



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**El Antiprisma**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**M A T E M A T I C O**

**P R E S E N T A:**

**Ian Andrei Gleason Freidberg**



**DIRECTOR DE TESIS:**  
**Dra. Isabel Alicia Hubard Escalera**  
México, D. F. **2014**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# El antiprisma

Ian Andrei Gleason Freidberg

30 de octubre de 2014

## Datos del Jurado

1. Datos del alumno  
Gleason  
Freidberg  
Ian Andrei  
56 59 81 87  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas
2. Datos del tutor  
Dra.  
Isabel Alicia  
Hubard  
Escalera
3. Datos de sinodal 1  
Dra.  
Gabriela  
Campero  
Arena
4. Datos de sinodal 2  
Dra.  
Eugenia  
O'Reilly  
Reguiro
5. Datos de sinodal 3  
Dr.  
Javier  
Páez  
Cárdenas
6. Datos de sinodal 4  
Lic.  
Alejandra  
Ramos  
Rivera
7. Datos del trabajo escrito  
El Antiprisma  
88 p.  
2014

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM, IB101412, Grupos y gráficas asociados a politopos abstractos. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.



# Introducción

Este trabajo tiene como objetivo generalizar la construcción clásica del antiprisma de un polígono a un politopo arbitrario, y estudiar las propiedades principales de esta construcción. El enfoque de este trabajo está completamente contenido en el lenguaje de los politopos abstractos y se apoya de muchas herramientas combinatorias de la teoría de gráficas.

La construcción original es la siguiente: tomemos un polígono regular finito con  $n$  lados, tomemos una copia del mismo en un plano paralelo, y girémoslo un poco ( $\frac{2\pi}{2n}$ ) hasta que queden vértices empalmados con los centros de las aristas de la otra copia. Por cada vértice que tenemos en el polígono original mandaremos un par de aristas que se unan a los vértices de la arista correspondiente en la otra copia del polígono, formando así un total de  $2n$  triángulos. La figura 3-dimensional formada de esta manera tendrá como nombre el antiprisma del polígono. Esta será la construcción a generalizar. Ilustramos la construcción en la figura 1 (pag. VI).

Este trabajo, como muchos trabajos en politopos abstractos, usa una intensa interacción entre varios objetos matemáticos (en especial combinatorios). En el capítulo 1 nos dedicamos a familiarizar al lector con el lenguaje que se usará durante el resto del trabajo, y refrescaremos algunos resultados de la teoría de gráficas, de la teoría de grupos y de la teoría de órdenes parciales. Tratamos con especial atención los temas de productos directos y semidirectos de grupos, así como las acciones de grupos sobre conjuntos. Hacemos una breve introducción al área de los politopos abstractos, ésta tiene como propósito principal que el lector entienda la interacción entre la geometría y la combinatoria de los órdenes parciales.

El contexto de los politopos abstractos incluye órdenes parciales infinitos numerables, por esta razón en el capítulo preliminar exponemos brevemente algunas construcciones de la teoría de conjuntos que nos permitirán tratar de igual manera a los politopos infinitos.

Como demostraremos posteriormente, la construcción del antiprisma está profundamente conectada con algunos productos de politopos. Es por eso que dedicamos un capítulo entero (el capítulo 2) a entender los diversos tipos de productos que le darán forma al trabajo. Comenzamos exponiendo el produc-



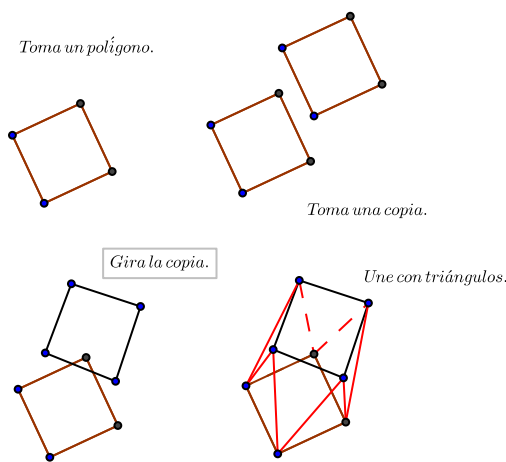


Figura 1: Construcción del antiprisma del cuadrado por pasos

to cartesiano de gráficas y digráficas, ampliamente estudiado, el cual será la principal herramienta de estudio para órdenes parciales, y en particular para los politopos abstractos. Demostramos una relación conocida entre el producto cartesiano de gráficas y el producto cartesiano de órdenes parciales. Y con la estructura combinatoria general nos dedicamos a estudiar productos de politopos. Introducimos las clases de órdenes parciales  $Poly^1$ ,  $Poly^2$ ,  $Poly^3$  y  $Poly^4$  que usaremos como recurso notacional para simplificar el desarrollo de productos entre politopos abstractos. Cada una de estas clases tiene una asociación directa con un producto de politopos.

El capítulo 3 se dedica a demostrar un teorema fundamental en el estudio del producto cartesiano de gráficas, el teorema de factorización única. A pesar de que el resultado se conoce desde 1960 [5], usamos una prueba más moderna e interesante [3]. Ésta se basa en una idea muy profunda que conecta a los productos de gráficas con la convexidad de las mismas. Probado el teorema para gráficas, nos dedicamos a moldear ese gran teorema estructural para obtener como corolarios la factorización única en las clases  $Poly^1$ ,  $Poly^2$ ,  $Poly^3$  y  $Poly^4$ . Por la naturaleza de la asociación que hay entre estas clases y los productos de politopos, obtenemos como corolario la factorización única de cada uno de los productos. Aunque en primera instancia, demostrar la factorización única en productos de politopos pudiera parecer superficial, será de enorme importancia para la determinación del grupo de automorfismos del antiprisma de un politopo.

El capítulo 4 se dedica a encontrar el grupo de automorfismos de todas las construcciones expuestas. En este capítulo hacemos uso intensivo del producto directo y semidirecto de grupos, así como del lenguaje y los resultados de acciones de grupos.

Con la preparación previa, el capítulo 5 culmina con la construcción generalizada del antiprisma como una función  $Ant : Poly^1 \rightarrow Poly^3$  multiplicativa. Encontramos el grupo de automorfismos del antiprisma de un politopo, poniendo éste en términos de la factorización en  $Poly^1$  del politopo original y por último pasamos a determinar todos los politopos regulares que se pueden construir de esta manera.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Gráficas y digráficas . . . . .	1
1.2. Órdenes parciales . . . . .	5
1.3. Politopos abstractos . . . . .	9
1.4. Productos Infinitos . . . . .	13
1.5. Teoría de Grupos . . . . .	15
1.6. Grupos de automorfismos y acciones . . . . .	18
1.6.1. Grupos, Acciones y Politopos Abstractos . . . . .	19
<b>2. Productos en Gráficas, Digráficas y Órdenes parciales</b>	<b>21</b>
2.1. Productos cartesianos . . . . .	22
2.1.1. Órdenes discretos y preórdenes . . . . .	24
2.1.2. Politopos abstractos . . . . .	27
2.2. La pirámide . . . . .	29
2.3. Primer producto . . . . .	30
2.4. El prisma . . . . .	32
2.5. Segundo producto . . . . .	33
2.6. Los dos productos como uno . . . . .	37
<b>3. Teoremas de Factorización Única</b>	<b>41</b>
3.1. Factorización única en gráficas conexas . . . . .	41
3.2. Teoremas de factorización única para digráficas, órdenes parciales, y politopos . . . . .	56
<b>4. Grupos de automorfismos</b>	<b>65</b>
4.1. Grupos de automorfismos . . . . .	65
4.2. Órbitas y banderas . . . . .	71
<b>5. El antiprisma</b>	<b>77</b>
5.1. Construcción . . . . .	77
5.2. Grupo de automorfismos . . . . .	80
<b>6. Conclusiones</b>	<b>87</b>



# Índice de figuras

1.	Construcción del antiprisma del cuadrado por pasos . . . . .	VI
1.1.	Una gráfica $G$ , con sus vértices $V(G)$ y aristas $E(G)$ . . . . .	2
1.2.	Una gráfica $G$ (negro), un camino (rojo), una trayectoria (verde), un ciclo (morado) . . . . .	3
1.3.	Una gráfica conexa $G$ , y una disconexa $D$ . . . . .	3
1.4.	Una digráfica . . . . .	4
1.5.	Digráfica $D$ con su gráfica subyacente $G$ . . . . .	4
1.6.	Orden parcial, con suborden . . . . .	5
1.7.	Una Cadena (de verde) y una bandera (de rojo) de un orden parcial	7
1.8.	Rango, Grado, Equipotencia . . . . .	8
1.9.	Politopos y sus representaciones abstractas . . . . .	11
2.1.	El producto cartesiano de $G_1$ con $G_2$ . . . . .	22
2.2.	Producto Cartesiano de digráficas . . . . .	24
2.3.	Ejemplo de arco falso . . . . .	26
2.4.	Producto cartesiano de dos órdenes parciales . . . . .	27
2.5.	Pirámide de un triángulo, con su diagrama de Hasse . . . . .	30
2.6.	Las iteraciones de la operación $Pyr$ , sobre el punto . . . . .	31
2.7.	Algunas figuras con su respectivo prisma . . . . .	32
2.8.	Diagramas de Hasse de la arista, el cuadrado y el cubo . . . . .	33
2.9.	Las gráficas de Hasse del producto $\odot_2$ de dos órdenes discretos con mínimo . . . . .	34
2.10.	Diagramas de Hasse de las distintas representaciones del triángulo en $Poly^i$ para $i = 1, \dots, 4$ . . . . .	38
2.11.	Comparación entre el producto $\odot_2$ de dos aristas y multiplicar en $Poly^2$ las respectivas representaciones de la arista . . . . .	40
3.1.	Gráfica convexa y no convexa . . . . .	42
3.2.	Coloraciones convexas y no convexas . . . . .	42
3.3.	Convexidad y convexidad fuerte . . . . .	43
3.4.	Coloración inducida por producto . . . . .	44
3.5.	Coloraciones que no son cuadradas . . . . .	45
3.6.	Coloraciones bien orientadas y mal orientadas . . . . .	57

4.1. Suma y producto de un triángulo con un cuadrado . . . . .	66
4.2. Coloraciones primoide y no primoide . . . . .	69
4.3. Suma y producto de un triángulo en $Poly^1$ con una arista en $Poly^1$ , y banderas correspondientes en la suma y el producto . .	72
5.1. Construcción del antiprisma del cuadrado por pasos . . . . .	78
5.2. Antiprisma del cubo . . . . .	79

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Gráficas y digráficas

En esta sección introduciremos a las gráficas, frecuentemente llamadas el objeto combinatorio más básico. Son un lenguaje esencial en el estudio de cualquier objeto combinatorio y muchas de las descripciones que daremos usarán este lenguaje (en ocasiones también los resultados). Una noción intuitiva del tema usualmente es mucho más fructífera que el uso riguroso de las definiciones para entender tanto las demostraciones como para intuir las. Sin embargo, hay ocasiones donde se requiere del lenguaje formal para hacer construcciones en las cuales la intuición se queda pobre. Una gráfica  $G$  la podemos describir como un conjunto  $V$  de elementos a los que llamamos *vértices*, y una relación binaria  $E$  sobre los vértices que cumple con ser simétrica e irreflexiva. A los pares  $(u, v) \in E$  se les llama *aristas*, y es común denotar a  $V$  y  $E$  por  $V(G)$  y  $E(G)$  respectivamente. Intuitivamente uno piensa a las gráficas como un dibujo donde los vértices son puntos del plano y una arista entre ellos es simplemente una curva uniendo estos puntos. En la figura 1.1 (pag. 2) dibujamos una gráfica.

Diremos que dos vértices  $u, v \in V$  son *adyacentes* si  $(u, v) \in E$ . Al ser  $E$  simétrica, esta condición es equivalente a  $(v, u) \in E$ . Una subgráfica  $H$  de  $G = (V, E)$  es una gráfica  $H = (V(H), E(H))$  tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  y  $E(H) \subseteq E(G)$ . A una subgráfica  $H$  la llamaremos *inducida por vértices* si adicionalmente  $v, u \in V(H)$  y  $(v, u) \in E(G)$  implican  $(v, u) \in E(H)$ .

Un *camino*  $P$  de una gráfica  $G$  es una sucesión de vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$  con la propiedad de que  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  para cualquier  $i = 0, \dots, n-1$ , además si  $v_0 = v_n$  diremos que es un *camino cerrado*. Podemos pensar a los caminos como el movimiento de una persona que camina dentro de un museo, si representamos a las salas del museo por vértices y ponemos una arista entre dos salas si hay un pasillo que las une. Si el museo tiene el mismo lugar de entrada que de salida,



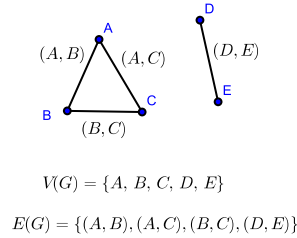


Figura 1.1: Una gráfica  $G$ , con sus vértices  $V(G)$  y aristas  $E(G)$

el paseo que represente al movimiento de la persona, tendrá que ser un paseo cerrado. Un *paseo* es un camino que no repite aristas, y un *paseo cerrado* es un camino cerrado que no repite aristas. Una *trayectoria* es un camino que no repite vértices, a la noción de trayectoria cerrada (un camino cerrado que sólo repite el vértice inicial y final) se le llama *ciclo*. Si queremos especificar que un ciclo tiene  $n$  vértices (y consecuentemente  $n$  aristas) le llamaremos  $n$ -ciclo.

Dado un paseo, camino, trayectoria o ciclo, nos podemos fijar en la *subgráfica inducida* por las aristas de estos (mínima subgráfica que contiene a todas las aristas) y es muy común que cuando hablemos de trayectorias o de ciclos nos refiramos a esta subgráfica y no a la sucesión per se. También es común que si queremos agregar la información adicional de que un paseo empieza en  $u$  y termina en  $v$  lo llamemos un  $(u, v)$ -paseo. En la figura 1.2 (pag. 3) ilustramos estos conceptos. Observemos que todo paseo cerrado contiene un ciclo, además dadas dos  $(u, v)$ -trayectorias distintas existe un ciclo inducido por las mismas. Si pedimos que éstas  $(u, v)$ -trayectorias sean ajenas, este ciclo tendrá a  $u$  y a  $v$  entre sus vértices.

Una noción de enorme importancia para la teoría de gráficas (y en general muchas áreas de las matemáticas) es la de conexidad, y en esta tesis también jugará un rol importante. Diremos que una gráfica  $G$  es *conexa* si para cualesquiera dos vértices existe una trayectoria que pasa por los dos. No todas las gráficas son conexas, como podemos ver en la figura 1.3 (pag. 3) que ilustra este concepto. Dado un vértice podemos definir su *componente conexa* como la máxima subgráfica conexa que tiene ese vértice. Concatenando paseos se puede demostrar que pertenecer a una misma componente conexa es una relación de equivalencia. De hecho las componentes conexas son las subgráficas inducidas por los vértices de las clases de equivalencia que se forman al tomar la cerradura transitiva de  $E(G)$  (donde  $E(G)$  es el conjunto de aristas pensado como una relación simétrica en los vértices, y donde la cerradura transitiva de una relación

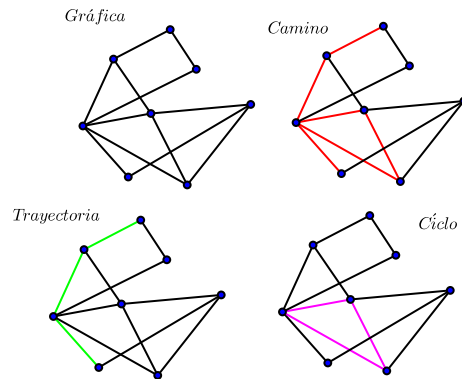


Figura 1.2: Una gráfica  $G$  (negro), un camino (rojo), una trayectoria (verde), un ciclo (morado)

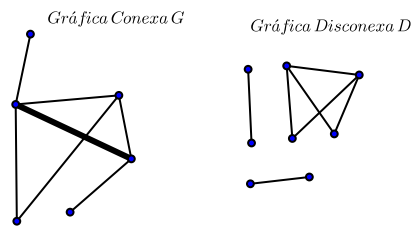


Figura 1.3: Una gráfica conexa  $G$ , y una disconexa  $D$

$R$  es la mínima relación que contiene a  $R$  y es transitiva). Las componentes conexas constituyen una partición de los vértices.

Algo que siempre es importante definir cuando se trabaja con un objeto matemático, es la noción de isomorfismo. Cuando un matemático da una noción de isomorfismo, de alguna manera está determinando qué parte de la estructura de un objeto le interesa estudiar. En este caso diremos que dos gráficas,  $G_1$  y  $G_2$ , son isomorfas si existe una biyección  $f : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$  tal que  $(a, b) \in E(G_1)$  si y sólo si  $(f(a), f(b)) \in E(G_2)$ , esta función recibirá el nombre de isomorfismo cuando  $G_1 \neq G_2$  y recibirá el nombre de automorfismo cuando  $G_1 = G_2$ .

Ya que sabemos un poco de gráficas, estamos listos para introducir la segunda estructura combinatoria. Ésta consistirá de un conjunto de elementos y una relación binaria sobre ellos. Una digráfica (o gráfica dirigida)  $D$  es un conjunto  $V$  de elementos a los que también llamaremos vértices y una relación binaria  $E$  sobre

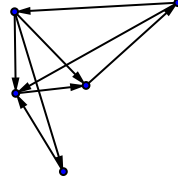
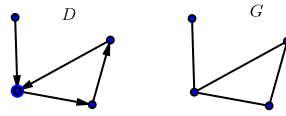


Figura 1.4: Una digráfica

Figura 1.5: Digráfica  $D$  con su gráfica subyacente  $G$ 

los vértices que cumple con ser asimétrica e irreflexiva. A los pares  $(u, v) \in E$  se les llama arcos, y es común denotar a  $V$  y  $E$  por  $V(G)$  y  $E(G)$  respectivamente. Notemos que la única diferencia entre una gráfica y una digráfica es que los arcos tienen más información, en el sentido de que le imponen una dirección a las aristas. También es usual pensar a las digráficas dibujadas de forma que en lugar de representar a las aristas por curvas, representaremos a los arcos por flechas como en la figura 1.4 (pag. 4). La noción de subgráfica se extiende de manera natural, conservando las orientaciones como se debe.

Un *camino dirigido* es una sucesión de vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$  tales que el par ordenado  $(v_i, v_{i+1})$  se encuentre entre los arcos de la digráfica. Es importante aclarar que, por la asimetría de la relación, la dirección empieza a tomar un rol muy importante en nuestras descripciones. Análogamente podemos definir paseos, trayectorias y ciclos dirigidos. Otra noción que usaremos, sobretodo en el capítulo 3, es la de gráfica subyacente de una digráfica. Intuitivamente la gráfica subyacente es la gráfica que se obtiene al eliminar las orientaciones de una digráfica y cambiar todos los arcos por aristas. Formalmente la gráfica subyacente de una digráfica es la gráfica que se obtiene de hacer a la relación  $E(D)$  simétrica. En la figura 1.5 (pag. 4) mostramos una digráfica con su gráfica subyacente. Hay muchas propiedades de digráficas que se heredan de su gráfica subyacente. Diremos, por ejemplo, que una digráfica es conexa si su gráfica subyacente lo es.

Diremos que dos digráficas,  $D_1$  y  $D_2$ , son isomorfas si hay una biyección  $f$  entre

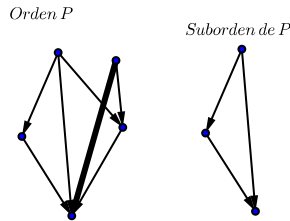


Figura 1.6: Orden parcial, con suborden

los vértices de éstas que además preserva arcos (i.e  $(a, b) \in E(D_1)$  si y sólo si  $(f(a), f(b)) \in E(D_2)$ ).

## 1.2. Órdenes parciales

En esta sección estudiaremos el lenguaje de los órdenes parciales y daremos algunas demostraciones estructurales sobre los mismos. Un orden parcial  $P$  consta de un conjunto  $X$ , y una relación binaria usualmente denotada como  $<_P$  (puede pensarse que el orden parcial es el par ordenado  $(X, <_P)$ ). Esta relación es transitiva, irreflexiva y asimétrica. Los órdenes parciales pueden ser pensados como un tipo específico de digráfica que cumple la condición de transitividad. Sin embargo, cuando uno piensa en un orden parcial usualmente no piensa en la digráfica que representa, pues aunque estructuralmente sí lo sea, semánticamente se han usado para propósitos distintos. Por supuesto, habrá pruebas donde necesitaremos referirnos a la digráfica de un orden parcial.

Un suborden  $S$  de un orden parcial es otro orden parcial que tiene como elementos a un conjunto  $Y \subseteq X$ , tal que para todo par de elementos  $y_0, y_1 \in Y$  se tiene que  $y_0 <_P y_1$  si y sólo si  $y_0 <_S y_1$ . En la figura 1.6 (pag. 5) representamos a la digráfica de un orden parcial y un respectivo suborden.

Tomemos una digráfica que no tenga ciclos dirigidos como subgráficas, y podemos pensar en la estructura que obtenemos al tomar la cerradura transitiva de la relación de arcos. Observemos que esta estructura es un orden parcial.

En un orden parcial diremos que dos elementos distintos  $a$  y  $b$  son incomparables si ninguna de las dos condiciones  $a < b$  ó  $b < a$  se cumple. Diremos que un orden es denso si para cualesquiera dos elementos  $a$  y  $b$  con  $a < b$  existe otro elemento  $c$  del orden que cumple  $a < c < b$ . Por ejemplo, el orden tradicional de los racionales  $(\mathbb{Q}, <)$  es un orden denso pues cualquier par de elementos distintos  $a$  y  $b$  tenemos que  $\frac{a+b}{2}$  será un elemento entre ellos. Por otro lado, el orden tradicional de los enteros  $(\mathbb{Z}, <)$  no es denso. Una noción relacionada con

la densidad, pero en cierto sentido contrario, es la de cubrir. Diremos que un elemento  $a$  de un orden cubre a otro elemento  $b$  del orden, si  $b < a$  y además no existe ningún elemento  $c$  que satisfaga  $b < c < a$ ; podemos ver la relación entre estos dos conceptos cuando planteamos a los órdenes densos como aquellos tales que ningún par de elementos satisfacen la condición de cubrir uno al otro. Por ejemplo, en el orden usual de los naturales  $\mathbb{N}$  tenemos que el número 666 cubre al número 665, pues no hay ningún número que sea menor al 666 y mayor a 665.

Diremos que un elemento es *máximo* del orden, si es mayor a cualquier otro elemento. Diremos que es *mínimo* si es menor a cualquier otro elemento. Al máximo y mínimo (cuando existen) se les llama *caras impropias* del orden; a todos los demás elementos del orden se les llama *caras propias*. Diremos que un elemento de un orden parcial es *maximal*, si es mayor a cualquier elemento comparable con él. Análogamente para *minimal*. Hacemos la observación de que un elemento maximal, que no sea máximo, es una cara propia.

Dado un orden parcial  $P$  y dos elementos  $a$  y  $b \in P$ , llamaremos al suborden parcial con elementos  $x \in P$  tales que  $a \leq x \leq b$  el *segmento acotado* por  $a$  y  $b$ , lo denotaremos  $[a, b]$ . Definiremos a su vez al *segmento superior* de un elemento, denotado  $[a, \infty]$ , como el suborden parcial de  $P$  que tiene como elementos a  $x \in P$  con  $a \leq x$ . Definimos de manera análoga a los *segmentos inferiores* y los denotamos  $[\infty, a]$ . Nos referiremos por los *segmentos de un orden* a cualquiera de estos tres tipos de subórdenes. Por ejemplo, en el conjunto potencia de un conjunto  $\wp(X)$ , ordenado por la relación de contención, podemos observar que los elementos del segmento inferior de un elemento  $R \in \wp(X)$ , serán los subconjuntos de  $R$ . Este coincidirá con el segmento acotado por el elemento vacío y  $R$ . Notemos que, en general, si un orden parcial tiene máximo y mínimo, todos los segmentos serán acotados.

Dentro de un orden parcial nos referimos por una cadena a un suborden del mismo en el cual todos los elementos son comparables. En el orden usual de los naturales todos los subórdenes son cadenas ya que todos los elementos son comparables entre sí. Una *bandera* es una cadena maximal, es decir, un suborden tal que al agregar cualquier elemento nuevo a la cadena se obtiene un orden parcial con al menos dos elementos incomparables. En la figura 1.7 (pag. 7) dibujamos cadenas y banderas para ilustrar el concepto.

Dado un orden parcial  $P$ , una función  $f$  es *de rango* si es un morfismo del orden parcial a los números enteros (i.e  $f : P \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $a \leq b$  implica  $f(a) \leq f(b)$ ). A una función  $f : P \rightarrow \mathbb{Z}$  de rango la llamaremos *de grado* si las desigualdades son estrictas y cada vez que un elemento  $a$  cubre a un elemento  $b$  se satisface  $f(a) - f(b) = 1$ . A los órdenes para los cuales existe una función de grado se les denomina graduados.

Daremos un ejemplo de un orden que no es graduado. Sea  $X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$ ,

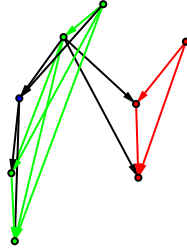


Figura 1.7: Una Cadena (de verde) y una bandera (de rojo) de un orden parcial

$\{1, 2\}$ ,  $\{1, 2, 3\}$  y ordenemos a  $X$  con la contención de conjuntos. Supongamos que el orden es graduado con función de grado  $f$ . Dado que los conjuntos  $\{1\}$ ,  $\{2\}$  y  $\{3\}$  cubren al conjunto  $\emptyset$  tenemos que  $f(\{1\}) = f(\{2\}) = f(\{3\}) = f(\emptyset) + 1$ . Como el conjunto  $\{1, 2\}$  cubre a 1 tenemos  $f(\{1, 2\}) = f(\emptyset) + 2$ . Dado que el conjunto  $\{1, 2, 3\}$  cubre a  $\{1, 2\}$  tenemos que  $f(\{1, 2, 3\}) = f(\emptyset) + 3$ . Sin embargo,  $\{1, 2, 3\}$  cubre a  $\{3\}$  por lo cual  $f(\{1, 2, 3\}) = f(\{3\}) + 1 = f(\emptyset) + 2$ . Esta contradicción nos dice que  $X$  no puede ser un orden graduado.

Tomaremos prestada la notación de teoría de conjuntos y diremos que dos banderas son equipotentes si tienen la misma cardinalidad. En el caso de que una bandera sea finita, definiremos su altura como la cardinalidad de la bandera menos 1 (si pensamos a una bandera como una trayectoria dirigida que va del elemento maximal al elemento minimal, entonces la altura representaría el número de arcos de esta trayectoria, mientras que la cardinalidad sería el número de vértices en ella).

**Proposición 1.** *Todo orden graduado con máximo y mínimo tiene banderas equipotentes.*

*Demostración.* Sea  $P$  un orden graduado con función de grado  $f$ . Lo que demostraremos es que las banderas tienen cardinalidad  $f(M) - f(m) + 1$  donde  $M$  y  $m$  son el máximo y el mínimo del orden respectivamente. Lo haremos por inducción fuerte sobre el número  $f(M) - f(m)$ . Nuestra hipótesis de inducción es que, todo orden parcial graduado con máximo  $M_b$ , mínimo  $m_b$  y función de rango  $f_b$  que satisfaga  $f_b(M_b) - f_b(m_b) < f(M) - f(m)$  cumple que sus banderas tienen cardinalidad  $f_b(M_b) - f_b(m_b) + 1$ .

Tomemos una bandera  $\mathcal{B}$  arbitraria del orden y pensemos en ésta como un suborden. Observemos que si un elemento  $a \in \mathcal{B}$  cubre a un elemento  $b \in \mathcal{B}$  en el orden restringido, entonces también lo cubre en  $P$ . Esto se debe a la maximalidad de la bandera como cadena (de no ser así podríamos agregar a un elemento entre ellos y hacer crecer a la presunta bandera). Tomemos un elemento  $x \in \mathcal{B}$  que cumpla  $m < x < M$ . Si no hay tal, tenemos que  $M$  cubre a  $m$  en  $\mathcal{B}$  (y por tanto en  $P$ ), mostrando  $f(M) - f(m) = 1$ . En este caso la única bandera es la

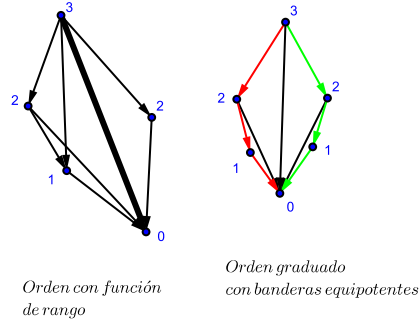


Figura 1.8: Rango, Grado, Equipotencia

trivial y tiene cardinalidad  $2 = f(M) - f(m) + 1$ , por lo que el resultado se sigue. La bandera del suborden  $[x, M]$  tendrá cardinalidad  $f(M) - f(x) + 1$  por hipótesis de inducción y la bandera de  $[m, x]$  tendrá cardinalidad  $f(x) - f(m) + 1$ . Si queremos calcular la cardinalidad del conjunto  $|[m, x] \cup [x, M]|$  necesitamos la fórmula  $|[m, x]| + |[x, M]| - |[m, x] \cap [x, M]|$  que nos da  $f(M) - f(m) + 2 - 1$  como queríamos demostrar.  $\square$

En la figura 1.8 (pag. 8) exponemos los conceptos de rango, grado y equipotencia entre banderas. Es importante aclarar que todo orden graduado con máximo y mínimo es automáticamente finito, por lo cual una prueba por inducción está justificada.

Pospondremos las definiciones de conexidad y conexidad fuerte en conjuntos parcialmente ordenados para la siguiente sección, pues la definición abstracta de estos conceptos parecerá un poco forzada sin la debida motivación.

Dado un orden parcial  $P = (X, <_P)$  podemos definir su orden dual, usualmente denotado  $P^*$ , como aquel orden con elementos en  $X$ , pero que cumple  $a <_{P^*} b$  si y sólo si  $b <_P a$ . En otras palabras, el orden dual es el que se obtiene de voltear todas las relaciones. La noción de isomorfismo para órdenes parciales es simplemente la noción de isomorfismo que tenemos cuando los pensamos como un caso particular de digráficas. Cuando un orden  $P$  satisface que él y su orden dual  $P^*$  son isomorfos lo llamaremos *autodual*. En ese caso identificaremos a  $P$  con  $P^*$  y toda función  $f : P \rightarrow P$  biyectiva que satisfaga  $a \leq b$  si y sólo si  $f(a) \geq f(b)$  la llamaremos *dualidad*. De forma análoga cualquier biyección  $f : P \rightarrow P$  que satisfaga  $a \leq b$  si y sólo si  $f(a) \leq f(b)$  la llamaremos un automorfismo.

Comentaremos un poco sobre el Lema de Zorn. Estamos muy lejos de demostrarlo, pues para eso tendríamos que tener muy frescas las ideas clásicas de un curso de teoría de conjuntos, lo cual no está muy relacionado con los propósitos de esta tesis. El Lema de Zorn es una proposición lógicamente equivalente al axioma de elección bajo la axiomática de conjuntos  $ZF$  y ambos representan una herramienta teórica de extrema utilidad. Lo menciono en esta sección pues

lo utilizamos en una demostración del capítulo 3 y además porque el lenguaje en el que suele enunciarse es el lenguaje de órdenes parciales. Será necesario introducir un término. Dado un orden parcial  $P = (X, <)$  y un conjunto  $Y \subseteq X$  diremos que un elemento  $x_0 \in X$  es una *cota superior* de  $Y$  si  $y \leq x_0$  para todo elemento  $y \in Y$ .

**Lema de Zorn.** *Sea  $P = (X, <)$  un orden parcial tal que cualquier cadena tenga una cota superior en el conjunto  $X$ , entonces  $P$  cumple con tener al menos un elemento maximal.*

### 1.3. Polítopos abstractos

Aunque esta tesis no use muchas técnicas del área de polítopos abstractos la razón de ser de la misma es estudiarlos. Por eso empezaremos con una introducción mucho más intuitiva al tema. Los polítopos son las generalizaciones de los objetos geométricos más antiguos con los que ha lidiado la humanidad, los polígonos y los poliedros. El primer trabajo en esta línea de pensamiento lo realizó Euclides en sus Elementos, donde clasificó a los poliedros regulares (en esa época la definición de regularidad exigía la convexidad de los cuerpos). A lo largo de los años la definición de poliedro fue evolucionando (y relajándose) para permitir el estudio de objetos con altos grados de simetría. El primer paso fue abandonar la convexidad y estudiar poliedros regulares no convexos. El segundo paso fue abandonar la finitud. El tercer paso fue abandonar a los poliedros y pensar en su generalización  $n$ -dimensional. El último paso fue abandonar la geometría. Los polítopos abstractos son representaciones combinatorias de estos objetos geométricos que han dejado perplejos durante siglos a la humanidad. La ventaja que ofrece esta forma de entender a los polítopos es que las simetrías de los objetos son mucho más manejables.

Como se hace es así: dado un polítopo usual  $\mathcal{P}$  (podemos tener en mente un cubo, un tetraedro, un polígono) representaremos a cada subconjunto geométrico (o cara) de él por un elemento de un orden parcial (en el caso del cubo sus pedazos serían: 8 vértices, 12 aristas, y 6 caras cuadradas). Diremos que un elemento es menor que otro si el primero es parte del otro a nivel geométrico. Para concretar ejemplos, pensemos en el objeto geométrico que tiene dos puntos y una arista. Al representarlos como orden parcial tenemos que la arista será un elemento y además será mayor a cada uno de los puntos, pues ellos forman parte de la arista. Pensemos ahora en un triángulo con sus tres aristas y sus tres vértices, el triángulo será mayor que cada una de las aristas y los vértices, y cada arista será mayor a los dos vértices que le corresponden. Resulta ser que uno puede abstraer qué es lo que tienen en común todos estos órdenes parciales. Esto inspira la definición de polítopos abstractos. En esta definición agregaremos un elemento mínimo al orden para describir de manera más concisa una de las propiedades de un polítopo (intuitivamente se ha entendido a este mínimo como el polítopo vacío).



En la figura 1.9 (pag. 11) mostramos algunos politopos con sus respectivos politopos abstractos (sólo hemos dibujado los arcos necesarios para deducir el orden parcial vía la transitividad).

