UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

PROBLEMARIO DE ESTÁTICA ESTRUCTURAL AVANZADA

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO CIVIL

PRESENTA:

KEER GARCÍA ALAN ABRAHAM

DIRECTOR: ING. PASCUAL GARCÍA CUEVAS

MÉXICO, D.F. SEPTIEMBRE 2014

FES Aragón

AGRADECIMIENTOS

Dedicado a todos aquellos que me quieren bien.

A MIS PADRES NESTOR Y AMPARO:

Todas las felicitaciones a ellos más que a mí, por toda su vida de esfuerzos y sacrificios, por las carencias vividas, por las noches de desvelo a mi lado, por su amor incondicional a pesar de mis errores, por exhortarme a ser un hombre de bien, porque sé que este no es el final del camino sino el inicio del verdadero proyecto, porque hoy con amor y respeto les dedico este logro, reiterando con humildad mis más sinceras gracias.

A MIS HERMANOS:

Lizbeth, Paola, Nestor… no encuentro las palabras para decirles cual agradecido me encuentro con ustedes por formar parte de mi vida, pero es mejor decir algo que simplemente callar… por tu esfuerzo y dedicación en mis primeros años de vida Lizbeth créeme que siempre serás mi segunda madre, a la más enojona de los cuatro por apoyarme siempre en mi necesidad puedes estar segura que ostento una gran deuda contigo, para aquel hombre que fue el ejemplo de este niño que aun sobrevive mil gracias Nestor. Espero encontrarme siempre en sus corazones como ustedes sin duda siempre estarán en el mío.

A JASETH KEER:

Mi sobrinito que aunque no lo sepas nos tocó ser niños al mismo tiempo, gracias por llenar la casa de alegría y por tantos juegos junto a ti y en compañía de nuestras amigas mascotas, mi mayor exhortación para que te conviertas en un gran profesionista, pero más allá de eso en un gran ser humano.

A LOS ABUELOS:

Alicia García donde te encuentres gracias infinitas por llenar mi niñez de risa y miedo con las caminatas a oscuras bajo la lluvia junto a mi madre, a Abraham Keer por tantas historias y por tus ánimos para llegar a ser una persona de bien, a Sofía Águila porqué eres el mayor ejemplo de lo incierta que es la vida pero aquí estoy frente a ti como el profesionista que pensabas el tiempo mismo no te alcanzaría para ver.

A LA FAMILIA GARCÍA GARCÍA:

Gracias porqué sin dudarlo me apoyaron tanto y sin duda son ustedes también parte importante de este gran logro, gracias a ustedes tíos(as) Juan, Abdías, Misael, Luis, Gregorio, Lucina, Sara, Hilda, Eva, Cecilia, a ustedes y sus familias que son también parte de mí.

AL INGENIERO PASCUAL GARCÍA CUEVAS:

Por apoyarme como director de tesis y facilitarme siempre su tiempo, sin duda parte fundamental en el presente trabajo

AL INGENIERO MARCOS MOLINA ELVIRA:

Por ofrecerme siempre su apoyo, por compartir conmigo sus conocimientos, por apoyarme en diversos aspectos académicos, y por contribuir en partes esenciales en este trabajo de tesis.

A MIS AMIGOS(AS):

David, Alejandro, Miguel, Héctor, Susana, Beatriz, Diana por tantos recuerdos preparatorianos. Aldair, Emilio, Jonathan, Nilly, Eduardo, Cala, Laura, Ceci, mis carnalitos de danza y algunos de la vida misma. Víctor, David Adrián, Martin, Luis Maya, Jocelyn, Daniel, por tantas experiencias, clases y karaokes juntos. Y en general a todos mis compañeros de licenciatura en Ingeniería civil UNAM Monserrat Valencia, Yazmin, José Luis porque a pesar de la distancia aun nos recordamos. A todos aquellos que olvide mencionar por su apoyo y por ser parte fundamental en mi formación como ser humano.

A LA FAMILIA PÉREZ MARTÍNEZ:

Por su indudable apoyo para mis estudios universitarios y su total comprensión siempre que así lo requería.

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO:

Mi alma mater a la cual jamás terminare de agradecer, sin duda alguna me llena de dicha y orgullo pertenecer a la máxima casa de estudios, porque sé que siempre estarás en mi corazón.

CONTENIDO:

INTRODUCCIÓN

Se entiende por estática a la rama de la mecánica clásica que estudia el equilibrio de fuerzas en aquellos sistemas físicos que se encuentran en equilibrio estático. Por otro lado, sabemos que la ingeniería estructural es una de tantas ramas de la ingeniería civil que se ocupa del análisis y diseño de elementos en los sistemas estructurales cualquiera que sea su fin; como: presas, puentes, edificios, etc., garantizando un buen comportamiento y seguridad al usuario. Por lo anterior, podemos decir entonces que la estática estructural, es básicamente la aplicación de los principios básicos de equilibrio estático para ofrecer una alternativa de solución a problemas que se nos plantean en el análisis de estructuras.

Los principios básicos del equilibrio estático son de gran importancia para aquellos que se dedican al análisis y diseño de estructuras, sin embargo actualmente la bibliografía donde pueden encontrarse métodos de análisis claramente explicados es aun escasa, sin mencionar que la mayoría de autores dan por hecho que el lector tiene totalmente claros ciertos conceptos que se emplean en sus libros de texto, además de que se resuelven ejemplos muy comunes por lo que el lector no queda totalmente preparado para resolver cualquier tipo de problema que en el futuro se le presente.

En el presente trabajo, se resolverán diversos ejercicios con vigas, marcos y armaduras sometidos a esfuerzos tan comunes que le serán de gran ayuda a aquellos que recién comiencen a familiarizarse con el análisis de estructuras empleando los fundamentos de equilibrio estático, así como combinaciones de cargas y apoyos tan poco usuales que será necesario involucrar otros métodos de análisis para poder dar solución a dichos problemas, mismos destinados a aquellos lectores que tienen conocimientos avanzados en el análisis de estructuras.

OBJETIVO

El propósito fundamental de esta tesis es que una vez finalizado su estudio, el lector sea capaz de aplicar los conocimientos y métodos aquí explicados para dar solución a diversos problemas que se presentan comúnmente en la etapa de análisis en ingeniería estructural, si bien esa es la razón primordial del trabajo, se pretende también que mediante la demostración matemática, el lector tenga una visión más clara de los fundamentos teóricos de distintas fórmulas y relaciones aplicadas en la estática estructural quedando así claros ciertos conceptos primordiales para aquel que recién se introduce a esta área de conocimiento en la ingeniería civil.

JUSTIFICACIÓN

Como hemos mencionado anteriormente, la bibliografía en la que se encuentran métodos de análisis explicados detalladamente es escasa, además de que no se incluye la demostración matemática que fundamente las formulas y relaciones que se aplican en dichos procedimientos y que son de vital importancia para el ingeniero civil dedicado al análisis y diseño de estructuras, entendiendo también que el personal dedicado a esta rama de la ingeniería debe ser apto para resolver los problemas con sus conocimientos a mano, para que de esta manera logre entender el algoritmo que siguen los software de cálculo actuales.

UTILIDAD

En el presente trabajo de tesis se encuentran resueltos problemas que involucran vigas, marcos y armaduras en los cuales a partir de los esfuerzos a los que esto sean sometidos, se da una solución tomando en cuenta principios básicos de estática para conocer las incógnitas del sistema de fuerzas que generan dichos problemas para así lograr el equilibrio estático, se conocerán también ecuaciones que rigen los elementos mecánicos en cualquier sección analizada y se explicara paso a paso la construcción de diagramas para dichas ecuaciones.

A fin de lograr el objetivo aquí presente se pretende desarrollar el siguiente contenido en los capítulos descritos a continuación.

En el primer capítulo definiremos los conceptos básicos de equilibrio estático de los cuales hemos estado hablando, también se hará notar al lector la causa-efecto de un sistema de fuerzas externo actuando sobre un sistema de fuerzas interno logrando el equilibrio entre ambos, identificando también los elementos mecánicos producidos por las causas externas analizando los efectos de estos.

En el segundo capítulo, el lector al concluir su estudio será capaz de identificar una estructura y su función como elemento estructural con una simple observación de su ambiente, además de que será capaz de clasificar las cargas que soportan dichos elementos y los distintos tipos de apoyos por lo que tendrá más claros ciertos conceptos que se enuncian en el primer capítulo.

En el tercer capítulo se encuentra el fundamento teórico de algunas relaciones que existen entre elementos mecánicos, así como también la demostración de diversas fórmulas matemáticas para el cálculo de centroides y momentos de inercia.

En los capítulos cuatro, cinco y seis se da solución paso a paso a diversos problemas que involucran vigas marcos y armaduras aplicando los métodos y conceptos descritos anteriormente tomando en cuenta la mecánica del solido rígido para dar solución a problemas estáticamente determinados.

En el capítulo siete se explicara el método de flexibilidades que se utiliza para dar solución a problemas hiperestáticos tomando en cuenta las deformaciones que sufre un elemento estructural para así generar ecuaciones de compatibilidad que se relacionan con las incógnitas de dicho sistema de fuerzas generado, es decir aplicando la mecánica del solido deformable para resolver ejercicios estáticamente indeterminados (vigas, marcos y armaduras).
.

En el capítulo ocho se dará solución a algunos marcos utilizando el método de rigideces clásico.

Keer García Alan Abraham

CAPITULO 1. FUNDAMENTOS DE ESTÁTICA ESTRUCTURAL

1.1. ESTÁTICA ESTRUCTURAL

1.1.1. LA ESTÁTICA APLICADA A LA INGENIERÍA

La estática es la rama de la mecánica clásica que analiza las cargas (Fuerza y Momento), a su vez, estudia el equilibrio de las fuerzas en los sistemas físicos que se encuentran en equilibrio estático. En ingeniería civil llamamos estática estructural al área del conocimiento que involucra la aplicación del análisis de equilibrio que nos proporciona la estática mediante el empleo de la mecánica del solido rígido para dar solución a problemas denominados “isostáticos” y mediante la aplicación de la mecánica del solido deformable para dar solución a problemas denominados “hiperestáticos”

1.1.2. APLICACIONES DE LA ESTÁTICA ESTRUCTURAL

Uno de los objetivos principales de la estática estructural es encontrar los esfuerzos cortantes, fuerza axial, Momento torsionante y Momento flector a lo largo de una pieza estructural ya sea una viga, columna, cable, etc.

1.1.3. IMPORTANCIA DE LA ESTÁTICA ESTRUCTURAL

La estática estructural es de gran importancia tanto en la etapa de análisis como en la etapa de diseño, debido a que una vez que se conocen las fuerzas actuantes sobre nuestra pieza y trazados los diagramas de dichas fuerzas, puede proponerse el material del cual serán fabricadas, las dimensiones que estas deberán tener, así como sus límites de esfuerzo para garantizar la seguridad y servicio.

1.1.4. El EQUILIBRIO ESTÁTICO COMO PRINCIPIO DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

El objetivo del análisis estructural es el cálculo de fuerzas actuantes y deformaciones sobre un punto en una estructura, cualquiera que este sea, sin embargo, los principios básicos del equilibrio estático son fundamentales para el desarrollo de dicho análisis, ya que para efectuarlo deben tomarse en cuenta las siguientes condiciones:

- $\sum F = 0$ y $\sum M = 0$ en cualquier punto de la estructura

- Debe existir compatibilidad de deformaciones de todos los elementos estructurales; es decir: que si bien al ser sometido a un sistema de fuerzas externo la estructura se deforma esta conservara las condiciones de continuidad iniciales, asimismo, los desplazamientos de dicha estructura deben ser compatibles con las condiciones de deformación en los diferentes apoyos.

Tomando en cuenta las condiciones anteriores, es notorio que para realizar un análisis estructural, debemos recurrir a los principios básicos de estática, sin mencionar que en la etapa de diseño estructural al definir la resistencia de un material esta depende también en gran medida de la aplicación del equilibrio estático.

1.2. TEORÍA DE LA ESTÁTICA

1.2.1. ECUACIONES DE EQUILIBRIO ESTÁTICO

En la teoría de la estática se dice que un sistema de fuerzas se encuentra en equilibrio estático cuando se resultante es igual a cero; es decir:

- $\sum F = F_R = 0$
- $\sum M = M_R = 0$

Si un elemento se encuentra sujeto a un sistema de fuerzas en equilibrio estático este debe encontrarse en reposo y cualquier variación en la resultante de este causa la perdida de equilibrio de dicho elemento.

1.2.2. DETERMINACIÓN DEL EQUILIBRIO EN UN SISTEMA DE FUERZAS

Para determinar si un sistema de fuerzas se encuentra en equilibrio, es decir que la resultante de dicho sistema sea igual a cero, es necesario revisar que se cumplan las condiciones antes mencionadas para las ecuaciones de equilibrio estático, sin embargo, la aplicación de estas ecuaciones depende de las características presentadas por el sistema de fuerzas, los casos característicos más usuales son los siguientes;

Que el sistema de fuerzas sea:

- De fuerzas paralelas en un plano.
- De fuerzas no paralelas en un plano.
- De fuerzas concurrentes en un plano.
- De fuerzas en el espacio.

Para el primer caso las ecuaciones de equilibrio son:

- $\sum F_Y = 0$
- $\sum M = 0$

Debido a que este tipo de sistemas representa aquellas estructuras planas sujetas a cargas netamente gravitacionales, por lo que las cargas y las reacciones en los apoyos serán verticales, la primer ecuación $\sum F_Y$ relaciona todas aquellas fuerzas paralelas al eje "Y" y la segunda ecuación $\sum M$ relaciona todos aquellos momentos alrededor de cualquier punto en el plano en el que actúan las fuerzas.

Para el segundo caso las ecuaciones de equilibrio son:

- $\sum F_Y = 0$
- $\sum F_X = 0$
- $\sum M = 0$

Debido a que este tipo de sistemas representa aquellas estructuras planas sujetas a fuerzas actuando en distintas direcciones, por lo que las cargas y reacciones en los apoyos constituyen un sistema de fuerzas no paralelas entre sí.

Para el tercer caso las ecuaciones de equilibrio son:

- $\sum F_X = 0, \quad \sum F_Y = 0$
- $\sum F_Y = 0, \quad \sum M_A = 0$

  Si el punto A no está situado en una recta perpendicular al eje Y que pasa por el punto de concurrencia.

- $\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0$

  Si la recta que una a los puntos A y B no toque el punto de concurrencia.

Para el último caso de sistema de fuerzas las ecuaciones de equilibrio son:

- $\sum F_X = 0, \quad \sum F_Y = 0, \quad \sum F_Z = 0, \quad \sum M_X = 0, \quad \sum M_Y = 0, \quad \sum M_Z = 0$

1.2.3. ECUACIONES DE CONDICIÓN

En el caso de las vigas que presentan articulaciones “Vigas Gerber” pueden plantearse ecuaciones adicionales a las ecuaciones de equilibrio estático mencionadas anteriormente, debido a que las articulaciones de momento son equivalentes a pasadores sin fricción, estas permiten el giro libre de los elementos estructurales concurrentes a ellas, por lo que en dicho punto no pude desarrollarse momento flexionante, bajo este fundamento podemos expresar una ecuación adicional la cual nos dice que la sumatoria de momentos en dicho punto es igual a cero, sin embargo, para el caso de las articulaciones de cortante debemos tomar en cuenta que estas permiten relativamente el desplazamiento lineal, restringiendo el giro de los elementos estructurales concurrentes a estas, bajo este fundamento podemos expresar una ecuación adicional en la cual planteamos que en dichos puntos la fuerza cortante es igual a creo, dicho lo anterior podemos concluir lo siguiente:

- En las articulaciones de momento, el momento flexionante es igual a cero, sin embargo existe fuerza cortante.

- En las articulaciones de cortante, la fuerza cortante es nula, sin embargo en estas si existe momento flexionante.

1.2.4. CONDICIONES DE ISOSTATICIDAD O GRADO DE INDETERMINACIÓN

Tomando en cuenta la teoría de la estática mencionada anteriormente, notamos que las condiciones de equilibrio que pueden asociarse a una estructura en el plano se ven representadas por tres ecuaciones que se relacionan con las incógnitas incluidas en el sistema de fuerzas que representa dicha estructura, estas ecuaciones son:

- $\sum F_Y = 0$

- $\sum F_X = 0$

- $\sum M = 0$

Podemos decir entonces que: para determinar las condiciones de isostaticidad de una estructura, debe relacionarse el número de ecuaciones de equilibrio estático

“E” con el número de incógnitas del sistema de fuerzas que representa la estructura **“I”**

1. **I=E** Decimos entonces que nuestra estructura es *isostática* o *estáticamente determinada,* su grado de indeterminación es igual a cero y tiene una solución única a la cual puede llegarse mediante la simple aplicación del análisis de equilibrio mediante la mecánica del cuerpo rígido que nos proporciona la estática .

2. **I>E** Decimos entonces que nuestra estructura es *hiperestática* o *estáticamente indeterminada,* su grado de indeterminación es mayor a uno, tiene varias soluciones, sin embargo, para llegar a ellas no podemos recurrir a las ecuaciones de equilibrio estático, sino que debemos determinar ecuaciones de compatibilidad asociadas a las deformaciones que presentara nuestra estructura mediante métodos correspondientes a la mecánica del solido deformable, cabe señalar que por cada grado de indeterminación que se presente en dicha estructura será necesario asociar una ecuación de compatibilidad de deformaciones.

3. **I<E** Decimos entonces que nuestra estructura es *hipostática,* por lo tanto no tiene solución, decimos que es inestable y su grado de indeterminación resulta ser menor a cero.

1.2.4.1. GRADO DE INDETERMINACIÓN EN VIGAS

Para calcular el grado de indeterminación en vigas, es necesario asociar el número de reacciones de los apoyos con el número de ecuaciones de equilibrio estático por lo cual podemos encontrar los siguientes casos:

- Si el número de reacciones de los apoyos es igual al número de ecuaciones de equilibrio, nuestra viga es isostática; es decir: su grado de indeterminación es igual a cero.

- Si el número de reacciones de los apoyos es mayor al número de ecuaciones de equilibrio, nuestra viga es hiperestática; es decir: su grado de indeterminación es mayor a cero.

- Si el número de reacciones de los apoyos es menor al número de ecuaciones de equilibrio nuestra viga es hipostática; es decir: su grado de indeterminación es menor a cero, este tipo de vigas es inestable y no puede mantenerse en equilibrio.

- En el caso de las vigas Gerber el número de ecuaciones de condición (c) debe sumarse al número de ecuaciones de equilibrio estático (n) esta sumatoria debe compararse con el número de reacciones en los apoyos (r), de tal forma que se cumpla una de las siguientes condiciones:

  - Si $\boldsymbol{r = c + n}$ Se trata de una viga Isostática "*Estáticamente determinada".*

  - Si $\boldsymbol{r > c + n}$ Se trata de una viga Hiperestática "*Estáticamente indeterminada".*

  - Si $\boldsymbol{r < c + n}$ Se trata de una viga Hipostática

1.2.4.2. GRADO DE INDETERMINACIÓN EN ARMADURAS

Una armadura puede ser externa o internamente indeterminada, para el primer caso mencionado se aplica la misma clasificación para el grado de indeterminación que las vigas tomando en cuenta la diferencia entre el número de reacciones y el número de ecuaciones de equilibrio estático, según el número que se obtenga de dicha diferencia, la armadura puede ser externamente determinada o indeterminada. En el segundo caso mencionado, se toma en cuenta la sumatoria entre el número de barras (b) y el número de reacciones (r), y se compara con el número de nudos (j) multiplicado por dos, pudiendo así presentarse cualquiera de los siguientes casos.

- Si $\boldsymbol{b + r = 2j}$ La armadura es Isostática o *"estáticamente determinada"*

- Si $\boldsymbol{b + r > 2j}$ La armadura es Hiperestática o "*Estáticamente indeterminada"*

- Si $\boldsymbol{b + r < 2j}$ La armadura es Hipostática y es inestable

Como podemos observar las armaduras pueden ser externamente determinadas e internamente indeterminadas o viceversa ya que no hay relación entre una clasificación y otra, sin embargo para fines de cálculo, la clasificación que nos interesa es la segunda, ya que si existe indeterminación interna en una armadura, esta no podrá resolverse empleando simplemente las ecuaciones de equilibrio o analizando sus nudos.

1.2.4.3. GRADO DE INDETERMINACIÓN EN MARCOS.

Si tomamos un marco cualquiera que este sea y seccionamos cada elemento: vigas y columnas, de tal forma que cada nudo de dicho marco sea un cuerpo libre, observaremos que en cada sección de cada miembro estructural habrá tres incógnitas: una fuerza normal, una fuerza cortante y un momento flexionante, por lo que en cada miembro existen 6 fuerzas internas desconocidas definidas; sin embargo: si se conocen tres fuerzas de una sección pueden determinarse las tres fuerzas de la otra sección de dicho miembro, como (m) es entonces el número miembros estructurales del marco, por lo tanto, el número total de incógnitas en dichos miembros será igual a 3m, como el número de reacciones de los apoyos es (r), la sumatoria ***r + 3m*** define el número total de incógnitas del marco, de la misma manera a cada nudo puede asociarse tres ecuaciones de equilibrio, como el número de nudos es (n) el número total de ecuaciones de equilibrio asociadas al marco es **3n,** sin embargo, cuando existan articulaciones adicionadas en el marco, deberá sumarse el número de ecuaciones de condición (c) inmersas en dichas articulaciones **3n+c** entonces: para obtener el grado de indeterminación en un marco pueden presentarse las siguientes condiciones :

- Si $\boldsymbol{r+3m=3n+c}$ El marco es Isostático *“estáticamente determinado”*
- Si $\boldsymbol{r+3m>3n+c}$ El marco es Hiperestática o “*Estáticamente indeterminado”*
- Si $\boldsymbol{r+3m<3n+c}$ El marco es Hipostático; es decir: es inestable.

Dicho lo anterior podemos definir los siguientes conceptos:

- **Condiciones de isostaticidad:** es la relación que existe entre el número de incógnitas y el número de ecuaciones de equilibrio estático de los elementos que integran una estructura.
- **Grado de isostaticidad:** Se define como la diferencia entre el número de incógnitas de una estructura y el número de ecuaciones de equilibrio estático asociadas a su plano.

- **Estructura isostática:** Es una estructura estáticamente determinada cuyo número de incógnitas es igual al número de las ecuaciones de la estática relacionadas con su plano, su grado de isostaticidad es igual a cero y tiene una solución única para sus sistema de fuerzas.

  La estática mediante el empleo de la mecánica del cuerpo rígido proporciona soluciones para este tipo de estructuras, mediante la simple aplicación de las condiciones básicas de equilibrio:

  - $\sum F = F_R = 0$
  - $\sum M = M_R = 0$

- **Estructura hiperestática:** Es una estructura estáticamente indeterminada cuyo número de incógnitas es mayor al número de ecuaciones de equilibrio estático asociadas a su plano, por lo que su grado de isostaticidad es mayor a cero y posee varias soluciones, para hallar una solución a este tipo de estructuras no basta con aplicar los principios básicos de la estática, sino que habrá que aplicar algunas combinaciones de esfuerzos en las que habrá que considerar ecuaciones de compatibilidad que se obtendrán a través de la introducción de esfuerzos y deformaciones internas asociadas a las deformaciones de la estructuras con ayuda de métodos proporcionados por la mecánica del solido deformable.

- **Estructura hipostática** Es una estructura indeterminada cuyo número de incógnitas es menor al número de ecuaciones de equilibrio estático asociadas a su plano, por lo que no tiene solución debido a su inestabilidad.

1.3. ELEMENTOS MECÁNICOS.

1.3.1. DEFINICIÓN

En términos vanos, un elemento mecánico, se define como el efecto interno en un elemento estructural causado por la aplicación de un sistema de fuerzas en equilibrio; dicho sistema se conforma por la combinación del *sistema activo,* que se refiere a todas aquellas cargas actuantes sobre el elemento estructural, y el *sistema reactivo*, definido por las reacciones en los apoyos de dicho elemento.

1.3.2. CLASIFICACIÓN

Por los efectos que causan las componentes del resultante interno se clasifican en:

- **Fuerza Norma (N):** Fuerza interna que actúa perpendicular a una sección.
- **Fuerza cortante (V):** Fuerza interna que actúa paralela a una sección.
- **Momento flexionante (M):** Momento interno que actúa paralelo a una sección.
- **Momento torsionante (T):** Momento interno que actúa perpendicular a una sección.

1.3.3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS.

Para definir los elementos mecánicos de un elemento estructural, es necesario entender la causa-efecto que provoca un sistema de fuerzas externo en el interior de una estructura, partiendo del teorema: “*Si un elemento sometido a un sistema de fuerzas externo se encuentra en equilibrio; cualquier punto de dicho elemento se encuentra también en equilibrio”,* tomemos en cuenta el siguiente cuerpo solido (figura 1) sometido al sistema de fuerzas en equilibrio.

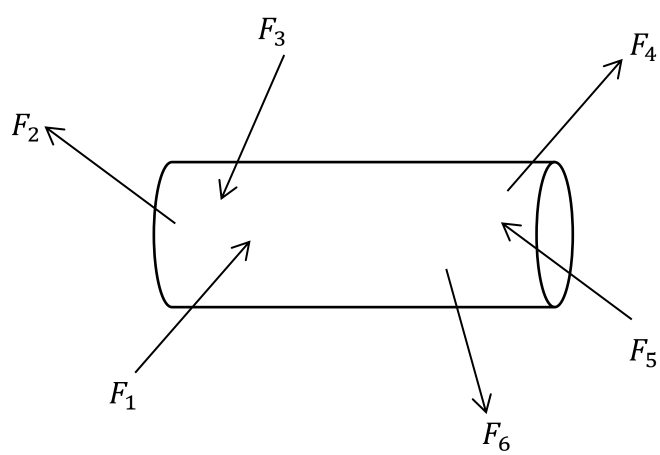


Fig. 1 Solido sometido hipotéticamente a un sistema de fuerzas en equilibrio

Como el cuerpo está en equilibrio podemos decir que:

- $\sum F = F_R = 0$

- $\sum M = M_R = 0$

Desde el punto de vista de la mecánica del solido rígido únicamente se plantea el equilibrio externo, sin embargo visto desde la perspectiva de la mecánica del solido deformable podemos relacionar el equilibrio externo con el equilibrio interno de la siguiente manera:

Dividamos en cuerpo por la sección **"a"** (figura 2)

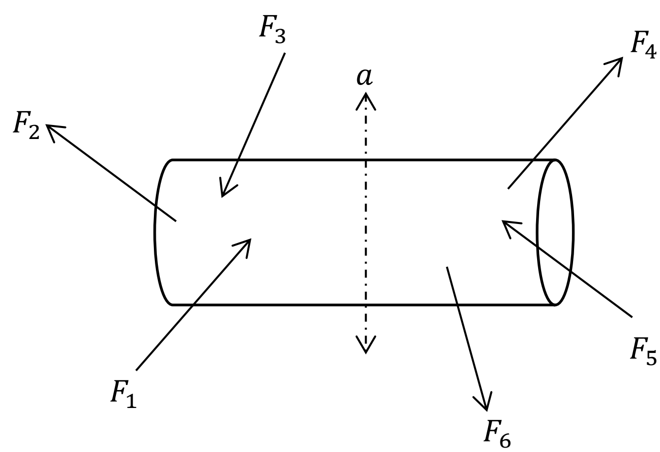


Fig. 2 Cuerpo mostrado en la fig.1 dividido a una distancia "x"

Tendremos entonces la porción del cuerpo $a^{´}$ (figura 3)

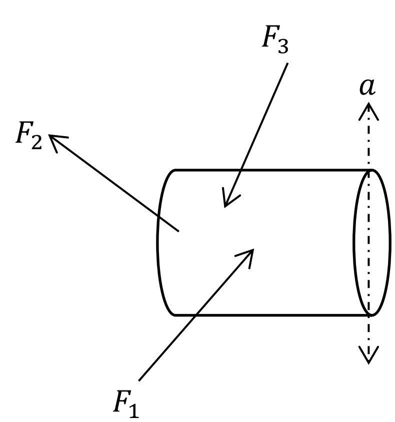


Fig. 3 Porción **a´** del solido propuesto

Y la porción del elemento $a^{''}$ (figura 4)

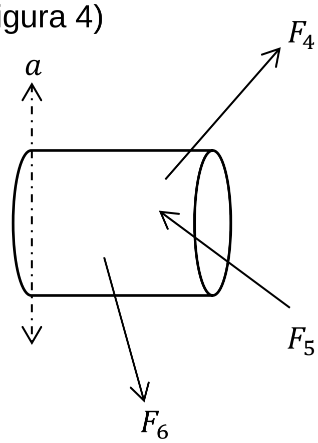


Fig.4 Porción **a´´** del solido propuesto

Dichas porciones del cuerpo bajo su respectivo sistema de fuerzas actuantes, por separado no se encuentran en equilibrio; para lograr el equilibrio en dichas partes, será necesario relacionar al sistema de fuerzas externo con otro sistema de fuerzas; es decir: nos veremos obligados a deducir la resultante de fuerzas internas del cuerpo causado por el sistema de fuerzas externo.

Aislando la porción del cuerpo $a^{'}$

Para mantener en equilibrio el resultante del sistema de fuerzas externo representado por: F_1 F_2 F_3 habrá que involucrar un resultante del sistema de fuerzas interno que será representado por F_R y un momento resultante interno M_R este sistema interno se obtiene a partir del concepto: descomposición de una fuerza en una fuerza y un par, y actúa en el centroide de la sección transversal de la siguiente manera:

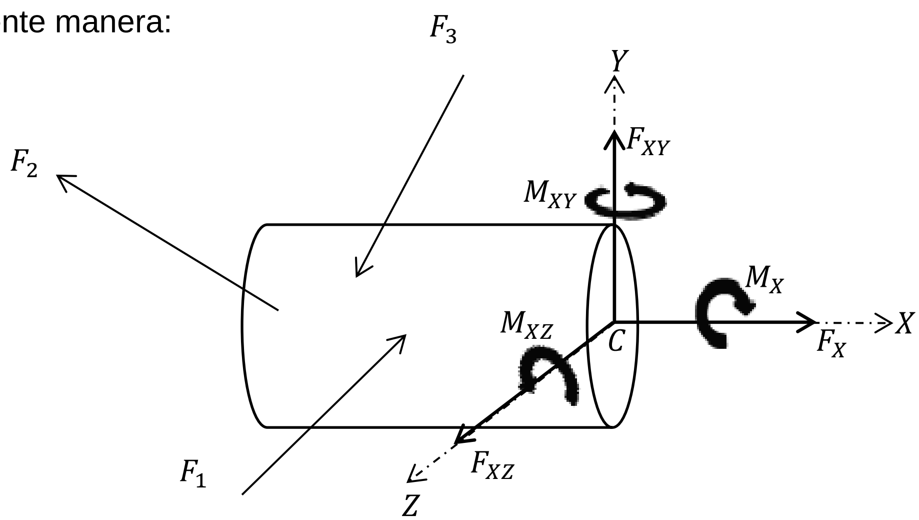


Fig. 5 Porción **a´** del solido que involucra el sistema de fuerzas activo y reactivo

Dicho sistema interno deberá tener la misma magnitud y dirección que el sistema externo pero con sentido opuesto a este para así lograr el equilibrio estático.

Como podemos observar el sistema interno está formado por las fuerzas F_X, F_{XY}, F_{XZ} y por los momentos M_X, M_{XY}, M_{XZ}. Todos actuando en dirección positiva de los ejes, como el plano de corte imaginario es perpendicular al eje “X” las componentes del sistema están referidas a dicho eje.

Definición de las fuerzas y momentos resultantes internos.

- $\boldsymbol{F_X}$: Es una fuerza que actúa perpendicular a la sección trasversal de corte, por lo que según el sentido en el que actúa produce efectos de tensión o compresión; este tipo de fuerza se define como: **Fuerza Normal (N)**

- $\boldsymbol{F_{XY}}$ **y** $\boldsymbol{F_{XZ}}$**:** Son fuerzas que actúan paralelas a la sección transversal de corte por lo que provoca efectos de corte en la dirección Y y Z respectivamente; este tipo de fuerzas se define como: **Fuerza Cortante (V)**

- $\boldsymbol{M_X}$: Es un momento que actúa perpendicular a la sección transversal de corte por lo que provoca efectos de torsión alrededor del eje longitudinal; este tipo de momentos de define como: **Momento Torsionante (T)**

- $\boldsymbol{M_{XY}}$ **y** $\boldsymbol{M_{XZ}}$**:** Son momentos que actúan paralelos a la sección transversal de corte lo que provoca efectos de flexión en la dirección Y y Z respectivamente: este tipo de momentos se define como: **Momento Flexionante (M)**

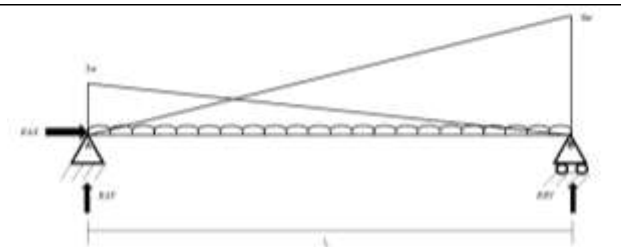
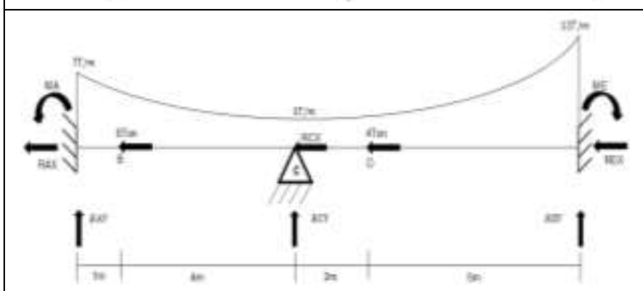
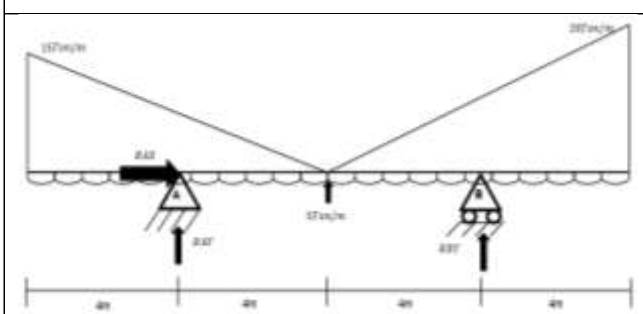
1.3.4. DETERMINACIÓN DEL DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE.

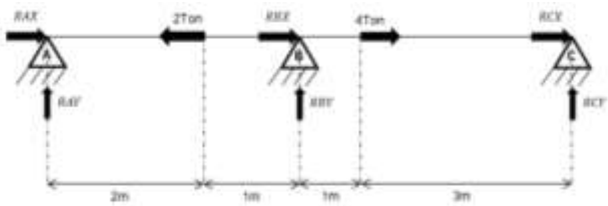
Para determinar el diagrama de fuerza cortante se calcula el valor de la fuerza cortante en distintos puntos del elemento estructural analizado, evaluando las ecuaciones de cortante obtenidas a partir de los métodos que serán descritos en los capítulos cuatro cinco y seis de este trabajo de tesis, sin embargo debemos saber que la fuerza cortante en cada sección de la viga es igual a la sumatoria de todas las fuerzas verticales a la izquierda de dicha sección, o bien a la derecha de esta respetando la convención de signos utilizada.

1.3.5. DETERMINACIÓN DEL DIAGRAMA DE MOMENTO

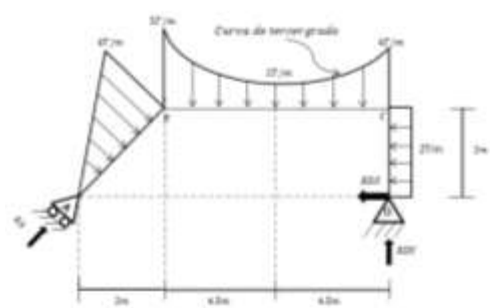
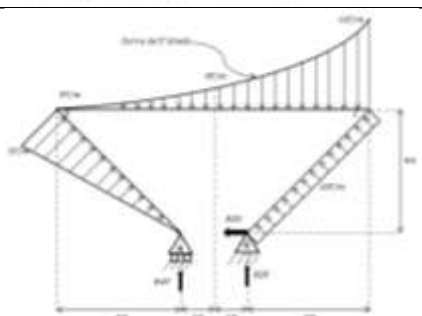
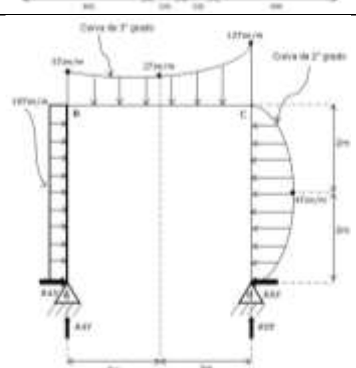
Al igual que para obtener el diagrama de fuerza cortante, en los capítulos cuatro, cinco y seis del presente trabajo de tesis se describirá un método para la obtención de ecuaciones que rigen el comportamiento del momento flexionante en el elemento estructural que estemos analizando, sin embargo, debemos tomar en cuenta que el momento flexionante de una sección es igual a la sumatoria de todos los momentos de primer orden de todas las fuerzas que actúan a la izquierda de dicha sección, o bien la sumatoria de todos los momentos de primer orden de las fuerzas actuantes a la derecha de dicha sección, tomando en cuenta la convención de signos utilizada.

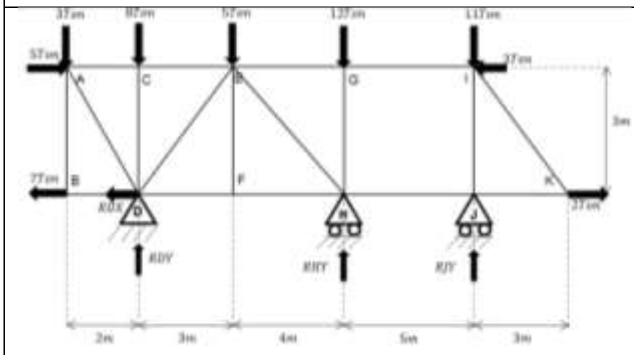
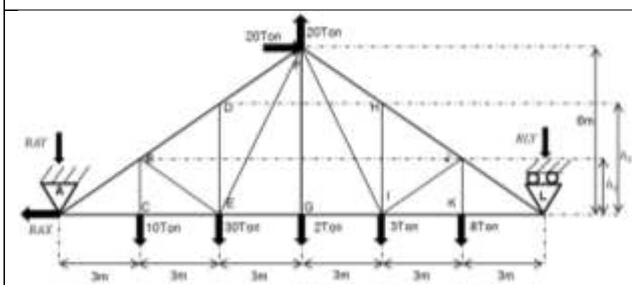
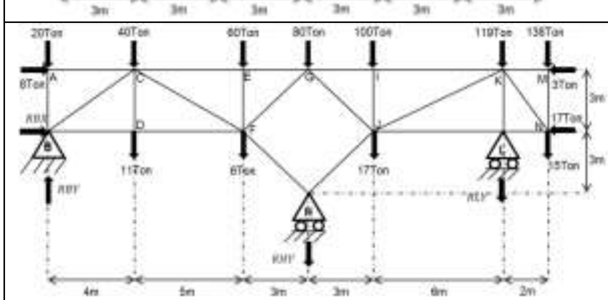
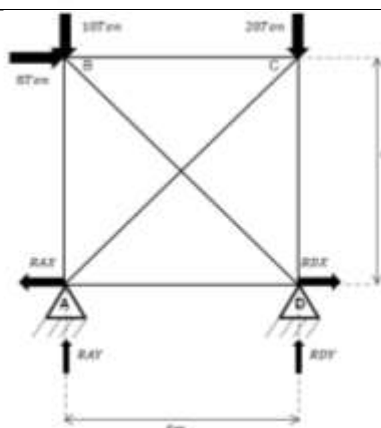
Ejemplo 1. Calcule el grado de indeterminación de las siguientes vigas. $\boldsymbol{r = c + n}$

Viga	Numero de incógnitas (r)	Numero de ecuaciones de equilibrio (n)	Numero de ecuaciones de condición (c)	Condiciones de isostaticidad
	3	3	0	Isostática
	8	3	0	Hiperestática
	3	3	0	Isostática

	6	3	0	Hiperestática

Ejemplo 2. Calcule el grado de indeterminación de los siguientes marcos $r + 3m = 3n + c$

Marco	Numero de incógnitas (r)	Número de miembros multiplicado por tres (3m)	Numero de nudos (n)	Numero de ecuaciones de condición (c)	Condiciones de isostaticidad
	3	9	12	0	Isostático
	3	9	12	0	Isostático
	4	9	12	0	Hiperestático

Ejemplo 3. Calcule el grado de indeterminación de las siguientes armaduras $b + r = 2j$				
Armadura	Numero de barras (b)	Número de incognitas (r)	Numero de nudos multiplicado por dos (2j)	Condiciones de isostaticidad
	18	4	22	Isostática
	21	3	24	Isostática
	24	4	28	Isostática
	6	4	8	Hiperestática

Capítulo 2. Clasificación de las estructuras.

2.1. Importancia de la clasificación de las estructuras.

Muy probablemente el primer tema que abordamos al observar una estructura es la clasificación de esta misma, debido a que una vez que logramos distinguir de qué tipo de esta se trata, podemos definir el método de análisis que más convenga para dar solución a los problemas que con ella se nos plantean, si bien la clasificación de una estructura es también uno de los aspectos que se resuelven con gran facilidad, existen muchos puntos que debemos tomar en cuenta para elegir con exactitud el grupo al cual pertenece. A continuación se enuncian los puntos de mayor importancia al momento de clasificar una estructura.

2.2. Aspectos fundamentales para la clasificación de las estructuras.

2.2.1. Según el plano en el que actúan.

Un primer punto que debe tomarse en cuenta para su clasificación es localizar el plano en el que actúan los elementos de la estructura, por consecuencia tomando en cuenta este aspecto las estructuras se dividen en dos grandes grupos:

2.2.1.1. Estructuras planas.

Son aquellas estructuras cuyos elementos se encuentran actuando en un plano compuesto comúnmente por dos ejes denominados (x, y) como puede notarse en la figura 6.

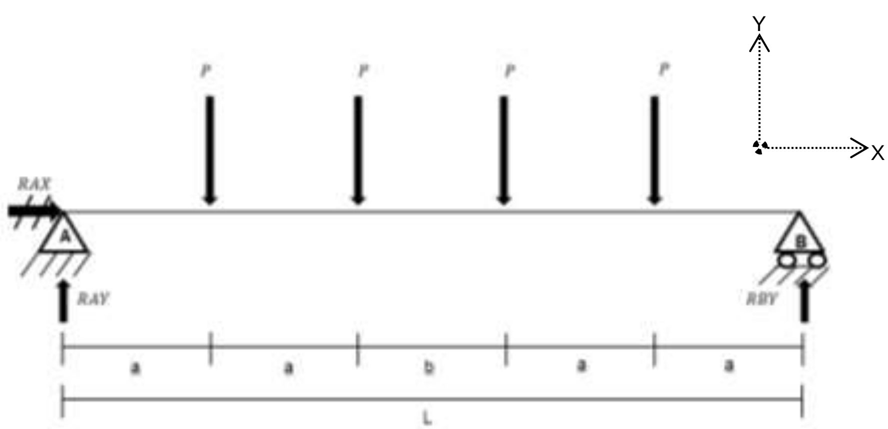


Fig. 6. Estructura en el plano

En la figura anterior podemos observar una representación común de una estructura cuyos elementos actúan en el plano.

2.2.1.2. Estructuras en el espacio.

Son aquellas estructuras cuyos elementos se encuentran actuando en el espacio comúnmente representado por más de dos ejes y habitualmente denominados (x, y , z) como se observa en la figura 7.

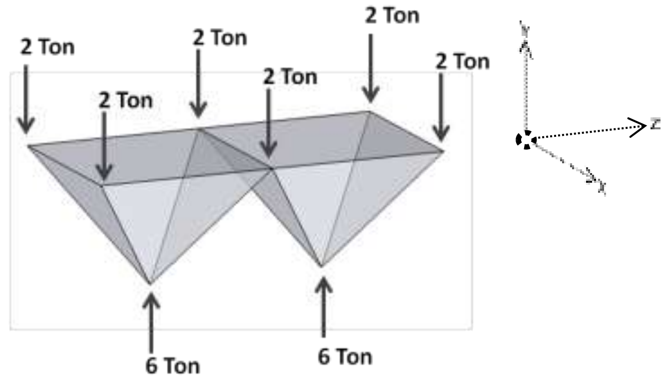


Fig. 7 Representación de una estructura en el espacio.

En la figura anterior podemos observar una representación común de una estructura cuyos elementos actúan en el espacio.

2.2.2. Según su tipo de apoyos.

La función del apoyo o soporte de una estructura es la de "fijar" la estructura al suelo o bien la de "sujetar" dicha estructura a un elemento deseado, de tal forma que los desplazamientos que estas pudieran tener queden restringidos para así garantizar la estabilidad tanto interna como externa. Los desplazamientos que una estructura puede presentar son de dos tipos: Lineales y angulares, de tal manera que una estructura que se encuentra actuando en el plano puede presentar tres desplazamientos: dos lineales y uno angular, mientras que una estructura que se encuentra actuando en el espacio puede presentar seis desplazamientos: tres lineales y tres angulares. Debido a que los desplazamientos en una estructura se presentan de la forma antes mencionada, los apoyos o soportes de estas se clasifican según el número y tipo de desplazamientos que estos son capaces de restringir de la siguiente forma.

2.2.2.1. Apoyo móvil.

Este tipo de apoyo restringe el desplazamiento lineal que pueda presentarse en el eje "Y" de su propio plano, por lo que a su componente reactiva se le asocia generalmente con el nombre de "RY" (reacción en el eje Y) como este tipo de soporte solo es capaz de restringir el desplazamiento mencionado, a este se asocian dos grados de libertad, es decir: que aún puede presentarse el desplazamiento en el eje “X” y el giro como se muestra en la figura 8.

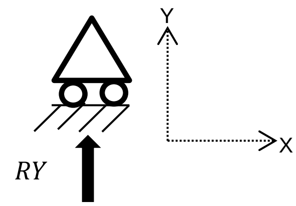


Fig. 8. Representación común de un apoyo móvil.

En la figura anterior podemos observar la representación más común de un apoyo móvil así como la componente reactiva actuando en el eje “Y” del plano en el que actúa, capaz de restringir el desplazamiento lineal con respecto a dicho eje.

2.2.2.2. Apoyo fijo.

Este tipo de apoyo restringe dos desplazamientos lineales: en el eje “Y” por lo que a su componente reactiva se le asocia general mente con el nombre de “RY” (reacción en el eje Y) así como en el que pudiera presentarse en el eje “X” por lo que a su componente reactiva se le asocia generalmente con el nombre de “RX” (reacción en el eje X) (ambas reacciones presentándose según el plano en el que actúa dicho apoyo) como este tipo de soporte es capaz de restringir los desplazamientos mencionados anteriormente, a este se asocias solamente un grado de libertad, es decir, que aún puede presentarse un desplazamiento: “el giro” como se muestra en la figura 9.

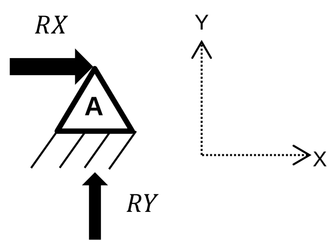


Fig. 9. Representación usual de un apoyo fijo.

En la figura anterior podemos observar la representación más común de un apoyo fijo así como la componente reactiva actuando en el eje “Y” y la componente reactiva asociada al eje “X” ambas capaces de restringir los desplazamientos lineales que pudieran presentarse en el eje en el que actúan.

2.2.2.3. Apoyo de empotramiento.

Este tipo de apoyo restringe los desplazamientos lineales que pudieran presentarse tanto en el eje “X” y “Y” así como el giro que pudiera presentarse en dicho punto.

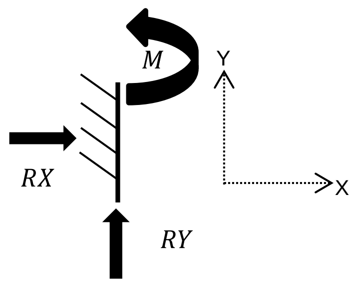


Fig. 10. Representación simple de un apoyo de empotramiento

En la figura 10 podemos observar la representación más común de un apoyo de empotramiento con las componentes reactivas restringiendo ambos desplazamientos lineales así como el giro.

2.2.3. Por la forma geométrica de los elementos que la conforman.

Con respecto a la forma geométrica de los elementos que integran a una estructura estas se clasifican en dos grandes grupos.

2.2.3.1. Estructuras rectilíneas.

Son todas aquellas estructuras que se encuentran formadas por elementos rectilíneos, pudiendo encontrarse cualquiera de los siguientes tipos de estructuras:

- Estructuras Rectilíneas
  - Vigas
    - Horizontales
    - Inclinadas
  - Columnas
    - Horizontales
    - Inclinadas
  - Marcos
    - Horizontales
    - Inclinados
  - Armaduras

2.2.3.2. Estructuras curvas.

Son aquellas estructuras que poseen elementos curvos; pudiendo encontrarse cualquiera de las siguientes estructuras. :

- Estructuras Curvas
  - Arcos
    - Circulares
    - Elípticos
    - Parabólicos
  - Cables
    - Parabólico
    - Elípticos
    - Catenario

2.2.3. Según las cargas a las que se encuentran sometidas.

Existen varios criterios que tomar en cuenta para clasificar una estructura según las cargas a las que esta se encuentra sometida, sin embargo, en aspectos generales se toma en cuenta el tipo de carga, la permanencia de esta, así como la forma en la que esta actúa, dichos aspectos se resumen a continuación:

2.2.3.1. Según el tipo de carga.

2.2.3.1.1. Cargas concentradas.

Son aquellas cuyo punto de aplicación es definido por un punto específico del elemento sobre el cual actúan, estas pueden ser axiales si actúan paralelas al eje longitudinal de dicho elemento provocando tensión o compresión a este dependiendo del sentido en el que actúan, estas cargas pueden actuar también perpendiculares al eje longitudinal de un elemento provocando efectos de corte.

En la figura 11 se encuentran representadas algunas representaciones de cargas puntuales.

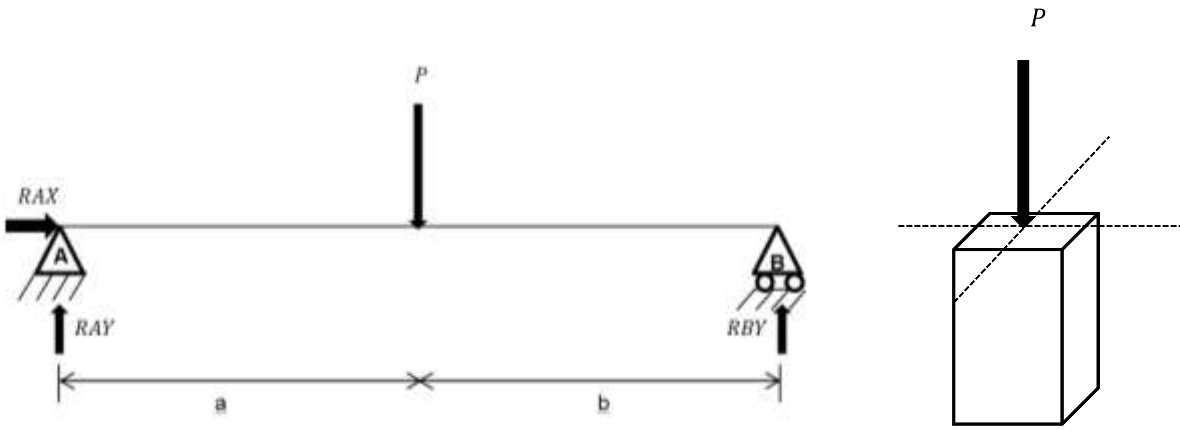


Fig. 11. Cargas puntuales axiales y perpendiculares al eje longitudinal de un elemento

2.2.3.1.2. Cargas repartidas.

Son aquellas cargas cuyo punto de aplicación se encuentra definido por una unidad de longitud pudiendo encontrar cualquiera de los siguientes casos:

2.2.3.1.2.1. Cargas uniformemente repartidas

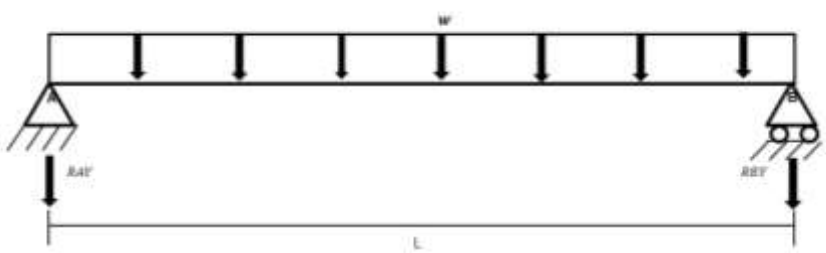


Fig. 12. Representación más común de cargas uniformemente repartidas

2.2.3.1.2.2. Cargas distribuidas y no uniformes con variación lineal

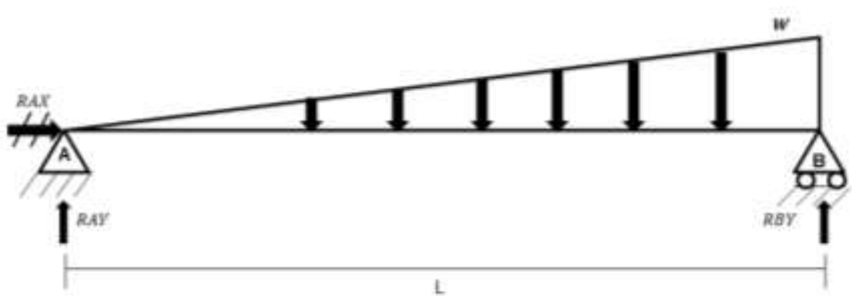


Fig. 13. Representación más común de cargas distribuidas no uniformes con variación lineal

2.2.3.1.2.3. Cargas distribuidas y no uniformes con variación no lineal

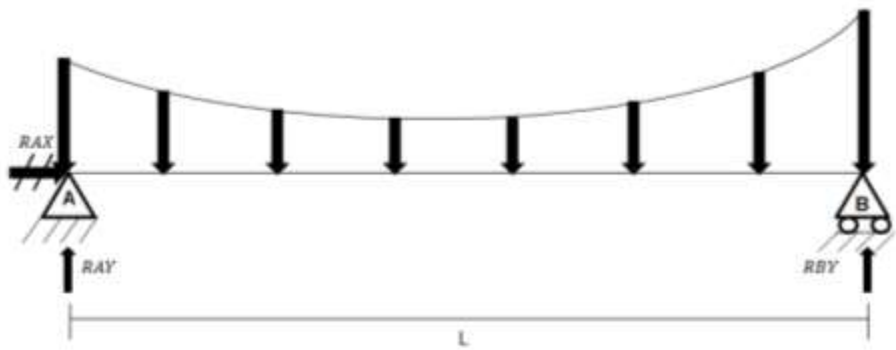


Fig. 14. Representación más común de cargas distribuidas no uniformes con variación no lineal

2.2.3.2. Según su permanencia.

2.2.3.2.1. Cargas Vivas

Son todas aquellas fuerzas que se producen por el uso y ocupación de las estructuras y que no tienen carácter permanente.

2.2.3.2.2. Cargas Muertas

Son todas aquellas fuerzas producidas por el peso propio de los elementos que conforman una estructura así como todos aquellos elementos de carácter permanente y cuya carga no cambia sustancialmente con el tiempo.

2.2.3.2.3. Cargas Accidentales

Son todas aquellas cargas que podrían presentarse en ciertos momentos causando aplicación de fuerza y esfuerzo en una estructura como es el caso del viento, sismo, etc.

2.2.3.3. Según la forma en la que actúan.

2.2.3.3.1. Cargas activas.

Son aquellas cargas que definen el sistema de cargas externo que se encuentra actuando sobre un elemento estructural.

2.2.3.3.2. Cargas reactivas.

Son aquellas que conforman el sistema reactivo de una estructura, es decir: aquellas fuerzas que se presentan en los soportes de una estructura.

2.2.3.3.3. Cargas internas.

Son todas aquellas fuerzas que se producen en el interior de una estructura y que a su vez son producto de la acción del sistema activo de una estructura, es decir: los elementos mecánicos de una estructura.

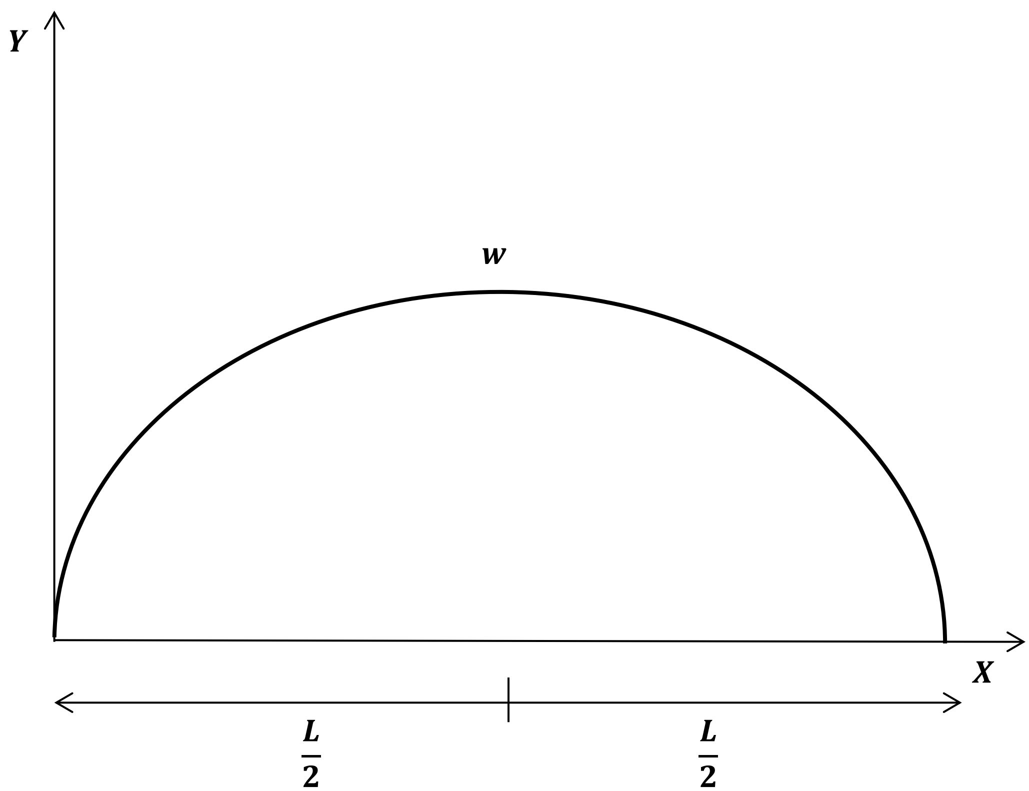
CAPITULO 3. DEFINICIÓN MATEMÁTICA DE CENTROIDES Y MOMENTOS DE INERCIA

En este capítulo se demostraran algunos centroides de gravedad de algunas figuras geométricas, tomando en cuenta para dicha demostración que la fórmula del centroide es:

$$\bar{X} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} \hat{X} da}{\int_{L_1}^{L_2} da}$$

Tomando en cuenta lo anterior demostraremos lo siguiente.

1.- Demostrar que $\bar{X} = \frac{L}{2}$



Tomando en cuenta que las formas posibles de la ecuación que describe nuestra parábola con una altura de W son las siguientes:

- $y = ax^2 + bx + c$
- $y = ax^2 + bx$
- $y = ax^2 + c$
- $y = ax$

Y tomando en cuenta los puntos que conocemos de dicha curva:

Si: x=0 y=0

x=L/2 y=W

x=L y=0

Los puntos que nos sirven en este caso para definir la ecuación de la curva son los siguientes que X=L/2 y X=L mientas que la forma más conveniente de usar seria la siguiente $y = ax^2 + bx$ con los puntos anteriormente mencionados formaremos un sistema de ecuaciones:

$$1.- \qquad \boldsymbol{a\left(\frac{L^2}{4}\right) + b\left(\frac{L}{2}\right) = W}$$

$$2.- \qquad \boldsymbol{a(L^2) + b(L) = W}$$

Para resolverlo como primer paso despejaremos **a** de la ecuación **2**

$$3.- \qquad \boldsymbol{a = -\frac{b}{L}}$$

Sustituyendo a en la ecuación **1** despejaremos **b**

$$\left(-\frac{b}{L}\right)\left(\frac{L^2}{4}\right) + b\left(\frac{L}{2}\right) = w$$

$$-\frac{bL}{4} + \frac{bL}{2} = w$$

$$\boldsymbol{b = \frac{4W}{L}}$$

Sustituyendo **b** en la ecuación **3**

$$\boldsymbol{a = -\frac{b}{L} = -\frac{\frac{4W}{L}}{L} = -\frac{4W}{L^2}}$$

Como ya conocemos **a** y **b;** y sabemos que la forma de nuestra ecuación es: $y = ax^2 + bx$ nuestra ecuación que define la curva es:

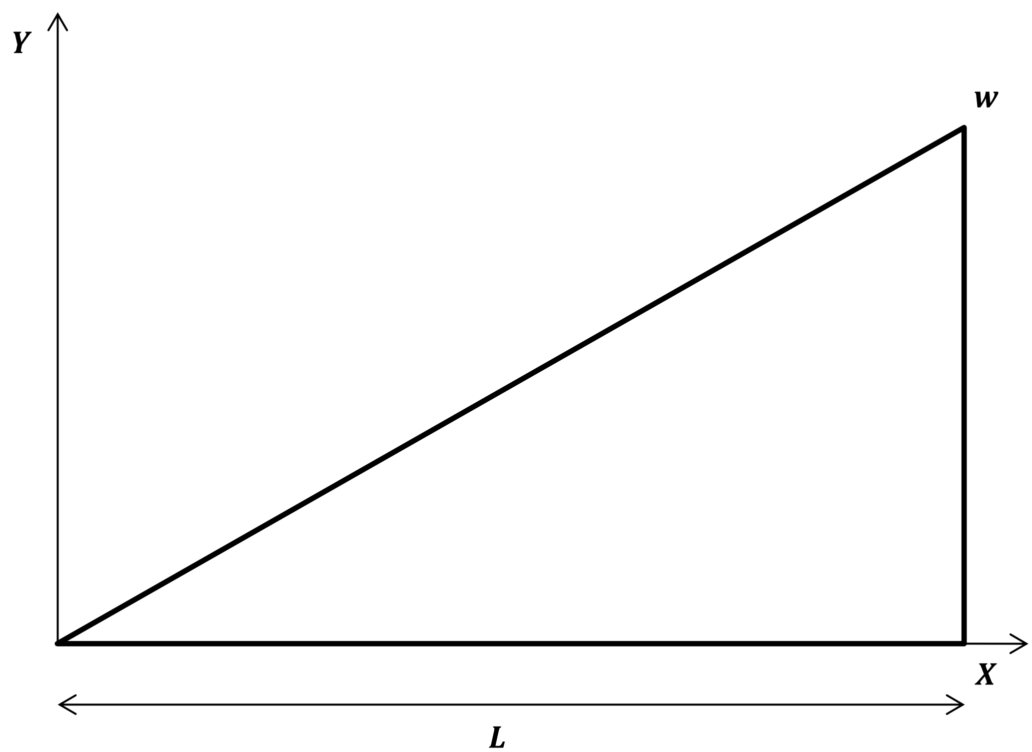
$$\boldsymbol{y = -\frac{4W}{L^2}x^2 + \frac{4W}{L}x}$$

Calculo del centroide de la parábola

$$\bar{X} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} \hat{X} da}{\int_{L_1}^{L_2} da} = \frac{\int_0^L (X)\left(-\frac{4W}{L^2}x^2 + \frac{4W}{L}x\right) dx}{\int_0^L \left(-\frac{4W}{L^2}x^2 + \frac{4W}{L}x\right) dx} = \frac{\int_0^L \left(-\frac{4W}{L^2}x^3 + \frac{4W}{L}x^2\right) dx}{\int_0^L \left(-\frac{4W}{L^2}x^2 + \frac{4W}{L}x\right) dx}$$

$$= \frac{\left[-\frac{WX^4}{L^2} + \frac{4WX^3}{3L}\right]_0^L}{\left[-\frac{4WX^3}{3L^2} + \frac{2WX^2}{L}\right]_0^L} = \frac{-\frac{wL^4}{L^2} + \frac{4wL^3}{3L^2}}{-\frac{4WL^3}{3L^2} + \frac{2WL^2}{L}} = \frac{-WL^2 + \frac{4WL^2}{3}}{-\frac{4WL}{3} + 2WL} = \frac{\frac{WL^2}{3}}{\frac{2WL}{3}} = \frac{3WL^2}{6WL} = \boldsymbol{\frac{L}{2}}$$

2.- Demostrar que $\boldsymbol{\bar{X} = \frac{2L}{3}}$



Tomando en cuenta que la línea recta está definida por los puntos P1: (0,0) y P2: (L,W) y que a su vez las formas posibles de la ecuación que describe la línea son:

- $y = mx + b$

- $y = mx$

Dónde: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{W - 0}{L - 0} = \frac{W}{L}$$

La forma de la función que nos conviene utilizar es:

- $y = mx$

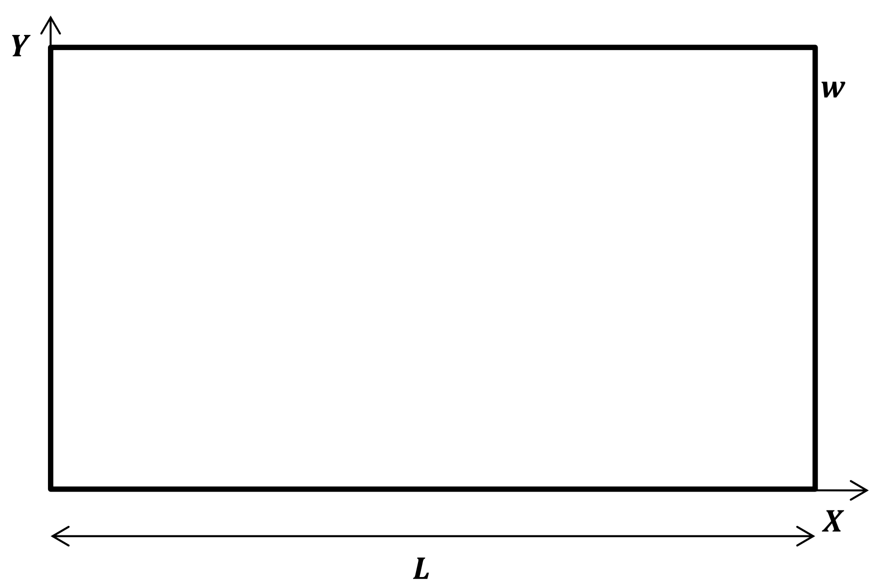
Por lo tanto la función que define nuestra recta es:

$$y = \frac{W}{L} X$$

Calculo del centroide del triangulo

$$\bar{X} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} \hat{X} da}{\int_{L_1}^{L_2} da} = \frac{\int_0^L (X)\left(\frac{W}{L} X\right) dx}{\int_0^L \left(\frac{W}{L} X\right) dx} = \frac{\int_0^L \left(\frac{W}{L} X^2\right) dx}{\int_0^L \left(\frac{W}{L} X\right) dx} = \frac{\left[\frac{WX^3}{3L}\right]_0^L}{\left[\frac{WX^2}{2L}\right]_0^L} = \frac{\frac{WL^2}{3}}{\frac{WL}{2}} = \frac{2WL^2}{3WL} = \boldsymbol{\frac{2}{3} L}$$

3.- Demostrar que $\bar{X} = \frac{L}{2}$



Tomando en cuenta que la línea recta está definida por los puntos P1: (0,W) y P2: (L,W) y que a su vez las formas posibles de la ecuación que describe la línea son:

- $y = mx + b$
- $y = mx$

Dónde: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{W - W}{L - 0}$$

En este caso es evidente que la pendiente está ausente m=0

SI X=0 Y=W
Si X=L Y=W

Como:

$y = mx + b$

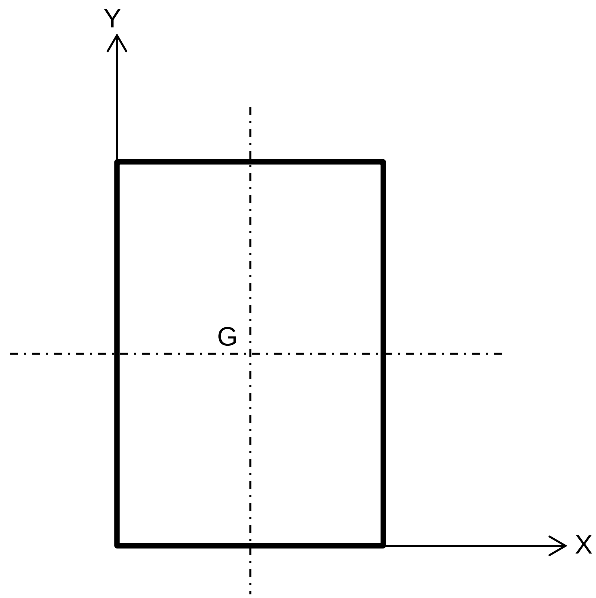
$b = y - mx$

$\boldsymbol{b = y}$

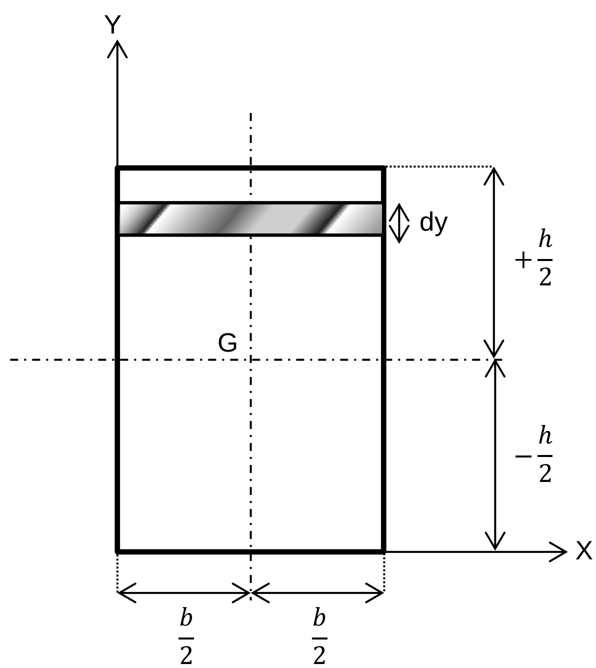
Y=W

$$\bar{X} = \frac{\int_{L_1}^{L_2} \hat{X} da}{\int_{L_1}^{L_2} da} = \frac{\int_0^L (X)(W)dx}{\int_0^L (W)dx} = \frac{\left[\frac{WX^2}{2}\right]_0^L}{[WX]_0^L} = \frac{\frac{WL^2}{2}}{WL} = \frac{WL^2}{2WL} = \frac{L}{2}$$

4.- De la siguiente figura geométrica, demostrar que la fórmula que define la inercia es $\frac{bh^3}{12}$ o bien $\frac{b^3h}{12}$ según el sentido en el que se tome dicha resistencia geométrica.



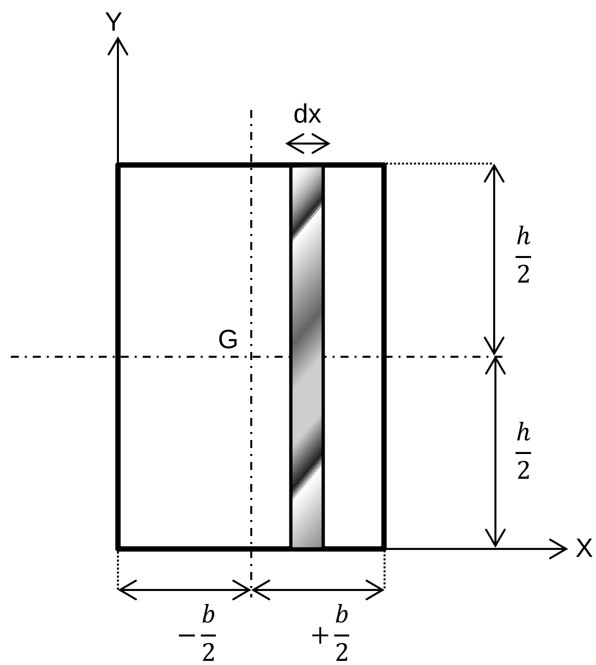
Si la inercia se tomara con respecto al eje X; se encontraría que la resistencia geométrica de la figura se representaría de la siguiente forma:



La sumatoria total de la resistencia geométrica de dicha figura con respecto al eje X se ve definida por la siguiente integral.

$$I_{XG} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (Y^2 b)dy = \left[\frac{b}{3} * y^3\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right) = \frac{b}{3} * \frac{h^3}{4} = \boldsymbol{\frac{bh^3}{12}}$$

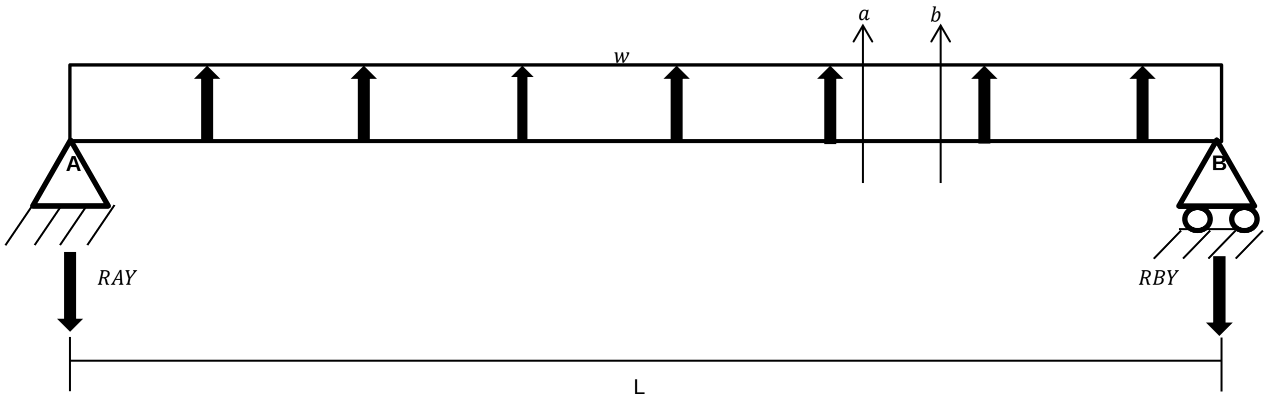
Si la inercia se tomara con respecto al eje Y; se encontraría que la resistencia geométrica de la figura se representaría de la siguiente forma:



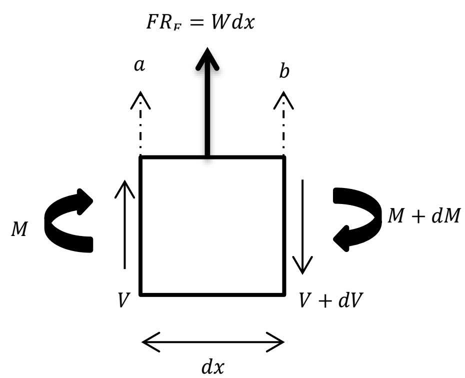
La sumatoria total de la resistencia geométrica de dicha figura con respecto al eje X se ve definida por la siguiente integral.

$$I_{YG} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (X^2 h)dx = \left[\frac{h}{3} * X^3\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \left(\frac{h}{3}\right)\left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8}\right) = \frac{h}{3} * \frac{b^3}{4} = \boldsymbol{\frac{hb^3}{12}}$$

Relación fuerza córtate – momento flexionante.



De la viga anteriormente mostrada, se aislara un elemento diferencial, localizado a una distancia “x” y delimitado por las secciones “a” y “b” las cuales son paralelas entre si y perpendiculares con respecto al eje longitudinal de la viga, con una distancia evidente “dx” entre sí, los elementos mecánicos de la sección aislada serian entonces:



En este elemento, se observan dos conjuntos de fuerzas: el “externo” o activo, que es denotado por la carga uniformemente distribuida Wdx que se encuentra actuando en sentido positivo del eje “Y” y cuyo brazo de palanca con respecto a “a” está definido por $\frac{dx}{2}$

Por otro lado, notamos el sistema de fuerzas “interno” representado por los elementos mecánicos “V” y “M” En la sección “a” y por la fuerza cortante $(V + dV)$ y el momento flexionante $(M + dM)$ en la sección “b”.

Ambos sistemas “interno” y “externo” conforman uno solo en el elemento aislado, dicho sistema unificado es paralelo al plano al cual se asocian dos ecuaciones de equilibrio estático: $\sum M = 0$ y $\sum Fy = 0$ por lo tanto los elementos mecánicos se obtienen al aplicar dichas ecuaciones:

Para la fuerza cortante:

$\sum Fy = 0$

$V + Wdx - V - dV = 0$

$\boldsymbol{dV = Wdx}$

Podemos decir entones:

“La pendiente de la fuerza cortante está representada por la carga externa”

Integrando la ecuación $dV = Wdx$

$\int_{V_1}^{V_2} V = \int_{W_1}^{W_2} Wdx$

$\int_{V_1}^{V_2} V$ Representa la variación de la fuerza cortante entre las secciones “a” y “b”

$\int_{x_1}^{x_2} Wdx$ Representa el área bajo la forma de la carga externa entre las secciones “a” y “b”

Podemos decir entones:

“la variación de la fuerza cortante entre ambas secciones es igual al área bajo la forma de la carga externa entre dichas secciones”

$\Delta \boldsymbol{V = V_2 - V_1 = area\ de\ la\ carga\ externa\ a - b}$

Para el momento flexionante:

$\sum M = 0$

$M + Vdx + Wdx\left(\frac{dx}{2}\right) - (M + dM) = 0$

$M + Vdx + \left(\frac{Wdx^2}{2}\right) - M - dM = 0$

Como $\frac{Wdx^2}{2} \cong 0$ entonces:

$$\boldsymbol{dM = Vdx}$$

Podemos decir entones:

“La pendiente del momento flexionante está representada por la fuerza cortante”

Integrando $dM = Vdx$

$$\int_{M_1}^{M_2} dM = \int_{x_1}^{x_2} Vdx$$

$\int_{M_1}^{M_2} dM$ Representa la variación del momento flexionante entre las secciones “a” y “b”

$\int_{x_1}^{x_2} Vdx$ Es el área de la fuerza cortante entre las secciones “a” y “b”

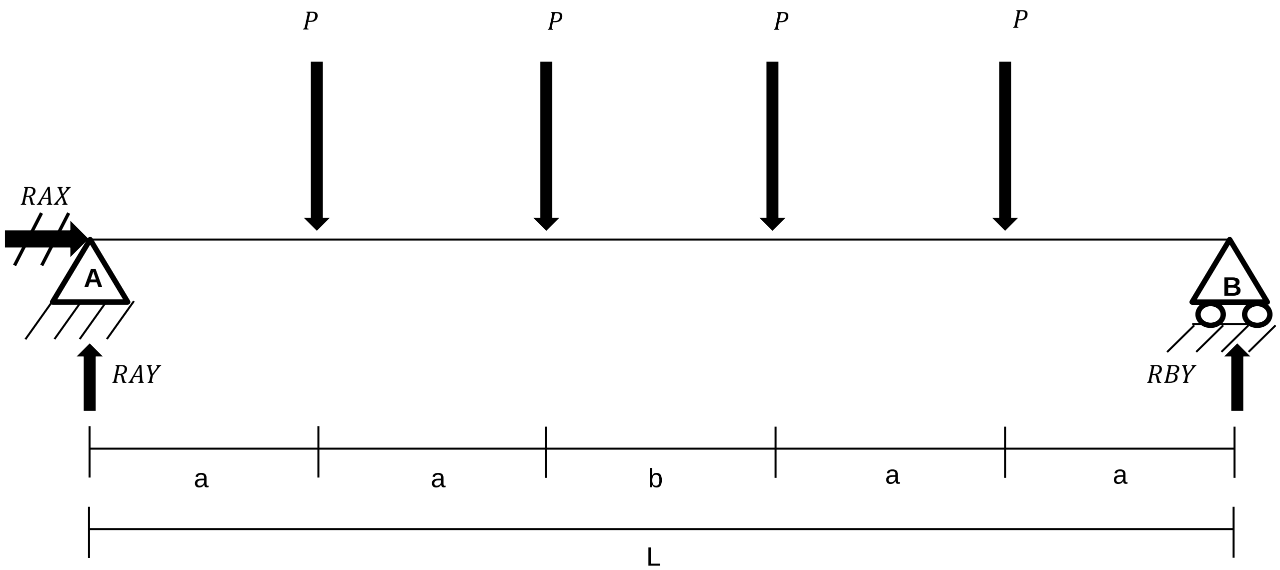
Podemos decir entones:

“La variación del momento flexionante entre las secciones “a” y “b” es igual al área de la fuerza cortante entre dichas secciones”

$$\boldsymbol{\Delta M = M_2 - M_1 = area\ de\ la\ fuerza\ cortante\ a - b}$$

Capítulo 4. Solución de vigas (Barras rectas e inclinadas)

1.- De la siguiente viga, determine las reacciones en los apoyos, las funciones que describen la variación del momento flexionante y fuerza cortante producto de la acción del sistema de fuerzas externo, dibuje los diagramas correspondientes a dichas funciones.



Verificación del grado de indeterminación de la viga:

Recordando que el grado de indeterminación en términos vanos es la diferencia entre el número de incógnitas de nuestra estructura "I" y el número de ecuaciones de equilibrio estático asociadas a su plano "E"

$$\boldsymbol{I - E = 3 - 3 = 0}$$

Por lo tanto: nuestra estructura es estáticamente determinada y podemos dar solución a ella mediante las ecuaciones de equilibrio estático.

- $\sum F = F_R = 0$
- $\sum M = M_R = 0$

Procedimiento de análisis:

Para el cálculo de las reacciones verticales en los apoyos A y B “RAY” y “RBY” respectivamente, realizaremos una sumatoria de momentos con respecto al punto A en la cual obtendremos una ecuación, cuya incógnita representará el valor de “RBY”; al resolver dicha ecuación, conoceremos el valor de la reacción vertical en el punto **B “RBY”** una vez obtenida la reacción procederemos a realizar una sumatoria de fuerzas con respecto al eje “Y” en la cual encontraremos una ecuación cuya incógnita representa el valor de la reacción vertical en el apoyo **“A” “RAY”** la cual resolveremos para encontrar su valor, como es evidente, en el diagrama mostrado nuestra viga no está sometida a fuerza axial, por lo que realizando el procedimiento de análisis anterior encontraremos el equilibrio estático .

$$\sum \boldsymbol{M_A = 0}$$

$$(P)(a) + (P)(2a) + (P)(2a + b) + (P)(3a + b) - (4a + b)RBY = 0$$

$$(4a + b)RBY = aP + 2aP + 2aP + bP + 3aP + bP$$

$$(4a + b)RBY = 8aP + 2bP$$

$$RBY = \frac{8aP + 2bP}{4a + b} = \frac{(2^3aP + 2bP)}{(4a + b)} = \frac{2P\left(\frac{2^3aP}{2P} + \frac{2bP}{2P}\right)}{(4a + b)} = \frac{2P(2^2a + b)}{(4a + b)}$$
$$= \frac{2P(4a + b)}{(4a + b)} = 2P$$

$$\boldsymbol{RBY = 2P}$$

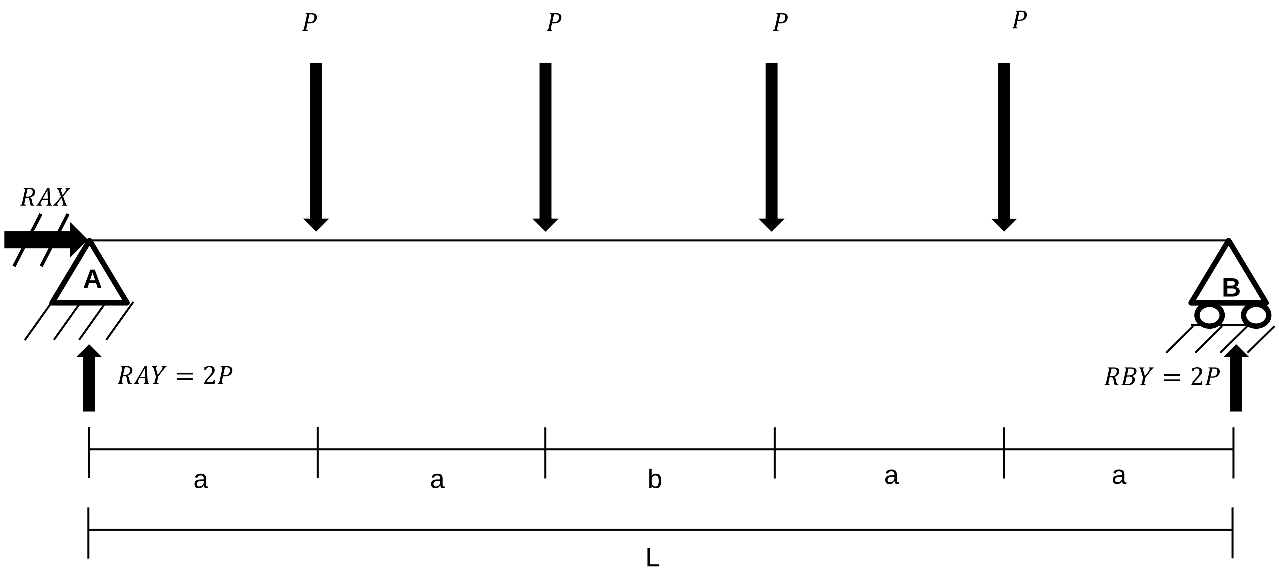
Realizando una sumatoria de fuerzas con respecto al eje **Y** para encontrar la reacción vertical en el apoyo A

$$\sum F_Y = 0$$

$$2P - 4P + RAY = 0$$

$$RAY = 4P - 2P = 2P$$

$$\boldsymbol{RAY = 2P}$$

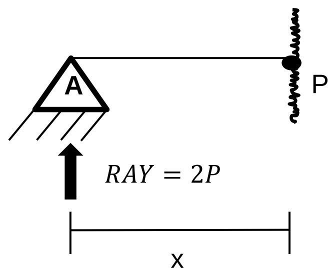


Procedimiento para encontrar las funciones que describen la variación de las acciones internas en nuestra viga:

Para obtener los diagramas de momento y fuerza cortante realizaremos un método de “secciones”, en el cual analizaremos la viga en distintas partes, para ello realizaremos cortes imaginarios a una distancia “X” en este caso de izquierda a derecha, realizando un corte antes de cada variación de carga que se encuentre a lo largo de la viga, debe entenderse que la distancia “X” se delimita por los puntos “A” en la izquierda, y por un punto imaginario “P” en la derecha, una vez propuesta la sección a analizar, se realizara una sumatoria de momentos con respecto al punto imaginario “P” mediante la cual se encontrara una función que describe la variación del momento flexionante a lo largo del eje de la viga, una vez obtenida nuestra ecuación de momento flexionante, al obtener su primer derivada, podemos hallar una función que describe la fuerza cortante que actúa a lo largo del eje de la viga, esta ecuación de cortante puede encontrarse también realizando una sumatoria de fuerzas con respecto al eje “Y” de la sección analizada, en este caso, la función de cortante se obtendrá por los dos métodos descritos, comprobando así que la realización de cualquiera de ellos, resulta indistinto.

Tramo 1.

$$\mathbf{0 \leq x \leq a}$$



Como lo mencionamos anteriormente realizamos, el primer corte se localiza a una distancia “X” a partir del punto “A” antes de la primer variación de carga y delimitado por el punto imaginario “P” para obtener la primera ecuación de momento realizaremos una sumatoria de momentos con respecto a “P”, que a su vez derivaremos para obtener la primer ecuación de cortante, cabe mencionar que dichas ecuaciones deben presentar continuidad al evaluarlas como se mostrara a continuación.

$\sum \boldsymbol{M_P}$

$$\boldsymbol{M_1 = 2Px}$$

$$\boldsymbol{V_1 = 2P}$$

$\sum \boldsymbol{F_Y}$

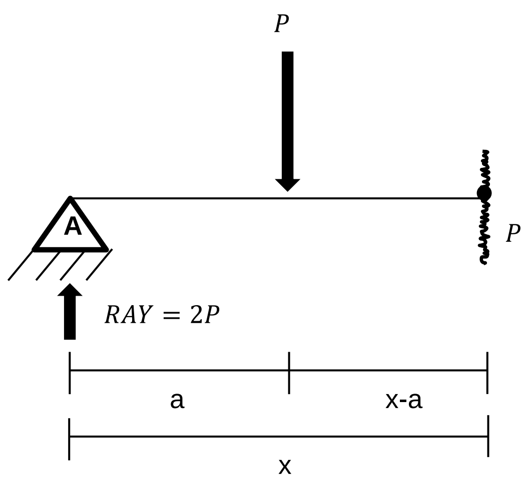
$$\boldsymbol{V_1 = 2P}$$

Para verificar la continuidad de estas primeras ecuaciones con las del siguiente corte, serán evaluadas de acuerdo a su dominio $0 \leq x \leq a$

Valor de x	Valor del momento 1	Valor del cortante 1
0	0	2P
a	2aP	2P

Tramo 2

$$\boldsymbol{a \leq x \leq 2a}$$



$$\sum \boldsymbol{M_P}$$

$$M_2 = 2Px - P(x-a)$$

$$\boldsymbol{M_2 = Px + aP}$$

$$\boldsymbol{V_2 = P}$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y}$$

$$V_2 = 2P - P$$

$$\boldsymbol{V_2 = P}$$

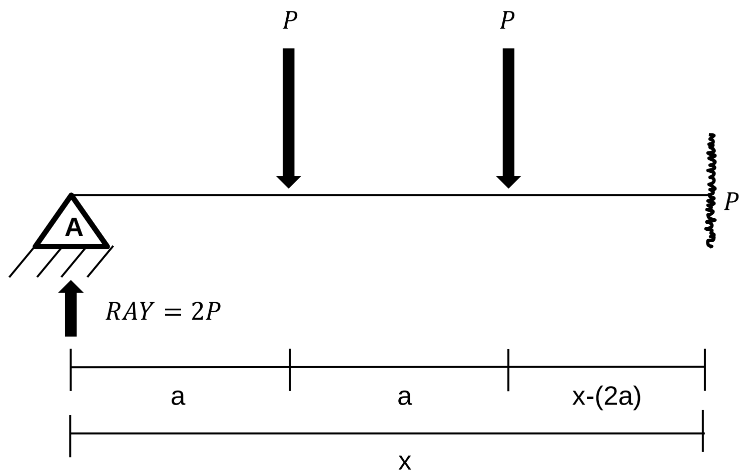
Para verificar la continuidad de estas ecuaciones con las del corte anterior y con el siguiente, serán evaluadas de acuerdo a su dominio $a \leq x \leq 2a$

Valor de x	Valor del momento 2	Valor del cortante 2
a	2ap	P
2a	3aP	P

Como podemos observar al evaluar las ecuaciones del corte anterior con el corte siguiente en el punto en que su dominio coincide, el comportamiento de la fuerza cortante y del momento coincide también.

Tramo 3

$$\boldsymbol{2a \leq x \leq 2a + b}$$



$\sum \boldsymbol{M_P}$

$$M_3 = 2Px - P(x-a) - P(x-2a)$$

$$M_3 = 2Px - P(x-a) - P(x-2a)$$

$$\boldsymbol{M_3 = 3aP}$$

$$\boldsymbol{V_3 = 0}$$

$\sum \boldsymbol{F_Y}$

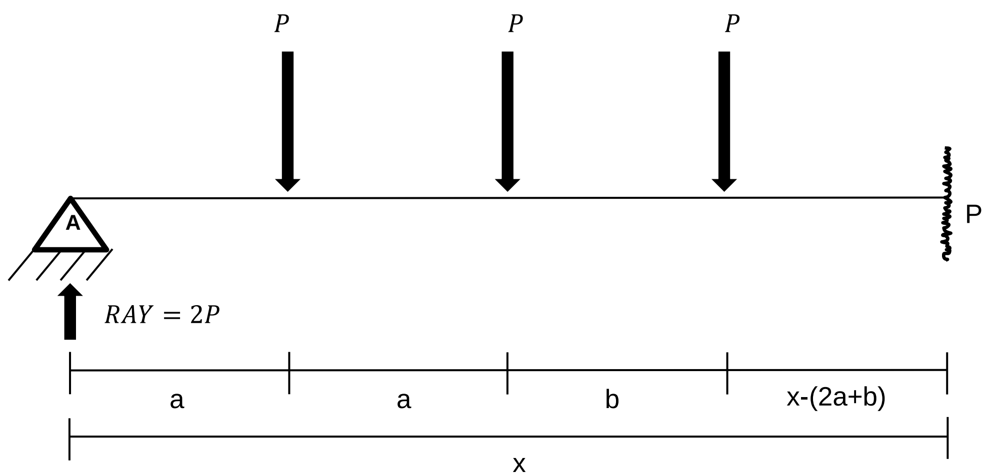
$$V_3 = 2P - P - P$$

$$\boldsymbol{V_3 = 0}$$

Para verificar la continuidad de estas ecuaciones con las del corte anterior y al siguiente, serán evaluadas de acuerdo a su dominio $\boldsymbol{2a \leq x \leq 2a + b}$

Valor de x	Valor del momento 3	Valor del cortante 3
2a	3aP	0
2a+b	3aP	0

Tramo 4 $\boldsymbol{2a + b \leq x \leq 3a + b}$



$\sum \boldsymbol{M_P}$

$$M_4 = 2Px - P(x - a) - P(x - 2a) - P(x - 2a - b)$$

$$\boldsymbol{M_4 = -Px + 5aP + bP}$$

$$\boldsymbol{V_4 = -P}$$

$\sum \boldsymbol{F_Y}$

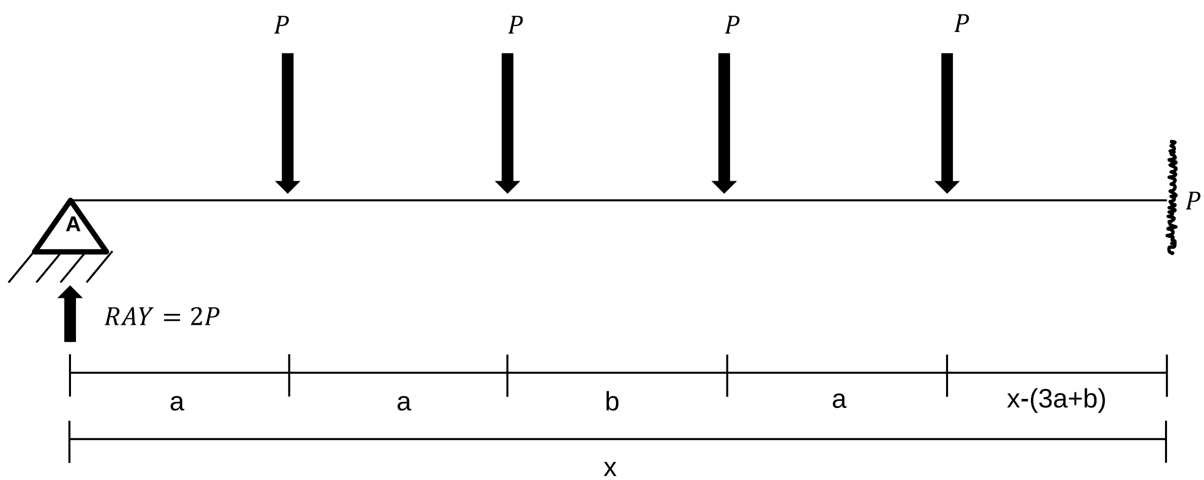
$$V_4 = 2P - P - P - P$$

$$\boldsymbol{V_4 = -P}$$

Para verificar la continuidad de estas ecuaciones con las del corte anterior y al siguiente, serán evaluadas de acuerdo a su dominio $\boldsymbol{2a+b \leq x \leq 3a+b}$

Valor de x	**Valor del momento 4**	**Valor del cortante 4**
2a+b	3aP	-P
3a+b	2aP	-P

Tramo5 $\boldsymbol{3a+b \leq x \leq 4a+b}$



$\sum \boldsymbol{M_P}$

$$M_5 = 2Px - P(x-a) - P(x-2a) - P(x-2a-b) - P(x-3a-b)$$

$$\boldsymbol{M_5 = -2Px + 8aP + 2bP}$$

$$\boldsymbol{V_5 = -2P}$$

$\sum F_Y$

$$V_5 = 2P - P - P - P - P$$

$$\boldsymbol{V_5 = -2P}$$

Para verificar la continuidad de estas ecuaciones con las del corte anterior y al siguiente, serán evaluadas de acuerdo a su dominio $\boldsymbol{3a + b \leq x \leq 4a + b}$

Valor de x	Valor del momento 5	Valor del cortante 5
3a+b	2aP	-2P
4a+b	0	-2P

Para dibujar los diagramas de cortante y de momento, evaluaremos las ecuaciones encontradas según su rango de dominio como se muestra a continuación.

Para realizar el cálculo de manera numérica cabe mencionar que se designaron los siguientes valores a las literales.

P=1ton
a=1m
b=2m

L(x)	M	V
0	0	2
0,2	0,4	2
0,4	0,8	2
0,6	1,2	2
0,8	1,6	2
1	2	2
1	2	1
1,2	2,2	1
1,4	2,4	1
1,6	2,6	1
1,8	2,8	1
2	3	1
2	3	0
2,2	3	0
2,4	3	0

2,6	3	0
2,8	3	0
3	3	0
3,2	3	0
3,4	3	0
3,6	3	0
3,8	3	0
4	3	0
4	3	-1
4,2	2,8	-1
4,4	2,6	-1
4,6	2,4	-1
4,8	2,2	-1
5	2	-1
5	2	-2
5,2	1,6	-2
5,4	1,2	-2
5,6	0,8	-2
5,8	0,4	-2
6	0	-2

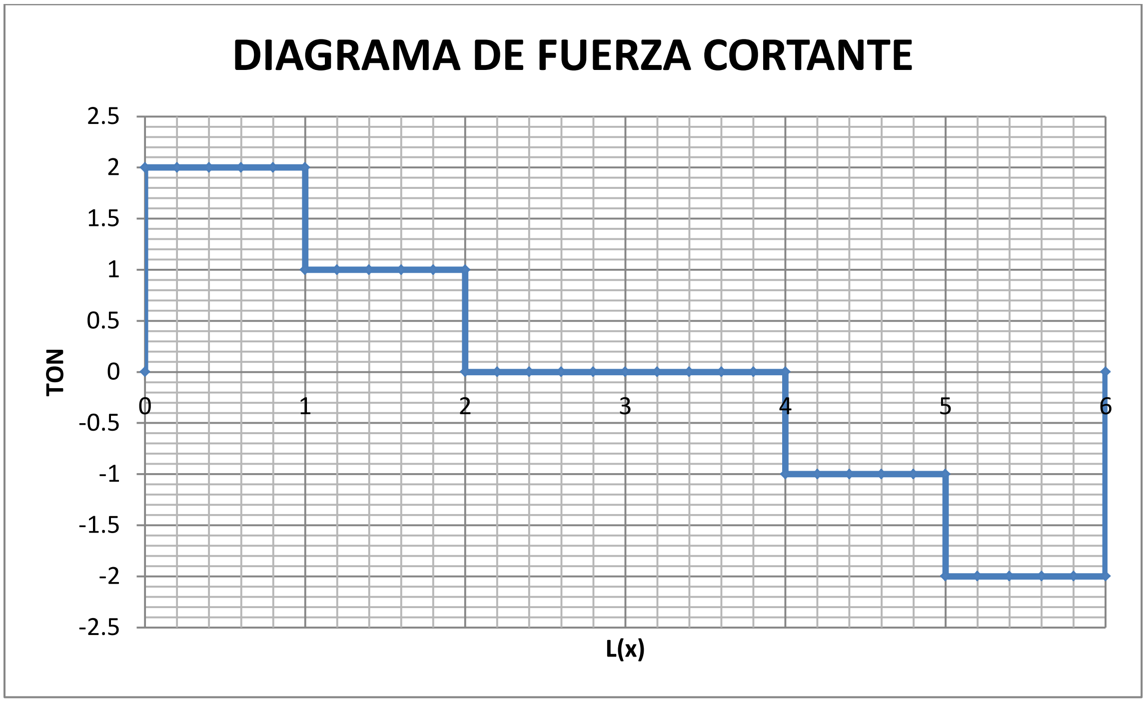


DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
TON
0
1
2
3
4
5
6
L(x)

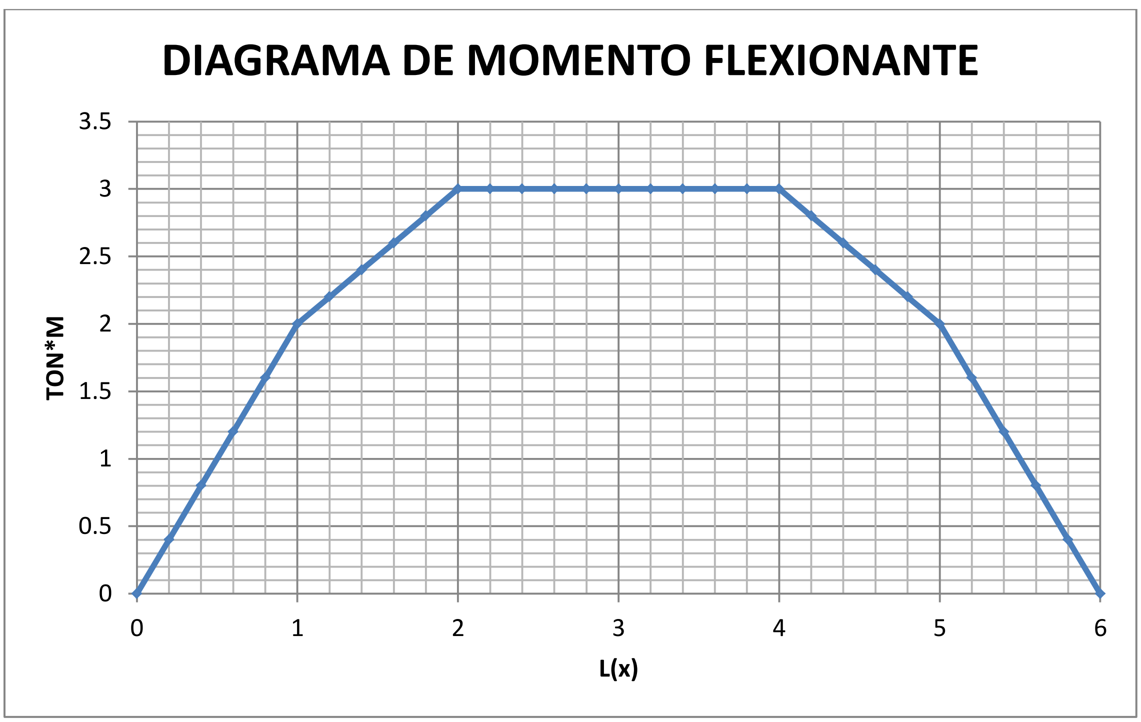
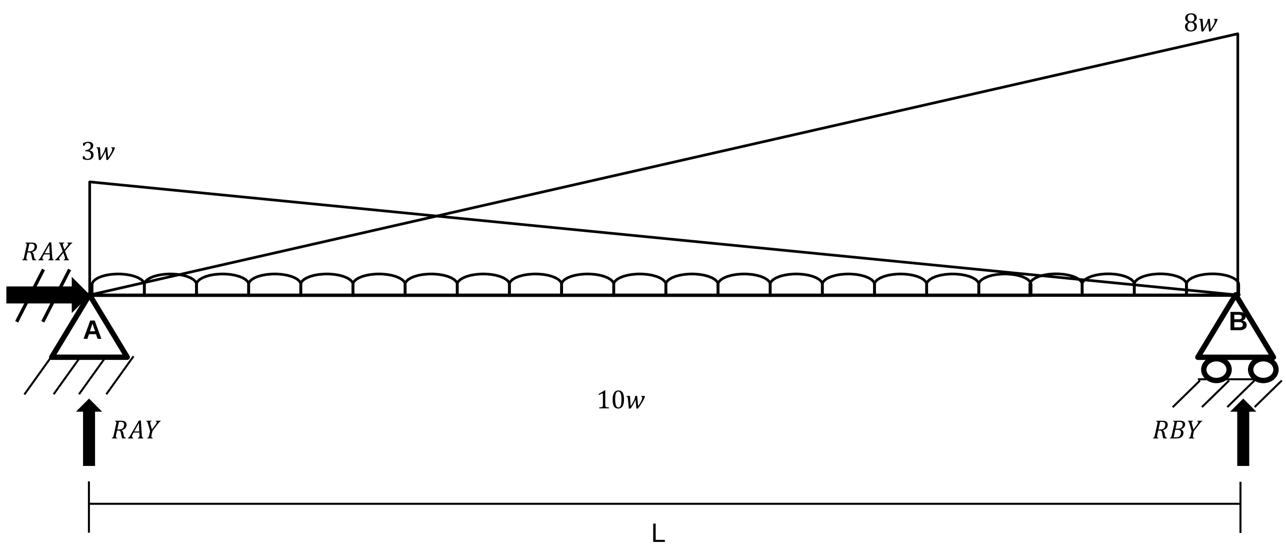


DIAGRAMA DE MOMENTO FLEXIONANTE
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
TON*M
0
1
2
3
4
5
6
L(x)

2.- De la siguiente viga, determine las reacciones en los apoyos, las funciones que describen la variación del momento flexionante y fuerza cortante a lo largo del eje de la viga, dibuje los diagramas correspondientes a dichas funciones y obtenga el valor y posición del momento máximo.



En este ejemplo encontramos la siguiente viga:

- Dos cargas triangulares traslapadas y una carga uniformemente repartida, ambas actuando a lo largo de toda la viga.

Verificación del grado de indeterminación de la viga:

$$\boldsymbol{I - E = 3 - 3 = 0}$$

Por lo tanto: nuestra estructura es estáticamente determinada y podemos dar solución a ella mediante las ecuaciones de equilibrio estático.

Para dar solución a este ejemplo; realizaremos el mismo método utilizado para resolver la primer viga: una sumatoria de momentos con respecto al apoyo “A” mediante la cual obtendremos una ecuación cuya incógnita representara el valor de la reacción vertical en el apoyo “B” a la cual hemos llamado: “RBY”, posteriormente realizaremos una sumatoria de fuerzas con respecto al eje “Y” mediante la cual obtendremos una ecuación cuya incógnita representara el valor de la reacción vertical en el apoyo “A” que a su vez hemos nombrado como: “RAY” el procedimiento se realiza a detalle a continuación:

$$\sum M_{A} = 0$$

$$\frac{(3w)(L)}{2}\left[\frac{L}{3}\right] + \frac{(8w)(L)}{2}\left[\frac{2L}{3}\right] + (10w)(L)\left(\frac{L}{2}\right) - (L)RBY = 0$$

$$RBY = \frac{\frac{wL^2}{2} + \frac{8wL^2}{3} + 5wL^2}{L} = \frac{\frac{49wL^2}{6}}{L} = \boldsymbol{\frac{49wL}{6}}$$

$$\boldsymbol{RBY = \frac{49wL}{6}}$$

$$\sum F_Y = 0$$

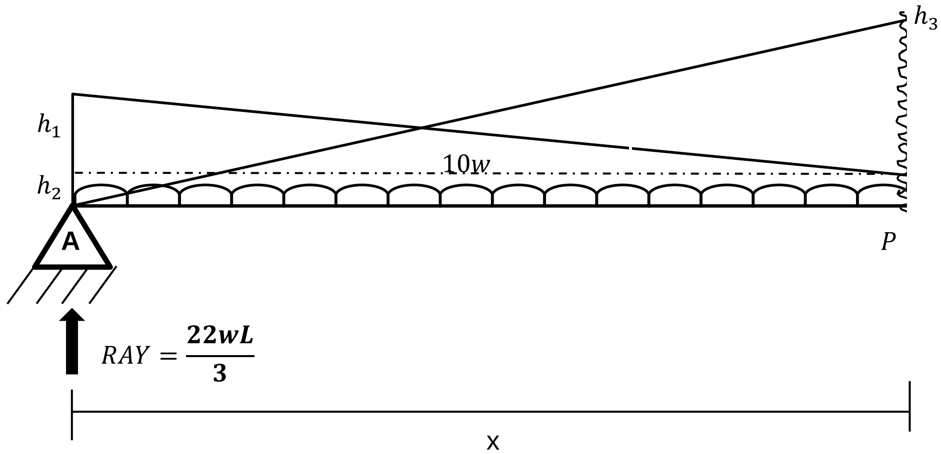
$$RAY - \frac{3wL}{2} - \frac{8wL}{2} - (10w)(L) + \frac{49wL}{6} = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = \frac{22wL}{3}}$$

$$\boldsymbol{RAX = 0}$$

Para encontrar el diagrama de momento y diagrama de cortante realizaremos el mismo método empleado para dibujar los diagramas correspondientes al primer ejemplo:

Como podemos notar en este caso solo encontramos un corte que rige toda la viga, ya que en cualquier distancia “x” que nosotros realicemos un corte, siempre encontraremos las mismas condiciones de carga, describiendo el método: cortamos a una distancia “x” a partir del punto “A” y hasta el punto imaginario “P”, mostrado en la figura, evidentemente la longitud de nuestra viga es “x”, sin embargo, observamos como producto de dicho corte obtenemos la siguiente configuración de cargas: $h_1$que pertenece a una altura del triángulo, h_2 que pertenece a una altura del rectángulo y h_3 que pertenece a una altura del triángulo, estas alturas serán deducidas por conceptos básicos de trigonometría como se mostrara a continuación.



Para encontrar las alturas h_1, h_2 y h_3 se efectuaran las siguientes relaciones

Para el cálculo de h_1

Si a una altura de 3w corresponde una longitud de L, a una altura de h_1 corresponde una longitud de x

$$\boldsymbol{h_1 = \frac{3wx}{L}}$$

Para el cálculo de h_2 tomamos en cuenta que $h_1 + h_2 = 3w$

$$h_2 = 3w - h_1 = \boldsymbol{3w - \frac{3wx}{L}}$$

Para el cálculo de h_3

Si a una altura de 8w corresponde una longitud de L, a una altura de h_3 corresponde una longitud de x

$$\boldsymbol{h_3 = \frac{8wx}{L}}$$

Para encontrar las ecuaciones de momento y cortante de esta viga, se realizara una sumatoria de momentos con respecto al punto P que definirá la ecuación de momento, a continuación se realizara una sumatoria de fuerzas en Y o bien se obtendrá la primer derivada de la ecuación de momento entendiendo que en cualquiera de estos casos se obtendrá la ecuación que rige el comportamiento de la fuerza cortante a lo largo de la viga entendiendo que su régimen es: $0 \leq x \leq L$

$$\sum M_P$$

$$M = \left(\frac{22wL}{3}\right)(x) - \frac{\left(\frac{3wx}{L}\right)(x)}{2}\left(\frac{2x}{3}\right) - \left(3w - \frac{3wx}{L}\right)(x)\left(\frac{x}{2}\right) - (10w)(x)\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$- \frac{\left(\frac{8wx}{L}\right)(x)}{2}\left[\frac{x}{3}\right]$$

$$M = \frac{22wLx}{3} - \frac{wx^3}{L} - \frac{3wx^2}{2} + \frac{3wx^3}{2L} - 5wx^2 - \frac{4wx^3}{3L}$$

$$\boldsymbol{M = -\frac{5wx^3}{6L} - \frac{13wx^2}{2} + \frac{22wLx}{3}}$$

Primer derivada de la ecuación de momento:

$$\boldsymbol{V = -\frac{5wx^2}{2L} - 13wx + \frac{22wL}{3}}$$

Demostrando que la ecuación de cortante se obtiene también con una sumatoria de fuerzas con respecto al eje “Y”

$$\sum F_Y$$

$$V = \frac{22wL}{3} - \frac{\left(\frac{3wx}{L}\right)(x)}{2} - \left(3w - \frac{3wx}{L}\right)(x) - (10w)(x) - \frac{\left(\frac{8wx}{L}\right)(x)}{2}$$

$$V = \frac{22wL}{3} - \frac{3wx^2}{2L} - 3wx + \frac{3wx^2}{L} - 10wx - \frac{8wx^2}{2L}$$

$$\boldsymbol{V = -\frac{5wx^2}{2L} - 13wx + \frac{22wL}{3}}$$

Evaluando las ecuaciones de momento y cortante para encontrar su gráfica definiremos los siguientes valores a las constantes.

- W=5ton/m
- L=5m

L(x)	Momento	Cortante
0.00	0.00000000	183.33333333
0.20	35.36000000	170.23333333
0.40	68.08000000	156.93333333
0.60	98.12000000	143.43333333
0.80	125.44000000	129.73333333
1.00	150.00000000	115.83333333
1.20	171.76000000	101.73333333
1.40	190.68000000	87.43333333
1.60	206.72000000	72.93333333
1.80	219.84000000	58.23333333
2.00	230.00000000	43.33333333
2.20	237.16000000	28.23333333
2.40	241.28000000	12.93333333
2.60	242.32000000	-2.56666667
2.80	240.24000000	-18.26666667
3.00	235.00000000	-34.16666667
3.20	226.56000000	-50.26666667
3.40	214.88000000	-66.56666667
3.60	199.92000000	-83.06666667
3.80	181.64000000	-99.76666667
4.00	160.00000000	-116.66666667
4.20	134.96000000	-133.76666667
4.40	106.48000000	-151.06666667
4.60	74.52000000	-168.56666667
4.80	39.04000000	-186.26666667
5.00	0.00000000	-204.16666667

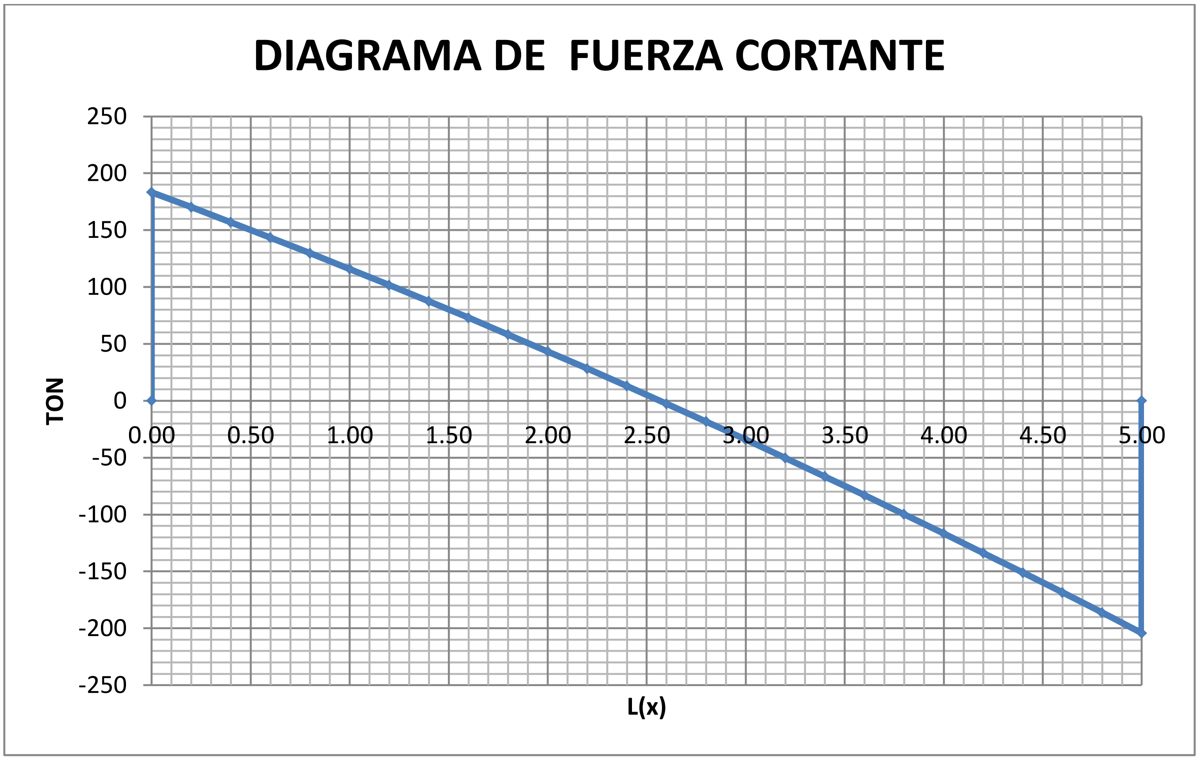


DIAGRAMA DE FUERZA CORTANTE
TON
L(x)
250
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
-250
0.00
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
3.00
3.50
4.00
4.50
5.00

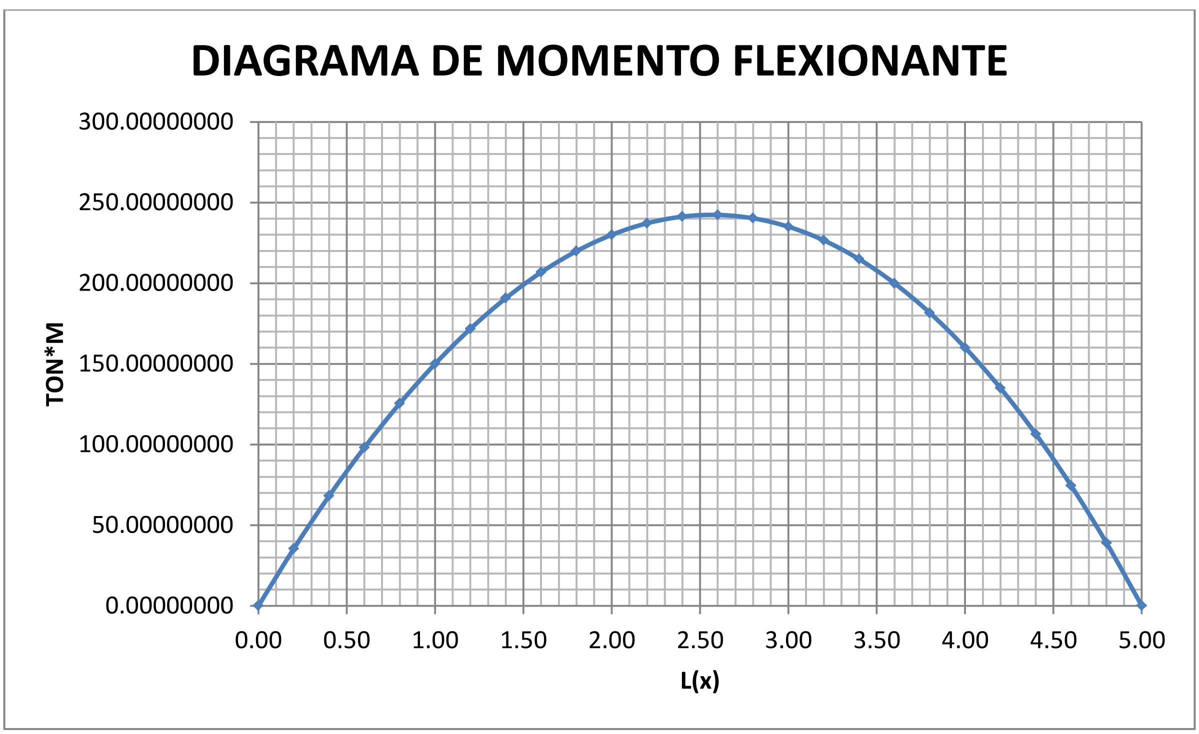


DIAGRAMA DE MOMENTO FLEXIONANTE
TON*M
L(x)
300.00000000
250.00000000
200.00000000
150.00000000
100.00000000
50.00000000
0.00000000
0.00
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
3.00
3.50
4.00
4.50
5.00

Determinación de la posición y valor del momento máximo:

Para obtener el valor del momento máximo, debemos hallar el "punto de inflexión" definido como el punto donde el cortante es nulo por lo que el momento flexionante toma su valor máximo, para ello, como solo tenemos una ecuación de fuerza cortante, la igualaremos a un valor de (0) y despejando "X" obtendremos la posición del punto de inflexión.

$$\boldsymbol{V = -\frac{5wx^2}{2L} - 13wx + \frac{22wL}{3}}$$

Tomando en cuenta que:

- W=5ton/m
- L=5m

$$\boldsymbol{-\frac{5(5)(x)^2}{2(5)} - 13(5)x + \frac{22(5)(5)}{3} = 0}$$

$$\boldsymbol{x \cong 2.567059238m}$$

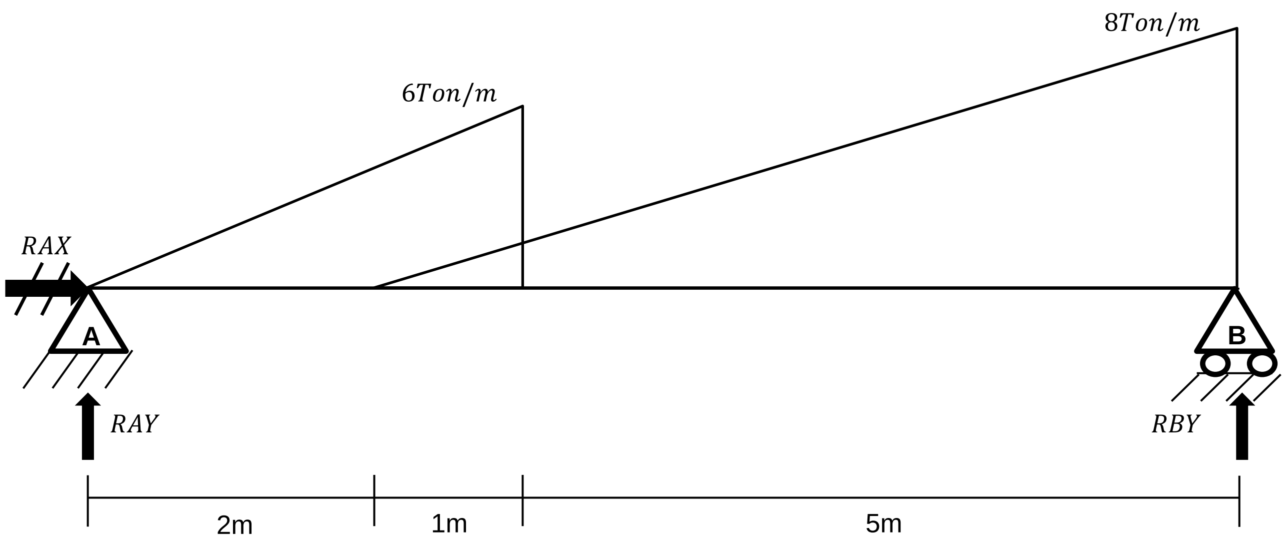
Evaluando esta distancia en la ecuación de momento obtendremos el valor del momento máximo.

$$M = -\frac{5wx^3}{6L} - \frac{13wx^2}{2} + \frac{22wLx}{3}$$

$$M = -\frac{5(5)(2.567059238)^3}{6(5)} - \frac{13(5)(2.567059238)^2}{2} + \frac{22(5)(5)(2.567059238)}{3}$$

$$\boldsymbol{M_{max} \cong 242.3622591Ton * m}$$

3.- De la siguiente viga, determine las reacciones en los apoyos, así como las funciones que describen la variación del momento flexionante y fuerza cortante a lo largo del eje de la viga producto de la acciones de las fuerzas externas, dibuje los diagramas correspondientes a dichas funciones.



Verificación del grado de indeterminación de la viga:

$$\boldsymbol{I - E = 3 - 3 = 0}$$

Por lo tanto: nuestra estructura es estáticamente determinada y podemos dar solución a ella mediante las ecuaciones de equilibrio estático.

Obteniendo “RAY” y “RBY” mediente el mismo procedimiento empleado en los casos anteriores

$$\sum M_A = 0$$

$$\frac{\left(6\,{}^{Ton}/_{m}\right)(3m)}{2}\left[\frac{2(3m)}{3}\right] + \frac{\left(8\,{}^{Ton}/_{m}\right)(6m)}{2}\left[\frac{2(6m)}{3} + 2m\right] - 8m(RBY) = 0$$

$$RBY = \frac{18\,{}^{Ton}/_{m} + 144\,{}^{Ton}/_{m}}{8m} = \frac{81}{4}Ton$$

$$\boldsymbol{RBY = \frac{81}{4}Ton}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$RAY - \frac{(6\,{}^{Ton}/_{m})(3m)}{2} - \frac{(8\,{}^{Ton}/_{m})(6m)}{2} + \frac{81}{4}Ton = 0$$

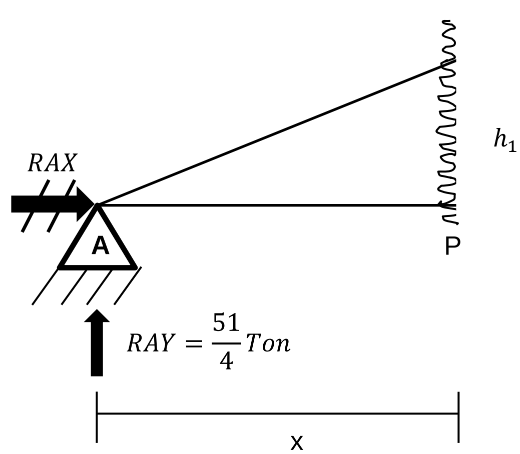
$$\boldsymbol{RAY = \frac{51}{4}Ton}$$

$$\boldsymbol{RAX = 0}$$

Como lo realizamos en los ejemplos anteriores, en este caso también se efectuaran cortes a una distancia X de derecha a izquierda, entendiendo que se realizara un corte antes de cada variación de carga encontrada.

Se efectuara una sumatoria de momentos con respecto al punto imaginario “P” para obtener la ecuación de momento flexionante que rige el tramo especificado, a su vez se obtendrá la primera derivada de dicha ecuación para obtener la ecuación de fuerza cortante de dicho tramo, recordando que deben calcularse las nuevas alturas para la configuración de cargas obtenidas a partir del corte imaginario.

Tramo 1 $\boldsymbol{0m \le x \le 2m}$



Para el cálculo de h_1 se efectuara la siguiente relación (triángulos semejantes):
Si a una altura de 6 corresponde una longitud de 3 a una altura h_1 corresponde una longitud de x

$$h_1 = \frac{6x}{3} = \mathbf{2x}$$

$$\sum M_P$$

$$M_1 = \frac{51}{4}x - \frac{(2x)(x)}{2}\left[\frac{x}{3}\right]$$

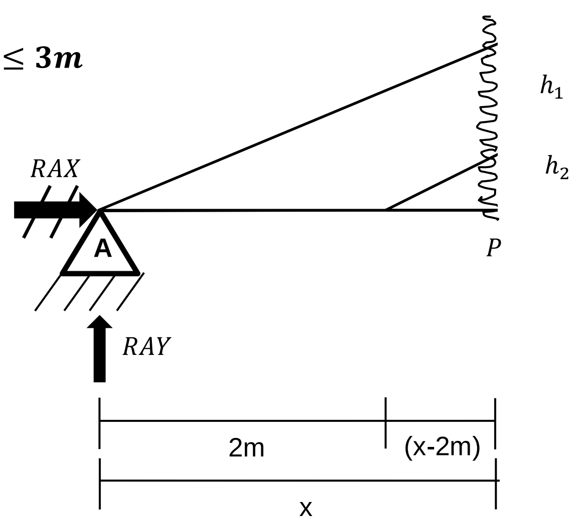
$$\boldsymbol{M_1 = -\frac{x^3}{3} + \frac{51}{4}x}$$

$$\boldsymbol{V_1 = -x^2 + \frac{51}{4}}$$

Como en este caso tendremos más de un corte y que si bien cada corte es realizado a una distancia “x” y por cada variación de carga, dichas ecuaciones pertenecen a la viga original, por lo que deben presentar continuidad, para verificar esto, evaluaremos nuestra ecuación con los valores de longitud extremos a los que corresponde, y debemos obtener un valor continuo con las ecuaciones siguientes, la anterior con la siguiente y así sucesivamente.

L(x)	M1	V1
0m	0	$\frac{51}{4}Ton$
2m	$\frac{137}{6}Ton*m$	$\frac{35}{4}Ton$

Tramo 2 $\boldsymbol{2m \le x \le 3m}$



Como sabemos:

$h_1 = 2x$

Para el cálculo de h_2 se efectuara la siguiente relación (triángulos semejantes):

Si a una altura de 8 corresponde una longitud de 6 a una altura h_2 corresponde una longitud de (x-2)

$$h_2 = \frac{8x - 16}{6} = \boldsymbol{\frac{4x}{3} - \frac{8}{3}}$$

$\sum M_P$

$$M_2 = \frac{51}{4}x - \frac{(2x)(x)}{2}\left[\frac{x}{3}\right] - \frac{\left(\frac{4x}{3} - \frac{8}{3}\right)(x-2)}{2}\left[\frac{x-2}{3}\right]$$

$$M_2 = -\frac{x^3}{3} + \frac{51}{4}x - \frac{1}{6}(x^2 - 4x + 4)\left(\frac{4x}{3} - \frac{8}{3}\right)$$

$$M_2 = -\frac{x^3}{3} + \frac{51}{4}x - \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 - \frac{16}{3}x^2 + \frac{32}{3}x - \frac{16}{3}x - \frac{32}{3}\right)$$

$$M_2 = -\frac{x^3}{3} + \frac{51}{4}x - \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 16x - \frac{32}{3}\right)$$

$$M_2 = -\frac{x^3}{3} + \frac{51}{4}x - \frac{2}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}$$

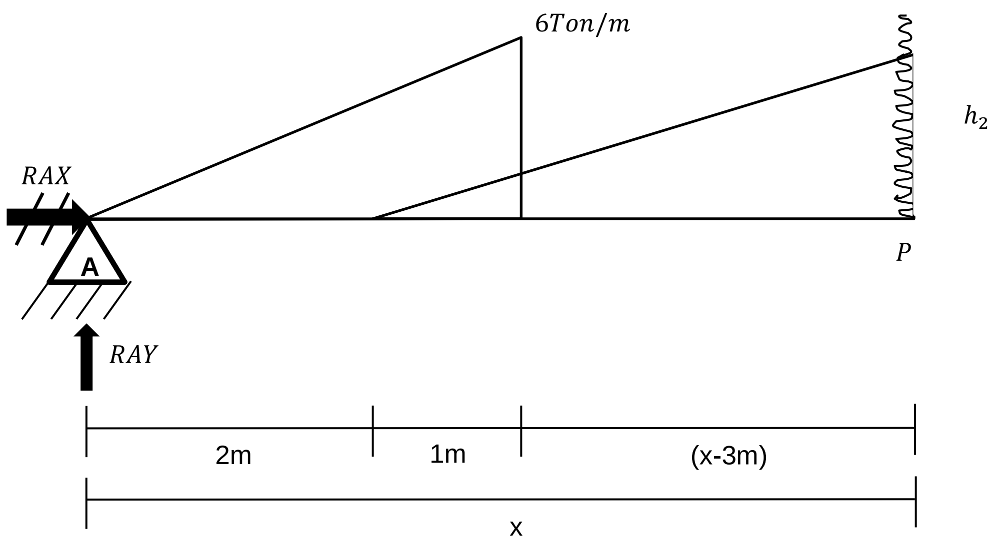
$$\boldsymbol{M_2 = -\frac{5x^3}{9} + \frac{4}{3}x^2 + \frac{121}{12}x + \frac{16}{9}}$$

$$\boldsymbol{V_2 = -\frac{5x^2}{3} + \frac{8}{3}x + \frac{121}{12}}$$

Para demostrar la continuidad con las ecuaciones de momento y cortante anteriores:

L(x)	M2	V2
2m	$\frac{137}{6}Ton*m$	$\frac{35}{4}Ton$
3m	$\frac{1045}{36}Ton*m$	$\frac{37}{12}Ton$

Tramo 3 $\boldsymbol{3m \leq x \leq 8m}$



Como sabemos:

$$h_2 = \frac{4x}{3} - \frac{8}{3}$$

$$\sum M_P$$

$$M_3 = \frac{51}{4}x - \frac{(6)(3)}{2}[x-2] - \frac{\left(\frac{4x}{3} - \frac{8}{3}\right)(x-2)}{2}\left[\frac{x-2}{3}\right]$$

$$M_3 = \frac{51}{4}x - 9x + 18 - \frac{1}{6}(x^2 - 4x + 4)\left(\frac{4x}{3} - \frac{8}{3}\right)$$

$$M_3 = \frac{51}{4}x - 9x + 18 - \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 - \frac{16}{3}x^2 + \frac{32}{3}x - \frac{16}{3}x - \frac{32}{3}\right)$$

$$M_3 = \frac{51}{4}x - 9x + 18 - \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 16x - \frac{32}{3}\right)$$

$$M_3 = \frac{51}{4}x - 9x + 18 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}$$

$$\boldsymbol{M_3 = -\frac{2}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2 + \frac{13}{12}x + \frac{178}{9}}$$

$$\boldsymbol{V_3 = -\frac{2x^2}{3} + \frac{8}{3}x + \frac{13}{12}}$$

L(x)	M3	V3
3m	$\frac{1045}{36} Ton * m$	$\frac{37}{12} Ton$
8m	0	$-\frac{81}{4} Ton$

Evaluando las ecuaciones para dibujar los diagramas de cortante y momento:

L(x)	**Cortante**	**Momento**
0.00	12.75000000	0.00000000
0.20	12.71000000	2.54733333
0.40	12.59000000	5.07866667
0.60	12.39000000	7.57800000
0.80	12.11000000	10.02933333
1.00	11.75000000	12.41666667
1.20	11.31000000	14.72400000
1.40	10.79000000	16.93533333
1.60	10.19000000	19.03466667
1.80	9.51000000	21.00600000
2.00	8.75000000	22.83333333
2.20	7.88333333	24.49888889
2.40	6.88333333	25.97777778
2.60	5.75000000	27.24333333
2.80	4.48333333	28.26888889
3.00	3.08333333	29.02777778

3.20	2.79000000	29.61600000
3.40	2.44333333	30.14022222
3.60	2.04333333	30.58977778
3.80	1.59000000	30.95400000
4.00	1.08333333	31.22222222
4.20	0.52333333	31.38377778
4.40	-0.09000000	31.42800000
4.60	-0.75666667	31.34422222
4.80	-1.47666667	31.12177778
5.00	-2.25000000	30.75000000
5.20	-3.07666667	30.21822222
5.40	-3.95666667	29.51577778
5.60	-4.89000000	28.63200000
5.80	-5.87666667	27.55622222
6.00	-6.91666667	26.27777778
6.20	-8.01000000	24.78600000
6.40	-9.15666667	23.07022222
6.60	-10.35666667	21.11977778
6.80	-11.61000000	18.92400000
7.00	-12.91666667	16.47222222
7.20	-14.27666667	13.75377778
7.40	-15.69000000	10.75800000
7.60	-17.15666667	7.47422222
7.80	-18.67666667	3.89177778
8.00	-20.25000000	0.00000000

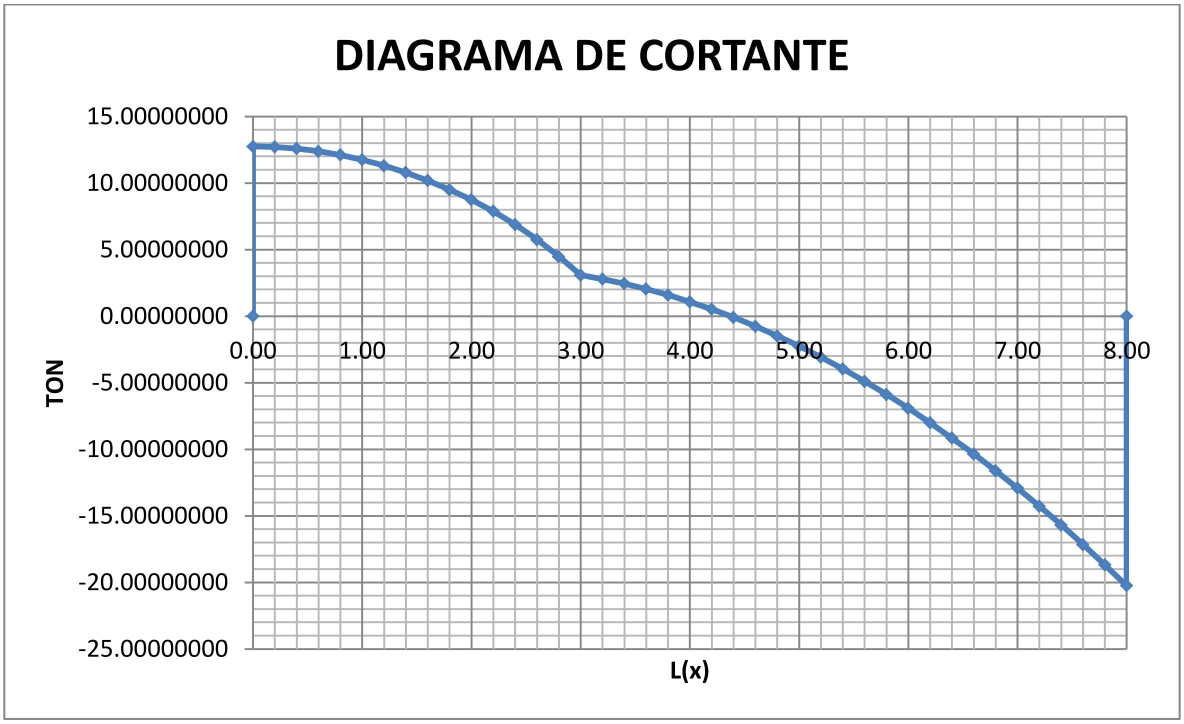


DIAGRAMA DE CORTANTE
15.00000000
10.00000000
5.00000000
0.00000000
-5.00000000
-10.00000000
-15.00000000
-20.00000000
-25.00000000
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
7.00
8.00
TON
L(x)

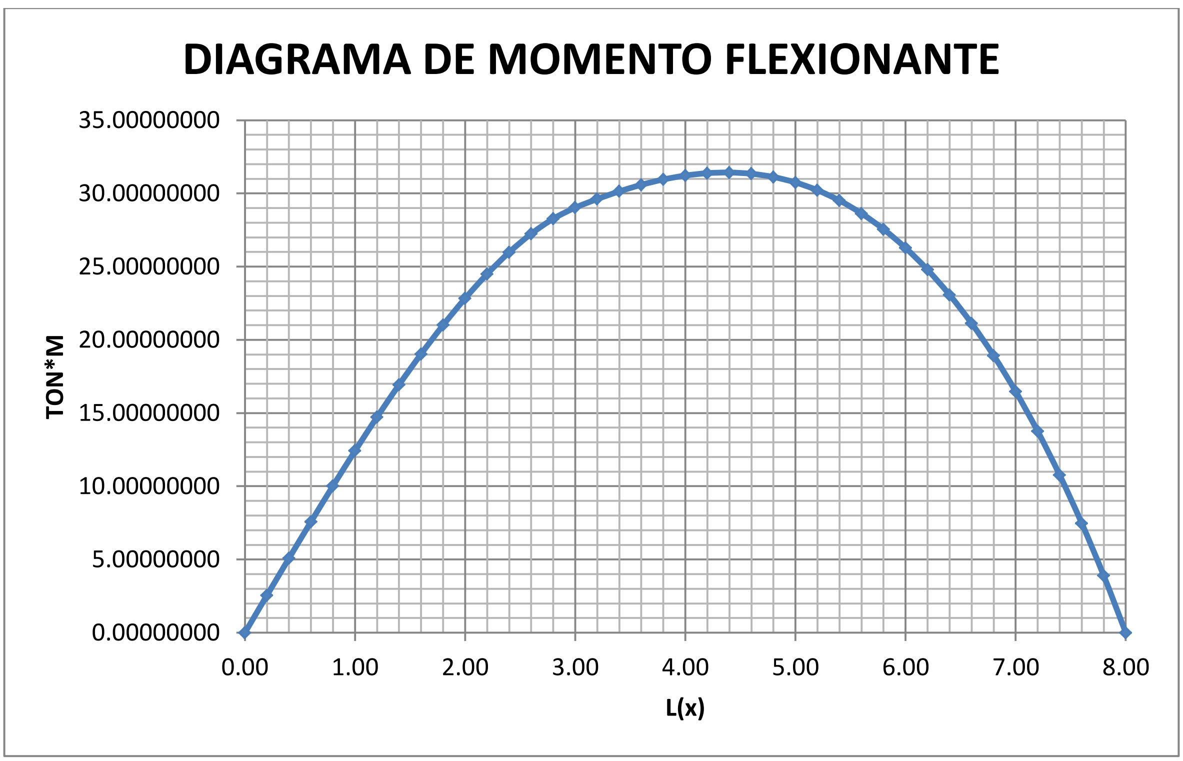
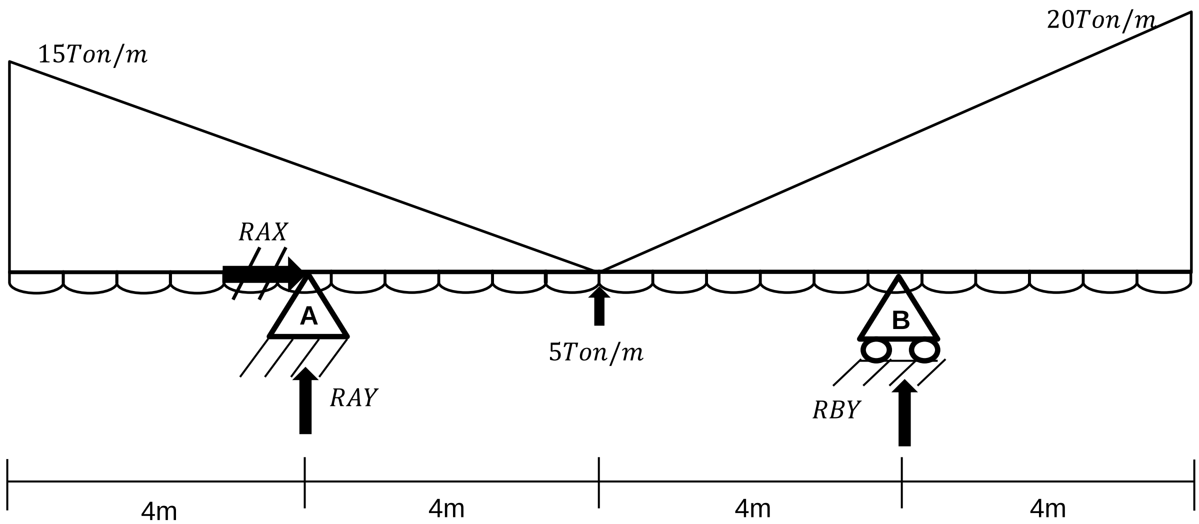


DIAGRAMA DE MOMENTO FLEXIONANTE
35.00000000
30.00000000
25.00000000
20.00000000
15.00000000
10.00000000
5.00000000
0.00000000
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
7.00
8.00
TON*M
L(x)

4.- De la siguiente viga, calcule las reacciones en los apoyos, así como las funciones que describen la variación del momento flexionante y fuerza cortante a lo largo del eje de la viga, dibujes los diagramas correspondientes a dichas acciones internas.



Verificación del grado de indeterminación de la viga:

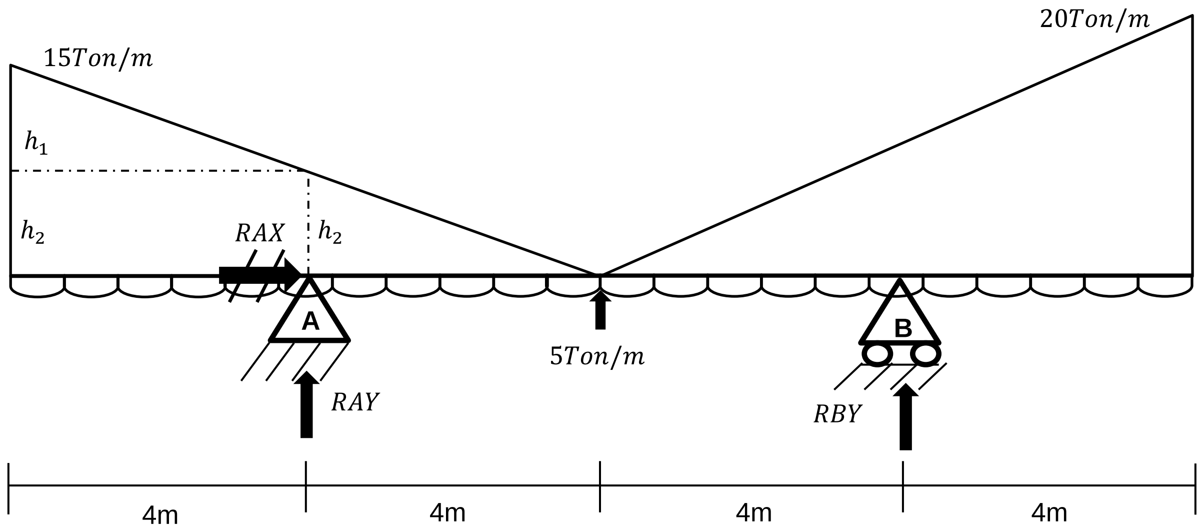
Recordando que el grado de indeterminación en términos vanos es la diferencia entre el número de incógnitas de nuestra estructura “I” y el número de ecuaciones de equilibrio estático asociadas a su plano “E”

$$\boldsymbol{I - E = 3 - 3 = 0}$$

Por lo tanto: nuestra estructura es estáticamente determinada y podemos dar solución a ella mediante las ecuaciones de equilibrio estático.

Para este caso nuevamente realizaremos los procedimientos ya mencionados para conocer el sistema reactivo de nuestra viga.

Tomando en cuenta que una condición para encontrar el equilibrio estático $\sum M_A = 0$ obtendremos dos convenciones de signos realizando la sumatoria de momentos con respecto al apoyo “A” obteniendo la siguiente configuración de cargas y brazos de palanca.



Para calcular h_1 y h_2 se realizaran las siguientes relaciones basadas en el concepto de “triángulos semejantes”

Para h_1
Si a una longitud de 8 corresponde una altura de 15 a una longitud de 4 corresponde una altura de h_1

$$h_1 = \frac{4 * 15}{8} = \mathbf{\frac{15}{2}}$$

$$h_2 = 15 - h_1 = 15 - \frac{15}{2} = \mathbf{\frac{15}{2}}$$

Obtenidas las alturas anteriores:

$$\sum M_A = 0$$

$$-\frac{\left(\frac{15}{2} {Ton}/_{m}\right)(4m)}{2}\left[\frac{8}{3}m\right] - \left(\frac{15}{2} {Ton}/_{m}\right)(4m)(2m) + \left(5\, {Ton}/_{m}\right)(4m)(2m)$$

$$+\frac{\left(\frac{15}{2} {Ton}/_{m}\right)(4m)}{2}\left[\frac{4}{3}m\right] + \frac{\left(20\, {Ton}/_{m}\right)(8m)}{2}\left[\frac{28}{3}m\right] - \left(5\, {Ton}/_{m}\right)(12m)(6m)$$

$$-8mRBY = 0$$

$$RBY = \frac{-40\,{}^{Ton}/_{m} - 60\,{}^{Ton}/_{m} + 40\,{}^{Ton}/_{m} + 20\,{}^{Ton}/_{m} + \frac{2240}{3}\,{}^{Ton}/_{m} - 360\,{}^{Ton}/_{m}}{8m}$$

$$\boldsymbol{RBY = \frac{130}{3}Ton}$$

$$\sum F_Y = 0$$

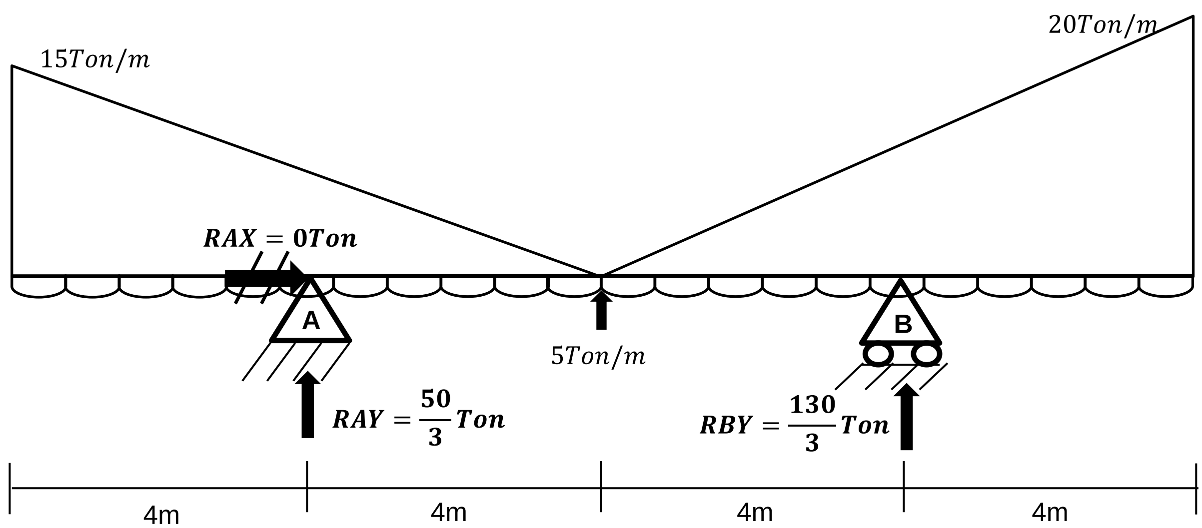
$$RAY - \frac{\left(15\,{}^{Ton}/_{m}\right)(8m)}{2} - \frac{\left(20\,{}^{Ton}/_{m}\right)(8m)}{2} + \left(5\,{}^{Ton}/_{m}\right)(16m) + \frac{130}{3}Ton = 0$$

$$RAY = 60 + 80Ton - 80Ton - \frac{130}{3}Ton = \frac{50}{3}Ton$$

$$\boldsymbol{RAY = \frac{50}{3}Ton}$$

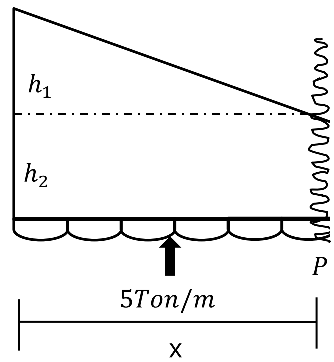
$$\boldsymbol{RAX = 0Ton}$$

Viga en equilibrio estático:



Para obtener las ecuaciones de momento y cortante se realizaran nuevamente cortes a cada variación de carga y se verificara la continuidad de dichas ecuaciones.

Tramo 1 $\mathbf{0 \leq x \leq 4m}$



Para el cálculo de las alturas encontradas en el corte:

Si a una altura de 15 corresponde una longitud de 8, a una altura h_1 corresponde una longitud de x

$$h_1 = \mathbf{\frac{15}{8}x}$$

$$h_2 = 15 - h_1 = \mathbf{15 - \frac{15}{8}x}$$

$$\sum M_P$$

$$M_1 = -\frac{\left(\frac{15}{8}x\right)(x)}{2}\left[\frac{2x}{3}\right] - \left(15 - \frac{15}{8}x\right)(x)\left[\frac{x}{2}\right] + (5)(x)\left[\frac{x}{2}\right]$$

$$M_1 = -\frac{5}{8}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

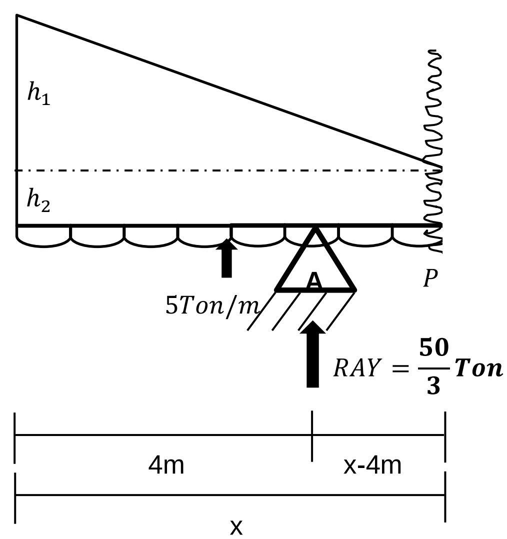
$$\boldsymbol{M_1 = \frac{5}{16}x^3 - 5x^2}$$

$$\boldsymbol{V_1 = \frac{15}{16}x^2 - 10x}$$

Evaluando las ecuaciones de fuerza cortante y momento flexionante obtenidas para verificar su continuidad con las siguientes:

L(x)	M1	V1
0	0	0
4m	$-60Ton*m$	$-25Ton$

Tramo 2 $\boldsymbol{4m \leq x \leq 8m}$



Anteriormente calculadas las alturas tenemos los siguientes valores:

$$h_1 = \frac{15}{8}x$$

$$h_2 = 15 - \frac{15}{8}x$$

$$\sum M_P$$

$$M_2 = -\frac{\left(\frac{15}{8}x\right)(x)}{2}\left[\frac{2x}{3}\right] - \left(15 - \frac{15}{8}x\right)(x)\left[\frac{x}{2}\right] + (5)(x)\left[\frac{x}{2}\right] + \frac{50}{3}(x-4)$$

$$M_2 = -\frac{5}{8}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{50}{3}x - \frac{200}{3}$$

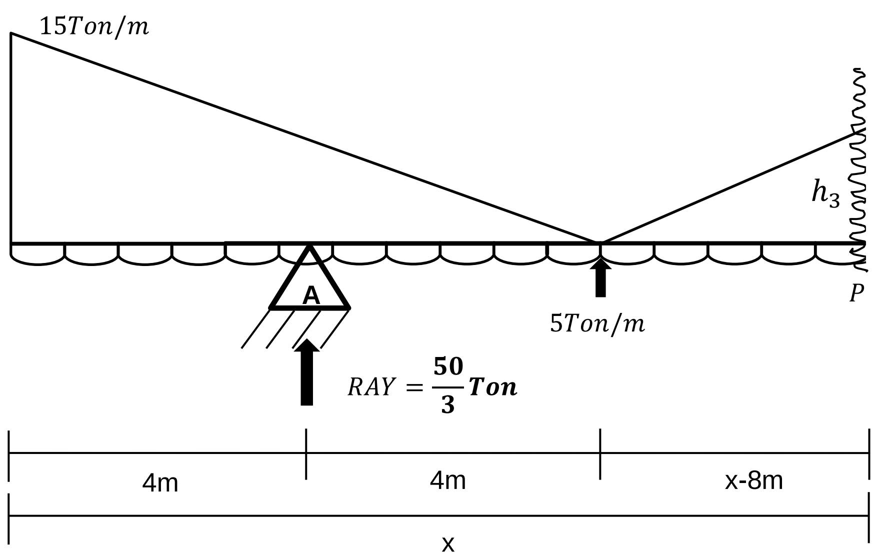
$$\boldsymbol{M_2 = \frac{5}{16}x^3 - 5x^2 + \frac{50}{3}x - \frac{200}{3}}$$

$$\boldsymbol{V_2 = \frac{15}{16}x^2 - 10x + \frac{50}{3}}$$

Evaluando las ecuaciones de fuerza cortante y momento flexionante obtenidas para verificar su continuidad con las siguientes:

L(x)	M2	V2
4m	$-60 Ton * m$	$-\frac{25}{3} Ton$
8m	$-\frac{280}{3} Ton * m$	$-\frac{10}{3} Ton$

Tramo 3 $\boldsymbol{8m \leq x \leq 12m}$



Para el cálculo de h_3 efectuaremos la relación basada en el concepto de “triángulos semejantes”

Si a una altura de 20 corresponde una longitud de 8 a una altura de h_3 corresponde una longitud de (x-8)

$$h_3 = \frac{20x - 160}{8} = \boldsymbol{\frac{5x}{2} - 20}$$

$$\sum M_P$$

$$M_3 = -\frac{(15)(8)}{2}\left[x-\frac{8}{3}\right]+\frac{50}{3}(x-4)+(5)(x)\left[\frac{x}{2}\right]+\frac{\left(\frac{5x}{2}-20\right)(x-8)}{2}\left[\frac{x-8}{3}\right]$$

$$M_3 = -60x+160+\frac{50}{3}x-\frac{200}{3}+\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{6}(x^2-16x+64)\left(\frac{5x}{2}-20\right)$$

$$M_3 = -60x+160+\frac{50}{3}x-\frac{200}{3}+\frac{5}{2}x^2$$
$$-\frac{1}{6}\left(\frac{5}{2}x^3-40x^2+160x-20x^2+320x-1280\right)$$

$$M_3 = -60x+160+\frac{50}{3}x-\frac{200}{3}+\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{6}\left(\frac{5}{2}x^3-60x^2+480x-1280\right)$$

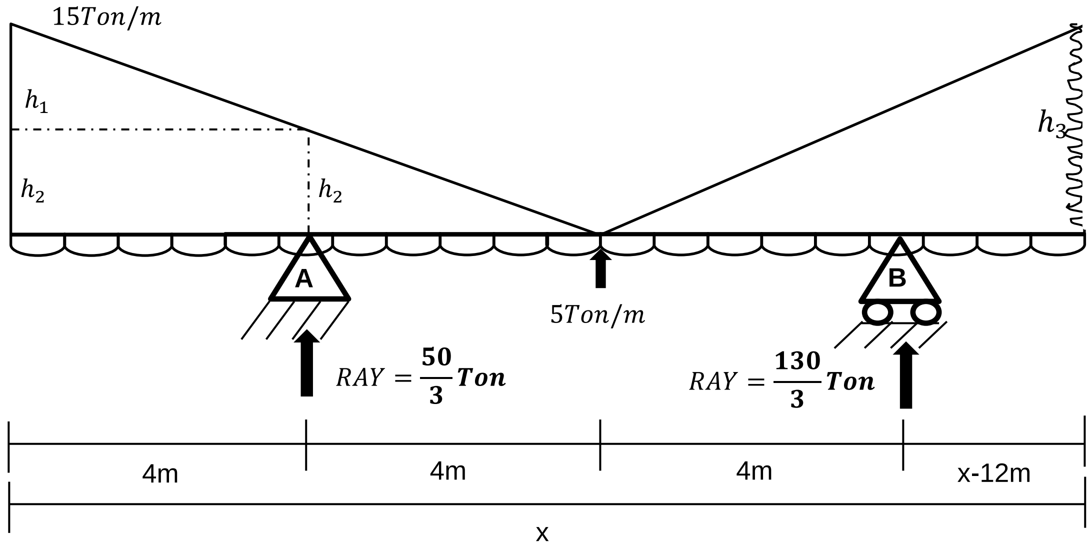
$$M_3 = -60x+160+\frac{50}{3}x-\frac{200}{3}+\frac{5}{2}x^2-\frac{5}{12}x^3+10x^2-80x+\frac{640}{3}$$

$$\boldsymbol{M_3 = -\frac{5}{12}x^3+\frac{25}{2}x^2-\frac{370}{3}x+\frac{920}{3}}$$

$$\boldsymbol{V_3 = -\frac{5}{4}x^2+25x-\frac{370}{3}}$$

L(x)	M3	V3
8m	$-\frac{280}{3}Ton*m$	$-\frac{10}{3}Ton$
12m	$-\frac{280}{3}Ton*m$	$-\frac{10}{3}Ton$

Tramo 4 $\mathbf{12m \leq x \leq 16m}$



Anteriormente calculada la altura obtenida por el corte

$$h_3 = \frac{\mathbf{5x}}{\mathbf{2}} - \mathbf{20}$$

$$\sum M_P$$

$$M_4 = -\frac{(15)(8)}{2}\left[x - \frac{8}{3}\right] + \frac{50}{3}(x-4) + (5)(x)\left[\frac{x}{2}\right] + \frac{\left(\frac{5x}{2} - 20\right)(x-8)}{2}\left[\frac{x-8}{3}\right] + \frac{130}{3}(x-12)$$

$$M_4 = -60x + 160 + \frac{50}{3}x - \frac{200}{3} + \frac{5}{2}x^2 + \frac{130}{3}x - 520 - \frac{1}{6}(x^2 - 16x + 64)\left(\frac{5x}{2} - 20\right)$$

$$M_4 = -60x + 160 + \frac{50}{3}x - \frac{200}{3} + \frac{5}{2}x^2 + \frac{130}{3}x - 520 - \frac{1}{6}\left(\frac{5}{2}x^3 - 40x^2 + 160x - 20x^2 + 320x - 1280\right)$$

$$M_4 = -60x + 160 + \frac{50}{3}x - \frac{200}{3} + \frac{5}{2}x^2 + \frac{130}{3}x - 520 - \frac{1}{6}\left(\frac{5}{2}x^3 - 60x^2 + 480x - 1280\right)$$

$$M_4 = -60x + 160 + \frac{50}{3}x - \frac{200}{3} + \frac{5}{2}x^2 + \frac{130}{3}x - 520 - \frac{5}{12}x^3 + 10x^2 - 80x + \frac{640}{3}$$

$$\boldsymbol{M_4 = -\frac{5}{12}x^3 + \frac{25}{2}x^2 - 80x + \frac{640}{3}}$$

$$\boldsymbol{V_4 = -\frac{5}{4}x^2 + 25x - 80}$$

Evaluando las ecuaciones de fuerza cortante y momento flexionante obtenidas para verificar su continuidad con las siguientes:

L(x)	M4	V4
12m	$-\frac{280}{3}Ton * m$	$40Ton$
16m	0	0

Evaluando las ecuaciones de momento obtenidas y dibujando su diagrama.

