



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA-CONTROL

FUNCIONES DE LYAPUNOV DE CONTROL PARA EL DISEÑO DE  
CONTROLADORES DISCONTINUOS

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN INGENIERÍA

PRESENTA

EMMANUEL CRUZ ZAVALA

TUTOR PRINCIPAL

DR. JAIME A. MORENO, INSTITUTO DE INGENIERÍA, UNAM

COMITÉ TUTOR

DR. LEONID FRIDMAN, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM  
DR. GERARDO RENÉ ESPINOSA PÉREZ, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM

México, D.F., Diciembre del 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Álvarez Icaza Longoria Luis A.

Secretario: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René

1er. vocal: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto

2do. vocal: Dr. Castaños Luna Fernando

3er. vocal: Dr. Fridman Leonid

Lugar donde se realizó la tesis:

Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F..

## TUTOR DE TESIS:

DR. JAIME A. MORENO PÉREZ

---

**FIRMA**



“Así es la vida, hermosa y dura como sólo ella sabe.  
Nos impulsa o destroza en el viaje.”

— Alan H. Cruz [22]

Dedicada a toda mi familia, ejemplo insuperable de unión y fuerza,  
y a todos aquellos que me han acompañado en este andar de la vida.



## RESUMEN

---

En este trabajo, mediante el enfoque de Función de Lyapunov de Control (Robusta) se aborda el problema diseño de controladores (homogéneos y no homogéneos) que producen Modos Deslizantes de Orden Superior. El estudio se enfoca principalmente a una clase sistemas no lineales de una entrada y una salida, y sobre la cual actúan tanto perturbaciones acopladas como no acopladas.

El principal objetivo de control es hacer que la salida del sistema sea cero en tiempo finito. Para cumplir con este objetivo, el problema de control se formula como un problema de estabilización en tiempo finito de un sistema no lineal (que depende de la salida y sus derivadas) es vez de diseñar una superficie deslizante que asegure la convergencia en tiempo finito. Al cambiar el enfoque a un problema de estabilización, las leyes de control para el sistema en consideración se pueden construir mediante una modificación del método de Backstepping, técnica ampliamente utilizada en la estabilización robusta de sistemas dinámicos, pero sorprendentemente poco utilizada como herramienta matemática en el análisis y diseño del Control por Modos Deslizantes de Orden Superior.

El método de Backstepping aquí utilizado permite conectar a la teoría de Modos Deslizantes de Orden Superior con los métodos clásicos empleados en la teoría de sistemas no lineales y probar otras propiedades, entre ellas, la robustez ante perturbaciones no acopladas.





## AGRADECIMIENTOS

---

Mi agradecimiento más profundo es para mi familia. Gracias por las sonrisas, las palabras de aliento, los consejos y preocupaciones. Me han enseñado a seguir siempre adelante sin importar que tan difícil parezca el camino y a dar siempre lo mejor de mí. Gracias por su extraordinario apoyo, comprensión y amor incondicional.

*Papá, Mamá y Hermano.*

Gracias a ti por tu comprensión y gran paciencia. Sobre todo, por todo tu amor y dulzura durante estos años que hemos estado juntos. ¡En verdad, muchas gracias por tantas experiencias y momentos compartidos;

*Luz Edith Salgado.*

A mis amigos por su amistad y tiempo compartido. Se que cuento con ustedes, así como ustedes cuentan conmigo.

A mis maestros, en especial al Dr. Jaime A. Moreno Pérez y al Dr. Leonid Fridman, por las lecciones y las enseñanzas que me han brindado durante estos últimos años.

Al Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México por todas las facilidades y el apoyo brindado. Al CONACyT por la beca otorgada para realización de mis estudios de doctorado, bajo el CVU 267513.



# ÍNDICE GENERAL

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	Motivación . . . . .	1
1.2	Antecedentes: Función de Lyapunov de Control (FLC) en Modos Deslizantes . . . . .	4
1.3	Objetivos Generales . . . . .	6
1.4	Estructura del Trabajo . . . . .	7
1.4.1	Estabilización en tiempo finito mediante FLCR . . . . .	8
1.4.2	Estabilización en tiempo fijo via Control por Modos Deslizantes (CMD) . . . . .	9
1.5	Comentarios Adicionales . . . . .	11
2	PRELIMINARES	13
2.1	Estabilidad de sistemas no lineales autónomos . . . . .	14
2.1.1	Estabilidad y tipo de convergencia . . . . .	14
2.1.2	Función de Lyapunov (FL) . . . . .	17
2.1.3	Caracterización del tipo de convergencia mediante FL . . . . .	18
2.2	Estabilidad de inclusiones diferenciales . . . . .	20
2.2.1	Existencia de FL suave . . . . .	20
2.2.2	Caracterización del tipo de convergencia . . . . .	21
2.3	Sistemas homogéneos . . . . .	22
2.3.1	Homogeneidad ponderada . . . . .	22
2.3.2	FL homogénea . . . . .	24
2.4	Sistemas homogéneos en el bi-límite . . . . .	25
2.5	Estabilizabilidad, controlabilidad, FLC y robustez . . . . .	26
2.6	Resumen del capítulo . . . . .	29
2.7	Prueba de los Teoremas y Proposiciones del capítulo . . . . .	29
3	EL PROBLEMA DE ESTABILIZACIÓN ROBUSTA	31
3.1	Descripción general del sistema . . . . .	31
3.2	Formulación del Problema . . . . .	32
i	ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO FINITO MEDIANTE FLCR	35
4	CONTROL DISCONTINUO HOMOGÉNEO CON CONVERGENCIA EN TIEMPO FINITO	37
4.1	Generalidades . . . . .	37
4.1.1	Problemas con el diseño por CMD clásico y alternativas . . . . .	38
4.1.2	Objetivos y estructura del capítulo . . . . .	40
4.2	Diseño de controladores homogéneos mediante FLCR . . . . .	40
4.2.1	Control discontinuo . . . . .	41
4.2.2	Control continuo . . . . .	43
4.3	Método para construir una FLCR . . . . .	44
4.3.1	FLCR para el sistema . . . . .	46
4.4	Controladores discontinuos de orden arbitrario . . . . .	47
4.4.1	Caso con perturbaciones acopladas . . . . .	47
4.4.2	Comparación con otros MDOS conocidos . . . . .	48
4.4.3	Diseño de las ganancias: caso con perturbación acoplada . . . . .	51
4.4.4	Caso con perturbaciones no acopladas . . . . .	53
4.5	Extensiones y Observaciones importantes . . . . .	54
4.6	Ejemplo Académico . . . . .	56
4.7	Resumen del capítulo . . . . .	58
4.8	Prueba de los Teoremas y Proposiciones del capítulo . . . . .	59
5	ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO FINITO CON VELOCIDAD DE CONVERGENCIA MEJORADA	67

5.1	Generalidades . . . . .	67
5.1.1	Objetivos . . . . .	68
5.2	Diseño de una clase de control no homogéneo mediante FLCR . . . . .	68
5.2.1	Control discontinuo homogéneo en el bi-límite . . . . .	69
5.2.2	Control continuo homogéneo en el bi-límite . . . . .	71
5.3	Controlador homogéneo generalizado (CHG) . . . . .	72
5.3.1	La FLCR del sistema . . . . .	74
5.3.2	Mejoramiento de la robustez del CHG . . . . .	75
5.4	Velocidad de convergencia mejorada: Control Híbrido . . . . .	76
5.5	Nueva clase de controladores discontinuos . . . . .	77
5.5.1	La FLCR del sistema . . . . .	77
5.5.2	Caso con perturbaciones acopladas . . . . .	77
5.5.3	Caso con perturbaciones no acopladas . . . . .	79
5.5.4	Extensiones y observaciones importantes . . . . .	80
5.5.5	Controlador para sistemas de segundo orden . . . . .	81
5.5.6	Ejemplo Académico . . . . .	84
5.6	Resumen del capítulo . . . . .	85
5.7	Prueba de los Teoremas y Proposiciones del capítulo . . . . .	86
<b>ii ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO FIJO VÍA CONTROL POR MODOS DESLIZANTES (CMD)</b>		<b>97</b>
6	ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO FIJO VÍA CMD: SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN	99
6.1	Planteamiento del problema y Objetivos . . . . .	100
6.2	Superficie deslizante (SD) uniforme . . . . .	101
6.3	Controladores de tiempo fijo . . . . .	102
6.3.1	Controlador Uniforme de Primer Orden (CUPO) . . . . .	102
6.3.2	Controlador Super-Twisting Uniforme (CSTU) . . . . .	102
6.3.3	Estimación del tiempo fijo . . . . .	104
6.4	Ejemplo académico . . . . .	105
6.5	Resumen del capítulo . . . . .	106
6.6	Prueba de los Teoremas y Proposiciones del capítulo . . . . .	107
7	ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO FIJO VÍA CMD: SISTEMA DE ORDEN ARBITRARIO	113
7.1	Objetivos y estructura del capítulo . . . . .	113
7.2	SD uniforme de orden $N$ . . . . .	114
7.3	Caso con perturbaciones acopladas . . . . .	114
7.3.1	Primera SD uniforme . . . . .	115
7.3.2	Segunda SD uniforme . . . . .	116
7.3.3	Controladores de tiempo fijo . . . . .	119
7.4	Caso con perturbaciones no acopladas . . . . .	123
7.4.1	Robustez de la segunda SD uniforme . . . . .	123
7.4.2	Robustez del sistema en lazo cerrado . . . . .	123
7.5	Ejemplo académico . . . . .	124
7.6	Resumen del capítulo . . . . .	125
7.7	Prueba de los Teoremas y Proposiciones del capítulo . . . . .	126
8	CONCLUSIONES	135
<b>iii APÉNDICES</b>		<b>137</b>
A	LEMAS	139
A.1	Lemas . . . . .	139
A.2	Operador $[z]^m =  z ^m \text{sign}(z)$ . . . . .	140
B	CÁLCULOS EXPLÍCITOS: TEOREMA 4.13 Y TEOREMA 4.14	141
B.1	Cálculos explícitos: Teorema 4.13. . . . .	141
B.2	Cálculos explícitos: Teorema 4.14 . . . . .	143

---

C	CÁLCULOS EXPLÍCITOS: TEOREMA 5.9	145
D	CÁLCULOS EXPLÍCITOS: TEOREMA 5.12	149
E	CÁLCULOS EXPLÍCITOS: TEOREMA 7.6	153
F	ESTIMACIÓN DE LA CONSTANTE DE TIEMPO FIJO: SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN	155
	BIBLIOGRAFÍA	159

## ACRÓNIMOS

---

c.r.	con respecto
p.d.	positiva definida
n.d.	negativa definida
resp.	respectivamente
CMD	Control por Modos Deslizantes
SD	Superficie Deslizante
MDPO	Modo Deslizante de Primer Orden
CMDPO	Control por Modos Deslizantes de Primer Orden
MDSO	Modos Deslizantes de Segundo Orden
MDOS	Modos Deslizantes de Orden Superior
CMDOS	Control por Modos Deslizantes de Orden Superior
CMDT	Control por Modos Deslizantes Terminales
CMDTNS	Control por Modos Deslizantes Terminales No Singulares
CMDTRNS	Control por Modos Deslizantes Terminales Rápidos No Singulares
FL	Función de Lyapunov
FLC	Función de Lyapunov de Control
FLCR	Función de Lyapunov de Control Robusta
MB	Método de Backstepping
EDO	Ecuación Diferencial Ordinaria
AE	Asintóticamente Estable
GAE	Global y Asintóticamente Estable
RE	Racionalmente Estable
EE	Exponencialmente Estable
ETF	Estable en Tiempo Finito
ETFdE	Estable en Tiempo Finito con decaimiento Exponencial
ETFj	Estable en Tiempo Fijo
ATFj	Atractivo en Tiempo Fijo
ID	Inclusión Diferencial
Fdes	Función Desingularizante
CHG	Control Homogéneo Generalizado
CUPU	Controlador Uniforme de Primer Orden

CSTU Controlador Super-Twisting Uniforme

DML Desigualdad Matricial Lineal

CUSO Controlador Uniforme de Segundo Orden



## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	(a) La variedad $s_2 = [x_2]^2 + k_2^2 x_1 = 0$ ; (b) la variedad $\sigma_3 = [x_3]^3 + k_2^3([x_2]^{\frac{3}{2}} + k_1^{\frac{3}{2}} x_1) = 0$ ; y (c) la variedad $\sigma_{3L} = x_3 + 2( x_2 ^3 +  x_1 ^2)^{1/6} [x_2 + [x_1]^{2/3}]^0 = 0$ . . . . .	50
Figura 2	Datos obtenidos de la FLCR: (a) Parametrización de la ganancia $k_2$ con $p = 0$ ; (b)-(c) parametrización de las ganancias $k_2$ y $k_3$ , con $p = 1/2$ ; y (d)-(f) parametrización de las ganancias $k_4$ , $k_3$ , y $k_2$ , con $p = 2/3$ . . . . .	52
Figura 3	Resultados con el controlador ( <b>L3</b> ): (a) estado $x_2$ (línea solida); (b) variedad deslizante $\sigma$ (línea solida) y sus derivadas $\dot{\sigma}$ (línea segmentada), $\ddot{\sigma}$ (línea punteada); y (c) el ángulo de dirección $x_4$ . Resultados con ( <b>LC3</b> ): (d) estado $x_2$ ; (e) variedad deslizante $\sigma$ y sus de derivadas $\dot{\sigma}$ , $\ddot{\sigma}$ ; y (e) el ángulo de dirección $x_4$ . Resultados con ( <b>E3</b> ): (d) estado $x_2$ ; (e) variedad deslizante $\sigma$ y sus de derivadas $\dot{\sigma}$ , $\ddot{\sigma}$ ; y (e) el ángulo de dirección $x_4$ . . . . .	57
Figura 4	Precisión: (a) con ( <b>L3</b> ); (b) con ( <b>LC3</b> ); (c) con ( <b>E3</b> ); (d) con ( <b>LC3</b> ) ( $k_{3C} = 70$ ). . . . .	58
Figura 5	La SD $[x_2]^2 + k_1^2 x_1 = 0$ , ( $k_1 = 0.5$ ) (línea solida); la SD terminal rápida clásica $s_r = x_2 + 0.5[x_1]^{1/2} + 0.125x_1$ (línea 'x'); la SD $\sigma_2 = [x_2]^2 + k_1^2 \sigma_1 = 0$ , ( $q = 1$ ) (línea '- -'); y la SD de tiempo fijo $\sigma_2 = 0$ , ( $q > 1$ ) (línea '- .'). . . . .	83
Figura 6	Resultados de Simulación: (a) error de seguimiento $e_1$ ; (b) error de seguimiento $e_2$ ; (c) las superficies deslizantes $\sigma_2, s, s_1$ y (d) el esfuerzo de control. . . . .	85
Figura 7	(a) y (b) muestran el estado $x_1$ y el estado $x_2$ con: el CMDPO (línea roja), el CUPO (línea verde) y el CSTU (línea azul); (c) Superficies deslizantes y (d) Entradas de Control. . . . .	106
Figura 8	(a) La SD lineal $s_L = x_2 + x_1 = 0$ , la SD uniforme $s_{\Lambda_1} = 0$ y la SD uniforme $s_{\Lambda_2} = 0$ ; (b) tiempo de convergencia a la SD durante el primer modo de operación (datos de simulación); (c) comparación entre el tiempo de convergencia real y el estimado. . . . .	107
Figura 9	(a) Con $T_r = 5, r = 3$ y (b) con $T_r = 3, r = 2$ . . . . .	117
Figura 10	(a) ( $k_1 = 0.3, k_2$ ) con $T_r = 3$ y $r = 2$ ; (b) ( $k_1 = 0.6, k_2$ ) con $T_r = 3$ y $r = 2$ ; y (c) ( $k_1 = 1, k_2$ ) con $T_r = 3$ y $r = 2$ , se considera que $k_{2\text{mín}} = 1.1k_1^{1/2}$ . . . . .	120
Figura 11	(a), (b) y (c) son los estados del sistema controlados por el CMDPO (línea punteada), el CUPO (línea segmentada) y el CUSO (línea solida); (d) SD ( <b>S1</b> ); (e) señales de control de cada controlador y (f) acercamiento de las señales de control. . . . .	125
Figura 12	(a), (b) y (c) son los estados del sistema aplicando el CMDPO (línea punteada), el CUPO (línea segmentada) y el CUSO (línea solida); (d) SDU ( <b>S2</b> ); (e) señales de control de cada controlador y (f) acercamiento de las señales de control. . . . .	126

---

Figura 13	(a) Tiempo que le toma a las trayectorias en llegar a $(S_2)$ ; (b) tiempo de convergencia (datos de simulación) a la bola $B_{r=2}$ comparado con la constante de tiempo fijo $T_p = 5.5$ ; (c) tiempo que le toma a las trayectorias en llegar a $(S_1)$ ; y (d) tiempo de convergencia (datos de simulación) a la bola $B_{r=2}$ comparado con $T_p = 5.5$ . . . . .	127
-----------	---	-----

## ÍNDICE DE CUADROS

---

Cuadro 1	Sintonización del CMDOS anidado y del CMDOS <i>casi-continuo</i>	49
Cuadro 2	Parametrización de las ganancias con FLCR. . . . .	52
Cuadro 3	Parametrización de las ganancias con FLCR. . . . .	119

## NOTACIÓN

---

La siguiente terminología se usará a lo largo de todo el trabajo.

- $\exists$  es el símbolo “existe”.
- $\forall$  es el símbolo de “para todo”.
- $<, \leq, >, \geq$  son los símbolos de “menor que”, “menor o igual que”, “mayor que” y “mayor o igual que”.
- $a \in A$  denota que el elemento  $a$  pertenece al conjunto  $A$ .
- $A \subset B$  denota el subconjunto  $A$  del conjunto  $B$ .
- $A \cap B$  denota la intersección de los conjuntos  $A$  y  $B$ .
- $A \cup B$  denota la unión de los conjuntos  $A$  y  $B$ .
- $A \setminus B$  denota la diferencia de los conjuntos  $A$  y  $B$  (la parte de  $A$  fuera de  $B$ ).
- $A \times B$  denota el producto cartesiano de dos conjuntos (el conjunto de pares  $(a, b)$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ ).
- $f : A \rightarrow B$  denota el mapeo  $f$  del conjunto  $A$  al conjunto  $B$ .
- $\dot{f}$  denota la tasa cambio de la función  $f$  (derivada c.r. al tiempo  $t$ ),  $\frac{df}{dx}$  es la derivada de  $f$  c.r. a  $x$  y  $\frac{\partial f}{\partial x}$  es la derivada parcial de  $f$  c.r. a  $x$ .
- $A \Rightarrow B$  denota que la afirmación  $A$  implica  $B$ .
- $A \Leftrightarrow B$  denota que las afirmaciones  $A$  y  $B$  son equivalentes.
- $\mathbb{R}$  es el conjunto de números reales,  $\mathbb{R}_+$  es el conjunto de los reales estrictamente positivos,  $\mathbb{R}_{\geq 0} := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ,  $\mathbb{R}^+ := \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ , y  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ .  $\mathbb{N}$  es el conjunto de los números naturales.
- el conjunto de vectores columna de dimensión  $n \times 1$  se denota con  $\mathbb{R}^n$ .
- el producto interno de  $x, y \in \mathbb{R}^n$  se denota por  $\langle x, y \rangle$  y la norma de Euclidiana de  $x$  por  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .
- $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$  denota un conjunto abierto centrado en el origen de radio  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $B_r^c = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq r\}$  denota su complemento,  $B_r(y)$  es la bola abierta de radio  $r > 0$  con centro en  $y \in \mathbb{R}^n$  y  $B$  denota la bola unitaria.
- $\text{diag}(a_1, \dots, a_i)$  denota a la matriz diagonal cuyos elementos son  $a_1, \dots, a_i \in \mathbb{R}$ .
- $\overline{\text{co}}\Omega$  denota la cerradura de la envolvente convexa del conjunto  $\Omega$ .
- $\mathcal{J}$  denota uno de los siguientes intervalos:  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ . donde  $a < b$ ,  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ .
- Una función continua a tramos en  $t \in \mathcal{J}$  satisface la condición de Lipschitz si  $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$ ,  $\forall x, y \in B_r(x_0)$ .<sup>1</sup>
- $C^k$  es el conjunto de funciones continuas definidas en  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , que son continuamente diferenciables hasta el orden  $k$ , donde  $k \in \mathbb{N}$ .

---

<sup>1</sup> La condición de Lipschitz es una propiedad más fuerte que la continuidad en una función. Además, en el intervalo de interés  $B_r$ ,  $\|\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\| \leq L$ ,  $\forall x \in B_r$ .

- Una función continua  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre  $\Omega$  es p.d. si  $V(0) = 0$  y  $V(x) > 0$  para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Y  $V$  es n.d. si  $V(0) = 0$  y  $V(x) < 0$  para  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- $V(\cdot)$  es radialmente no acotada si está definida sobre  $B_r$ , y  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$
- $V(\cdot)$  es una función *propia* si los conjuntos de nivel  $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq a\}$  están acotados  $\forall a \geq 0$ .
- Si  $V(\cdot) \in C^1$  entonces el gradiente de  $V(x)$  es  $\nabla V(x) = (\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n})^T$ .
- $L_f V = \langle \frac{\partial V(x)}{\partial x}, f(x) \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$  define la derivada de  $V$  en la dirección del campo vectorial<sup>2</sup>  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ . Además, (i)  $L_f^k V = \frac{\partial(L_f^{k-1} V)}{\partial x} f(x)$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , representa que  $V$  es diferenciada  $k$  veces en la dirección de  $f(x)$ , donde  $L_f^0 = V(x)$ , y (ii)  $L_g L_f V = \frac{\partial(L_f V)}{\partial x} g(x)$  define la derivada de  $L_f V$  en la dirección del campo vectorial  $g(x)$ .
- $[z]^m = |z|^m \text{sign}(z)$ ,  $\forall m \geq 0$ , es un operador<sup>3</sup> de potencia que preserva el signo de la función  $z \in \mathbb{R}$ .
- una función  $\alpha : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}^+$  pertenece a la clase  $\mathcal{K}$ , si es continua, estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ . Además, (i)  $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ , si  $\alpha \in \mathcal{K}$ , con  $a = \infty$ , y  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \infty$ ; (ii)  $\alpha \in \mathcal{L}$ , si  $\alpha$  es continua, estrictamente decreciente y  $\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = 0$ ; y por último (iii) una función  $\beta : [0, a) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  pertenece a la clase  $\mathcal{KL}$  si es de clase  $\mathcal{L}$  c.r. a la primera variable y de clase  $\mathcal{K}_\infty$  c.r. a la segunda.<sup>4</sup>
- $L_\infty$  representa el conjunto de funciones acotadas. Una función es localmente  $L_\infty$  cuando esta (esencialmente) acotada sobre una vecindad de cada punto.

<sup>2</sup> Comúnmente conocida como la derivada de Lie.

<sup>3</sup> Para más información de este operador consulte el Apéndice A.

<sup>4</sup> A esta clase de funciones se le conoce como funciones de comparación, fueron introducidas por primera vez en la obra de Hahn [36]. El objetivo de proponer una clase de funciones genéricas  $\mathcal{K}$ , es considerar la más amplia variedad de funciones. Por ejemplo:  $\alpha(r) = r^c$  pertenece a la clase  $\mathcal{K}_\infty$ ;  $\beta(r, s) = r/(ksr + 1)$ ,  $k \in \mathbb{R}_+$ , es estrictamente creciente en  $r$  y estrictamente decreciente en  $s$ , además  $\beta(r, s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow \infty$ , por lo tanto,  $\beta \in \mathcal{KL}$ ;  $\beta(r, s) = r^c \exp(-s)$ ,  $c \in \mathbb{R}_+$ , pertenece a la clase  $\mathcal{KL}$ .

“Estudia el pasado si quieres pronosticar el futuro.”

— Confucio

### 1.1. MOTIVACIÓN

Las ecuaciones diferenciales (ordinarias o parciales) se utilizan frecuentemente para describir la dinámica de los sistemas. A dicha descripción se le conoce como modelo del sistema. A través del modelo es posible realizar algún tipo de análisis cualitativo del comportamiento dinámico. Generalmente, un sistema “real” está sujeto a condiciones de operación no previstas (incertidumbres) y/o bajo la influencia de alguna acción externa (perturbaciones). El efecto de ambas se ve reflejado en un cambio inesperado en el comportamiento del sistema.

El desempeño del sistema, mantenido bajo condiciones adversas o inciertas, se debe a la propiedad de robustez que este tiene. El propósito principal de diseñar un control robusto es reducir o contrarrestar el efecto de las incertidumbres y/o perturbaciones, mientras se trata de mantener el comportamiento requerido en el sistema. Relacionado al desempeño, existen dos tareas importantes que se buscan concretar en cualquier aplicación: la regulación y el seguimiento <sup>1</sup>.

Para realizar el diseño, tomando en cuenta las perturbaciones, hay que contar con el modelo del sistema. Una representación muy general de la dinámica de un sistema es la descrita por el modelo en espacio de estados

$$\dot{z} = f(t, z) + g(t, z)(u + \rho(t, z)), \quad \sigma = h(t, z). \quad (1)$$

La función  $f(t, z)$  contiene a la dinámica conocida y perturbaciones no acopladas a la entrada de control,  $g(t, z)$  designa los canales por donde entra la señal de control y  $\rho(t, z)$  representa las perturbaciones acopladas, y posiblemente no desvanecientes, presentes en el sistema,  $z$  define las variables de estado y  $u$  define las entradas de control. La función  $h(t, z)$  define la tarea de regulación o seguimiento que se desea cumplir. Bajo las hipótesis adecuadas, dichas tareas de control se transforman en un problema de estabilización del siguiente sistema [89]

$$\begin{aligned} \Sigma_0 : \quad & \dot{\eta} = f_0(\eta, x) + \Delta f_0(x, \eta), \\ \Sigma_T : \quad & \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + w_i(t, x, \eta), & \forall i = 1, \dots, r-1, \\ \dot{x}_r = w_r(t, x, \eta) + b(t, x, \eta)u, & x_0 = x(0), \\ x_1 = \sigma, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\Sigma_0$  representa la dinámica cero,  $x$  y  $\eta$  son nuevos vectores de estados,  $b(t, x, \eta)$  es una función continua que no cruza por cero y las funciones  $w_r(t, x, \eta)$ ,  $w_i(t, x, \eta)$  y  $\Delta f_0(x, \eta)$ , modelan a las perturbaciones acopladas y no acopladas del sistema. Una vez conocida la dinámica nominal del sistema, el problema de control robusto se reduce a diseñar la entrada de control  $u$  que garantice la estabilidad del sistema (2) en presencia de alguna clase apropiada de perturbaciones acopladas y no acopladas.

Existen dos enfoques, muy interesantes, que resuelven el problema de control robusto del sistema  $\Sigma_T$  bajo ciertas condiciones. El control por modos deslizantes (CMD) y el control diseñado mediante una Función de Lyapunov de Control (FLC).

Un CMD requiere esencialmente que solo existan perturbaciones acopladas. El diseño clásico por CMD consta de dos pasos, Utkin [87]:

*Las incertidumbres y/o perturbaciones pueden ser modeladas por funciones que dependen del tiempo, de las variables de estado, incluso de las entradas de control.*

*De aquí en adelante, a la incertidumbre paramétrica del modelo y a las perturbaciones externas se les considerará simplemente como perturbaciones.*

*Los controladores continuos estáticos por retroalimentación de estados no aseguran la estabilización robusta del sistema en lazo cerrado en presencia de perturbaciones no desvanecientes.*

<sup>1</sup> Que es regulación y seguimiento

*El control puede ser continuo o discontinuo, ver por ejemplo el tutorial [42].*

*Las nociones de estabilidad se revisarán más detalle en el Capítulo 2.*

*El control por modos deslizantes terminales (CMDT) y el control por modos deslizantes terminales no singulares (CMDTNS) logran durante el modo deslizante convergencia en tiempo finito. Estas técnicas están restringidas a sistemas de segundo orden.*

*La Homogeneidad es una propiedad geométrica. Ha sido muy utilizada para el diseño de controladores y observadores. Es una propiedad fundamental en el desarrollo de los resultados de este trabajo.*

- (s1) Diseño de la superficie deslizante (SD), donde se incluyen los criterios de desempeño que se desean o se requieren para el sistema. Al comportamiento dinámico del sistema restringido a la SD se le denomina modo deslizante.
- (s2) Diseño de la entrada control, la cual asegura que cualquier trayectoria del sistema sea forzada a converger a la SD en tiempo finito y se mantenga ahí, una vez iniciado el modo deslizante.

Las características principales que presentan los sistemas con un CMD son:

1. Insensibilidad ante incertidumbres paramétricas y rechazo ante perturbaciones externas, cuando ambas se encuentran acopladas a la entrada de control. La condición de acoplamiento (matching condition) se refiere a que, la entrada de control y la perturbación entran al sistema a través de los mismos canales.
2. Reducción del orden del sistema durante el modo deslizante (sistema reducido).
3. Convergencia en tiempo finito solamente a la SD.

Desafortunadamente, el CMD estándar presenta algunos inconvenientes:

1. La técnica esta limitada a sistemas que tienen grado relativo igual a uno con respecto (c.r) a la entrada de control.<sup>2</sup>
2. Produce el efecto de castaño o chattering. Un fenómeno de oscilaciones de alta frecuencia y de amplitud finita en el sistema controlado.
3. Altamente sensible ante la discretización.
4. Las perturbaciones no acopladas no se pueden compensar.
5. Convergencia asintótica (o exponencial) de las trayectorias del sistema durante el modo deslizante. De forma más precisa, el origen del sistema reducido solo es asintóticamente (o exponencialmente) estable.

La característica principal del CMD clásico es que es capaz de llevar cualquier trayectoria del sistema controlado en tiempo finito a la SD y mantenerla ahí, a pesar de la presencia de perturbaciones acopladas. Por otro lado, la técnica de diseño no toma en cuenta del todo<sup>3</sup> a las perturbaciones no acopladas, el chattering degrada enormemente el desempeño del sistema en la práctica debido al uso de un modo deslizante de primer orden (MDPO) como entrada de control y en el modo deslizante solo existe convergencia asintótica.

Hallar condiciones para que la propiedad de convergencia en tiempo finito esté presente en una variable escalar es más o menos obvio, pero la extensión de esta propiedad a una variable vectorial de orden arbitrario no es trivial. En un intento por extender esta propiedad a variables vectoriales en CMD se ha introducido el concepto de modo deslizante de orden superior (MDOS), Levant [54].

Un control, cuyo diseño esta basado en un MDOS, hereda las propiedades de robustez del CMD estándar, pero con la ventaja de proporcionar convergencia en tiempo finito durante el modo deslizante, si las perturbaciones están acopladas a la entrada de control. Una de las diferencias principales del diseño por MDOS con el diseño clásico por CMD, es que un control por MDOS (CMDOS) se construye usualmente utilizando el concepto de homogeneidad. Algunas características del CMDOS son:

- (c1) Eliminación de la restricción del grado relativo uno.

<sup>2</sup> Comentar acerca de grado relativo

<sup>3</sup> Existen muy pocas técnicas desarrolladas para la atenuación de este tipo de perturbaciones.

- (c2) Reducción del efecto de chattering.
- (c3) Una mayor precisión c.r. al tiempo de muestreo discreto, [55], [56].
- (c4) Poseen propiedades de homogeneidad.
- (c5) Solo rechazan perturbaciones acopladas. Al menos no sido probado formalmente que tengan robustez ante perturbaciones no acopladas.

A pesar de que los algoritmos por MDOS tienen una teoría establecida, aún existen problemas que no se han resuelto del todo, [54], [55], [56]. Por ejemplo,

- (A1) las ganancias en un CMDOS se eligen *a priori*, y aunque solo es necesario ajustar un parámetro, el cual tiene que ser elegido suficientemente grande, no existen condiciones explícitas para ajustar las ganancias;
- (A2) no obstante de que los algoritmos empleados en CMDOS son homogéneos, no se propone ninguna función de Lyapunov (FL) (Homogénea) para mostrar su estabilidad;
- (A3) no es posible diseñar algoritmos por MDOS que tengan mayor velocidad de convergencia y mejores propiedades de robustez con las técnicas propuestas en [56].

*En un CMDOS, las ganancias son propuestas por el autor Levant con base en simulaciones. Esto se discutirá con más detalle en el Capítulo 4.*

Por otro lado, el enfoque con FL se utiliza frecuentemente en el análisis de estabilidad de sistemas no lineales, siendo también una herramienta fundamental para la síntesis de controladores. Originalmente, la teoría de Lyapunov fue desarrollado para sistemas sin entradas de control. Para sistemas con entradas de control, la FLC desempeña un papel importante en la construcción y diseño de leyes de control, [30], [70], [33]. Una FLC es simplemente una candidata a FL para el sistema en lazo cerrado y cuya derivada c.r. al tiempo se impone a ser negativa definida (n.d.) a través de una correcta elección de la entrada de control. Si bien, la existencia de una FL es suficiente (y necesaria) para determinar la estabilidad del sistema no lineal sin entradas, la existencia de una FLC es suficiente (y necesaria) para que un sistema con una entrada de control sea estabilizado, [33].

La noción de FLC robusta (FLCR) aparece cuando también existen perturbaciones actuando sobre el sistema. Desafortunadamente, a menudo la FLCR es desconocida y, en general, no toda FLC llega a ser una FLCR, [33]. El rediseño por Lyapunov o método min-max es una de las primeras técnicas utilizadas para el diseño de control robusto no lineal, [35], [46]. La idea del rediseño por Lyapunov es muy simple, si uno conoce una FLC para el sistema nominal, entonces esta misma función se puede utilizar como una FLCR para el sistema incierto. Lo anterior funciona siempre y cuando se cumpla la *condición de acoplamiento*. Sin embargo, el obstáculo radica en como construir una FLC.

*Se considera como sistema nominal al sistema que no tiene incertidumbres ni perturbaciones.*

Una técnica ampliamente conocida para el diseño de control robusto no lineal, es el método de Backstepping (MB). Con este método siempre es posible construir sistemáticamente una FLCR, y simultáneamente un controlador robusto, para sistemas de dinámica incierta que se encuentran en la forma de retroalimentación estricta y que estructuralmente cumplen con una condición mucho más débil que la condición de acoplamiento [45], [47], [48], [46], [33].

*El MB se basa en la aplicación recursiva de la técnica de añadir un integrador. Para mayores detalles de esta técnica, el lector puede consultar a Freeman and Kokotović [33] y sus referencias.*

Cuando se utiliza el MB, comúnmente se asume que las funciones con las cuales se construye la FLCR son suaves, debido a la necesidad de calcular las derivadas de dichas funciones durante la construcción de la ley de control y de la FLCR. Sin embargo, para algunos sistemas no lineales, tal suposición no se cumple, por ejemplo, en sistemas que no tienen un campo vectorial suave. Sin alguna modificación extra, la aplicación directa del MB falla cuando se tienen que diseñar entradas de control puramente continuas, la suavidad es imprescindible en este método. Para hacer frente a este inconveniente, existen básicamente dos enfoques. Uno es utilizar



una FLCR no suave, lo que implica el manejo de herramientas matemáticas más complejas, [33]. La otra alternativa es integrar al MB una técnica de desingularización de funciones para obtener una FLCR. La idea de desingularizar funciones no es nueva. Las funciones desingularizantes (Fdes) fueron introducidas por primera vez en [78]. El objetivo principal de este trabajo fue construir explícitamente una FLC para una clase de sistemas en cascada en donde la entrada de control a diseñar solo puede admitir una retroalimentación de alguna función continua de los estados. El empleo de Fdes fue retomado en [79], [39], [41], para diseñar leyes de control continuas por retroalimentación de estado que estabilizan en tiempo finito cierta clase de sistemas no lineales. Sin embargo, nunca se ha aplicado para diseñar controladores discontinuos puramente homogéneos.

*Por razones estructurales del sistema, en los trabajos [78], [79], [39], [41], no se pueden admitir entradas de control suaves.*

Una cuestión natural que surge es si es posible utilizar el enfoque de FLCR para el diseño de controladores discontinuos que brinden convergencia en tiempo finito. Una FLCR permite encontrar condiciones suficientes para sintonizar las ganancias, permite obtener un estimado del tiempo de convergencia de las trayectorias de estado y hacer extensiones de los algoritmos de control que de otra manera no sería posible. Por estas razones, es importante investigar cómo construir FLCR para sistemas retroalimentados con una entrada de control discontinua.

La finalidad de este trabajo es proponer un enfoque basado en FLC para generar un diseño totalmente novedoso de controladores discontinuos homogéneos (y no homogéneos) para ser utilizados en CMDOS.

## 1.2. ANTECEDENTES: FUNCIÓN DE LYAPUNOV DE CONTROL (FLC) EN MODOS DESLIZANTES

El diseño de controladores capaces de garantizar convergencia en tiempo finito de algún sistema dinámico no es un problema reciente, [37]. El empleo de controladores, continuos o discontinuos, que aseguran convergencia en tiempo finito en el esquema de control, provee ventajas notables: el objetivo de control se alcanza en tiempo finito, hay mejor robustez y rechazo a cierta clase de perturbaciones, [15], [56]. Existe una diferencia importante entre usar un controlador continuo y uno discontinuo. Una entrada de control discontinua puede eliminar el efecto de perturbaciones acopladas estáticas que no necesariamente se desvanecen, y que por el contrario, un controlador continuo jamás podrá compensar.

*En una función estática o sin memoria su valor en un tiempo  $t$  solo depende de valores en ese mismo instante de tiempo y del estado.*

Para algunos sistemas no lineales continuos, el análisis de estabilidad y de estabilización en tiempo finito usando el enfoque de FL ha sido ampliamente estudiado en [37], [14], [15], [16], [79], [39], [41].