Hay varias maneras equivalentes de axiomatizar a los politopos abstractos, daremos las dos principales:

**Definición 1.** *Un politopo abstracto es:*

1. *Un orden graduado.*
2. *Con máximo y mínimo.*
3. *Que cumple la condición diamante  $D^1$  (posteriormente la explicaremos con detalle).*
4. *Que es fuertemente conexo.*

Desglosaremos un poco las definiciones:

1. En un contexto tradicional se pide adicionalmente que la función de rango evalúe al mínimo de la función con valor  $-1$  y al resto de los elementos del orden con enteros no negativos. Si el máximo del orden evalúa  $n$  diríamos que éste es un  $n$ -politopo o un politopo de rango  $n$ . Esta función de rango pretende capturar la dimensión de cada pedazo del politopo; los vértices tendrán rango 0, lo cual coincide con la noción geométrica de que tienen dimensión 0, las aristas tendrán rango 1, lo cual coincide con su dimensión. La razón por la cual la definición de orden graduado requiere una desigualdad estricta es que queremos que un objeto que contenga a otro tenga dimensión mayor, entonces el segundo tenga mayor dimensión. Pedimos que la diferencia de rangos entre caras que se cubren sea 1, para que uno no pueda omitir dimensiones. Si no ponemos esta restricción podríamos representar objetos con vértices dentro de una cara, pero tales que no haya ninguna arista de la cara en contacto con ese vértice.
2. La principal razón por la cual se agrega un máximo y un mínimo a las condiciones de un orden es por la simplificación combinatoria que se logra al incluirlos. En particular, al incluir un mínimo y un máximo aseguramos que los segmentos acotados de politopos vuelvan a satisfacer las condiciones necesarias para ser politopos. En el fondo, el mínimo representa el “vacío” que no tiene ninguna interpretación geométrica y el máximo representa al politopo per se.
3. La condición diamante quiere recuperar una propiedad intrínsecamente geométrica que separa a los politopos de otros cuerpos geométricos. Dada una cara de un poliedro (un polígono) y un vértice en él, existen exactamente dos aristas del polígono que pertenecen al polígono y contienen al vértice. Si tomamos una arista del mismo poliedro, existen exactamente

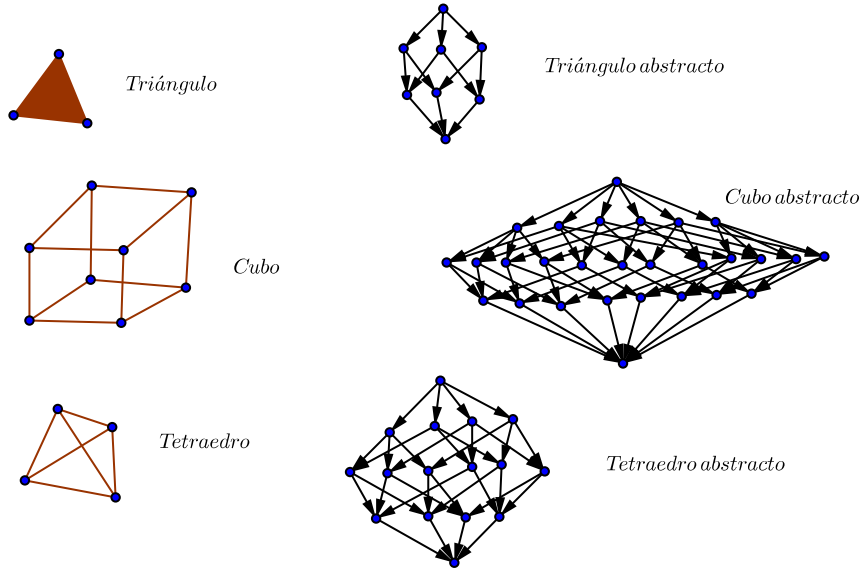


Figura 1.9: Polítopos y sus representaciones abstractas

dos caras de éste que contienen a la arista. La condición diamante generaliza este fenómeno en dimensiones superiores. Formalmente diremos que un orden parcial  $P = (X, \leq)$  graduado, con función de grado  $f$ , cumple la condición  $D^1$  (o condición diamante) si para todo par de elementos  $x, y$  que cumplan  $x < y$  y  $f(y) - f(x) = 2$  existen exactamente dos elementos  $z, w$  que satisfacen  $x < z, w < y$ . Observemos que si  $m$  es el mínimo de un polítopo abstracto y  $a$  es un arista, se cumplirá que  $f(a) - f(m) = 2$ . La condición  $D^1$  nos diría, en este caso, que toda arista contiene exactamente dos vértices.

4. La conexidad geométrica se logra abstraer de manera correcta con la conexidad abstracta. Motivaremos más adelante la razón por la cual pedimos conexidad fuerte y no simplemente conexidad.

Diremos que un orden parcial es conexo si al tomar el suborden inducido por las caras propias y al considerar a este orden como digráfica, se tiene una digráfica conexa. Diremos además que todos los órdenes isomorfos a un suborden de  $\wp(\{1, 2\})$  ordenado por la relación contención, serán conexos. La razón por la cual agregamos a la familia de subórdenes de  $\wp(\{1, 2\})$  como órdenes conexos, es que (como veremos en el capítulo 2) estos órdenes son los que representarán de forma combinatoria a la arista (o segmento de recta). Diremos que un orden es fuertemente conexo si cualquiera de sus segmentos es conexo.

Las banderas de un polítopo abstracto son de los objetos más importantes en la

teoría. Tan importantes que se tiene una axiomatización de los mismos en términos de banderas. Para darla definamos algunas cosas. Dado un orden parcial  $P$  y dos banderas equipotentes de éste, diremos que son adyacentes si difieren en una sola cara. Las banderas junto con la relación de adyacencia formarán una gráfica, la gráfica de banderas que denotaremos  $\beta(P)$ . Diremos que un orden es conexo por banderas, si la gráfica de banderas es conexa. Y diremos que un orden es fuertemente conexo por banderas si para cualesquiera dos banderas  $\Phi$  y  $\Psi$  se tiene una sucesión  $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n = \Psi$  tal que  $\Phi_i$  es adyacente a  $\Phi_{i+1}$  y además  $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_i$  para toda  $i = 0, \dots, n$ . La condición fuertemente conexa por banderas pide que cualesquiera dos banderas estén conectadas por banderas que no muevan las caras que tienen en común.

La segunda axiomatización de politopos abstractos queda de la siguiente manera. Un politopo abstracto es:

**Definición 2.** 1. *Un orden graduado.*

2. *Con máximo y mínimo.*

3. *Cumple con que cada bandera tiene exactamente una bandera adyacente de cada rango propio (recordemos que los rangos impropios son los correspondientes al mínimo y máximo).*

4. *Que es fuertemente conexo por banderas.*

Demostraremos un resultado que posteriormente será de enorme utilidad.

**Proposición 2.** *Dado un orden graduado  $P$  conexo, sin caras impropias y que tenga banderas equipotentes finitas, se tiene que cualesquiera dos elementos maximales  $M_1$  y  $M_2$  cumplen que  $\text{grad}(M_1) = \text{grad}(M_2)$ .*

*Demostración.* Diremos que dos elementos maximales,  $M_1$  y  $M_2$ , son adyacentes si  $[\infty, M_1] \cap [\infty, M_2] \neq \emptyset$ . Demostraremos dos cosas: la primera, que cualesquiera dos maximales adyacentes tienen el mismo grado, y la segunda, que la gráfica de maximales es conexa.

Si  $M_1$  y  $M_2$  son adyacentes existe un elemento  $a \in [\infty, M_1] \cap [\infty, M_2]$  y por tener banderas finitas existe un elemento minimal  $m_0$  tal que  $m_0 \leq a$ , esto implica  $m_0 \leq M_1$  y  $m_0 \leq M_2$ . Entonces podemos encontrar una cadena que contenga a  $m_0$  y a  $M_1$ , y otra que contenga a  $m_0$  y  $M_2$ . Al ser un orden graduado,  $\text{grad}(M_1)$  está determinado por  $\text{grad}(m_0)$  y por la altura de la bandera. Como este argumento es simétrico para  $M_2$  y las banderas son equipotentes,  $\text{grad}(M_1) = \text{grad}(M_2)$ .

Demostremos que la gráfica de maximales es conexa. Esta gráfica tiene por vértices a los elementos maximales del orden, y tiene una arista entre dos maximales  $M_1$  y  $M_2$  si  $[\infty, M_1] \cap [\infty, M_2] \neq \emptyset$ . Tomemos una componente conexa de la gráfica, llamémosla  $C_1$ , consideremos el conjunto  $[\infty, C_1] := \bigcup_{M \in C_1} [\infty, M]$  y

pensemos en éste como un suborden parcial. Tomemos un elemento  $x \in P$  y un elemento  $y \in [\infty, C_1]$ . Si  $y < x$ , cualquier maximal  $M_1$  tal que  $x \leq M_1$  será adyacente a cualquier maximal  $M_2 \in C_1$  que cumpla  $y \leq M_2$  y por tanto tendremos que  $M_1 \in C_1$ . Esto último implica necesariamente que  $x \in [\infty, M_1] \subseteq [\infty, C_1]$ . Tenemos pues, que  $[\infty, C_1]$  es una componente conexa del orden. Como  $P$  era conexo, tenemos que  $P = [\infty, C_1]$ , entonces para todo maximal  $M$  se tiene que  $M \in [\infty, C_1]$ , por lo tanto,  $M \in C_1$ . Ésta es la prueba de que la componente conexa  $C_1$  es la gráfica de maximales.  $\square$

De manera análoga tenemos la siguiente afirmación.

**Proposición 3.** *Dado un orden graduado  $P$  conexo, sin caras impropias y que tenga banderas equipotentes finitas, se tiene que cualesquiera dos elementos minimales  $m_1$  y  $m_2$  cumplen que  $\text{grad}(m_1) = \text{grad}(m_2)$ .*

## 1.4. Productos Infinitos

En el capítulo 2 y el capítulo 3 utilizaremos la herramienta conjuntista de productos infinitos, por eso aprovecharemos este capítulo preliminar para introducir el tema y facilitar la lectura de estos capítulos.

Dado un conjunto  $Y$ , una *operación binaria* es una función  $f : Y \times Y \rightarrow Y$ . Cuando tratamos con operaciones infinitarias, estamos pensando en funciones que corren su dominio sobre objetos que tienen una infinidad de coordenadas en  $Y$  y tienen contradominio en  $Y$ . Empecemos por entender qué significa una infinidad de coordenadas. Los pares ordenados  $(y_1, y_2) \in Y \times Y$  podemos pensarlos como el conjunto de funciones que tienen dominio  $\{1, 2\}$  y contradominio  $Y$ . En general dado un conjunto  $X$  podemos pensar en el conjunto de todas las funciones  $f : X \rightarrow Y$ , denotado como  ${}^X Y$ . Si  $X$  es infinito podemos pensar a cualquier elemento  $f \in {}^X Y$  como un objeto que tiene una infinidad de coordenadas en  $Y$  (tantas como tenga  $X$ ).

Podemos pensar ahora en operaciones infinitarias, como  $F : {}^X Y \rightarrow Y$ , donde el dominio es una  $X$ -ada, o coordenadas indexadas por  $X$ . Decir que una operación es conmutativa cuando tratamos de operaciones binarias significa  $f(y_1, y_2) = f(y_2, y_1)$  para todo  $y_1, y_2 \in Y$ . De alguna manera nos habla de que no importa como estén indexados los elementos por el dominio  $\{1, 2\}$  el resultado bajo  $f$  es el mismo. La manera de abstraerlo es: diremos que una operación  $X$ -aria,  $F$ , es conmutativa si para cualquier biyección (permutación)  $\beta : X \rightarrow X$  se tiene que, si  $f \in {}^X Y$ , entonces  $F(f) = F(f \circ \beta)$ .

El tema de asociatividad es un poco más delicado. Hay veces que necesitamos que nuestras funciones sepan evaluar coordenadas que estén indexadas no sólo por un único índice. Nos gustaría poder entender funciones que puedan recibir como entrada un par ordenado, una terna ordenada o una sucesión infinita. Podemos pensar en la función producto en los naturales a la que estamos

acostumbrados  $\prod_{i=1}^n m_i$  que recibe como argumento cualquier  $n$ -ada para cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , esta operación no es binaria, ni ternaria, pues puede recibir más de tres entradas. El nombre multinaria, aunque no sea muy formal, refleja la flexibilidad que queremos conferirle. Esto nos invita a considerar funciones  $F$  definidas en un conjunto  $Z$  el cual tenga como elementos funciones con dominio arbitrario, pero contradominio  $Y$ . Podemos pensar que la función  $\prod$  está definida en  $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} {}^i\mathbb{N}$ .

Ya que tenemos una noción de lo que una función multinaria es, hay muchas nociones dentro de este contexto que podrían conferirle el nombre de asociativa a una función de este estilo. Mencionaré únicamente la que nos será de utilidad. Diremos que una función conmutativa,  $F$ , es además asociativa si para cualquier función  $f \in {}^X Y$  con un  $X$  arbitrario ( $f = \{y_x\}_{x \in X}$ ), y cualquier partición de  $X$ ,  $\{X_i\}_{i \in I}$  indexada por un conjunto  $I$ , se tiene que  $F(\{y_x\}_{x \in X}) = F(\{F(\{y_x\}_{x \in X_i})\}_{i \in I})$ . Lo que estamos permitiendo es que para cualquier partición del índice sobre el que trabajamos, se puede operar dentro de la partición, y luego en cada pedazo de esa partición.

Otra cosa que debemos tratar, son los productos cartesianos infinitos de la teoría de conjuntos. Dada una familia indexada de conjuntos  $\{X_i\}_{i \in I}$  definimos su producto cartesiano, denotado  $\prod_{i \in I} X_i$ , como el conjunto de funciones  $f: I \rightarrow \bigcup X_i$  que satisfacen  $f(i) \in X_i$ . Como veremos, esta construcción tiene una familia de biyecciones naturales que están relacionadas con la conmutatividad y asociatividad infinitarias.

Tomemos una familia de conjuntos indexada por un conjunto  $I$ ,  $\{X_i\}_{i \in I}$  y otra familia indexada por un conjunto  $J$ ,  $\{Y_j\}_{j \in J}$  tales que exista una biyección  $\beta: I \rightarrow J$  que cumpla que  $Y_{\beta(i)} = X_i$ . Dadas estas condiciones tenemos una forma natural de definir una biyección  $\hat{\beta}$  entre  $\prod_{i \in I} X_i$  y  $\prod_{j \in J} Y_j$ . Podemos hacerlo de la siguiente forma, dada una función  $f \in \prod_{i \in I} X_i$  definimos  $\hat{\beta}(f)$  como la función  $g$ , tal que  $g(\beta(i)) = f(i)$  para toda  $i \in I$ . Empecemos por demostrar que  $\hat{\beta}$  tiene contradominio en  $\prod_{i \in J} Y_j$ . Tenemos  $g = \hat{\beta}(f) \in \prod_{i \in J} Y_j$  sólo si  $g(j) \in Y_j$ . Si  $\beta(i) = j$ , se tiene que  $g(j) = f(i)$ . Sabemos que  $f(i) \in X_i$ , como  $X_i = Y_{\beta(i)} = Y_j$ , tenemos que  $g(j) \in Y_j$  y así  $g \in \prod_{i \in J} Y_j$ . Verifiquemos ahora la biyectividad, consideremos la función  $\beta^{-1}$  y la construcción análoga  $\widehat{\beta^{-1}}$  observemos que:

$$\widehat{\beta^{-1}}(\hat{\beta}(f))[\beta^{-1}(\beta(i))] = \hat{\beta}(f)[\beta(i)] = f(i)$$

lo cual muestra que  $\hat{\beta}$  tiene inversa izquierda que cumple  $\hat{\beta}^{-1} = \widehat{\beta^{-1}}$ . Haciendo un cálculo parecido se muestra que esta también es la inversa derecha. Usaremos en las próximas secciones esta biyección natural.

Tomemos ahora una familia indexada de conjuntos  $\{X_i\}_{i \in I}$  y tomemos una partición de  $I$  indexada como  $\{I_j\}_{j \in J}$ , consideremos los productos  $\prod_{i \in I} X_i$  y  $\prod_{j \in J} (\prod_{i \in I_j} X_i)$ . Daremos una biyección natural entre estos conjuntos. Dada

una función  $f \in \prod_{i \in I} X_i$  mandaremos  $f$  a la función  $g$  que satisfice:  $g(j)[i] = f(i)$  para cualquier  $i \in I_j$ . Dada una función  $g \in \prod_{j \in J} (\prod_{i \in I_j} X_i)$  podemos asociarle una función  $h \in \prod_{i \in I} X_i$  definida como  $h(i) = g(j_i)[i]$  donde  $j_i$  es el único índice tal que  $i \in I_{j_i}$ . Estas dos asociaciones son claramente inversas y por tanto las asociaciones son una biyección. A esta biyección nos referiremos como la biyección natural.

## 1.5. Teoría de Grupos

La teoría de grupos es una importante rama de las matemáticas que ha tenido un impacto enorme en muchas áreas. La teoría de grupos estudia de forma intensa un tipo particular de operaciones binarias. Dado un conjunto  $X$  con una operación binaria  $*$  diremos que esta estructura es un semigrupo si la operación  $*$  es asociativa. Dado un semigrupo  $\langle X, * \rangle$  diremos que éste es un monoide si además existe un elemento  $e \in X$  que funge como identidad (es decir, para todo  $x \in X$  se tiene que  $x * e = x = e * x$ ). Un monoide lo llamaremos conmutativo si la operación  $*$  es además conmutativa. Dado un monoide  $\langle M, * \rangle$  lo llamaremos grupo si además, para cualquier elemento  $a \in M$  existe un elemento  $a^{-1} \in M$  tal que:  $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$ .

Si tomamos al conjunto de los enteros positivos junto con la suma, obtendremos un semigrupo que no será un monoide, pues no tendrá neutro aditivo. Si consideramos a los enteros no negativos con la suma obtendremos un monoide (pues tiene como neutro a 0), pero no será un grupo, pues no tendrá a los inversos. Los enteros con la suma son un grupo. Dado un conjunto  $X$ , el conjunto de todas las biyecciones  $f : X \rightarrow X$  junto con la composición, también será un grupo, pues la composición es asociativa, la identidad funge de neutro y toda biyección tiene inversa. Comenzaremos a omitir la operación cuando se entienda del contexto, así  $g *_G h$  lo denotaremos como  $gh$ .

Dado un grupo  $\langle G, * \rangle$  diremos que un subconjunto  $S \subseteq G$  es un subgrupo si para cualquier par de elementos  $s$  y  $t$  en  $S$  (no necesariamente distintos),  $s^{-1}t \in S$ . En tal caso escribiremos  $S \leq G$  para denotar que  $S$  es un subgrupo. Observemos que la intersección arbitraria de subgrupos es a su vez un subgrupo. Dado un conjunto  $X \subseteq G$ , llamaremos el subgrupo generado por  $X$  y lo denotaremos por  $\langle X \rangle$  al subgrupo descrito como la intersección de todos los subgrupos de  $G$  que contienen a  $X$ . Dado un grupo  $G$  y un subgrupo  $S$  definiremos el *índice* de  $S$  en  $G$  como la cardinalidad del conjunto  $\{gS | g \in G\}$ .

Un homomorfismo entre dos grupos  $\langle G, *_G \rangle$  y  $\langle H, *_H \rangle$ , es una función  $f : G \rightarrow H$  que cumple:  $f(a *_G b) = f(a) *_H f(b)$ . Diremos que un homomorfismo es un isomorfismo si la función  $f$  es además una biyección. Es fácil ver que los homomorfismos respetan neutros e inversos. Si tenemos un isomorfismo de un grupo en sí mismo (de la forma  $f : G \rightarrow G$ ), lo llamaremos automorfismo; al conjunto de todos los automorfismos de un grupo lo denotamos  $Aut(G)$ . Como

la composición de dos automorfismos es un automorfismo, y la inversa de un automorfismo es otro automorfismo, tenemos que el conjunto  $Aut(G)$  junto con la composición  $\circ$  es naturalmente otro grupo.

A un subgrupo  $N \leq G$  lo llamaremos normal, que denotaremos  $N \trianglelefteq G$ , si para cualquier elemento  $g \in G$  se cumple la igualdad  $gNg^{-1} = N$ , donde  $gNg^{-1} := \{gng^{-1} | n \in N\}$ . Dado un homomorfismo  $f : G \rightarrow H$  definiremos su kernel, denotado  $Ker(f)$ , como  $Ker(f) := \{g \in G | f(g) = e_H\}$ . Una observación rápida de probar, es que para cualquier homomorfismo  $f$ , se tiene  $Ker(f) \trianglelefteq G$ , pues si  $n \in Ker(f)$  se tiene que  $gng^{-1} \in Ker(f)$  ya que  $f(gng^{-1}) = f(g)f(n)f(g^{-1}) = e_H$ .

Introduciremos ahora los productos directos y semidirectos de grupos. Comenzaremos dando una construcción: dados dos grupos  $\langle G, *_G \rangle$  y  $\langle H, *_H \rangle$  definiremos el *producto de  $G$  y  $H$* , denotado  $\langle G \times H, *_G \times *_H \rangle$ , como el grupo con elementos en el producto cartesiano de  $G$  y  $H$  que satisfacen

$$(g_1, h_1) *_G \times *_H (g_2, h_2) = (g_1 *_G g_2, h_1 *_H h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2).$$

La asociatividad se deduce de las respectivas asociatividades, y la identidad del grupo será  $(e_G, e_H)$  y el inverso satisface  $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$ .

Observemos que los grupos  $(G, e_H) := \{(g, h) \in G \times H | h = e_H\}$  y  $(e_G, H) := \{(g, h) \in G \times H | g = e_G\}$  satisfacen  $(G, e_H), (e_G, H) \trianglelefteq G \times H$  y además  $(G, e_H) \cap (e_G, H) = (e_G, e_H)$ , veremos que estas propiedades son características de los productos. Tomemos un grupo  $G$  y dos subgrupos  $N, H \trianglelefteq G$  tales que  $NH = G$  (observemos que si tenemos un subgrupo  $S$  y un subgrupo normal  $N$  se tiene que el conjunto  $SN$  será un subgrupo) y  $N \cap H = \{e_G\}$ . Demostraremos que  $N \times H$  es isomorfo a  $G$ . Consideremos la función  $f : N \times H \rightarrow G$  dada por  $f(n, h) = nh$ . Entonces la suprayectividad de  $f$  está garantizada por el hecho de que  $NH = G$ . Observemos que los elementos de  $N$  conmutan con los de  $H$  ya que por normalidad  $nhn^{-1}h^{-1}$  está tanto en  $N$  como en  $H$  y por lo tanto  $nhn^{-1}h^{-1} = e$ . Esta conmutatividad demuestra que esta función es un morfismo. Para ver que es inyectiva observemos que si  $n_1 h_1 = n_2 h_2$ , entonces  $n_2^{-1} n_1 = h_2 h_1^{-1} = e$ .

Un concepto muy cercano al de producto directo de grupos es el de producto semidirecto de grupos. Sin embargo, éste es ligeramente más complicado de entender. Empecemos con algunas definiciones y aclaraciones de notación: Dado un grupo  $G$  y un elemento  $x \in G$ , definimos la conjugación por  $x$  como la función  $\gamma_x : G \rightarrow G$  dada por  $\gamma_x(g) = xgx^{-1}$ . Es fácil demostrar que  $\gamma_x$  definida de esta forma siempre es un automorfismo de  $G$ , y que además  $\gamma_x \circ \gamma_y = \gamma_{xy}$ .

Consideremos un grupo  $G$  y dos subgrupos  $H, N$ , tales que  $NH = G$  y  $N \cap H = \{e\}$ , pero esta vez pidamos únicamente  $N \trianglelefteq G$ . En este caso diremos que  $G = N \rtimes H$  y que  $G$  es el semiproducto directo interno de  $N$  y  $H$ . Una propiedad

simbólica de estos subgrupos es que cualquier elemento de  $G$  tiene una representación única como producto de un elemento en  $N$  y otro en  $H$  (la prueba es extremadamente parecida a la que acabamos de realizar).

Ahora daremos una construcción que nos ayude a entender mejor a los productos semidirectos. Sean  $H$  y  $N$  grupos, y sea  $\theta : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  un homomorfismo de grupos. Consideremos al conjunto  $N \times H$ , junto con la operación  $*$  :  $(N \times H) \times (N \times H) \rightarrow (N \times H)$  dada por  $(n_0, h_0) * (n_1, h_1) = (n_0 \theta_{h_0}(n_1), h_0 h_1)$  para cualesquiera  $n_0, n_1 \in N$  y cualesquiera  $h_0, h_1 \in H$  (donde  $\theta_{h_0}$  es el automorfismo de  $N$  correspondiente a  $\theta(h_0)$ ). Demostraremos que esta construcción nos da un grupo. La operación es asociativa, pues

$$\begin{aligned} [(n_0, h_0) * (n_1, h_1)] * (n_2, h_2) &= (n_0 \theta_{h_0}(n_1), h_0 h_1) * (n_2, h_2) \\ &= (n_0 \theta_{h_0}(n_1) \theta_{h_0 h_1}(n_2), h_0 h_1 h_2) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (n_0, h_0) * [(n_1, h_1) * (n_2, h_2)] &= (n_0, h_0) * (n_1 \theta_{h_1}(n_2), h_1 h_2) \\ &= (n_0 \theta_{h_0}(n_1 \theta_{h_1}(n_2)), h_0 h_1 h_2) \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} \theta_{h_0}(n_1 \theta_{h_1}(n_2)) &= \theta_{h_0}(n_1) \theta_{h_0}(\theta_{h_1}(n_2)) \\ &= \theta_{h_0}(n_1) \theta_{h_0 h_1}(n_2) \end{aligned}$$

la asociatividad se sigue. El neutro del grupo será  $(e_N, e_H)$ , y los inversos  $(x, y)^{-1} = (\theta_{y^{-1}}(x^{-1}), y^{-1})$ , verificar que estos funcionan como neutro e inversos es un cálculo directo. A este grupo se le denota como  $N \rtimes_{\theta} H$ , y se le conoce como el producto semidirecto externo inducido por  $\theta$ .

Demostremos algunas propiedades de este grupo. Fijémonos en los conjuntos de la forma  $N \times \{e_H\}$  y  $\{e_N\} \times H$ . Observemos que  $(n_0, e_H)(n_1, e_H) = (n_0 \theta_{e_H}(n_1), e_H)$  y, como  $\theta(e_H) = \text{Id} \in \text{Aut}(N)$ , tenemos que  $(n_0, e_H)(n_1, e_H) = (n_0 n_1, e_H)$ . Esto muestra que el conjunto  $N \times \{e_H\}$  es un subgrupo isomorfo al grupo  $N$ . Ahora, si consideramos  $(e_N, h_0)(e_N, h_1) = (e_N \theta_{h_0}(e_N), h_0 h_1)$ , al ser  $\theta_{h_0}$  un automorfismo mandará la identidad de  $N$  en sí misma, así

$$(e_N, h_0)(e_N, h_1) = (e_N, h_0 h_1).$$

Lo anterior muestra que  $\{e_N\} \times H$  es un subgrupo isomorfo al grupo  $H$ . Otra propiedad interesante es que  $N \times \{e_H\} \cap \{e_N\} \times H = \{(e_N, e_H)\}$ . Como teníamos en el producto directo, tenemos que  $N \times \{e_H\}$  es un subgrupo normal. Para ver eso, consideremos el producto  $(n_1, h_1)(n_0, e_H)(\theta_{h_1^{-1}}(n_1), h_1^{-1})$ . Como la última coordenada del producto es simplemente el producto de la última coordenada de cada factor, sin importar como se vea la expresión en la primera entrada, tendremos que este elemento estará en  $N \times \{e_H\}$ . A diferencia del producto directo, el conjunto  $\{e_N\} \times H$  no siempre será un subgrupo normal, pero lo que



sí se cumplirá es que los conjuntos  $N \times \{e_H\}$  y  $\{e_N\} \times H$  generen a todo el grupo. Para ver esto último, basta con escribir a  $(n_0, h_0)$  como  $(n_0, e_H)(e_N, h_0)$ . En resumen, hemos visto que el grupo  $N \rtimes_{\theta} H$  es un producto semidirecto interno de  $N \times \{e_H\}$  con  $\{e_N\} \times H$ .

Veremos ahora que esta construcción recupera esencialmente a todos los productos semidirectos internos. Consideremos un grupo  $G$  que se pueda escribir como el producto semidirecto de sus subgrupos  $N$  y  $H$ , digamos  $G = N \rtimes H$ . Definamos  $\theta : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  como  $\theta(h) = \gamma_h$  para cada  $h \in H$  (como  $N$  es un subgrupo normal, tenemos que  $\gamma_h(N) = N$  y  $\theta$  está bien definida). Tenemos que  $\theta(xy) = \gamma_{xy} = \gamma_x \circ \gamma_y = \theta(x) \circ \theta(y)$ , esto muestra que  $\theta$  es un homomorfismo de grupos. Con esto en mente, consideremos el grupo  $G' = N \rtimes_{\theta} H$ . Lo que demostraremos es que  $G$  y  $G'$  son isomorfos. Definimos  $\psi : G' \rightarrow G$  como  $\psi(n_0, h_0) = n_0 h_0$ . Para mostrar que es morfismo, consideremos

$$\begin{aligned} \psi[(n_0, h_0)(n_1, h_1)] &= \psi(n_0 \theta_{h_0}(n_1), h_0 h_1) \\ &= n_0 \gamma_{h_0}(n_1) h_0 h_1 \\ &= n_0 h_0 n_1 h_1 \\ &= \psi(n_0, h_0) \psi(n_1, h_1). \end{aligned}$$

Como todo elemento de  $G$  se puede escribir de manera única de la forma  $n_0 h_0$ ,  $\psi$  es una biyección. Esto muestra el isomorfismo.

## 1.6. Grupos de automorfismos y acciones

Una de las partes más interesantes de la teoría de grupos es cuando los grupos interactúan con otros objetos matemáticos. La forma más común en que un grupo interactúa con otro objeto matemático es a través de los automorfismos que tenga este objeto matemático. Para cualquier objeto matemático, es fácil ver que el conjunto de todas las funciones que van de este a él mismo y que son automorfismos, forman un grupo con la operación composición. A este grupo se le llama *el grupo de automorfismos*, usualmente se denota  $\text{Aut}$  o  $\mathcal{AUT}$ . En la teoría de politopos abstractos es usual encontrarlo como  $\Gamma$ . Los automorfismos de un politopo serán simplemente los automorfismos de ellos cuando los pensamos como órdenes parciales (ver página 8).

Por dar un ejemplo, tomemos a la gráfica  $G$  que tiene dos vértices y una arista entre ellos. Los únicos automorfismos de este objeto son (ver 3): la identidad, y la función que intercambia los vértices. Así  $\mathcal{AUT}(G) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Otra forma usual en la que un grupo interactúa con otro objeto matemático es a través del concepto de acciones. Dado un grupo  $G$  y un conjunto  $X$ , una acción de  $G$  en  $X$  es una función  $*$  :  $G \times X \rightarrow X$  que cumple:  $e_G * x = x$  para todo  $x \in X$ , y  $g * (h * x) = (gh) * x$  para cualesquiera  $g, h \in G$  y cualquier  $x \in X$ , siempre que esta acción exista diremos que  $X$  es un  $G$ -conjunto. Intuitivamente

estamos pensando en un grupo  $G$  que tiene una forma de transformar a los elementos de  $X$ . La órbita de un elemento  $x \in X$  es el subconjunto  $\mathcal{O}(x)$  de  $X$  tal que  $y \in \mathcal{O}$  si y sólo si  $x = g * y$  para algún  $g \in G$ . Las órbitas parten en clases de equivalencia a los elementos de  $X$ . Por ejemplo, podemos considerar el orden parcial  $P = \wp(\{1, 2\})$  con la contención y su grupo de automorfismos  $G = \mathcal{AUT}(P)$ , podemos pensar ahora en la acción  $* : G \times P \rightarrow P$  dada por  $g * p = g(p)$  (la evaluación). Tendremos que la órbita del elemento  $\{1\}$ ,  $\mathcal{O}(\{1\})$ , será  $\{\{1\}, \{2\}\}$ . Por otro lado, la órbita del elemento  $\{1, 2\}$  será simplemente él mismo, al igual que la órbita del elemento  $\emptyset$ .

Diremos que una acción actúa de forma *transitiva* si la partición de  $X$  en órbitas de la acción es trivial (es decir, consta de una sola órbita). Diremos que una acción es *fiel* si dado cualquier elemento  $g \neq e_G$  tenemos que existe un elemento  $x \in X$  tal que  $gx \neq x$ . La condición de actuar fiel se puede entender intuitivamente como que no haya elementos que se asemejen a la identidad. Diremos además que una acción es *libre* si para cualquier elemento  $x \in X$  y cualquier elemento  $g \in G \setminus \{e_G\}$  se tiene que  $gx \neq x$ . La noción de actuar libremente es un poco más exigente que la de actuar fiel. La acción que definimos en el párrafo anterior no es transitiva, pues (como vimos) tiene 3 órbitas. No es libre, pues el elemento  $\{1, 2\}$  se queda fijo para los elementos no triviales. Pero la acción es fiel.

Dada una acción de un grupo  $G$  en un conjunto  $X$  hay una forma natural de definir una acción de  $G$  en  $\wp(X)$ . La acción sería de la forma: para cada  $Y \subseteq X$ , y  $g \in G$  tenemos que  $g * Y = g[Y] = \{g * y | y \in Y\}$ . Es fácil verificar que ésta es a su vez una acción. Si una acción de  $G$  en  $X$  se restringe a un subconjunto cerrado bajo la acción, digamos  $Y$ , tendremos a su vez una acción de  $G$  en  $Y$ . Un ejemplo de esto puede ser una órbita, pues al ser órbita es cerrada bajo la acción del grupo. Podemos combinar las construcciones anteriores. Por ejemplo, tomemos un orden parcial  $P$  y la acción natural de su grupo de automorfismos. Veremos que esta acción define una acción, de manera natural en el conjunto de banderas de  $P$ . Para esto necesitamos ver que cualquier elemento en la órbita de una bandera es a su vez una bandera. Tomemos un elemento  $g \in G$  y una bandera  $\mathcal{B}_1 \subseteq P$ . Consideremos  $g[\mathcal{B}_1]$  y extendamos este conjunto a una bandera  $\mathcal{B}_2$ . Si tomamos un elemento  $x \in \mathcal{B}_2 \setminus g[\mathcal{B}_1]$ , tendremos entonces que  $g^{-1}(x)$  será comparable con todos los elementos de  $\mathcal{B}_1$  contradiciendo que  $\mathcal{B}_1$  sea una bandera.

### 1.6.1. Grupos, Acciones y Politopos Abstractos

Como el estudio de los politopos abstractos está principalmente enfocado a entender las simetrías de ciertos objetos geométricos, el lenguaje de teoría de grupos y acciones surge de manera muy natural. El grupo de simetrías de un politopo abstracto  $P$  es simplemente el grupo de automorfismos cuando pensamos al politopo como un orden parcial. Lo denotaremos  $\Gamma(P)$ . A los politopos abstractos (en general los órdenes parciales) se les puede asignar un “segundo” grupo de automorfismos. A este grupo se le llama el *grupo de automorfismos*

*extendido*, y tiene por elementos al conjunto de automorfismos junto con el de dualidades (cuando estas últimas existan), su operación es la composición. Éste lo denotamos  $\hat{\Gamma}(P)$  y en el capítulo 5 nos será de gran utilidad. Notemos que si  $P$  es autodual (y, por lo tanto, existen dualidades de  $P$  en él mismo), la composición de dos dualidades es una biyección que preserva el orden, y por lo tanto es un automorfismo. Entonces, si  $P$  es autodual,  $\Gamma(P)$  será un subgrupo de índice 2 en  $\hat{\Gamma}(P)$ , en cualquier otro caso  $\Gamma(P) = \hat{\Gamma}(P)$ .

Una de las acciones más importantes que se estudian sobre un politopo es la acción del grupo de automorfismo sobre las banderas del politopo. Diremos que un politopo  $P$  es regular si la acción natural de  $\Gamma(P)$  sobre las banderas de  $P$  es una acción transitiva.

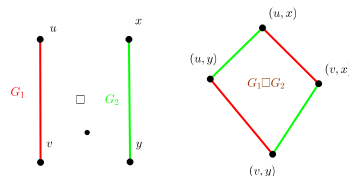
Una proposición clásica de la teoría de politopos dice que dado un politopo  $P$  y su grupo de automorfismos  $\Gamma(P)$ , la acción natural de éste sobre las banderas de  $P$  es una acción libre. Para probarlo tomemos  $g \in \Gamma(P)$  y una bandera  $\Phi$  tales que  $g\Phi = \Phi$ . Ahora, si  $\Phi^i$  denota la única bandera de  $P$  que es adyacente a  $\Phi$  en el rango  $i$  se debe de cumplir que  $g\Phi^i = \Phi^i$ , pues los automorfismos conservan la adyacencia de banderas. Sin embargo, por la conexidad de la gráfica de banderas, con un argumento inductivo, podemos probar que  $g\Psi = \Psi$  para cualquier bandera  $\Psi$ . Esto automáticamente implica que  $g$  es la identidad del grupo  $\Gamma(P)$ , lo cual termina la prueba.

## Capítulo 2

# Productos en Gráficas, Digráficas y Órdenes parciales

En este capítulo expondremos varios tipos de construcciones y encontraremos relaciones entre los mismos. Definiremos el producto cartesiano y producto cartesiano débil para gráficas y digráficas, lo que es un orden discreto, y el producto cartesiano de órdenes discretos. Con ese lenguaje podremos construir cuatro tipos de productos de politopos que generalizarán construcciones clásicas como la construcción de pirámides y prismas. El capítulo se divide en seis secciones.