L(x)	Cortante	Momento
0.00	0.00000000	0.00000000
0.20	-1.96250000	-0.19750000
0.40	-3.85000000	-0.78000000
0.60	-5.66250000	-1.73250000
0.80	-7.40000000	-3.04000000
1.00	-9.06250000	-4.68750000
1.20	-10.65000000	-6.66000000
1.40	-12.16250000	-8.94250000
1.60	-13.60000000	-11.52000000
1.80	-14.96250000	-14.37750000
2.00	-16.25000000	-17.50000000
2.20	-17.46250000	-20.87250000
2.40	-18.60000000	-24.48000000
2.60	-19.66250000	-28.30750000
2.80	-20.65000000	-32.34000000

3.00	-21.56250000	-36.56250000
3.20	-22.40000000	-40.96000000
3.40	-23.16250000	-45.51750000
3.60	-23.85000000	-50.22000000
3.80	-24.46250000	-55.05250000
4.00	-25.00000000	-60.00000000
4.00	-8.33333333	-60.00000000
4.20	-8.79583333	-61.71416667
4.40	-9.18333333	-63.51333333
4.60	-9.49583333	-65.38250000
4.80	-9.73333333	-67.30666667
5.00	-9.89583333	-69.27083333
5.20	-9.98333333	-71.26000000
5.40	-9.99583333	-73.25916667
5.60	-9.93333333	-75.25333333
5.80	-9.79583333	-77.22750000
6.00	-9.58333333	-79.16666667
6.20	-9.29583333	-81.05583333
6.40	-8.93333333	-82.88000000
6.60	-8.49583333	-84.62416667
6.80	-7.98333333	-86.27333333
7.00	-7.39583333	-87.81250000
7.20	-6.73333333	-89.22666667
7.40	-5.99583333	-90.50083333
7.60	-5.18333333	-91.62000000
7.80	-4.29583333	-92.56916667
8.00	-3.33333333	-93.33333333
8.20	-2.38333333	-93.90333333
8.40	-1.53333333	-94.29333333
8.60	-0.78333333	-94.52333333
8.80	-0.13333333	-94.61333333
9.00	0.41666667	-94.58333333
9.20	0.86666667	-94.45333333
9.40	1.21666667	-94.24333333
9.60	1.46666667	-93.97333333
9.80	1.61666667	-93.66333333
10.00	1.66666667	-93.33333333
10.20	1.61666667	-93.00333333
10.40	1.46666667	-92.69333333
10.60	1.21666667	-92.42333333
10.80	0.86666667	-92.21333333

11.00	0.41666667	-92.08333333
11.20	-0.13333333	-92.05333333
11.40	-0.78333333	-92.14333333
11.60	-1.53333333	-92.37333333
11.80	-2.38333333	-92.76333333
12.00	-3.33333333	-93.33333333
12.00	40.00000000	-93.33333333
12.20	38.95000000	-85.43666667
12.40	37.80000000	-77.76000000
12.60	36.55000000	-70.32333333
12.80	35.20000000	-63.14666667
13.00	33.75000000	-56.25000000
13.20	32.20000000	-49.65333333
13.40	30.55000000	-43.37666667
13.60	28.80000000	-37.44000000
13.80	26.95000000	-31.86333333
14.00	25.00000000	-26.66666667
14.20	22.95000000	-21.87000000
14.40	20.80000000	-17.49333333
14.60	18.55000000	-13.55666667
14.80	16.20000000	-10.08000000
15.00	13.75000000	-7.08333333
15.20	11.20000000	-4.58666667
15.40	8.55000000	-2.61000000
15.60	5.80000000	-1.17333333
15.80	2.95000000	-0.29666667
16.00	0.00000000	0.00000000

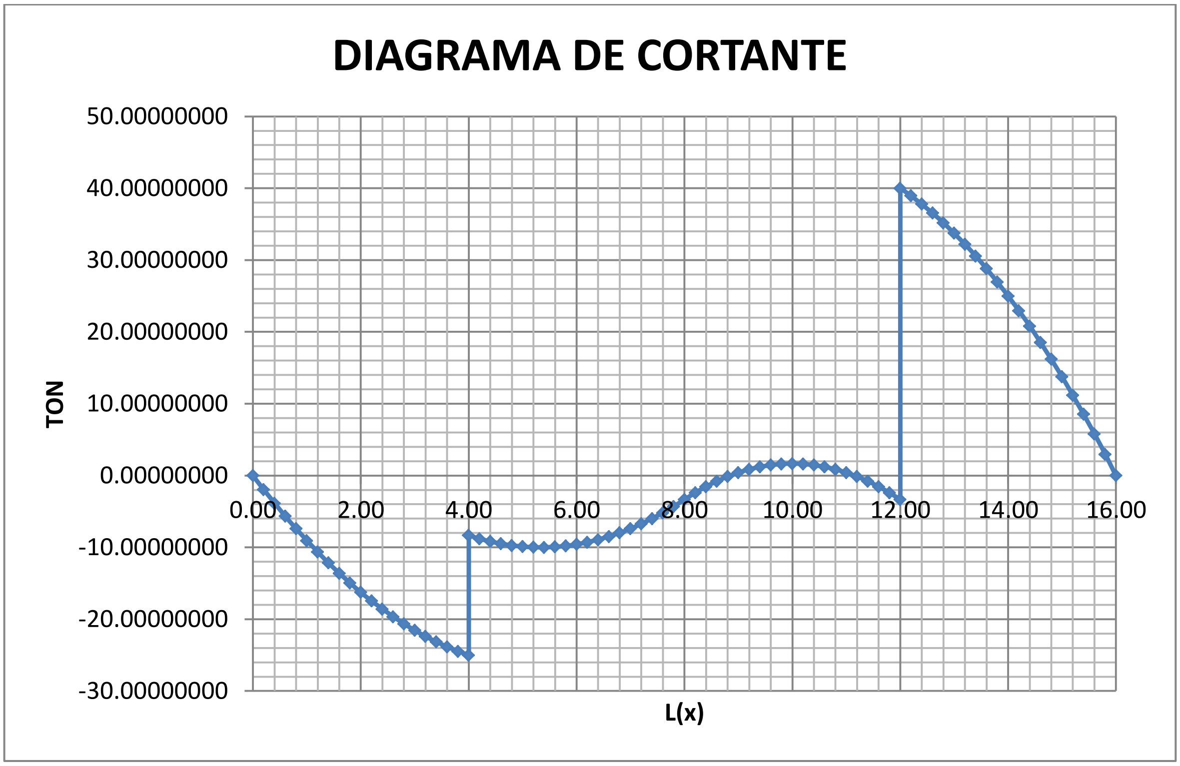


DIAGRAMA DE CORTANTE
50.00000000
40.00000000
30.00000000
20.00000000
10.00000000
0.00000000
-10.00000000
-20.00000000
-30.00000000
TON
0.00
2.00
4.00
6.00
8.00
10.00
12.00
14.00
16.00
L(x)

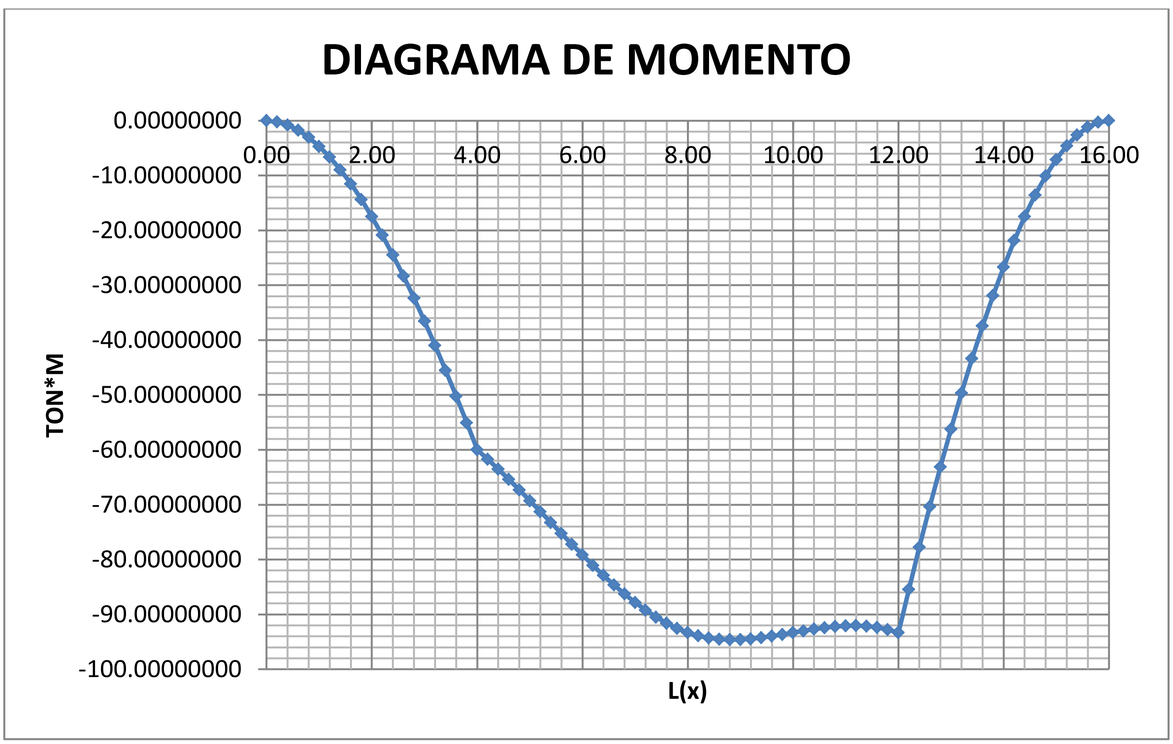
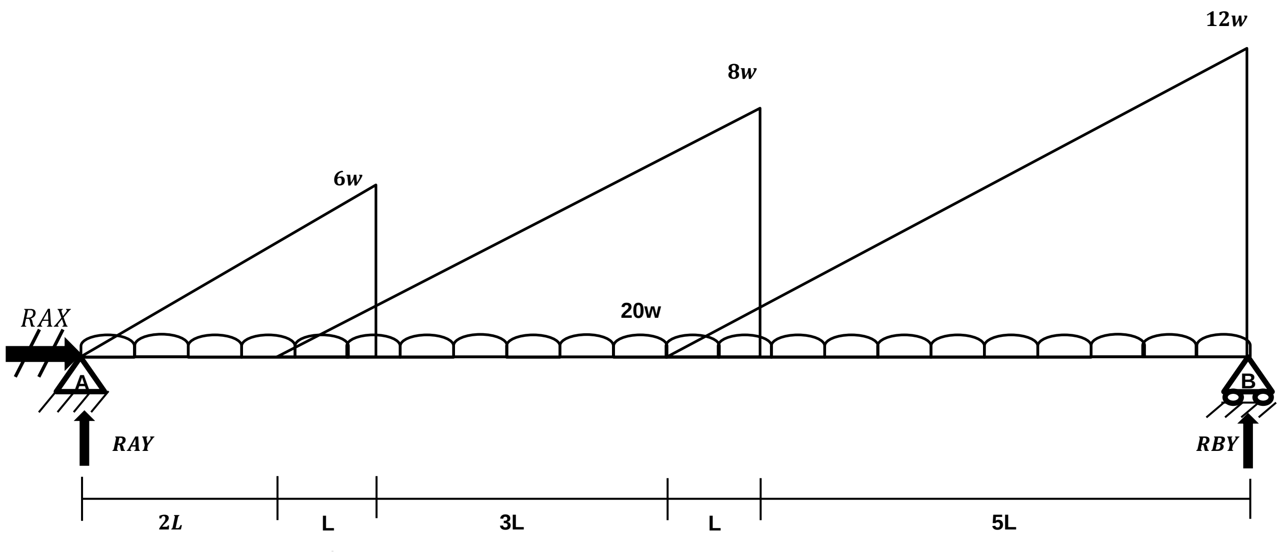


DIAGRAMA DE MOMENTO
0.00000000
-10.00000000
-20.00000000
-30.00000000
-40.00000000
-50.00000000
-60.00000000
-70.00000000
-80.00000000
-90.00000000
-100.00000000
TON*M
0.00
2.00
4.00
6.00
8.00
10.00
12.00
14.00
16.00
L(x)

5.- De la siguiente viga, obtenga el valor de las reacciones en los apoyos, así como las funciones que describen la variaciones de las acciones internas: momento flexionante y fuerza cortante producto de la acción del sistema de fuerzas externo, dibuje los diagramas correspondientes a dichas funciones.



Verificación del grado de indeterminación de la viga:

$$\boldsymbol{I - E = 3 - 3 = 0}$$

Por lo tanto: nuestra estructura es estáticamente determinada y podemos dar solución a ella mediante las ecuaciones de equilibrio estático.

Para dar solución a este ejemplo de viga seguiremos los mismos pasos que utilizamos para realizar los ejemplos anteriores:

$$\sum M_A = 0$$

$$\frac{(6w)(3L)}{2}[2L] + \frac{(8w)(5L)}{2}\left[\frac{16}{3}L\right] + \frac{(12w)(6L)}{2}[10L] + (20w)(12L)[6L] - 12(LRBY)$$

$$12L(RBY) = 18wL^2 + \frac{320}{3}wL^2 + 360wL^2 + 1440wL^2$$

$$RBY = \frac{\frac{5774}{3}wL^2}{12L} = \frac{2887}{18}wL$$

$\boldsymbol{RBY = \frac{2887}{18} wL}$

$$\sum F_Y = 0$$

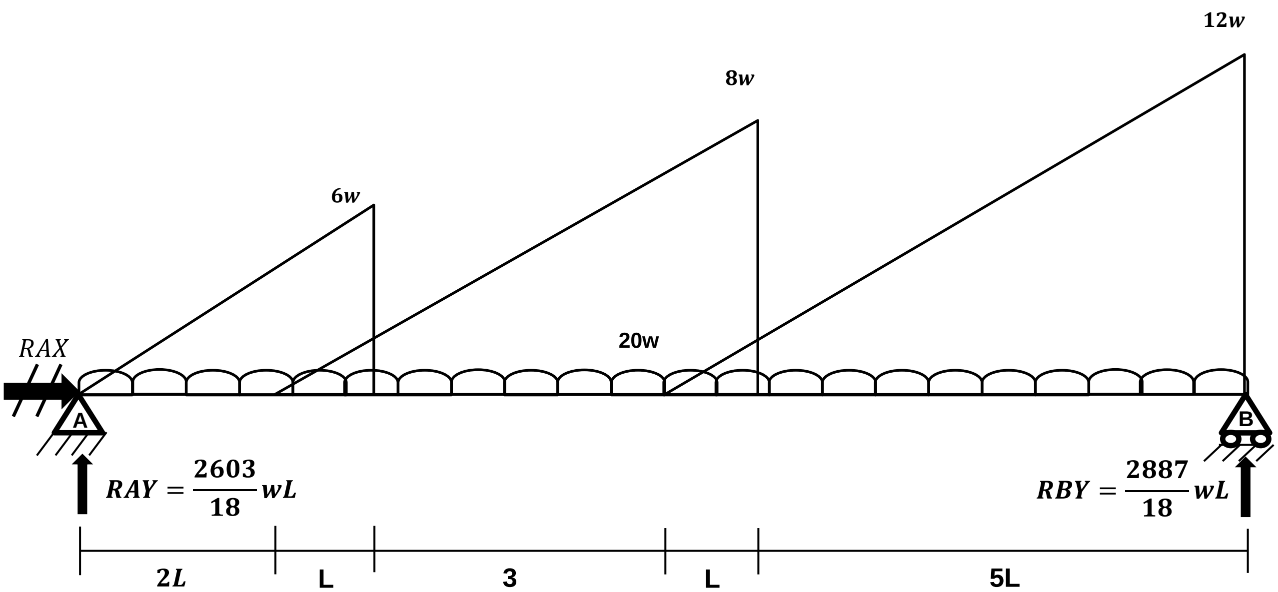
$$RAY - \frac{(6w)(3L)}{2} - \frac{(8w)(5L)}{2} - \frac{(12w)(6L)}{2} - (20w)(12L) + \frac{2887}{18} wL$$

$$RAY = 9wL + 20wL + 36wL + 240wL - \frac{2887}{18} wL$$

$$\boldsymbol{RAY = \frac{2603}{18} wL}$$

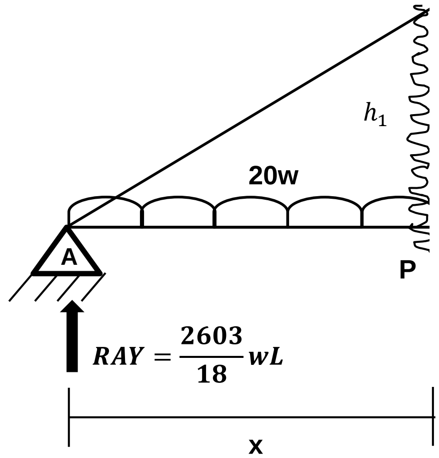
$$\boldsymbol{RAX = 0}$$

Viga en equilibrio estático:



Una vez que hemos encontrado el equilibrio estático de nuestra viga, nuevamente obtendremos las ecuaciones de momento y cortante empleando el mismo procedimiento de análisis de secciones utilizado en los ejemplos anteriores.

Tramo 1 $\mathbf{0 \leq x \leq 2L}$



Para calcular la altura h_1 se efectuara la siguiente relación basada en el concepto de "triángulos semejantes"

Si a una altura de 6w corresponde una longitud de 3L, a una altura h_1 corresponde una longitud de "x"

$$h_1 = \frac{6wx}{3L} = \frac{2wx}{L}$$

$$\sum M_P$$

$$M_1 = \frac{2603}{18}wLx - \frac{\left(\frac{2wx}{L}\right)(x)}{2}\left[\frac{x}{3}\right] - (20w)(x)\left[\frac{x}{2}\right]$$

$$M_1 = \frac{2603}{18}wLx - \frac{wx^3}{3L} - 10wx^2$$

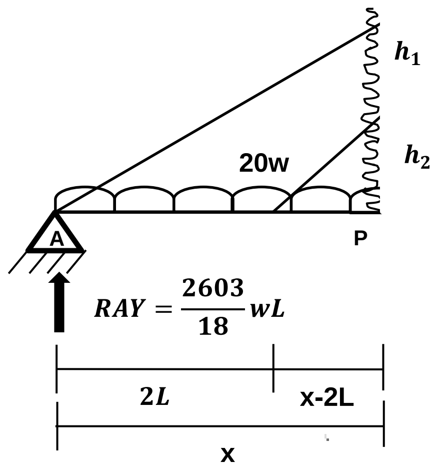
$$\boldsymbol{M_1 = -\frac{wx^3}{3L} - 10wx^2 + \frac{2603}{18}wLx}$$

$$\boldsymbol{V_1 = -\frac{wx^2}{L} - 20wx + \frac{2603}{18}wL}$$

Evaluando las ecuaciones de cortante y momento para verificar la continuidad con las siguientes:

L(x)	M1	V1
0	0	$\frac{2603}{18}wL$
2L	$\frac{2219}{9}wL^2$	$\frac{1811}{18}wL$

Tramo 2 $\boldsymbol{2L \leq x \leq 3L}$



Como anteriormente ya habíamos calculado $h_1 = \frac{2wx}{L}$ debemos obtener el valor de h_2 de una manera similar.

Si a una altura de 8w corresponde una longitud de 5L, a una altura h_2 corresponde una longitud de x-2L

$$h_2 = \frac{8wx - 16wL}{5L} = \boldsymbol{\frac{8wx}{5L} - \frac{16w}{5}}$$

$$\sum M_P$$

$$M_2 = \frac{2603}{18}wLx - \frac{\left(\frac{2wx}{L}\right)(x)}{2}\left[\frac{x}{3}\right] - (20w)(x)\left[\frac{x}{2}\right] - \frac{\left(\frac{8wx}{5L} - \frac{16w}{5}\right)(x-2L)}{2}\left[\frac{x-2L}{3}\right]$$

$$M_2 = -\frac{wx^3}{3L} - 10wx^2 + \frac{2603}{18}wLx - \frac{1}{6}(x^2 - 4Lx + 4L^2)\left(\frac{8wx}{5L} - \frac{16w}{5}\right)$$

$$M_2 = -\frac{wx^3}{3L} - 10wx^2 + \frac{2603}{18}wLx$$
$$-\frac{1}{6}\left(\frac{8wx^3}{5L} - \frac{16wx^2}{5} - \frac{32wx^2}{5} + \frac{64wLx}{5} + \frac{32wLx}{5} - \frac{64wL^2}{5}\right)$$

$$M_2 = -\frac{wx^3}{3L} - 10wx^2 + \frac{2603}{18}wLx - \frac{1}{6}\left(\frac{8wx^3}{5L} - \frac{48wx^2}{5} + \frac{96wLx}{5} - \frac{64wL^2}{5}\right)$$

$$M_2 = -\frac{wx^3}{3L} - 10wx^2 + \frac{2603}{18}wLx - \frac{4wx^3}{15L} + \frac{8wx^2}{5} - \frac{16wLx}{5} + \frac{32wL^2}{15}$$

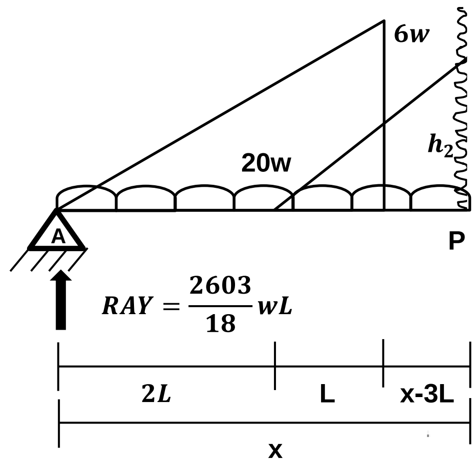
$$\boldsymbol{M_2 = -\frac{3wx^3}{5L} - \frac{42wx^2}{5} + \frac{12727wLx}{90} + \frac{32wL^2}{15}}$$

$$\boldsymbol{V_2 = -\frac{9wx^2}{5L} - \frac{84wx}{5} + \frac{12727wL}{90}}$$

Evaluando las ecuaciones de cortante y momento para verificar la continuidad con las siguientes:

L(x)	M2	V2
2L	$\frac{2219}{9}wL^2$	$\frac{1811}{18}wL$
3L	$\frac{10037}{30}wL^2$	$\frac{6733}{90}wL$

Tramo 3 $\boldsymbol{3L \le x \le 6L}$



$$h_2 = \frac{8wx}{5L} - \frac{16w}{5}$$

$$\sum M_P$$

$$M_3 = \frac{2603}{18} wLx - \frac{(6W)(3L)}{2}[x - 2L] - (20w)(x)\left[\frac{x}{2}\right]$$
$$- \frac{\left(\frac{8wx}{5L} - \frac{16w}{5}\right)(x - 2L)}{2}\left[\frac{x - 2L}{3}\right]$$

$$M_3 = \frac{2603}{18} wLx - 9wLx + 18wL^2 - 10wx^2 + -\frac{1}{6}(x^2 - 4Lx + 4L^2)\left(\frac{8wx}{5L} - \frac{16w}{5}\right)$$

$$M_3 = \frac{2603}{18} wLx - 9wLx + 18wL^2 - 10wx^2$$
$$-\frac{1}{6}\left(\frac{8wx^3}{5L} - \frac{16wx^2}{5} - \frac{32wx^2}{5} + \frac{64wLx}{5} + \frac{32wLx}{5} - \frac{64wL^2}{5}\right)$$

$$M_3 = \frac{2603}{18} wLx - 9wLx + 18wL^2 - 10wx^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{8wx^3}{5L} - \frac{48wx^2}{5} + \frac{96wLx}{5} - \frac{64wL^2}{5}\right)$$

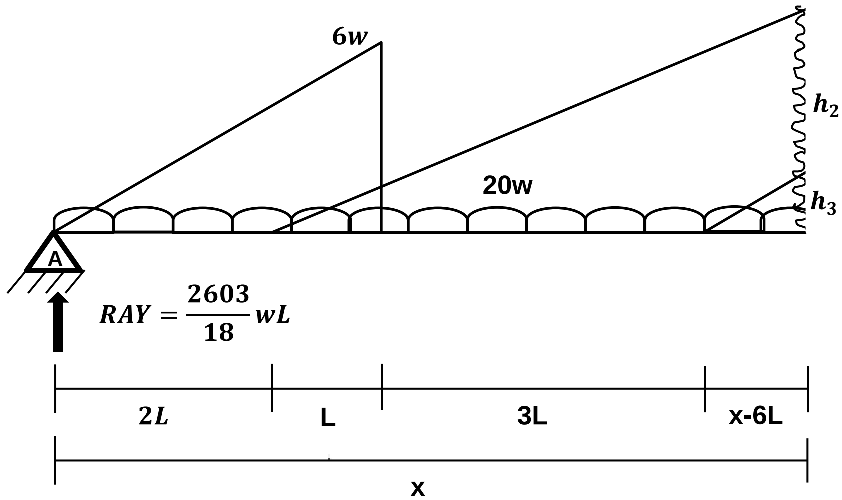
$$M_3 = \frac{2603}{18} wLx - 9wLx + 18wL^2 - 10wx^2 - \frac{4wx^3}{15L} + \frac{8wx^2}{5} - \frac{16wLx}{5} + \frac{32wL^2}{15}$$

$$\boldsymbol{M_3 = -\frac{4wx^3}{15L} - \frac{42wx^2}{5} + \frac{11917wLx}{90} + \frac{302wL^2}{15}}$$

$$\boldsymbol{V_3 = -\frac{4wx^2}{5L} - \frac{84wx}{5} + \frac{11917wL}{90}}$$

L(x)	M3	V3
3L	$\frac{10037}{30} wL^2$	$\frac{6733}{90} wL$
6L	$\frac{2273}{5} wL^2$	$\frac{253}{90} wL$

Tramo 4 $6L \leq x \leq 7L$



Como:

$$h_2 = \frac{8wx}{5L} - \frac{16w}{5}$$

Calculando h_3: SI a una altura de 12w corresponde una longitud de 6L, a una altura h_3 corresponde una longitud de (x-6L)

$$h_3 = \frac{12wx - 72wL}{6L} = \frac{2wx}{L} - 12w$$

$$\sum M_P$$

$$M_4 = \frac{2603}{18}wLx - \frac{(6W)(3L)}{2}[x-2L] - (20w)(x)\left[\frac{x}{2}\right]$$
$$-\frac{\left(\frac{8wx}{5L} - \frac{16w}{5}\right)(x-2L)}{2}\left[\frac{x-2L}{3}\right] - \frac{\left(\frac{2wx}{L} - 12w\right)(x-2L)}{2}\left[\frac{x-6L}{3}\right]$$

$$M_4 = \frac{2603}{18}wLx - 9wLx + 18wL^2 - 10wx^2 - \frac{1}{6}(x^2 - 4Lx + 4L^2)\left(\frac{8wx}{5L} - \frac{16w}{5}\right)$$
$$-\frac{1}{6}(x^2 - 12Lx + 36L^2)\left(\frac{2wx}{L} - 12w\right)$$

$$M_4 = \frac{2603}{18}wLx - 9wLx + 18wL^2 - 10wx^2$$
$$-\frac{1}{6}\left(\frac{8wx^3}{5L} - \frac{16wx^2}{5} - \frac{32wx^2}{5} + \frac{64wLx}{5} + \frac{32wLx}{5} - \frac{64wL^2}{5}\right)$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{2wx^3}{L}-12wx^2-24wx^2+144wLx+72wLx-432wL^2\right)$$

$$M_4=\frac{2603}{18}wLx-9wLx+18wL^2-10wx^2-\frac{1}{6}\left(\frac{8wx^3}{5L}-\frac{48wx^2}{5}+\frac{96wLx}{5}-\frac{64wL^2}{5}\right)$$
$$-\frac{1}{6}\left(\frac{2wx^3}{L}-36wx^2+216wLx-432wL^2\right)$$

$$M_4=\frac{2603}{18}wLx-9wLx+18wL^2-10wx^2-\frac{4wx^3}{15L}+\frac{8wx^2}{5}-\frac{16wLx}{5}+\frac{32wL^2}{15}-\frac{wx^3}{3L}$$
$$+6wx^2-36wLx+72wL^2$$

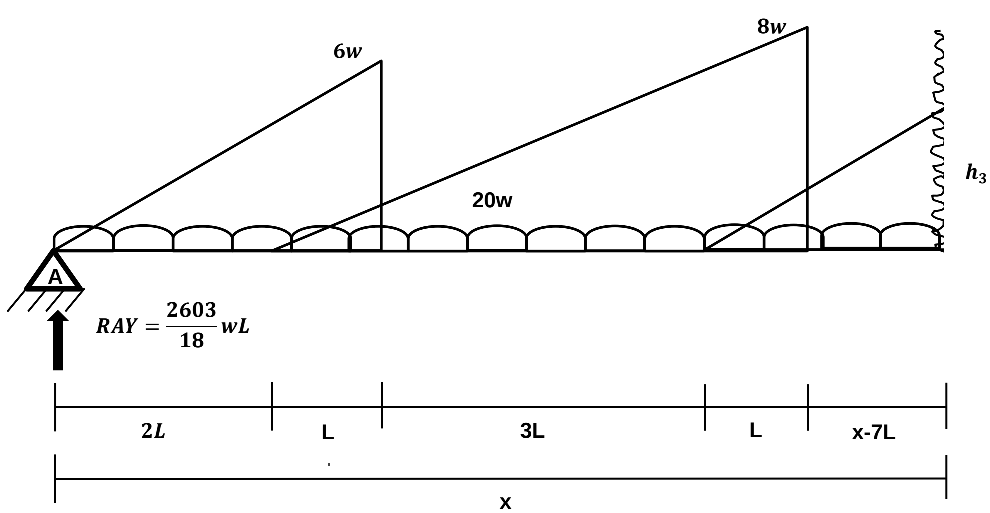
$$\boldsymbol{M_4=-\frac{3wx^3}{5L}-\frac{12wx^2}{5}+\frac{8677wLx}{90}+\frac{1382wL^2}{15}}$$

$$\boldsymbol{V_4=-\frac{9wx^2}{5L}-\frac{24wx}{5}+\frac{8677wL}{90}}$$

Evaluando las ecuaciones de cortante y momento para verificar la continuidad con las siguientes:

L(x)	M4	V4
6L	$\frac{2273}{5}wL^2$	$\frac{253}{90}wL$
7L	$\frac{7985}{18}wL^2$	$-\frac{457}{18}wL$

Tramo 5 $\boldsymbol{7L \leq x \leq 12L}$



Como:

$$h_3 = \frac{2wx}{L} - 12w$$

$$\sum M_P$$

$$M_5 = \frac{2603}{18}wLx - \frac{(6W)(3L)}{2}[x-2L] - (20w)(x)\left[\frac{x}{2}\right] - \frac{(8w)(5L)}{2}\left[x - \frac{16L}{3}\right]$$
$$-\frac{\left(\frac{2wx}{L} - 12w\right)(x-2L)}{2}\left[\frac{x-6L}{3}\right]$$

$$M_5 = \frac{2603}{18}wLx - 9wLx + 18wL^2 - 10wx^2 - 20wLx + \frac{320WL^2}{3}$$
$$-\frac{1}{6}(x^2 - 12Lx + 36L^2)\left(\frac{2wx}{L} - 12w\right)$$

$$M_5 = \frac{2603}{18}wLx - 9wLx + 18wL^2 - 10wx^2 - 20wLx + \frac{320WL^2}{3}$$
$$-\frac{1}{6}\left(\frac{2wx^3}{L} - 12wx^2 - 24wx^2 + 144wLx + 72wLx - 432wL^2\right)$$

$$M_5 = \frac{2603}{18}wLx - 9wLx + 18wL^2 - 10wx^2 - 20wLx + \frac{320WL^2}{3}$$
$$-\frac{1}{6}\left(\frac{2wx^3}{L} - 36wx^2 + 216wLx - 432wL^2\right)$$

$$M_5 = \frac{2603}{18}wLx - 9wLx + 18wL^2 - 10wx^2 - 20wLx + \frac{320WL^2}{3} - \frac{wx^3}{3L} + 6wx^2$$
$$-36wLx + 72wL^2$$

$$\boldsymbol{M_5 = -\frac{wx^3}{3L} - 4wx^2 + \frac{1433wLx}{18} + \frac{590wL^2}{3}}$$

$$\boldsymbol{V_5 = -\frac{wx^2}{L} - 8wx + \frac{1433wL}{18}}$$

Evaluando las ecuaciones de cortante y momento para verificar la continuidad con las siguientes:

L(x)	M5	V5
7L	$\frac{7985}{18}wL^2$	$-\frac{457}{18}wL$
12L	0	$-\frac{2887}{18}wL$

Dibujo del diagrama de momento flexionante y fuerza cortante

Tómese en cuenta que para facilitar cálculos se tomaran en cuenta los siguientes valores:

- W=1Ton/m
- L=1m

Evaluando las ecuaciones de momento y cortante para obtener sus respectivas graficas:

L(x)	Cortante	Momento
0.00	144.61111111	0.00000000
0.20	140.57111111	28.51955556
0.40	136.45111111	56.22311111
0.60	132.25111111	83.09466667
0.80	127.97111111	109.11822222
1.00	123.61111111	134.27777778
1.20	119.17111111	158.55733333
1.40	114.65111111	181.94088889
1.60	110.05111111	204.41244444
1.80	105.37111111	225.95600000
2.00	100.61111111	246.55555556
2.20	95.73911111	266.19297778
2.40	90.72311111	284.84160000
2.60	85.56311111	302.47262222
2.80	80.25911111	319.05724444
3.00	74.81111111	334.56666667
3.20	70.45911111	349.09475556
3.40	66.04311111	362.74604444
3.60	61.56311111	375.50773333
3.80	57.01911111	387.36702222
4.00	52.41111111	398.31111111

4.20	47.73911111	408.32720000
4.40	43.00311111	417.40248889
4.60	38.20311111	425.52417778
4.80	33.33911111	432.67946667
5.00	28.41111111	438.85555556
5.20	23.41911111	444.03964444
5.40	18.36311111	448.21893333
5.60	13.24311111	451.38062222
5.80	8.05911111	453.51191111
6.00	2.81111111	454.60000000
6.20	-2.54088889	454.62942222
6.40	-8.03688889	453.57404444
6.60	-13.67688889	451.40506667
6.80	-19.46088889	448.09368889
7.00	-25.38888889	443.61111111
7.20	-29.82888889	438.09066667
7.40	-34.34888889	431.67422222
7.60	-38.94888889	424.34577778
7.80	-43.62888889	416.08933333
8.00	-48.38888889	406.88888889
8.20	-53.22888889	396.72844444
8.40	-58.14888889	385.59200000
8.60	-63.14888889	373.46355556
8.80	-68.22888889	360.32711111
9.00	-73.38888889	346.16666667
9.20	-78.62888889	330.96622222
9.40	-83.94888889	314.70977778
9.60	-89.34888889	297.38133333
9.80	-94.82888889	278.96488889
10.00	-100.38888889	259.44444444
10.20	-106.02888889	238.80400000
10.40	-111.74888889	217.02755556
10.60	-117.54888889	194.09911111
10.80	-123.42888889	170.00266667
11.00	-129.38888889	144.72222222
11.20	-135.42888889	118.24177778
11.40	-141.54888889	90.54533333
11.60	-147.74888889	61.61688889
11.80	-154.02888889	31.44044444
12.00	-160.38888889	0.00000000

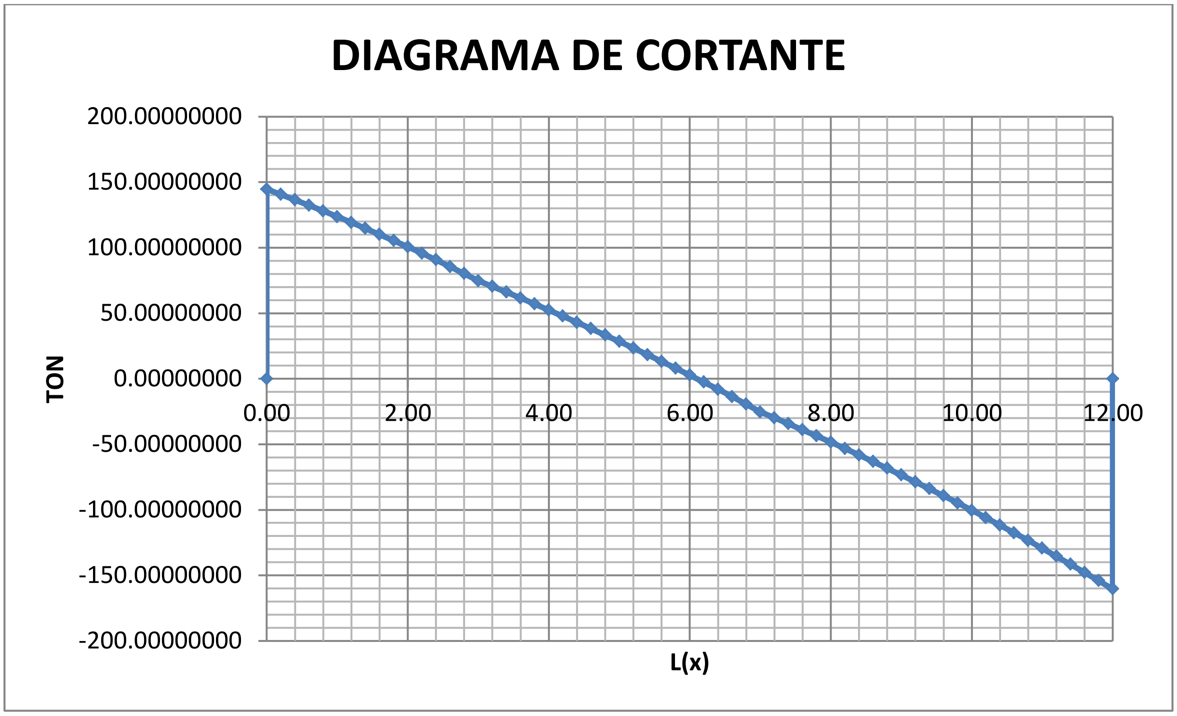


DIAGRAMA DE CORTANTE
200.00000000
150.00000000
100.00000000
50.00000000
0.00000000
-50.00000000
-100.00000000
-150.00000000
-200.00000000
TON
0.00
2.00
4.00
6.00
8.00
10.00
12.00
L(x)

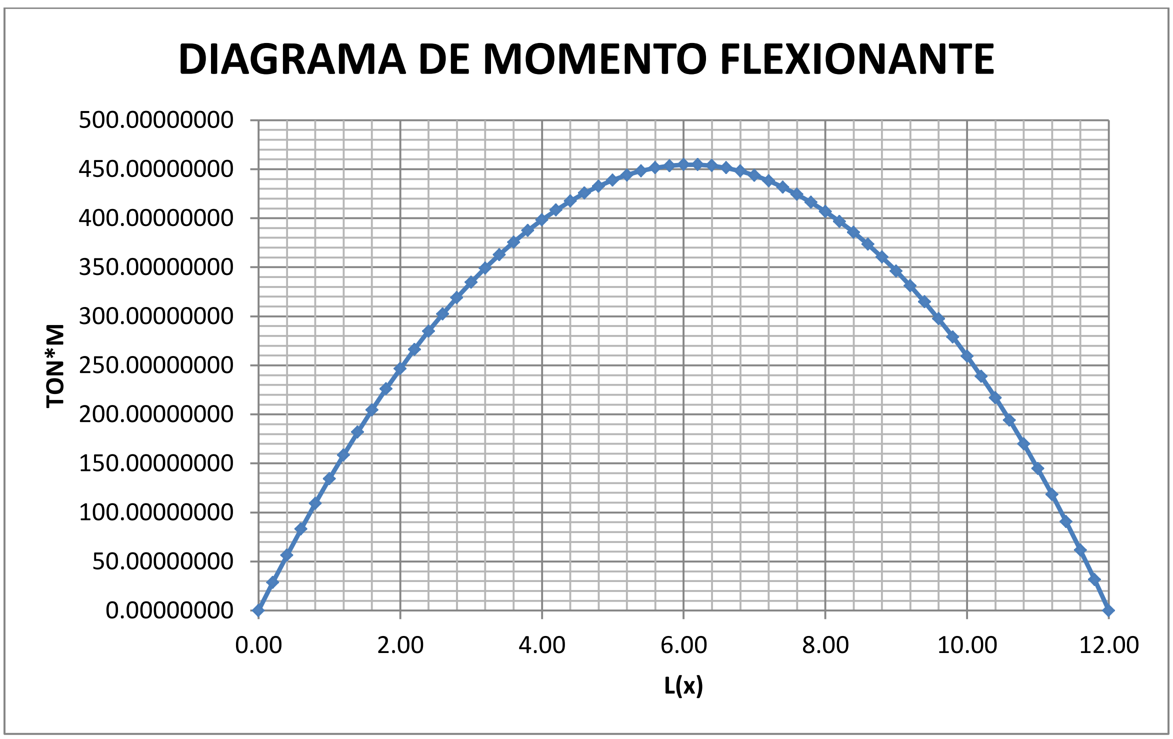
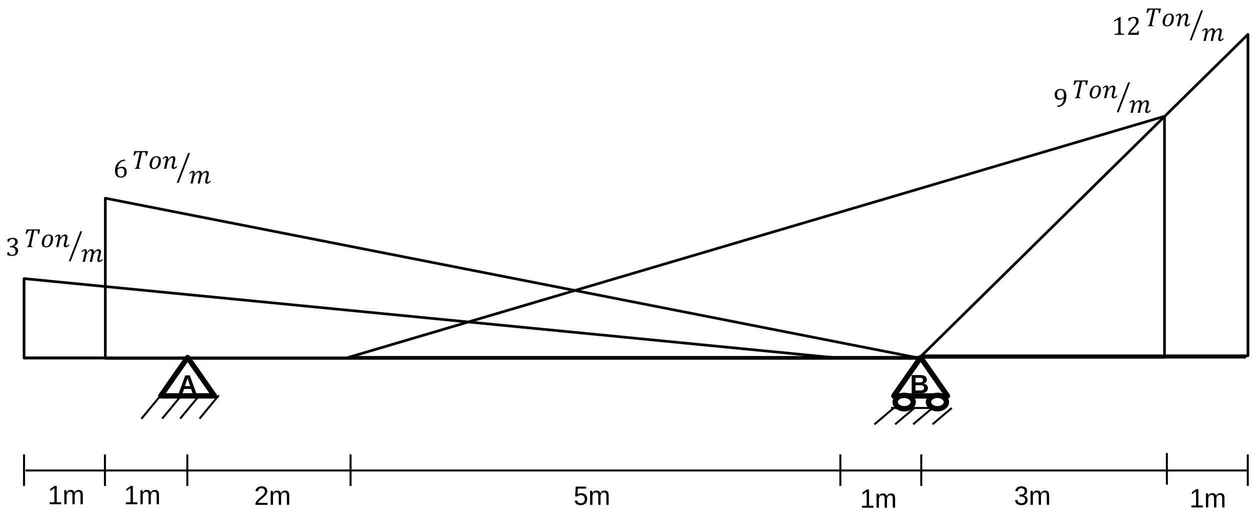


DIAGRAMA DE MOMENTO FLEXIONANTE
500.00000000
450.00000000
400.00000000
350.00000000
300.00000000
250.00000000
200.00000000
150.00000000
100.00000000
50.00000000
0.00000000
TON*M
0.00
2.00
4.00
6.00
8.00
10.00
12.00
L(x)

6.- De la siguiente viga, obtenga el valor en las reacciones de los apoyos, determine las funciones que describen la variación del momento flexionante y fuerza cortante a lo largo del eje de la viga y dibuje los diagramas correspondientes



Verificación del grado de indeterminación de la viga:

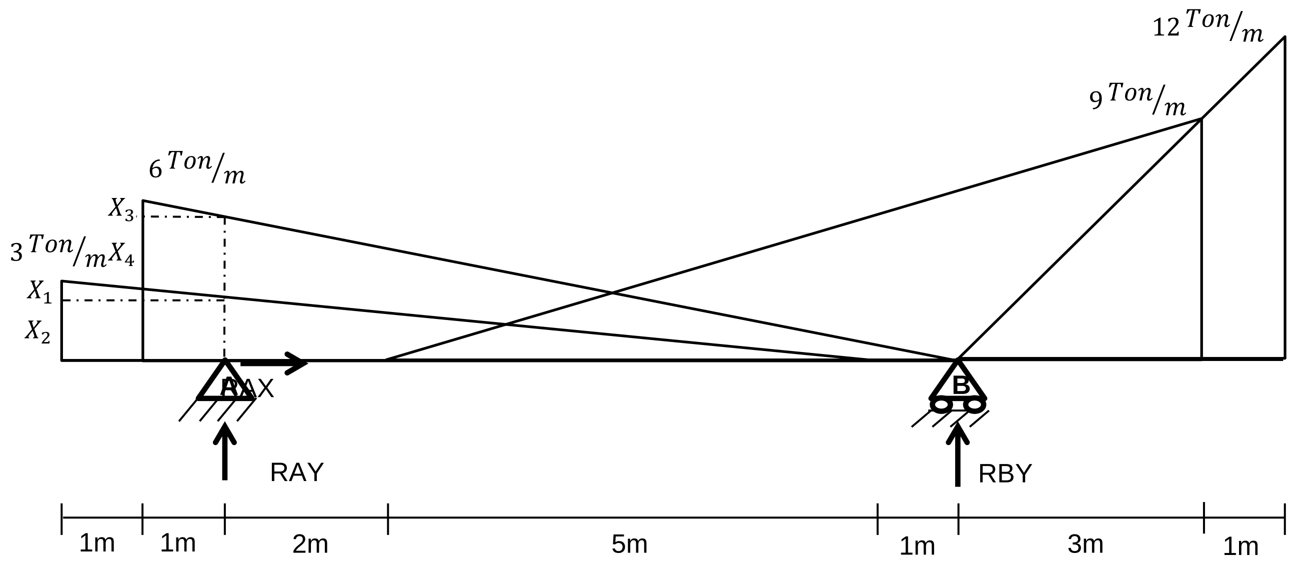
Recordando que el grado de indeterminación en términos vanos es la diferencia entre el número de incógnitas de nuestra estructura “I” y el número de ecuaciones de equilibrio estático asociadas a su plano “E”

$$\boldsymbol{I - E = 3 - 3 = 0}$$

Por lo tanto: nuestra estructura es estáticamente determinada y podemos dar solución a ella mediante las ecuaciones de equilibrio estático.

- $\sum F = F_R = 0$
- $\sum M = M_R = 0$

Realizando sumatoria de momentos con respecto al apoyo A obtendremos la siguiente distribución de cargas debido a la diferencia en cuanto a convención de signos.



Para el cálculo de las alturas X_1, X_2, X_3 y X_4 realizaremos lo siguiente

Para X_1:

Si a una longitud de 9m corresponde una altura de 3, a una longitud de 2m corresponde una altura de X_1

Y se realiza la siguiente la siguiente relación con el fin de calcular la altura de X_1

$$X_1 = \frac{(3\text{"}altura\ total\text{"})(2)}{(9\text{"longitud total"})} = \frac{6}{9} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

Para X_2

Tomando en cuenta que la altura total h= 3 y que $h = X_1 + X_2$ para encontrar

$$X_2 = h - X_1 = 3 - \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{7}{3}}$$

Para X_3

Si a una longitud de 9m corresponde una altura de 6, a una longitud de 1m corresponde una altura X_3

Y se realiza la siguiente la siguiente relación con el fin de calcular la altura de X_3

$$X_1 = \frac{(6"altura\ total")(1)}{(9"\text{longitud total"})} = \frac{6}{9} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

Para X_4

Tomando en cuenta que la altura total h= 6 y que $h = X_3 + X_4$ para encontrar

$$X_4 = h - X_3 = 6 - \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{16}{3}}$$

Obtenidas las alturas anteriores para el cálculo de las reacciones en los apoyos A y B realizaremos una sumatoria de momentos con respecto al apoyo A y luego se efectuara una sumatoria de fuerzas con respecto al Eje Y de la siguiente manera.

$$\sum \boldsymbol{M_A = 0}$$

$$-\frac{\left({}^{2}/_{3}\right)(2)}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)(2)\right] - \left({}^{7}/_{3}\right)(2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)(2)\right] - \frac{\left({}^{2}/_{3}\right)(1)}{2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)(1)\right] - \left({}^{16}/_{3}\right)(1)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{\left({}^{16}/_{3}\right)(8)}{2}\left[\frac{8}{3}\right] + \frac{\left({}^{7}/_{3}\right)(7)}{3}\left[\frac{7}{3}\right] + \frac{(9)(9)}{2}[8] + \frac{(12)(4)}{2}\left[\frac{32}{3}\right] - 8RBY = 0$$

$$8mRBY = -\frac{8}{9}{}^{ton}/_{m} - \frac{14}{3}{}^{ton}/_{m} - \frac{2}{9}{}^{ton}/_{m} - \frac{8}{3}{}^{ton}/_{m} + \frac{512}{9}{}^{ton}/_{m} + \frac{343}{18}{}^{ton}/_{m}$$
$$+324\,{}^{ton}/_{m} + 256\,{}^{ton}/_{m}$$

$$(8m)RBY = \frac{1295}{2}{}^{ton}/_{m}$$

$$RBY = \frac{\frac{1295}{2}{}^{ton}/_{m}}{8m}$$

$$\boldsymbol{RBY = \frac{1295}{16}\,ton}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\frac{1295}{16}ton - \frac{(3)(9)}{2}ton - \frac{(6)(9)}{2}ton - \frac{(9)(9)}{2}ton - \frac{(12)(4)}{2}ton + RAY = 0$$

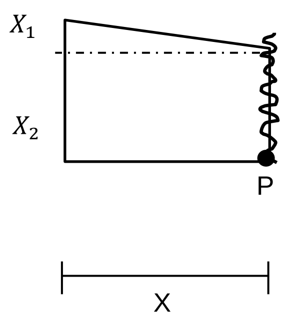
$$\boldsymbol{RAY = \frac{385}{16} Ton}$$

$$\boldsymbol{RAX = 0Ton}$$

Para obtener las ecuaciones de momento y cortante se realizara el mismo procedimiento utilizado en los ejemplos anteriores:

Tramo 1

$$\boldsymbol{0 \leq x \leq 1m}$$



Para realizar una sumatoria de momentos con respecto al punto P y encontrar las primeras ecuaciones de cortante y momento habrá que hallar las alturas de las incógnitas generadas por el corte.

Para $\boldsymbol{X_1}$:

Si a una longitud de 9m corresponde una altura de 3, a una longitud de x m corresponde una altura de X_1

Y se realiza la siguiente la siguiente relación con el fin de calcular la altura de X_1

$$X_1 = \frac{(3"altura\ total")(x)}{(9"\text{longitud total}")} = \frac{3X}{9} = \boldsymbol{\frac{x}{3}}$$

Para $\boldsymbol{X_2}$

Tomando en cuenta que la altura total h= 3 y que $h = X_1 + X_2$ para encontrar

$$X_2 = h - X_1 = \boldsymbol{3 - \frac{x}{3}}$$

Obtenidas las alturas requeridas realizando la sumatoria de momentos con respecto al punto P

$$M_1 = -\frac{\left(X/_3\right)(X)}{2}\left[\frac{2}{3}X\right] - \left(3 - \frac{X}{3}\right)(X)\left(\frac{X}{2}\right)$$

$$M_1 = -\frac{X^3}{9} - \frac{3X^2}{2} + \frac{X^3}{6}$$

$$\boldsymbol{M_1 = \frac{X^3}{18} - \frac{3X^2}{2}}$$

Para obtener la ecuación de cortante debemos derivar la ecuación de momento

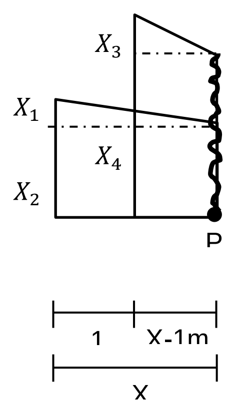
$$\boldsymbol{V_1 = \frac{X^2}{6} - 3X}$$

Para verificar la continuidad de nuestras ecuaciones, estas se evaluaran según el tramo de corte al que corresponden, en este caso de 0 a 1 y tenemos lo siguiente:

Valor de X	**Valor del Momento 1**	**Valor del cortante 1**
0	0	0
1	$-\frac{13}{9}$	$-\frac{17}{6}$

Tramo 2

$$\boldsymbol{1m \leq x \leq 2m}$$



Nuevamente calcularemos las alturas requeridas de la siguiente manera

Para X_1:

Si a una longitud de 9m corresponde una altura de 3, a una longitud de x m corresponde una altura de X_1

Y se realiza la siguiente la siguiente relación con el fin de calcular la altura de X_1

$$X_1 = \frac{(3"altura\ total")(X)}{(9"\text{longitud total}")} = \frac{3X}{9} = \boldsymbol{\frac{X}{3}}$$

Para X_2

Tomando en cuenta que la altura total h= 3 y que $h = X_1 + X_2$ para encontrar

$$X_2 = h - X_1 = \mathbf{3} - \boldsymbol{\frac{X}{3}}$$

Para X_3

Si a una longitud de 9m corresponde una altura de 6, a una longitud de (X-1) m corresponde una altura X_3

Y se realiza la siguiente la siguiente relación con el fin de calcular la altura de X_3

$$X_3 = \frac{(6"altura\ total")(X-1)}{(9"\text{longitud total}")} = \frac{6(X-1)}{9} = \frac{6X}{9} - \frac{6}{9} = \boldsymbol{\frac{2X}{3}} - \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

Para X_4

Tomando en cuenta que la altura total h= 6 y que $h = X_3 + X_4$ para encontrar

$$X_4 = h - X_3 = 6 - \left(\frac{6X}{9} - \frac{6}{9}\right) = -\boldsymbol{\frac{2X}{3}} + \boldsymbol{\frac{20}{3}}$$

Calculadas las alturas requeridas realizaremos una sumatoria de momentos en el punto P para obtener las ecuaciones de momento y cortante siguientes.

$$M_2 = -\frac{\left(X/_{3}\right)(X)}{2}\left[\frac{2}{3}X\right] - \left(3 - \frac{X}{3}\right)(X)\left(\frac{X}{2}\right) - \frac{\left(\frac{2X}{3} - \frac{2}{3}\right)(X-1)}{2}\left[\frac{2(X-1)}{3}\right] - \left(\frac{20}{3} - \frac{2X}{3}\right)(X-1)\left(\frac{X-1}{2}\right)$$

$$M_2 = \frac{X^3}{18} - \frac{3X^2}{2} - \frac{1}{3}(X^2 - 2X + 1)\left(\frac{2X}{3} - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}(X^2 - 2X + 1)\left(\frac{20}{3} - \frac{2X}{3}\right)$$

$$M_2 = \frac{X^3}{18} - \frac{3X^2}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}X^3 - 2X^2 + 2X - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}X^3 + 8X^2 - 14X + \frac{20}{3}\right)$$

$$M_2 = \frac{X^3}{18} - \frac{3X^2}{2} - \frac{2}{9}X^3 + \frac{2}{3}X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{2}{9} + \frac{X^3}{3} - 4X^2 + 7X - \frac{10}{3}$$

$$\boldsymbol{M_2 = \frac{X^3}{6} - \frac{29}{6}X^2 + \frac{19}{3}X - \frac{28}{9}}$$

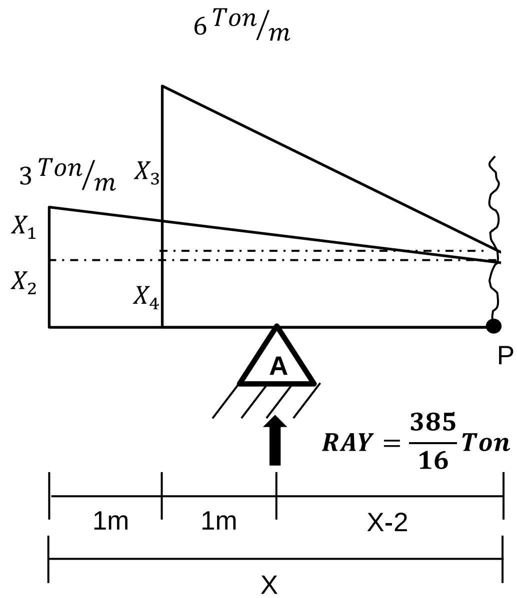
$$\boldsymbol{V_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{29}{3}X + \frac{19}{3}}$$

Nuevamente verificaremos la continuidad de las ecuaciones de momento y cortante con las ecuaciones anteriores, en este caso evaluaremos las ecuaciones obtenidas con valores de 1 hasta 2m, al hacer esto, los resultados de las ecuaciones cuando la X tome el valor de 1 debe obtenerse el mismo valor que evaluando las ecuaciones anteriores con el mismo valor de X y así sucesivamente.

Valor de X	Valor del Momento 2	Valor del cortante 2
1	$-\frac{13}{9}$	$-\frac{17}{6}$
2	$-\frac{76}{9}$	-11

Tramo 3

$$2m \leq x \leq 4m$$



Nuevamente realizaremos sumatoria de momentos con respecto al punto P para así obtener las ecuaciones de momento que rigen el tramo indicado.

Tomando en cuenta que las alturas de las incógnitas indicadas ya fueron calculadas anteriormente. $X_1 = \frac{X}{3}$, $X_2 = \left(3 - \frac{X}{3}\right)$, $X_3 = \left(\frac{2}{3}X - \frac{2}{3}\right)$ y $X_4 = \left(\frac{20}{3} - \frac{2}{3}X\right)$

$$M_3 = -\frac{({}^{X}/_{3})(X)}{2}\left[\frac{2}{3}X\right] - \left(3 - \frac{X}{3}\right)(X)\left(\frac{X}{2}\right) - \frac{\left(\frac{2X}{3} - \frac{2}{3}\right)(X-1)}{2}\left[\frac{2(X-1)}{3}\right]$$

$$-\left(\frac{20}{3} - \frac{2X}{3}\right)(X-1)\left(\frac{X-1}{2}\right) + \frac{385}{16}(X-2)$$

$$M_3 = \frac{X^3}{18} - \frac{3X^2}{2} - \frac{1}{3}(X^2 - 2X + 1)\left(\frac{2X}{3} - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}(X^2 - 2X + 1)\left(\frac{20}{3} - \frac{2X}{3}\right) + \frac{385}{16}X - \frac{385}{8}$$

$$M_3 = \frac{X^3}{18} - \frac{3X^2}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}X^3 - 2X^2 + 2X - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}X^3 + 8X^2 - 14X + \frac{20}{3}\right) + \frac{385}{16}X - \frac{385}{8}$$

$$M_3 = \frac{X^3}{18} - \frac{3X^2}{2} - \frac{2}{9}X^3 + \frac{2}{3}X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{2}{9} + \frac{X^3}{3} - 4X^2 + 7X - \frac{10}{3} + \frac{385}{16}X - \frac{385}{8}$$

$$M_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{29}{6}X^2 + \frac{19}{3}X - \frac{28}{9} + \frac{385}{16}X - \frac{385}{8}$$

$$\boldsymbol{M_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{29}{6}X^2 + \frac{1459}{48}X - \frac{3689}{72}}$$

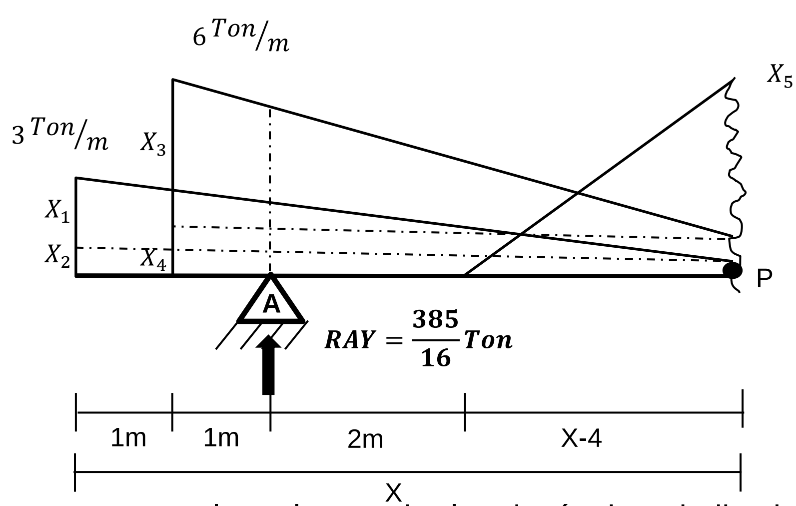
$$\boldsymbol{V_3 = \frac{X^2}{2} - \frac{29}{3}X + \frac{1459}{48}}$$

Evaluando las ecuaciones de momento y comparándolas con las ecuaciones anteriores para verificar la continuidad

Valor de X	**Valor del Momento 3**	**Valor del cortante 3**
2	$-\frac{76}{9}$	$-\frac{209}{16}$
4	$\frac{265}{72}$	$-\frac{13}{48}$

Tramo 4

$$\boldsymbol{4m \leq x \leq 9m}$$



Tomando en cuenta que las alturas de las incógnitas indicadas ya fueron calculadas anteriormente. $X_1 = \frac{X}{3}$, $X_2 = \left(3 - \frac{X}{3}\right)$, $X_3 = \left(\frac{2}{3}X - \frac{2}{3}\right)$ y $X_4 = \left(\frac{20}{3} - \frac{2}{3}X\right)$

Para X_5

Si a una longitud de 9m corresponde una altura de 9, a una longitud de (X-4) m corresponde una altura X_5

Y se realiza la siguiente la siguiente relación con el fin de calcular la altura de X_5

$$X_5 = \frac{(9"altura\ total")(X-4)}{(9"\text{longitud total}")} = \frac{9(X-4)}{9} = (\boldsymbol{X-4})$$

Obtenida la altura requerida podemos realizar la sumatoria de momentos con respecto al punto P

$$M_4 = -\frac{\left(X/_3\right)(X)}{2}\left[\frac{2}{3}X\right] - \left(3-\frac{X}{3}\right)(X)\left(\frac{X}{2}\right) - \frac{\left(\frac{2X}{3}-\frac{2}{3}\right)(X-1)}{2}\left[\frac{2(X-1)}{3}\right]$$

$$-\left(\frac{20}{3}-\frac{2X}{3}\right)(X-1)\left(\frac{X-1}{2}\right) + \frac{385}{16}(X-2) - \left(\frac{(X-4)(X-4)}{2}\right)\left(\frac{X-4}{3}\right)$$

$$M_4 = \frac{X^3}{18} - \frac{3X^2}{2} - \frac{2}{9}X^3 + \frac{2}{3}X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{2}{9} + \frac{X^3}{3} - 4X^2 + 7X - \frac{10}{3} + \frac{385}{16}X - \frac{385}{8} - \frac{X^3}{6}$$
$$+2X^2 - 8X + \frac{32}{3}$$

$$M_4 = \frac{X^3}{6} - \frac{29}{6}X^2 + \frac{19}{3}X - \frac{28}{9} + \frac{385}{16}X - \frac{385}{8} - \frac{X^3}{6} + 2X^2 - 8X + \frac{32}{3}$$

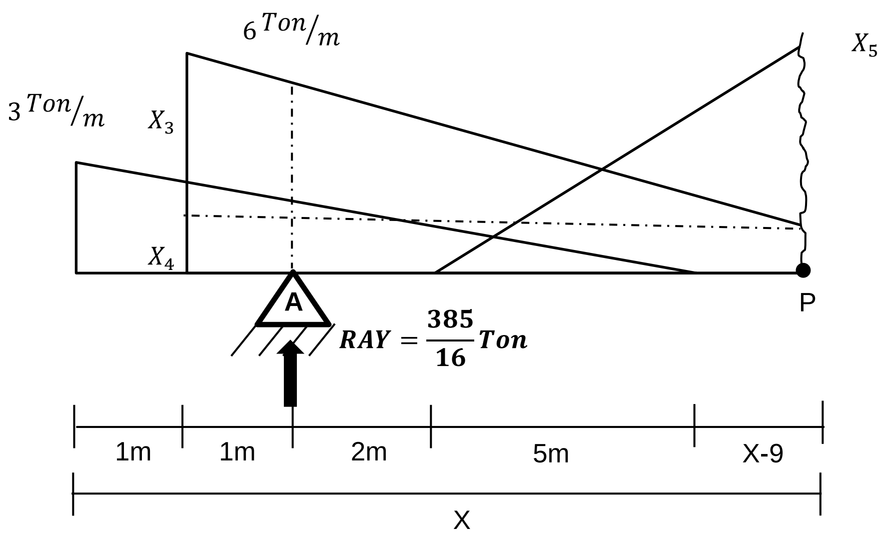
$$\boldsymbol{M_4} = -\frac{\boldsymbol{17X^2}}{\boldsymbol{6}} + \frac{\boldsymbol{1075}}{\boldsymbol{48}}\boldsymbol{X} - \frac{\boldsymbol{2921}}{\boldsymbol{72}}$$

$$\boldsymbol{V_4} = -\frac{\boldsymbol{17X}}{\boldsymbol{3}} + \frac{\boldsymbol{1075}}{\boldsymbol{48}}$$

Evaluando las ecuaciones de momento y comparándolas con las ecuaciones anteriores para verificar la continuidad

Valor de X	Valor del Momento 4	Valor del cortante 4
4	$\frac{265}{72}$	$-\frac{13}{48}$
9	$-\frac{9865}{144}$	$-\frac{1373}{48}$

Tramo 5 $\quad$ $\boldsymbol{9m \leq x \leq 10m}$



Tomando en cuenta que las alturas calculadas anteriormente podemos realizar sumatoria de momentos con respecto al punto P

$$X_3 = \left(\frac{2}{3}X - \frac{2}{3}\right)$$

$$X_4 = \left(\frac{20}{3} - \frac{2}{3}X\right)$$

$$X_5 = X - 4$$

$$M_5 = -\frac{(3)(9)}{2}[X-3] - \frac{\left(\frac{2X}{3}-\frac{2}{3}\right)(X-1)}{2}\left[\frac{2(X-1)}{3}\right] - \left(\frac{20}{3}-\frac{2X}{3}\right)(X-1)\left(\frac{X-1}{2}\right)$$
$$+\frac{385}{16}(X-2) - \left(\frac{(X-4)(X-4)}{2}\right)\left(\frac{X-4}{3}\right)$$

$$M_5 = -\frac{27}{2}X + \frac{81}{2} - \frac{2}{9}X^3 + \frac{2}{3}X^2 - \frac{2}{3}X + \frac{2}{9} + \frac{X^3}{3} - 4X^2 + 7X - \frac{10}{3} + \frac{385}{16}X$$

$$-\frac{385}{8} - \frac{X^3}{6} + 2X^2 - 8X + \frac{32}{3}$$

$$\boldsymbol{M_5 = -\frac{X^3}{18} - \frac{4}{3}X^2 + \frac{427}{48}X - \frac{5}{72}}$$

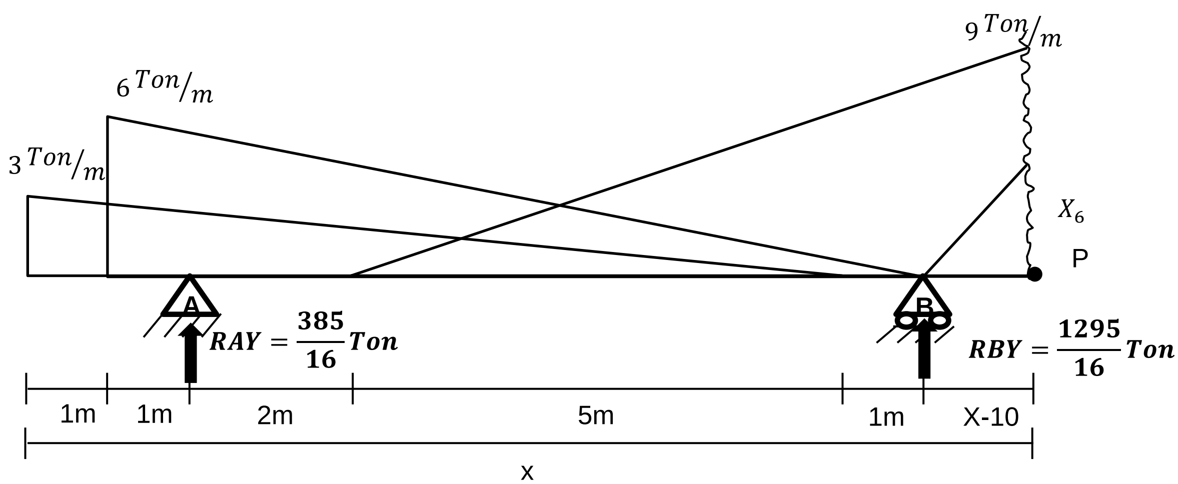
$$\boldsymbol{V_5 = -\frac{X^2}{6} - \frac{8}{3}X + \frac{427}{48}}$$

Evaluando las ecuaciones de momento y comparándolas con las ecuaciones anteriores para verificar la continuidad

Valor de X	Valor del Momento 5	Valor del cortante 5
9	$-\frac{9865}{144}$	$-\frac{1373}{48}$
10	-100	$-\frac{551}{16}$

Tramo 6

$$\boldsymbol{10m \leq x \leq 13m}$$



Para el cálculo de la altura X_6 efectuaremos una relación similar al cálculo de las alturas anteriores

Para X_6

Si a una longitud de 4m corresponde una altura de 12, a una longitud de (X-10) m corresponde una altura X_6

Y se realiza la siguiente la siguiente relación con el fin de calcular la altura de X_6

$$X_6 = \frac{(12''altura\ total'')(X-10)}{(4''\text{longitud total}'')} = \frac{(12X-120)}{4} = (\mathbf{3X-30})$$

Obtenida esta relación podemos realizar sumatoria de momentos en el punto P

$$M_6 = -\frac{(3)(9)}{2}[X-3] - \frac{(6)(9)}{2}[X-4] + \frac{385}{16}(X-2) - \left(\frac{(X-4)(X-4)}{2}\right)\left(\frac{X-4}{3}\right) + \frac{1295}{16}(X-10) - \frac{(3X-30)(X-10)}{2}\left[\frac{X-10}{3}\right]$$

$$M_6 = -\frac{27}{2}X + \frac{81}{2} - 27X + 108 + \frac{385}{16}X - \frac{385}{8} - \frac{X^3}{6} + 2X^2 - 8X + \frac{32}{3} + \frac{1295}{16}X - \frac{6475}{8} - \frac{X^3}{2} + 15X^2 - 150X + 500$$

$$\boldsymbol{M_6 = -\frac{2X^3}{3} + 17X^2 - \frac{187}{2}X - \frac{595}{3}}$$

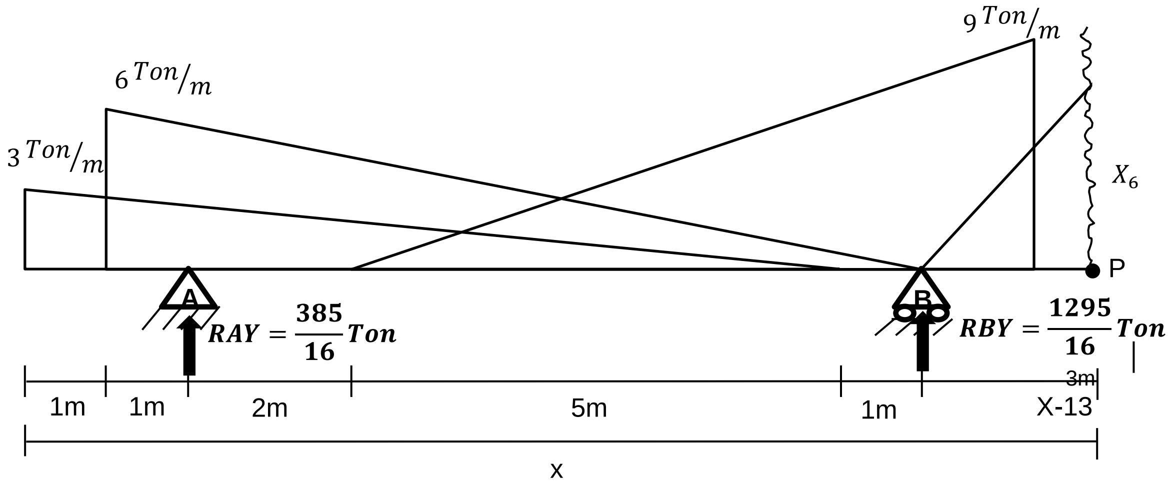
$$\boldsymbol{V_6 = -2X^2 + 34X - \frac{187}{2}}$$

Evaluando las ecuaciones de momento y comparándolas con las ecuaciones anteriores para verificar la continuidad

Valor de X	Valor del Momento 6	Valor del cortante 6
10	-100	$\frac{93}{2}$
13	$-\frac{11}{2}$	$\frac{21}{20}$

Tramo 7

$$\boldsymbol{13m \leq x \leq 14m}$$



Como X_6 ya fue calculada anteriormente podemos realizar la sumatoria de momentos con respecto al punto P sin ninguna complicación

$$M_7 = -\frac{(3)(9)}{2}[X-3] - \frac{(6)(9)}{2}[X-4] - \left(\frac{(9)(9)}{2}\right)(X-10) + \frac{385}{16}(X-2) + \frac{1295}{16}(X-10) - \frac{(3X-30)(X-10)}{2}\left[\frac{X-10}{3}\right]$$

$$M_7 = -\frac{27}{2}X + \frac{81}{2} - 27X + 108 - \frac{81}{2}X + 405 + \frac{385}{16}X - \frac{385}{8} + \frac{1295}{16}X - \frac{6475}{8} - \frac{X^3}{2} + 15X^2 - 150X + 196$$

$$\boldsymbol{M_7 = -\frac{X^3}{2} + 15X^2 - 126X + 196}$$

$$\boldsymbol{V_7 = -\frac{3}{2}X^2 + 30X - 126}$$

Evaluando las ecuaciones de momento y comparándolas con las ecuaciones anteriores para verificar la continuidad

Valor de X	Valor del Momento 7	Valor del cortante 7
13	-5.5	$\frac{21}{20}$
14	0	0

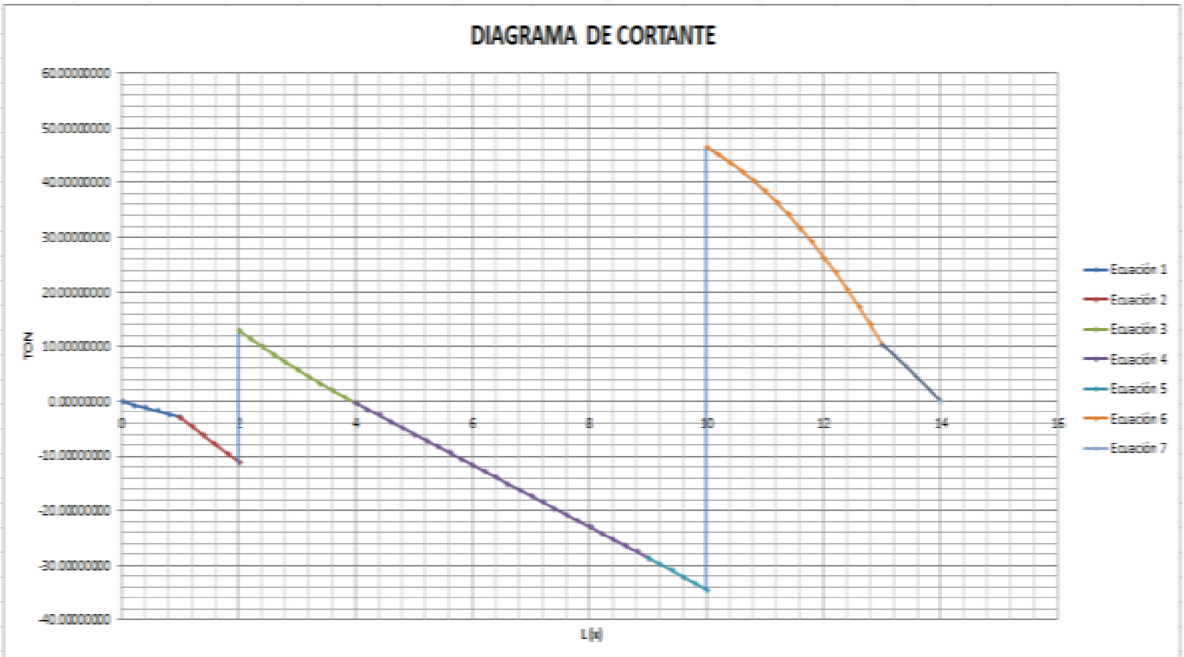
A continuación se obtendrán las gráficas de momento y cortante con las ecuaciones obtenidas evaluadas con respecto a su dominio.

Para el diagrama de cortante según las ecuaciones

Obtenemos la gráfica de cortante, en este ejemplo podemos observar su distribución según las ecuaciones encontradas para cada corte.

L(x)	$V_1=\frac{X^2}{6}-3X$	$V_2=\frac{X^2}{2}-\frac{29}{3}X+\frac{19}{3}$	$V_3=\frac{X^2}{2}-\frac{29}{3}X+\frac{1459}{48}$	$V_4==-\frac{17X}{3}+\frac{1075}{48}$	$V_5=-\frac{X^2}{6}-\frac{8}{3}X+\frac{427}{48}$	$V_6=-2X^2+34X-\frac{187}{2}$	$V_7=-\frac{3}{2}X^2+30X-126$
0	0.00000000						
0.2	-0.59333333						
0.4	-1.17333333						
0.6	-1.74000000						
0.8	-2.29333333						
1	-2.83333333	-2.83333333					
1.2		-4.54666667					
1.4		-6.22000000					
1.6		-7.85333333					
1.8		-9.44666667					
2		-11.00000000	13.06250000				
2.2			11.54916667				
2.4			10.07583333				
2.6			8.64250000				
2.8			7.24916667				
3			5.89583333				
3.2			4.58250000				
3.4			3.30916667				
3.6			2.07583333				
3.8			0.88250000				
4			-0.27083333	-0.27083333			
4.2				-1.40416667			
4.4				-2.53750000			
4.6				-3.67083333			
4.8				-4.80416667			
5				-5.93750000			
5.2				-7.07083333			
5.4				-8.20416667			
5.6				-9.33750000			
5.8				-10.47083333			
6				-11.60416667			

6.2				-12.73750000			
6.4				-13.87083333			
6.6				-15.00416667			
6.8				-16.13750000			
7				-17.27083333			
7.2				-18.40416667			
7.4				-19.53750000			
7.6				-20.67083333			
7.8				-21.80416667			
8				-22.93750000			
8.2				-24.07083333			
8.4				-25.20416667			
8.6				-26.33750000			
8.8				-27.47083333			
9				-28.60416667	-28.60416667		
9.2					-29.74416667		
9.4					-30.89750000		
9.6					-32.06416667		
9.8					-33.24416667		
10					-34.43750000	46.50000000	
10.2						45.22000000	
10.4						43.78000000	
10.6						42.18000000	
10.8						40.42000000	
11						38.50000000	
11.2						36.42000000	
11.4						34.18000000	
11.6						31.78000000	
11.8						29.22000000	
12						26.50000000	
12.2						23.62000000	
12.4						20.58000000	
12.6						17.38000000	
12.8						14.02000000	
13						10.50000000	10.50000000
13.2							8.64000000
13.4							6.66000000
13.6							4.56000000
13.8							2.34000000
14							0.00000000

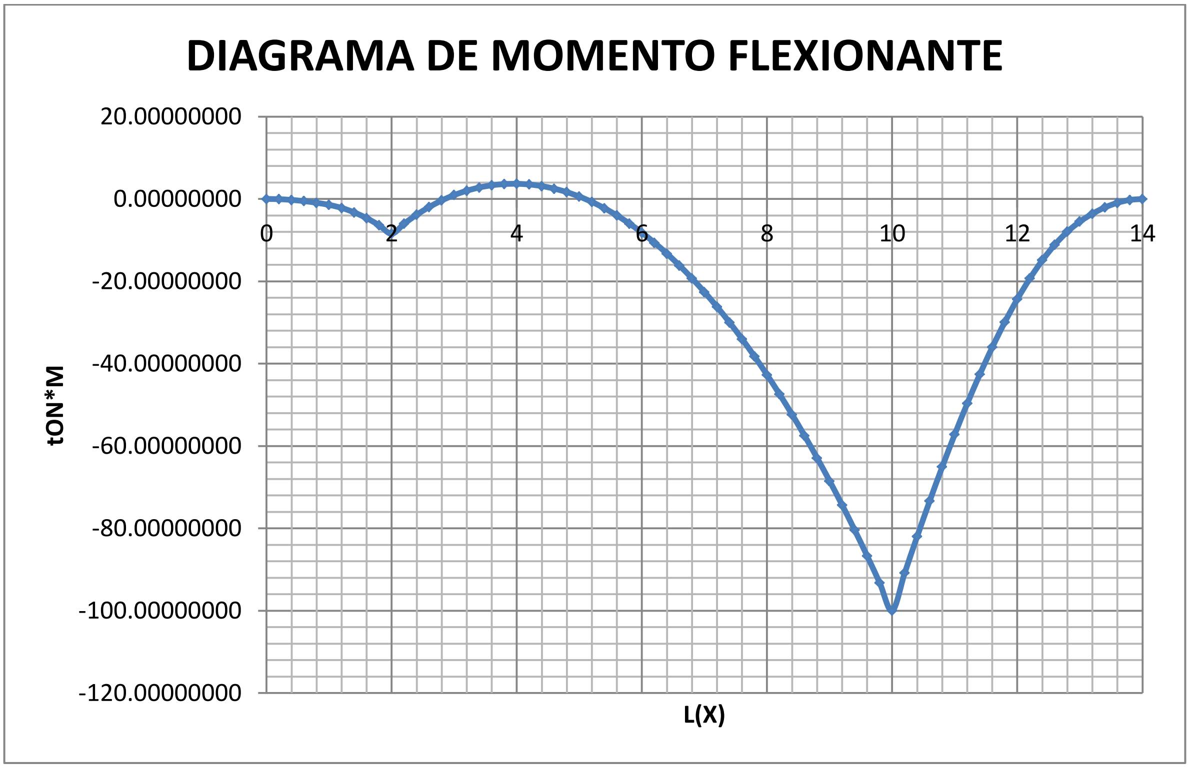


Para el diagrama de momento según las ecuaciones

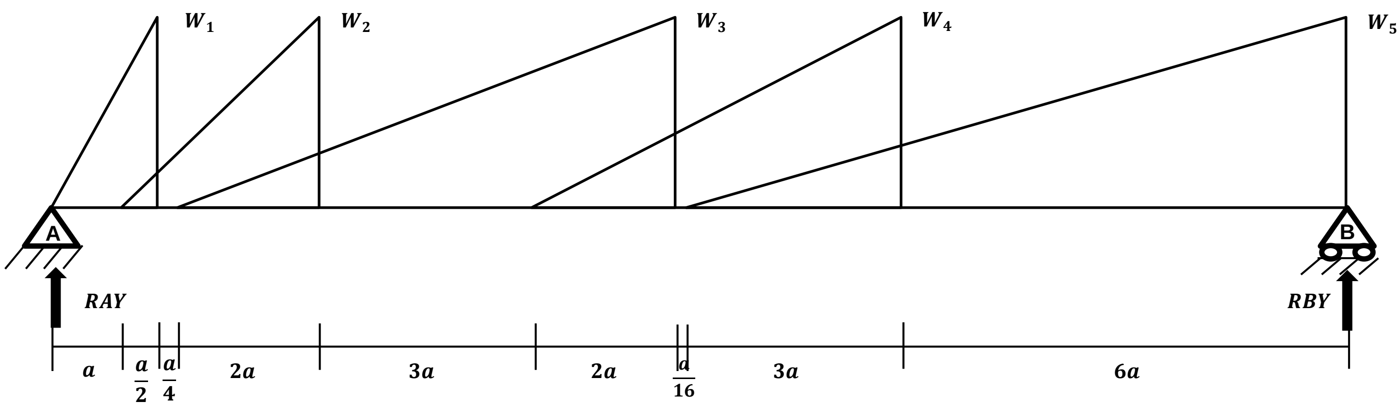
L(x)	(M)
0	0.00000000
0.2	-0.05955556
0.4	-0.23644444
0.6	-0.52800000
0.8	-0.93155556
1	-1.44444444
1.2	-2.18311111
1.4	-3.26044444
1.6	-4.66844444
1.8	-6.39911111
2	-8.44444444
2.2	-5.98394444
2.4	-3.82211111
2.6	-1.95094444
2.8	-0.36244444
3	0.95138889
3.2	1.99855556
3.4	2.78705556
3.6	3.32488889
3.8	3.62005556

4	3.68055556
4.2	3.51305556
4.4	3.11888889
4.6	2.49805556
4.8	1.65055556
5	0.57638889
5.2	-0.72444444
5.4	-2.25194444
5.6	-4.00611111
5.8	-5.98694444
6	-8.19444444
6.2	-10.62861111
6.4	-13.28944444
6.6	-16.17694444
6.8	-19.29111111
7	-22.63194444
7.2	-26.19944444
7.4	-29.99361111
7.6	-34.01444444
7.8	-38.26194444
8	-42.73611111
8.2	-47.43694444
8.4	-52.36444444
8.6	-57.51861111
8.8	-62.89944444
9	-68.50694444
9.2	-74.34155556
9.4	-80.40550000
9.6	-86.70144444
9.8	-93.23205556
10	-100.00000000
10.2	-90.82533333
10.4	-81.92266667
10.6	-73.32400000
10.8	-65.06133333
11	-57.16666667
11.2	-49.67200000
11.4	-42.60933333
11.6	-36.01066667
11.8	-29.90800000
12	-24.33333333

12.2	-19.31866667
12.4	-14.89600000
12.6	-11.09733333
12.8	-7.95466667
13	-5.50000000
13.2	-3.58400000
13.4	-2.05200000
13.6	-0.92800000
13.8	-0.23600000
14	0.00000000



7.- De la siguiente viga, determine las reacciones en los apoyos, así como las funciones que describen la variación del momento flexionante y fuerza cortante a lo largo del eje de la viga, dibuje los diagramas correspondientes.



Verificación del grado de indeterminación de la viga:

Recordando que el grado de indeterminación en términos vanos es la diferencia entre el número de incógnitas de nuestra estructura “I” y el número de ecuaciones de equilibrio estático asociadas a su plano “E”

$$\boldsymbol{I - E = 3 - 3 = 0}$$

Por lo tanto: nuestra estructura es estáticamente determinada y podemos dar solución a ella mediante las ecuaciones de equilibrio estático.

Para obtener RAY y RBY.

$$\sum M_A = 0$$

$$+\frac{(W_1)\left(\frac{3}{2}a\right)}{2}(a)+\frac{(W_2)\left(\frac{11}{4}a\right)}{2}\left(\frac{17}{6}a\right)+\frac{(W_3)(7a)}{2}\left(\frac{77}{12}a\right)+\frac{(W_4)\left(\frac{81}{16}a\right)}{2}\left(\frac{81}{8}a\right)$$
$$+\frac{(W_5)(9a)}{2}\left(\frac{237}{16}a\right)-\left(\frac{285}{16}a\right)RBY=0$$

$$\left(\frac{285}{16}a\right)RBY=\frac{3}{4}W_1a^2+\frac{187}{48}W_2a^2+\frac{539}{24}W_3a^2+\frac{6561}{256}W_4a^2+\frac{2133}{32}W_5a^2$$

$$\boldsymbol{RBY = \frac{4}{95}W_1a + \frac{187}{855}W_2a + \frac{1078}{855}W_3a + \frac{2187}{1520}W_4a + \frac{711}{190}W_5a}$$

$$\sum F_Y$$

$$RAY - \frac{(W_1)\left(\frac{3}{2}a\right)}{2} - \frac{(W_2)\left(\frac{11}{4}a\right)}{2} - \frac{(W_3)(7a)}{2} - \frac{(W_4)\left(\frac{81}{16}a\right)}{2} - \frac{(W_5)(9a)}{2} + RBY = 0$$

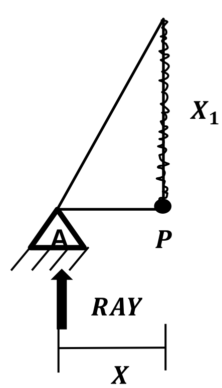
$$RAY = \frac{3}{4}W_1a + \frac{11}{8}W_2a + \frac{7}{2}W_3a + \frac{81}{32}W_4a + \frac{9}{2}W_5a - \frac{4}{95}W_1a - \frac{187}{855}W_2a - \frac{1078}{855}W_3a - \frac{2187}{1520}W_4a - \frac{711}{190}W_5a$$

$$RAY = \boldsymbol{\frac{269}{380}W_1a + 1.15628655W_2a + \frac{3829}{1710}W_3a + \frac{3321}{3040}W_4a + \frac{72}{95}W_5a}$$

Obtenidas las reacciones de los apoyos, encontraremos las ecuaciones de momento flexionante y fuerza cortante empleando el mismo procedimiento utilizado en los ejemplos anteriores

Tramo 1

$$\boldsymbol{0 \leq x \leq a}$$



Para calcular X_1efectuaremos la siguiente relación:

Si a una longitud de $\frac{3}{2}a$ corresponde una altura de W_1 a una longitud de X corresponde una altura X_1

$$X_1 = \frac{w_1 x}{\left(\frac{3}{2}a\right)} = \frac{2w_1 x}{3a}$$

$$\sum M_P$$

$$M_1 = (RAY)X - \frac{\left(\frac{2w_1 x}{3a}\right)(x)}{2}\left[\frac{x}{3}\right]$$

$$\boldsymbol{M_1 = -\frac{w_1 x^3}{9a} + \frac{269}{380}W_1 ax + 1.15628655 W_2 ax + \frac{3829}{1710}W_3 ax + \frac{3321}{3040}W_4 ax + \frac{72}{95}W_5 ax}$$

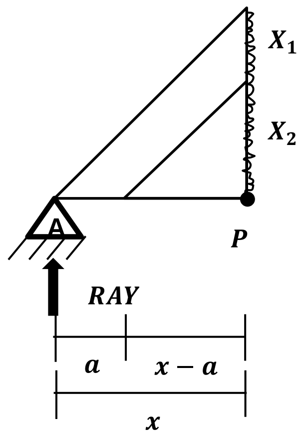
$$\boldsymbol{V_1 = -\frac{w_1 x^2}{3a} + \frac{269}{380}W_1 a + 1.15628655 W_2 a + \frac{3829}{1710}W_3 a + \frac{3321}{3040}W_4 a + \frac{72}{95}W_5 a}$$

Para comprobar la continuidad de las ecuaciones de momento y cortante, es necesario evaluar los extremos de su dominio y verificar su continuidad como se ha hecho en los ejemplos anteriores, para facilitar lo dicho sabemos que “w” y “a” son constantes, por lo que solo evaluaremos la variable “x” para cada ecuación, sabiendo esto:

Valor de X	Valor del Momento 1	Valor del cortante 1
0	0	5.953691521
a	5.84258041	5.620358188

Tramo 2

$$\boldsymbol{a \leq x \leq \frac{3a}{2}}$$



Como sabemos que

$$X_1 = \frac{2w_1x}{3a}$$

Calcularemos el valor de X_2 efectuando una relación similar que a continuación se describe

Si a una longitud de $\frac{11}{4}a$ corresponde una altura de w_2a una longitud de (x-a) corresponde una altura X_2

$$X_2 = \frac{(w_2)(x-a)}{\frac{11}{4}a} = \frac{4w_2x - 4w_2a}{11a} = \boldsymbol{\frac{4w_2x}{11a} - \frac{4w_2}{11}}$$

$$\sum M_P$$

$$M_2 = (RAY)X - \frac{(x)\left(\frac{2w_1x}{3a}\right)}{2}[x-a] - \frac{\left(\frac{4w_2x}{11a} - \frac{4w_2}{11}\right)(x-a)}{2}\left[\frac{x-a}{3}\right]$$

$$M_2 = -\frac{w_1x^3}{9a} + \frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax - \frac{1}{6}(x^2 - 2ax + a^2)\left(\frac{4w_2x}{11a} - \frac{4w_2}{11}\right)$$

$$M_2 = -\frac{w_1x^3}{9a} + \frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{4w_2x^3}{11a} - \frac{4w_2x^2}{11} - \frac{8w_2x^2}{11} + \frac{8w_2ax}{11} + \frac{4w_2ax}{11} - \frac{4w_2a^2}{11}\right)$$

$$M_2 = -\frac{w_1x^3}{9a} + \frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax$$

$$-\frac{2w_2x^3}{33a} + \frac{2w_2x^2}{11} - \frac{2w_2ax}{11} + \frac{2w_2a^2}{33}$$

$$M_2 = -\frac{w_1x^3}{9a} - \frac{2w_2x^3}{33a} + \frac{2w_2x^2}{11} + \frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax - \frac{2w_2ax}{11}$$
$$+\frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax + \frac{2w_2a^2}{33}$$

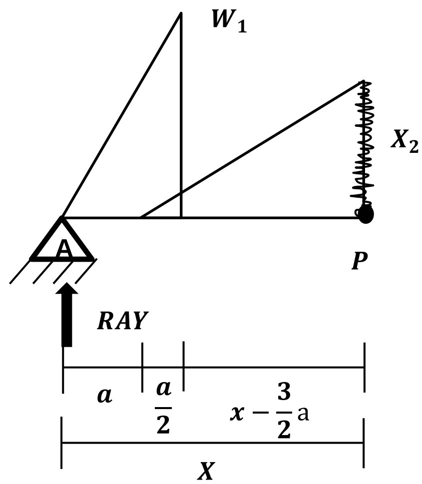
$$\boldsymbol{M_2 = -\frac{w_1x^3}{9a} - \frac{2w_2x^3}{33a} + \frac{2w_2x^2}{11} + \frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax - \frac{2w_2ax}{11}}$$
$$\boldsymbol{+\frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax + \frac{2w_2a^2}{33}}$$

$$\boldsymbol{V_2 == -\frac{w_1x^2}{3a} - \frac{2w_2x^2}{11a} + \frac{4w_2x}{11} + \frac{269}{380}W_1a + 1.15628655W_2a - \frac{2w_2a}{11}}$$
$$\boldsymbol{+\frac{3829}{1710}W_3a + \frac{3321}{3040}W_4a + \frac{72}{95}W_5a}$$

Valor de X	Valor del Momento 2	Valor del cortante 2
a	5.84258041	5.620358188
$\frac{3a}{2}$	8.547961524	5.158236975

Tramo 3

$$\frac{\mathbf{3a}}{\mathbf{2}} \leq \boldsymbol{x} \leq \frac{\mathbf{7a}}{\mathbf{4}}$$



Como sabemos:

$$\boldsymbol{X_2} = \frac{\mathbf{4}\boldsymbol{w_2 x}}{\mathbf{11}\boldsymbol{a}} - \frac{\mathbf{4}\boldsymbol{w_2}}{\mathbf{11}}$$

$\sum M_P$

$$M_3 = RAY(x) - \frac{(w_1)\left(\frac{3a}{2}\right)}{2}[x-a] - \frac{\left(\frac{4w_2x}{11a} - \frac{4w_2}{11}\right)(x-a)}{2}\left[\frac{x-a}{3}\right]$$

$$M_3 = +\frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax$$
$$-\frac{3}{4}w_1ax + \frac{3}{4}w_1a^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{4w_2x^3}{11a} - \frac{4w_2x^2}{11} - \frac{8w_2x^2}{11} + \frac{8w_2ax}{11} + \frac{4w_2ax}{11} - \frac{4w_2a^2}{11}\right)$$

$$M_3 = +\frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax$$
$$-\frac{3}{4}w_1ax + \frac{3}{4}w_1a^2 - \frac{2w_2x^3}{33a} + \frac{2w_2x^2}{11} - \frac{2w_2ax}{11} + \frac{2w_2a^2}{33}$$

$$M_3=-\frac{2w_2x^3}{33a}+\frac{2w_2x^2}{11}+\frac{269}{380}W_1ax-\frac{3}{4}w_1ax+1.15628655W_2ax-\frac{2w_2ax}{11}+\frac{3829}{1710}W_3ax+\frac{3321}{3040}W_4ax+\frac{72}{95}W_5ax+\frac{3}{4}w_1a^2+\frac{2w_2a^2}{33}$$

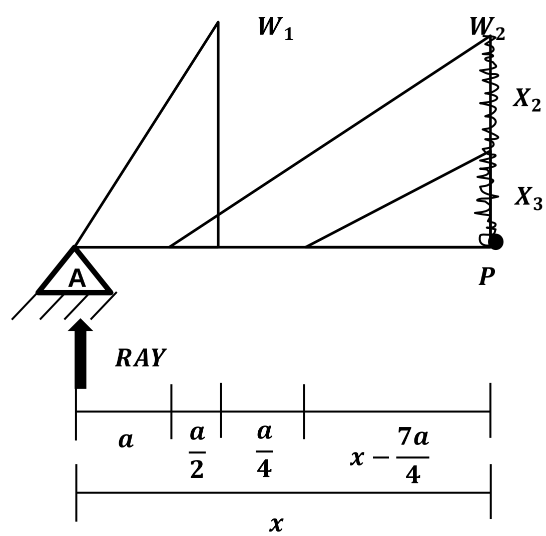
$$V_3=-\frac{2w_2x^2}{11a}+\frac{4w_2x}{11}+\frac{269}{380}W_1a-\frac{3}{4}w_1a+1.15628655W_2a-\frac{2w_2a}{11}+\frac{3829}{1710}W_3a+\frac{3321}{3040}W_4a+\frac{72}{95}W_5a$$

Para verificar la continuidad con las ecuaciones anteriores:

Valor de X	Valor del Momento 3	Valor del cortante 3
$\frac{3a}{2}$	8.547961524	5.158236975
$\frac{7a}{4}$	9.83089198	5.101418794

Tramo 4

$$\frac{7a}{4}\le x\le\frac{15a}{4}$$



Como:

$$X_2=\frac{4w_2x}{11a}-\frac{4w_2}{11}$$

Para el cálculo de X_3 es necesario efectuar la siguiente relación:

SI a una longitud de 7a corresponde una altura de w_3 a una longitud de $x - {}^{7a}/_{4}$ corresponde una altura de X_3

$$X_3 = \frac{\left(x - \frac{7}{4}a\right)(w_3)}{7a} = \frac{w_3 x - \frac{7w_3 a}{4}}{7a} = \boldsymbol{\frac{w_3 x}{7a} - \frac{w_3}{4}}$$

$$\sum M_P$$

$$M_4 = RAY(x) - \frac{(w_1)\left(\frac{3a}{2}\right)}{2}[x-a] - \frac{\left(\frac{4w_2 x}{11a} - \frac{4w_2}{11}\right)(x-a)}{2}\left[\frac{x-a}{3}\right] - \frac{\left(\frac{w_3 x}{7a} - \frac{w_3}{4}\right)\left(x - \frac{7a}{4}\right)}{2}\left[\frac{x - \frac{7a}{4}}{3}\right]$$

$$M_4 = -\frac{2w_2x^3}{33a} + \frac{2w_2x^2}{11} + \frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax - \frac{2w_2ax}{11} + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax - \frac{3}{4}w_1ax + \frac{3}{4}w_1a^2 + \frac{2w_2a^2}{33} - \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{7}{2}ax + \frac{49}{16}a^2\right)\left(\frac{w_3x}{7a} - \frac{w_3}{4}\right)$$

$$M_4 = -\frac{2w_2x^3}{33a} + \frac{2w_2x^2}{11} + \frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax - \frac{2w_2ax}{11} + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax - \frac{3}{4}w_1ax + \frac{3}{4}w_1a^2 + \frac{2w_2a^2}{33} - \frac{1}{6}\left(\frac{w_3x^3}{7a} - \frac{w_3x^2}{4} - \frac{w_3x^2}{2} + \frac{7w_3ax}{8} + \frac{7w_3ax}{16} - \frac{49w_3a^2}{64}\right)$$

$$M_4 = -\frac{2w_2x^3}{33a} + \frac{2w_2x^2}{11} + \frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax - \frac{2w_2ax}{11} + \frac{3829}{1710}W_3ax$$

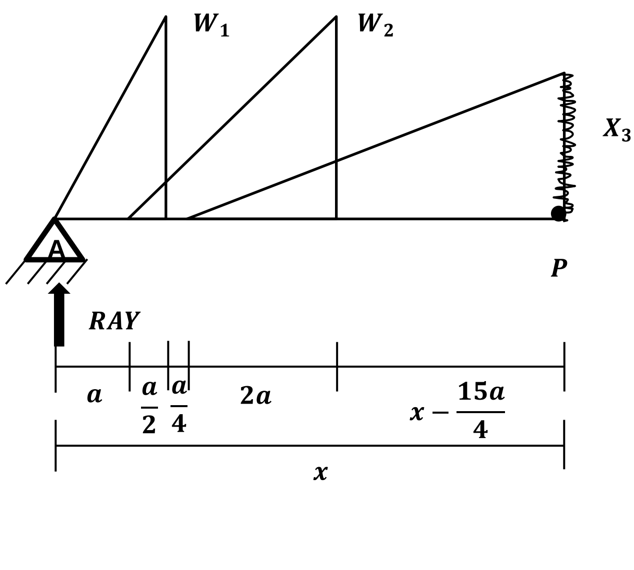
$$+\frac{3321}{3040}W_4ax+\frac{72}{95}W_5ax-\frac{3}{4}w_1ax+\frac{3}{4}w_1a^2+\frac{2w_2a^2}{33}-\frac{w_3x^3}{42a}+\frac{w_3x^2}{8}-\frac{7w_3ax}{32}+\frac{49w_3a^2}{384}$$

$$\boldsymbol{M_4=-\frac{2w_2x^3}{33a}-\frac{w_3x^3}{42a}+\frac{2w_2x^2}{11}+\frac{w_3x^2}{8}+\frac{269}{380}W_1ax-\frac{3}{4}w_1ax+1.15628655W_2ax-\frac{2w_2ax}{11}+\frac{3829}{1710}W_3ax-\frac{7w_3ax}{32}+\frac{3321}{3040}W_4ax+\frac{72}{95}W_5ax+\frac{3}{4}w_1a^2+\frac{2w_2a^2}{33}+\frac{49w_3a^2}{384}}$$

$$\boldsymbol{V_4=-\frac{2w_2x^2}{11a}-\frac{w_3x^2}{14a}+\frac{4w_2x}{11}+\frac{w_3x}{4}+\frac{269}{380}W_1a-\frac{3}{4}w_1a+1.15628655W_2a-\frac{2w_2a}{11}+\frac{3829}{1710}W_3a-\frac{7w_3a}{32}+\frac{3321}{3040}W_4a+\frac{72}{95}W_5a}$$

Valor de X	Valor del Momento 4	Valor del cortante 4
$\frac{7a}{4}$	9.83089198	5.101418794
$\frac{15a}{4}$	18.81295035	3.542977235

Tramo 5 $\boldsymbol{\frac{15a}{4}\le x\le\frac{27a}{4}}$



Como:

$$X_3=\boldsymbol{\frac{w_3x}{7a}-\frac{w_3}{4}}$$

$$\sum M_P$$

$$M_5 = RAY(x) - \frac{(w_1)\left(\frac{3a}{2}\right)}{2}[x-a] - \frac{(w_2)\left(\frac{11a}{4}\right)}{2}\left[x - \frac{17a}{6}\right] - \frac{\left(\frac{w_3 x}{7a} - \frac{w_3}{4}\right)\left(x - \frac{7a}{4}\right)}{2}\left[\frac{x - \frac{7a}{4}}{3}\right]$$

$$M_5 = +\frac{269}{380}W_1 ax + 1.15628655 W_2 ax + \frac{3829}{1710}W_3 ax + \frac{3321}{3040}W_4 ax + \frac{72}{95}W_5 ax - \frac{3}{4}w_1 ax + \frac{3}{4}w_1 a^2 - \frac{11}{8}w_2 ax + \frac{187}{48}w_2 a^2 - \frac{w_3 x^3}{42a} + \frac{w_3 x^2}{8} - \frac{7w_3 ax}{32} + \frac{49 w_3 a^2}{384}$$

$$\boldsymbol{M_5 = -\frac{w_3 x^3}{42a} + \frac{w_3 x^2}{8} + \frac{269}{380}W_1 ax - \frac{3}{4}w_1 ax + 1.15628655 W_2 ax - \frac{11}{8}w_2 ax + \frac{3829}{1710}W_3 ax - \frac{7w_3 ax}{32} + \frac{3321}{3040}W_4 ax + \frac{72}{95}W_5 ax + \frac{3}{4}w_1 a^2 + \frac{187}{48}w_2 a^2 + \frac{49 w_3 a^2}{384}}$$

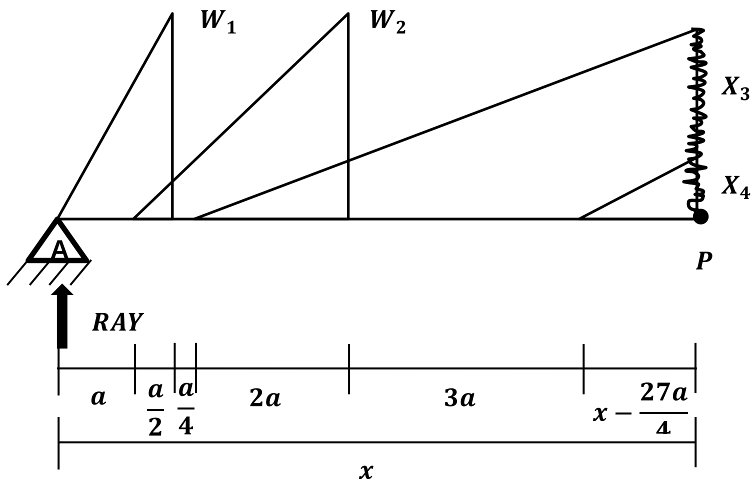
$$\boldsymbol{V_5 = -\frac{w_3 x^2}{14a} + \frac{w_3 x}{4} + \frac{269}{380}W_1 ax - \frac{3}{4}w_1 a + 1.15628655 W_2 a - \frac{11}{8}w_2 a + \frac{3829}{1710}W_3 a - \frac{7w_3 a}{32} + \frac{3321}{3040}W_4 a + \frac{72}{95}W_5 a}$$

Verificando la continuidad con las ecuaciones de momento y cortante anteriores.

Valor de X	**Valor del Momento 5**	**Valor del cortante 5**
$\frac{15a}{4}$	18.81295035	3.542977235
$\frac{27a}{4}$	27.51331062	2.042977235

Tramo 6

$$\frac{\mathbf{27}\boldsymbol{a}}{\mathbf{4}} \leq \boldsymbol{x} \leq \frac{\mathbf{35}\boldsymbol{a}}{\mathbf{4}}$$



$$\boldsymbol{X_3} = \frac{\boldsymbol{w_3 x}}{\mathbf{7}\boldsymbol{a}} - \frac{\boldsymbol{w_3}}{\mathbf{4}}$$

Habrá que realizar la siguiente relación para conocer el valor de X_4

Si a una longitud de $\frac{81a}{16}$ corresponde una altura de w_4 a una longitud de $x - \frac{27a}{4}$ corresponde una altura de X_4

$$X_4 = \frac{\left(x - \frac{27a}{4}\right)(w_4)}{\frac{81a}{16}} = \frac{w_4 x - \frac{27aw_4}{4}}{\frac{81a}{16}} = \frac{\mathbf{16}\boldsymbol{w_4 x}}{\mathbf{81}\boldsymbol{a}} - \frac{\mathbf{4}\boldsymbol{w_4}}{\mathbf{3}}$$

$$\sum M_P$$

$$M_6 = RAY(x) - \frac{(w_1)\left(\frac{3a}{2}\right)}{2}[x-a] - \frac{(w_2)\left(\frac{11a}{4}\right)}{2}\left[x - \frac{17a}{6}\right] - \frac{\left(\frac{w_3 x}{7a} - \frac{w_3}{4}\right)\left(x - \frac{7a}{4}\right)}{2}\left[\frac{x - \frac{7a}{4}}{3}\right] - \frac{\left(\frac{16w_4 x}{81a} - \frac{4w_4}{3}\right)\left(x - \frac{27a}{4}\right)}{2}\left[\frac{x - \frac{27a}{4}}{3}\right]$$

$$M_6 = +\frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax$$
$$-\frac{3}{4}w_1ax + \frac{3}{4}w_1a^2 - \frac{11}{8}w_2ax + \frac{187}{48}w_2a^2 - \frac{w_3x^3}{42a} + \frac{w_3x^2}{8} - \frac{7w_3ax}{32} + \frac{49w_3a^2}{384}$$
$$-\frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{27ax}{2} + \frac{729a^2}{16}\right)\left(\frac{16w_4x}{81a} - \frac{4w_4}{3}\right)$$

$$M_6 = +\frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax$$
$$-\frac{3}{4}w_1ax + \frac{3}{4}w_1a^2 - \frac{11}{8}w_2ax + \frac{187}{48}w_2a^2 - \frac{w_3x^3}{42a} + \frac{w_3x^2}{8} - \frac{7w_3ax}{32} + \frac{49w_3a^2}{384}$$
$$-\frac{1}{6}\left(\frac{16w_4x^3}{81a} - \frac{4w_4x^2}{3} - \frac{8w_4x^2}{3} + 18w_4ax + 9w_4ax - \frac{243w_4a^2}{4}\right)$$

$$M_6 = +\frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax$$
$$-\frac{3}{4}w_1ax + \frac{3}{4}w_1a^2 - \frac{11}{8}w_2ax + \frac{187}{48}w_2a^2 - \frac{w_3x^3}{42a} + \frac{w_3x^2}{8} - \frac{7w_3ax}{32} + \frac{49w_3a^2}{384}$$
$$-\frac{8w_4x^3}{243} + \frac{2w_4x^2}{3} - \frac{9w_4ax}{2} + \frac{81w_4a^2}{8} - \frac{11}{8}w_2ax + \frac{187}{48}w_2a^2 - \frac{w_3x^3}{42a} + \frac{w_3x^2}{8} - \frac{7w_3ax}{32}$$
$$+\frac{49w_3a^2}{384} - \frac{8w_4x^3}{243} + \frac{2w_4x^2}{3} - \frac{9w_4ax}{2} + \frac{81w_4a^2}{8}$$

$$\boldsymbol{M_6 = -\frac{w_3x^3}{42a} - \frac{8w_4x^3}{243} + \frac{w_3x^2}{8} + \frac{2w_4x^2}{3} + \frac{269}{380}W_1ax - \frac{3}{4}w_1ax}$$
$$\boldsymbol{+1.15628655W_2ax - \frac{11}{8}w_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax - \frac{7w_3ax}{32} + \frac{3321}{3040}W_4ax - \frac{9w_4ax}{2}}$$
$$\boldsymbol{+\frac{72}{95}W_5ax + \frac{3}{4}w_1a^2 + \frac{187}{48}w_2a^2 + \frac{49w_3a^2}{384} + \frac{81w_4a^2}{8}}$$

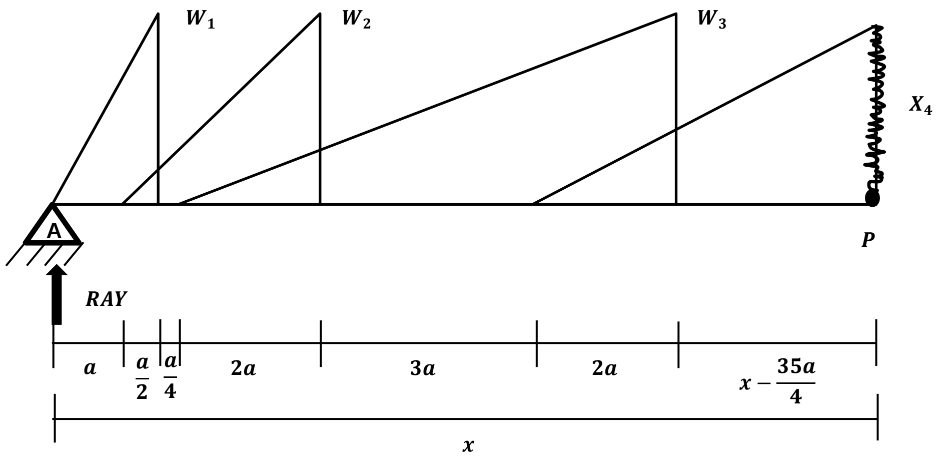
$$\boldsymbol{V_6 = -\frac{w_3x^2}{14a} - \frac{8w_4x^2}{81} + \frac{w_3x}{4} + \frac{4w_4x}{3} + \frac{269}{380}W_1a - \frac{3}{4}w_1a + 1.15628655W_2a}$$
$$\boldsymbol{-\frac{11}{8}w_2a + \frac{3829}{1710}W_3a - \frac{7w_3a}{32} + \frac{3321}{3040}W_4a - \frac{9w_4a}{2} + \frac{72}{95}W_5a}$$

Verificando la continuidad con las ecuaciones de momento y cortante anteriores.

Valor de X	Valor del Momento 6	Valor del cortante 6
$\frac{27a}{4}$	27.51331062	2.042977235
$\frac{35a}{4}$	29.71684299	-0.0663702074

Tramo 7

$$\frac{35a}{4} \leq x \leq \frac{141a}{16}$$



Como:

$$X_4 = \frac{16w_4x}{81a} - \frac{4w_4}{3}$$

$$\sum M_P$$

$$M_7 = RAY(x) - \frac{(w_1)\left(\frac{3a}{2}\right)}{2}[x-a] - \frac{(w_2)\left(\frac{11a}{4}\right)}{2}\left[x-\frac{17a}{6}\right]$$

$$-\frac{(w_3)(7a)}{2}\left[x-\frac{77a}{12}\right] - \frac{\left(\frac{16w_4x}{81a}-\frac{4w_4}{3}\right)\left(x-\frac{27a}{4}\right)}{2}\left[\frac{x-\frac{27a}{4}}{3}\right]$$

$$M_7 = +\frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax - \frac{3}{4}w_1ax + \frac{3}{4}w_1a^2 - \frac{11}{8}w_2ax + \frac{187}{48}w_2a^2 - \frac{7w_3ax}{2} + \frac{539w_3a^2}{24} - \frac{8w_4x^3}{243} + \frac{2w_4x^2}{3} - \frac{9w_4ax}{2} + \frac{81w_4a^2}{8}$$

$$\boldsymbol{M_7 = -\frac{8w_4x^3}{243} + \frac{2w_4x^2}{3} + \frac{269}{380}W_1ax - \frac{3}{4}w_1ax + 1.15628655W_2ax - \frac{11}{8}w_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax - \frac{7w_3ax}{2} + \frac{3321}{3040}W_4ax - \frac{9w_4ax}{2} + \frac{72}{95}W_5ax + \frac{3}{4}w_1a^2 + \frac{187}{48}w_2a^2 + \frac{539w_3a^2}{24} + \frac{81w_4a^2}{8}}$$

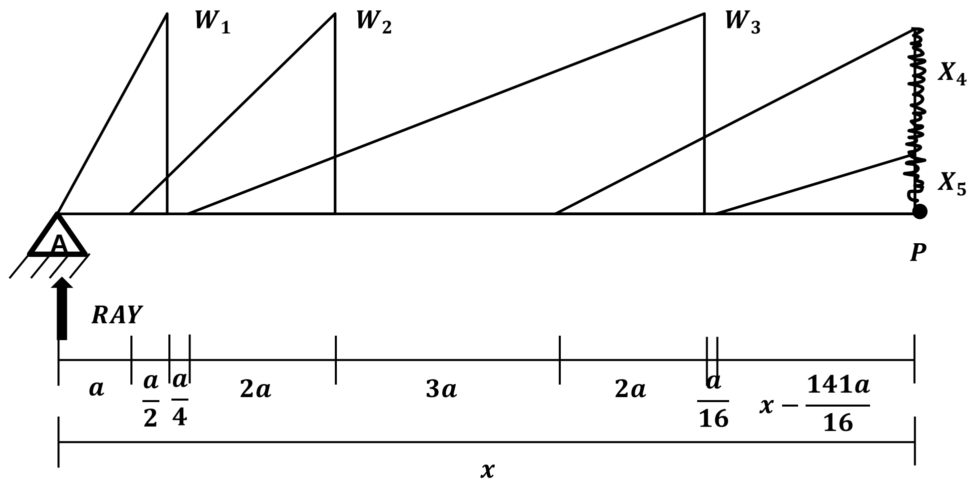
$$\boldsymbol{V_7 = -\frac{8w_4x^2}{81} + \frac{4w_4x}{3} + \frac{269}{380}W_1a - \frac{3}{4}w_1a + 1.15628655W_2a - \frac{11}{8}w_2a + \frac{3829}{1710}W_3a - \frac{7w_3a}{2} + \frac{3321}{3040}W_4a - \frac{9w_4a}{2} + \frac{72}{95}W_5a}$$

Verificando la continuidad con las ecuaciones de momento y cortante anteriores.

Valor de X	**Valor del Momento 7**	**Valor del cortante 7**
$\frac{35a}{4}$	29.71684299	−0.0663702074
$\frac{141a}{16}$	29.71191521	−0.09144736789

Tramo 8

$$\frac{\mathbf{141}\boldsymbol{a}}{\mathbf{16}} \leq \boldsymbol{x} \leq \frac{\mathbf{189}\boldsymbol{a}}{\mathbf{16}}$$



Para el cálculo de X_5 se efectuara la siguiente relación, entendiendo que anteriormente ya calculamos el valor de X_4

SI a una longitud de $9a$ corresponde una altura de w_5 a una longitud de $\left(x-\frac{141a}{16}\right)$ corresponde una altura X_5

$$X_5 = \frac{\left(x-\frac{141a}{16}\right)(w_5)}{9a} = \frac{w_5x-\frac{141aw_5}{16}}{9a} = \frac{\boldsymbol{w_5x}}{\mathbf{9}\boldsymbol{a}} - \frac{\mathbf{47}\boldsymbol{w_5}}{\mathbf{48}}$$

$$\sum M_P$$

$$M_8 = RAY(x) - \frac{(w_1)\left(\frac{3a}{2}\right)}{2}[x-a] - \frac{(w_2)\left(\frac{11a}{4}\right)}{2}\left[x-\frac{17a}{6}\right] - \frac{(w_3)(7a)}{2}\left[x-\frac{77a}{12}\right]$$

$$-\frac{\left(\frac{16w_4x}{81a}-\frac{4w_4}{3}\right)\left(x-\frac{27a}{4}\right)}{2}\left[\frac{x-\frac{27a}{4}}{3}\right] - \frac{\left(\frac{w_5x}{9a}-\frac{47w_5}{48}\right)\left(x-\frac{141a}{16}\right)}{2}\left[\frac{x-\frac{141a}{16}}{3}\right]$$

$$M_8 = +\frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax - \frac{3}{4}w_1ax + \frac{3}{4}w_1a^2 - \frac{11}{8}w_2ax + \frac{187}{48}w_2a^2 - \frac{7w_3ax}{2} + \frac{539w_3a^2}{24} - \frac{8w_4x^3}{243} + \frac{2w_4x^2}{3} - \frac{9w_4ax}{2} + \frac{81w_4a^2}{8} - \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{141ax}{8} + \frac{19881a^2}{256}\right)\left(\frac{w_5x}{9a} - \frac{47w_5}{48}\right)$$

$$M_8 = +\frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax - \frac{3}{4}w_1ax + \frac{3}{4}w_1a^2 - \frac{11}{8}w_2ax + \frac{187}{48}w_2a^2 - \frac{7w_3ax}{2} + \frac{539w_3a^2}{24} - \frac{8w_4x^3}{243} + \frac{2w_4x^2}{3} - \frac{9w_4ax}{2} + \frac{81w_4a^2}{8} - \frac{1}{6}\left(\frac{w_5x^3}{9a} - \frac{47w_5x^2}{48} - \frac{47w_5x^2}{24} + \frac{2209w_5ax}{128} + \frac{2209w_5ax}{256} - 76.04223633w_5a^2\right)$$

$$M_8 = +\frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax - \frac{3}{4}w_1ax + \frac{3}{4}w_1a^2 - \frac{11}{8}w_2ax + \frac{187}{48}w_2a^2 - \frac{7w_3ax}{2} + \frac{539w_3a^2}{24} - \frac{8w_4x^3}{243} + \frac{2w_4x^2}{3} - \frac{9w_4ax}{2} + \frac{81w_4a^2}{8} - \frac{w_5x^3}{54a} + \frac{47w_5x^2}{96} - \frac{2209w_5ax}{256} + 12.67370606w_5a^2$$

$$\boldsymbol{M_8 = -\frac{8w_4x^3}{243} - \frac{w_5x^3}{54a} + \frac{2w_4x^2}{3} + \frac{47w_5x^2}{96} + \frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax - \frac{11}{8}w_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax - \frac{7w_3ax}{2} + \frac{3321}{3040}W_4ax - \frac{9w_4ax}{2} + \frac{72}{95}W_5ax - \frac{2209w_5ax}{512} - \frac{3}{4}w_1ax + \frac{3}{4}w_1a^2 + \frac{187}{48}w_2a^2 + \frac{539w_3a^2}{24} + \frac{81w_4a^2}{8} + 12.67370606w_5a^2}$$

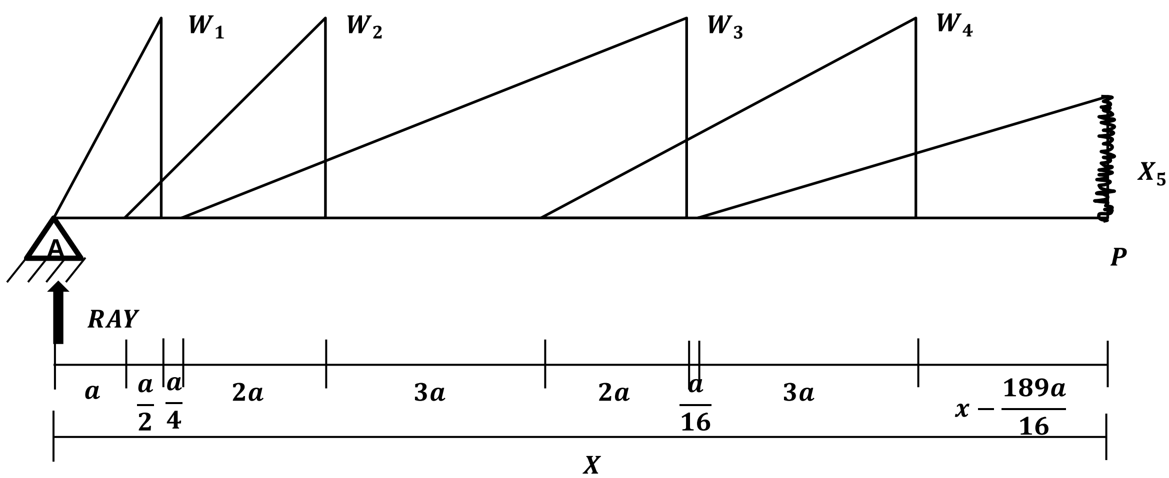
$$V_8 = -\frac{8w_4x^2}{81} - \frac{w_5x^2}{18a} + \frac{4w_4x}{3} + \frac{47w_5x}{48} + \frac{269}{380}W_1a + 1.15628655W_2a - \frac{11}{8}w_2a + \frac{3829}{1710}W_3a - \frac{7w_3a}{2} + \frac{3321}{3040}W_4a - \frac{9w_4ax}{2} + \frac{72}{95}W_5a - \frac{2209w_5a}{512} - \frac{3}{4}w_1a$$

Verificando la continuidad con las ecuaciones de momento y cortante anteriores.

Valor de X	Valor del Momento 8	Valor del cortante 8
$\frac{141a}{16}$	29.71191521	-0.09144736789
$\frac{189a}{16}$	26.21535089	-2.7002558479

Tramo 9

$$\frac{189a}{16} \leq x \leq \frac{285a}{16}$$



Como anteriormente ya fue calculado el valor de x_5 podemos realizar sumatoria de momentos con respecto al punto P sin mayor dificultad. Luego verificaremos la continuidad en nuestras ecuaciones de momento y cortante con las ecuaciones obtenidas en el tramo anterior como se muestra a continuación.

$$X_5 = \frac{w_5x}{9a} - \frac{47w_5}{48}$$

$$\sum M_P$$

$$M_9 = RAY(x) - \frac{(w_1)\left(\frac{3a}{2}\right)}{2}[x-a] - \frac{(w_2)\left(\frac{11a}{4}\right)}{2}\left[x-\frac{17a}{6}\right] - \frac{(w_3)(7a)}{2}\left[x-\frac{77a}{12}\right]$$
$$-\frac{(w_4)\left(\frac{81a}{16}\right)}{2}\left[x-\frac{81a}{8}\right] - \frac{\left(\frac{w_5 x}{9a}-\frac{47w_5}{48}\right)\left(x-\frac{141a}{16}\right)}{2}\left[\frac{x-\frac{141a}{16}}{3}\right]$$

$$M_9 = +\frac{269}{380}W_1ax + 1.15628655W_2ax + \frac{3829}{1710}W_3ax + \frac{3321}{3040}W_4ax + \frac{72}{95}W_5ax$$
$$-\frac{3}{4}w_1ax + \frac{3}{4}w_1a^2 - \frac{11}{8}w_2ax + \frac{187}{48}w_2a^2 - \frac{7w_3ax}{2} + \frac{539w_3a^2}{24} - \frac{81w_4ax}{32} + \frac{6561w_4a}{256}$$
$$-\frac{w_5x^3}{54a} + \frac{47w_5x^2}{96} - \frac{2209w_5ax}{512} - 12.67370606w_5a^2$$

$$\boldsymbol{M_9 = -\frac{w_5x^3}{54a} + \frac{47w_5x^2}{96} + \frac{269}{380}W_1ax - \frac{3}{4}w_1ax + 1.15628655W_2ax - \frac{11}{8}w_2ax}$$
$$\boldsymbol{+\frac{3829}{1710}W_3ax - \frac{7w_3ax}{2} + \frac{3321}{3040}W_4ax - \frac{81w_4ax}{32} + \frac{72}{95}W_5ax - \frac{2209w_5ax}{512}}$$
$$\boldsymbol{+\frac{3}{4}w_1a^2 + \frac{187}{48}w_2a^2 + \frac{539w_3a^2}{24} + \frac{6561w_4a}{256} + 12.67370606w_5a^2}$$

$$\boldsymbol{V_9 = -\frac{w_5x^2}{18a} + \frac{47w_5x}{48} + \frac{269}{380}W_1a - \frac{3}{4}w_1ax + 1.15628655W_2a - \frac{11}{8}w_2a}$$
$$\boldsymbol{+\frac{3829}{1710}W_3a - \frac{7w_3a}{2} + \frac{3321}{3040}W_4a - \frac{81w_4a}{32} + \frac{72}{95}W_5a - \frac{2209w_5a}{512}}$$

Verificando la continuidad con las ecuaciones de momento y cortante anteriores.

Valor de X	**Valor del Momento 9**	**Valor del cortante 9**
$\frac{141a}{16}$	26.21535089	-2.7002558479
$\frac{189a}{16}$	0	-6.702255848

A continuación calcularemos los diagramas de momento y de cortante, evaluando las ecuaciones encontradas anteriormente según su rango de dominio.

L(x)	**Momento**	**Cortante**
0.0000	0.00000000	5.95369152
0.2000	1.18984942	5.94924708
0.4000	2.37436550	5.93591374
0.6000	3.54821491	5.91369152
0.8000	4.70606433	5.88258041
1.0000	5.84258041	5.62035819
1.2000	6.95194498	5.46641879
1.4000	8.02640045	5.27126728
1.5000	8.54796152	5.15823698
1.6000	9.06281552	5.13823698
1.7500	9.83089198	5.10141879
1.8000	10.08561146	5.08714931
2.0000	11.09640496	5.01740905
2.2000	12.09122443	4.92740905
2.4000	13.06601793	4.81714931
2.6000	14.01673351	4.68662983
2.8000	14.93931921	4.53585061
3.0000	15.82972310	4.36481165
3.2000	16.68389322	4.17351295
3.4000	17.49777763	3.96195451
3.6000	18.26732438	3.73013633
3.7500	18.81295035	3.54297724
3.8000	18.98973909	3.52851295
4.0000	19.68939406	3.46708438
4.2000	20.37619189	3.39994152
4.4000	21.04898972	3.32708438
4.6000	21.70664469	3.24851295
4.8000	22.34801394	3.16422724
5.0000	22.97195463	3.07422724
5.2000	23.57732389	2.97851295
5.4000	24.16297886	2.87708438
5.6000	24.72777668	2.76994152
5.8000	25.27057451	2.65708438
6.0000	25.79022948	2.53851295
6.2000	26.28559874	2.41422724
6.4000	26.75553942	2.28422724
6.6000	27.19890868	2.14851295

6.7500	27.51331062	2.04297724
6.8000	27.61455954	2.00683746
7.0000	28.00084708	1.85376868
7.2000	28.35515931	1.68708438
7.4000	28.67477313	1.50678455
7.6000	28.95696543	1.31286921
7.8000	29.19901311	1.10533835
8.0000	29.39819307	0.88419196
8.2000	29.55178219	0.64943006
8.4000	29.65705739	0.40105263
8.6000	29.71129554	0.13905969
8.7500	29.71684299	-0.06637021
8.8000	29.71302654	-0.08637021
8.8125	29.71191521	-0.09144737
9.0000	29.68726829	-0.17326160
9.2000	29.64289890	-0.27249000
9.4000	29.57744925	-0.38406407
9.6000	29.48845022	-0.50798383
9.8000	29.37343267	-0.64424926
10.0000	29.22992747	-0.79286037
10.2000	29.05546548	-0.95381716
10.4000	28.84757756	-1.12711963
10.6000	28.60379458	-1.31276778
10.8000	28.32164741	-1.51076160
11.0000	27.99866690	-1.72110111
11.2000	27.63238392	-1.94378630
11.4000	27.22032933	-2.17881716
11.6000	26.76003401	-2.42619370
11.8000	26.24902881	-2.68591592
11.8125	26.21535089	-2.70255848
12.0000	25.70263973	-2.76701160
12.2000	25.14200593	-2.84006716
12.4000	24.56631657	-2.91756716
12.6000	23.97468277	-2.99951160
12.8000	23.36621563	-3.08590049
13.0000	22.74002628	-3.17673383
13.2000	22.09522581	-3.27201160
13.4000	21.43092534	-3.37173383
13.6000	20.74623598	-3.47590049
13.8000	20.04026884	-3.58451160
14.0000	19.31213504	-3.69756716

14.2000	18.56094568	-3.81506716
14.4000	17.78581188	-3.93701160
14.6000	16.98584475	-4.06340049
14.8000	16.16015539	-4.19423383
15.0000	15.30785492	-4.32951160
15.2000	14.42805445	-4.46923383
15.4000	13.51986509	-4.61340049
15.6000	12.58239796	-4.76201160
15.8000	11.61476416	-4.91506716
16.0000	10.61607480	-5.07256716
16.2000	9.58544100	-5.23451160
16.4000	8.52197386	-5.40090049
16.6000	7.42478450	-5.57173383
16.8000	6.29298403	-5.74701160
17.0000	5.12568356	-5.92673383
17.2000	3.92199421	-6.11090049
17.4000	2.68102707	-6.29951160
17.6000	1.40189327	-6.49256716
17.8000	0.08370391	-6.69006716
17.8125	0.00000000	-6.70255848

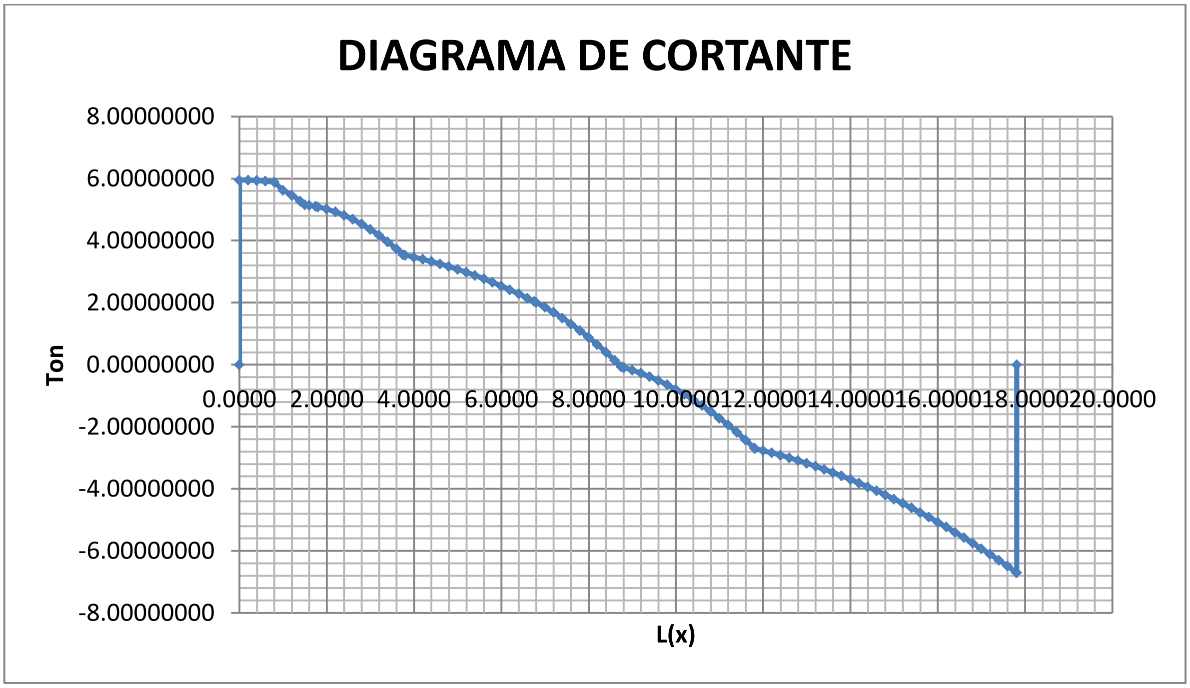


DIAGRAMA DE CORTANTE
8.00000000
6.00000000
4.00000000
2.00000000
0.00000000
-2.00000000
-4.00000000
-6.00000000
-8.00000000
Ton
0.0000 2.0000 4.0000 6.0000 8.0000 10.0000 12.0000 14.0000 16.0000 18.0000 20.0000
L(x)

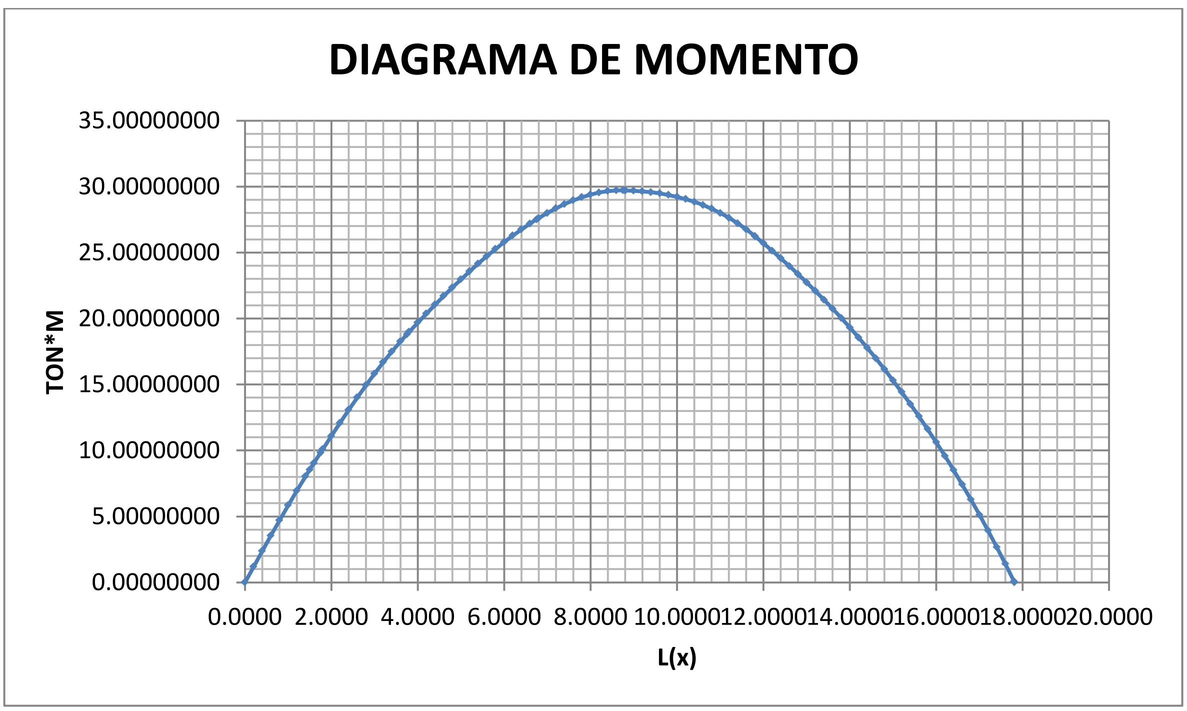
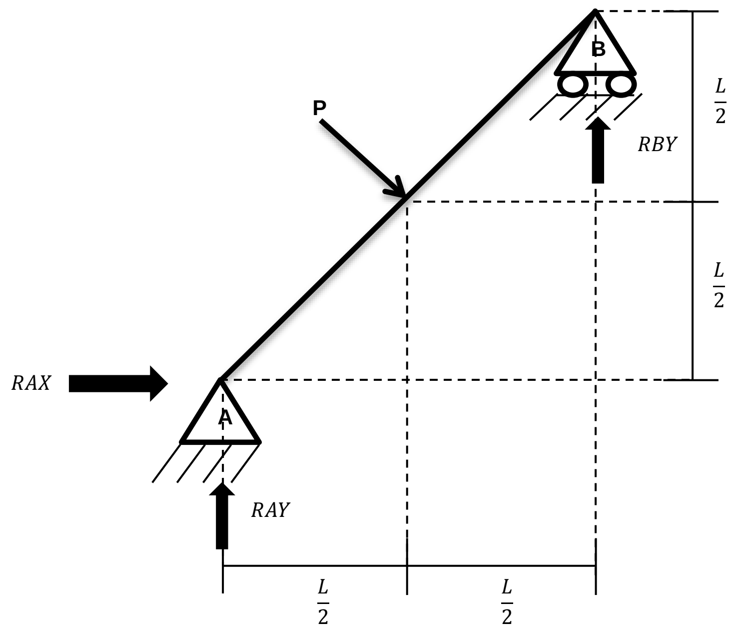
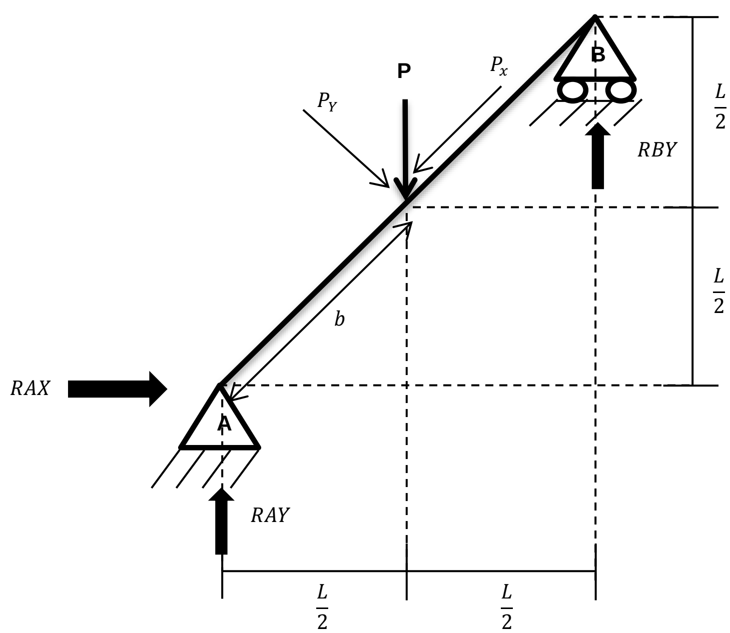


DIAGRAMA DE MOMENTO
35.00000000
30.00000000
25.00000000
20.00000000
15.00000000
10.00000000
5.00000000
0.00000000
TON*M
0.0000 2.0000 4.0000 6.0000 8.0000 10.0000 12.0000 14.0000 16.0000 18.0000 20.0000
L(x)

8.- De la siguiente viga, determine las reacciones en los apoyos, las funciones que describen la variación del momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial producto de la acción del sistema de fuerzas externo, dibuje los diagramas correspondientes a dichas funciones.



Para poder realizar sumatoria de momentos con respecto al apoyo A como lo hemos realizado en los ejercicios anteriores es necesario obtener las componentes rectangulares de la carga puntual P, así como su respectivo brazo de palanca.



Para realizar dichos cálculos nombraremos a la longitud de la barra inclinada como “a” y a la longitud del apoyo A al punto de aplicación de la carga puntual P nombraremos “b” como se muestra en la figura anterior.

Para calcular “a”

$$\boldsymbol{a = \sqrt{L^2 + L^2} = \sqrt{2}\, L}$$

Para el cálculo de la longitud “b” emplearemos el concepto de triángulos semejantes donde:

SI a una longitud total de $\sqrt{2}\,L$ corresponde una altura de L a una longitud “b” corresponde una altura de $\frac{L}{2}$

$$\boldsymbol{b = \frac{\sqrt{2}}{2} L}$$

Obteniendo las componentes rectangulares de nuestra carga P

$$\boldsymbol{P_Y = P \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} P}$$

$$\boldsymbol{P_X = P \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} P}$$

$$\sum M_A$$

$$P \sin 45° \left(\frac{\sqrt{2}}{2} L\right) - (L)RBY = 0$$

$$(L)RBY = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} P\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} L\right)$$

$$(L)RBY = \frac{PL}{2}$$

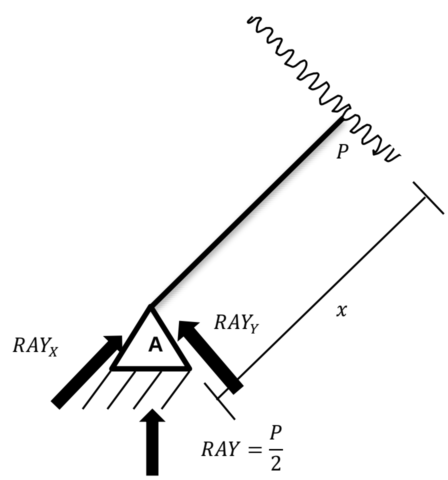
$$\boldsymbol{RBY = \frac{P}{2}}$$

$$\sum F_Y$$

$$RAY - P + \frac{P}{2} = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = \frac{P}{2}}$$

Tramo 1 $\boldsymbol{0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} L}$



$$RAY_Y = \sin 45° \left(\frac{P}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{P}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\,P}{4}$$

$$RAY_X = \cos 45° \left(\frac{P}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{P}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\,P}{4}$$

$$\sum M_P$$

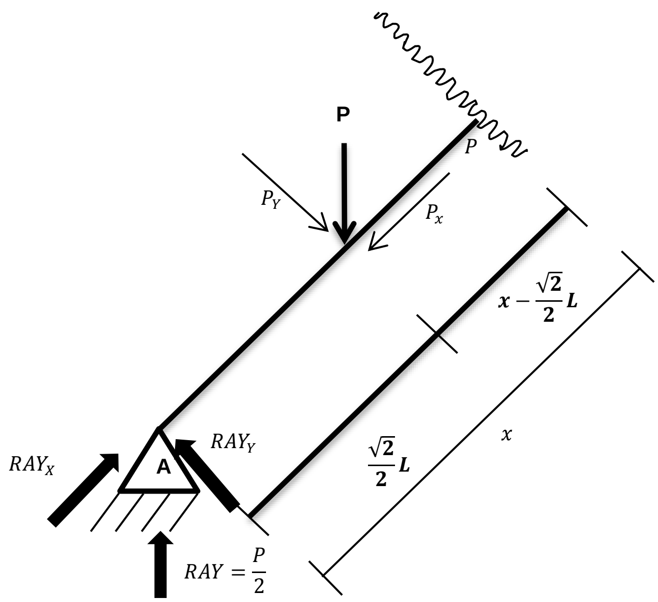
$$\boldsymbol{M_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} P x}$$

$$\boldsymbol{V_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} P}$$

Evaluando las ecuaciones de momento y cortante obtenidas para verificar la continuidad con las siguientes:

L(x)	M1	V1
0	0	$\frac{\sqrt{2}\,P}{4}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}L$	$\frac{PL}{4}$	$\frac{\sqrt{2}\,P}{4}$

Tramo 2 $\frac{\sqrt{2}}{2}L \le x \le \sqrt{2}L$



Recordando que:

$$P_Y = P\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}P$$

$$P_X = P\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}P$$

$$RAY_Y = \sin 45°\left(\frac{P}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{P}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\,P}{4}$$

$$RAY_X = \cos 45°\left(\frac{P}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{P}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}\,P}{4}$$

$$\sum M_P$$

$$M_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}Px - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}P\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}L\right)$$

$$M_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}Px - \frac{\sqrt{2}}{2}Px + \frac{PL}{2}$$

$$\boldsymbol{M_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}Px + \frac{PL}{2}}$$

$$\boldsymbol{V_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}P}$$

L(x)	M2	V2
$\frac{\sqrt{2}}{2}L$	$\frac{PL}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}\,P}{4}$
$\sqrt{2}L$	0	$-\frac{\sqrt{2}\,P}{4}$

Diagramas de cortante, momento y en este caso fuerza axial, nombrando a las literales.

- P=1Ton
- L=1m

L(x)	Cortante	Momento	Fuerza axial
0	0	0	0
0	0.353553391	0	0.353553391
0.707106781	0.353553391	0.25	0.353553391
0.707106781	-0.353553391	0.25	-0.353553391
1.414213562	-0.353553391	0	-0.353553391
1.414213562	0	0	0

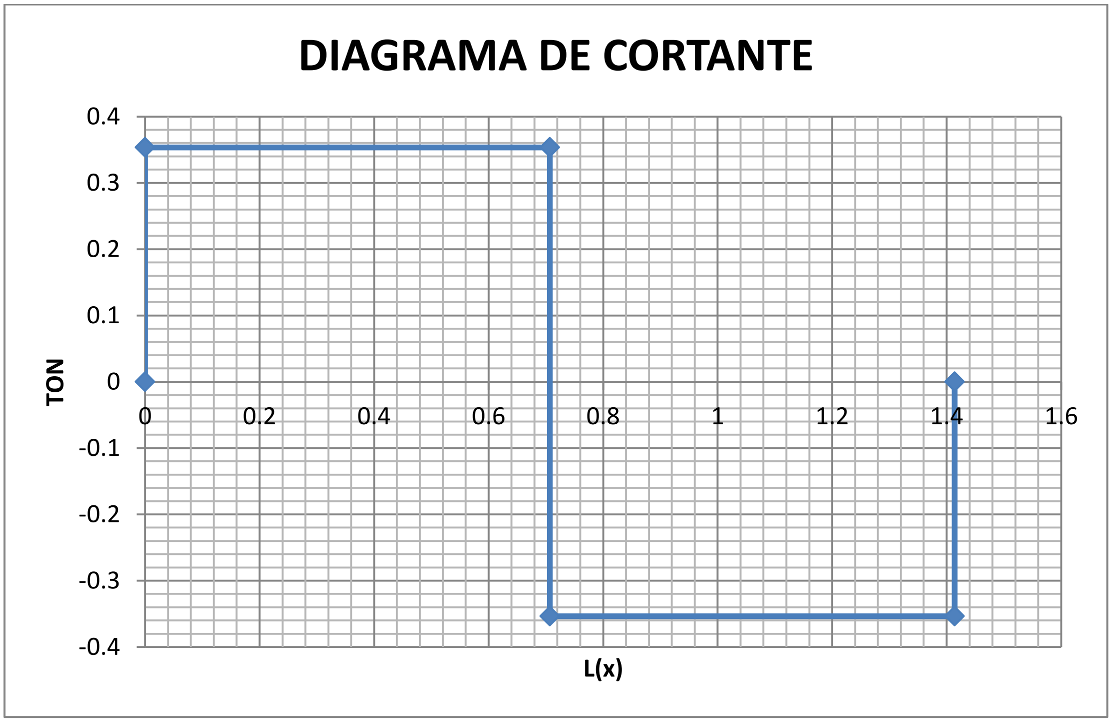


DIAGRAMA DE CORTANTE
TON
L(x)
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

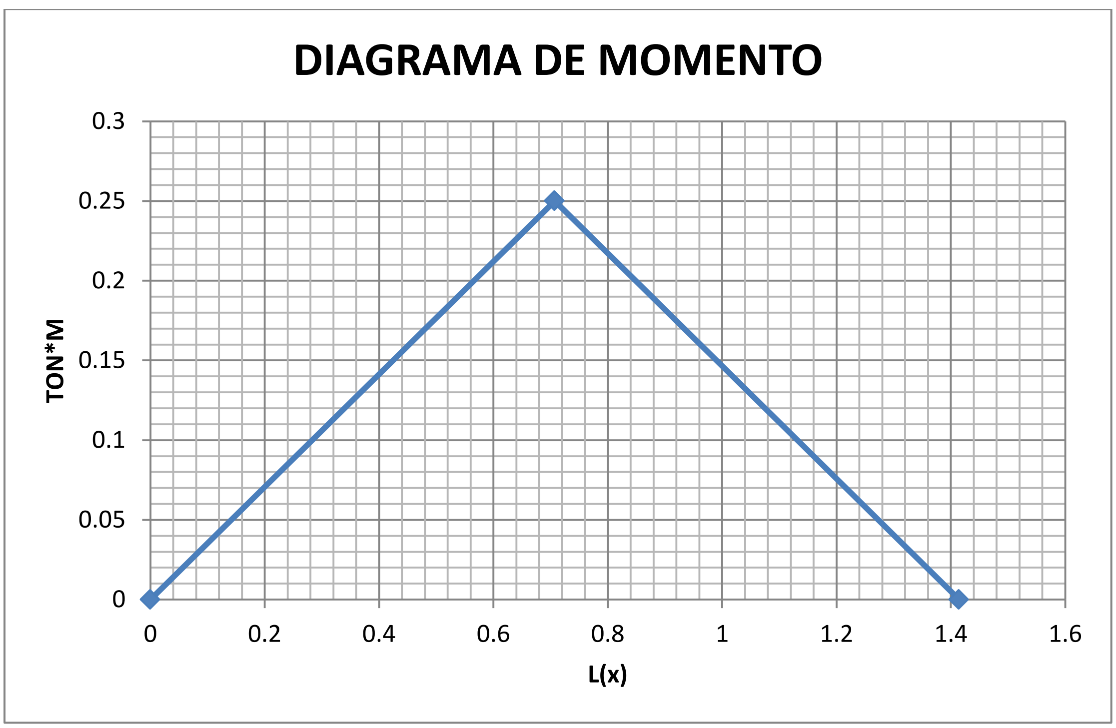
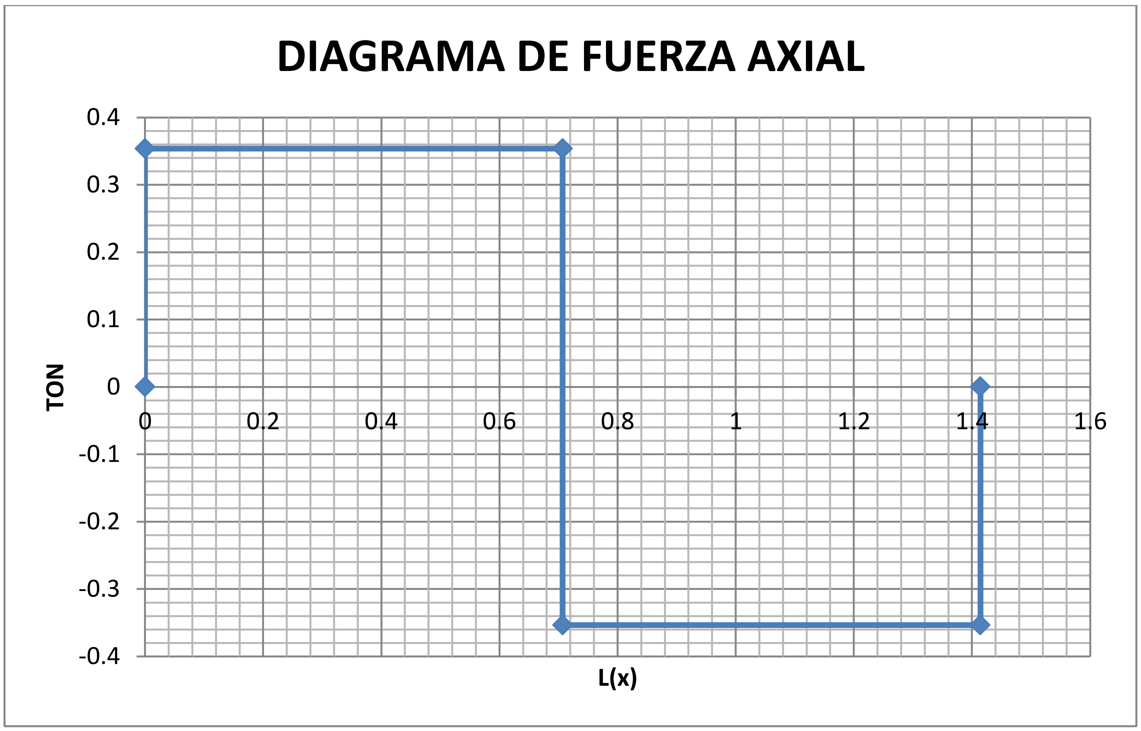


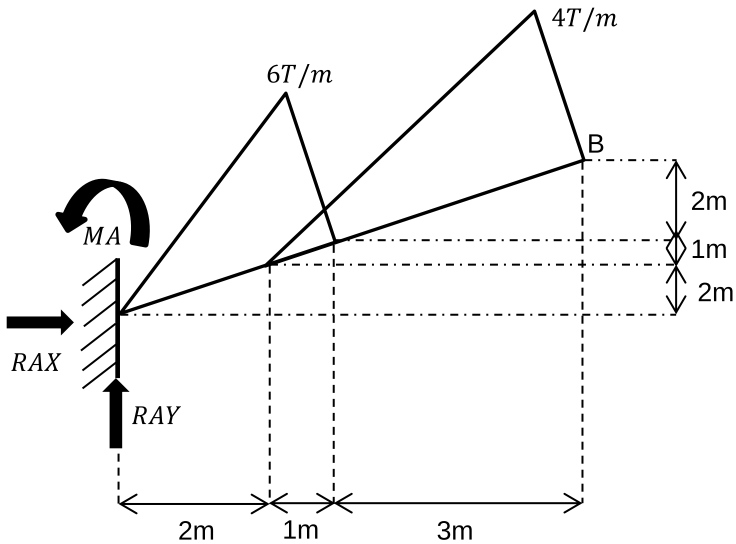
DIAGRAMA DE MOMENTO
TON*M
L(x)
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

Puntos notables en el diagrama de fuerza axial:

L(x)	n
0	$-\frac{\sqrt{2}\,P}{4}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}L$	$-\frac{\sqrt{2}\,P}{4}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}L$	$\frac{\sqrt{2}\,P}{4}$
$\sqrt{2}L$	$\frac{\sqrt{2}\,P}{4}$



9.- De la siguiente viga, determine las reacciones en los apoyos, las funciones que describen la variación del momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial producto de la acción del sistema de fuerzas externo, dibuje los diagramas correspondientes a dichas funciones. (Nótese que la carga total ejercida por ambos triángulos actúa perpendicular a la barra A-B)

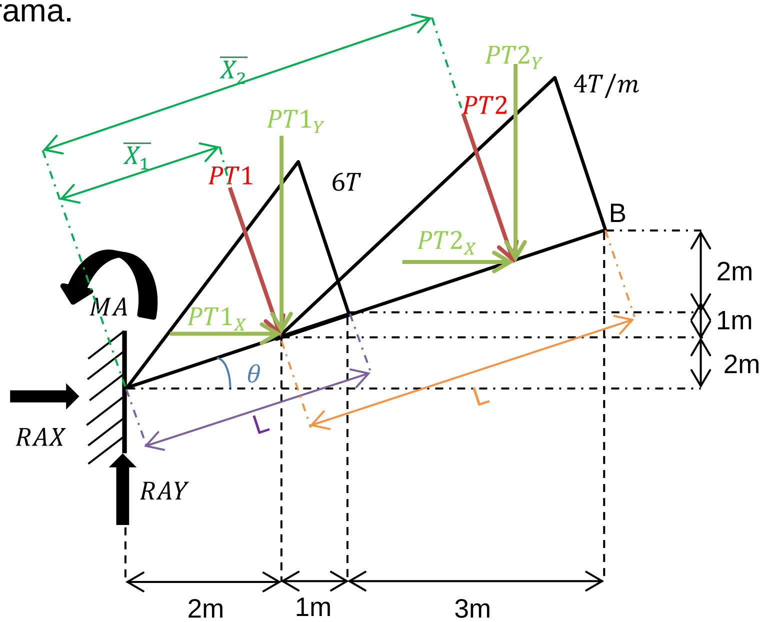


Verificación del grado de indeterminación de la viga:

$$\boldsymbol{I - E = 3 - 3 = 0}$$

Por lo tanto: nuestra estructura es estáticamente determinada.

Como primer paso obtenemos calcularemos los elementos notables en el siguiente diagrama.



$$\theta = Tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$$

Longitud de las cargas triangulares:

$$L1 = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}m$$

$$L2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5m$$

Cargas ejercidas:

$$PT1 = \frac{(3\sqrt{2}m)\left(6\,{}^{Ton}/_{m}\right)}{2} = 9\sqrt{2}Ton$$

$$PT2 = \frac{(5m)\left(4\,{}^{Ton}/_{m}\right)}{2} = 10Ton$$

Calculo de las componentes rectangulares ejercidas las cargas.

$$PT1_x = (PT1)(Sen\theta) = \left(9\sqrt{2}Ton\right)\left\{Sen\left[\,Tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)\right]\right\} = 8.148217Ton$$

$$PT1_Y = (PT1)(Cos\theta) = \left(9\sqrt{2}Ton\right)\left\{Cos\left[\,Tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)\right]\right\} = 9.777861Ton$$

$$PT2_x = (PT2)(Sen\theta) = (10Ton)\left\{Sen\left[\,Tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)\right]\right\} = 6.401844Ton$$

$$PT2_Y = (PT2)(Cos\theta) = (10Ton)\left\{Cos\left[\,Tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)\right]\right\} = 7.682213Ton$$

Distancia del soporte “A” al punto de concentración de las cargas.

$$\overline{X_1} = \left(\frac{2}{3}L1\right) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(3\sqrt{2}m\right) = 2\sqrt{2}m$$

$$\overline{X_2} = \left(\frac{2}{3}L2\right) + \left(\sqrt{2^2 + 2^2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)(5m) + 2\sqrt{2}m = \frac{10 + 6\sqrt{2}}{3}m$$

Calculo de las reacciones en el soporte mostrado.

$$\sum M_A = 0$$

$$-MA + \left(9\sqrt{2}Ton\right)\left(2\sqrt{2}m\right) + (10Ton)\left(\frac{10 + 6\sqrt{2}}{3}m\right)$$

$$\boldsymbol{MA = 97.617605Ton * m}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$RAY - 9.777861Ton - 7.682213Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = 17.460074Ton}$$

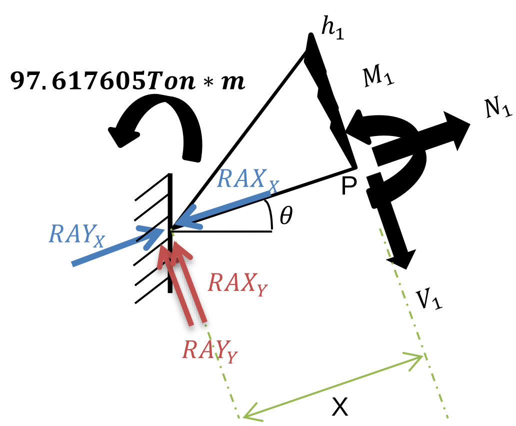
$$\sum F_X = 0$$

$$RAX + 8.148217Ton + 6.401844Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = 14.550061Ton}$$

Calculo de las ecuaciones de momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial.