*La noción de FLC fue introducida originalmente por Artstein y Sontag.*

La ventaja del enfoque de FLC es que permite lograr la estabilización de casi cualquier sistema no lineal, por supuesto, si se conoce la FLC del sistema. Particularmente en [79], [39], [41], aunque no se menciona propiamente, se construye explícitamente una FLC para diseñar entradas de control que son solo continuas usando el MB y funciones desingularizantes.

Cuando se usan entradas de control discontinuas, la estabilidad del sistema en lazo cerrado se puede analizar bajo la teoría de una ID, [5], [32], [84]. El método de FLC se ha empleado para estabilizar cierta clase de sistemas descrito por una ID con una sola entrada de control en [90] y con muchas entradas en [17]. Sin embargo, esta clase de sistemas son relativamente especiales y pertenecen básicamente a sistemas politópicos. En ambos casos, la estabilización es asintótica.

El problema de estabilidad en tiempo finito de una ID ha sido estudiado en [71], [68]. En [40] se usa el método de FLC no solo para construir controladores discontinuos con velocidad de convergencia asintótica sino también con convergencia en tiempo finito. Sin embargo, la principal desventaja en todos estos trabajos es que el diseñador ya debe contar con una FLC para implementar el control.

En CMDOS homogéneos [54], [55], [57], el análisis de estabilidad mediante FL sólo ha sido fructífero en sistemas de segundo orden. Los algoritmos más estudiados

han sido los pertenecientes a los modos deslizantes de segundo orden (MDSO): el algoritmo Twisting y el algoritmo Super-Twisting [72], [75], [76], [73], [65], [67], y el algoritmo Terminal, [31], [95], [92]. En algunos de estos trabajos, la estabilidad se estudia a través de alguna FL débil restringiendo la posibilidad de estimar el tiempo de convergencia y hacer otra clase de extensiones [72]. En [65] se propone una FL para el Super-Twisting generalizado permitiendo estimar el tiempo de convergencia, y hallar una sintonización de las ganancias en forma explícita. Un análisis similar no ha sido posible para los algoritmos por MDOS.

Recientemente, se ha tratado de abordar el problema de construir una FL para algoritmos de MDOS pero con limitado éxito, [67],[81]. Una de las soluciones a este problema ha sido propuesta en [81]. Sin embargo, la gran desventaja del método propuesto en [81] radica en que hay que obtener las soluciones del sistema retroalimentado con un CMDOS para poder construir la FL. Lo cual resulta prácticamente imposible para órdenes mayores a tres.

El rediseño de Lyapunov se ha aplicado en [38] para generar una nueva familia de CMDOS en dos pasos. El método consiste en usar un controlador continuo para estabilizar en tiempo finito una cadena de integradores no perturbada, para después, aplicar un control discontinuo junto con la entrada continua con el fin de mejorar las propiedades de robustez del sistema en lazo cerrado, [46]. Esta estrategia permite rechazar perturbaciones acotadas y acopladas, que ley de control nominal no es capaz de compensar. Sin embargo, no construyen una FLCR para diseñar controladores por retroalimentación de estados discontinuos que hagan que el sistema en lazo cerrado sea homogéneo.

La homogeneidad permite concluir de una forma sencilla la estabilidad en tiempo finito de sistema. Cuando se tiene una entrada de control, solo hay que lograr que a través de dicha entrada, el campo vectorial asociado al sistema en lazo cerrado tenga un grado de homogeneidad negativo, [16], [39], [41], [56].

Aunque, los MDOS poseen características muy atractivas para su empleo como controladores, también poseen algunas desventajas. Por ejemplo, los algoritmos por MDOS generalmente tienen una estructura fija, lo cual restringe la posibilidad de manipular la velocidad de convergencia a través de los parámetros del controlador, proveen estabilidad semiglobal, compensan perturbaciones acopladas acotadas por alguna constante conocida y el rechazo ante perturbaciones no acopladas no ha sido formalmente demostrado. La estrategia adoptada para combatir y/o reducir el efecto de las perturbaciones no acopladas en CMD y CMDOS es la combinación de estas técnicas con otros métodos de control robusto. Por ejemplo, en [19], [80], el CMD integrales se utiliza para atenuar el efecto de perturbaciones no acopladas, y en [18] para eliminar completamente su efecto; sin embargo, estos enfoques funcionan para un MDPO. Para MDOS, los controladores propuestos en [54], [57] se combinan con el MB, bajo la suposición de que los términos no acoplados sean lo bastante diferenciables, [28], [29]. Esta condición es relajada en [89], donde la diferenciación del modelo del sistema perturbado es difícil.

El control por modos deslizantes terminales (CMDT) rápidos propuesto en [96] brinda una mejor velocidad de convergencia a las trayectorias del sistema en comparación con el CMDT clásicos, [63]. Un CMDT rápidos emplea una SD terminal que contiene términos lineales permitiendo una convergencia más rápida durante el modo deslizante. Aunque hay una mejora en la velocidad de convergencia, esta clase de controladores posee los mismos problemas de implementación que un CMDT clásico. Principalmente, el problema está relacionado con la singularidad que aparece en el control. Las leyes de control propuestas por estos métodos no están bien definidas en todo el espacio de estados. Algunos métodos alternativos que permiten obtener controladores bien definidos en todo el espacio de estados con un esquema de CMDT se han propuestos por Man and Yu [62] y Wu et al. [91].

Un método bastante utilizado en la comunidad de CMDT es el basado en el empleo de una Fdes, [31], [95], [92]. La idea es reescribir la SD terminal (rápida) con el ob-

*A la SD empleada en un CMDT rápidos se le conoce como SD terminal rápida.*

jetivo de obtener leyes de control no singulares. Las dos técnicas más conocidas que emplean esta idea son el CMDTNS y el control por modos de deslizante terminales rápidos no singulares (CMDTRNS). Esta última mejora la velocidad de convergencia usando señales de control que no se hacen singulares en ningún conjunto del espacio de estados.

Las principal característica de un CMDTRNS es que su diseño está basado en CMD clásicos. Hasta ahora, este enfoque ha resultado satisfactorio para sistemas de segundo orden. Sin embargo, para sistemas de orden arbitrario la extensión de la idea de desingularizar la SD terminal rápida ya no es obvia y el diseño del controlador parece complicarse conforme el orden del sistema crece [93], [94]. Un hecho importante, es que en el contexto de exclusivo de MDOS nunca se ha tratado de mejorar la velocidad de convergencia.

*Utilizar la idea de desingularizar la SD terminal (rápida) es complicada bajo el enfoque de CMDTNS.*

### 1.3. OBJETIVOS GENERALES

Debido a las ventajas que presenta la convergencia en tiempo finito, es recomendable que la tarea de control se realice en tiempo finito y de manera robusta. Desde el punto de vista más general, lograr la tarea de regulación o seguimiento  $\sigma$  usando el modelo del sistema (1) es complicado. Como se busca llevar a cabo la tarea de control mediante controladores discontinuos, es mas conveniente trabajar con el sistema  $\Sigma_T$ . Dicho lo anterior, existen dos problemas específicos que se abordan en este trabajo:

(P1) Proponer un método basado en Funciones de Lyapunov de Control Robustas para el diseño de controladores discontinuos, homogéneos y no homogéneos, que garantizan que la tarea de regulación o seguimiento se lleva a cabo en tiempo finito. Además, a diferencia del problema convencional de CMDOS, se considera que existe cierta clase de perturbaciones no acopladas. El caso homogéneo podría considerarse como un caso particular del no homogéneo, pero se examinan ambos casos por separado por ciertas razones que pueden dividirse en dos categorías.

(I) Existe una importante familia de algoritmos homogéneos que son aplicados en CMDOS, y cuya obtención es poco clara. En el contexto estándar de CMDOS, la idea es diseñar la entrada de control robusta  $u = u(x)$  que logre que las trayectorias del sistema  $\Sigma_T$  converjan al origen  $x = 0$  en tiempo finito, a pesar de la presencia de perturbaciones acopladas y acotadas. Un análisis ante perturbaciones no acopladas para un CMDOS homogéneo nunca ha sido tratado.

(II) La otra categoría concierne al diseño controladores discontinuos no homogéneos. Es importante investigar cómo diseñar leyes de control robustas  $u = u(x)$  que logren que las trayectorias del sistema  $\Sigma_T$  converjan al origen  $x = 0$  en tiempo finito, pero con una mejor velocidad de convergencia. Todo esto a pesar de la presencia de cierta clase de perturbaciones. Una familia importante de controladores que se estudian son los que aseguran convergencia en tiempo fijo. Esta familia no solo garantiza convergencia en tiempo finito al origen, sino también, el tiempo de convergencia al origen de cualquier trayectoria está uniformemente acotado por una constante independientemente de las condiciones iniciales de los estados del sistema.

(P2) Utilizar el método por CMD clásico en conjunto con una FLCR para diseñar la entrada de control robusta  $u = u(x)$  que asegure que cualquier vecindad del origen del sistema  $\Sigma_T$  sea atractiva en tiempo fijo (ATFj), a pesar de la presencia de otra clase de perturbaciones. La entrada de control se diseña con base en el método clásico de CMD con el fin de que las trayectorias del sistema en lazo cerrado converjan asintóticamente al origen, pero además, el

*La propiedad de atractividad en tiempo fijo se define en el Capítulo 2.*

tiempo que le toma a cualquier trayectoria de estado alcanzar una vecindad del origen del sistema  $\Sigma_T$  esté acotado uniformemente por una constante. Es importante resaltar que dicha cota solo depende de parámetros constantes y es independiente de la condición inicial de las trayectorias.

El problema **(P1)** es menos sencillo de resolver que el segundo. Puesto que, el diseño de controladores discontinuos con convergencia en tiempo finito a través de la construcción explícita de una FLCR nunca antes se había considerado. Una FLCR permite conocer el tipo de perturbaciones no acopladas que soporta el sistema controlado. El problema **(P1)** se reduce a buscar ciertas funciones desingularizantes (homogéneas y no homogéneas) con las que es posible construir una FLCR. El correcto estudio del punto **(I)** es clave para hallar una solución al punto **(II)**.

Con respecto al problema **(P2)**, las dificultades aparecen ya que el CMD solo funciona en el caso en que la perturbación es acoplada. Es por ello que es imperativo hallar bajo que tipo de perturbaciones no acopladas se preserva la estabilidad.

Todos los problemas mencionados toman en cuenta en su diseño a las perturbaciones no acopladas. Cada ley de control estabilizante es capaz de soportar cierta clase de perturbaciones. En general, la clase de perturbaciones que se puede compensar dependerá en gran medida de la entrada de control seleccionada para el sistema. Además, cuando la perturbación acoplada no desvanece en el origen, no existe ningún controlador continuo que la pueda compensar. Por ello, es imprescindible el diseño de controladores discontinuos.

#### 1.4. ESTRUCTURA DEL TRABAJO

En el [Capítulo 2](#) se presentan definiciones y conceptos teóricos relacionados con la estabilidad en el sentido de Lyapunov y el tipo de convergencia para sistemas continuos y discontinuos. Con el desarrollo de la teoría de estabilidad en el sentido de Lyapunov [60], evaluar la estabilidad de un sistema no lineal utilizando las propiedades de la solución de su ecuación diferencial ordinaria (EDO) que lo modela, se convierte en un problema de existencia de una FL. Permitiendo darle la vuelta al problema de resolver la EDO para probar la estabilidad y caracterizar otras propiedades distintas, entre ellas, la velocidad de convergencia. La existencia de una FL es suficiente (y necesaria) para determinar la estabilidad de un sistema sin entradas.

Durante estos últimos años, la teoría de homogeneidad ha contribuido al análisis de sistemas no lineales [16],[6],[56]. Sus resultados más fuertes están relacionados con el grado de homogeneidad del sistema y la existencia de alguna FL homogénea. Como casi ningún sistema dinámico es homogéneo, se hace el uso de alguna aproximación homogénea para analizar su estabilidad. Una importante extensión de esta propiedad es presentada en [2] como homogeneidad en el bi-límite permitiendo utilizar diferentes aproximaciones homogéneas.

En sistemas donde aparecen entradas de control, uno de los enfoques más utilizados para el diseño de controladores es el basado en FLC. Dicha función es una candidata a FL cuya derivada puede hacerse negativa a través de la correcta construcción de la entrada de control. Aquí, la existencia de una FLC es suficiente (y necesaria) para la estabilización del sistema con entradas. Para un sistema incierto, la FLC quizás no permite abordar el problema de robustez. Para garantizar la robustez del sistema en lazo cerrado se requiere de lo que se conoce como FLCR, la cual permite hacer el diseño de la entrada de control cuando se toman en cuenta perturbaciones.

El [Capítulo 3](#) presenta el sistema dinámico con el cual se trabajará a lo largo del trabajo. La formulación del problema toma en cuenta a las perturbaciones no acopladas que actúan sobre planta y que generalmente son excluidas del análisis cuando se utiliza el enfoque de MDOS, donde únicamente se consideran perturbaciones acopladas.

Una vez se ha formulado el problema de control en el espacio de estados, se desarrollan diferentes tipos de controladores, basados en la construcción explícita de una FLCR, que aseguran distintas propiedades de convergencia del sistema en lazo cerrado.

#### 1.4.1. Estabilización en tiempo finito mediante FLCR

El [Capítulo 4](#) y el [Capítulo 8](#) se enfocan exclusivamente en el diseño de controladores discontinuos, homogéneos y no homogéneos, a través de la construcción de una FLCR.

*A pesar de que la Teoría de Homogeneidad garantiza la existencia de alguna FL homogénea, no propone ningún método para construirla.*

**Capítulo 4.** El diseño de controladores discontinuos puede realizarse cuando se cuenta con una FLC, o una FLCR. La meta es garantizar no solo estabilización robusta, sino también, que dicha estabilización sea en tiempo finito.

Los algoritmos del CMDOS ampliamente reportados en [54],[55],[56], pueden resolver el problema de estabilización robusta y en tiempo finito, siempre y cuando las perturbaciones cumplan la condición de acoplamiento. Hasta ahora, la prueba de estabilidad de los algoritmos por MDOS se ha basado en propiedades de contracción y propiedades de homogeneidad para inclusiones diferenciales. Como el grado de homogeneidad del sistema retroalimentado es negativo, es posible concluir convergencia en tiempo finito.

Recientemente, el rediseño de Lyapunov se ha aplicado para diseñar nuevos algoritmos para CMDOS, [38]. Este enfoque utiliza el rediseño por Lyapunov y requiere del empleo de algún controlador continuo que garantice la convergencia en tiempo finito del sistema a controlar. Además, los controladores resultantes ya no hacen homogéneo al campo vectorial del sistema en lazo cerrado. Por lo que existe una pregunta muy interesante a cuestionar

¿Es posible diseñar controladores puramente discontinuos que sean homogéneos y que presenten la propiedad de convergencia en tiempo finito a través de la construcción explícita de una FLC?

Un diseño explícito de una FLC permite, entre otras cosas, caracterizar la velocidad de convergencia, estimar el tiempo de convergencia, obtener un conjunto de ganancias, y hacer extensiones de los algoritmos de control, que de otra forma no sería posible. Si uno puede diseñar una FLC, entonces se obtiene indirectamente una solución al problema de diseñar la ley de control discontinua. Con el enfoque propuesto por [Levant](#), [54],[55],[56], no es posible tener los beneficios anteriormente mencionados

El análisis realizado en este capítulo da una posible solución a la pregunta anterior, dando como resultado una herramienta metodológica complemente novedosa para el diseño de controladores discontinuos homogéneos. Adicionalmente, en el diseño se toman en cuenta las perturbaciones no acopladas, logrando que el problema de estabilización robusta sea lo más general posible.

**CONTRIBUCIÓN:** La contribución principal es el desarrollo de un método de diseño que permite construir simultáneamente algún controlador discontinuo con su correspondiente FLCR, garantizando la existencia de un MDOS en tiempo finito. La construcción explícita de la FLCR está fuertemente inspirado en el MB y en las propiedades de sistemas homogéneos.

Se muestra como funciona el método paso a paso y se propone una forma de diseñar las ganancias de los controladores. En general, se puede construir cualquier familia de controladores discontinuos que se desee con el método que se propone. Todos los controladores obtenidos con esta metodología son estructuralmente diferentes a los propuestos en [56]. Esta diferencia permite que la respuesta transitoria de las trayectorias del sistema sea más suave cuando se aplican los controladores propuestos que cuando se aplican los controladores dados en [56].

*Los controladores obtenidos a través de la FLCR comparten algunas características cualitativas con los controladores propuestos en [56]. Por ejemplo, ambos son homogéneos y garantizan convergencia en tiempo finito.*



**Capítulo 8.** Se plantea el problema de estabilización robusta y en tiempo finito, pero con un ingrediente adicional, el mejoramiento de velocidad con que se alcanzan las tareas de control. Los controladores discontinuos que son puramente homogéneos no pueden cambiar, o mejorar, la velocidad de convergencia del sistema en lazo cerrado. Para resolver este nuevo problema se siguen dos enfoques.

El primer método consiste en combinar dos controladores con distinto tipo de convergencia a través de una correcta regla de conmutación. Básicamente, se emplea uno de los controladores discontinuos del **Capítulo 4**, que asegura estabilización en tiempo finito, en combinación con otro controlador que no es homogéneo pero que garantiza la velocidad de convergencia y robustez deseadas lejos de una vecindad del origen.

La segunda alternativa consiste en construir una ley de control robusta completamente nueva que no necesite de una regla de conmutación para proveer la velocidad de convergencia deseada. El diseño de esta ley de control es más complicado y requiere del uso de herramientas matemáticas más generales que las puras propiedades de homogeneidad. Para este fin, se usarán las propiedades de homogeneidad en el bi-límite. En **Andrieu et al. [2]**, se define y utiliza esta propiedad junto con una FLCR para el diseño de controladores continuos. Aquí se utiliza esa propiedad para diseñar una nueva clase de controladores discontinuos mediante una FLCR. Dependiendo de cómo se sintonicen los parámetros del controlador, las trayectorias del sistema en lazo cerrado exhiben distintos tipos de convergencia, incluyendo la propiedad recientemente redefinida como estabilización en tiempo fijo, [73], y brevemente estudiada en [2] a través del concepto de homogeneidad en el bi-límite.

**CONTRIBUCIÓN:** Se proponen dos familias de controladores que tienen mejor velocidad de convergencia comparado con los MDOS propuestos en [56]. En el diseño de ambas familias está completamente basado en el MB y se basa en una ligera modificación del método presentado en el **Capítulo 4** y tomando en cuenta las herramientas matemáticas presentadas en [2].

La primera familia utiliza una regla de conmutación entre controladores con distinto tipo de convergencia. Para ello, se hace una generalización de un controlador homogéneo que provee la velocidad de convergencia deseada a través de la sintonización de sus parámetros. Este controlador es conmutado con los controladores discontinuos del capítulo 4. El esquema resulta robusto solamente ante perturbaciones acopladas y acotadas.

La segunda familia de controladores no utiliza una regla de conmutación y a través de los parámetros involucrados en la estructura de control se obtiene el tipo de convergencia deseada. Para esta familia de controladores es posible asegurar convergencia en tiempo finito en presencia de cierta clase de perturbaciones no acopladas. Esta familia de controladores constituye el aporte importante de este capítulo, ya que hasta ahora no se había propuesto controladores discontinuos que tuvieran distintos tipos de convergencia para sistemas con grado relativo arbitrario.

#### 1.4.2. Estabilización en tiempo fijo via Control por Modos Deslizantes (CMD)

El **Capítulo 6** y el **Capítulo 7** se enfocan en el diseño de controladores de tiempo fijo a través del método brindado por la técnica de CMD clásico.

La propiedad de convergencia en tiempo fijo, recientemente ha llamado la atención de la comunidad de CMD [26],[73]. El mejoramiento de la velocidad de convergencia y de la robustez de los sistemas dinámicos lejos y cerca del origen son dos características inherentes de la estabilización en tiempo fijo [2]. Una consecuencia relevante de esta propiedad, es que los objetivos de observación y control pueden ser alcanzados durante un tiempo acotado y posiblemente predefinido *a priori* por el usuario.

**Capítulo 6.** Se analiza uno de los casos más simples, un sistema de segundo orden. Para lograr estabilizar el sistema en tiempo fijo se necesita proponer una nueva

*La propiedad de convergencia en tiempo fijo fue descubierta en el diseño de observadores [44], [27], [24], y presenta dos características interesantes. La primera es que el objetivo de control se alcanza en tiempo finito. La segunda es que el tiempo de convergencia está acotado uniformemente por una constante.*

*Para sistemas de segundo orden, el mejoramiento de la velocidad de convergencia ha sido ampliamente estudiado en [92], [73], usando la idea básica de CMD. En Yu and Man [96] se proponen un CMDT rápidos, que no es implementable en la práctica.*

*En [23], [24] se presenta un observador y un diferenciador en cuyo diseño se incluye esta propiedad.*

clase algoritmos, y además, como las superficies deslizantes conocidas no poseen la propiedad de ATFj, se necesita proponer una nueva SD que asegure que el sistema reducido posea esta característica. A diferencia de los controladores de tiempo fijo del capítulo anterior, el enfoque de CMD clásico solamente permite asegurar ATFj de cualquier vecindad arbitrariamente pequeña del origen del sistema en lazo cerrado. La estabilidad en tiempo fijo queda resuelta con los controladores del [Capítulo 8](#), pero con el empleo de esta clase de controladores es inevitable la aparición del efecto de chattering. Para reducir este efecto, se propone un controlador basado en una modificación del Super-Twisting, permitiendo convergencia en tiempo fijo a la SD. El esquema de control resulta robusto ante variaciones en *las condiciones iniciales del sistema* y ante la presencia de cierta clase de perturbaciones.

**CONTRIBUCIÓN:** Se proponen dos controladores de tiempo fijo para un sistema de segundo orden usando la metodología clásica de MD. Los controladores propuestos aseguran estabilidad asintótica robusta del origen del sistema controlado ante la presencia de cierta clase de perturbaciones. Pero además, garantizan que cualquier vecindad del origen sea ATFj. Esencialmente se diseñan

*Con la propiedad de ATFj el tiempo de convergencia a una vecindad esta acotado por alguna constante independiente de la condición inicial del sistema.*

- (I) una SD no lineal tal que, durante el modo deslizante, el origen del sistema sea AE y una vecindad arbitrariamente pequeña del origen sea ATFj;
- (II) un controlador basado en un MDPO pero que incluye algunos términos adicionales. Esto ayuda a que la convergencia de cualquier trayectoria a la SD sea robusta ante cierta clase de perturbaciones acopladas y en tiempo fijo;
- (III) un controlador basado en el Super-Twisting generalizado con el fin de reducir el efecto de chattering. De forma similar, se adicionan algunos términos al controlador para que las trayectorias converjan a la SD en tiempo fijo. Este controlador resulta robusto en presencia de otra clase de perturbaciones.

[Capítulo 6](#). Como una extensión del resultado anterior, se hace una generalización de los controladores de tiempo fijo para una clase de sistemas de orden arbitrario. El diseño de controladores que tienen la propiedad de atractividad tiempo fijo para sistemas con orden mayor a dos ha sido abordado por [Polyakov \[73\]](#), en donde los controladores no son diseñados propiamente mediante una FLCR, las leyes de control propuestas tienen un estructura muy compleja, y el análisis bajo perturbaciones no acopladas no se toma en cuenta.

Nuestro análisis es motivado por la compensación de perturbaciones no acopladas y que usualmente no se toma en cuenta en un CMD clásico. Con este enfoque de control, la SD se construye de tal manera que exista convergencia asintótica durante el modo deslizante cuando únicamente existen perturbaciones acopladas. Si llegasen a existir perturbaciones no acopladas, es necesario conocer la clase de perturbaciones para la cual el sistema controlado sigue siendo estable. La solución que se propone a este problema, es hacer el diseño de la SD a través de la construcción de una FLCR. Con este enfoque es posible determinar la clase de perturbaciones no acopladas que los controladores de tiempo fijo son capaces de compensar.

**CONTRIBUCIÓN:** Se introducen dos controladores de tiempo fijo para una clase de sistema de orden arbitrario usando la metodología de diseño de CMD clásico. Dichos controladores son una extensión de los controladores desarrollados en el [Capítulo 6](#). Se demuestra que la construcción de la SD a través del MB permite obtener un diseño recursivo y conocer la clase de perturbaciones que es capaz de compensar cualquiera de los controladores de tiempo fijo que se proponen.

### 1.5. COMENTARIOS ADICIONALES

Para facilitar la lectura, todas las pruebas de los resultados de cada capítulo se presentan en una sección al final del mismo. Las pruebas son presentadas en el orden en que aparecen los resultados de cada capítulo.

Para mayor información sobre los resultados reportados en este trabajo el lector puede consultar el [Apéndice F](#), donde se presenta una lista detallada de las publicaciones realizadas a lo largo de los estudios de doctorado.





*“Aprende las reglas, así sabrás  
como romperlas apropiadamente.”*

— Dalai Lama

Un aspecto importante del comportamiento dinámico de un sistema corresponde al análisis de estabilidad. Las primeras nociones de estabilidad describieron a sistemas cuyas trayectorias convergen asintóticamente a un punto de equilibrio. La estabilidad asintótica se divide en dos categorías: exponencial y racional, [6]. En un sistema racionalmente estable, el tiempo de convergencia al punto de equilibrio del origen es en un tiempo no acotado y la velocidad de convergencia es muy lenta muy cerca del origen. Sin embargo, la característica notable es que la velocidad de convergencia llega a ser tan grande fuera de una vecindad del origen, que el tiempo que le toma a cualquier trayectoria en llegar a dicha vecindad, está uniformemente acotado por una constante, independientemente del valor de la condición inicial del sistema. Esta propiedad se conoce como atractividad en tiempo fijo y ha sido poco utilizada en el diseño de controladores y observadores para sistemas no lineales, a excepción de algunos trabajos, [2], [24], [73].

Otra noción importante, conocida desde hace tiempo, es la estabilidad en tiempo finito. La característica sobresaliente de los sistemas que presentan esta propiedad es que sus trayectorias llegan en tiempo finito al punto de equilibrio. En un sistema con convergencia en tiempo finito no hay unicidad de las soluciones hacia atrás en el tiempo, por lo que asumir que el sistema es Lipschitz continuo no es suficiente para analizar estos sistemas.

Establecer herramientas para el análisis de estabilidad de sistemas con dinámica no lineal ha sido una tarea difícil. Una forma de evaluar la estabilidad del sistema es a través del método directo de Lyapunov. Este método, muy eficiente para sistemas no lineales, requiere de la construcción de lo que ahora se conoce como FL. Con el desarrollo de la teoría de la estabilidad en el sentido de Lyapunov [60], evaluar la estabilidad de un sistema no lineal se convierte en un problema de existencia de una FL. Permitiendo darle la vuelta al problema de obtener la solución de la EDO que modela al sistema para estudiar la estabilidad.

En general, no hay ningún algoritmo explícito que permita construir una FL. La dificultad no sólo radica en la construcción “manual” de la FL, sino también en la complejidad de verificar las dos condiciones que se necesitan satisfacer: la función debe ser p.d. y su derivada a lo largo de las trayectorias del sistema debe ser n.d..

Un enfoque basado en FL no solo permite analizar el comportamiento dinámico, sino además, permite realizar el diseño de controladores y observadores de sistemas lineales y no lineales, garantizando la estabilidad en lazo cerrado cuando son conectados junto con el sistema. A través de una FL se puede caracterizar el comportamiento dinámico de un sistema, es decir, la estabilidad asintótica o en tiempo finito se pueden caracterizar a través de una FL, [13], [15], [6],[46].

Durante estos últimos años, los sistemas que presentan la propiedad de homogeneidad han recibido una notable atención. Los resultados más fuertes establecidos para sistemas homogéneos están relacionados con lo que se conoce como grado de homogeneidad y con la existencia de alguna FL homogénea. Ambos, permiten caracterizar el tipo de convergencia que exhibe el sistema homogéneo. Sin embargo, la teoría de homogeneidad no propone una forma para construir una FL. Como casi ningún sistema dinámico es homogéneo, usualmente se hace alguna aproximación homogénea para analizar su estabilidad. Una extensión importante de esta propie-

*Para conocer más detalles  
sobre estabilidad en tiempo  
finito, consúltese los  
trabajos [36], [15], [16].*

dad es presentada por [Andrieu et al. \[2\]](#) como homogeneidad en el bi-límite permitiendo utilizar diferentes aproximaciones homogéneas.

Originalmente, la teoría de Lyapunov se desarrolló para sistemas sin entradas de control. Para sistemas con entradas de control, uno de los enfoques más utilizados es el basado en FLC. Dicha función es una candidata a FL cuya derivada puede hacerse negativa a través de los correctos valores de la entrada de control. Aquí, la existencia de una FLC es suficiente (y necesaria) para la estabilización del sistema (nominal) con entradas. Para un sistema incierto, la FLC quizás no permite abordar el problema de estabilización robusta. Para analizar la robustez del sistema en lazo cerrado se requiere de lo que se conoce como FLC<sub>R</sub>, la cual permite hacer un análisis cuando se toman en cuenta perturbaciones.

Los conceptos que se presentan en este capítulo servirán para formular el problema de control en [Capítulo 3](#) y para desarrollar distintos controladores discontinuos en capítulos posteriores. La mayoría de los conceptos y resultados presentados en este capítulo han sido extraídos de [Bacciotti and Rosier \[6\]](#), [Polyakov and Fridman \[74\]](#), [Bernuau et al. \[11\]](#), [Clarke et al. \[20\]](#).

## 2.1. ESTABILIDAD DE SISTEMAS NO LINEALES AUTÓNOMOS

La estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema no lineal puede ser estudiada en dos formas. La primera es a través de la noción de estabilidad interna, que simplemente es la noción clásica de estabilidad del sistema no forzado, es decir, cuando la entrada de control es nula. El segundo caso es utilizando la noción de estabilidad externa, que considera el caso cuando que la entrada es distinta de cero.

### 2.1.1. Estabilidad y tipo de convergencia

El concepto de estabilidad introducido en [\[60\]](#) es una de las nociones centrales en la teoría de control moderna. Considere el siguiente sistema

$$\dot{x} = f(x), \quad x_0 = x(0), \quad (3)$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial continuo que mapea de un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ . Esto garantiza que para cada condición inicial de  $x_0$ , existe al menos una solución de (3). Denotaremos a una solución<sup>1</sup> de (3) por  $x(t, x_0)$ .

**Definición 2.1** [\[6\]](#) Se dice que el origen  $x = 0$  es un punto de equilibrio de (3) si  $f(0) = 0$ .

**Definición 2.2** [\[6\]](#) El origen de (3) es

- (I) estable en el sentido de Lyapunov si para cada  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$  existe  $\delta \in \mathbb{R}_+$  tal que  $\forall x_0 \in B_\delta$ , las soluciones  $x(t, x_0) \in B_\epsilon, \forall t \geq 0$ .
- (II) localmente atractivo si existe  $\delta_0$  tal que  $\forall x_0 \in B_{\delta_0}, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = 0$ .
- (III) es local y asintóticamente estable (AE), si es estable en el sentido de Lyapunov y localmente atractivo. El origen es global y AE (GAE), si  $B_{\delta_0} = \mathbb{R}^n$ .
- (IV) es inestable si no satisface la condición (I).

*Solo se estudia la estabilidad del origen  $x = 0$  del sistema (3), ya que haciendo un cambio de variable  $y = x - x^*$ , siempre se puede transformar cualquier problema de análisis de estabilidad de alguna solución no trivial  $x^*(t, x_0^*)$  en un análisis de estabilidad de un punto de equilibrio  $y = 0$ .*

$B_{\delta_0}$  es el dominio de atracción.

<sup>1</sup> Cuando se habla de soluciones a la EDO hay que especificar el problema asociado. El problema de Cauchy o de la condición inicial ocurre cuando, dada una  $x_0$  y un tiempo inicial  $t_0 \in \mathbb{R}^+$ , hay que hallar un función definida en un intervalo de tiempo, que contiene a  $t_0$ , que satisface la EDO tal que su valor en  $t_0$  es  $x_0$ . El problema se puede reducir a buscar funciones que son al menos absolutamente continuas c.r. al tiempo. Para asegurar existencia de la solución hay que suponer que la EDO posee soluciones maximales únicas en tiempo hacia adelante en  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ . La función  $x_0(t, x_0), x_0 \in \mathcal{X}$ , definida en  $[0, T_{x_0}]$  es una solución maximal si para cualquier otra solución  $x_1(t, x_0)$  definida en  $[0, T_{x_1}]$ ,  $T_{x_1} \leq T_{x_0}$  y  $x_0(t, x_0) = x_1(t, x_0), \forall t \in (0, T_{x_1})$ . Además, la solución  $x(t, x_0)$  satisface la propiedad de consistencia  $x(0, x_0) = x_0$  y de semi-grupo  $x(t, x_s(\tau, x_0)) = s(t + \tau, x_0)$  por cada  $x \in D$  y  $t, \tau \in [0, T_{x_1})$ .

Las funciones de comparación permiten reformular las definiciones de estabilidad de un modo unificado, generalizando la clase de función que se utilizan para acotar las soluciones de un sistema autónomo.

**Proposición 2.1** [6],[36] *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (I) *el sistema (3) se establece en  $x = 0$ ,*
- (II) *existen  $r_0 \in \mathbb{R}_+$  y un mapa  $\alpha : [0, r_0) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $\alpha \in \mathcal{K}$ , tal que  $\forall x_0 \in B_{r_0}$  y  $\forall t \geq 0$ ,  $\|x(t, x_0)\| \leq \alpha(\|x_0\|)$ .*

**Proposición 2.2** [6],[36] *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (I) *el sistema (3) es local AE (o GAE) en  $x = 0$ ,*
- (II) *existe un mapa de  $\beta : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\beta \in \mathcal{KL}$ , tal que  $\forall x_0 \in B_r$  ( $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ ) y  $\forall t \geq 0$ ,  $\|x(t, x_0)\| \leq \beta(t, \|x_0\|)$ .*

La noción de estabilidad asintótica por si sola no permite caracterizar la velocidad de convergencia de las trayectorias del sistema. Existen tres tipos básicos de convergencia que se pueden distinguir.

**Definición 2.3** [6] *El origen de (3) es*

- (I) *racionalmente estable (RE) si es AE y existen constantes positivas  $\delta, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$  y  $\eta \in (0, 1]$ , tal que  $\forall x_0 \in B_\delta$ , la solución  $x(t, x_0)$  está definida en  $[0, +\infty)$  y satisface  $\|x(t, x_0)\| \leq b_1(1 + \|x_0\|^{b_2}t)^{-\frac{1}{b_2}} \|x_0\|^\eta$ ,  $\forall t \geq 0$ ;*
- (II) *exponencialmente estable (EE) si es AE y existen constantes positivas  $\delta, b_1, b_2 \in \mathbb{R}_+$ , tal que  $\forall x_0 \in B_\delta$ , la solución  $x(t, x_0)$  está definida en  $[0, +\infty)$  y satisface  $\|x(t, x_0)\| \leq b_1 \exp(-b_2 t) \|x_0\|$ ,  $\forall t \geq 0$ ;*
- (III) *estable en tiempo finito (ETF) si es AE y  $\forall x_0 \in B_\delta$ , la solución  $x(t, x_0)$  satisface  $x(t, x_0) = 0$  en algún tiempo finito  $t = T(x_0)$  y permanece ahí  $\forall t \geq T(x_0)$ , donde  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  es la función de tiempo de asentamiento.*

Las nociones son globales si satisfacen la Definición 2.3 con  $B_\delta = \mathbb{R}^n$ . Además, de la Definición 2.3 se observa que: el punto (II) define la convergencia exponencial bastante conocida en la Teoría de Control Lineal. La propiedad de convergencia en tiempo finito queda caracterizada en el punto (III). De hecho,  $\forall x_0 \in B_\delta$ , la función de tiempo de asentamiento satisface

$$T(x_0) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : x(t, x_0) = 0\}.$$

La función  $T(x_0)$  define el tiempo de convergencia y es el tiempo que le toma a la trayectoria  $x(t, x_0)$ , con estado inicial  $x_0 \in B_\delta$ , en llegar al origen. La estabilidad asintótica implica que si el origen de (3) es un equilibrio ETF, la única trayectoria solución a partir de  $x = 0$  es  $x(t, 0) = 0$  y la solución permanece en el origen para cualquier momento mayor a  $T(x_0)$ , [15].

Como se verá mas adelante, el punto (I) caracteriza la propiedad de atractividad en tiempo fijo. Las siguientes definiciones caracterizan dos casos peculiares de la estabilidad en tiempo finito.

**Definición 2.4** . *El origen  $x = 0$  es ETF con decaimiento exponencial (ETFdE) si es ETF y la función de tiempo de asentamiento  $T(x_0)$  está acotada por una función logarítmica de  $x_0$ , es decir,  $\exists \eta \in (0, 1)$ ,  $b_1, b_2 > 0 : T(x_0) \leq b_1 \ln(1 + b_2 \|x_0\|^\eta)$ ,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ .*

No solo las trayectorias del sistema convergen al origen en tiempo finito, también, el decaimiento de las trayectorias al origen es similar a un decaimiento exponencial. A pesar de que existe una mayor velocidad de convergencia, el tiempo de asentamiento sigue dependiendo de la condición inicial  $x_0$ .