1. Productos Cartesianos: En esta sección construimos los productos cartesianos de gráficas, digráficas y órdenes discretos, encontramos la relación entre ellos y probamos algunas propiedades fundamentales.
2. La Pirámide: En esta sección analizamos la construcción de la pirámide para politopos abstractos.
3. Primer Producto: En esta sección generalizamos la construcción de la pirámide asociando esta construcción con el producto cartesiano de órdenes y demostramos algunas propiedades de este producto.
4. El Prisma: En esta sección analizamos la construcción del prisma para politopos abstractos.
5. Segundo Producto: En esta sección construimos un segundo producto que generaliza la construcción del prisma.
6. Los dos productos como uno: En esta sección replanteamos la forma de entender a los politopos abstractos, de forma que nos permita unificar el primer y segundo producto como casos particulares del producto cartesiano de órdenes. Una vez creado ese lenguaje descubrimos otros dos

Figura 2.1: El producto cartesiano de  $G_1$  con  $G_2$ 

productos y demostramos que estos inducen construcciones particulares de politopos abstractos.

## 2.1. Productos cartesianos

En esta sección desarrollaremos todas las herramientas de construcción básicas necesarias para comprender los capítulos subsecuentes. Empezaremos con un par de definiciones y observaciones sobre las mismas, referentes a construcciones estándar en la teoría de gráficas. Empezaremos por definir el producto cartesiano de gráficas [5] que ha sido trabajado desde 1960, y proseguiremos a la definición del producto cartesiano débil, que es de suma utilidad cuando se trata con productos cartesianos infinitos.

**Definición 3.** Dada la familia de gráficas  $\{G_i\}_{i \in I}$ , definimos el producto cartesiano  $\prod_{i \in I} G_i$  de la familia  $G_i$ , como la gráfica con vértices  $V(\prod_{i \in I} G_i) = \prod_{i \in I} V(G_i)$  y con aristas  $(u, v) \in E(\prod_{i \in I} G_i)$  si y sólo si, existe un único índice  $i_0$  tal que  $(u_{i_0}, v_{i_0}) \in E(G_{i_0})$  y  $u_i = v_i$  para todas las otras coordenadas  $i \neq i_0$ .

Al producto cartesiano de únicamente dos gráficas lo denotaremos  $G_1 \square G_2$ . Por ejemplo digamos que  $G_1$  y  $G_2$  son las gráficas completas de dos vértices,  $K_2$ . Entonces la gráfica  $\prod_{i=1}^2 G_i = G_1 \square G_2$  será un cuadrado como en la figura 2.1 (pag. 22).

Mostraremos asociatividad y conmutatividad de este producto. Para demostrar conmutatividad del producto tomaremos dos conjuntos  $I$  y  $J$  tales que ambos indexen a la misma familia de gráficas  $\{G_i\}_{i \in I} = \{G_j\}_{j \in J}$  y de forma que exista una biyección  $f : I \rightarrow J$ , tal que  $G_{f(i)} = G_i$ . Podemos extender esta biyección de índices a la biyección natural de los vértices de los respectivos productos (la introducida en el capítulo 1)  $\hat{f} : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow \prod_{j \in J} G_j$ . Teniendo una biyección de vértices, basta con ver que se conservan las aristas para demostrar que las gráficas son isomorfas. Como  $(\hat{f}(u))_{f(i)} = (u)_i$  y  $(\hat{f}(v))_{f(i)} = (v)_i$ , si

tenemos que  $(v)_i = (u)_i$  para toda  $i \neq i_0$ , tendremos  $(\hat{f}(u))_{f(i)} = (\hat{f}(v))_{f(i)}$  para toda  $i \neq i_0$  y, por lo tanto,  $(\hat{f}(u))_j = (\hat{f}(v))_j$  para toda  $j \neq f(i_0)$ . Si además sabemos que  $u_{i_0}$  es adyacente a  $v_{i_0}$  en  $G_{i_0}$ , como  $(\hat{f}(u))_{f(i_0)} = u_{i_0}$  y  $(\hat{f}(v))_{f(i_0)} = v_{i_0}$  tendremos que  $(\hat{f}(u))_{f(i_0)}$  es adyacente a  $(\hat{f}(v))_{f(i_0)}$  en  $G_{f(i_0)}$ . La discusión anterior nos da las condiciones suficientes para asegurar que si  $u$  y  $v$  son adyacentes, entonces  $\hat{f}(u)$  y  $\hat{f}(v)$  también lo son. Con un argumento simétrico para la función  $f^{-1}$  (y su respectiva extensión  $\widehat{f^{-1}}$ ) obtenemos lo recíproco (es decir, si  $\hat{f}(u)$  y  $\hat{f}(v)$  son adyacentes, entonces  $u$  y  $v$  también lo son), lo cual nos asegura el isomorfismo de gráficas.

Recordando que, como vimos en la sección 1.4, una vez que se tiene conmutatividad generalizada en un producto infinito, entender la asociatividad se reduce al planteamiento por particiones del índice podemos proceder a probar la asociatividad del producto.

Sea  $\{G_i\}_{i \in I}$  una familia de gráficas indexadas por un conjunto  $I$ . Tomemos una partición arbitraria del conjunto  $I$ . Denotémosla por  $\{I_j\}$  con  $j \in J$ , y consideremos  $P_j = \prod_{i \in I_j} G_i$ . Después consideremos  $\prod_{j \in J} P_j$ . Tomemos la biyección natural (la estudiada en la sección 1.4) que inducen estas factorizaciones  $(\prod_{j \in J} P_j$  y  $\prod_{i \in I} G_i)$ . Y consideremos una pareja de vértices adyacentes  $u, v$  de  $\prod_{j \in J} P_j$ . Como la arista  $(u, v)$  está en la gráfica,  $u$  y  $v$  difieren en exactamente una coordenada. Digamos que difieren en  $j_0$ , y que además  $u_{j_0}$  es adyacente a  $v_{j_0}$ . Esto sólo pasa si  $u_{j_0}$  y  $v_{j_0}$  difieren en una coordenada en el producto  $P_{j_0}$ , dándonos la única coordenada en que difieren en el producto original  $\prod_{i \in I} G_i$ .

El hecho de que si  $u$  y  $v$  son adyacentes en  $\prod_{i \in I} G_i$  implica que son adyacentes en  $\prod_{j \in J} P_j$ , se obtiene al observar que al diferir en una coordenada  $i_0$  en el primer producto, existirá un único índice  $I_{j_0}$  con  $i_0 \in I_{j_0}$ , tal que en ese  $u_{j_0}$  y  $v_{j_0}$  serán adyacentes.

Observemos que el producto finito de gráficas conexas es conexo. Esto se prueba fácilmente por inducción. Pero el producto infinito de gráficas no triviales es necesariamente desconexo. Al tener una infinidad de factores no triviales existirán dos vértices  $u$  y  $v$  que difieran en cada una de las coordenadas no triviales y por tanto en una infinidad de ellas. Por nuestra definición de adyacencia, para que exista una trayectoria de un vértice al otro, es necesario que estos difieran en una cantidad finita de coordenadas.

A las componentes conexas de un producto cartesiano (infinito), se le llama un producto cartesiano débil. Aclaremos, sin demostrar, que las distintas componentes no son necesariamente isomorfas, así de un producto cartesiano se pueden derivar varios productos cartesianos débiles distintos. En la literatura que trabaja con este tipo de productos de gráficas hay dos formas de entender al producto cartesiano débil. La primera consiste en tomar el producto cartesiano, fijar un vértice del mismo y tomar la componente conexa que tiene a ese vértice.

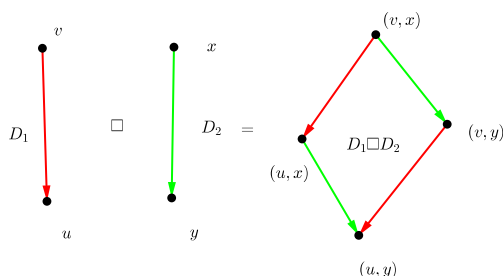


Figura 2.2: Producto Cartesiano de digráficas

La segunda perspectiva (igual de común) es comenzar con gráficas que tengan un vértice etiquetado como información adicional, y definir a los vértices del producto cartesiano débil como los vértices que difieren en una cantidad finita de coordenadas del vértice que tiene todas las etiquetas (al vértice con estas etiquetas se le llama la *raíz* del producto). Ambas perspectivas son análogas. La forma de denotar a un producto cartesiano débil de gráficas es  $\prod_{i \in I}^a G_i$ , donde  $a$  representa la raíz del producto.

Observamos que la definición que hemos dado para el producto cartesiano de gráficas se puede extender fácilmente al producto cartesiano de digráficas simples, donde la orientación de las aristas del producto es simplemente la orientación que heredan de la coordenada en la que difieren dos vértices. La figura 2.2 (pag. 24) muestra un ejemplo sencillo.

### 2.1.1. Órdenes discretos y preórdenes

En el capítulo 2 demostraremos un teorema de factorización única para un tipo especial de órdenes parciales, para eso utilizaremos una conexión intrínseca que hay entre órdenes parciales y gráficas dirigidas. Exploraremos un poco esta relación.

Dado un orden parcial  $(P, <)$  definiremos su gráfica de Hasse como la digráfica que tiene como vértices a los elementos de  $P$  y sus arcos son de la forma  $u \rightarrow v$ , si y sólo si  $u > v$ , y no existe  $z$  con  $u > z > v$ . Denotaremos a esta gráfica como  $H(P)$ . Por ejemplo, consideremos a la potencia  $\wp$  del conjunto  $\{1, 2\}$  ordenada por la contención. Tenemos que  $H(\wp(\{1, 2\}))$  tiene arcos de  $\{1, 2\}$  a  $\{1\}$ , y a

$\{2\}$ , y cada uno de estos dos conjuntos tendrá un arco a  $\emptyset$ . Estos son los únicos arcos, pues aunque  $\emptyset \subset \{1, 2\}$ , hay al menos un elemento en medio de ellos.

De manera análoga, dada una digráfica podemos definir un orden parcial de la siguiente manera: los elementos del orden parcial serán los vértices de la digráfica, y diremos que  $u > v$  si existe una trayectoria dirigida de  $u$  a  $v$ . Para que de esta definición obtengamos un orden parcial tenemos que pedir que la gráfica no tenga ciclos dirigidos. Pedir que la digráfica no tenga ciclos dirigidos será suficiente, pues la transitividad de la relación se obtiene de la concatenación de trayectorias, y la asimetría de la relación se obtiene de la ausencia de ciclos dirigidos. A este orden derivado de la digráfica  $D$  sin ciclos dirigidos lo denotaremos por  $C(D)$  (haciendo alusión a la cerradura transitiva).

**Definición 4.** *Un orden parcial  $P$  es discreto si  $C(H(P)) = P$ . A su vez una digráfica  $D$  sin ciclos dirigidos es un preorden discreto si  $H(C(D)) = D$ .*

Un ejemplo sencillo de orden discreto nos lo da  $\wp(\{1, 2\})$  junto con la contención.

Observemos que por nuestras definiciones, hay una biyección natural entre órdenes discretos y preórdenes discretos, dada por  $H$  con inversa  $C$ . Es decir, dado un orden discreto  $P$  se tiene que  $H(P)$  es un preorden discreto y dado un preorden discreto  $D$  tenemos que  $C(D)$  es un orden discreto. Para demostrar esto observemos que si  $P$  cumple  $C(H(P)) = P$ , entonces  $H(P)$  cumplirá  $H(C(H(P))) = H(P)$ .

Otra cosa que hay que observar es que no todos los órdenes parciales son discretos. Por ejemplo, consideremos a  $(\mathbb{Q}, <)$  el orden usual de los números racionales. Tenemos que su gráfica de Hasse consiste de únicamente puntos aislados, pues el hecho de que este orden sea denso implica que ningún punto puede cubrir a ningún otro. Tampoco será cierto que toda digráfica sin ciclos dirigidos sea un preorden discreto. Podemos considerar la digráfica  $D_1$  con vértices  $\{a, b, c\}$  y arcos  $a \rightarrow b \rightarrow c$  y  $a \rightarrow c$ . El orden descrito por esta gráfica será  $a > b > c$  que tendrá como gráfica de Hasse a  $a \rightarrow b \rightarrow c$  perdiendo de vista al arco  $a \rightarrow c$ . A este fenómeno le llamaremos tener un arco falso. Formalmente diremos que un arco  $u \rightarrow v$  es *falso* si existe una trayectoria dirigida de  $u$  a  $v$ , distinta de la trayectoria trivial. En la figura 2.3 (pag. 26) dibujamos el ejemplo anterior.

**Proposición 4.** *Una digráfica sin ciclos dirigidos es un preorden discreto si y sólo si no tiene arcos falsos. Además, cualquier orden parcial con una función de rango estricta en los enteros será un orden discreto.*

*Demostración.* Observamos que la digráfica de Hasse de un orden no tiene arcos falsos por construcción, pues sólo ponemos un arco entre dos elementos si uno cubre al otro. Esto prueba la necesidad en el primer enunciado. Tomemos ahora una digráfica  $D$  sin ciclos dirigidos, que no tenga arcos falsos. Tomemos un arco  $u \rightarrow v$ . Como este arco no es falso, tenemos que no hay una trayectoria dirigida diferente de la trivial de  $u$  a  $v$ . Por lo anterior,  $u$  cubrirá a  $v$  en  $C(D)$ , y el arco



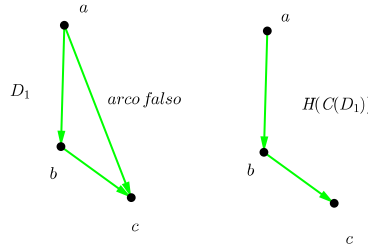


Figura 2.3: Ejemplo de arco falso

$u \rightarrow v$  estará en  $H(C(D))$ . Por otro lado, si el arco  $a \rightarrow b$  está en  $H(C(D))$ , tendremos que  $a > b$  en  $C(D)$ , por lo cual debe de existir una trayectoria de  $a$  a  $b$  en  $D$ . Como además  $a$  cubre a  $b$ , esto deja como única posibilidad de trayectoria a la trivial. Esto prueba la suficiencia de la primera afirmación.

Para la segunda afirmación basta ver que si  $a < b$ , entonces hay una sucesión creciente de  $a$  a  $b$ , de tamaño finito, tal que un término es cubierto por su consecutivo. Esto hará que en la respectiva gráfica de Hasse podamos encontrar una trayectoria dirigida de  $a$  a  $b$ . Al tomar la cerradura  $C$ , obtendremos de nuevo  $a > b$ . A su vez, si dos elementos eran incomparables, no habrá forma de encontrar una trayectoria dirigida de uno a otro, y por ende seguirán siendo incomparables en el nuevo orden.  $\square$

Definiremos ahora el producto cartesiano de órdenes parciales, y por si el lector sentía algo de curiosidad, los nombres no son coincidencia.

**Definición 5.** *Dados dos órdenes parciales  $P = (X, \leq_P)$  y  $Q = (Y, \leq_Q)$  definimos  $R = P \odot Q$  como el orden parcial con elementos en  $P \times Q$  y con relación:*

$$(v_0, w_0) \leq_R (v_1, w_1) \Leftrightarrow v_0 \leq_P v_1 \text{ y } w_0 \leq_Q w_1.$$

En la figura 2.4 (pag. 27), hemos dibujado el producto de dos órdenes que tienen únicamente dos elementos, uno mayor que el otro. Representamos al orden con una digráfica donde un elemento  $x$  es mayor que otro, digamos  $y$ , si y sólo si hay un arco de  $x$  a  $y$ .

A continuación veremos la principal relación que hay entre el producto cartesiano de digráficas y el producto cartesiano de órdenes discretos.

**Proposición 5.** *Dados dos órdenes discretos  $A$  y  $B$  tenemos que  $H(A) \square H(B) = H(A \odot B)$ .*

*Demostración.* Ambas digráficas tienen los mismos vértices, pues la función  $H$  evaluada en un orden tiene como vértices a los elementos del orden, y porque ambos productos ( $\square$ ,  $\odot$ ) trabajan con el producto cartesiano (conjuntista) de sus respectivos factores (es decir,  $V(H(A \odot B)) = A \times B = V(H(A) \square H(B))$ ).

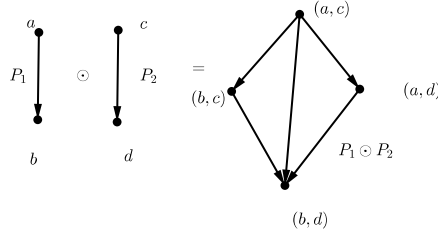


Figura 2.4: Producto cartesiano de dos órdenes parciales

Basta con ver que también tienen los mismos arcos.

Tomemos un arco de la gráfica  $H(A) \square H(B)$ ,  $(a, b) \rightarrow (c, d)$ . Por la definición de nuestro producto cartesiano de digráficas debe suceder que  $a = c$  ó  $b = d$ , sin pérdida de la generalidad, supondremos que  $a = c$ . De esta suposición, obtenemos que  $b \rightarrow d$  en  $H(B)$ . Esto nos dice que  $d \leq_B b$ ,  $a = c$  y  $b$  cubre a  $d$  en  $B$ . Por lo tanto,  $(c, d) \leq_{A \odot B} (a, b)$ . Como  $(c, d) \leq_{A \odot B} (x, y) \leq_{A \odot B} (a, b)$  automáticamente implica  $x = a = c$  y que  $y \in \{b, d\}$ , obtenemos que  $(a, b)$  cubre a  $(c, d)$  en  $A \odot B$ . Esto hace que tengamos un arco de  $(a, b)$  a  $(c, d)$  en  $H(A \odot B)$ .

Supongamos ahora que tenemos un arco de  $(a, b)$  a  $(c, d)$  en  $H(A \odot B)$ . Tenemos que  $(a, b)$  cubre a  $(c, d)$  en  $A \odot B$ . Como  $(c, d) \leq (c, b) \leq (a, b)$  y  $(a, b)$  cubre a  $(c, d)$ , alguna de las igualdades  $a = c$  ó  $b = d$  se tiene que dar. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que  $a = c$ . Además, si  $d < x < b$  se diera para algún  $x$ , entonces  $(a, d) < (a, x) < (a, b)$  contradiciendo que  $(a, b)$  cubre a  $(c, d)$ . De esta forma tenemos que  $b$  cubre a  $d$ . Esto muestra que  $b \rightarrow d$  en  $H(B)$  y por tanto  $(a, b) \rightarrow (c, d)$  en  $H(A) \square H(B)$ . Esto termina de mostrar que las dos digráficas son iguales.  $\square$

Otra forma de entender a los órdenes discretos junto con el producto cartesiano de dos órdenes es como un monoide conmutativo. Podemos hacer lo mismo con los preórdenes discretos, junto con su producto cartesiano de digráficas. Las afirmaciones pasadas mostrarían que estos dos monoides serían isomorfos, con el isomorfismo  $H$  y su respectiva inversa  $C$ . Este isomorfismo lo usaremos mucho en el siguiente capítulo, por ahora podemos obtener como corolario que el producto cartesiano de órdenes discretos es asociativo y conmutativo, ya que el producto cartesiano de preórdenes discretos lo es.

### 2.1.2. Polítopos abstractos

Como todo polítopo abstracto es un orden discreto (pues tiene una función de rango estricta), y podemos recuperar toda la información del polítopo de su gráfica de Hasse, empezaremos a pensar a los polítopos como preórdenes dis-

cretos. Cuando queramos probar que cierto orden discreto tiene una propiedad, nos referiremos a su preorden como el mismo objeto, y es posible que en una misma prueba usemos ambas representaciones.

Daremos ahora una herramienta técnica que nos será útil para algunas construcciones. Demostraremos que el producto cartesiano  $\odot$  preserva: órdenes graduados, tener máximo, tener mínimo, ser conexo y ser fuertemente conexo.

**Lema 1.** *Si  $P$  y  $R$  son dos órdenes con máximo (respectivamente mínimo), entonces  $P \odot R$  tiene máximo (respectivamente mínimo).*

*Demostración.* Si  $M_P$  y  $M_R$  denotan los máximos de  $P$  y  $R$  respectivamente entonces,  $(M_P, M_R)$  es el máximo de  $P \odot R$ . Esto se deduce inmediatamente de la definición del orden  $P \odot R$ .  $\square$

**Lema 2.** *Si  $P$  y  $R$  son dos órdenes graduados con banderas de altura  $n$  y  $m$  respectivamente, entonces  $P \odot R$  es graduado con banderas de altura  $n + m$ .*

*Demostración.* Esto es una consecuencia de que un elemento  $(c, d)$  cubrirá al elemento  $(a, b)$  si y sólo si  $a = c$  y  $d$  cubre a  $b$  en  $R$  ó, de forma simétrica, si  $b = d$  y  $c$  cubre a  $a$  en  $P$ . Podemos definir

$$\text{grad}((a, b)) = \text{grad}(a) + \text{grad}(b),$$

ésta será la función de grado que nos funcione, pues tomando dos elementos del orden  $P \odot R$  tales que  $(a, b) \leq (c, d)$  tendremos que  $a \leq c$  y  $b \leq d$  por lo cual

$$\text{grad}(a) + \text{grad}(b) \leq \text{grad}(c) + \text{grad}(d).$$

Además, si  $(c, d)$  cubre a  $(a, b)$ , por la observación inicial y por el hecho de que  $P$  y  $R$  son graduados, la diferencia de sus grados será necesariamente uno. La altura de las banderas resulta del hecho de que si las banderas tenían altura  $n$  y  $m$  respectivamente, cualquier elemento  $M_P \in P$  que sea maximal cumple  $\text{grad}(M_P) = n$  y cualquier elemento  $M_R \in R$  cumple  $\text{grad}(M_R) = m$ . Así, cualquier maximal de este orden (de la forma  $(M_P, M_R)$ ) cumple  $\text{grad}((M_P, M_R)) = n + m$ .  $\square$

Observemos que los segmentos de un producto son el producto de los segmentos. Para ser más claros, si  $(a, b)$  y  $(c, d)$  son elementos de  $P \odot R$ , el segmento  $[(a, b), (c, d)]$  es el mismo orden parcial que el producto de segmentos  $[a, c] \odot [b, d]$ . Asimismo, el segmento superior  $[(a, b), \infty]$  será el mismo que el producto de segmentos  $[a, \infty] \odot [b, \infty]$ . Análogamente con segmentos inferiores. Probaremos ahora que el producto de órdenes fuertemente conexos es fuertemente conexo.

**Lema 3.** *Si  $P$  y  $R$  son dos órdenes fuertemente conexos, entonces  $P \odot R$  es fuertemente conexo.*

*Demostración.* Demostremos primero que el producto de órdenes conexos es conexo. Sean  $P$  y  $R$  dos órdenes conexos. Supongamos que uno de ellos tiene

una cara propia, digamos  $P$ . Sea  $(a, b)$  un elemento del orden  $P \odot R$  tal que  $a$  es un elemento propio en  $P$ , automáticamente  $(a, b)$  será un elemento propio de  $P \odot R$ . Tomemos otro elemento  $(c, d)$  que sea propio en  $P \odot R$ . Por conexidad en  $P$  y en  $R$  hay una sucesión  $d = b_0, b_1, \dots, b_n = b$  de elementos propios (salvo, quizás  $b$  y  $d$ ) e incidentes en  $R$ , y a su vez, una sucesión  $c = a_0, a_1, \dots, a_m = a$  de elementos propios (salvo, quizás  $c$ ) e incidentes en  $P$ . Sean  $x_0 = (c, d)$ ,  $x_1 = (a_1, d), \dots, x_n = (a, d)$ ,  $x_{n+1} = (a, b_1) \dots x_{n+m} = (a, b)$ . La sucesión  $x_0, x_1, \dots, x_{n+m}$  es una sucesión de elementos propios (pues en cada uno de ellos, al menos una coordenada es propia) incidentes en  $P \odot R$ , podemos concluir que  $P \odot R$  es conexo.

El único caso que no hemos contemplado hasta ahora es aquel en el que ni  $P$  ni  $R$  tienen elementos propios, pero eso sólo sucede si ambos consisten del orden con únicamente máximo y mínimo, o alguno de ellos es el orden trivial. El único caso interesante es el primero, en este el producto de los órdenes es una arista (pensándolo como politopo abstracto), que por definición es conexa.

Ya que hemos demostrado que el producto de órdenes conexos es conexo, podemos usar las observaciones que preceden a esta proposición para demostrar que el producto de órdenes fuertemente conexos son fuertemente conexos.  $\square$

La única propiedad que nos faltaría probar para que el producto de órdenes conservara el hecho de ser un politopo, es la propiedad diamante, sin embargo, dejaremos esta prueba para las próximas secciones de este capítulo.

## 2.2. La pirámide

Como en muchas ramas de las matemáticas (en especial las geométricas) se comienza con una construcción conocida en un caso particular y se procede a generalizar dicha construcción. En este caso haremos lo mismo. Dado un polígono (o un 2-politopo) sabemos muy bien lo que significa construir una pirámide que tenga como base ese polígono. Es lo mismo que imaginar el polígono plano en el espacio tridimensional, agregar un vértice fuera del plano generado por el polígono, trazar una arista del nuevo vértice a cada uno de los vértices del polígono, y rellenar los triángulos que se forman entre el nuevo vértice y los lados del polígono. Esta construcción nos da un poliedro (o un 3-politopo). Imaginemos que hacemos esta construcción, pero ahora con una arista (o un 1-politopo) y con un vértice (o un 0-politopo), lo que nos quedaría es un triángulo, y una arista, respectivamente.

Estas construcciones las hemos hecho desde el nivel geométrico. Observemos qué pasa una vez que traducimos estos objetos al nivel combinatorio. Trazando algunos diagramas de Hasse de pirámides de polígonos (por ejemplo el de la figura 2.5 pag. 30) podremos observar que la figura de vértice (este término se refiere al segmento superior de algún elemento de rango 0) del vértice que

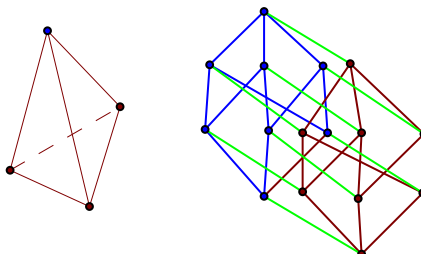


Figura 2.5: Pirámide de un triángulo, con su diagrama de Hasse

agregamos, es un politopo isomorfo al polígono original. Si coloreamos de azul las caras de esta sección (la figura de vértice), de rojo el resto de las caras y de verde las aristas del diagrama que une una cara roja con una azul (como en la figura 2.5 pag. 30), observaremos que el diagrama de la pirámide de un polígono consiste de dos copias del mismo. Una de estas copias está dibujada en un rango mayor que la otra, y hay una arista uniendo caras correspondientes de la copia. Esta meticolosa descripción da pie a convertirse en una definición de la pirámide, pues al cambiar en la descripción la palabra polígono por politopo, nos queda otra descripción bien definida.

**Definición 6.** *Dado un politopo  $P$  definimos su pirámide  $Pyr(P)$  como el politopo descrito por el diagrama de Hasse que consiste de dos copias de  $P$ , una dibujada en el rango 1 y la otra dibujada en el rango 0, y una arista uniendo cada par de caras correspondientes de las copias.*

En la figura 2.6 (pag. 31) exponemos la iteración de la operación pirámide sobre el punto con sus respectivos diagramas de Hasse. Aunque demostrar que este objeto en efecto es un politopo sea sencillo, lo pospondremos a la sección siguiente donde contaremos con una herramienta de construcción generalizada.

### 2.3. Primer producto

Resulta ser que el producto cartesiano de órdenes nos da de forma natural cuatro tipos distintos de productos entre politopos. En esta sección exploraremos el más sencillo, que generaliza la construcción de la pirámide. Intuitivamente este producto mezcla combinatoriamente dos politopos de forma que cada uno de ellos resulte como sección del producto, y que dichas secciones del producto compartan únicamente la cara vacía. La forma más natural de definir un producto entre dos politopos es como el producto cartesiano de órdenes parciales que hemos desarrollado en las secciones anteriores.

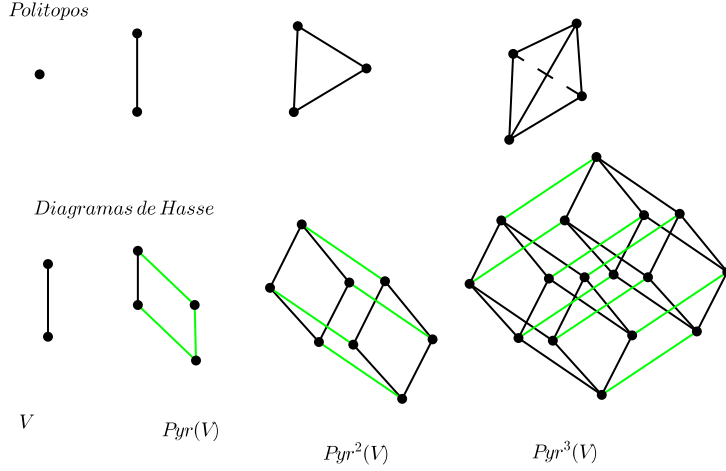


Figura 2.6: Las iteraciones de la operación  $Pylr$ , sobre el punto

**Teorema 1.** *Si  $P$  y  $Q$  son dos politopos, entonces el orden parcial  $L$  definido como  $L = P \odot Q$  también es un politopo.*

*Demostración.* Por los lemas 1, 2 y 3 sabemos que  $L$  es un orden parcial, graduado, con máximo y mínimo que es fuertemente conexo. Lo único que falta es demostrar que además cumple la propiedad diamante. Tomemos dos elementos de nuestro orden  $(a, b)$  y  $(c, d)$  tales que  $(a, b) \leq (c, d)$  y tal que la diferencia entre los rangos sea dos. Como  $grad(a, b) = grad(a) + grad(b)$ , las únicas opciones que tenemos son  $grad(c) - grad(a) = 1 = grad(d) - grad(b)$  ó  $grad(c) - grad(a) = 2$  (y por lo tanto  $grad(b) = grad(d)$ ) y su caso simétrico. En el segundo caso tenemos  $b = d$ , y por ser  $P$  un politopo y cumplir la propiedad diamante, existirán exactamente dos elementos  $x$  y  $y$  que cumplan  $a < x < y < c$ , esto nos da inmediatamente que  $(x, b)$  y  $(y, b)$  son los únicos elementos tales que  $(a, b) < (x, b), (y, b) < (c, b) = (c, d)$ . Esto muestra que en este caso se cumple la propiedad diamante. En el primer caso los únicos dos elementos que estarán entre  $(a, b)$  y  $(c, d)$  serán  $(a, d)$  y  $(c, b)$ , pues  $d$  cubre a  $b$  y  $c$  cubre a  $a$ .  $\square$

Con este lenguaje podemos definir de forma más cómoda  $Pylr(P) = P \odot V$ , donde  $V$  es el único politopo de rango 0 (el punto). Esto se debe a que la primera definición es una descripción de un producto de gráficas de Hasse, la segunda es un producto de órdenes parciales y conocemos la asociación entre el producto de gráficas de Hasse y sus respectivos órdenes discretos. Como la construcción de la pirámide es un producto de dos politopos, tenemos que para todo politopo  $P$  el orden  $Pylr(P)$  será un politopo.

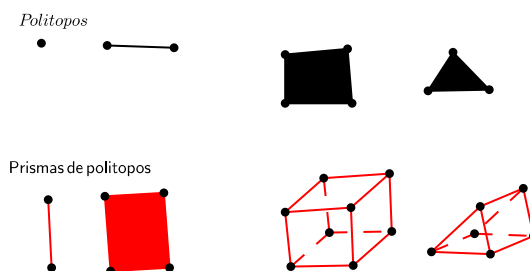


Figura 2.7: Algunas figuras con su respectivo prisma

Otra observación que será de suma importancia posteriormente es que en  $P \odot Q$  el segmento inferior  $[\infty, (P, 0)]$  es isomorfo a  $P$  y el segmento superior  $[(P, 0), \infty]$  es isomorfo a  $Q$  (ambos con las proyecciones naturales). De alguna forma hemos logrado apilar combinatoriamente a  $P$  y  $Q$ .

Dada una noción de producto, es natural definir la noción de elevar a potencias naturales, esto consiste simplemente en la iteración de la operación. Esta noción de potencia nos ayudará a expresar de manera sintética una familia de polítopos muy famosa: los simplejos. El  $n$ -simplejo es simplemente  $(V)^n$  la  $n$ -ésima potencia del punto. Esta propiedad es una consecuencia inductiva de que el  $n$ -simplejo es la pirámide del  $(n - 1)$ -simplejo.

## 2.4. El prisma

El prisma, como la pirámide, es una construcción geométrica con la que nos familiarizamos desde muy temprano en nuestra formación matemática. Intuitivamente sabemos que para formar el prisma que tenga por base a un polígono fijo, lo único que tenemos que hacer es dibujar dos copias geométricas del polígono, una frente a la otra, unir con aristas vértices correspondientes y unir con rectángulos aristas correspondientes.

Si aplicamos este algoritmo de construcción a la arista y el vértice obtendremos un cuadrado y una arista, respectivamente. Lo que sucede combinatoriamente es un poco más complicado que con la pirámide, pero de igual manera analizable.

Empecemos por analizar lo que sucede con la arista. Sabiendo que el prisma de la arista es el cuadrado, dibujemos ambos como diagramas de Hasse, pero por el momento olvidémonos en ambos dibujos del elemento mínimo (la cara vacía). Ubiquemos en el cuadrado combinatorio (ver figura 2.8 pag. 33) las dos copias de aristas (es decir, dos aristas ajenas) una de verde y la otra de rojo (incluyendo todos los vértices incidentes en ellas). En el dibujo deberían quedar sólo 3 caras

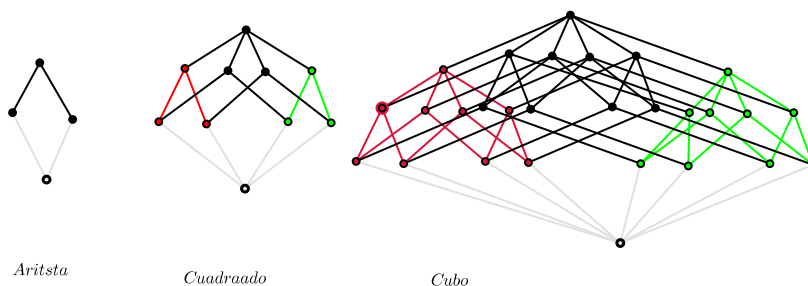


Figura 2.8: Diagramas de Hasse de la arista, el cuadrado y el cubo

sin colorear (dos de grado 1 y la de grado 2). Observemos que el orden parcial determinado por estas 3 caras es isomorfo al orden parcial de la arista cuando eliminamos la cara vacía. Haciendo este mismo análisis con un cuadrado (y su respectivo prisma: el cubo) podemos colorear dos copias ajenas de cuadrado (de nuevo ignorando la cara vacía) y el orden parcial de las caras no coloreadas será isomorfo al orden parcial de un cuadrado sin cara vacía. Lo que hacemos para formar el prisma, es tomar tres copias del polígono original sin mínimo, y unir las copias. A continuación daremos una descripción más detallada.

El algoritmo para construir un prisma dado un politopo en general, es descrito de la siguiente manera:

1. Toma el diagrama de Hasse del politopo original y quita el elemento mínimo (o elemento vacío). Etiqueta cada cara del dibujo (de manera que caras distintas reciban diferentes etiquetas).
2. Dibuja tres copias del diagrama de Hasse etiquetado, las primeras dos empezando en el rango 0 y la tercera en el rango 1. Anexa las etiquetas con las copias.
3. Dibuja una arista por cada par de caras que compartan etiqueta y tengan un rango distinto.
4. Agrega la cara mínima de rango -1 al diagrama de Hasse.

En la próxima sección entenderemos más formalmente esta construcción una vez que hayamos desarrollado y entendido un nuevo producto.

## 2.5. Segundo producto

En esta sección generalizaremos la construcción del prisma, y obtendremos como corolario que ésta nos induce siempre un politopo. Para eso introduciremos el producto  $\odot_2$  entre dos politopos. Intuitivamente este producto mezcla geoméricamente a los politopos.