Tramo 1 $\quad \boldsymbol{0 \leq X \leq 2\sqrt{2}m}$



Calculo de las componentes rectangulares correspondientes a las reacciones en el eje "X" y "Y" del empotramiento en el punto A

$$RAX_Y = \left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)\right]\right\}(14.550061Ton) = 9.314720Ton$$

$$RAX_X = \left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)\right]\right\}(14.550061Ton) = 11.177666Ton$$

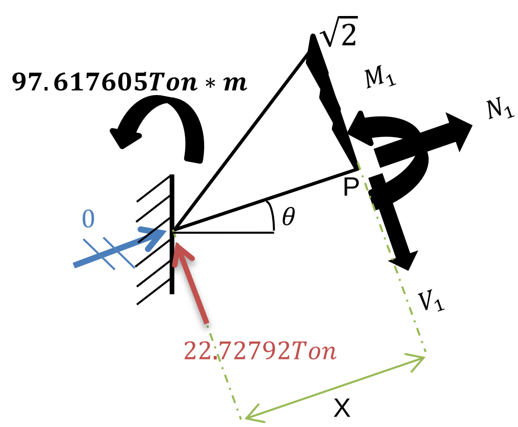
$$RAY_Y = \left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)\right]\right\}(17.460074Ton) = 13.413200Ton$$

$$RAY_X = \left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)\right]\right\}(17.460074Ton) = 11.177667Ton$$

Por trigonometría definimos:

$$h_1 = \frac{6X}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}X$$

Por lo tanto:



$$\sum M_P = 0$$

$$-M_1 - 97.617605 + (22.72792)(x) - \frac{(\sqrt{2}X)(X)}{2}\left[\frac{X}{3}\right]$$

$$\boldsymbol{M_1 = -\frac{\sqrt{2}X^3}{6} + 22.72792X - 97.617605}$$

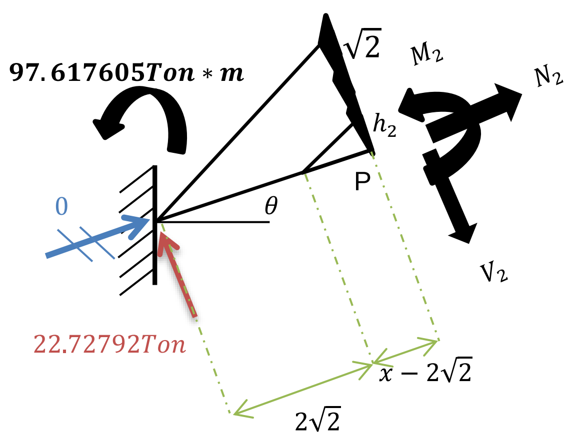
$$\boldsymbol{V_1 = -\frac{\sqrt{2}X^2}{2} + 22.72792}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$\boldsymbol{N_1 = 0}$$

L(x)	M1	V1
0	$-97.617605 Ton * m$	$22.72792 Ton$
$2\sqrt{2}m$	$-38.666673 Ton * m$	$17.071066 Ton$

Tramo 2 $\boldsymbol{2\sqrt{2}m \leq X \leq 3\sqrt{2}m}$



Por trigonometría definimos:

$$h_2 = \frac{4X - 8\sqrt{2}}{5}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_2 - \frac{\sqrt{2}X^3}{6} + 22.72792X - 97.617605 - \frac{\left(\frac{4X - 8\sqrt{2}}{5}\right)(x - 2\sqrt{2})}{2}\left[\frac{x - 2\sqrt{2}}{3}\right]$$

$$M_2 = -\frac{\sqrt{2}X^3}{6} + 22.72792X - 97.617605 - \left(\frac{2X}{15} - \frac{4\sqrt{2}}{15}\right)(X^2 - 4\sqrt{2}X + 8)$$

$$M_2 = -\frac{\sqrt{2}X^3}{6} + 22.72792X - 97.617605$$
$$-\left(\frac{2X^3}{15} - \frac{8\sqrt{2}}{15}X^2 + \frac{16}{15}X - \frac{4\sqrt{2}}{15}X^2 + \frac{32}{15}X - \frac{32\sqrt{2}}{15}\right)$$

$$M_2 = -\frac{\sqrt{2}X^3}{6} + 22.72792X - 97.617605 - \frac{2X^3}{15} + \frac{4\sqrt{2}}{5}X^2 - \frac{16}{5}X + \frac{32\sqrt{2}}{15}$$

$$\boldsymbol{M_2} = \frac{\boldsymbol{-4-5\sqrt{2}}}{\boldsymbol{30}}\boldsymbol{X^3} + \frac{\boldsymbol{4\sqrt{2}}}{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{X^2} + \boldsymbol{19.52792X - 94.600616}$$

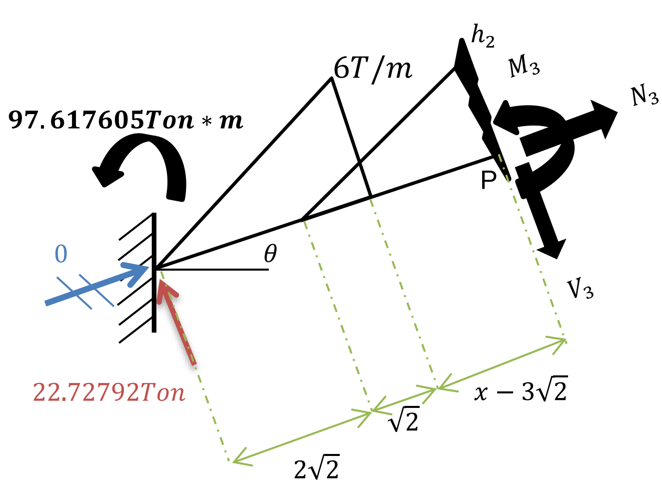
$$\boldsymbol{V_2} = \frac{\boldsymbol{-4-5\sqrt{2}}}{\boldsymbol{10}}\boldsymbol{X^2} + \frac{\boldsymbol{8\sqrt{2}}}{\boldsymbol{5}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{19.52792}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$\boldsymbol{N_2 = 0}$$

L(x)	M2	V2
$2\sqrt{2}m$	$-38.666673Ton * m$	$17.071066Ton$
$3\sqrt{2}m$	$-19.568330 * m$	$9.199998Ton$

Tramo 3 $\boldsymbol{3\sqrt{2}m \leq X \leq \sqrt{61}m}$



$$\sum M_P = 0$$

$$-M_3 - 97.617605 + 22.72792X - \frac{(6)(3\sqrt{2})}{2}\left[x - 2\sqrt{2}\right]$$

$$-\frac{\left(\frac{4X - 8\sqrt{2}}{5}\right)(x - 2\sqrt{2})}{2}\left[\frac{x - 2\sqrt{2}}{3}\right]$$

$$M_3 = -97.617605 + 22.72792X - 9\sqrt{2}X + 36 - \frac{2X^3}{15} + \frac{4\sqrt{2}}{5}X^2 - \frac{16}{5}X + \frac{32\sqrt{2}}{15}$$

$$\boldsymbol{M_3 = -\frac{2X^3}{15} + \frac{4\sqrt{2}}{5}X^2 + 6.799998X - 58.600616}$$

$$\boldsymbol{N_3 = -\frac{6X^2}{15} + \frac{8\sqrt{2}}{5}X + 6.799998}$$

$$\sum F_X = 0$$

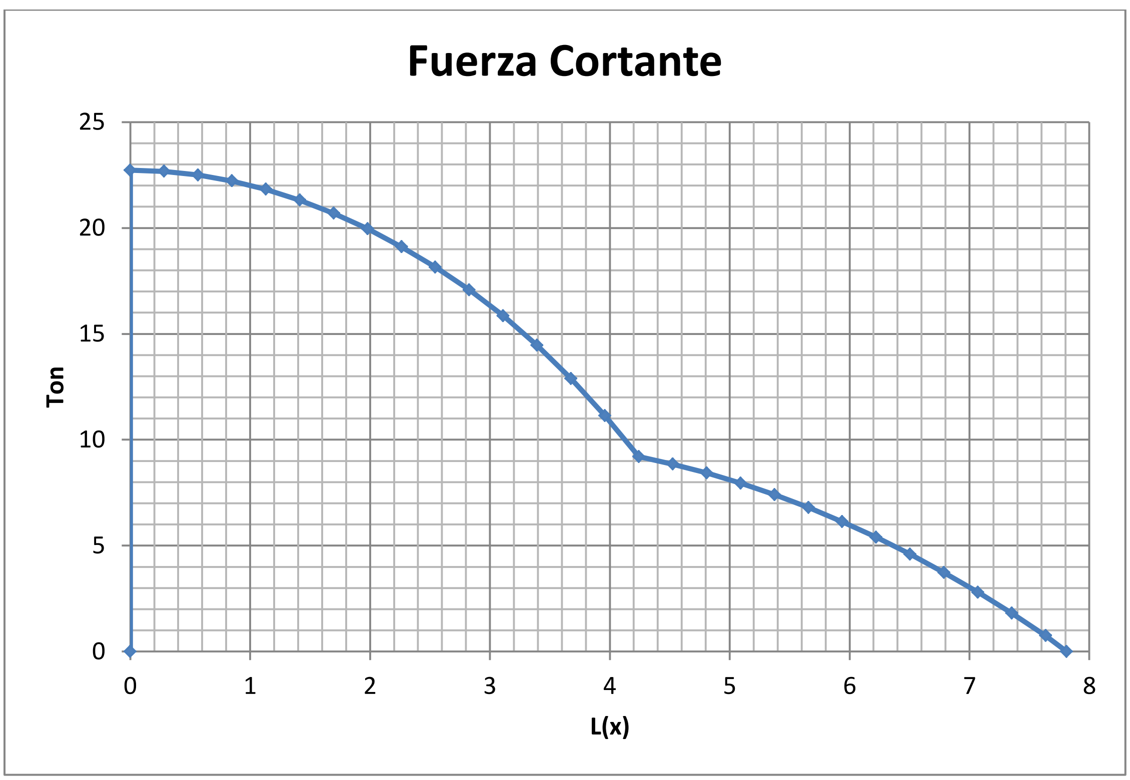
$$\boldsymbol{N_3 = 0}$$

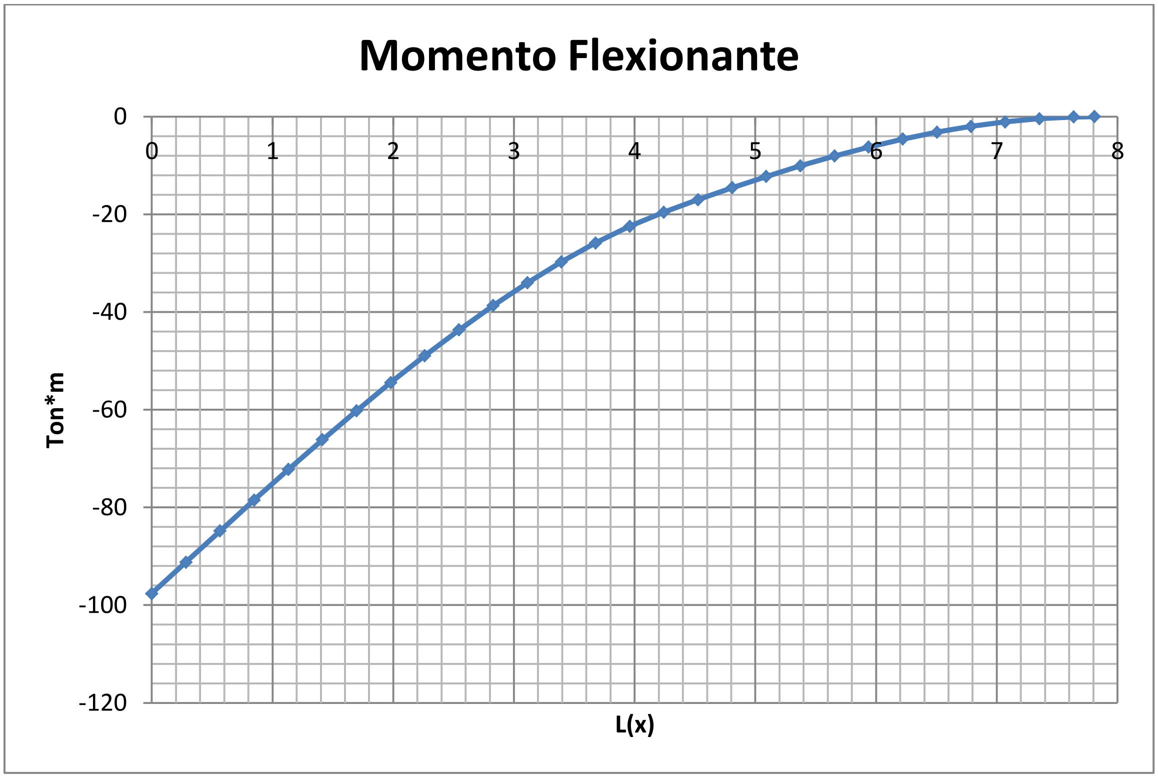
L(x)	M3	V3
$3\sqrt{2}m$	$-19.568330 * m$	$9.199998Ton$
$\sqrt{61}m$	0	0

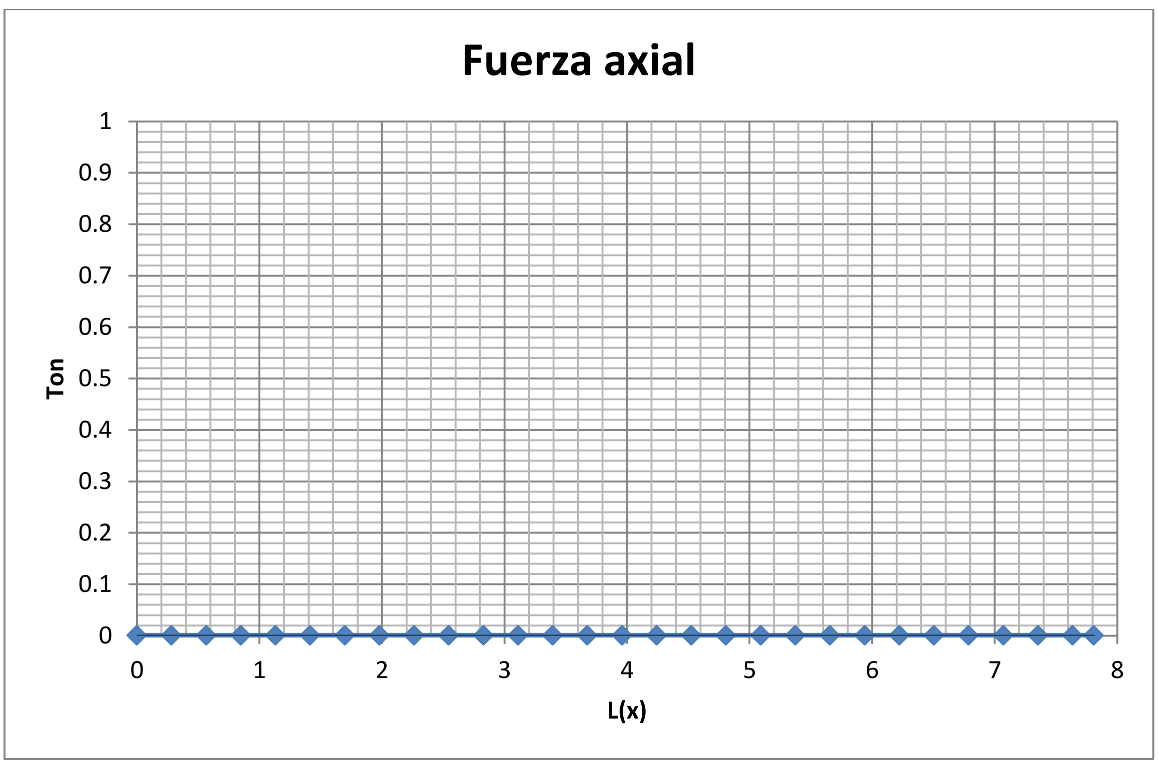
Calculo de los diagramas correspondientes a las funciones que describen la variación de las acciones internas en la viga

L(x)	Cortante	Momento	Fuerza axial
0	22.72792	-97.617605	0
0.282842712	22.67135146	-91.19451179	0
0.565685425	22.50164583	-84.80341858	0
0.848528137	22.21880312	-78.47632537	0
1.13137085	21.82282332	-72.24523217	0
1.414213562	21.31370644	-66.14213896	0
1.697056275	20.69145247	-60.19904575	0
1.979898987	19.95606142	-54.44795254	0

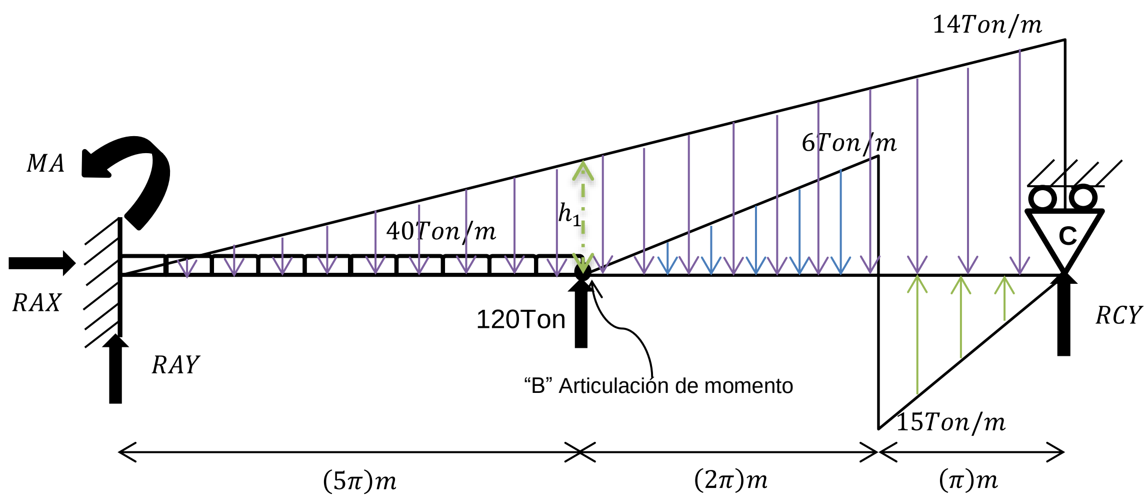
2.2627417	19.10753328	-48.92085933	0
2.545584412	18.14586806	-43.64976612	0
2.828427125	17.07106575	-38.66667285	0
3.111269837	15.85112636	-34.00659663	0
3.39411255	14.45404988	-29.71662234	0
3.676955262	12.87983632	-25.84685192	0
3.959797975	11.12848567	-22.44738731	0
4.242640687	9.199998001	-19.56816816	0
4.5254834	8.847998001	-17.01426528	0
4.808326112	8.431998001	-14.56897255	0
5.091168825	7.951998001	-12.25039192	0
5.374011537	7.407998001	-10.07662532	0
5.656854249	6.799998001	-8.065774682	0
5.939696962	6.127998001	-6.235941939	0
6.222539674	5.391998001	-4.605229026	0
6.505382387	4.591998001	-3.191737876	0
6.788225099	3.727998001	-2.013570423	0
7.071067812	2.799998001	-1.088828601	0
7.353910524	1.807998001	-0.435614342	0
7.636753237	0.751998002	-0.072029581	0
7.810249676	0	0	0




Momento Flexionante
Ton*m
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
0
1
2
3
4
5
6
7
8
L(x)


Fuerza axial
Ton
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
L(x)

10.- De la siguiente viga, determine las reacciones en los apoyos, las funciones que describen la variación del momento flexionante y fuerza cortante producto de la acción del sistema de fuerzas externo, dibuje los diagramas correspondientes a dichas funciones.



Verificación del grado de indeterminación de la viga:

$$\boldsymbol{I - E = 4 - 4 = 0}$$

Por lo tanto: nuestra estructura es estáticamente determinada y podemos dar solución a ella mediante las ecuaciones de equilibrio estático.

Método de análisis

En este caso se presenta una articulación de momento en la cual se permite añadir la condición $\sum M = 0$ en dicho punto, por lo que para dar solución al problema planteado, se propone realizar una sumatoria de momentos con respecto al punto "B" (a la izquierda de la articulación) y una sumatoria de momentos con respecto al punto "C" (de toda la viga) generando un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas representan el valor de la reacción en el eje "Y" del empotramiento "A" así como el momento en dicho punto "MA", una vez obtenido el valor de dichas reacciones, podemos emplea la ecuación de equilibrio mecánico $\sum FY = 0$ como evidentemente no existen fuerzas axiales a la barra, el análisis mencionado anteriormente bastara para hallar el equilibrio mecánico de la viga.

Por trigonometría definimos.

$$h_1 = \frac{(5\pi)(14)}{8\pi} = \frac{35}{4}$$

$$\sum M_B = 0 \ (a\ la\ izquierda\ de\ la\ articulación)$$

$$-MA + (5\pi)(RAY) - (40)(5\pi)\left(\frac{5\pi}{2}\right) - \frac{\left(\frac{35}{4}\right)(5\pi)}{2}\left[\frac{5\pi}{3}\right] = 0$$

$$\boldsymbol{-MA + 5\pi RAY = 5294.631528 \ldots\ldots\ldots Ec. 1}$$

$$\sum M_C = 0 \ (Toda\ la\ viga)$$

$$-MA + (8\pi)(RAY) - (40)(5\pi)\left(\frac{11\pi}{2}\right) + (120)(3\pi) - \frac{(14)(8\pi)}{2}\left[\frac{8\pi}{3}\right]$$

$$-\frac{(6)(2\pi)}{2}\left[\frac{5\pi}{3}\right] - \frac{(15)(\pi)}{2}\left[\frac{2\pi}{3}\right] = 0$$

$$\boldsymbol{-MA + 8\pi RAY = 11248.80043 \ldots\ldots\ldots Ec. 2}$$

Dando solución al sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{MA = 4628.983309 Ton * m}$$

$$\boldsymbol{RAY = 631.7569418\ Ton}$$

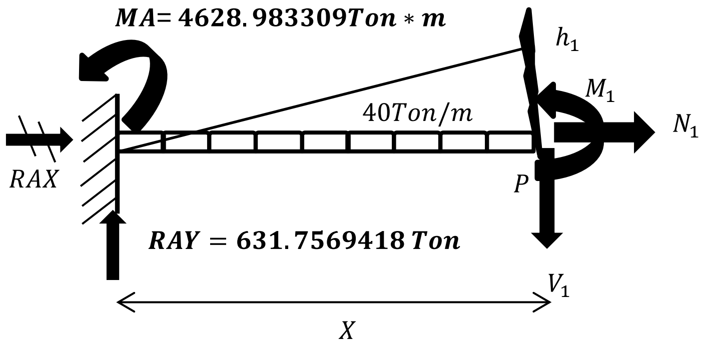
$$\sum F_Y = 0$$

$$631.7569418 - (40)(5\pi) - \frac{(14)(8\pi)}{2} + 120 - \frac{(6)(2\pi)}{2} + \frac{(15)(\pi)}{2} + RCY = 0$$

$$\boldsymbol{RCY = 47.77838854 Ton}$$

Calculo de las ecuaciones de momento flexionante y fuerza cortante

Tramo 1 $\mathbf{0 \leq x \leq 5\pi}$



Por trigonometría definimos:

$$h_1 = \frac{7X}{4\pi}$$

$$\sum \boldsymbol{M_P = 0}$$

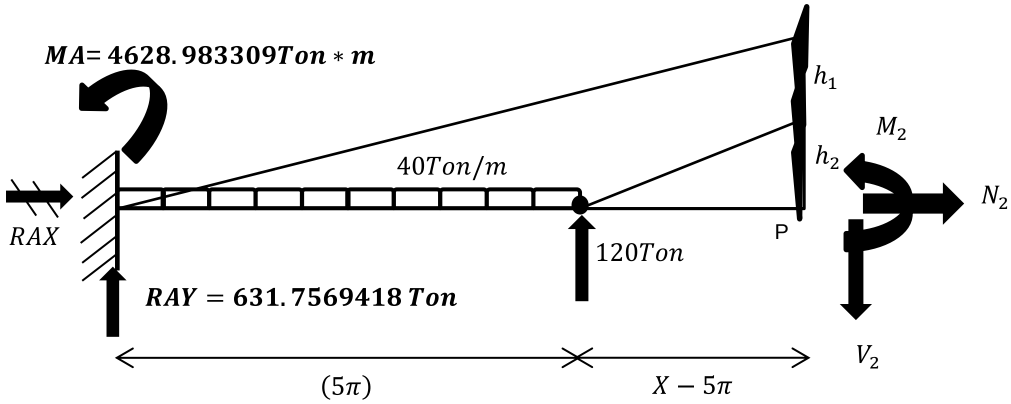
$$-M_1 - 4628.983309 + 631.7569418(X) - (40)(X)\left(\frac{X}{2}\right) - \frac{\left(\frac{7X}{4\pi}\right)(X)}{2}\left[\frac{X}{3}\right]$$

$$\boldsymbol{M_1 = -\frac{7X^3}{24\pi} - 20X^2 + 631.7569418X - 4628.983309}$$

$$\boldsymbol{V_1 = -\frac{21X^2}{24\pi} - 40X + 631.7569418}$$

L(x)	M1	V1
0	$-4628.983309 Ton * m$	$631.7569418 Ton$
5π	0	$-65.28392822 Ton$

Tramo 2 $\mathbf{5\pi \le x \le 7\pi}$



Por trigonometría definimos:

$$h_2 = \frac{6X-30\pi}{2\pi} = \frac{3X}{\pi} - 15$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_2 - 4628.983309 + 631.7569418(X) - (40)(5\pi)\left(X - \frac{5\pi}{2}\right)$$
$$+(120)(X-5\pi) - \frac{\left(\frac{7X}{4\pi}\right)(X)}{2}\left[\frac{X}{3}\right] - \frac{\left(\frac{3X}{\pi} - 15\right)(X-5\pi)}{2}\left[\frac{X-5\pi}{3}\right]$$

$$M_2 = -\frac{7X^3}{24\pi} + 631.7569418X - 4628.983309 - 200X\pi + 500\pi^2 + 120X$$
$$-600\pi - \left(\frac{X}{2\pi} - \frac{5}{2}\right)(X^2 - 10X\pi + 25\pi^2)$$

$$M_2 = -\frac{7X^3}{24\pi} + 751.7569418X - 4628.983309 - 200X\pi + 500\pi^2 - 600\pi$$
$$-\left(\frac{X^3}{2\pi} - 5X^2 + \frac{25}{2}X\pi - \frac{5}{2}X^2 + 25X\pi - \frac{125}{2}\pi^2\right)$$

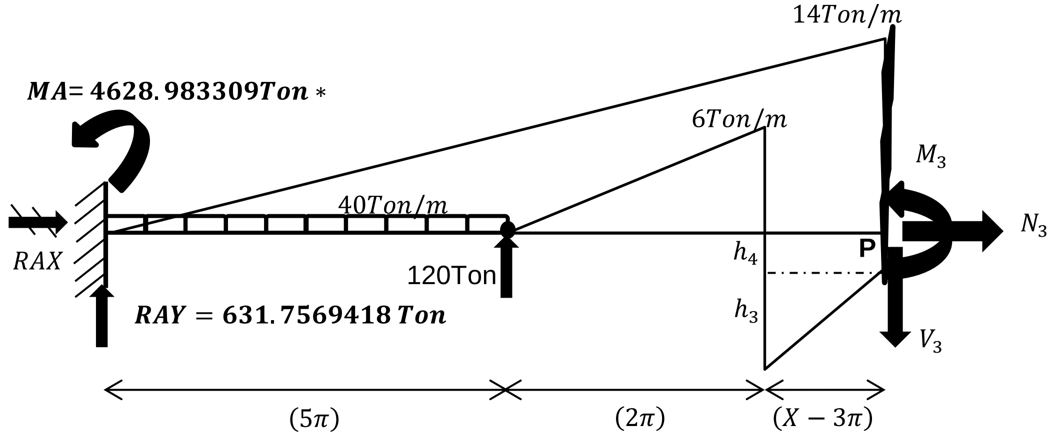
$$M_2 = -\frac{7X^3}{24\pi} + 751.7569418X - 4628.983309 - 200X\pi + 500\pi^2 - 600\pi - \frac{X^3}{2\pi} + \frac{15}{2}X^2 - \frac{75}{2}X\pi + \frac{125}{2}\pi^2$$

$$\boldsymbol{M_2 = -\frac{19X^3}{24\pi} + \frac{15}{2}X^2 + 5.628686572X - 962.2864255}$$

$$\boldsymbol{V_2 = -\frac{19X^2}{8\pi} + 15X + 5.628686572}$$

L(x)	M2	V2
5π	0	$54.71607178Ton$
7π	$108.5656463Ton * m$	$-30.10692986Ton$

Tramo 2 $\boldsymbol{7\pi \leq x \leq 8\pi}$



Por trigonometría definimos:

$$h_3 = \frac{15X - 105\pi}{\pi} = \frac{15X}{\pi} - 105$$

$$h_4 = 15 - \left(\frac{15X}{\pi} - 105\right) = -\frac{15X}{\pi} + 120$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_3-4628.983309+631.7569418(X)-(40)(5\pi)\left(X-\frac{5\pi}{2}\right)+(120)(X-5\pi)$$
$$-\frac{\left(\frac{7X}{4\pi}\right)(X)}{2}\left[\frac{X}{3}\right]-\frac{(6)(2\pi)}{2}\left[X-\frac{19}{3}\pi\right]+\frac{\left(\frac{15X}{\pi}-105\right)(X-7\pi)}{2}\left[\frac{(2)(X-7\pi)}{3}\right]$$
$$+\left(-\frac{15X}{\pi}+120\right)(X-7\pi)\left(\frac{X-7\pi}{2}\right)$$

$$M_3=631.7569418X-4628.983309-200X\pi+500\pi^2+120X-600\pi-\frac{7X^3}{24\pi}$$
$$-6X\pi+38\pi^2+\left(\frac{5X}{\pi}-35\right)(X^2-14X\pi+49\pi^2)+\left(-\frac{15X}{2\pi}+60\right)$$
$$(X^2-14X\pi+49\pi^2)$$

$$M_3=631.7569418X-4628.983309-200X\pi+500\pi^2+120X-600\pi-\frac{7X^3}{24\pi}$$
$$-6X\pi+38\pi^2+\frac{5X^3}{\pi}-70X^2+245X\pi-35X^2+490X\pi-1715\pi^2-\frac{15X^3}{2\pi}+105X^2$$
$$-\frac{735}{2}X\pi+60X^2+840X\pi+2940\pi^2$$

$$\boldsymbol{M_3=-\frac{67X^3}{24\pi}+60X^2-1379.813674X+10886.17366}$$

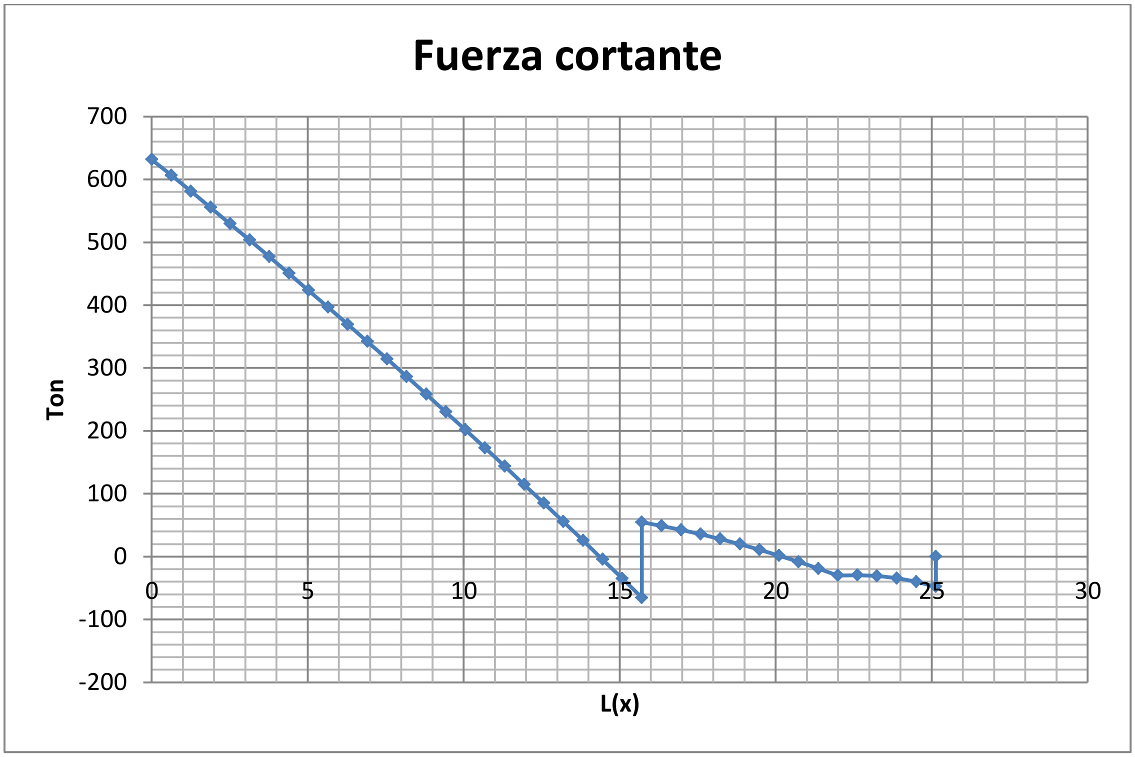
$$\boldsymbol{V_3=-\frac{67X^2}{8\pi}+120X-1379.813674}$$

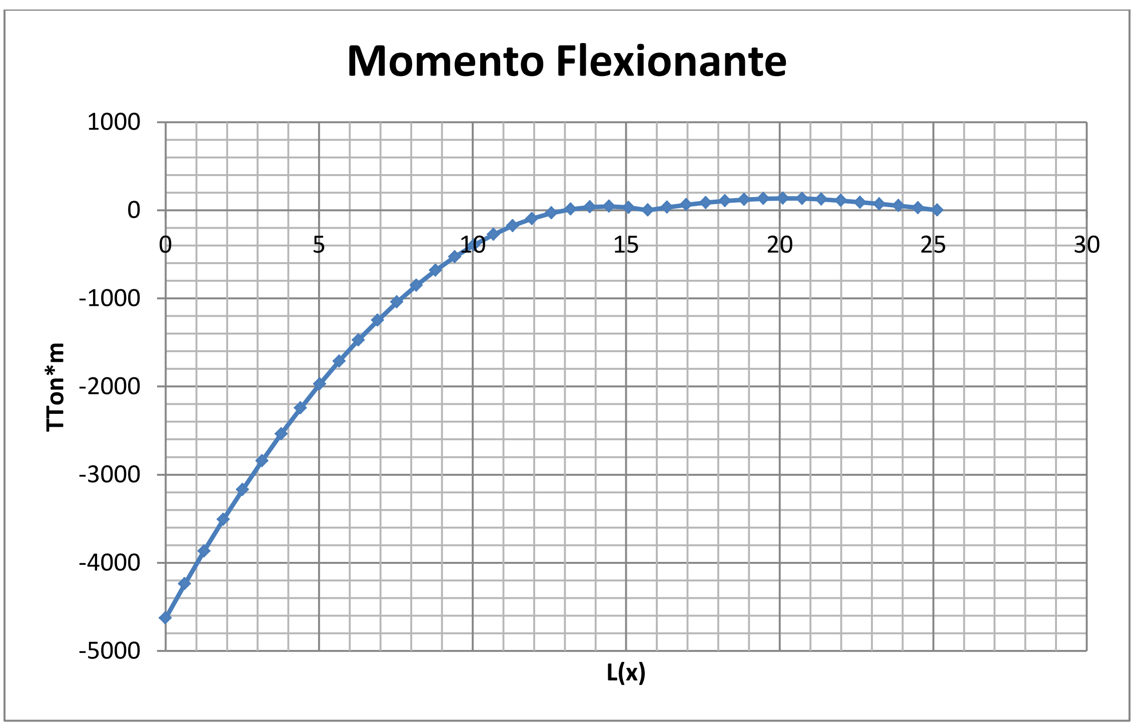
L(x)	M3	V3
7π	$108.5656463 Ton*m$	$-30.10692986 Ton$
8π	0	$-47.778388 Ton$

Calculo de los diagramas correspondientes a las funciones que describen la variación de las acciones internas en la viga

L(x)	Cortante	Momento
0	631.7569418	-4628.983309
0.628318531	606.5142448	-4239.957428
1.256637061	581.0516364	-3866.861089
1.884955592	555.3691164	-3509.832465

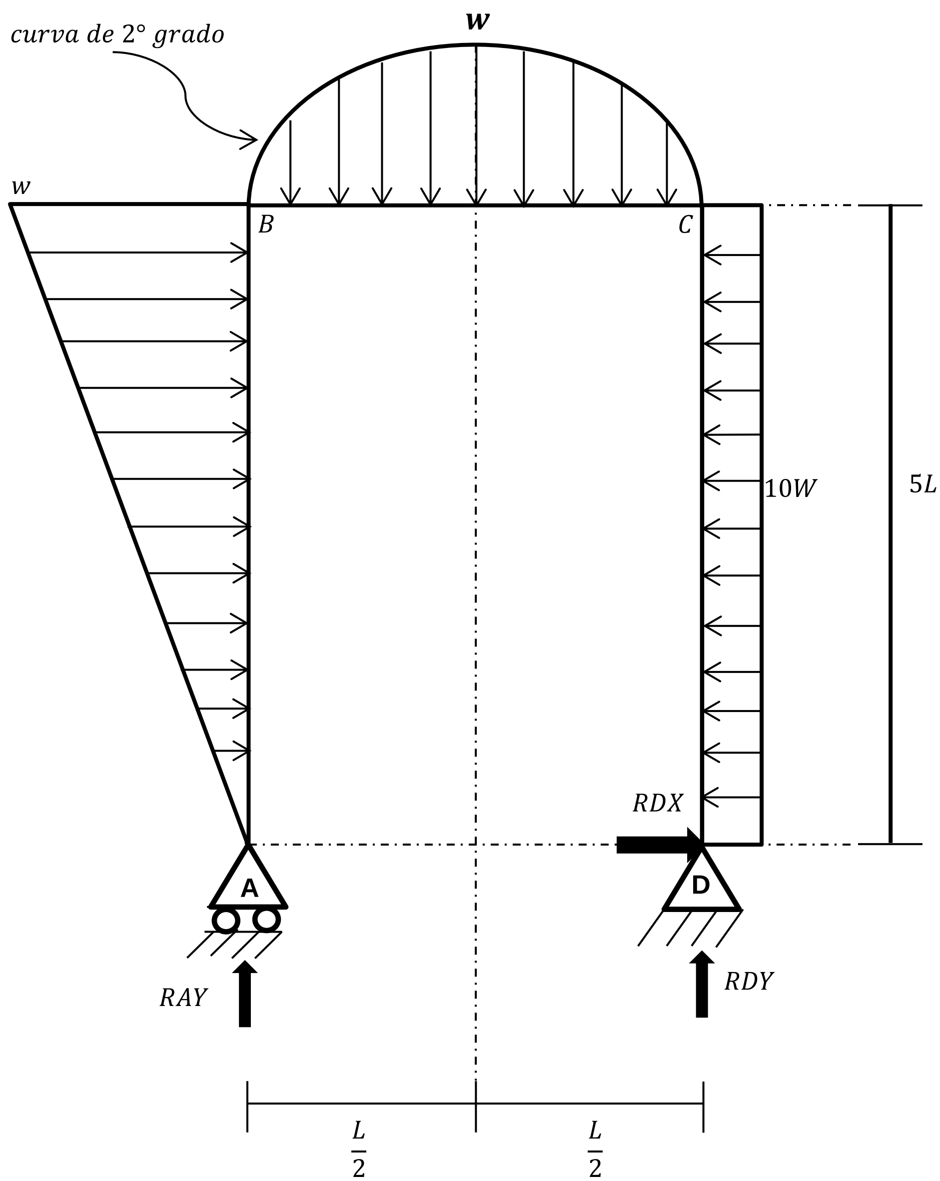
2.513274123	529.466685	-3169.009732
3.141592654	503.3443421	-2844.531064
3.769911184	477.0020877	-2536.534636
4.398229715	450.4399218	-2245.158621
5.026548246	423.6578444	-1970.541194
5.654866776	396.6558556	-1712.82053
6.283185307	369.4339552	-1472.134804
6.911503838	341.9921434	-1248.622189
7.539822369	314.3304201	-1042.42086
8.168140899	286.4487853	-853.6689913
8.79645943	258.347239	-682.504758
9.424777961	230.0257812	-529.0663342
10.05309649	201.484412	-393.4918944
10.68141502	172.7231312	-275.919613
11.30973355	143.741939	-176.4876645
11.93805208	114.5408353	-95.33422333
12.56637061	85.11982008	-32.59746398
13.19468915	55.47889339	11.58443909
13.82300768	25.61805522	37.07331142
14.45132621	-4.462694442	43.73097856
15.07964474	-34.76335559	31.41926604
15.70796327	-65.28392822	0
15.70796327	54.71607178	0
16.3362818	48.91983334	32.589433
16.96460033	42.52669229	61.34946006
17.59291886	35.53664863	85.90503564
18.22123739	27.94970238	105.8811148
18.84955592	19.76585351	120.9026525
19.47787445	10.98510205	130.5946039
20.10619298	1.607447975	134.5819239
20.73451151	-8.3671087	132.4895676
21.36283004	-18.93856798	123.94249
21.99114858	-30.10692986	108.5656462
22.61946711	-29.43148778	89.97130564
23.24778564	-30.86091244	71.14010007
23.87610417	-34.39520417	50.74949699
24.5044227	-40.03436299	27.47696944
25.13274123	-47.77838888	0


Fuerza cortante
Ton
L(x)
700
600
500
400
300
200
100
0
-100
-200
0
5
10
15
20
25
30


Momento Flexionante
TTon*m
L(x)
1000
0
-1000
-2000
-3000
-4000
-5000
0
5
10
15
20
25
30

Capítulo 5. Solución de marcos (Barras rectas e inclinadas)

1.- Del siguiente marco, determine: el valor de las reacciones en los soportes mostrados, las funciones que describen la variación de las acciones internas (momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal) y dibuje los diagramas correspondientes a estas.



Grado de indeterminación del marco:

$$\boldsymbol{r + 3m = 3n + c}$$

$$\boldsymbol{3 + 3(3) = 3(4) + 0}$$

$$\boldsymbol{12 = 12}$$

Por lo tanto nuestro marco es estáticamente determinado y podemos resolverlo con la simple aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático:

- $\sum F = F_R = 0$
- $\sum M = M_R = 0$

Procedimiento de análisis:

Para encontrar el valor de las reacciones en los soportes debido a las configuración de cargas mostradas, se llevara a cabo un método similar al usado en nuestro análisis de vigas; se realizara una sumatoria de momentos con respecto al nudo A mediante la cual se obtendrá una ecuación cuya incógnita representa el valor de RDY , posteriormente se realizara una sumatoria de fuerzas con respecto al eje Y en la cual se obtendrá una ecuación cuya incógnita represente el valor de RAY, luego, una sumatoria de fuerzas con respecto al eje X para encontrar el valor de la reacción RDX, como se muestra a continuación.

Como primer paso construiremos la función de la curva y calcularemos la fuerza que ejerce, así como el brazo de palanca, aislando el miembro B-C del marco:

Como la ecuación de la curva es de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Y tomando en cuenta nuestras condiciones de frontera:

Si: X=0 Y=0

X=L/2 Y=W

X=L Y=0

En nuestra primera condición si X=0 Y=0 evidentemente C=0, por lo tanto utilizaremos las siguientes dos condiciones para definir la función de nuestra curva de la siguiente manera:

$$1.- \qquad \boldsymbol{a\left(\frac{L^2}{4}\right) + b\left(\frac{L}{2}\right) = W}$$

$$2.- \qquad \boldsymbol{a(L^2) + b(L) = 0}$$

Para resolverlo como primer paso despejaremos **a** de la ecuación **2**

$$3.- \qquad \boldsymbol{a = -\frac{b}{L}}$$

Sustituyendo la ecuación **3** en la ecuación **1** despejaremos **b**

$$\left(-\frac{b}{L}\right)\left(\frac{L^2}{4}\right) + b\left(\frac{L}{2}\right) = w$$

$$-\frac{bL}{4} + \frac{bL}{2} = w$$

$$4.- \ \boldsymbol{b = \frac{4W}{L}}$$

Sustituyendo **4** en la ecuación **3**

$$\boldsymbol{a = -\frac{b}{L} = -\frac{\frac{4W}{L}}{L} = -\frac{4W}{L^2}}$$

Como ya conocemos **a** y **b;** y sabemos que la forma de nuestra ecuación es: $y = ax^2 + bx$ nuestra ecuación que define la curva es:

$$\boldsymbol{y = -\frac{4W}{L^2}x^2 + \frac{4W}{L}x}$$

Calculo de la carga de la curva Pc aislando el miembro B-C del marco:

$$\boldsymbol{Pc} = \int_0^L \left(-\frac{4W}{L^2}x^2 + \frac{4W}{L}x\right)dx = \int_0^L \left(-\frac{4W}{L^2}x^2 + \frac{4W}{L}x\right)dx = \left[-\frac{4WX^3}{3L^2} + \frac{2WX^2}{L}\right]_0^L$$

$$\boldsymbol{Pc} = -\frac{4WL^3}{3L^2} + \frac{2WL^2}{L} = -\frac{4WL}{3} + 2WL = \frac{2WL}{3}$$

$$\boldsymbol{Pc = \frac{2WL}{3}}$$

Calculo del centroide de la curva aislando el miembro B-C del marco:

$$\bar{X}=\frac{\int_{L_1}^{L_2}\hat{X}da}{\int_{L_1}^{L_2}da}=\frac{\int_0^L(X)\left(-\frac{4W}{L^2}x^2+\frac{4W}{L}x\right)dx}{\int_0^L\left(-\frac{4W}{L^2}x^2+\frac{4W}{L}x\right)dx}=\frac{\int_0^L\left(-\frac{4W}{L^2}x^3+\frac{4W}{L}x^2\right)dx}{\int_0^L\left(-\frac{4W}{L^2}x^2+\frac{4W}{L}x\right)dx}$$

$$=\frac{\left[-\frac{WX^4}{L^2}+\frac{4WX^3}{3L}\right]_0^L}{\left[-\frac{4WX^3}{3L^2}+\frac{2WX^2}{L}\right]_0^L}\frac{-\frac{wL^4}{L^2}+\frac{4wL^3}{3L^2}}{-\frac{4WL^3}{3L^2}+\frac{2WL^2}{L}}=\frac{-WL^2+\frac{4WL^2}{3}}{-\frac{4WL}{3}+2WL}=\frac{\frac{WL^2}{3}}{\frac{2WL}{3}}$$

$$\bar{X}=\frac{3WL^2}{6WL}=\boldsymbol{\frac{L}{2}}$$

Calculo de las reacciones en los soportes:

$$\sum M_A=0$$

$$\frac{w(5L)}{2}\left[\frac{10}{3}L\right]+\frac{2WL}{3}\left(\frac{L}{2}\right)-(10W)(5L)\left[\frac{5L}{2}\right]-(L)RDY=0$$

$$(L)RDY=\frac{25}{3}WL^2+\frac{WL^2}{3}-125WL^2$$

$$RDY=\frac{-\frac{349}{3}WL^2}{L}=-\frac{349}{3}WL$$

$$\boldsymbol{RDY=\frac{349}{3}WL}\downarrow$$

$$\sum F_Y=0$$

$$-\frac{349}{3}WL-\frac{2}{3}WL+RAY=0$$

$$RAY=\frac{349}{3}WL+\frac{2}{3}WL=\frac{351}{3}WL$$

$$\boldsymbol{RAY=\frac{351}{3}WL}\uparrow$$

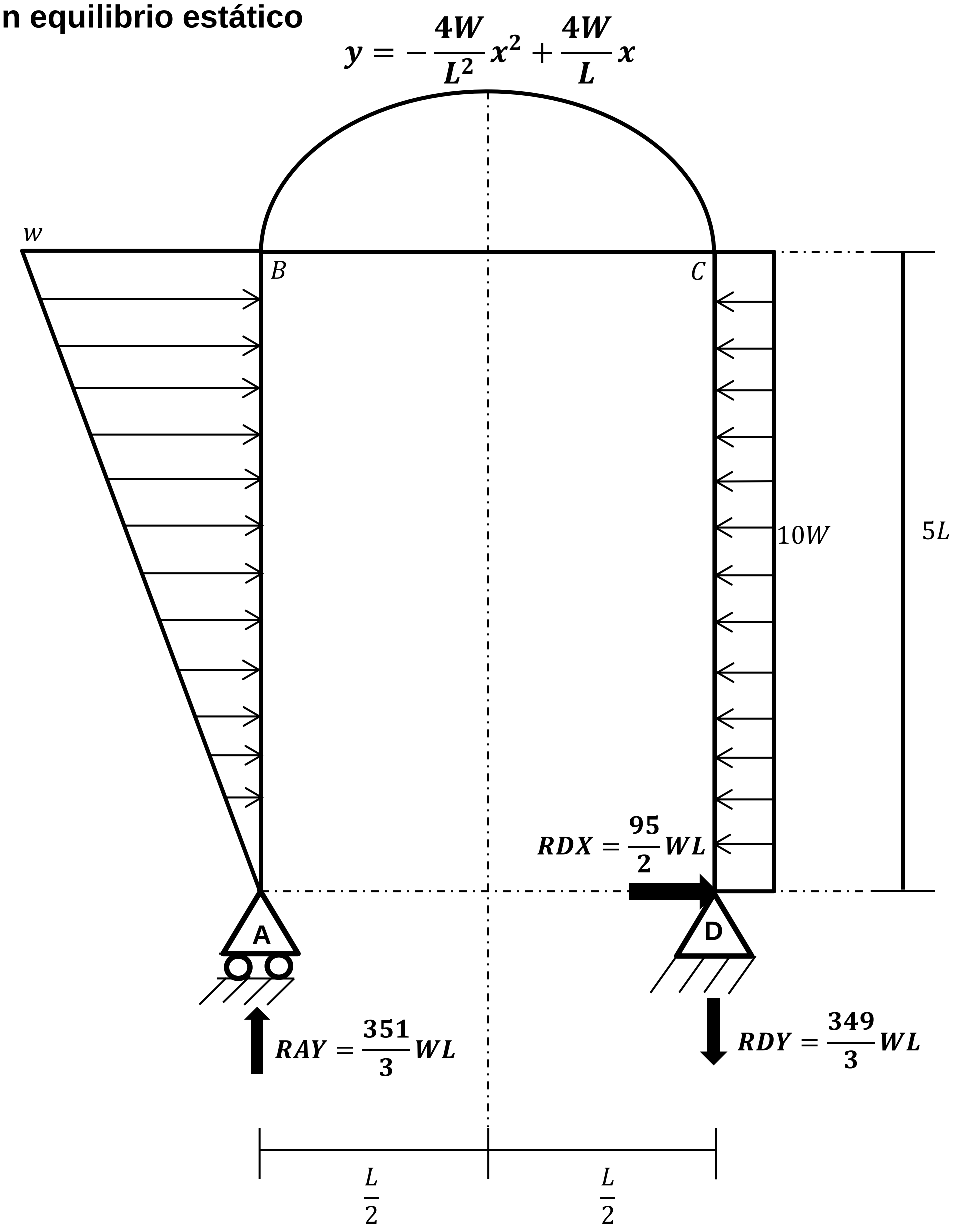
$$\sum F_X = 0$$

$$\frac{W(5L)}{2} - (10W)(5L) + RDX = 0$$

$$RDX = 50WL - \frac{5}{2}WL = \frac{95}{2}WL$$

$$\boldsymbol{RDX = \frac{95}{2}WL} \longrightarrow$$

Marco en equilibrio estático



Para verificar si las reacciones obtenidas son correctas partiremos del principio: Si un sistema bajo la acción de un sistema de fuerzas externo se encuentra en equilibrio, cualquier punto de este está en equilibrio. Realizaremos una sumatoria de momentos con respecto al punto C (nudo C) y debe cumplirse en teorema mencionado anteriormente:

$$\sum M_{NudoC} = 0$$

$$\left(\frac{351}{3}WL\right)(L) - \frac{W(5L)}{2}\left[\frac{5}{3}L\right] - \left(\frac{2}{3}WL\right)\left(\frac{L}{2}\right) + (10W)(5L)\left[\frac{5L}{2}\right] - \left(\frac{95}{2}WL\right)(5L) = 0$$

$$\frac{351}{3}WL^2 - \frac{25}{6}WL^2 - \frac{WL^2}{3} + 125WL^2 - \frac{475}{2}WL^2 = 0$$

$$\sum M_{NudoC} = 0$$

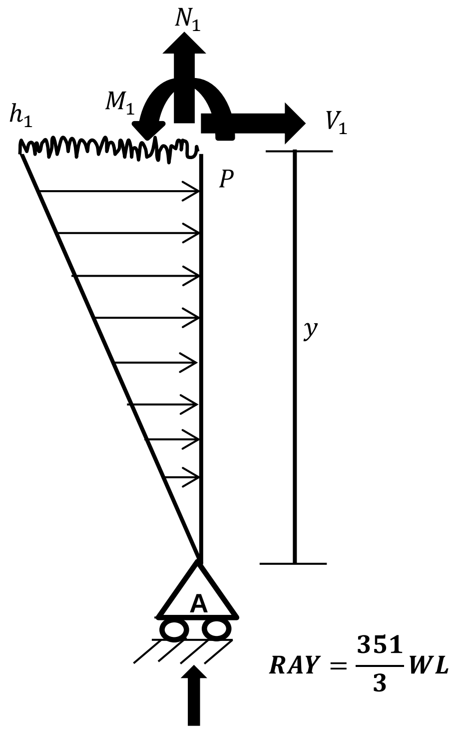
Por lo tanto las reacciones obtenidas el análisis son correctas.

Deducción de las ecuaciones de momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal del marco.

Procedimiento de análisis:

Para encontrar las ecuaciones que describen la variación de los elementos mecánicos de cada miembro del marco se empleara el mismo método utilizado para el análisis del capítulo de vigas, cortando a una distancia X o Y según el eje en el que cada miembro se localice cada miembro, realizando un corte antes de cada variación de carga como se muestra en los siguientes diagramas.

Miembro A-B $\mathbf{0 \leq Y \leq 5L}$



Por trigonometría calculamos h_1

Si a una longitud de 5L corresponde una altura de W, a una longitud Y corresponde una altura h_1

$$h_1 = \frac{yW}{5L}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_1 - \frac{\left(\frac{yW}{5L}\right)(y)}{2}\left[\frac{y}{3}\right] = 0$$

$$\boldsymbol{M_1 = -\frac{Wy^3}{30L}}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$V_1 + \frac{\left(\frac{yW}{5L}\right)(y)}{2} = 0$$

$$\boldsymbol{V_1 = -\frac{Wy^2}{10L}}$$

$$\sum F_Y = 0$$

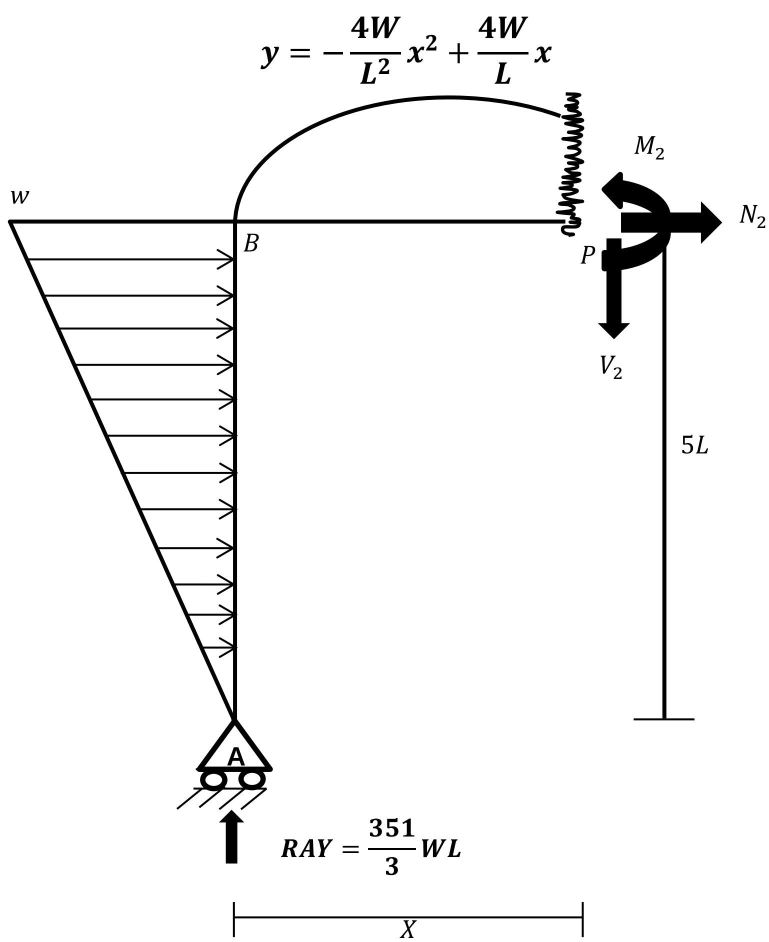
$$N_1 + \frac{\mathbf{351}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{WL} = 0$$

$$\boldsymbol{N_1} = -\frac{\mathbf{351}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{WL}(\boldsymbol{compresion})$$

Evaluando las ecuaciones de fuerza cortante y momento flexionante para verificar continuidad.

Valor de x	Valor del momento 1	Valor del cortante 1
0	0	0
5L	$-\frac{25}{6}WL^2$	$-\frac{5}{2}WL$

Miembro B-C $\boldsymbol{0 \leq x \leq L}$



$$\sum M_P = 0$$

$$-M_2 + \frac{351}{3} WL(X) - \frac{W(5L)}{2}\left[\frac{5}{3}L\right] - \int_0^X \left(-\frac{4W}{L^2}x^2 + \frac{4W}{L}x\right)dx$$

$$\left[X - \frac{\int_0^X \left(-\frac{4W}{L^2}x^3 + \frac{4W}{L}x^2\right)dx}{\int_0^X \left(-\frac{4W}{L^2}x^2 + \frac{4W}{L}x\right)dx}\right] = 0$$

$$M_2 = +\frac{351}{3}WLX - \frac{25}{6}WL^2 - \left(-\frac{4WX^3}{3L^2} + \frac{2WX^2}{L}\right)\left[X - \frac{-\frac{wX^4}{L^2} + \frac{4wX^3}{3L^2}}{-\frac{4WX^3}{3L^2} + \frac{2WX^2}{L}}\right]$$

$$M_2 = -\left(-\frac{4WX^4}{3L^2} + \frac{2WX^3}{L} + \frac{wX^4}{4L^2} - \frac{4wX^3}{3L^2}\right) + \frac{351}{3}WLX - \frac{25}{6}WL^2$$

$$M_2 = -\left(-\frac{4WX^4}{3L^2} + \frac{2WX^3}{L} + \frac{wX^4}{L^2} - \frac{4wX^3}{3L^2}\right) + \frac{351}{3}WLX - \frac{25}{6}WL^2$$

$$M_2 = -\left(-\frac{4WX^4}{3L^2} + \frac{2WX^3}{L} + \frac{wX^4}{L^2} - \frac{4wX^3}{3L^2}\right) + \frac{351}{3}WLX - \frac{25}{6}WL^2$$

$$\boldsymbol{M_2 = \frac{WX^4}{3L^2} - \frac{2WX^3}{3L} + \frac{351}{3}WLX - \frac{25}{6}WL^2}$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_2}$$

$$\boldsymbol{V_2 = \frac{4WX^3}{3L^2} - \frac{2WX^2}{L} + \frac{351}{3}WL}$$

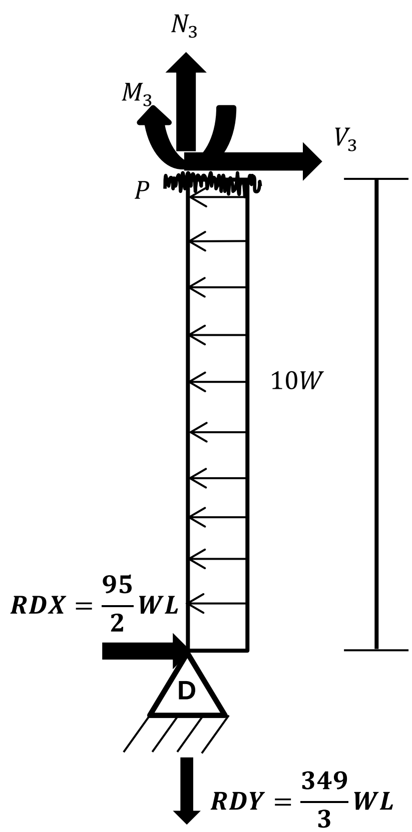
$$\sum F_X = 0$$

$$N_2 + \frac{W(5L)}{2} = 0$$

$$N_2 = -\frac{5}{2}WL(compresion)$$

Valor de x	Valor del momento 2	Valor del cortante 2
0	$-\frac{25}{6}WL^2$	$\frac{351}{3}WL$
L	$\frac{225}{2}WL^2$	$\frac{349}{3}WL$

MIEMBRO C-D $\mathbf{0 \leq Y \leq 5L}$



$$\sum M_P = 0$$

$$-M_3 - (10W)(Y)\left[\frac{Y}{2}\right] + \frac{95}{2}WL(Y) = 0$$

$$M_3 = -5WY^2 + \frac{95}{2}WLY$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-\frac{95}{2}WL + 10WY - V_3 = 0$$

$$\boldsymbol{V_3 = -10WY + \frac{95}{2}WL}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$\boldsymbol{-N_3 + \frac{349}{3}WL = 0}$$

$$\boldsymbol{N_3 = \frac{349}{3}WL(Tension)}$$

Valor de x	Valor del momento 2	Valor del cortante 2
0	0	$-\frac{95}{2}WL$
5L	$\frac{225}{2}WL^2$	$-\frac{5}{2}WL$

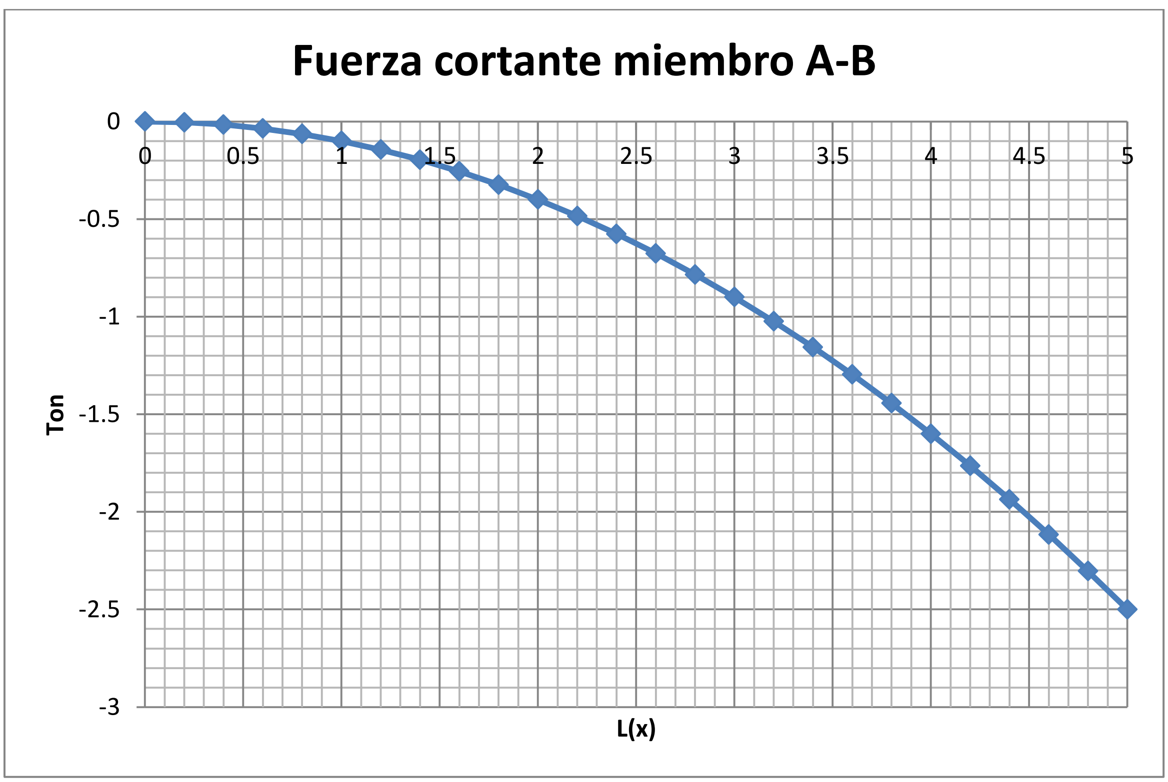
Para facilitar la evaluación de los diagramas de momento.

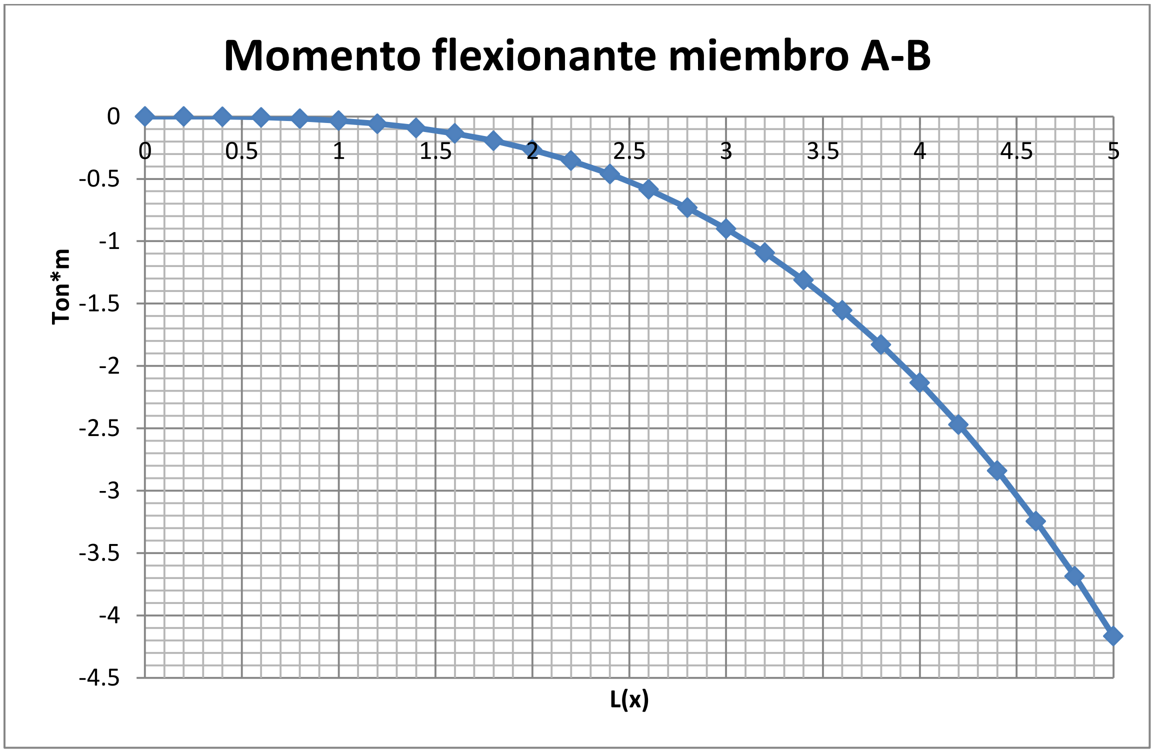
- W=1T/m
- L=1m

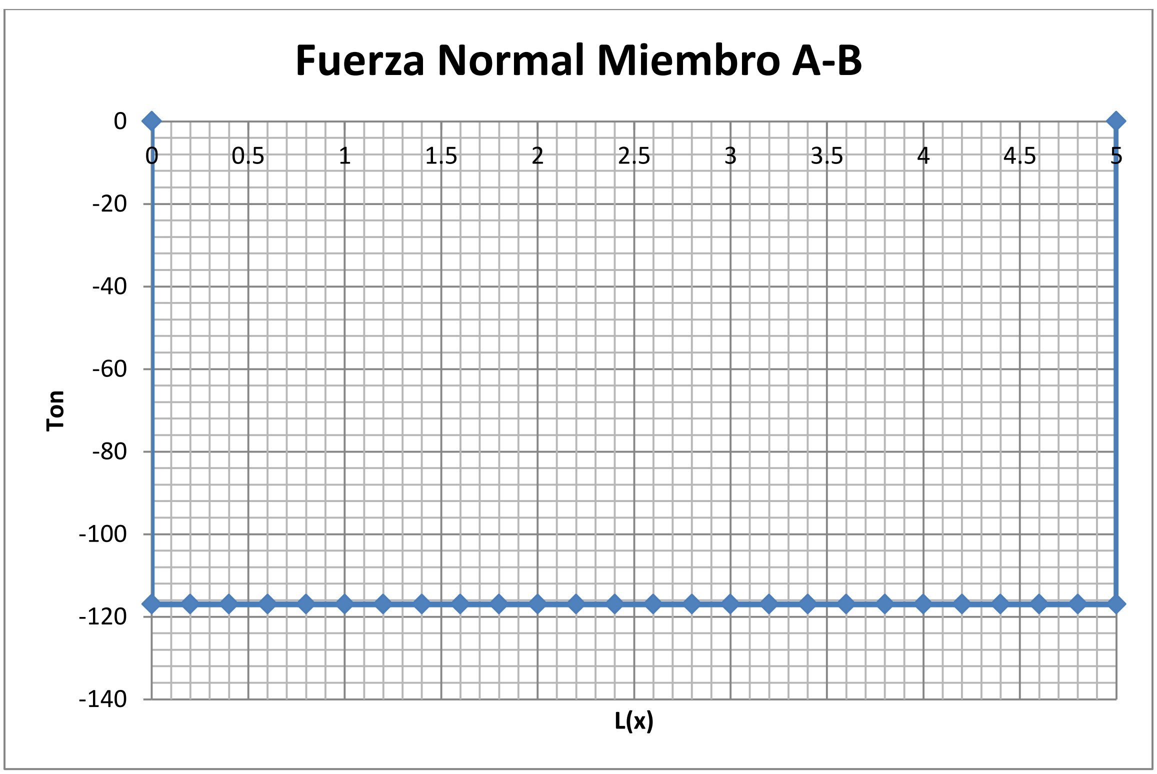
Miembro A-B

L(x)	Cortante	Momento	Normal
0	0	0	-117
0.2	-0.004	-0.000266667	-117
0.4	-0.016	-0.002133333	-117
0.6	-0.036	-0.0072	-117
0.8	-0.064	-0.017066667	-117
1	-0.1	-0.033333333	-117
1.2	-0.144	-0.0576	-117

1.4	-0.196	-0.091466667	-117
1.6	-0.256	-0.136533333	-117
1.8	-0.324	-0.1944	-117
2	-0.4	-0.266666667	-117
2.2	-0.484	-0.354933333	-117
2.4	-0.576	-0.4608	-117
2.6	-0.676	-0.585866667	-117
2.8	-0.784	-0.731733333	-117
3	-0.9	-0.9	-117
3.2	-1.024	-1.092266667	-117
3.4	-1.156	-1.310133333	-117
3.6	-1.296	-1.5552	-117
3.8	-1.444	-1.829066667	-117
4	-1.6	-2.133333333	-117
4.2	-1.764	-2.4696	-117
4.4	-1.936	-2.839466667	-117
4.6	-2.116	-3.244533333	-117
4.8	-2.304	-3.6864	-117
5	-2.5	-4.166666667	-117

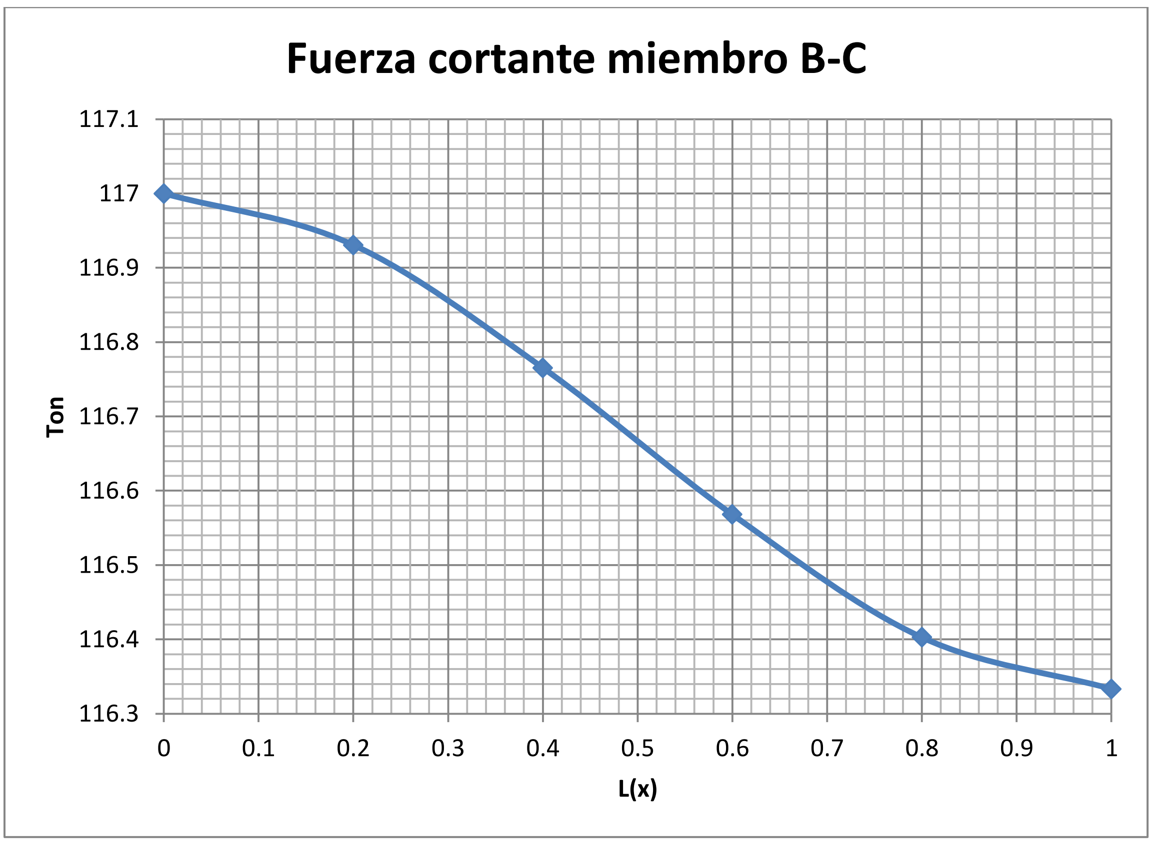


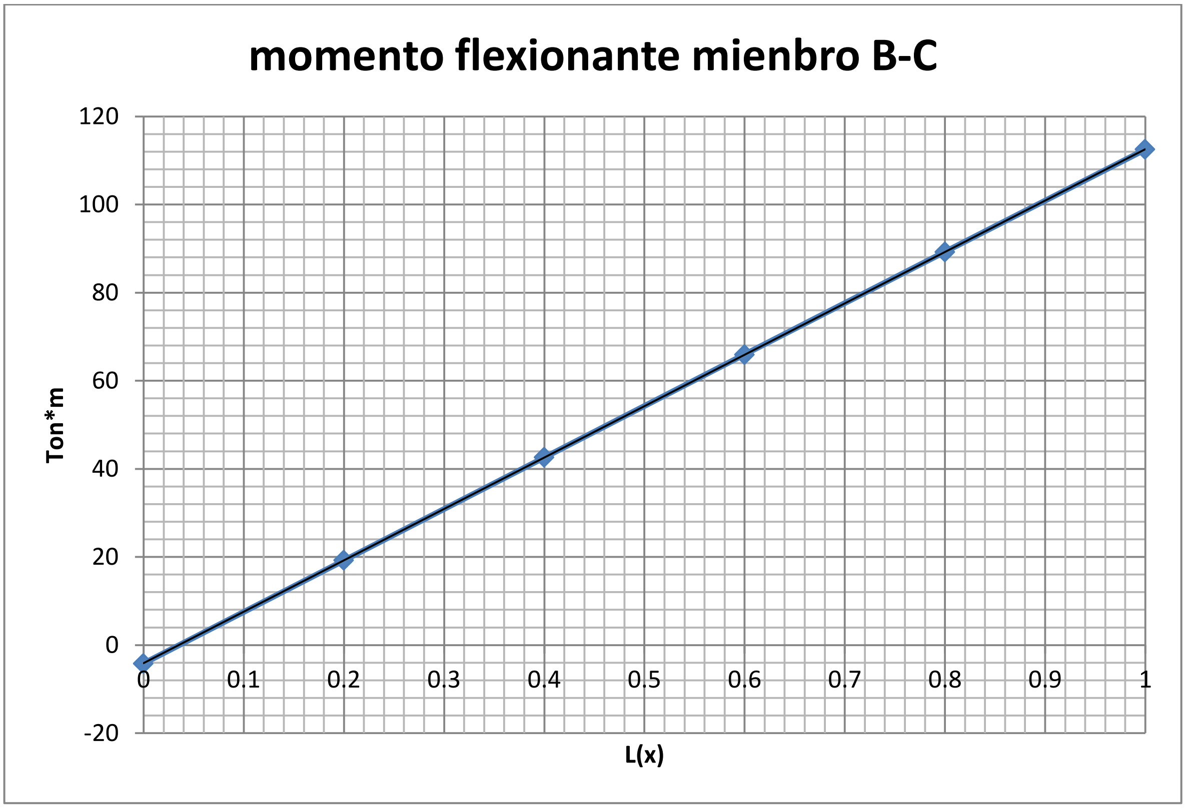

Momento flexionante miembro A-B
Ton*m
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
-4.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
L(x)

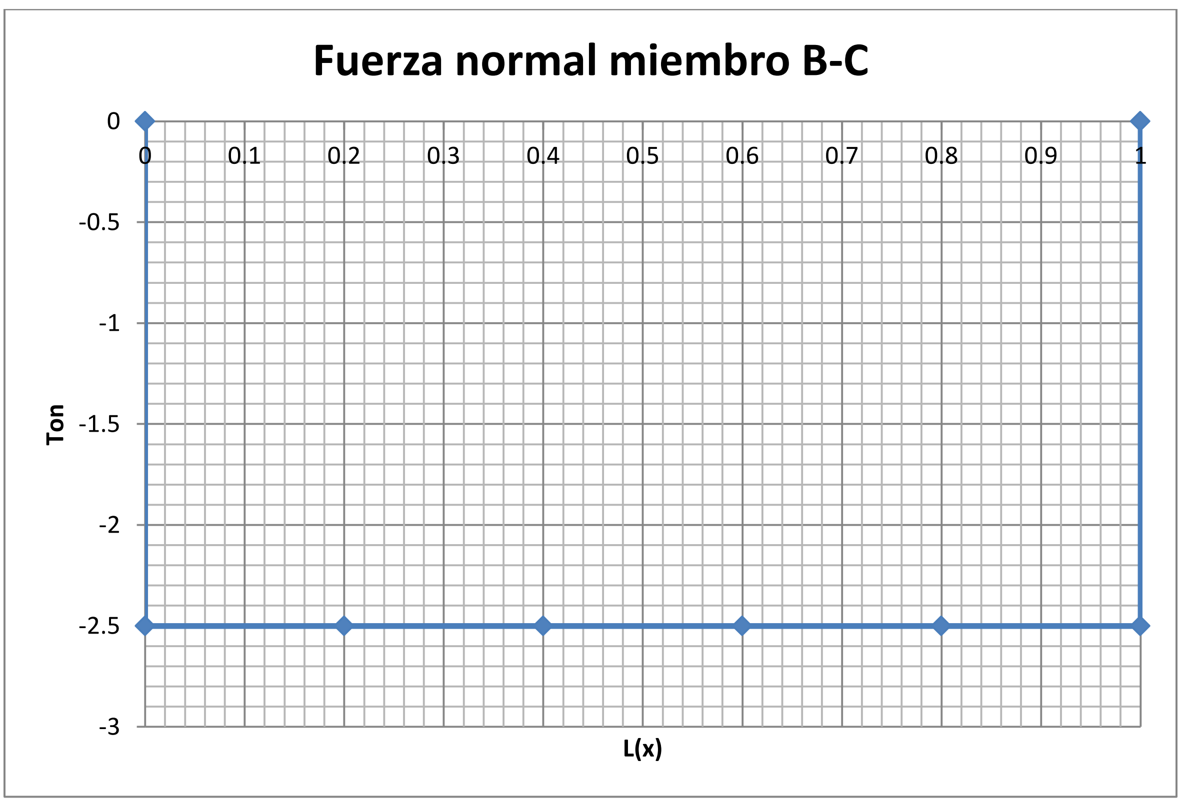

Fuerza Normal Miembro A-B
Ton
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
L(x)

Miembro B-C

L(x)	Cortante	Momento	normal
0	117	-4.16667	-2.5
0.2	116.9307	19.23067	-2.5
0.4	116.7653	42.612	-2.5
0.6	116.568	65.96133	-2.5
0.8	116.4027	89.26267	-2.5
1	116.3333	112.5	-2.5

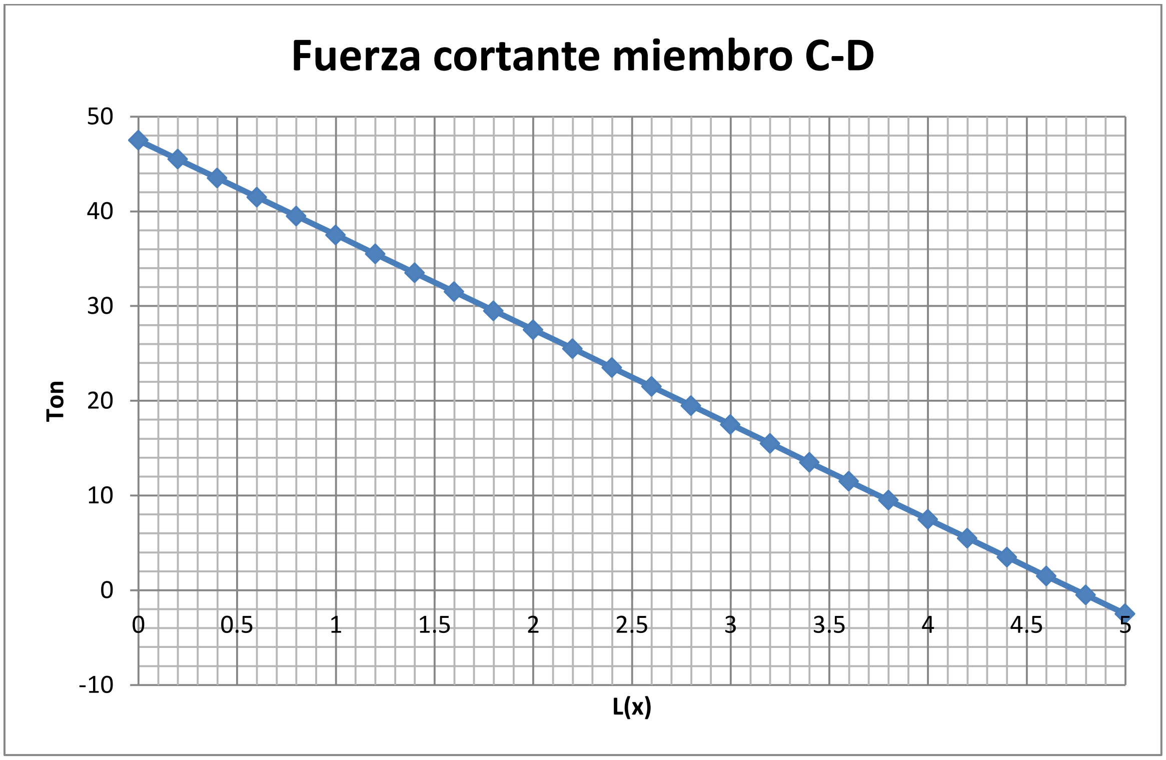


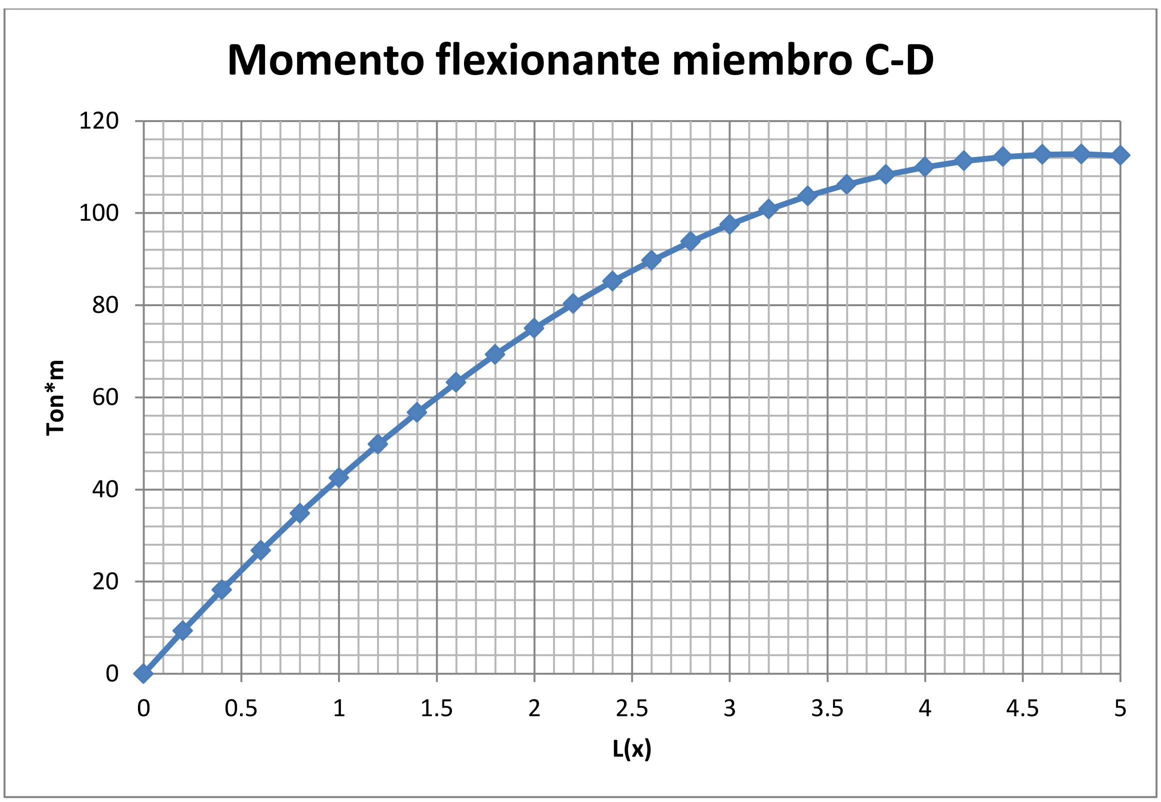

momento flexionante miembro B-C
120
100
80
60
40
20
0
-20
Ton*m
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
L(x)

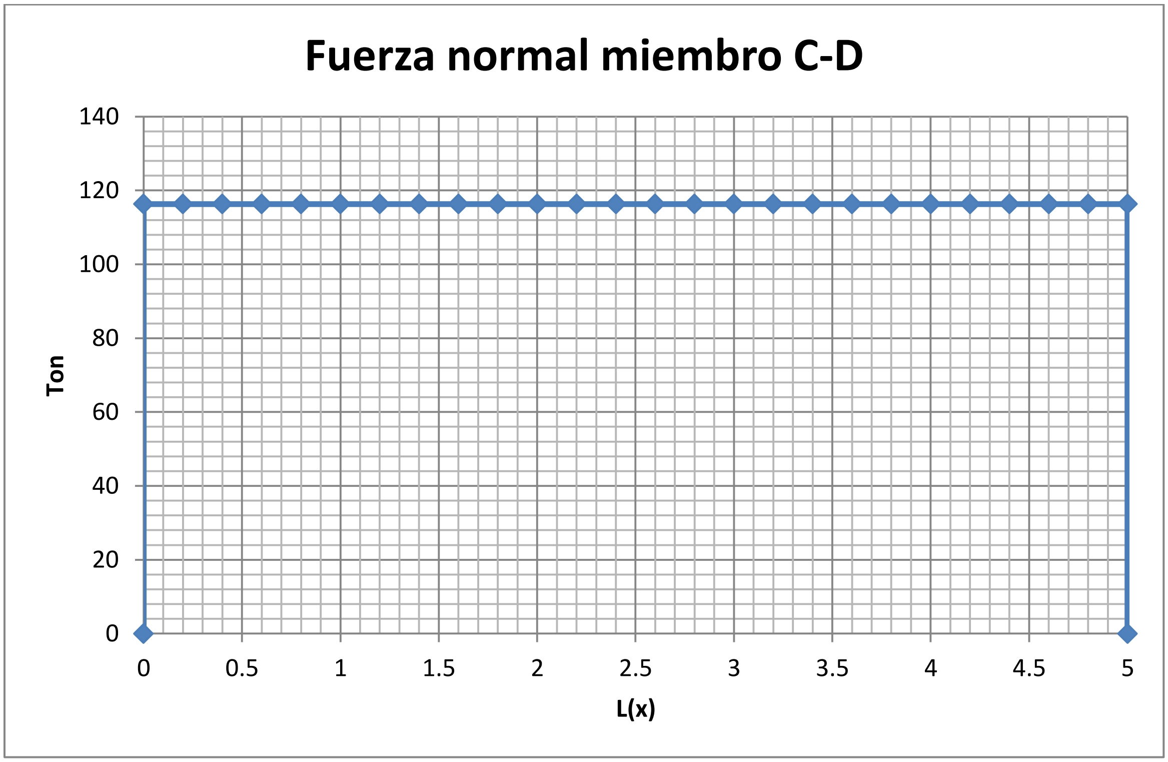

Fuerza normal miembro B-C
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
Ton
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
L(x)

Miembro C-D

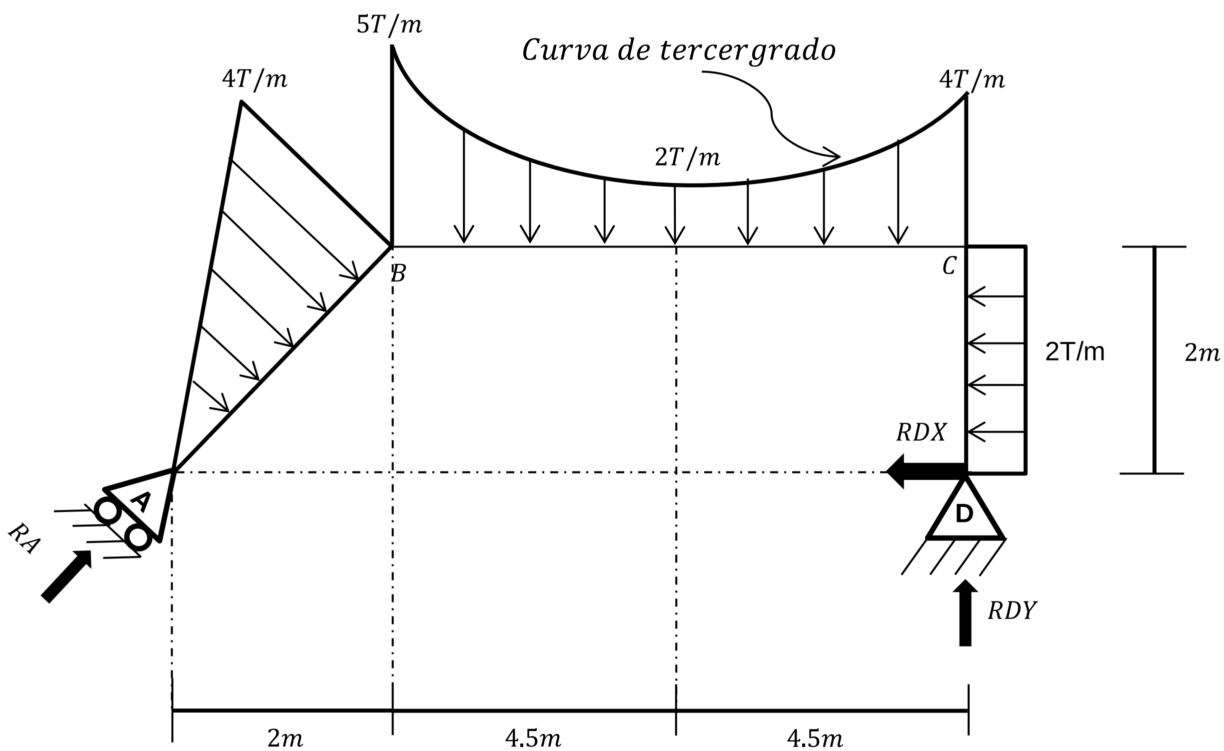
L(X)	Cortante	Momento	Normal
0	47.5	0	116.3333
0.2	45.5	9.3	116.3333
0.4	43.5	18.2	116.3333
0.6	41.5	26.7	116.3333
0.8	39.5	34.8	116.3333
1	37.5	42.5	116.3333
1.2	35.5	49.8	116.3333
1.4	33.5	56.7	116.3333
1.6	31.5	63.2	116.3333
1.8	29.5	69.3	116.3333
2	27.5	75	116.3333
2.2	25.5	80.3	116.3333
2.4	23.5	85.2	116.3333
2.6	21.5	89.7	116.3333
2.8	19.5	93.8	116.3333
3	17.5	97.5	116.3333
3.2	15.5	100.8	116.3333
3.4	13.5	103.7	116.3333
3.6	11.5	106.2	116.3333
3.8	9.5	108.3	116.3333
4	7.5	110	116.3333
4.2	5.5	111.3	116.3333
4.4	3.5	112.2	116.3333
4.6	1.5	112.7	116.3333
4.8	-0.5	112.8	116.3333
5	-2.5	112.5	116.3333


Fuerza cortante miembro C-D
50
40
30
20
10
0
-10
Ton
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
L(x)


Momento flexionante miembro C-D
120
100
80
60
40
20
0
Ton*m
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
L(x)


Fuerza normal miembro C-D
Ton
140
120
100
80
60
40
20
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
L(x)

2.- Del siguiente marco, determine: el valor de las reacciones en los soportes mostrados, las funciones que describen la variación de las acciones internas (momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal) y dibuje los diagramas correspondientes a estas.



Grado de indeterminación del marco:

$$\boldsymbol{r + 3m = 3n + c}$$

$$\boldsymbol{3 + 3(3) = 3(4) + 0}$$

$$\boldsymbol{12 = 12}$$

Por lo tanto nuestro marco es estáticamente determinado y podemos resolverlo con la simple aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático:

Procedimiento de análisis:

En este caso proyectaremos la longitud de los elementos A-B y C-D hasta el punto de intersección al cual denotaremos como el punto “O” a partir del cual tomaremos una sumatoria de momentos, nótese que RA (a pesar de sus componentes) y RDY serán paralelos a “O” por lo que no generaran momento, de esta manera, encontraremos una ecuación que representa el valor de RDX, sin embargo, para realizar una sumatoria de momentos con respecto a los ejes tanto “X” como “Y” habrá que obtener las componentes respectivas que inicialmente se encuentran perpendiculares al eje del elemento A-B, dicho análisis se verá con más claridad en los siguientes diagramas:

Definición de la función de la curva que actúa a lo largo del elemento B-C

Como la curva es de tercer grado tendrá la forma: $y = ax^3 + bx + c$

Tomando en cuenta nuestras condiciones de frontera

Si: x=0 y=5

x=4.5 y=2

x=9 y=4

$5 = a(0)^3 + b(0) + c$ Tomando en cuenta la primera condición evidentemente C= 5 por lo tanto construiremos la función de la curva a partir de las siguientes dos condiciones:

1.- $a(4.5)^3 + b(4.5) = -3$

2.- $a(9)^3 + b(9) = -1$

De la ecuación 2 despejamos a

3.- $a = \frac{-9b-1}{729}$

Sustituimos la ecuación 3 en la ecuación 1 y despejamos b

$$\frac{-9b-1}{729}\left(\frac{729}{8}\right) + b(4.5) = -3$$

$$-\frac{9b}{8}-\frac{1}{8}+4.5b=-3$$

$$\frac{27}{8}b=-\frac{23}{8}$$

$$\boldsymbol{b=-\frac{23}{27}}$$

Sustituimos el valor de b en la ecuación 3

$$a=\frac{-9\left(-\frac{23}{27}\right)-1}{729}=\mathbf{\frac{20}{2187}}$$

La función de la curva es:

$$\boldsymbol{y=\frac{20}{2187}x^3-\frac{23}{27}x+5}$$

Calculo de la carga que ejerce la curva Pc y su brazo de palanca $\bar{x}$ aislando el miembro B-C

$$\boldsymbol{P_c=\int_o^9\left(\frac{20}{2187}x^3-\frac{23}{27}x+5\right)dx=\left[\frac{5}{2187}x^4-\frac{23}{54}x^2+5x\right]_0^9=\frac{51}{2}Ton}$$

$$\bar{x}=\frac{\int_o^9 x\left(\frac{20}{2187}x^3-\frac{23}{27}x+5\right)dx}{\int_o^9\left(\frac{20}{2187}x^3-\frac{23}{27}x^2+5\right)\,dx}=\frac{\left[\frac{4}{2187}x^5-\frac{23}{81}x^3+\frac{5x^2}{2}\right]_0^9}{\left[\frac{5}{2187}x^4-\frac{23}{54}x^2+5x\right]_0^9}=\frac{\frac{207}{2}}{\frac{51}{2}}=\boldsymbol{\frac{69}{17}m}$$

Del siguiente diagrama:

Por trigonometría definimos “H"

$$H=\frac{2(11)}{2}=11m$$

$$h=H-2m=9m$$

$$L_1 = \sqrt{11^2 + 11^2} = 11\sqrt{2}$$

$$L_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$L_3 = 11\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

$$T_Y = \sin 45° \left(\frac{2\sqrt{2} * 4}{2}\right) = 4TON$$

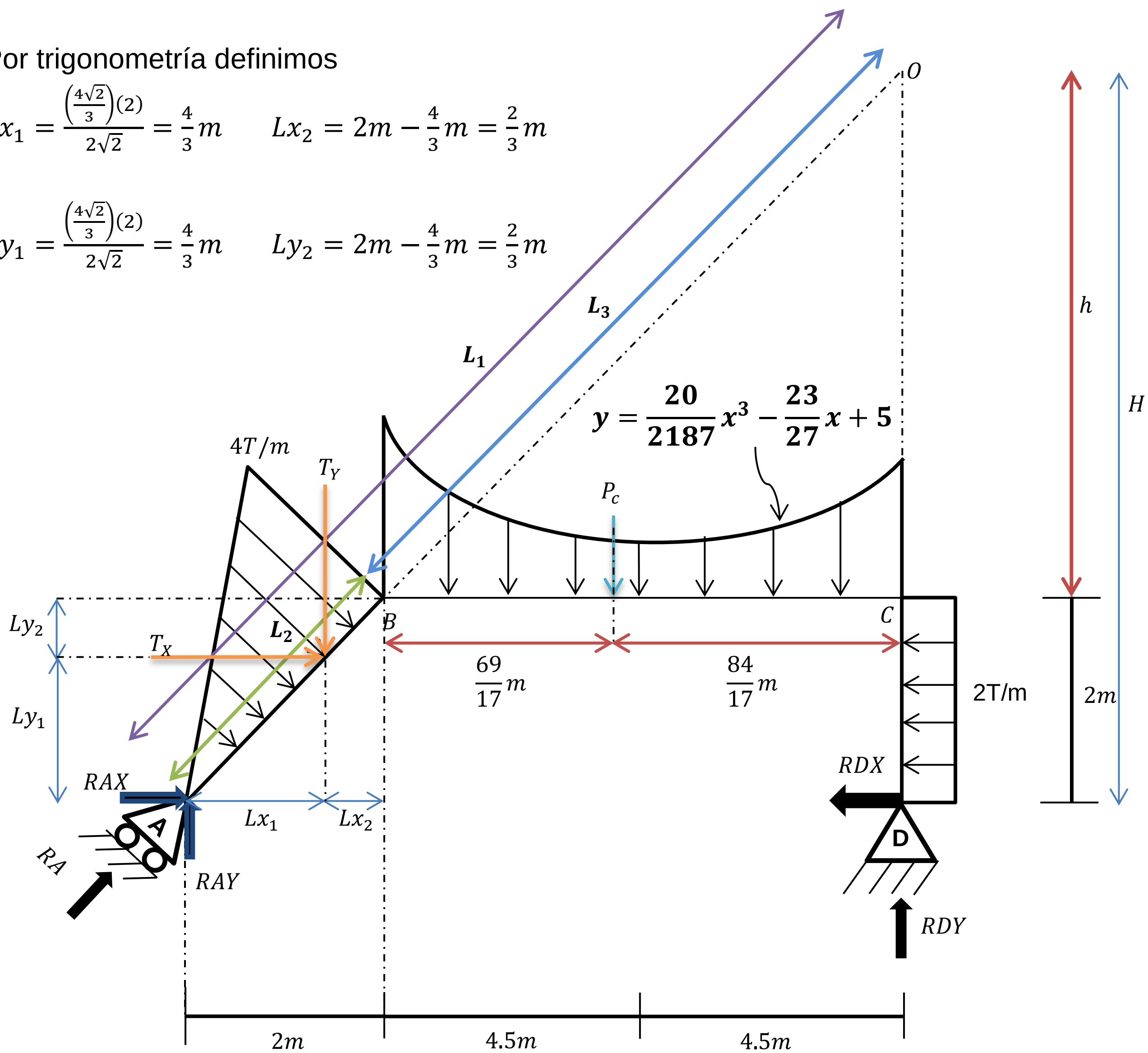
$$T_X = \cos 45° \left(\frac{2\sqrt{2} * 4}{2}\right) = 4TON$$

$$P_C = \frac{51}{2}TON$$

Por trigonometría definimos

$$Lx_1 = \frac{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)(2)}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{3}m \qquad Lx_2 = 2m - \frac{4}{3}m = \frac{2}{3}m$$

$$Ly_1 = \frac{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)(2)}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{3}m \qquad Ly_2 = 2m - \frac{4}{3}m = \frac{2}{3}m$$



$$\sum \boldsymbol{M_O = 0}$$

$$-\frac{(4\,{}^{Ton}\!/_{m})(2\sqrt{2}m)}{2}\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}m + 9\sqrt{2}m\right] - \left(\frac{51}{2}\,{}^{Ton}\!/_{m}\right)\left(\frac{84m}{17}\right) + \left(2\,{}^{Ton}\!/_{m}\right)(2m)(10m) + (11m)RDX = 0$$

$$(11m)RDX = \left(\frac{232}{3}\,{}^{Ton}\!/_{m}\right) + \left(126\,{}^{Ton}\!/_{m}\right) - \left(40\,{}^{Ton}\!/_{m}\right)$$

$$\boldsymbol{RDX} = \frac{\frac{490}{3}{}^{Ton}\!/_{m}}{11m} = \boldsymbol{\frac{490}{33}Ton} \longleftarrow$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$RAX + \frac{(4\,{}^{Ton}\!/_{m})(2\sqrt{2}m)}{2}(\cos 45°) - \left(2\,{}^{Ton}\!/_{m}\right)(2m) - \frac{490}{33}\,{}^{Ton}\!/_{m} = 0$$

$$RAX = -4Ton + 4Ton + \frac{490}{33}\,{}^{Ton}\!/_{m}$$

$$\boldsymbol{RAX} = \boldsymbol{\frac{490}{33}Ton} \longrightarrow$$

$$\sum \boldsymbol{M_D = 0}$$

$$(11m)RAY - \frac{(4\,{}^{Ton}\!/_{m})(2\sqrt{2}m)}{2}[Sen45°]\left\{9m + \frac{2}{3}m\right\} - \left(\frac{51}{2}\,{}^{Ton}\!/_{m}\right)\left(\frac{84m}{17}\right) + \left(2\,{}^{Ton}\!/_{m}\right)(2m)(1m) + \frac{(4\,{}^{Ton}\!/_{m})(2\sqrt{2}m)}{2}[Cos45°]\left\{\frac{4}{3}m\right\} = 0$$

$$(11m)RAY = \frac{116}{3}\,{}^{Ton}\!/_{m} + 126\,{}^{Ton}\!/_{m} + 4\,{}^{Ton}\!/_{m} - \frac{16}{3}\,{}^{Ton}\!/_{m}$$

$$\boldsymbol{RAY} = \frac{\frac{490}{3}{}^{Ton}\!/_{m}}{11m} = \boldsymbol{\frac{490}{33}Ton} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{490}{33}Ton - \frac{\left(4\,{}^{Ton}/_{m}\right)\left(2\sqrt{2}m\right)}{2}[Sen\,45°] - \frac{51}{2}{}^{Ton}/_{m} + RDY = 0$$

$$RDY = \frac{967}{66}Ton \uparrow$$

Verificando el valor de las reacciones:

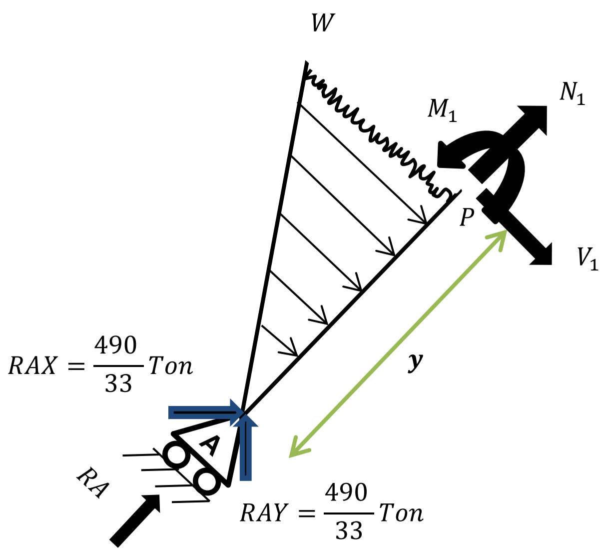
$$\sum M_C = 0$$

$$\left(\frac{490}{33}\right)(11) - \left(\frac{490}{33}\right)(2) - (4)\left(\frac{2}{3}\right) - (4)\left(\frac{29}{3}\right) - \left(\frac{51}{2}\right)\left(\frac{84}{17}\right) + (4)(1) + \left(\frac{490}{33}\right)(2) = 0$$

Por lo tanto las reacciones obtenidas son correctas.

Deducción de las funciones que describen la variación de (momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal) en el marco empleando el método de secciones:

Miembro A-B $\quad 0 \leq Y \leq 2\sqrt{2}m$



Por trigonometría calculamos W

$$W = \frac{4Y}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,Y$$

$$\sum \boldsymbol{M_P = 0}$$

$$-M_1 - \frac{(\sqrt{2}\,Y)(Y)}{2}\left[\frac{Y}{3}\right] = 0$$

$$\boldsymbol{M_1 = -\frac{\sqrt{2}}{6}Y^3}$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx_1}$$

$$\boldsymbol{V_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}Y^2}$$

$$\sum \boldsymbol{F_x = 0}$$

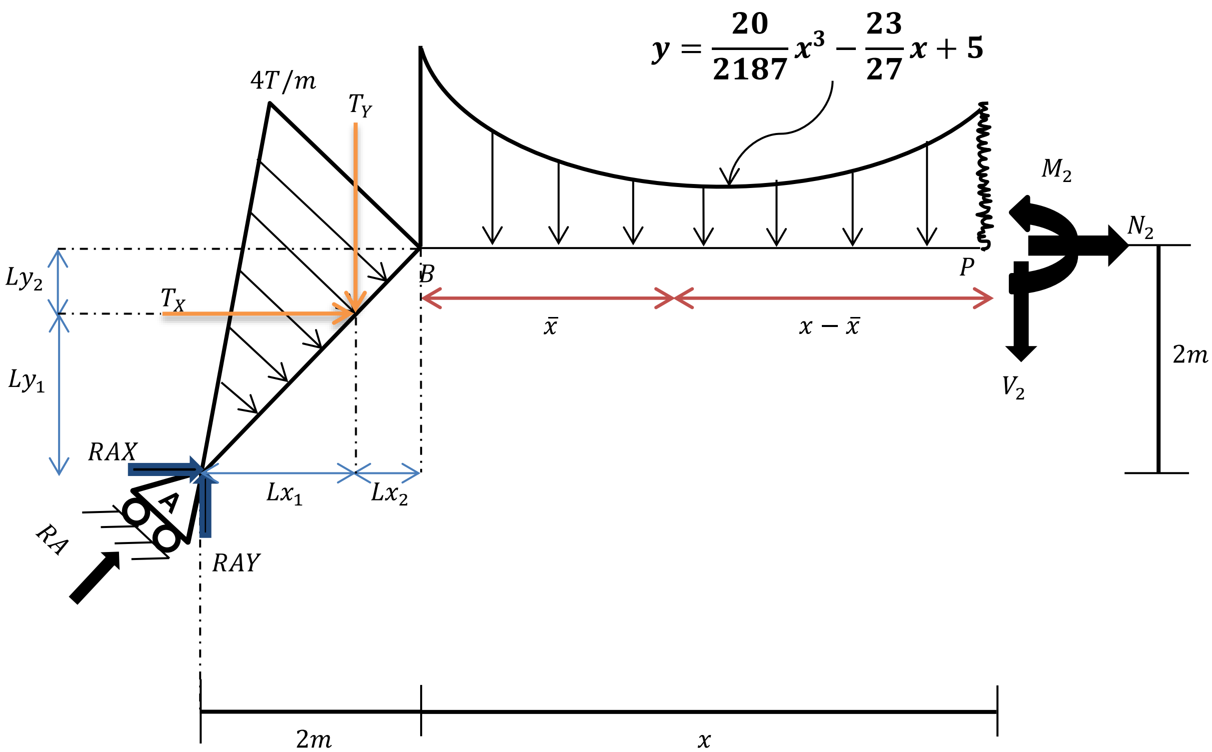
$$N_1 + RA = 0$$

$$N_1 = -\sqrt{\left(\frac{490}{33}\right)^2 + \left(\frac{490}{33}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{N_1 = -20.99982865Ton(compresion)}$$

Valor de x	Valor del momento 1	Valor del cortante 1
0	0	0
$\boldsymbol{2\sqrt{2}}$	$-\frac{16}{3}Ton * m$	$-4\sqrt{2}Ton$

Miembro B - C $\qquad 0 \le x \le 9m$



Calculo de la carga transmitida por la parábola Pc y brazo de palanca $\bar{x}$ aislando el miembro B-C

$$P_C = \int_0^x \left(\frac{20}{2187}x^3 - \frac{23}{27}x + 5\right)dx = \frac{5}{2187}x^4 - \frac{23}{54}x^2 + 5x$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^x x\left(\frac{20}{2187}x^3 - \frac{23}{27}x + 5\right)dx}{\int_0^x \left(\frac{20}{2187}x^3 - \frac{23}{27}x + 5\right)dx} = \frac{\frac{4}{2187}x^5 - \frac{23}{81}x^3 + \frac{5x^2}{2}}{\frac{5}{2187}x^4 - \frac{23}{54}x^2 + 5x}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_2 + \frac{490}{33}(x+2) - \frac{490}{33}(2) - 4\left(\frac{2}{3}\right) - 4\left(x + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{5}{2187}x^4 - \frac{23}{54}x^2 + 5x\right)$$

$$\left(x-\frac{\frac{4}{2187}x^5-\frac{23}{81}x^3+\frac{5x^2}{2}}{\frac{5}{2187}x^4-\frac{23}{54}x^2+5x}\right)=0$$

$$M_2=-\left(\frac{5}{2187}x^5-\frac{23}{54}x^3+5x^2-\frac{4}{2187}x^5+\frac{23}{81}x^3-\frac{5x^2}{2}\right)+\frac{490}{33}x+\frac{980}{33}-\frac{980}{33}-\frac{8}{3}$$
$$-4x-\frac{8}{3}$$

$$\boldsymbol{M_2=-\frac{x^5}{2187}+\frac{23}{162}x^3-\frac{5x^2}{2}+\frac{358}{33}x-\frac{16}{3}}$$

$$V_2=\frac{dM_2}{dx_2}$$

$$\boldsymbol{V_2=-\frac{5x^4}{2187}+\frac{23}{54}x^2-5x+\frac{358}{33}}$$

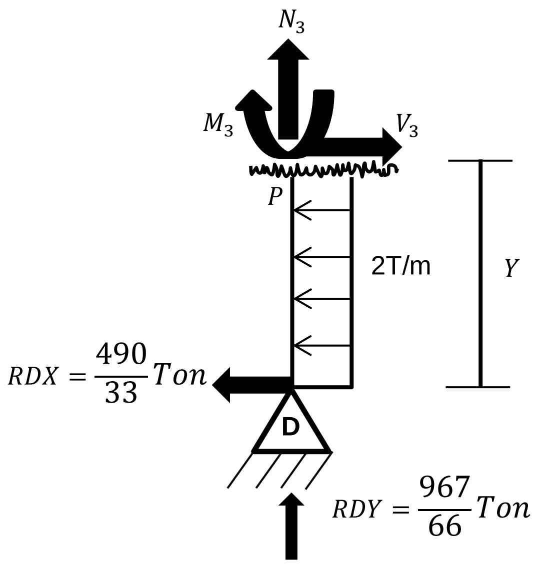
$$\boldsymbol{\sum F_x=0}$$

$$N_2+\frac{490}{33}+4=0$$

$$\boldsymbol{N_2=-\frac{622}{33}Ton(compresion)}$$

Valor de x	Valor del momento 2	Valor del cortante 2
0	$-\frac{16}{3}Ton*m$	$\frac{358}{33}Ton$
$\boldsymbol{9m}$	$-\frac{1112}{33}Ton*m$	$-\frac{967}{66}Ton$

MIEMBRO C-D $\mathbf{0 \leq Y \leq 2m}$



$$\sum \boldsymbol{M_P = 0}$$

$$-M_3 - (2)(Y)\left[\frac{Y}{2}\right] - \frac{490}{33}Y = 0$$

$$\boldsymbol{M_3 = -Y^2 - \frac{490}{33}Y}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-V_3 + (2)(Y) + \frac{490}{33} = 0$$

$$\boldsymbol{V_3 = -2Y - \frac{490}{33}}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$-N_3 + \frac{967}{66} = 0$$

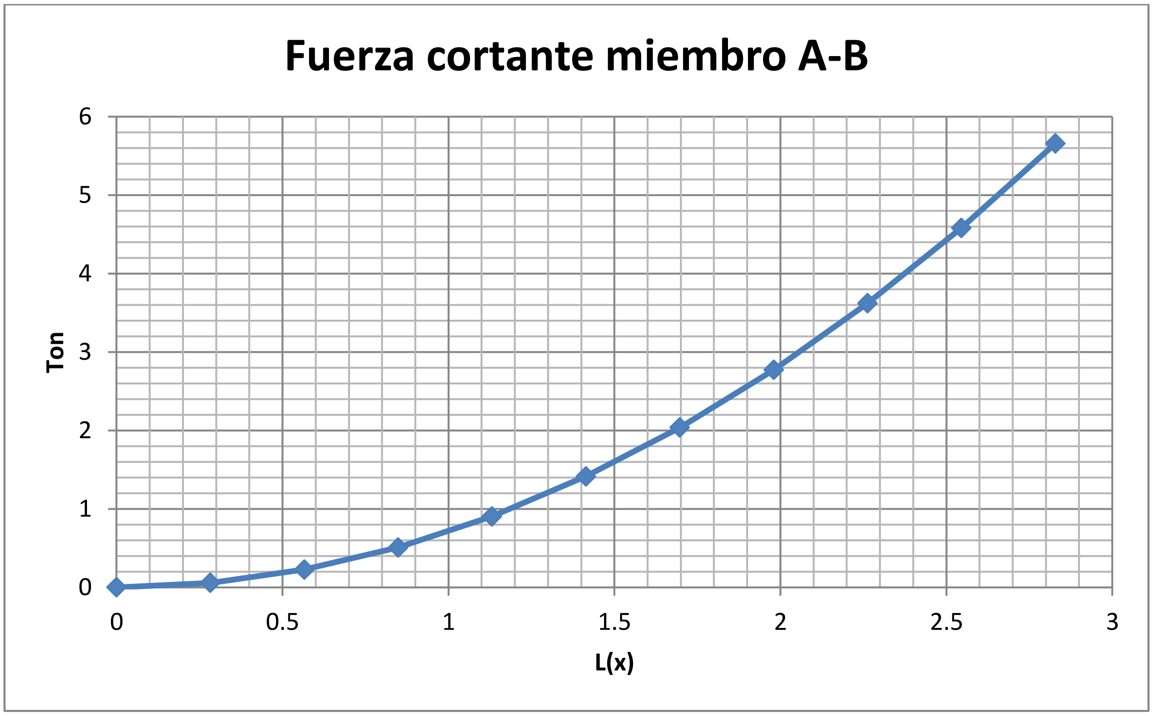
$$\boldsymbol{N_3 = -\frac{967}{66} Ton(compresion)}$$

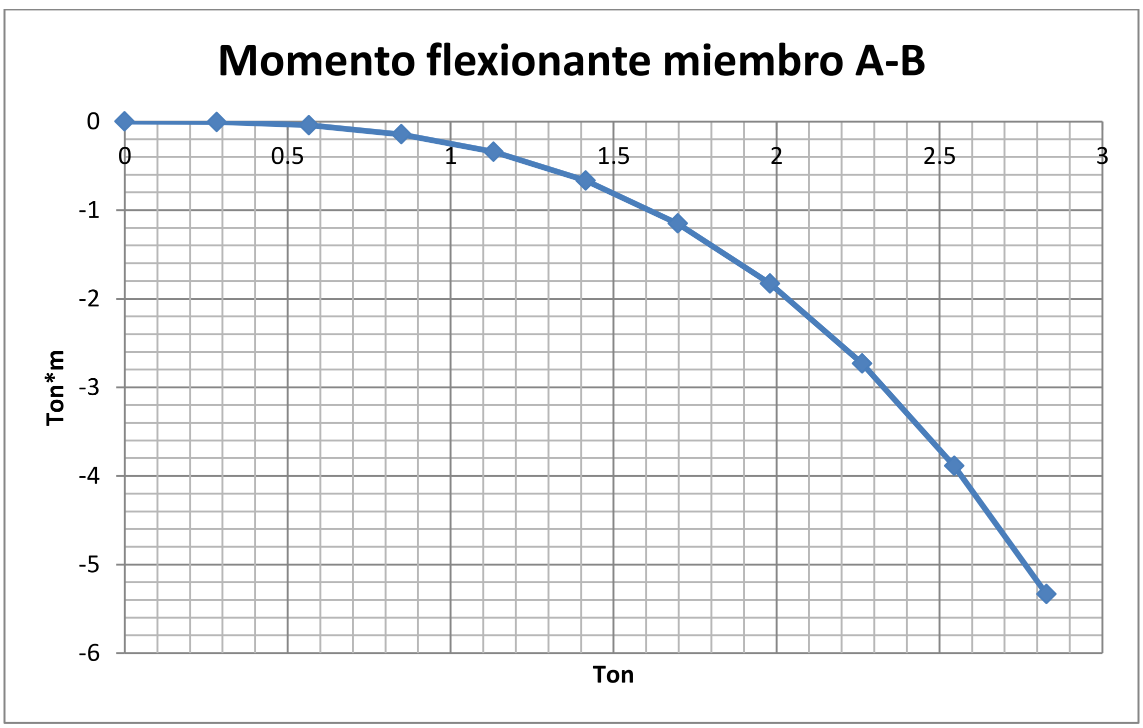
Valor de x	Valor del momento 3	Valor del cortante 3
0	0	$-\frac{490}{33}Ton$
$\boldsymbol{2m}$	$-\frac{1112}{33}Ton*m$	$-\frac{622}{66}Ton$

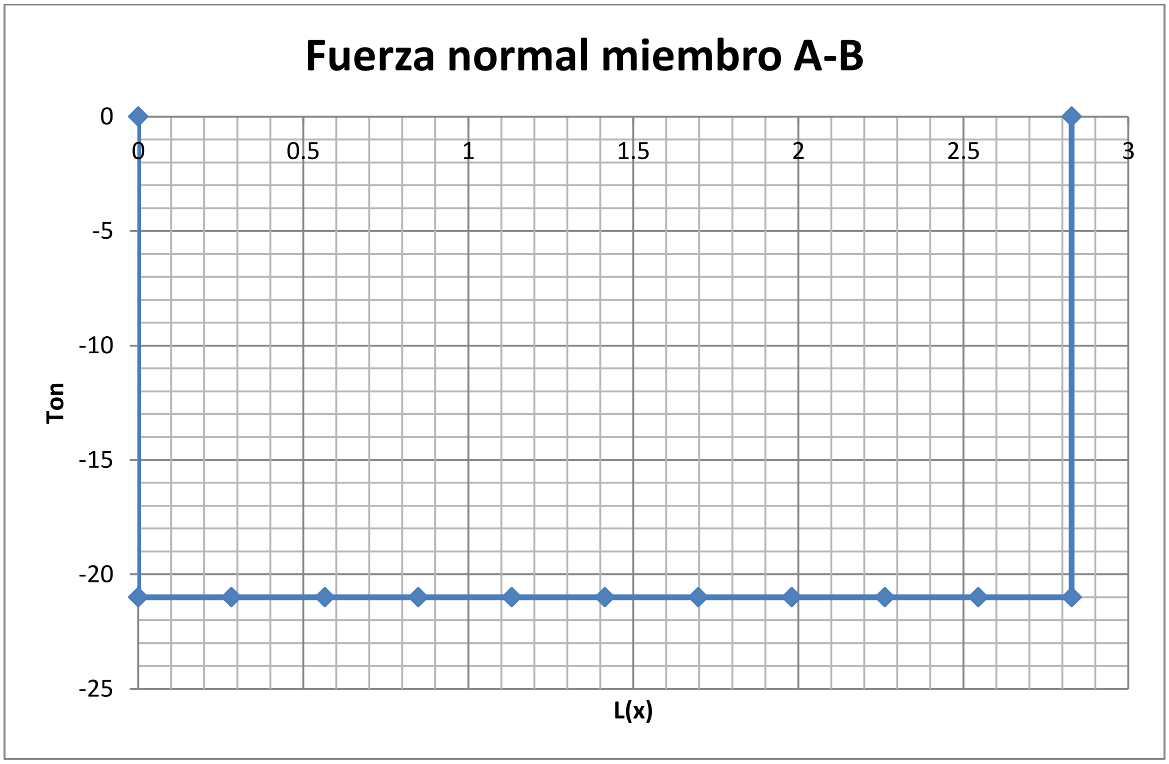
Diagramas de momento flexionante, fuerza cortante y normal en el marco.

Miembro A-B $\boldsymbol{0 \leq Y \leq 2\sqrt{2}m}$

L(x)	Cortante	Momento	Normal
0	0	0	-20.99982865
0.282842712	0.056568542	-0.005333333	-20.99982865
0.565685425	0.22627417	-0.042666667	-20.99982865
0.848528137	0.509116882	-0.144	-20.99982865
1.13137085	0.90509668	-0.341333333	-20.99982865
1.414213562	1.414213562	-0.666666667	-20.99982865
1.697056275	2.03646753	-1.152	-20.99982865
1.979898987	2.771858582	-1.829333333	-20.99982865
2.2627417	3.62038672	-2.730666667	-20.99982865
2.545584412	4.582051942	-3.888	-20.99982865
2.828427125	5.656854249	-5.333333333	-20.99982865


Fuerza cortante miembro A-B
Ton
6
5
4
3
2
1
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
L(x)

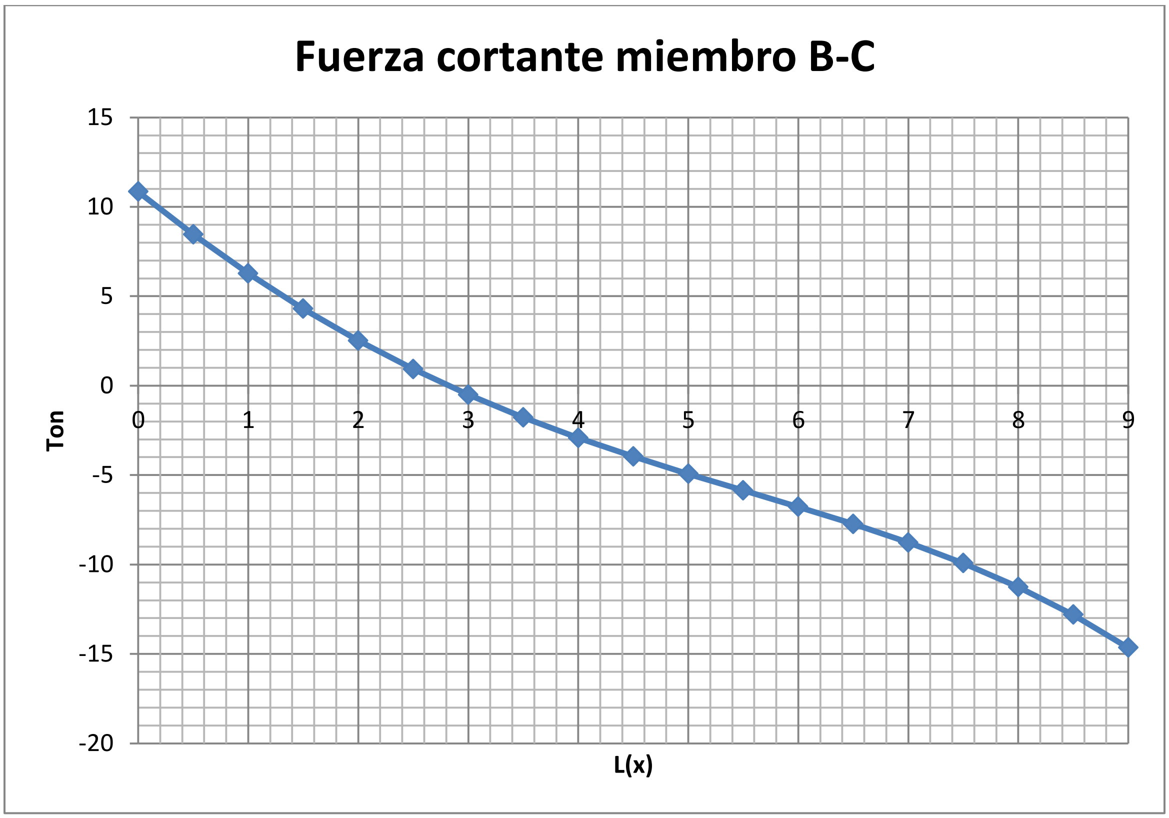

Momento flexionante miembro A-B
Ton*m
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
Ton

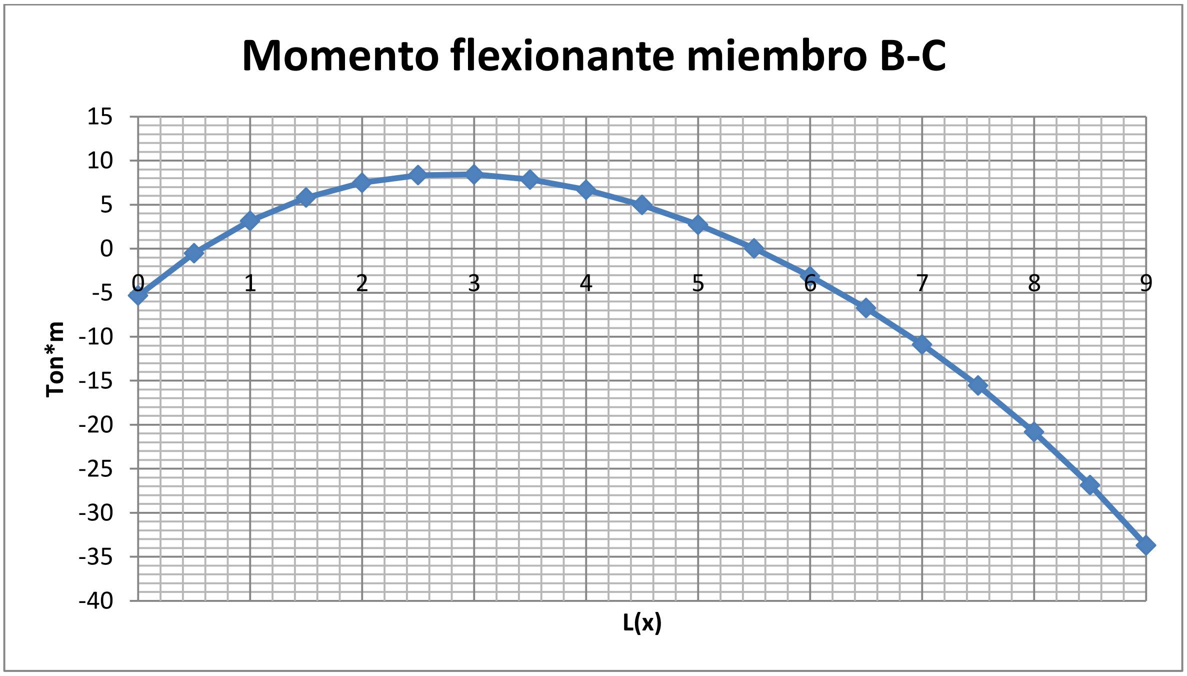


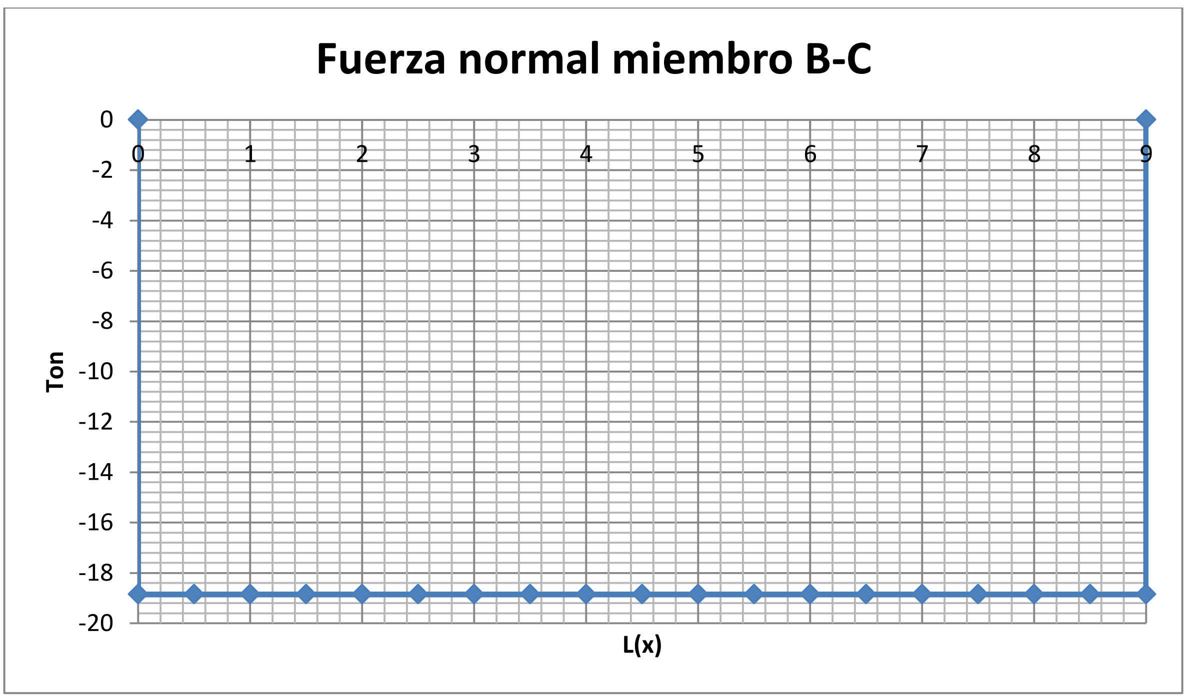
Miembro B - C $0 \leq x \leq 9m$

L(x)	Cortante	Momento	Normal
0	10.84848485	-5.333333333	-18.84848485
0.5	8.45482344	-0.516358284	-18.84848485
1	6.272124538	3.156669576	-18.84848485
1.5	4.295244108	5.790088384	-18.84848485
2	2.515608763	7.484806917	-18.84848485
2.5	0.921215758	8.336589922	-18.84848485
3	-0.503367003	8.434343434	-18.84848485
3.5	-1.777000977	7.858400102	-18.84848485
4	-2.921976971	6.678804506	-18.84848485
4.5	-3.964015152	4.953598485	-18.84848485
5	-4.932265037	2.727106456	-18.84848485
5.5	-5.859305504	0.028220736	-18.84848485
6	-6.781144781	-3.131313131	-18.84848485
6.5	-7.737220456	-6.758611059	-18.84848485
7	-8.770399468	-10.88136509	-18.84848485
7.5	-9.926978114	-15.54955808	-18.84848485

8	-11.25668205	-20.83717837	-18.84848485
8.5	-12.81266627	-26.84393446	-18.84848485
9	-14.65151515	-33.6969697	-18.84848485

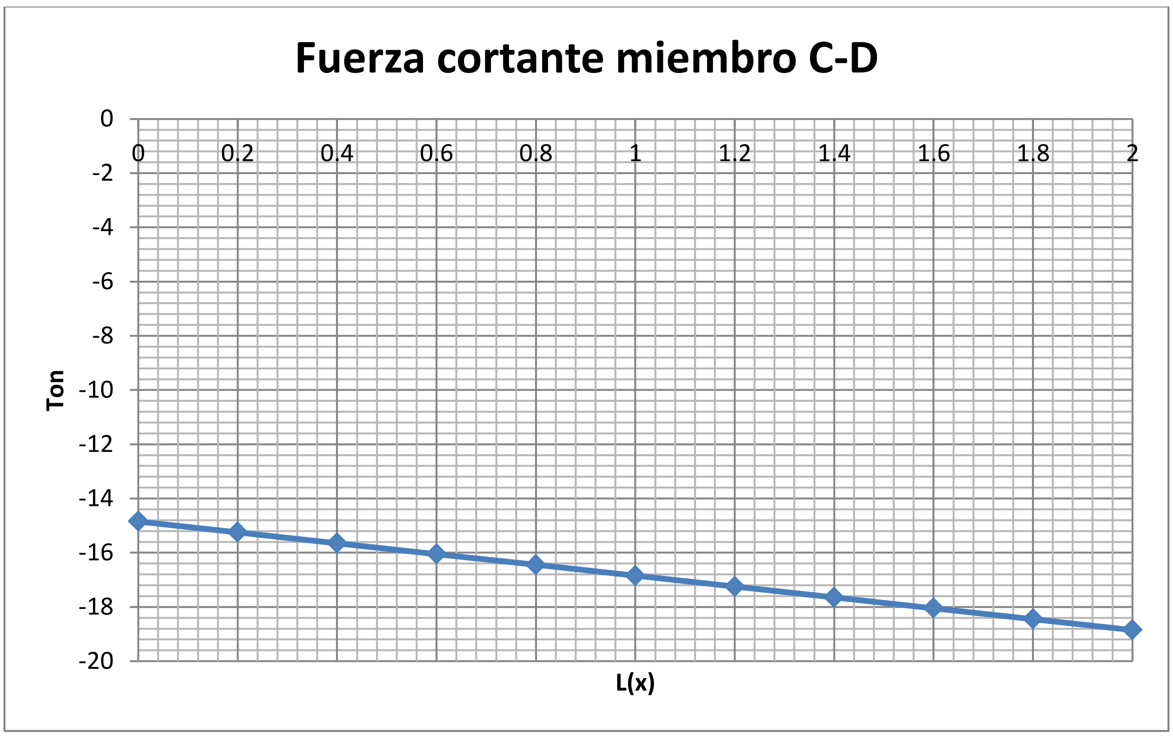


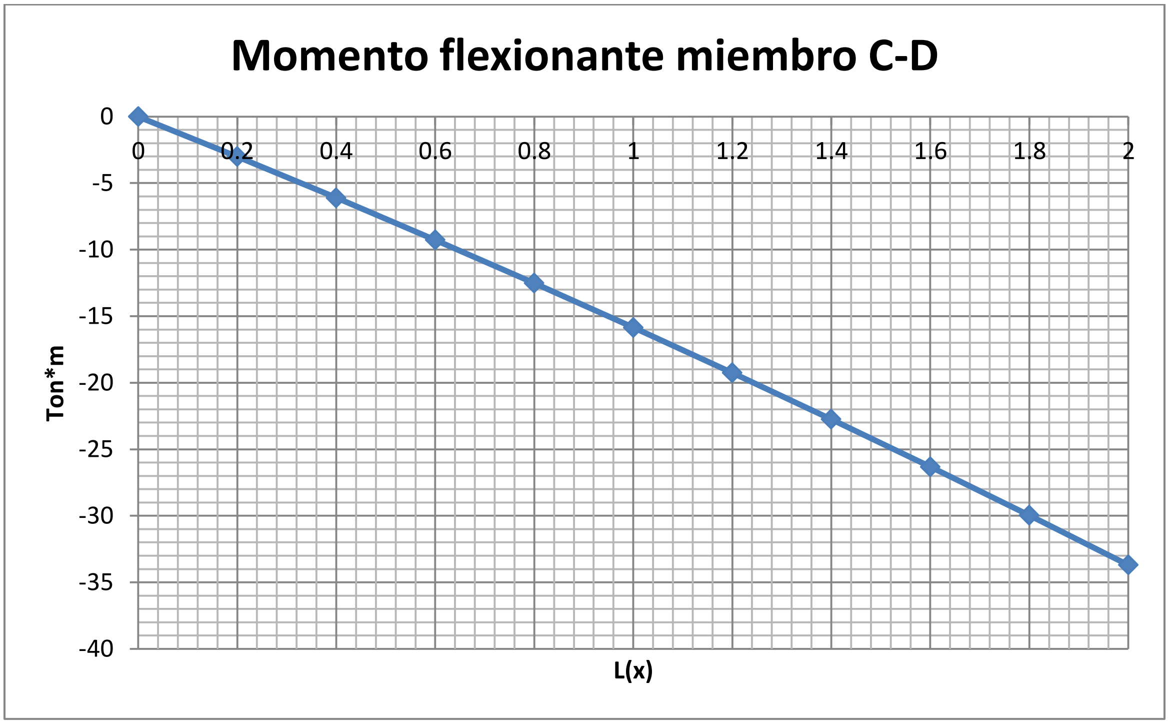

Momento flexionante miembro B-C
Ton*m
L(x)
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

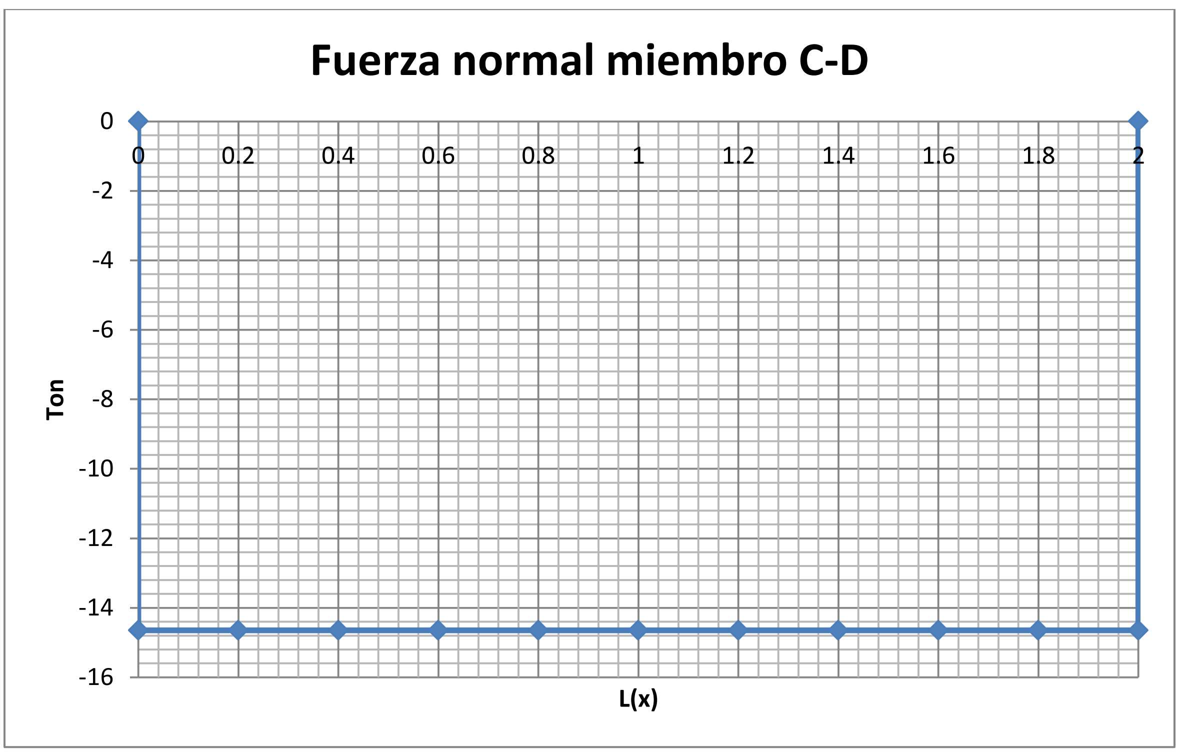

Fuerza normal miembro B-C
Ton
L(x)
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
-18
-20
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

MIEMBRO C-D $0 \leq Y \leq 2m$

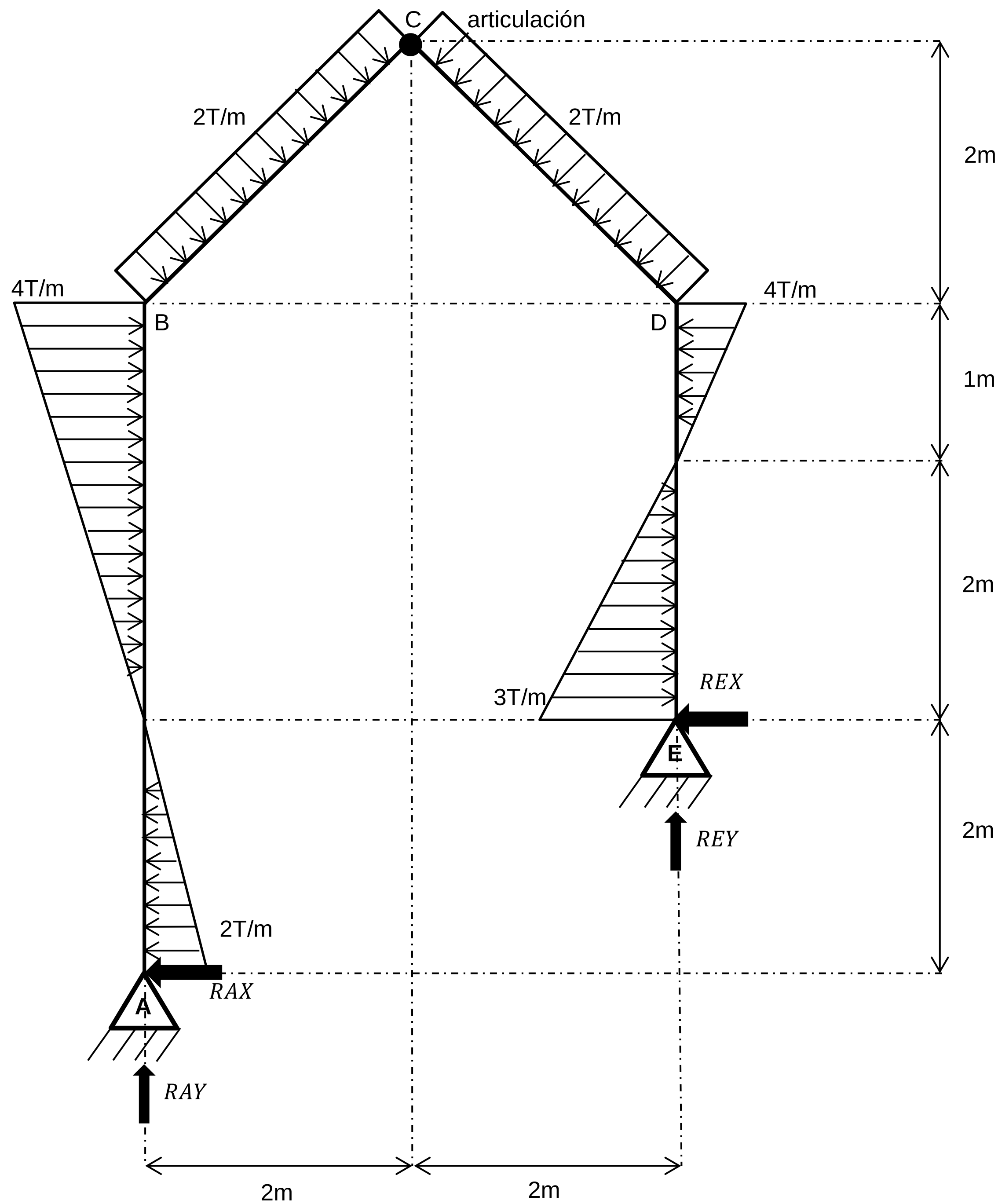
L(x)	Cortante	Momento	Normal
0	-14.84848485	0	-14.65151515
0.2	-15.24848485	-3.00969697	-14.65151515
0.4	-15.64848485	-6.099393939	-14.65151515
0.6	-16.04848485	-9.269090909	-14.65151515
0.8	-16.44848485	-12.51878788	-14.65151515
1	-16.84848485	-15.84848485	-14.65151515
1.2	-17.24848485	-19.25818182	-14.65151515
1.4	-17.64848485	-22.74787879	-14.65151515
1.6	-18.04848485	-26.31757576	-14.65151515
1.8	-18.44848485	-29.96727273	-14.65151515
2	-18.84848485	-33.6969697	-14.65151515




Momento flexionante miembro C-D
Ton*m
L(x)
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2


Fuerza normal miembro C-D
Ton
L(x)
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
-16
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

3.- Del siguiente marco, determine: el valor de las reacciones en los soportes mostrados, las funciones que describen la variación de las acciones internas (momento flexionante, fuerza cortante) y dibuje los diagramas correspondientes a estas, nótese que en el nudo C existe una articulación de momento.



Grado de indeterminación del marco:

$$\boldsymbol{r+3m=3n+c}$$

$$\boldsymbol{4+3(4)=3(5)+1}$$

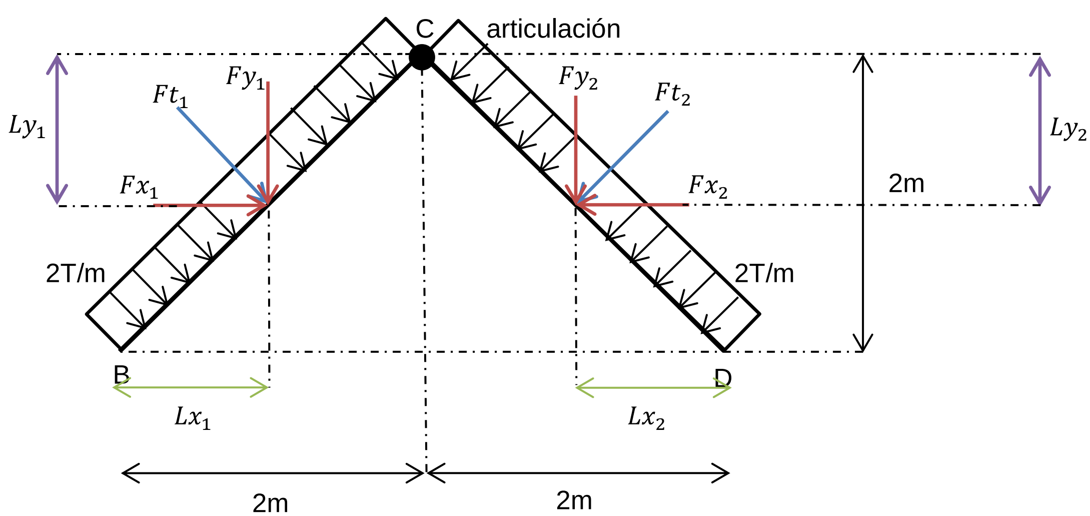
$$\boldsymbol{16=16}$$

Por lo tanto nuestro marco es estáticamente determinado y podemos resolverlo con la simple aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático:

Para dar solución al problema planteado, se observa que el nudo C se conforma de una articulación a momento, a partir de la cual se puede plantear la ecuación de equilibrio $\sum M=0$ sin embargo, nótese que al efectuar dicha condición, ya sea hacia el lado izquierdo o hacia el lado derecho del nudo, se obtiene una ecuación con dos incógnitas, por definición, de la manera antes mencionada no es posible conocer las reacciones en los soportes mostrados, por lo que para dar solución a dicho marco, primero: se realizara una sumatoria de momentos a partir del nudo C a la izquierda de este, como siguiente paso: se realizara una sumatoria de momentos a partir del nudo E de todo el marco, de esta manera se construirá un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el cual se encuentra una solución única que define las reacciones en el soporte A, como se observa en el siguiente análisis:

Para facilitar la sumatoria de momentos, concentraremos las cargas en cada miembro de la siguiente manera:

Miembros B-C y C-D



Para el miembro B-C

$$FT_1 = \left(\sqrt{2^2 + 2^2}\, m\right)\left(2\, {}^{Ton}\!/_{m}\right) = \boldsymbol{4\sqrt{2}\ Ton}$$

$$Fx_1 = \left(4\sqrt{2}\, Ton\right)(cos\ 45°) = \boldsymbol{4Ton}$$

$$Fy_1 = \left(4\sqrt{2}\, Ton\right)(sen\ 45°) = \boldsymbol{4Ton}$$

Por trigonometría definimos:

Si 2 es a $2\sqrt{2}$ entonces: Lx_1 es a $\sqrt{2}$

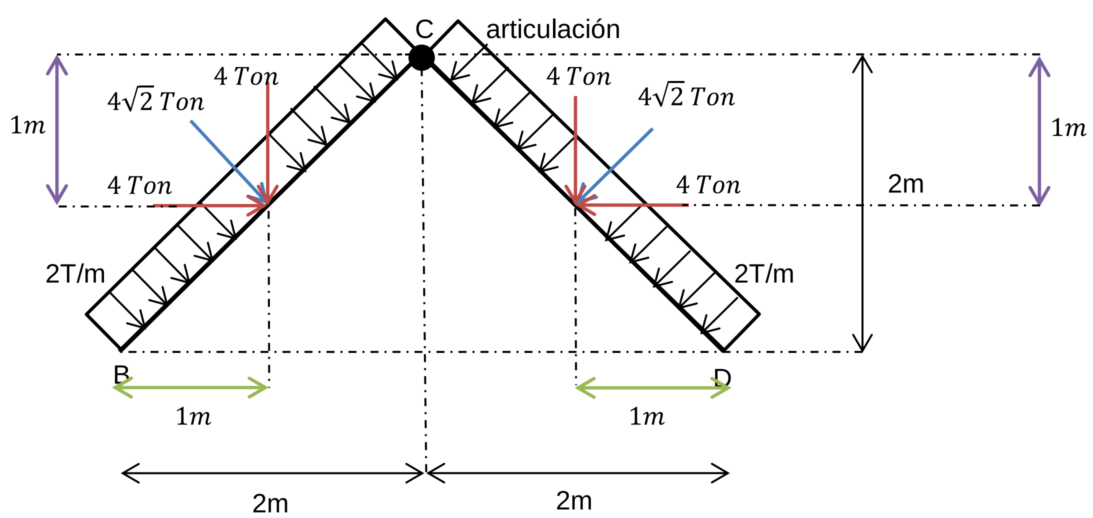
$$Lx_1 = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{1m}$$

Por trigonometría definimos:

Si 2 es a $2\sqrt{2}$ entonces: Ly_1 es a $\sqrt{2}$

$$Ly_1 = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{1m}$$

Como los miembros A-B y C-D tienen dimensiones iguales entonces:



Miembro A-B

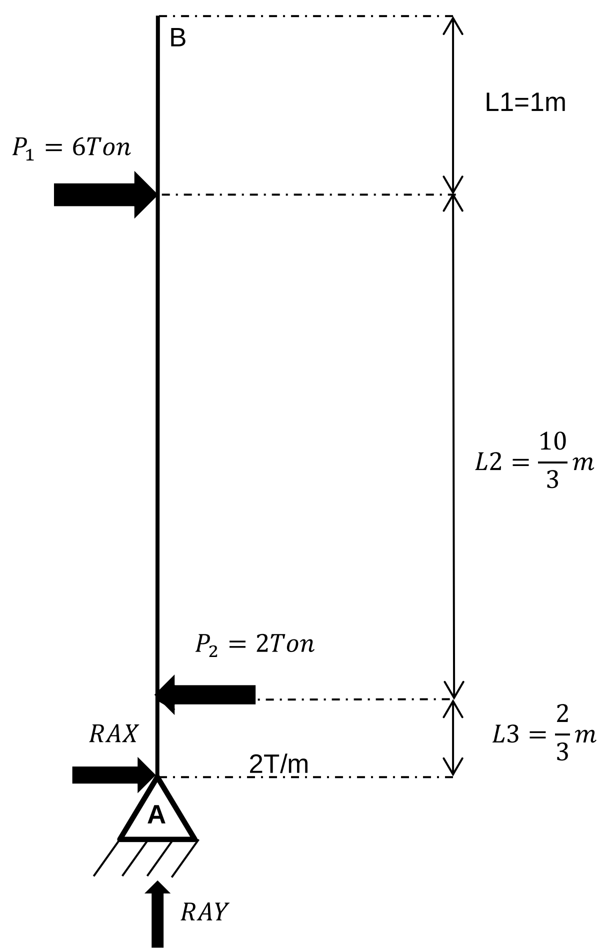
$$P_1 = \frac{\left(4\,{}^{Ton}\!/_{m}\right)(3m)}{2} = 6Ton$$

$$P_2 = \frac{\left(2\,{}^{Ton}\!/_{m}\right)(2m)}{2} = 2Ton$$

$$L_1 = \frac{(1)}{3}(3m) = 1m$$

$$L_3 = \frac{(1)}{3}(2m) = \frac{2}{3}m$$

$$L_2 = \frac{15}{3}m - \frac{5}{3}m = \frac{10}{3}m$$



Miembro D-E

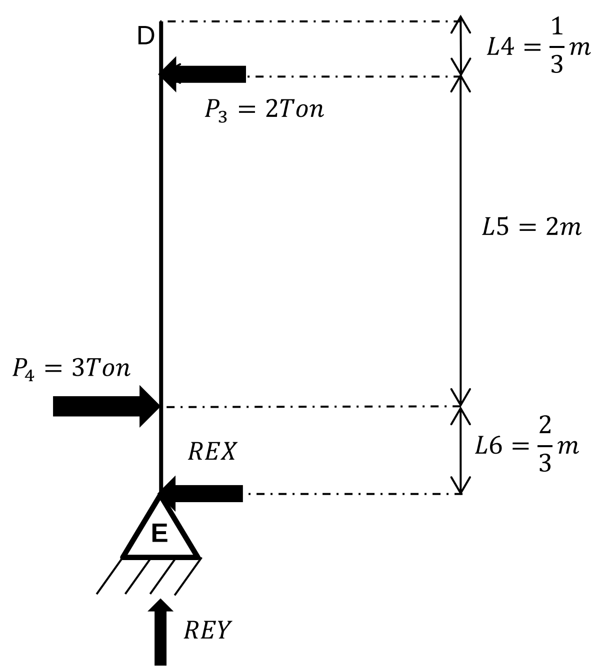
$$P_3 = \frac{\left(4\,{}^{Ton}\!/_{m}\right)(1m)}{2} = 2Ton$$

$$P_4 = \frac{\left(3\,{}^{Ton}\!/_{m}\right)(2m)}{2} = 3Ton$$

$$L_4 = \frac{(1)}{3}(1m) = \frac{1}{3}m$$

$$L_6 = \frac{(1)}{3}(2m) = \frac{2}{3}m$$

$$L_5 = \frac{9}{3}m - \frac{3}{3}m = 2m$$



$$\sum M_C = 0 \quad a\ la\ izquierda\ del\ nudo$$

$$(2m)RAY + (7m)RAX + (2ton)\left(\frac{19}{3}m\right) - (6ton)(3m) - (4Ton)(1m) - (4Ton)(1m) = 0$$

$$\boldsymbol{2RAY + 7RAX = \frac{40}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . Ec.1}$$

$$\sum M_E = 0 \quad todo\ el\ marco$$

$$(4m)RAY + (2m)RAX + (2ton)\left(\frac{4}{3}m\right) + (6ton)(2m) + (4Ton)(4m) - (4Ton)(3m)$$
$$-(4Ton)(1m) - (4Ton)(4m) - (2ton)\left(\frac{8}{3}m\right) + (3ton)\left(\frac{2}{3}m\right) = 0$$

$$\boldsymbol{4RAY + 2RAX = \frac{14}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . Ec.2}$$

Sistema de ecuaciones

$$\boldsymbol{2RAY + 7RAX = \frac{40}{3}}$$

$$\boldsymbol{4RAY + 2RAX = \frac{14}{3}}$$

Resolviendo el sistema:

$$\boldsymbol{RAY = \frac{1}{4}Ton} \qquad \uparrow$$

$$\boldsymbol{RAX = \frac{11}{6}Ton} \qquad \leftarrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{1}{4}Ton - 4Ton - 4Ton + REY = 0$$

$$\boldsymbol{REY = \frac{31}{4} Ton} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-\frac{11}{6}Ton - 2Ton + 6Ton + 4Ton - 4Ton - 2Ton + 3Ton - REX = 0$$

$$\boldsymbol{REX = \frac{19}{6} Ton} \longleftarrow$$

Para verificar si las reacciones son correctas:

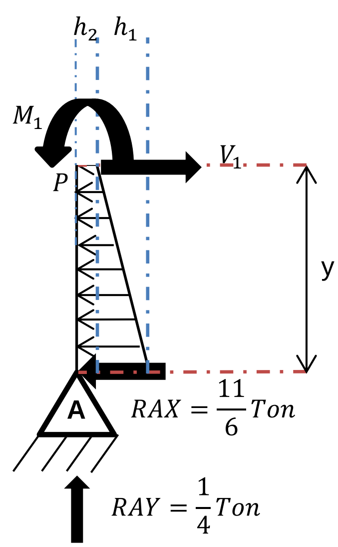
$$\sum M_D = 0$$

$$\left(\frac{1}{4}Ton\right)(4m) + \left(\frac{11}{6}Ton\right)(5m) + (2Ton)\left(\frac{13}{3}m\right) - (6Ton)(1m) + (4Ton)(1m) - (4Ton)(3m) - (4Ton)(1m) - (4Ton)(1m) + (2Ton)\left(\frac{1}{3}m\right) - (3Ton)\left(\frac{7}{3}m\right) + \left(\frac{19}{6}Ton\right)(3m) = 0$$

Por lo tanto las reacciones calculadas son correctas.

Deducción de las ecuaciones de momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal del marco.