*De la Proposición 2.2 existen dos casos notables, cuando  $\beta \in \mathcal{KL}$ , y  $\beta(r, s) = r \exp(-c_e s)$ , y  $\beta(r, s) = (r^{1-\eta} + (1-p)c_u(s))^{\frac{1}{1-\eta}}$ , con  $\eta > 1$ .*

*La noción de la estabilidad racional fue introducida por primera vez por Bacciotti and Rosier [6]. Sin embargo, desde hace mucho tiempo atrás se conoce este tipo de soluciones de un sistema, véase Hahn [36]. Comúnmente a  $T(x_0)$  se le conoce como settling-time function.*

**Definición 2.5** [73]. El origen  $x = 0$  es estable en tiempo fijo (ETFj) si es globalmente ETF y la función de tiempo de asentamiento  $T(x_0)$  esta uniformemente acotada por una constante de tiempo fijo  $T_{\text{máx}}$ , es decir,  $\exists T_{\text{máx}} > 0 : T(x_0) \leq T_{\text{máx}}, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

No se debe pasar por alto que  $T_{\text{máx}}$  es una constante positiva que no dependen del estado inicial  $x_0$ . Esta propiedad enfatiza el hecho de que, el tiempo de convergencia de cualquier trayectoria al origen puede encontrarse uniformemente acotado por una constante sin importar el valor de la condición inicial que se tenga. Los conceptos de ETF y ETFj se pueden extender al caso de conjuntos invariantes atractivos.

**Definición 2.6** [73]. El conjunto  $B_r$  del sistema (3) es

- (I) atractivo en tiempo finito si cualquier solución  $x(t, x_0)$  de (3) llega a  $B_r$  en un tiempo finito  $t = T(x_0)$  y permanece ahí  $\forall t \geq T(x_0)$ .  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  es la función de asentamiento.
- (II) atractivo en tiempo fijo (ATFj) si  $B_r$  es globalmente atractivo en tiempo finito y la función de tiempo de asentamiento  $T(x_0)$  tiene una constante de tiempo fijo  $T_{\text{máx}} > 0$ , es decir,  $\exists T_{\text{máx}} > 0 : T(x_0) \leq T_{\text{máx}}, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

La atractividad en tiempo fijo se refiere a que las trayectorias del sistema convergen asintóticamente al origen pero con la notable característica, de que el tiempo de convergencia de cualquier trayectoria iniciada fuera de una bola  $B_r$  (es decir,  $\forall x_0 \in B_r^c$ ) está uniformemente acotado por una constante c.r. a cualquier condición inicial, o equivalente, existe una constante  $T_{\text{máx}}$  que no depende del estado inicial  $x_0 \in B_r^c$  tal que  $\forall t \geq T_{\text{máx}}$  se satisface  $x(t, x_0) \in B_r$ . Por lo tanto,  $x(t, x_0)$  pertenece a la bola  $B_r$ ,  $\forall t \geq T_{\text{máx}}$ . En este sentido, existe una cota del tiempo de convergencia para cualquier trayectoria iniciada fuera de un conjunto compacto, no importa si la condición inicial llega a ser infinita. Debe quedar claro que las trayectorias se aproximan lentamente al origen cuando  $x_0 \in B_r$ . Pero son atraídas tan fuertemente desde infinito a una vecindad del origen  $B_r$ , si  $x_0 \in B_r^c$ , que el tiempo de convergencia de cualquier  $x(t, x_0)$  a la bola  $B_r$  tiene una constante de tiempo fijo.

El siguiente resultado muestra que un sistema con punto de equilibrio global y RE posee un vecindad  $B_r$  que es ATFj.

**Proposición 2.3** Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para (3). Si  $x = 0$  es global y RE con  $\eta = 1$ , entonces, el conjunto  $B_r$  es ATFj.

El converso de la Proposición 2.3 no es totalmente cierta. Existe otra clase de sistemas que presenta la propiedad de atractividad en tiempo fijo, y cuyas soluciones no satisfacen la Definición 2.3 para la estabilidad racional.

Los siguientes ejemplos ilustran algunos de los conceptos revisados hasta el momento.

**Ejemplo 2.1** [36] Considere la EDO escalar

$$\dot{x} = c[x]^p, p > 0, \quad (4)$$

el comportamiento dinámico depende del signo de  $c$  y del valor del exponente  $p$ . La soluciones quedan determinadas por

$$x_s(t, x_0) = \begin{cases} x_0 e^{c(t-t_0)}, & \text{si } p = 1, \\ \text{sign}(x_0) (|x_0|^{1-p} + (1-p)c(t-t_0))^{-\frac{1}{1-p}}, & \text{si } 0 < p \neq 1. \end{cases}$$

La estabilidad depende del signo de  $(1-p)c$  ó del signo de  $c$ . Considerando que  $t_0 = 0$ ,

- (i) Cuando  $p = 1, c < 0$ , la solución es la solución clásica para un sistema y  $x_s = 0$  es EE.

(II) Si  $c < 0$ ,  $p \in (0, 1)$  el valor de  $x_s = 0$  es alcanzado en tiempo finito. En este caso, el tiempo de convergencia de cualquier estado inicial  $x_0$  a  $x = 0$  está dado por

$$T(x_0) = \frac{|x_0|^{1-p}}{c(p-1)},$$

y las trayectorias alcanzan  $x_s = 0$  en un tiempo  $T(x_0)$ .

(III) Para el caso  $p > 1$ , si  $c < 0$ , entonces  $1/(1-p) < 0$  y  $x_s$  tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ , por lo que  $x_s = 0$  es AE. El tiempo de convergencia de cualquier estado inicial  $x_0$  está dado por

$$T(x_0) = \frac{1}{(1-p)c} (|x_s(t, x_0)|^{1-p} - |x_0|^{1-p}),$$

es importante notar que cuando  $|x_s(t, x_0)| \rightarrow 0$ ,  $T(x_0) \rightarrow \infty$ , pero fijando  $|x_s(t, x_0)| \rightarrow r$  (tal que  $r \in \mathbb{R}_+$ ) y haciendo que la condición inicial crezca indefinidamente (es decir,  $|x_0| \rightarrow \infty$ ), se deduce que, no importa que tan grande sea el estado inicial, el tiempo de convergencia a una vecindad del origen de radio  $r$  está uniformemente acotado por

$$T_r = \frac{1}{(1-p)c} r^{1-p},$$

una constante que solo depende de parámetros del sistema y del radio de la vecindad pero no depende de las condiciones iniciales (cuando  $r$  se hace arbitrariamente pequeña  $T_r \rightarrow \infty$ ).

(IV) Por otro lado, para  $c > 0$ ,  $x_s(\cdot)$  crece sin cotas y en el caso de  $p > 1$  esto sucede en tiempo finito. Comúnmente llamado escape a infinito en tiempo finito.

Del ejemplo, se observa que: (a) términos con exponente  $p \in (0, 1)$  ofrecen convergencia en tiempo finito, (b) términos lineales ofrecen convergencia exponencial y (c) términos con exponente  $p \in (1, \infty)$  ofrecen convergencia racional.

**Ejemplo 2.2** [74] El siguiente sistema es ETFj,

$$\dot{x} = -[x]^{1/2} - [x]^{3/2}, x \in \mathbb{R}.$$

Las soluciones están definidas  $\forall t \geq 0$ :

$$x(t, x_0) = \begin{cases} \text{sign}(x_0) \tan^2(\arctan(|x_0|^{1/2}) - t/2), & t \leq 2 \arctan(|x_0|^{1/2}), \\ 0, & t > 2 \arctan(|x_0|^{1/2}). \end{cases}$$

Cualquier solución  $x(t, x_0)$  de este sistema converge al origen en tiempo finito y además, la igualdad  $x(t, x_0) = 0$  se cumple  $\forall t \geq \pi, \forall x_0 \in \mathbb{R}$ . En este caso, la constante de tiempo fijo es  $T_{\text{máx}} = \pi$ . Obsérvese, que la estabilización en tiempo fijo se debe a que existen términos correctos de bajo y alto orden en la EDO.

### 2.1.2. Función de Lyapunov (FL)

La existencia de una FL es la condición más importante de suficiencia y necesidad para estudiar la estabilidad de un sistema no lineal. Por lo que es imprescindible revisar conceptos y resultados importantes relacionados con este enfoque, particularmente los concernientes con el segundo método de Lyapunov.

El segundo método de Lyapunov analiza la estabilidad de un sistema dinámico desde el punto de vista energético. El método toma cualquier función p.d. como posible función de energía para el sistema y estudia la evolución de dicha función en el tiempo. Si la función es decreciente (o acotada) a lo largo de cualquier trayectoria del sistema, entonces el sistema tiene propiedades de estabilidad y a la función se le denomina FL.

A lo largo del texto se le llamará términos de bajo orden a los términos con exponente  $p \in (0, 1)$ , y términos de alto orden a los términos con exponente  $p \in (1, \infty)$ .

La suficiencia fue mostrada por Lyapunov [60], y la necesidad aparece con los teoremas conversos [46].

La existencia de la función que garantiza que el origen del sistema (3) es AE se debe al Teorema de *Zuovov*.

Para resultados concernientes a FL no suave y discontinua, el lector puede consultar a *Polyakov and Fridman* [74]. Este trabajo solamente considera funciones de Lyapunov diferenciables.

Para analizar la estabilidad del sistema (3) es suficiente con hallar una función p.d. y continua  $V(\cdot)$  tal que para cualquier solución  $x(t, x_0)$  del sistema (3), la función  $V(x(t, x_0))$  sea decreciente y tienda a cero cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Para una función  $V \in C^1$ , ésta propiedad de monotonicidad queda descrita por:

$$\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0.$$

Esta desigualdad no requiere del conocimiento de las soluciones de (3) para verificar la estabilidad del sistema. Para analizar de estabilidad mediante una LF se debe calcular la derivada de una función p.d. a lo largo de las trayectorias del sistema dinámico. Si la función no es diferenciable, el análisis se puede llevar a cabo mediante el concepto de derivada direccional generalizada.

**Definición 2.7** Una candidata a FL estricta (o fuerte) es un mapeo real  $V(x)$  definido sobre  $B_r$  que satisface las siguientes propiedades: **(i)**  $V(x)$  es p.d., **(ii)**  $V(x) \in C^1$  sobre  $B_r$ , y **(iii)**  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < 0, \forall x \in B_r \setminus \{0\}$ . A la función  $V(x)$  que está definida  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , que es radialmente no acotada y que satisface las propiedades **(i)-(iii)** con  $B_r \in \mathbb{R}^n$ , se conoce como FL estricta (o fuerte) global.

Para sistemas que satisfacen la condición de Lipschitz (al menos localmente) analizar la estabilidad a través de una FL siempre es posible. Como el sistema considerado es solo continuo, se requiere de un resultado que asegure que un análisis de estabilidad puede realizarse mediante una FL.

**Teorema 2.1** [50] Considere el sistema (3) tal que  $f$  es continua. El origen de (3) es AE si y sólo si existe una FL estricta para el sistema (3).

La estabilidad asintótica de un punto de equilibrio puede ser caracterizada a través de una FL débil o fuerte. Una FL débil satisface los puntos **(i)-(ii)** de la Definición 2.7, pero  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq 0, \forall x \in B_r \setminus \{0\}$ .

**Teorema 2.2** [6] Si para el sistema (3) existe una

(I) FL débil y suave en  $B_r$ , entonces  $x = 0$  es estable.

(II) FL estricta (global) y suave en  $B_r$ , entonces  $x = 0$  es local AE (GAE).

Las propiedades de positividad y negatividad definida de una FL se pueden caracterizar utilizando una función de comparación. En este caso,

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}, \forall x_0 \in B_r,$$

implica que  $V(x)$  es p.d.. Si  $V(x)$  se define en  $\mathbb{R}^n$ , es radialmente no acotada, entonces  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ . Si

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha_3(\|x\|), \alpha_3 \in \mathcal{K},$$

implica que  $V(x)$  es n.d..

### 2.1.3. Caracterización del tipo de convergencia mediante FL

Inicialmente, el método de Lyapunov fue introducido para analizar la estabilidad sin tomar en cuenta el tipo de convergencia. En esta sección se establecen importantes resultados sobre la caracterización del tipo de convergencia a través de una FL.

La estabilidad exponencial y estabilidad asintótica pueden garantizarse si existe una FL que satisface las siguientes propiedades.

**Teorema 2.3** [46] Sea  $x = 0$  es un punto de equilibrio y  $f$  un campo vectorial de clase  $C^1$  para (3) en  $B_r$ . Sea  $V(x)$  una FL estricta tal que  $\forall x \in B_r$ ,

$$c_1 \|x\|^\alpha \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^\alpha, \langle \nabla V(x), f(x) \rangle < -c_3 \|x\|^\alpha, \forall t > 0,$$

donde  $c_1, c_2, c_3, \alpha \in \mathbb{R}_+$ . Entonces,  $x = 0$  es EE. Si las hipótesis se cumplen globalmente, entonces  $x = 0$  es globalmente EE.



**Teorema 2.4** [6] *Sea  $f$  un campo vectorial de clase  $C^1$  cerca de  $0$  tal que  $f(0) = 0$ . Entonces, el origen  $x = 0$  es RE si y sólo si existe una FL estricta  $V(x)$  tal que  $\forall x \in B_r$ ,*

$$c_1 \|x\|^a \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^b, \quad \langle \nabla V(x), f(x) \rangle < -c_3 \|x\|^c, \quad \forall t > 0,$$

donde  $c_1, c_2, c_3, a, b, c \in \mathbb{R}_+$ , con  $c > b \geq a$ . Si las hipótesis se cumplen globalmente, entonces  $x = 0$  es global y RE.

Otra clase de sistemas que presentan la propiedad de atractividad de tiempo fijo son los que cumplen con las siguientes condiciones.

**Teorema 2.5** *Sea  $x = 0$  un punto de equilibrio para (3) en  $B_r$ . Sea  $V(x)$  una FL estricta tal que  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$c_1 \|x\|^a \leq V(x) \leq c_2 \|x\|^a, \quad \langle \nabla V(x), f(x) \rangle < -c_3 \|x\|^a - c_4 \|x\|^b, \quad \forall t > 0, \quad (5)$$

donde  $c_1, c_2, c_3, a, b \in \mathbb{R}$ , con  $b > a$ . Entonces,  $x = 0$  es GAE y  $B_r$  es ATFj.

La caracterización de la estabilidad en tiempo finito del sistema (3) a través de una FL continua se enuncia a continuación.

**Teorema 2.6** [15]. *El origen de (3) es un punto de equilibrio ETF y la función de asentamiento  $T$  es continua en  $0$  si y sólo si existe una función p.d. y continua  $V(x)$  en  $B_r$  tal que,*

$$\dot{V}(x) \leq -cV^p(x), \quad \forall x \in B_r \setminus \{0\},$$

donde  $c \in \mathbb{R}_+$  y  $p \in (0, 1)$ . En este caso,  $T(x_0)$  es continua en una vecindad del origen y satisface

$$T(x_0) \leq \frac{1}{c(1-p)} V^{1-p}(x_0). \quad (6)$$

Si las hipótesis se cumple globalmente, entonces  $x = 0$  es globalmente ETF.

Es muy difícil calcular  $\dot{V}$  si  $V$  es solamente continua, al menos que la solución de (3) sea conocida. Es más conveniente aplicar el Teorema anterior con una función  $V$  que es Lipschitz continua o que es continuamente diferenciable.

**Teorema 2.7** *Suponga que existe una función p.d. y diferenciable  $V(x)$  tal que cualquier solución  $x(t, x_0)$  de (3) satisface la desigualdad diferencial*

$$\dot{V}(x) \leq -\kappa_f V^p(x) - \kappa_u V^q(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (7)$$

para algunas constantes  $\kappa_f, \kappa_u > 0$  y  $p \in (0, 1)$ ,  $q > 1$ . Entonces, el origen  $x = 0$  de (3) es ETFj y  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $T(x_0)$  satisface

$$T(x_0) \leq \frac{1}{(q-1)\kappa_u} \left( \frac{\kappa_u}{\kappa_f} \right)^{\frac{q-p}{q-1}} - \frac{1}{(q-1)\kappa_u} \frac{1}{V^{q-1}(x_0)} + \frac{1}{(1-p)\kappa_f} \left( \frac{\kappa_f}{\kappa_u} \right)^{\frac{1-p}{q-p}}. \quad (8)$$

Además,  $T(x_0)$  está acotado por la constante de tiempo fijo

$$T_f = \frac{1}{(q-1)\kappa_u} \left( \frac{\kappa_u}{\kappa_f} \right)^{\frac{q-p}{q-1}} + \frac{1}{(1-p)\kappa_f} \left( \frac{\kappa_f}{\kappa_u} \right)^{\frac{1-p}{q-p}}. \quad (9)$$

Tenga en cuenta que la estabilidad en tiempo fijo implica que  $x(t, x_0) = 0$  es globalmente ETF y  $T(\cdot)$  es continua en  $\mathbb{R}^n$ . Además, cualquier solución  $x(t, x_0)$  se encuentra en el origen  $\forall t \geq T_f$ ,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Si se permite que el parámetro  $q = 1$  en el resultado anterior, se obtienen la caracterización de convergencia en tiempo finito con decaimiento exponencial.



**Teorema 2.8** *Suponga que existe una función p.d. y diferenciable  $V(x)$  en  $B_r$  tal que cualquier solución  $x(t, x_0)$  de (3) satisface la desigualdad diferencial*

$$\dot{V}(x) \leq -\kappa_f V^p(x) - \kappa_u V(x), \forall x \in B_r, \quad (10)$$

para algunas constantes  $\kappa_f, \kappa_u > 0$ , y  $p \in (0, 1)$ . Entonces, el origen  $x = 0$  de (3) es ETFdE y  $T(x_0)$  satisface

$$T(x_0) \leq \frac{1}{\kappa_u(1-p)} \ln\left(1 + \frac{\kappa_u}{\kappa_f} V^{1-p}(x_0)\right). \quad (11)$$

## 2.2. ESTABILIDAD DE INCLUSIONES DIFERENCIALES

Considere la inclusión diferencial (ID), [32], [20],

$$\dot{x} \in F(x(t)), \quad (12)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ .  $F$  es una función multivaluada cuyos valores son subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Una solución de (12) sobre el intervalo  $\mathcal{J}$  es una función absolutamente continua  $x(t, x_0) : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que (12) se cumple casi en todas partes sobre el intervalo<sup>2</sup>  $\mathcal{J}$ . Las principales hipótesis sobre  $F$  son

(H1)  $F(x)$  es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de  $\mathbb{R}^n$  para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

(H2)  $F(x)$  es una función semicontinua por arriba.

Bajo estas hipótesis existen soluciones de (12) al menos localmente; es decir,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  existe una solución de  $x(\cdot)$  de (12) satisfaciendo  $x(0) = x_0$ , sobre un intervalo  $[0, T)$  para algún maximal  $T > 0$ .

Las mismas nociones de estabilidad introducidas en la Subsección 2.1.1 para sistemas continuos son extensibles a las soluciones de la ID (12), y en este caso, se debe tener en mente que cada  $x(\cdot)$  pertenece al conjunto solución de la ID (12). También es posible usar funciones de comparación. Debido a la no unicidad de las soluciones existen dos nociones de estabilidad para la ID : *estabilidad débil* (la propiedad de estabilidad solo la cumple una solución) y *estabilidad fuerte* (la propiedad de estabilidad la cumplen todas las soluciones de la ID).

**Lema 2.1** [20] *F es fuertemente AE si y sólo si las soluciones existen globalmente y existe una función  $\beta \in \mathcal{KL}$  tal que para cada solución  $x(t, x_0)$  de (12) se cumple  $\|x(t, x_0)\| \leq \beta(t, \|x_0\|)$ .*

### 2.2.1. Existencia de FL suave

Una ID puede admitir un FL diferenciable lo que facilita enormemente el análisis de estabilidad.

**Definición 2.8** [20] *La pareja de funciones continuas  $(V, W)$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , con  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $W \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ , constituyen un par de Lyapunov fuerte, y además, suave, para  $F$  si las siguientes condiciones se cumplen*

(I)  $V(x) > 0$  y  $W(x) > 0$  son positivas definidas, y  $V(x)$  es propia;

(II) *Decrecimiento infinitesimal fuerte*

$$\max_{y \in F(x)} \langle \nabla V(x), y \rangle \leq -W(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (13)$$

Una función es semicontinua por arriba si dada  $x \in \mathbb{R}^n$ , para cualquier  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $|x - x'| < \delta \Rightarrow F(x') \subseteq F(x) + \epsilon B$ .

La contraparte de estabilidad asintótica fuerte es la estabilidad asintótica débil. Una función multivaluada es débilmente AE si para cualquier  $x_0$  existe al menos una solución de la ID (12) iniciada en  $x_0$  que satisface la atractividad y estabilidad.

<sup>2</sup> Es decir, se debe cumplir que  $\frac{dx(t, x_0)}{dt} \in F(x(t, x_0))$  casi en todas partes sobre  $\mathcal{J}$  tal que  $x(t_0, x_0) = x_0$ .

Si existe un par  $(V, W)$ , entonces para cualquier estado inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , cada solución de (12) con  $x(0) = x_0$  se encuentra definida en todo el intervalo  $[0, \infty)$  y es atraída al origen de manera uniforme y estable. Propiedad que se conoce como estabilidad asintótica fuerte.

El siguiente Teorema pone en claro que una FL suave siempre existe para una ID invariante en el tiempo y cuyo equilibrio es AE.

**Teorema 2.9** [20] *Sea  $F$  una función multivaluada que cumple las hipótesis (H1) y (H2). Entonces, el origen de (12) es fuertemente AE si y sólo si existe un par de Lyapunov fuerte  $(V, W)$ .*

El origen  $x = 0$  es necesariamente un equilibrio de  $F$ , es decir,  $0 \in F(0)$ . Este resultado puede verse como una generalización del Teorema converso de Lyapunov de Kurzweil para el sistema (3) si  $f$  es un campo vectorial continuo, Kurzweil [50]. La importancia de este resultado radica en que se asegura estabilidad asintótica incluso si el lado derecho del sistema no es Lipschitz continuo en el origen.

El Teorema 2.9 se apoya en la estabilidad asintótica de las soluciones del sistema (3), cuando  $f$  es un campo vectorial discontinuo. Como en este caso, las soluciones clásicas pueden no existir, se ha hecho necesario desarrollar conceptos de las soluciones más generales.

Una solución de Krasovskii es una solución de la ID

$$\dot{x}(t) \in K[f](t, x), K[f](t, x) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{co}}f(\overline{B}_\delta(x)), \tag{14}$$

mientras que una solución de Filippov es una solución de la ID

$$\dot{x}(t) \in K[f](t, x), K[f](t, x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(\mathcal{N})=0} \overline{\text{co}}f(B_\delta(x) \setminus \mathcal{N}), \tag{15}$$

donde  $\mu(\mathcal{N})$  denota la medida de Lebesgue del conjunto  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ . Observe que la segunda intersección se toma sobre todos los subconjuntos de  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$  de medida cero denotado por  $\mu(\mathcal{N}) = 0$ . Aquí, en cada punto de discontinuidad, el lado derecho de (12) es remplazado por la envolvente convexa del conjunto de vectores de velocidad obtenido al aproximarse a  $x$  de todas las direcciones en  $\mathbb{R}^n$ , mientras se evitan los conjuntos de medida cero.

Si  $f$  está acotada sobre conjuntos acotados y (para el caso de las soluciones de Filippov) si  $f$  es además medible, entonces el lado derecho multivaluado de (14) y (15) cumple las hipótesis (H1) y (H2), y por lo tanto el Teorema 2.9 es aplicable.

**Teorema 2.10** [20] *Suponga que  $f$  está acotado sobre subconjuntos acotados de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces*

(A) *la solución de Krasovskii de (12) es fuertemente AE si y sólo si existe un par de Lyapunov fuerte  $(V, W)$  que satisface (I) de la Definición 2.8 y*

$$\limsup_{y \rightarrow x} \langle \nabla V(x), f(y) \rangle \leq -W(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{16}$$

(B) *Si, además,  $f$  es medible, la solución de Filippov es fuertemente AE si y sólo si existe tal par de Lyapunov fuerte  $(V, W)$  que satisface*

$$\text{ess } \limsup_{y \rightarrow x} \langle \nabla V(x), f(y) \rangle \leq -W(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{17}$$

### 2.2.2. Caracterización del tipo de convergencia

Si existe una función  $V(x)$  de clase  $C^1$  sobre una vecindad del origen contenido en un conjunto  $\Omega$  tal que  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle + cV^\alpha(x)$  ( $c > 0$  y  $\alpha \in (0, \infty)$ ) sea negativa semidefinida en  $\Omega$ ; entonces, el origen exhibe cierta propiedad de estabilidad dependiendo del valor del exponente  $\alpha$ . Así como el tipo de convergencia de sistemas con campo vectorial continuo queda caracterizada a través de una FL [15],[46], [6], el tipo de convergencia de las trayectorias de una ID también puede caracterizarse por medio de una FL suave.

*Teoremas conversos de Lyapunov para ID aparecen en Bacciotti and Rosier [6], asumiendo que el lado derecho del sistema es Lipschitz.*

*A la ID que satisface (15) se le conoce como ID de Filippov.*

*Otros Teoremas conversos de Lyapunov para ecuaciones diferenciales con lado derecho discontinuo, cuyas soluciones se entienden en el sentido de Filippov, pueden consultarse en [6].*

**Teorema 2.11** [74] Sea  $(V, W)$  un par de Lyapunov fuerte para el sistema (12),

- (I) si existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  tal que  $W(x) \geq \alpha V(x)$ , entonces el origen de (12) es EE.
- (II) si existen  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  y  $p \in (0, 1)$  tal que  $W(x) \geq \alpha V^p(x)$ , entonces el origen del sistema (12) es ETF y la función de tiempo de asentamiento cumple con la desigualdad (6)
- (III) si existen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ ,  $p \in (0, 1)$  y  $q \in (1, \infty)$ , tal que

$$W(x) \geq \begin{cases} \alpha V^p(x) & \forall x \in \Omega : V(x) \leq 1, \\ \beta V^q(x) & \forall x \in \Omega : V(x) \geq 1, \end{cases}$$

entonces el origen de (27) es ETFj y el tiempo de convergencia está acotado por una constante de tiempo fijo  $T_{\max}$ , es decir,

$$T(x_0) \leq T_{\max} \leq \frac{1}{\alpha p} + \frac{1}{\beta q}.$$

### 2.3. SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Las propiedades de homogeneidad se utilizan ampliamente para construir sistemáticamente leyes de control (continuas y discontinuas) por retroalimentación de estados. Los sistemas homogéneos aparecen naturalmente como una aproximación local de los sistemas no lineales. Una linealización alrededor del origen es, de hecho, una aproximación de un sistema no lineal por uno que es lineal y que es, naturalmente, homogéneo.

Homogeneidad es una propiedad de escalamiento de funciones y campos vectoriales que es consistente c.r. a un operador de escalamiento conocido como dilatación. La homogeneidad clásica surgió de estudiar polinomios homogéneos. La generalización de homogeneidad clásica propuesta por V.I. Zubov en los años 50's y por H. Hermes en los años 90's dio como nacimiento la noción de homogeneidad más popular: homogeneidad ponderada.

#### 2.3.1. Homogeneidad ponderada

El operador dilatación es una transformación lineal definida por

$$\Delta_\epsilon^r x : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\epsilon^{r_1} x_1, \dots, \epsilon^{r_n} x_n), \forall \epsilon > 0,$$

donde el vector  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Las constantes  $r_i \in \mathbb{R}_+$  son los pesos asociados a las coordenadas  $x_i$  y se pueden agrupar en el vector de pesos  $r = (r_1, \dots, r_n)$ . El mapeo también puede reescribirse como  $\Delta_\epsilon^r x = \text{diag}(\epsilon^{r_1}, \dots, \epsilon^{r_n})x$ , donde  $\Delta_\epsilon^r$  es la matrix de dilatación y  $x$  es el vector de coordenadas.

**Definición 2.9** Se dice que

- (I) una función  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , es  $r$ -homogénea de grado  $m \in \mathbb{R}$  c.r. a  $\Delta_\epsilon^r x$ , si  $V(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^m V(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0$ ;
- (II) un campo vectorial  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es  $r$ -homogéneo de grado  $l \in \mathbb{R}$  c.r. a  $\Delta_\epsilon^r x$ , si  $f(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^l \Delta_\epsilon^r f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0$ ;
- (III) un campo vectorial multivaluado  $F(x) \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$ , es  $r$ -homogéneo de grado  $l \in \mathbb{R}$  c.r. a  $\Delta_\epsilon^r x$ , si  $F(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^l \Delta_\epsilon^r F(x), \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0$ ;
- (IV) el sistema (3) es homogéneo si el campo vectorial  $f$  (o el campo vectorial multivaluado  $F$ ) es homogéneo.

**Definición 2.10** La norma homogénea es un mapeo  $x \mapsto \|x\|_{r,p}$ , definido por  $\|x\|_{r,p} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{p}{r_i}} \right)^{\frac{1}{p}}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall p \geq 1$ . El conjunto  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{r,p} = 1\}$  es la esfera homogénea unitaria.

Las propiedades de simetría de polinomios homogéneos fue primero estudiada por Euler, y más profundamente en el siglo 1900, desde el punto de vista de geometría proyectiva y algebraica. El lector puede consultar a Bernuau et al. [11] para más información sobre homogeneidad clásica. Para más detalles sobre el operador dilatación, consúltese [6].

Las funciones y campos vectoriales homogéneos tienen propiedades útiles. Considere que el vector de pesos  $r$  y la dilatación  $\Delta_\epsilon^r x$  están fijos.

**Lema 2.2** [6] *Sea  $\Delta_\epsilon^r x$  cualquier familia de dilataciones en  $\mathbb{R}^n$ , y sea  $V_1, V_2$  (resp.,  $f_1, f_2$ ) funciones homogéneas (resp., campos vectoriales) de grado  $m_1, m_2$  (resp.,  $l_1, l_2$ ) c.r. a la dilatación  $\Delta_\epsilon^r x$ . Entonces,*

(I)  $V_1 V_2$  (resp.,  $V_1 f_1, [f_1, f_2]$ ) es homogénea de grado  $m_1 + m_2$  (resp.,  $m_1 + l_1, l_1 + l_2$ ).

(II)  $\frac{\partial V_1(x)}{\partial x_i}$  es homogénea de grado  $m_1 - r_i$ , siendo  $r_i$  el peso del estado  $x_i$ .

(III)  $\dot{V}_1 = L_{f_1} V_1$  es homogénea de grado  $m_1 + l_1$ .

(IV) Existe una constante  $c_2 > 0$  tal que  $V_1(x) \leq c_2 \|x\|_{r,p}^{m_1}$ . Además, si  $V_1$  es p.d., existe  $c_1 > 0$  tal que  $c_1 \|x\|_{r,p}^{m_1} \leq V_1$ .

Cabe mencionar que el grado de homogeneidad de una constante es cero. Además, si dos funciones tienen el mismo grado de homogeneidad la suma de ambas es homogénea. Las características más importantes de la homogeneidad ponderada son [11]:

(I) Si el origen de un sistema con campo vectorial homogéneo es localmente atractivo, entonces el origen es GAE.

(II) Si  $f = f_1 + \dots + f_p$ , donde  $f_1, \dots, f_p$ , son campos vectoriales homogéneos de grado  $l_1, \dots, l_p$  y el origen es GAE bajo  $f_1$ , entonces el origen es localmente AE bajo  $f$ .

(III) Si el campo vectorial  $f$  del sistema es homogéneo de grado  $l$  y existen soluciones en tiempo hacia adelante para cada condición inicial  $x_0$ , entonces las soluciones satisfacen  $\Delta_\epsilon^r x(\epsilon^l t, x_0) = x(t, \Delta_\epsilon^r x_0)$ .

**Ejemplo 2.3** *A continuación se muestra que el campo vectorial del siguiente sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -k_1 [x_1]^m - k_2 [x_2]^n,\end{aligned}$$

es homogéneo para ciertas condiciones sobre los exponentes  $m$  y  $n$ . De la Definición 2.9, se debe cumplir  $f(\Delta_\epsilon x) = \epsilon^l \Delta_\epsilon f(x)$ , donde

$$\Delta_\epsilon^r = \begin{bmatrix} \epsilon^{r_1} & 0 \\ 0 & \epsilon^{r_2} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Con esto en mente,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \epsilon^{r_2} x_2; \\ -k_1 \epsilon^{r_1 m} [x_1]^m - k_2 \epsilon^{r_2 n} [x_2]^n \end{bmatrix} &= \epsilon^l \begin{bmatrix} \epsilon^{r_1} & 0 \\ 0 & \epsilon^{r_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ -k_1 [x_1]^m - k_2 [x_2]^n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \epsilon^l \epsilon^{r_1} \{x_2\} \\ \epsilon^l \epsilon^{r_2} \{-k_1 [x_1]^m - k_2 [x_2]^n\} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

El sistema es homogéneo si se satisfacen simultáneamente las siguientes restricciones

$$r_1 m = l + r_2, \quad r_2 = l + r_1, \quad r_2 n = l + r_2,$$

que se cumplen si  $n = 2m/(1 + m)$ , cuando  $m$  es conocido, ó  $m = n/(2 - n)$ , cuando  $n$  es dado.

Observe que el valor del exponente de uno de los estados depende del valor del otro.

### 2.3.2. FL homogénea

Se sabe que un sistema lineal con punto de equilibrio AE posee una FL estricta, la cual tiene forma cuadrática. En el caso de sistemas homogéneos se admiten FL estrictas y homogéneas que no necesariamente tienen una estructura cuadrática. El siguiente teorema establece la existencia de una FL estricta para un sistema homogéneo.

**Teorema 2.12** [6]. *Sea  $f$  un campo vectorial continuo en  $\mathbb{R}^n$  tal que el punto de equilibrio es localmente AE. Asuma que  $f$  es homogénea de grado  $l$  con algún vector de pesos  $r$ . Entonces, para cualquier  $p \in \mathbb{N}$  y cualquier  $m > p \cdot \max_i \{r_i\}$ , existe una FL estricta  $V$  para (3), la cual es homogénea de grado  $m$  y de clase  $C^p$ . Además, la derivada c.r. al tiempo  $\dot{V} = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$  es homogénea de grado  $l + m$ .*

Una consecuencia importante del Teorema anterior es que la velocidad de convergencia de un sistema homogéneo queda caracterizada por el grado de homogeneidad de su campo vectorial. Si el grado de homogeneidad cambia, también las trayectorias cambian su tipo de convergencia.

**Corolario 2.1** [6] *Sea  $f$  como en el Teorema 2.12 con grado homogéneo  $l$  y sea  $\|\cdot\|_{r,p}$  cualquier norma homogénea:*

(I) *si  $l > 0$ , entonces existen constantes  $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_+$ , tal que, para cualquier trayectoria y  $\forall t \geq 0$ ,*

$$M_1 (1 + \|x(0)\|_{r,p}^q t)^{-\frac{1}{q}} \|x(0)\|_{r,p}^q \leq \|x(t)\|_{r,p} \leq M_2 (1 + \|x(0)\|_{r,p}^q t)^{-\frac{1}{q}} \|x(0)\|_{r,p}^q;$$

(II) *si  $l = 0$ , entonces existen constantes  $M_1, M_2, D \in \mathbb{R}_+$ , tal que*

$$M_1 \exp(-Dt) \|x(0)\|_{r,p} \leq \|x(t)\|_{r,p} \leq M_2 \exp(-Dt) \|x(0)\|_{r,p};$$

(III) *si  $l < 0$ , el origen es ETF.*

Si el punto de equilibrio del sistema homogéneo es AE y el campo vectorial tiene grado de homogeneidad: (a)  $l < 0$ , entonces el origen es ETF; (b)  $l = 0$ , entonces el origen es EE; y (c)  $l > 0$ , entonces el origen es RE [16],[6], [56], [36]. Y si es RE, entonces tiene la propiedad de atractividad en tiempo fijo. Esto motiva a utilizar las propiedades de homogeneidad para el diseño controles homogéneos.

Cuando se tiene una ID, se cuenta con el siguientes resultados.

**Teorema 2.13** [69]. *Suponga que el origen de una ID de Filippov homogénea  $\dot{x} \in F(x)$  es uniformemente GAE. Entonces, existe una FL fuerte y homogénea de clase  $C^\infty$ .*

Tanto el Teorema 2.12 como el Teorema 2.13 aseguran la existencia de alguna FL para sistemas que son homogéneos. Sin embargo, no se dice nada acerca de como construir explícitamente dichas funciones. Cabe señalar que, es posible obtener una FL homogénea que sea continua pero no necesariamente de clase  $C^1$ .

**Teorema 2.14** [56] *Sea  $\dot{x} \in F(x)$  una ID de Filippov homogénea de grado homogéneo negativo  $l < 0$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes: (i)  $x = 0$  de la ID es uniformemente GAE en  $x = 0$ ; (ii)  $x = 0$  de la ID es uniformemente y globalmente ETF; y (iii) la ID es contractiva.*

En una ID de Filippov homogénea de grado negativo existe convergencia en tiempo finito cuando  $x = 0$  es GAE.

De manera análoga al Corolario 2.1, el comportamiento dinámico de una ID homogénea queda caracterizado a través de su grado de homogeneidad, [69].

## 2.4. SISTEMAS HOMOGÉNEOS EN EL BI-LÍMITE

En general, como los sistemas dinámicos no son homogéneos, la estabilidad de su punto equilibrio puede hacerse a través de alguna aproximación homogénea. Esta aproximación se utilizan para estudiar el comportamiento de las soluciones del sistema dinámico tanto cerca del origen como lejos del mismo (en infinito). El trabajo reportado por [Andrieu et al. \[2\]](#), rescata las definiciones de aproximaciones homogéneas en el origen y en el infinito. Estas aproximaciones satisfacen las propiedades usuales de homogeneidad.