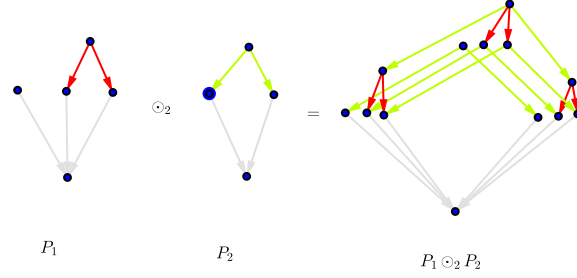


Figura 2.9: Las gráficas de Hasse del producto  $\odot_2$  de dos órdenes discretos con mínimo

**Definición 7.** *Dados dos órdenes parciales  $P = (P, \leq_P)$  y  $Q = (Q, \leq_Q)$  con mínimos  $m_P$  y  $m_Q$ , respectivamente, definimos  $R = P \odot_2 Q$  como el orden parcial con elementos en  $(P \setminus \{m_P\} \times Q \setminus \{m_Q\}) \cup \{(m_P, m_Q)\}$  y con relación*

$$(v_0, w_0) \leq_R (v_1, w_1) \Leftrightarrow v_0 \leq_P v_1 \text{ y } w_0 \leq_Q w_1.$$

A este producto lo llamaremos el producto geométrico de órdenes. En la figura 2.9 (pag. 34) podemos ver diagramas de Hasse de este producto.

Demostraremos ahora que este producto es asociativo y conmutativo:

**Proposición 6.** *El producto geométrico de órdenes es asociativo.*

*Demostración.* Sean  $P = (P, \leq_P)$ ,  $Q = (Q, \leq_Q)$  y  $R = (R, \leq_R)$  tres órdenes parciales con mínimo y consideremos

$$L = ((P \odot_2 Q) \odot_2 R)$$

y

$$M = (P \odot_2 (Q \odot_2 R)).$$

Observemos que

$$L \setminus \{(m_P, m_Q), m_R\} = \left( ((P \setminus \{m_P\}) \odot (Q \setminus \{m_Q\})) \odot (R \setminus \{m_R\}) \right)$$

y

$$M \setminus \{(m_P, (m_Q, m_R))\} = \left( (P \setminus \{m_P\}) \odot ((Q \setminus \{m_Q\}) \odot (R \setminus \{m_R\})) \right)$$

De forma que por asociatividad de  $\odot$  tenemos

$$L \setminus \{(m_P, m_Q), m_R\} \cong M \setminus \{(m_P, (m_Q, m_R))\}$$

y como  $\{(m_P, m_Q), m_R\}$  y  $\{(m_P, (m_Q, m_R))\}$  son ambos mínimos tenemos que  $L \cong M$ .  $\square$

**Proposición 7.** *El producto geométrico de dos órdenes parciales es conmutativo.*

*Demostración.* Sean  $P = (P, \leq_P)$  y  $Q = (Q, \leq_Q)$  dos órdenes parciales y consideremos  $L = (P \odot_2 Q)$  y  $M = (Q \odot_2 P)$ . Definiremos el isomorfismo  $f : L \rightarrow M$  como  $f((v, w)) = (w, v)$ . Ésta es una biyección entre  $L$  y  $M$ . Además

$$(v_0, w_0) \leq_L (v_1, w_1) \Leftrightarrow ((v_0 \leq_P v_1) \text{ y } (w_0 \leq_Q w_1)) \Leftrightarrow (w_0, v_0) \leq_M (w_1, v_1).$$

Por lo tanto

$$a \leq_L b \Leftrightarrow f(a) \leq_M f(b)$$

cuando  $a, b \in L$ . Esto prueba que  $f$  es un isomorfismo.  $\square$

La razón por la cual las pruebas de asociatividad y conmutatividad del producto  $\odot$  pueden ser utilizadas para demostrar estas propiedades del otro producto  $\odot_2$ , es porque en el fondo  $S \odot_2 T$  es un suborden de  $S \odot T$ . Es el suborden inducido por todos los elementos que tienen un número par de veces al elemento mínimo entre sus coordenadas.

El motivo por el cual quitamos el elemento mínimo de los politopos para construir el producto geométrico de ellos es que la cara vacía (el mínimo de un politopo) es la única que no tiene significado geométrico intrínseco. Si recordamos el capítulo 1, agregamos esta cara para describir con mayor elegancia a la familia de los politopos. Es por eso que para recuperar combinatoriamente el producto geométrico tenemos que deshacernos de esta cara, multiplicar y agregarla de nuevo. Podemos observar que el orden que consiste de dos elementos (uno mayor que el otro) funge como identidad bajo este producto.

Aunque la definición 7 hace referencia a cualquier orden parcial con mínimo arbitrario, podemos restringir su estudio a los politopos abstractos. Es por eso que demostraremos que este producto conserva la propiedad de ser politopo.

**Teorema 2.** *Si  $P$  y  $Q$  son dos politopos, entonces el orden parcial  $L$  definido como  $L = P \odot_2 Q$  también es un politopo.*

*Demostración.* Sabemos que  $L$  es un orden parcial, pues este producto define órdenes parciales. Si llamamos  $m_P$  y  $m_Q$  respectivamente a los mínimos de  $P$  y  $Q$  y  $M_P, M_Q$  a los máximos de los mismos, obtendremos a  $(m_P, m_Q)$  y  $(M_P, M_Q)$  como el mínimo y máximo de  $L$ .

Para probar la conexidad fuerte de  $L$ , tomemos un segmento  $[(p_0, q_0), (p_1, q_1)] \subseteq L$ . Si  $p_0 \neq m_P$ , entonces  $q_0 \neq m_Q$  y  $[(p_0, q_0), (p_1, q_1)]$  es isomorfo a  $[p_0, p_1] \odot [q_0, q_1]$  que nos da un politopo y por ende un orden conexo. Si  $p_0 = m_P$ , entonces  $q_0 = m_Q$  y si además  $p_1 < M_P$  ó  $q_1 < M_Q$ , tenemos que

$$\begin{aligned} [(p_0, q_0), (p_1, q_1)] &= [(-\infty, p_1] \setminus m_P \odot [(-\infty, q_1] \setminus m_Q \cup (m_P, m_Q) \\ &= [p_0, p_1] \odot_2 [q_0, q_1] \end{aligned} \tag{2.1}$$

que por inducción fuerte se tiene que es conexo. De forma que sólo basta verificar que  $L$  es en sí conexo. Para probar que  $L$  es conexo tomemos  $(p_0, q_0)$  de forma que  $p_0$  sea una cara propia en  $P$ , tomemos otro elemento  $(p_1, q_1)$  propio arbitrario. Como  $P$  y  $Q$  son conexos, existen sucesiones  $p_1 = s_0, s_1, \dots, s_k = p_0$  con todas sus caras propias (excepto quizás  $p_1$ ) y  $q_1 = c_0, c_1, \dots, c_l = q_0$  con todas sus caras propias (excepto quizás  $q_1$  y/o  $q_0$ ) con términos consecutivos incidentes en  $P$  y  $Q$  respectivamente. Definiendo la sucesión

$$(p_1, q_1) = (s_0, c_0), (s_1, c_0) \dots, (p_0, c_0) = (s_k, c_0), (s_k, c_1), \dots (s_k, c_l)$$

obtendremos una sucesión de caras incidentes y propias entre  $(s_0, c_0)$  y  $(s_k, c_l)$  mostrando que este orden es conexo.

Para probar que todas las banderas tienen la misma altura, basta con observar que las únicas tres maneras en que dos caras de un producto cumplan que  $(p_1, q_1)$  cubre a  $(p_0, q_0)$ , son: si  $p_0 = p_1 \neq m_P$  y  $q_1$  cubre a  $q_0$ ;  $p_1$  cubre a  $p_0$  y  $q_0 = q_1 \neq m_Q$ ; ó si  $p_0 = m_P, q_0 = m_Q$  y  $p_1, q_1$  cubren a  $p_0$  y  $q_0$  respectivamente. Así las banderas en el producto son sucesiones  $(p_0, q_0), (p_1, q_1) \dots (p_n, q_n)$  con  $(p_0, q_0) = (m_P, m_Q)$ ,  $p_1$  y  $q_1$  cubren a  $p_0$  y  $q_0$  respectivamente y además para todo  $i > 0$ ,  $p_i = p_{i+1}$  y  $q_{i+1}$  cubre a  $q_i$  ó  $p_{i+1}$  cubre a  $p_i$  y  $q_i = q_{i+1}$ . Observamos entonces que si el tamaño de las banderas de  $P$  y  $Q$  eran  $n + 2$  y  $m + 2$  respectivamente, el tamaño de las banderas de  $L$  será:  $n + m + 2$ . Siendo un orden con máximo, mínimo y banderas equipotentes finitas, automáticamente es un orden graduado.

Por último, mostraremos la condición diamante: tomemos dos caras  $(a, b), (c, d)$  tales que  $(a, b) \leq (c, d)$ ,  $(a, b) \neq (m_P, m_Q)$  y  $grad(c, d) - grad(a, b) = 2$ . Como  $[(a, b), (M_P, M_Q)] = [a, M_P] \odot [b, M_Q]$  y el término derecho sabemos que es un politopo, satisficará la condición diamante. Entonces, si tomamos  $x$  que cumpla  $(a, b) < x < (c, d)$ , tenemos  $x \in [(a, b), (M_P, M_Q)]$ , pero la condición diamante en  $[(a, b), (M_P, M_Q)]$  nos dice que hay exactamente 2 caras  $x$  que lo cumplen. Si ahora  $(a, b) = (m_p, m_q)$  y  $grad(c, d) - grad(a, b) = 2$  es porque  $grad(c) - grad(a) = 2$  y  $grad(d) - grad(b) = 1$  (o su respectivo caso simétrico). Al cumplir  $P$  la condición diamante tenemos que existen exactamente 2 elementos de  $P$  que satisfacen  $a < x, y < c$ , los elementos  $(x, d)$  y  $(y, d)$  serán los únicos que satisfagan:  $(a, b) < (x, d)$  y  $(y, d) < (c, d)$ , ya que cuando tomamos una pareja  $(w, z)$  tal que  $(a, b) < (w, z) < (c, d)$  y consideramos el caso  $z = m_Q$  tenemos automáticamente  $w = m_P$  y  $(a, b) = (w, z)$  y, por lo tanto,  $z = d$ .  $\square$

Ya teniendo esta herramienta podemos definir el prisma de un politopo, como  $Pris(P) = P \odot_2 A$ , donde  $A$  es el único politopo de dimensión 1 (es decir, la arista). Con el segundo producto que hemos construido podemos describir de manera muy sintética otra familia muy importante en el mundo de los politopos: los hipercubos. El cubo de dimensión  $n$  es simplemente  $A_2^n$  donde tomamos la potencia de la arista usando el segundo producto  $\odot_2$ . Esto es una consecuencia inductiva de que el  $n$ -cubo es el prisma del  $(n - 1)$ -cubo.

## 2.6. Los dos productos como uno

En la sección anterior encontramos conexiones entre los dos productos, de hecho, en varias demostraciones del segundo producto usábamos información que conocíamos del primero. En esta sección se expondrá una forma de entender a los dos productos como uno solo de forma que nos permita hacer pruebas para un solo producto. No cambiaremos nada en esencia, es sólo una pausa semántica que se utilizará para acortar algunas demostraciones en el resto del trabajo. Entenderemos cuatro tipos de representaciones abstractas de politopos:

1. Los usuales (con máximo y mínimo).
2. Con sólo máximo.
3. Con sólo mínimo.
4. Sin máximo ni mínimo.

Y daremos sus respectivas axiomatizaciones. Todos son órdenes parciales graduados, con banderas equipotentes, fuertemente conexos;

1. Los usuales: (denotados  $Poly^1$ )
  - Tienen máximo y mínimo.
  - Cumplen la condición diamante usual (denotada  $D^1$ ).
2. Con sólo máximo: (Denotados  $Poly^2$ )
  - Tienen máximo.
  - Cumplen *diamante*<sup>2</sup>, denotada  $D^2$ . Esto es, al agregar un mínimo absoluto al orden, se cumple la condición diamante. A este mínimo lo llamaremos el falso mínimo.
3. Con sólo mínimo. (Denotados  $Poly^3$ )
  - Tienen mínimo.
  - Cumplen *diamante*<sup>3</sup>, denotada  $D^3$ . Esto es, al agregar un máximo absoluto al orden, se cumple diamante. A este máximo lo llamaremos el falso máximo.
4. Sin máximo ni mínimo. (Denotados  $Poly^4$ )
  - Cumplen *diamante*<sup>4</sup>, denotada  $D^4$ . Lo cual quiere decir que cumple  $D^2$  y  $D^3$ .

En la figura 2.10 (pag. 38) damos las distintas representaciones de un triángulo en las distintas clases  $Poly^i$ . Una conclusión que el dibujo nos invita a obtener, es que los elementos de  $Poly^i$  son los mismos que los de  $Poly^j$  salvo que en algunos hemos quitado o agregado máximos y mínimos según sea el caso. La

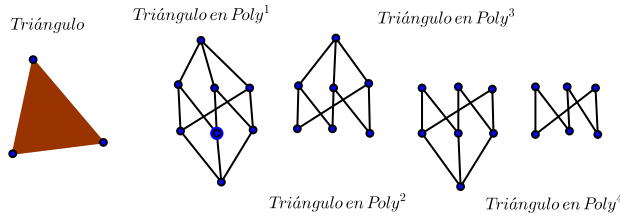


Figura 2.10: Diagramas de Hasse de las distintas representaciones del triángulo en  $Poly^i$  para  $i = 1, \dots, 4$

afirmación pasada es casi precisa, excepto que tenemos el siguiente caso degenerado. Tomemos la arista abstracta en  $Poly^1$  y tomemos el suborden que resulta de quitar tanto el mínimo como el máximo del orden. El orden resultante no es conexo bajo nuestra definición de conexidad, lo cual implica que no es fuertemente conexo. Eso automáticamente nos dice que este orden no puede ser un miembro de  $Poly^4$ . Afortunadamente este es el único caso degenerado.

A continuación demostraremos cosas que nos serán de gran utilidad para las próximas secciones y haremos observaciones importantes. La primera observación que es importante hacer, es que  $Poly^i \cap Poly^j = \{N\}$  si  $i \neq j$ , donde  $N$  representa el orden parcial con un único elemento. Esto se debe a que si un orden parcial tiene un máximo diferente del mínimo, entonces no puede satisfacer  $D^3$  ya que si  $M$  es el máximo y  $a$  es cualquier elemento cubierto por  $M$  tendremos que existirá sólo un elemento ( $M$ ) en el segmento comprendido entre  $a$  y el nuevo máximo (el máximo falso). De manera análoga si un orden tiene mínimo diferente del máximo no puede satisfacer  $D^2$ . Esto deja como única posibilidad que  $Poly^i \cap Poly^j \subseteq \{N\}$ . Pero  $N$  satisface  $D^1$ ,  $D^2$ , y  $D^3$  y por lo mismo  $D^4$ .

Hemos cambiado drásticamente nuestro lenguaje. En las secciones anteriores entendíamos a los politopos abstractos como un tipo particular de orden parcial que cumplía ciertas características, y sobre ellos podíamos definir dos productos distintos. En este nuevo escenario tendremos un sólo producto y distintos tipos de órdenes parciales. Podríamos continuar el trabajo olvidándonos absolutamente de la parte geométrica y demostrar teoremas estructurales para estos tipos de órdenes parciales, pues los teoremas no dependen de la interpretación que queramos darle a los órdenes, pero el propósito de estudio de los politopos abstractos es entender a los cuerpos geométricos, y por eso haremos algunas anotaciones sobre las interpretaciones.

La filosofía de los politopos abstractos es poder representar a los politopos geométricos de forma combinatoria, y estudiar de manera sistemática todas las propiedades recuperables de esta representación.  $Poly^1$  es la representación usual con la que trabajamos en las primeras secciones. En esta sección estamos proponiendo otros 3 tipos de representaciones, y la razón por la que hacemos

esto es la claridad combinatoria que le ofrece a nuestros argumentos. Cuando tengamos un politopo geométrico  $P$  y nos querramos referir a su representación en  $Poly^i$  simplemente escribiremos  $P^i$ . Recordemos que en el capítulo 1, cuando discutimos conexidad, agregamos de manera casi arbitraria 3 órdenes parciales que eran conexos por más que el orden de caras propias no lo fuera. Estos tres órdenes corresponden a las representaciones de la arista en  $Poly^i$  para  $i = 1, 2, 3$ .

Demostremos que  $\odot$  preserva las propiedades  $D^i$  para  $i = 1, \dots, 4$ . Para eso usaremos una notación concisa. Dados dos elementos  $x, y$  de un orden discreto, diremos que  $x \blacktriangleleft^i y$  si y sólo si  $x < y$  y además las trayectorias dirigidas en la gráfica de Hasse del orden discreto de  $y$  a  $x$  de longitud mínima miden exactamente  $i$ . Una reformulación sencilla dice que cuando  $a$  cubre  $b$  escribimos  $b \blacktriangleleft^1 a$ . En el caso de órdenes graduados, todas las trayectorias dirigidas de un punto a otro, tienen exactamente la misma longitud, pues cada paso en una arista obliga a bajar en exactamente una unidad el rango. Otra observación sencilla es que podemos reformular la condición diamante  $D^1$  al siguiente enunciado. Si  $x$  y  $y$  son dos elementos de un orden tales que  $x \blacktriangleleft^2 y$ , entonces hay exactamente dos elementos  $z, w$  con  $x < z, w < y$ .

**Lema 4.** *Si  $P$  y  $R$  son dos órdenes que cumplen  $D^1$ , entonces  $P \odot R$  cumple  $D^1$ .*

*Demostración.* Sean  $P$  y  $R$  órdenes discretos que cumplan  $D^1$ . Tomemos  $(a, b)$  y  $(c, d)$  en  $P \odot R$  con  $(a, b) \blacktriangleleft^2 (c, d)$ . Las únicas maneras en que  $(a, b) \blacktriangleleft^2 (c, d)$  puede suceder son si  $a \blacktriangleleft^1 c$  y  $b \blacktriangleleft^1 d$  o si  $a \blacktriangleleft^2 c$  y  $b \blacktriangleleft^0 d$  con su respectivo caso simétrico. En el primer caso  $(a, d)$  y  $(c, b)$  completarán el diamante, y en el segundo caso, por cumplir  $P$  la propiedad  $D^1$ , se tiene que hay dos únicos elementos digamos  $s$  y  $h$  con  $a < s, h < c$  y así los elementos  $(s, d)$  y  $(h, d)$  son los que formarán el diamante.  $\square$

**Lema 5.** *Si  $P$  y  $R$  son dos órdenes que cumplen  $D^2$ , entonces  $P \odot R$  cumple  $D^2$ .*

*Demostración.* Sean  $P$  y  $R$  órdenes discretos que cumplan  $D^2$ . Por la afirmación anterior y la observación de que un segmento en un producto es el producto de los respectivos segmentos, sólo falta verificar la condición diamante sobre el falso mínimo. Para eso tomemos  $(a, b) \in P \odot R$  que cubra a un elemento minimal  $(m_P, m_R)$ . Sin pérdida de la generalidad,  $a \neq m_P$  y  $b = m_R$ . Por cumplir  $P$  la propiedad  $D^2$  existen dos únicos  $h, s$  con  $h, s \blacktriangleleft^1 a$  (donde uno de ellos es  $m_P$ ) y así  $(h, b), (s, b) < (a, b)$ , además son los únicos por ser  $b$  minimal en  $R$ . Probando que en el falso mínimo también se da la condición diamante.  $\square$

**Lema 6.** *Si  $P$  y  $R$  son dos órdenes que cumplen  $D^3$ , entonces  $P \odot R$  cumple  $D^3$ .*

*Demostración.* La demostración de esta afirmación se sigue de que un orden parcial cumple  $D^2$  si y sólo si su dual cumple  $D^3$ .  $\square$

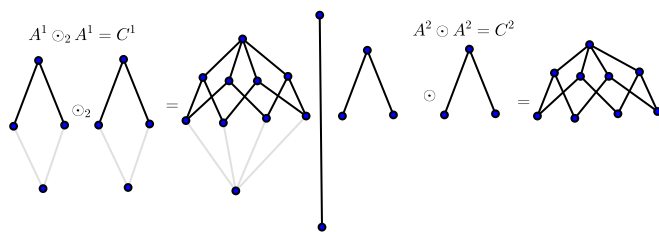


Figura 2.11: Comparación entre el producto  $\odot_2$  de dos aristas y multiplicar en  $Poly^2$  las respectivas representaciones de la arista

Podemos observar que por la definición de  $D^4$  y porque el producto conserva  $D^2$  y  $D^3$ , también preservará  $D^4$ . Por último podemos sintetizar las observaciones de esta sección en el siguiente teorema.

**Teorema 3.** *El producto cartesiano de órdenes discretos  $\odot$  es cerrado en  $Poly^i$  para  $i = 1, \dots, 4$ , es decir,  $P, Q \in Poly^i$  implica que  $P \odot Q \in Poly^i$ .*

Este teorema nos permitirá construir una muy amplia variedad de politopos con estos cuatro tipos de productos distintos. Sin embargo, como veremos más adelante, la mayoría de estos no son regulares.

## Capítulo 3

# Teoremas de Factorización Única

### 3.1. Factorización única en gráficas conexas

En esta sección demostraremos un teorema fundamental en el estudio del producto cartesiano de gráficas. El teorema nos dice que cualquier gráfica conexa puede verse como un producto (posiblemente infinito) de gráficas irreducibles. Nos dice además que esta representación es única salvo por el orden de los factores. Este resultado se conoce desde 1960, fue inicialmente probado por Sabidussi [5] y desde entonces se han encontrado distintas pruebas y generalizaciones. La prueba que daremos es mucho más reciente [3]. En esta sección todas las gráficas denotadas por  $G$  las asumiremos conexas. Todo lo que haremos se puede extender al lenguaje de digráficas y multigráficas, y las pruebas son análogas. Sin embargo, mantendremos la prueba para gráficas simples por motivos didácticos. Posteriormente demostraremos de otra manera el teorema para digráficas. Empecemos con algunas definiciones.

**Definición 8.** *Dada una gráfica conexa  $G$  y una subgráfica conexa  $H$  de  $G$ . Decimos que  $H$  es convexa en  $G$ , si y sólo si dados cualesquiera dos vértices  $v$  y  $u$  de  $H$ , y dada cualquier  $(u, v)$ -trayectoria de tamaño minimal en  $G$ , se tiene que dicha trayectoria es una subgráfica de  $H$ .*

Esta noción pretende particularizar a gráficas la noción de que un espacio métrico conexo por trayectorias sea convexo en otro. Cuando  $G$  se entienda del contexto, simplemente diremos que  $H$  es convexa. En la figura 3.1 (pag. 42) damos un ejemplo de gráficas convexas.

Resulta ser que los productos cartesianos de gráficas están íntimamente relacionados con la noción de convexidad que acabamos de dar, sin embargo, tendremos que pedir una noción de convexidad más particular para lo que haremos



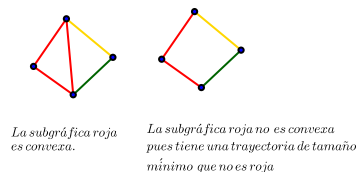


Figura 3.1: Gráfica convexa y no convexa

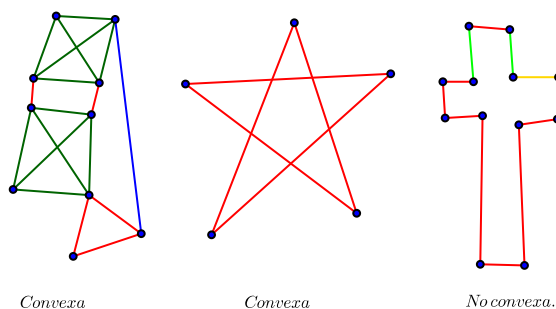


Figura 3.2: Coloraciones convexas y no convexas

en adelante. Es por eso que introducimos la noción de que una relación de equivalencia (o coloración) sea convexa en una gráfica. En cierto sentido estamos permitiéndonos entender a la convexidad inclusive cuando contamos con objetos disconexos. Formalmente la definimos así:

**Definición 9.** *Dada una relación de equivalencia  $\sim$  sobre las aristas de una gráfica  $G$ , decimos que ésta es convexa en  $G$ , si y sólo si para cualquier clase de equivalencia  $C$  de  $\sim$  se cumple que las componentes conexas de  $C$  son convexas en  $G$ .*

En la figura 3.2 (pag. 42) damos un ejemplo de coloración convexa.

Parafraseando la definición 9, dada una coloración de aristas de  $G$  (toda coloración induce una relación de equivalencia y viceversa) diremos que ésta es convexa en  $G$  si toda componente conexa monocromática es convexa en  $G$ . Los productos cartesianos de gráficas son convexas, en un sentido que aclararemos más adelante. Pero tienen un tipo de convexidad un poco más exigente que la usual, esta está muy relacionada con el hecho de que el producto cartesiano de gráficas es asociativo.

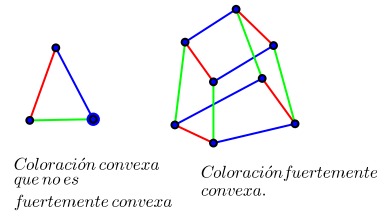


Figura 3.3: Convexidad y convexidad fuerte

**Definición 10.** Dada una relación de equivalencia  $\sim$  sobre las aristas de una gráfica  $G$ , decimos que ésta es fuertemente convexa en  $G$  si y sólo si para cualquier relación de equivalencia  $\sim^*$  que extienda a  $\sim$  (es decir,  $\sim \subseteq \sim^*$ ) se cumple que  $\sim^*$  es convexa en  $G$ .

En la figura 3.3 (pag. 43) damos ejemplos ilustrando este concepto.

En otras palabras, que una coloración de aristas tenga convexidad fuerte lo que nos dice es que la coloración es convexa aún cuando unimos clases cromáticas. Omitiremos a  $G$  al momento de decir que una relación de equivalencia es fuertemente convexa en  $G$ , cuando ésta se entienda del contexto. A lo largo de esta sección utilizaremos los conceptos de partición, coloración y relación de equivalencia de manera indistinta. También nos referiremos por colores a las clases de equivalencia como lo hemos hecho hasta el momento.

Dada una gráfica  $G$  y una factorización cartesiana débil de  $G = \prod_{i \in I} G_i$  le asignaremos el color  $i$  a toda arista  $(u, v) \in E(G)$  que cumpla  $u_i \neq v_i$ ; denotaremos por  $\sim_\sigma$  a esta relación de equivalencia, donde  $\sigma$  representa a la factorización. Recordemos que dados  $u, v \in V(G)$  si estos son adyacentes, entonces tienen exactamente una coordenada distinta. La observación anterior demuestra que a cada arista se le asignó exactamente un color. En la figura 3.4 (pag. 44) ilustramos coloraciones inducidas por un producto.

Probaremos ahora que los productos de gráficas son fuertemente convexos, es decir, la coloración inducida por la expresión de una gráfica como un producto cartesiano débil de otras gráficas, es fuertemente convexa en la gráfica. La prueba tiene dos ideas esenciales. La primera idea lida con la convexidad usual, y consiste de visualizar a un color en una dimensión espacial y pensar a los otros colores como dimensiones adicionales. En cierto sentido caputra la idea de: no importa cuánto te muevas en el eje  $y$ , tienes que usar el eje  $x$  si quieres avanzar en éste. Para describir esto en lenguaje formal usaremos proyecciones. En contraparte, la segunda idea lida con la convexidad fuerte, y lo único que hace es aclarar que unir colores en un producto es, asociar factores. Recordemos que

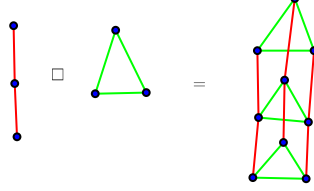


Figura 3.4: Coloración inducida por producto

por un producto cartesiano débil nos referimos a una componente conexa de un producto cartesiano, y que por una raíz nos referimos a cualquier elemento que pertenezca a esa componente.

**Teorema 4.** *Dada una gráfica  $G$  y una expresión  $\sigma$  de  $G$  como un producto cartesiano débil con raíz  $a$ , se tiene que la relación de equivalencia  $\sim_\sigma$  es fuertemente convexa en  $G$ .*

*Demostración.* Digamos que  $\sigma$  es  $\prod_{i \in I}^a G_i$ . Empezaremos por probar que basta con demostrar la convexidad de  $\sim_\sigma$ . Sea  $\sim^*$  una relación que extienda a  $\sim_\sigma$ . Sean  $C_i$ ,  $i \in I$  y  $D_k$ ,  $k \in K$  las clases de equivalencia de  $\sim_\sigma$  y  $\sim^*$ , respectivamente (indexamos a las clases  $C_i$  con el índice  $I$ , pues la forma de colorear un producto conserva la forma de indexar). Entonces, como  $\sim^*$  extiende a  $\sim_\sigma$ , tenemos que cada  $D_k$  es la unión de algunas clases  $C_i$ . Digamos  $D_k = \bigcup_{j \in I_k} C_{i_j}$ . Si expresamos a  $G$  como  $\tau$  determinada por  $G = \prod_{k \in K} \left( \prod_{j \in I_k} G_{i_j} \right)$ , tendremos entonces que  $\sim^* = \sim_\tau$ , pues cada factor  $\prod_{j \in I_k} G_{i_j}$  tendrá asociado ahora un mismo color, y por la convexidad (usual) en productos, que probaremos en unos momentos, tenemos que  $\sim_\tau$  es convexa. Así,  $\sim_\sigma$  será fuertemente convexa.

Para completar el argumento demostremos la convexidad de  $\sigma$ . Tomemos una clase de equivalencia  $C_i$  y una componente conexa  $H_i$  de la misma. Es natural observar que esta componente es isomorfa a  $G_i$  y que el isomorfismo está dado por la restricción de  $\pi : G \rightarrow G_i$ , la proyección usual. Identifiquemos a  $G_i$  como esta subgráfica de  $G$ . Tomemos  $T$  una  $G$ -trayectoria entre dos vértices  $u, v \in G_i$  que sea de tamaño mínimo y consideremos la trayectoria  $T' = \pi(T)$ . Como  $T'$  también es una trayectoria entre  $u$  y  $v$ , el tamaño de las trayectorias debe coincidir, por la minimalidad de  $T$ . De esto podemos deducir que no hay una arista  $(v_1, v_2)$  en  $T$  con  $\pi(v_1) = \pi(v_2)$ , es decir, que haya usado otra coordenada o equivalentemente, otro color. Esto implica que  $T \leq G_i$  como queríamos ver.  $\square$

Una vez que ya afianzamos el concepto de convexidad y su relación con los productos, podemos introducir un segundo ingrediente de suma importancia para los productos cartesianos: la propiedad cuadrado. En el fondo lo que captura esta propiedad es el hecho de que el producto cartesiano de dos aristas es siempre un cuadrado y el hecho de que localmente un producto siempre es el producto

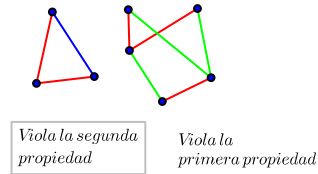


Figura 3.5: Coloraciones que no son cuadradas

de sus aristas adecuadamente pegadas. Por un *cuadrado sin diagonales* de una gráfica  $G$ , entenderemos a un 4-ciclo de  $G$  cuya gráfica inducida por vértices es él mismo. (Ver página 2)

**Definición 11.** Dada una gráfica  $G$  y una coloración por aristas  $C$  en  $G$  diremos que la coloración tiene la propiedad cuadrado, y la llamaremos cuadrada, si:

1. Cualquier cuadrado sin diagonales de  $G$  tiene a sus aristas ajenas (es decir, sin vértices en común) coloreadas con el mismo color.
2. Cualquier par de aristas adyacentes de distinto color, pertenecen a un único cuadrado sin diagonales de la gráfica.

Podemos deducir algunas cosas sencillas de las coloraciones cuadradas, como que en una coloración cuadrada todo triángulo es monocromático. En la figura 3.5 (pag. 45), tendremos otra subgráfica que es necesariamente monocromática en coloraciones cuadradas.

Demostremos que las coloraciones inducidas por productos son cuadradas.

**Teorema 5.** Sea  $G$  una gráfica,  $\sigma$  una expresión de la gráfica como un producto, y  $\sim_\sigma$  su respectiva coloración. Entonces  $\sim_\sigma$  tiene la propiedad cuadrado.

*Demostración.* Demostremos la primera parte de la propiedad cuadrado. Tomemos a  $Q = (v_0, v_1, v_3, v_2)$  un cuadrado sin diagonales de  $G$ . Sin pérdida de la generalidad,  $Q$  tiene dos aristas adyacentes de diferente color, si no habríamos terminado. Digamos que son  $e = (v_0, v_1)$  y  $f = (v_0, v_2)$  y que están coloreadas con  $i, j$  respectivamente. Es decir,  $v_1$  difiere de  $v_0$  en la coordenada  $i$ , mientras que  $v_0$  y  $v_2$  difieren en la coordenada  $j$ . Ahora,  $v_3$  difiere en exactamente una coordenada de  $v_1$  y en una coordenada de  $v_2$ , por la definición de adyacencia. Esto implica que  $v_3$  difiere de  $v_0$  en exactamente dos coordenadas y que estas coordenadas son precisamente  $i$  y  $j$ . Si  $(v_3)_j = (v_1)_j$ , se tiene que  $(v_3)_j \neq (v_2)_j$ , dando  $(v_3)_i = (v_2)_i$  y, por lo tanto,  $v_3 = v_0$ . De forma que  $(v_3)_j \neq (v_1)_j$ . De manera análoga, tenemos que  $(v_3)_i \neq (v_2)_i$ . Entonces la arista  $(v_1, v_3)$  tiene

color  $j$  y la arista  $(v_2, v_3)$  tiene color  $i$ . Por lo tanto,  $G$  cumple la primera parte de la propiedad cuadrado.

Demostremos la segunda parte de la propiedad cuadrado. Recordemos que en el párrafo anterior argumentamos sobre un cuadrado que nos fue dado, en esta parte debemos demostrar que podemos contruirlo. Tomemos aristas  $e$  y  $f$  que sean adyacentes y de colores distintos. Llamemos al vértice de intersección  $v_0$  y a los otros dos  $v_1$  y  $v_2$  respectivamente. Digamos además que  $v_0$  difiere de  $v_1$  en el color  $i$  y de  $v_2$  en el color  $j$ . Sea  $v_3$  tal que  $(v_3)_k = (v_0)_k$  para todo  $k \neq j, i$ ,  $(v_3)_i = (v_1)_i$  y  $(v_3)_j = (v_2)_j$ . Entonces la gráfica inducida por  $v_0, v_1, v_2$  y  $v_3$  es un 4-ciclo, por lo que  $e$  y  $f$  están en un cuadrado sin diagonales. Usando el argumento del párrafo anterior podemos ver que el vértice  $v_3$  es único y, por lo tanto, también el cuadrado.  $\square$

Hemos visto que las coloraciones inducidas por una factorización tienen la propiedad cuadrado y son fuertemente convexas. En lo subsecuente nos dedicaremos a demostrar que son las únicas coloraciones con ambas propiedades. Descompondremos una prueba larga en varios lemas.

**Lema 7.** *Sea  $G$  una gráfica conexa,  $C$  una coloración de  $G$  que tenga la propiedad cuadrado,  $u$  un vértice de  $G$  y  $c \in C$  un color, entonces existe una arista incidente a  $u$  de color  $c$ .*

*Demostración.* Supongamos que el color  $c$  no toca al vértice  $u$ . Por conexidad podemos suponer que  $u$  no toca a ninguna arista de color  $c$ , pero es adyacente a otro vértice  $v$  que sí es incidente a una arista de color  $c$ , digamos  $f$ . La arista  $e = (u, v)$  debe de estar coloreada con un color diferente de  $c$ . Por la segunda parte de la propiedad cuadrado,  $e$  y  $f$  generan un cuadrado. Si  $u, v, x$  y  $z$  son los vértices de dicho cuadrado de manera que  $f = (v, x)$ , entonces por la primera parte de la propiedad cuadrado, la arista  $(u, z)$  tiene el color de  $f$ . Pero esta arista incide en  $u$  y tiene el color  $c$ . Esta contradicción nos da el resultado.  $\square$

Como las coloraciones inducidas por productos tienen la propiedad cuadrado, podemos interpretar lo que dice la afirmación anterior para el producto: para todo vértice  $v$  y toda coordenada  $i$  del producto existe un vértice  $u$  tal que  $v$  y  $u$  comparten todas sus coordenadas salvo la  $i$ -ésima.