Miembro A-B $\boldsymbol{0m \leq y \leq 2m}$



Por trigonometría definimos:

$$\boldsymbol{h_1 = \frac{2y}{2} = y}$$

$$\boldsymbol{h_2 = 2 - y}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_1 + \frac{11}{6}y + \frac{(y)(y)}{2}\left[\frac{2y}{3}\right] + (2-y)(y)\left[\frac{y}{2}\right] = 0$$

$$M_1 = \frac{y^3}{3} - \frac{y^3}{2} + y^2 + \frac{11}{6}y$$

$$\boldsymbol{M_1 = -\frac{y^3}{6} + y^2 + \frac{11}{6}y}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-V_1 + \frac{11}{6} + \frac{(y)(y)}{2} + (2-y)(y) = 0$$

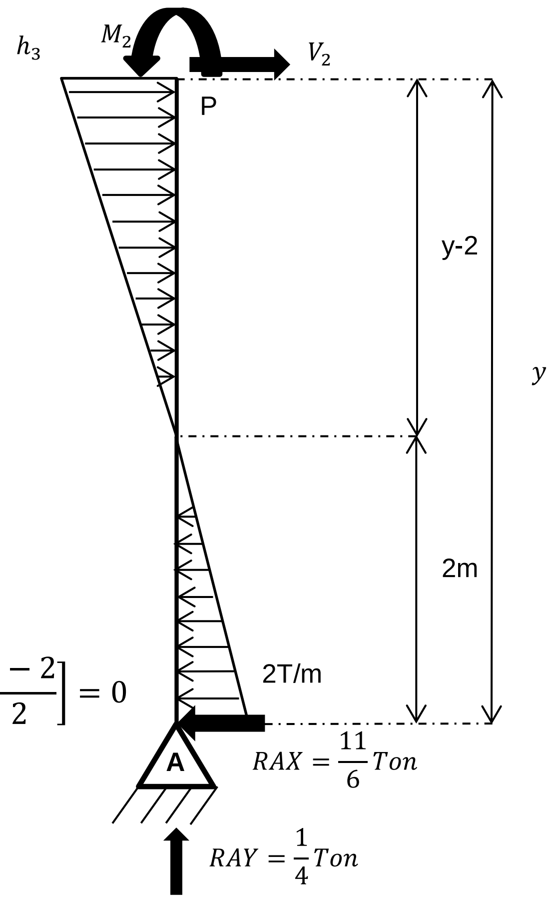
$$\boldsymbol{V_1 = -\frac{y^2}{2} + 2y + \frac{11}{6}}$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx}$$

$$\boldsymbol{V_1 = -\frac{y^2}{2} + 2y + \frac{11}{6}}$$

Valor de x	Valor del momento 1	Valor del cortante 1
0	0	$\frac{11}{6}Ton$
$\boldsymbol{2m}$	$\frac{19}{3}Ton*m$	$\frac{23}{6}Ton$

Miembro A-B $\boldsymbol{2m \leq y \leq 5m}$



Por trigonometría definimos:

$$h_3 = \frac{4(y-2)}{3}$$

$$\boldsymbol{h_3 = \frac{4y-8}{3}}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_2 + \frac{11}{6}y + \frac{(2)(2)}{2}\left[y - \frac{2}{3}\right] + \frac{\left(\frac{4y-8}{3}\right)(y-2)}{2}\left[\frac{y-2}{2}\right] = 0$$

$$M_2 = \frac{11}{6}y + 2y - \frac{4}{3} - \frac{1}{6}(y^2 - 4y + 4)\left(\frac{4y-8}{3}\right)$$

$$M_2 = \frac{11}{6}y + 2y - \frac{4}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}y^3 - \frac{16}{3}y^2 + \frac{16}{3}y - \frac{8}{3}y^2 + \frac{32}{3}y - \frac{32}{3}\right)$$

$$M_2 = \frac{11}{6}y + 2y - \frac{4}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}y^3 - 8y^2 + 16y - \frac{32}{3}\right)$$

$$M_2 = -\frac{2}{9}y^3 + \frac{4}{3}y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{16}{9} + \frac{11}{6}y + 2y - \frac{4}{3}$$

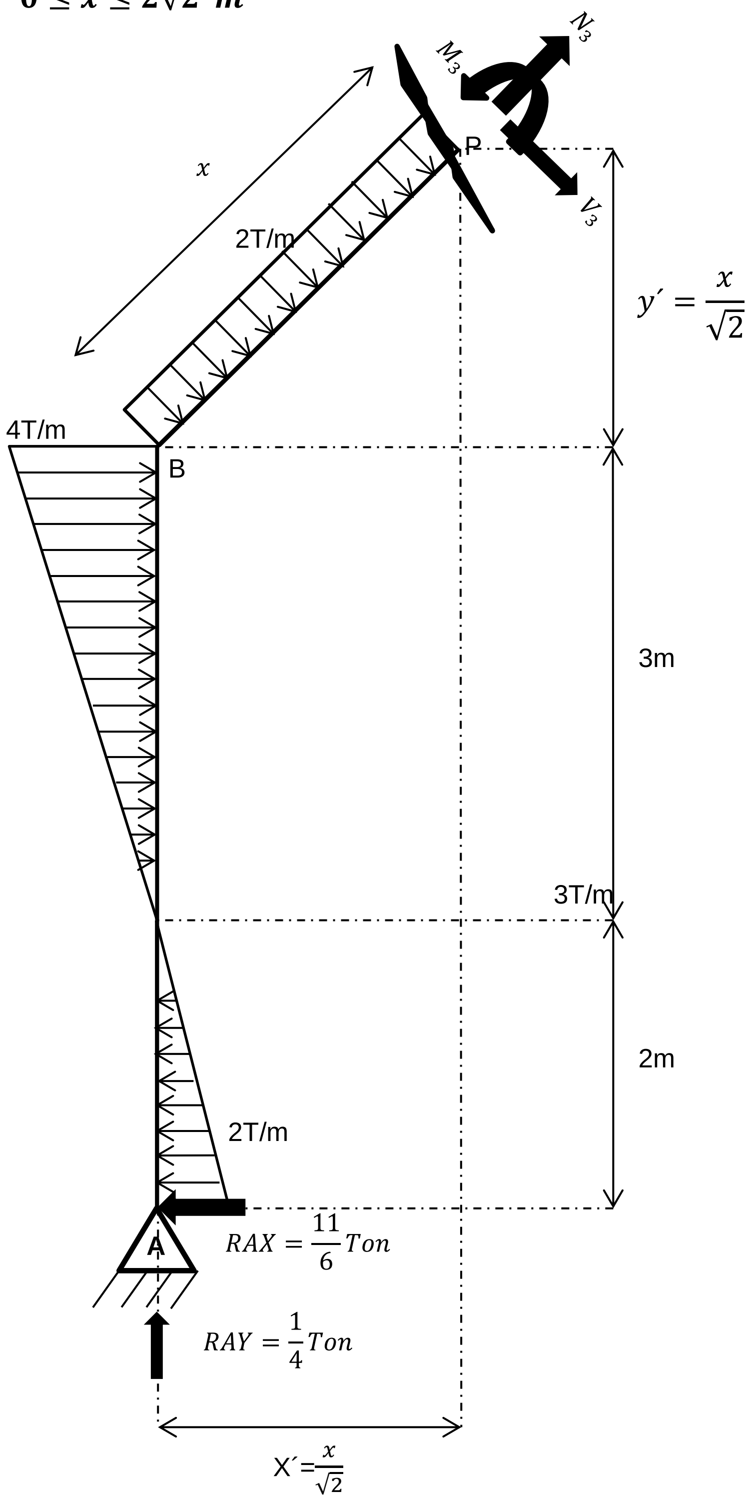
$$\boldsymbol{M_2 = -\frac{2}{9}y^3 + \frac{4}{3}y^2 + \frac{7}{6}y + \frac{4}{9}}$$

L(x)	Valor del momento 2	Valor del cortante 2
$\boldsymbol{2m}$	$\frac{19}{3} Ton * m$	$\frac{23}{6} Ton$
$\boldsymbol{5m}$	$\frac{71}{6} Ton * m$	$-\frac{13}{6} Ton$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx_2}$$

$$\boldsymbol{V_2 = -\frac{2}{3}y^2 + \frac{8}{3}y + \frac{7}{6}}$$

Miembro B-C $\quad 0 \le x \le 2\sqrt{2}\ m$



Por trigonometría definimos

$$x' = y' = \frac{2x}{2\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_3 + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{11}{6}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 5\right)y + (2)\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{13}{3}\right) - (6)\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 1\right) - (2)(x)\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

$$M_3 = \frac{x}{4\sqrt{2}} + \frac{11x}{6\sqrt{2}} + \frac{55}{6} + \frac{2x}{\sqrt{2}} + \frac{26}{3} - \frac{6x}{\sqrt{2}} - 6 - x^2$$

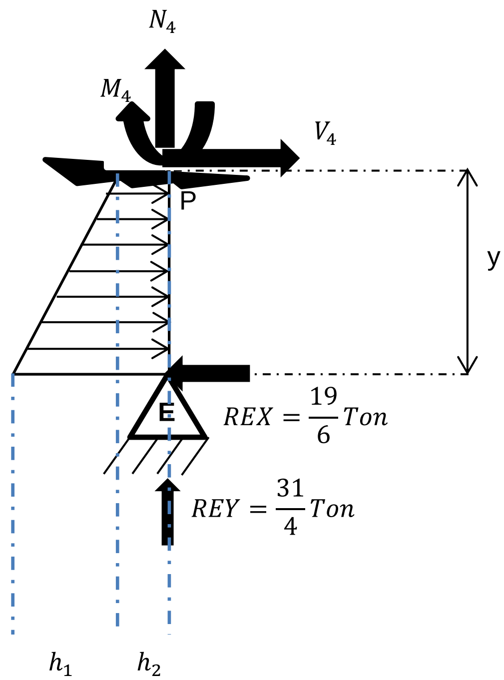
$$\boldsymbol{M_3 = -x^2 - \frac{23\sqrt{2}x}{24} + \frac{71}{6}}$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx}$$

$$\boldsymbol{V_3 = -2x - \frac{23\sqrt{2}}{24}}$$

L(x)	Valor del momento 3	Valor del cortante 3
$\boldsymbol{0m}$	$\frac{71}{6}Ton * m$	$-1.355287997Ton$
$\boldsymbol{2\sqrt{2}m}$	$0Ton * m$	$-7.012142247Ton$

Miembro E-D $\quad \mathbf{0 \leq y \leq 2\ m}$



Por trigonometría definimos:

$$\boldsymbol{h_1 = \frac{3y}{2}}$$

$$\boldsymbol{h_2 = 3 - \frac{3y}{2}}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_4 + \frac{\left(\frac{3y}{2}\right)(y)}{2}\left[\frac{2y}{3}\right] + \left(3 - \frac{3y}{2}\right)(y)\left[\frac{y}{2}\right] - \left(\frac{19}{6}\right)(y) = 0$$

$$M_4 = \frac{y^3}{2} - \frac{3y^3}{4} + \frac{3y^2}{2} - \frac{19y}{6}$$

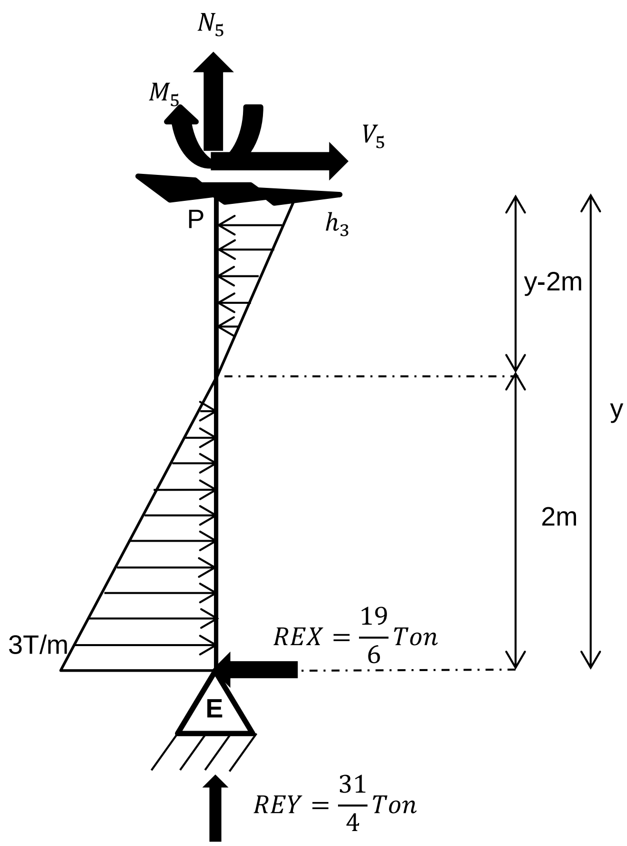
$$\boldsymbol{M_4 = -\frac{y^3}{4} + \frac{3y^2}{2} - \frac{19y}{6}}$$

$$V_4 = \frac{dM_4}{dx}$$

$$V_4 = -\frac{3y^2}{4} + 3y - \frac{19}{6}$$

L(x)	Valor del momento 4	Valor del cortante 4
$0m$	$0Ton * m$	$-\frac{19}{6}Ton$
$2m$	$-\frac{7}{3}Ton * m$	$-\frac{1}{6}Ton$

Miembro E-D $2m \leq y \leq 3m$



Por trigonometría definimos:

$$h_3 = 4y - 8$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_5 - \left(\frac{19}{6}\right)(y) + \frac{(3)(2)}{2}\left[y - \frac{2}{3}\right] - \frac{(4y-8)(y-2)}{2}\left[\frac{y-2}{3}\right] = 0$$

$$M_5 = -\frac{19}{6}y + 3y - 2 - \frac{1}{6}(y^2 - 4y + 4)(4y - 8)$$

$$M_5 = -\frac{19}{6}y + 3y - 2 - \frac{1}{6}(4y^3 - 8y^2 - 16y^2 + 32y + 16y - 32)$$

$$M_5 = -\frac{19}{6}y + 3y - 2 - \frac{1}{6}(4y^3 - 24y^2 + 48y - 32)$$

$$M_5 = -\frac{19}{6}y + 3y - 2 - \frac{2}{3}y^3 + 4y^2 - 8y + \frac{16}{3}$$

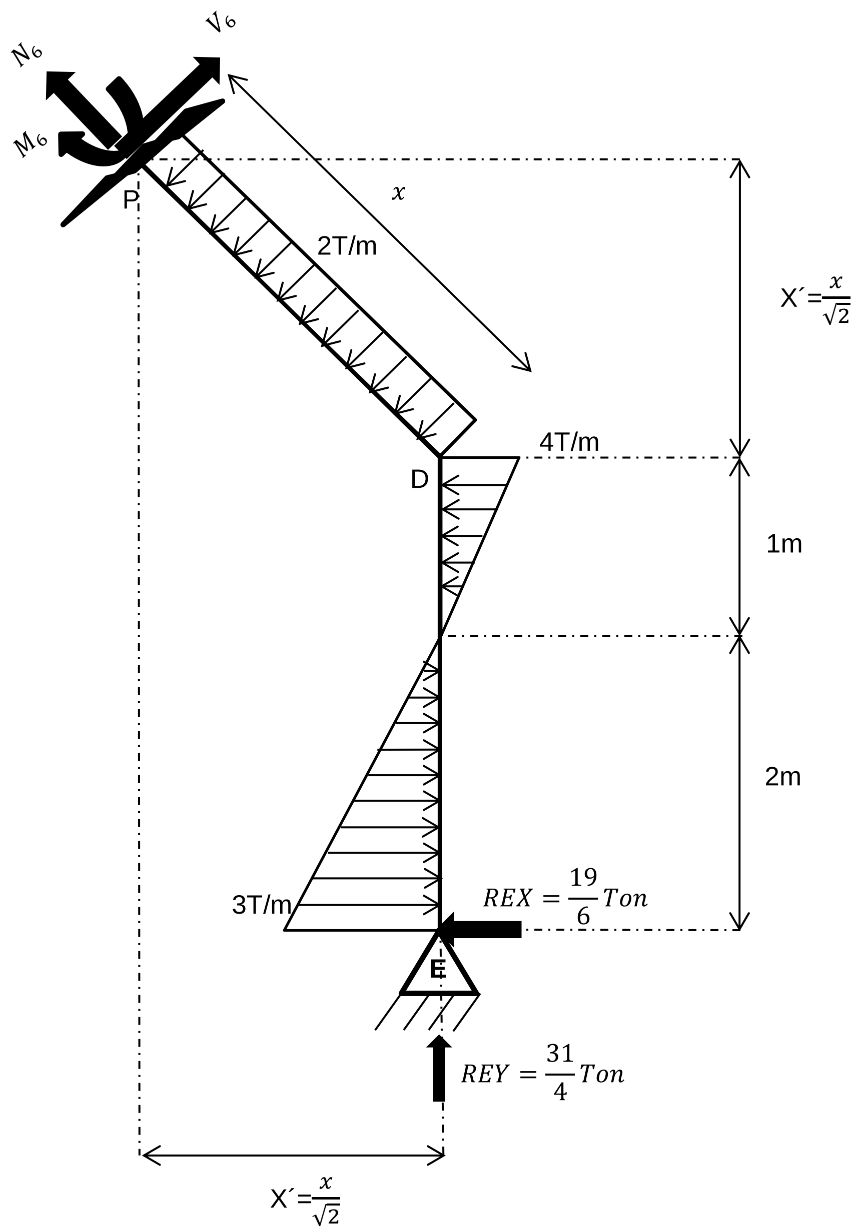
$$\boldsymbol{M_5 = -\frac{2}{3}y^3 + 4y^2 - \frac{49}{6}y + \frac{10}{3}}$$

$$V_5 = \frac{dM_5}{dx}$$

$$\boldsymbol{V_5 = -2y^2 + 8y - \frac{49}{6}}$$

L(x)	Valor del momento 5	Valor del cortante 5
$\boldsymbol{2m}$	$-\frac{7}{3}Ton * m$	$-\frac{1}{6}Ton$
$\boldsymbol{3m}$	$-\frac{19}{6}Ton * m$	$-\frac{13}{6}Ton$

Miembro C-D $\boldsymbol{0m \leq y \leq 2\sqrt{2}m}$



Por trigonometría definimos

$$X' = y' = \frac{2x}{2\sqrt{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_6 - \left(\frac{19}{6}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 3\right) + \left(\frac{31}{4}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{(3)(2)}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{7}{3}\right) - \frac{(4)(1)}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\right) - (2)(x)\left[\frac{x}{2}\right] = 0$$

$$M_6 = +\frac{31x}{4\sqrt{2}} - \frac{19x}{6\sqrt{2}} - \frac{19}{2} + \frac{3x}{\sqrt{2}} + 7 - \frac{2x}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3} - x^2$$

$$\boldsymbol{M_6 = -x^2 + \frac{67\sqrt{2}x}{24} - \frac{19}{6}}$$

$$V_6 = \frac{dM_6}{dx}$$

$$\boldsymbol{V_6 = -2x + \frac{67}{24\sqrt{2}}}$$

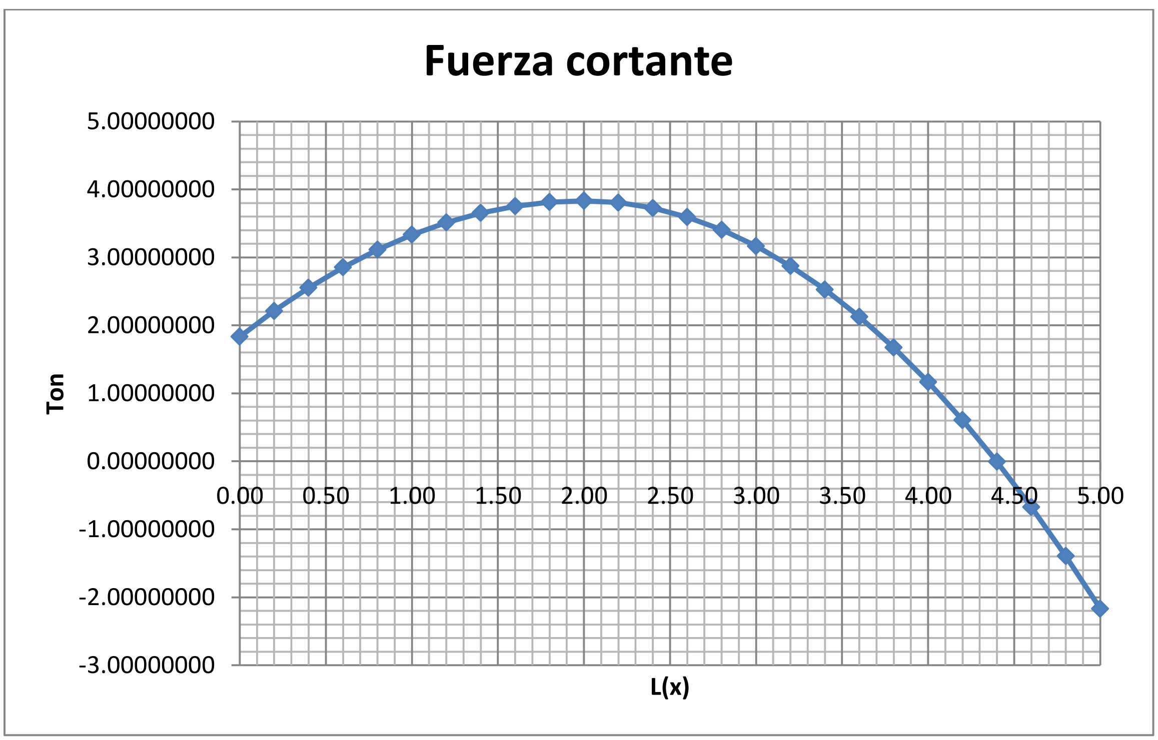
L(x)	Valor del momento 6	Valor del cortante 6
$\boldsymbol{0m}$	$-\frac{19}{6}Ton * m$	$3.948012862Ton$
$\boldsymbol{2\sqrt{2}m}$	$0Ton * m$	$-1.708841388Ton$

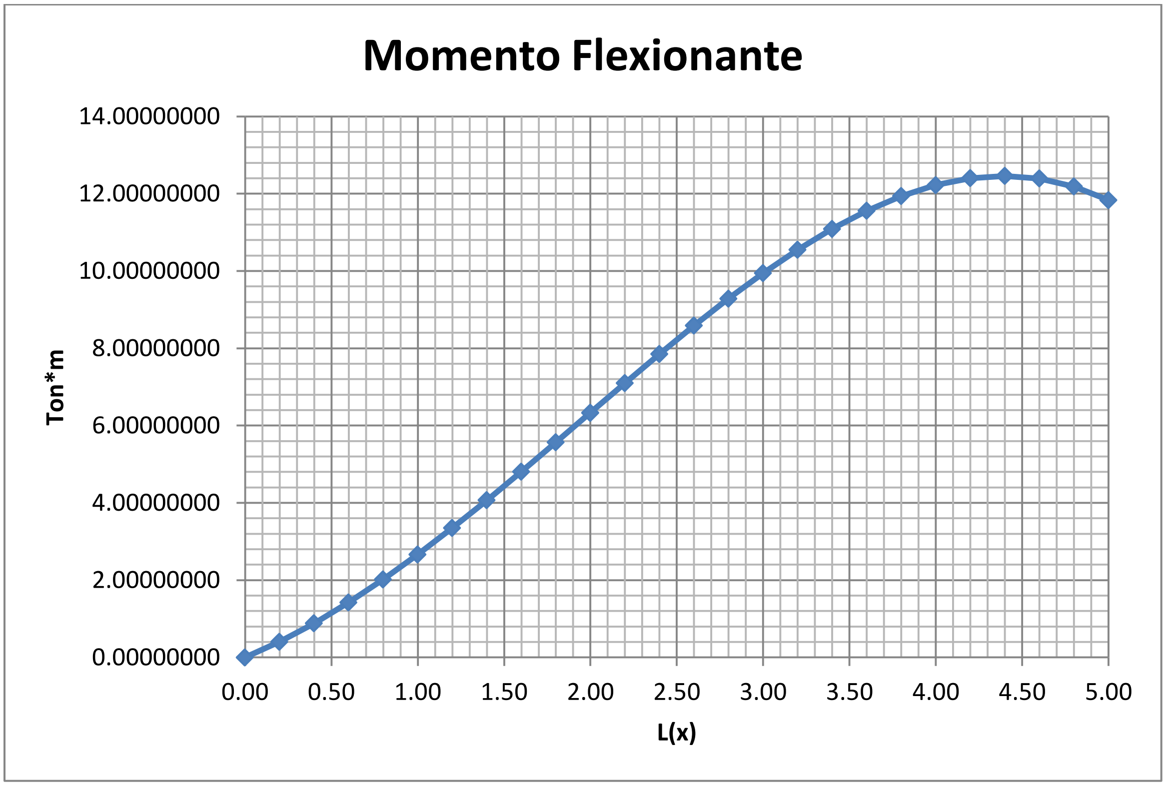
Diagramas de momento flexionante y fuerza cortante en el marco.

Miembro A-B $\boldsymbol{0m \leq y \leq 5m}$

L(x)	Cortante	Momento
0.00000000	1.83333333	0.00000000
0.20000000	2.21333333	0.40533333
0.40000000	2.55333333	0.88266667
0.60000000	2.85333333	1.42400000
0.80000000	3.11333333	2.02133333
1.00000000	3.33333333	2.66666667
1.20000000	3.51333333	3.35200000
1.40000000	3.65333333	4.06933333

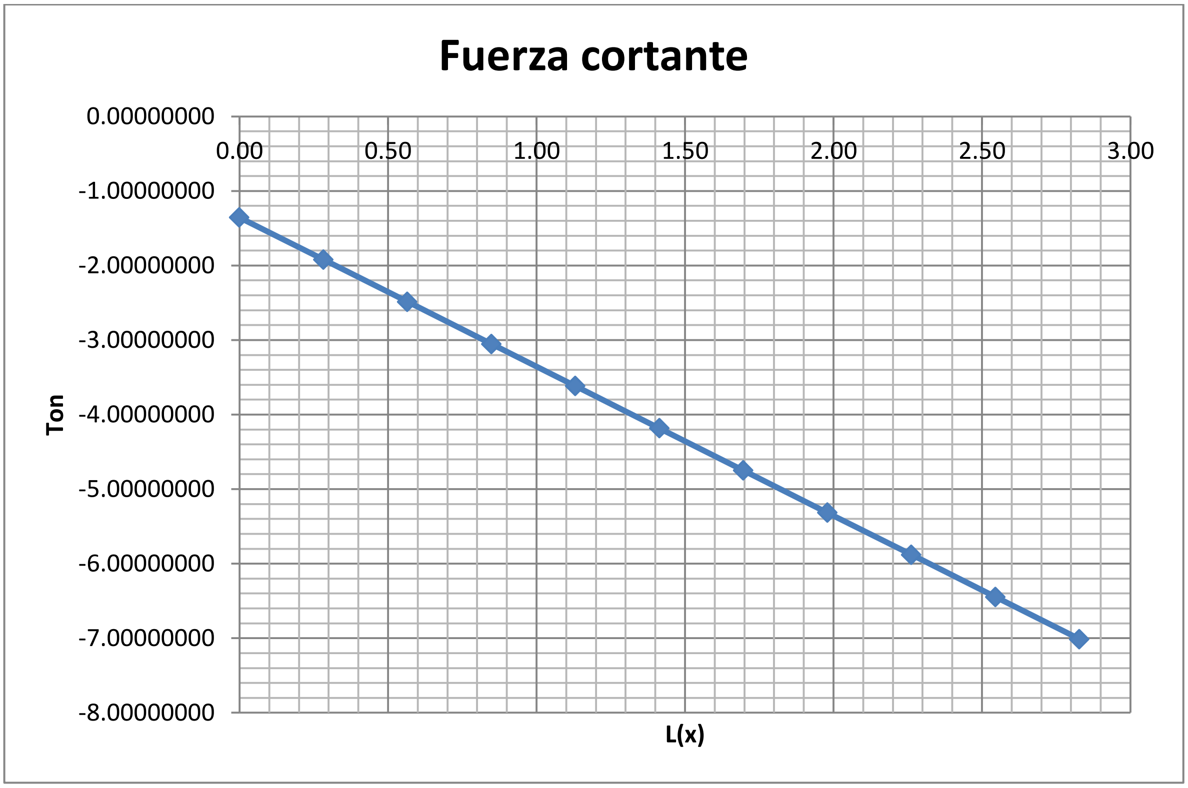
1.60000000	3.75333333	4.81066667
1.80000000	3.81333333	5.56800000
2.00000000	3.83333333	6.33333333
2.20000000	3.80666667	7.09822222
2.40000000	3.72666667	7.85244444
2.60000000	3.59333333	8.58533333
2.80000000	3.40666667	9.28622222
3.00000000	3.16666667	9.94444444
3.20000000	2.87333333	10.54933333
3.40000000	2.52666667	11.09022222
3.60000000	2.12666667	11.55644444
3.80000000	1.67333333	11.93733333
4.00000000	1.16666667	12.22222222
4.20000000	0.60666667	12.40044444
4.40000000	-0.00666667	12.46133333
4.60000000	-0.67333333	12.39422222
4.80000000	-1.39333333	12.18844444
5.00000000	-2.16666667	11.83333333

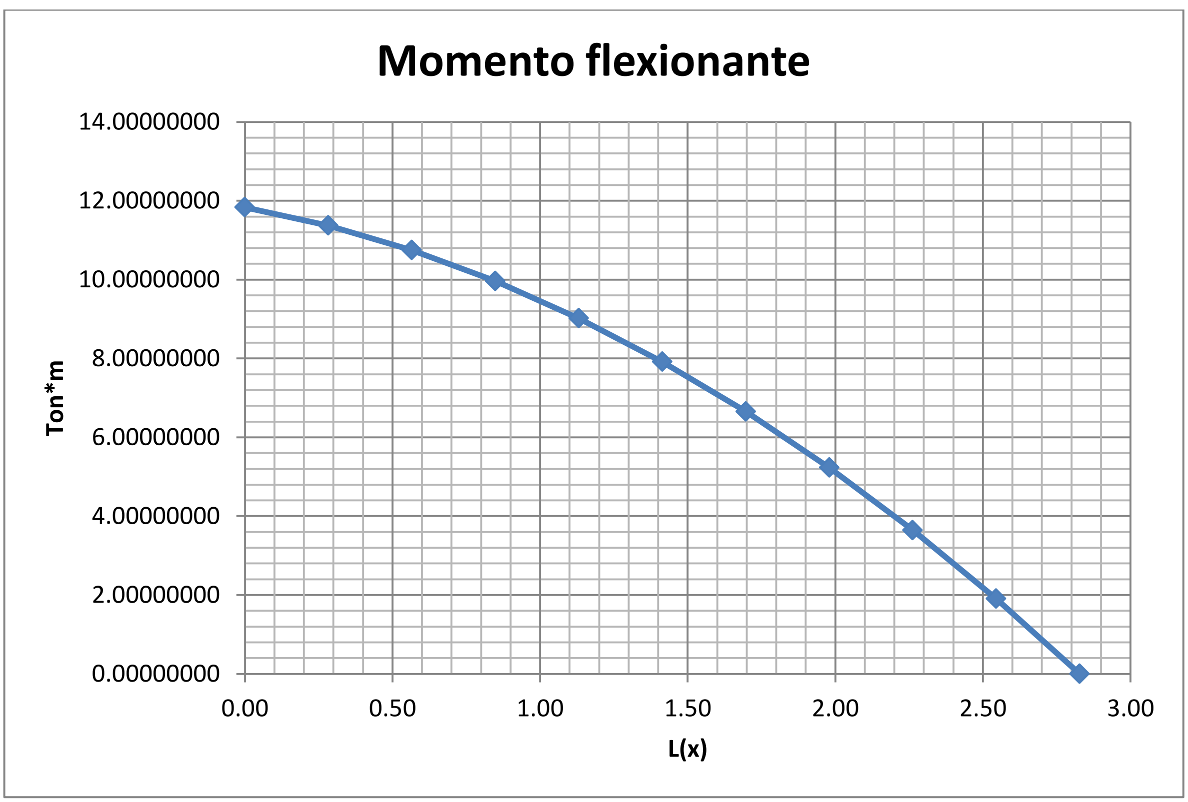




Miembro B-C $0m \leq y \leq 2\sqrt{2}m$

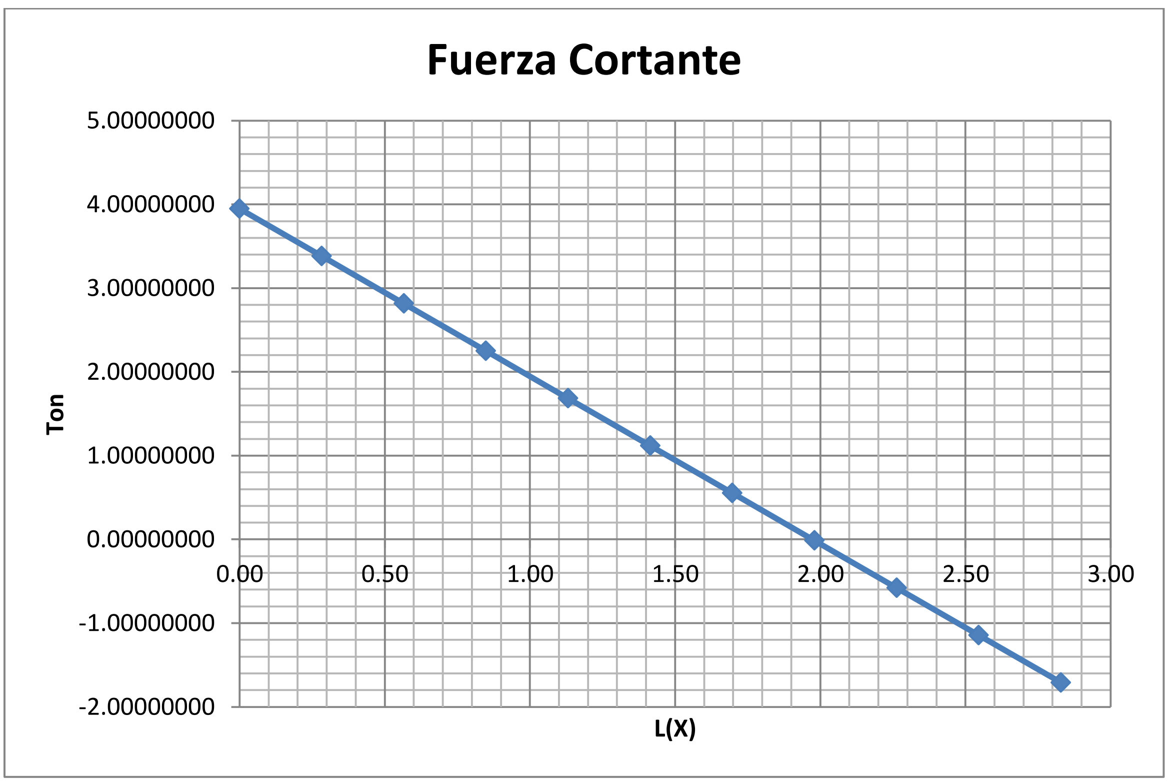
L(x)	Cortante	momento
0.00000000	-1.35528800	11.83333333
0.28284271	-1.92097342	11.37000000
0.56568542	-2.48665885	10.74666667
0.84852814	-3.05234427	9.96333333
1.13137085	-3.61802970	9.02000000
1.41421356	-4.18371512	7.91666667
1.69705627	-4.74940055	6.65333333
1.97989899	-5.31508597	5.23000000
2.26274170	-5.88077140	3.64666667
2.54558441	-6.44645682	1.90333333
2.82842712	-7.01214225	0.00000000

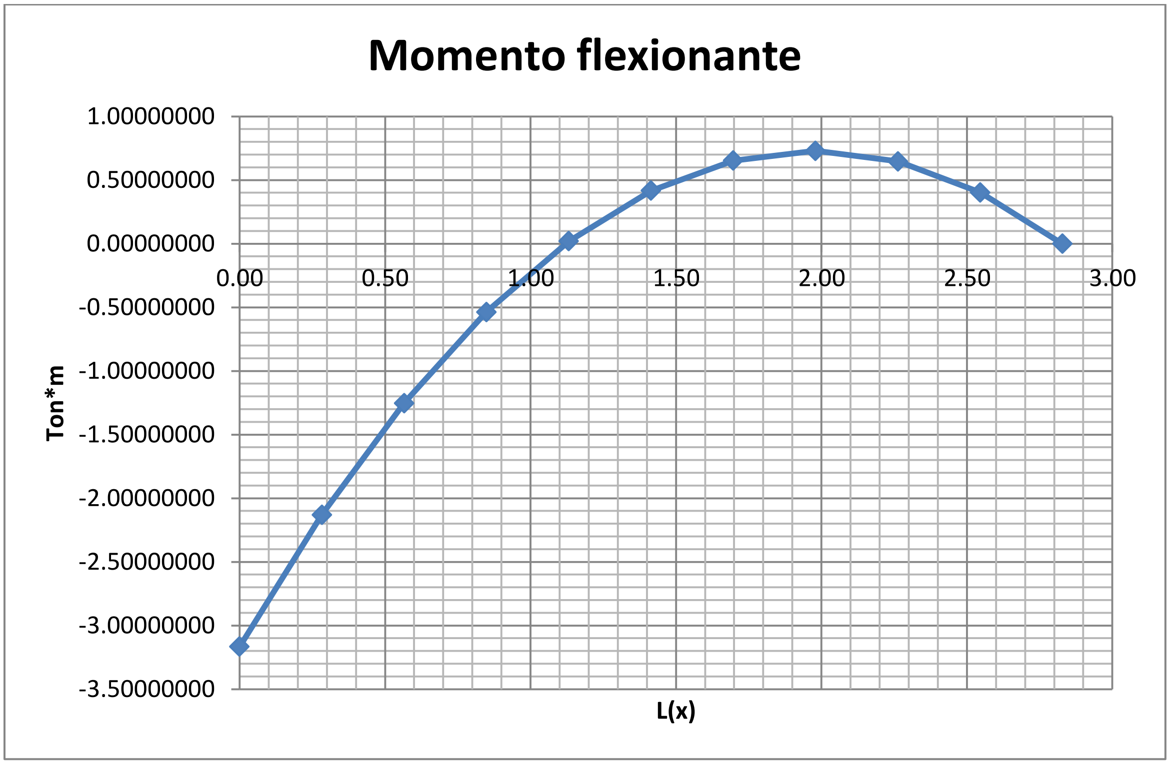

Fuerza cortante
Ton
L(x)
0.00000000
-1.00000000
-2.00000000
-3.00000000
-4.00000000
-5.00000000
-6.00000000
-7.00000000
-8.00000000
0.00
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
3.00


Momento flexionante
Ton*m
L(x)
14.00000000
12.00000000
10.00000000
8.00000000
6.00000000
4.00000000
2.00000000
0.00000000
0.00
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
3.00

Miembro C-D $\quad 0m \leq y \leq 2\sqrt{2}m$

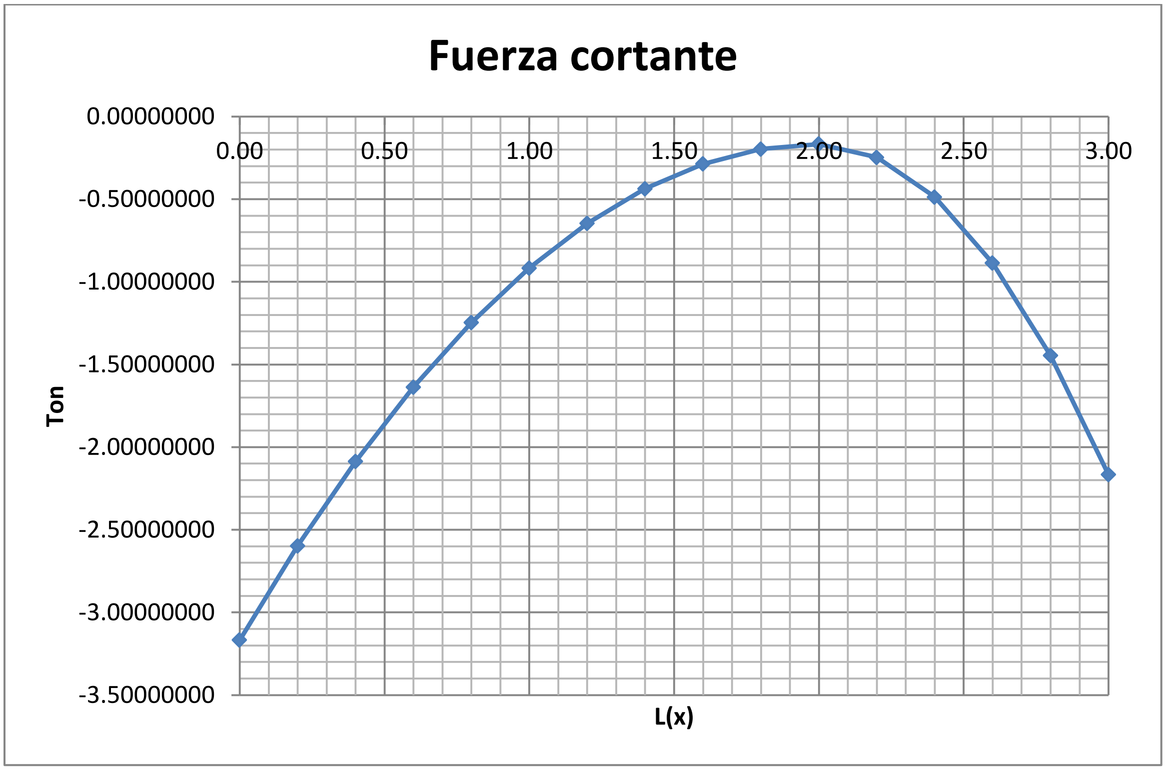
L(x)	Cortante	momento
0.00000000	3.94801286	-3.16666667
0.28284271	3.38232744	-2.13000000
0.56568542	2.81664201	-1.25333333
0.84852814	2.25095659	-0.53666667
1.13137085	1.68527116	0.02000000
1.41421356	1.11958574	0.41666667
1.69705627	0.55390031	0.65333333
1.97989899	-0.01178511	0.73000000
2.26274170	-0.57747054	0.64666667
2.54558441	-1.14315596	0.40333333
2.82842712	-1.70884139	0.00000000

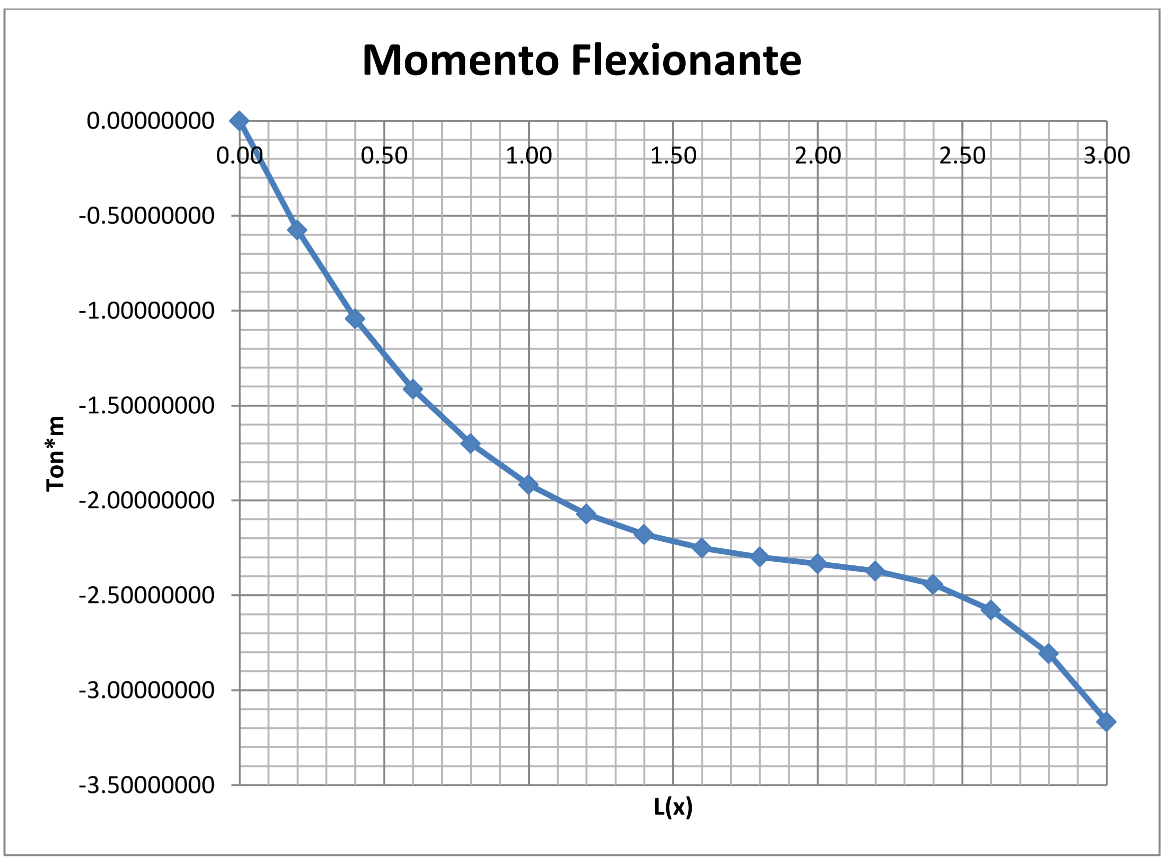




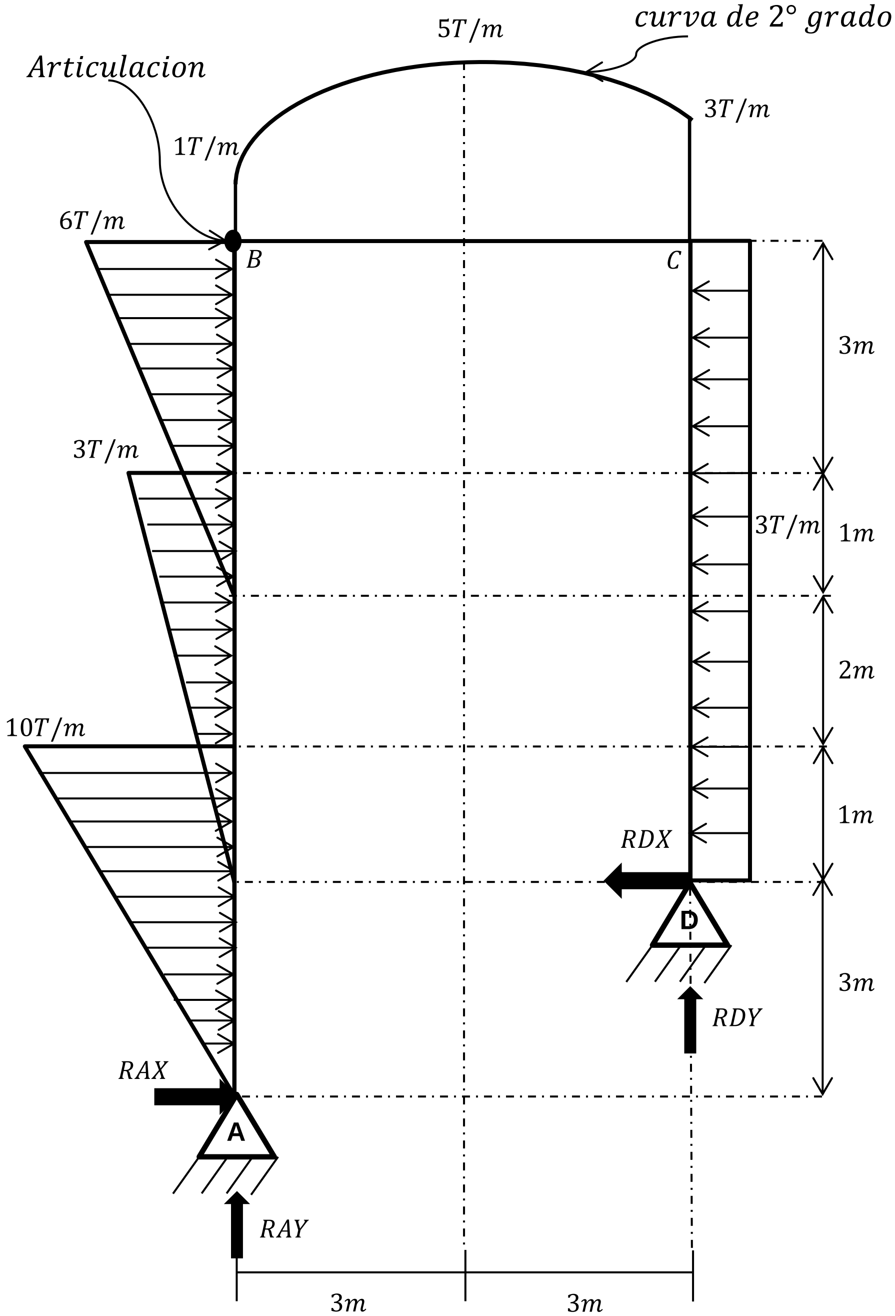
Miembro D-E $0m \leq y \leq 3m$

L(x)	Cortante	momento
0.00	-3.16666667	0.00000000
0.20	-2.59666667	-0.57533333
0.40	-2.08666667	-1.04266667
0.60	-1.63666667	-1.41400000
0.80	-1.24666667	-1.70133333
1.00	-0.91666667	-1.91666667
1.20	-0.64666667	-2.07200000
1.40	-0.43666667	-2.17933333
1.60	-0.28666667	-2.25066667
1.80	-0.19666667	-2.29800000
2.00	-0.16666667	-2.33333333
2.00	-0.16666667	-2.33333333
2.20	-0.24666667	-2.37200000
2.40	-0.48666667	-2.44266667
2.60	-0.88666667	-2.57733333
2.80	-1.44666667	-2.80800000
3.00	-2.16666667	-3.16666667


Fuerza cortante
Ton
L(x)
0.00000000
-0.50000000
-1.00000000
-1.50000000
-2.00000000
-2.50000000
-3.00000000
-3.50000000
0.00
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
3.00


Momento Flexionante
Ton*m
L(x)
0.00000000
-0.50000000
-1.00000000
-1.50000000
-2.00000000
-2.50000000
-3.00000000
-3.50000000
0.00
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
3.00

4.- Del siguiente marco, determine: el valor de las reacciones en los soportes mostrados, las funciones que describen la variación de las acciones internas (momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal) y dibuje los diagramas correspondientes a estas.



Calculo del grado de indeterminación del marco:

$$\boldsymbol{r + 3m = 3n + c}$$

$$\mathbf{4 + 3(3) = 3(4) + 1}$$

$$\mathbf{13 = 13}$$

Por lo tanto nuestro marco es estáticamente determinado y podemos resolverlo con la simple aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático:

- $\sum F = F_R = 0$
- $\sum M = M_R = 0$

1.- Construcción de la función que define la curva de 2° grado de la forma:

$ax^2 + bx + c = 0$

Condiciones de frontera:

Si $x = 0 \quad y = 1$
Si $x = 3 \quad y = 5$
Si $x = 6 \quad y = 3$

SI: $x = 0 \quad y = 1$: $a(0)^2 + b(0) + c = 1$ Por lo tanto: $c = 1$

Entonces:

$a(3)^2 + b(3) + c = 4$ …………….Ec. 1

$a(6)^2 + b(6) + c = 2$ …………….Ec. 2

De la ecuación 2 despejamos **"a"**

$$a = \frac{-6b + 2}{36} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\mathrm{Ec.}\,3$$

Sustituyendo la ecuación **"3"** en la ecuación **"1"** , despejando **"b"**

$$(9)\left(\frac{-6b+2}{36}\right)+3b=4$$

$$-\frac{54b}{36}+\frac{18}{36}+3b=4$$

$$\frac{3}{2}b=\frac{7}{2}$$

$$\boldsymbol{b}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$$

Sustituyendo el valor **"b"** en la ecuación **"3"**

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathbf{-6}\left(\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right)+\mathbf{2}}{\mathbf{36}}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Por lo tanto la función que describe la curva es:

$$\boldsymbol{y}=-\frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{3}}+\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x}+\mathbf{1}$$

Calculo de la carga total que ejerce la curva $(\boldsymbol{Py})$ y su brazo $(\bar{\boldsymbol{x}})$ de palanca aislando el miembro B-C

$$P_y=\int_0^6\left(-\frac{x^2}{3}+\frac{7}{3}x+1\right)dx=\left[-\frac{x^3}{9}+\frac{7x^2}{6}+x\right]_0^6=\boldsymbol{24Ton}$$

$$\bar{x}=\frac{\int_0^6(x)\left(-\frac{x^2}{3}+\frac{7}{3}x+1\right)dx}{\int_0^6\left(-\frac{x^2}{3}+\frac{7}{3}x+1\right)dx}=\frac{\left[-\frac{x^4}{12}+\frac{7x^3}{9}+\frac{x^2}{2}\right]_0^6}{\left[-\frac{x^3}{9}+\frac{7x^2}{6}+x\right]_0^6}=\frac{78}{24}=\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{m}$$

$$\sum M_B = 0(a\ la\ izquierda\ de\ la\ articulacion)$$

$$-10m(RAX) - \frac{\left(10\,{}^{Ton}/_{m}\right)(4m)}{2}\left[\frac{22}{3}m\right] - \frac{\left(3\,{}^{Ton}/_{m}\right)(4m)}{2}\left[\frac{13}{3}m\right] - \frac{\left(6\,{}^{Ton}/_{m}\right)(4m)}{2}\left[\frac{4}{3}m\right] = 0$$

$$10m(RAX) = -\frac{440}{3}Ton*m - 26Ton*m - 16Ton*m$$

$$\boldsymbol{RAX = \frac{-\frac{566}{3}Ton*m}{10m} = -\frac{283}{15}Ton} \longleftarrow$$

$$\sum M_D = 0\ (De\ todo\ el\ marco)$$

$$6m(RAY) + \frac{283}{15}Ton(3m) - \frac{\left(10\,{}^{Ton}/_{m}\right)(4m)}{2}\left[\frac{1}{3}m\right] + \frac{\left(3\,{}^{Ton}/_{m}\right)(4m)}{2}\left[\frac{8}{3}m\right]$$

$$+\frac{\left(6\,{}^{Ton}/_{m}\right)(4m)}{2}\left[\frac{17}{3}m\right] - (24Ton)\left(6m - \frac{13}{4}m\right) - \left(\frac{3Ton}{m}\right)(7m)\left(\frac{7}{2}m\right) = 0$$

$$6m(RAY) = -\frac{283}{5}Ton*m + \frac{20}{3}Ton*m - 16Ton*m - 68Ton*m + 66Ton*m + \frac{147}{2}Ton*m$$

$$\boldsymbol{RAY = \frac{\frac{167}{30}Ton*m}{6m} = \frac{167}{180}Ton} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{167}{180}Ton - 24Ton + RDY = 0$$

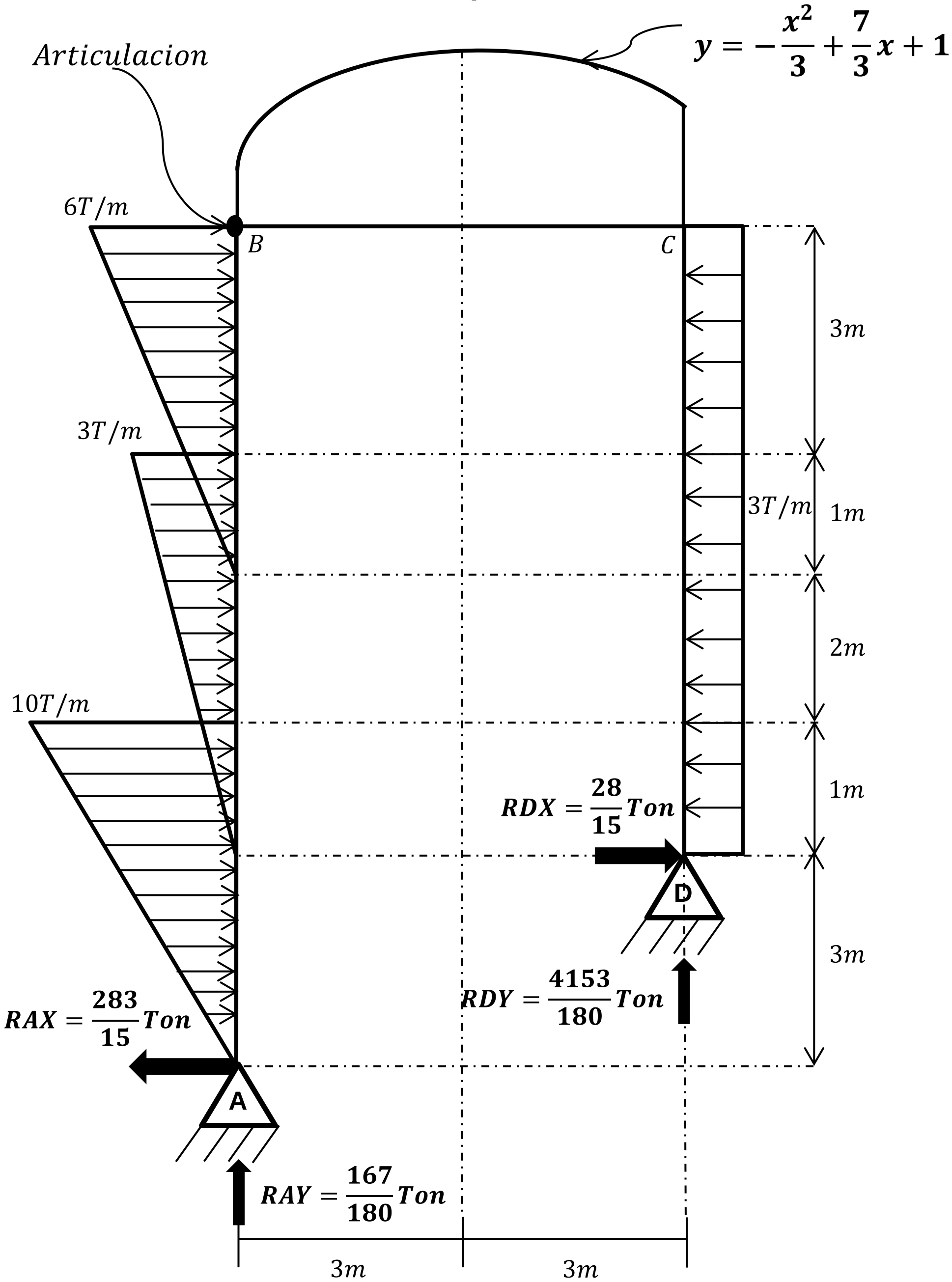
$$\boldsymbol{RDY = \frac{4153}{180}Ton} \uparrow$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-\frac{283}{15}Ton + \frac{\left(10\,{}^{Ton}\!/_{m}\right)(4m)}{2} + \frac{\left(3\,{}^{Ton}\!/_{m}\right)(4m)}{2} + \frac{\left(6\,{}^{Ton}\!/_{m}\right)(4m)}{2} - \left(\frac{3Ton}{m}\right)(7m)$$
$$-RDX = 0$$

$$\boldsymbol{RDX = -\frac{28}{15}Ton} \longrightarrow$$

Marco en equilibrio estático



Para verificar si las reacciones obtenidas son correctas partiremos del principio: Si un sistema bajo la acción de un sistema de fuerzas externo se encuentra en equilibrio, cualquier punto de este está en equilibrio, dicho lo anterior, realizaremos una sumatoria de momentos con respecto al punto C (nudo C).

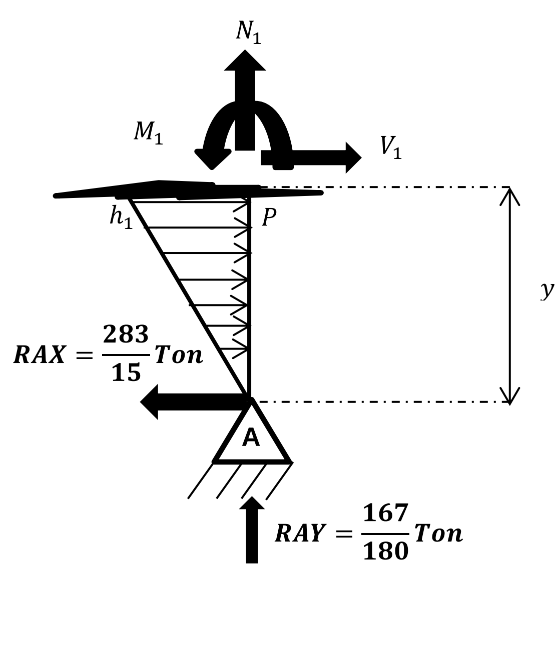
$$\sum \boldsymbol{M_C = 0}$$

$$\left(\frac{167}{180}Ton\right)(6m)+\left(\frac{283}{15}Ton\right)(10m)-(20Ton)\left(\frac{22}{3}m\right)-(6ton)\left(\frac{13}{3}m\right)$$
$$-(12Ton)\left(\frac{4}{3}m\right)-(24Ton)\left(\frac{11}{4}m\right)+(21Ton)\left(\frac{7}{2}m\right)-\left(\frac{28}{15}Ton\right)(7m)=0$$

Demostrado lo anterior, el teorema mencionado se cumple, entonces podemos asegurar que las reacciones calculadas en los soportes son correctas.

Deducción de las ecuaciones que describen la variación de las acciones internas del marco: Momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial.

Miembro A-B $\boldsymbol{0m \leq y \leq 3m}$



Por trigonometría definimos:

$$\boldsymbol{h_1 = \frac{5}{2}y}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_1 + \frac{283}{15}y - \frac{\left(\frac{5}{2}y\right)(y)}{2}\left[\frac{y}{3}\right] = 0$$

$$\boldsymbol{M_1 = -\frac{5}{12}y^3 + \frac{283}{15}y}$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx}$$

$$\boldsymbol{V_1 = -\frac{5}{4}y^2 + \frac{283}{15}}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$V_1 + \frac{\left(\frac{5}{2}y\right)(y)}{2} - \frac{283}{15} = 0$$

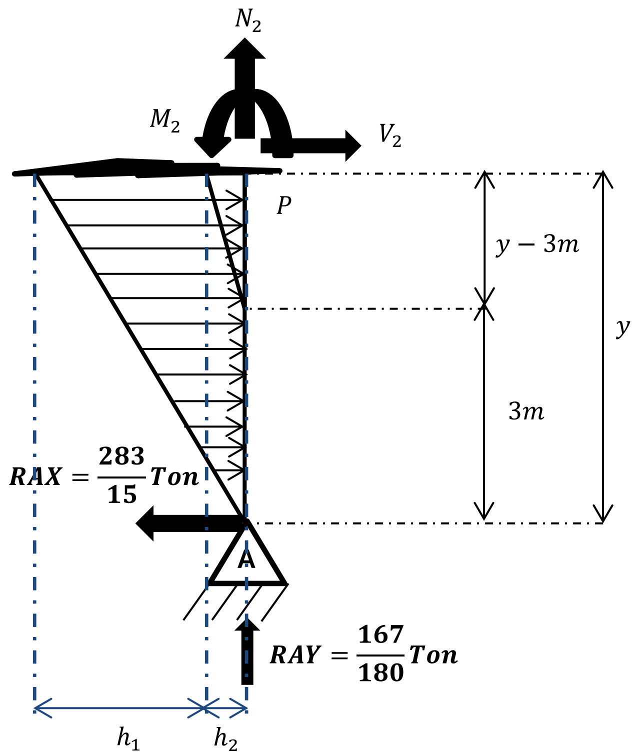
$$\boldsymbol{V_1 = -\frac{5}{4}y^2 + \frac{283}{15}}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_1 + \frac{167}{180} = 0 \qquad \boldsymbol{N_1 = -\frac{167}{180}Ton\ (Compresion)}$$

L (x)	Valor del momento 1	Valor del cortante 1
$0m$	0	$\frac{283}{15}Ton$
$3m$	$\frac{907}{20}Ton * m$	$\frac{457}{60}Ton$

Miembro A-B $\quad 3m \leq y \leq 4m$



Por trigonometría definimos:

$$h_1 = \frac{5}{2}y$$

$$h_2 = \frac{3y}{4} - \frac{9}{4}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_2 + \frac{283}{15}y - \frac{\left(\frac{5}{2}y\right)(y)}{2}\left[\frac{y}{3}\right] - \frac{\left(\frac{3y}{4} - \frac{9}{4}\right)(y-3)}{2}\left[\frac{y-3}{3}\right] = 0$$

$$M_2 = -\frac{5}{12}y^3 + \frac{283}{15}y - \frac{1}{6}\left(\frac{3y}{4} - \frac{9}{4}\right)(y^2 - 6y + 9)$$

$$M_2 = -\frac{5}{12}y^3 + \frac{283}{15}y - \frac{1}{6}\left(\frac{3y^3}{4} - \frac{18}{4}y^2 + \frac{27}{4}y - \frac{9}{4}y^2 + \frac{54}{4}y - \frac{81}{4}\right)$$

$$M_2 = -\frac{5}{12}y^3 + \frac{283}{15}y - \frac{1}{6}\left(\frac{3y^3}{4} - \frac{27}{4}y^2 + \frac{81}{4}y - \frac{81}{4}\right)$$

$$M_2 = -\frac{5}{12}y^3 + \frac{283}{15}y - \frac{y^3}{8} + \frac{9}{8}y^2 - \frac{27}{8}y + \frac{27}{8}$$

$$\boldsymbol{M_2 = -\frac{13}{24}y^3 + \frac{9}{8}y^2 + \frac{1859}{120}y + \frac{27}{8}}$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx}$$

$$\boldsymbol{V_2 = -\frac{13}{8}y^2 + \frac{9}{4}y + \frac{1859}{120}}$$

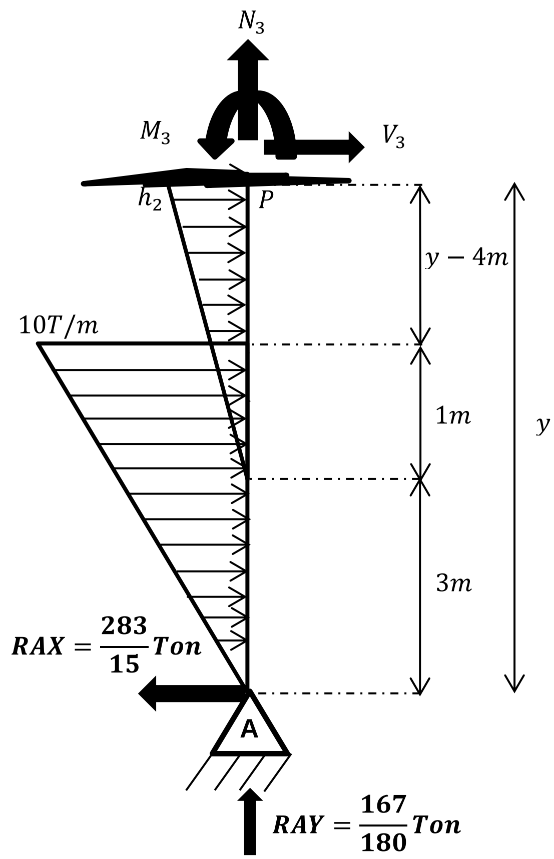
$$\sum F_y = 0$$

$$N_2 + \frac{167}{180} = 0$$

$$\boldsymbol{N_2 = -\frac{167}{180}Ton\ (Compresion)}$$

L (x)	Valor del momento 2	Valor del cortante 2
$3m$	$\frac{907}{20}Ton*m$	$\frac{457}{60}Ton$
$4m$	$\frac{1947}{40}Ton*m$	$-\frac{181}{120}Ton$

Miembro A-B $\quad\quad 4m \leq y \leq 6m$



Por trigonometría definimos:

$$h_2 = \frac{3y}{4} - \frac{9}{4}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_3 + \left(\frac{283}{15}\right)(y) - \frac{(10)(4)}{2}\left[y - \frac{8}{3}\right] - \frac{\left(\frac{3y}{4} - \frac{9}{4}\right)(y-3)}{2}\left[\frac{y-3}{3}\right] = 0$$

$$M_3 = \frac{283}{15}y - 20y + \frac{160}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{3y}{4} - \frac{9}{4}\right)(y^2 - 6y + 9)$$

$$M_3 = \frac{283}{15}y - 20y + \frac{160}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{3y^3}{4} - \frac{18}{4}y^2 + \frac{27}{4}y - \frac{9}{4}y^2 + \frac{54}{4}y - \frac{81}{4}\right)$$

$$M_3=\frac{283}{15}y-20y+\frac{160}{3}-\frac{1}{6}\left(\frac{3y^3}{4}-\frac{27}{4}y^2+\frac{81}{4}y-\frac{81}{4}\right)$$

$$M_3=\frac{283}{15}y-20y+\frac{160}{3}-\frac{y^3}{8}+\frac{9}{8}y^2-\frac{27}{8}y+\frac{27}{8}$$

$$\boldsymbol{M_3=-\frac{y^3}{8}+\frac{9}{8}y^2-\frac{541}{120}y+\frac{1361}{24}}$$

$$V_3=\frac{dM_3}{dx}$$

$$\boldsymbol{V_3=-\frac{3}{8}y^2+\frac{9}{4}y-\frac{541}{120}}$$

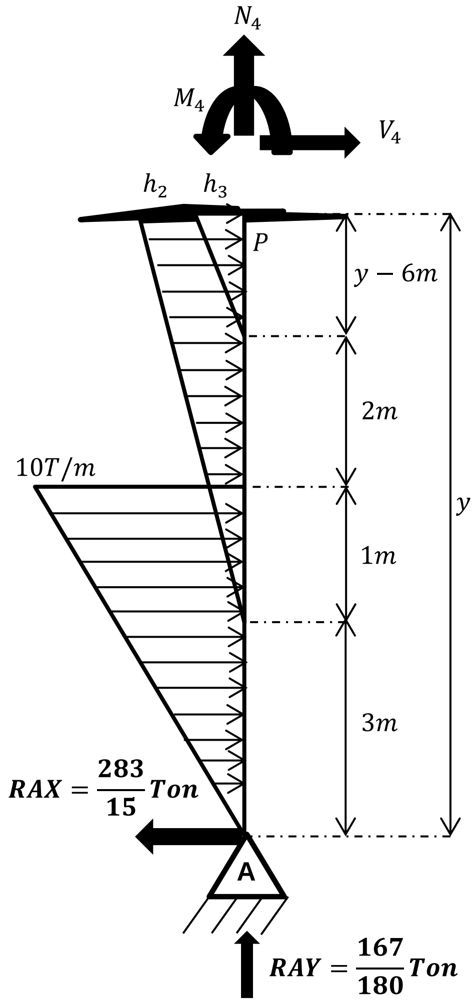
$$\sum F_y=0$$

$$N_3+\frac{167}{180}=0$$

$$\boldsymbol{N_3=-\frac{167}{180}Ton\ (Compresion)}$$

L (x)	Valor del momento 3	Valor del cortante 3
$4m$	$\frac{1947}{40}Ton*m$	$-\frac{181}{120}Ton$
$6m$	$\frac{5179}{120}Ton*m$	$-\frac{541}{120}Ton$

Miembro A-B $\boldsymbol{6m \leq y \leq 7m}$



Por trigonometría definimos:

$$\boldsymbol{h_2 = \frac{3y}{4} - \frac{9}{4}}$$

$$\boldsymbol{h_3 = \frac{3y}{2} - 9}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_4 + \left(\frac{283}{15}\right)(y) - \frac{(10)(4)}{2}\left[y - \frac{8}{3}\right] - \frac{\left(\frac{3y}{4} - \frac{9}{4}\right)(y-3)}{2}\left[\frac{y-3}{3}\right]$$
$$-\frac{\left(\frac{3y}{2} - 9\right)(y-6)}{2}\left[\frac{y-6}{3}\right] = 0$$

$$M_4 = -\frac{y^3}{8} + \frac{9}{8}y^2 - \frac{541}{120}y + \frac{1361}{24} - \frac{1}{6}(y^2 - 12y + 36)\left(\frac{3y}{2} - 9\right)$$

$$M_4 = -\frac{y^3}{8} + \frac{9}{8}y^2 - \frac{541}{120}y + \frac{1361}{24} - \frac{1}{6}\left(\frac{3y^3}{2} - 18y^2 + 54y - 9y^2 + 108y - 324\right)$$

$$M_4 = -\frac{y^3}{8} + \frac{9}{8}y^2 - \frac{541}{120}y + \frac{1361}{24} - \frac{1}{6}\left(\frac{3y^3}{2} - 27y^2 + 162y - 324\right)$$

$$M_4 = -\frac{y^3}{8} + \frac{9}{8}y^2 - \frac{541}{120}y + \frac{1361}{24} - \frac{y^3}{4} + \frac{9y^2}{2} - 27y + 54$$

$$\boldsymbol{M_4 = -\frac{3y^3}{8} + \frac{45}{8}y^2 - \frac{3781}{120}y + \frac{2657}{24}}$$

$$V_4 = \frac{dM_4}{dx}$$

$$\boldsymbol{V_4 = -\frac{9}{8}y^2 + \frac{45}{4}y - \frac{3781}{120}}$$

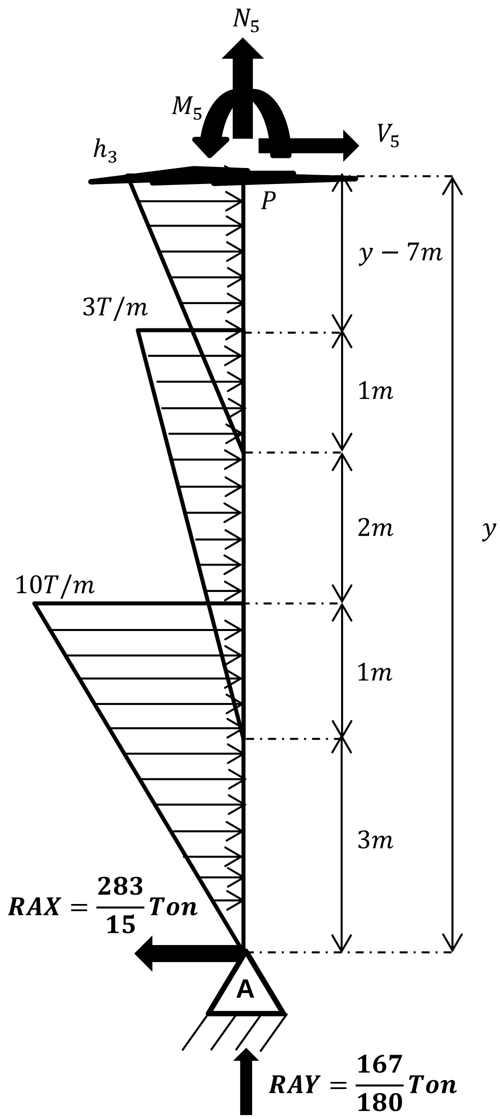
$$\sum F_y = 0$$

$$N_4 + \frac{167}{180} = 0$$

$$\boldsymbol{N_4 = -\frac{167}{180}Ton\ (Compresion)}$$

L (x)	Valor del momento 4	Valor del cortante 4
$6m$	$\frac{5179}{120}Ton * m$	$-\frac{541}{120}Ton$
$7m$	$\frac{743}{20}Ton * m$	$-\frac{473}{60}Ton$

Miembro A-B $\quad 7m \leq y \leq 10m$



Por trigonometría definimos:

$$h_3 = \frac{3y}{2} - 9$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_5 + \left(\frac{283}{15}\right)(y) - \frac{(10)(4)}{2}\left[y - \frac{8}{3}\right] - \frac{(3)(4)}{2}\left[y - \frac{17}{3}\right] - \frac{\left(\frac{3y}{2} - 9\right)(y-6)}{2}\left[\frac{y-6}{3}\right] = 0$$

$$M_5 = \frac{283}{15}y - 20y + \frac{160}{3} - 6y + 34 - \frac{1}{6}(y^2 - 12y + 36)\left(\frac{3y}{2} - 9\right)$$

$$M_5 = \frac{283}{15}y - 20y + \frac{160}{3} - 6y + 34 - \frac{1}{6}\left(\frac{3y^3}{2} - 18y^2 + 54y - 9y^2 + 108y - 324\right)$$

$$M_5 = \frac{283}{15}y - 20y + \frac{160}{3} - 6y + 34 - \frac{1}{6}\left(\frac{3y^3}{2} - 27y^2 + 162y - 324\right)$$

$$M_5 = \frac{283}{15}y - 20y + \frac{160}{3} - 6y + 34 - \frac{y^3}{4} + \frac{9y^2}{2} - 27y + 54$$

$$\boldsymbol{M_5 = -\frac{y^3}{4} + \frac{9y^2}{2} - \frac{512}{15}y + \frac{424}{3}}$$

$$V_5 = \frac{dM_5}{dx}$$

$$\boldsymbol{V_5 = -\frac{3}{4}y^2 + 9y - \frac{512}{15}}$$

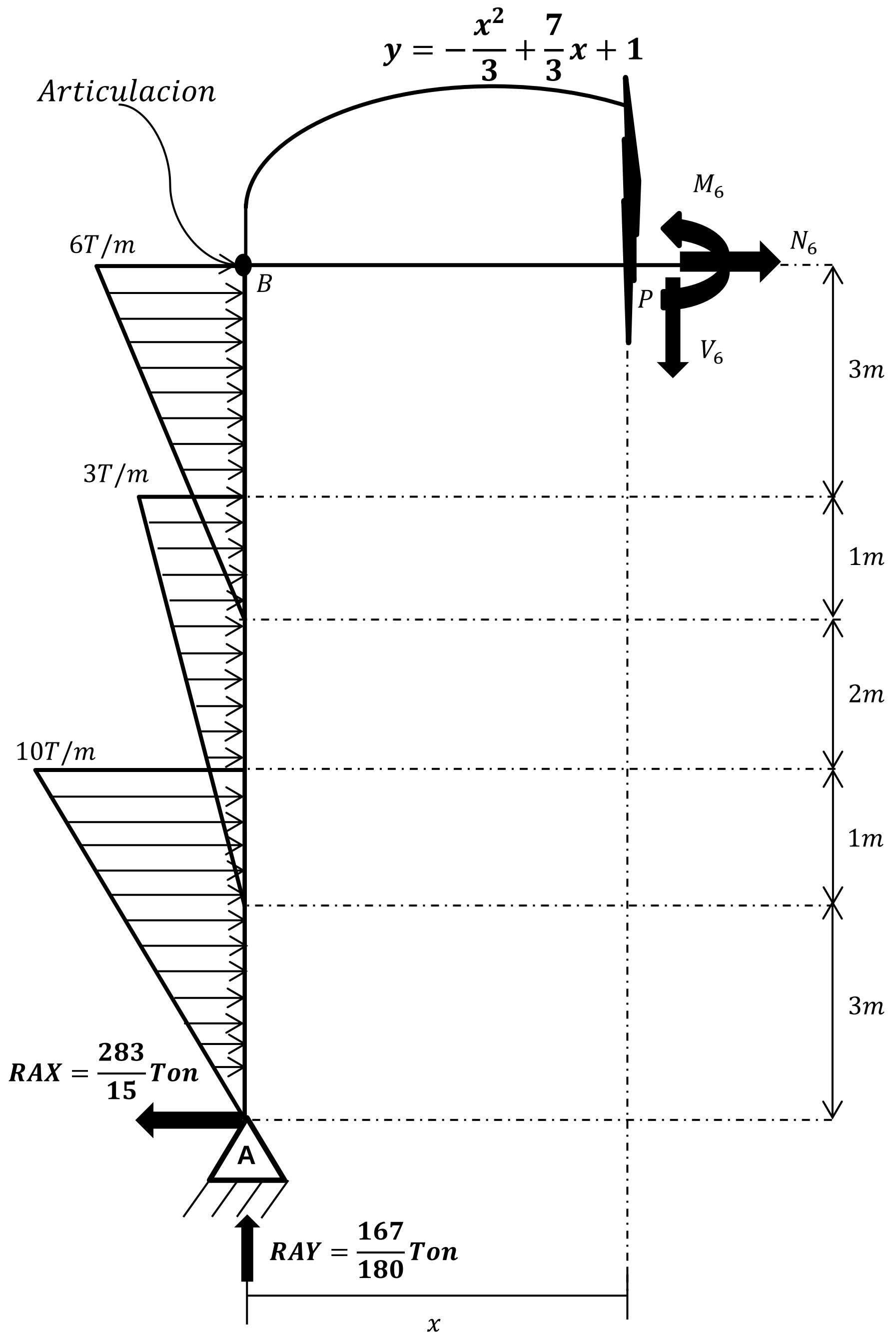
$$\sum F_y = 0$$

$$N_5 + \frac{167}{180} = 0$$

$$\boldsymbol{N_5 = -\frac{167}{180}Ton\ (Compresion)}$$

L (x)	Valor del momento 5	Valor del cortante 5
$7m$	$\frac{743}{20}Ton * m$	$-\frac{473}{60}Ton$
$10m$	0	$-\frac{287}{15}Ton$

Miembro B-C $0m \leq x \leq 6m$



$$\sum M_P = 0$$

$$-M_6 + \left(\frac{167}{180}\right)(x) + \left(\frac{283}{15}Ton\right)(10m) - (20Ton)\left(\frac{22}{3}m\right) - (6ton)\left(\frac{13}{3}m\right)$$

$$-(12Ton)\left(\frac{4}{3}m\right) - \int_0^x \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{7}{3}x + 1\right)dx \left(x - \frac{\int_0^x (x)\left(-\frac{x^2}{3} + \frac{7}{3}x + 1\right)dx}{\int_0^x \left(-\frac{x^2}{3} + \frac{7}{3}x + 1\right)dx}\right) = 0$$

$$M_6 = \frac{167}{180}x + \frac{566}{3} - \frac{440}{3} - 26 - 16 - \left(-\frac{x^3}{9} + \frac{7x^2}{6} + x\right)\left(x - \frac{-\frac{x^4}{12} + \frac{7x^3}{9} + \frac{x^2}{2}}{-\frac{x^3}{9} + \frac{7x^2}{6} + x}\right)$$

$$M_6 = \frac{167}{180}x - \left(-\frac{x^4}{9} + \frac{7x^3}{6} + x^2 + \frac{x^4}{12} - \frac{7x^3}{9} - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{M_6 = \frac{x^4}{36} - \frac{7x^3}{18} - \frac{x^2}{2} + \frac{167}{180}x}$$

$$V_6 = \frac{dM_6}{dx}$$

$$\boldsymbol{V_6 = \frac{y^3}{9} - \frac{7x^2}{6} - x + \frac{167}{180}}$$

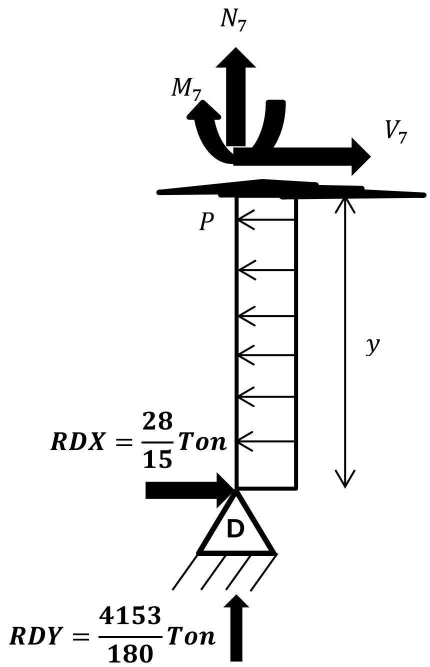
$$\sum F_x = 0$$

$$N_6 - \frac{283}{15}Ton + 20Ton + 6Ton + 12Ton = 0$$

$$\boldsymbol{N_6 = -\frac{287}{15}Ton\ (Compresion)}$$

L (x)	Valor del momento 6	Valor del cortante 6
$0m$	0	$\frac{167}{180}Ton$
$6m$	$-\frac{1813}{30}Ton * m$	$-\frac{4153}{180}Ton$

Miembro C-D $\boldsymbol{0m \leq y \leq 7m}$



$$\sum M_P = 0$$

$$-M_7 + \frac{28}{15}y - (3)(y)\left(\frac{y}{2}\right) = 0$$

$$\boldsymbol{M_7 = -\frac{3}{2}y^2 + \frac{28}{15}y}$$

$$V_7 = \frac{dM_7}{dx}$$

$$\boldsymbol{V_7 = -3x + \frac{28}{15}}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_7 + \frac{4153}{180} = 0$$

$$N_7 = -\frac{\mathbf{4153}}{\mathbf{180}}\boldsymbol{Ton}\ (\boldsymbol{Compresion})$$

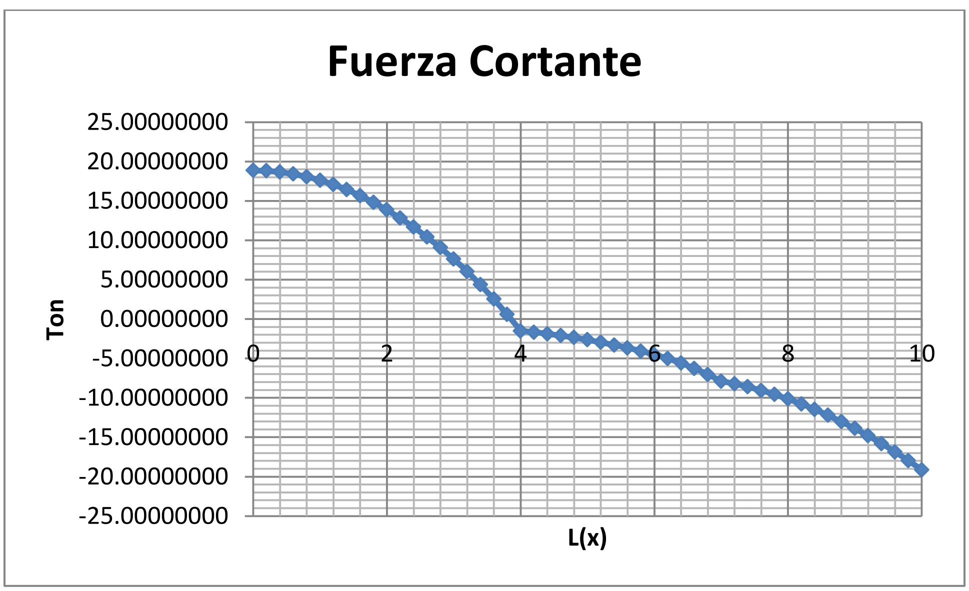
L (x)	Valor del momento 7	Valor del cortante 7
$0m$	0	$\frac{28}{15}Ton$
$7m$	$-\frac{1813}{30}Ton * m$	$-\frac{287}{15}Ton$

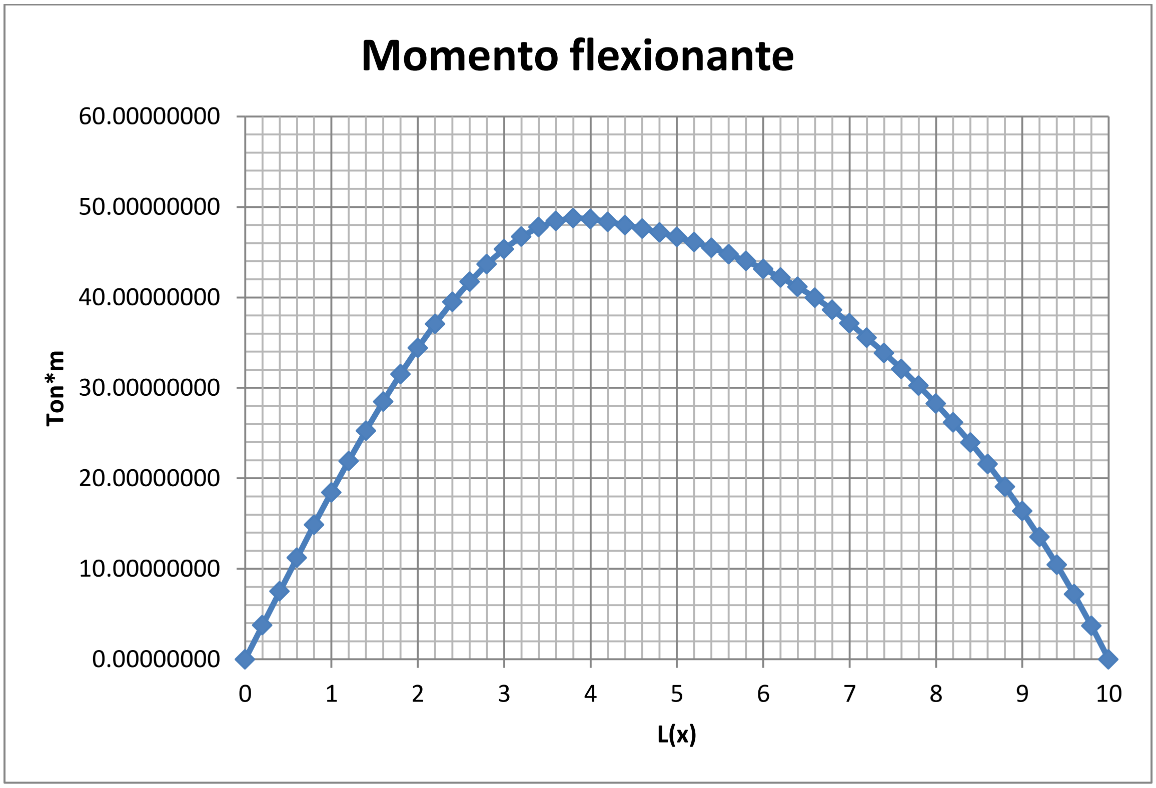
Diagramas de momento flexionante, Fuerza Cortante y fuerza axial en el marco.

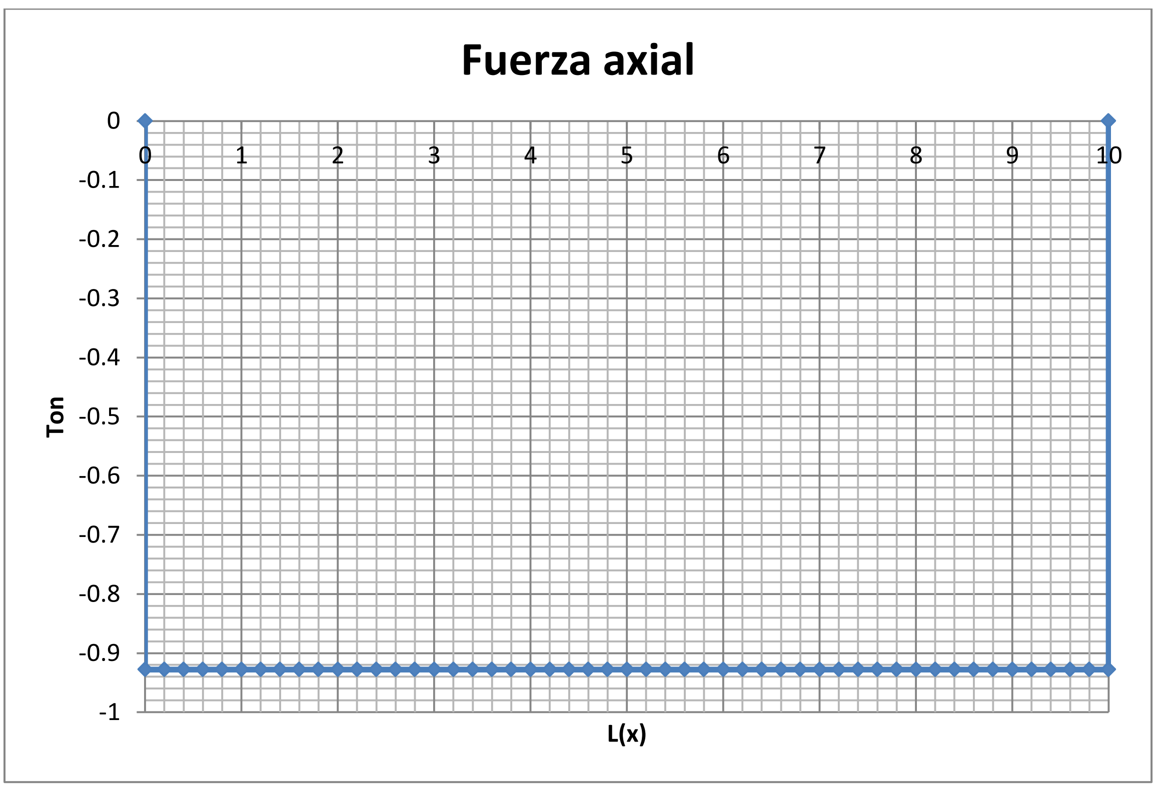
Miembro A-B $\mathbf{0}\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{y} \leq \mathbf{10}\boldsymbol{m}$

L(x)	Cortante	Momento	Axial
0	18.86666667	0.00000000	0.00000000
0.2	18.81666667	3.77000000	-0.92777778
0.4	18.66666667	7.52000000	-0.92777778
0.6	18.41666667	11.23000000	-0.92777778
0.8	18.06666667	14.88000000	-0.92777778
1	17.61666667	18.45000000	-0.92777778
1.2	17.06666667	21.92000000	-0.92777778
1.4	16.41666667	25.27000000	-0.92777778
1.6	15.66666667	28.48000000	-0.92777778
1.8	14.81666667	31.53000000	-0.92777778
2	13.86666667	34.40000000	-0.92777778
2.2	12.81666667	37.07000000	-0.92777778
2.4	11.66666667	39.52000000	-0.92777778
2.6	10.41666667	41.73000000	-0.92777778
2.8	9.06666667	43.68000000	-0.92777778
3	7.61666667	45.35000000	-0.92777778
3.2	6.05166667	46.71900000	-0.92777778
3.4	4.35666667	47.76200000	-0.92777778
3.6	2.53166667	48.45300000	-0.92777778
3.8	0.57666667	48.76600000	-0.92777778
4	-1.50833333	48.67500000	-0.92777778
4.2	-1.67333333	48.35733333	-0.92777778
4.4	-1.86833333	48.00366667	-0.92777778
4.6	-2.09333333	47.60800000	-0.92777778
4.8	-2.34833333	47.16433333	-0.92777778

5	-2.63333333	46.66666667	-0.92777778
5.2	-2.94833333	46.10900000	-0.92777778
5.4	-3.29333333	45.48533333	-0.92777778
5.6	-3.66833333	44.78966667	-0.92777778
5.8	-4.07333333	44.01600000	-0.92777778
6	-4.50833333	43.15833333	-0.92777778
6.2	-5.00333333	42.20866667	-0.92777778
6.4	-5.58833333	41.15100000	-0.92777778
6.6	-6.26333333	39.96733333	-0.92777778
6.8	-7.02833333	38.63966667	-0.92777778
7	-7.88333333	37.15000000	-0.92777778
7.2	-8.21333333	35.54133333	-0.92777778
7.4	-8.60333333	33.86066667	-0.92777778
7.6	-9.05333333	32.09600000	-0.92777778
7.8	-9.56333333	30.23533333	-0.92777778
8	-10.13333333	28.26666667	-0.92777778
8.2	-10.76333333	26.17800000	-0.92777778
8.4	-11.45333333	23.95733333	-0.92777778
8.6	-12.20333333	21.59266667	-0.92777778
8.8	-13.01333333	19.07200000	-0.92777778
9	-13.88333333	16.38333333	-0.92777778
9.2	-14.81333333	13.51466667	-0.92777778
9.4	-15.80333333	10.45400000	-0.92777778
9.6	-16.85333333	7.18933333	-0.92777778
9.8	-17.96333333	3.70866667	-0.92777778
10	-19.13333333	0.00000000	0.00000000

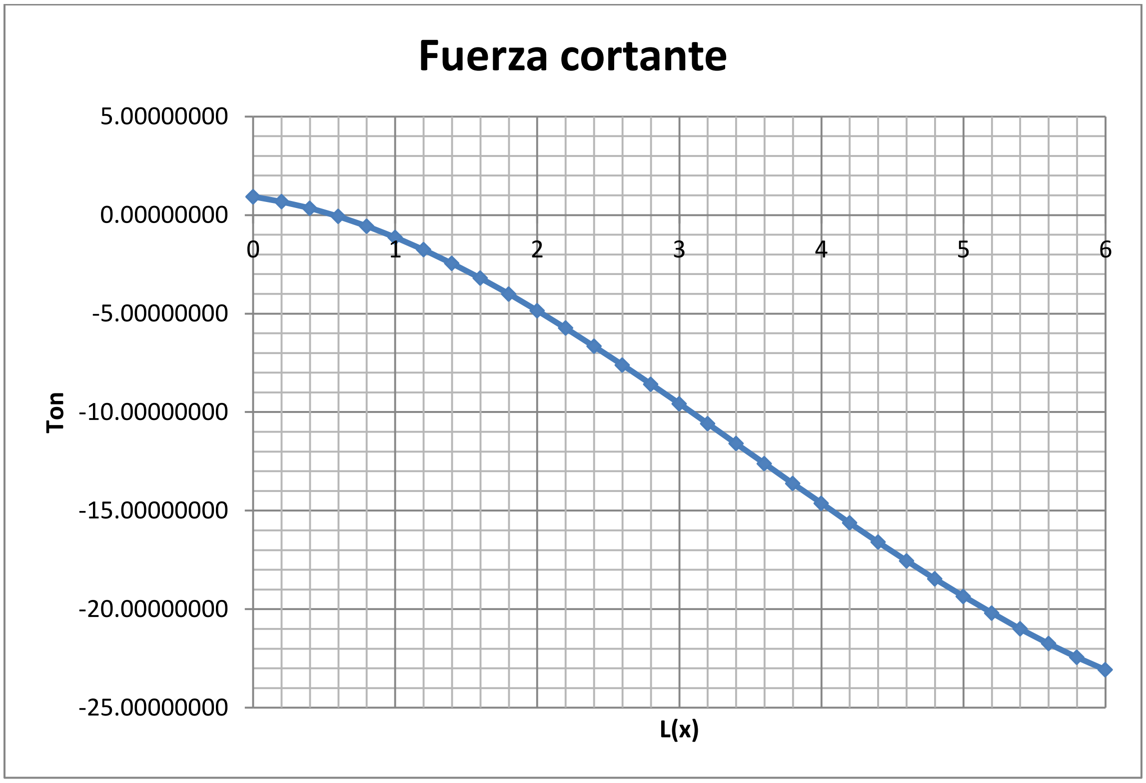


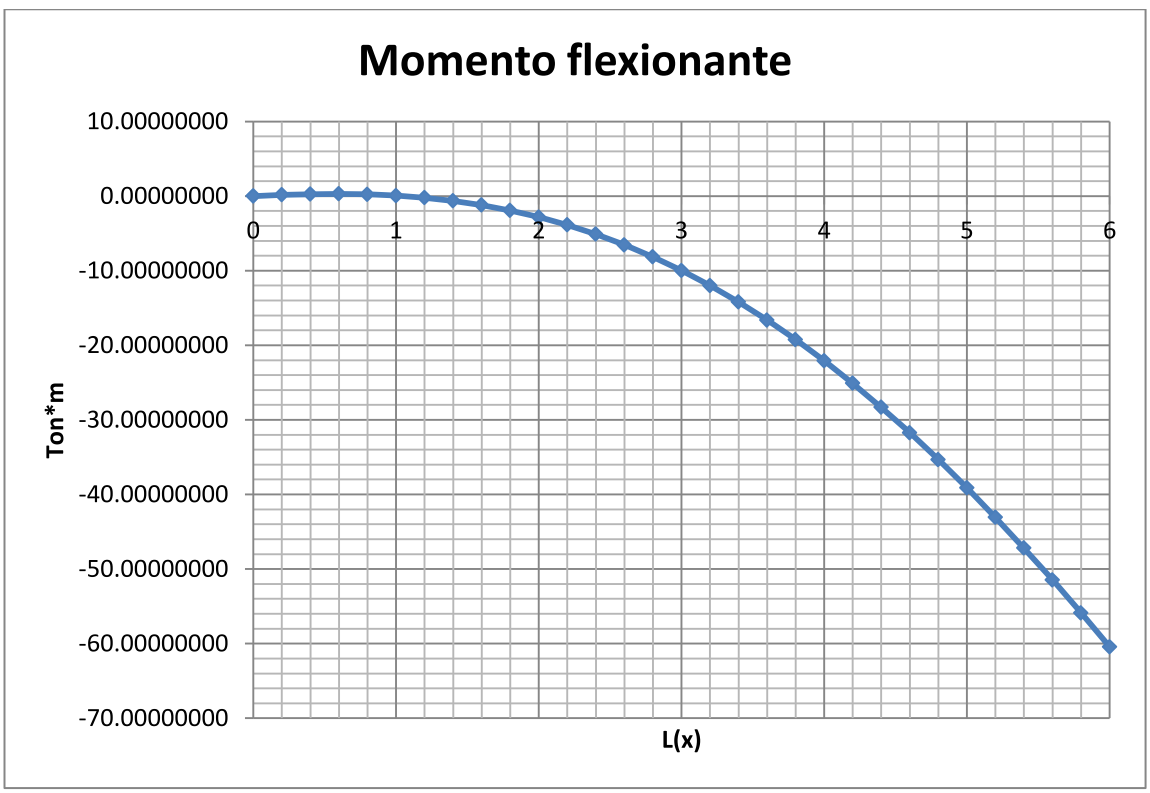

Momento flexionante
60.00000000
50.00000000
40.00000000
30.00000000
20.00000000
10.00000000
0.00000000
Ton*m
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
L(x)

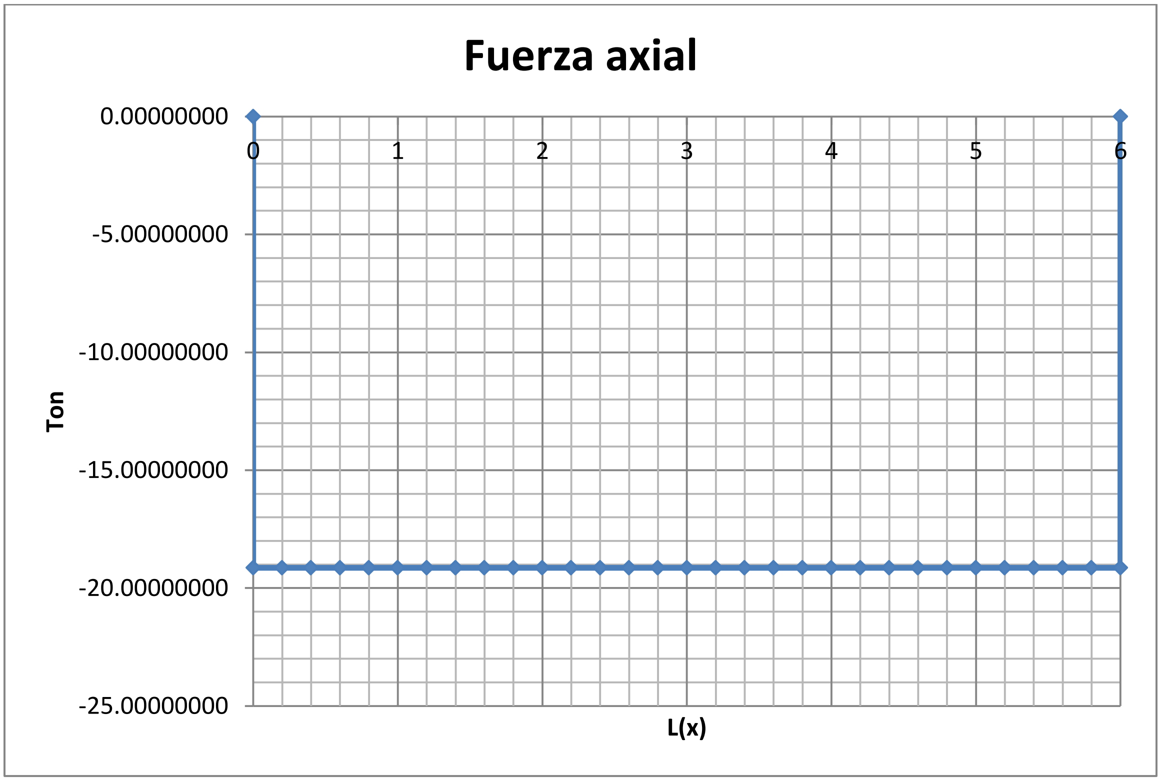

Fuerza axial
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
-0.8
-0.9
-1
Ton
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
L(x)

Miembro B-C $0m \leq x \leq 6m$

L(x)	Cortante	Momento	Axial
0	0.92777778	0.00000000	-19.13333333
0.2	0.68200000	0.16248889	-19.13333333
0.4	0.34822222	0.26693333	-19.13333333
0.6	-0.06822222	0.29626667	-19.13333333
0.8	-0.56200000	0.23448889	-19.13333333
1	-1.12777778	0.06666667	-19.13333333
1.2	-1.76022222	-0.22106667	-19.13333333
1.4	-2.45400000	-0.64151111	-19.13333333
1.6	-3.20377778	-1.20640000	-19.13333333
1.8	-4.00422222	-1.92640000	-19.13333333
2	-4.85000000	-2.81111111	-19.13333333
2.2	-5.73577778	-3.86906667	-19.13333333
2.4	-6.65622222	-5.10773333	-19.13333333
2.6	-7.60600000	-6.53351111	-19.13333333
2.8	-8.57977778	-8.15173333	-19.13333333
3	-9.57222222	-9.96666667	-19.13333333
3.2	-10.57800000	-11.98151111	-19.13333333
3.4	-11.59177778	-14.19840000	-19.13333333
3.6	-12.60822222	-16.61840000	-19.13333333
3.8	-13.62200000	-19.24151111	-19.13333333
4	-14.62777778	-22.06666667	-19.13333333
4.2	-15.62022222	-25.09173333	-19.13333333
4.4	-16.59400000	-28.31351111	-19.13333333
4.6	-17.54377778	-31.72773333	-19.13333333
4.8	-18.46422222	-35.32906667	-19.13333333
5	-19.35000000	-39.11111111	-19.13333333
5.2	-20.19577778	-43.06640000	-19.13333333
5.4	-20.99622222	-47.18640000	-19.13333333
5.6	-21.74600000	-51.46151111	-19.13333333
5.8	-22.43977778	-55.88106667	-19.13333333
6	-23.07222222	-60.43333333	-19.13333333


Fuerza cortante
5.00000000
0.00000000
-5.00000000
-10.00000000
-15.00000000
-20.00000000
-25.00000000
Ton
0
1
2
3
4
5
6
L(x)

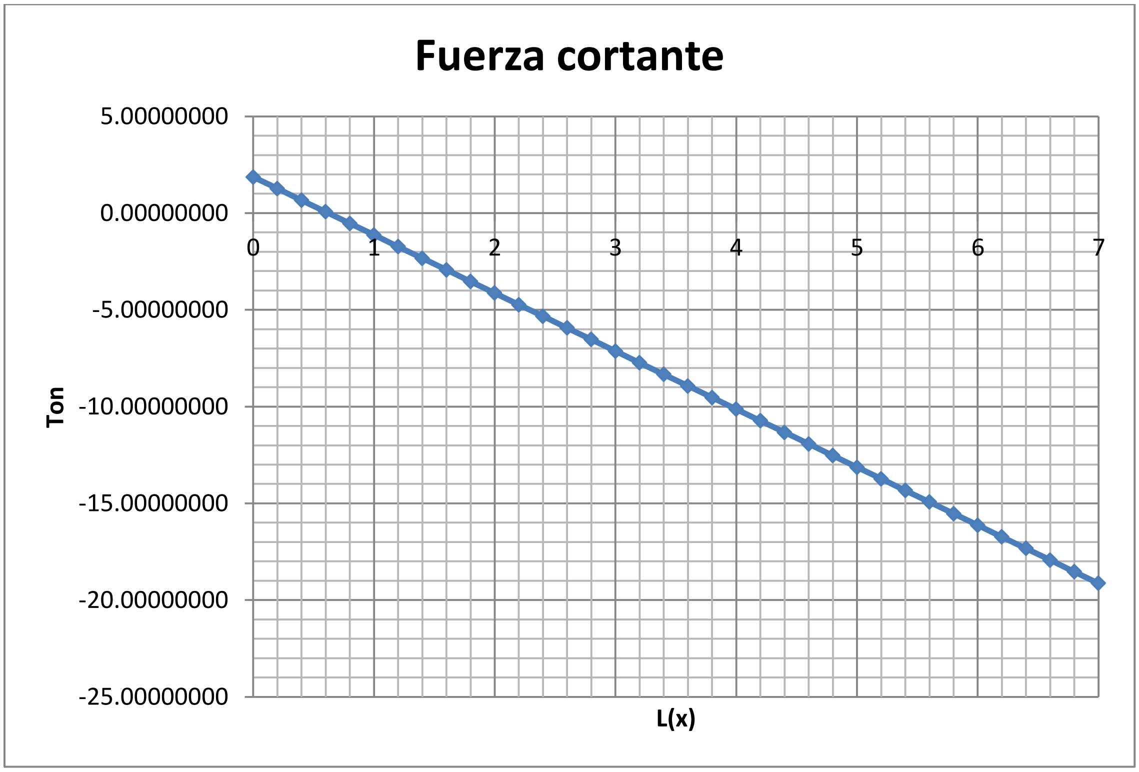

Momento flexionante
10.00000000
0.00000000
-10.00000000
-20.00000000
-30.00000000
-40.00000000
-50.00000000
-60.00000000
-70.00000000
Ton*m
0
1
2
3
4
5
6
L(x)

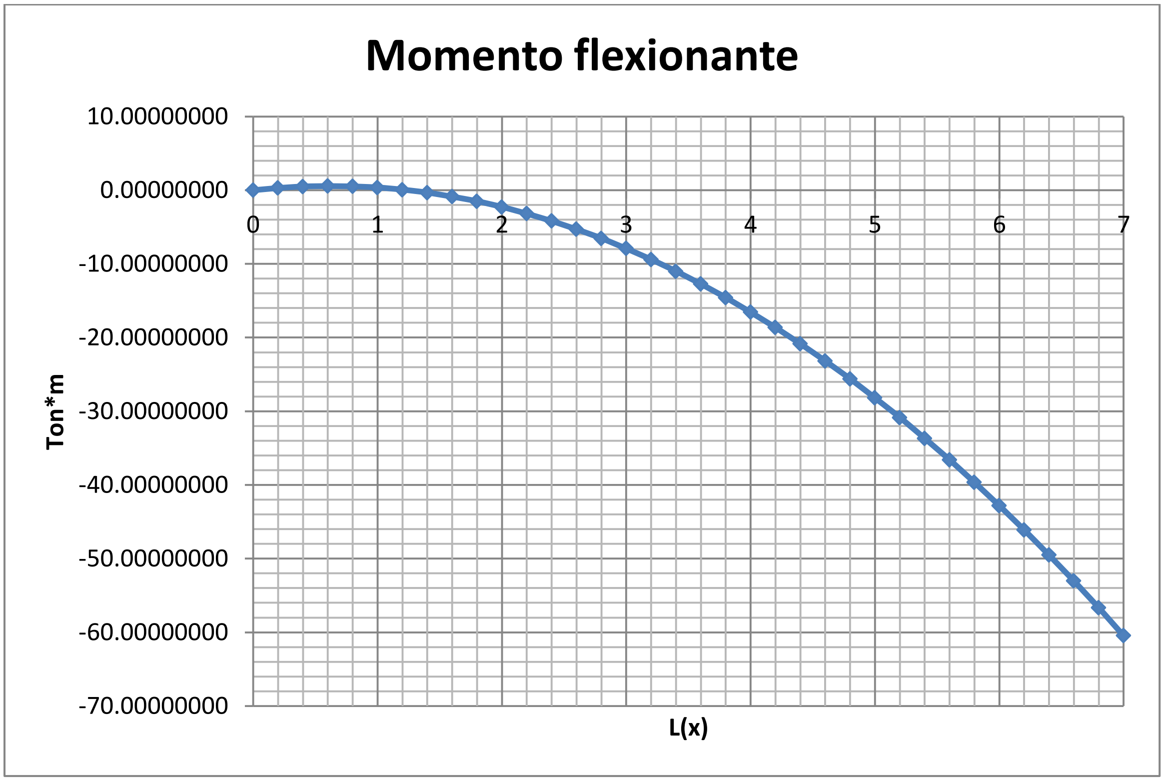


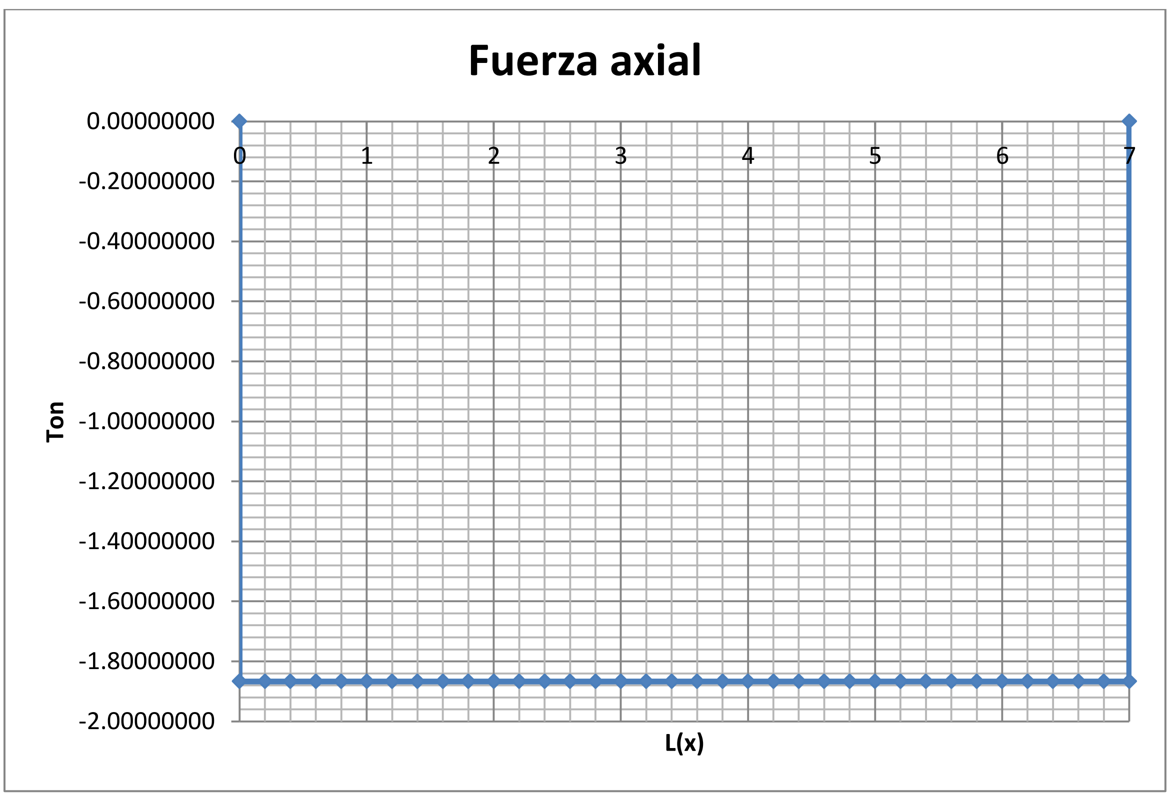
Miembro C-D $0m \leq y \leq 7m$

L(x)	Cortante	Momento	Axial
0	1.86666667	0.00000000	0.00000000
0.2	1.26666667	0.31333333	-1.86666667
0.4	0.66666667	0.50666667	-1.86666667
0.6	0.06666667	0.58000000	-1.86666667
0.8	-0.53333333	0.53333333	-1.86666667
1	-1.13333333	0.36666667	-1.86666667
1.2	-1.73333333	0.08000000	-1.86666667
1.4	-2.33333333	-0.32666667	-1.86666667
1.6	-2.93333333	-0.85333333	-1.86666667
1.8	-3.53333333	-1.50000000	-1.86666667
2	-4.13333333	-2.26666667	-1.86666667
2.2	-4.73333333	-3.15333333	-1.86666667
2.4	-5.33333333	-4.16000000	-1.86666667
2.6	-5.93333333	-5.28666667	-1.86666667
2.8	-6.53333333	-6.53333333	-1.86666667
3	-7.13333333	-7.90000000	-1.86666667
3.2	-7.73333333	-9.38666667	-1.86666667

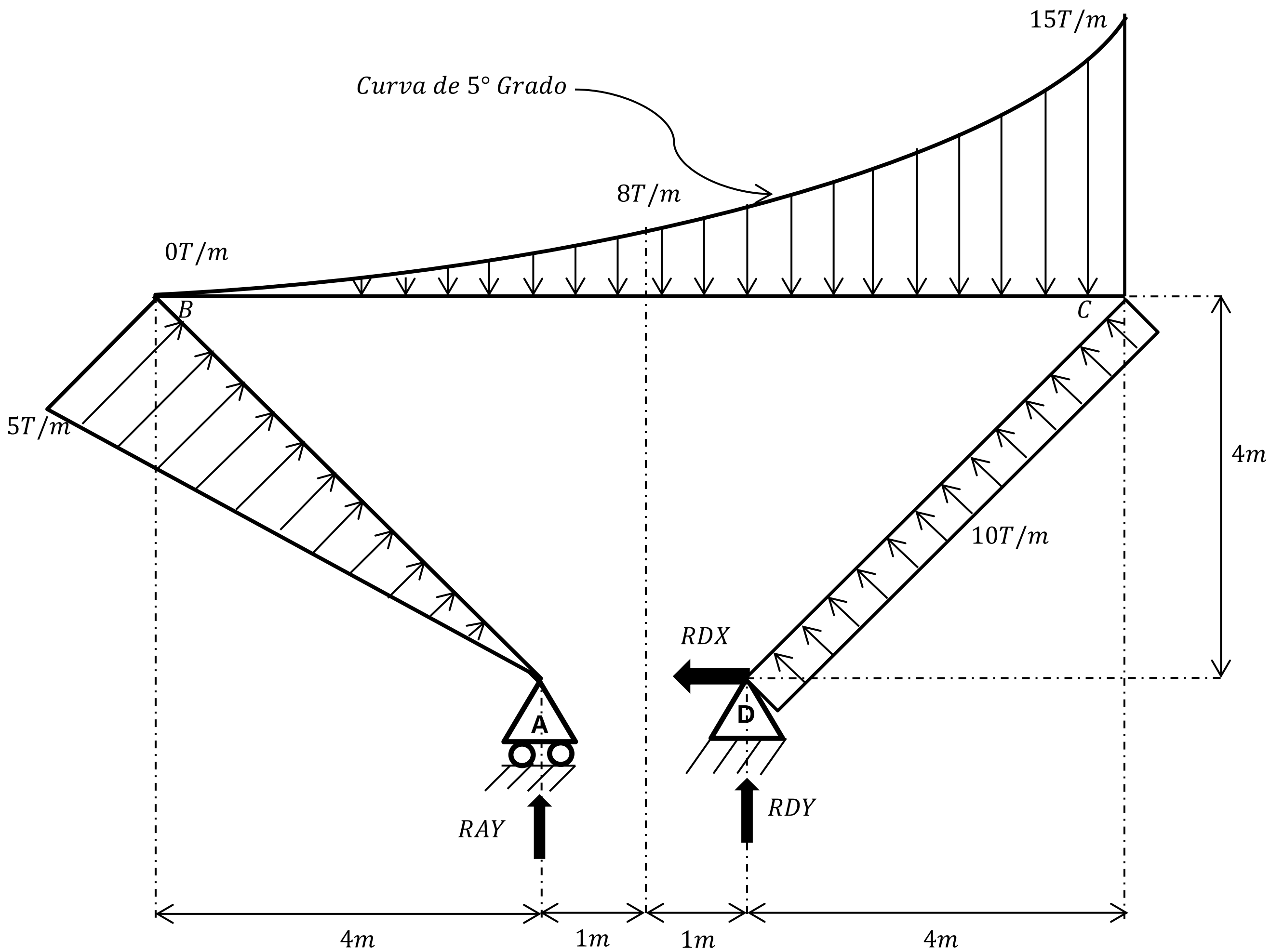
3.4	-8.33333333	-10.99333333	-1.86666667
3.6	-8.93333333	-12.72000000	-1.86666667
3.8	-9.53333333	-14.56666667	-1.86666667
4	-10.13333333	-16.53333333	-1.86666667
4.2	-10.73333333	-18.62000000	-1.86666667
4.4	-11.33333333	-20.82666667	-1.86666667
4.6	-11.93333333	-23.15333333	-1.86666667
4.8	-12.53333333	-25.60000000	-1.86666667
5	-13.13333333	-28.16666667	-1.86666667
5.2	-13.73333333	-30.85333333	-1.86666667
5.4	-14.33333333	-33.66000000	-1.86666667
5.6	-14.93333333	-36.58666667	-1.86666667
5.8	-15.53333333	-39.63333333	-1.86666667
6	-16.13333333	-42.80000000	-1.86666667
6.2	-16.73333333	-46.08666667	-1.86666667
6.4	-17.33333333	-49.49333333	-1.86666667
6.6	-17.93333333	-53.02000000	-1.86666667
6.8	-18.53333333	-56.66666667	-1.86666667
7	-19.13333333	-60.43333333	-1.86666667
7	-19.13333333	-60.43333333	0




Momento flexionante
10.00000000
0.00000000
-10.00000000
-20.00000000
-30.00000000
-40.00000000
-50.00000000
-60.00000000
-70.00000000
0
1
2
3
4
5
6
7
Ton*m
L(x)


Fuerza axial
0.00000000
-0.20000000
-0.40000000
-0.60000000
-0.80000000
-1.00000000
-1.20000000
-1.40000000
-1.60000000
-1.80000000
-2.00000000
0
1
2
3
4
5
6
7
Ton
L(x)

5.- Del siguiente marco, determine: el valor de las reacciones en los soportes mostrados, las funciones que describen la variación de las acciones internas (momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal) y dibuje los diagramas correspondientes a estas.



Grado de indeterminación del marco:

$$\boldsymbol{r + 3m = 3n + c}$$

$$\boldsymbol{3 + 3(3) = 3(4) + 0}$$

$$\boldsymbol{12 = 12}$$

Por lo tanto nuestro marco es estáticamente determinado y podemos resolverlo con la simple aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático.

Deducción de la función de la curva:

$y = ax^5 + bx + c$

Condiciones de tontera:

Si $x = 0 \quad y = 0$
Si $x = 5 \quad y = 8$
Si $x = 10 \quad y = 15$

De la primera condición: $0 = a(0)^5 + b(0) + c \quad \therefore \quad c = 0$

$a(5)^5 + b(5) = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots Ec.1$

$a(10)^5 + b(10) = 15 \ldots\ldots\ldots\ldots Ec.2$

De la ecuación 1 despejamos **"a"**

$$a = \frac{-10b + 15}{10^5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Ec.3$$

Sustituyendo la ecuación **"3"** y despejando el valor de **"b"**

$$\boldsymbol{b = \frac{241}{150}}$$

Sustituyendo el valor de **"b"** en la ecuación **"3"**

$$\boldsymbol{a = \frac{-1}{93750}}$$

La función de la curva: $\boldsymbol{y = -\frac{x^5}{93750} + \frac{241}{150}x}$

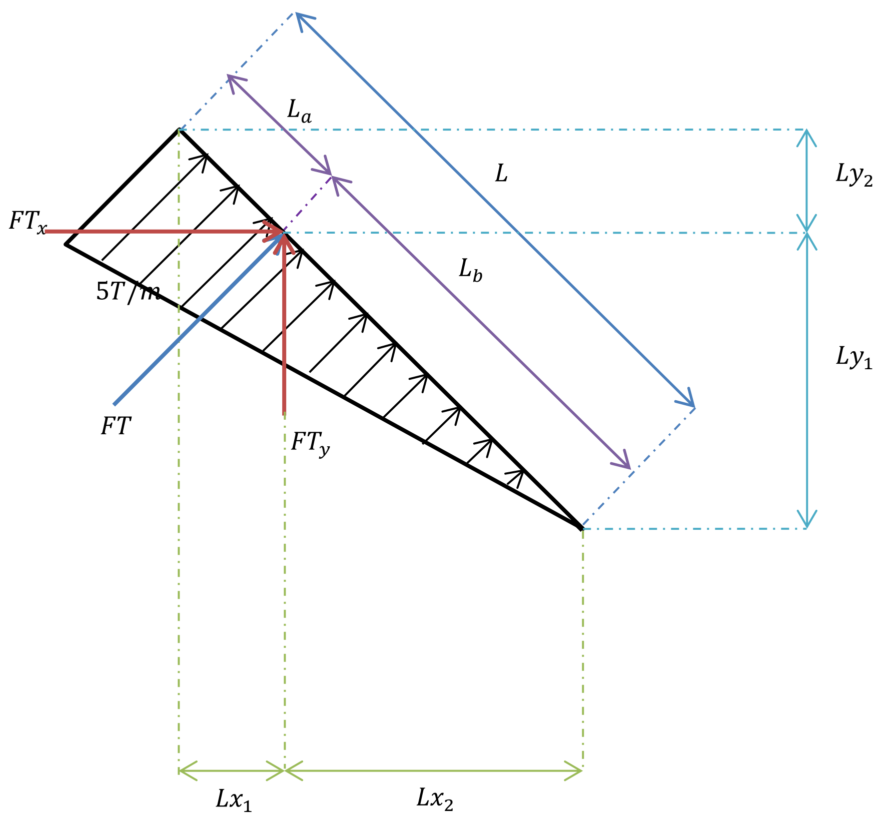
Calculo de la carga total de la curva $\boldsymbol{P_C}$ y su brazo de palanca $\boldsymbol{\bar{x}}$ aislando el miembro B-C

$$P_C = \int_0^{10} \left(-\frac{x^5}{93750} + \frac{241}{150}x\right) dx = \left[-\frac{x^6}{562500} + \frac{241}{300}x^2\right]_0^{10} = \boldsymbol{\frac{707}{9} Ton}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{10}(x)(-\frac{x^5}{93750}+\frac{241}{150}x)\,dx}{\int_0^{10}(-\frac{x^5}{93750}+\frac{241}{150}x)\,dx} = \frac{\left[-\frac{x^7}{656200}+\frac{241}{450}x^3\right]_0^{10}}{\left[-\frac{x^6}{562500}+\frac{241}{300}x^2\right]_0^{10}} = \frac{\frac{32780}{63}}{\frac{707}{9}} = \frac{\mathbf{295020}}{\mathbf{44541}}\boldsymbol{m}$$

Concentración de cargas y cálculo de su brazo de palanca en los miembros A-B y C-D:

Miembro A-B



Del Diagrama anterior:

$$L = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}m$$

$$L_a = (4\sqrt{2})\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}m$$

$$L_b = (4\sqrt{2})\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}m$$

$$FT = \frac{(5)\left(4\sqrt{2}\right)}{2} = 10\sqrt{2}Ton$$

$$FT_y = (Sen45°)\left(10\sqrt{2}\right) = 10Ton$$

$$FT_x = (Cos45°)\left(10\sqrt{2}\right) = 10Ton$$

Por trigonometría deducimos:

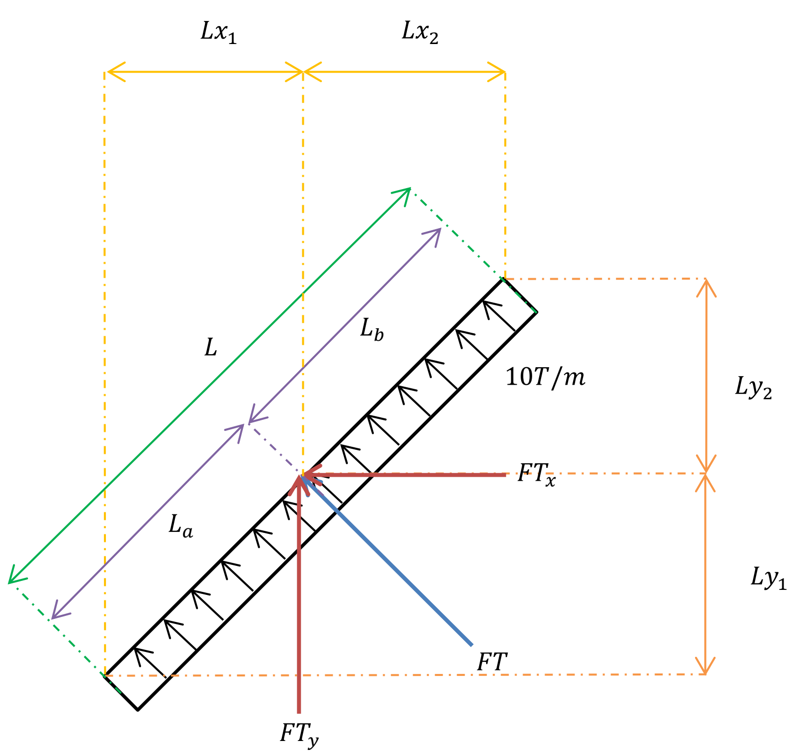
$$Lx_2 = \frac{\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)(4)}{4\sqrt{2}} = \frac{8}{3}m$$

$$Lx_1 = 4m - \frac{8}{3}m = \frac{4}{3}m$$

$$Ly_2 = \frac{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)(4)}{4\sqrt{2}} = \frac{4}{3}m$$

$$Ly_1 = 4m - \frac{4}{3}m = \frac{8}{3}m$$

Miembro C-D



Del Diagrama anterior:

$$L = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}m$$

$$L_a = L_b = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$FT = (10)\left(4\sqrt{2}\right) = 40\sqrt{2}Ton$$

$$FT_y = (Sen45°)\left(40\sqrt{2}\right) = 40Ton$$

$$FT_x = (Cos45°)\left(40\sqrt{2}\right) = 40Ton$$

Por trigonometría deducimos:

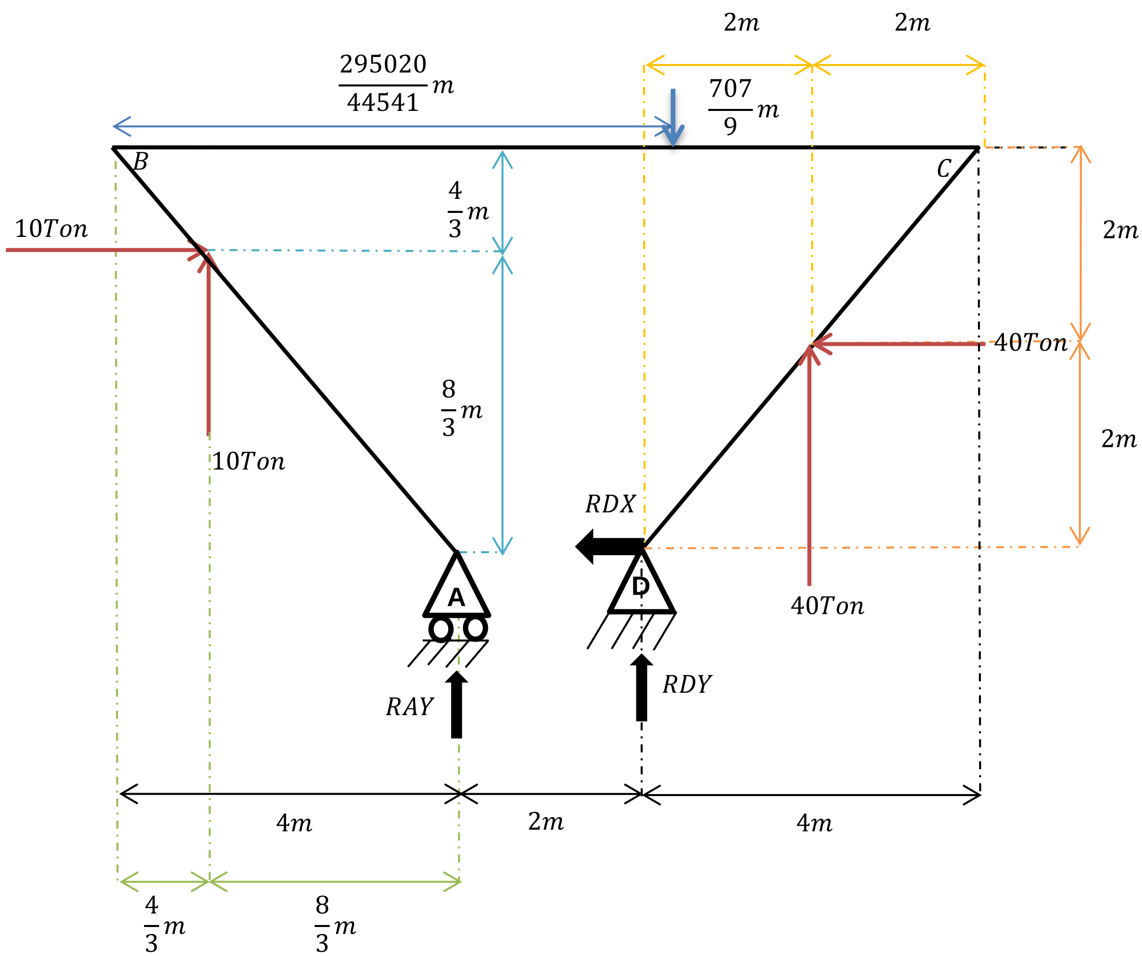
$$Lx_1 = \frac{(2)\left(4\sqrt{2}\right)}{4\sqrt{2}} = 2m$$

$$Lx_2 = 4m - 2m = 2m$$

$$Ly_1 = \frac{(2)\left(4\sqrt{2}\right)}{4\sqrt{2}} = 2m$$

$$Ly_2 = 4m - 2m = 2m$$

Marco con cargas concentradas



Calculo de las reacciones en los soportes.

$$\sum M_D$$

$$(2m)RAY + (10Ton)\left(\frac{14}{3}m\right) + (10Ton)\left(\frac{8}{3}m\right) + \left(\frac{707}{9}Ton\right)\left(\frac{295020}{44541}m - 6m\right)$$

$$-(40Ton)(2m) - (40Ton)(2m) = 0$$

$$RAY = \frac{\left(-\frac{140}{3} - \frac{80}{3} - \frac{3086}{63} + 80 + 80\right)Ton * m}{2m} = \frac{\frac{2374}{63}Ton * m}{2m}$$

$$\boldsymbol{RAY = \frac{1187}{63} Ton} \uparrow$$

$$\sum F_Y$$

$$RDY + \frac{1187}{63} Ton - \frac{707}{9} Ton + 10Ton + 40Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = \frac{68}{7} Ton} \uparrow$$

$$\sum F_x$$

$$-RDX + 10Ton - 40Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RDX} = -30\boldsymbol{Ton} \longrightarrow$$

Verificando las reacciones calculadas.

$$\sum M_C = 0$$

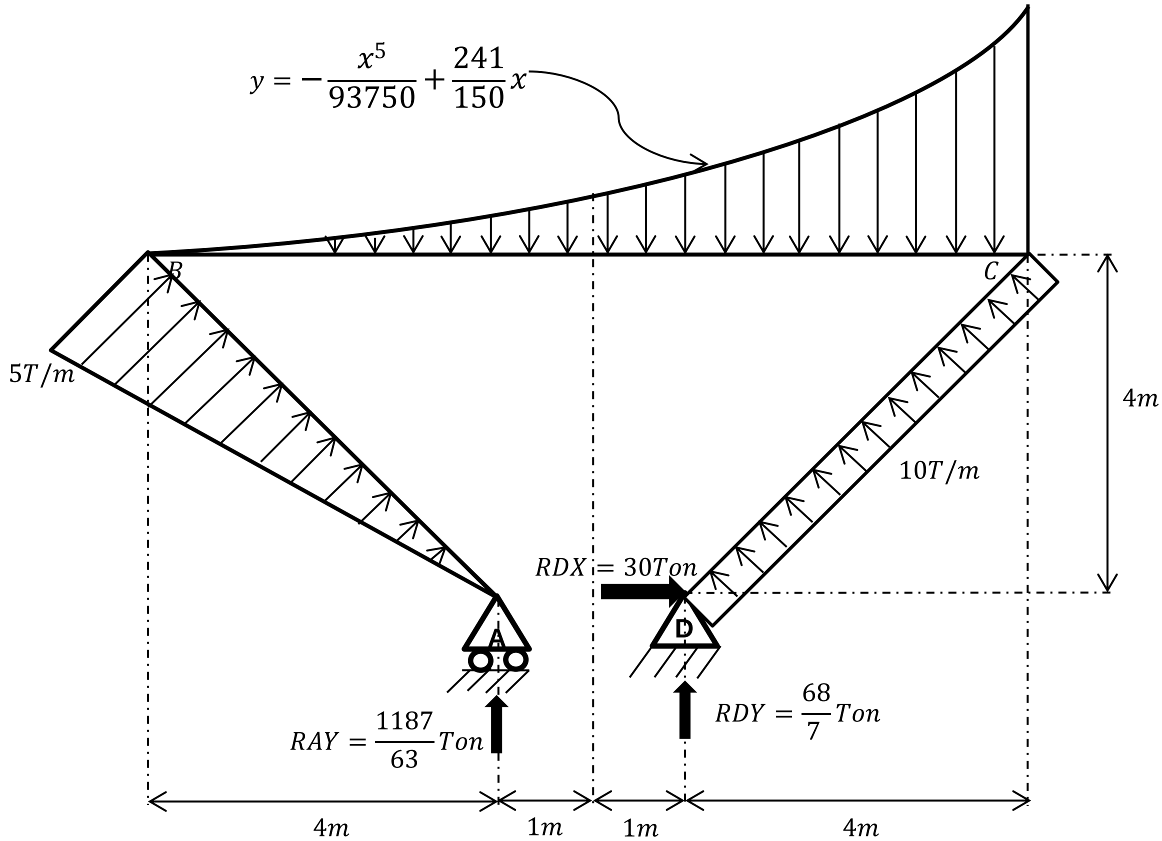
$$\left(\frac{1187}{63} Ton\right)(6m) + (10Ton)\left(\frac{26}{3} m\right) - (10Ton)\left(\frac{4}{3} m\right) - \left(\frac{707}{9} Ton\right)$$
$$\left(10m - \frac{295020}{44541} m\right) + (40Ton)(2m) + (40Ton)(2m) + \left(\frac{68}{7} Ton\right)(4m)$$
$$-(30Ton)(4m) = 0$$

Como la siguiente condición se cumple:

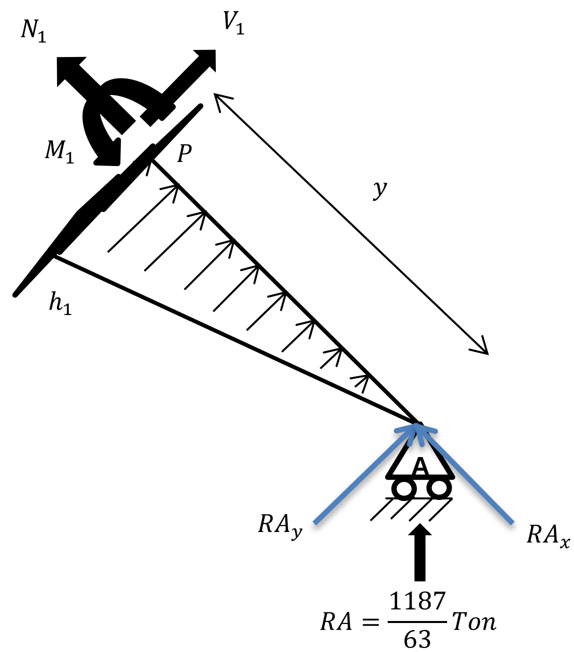
$$\sum M_C = 0$$

Las reacciones calculadas en los soportes son correctas.

Marco en equilibrio estático.



Calculo de las ecuaciones de Momento flexionante, Fuerza cortante y Fuerza axial



Miembro A-B $\quad \mathbf{0 \le y \le 4\sqrt{2}m}$

Por trigonometría definimos:

$$h_1 = \frac{5y}{4\sqrt{2}}$$

$$RA_y = (Sen45°)\left(\frac{1187}{63}\right) = \frac{1187\sqrt{2}}{126}$$

$$RA_x = (Cos45°)\left(\frac{1187}{63}\right) = \frac{1187\sqrt{2}}{126}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_1 - \left(\frac{1187\sqrt{2}}{126}\right)(y) - \frac{\left(\frac{5y}{4\sqrt{2}}\right)(y)}{2}\left[\frac{y}{3}\right] = 0$$

$$\boldsymbol{M_1 = -\frac{5\sqrt{2}}{48}y^3 - \frac{1187\sqrt{2}}{126}y}$$

$$V_1 = \frac{dM_1}{dx}$$

$$\boldsymbol{V_1 = -\frac{15\sqrt{2}}{48}y^2 - \frac{1187\sqrt{2}}{126}}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$\boldsymbol{V_1 = -\frac{15\sqrt{2}}{48}y^2 - \frac{1187\sqrt{2}}{126}}$$

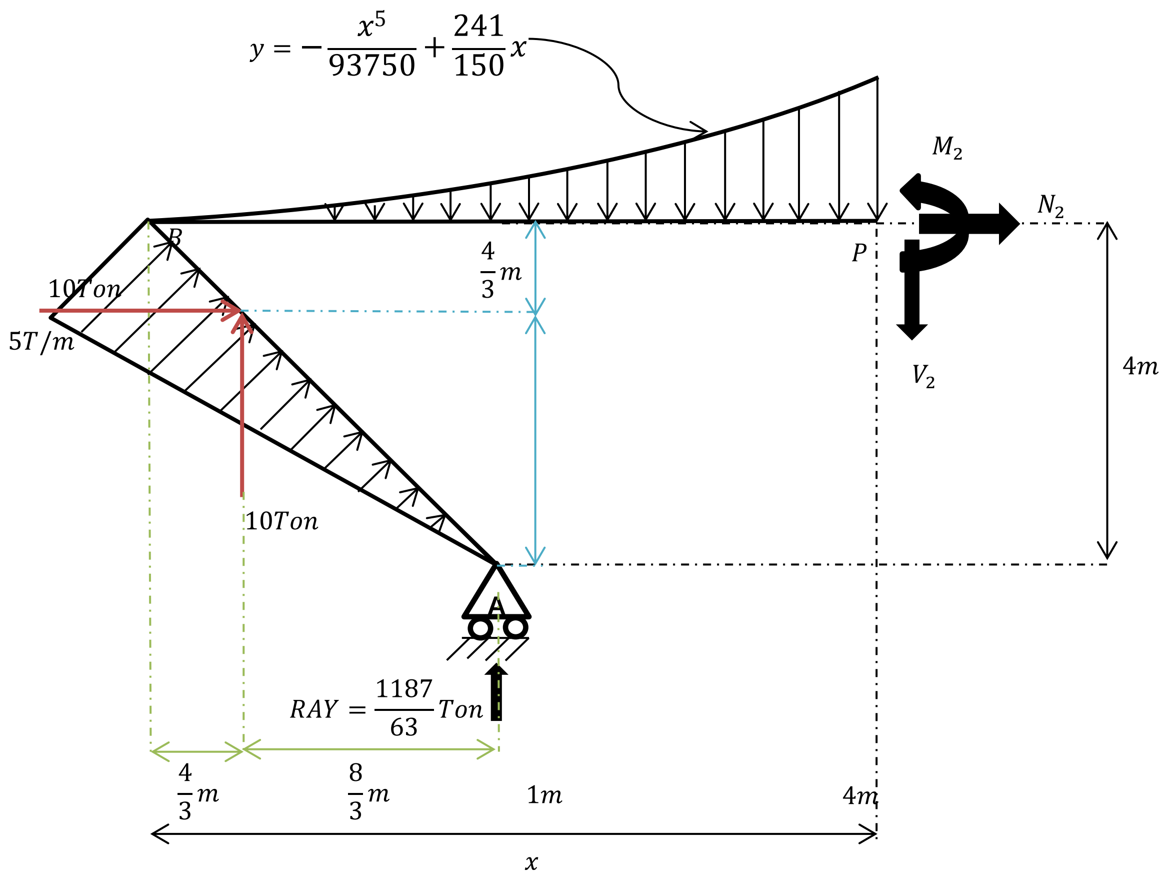
$$\sum F_y = 0$$

$$N_1 + \frac{1187\sqrt{2}}{126} = 0$$

$$\boldsymbol{N_1 = -\frac{1187\sqrt{2}}{126}Ton\ (Compresion)}$$

L (x)	Valor del momento 1	Valor del cortante 1
$0m$	0	$-13.32278967Ton$
$4\sqrt{2}m$	$-102.031746Ton * m$	$-27.46492529Ton$

Miembro B-C $\quad 0 \leq x \leq 10m$



$$\sum M_P = 0$$

$$-M_2 + \left(\frac{1187}{126}\right)(x-4) + (10)\left(x-\frac{4}{3}\right) - (10)\left(\frac{4}{3}\right) - \left(\int_0^x -\frac{x^5}{93750} + \frac{241}{150}x\,dx\right)$$
$$\left(x - \frac{\int_0^x (x)(-\frac{x^5}{93750} + \frac{241}{150}x)\,dx}{\int_0^x (-\frac{x^5}{93750} + \frac{241}{150}x)\,dx}\right) = 0$$

$$M_2 = +\frac{1187}{126}x - \frac{4748}{63}x + 10x - \frac{40}{3}x - \frac{40}{3}x - \left(-\frac{x^6}{562500} + \frac{241}{300}x^2\right)$$
$$\left(\boldsymbol{x} - \frac{-\frac{x^7}{656200} + \frac{241}{450}x^3}{-\frac{x^6}{562500} + \frac{241}{300}x^2}\right)$$

$$M_2 = +\frac{1187}{126}x - \frac{6428}{63} - \left(+\frac{x^7}{656200} - \frac{241}{450}x^3 - \frac{x^7}{562500} + \frac{241}{300}x^3\right)$$

$$\boldsymbol{M_2 = -\frac{x^7}{656200} + \frac{x^7}{562500} + \frac{241}{450}x^3 - \frac{241}{300}x^3 + \frac{1817}{63}x - \frac{6428}{63}}$$

$$V_2 = \frac{dM_2}{dx}$$

$$\boldsymbol{V_2 = -\frac{7x^6}{656200} + \frac{7x^6}{562500} + \frac{241}{150}x^2 - \frac{241}{100}x^2 + \frac{1817}{63}}$$

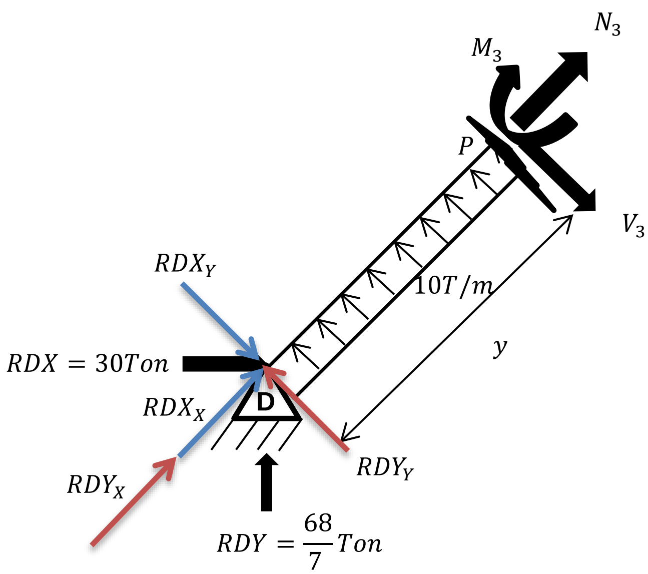
$$\sum F_x = 0$$

$$N_2 + 10 = 0$$

$$\boldsymbol{N_2 = -10Ton\ (Compresion)}$$

L (x)	Valor del momento 2	Valor del cortante 2
$0m$	$-102.031746Ton * m$	$28.8412698Ton$
$10m$	$-\frac{552}{7}Ton * m$	$-49.71509847Ton$

Miembro C-D $\boldsymbol{0 \le y \le 4\sqrt{2}m}$



$$RDX_Y = (Sen45°)(30) = 15\sqrt{2}$$

$$RDX_X = (Cos45°)(30) = 15\sqrt{2}$$

$$RDY_Y = (Sen45°)\left(\frac{68}{7}\right) = \frac{34\sqrt{2}}{7}$$

$$RDY_X = (Cos45°)\left(\frac{68}{7}\right) = \frac{34\sqrt{2}}{7}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$-M_3 + (15\sqrt{2})(y) - \left(\frac{34\sqrt{2}}{7}\right)(y) - (10)(y)\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{M_3 = -5y^2 + \frac{71\sqrt{2}}{7}y}$$

$$V_3 = \frac{dM_3}{dx}$$

$$\boldsymbol{V_3 = -10y + \frac{71\sqrt{2}}{7}}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$N_3 + 15\sqrt{2} + \frac{34\sqrt{2}}{7} = 0$$

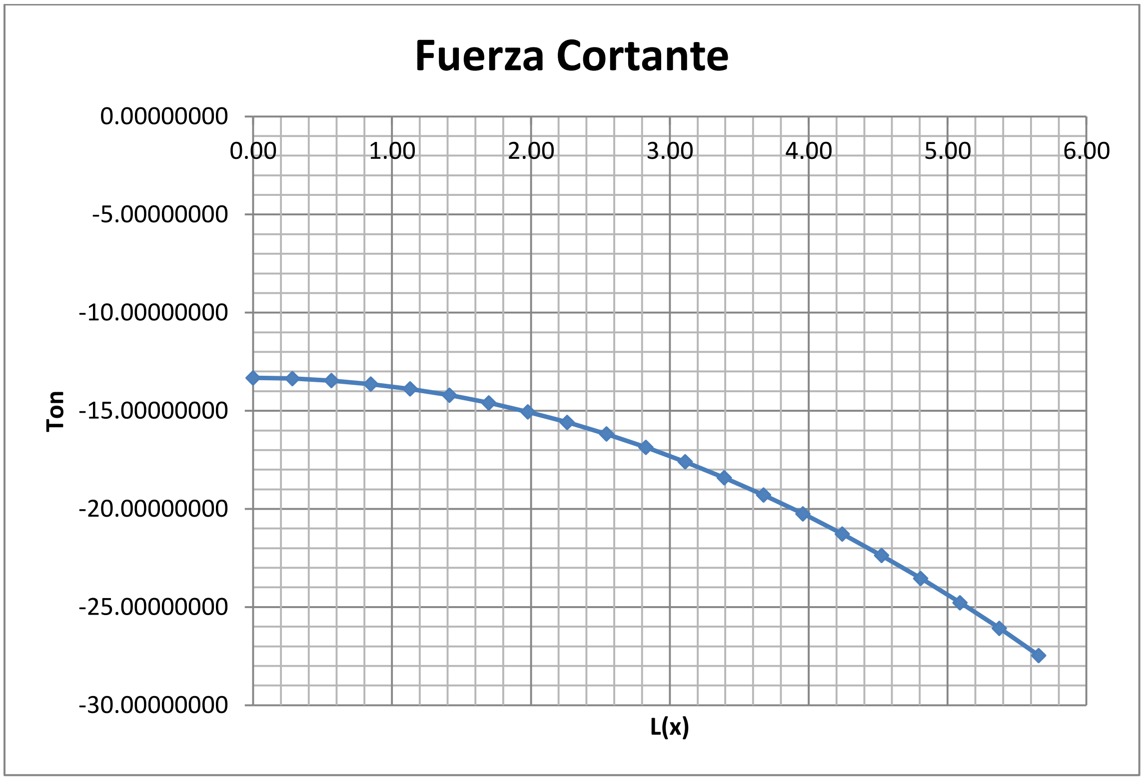
$$\boldsymbol{N_3 = -28.08224074Ton\ (Compresion)}$$

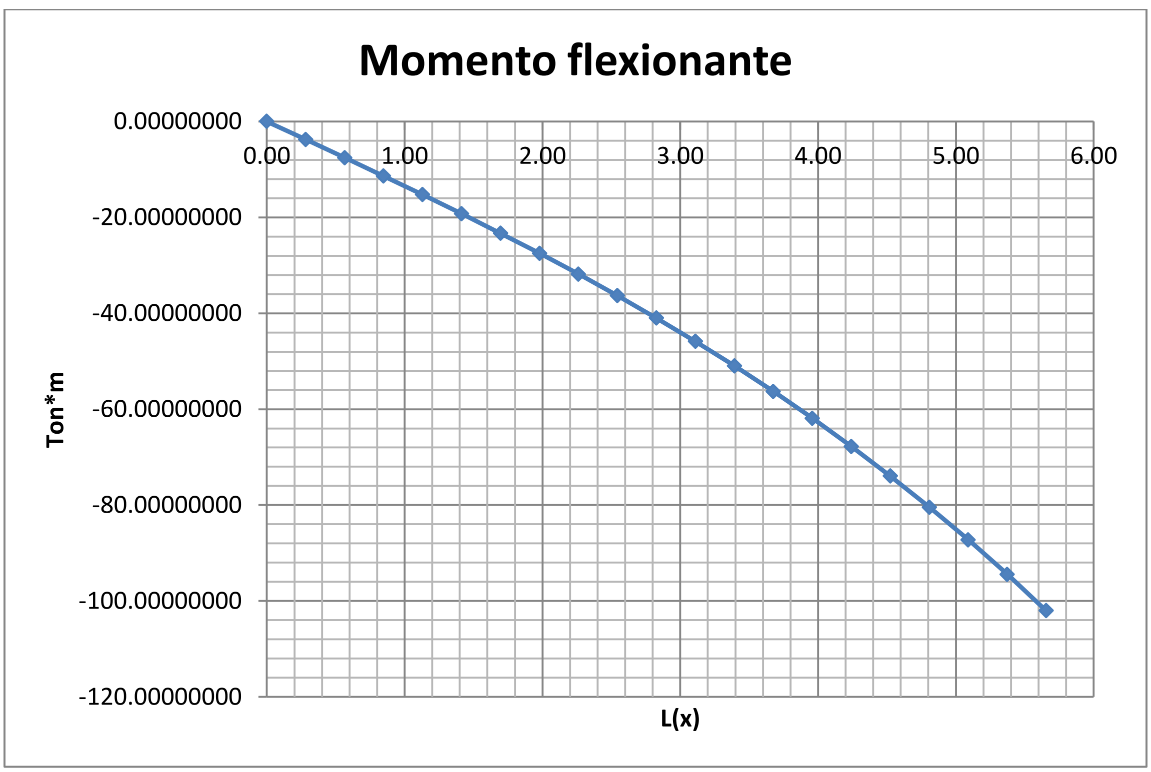
L (x)	Valor del momento 2	Valor del cortante 2
$0m$	$0Ton * m$	$\frac{71\sqrt{2}}{7}Ton$
$4\sqrt{2}m$	$-\frac{552}{7}Ton * m$	$-42.22437636Ton$

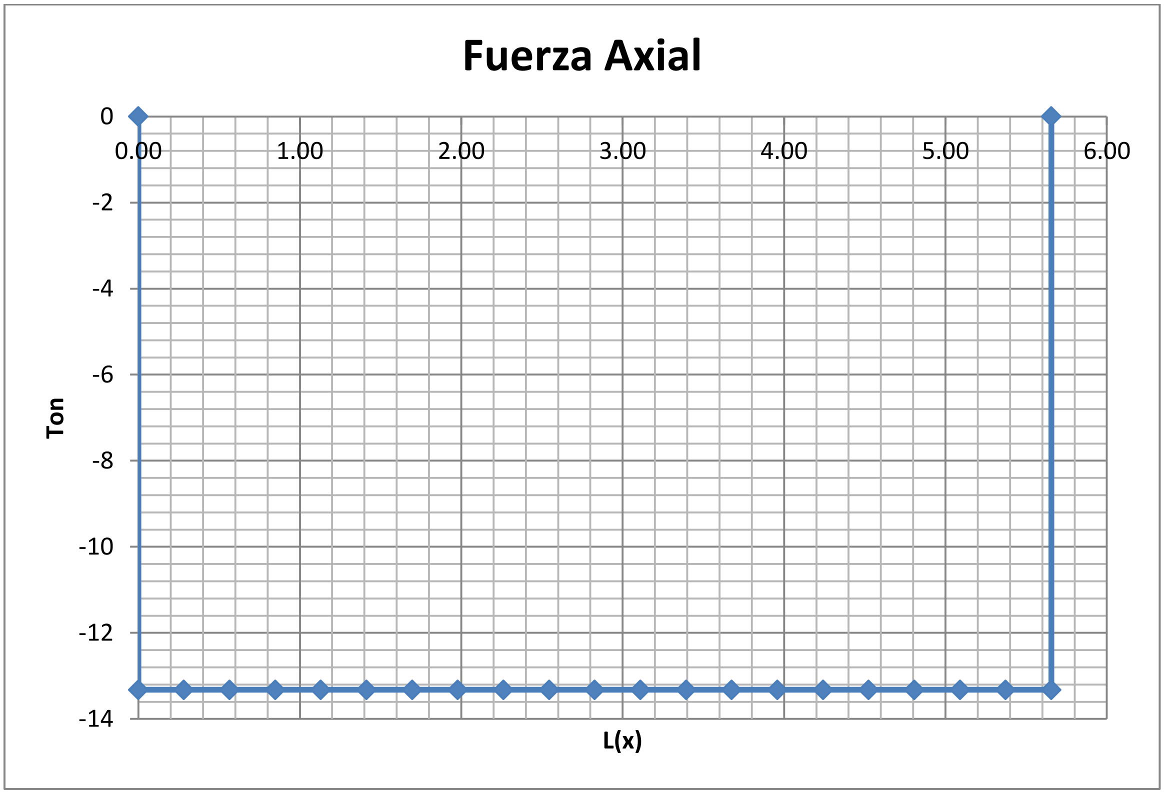
Diagramas de momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial en el marco.