**Definición 2.11** [2] Sea  $\mathbf{r}_0$  el vector de pesos,  $l_0 \in \mathbb{R}$  el grado de homogeneidad de una función (resp. un campo vectorial)  $f_0$ . Una función (resp. un campo vectorial)  $f$  es homogénea en el 0-límite con tripleta asociada  $(\mathbf{r}_0, l_0, f_0)$  si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in K} \|\epsilon^{-l_0} f(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}_0} x) - f_0(x)\| = 0,$$

(resp.  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{x \in K} \|\epsilon^{-l_0} (\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}_0})^{-1} f(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}_0} x) - f_0(x)\| = 0$ ), para cada conjunto compacto  $K \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

**Definición 2.12** [2] Sea  $\mathbf{r}_\infty$  el vector de pesos,  $l_\infty \in \mathbb{R}$  el grado de homogeneidad de una función (resp. un campo vectorial)  $f_\infty$ . Un función (resp. un campo vectorial)  $f$  es homogénea en el  $\infty$ -límite con tripleta asociada  $(\mathbf{r}_\infty, l_\infty, f_\infty)$  si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K} \|\epsilon^{-l_\infty} f(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}_\infty} x) - f_\infty(x)\| = 0,$$

(resp.  $\lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K} \|\epsilon^{-l_\infty} (\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}_\infty})^{-1} f(\Delta_\epsilon^{\mathbf{r}_\infty} x) - f_\infty(x)\| = 0$ ), para cada conjunto compacto  $K \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

El primer elemento de cada tripleta denota el vector pesos  $\mathbf{r}_0 = (r_1^0, \dots, r_n^0)$  y  $\mathbf{r}_\infty = (r_1^\infty, \dots, r_n^\infty)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , el segundo el grado de homogeneidad del campo vectorial (o función), y el tercero es la aproximación en el 0-límite o en el  $\infty$ -límite del campo vectorial (o función).

**Definición 2.13** [2] Una función  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (o campo vectorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) es homogénea en el bi-límite si es homogénea en cero (0-límite) y homogénea en el infinito ( $\infty$ -límite).

Básicamente, si una función  $f$  es homogénea en el bi-límite (resp. un campo vectorial) entonces posee funciones de aproximación  $f_0$  ó  $f_\infty$ , estas aproximaciones son homogéneas en el sentido estándar de homogeneidad ponderada con sus pesos y grados correspondientes. Los campos vectoriales  $f_0$  y  $f_\infty$  son aproximaciones del campo vectorial  $f$  cerca del origen y cerca de infinito.

Además, es posible analizar la estabilidad de los sistemas que son aproximados en forma homogénea en el bi-límite a través de una FL homogénea en el bi-límite.

**Teorema 2.15** [2] Considere un campo vectorial homogéneo en el bi-límite  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  con tripletas asociadas  $(\mathbf{r}_0, l_0, f_0)$  y  $(\mathbf{r}_\infty, l_\infty, f_\infty)$  tal que el origen de los sistemas

$$\dot{x} = f(x), \quad \dot{x} = f_0(x), \quad \dot{x} = f_\infty(x),$$

es un punto de equilibrio GAE. Sean  $m_{V_0}, m_{V_\infty} \in \mathbb{R}$  tales que  $m_{V_0} > \max_{1 \leq i \leq n} r_i^0$  y  $m_{V_\infty} > \max_{1 \leq i \leq n} r_i^\infty$ . Entonces, existe una función de clase  $C^1$ , p.d. y propia  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que por cada  $i$  en  $\{1, \dots, n\}$ , el mapeo  $x \rightarrow \partial V / \partial x_i$  es homogéneo en el bi-límite con tripletas asociadas  $(\mathbf{r}_0, m_{V_0} - r_i^0, \partial V_0 / \partial x_i)$  y  $(\mathbf{r}_\infty, m_{V_\infty} - r_i^\infty, \partial V_\infty / \partial x_i)$ , y las funciones  $(\partial V_0 / \partial x_i) f_0(x)$ ,  $(\partial V / \partial x_i) f_0(0)$  y  $(\partial V_\infty / \partial x_i) f_\infty(x)$  son negativas definidas.

Este resultado es una extensión del Teorema Converso de Lyapunov para sistema homogéneos [6]. Algunas características de los sistemas homogéneos en el bi-límite son:

Las funciones homogéneas en el bi-límite, poseen algunas propiedades que se refieren a: composición de funciones, funciones inversas e integrales, [2].

El lector puede consultar [2] para conocer más detalles sobre homogeneidad en el bi-límite.



- (c1) Si el campo vectorial  $f$  tiene una aproximación homogénea en el 0-límite con tripleta asociada  $(r_0, l_0, f_0)$  y el sistema con  $f_0$  es GAE, entonces  $f$  es localmente AE.
- (c2) Si el campo vectorial  $f$  tiene una aproximación homogénea en el  $\infty$ -límite con tripleta asociada  $(r_\infty, l_\infty, f_\infty)$  y el sistema con  $f_\infty$  es GAE, entonces existe un subconjunto compacto invariante, que contiene el origen, que es globalmente ATFj para el sistema (3).
- (c3) Satisfacen propiedades la estabilidad entrada-estados c.r. a perturbaciones y de pequeñas ganancias.

De [16],[6], se sabe que cuando el sistema es GAE y tiene grado de homogeneidad negativo, las soluciones convergen en tiempo finito. Lo anterior puede extenderse de la siguiente manera, si el origen es GAE y tiene aproximación homogénea de grado homogéneo negativo en el origen y además, tiene aproximación homogénea de grado homogéneo positivo en el infinito, entonces la cota del tiempo de convergencia no depende de la condición inicial.

**Corolario 2.2** [2](convergencia uniforme y en tiempo finito) Bajo las hipótesis del Teorema 2.15, si los grados de homogeneidad satisfacen  $l_\infty > 0 > l_0$ , entonces todas las soluciones del sistema  $\dot{x} = f(x)$  convergen en tiempo finito al origen, uniformemente en la condición inicial.

Propiamente, este resultado establece la convergencia en tiempo fijo a través de la homogeneidad en el bi-límite. En este trabajo se adoptará la noción de estabilidad en tiempo fijo, es vez de convergencia uniforme y en tiempo finito.

La noción de estabilidad en tiempo fijo captura muy bien las propiedades involucradas del punto de equilibrio, y la palabra uniforme puede llegar a causar confusión, ya que se usa en distintos contextos, [71].

## 2.5. ESTABILIZABILIDAD, CONTROLABILIDAD, FLC Y ROBUSTEZ

Originalmente, la teoría de Lyapunov solo consideraba sistemas dinámicos sin entradas. Cuando aparecen entradas de control en el sistema, una candidata a FL puede usarse para el diseño de la ley de control si a través de los valores del control puede lograrse que la derivada de FL sea negativa. Esta idea es la esencia de lo que es una FLC. Para introducir el concepto de FLC, considere el sistema dinámico con entrada afín descrito por

El teorema de Artstein [4] asegura la existencia de un control continuo para sistemas con entrada afín.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad x(0) = x_0, \quad u \in \mathbb{R}^1, \quad (18)$$

donde  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 0$  y  $f(x)$  y  $g(x)$  son mapas continuos.

**Definición 2.14** (Sistema Estabilizable) Se dice que el sistema (18) es estabilizable, si .....

**Definición 2.15** [86] (Sistema Controlable) Se dice que el sistema (18) es controlable si dado algún estado inicial  $x_0$  existe una entrada de control sobre un intervalo finito de tiempo  $\mathcal{J}$  tal que la trayectoria  $x(t, x_0)$  es obligada a converger asintóticamente al origen.

**Definición 2.16** (Sistema Homogéneo con Control) Se dice que el sistema (18) es de grado homogéneo  $l \in \mathbb{R}$  c.r. a la dilatación  $\Delta_\epsilon^r x$ , si existe  $u(x)$  tal que se cumple  $f(\Delta_\epsilon^r x) + g(\Delta_\epsilon^r x)u(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^l \Delta_\epsilon^r (f(x) + g(x)u)$ .

La definición anterior es aplicable a la ID con entrada de control

$$\dot{x} \in F(x) + g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^1, \quad (19)$$

donde  $F(x) \in \mathbb{R}^n$  es un mapa multivaluado,  $g(x)$  es continua,  $0 \in F(0)$  y  $g(0) = 0$ . En este caso la ID (19) es homogénea de grado  $l$  si existe  $u(x)$  tal que se cumple  $F(\Delta_\epsilon^r x) + g(\Delta_\epsilon^r x)u(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^l \Delta_\epsilon^r (F(x) + g(x)u)$ .

Las suposiciones sobre  $f(x)$ ,  $F(x)$  y  $g(x)$  aseguran que el origen es un punto de equilibrio.

**Definición 2.17** [85],[33] Una función (homogénea) de clase  $C^1$ , propia y p.d.  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , es una FLC (homogénea) para el sistema (18) (resp. para la ID (19)) si  $\inf_{u \in \mathbb{R}} \{L_f V + L_g V \cdot u\} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  (resp. si  $\inf_{u \in \mathbb{R}} \{L_f V + L_g V \cdot u\} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ).

La definición garantiza que el origen es el único punto estacionario de una FLC (homogénea). El problema de estabilización se resuelve si se puede asignar a través de  $u$ , valores estrictamente negativos a la función  $\dot{V}(x)$ . Lo cual es posible en todos los puntos  $x$  donde  $L_g V$  no es cero. Además, la función  $V$  es una FLC si y sólo si la siguiente implicación se cumple

$$L_g V = 0 \Rightarrow L_f V < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (20)$$

lo cual garantiza que en aquellos puntos donde  $L_g V$  es cero, una FLC es n.d.<sup>3</sup> La Definición 2.17 no exige que  $u$  sea una función de los estados, cualquier valor que haga negativa la derivada es permitido. Sin embargo, un control por retroalimentación de estados tiene propiedades de robustez. A *grosso modo*, la existencia de una FLC para el sistema (18) es equivalente a la existencia de la ley de control por retroalimentación de estados  $u(x)$ , excepto posiblemente en cero, [4].

**Comentario 2.1** Una FLC homogénea para un sistema continuo y homogéneo con entrada afín siempre satisface la propiedad de control pequeño [30], [70]. Esta propiedad dice que  $\|u\| \rightarrow 0$ , cuando  $\|x\| \rightarrow 0$ .

En general, en el sistema (18) no sólo actúan entradas de control. En el caso de que exista una entrada de perturbación en el sistema, es importante saber si existe una entrada de control que estabilice el sistema aun ante la presencia de la perturbación [33]. Con este fin, surge el concepto de FLCR. Una FLCR generaliza la noción de FLC para sistemas que presentan entradas de perturbación. Antes de introducir el concepto de FLCR, se presenta la noción de robustez, que aparece naturalmente al considerar perturbaciones. Para ello, considere el sistema no lineal invariante c.r. al tiempo descrito por la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x, u, w), \quad x(0) = x_0, \quad (21)$$

donde  $x \in X$  define la variable de estado,  $u \in U$  es la entrada de control,  $w \in W$  es la perturbación, y  $t \in \mathbb{R}$  es la variable independiente. El espacio

- (I)  $X$  define el espacio de estados
- (II)  $U$  define el espacio del control. La función  $u$  es una entrada de control admisible cuando  $u \in U$ ;
- (III)  $W$  define el espacio de la perturbación. La función  $w$  es una perturbación admisible cuando  $w \in W$  y representa a las perturbaciones externas e incertidumbres de la planta;

El lado derecho de (18) se considera continuo en  $x$  y localmente  $L_\infty$  en  $t$ , y por los teoremas clásicos de existencia, la solución de (18) siempre existe (localmente en  $t$ ) pero no necesariamente es única. Dada una  $u \in U$  para el sistema (21), si cada solución converge a un conjunto  $\Omega \subset X$  que contiene el punto de operación deseada, por conveniencia se toma  $0 \in X$ , para toda condición inicial en  $X$  y  $w \in W$ , se dice que la solución es robustamente estable.

**Definición 2.18** [33] Fije una entrada de control para el sistema (21) y sea  $\Omega \subset X$  un conjunto compacto que contiene  $0 \in X$ . Toda solución de (21) es robusta y GAE c.r. a  $\Omega$  (RGAE- $\Omega$ ), si existe  $\beta \in \mathcal{KL}$  tal que  $\forall x_0 \in X$  y  $\forall w \in W$ , toda solución está definida en  $[0, \infty)$  y satisface  $\|x(t, x_0)\|_\Omega \leq \beta(\|x_0\|_\Omega, t - t_0), \forall t \geq t_0$ . Además, toda solución de (21) es RGAE si  $\Omega = 0$ .

<sup>3</sup> La existencia de una FLC implica que el sistema es asintóticamente controlable.

Si  $f$  es continua y existe una retroalimentación de estados continua para (18) tal que  $x = 0$  es GAE, por los teoremas conversos [64], debe existir una FLC para (18). Si  $f$  es afín, entonces la existencia de una FLC es también suficiente la estabilización a través de una retroalimentación de estados continua.

La existencia de FLCR implica la existencia de una FLC, pero no toda FLC llega a ser una FLCR, esto solamente ocurre si la perturbación está acoplada a la entrada de control.

La notación  $\|\cdot\|_\Omega$  define la distancia Euclidiana de un punto al conjunto  $\Omega$ , es decir  $\|\cdot\|_\Omega := d(\cdot, \Omega)$ .



El concepto de RGAE- $\Omega$  implica que el conjunto  $\Omega$  es (robustamente) invariante positivo. Mientras, que el concepto de RGAE implica que  $0 \in X$  es un punto de equilibrio. Se pueden definir tres tipos de estabilizabilidad robusta de acuerdo con que tan pequeño se pueda hacer el conjunto  $\Omega$ .

**Definición 2.19** [33] *El sistema (21) es*

- (I) *robustamente AE si existe  $u \in U$  tal que toda solución de (21) es RGAE.*
- (II) *robustamente prácticamente estabilizable si  $\forall \epsilon > 0$  existe  $u \in U$  y un conjunto compacto  $\Omega \in X$  que cumple  $0 \in \Omega \subset \epsilon B$  tal que toda solución de (21) es RGAE- $\Omega$ .*
- (III) *robustamente estabilizable si existe  $u \in U$  y un conjunto compacto  $\Omega \in X$  que cumple  $0 \in \Omega$  tal que toda solución de (21) es RGAE- $\Omega$ .*

La diferencia entre estabilidad práctica y mera estabilidad es que el conjunto  $\Omega$  de la estabilidad práctica puede hacerse arbitrariamente pequeño eligiendo la entrada de control.

**Definición 2.20** [33] *Una función  $V \in \mathcal{V}(X)$  es una FLCR (homogénea) para un sistema si y sólo si existen  $c_v \in \mathbb{R}_+$  y una función invariante en el tiempo  $\alpha_v \in \mathcal{P}(X)$  tal que*

$$\inf_{u \in U(x)} \sup_{w \in W(x,u)} [L_f V(x, u, w) + \alpha_v(x)] < 0, \quad (22)$$

*siempre que  $V(x) > c_v$ .*

El conjunto  $\mathcal{V}(x)$  define el conjunto de todas funciones propias, positivas definidas y de clase  $C^1$ , que son candidatas a FL para probar la estabilidad robusta del sistema (21). El conjunto  $\mathcal{P}(X)$  representa las funciones que no necesitan ser diferenciables o radialmente no acotadas, es decir, funciones continuas  $\alpha_v : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ . La desigualdad (22) se puede interpretar de la siguiente manera: para cada  $x$  fijo existe un valor admisible  $u$  para el control y cualquier valor admisible  $w$  de la perturbación tal que la derivada de Lyapunov es negativa. Las funciones  $u$  y  $w$  son admisibles cuando  $u \in U(x)$  y  $w \in W(x, u)$ . Por último, el parámetro  $c_v$  permite considerar: estabilización asintótica robusta ( $c_v = 0$ ), estabilización práctica robusta ( $c_v > 0$ ) y estabilización robusta, para algunos espacios admisibles  $U, W$ . La existencia de una FLCR es necesaria y suficiente para la estabilización robusta.

*Para más detalles, consultar [33].*

En particular, si existe una función FLCR y  $c_v = 0$ , la construcción de una entrada de control por retroalimentación de estados se reduce al problema de hallar una función continua  $k : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow U$ , acotada cerca de cero, que cumpla con la condición (22), es decir que

$$\sup_{w \in W(x,u)} L_f V(x, k(x), w) < -\alpha_v(x), \quad (23)$$

donde la retroalimentación  $k(x)$  es una entrada de control estabilizante (continua o discontinua), lo que significa que el origen del sistema en lazo cerrado puede hacerse RGAE mediante el control  $k(x)$ .

**Teorema 2.16** [52] *El sistema (21) admite una FLCR si y sólo si existe una entrada de control estabilizante robusta para tal sistema. Además para cualquier FLCR, toda retroalimentación  $k(x)$  que cumpla con (23) es un control estabilizante robusto.*

Finalmente, si se cuenta con una FLC, en el caso general, también existe una ley estabilizante variante en el tiempo  $k(t, x)$ , [Coron and Rosier \[21\]](#).

## 2.6. RESUMEN DEL CAPÍTULO

La breve revisión de conceptos y resultados presentada en este capítulo será de gran utilidad en la formulación del problema de control en el capítulo 3. La noción FLCR da un marco de referencia unificado para tratar con el problema de diseño de un control robusto (no lineal). Sin embargo, todavía existen dos obstáculos: cómo construir dicha función y cómo diseñar el control estabilizante una vez que se conoce la FLCR. La noción de FLCR junto con las propiedades de homogeneidad estándar y de homogeneidad en el bi-límite ayudará a construir leyes de control discontinuas con las propiedades deseadas en capítulos posteriores.

## 2.7. PRUEBA DE LOS TEOREMAS Y PROPOSICIONES DEL CAPÍTULO

**Prueba de la Proposición 2.3.** Las soluciones de un sistema que es RE satisfacen  $\|x(t, x_0)\| \leq c_r(1 + \|x_0\|^k t)^{-\frac{1}{k}} \|x_0\|^\eta$ ,  $\forall t \in [0, \infty)$ . Suponga que existe  $r \in \mathbb{R}_+$  arbitraria, de tal manera que  $\forall x_0 \in B_r^c$ , existe un tiempo fijo  $T_r$  tal que  $x(t, x_0) \in B_r$ . Debido a que  $\eta \leq 1$ , se tiene

$$T \leq \left(\frac{c_r}{r}\right)^k \|x_0\|^{k(\eta-1)} - \frac{1}{\|x_0\|^k} = \left(\frac{c_r}{r}\right)^k \frac{1}{\|x_0\|^{k(1-\eta)}} - \frac{1}{\|x_0\|^k},$$

fijando  $\eta = 1$  y haciendo  $x_0$  suficientemente grande, es decir,  $\|x_0\| \rightarrow \infty$ , se observa que

$$T \leq \left(\frac{c_r}{r}\right)^k \frac{1}{\|x_0\|^{k(1-\eta)}} - \frac{1}{\|x_0\|^k} < (c_r/r)^k = T_r.$$

Por tanto, cualquier solución  $x(t, x_0)$  iniciada con cualquier estado inicial  $x_0 \in B_r^c$  pertenecerá a un conjunto compacto ( $x(t, x_0) \in B_r$ ) antes de un tiempo  $T_r$ .

**Prueba de la Teorema 2.5.** Con ayuda de (5),  $\forall t \geq 0$ , se cumple  $\langle \nabla V(x), f(x) \rangle < -\frac{c_3}{c_2} V - \frac{c_4}{b/a} V^{b/a}$ . Por el principio de comparación [46], como  $V(x(t)) \leq v(t)$ , cuando  $V_0 = V(x_0) \leq v_0$ , la solución de la EDO  $\dot{v} = -\kappa_1 v - \kappa_2 v^q$ , con  $V(0) = v_0 \geq 0$ ,  $\kappa_1 = c_3/c_2$ ,  $\kappa_2 = c_4/c_2^q$  y  $q = b/a$  está dada por

$$v(t)^{1-q} = \exp(-(1-q)\kappa_2 t) v_0^{1-q} - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \exp(-(1-q)\kappa_2 t) [\exp((1-q)\kappa_2 t) - 1]. \quad (24)$$

El tiempo  $T$  que le toma a cada trayectoria en ir de cualquier estado inicial  $x_0$  a una superficie de nivel  $V = r$  ( $0 < r < V(x_0)$ ), se calcula mediante

$$\begin{aligned} T(x_0, r) &\leq \frac{1}{(q-1)\kappa_2} \left[ \ln \left( \frac{\kappa_2 V_0^{q-1}}{\kappa_1 + \kappa_2 V_0^{q-1}} \right) - \ln \left( \frac{\kappa_2 r^{q-1}}{\kappa_1 + \kappa_2 r^{q-1}} \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{(q-1)\kappa_2} \left[ -\ln \left( \frac{\kappa_2 r^{q-1}}{\kappa_1 + \kappa_2 r^{q-1}} \right) \right] = T_r. \end{aligned}$$

Es claro ver que el tiempo de convergencia  $T(x_0, r)$  está uniformemente acotado por una constante independiente del estado inicial  $x_0 \in V(x_0)$ . Por lo tanto,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$  y  $\forall t \geq T_r$ , las trayectorias del sistema estarán en el interior de un conjunto  $B_r$ . Aquí,  $T(x_0, r)$  denota el tiempo de convergencia de  $x(t, x_0)$ , con condición inicial  $x_0 \in B_r^c$ , a la bola  $B_r$ .

**Prueba del Teorema 2.7.** Hay que encontrar alguna constante  $T_f > 0$ , de tal manera que, la solución  $x(t, x_0)$  este en  $x = 0$ ,  $\forall t \geq T_f$ , independientemente del valor de  $x_0$ . Desde que  $V(t)$  satisface  $\dot{V} \leq -c_f V^p$  y  $\dot{V} \leq -c_u V^q$ , el valor de  $V(t)$  está por debajo de la solución de cualquiera de ambas desigualdades. La solución de la EDO  $\dot{v} = -\kappa_f v^p$ ,  $v(0) = v_0 \geq 0$ ,  $\forall p \in (0, 1)$ , está dada por

$$v(t) = (v_0^{1-p} - (1-p)\kappa_f(t-t_0))^{-\frac{1}{1-p}}, \quad (25)$$

*El principio de comparación se aplica en situaciones donde la función  $v(t)$  satisface una desigualdad diferencial  $\dot{v}(t) \leq f(t, v(t))$ . La meta es comparar la solución de la desigualdad diferencial  $\dot{v}(t) \leq f(t, v(t))$  con la solución de la EDO  $\dot{u} = f(t, u)$ . El lema establece que si se tiene una EDO escalar  $\dot{u} = f(t, u)$ ,  $u(0) = u_0$ , y una desigualdad diferencial  $\dot{v}(t) \leq f(t, v(t))$ , donde  $v_0 \leq u_0$ , entonces,  $v(t) \leq u(t)$  para todo  $t \in J$ .*

y la solución de la EDO  $\dot{v} = -\kappa_u v^q$ ,  $v(0) = v_0 \geq 0$ , para  $q > 1$ , está dada por

$$v(t) = (v_0^{-(q-1)} + (q-1)\kappa_u(t-t_0))^{-\frac{1}{q-1}}. \quad (26)$$

Del principio de comparación [46] y considerando  $V(t) \leq v(t)$ , cuando  $V_0 = V(x(t), x_0) \leq v_0$ , se obtiene

$$V(t) \leq \min \left\{ V_1 = (v_0^{1-p} - (1-p)\kappa_f(t-t_0))^{\frac{1}{1-p}}, V_2 = (v_0^{-(q-1)} + (q-1)\kappa_u(t-t_0))^{-\frac{1}{q-1}} \right\}.$$

Esta expresión permite estimar el tiempo de convergencia. Primero, considere una trayectoria iniciada en  $x_0$ , con un nivel de energía  $V_0$ . El tiempo  $T_2$  en el cual se alcanza el conjunto de nivel  $V = r$  ( $0 < r < V_0$ ), se calcula a partir de  $V_2 = r$ , obteniéndose  $T_2(x_0, r) = \frac{1}{(q-1)\kappa_u} (r^{-(q-1)} - V_0^{-(q-1)})$ . Ahora, a partir del conjunto de nivel  $V = r$ , el tiempo  $T_1$  que le toma a la trayectoria en alcanzar  $x = 0$ , se calcula haciendo  $V_1 = 0$ , lo cual da  $T_1(r) = \frac{1}{(1-p)\kappa_f} r^{1-p}$ . Por lo tanto, el tiempo de convergencia al origen de cada trayectoria iniciada en  $x_0 \in V_0$  cumple  $T(x_0) \leq T_1(r) + T_2(x_0, r)$ . La función  $T(x_0)$  está uniformemente acotada por la constante

$$T_f = \frac{1}{(q-1)\kappa_u} \frac{1}{r^{q-1}} + \frac{1}{(1-p)\kappa_f} r^{1-p}, \quad (27)$$

es decir,  $T(x_0) \leq T_f$ . Para garantizar la mejor estimación de la constante de tiempo fijo, seleccione  $r = (\kappa_f/\kappa_u)^{\frac{1}{q-p}}$ , que es el valor que minimiza la función (9).

**Prueba del Teorema 2.8.** La estabilidad en tiempo finito se debe al Teorema 2.7. Por otro lado, la solución de la EDO  $\dot{v} = -\kappa_f v^p - \kappa_u v$ ,  $v(0) = v_0 \geq 0$ , para  $p \in (0, 1)$  está dada por

$$v(t) = \exp(-\kappa_u t) [v_0^{1-p} - \frac{\kappa_f}{\kappa_u} [\exp((1-p)\kappa_u t) - 1]]^{\frac{1}{1-p}}. \quad (28)$$

Del principio de comparación [46] y considerando  $V(t) \leq v(t)$ , cuando  $V_0 = V(x(t), x_0) \leq v_0$ , se obtiene

$$V(t) \leq \exp(-\kappa_u t) [V_0^{1-p} - \frac{\kappa_f}{\kappa_u} [\exp((1-p)\kappa_u t) - 1]]^{\frac{1}{1-p}}.$$

El tiempo que le toma a cada trayectoria, iniciada en  $x_0 \in V_0$ , para converger al origen se obtiene haciendo  $V(t) = 0$  en la expresión anterior, lo cual permite obtener (11). Por lo tanto, el origen es ETFdE.

*“Me lo contaron y lo olvidé; lo vi  
y lo entendí; lo hice y lo aprendí.”*

— Confucio

En este capítulo se formula el problema de regulación y seguimiento de alguna referencia deseada para una clase de sistemas no lineales con perturbaciones como un problema de estabilización robusta. Las perturbaciones que se toman en cuenta son de dos tipos: las debidas a la incertidumbre en el modelo del sistema y las debidas a acciones externas que afectan el desempeño del sistema.

Para poder resolver el problema de estabilización robusta se requieren de algunas condiciones adicionales sobre el sistema y sobre la función que describe a la referencia deseada. Como los métodos de frecuencia están prácticamente ausentes para el análisis de sistemas no lineales, se usa la representación en el espacio de estados. Se considera que el sistema únicamente posee una entrada de control, y que las perturbaciones son descritas por funciones sin memoria.

### 3.1. DESCRIPCIÓN GENERAL DEL SISTEMA

Se considera un sistema de una sola entrada y una sola salida, cuyo modelo en el espacio de estados está descrito por

$$\dot{z} = f(t, z) + g(t, z)(u + \rho(t, z)), \quad \sigma = h(t, z), \quad z_0 = z(0), \quad (29)$$

donde  $u \in \mathbb{R}$  y  $\sigma \in \mathbb{R}$  son variables escalares. Las características del sistema son:

- (c1) La variable  $z \in \mathbb{R}^n$  define el vector de estados del sistema,  $u$  es la entrada de control,  $\sigma$  es la salida,  $\sigma = 0$  define a la SD,  $z_0$  es la condición inicial y  $z = 0$  es un punto de equilibrio.
- (c2) Todo el estado  $z$  se considera medible y  $z(t)$  define a las trayectorias de estado absolutamente continuas que satisface la EDO (29) casi en todas partes.
- (c3) La función  $h(t, z) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  describe la tarea de control de regulación o seguimiento que se desea que realice el sistema.
- (c4) Los campos vectoriales  $f(t, z) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g(t, z) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son suaves, y para cada  $z \in \mathbb{R}^n$ , estos campos vectoriales se consideran uniformemente acotados c.r. al tiempo  $t$ ,  $\forall t \geq 0$ . Además, existe una función escalar  $\xi(t, z) > 0$  tal que  $g(t, z) = g_n(z)\xi(t, z)$ , y  $g_n(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- (c5) La función  $f(t, z)$  se asume que puede descomponerse esencialmente en dos partes importantes, es decir,  $f = f_n(z) + \Delta_u(t, z)$ . El término  $f_n(z)$  representa la dinámica que se conoce del sistema. El término  $\Delta_u(t, z)$  representa el nivel de incertidumbre de la dinámica conocida y/o las perturbaciones externas que actúan sobre el sistema, no acopladas a la entrada de control, pero que puede ser acotado por un campo vectorial  $\Delta(z)$ , es decir, para cada componente se satisface  $|\Delta_{ui}(t, z)| \leq \Delta_i(z)$ . Una condición necesaria para lograr la estabilización del origen del sistema (29) es que el término  $\Delta_u(t, z)$  debe desvanecerse en  $z = 0$ , es decir,  $\Delta_u(t, 0) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ .
- (c6) Las función  $\rho(t, z) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  modela al conjunto de perturbaciones acopladas que actúan sobre el sistema. Se considera que  $\rho(t, z)$  pertenece a la clase de funciones esencialmente acotadas  $\mathcal{W} = \{\rho(t, z) \in L_\infty : |\rho(t, z)| \leq \rho\}$ ,  $\forall t \geq 0$  y  $\forall z \in \mathbb{R}^n$ . El término  $\rho(t, z)$  no necesariamente se desvanece en el origen  $z = 0$ .

*Si  $\Delta_u(x, t)$  estuviera acoplada a la entrada de control existiría una función escalar incierta  $e(x, t)$  tal que  $\Delta_u(z, t) = e(x, t)g(x, t)$ .*

(c7) Tanto  $\Delta_u(t, z)$  como  $\rho(t, z)$  están modeladas por funciones sin memoria.

El sistema nominal de (29) se obtiene cuando no existen perturbaciones, es decir, para  $\Delta_u(t, z) = 0$  y  $\rho(t, z) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ . En cualquier otro caso,  $\Delta_u(t, z) \neq 0$  ó  $\rho(t, z) \neq 0$ , para algún  $t \geq 0$ , el sistema (29) se encuentra perturbado. En general, se busca cumplir con la tarea seguimiento y/o regulación descrita por la función  $h(t, z)$  a pesar de las perturbaciones que actúan sobre el sistema.

### 3.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Como la tarea de regulación y/o seguimiento debe cumplirse a pesar de la presencia de perturbaciones, se necesita emplear una técnica de control robusto. Dos técnicas de control robusto que permiten resolver este problema son el CMD y CMDOS. Ambos enfoques son adecuados bajo la hipótesis de que solo existan perturbaciones acopladas en el sistema (29). En comparación con el CMD clásico, un CMDOS garantiza la realización de la tarea de control en tiempo finito sin la restricción de que el grado relativo solo sea uno. Teniendo esto en mente, basados en un enfoque de CMDOS, el objetivo de control se transforma a:

(O1) garantizar que, mediante una ley de control por retroalimentación discontinua de los estados, se logre llevar cualquier trayectoria de estado del sistema (29) a la SD  $\sigma = 0$  en tiempo finito y mantenerla ahí, a pesar de la presencia de cierta clase de perturbaciones acopladas y no acopladas.

*Al ser discontinua la entrada de control, las soluciones del sistema en lazo cerrado (29) en retroalimentación con el controlador discontinuo se entienden en el sentido Filippov [32].*

Para poder lograr el objetivo (O1) se requiere de una representación adecuada del sistema. Para ello, hay que imponer algunas condiciones adicionales. Las únicas suposiciones que se hacen son:

(H0) el sistema (29) es completo en el conjunto compacto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , es decir, que  $z(t) \in \Omega$  y, para cada  $z_0$  y cada entrada de control  $u$ ,  $z(t)$  está definida para casi todo  $t \in \mathbb{R}^+$ ;

*Se entiende por función suave como aquella función que es continuamente diferenciable.*

(H1)  $h(t, z)$  es una función suficientemente suave;

(H2) en ausencia de perturbaciones no acopladas, el grado relativo  $r$  del sistema (29) c.r. a  $\sigma$  debe estar bien definido, ser constante (no variante con el tiempo) y conocido. El grado relativo  $r$  es exactamente el número de veces que hay que diferenciar a  $\sigma$  para que la entrada de control  $u$  aparezca explícitamente por primera vez en  $\sigma^{(r)} := \frac{d^r}{dt^r} h(t, z)$ ;

Bajo las hipótesis (H0)-(H2), el sistema (29) puede ser llevado a una forma normal computada, al menos localmente, [43], [89]. Si sólo aparecen perturbaciones acopladas, la forma normal computada se reduce a la forma normal convencional; si además, la dinámica cero es de dimensión cero, la forma normal computada se reduce a la forma de controlador. El hecho más importante es que las hipótesis (H0)-(H2) aseguran la existencia de un difeomorfismo  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definido por

$$\phi(t, z) = \begin{pmatrix} \psi(z) \\ h(t, z) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(t, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix},$$

*La forma de controlador se obtiene si el grado relativo  $r$  es igual al orden del sistema.*

*Un difeomorfismo  $x = \phi(z)$  es un vector de cambio de coordenadas en  $\mathbb{R}^n$ . Básicamente satisface dos propiedades: (i) es invertible ( $\phi^{-1}(x) = z$ ) y (ii)  $\phi(z)$  y  $\phi^{-1}(x)$  son mapas suaves.*

con  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$ , y donde el estado normal se ha designado por  $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_r) \in \mathbb{R}^r$ ,  $\eta = (\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_{n-r}) \in \mathbb{R}^{n-r}$ , y la función  $L_f^i h(t, z) := L_{f_n} L_f^{i-1} h(t, z) + \frac{\partial L_f^{i-1} h(t, z)}{\partial t}$ ,  $\forall i = 1, \dots, r-1$ , quedando por definición  $L_f^0 \sigma := h$ . El vector  $x$  está formado por la variable de salida  $\sigma$  y funciones que dependen de las  $(r-1)$  derivadas

de  $h(z, t)$  c.r. al tiempo. Diferenciando c.r. al tiempo el nuevo vector de coordenadas  $\phi(z)$ , la estabilización en tiempo finito de la variable  $\sigma$  se trasforma en un problema de estabilización del sistema

$$\begin{aligned} \Sigma_0 : \quad \dot{\eta} &= f_0(\eta, x) + \Delta f_0(x, \eta), \\ \Sigma_T : \quad \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + w_i(t, x, \eta), & \forall i = 1, \dots, r-1, \\ \dot{x}_r = w_r(t, x, \eta) + b(t, x, \eta)u, & x_0 = x(0), \\ x_1 = \sigma, \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

y más específicamente, de la estabilización en tiempo finito del origen  $x = 0$  del sistema  $\Sigma_T$  a través de la entrada de control  $u$ . Aquí, el campo vectorial  $f_0 = [L_{f_n} \eta_1, \dots, L_{f_n} \eta_{n-r}]^T$  representa la dinámica cero del sistema (29) perturbada por el término  $\Delta f_0 = [L_{\Delta_u} \eta_1, \dots, L_{\Delta_u} \eta_{n-r}]^T$ , las funciones  $w_i(x, \eta, t) = L_{\Delta_u} L_{f_n}^i \sigma$ ,  $\forall i = 1, \dots, r-1$ , representan a las perturbaciones y términos no acoplados a la entrada de control que actúan sobre el sistema, las perturbaciones y términos acoplados a la entrada de control quedan definidos por la función  $w_r(x, \eta, t) = L_{f_n}^r \sigma + L_{\Delta_u} L_{f_n}^r \sigma + L_g L_{f_n}^{r-1} \sigma \rho(z, t)$ , y siendo  $b(t, x, \eta) = L_g L_{f_n}^{r-1} \sigma \neq 0$  debido a la condición de grado relativo. No es restrictivo considerar  $b(t, x, \eta) > 0$ , puesto que es posible redefinir el signo de la señal control  $u$ . Para la lograr estabilización del sistema (30), hay que asegurar que el vector de estado  $\eta$  permanezca acotado.

(H3) El vector de estados  $x$  está acotado; la dinámica cero  $\Sigma_0$  es global y EE, y el campo vectorial  $f_0(x, \eta) + \Delta f_0(x, \eta)$  es globalmente Lipschitz en  $x$  y  $\eta$ , [82].

Observe que los términos  $w_i(\cdot)$  no involucran diferenciación del término no acoplado  $\Delta_u(z, t)$  después del cambio de coordenadas. La diferencia más notable con el enfoque tradicional en CMDOS es que en el sistema  $\Sigma_T$  aparecen términos no acoplados. Generalmente, en el diseño convencional de un CMDOS, los términos  $w_i(\cdot)$ ,  $i = 1, \dots, r-1$ , se consideran suficientemente diferenciables con el fin de llevar el efecto de las perturbaciones no acopladas a la parte donde se encuentra la entrada de control. No siempre el término desconocido  $\Delta_u$  es suficientemente diferenciable. Si solamente existen perturbaciones acopladas en (29), es decir,  $\Delta f_0(x, \eta) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ , el vector  $x$  depende de  $\sigma$  y de sus  $(r-1)$  derivadas c.r. al tiempo, es decir,  $x = \begin{pmatrix} \sigma & \sigma^{(1)} & \dots & \sigma^{(r-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-r}$ . Convencionalmente, en CMDOS se necesita que las siguientes hipótesis se cumplan para  $\Sigma_T$ .