**Lema 8.** *Sea  $G$  una gráfica conexa,  $C$  una coloración con la propiedad cuadrado y  $c$  una clase de equivalencia. Si todas las componentes conexas inducidas por las aristas de color  $c$  son convexas en  $G$ , entonces son isomorfas.*

*Demostración.* Diremos que dos componentes de  $c$  diferentes son adyacentes si existe una arista entre algunos de sus respectivos vértices. Por la conexidad de  $G$  y por el hecho de que todo vértice toca al menos una arista de cada color, basta con probar que dos componentes de  $c$  adyacentes son isomorfas, pues si tomamos una trayectoria que conecte dos componentes de color  $c$  cada vértice de esa trayectoria pertenecerá a alguna componente de color  $c$ , e inductivamente cada una de estas serán isomorfas a la primera. Tomemos dos componentes

conexas  $c_1$  y  $c_2$  de  $c$  que sean adyacentes. Sean  $u_1 \in c_1$ ,  $u_2 \in c_2$  vértices con  $e = (u_1, u_2) \in E(G)$ . Digamos que  $e$  tiene un color  $r$  con  $r \neq c$ . Consideremos todas las aristas de color  $r$  que tienen un vértice en  $c_1$  y otro en  $c_2$ , llamemos a este conjunto  $E(c_1, c_2, r)$ . Demostraremos que para cada vértice  $v$  en  $c_1$  o en  $c_2$  existe una arista  $f \in E(c_1, c_2, r)$  incidente en  $v$ . Supongamos que esto no sucede, tomemos  $v_1 \in c_1$  tal que  $E(c_1, c_2, r)$  no toca a  $v_1$ . Por conexidad y porque  $E(c_1, c_2, r) \neq \emptyset$ , podemos suponer que  $v_1$  es adyacente a un vértice  $w_1$  de  $c_1$  con  $(v_1, w_1) \in c$  y tal que  $E(c_1, c_2, r)$  toca a  $w_1$ . Sea  $w_2$  un vértice de  $c_2$  con  $(w_1, w_2) \in r$ , por la propiedad cuadrado de la coloración  $C$  se tiene que  $(v_1, w_1)$  y  $(w_1, w_2)$  generan un cuadrado sin diagonales. Llamemos  $v_2$  al vértice que falta de este cuadrado. Ahora  $(w_2, v_2)$  tiene que ser de color  $c$  por la propiedad cuadrado, de forma que  $v_2 \in c_2$  y, como  $(v_1, v_2) \in r$ , se tiene que  $(v_1, v_2) \in E(c_1, c_2, r)$ . Esto contradice que  $E(c_1, c_2, r)$  no toque a  $v_1$ . Como el argumento es simétrico, lo mismo aplica para los vértices de  $c_2$ .

Demostraremos ahora que por cada vértice de  $c_1$  existe una única arista de  $E(c_1, c_2, r)$  que lo toca. Supongamos que existe un vértice  $v_1$  en  $c_1$  y dos aristas  $(v_1, v_2), (v_1, v_2^*) \in E(c_1, c_2, r)$ . Entonces  $v_2^*, v_1, v_2$  es una  $G$ -trayectoria entre  $v_2^*$  y  $v_2$  de color  $r$ . Como  $c_2$  es convexa tenemos que la distancia  $\rho(v_2, v_2^*) < 2$  de forma que  $v_2$  y  $v_2^*$  son adyacentes y la arista  $(v_2, v_2^*)$  es de color  $c$ . Pero así los vértices  $v_2^*, v_2$  y  $v_1$  forman un triángulo bicromático, lo cual es una configuración que prohíbe la propiedad cuadrado, por lo tanto,  $v_2 = v_2^*$ . Entonces cada vértice de  $c_1$  (y por simetría de  $c_2$ ) tiene una única arista en  $E(c_1, c_2, r)$ . Por lo tanto, induce una biyección entre vértices de  $c_1$  y  $c_2$ . Veamos que esta biyección es un isomorfismo, dada una arista  $(u_1, v_1) \in c_1$  y vértices  $u_2, v_2 \in c_2$  con  $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in E(c_1, c_2, r)$  se tiene un vértice  $w$  que completa el cuadrado de  $u_1, v_1, v_2$  dando  $(u_1, w) \in E(c_1, c_2, r)$ . Por la unicidad,  $w = u_2$  demostrando que  $(u_1, v_1) \in c_1$  si y sólo si  $(u_2, v_2) \in c_2$ . Esto concluye la prueba de que  $c_1$  y  $c_2$  son isomorfas.  $\square$

Poniendo esto en un contexto de productos, podemos observar que las componentes conexas de una coloración por aristas son el resultado de fijar todas las coordenadas salvo una, y en efecto estas componentes son todas isomorfas al factor, por tanto, entre sí. Daremos ahora una definición que usaremos también en otras secciones.

**Definición 12.** *Dada una gráfica conexa  $G$ , una coloración  $C$ , dos vértices  $u, v$  y  $T$  un  $(u, v)$ -camino definimos la sucesión de colores de  $T$  como  $f : |T| \rightarrow C$  con  $f(k) = c$ , si la  $k$ -ésima arista de  $T$  está coloreada con el color  $c$ .*

La siguiente afirmación nos dice que dado un camino  $P$  entre dos vértices podemos encontrar otro camino entre esos vértices, pero de manera que la sucesión de colores haya quedado permutada.

**Lema 9.** *Sea  $G$  una gráfica conexa, una coloración cuadrada  $C$ , dos vértices  $u, v$ , y  $T$  un  $(u, v)$ -camino con sucesión de colores  $f$ , entonces para cualquier sucesión de colores  $g$  tal que  $g = f(\sigma)$ , donde  $\sigma$  es una permutación  $\sigma \in S_{|T|}$  del*

dominio de  $f$ , se tiene que existe un  $(u, v)$ -camino  $T^*$  con sucesión de colores  $g$ .

*Demostración.* Basta probar el resultado cuando  $\sigma$  es de la forma  $(k, k + 1)$ , ya que cualquier permutación es expresable como transposiciones de elementos consecutivos. Tomemos  $T$  y  $\sigma$  como previamente mencionamos. Si  $f(k) = f(k + 1)$ , entonces  $T$  es un  $(u, v)$ -camino con sucesión de colores  $f(\sigma)$ , pues permutarlos no cambia su color. Si difieren, por la propiedad cuadrado, tendremos que la arista  $k$ -ésima y  $k + 1$ -ésima generan un único cuadrado, los nuevos dos lados del cuadrado completan otro camino  $T^*$  en donde los colores están permutados y así  $T^*$  es un  $(u, v)$ -camino con sucesión de colores  $f(\sigma)$ .  $\square$

Como es costumbre, contextualizaremos la afirmación pasada en lenguaje de productos. Ésta nos diría que si dos vértices difieren en varias coordenadas, y tomamos una trayectoria de uno al otro, no importa el orden en que decidamos variar las coordenadas. En cierto sentido hablamos de un tipo de independencia sobre las coordenadas, es decir, no importa todo lo que hagamos sobre una coordenada, las otras coordenadas permanecerán igual. A dos caminos de tamaño  $n$  con sucesiones de colores  $g$  y  $f$  que satisfagan:  $g(\sigma) = f$ , para algún  $\sigma \in S_n$ , los llamaremos *afines*.

**Lema 10.** *Sea  $G$  una gráfica conexa,  $C$  una coloración convexa con la propiedad cuadrado y tal que sólo tenga dos clases de equivalencia, digamos de color verde y rojo. Si  $V$  es una componente verde (es decir, una subgráfica conexa, monocromática en aristas, maximal) y  $R$  es una componente roja, entonces  $|V \cap R| = 1$ .*

*Demostración.* Demostremos primero  $|V \cap R| \geq 1$  usando sólo la propiedad cuadrado. Supongamos que existen componentes  $V$  y  $R$ , verde y roja respectivamente, que sean ajenas en vértices. Tomemos una trayectoria  $T$  de  $V$  a  $R$ , y tomemos vértices  $v \in T \cap V$  y  $r \in T \cap R$ ; sin pérdida de la generalidad  $T$  es una  $(v, r)$ -trayectoria. Gracias al lema 9 podemos tomar a  $T$  de forma que todas las aristas verdes formen una subtrayectoria de  $T$  incidente a  $v$  y de igual manera todas las aristas rojas formen una subtrayectoria de  $T$  incidente a  $r$ , pues en efecto hay una permutación con esa sucesión de colores. Como  $v \in V$  y las aristas verdes de  $T$  forman una subtrayectoria, cada una de éstas es parte de  $V$ , de manera análoga las aristas rojas de  $T$  forman parte de  $R$ , así la última arista verde de  $T$  y la primera roja comparten un vértice, de forma que  $V \cap R \neq \emptyset$ . Que la intersección conste de un solo elemento, es consecuencia de la convexidad. Si la intersección tuviera al menos dos elementos diferentes, por convexidad cualquier camino de tamaño mínimo entre estos vértices sería de color tanto verde como rojo.  $\square$

**Lema 11.** *Dada una gráfica  $G$ , una coloración cuadrada y fuertemente convexa  $C$ , un color  $a \in C$  y dos componentes distintas  $a_1$  y  $a_2$  de  $a$ , existe un color  $r \in C$  tal que  $r$  desconecta a  $a_1$  y  $a_2$  en  $G$  (es decir, toda trayectoria de  $a_1$  a  $a_2$  necesariamente usa el color  $r$ , o de manera equivalente  $a_1$  y  $a_2$  pertenecen a diferentes componentes conexas de  $G \setminus r$ ).*

*Demostración.* De todas las trayectorias que empiezan en algún vértice de  $a_1$  y terminan en  $a_2$  tomemos una de tamaño mínimo, denotémosla  $T$ . Llamemos  $v_1$  y  $v_2$  a los vértices inicial y final respectivamente. Como  $a_1 \neq a_2$ , la sucesión de colores de  $T$  involucra al menos un color diferente de  $a$ , digamos  $r$ . Afirmamos que  $r$  desconecta a  $a_1$  de  $a_2$ . Primero observemos que por el lema 9 podemos tomar a  $T^*$  una trayectoria afin a  $T$ , de forma que todas las aristas de color  $r$  estén juntas y al principio de la trayectoria. Por ser  $T$  trayectoria de tamaño mínimo,  $T^*$  también será una trayectoria de tamaño mínimo. Supongamos ahora que  $r$  no separa a estas componentes, y tomemos una  $v_1v_2$ -trayectoria  $P$  que no involucre al color  $r$ . Eliminando las aristas repetidas, de ser necesario, podemos formar de  $P$  y  $T^*$  un ciclo  $O$  que tenga a las aristas de color  $r$  contenidas en  $T^*$  (pues éstas no se repitieron). Tomando a la coloración que une a todos los colores salvo a  $r$  (y por ende extiende a  $C$ ) tenemos una coloración convexa. Llamemos  $v$  al color que se obtuvo de la unión. Tenemos que  $O$  se puede ver como la unión de una trayectoria  $T_r$  de color  $r$  y otra trayectoria  $T_v$  de color  $v$ . Si tomamos la componente de color  $r$  que contiene a  $T_r$ , y su análogo de color  $v$  que contiene a  $T_v$ , habremos encontrado una componente de color  $r$  y una componente de color  $v$  que se intersectan en al menos dos vértices. Esto contradice el lema anterior, y la contradicción nos deja concluir que el color  $r$  separa a  $a_1$  de  $a_2$ .  $\square$

Observemos que hasta ahora sólo hemos utilizado la convexidad fuerte en el lema 11, y que cuando una coloración tiene únicamente 2 colores, ser convexa equivale a ser fuertemente convexa. Hemos descompuesto la prueba del siguiente teorema en diversas afirmaciones, y éste será el último fragmento. Básicamente lo que dice el enunciado es: si tenemos una gráfica con una coloración cuadrada y fuertemente convexa, entonces es factorizable. Lo que haremos es construir a cada uno de los factores, y una vez que tenemos una construcción adecuada de los factores, la demostración procede de forma natural usando el lenguaje que impuso nuestra construcción.

Se debe de hacer énfasis en que la parte difícil de la prueba es en efecto encontrar los factores.

**Proposición 8.** *Dada una gráfica conexa  $G$  y una coloración  $C$  que sea fuertemente convexa, tenga la propiedad cuadrado y conste de sólo dos clases de equivalencia, existe una factorización  $\sigma$  de  $G$  inducida por  $C$  tal que  $\sim_\sigma = C$ . En esta factorización cada uno de los factores resulta isomorfo a una de las componentes de cada color.*

*Demostración.* Llamemos a los dos colores  $A$  y  $R$ . Numeremos las componentes conexas de  $A$ :  $A_1, A_2, \dots, A_i \dots$  con  $i \in I_A$  y las de  $R$ ,  $R_1, R_2, \dots, R_j, \dots$  con  $j \in I_R$ . Construyamos las gráficas  $G_A$  y  $G_R$  como  $V(G_A) = \{R_i\}_{i \in I_R}$  y  $(R_i, R_j) \in E(G_A)$  si y sólo si existe una arista de color  $A$  entre vértices de  $R_i$  y  $R_j$ . Análogamente construimos a  $G_R$ .

Demostraremos que  $G = G_R \square G_A$  (el producto cartesiano de  $G_R$  y  $G_A$ ) y si



llamamos a esta expresión  $\sigma$ , entonces  $\sim_\sigma = C$ . Además, demostraremos que  $G_A$  es isomorfo a una (y por tanto a todas) de las componentes de  $A$ , y análogamente  $G_R$  será isomorfa a las componentes de  $R$ .

Definimos  $f : G_A \square G_R \rightarrow G$  como  $f(R_j, A_i) = A_i \cap R_j$ . Por el lema 10 estas intersecciones constan de un sólo vértice, por lo cual  $f$  es en efecto una función a los vértices de  $G$ . Además, el lema 7 nos dice que a todo vértice de  $G$  le corresponde una de estas componentes, así  $f$  es suprayectiva. Si  $v = A_{i_1} \cap R_{j_1} = A_{i_2} \cap R_{j_2}$  es porque  $v \in A_{i_1}$  y  $v \in A_{i_2}$  de forma que estas dos componentes deben ser la misma, de manera análoga,  $R_{j_1} = R_{j_2}$  lo cual prueba la inyectividad. Hasta ahora sabemos que  $f$  es una biyección entre vértices, pero queremos ver que es un isomorfismo.

Tomemos una arista de  $G_A \square G_R$ . Sin pérdida de la generalidad, esta arista es de la forma  $((R_j, A_i), (R_k, A_i))$  con  $R_j$  adyacente a  $R_k$ . Llamemos  $v_j$  a  $A_i \cap R_j$  y  $v_k$  a  $A_i \cap R_k$ . Por ser  $R_j$  adyacente a  $R_k$  existe una arista de color  $A$  entre estas dos componentes. Por la demostración del lema 8, tenemos que hay una arista de color  $A$  que va de  $v_j$  a  $v_k$ , por otro lado esta arista al ser de color  $A$  pertenece a la componente conexa  $A_i$ . Dado que  $|A_i \cap R_k| = 1$ , por el lema 10, tenemos que la arista que va de  $v_j$  a  $v_k$  tiene por vértice a  $v_k$ , así  $(f(R_j, A_i), f(R_k, A_i)) \in E(G)$ . De esta forma  $f$  manda aristas en aristas. Veamos que  $f^{-1}$  también preserva aristas. Para eso tomemos una arista en  $(u, v) \in G$ , sin pérdida de la generalidad de color  $A$  y en la componente  $A_i$ . Por como hemos definido a  $f$ , se tiene  $f^{-1}(u) = (R_k, A_i)$  y  $f^{-1}(v) = (R_l, A_i)$  y como la arista  $(u, v)$  es un testigo de que las componentes  $R_k$  y  $R_l$  son adyacentes,  $(R_k, A_i)$  y  $(R_l, A_i)$  son adyacentes. Mostrando así que  $f^{-1}$  manda aristas en aristas.

Observemos además que al tomar una arista de color  $A$  obtenemos siempre una arista con la primera coordenada distinta, en la expresión del producto esta arista se colorearía de color 1, de forma que toda arista de color  $A$  va a una arista de color 1 y toda arista de color  $R$  va a una arista de color 2. Demostrando que  $C = \sim_\sigma$ .

El isomorfismo entre  $G_A$  y las  $A_j$  surge de restringir a  $f^{-1}$  a alguna de las componentes, digamos  $A_i$ , como tenemos un isomorfismo que conserva clases cromáticas  $f^{-1}[A_i]$  será una componente conexa de color 1, pero las componentes de color 1 en un producto son las subgráficas resultantes de fijar todas las coordenadas salvo la primera, y esa subgráfica siempre es isomorfa al primer factor  $G_A$ .  $\square$

La prueba anterior podría ser utilizada, con un argumento inductivo para encontrar factorizaciones de gráficas con coloraciones cuadradas, y fuertemente convexas que utilicen una cantidad finita de colores. Sin embargo, para nuestros fines necesitaremos algo más general. Una observación de suma importancia que hay que hacer a esta altura, es que la definición que dimos en la prueba del teorema pasado de  $G_A$  como la gráfica que tenía por vértices a las componentes

rojas, fue únicamente por el hecho de que el color rojo y el azul eran los únicos colores, es decir, el color azul era el complemento del color rojo. Es por eso que necesitamos una noción de color complemento para la versión general.

Dada una coloración  $C$  en una gráfica  $G$ , y un color  $A \in C$  denotaremos por  $A^c$  (el complemento de  $A$ ) a  $E(G) \setminus A$ . Podemos observar que la relación de equivalencia con clases de equivalencia  $A$  y  $A^c$  extiende a  $C$ , pues basta con unir las clases cromáticas distintas de  $A$  para obtener  $A^c$ . Denotaremos por  $G_{A^c}$  como la gráfica con vértices  $V(G_{A^c}) = \{A_i\}_{i \in I_A}$  y  $(A_i, A_j) \in E(G_{A^c})$  si y sólo si existe una arista entre un vértice de  $A_i$  y un vértice de  $A_j$  (donde las  $A_i$  representan las componentes conexas de  $A$ ). Como  $A = (A^c)^c$ , por  $G_A$  nos referiremos a  $G_{(A^c)^c}$ .

**Teorema 6.** *Dada una gráfica conexa  $G$  y una coloración  $C$  que sea fuertemente convexa y tenga la propiedad cuadrado, existe una factorización  $\sigma$  de  $G$  inducida por  $C$  tal que  $\sim_\sigma = C$ . En esta factorización cada uno de los factores resulta isomorfo a las componentes conexas de cada color.*

*Demostración.* Consideremos el producto cartesiano débil  $H = \prod_{A \in C} G_A$  tomando la componente conexa adecuada (a lo largo de la prueba encontraremos la componente adecuada). Para cada  $A \in C$  y  $v \in G$  definimos  $(A^c)_{i_v}$  como la única componente conexa de color  $A$  tal que  $v \in (A^c)_{i_v}$ . A su vez asignémosle a  $v$  el elemento de  $H$  que tiene por coordenadas  $\{(A^c)_{i_v}\}_{A \in C}$ .

Como

$$A = \bigcap_{B \in C \setminus A} B^c$$

dado  $v \in G$ , la intersección

$$A_{i_v} = \bigcap_{B \in C \setminus A} (B^c)_{i_v}$$

es la componente de  $A$  a la que  $v$  pertenece. Pues cada intersección cumple

$$(B^c)_{i_v} \supseteq \bigcup_{R \in C \setminus B} R_{i_v} \supseteq A_{i_v},$$

lo cual nos da

$$A_{i_v} \subseteq \bigcap_{B \in C \setminus A} (B^c)_{i_v}.$$

Como

$$(B^c)_{i_v} \subseteq B^c,$$

tendremos que

$$\bigcap_{B \in C \setminus A} (B^c)_{i_v} \subseteq \bigcap_{B \in C \setminus A} B^c = A.$$

Por último observemos que por el lema 11 cualquier componente  $A_j \neq A_{i_v}$  será desconectada de  $A_{i_v}$  por un color, por lo tanto, ninguno de sus elementos podrá pertenecer a la componente conexa que tiene a  $v$  del complemento de ese color, y por ende no pertenecerá a la intersección.

Observemos ahora que

$$\bigcap_{B \in C} (B^c)_{i_v} = (A^c)_{i_v} \cap A_{i_v} = v.$$

Por el lema 10, la asignación  $f : G \rightarrow \prod_{A \in C} G_A$  dada por  $f(v) = \{A_{i_v}^c\}_{A \in C}$  es inyectiva. Supongamos que esta función no es suprayectiva. Por conexidad podemos suponer que hay un par de vértices adyacentes  $u$  y  $v$  de  $H$ , de los cuales sólo uno pertenece a la imagen de la función, digamos que ese es  $v$ . Sin pérdida de la generalidad, difieren en la coordenada correspondiente al factor  $G_A$  y sus coordenadas son  $A_{i_0}^c, A_{i_v}^c$  respectivamente. Como las coordenadas de  $v$  son subgráficas, podemos interseccionarlas. Además la intersección de las coordenadas de  $v$  correspondientes a los factores  $G_B$  con  $B \in C \setminus \{A\}$  es la componente  $A_{i_v}$ . Como cualesquiera dos componentes de  $A^c$  y de  $A$  se intersecan (por el lema 10), tenemos que  $A_{i_v} \cap A_{i_0}^c \neq \emptyset$ . Por tanto, la intersección de las coordenadas de  $u$  es no vacía. Cualquier vértice en esta intersección tendrá asociado el vértice  $u$ , y, por lo tanto,  $f$  es suprayectiva.

La demostración de que esta biyección es un isomorfismo que preserva colores es análoga a la del caso cuando teníamos sólo dos colores (ver el teorema 8).  $\square$

Ya que hemos demostrado la relación entre las factorizaciones de una gráfica y las coloraciones cuadradas y fuertemente convexas, pasemos a demostrar la factorización única. Para eso lo único que tenemos que demostrar es que hay una única coloración mínima al ordenar estas relaciones bajo contención. Esto es porque una coloración mínima obliga a cada uno de los factores a ser irreducibles, y al ser única obligará a que cualquier representación en irreducibles sea en esencia la misma.

En lo subsecuente será importante recordar que estamos pensando a las coloraciones como relaciones de equivalencia, y es por eso que es justificable interseccionarlas. Cuando interseccionamos dos o más coloraciones (o relaciones de equivalencia) obtenemos una tercera coloración. Dos aristas compartirán color únicamente si compartían color en todas las coloraciones interseccionadas.

**Lema 12.** *La intersección de relaciones cuadradas es cuadrada.*

*Demostración.* Para la primera parte de la propiedad cuadrado basta observar que si dos aristas,  $e$  y  $f$ , son ajenas (no comparten vértices) y pertenecen a un cuadrado sin diagonales, entonces se relacionan en cada una de las relaciones de equivalencia. El par ordenado  $(e, f)$  está en la intersección de las relaciones, y por

ende se relacionan en la relación intersección. Así, la relación intersección cumple la primera parte de la propiedad cuadrado. Para la segunda parte, tomemos dos aristas adyacentes  $e$  y  $f$  de diferente color en la relación intersección. Si tienen diferente color es porque en alguna de las relaciones intersectadas, digamos  $R$ , no se relacionan. Como  $R$  tiene la propiedad cuadrado, estas aristas pertenecen a un único cuadrado de  $G$ . Hemos probado que en la relación intersección dos aristas de diferente color generan un único cuadrado. Así, la relación intersección tiene la propiedad cuadrado.  $\square$

El siguiente lema enriquece nuestra definición de convexidad para relaciones, pues la convexidad es algo que nos gustaría que se preservara bajo intersecciones como sucede en los espacios métricos.

**Lema 13.** *La intersección de relaciones convexas es convexa.*

*Demostración.* Tomemos dos vértices  $u$  y  $v$  que pertenezcan a la misma componente de un color de la relación intersección. Como  $u$  y  $v$  pertenecen a una misma componente, existe una  $uv$ -trayectoria monocromática  $T$ . Esa trayectoria debe ser monocromática en cada uno de los intersectandos y, por lo tanto,  $u$  y  $v$  pertenecían a la misma componente en cada una de las relaciones intersectadas. Tomemos ahora una  $uv$ -trayectoria de tamaño mínimo, digamos  $M$ . Por la convexidad de las relaciones intersectadas, tenemos que el color de  $M$  y el de  $T$  deben coincidir para cualquiera de las relaciones intersectadas. Como cada arista de  $M$  se relaciona con cada arista de  $T$ , en cada una de las relaciones intersectadas tenemos que en la relación intersección cada arista de  $M$  se relaciona con cada arista de  $T$ . Esto demuestra que  $M$  tiene el mismo color que  $T$  en la relación intersección, y por ende la relación intersección es convexa.  $\square$

Los siguientes lemas nos permitirán apoyarnos posteriormente en la teoría de conjuntos. La idea detrás de el siguiente lema es pensar a las componentes como si supiéramos que son factores, y entender que si se puede refinar una componente es porque puede refinarse como factor. De alguna forma estamos aprendiendo a “romper” los factores hasta que no se puedan “romper” más.

**Lema 14.** *Dadas dos relaciones de equivalencia  $R_1$  y  $R_2$  sobre un conjunto  $E$ , cuadradas, fuertemente convexas e incomparables, existe una relación  $L$  fuertemente convexa y cuadrada que refina a  $R_1$ .*

*Demostración.* La idea principal de la prueba es refinar a uno de los factores inducidos por la coloración  $R_1$  y de ésta refinación obtener a  $L$ . Como  $R_1$  y  $R_2$  son incomparables, existe un color  $A \in R_1$ , con  $A \not\subseteq B$  para todo color  $B \in R_2$ . Existe un color  $V \in R_2$  con  $A \cap V \neq \emptyset$  y  $A \cap V^c \neq \emptyset$ . Para demostrarlo tomemos una arista  $u \in A$  y tomemos el único  $V \in R_2$  tal que  $u \in V$ , tenemos que  $\{u\} \subseteq V \cap A$  y, como a  $A$  lo tomamos de forma que  $A \not\subseteq V$ , se tiene que  $V^c \cap A \neq \emptyset$ . Tomando una componente conexa  $A_0$  tenemos que por ser  $R_2$  fuertemente convexa, los colores  $V^c$  y  $V$ , serán convexas y tanto  $A_0 \cap V$  como  $A_0 \cap V^c$  serán convexas en  $G$  gracias al lema 13. Por ser convexas en  $G$  también son convexas en  $A_0$ . Además tendremos que  $A_0 \cap V \neq \emptyset$  y  $A_0 \cap V^c \neq \emptyset$ , pues

si una componente de  $A$ , digamos  $A_k$ , fuera ajena a  $V$  podríamos encontrarla adyacente a una que no fuera ajena a  $V$ , digamos  $A_l$ . Al ser adyacentes, tenemos una biyección entre vértices y aristas de las componentes como en el lema 8 y además de forma que aristas correspondientes forman un cuadrado. Como  $R_2$  tiene la propiedad cuadrado, encontraremos una arista de  $A_k$  que en efecto es de color  $V$ . Dado que  $A_0 \cap V \neq \emptyset$  y  $A_0 \cap V^c \neq \emptyset$ , estos conjuntos de aristas forman una coloración convexa y cuadrada en  $A_i$ . Tenemos una factorización no trivial de  $A_0$  por el teorema 8. Si tomamos la factorización inducida por  $R_1$ , el factor isomorfo a  $A_0$  lo cambiamos por su expresión factorizada, y tomamos la relación inducida por esta nueva factorización, encontraremos una relación que refina a  $R_1$ . Por venir dicha relación de un producto, tiene la propiedad cuadrado y es fuertemente convexa.  $\square$

Podemos ver que el lema 14 inmediatamente implica que el orden descrito por las relaciones fuertemente convexas y cuadradas junto con la contención no puede tener dos elementos minimales. Cualquier condición que implique que este orden tiene un minimal automáticamente demostrará que este orden tiene un mínimo. En el caso de que la gráfica sea finita automáticamente tendremos que hay una cantidad finita de coloraciones y por ende una de ellas será minimal y mínima. En el caso de que uno de los vértices tenga grado finito, digamos  $n$ , una relación que tenga  $n$  colores será minimal. Esto se cumple pues cualquier refinamiento aumenta un color y por el lema 7 esos colores inciden en el vértice. Así, para una gran cantidad de gráficas hemos encontrado una relación de equivalencia fuertemente convexa y cuadrada de tamaño mínimo bajo la contención. Como aclararemos posteriormente una relación con esas propiedades corresponde a una factorización única en factores irreducibles.

Para probar que este orden siempre tiene mínimo introduciremos un término que usaremos únicamente en la siguiente demostración. Dada una gráfica  $G$  y una coloración  $C$ , diremos que la coloración es *fuertemente convexa a nivel finito* en  $G$ , si las componentes conexas de las gráficas inducidas por unir una cantidad finita de colores son convexas en  $G$ . Lo abreviaremos como *finitamente convexa*.

**Proposición 9.** *Sea  $G$  una gráfica y  $C$  una coloración finitamente convexa, entonces es fuertemente convexa.*

*Demostración.* Supongamos que  $C$  no es fuertemente convexa. Entonces existe una unión de colores que no es convexa, llamemos a esta unión  $B$ . Al no ser convexa existen dos vértices,  $u$  y  $v$ , una trayectoria  $T$  de color  $B$  que une a  $u$  y a  $v$  y una trayectoria minimal  $M$  con al menos una arista de color  $B^c$ . Tomando  $B_1, B_2, \dots, B_k$  los colores contenidos en  $T$  tenemos que  $B^* = \bigcup_{i=1}^k B_i$  no es convexa, pues  $u, v$  se encuentran en una misma componente de  $B^*$ , pero hay una trayectoria minimal  $M$  con al menos una arista de color  $(B^*)^c$  mostrando que  $C$  no es finitamente convexa.  $\square$

**Lema 15.** *Sea  $G$  una gráfica conexa y tomemos una familia de relaciones de equivalencia  $R^i$ , con  $i \in I$ , sobre las aristas de  $G$  totalmente ordenada por la contención. Si, pensadas como coloraciones, todas las relaciones de la familia son fuertemente convexas y cuadradas, entonces la intersección de estas relaciones es una relación de equivalencia fuertemente convexa y cuadrada.*

*Demostración.* Ser cuadrada es una propiedad que se conserva en cualquier tipo de intersección como vimod en el lema 12. Para ver que la intersección es fuertemente convexa demostraremos únicamente que es finitamente convexa. Para eso tomemos un natural  $k \in \mathbb{N}$  y  $k$  colores  $A_1, \dots, A_k$  de la relación intersección. Llamemos  $C_k^i$  al único color en  $R^i$  que contiene a  $A_k$ . Llamemos  $C^i$  a  $\bigcup_{j=1}^k C_j^i$ . Lo que demostraremos es que

$$\bigcup_{j=1}^k A_j = \bigcap_{i \in I} C^i.$$

La primera contención

$$\bigcup_{j=1}^k A_j \subseteq \bigcap_{i \in I} C^i$$

es completamente conjuntista. Dada una arista  $e$ , con  $e \in \bigcup_{j=1}^k A_j$ , hay un  $j_0$  con  $e \in A_{j_0}$ . Como  $A_{j_0} = \bigcap_{i \in I} C_{j_0}^i$ , tenemos que  $e \in C_{j_0}^i$  para cada  $i$  y por ende  $e \in C^i$  para toda  $i \in I$ . Esto muestra que  $e \in \bigcap_{i \in I} C^i$ . Ya que tenemos una contención, tomemos una arista  $f \in E(G)$  con  $f \notin \bigcup_{j=1}^k A_j$ , como  $f \notin A_j$  para toda  $j$ , se tiene una  $i_j$  tal que en  $R^{i_j}$ ,  $f \notin C_j^{i_j}$ . Consideremos el mínimo de estos  $R^{i_j}$ , digamos  $R^{i_{j_0}}$  (es importante observar que la tricotomía es esencial para poder establecer la existencia del mínimo). Como los  $R^i$  forman una cadena con respecto a la contención  $R^{i_1} < R^{i_2}$  implica que  $C_{j_1}^{i_1} \subseteq C_{j_2}^{i_2}$ . Así, se tiene que  $f \notin C_{j_0}^{i_{j_0}}$  y por tanto  $f \notin \bigcap_{i \in I} C^i$ , probando la igualdad. Pero al ser  $\bigcup_{i=1}^k A_k = \bigcap_{i \in I} C^i$  tenemos que la expresión derecha es una intersección arbitraria de colores convexas, pues cada  $R^i$  es fuertemente convexa. De esta forma  $\bigcup_{i=1}^k A_k$  es convexa por el lema 13 demostrando que esta intersección es finitamente y por tanto fuertemente convexa.  $\square$

Con el propósito de ayudar al lector a aclarar las ideas involucradas en el lema pasado, recalcaremos la importancia (para la prueba, no necesariamente para el resultado) de pedir una familia  $R^i$  totalmente ordenada. Daremos un ejemplo de una gráfica  $G$ , dos coloraciones cuadradas y fuertemente convexas de las aristas de  $G$ ,  $R_1$  y  $R_2$ , y dos colores  $A_1^*$  y  $A_4^*$  de la relación  $R = R_1 \cap R_2$  tales que  $A_1^* \cup A_4^*$  es un subconjunto propio de  $\bigcap C^i$ : Sea  $G = K_2 \odot K_2 \odot K_2 \odot K_2$  (donde  $K_2$  es la gráfica con dos vértices y una arista entre ellos). Sea  $R^*$  la coloración inducida por la factorización de  $G$ , y sean  $A_1^*$ ,  $A_2^*$ ,  $A_3^*$  y  $A_4^*$  los colores de  $R^*$ . Sea

$$R_1 = \{A_1^* \cup A_2^*, A_3^* \cup A_4^*\}$$

y sea

$$R_2 = \{A_1^* \cup A_3^*, A_2^* \cup A_4^*\}.$$

Ahora,  $R_1 \cap R_2 = R^*$ . Si tomamos los colores  $A_1^*$  y  $A_4^*$  tendremos que  $C^1 = G = C^2$ , lo cual hace que  $\bigcap C^i = G$  y  $A_1^* \cup A_4^*$  sea un subconjunto propio de  $\bigcap C^i$ . Observemos que  $R_1$  y  $R_2$  son incomparables y por ende no hay contradicción con el lema 15.

Ya tenemos toda la herramienta necesaria para demostrar el teorema principal de esta sección, el teorema de factorización única para gráficas conexas. Sin embargo, para poder factorizar gráficas infinitas necesitaremos usar el axioma de elección.

**Teorema 7.** *Para toda gráfica conexa  $G$  existe una única expresión de  $G$  como un producto cartesiano débil de gráficas idescomponibles.*

*Demostración.* Por el lema 15, sabemos que la intersección de toda cadena, ordenada con la contención, de coloraciones cuadradas y fuertemente convexas es una coloración cuadrada y fuertemente convexa. Por el Lema de Zorn, esto implica que existe un elemento minimal  $M$  en la familia  $F$ , pero por el lema 14 este minimal es único y es mínimo. Una vez que encontramos una relación mínima, por el teorema 6, ésta induce una factorización. Dicha factorización debe de ser en factores irreducibles, pues de no ser así al refinar uno de los factores podríamos refinar a  $M$  contradiciendo su minimalidad. Si tenemos dos factorizaciones en gráficas irreducibles  $\sigma$  y  $\delta$ , al ser irreducibles inducen coloraciones  $\sim_\sigma$  y  $\sim_\delta$  que no pueden refinarse. Por lo tanto, ambas son mínimas y  $\sim_\sigma = \sim_\delta$ , además el  $i$ -ésimo término es isomorfo a las componentes conexas del color  $i$ . Como  $\sigma$  y  $\delta$  forman la misma coloración, hay una biyección natural de los factores de  $\sigma$  a los de  $\delta$  y esta biyección es isomorfa vía los isomorfismos que hay de los factores a las componentes conexas de los colores correspondientes.  $\square$

### 3.2. Teoremas de factorización única para digráficas, órdenes parciales, y politopos

En esta sección utilizaremos el lenguaje y los resultados de la sección anterior con el propósito de demostrar teoremas de factorización única para digráficas, órdenes parciales discretos y las cuatro clases de politopos abstractos que hemos contemplado.