Miembro A-B $0 \leq y \leq 4\sqrt{2}m$

L(x)	Cortante	Momento	Normal
0.00000000	-13.32278967	0.00000000	-13.32278967
0.28284271	-13.35814501	-3.77158730	-13.32278967
0.56568542	-13.46421103	-7.56317460	-13.32278967
0.84852814	-13.64098772	-11.39476190	-13.32278967
1.13137085	-13.88847510	-15.28634921	-13.32278967
1.41421356	-14.20667315	-19.25793651	-13.32278967
1.69705627	-14.59558188	-23.32952381	-13.32278967
1.97989899	-15.05520128	-27.52111111	-13.32278967
2.26274170	-15.58553137	-31.85269841	-13.32278967
2.54558441	-16.18657213	-36.34428571	-13.32278967
2.82842712	-16.85832358	-41.01587302	-13.32278967
3.11126984	-17.60078570	-45.88746032	-13.32278967
3.39411255	-18.41395850	-50.97904762	-13.32278967
3.67695526	-19.29784197	-56.31063492	-13.32278967
3.95979797	-20.25243613	-61.90222222	-13.32278967
4.24264069	-21.27774096	-67.77380952	-13.32278967
4.52548340	-22.37375647	-73.94539683	-13.32278967
4.80832611	-23.54048266	-80.43698413	-13.32278967
5.09116882	-24.77791953	-87.26857143	-13.32278967
5.37401154	-26.08606707	-94.46015873	-13.32278967
5.65685425	-27.46492529	-102.03174603	-13.32278967


Fuerza Cortante
0.00000000
-5.00000000
-10.00000000
-15.00000000
-20.00000000
-25.00000000
-30.00000000
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
Ton
L(x)

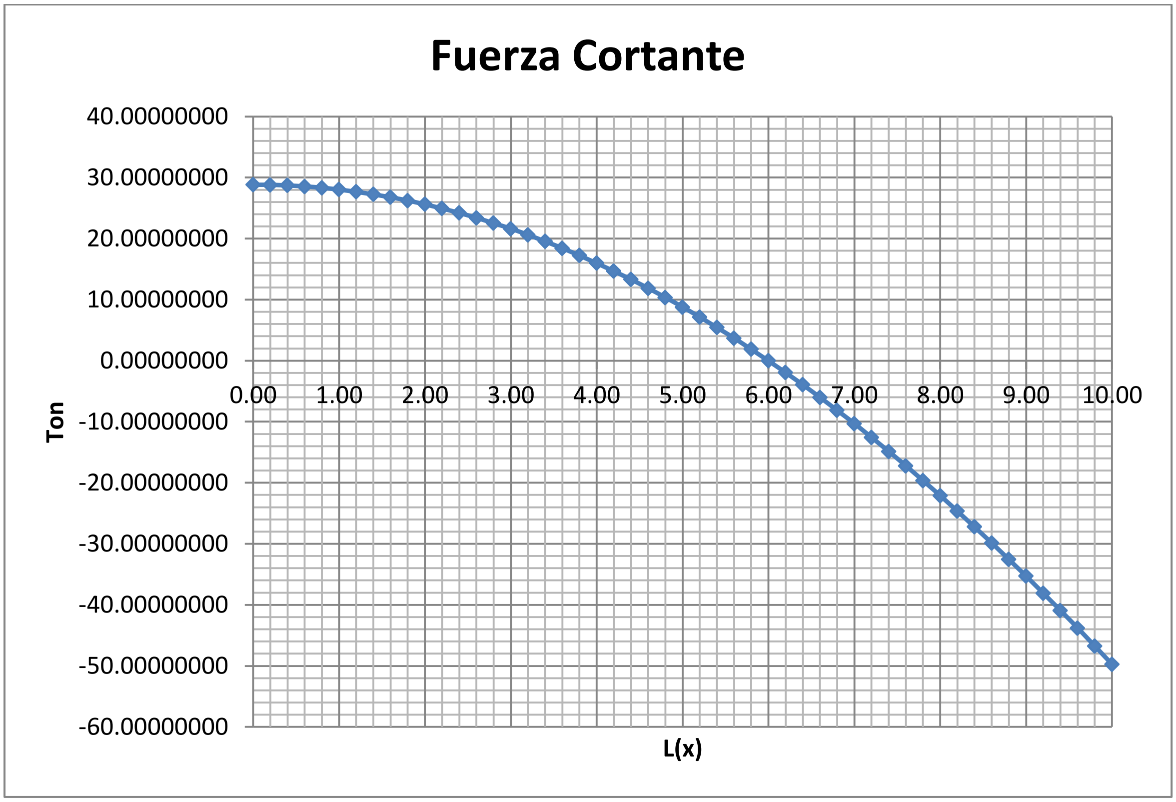

Momento flexionante
0.00000000
-20.00000000
-40.00000000
-60.00000000
-80.00000000
-100.00000000
-120.00000000
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
Ton*m
L(x)

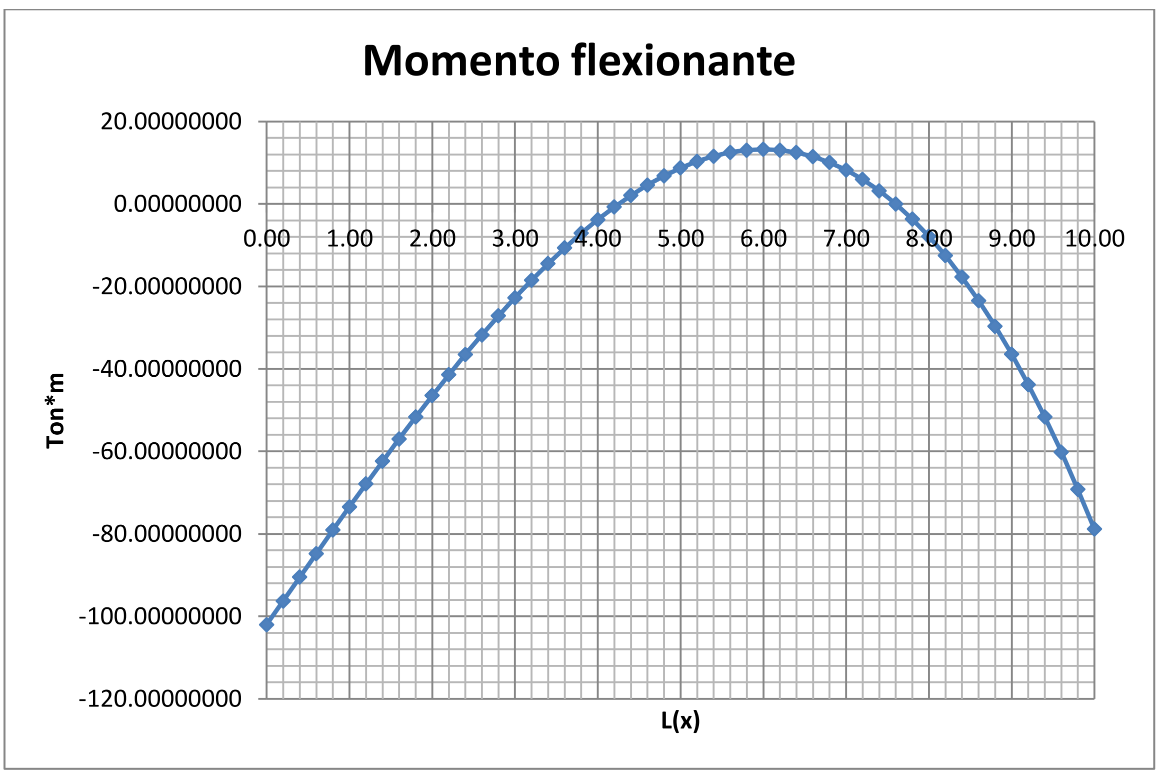


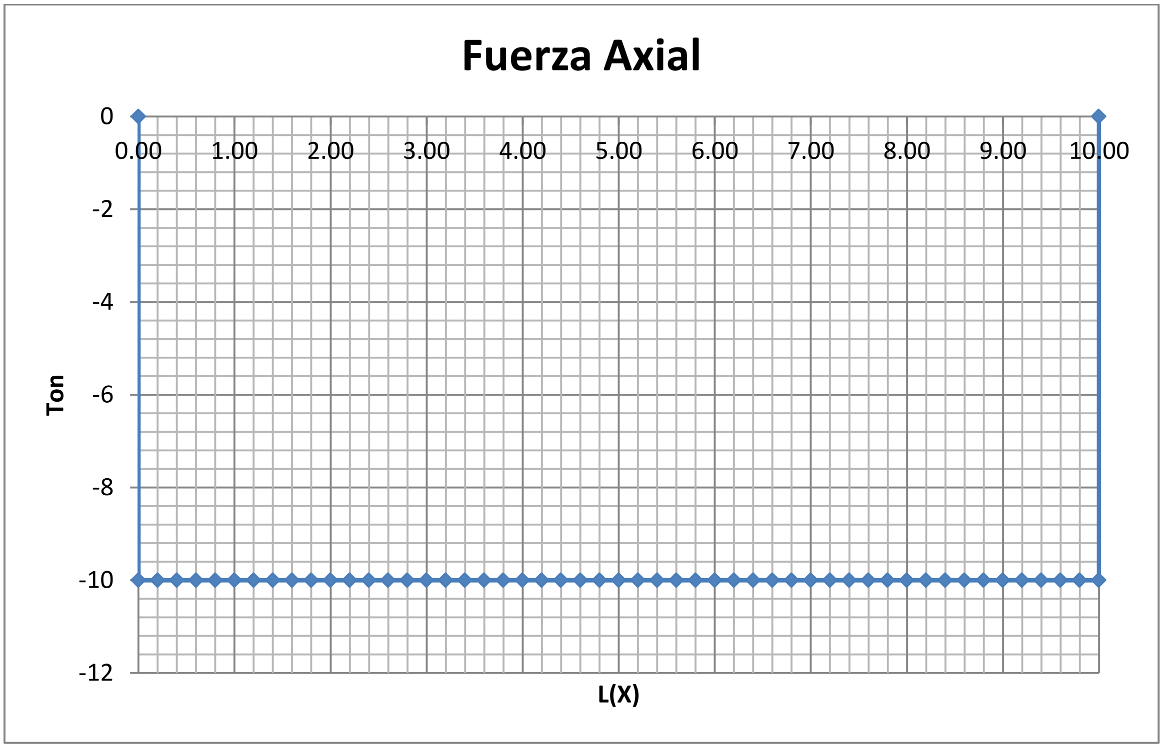
Miembro B-C $0 \leq x \leq 10m$

L(x)	Cortante	Momento	Normal
0.00	28.84126984	-102.03174603	-10.00000000
0.20	28.80913651	-96.26563429	-10.00000000
0.40	28.71273652	-90.51237587	-10.00000000
0.60	28.55206992	-84.78482412	-10.00000000
0.80	28.32713697	-79.09583233	-10.00000000
1.00	28.03793828	-73.45825371	-10.00000000
1.20	27.68447515	-67.88494131	-10.00000000
1.40	27.26674989	-62.38874780	-10.00000000
1.60	26.78476632	-56.98252525	-10.00000000
1.80	26.23853028	-51.67912478	-10.00000000
2.00	25.62805023	-46.49139608	-10.00000000
2.20	24.95333798	-41.43218684	-10.00000000
2.40	24.21440942	-36.51434198	-10.00000000
2.60	23.41128544	-31.75070278	-10.00000000
2.80	22.54399281	-27.15410573	-10.00000000
3.00	21.61256525	-22.73738133	-10.00000000
3.20	20.61704451	-18.51335253	-10.00000000
3.40	19.55748157	-14.49483303	-10.00000000

3.60	18.43393791	-10.69462531	-10.00000000
3.80	17.24648684	-7.12551839	-10.00000000
4.00	15.99521496	-3.80028533	-10.00000000
4.20	14.68022366	-0.73168041	-10.00000000
4.40	13.30163072	2.06756398	-10.00000000
4.60	11.85957200	4.58474079	-10.00000000
4.80	10.35420317	6.80717206	-10.00000000
5.00	8.78570159	8.72221315	-10.00000000
5.20	7.15426819	10.31725719	-10.00000000
5.40	5.46012953	11.57974001	-10.00000000
5.60	3.70353985	12.49714553	-10.00000000
5.80	1.88478324	13.05701142	-10.00000000
6.00	0.00417592	13.24693537	-10.00000000
6.20	-1.93793146	13.05458170	-10.00000000
6.40	-3.94115139	12.46768853	-10.00000000
6.60	-6.00505698	11.47407535	-10.00000000
6.80	-8.12917943	10.06165118	-10.00000000
7.00	-10.31300533	8.21842324	-10.00000000
7.20	-12.55597393	5.93250609	-10.00000000
7.40	-14.85747430	3.19213143	-10.00000000
7.60	-17.21684246	-0.01434161	-10.00000000
7.80	-19.63335835	-3.69841554	-10.00000000
8.00	-22.10624277	-7.87144299	-10.00000000
8.20	-24.63465427	-12.54461460	-10.00000000
8.40	-27.21768585	-17.72894619	-10.00000000
8.60	-29.85436167	-23.43526538	-10.00000000
8.80	-32.54363368	-29.67419744	-10.00000000
9.00	-35.28437809	-36.45615052	-10.00000000
9.20	-38.07539187	-43.79130015	-10.00000000
9.40	-40.91538902	-51.68957302	-10.00000000
9.60	-43.80299695	-60.16063001	-10.00000000
9.80	-46.73675257	-69.21384852	-10.00000000
10.00	-49.71509847	-78.85830394	-10.00000000


Fuerza Cortante
40.00000000
30.00000000
20.00000000
10.00000000
0.00000000
-10.00000000
-20.00000000
-30.00000000
-40.00000000
-50.00000000
-60.00000000
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
7.00
8.00
9.00
10.00
Ton
L(x)

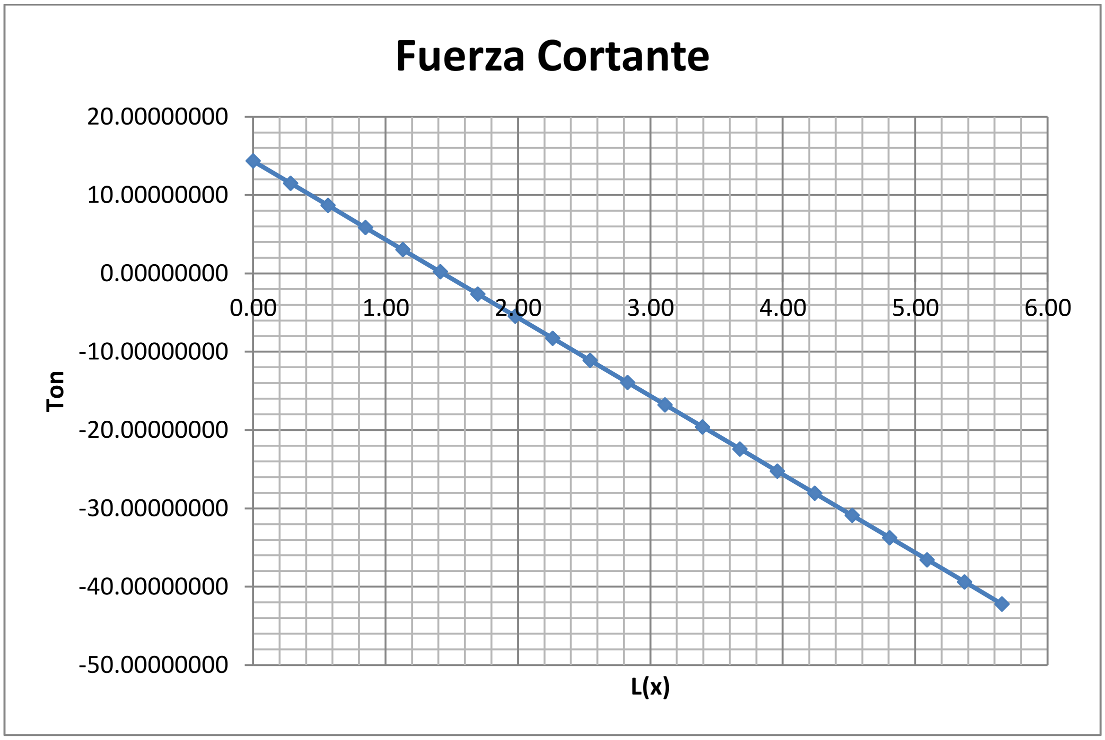

Momento flexionante
20.00000000
0.00000000
-20.00000000
-40.00000000
-60.00000000
-80.00000000
-100.00000000
-120.00000000
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
7.00
8.00
9.00
10.00
Ton*m
L(x)

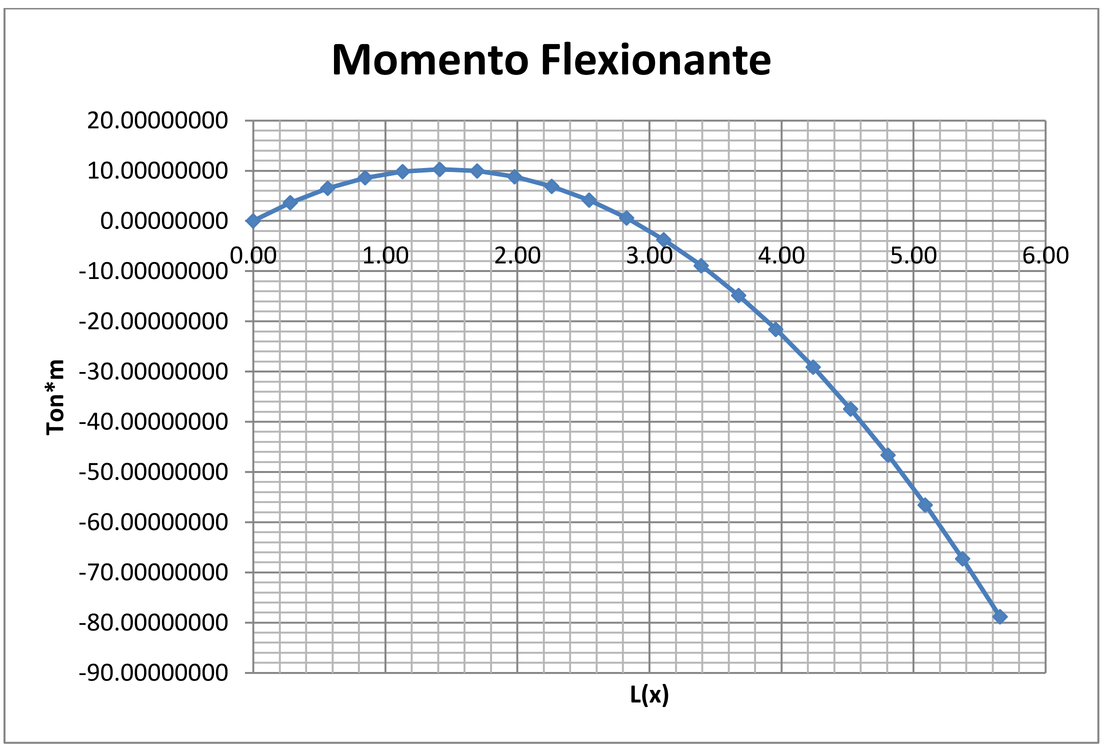


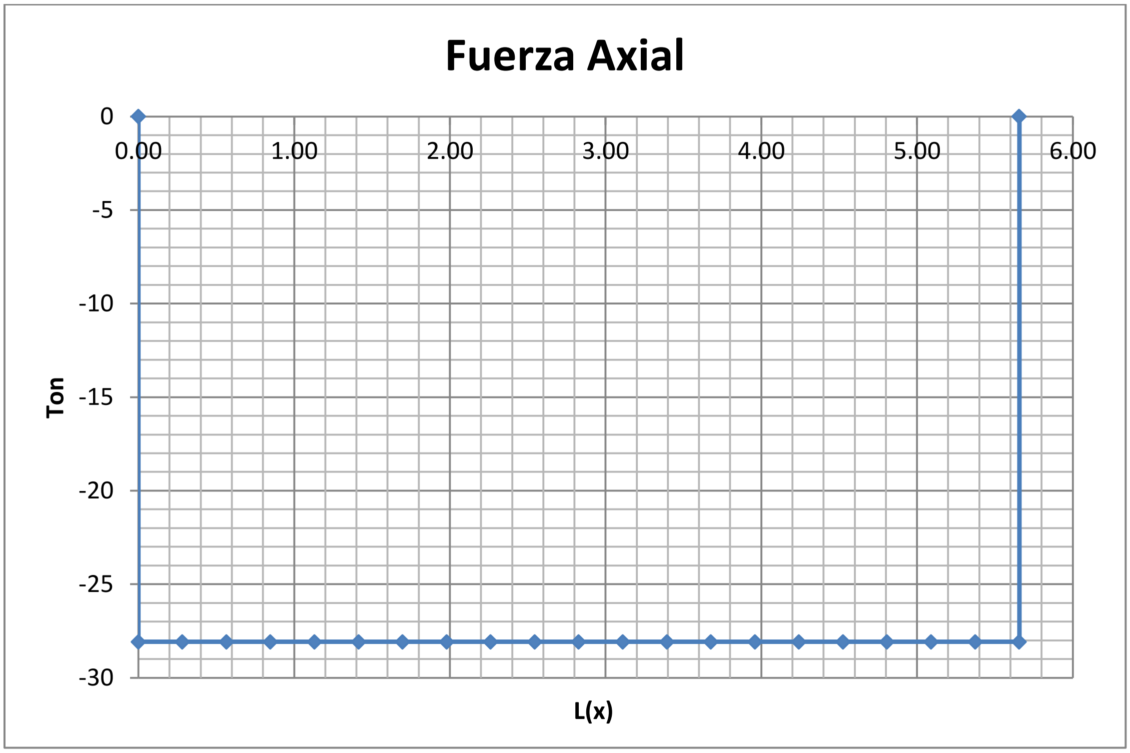
Miembro A-B $0 \leq y \leq 4\sqrt{2}m$

L(x)	Cortante	Momento	Normal
0.00	14.34416613	0.00000000	-28.08224074
0.28	11.51573901	3.65714286	-28.08224074
0.57	8.68731188	6.51428571	-28.08224074
0.85	5.85888476	8.57142857	-28.08224074
1.13	3.03045763	9.82857143	-28.08224074
1.41	0.20203051	10.28571429	-28.08224074
1.70	-2.62639662	9.94285714	-28.08224074
1.98	-5.45482374	8.80000000	-28.08224074
2.26	-8.28325087	6.85714286	-28.08224074
2.55	-11.11167799	4.11428571	-28.08224074
2.83	-13.94010511	0.57142857	-28.08224074
3.11	-16.76853224	-3.77142857	-28.08224074
3.39	-19.59695936	-8.91428571	-28.08224074
3.68	-22.42538649	-14.85714286	-28.08224074
3.96	-25.25381361	-21.60000000	-28.08224074
4.24	-28.08224074	-29.14285714	-28.08224074
4.53	-30.91066786	-37.48571429	-28.08224074
4.81	-33.73909499	-46.62857143	-28.08224074

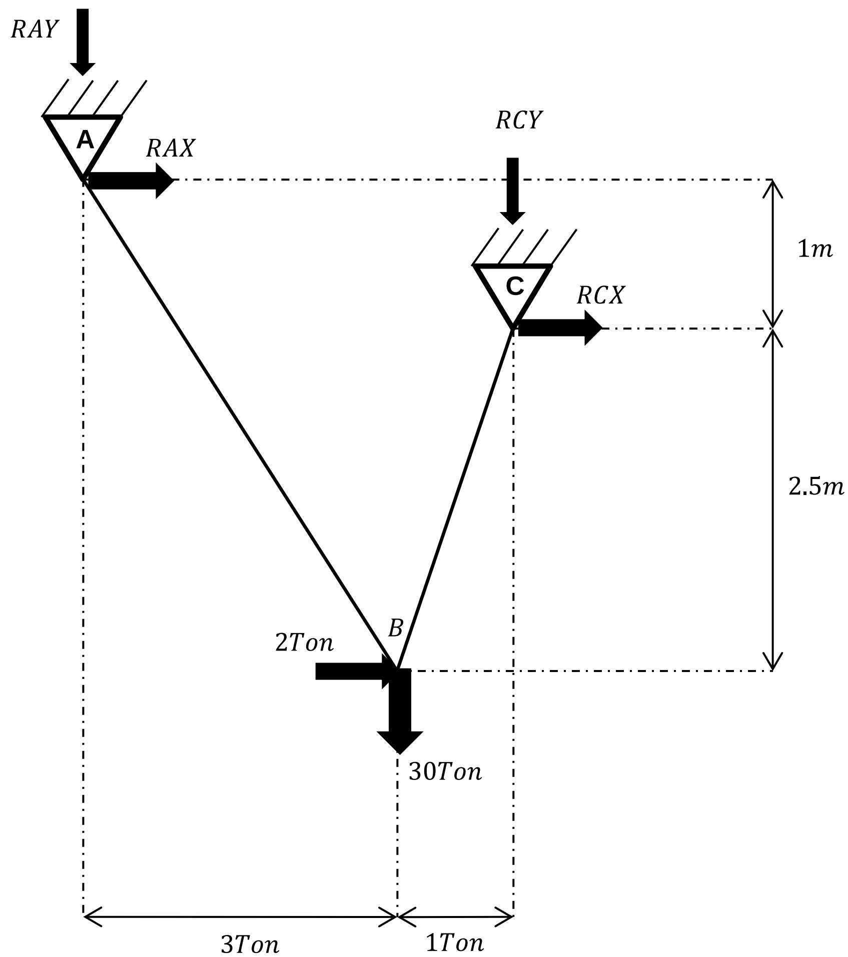
5.09	-36.56752211	-56.57142857	-28.08224074
5.37	-39.39594924	-67.31428571	-28.08224074
5.66	-42.22437636	-78.85714286	-28.08224074






Fuerza Axial
Ton
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
L(x)

1.- Calcule el valor de las reacciones en los soportes mostrados, y las fuerzas presentadas en las barras de la siguiente armadura.



Calculo del grado de indeterminación de la armadura

$b + r = 2j$
$2 + 4 = 2(3)$

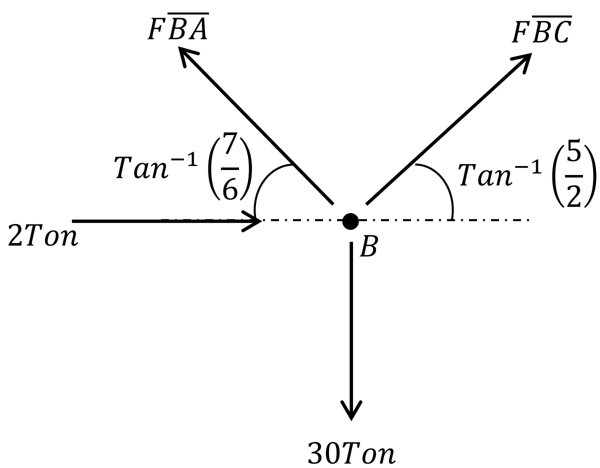
$6 = 6 \;\therefore La\ armadura\ es\ estáticamente\ determinada$

Procedimiento de análisis:

En este caso se analizara el nodo B de la armadura mostrada, encontrando las fuerzas a las que se encuentran sometidas las barras B-C y B-A, posteriormente se podrá encontrar el valor de las reacciones en los soportes.

En sentido general, para analizar cada nodo, toda fuerza desconocida se propondrá a tensión (+), es decir, en sentido contrario al nodo, si al realizar el despeje y obtener el valor de las reacciones estas ostentan un signo (-) quiere decir que nuestro sentido está mal propuesto y que las fuerzas a las que se encuentra sometida la barra son de compresión, es decir que van en sentido del nodo.

Nodo B



$$\sum \boldsymbol{F_Y} = \boldsymbol{0}$$

$$-30 + F\overline{BA}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{7}{6}\right)\right]\right\} + F\overline{BC}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

$$\sum \boldsymbol{F_X} = \boldsymbol{0}$$

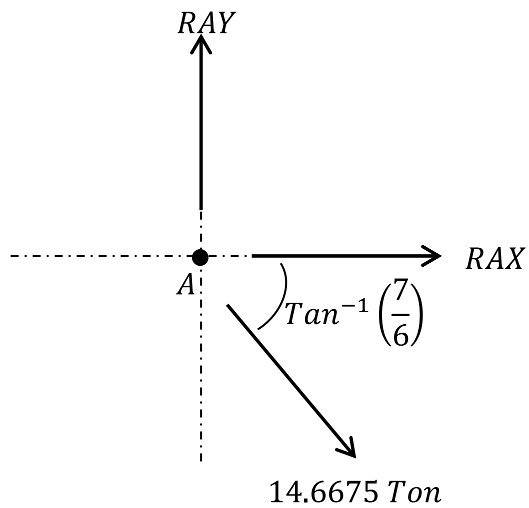
$$2 - F\overline{BA}\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{7}{6}\right)\right]\right\} + F\overline{BC}\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{F\overline{BA} = +14.6675(Tension)}$$

$$\boldsymbol{F\overline{BC} = +20.3168(Tension)}$$

Nodo A



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$RAY - 14.6675\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{7}{6}\right)\right]\right\} = 0$$

$$RAY = 14.6675\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{7}{6}\right)\right]\right\}$$

$$RAY = \boldsymbol{11.1364Ton}$$

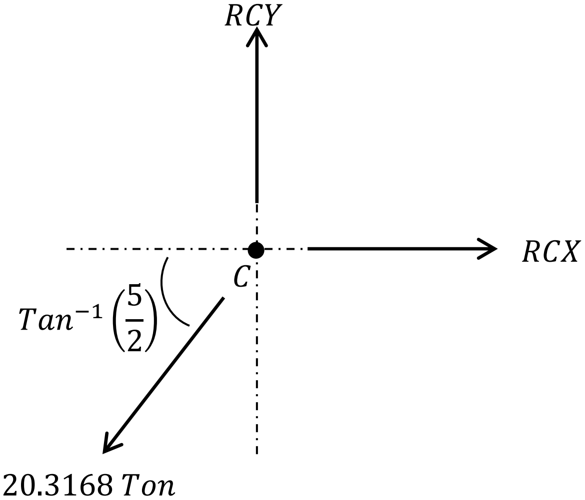
$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$RAX + 14.6675\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{7}{6}\right)\right]\right\} = 0$$

$$RAX = -14.6675\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{7}{6}\right)\right]\right\}$$

$$RAX = \boldsymbol{-9.5455Ton}$$

Nodo C



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$RCY - 20.3168\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

$$RCY = 20.3168\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right]\right\}$$

$$RCY = \boldsymbol{18.8636Ton} \quad \uparrow$$

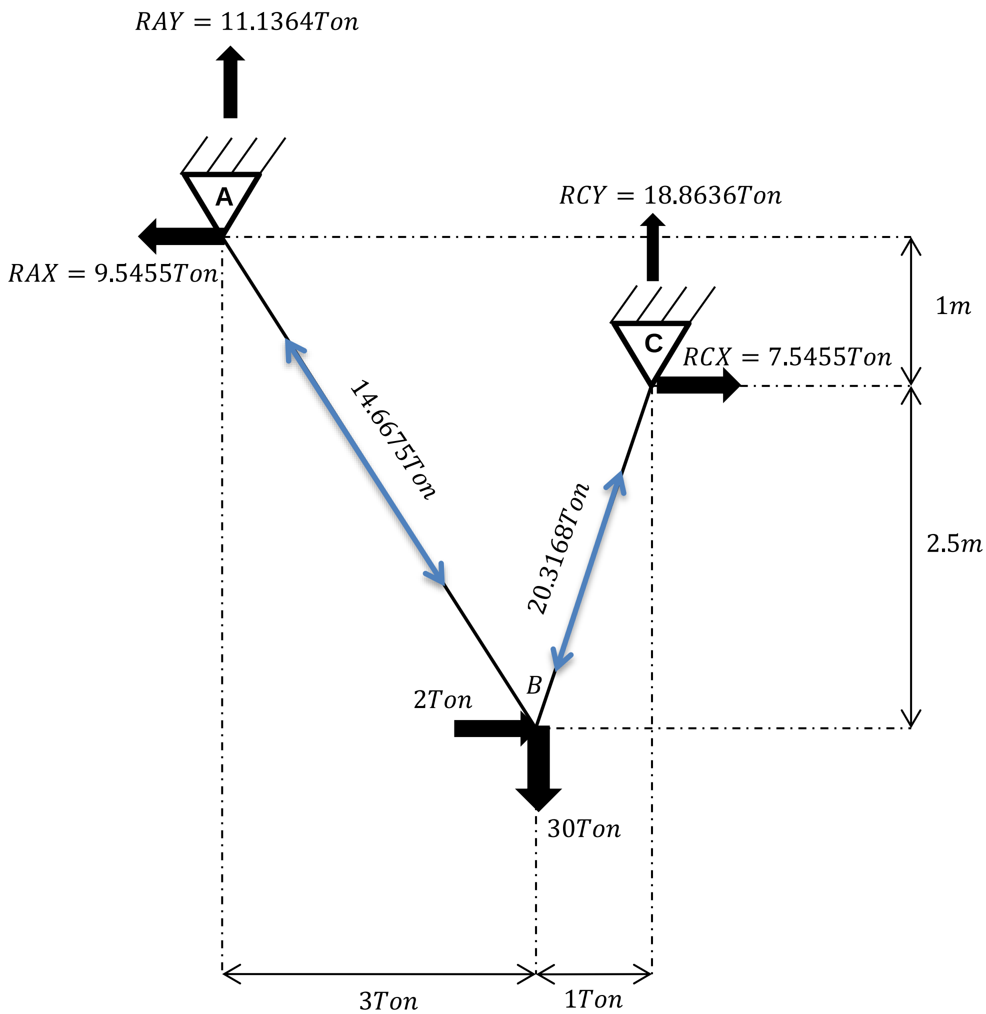
$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$RCX - 20.3168\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

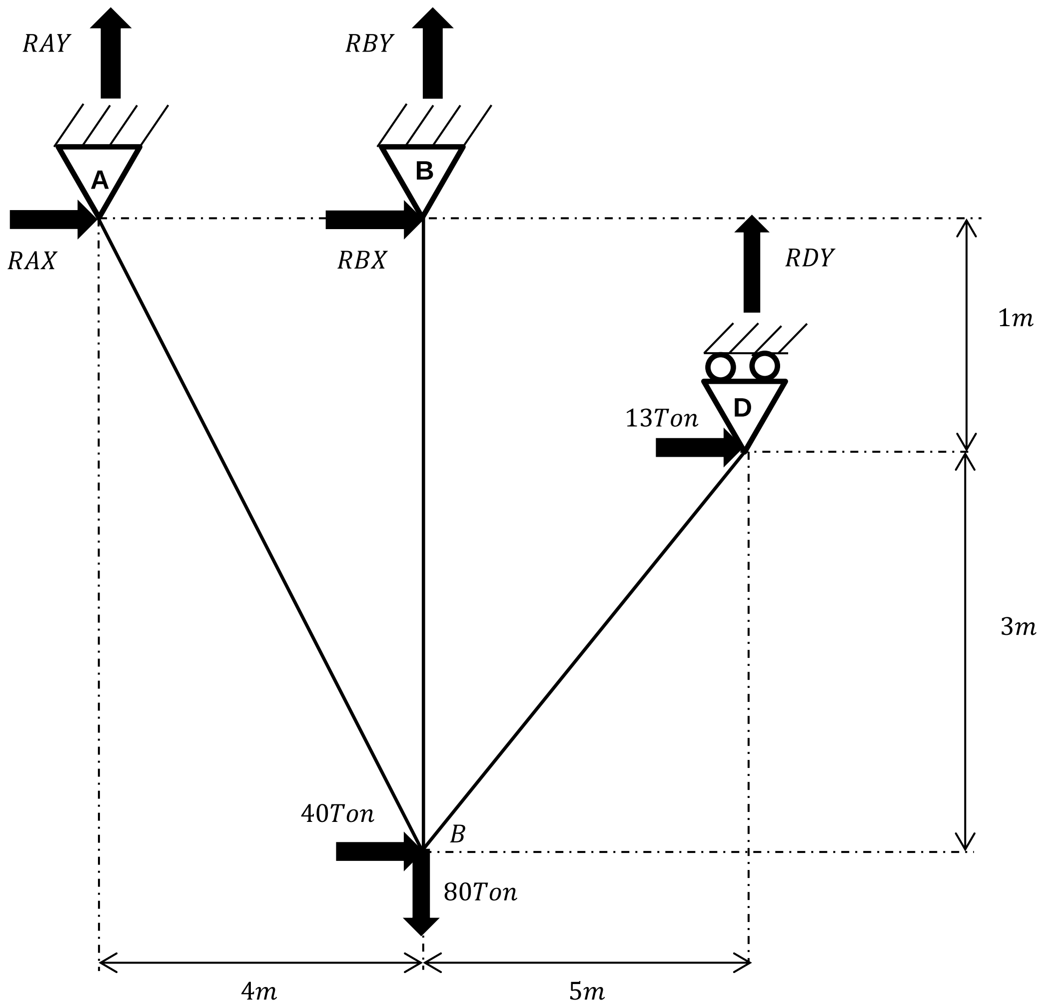
$$RCX = 20.3168\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right]\right\}$$

$$RCX = \boldsymbol{7.5455\ Ton} \quad \longrightarrow$$

Diagrama que muestra las fuerzas a las que se encuentra sometida cada barra, así como el valor de las reacciones en los soportes calculadas.



2.- Calcule el valor de las reacciones en los soportes mostrados, y las fuerzas presentadas en las barras de la siguiente armadura.



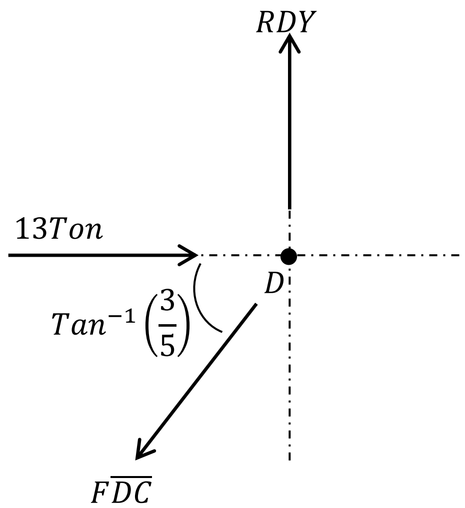
Calculo del grado de indeterminación de la armadura

$b + r = 2j$

$3 + 5 = 2(4)$

$8 = 8 \;\therefore\; La\ armadura\ es\ estáticamente\ determinada$

Nodo D



$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$13 - F\overline{DC}\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\} = 0$$

$$F\overline{DC} = \frac{13}{\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}}$$

$$F\overline{DC} \approx \boldsymbol{15.1605Ton}(\boldsymbol{Tension})$$

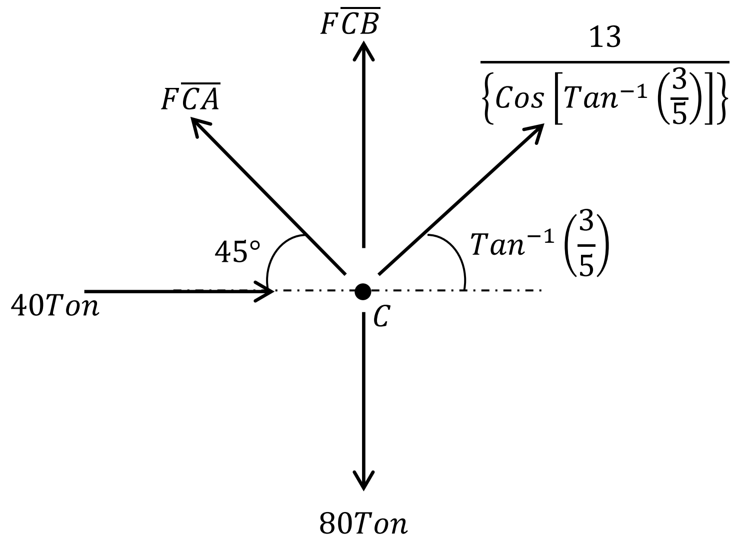
$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$RDY - \left(\frac{13}{\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\} = 0$$

$$RDY = \left(\frac{13}{\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}$$

$$RDY = \left(\frac{13}{\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\} \approx \boldsymbol{\frac{39}{5}Ton} \uparrow$$

Nodo C



$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$40+\left(\frac{13}{\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}-F\overline{CA}(Cos45°)=0$$

$$F\overline{CA}=\frac{40+\left(\frac{13}{\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}}{(Cos45°)}=\boldsymbol{53\sqrt{2}Ton\ (Tension)}$$

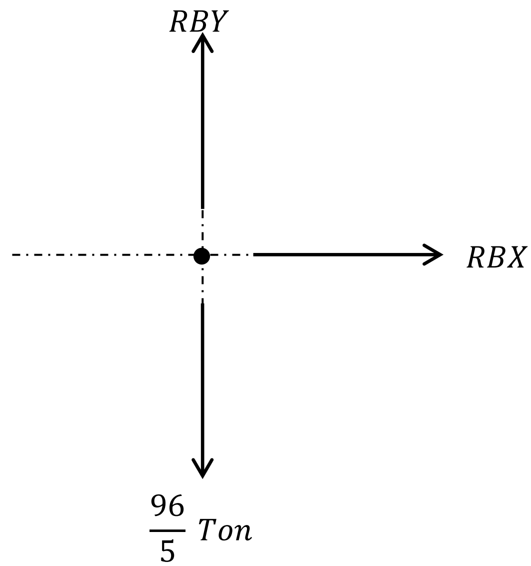
$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-80+\left(53\sqrt{2}\right)(Sen45°)+\left(\frac{13}{\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}+F\overline{CB}=0$$

$$F\overline{CB}=+80-\left(53\sqrt{2}\right)(Sen45°)-\left(\frac{13}{\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{96}{5}Ton(Tension)}$$

Nodo B



$$\sum \boldsymbol{F_X} = \mathbf{0}$$

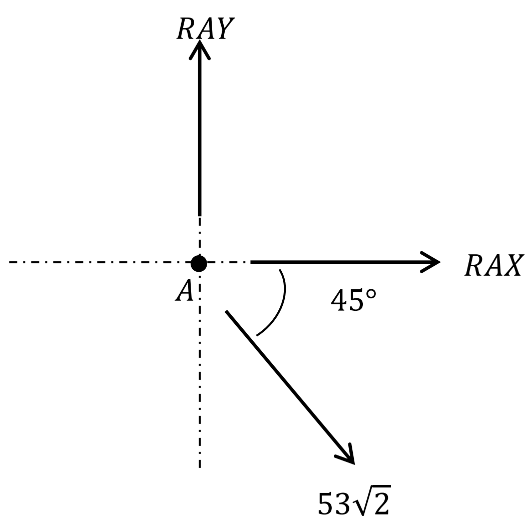
$$RBX = 0$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y} = \mathbf{0}$$

$$-\frac{96}{5} + RBY = 0$$

$$RBY = \frac{96}{5} \quad \uparrow$$

Nodo A



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$RAY - \left(53\sqrt{2}\right)(Sen45°) = 0$$

$$RAY = \boldsymbol{53Ton} \uparrow$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$RAX + \left(53\sqrt{2}\right)(Cos45°) = 0$$

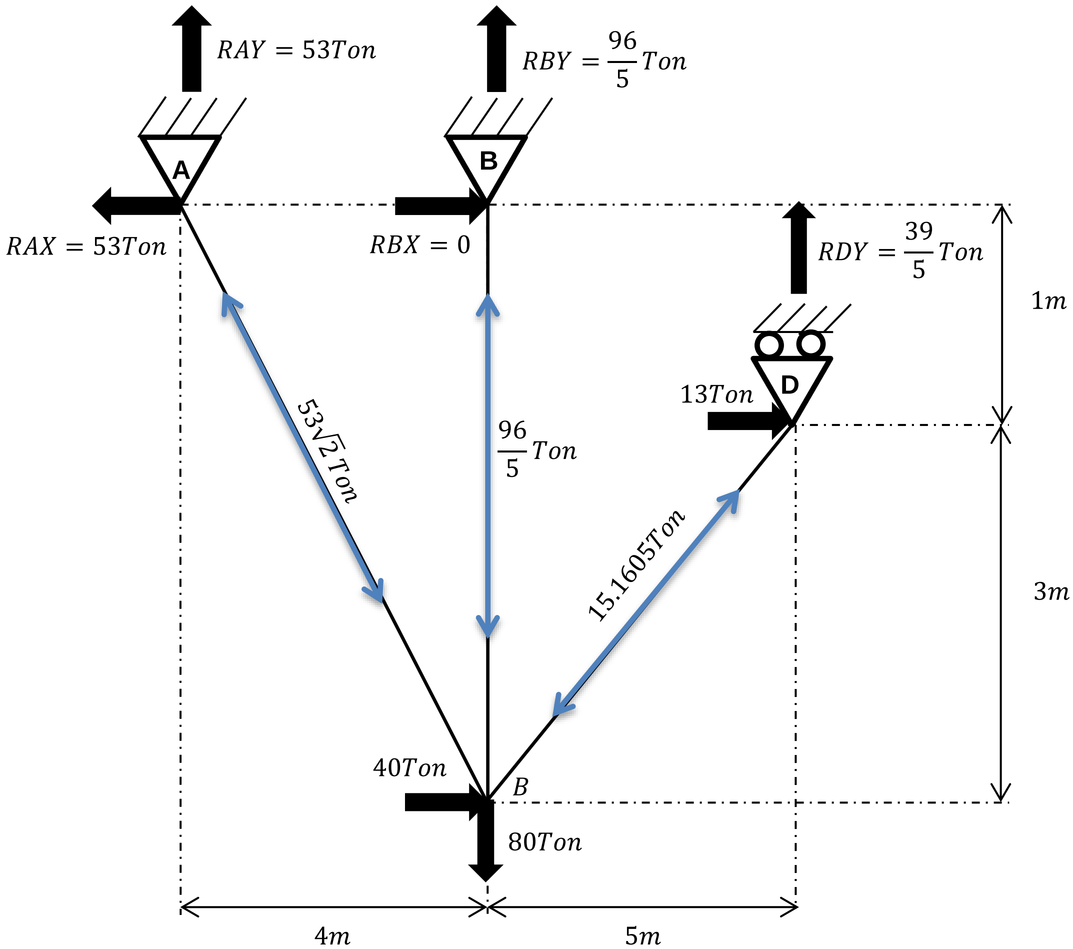
$$RAX = \boldsymbol{-53Ton} \leftarrow$$

Comprobando que las reacciones en los soportes sean correctas:

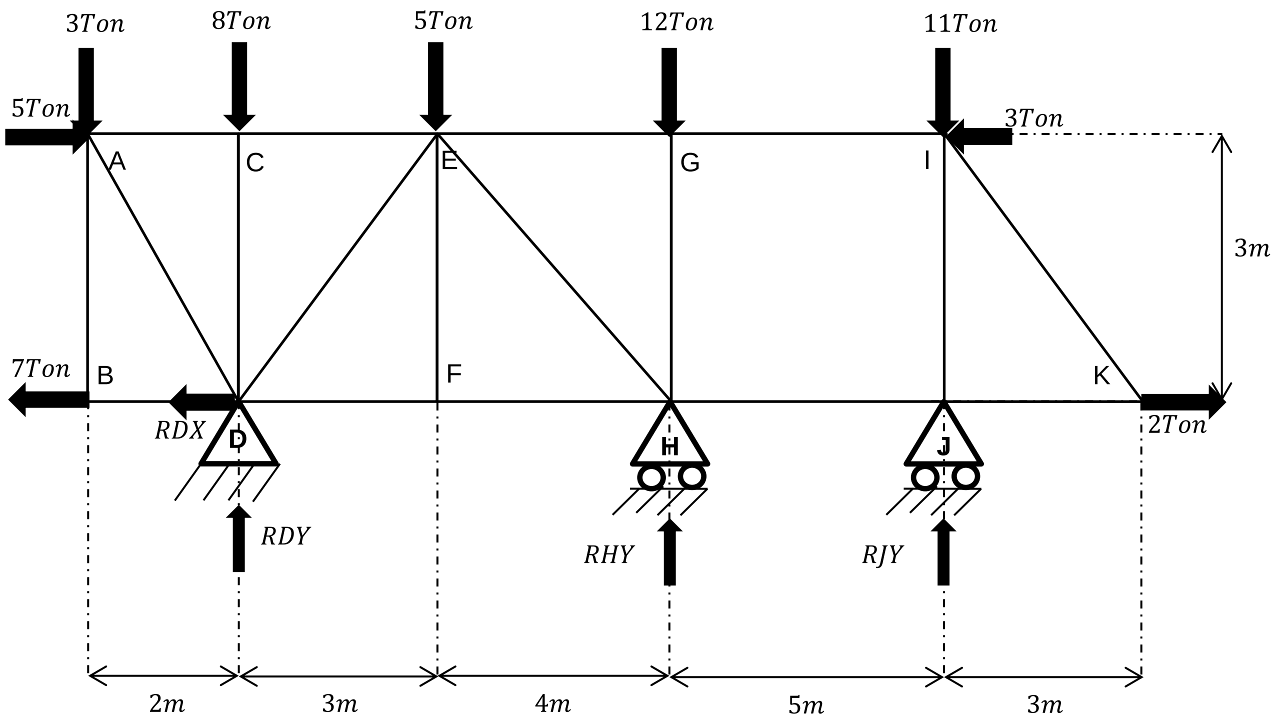
$$\sum \boldsymbol{M_B = 0}$$

$$\boldsymbol{(53Ton)(4m) - (40Ton)(4m) - (13Ton)(1m) - \left(\frac{39}{5}Ton\right)(5m) = 0}$$

Diagrama que muestra las fuerzas a las que se encuentra sometida cada barra, así como el valor de las reacciones en los soportes calculadas.



3.- Calcule el valor de las reacciones en los soportes mostrados, y las fuerzas presentadas en las barras de la siguiente armadura.



Calculo del grado de indeterminación de la armadura

$b + r = 2j$

$18 + 4 = 2(11)$

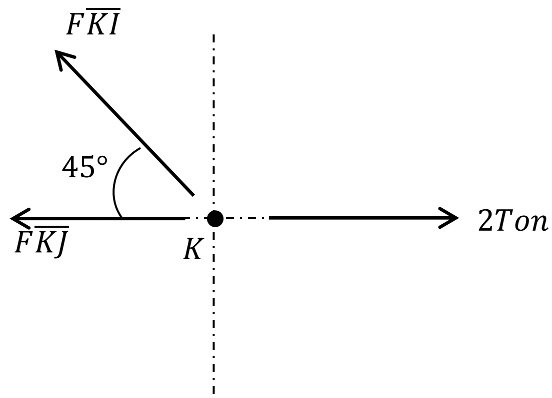
$22 = 22 \;\therefore \textit{La armadura es estáticamente determinada}$

$$\boldsymbol{\sum F_X = 0}$$

$-7Ton + 5Ton - 3Ton + 2Ton - RDX = 0$

$\boldsymbol{RDX = 3Ton} \longrightarrow$

Nodo K



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

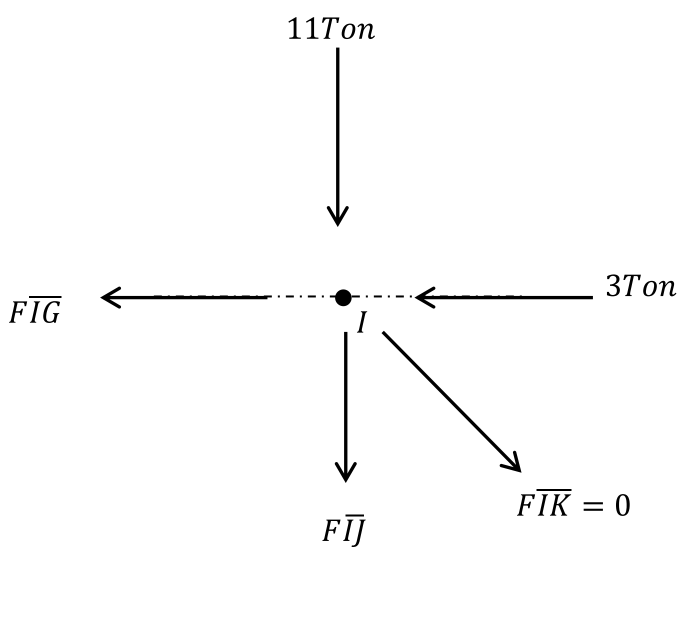
$$F\overline{KI} = 0$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-F\overline{KJ} + 2 = 0$$

$$F\overline{KJ} = \boldsymbol{2Ton\ (Tension)}$$

Nodo I



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-11 - F\overline{IJ} = 0$$

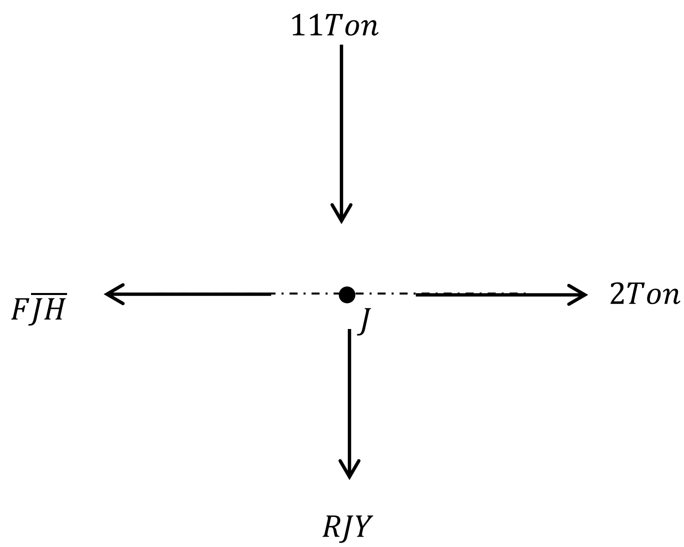
$$F\overline{IJ} = \boldsymbol{-11Ton\ (Compresion)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-F\overline{IG} - 3 = 0$$

$$F\overline{IG} = \boldsymbol{-3Ton\ (Compresion)}$$

Nodo J



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-11 - RJY = 0$$

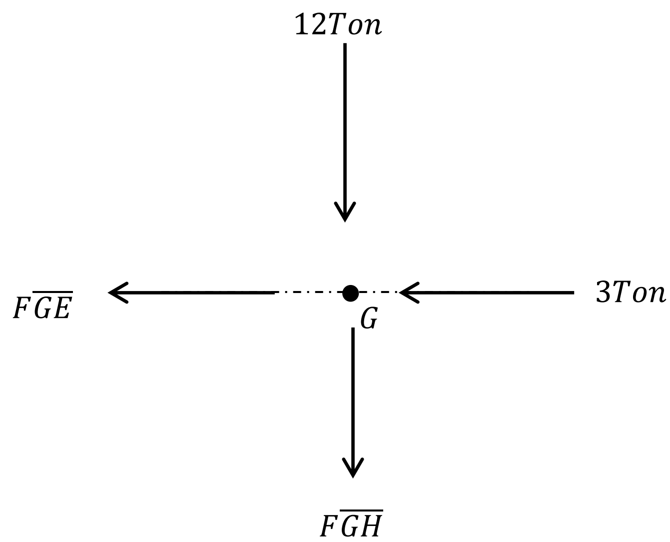
$$RJY = \boldsymbol{-11Ton}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-F\overline{JH} + 2 = 0$$

$$F\overline{JH} = \boldsymbol{2Ton\ (Tension)}$$

Nodo G



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-12 - F\overline{GH} = 0$$

$$F\overline{GH} = \boldsymbol{-12Ton\ (Crompresion)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-F\overline{GE} - 3 = 0$$

$$F\overline{GE} = \boldsymbol{-3Ton\ (Compresion)}$$

Calculo de la reacción vertical en el soporte “H” (RHY)

$$\sum \boldsymbol{M_D = 0}$$

$$(5Ton)(3m) - (3Ton)(2m) + (5Ton)(3m) + (12Ton)(7m) - RHY(7m) + (11Ton)(12m) - (11Ton)(12m) - (3Ton)(3m) = 0$$

$$\boldsymbol{RHY = \frac{99}{7}Ton} \uparrow$$

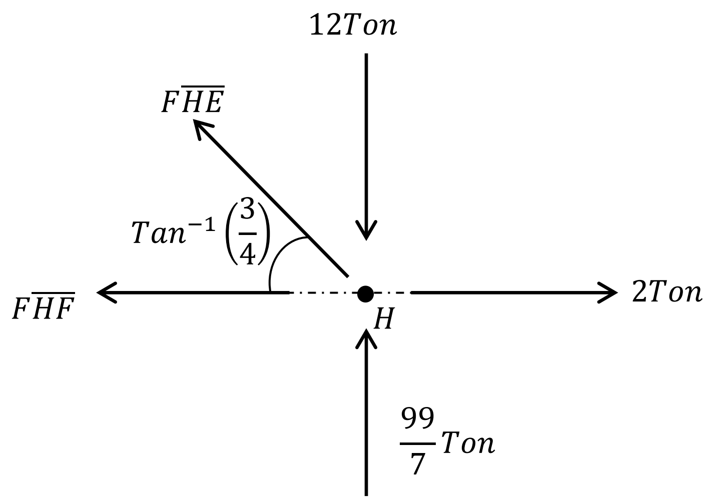
Calculo de la reacción vertical en el soporte "D" (RDY)

$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-3Ton - 8Ton - 5Ton - 12Ton - 11Ton + 11Ton + \frac{99}{7}Ton + RDY = 0$$

$$\boldsymbol{RDY = \frac{97}{7}Ton} \uparrow$$

Nodo H



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-12 + \frac{99}{7} + F\overline{HE}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\} = 0$$

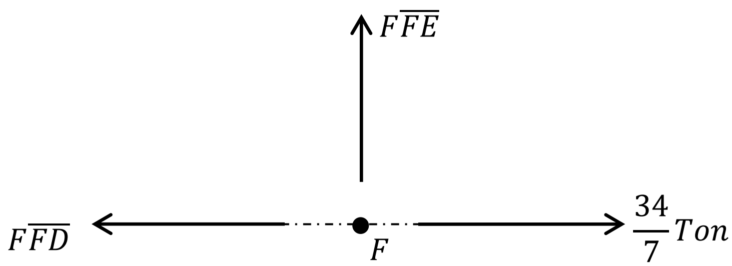
$$F\overline{HE} = \frac{12 - \frac{99}{7}}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\}} = -\boldsymbol{\frac{25}{7}Ton}\ (\boldsymbol{Compresion})$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-F\overline{HF} + \frac{25}{7}\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\} + 2 = 0$$

$$F\overline{HF} = +\frac{25}{7}\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\} + 2 = \boldsymbol{\frac{34}{7}Ton}(\boldsymbol{Tension})$$

Nodo F



$$\sum \boldsymbol{F_Y} = \mathbf{0}$$

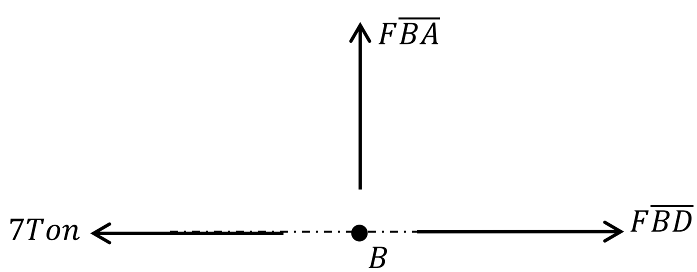
$$F\overline{FE} = 0$$

$$\sum \boldsymbol{F_X} = \mathbf{0}$$

$$-F\overline{FD} + \frac{34}{7} = 0$$

$$F\overline{FD} = \boldsymbol{\frac{34}{7}Ton(Tension)}$$

Nodo B



$$\sum \boldsymbol{F_Y} = \mathbf{0}$$

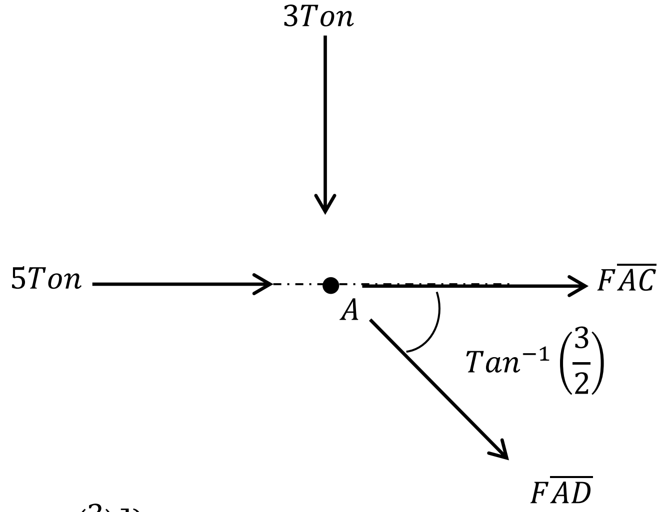
$$F\overline{BA} = 0$$

$$\sum \boldsymbol{F_X} = \mathbf{0}$$

$$F\overline{BD} - 7 = 0$$

$$F\overline{BD} = 7\boldsymbol{Ton(Tension)}$$

Nodo A



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-3 - F\overline{AD}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

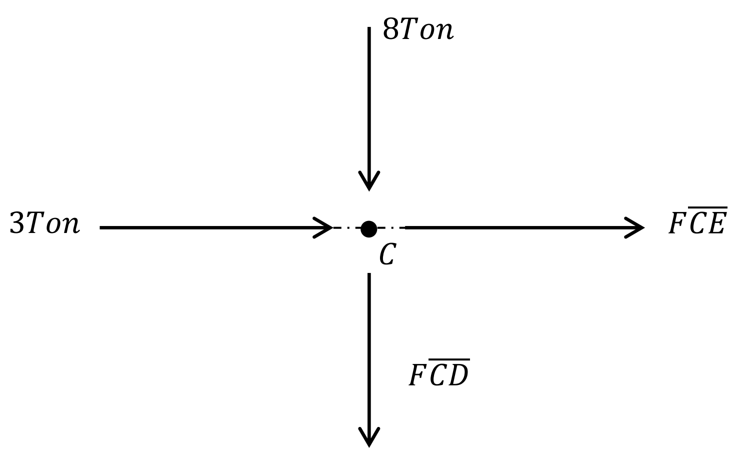
$$F\overline{AD} = \frac{-3}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\}} \approx -\boldsymbol{3.6056Ton}(\boldsymbol{Compresion})$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$5 - 3.6056\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} + F\overline{AC} = 0$$

$$F\overline{AC} = -5 + 3.6056\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} = -3\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Compresion})$$

Nodo C



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-8 - F\overline{CE} = 0$$

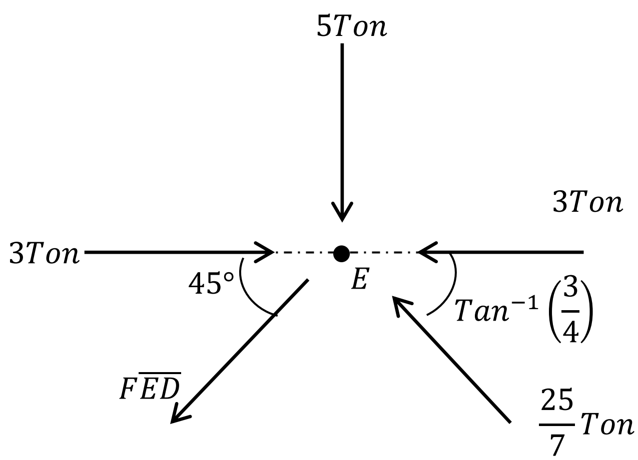
$$F\overline{CD} = \boldsymbol{-8Ton(Compresion)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$3 + F\overline{CE} = 0$$

$$F\overline{CE} = -3\boldsymbol{Ton(Compresion)}$$

Nodo E



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-5 + \frac{25}{7}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\} - F\overline{ED}(Sen45°) = 0$$

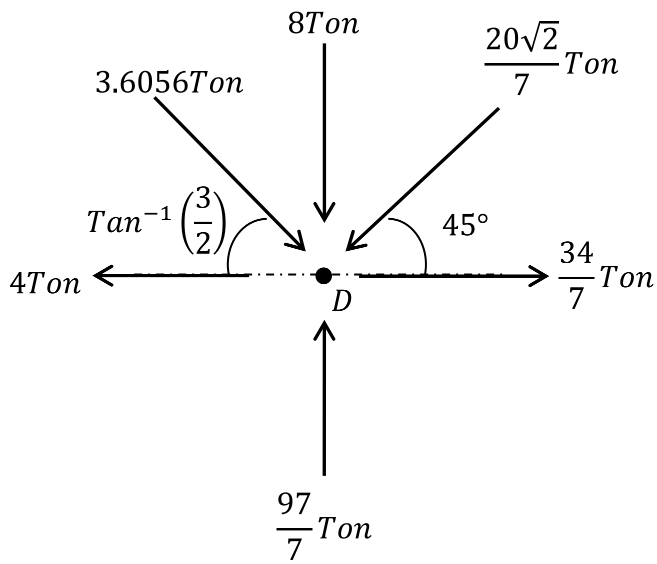
$$F\overline{ED} = \frac{-5 + \frac{25}{7}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\}}{(Sen45°)} = -\boldsymbol{\frac{20\sqrt{2}}{7}Ton(Compresion)}$$

Si las fuerzas calculadas, así como su sentido son correctas entonces:

$$\sum \boldsymbol{F_Y} = \mathbf{0}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X} = \mathbf{0}$$

En el nodo D



$$\sum \boldsymbol{F_Y} = \mathbf{0}$$

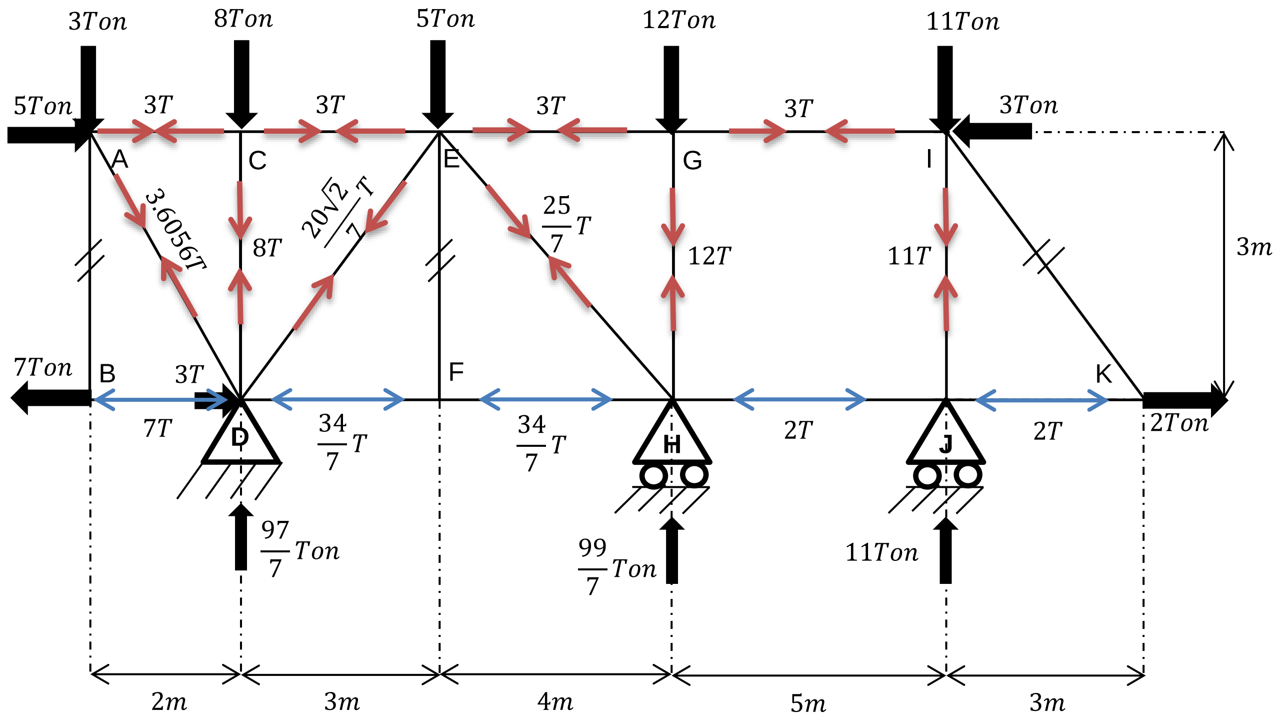
$$\frac{97}{7} - 8 - \left(\frac{20\sqrt{2}}{7}\right)(Sen45°) - (3.6056)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

$$\sum \boldsymbol{F_X} = \mathbf{0}$$

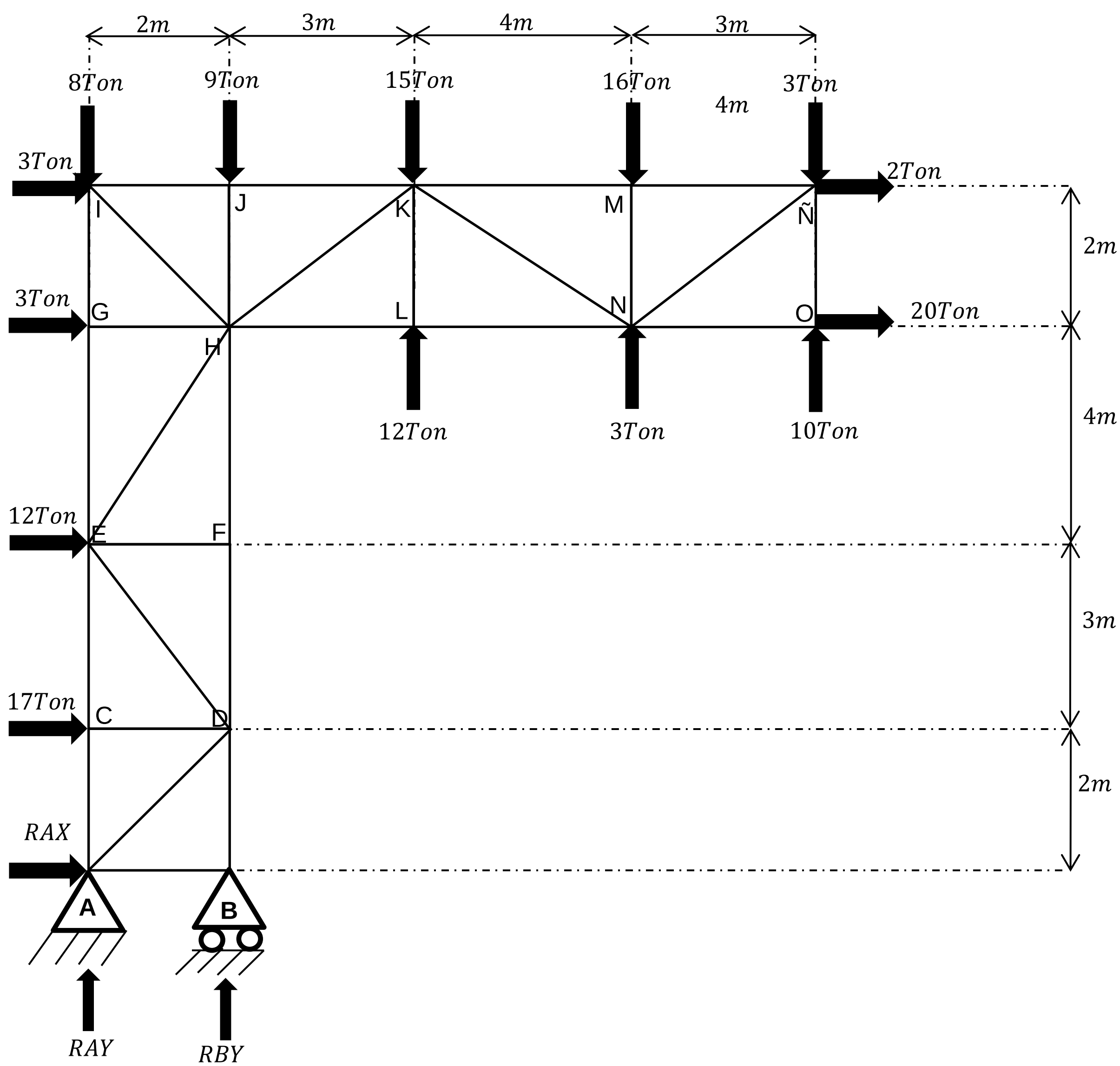
$$-4 + (3.6056)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} - \left(\frac{20\sqrt{2}}{7}\right)(Cos45°) + \frac{34}{7} = 0$$

Por lo tanto las fuerzas a las que se encuentran sometidas las barras están correctamente calculadas.

Diagrama que muestra las fuerzas a las que se encuentra sometida cada barra, así como el valor de las reacciones en los soportes calculadas.



4.- Calcule el valor de las reacciones en los soportes mostrados, y las fuerzas presentadas en las barras de la siguiente armadura.



Calculo del grado de indeterminación de la armadura

$b + r = 2j$

$29 + 3 = 2(16)$

$32 = 32 \;\; \therefore \; La\ armadura\ es\ estáticamente\ determinada$

Calculo de la reacción vertical en el soporte “B” (RBY)

$$\sum M_A = 0$$

$$-RBY(2m) + 17Ton(2m) + 12Ton(5m) + 3Ton(9m) + 3Ton(11m) + 9Ton(2m)$$
$$+15Ton(5m) - 12Ton(5m) + 16Ton(9m) - 3Ton(9m) + 3Ton(12m)$$
$$-10Ton(12m) + 2Ton(11m) + 20Ton(9m) = 0$$

$$\boldsymbol{RBY = \frac{422\,{}^{Ton}/_{m}}{2m} = 211Ton}$$

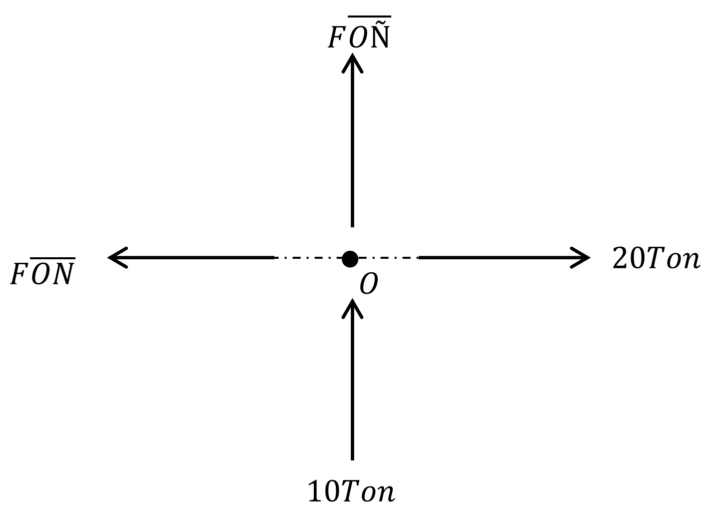
Calculo de la reacción horizontal en el soporte “A” (RAX)

$$\sum F_X = 0$$

$$RAX + 17Ton + 12Ton + 3Ton + 3Ton + 2Ton + 20Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RAX = -57Ton}$$

Nodo “O”



$$\sum F_X = 0$$

$$-F\overline{ON} + 20 = 0$$

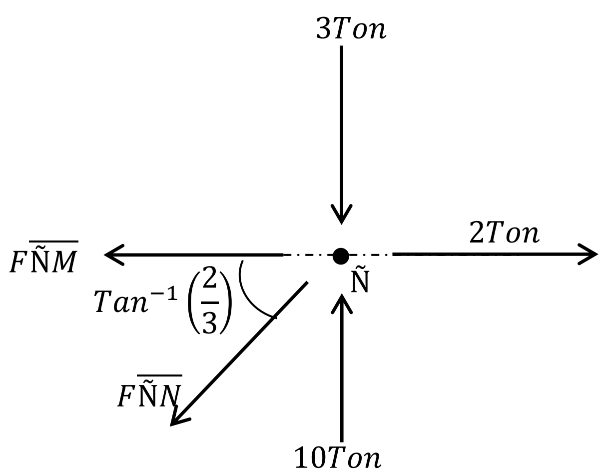
$$F\overline{ON} = \mathbf{20Ton(Tension)}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$F\overline{O\tilde{N}} + 10 = 0$$

$$F\overline{O\tilde{N}} = \mathbf{-10Ton\ (Compresion)}$$

Nodo "Ñ"



$$\sum F_Y = 0$$

$$-3 + 10 - F\overline{\tilde{N}N}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} = 0$$

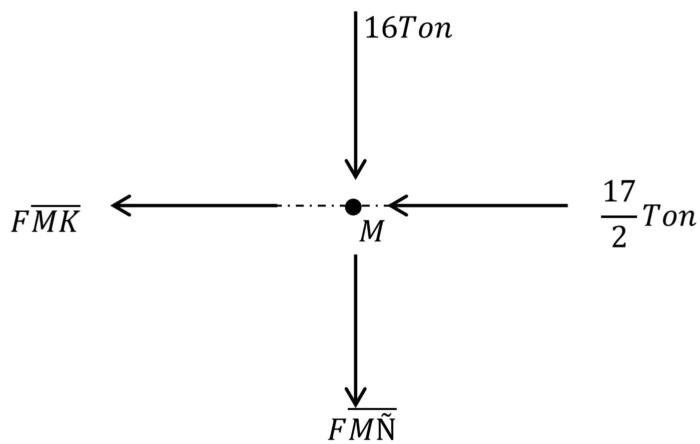
$$F\overline{\tilde{N}N} = \frac{\mathbf{7}}{\left\{\mathbf{Sen}\left[\mathbf{Tan^{-1}}\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\right)\right]\right\}} \approx \mathbf{12.6194Ton(Tension)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-F\overline{\tilde{N}M} + 2 - \left(\frac{7}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} = 0$$

$$F\overline{\tilde{N}M} = \boldsymbol{\frac{-17}{2} Ton(Compresion)}$$

Nodo “M”



$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-F\overline{MK} - \frac{17}{2} = 0$$

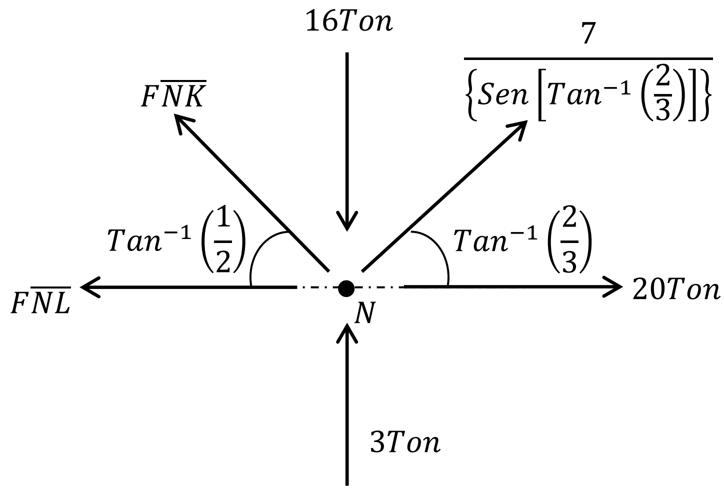
$$F\overline{MK} = -\boldsymbol{\frac{17}{2} Ton(Compresion)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-F\overline{MN} - 16 = 0$$

$$F\overline{MN} = \boldsymbol{-16Ton\ (Compresion)}$$

Nodo "N"



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$3-16+\left(\frac{7}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}+F\overline{NK}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}=0$$

$$F\overline{NK}=\frac{-3+16-\left(\frac{7}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}}$$

$$F\overline{NK}\approx \mathbf{13.4164}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Tension})$$

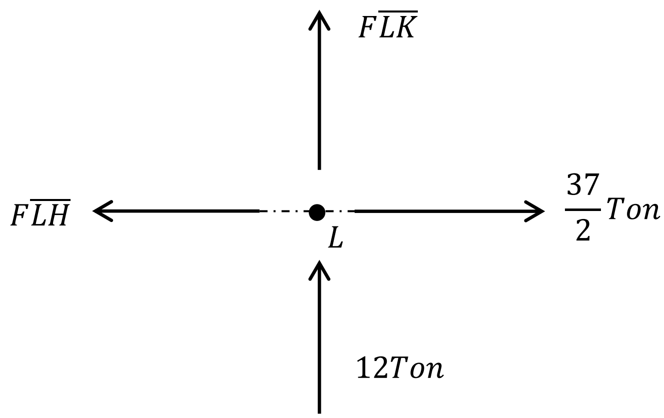
$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$20-F\overline{NL}+\left(\frac{7}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}-13.4164\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$$
$$=0$$

$$F\overline{NL}=+\left(\frac{7}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}-13.4164\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}+20$$

$F\overline{NL} = \frac{\mathbf{37}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Tension})$

Nodo "L"



$\sum \boldsymbol{F_Y} = \mathbf{0}$

$F\overline{LK} + 12 = 0$

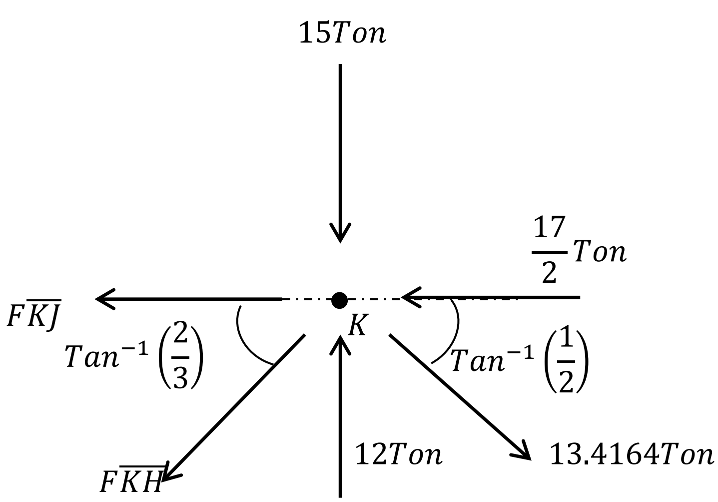
$F\overline{LK} = \mathbf{-12}\boldsymbol{Ton}\ (\boldsymbol{Compresion})$

$\sum \boldsymbol{F_X} = \mathbf{0}$

$-F\overline{LH} + \frac{37}{2} = 0$

$F\overline{LH} = \frac{\mathbf{37}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Tension})$

Nodo "K"



$$\sum F_Y = 0$$

$$-15 + 12 - 13.4164\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} - F\overline{KH}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} = 0$$

$$F\overline{KH} = \frac{-15 + 12 - 13.4164\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}}$$

$$F\overline{KH} \approx \mathbf{-16.2250\,Ton(Compresion)}$$

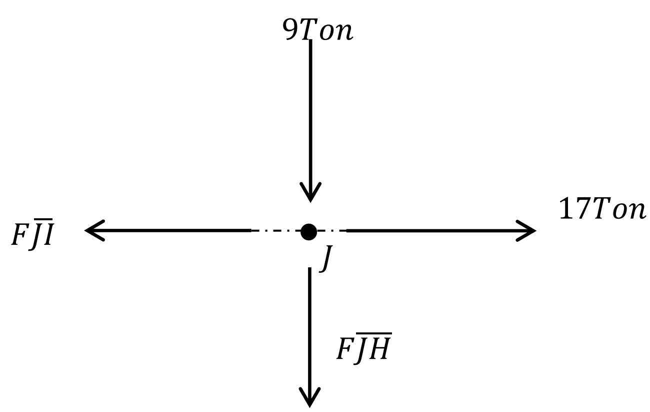
$$\sum F_X = 0$$

$$-F\overline{KJ} + 16.2250\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} - \frac{17}{2} + 13.4164\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

$$F\overline{KJ} = +16.2250\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} - \frac{17}{2} + 13.4164\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$$

$$F\overline{KJ} = \mathbf{17\,Ton(Tension)}$$

Nodo "J"



$$\sum F_Y = 0$$

$-F\overline{JH} - 9 = 0$

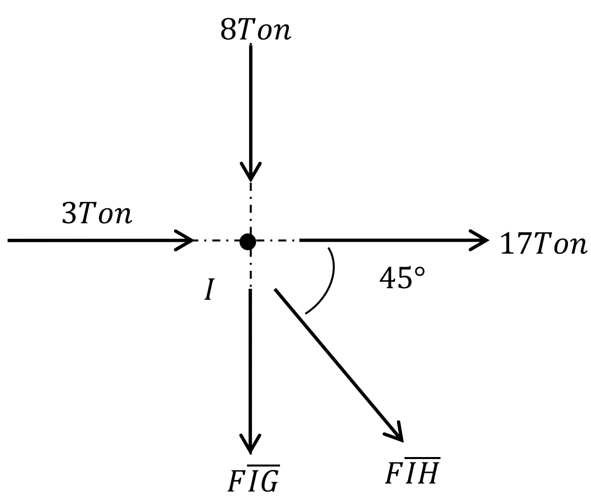
$F\overline{JH} = \mathbf{-9Ton\ (Compresion)}$

$$\sum F_X = 0$$

$-F\overline{JI} + 17 = 0$

$F\overline{JI} = \mathbf{17Ton(Tension)}$

Nodo “I”



$$\sum F_X = 0$$

$3 + 17 + F\overline{IH}(Cos45°) = 0$

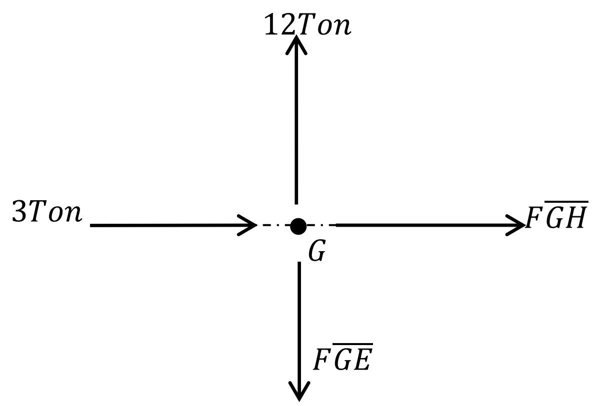
$$F\overline{IH} = \frac{-20}{(Cos45°)} = \mathbf{-20\sqrt{2}Ton(Compresion)}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$-8 + 20\sqrt{2}Ton(Sen45°) - F\overline{IG} = 0$

$F\overline{IG} = -8 + 20\sqrt{2}Ton(Sen45°) = \mathbf{12Ton(Tension)}$

Nodo “G”



$$\sum F_Y = 0$$

$$-F\overline{GE} + 12 = 0$$

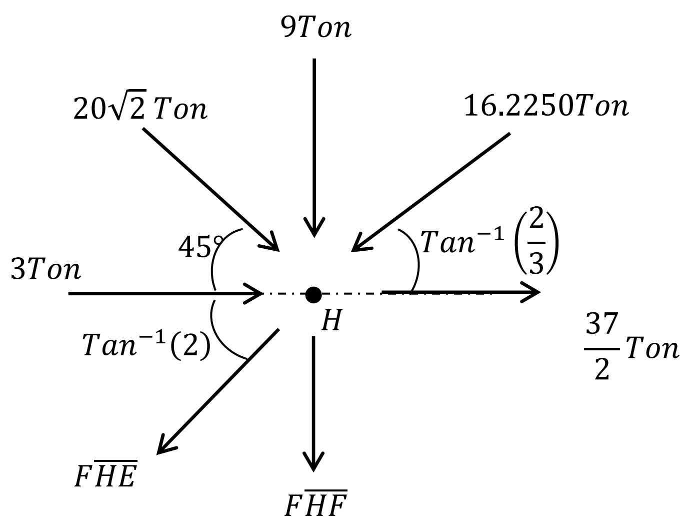
$$F\overline{GE} = \mathbf{12Ton}\ (\boldsymbol{Tension})$$

$$\sum F_X = 0$$

$$F\overline{GH} + 3 = 0$$

$$F\overline{GH} = \mathbf{-3Ton}(\boldsymbol{Compresion})$$

Nodo “H”



$$\sum \boldsymbol{F_X} = \mathbf{0}$$

$$-F\overline{HE}\{Cos[Tan^{-1}(2)]\} + 3 + 20\sqrt{2}(Cos45°) - 16.2250\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} + \frac{37}{2} = 0$$

$$F\overline{HE} = \frac{3 + 20\sqrt{2}(Cos45°) - 16.2250\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} + \frac{37}{2}}{\{Cos[Tan^{-1}(2)]\}}$$

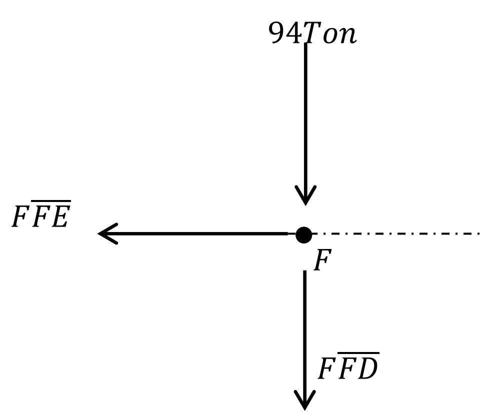
$$F\overline{HE} \approx \mathbf{62.6099}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Tension})$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y} = \mathbf{0}$$

$$-(62.6099)\{Sen[Tan^{-1}(2)]\} - 20\sqrt{2}(Sen45°) - 9 - (16.2250)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}$$
$$-F\overline{HF} = 0$$

$$F\overline{HF} = \mathbf{-94}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Compresion})$$

Nodo “F”



$$\sum \boldsymbol{F_Y} = \mathbf{0}$$

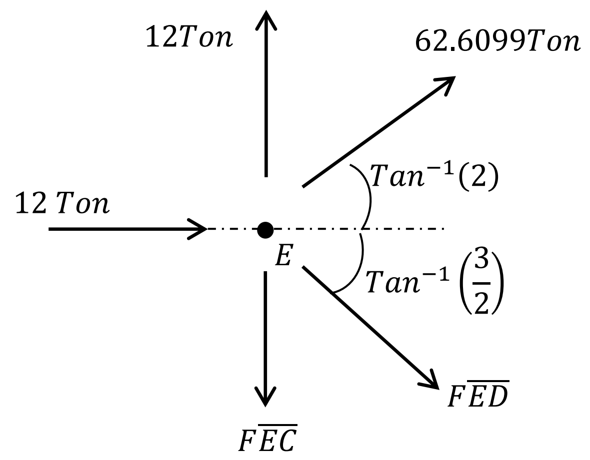
$$-F\overline{FD} - 94 = 0$$

$$F\overline{FD} = \mathbf{-94}\boldsymbol{Ton}\ (\boldsymbol{Compresion})$$

$$\sum \boldsymbol{F_X} = \mathbf{0}$$

$$F\overline{FE} = 0$$

Nodo "E"



$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$12 + (62.6099)\{Cos[Tan^{-1}(2)]\} + F\overline{ED}\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

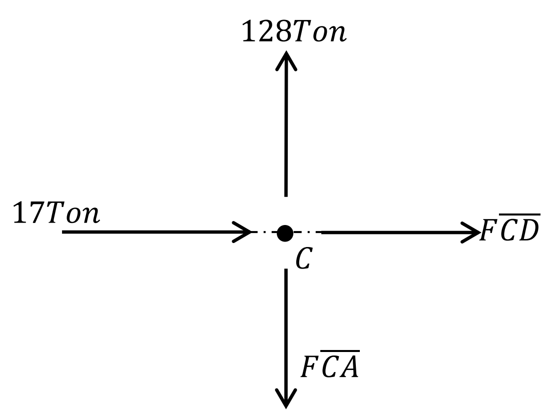
$$F\overline{ED} = \boldsymbol{-72.1110Ton(Compresion)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-F\overline{EC} + 12 + (62.6099)\{Sen[Tan^{-1}(2)]\} + (72.1110)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

$$F\overline{EC} = \boldsymbol{128Ton(Tension)}$$

Nodo "C"



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-F\overline{CA} + 128 = 0$$

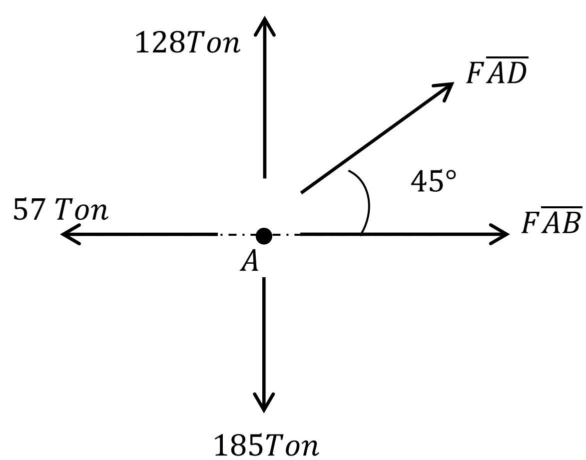
$$F\overline{CA} = \boldsymbol{128Ton}\ (\boldsymbol{Tension})$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$F\overline{CD} + 17 = 0$$

$$F\overline{CD} = \boldsymbol{-17Ton}\ (\boldsymbol{Compresion})$$

Nodo "A"



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$128 - 185 + F\overline{AD}(Sen45°) = 0$$

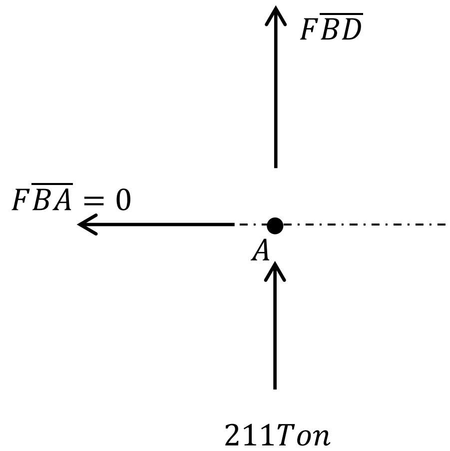
$$F\overline{AD} = \frac{-128 + 185}{(Sen45°)} = \boldsymbol{57\sqrt{2}Ton(Tension)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-57 + 57\sqrt{2}(Cos45°) + F\overline{AB} = 0$$

$$\boldsymbol{F\overline{AB} = 0}$$

Nodo “B”



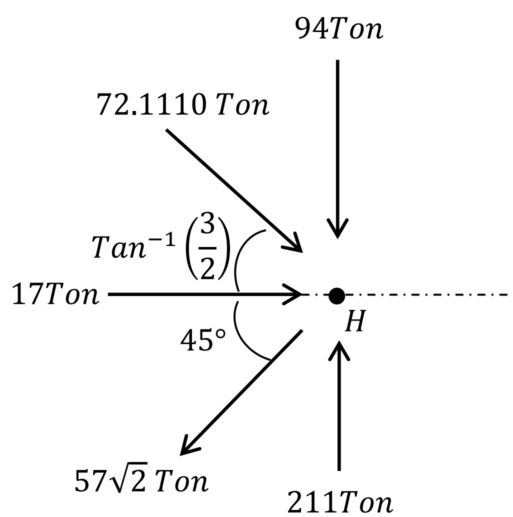
$$\sum \boldsymbol{F_Y} = \mathbf{0}$$

$$211 + F\overline{BD} = 0$$

$$F\overline{BD} = \mathbf{-211}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Compresion})$$

Para verificar si las fuerzas a las que se encuentran sometidas las barras han sido correctamente calculadas:

Nodo “D”



$$\sum \boldsymbol{F_Y} = \mathbf{0}$$

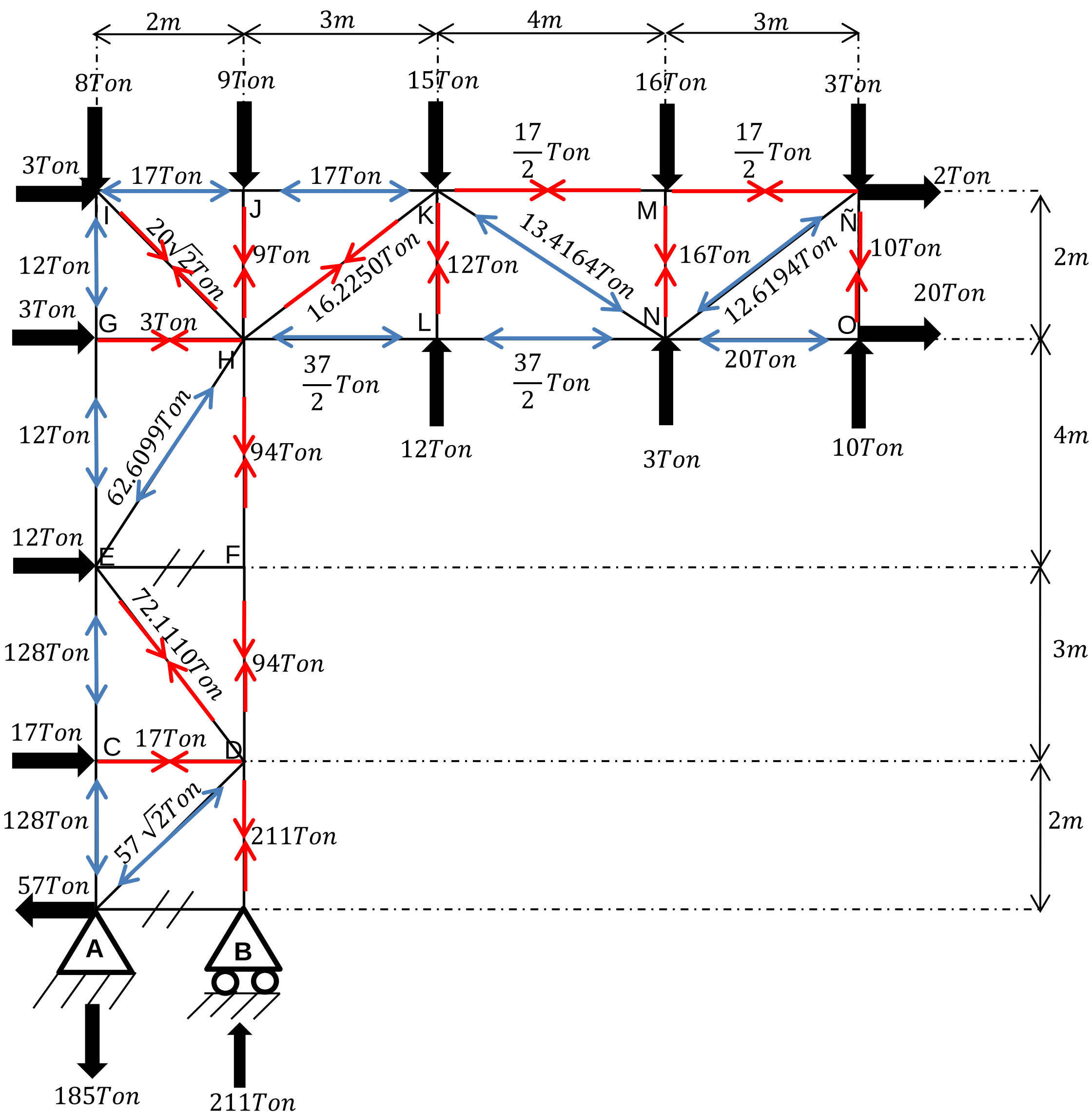
$$211 - \left(57\sqrt{2}\,\right)(Sen45°) - (72.1110)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} - 94 = 0$$

$$\sum \boldsymbol{F_X} = \mathbf{0}$$

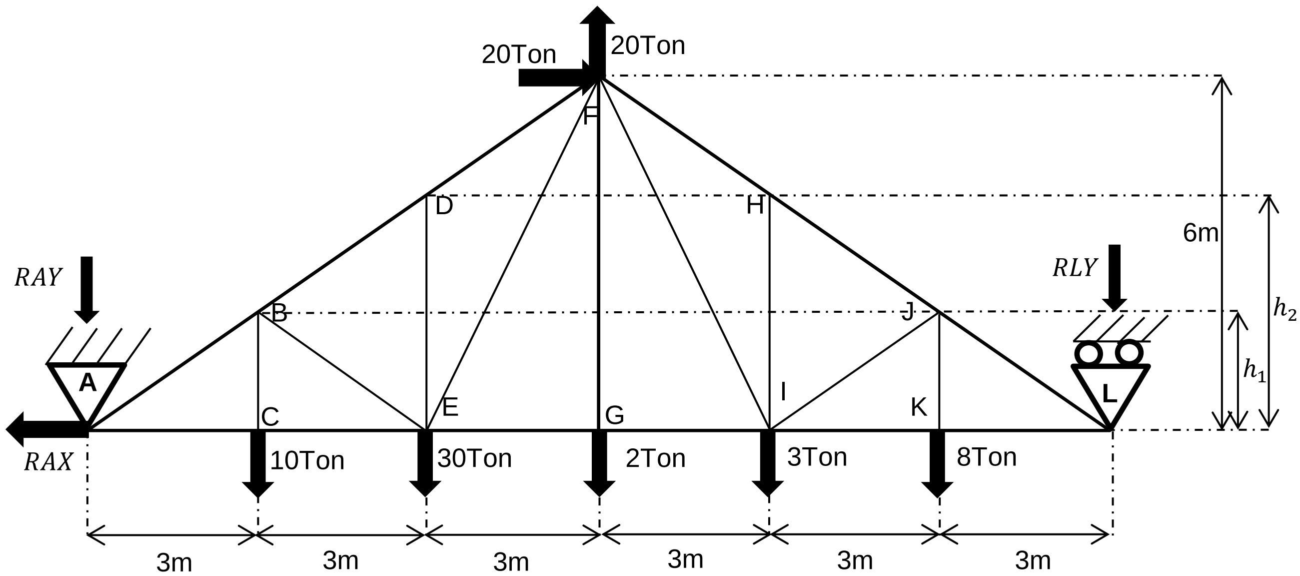
$$17 - \left(57\sqrt{2}\,\right)(Sen45°) + (72.1110)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

Como las condiciones de equilibrio de fuerzas se cumplen, las fuerzas calculadas en las barras son correctas.

Diagrama que muestra las fuerzas a las que se encuentra sometida cada barra, así como el valor de las reacciones en los soportes calculadas.



5.- Calcule el valor de las reacciones en los soportes mostrados, y las fuerzas presentadas en las barras de la siguiente armadura.



Calculo del grado de indeterminación de la armadura

$b + r = 2j$
$21 + 3 = 2(12)$

$24 = 24 \ \therefore \ La\ armadura\ es\ estáticamente\ determinada$

Calculo de las reacciones en los soportes mostrados

$$\sum M_A = 0$$

$$(10Ton)(3m) + (30Ton)(6m) + (2Ton)(9m) - (20Ton)(9m) + (3Ton)(12m)$$
$$+(8Ton)(15m) + (20Ton)(6m) + RLY(18m) = 0$$

$$\boldsymbol{RLY = \frac{-324}{18} = -18Ton \uparrow}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$-RAY - 10Ton - 30Ton - 2Ton - 3Ton - 8Ton + 18Ton + 20Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = -15Ton}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-RAX + 20Ton = 0$$

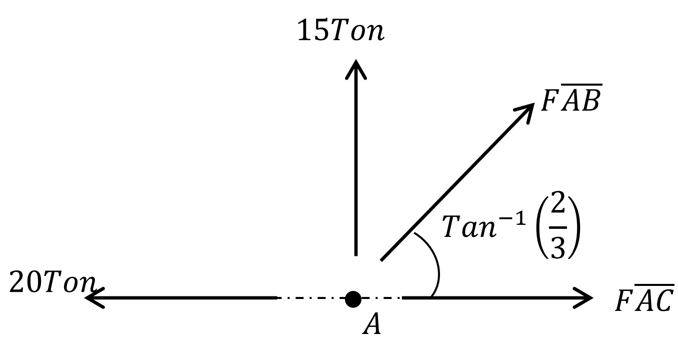
$$\boldsymbol{RAX = -20Ton}$$

Por trigonometría definimos:

$$\boldsymbol{h_1 = \frac{(3)(6)}{9} = 2m}$$

$$\boldsymbol{h_2 = \frac{(6)(6)}{9} = 4m}$$

Nodo "A"



$$\sum F_Y = 0$$

$$15 + F\overline{AB}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} = 0$$

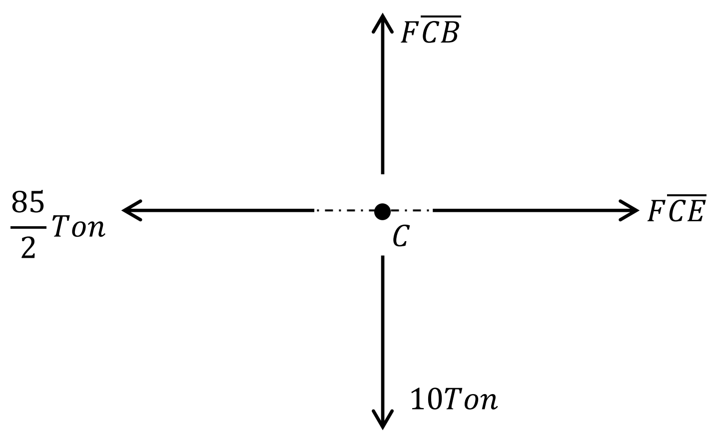
$$F\overline{AB} = \frac{-15}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}} \approx \boldsymbol{-27.0416Ton(Compresion)}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-20 - \left(\frac{15}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} + F\overline{AC} = 0$$

$$F\overline{AC} = +20 + \left(\frac{15}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} = \boldsymbol{\frac{85}{2}Ton(Tension)}$$

Nodo C



$$\sum F_Y = 0$$

$$F\overline{CB} - 10 = 0$$

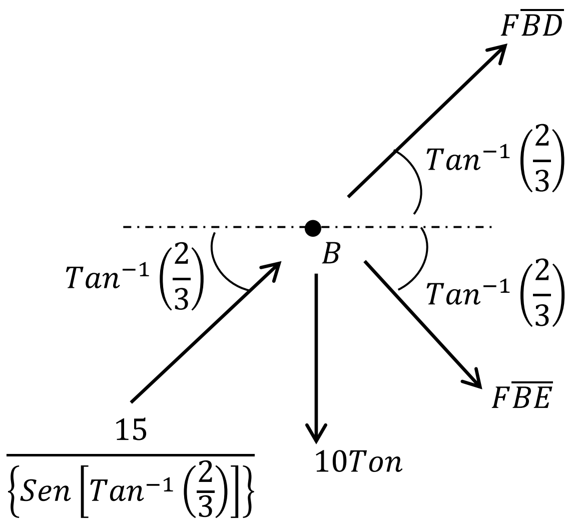
$$F\overline{CB} = \boldsymbol{10Ton(Tension)}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$F\overline{CE} - \frac{85}{2} = 0$$

$$F\overline{CE} = \boldsymbol{\frac{85}{2}Ton(Tension)}$$

Nodo B



$$\sum F_X = 0$$

$$\left(\frac{15}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} + F\overline{BE}\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}$$
$$+F\overline{BD}\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} = 0$$

$$\sum F_Y = 0$$

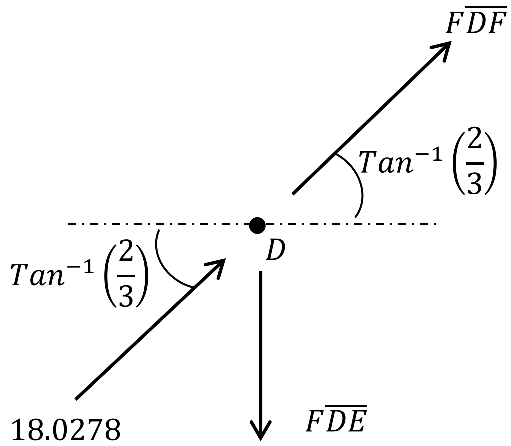
$$\left(\frac{15}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} - F\overline{BE}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} + F\overline{BD}\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}$$
$$-10 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{F\overline{BE} = -9.0139Ton(Compresion)}$$

$$\boldsymbol{F\overline{BD} = -18.0278Ton(Compresion)}$$

Nodo D



$$\sum F_X = 0$$

$$(18.0278)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} + F\overline{DF}\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} = 0$$

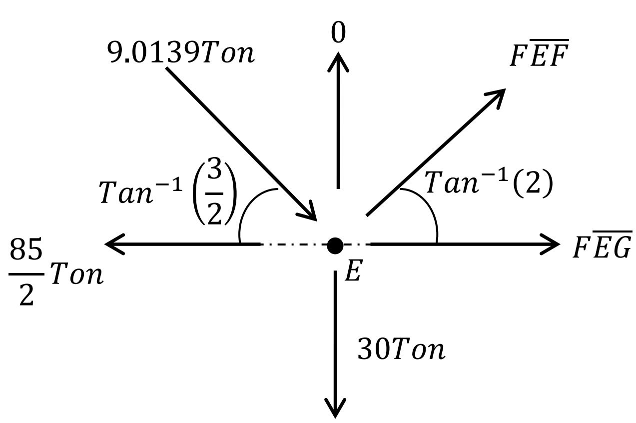
$$F\overline{DF} = \frac{-(18.0278)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}}{\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}} = \boldsymbol{-18.0278Ton(Compresion)}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$(18.0278)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} - (18.0278)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} + F\overline{DE} = 0$$

$$\boldsymbol{F\overline{DE} = 0}$$

Nodo E



$$\sum F_Y = 0$$

$$(-9.0139)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} + F\overline{EF}\{Sen[Tan^{-1}(2)]\} - 30 = 0$$

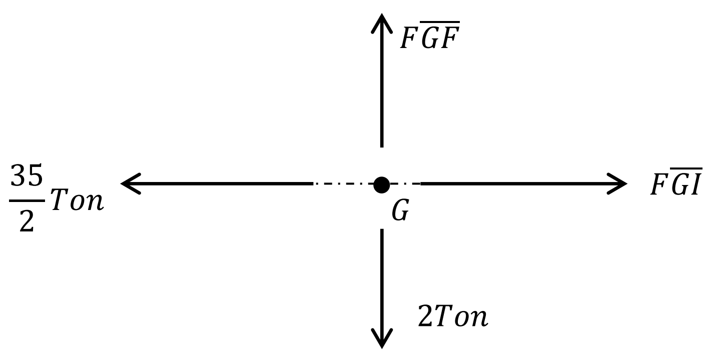
$$F\overline{EF} = \frac{(9.0139)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} + 30}{\{Sen[Tan^{-1}(2)]\}} = \mathbf{39.1312}(\boldsymbol{Tension})$$

$$\sum F_X = 0$$

$$\left(-\frac{85}{2}\right) + (9.0139)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} + (39.1312)\{Cos[Tan^{-1}(2)]\} + F\overline{EG} = 0$$

$$\boldsymbol{F\overline{EG}} = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Tension})$$

Nodo G



$$\sum F_Y = 0$$

$$F\overline{GF} - 2 = 0$$

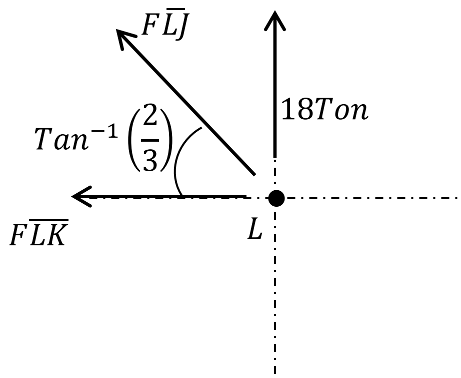
$$F\overline{GF} = \boldsymbol{2Ton}(\boldsymbol{Tension})$$

$$\sum F_X = 0$$

$$F\overline{GI} - \frac{35}{2} = 0$$

$$F\overline{GI} = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Tension})$$

Nodo L



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$18 + F\overline{LJ}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} = 0$$

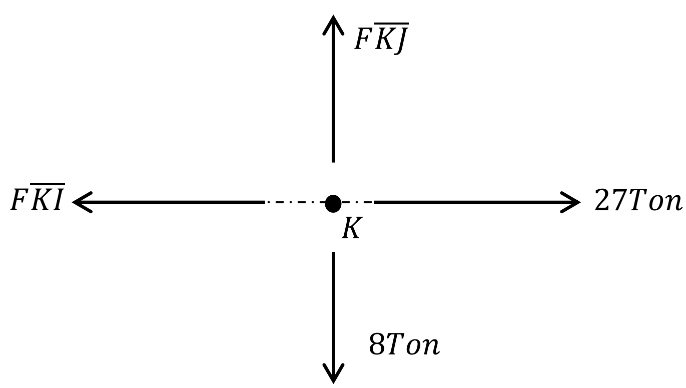
$$F\overline{LJ} = \frac{-18}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\}} = -\boldsymbol{\frac{649}{20}Ton(Compresion)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-F\overline{LK} + \left(\frac{649}{20}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} = 0$$

$$F\overline{KJ} = \boldsymbol{27Ton\ (Tension)}$$

Nodo K



$$\sum F_Y = 0$$

$$F\overline{KJ} - 8 = 0$$

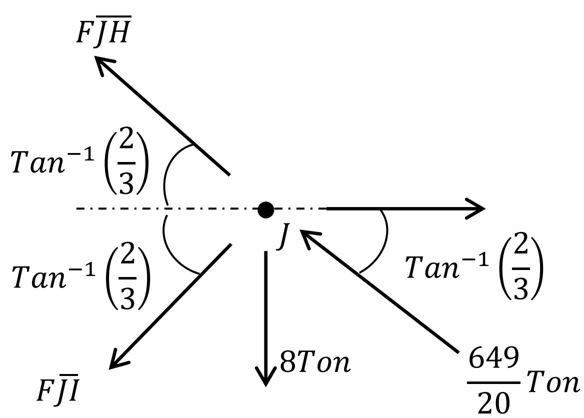
$$F\overline{KJ} = \boldsymbol{8Ton(Tension)}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-F\overline{KI} + 27 = 0$$

$$F\overline{KI} = \boldsymbol{27Ton(Tension)}$$

Nodo "J"



$$\sum F_Y = 0$$

$$-8 + \left(\frac{649}{20}\right)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} - F\overline{JI}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} + F\overline{JH}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} = 0$$

$$\sum F_X = 0$$

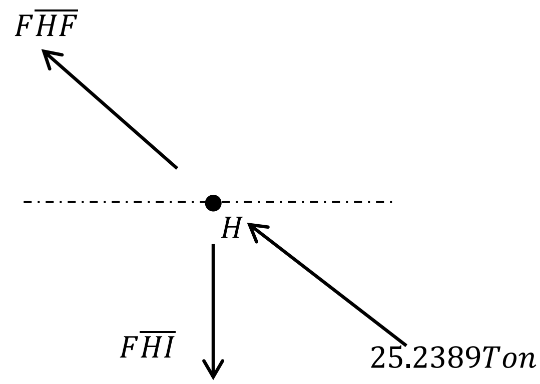
$$-\left(\frac{649}{20}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} - F\overline{JI}\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} - F\overline{JH}\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$F\overline{JI} = \boldsymbol{-7.2110Ton(Compresion)}$$

$$F\overline{JH} = \boldsymbol{-25.2389Ton(Compresion)}$$

Nodo “H”



$$\sum F_X = 0$$

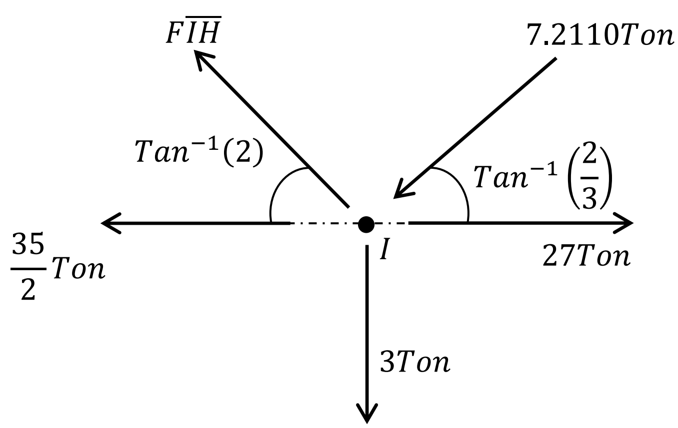
$$-F\overline{HF} - 25.2389 = 0$$

$$F\overline{HF} = \mathbf{-25.2389}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Compresion})$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$F\overline{HI} = 0$$

Nodo “I”



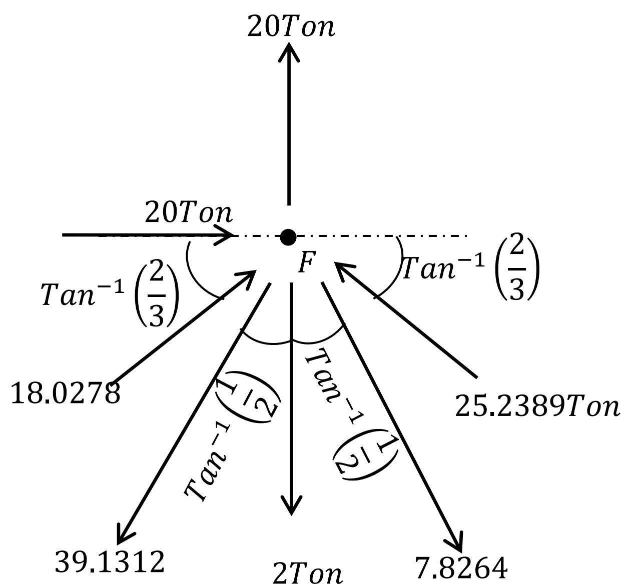
$$\sum F_X = 0$$

$$-\frac{35}{2} + 27 - (7.2110)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} - F\overline{IH}\{Cos[Tan^{-1}(2)]\} = 0$$

$$\boldsymbol{F\overline{IH}} = \mathbf{7.8264}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Tension})$$

Verificando que las fuerzas a las que se encuentran sometidas las barras son correctas:

Nodo F



$$\sum F_Y = 0$$

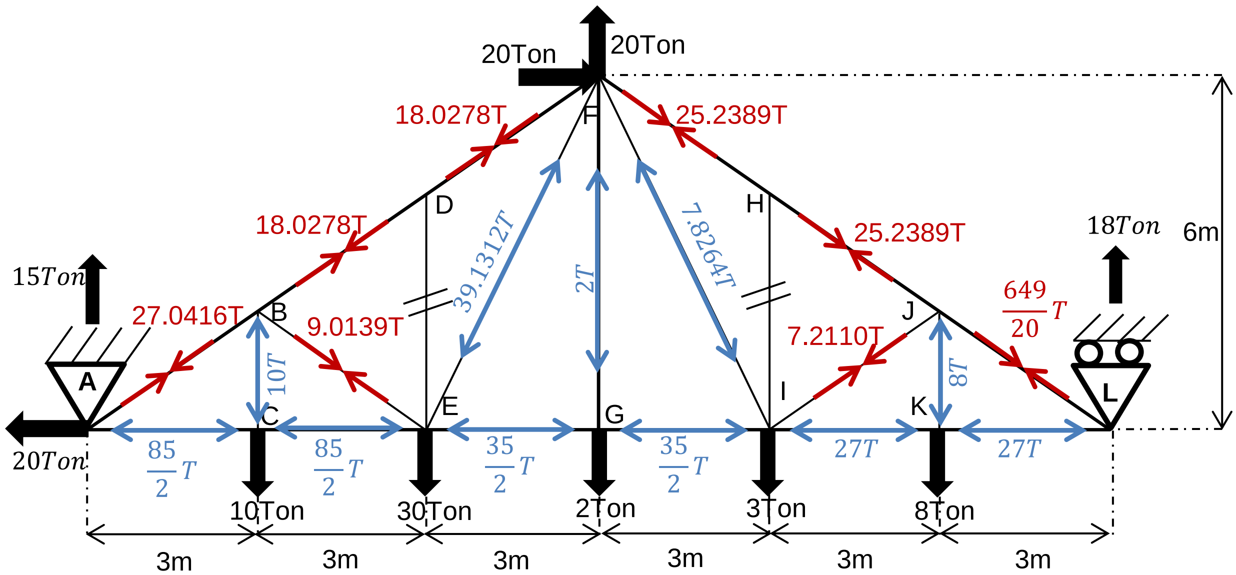
$$20 + 18.0278\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} - 39.1312\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} - 2$$
$$-7.8264\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} + 25.2389\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} = 0$$

$$\sum F_X = 0$$

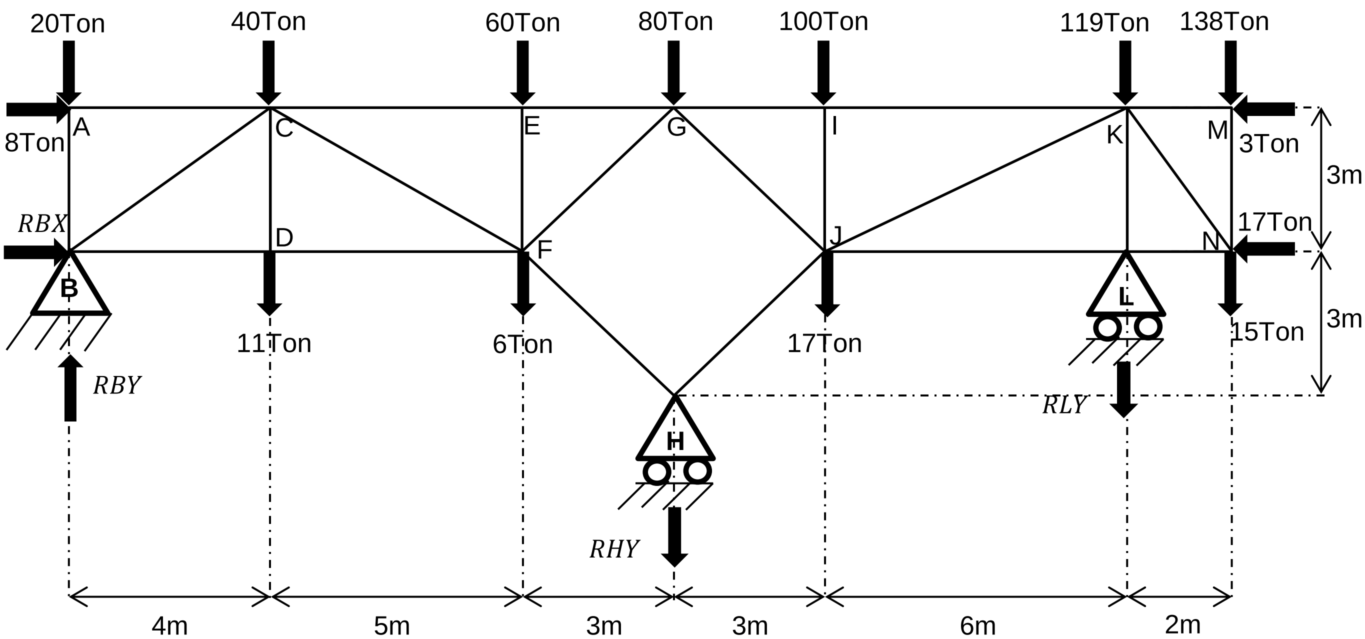
$$20 + 18.0278\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} - 39.1312\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$$
$$+7.8264\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} - 25.2389\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]\right\} = 0$$

Como las condiciones de equilibrio se satisfacen, las fuerzas calculadas son correctas.

Diagrama que muestra las fuerzas a las que se encuentra sometida cada barra, así como el valor de las reacciones en los soportes calculadas.



6.- Calcule el valor de las reacciones en los soportes mostrados, y las fuerzas presentadas en las barras de la siguiente armadura.



Calculo del grado de indeterminación de la armadura

$b + r = 2j$

$24 + 4 = 2(14)$

$28 = 28 \ \therefore La\ armadura\ es\ estáticamente\ determinada$

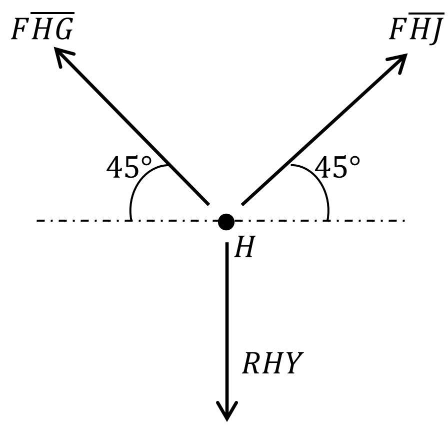
Calculo de la reacción horizontal en el soporte “B” (RBY)

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$\boldsymbol{8Ton - 3Ton - 17Ton + RBX = 0}$$

$$\boldsymbol{RBX = 12Ton} \longrightarrow$$

Nodo "H"



$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-F\overline{HG}(Cos45°) + F\overline{HJ}(Cos45°) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots Ec. 1$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$F\overline{HG}(Sen45°) + F\overline{HJ}(Sen45°) - RHY = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots Ec."$$

De la ecuación 1 es evidente que: $F\overline{HG} = F\overline{HJ}$

De la ecuación 2 podemos inferir que:

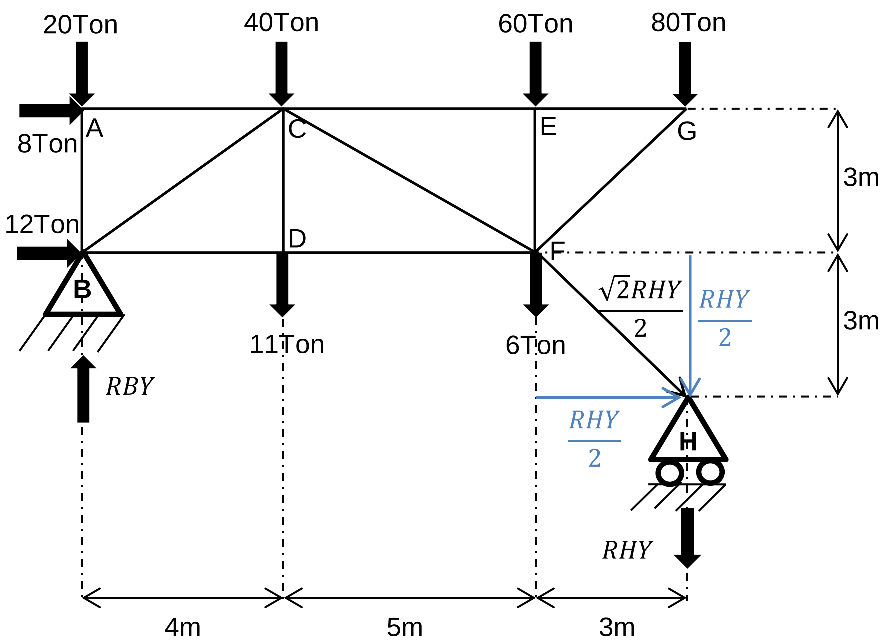
$$\sqrt{2}F\overline{HG} = \sqrt{2}F\overline{HJ} = RHY$$

$$F\overline{HG} = F\overline{HJ} = \frac{RHY}{\sqrt{2}}$$

$$F\overline{HG} = F\overline{HJ} = \left(\frac{RHY}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\boldsymbol{F\overline{HG} = F\overline{HJ} = \frac{\sqrt{2}RHY}{2}}$$

Tomando en cuenta la junta constructiva formada entre los nodos G-H



$$\sum \boldsymbol{M_G} = \mathbf{0}(a\ la\ izquierda\ de\ la\ junta\ constructiva)$$

$$RBY(12m) - (12Ton)(3m) - (20Ton)(12m) - (40Ton)(8m) - (11Ton)(8m) - (60Ton)(3m) - (6Ton)(3m) - \left(\frac{RHY}{2}\right)(6m) = 0$$

$\mathbf{12}\boldsymbol{RBY} - \mathbf{3}\boldsymbol{RHY} = \mathbf{882}$ … … … $Ec. 1$

$$\sum \boldsymbol{M_L} = \mathbf{0}(de\ toda\ la\ armadura\ )$$

$$RBY(21m) + (8Ton)(3m) - (20Ton)(21m) - (40Ton)(17m) - (11Ton)(17m)$$
$$-(60Ton)(12m) - (6Ton)(12m) - (80Ton)(9m) - (RHY)(9m) - (100Ton)(6m)$$
$$-(17Ton)(6m) + (138Ton)(2m) + (15Ton)(2m) - (3Ton)(3m) = 0$$

$\mathbf{21}\boldsymbol{RBY} - \mathbf{9}\boldsymbol{RHY} = \mathbf{3180}$ … … … $Ec. 2$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{RBY = -\frac{178}{5}Ton}$$

$$\boldsymbol{RHY = -\frac{2182}{5}Ton}$$

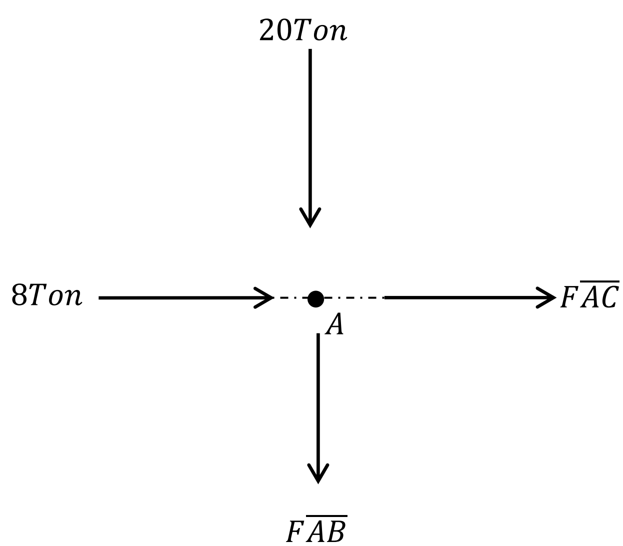
$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-\frac{178}{5}Ton - 20Ton - 40Ton - 11Ton - 60Ton - 6Ton - 80Ton + \frac{2182}{5}Ton$$
$$-100Ton - 17Ton - 119Ton - RLY - 138Ton - 15Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RLY = -\frac{1026}{5}Ton}$$

Calculo de las fuerzas a las que se encuentran sometidas la barras

Nodo "A"



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-20 - F\overline{AB} = 0$$

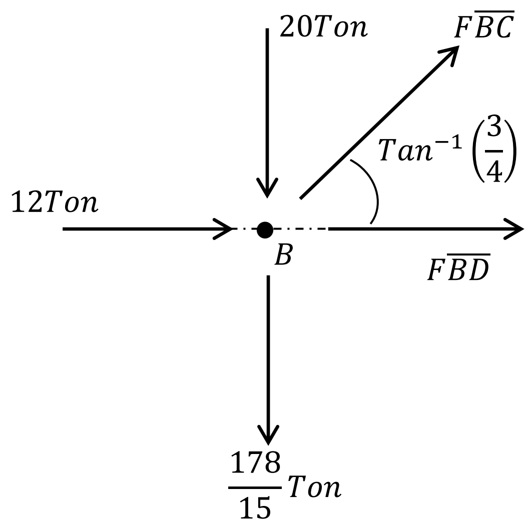
$$F\overline{AB} = \boldsymbol{-20Ton(Compresion)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$F\overline{AC} + 8 = 0$$

$$F\overline{AC} = \boldsymbol{-8Ton\ (Compresión)}$$

Nodo B



$$\sum F_Y = 0$$

$$-20 - \frac{178}{5} + F\overline{BC}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\} = 0$$

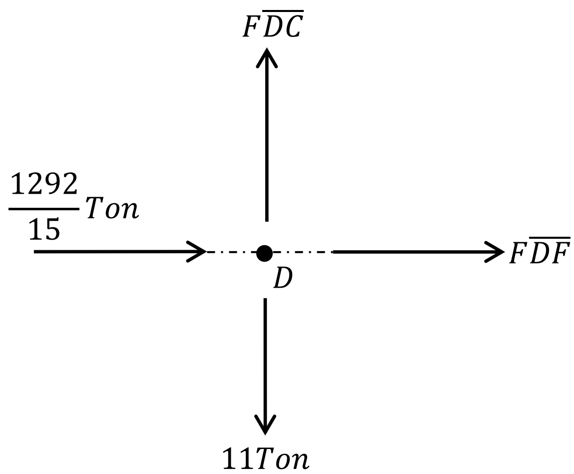
$$F\overline{BC} = \frac{20 + \frac{178}{5}}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\}} = \boldsymbol{\frac{278}{3}Ton(Tension)}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$12 + \left(\frac{278}{3}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\} + F\overline{BD} = 0$$

$$F\overline{BD} = -12 - \left(\frac{278}{3}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\} = -\boldsymbol{\frac{1292}{15}Ton(Compresion)}$$

Nodo “D”



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-11 + F\overline{DC} = 0$$

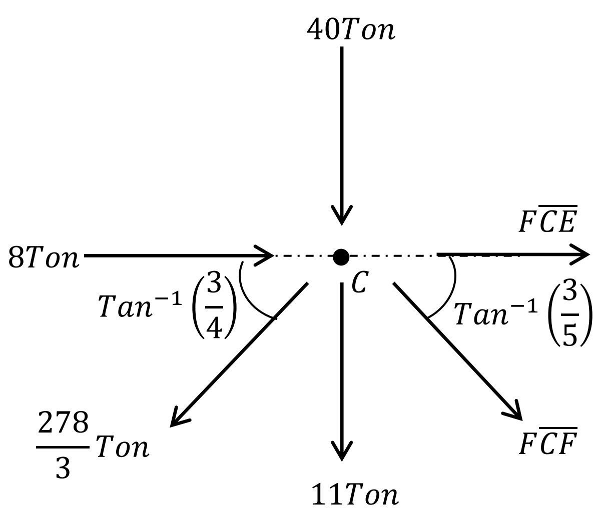
$$F\overline{DC} = \mathbf{11}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Tension})$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$\frac{1292}{15} + F\overline{DF} = 0$$

$$F\overline{DF} = -\frac{\mathbf{1292}}{\mathbf{15}}\boldsymbol{Ton}\ (\boldsymbol{Compresion})$$

Nodo “C”



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-40-11-\frac{278}{3}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\}-F\overline{CF}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}=0$$

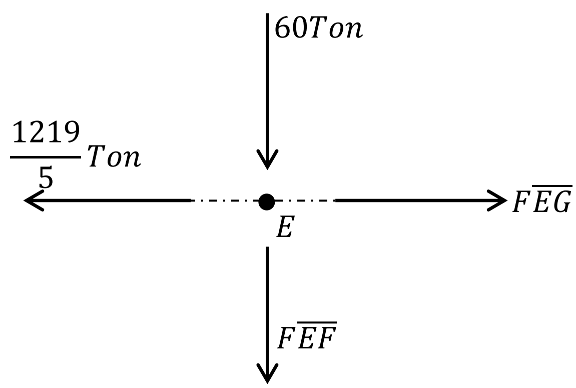
$$F\overline{CF}=\frac{-40-11-\frac{278}{3}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\}}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}}\approx \boldsymbol{-207.1932Ton(Compresion)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$8-\frac{278}{3}\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\}-\left(\frac{-40-11-\frac{278}{3}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\}}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\}$$
$$+F\overline{CE}=0$$

$$\boldsymbol{F\overline{CE}=\frac{1219}{5}\approx Ton(Tension)}$$

Nodo "E"



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-60-F\overline{EF}=0$$

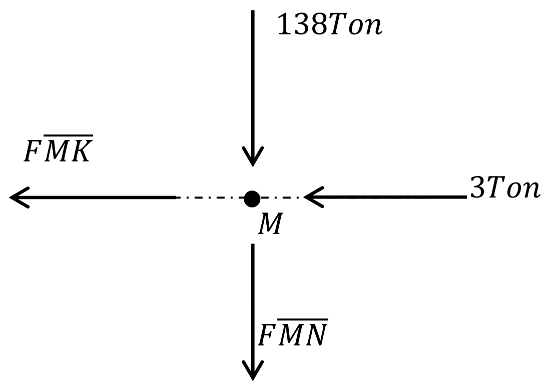
$$F\overline{EF}=\boldsymbol{-60Ton(Compresion)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-\frac{1219}{5} + F\overline{EG} = 0$$

$$F\overline{EG} = \boldsymbol{\frac{1292}{15} Ton\ (Tension)}$$

Nodo "M"



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-138 - F\overline{MN} = 0$$

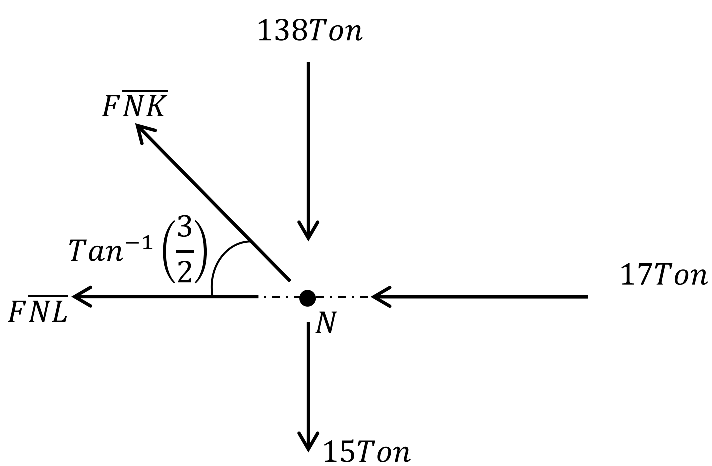
$$F\overline{MN} = \boldsymbol{-138Ton(Compresion)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-3 - F\overline{MK} = 0$$

$$F\overline{MK} = \boldsymbol{-3Ton\ (Compresion)}$$

Nodo "N"



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-138 - 15 + F\overline{NK}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

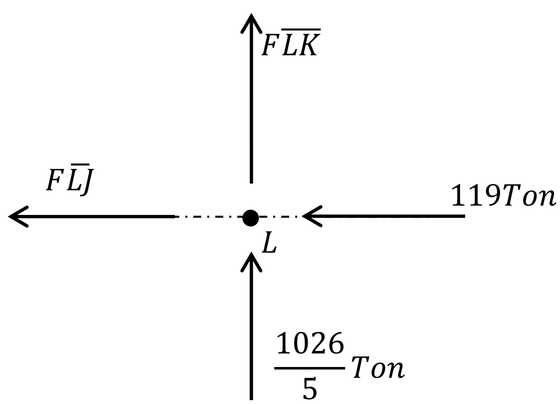
$$F\overline{NK} = \frac{138 + 15}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\}} \approx \boldsymbol{183.8831Ton(Tension)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-17 - F\overline{NL} - \left(\frac{138 + 15}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

$$F\overline{NL} = -\left(\frac{138 + 15}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} - 17 = \boldsymbol{-119Ton(Compresion)}$$

Nodo "L"



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$\frac{1026}{5} + F\overline{LK} = 0$$

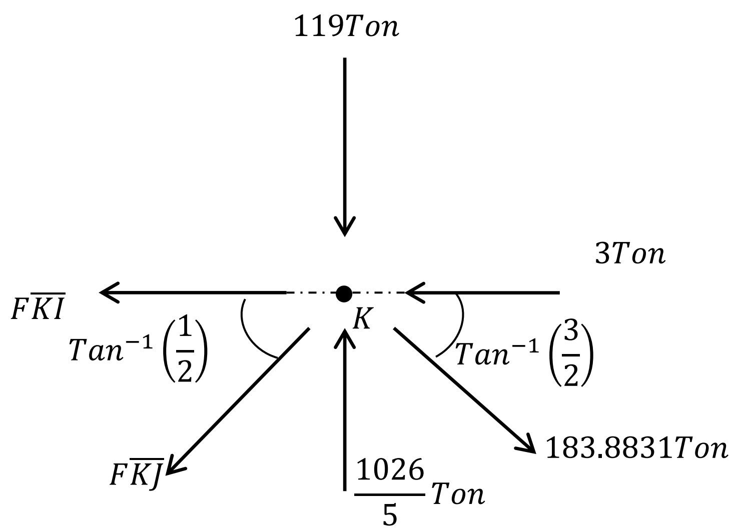
$$F\overline{LK} = -\boldsymbol{\frac{1026}{5}Ton(Compresion)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-119 - F\overline{L}J = 0$$

$$F\overline{L}J = \boldsymbol{-119Ton\ (Compresion)}$$

Nodo "K"



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-119 + \frac{1026}{5} - 183.8831\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} - F\overline{KJ}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

$$F\overline{KJ} = \frac{-119 + \frac{1026}{5} - 183.8831\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\}}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}}$$

$$F\overline{KJ} \approx \boldsymbol{-149.3693Ton(Compresion)}$$

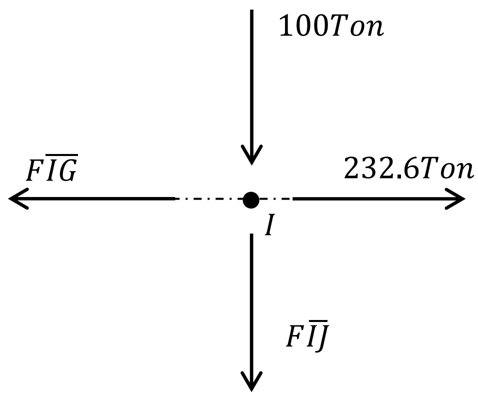
$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-F\overline{KI} - 3 + (149.3696)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} + (183.8831)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

$$F\overline{KI} = -3 + (149.3696)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} + (183.8831)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right\}$$

$$F\overline{KI} = \mathbf{232.6}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Tension})$$

Nodo "I"



$$\sum \boldsymbol{F_Y} = \mathbf{0}$$

$$-100 - F\overline{IJ} = 0$$

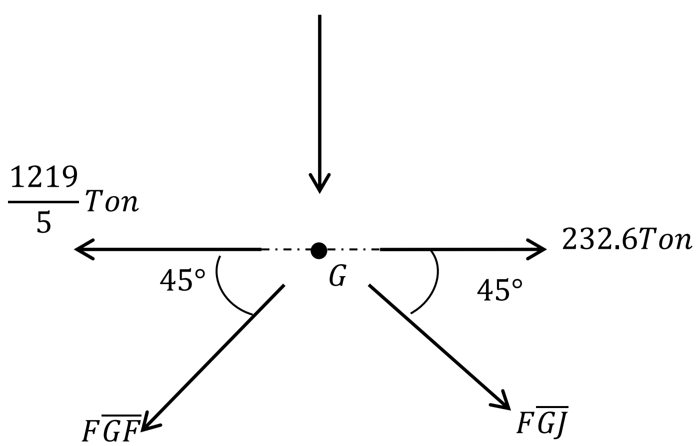
$$F\overline{IJ} = \mathbf{-100}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Compresion})$$

$$\sum \boldsymbol{F_X} = \mathbf{0}$$

$$232.6 - F\overline{IG} = 0$$

$$F\overline{IG} = \mathbf{232.6}\boldsymbol{Ton}\ (\boldsymbol{Tension})$$

Nodo "G"



$$\sum F_Y = 0$$

$$-F\overline{GF}(Sen45°) - F\overline{GJ}(Sen45°) = 80 \ldots\ldots\ldots\ldots Ec.1$$

$$\sum F_X = 0$$

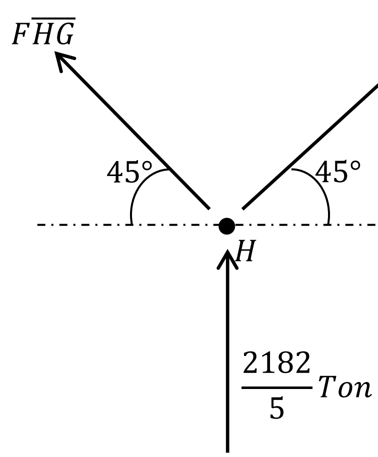
$$-F\overline{GF}(Cos45°) + F\overline{GJ}(Cos45°) = -232.6 + \frac{1219}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots Ec.2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{F\overline{GF} = -64.4881Ton(Compresion)}$$

$$\boldsymbol{F\overline{GJ} = -48.6489Ton(Compresion)}$$

Nodo "H"



$$\sum F_Y = 0$$

$$F\overline{HF}(Sen45°) + F\overline{HJ}(Sen45°) = -\frac{2182}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots Ec.1$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-F\overline{HF}(Cos45°) + F\overline{HJ}(Cos45°) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots Ec.2$$

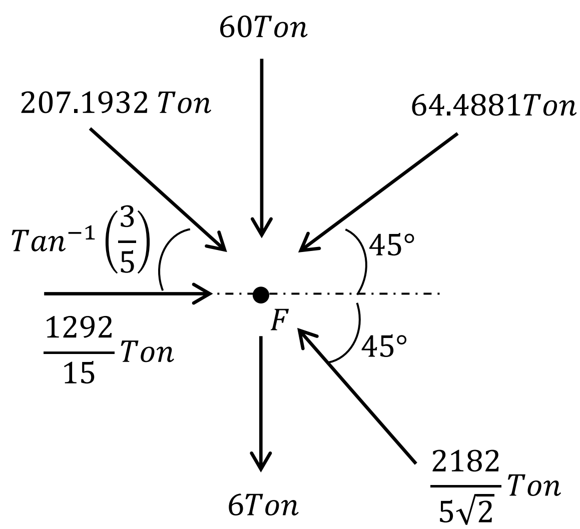
Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{F\overline{HF} = -\frac{2182}{5\sqrt{2}}Ton(Compresion) \approx -308.5814}$$

$$\boldsymbol{F\overline{HJ} = -\frac{2182}{5\sqrt{2}}Ton(Compresion) \approx -308.5814}$$

Verificando los nodos restantes (F) y (J) para conocer si las fuerzas a las que se encuentran sometidas las barras fueron calculadas correctamente

Nodo "F"



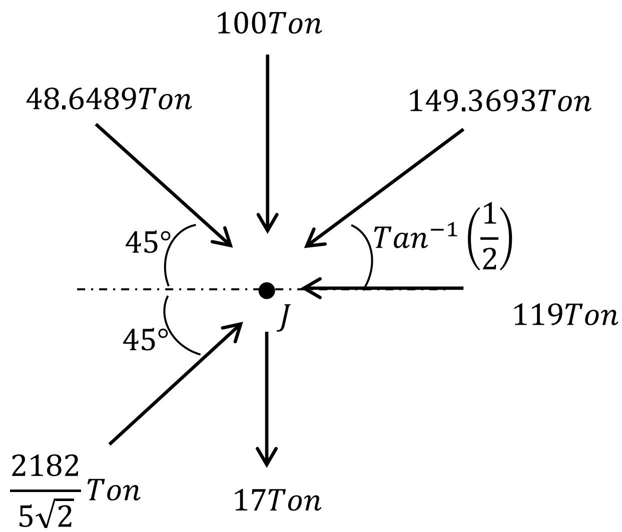
$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-207.1932\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\} - 60 - 6 - 64.48813(Sen45°) + \frac{2182}{5\sqrt{2}}(Sen45°) = 0$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$\frac{1292}{15} + 207.1932\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]\right\} - 64.48813(Cos45°) - \frac{2182}{5\sqrt{2}}(Cos45°) = 0$$

Nodo "J"



$$\sum \boldsymbol{F_Y} = \mathbf{0}$$

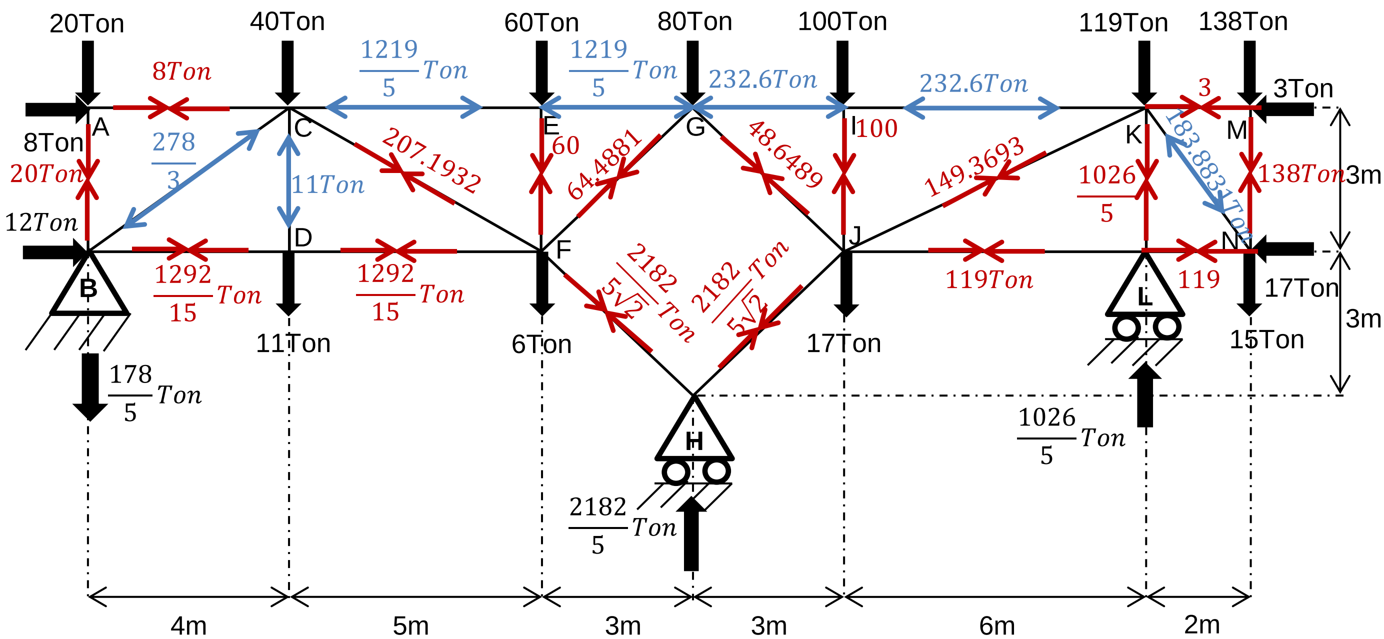
$$-100 - 17 - (48.6489)(Sen45°) + \left(\frac{2182}{5\sqrt{2}}\right)(Sen45°) - (149.3693)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} = 0$$

$$\sum \boldsymbol{F_X} = \mathbf{0}$$

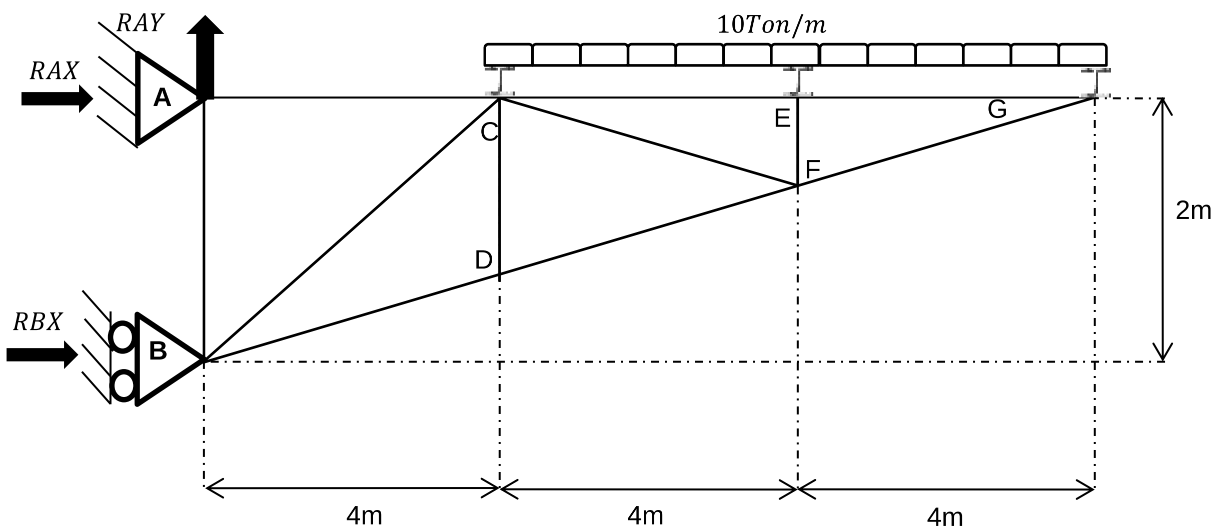
$$\left(\frac{2182}{5\sqrt{2}}\right)(Cos45°) + (48.6489)(Cos45°) - (149.3693)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} - 119 = 0$$

Como las condiciones de equilibrio estático se cubren, las fuerzas en las barras han sido calculadas correctamente.

Diagrama que muestra las fuerzas a las que se encuentra sometida cada barra, así como el valor de las reacciones en los soportes calculadas.



7.- Calcule el valor de las reacciones en los soportes mostrados, y las fuerzas presentadas en las barras de la siguiente armadura.



Calculo del grado de indeterminación de la armadura

$b + r = 2j$

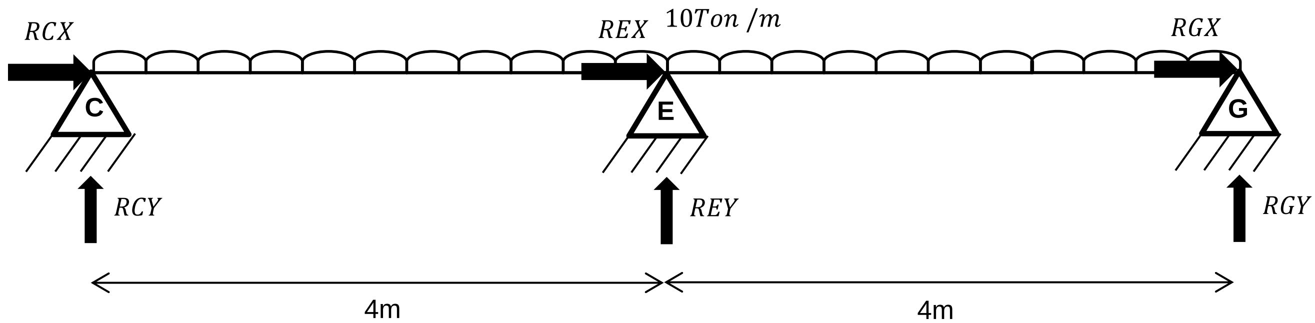
$11 + 3 = 2(7)$

$14 = 14 \;\therefore\; La\ armadura\ es\ estáticamente\ determinada$

Procedimiento de solución:

En este caso, se encuentran apoyados sobre los nodos C, E y G, perfiles de sección doble “T” que a su vez soportan el peso generado por la viga con carga uniformemente repartida de 10 ton/m primeramente habrá que calcular la carga que soporta cada perfil y que a su vez es transmitida a los nodos mencionados.

Podemos considerar a los perfiles como apoyos fijos formando la viga hiperestática que se presenta a continuación:



Verificación del grado de indeterminación de la viga:

Recordando que el grado de indeterminación en términos vanos es la diferencia entre el número de incógnitas de nuestra estructura "I" y el número de ecuaciones de equilibrio estático asociadas a su plano "E"

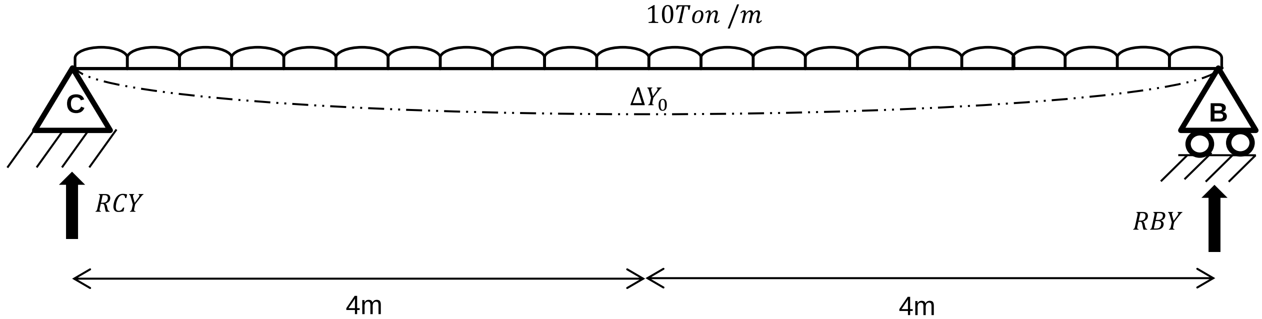
$$\boldsymbol{I - E = 6 - 3 = 3}$$

Como la viga formada es estáticamente indeterminada no podemos resolverla con las ecuaciones de equilibrio estático, por lo que para hallar el valor de las reacciones en los soportes emplearemos un método descrito en esta tesis en el capítulo *7.- Introducción al método de "flexibilidades"* los pasos aquí mostrados se explicaran de manera resumida.

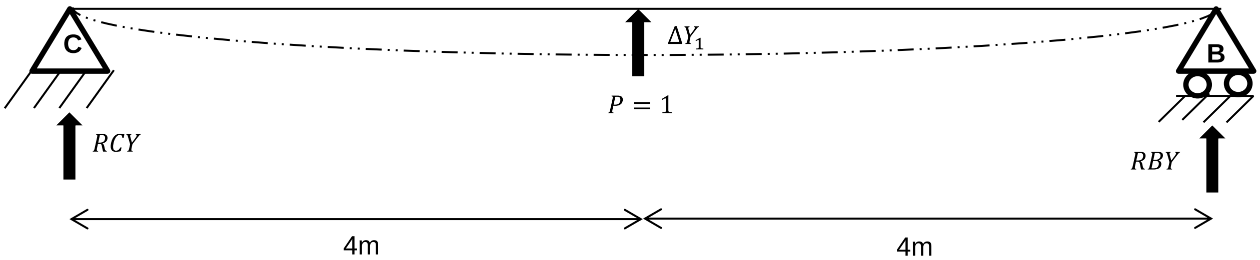
Principios de superposición:

Como es evidente que la viga no está sujeta a fuerza axial podemos despreciar el cálculo de las reacciones en el eje (x)

Viga primaria



Viga Isostática ficticia 1



Calculo de las reacciones en los soportes mostrados en la viga primaria:

$$\sum M_C = 0$$

$$(10Ton/m)(8m)\left(\frac{8}{2}m\right) - (8m)RGY = 0$$

$$\boldsymbol{RGY = \frac{(320Ton * m)}{(8m)} = 40Ton} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$RCY - (10Ton/m)(8m) + 40Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RCY = 40Ton} \uparrow$$

Calculo de las ecuaciones de momento de la viga primaria

$$\boldsymbol{0 \leq x \leq 8m}$$

$$M = 40x - (10)(x)\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M = -5x^2 + 40x$$

Calculo de las reacciones en los soportes mostrados en la viga isostática ficticia 1:

$$\sum M_C = 0$$

$$-(1Ton)(4m) - (8m)RGY = 0$$

$$\boldsymbol{RGY = -\frac{(4Ton * m)}{(8m)} = -\frac{1}{2}Ton} \downarrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$RCY + 1Ton - \frac{1}{2}Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RCY = \frac{1}{2}Ton} \downarrow$$

Calculo de las ecuaciones de momento de la viga primaria

$$\boldsymbol{0 \le x \le 4m}$$

$$M1 = -\left(\frac{1}{2}\right)(x)$$

$$M1 = -\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{4m \le x \le 8m}$$

$$M2 = -\left(\frac{1}{2}\right)(x) + (1)(x-4)$$

$$M2 = -\left(\frac{x}{2}\right) + x - 4$$

$$M2 = \left(\frac{x}{2}\right) - 4$$

Tomando en cuenta que:

$$\Delta \boldsymbol{Y_i} = \int_{L_1}^{L_2} \frac{\boldsymbol{(M)(m)dx}}{\boldsymbol{EI}}$$

$$\Delta Y_0 = \frac{1}{EI}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{4}} (-5x^2 + 40x)\left(-\frac{x}{2}\right)dx + \frac{1}{EI}\int_{\mathbf{4}}^{\mathbf{8}} (-5x^2 + 40x)\left(\frac{x}{2} - 4\right)dx$$

$$\Delta Y_0 = \frac{1}{EI}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{4}} \left(\frac{5}{2}x^3 - 20x^2\right)dx + \frac{1}{EI}\int_{\mathbf{4}}^{\mathbf{8}} \left(\frac{5}{2}x^2 + 40x^2 - 160x\right)dx$$

$$\Delta Y_0 = -\frac{800}{3EI} - \frac{800}{3EI} = -\frac{\mathbf{1600}}{\mathbf{3EI}}$$

$$\Delta Y_1 = \frac{1}{EI}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{4}} \left(-\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{x}{2}\right)dx + \frac{1}{EI}\int_{\mathbf{4}}^{\mathbf{8}} \left(\frac{x}{2} - 4\right)\left(\frac{x}{2} - 4\right)dx$$

$$\Delta Y_1 = \frac{1}{EI}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{4}} \left(\frac{x^2}{4}\right)dx + \frac{1}{EI}\int_{\mathbf{4}}^{\mathbf{8}} \left(\frac{x^2}{4} - 4x + 16\right)dx$$

$$\Delta Y_1 = \frac{16}{3EI} + \frac{16}{3EI} = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{3EI}}$$

Asociando las deformaciones y formando una ecuación de flexibilidades:

$$\Delta Y_0 + \Delta Y_1 REY = 0$$

Sustituyendo y solucionando la ecuación:

$$-\frac{1600}{3EI} + \frac{32}{3EI}REY = 0$$

$$\boldsymbol{REY = 50Ton} \uparrow$$

Calculo de las reacciones verticales en “C” y “G” de la viga original

$$\sum M_C = 0$$

$$(10Ton/m)(8m)(4m) - (50ton)(4m) - (8m)RGY = 0$$

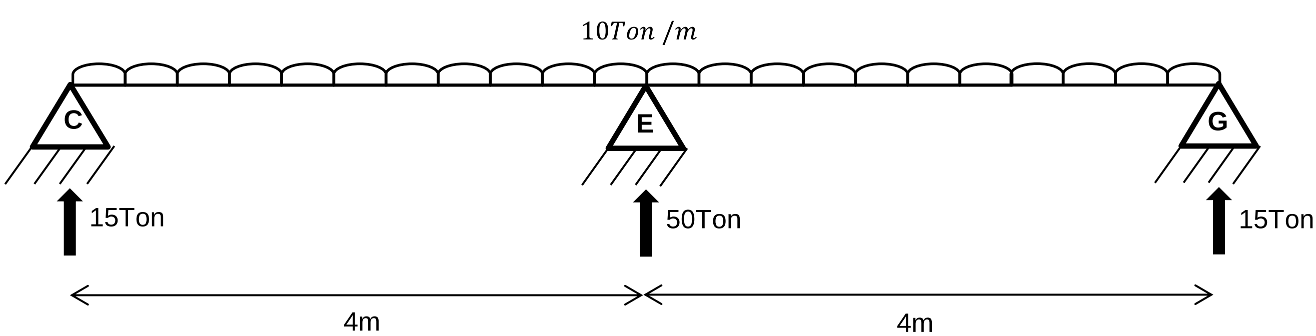
$$RGY = \frac{(320 - 200)ton * m}{8m} = \mathbf{15Ton} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

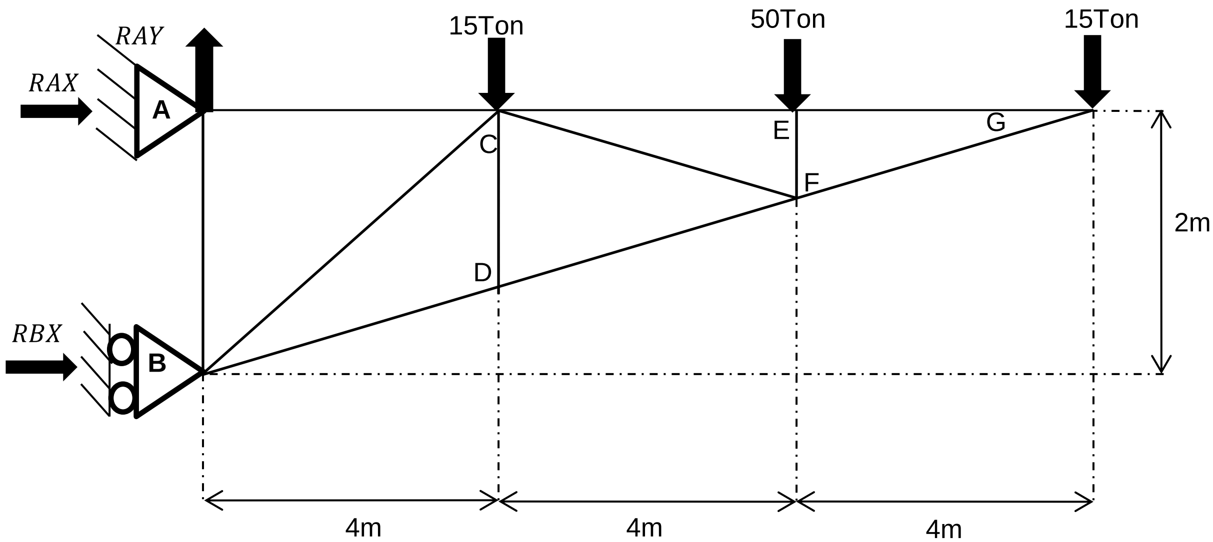
$$15ton + 50Ton - (10Ton)(8m) + RCY = 0$$

$$\mathbf{RCY = 15Ton} \uparrow$$

Viga en equilibrio estático



Las cargas transmitidas por los perfiles a los nodos C, E y G de la armadura son las siguientes:



Calculo de las reacciones en los soportes de la armadura:

$$\sum M_B = 0$$

$$(15Ton)(4m) + (50ton)(8m) + (15ton)(12m) - (2m)RBX = 0$$

$$RBX = \frac{(60+400+180)ton*m}{2m} = \boldsymbol{320Ton} \longrightarrow$$

$$\sum F_X = 0$$

$$RAX + 320Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RCY = -320Ton} \longleftarrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$RAY - 15Ton - 15Ton - 50Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = 80Ton} \uparrow$$

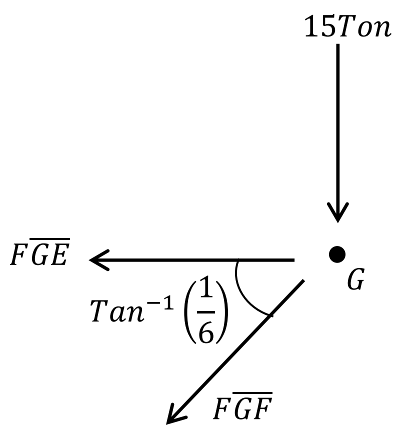
Por trigonometría definimos:

$$Longitud\ de\ la\ barra\ C-D=\frac{(2)(8)}{12}=\frac{4}{3}m$$

$$Longitud\ de\ la\ barra\ E-F=\frac{(4)(2)}{12}=\frac{2}{3}m$$

Calculo de las fuerzas a las que se encuentran sometidas las barras:

Nodo G



$$\sum \boldsymbol{F_Y=0}$$

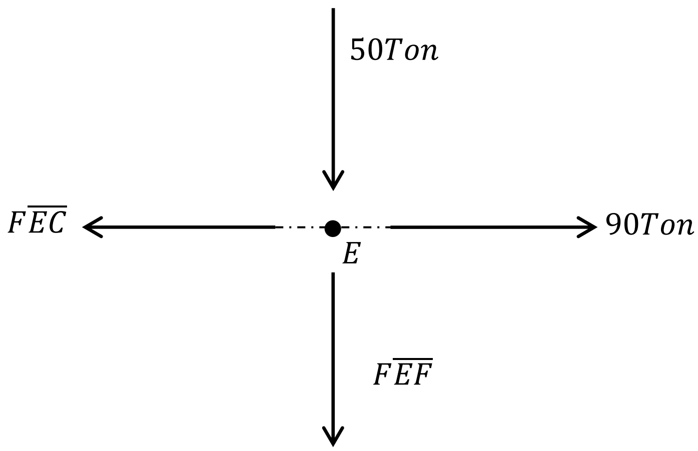
$$-15-F\overline{GF}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)\right]\right\}=0$$

$$F\overline{GF}=\frac{-15}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)\right]\right\}}\approx \boldsymbol{-91.2414Ton(Compresion)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X=0}$$

$$-F\overline{GE}+\left(\frac{15}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)\right]\right\}}\right)\left\{Cos\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)\right]\right\}=\boldsymbol{90Ton(Tension)}$$

Nodo E



$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-50 - F\overline{EF} = 0$$

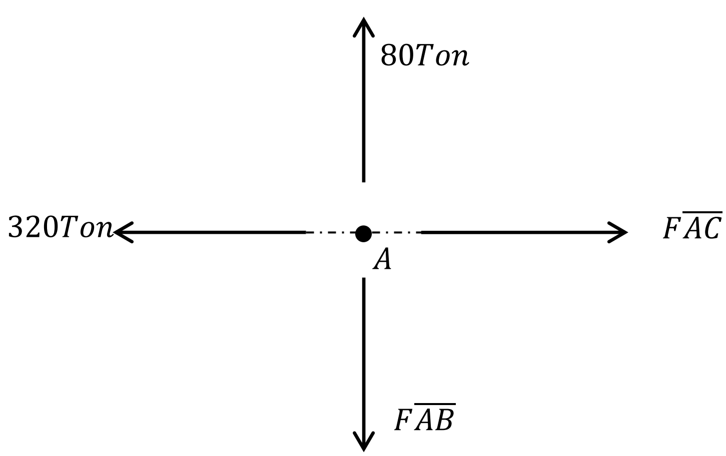
$$F\overline{EF} = \boldsymbol{-50Ton(Compresion)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$90 - F\overline{EC} = 0$$

$$F\overline{EC} = \boldsymbol{90Ton(Tension)}$$

Nodo A



$$\sum F_Y = 0$$

$$80 - F\overline{AB} = 0$$

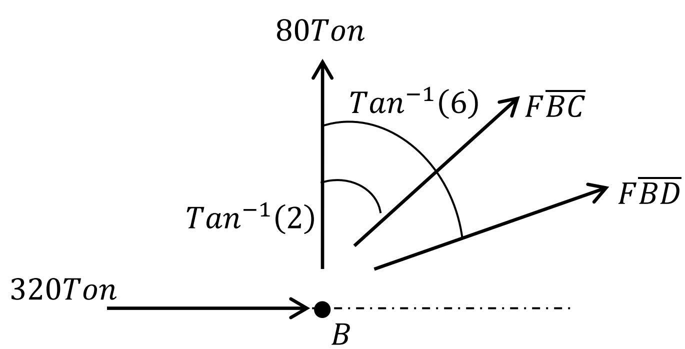
$$F\overline{AB} = \mathbf{80}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Tension})$$

$$\sum F_X = 0$$

$$-320 + F\overline{AC} = 0$$

$$F\overline{AC} = \mathbf{320}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Tension})$$

Nodo B



$$\sum F_Y = 0$$

$$80 + F\overline{BC}\{Cos[Tan^{-1}(2)]\} + F\overline{BD}\{Cos[Tan^{-1}(6)]\} = 0 \ldots\ldots\ldots Ec.1$$

$$\sum F_X = 0$$

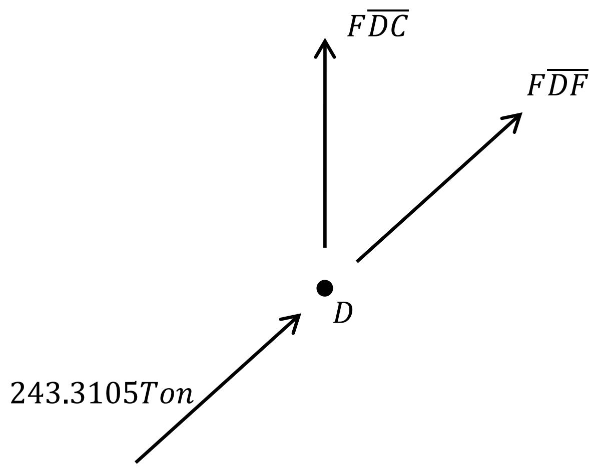
$$320 + F\overline{BC}\{Sen[Tan^{-1}(2)]\} + F\overline{BD}\{Sen[Tan^{-1}(6)]\} = 0 \ldots\ldots\ldots Ec.2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado:

$$\boldsymbol{F\overline{BC}} = -\mathbf{89.4427}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Compresion})$$

$$\boldsymbol{F\overline{BD}} = -\mathbf{243.3105}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Compresion})$$

Nodo D



$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

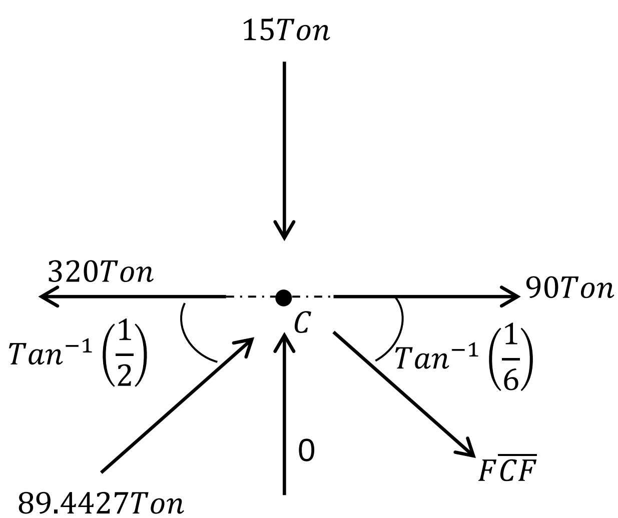
$$243.3105 + F\overline{DF} = 0$$

$$\boldsymbol{F\overline{DF} = -243.3105Ton(Compresion)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$F\overline{DC} = 0$$

Nodo "C"



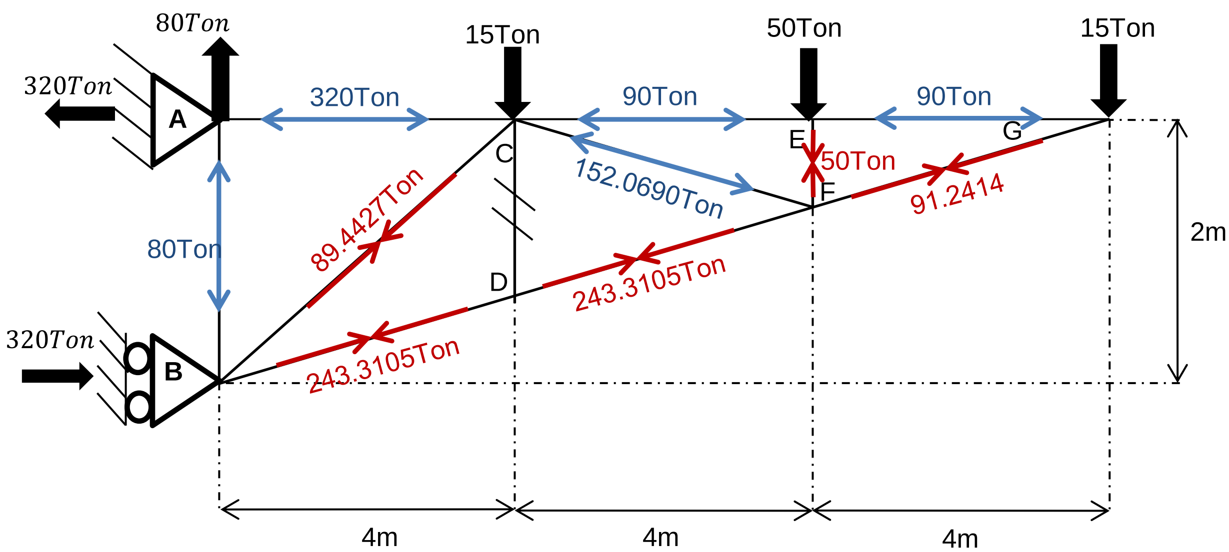
$$\sum F_Y = 0$$

$$-15 + (89.4427)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\} - F\overline{CF}\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)\right]\right\} = 0$$

$$F\overline{CF} = \frac{-15 + (89.4427)\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\right\}}{\left\{Sen\left[Tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)\right]\right\}}$$

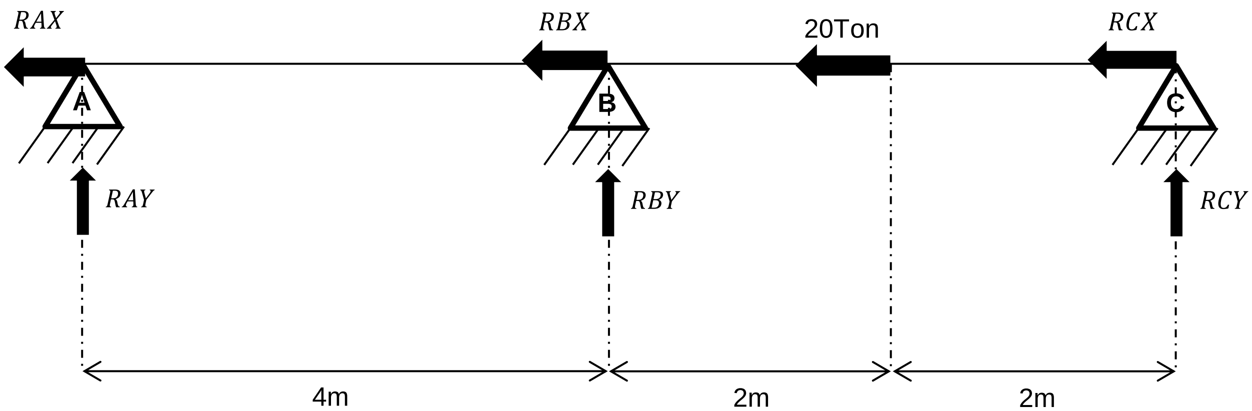
$$F\overline{CF} \approx \mathbf{152.0690}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Tension})$$

Diagrama que muestra las fuerzas a las que se encuentra sometida cada barra, así como el valor de las reacciones en los soportes calculadas.