(H4) Los términos no acoplados  $w_i(t, x, \eta)$ ,  $i = 1, \dots, r-1$ , son suficientemente diferenciables.

Bajo la hipótesis (H4), los efectos de los términos no acoplados existentes en el sistema (29) pueden transformarse a efectos que están acoplados a la entrada de control. Como las funciones  $w_r(t, x, \eta)$  y  $b(t, x, \eta)$  son continuas, y  $\phi(\Omega)$  es un conjunto compacto, estas funciones satisfacen las siguientes condiciones

(H5)  $0 < K_m \leq b(t, x, \eta) \leq K_M$ ,  $|w_r(t, x, \eta)| \leq C$ ,  $\forall x, \eta \in \phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^r$ ,  $\forall t \geq 0$ , donde las constantes  $C, K_m, K_M \in \mathbb{R}_+$ , y además, son conocidas.

La hipótesis (H5) siempre se cumple al menos localmente. Las condiciones (H4)-(H5) permiten que el problema de estabilización sea resuelto con cualquier CMDOS homogéneo propuesto en [54],[55],[56], dando lugar a un modo deslizante de orden  $r$ .

**Definición 3.1** [54] Considere que el sistema (29) está retroalimentando con un control discontinuo y sean  $\sigma, \sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(r-1)}$  funciones continuas. La dinámica en la variable deslizante se denomina modo deslizante de orden  $r$  c.r. a la variable deslizante  $\sigma$  si las trayectorias pertenecen al conjunto  $S^r = \{x \in \mathbb{R}^n | \sigma = \sigma^{(1)} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0\}$ , el cual es un conjunto no vacío y local integrable en el sentido de Filippov.

*El sistema (30) en realidad es un extensión la forma normal computada introducida en [89].*

*No se ha exigido que las derivadas de la salida queden definidas por  $\sigma^{(r)} := L_f^i h(t, z)$ , ya que en el caso del sistema (29) la forma convencional de la forma normal no puede ser derivada.*

*A lo largo de este trabajo se toma como verdadera la hipótesis H3.*

*$\phi(\Omega)$  es un subconjunto abierto acotado de  $\mathbb{R}^r$  dentro del cual se asegura que la dinámica del sistema está acotada. Esta condición se puede relajar un poco usando otra clase de controladores discontinuos, véase Capítulo 8.*



La hipótesis sobre  $b(\cdot)$  es estándar y evita la pérdida de controlabilidad en el sistema  $\Sigma_T$ . La hipótesis sobre  $w_r(\cdot)$  puede satisfacerse localmente, pero es muy restrictiva en el contexto de globalidad. Cualquier perturbación que sea creciente en función de los estados no cumple con la condición **(H5)** globalmente. Esto es una consecuencia inherente de la ley de control, puesto que ésta es acotada. Para poder contrarrestar el efecto de perturbaciones crecientes es necesario contar con una acción de control que sea también creciente. Debido a las incertidumbres en las funciones  $b(t, x, \eta)$  y  $w(t, x, \eta)$ , no es posible resolver este problema usando una entrada de control continua y estática por retroalimentación de estados.

*En una retroalimentación estática, el control es una función sin memoria. Las leyes de control dinámicas surgen cuando se usa, por ejemplo, control integral o control adaptable, y es muy común en esquemas por retroalimentación de salida, [46].*

Es muy posible que el sistema original (29) no tenga propiedades de homogeneidad. De hecho, no se ha supuesto que el sistema (29) sea homogéneo. Bajo las hipótesis **(H4)** y **(H5)** hechas sobre los términos acoplados y no acoplados, la aplicación de un controlador discontinuo homogéneo hace que el sistema  $\Sigma_T$ , en presencia solamente de perturbaciones acopladas, resulte ser una ID homogénea. Esta observación es importante, ya que el campo vectorial de cualquier cadena de integradores *pura* puede hacerse homogénea aplicando una ley de control homogénea. Como la única información acerca de  $w_r(t, x, \eta)$  y  $b(t, x, \eta)$  son sus cotas, el sistema  $\Sigma_T$  implica la ID,

$$\Sigma_{ID} : \begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + w_i(t, x, \eta), & \forall i = 1, \dots, r-1, \\ \dot{x}_r \in [-C, C] + [K_m, K_M]u, & x_0 = x(0). \end{cases} \quad (31)$$

Solamente en ausencia de perturbaciones no acopladas, en el sistema auxiliar  $\Sigma_{ID}$  desaparece la dependencia de la dinámica del sistema original. El diseño de un CMDOS se reduce a la tarea de hallar controladores que estabilizan en tiempo finito el origen  $x = 0$  de  $\Sigma_{ID}$ .

*Una vez se ha alcanzado el origen, el sistema controlado exhibe un modo deslizante de orden  $r$ .*

El CMD y el CMDOS resultan adecuados para remover los efectos de las perturbaciones acopladas; sin embargo, es de interés considerar el diseño de controladores discontinuos cuando existen perturbaciones no acopladas que afectan la tarea de control. Algunos esquemas han sido desarrollados para atenuar el efecto producido por las perturbaciones no acopladas en vez de eliminar completamente dicho efecto, [19],[80].

Este trabajo considera el objetivo **(O1)** pero relajando la hipótesis **(H4)**. Principalmente, se busca resolver el problema de estabilización en tiempo finito del sistema  $\Sigma_T$  tomando en cuenta perturbaciones no acopladas que no son suficientemente diferenciables. La hipótesis sobre  $b(t, x, \eta)$  permanece sin cambios, pero la hipótesis sobre  $w_r(t, x, \eta)$  dependerá de si la entrada de control es acotada o no. Para los términos no acoplados  $w_i(x, \eta, t)$ ,  $\forall i = 1, \dots, r-1$ , se consideran dos suposiciones adicionales.

(H6) Las perturbaciones no acopladas satisfacen la condición  $w_i(0, 0, t) = 0$ ,  $i = 1, \dots, r-1$ . De forma más concreta, las perturbaciones no acopladas deben desvanecerse cuando los vectores de estado  $x$  y  $\eta$  se desvanezcan;

(H7) Las perturbaciones no acopladas están uniformemente acotadas por funciones conocidas que dependen solamente del estado, es decir, las cotas de las perturbaciones son uniformes c.r. al tiempo  $t$ ,  $\forall t \geq 0$ . De esta forma, el modelo exacto de las perturbaciones no es requerido para propósitos de análisis y/o diseño.

*En este trabajo se consideran funciones continuas.*

Sin **(H6)**, el origen  $x = 0$  no es un punto de equilibrio del sistema  $\Sigma_T$ . La condición **(H7)** establece que siempre es posible acotar las funciones  $w_i(t, x, \eta)$  por funciones que no dependen del tiempo  $t$ . El sistema  $\Sigma_0$  junto con el sistema  $\Sigma_T$  representan una clase de sistemas no lineales más amplia que la comúnmente descrita en el contexto de MDOS.

## Parte I

# ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO FINITO MEDIANTE FLCR

La primera parte de este trabajo se enfoca exclusivamente en el diseño de controladores discontinuos, homogéneos y no homogéneos, a través de la construcción de una FLCR.





*“Las que conducen y arrastran al mundo  
no son las máquinas sino las ideas.”*

— Víctor Hugo

En este capítulo se aborda el problema de diseñar controladores discontinuos por retroalimentación de estados que son homogéneos y que garantizan que la variable deslizante y sus  $(r - 1)$  derivadas c.r. al tiempo sean llevadas a cero en tiempo finito dando lugar a un MDOS. La ley de control se obtiene a través de una FLC. La FLC se construye en forma iterativa, empleando una modificación del MB con el cual también es posible construir simultáneamente el controlador. Además, es posible determinar la clase de perturbaciones no acopladas que admite el sistema y que preservan la estabilización en tiempo finito.

#### 4.1. GENERALIDADES

El empleo de controladores, continuos o discontinuos, que aseguran convergencia en tiempo finito, provee ventajas notables: el objetivo de control se alcanza en tiempo finito, hay mejor robustez y rechazo a cierta clase de perturbaciones [15], [56]. Motivados por estas favorables características, uno desearía desarrollar algún controlador robusto que tenga esta propiedad para resolver el problema de estabilización planteado.

Para algunos sistemas no lineales continuos, el análisis de estabilidad y de estabilización en tiempo finito usando el enfoque de FL ha sido ampliamente estudiado en [37], [14], [15], [16], [79], [39], [41]. Particularmente en [79], [39], [41], aunque no se menciona propiamente, se construye explícitamente una FLC para diseñar las entradas de control continuas. La técnica empleada para la construcción de la FLC es la integración entre Fdes y el MB. La Fdes ya se había utilizado para diseñar controladores estabilizantes para una clase de sistemas en cascada, donde solo es posible implementar entradas de control continuas, [78]; y fue retomado en [79], [39], [41], para diseñar leyes de control continuas por retroalimentación de estado que estabilizan en tiempo finito cierta clase de sistemas no lineales.

Por otro lado, para controladores que emplean algoritmos discontinuos, el análisis mediante una FL sólo ha sido fructífero para sistemas de segundo orden. Los algoritmos más estudiados han sido los algoritmos Twisting y Super-Twisting [72], [75], [76], [73], [65], [67]. Recientemente, se ha tratado de abordar el problema de construir una FL para algoritmos de MDOS pero con limitado éxito, [67],[81]. Una de las soluciones a este problema ha sido propuesta por Sánchez and Moreno, [81]. La gran desventaja del método propuesto en [81] radica en que hay que obtener las soluciones del sistema retroalimentado con un CMDOS para poder construir la FL. Lo cual resulta prácticamente imposible para órdenes mayores a tres.

En [38] se aplica el rediseño de Lyapunov para [46] generar un nuevo tipo de CMDOS en dos pasos. El método consiste en usar un controlador continuo para estabilizar en tiempo finito una cadena de integradores no perturbada, para después, aplicar un control discontinuo junto con la entrada continua con el fin de mejorar las propiedades de robustez del sistema en lazo cerrado. La estrategia permite rechazar perturbaciones acotadas y acopladas, que la ley de control nominal no es capaz de compensar. Algunos puntos importantes a resaltar en este enfoque son:

*Por ejemplo, los controladores que se proponen en [79], [39], [41], para los cuales, la FLC ya es conocida.*

*Con el enfoque presentado en [38], no es posible conocer si hay alguna mejora en la velocidad de convergencia del sistema controlado.*

*Hasta ahora, no ha sido formalmente probado que un CMDOS sea robusto ante perturbaciones no acopladas.*

*En Gonzalez et al. [34] se presenta el Super-Twisting con ganancia variable para compensar perturbaciones que crecen en función del tiempo y del estado. La compensación es exacta si las perturbaciones (así como sus derivadas) son acotadas por funciones conocidas.*

- (I) para diseñar el controlador discontinuo, se necesita de un controlador continuo previamente diseñado que tenga la propiedad de convergencia en tiempo finito;
- (II) no se construye una FLCR para diseñar controladores por retroalimentación de estados homogéneos y discontinuos;
- (III) el sistema en lazo cerrado no es homogéneo;
- (IV) los controladores no son acotados, pero además, no es posible decir algo acerca de como está contribuyendo la parte continua del controlador.
- (v) solo se prueba que pueden compensar perturbaciones acopladas.

Un ingrediente que ha sido crucial en el desarrollo de todos los enfoques mencionados es la propiedad de homogeneidad. Esta propiedad permite concluir de una forma sencilla que el sistema controlado es estabilizado en tiempo finito. Solo hay que lograr que a través de la entrada de control el punto de equilibrio del sistema sea AE y que el campo vectorial asociado al sistema en lazo cerrado tenga grado de homogeneidad negativo, [16], [39], [41], [56].

Aunque poseen propiedades similares, existe una diferencia importante entre usar un controlador continuo y uno discontinuo. Una control discontinuo puede eliminar el efecto de perturbaciones acopladas que no necesariamente se desvanecen, y que un control continuo no puede compensar. Por ello, el problema de estabilización se resolverá diseñando una nueva clase de controladores por MDOS. En contraste con los algoritmos por CMDOS reportados en [54], [55], [56], los controladores discontinuos homogéneos propuestos:

- (I) se obtienen por medio de la construcción explícita de una FLCR;
- (II) son discontinuos sobre una superficie continua;
- (III) un logro importante, desde el punto de vista práctico, es que las leyes de control discontinuas que se proponen mejoran la respuesta transitoria utilizando el mismo esfuerzo de control;
- (IV) permiten compensar cierta clase de perturbaciones no acopladas;
- (v) el enfoque de FLCR permite hacer extensiones importantes que de otra manera no sería posible. Por ejemplo, controladores con ganancia variable solo pueden ser obtenidos a través de una FL.

Para resolver el problema de estabilización bajo perturbaciones no acopladas (a la entrada de control) se supondrá que entran en forma triangular inferior al sistema y están acotadas por cierta clase de funciones conocidas. Esta suposición garantiza la estabilización en tiempo finito, de manera global y robusta, del sistema en lazo cerrado.

#### 4.1.1. Problemas con el diseño por CMD clásico y alternativas

El problema de estabilización en tiempo finito utilizando una ley de control discontinua puede ser atacado a través de una variante del enfoque de CMD, conocido como CMDT, [63],[91]. Como ejemplo ilustrativo, considere que se quiere estabilizar en tiempo finito el origen del sistema

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad (32)$$

donde  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada de control a diseñar. Para lograr estabilización en tiempo finito con un CMDT, la SD debe tener la siguiente estructura

$$s = x_2 + c_1 |x_1|^p = 0, \quad p \in (0, 1). \quad (33)$$

siendo  $c_1 > 0$  una constante. A la superficie (33) se le conoce como SD terminal. Usando las coordenadas de estado  $(x_1, s)$ , el sistema (32) queda representado por

$$\dot{x}_1 = -c_1 \lceil x_1 \rceil^p + s, \quad \dot{s} = u + c_1 p |x_1|^{p-1} x_2. \quad (34)$$

En el modo deslizante  $s = 0$ , la dinámica reducida del sistema queda descrita por

$$\dot{x}_1 = -c_1 \lceil x_1 \rceil^p. \quad (35)$$

Como  $p \in (0, 1)$ , se puede concluir que la solución de la EDO (35) converge a cero en tiempo finito. Por lo que la SD (33) asegura convergencia en tiempo finito al origen durante el modo deslizante. Propiedad que no está presente si el parámetro  $p = 1$ . Una vez seleccionada la SD, la ley de control debe garantizar que la SD se alcanza en tiempo finito, desde cualquier condición inicial arbitraria. Para garantizar la existencia del modo deslizante, el diseño por CMDT requiere que la ley de control cumpla la condición de suficiencia  $\dot{s} < -n|s|$ , [87]. Para el sistema (34), una ley de control que satisface tal condición es

$$u = -c_1 p |x_1|^{p-1} x_2 - Q \lceil s \rceil^0, \quad Q > 0. \quad (36)$$

Con esta ley de control, el origen de (32) es ETF. Sin embargo, existen términos que provocan que la señal de control no este definida para valores en el conjunto  $x = \{x_1 = 0\}$ . Como la ley de control se obtiene de la derivada c.r. al tiempo de la SD, los términos de bajo orden producen términos singulares, haciendo que la ley de control no esté acotada para cierto conjunto de valores. Lamentablemente, el empleo de este controlador es limitado en la práctica debido a que las trayectorias del sistema deben comenzar en un sector predeterminado en el espacio de estados para evitar señales de control no acotadas, [96]. Para lidiar con el problema provocado por términos singulares en la ley de control, algunos autores han propuesto una clase de “desingularización” de la SD para evitar la aparición de términos indeseados en la ley de control, preservando la propiedad de convergencia en tiempo finito durante el modo deslizante, [31], [95], [88]. Este enfoque llamado CMDTNS, busca remplazar la SD por una más suave. Para ilustrar lo anterior, la SD (33) se remplaza por una Fdes  $\phi(x_1, x_2)$ . La Fdes debe cumplir

$$\phi(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 = -k_1 \lceil x_1 \rceil^p.$$

La Fdes debe elegirse de clase  $C^1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^2$ . Proponiendo  $\phi(x_1, x_2) = \lceil x_2 \rceil^{1/p} + k_1^{1/p} x_1$ , y utilizando  $(x_1, \phi)$  como nuevas coordenadas, el sistema (32) se puede escribir como

$$\dot{x}_1 = \lceil \phi - k_1^{1/p} x_1 \rceil^p, \quad \dot{\phi} = |x_2|^{\frac{1-p}{p}} [p u + k_1^{1/p} \lceil x_2 \rceil^{\frac{2p-1}{p}}].$$

Utilizando la idea básica del diseño por CMD, se elige  $u = -(k_2 \lceil \phi \rceil^0 + k_1^{1/p} \lceil x_2 \rceil^{\frac{2p-1}{p}}) / p$  para obtener

$$\dot{x}_1 = \lceil \phi - k_1^{1/p} x_1 \rceil^p, \quad \dot{\phi} = -k_2 |x_2|^{\frac{1-p}{p}} \lceil \phi \rceil^0. \quad (37)$$

Es claro que, durante el modo deslizante las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito al origen. Además, la nueva ley de control está bien definida en todo el espacio de estados. Por otro lado, hay otras cosas que destacar:

- (I) No es claro como la ley de control propuesta asegura la existencia del modo deslizante. Desde este punto de vista, (37) pareciera tener dos conjuntos de equilibrio, el punto  $x_1 = x_2 = 0$  y el eje  $x_2 = 0$ .
- (II) Como el punto (i) no es claro, se necesita realizar un análisis adicional (geométrico) para mostrar que hay un solo punto de equilibrio ( $x_1 = x_2 = 0$ ) y que existe el modo deslizante para el sistem (37).

*La expresión (32) representa la dinámica del sistema proyectada sobre la variable s.*

*Si hubiera perturbaciones acopladas con cota  $\rho_0$ , la ganancia Q se elige tal que  $Q > \rho_0$ .*

*Una extensión para sistemas de orden n ha sido reportada en [96], pero la ley de control resultante sigue presentando singularidades restringiendo su aplicación en la práctica.*

*El diseño de la entrada de control se reduce a encontrar una Fdes  $\phi(x_1, x_2)$  apropiada.*

*El lector puede consultar los trabajos Yu et al. [93] y Yu et al. [94] para conocer más sobre la desingularización en CMDT.*

(III) La extensión sistemática de esta idea a sistemas de órdenes mayores no es sencilla ni obvia.

El CMDT y el CMDTNS necesitan diseñar una SD con la propiedad de convergencia en tiempo finito para lograr la estabilización del sistema. Hasta ahora, estos enfoques han sido satisfactorios para sistemas de orden dos. Un CMDOS puede resolver el problema, y en el caso de orden arbitrario podría usarse un CMDOS existente, como los propuestos en [54], [56]. Pero lo que realmente nos interesa es hallar un método sistemático para diseñar una ley de control dada una FLC, o una FLCR, para cualquier sistema de orden mayor a dos.

#### 4.1.2. Objetivos y estructura del capítulo

En este capítulo, se desarrolla un método alternativo a los enfoques de CMDT y de CMDTNS, y que, a diferencia de estos, es posible utilizar en sistemas de órdenes mayores a dos. Además, cualquier controlador obtenido por el método que se propone tiene características cualitativas similares a los utilizados en CMDOS.

La meta primordial de este capítulo es proporcionar un método de diseño basado en la construcción explícita de FLC para construir controladores discontinuos estabilizantes robustos que aseguran convergencia en tiempo finito del sistema controlado.

En la Sección 4.2, se aborda el diseño de un controlador discontinuo para el sistema (38) en un marco de referencia muy general considerando que se conoce alguna FLCR.

Posteriormente, inspirados por la técnica propuesta por Praly et al. [78], se propone un método para construir explícitamente una FLC para diseñar controladores discontinuos homogéneos que estabilizan el sistema (30). Los controladores obtenidos aseguran estabilización robusta y en tiempo finito a pesar de la existencia de cierta clase de perturbaciones actuando en el sistema. El único requerimiento que se pide es que las perturbaciones no acopladas estén acotadas por cierta clase de funciones conocidas. Si esta suposición se cumple globalmente, entonces se garantiza estabilización global en tiempo finito del sistema en lazo cerrado. Para ilustrar cómo funciona el método, se obtienen dos familias distintas de controladores discontinuos. Estas familias comparten características cualitativas similares a las propuestas en [54], [55],[56], pero su estructura es totalmente diferente. Entre las similitudes se encuentra que, las familias de controladores en lazo cerrado con el sistema (30) aseguran que la ID asociada al sistema controlado sea homogénea de grado negativo. Por lo tanto, la convergencia de las trayectorias de estado al origen del sistema (30) es en tiempo finito.

Finalmente, en la Sección 4.5 se muestra como una FLCR permite construir controladores discontinuos con ganancia variable.

## 4.2. DISEÑO DE CONTROLADORES HOMOGÉNEOS MEDIANTE FLCR

A continuación, se presentan algunos resultados relacionados con el diseño de entradas de control discontinuas y continuas cuando se conoce una FLC (o FLCR). En un análisis preliminar, se estudia el sistema

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)(u + \rho(t, x)), \quad (38)$$

cuyas características han sido definidas en el Capítulo 3. Hay que recordar que  $f(t, x) = f_n(x) + \Delta_u(t, x)$  y  $g(t, x) = g_n(x)\xi(t, x)$ . Las funciones  $\rho(t, x)$  y  $\Delta_u(t, x)$  modelan al conjunto de perturbaciones acopladas y no acopladas que actúan sobre el sistema. Como para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(t, x)$  está uniformemente acotada en  $t$ , las perturbaciones no acopladas  $\Delta_u(t, x)$  también se encuentran uniformemente acotadas en  $t$ ,  $\forall t \geq 0$ . El sistema nominal de (38) está descrito por

$$\dot{x} = f_n(x) + g_n(x)\xi(t, x)u. \quad (39)$$

## 4.2.1. Control discontinuo

Los consideraciones que se tomarán en cuenta en esta sección son

- H'0: El origen  $x = 0$  es un punto de equilibrio del sistema nominal (perturbado).
- H'1: La función escalar  $\xi(t, x)$  satisface  $\xi(t, x) \geq \gamma$ , siendo  $\gamma > 0$  una constante conocida.
- H'2: El vector  $\Delta_u(t, x)$  es desvaneciente en el origen. Si  $x \rightarrow 0$  entonces  $\Delta_u(t, x) \rightarrow 0$ ,  $\forall t \geq 0$ . Por lo tanto,  $f(t, x)$  es desvaneciente en el origen.
- H'3:  $\rho(t, x)$  pertenece a la clase de funciones  $\mathcal{W} = \{\rho(t, x) \in \mathcal{L}_\infty : |\rho(t, x)| \leq C\}$ .

Para un análisis preliminar, el campo vectorial del sistema nominal (39) no necesita ser homogéneo.

**Suposición 4.1** Para toda  $x \in B_r$ , existen constantes  $\alpha, \beta > 0$  tales que: (i) para el sistema nominal  $L_{f_n} V \leq \alpha |L_{g_n} V|$ ; y (ii) para el sistema perturbado  $L_{f(t,x)} V \leq \beta |L_{g_n} V|$ , donde  $V$  es la FLC (o FLCR).

La Suposición asegura que la función  $L_{g_n} V$  domina a  $L_{f_n} V$  (o  $L_{f(t,x)} V$ ) al menos en un vecindad del origen. Por definición de FLC,  $L_{g_n} V = 0$  implica  $L_f V < 0$ . Los siguientes resultados muestran que la existencia de una FLC (o FLCR) asegura la existencia de una la ley de control estabilizante.

**Teorema 4.1** Sea  $V(x)$  una FLC para el sistema nominal (39) y considere que el punto (i) de la Suposición 4.1 se cumple. Elija la ley de control discontinua  $u = -k[L_{g_n} V]^0$ . Entonces, para cualquier ganancia  $k$  suficientemente grande, el origen  $x = 0$  de (39) es local y AE.

En comparación con otras leyes de control, la ley de control discontinua  $u$  propuesta tiene una estructura muy sencilla.

**Teorema 4.2** Sea  $V(x)$  una FLCR para el sistema (38) y considere que la Suposición 4.1 se cumple y . Elija la ley de control discontinua  $u = -k[L_{g_n} V]^0$ . Entonces, para cualquier ganancia  $k$  suficientemente grande, el origen  $x = 0$  de (38) sigue siendo local y AE.

La ley de control discontinua estabiliza local y asintóticamente el origen, aun en presencia de perturbaciones no acopladas. Las perturbaciones acopladas siempre pueden compensarse a través de la entrada de control.

El diseño propuesto en los Teoremas previos no requiere que el sistema (38) sea homogéneo. Sin embargo, se presentan dos inconvenientes, solamente se asegura estabilidad asintótica localmente y no es posible caracterizar el tipo de convergencia de las trayectorias del sistema en lazo cerrado.

El análisis de estabilidad, la robustez del sistema y el diseño de controladores basados en MDOS usualmente se hace con la ayuda de herramientas de homogeneidad para ID's y propiedades de contracción [56]. En particular, los conceptos de homogeneidad ayudan a establecer resultados globales y garantizar, en este caso, la existencia de convergencia en tiempo finito.

Para los siguientes resultados, se necesitan las siguientes hipótesis adicionales:

- H'4: El campo vectorial del sistema nominal y la FLC son homogéneas c.r. a la misma dilatación.
- H'5: Existe una FLCR homogénea cuando las perturbaciones no acopladas y acopladas están actuando sobre el sistema.
- H'6: Existen constantes positivas  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , tales que  $|\Delta_{u_i}(t, x)| \leq d_i \|x\|_{r,p}^{1+r_i}$ . Las funciones  $\Delta_{u_i}(t, x)$  son las componentes del vector  $\Delta_u(t, x)$ . Esta suposición establece que las perturbaciones son dominadas por funciones homogéneas. Además, el sistema perturbado está dominado por un sistema homogéneo que tiene el mismo grado que el sistema nominal.

Como en muchos trabajos donde se usa el enfoque de FLC, la ley de control  $u$  incorpora en su diseño a la función  $V(x)$ .

Este tipo de diseño es parecido al CMD clásico.

Las hipótesis garantizan que existe un control homogéneo que es capaz de llevar a las trayectorias de estados al origen. **H'6** asegura que el sistema en lazo cerrado es homogéneo de cierto grado.

**Teorema 4.3** Sea  $V(x)$  una FLC de grado homogéneo  $m$  y  $u = -k[L_{g_n}V]^0$  la ley de control discontinua para el sistema nominal (39). Si  $f_n(x)$  y  $g_n(x)$  son funciones homogéneas del mismo grado  $l$  y si la ganancia  $k$  se elige suficientemente grande, entonces el origen  $x = 0$  es GAE. Además, si  $l < 0$ , el origen es globalmente ETF.

Cualquier sistema que cumpla las hipótesis del Teorema es estabilizable globalmente en tiempo finito en ausencia de perturbaciones. Para el caso perturbado, se cuenta con el siguiente resultado.

**Teorema 4.4** Sea  $V(x)$  una FLCR de grado homogéneo  $m$  y  $u = -k[L_{g_n}V]^0$  la ley de control discontinua. Bajo las hipótesis **H'3** y **H'6**, si la ganancia  $k$  se elige suficientemente grande, entonces el origen  $x = 0$  es RGAE. Además, si  $l < 0$ , el origen es globalmente ETF.

Los Teoremas anteriores muestran cómo diseñar un control discontinuo para el sistema en lazo cerrado, cuando el campo vectorial del sistema (38) es dominado por uno homogéneo y cuando se cuenta con la FLCR homogénea. Si el grado de homogeneidad del campo vectorial del sistema en lazo cerrado es negativo, el controlador discontinuo homogéneo garantiza que el origen es globalmente ETF a pesar de las perturbaciones. Esto se debe a que las perturbaciones (acopladas y no acopladas) están uniformemente acotadas por funciones homogéneas conocidas que preservan el grado de homogeneidad del sistema.

Es importante resaltar que las propiedades de homogeneidad ponderada del campo vectorial de un sistema dependen fuertemente de las coordenadas de estado utilizadas. Transformar el sistema a una forma normal utilizando la variable deslizante, es explotado enormemente en el diseño de MDOS homogéneos [56].

Hallar una FLCR es prácticamente imposible en el caso general. El diseño de la ley de control solo se realiza para una clase reducida pero importante de sistemas no lineales. Sin pérdida de generalidad y por motivos de simplicidad, el diseño de la ley de control discontinua se hace para el sistema  $\Sigma_T$  (30), considerando que el grado relativo  $r$  es igual al orden del sistema. En este caso, el sistema  $\Sigma_T$  se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + w_i(t, x), & \forall i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= b(t, x)u + w_n(t, x), \end{aligned} \quad (40)$$

siendo  $n$  el orden del sistema. Este sistema puede representarse por

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u + \rho(t, x). \quad (41)$$

donde se ha definido  $f(t, x) = f_n(x) + \Delta_u(t, x)$ ,  $f_n(x) = [x_2, \dots, x_n, 0]^T$ ,  $\Delta_u(t, x) = [w_1, \dots, w_{n-1}, 0]^T$ ,  $g(t, x) = [0, \dots, 0, b(t, x)]^T$  y  $\rho(t, x) = [0, \dots, 0, w_n(t, x)]^T$ . Las hipótesis adicionales son

**H'7:** Las funciones  $b(t, x)$  y  $w_n(t, x)$  satisfacen  $b(t, x) \in [K_m, K_M]$  con  $K_M \geq K_m > 0$ , y  $|w_n(t, x)| \leq C$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall t \geq 0$ . Las constantes  $K_m$ ,  $K_M$  y  $C$  son conocidas.

**H'8:** Para toda  $i = 1, \dots, n-1$ , existen constantes positivas  $\rho_i$  tales que  $|\Delta_{u_i}(t, x)| \leq \rho_i (|x_1|^{\frac{l+r_1}{r_1}} + \dots + |x_i|^{\frac{l+r_i}{r_i}})$ .

La hipótesis **H'8** es diferente a la condición **H'6**, ya que no está en la forma de una norma. Pero el lado derecho de la desigualdad si es homogéneo de grado  $l$ , es decir,

$$\rho_i (|e^{r_1} x_1|^{\frac{l+r_1}{r_1}} + \dots + |e^{r_i} x_i|^{\frac{l+r_i}{r_i}}) = \rho_i e^{l+r_i} (|x_1|^{\frac{l+r_1}{r_1}} + \dots + |x_i|^{\frac{l+r_i}{r_i}}) \quad (42)$$

Un campo vectorial puede exhibir propiedades de homogeneidad en algún tipo de coordenadas, mientras en otras, nunca se presentará la propiedad.

La representación (41) será útil para las demostraciones de los Teoremas.



Para poder construir la ley de control homogénea para el sistema (40) se necesitan dos cosas. La primera es contar con una FLC homogénea, con lo cual se asegura la existencia de un controlador capaz de hacer homogéneo el campo vectorial del sistema en lazo cerrado. La segunda es que la FLC y la ID asociada al sistema (40) deben ser homogéneas c.r. a la misma dilatación. Entonces, hay que hallar el vector de pesos  $\mathbf{r}$  correcto. Primero, se considera al sistema (40) perturbado solamente por términos acoplados (con  $\Delta_u(t, \mathbf{x}) = 0, \forall t \geq 0$ ).

**Teorema 4.5** *Considere que  $H'7$  se cumple. Sea  $V(x)$  una FLC de grado homogéneo  $m$ ,  $f_n(x)$  de grado homogéneo  $l$  y  $u = -k[\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}]^0$  la ley de control discontinua. Entonces, si  $\Delta_u(t, \mathbf{x}) = 0, \forall t \geq 0$ ,*

- (I) *la ID asociada a (40) es homogénea de grado  $l < 0$  y los pesos  $r_i$  cumplen  $(n + 1 - i)l + r_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$ .*
- (II) *si la ganancia  $k$  se elige suficientemente grande, el origen  $\mathbf{x} = 0$  de (40) es globalmente ETF.*

Una ID en forma de cadena de integradores que es homogénea únicamente puede presentar convergencia en tiempo finito. Además, del punto (i) se observa que los pesos satisfacen

$$r_2 = l + r_1, r_3 = 2l + r_1, \dots, r_{n-1} = (n-2)l + r_1, r_n = (n-1)l + r_1, \quad (43)$$

como el orden del sistema es conocido, con solo fijar el grado de homogeneidad  $l < 0$ , todos los pesos quedan automáticamente determinados. Es posible elegir el parámetro  $l$ , básicamente, de dos formas. Una de ellas es fijarlo a que tenga valor  $-1$ , como en Levant [56]. Por ejemplo, si  $n = 2, \mathbf{r} = (2, 1)$ , si  $n = 3, \mathbf{r} = (3, 2, 1)$ .

Otra posibilidad, es reparametrizar  $l$ , por ejemplo, a que tenga el valor  $p - 1$  con  $p \in [0, 1)$ , lo cual implica que  $l \in [-1, 0)$ . Más concretamente, se busca que el grado de homogeneidad  $l$  esté en función del orden del sistema, hallar el valor de  $p$  como función de  $n$ . De esta forma el vector de pesos  $\mathbf{r}$  dependerá exclusivamente del orden del sistema. Para ello, en contraste con la primera alternativa, solo hay que fijar el valor de alguno de los pesos.

De la primera igualdad de (43) y de  $nl + r_1 = 0$ , si  $r_2 = 1$ , entonces  $r_1 = 1 - (p - 1) = 2 - p$ , y  $p = \frac{n-2}{n-1}$  válida  $\forall n \geq 2$ . Por lo tanto,  $l = \frac{-1}{n-1}$ . Si  $r_1 = 1$ , de forma similar se obtiene  $r_2 = p$ ,  $p = \frac{n-1}{n}$ , y  $l = \frac{-1}{n}$ .

**Teorema 4.6** *Sea  $V(x)$  una FLC de grado homogéneo  $m$  y  $u = -k[\frac{\partial V}{\partial x_n}]^0$  la ley de control discontinua. Bajo las hipótesis  $H'7$  y  $H'8$ , si la ganancia  $k$  se elige suficientemente grande, entonces el origen  $\mathbf{x} = 0$  de (40) es robusto y globalmente ETF.*

#### 4.2.2. Control continuo

Los resultados del Teorema 4.3 y del Teorema 4.4 se pueden generalizar al caso cuando la entrada de control es continua (suave).

**Teorema 4.7** *Sea  $V(x)$  una FLC de grado homogéneo  $m$  y  $u = -k[L_{g_n} V]^q, q \in (0, \infty)$ , la ley de control para el sistema nominal (39). Si los grados de homogeneidad  $l_f$  y  $l_g$  de  $f_n(x)$  y  $g_n(x)$  satisfacen  $l = l_f = l_g + (m + l_g)q$ , y si la ganancia  $k$  se elige suficientemente grande, entonces el origen  $\mathbf{x} = 0$  es GAE. Además, (i) si  $l < 0$ , el origen es globalmente ETF; (ii) si  $l = 0$ , el origen es global y EE; (iii) si  $l > 0$ , el origen es global y RE.*

En ausencia de perturbaciones, todo sistema que cumpla las hipótesis del Teorema anterior es estabilizable globalmente por un control homogéneo. Para el caso perturbado, hay que cambiar la hipótesis  $H'3$  por la siguiente

$H''3$ :  $\rho(t, \mathbf{x})$  pertenece a la clase de funciones  $\mathcal{W}_1 = \{\rho(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} : |\rho(t, \mathbf{x})| \leq C|L_{g_n} V|^q\}$ , con  $q \in (0, \infty)$ .

*Si se permite que el parámetro  $q = 0$  en el Teorema 4.7, se recupera el resultado del Teorema 4.3.*



**Teorema 4.8** Considere que  $H''3$  y  $H'6$  se cumplen. Sea  $V(x)$  una FLCR de grado homogéneo  $m$  y  $u = -k[L_{g_n} V]^q$  la ley de control. Si los grados de homogeneidad  $l_f$  y  $l_g$  de  $f_n(x)$  y  $g_n(x)$  satisfacen  $l = l_f = l_g + (m + l_g)q$ , y si la ganancia  $k$  se elige suficientemente grande, entonces el origen  $x = 0$  es RGAE. Además, los puntos (i)-(iii) del Teorema 4.7 se cumplen.

Para establecer los resultados para el sistema (40), hay que cambiar ligeramente la hipótesis  $H'7$ ,

$H''7$ : Las funciones  $b(t, x)$  y  $w_n(t, x)$  satisfacen  $b(t, x) \in [K_m, K_M]$  con  $K_M \geq K_m > 0$  y  $|w_n(t, x)| \leq C[L_{g_n} V]^q, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$ . El parámetro  $q \in (0, \infty)$ , y  $K_m, K_M$  y  $C$  son constantes conocidas.

**Teorema 4.9** Considere que la hipótesis  $H''7$  se cumple. Sea  $V(x)$  una FLC de grado homogéneo  $m$ ,  $f_n(x)$  de grado homogéneo  $l$  y  $u = -k[\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}]^q$  la ley de control. Entonces, cuando  $\Delta_u(t, x) = 0, \forall t \geq 0$ ,

- (I) el sistema (40) es homogéneo de grado  $l$  arbitrario y los pesos  $r_i$  cumplen  $(n + 1 - i)l + r_i = mq, \forall i = 1, \dots, n$ .
- (II) si la ganancia  $k$  se elige suficientemente grande, el origen  $x = 0$  de (40) es RGAE. Además, se cumplen los puntos (i)-(iii) del Teorema 4.7.

Para el caso en el que existen perturbaciones no acopladas se cuenta con el siguiente resultado.