Comenzaremos demostrando teoremas de factorización única para digráficas. A lo largo de esta sección trabajaremos con las gráficas subyacentes de una digráfica. La única propiedad que nos interesará de las digráficas es la disposición de sus orientaciones locales. Propiedades no tan locales como conexidad, convexidad y convexidad fuerte, las tomaremos sobre las gráficas subyacentes. Para probar el teorema de factorización única para digráficas hemos hecho ya más de la mitad del trabajo. El problema con el que nos encontramos ahora es

### 3.2. TEOREMAS DE FACTORIZACIÓN ÚNICA PARA DIGRÁFICAS, ÓRDENES PARCIALES, Y POLITOPOS

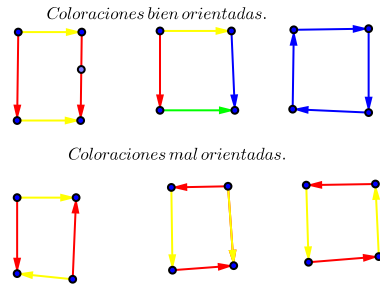


Figura 3.6: Coloraciones bien orientadas y mal orientadas

básicamente que hay cierto tipo de orientaciones que hacen que una digráfica que tenía por gráfica subyacente a una gráfica factorizable, sea ahora una digráfica irreducible. Tomemos, por ejemplo, un ciclo dirigido de longitud cuatro, esta digráfica tiene como gráfica subyacente a un cuadrado sin diagonales que se factoriza como el producto de dos aristas. Sin embargo, cuando intentamos orientar estas dos aristas para obtener el ciclo dirigido fallamos. Construiremos el lenguaje adecuado para poder encontrar las digráficas irreducibles que parecen no serlo.

**Definición 13.** *Dado un cuadrado (sin diagonales) dirigido, diremos que está bien orientado, si es isomorfo al producto de dos aristas dirigidas. Si un cuadrado sin diagonales no está bien orientado, diremos que está mal orientado. Dada una digráfica y una coloración de sus aristas, diremos que ésta es orientada si todo cuadrado policromático está bien orientado.*

En la figura 3.6 (pag. 57), vemos cuadrados bien orientados y mal orientados.

**Lema 16.** *Dada una digráfica  $D$ , una expresión  $\sigma$  de  $D$  como un producto de digráficas y la coloración de  $D$  inducida por  $\sim_\sigma$ . Tenemos que  $\sim_\sigma$  es orientada.*

*Demostración.* Tomemos un cuadrado policromático  $Q$  de  $D$ , pensemos en la gráfica subyacente de  $D$  con la coloración heredada. Por la propiedad cuadrado y la demostración del teorema 5, sabemos que los únicos cuadrados policromáticos son bicromáticos y sus vértices son de la forma  $v, v^i, v^j, v^{i,j}$  (la notación  $v^k$  denota  $(v)_j = (v^k)_j$  si y sólo si  $j \neq k$ ). Como la orientación de  $v$  a  $v^i$  debe de ser la misma que la de  $v^j$  a  $v^{i,j}$ , por diferir en la misma coordenada de la misma forma (es decir,  $(v)_i = (v^j)_i$  y  $(v^i)_i = (v^{i,j})_i$ ), se tiene que el cuadrado inducido por  $v, v^i, v^j, v^{i,j}$  es isomorfo a  $A_i \times A_j$ , donde  $A_k$  es la arista que se forma entre  $v$  y  $v^k$ . El isomorfismo es  $v \mapsto (v, v)$ ,  $v^i \mapsto (v_i, v)$ ,  $v^j \mapsto (v, v_j)$  y  $v^{i,j} \mapsto (v_i, v_j)$ .  $\square$

Como queremos rescatar la prueba del teorema de factorización única para gráficas, necesitamos que las propiedades que vamos añadiendo también se conserven bajo intersecciones. Dadas dos coloraciones  $C_1$  y  $C_2$  diremos que  $C_2$  extiende



a  $C_1$  si al pensarlas como relaciones de equivalencia se tiene que  $C_1 \subseteq C_2$ . Por ejemplo, si a cada natural  $n$  lo coloreamos con el color  $[n]_4$  (donde  $[n]_m$  denota el residuo que deja  $n$  al ser dividido por  $m$ ), a esta coloración la llamamos  $C_1$ , y a la coloración que a  $n$  le asigna  $[n]_2$  la llamamos  $C_2$ . Entonces  $C_2$  extenderá a  $C_1$ .

**Lema 17.** *La propiedad ser orientada para coloraciones se preserva bajo intersecciones y extensiones.*

*Demostración.* Empecemos con extensiones, tomemos una coloración orientada  $C_1$  y otra coloración  $C_2$  que la extienda. Tomemos un cuadrado policromático de  $C_2$ . Como es policromático en  $C_2$ , también es policromático en  $C_1$  y por ser  $C_1$  orientada, este cuadrado está bien orientado. De forma que cualquier cuadrado policromático de  $C_2$  está bien orientado.

Sigamos con intersecciones. Tomemos la intersección de una familia de coloraciones orientadas. Llamémosla  $I$ . Tomemos un cuadrado  $Q$  policromático para  $I$ . Como hay dos aristas que no se relacionan, debe de haber una coloración  $C_i$  de las intersectadas que no relaciona a estas dos aristas.  $Q$  es un cuadrado policromático para  $C_i$ , entonces  $Q$  debe de ser orientado.  $\square$

**Lema 18.** *Dada una digráfica  $D$ ,  $G$  su gráfica subyacente, y una coloración  $C$  de  $D$  que sea orientada, que cumpla la propiedad cuadrado en  $G$  y sea fuertemente convexa en  $G$ , existe una expresión  $\sigma$  de  $D$  como un producto de digráficas tal que  $\sim_\sigma = C$ . Cada factor de  $\sigma$  es isomorfo a las componentes conexas de los diversos colores de  $C$ .*

*Demostración.* Por el teorema 6 la gráfica subyacente  $G$  de  $D$ , bajo la coloración  $C$ , tiene una factorización  $\sigma^*$  con las propiedades deseadas. Como  $\sim_{\sigma^*} = C$ , podemos decir que  $\sigma^*$  es  $\prod_{i \in C} G_i$ . Lo que haremos es encontrar gráficas  $D_i$ , con  $i \in C$ , que tengan como gráficas subyacentes a  $G_i$  respectivamente y tomen la estructura de la digráfica. Para eso tomemos un vértice  $v$  de  $G$  (o de  $D$ ). Por el lema 7, sabemos que cada color de  $C$  tiene una arista que incide en  $v$ . Tomemos, por cada color  $i$  la única componente conexa de color  $i$  de  $G$  adyacente a  $v$ . Llamémoslas  $H_i$ . Como  $G_i$  es isomorfa a  $H_i$ , podemos definir a  $D_i$  como la digráfica inducida en  $D$  por esta componente en  $G$  de color  $i$ . Observemos que la gráfica subyacente de  $D_i$  será  $G_i$ . Definimos la expresión  $\sigma$  como  $\prod_{i \in C} D_i$  y llamamos a esta gráfica  $D^*$ . Por construcción, la gráfica subyacente de  $D^*$  es  $G$  y además la componente  $H_i$  de  $D$  es isomorfa a la componente  $H_i$  de  $D^*$  con la biyección natural de vértices que hay entre  $D$ ,  $G$  y  $D^*$ .

Demostraremos que esta biyección natural es un isomorfismo entre las digráficas  $D$  y  $D^*$ . Como  $D$  y  $D^*$  tienen la misma gráfica subyacente, sabemos qué arcos de  $D^*$  irán en arcos de  $D$  bajo la biyección natural de vértices. Lo único que ignoramos es si la orientación se preserva. Sin embargo, sabemos que la orientación se preserva para las aristas de las componentes  $H_i$ , y que la coloración  $C$  inicial de  $D$  coincide con la coloración  $D^*$ . Tomemos un color  $i$ , supongamos

### 3.2. TEOREMAS DE FACTORIZACIÓN ÚNICA PARA DIGRÁFICAS, ÓRDENES PARCIALES, Y POLITOPOS

que hay una componente  $J_i$  de  $i$ , que tiene al menos una arista  $e$  de  $D^*$  que bajo la biyección natural no preserva su orientación en  $D$ . Por conexidad podemos suponer que esta componente es adyacente a una componente  $K_i$  de  $i$  que bajo la biyección natural preserva todas las orientaciones. Por el lema 8, sabemos que a la arista  $e$  de  $J_i$  le corresponde una única arista  $f$  de  $K_i$  y que además esta correspondencia genera un cuadrado bicromático. Por hipótesis,  $f$  preserva su orientación bajo la biyección natural,  $e$  no, pero este cuadrado es bicromático bajo las dos coloraciones (pues las coloraciones son iguales). Observamos que este cuadrado no puede ser bien orientado para ambas orientaciones de  $e$  (la de  $D^*$  y la de  $D$ ). Por lo tanto, una de las coloraciones no es orientada. Pero hemos visto en el teorema 16 que las coloraciones inducidas por un producto son orientadas. Así,  $C$  es orientada en  $D^*$  y, por lo tanto,  $C$  no es orientada en  $D$ , lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis original. Entonces la biyección natural preserva orientaciones y  $D = \prod_{i \in C} D_i$ . Esta factorización induce a  $C$  y por construcción  $D_i$  es isomorfo a las componentes conexas  $H_i$ . Pero en un producto todas las componentes de un color son isomorfas.  $\square$

Tenemos de nuevo una asociación natural entre factorizaciones de digráficas y un tipo especial de coloraciones (las cuadradas, orientadas y fuertemente convexas). Como ser orientada se preserva al intersectar coloraciones, esto nos inducirá un teorema análogo al teorema 7, pues de igual manera podremos encontrar una coloración con estas propiedades de tamaño mínimo y esta representa una factorización prima única. La demostración del siguiente teorema es análoga a la del teorema 7, tomando a  $F$  como la familia de coloraciones ordenadas, fuertemente convexas y cuadradas.

**Teorema 8.** *Para toda digráfica conexa  $D$ , existe una única expresión de  $D$  como un producto cartesiano débil de digráficas idescomponibles.*

En lo que resta de esta sección nos dedicaremos a estudiar órdenes discretos. Como ya sabemos, todo orden discreto  $P$  tiene asociado una digráfica, su digráfica de Hasse  $H(P)$ . Además sabemos que dados dos órdenes  $P$  y  $Q$  se tiene que  $H(P \odot Q) = H(P) \square H(Q)$ , y en general,  $H(\prod_{i \in I} P_i) = \prod_{i \in I} H(P_i)$  cuando nuestro índice  $I$  es finito (para índices arbitrariamente grandes también será cierto, pero no es nuestra intención explorar este resultado, pues nuestro principal objeto de estudio son los politopos, que al tener rango finito siempre serán un producto finito de irreducibles).

Podemos considerar las digráficas que provienen de un orden discreto. Un teorema de factorización única para este tipo de digráficas automáticamente nos dará un teorema de factorización única para órdenes discretos, ya que la asociación entre estas estructuras constituye un isomorfismo de monoides, y los isomorfismos preservan factorización única.

En general no es cierto que dado un conjunto con un producto que admite factorización única en factores irreducibles, se tenga que cualquier subfamilia de objetos cerrada bajo el producto también tenga factorización única dentro

de la subfamilia. Por dar un ejemplo, tomemos el conjunto de los números naturales con el producto usual. Este tiene factorización única en irreducibles, pero en la subfamilia de los números pares, los números de la forma  $2i$  con  $i$  un número impar, serán irreducibles en esta familia, pues no se pueden expresar como producto de dos pares. Además el número 60 se puede expresar como  $6(10)$  y como  $2(30)$  lo cual nos da dos factorizaciones en irreducibles distintas. A continuación enunciaremos un principio de factorización que nos ayudará a evitar situaciones como ésta.

**Principio de factorización.** *Supongamos que tenemos una familia  $F$  y un producto sobre ellos que tenga un principio de factorización única. Si tomamos una subfamilia  $G$  con  $G \subseteq F$ , podemos asegurar que la familia  $G$  tendrá un principio de factorización única en  $G$ , si para cada objeto  $O \in G$  y cada factor  $H \in F$  que divida a  $O$  (en el sentido de que exista  $H_2 \in F$  tal que  $O = H \cdot H_2$ ), se tiene que  $H \in G$ .*

*Demostración.* Si tomamos un elemento irreducible de  $G$ , se tendrá que este elemento será irreducible en  $F$ . De no ser así, se factorizaría en  $F$  y cada uno de los factores estaría en  $G$  por hipótesis. Esto demuestra que no es irreducible en  $G$ .

Si tomamos un objeto de  $G$ , por hipótesis tiene una factorización prima en  $F$ , pero ésta misma es una factorización en  $G$ . Así, todo elemento de  $G$  tiene al menos una factorización irreducible; ésta es única, pues de tener dos diferentes tendría dos diferentes en  $F$ , dado que aquí también serían factorizaciones irreducibles, por lo que demostramos inicialmente.  $\square$

Llamaremos a una subfamilia  $G$  *factorizable*, si cumple las condiciones del principio de factorización. Diremos a su vez que una propiedad es factorizable si la familia de los elementos que cumplen la propiedad es factorizable. Lo que nos dedicaremos a probar de ahora en adelante, paso a paso, es que las familias  $Poly^i$ , para  $i = 1, \dots, 4$  son factorizables. Una observación sencilla es que los factores de una digráfica son subdigráficas de la misma. Así, al probar que una propiedad se preserva bajo subdigráficas, automáticamente se prueba que es factorizable para las familias que nos conciernen (pues la propiedad la tendrán los factores, al pensarlos como subdigráficas).

**Lema 19.** *Dado un preorden  $D$  y una subdigráfica conexa  $S$  de  $D$  (recordemos que estamos tomando conexidad sobre las gráficas subyacentes), se tiene que  $S$  es también un preorden.*

*Demostración.* Supongamos que  $S$  no es un preorden. Hay dos opciones: o que tenga un ciclo dirigido, en cuyo caso  $D$  también lo tendría; o que tenga un arco falso y de nuevo,  $D$  lo tendría.  $\square$

**Teorema 9.** *La familia de preordenes discretos conexos junto con el producto cartesiano tiene factorización única.*

### 3.2. TEOREMAS DE FACTORIZACIÓN ÚNICA PARA DIGRÁFICAS, ÓRDENES PARCIALES, Y POLITOPOS

*Demostración.* Como la familia de preórdenes discretos conexos es una subfamilia de digráficas conexas, por el principio de factorización, basta con demostrar que esta familia es factorizable. Pero hemos visto que ser preorden se preserva bajo subgráficas.  $\square$

A continuación veremos muchas propiedades factorizables en el producto cartesiano de órdenes parciales. Las hemos organizado modularmente para poder aclarar las dependencias entre una afirmación y otra.

**Proposición 10.** *Ser un orden graduado es factorizable en el producto cartesiano de órdenes parciales discretos.*

*Demostración.* Tomemos un orden  $P$  que sea graduado, y un orden  $F$  con  $P = F \odot T$ . Tomando un punto en  $P$  y fijando su segunda coordenada de este producto podemos pensar a  $F$  como un suborden de  $P$ . Tomando la función de grado  $\rho$  de  $P$  restringida a  $F$ , podemos ver que  $x < y$  en  $F$  implica que  $\rho(x) < \rho(y)$ , pues así era en  $P$  por ser graduado. Si  $x$  cubre a  $y$  en  $F$ , también lo cubre en  $P$ , pues  $x$  y  $y$  comparten su segunda coordenada, cualquier elemento entre ellos está obligado a tener la misma segunda coordenada y por ende estar en  $F$ . Al cubrir  $x$  a  $y$  en  $P$ , se tiene que  $\rho(x) = \rho(y) + 1$ . Mostrando que la restricción de la función de grado  $\rho$  a  $F$  también es una función de rango y de grado en  $F$ .  $\square$

**Proposición 11.** *Tener mínimo y tener máximo son ambas propiedades factorizables en el producto cartesiano de órdenes parciales discretos.*

*Demostración.* El mínimo de  $P$  será mínimo en la copia del factor  $F$  que tenga a este elemento. Análogamente con el máximo.  $\square$

**Proposición 12.** *Tener rango finito es factorizable en el producto de órdenes parciales discretos.*

*Demostración.* Como un factor es a su vez un suborden que por la proposición 10 es graduado bajo la misma función de grado, si la función grado está acotada en el caso del producto, también lo estará en cada uno de los factores.  $\square$

Empezaremos a restringir cada vez más nuestra familia de estudio. En este momento restringiremos nuestras factorizaciones a los órdenes con rango finito, pues todos los politopos tienen rango finito.

**Proposición 13.** *Tener banderas equipotentes es factorizable bajo el producto cartesiano débil de órdenes discretos graduados finitos.*

*Demostración.* Sea  $P$  un orden discreto graduado finito, y  $P = F \odot T$  una factorización de  $P$ . Tomemos un elemento minimal  $m$  de  $P$ . Al fijar la segunda coordenada de  $m$ , digamos  $m_0$ , tenemos un orden isomorfo a  $F$ . Tomemos dos banderas distintas de  $F \odot \{m_0\}$ , digamos  $B_1$  y  $B_2$ , y sean  $M_1$  y  $M_2$  los elementos maximales de  $B_1$  y  $B_2$  respectivamente. Extendamos la bandera  $B_1$  a una bandera de  $P$  y llamémosla  $B_1^*$ . Al ser la primera coordenada de  $M_1$  maximal en  $F$ , los términos nuevos de la bandera  $B_1^*$  compartirán ésta coordenada con  $M_1$ . Lo único que hemos hecho es concatenar una bandera de  $F$  con

una de  $T$ , llamémosla  $B_T$ . Concatenemos a  $B_T$ , con la bandera  $B_2$ , (como la segunda coordenada de  $M_2$  es la misma que la segunda coordenada de  $m$  y que de  $M_1$ , podemos concatenarlas). Llamando  $B_2^*$  a esta concatenación, podemos observar que  $B_2^*$  y  $B_1^*$  son ambas banderas de  $P$ . Así,  $|B_1^*| = |B_2^*|$  y, como  $|B_i^*| = |B_T| + |B_i|$ , tenemos que  $|B_1| = |B_2|$ . Esto prueba que las banderas del factor  $F$  son equipotentes.  $\square$

**Proposición 14.** *Ser fuertemente conexo es factorizable en el producto cartesiano de órdenes discretos.*

*Demostración.* Tomemos un orden  $P$  y una factorización  $P = F \odot T$ , todos con las características de la afirmación. Lo primero que demostraremos es que los segmentos (acotados, superiores e inferiores) de  $F$  son isomorfos a algún segmento de  $P$ . Tomemos un segmento superior  $[a, \infty]$  de  $F$ , tomemos un elemento maximal  $M \in T$ . El segmento  $[a, \infty] \subseteq F$  es isomorfo al segmento  $[(a, M), \infty] = \{x \in P | (a, M) \leq x\} = \{(b, M) \in P | a \leq b\}$ , donde la última igualdad se debe a que  $M$  es maximal. Haciendo el análisis análogo para segmentos inferiores, y escogiendo respectivamente un elemento minimal  $m \in T$ , obtendremos que el segmento  $[\infty, a]$  será isomorfo al segmento  $[\infty, (a, m)]$ . Por último, un segmento de la forma  $[a, b] \subseteq F$  será isomorfo a un segmento de la forma  $[(a, x), (b, x)]$ , donde  $x$  es un elemento arbitrario de  $T$ .

Hemos probado que cualquier segmento de  $F$  es conexo como orden, pues  $P$  es fuertemente conexo y tenemos un isomorfismo explícito entre los segmentos de  $F$  y algunos segmentos de  $P$ . Veamos ahora que  $F$  es conexo per se. Si  $F$  tiene un mínimo  $m$ , automáticamente puede ser visto como un segmento inferior ( $F = [m, \infty]$ ) y, por lo tanto, es isomorfo a un segmento de  $P$ . Esto muestra su conexidad. El argumento en caso de tener máximo es análogo. Si  $F$  no tiene ni máximo ni mínimo, su conexidad como orden discreto coincide con la conexidad de su gráfica de Hasse. Si  $F$  fuera disconexo,  $H(F)$  también lo sería (recordemos que esto no sucede en caso de tener máximo o mínimo), así  $H(P) = H(F) \square H(T)$  sería disconexa y, por lo tanto,  $P$  sería disconexo contradiciendo la hipótesis.  $\square$

**Proposición 15.** *La propiedad  $D^1$  es factorizable en el producto cartesiano de órdenes parciales graduados de rango finito.*

*Demostración.* Sea  $P = F \odot T$  como en las afirmaciones anteriores. Pensemos a  $F$  como el suborden inducido por los elementos de  $P$  al fijar su segunda coordenada. Tomemos dos elementos  $x$  y  $y$  de  $F$  con  $x \triangleleft^2 y$ . Por tener  $P$  la propiedad  $D^1$ , existen exactamente dos elementos  $z_1, z_2$  con  $x < z_1, z_2 < y$ . Como  $x$  y  $y$  tienen la misma segunda coordenada, los elementos  $z_i$  están obligados a su vez a tener la misma segunda coordenada. Por eso  $z_i \in F$  mostrando que también en  $F$  hay exactamente dos elementos entre  $x$  y  $y$ . Así,  $F$  también tiene la propiedad  $D^1$ .  $\square$

**Proposición 16.** *La propiedad  $D^2$  y  $D^3$  son factorizables en el producto cartesiano de órdenes parciales graduados de rango finito.*

### 3.2. TEOREMAS DE FACTORIZACIÓN ÚNICA PARA DIGRÁFICAS, ÓRDENES PARCIALES, Y POLITOPOS

*Demostración.* Probaremos únicamente  $D^2$ , pues la otra demostración es análoga. Sea  $P = F \odot T$  como en las proposiciones anteriores. Pensemos a  $F$  como el suborden inducido al fijar su segunda coordenada de un elemento minimal  $m$ , de  $P$ . Como  $P$  al cumplir  $D^2$  cumple  $D^1$ , tenemos que  $F$  cumple  $D^1$  por la afirmación 15. Por lo anterior, sólo debemos preocuparnos por la condición diamante en el falso mínimo, llamémoslo  $s$ .  $P$  cumple la condición diamante en el falso mínimo, si tomamos un elemento  $x \in F$  tal que  $s \prec^2 x$  tendremos que  $[s, x]$  es un diamante en  $P$ . Además,  $y \leq x$  automáticamente implica que  $y \in F$ , ya que la segunda coordenada de  $y$  está obligada a ser  $m$ , por ser la segunda coordenada de  $x$  un elemento minimal de  $T$ . Esto muestra que la condición diamante se cumple al agregar el falso mínimo al orden  $F$ .  $\square$

**Teorema de factorización única para politopos abstractos 1.** *Para  $i = 1, 2, 3, 4$  se tiene que  $Poly^i$  tiene factorización única bajo el producto cartesiano de órdenes.*

*Demostración.* Mezclando las afirmaciones requeridas según el índice  $i$  con el que queramos trabajar, y usando el principio de factorización, podemos concluir que las familias  $Poly^i$  son factorizables de entre los órdenes discretos. Y por tanto tienen un principio de factorización única.  $\square$



## Capítulo 4

# Grupos de automorfismos

### 4.1. Grupos de automorfismos

En esta sección estudiaremos los grupos de automorfismos de los productos de digráficas conexas. Para eso tomaremos una descomposición de la gráfica como un producto de primos y caracterizaremos al grupo de automorfismos en términos de los respectivos grupos de los primos. Como el propósito principal de esta tesis es discutir ciertas construcciones de politopos abstractos, y éstos son de rango finito, nos concentraremos en caracterizar el grupo de automorfismos de productos finitos de digráficas. Eso será suficiente para caracterizar los grupos de automorfismos de los politopos.

Nuestra caracterización comenzará por encontrar otra digráfica (no necesariamente conexa en este caso) que tenga el mismo grupo de automorfismos que el producto.

**Definición 14.** *Dada una familia de digráficas  $D_i$ , con  $i \in I$ , definimos la suma de las gráficas,  $\sum_{i \in I} D_i$ , como  $V(\sum_{i \in I} D_i) = \{(v, i) | v \in D_i, i \in I\}$  y  $[(v, i), (u, j)] \in E(\sum_{i \in I} D_i)$  si y sólo si  $i = j$  y  $(v, u) \in E(D_i)$ .*

En la figura 4.1 (pag. 66) ilustramos sumas de gráficas y sus respectivos productos.



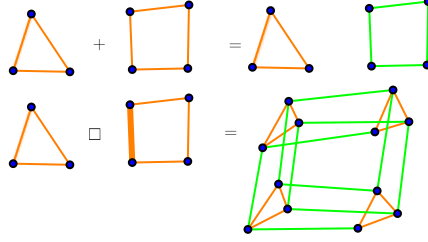


Figura 4.1: Suma y producto de un triángulo con un cuadrado

Dada una factorización  $\sigma$  de una digráfica  $D$ , diremos que  $\sigma$  es *primorde* si la coloración que esta factorización induce cumple con que para cualquier automorfismo  $g \in \text{Aut}(D)$  se satisface  $\sim_\sigma = g(\sim_\sigma)$ . Es decir, todo automorfismo manda clases cromáticas en clases cromáticas. Hay dos tipos especiales de coloraciones primordes con las que trabajaremos en adelante: la factorización en primos (todos los factores son primos), y las factorizaciones en primos relativos (pedimos que cualesquiera dos factores de la factorización que tomemos no compartan factores).

**Lema 20.** *La factorización en primos y las factorizaciones en primos relativos son primordes.*

*Demostración.* Para demostrar que la factorización en primos es primorde, basta con observar que  $\sim_\sigma \neq g(\sim_\sigma)$  implica inmediatamente que  $\sim_\sigma \cap g(\sim_\sigma)$  es una coloración estrictamente menor, pero la factorización en primos induce una coloración mínima. Para probar que las factorizaciones en primos relativos son primordes, tomemos una factorización  $\sigma$  y un elemento  $g \in \text{Aut}(D)$  tal que  $\sim_\sigma \neq g(\sim_\sigma)$ . Al ser diferentes estas relaciones, hay un par de aristas  $e$  y  $f$  tales que  $e \sim_\sigma f$ , pero  $g(e) \not\sim_\sigma g(f)$ . Sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que  $f \not\sim_\sigma g(f)$  (de no ser así tendríamos que  $e \not\sim_\sigma g(e)$ ). La relación  $\sim_\tau = \sim_\sigma \cap g(\sim_\sigma)$  cumple que  $e \not\sim_\tau f$ . Si  $A$  es la componente conexa monocromática de  $f$  en  $\sim_\sigma$  y  $R$  es la componente conexa monocromática de  $g(f)$  en  $\sim_\sigma$ , tendremos que  $g^{-1}(R)$  será la componente conexa monocromática de  $f$  en  $g(\sim_\sigma)$ , y  $V = A \cap g^{-1}(R)$  será la componente conexa monocromática de  $f$  en  $\sim_\tau$ . Por ser  $A$  y  $R$  componentes conexas monocromáticas que no se relacionan en  $\sim_\sigma$  son isomorfas a distintos factores de la factorización  $\sigma$ . Al ser  $V$  una componente conexa monocromática de una coloración cuadrada, convexa y orientada, y dado que  $V \subseteq A$ , tenemos que  $V$  corresponde a un factor de  $A$ , análogamente  $V$  será isomorfo a un factor de  $g^{-1}(R)$ . Como  $g^{-1}(R)$  es isomorfo a  $R$ , hemos encontrado un factor no trivial  $V$ , común a  $R$  y a  $A$ , lo cual prueba que esta factorización no era en primos relativos.  $\square$

Aunque estas factorizaciones no sean las únicas primordes, son las únicas que

usaremos. Ya que tenemos la noción primoide, demostremos un hecho importante sobre estas coloraciones. La siguiente prueba es una excelente ilustración del poder y naturalidad que tiene el lenguaje de acciones en la combinatoria algebraica.

**Teorema 10.** *Dada una digráfica conexa  $D$  y una factorización primoide  $\sigma = \prod_{i=1}^n D_i$  de  $D$  en digráficas, el grupo de automorfismos de  $D$  es isomorfo al grupo de automorfismos de la suma  $\sum_{i=1}^n D_i$ .*

*Demostración.* Sean  $P = \prod_{i=1}^n D_i$  y  $S = \sum_{i=1}^n D_i$ . Podemos pensar a los vértices de  $\prod_{i=1}^n D_i$  como conjuntos de pares ordenados de la forma  $(v, i)$  con  $v \in D_i$ . (Por ejemplo:  $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  lo podemos pensar como el conjunto  $V = \{(v_i, i) | i = 1, 2, \dots, n\}$ ). Estamos pensando a los elementos de  $P$  como subconjuntos de los elementos de  $S$  con la cualidad de que la intersección de estos subconjuntos con cualquier sumando de  $S$  tiene exactamente un elemento. A lo largo de la prueba denotaremos a los elementos de  $Aut(P) = Aut(D)$  con  $g_p$  y a los elementos de  $Aut(S) = Aut(\sum_{i \in I} D_i)$  por  $g_s$ . Haremos una asociación entre las  $g_s$  y las  $g_p$ . Dada una  $g_s$  tenemos que ésta tiene una forma natural de actuar en los elementos de  $P$ . Como estamos pensando a los elementos de  $P$  como subconjuntos de  $S$ ,  $g_s$  puede actuar elemento por elemento, es decir,  $g_s(V) = \{g_s[(v_i, i)] | (v_i, i) \in V\}$ . Veremos que esta permutación de los elementos de  $P$  es un elemento de  $Aut(P)$ .

Primero veamos que para todo  $V \in P$  se tiene que  $g_s(V) \in P$ . Como  $g_s$  es un automorfismo de  $S$ , manda componentes conexas en componentes conexas de forma biyectiva (recordemos que cada  $D_i$  era conexa, así las componentes conexas de  $S$  son simplemente sus sumandos). Entonces, al aplicar  $g_s$  a un subconjunto de vértices de  $S$  se conserva el número de componentes que toca. Como los elementos de  $P$  son los subconjuntos de  $S$  con  $n$  elementos que tocan a cada una de las  $n$  componentes de  $S$ , la acción  $g_s$  sobre uno de ellos dejará un subconjunto de  $S$  con  $n$  elementos todos ellos en diferentes componentes. Por lo anterior, el nuevo subconjunto de  $S$  tendrá intersección no vacía con cada una de las  $n$  componentes. Esto muestra que  $V \in P$  implica que  $g_s(V) \in P$ .

Ya sabemos que  $Aut(S)$  es una acción en la potencia  $\wp(S)$ . Como  $P \subset \wp(S)$ , y como ya demostramos que puntos en  $P$  permanecen en  $P$  bajo los elementos  $g_s \in Aut(S)$ , tenemos que  $Aut(S)$  actúa de forma natural en  $P$ . Demostremos ahora que cada  $g_s$  es un morfismo de digráficas. Tomemos  $V$  y  $W$  en  $P$  con  $W \rightarrow V$  (en el contexto de digráficas por  $W \rightarrow V$  nos referimos a que nuestra digráfica tenga el arco  $(W, V)$  entre sus arcos). Por la definición de adyacencia en un producto,  $V$  y  $W$  difieren en una coordenada, digamos  $i$ . Además  $(w_i, i) \rightarrow (v_i, i)$  se debe satisfacer en la gráfica  $D_i$ . Bajo  $g_s$  obtendremos dos conjuntos ( $g_s(V)$  y  $g_s(W)$ ) que tengan las coordenadas  $j \neq i$  iguales (es decir  $v_j = w_j$  para  $j \neq i$ ) y, como  $g_s$  es un automorfismo de  $S$ , tenemos que  $g_s(w_i) \rightarrow g_s(v_i)$ . Lo anterior muestra que  $g_s$  también es un morfismo de  $P$ . Como el mismo argumento es aplicable a  $(g_s)^{-1}$  y  $g_s \circ (g_s)^{-1}$  es la identidad, tenemos un morfismo que tiene por función inversa a otro morfismo, esto es suf-

ciente para concluir que  $g_s$  es un automorfismo. La función  $\phi : Aut(S) \rightarrow Aut(P)$  que a cada  $g_s$  le asocia su acción en  $P$  es un morfismo por la asociatividad de las acciones. Además es inyectiva, pues si suponemos que  $g_s(V) = V$  para todo  $V \in P$ , tomamos  $(v_i, i) \in S$  y  $V_1, V_2 \in P$  tales que  $V_1 \cap V_2 = \{(v_i, i)\}$ , tendremos que  $g_s(v_i, i) \in g_s(V_1) \cap g_s(V_2) = V_1 \cap V_2$ , lo cual muestra que  $g_s(v_i, i) = (v_i, i)$  para todo vértice y así,  $g_s$  es la identidad en  $Aut(S)$ . Para probar que la asignación  $\phi$  es un isomorfismo de grupos basta con probar que es suprayectiva.

Para ver que esta asignación es suprayectiva, tomaremos un elemento  $g_p \in G_P$  y encontraremos el  $g_s$  del que proviene. Recordemos aquí que pedimos que nuestra factorización fuera primoide, pues esta hipótesis es de suma importancia para obtener el resultado. Dado un elemento  $g_p \in Aut(P)$ , definiremos una función  $f : S \rightarrow S$  de la siguiente manera: dado un elemento  $a \in S$  (digamos  $a = (v_i, i)$ ) tomemos un elemento  $V \in P$  con  $a \in V$ . Sea  $W \in P$  con  $a \notin W$  y  $W$  adyacente a  $V$ . Tenemos que  $g_p(V) \setminus g_p(W)$  consta de exactamente un elemento pues  $g_p(V)$  y  $g_p(W)$  son adyacentes. Ese lo nombraremos  $f(a)$ . Probemos que esta función está bien definida.

Esta función no depende de  $W$ , pues dadas dos  $W_0$  y  $W_1$  ambas adyacentes a  $V$  y con  $a \notin W_0, W_1$ , se tiene que las aristas  $(V, W_0)$  y  $(V, W_1)$  se encuentran en la misma clase cromática (la de color  $i$ , pues  $a = (v_i, i)$ ). Por ende, bajo  $g_p$  las aristas  $(V, W_0)$  y  $(V, W_1)$  estarán en la misma clase cromática (esto se debe a que la factorización es primoide, de hecho si la factorización no fuera primoide, la función  $f$  que estamos construyendo podría no estar bien definida). Así, la diferencia con  $g_p(V)$  se mantiene en una clase cromática. En ese caso hay un único elemento de  $g_p(V)$  correspondiente a esa clase cromática. Nos falta ver ahora porque  $f(a)$  no depende de la elección de  $V$  para demostrar que esta función esté bien definida. Supongamos ahora que la asignación  $f(a)$  dependió de la elección de  $V$ . Sin pérdida de la generalidad, podemos asumir que existen  $V_0$  y  $V_1$  adyacentes con  $a \in V_0, V_1$ , pero  $f(a)_0$  según  $V_0$ , es distinto de  $f(a)_1$  según  $V_1$ . Tomemos  $W_0$  y  $W_1$  adyacentes a  $V_0$  y  $V_1$  respectivamente, con  $a \notin W_0 \cup W_1$  y con  $W_0$  adyacente a  $W_1$ . Como estos cuatro puntos forman un cuadrado bicromático, bajo  $g_p$  se irán a un cuadrado bicromático (esta afirmación usa nuevamente el hecho de que nuestra factorización sea primoide). Sin embargo, esto nos da  $f(a)_0 = g_p(V_0) \setminus g_p(W_0) = g_p(V_1) \setminus g_p(W_1) = f(a)_1$  por la proposición 5.

Ya que tenemos que esta función está bien definida, podemos pensar que  $g_p(V) = f[V]$  (donde  $f[V] = \{f(a) | a \in V\}$ ) pues, por construcción,  $a \in V$  implica que  $f(a) \in g_p(V)$ , esto prueba  $f[V] \subseteq g_p(V)$ . Sabemos además que  $f$  tiene que ser una biyección de vértices de  $S$ , pues la función asociada a  $g_p^{-1}$  inducirá la inversa de  $f$ . Como  $f[V] \subseteq g_p(V)$  y  $|V| = |f[V]| = |g_p(V)| = n$ , tenemos que  $f[V] = g_p(V)$ .