Capítulo 7. Introducción al método de “flexibilidades”

1.- De la siguiente viga, obtenga las reacciones horizontales en los soportes mostrados y dibuje el diagrama de fuerza axial correspondiente.



Verificación del grado de indeterminación de la viga:

Recordando que el grado de indeterminación en términos vanos es la diferencia entre el número de incógnitas de nuestra estructura “I” y el número de ecuaciones de equilibrio estático asociadas a su plano “E”

$$\boldsymbol{I - E = 6 - 3 = 3}$$

Como notamos en este caso, encontramos una viga hiperestática, de grado 3, para dar solución a este problema emplearemos el método de flexibilidades, (trabajo virtual en vigas) descrito a continuación.

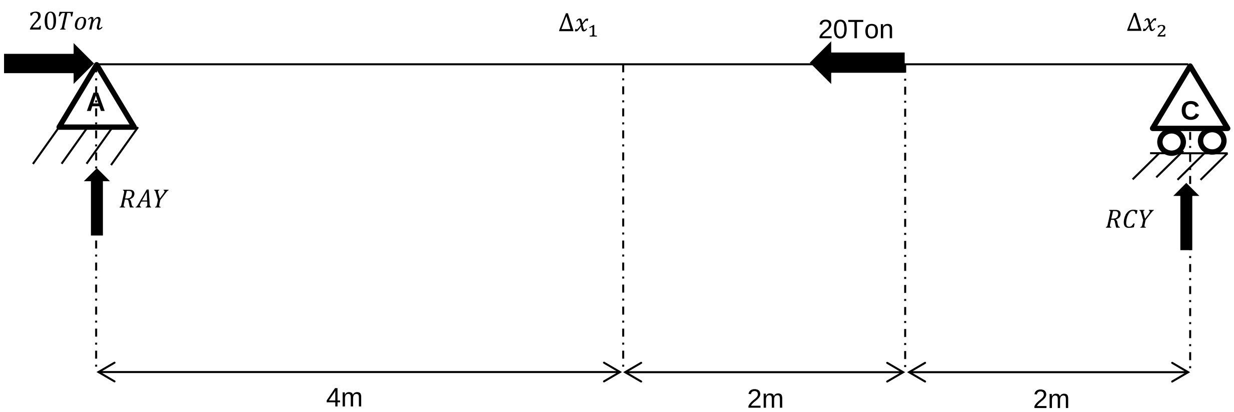
Como la viga no está soportando cargas verticales, podemos despreciar el análisis de las mismas e ir directamente a la obtención de las reacciones horizontales en los soportes mostrados, se obtendrá un *sistema de ecuaciones de flexibilidades por compatibilidad de deflexiones*, si bien el método resulta un poco difícil de explicar, daremos solución a la viga paso a paso explicándolo de la manera más precisa posible.

Como primer paso se idealizara una “viga primaria” la cual tendrá como principales características que será: isostática y conservara las cargas originales, notando que al desaparecer los apoyos necesarios para que la viga sostenga las características antes mencionadas, liberaremos desplazamientos, los cuales habrá que señalar en el diagrama que representa dicha viga primaria los cuales se nombraran en este caso:

Para los desplazamientos horizontales Δx_i

En este caso cada viga debe resolverse y obtenerse la fuerza axial actuante para cada tramo de la misma.

Viga primaria:



$$0m \leq x \leq 6m$$

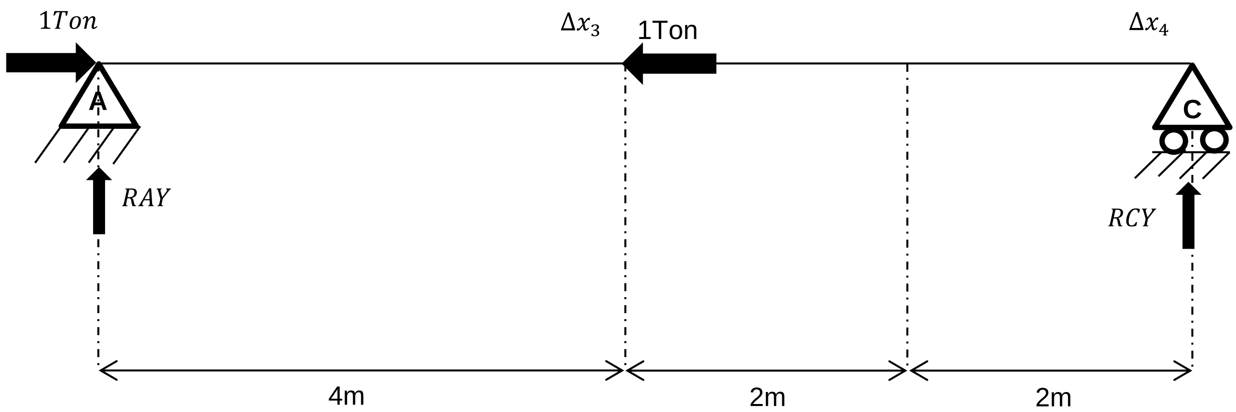
$$N = 20Ton(Compresión)$$

$$6m \leq x \leq 8m$$

$$N = 0$$

Como notamos nuestra "Viga primaria" es isostática y conserva las cargas originalmente planteadas, y señalamos los desplazamientos liberados al quitar los apoyos necesarios para lograr que esta sea isostática, el siguiente paso del método de trabajo virtual es ir creando tantas vigas isostáticas ficticias como sean necesarias, en las cuales las cargas originalmente planteadas de la viga se eliminaran y se pondrá una carga unitaria por cada desplazamiento liberado a cada viga corresponderá una carga unitaria, a manera que estas cargas unitarias restrinjan dichos desplazamientos, cada viga debe resolverse y obtenerse la fuerza axial actuante para cada tramo de viga las vigas isostáticas ficticias se describen a continuación:

Viga isostática ficticia 1



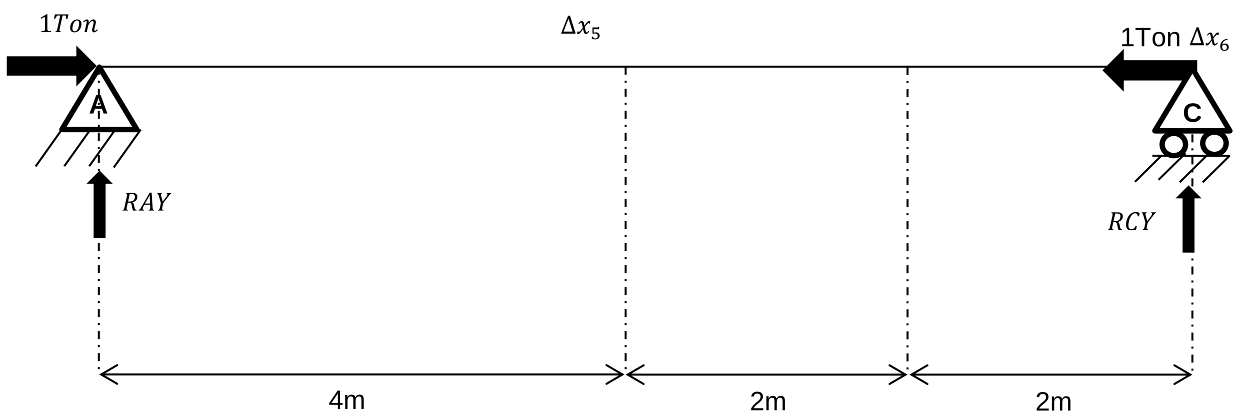
$$0m \leq x \leq 4m$$

$$N = 1Ton(Compresión)$$

$$4m \leq x \leq 8m$$

$$N = 0$$

Viga isostática ficticia 2



$0m \leq x \leq 8m$

$N = 1Ton(Compresión)$

El siguiente paso para análisis de cargas horizontales será calcular los desplazamientos horizontales liberados tanto en la viga primaria como en todas las vigas isostáticas ficticias que se hayan generado.

Tomando en cuenta que el desplazamiento horizontal en cualquier punto se calcula con la ecuación

$$\Delta \boldsymbol{x_i} = \frac{\boldsymbol{NnL}}{\boldsymbol{AE}}$$

Dónde:

- Δx: Desplazamiento horizontal
- N: Fuerza axial actuante en el punto donde se requiere conocer el desplazamiento horizontal
- n: Fuerza axial actuante en la viga isostática ficticia "Donde se propone una carga unitaria"
- A: Área de la sección transversal
- E: Módulo de elasticidad.

Calculo de los desplazamientos horizontales

$$\Delta x_1 = \frac{(-20)(-1)(4)}{AE} + \frac{(-20)(0)(2)}{AE} + \frac{(-20)(0)(2)}{AE} = \frac{\mathbf{80}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_2 = \frac{(-20)(-1)(6)}{AE} + \frac{(0)(-1)(2)}{AE} = \frac{\mathbf{120}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_3 = \frac{(-1)(-1)(4)}{AE} + \frac{(0)(0)(4)}{AE} = \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_4 = \frac{(-1)(-1)(4)}{AE} + \frac{(0)(-1)(4)}{AE} = \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_5 = \frac{(-1)(-1)(4)}{AE} + \frac{(-1)(0)(4)}{AE} = \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_6 = \frac{(-1)(-1)(8)}{AE} = \frac{\mathbf{8}}{\boldsymbol{AE}}$$

Los desplazamientos calculados $\Delta \boldsymbol{x_i} = \frac{\boldsymbol{NnL}}{\boldsymbol{AE}}$ se asocian a las reacciones horizontales de los apoyos por lo que nuestro sistema de ecuaciones se forma de la siguiente manera:

$$\Delta x_1 + \Delta x_3 RBX + \Delta x_5 RCX = 0$$

$$\Delta x_2 + \Delta x_4 RBX + \Delta x_6 RCX = 0$$

$$+\frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{AE}}\boldsymbol{RBX} + \frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{AE}}\boldsymbol{RCX} = \frac{\mathbf{-80}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$+\frac{\mathbf{4}}{\boldsymbol{AE}}\boldsymbol{RBX} + \frac{\mathbf{8}}{\boldsymbol{AE}}\boldsymbol{RCX} = \frac{\mathbf{-120}}{\boldsymbol{AE}}$$

Resolviendo el sistema:

$\boldsymbol{RBX = -10Ton}$ ⟶ $\boldsymbol{RCX = -10Ton}$ ⟶

Nota: como el signo de las cargas resulto negativo, quiere decir que el sentido originalmente propuesto es incorrecto

Para el cálculo de la reacción horizontal en E "RAX"

$$\sum F_X = 0$$

$$RAX + 10Ton - 20Ton + 10Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RAX = 0}$$

Viga en equilibrio estático

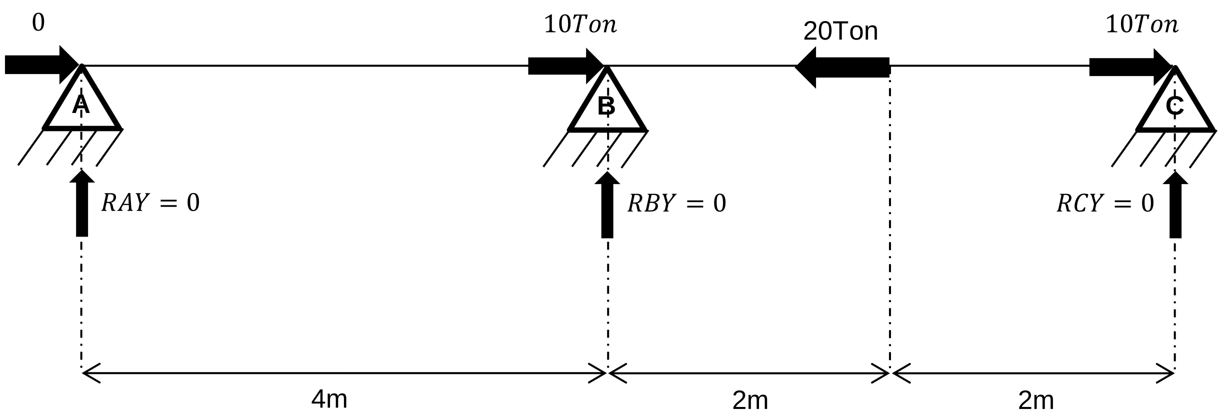
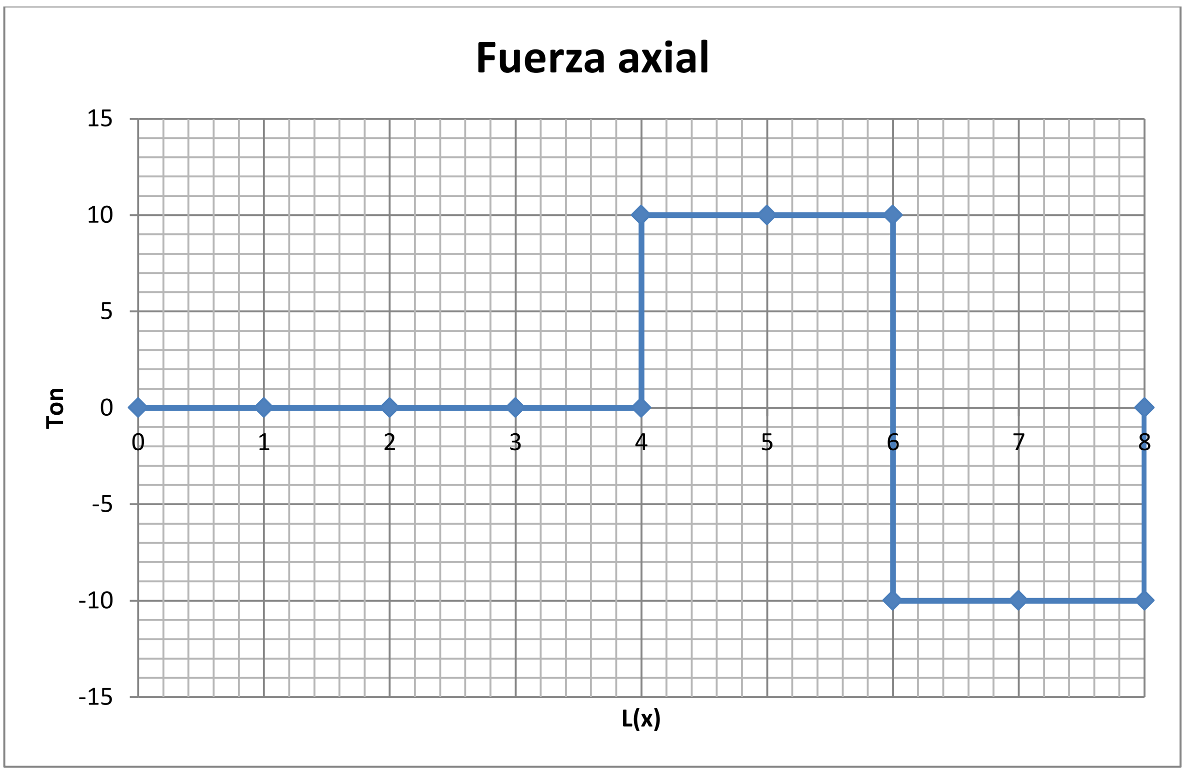
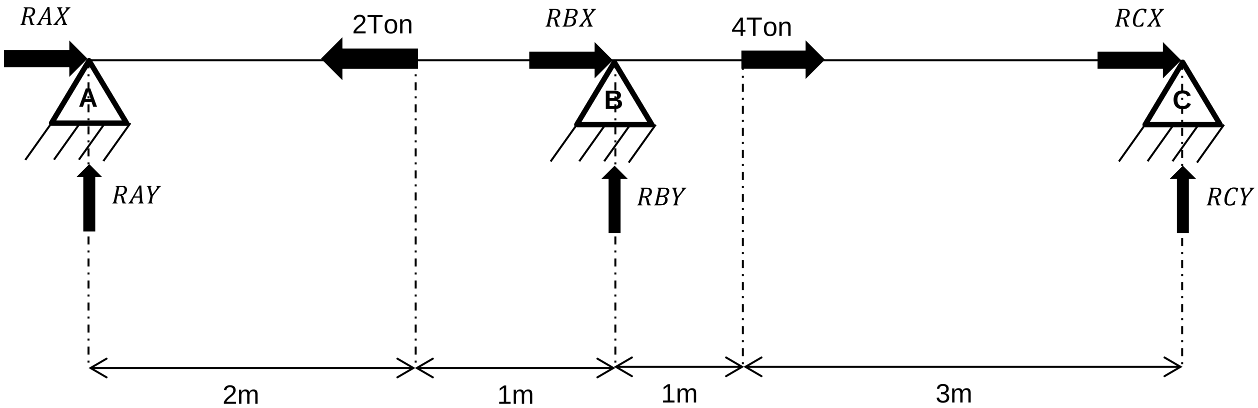


Diagrama de fuerza axial

L(x)	F. Axial o Normal
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
4	10
5	10
6	10
6	-10
7	-10
8	-10
8	0



2.- De la siguiente viga, obtenga las reacciones horizontales en los soportes mostrados y dibuje el diagrama de fuerza axial correspondiente.



Verificación del grado de indeterminación de la viga:

Recordando que el grado de indeterminación en términos vanos es la diferencia entre el número de incógnitas de nuestra estructura “I” y el número de ecuaciones de equilibrio estático asociadas a su plano “E”

$$\boldsymbol{I - E = 6 - 3 = 3}$$

Como notamos en este caso, encontramos una viga hiperestática, para dar solución a este problema emplearemos el método de flexibilidades (trabajo virtual en vigas) descrito a continuación.

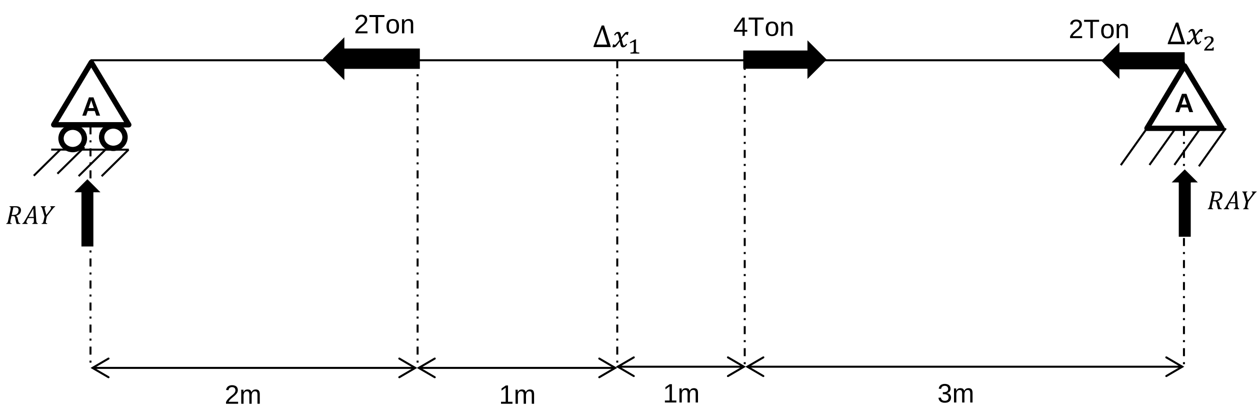
Como la viga no está soportando cargas verticales, podemos despreciar el análisis de las mismas e ir directamente a la obtención de las reacciones horizontales en los soportes mostrados, se obtendrá un *sistema de ecuaciones de flexibilidades por compatibilidad de deflexiones*, si bien el método resulta un poco difícil de explicar, daremos solución a la viga paso a paso explicándolo de la manera más precisa posible.

Como primer paso se idealizara una “viga primaria” la cual tendrá como principales características que será: isostática y conservara las cargas originales, notando que al desaparecer los apoyos necesarios para que la viga sostenga las características antes mencionadas, liberaremos desplazamientos, los cuales habrá que señalar en el diagrama que representa dicha viga primaria los cuales se nombraran en este caso:

Para los desplazamientos horizontales Δx_i

En este caso cada viga debe resolverse y obtenerse la fuerza axial actuante para cada tramo de viga

Viga primaria:



$0m \leq x \leq 2m$

$N = 0$

$2m \leq x \leq 4m$

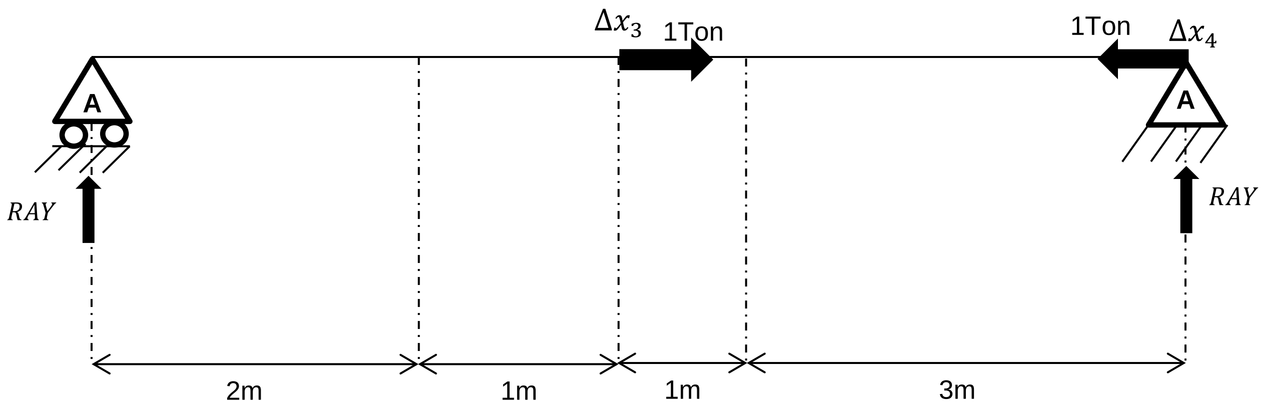
$N = 2Ton\ (Tensión)$

$4m \leq x \leq 7m$

$N = 2Ton\ (Compresión)$

Como notamos nuestra "Viga primaria" es isostática y conserva las cargas originalmente planteadas, y señalamos los desplazamientos liberados al quitar los apoyos necesarios para lograr que nuestra viga primaria sea isostática, el siguiente paso del método de trabajo virtual es ir creando tantas vigas isostáticas ficticias sean necesarias en las cuales las cargas originalmente planteadas de la viga se eliminaran y se pondrá una carga unitaria por cada desplazamiento liberado a cada viga corresponderá una carga unitaria, a manera que estas cargas unitarias restrinjan dichos desplazamientos, cada viga debe resolverse y obtenerse la fuerza axial actuante para cada tramo de viga las vigas isostáticas ficticias se describen a continuación:

Viga isostática ficticia 1



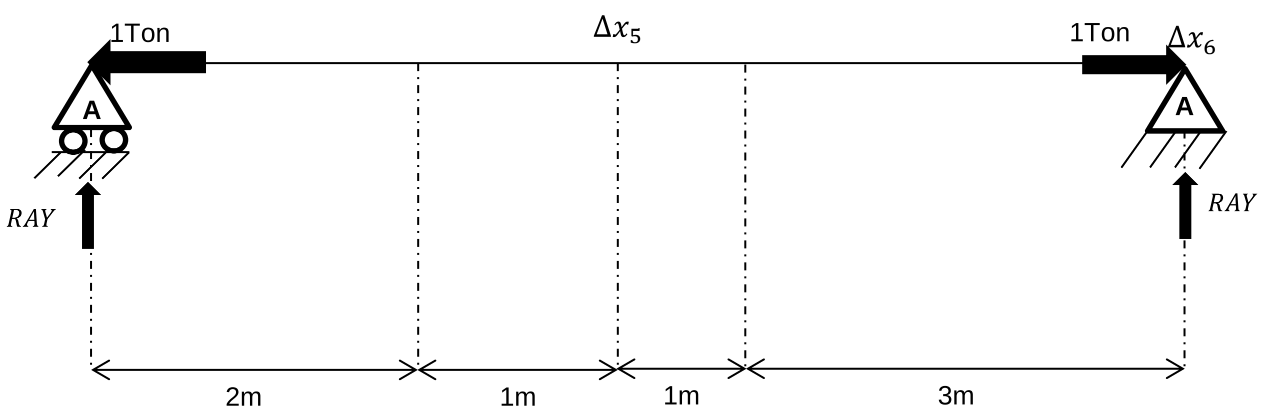
$0m \leq x \leq 3m$

$N = 0$

$3m \leq x \leq 7m$

$N = 1Ton(Compresión)$

Viga isostática ficticia 2



$0m \leq x \leq 12m$

$N = 1Ton(Tensión)$

Tomando en cuenta que el desplazamiento horizontal en cualquier punto se calcula con la ecuación

$$\Delta \boldsymbol{x_i} = \frac{\boldsymbol{NnL}}{\boldsymbol{AE}}$$

Dónde:

- Δx: Desplazamiento horizontal
- N: Fuerza axial actuante en el punto donde se requiere conocer el desplazamiento horizontal
- n: Fuerza axial actuante en la viga isostática ficticia “Donde se propone una carga unitaria”
- A: Área de la sección transversal
- E: Módulo de elasticidad.

Calculo de los desplazamientos horizontales

$$\Delta x_1 = \frac{(0)(0)(2)}{AE} + \frac{(2)(0)(1)}{AE} + \frac{(2)(-1)(1)}{AE} + \frac{(-2)(-1)(3)}{AE} = \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_2 = \frac{(0)(1)(2)}{AE} + \frac{(2)(1)(2)}{AE} + \frac{(-2)(1)(3)}{AE} = \frac{\boldsymbol{-2}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_3 = \frac{(0)(0)(3)}{AE} + \frac{(-1)(-1)(4)}{AE} = \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_4 = \frac{(0)(1)(3)}{AE} + \frac{(-1)(1)(4)}{AE} = \frac{\boldsymbol{-4}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_5 = \frac{(1)(0)(3)}{AE} + \frac{(1)(-1)(4)}{AE} = \frac{\boldsymbol{-4}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_6 = \frac{(1)(1)(7)}{AE} = \frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{AE}}$$

Los desplazamientos calculados $\Delta \boldsymbol{x_i} = \frac{\boldsymbol{NnL}}{\boldsymbol{AE}}$ se asocian a las reacciones horizontales de los apoyos por lo que nuestro sistema de ecuaciones se forma de la siguiente manera:

$$\Delta x_1 + \Delta x_3 RBX + \Delta x_5 RCX = 0$$

$$\Delta x_2 + \Delta x_4 RBX + \Delta x_6 RCX = 0$$

$$+\frac{4}{AE}RBX-\frac{4}{AE}RCX=-\frac{4}{AE}$$

$$-\frac{4}{AE}RBX+\frac{7}{AE}RCX=+\frac{2}{AE}$$

Resolviendo el sistema:

$RBX=-\frac{5}{3}Ton$ $\leftarrow$ $\qquad$ $RCX=-\frac{2}{3}TonTon$ $\leftarrow$

Nota: como el signo de las cargas resulto negativo, quiere decir que el sentido originalmente propuesto es incorrecto

Para el cálculo de la reacción horizontal en E "RAX"

$\sum F_X=0$

$RAX-2Ton-\frac{5}{3}Ton+4Ton-\frac{2}{3}Ton=0$

$RAX=\frac{1}{3}Ton$ $\rightarrow$

Viga en equilibrio estático

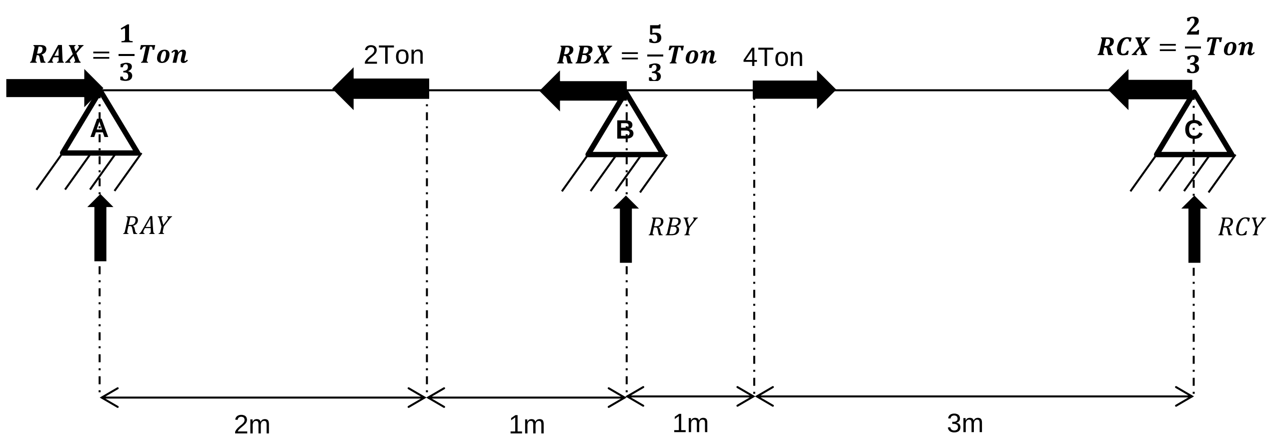
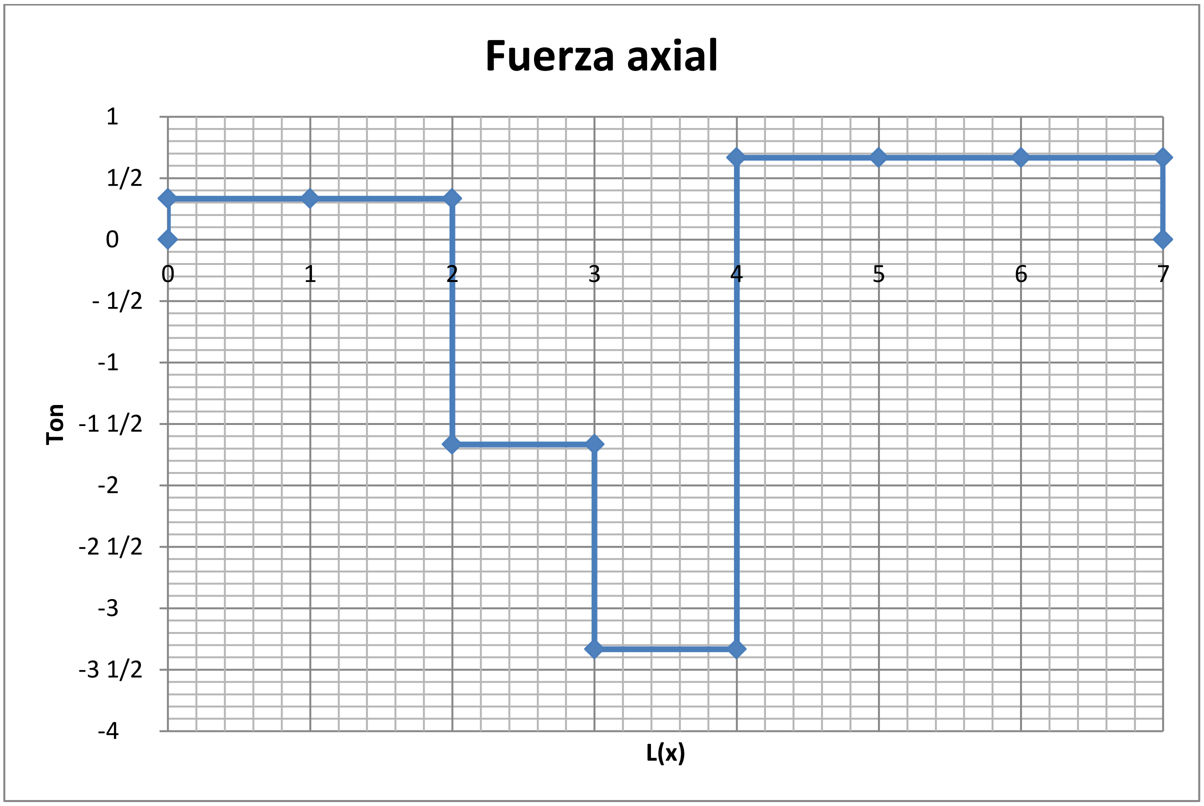
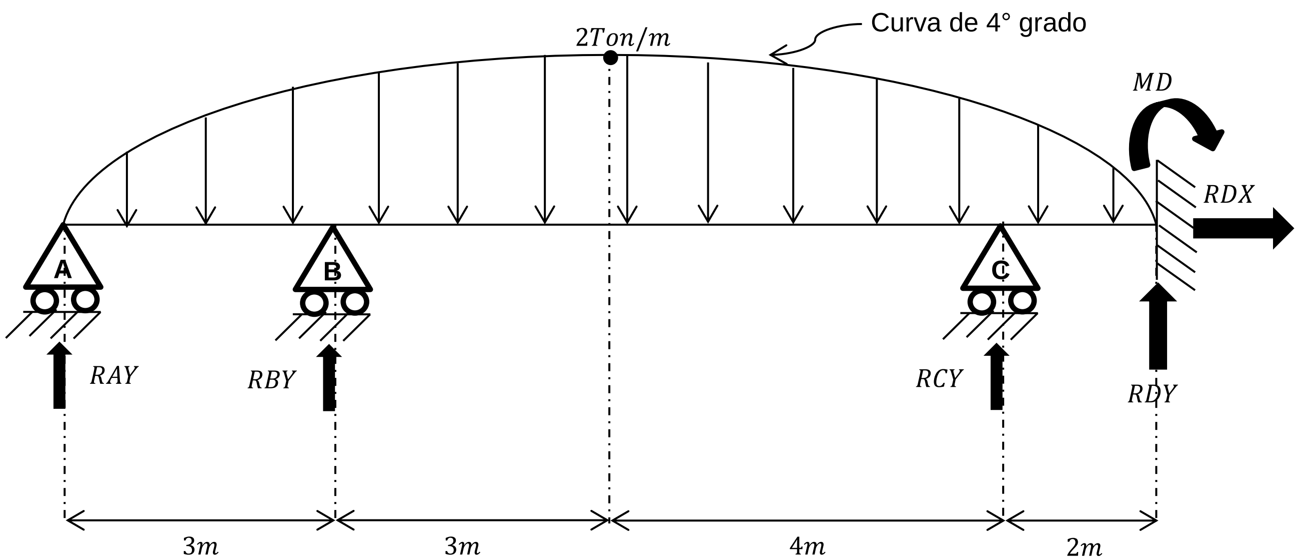


Diagrama de fuerza axial

L(x)	Normal
0	0
0	1/3
1	1/3
2	1/3
2	-1 2/3
3	-1 2/3
3	-3 1/3
4	-3 1/3
4	2/3
5	2/3
6	2/3
7	2/3
7	0



3.- De la siguiente viga, determine las reacciones en los apoyos, las funciones que describen la variación del momento flexionante y fuerza cortante producto de la acción del sistema de fuerzas externo, dibuje los diagramas correspondientes a dichas funciones.



Verificación del grado de indeterminación de la viga:

Recordando que el grado de indeterminación en términos vanos es la diferencia entre el número de incógnitas de nuestra estructura "I" y el número de ecuaciones de equilibrio estático asociadas a su plano "E"

$$\boldsymbol{I - E = 6 - 3 = 3}$$

Por lo tanto: nuestra estructura es estáticamente indeterminada. Para dar solución a esta viga, emplearemos el método de flexibilidades (trabajo virtual en vigas) para analizar las cargas verticales, como es evidente, no existe fuerza axial actuando en la viga, por lo que podemos despreciar el análisis de esta, el método de análisis empleado será descrito una vez que obtengamos la función de la curva que genera una carga sobre la viga.

Construcción de la función de la curva

Como en este caso la curva es de 4° grado proponemos la forma de la ecuación de la siguiente forma:

$\boldsymbol{y = ax^4 + bx + c}$

Condiciones de frontera asociadas a la curva:

Si $x = 0$ $y = 0$
Si $x = 6$ $y = 2$
Si $x = 12$ $y = 0$

De la primera condición:

$$\boldsymbol{a(0)^4 + b(0) + c = 0} \quad \therefore \quad \boldsymbol{c = 0}$$

Utilizando las dos condiciones de frontera restantes para construir un sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{a(6)^4 + b(6) = 2 \ldots\ldots.\ldots\ldots Ec.1}$$

$$\boldsymbol{a(12)^4 + b(12) = 0 \ldots\ldots\ldots Ec.2}$$

De la ecuación **"1"** despejamos **"a"**

$$a = \frac{2 - 6b}{1296}$$

Sustituimos **"a"** en la ecuación **"2"** y despejamos **"b"**

$$\left(\frac{2 - 6b}{1296}\right)(20736) + 12b = 0$$

$$-84b = -32$$

$$\boldsymbol{b = \frac{8}{21}}$$

Sustituyendo el valor de **"b"** en la equivalencia de **"a"**

$$a = \frac{2 - 6\left(\frac{8}{21}\right)}{1296} \qquad \boldsymbol{a = -\frac{1}{4536}}$$

Por lo tanto la función de la curva es:

$$\boldsymbol{y = -\frac{x^4}{4536} + \frac{8}{21}x}$$

Una vez obtenida la función de la curva, se procede a obtener las reacciones en los soportes mostrados, el procedimiento es similar al empleado para analizar las cargas horizontales, como primer paso se propondrá una viga primaria, la cual tendrá como principales características; que será isostática y conservara las mismas cargas que la viga original, sin embargo al hacer la viga isostática se liberaran fuerzas reactivas; es decir las reacciones en los apoyos que restringen los desplazamientos, por lo que habrá que mencionarlos en la posición en la que se encontraban originalmente, denotados como **($\Delta \boldsymbol{y_i}$)**, similar al procedimiento del análisis de cargas horizontales, formaremos un sistema de ecuaciones de flexibilidad por compatibilidad de deflexiones, sin embargo, al analizar las cargas verticales obtendremos que para calcular las deflexiones generadas por la eliminación de los soportes se empleara la siguiente ecuación:

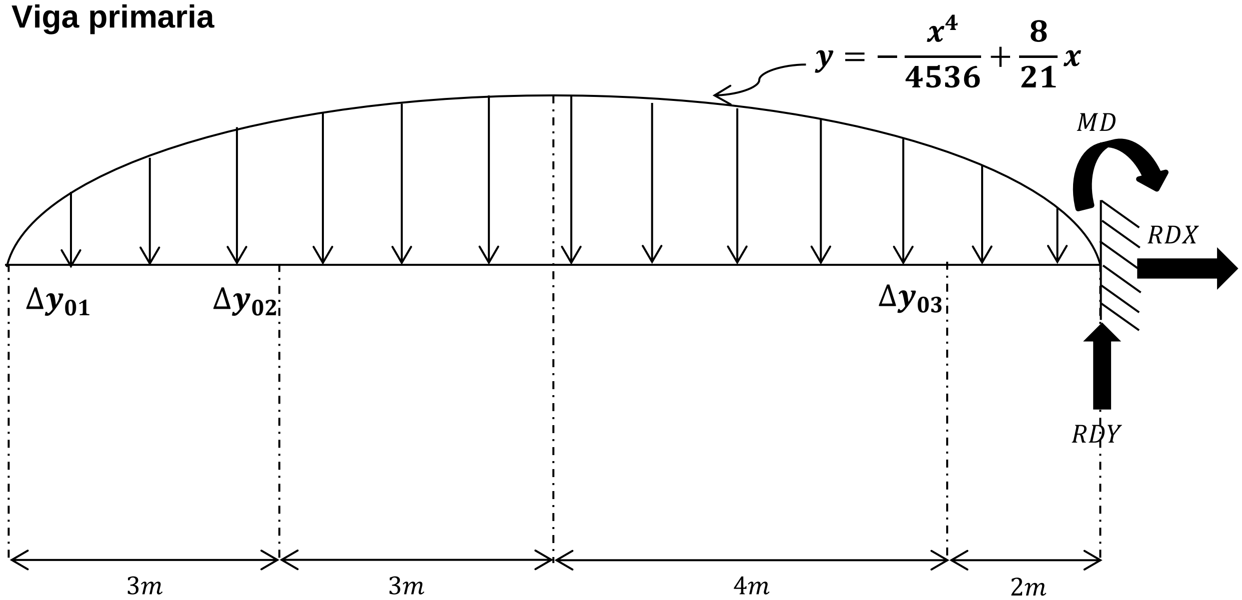
$$\Delta y_i = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mmdx}{EI}$$

Dónde:

- M: Ecuación de momento de la viga en la que supone la deflexión a calcular.
- m: Ecuación de momento de la viga que restringe la deflexión a calcular "carga unitaria"
- La integral define la longitud de tramo en la que las ecuaciones rigen el comportamiento del momento flexionante.
- E:Modulo de elasticidad
- I: Inercia de la sección

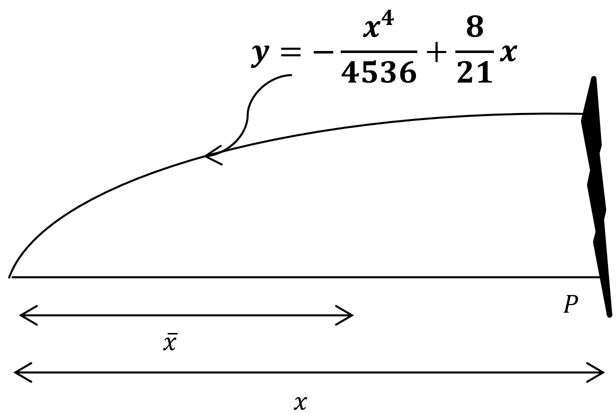
Como en este caso se asocian las ecuaciones de momento, estas habrán de calcularse para tantas vigas se generen a lo largo del procedimiento de análisis.

Viga primaria



Calculo de las ecuaciones de momento para la viga primaria

$0 \leq x \leq 12m$



$$\sum M_P = 0$$

$$M=-\int_0^x\left(-\frac{x^4}{4536}dx+\frac{8}{21}xdx\right)\left[x-\frac{\int_0^x x\left(-\frac{x^4}{4536}dx+\frac{8}{21}xdx\right)}{\int_0^x\left(-\frac{x^4}{4536}dx+\frac{8}{21}xdx\right)}\right]$$

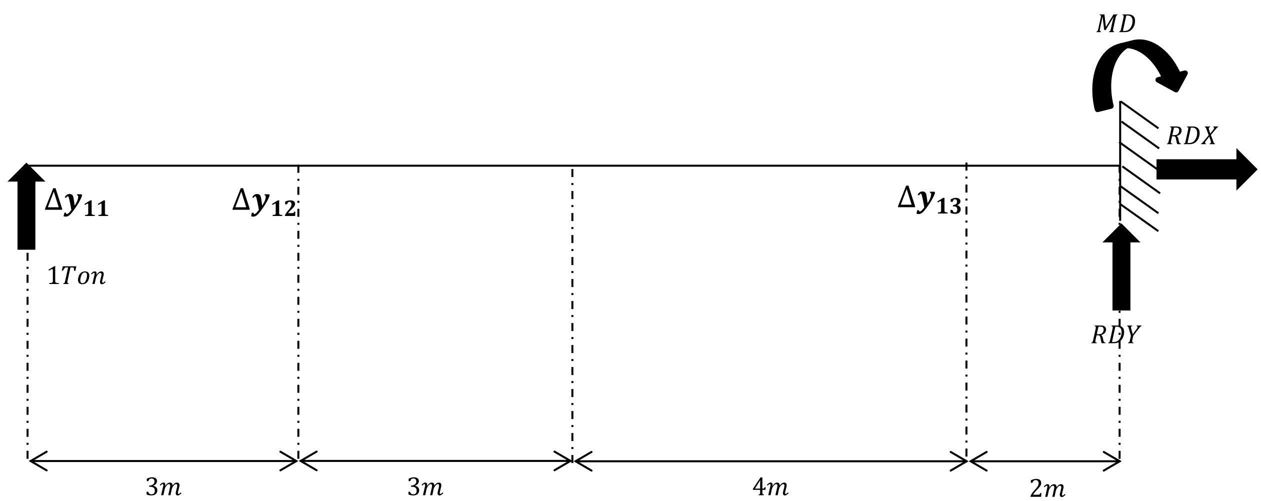
$$M=-\left(-\frac{x^5}{22680}+\frac{4}{21}x^2\right)\left[x-\frac{-\frac{x^6}{27216}+\frac{8}{63}x^3}{-\frac{x^5}{22680}+\frac{4}{21}x^2}\right]$$

$$M = -\left(-\frac{x^6}{22680} + \frac{4}{21}x^3 + \frac{x^6}{27216} - \frac{8}{63}x^3\right)$$

$$\boldsymbol{M = \frac{x^6}{136080} - \frac{4}{63}x^3}$$

Como notamos nuestra “Viga primaria” es isostática y conserva las cargas originalmente planteadas, y señalamos los desplazamientos liberados al quitar los apoyos necesarios para lograr que nuestra viga primaria sea isostática, también calculamos la ecuación que rige el comportamiento del momento flexionante, el siguiente paso del método de trabajo virtual es ir creando tantas vigas isostáticas ficticias sean necesarias en las cuales las cargas originalmente planteadas de la viga se eliminaran y se pondrá una carga unitaria por cada desplazamiento liberado, a cada viga corresponderá una carga unitaria, a manera que estas cargas restrinjan dichos desplazamientos, debe continuarse mencionando los desplazamientos verticales liberados y calcularse las ecuaciones que rigen el momento flexionante a lo largo de cada tramo de viga, las vigas isostáticas ficticias se describen a continuación:

Viga isostática ficticia 1

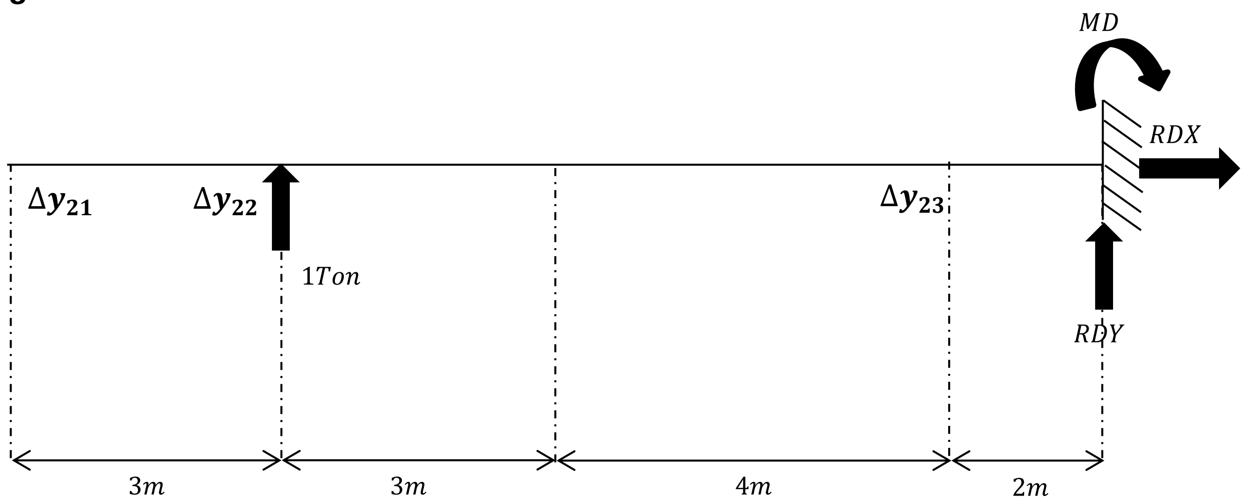


Evidentemente:

$$0 \leq x \leq 12m$$

$$\boldsymbol{M = x}$$

Viga isostática ficticia 2



Evidentemente:

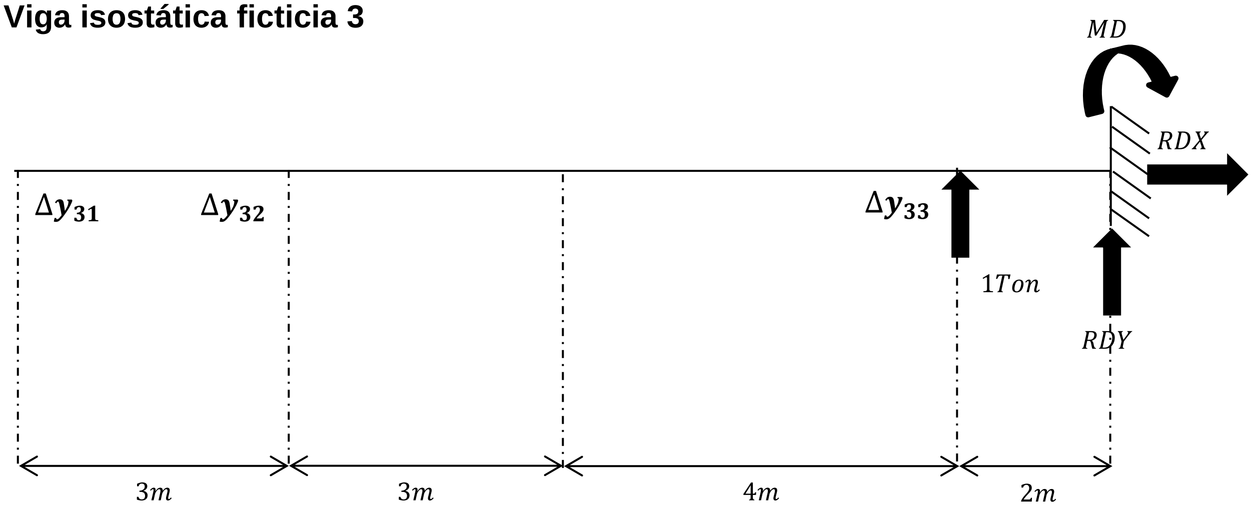
$$0 \leq x \leq 3m$$

$$\boldsymbol{M = 0}$$

$$3 \leq x \leq 12m$$

$$\boldsymbol{M = 1(x-3) = x-3}$$

Viga isostática ficticia 3



$$0 \leq x \leq 10m$$

$$\boldsymbol{M = 0}$$

$$10 \leq x \leq 12m$$

$$\boldsymbol{M = 1(x - 10) = x - 10}$$

Calculo de los desplazamientos verticales liberados

$$\Delta y_i = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mmdx}{EI}$$

$$\Delta y_{01} = \frac{1}{EI}\int_0^{12}\left(\frac{x^6}{136080} - \frac{4}{63}x^3\right)(x)dx = \left[\frac{x^8}{1088640} - \frac{4}{315}x^5\right]_{\mathbf{0}}^{\mathbf{12}} = -\frac{\mathbf{13824}}{\boldsymbol{EI}}$$

$$\Delta y_{02} = \frac{1}{EI}\int_0^{3}\left(\frac{x^6}{136080} - \frac{4}{63}x^3\right)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_3^{12}\left(\frac{x^6}{136080} - \frac{4}{63}x^3\right)(x-3)dx =$$

$$= \frac{1}{EI}\int_3^{12}\left(\frac{x^7}{136080} - \frac{3x^6}{136080} - \frac{4}{63}x^4 + \frac{12}{63}x^3\right)dx = -\frac{\mathbf{1890.990976}}{\boldsymbol{EI}}$$

$$\Delta y_{03} = \frac{1}{EI}\int_0^{10}\left(\frac{x^6}{136080} - \frac{4}{63}x^3\right)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_{10}^{12}\left(\frac{x^6}{136080} - \frac{4}{63}x^3\right)(x-10)dx =$$

$$= \frac{1}{EI}\int_{10}^{12}\left(\frac{x^7}{136080} - \frac{x^6}{13608} - \frac{4}{63}x^4 + \frac{40}{63}x^3\right)dx = -\frac{\mathbf{153.8724784}}{\boldsymbol{EI}}$$

$$\Delta y_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^{12}(x)(x)dx = \frac{1}{EI}\int_0^{12}(x^2)dx = \frac{\mathbf{576}}{\boldsymbol{EI}}$$

$$\Delta y_{12} = \frac{1}{EI}\int_0^{3}(x)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_3^{12}(x)(x-3)dx = \frac{1}{EI}\int_3^{12}(x^2 - 3x)dx = \frac{\mathbf{729}}{\boldsymbol{2EI}}$$

$$\Delta y_{13} = \frac{1}{EI}\int_0^{10}(x)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_{10}^{12}(x)(x-10)dx = \frac{1}{EI}\int_{10}^{12}(x^2-10x)dx = \boldsymbol{\frac{68}{3EI}}$$

$$\Delta y_{21} = \frac{1}{EI}\int_0^{3}(0)(x)dx + \frac{1}{EI}\int_{3}^{12}(x-3)(x)dx = \frac{1}{EI}\int_{3}^{12}(x^2-3x)dx = \boldsymbol{\frac{729}{2EI}}$$

$$\Delta y_{22} = \frac{1}{EI}\int_0^{3}(0)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_{3}^{12}(x-3)(x-3)dx = \frac{1}{EI}\int_{3}^{12}(x^2-6x+9)dx = \boldsymbol{\frac{243}{EI}}$$

$$\Delta y_{23} = \frac{1}{EI}\int_0^{3}(0)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_{3}^{10}(x-3)(0)dx\frac{1}{EI}\int_{10}^{12}(x-3)(x-10)dx =$$

$$= \frac{1}{EI}\int_{10}^{12}(x^2-13x+30)dx = \boldsymbol{\frac{50}{3EI}}$$

$$\Delta y_{31} = \frac{1}{EI}\int_0^{10}(0)(x)dx + \frac{1}{EI}\int_{10}^{12}(x-10)(x)dx = \frac{1}{EI}\int_{10}^{12}(x^2-10x)dx = \boldsymbol{\frac{68}{3EI}}$$

$$\Delta y_{32} = \frac{1}{EI}\int_0^{3}(0)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_{3}^{10}(0)(x-3)dx + \frac{1}{EI}\int_{10}^{12}(x-10)(x-3)dx =$$

$$= \frac{1}{EI}\int_{10}^{12}(x^2-13x+30)dx = \boldsymbol{\frac{50}{3EI}}$$

$$\Delta y_{33} = \frac{1}{EI}\int_0^{10}(0)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_{10}^{12}(x-10)(x-10)dx$$

$$= \frac{1}{EI}\int_{10}^{12}(x^2-20x+100)dx = \boldsymbol{\frac{8}{3EI}}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidades por compatibilidad de deflexiones

$$\Delta y_{01} + \Delta y_{11} RAY + \Delta y_{21} RBY + \Delta y_{31} RCY = 0$$

$$\Delta y_{02} + \Delta y_{12} RAY + \Delta y_{22} RBY + \Delta y_{32} RCY = 0$$

$$\Delta_{03} + \Delta_{13}\, RAY + \Delta_{23}\, RBY + \Delta_{33}\, RCY = 0$$

$$\frac{\mathbf{576}}{\boldsymbol{EI}} RAY + \frac{\mathbf{729}}{\boldsymbol{2EI}}\, RBY + \frac{\mathbf{68}}{\boldsymbol{3EI}} RCY = \frac{\mathbf{13824}}{\boldsymbol{EI}}$$

$$\frac{\mathbf{729}}{\boldsymbol{2EI}} RAY + \frac{\mathbf{243}}{\boldsymbol{EI}}\, RBY + \frac{\mathbf{50}}{\boldsymbol{3EI}} RCY = \frac{\mathbf{1890.990976}}{\boldsymbol{EI}}$$

$$\frac{\mathbf{68}}{\boldsymbol{3EI}}\, RAY + \frac{\mathbf{50}}{\boldsymbol{3EI}}\, RBY + \frac{\mathbf{8}}{\boldsymbol{3EI}}\, RCY = \frac{\mathbf{153.8724784}}{\boldsymbol{EI}}$$

Solucionando el sistema de ecuaciones:

$\boldsymbol{RAY \approx -1.349965 Ton}$ ⬇

$\boldsymbol{RBY \approx 8.860301 Ton}$ ⬆

$\boldsymbol{RCY \approx 13.799998 Ton}$ ⬆

Para el cálculo de las reacciones en el soporte “D” habrá que calcular la carga total ejercida por la curva $\boldsymbol{P_C}$ así como su brazo de palanca $\boldsymbol{\bar{x}}$ en este caso el brazo de palanca será calculado a partir del soporte “A”

$$\boldsymbol{P_C} = \int_0^{12} \left(-\frac{x^4}{4536} + \frac{8}{21}x\right) dx = \left[-\frac{x^5}{22680} + \frac{4}{21}x^2\right]_0^{12} = -\frac{384}{35} + \frac{192}{7} = \frac{\mathbf{576}}{\mathbf{35}} \boldsymbol{Ton}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}=\frac{\int_0^{12}(x)\left(-\frac{x^4}{4536}+\frac{8}{21}x\right)dx}{\int_0^{12}\left(-\frac{x^4}{4536}+\frac{8}{21}x\right)dx}=\frac{\left[-\frac{x^6}{27216}+\frac{8}{63}x^3\right]_0^{12}}{\left[-\frac{x^5}{22680}+\frac{4}{21}x^2\right]_0^{12}}=\frac{-\frac{768}{7}+\frac{1536}{7}}{-\frac{384}{35}+\frac{192}{7}}=\frac{\frac{768}{7}}{\frac{576}{35}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{20}{3}m}$$

$$\sum F_Y=0$$

$$-1.349965Ton+8.860301Ton+13.799998Ton-\frac{576}{35}Ton+RDY=0$$

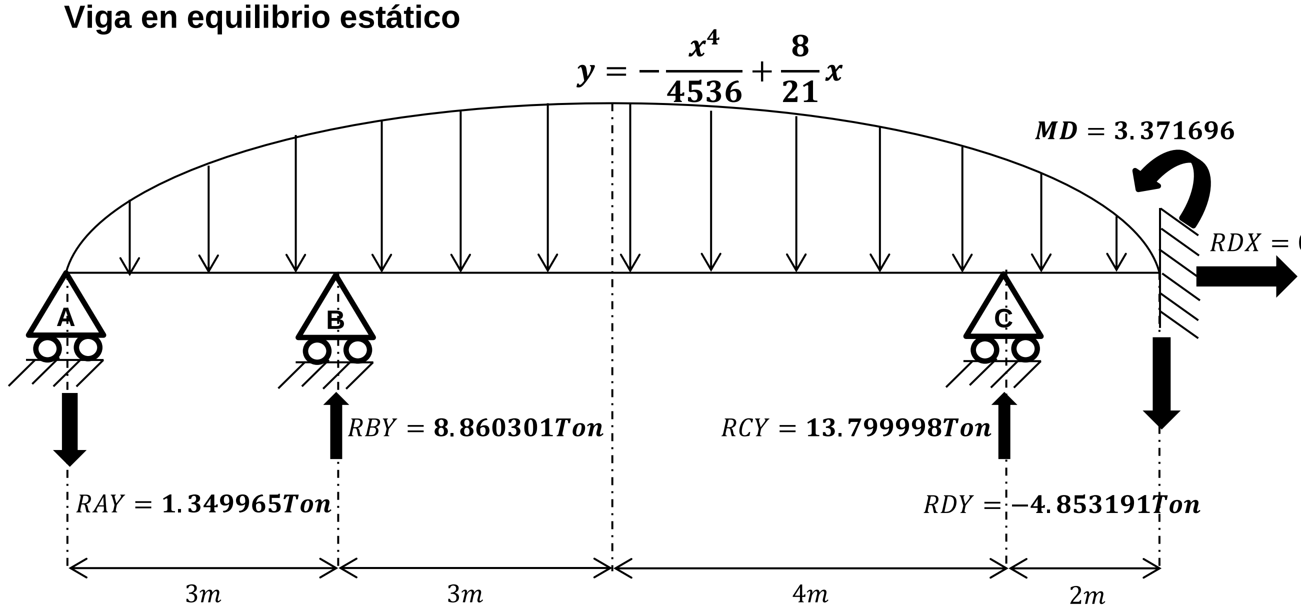
$$\boldsymbol{RDY=-4.853191}$$

$$\sum M_D=0$$

$$-1.349965Ton(12m)+8.860301Ton(9m)+13.799998Ton(2m)$$
$$-\frac{576}{35}Ton\left(12m-\frac{20}{3}m\right)+MD=0$$

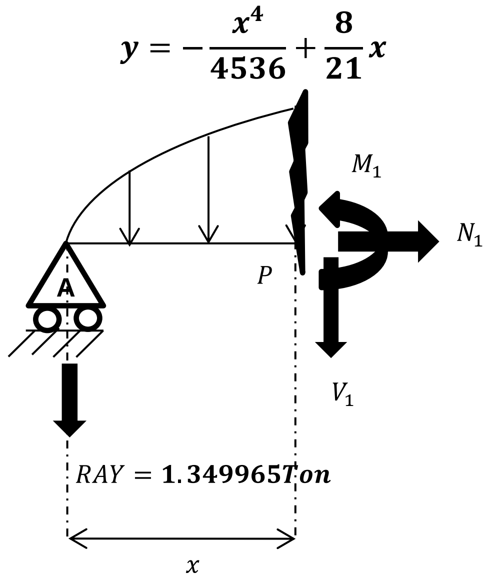
$$\boldsymbol{MD=-3.371696}$$

Viga en equilibrio estático



Calculo de las ecuaciones de momento flexionante y fuerza cortante

$0 \leq x \leq 3m$



$$\sum M_P = 0$$

$$-M_1 - \int_0^x \left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)\left[x - \frac{\int_0^x x\left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)}{\int_0^x \left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)}\right] - 1.349965x = 0$$

$$M_1 = -\int_0^x \left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)\left[x - \frac{\int_0^x x\left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)}{\int_0^x \left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)}\right] - 1.349965x$$

$$M_1 = -\left(-\frac{x^5}{22680} + \frac{4}{21}x^2\right)\left[x - \frac{-\frac{x^6}{27216} + \frac{8}{63}x^3}{-\frac{x^5}{22680} + \frac{4}{21}x^2}\right] - 1.349965x$$

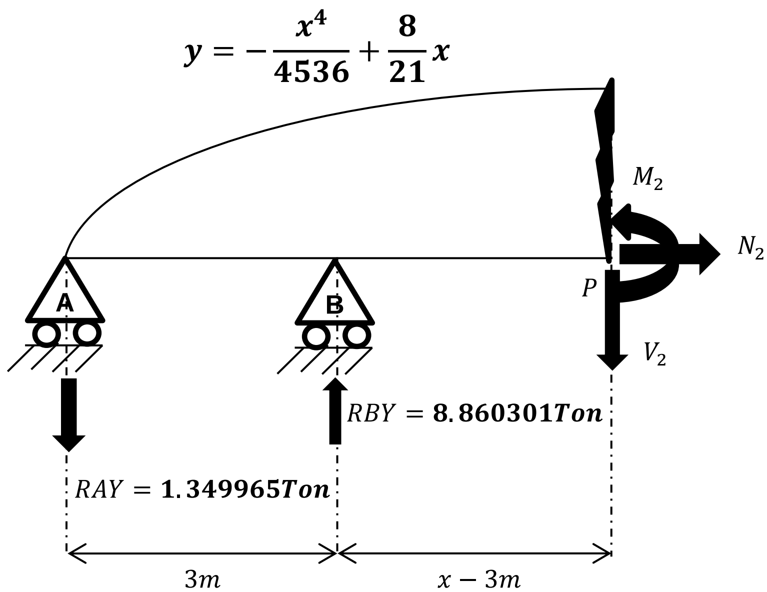
$$M_1 = -\left(-\frac{x^6}{22680} + \frac{4}{21}x^3 + \frac{x^6}{27216} - \frac{8}{63}x^3\right) - 1.349965x$$

$$\boldsymbol{M_1 = \frac{x^6}{136080} - \frac{4}{63}x^3 - 1.349965x}$$

$$V_1 = \frac{x^5}{22680} - \frac{4}{21}x^2 - 1.349965$$

L(x)	Momento	Cortante
0	0	$-1.349965Ton$
3m	$-5.758824Ton*m$	$-3.053536Ton$

$3m \leq x \leq 10m$



$$\sum M_P = 0$$

$$-M_2 - \int_0^x \left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)\left[x - \frac{\int_0^x x\left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)}{\int_0^x \left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)}\right] - 1.349965x + 8.860301(x-3) = 0$$

$$M_2 = -\int_0^x \left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)\left[x - \frac{\int_0^x x\left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)}{\int_0^x \left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)}\right] + 7.510336x - 26.580903$$

$$M_2=-\left(-\frac{x^5}{22680}+\frac{4}{21}x^2\right)\left[x-\frac{-\frac{x^6}{27216}+\frac{8}{63}x^3}{-\frac{x^5}{22680}+\frac{4}{21}x^2}\right]+7.510336x-26.580903$$

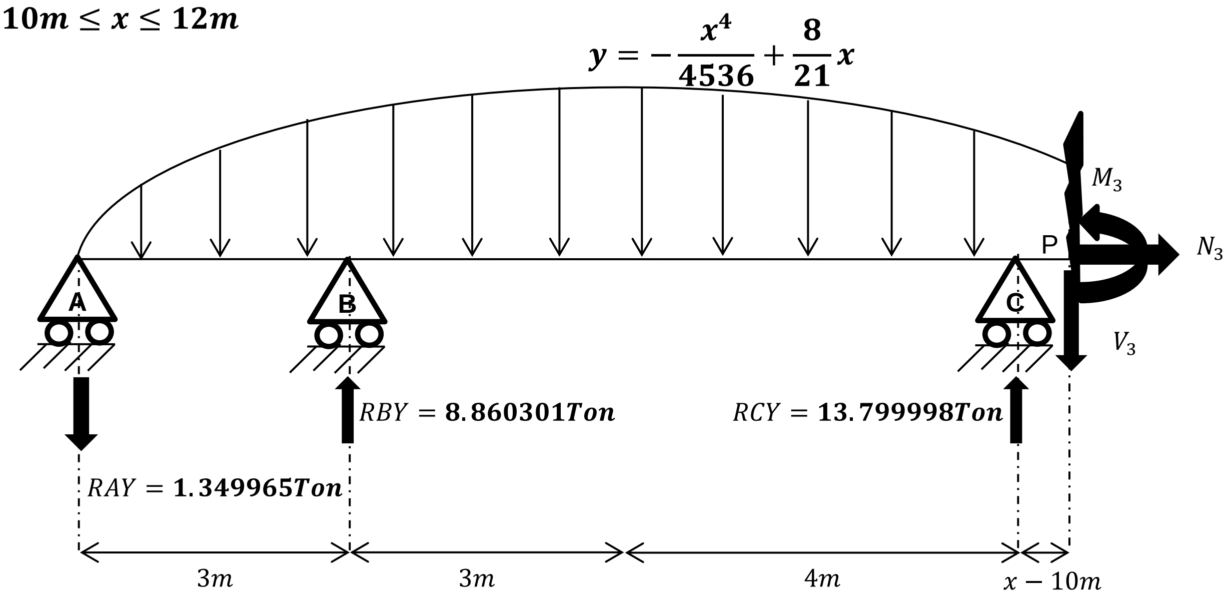
$$M_2=-\left(-\frac{x^6}{22680}+\frac{4}{21}x^3+\frac{x^6}{27216}-\frac{8}{63}x^3\right)+7.510336x-26.580903$$

$$\boldsymbol{M_2=\frac{x^6}{136080}-\frac{4}{63}x^3+7.510336x-26.580903}$$

$$\boldsymbol{V_2=\frac{x^5}{22680}-\frac{4}{21}x^2+7.510336}$$

L(x)	Momento	Cortante
3m	$-5.758824 Ton*m$	$5.860336 Ton$
10m	$-7.620988 Ton*m$	$-7.12811197 Ton$

$\boldsymbol{10m \le x \le 12m}$



$$\sum M_P=0$$

$$-M_3-\int_0^x\left(-\frac{x^4}{4536}dx+\frac{8}{21}xdx\right)\left[x-\frac{\int_0^x x\left(-\frac{x^4}{4536}dx+\frac{8}{21}xdx\right)}{\int_0^x\left(-\frac{x^4}{4536}dx+\frac{8}{21}xdx\right)}\right]-1.349965x$$

$$+8.860301(x-3)+13.799998(x-10)=0$$

$$M_3 = -\int_0^x \left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)\left[x - \frac{\int_0^x x\left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)}{\int_0^x \left(-\frac{x^4}{4536}dx + \frac{8}{21}xdx\right)}\right] + 21.310334x - 164.580883$$

$$M_3 = -\left(-\frac{x^5}{22680} + \frac{4}{21}x^2\right)\left[x - \frac{-\frac{x^6}{27216} + \frac{8}{63}x^3}{-\frac{x^5}{22680} + \frac{4}{21}x^2}\right] + 21.310334x - 164.580883$$

$$M_3 = -\left(-\frac{x^6}{22680} + \frac{4}{21}x^3 + \frac{x^6}{27216} - \frac{8}{63}x^3\right) + 21.310334x - 164.580883$$

$$\boldsymbol{M_3 = \frac{x^6}{136080} - \frac{4}{63}x^3 + 21.310334x - 164.580883}$$

$$\boldsymbol{V_3 = \frac{x^5}{22680} - \frac{4}{21}x^2 + 21.310334}$$

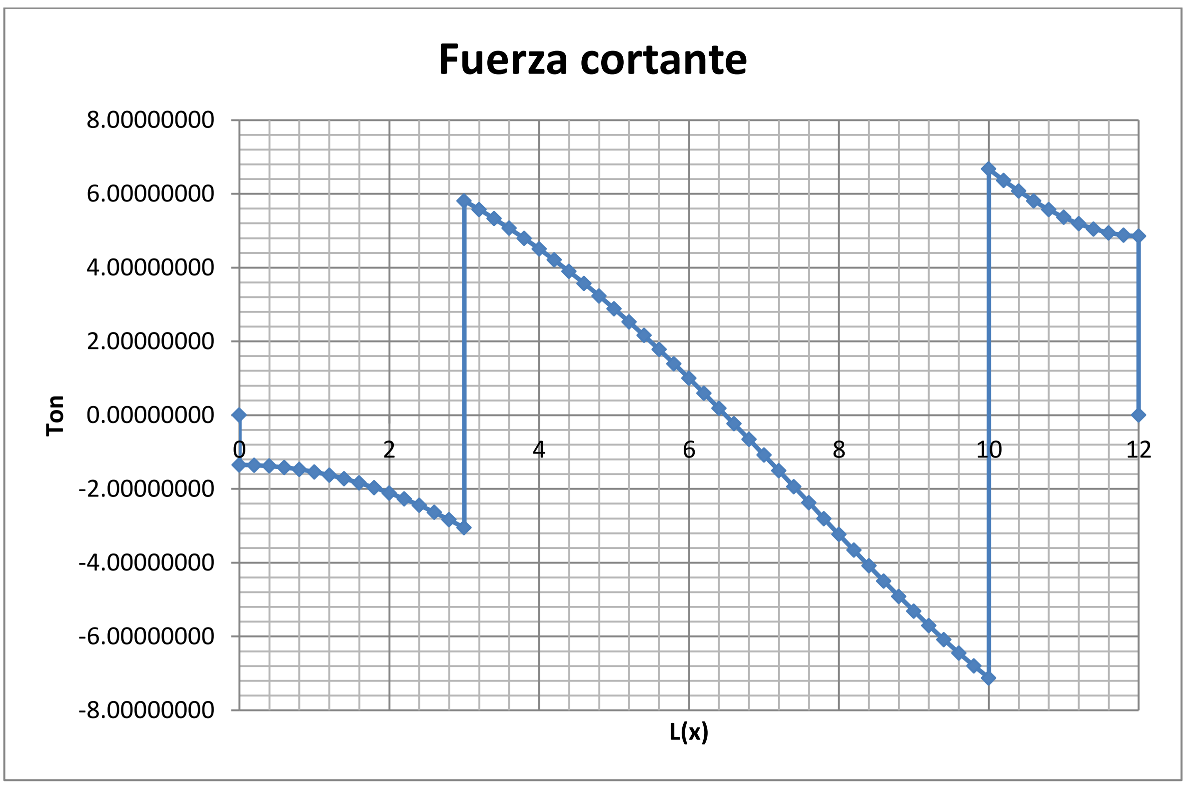
L(x)	Momento	Cortante
10m	$-7.620988 Ton * m$	$6.671886 Ton$
12m	$3.371696 Ton * m$	$4.853191 Ton$

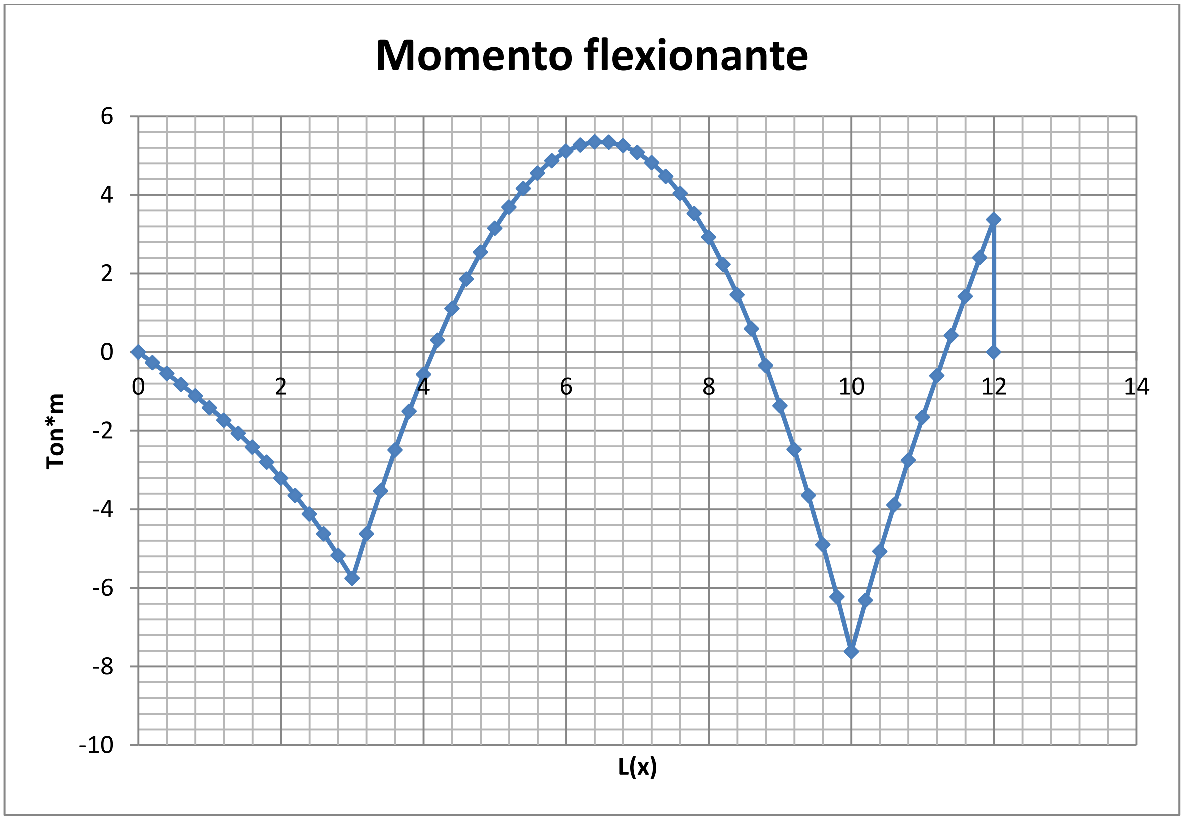
Calculo de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante

L(x)	Cortante	Momento
0	0.00000000	0
0	-1.34996500	0
0.2	-1.35758403	-0.270500936
0.4	-1.38044074	-0.544049462
0.6	-1.41853300	-0.823692943
0.8	-1.47185531	-1.11247801
1	-1.54039710	-1.413449715
1.2	-1.62414100	-1.729650343
1.4	-1.72306120	-2.064117891
1.6	-1.83712171	-2.419884203
1.8	-1.96627471	-2.799972771

2	-2.11045883	-3.207396196
2.2	-2.26959744	-3.645153306
2.4	-2.44359700	-4.116225943
2.6	-2.63234535	-4.623575404
2.8	-2.83570999	-5.17013855
3	-3.05353643	-5.758823571
3	5.80676457	-5.758823571
3.2	5.57465453	-4.620445218
3.4	5.32846449	-3.529900485
3.6	5.06842514	-2.489982771
3.8	4.79479595	-1.503436485
4	4.50786686	-0.572951122
4.2	4.20796000	0.298845
4.4	3.89543134	1.109391345
4.6	3.57067241	1.856202101
4.8	3.23411200	2.536873457
5	2.88621783	3.149091227
5.2	2.52749827	3.690638804
5.4	2.15850400	4.159405457
5.6	1.77982973	4.553394969
5.8	1.39211588	4.870734605
6	0.99605029	5.109684429
6.2	0.59236988	5.268646952
6.4	0.18186238	5.346177123
6.6	-0.23463200	5.340992657
6.8	-0.65621886	5.2519847
7	-1.08194795	5.078228835
7.2	-1.51081143	4.818996429
7.4	-1.94174221	4.473766308
7.6	-2.37361225	4.042236789
7.8	-2.80523086	3.524338029
8	-3.23534301	2.92024473
8.2	-3.66262765	2.230389174
8.4	-4.08569600	1.4554746
8.6	-4.50308985	0.596488916
8.8	-4.91327989	-0.345281247
9	-5.31466400	-1.368236143
9.2	-5.70556557	-2.47044818
9.4	-6.08423180	-3.649646856
9.6	-6.44883200	-4.903203343
9.8	-6.79745590	-6.22811475

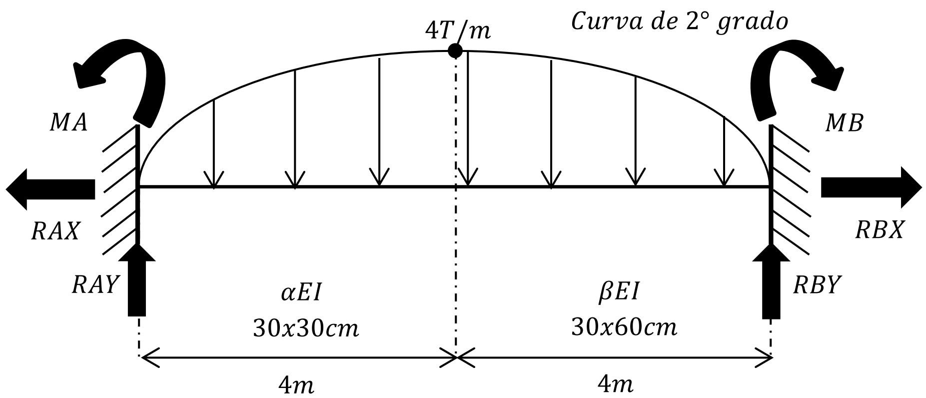
10	-7.12811197	-7.620988032
10	6.67188603	-7.620988032
10.2	6.36127229	-6.318023971
10.4	6.07286002	-5.074999211
10.6	5.80889475	-3.887250358
10.8	5.57171000	-2.749656143
11	5.36372906	-1.656619641
11.2	5.18746664	-0.602050157
11.4	5.04553057	0.420655229
11.6	4.94062350	1.418630457
11.8	4.87554457	2.399559618
12	4.85319114	3.371696429
12	0.00000000	0





Momento flexionante
Ton*m
L(x)
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
0
2
4
6
8
10
12
14

4.- De la siguiente viga, determine las reacciones en los soportes mostrados, las funciones que describen la variación del momento flexionante y fuerza cortante producto de la acción del sistema de fuerzas externo, dibuje los diagramas correspondientes a dichas funciones.



Como dato del concreto se sabe que: $\boldsymbol{F'c = 250 \,{}^{Kg}/_{cm^2}}$

Verificación del grado de indeterminación de la viga:

Recordando que el grado de indeterminación en términos vanos es la diferencia entre el número de incógnitas de nuestra estructura "I" y el número de ecuaciones de equilibrio estático asociadas a su plano "E"

$$\boldsymbol{I - E = 6 - 3 = 3}$$

Como notamos en este caso, encontramos una viga hiperestática, para dar solución a este problema emplearemos el método de flexibilidades (trabajo virtual en vigas) mismo que ya fue mencionado en ejemplos anteriores, sin embargo, para este caso **"EI" (módulo de rigidez)** no es constante a lo largo de la viga, más adelante, cuando esto sea necesario, se explicara cómo resolver este problema, como primer paso idealizaremos la función de la curva que describe la magnitud de la carga aplicada en la viga.

Construcción de la función de la curva

Como en este caso la curva es de 2° grado proponemos la forma de la ecuación de la siguiente forma:

$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$

Condiciones de frontera asociadas a la curva:

Si $x = 0$ $y = 0$
Si $x = 4$ $y = 4$
Si $x = 8$ $y = 0$

De la primera condición:

$$\boldsymbol{a(0)^2 + b(0) + c = 0} \quad \therefore \quad \boldsymbol{c = 0}$$

Utilizando las dos condiciones de frontera restantes para construir un sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{a(4)^2 + b(4) = 4} \ldots\ldots\ldots\ldots \boldsymbol{Ec. 1}$$

$$\boldsymbol{a(8)^2 + b(8) = 0} \ldots\ldots\ldots\ldots \boldsymbol{Ec. 2}$$

De la ecuación **"1"** despejamos **"a"**

$$a = \frac{4 - 4b}{16}$$

Sustituimos **"a"** en la ecuación **"2"** y despejamos **"b"**

$$\left(\frac{4 - 4b}{16}\right)(64) + 8b = 0$$

$$-8b = -16$$

$$\boldsymbol{b = 2}$$

Sustituyendo el valor de **"b"** en la equivalencia de **"a"**

$$a = \frac{4 - 4(2)}{16} \qquad \boldsymbol{a = -\frac{1}{4}}$$

Por lo tanto la función de la curva es:

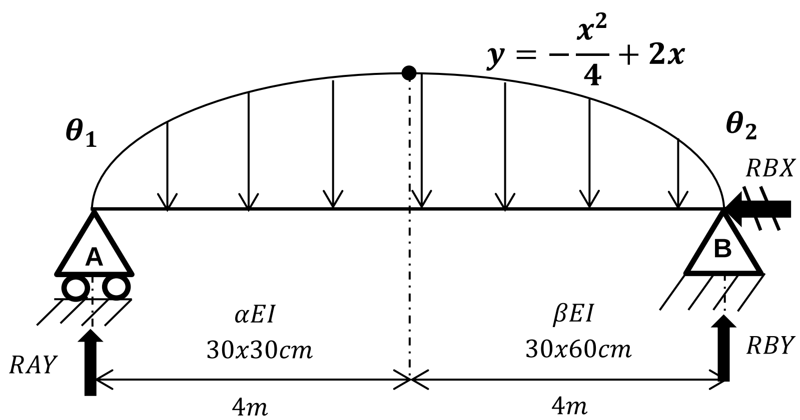
$$\boldsymbol{y = -\frac{x^2}{4} + 2x}$$

A continuación se describe la viga primaria así como las vigas isostáticas ficticias necesarias para dar solución al problema, cuyas características ya fueron mencionadas en los ejercicios anteriores, se calcularan las ecuaciones que describen la variación del momento flexionante para cada viga.

Nótese que para este caso: se liberaron los giros en los empotramientos, y se nombró a dichos giros como: $\boldsymbol{\theta_i}$

(Como evidentemente la viga no se encuentra sometida a cargas axiales, se despreciara el análisis de las mismas)

Viga primaria.



Calculo de la carga total ejercida por la curva "$\boldsymbol{P_C}$" así como el brazo de palanca "$\boldsymbol{\overline{x}}$" a partir del apoyo A

$$P_C = \int_1^8 \left(-\frac{x^2}{4} + 2x\right) dx = \left[-\frac{x^3}{12} + x^2\right]_0^8 = \boldsymbol{\frac{64}{3} Ton}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^8 (x)\left(-\frac{x^2}{4} + 2x\right)dx}{\int_0^8 \left(-\frac{x^2}{4} + 2x\right)dx} = \frac{\left[-\frac{x^4}{16} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^8}{\left[-\frac{x^3}{12} + x^2\right]_0^8} = \frac{\frac{256}{3}}{\frac{64}{3}} = \boldsymbol{4m}$$

Calculo de las reacciones en los soportes de la viga primaria:

$$\sum M_A = 0$$

$$\left(\frac{64}{3}Ton\right)(4m) - (8m)RBY = 0$$

$$RBY = \frac{\frac{256}{3}Ton * m}{8m} = \boldsymbol{\frac{32}{3}Ton}$$

$$\sum F_Y = 0$$

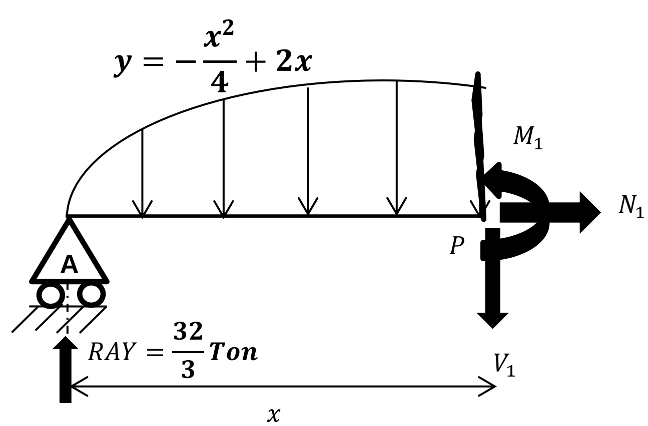
$$RAY - \frac{64}{3}Ton + \frac{32}{3}Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = \frac{32}{3}Ton}$$

$$\boldsymbol{RBX = 0}$$

Calculo de la ecuación de momento flexionante para la viga primaria

$$0 \le x \le 8m$$



$$\sum M_P = 0$$

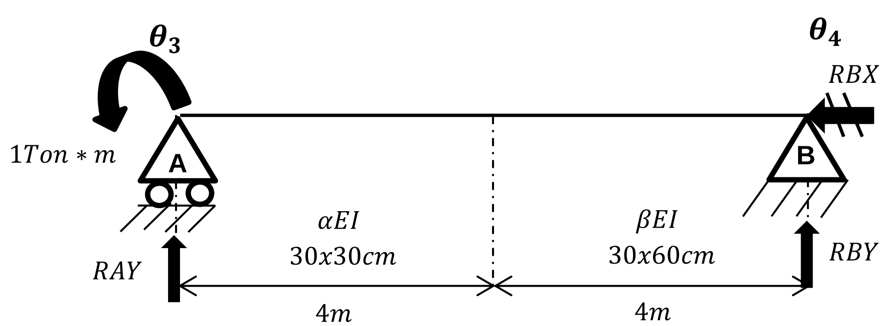
$$-M_1 + \left(\frac{32}{3}\right)(x) - \left[\int_0^x \left(-\frac{x^2}{4} + 2x\right) dx\right]\left(x - \frac{\int_0^x (x)\left(-\frac{x^2}{4} + 2x\right) dx}{\int_0^x \left(-\frac{x^2}{4} + 2x\right) dx}\right) = 0$$

$$M_1 = \frac{32}{3}x - \left(-\frac{x^3}{12} + x^2\right)\left(x - \frac{-\frac{x^4}{16} + \frac{2x^3}{3}}{-\frac{x^3}{12} + x^2}\right)$$

$$M_1 = \frac{32}{3}x - \left(-\frac{x^4}{12} + x^3 + \frac{x^4}{16} - \frac{2x^3}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{M_1 = \frac{x^4}{48} - \frac{x^3}{3} + \frac{32}{3}x}$$

Viga isostática ficticia 1



Calculo de las reacciones en los soportes:

$$\sum M_A = 0$$

$$-1Ton * m - (8m)RBY = 0$$

$$RBY = -\frac{1Ton * m}{8m} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\boldsymbol{Ton}$$

$$\sum F_Y = 0$$

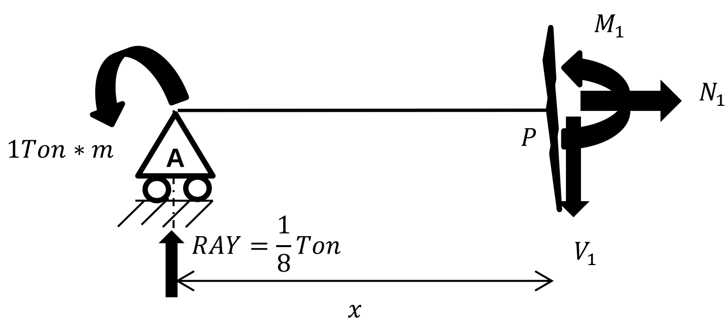
$$RAY - \frac{1}{8}Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = \frac{1}{8}Ton}$$

$$\boldsymbol{RBX = 0}$$

Calculo de la ecuación de momento flexionante

$$\boldsymbol{0 \leq x \leq 8m}$$

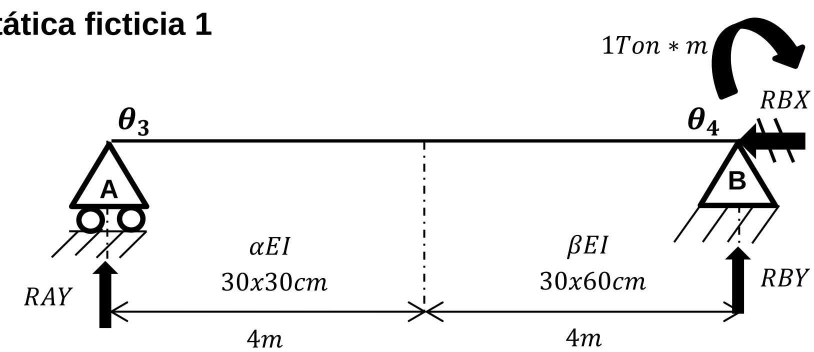


$$\sum M_P = 0$$

$$-M_1 + \left(\frac{1}{8}\right)(x) - 1 = 0$$

$$\boldsymbol{M_1 = \frac{x}{8} - 1}$$

Viga isostática ficticia 1



Calculo de las reacciones en los soportes:

$$\sum M_B = 0$$

$$1Ton * m + (8m)RAY = 0$$

$$RAY = -\frac{1Ton * m}{8m} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\boldsymbol{Ton}$$

$$\sum F_Y = 0$$

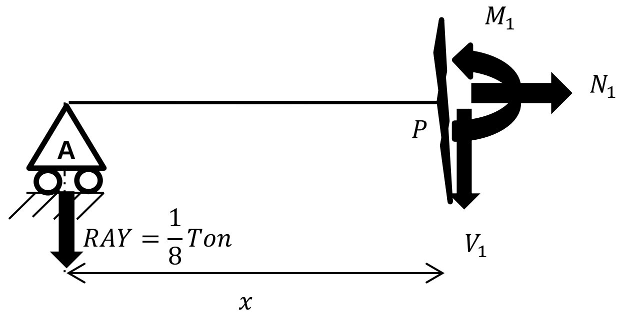
$$RBY - \frac{1}{8}Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RBY} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\boldsymbol{Ton}$$

$$\boldsymbol{RBX} = \mathbf{0}$$

Calculo de la ecuación de momento flexionante

$$0 \leq x \leq 8m$$

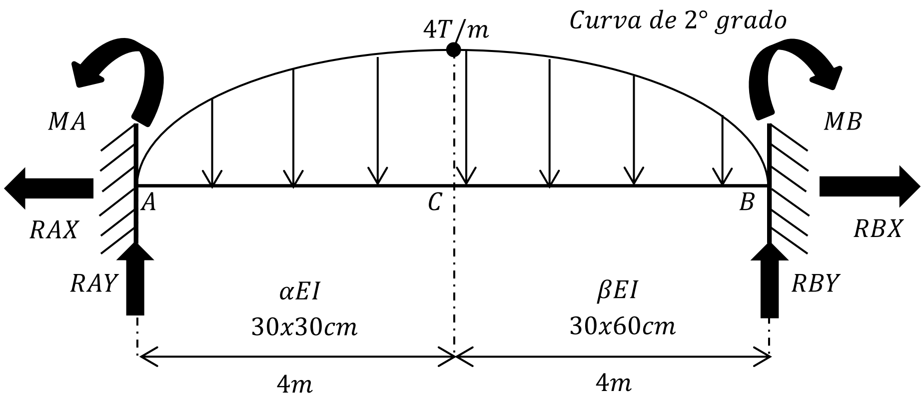


$$\sum M_P = 0$$

$$-M_1 - \left(\frac{1}{8}\right)(x) = 0$$

$$\boldsymbol{M_1} = -\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{8}}$$

Cálculo del valor de los módulos de rigidez (EI)



Como mencionamos anteriormente el módulo de rigidez no es constante puesto que:

Barra	Módulo de rigidez
A-C	αEI
C-B	βEI

Para calcular el valor numérico de los módulos de rigidez en las barras tomamos en cuenta que:

$$\boldsymbol{I = \frac{bh^3}{12}}$$

Como el concreto es de clase 1 puesto que $F'c = 250\ {}^{kg}/_{cm^2}\quad entonces$:

$$\boldsymbol{E = 14000\sqrt{F'c}}$$

Entonces:

$$\alpha EI = \left(14000\sqrt{250}\right)\left(\frac{0.3^4}{12}\right)$$

$$\beta EI = \left(14000\sqrt{250}\right)\left(\frac{0.3 * 0.6^3}{12}\right)$$

Dividiendo ambos módulos de rigidez entre $\boldsymbol{\alpha EI}$ para obtener la proporción entre ambos.

Para la barra A-C

$$\frac{\alpha EI}{\alpha EI}=\frac{\left(14000\sqrt{250}\right)\left(\frac{0.3^4}{12}\right)}{\left(14000\sqrt{250}\right)\left(\frac{0.3^4}{12}\right)}=\boldsymbol{1EI}$$

Para la barra C-B

$$\frac{\beta EI}{\alpha EI}=\frac{\left(14000\sqrt{250}\right)\left(\frac{0.3*0.6^3}{12}\right)}{\left(14000\sqrt{250}\right)\left(\frac{0.3^4}{12}\right)}=\boldsymbol{8EI}$$

Calculo de los giros liberados

$$\theta_i=\int_{L_1}^{L_2}\frac{Mmdx}{EI}$$

$$\theta_1=\frac{1}{EI}\int_0^4\left(\frac{x^4}{48}-\frac{x^3}{3}+\frac{32}{3}x\right)\left(\frac{x}{8}-1\right)dx+\frac{1}{8EI}\int_4^8\left(\frac{x^4}{48}-\frac{x^3}{3}+\frac{32}{3}x\right)\left(\frac{x}{8}-1\right)dx=$$

$$-\frac{2096}{45EI}-\frac{122}{45EI}=-\boldsymbol{\frac{2218}{45EI}}$$

$$\theta_2=\frac{1}{EI}\int_0^4\left(\frac{x^4}{48}-\frac{x^3}{3}+\frac{32}{3}x\right)\left(-\frac{x}{8}\right)dx+\frac{1}{8EI}\int_4^8\left(\frac{x^4}{48}-\frac{x^3}{3}+\frac{32}{3}x\right)\left(-\frac{x}{8}\right)dx=$$

$$-\frac{976}{45EI}-\frac{262}{45EI}=-\boldsymbol{\frac{1238}{45EI}}$$

$$\theta_3=\frac{1}{EI}\int_0^4\left(\frac{x}{8}-1\right)\left(\frac{x}{8}-1\right)dx+\frac{1}{8EI}\int_4^8\left(\frac{x}{8}-1\right)\left(\frac{x}{8}-1\right)dx=\frac{7}{3EI}+\frac{1}{24EI}=\boldsymbol{\frac{19}{8EI}}$$

$$\theta_4 = \frac{1}{EI}\int_0^4 \left(\frac{x}{8}-1\right)\left(-\frac{x}{8}\right)dx = \frac{1}{EI}\int_4^8 \left(\frac{x}{8}-1\right)\left(-\frac{x}{8}\right)dx = \frac{2}{3EI}+\frac{1}{12EI} = \boldsymbol{\frac{3}{4EI}}$$

$$\theta_5 = \frac{1}{EI}\int_0^4 \left(-\frac{x}{8}\right)\left(\frac{x}{8}-1\right)dx = \frac{1}{EI}\int_4^8 \left(-\frac{x}{8}\right)\left(\frac{x}{8}-1\right)dx = \frac{2}{3EI}+\frac{1}{12EI} = \boldsymbol{\frac{3}{4EI}}$$

$$\theta_6 = \frac{1}{EI}\int_0^4 \left(-\frac{x}{8}\right)\left(-\frac{x}{8}\right)dx = \frac{1}{EI}\int_4^8 \left(-\frac{x}{8}\right)\left(-\frac{x}{8}\right)dx = \frac{1}{3EI}+\frac{7}{24EI} = \boldsymbol{\frac{5}{8EI}}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidades por compatibilidad de deflexiones

$$\theta_1 + \theta_3 MA + \theta_5 MB = 0$$

$$\theta_2 + \theta_4 MA + \theta_6 MB = 0$$

$$\boldsymbol{\frac{19}{8EI}} MA + \boldsymbol{\frac{3}{4EI}} MB = \boldsymbol{\frac{2218}{45EI}}$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{4EI}} MA + \boldsymbol{\frac{5}{8EI}} MB = \boldsymbol{\frac{1238}{45EI}}$$

Solucionando el sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{MA = \frac{29296}{2655} Ton * m}$$

$$\boldsymbol{MB = 30.77664783 Ton * m}$$

Calculo de las reacciones verticales en los empotramientos

$$\sum M_A = 0$$

$$-\frac{29296}{1655} ton * m + 30.776648 ton * m - RBY(8m) + \left(\frac{64}{3} Ton\right)(4m) = 0$$

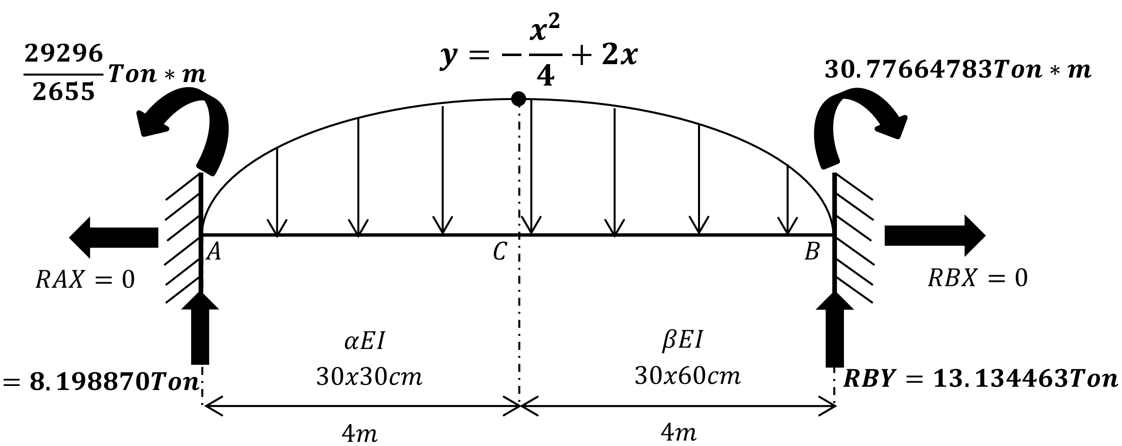
$$\boldsymbol{RBY = 13.134463Ton}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$RAY - \frac{64}{3}Ton + 13.134463Ton = 0$$

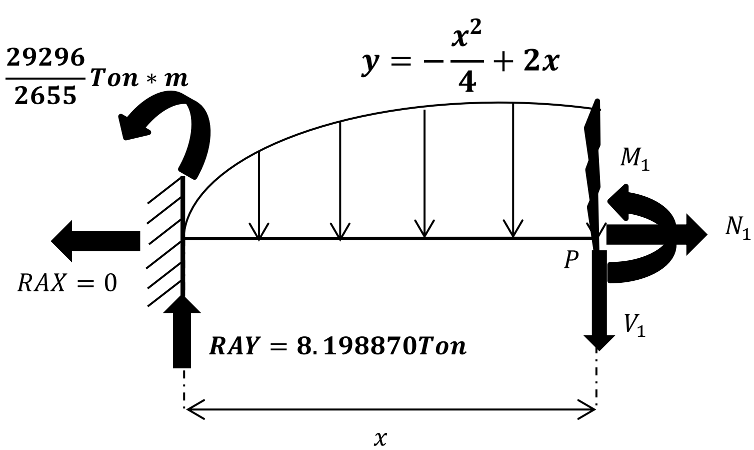
$$\boldsymbol{RAY = 8.198870Ton}$$

Viga en equilibrio estático



Calculo de las ecuaciones de momento flexionante y fuerza cortante en la viga.

$$\boldsymbol{0 \leq x \leq 8m}$$



$$\sum M_P = 0$$

$$-M_1 + 8.198870x - \frac{29296}{1655} - \left[\int_0^x \left(-\frac{x^2}{4} + 2x\right) dx\right] \left(x - \frac{\int_0^x (x)\left(-\frac{x^2}{4} + 2x\right) dx}{\int_0^x \left(-\frac{x^2}{4} + 2x\right) dx}\right) = 0$$

$$M_1 = -\left(-\frac{x^3}{12} + x^2\right)\left(x - \frac{-\frac{x^4}{16} + \frac{2x^3}{3}}{-\frac{x^3}{12} + x^2}\right) + 8.198870x - \frac{29296}{2655}$$

$$M_1 = -\left(-\frac{x^4}{12} + x^3 + \frac{x^4}{16} - \frac{2x^3}{3}\right) + 8.198870x - \frac{29296}{2655}$$

$$\boldsymbol{M_1 = \frac{x^4}{48} - \frac{x^3}{3} + 8.198870x - \frac{29296}{2655}}$$

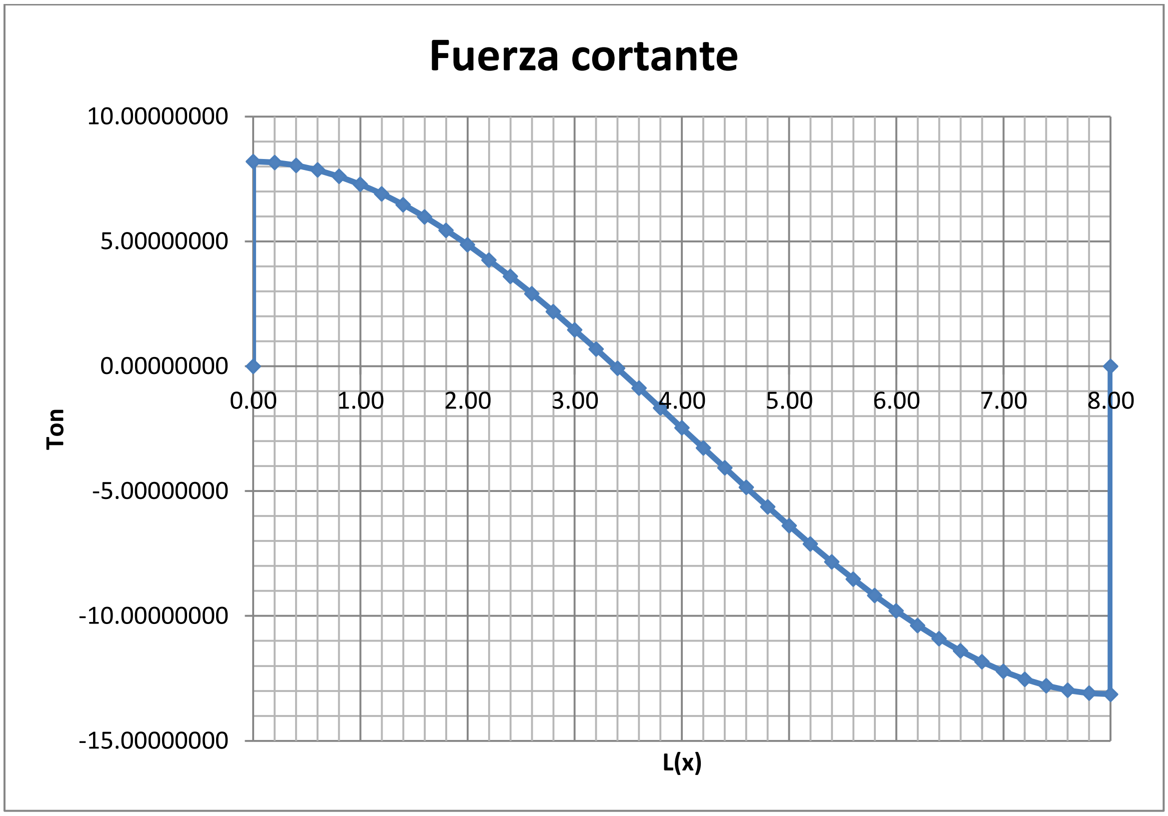
$$\boldsymbol{V_1 = \frac{x^3}{12} - x^2 + 8.198870}$$

L(x)	Momento	Cortante
0m	$-\frac{29296}{1655} Ton * m$	$8.198870 Ton$
8m	$-30.776648 Ton * m$	$-13.134463 Ton$

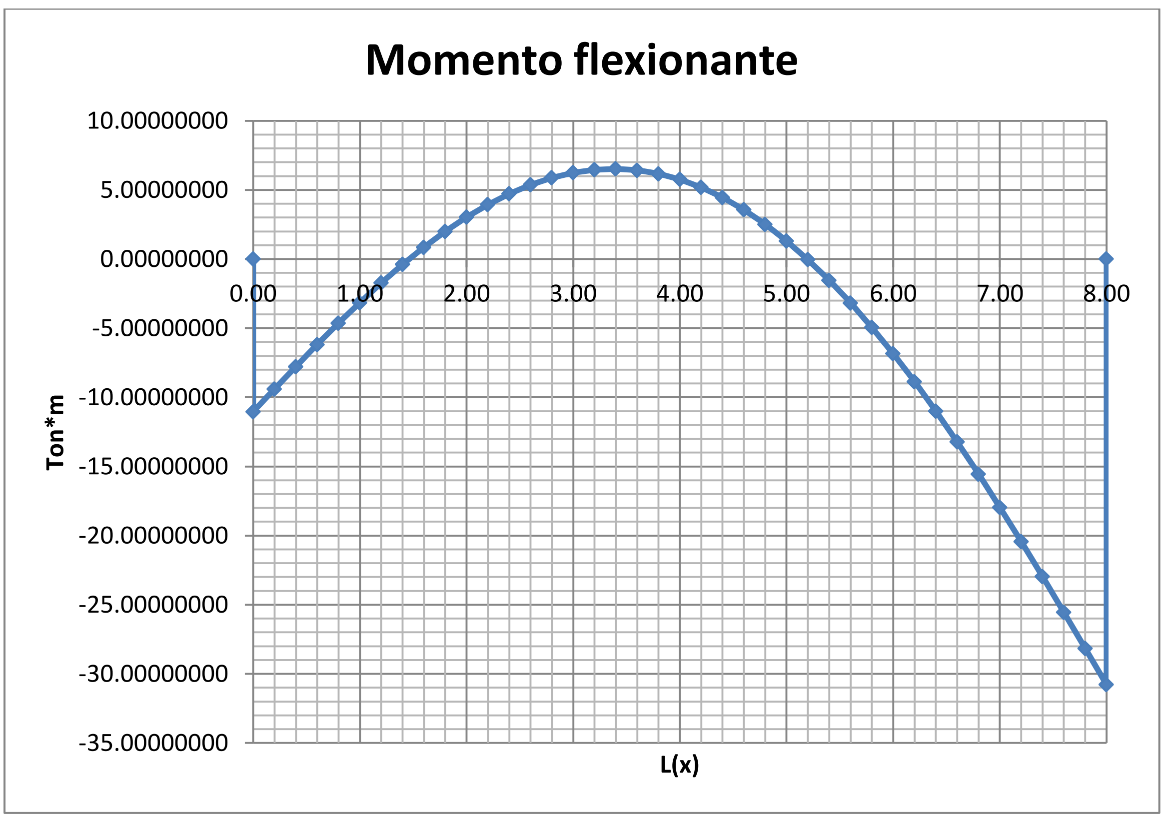
Calculo de los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante

L(x)	Cortante	Momento
0.00	0.00000000	0.00000000
0.00	8.19887000	-11.03427495
0.20	8.15953667	-9.39713429
0.40	8.04420333	-7.77552695
0.60	7.85687000	-6.18425295
0.80	7.60153667	-4.63731229

1.00	7.28220333	-3.14790495
1.20	6.90287000	-1.72843095
1.40	6.46753667	-0.39049029
1.60	5.98020333	0.85511705
1.80	5.44487000	1.99839105
2.00	4.86553667	3.03013171
2.20	4.24620333	3.94193905
2.40	3.59087000	4.72621305
2.60	2.90353667	5.37615371
2.80	2.18820333	5.88576105
3.00	1.44887000	6.24983505
3.20	0.68953667	6.46397571
3.40	-0.08579667	6.52458305
3.60	-0.87313000	6.42885705
3.80	-1.66846333	6.17479771
4.00	-2.46779667	5.76120505
4.20	-3.26713000	5.18767905
4.40	-4.06246333	4.45461971
4.60	-4.84979667	3.56322705
4.80	-5.62513000	2.51550105
5.00	-6.38446333	1.31424171
5.20	-7.12379667	-0.03695095
5.40	-7.83913000	-1.53367695
5.60	-8.52646333	-3.17073629
5.80	-9.18179667	-4.94212895
6.00	-9.80113000	-6.84105495
6.20	-10.38046333	-8.85991429
6.40	-10.91579667	-10.99030695
6.60	-11.40313000	-13.22303295
6.80	-11.83846333	-15.54809229
7.00	-12.21779667	-17.95468495
7.20	-12.53713000	-20.43121095
7.40	-12.79246333	-22.96527029
7.60	-12.97979667	-25.54366295
7.80	-13.09513000	-28.15238895
8.00	-13.13446333	-30.77664829
8.00	0.00000000	0.00000000

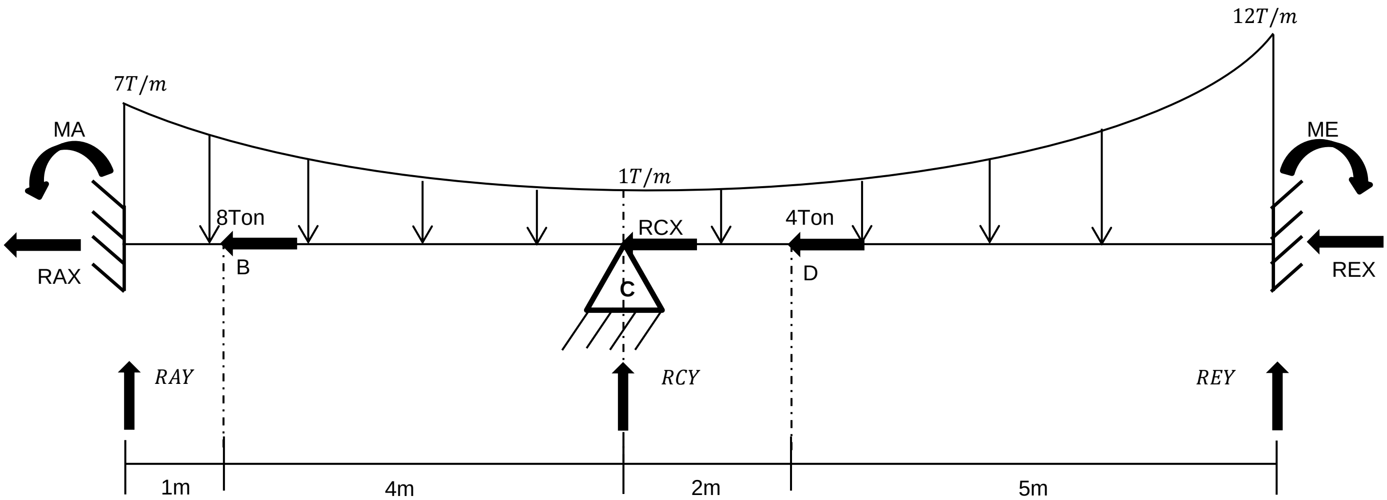


Fuerza cortante
10.00000000
5.00000000
0.00000000
-5.00000000
-10.00000000
-15.00000000
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
7.00
8.00
Ton
L(x)



Momento flexionante
10.00000000
5.00000000
0.00000000
-5.00000000
-10.00000000
-15.00000000
-20.00000000
-25.00000000
-30.00000000
-35.00000000
0.00
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
7.00
8.00
Ton*m
L(x)

5.- De la siguiente viga, determine las reacciones en los soportes mostrados, las funciones que describen la variación del momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial; producto de la acción del sistema de fuerzas externo, dibuje los diagramas correspondientes a dichas funciones.



Verificación del grado de indeterminación de la viga:

Recordando que el grado de indeterminación en términos vanos es la diferencia entre el número de incógnitas de nuestra estructura “I” y el número de ecuaciones de equilibrio estático asociadas a su plano “E”

$$\boldsymbol{I - E = 8 - 3 = 5}$$

Como notamos en este caso, encontramos una viga hiperestática, para dar solución a este problema emplearemos el método de flexibilidades (trabajo virtual en vigas) que si bien ya fue descrito en ejercicios anteriores, valdrá la pena recordarlo, ya que en este ejemplo, habrán de analizarse tanto las cargas verticales como las horizontales.

Las fuerzas reactivas liberadas se denotan en este ejemplo de la siguiente manera:

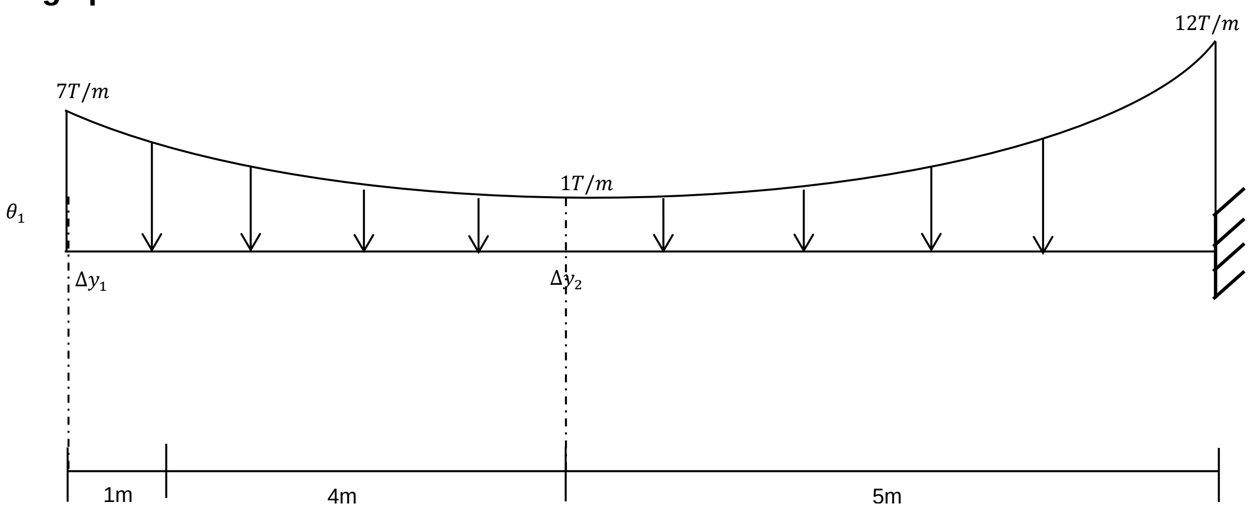
Para los giros θ_i

Para los desplazamientos verticales Δy_i

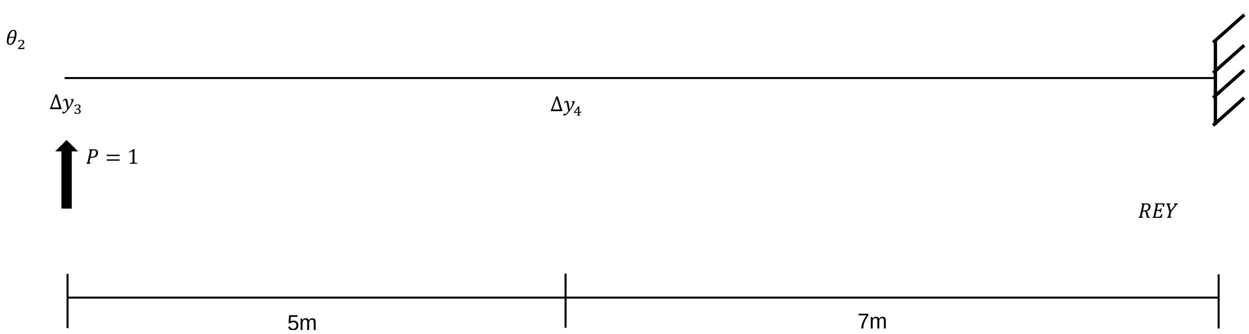
Para los desplazamientos horizontales que posteriormente serán calculados Δx_i

Nota: primero se realizara el análisis de cargas verticales, una vez efectuado dicho análisis se calcularán las reacciones horizontales en los apoyos.

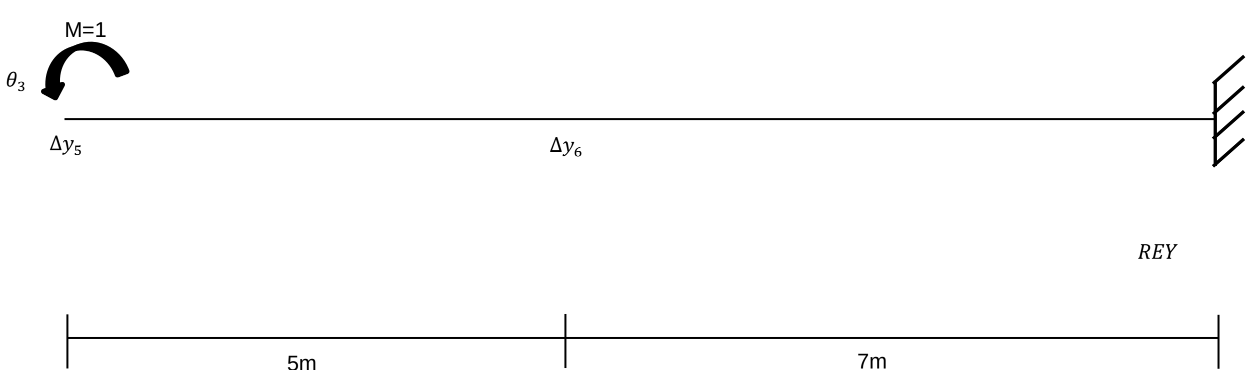
Viga primaria



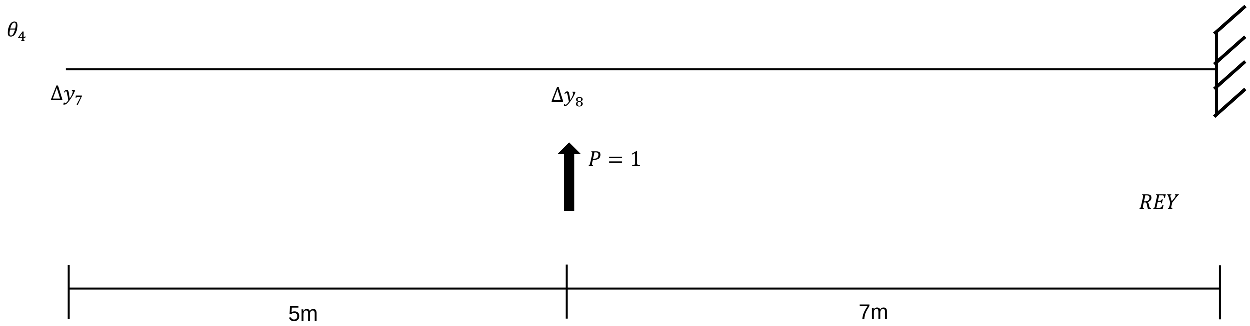
Viga isostática ficticia 1



Viga isostática ficticia 2



Viga isostática ficticia 3



Observando que los desplazamientos liberados se asocian con las cargas originales de nuestra viga el sistema de ecuaciones de flexibilidad por compatibilidad de deflexiones se define de la siguiente manera:

$$\Delta y_1 + \Delta y_3 RAY + \Delta y_5 MA + \Delta y_7 RCY = 0$$

$$\Delta y_2 + \Delta y_4 RAY + \Delta y_6 MA + \Delta y_8 RCY = 0$$

$$\theta_1 + \theta_2 \, RAY + \theta_3 \, MA + \theta_4 \, RCY = 0$$

Tomando en cuenta que la ecuación para calcular la deflexión en cualquier punto es:

$$\Delta y_i = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mmdx}{EI}$$

$$\theta_i = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mmdx}{EI}$$

Dónde:

- M: Ecuación de momento de la viga en la que supone la deflexión a calcular.
- m: Ecuación de momento de la viga que restringe la deflexión a calcular “carga unitaria”
- La integral define la longitud de tramo en la que las ecuaciones rigen el comportamiento del momento flexionante.
- E:Modulo de elasticidad
- I: Inercia de la sección

Calculo de las ecuaciones de momento de cada viga:

Para el cálculo de la ecuación de momento de la viga primaria, habrá que conocer la función de la curva que define la carga, tomando en cuenta los siguientes puntos notables de la curva:

Si x=0 y=7
Si x=5 y=1
Si x=12 y=12

Tomando en cuenta que la ecuación de la curva es de la forma

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$$

$a(0)^2 + b(0) + c = 7$

Entonces c=7

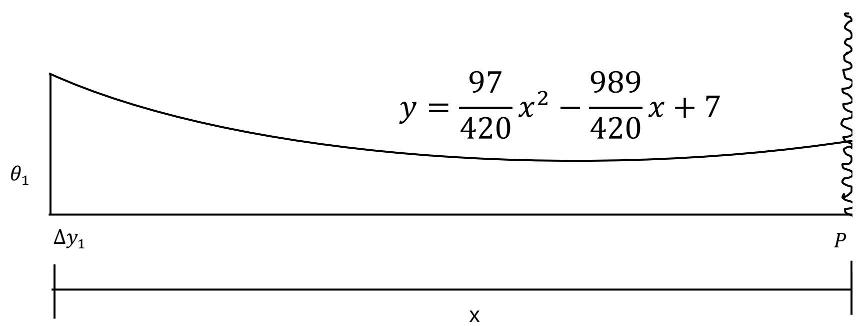
$a(5)^2 + b(5) + c = -6$

$a(12)^2 + b(12) + c = 5$

$\boldsymbol{a = \frac{97}{420}} \qquad \boldsymbol{b = -\frac{989}{420}}$

Por lo que la función de la curva es:

$y = \frac{97}{420}x^2 - \frac{989}{420}x + 7$



Para la viga primaria

Calculo de la carga

$$\int_0^x \frac{97}{420}x^2 - \frac{989}{420}x + 7 = \boldsymbol{\frac{97}{1260}x^3 - \frac{989}{840}x^2 + 7x}$$

Calculo del brazo de palanca total calculado a partir del apoyo A

$$\bar{x} = \frac{\int_0^x x\left(\frac{97}{420}x^2 - \frac{989}{420}x + 7\right)}{\int_0^x \frac{97}{420}x^2 - \frac{989}{420}x + 7} = \boldsymbol{\frac{\frac{97}{1680}x^4 - \frac{989}{1260}x^3 + \frac{7}{2}x^2}{\frac{97}{1260}x^3 - \frac{989}{840}x^2 + 7x}}$$

Como el brazo de palanca está calculado a partir del apoyo A de la viga original, para obtener el brazo de palanca en la viga primaria desde el punto P habrá que restar $x - \boldsymbol{\frac{\frac{97}{1680}x^4 - \frac{989}{1260}x^3 + \frac{7}{2}x^2}{\frac{97}{1260}x^3 - \frac{989}{840}x^2 + 7x}}$ al cual llamaremos

$$\boldsymbol{\bar{x}_1 = x - \frac{\frac{97}{1680}x^4 - \frac{989}{1260}x^3 + \frac{7}{2}x^2}{\frac{97}{1260}x^3 - \frac{989}{840}x^2 + 7x}}$$

$0 \leq x \leq 12$

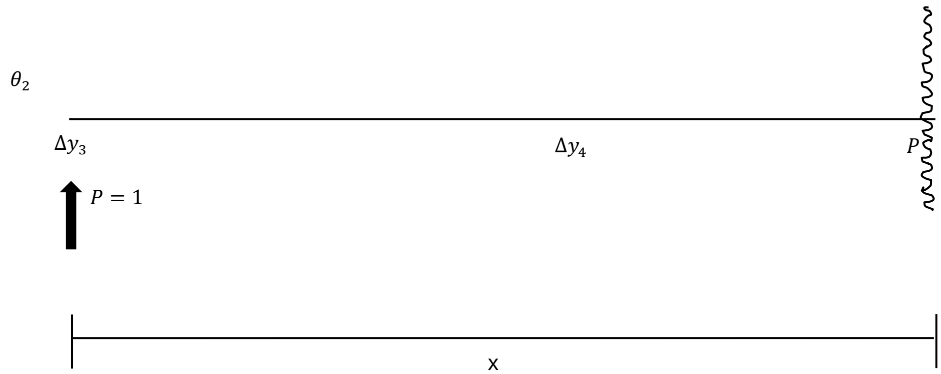
$\sum Mp$

$$M = -\left(\frac{97}{1260}x^3 - \frac{989}{840}x^2 + 7x\right)\left(x - \frac{\frac{97}{1680}x^4 - \frac{989}{1260}x^3 + \frac{7}{2}x^2}{\frac{97}{1260}x^3 - \frac{989}{840}x^2 + 7x}\right)$$

$$M = -\frac{97}{1260}x^4 + \frac{989}{840}x^3 - 7x^2 + \frac{97}{1680}x^4 - \frac{989}{1260}x^3 + \frac{7}{2}x^2$$

$$\boldsymbol{M = -\frac{97}{5040}x^4 + \frac{989}{2520}x^3 - \frac{7}{2}x^2}$$

Para la viga isostática ficticia 1

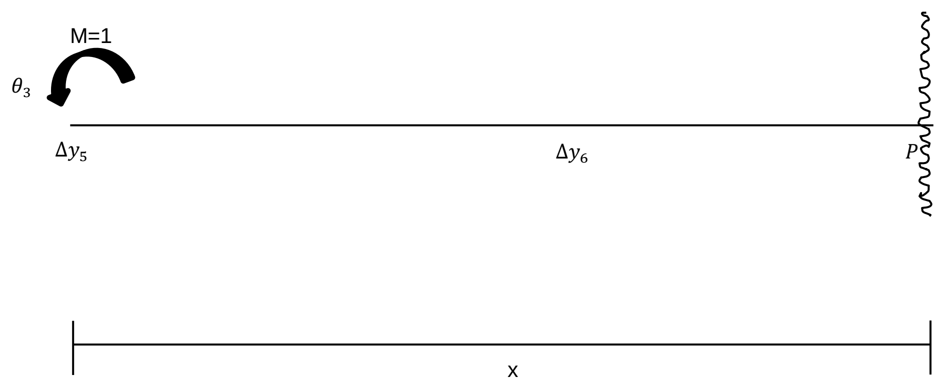


$0 \leq x \leq 12$

$\sum M_P$

$\boldsymbol{M = x}$

Para la viga isostática ficticia 2

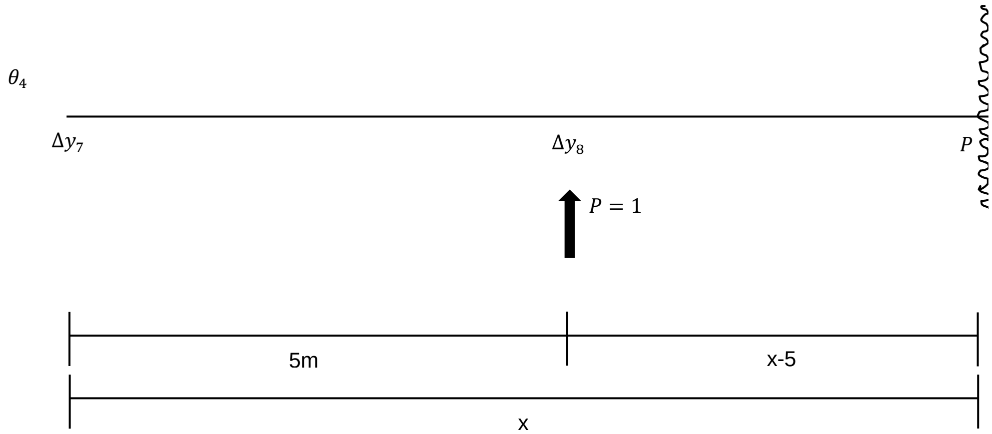


$0 \leq x \leq 12$

$\sum M_P$

$\boldsymbol{M = -1}$

Para la viga isostática ficticia 3



$0 \leq x \leq 5$

$\sum M_P$

$\boldsymbol{M_1 = 0}$

$5 \leq x \leq 12$

$\sum M_P$

$\boldsymbol{M_2 = x - 5}$

Calculo de las deflexiones

$$\Delta \boldsymbol{y_1} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{EI}} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{12}} \left(-\frac{\mathbf{97}}{\mathbf{5040}} \boldsymbol{x^4} + \frac{\mathbf{989}}{\mathbf{2520}} \boldsymbol{x^3} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{x^2} \right) (\boldsymbol{x}) = -\frac{\mathbf{204768}}{\mathbf{25}\boldsymbol{EI}}$$

$$\Delta \boldsymbol{y_2} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{EI}} \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{5}} \left(-\frac{\mathbf{97}}{\mathbf{5040}} \boldsymbol{x^4} + \frac{\mathbf{989}}{\mathbf{2520}} \boldsymbol{x^3} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{x^2} \right) (\mathbf{0})$$
$$+ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{EI}} \int_{\mathbf{5}}^{\mathbf{12}} \left(-\frac{\mathbf{97}}{\mathbf{5040}} \boldsymbol{x^4} + \frac{\mathbf{989}}{\mathbf{2520}} \boldsymbol{x^3} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}} \boldsymbol{x^2} \right) (\boldsymbol{x} - \mathbf{5})$$

$$= -\frac{\mathbf{3625.256574}}{\boldsymbol{EI}}$$

$$\Delta y_3 = \frac{1}{EI}\int_0^{12}(x)(x) = \frac{576}{EI}$$

$$\Delta y_4 = \frac{1}{EI}\int_0^{5}(x)(0) + \frac{1}{EI}\int_5^{12}(x)(x-5) = \frac{1421}{6EI}$$

$$\Delta y_5 = \frac{1}{EI}\int_0^{12}(-1)(x) = -\frac{72}{EI}$$

$$\Delta y_6 = \frac{1}{EI}\int_0^{5}(-1)(0) + \frac{1}{EI}\int_5^{12}(-1)(x-5) = -\frac{49}{2EI}$$

$$\Delta y_7 = \frac{1}{EI}\int_0^{5}(0)(x) + \frac{1}{EI}\int_5^{12}(x-5)(x) = \frac{1421}{6EI}$$

$$\Delta y_8 = \frac{1}{EI}\int_0^{5}(0)(0) + \frac{1}{EI}\int_5^{12}(x-5)(x-5) = \frac{343}{3EI}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{EI}\int_0^{12}\left(-\frac{97}{5040}x^4 + \frac{989}{2520}x^3 - \frac{7}{2}x^2\right)(-1) = \frac{164376}{175EI}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{EI}\int_0^{12}(-x)(-1) = -\frac{72}{EI}$$

$$\theta_3 = \frac{1}{EI}\int_0^{12}(-1)(-1) = \frac{12}{EI}$$

$$\theta_4 = \frac{1}{EI}\int_0^{5}(0)(-1) + \frac{1}{EI}\int_5^{12}(x-5)(-1) = -\frac{49}{2EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidades por compatibilidad de deflexiones

$$\Delta y_1 + \Delta y_3 RAY + \Delta y_5 MA + \Delta y_7 RCY = 0$$

$$\Delta y_2 + \Delta y_4 RAY + \Delta y_6 MA + \Delta y_8 RCY = 0$$

$$\theta_1 \ + \ \theta_2 \ RAY + \ \theta_3 \ MA \ + \theta_4 \ \ RCY \ = 0$$

$$-\frac{\mathbf{204768}}{\mathbf{25}\boldsymbol{EI}} + \frac{\mathbf{576}}{\boldsymbol{EI}} RAY - \frac{\mathbf{72}}{\boldsymbol{EI}} MA + \frac{\mathbf{1421}}{\mathbf{6}\boldsymbol{EI}} RCY = 0$$

$$-\frac{\mathbf{3625.256574}}{\boldsymbol{EI}} + \frac{\mathbf{1421}}{\mathbf{6}\boldsymbol{EI}} RAY - \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{2}\boldsymbol{EI}} MA + \frac{\mathbf{343}}{\mathbf{3}\boldsymbol{EI}} RCY = 0$$

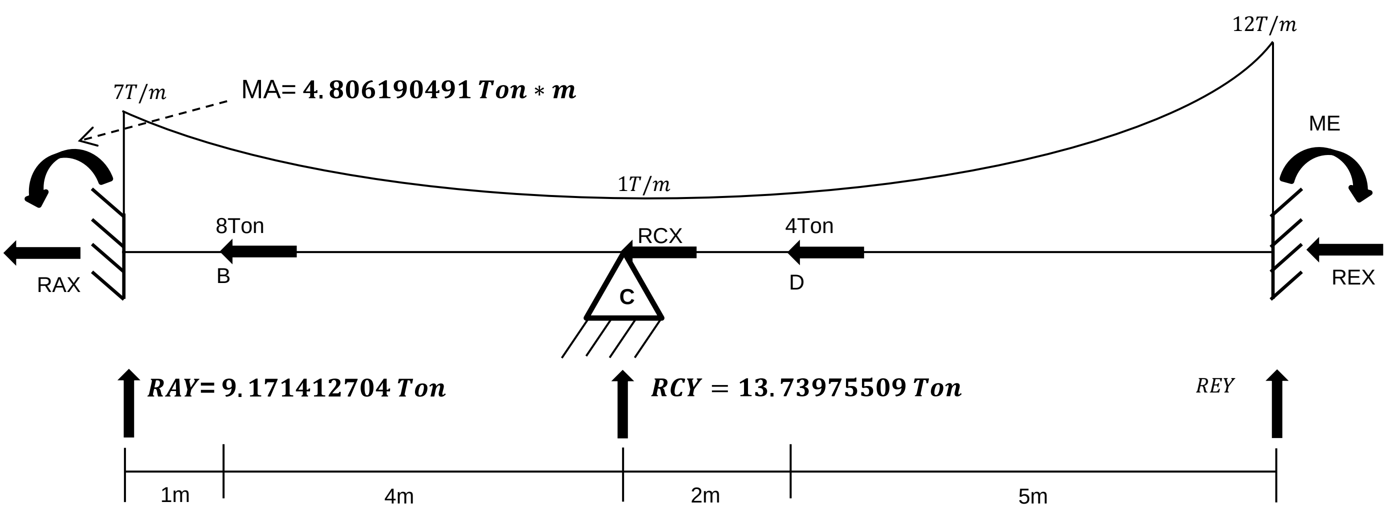
$$\frac{\mathbf{164376}}{\mathbf{175}\boldsymbol{EI}} - \frac{\mathbf{72}}{\boldsymbol{EI}} \ RAY + \frac{\mathbf{12}}{\boldsymbol{EI}} \ MA \ - \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{2}\boldsymbol{EI}} \ \ RCY \ = 0$$

Dando solución al sistema de ecuaciones:

$\boldsymbol{RAY = 9.171412704 \ Ton}$

$\boldsymbol{MA = 4.806190491 \ Ton * m}$

$\boldsymbol{RCY = 13.73975509 \ Ton}$



Para el cálculo del momento en el punto E "ME"

$$\sum \boldsymbol{M_E = 0}$$

$$9.171412704Ton(12m) - 4.806190491\ Ton*m + 13.73975509\ Ton(7m)$$

$$-\int_0^{12}\left(\frac{97}{420}x^2-\frac{989}{420}x+7\right)\left(12-\frac{\int_0^{12} x\left(\frac{97}{420}x^2-\frac{989}{420}x+7\right)}{\int_0^{12}\frac{97}{420}x^2-\frac{989}{420}x+7}\right)-ME=0$$

$$ME = -201.4290476 + \left(\frac{1662}{35}\right)\left(\frac{1312}{277}\right)$$

$$\boldsymbol{ME = 23.4852381Ton*m}$$

Para el cálculo del momento en el punto "REY"

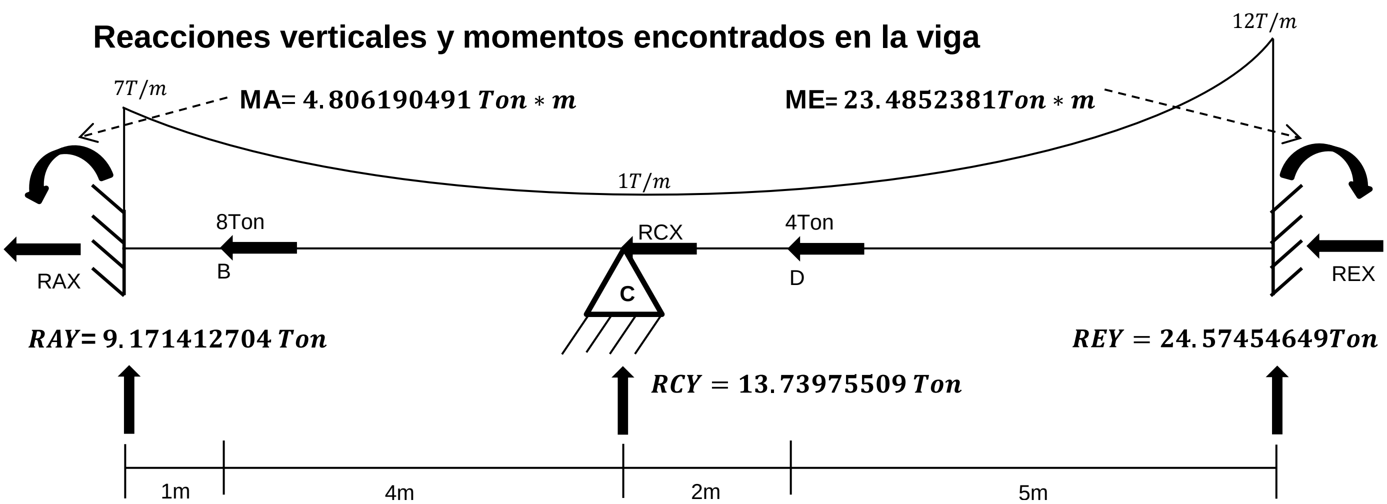
$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$9.171412704 + 13.73975509 - \int_0^{12}\left(\frac{97}{420}x^2-\frac{989}{420}x+7\right) + REY = 0$$

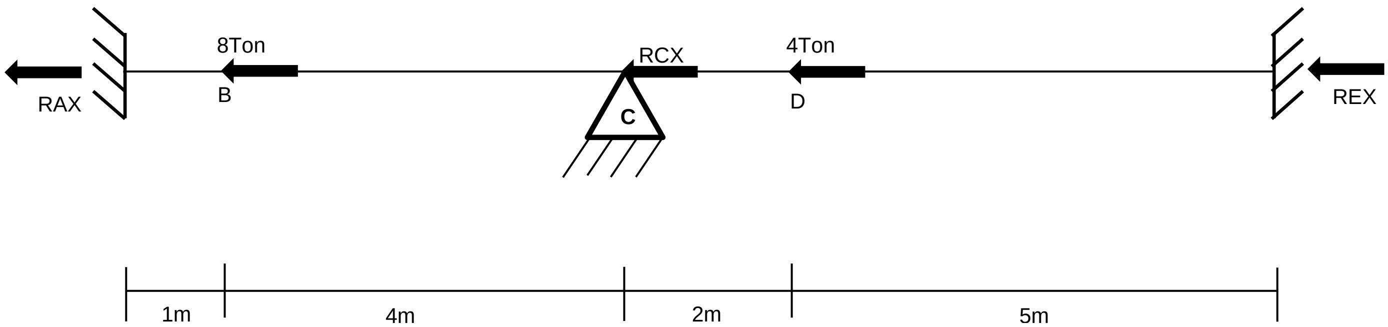
$$REY = -9.171412704 - 13.73975509 + \frac{1662}{35}$$

$$\boldsymbol{REY = 24.57454649Ton}$$

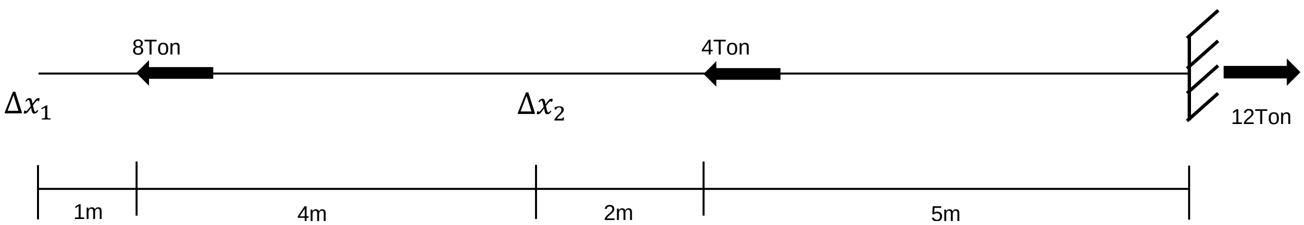
Reacciones verticales y momentos encontrados en la viga



Análisis de cargas horizontales



Viga primaria



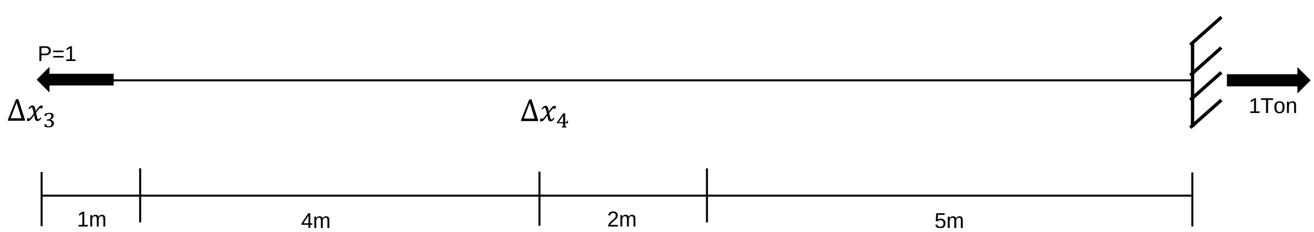
$0m \leq x \leq 1m$

$N = 0$

$1m \leq x \leq 12m$

$N = 12Ton\ (Tensión)$

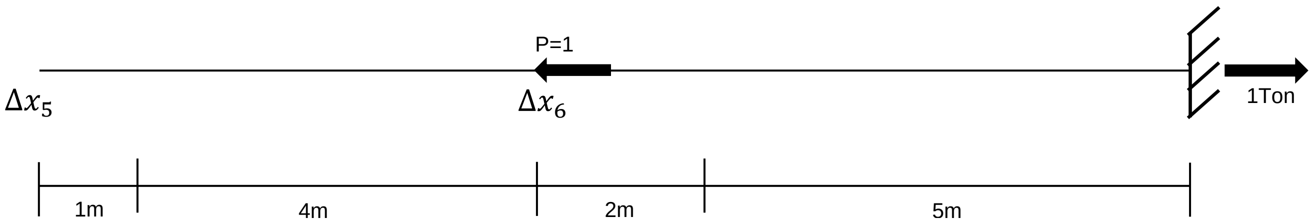
Viga isostática ficticia 1



$0m \leq x \leq 12m$

$N = 1Ton\ (Tensión)$

Viga isostática ficticia 2



$0m \leq x \leq 5m$

$N = 0$

$5m \leq x \leq 12m$

$N = 1Ton\ (Tensión)$

Tomando en cuenta que el desplazamiento horizontal en cualquier punto se calcula con la ecuación

$$\Delta \boldsymbol{x_i} = \frac{\boldsymbol{NnL}}{\boldsymbol{AE}}$$

Dónde:

- Δx: Desplazamiento horizontal
- N: Fuerza axial actuante en el punto donde se requiere conocer el desplazamiento horizontal
- n: Fuerza axial actuante en la viga isostática ficticia “Donde se propone una carga unitaria”
- A: Área de la sección transversal
- E: Módulo de elasticidad.

Calculo de los desplazamientos horizontales

$$\Delta x_1 = \frac{(0)(1)(0)}{AE} + \frac{(12)(1)(11)}{AE} = \boldsymbol{\frac{132}{AE}}$$

$$\Delta x_2 = \frac{(0)(1)(0)}{AE} + \frac{(12)(0)(4)}{AE} + \frac{(12)(1)(7)}{AE} = \boldsymbol{\frac{84}{AE}}$$

$$\Delta x_3 = \frac{(1)(1)(12)}{AE} = \boldsymbol{\frac{12}{AE}}$$

$$\Delta x_4 = \frac{(1)(0)(5)}{AE} + \frac{(1)(1)(7)}{AE} = \boldsymbol{\frac{7}{AE}}$$

$$\Delta x_5 = \frac{(0)(1)(5)}{AE} + \frac{(1)(1)(7)}{AE} = \boldsymbol{\frac{7}{AE}}$$

$$\Delta x_6 = \frac{(0)(0)(5)}{AE} + \frac{(1)(1)(7)}{AE} = \boldsymbol{\frac{7}{AE}}$$

Al igual que Para el cálculo de las reacciones verticales, los desplazamientos, $\Delta \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{\frac{NnL}{AE}}$ se asocian a las reacciones horizontales de los apoyos por lo que nuestro sistema de ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$\Delta x_1 + \Delta x_3 RAX + \Delta x_5 RCX = 0$$

$$\Delta x_2 + \Delta x_4 RAX + \Delta x_6 RCX = 0$$

$$\boldsymbol{\frac{132}{AE} + \frac{12}{AE} RAX + \frac{7}{AE} RCX = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{84}{AE} + \frac{7}{AE} RAX + \frac{7}{AE} RCX = 0}$$

Resolviendo el sistema:

$\boldsymbol{RAX = -\frac{48}{5} Ton}$ $\boldsymbol{RCX = -\frac{12}{5} Ton}$

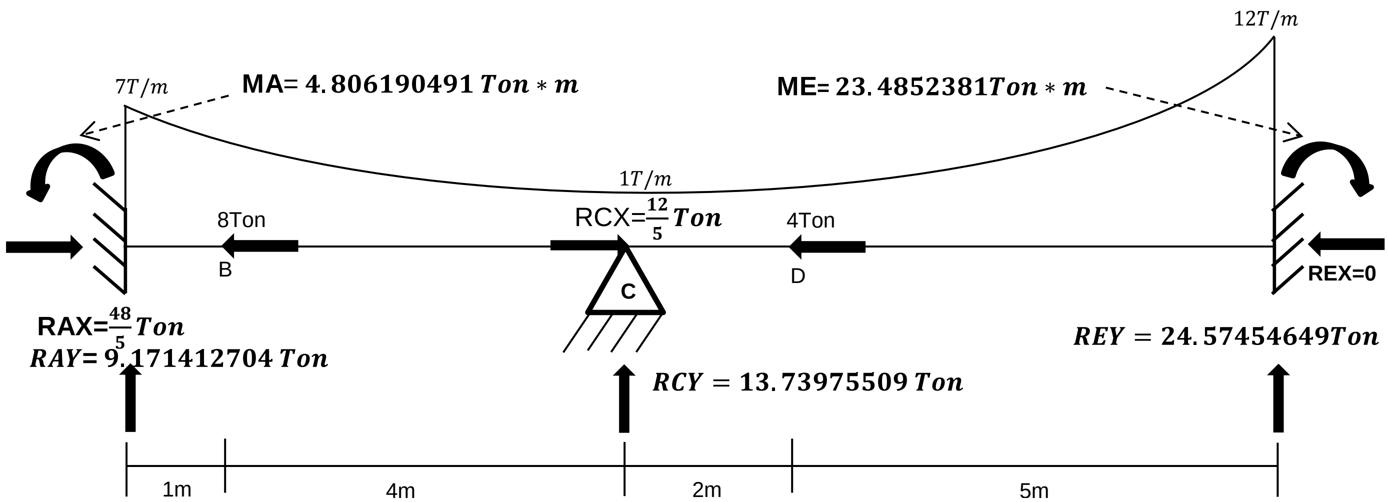
Para el cálculo de la reacción horizontal en E "REX"

$$\sum F_X = 0$$

$$\frac{48}{5}Ton - 8Ton + \frac{12}{5}Ton - 4Ton - REX = 0$$

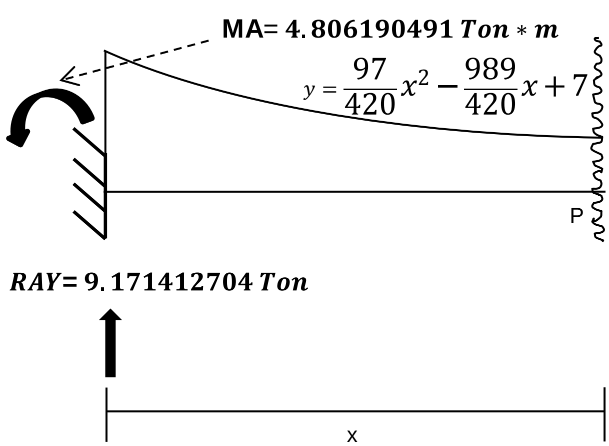
$$\boldsymbol{REX = 0}$$

Viga en equilibrio estático:



Calculo de las ecuaciones de momento flexionante, fuerza cortante.

Tramo 1 $\boldsymbol{0m \leq x \leq 5m}$



$\sum M_P$

$$M_1 = 9.171412704x - 4.806190491 - \int_0^x \frac{97}{420}x^2 - \frac{989}{420}x + 7\left(x - \frac{\int_0^x x\left(\frac{97}{420}x^2 - \frac{989}{420}x + 7\right)}{\int_0^x \frac{97}{420}x^2 - \frac{989}{420}x + 7}\right)$$

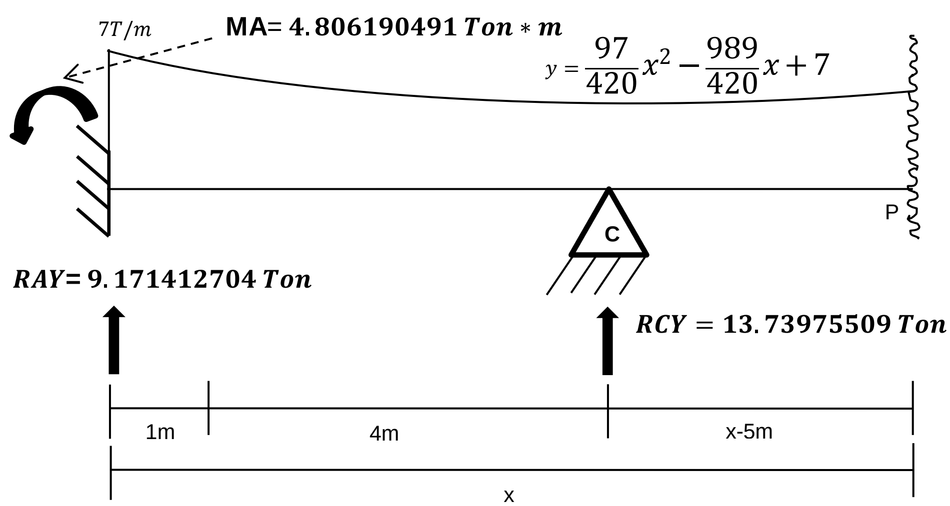
$$\boldsymbol{M_1 = -\frac{97}{5040}x^4 + \frac{989}{2520}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 9.171412704x - 4.806190491}$$

$$\boldsymbol{V_1 = -\frac{97}{1260}x^3 + \frac{989}{840}x^2 - 7x + 9.171412704}$$

Evaluando las ecuaciones, para verificar la continuidad con las ecuaciones siguientes:

L(x)	M1	V1
0m	$-4.806190491Ton * m$	$9.171412704Ton$
5m	$-9.42035713Ton * m$	$-6.017079359Ton$

Tramo 2 $\boldsymbol{5m \leq x \leq 12m}$



$\sum M_P$

$$M_2 = 9.171412704x - 4.806190491 - \int_0^x \frac{97}{420}x^2 - \frac{989}{420}x + 7\left(x - \frac{\int_0^x x\left(\frac{97}{420}x^2 - \frac{989}{420}x + 7\right)}{\int_0^x \frac{97}{420}x^2 - \frac{989}{420}x + 7}\right)$$
$$+13.73975509x - 68.69877545$$

$$M_2 = -\frac{97}{5040}x^4 + \frac{989}{2520}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 22.91116779x - 73.50496594$$

$$V_2 = -\frac{97}{1260}x^3 + \frac{989}{840}x^2 - 7x + 22.91116779$$

Evaluando las ecuaciones, para verificar la continuidad con las ecuaciones siguientes:

L(x)	M2	V2
5m	$-9.42357149 Ton * m$	$7.722675727 Ton$
12m	$-23.48523811 * m$	$-24.57454649 Ton$

Evaluando las ecuaciones de momento y cortante para dibujar los diagramas:

L(x)	Cortante	Momento
0.00	9.17141270	-4.806190491
0.20	7.81789207	-3.108799061
0.40	6.55486667	-1.673000647
0.60	5.37864128	-0.481065726
0.80	4.28552064	0.48399618
1.00	3.27180953	1.238436499
1.20	2.33381270	1.797767611
1.40	1.46783493	2.17676285
1.60	0.67018096	2.389456502
1.80	-0.06284444	2.449143805
2.00	-0.73493650	2.368380949
2.20	-1.34979047	2.158985077
2.40	-1.91110158	1.832034284
2.60	-2.42256507	1.397867619
2.80	-2.88787618	0.86608508
3.00	-3.31073015	0.245547621
3.20	-3.69482222	-0.455622854
3.40	-4.04384761	-1.230043488
3.60	-4.36150158	-2.071070471
3.80	-4.65147936	-2.972799041
4.00	-4.91747618	-3.930063485
4.20	-5.16318730	-4.938437134

4.40	-5.39230793	-5.994232371
4.60	-5.60853333	-7.094500624
4.80	-5.81555872	-8.237032369
5.00	-6.01707936	-9.42035713
5.00	7.72267573	-9.420357149
5.20	7.52296462	-7.89579248
5.40	7.32136779	-6.411297017
5.60	7.11419001	-4.967617427
5.80	6.89773604	-3.566239425
6.00	6.66831065	-2.209387771
6.20	6.42221858	-0.900026277
6.40	6.15576462	0.358142202
6.60	5.86525350	1.56067576
6.80	5.54699001	2.702393445
7.00	5.19727890	3.777375257
7.20	4.81242493	4.778962148
7.40	4.38873287	5.699756023
7.60	3.92250747	6.53161974
7.80	3.41005350	7.265677108
8.00	2.84767573	7.892312888
8.20	2.23167890	8.401172795
8.40	1.55836779	8.781163496
8.60	0.82404716	9.02045261
8.80	0.02502176	9.106468707
9.00	-0.84240364	9.025901313
9.20	-1.78192427	8.764700903
9.40	-2.79723538	8.308078905
9.60	-3.89203221	7.640507701
9.80	-5.07000999	6.745720624
10.00	-6.33486396	5.60671196
10.20	-7.69028935	4.205736947
10.40	-9.13998142	2.524311774
10.60	-10.68763538	0.543213586
10.80	-12.33694650	-1.757519522
11.00	-14.09160999	-4.398588504
11.20	-15.95532110	-7.401433359
11.40	-17.93177507	-10.78823313
11.60	-20.02466713	-14.58190593
11.80	-22.23769253	-18.80610888
12.00	-24.57454650	-23.48523817

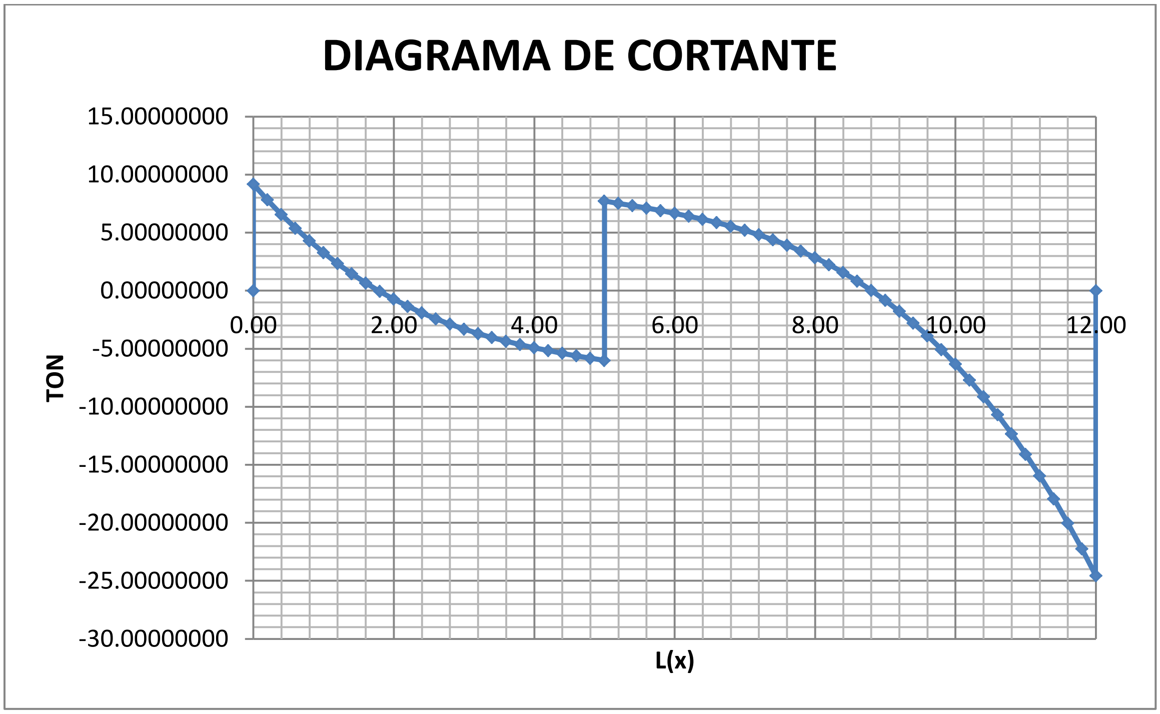


DIAGRAMA DE CORTANTE
15.00000000
10.00000000
5.00000000
0.00000000
-5.00000000
-10.00000000
-15.00000000
-20.00000000
-25.00000000
-30.00000000
0.00
2.00
4.00
6.00
8.00
10.00
12.00
TON
L(x)

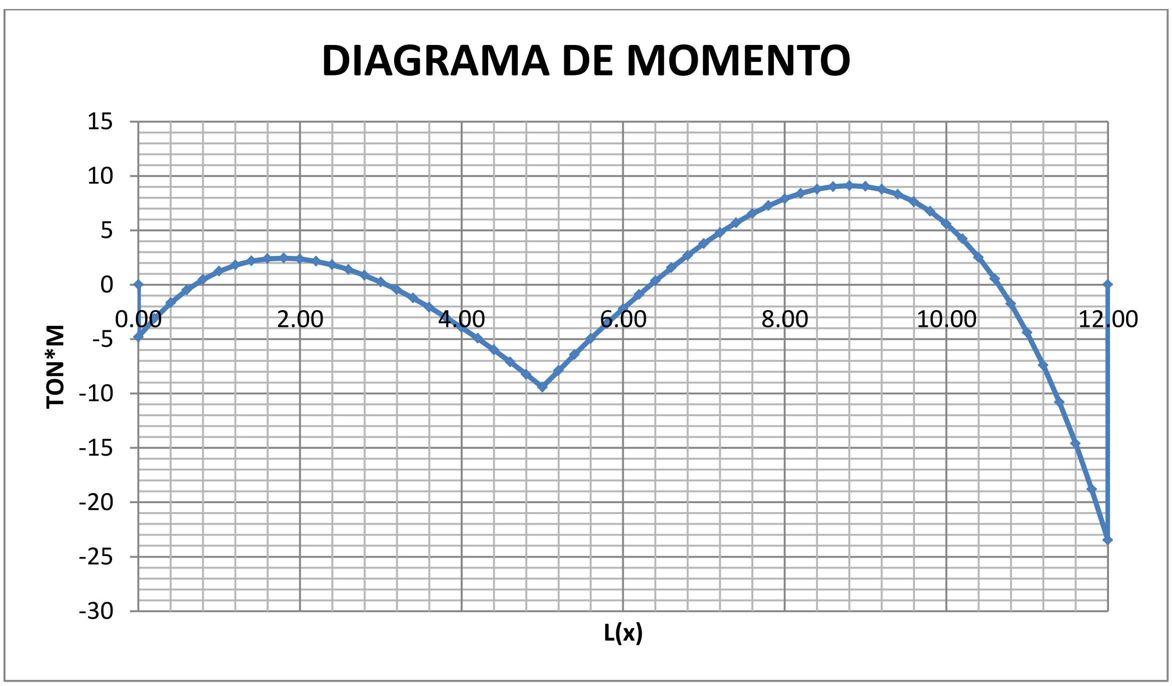
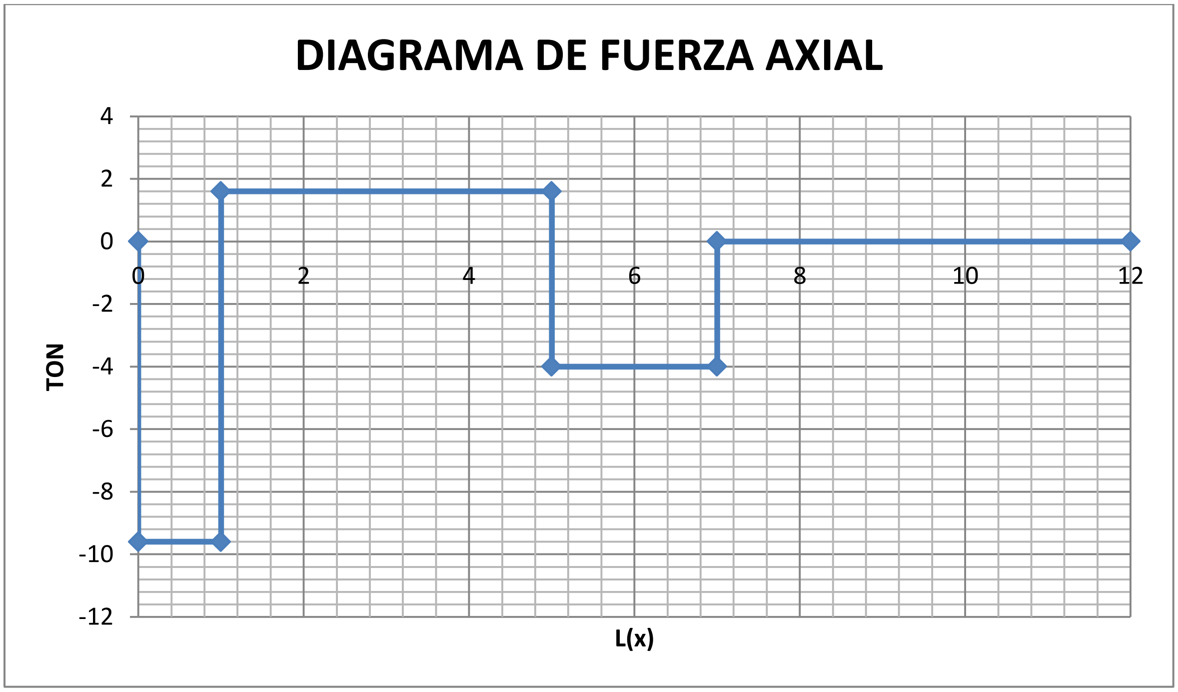


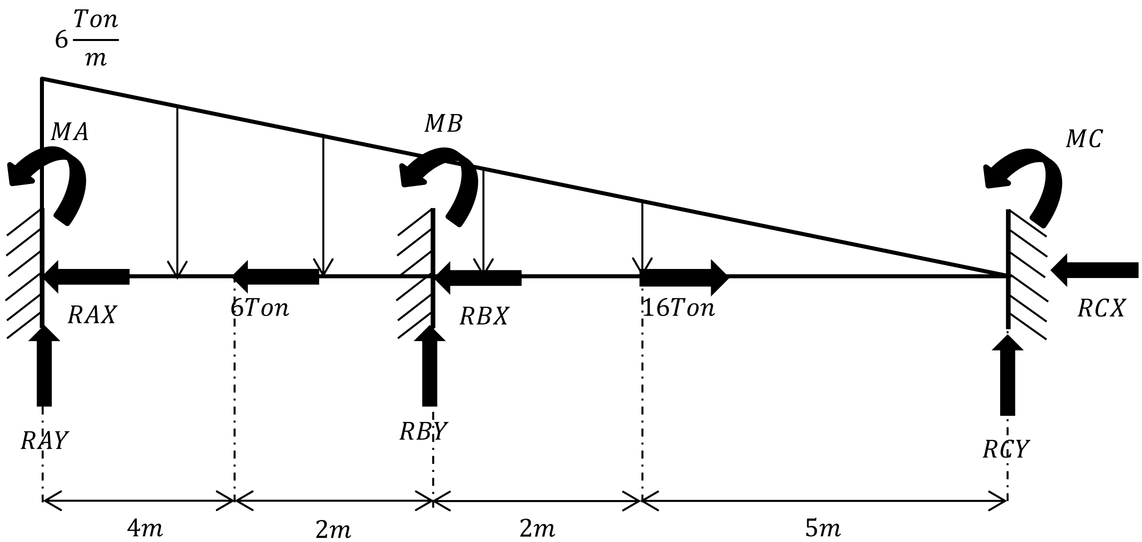
DIAGRAMA DE MOMENTO
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
0.00
2.00
4.00
6.00
8.00
10.00
12.00
TON*M
L(x)

Diagrama de fuerza axial

L(x)	N
0m-1m	48/5Ton (C)
1m-5m	8/5 Ton (C)
5m-7m	4Ton (C)
7m-12m	0



6.- De la siguiente viga, determine las reacciones en los soportes mostrados, las funciones que describen la variación del momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial; producto de la acción del sistema de fuerzas externo, dibuje los diagramas correspondientes a dichas funciones.