**Teorema 4.10** Sea  $V(x)$  una FLCR de grado homogéneo  $m$  y sea  $u = -k[\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}]^q$  la ley de control. Bajo las hipótesis  $H''7$  y  $H'8$ , si la ganancia  $k$  se elige suficientemente grande, entonces el origen  $x = 0$  de (40) es RGAE. Además, los puntos (i)-(iii) del Teorema 4.7 se cumplen.

Tomando ventaja de las propiedades homogeneidad, el diseño de la ley de control que se presenta tiene una estructura muy simple. En bien sabido que una estructura compleja puede ocasionar una mala respuesta transitoria de los estados del sistema [33].

Todos los resultados presentados en esta sección necesitan conocer la FLCR. Esencialmente, el diseño de controladores discontinuos, y continuos, homogéneos se reduce a hallar una FLCR apropiada.

La siguiente Sección se enfoca al problema de construir explícitamente una FLCR para diseñar la ley de control discontinua para el sistema perturbado (40).

#### 4.3. MÉTODO PARA CONSTRUIR UNA FLCR

A continuación se presenta el método para construir simultáneamente una FLCR y un controlador discontinuo con el fin de estabilizar el origen del sistema (40) en tiempo finito. El método se basa en gran medida en el uso de Fdes combinado con el MB estándar. La Fdes de emplea para construir un FLCR de clase  $C^k$ . El método construye una FLCR con las siguientes características:

- (C1) La FLCR es p.d. por construcción. No es necesario probar esta propiedad.
- (C2) La FLCR que se construye es suave y puede hacerse tantas veces continuamente diferenciable como uno quiera. <sup>1</sup>
- (C3) La derivada c.r. al tiempo de FLCR a lo largo de las trayectorias del sistema siempre puede hacerse n.d. haciendo la ganancia del control suficientemente grande. El método sólo proporciona condiciones suficientes sobre las ganancias.

<sup>1</sup> Por simplicidad solamente se construyen funciones que pertenecen a la clase  $C^1$ .

- (c4) La FLCR es homogénea un grado de homogeneidad asignable. Hay que elegir el grado de la función de tal forma que sea al menos una vez diferenciable.
- (c5) El método permite determinar la clase de perturbaciones no acopladas que admite el sistema sin que se pierda la estabilidad en tiempo finito.

En nuestro caso, construir una FLCR no puede hacerse sin utilizar una Fdes. El método, que está inspirado en el trabajo de Praly et al. [78], construye recursivamente una FLCR para el sistema 40 y se sintetiza de la siguiente forma:

*En [78] se introduce la noción Fdes para construir una FLC para una clase de sistema de orden dos. La idea se puede extender a sistemas de órdenes mayores.*

P1: Asignar cualquiera de los siguientes pesos  $(2 - p, 1, \dots, (j - 1)p - (j - 2))$ ,  $j = 0, 1, \dots, \infty$ , al estado  $x_1$  y denótelos como el peso  $r_1$ . Una vez hecho esto, tome el resto de pesos a la derecha del asignado a  $x_1$  y asígneles uno a uno a los estados  $x_i$ ,  $\forall i = 2, \dots, n$ . Por ejemplo, si se asigna el peso  $r_1 = 1$  a  $x_1$ , entonces el vector de pesos del vector de estados  $x = (x_1, \dots, x_n)$  será  $r = (1, p, \dots, (n - 1)p - (n - 2))$ .

P2: Fije el grado de homogeneidad  $m$  de la FLC tal que  $m > c \cdot \max\{r_i\}$ , donde  $c$  es el orden de diferenciabilidad de la FLC. Es decir esta condición representa el grado mínimo que debe tener la FLC para que sea  $c$  veces diferenciable.

Para los pesos propuestos,  $r_1$  es el máximo de los pesos para cualquier  $p \in [0, 1)$ . Se ha elegido  $m = d_2 + r_2$ , con  $d_2 \geq 1$ , el cual claramente satisface la condición previa. Note que  $m$  depende del valor que tome  $p$ .

P3: Para  $i = 2$ , defina la Fdes como  $s_{2d} = [x_2]_{r_2}^{d_2} + k_1^{d_2/r_2} [x_1]_{r_1}^{d_2}$ , para alguna  $d_2 \geq 1$ . Note que  $s_{2d} = 0 \Leftrightarrow x_2 = -k_1 [x_1]_{r_1}^{r_2/r_1} = v_1$ . La FLCR queda determinada por

$$V_2 = W_2 + \delta_1 V_1, \quad W_2 = \int_{v_1}^{x_2} ([\tau_2]_{r_2}^{d_2} + k_1^{d_2/r_2} [\tau_1]_{r_1}^{d_2}) d\tau_2,$$

donde  $V_1 = |x_1|_{r_1}^{d_2+r_2}$  y  $\delta_1$  es una constante arbitraria positiva. Esta función determina el máximo grado de homogeneidad para el cual la FLCR es, al menos, de clase  $C^1$ . Cada Fdes debe diseñarse, al menos, para garantizar el mismo grado de homogeneidad de la FLCR.

P4: Para órdenes arbitrarios  $i > 2$ , defina la Fdes como  $s_{id} = [x_i]_{r_i}^{d_i/r_i} + k_{i-1}^{d_i/r_i} [s_{(i-1)d}]_{r_{i-1}}^{d_i}$ , para algunas  $d_i \geq 1$ ,  $\forall i = 3, \dots, n$ , apropiadas. La FLCR está dada por

$$V_i = W_i + \delta_{i-1} V_{i-1}, \quad \forall i = 2, \dots, n, \quad (44)$$

donde la función  $W_i = \int_{v_{i-1}}^{x_i} ([\tau_i]_{r_i}^{d_i/r_i} + k_{i-1}^{d_i/r_i} [s_{(i-1)d}]_{r_{i-1}}^{d_i}) d\tau_i$ ,  $v_{i-1} = -k_{i-1} [s_{(i-1)d}]_{r_{i-1}}^{r_i}$ , y siendo  $\delta_{i-1} \in \mathbb{R}_+$  una constante. El parámetro  $d_i$  se elige apropiadamente para asegurar el mismo grado de homogeneidad  $m$  de la FLCR  $V_i$ .

P5: El controlador discontinuo para el sistema de orden  $n$ , se obtiene haciendo  $r_{n+1} = 0$ . En este caso, la ley de control discontinua queda determinada por  $u = v_n = -k_n [s_{nd}]^0$ .

Cada elemento  $W_i$  en (44) es una función positiva semidefinida<sup>2</sup>. Pero la suma resulta ser una función p.d.. Construir la FLCR como una suma de funciones positivas semidefinidas es común en el diseño por MB. Por ejemplo, si se tiene  $V(a, b) = (a + b)^2$ , este término es positivo semidefinido, ya que es cero si  $a = -b$  y positivo para  $a \neq -b$ . Ahora, para que  $V(a, b)$  sea p.d. solamente hay que agregarle

*Una función constituida por una suma de funciones positivas semidefinidas, se hace positiva agregando un término positivo.*

un término que sea positivo, por ejemplo,  $a^2$ , con lo que  $V(a, b) = (a + b)^2 + a^2 > 0$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  y  $V(a, b) = 0$  sólo si  $a = b = 0$ .

Cualquier controlador obtenido mediante el método genera controladores por retroalimentación de estados estabilizantes y robustos asegurando que el origen  $x = 0$  de (40) es RGAE c.r. a cierta clase de perturbaciones. Un control que no utilice la información de los estados también podría ser implementado pero las propiedades de robustez se perderían.

Asignar el vector de pesos como se establece en el punto P1 permite construir simultáneamente el control discontinuo (o continuo) y la estructura general de la FLCR. La FLC del sistema (40) está dada por

$$V_n = W_n + \delta_{n-1} V_{n-1},$$

la cual es una estructura recursiva de funciones. La derivada de la FLCR siempre se puede hacer n.d. aplicando una ganancia de control  $k_n$  suficientemente grande. Pero, para propósitos de diseño es de vital interés determinar cual es el valor mínimo de la ganancia que se necesita.

#### 4.3.1. FLCR para el sistema

El método anterior permite construir una FLCR para el sistema (40), tomando en cuenta perturbaciones que no necesariamente están acopladas a la entrada de control. Por lo que, si únicamente existen perturbaciones acopladas (cuando  $\Delta_u(t, x) = 0$ ) es un caso particular. Aquí, se presentan dos FLCR distintas que dan lugar, como se verá mas adelante, a distintos controladores que garantizan convergencia en tiempo finito.

Como la FLCR debe ser de clase  $C^1$ , para la construcción de esta función se ha asignado al vector de estados  $x = [x_1, \dots, x_n]$ , el siguiente vector de pesos  $r = (2 - p, 1, p, \dots, (n - 2)p - (n - 3))$ , donde  $p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1)$ . Como las siguientes desigualdades se cumplen  $r_1 > r_2 > \dots > r_n > 0$ ,  $\forall p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1)$ , para que la FLCR sea de clase  $C^1$ , el grado de homogeneidad de la FLCR debe satisfacer  $m > r_1$ . Claramente,  $m = 3 - p$  cumple esta restricción.

Cuando se fija el parámetro  $p = \frac{n-2}{n-1}$ , la FLCR resultante sirve para diseñar una ley de control discontinua homogénea para sistemas de orden  $n \geq 2$ . Para este caso, el vector de pesos depende exclusivamente del orden del sistema  $r = (\frac{n}{n-1}, 1, \frac{n-2}{n-1}, \dots, \frac{1}{n-1})$ . El caso  $n = 1$ , el cual representa un control por MDPO, se ha excluido, ya que su diseño es trivial. Si  $p \in (\frac{n-2}{n-1}, 1)$ , la FLCR resultante sirve para diseñar controladores continuos homogéneos. Cuando  $p = 1$ , el vector de pesos se transforma en  $r = (1, 1, \dots, 1)$ , dando como resultado una FLCR cuadrática, y con la que se puede diseñar un controlador por realimentación de estados lineal, garantizando estabilidad exponencial del sistema.

Para la primera FLCR, se define la siguiente Fdes,  $\sigma_i = [x_i]^{\frac{2-p}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{2-p}{\alpha_i}} \sigma_{i-1}$ , donde  $\sigma_1 = x_1$ , y  $\alpha_i = (i - 2)p - (i - 3)$ ,  $\forall i = 2, \dots, n$ .

**Proposición 4.1** *La función continua y diferenciable*

$$V_n = \frac{\alpha_n}{3-p} |x_n|^{\frac{3-p}{\alpha_n}} + k_{n-1}^{\frac{\alpha_n}{\alpha_n}} [\sigma_{n-1}]^{\frac{d_n}{2-p}} x_n + \frac{d_n}{3-p} k_{n-1}^{\frac{3-p}{\alpha_n}} |\sigma_{n-1}|^{\frac{3-p}{2-p}} + \delta_{n-1} V_{n-1}, \forall n \geq 2, \quad (45)$$

con  $V_1 = \frac{2-p}{3-p} |x_1|^{\frac{3-p}{2-p}}$ ,  $d_n = n - (n - 1)p$  y  $\delta_{n-1} = k_{n-1}^{\frac{3-p}{\alpha_n}} > 0$ , es una FLCR global para el sistema (40).

<sup>2</sup> Una función es positiva semidefinida si  $V(x) \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Es decir,  $x = 0$  no es el único punto en el que se anula la función.

Es fácil mostrar que la variable  $\sigma_i$ , la FLCR  $V_n$  y su derivada  $\dot{V}_n$ , son homogéneas c.r. a la dilatación

$$\Delta_\epsilon^r x = (\epsilon^{2-p} x_1, \epsilon^1 x_2, \dots, \epsilon^{\alpha_n} x_n). \quad (46)$$

donde el parámetro  $p = \frac{n-2}{n-1}$ . Con base en la Definición 2.9,  $\sigma_i(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{2-p} \sigma_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $V_n(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{3-p} V_n(x)$ ,  $\dot{V}_n(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^2 \dot{V}_n(x)$ .

Para la segunda FLCR, se define la Fdes como  $s_{i,d} = \lceil x_i \rceil^{\frac{d_i}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} \lceil s_{(i-1),d} \rceil^{\frac{d_i}{d_{i-1}}}$ , donde  $s_{1,d} = \lceil x_1 \rceil^{\frac{1}{2-p}}$ ,  $y \alpha_i = (i-2)p - (i-3)$ ,  $d_i = i - (i-1)p$ ,  $\forall i = 2, \dots, n$ .

**Proposición 4.2** *La función continua y diferenciable*

$$V_n = \frac{\alpha_n}{3-p} |x_n|^{\frac{3-p}{\alpha_n}} + k_{n-1}^{\frac{d_n}{\alpha_n}} \lceil s_{(n-1),d} \rceil^{\frac{d_n}{d_{n-1}}} x_n + \frac{d_n}{3-p} k_{n-1}^{\frac{3-p}{\alpha_n}} \lceil s_{(n-1),d} \rceil^{\frac{3-p}{d_{n-1}}} + \delta_{n-1} V_{n-1}, \forall n \geq 2, \quad (47)$$

con  $V_1 = \frac{2-p}{3-p} |x_1|^{\frac{3-p}{2-p}}$  y  $\delta_{n-1} = k_{n-1}^{\frac{3-p}{\alpha_n}} > 0$ , es una FLCR global para el sistema (40).

A pesar de tener una estructura ligeramente diferente, la FLCR propuesta en el Teorema 4.1 y la FLCR propuesta en el Teorema 4.2 tienen los mismos grados de homogeneidad c.r. a la dilatación (46). Tanto la FLCR (47) como la FLCR (45) se construyen en forma recursiva usando el método sistemático propuesto. Además, el método permite construir siempre una FLCR distinta. Las dos funciones presentadas son solamente dos ejemplos.

Para que una función sea una FLCR debe cumplir la condición (20) en presencia de perturbaciones. Derivando c.r. al tiempo la función (45) a lo largo del sistema (41) se tiene

$$\dot{V}_n = s_{n,d} [u + w_n] + \frac{d_n}{2-p} k_{n-1}^{\frac{d_n}{\alpha_n}} s_n |\sigma_{n-1}|^{\frac{(n-2)(1-p)}{2-p}} \dot{\sigma}_{n-1} + \delta_{n-1} (\dot{V}_{n-1} + \frac{\partial V_{n-1}}{\partial x_{n-1}} s_n).$$

donde  $V_{n-1}$  se diseña para ser n.d. a pesar de las perturbaciones no acopladas. Las Fdes  $s_{n,d}$  es una Fdes de  $s_n$ , por lo tanto se desvanecen en los mismo puntos. Cuando esto pasa

$$\dot{V}_n = \dot{V}_{n-1} < 0.$$

Lo mismo sucede con la FLCR (47). Para elegir la ley de control hay que considerar esencialmente dos cosas. La primera es que el control propuesto no debe destruir la propiedad de homogeneidad de la derivada de FLCR. La segunda, es que debe desvanecerse en los mismos puntos donde la función  $\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}$  se desvanece.

Con cada FLCR se puede diseñar un control distinto para el sistema (40).

#### 4.4. CONTROLADORES DISCONTINUOS DE ORDEN ARBITRARIO

Con ayuda de cada FLCR se construyen dos familias de controladores discontinuos capaces de estabilizar el origen del sistema (40) en tiempo finito a pesar de las perturbaciones acopladas y no acopladas.

Primero, se considera que solo existen perturbaciones acopladas en el sistema (40) (cuando  $w_i(t, x) = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-1$ ).

##### 4.4.1. Caso con perturbaciones acopladas

Con la primera FLCR se obtiene el siguiente controlador.

*Cualquier entrada de control que cumpla estas dos propiedades es admisible, en el sentido de que toda trayectoria del sistema en lazo cerrado eventualmente va a converger al origen.*

**Teorema 4.11** Suponga que  $w_n(t, x)$  satisface  $H^7$ . Elija la ley de control discontinua y homogénea

$$u = -k_n \left[ |x_n|^{\frac{2-p}{\alpha_n}} + k_{n-1}^{\frac{2-p}{\alpha_n}} \sigma_{n-1} \right]^0, p = \frac{n-2}{n-1}, \forall n \geq 2. \quad (48)$$

Entonces, existen ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , suficientemente grandes tales que el origen  $x = 0$  del sistema en lazo cerrado (40) es globalmente ETF.

Con la segunda FLCR se obtiene otro controlador.

**Teorema 4.12** Suponga que  $w_n(t, x)$  satisface  $H^7$ . Elija la ley de control discontinua y homogénea

$$u = -k_n \left[ |x_n|^{\frac{d_n}{\alpha_n}} + k_{n-1}^{\frac{d_n}{\alpha_n}} [s_{(n-1)d}]^{\frac{d_n}{d_{n-1}}} \right]^0, p = \frac{n-2}{n-1}, \forall n \geq 2. \quad (49)$$

Entonces, existen ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , suficientemente grandes tales que el origen  $x = 0$  del sistema en lazo cerrado (40) es globalmente ETF.

**Comentario 4.1** Para el caso  $n = 2$ , ambos controladores tienen la misma estructura y las ganancias satisfacen las mismas desigualdades:  $k_1 > 0$  y  $k_2 K_m > 2k_1^2 + C$ . Para el caso  $n \geq 3$ , las ganancias satisfacen:  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} k_1^{2-p}$  y  $k_i > \Lambda_{i-1}$ ,  $\forall i = 3, \dots, n-1$ , y  $K_m k_n > \Lambda_{n-1} + C$ , donde  $\Lambda_{i-1}$ ,  $i = 3, \dots, n$ , es un parámetro que depende de las ganancias  $(k_{i-1}, \dots, k_1)$ . En este caso, el parámetro  $\Lambda_{i-1}$  cambia dependiendo de la ley de control (48) ó (49) que se utilice.

Ambas estructuras de control tienen una forma anidada simple, bien definida y no producen señales de control no acotadas como un CMDT. Además, ambas leyes de control producen MDOS.

El campo vectorial del sistema en lazo cerrado (40) en retroalimentación con la entradas de control (49) y (48), es homogéneo de grado  $l = p - 1$  c.r. a la dilatación (46). Es claro que,  $\forall n \geq 2$ ,  $p \in [0, 1)$  implica  $l \in [-1, 0)$ . Por lo tanto, el sistema en lazo cerrado es homogéneo de grado negativo, asegurando estabilidad del origen en tiempo finito para cualquier condición inicial, [69], [56].

Los Teoremas 4.11 y 4.12 solo establecen condiciones suficientes para garantizar la estabilidad en tiempo finito.

En general, las ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , se determinan en orden creciente del índice, es decir, que es necesario calcular cada ganancia  $k_1, \dots, k_{n-1}$ , para poder diseñar la ganancia  $k_n$ . Las ganancias no se han fijado *a priori* en los controladores que se proponen y pueden obtenerse a partir de la FLCR. Esto permite tener mayor flexibilidad en la sintonización de las ganancias cuando se diseña la ley de control.

Todas las trayectorias de estado del sistema (40) en lazo cerrado con los controladores propuestos exhiben MDOS. Un modo deslizante de primer orden (o modo deslizante terminal) no puede determinarse a través de la FLCR. A excepción del caso de segundo orden, hallar las condiciones sobre las ganancias para producir un modo deslizante terminal es un tema abierto, aun en los MDOS hasta ahora reportados, [55],[56].

#### 4.4.2. Comparación con otros MDOS conocidos

Las entradas de control discontinuas homogéneas se emplean ampliamente en MDOS para estabilizar en tiempo finito y robustamente sistemas con perturbaciones acopladas. En [54],[56], [57], se presentan las dos familias de controladores discontinuos comúnmente utilizadas en MDOS: la familia de CMDOS anidada y la familia de CMDOS *casi-continuo*. Ambas familias tienen una estructura recursiva. Los siguientes controladores reportados en [54] pertenecen a la clase de CMDOS anidada,

$$(L2) u_{2L} = -k_2 [x_2 + \beta_1 |x_1|^{1/2}]^0$$

$$(L3) u_{3L} = -k_3 [x_3 + \beta_2 (|x_2|^3 + |x_1|^2)^{1/6} [x_2 + \beta_1 |x_1|^{2/3}]^0]^0$$

$$(L4) u_{4L} = -k_4 [x_4 + \beta_3 (|x_3|^6 + |x_2|^4 + |x_1|^3)^{1/12} [x_3 + \beta_2 (|x_2|^4 + |x_1|^3)^{1/6} [x_2 + \beta_1 |x_1|^{3/4}]^0]^0]^0$$

Para  $n = 2$ , la cota mínima de la ganancia  $k_2$  que se puede obtener con la FLCR es  $k_2 K_m > \frac{4\sqrt{5}}{4+(\sqrt{5}-1)^2} k_1^2 + C$ .

Cabe la posibilidad de que exista un conjunto de ganancias menos restrictivo que aún garantice la estabilidad en tiempo finito.

En el modo deslizante terminal las trayectorias llegan a la SD y luego deslizan sobre ella hasta que llegan al origen en tiempo finito. En MDOS, las trayectorias conmutan sobre la SD, sin deslizar sobre ella, hasta que el origen es alcanzado en tiempo finito.

La familia de CMDOS anidada está basada en una estructura pseudo anidada de un MDPO, [83].

ANIDADADO	CASI-CONTINUO	PARÁMETROS
(L2)	(LC2)	$\beta_1 = 1$
(L3)	(LC3)	$\beta_2 = 2, \beta_1 = 1$
(L4)	(LC4)	$\beta_3 = 3, \beta_2 = 1, \beta_1 = 0.5$

Cuadro 1.: Sintonización del CMDOS anidado y del CMDOS *casi-continuo*, Levant, [56],[57].

mientras que los siguientes controladores pertenecen al CMDOS *casi-continuo* [57],

$$\begin{aligned} \text{(LC2)} \quad u_{2C} &= -k_2(x_2 + \beta_1 \lceil x_1 \rceil^{1/2}) / (|x_2| + \beta_1 |x_1|^{1/2}) \\ \text{(LC3)} \quad u_{3C} &= -k_3 \frac{x_3 + \beta_2 (|x_2| + \beta_1 |x_1|^{3/2})^{-1/2} (x_2 + \beta_1 \lceil x_1 \rceil^{3/2})}{|x_3| + \beta_2 (|x_2| + \beta_1 |x_1|^{3/2})^{1/2}} \\ \text{(LC4)} \quad u_{4C} &= -k_4 \frac{x_4 + \beta_3 |x_3 + \beta_2 (|x_2| + \beta_1 |x_1|^{3/4})^{-1/3} (x_2 + \beta_1 \lceil x_1 \rceil^{3/4})| |x_3| + \beta_2 (|x_2| + \beta_1 |x_1|^{3/4})^{3/2} - 1/2}{|x_4| + \beta_3 (|x_3| + \beta_2 (|x_2| + \beta_1 |x_1|^{3/4})^{2/3})^{1/2}} \end{aligned}$$

La ventaja de un CMDOS *casi-continuo*, comparado con un CMDOS anidado, es que hay una reducción de la alta frecuencia que se produce en la respuesta transitoria de las trayectorias cuando se aproximan al MDOS.

La estabilidad en tiempo finito empleando estos controladores discontinuos se deduce a través de un enfoque de homogeneidad para ID's y propiedades de contracción. Los parámetros  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, k_n$ , se eligen apropiadamente y suficientemente grandes en el orden del índice. En los trabajos [54],[55], [56], las ganancias de la variedad deslizante (el conjunto en donde los controladores son discontinuos) son dadas *a priori* y no se dan condiciones explícitas para sintonizarlas. La Tabla 1 muestra la sintonización que se usa comúnmente. Así, solo hay que ajustar la ganancia  $k_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , dependiendo del grado relativo. El ajuste de  $k_n$  se hace convencionalmente a través de simulaciones, [83]. No hay una regla explícita para la sintonización de las ganancias  $\beta_1, \beta_{n-1}$ , y además, ambas familias tienen una estructura compleja.

En contraste con estos resultados reportados, del Teorema 4.11 y del Teorema 4.12 se obtienen dos nuevas clases de controladores discontinuos con convergencia en tiempo finito que se han diseñado mediante una FLCR.

Los siguientes controladores discontinuos, y sus correspondientes FLCR, se derivan del Teorema 4.11 y de la Proposición 4.1

$$\text{(E2)} \quad v_2 = -k_2 \lceil \lceil x_2 \rceil^2 + k_1^2 x_1 \rceil^0, \text{ y } V_2 = \frac{1}{3} |x_2|^3 + k_1^2 x_1 x_2 + \frac{2}{3} 2k_1^3 |x_1|^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{(E3)} \quad v_3 = -k_3 \lceil \lceil x_3 \rceil^3 + k_2^3 (\lceil x_2 \rceil^{\frac{3}{2}} + k_1^{\frac{3}{2}} x_1) \rceil^0, \text{ y } V_3 = \frac{1}{5} |x_3|^5 + k_2^4 \lceil \sigma_2 \rceil^{\frac{4}{3}} x_3 + \frac{4}{5} k_2^5 \lceil \sigma_2 \rceil^{\frac{5}{4}} + k_2^5 V_2,$$

$$V_2 = \frac{2}{5} |x_2|^{\frac{5}{2}} + k_1^{\frac{3}{2}} x_1 x_2 + \frac{3}{5} 2k_1^{\frac{5}{2}} |x_1|^{\frac{5}{3}}.$$

$$\text{(E4)} \quad v_4 = -k_4 \lceil \lceil x_4 \rceil^4 + k_3^4 (\lceil x_3 \rceil^2 + k_2^2 (\lceil x_2 \rceil^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} x_1)) \rceil^0, \text{ y } V_4 = \frac{1}{7} |x_4|^7 + k_3^6 \lceil \sigma_3 \rceil^{\frac{6}{4}} x_4 + \frac{6}{7} k_3^7 \lceil \sigma_3 \rceil^{\frac{7}{4}} + k_3^7 V_3,$$

$$V_3 = \frac{2}{7} |x_3|^{\frac{7}{2}} + k_2^{\frac{5}{2}} \lceil \sigma_2 \rceil^{\frac{5}{4}} x_3 + \frac{5}{7} k_2^{\frac{7}{2}} \lceil \sigma_2 \rceil^{\frac{7}{4}} + k_2^{\frac{7}{2}} V_2, \quad V_2 = \frac{3}{7} |x_2|^{\frac{7}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} x_1 x_2 + \frac{4}{7} 2k_1^{\frac{7}{3}} |x_1|^{\frac{7}{4}}.$$

Del Teorema 4.12, se obtiene la siguiente familia de controladores

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad v_2 &= -k_2 \lceil \lceil x_2 \rceil^2 + k_1^2 x_1 \rceil^0 \\ \text{(2)} \quad v_3 &= -k_3 \lceil \lceil x_3 \rceil^4 + k_2^4 \lceil \lceil x_2 \rceil^{\frac{3}{2}} + k_1^{\frac{3}{2}} x_1 \rceil^{\frac{4}{3}} \rceil^0 \\ \text{(3)} \quad v_4 &= -k_4 \lceil \lceil x_4 \rceil^6 + k_3^6 \lceil \lceil x_3 \rceil^{\frac{5}{2}} + k_2^{\frac{5}{2}} \lceil \lceil x_2 \rceil^{\frac{4}{3}} + k_1^{\frac{4}{3}} x_1 \rceil^{\frac{5}{4}} \rceil^{\frac{6}{5}} \rceil^0 \end{aligned}$$

*Aunque la magnitud de la alta frecuencia tiende a cero durante la respuesta transitoria, en la práctica puede ocasionar problemas.*

*Los parámetros  $\beta_i$  tiene la misma sintonización para ambos controladores. Para sintonizar la ganancia  $k_n$  hay que tomar en cuenta la condición H'7.*

*El controlador (L2) y (E3) son análogos a los utilizados en CMDT y CMDTNS.*



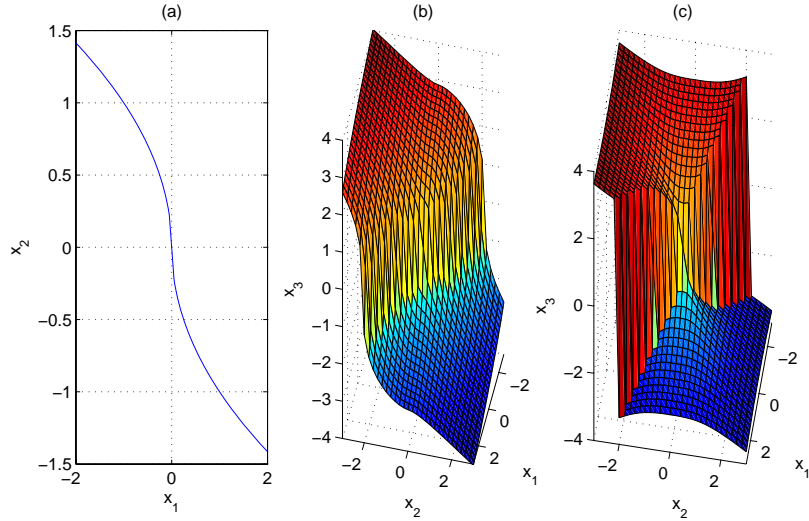


Figura 1.: (a) La variedad  $s_2 = [x_2]^2 + k_2^2 x_1 = 0$ ; (b) la variedad  $\sigma_3 = [x_3]^3 + k_2^3 ([x_2]^{\frac{3}{2}} + k_1^{\frac{3}{2}} x_1) = 0$ ; y (c) la variedad  $\sigma_{3L} = x_3 + 2(|x_2|^3 + |x_1|^2)^{1/6} [x_2 + [x_1]^{2/3}]^0 = 0$ .

En el caso de primer orden se puede utilizar el control discontinuo  $u_1 = -k_1 [x_1]^0$ . Para el caso de segundo orden,  $v_2$  y  $v_2$  son discontinuos en el conjunto  $[x_2]^2 + k_1^2 x_1 = 0$ , como también lo es, el controlador  $u_{L2} = -k_2 [x_2 + k_1 [x_1]^{1/2}]^0$ . Ambos controladores son discontinuos sobre la misma curva  $x_2 = -k_1 [x_1]^{1/2}$ , en el plano de fase (véase Figura 1.(a)). El análisis de estabilidad con el controlador  $u_{2L}$ , ha sido ampliamente estudiado en [58]. Se ha demostrado que las trayectorias convergen en tiempo finito al origen en dos formas diferentes, dependiendo de cómo se elijan las ganancias  $k_1$  y  $k_2$ . Básicamente,

- (1) eligiendo  $k_2 K_m > k_1^2/2 + C$ , el controlador  $u_{2L}$  asegura un modo deslizante terminal. Las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito a la variedad  $x_2 + k_1 [x_1]^{1/2} = 0$ , y una vez ahí, se deslizan sobre ella hasta alcanzar el origen en tiempo finito,
- (2) eligiendo  $\rho < k_2 K_m \leq k_1^2/2 + C$ , el controlador  $u_{2L}$  hace que las trayectorias tengan un modo de convergencia a la twisting. Las trayectorias conmutan sobre la variedad  $x_2 + k_1 [x_1]^{1/2} = 0$ , hasta que el origen se alcanza en tiempo finito.

El Teorema 4.11 muestra que hay que seleccionar  $k_1 > 0$  y  $K_m k_2 > 2k_1^2 + C$ , para asegurar la estabilidad en tiempo finito cuando se usa el controlador  $v_2$ . Acorde con lo anterior, con este conjunto de ganancias, las trayectorias se deslizan sobre la variedad  $x_2 + k_1 [x_1]^{1/2} = 0$ , dando lugar a un modo deslizante terminal. Obsérvese que el CMDTNS  $u = -[k_2 [x_1]^{1/p} + k_1^{1/p} x_1]^0 + k_1^{1/p} [x_2]^{\frac{2p-1}{p}}/p$ , reportado en [95], tiene un término que casi coincide con el controlador diseñado pero, tiene otro que quizás no es necesario para asegurar la estabilidad en tiempo finito.

En general, para órdenes más altos ( $n \geq 3$ ), los controladores (49) y (48) son discontinuos en conjuntos distintos a los comúnmente observados en los controladores propuestos en [55]. Por ejemplo, (48) es discontinua en el conjunto  $[x_n]^{\frac{2-p}{\alpha_n}} + k_{n-1}^{\frac{2-p}{\alpha_n}} \sigma_{n-1} = 0$ , o equivalentemente, cuando  $x_n = -k_{n-1} [\sigma_{n-1}]^{\frac{\alpha_n}{(2-p)}}$ . Este conjunto es una variedad que define una hiper superficie continua. En la Figura 1. (b) y la Figura 1.(c), se muestran las variedades donde los controladores (L3) y (E3) se hacen discontinuos. Mientras que la variedad determinada por el conjunto  $\sigma_3 = 0$ , es una superficie continua, la variedad impuesta por la condición  $\sigma_{3L} = 0$ , es discontinua en si misma. Como se observa, las superficies donde se hacen discontinuos los controladores son distintas. Además, la estructura de control es también notablemente diferente y más simple.

Según la metodología propuesta en [95], el CMDTNS  $u = -[k_2 [x_1]^{1/p} + k_1^{1/p} x_1]^0 + k_1^{1/p} [x_2]^{\frac{2p-1}{p}}/p$  no puede admitir el valor  $p = 1/2$ .

## 4.4.3. Diseño de las ganancias: caso con perturbación acoplada

En general, para órdenes mayores a dos no parece posible obtener un fórmula analítica para las ganancias. Gracias a las propiedades de homogeneidad, obtener el valor de las ganancias de los controladores se convierte en un problema de hallar máximos de funciones homogéneas. Para sintonizar las ganancias del controlador del Teorema 4.11, cuando  $n > 2$ , estas deben satisfacer:  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} k_1^{2-p}$ ,

$$k_i > \Lambda_{i-1}, \forall i = 3, \dots, n-1, \text{ y } K_m k_n - C > \Lambda_{n-1}. \quad (50)$$

El parámetro  $\Lambda_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , depende de como se elijan las ganancias anteriores ( $k_{n-1}, \dots, k_1$ ). El correspondiente valor de  $\Lambda_{i-1}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , se puede obtener numéricamente a través de la FLCR (45) con la fórmula:

$$\Lambda_{i-1} = \max_{\{x:S\}} \left\{ \frac{\frac{d_i}{2-p} k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} s_i |\sigma_{i-1}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{2-p}} \dot{\sigma}_{i-1} + \delta_{i-1} (\sum_{j=2}^i \frac{\partial v_{i-1}}{\partial x_{j-1}} x_j)}{|s_{id}| |\sigma_i|^{\frac{\alpha_i+1}{2-p}}} \right\}, \quad (51)$$

donde  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{r,3-p} = 1\}$  es la esfera homogénea unitaria con vector de pesos  $r = \{2-p, 1, \dots, (n-2)p - (n-3)\}$ , recuerde que  $p = \frac{n-2}{n-1}$ . Los máximos son funciones de las ganancias ( $k_1, \dots, k_{i-1}$ ). La manera de obtener las ganancias, se resume a valuar el lado derecho de la expresión (51), y elegir las ganancias  $k_i$  tal que la desigualdades en (50) se cumplan. Resulta inadecuado para propósitos de diseño tener que valuar el lado derecho de la desigualdad anterior cada vez que se necesiten sintonizar las ganancias. Una manera apropiada de calcular las ganancias es parametrizándolas en términos de la ganancia  $k_1$ , permitiéndose obtener curvas de sintonización solamente para la ganancia  $k_n$ . Sin embargo, las restricciones que se obtienen sobre la ganancia  $k_n$  son bastantes conservadoras. Resulta un tanto sorprendente que la sintonización para las ganancias  $k_1, \dots, k_{n-1}$ , sí pueda realizarse a través de la expresión (51). La Figura 2 muestra el conjunto de valores mínimo de la ganancia  $k_n$  que se obtienen para el controlador (E3) y (E4) usando su correspondiente FLCR. La sintonización resulta inaplicable para el diseño de la ganancia  $k_4$  del controlador (E4).

