental. Con estos dos modelos podemos hacer una comparación entre una descripción conservando la simetría de sabor y otra en la que no se conserva. El primer punto a mencionar respecto al comentario anterior es una observación sobre los resultados contenidos en la tabla 5.1, en los cuales aunque se conservan diferentes simetrías el contenido de sabor es cualitativamente muy parecido, lo cual en primera instancia nos incita a decir que el rompimiento de simetría de sabor no altera de manera importante las propiedades de los bariones.

Sin embargo, como queremos estudiar las propiedades de un cuerpo compuesto tenemos que estudiar su estructura interna, para esto se estudia el comportamiento de las funciones de estructura, las cuales pueden expresarse en términos de  $\Delta u$ ,  $\Delta d$  y  $\Delta s$ , y los resultados en la tabla 5.3, los resultados en ambos modelos son muy parecidos, con diferencias de no más del 12% , pero estos casos son aquellos con valores muy cercanos a cero, es decir son del orden. Para el protón obtenemos que los resultados difieren en un 5% y observamos que al considerar las fluctuaciones en la función de onda del protón nos acercamos mas al valor experimental, de hecho reducimos en un 75% las diferencias entre el valor experimental y el valor predicho por el CQM. Esta primera aproximación al considerar acoplamientos de los mesones pseudoescalares con bariones del octete y decuplete nos indica que es importante considerar estas fluctuaciones.

Quisiéramos hacer notar que para poder concluir de manera más contundente la contribución de estas fluctuaciones al espín del protón sería adecuado considerar la contribución de acoplamiento de los mesones vectoriales con los bariones del octete y decuplete. Respecto a la comparación con los resultados de Holtmann concluimos que el valor considerado en su análisis para la asimetría de sabor en el protón provoca en su mayoría las diferencias con nuestros resultados, pero debemos recalcar que el valor que tomamos es ajustado a resultados experimentales [29] un poco más recientes que los considerados por Holtmann.

En cuanto al espín del protón es contundente la participación de los quarks del mar, y por lo tanto la contribución de los quarks de valencia al espín es pequeña, este resultado está basado en mediciones experimentales del primer momento  $I_p$  de la función de estructura del protón, sin embargo el análisis hecho supone la simetría de sabor SU(3), la cual también se conserva en el MCM y aunque los resultados para  $\Delta\Sigma_p^{MCM}$  están lejos de  $\Delta\Sigma_p^{exp}$  logramos un acercamiento respecto al CMQ y los resultados en el UQM son similares, pero, encontramos que es un poco más lejano que el encontrado en el MCM, sin embargo en este modelo no se conserva la simetría de sabor. Además para corregir los resultados es necesario considerar contribuciones de los acoplamiento del octete de mesones vectoriales en ambos modelos. También puede que existan otras contribuciones al espín del protón, como por ejemplo, los gluones [30].

Una parte importante del análisis recae en el comportamiento de los decaimientos  $\beta$  al considerar todas estas fluctuaciones, se obtuvo una muy buena aproximación al resultado experimental del protón, además que se observó un rompimiento de la simetría de sabor pequeño en los decaimientos de los bariones  $\Sigma$  y uno más grande en el de los bariones  $\Xi$ , esto se debe a que el contenido de quarks  $s$  es mayor que el de los bariones  $\Sigma$ . Para el decaimiento  $n \rightarrow p$  podemos decir que los resultados para el UQM ajustan muy bien considerando que no se utilizó información experimental de los decaimientos  $\beta$  al realizar nuestros cálculos, hay apenas una desviación del 5% respecto al valor experimental.

# Capítulo 7

## Bibliografía

- [1] F.E. close, *An itroduction to Quarks and Partons*, (Academic press, 1982).
- [2] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particle Physics*, (2<sup>nd</sup> Revised Edition. Wiley-VCH. 2010).
- [3] P. Amaudruz et al., Phys. Rev. Lett. 66, 2712(1961).
- [4] A. D. Martin, W. j. Stirling and R. G. Roberts, Phys. Lett. B 306 (1993) 145.  
A. D. Martin, W. j. Stirling and R. G. Roberts, Phys. Lett. D 50 (1994) 6734.
- [5] A. Airapetean et. al., Phys. Rev. D75, 012007 (2007).
- [6] V. Yu. Alexakhin et. al. Phys. Lett. B, 647 (2007) 8-17.
- [7] M. Gell-Mann, Phys. Rev 92, 8 83(1953).  
T. Nakano, K. Nijishima, Prog Theor Phys. 1, 581(1953).
- [8] Y. Ne´eman, Nuc. Phys. 26, 222(1961). M. Gell-Mann, Phys. Rev. 125, 1067(1962).
- [9] M. Gell-Mann, Phys. Lett. 8,214(1961).  
G. Sweig, CERN Reports TH401, 402(unpnb)(1964).
- [10] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler, Phys. Lett. B 47, 365 (1973).  
F.J. Ynduráin, *Quantum Chromodynamics*, Sping-Verlag, 1983.
- [11] O. W. Grennberg, Phys. Rev. Lett. 13, 598 (1964).
- [12] M. Han, Y. Nambu, Phys. Rev. 139, B1006 (1965).
- [13] F. Stancu, *Group Theory in Subnuclear Physics*, (Oxford University Press, 1996).
- [14] J. Speth, A. W. Thomas, Advances in Nuclear Physics, vol. 24 (Plenum Press, 1998).
- [15] P. Geiger, N. Isgur, Phys. Rev. D55, 299(1997).

- [16] R. Bijker, E. Santopinto, Phys. Rev. C 80, 065210(2009).
- [17] E. Santopinto, R. Bijker, Phys. Rev. C. 82, 062202(R)(2010).
- [18] R. Bijker, J. Ferretti, H. García,  $^3P_0$  Amplitudes.
- [19] K.A. Olive et al, Chin Phys C 38(9), 1 (2014).
- [20] W. Chang, J. Peng, *Flavor Asymmetry of the Nucleon Sea and the Five-Quark Components of the Nucleons* (2011).
- [21] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. 10, 531 (1963).
- [22] N. Cabibbo, R. Gatto, Il Nuovo Cimento, Vol XXXI, 873 (1961).
- [23] N. Cabibbo, E. Swallow, R. Winston, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 53, 39 (2003).
- [24] R. Bijker, E. Santopinto, *The role of valence and sea quarks in light baryons*.
- [25] H. Kim, M. Praszalowicz, K. Goeke, Acta Phys. Pol B32, 1343 (2001).
- [26] H. Kim, M. Praszalowicz, K. Goeke, Phys. Rev. D 61, 114006 (2000).
- [27] H. Holtmann, A. Szczurek, J. Speth, Nuclear Phys. A 569, (1996).
- [28] A. W. Thomas, W. Weise, *The Structure of the Nucleon*, 1<sup>ra</sup> Edición. Wiley-VCH. 2001).
- [29] E. A. Hawker et. al. (E866/NuSea Collaboration), Phys. Rev. Lett. 80, 3715 (1998).
- [30] D. Florian, M. Stratmann, W. Vogelsang, Phys. Rev. Lett, 113, 012001 (2014).
- [31] W. Chang, J. Peng, arxiv: 1410.702v1 [hep-ph] 26 Oct 2014.