Verificación del grado de indeterminación de la viga:

Recordando que el grado de indeterminación en términos vanos es la diferencia entre el número de incógnitas de nuestra estructura “I” y el número de ecuaciones de equilibrio estático asociadas a su plano “E”

$$\boldsymbol{I - E = 9 - 3 = 6}$$

Como notamos en este caso, encontramos una viga hiperestática, para dar solución a este problema emplearemos el método de flexibilidades (trabajo virtual en vigas) que si bien ya fue descrito en ejercicios anteriores, valdrá la pena recordarlo, ya que en este ejemplo, habrán de analizarse tanto las cargas verticales como las horizontales.

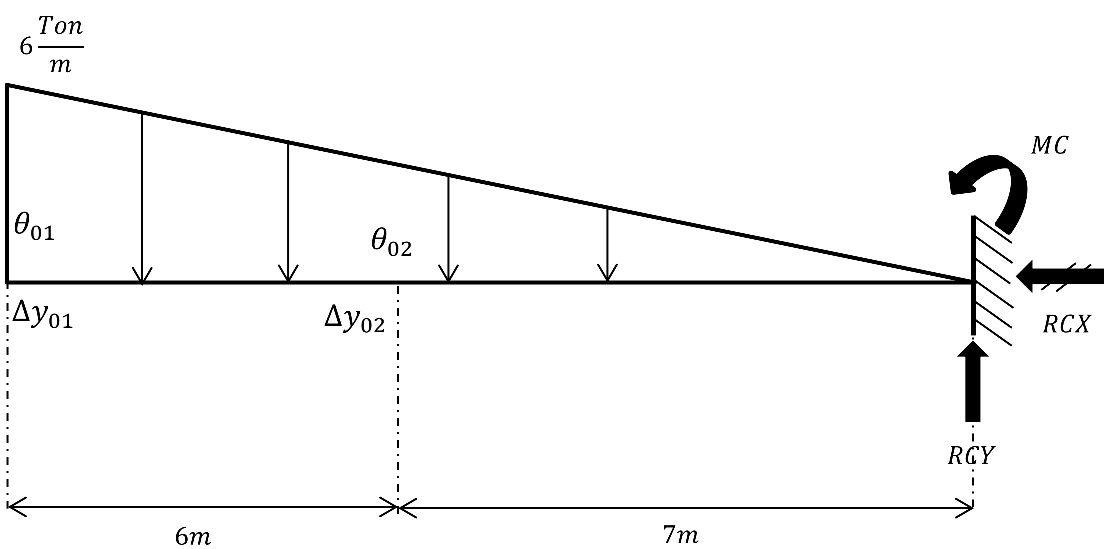
Como primer paso se idealizara una “viga primaria” la cual tendrá como principales características que será: isostática y conservara las cargas originales, notando que al desaparecer los apoyos necesarios para que la viga sostenga las características antes mencionadas, liberaremos desplazamientos, los cuales habrá que señalar en el diagrama que representa dicha viga primaria los cuales se nombraran en este caso:

Para los giros θ_i

Para los desplazamientos verticales Δy_i

Para los desplazamientos horizontales que posteriormente serán calculados Δx_i

Nota: primero se realizara el análisis de cargas verticales, una vez efectuado dicho análisis se calcularán las reacciones horizontales en los apoyos.

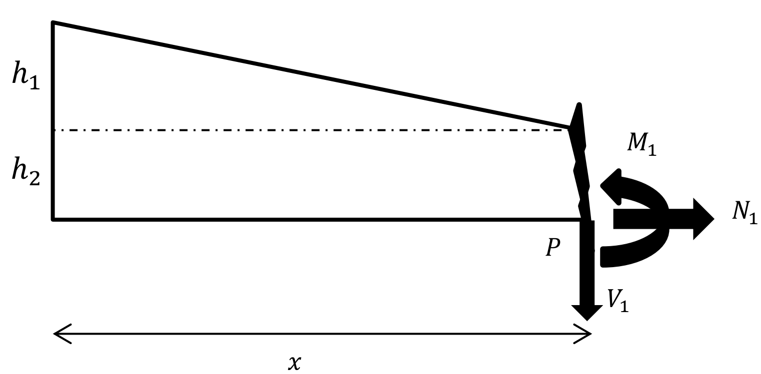


Tomando en cuenta que la ecuación para calcular la deflexión en cualquier punto es:

$$\Delta y_i = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mmdx}{EI}$$

$$\theta_i = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mmdx}{EI}$$

Calculo de las ecuaciones de momento para la viga primaria.



Por trigonometría definimos:

$$h_1 = \frac{6x}{13}$$

$$h_2 = 6 - \frac{6x}{13}$$

$$\boldsymbol{0 \leq x \leq 13m}$$

$$\sum M_P = 0$$

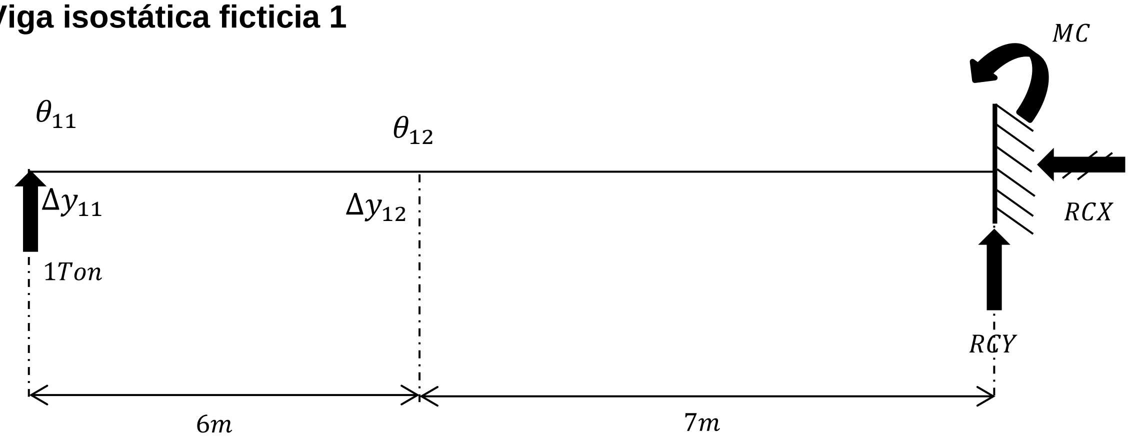
$$M_1 = -\frac{\left(\frac{6x}{13}\right)(x)}{2}\left[\frac{2x}{3}\right] - \left(6 - \frac{6x}{13}\right)(x)\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M_1 = -\frac{2x^3}{13} - 3x^2 + \frac{3x^3}{13}$$

$$\boldsymbol{M_1 = \frac{x^3}{13} - 3x^2}$$

El siguiente paso del método de trabajo virtual es ir creando tantas vigas isostáticas ficticias sean necesarias en las cuales las cargas originalmente planteadas de la viga se eliminaran y se pondrá una carga unitaria por cada desplazamiento liberado a cada viga corresponderá una carga unitaria, a manera que estas cargas unitarias restrinjan dichos desplazamientos, para cada viga isostática ficticia habrá que calcular también las ecuaciones de momento flexionante, dichas vigas se describen a continuación.

Viga isostática ficticia 1

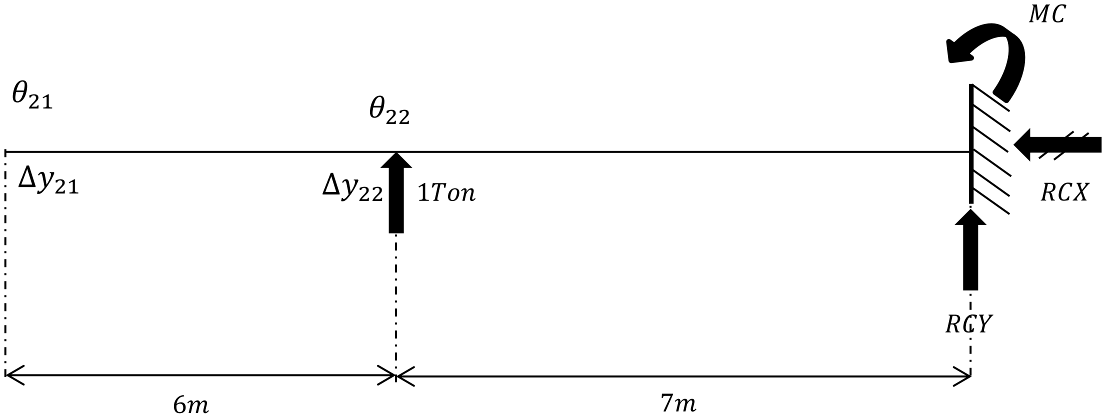


Calculo de las ecuaciones de momento flexionante.

$\boldsymbol{0 \leq x \leq 13m}$

$M = x$

Viga isostática ficticia 2



Calculo de las ecuaciones de momento flexionante.

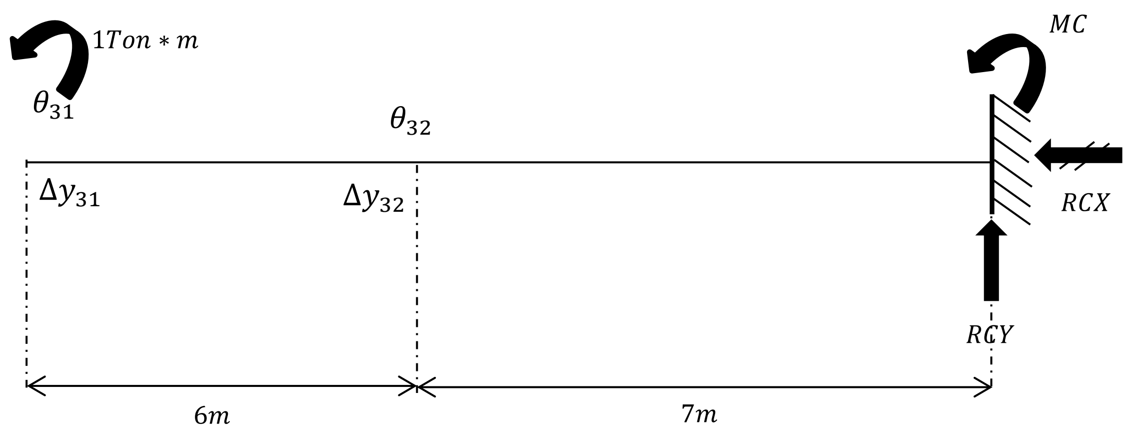
$\boldsymbol{0 \leq x \leq 6m}$

$M = 0$

$\boldsymbol{6m \leq x \leq 13m}$

$M = x - 6$

Viga isostática ficticia 3

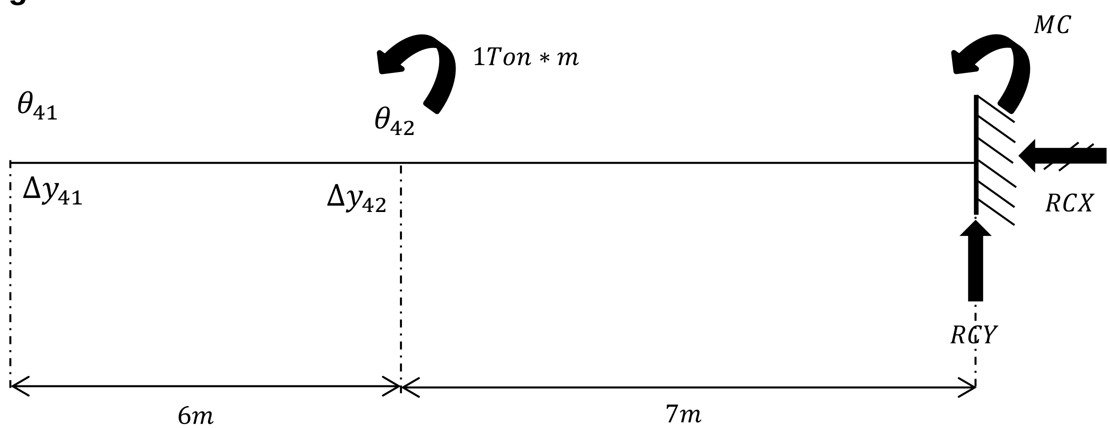


Calculo de las ecuaciones de momento flexionante.

$\boldsymbol{0 \leq x \leq 13m}$

$M = -1$

Viga isostática ficticia 4



Calculo de las ecuaciones de momento flexionante.

$\boldsymbol{0 \leq x \leq 6m}$

$M = 0$

$\boldsymbol{6m \leq x \leq 13m}$

$M = -1$

Calculo de los desplazamientos liberados

$$\Delta y_i = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mmdx}{EI}$$

$$\Delta_{01} = \frac{1}{EI}\int_0^{13}\left(\frac{x^3}{13} - 3x^2\right)(x)dx = -\frac{\mathbf{15708.55}}{\boldsymbol{EI}}$$

$$\Delta_{02} = \frac{1}{EI}\int_0^{6}\left(\frac{x^3}{13} - 3x^2\right)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{13}\left(\frac{x^3}{13} - 3x^2\right)(x-6)dx = -\frac{\mathbf{6116.142308}}{\boldsymbol{EI}}$$

$$\Delta_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^{13}(x)(x)dx = \frac{\mathbf{2197}}{\mathbf{3EI}}$$

$$\Delta_{12} = \frac{1}{EI}\int_0^{6}(x)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{13}(x)(x-6)dx = \frac{\mathbf{784}}{\mathbf{3EI}}$$

$$\Delta_{21} = \frac{1}{EI}\int_0^{6}(0)(x)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{13}(x-6)(x)dx = \frac{\mathbf{784}}{\mathbf{3EI}}$$

$$\Delta_{22} = \frac{1}{EI}\int_0^{6}(0)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{13}(x-6)(x-6)dx = \frac{\mathbf{343}}{\mathbf{3EI}}$$

$$\Delta_{31} = \frac{1}{EI}\int_0^{13}(-1)(x)dx = -\frac{\mathbf{169}}{\mathbf{2EI}}$$

$$\Delta_{32} = \frac{1}{EI}\int_0^{6}(-1)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{13}(-1)(x-6)dx = -\frac{\mathbf{49}}{\mathbf{2EI}}$$

$$\Delta_{41} = \frac{1}{EI}\int_0^{6}(0)(x)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{13}(-1)(x)dx = -\frac{\mathbf{133}}{\mathbf{2EI}}$$

$$\Delta_{42} = \frac{1}{EI}\int_0^{6}(0)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{13}(-1)(x-6)dx = -\frac{\mathbf{49}}{\mathbf{2EI}}$$

Calculo de los giros liberados

$$\theta_i = \int_{L_1}^{L_2}\frac{Mmdx}{EI}$$

$$\theta_{01} = \frac{1}{EI}\int_0^{13}\left(\frac{x^3}{13} - 3x^2\right)(-1)dx = \frac{\mathbf{5691}}{\mathbf{4EI}}$$

$$\theta_{02} = \frac{1}{EI}\int_0^6 \left(\frac{x^3}{13} - 3x^2\right)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{13} \left(\frac{x^3}{13} - 3x^2\right)(-1)dx = \frac{\mathbf{75747}}{\mathbf{52}\boldsymbol{EI}}$$

$$\theta_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^{13} (x)(-1)dx = -\frac{\mathbf{169}}{\mathbf{2}\boldsymbol{EI}}$$

$$\theta_{12} = \frac{1}{EI}\int_0^6 (x)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{13} (x)(-1)dx = -\frac{\mathbf{133}}{\mathbf{2}\boldsymbol{EI}}$$

$$\theta_{21} = \frac{1}{EI}\int_0^6 (0)(-1)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{13} (x-6)(-1)dx = -\frac{\mathbf{49}}{\mathbf{2}\boldsymbol{EI}}$$

$$\theta_{22} = \frac{1}{EI}\int_0^6 (0)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{13} (x-6)(-1)dx = -\frac{\mathbf{49}}{\mathbf{2}\boldsymbol{EI}}$$

$$\theta_{31} = \frac{1}{EI}\int_0^{13} (-1)(-1)dx = \frac{\mathbf{13}}{\boldsymbol{EI}}$$

$$\theta_{32} = \frac{1}{EI}\int_0^6 (-1)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{13} (-1)(-1)dx = \frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{EI}}$$

$$\theta_{41} = \frac{1}{EI}\int_0^6 (0)(-1)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{13} (-1)(-1)dx = \frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{EI}}$$

$$\theta_{42} = \frac{1}{EI}\int_0^6 (0)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_6^{13} (-1)(-1)dx = \frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{EI}}$$

Asociando los giros y desplazamientos liberados a las reacciones en los empotramientos y construyendo un sistema de ecuaciones de flexibilidades por compatibilidad de deflexiones.

$$\Delta_{01} + \Delta_{11}RAY + \Delta_{21}RBY + \Delta_{31}MA + \Delta_{41}MB = 0$$

$$\Delta_{02} + \Delta_{12}RAY + \Delta_{22}RBY + \Delta_{32}MA + \Delta_{42}MB = 0$$

$$\theta_{01} + \theta_{11}RAY + \theta_{21}RBY + \theta_{31}MA + \theta_{41}MB = 0$$

$$\theta_{02} + \theta_{12}RAY + \theta_{22}RBY + \theta_{32}MA + \theta_{42}MB = 0$$

Sustituyendo:

$$+\frac{\mathbf{2197}}{\mathbf{3EI}}RAY + \frac{\mathbf{784}}{\mathbf{3EI}}RBY - \frac{\mathbf{169}}{\mathbf{2EI}}MA - \frac{\mathbf{133}}{\mathbf{2EI}}MB = \frac{\mathbf{15708.55}}{\mathbf{EI}}$$

$$+\frac{\mathbf{784}}{\mathbf{3EI}}RAY + \frac{\mathbf{343}}{\mathbf{3EI}}RBY - \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{2EI}}MA - \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{2EI}}MB = \frac{\mathbf{6116.142308}}{\mathbf{EI}}$$

$$-\frac{\mathbf{169}}{\mathbf{2EI}}RAY - \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{2EI}}RBY + \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{EI}}MA + \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{EI}}MB = -\frac{\mathbf{5691}}{\mathbf{4EI}}$$

$$-\frac{\mathbf{133}}{\mathbf{2EI}}RAY - \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{2EI}}RBY + \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{EI}}MA + \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{EI}}MB = -\frac{\mathbf{75747}}{\mathbf{52EI}}$$

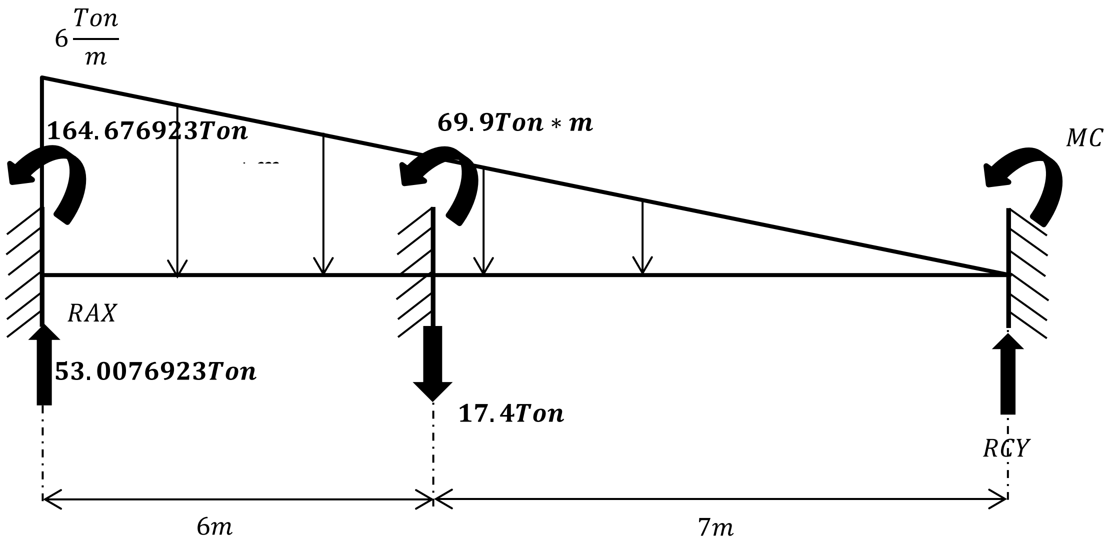
Solucionando el sistema de ecuaciones:

$\boldsymbol{RAY \approx 53.0076923Ton}$ $\uparrow$

$\boldsymbol{RBY \approx -17.4Ton}$ $\downarrow$

$\boldsymbol{MA \approx 164.676923Ton * m}$

$\boldsymbol{MB \approx 69.9Ton * m}$



Calculo de la reacción vertical y el momento en el empotramiento "C"

$$\sum F_Y = 0$$

$$53.0076923Ton - 17.4Ton + RCY - \frac{\left(\frac{6Ton}{m}\right)(13m)}{2} = 0$$

$$\boldsymbol{RCY = 3.3923077Ton}$$

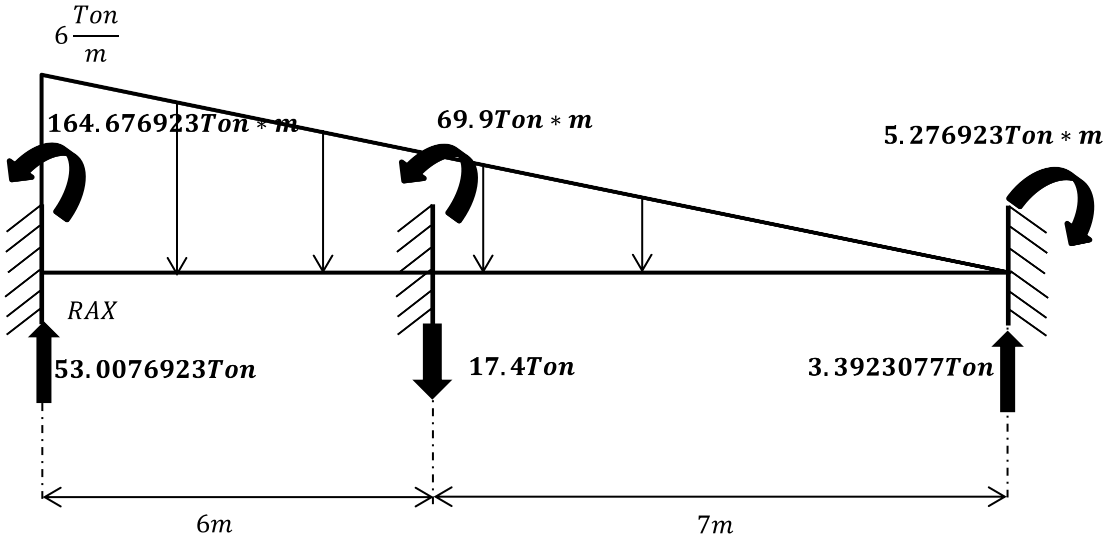
$$\sum M_A = 0$$

$$-164.676923Ton*m - 69.9Ton*m + (17.4Ton)(6m) - (3.3923077Ton)(13m)$$

$$+\frac{\left(\frac{6Ton}{m}\right)(13m)}{2}\left[\frac{13}{3}m\right] = 0$$

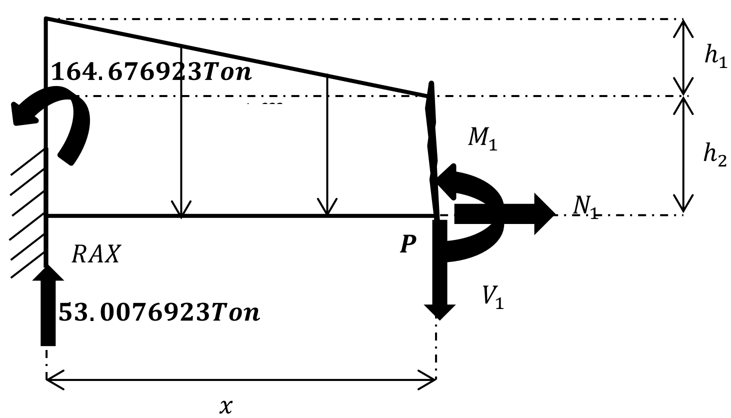
$$\boldsymbol{MC = 5.276923Ton*m}$$

Reacciones verticales y momentos encontrados en la viga



Calculo de las ecuaciones de momento flexionante y fuerza cortante

$\mathbf{0 \leq x \leq 6m}$



Por trigonometría definimos:

$$h_1 = \frac{6x}{13}$$

$$h_2 = 6 - \frac{6x}{13}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$M_1 = -\frac{\left(\frac{6x}{13}\right)(x)}{2}\left[\frac{2x}{3}\right] - \left(6 - \frac{6x}{13}\right)(x)\left(\frac{x}{2}\right) + (53.0076923)(x) - 164.676923$$

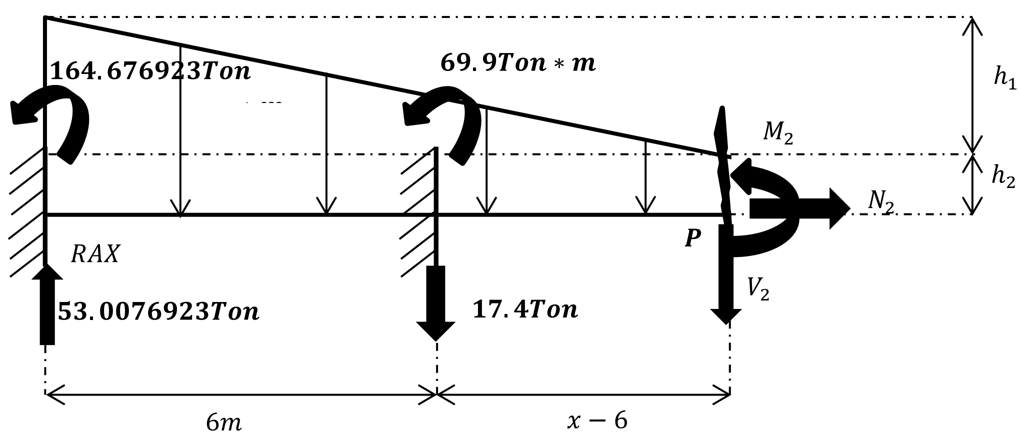
$$M_1 = -\frac{2x^3}{13} - 3x^2 + \frac{3x^3}{13} + 53.0076923x - 164.676923$$

$$\boldsymbol{M_1 = \frac{x^3}{13} - 3x^2 + 53.0076923x - 164.676923}$$

$$\boldsymbol{V_1 = \frac{3x^2}{13} - 6x + 53.0076923}$$

L(x)	Momento	Cortante
0	$-164.676923 Ton * m$	$53.0076923 Ton$
6m	$61.98461542 Ton * m$	$25.315385 Ton$

$\boldsymbol{6m \leq x \leq 13m}$



$$h_1 = \frac{6x}{13}$$

$$h_1 = 6 - \frac{6x}{13}$$

$$\sum M_P = 0$$

$$M_2 = -\frac{\left(\frac{6x}{13}\right)(x)}{2}\left[\frac{2x}{3}\right] - \left(6 - \frac{6x}{13}\right)(x)\left(\frac{x}{2}\right) + (53.0076923)(x) - 164.676923$$

$$-(17.4)(x-6) - 69.9$$

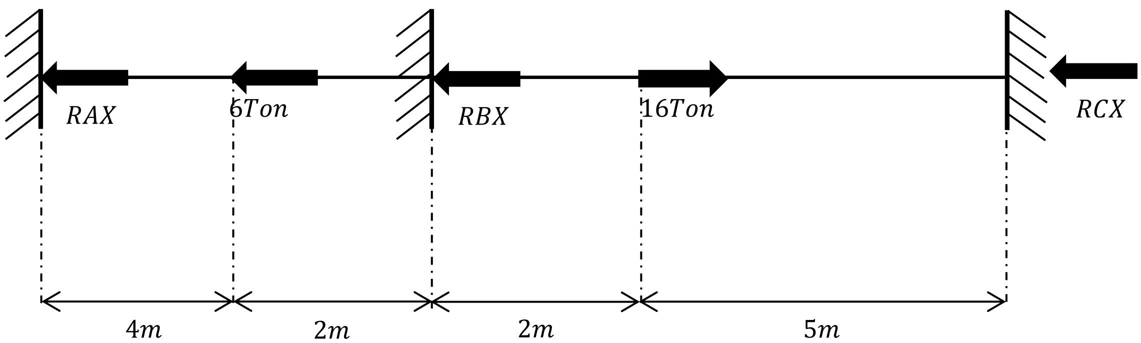
$$M_2 = -\frac{2x^3}{13} - 3x^2 + \frac{3x^3}{13} + 53.0076923x - 164.676923 - 17.4x + \frac{522}{5} - 69.9$$

$$\boldsymbol{M_2 = \frac{x^3}{13} - 3x^2 + 35.6076923x - 130.176923}$$

$$\boldsymbol{V_2 = \frac{3x^2}{13} - 6x + 35.6076923}$$

L(x)	Momento	Cortante
6m	$-7.915385 Ton * m$	$7.915385 Ton$
13m	$-5.276923 Ton * m$	$-3.392308 Ton$

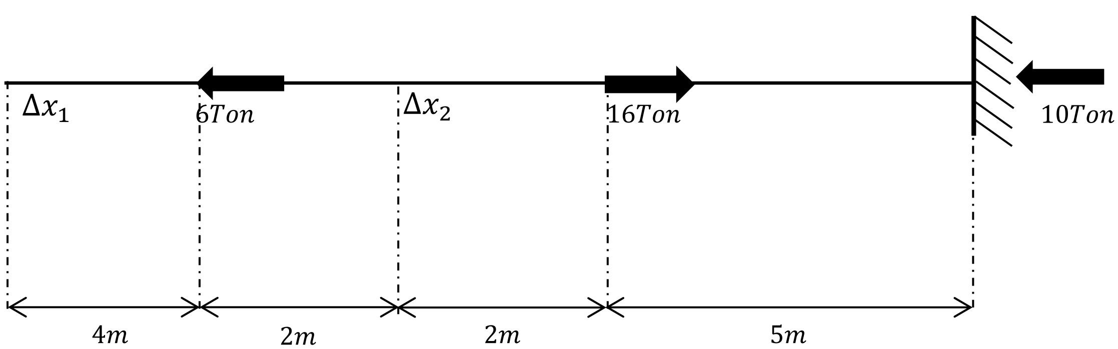
Análisis de cargas horizontales.



Para encontrar las reacciones horizontales en los apoyos, se utilizara un procedimiento similar al efectuado para calcular las reacciones en el sentido vertical, primeramente idealizaremos una viga primaria, cuyas características principales son: será estáticamente determinada y conservara el sistema de cargas originales que actúan sobre la viga, debemos tomar en cuenta que al quitar los apoyos necesarios para hacer isostática a nuestra viga primaria, hemos liberado desplazamientos, a los cuales llamaremos como anteriormente mencionamos: Δx_i

En este caso cada viga debe resolverse y obtenerse la fuerza axial actuante para cada tramo de viga

Viga primaria



$0m \leq x \leq 4m$

$N = 0$

$4m \leq x \leq 8m$

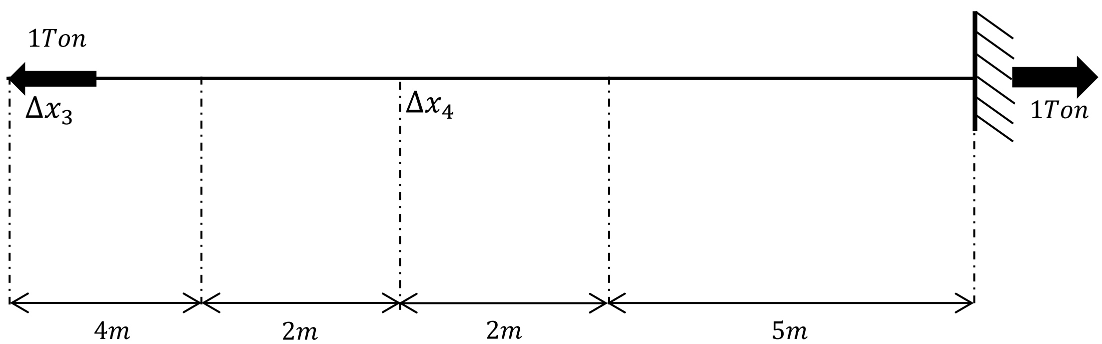
$N = 6Ton\ (Tensión)$

$8m \leq x \leq 13m$

$N = 10Ton\ (compresión)$

Como se hizo anteriormente, se proponen vigas isostáticas ficticias, en las cuales se pondrán cargas unitarias en aquel punto donde se liberaron desplazamientos, se propondrá una viga isostática ficticia por cada desplazamiento liberado en la cual se pondrá una carga unitaria asociada a dichos desplazamientos como se hizo en el análisis de cargas verticales, a su vez se señalaran también en ellas los desplazamientos horizontales liberados Δx_i se resolverán y se obtendrá también la fuerza axial actuante en cada tramo de viga.

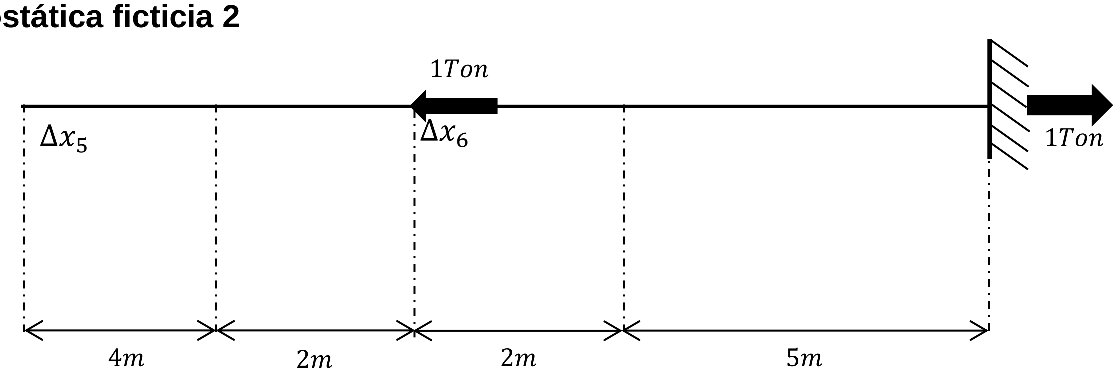
Viga isostática ficticia 1



$0m \leq x \leq 13m$

$N = 1Ton\ (Tensión)$

Viga isostática ficticia 2



$0m \leq x \leq 6m$

$N = 0$

$6m \leq x \leq 13m$

$N = 1Ton\ (Tensión)$

Calculo de los desplazamientos horizontales liberados.

$$\Delta \boldsymbol{x_i} = \frac{\boldsymbol{NnL}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_1 = \frac{(0)(1)(4)}{AE} + \frac{(6)(1)(4)}{AE} + \frac{(-10)(1)(5)}{AE} = -\frac{\mathbf{26}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_2 = \frac{(0)(0)(4)}{AE} + \frac{(6)(0)(2)}{AE} + \frac{(6)(1)(2)}{AE} + \frac{(-10)(1)(5)}{AE} = -\frac{\mathbf{38}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_3 = \frac{(1)(1)(13)}{AE} = \frac{\mathbf{13}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_4 = \frac{(1)(0)(6)}{AE} + \frac{(1)(1)(7)}{AE} = \frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_5 = \frac{(0)(1)(6)}{AE} + \frac{(1)(1)(7)}{AE} = \frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta x_6 = \frac{(0)(0)(6)}{AE} + \frac{(1)(1)(7)}{AE} = \frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{AE}}$$

Asociando los desplazamientos liberados con las reacciones horizontales en los empotramientos para idealizar un sistema de ecuaciones de flexibilidades por compatibilidad de deflexiones.

$$\Delta \boldsymbol{x_1} + \Delta \boldsymbol{x_3 RAX} + \Delta \boldsymbol{x_5 RBX} = \mathbf{0}$$

$$\Delta \boldsymbol{x_2} + \Delta \boldsymbol{x_4 RAX} + \Delta \boldsymbol{x_6 RBX} = \mathbf{0}$$

Sustituyendo:

$$+\frac{\mathbf{13}}{\boldsymbol{AE}}RAX+\frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{AE}}RBX=\frac{\mathbf{26}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$+\frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{AE}}RAX+\frac{\mathbf{7}}{\boldsymbol{AE}}RBX=\frac{\mathbf{38}}{\boldsymbol{AE}}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{RAY=-2Ton}$$

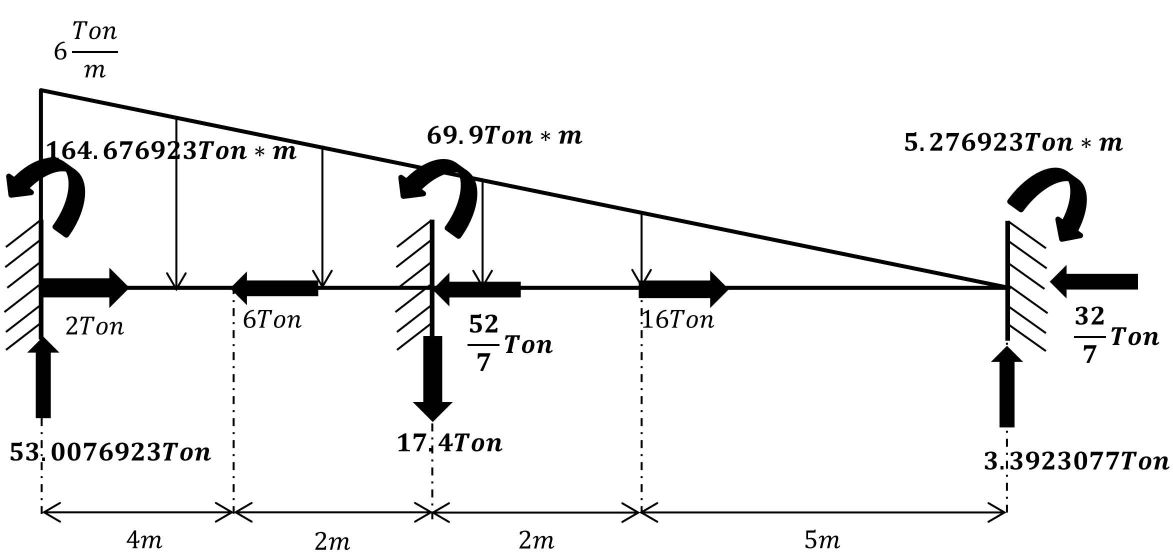
$$\boldsymbol{RBY=\frac{52}{7}Ton}$$

$$\sum F_X=0$$

$$-RCX+2Ton-6Ton-\frac{52}{7}Ton+16Ton=0$$

$$\boldsymbol{RCX=\frac{32}{7}Ton}$$

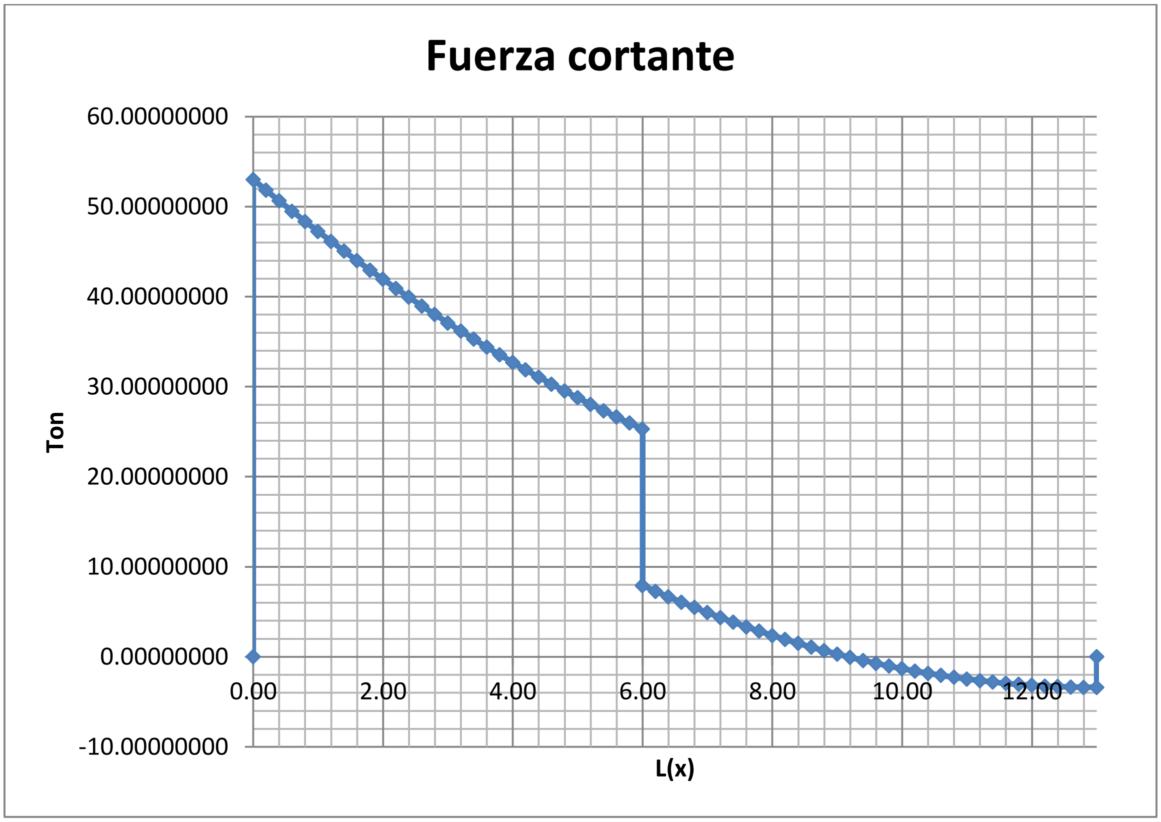
Viga en equilibrio estático

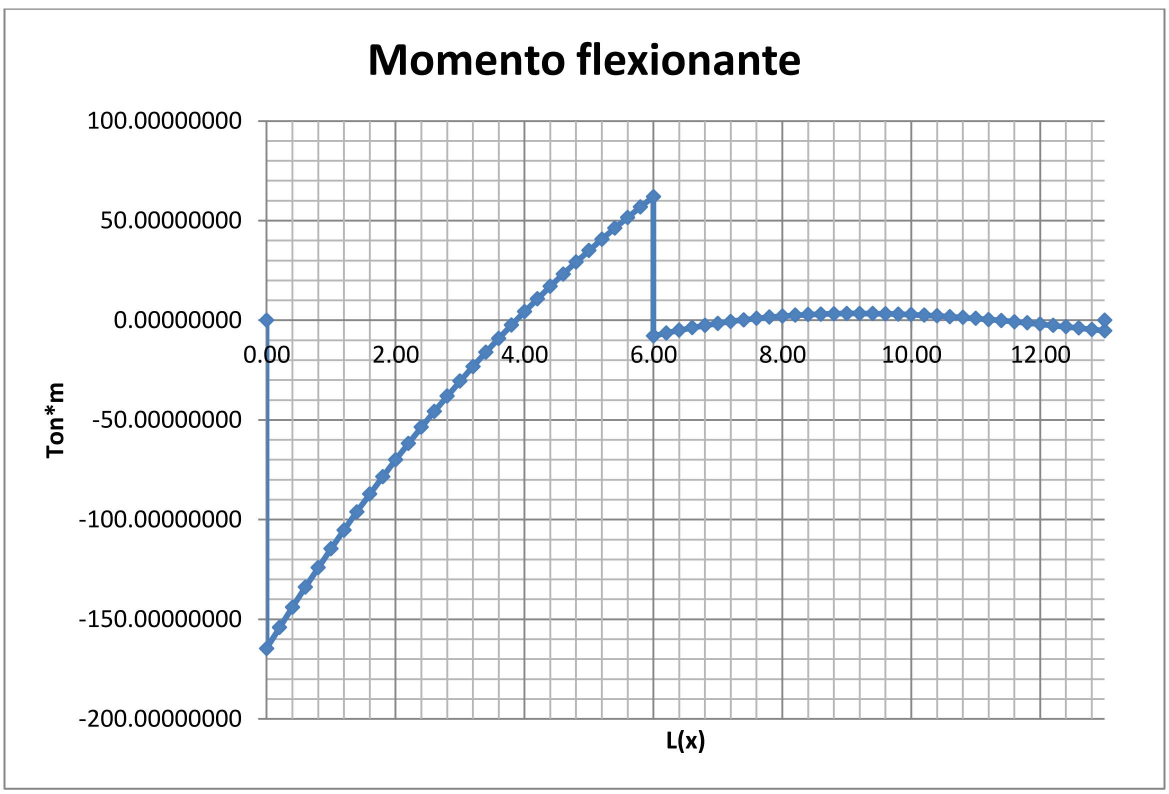


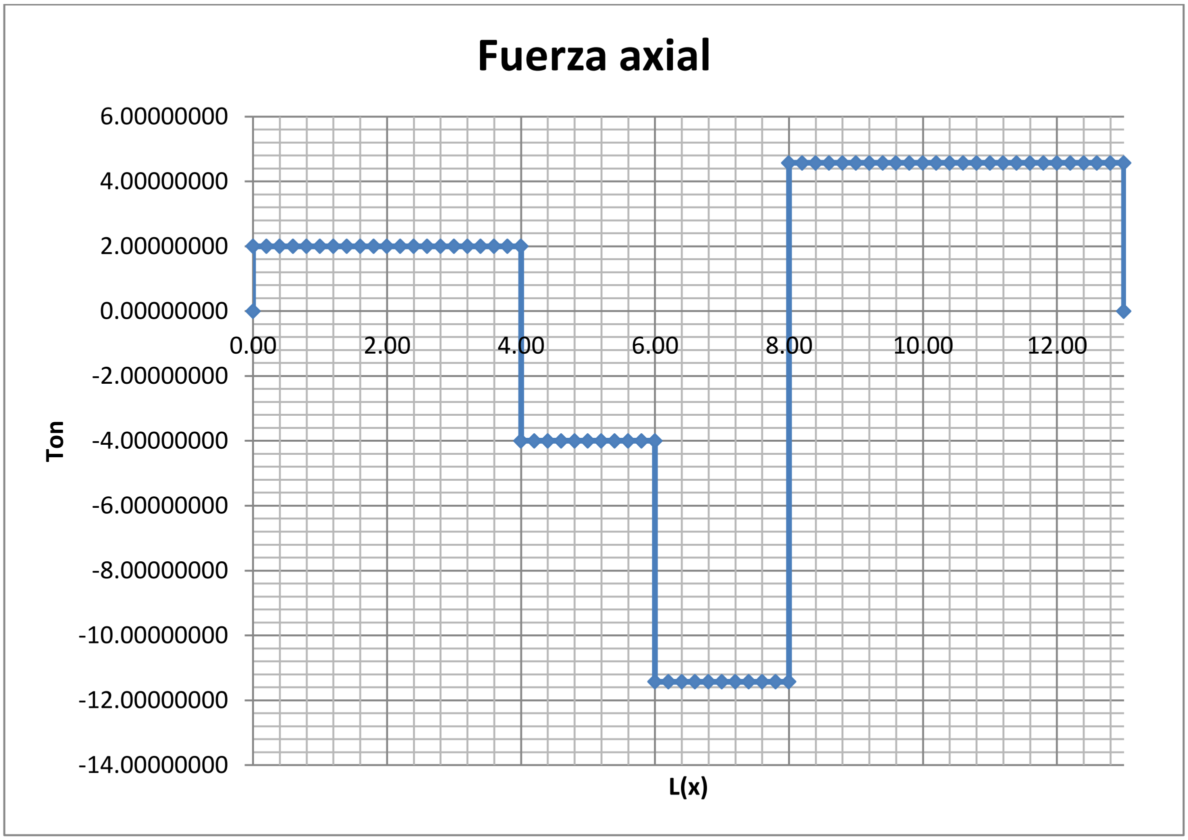
Evaluando las ecuaciones de momento flexionante y fuerza cortante para dibujar los respectivos diagramas.

L(x)	Cortante	Momento	Axial
0.00	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.00	53.00576923	-164.67692300	2.00000000
0.20	51.81500000	-154.19476916	2.00000000
0.40	50.64269231	-143.94892300	2.00000000
0.60	49.48884615	-133.93569224	2.00000000
0.80	48.35346154	-124.15138454	2.00000000
1.00	47.23653846	-114.59230762	2.00000000
1.20	46.13807692	-105.25476916	2.00000000
1.40	45.05807692	-96.13507686	2.00000000
1.60	43.99653846	-87.22953840	2.00000000
1.80	42.95346154	-78.53446148	2.00000000
2.00	41.92884615	-70.04615378	2.00000000
2.20	40.92269231	-61.76092302	2.00000000
2.40	39.93500000	-53.67507686	2.00000000
2.60	38.96576923	-45.78492302	2.00000000
2.80	38.01500000	-38.08676918	2.00000000
3.00	37.08269231	-30.57692302	2.00000000
3.20	36.16884615	-23.25169226	2.00000000
3.40	35.27346154	-16.10738456	2.00000000
3.60	34.39653846	-9.14030764	2.00000000
3.80	33.53807692	-2.34676918	2.00000000
4.00	32.69807692	4.27692312	2.00000000
4.00	32.69807692	4.27692312	-4.00000000
4.20	31.87653846	10.73446158	-4.00000000
4.40	31.07346154	17.02953850	-4.00000000
4.60	30.28884615	23.16584620	-4.00000000
4.80	29.52269231	29.14707696	-4.00000000
5.00	28.77500000	34.97692312	-4.00000000
5.20	28.04576923	40.65907696	-4.00000000
5.40	27.33500000	46.19723080	-4.00000000
5.60	26.64269231	51.59507696	-4.00000000
5.80	25.96884615	56.85630772	-4.00000000
6.00	25.31346154	61.98461542	-4.00000000
6.00	7.91538461	-7.91538458	-11.42857143
6.20	7.27846153	-6.39630766	-11.42857143
6.40	6.65999999	-5.00276920	-11.42857143
6.60	6.05999999	-3.73107690	-11.42857143

6.80	5.47846153	-2.57753844	-11.42857143
7.00	4.91538461	-1.53846152	-11.42857143
7.20	4.37076922	-0.61015382	-11.42857143
7.40	3.84461538	0.21107694	-11.42857143
7.60	3.33692307	0.92892310	-11.42857143
7.80	2.84769230	1.54707694	-11.42857143
8.00	2.37692307	2.06923078	-11.42857143
8.00	2.37692307	2.06923078	4.57142857
8.20	1.92461538	2.49907694	4.57142857
8.40	1.49076922	2.84030770	4.57142857
8.60	1.07538461	3.09661540	4.57142857
8.80	0.67846153	3.27169232	4.57142857
9.00	0.29999999	3.36923078	4.57142857
9.20	-0.06000001	3.39292308	4.57142857
9.40	-0.40153847	3.34646154	4.57142857
9.60	-0.72461539	3.23353846	4.57142857
9.80	-1.02923078	3.05784616	4.57142857
10.00	-1.31538462	2.82307692	4.57142857
10.20	-1.58307693	2.53292308	4.57142857
10.40	-1.83230770	2.19107692	4.57142857
10.60	-2.06307693	1.80123076	4.57142857
10.80	-2.27538462	1.36707692	4.57142857
11.00	-2.46923078	0.89230768	4.57142857
11.20	-2.64461539	0.38061538	4.57142857
11.40	-2.80153847	-0.16430770	4.57142857
11.60	-2.94000001	-0.73876924	4.57142857
11.80	-3.06000001	-1.33907694	4.57142857
12.00	-3.16153847	-1.96153848	4.57142857
12.20	-3.24461539	-2.60246156	4.57142857
12.40	-3.30923078	-3.25815386	4.57142857
12.60	-3.35538462	-3.92492310	4.57142857
12.80	-3.38307693	-4.59907694	4.57142857
13.00	-3.39230770	-5.27692310	4.57142857
13.00	0.00000000	0.00000000	0.00000000

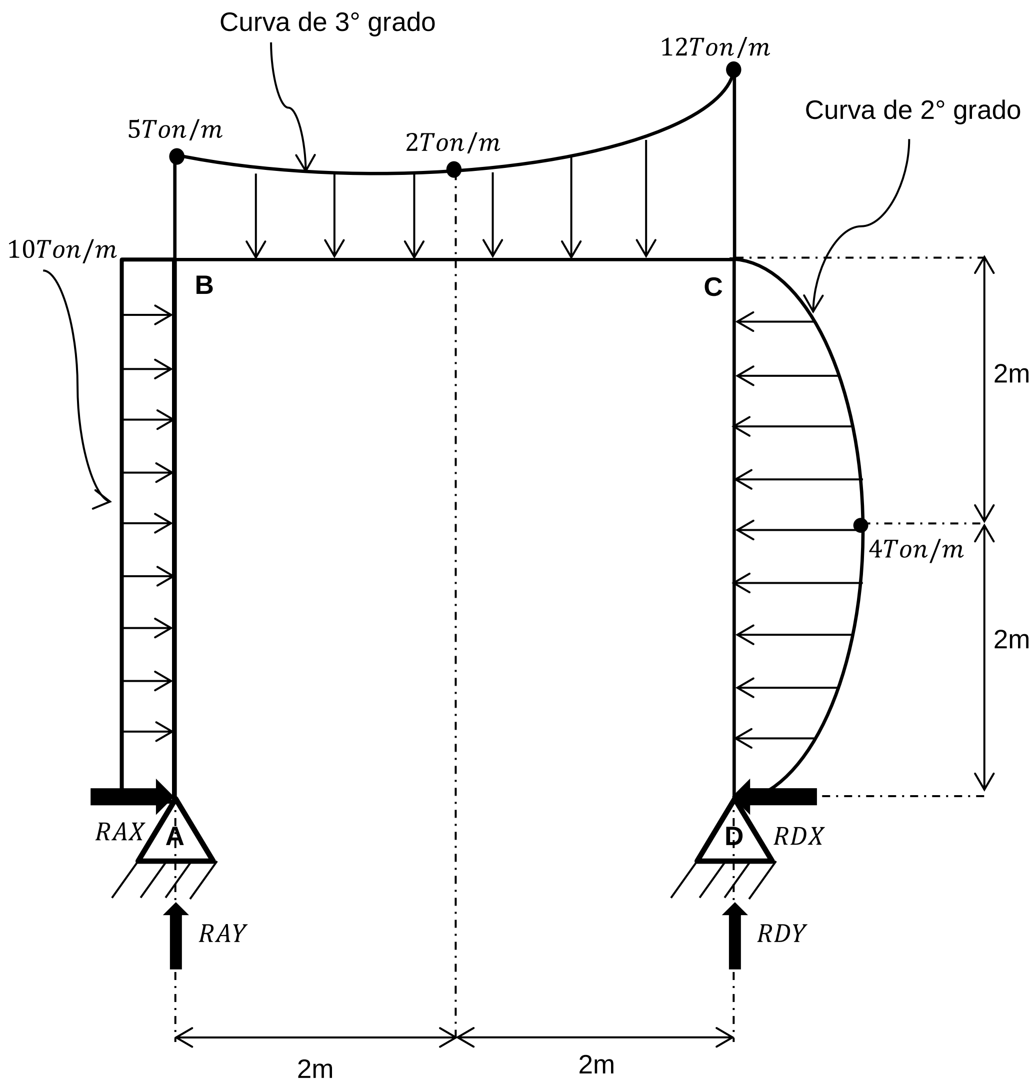

Fuerza cortante
60.00000000
50.00000000
40.00000000
30.00000000
20.00000000
10.00000000
0.00000000
-10.00000000
Ton
0.00
2.00
4.00
6.00
8.00
10.00
12.00
L(x)


Momento flexionante
100.00000000
50.00000000
0.00000000
-50.00000000
-100.00000000
-150.00000000
-200.00000000
Ton*m
0.00
2.00
4.00
6.00
8.00
10.00
12.00
L(x)



Fuerza axial
6.00000000
4.00000000
2.00000000
0.00000000
-2.00000000
-4.00000000
-6.00000000
-8.00000000
-10.00000000
-12.00000000
-14.00000000
Ton
0.00
2.00
4.00
6.00
8.00
10.00
12.00
L(x)

7.- Del siguiente marco: determine el valor de las reacciones en los soportes mostrados, las funciones que describen la variación de las acciones internas (momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal) y dibuje los diagramas correspondientes a estas.



Grado de indeterminación del marco:

$$\boldsymbol{r + 3m = 3n + c}$$

$$\mathbf{4 + 3(3) = 3(4) + 0}$$

$$\mathbf{13 = 12}$$

Por lo tanto nuestro marco es estáticamente indeterminado y no podemos resolverlo con las ecuaciones de equilibrio estático.

Método de análisis.

Para dar solución al presente problema propuesto, se empleara el método de flexibilidades (trabajo virtual en marcos) el cual resulta bastante similar al aplicado a las vigas anteriores.

Como primer paso debemos idealizar un marco primario, el cual tendrá como principales características: será isostático, conservara las mismas cargas que soporta el marco originalmente planteado. Similar al método anterior al liberar las reacciones necesarias para que el marco primario sea estáticamente determinado se provocaran desplazamientos los cuales habrán de señalarse en su respectiva posición.

Posteriormente se propondrán tantos marcos isostáticos ficticios sean necesarios para calcular el valor de las reacciones que restrinjan los desplazamientos liberados, similar al método de trabajo virtual en vigas; a cada marco isostático ficticio corresponderá una carga unitaria positiva que se pondrá en aquel lugar en el cual se eliminó la reacción necesaria para que el marco sostenga condiciones de isostaticidad. Cabe mencionar que se propondrá un marco isostático ficticio por cada reacción liberada en los soportes

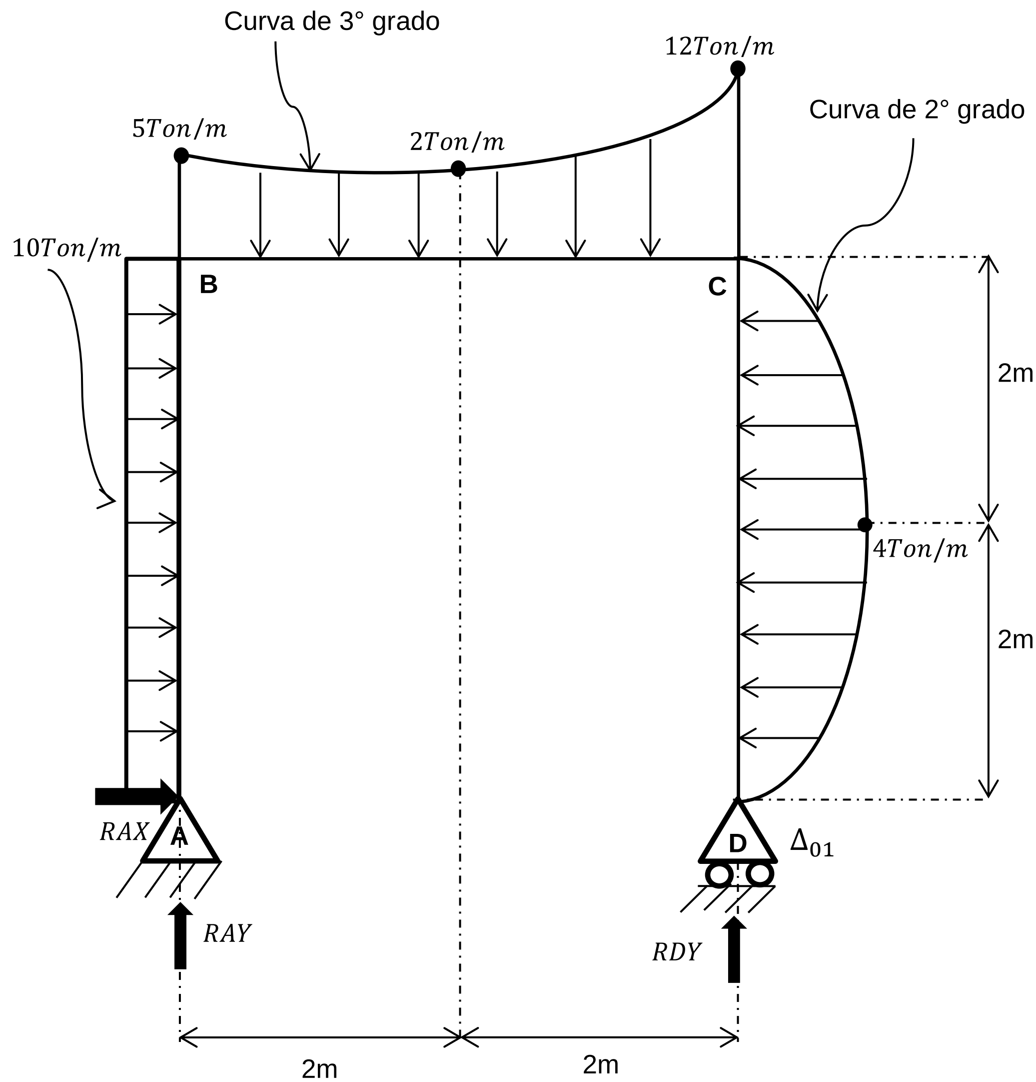
Como recordamos los desplazamientos en cualquier punto se calculan con la ecuación:

$$\Delta_i = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mmdx}{EI}$$

Habrán de calcularse las ecuaciones que rigen el comportamiento del momento flexionante en cada miembro de los marcos que se generen al dar solución al problema planteado.

Los desplazamientos propuestos a liberar para resolver el marco original, así como el marco primario y los marcos isostáticos ficticios necesarios para resolver el ejercicio se describen a continuación.

Marco primario



Como observamos el marco primario es isostático y conserva las reacciones originalmente planteadas por el problema, para obtener las ecuaciones de momento flexionante que rigen cada miembro habrán de calcularse las reacciones en los soportes, por lo que antes deben construirse las funciones de las cargas curvas que soporta el marco.

Determinación de la función de la curva para el miembro B-C

Como en este caso la curva es de 3er grado proponemos la forma de la ecuación de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{y = ax^3 + bx + c}$$

Condiciones de frontera asociadas a la curva:

Si $x = 0$ $y = 5$
Si $x = 2$ $y = 2$
Si $x = 4$ $y = 12$

De la primera condición:

$$\boldsymbol{a(0)^3 + b(0) + c = 5 \qquad \therefore \qquad c = 5}$$

Utilizando las dos condiciones de frontera restantes para construir un sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{a(2)^3 + b(2) = -3 \ldots\ldots\ldots\ldots Ec.1}$$

$$\boldsymbol{a(4)^3 + b(4) = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots Ec.2}$$

De la ecuación **“1”** despejamos **“a”**

$$a = \frac{-3 - 2b}{8}$$

Sustituimos **“a”** en la ecuación **“2”** y despejamos **“b”**

$$\left(\frac{-3 - 2b}{8}\right)(64) + 4b = 7$$

$$-12b = 31$$

$$\boldsymbol{b = -\frac{31}{12}}$$

Sustituyendo el valor de **“b”** en la equivalencia de **“a”**

$$a=-\frac{3}{8}-\frac{2}{8}\left(-\frac{\mathbf{31}}{\mathbf{12}}\right) \qquad \boldsymbol{a}=\frac{\mathbf{13}}{\mathbf{48}}$$

Por lo tanto la función de la curva es:

$$\boldsymbol{y}=\frac{\mathbf{13}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{48}}-\frac{\mathbf{31}}{\mathbf{12}}\boldsymbol{x}+\mathbf{5}$$

Calculo de la carga total ejercida por la curva del miembro B-C así como su brazo de palanca aislando dicho miembro.

$$P_{\boldsymbol{C}}=\int_0^4\left(\frac{13x^3}{48}-\frac{31}{12}x+5\right)dx=\left[\frac{13x^4}{192}-\frac{31x^2}{24}+5x\right]_0^4=\frac{\mathbf{50}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{Ton}$$

$$\bar{x}=\frac{\int_0^4(x)\left(\frac{13x^3}{48}-\frac{31}{12}x+5\right)dx}{\int_0^4\left(\frac{13x^3}{48}-\frac{31}{12}x+5\right)dx}=\frac{\left[\frac{13x^5}{240}-\frac{31x^3}{36}+\frac{5x^2}{2}\right]_0^4}{\left[\frac{13x^4}{192}-\frac{31x^2}{24}+5x\right]_0^4}=\frac{\frac{1816}{45}}{\frac{50}{3}}=\frac{\mathbf{908}}{\mathbf{375}}\boldsymbol{m}$$

Determinación de la función de la curva para el miembro C-D

Como en este caso la curva es de 2° grado proponemos la forma de la ecuación de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$$

Condiciones de frontera asociadas a la curva:

Si $x=0$ $y=0$
Si $x=2$ $y=4$
Si $x=4$ $y=0$

De la primera condición:

$$\boldsymbol{a}(\mathbf{0})^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{b}(\mathbf{0})+\boldsymbol{c}=\mathbf{0} \qquad \therefore \qquad \boldsymbol{c}=\mathbf{0}$$

Utilizando las dos condiciones de frontera restantes para construir un sistema de ecuaciones:

$$\boldsymbol{a}(\mathbf{2})^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{b}(\mathbf{2}) = \mathbf{4} \ldots\ldots\ldots\ldots \boldsymbol{Ec}.\mathbf{1}$$

$$\boldsymbol{a}(\mathbf{4})^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{b}(\mathbf{4}) = \mathbf{0} \ldots\ldots\ldots\ldots \boldsymbol{Ec}.\mathbf{2}$$

De la ecuación **“2”** despejamos **“a”**

$$a = \frac{-4b}{16}$$

Sustituimos **“a”** en la ecuación **“1”** y despejamos **“b”**

$$\left(\frac{-4b}{16}\right)(4) + 2b = 4$$

$$\boldsymbol{b} = \mathbf{4}$$

Sustituyendo el valor de **“b”** en la equivalencia de **“a”**

$$a = \frac{-4}{16}(4) \qquad\qquad \boldsymbol{a} = -\mathbf{1}$$

Por lo tanto la función de la curva es:

$$\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{4}\boldsymbol{x}$$

Calculo de la carga total ejercida por la curva del miembro C-D así como su brazo de palanca aislando dicho miembro.

$$P_{\boldsymbol{C}} = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{Ton}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^4 (x)(-x^2 + 4x)dx}{\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx} = \frac{\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3}\right]_0^4}{\left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4} = \frac{\frac{64}{3}}{\frac{32}{3}} = \mathbf{2}\boldsymbol{m}$$

Cálculo de las reacciones en los soportes del marco primario.

$$\sum \boldsymbol{M_A = 0}$$

$$\left(\frac{10Ton}{m}\right)(4m)(2m) + \left(\frac{50}{3}ton\right)\left(\frac{908}{375}m\right) - \left(\frac{32}{3}Ton\right)(2m) - 4m(RDY) = 0$$

$$RDY = \frac{\frac{4456}{45}Ton * m}{4m} = \boldsymbol{\frac{1114}{45}Ton}$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$RAY - \frac{50}{3}ton + \frac{1114}{45}Ton = 0$$

$$RAY = -\boldsymbol{\frac{364}{45}Ton}$$

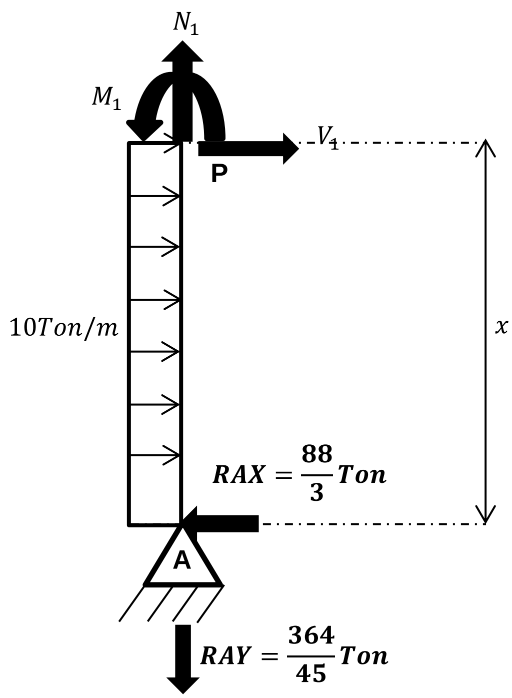
$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$RAX + \left(\frac{10Ton}{m}\right)(4m) - \left(\frac{32}{3}Ton\right) = 0$$

$$RAX = -\boldsymbol{\frac{88}{3}Ton}$$

Calculo de las ecuaciones de momento flexionante para el marco primario

Miembro A-B $\mathbf{0 \leq x \leq 4m}$



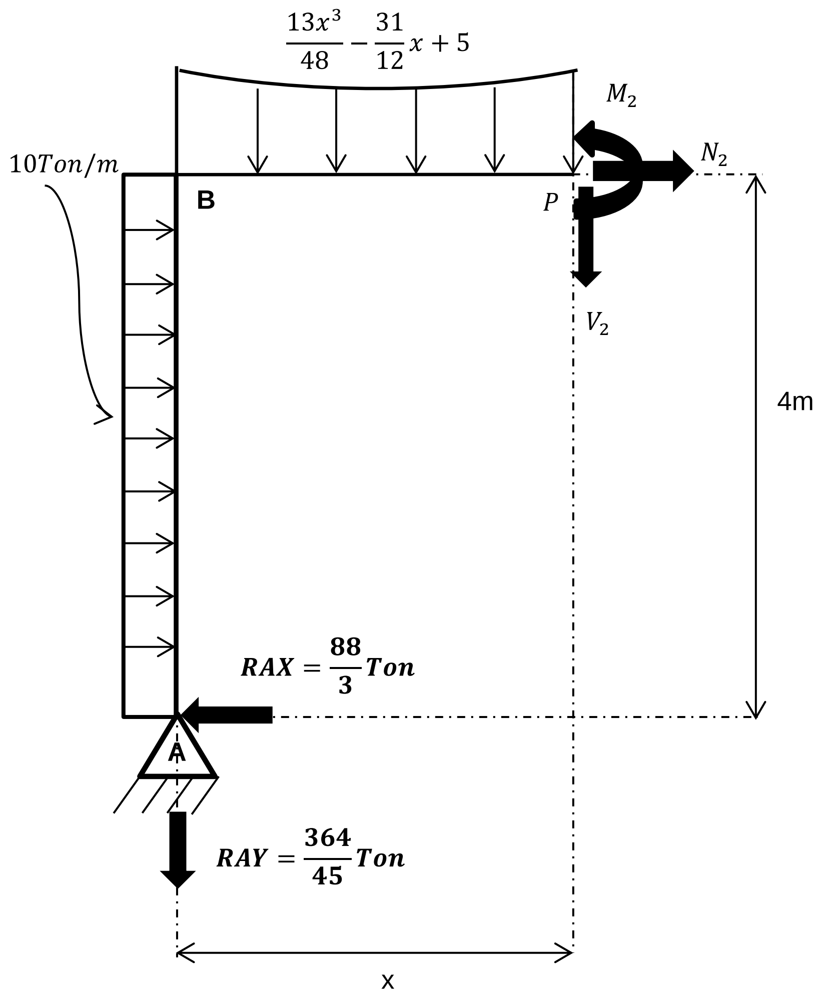
$$\sum \boldsymbol{M_P = 0}$$

$$-M_1 + \left(\frac{88}{3}\right)(x) - (10)(x)\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M_1 = -5x^2 + \frac{88}{3}x$$

L(x)	Momento
0	$0Ton * m$
4m	$\frac{112}{3} Ton * m$

Miembro B-C $\quad \boldsymbol{0 \leq x \leq 4m}$



$$\sum \boldsymbol{M_P = 0}$$

$$-M_2 - \left(\frac{364}{45}\right)(x) + \left(\frac{88}{3}\right)(4) - (10)(4)\left(\frac{4}{2}\right)$$
$$-\left[\int_0^x \left(\frac{13x^3}{48} - \frac{31}{12}x + 5\right) dx\right]\left(x - \frac{\int_0^x (x)\left(\frac{13x^3}{48} - \frac{31}{12}x + 5\right) dx}{\int_0^x \left(\frac{13x^3}{48} - \frac{31}{12}x + 5\right) dx}\right) = 0$$

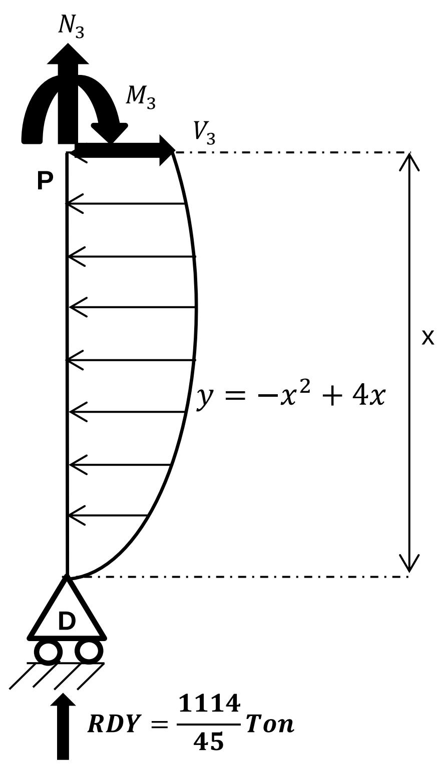
$$M_2 = -\frac{364}{45}x + \frac{112}{3} - \left(\frac{13x^4}{192} - \frac{31x^2}{24} + 5x\right)\left(x - \frac{\frac{13x^5}{240} - \frac{31x^3}{36} + \frac{5x^2}{2}}{\frac{13x^4}{192} - \frac{31x^2}{24} + 5x}\right)$$

$$M_2 = -\frac{364}{45}x + \frac{112}{3} - \left(\frac{13x^5}{192} - \frac{31x^3}{24} + 5x - \frac{13x^5}{240} + \frac{31x^3}{36} - \frac{5x^2}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{M_2 = -\frac{13x^5}{960} + \frac{31x^3}{72} - \frac{5x^2}{2} - \frac{364}{45}x + \frac{112}{3}}$$

L(x)	Momento
0	$\frac{112}{3} Ton * m$
4m	$\frac{-64}{3} Ton * m$

Miembro C-D $\boldsymbol{0 \leq x \leq 4m}$



$$\boldsymbol{\sum M_P = 0}$$

$$-M_3 - \left[\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx\right]\left(x - \frac{\int_0^x (x)(-x^2 + 4x)dx}{\int_0^x (-x^2 + 4x)dx}\right) = 0$$

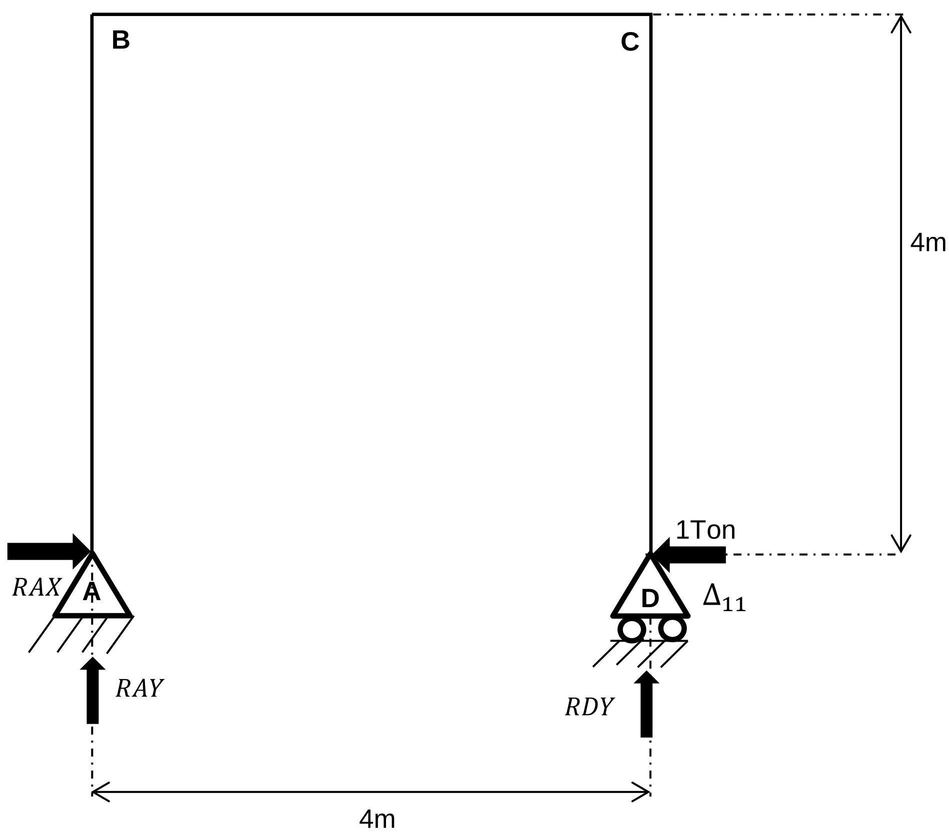
$$M_3=-\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2\right)\left(x-\frac{-\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}}{-\frac{x^3}{3}+2x^2}\right)$$

$$M_3=-\left(-\frac{x^4}{3}+2x^3+\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{M_3=\frac{x^4}{12}-\frac{2x^3}{3}}$$

L(x)	Momento
0	$0Ton*m$
4m	$-\frac{64}{3}Ton*m$

Marco isostático ficticio 1



Calculo de las reacciones en los soportes.

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$RAX - 1Ton = 0$$

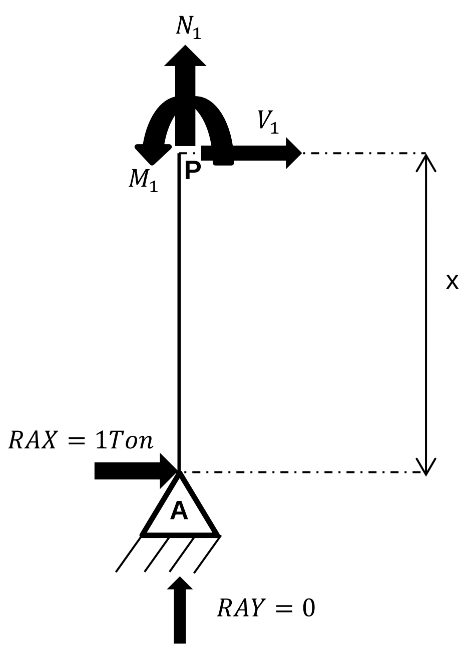
$$\boldsymbol{RAX = 1Ton}$$

$$\sum \boldsymbol{F_y = 0}$$

$$\boldsymbol{RAY = RDY = 0}$$

Calculo de las ecuaciones de momento flexionante para cada miembro del marco

Miembro A-B $\boldsymbol{0 \leq x \leq 4m}$

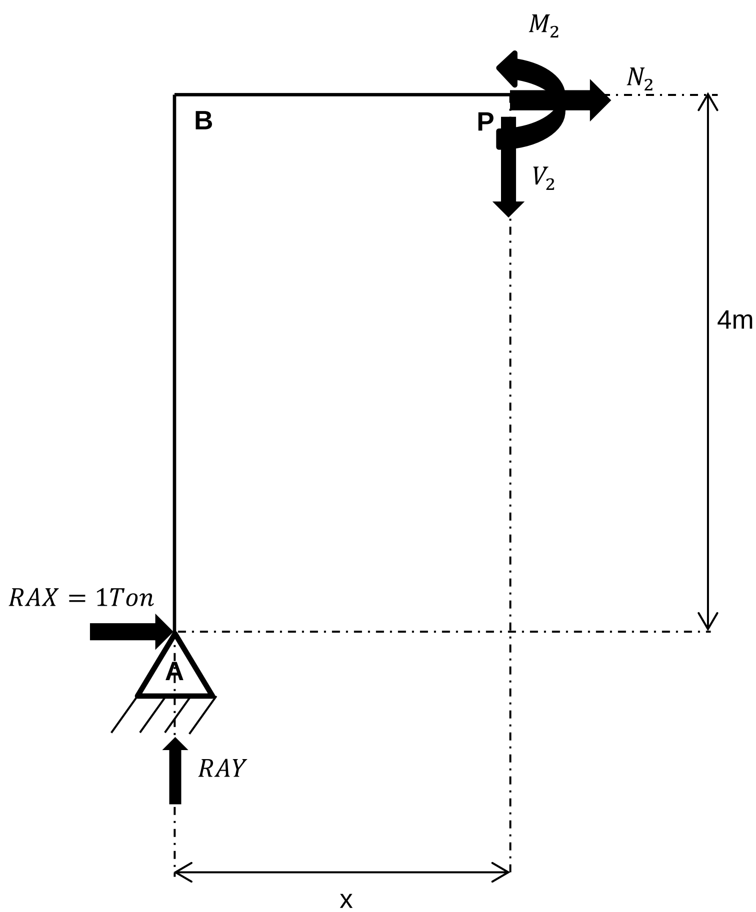


$$\sum \boldsymbol{M_P = 0}$$

$$-M_1 - (1)(x) = 0$$

$$\boldsymbol{M_1 = -x}$$

Miembro B-C $\boldsymbol{0 \leq x \leq 4m}$

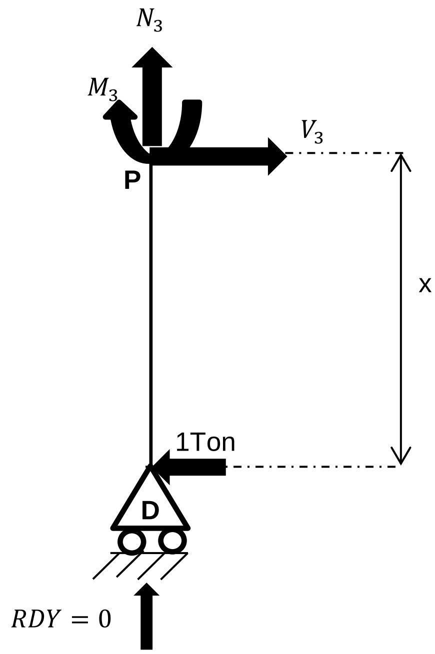


$$\sum \boldsymbol{M_P = 0}$$

$$-M_2 - (1)(4) = 0$$

$$\boldsymbol{M_2 = -4}$$

Miembro C-D $\quad \mathbf{0 \le x \le 4m}$



$$\sum \boldsymbol{M_P = 0}$$

$$-M_3 - (1)(x) = 0$$

$$\boldsymbol{M_3 = -x}$$

Calculo de los desplazamientos liberados

$$\Delta_i = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mmdx}{EI}$$

$$\Delta_{\mathbf{01}} = \frac{1}{EI}\int_0^4 \left(-5x^2 + \frac{88}{3}x\right)(-x)dx + \frac{1}{EI}\int_0^4 \left(-\frac{13x^5}{960} + \frac{31x^3}{72} - \frac{5x^2}{2} - \frac{364}{45}x + \frac{112}{3}\right)$$

$$(-4)dx + \frac{1}{EI}\int_0^4 \left(\frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{3}\right)(-x)dx$$

$$\Delta_{\mathbf{01}} = -\frac{2752}{9EI} + \frac{5984}{15EI} + \frac{3584}{45EI} = \boldsymbol{\frac{864}{5EI}}$$

$$\Delta_{\mathbf{11}}=\frac{1}{EI}\int_0^4(-x)(-x)dx+\frac{1}{EI}\int_0^4(-4)(-4)dx+\frac{1}{EI}\int_0^4(-x)(-x)dx=$$

$$\Delta_{\mathbf{11}}=\frac{64}{3EI}+\frac{64}{EI}+\frac{64}{3EI}=\boldsymbol{\frac{320}{3EI}}$$

Asociando los desplazamientos liberados con las reacciones del marco original para formar el sistema de ecuaciones de flexibilidades.

$$\Delta_{01}+\Delta_{11}RDX=0$$

Sustituyendo y dado solución a la ecuación.

$$\frac{320}{3EI}RDX=-\frac{864}{5EI}$$

$$\boldsymbol{RDX=-\frac{81}{50}Ton}$$

Calculo de las reacciones en los soportes del marco original

$$\sum \boldsymbol{M_A=0}$$

$$\left(\frac{10Ton}{m}\right)(4m)(2m)+\left(\frac{50}{3}ton\right)\left(\frac{908}{375}m\right)-\left(\frac{32}{3}Ton\right)(2m)-4m(RDY)=0$$

$$RDY=\frac{\frac{4456}{45}Ton*m}{4m}=\boldsymbol{\frac{1114}{45}Ton}$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y=0}$$

$$RAY-\frac{50}{3}ton+\frac{1114}{45}Ton=0$$

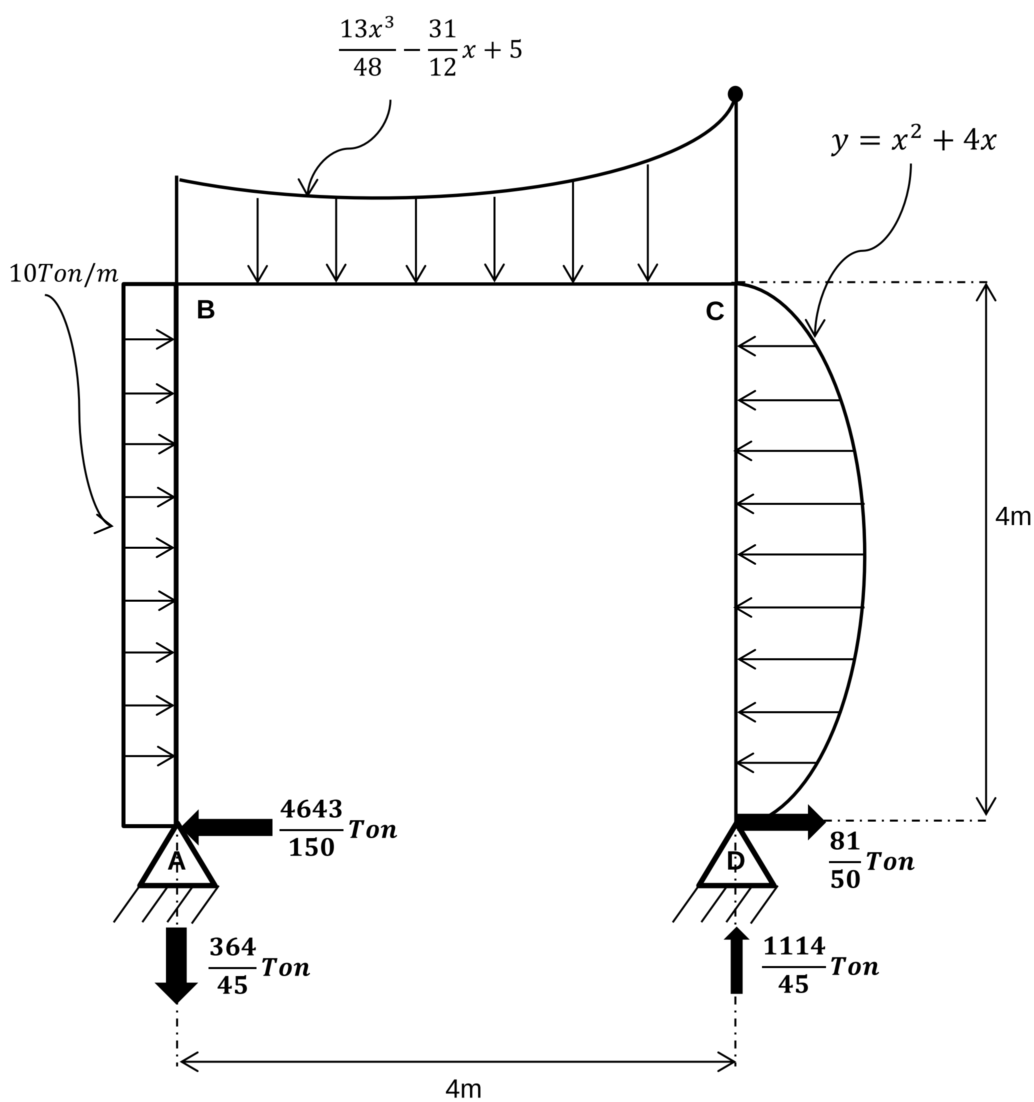
$$RAY=-\boldsymbol{\frac{364}{45}Ton}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$RAX + \left(\frac{10Ton}{m}\right)(4m) - \left(\frac{32}{3}Ton\right) + \left(\frac{81}{50}Ton\right) = 0$$

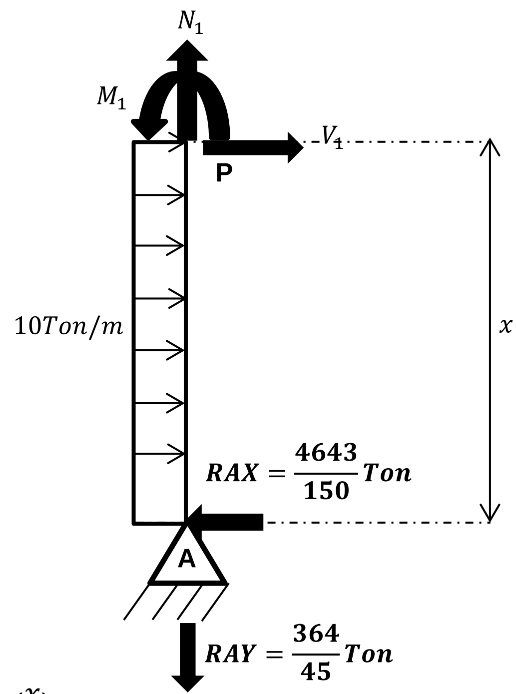
$$RAX = -\frac{4643}{150}Ton$$

Marco equilibrio estático



Calculo de las ecuaciones de momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial de cada miembro en el marco.

Miembro A-B $\mathbf{0 \leq x \leq 4m}$



$$\sum \boldsymbol{M_P = 0}$$

$$-M_1 + \left(\frac{4653}{150}\right)(x) - (10)(x)\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{M_1 = -5x^2 + \frac{4643}{150}x}$$

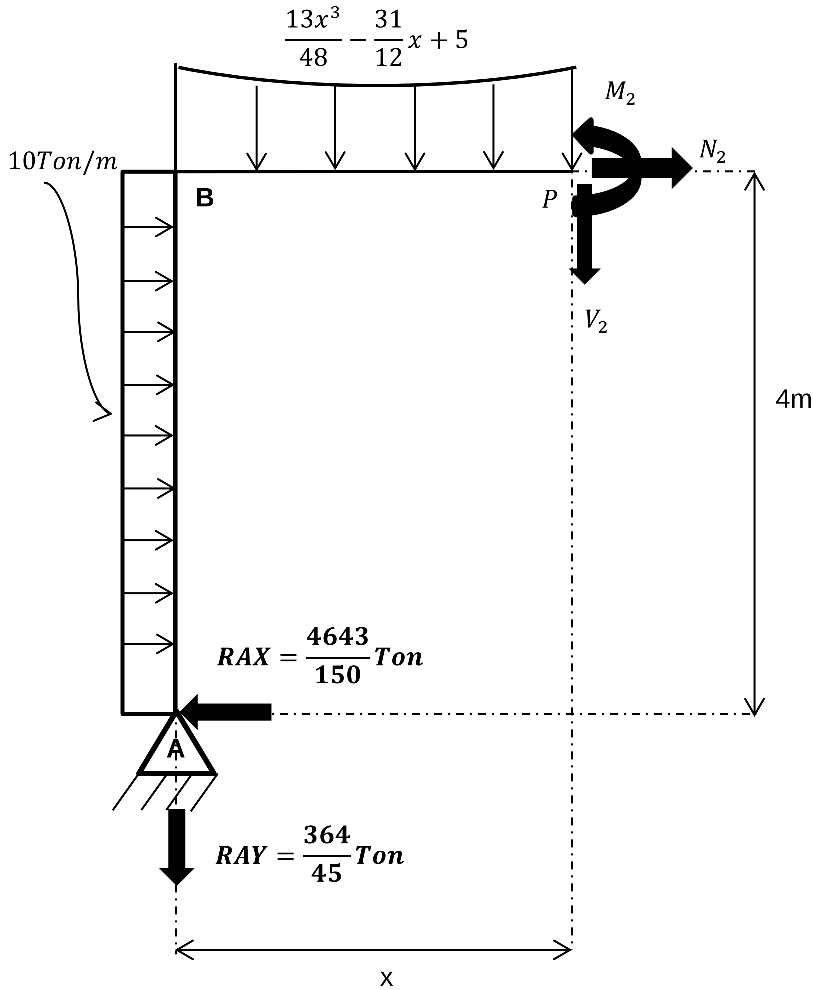
$$\boldsymbol{V_1 = -10x + \frac{4643}{150}}$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$N_1 - \frac{364}{45} Ton = 0 \qquad \boldsymbol{N_1 = \frac{364}{45} Ton(Tensión)}$$

L(x)	Momento	Cortante
0	$0Ton * m$	$\frac{4643}{150} Ton$
4m	$\frac{3286}{75} Ton * m$	$-\frac{1357}{150} Ton$

Miembro B-C $\qquad \mathbf{0 \leq x \leq 4m}$



$$\sum \boldsymbol{M_P = 0}$$

$$-M_2 - \left(\frac{364}{45}\right)(x) + \left(\frac{4643}{150}\right)(4) - (10)(4)\left(\frac{4}{2}\right)$$
$$-\left[\int_0^x \left(\frac{13x^3}{48} - \frac{31}{12}x + 5\right) dx\right]\left(x - \frac{\int_0^x (x)\left(\frac{13x^3}{48} - \frac{31}{12}x + 5\right) dx}{\int_0^x \left(\frac{13x^3}{48} - \frac{31}{12}x + 5\right) dx}\right) = 0$$

$$M_2 = -\frac{364}{45}x + \frac{3286}{75} - \left(\frac{13x^4}{192} - \frac{31x^2}{24} + 5x\right)\left(x - \frac{\frac{13x^5}{240} - \frac{31x^3}{36} + \frac{5x^2}{2}}{\frac{13x^4}{192} - \frac{31x^2}{24} + 5x}\right)$$

$$M_2 = -\frac{364}{45}x + \frac{112}{3} - \left(\frac{13x^5}{192} - \frac{31x^3}{24} + 5x - \frac{13x^5}{240} + \frac{31x^3}{36} - \frac{5x^2}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{M_2 = -\frac{13x^5}{960} + \frac{31x^3}{72} - \frac{5x^2}{2} - \frac{364}{45}x + \frac{3286}{75}}$$

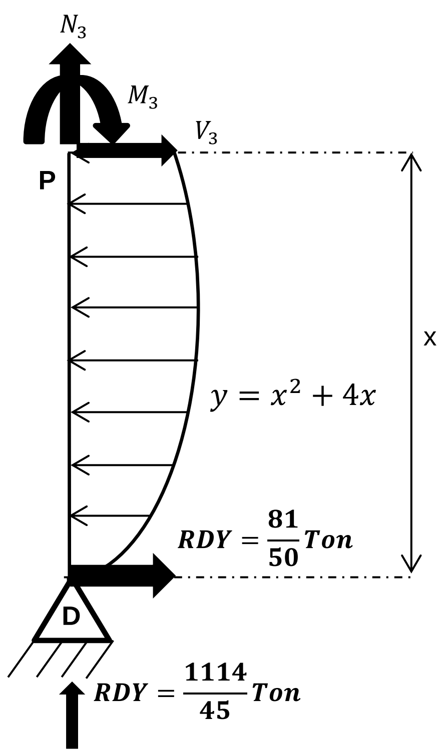
$$\boldsymbol{V_2 = -\frac{13x^4}{192} + \frac{31x^2}{24} - 5x - \frac{364}{45}}$$

$$\boldsymbol{\sum F_x = 0}$$

$$N_2 - \left(\frac{4643}{150}Ton\right) + \left(\frac{10Ton}{m}\right)(4m) = 0 \qquad \boldsymbol{N_2 = -\frac{1357}{150}Ton(Compresión)}$$

L(x)	Momento	Cortante
0	$\frac{3286}{75}Ton*m$	$-\frac{364}{45}Ton$
4m	$-\frac{1114}{75}Ton*m$	$-\frac{1114}{45}Ton$

Miembro C-D $\boldsymbol{0 \leq x \leq 4m}$



$$\sum M_P = 0$$

$$-M_3 - \left[\int_0^4 (-x^2 + 4x)dx\right]\left(x - \frac{\int_0^x (x)(-x^2 + 4x)dx}{\int_0^x (-x^2 + 4x)dx}\right) + \left(\frac{81}{50}\right)(x) = 0$$

$$M_3 = -\left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\left(x - \frac{-\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3}}{-\frac{x^3}{3} + 2x^2}\right) + \frac{81}{50}x$$

$$M_3 = -\left(-\frac{x^4}{3} + 2x^3 + \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3}\right) + \frac{81}{50}x$$

$$\boldsymbol{M_3 = \frac{x^4}{12} - \frac{2x^3}{3} + \frac{81}{50}x}$$

$$\boldsymbol{V_3 = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{81}{50}}$$

$$\sum F_y = 0$$

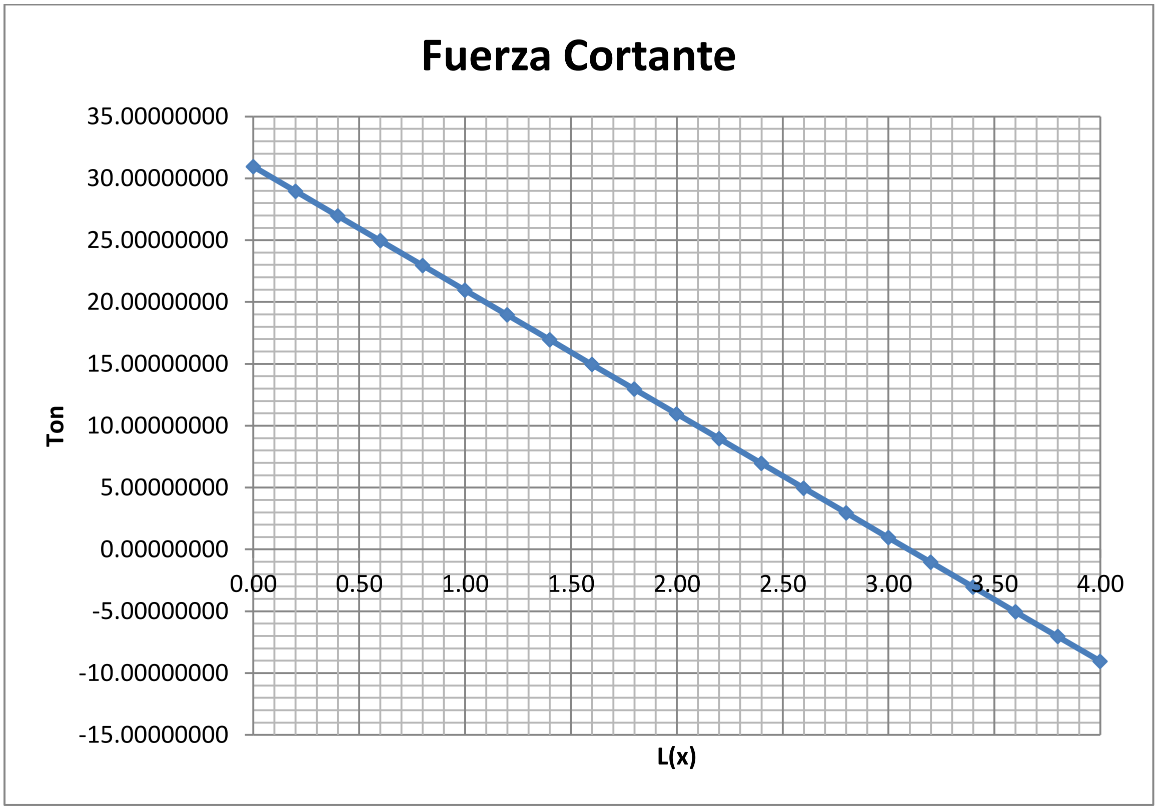
$$N_3 + \left(\frac{1114}{45}Ton\right) = 0 \qquad \boldsymbol{N_3 = \frac{1114}{45}Ton(Compresión)}$$

L(x)	Momento	Cortante
0	$0Ton * m$	$\frac{81}{50}Ton$
4m	$-\frac{1114}{75}Ton * m$	$-\frac{1357}{150}Ton$

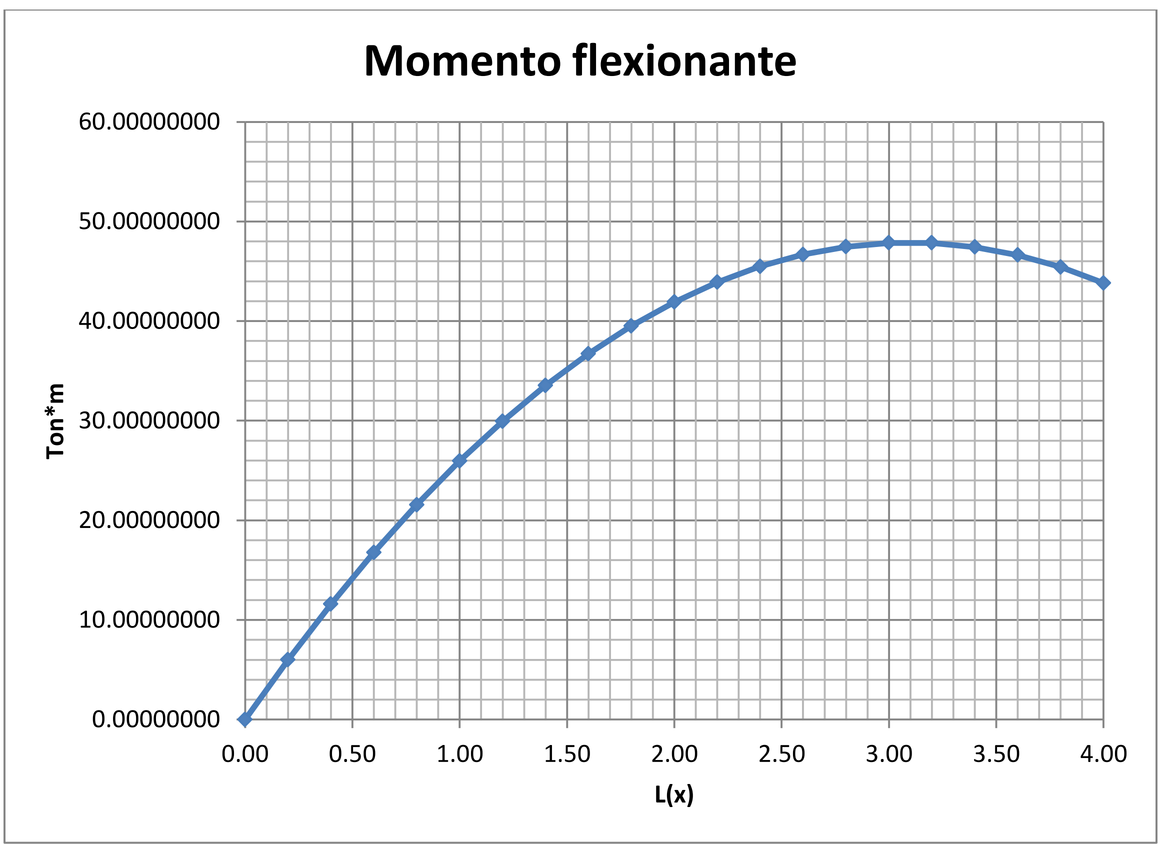
Diagramas de momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial en el marco.

Miembro A-B $0 \leq x \leq 4m$

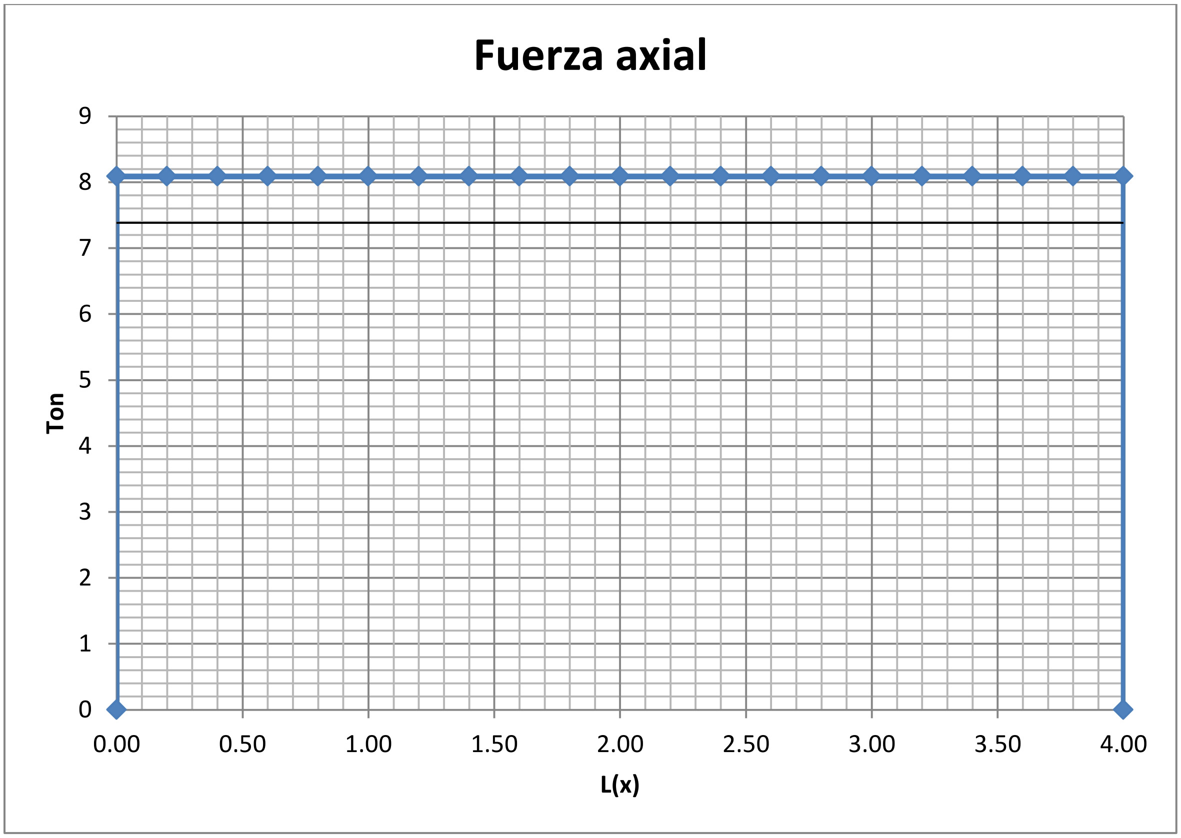
L(x)	Cortante	Momento	Axial
0.00	30.95333333	0.00000000	8.088888889
0.20	28.95333333	5.99066667	8.088888889
0.40	26.95333333	11.58133333	8.088888889
0.60	24.95333333	16.77200000	8.088888889
0.80	22.95333333	21.56266667	8.088888889
1.00	20.95333333	25.95333333	8.088888889
1.20	18.95333333	29.94400000	8.088888889
1.40	16.95333333	33.53466667	8.088888889
1.60	14.95333333	36.72533333	8.088888889
1.80	12.95333333	39.51600000	8.088888889
2.00	10.95333333	41.90666667	8.088888889
2.20	8.95333333	43.89733333	8.088888889
2.40	6.95333333	45.48800000	8.088888889
2.60	4.95333333	46.67866667	8.088888889
2.80	2.95333333	47.46933333	8.088888889
3.00	0.95333333	47.86000000	8.088888889
3.20	-1.04666667	47.85066667	8.088888889
3.40	-3.04666667	47.44133333	8.088888889
3.60	-5.04666667	46.63200000	8.088888889
3.80	-7.04666667	45.42266667	8.088888889
4.00	-9.04666667	43.81333333	8.088888889



Fuerza Cortante
Ton
35.00000000
30.00000000
25.00000000
20.00000000
15.00000000
10.00000000
5.00000000
0.00000000
-5.00000000
-10.00000000
-15.00000000
0.00
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
3.00
3.50
4.00
L(x)



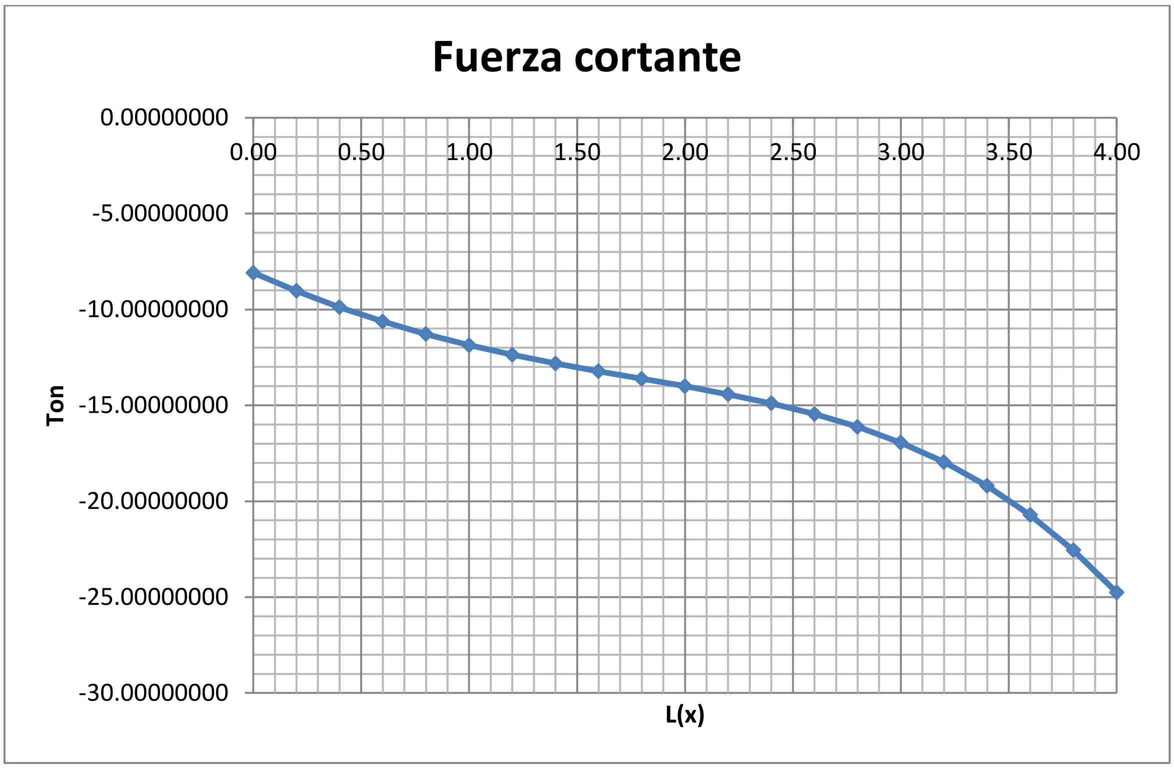
Momento flexionante
Ton*m
60.00000000
50.00000000
40.00000000
30.00000000
20.00000000
10.00000000
0.00000000
0.00
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
3.00
3.50
4.00
L(x)

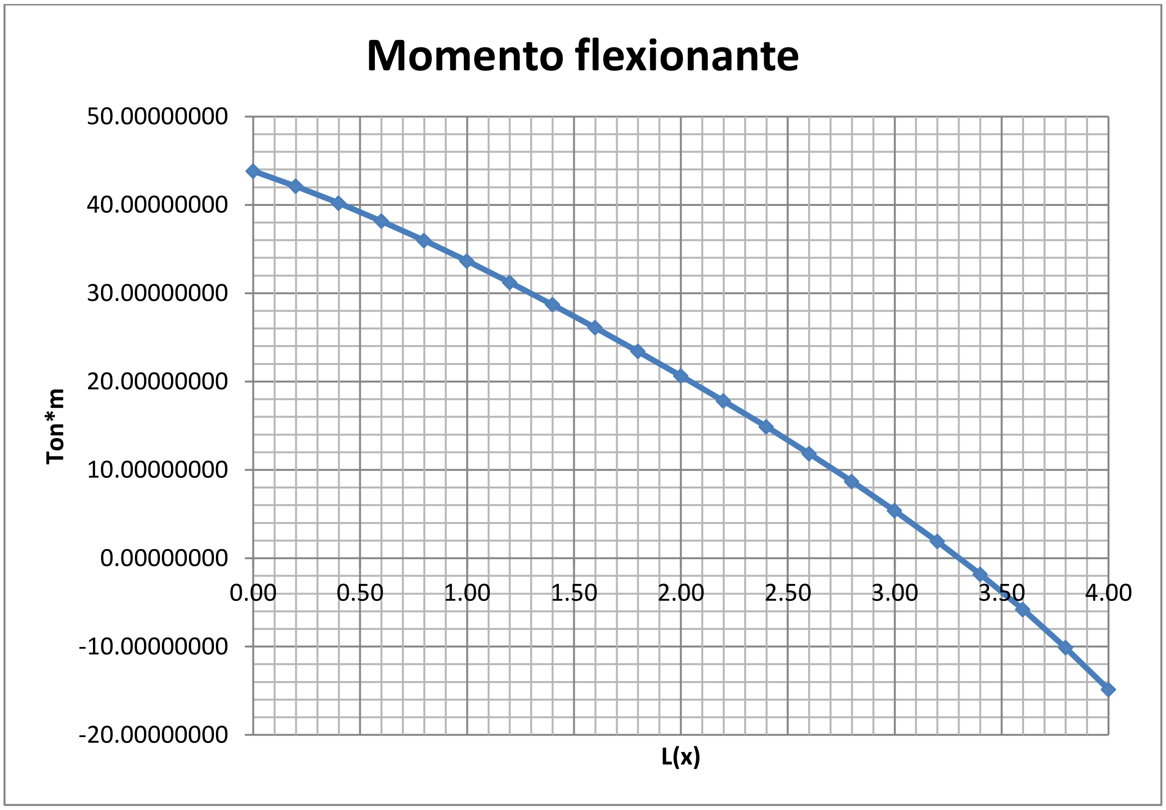


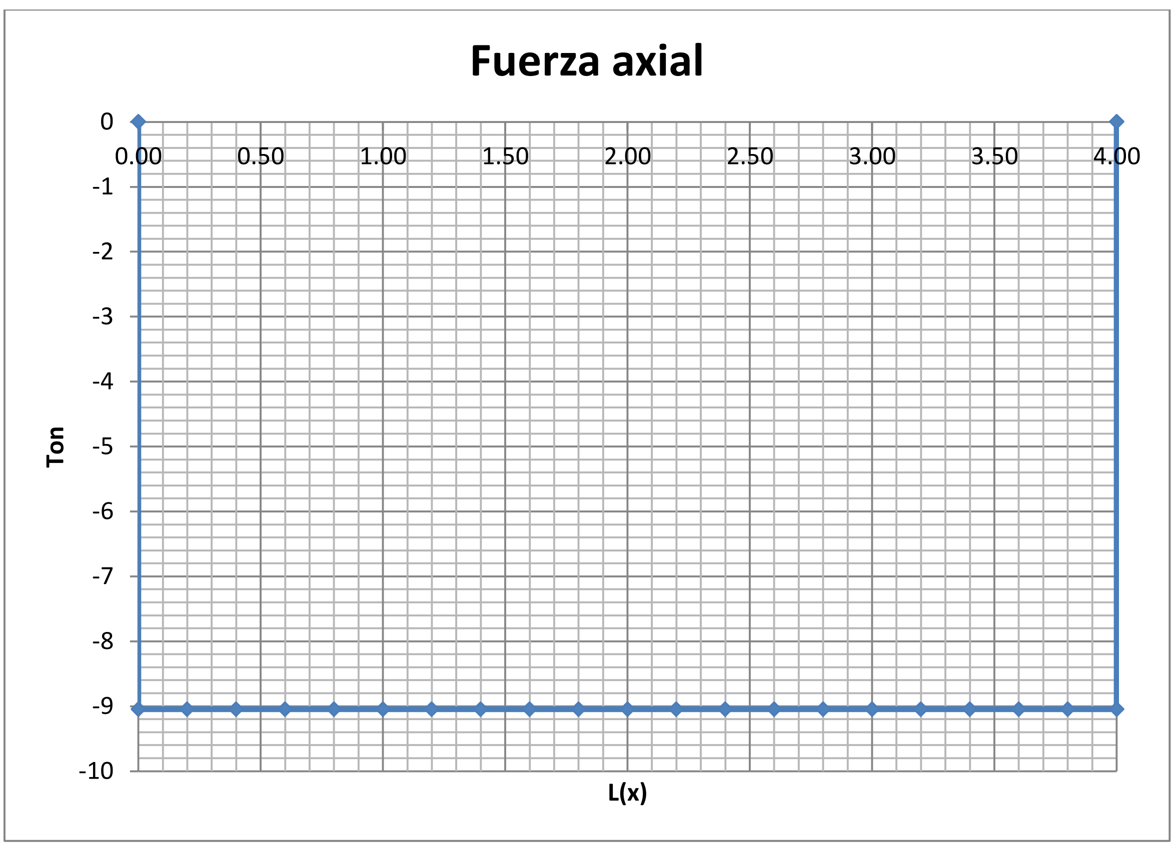
Miembro B-C $0 \leq x \leq 4m$

L(x)	**Cortante**	**Momento**	**Axial**
0.00	-8.08888889	43.81333333	-9.046666667
0.20	-9.03733056	42.09899567	-9.046666667
0.40	-9.88395556	40.20519467	-9.046666667
0.60	-10.63266389	38.15194700	-9.046666667
0.80	-11.28995556	35.95822933	-9.046666667
1.00	-11.86493056	33.64145833	-9.046666667
1.20	-12.36928889	31.21697067	-9.046666667
1.40	-12.81733056	28.69750300	-9.046666667
1.60	-13.22595556	26.09267200	-9.046666667
1.80	-13.61466389	23.40845433	-9.046666667
2.00	-14.00555556	20.64666667	-9.046666667
2.20	-14.42333056	17.80444567	-9.046666667
2.40	-14.89528889	14.87372800	-9.046666667
2.60	-15.45133056	11.84073033	-9.046666667

2.80	-16.12395556	8.68542933	-9.046666667
3.00	-16.94826389	5.38104167	-9.046666667
3.20	-17.96195556	1.89350400	-9.046666667
3.40	-19.20533056	-1.81904700	-9.046666667
3.60	-20.72128889	-5.80679467	-9.046666667
3.80	-22.55533056	-10.12876233	-9.046666667
4.00	-24.75555556	-14.85333333	-9.046666667

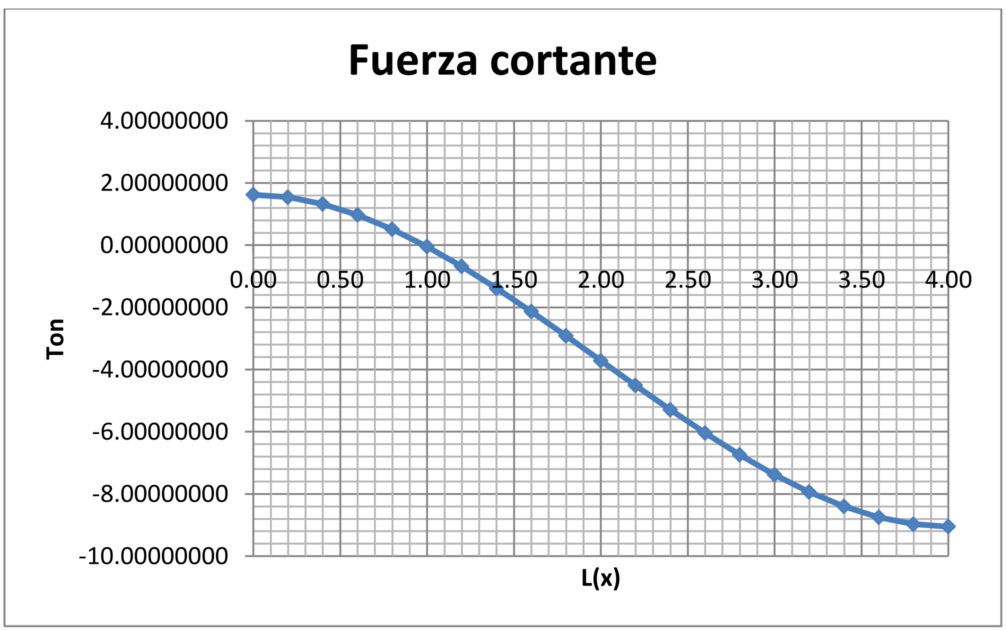


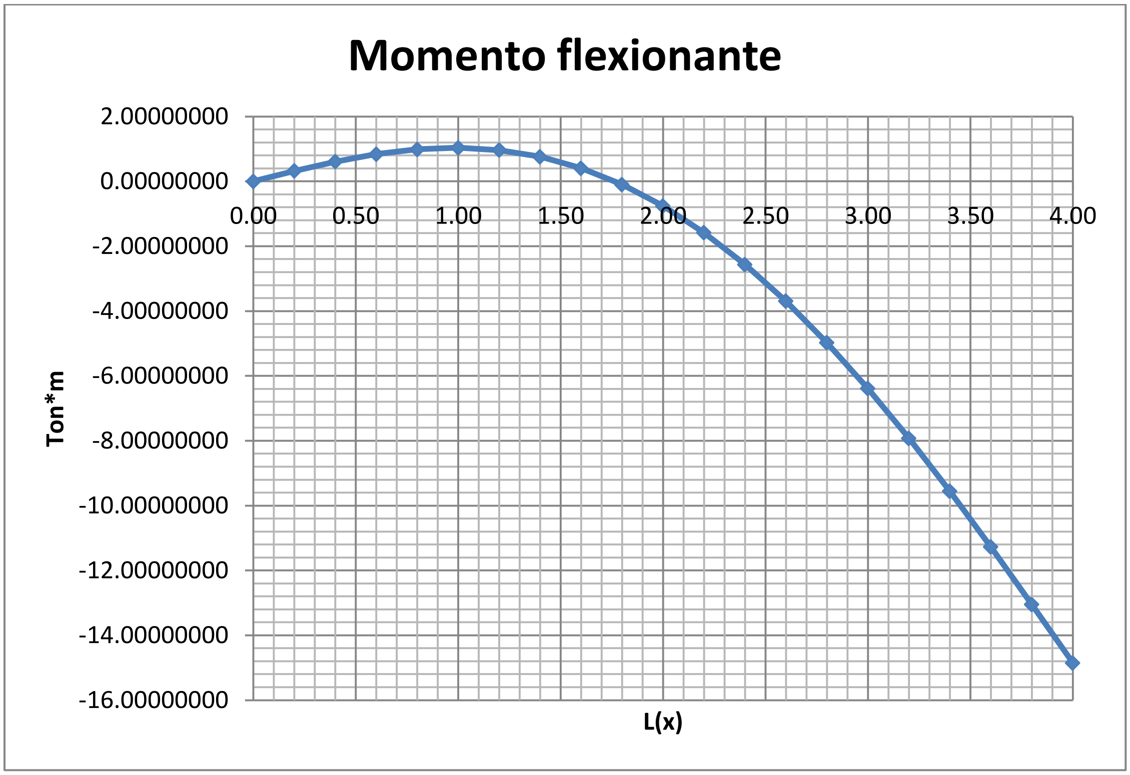

Momento flexionante
50.00000000
40.00000000
30.00000000
20.00000000
10.00000000
0.00000000
-10.00000000
-20.00000000
Ton*m
0.00
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
3.00
3.50
4.00
L(x)

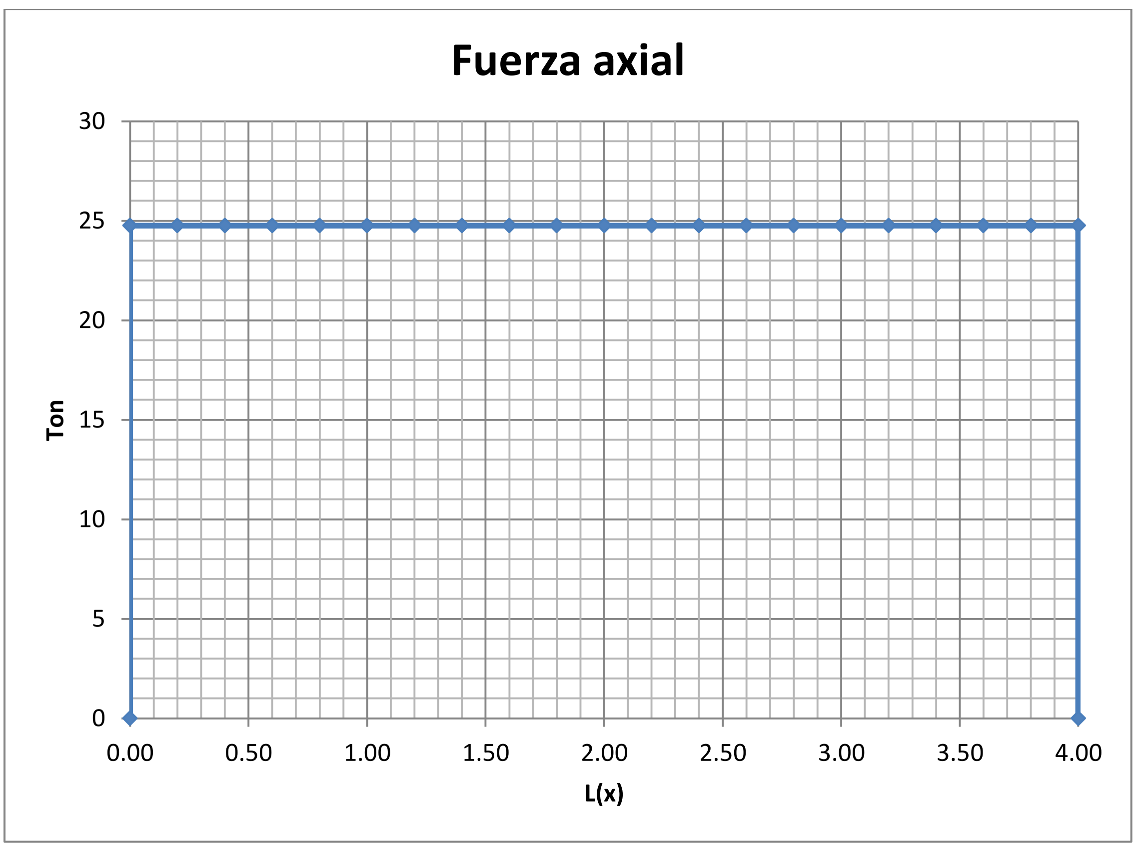

Fuerza axial
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
Ton
0.00
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
3.00
3.50
4.00
L(x)

Miembro C-D $0 \leq x \leq 4m$

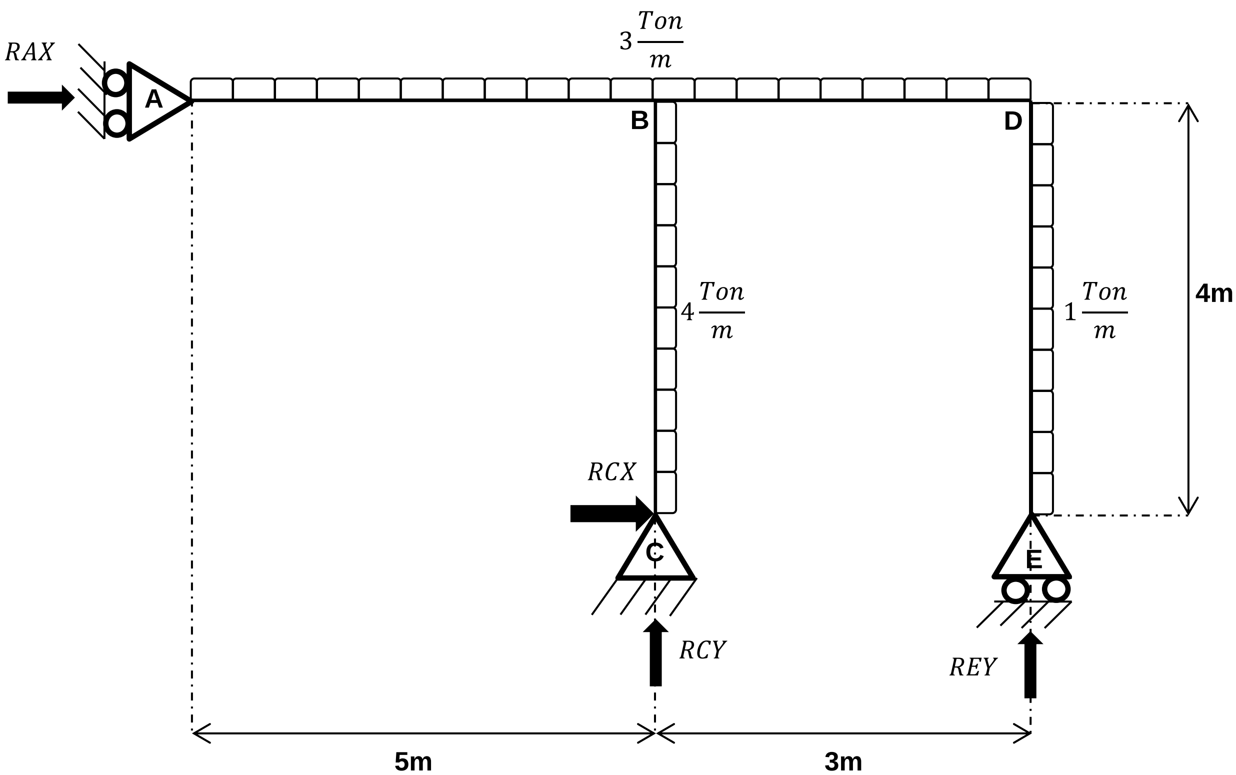
L(x)	**Cortante**	**Momento**	**Axial**
0.00	1.62000000	0.00000000	24.75555556
0.20	1.54266667	0.31880000	24.75555556
0.40	1.32133333	0.60746667	24.75555556
0.60	0.97200000	0.83880000	24.75555556
0.80	0.51066667	0.98880000	24.75555556
1.00	-0.04666667	1.03666667	24.75555556
1.20	-0.68400000	0.96480000	24.75555556
1.40	-1.38533333	0.75880000	24.75555556
1.60	-2.13466667	0.40746667	24.75555556
1.80	-2.91600000	-0.09720000	24.75555556
2.00	-3.71333333	-0.76000000	24.75555556
2.20	-4.51066667	-1.58253333	24.75555556
2.40	-5.29200000	-2.56320000	24.75555556
2.60	-6.04133333	-3.69720000	24.75555556
2.80	-6.74266667	-4.97653333	24.75555556
3.00	-7.38000000	-6.39000000	24.75555556
3.20	-7.93733333	-7.92320000	24.75555556
3.40	-8.39866667	-9.55853333	24.75555556
3.60	-8.74800000	-11.27520000	24.75555556
3.80	-8.96933333	-13.04920000	24.75555556
4.00	-9.04666667	-14.85333333	24.75555556




Momento flexionante
2.00000000
0.00000000
-2.00000000
-4.00000000
-6.00000000
-8.00000000
-10.00000000
-12.00000000
-14.00000000
-16.00000000
Ton*m
0.00
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
3.00
3.50
4.00
L(x)


Fuerza axial
30
25
20
15
10
5
0
Ton
0.00
0.50
1.00
1.50
2.00
2.50
3.00
3.50
4.00
L(x)

8.- Del siguiente marco: determine el valor de las reacciones en los soportes mostrados, las funciones que describen la variación de las acciones internas (momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal) y dibuje los diagramas correspondientes a estas.



Grado de indeterminación del marco:

$$\boldsymbol{r + 3m = 3n + c}$$

$$\mathbf{4 + 3(4) = 3(5) + 0}$$

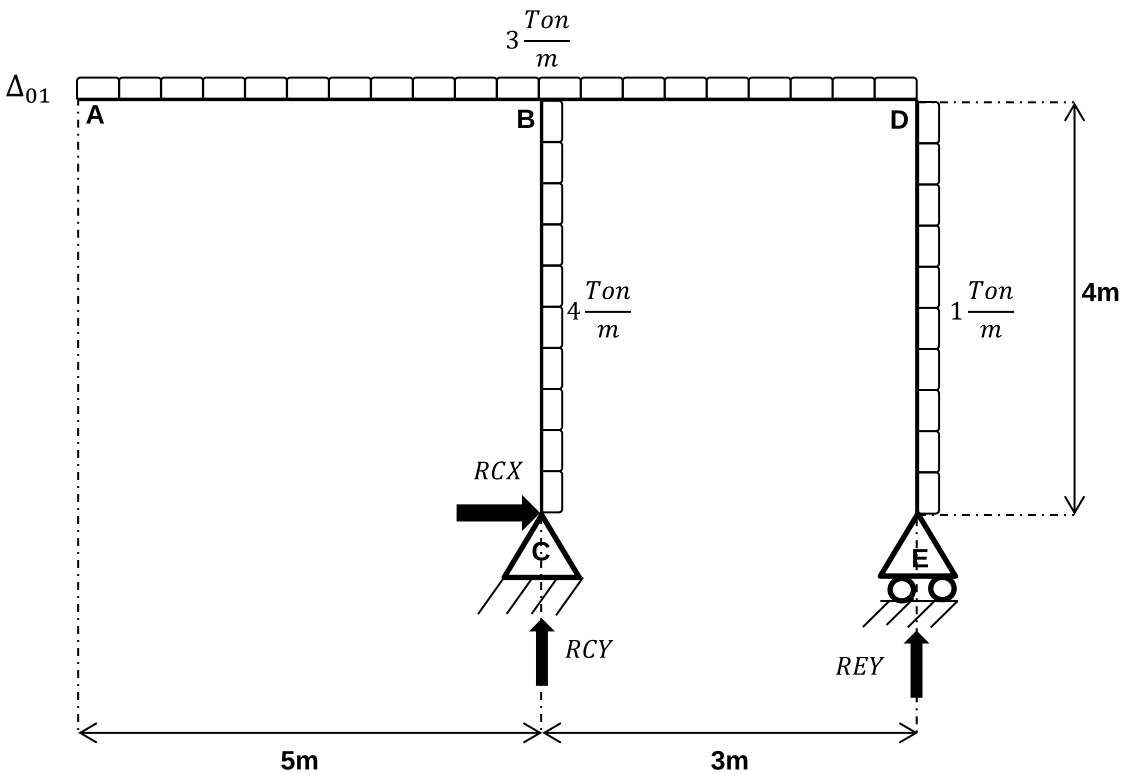
$$\mathbf{16 = 15}$$

Por lo tanto nuestro marco es estáticamente indeterminado y no podemos resolverlo con las ecuaciones de equilibrio estático.

Método de análisis.

Para dar solución al presente problema propuesto, se empleara el método de flexibilidades (trabajo virtual en marcos) descrito en ejercicios anteriores.

Marco primario.



Como puede observarse el marco primario idealizado es isostático y en él se mencionan los desplazamientos que fue necesario liberar para lograr dicha condición, a continuación se calcularan las reacciones en los soportes de dicho marco y se encontraran las ecuaciones que rigen el comportamiento del momento flexionante en cada miembro de este.

$$\sum M_C = 0$$

$$-\left(3\,{}^{Ton}/_{m}\right)(5m)\left(\frac{5}{2}m\right)-\left(4\,{}^{Ton}/_{m}\right)(4m)\left(\frac{4}{2}m\right)+\left(3\,{}^{Ton}/_{m}\right)(3m)\left(\frac{3}{2}m\right)$$
$$-\left(1\,{}^{Ton}/_{m}\right)(4m)\left(\frac{4}{2}m\right)-(3m)REY=0$$

$$\boldsymbol{REY=-\frac{64}{3}Ton}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$RCY - \left(3\,{}^{Ton}/_{m}\right)(8m) - \frac{64}{3}Ton = 0$$

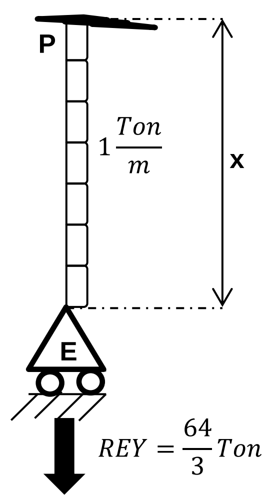
$$\boldsymbol{RCY = \frac{136}{3}Ton}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$RCX - \left(4\,{}^{Ton}/_{m}\right)(4m) - \left(1\,{}^{Ton}/_{m}\right)(4m) = 0$$

$$\boldsymbol{RCX = 20Ton}$$

Calculo de las ecuaciones de momento flexionante del marco primario.



Miembro D-E $\boldsymbol{0 \leq x \leq 4m}$

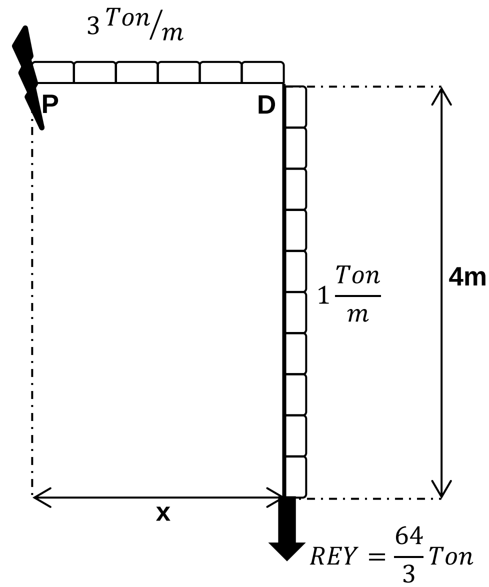
$$\sum M_P = 0$$

$$M = (1)(x)\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{M = \frac{x^2}{2}}$$

L(x)	Momento
0m	0
4m	$\boldsymbol{8Ton * m}$

Miembro B-D $\quad 0 \le x \le 3m$



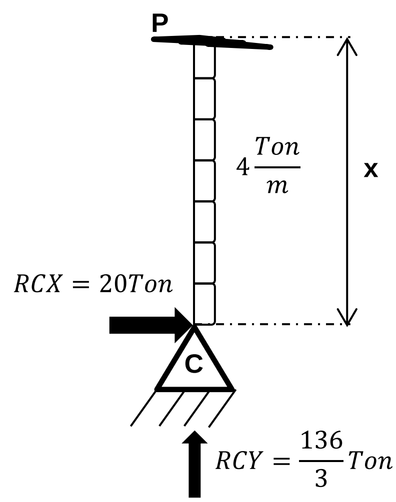
$$\sum M_P = 0$$

$$M = (3)(x)\left(\frac{x}{2}\right) + (1)(4)\left(\frac{4}{2}\right) + \frac{64}{3}x$$

$$\boldsymbol{M = \frac{3x^2}{2} + \frac{64}{3}x + 8}$$

L(x)	Momento
0m	$\boldsymbol{8Ton * m}$
3m	$\boldsymbol{85.5Ton * m}$

Miembro B-C $\quad 0 \le x \le 4m$



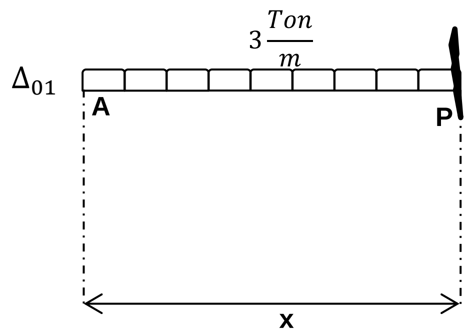
$$\sum M_P = 0$$

$$M = (4)(x)\left(\frac{x}{2}\right) - (20)(x)$$

$$\boldsymbol{M = 2x^2 - 20x}$$

L(x)	Momento
0m	$\boldsymbol{0}$
4m	$\boldsymbol{-48Ton * m}$

Miembro A-B $\quad 0 \le x \le 5m$



$$\sum M_P = 0$$

$$M = -(3)(x)\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{M = -\frac{3x^2}{2}}$$

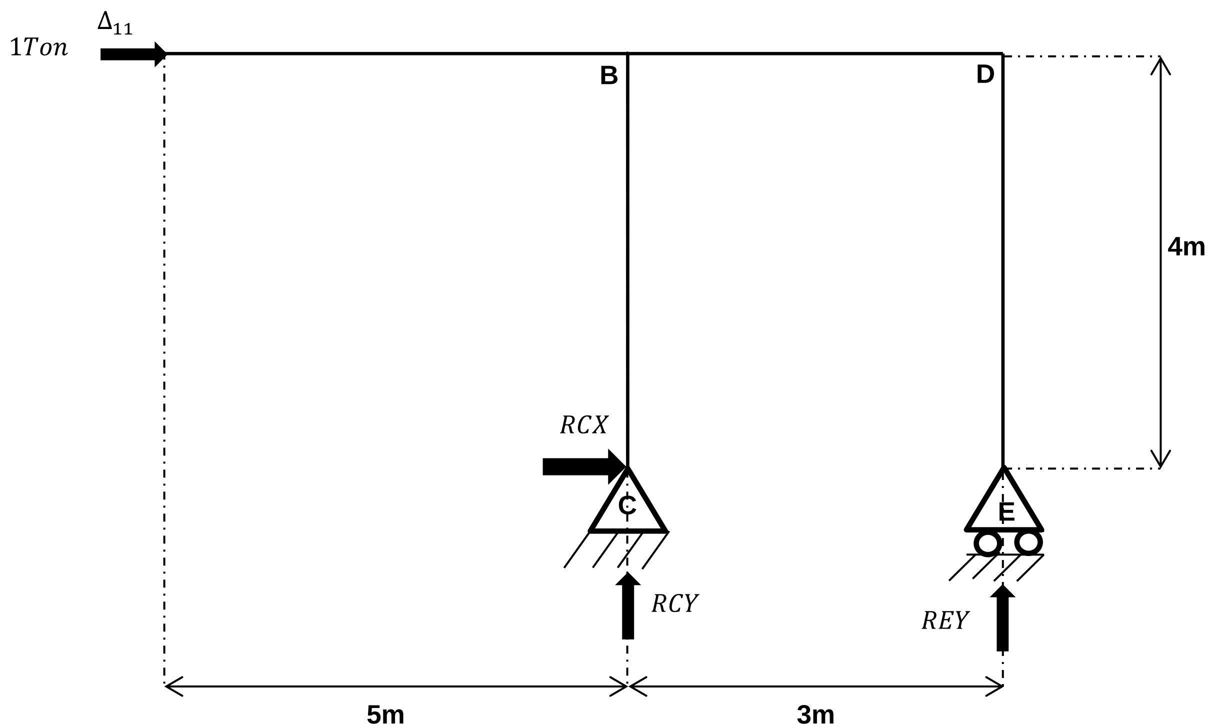
L(x)	Momento
0m	$\boldsymbol{0}$
5m	$\boldsymbol{-37.5Ton * m}$

Verificando que las ecuaciones de momento flexionante calculadas son correctas sumamos los momentos que coinciden en el punto B

$$\boldsymbol{\sum MB = 0}$$

$$\boldsymbol{85.5Ton*m - 48Ton*m - 37.5Ton*m = 0}$$

Marco isostático ficticio 1



Como puede observarse el marco isostático ficticio planteado para obtener el valor de la reacción liberada, carece de las cargas originalmente planteadas al marco real y se induce una carga positiva unitaria en el lugar donde originalmente se encontraba la reacción liberada.

Calculo de las reacciones en los soportes del marco isostático ficticio 1

$$\sum M_C = 0$$

$$(1Ton)(4m) - (3m)REY = 0$$

$$\boldsymbol{REY = \frac{4}{3}Ton} \uparrow$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$RCY + \frac{4}{3}Ton = 0$$

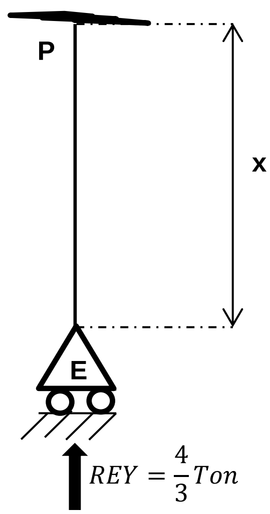
$$\boldsymbol{RCY = -\frac{4}{3}Ton}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$RCX + 1Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RCX = -1Ton}$$

Calculo de las ecuaciones de momento flexionante del marco primario.



Miembro D-E $\boldsymbol{0 \leq x \leq 4m}$

$$\sum M_P = 0$$

$$\boldsymbol{M = 0}$$

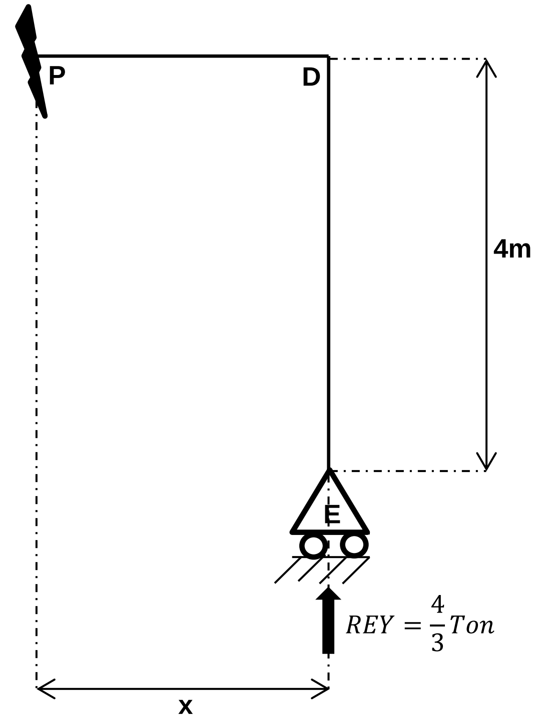
L(x)	Momento
0m	0
4m	0

Miembro B-D $\mathbf{0 \leq x \leq 3m}$

$$\sum M_P = 0$$

$$M = -\left(\frac{4}{3}\right)(x)$$

$$\boldsymbol{M = -\frac{4}{3}x}$$



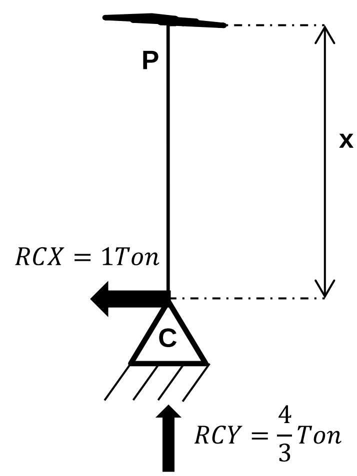
L(x)	Momento
0m	$\mathbf{0Ton * m}$
3m	$\mathbf{-4Ton * m}$

Miembro B-C $\mathbf{0 \leq x \leq 4m}$

$$\sum M_P = 0$$

$$M = (1)(x)$$

$$\boldsymbol{M = x}$$

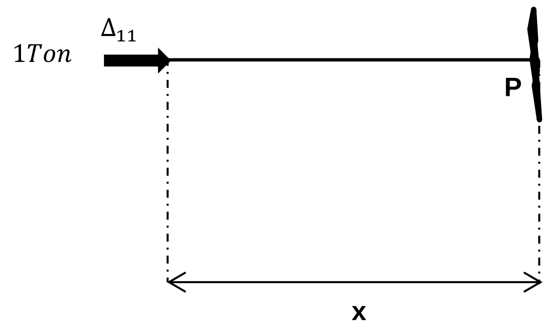


L(x)	Momento
0m	**0**
4m	$\mathbf{4Ton * m}$

Miembro A-B $\boldsymbol{0 \leq x \leq 5m}$

$$\sum M_P = 0$$

$\boldsymbol{M = 0}$



L(x)	Momento
0m	0
5m	0

Verificando que las ecuaciones de momento flexionante calculadas son correctas sumamos los momentos que coinciden en el punto B

$$\sum \boldsymbol{MB = 0}$$

$$\boldsymbol{-4Ton * m + 4Ton * m = 0}$$

Calculo de las deflexiones.

$$\Delta y_i = \int_{L_1}^{L_2} \frac{Mmdx}{EI}$$

$$\Delta y_{01} = \frac{1}{EI}\int_0^5 \left(-\frac{3x^2}{2}\right)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_0^4 (2x^2 - 20x)(x)dx + \frac{1}{EI}\int_0^3 \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{64}{3}x + 8\right)\left(-\frac{4}{3}x\right)dx + \frac{1}{EI}\int_0^4 \left(\frac{x^2}{2}\right)(0)dx = -\frac{896}{3EI} - \frac{689}{2EI} = -\boldsymbol{\frac{3859}{6EI}}$$

$$\Delta y_{01} = \frac{1}{EI}\int_0^5 (0)(0)dx + \frac{1}{EI}\int_0^4 (x)(x)dx + \frac{1}{EI}\int_0^3 \left(-\frac{4}{3}x\right)\left(-\frac{4}{3}x\right)dx + \frac{1}{EI}\int_0^4 (0)(0)dx = \frac{64}{3EI} + \frac{16}{EI} = \boldsymbol{\frac{112}{3EI}}$$

Asociando los desplazamientos con las reacciones liberadas.

$$\Delta_{01} + \Delta_{11}RAX = 0$$

Sustituyendo y solucionando.

$$\frac{\mathbf{112}}{\mathbf{3EI}}\boldsymbol{RAX}=\frac{\mathbf{3859}}{\mathbf{6EI}}$$

$$\boldsymbol{RAX}=\frac{\mathbf{3859}}{\mathbf{224}}\boldsymbol{Ton}\;\rightarrow$$

Calculo de las reacciones en los soportes del marco original.

$$\sum \boldsymbol{M_C}=\mathbf{0}$$

$$\left(\frac{3859}{224}Ton\right)(4m)-\left(3\,{}^{Ton}/_{m}\right)(5m)\left(\frac{5}{2}m\right)-\left(4\,{}^{Ton}/_{m}\right)(4m)\left(\frac{4}{2}m\right)$$
$$+\left(3\,{}^{Ton}/_{m}\right)(3m)\left(\frac{3}{2}m\right)-\left(1\,{}^{Ton}/_{m}\right)(4m)\left(\frac{4}{2}m\right)-(3m)REY=0$$

$$\boldsymbol{REY}=\frac{\mathbf{275}}{\mathbf{168}}\boldsymbol{Ton}\;\uparrow$$

$$\sum F_Y=0$$

$$RCY-\left(3\,{}^{Ton}/_{m}\right)(8m)+\frac{275}{168}Ton=0$$

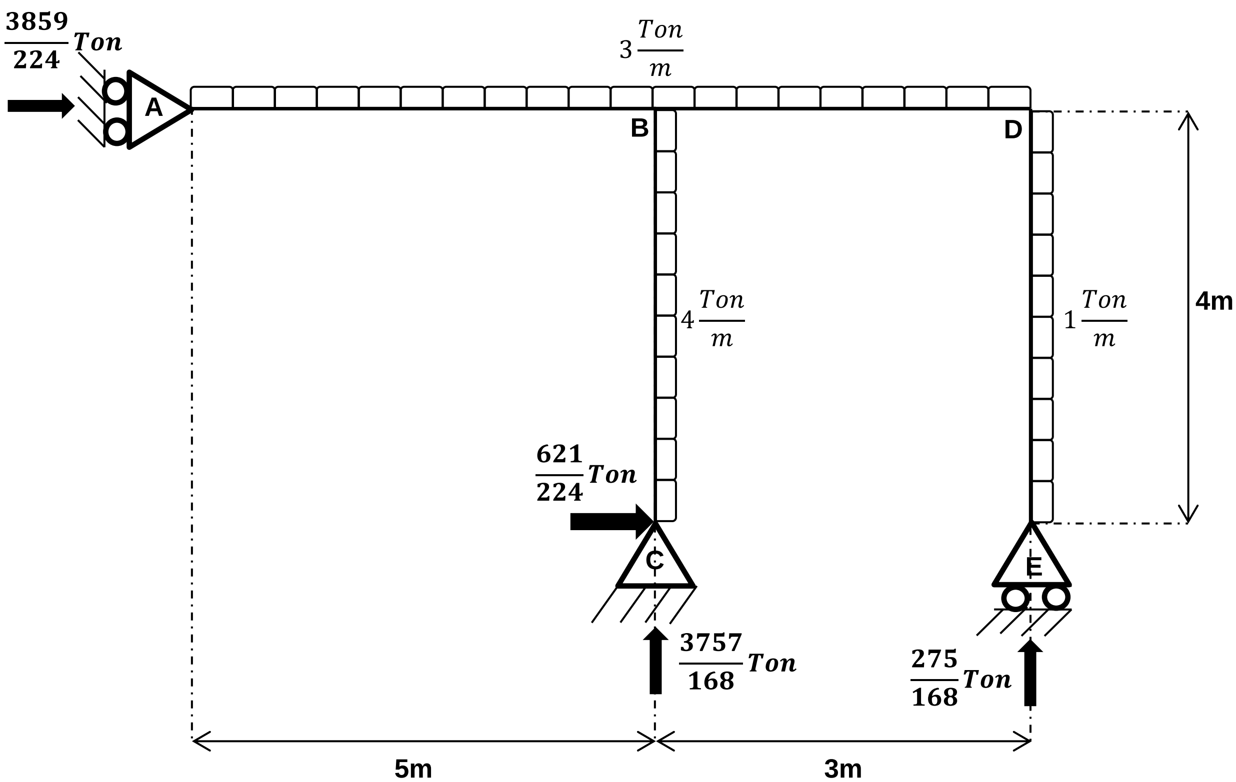
$$\boldsymbol{RCY}=\frac{\mathbf{3757}}{\mathbf{168}}\boldsymbol{Ton}\;\uparrow$$

$$\sum F_X=0$$

$$RCX-\left(4\,{}^{Ton}/_{m}\right)(4m)-\left(1\,{}^{Ton}/_{m}\right)(4m)+\frac{3859}{224}Ton=0$$

$$\boldsymbol{RCX}=\frac{\mathbf{621}}{\mathbf{224}}\boldsymbol{Ton}\;\rightarrow$$

Marco en equilibrio estático



Calculo de las ecuaciones de momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal en los miembros del marco real.