*Experimentos de simulación muestran que la ganancia  $k_n$  siempre puede sintonizarse con valores muchos menores a los obtenidos a través de la FLCR.*

La Tabla 2 presenta una posible parametrización de las ganancias para el controlador (48). La segunda columna muestra como elegir las ganancias de la ley de control cuando se usa la fórmula (51). Se observa que conforme el orden crece la ultima ganancia se vuelve absurdamente grande y no puede ser utilizada en la sintonización. La tercera columna muestra el diseño de ganancias utilizando la misma sintonización para las ganancias  $k_1, \dots, k_{n-1}$ , y que se ha obtenido de la expresión (51), excepto que las ganancias  $k_n$ , afuera del signo, se obtiene a través de simulación. Lo importante de usar la expresión (51) es que permite obtener una estructura para el diseño de las ganancias. De hecho, no es muy difícil observar, que a través de la fórmula (51), en realidad se puede obtener una parametrización de  $\Lambda_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , en términos de la ganancia  $k_1$ , por lo que el sistema de desigualdades (51) se reduce a

$$k_i > \beta_{i-1} k_1^{\frac{2-p}{\alpha_i}}, \forall i = 2, \dots, n-1, \text{ y } K_m k_n - C > \beta_{n-1} k_1^{\frac{2-p}{\alpha_n}}, \quad (52)$$

y donde los parámetros  $\beta_{i-1}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , son las constantes que se obtienen de valuar la expresión (51), y que resultan ser apropiadamente y suficientemente grandes en el orden de índice, es decir,  $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{n-1}$ . Esta parametrización es posible gracias a que se ha elegido una FLCR apropiada. Si se introduce el parámetro  $\lambda = k_1^{\frac{n}{n-1}}$ , siendo  $n \geq 2$  el orden del sistema, la parametrización (52) se convierte en una reparametrización de  $\lambda$ ,

$$k_i > \beta_{i-1} \lambda^{\frac{n-1}{n-(i-1)}}, \forall i = 2, \dots, n-1, \text{ y } K_m k_n - C > \beta_{n-1} \lambda_1^{n-1}. \quad (53)$$

*Como  $p = \frac{n-2}{n-1}$ , entonces  $\frac{2-p}{\alpha_i} = \frac{n}{n-(i-1)}$ ,  $\forall i = 2, \dots, n$ .*



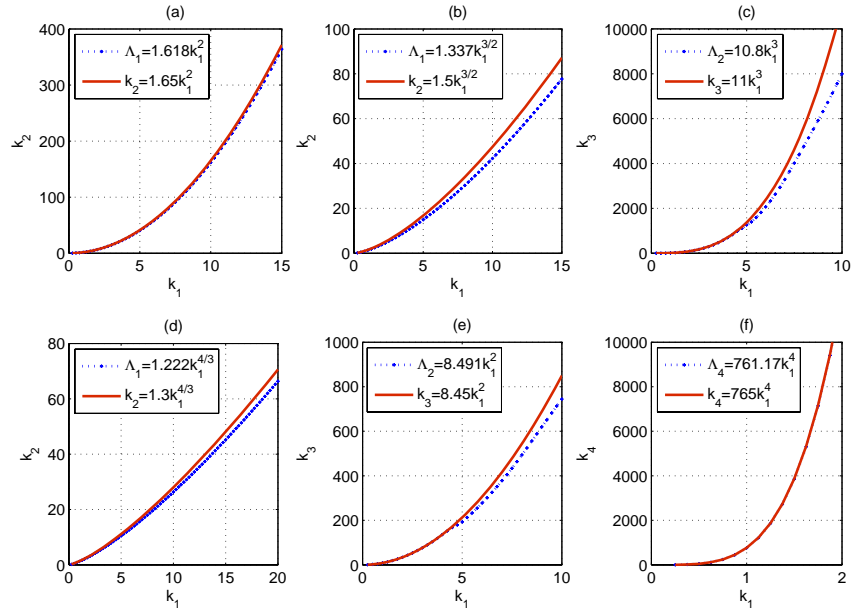


Figura 2.: Datos obtenidos de la FLCR: (a) Parametrización de la ganancia  $k_2$  con  $p = 0$ ; (b)-(c) parametrización de las ganancias  $k_2$  y  $k_3$ , con  $p = 1/2$ ; y (d)-(f) parametrización de las ganancias  $k_4$ ,  $k_3$ , y  $k_2$ , con  $p = 2/3$ .

CONTROL	SIN MODIFICACIÓN	CON MODIFICACIÓN
(E2)	$K_m k_2 \geq 1.62k_1^2 + C$	$K_m k_2 \geq 1.62k_1^2 + C$
(E3)	$K_m k_3 \geq 11k_1^3 + C,$ $k_2 = 1.5k_1^{3/2}$	$K_m k_3 \geq 3.25k_1^3 + C,$ $k_2 = 1.5k_1^{3/2}$
(E4)	$K_m k_4 \geq 765k_1^4 + C, k_3 = 8.45k_1^2,$ $k_2 = 2k_1^{4/3}$	$K_m k_4 \geq 30k_1^4 + C, k_3 = 8.45k_1^2,$ $k_2 = 2k_1^{4/3}$

Cuadro 2.: Parametrización de las ganancias con FLCR.

De este análisis y tomando en cuenta los datos de la [Tabla 2](#), los controladores **(E1)-(E3)** tienen la siguiente estructura que ya puede ser empleada en problemas de diseño,

$$(E2) \quad v_2 = -k_2 \left[ |x_2|^2 + \lambda x_1 \right]^0, \lambda > 0 \text{ y } K_m k_2 > 1.62\lambda + C,$$

$$(E3) \quad v_3 = -k_3 \left[ |x_3|^3 + (1.5)^3 \lambda^3 \left( |x_2|^{\frac{3}{2}} + \lambda x_1 \right) \right]^0, \lambda > 0 \text{ y } K_m k_3 > 3.25\lambda^2 + C,$$

$$(E4) \quad v_4 = -k_4 \left[ |x_4|^4 + (8.45)^4 \lambda^6 \left( |x_3|^2 + 2\lambda^2 \left( |x_2|^{\frac{4}{3}} + \lambda x_1 \right) \right) \right]^0, \lambda > 0 \text{ y } K_m k_4 > 30\lambda^3 + C,$$

La parametrización no solo permite tener un diseño más o menos explícito de las ganancias, sino también, permite mejorar la velocidad de convergencia de los controladores propuestos. Si solo se fijan las ganancias que están dentro de la función signo a un valor predefinido, como se propone en la [Tabla 1](#) para los algoritmos anidados y *casi-continuos*, el incremento de la ganancia fuera de la función signo no permite tener cambio significativo en la velocidad de convergencia, solo produce un incremento del efecto de chattering.

En [59], [83], también se propone una parametrización de las ganancias  $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ , para el CMDOS casi-continuo.

## 4.4.4. Caso con perturbaciones no acopladas

Para los controladores propuestos en [55] no se ha demostrado robustez ante perturbaciones no acopladas. La familia de controladores (49) y (48) también pueden compensar cierta clase de perturbaciones no acopladas. Los resultados que se presentan enseguida son una solución al problema de estabilización con un control discontinuo para el sistema (40) ante cierta clase perturbaciones  $w_i(t, x) \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . En algún sentido, las cotas de las perturbaciones que admite el sistema solo son funciones de los estados y tienen una estructura triangular.

Considere que la cota de los términos de perturbación no acoplada es conocida y satisface la condición de crecimiento globalmente.

**Suposición 4.2** Para cada  $i = 1, \dots, n-1$ , y alguna  $p \in [0, 1]$  si  $i = 1$  ó  $p \in [\frac{i-2}{i-1}, 1]$  si  $i \geq 2$ , las perturbaciones no acopladas pertenecen a la clase de funciones  $\mathcal{W}_1 = \{w_i \in \mathbb{R} : |w_i(t, x)| \leq \rho_i |\sigma_i|^{\frac{\alpha_i+1}{2-p}}, \rho_i \geq 0\}$ , con  $\alpha_i = (i-2)p - (i-3)$ .

Las perturbaciones que pertenecen a la clase  $\mathcal{W}_1$  son desvanecientes en  $x = 0$ , por lo que el origen del sistema perturbado sigue siendo un punto de equilibrio.

**Teorema 4.13** Suponga que  $w_n(t, x)$  satisface **H'7** y que  $w_i(t, x) \in \mathcal{W}_1$ . Si las ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , del controlador (48) se eligen suficientemente grandes, entonces, el origen  $x = 0$  del sistema (40) sigue siendo globalmente ETF.

Ahora, considere que los términos de perturbación satisfacen la siguiente condición de crecimiento globalmente.

**Suposición 4.3** Para cada  $i = 1, \dots, n-1$ , y alguna  $p \in [0, 1]$  si  $i = 1$  ó  $p \in [\frac{i-2}{i-1}, 1]$  si  $i \geq 2$ , las perturbaciones no acopladas pertenecen a la clase de funciones  $\mathcal{W}_2 = \{w_i \in \mathbb{R} : |w_i(t, x)| \leq \rho_i |s_{id}|^{\frac{\alpha_i+1}{d_i}}, \rho_i \geq 0\}$ , con  $\alpha_i = (i-2)p - (i-3)$  y  $d_i = i - (i-1)p$ .

**Teorema 4.14** Suponga que  $w_n(t, x)$  satisface **H'7** y que  $w_i(t, x) \in \mathcal{W}_2$ . Si las ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , del controlador (49) se eligen suficientemente grandes, entonces, el origen  $x = 0$  del sistema (40) sigue siendo globalmente ETF.

Si dichas Suposiciones 4.2 y 4.3 se satisfacen localmente, los Teoremas 4.13 y 4.14 únicamente aseguran estabilidad en tiempo finito localmente.

El diseño de las ganancias también debe tomar en cuenta a las constantes  $\rho_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-1$ , que forma parte de la cota de las perturbaciones no acopladas.

**Comentario 4.2** Ahora, para el caso  $n = 2$ , las ganancias tienen la siguiente forma explícita:  $k_1 > \rho_1$ , y  $k_2 K_m > [2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} + 2^{-\frac{2}{2-p}} \frac{\rho_1^2}{k_1(k_1-\rho_1)}] k_1^{2-p} + C$ . Para el caso  $n \geq 3$ , las ganancias satisfacen:  $k_1 > \rho_1$ ,  $k_2 > [2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} + 2^{-\frac{2}{2-p}} \frac{\rho_1^2}{k_1(k_1-\rho_1)}] k_1^{2-p} + \rho_2$ , y  $k_i > \Lambda_{i-1} + \rho_i$ ,  $\forall i = 3, \dots, n-1$ , y  $K_m k_n > \Lambda_{n-1} + C$ , donde  $\Lambda_{i-1}$ ,  $i = 3, \dots, n$ , es un parámetro que depende de las ganancias  $(k_{i-1}, \dots, k_1)$  y de las constantes  $(\rho_1, \dots, \rho_{i-1})$ . Nuevamente, el parámetro  $\Lambda_{i-1}$  cambia dependiendo de la ley de control (48) ó (49) que se utilice.

Cada controlador es robusto ante un conjunto de perturbaciones no acopladas diferente. Bajo la Suposición 4.2 y la Suposición 4.3 se preserva el grado de homogeneidad del sistema cuando se encuentra perturbado solamente por términos acoplados y acotados. También, es posible mostrar que los controladores son robustos ante perturbaciones que están acotadas por funciones de la forma establecida en la hipótesis **H'8**.

Una FL (homogénea) permite caracterizar la velocidad de convergencia de las trayectorias del sistema.

La estabilización en tiempo finito, de cualquier estado inicial  $x_n(0) \in \mathbb{R}^n$ , queda caracterizada por la desigualdad (54), ya que  $\forall p \in [0, 1]$ , el exponente  $2/(3-p) \in [2/3, 1]$ . El valor de la constante  $\kappa_n$  dependen de cual FLCR se utilice.

**Proposición 4.3** Elija la ley de control (48) (ó (49)). Entonces, la derivada c.r. al tiempo  $\dot{V}_n$  de la FLCR (45) (ó (47)) a lo largo de las trayectorias del sistema satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{V}_n \leq -\kappa_n V_n^{\frac{2}{3-p}}(x), \quad (54)$$

donde  $\kappa_n$  es un parámetro que depende de las ganancias  $(k_1, \dots, k_n)$  y de las constantes  $(\rho_1, \dots, \rho_{n-1}, C)$ .

**Comentario 4.3** Para  $n = 1$ ,  $\dot{V}_1 \leq -\alpha_{11} \left(\frac{3-p}{2-p}\right)^{2/(3-p)} V_1^{2/(3-p)}$ ,  $\alpha_{11} = k_1 - \rho_1$ .

La FLCR permite obtener un estimado del tiempo de convergencia.

**Proposición 4.4** El control discontinuo (49) y (48), en lazo cerrado con el sistema (40), logran que cualquier trayectoria de (40), con estado inicial  $x_n(0) \in \mathbb{R}^n$ , llegue al origen en un tiempo finito menor a

$$T(x_n(0)) \leq \frac{3-p}{(1-p)\kappa_n} V_n^{\frac{1-p}{3-p}}(x_n(0)). \quad (55)$$

**Comentario 4.4** Para  $n = 1$ , se cumple  $T_1 \leq \frac{3-p}{(1-p)\kappa_1} |x_1(0)|^{\frac{1-p}{3-p}}$ , donde  $\kappa_1 = \alpha_{11} \left(\frac{3-p}{2-p}\right)^{\frac{2}{3-p}}$ ,  $\forall p \in [0, 1]$ .

Una consecuencia directa del Teorema 4.13 y del Teorema 4.14 es que la estabilización global en tiempo finito de un sistema en la forma de retroalimentación estricta

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_i), \quad 1 \leq i < n, \\ \dot{x}_n &= u + f_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (56)$$

puede lograrse a través de una retroalimentación de los estados discontinua.

**Corolario 4.1** Considere el sistema de una sola entrada (56), donde  $f_i : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^0$  con  $f_i(0, \dots, 0) = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Entonces, (56) se puede estabilizar localmente en tiempo finito a través de la ley discontinua (49) (ó (48)).

El resultado es global si las funciones  $f_i$  satisfacen ciertas cotas. Para nuestro caso, con los controladores presentados, la estabilización global se alcanza si la Suposición 4.3 y la Suposición 4.2 se cumplen globalmente.

#### 4.5. EXTENSIONES Y OBSERVACIONES IMPORTANTES

A continuación, se presentan algunas extensiones de los resultados presentados en secciones anteriores. Entre los más importantes se encuentran, un controlador discontinuo y un controlador continuo, ambos, de ganancia variable. Por un lado, el empleo de alguna ganancia variable en los algoritmos de control con términos discontinuos permite relajar la hipótesis **H'7** haciendo posible controlar sistemas cuya dinámica no esté acotada. Por otro, la ganancia variable ayuda a reducir el efecto de chattering, si se disminuye apropiadamente conforme se va alcanzando el objetivo de control. Los controladores propuestos por Levant, [54], [56], [57], y en especial el algoritmo *casi-continuo* [59], también se han modificado para que admitan una ganancia variable. Sin embargo, el análisis de estabilidad sigue siendo geométrico y hasta cierto punto poco claro. Con una FLCR, el análisis y diseño de algoritmos discontinuos con ganancia variable es inmediato.

**Teorema 4.15** Considere que la Suposición 4.2 se cumple y que  $|w_n(t, x)| \leq C + \Xi(t, x)$ , donde la constante  $C \geq 0$ , y  $\Xi(t, x) \geq 0$ ,  $\forall t \geq 0$ , es una función conocida. Elija la ley de control discontinua

$$u = -(K(t, x) + k_n) \left[ |x_n|^{\frac{2-p}{\alpha_n}} + k_{n-1}^{\frac{2-p}{\alpha_n}} \sigma_{i-1} \right]^0, \quad p = \frac{n-2}{n-1}, \quad \forall n \geq 2. \quad (57)$$

El tiempo de convergencia está acotado por una función de las condiciones iniciales.

El controlador (48) también puede ser usado como una retroalimentación de estados para estabilizar en tiempo finito un sistema lineal controlable. Resultados similares aparecen en [16] y [39] usando una retroalimentación de estados continua.

Si las ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , se eligen suficientemente grandes y  $K_m K(t, x) \geq \Xi(t, x)$ , entonces el origen  $x = 0$  del sistema (40) es globalmente ETF.

En ausencia de perturbaciones no acopladas, el Teorema 4.15 sigue siendo válido. El siguiente resultado es una consecuencia directa de la aplicación del método.

**Proposición 4.5** Para el sistema (40), suponga que  $\sigma_1 = x_1$  y  $\sigma_i = [x_i]^{\frac{2-p}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{2-p}{\alpha_i}} [\sigma_{i-1}]$ ,  $\alpha_i = (i-2)p - (i-3)$ ,  $\forall i = 2, \dots, n$ . Si la ley de control  $v_n$  se elige como

$$v_n = -k_n [\sigma_n]^{\frac{\alpha_{n+1}}{2-p}}, \text{ para alguna } p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1), \quad (58)$$

el origen  $x = 0$  es ETF para cualquier  $k_n$  suficientemente grande.

La ley de control  $v_n$  sigue siendo homogénea c.r. a la dilatación (46) con  $p \in (\frac{n-2}{n-1}, 1)$ . En este caso, se recupera una familia de controladores continuos que tienen la propiedad de convergencia en tiempo finito. De igual manera que en casos anteriores, para estimar la ganancia correspondiente  $k_n$ , es necesario asignar las ganancias  $(k_{n-1}, \dots, k_1)$  previamente. Enseguida se presentan unos cuantos controladores derivados del resultado previo

- (1)  $v_1 = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{2-p}}, \forall p \in [0, 1)$ ,
- (2)  $v_2 = -k_2 [[x_2]^{2-p} + k_1^{2-p} x_1]^{\frac{p}{2-p}} = -k_2 [\sigma_2]^{\frac{p}{2-p}}, \forall p \in [0, 1)$ ,
- (3)  $v_3 = -k_3 [[x_3]^{\frac{2-p}{p}} + k_2^{\frac{2-p}{p}} \sigma_2]^{\frac{2p-1}{2-p}} = -k_3 [\sigma_3]^{\frac{2p-1}{2-p}}, \forall p \in [1/2, 1)$ ,
- (4)  $v_4 = -k_4 [[x_4]^{\frac{2-p}{2p-1}} + k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} \sigma_3]^{\frac{3p-2}{2-p}} = -k_4 [\sigma_4]^{\frac{3p-2}{2-p}}, \forall p \in [2/3, 1)$ .

La familia de controladores es robusta ante cualquier perturbación no acoplada que no cambie el grado de homogeneidad del sistema retroalimentado y que cumpla Suposición 4.2.

**Teorema 4.16** Considere que la Suposición 4.2 se cumple y que  $|w_n(t, x)| \leq C [\sigma_n]^{\frac{\alpha_{n+1}}{2-p}} + \Xi(t, x)$ , donde la constante  $C \geq 0$ , y  $\Xi(t, x) \geq 0$ ,  $\forall t \geq 0$ , es una función conocida. Elija la ley de control continua

$$u = -(K(t, x) + k_n) [\sigma_n]^{\frac{\alpha_{n+1}}{2-p}}, \text{ para alguna } p \in (\frac{n-2}{n-1}, 1), \quad (59)$$

Si las ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , se eligen suficientemente grandes y  $K_m K(t, x) \geq \Xi(t, x)$ , entonces el origen  $x = 0$  del sistema (40) es globalmente ETF.

Un consecuencia directa de la Proposición 4.2 es el siguiente resultado.

**Proposición 4.6** Para el sistema (40), suponga que  $s_{i,d} = [x_i]^{\frac{d_i}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} [s_{(i-1),d}]^{\frac{d_i}{d_{i-1}}}$ , donde  $s_{1,d} = [x_1]^{\frac{1}{2-p}}$ , y  $\alpha_i = (i-2)p - (i-3)$ ,  $d_i = i - (i-1)p$ ,  $\forall i = 2, \dots, n$ . Elija la ley de control

$$u = -k_n [s_{n,d}]^{\frac{\alpha_{n+1}}{d_n}}, \text{ para alguna } p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1). \quad (60)$$

Existen ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , suficientemente grandes tales que el origen  $x = 0$  es globalmente ETF.

Obsérvese que este resultado contiene a la clase de controladores discontinuos presentados en el Teorema 4.12, pero además, también se obtiene un clase de controladores continuos cuando  $p \in (\frac{n-2}{n-1}, 1)$ . Enseguida se presentan unos cuantos controladores, derivados del resultado previo

- (1)  $v_1 = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{2-p}}, \forall p \in [0, 1)$ ,
- (2)  $v_2 = -k_2 [[x_2]^{2-p} + k_1^{2-p} x_1]^{\frac{p}{2-p}} = -k_2 [s_{2,d}]^{\frac{p}{2-p}}, \forall p \in [0, 1)$ ,
- (3)  $v_3 = -k_3 [[x_3]^{\frac{3-2p}{p}} + k_2^{\frac{3-2p}{p}} [s_{2,d}]^{\frac{3-2p}{2-p}}]^{\frac{2p-1}{3-2p}} = -k_3 [s_{3,d}]^{\frac{2p-1}{3-2p}}, \forall p \in [1/2, 1)$ ,
- (4)  $v_4 = -k_4 [[x_4]^{\frac{4-3p}{2p-1}} + k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}} [s_{3,d}]^{\frac{4-3p}{3-2p}}]^{\frac{3p-2}{4-3p}} = -k_4 [s_{4,d}]^{\frac{3p-2}{4-3p}}, \forall p \in [2/3, 1)$ .

De manera similar, se puede diseñar otra familia de algoritmos de ganancia variable.

**Teorema 4.17** Considere que la Suposición 4.3 se cumple y que  $|w_n(t, x)| \leq C + \Xi(t, x)$ , donde la constante  $C \geq 0$ , y  $\Xi(t, x) \geq 0, \forall t \geq 0$ , es una función conocida. Elija la ley de control discontinua

$$u = -(K(t, x) + k_n) \left[ |x_n|^{\frac{d_n}{\alpha_n}} + k_{n-1}^{\frac{d_n}{\alpha_n}} |s_{(n-1)d}|^{\frac{d_n}{\alpha_{n-1}}} \right]^0, p = \frac{n-2}{n-1}, \forall n \geq 2. \quad (61)$$

Si las ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , se eligen suficientemente grandes y  $K_m K(t, x) \geq \Xi(t, x)$ , entonces el origen  $x = 0$  del sistema (40) es globalmente ETF.

**Teorema 4.18** Considere que la Suposición 4.3 se cumple y que  $|w_n(t, x)| \leq C |\sigma_n|^{\frac{\alpha_{n+1}}{2-p}} + \Xi(t, x)$ , donde la constante  $C \geq 0$ , y  $\Xi(t, x) \geq 0, \forall t \geq 0$ , es una función conocida. Elija la ley de control continua

$$u = -(K(t, x) + k_n) |s_{nd}|^{\frac{\alpha_{n+1}}{d_n}}. \quad (62)$$

Si las ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , se eligen suficientemente grandes y  $K_m K(t, x) \geq \Xi(t, x)$ , entonces el origen  $x = 0$  del sistema (40) es globalmente ETF.

En general, los controladores (58), (59), (60), y (62) son continuos cuando  $p \in (\frac{n-2}{n-1}, 1)$ . Obviamente, no pueden rechazar perturbaciones no desvanecientes y acopladas como lo hace una entrada de control discontinua.

#### 4.6. EJEMPLO ACÁDEMICO

Considere el modelo cinemático de un carro [54], modelado en el espacio estados por

$$\dot{x}_1 = v \cos(x_3), \quad \dot{x}_2 = v \sin(x_3), \quad \dot{x}_3 = \left(\frac{v}{L}\right) \tan(x_4), \quad \dot{x}_4 = u,$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son las coordenadas cartesianas del punto medio eje trasero,  $x_3$  es el ángulo de orientación,  $x_4$  es el ángulo de dirección,  $v$  es la velocidad longitudinal ( $v = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ),  $L$  es la distancia entre los dos ejes ( $L = 5 \text{ m}$ ) y  $u$  es la entrada de control. El estado  $x_4$  se usa como entrada auxiliar y  $u$  define la nueva entrada de control para evitar discontinuidades en  $x_4$ .

El objetivo de control es llevar el carro desde una posición inicial dada a la trayectoria  $x_{2ref} = 10 \sin(0.05x_1) + 5$  en tiempo finito. Sin pérdida de generalidad, la entrada de control entra en acción después de 0.5 segundos bajo la suposición de que existe un observador que da la estimación exacta de los estados antes de 0.5 segundos. Con la variable deslizante  $\sigma = x_2 - x_{2ref}$ , el grado relativo del sistema es  $r = 3$ . El sistema se puede reescribir como

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = \phi(\cdot) + \gamma(\cdot)u,$$

donde el vector  $z = \begin{bmatrix} \sigma & \dot{\sigma} & \ddot{\sigma} \end{bmatrix}^T$ ,

$$\begin{aligned} \phi(\cdot) &= \left[ \frac{1}{800} \cos\left(\frac{x_1}{20}\right) \cos^2(x_3) - \frac{1}{4L} \sin\left(\frac{x_1}{20}\right) \sin(x_3) \tan(x_4) \right] v^3 \cos(x_3) \\ &+ \left[ -\frac{1}{20} \sin\left(\frac{x_1}{20}\right) \cos(x_3) \sin(x_3) + \frac{1}{L} \left( \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x_1}{20}\right) \cos(x_3) - \sin(x_3) \right) \tan(x_4) \right] \frac{v^3}{L} \tan(x_4), \\ \gamma(\cdot) &= \frac{v^2}{L} \left[ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x_1}{20}\right) \cdot \sin x_3 + \cos(x_3) \right] [1 + \tan^2(x_4)]. \end{aligned}$$

Se considera que las variables de estado  $x_3$  y  $x_4$  pertenecen a  $X = \{|x_3| \leq \pi/4, |x_4| \leq \pi/4\}$  y que solo hay 5% de incertidumbre en la velocidad. Tomando en cuenta lo anterior, las cotas de las funciones  $\phi$  y  $\gamma$  se estiman como  $|\phi| \leq C_0 = 49.63$ , y  $K_m = 6.38 \leq \gamma \leq K_M = 46.77$ , [51]. Se comparan los controladores:

A través del rediseño del Lyapunov siempre es posible robustificar una ley de control continua para que pueda compensar perturbaciones no desvanecientes.

Se pueden utilizar los observadores propuestos por Levant [55] y Angulo et al. [3].

Para la simulación se toman  $x(0) = [0, 0, 0, 0]^T$  y tiempo de muestreo  $\tau = 0.0005$  con método de integración de Euler.

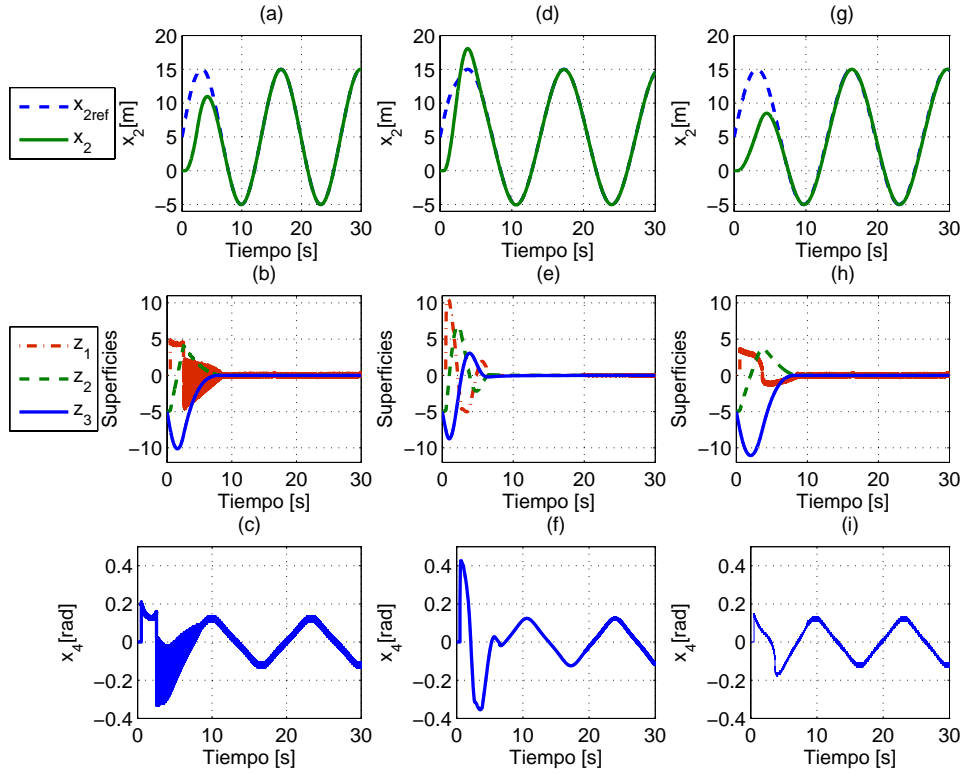


Figura 3.: Resultados con el controlador **(L3)**: (a) estado  $x_2$  (línea sólida); (b) variedad deslizante  $\sigma$  (línea sólida) y sus derivadas  $\dot{\sigma}$  (línea segmentada),  $\ddot{\sigma}$  (línea punteada); y (c) el ángulo de dirección  $x_4$ . Resultados con **(LC3)**: (d) estado  $x_2$ ; (e) variedad deslizante  $\sigma$  y sus derivadas  $\dot{\sigma}$ ,  $\ddot{\sigma}$ ; y (f) el ángulo de dirección  $x_4$ . Resultados con **(E3)**: (g) estado  $x_2$ ; (h) variedad deslizante  $\sigma$  y sus derivadas  $\dot{\sigma}$ ,  $\ddot{\sigma}$ ; y (i) el ángulo de dirección  $x_4$ .

$$(\text{L3}) \quad u_{3L} = -k_{3L} [z_3 + 2(|z_2|^3 + |z_1|^2)^{1/6} [z_2 + |z_1|^{2/3}]^0]^0, \text{ donde } k_{3L} = 20.$$

$$(\text{LC3}) \quad u_{3C} = -k_{3C} \frac{x_3 + 2(|x_2| + |x_1|^{3/2})^{-1/2} (x_2 + |x_1|^{3/2})}{|x_3| + 2(|x_2| + |x_1|^{3/2})^{1/2}}, \text{ donde } k_{3C} = 24.5.$$

$$(\text{E3}) \quad v_3 = -k_3 [ |z_3|^3 + (1.5)^3 \lambda^3 (|z_2|^{3/2} + \lambda z_1) ]^0, \text{ con ganancias } \lambda_1 = 1 \text{ y } k_3 = 20.$$

El desempeño de los controladores se muestra en la [Figura 3](#). Todos controladores aseguran que la referencia  $x_{2ref}$  se alcanza en tiempo finito usando la misma magnitud de control. El objetivo de control se alcanza aproximadamente a los 9 segundos usando el controlador **(L3)** y **(E3)**, véase la [Figura 3.\(a\)](#) y la [Figura 3.\(g\)](#), y a los 17.8 segundos, aproximadamente, usando la ley de control **(LC3)**. Aunque los autores no lo mencionan [57], [83], **(LC3)** funciona como un algoritmo de ganancia variable, permitiéndose obtener mejor precisión que los controladores **(L3)** y **(E3)**, [Figura 4](#). Por otro lado, el controlador tarda aproximadamente el doble de tiempo en alcanzar el objetivo de control. Para mejorar la velocidad de convergencia de **(LC3)** hay que incrementar la ganancia  $k_{3C}$ , lo que produce un incremento significativo del efecto de chattering en el control y una menor precisión. La [Figura 4.\(d\)](#) muestra cómo la precisión del **(LC3)** empeora al tratar de tener una velocidad de convergencia similar a la de los controladores **(L3)** y **(E3)**.

La [Figura 3.\(b\)](#) muestra las oscilaciones de alta frecuencia del ángulo de dirección  $x_4$  durante la repuesta transitoria con el controlador **(L3)**, y que posiblemente seas causadas por el conjunto donde el controlador es discontinuo, ya que también es discontinuo. Por otro lado, el ángulo de dirección  $x_4$  es más suave con el controlador

La ganancia  $k_3$  se calcula de  $K_m k_3 = 2.3866((1.5)^3 \lambda^2 + C_0) = 126.5$ .

La ganancia  $k_{3C}$  fue elegida para que disminuyera hasta alcanzar el valor aproximado de 20. Así la comparación de todos los controladores es más justa en términos de la magnitud del control.



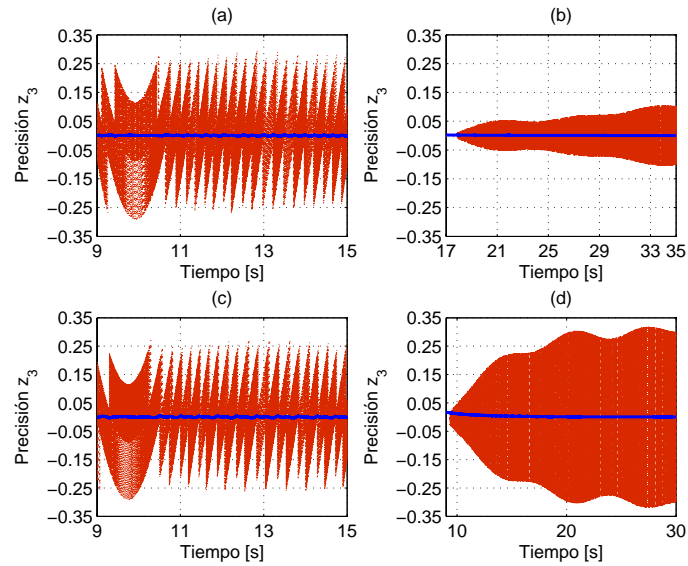


Figura 4.: Precisión: (a) con  $(L_3)$ ; (b) con  $(LC_3)$ ; (c) con  $(E_3)$ ; (d) con  $(LC_3)$  ( $k_{3C} = 70$ ).

propuesto, véase la Figura 3.(i). El mismo efecto se observa en el comportamiento dinámico de  $z_3$ , véase la Figura 3.(b) y la Figura 3.(h). Además, se observa que la precisión es similar para ambos controladores, Figura 4.(a) y Figura 4.(c).

El controlador  $(E_3)$  garantiza buena velocidad de convergencia y respuesta transitoria suave. Dos buenas características que los controladores  $(L_3)$  y  $(LC_3)$  tienen por separado.

*La precisión final de  $z_3$  con  $(LC_3)$  ( $k_3 = 24.5$ ), cumple  $|z_3| \leq 0.115$ . Esta cota se encontró después de los primeros 50 segundos de simulación.*

#### 4.7. RESUMEN DEL CAPÍTULO

El diseño de controladores discontinuos que producen MDOS se puede realizar a través del MB. Esto marca una diferencia metodológica importante y novedosa, ya que a diferencia de otros métodos reportados anteriormente, como el CMDT o el CMDOS, el diseño de controladores discontinuos con convergencia en tiempo finito se puede hacer a través de la construcción explícita de una FLCR.

El método de diseño propuesto es sistemático, y conduce a construir simultáneamente un controlador discontinuo, así como su correspondiente FLCR. Las características más notables de controladores discontinuos que se pueden obtener con el método son

- (C1) Utiliza el MB ampliamente conocido en la teoría de estabilización de sistemas no lineales para construir alguna FLCR.
- (C2) La estabilización del origen del sistema se logra en tiempo finito.
- (C3) Permite conocer el tipo de perturbaciones no acopladas que soporta el controlador. No es necesario contar con el conocimiento preciso de las no linealidades del sistema. La única información requerida es una cota de la función de incertidumbre.
- (C4) La estructura de control es simple.
- (C5) Solo hay que diseñar apropiadamente y suficientemente grandes las ganancias del controlador. Esta condición de suficiencia es inherente al método utilizado. Además, es posible derivar condiciones explícitas para el ajuste de las ganancias.
- (C6) Es posible estimar el tiempo de convergencia, en general de forma muy conservadora.

*Sólo es posible obtener condiciones suficientes sobre las ganancias, y están lejos de las condiciones necesarias para la estabilidad.*

- (c7) Tiene la peculiar característica de reducir la elevada frecuencia durante la respuesta transitoria de las trayectorias del sistema controlado si se les comparan con los MDOS propuestos en [56].
- (c8) Se pueden realizar extensiones que de otra forma no sería posible con las metodologías hasta ahora conocidas para MDOS. Aquí, solo se ha presentado una extensión a algoritmos de ganancia variable y que hace posible que los controladores propuestos sean robustos ante perturbaciones acopladas no necesariamente acotadas por constantes.

Para propósitos prácticos, las ganancias se pueden parametrizar para que sólo dos parámetros sean ajustados. Particularmente, para el caso cuando aparecen perturbaciones acopladas, las ganancias en el interior de la función signo se han parametrizado en términos de la ganancia  $k_1$ , así solo la otra ganancia debe seleccionarse apropiadamente. Resultados numéricos, más que sólo estudios teóricos, han mostrado que el conjunto de ganancias que se obtienen de la FLCR es un subconjunto de aquel que produce estabilidad y que en general, da ganancias más grandes de lo necesario.

Aunque, un análisis sobre la precisión de los controladores que se obtienen con el método no fue formalmente desarrollado, una conjetura basada en resultados de simulación es que estos controladores tienen una precisión similar a los conocidos en MDOS, [56].

Los controladores discontinuos se han diseñado considerando que en el sistema (4.5) el grado relativo es igual al orden del sistema. Sí solo se llegase a conocer el grado relativo del sistema, esta consideración no interfiere con los resultados aquí presentados, como se ha ilustrado en el ejemplo.

#### 4.8. PRUEBA DE LOS TEOREMAS Y PROPOSICIONES DEL CAPÍTULO

**Prueba del Teorema 4.1.** Como la función  $V(x)$  es una FLC, **(I)** en aquellos puntos donde  $L_{g_n} V = 0 \Rightarrow \dot{V} = L_{f_n} V < 0, \forall x \in B_r \setminus \{0\}$ ; **(II)** cuando  $x \in \{x \in B_r : L_{g_n} V \neq 0\}$ , bajo las hipótesis **(i)** de la Suposición 4.1 y **H'1**, se obtiene

$$\dot{V}(x) = L_{f_n} V + L_{g_n} V \cdot \xi(t, x) \cdot u \leq -(k\gamma - \alpha)|L_{g_n} V|, \forall x \in B_r.$$

Elegir  $k\gamma > \alpha$  implica que  $\dot{V}(x) < 0$ , al menos en una vecindad del origen. Con **(I)** y **(II)**, se concluye  $\dot{V} = L_{f_n} V + L_{g_n} V \cdot \xi(t, x) \cdot u < 0, \forall x \in B_r$ . Entonces, el origen de (39) es local y AE en lazo cerrado con la ley de control discontinua.

**Prueba del Teorema 4.2.** Ahora,  $V(x)$  es una FLCR. **(I)** Cuando  $L_{g_n} V = 0 \Rightarrow \dot{V}(x) = L_{f(t,x)} V < 0, \forall x \in B_r \setminus \{0\}$ . **(II)** Acorde con las hipótesis **(ii)** de la Suposición 4.1, **H'1** y **H'3**, se llega a que

$$\dot{V}(x) = L_{f(t,x)} V + L_{g_n} V \cdot \xi(t, x) \cdot (u + \rho(t, x)) \leq -(k\gamma - \beta - \gamma C)|L_{g_n} V|, \forall x \in B_r.$$

Si  $k\gamma > \beta + \gamma C$ ,  $\dot{V}(x) < 0$  en una vecindad del origen. Por lo tanto, de **(I)** y **(II)**, se concluye que el origen del sistema perturbado es local y AE.