Veamos que  $f$  también es morfismo de digráficas. Tomemos  $a, b \in S$  con  $a \rightarrow b$  y un conjunto  $V \in P$  con  $a \in V$ , tomemos  $W = (V \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ . Por construc-

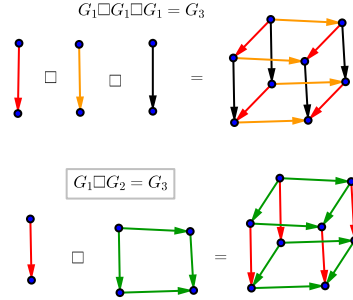


Figura 4.2: Coloraciones primoide y no primoide

ción  $V \rightarrow W$ . Ahora  $g_p(V) \rightarrow g_p(W)$ , por ser  $g_p$  un automorfismo de  $P$ . Por tanto,  $[g_p(V) \setminus g_p(W)] \rightarrow [g_p(W) \setminus g_p(V)]$  por las definiciones de adyacencia en el producto. Pero estos conjuntos son  $f(a)$  y  $f(b)$  respectivamente. Tenemos entonces  $f(a) \rightarrow f(b)$ , así  $f \in \text{Aut}(S)$ . Siendo  $f$  un elemento de  $\text{Aut}(S)$ , podemos considerar su efecto en los elementos de  $P$  bajo la acción natural de  $\text{Aut}(S)$ . Si  $V \in P$ , tenemos  $f(V) = f[V] = \{f(s) | s \in V\} = g_p(V)$ , mostrando que  $g_p$  proviene de la acción natural de un elemento de  $\text{Aut}(S)$  (explícitamente viene de  $f$ ). Por ende la asociación que mencionamos es suprayectiva, y por tanto tenemos un isomorfismo de grupos.  $\square$

Para darle claridad a la prueba anterior, expondremos un ejemplo de una factorización no primoide de una digráfica. Sea  $G_1$  la digráfica con  $V(G_1) = \{1, 2\}$  y  $E(G_1) = \{(1, 2)\}$ . Consideremos  $G_2 = G_1 \square G_1$ , y  $G_3 = G_1 \square G_2$ . Por la asociatividad del producto cartesiano de digráficas, tendremos que  $G_3 = G_1 \square G_1 \square G_1$ , de hecho esta última factorización será primoide y así  $\text{Aut}(G_3) = \text{Aut}(G_1 + G_1 + G_1) = S_3$  por el teorema pasado. Sin embargo, la factorización  $G_3 = G_2 \square G_1$  no es primoide. Los elementos de  $G_3$  en esta factorización tienen la forma  $((i, j), k)$  con  $i, j, k \in \{1, 2\}$ , y el mapa que manda al elemento  $((i, j), k)$  a  $((k, j), i)$  será un automorfismo del producto que no respeta clases cromáticas. La suma asociada a la factorización es  $G_2 + G_1$  y  $\text{Aut}(G_2 + G_1) = S_2$  que es distinto a  $S_3$ . Esto muestra que nuestra hipótesis era necesaria. En la figura 4.2 (pag. 69) ilustramos ambas factorizaciones de  $G_3$ .

Teniendo este nuevo objeto combinatorio (la suma de digráficas), los cálculos necesarios para encontrar el grupo de automorfismos pueden hacerse con absoluta intuición. Para poder dar una descripción formal del objeto es necesario el lenguaje de productos semidirectos.

**Teorema 11.** *El grupo de automorfismos de una suma finita de digráficas conexas  $\text{Aut}(\sum_{i=1}^n D_i)$  es isomorfo a un grupo de la forma  $H \rtimes K$  con  $H$  el producto  $\prod_{i=1}^n \text{Aut}(D_i)$  y  $K = \prod_D S_{n(D)}$  con  $n(D) = |\{i | D_i \simeq D\}|$*

*Demostración.* Llamemos  $\Gamma_i = \text{Aut}(D_i)$  al grupo de automorfismos de cada sumando, y denotemos por  $S$  a  $\sum_{i=1}^n D_i$ . Notemos que  $\prod_{i=1}^n \Gamma_i$  es un subgrupo de  $\text{Aut}(S)$  si lo dejamos actuar coordenada a coordenada. Además, si tomamos un elemento  $g \in \text{Aut}(S)$  que no mueva sumandos de  $S$  (es decir  $g(D_i) = D_i$  para toda  $i$ ), el elemento  $g$  restringido a cada  $D_i$  será un automorfismo de  $D_i$ . La restricción de  $g$  a  $D_i$  es un elemento de  $\Gamma_i$ , y  $g$  es un elemento de  $\prod_{i=1}^n \Gamma_i$ . Llamemos  $H$  a  $\prod_{i=1}^n \Gamma_i$ .

Obsrvemos que  $H \leq \text{Aut}(S)$ . Para demostrarlo tomemos  $h \in H$ , un elemento  $g \in \text{Aut}(S)$  y un elemento  $x \in S$  en una componente  $i$ . Si  $g(x)$  está en una componente  $j$ , por la forma de  $h$ , se tiene que  $h(g(x))$  está en la misma componente  $j$ . Dado que  $g^{-1}$  es la inversa de  $g$ , todo elemento de la componente  $j$  irá a un elemento de la componente  $i$ . Así  $g^{-1}(h(g(x)))$  está en la componente  $i$  mostrando que  $g^{-1}hg \in H$ . Como estamos pensando a los elementos de  $S$  como pares ordenados  $(v, i)$  con  $v \in D_i$ , tenemos que  $H$  sólo actúa sobre la primera coordenada. Si tenemos primos isomorfos en nuestra suma, podemos pensar que son isomorfos bajo la identidad y que en lo único que difieren es en su segunda coordenada. Consideremos  $K$  el subgrupo de  $\text{Aut}(S)$  que únicamente permuta primos bajo la identidad, es decir, si  $k \in K$ , entonces existe  $\hat{k}$  una permutación de  $\{1, \dots, n\}$  tal que  $k(v, i) = (v, \hat{k}(i))$  y  $D_i = D_{\hat{k}(i)}$ , para toda  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Este grupo, por construcción, sólo afecta a la segunda coordenada de algunos de los elementos de  $S$ . Por esta razón  $K \cap H = \{id\}$ . Además  $\text{Aut}(S) = KH$ . Lo último se debe a que para cualquier elemento  $g \in \text{Aut}(S)$ , podemos considerar un elemento  $k \in K$  de forma que si la componente  $i$  fue a dar a la componente  $j$  bajo  $g$ , entonces  $k$  mande a la componente  $j$  a la componente  $i$ . Bajo esta construcción  $kg \in H$  y  $g = k^{-1}h$  mostrando  $\text{Aut}(S) = KH$ . Esto nos da  $\text{Aut}(S) = H \rtimes K$ . Naturalmente  $K$  es isomorfo al producto  $\prod_D S_{n(D)}$  de grupos simétricos, donde  $n(D)$  es el número de factores isomorfos a la digráfica  $D$ .  $\square$

Tenemos ahora un teorema de automorfismos sobre productos finitos de digráficas. Notemos que el grupo de automorfismos de un orden discreto y su respectiva gráfica de Hasse son iguales,  $\text{Aut}(Q) = \text{Aut}(H(Q))$ . Esto es consecuencia de que  $a \leq b$  en  $Q$  si y sólo si existe una trayectoria dirigida de  $a$  a  $b$  en  $H(Q)$ , y los respectivos grupos preservan incidencia y trayectorias dirigidas.

Combinando estos resultados tendremos un teorema de automorfismos para el producto finito de órdenes discretos. En particular tendremos caracterizados los automorfismos de productos de politopos. Es decir, si buscamos el grupo de automorfismos de un politopo, basta con encontrar los grupos de automorfismos de sus primos.

**Corolario 1.** *Sea  $P$  un politopo en  $\text{Poly}^i$ , para  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , y sea  $P = \prod_{i=1}^n P_i^{m_i}$  su factorización prima. El grupo de automorfismos de  $P$  es:*

$$\text{Aut}(P) = \prod_{i=1}^n (\text{Aut}(P_i)^{m_i} \rtimes S_{m_i}).$$

## 4.2. Órbitas y banderas

En la sección pasada determinamos el grupo de automorfismos de un producto buscando el grupo de automorfismos de la suma. Lo que haremos en esta sección es entender la acción del grupo de automorfismos en las banderas del producto de un orden parcial. Para eso nos apoyaremos de otro objeto combinatorio, “las banderas” de la suma de órdenes parciales (la suma de órdenes parciales es simplemente, como en digráficas, la unión disjunta de ellos). En la sección pasada probamos que el grupo de automorfismos de una suma de digráficas  $S = \sum_{i=1}^n D_i$  se puede ver como el producto semidirecto de dos grupos,  $Aut(S) = H \rtimes K$ , con  $H = \prod_{i=1}^n G_i$ ,  $G_i = Aut(D_i)$ , y  $K = \prod_D S_n(D)$  donde  $n(D) = |\{i | D_i \cong D\}|$ . Por la similitud de los órdenes parciales discretos con las digráficas esta descomposición también se dará para los grupos de automorfismos de sumas de órdenes parciales discretos. A lo largo de esta sección utilizaremos esta descomposición de  $Aut(S)$ , y tomaremos prestada la notación.

**Definición 15.** *Dada la suma de  $n$  órdenes graduados, conexos, de rango finito, con banderas equipotentes, definiremos las banderas de la suma de ellos como un par ordenado con primera entrada, un conjunto de  $n$  pares ordenados (exactamente uno por cada sumando)  $(b_i, i)$  con  $b_i$  una bandera del respectivo orden  $i$ . Como segunda entrada tendrá una sucesión de colores (como el definido en el capítulo dos, simplemente es una sucesión con contradominio un conjunto preestablecido de colores) que tenga por longitud la suma de las longitudes de las banderas  $b_i$  y por colores los índices de la suma. Pediremos adicionalmente que el número de veces que aparece el color  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  en la sucesión de colores sea exactamente la altura de las banderas del sumando  $i$ , es decir, la altura de  $b_i$ .*

En la figura 4.3 (pag. 72) mostramos algunas banderas de sumas.

Hay una forma natural en que el grupo de automorfismos de la suma de órdenes parciales discretos  $S = \sum_{i=1}^n P_i$  actúa en las banderas de la suma. Utilizando notación de la sección anterior, cualquier elemento  $g$  del grupo se puede descomponer en  $hk$ , con  $h \in H$  y  $k \in K$ . Tendremos que  $h$  moverá a los elementos del conjunto de  $n$  coordenadas actuando como:  $h(b_i, i) = (h(b_i), i)$ . Por otro lado tendremos que  $k$  actuará tanto en la segunda coordenada de los conjuntos (es decir en la segunda coordenada de los elementos de la primera coordenada de la bandera de la suma) como en la segunda coordenada de la bandera de la suma. Permutará los mismos colores de los sumandos que permuta en la suma. Es decir,  $k(b_i, i) = (b_i, \hat{k}(i))$  y si  $T = i_0, i_1, \dots, i_m$  era el patrón (o sucesión) de colores de la bandera tenemos que la acción de  $k$  sobre ésta será  $k(T) = \hat{k}(i_0), \hat{k}(i_1), \dots, \hat{k}(i_m)$ . En general la acción de un elemento  $g = hk$  sobre un patrón de colores  $T$  será  $g(T) = k(T)$ .

Podemos considerar ahora la acción que tiene  $Aut(S)$  sobre las banderas del producto  $P = \prod_{i=1}^n P_i$ . A lo largo de esta sección  $S$  denotará una suma de órdenes graduados, conexos, de rango finito y con banderas equipotentes,  $P$  denotará el producto de los mismos,  $B_S$  denotará el conjunto de banderas de la

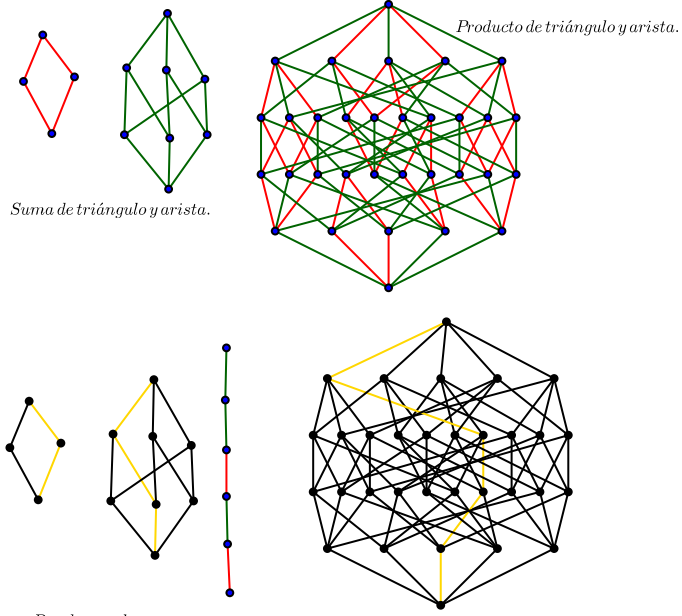


Figura 4.3: Suma y producto de un triángulo en  $Poly^1$  con una arista en  $Poly^1$ , y banderas correspondientes en la suma y el producto

suma  $S$  y  $B_P$  denotará el conjunto de banderas del producto  $P$ .

El siguiente lema identifica las acciones sobre estos dos objetos combinatorios, usaremos nuevamente muchas nociones de acciones y notación de este lenguaje. Básicamente la idea de todo lo subsecuente es darse cuenta de que queremos describir a las banderas de un producto como el producto de banderas en los factores, sin embargo, podemos describir a más de una bandera de esa forma, y por eso necesitamos introducir el patrón de colores, que nos dice en qué orden fuimos bajando dentro de este producto.

**Lema 21.** *Tomemos dos órdenes graduados, conexos, de rango finito, con banderas equipotentes  $R$  y  $Q$ . Sea  $P = R \odot Q$  y  $S = R + Q$ . Si  $R$  y  $Q$  son primos relativos, entonces la acción natural del grupo de automorfismos  $Aut(S)$  en  $B_P$  es isomorfa a la acción de  $Aut(S)$  en  $B_S$ .*

*Demostración.* Al ser  $R$  y  $Q$  primos relativos, el grupo de automorfismos  $Aut(P)$  conserva clases cromáticas (pensando la coloración en las respectivas gráficas de Hasse  $H(P) = H(R) \square H(Q)$ ). Por el teorema 10,  $Aut(P)$  es isomorfo  $Aut(S)$ . En este caso  $Aut(P)$  no sólo conserva clases cromáticas, las fija, pues sólo habrá dos de ellas y no son isomorfas. Así, por el teorema 11,  $Aut(S) = H = Aut(R) \times Aut(Q)$ . Podemos pensar a las banderas de  $P$  como trayectorias dirigidas maximales en las digráficas de Hasse de los órdenes

parciales, y considerar sus trayectorias proyección (es decir, las trayectorias que se forman al considerar la imagen bajo cada una de las respectivas funciones de proyección en los factores de  $P$ ). También consideramos su patrón de colores, y con esta información construimos una asignación entre  $B_P$  y  $B_S$  de la siguiente manera. Definimos  $\pi : B_P \rightarrow B_S$  con  $\pi(b) = (\{\pi_R(b), \pi_Q(b)\}, f(b))$  donde  $f$  denota la función que a una trayectoria le asigna su patrón de colores,  $\pi_R : B_P \rightarrow B_R$  y  $\pi_Q : B_P \rightarrow B_Q$  son las funciones que a cada bandera le asignan su bandera proyección en  $R$  y  $Q$  respectivamente. Esta asignación  $\pi$  resultará ser un isomorfismo de acciones entre los  $\text{Aut}(S)$ -conjuntos  $B_P$  y  $B_S$ .

Primero demos que  $\pi$  es una biyección: consideremos  $b_r$  y  $b_q$ , banderas de  $R$  y  $Q$  respectivamente. Ahora,  $b_r \odot b_q \subset R \odot Q$ . Además, si tomamos un patrón de colores  $c$  que repita exactamente  $|b_r|$  veces el color  $R$  y exactamente  $|b_q|$  veces el color  $Q$ , tendremos que en  $b_r \odot b_q$  existirá una única bandera  $b_p \in b_r \odot b_q$  del orden  $R \odot Q$  con  $f(b_p) = c$ . Como en cada factor hay una única sucesión decreciente y suprayectiva, el patrón de colores determina la bandera. Si llamamos  $\pi^{-1}((b_r, b_q), c)$  a esta única bandera  $b_p$  tendremos que  $\pi \circ \pi^{-1}((b_r, b_q), c) = ((b_r, b_q), c)$ . Por lo tanto  $\pi \circ \pi^{-1}$  funge como identidad y así  $\pi$  es suprayectiva. Supongamos  $\pi(b_p) = \pi(b_p^*)$ , como  $\pi(b_p) = ((b_r, b_q), c)$  implica automáticamente  $b_p \in b_r \odot b_q$  tenemos que  $b_p, b_p^* \in b_r \odot b_q$ , además  $f(b_p) = f(b_p^*)$ , como hay una única bandera en  $b_r \odot b_q$  que cumpla  $f(b_p) = c$  tenemos que  $b_p = b_p^*$  probando la inyectividad de  $\pi$ .

Para ver que  $\pi$  además de biyección es isomorfismo de acciones consideremos lo siguiente: al ser  $R$  y  $Q$  primos relativos,  $g \in \text{Aut}(S)$  implica que existen  $g_r \in \text{Aut}(R)$  y  $g_q \in \text{Aut}(Q)$  tales que  $g = (g_r, g_q)$ . Dado  $(r_0, q_0) \in P$  tenemos  $\pi_R(g(r_0, q_0)) = \pi_R((g_r(r_0), g_q(q_0))) = g_r(r_0)$ . Esto es lo mismo a la acción de  $g$  en  $B_S$ , es decir,  $g(\pi_R(r_0, q_0)) = g(r_0) = g_r(r_0)$ , análogamente con  $Q$ . Como  $g \in H$ , tenemos que  $g$  conserva clases cromáticas y por lo tanto el patrón de colores de una bandera. Así  $f(g(b)) = g(f(b))$ , todo esto nos da que  $g(\pi(b)) = \pi(g(b))$  y que  $\pi$  un isomorfismo de acciones, ya que tenemos dos  $\text{Aut}(S)$ -conjuntos ( $B_P$  y  $B_S$ ) con una biyección  $\pi : B_P \rightarrow B_S$  que cumple  $g(\pi(b)) = \pi(g(b))$  para cualquier  $g \in \text{Aut}(S)$  y cualquier  $b \in B_P$ .  $\square$

Ya que tenemos estudiado el caso para primos relativos, tenemos que estudiar el caso complementario, es decir, el caso en el que tenemos una potencia de primos.

**Lema 22.** *Sea  $P$  un orden graduado, conexo, de rango finito, con banderas equipotentes y que sea la potencia de un primo  $R$ , es decir,  $P = \prod_{i=1}^n R$ . Sea  $S = \sum_{i=1}^n R$ . Entonces la acción de  $\text{Aut}(S)$  sobre  $B_P$  es isomorfa a la acción de  $\text{Aut}(S)$  sobre  $B_S$ .*

*Demostración.* Como  $P$  está descompuesto en primos, los automorfismos  $\text{Aut}(P)$  conservan clases cromáticas y  $\text{Aut}(S) \cong \text{Aut}(P)$ . Tomando la misma asociación del lema pasado, que a una bandera  $b$  en  $B_P$  la manda a

$$(\pi_1(b), \pi_2(b), \dots, \pi_n(b), f(b)),$$



con  $\pi_i$  la proyección natural a  $R$  y  $f$  la función que asocia el patrón de colores, tenemos una biyección  $\pi$  entre  $B_S$  y  $B_P$  (verificar que esta función es en efecto una biyección es análogo al caso estudiado en el lema 21). Esta biyección entre  $Aut(S)$ -conjuntos ( $B_P$  y  $B_S$ ) resultará ser, como veremos, un isomorfismo de acciones.

Como  $Aut(S) = H \rtimes K$  según el teorema 11, podemos descomponer la acción de  $Aut(S)$  en las respectivas acciones de  $H$  y  $K$  (la notación de  $H = \prod_{i=1}^n Aut(R)$  y  $K = S_n$  la heredamos de la prueba del teorema 11), pues si la acción de  $H$  y de  $K$  coincide en  $B_P$  y en  $B_S$  entonces la acción de  $Aut(S) = HK$  coincidirá a su vez en  $B_P$  y  $B_S$ .

Sean  $h \in H$ , con  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ ,  $h_i \in Aut(R)$  y  $p \in P$  con  $p = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ . Entonces  $\pi_i(h(p)) = h_i(r_i)$  y  $h(\pi_i(p)) = h(r_i) = h_i(r_i)$ . Como  $h$  no mueve clases cromáticas,  $h(f(b)) = f(h(b)) = f(b)$  así  $\pi(h(b)) = h(\pi(b))$ . Tomemos un elemento  $k \in K$ , y un elemento  $p \in P$  con  $p = (r_1, r_2, \dots, r_n) = \{(r_i, i) | i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ . Así,  $p$  bajo  $k$  tiene la forma

$$k(p) = \{(r_i, \hat{k}(i)) | i \in \{1, 2, \dots, n\}\} = \{(r_{\hat{k}^{-1}(i)}, i) | i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

por lo que

$$\pi_i(k(p)) = (r_{\hat{k}^{-1}(i)}, i),$$

y

$$k(\pi_{\hat{k}^{-1}(i)}(p)) = k(r_{\hat{k}^{-1}(i)}, \hat{k}^{-1}(i)) = (r_{\hat{k}^{-1}(i)}, i).$$

Estas identidades al cumplirse para un elemento  $p \in P$  se cumplirán para cualquier bandera  $b \subseteq P$ . Si el patrón de colores de  $b$  (pensando a  $b$  como una trayectoria dirigida en la digráfica de Hasse de  $P$ ) es  $\{(i_1), (i_2), \dots, (i_m)\}$  entonces  $f(k(b)) = \{k(i_1), k(i_2), \dots, k(i_m)\}$  que es justo  $\hat{k}(f(b))$ . Con esto se tiene que  $k(\pi(b)) = \pi(k(b))$  y esto muestra que  $\pi$  es un isomorfismo de acciones.  $\square$

Ya que conocemos mejor la acción del grupo de automorfismos en las banderas, podemos pasar a calcular el número de órbitas de banderas que induce un producto. En el caso del producto de dos primos relativos, nuestros objetos son el producto cartesiano (de conjuntos) entre las banderas de un factor, las banderas de otro factor y el patrón de colores. Si tomamos dos elementos  $(b_r^0, b_q^0, s^0)$  y  $(b_r^1, b_q^1, s^1)$  tales que  $b_r^0$  y  $b_r^1$  se encuentren en la misma órbita bajo la acción natural de  $Aut(R)$  con  $g_r(b_r^0) = b_r^1$ ,  $b_q^0$  y  $b_q^1$  estén en la misma órbita bajo la acción natural de  $Aut(Q)$  con  $g_q(b_q^0) = b_q^1$ , y además  $s^0 = s^1$ , entonces estas banderas estarán en la misma órbita de  $B_S$  bajo la acción natural de  $Aut(S)$ . Pues el elemento  $g = (g_r, g_q) \in Aut(R) \times Aut(Q) = H = Aut(S)$  hará que  $g(b_r^0, b_q^0, s^0) = (b_r^1, b_q^1, s^1)$ .

Para la parte converso, observemos que ningún elemento de  $H = Aut(S)$  mueve a los patrones de colores. Así la condición  $s^0 = s^1$  es necesaria. Como los elementos de  $H$  elementos restringidos en sus coordenadas son automorfismos de

$R$  y  $Q$ , respectivamente, tenemos que  $g_r(b_r^0) = b_r^1$  para algún  $g_r \in \text{Aut}(R)$  también será una condición necesaria, análogamente con  $g_q(b_q^0) = b_q^1$ . Con esto se tiene que el número de órbitas de banderas en un producto de primos relativos  $P = R \odot Q$  es:  $O(R) \cdot O(Q) \cdot \binom{n+m}{n}$  donde  $n$  y  $m$  representan la altura de las banderas de  $R$  y  $Q$ , y  $O(R)$ ,  $O(Q)$  representa el número de órbitas de banderas que  $R$  y  $Q$  tenían respectivamente.

Sólo falta determinar el número de banderas de las potencias de un primo. Si tomamos dos banderas en la suma de primos  $b^0 = (b_1^0, b_2^0, \dots, b_n^0, s^0)$  y  $b^1 = (b_1^1, b_2^1, \dots, b_n^1, s^1)$  tal que bajo la acción natural de  $\text{Aut}(S)$  se encuentren en la misma órbita, entonces debe de haber una permutación  $\hat{k}$  de los colores  $i = 1, 2, \dots, n$  tal que  $\hat{k}(s^0) = s^1$ . Esto se debe a que, de la descomposición  $\text{Aut}(S) = H \rtimes K$  la única parte de la descomposición que actúa en el patrón de colores (de las banderas de una suma) son los elementos de  $K$ . Estos intercambian clases cromáticas completas. Además si  $j = \hat{k}(i)$  tenemos que  $b_i^0$  debe de estar en la órbita de  $b_j^1$  en la acción natural de  $\text{Aut}(R)$  en  $R$ . Pues cualquier automorfismo  $g$  que mande  $b^0$  a  $b^1$  al descomponerlo en  $g = hk$ , con  $h \in H$  y  $k \in K$  y considerando que  $j = \hat{k}(i)$  tenemos que  $hk(b_i^0, i) = h(b_i^0, j) = (h_j(b_i^0), j) = (b_j^1, j)$  y como  $h_j \in \text{Aut}(R)$  estamos obligados a que  $b_i^0$  y  $b_j^1$  estén en una misma órbita, bajo la acción natural de  $\text{Aut}(R)$ . Por construcción, esas condiciones no sólo son necesarias, también son suficientes.

Una vez que sabemos que  $s^0$  se puede ver como una permutación de colores de  $s^1$  (o en el lenguaje del capítulo 2,  $s^0$  y  $s^1$  son afines) podemos construir el  $k$  que sea testigo de esa permutación. Una vez teniendo la permutación y sabiendo qué coordenadas se corresponden, es fácil construir a  $h$  coordenada a coordenada, encontrando así el automorfismo  $g = hk$  adecuado que sea testigo de que  $b^0$  y  $b^1$  están en la misma órbita. El número de órbitas será: el número de órbitas de los patrones de colores bajo el grupo simétrico  $S_n$ , multiplicado por el número de órbitas que comparten el mismo patrón de colores.

Para ver lo anterior, observemos que dadas dos banderas de la suma  $S = \sum_{i=1}^n R$  que tengan un patrón de colores en la misma órbita bajo la acción del grupo simétrico  $S_n$ , podemos llevarlas con automorfismos en el grupo  $K$  a que tengan el mismo patrón de colores (ya que por hipótesis sus patrones de colores están en la misma órbita bajo  $S_n$ ). Una vez hecho eso, tomemos representantes de las órbitas de  $B_S$  bajo la acción de  $\text{Aut}(S)$  que tengan el mismo patrón de colores. Como las banderas en cada coordenada de la suma  $S$  podemos variarlas, y como basta con que las banderas de la suma no se relacionen coordenada a coordenada (es decir, que exista una coordenada  $i$  tal que  $b_i^1, b_i^2 \in B_R$  se encuentren en órbitas distintas de la acción de  $\text{Aut}(R)$  en  $R$ ) para que las banderas completas tampoco lo hagan tendremos  $O(R)^n$  de representantes. Así, para cada patrón de colores fijo hay una cantidad  $O(R)^n$  de órbitas de banderas distintas que tienen al menos un elemento con ese patrón. Falta únicamente contar cuántas

órbitas de patrones de colores existen. Si la altura de las banderas de  $R$  es  $a$ , las banderas del producto serán de altura  $an$ . La forma de contar estas estructuras es  $\frac{\prod_{i=1}^n \binom{ai}{a}}{n!}$  pues hay  $\binom{an}{a}$  formas de tomar el primer color multiplicado por  $\binom{a(n-1)}{a}$  de tomar el segundo color entre los lugares restantes, etc. Debemos dividir entre  $n!$  por la permutación de colores que estamos permitiendo. La fórmula final es más fácil de visualizar como  $\frac{(an)!}{(a!^n)n!}$ . Resumiremos la discusión pasada en el siguiente teorema.

**Teorema 12.** *Sea  $P$  un orden graduado de rango finito con banderas equipotentes y sea  $P = \prod_{i=1}^n (P_i)^{m_i}$  su descomposición en primos. Sean  $a_i$  las alturas respectivas de las banderas de los primos  $P_i$ , y  $o_i$  el número de órbitas de banderas respectivas de los primos, bajo la acción de  $\text{Aut}(P_i)$ . Entonces el número de órbitas de las banderas bajo la acción de  $\text{Aut}(P)$  es:*

$$|O(P)| = \frac{(\sum_{i=1}^n m_i a_i)! \prod_{i=1}^n o_i^{m_i} \frac{(m_i a_i)!}{(a_i!)^{m_i m_i!}}}{\prod_{i=1}^n (m_i a_i)!} \quad (4.1)$$

*Demostración.* □

De esta fórmula podemos intuir que habrá muy pocos politopos regulares que estén inducidos por un producto. De hecho, suponiendo que esta fórmula resultara valiendo uno, podemos concluir que  $P$  es una potencia de primos, ya que  $\frac{\sum_{i=1}^n m_i a_i!}{\prod_{i=1}^n (m_i a_i)!}$  siempre es un entero mayor a uno cuando  $i \geq 2$ . Teniendo a  $P$  como potencia de primos obtenemos la nueva fórmula  $\frac{(a_1 m_1)! o_1^{m_1}}{(a_1!)^{m_1} m_1!}$ . Como buscamos aquellos números que hacen que la expresión valga uno y  $\frac{(a_1 m_1)!}{(a_1!)^{m_1} m_1!}$  siempre es entero tenemos que  $o_1 = 1$ , lo cual nos dice que este factor primo tenía que ser inicialmente regular. Para que  $\frac{(a_1 m_1)!}{(a_1!)^{m_1} m_1!}$  sea uno, es necesario y suficiente que  $a_1 = 1$  ó  $m_1 = 1$ . Si  $m_1 = 1$  entonces  $P$  es un primo. Y  $a_1 = 1$  nos da 4 opciones, una por cada clase de  $Poly^i$  de politopo que tenemos. En  $Poly^1$  el único politopo que tiene altura uno es el vértice y las potencias del vértice son los simplejos. En  $Poly^2$  el único politopo que tiene altura uno es la arista (sin mínimo) y las potencias de la arista en  $Poly^2$  son los hipercubos. En  $Poly^3$  el único politopo con altura uno es la arista (sin máximo) y sus potencias son los duales de los hipercubos (conocidos en inglés como crosspolytopes). En  $Poly^4$  los únicos politopos de altura uno son los polígonos (sin máximo ni mínimo) y la potencia de un polígono de  $Poly^4$  serán toros  $n$ -dimensionales.

## Capítulo 5

# El antiprisma

Ya que tenemos toda la herramienta de productos y grupos de automorfismos de productos, podremos construir el antiprisma y encontrar todas las propiedades clásicas que se buscan de una construcción.

### 5.1. Construcción

Primero describiremos la construcción del antiprisma para polígonos: tomemos un polígono regular finito con  $n$  lados, tomemos una copia del mismo en un plano paralelo, y girémoslo  $\frac{2\pi}{2n}$ , de forma que los planos que bisectan perpendicularmente a las aristas del polígono original contengan a los vértices de la copia rotada. Por cada vértice que tenemos en la figura colocaremos un par de aristas a los vértices de la arista correspondiente en la otra copia del polígono, formando así un total de  $2n$  triángulos. En la figura 5.1 (pag. 78) ilustramos esta construcción.

Lo que intentaremos es generalizar esta construcción, pero motivaremos la generalización con una descripción diferente. Para eso recordemos que un polígono es un politopo autodual. Pensemos a los dos polígonos del antiprisma como el inicial y su dual. Ahora busquemos una forma diferente de entender a los  $2n$  triángulos. Recordemos que el producto en  $Poly^1$  de un vértice por una arista es precisamente un triángulo, y recordemos que en una dualidad de polígonos los vértices van en aristas. De cierta forma podemos pensar a  $n$  de estos triángulos como el resultado de multiplicar a la arista por su dual en una dualidad. Podemos pensar al polígono original como el producto de este con la identidad y a los otros  $n$  triángulos como el producto de los vértices también con su dual. Todas las facetas son el producto de una cara original del polígono con su respectiva dual. Lo único que nos faltaría es saber cómo “unirlas”. La definición 16 tiene como facetas al producto de caras con sus duales y tiene una manera muy sintética de realizar la unión.

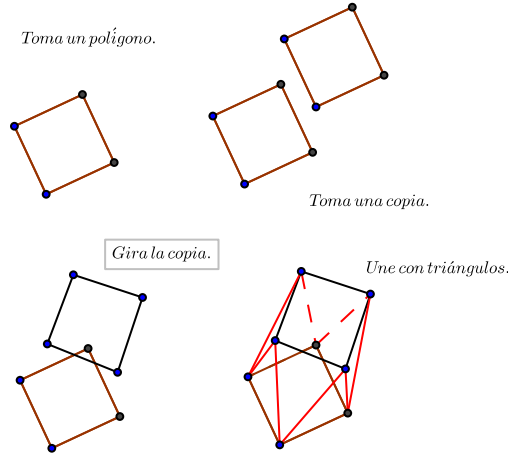


Figura 5.1: Construcción del antiprisma del cuadrado por pasos

**Definición 16.** Definimos la función  $Ant : Poly^1 \rightarrow Poly^3$ , que a  $P \in Poly^1$  lo manda a  $Ant(P)$ , donde  $Ant(P)$  es el orden parcial que tiene como elementos a  $\{(a, b) \in P \odot P \mid a \leq b\}$  y como relación de orden parcial a  $(a, b) \leq (c, d)$  si y sólo si  $a \leq c \leq d \leq b$ . El orden parcial  $Ant(P)$  es el antiprisma de  $P$ .

En la figura 5.2 (pag. 79) dibujamos el esqueleto del antiprisma de un cubo. Es claro de la definición que  $Ant(P)$  es un orden parcial. Demostraremos ahora que realmente el antiprisma de un politopo en  $Poly^1$  yace en  $Poly^3$ . Es decir, que la función  $Ant$  está bien definida.

**Lema 23.** El antiprisma de un politopo es un orden graduado.

*Demostración.* Sea  $P \in Poly^1$  y  $\rho$  la función de grado de  $P$ . Definiendo  $\rho^*$  como  $\rho^*(a, b) = \rho(a) + \rho(P) - \rho(b)$  tendremos que esta será una función de rango de  $Ant(P)$ , pues  $(c, d) \leq (a, b)$  implica que  $c \leq a \leq b \leq d$  y  $\rho(c) \leq \rho(a)$  y  $\rho(b) \leq \rho(d)$ . Esto hace que  $\rho^*(c, d) \leq \rho^*(a, b)$ . Si  $(a, b)$  cubre a  $(c, d)$  quiere decir que pueden variar en sólo una coordenada. Si  $a = c$  tenemos que  $d$  cubre a  $b$  en  $P$  y por tanto  $\rho(b) = \rho(d) + 1$  dejando  $\rho(a, b) = \rho(c, d) + 1$ , el otro caso es análogo.  $\square$

**Proposición 17.** Las banderas del antiprisma son equipotentes.

*Demostración.* Los únicos elementos maximales son de la forma  $(a, a)$  con  $a \in P$ , y todos los elementos de esta forma son maximales. Tenemos a su vez un único elemento mínimo  $(m_P, M_P)$  donde  $m_P$  y  $M_P$  son el mínimo y máximo de  $P$ , respectivamente. Como  $Ant(P)$  es un orden graduado, el tamaño de una bandera  $B$  es  $\rho^*(M_B) - \rho^*(m_B)$  donde  $m_B$  y  $M_B$  son el mínimo y máximo de la bandera  $B$  respectivamente. Al tener  $Ant(P)$  un mínimo se tiene  $m_B = (m_P, M_P)$  sin importar la bandera. Por la observación inicial  $M_B$  es de la forma  $(a, a)$  para

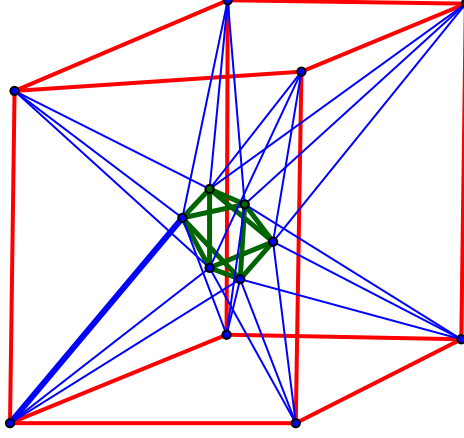


Figura 5.2: Antiprisma del cubo

algún  $a \in P$ . Sin embargo,  $\rho^*(a, a) = \rho(P)$  sin importar el elemento  $a$  que tomemos. Por lo tanto todas las banderas de  $Ant(P)$  tienen tamaño

$$\rho^*(a, a) - \rho^*(m_P, M_P) = \rho(P) - \rho(m_P).$$

□

Una observación importante que hay que hacer, es que los segmentos inferiores de un elemento maximal (de la forma  $(a, a)$ ) son el producto del segmento inferior de  $a$  en  $P$  con el segmento inferior del dual de  $a$  en  $P^*$ . En particular, al ser productos de politopos, son politopos. Otra observación importante es que el segmento superior de un elemento  $(a, c)$  en un antiprisma (es decir  $[(a, c), \infty]$ ) es el antiprisma del segmento acotado por  $a$  y  $c$ , esto es,  $Ant([a, c])$  (pues  $(b, d) \geq (a, c)$  si y sólo si  $b$  y  $d$  están en  $[a, c]$ ). Con estas observaciones podemos probar la conexidad y conexidad fuerte del antiprisma.