Miembro D-E $\quad 0 \leq x \leq 4m$

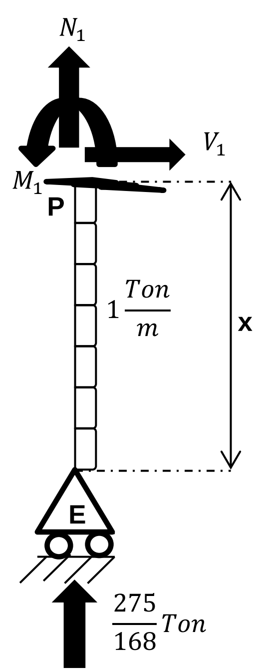
$$\sum M_P = 0$$

$$-M_1 + (1)(x)\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$M_1 = \frac{x^2}{2}$$

L(x)	Momento	Cortante
0m	0	0
4m	$8Ton * m$	$4Ton$

$$V_1 = x$$

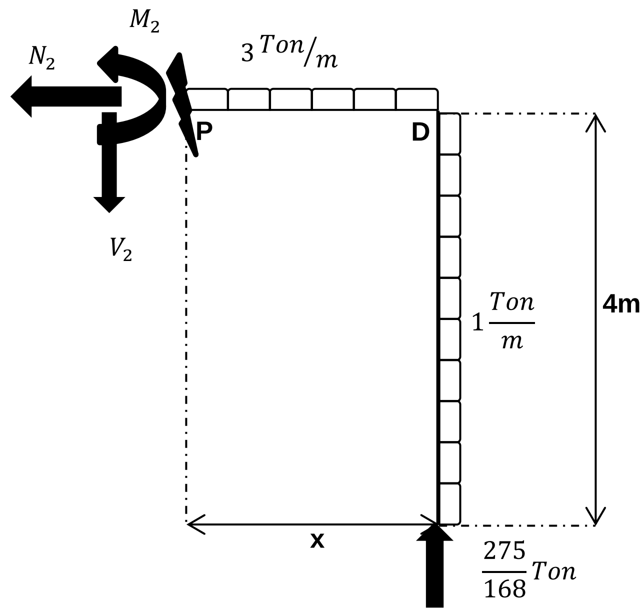


$$\sum F_Y = 0$$

$$N_1 + \frac{275}{168}Ton = 0$$

$$N_1 = \frac{275}{168}Ton(Compresión)$$

Miembro B-D $0 \leq x \leq 3m$



$$\sum M_P = 0$$

$$M_2 = (3)(x)\left(\frac{x}{2}\right) + (1)(4)\left(\frac{4}{2}\right) - \frac{275}{168}x$$

$$\boldsymbol{M_2 = \frac{3x^2}{2} - \frac{275}{168}x + 8}$$

$$\boldsymbol{V_2 = 3x - \frac{275}{168}}$$

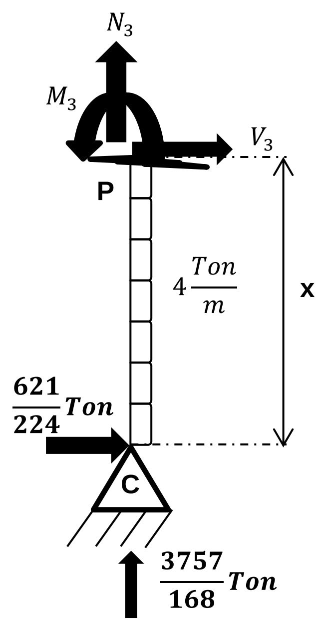
$$\sum F_X = 0$$

$$-N_2 - \left(\frac{1Ton}{m}\right)(4m) = 0$$

$$\boldsymbol{N_1 = 4Ton(Compresión)}$$

L(x)	Momento	Cortante
0m	$\boldsymbol{8Ton * m}$	$\boldsymbol{-\frac{275}{168}Ton}$
3m	$\boldsymbol{\frac{929}{56}Ton * m}$	$\boldsymbol{\frac{1237}{168}Ton}$

Miembro B-C $0 \leq x \leq 4m$



$$\sum M_P = 0$$

$$M_3 = (4)(x)\left(\frac{x}{2}\right) - \left(\frac{621}{224}\right)(x)$$

$$\boldsymbol{M_3 = 2x^2 - \frac{621}{224}x}$$

$$\boldsymbol{V_3 = 4x - \frac{621}{224}} \qquad \boldsymbol{N_3 = \frac{3757}{168}Ton(Compresión)}$$

L(x)	Momento	Cortante
0m	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{-\frac{621}{224}Ton}$
4m	$\boldsymbol{\frac{1171}{56}Ton * m}$	$\boldsymbol{\frac{2963}{224}Ton}$

Miembro A-B $\quad 0 \leq x \leq 5m$

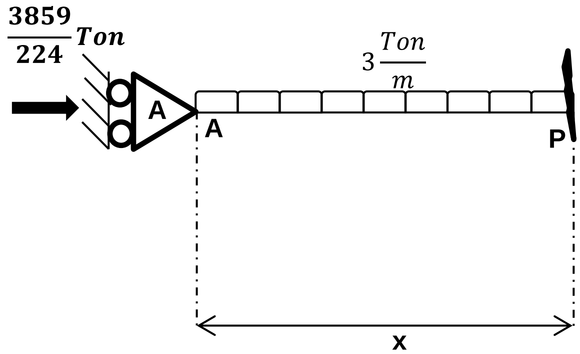
$$\sum M_P = 0$$

$$M_3 = -(3)(x)\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{M_3 = -\frac{3x^2}{2}}$$

$$\boldsymbol{V_3 = -3x}$$

$$\boldsymbol{N_3 = \frac{3859}{224}Ton(Compresión)}$$



L(x)	Momento	Cortante
0m	0	0
5m	$-37.5Ton*m$	$15Ton$

Verificando que las ecuaciones sean correctas.

$$\sum \boldsymbol{M_B = 0}$$

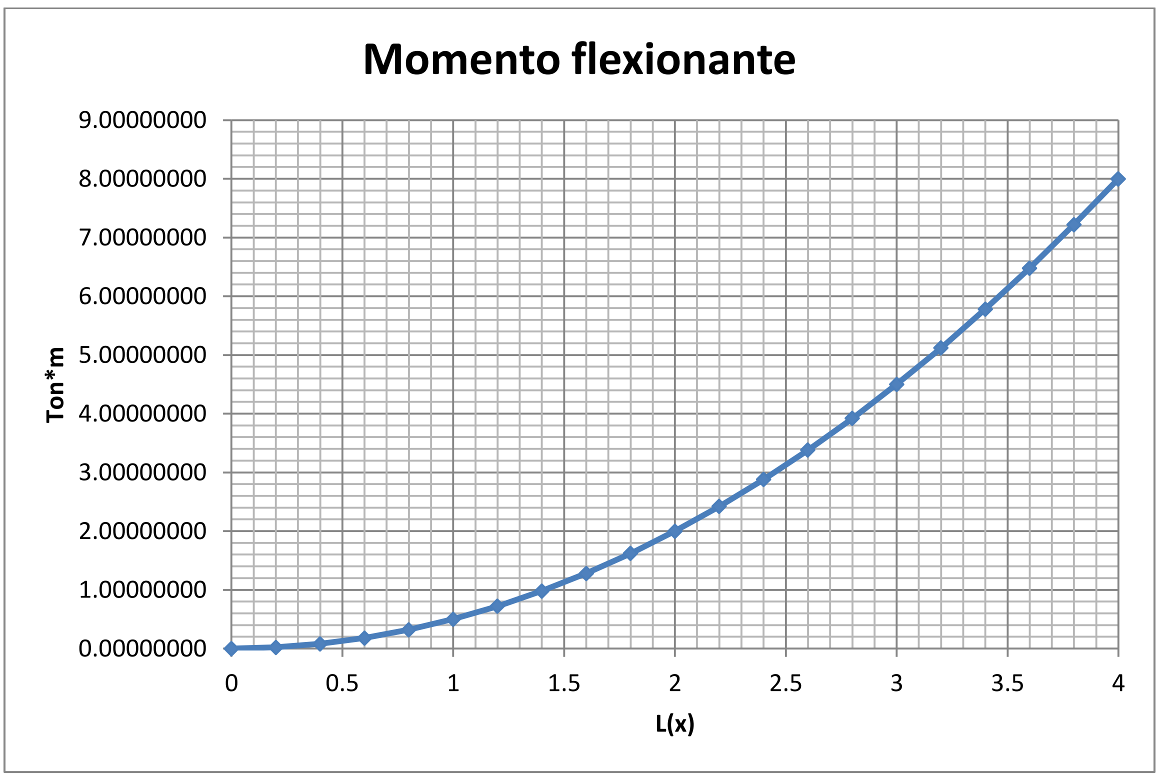
$$\frac{929}{56}Ton*m + \frac{1171}{56}Ton*m - -37.5Ton*m = 0$$

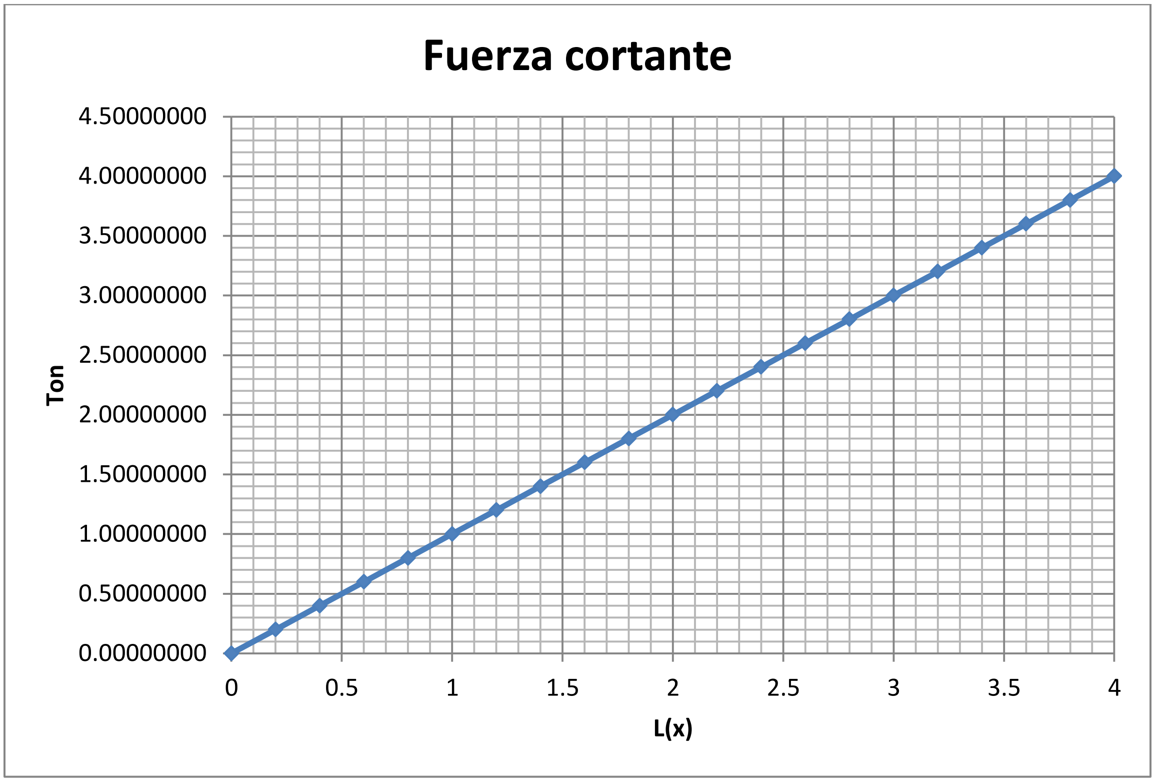
Dibujo de los diagramas de momento flexionante, fuerza cortante y fuerza axial en cada miembro del marco.

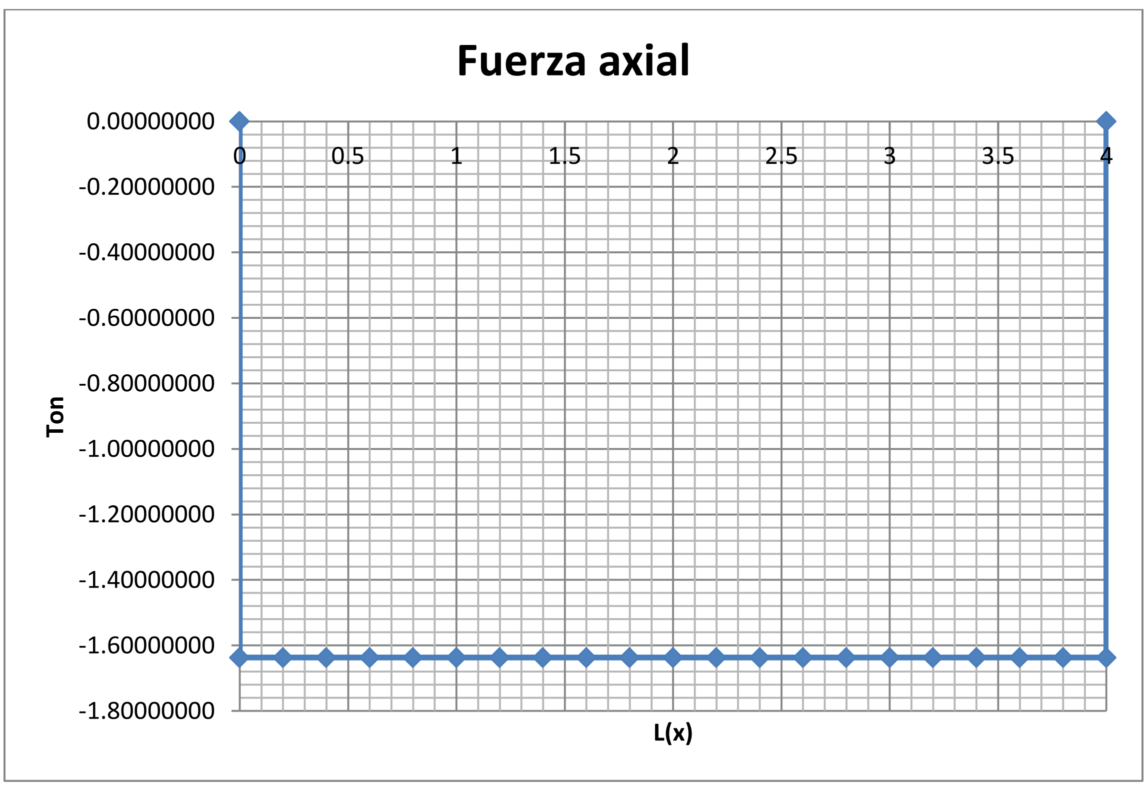
Miembro D-E $\quad 0 \leq x \leq 4m$

L(x)	momento	Cortante	F. Axial
0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0	0.00000000	0.00000000	-1.63690476
0.2	0.02000000	0.20000000	-1.63690476
0.4	0.08000000	0.40000000	-1.63690476
0.6	0.18000000	0.60000000	-1.63690476
0.8	0.32000000	0.80000000	-1.63690476
1	0.50000000	1.00000000	-1.63690476
1.2	0.72000000	1.20000000	-1.63690476
1.4	0.98000000	1.40000000	-1.63690476

1.6	1.28000000	1.60000000	-1.63690476
1.8	1.62000000	1.80000000	-1.63690476
2	2.00000000	2.00000000	-1.63690476
2.2	2.42000000	2.20000000	-1.63690476
2.4	2.88000000	2.40000000	-1.63690476
2.6	3.38000000	2.60000000	-1.63690476
2.8	3.92000000	2.80000000	-1.63690476
3	4.50000000	3.00000000	-1.63690476
3.2	5.12000000	3.20000000	-1.63690476
3.4	5.78000000	3.40000000	-1.63690476
3.6	6.48000000	3.60000000	-1.63690476
3.8	7.22000000	3.80000000	-1.63690476
4	8.00000000	4.00000000	-1.63690476
4	8.00000000	4.00000000	0.00000000

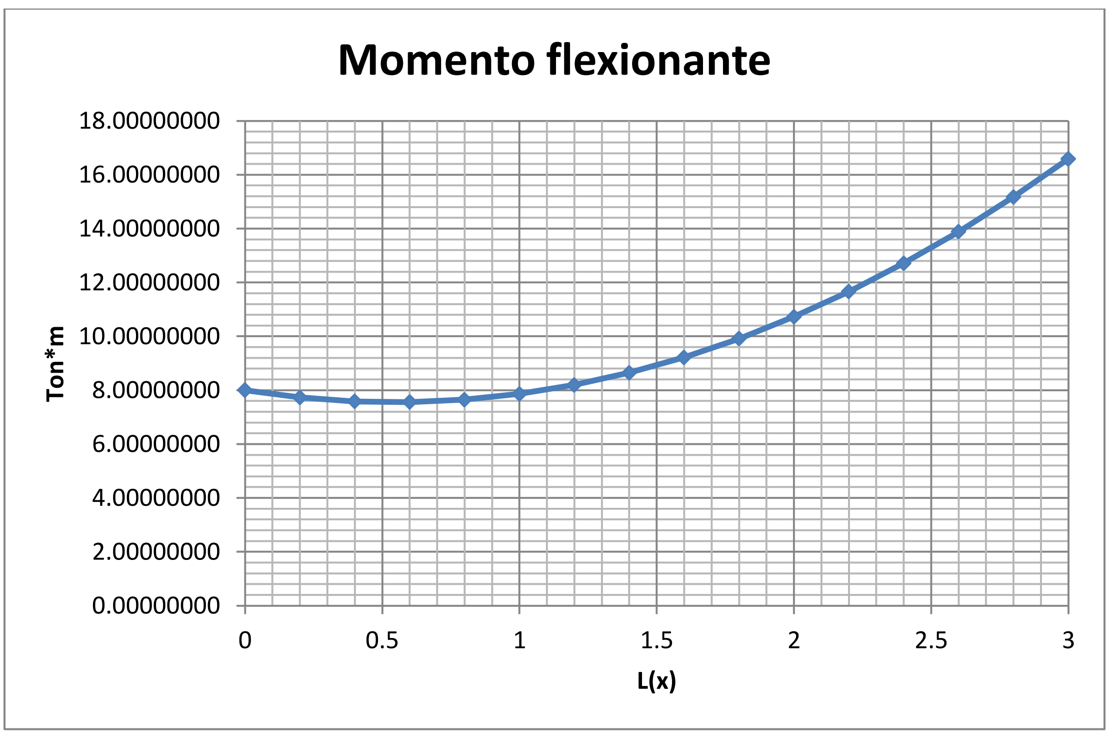


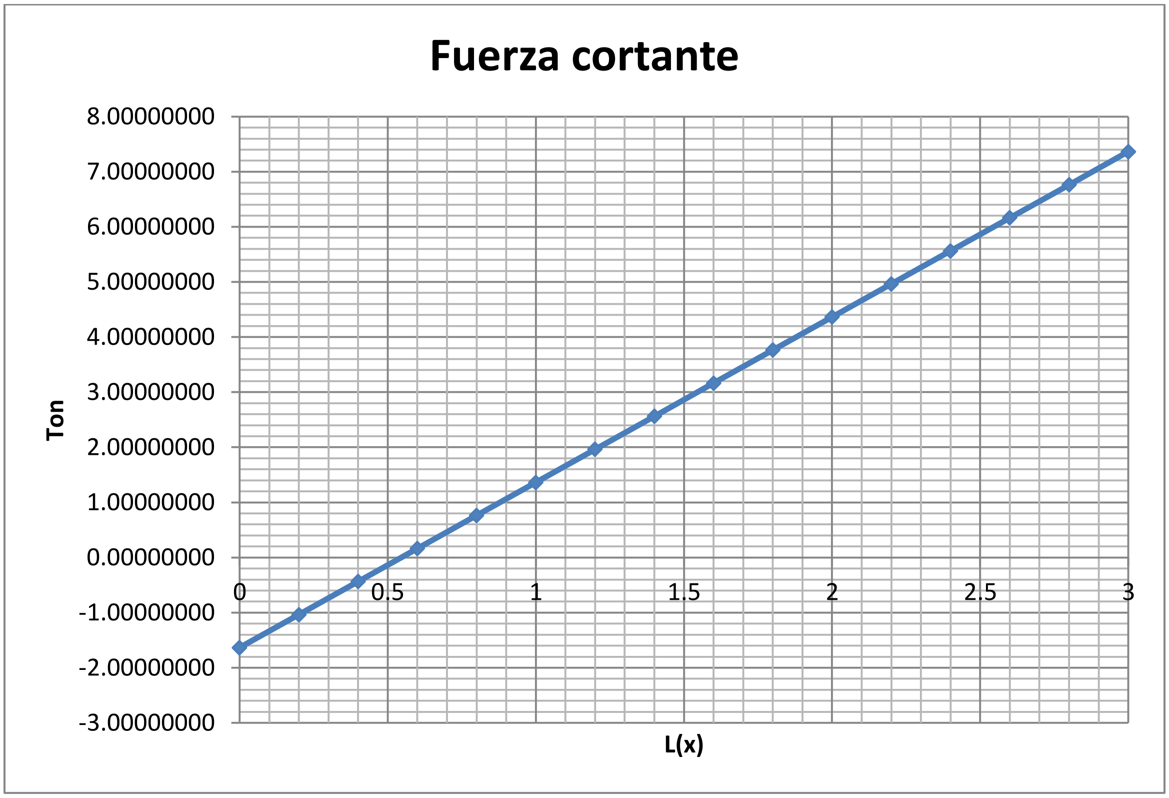

Fuerza cortante
4.50000000
4.00000000
3.50000000
3.00000000
2.50000000
2.00000000
1.50000000
1.00000000
0.50000000
0.00000000
Ton
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
L(x)


Fuerza axial
0.00000000
-0.20000000
-0.40000000
-0.60000000
-0.80000000
-1.00000000
-1.20000000
-1.40000000
-1.60000000
-1.80000000
Ton
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
L(x)

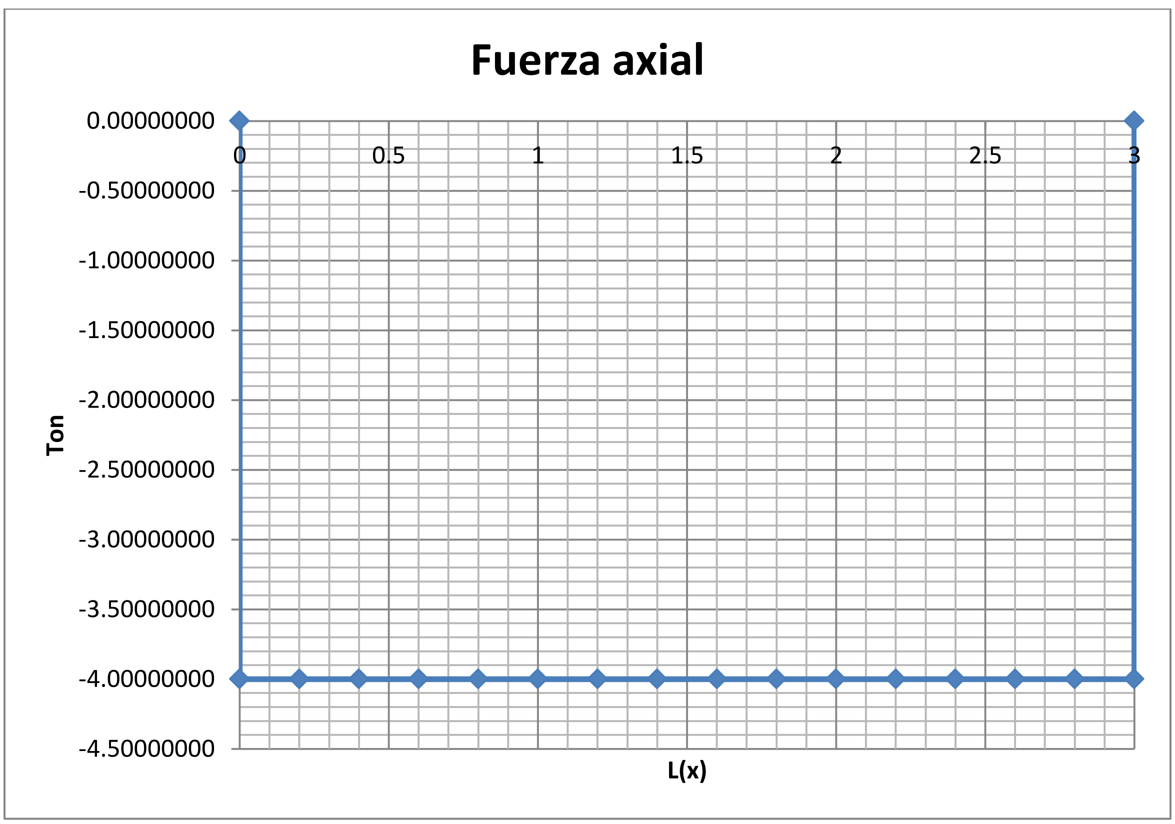
Miembro B-D $0 \leq x \leq 3m$

L(x)	Momento	Cortante	F. Axial
0	8.00000000	-1.63690476	0.00000000
0	8.00000000	-1.63690476	-4.00000000
0.2	7.73261905	-1.03690476	-4.00000000
0.4	7.58523810	-0.43690476	-4.00000000
0.6	7.55785714	0.16309524	-4.00000000
0.8	7.65047619	0.76309524	-4.00000000
1	7.86309524	1.36309524	-4.00000000
1.2	8.19571429	1.96309524	-4.00000000
1.4	8.64833333	2.56309524	-4.00000000
1.6	9.22095238	3.16309524	-4.00000000
1.8	9.91357143	3.76309524	-4.00000000
2	10.72619048	4.36309524	-4.00000000
2.2	11.65880952	4.96309524	-4.00000000
2.4	12.71142857	5.56309524	-4.00000000
2.6	13.88404762	6.16309524	-4.00000000
2.8	15.17666667	6.76309524	-4.00000000
3	16.58928571	7.36309524	-4.00000000
3	16.58928571	7.36309524	0.00000000





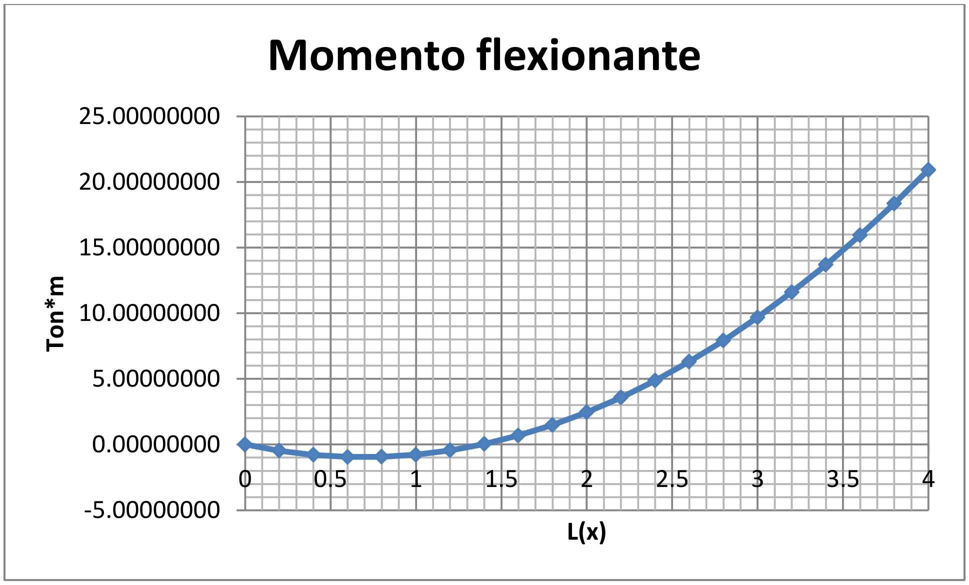
Fuerza cortante
8.00000000
7.00000000
6.00000000
5.00000000
4.00000000
3.00000000
2.00000000
1.00000000
0.00000000
-1.00000000
-2.00000000
-3.00000000
Ton
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
L(x)

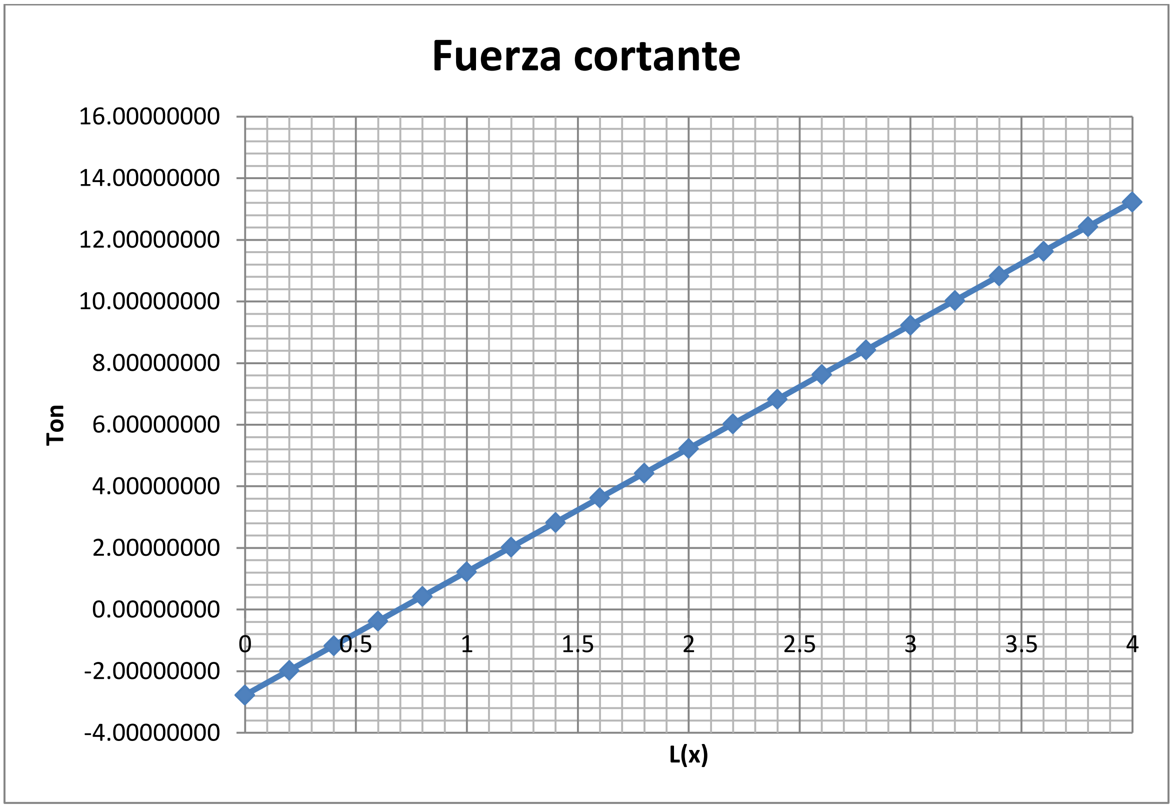


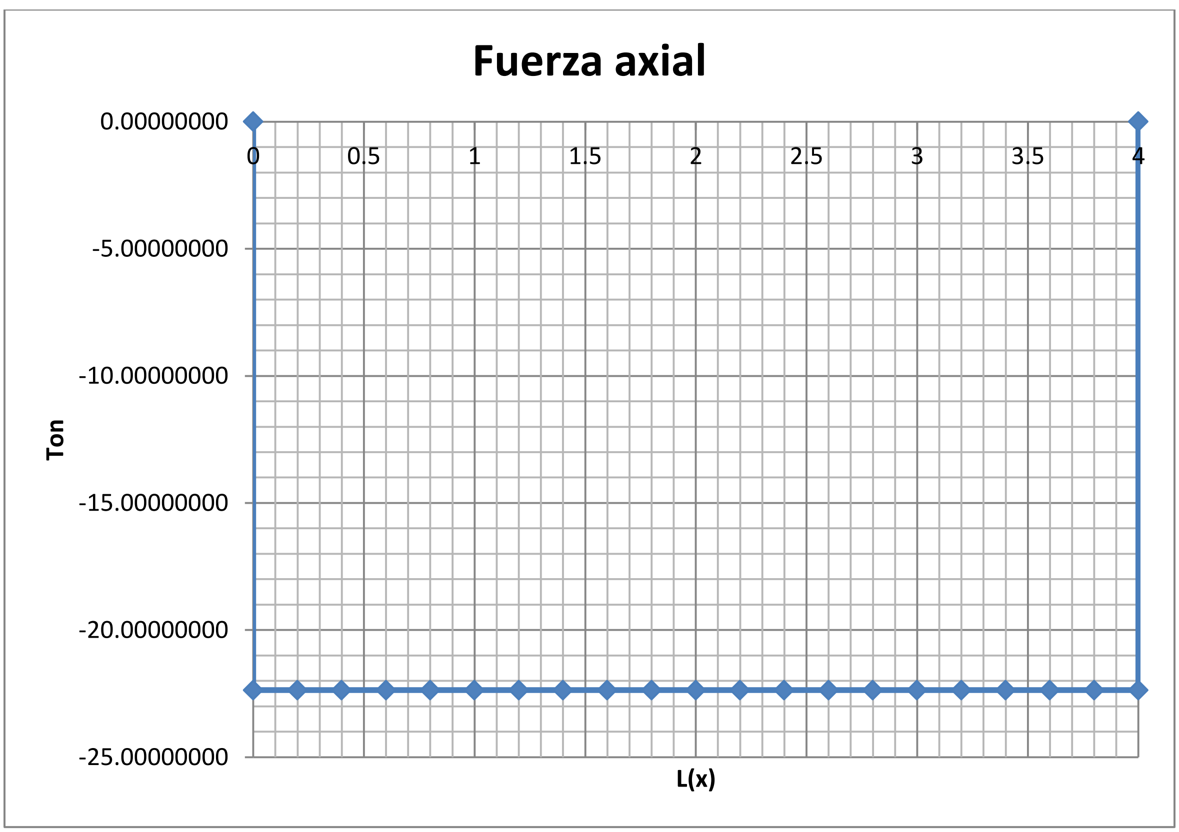
Fuerza axial
0.00000000
-0.50000000
-1.00000000
-1.50000000
-2.00000000
-2.50000000
-3.00000000
-3.50000000
-4.00000000
-4.50000000
Ton
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
L(x)

Miembro B-C $0 \leq x \leq 4m$

L(x)	Momento	Cortante	F. Axial
0	0.00000000	-2.77232143	0.00000000
0	0.00000000	-2.77232143	-22.36309524
0.2	-0.47446429	-1.97232143	-22.36309524
0.4	-0.78892857	-1.17232143	-22.36309524
0.6	-0.94339286	-0.37232143	-22.36309524
0.8	-0.93785714	0.42767857	-22.36309524
1	-0.77232143	1.22767857	-22.36309524
1.2	-0.44678571	2.02767857	-22.36309524
1.4	0.03875000	2.82767857	-22.36309524
1.6	0.68428571	3.62767857	-22.36309524
1.8	1.48982143	4.42767857	-22.36309524
2	2.45535714	5.22767857	-22.36309524
2.2	3.58089286	6.02767857	-22.36309524
2.4	4.86642857	6.82767857	-22.36309524
2.6	6.31196429	7.62767857	-22.36309524
2.8	7.91750000	8.42767857	-22.36309524
3	9.68303571	9.22767857	-22.36309524
3.2	11.60857143	10.02767857	-22.36309524
3.4	13.69410714	10.82767857	-22.36309524
3.6	15.93964286	11.62767857	-22.36309524
3.8	18.34517857	12.42767857	-22.36309524
4	20.91071429	13.22767857	-22.36309524
4	20.91071429	13.22767857	0.00000000

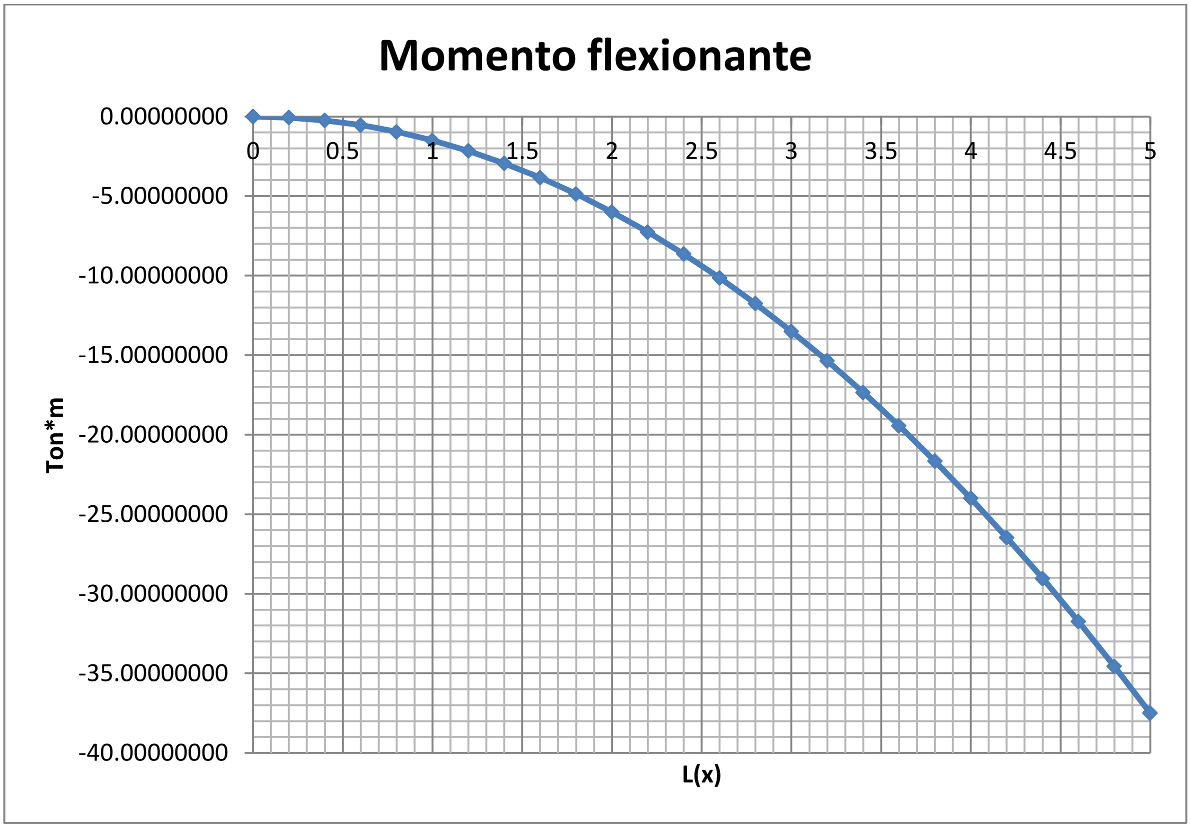


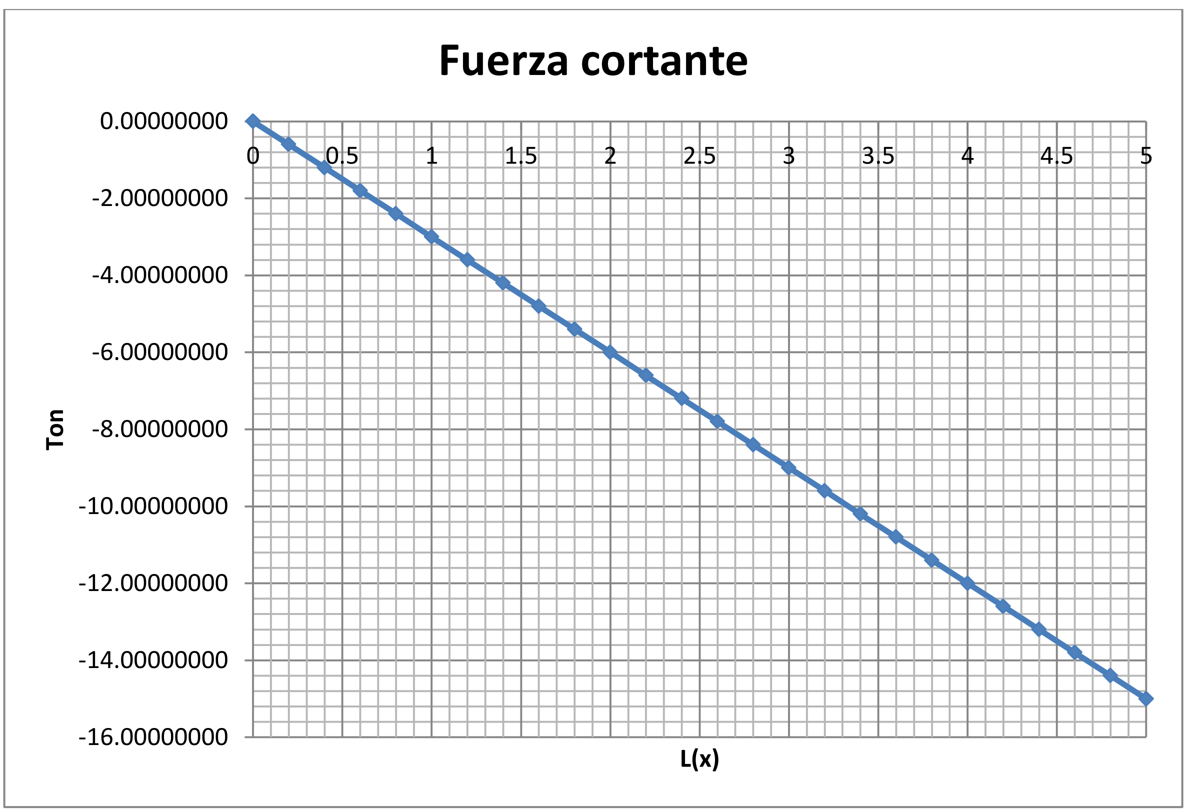

Fuerza cortante
16.00000000
14.00000000
12.00000000
10.00000000
8.00000000
6.00000000
4.00000000
2.00000000
0.00000000
-2.00000000
-4.00000000
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
Ton
L(x)

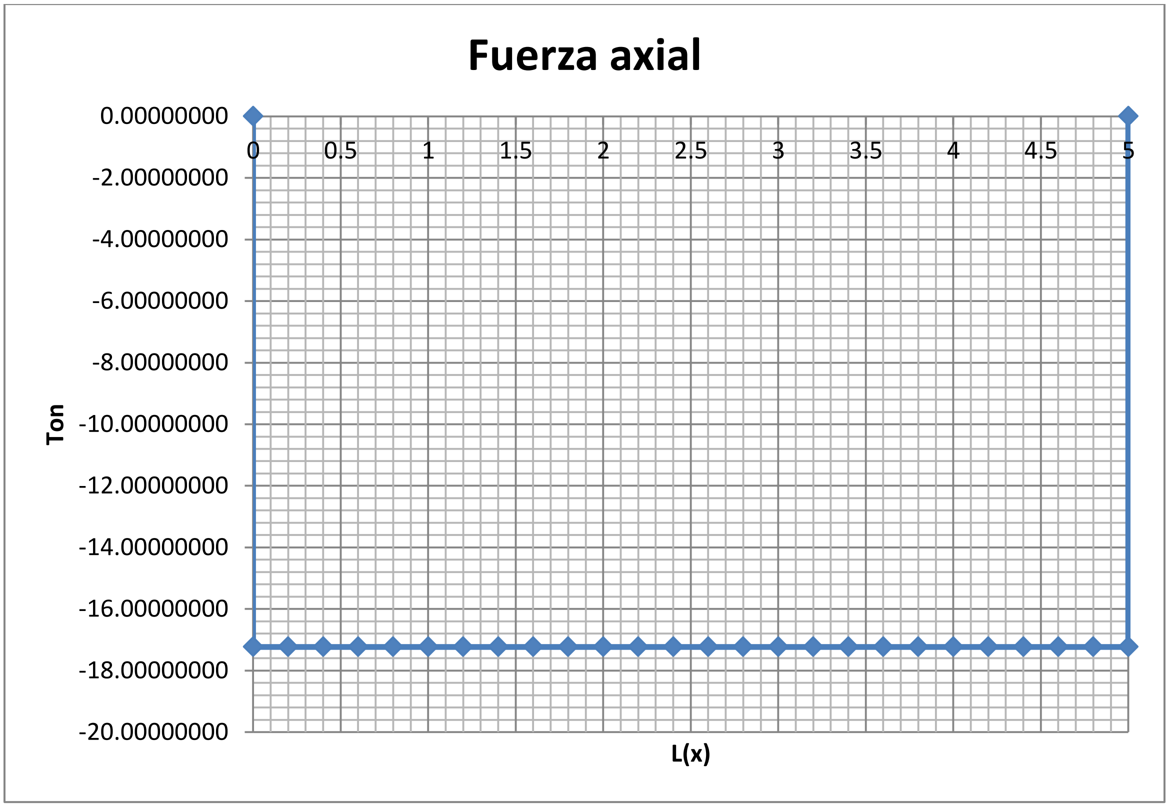

Fuerza axial
0.00000000
-5.00000000
-10.00000000
-15.00000000
-20.00000000
-25.00000000
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
Ton
L(x)

Miembro A-B $0 \leq x \leq 5m$

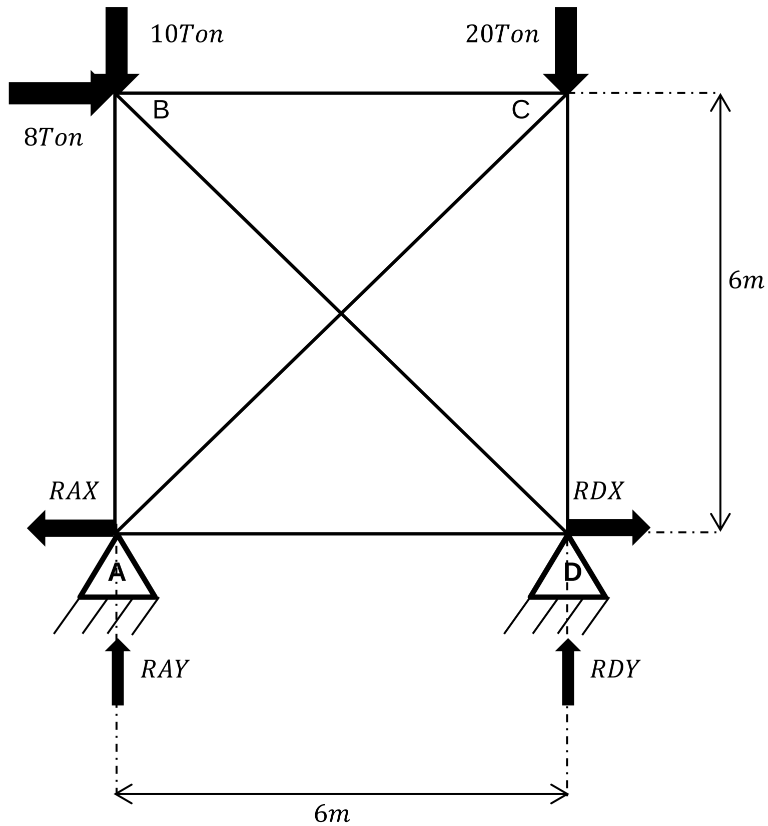
L(x)	Momento	Cortante	F. axial
0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0	0.00000000	0.00000000	-17.22767857
0.2	-0.06000000	-0.60000000	-17.22767857
0.4	-0.24000000	-1.20000000	-17.22767857
0.6	-0.54000000	-1.80000000	-17.22767857
0.8	-0.96000000	-2.40000000	-17.22767857
1	-1.50000000	-3.00000000	-17.22767857
1.2	-2.16000000	-3.60000000	-17.22767857
1.4	-2.94000000	-4.20000000	-17.22767857
1.6	-3.84000000	-4.80000000	-17.22767857
1.8	-4.86000000	-5.40000000	-17.22767857
2	-6.00000000	-6.00000000	-17.22767857
2.2	-7.26000000	-6.60000000	-17.22767857
2.4	-8.64000000	-7.20000000	-17.22767857
2.6	-10.14000000	-7.80000000	-17.22767857
2.8	-11.76000000	-8.40000000	-17.22767857
3	-13.50000000	-9.00000000	-17.22767857
3.2	-15.36000000	-9.60000000	-17.22767857
3.4	-17.34000000	-10.20000000	-17.22767857
3.6	-19.44000000	-10.80000000	-17.22767857
3.8	-21.66000000	-11.40000000	-17.22767857
4	-24.00000000	-12.00000000	-17.22767857
4.2	-26.46000000	-12.60000000	-17.22767857
4.4	-29.04000000	-13.20000000	-17.22767857
4.6	-31.74000000	-13.80000000	-17.22767857
4.8	-34.56000000	-14.40000000	-17.22767857
5	-37.50000000	-15.00000000	-17.22767857
5	-37.50000000	-15.00000000	0.00000000


Momento flexionante
0.00000000
-5.00000000
-10.00000000
-15.00000000
-20.00000000
-25.00000000
-30.00000000
-35.00000000
-40.00000000
Ton*m
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
L(x)


Fuerza cortante
0.00000000
-2.00000000
-4.00000000
-6.00000000
-8.00000000
-10.00000000
-12.00000000
-14.00000000
-16.00000000
Ton
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
L(x)


Fuerza axial
0.00000000
-2.00000000
-4.00000000
-6.00000000
-8.00000000
-10.00000000
-12.00000000
-14.00000000
-16.00000000
-18.00000000
-20.00000000
Ton
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
L(x)

9.- Calcule el valor de las reacciones en los soportes mostrados, y las fuerzas presentadas en las barras de la siguiente armadura.



Calculo del grado de indeterminación de la armadura

$b + r = 2j$

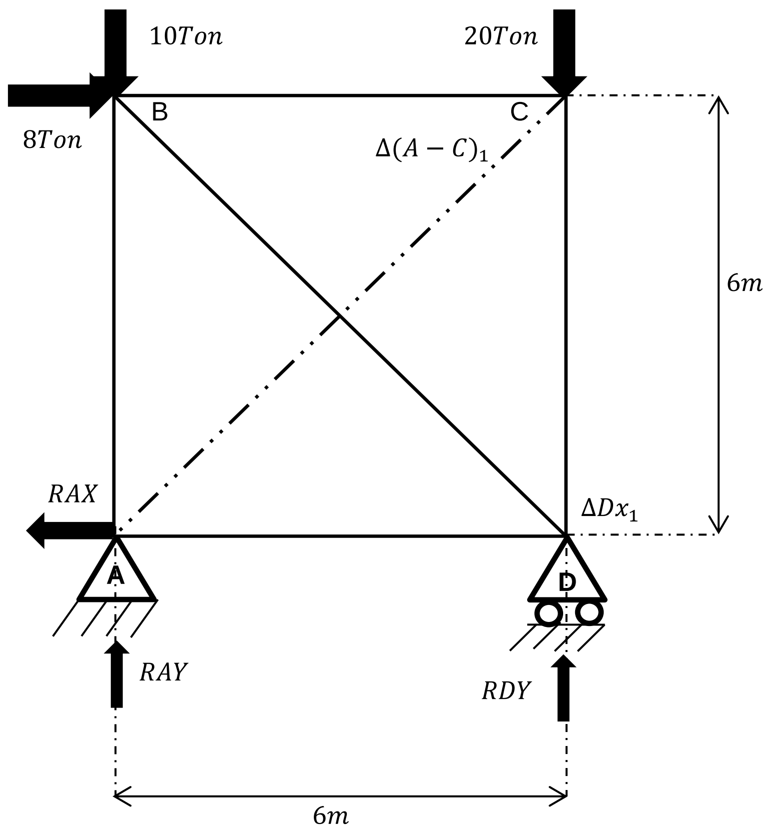
$6 + 4 = 2(4)$

$10 > 8 \;\therefore\; La\ armadura\ es\ estáticamente\ indeterminada$

Método de análisis

Para dar solución al ejemplo presente se empleara el método de flexibilidades (trabajo virtual en armaduras) el cual es similar al empleado para solucionar vigas y marcos hiperestáticos, como primer paso, debemos idealizar una armadura primaria la cual tendrá como principales características: será isostática y conservara las cargas de la armadura original, en este caso podemos liberar tantas reacciones como barras sean necesarias para que la armadura primaria logre ostentar condiciones de isostaticidad, una vez concluida la propuesta de la armadura primaria, se propondrán tantas armaduras isostáticas ficticias (AIF) sean necesarias para calcular los desplazamientos liberados, recordando que por cada desplazamiento liberado se propondrá una (AIF) en la cual se inducirá una carga positiva unitaria. En todas las armaduras que se generen por el método de flexibilidades se enunciaran los desplazamientos liberados en el lugar correspondiente y se calcularan las reacciones en los soportes, así como las fuerzas que se ejercen en cada barra de las mismas.

Armadura primaria.

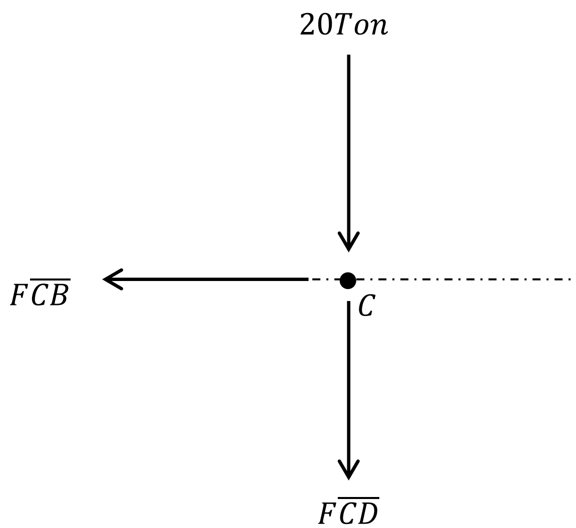


Como observamos para que la armadura primaria logre ostentar condiciones de isostaticidad, liberamos la barra (A-B) y la reacción horizontal en el soporte (D) a continuación calcularemos las fuerzas que se ejercen en cada barra por el método de (nodos) el cual se describe en esta tesis en el capítulo 6.

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$8Ton - RAX = 0$ $\qquad$ $\boldsymbol{RAX = 8Ton}$

Nodo C



$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

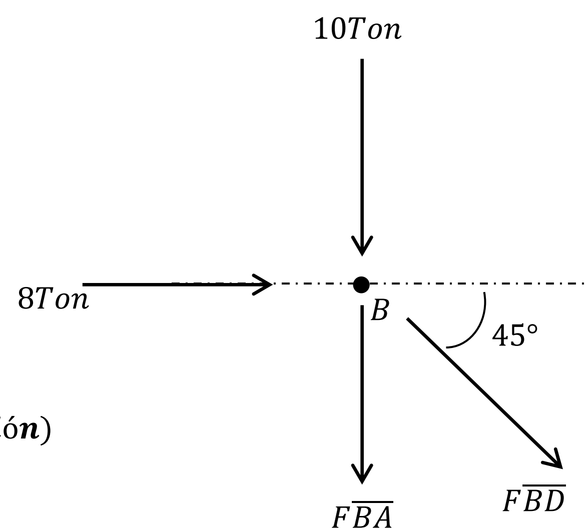
$$F\overline{CB} = \mathbf{0}$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-20 - F\overline{CD} = 0$$

$$F\overline{CD} = \boldsymbol{20Ton(Compresión)}$$

Nodo B



$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$8 + F\overline{BD}(Cos45°) = 0$$

$$F\overline{BD} = -\frac{8}{(Cos45°)} = \boldsymbol{8\sqrt{2}Ton\ (Compresión)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-10 + \left(8\sqrt{2}\right)(sen45°) - F\overline{BA} = 0$$

$$F\overline{BA} = \boldsymbol{2Ton(Compresión)}$$

Nodo A

$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

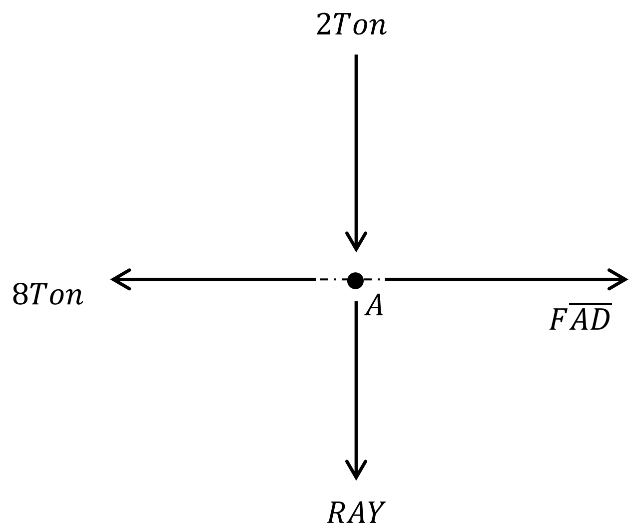
$$-8 + F\overline{AD} = 0$$

$$F\overline{AD} = \boldsymbol{8Ton(Tensión)}$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-2 - RAY = 0$$

$$RAY = \boldsymbol{-2Ton} \uparrow$$

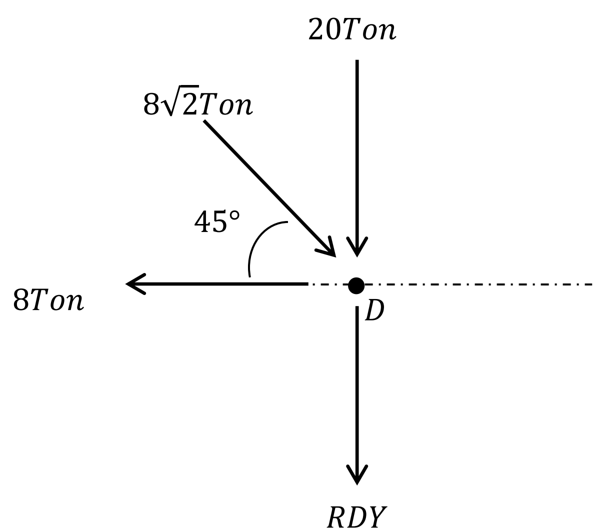


Nodo D

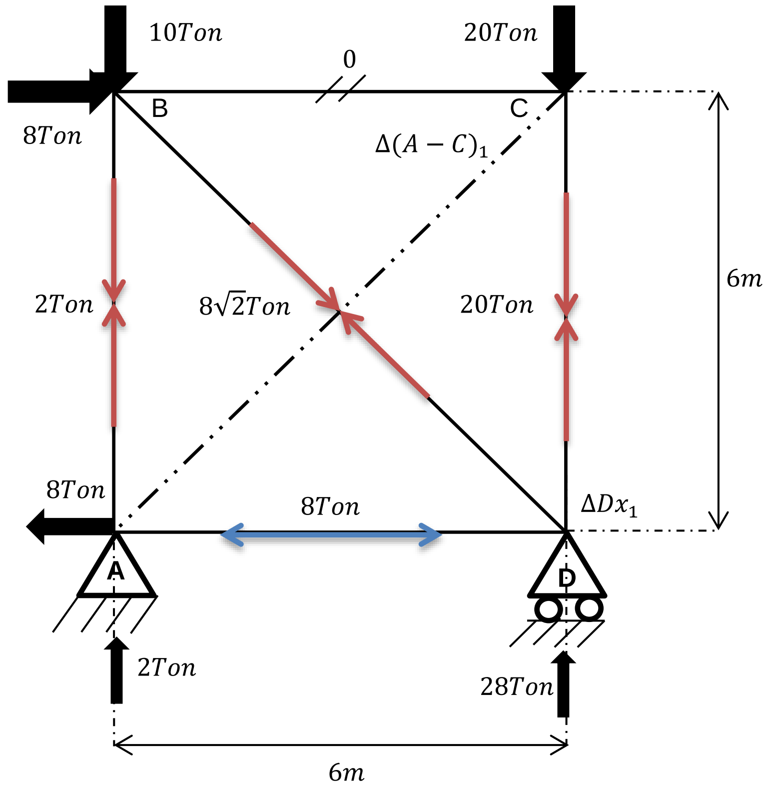
$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-20 - \left(8\sqrt{2}\right)(Sen45°) - RDY = 0$$

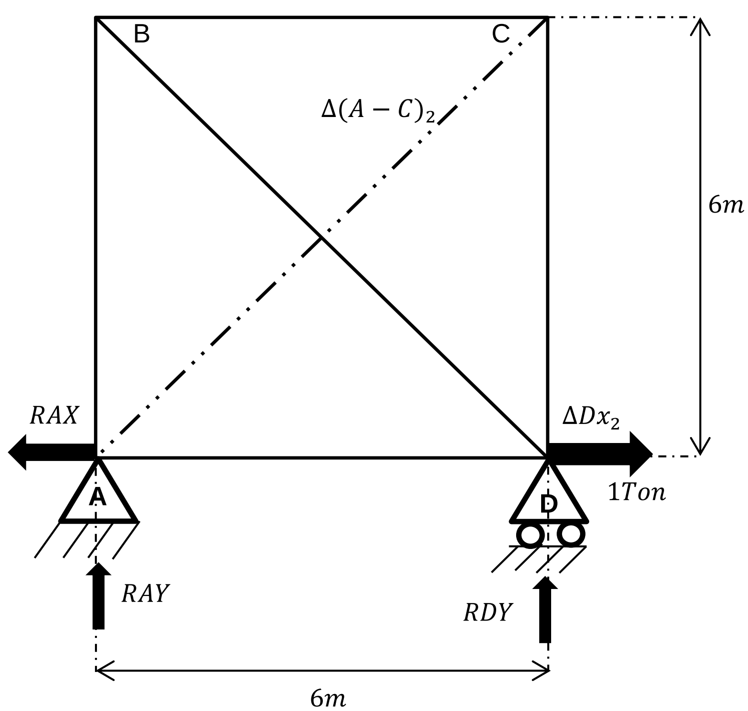
$$RDY = \boldsymbol{-28Ton} \uparrow$$



Viga primaria, fuerzas en barras y reacciones en los soportes



Armadura isostática ficticia 1

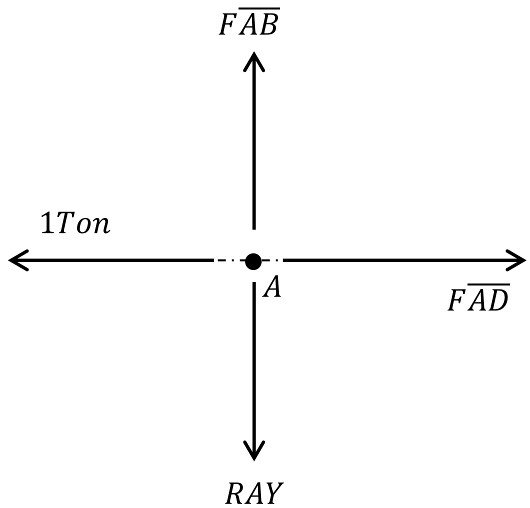


Calculo de las reacciones en los soportes y fuerzas en las barras.

$$\sum F_X = 0$$

$1Ton - RAX = 0$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{RAX = 1Ton}$

Nodo A



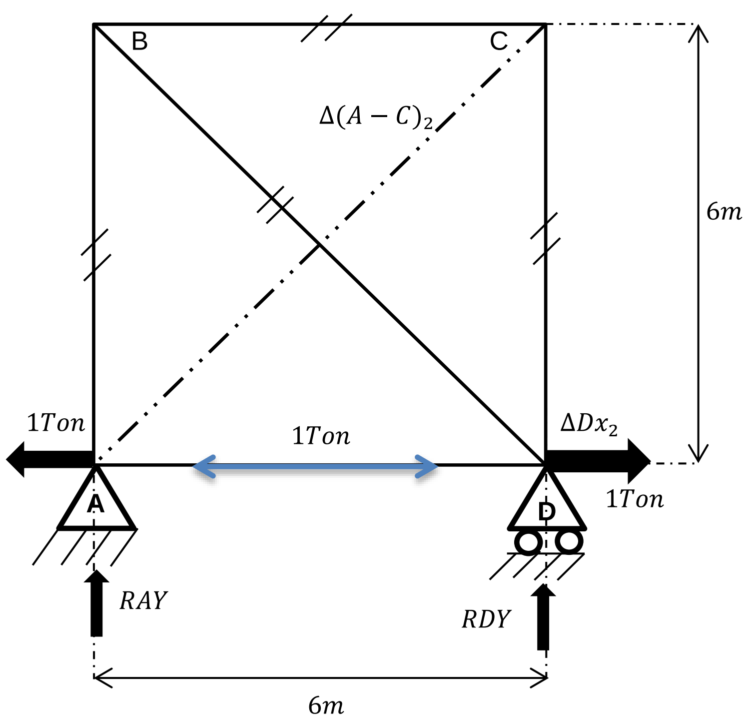
$$\sum F_X = 0$$

$$-1 + F\overline{AD} = 0$$

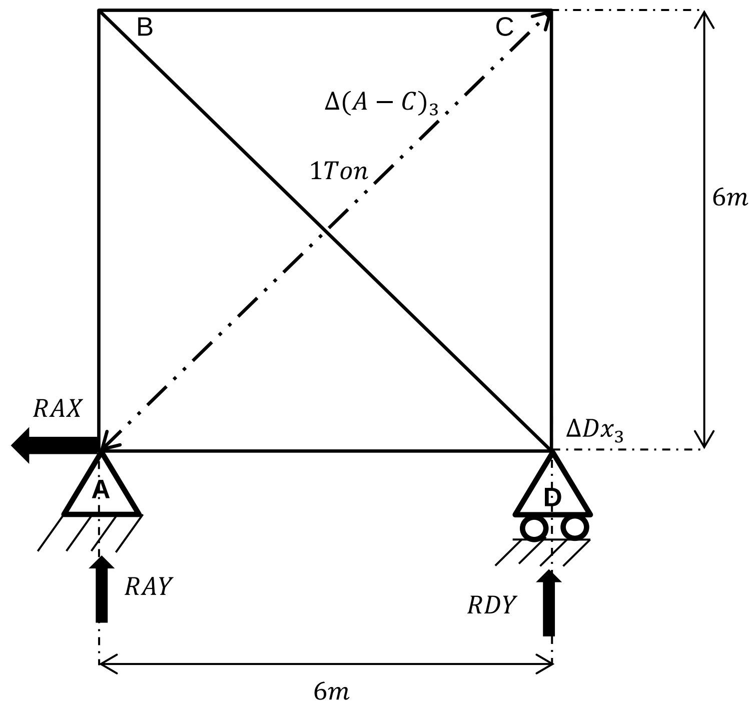
$$F\overline{AD} = \boldsymbol{1Ton(Tensión)}$$

$$\sum F_Y = 0$$

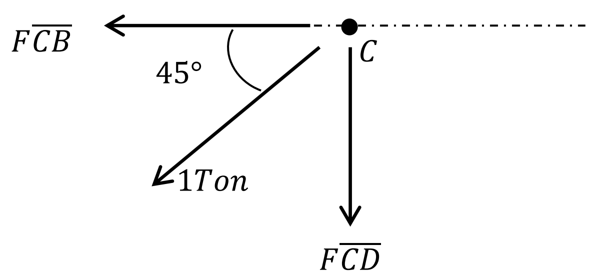
(AIF1) fuerzas en las barras y reacciones en los soportes



Armadura isostática ficticia 2



Nodo C



$$\sum \boldsymbol{F_X} = \mathbf{0}$$

$$-F\overline{CB} - (1)(Cos45°) = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{F\overline{CB}} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{Ton}(\ \boldsymbol{compresi}\acute{\text{o}}\boldsymbol{n})$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y} = \mathbf{0}$$

$$-F\overline{CD} - (1)(Sen45°) = 0$$

$$\boldsymbol{F\overline{CD}} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{Ton}(\ \boldsymbol{compresi}\acute{\text{o}}\boldsymbol{n})$$

Nodo B

$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$

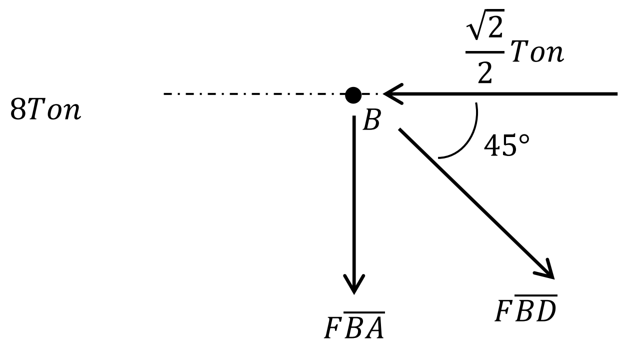
$-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + F\overline{BD}(Cos45°) = 0$

$F\overline{BD} = \boldsymbol{1Ton}\ (\boldsymbol{Tensi}ó\boldsymbol{n})$

$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$

$-F\overline{BA} - (1)(Sen45°) = 0$

$\boldsymbol{F\overline{BA}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2} Ton}(\ \boldsymbol{compresi}ó\boldsymbol{n})$



Nodo D

$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$

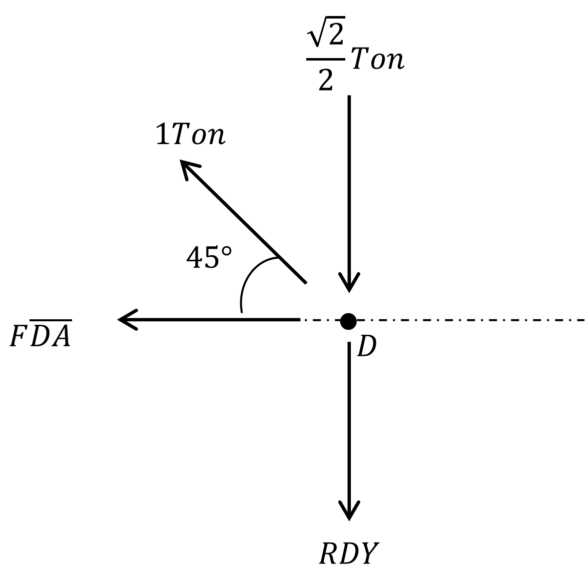
$-F\overline{DA} - (1)(Sen45°) = 0$

$F\overline{DA} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2} Ton}(\ \boldsymbol{compresi}ó\boldsymbol{n})$

$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$

$-RDY - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (1)(Sen45°) = 0$

$\boldsymbol{RDY = 0}$

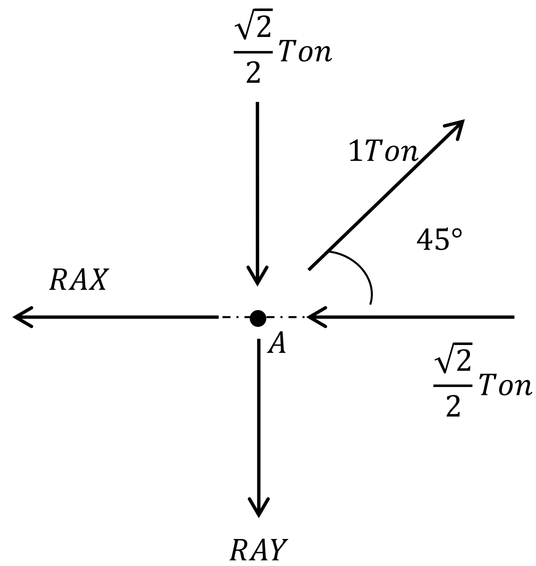


Nodo A

$$\sum F_Y = 0$$

$$-RAY - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (1)(Sen45°) = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = 0}$$

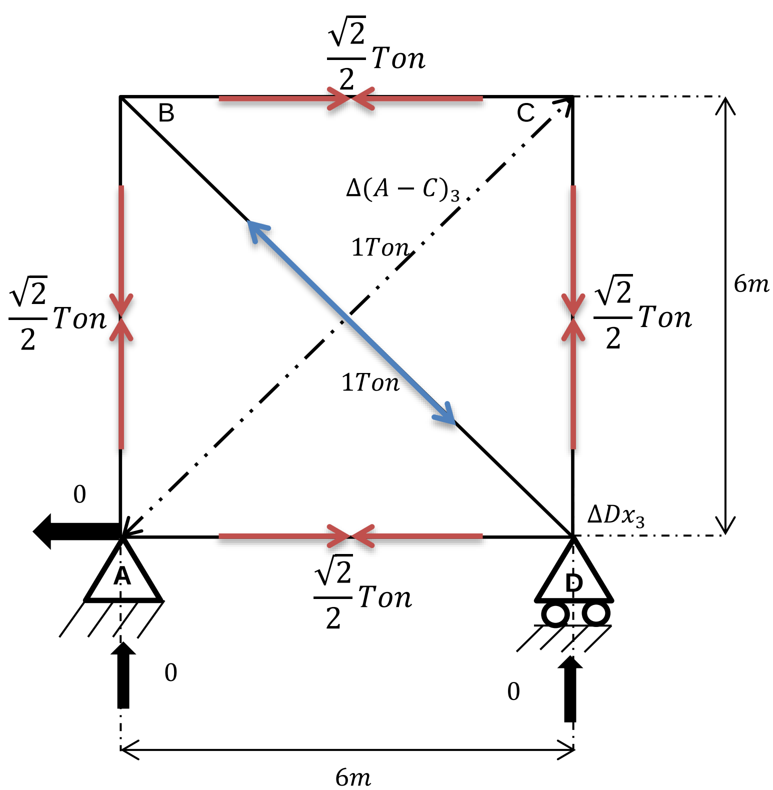


$$\sum F_X = 0$$

$$-RAX - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (1)(Sen45°) = 0$$

$$\boldsymbol{RAX = 0}$$

(AIF2) fuerzas en las barras y reacciones en los soportes



Calculo de las deflexiones. has

$$\Delta \boldsymbol{x_i} = \frac{\boldsymbol{NnL}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta DX_1 = \frac{(8)(1)(6)}{AE} = \frac{\mathbf{48}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta \overline{AC}_1 = \frac{(-2)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(6)}{AE} + \frac{(8)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(6)}{AE} + \frac{(-20)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(6)}{AE} + \frac{\left(-8\sqrt{2}\right)(1)\left(6\sqrt{2}\right)}{AE}$$

$$\Delta \boldsymbol{\overline{AC}_1} = \frac{\mathbf{-96 + 42\sqrt{2}}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta DX_2 = \frac{(1)(1)(6)}{AE} = \frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta \overline{AC}_2 = \frac{(1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(6)}{AE} = \frac{\mathbf{-3\sqrt{2}}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta DX_3 = \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1)(6)}{AE} = \frac{\mathbf{-3\sqrt{2}}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$\Delta \overline{AC}_3 = \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(6)}{AE} + \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(6)}{AE} + \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(6)}{AE}$$
$$+ \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(6)}{AE} + \frac{(1)(1)\left(6\sqrt{2}\right)}{AE} + \frac{(1)(1)\left(6\sqrt{2}\right)}{AE}$$

$$\Delta \overline{AC}_3 = \frac{\mathbf{12 + 12\sqrt{2}}}{\boldsymbol{AE}}$$

Asociando las deflexiones con las reacciones y barras liberadas para formar el sistema de ecuaciones de flexibilidades.

$$\Delta Dx_1 + \Delta Dx_2 RDX + \Delta Dx_3 F\overline{AC} = 0$$

$$\Delta\overline{AC}_1 + \Delta\overline{AC}_2 RDX + \Delta\overline{AC}_3 F\overline{AC} = 0$$

Sustituyendo y solucionando el sistema de ecuaciones:

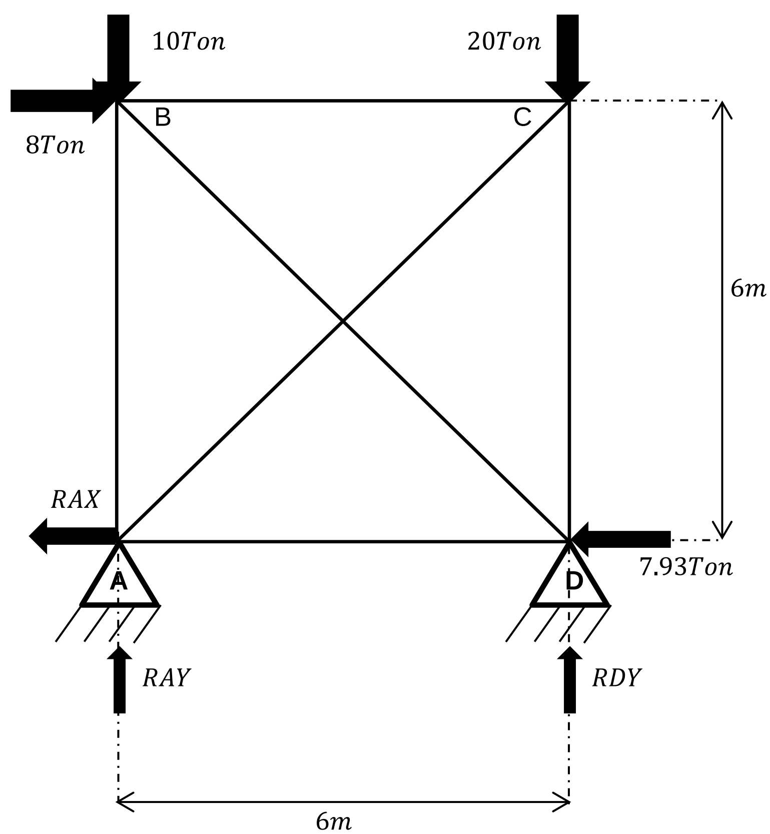
$$+\frac{\mathbf{6}}{\boldsymbol{AE}}RDX + \frac{\mathbf{-3\sqrt{2}}}{\boldsymbol{AE}}F\overline{AC} = -\frac{\mathbf{48}}{\boldsymbol{AE}}$$

$$+\frac{\mathbf{-96+42\sqrt{2}}}{\boldsymbol{AE}}RDX + \frac{\mathbf{-3\sqrt{2}}}{\boldsymbol{AE}}F\overline{AC} = -\frac{\mathbf{-96+42\sqrt{2}}}{\boldsymbol{AE}}$$

$\boldsymbol{RDX \approx -7.93Ton}$

$\boldsymbol{F\overline{AC} \approx 0.10Ton(Tensi\text{ó}n)}$

Calculo de las reacciones en los soportes y las fuerzas en las barras de la armadura original.



$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$8Ton - 7.93 - RAX = 0 \qquad \boldsymbol{RAX = \frac{7}{100} Ton}$$

$$\sum \boldsymbol{M_A = 0}$$

Nodo C

$$(8ton)(6m) + (20Ton)(6m) - RDY(6m) = 0$$

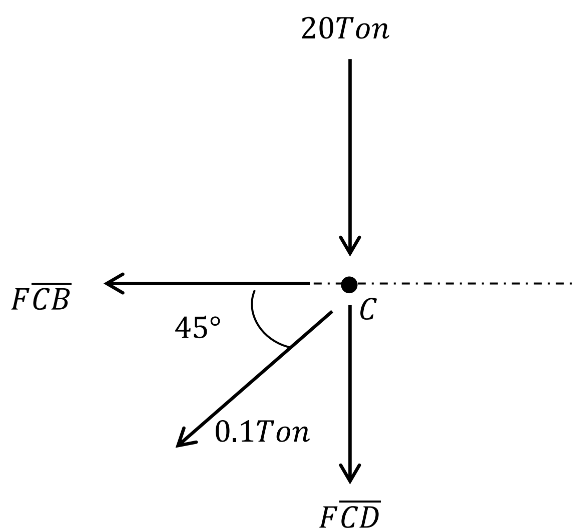
$$\boldsymbol{RDY = 28Ton}$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$RAY - 10Ton - 20Ton + 28Ton = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = 2Ton}$$

Nodo C



$$\sum \boldsymbol{F_X = 0}$$

$$-F\overline{CB} - (0.1)(Cos45°) = 0$$

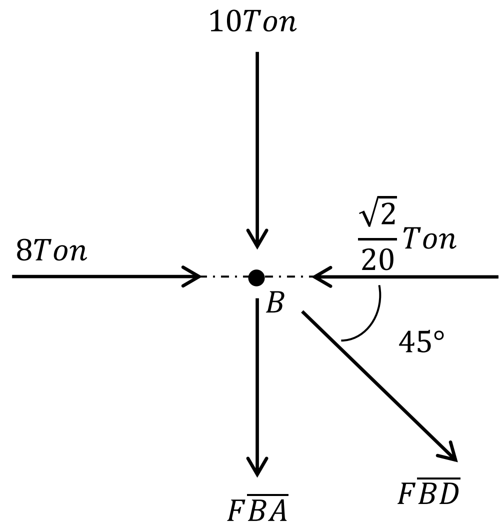
$$\boldsymbol{F\overline{CB} = \frac{\sqrt{2}}{20} Ton(Compresi}\text{ó}\boldsymbol{n})$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y = 0}$$

$$-20 - (0.1)(sen45°) - F\overline{CD} = 0$$

$$F\overline{CD} = \boldsymbol{20.07Ton(Compresi}\text{ó}\boldsymbol{n})$$

Nodo B



$$\sum \boldsymbol{F_X} = \mathbf{0}$$

$$8 - \frac{\sqrt{2}}{20}Ton + F\overline{BD}(Cos45°) = 0$$

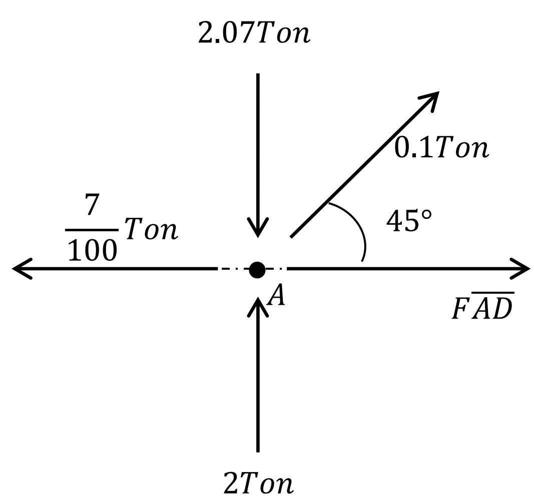
$$F\overline{BD} = \mathbf{11.21}\boldsymbol{Ton}\ (\boldsymbol{Compresi}\text{ó}\boldsymbol{n})$$

$$\sum \boldsymbol{F_Y} = \mathbf{0}$$

$$-10 + (11.21)(sen45°) - F\overline{BA} = 0$$

$$F\overline{BA} = \mathbf{2.07}\boldsymbol{Ton}(\boldsymbol{Compresi}\text{ó}\boldsymbol{n})$$

Nodo A

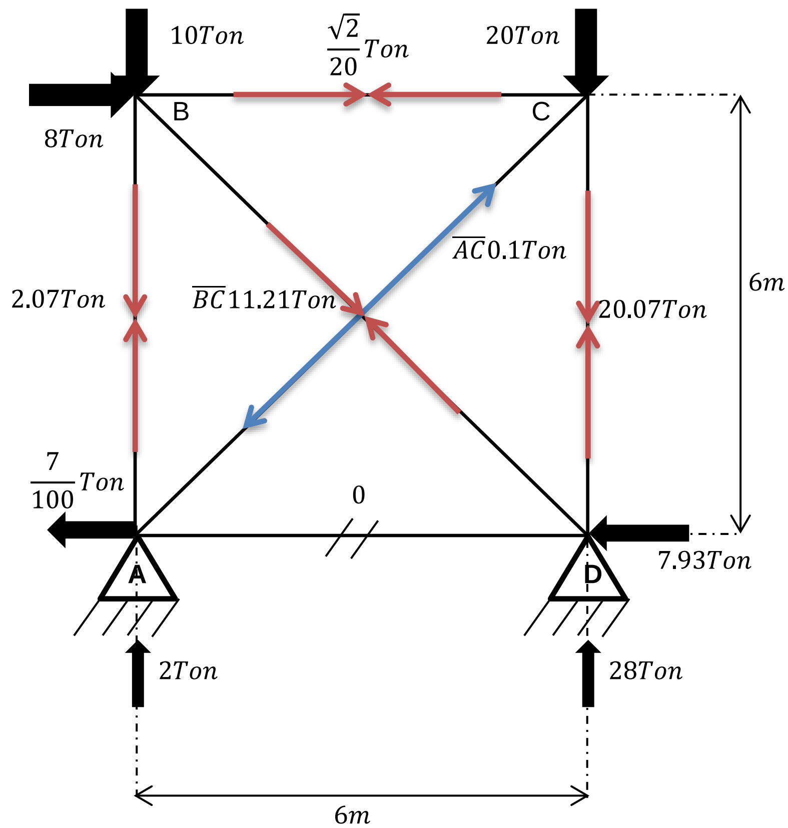


$$\sum \boldsymbol{F_X} = \mathbf{0}$$

$$-\frac{7}{100} + F\overline{AD} + (0.1)(Cos45°) = 0$$

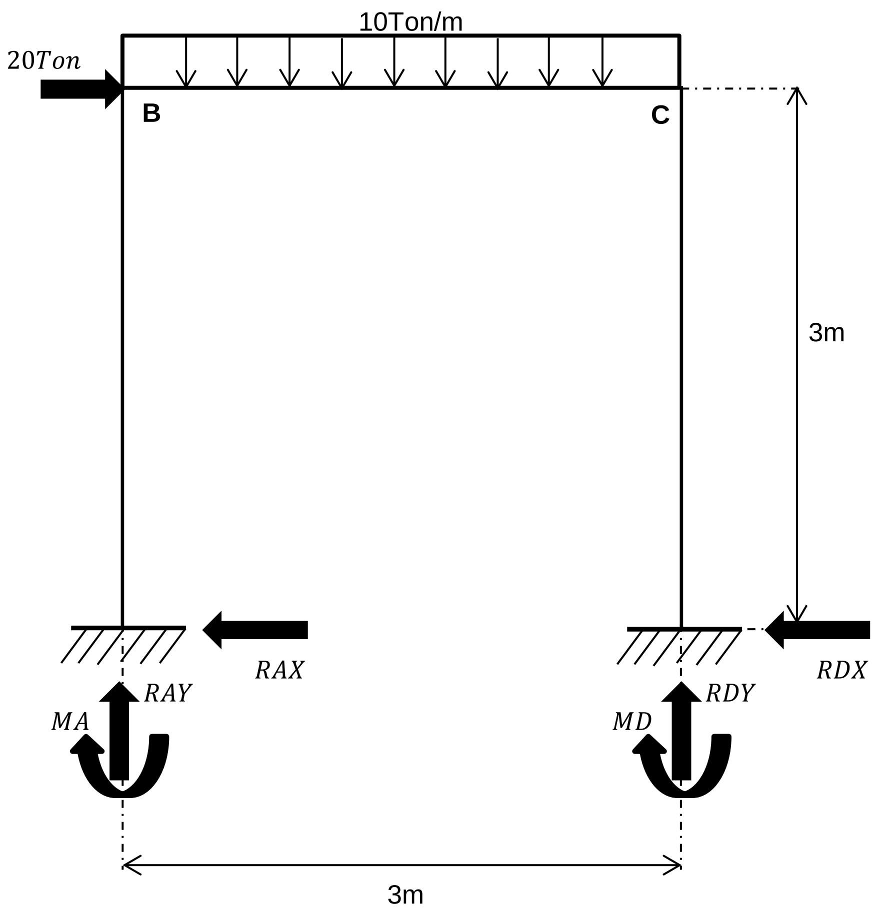
$$F\overline{AD} = \mathbf{0}$$

Reacciones en los soportes y fuerzas en las barras de la viga original



Capítulo 8. Introducción al método de “Rigideces Clásico”

1.- Obtenga las reacciones en los soportes del siguiente marco mediante el método de rigideces clásico.



Grado de indeterminación del marco:

$$\boldsymbol{r + 3m = 3n + c}$$

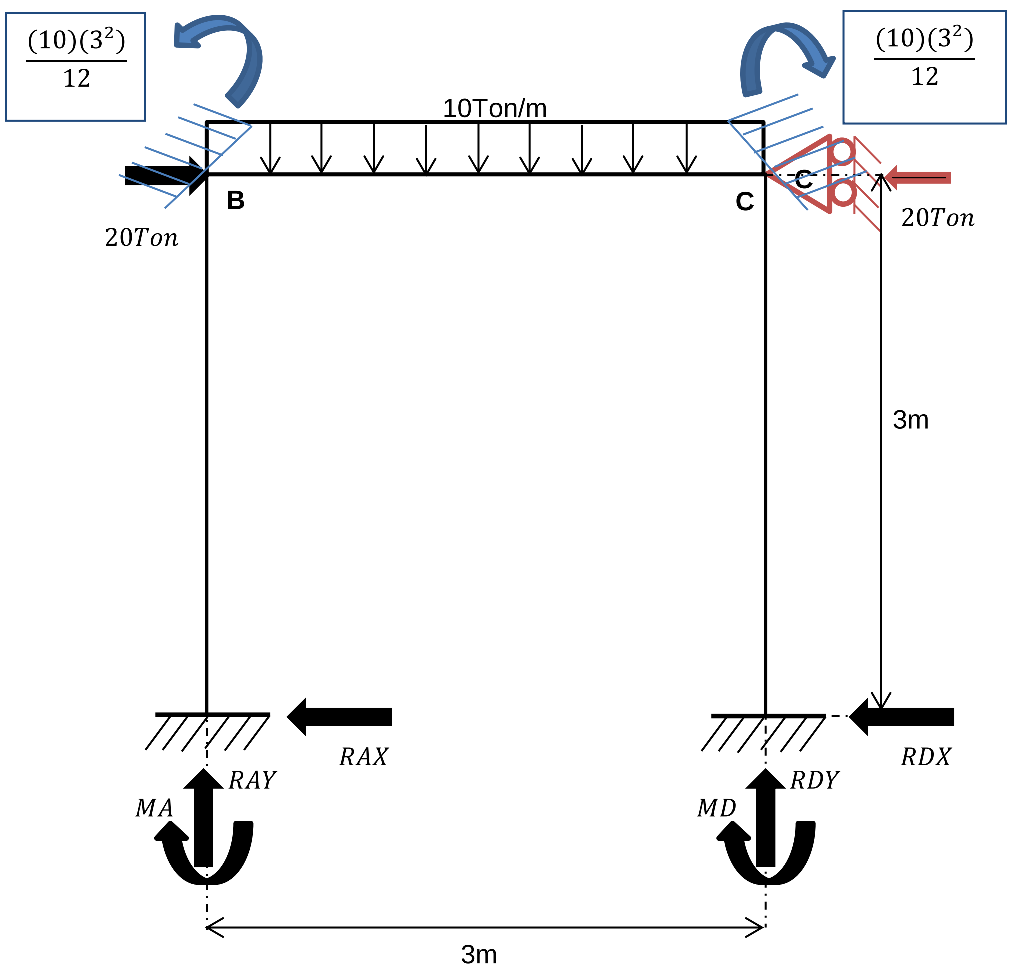
$$\boldsymbol{6 + 3(3) = 3(4) + 0}$$

$$\boldsymbol{15 = 12}$$

Por lo tanto nuestro marco es estáticamente indeterminado y no podemos resolverlo con las ecuaciones de equilibrio estático.

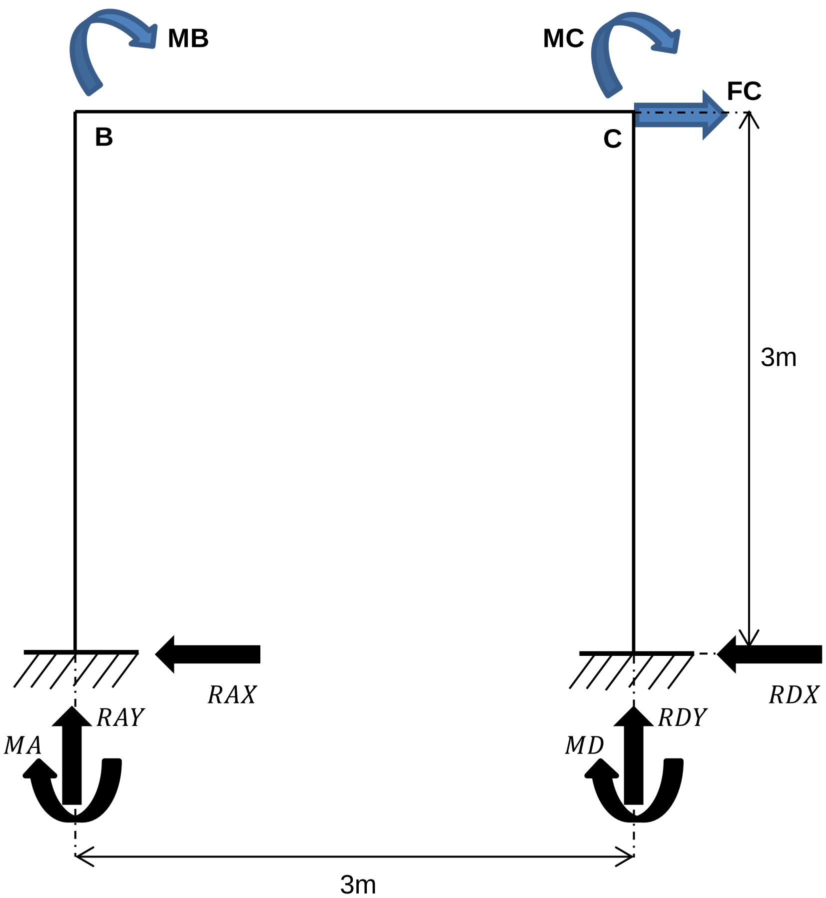
Método de análisis.

Para dar solución al problema hiperestático planteado emplearemos el método de “rigideces clásico” en el cual como primer paso, en este caso en los nudos B y C se han introducido empotramientos para restringir la rotación que pudiera ocurrir en dichos puntos, también se ha introducido una reacción horizontal en el nudo C para impedir el desplazamiento horizontal del marco, de esta manera los empotramientos restringen las rotaciones que pudiesen ocurrir a cada miembro en el respectivo nudo, es decir: el empotramiento en el nudo B restringe la rotación de los miembros B-A y B-C, el empotramiento en el nudo C restringe la rotación en los miembros C-B y C-D, la reacción horizontal introducida como apoyo móvil en el nudo D restringe los desplazamientos horizontales que los nudos B y C, no es necesario impedir el desplazamiento vertical en el marco, ya que dicho desplazamiento solo ocurriría en caso de deformación axial en las columnas, básicamente el número de restricciones es igual al número de grados de libertad de la estructura que en este caso según el grado de indeterminación es 3, en este primer paso también se han calculado los momentos de empotramiento perfecto $\overline{M}$ para aquellos miembros que tienen cargas transversales.



$\bar{M}AB = 0$
$\bar{M}BA = 0$
$\bar{M}BC = -\frac{15}{2}Ton * m$
$\bar{M}CB = \frac{15}{2}Ton * m$
$\bar{M}CD = 0$
$\bar{M}DC = 0$

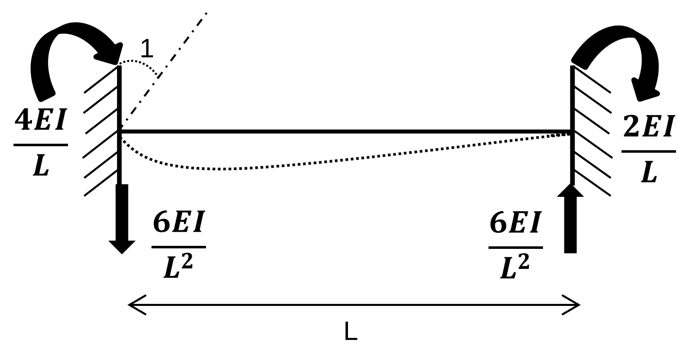
En el siguiente paso se calcularan los momentos y fuerzas de desequilibrio, los primeros se definen como la suma de los momentos de empotramiento perfecto en cada nudo, la fuerza desequilibrio en este caso se calcula mediante la relación $\sum Fx = 0$



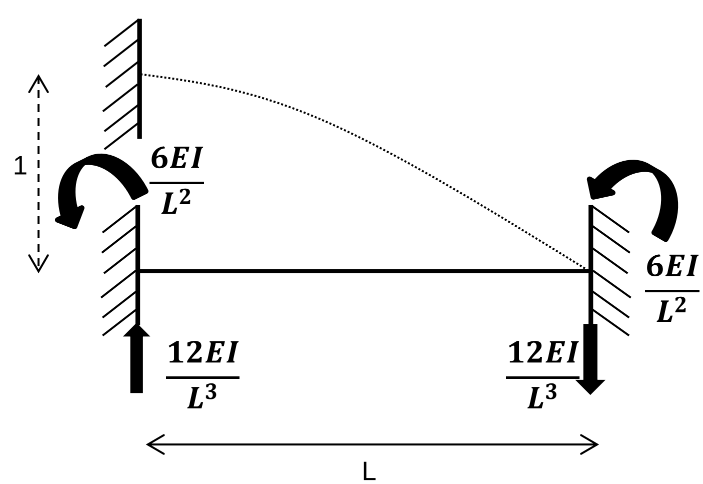
$$MB = \bar{M}BC + \bar{M}BA = -\frac{15}{2}Ton * m + 0 = -\frac{15}{2}Ton * m$$
$$MC = \bar{M}CB + \bar{M}CD = \frac{15}{2}Ton * m + 0 = \frac{15}{2}Ton * m$$
$$\sum Fx = 0 \qquad 20Ton + FC = 0 \qquad Fc = -20Ton$$

En el siguiente paso se inducen deformaciones unitarias; rotaciones para los nudos restringidos y un desplazamiento horizontal unitario correspondiente a la restricción que produce la fuerza **FC** dichas deformaciones se inducen manteniendo restringidas las demás, es decir, se propondrán tantos marcos como deformaciones se requiera inducir, entendiendo que a cada marco corresponde inducir una de ellas, debe notarse que al imponer dichas deformaciones, en el miembro se producen momentos concurrentes en los respectivos nudos, por ello en los extremos de los miembros se producen reacciones que equilibran dichos momentos, en la presente tesis las reacciones se deducen para los casos más comunes de configuraciones de carga en el apartado de anexos.

Rigideces angular en el empotramiento al inducir un giro unitario

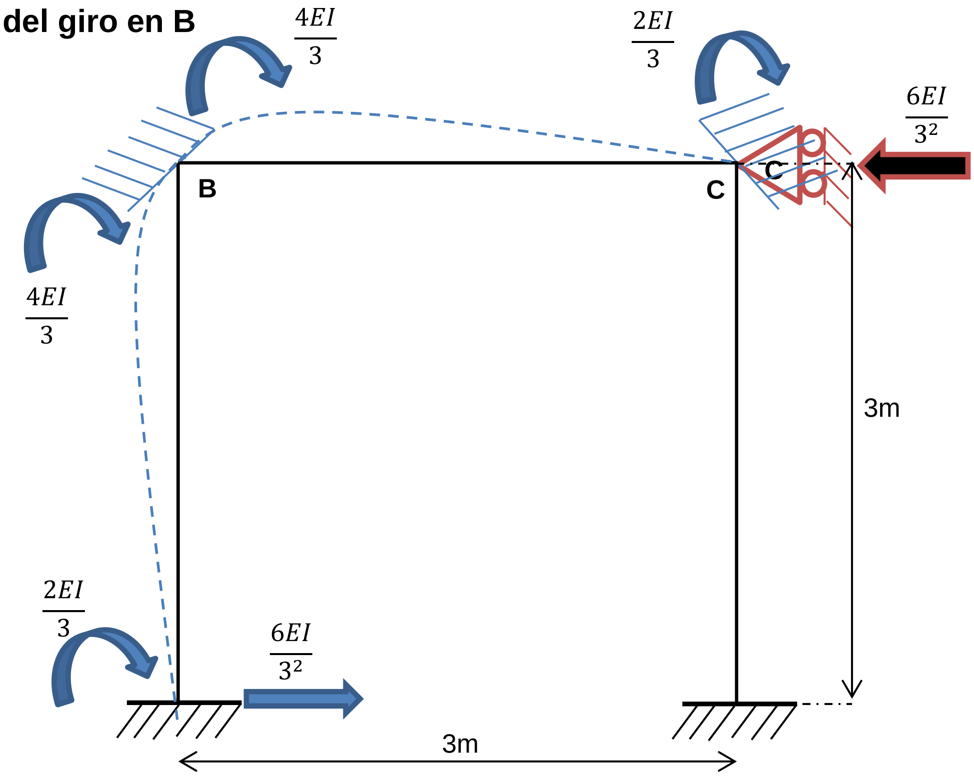


Rigideces lineal en el empotramiento al inducir un desplazamiento unitario



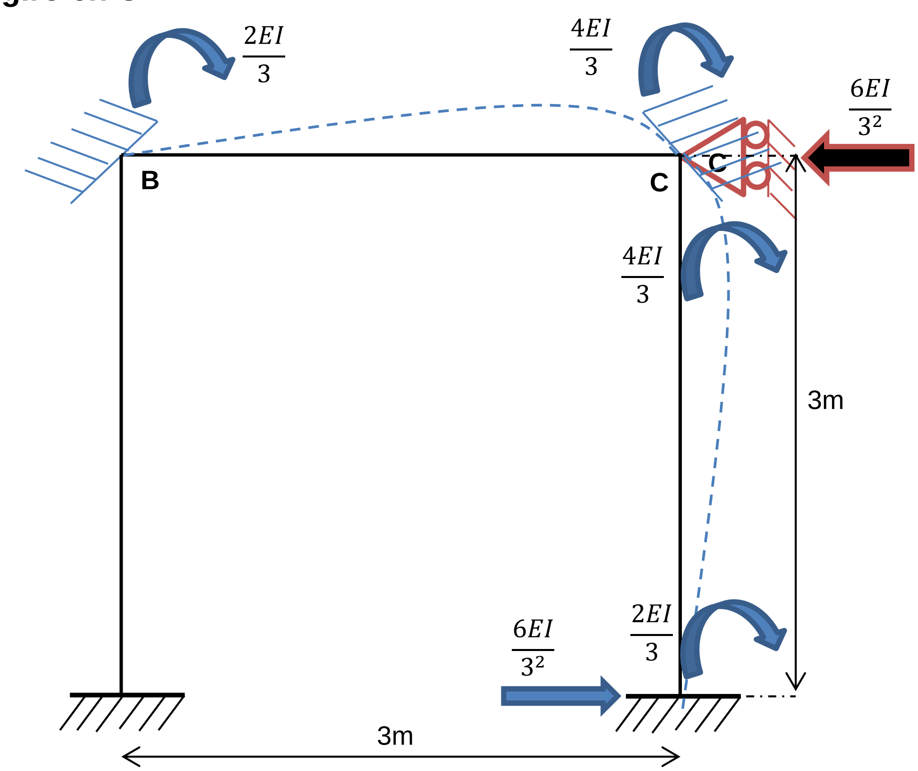
Imposición del giro en B

"$\boldsymbol{\theta B}$"



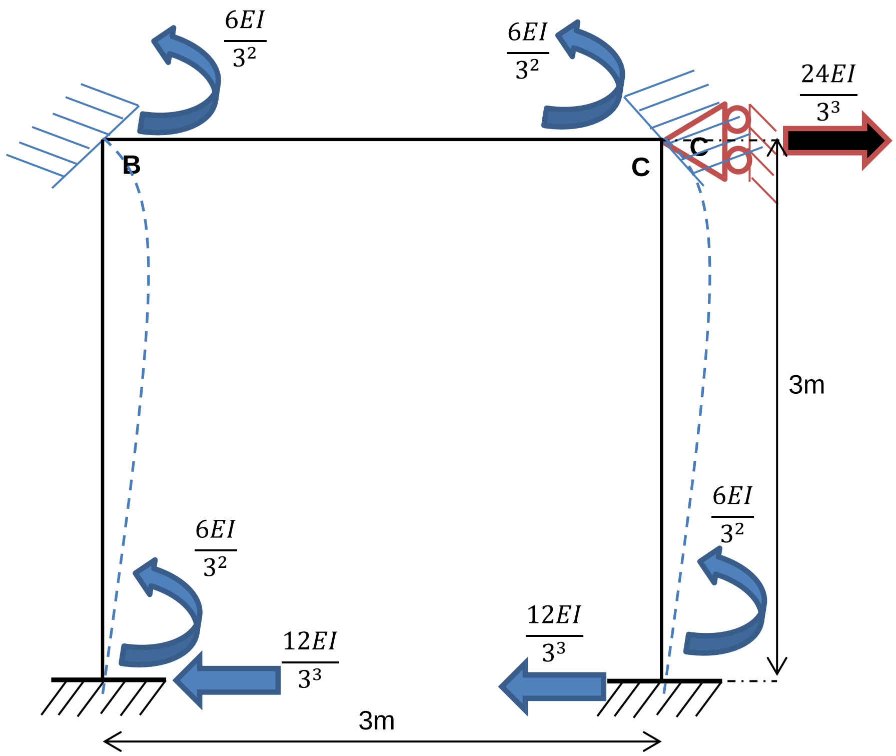
Imposición del giro en C

"$\boldsymbol{\theta C}$"



Imposición del desplazamiento en C

"$\Delta \boldsymbol{C}$"



A continuación se realiza el cálculo de las rotaciones y desplazamientos inducidos.

$$\sum M_B$$

$$-\frac{(10)(3^2)}{12}+\left[\frac{4EI}{3}+\frac{4EI}{3}\right]\theta_B+\frac{2EI}{3}\theta_C-\frac{6EI}{3^2}\Delta_C=0$$

$$\sum M_B$$

$$\frac{(10)(3^2)}{12}+\frac{2EI}{3}\theta_B+\left[\frac{4EI}{3}+\frac{4EI}{3}\right]\theta_C-\frac{6EI}{3^2}\Delta_C=0$$

$$\sum F_C$$

$$-20-\frac{6EI}{3^2}\theta_B-\frac{6EI}{3^2}\theta_C+\frac{24EI}{3^3}\Delta_C=0$$

De la relación anterior podemos notar que en las primeras dos ecuaciones se expresa que la suma de los momentos de desequilibrio y de los momentos producidos por las deformaciones impuestas multiplicados por el valor real de las de dichas deformaciones es igual a cero, o bien que cada nudo se encuentra en equilibrio, la tercera ecuación deduce el equilibrio de fuerzas horizontales, es decir: que la suma de las fuerzas de desequilibrio producidas en el punto C y de las fuerzas horizontales en el nudo C multiplicadas por el valor real de las fuerzas horizontales producidas por las deformaciones inducidas es igual a cero.

Sistema de ecuaciones:

$$\frac{8EI}{3}\theta_B + \frac{2EI}{3}\theta_C - \frac{2EI}{3}\Delta_C = \frac{15}{2}$$

$$\frac{2EI}{3}\theta_B + \frac{8EI}{3}\theta_C - \frac{2EI}{3}\Delta_C = -\frac{15}{2}$$

$$-\frac{2EI}{3}\theta_B - \frac{2EI}{3}\theta_C + \frac{8EI}{9}\Delta_C = 20$$

Solucionando

$$\boldsymbol{\theta_B} = \frac{\mathbf{285}}{\mathbf{28EI}}$$

$$\boldsymbol{\theta_C} = \frac{\mathbf{75}}{\mathbf{28EI}}$$

$$\Delta_{\boldsymbol{C}} = \frac{\mathbf{225}}{\mathbf{7EI}}$$

A continuación se calcularan los momentos correctivos, los cuales se definen como la sumatoria de los momentos producidas por las deformaciones unitarias impuestas multiplicados por el valor real del giro o desplazamiento ($\boldsymbol{\theta_B}, \boldsymbol{\theta_C}, \Delta_{\boldsymbol{C}}$) según correspondiente

$$m_{AB} = \left(\frac{2EI}{3}\right)\left(\frac{285}{28EI}\right) - \left(\frac{6EI}{3^2}\right)\left(\frac{225}{7EI}\right) = -\frac{205}{14}$$

$$m_{BA} = \left(\frac{4EI}{3}\right)\left(\frac{285}{28EI}\right) - \left(\frac{6EI}{3^2}\right)\left(\frac{225}{7EI}\right) = -\frac{55}{7}$$

$$m_{BC}=-\frac{15}{2}+\left(\frac{4EI}{3}\right)\left(\frac{285}{28EI}\right)+\left(\frac{2EI}{3}\right)\left(\frac{75}{28EI}\right)=\frac{55}{7}$$

$$m_{CB}=\frac{15}{2}+\left(\frac{2EI}{3}\right)\left(\frac{285}{28EI}\right)+\left(\frac{4EI}{3}\right)\left(\frac{75}{28EI}\right)=\frac{125}{7}$$

$$m_{CD}=\left(\frac{4EI}{3}\right)\left(\frac{75}{28EI}\right)-\left(\frac{6EI}{3^2}\right)\left(\frac{225}{7EI}\right)=-\frac{125}{7}$$

$$m_{DC}=\left(\frac{2EI}{3}\right)\left(\frac{75}{28EI}\right)-\left(\frac{6EI}{3^2}\right)\left(\frac{225}{7EI}\right)=-\frac{275}{14}$$

Posteriormente, se calcula los momentos finales que se definen como la sumatoria de los momentos correctivos y los de desequilibrio, obteniendo lo siguiente.

$$M_{AB}=m_{AB}=-\frac{205}{14}$$

$$M_{BA}=m_{BA}=-\frac{55}{7}$$

$$M_{BC}=\overline{M}_{BC}+m_{BC}=-\frac{15}{2}+\frac{55}{7}=\frac{5}{14}$$

$$M_{CB}=\overline{M}_{CB}+m_{CB}=\frac{15}{2}+\frac{125}{7}=\frac{355}{14}$$

$$M_{CD}=m_{CD}=-\frac{125}{7}$$

$$M_{DC}=m_{DC}=-\frac{275}{14}$$

Una vez obtenidos los momentos finales es posible obtener las reacciones en los apoyos del marco, para calcular la reacción horizontal en el soporte **A** se efectúa una suma de los momentos extremos en la barra A-B y se divide entre la longitud de esta.

$$RAX=\frac{M_{AB}+M_{BA}}{3}=\frac{-\frac{205}{14}Ton*m-\frac{55}{7}Ton*m}{3m}=-\frac{15}{2}Ton$$

Como los momentos en los extremos de la barra se encuentran actuando en sentido negativo (para nuestra convención antihorario) se deduce que nuestra reacción debe actuar en sentido positivo

Así mismo para calcular la reacción horizontal en el soporte **D**

$$RDX = \frac{M_{DC} + M_{CD}}{3} = \frac{-\frac{125}{7} Ton * m - \frac{275}{14} Ton * m}{3m} = -\frac{25}{2} Ton$$

Para calcular la reacción vertical en los soportes, aislamos la viga B-C. con la carga uniformemente repartida y sumando los momentos finales obtenidos en los extremos de la misma, y realizando una sumatoria de momentos con respecto a C calculamos el valor de la reacción en el extremo izquierdo de dicha viga que a su vez se transmite axialmente por la columna A-B y es también el valor de la reacción vertical en el soporte A, posteriormente se realiza una sumatoria de fuerzas con respecto al eje "Y" en la viga B-C para encontrar el valor de la reacción en el extremo derecho de esta viga que a su vez se transmite axialmente por la columna C-D y es el valor re la reacción vertical en el soporte D, como se observa a continuación.

Para la viga B-C

$$\sum MC = 0$$

$$3RAY - (10Ton)(3m)\left(\frac{3}{2} m\right) + \left(\frac{5}{14} Ton * m + \frac{355}{14} Ton * m\right) = 0$$

$$RAY = (10Ton)\left(\frac{3}{2} m\right) - \left(\frac{\frac{5}{14} Ton * m + \frac{355}{14} Ton * m}{3m}\right)$$

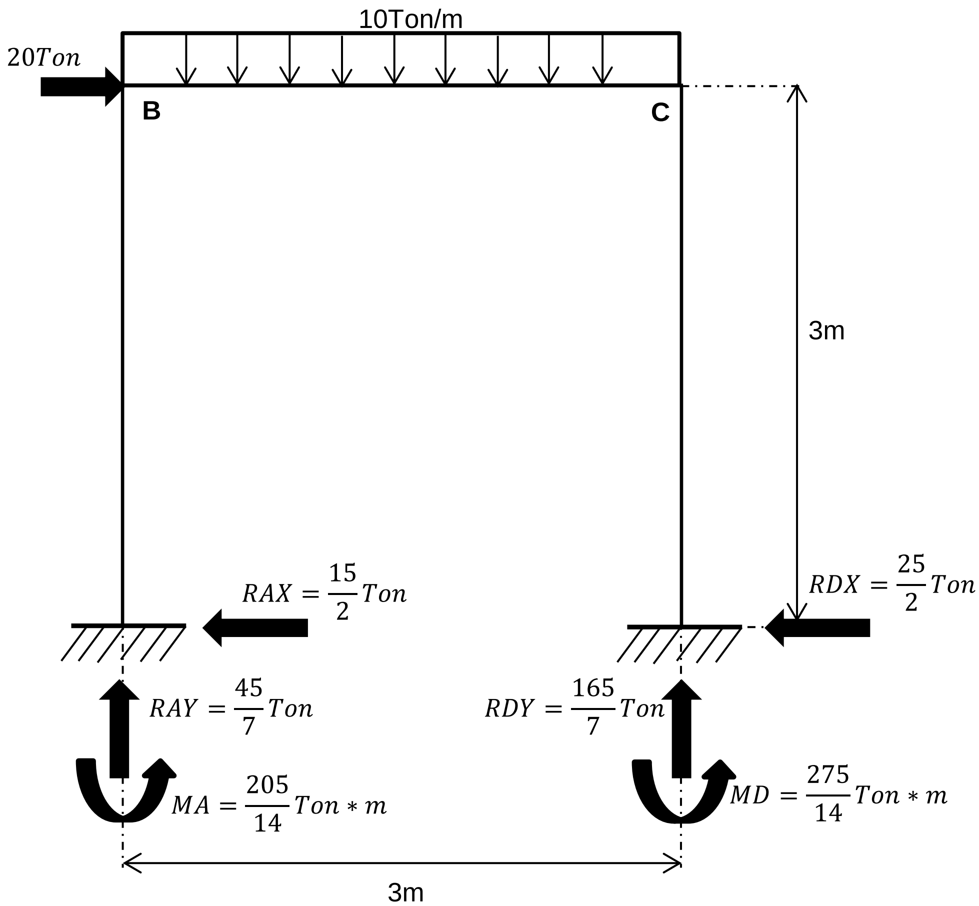
$$\boldsymbol{RAY = \frac{45}{7} Ton}$$

$$\sum FY = 0$$

$$\frac{45}{7} Ton - 30Ton + RDY = 0$$

$$\boldsymbol{RDY = \frac{165}{7} Ton}$$

Marco en equilibrio estático



$$\sum FY = 0$$

$$\frac{45}{7}Ton - \left(\frac{10Ton}{m}\right)(3m) + \frac{165}{7}Ton = 0$$

$$\sum FX = 0$$

$$20Ton - \frac{15}{2}Ton - \frac{25}{2}Ton = 0$$

$$\sum MB = 0$$

$$-\frac{205}{14} + \left(\frac{15}{2}\right)(3) + (10)(3)(1.5) - \left(\frac{165}{7}\right)(3) + \left(\frac{25}{2}\right)(3) - \frac{275}{14} = 0$$

Por lo tanto las reacciones obtenidas en los soportes del marco son correctas.

CONCLUSIONES:

La etapa de análisis en una estructura resulta ser parte fundamental para el buen diseño de la misma, por lo que resulta primordial para los ingenieros dedicados a dicho análisis dominar los principios básicos de la estática estructural.

En el presente trabajo se dio solución detallada a diversos problemas (vigas, marcos y armaduras) mediante la aplicación de las ecuaciones de equilibrio mecánico, así como la aplicación de la mecánica del solido deformable para los problemas que así lo exigían para hallar su equilibrio estático. De tal forma que los métodos de análisis mencionados a lo largo de este trabajo se encuentran descritos tanto en la solución de problemas sencillos así como en otros con mayor grado de dificultad con el fin de que los lectores de esta tesis sean capaces de resolver una gran variedad de ejercicios de la mejor manera posible, así mismo, la solución de dichos problemas se expresa claramente, para que el lector sea también capaz de entender el algoritmo que siguen los softwares de análisis estructural actuales.

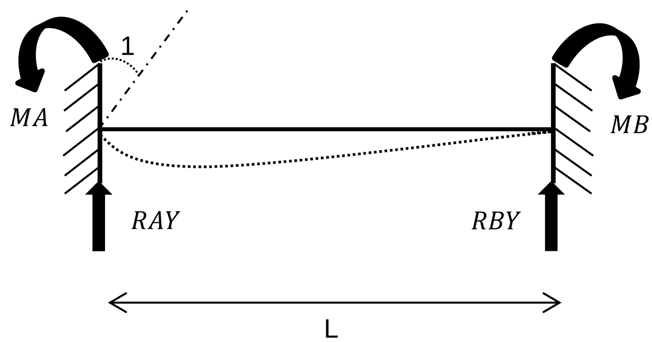
Como ya se mencionó la etapa de análisis estructural es de gran importancia, debido a que es aquí donde se obtienen datos para el buen diseño de la estructura cualquiera que esta sea, por lo que es necesario dominar principios básicos no solo de estática, sino también tomar en cuenta conceptos de otras asignaturas correspondientes al plan de estudios de ingeniería civil como lo son: algebra, algebra lineal, calculo diferencial e integral, mecánica de materiales, etc.

Es importante mencionar también que al realizar el análisis de una estructura, ya sea esta una viga, un marco o una armadura, siempre se deje en claro la convención de signos empleada y se respete a lo largo de todo el análisis, conviene también si resulta posible, hacer el análisis sin despreciar números decimales, es decir: empleando la forma fraccionaria de todos los valores obtenidos, esto nos llevara a tener un análisis más preciso lo que es sumamente indispensable debido a la importancia siempre enunciada de la etapa del análisis estructural.

Anexos.

Deducción matemática de la rigidez angular y lineal en empotramientos para vigas.

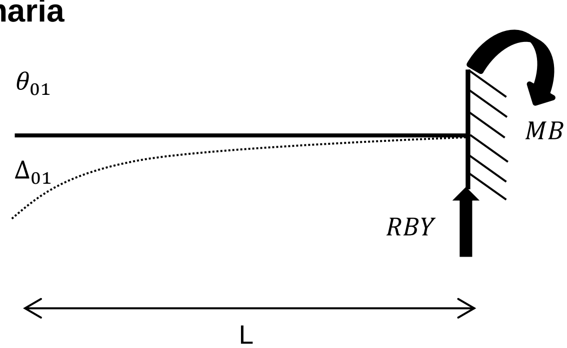
Viga 1



Solución por flexibilidades.

Principios de superposición

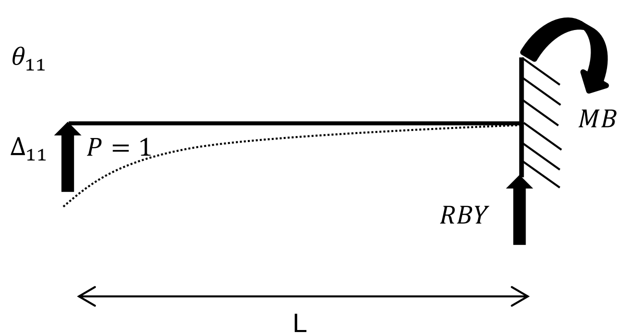
Viga primaria



$0 \leq x \leq L$

$\boldsymbol{M(x) = 0}$

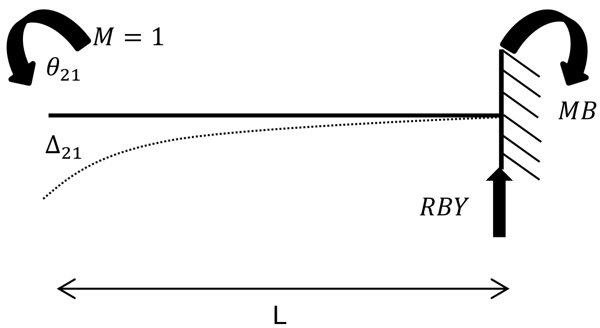
Viga Isostática ficticia 1



$0 \leq x \leq L$

$\boldsymbol{M(x) = X}$

Viga Isostática ficticia 2



$$0 \leq x \leq L$$

$$\boldsymbol{M(x) = -1}$$

Calculo de los desplazamientos liberados

$$\boldsymbol{\theta_{01}} = \frac{1}{EI}\int_0^L (0)(-1) = 0$$

$$\boldsymbol{\theta_{11}} = \frac{1}{EI}\int_0^L (X)(-1) = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$\boldsymbol{\theta_{21}} = \frac{1}{EI}\int_0^L (-1)(-1) = \frac{L}{EI}$$

$$\Delta_{\mathbf{01}} = \frac{1}{EI}\int_0^L (0)(X) = 0$$

$$\Delta_{\mathbf{11}} = \frac{1}{EI}\int_0^L (X)(X) = \frac{L^3}{3EI}$$

$$\Delta_{\mathbf{21}} = \frac{1}{EI}\int_0^L (-1)(X) = -\frac{L^2}{2EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidad asociando el desplazamiento unitario original inducido en el empotramiento A

$$\boldsymbol{\theta_{01} + \theta_{11}RAY + \theta_{21}MA = -1 \ldots\ldots\ldots Ec.1}$$

$$\boldsymbol{\Delta_{01} + \Delta_{11}RAY + \Delta_{21}MA = 0 \ldots\ldots\ldots Ec.2}$$

Sustituyendo.

$$\boldsymbol{\frac{L^2}{2EI}RAY + \frac{L}{EI}MA = -1 \ldots\ldots\ldots Ec.1}$$

$$\boldsymbol{\frac{L^3}{3EI}RAY - \frac{L^2}{2EI}MA = 0 \ldots\ldots\ldots Ec.2}$$

De la ecuación 1 despejamos “RAY”

$$RAY = \frac{2EI}{L^2} + \frac{2MA}{L} \ldots\ldots\ldots Ec.3$$

Sustituyendo la ecuación 3 en la ecuación 2 y despejando “MA”.

$$\frac{L^3}{3EI}\left(\frac{2EI}{L^2} + \frac{2MA}{L}\right) - \frac{L^2}{2EI}MA = 0$$

$$\frac{MAL^2}{6EI} = -\frac{2L}{3}$$

$$\boldsymbol{MA = -\frac{4EI}{L}}$$

Sustituyendo el valor de “MA” en la ecuación 3.

$$\boldsymbol{RAY = \frac{2EI}{L^2} + \frac{2\left(-\frac{4EI}{L}\right)}{L} = -\frac{6EI}{L^2}}$$

$$\sum M_B = 0$$

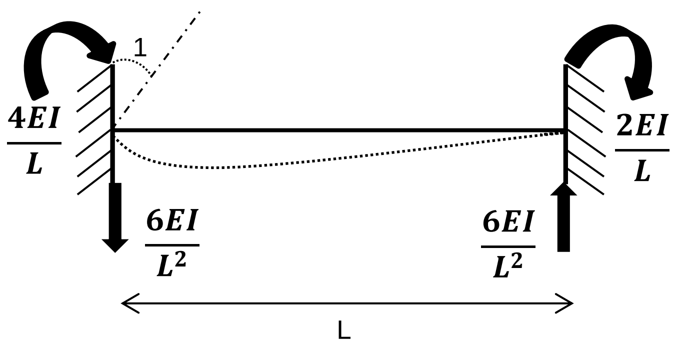
$$\frac{4EI}{L} - \left(\frac{6EI}{L^2}\right)(L) + MB = 0$$

$$\boldsymbol{MB = \frac{2EI}{L}}$$

$$\sum F_Y = 0$$

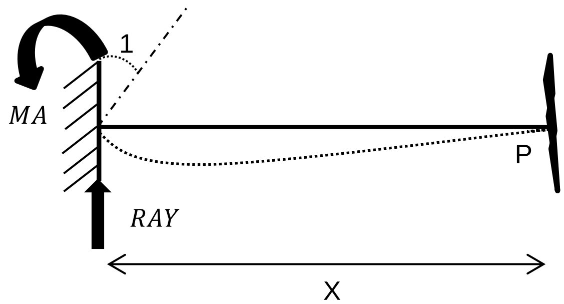
$$-\frac{6EI}{L^2} + RBY = 0$$

$$\boldsymbol{RBY = \frac{6EI}{L^2}} \uparrow$$



Solución empleando el método de secciones.

Realizando un corte a una distancia (X) y obteniendo las ecuaciones de momento, giro y flecha.



$$M(x) = -MA + RAY(X)$$

$$EI\theta = -MAX + \frac{RAY(X)^2}{2} + C_1$$

$$EIY = -\frac{MA(X)^2}{2} + \frac{RAY(X)^3}{6} + C_1X + C_2$$

Condiciones de frontera.

Si $X = 0 \quad \theta = -1 \quad\quad Y = 0$

Si $X = L \quad \theta = 0 \quad\quad Y = 0$

De la primera condición:

$$EI(-1) = -MA(0) + \frac{RAY(0)^2}{2} + C_1$$

$$EI(0) = -\frac{MA(0)^2}{2} + \frac{RAY(0)^3}{6} + C_1(0) + C_2$$

$\boldsymbol{C_1 = -EI}$

$\boldsymbol{C_2 = 0}$

Tomando en cuenta la segunda condición.

$$-MA(L) + \frac{RAY(L)^2}{2} - EI = 0 \ldots\ldots\ldots Ec. 1$$

$$-\frac{MA(L)^2}{2} + \frac{RAY(L)^3}{6} - EI(L) = 0 \ldots\ldots\ldots Ec. 2$$

De la ecuación 1 despejamos “RAY”

$$RAY = \frac{2EI}{L^2} + \frac{2MA}{L} \ldots\ldots\ldots Ec. 3$$

Sustituyendo la ecuación 3 en la ecuación 2 y despejando “MA”.

$$-\frac{MA(L)^2}{2} + \frac{(L)^3}{6}\left(\frac{2EI}{L^2} + \frac{2MA}{L}\right) - EI(L) = 0$$

$$\frac{MAL^2}{6EI} = -\frac{2L}{3}$$

$$\boldsymbol{MA = -\frac{4EI}{L}}$$

Sustituyendo el valor de “MA” en la ecuación 3.

$$\boldsymbol{RAY = \frac{2EI}{L^2} + \frac{2\left(-\frac{4EI}{L}\right)}{L} = -\frac{6EI}{L^2}}$$

$$\sum M_B = 0$$

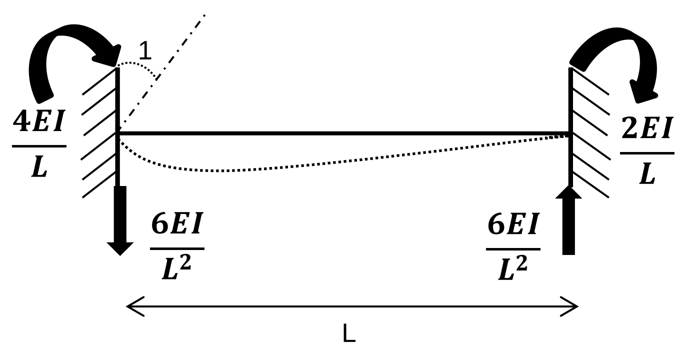
$$\frac{4EI}{L} - \left(\frac{6EI}{L^2}\right)(L) + MB = 0$$

$$\boldsymbol{MB = \frac{2EI}{L}}$$

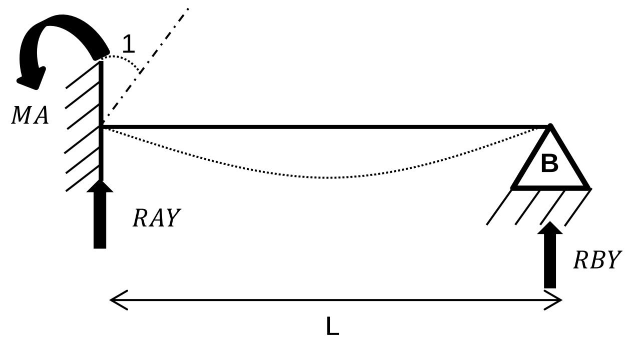
$$\sum F_Y = 0$$

$$-\frac{6EI}{L^2} + RBY = 0$$

$$\boldsymbol{RBY = \frac{6EI}{L^2}} \uparrow$$



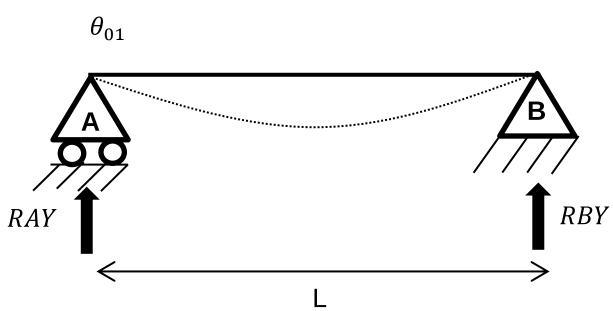
Viga 2



Solución por flexibilidades.

Principios de superposición

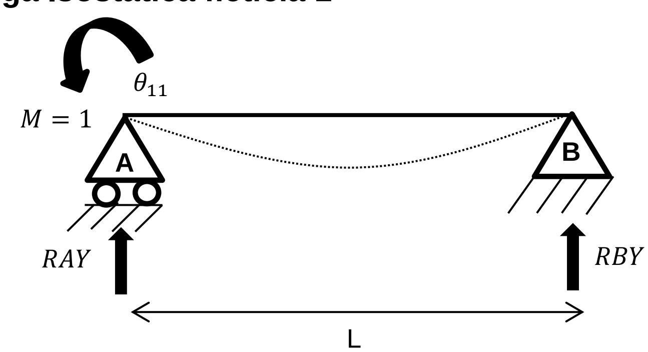
Viga primaria



$$RAY = 0$$
$$RBY = 0$$

$$0 \leq x \leq L$$
$$\boldsymbol{M(x) = 0}$$

Viga Isostática ficticia 1



$$\sum M_A = 0$$
$$-1 - RBY(L) = 0$$
$$RBY = -\frac{1}{L}$$
$$\sum F_Y = 0$$
$$RAY - \frac{1}{L} = 0$$
$$RAY = \frac{1}{L}$$

$$0 \leq x \leq L$$
$$\boldsymbol{M(x) = \frac{X}{L} - 1}$$

Calculo de los desplazamientos liberados

$$\boldsymbol{\theta_{01}} = \frac{1}{EI}\int_0^L (0)\left(\frac{X}{L}-1\right) = 0$$

$$\boldsymbol{\theta_{11}} = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{X}{L}-1\right)\left(\frac{X}{L}-1\right) = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{X^2}{L^2}-2\frac{X}{L}+1\right) = \left[\frac{L^3}{3L^2}-\frac{2L^2}{2L}+L\right]_0^L = \frac{L}{3EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidad asociando el desplazamiento unitario original inducido en el empotramiento A

$$\boldsymbol{\theta_{01} + \theta_{11} MA = -1}$$

Sustituyendo.

$$\boldsymbol{\frac{L}{3EI} MA = -1}$$

$$\boldsymbol{MA = -\frac{3EI}{L}}$$

$$\sum M_A = 0$$

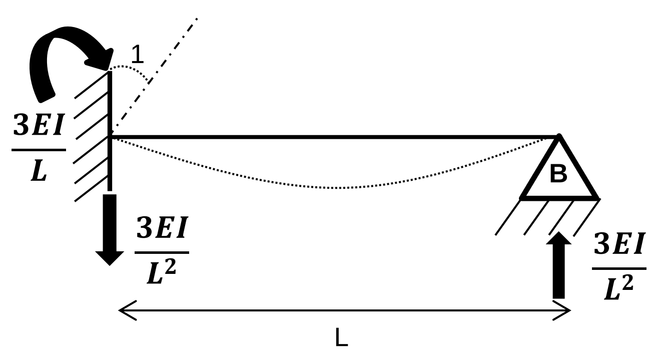
$$\frac{3EI}{L} - RBY(L) = 0$$

$$\boldsymbol{RBY = \frac{3EI}{L^2}}$$

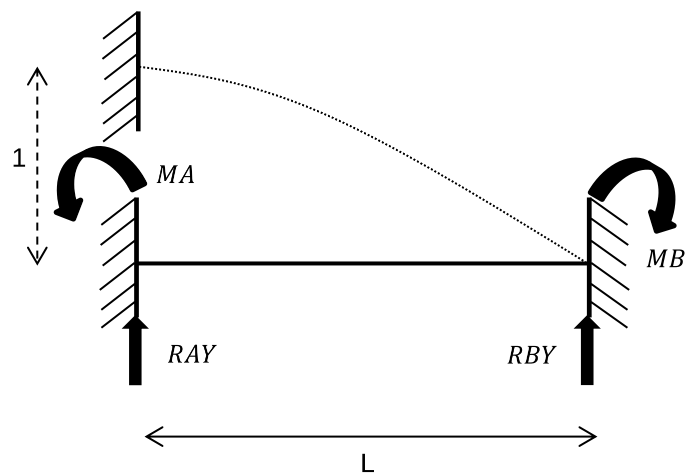
$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{3EI}{L^2} + RAY = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = -\frac{3EI}{L^2}}$$



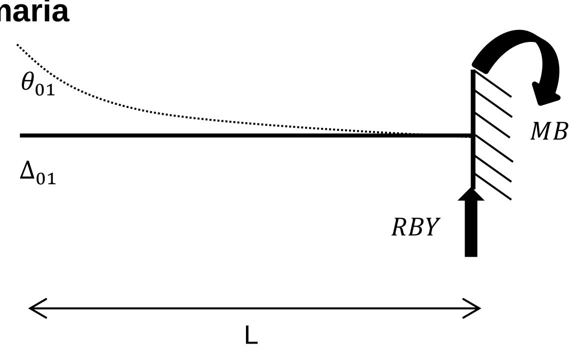
Viga 3



Solución por flexibilidades.

Principios de superposición

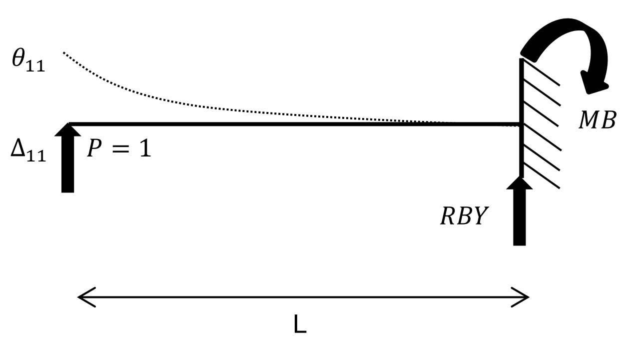
Viga primaria



$$0 \leq x \leq L$$

$$\boldsymbol{M(x) = 0}$$

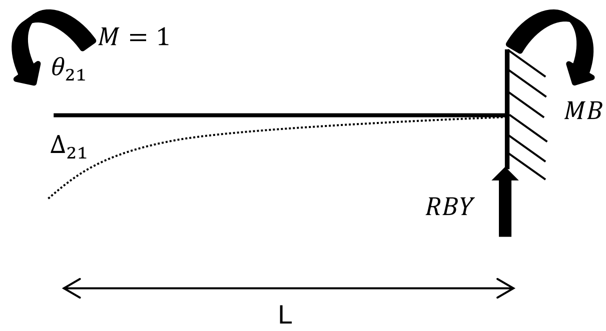
Viga Isostática ficticia 1



$$0 \leq x \leq L$$

$$\boldsymbol{M(x) = X}$$

Viga Isostática ficticia 2



$0 \leq x \leq L$

$\boldsymbol{M(x) = -1}$

Calculo de los desplazamientos liberados

$$\boldsymbol{\theta_{01}} = \frac{1}{EI}\int_0^L (0)(-1) = 0$$

$$\boldsymbol{\theta_{11}} = \frac{1}{EI}\int_0^L (X)(-1) = -\frac{L^2}{2EI}$$

$$\boldsymbol{\theta_{21}} = \frac{1}{EI}\int_0^L (-1)(-1) = \frac{L}{EI}$$

$$\Delta_{\mathbf{01}} = \frac{1}{EI}\int_0^L (0)(X) = 0$$

$$\Delta_{\mathbf{11}} = \frac{1}{EI}\int_0^L (X)(X) = \frac{L^3}{3EI}$$

$$\Delta_{\mathbf{21}} = \frac{1}{EI}\int_0^L (-1)(X) = -\frac{L^2}{2EI}$$

Sistema de ecuaciones de flexibilidad asociando el desplazamiento unitario original inducido en el empotramiento A

$$\boldsymbol{\theta_{01} + \theta_{11}RAY + \theta_{21}MA = 0 \ldots\ldots\ldots Ec. 1}$$

$$\boldsymbol{\Delta_{01} + \Delta_{11}RAY + \Delta_{21}MA = 1 \ldots\ldots\ldots Ec. 2}$$

Sustituyendo.

$$\boldsymbol{\frac{L^2}{2EI}RAY + \frac{L}{EI}MA = 0 \ldots\ldots\ldots Ec.1}$$

$$\boldsymbol{\frac{L^3}{3EI}RAY - \frac{L^2}{2EI}MA = 1 \ldots\ldots\ldots Ec.2}$$

De la ecuación 1 despejamos “RAY”

$$RAY = \frac{2MA}{L} \ldots\ldots\ldots Ec.3$$

Sustituyendo la ecuación 3 en la ecuación 2 y despejando “MA”.

$$\frac{L^3}{3EI}\left(\frac{2MA}{L}\right) - \frac{L^2}{2EI}MA = 1$$

$$\frac{2MA(L)^2}{3EI} - \frac{MA(L)^2}{2EI} = 1$$

$$\boldsymbol{MA = \frac{6EI}{L^2}}$$

Sustituyendo el valor de “MA” en la ecuación 3.

$$\boldsymbol{RAY = \frac{2\left(\frac{6EI}{L^2}\right)}{L} = \frac{12EI}{L^3}}$$

$$\sum M_B = 0$$

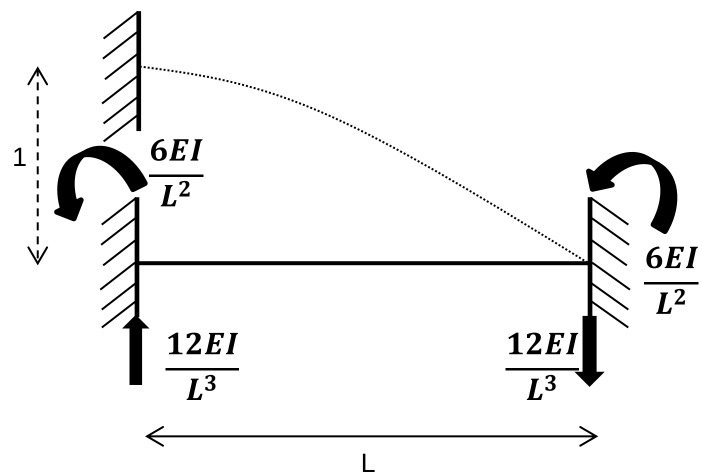
$$-\frac{6EI}{L^2} + \left(\frac{12EI}{L^3}\right)(L) + MB = 0$$

$$\boldsymbol{MB = -\frac{12EI}{L^3}}$$

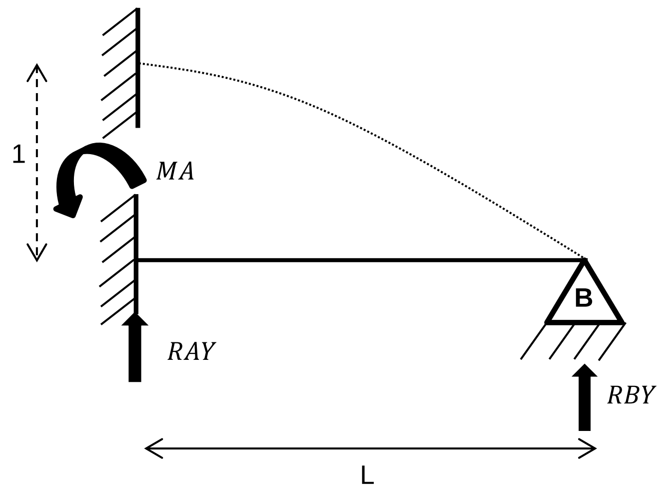
$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{12EI}{L^3} + RBY = 0$$

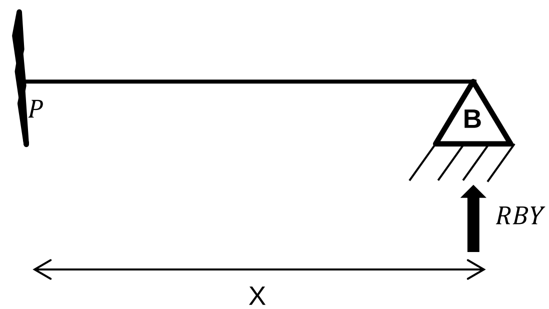
$$\boldsymbol{RBY = -\frac{12EI}{L^3}} \downarrow$$



Viga 4



Realizando un corte a una distancia (X) y obteniendo las ecuaciones de momento, giro y flecha.



$$M(X) = -RBY(X)$$

$$EI\theta = -\frac{RBY(X)^2}{2} + C_1$$

$$EIY = -\frac{RBY(X)^3}{3} + C_1X + C_2$$

Condiciones de frontera.

Si $X = 0$ $\theta = 0$ $Y = 0$

Si $X = L$ $\theta = 0$ $Y = 1$

La primera condición aplicada a la ecuación de la flecha.

$$EI(0) = -\frac{RBY(0)^3}{3} + C_1(0) + C_2$$

$$\boldsymbol{C_2 = 0}$$

La segunda condición aplicada a la ecuación del giro.

$$EI(0) = -\frac{RBY(L)^2}{2} + C_1$$

$$\boldsymbol{C_1 = \frac{RBY(L)^2}{2}}$$

La segunda condición aplicada a la ecuación de la flecha.

$$EI(1) = -\frac{RBY(L)^3}{3} + \frac{RBY(L)^2}{2}(L)$$

$$\boldsymbol{RBY = \frac{3EI}{L^3}}$$

$$\sum F_Y = 0$$

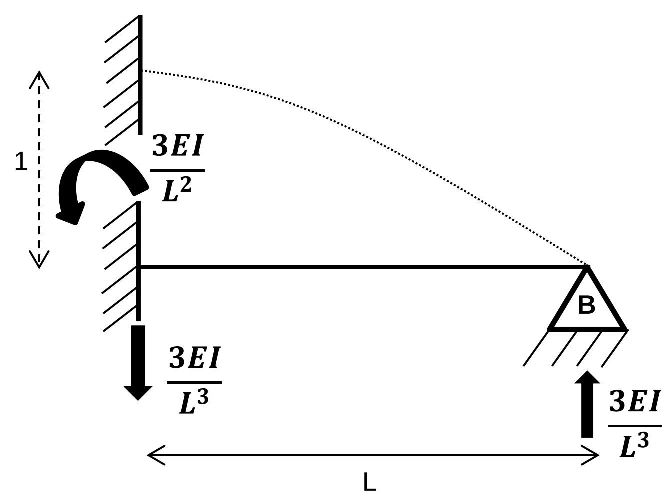
$$RAY + \frac{3EI}{L^3} = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = -\frac{3EI}{L^3}}$$

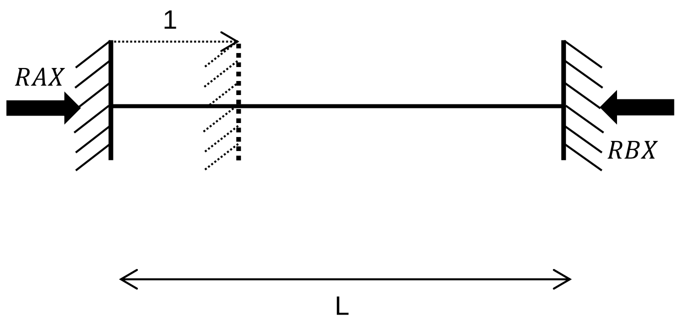
$$\sum M_B = 0$$

$$\frac{3EI}{L^3}(L) - MA = 0$$

$$\boldsymbol{MA = \frac{3EI}{L^2}}$$



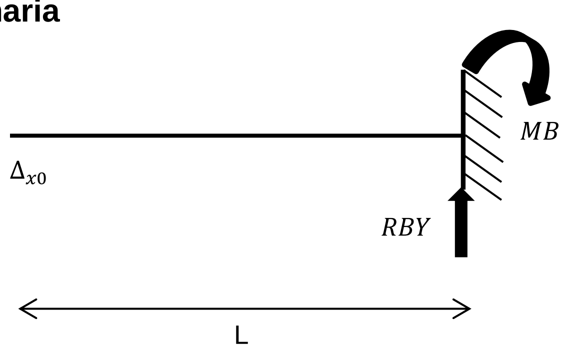
Viga 5



Solución por flexibilidades.

Principios de superposición

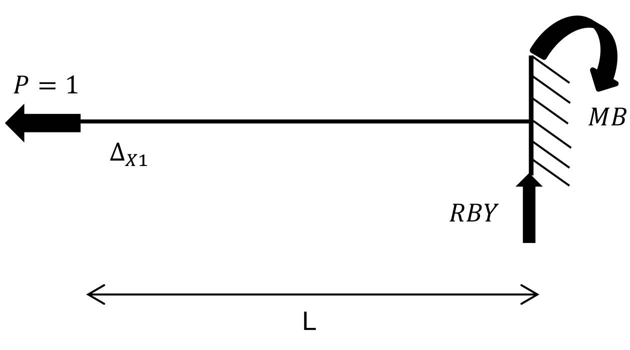
Viga primaria



$$0 \leq x \leq L$$

$$\boldsymbol{N = 0}$$

Viga Isostática ficticia 1



$$0 \leq x \leq L$$

$$\boldsymbol{N = 1Ton}$$

Calculo de los desplazamientos liberados.

$$\boldsymbol{Axn = \frac{NnL}{AE}}$$

$$\Delta_{X0} = \frac{(\mathbf{0})(\mathbf{1})(\boldsymbol{L})}{\boldsymbol{AE}} = \mathbf{0}$$

$$\Delta_{X1} = \frac{(\mathbf{1})(\mathbf{1})(\boldsymbol{L})}{\boldsymbol{AE}} = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{AE}}$$

Ecuación de flexibilidad.

$$\Delta_{X0} + \Delta_{X1} RAX = -1$$

Sustituyendo y solucionando.

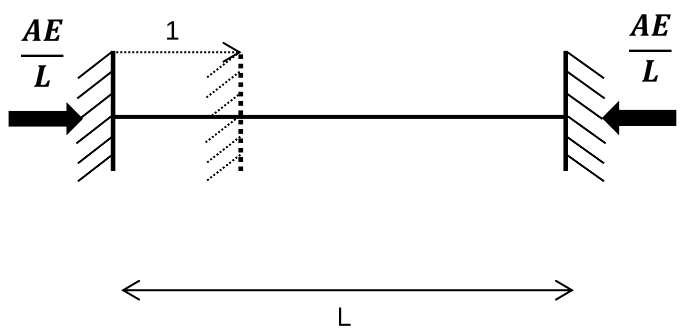
$$\frac{L}{AE} RAX = -1$$

$$\boldsymbol{RAX} = -\frac{\boldsymbol{AE}}{\boldsymbol{L}} \rightarrow$$

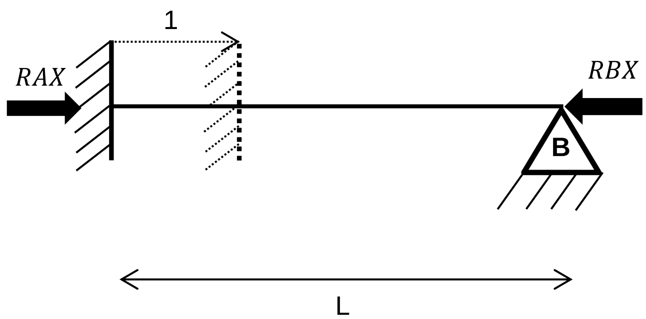
$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{AE}{L} - RBX = 0$$

$$\boldsymbol{RBX} = \frac{\boldsymbol{AE}}{\boldsymbol{L}} \leftarrow$$



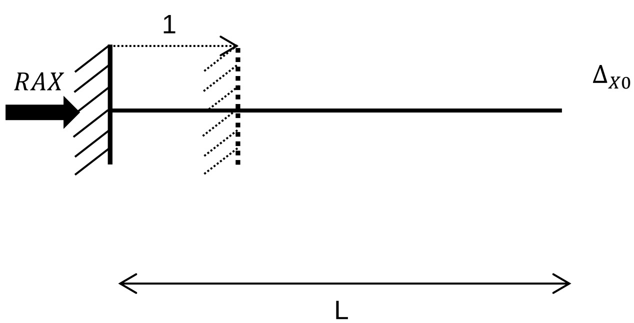
Viga 6



Solución por flexibilidades.

Principios de superposición

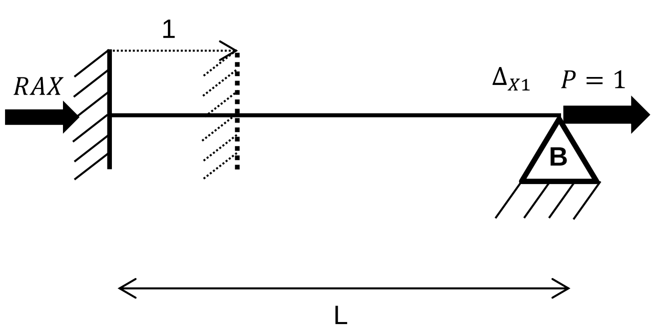
Viga primaria



$$0 \leq x \leq L$$

$$\boldsymbol{N = 0}$$

Viga Isostática ficticia 1



$$0 \leq x \leq L$$

$$\boldsymbol{N = 1Ton}$$

Calculo de los desplazamientos liberados.

$$\boldsymbol{Axn = \frac{NnL}{AE}}$$

$$\Delta_{X0} = \frac{(\mathbf{0})(\mathbf{1})(\boldsymbol{L})}{\boldsymbol{AE}} = \mathbf{0}$$

$$\Delta_{X1} = \frac{(\mathbf{1})(\mathbf{1})(\boldsymbol{L})}{\boldsymbol{AE}} = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{AE}}$$

Ecuación de flexibilidad.

$$\Delta_{X0} + \Delta_{X1}RBX = -1$$

Sustituyendo y solucionando.

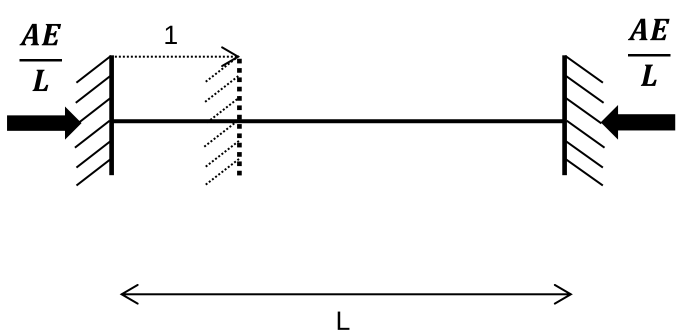
$$\frac{L}{AE}RAX = -1$$

$$\boldsymbol{RBX} = -\frac{\boldsymbol{AE}}{\boldsymbol{L}} \leftarrow$$

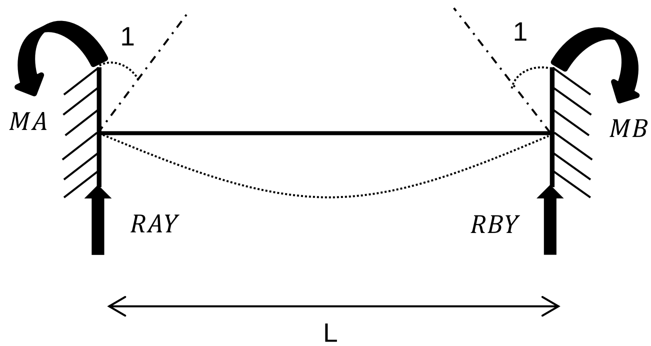
$$\sum F_Y = 0$$

$$-\frac{AE}{L} + RAX = 0$$

$$\boldsymbol{RBX} = \frac{\boldsymbol{AE}}{\boldsymbol{L}} \rightarrow$$

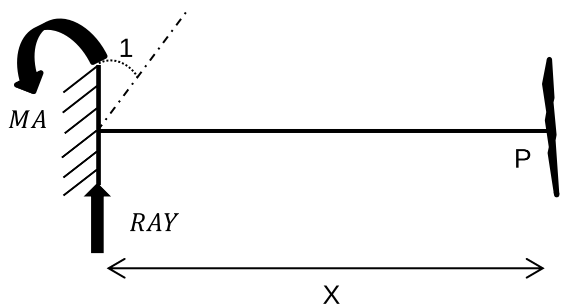


Viga 7



Solución empleando el método de secciones.

Realizando un corte a una distancia (X) y obteniendo las ecuaciones de momento, giro y flecha.



$$M(x) = -MA + RAY(X)$$

$$EI\theta = -MAX + \frac{RAY(X)^2}{2} + C_1$$

$$EIY = -\frac{MA(X)^2}{2} + \frac{RAY(X)^3}{6} + C_1X + C_2$$

Condiciones de frontera.

Si $X = 0$ $\theta = -1$ $Y = 0$

Si $X = L$ $\theta = 1$ $Y = 0$

De la primera condición:

$$EI(-1) = -MA(0) + \frac{RAY(0)^2}{2} + C_1$$

$$EI(0) = -\frac{MA(0)^2}{2} + \frac{RAY(0)^3}{6} + C_1(0) + C_2$$

$$\boldsymbol{C_1 = -EI}$$

$$\boldsymbol{C_2 = 0}$$

Tomando en cuenta la segunda condición.

$$-MA(L) + \frac{RAY(L)^2}{2} - EI = EI \ldots\ldots\ldots Ec.1$$

$$-\frac{MA(L)^2}{2} + \frac{RAY(L)^3}{6} - EI(L) = 0 \ldots\ldots\ldots Ec.2$$

De la ecuación 1 despejamos “MA”

$$MA = -\frac{2EI}{L} + \frac{RAY(L)}{2} \ldots\ldots\ldots Ec.3$$

Sustituyendo la ecuación 3 en la ecuación 2 y despejando “RAY”.

$$-\frac{(L)^2}{2}\left(-\frac{2EI}{L} + \frac{RAY(L)}{2}\right) + \frac{RAY(L)^3}{6} - EI(L) = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = 0}$$

Sustituyendo el valor de “RAY” en la ecuación 3.

$$\boldsymbol{MA} = -\frac{2EI}{L}$$

$$\sum M_B = 0$$

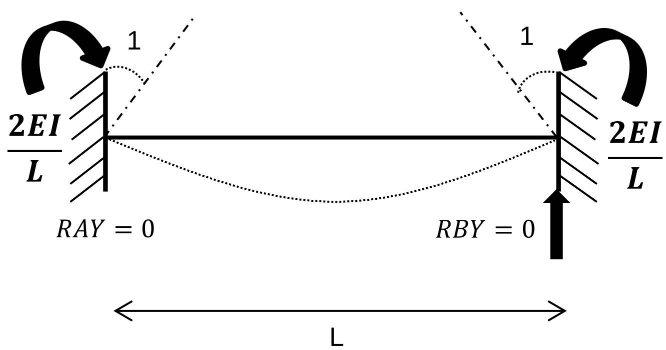
$$\frac{2EI}{L} + MB = 0$$

$$\boldsymbol{MB = -\frac{2EI}{L}}$$

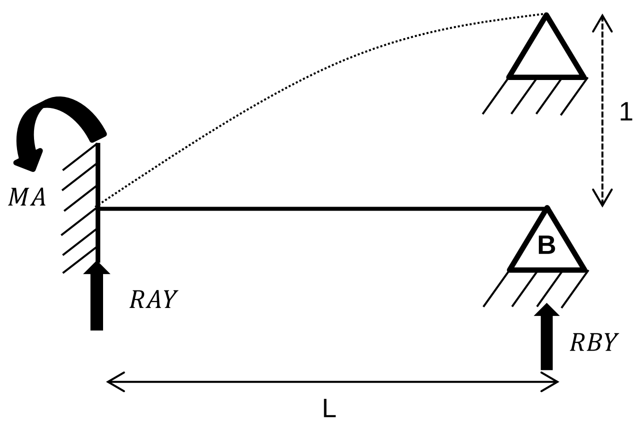
$$\sum F_Y = 0$$

$$0 + RBY = 0$$

$$\boldsymbol{RBY = 0}$$



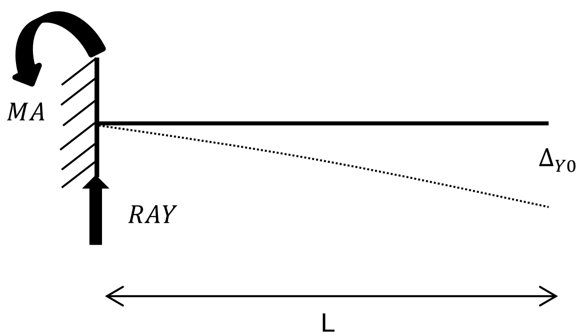
Viga 8



Solución por flexibilidades.

Principios de superposición

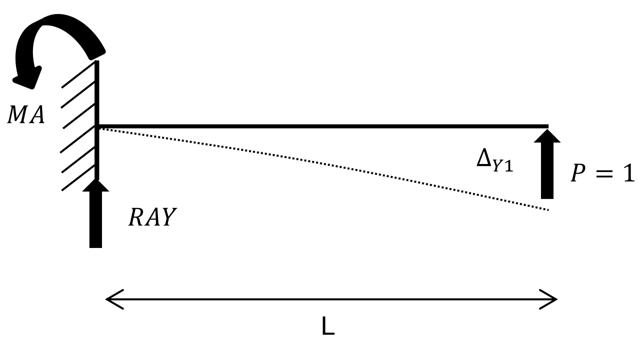
Viga primaria



$$0 \leq x \leq L$$

$$\boldsymbol{M(x) = 0}$$

Viga Isostática ficticia 1



$$0 \leq x \leq L$$

$$\boldsymbol{M(x) = -X}$$

Calculo de los desplazamientos liberados

$$\Delta_{\boldsymbol{Y0}}= \frac{1}{EI}\int_0^L (0)(-X) = 0$$

$$\Delta_{\boldsymbol{Y1}}= \frac{1}{EI}\int_0^L (-X)(-X) = \frac{L^3}{3EI}$$

Ecuación de flexibilidad asociando el desplazamiento unitario original inducido en el empotramiento B

$$\Delta_{\mathbf{01}} + \Delta_{\mathbf{11}}\boldsymbol{RBY} = \mathbf{1}$$

Sustituyendo y despejando

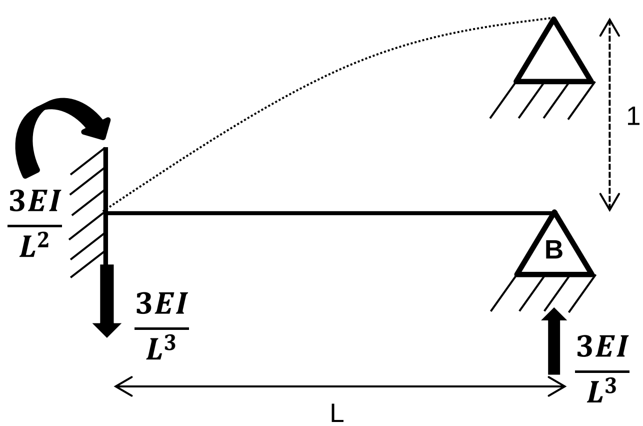
$$\frac{L^3}{3EI}RBY = 1$$

$$\boldsymbol{RBY} = \frac{\boldsymbol{3EI}}{\boldsymbol{L^3}}$$

$$\sum F_Y = 0$$

$$\frac{3EI}{L^3} + RAY = 0$$

$$\boldsymbol{RAY} = -\frac{\boldsymbol{3EI}}{\boldsymbol{L^3}}$$

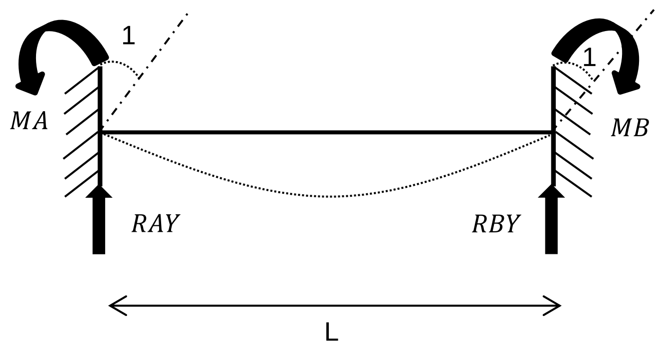


$$\sum M_A = 0$$

$$-MA - \left(\frac{3EI}{L^3}\right)(L) = 0$$

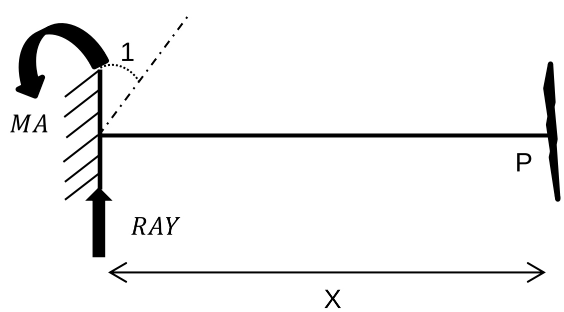
$$\boldsymbol{MA} = -\frac{\boldsymbol{3EI}}{\boldsymbol{L^2}}$$

Viga 9



Solución empleando el método de secciones.

Realizando un corte a una distancia (X) y obteniendo las ecuaciones de momento, giro y flecha.



$$M(x) = -MA + RAY(X)$$

$$EI\theta = -MAX + \frac{RAY(X)^2}{2} + C_1$$

$$EIY = -\frac{MA(X)^2}{2} + \frac{RAY(X)^3}{6} + C_1X + C_2$$

Condiciones de frontera.

Si $X = 0$ $\theta = -1$ $Y = 0$

Si $X = L$ $\theta = -1$ $Y = 0$

De la primera condición:

$$EI(-1) = -MA(0) + \frac{RAY(0)^2}{2} + C_1$$

$$EI(0) = -\frac{MA(0)^2}{2} + \frac{RAY(0)^3}{6} + C_1(0) + C_2$$

$$\boldsymbol{C_1 = -EI}$$

$$\boldsymbol{C_2 = 0}$$

Tomando en cuenta la segunda condición.

$$-MA(L) + \frac{RAY(L)^2}{2} - EI = -EI \ldots\ldots\ldots Ec. 1$$

$$-\frac{MA(L)^2}{2} + \frac{RAY(L)^3}{6} - EI(L) = 0 \ldots\ldots\ldots Ec. 2$$

De la ecuación 1 despejamos "MA"

$$MA = \frac{RAY(L)}{2} \ldots\ldots\ldots Ec. 3$$

Sustituyendo la ecuación 3 en la ecuación 2 y despejando "RAY".

$$-\frac{(L)^2}{2}\left(\frac{RAY(L)}{2}\right) + \frac{RAY(L)^3}{6} - EI(L) = 0$$

$$-\frac{RAY(L)^3}{4} + \frac{RAY(L)^3}{6} - EI(L) = 0$$

$$-\frac{RAY(L)^3}{12} = EI(L)$$

$$\boldsymbol{RAY = -\frac{12EI}{(L)^2}} \downarrow$$

Sustituyendo el valor de “RAY” en la ecuación 3.

$$\boldsymbol{MA = \frac{(L)}{2}\left(-\frac{12EI}{(L)^2}\right) = -\frac{6EI}{L}}$$

$$\sum F_Y = 0$$

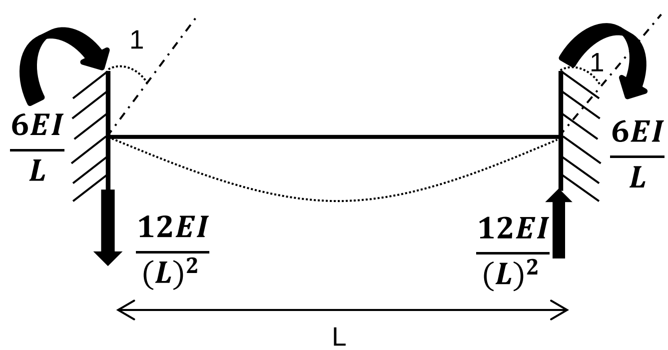
$$-\frac{12EI}{(L)^2} + RAY = 0$$

$$\boldsymbol{RAY = \frac{12EI}{(L)^2}}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$\frac{6EI}{L} - \frac{12EI}{(L)^2}(L) + MB = 0$$

$$\boldsymbol{MB = \frac{6EI}{L}}$$



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

1. Carmona González, Carlos J García Carbajal, Julio Olvera Montes, Alfonso E. “Introducción al análisis de estructuras isostáticas” Instituto Politécnico Nacional. México, D, F. 2001

2. Dr. Oscar M. González Cuevas “Análisis estructural”. Limusa Noriega Editores.

3. Apuntes de la asignatura de estructuras isostáticas impartida por el catedrático Ing. Marcos Molina Elvira.

4. Apuntes de la asignatura de mecánica de materiales I impartida por el catedrático Ing. Pascual García Cuevas.