**Proposición 18.** *El antiprisma de un elemento en  $Poly^1$  es un orden fuertemente conexo.*

*Demostración.* Probemos primero la conexidad de  $Ant(P)$ . Para eso tomemos dos caras propias  $(a, b)$  y  $(c, d) \in Ant(P)$ . La única cara no propia (por ser mínimo del orden) es  $(m_P, M_P)$ . Alguna de las sucesiones  $(a, b)$ ,  $(a, M_P)$  o  $(a, b)$ ,  $(m_P, b)$  es una sucesión de caras propias (pues  $(a, b)$  es una cara propia), análogamente para  $(c, d)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos restringirnos a los casos en que los siguientes pares de sucesiones son sucesiones de caras propias:  $(a, b)$ ,  $(m_P, b)$  y  $(c, d)$ ,  $(m_P, d)$ , o  $(a, b)$ ,  $(a, M_P)$  y  $(c, d)$ ,  $(m_P, d)$ , pues el

argumento sobre los otros casos es simétrico. En el primer caso  $b$  y  $d$  son caras diferentes al máximo de  $P$ . La trayectoria  $(a, b), (m_P, b), (m_P, m_P), (m_P, d), (c, d)$  es una sucesión de caras propias incidentes de  $Ant(P)$ . En el segundo caso  $a$  no es la cara mínima y  $d$  no es la cara máxima. Como  $(a, d)$  es incidente con  $(m_P, d)$  tenemos que  $(a, b), (a, M_P), (a, d), (m_P, d), (c, d)$  es una trayectoria de caras propias incidentes de  $(a, b)$  a  $(c, d)$  en  $Ant(P)$ . Para probar la conexidad fuerte hay que probar que cada segmento inferior, superior o acotado es conexo. Como todo segmento acotado o inferior es un segmento de algún politopo de la forma  $[(m_P, M_P), (a, a)]$ . Tenemos que esos serán conexos. A su vez, si tomamos el segmento superior  $(a, c)$  obtendremos un orden isomorfo al de  $Ant([a, c])$  pero el antiprisma del politopo  $[a, c]$  hemos visto en un principio que es conexo.  $\square$

Encontraremos qué tipo de propiedad diamante tiene:

**Proposición 19.** *El antiprisma de un politopo  $P$  tiene la propiedad  $D^3$ .*

*Demostración.* Cualquier 2-segmento acotado de  $Ant(P)$  es un segmento del politopo formado por el segmento inferior de una cara máxima (de la forma  $[(m_P, M_P), (a, a)]$ ) y por ende estos 2-segmentos son siempre una arista con máximo y mínimos. Nos basta probar que los 1-segmentos superiores, al agregarles un máximo absoluto son aristas. Recordemos que segmentos superiores son antiprismas de un subpolitopo. Al pedir que sea un 1-segmento, estamos forzando a que sea el antiprisma de un 0-politopo, pero los únicos 0-politopos son los vértices, y el antiprisma de un vértice sabemos que es la arista sin máximo, como se requiere.  $\square$

Resumimos las pasadas afirmaciones en el siguiente teorema:

**Teorema 13.** *Sea  $P$  tal que  $P \in Poly^1$ , entonces  $Ant(P) \in Poly^3$*

## 5.2. Grupo de automorfismos

La siguiente observación será esencial para encontrar el grupo de automorfismos de un antiprisma.

**Proposición 20.** *Si  $P, Q \in Poly^1$ , entonces  $Ant(P \odot Q) \cong Ant(P) \odot Ant(Q)$ .*

*Demostración.* Dado un elemento  $a_0 = [(x_0, y_0), (z_0, w_0)] \in Ant(P \odot Q)$  definimos a  $f(a_0) = [(x_0, z_0), (y_0, w_0)]$ . Ahora como  $a_0 \in Ant(P \odot Q)$ , tenemos que  $(x_0, y_0) \leq (z_0, w_0)$  en  $P \odot Q$ . Así  $x_0 \leq z_0$  en  $P$  y  $y_0 \leq w_0$  en  $Q$ . Lo anterior muestra que  $(x_0, z_0)$  y  $(y_0, w_0)$  están en  $Ant(P)$  y  $Ant(Q)$  respectivamente y, por tanto,  $f(a_0) \in Ant(P) \odot Ant(Q)$ . Entonces la función  $f : Ant(P \odot Q) \rightarrow Ant(P) \odot Ant(Q)$  está bien definida. Sea  $g : Ant(P) \odot Ant(Q) \rightarrow Ant(P \odot Q)$  con  $g(b_0) = [(x_0, y_0), (z_0, w_0)]$  si  $b_0 = [(x_0, z_0), (y_0, w_0)]$ . De manera similar al caso de  $f$ ,  $g$  está bien definida. Más aún, es inmediato ver que es la función inversa de  $f$ .

Demostraremos que  $a_0 \leq a_1$  en  $Ant(P \odot Q)$  si y sólo si  $f(a_0) \leq f(a_1)$  en  $Ant(P) \odot Ant(Q)$ . Digamos que  $a_i = [(x_i, y_i), (z_i, w_i)]$ . Entonces tenemos que

$$\begin{array}{ccc} a_0 \leq a_1 & \Leftrightarrow & (x_0, y_0) \leq (x_1, y_1) \leq (z_1, w_1) \leq (z_0, w_0) \\ \text{en } Ant(P \odot Q) & & \text{en } P \odot Q \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x_0 \leq x_1 \leq z_1 \leq z_0 & \Leftrightarrow & (x_0, z_0) \leq (x_1, z_1) \\ \text{en } P & & \text{en } Ant(P) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} y_0 \leq y_1 \leq w_1 \leq w_0 & \Leftrightarrow & (y_0, w_0) \leq (y_1, w_1) \\ \text{en } Q & & \text{en } Ant(Q) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (x_0, y_0) \leq (x_1, y_1) \leq (z_1, w_1) \leq (z_0, w_0) & \Leftrightarrow & [(x_0, z_0), (y_0, w_0)] \leq [(x_1, z_1), (y_1, w_1)] \\ \text{en } P \odot Q & & \text{en } Ant(P) \odot Ant(Q) \end{array}$$

Por lo tanto,  $a \leq b$  en  $Ant(P \odot Q)$  si y sólo si  $f(a) \leq f(b)$  en  $Ant(P) \odot Ant(Q)$ . Esto prueba el isomorfismo.  $\square$

Como sabemos muy bien cómo se comporta el grupo de automorfismos de un producto de politopos, y la acción de éste sobre las banderas del mismo, lo único que nos falta por conocer es cómo se comporta el grupo de automorfismos y la acción natural que éste define sobre las banderas del antiprisma de un politopo primo en  $Poly^1$ .

**Teorema 14.** *Sea  $P$  un politopo primo en  $Poly^1$ , sea  $G = \Gamma(P)$  el grupo de automorfismos de  $P$ , y  $\hat{\Gamma}(P)$  el grupo extendido de  $P$ . Entonces  $\Gamma(Ant(P))$  es isomorfo a  $\hat{\Gamma}(P)$ .*

*Demostración.* Sea  $H = \Gamma(Ant(P))$ . Tenemos que un automorfismo  $g$  de  $P$  actúa de forma natural en el antiprisma de  $P$  como  $g(a, c) = (g(a), g(c))$ . Como el orden del antiprisma estaba dado absolutamente en términos del orden de  $P$ , éste será un automorfismo del antiprisma. Notemos que cualquier  $g \in \Gamma(P)$  fija a los elementos maximales  $(M_P, M_P)$  y  $(m_P, m_P)$ .

El segmento inferior de  $(M_P, M_P)$  es isomorfo a  $P$  y sus elementos son de la forma  $(a, M_P)$ . Llamaremos  $P_0$  a este segmento de  $Ant(P)$ . Cualquier automorfismo  $g \in \Gamma(Ant(P))$  que fije a  $(M_P, M_P)$ , al restringirse a  $P_0$  induce un automorfismo  $g' \in \Gamma(P)$ . La acción natural que  $g'$  induce en  $Ant(P)$  (como un automorfismo de  $P$ ) coincide con el  $g$ . Lo anterior se debe a que ambos actúan de la misma manera en  $P_0$  y, por tanto, en una bandera de  $Ant(P)$  (recordemos aquí que la imagen en una bandera determina completamente el automorfismo, pues la acción es libre en banderas). Tenemos pues, un isomorfismo entre el grupo de automorfismos  $G$  de  $P$  y el estabilizador de  $(M_P, M_P)$  en  $H$ .

El único otro segmento que tiene oportunidad de ser isomorfo a  $P$  es el segmento inferior de  $(m_p, m_p)$ , con elementos de la forma  $(m_p, a)$ . Esto se debe al



hecho de que cualquier segmento  $(a, a)$ , con  $a$  una cara propia de  $P$ , será un producto no trivial y, como  $P$  es primo, no puede ser isomorfo a  $[(m_P, M_P), (a, a)]$ . Por lo tanto, dado  $h \in H$ ,  $h(M_P, M_P) \neq (a, a)$  para cualquier cara propia  $a \in P$ .

Si somos observadores, el segmento  $[(m_P, M_P), (m_P, m_P)]$  es isomorfo al dual de  $P$ , es decir, a  $P^*$ . Ahora, si  $P$  es autodual, toda dualidad de  $P$  tiene una forma natural de actuar en  $Ant(P)$ . Tomemos  $*$  :  $P \rightarrow P$  una dualidad (en caso de que exista), definimos un automorfismo  $\delta$  en  $Ant(P)$  como  $\delta(a, b) = (b^*, a^*)$ . Dado que  $a \leq b$  implica  $b^* \leq a^*$ , por ser una dualidad, éste será en efecto una función con codominio  $Ant(P)$ . Además, expresiones del estilo  $x_0 \leq y_0 \leq y_1 \leq x_1$  conservarán  $x_0^* \geq y_0^* \geq y_1^* \geq x_1^*$  y por ende tendremos un automorfismo. Cabe destacar que  $\delta(M_P, M_P) = (m_P, m_P)$ .

De forma converso, sea  $h \in H$  tal que  $h(M_P, M_P) = (m_P, m_P)$ . Como para toda  $a \in P$ ,  $(a, M_P) \leq (M_P, M_P)$ , entonces  $h(a, M_P) \leq h(M_P, M_P) = (m_P, m_P)$ . Por lo tanto,  $h(a, M_P) = (m_P, b)$  para algún  $b \in P$ . Entonces podemos construir la asignación  $g : P \rightarrow P$  con  $g(a)$  el único elemento que cumple  $h(a, M_P) = (m_P, g(a))$ . Notemos que  $(a, M_P) \leq (b, M_P)$  implica que  $h(a, M_P) \leq h(b, M_P)$  y así  $(m_P, g(a)) \leq (m_P, g(b))$ . Usando la definición del orden  $\leq_{Ant(P)}$ , obtenemos  $m_P \leq m_P \leq g(b) \leq g(a)$ , en particular  $g(b) \leq g(a)$  y, por lo tanto,  $g$  es una dualidad de  $P$ . La acción natural de  $g$  en  $Ant(P)$  cumple  $g(a, M_P) = (m_P, g(a)) = h(a, M_P)$ . Como la acción del grupo de automorfismos de un politopo es libre en banderas, esto nos da que la acción de  $g$  en  $Ant(P)$  es  $h$ . En resumen, hemos encontrado una biyección entre el grupo extendido de automorfismos  $\hat{\Gamma}(P)$  y  $\Gamma(Ant(P))$ . Como  $\Gamma(Ant(P))$  y  $\hat{\Gamma}(P)$  actúan fielmente y de la misma manera en  $Ant(P)$ , tienen que ser isomorfos. Al actuar fielmente podemos pensar a estos grupos encajados en el grupo simétrico  $S_{|Ant(P)|}$  y, como actúan de la misma manera estos encajes, tendrán la misma imagen en  $S_{|Ant(P)|}$ , llamemos  $I$  a esta imagen. Tendremos que  $\Gamma(Ant(P)) \cong I$  y  $\hat{\Gamma}(P) \cong I$  por la definición de encaje, así tenemos  $\Gamma(Ant(P)) \cong \hat{\Gamma}(P)$ .  $\square$

En lo subsecuente nos dedicaremos a entender la acción natural del grupo de automorfismos  $\Gamma(Ant(P))$  sobre las banderas de  $Ant(P)$ . Para eso, nos apoyaremos de otro objeto combinatorio el cual facilitará la comprensión de la acción.

Sea  $P$  un politopo (en  $Poly^1$ ) y  $Ant(P)$  su respectivo antiprisma. Sea  $B_P$  el conjunto de banderas de  $P$ , sea  $h$  la altura de las banderas de  $P$ , y sea  $V = \{0, 1\}^h$  el conjunto de sucesiones de longitud  $h$  con contradominio  $\{0, 1\}$ . Encontraremos una biyección entre las banderas de  $Ant(P)$  y el conjunto  $B_P \times V$ . Podemos pensar a un elemento  $j = (b, v)$  de  $B_P \times V$  como un conjunto de instrucciones para construir a una bandera en  $Ant(P)$ , la bandera  $b$  nos dirá sobre qué bandera de  $P$  movernos y el conjunto de instrucciones  $v$  nos dirá si modificar la primera o la segunda coordenada en el antiprisma. Lo subsecuente formaliza esta idea.

Definimos las funciones  $+_b : b \setminus \{M_P\} \rightarrow b$  y  $-_b : b \setminus \{m_P\} \rightarrow b$  como  $+_b(x) = y$  si  $y$  cubre a  $x$  en  $b$ , y  $-_b(x) = y$  si  $x$  cubre a  $y$  en  $b$ . Si  $x$  y  $y$

son elementos de  $b$  tales que  $x < y$ , definimos  $f_b((x, y), 0) = (+_b(x), y)$  y definimos  $f_b((x, y), 1) = (x, -_b(y))$  (observemos que si  $(x, y) \in \text{Ant}(P)$ , entonces tanto  $f_b((x, y), 1)$  como  $f_b((x, y), 0)$  cubren a  $(x, y)$  en  $\text{Ant}(P)$ ). Por último, definimos de manera recursiva  $B_j : \{0, 1, 2, \dots, h\} \rightarrow \text{Ant}(P)$  (recordemos que  $j = (b, v)$ ) como  $B_j(0) = (m_P, M_P)$  y  $B_j(k+1) = f_b(B_j(k), v(k+1))$ . La sucesión  $B_j$  será por construcción una bandera de  $\text{Ant}(P)$ , pues  $B_j(0)$  es el mínimo en  $\text{Ant}(P)$ ,  $B_j(k+1)$  cubre a  $B_j(k)$ , y  $B_j(h)$  es de la forma  $(a, a)$  (un maximal para algún  $a \in b$  (esto se debe a que las banderas de  $\text{Ant}(P)$  tienen altura  $h$ , y hemos subido de rango exactamente  $h$  veces).

Demostremos que la asignación  $\phi : B_P \times V \rightarrow B_{\text{Ant}(P)}$  que asigna  $\phi(j) = B_j$  es una biyección. Empecemos por demostrar la inyectividad de  $\phi$ . Supongamos  $\phi(j_0) = \phi(j_1)$ , con  $j_i = (b_i, v_i)$ . Observemos que las coordenadas de  $B_{j_i}$  son todos elementos de la bandera  $b_i$  (por construcción). Además, cada elemento de la bandera  $b_i$  aparece por lo menos una vez como coordenada de la bandera  $B_{j_i}$ . Así, el conjunto formado por las coordenadas de  $B_{j_i}$  es precisamente  $b_i$ . Como  $B_{j_0} = B_{j_1}$ , por hipótesis, tenemos que  $b_0 = b_1$ . Denotemos por  $b$  a  $b_0 = b_1$ . Tenemos  $B_{j_i}(k+1) = f_b(B_{j_i}(k), v_i(k))$  y por hipótesis  $B_{j_0}(k+1) = B_{j_1}(k+1)$  así  $f_b(B_{j_0}(k), v_0(k+1)) = f_b(B_{j_0}(k), v_1(k+1))$ , lo cual automáticamente nos da  $v_0(k+1) = v_1(k+1)$ . Mostrando,  $v_0 = v_1$ ,  $j_0 = j_1$ , y por ende la inyectividad de  $\phi$ .

Definamos  $\pi_0 : \text{Ant}(P) \rightarrow P$  como  $\pi_0(a, b) = a$  y  $\pi_1 : \text{Ant}(P) \rightarrow P$  como  $\pi_1(a, b) = b$ . Tomemos una bandera del antiprisma  $B \in B_{\text{Ant}(P)}$  (escrita como una sucesión estrictamente creciente de elementos de  $\text{Ant}(P)$ ) que tenga por elemento máximo a  $(a, a)$ . Consideremos la sucesión

$$\pi_0[B] = \{\pi_0(B(i)) \mid i \in \{0, 1, \dots, h\}\}.$$

Esta sucesión será no decreciente de  $m_P$  a  $a$ . Por otro lado la sucesión  $\pi_1[B]$  será no creciente de  $M_P$  a  $a$ . Invirtiendo el orden de la sucesión  $\pi_1[B]$  y concatenándola con  $\pi_0[B]$  (por supuesto eliminando los términos repetidos) obtenemos una bandera de  $P$ , digamos  $b$ . Tenemos que exactamente uno de los siguientes dos casos se da para todo  $i \in \{0, 1, \dots, (h-1)\}$ : o sucede que  $\pi_1(B(i+1)) = \pi_1(B(i))$  y  $\pi_0(B(i+1))$  cubre a  $\pi_0(B(i))$  en  $P$ , o  $\pi_0(B(i+1)) = \pi_0(B(i))$  y  $\pi_1(B(i))$  cubre a  $\pi_1(B(i+1))$  en  $P$ . Esto nos da derecho a definir  $v(i+1) = 0$  si se da el primer caso, y  $v(i+1) = 1$  si se da el segundo caso.

Demostremos que con  $j = (b, v)$  definidos de esta forma tendremos un elemento  $j$  tal que  $\phi(j) = B$ . La prueba será por inducción. Sea  $B_1 = \phi(j)$ , por construcción  $B_1(0) = (m_P, M_P) = B(0)$ . Además  $B_1(i+1) = f_b(B_1(i), v(i+1)) = f_b(B(i), v(i+1))$ . Si  $v(i+1) = 0$  es porque  $\pi_0(B(i+1))$  cubre a  $\pi_0(B(i))$  en  $b$  y  $\pi_1(B(i+1)) = \pi_1(B(i))$ . Ahora  $v(i+1) = 0$  nos dará que  $\pi_0(f_b(B(i), v(i+1))) = \pi_0(+_b(B(i))) = \pi_0(B(i+1))$  y  $\pi_1(f_b(B_1(i), v(i+1))) = \pi_1(+_b(B(i))) = \pi_1(B(i)) = \pi_1(B(i+1))$ , lo cual prueba que si asumimos que  $B(i) = B_1(i)$ , entonces  $B_1(i+1) = B(i+1)$  cuando  $v(i+1) = 0$ . Probar que si asumimos que  $B(i) = B_1(i)$ , entonces obtenemos  $B_1(i+1) = B(i+1)$  cuando  $v(i+1) = 1$  es análogo al caso anterior. Esto es suficiente para concluir de forma

inductiva que  $B = B_1 = \phi(j)$ .

Teniendo esta biyección entre las banderas del antiprisma  $B_{Ant(P)}$  y el conjunto  $B_P \times V$  podemos hacer algunas observaciones. Por ejemplo, si  $P$  es un politopo finito, entonces  $Ant(P)$  también será finito y el número de banderas de  $Ant(P)$  ( $|B_{Ant(P)}| = |B_P \times V|$ ) será exactamente  $2^h \cdot |B_P|$ . Como segunda observación, si  $P$  además de ser politopo finito es primo, entonces  $\Gamma(Ant(P)) = \hat{\Gamma}(P)$  y el número de órbitas que tiene la acción natural de  $\Gamma(Ant(P))$  en las banderas  $B_{Ant(P)}$  lo podemos calcular como:

$$O(Ant(P)) = \frac{|B_{Ant(P)}|}{|\Gamma(Ant(P))|} = \frac{2^h \cdot |B_P|}{|\hat{\Gamma}(P)|}$$

Esta expresión puede tomar los valores  $2^h \cdot O(P)$  o  $2^{h-1} \cdot O(P)$  dependiendo de si  $P$  es o no autodual (en esta expresión  $O(Q)$  denota el número de órbitas que tiene la acción natural del grupo de automorfismos de un politopo  $Q$  sobre sus propias banderas).

Afortunadamente la biyección entre  $B_{Ant(P)}$  y  $B_P \times V$  nos ayuda a estudiar el número de órbitas de la acción del grupo  $\Gamma(Ant(P))$  sobre las banderas  $B_{Ant(P)}$  aún cuando  $P$  es un politopo primo infinito. Para eso definiremos una acción de  $\Gamma(Ant(P))$  sobre  $B_P \times V$  que nos ayudará a entender lo que sucede.

Como  $P$  es un politopo primo, tenemos que cualquier automorfismo  $g \in \Gamma(Ant(P))$  viene inducido de un automorfismo de  $P$  o una dualidad de  $P$  (como en el teorema 14). Si  $j = (b, v)$ , definimos  $g(j) = (g(b), v)$  cuando  $g$  es un automorfismo de  $P$  y  $g(j) = (g(b), v^*)$  si  $g$  es una dualidad, donde  $v^*(i) = 1 - v(i)$ . Tendremos que  $\phi : B_P \times V \rightarrow B_{Ant(P)}$  no es solamente una biyección, será una biyección que preserve la acción de  $\hat{\Gamma}(P)$  sobre estos conjuntos. Para probarlo, tomemos  $g \in \Gamma(P)$  y  $j = (b, v) \in B_P \times V$ . Tenemos que  $g(B_j(0)) = g(m_P, M_P) = B_{g(j)}(0)$ . Supongamos ahora que  $g(B_j(i)) = B_{g(j)}(i)$ , y demostremos por casos que  $g(B_j(i+1)) = B_{g(j)}(i+1)$ .

- Caso  $v(i+1) = 0$ : Tenemos que  $B_j(i+1) = f_b(B_j(i), 0) = +_b(B_j(i))$ , así  $\pi_0(B_j(i+1))$  cubre a  $\pi_0(B_j(i))$  en la bandera  $b$  y  $\pi_1(B_j(i+1)) = \pi_1(B_j(i))$ . De lo anterior tenemos que  $g(\pi_0(B_j(i+1)))$  cubrirá a  $g(\pi_0(B_j(i)))$  y  $g(\pi_1(B_j(i+1))) = g(\pi_1(B_j(i)))$  en la bandera  $g(b)$ . Así  $g(B_j(i+1)) = +_{g(b)}(g(B_j(i)))$ , pero por la hipótesis inductiva  $g(B_j(i)) = B_{g(j)}(i)$ , así que  $g(B_j(i+1)) = +_{g(b)}(B_{g(j)}(i)) = f_{g(b)}(B_{g(j)}(i), 0) = B_{g(j)}(i+1)$ .
- Caso  $v(i+1) = 1$ : Tenemos que  $B_j(i+1) = f_b(B_j(i), 1) = -_b(B_j(i))$ , así  $\pi_1(B_j(i))$  cubre a  $\pi_1(B_j(i+1))$  en la bandera  $b$  y  $\pi_0(B_j(i+1)) = \pi_0(B_j(i))$ . De lo anterior tenemos que  $g(\pi_1(B_j(i)))$  cubrirá a  $g(\pi_1(B_j(i+1)))$  y  $g(\pi_0(B_j(i+1))) = g(\pi_0(B_j(i)))$  en la bandera  $g(b)$ . Así  $g(B_j(i+1)) = -_{g(b)}(g(B_j(i)))$  pero, por la hipótesis inductiva  $g(B_j(i)) = B_{g(j)}(i)$ , así que  $g(B_j(i+1)) = -_{g(b)}(B_{g(j)}(i)) = f_{g(b)}(B_{g(j)}(i), 1) = B_{g(j)}(i+1)$ .

Este argumento inductivo muestra que si  $g \in \Gamma(P)$ , entonces  $g(\phi(j)) = \phi(g(j))$ . Tomemos ahora una dualidad  $d \in \hat{\Gamma}(P) \setminus \Gamma(P)$ . Demostraremos que  $d(B_j) = B_{d(j)}$ . La prueba también será por inducción. Observemos que  $d(B_j(0)) = d(m_P, M_P) = (m_P, M_P) = B_{d(j)}(0)$ . Demostremos ahora que si  $d(B_j(i)) = B_{d(j)}(i)$ , entonces  $d(B_j(i+1)) = B_{d(j)}(i+1)$ . Nuevamente lo haremos por casos:

- Caso  $v(i+1) = 0$ : Tenemos que  $B_j(i+1) = f_b(B_j(i), 0) = +_b(B_j(i))$ , así  $\pi_0(B_j(i+1))$  cubre a  $\pi_0(B_j(i))$  en la bandera  $b$  y  $\pi_1(B_j(i+1)) = \pi_1(B_j(i))$ . Ahora,  $d(\pi_0(B_j(i)))$  cubre a  $d(\pi_0(B_j(i+1)))$  en  $d(b)$  y  $d(\pi_1(B_j(i+1))) = d(\pi_1(B_j(i)))$ . Ahora,  $\pi_0(d(B_j(i+1))) = d(\pi_1(B_j(i+1)))$  y  $\pi_1(d(B_j(i+1))) = d(\pi_0(B_j(i+1)))$  por cómo se comporta una dualidad en los elementos de  $Ant(P)$ . De esto deducimos que  $d(B_j(i+1)) = -_{d(b)}(d(B_j(i)))$  como por hipótesis inductiva se tiene que  $d(B_j(i)) = B_{d(j)}(i)$ , tendremos que  $d(B_j(i+1)) = -_{d(b)}(B_{d(j)}(i)) = f_{d(b)}(B_{d(j)}(i), v^*(i+1)) = B_{d(j)}(i+1)$ , como queríamos ver.
- Caso  $v(i+1) = 1$ : Tenemos que  $B_j(i+1) = f_b(B_j(i), 1) = -_b(B_j(i))$ , así  $\pi_1(B_j(i))$  cubre a  $\pi_1(B_j(i+1))$  en la bandera  $b$  y  $\pi_0(B_j(i+1)) = \pi_0(B_j(i))$ . Ahora,  $d(\pi_1(B_j(i+1)))$  cubre a  $d(\pi_1(B_j(i)))$  en  $d(b)$  y  $d(\pi_0(B_j(i+1))) = d(\pi_0(B_j(i)))$ . De esto deducimos que  $d(B_j(i+1)) = +_{d(b)}(d(B_j(i)))$  como por hipótesis inductiva se tiene que  $d(B_j(i)) = B_{d(j)}(i)$ , tendremos que  $d(B_j(i+1)) = +_{d(b)}(B_{d(j)}(i)) = f_{d(b)}(B_{d(j)}(i), v^*(i+1)) = B_{d(j)}(i+1)$ , como queríamos ver.

Este argumento inductivo muestra que si  $d$  es una dualidad de  $P$ , entonces  $d(\phi(j)) = \phi(d(j))$ . Esto con lo anterior termina de probar que las acciones de  $\hat{\Gamma}(P)$  sobre los conjuntos  $B_{Ant(P)}$  y  $B_P \times V$  son isomorfías vía  $\phi$ .

Pero la acción de  $\hat{\Gamma}(P)$  sobre  $B_P \times V$  es muy clara y estudiable. Por ejemplo, si  $P$  es un politopo primo (finito o infinito) que no sea autodual, tendremos  $\hat{\Gamma}(P) = \Gamma(P)$  y que para cualesquiera elementos  $j_0 = (b_0, v_0)$ ,  $j_1 = (b_1, v_1)$ , se tendrá que  $j_0 \in \Gamma(P) \cdot j_1$  si y sólo si  $v_0 = v_1$  y  $b_0 \in \Gamma(P) \cdot b_1$ . Por lo tanto, en este caso el número de órbitas de  $Ant(P)$  bajo la acción del grupo  $\hat{\Gamma}(P)$  será exactamente:

$$O(Ant(P)) = O(P) \cdot 2^h$$

El caso en que el politopo  $P$  sea primo y autodual se analiza de manera análoga. Si restringimos la acción de  $\hat{\Gamma}(P)$  en  $B_P \times V$  a la acción de  $\Gamma(P)$  en el mismo conjunto, tendremos  $O(P) \cdot 2^h$  órbitas de banderas (como en el caso pasado) pero las dualidades permitirán pasar de una de estas órbitas a otra de ellas de forma única. En este caso la fórmula de órbitas es:  $O(Ant(P)) = O(P) \cdot 2^{h-1}$  como teníamos en el caso finito. Resumiremos la discusión pasada en el siguiente teorema:

**Teorema 15.** *Sea  $P \in Poly^1$  un politopo primo. Sea  $O(P)$  el número de órbitas que tiene la acción natural de  $\Gamma(P)$  en las banderas de  $P$  ( $B_P$ ). Sea  $n$  el rango de  $P$ . Si  $P$  es autodual, entonces  $O(Ant(P)) = O(P) \cdot 2^n$ . Por otro lado, si  $P$  no es autodual, entonces  $O(Ant(P)) = O(P) \cdot 2^{n+1}$*

*Demostración.* Apoyándonos de la discusión que precede a este teorema, basta con observar que si  $h$  denota la altura de las banderas de  $P$ , entonces  $h = n + 1$ .  $\square$

Pasemos ahora a determinar los antiprismas regulares. Al ser la función  $Ant$  una función multiplicativa podemos concentrarnos en el estudio de antiprismas de primos, pues de no ser primo tendría que ser una potencia de un primo (productos con más de un primo como factor nunca son regulares). El único primo en  $Poly^3$  que tiene potencias regulares es la arista sin máximo. Observemos que la arista sin máximo es el antiprisma del vértice. Así, los antiprismas de simplejos (las potencias del vértice en  $Poly^1$ ) nos darán siempre el dual de un hipercubo (las potencias de la arista sin máximo, en  $Poly^3$ ), esta familia de antiprismas es regular. Dejando esta familia de lado, tomemos un politopo primo finito regular  $P$  en  $Poly^1$  que no sea el vértice. Sus banderas tendrán altura  $h$  con  $h \geq 2$ . Por la fórmula de órbitas estudiada anteriormente, al ser  $h \geq 2$  tendremos que  $O(Ant(P)) \geq O(P) \cdot 2^{h-1} \geq 2$ , probando que el antiprisma de estos primos no será regular.

**Corolario 2.** *Sea  $P \in Poly^1$  un politopo primo de rango 2 o mayor, entonces  $Ant(P)$  no es regular.*

# Capítulo 6

## Conclusiones

El trabajo presentado en esta tesis deja traducidos teoremas y pruebas importantes de factorización en gráficas, digráficas, y órdenes parciales, y los expone en términos elementales. Involucra al lector con conceptos que relacionan a la combinatoria con diversas áreas de las matemáticas. Resuelve el problema de encontrar el grupo de automorfismos del antiprisma. Introduce un nuevo producto entre politopos abstractos, y establece precedentes lingüísticos que facilitan el trato de los productos en politopos. A su vez, abre la línea de investigación al estudio de politopos fibrados.

A continuación enlistamos los principales resultados expuestos en este trabajo:

- **Teorema 3 (p. 40):** El producto cartesiano de órdenes discretos  $\odot$  es cerrado en  $Poly^i$  para  $i = 1, \dots, 4$ , es decir,  $P, Q \in Poly^i$  implica que  $P \odot Q \in Poly^i$ .
- **Teorema 6 (p. 51):** Dada una gráfica conexa  $G$  y una coloración  $C$  que sea fuertemente convexa y tenga la propiedad cuadrado, existe una factorización  $\sigma$  de  $G$  inducida por  $C$  tal que  $\sim_\sigma = C$ . En esta factorización cada uno de los factores resulta isomorfo a las componentes conexas de cada color.
- **Teorema 7 (p. 56):** Para toda gráfica conexa  $G$  existe una única expresión de  $G$  como un producto cartesiano débil de gráficas idescomponibles.
- **Teorema 8 (p. 59):** Para toda digráfica conexa  $D$ , existe una única expresión de  $D$  como un producto cartesiano débil de digráficas idescomponibles.
- **Teorema de factorización única para politopos abstractos (p. 63):** Para  $i = 1, 2, 3, 4$  se tiene que  $Poly^i$  tiene factorización única bajo el producto cartesiano de órdenes.

- **Teorema 10 (p. 67):** Dada una digráfica conexa  $D$  y una factorización primoide  $\sigma = \prod_{i=1}^n D_i$  de  $D$  en digráficas, el grupo de automorfismos de  $D$  es isomorfo al grupo de automorfismos de la suma  $\sum_{i=1}^n D_i$ .
- **Teorema 11 (p. 69):** El grupo de automorfismos de una suma finita de digráficas conexas  $Aut(\sum_{i=1}^n D_i)$  es isomorfo a un grupo de la forma  $H \times K$  con  $H$  el producto  $\prod_{i=1}^n Aut(D_i)$  y  $K = \prod_D S_{n(D)}$  con  $n(D) = |\{i | D_i \simeq D\}|$ .
- **Teorema 12 (p. 76):** Sea  $P$  un orden graduado de rango finito con banderas equipotentes y sea  $P = \prod_{i=1}^n (P_i)^{m_i}$  su descomposición en primos. Sean  $a_i$  las alturas respectivas de las banderas de los primos  $P_i$ , y  $o_i$  el número de órbitas de banderas respectivas de los primos, bajo la acción de  $Aut(P_i)$ . Entonces el número de órbitas de las banderas bajo la acción de  $Aut(P)$  es:

$$|O(P)| = \frac{(\sum_{i=1}^n m_i a_i)! \prod_{i=1}^n o_i^{m_i} \frac{(m_i a_i)!}{(a_i!)^{m_i m_i!}}}{\prod_{i=1}^n (m_i a_i)!} \quad (6.1)$$

- **Teorema 13 (p. 80):** Sea  $P$  tal que  $P \in Poly^1$ , entonces  $Ant(P) \in Poly^3$
- **Teorema 14 (p. 81):** Sea  $P$  un politopo primo en  $Poly^1$ , sea  $G = \Gamma(P)$  el grupo de automorfismos de  $P$ , y  $\hat{\Gamma}(P)$  el grupo extendido de  $P$ . Entonces  $\Gamma(Ant(P))$  es isomorfo a  $\hat{\Gamma}(P)$ .
- **Teorema 15 (p. 85):** Sea  $P \in Poly^1$  un politopo primo. Sea  $O(P)$  el número de órbitas que tiene la acción natural de  $\Gamma(P)$  en las banderas de  $P$  ( $B_P$ ). Sea  $n$  el rango de  $P$ . Si  $P$  es autodual, entonces  $O(Ant(P)) = O(P) \cdot 2^n$ . Por otro lado, si  $P$  no es autodual, entonces  $O(Ant(P)) = O(P) \cdot 2^{n+1}$

# Bibliografía

- [1] Joan Feigenbaum. Directed cartesian-product graphs have unique factorizations that can be computed in polynomial time. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 15:105–110, 1986.
- [2] Isabel Hubard. Abstract polytopes course notes. 2014.
- [3] Wilfried Imrich and Janez Zerovnik. Factoring cartesian-product graphs. *Journal of Graph Theory*, Vol. 18(No. 6):557–567, 1994.
- [4] Donald J. Miller. The automorphism group of a product of graphs. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 25(No. 1):24–28, 1970.
- [5] Gert Sabidussi. Graph multiplication. *Mathematische Zeitschrift*, 72:446–457, 1960.