**Prueba del Teorema 4.3.** Hay que probar que dada  $u(x) = -k \text{sign}(L_{g_n} V)$  se cumple  $f_n(\Delta_\epsilon^r x) + g(\Delta_\epsilon^r x)u(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^l \Delta_\epsilon^r (f_n(x) + g_n(x)u(x))$ . Por homogeneidad,  $f_n(\Lambda_\epsilon^r x) = \epsilon^{l_f} \Lambda_\epsilon^r f_n(x)$  y  $g(\Lambda_\epsilon^r x) = \epsilon^{l_g} \Lambda_\epsilon^r g_n(x)$ , donde  $l_f$  y  $l_g$  son los grados de homogeneidad de  $f_n(x)$  y  $g_n(x)$ . Del punto **(iii)** del Lema 2.2 se obtiene que  $\frac{\partial V}{\partial x}(\Lambda_\epsilon^r x)g(\Lambda_\epsilon^r x) = \epsilon^{m+l_g} L_{g_n} V$  y  $u(x) = -k \text{sign}(\epsilon^{m+l_g} L_{g_n} V) = -k \text{sign}(L_{g_n} V)$ . Por lo tanto,

$$\epsilon^{l_f} \Lambda_\epsilon^r f_n(x) + \epsilon^{l_g} \Lambda_\epsilon^r g_n(x)u(x) = \epsilon^l \Lambda_\epsilon^r (f_n(x) + g_n(x)u(x)).$$

La igualdad se cumple si y sólo si  $l_f = l_g = l$ .

Además, como  $V(x)$  es una FLC, **(I)** cuando  $L_{g_n} V = 0 \Rightarrow \dot{V}(x) = L_{f_n} V < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ; **(II)** cuando  $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : L_{g_n} V \neq 0\}$ , las funciones  $L_{f_n} V$  y  $L_{g_n} V$  son

*El Lema 2.2 se ha enunciado en el Capítulo 2.*



Véase el Apéndice A para consultar el Lema A.6.

homogéneas del mismo grado  $m + l$ . Como  $\dot{V}$  satisface las condiciones (ii) y (II) del Lema A.6, existe  $k^* \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_{f_n} V \leq k^* |L_{g_n} V|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, junto con  $H'1$ , se obtiene

$$\dot{V}(x) = L_{f_n} V + L_{g_n} V \cdot \xi(t, x) \cdot u \leq -(\kappa\gamma - k^*) |L_{g_n} V| < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

Claramente, eligiendo  $\kappa\gamma > k^*$ ,  $\dot{V}(x)$  es n.d..

Por (I) y (II),  $\dot{V}(x) < 0$  y el origen es GAE. La estabilidad global en tiempo finito se concluye del Teorema 2.14 con  $l < 0$ .

**Prueba del Teorema 4.4.** Considerando  $H'1$ ,  $H'3$ , la derivada temporal de la FLCR a lo largo de las trayectorias del sistema (38) satisface

$$\dot{V}(x) = L_{f(t,x)} V + L_{g_n} V \cdot \xi(t, x) \cdot (u + \rho(t, x)) \leq L_N V + L_{\Delta_u} V,$$

donde  $L_N V = L_{f_n} V - (k - C)\gamma |L_{g_n} V|$ . Como  $V(x)$  es una FLCR, (I) cuando  $L_{g_n} V = 0$ , se cumple  $\dot{V}(x) = L_{f(t,x)} V < 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Esto significa que  $\dot{V}$  es n.d. a pesar de las perturbaciones no acopladas; (II) cuando  $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : L_{g_n} V \neq 0\}$ , del resultado anterior se sabe que  $L_{f_n} V$  y  $L_{g_n} V$  son homogéneas de grado  $m + l$ . De la hipótesis  $H'6$  y del punto (iv) del Lema 2.2, existen constantes  $\sigma_i$  tales que

$$L_{\Delta_u} V = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial x_i} \Delta_{ui}(t, x) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial V}{\partial x_i} \right| |\Delta_{ui}(t, x)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sigma_i \|x\|_{r,p}^{m+l}$$

Por los mismos argumentos del resultado anterior,  $L_N V$  es n.d. si  $\kappa\gamma > k^* + \gamma C$ . Por punto (iv) del Lema 2.2, existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_N V \leq -\lambda \|x\|_{r,p}^{m+l}$ . Tomando en cuenta lo anterior, se obtiene  $\dot{V}(x) \leq L_N V + L_{\Delta_u} V \leq -(\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sigma_i) \|x\|_{r,p}^{m+l}$ . La derivada  $\dot{V}(x)$  es n.d. si  $\lambda > \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sigma_i$ . El parámetro  $\lambda$  se hace suficientemente grande si  $k$  se hace suficientemente grande. Entonces,  $x = 0$  es RGAE. La estabilidad global en tiempo finito se concluye tomando  $l < 0$ .

**Prueba del Teorema 4.5.** Bajo la hipótesis  $H'7$  y como la entrada de control es discontinua, el sistema (40) se transforma en la ID

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, & \forall i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &\in [K_m, K_M]u + [-C, C], \end{aligned}$$

ya que  $\Delta_u(t, x) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ . Este sistema es homogéneo si

$$\begin{aligned} \epsilon^{r_{i+1}} x_{i+1} &= \epsilon^l \epsilon^{r_i} x_{i+1}, & \forall i = 1, \dots, n-1, \\ [K_m, K_M]u + [-C, C] &= \epsilon^l \epsilon^{r_n} ([K_m, K_M]u + [-C, C]), \end{aligned}$$

es decir, si se cumplen  $r_{i+1} = l + r_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-1$ , y  $0 = l + r_n$ .

Todos los pesos  $r_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , pueden ser determinados en función del peso  $r_1$  y del grado de homogeneidad  $l$  como en (43). Substituyendo  $0 = l + r_n$ , en la última igualdad de (43) se obtiene  $nl + r_1 = 0$ . Substituyendo esta condición en todas las igualdades de (43) se obtiene la condición de los pesos de primer punto del Teorema. Como  $r_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , y  $n > 0$ , el conjunto de igualdades  $(n + 1 - i)l + r_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , únicamente puede cumplirse si  $l < 0$ .

Por otro lado, la derivada temporal de  $V(x)$  a lo largo de las trayectorias del sistema satisface

$$\dot{V}(x) = L_{f_n} V + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \cdot (b(t, x)u + w_n(t, x)) \leq L_{f_n} V - (K_m k - C) \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right|$$

Como  $V(x)$  es una FLC, (I) cuando  $L_{g_n} V = 0 \Rightarrow \dot{V}(x) = L_{f_n} V < 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ; (II) en el caso  $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : L_{g_n} V \neq 0\}$ , note que  $L_{f_n} V$  y  $\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}$  son homogéneas del mismo grado  $m + l$ . Como  $\dot{V}(x)$  satisface las condiciones (ii) y (II) del Lema A.6, existe  $k^* \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_{f_n} V \leq k^* \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, se obtiene  $\dot{V}(x) \leq$

$-(K_m k - C - k^*) \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right| < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Eligiendo  $K_m k > C + k^*$ , la derivada  $\dot{V}(x)$  es n.d..

Por **(I)** y **(II)**,  $\dot{V}(x) < 0$  y el origen es GAE. La estabilidad global en tiempo finito se concluye tomando  $l < 0$ .

**Prueba del Teorema 4.6.** Considerando **H'7** y **H'8**, la derivada temporal de la FLCR a lo largo de las trayectorias del sistema (38) satisface

$$\dot{V}(x) = L_{f(t,x)} V + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \cdot (b(t,x)u + w_n(t,x)) \leq L_N V + L_{\Delta_u(t,x)} V,$$

con  $L_N = L_{f_n} V - (K_m k - C) \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right|$ . Como  $V$  es una FLCR, **(I)** cuando  $L_{g_n} V = 0 \Rightarrow \dot{V}(x) = L_{f(t,x)} V < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Esto significa que  $\dot{V}$  es n.d. a pesar de las perturbaciones no acopladas; **(II)** cuando  $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : L_{g_n} V \neq 0\}$ , se sabe que  $L_N V$  es homogénea de grado  $m+l$ , y n.d. si  $k\gamma > k^* + \gamma C$ . Por el punto **(iv)** del Lema 2.2, existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_N V \leq -\lambda \|x\|_{r,p}^{m+1}$ . Además, de la hipótesis **H'8**, del punto **(iv)** del Lema 2.2 y de (42), se deduce que existen constantes  $\sigma_i$  tales que

$$L_{\Delta_u} V = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \Delta_{ui}(t,x) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \right| (|x_1|^{\frac{l+r_1}{r_1}} + \dots + |x_i|^{\frac{l+r_i}{r_i}}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \sigma_i \|x\|_{r,p}^{m+1}.$$

Tomando en cuenta lo anterior, se obtiene  $\dot{V}(x) \leq L_N V + L_{\Delta_u} V \leq -(\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \sigma_i) \|x\|_{r,p}^{m+1}$ .

La derivada  $\dot{V}(x)$  es n.d. si  $\lambda > \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \sigma_i$ . Lo cual siempre es posible haciendo  $k$  suficientemente grande. Entonces,  $x = 0$  es RGAE. La estabilidad global en tiempo finito se concluye tomando  $l < 0$ .

**Prueba del Teorema 4.7.** Hay que probar que  $u(x) = -k[L_{g_n} V]^q$  cumple  $f_n(\Delta_\epsilon^r x) + g(\Delta_\epsilon^r x)u(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^l \Delta_\epsilon^r (f_n(x) + g_n(x)u(x))$ . Por homogeneidad y del punto **(iii)** del Lema 2.2, se cumple  $f_n(\Lambda_\epsilon^r x) = \epsilon^{l_f} \Lambda_\epsilon^r f_n(x)$ ,  $g(\Lambda_\epsilon^r x) = \epsilon^{l_g} \Lambda_\epsilon^r g_n(x)$  y  $u(\Lambda_\epsilon^r x) = -k \left[ \frac{\partial V}{\partial x}(\Lambda_\epsilon^r x) g(\Lambda_\epsilon^r x) \right]^q = \epsilon^{(m+l_g)q} u(x)$ . Por lo tanto,

$$\epsilon^{l_f} \Lambda_\epsilon^r f_n(x) + \epsilon^{l_g} \epsilon^{(m+l_g)q} \Lambda_\epsilon^r g_n(x) u(x) = \epsilon^l \Lambda_\epsilon^r (f_n(x) + g_n(x)u(x)). \quad (63)$$

La igualdad (63) se cumple si y sólo si  $l = l_f = l_g + (m + l_g)q$ .

Ahora con **H'1**, la derivada temporal de la FLC satisface

$$\dot{V}(x) = L_{f_n} V + L_{g_n} V \cdot \xi(t,x) \cdot u \leq L_{f_n} V - k\gamma |L_{g_n} V|^{q+1}.$$

Como  $V(x)$  es una FLC, **(I)** cuando  $L_{g_n} V = 0 \Rightarrow \dot{V}(x) = L_{f_n} V < 0, x \in \forall \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ; **(II)** cuando  $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : L_{g_n} V \neq 0\}$ , las funciones  $L_{f_n} V$  y  $|L_{g_n} V|^{q+1}$  son homogéneas del mismo grado  $m+l$ . Como  $\dot{V}(x)$  satisface las condiciones **(ii)** y **(II)** del Lema A.6, existe  $k^* \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_{f_n} V \leq k^* |L_{g_n} V|^{q+1}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces,  $\dot{V}(x) \leq -(k\gamma - k^*) |L_{g_n} V|^{q+1} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , eligiendo  $k\gamma > k^*$ .

Por **(I)** y **(II)**,  $\dot{V}(x) < 0$  y el origen es GAE. Los puntos **(i)-(iii)** se concluyen del Corolario 2.1.

**Prueba del Teorema 4.8.** Considerando **H'1** y **H'3**, la derivada temporal de la FLCR a lo largo de las trayectorias del sistema (38) satisface

$$\dot{V}(x) = L_{f(t,x)} V + L_{g_n} V \cdot \xi(t,x) \cdot (u + \rho(t,x)) \leq L_{f_n} V + L_{\Delta_u} V - (k - C)\gamma |L_{g_n} V|^{q+1},$$

donde  $L_N V = L_{f_n} V - (k - C)\gamma |L_{g_n} V|^{q+1}$ . Como  $V$  es una FLCR, **(I)** cuando  $L_{g_n} V = 0 \Rightarrow \dot{V}(x) = L_{f(t,x)} V < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Esto significa que  $\dot{V}$  es n.d. a pesar de las perturbaciones no acopladas; **(II)** cuando  $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : L_{g_n} V \neq 0\}$ ,  $L_N V$  es homogénea de grado  $m+l$ . De la hipótesis **H'6** y del punto **(iv)** del Lema 2.2, existen constantes  $\sigma_i$  tales que

$$L_{\Delta_u} V = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial x_i} \Delta_{ui}(t,x) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial V}{\partial x_i} \right| |\Delta_{ui}(t,x)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sigma_i \|x\|_{r,p}^{m+1}$$

Por los mismos argumentos del resultado anterior,  $L_N V$  es n.d. si  $k\gamma > k^* + \gamma C$ . Por el punto **(iv)** del Lema 2.2, existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_N V \leq -\lambda \|x\|_{r,p}^{m+1}$ . Tomando en cuenta lo anterior,  $\dot{V}(x) \leq L_N V + L_{\Delta_u} V \leq -(\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sigma_i) \|x\|_{r,p}^{m+1}$ .

*Las función  $|L_{g_n} V|^{q+1}$  es homogénea de grado  $l + m$ , ya que  $(m + l_g)(q + 1) = l + m$ .*

La derivada  $\dot{V}(x)$  es n.d. si  $\lambda > \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sigma_i$ ,  $\lambda$  se hace suficientemente grande si  $k$  se hace suficientemente grande. Los puntos (i)-(iii) se concluyen del Corolario 2.1.

**Prueba del Teorema 4.9.** Para  $\Delta_u(t, x) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ , el sistema (40) queda descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, & \forall i &= 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= b(t, x)u + w_n(t, x). \end{aligned} \quad (64)$$

Como  $b(t, x) \in [K_m, K_M]$ , a este término se le puede asociar el grado  $l_b = 0$ . Además,  $u(\Lambda_\epsilon^r x) = \epsilon^{mq} u(x)$  y la cota de  $w_n(t, x)$  es homogénea, el sistema (64) es dominado por uno que sí es homogéneo y que cumple

Aquí, se toma el hecho de  
que  
 $|w_n(t, x)| \leq C w(x)$ ,  
 $w(x) > 0$  y  $w(\Lambda_\epsilon^r x) =$   
 $\epsilon^{(m+l_g)q} w(x)$

$$\begin{aligned} \epsilon^{r_{i+1}} x_{i+1} &= \epsilon^l \epsilon^{r_i} x_{i+1}, & \forall i &= 1, \dots, n-1, \\ \epsilon^{mq} ([K_m, K_M] u(x) + w(x)) &= \epsilon^l \epsilon^{r_n} ([K_m, K_M] u + w(x)), \end{aligned}$$

es decir, si se cumplen  $r_{i+1} = l + r_i$ ,  $\forall i = 1, \dots, n-1$ , y  $mq = l + r_n$ . Todos los pesos  $r_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , pueden determinarse en función de  $r_1$  y del grado de homogeneidad  $l$ , como

$$r_2 = l + r_1, r_3 = 2l + r_1, \dots, r_{n-1} = (n-2)l + r_1, r_n = (n-1)l + r_1. \quad (65)$$

Como  $r_n = mq - l$ , de la última igualdad de (65) obtenemos  $nl + r_1 = mq$ . Si se substituye esta condición en cada una de las igualdades de (65) se llega a la condición de los pesos del punto (i), la cual se cumple para valores positivos y negativos de  $l$ . Bajo las hipótesis  $H''7$ , la derivada temporal de  $V$  a lo largo de las trayectorias de (64) satisface

$$\dot{V}(x) = L_{f_n} V + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \cdot (b(t, x)u + w_n(t, x)) \leq L_{f_n} V - (K_m k - C) \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right|^{q+1}$$

Recuerde que  $V(x)$  es una FLCR. El resto de la prueba es similar a los puntos (I) y (II) de la demostración del Teorema 4.7. Entonces, existe  $k^* \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_{f_n} V \leq k^* \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right|^{q+1}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Por lo tanto,  $\dot{V}(x) \leq -(K_m k - C - k^*) \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right| < 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Eligiendo  $K_m k > C + k^*$ , la derivada  $\dot{V}(x)$  es n.d..

Por lo tanto,  $\dot{V}(x) < 0$  y el origen es GAE. La estabilidad global en tiempo finito se concluye tomando  $l < 0$ .

**Prueba del Teorema 4.10.** Considerando  $H''7$ , la derivada temporal de la FLCR a lo largo de las trayectorias del sistema (40) satisface

$$\dot{V}(x) = L_{f(t, x)} V + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \cdot (b(t, x)u + w(t, x)) \leq L_N V + L_{\Delta_u(t, x)} V,$$

donde  $L_N = L_{f_n} V - (K_m k - C) \left| \frac{\partial V}{\partial x_n} \right|^{q+1}$  es homogénea de grado  $m + l$  y n.d. si  $K_m k > C + k^*$ . El resto de la prueba es similar a los puntos (I) y (II) de la demostración del Teorema 4.8. Entonces,  $\dot{V}(x)$  es n.d. a pesar de las perturbaciones no acopladas. Por el punto (iv) del Lema 2.2, existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_N V \leq -\lambda \|x\|_{r, p}^{m+l}$ . De la hipótesis  $H'8$ , del punto (iv) del Lema 2.2 y de (42), existen constantes  $\sigma_i$  tales que

$$L_{\Delta_u} V = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial x_i} \Delta_{u_i}(t, x) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \left| \frac{\partial V}{\partial x_i} \right| (|x_1|^{\frac{l+r_1}{r_1}} + \dots + |x_i|^{\frac{l+r_i}{r_i}}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \sigma_i \|x\|_{r, p}^{m+l}.$$

Tomando en cuenta lo anterior, se obtiene  $\dot{V}(x) \leq L_N V + L_{\Delta_u} V \leq -(\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \sigma_i) \|x\|_{r, p}^{m+l}$ .

La derivada  $\dot{V}(x)$  es n.d. si  $\lambda > \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \sigma_i$ ,  $\lambda$  se hace suficientemente grande si  $k$  se hace suficientemente grande. Entonces,  $x = 0$  es RGAE. Los puntos (i)-(iii) se concluyen del Corolario 2.1.

**Prueba de la Proposición 4.1 y del Teorema 4.11.** La demostración de ambos resultados se hace en forma simultánea aplicando el método propuesto en la Sección 4.3 y

que es una modificación del MB. Para diseñar un control discontinuo apropiado  $u(x)$  junto con su FLCR, hay que definir la siguiente ley de control por realimentación de estado auxiliar

$$v_i = -k_i [\sigma_i]^{\frac{\alpha_i+1}{2-p}}, \quad \alpha_i = (i-2)p - (i-3), \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (66)$$

con  $p \in [0, 1)$  si  $i = 1$ , y  $p \in [\frac{i-2}{i-1}, 1)$  si  $i \geq 2$ . A continuación se mostrará que (66) estabiliza globalmente y en tiempo finito el origen de (40) bajo la Suposición 4.2. La ley de control correspondiente se obtiene fijando  $u = v_n$ . Puesto que el método se basa en una modificación del MB, se procede por inducción. El método funciona de la siguiente manera:

*Paso 1:* Se tiene que  $\dot{x}_1 = v_1 + w_1(x_1)$ , suponga que  $v_1 = -k_1 [x_1]^{1/(2-p)}$ . El vector de pesos es  $r = (2-p)$ . El parámetro  $p \in [0, 1)$ , lo cual implica  $1/(2-p) \in [1/2, 1)$ . Por lo que,

$$\dot{x}_1 = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{2-p}} + w_1(t, x). \quad (67)$$

Tomando la derivada c.r. al tiempo de la FLCR  $V_1 = \frac{2-p}{3-p} |x_1|^{\frac{3-p}{2-p}}$  a lo largo de las trayectorias de (67) y bajo la Suposición 4.2, se obtiene

$$\dot{V}_1 = \frac{dV_1}{dx_1} (v_1 + w_1(t, x)) \leq -[x_1]^{\frac{1}{2-p}} (k_1 [x_1]^{\frac{1}{2-p}} - \rho_1 |x_1|^{\frac{1}{2-p}}) \leq -\alpha_{11} |x_1|^{\frac{2}{2-p}},$$

donde  $\alpha_{11} = k_1 - \rho_1$ . La derivada  $\dot{V}_1$  es n.d. si  $\alpha_{11} > 0$  y puede describirse como  $\dot{V}_1 = -(k_1 - \rho_1) \left( \frac{3-p}{2-p} V_1 \right)^{\frac{2}{3-p}}$ . Note que  $\forall p \in [0, 1)$  se cumple que  $2/(3-p) \in [2/3, 1)$ . La derivada  $\dot{V}_1$  muestra que el origen es ETF.

*Paso 2:* Se tiene

$$\dot{x}_1 = x_2 + w_1(t, x), \quad \dot{x}_2 = v_2 + w_2(t, x). \quad (68)$$

A partir de este paso, la construcción no es trivial. La aplicación directa del MB estándar produce leyes de control singulares [63] (produciendo señales infinitas en ciertos conjuntos), cuando se trata de utilizar para diseñar controladores con convergencia en tiempo finito. Sin embargo, el diseño de leyes de control no singulares que estabilizan a (68) en tiempo finito se puede resolver de manera inteligente. En lugar de utilizar la variable  $s_2 = x_2 - v_1$  para construir el FLCR, se define la Fdes

$$s_{2d} = [x_2]^{2-p} + k_1^{2-p} x_1. \quad (69)$$

Es muy importante notar que la variable  $s_2$  y  $s_{2d}$  definen la misma curva  $x_2 = -k_1 x_1^{\frac{1}{2-p}} \Leftrightarrow s_2 = s_{2d} = 0$ . En contraste con  $s_2$ , la Fdes  $s_{2d}$  es de clase  $C^1$ . Usando esta función se construye la FLCR  $V_2 = \Phi_2 + \delta_1 V_1$ ,  $\Phi_2 = \int_{v_1}^{x_2} ([\tau_2]^{2-p} + k_1^{2-p} x_1) d\tau_2$ , donde  $\delta_1 = \frac{3-p}{2-p} k_1^{3-p}$ .

La solución de  $\Phi_2 = \frac{1}{3-p} |x_2|^{3-p} + k_1^{2-p} x_1 x_2 + \frac{2-p}{3-p} k_1^{3-p} |x_1|^{\frac{3-p}{2-p}}$ . Como  $\Phi_2$  es positiva semidefinida y  $V_1$  es p.d.,  $V_2$  es p.d. por construcción. Tomando la derivada de  $V_2$  a largo de las trayectorias de (68) y bajo la Suposición 4.2, se obtiene

$$\dot{V}_2 = s_{2d} [v_2 + w_2(t, x)] + k_1^{2-p} s_2 (x_2 + w_1(t, x)) + k_1^{3-p} [x_1]^{\frac{1}{2-p}} [x_2 + w_1(t, x)].$$

Observe que  $x_2 = s_2 - k_1 [x_1]^{\frac{1}{2-p}}$ . En este caso,  $\sigma_2 = s_{2d}$ ,  $|w_1(t, x)| \leq \rho_1 |x_1|^{\frac{1}{2-p}}$ , y  $|w_2(t, x)| \leq \rho_2 |\sigma_2|^{\frac{p}{2-p}}$ . Elija  $v_2 = -k_2 [\sigma_2]^{\frac{p}{2-p}}$ . Después de algunas simplificaciones se llega a

$$\dot{V}_2 \leq -(k_2 - \rho_2) |\sigma_2|^{\frac{2}{2-p}} + k_1^{2-p} |s_2|^2 - k_1^{3-p} (k_1 - \rho_1) |x_1|^{\frac{2}{2-p}} + k_1^{2-p} \rho_1 |s_2| |x_1|^{\frac{1}{2-p}}.$$

*Diseñar la ley de control a través del método de CMD también produce una ley de control singular. Por lo tanto, no puede ser utilizado.*

Del Lema A.2 y del Lema A.1, se deducen las desigualdades  $|s_2|^2 \leq 2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} |\sigma_2|^{\frac{2}{2-p}}$ , y  $|\sigma_2|^{\frac{1}{2-p}} |x_1|^{\frac{1}{2-p}} \leq \gamma^2 |\sigma_2|^{\frac{2}{2-p}} / 2 + \gamma^{-2} |x_1|^{\frac{2}{2-p}} / 2$ . Usando estas desigualdades, se obtiene

$$\dot{V}_2 \leq -a_{22} |\sigma_2|^{\frac{2}{2-p}} - k_1^{2-p} a_{21} |x_1|^{\frac{2}{2-p}},$$

con  $a_{22} = k_2 - \rho_2 - 2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} k_1^{2-p} - 2^{-\frac{1}{2-p}} k_1^{2-p} \rho_1 \gamma^2$ , y  $a_{21} = k_1(k_1 - \rho_1) - 2^{-\frac{1}{2-p}} \rho_1 \gamma^{-2}$ . La constante  $\gamma$  siempre existe si y sólo si las ganancias satisfacen

$$k_2 > [2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} + 2^{-\frac{2}{2-p}} \frac{\rho_1^2}{k_1(k_1 - \rho_1)}] k_1^{2-p} + \rho_2, \quad k_1 > \rho_1. \quad (70)$$

La función  $\dot{V}_2$  es n.d. si las ganancias cumplen las desigualdades anteriores.

Para continuar con el diseño, hay de definir la Fdes de la variable  $s_i = x_i - v_{i-1}$ . Se elige

$$s_{i,d} = [x_i]^{d_i/\alpha_i} + k_{i-1}^{d_i/\alpha_i} [\sigma_{i-1}]^{\frac{d_i}{2-p}}, \quad \sigma_i = [x_i]^{\frac{2-p}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{2-p}{\alpha_i}} \sigma_{i-1},$$

con  $\alpha_i = (i-2)p - (i-3)$ ,  $d_i = i - (i-1)p$ ,  $\forall i = 2, \dots, n$ , y  $\sigma_1 = s_1 = x_1$ . Estas representaciones definen las mismas variedades cuando  $s_i = s_{i,d} = \sigma_i = 0$ . A diferencia de  $s_i$ , la Fdes  $s_{i,d}$  es de clase  $C^1$ . La Fdes permite construir una FLCR de la forma (44), donde la función  $W_i = \int_{v_{i-1}}^{x_i} ([\tau_i]^{d_i/\alpha_i} + k_{i-1}^{d_i/\alpha_i} [\sigma_{i-1}]^{\frac{d_i}{2-p}}) d\tau_i$ . La función (44) es p.d. y es de clase  $C^1$  por construcción. La forma explícita se da en la expresión (45). La FDES  $s_{i,d}$  se ha elegido tal que  $V_i$  sea homogénea de grado  $m = 3 - p$  c.r. a la dilatación (46).

*Paso  $i-1$ :* Se considera que el controlador  $v_{i-1}$  estabiliza el sistema (40) de orden  $(i-1)$  y que la FLCR  $V_{i-1}$  lo garantiza, debido a que su derivada  $\dot{V}_{i-1}$  es n.d..

*Paso  $i$ :* Tomando la derivada de FLCR  $V_i$ , definida por (45), a largo de las trayectorias de (40), se obtiene

$$\dot{V}_i = s_{i,d} [v_i + w_i] + \frac{d_i}{2-p} k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} s_i |\sigma_{i-1}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{2-p}} \dot{\sigma}_{i-1} + \delta_{i-1} (\sum_{j=2}^i \frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{j-1}} \dot{x}_{j-1}).$$

De un cálculo directo se deduce que  $\sum_{j=2}^i \frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{j-1}} \dot{x}_{j-1} = \dot{V}_{i-1} + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{i-1}} s_i$ , donde  $\frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{i-1}} = s_{(i-1),d}$ . Cuando  $s_i = s_{i,d} = 0$  se tiene que para cualquier  $(x_1, \dots, x_i) \neq 0$ , se cumple  $\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} < 0$ , ya que  $\dot{V}_i$  es una FLCR. Para  $s_i$  y  $s_{i,d}$  diferentes de cero, debido a que  $x_i = s_i + v_{i-1}$ , no es difícil mostrar que  $\dot{\sigma}_{i-1} = \sum_{j=2}^i \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_{j-1}} (x_j + w_{j-1}) = \Psi_{(i-1),n} + \frac{2-p}{\alpha_{i-1}} |x_{i-1}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{\alpha_{i-1}}} s_i + \Psi_{(i-1),\rho}$ , donde la función asociada a parte nominal del sistema es  $\Psi_{(i-1),n} = \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_{j-1}} x_j + \frac{2-p}{\alpha_{i-1}} |x_{i-1}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{\alpha_{i-1}}} v_{i-1}$ , y la función  $\Psi_{(i-1),\rho} = \sum_{j=2}^i \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_{j-1}} w_{j-1}$  está asociada a las perturbaciones. Acorde con la Suposición 4.2, se cumple que  $\Psi_{(i-1),\rho} \leq \Delta_{(i-1),\rho}$ , donde  $\Delta_{(i-1),\rho} = \sum_{j=2}^i \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_{j-1}} w_{j-1}$ , y se evalúa tomando  $w_{j-1} = \rho_{j-1} |\sigma_{j-1}|^{\frac{\alpha_j}{2-p}}$ . Tomando en cuenta todo lo anterior, y utilizando la ley de control  $v_i$  definida en (66), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -(k_i - \rho_i) |s_{i,d}| |\sigma_i|^{\frac{\alpha_i+1}{2-p}} - k_{i-1}^{\frac{3-p}{\alpha_i}} \mathcal{V}_{i-1} + \Phi_i(x), \\ \Phi_i(x) &= k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} s_i \Upsilon_{i-1} + \frac{d_i}{\alpha_{i-1}} k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} |\sigma_{i-1}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{2-p}} |x_{i-1}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{\alpha_{i-1}}} |s_i|^2, \end{aligned}$$

donde  $\Upsilon_{i-1} = \frac{d_i}{2-p} |\sigma_{i-1}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{2-p}} [\Psi_{(i-1),n} + \Delta_{(i-1),\rho}] + k_{i-1} s_{(i-1),d}$ , y  $\mathcal{V}_{i-1} = -\dot{V}_{i-1} \geq 0$ , ya que  $\dot{V}_{i-1} \leq 0$ . Además, por ser  $V_i$  una FLCR, la derivada  $\dot{V}_i$  cumple con el Lema A.6. Por lo tanto existe  $k_i$  suficientemente grande tal que se logra que  $\dot{V}_i$  sea n.d.

Para obtener (120), básicamente se chequea cuando  $a_{22} > 0$  y  $a_{21} > 0$ , y se verifica cuando existe  $\gamma^2 > 0$ .

Para más detalles sobre el término  $\Psi_{(i-1),\rho}$  consúltese el Apéndice B.

y el origen del sistema (40) es RGAE. Ya que el grado de homogeneidad del campo vectorial es negativo aplicando la ley de control se obtiene la estabilidad en tiempo finito.

*Paso n:* Por argumentos de inducción, se obtiene

$$\dot{V}_n \leq -(K_m k_n - C) |s_{nd}| |\sigma_n|^{\frac{\alpha_n+1}{2-p}} - k_{n-1}^{\frac{3-p}{\alpha_n}} \mathcal{V}_{n-1} + \Phi_n(x),$$

la cual es n.d. eligiendo el valor de  $k_n$  suficientemente grande. Para obtener el controlador discontinuo en el paso  $i = n$ , elija el parámetro  $p = (n-2)/(n-1)$ . La estabilidad en tiempo finito se concluye del Corolario 2.1. Como se observa, el diseño de controladores discontinuos y continuos se ha realizado de forma unificada.

**Prueba de la Proposición 4.2 y del Teorema 4.12.** El diseño de la ley de control discontinua  $u$  junto con su FLCR se hace a través de la ley de control auxiliar

$$v_i = -k_i [s_{id}]^{\frac{\alpha_i+1}{d_i}}, \quad \alpha_i = (i-2)p - (i-3), \quad (71)$$

$\forall i = 1, \dots, n$ , con  $p \in [0, 1)$  si  $i = 1$ , y  $p \in [\frac{i-2}{i-1}, 1)$  si  $i \geq 2$ . La ley de control correspondiente se obtiene haciendo  $u = v_n$ .

*Paso 1 y 2:* Estos pasos son idénticos a los presentados en la demostración anterior.

*Paso  $i-1$ :* Se considera que el controlador  $v_{i-1}$  estabiliza el sistema (40) de orden  $(i-1)$  y que la FLCR  $V_{i-1}$  lo garantiza, debido a que su derivada  $\dot{V}_{i-1}$  es n.d..

*Paso  $i$ :* Tomando la derivada de FLCR  $V_i$ , definida por (47), a largo de las trayectorias del sistema (40), se obtiene

$$\dot{V}_i = s_{id} [v_i + w_i] + \frac{d_i}{2-p} k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} s_i |s_{(i-1)d}|^{\frac{1-p}{d_{i-1}}} \dot{s}_{(i-1)d} + \dot{V}_{i-1} + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{i-1}} s_i,$$

donde  $\frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{i-1}} = s_{(i-1)d}$  y  $s_i = x_i - v_{i-1}$ . Cuando  $s_i = s_{id} = 0$ , se tiene que  $\forall (x_1, \dots, x_i) \neq 0$ , se cumple  $\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} < 0$ , ya que  $\dot{V}_i$  es una FLC. Para  $s_i$  y  $s_{id}$  diferentes de cero, debido a que  $x_i = s_i + v_{i-1}$ , no es difícil mostrar que

$$\dot{s}_{(i-1)d} = \sum_{j=2}^i \frac{\partial s_{(i-1)d}}{\partial x_{j-1}} (x_j + w_{j-1}) = \Psi_{(i-1)n} + \frac{d_{i-1}}{\alpha_{i-1}} |x_{i-1}|^{\frac{(2i-5)(1-p)}{\alpha_{i-1}}} s_i + \Psi_{(i-1)\rho},$$

donde la función  $\Psi_{(i-1)\rho} = \sum_{j=2}^i \frac{\partial s_{(i-1)d}}{\partial x_{j-1}} w_{j-1}$ , y  $\Psi_{(i-1)n} = \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial s_{(i-1)d}}{\partial x_{j-1}} x_j +$

$\frac{d_{i-1}}{\alpha_{i-1}} |x_{i-1}|^{\frac{(2i-5)(1-p)}{\alpha_{i-1}}} v_{i-1}$ . Acorde con la Suposición 4.3,  $\Psi_{(i-1)\rho} \leq \Delta_{(i-1)\rho}$ , donde

$\Delta_{(i-1)\rho} = \sum_{j=2}^i \frac{\partial s_{(i-1)d}}{\partial x_{j-1}} w_{j-1}$ , se evalúa tomando  $w_{j-1} = \rho_{j-1} |s_{(j-1)d}|^{\frac{\alpha_j}{d_{j-1}}}$ . Tomando

en cuenta todo lo anterior, y utilizando la ley de control  $v_i$  definida en (71), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -(k_i - \rho_i) |s_{id}|^{\frac{2}{d_i}} - k_{i-1}^{\frac{3-p}{\alpha_i}} \mathcal{V}_{i-1} + \Phi_i^s(x), \\ \Phi_i^s(x) &= k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} s_i \Upsilon_{i-1} + \frac{d_i}{\alpha_{i-1}} k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} |s_{(i-1)d}|^{\frac{1-p}{d_{i-1}}} |x_{i-1}|^{\frac{(2i-5)(1-p)}{\alpha_{i-1}}} |s_i|^2, \end{aligned}$$

donde la función  $\Upsilon_{i-1} = \frac{d_i}{d_{i-1}} |\sigma_{i-1}|^{\frac{1-p}{d_{i-1}}} [\Psi_{(i-1)n} + \Delta_{(i-1)\rho}] + k_{i-1} s_{(i-1)d}$  y  $\mathcal{V}_{i-1} = -\dot{V}_{i-1} \geq 0$ , ya que  $\dot{V}_{i-1} \leq 0$ . Nuevamente, al ser  $V_i$  una FLCR, la derivada  $\dot{V}_i$  cumple con el Lema A.6. Por lo tanto existe  $k_i$  suficientemente grande tal que se logra que  $\dot{V}_i$  sea n.d. y el origen del sistema (40) es RGAE. Ya que el grado de homogeneidad del campo vectorial es negativo aplicando la ley de control se obtiene la estabilidad en tiempo finito.

*Paso n:* Por argumentos de inducción, se obtiene

$$\dot{V}_n \leq -(k_n - \rho_n) |s_{nd}|^{\frac{2}{d_n}} - k_{n-1}^{\frac{3-p}{\alpha_n}} \mathcal{V}_{n-1} + \Phi_n^s(x),$$

la cual se hace n.d eligiendo el valor de  $k_n$  suficientemente grande. Para obtener el controlador discontinuo en el paso  $i = n$ , elija el parámetro  $p = (n-2)/(n-1)$ .

*Solamente, para un sistema de primer orden ( $n = 1$ ), no es posible recuperar un controlador discontinuo.*

*Para más detalles sobre el término  $\Delta_{(i-1)\rho}$  consulte el Apéndice B.*

**Prueba del Teorema 4.13 y de la Proposición 4.5.** Directa de la Proposición 4.1.

**Prueba del Teorema 4.14 y de la Proposición 4.6.** Directa de la Proposición 4.2.

**Prueba de la Proposición 4.3.** Las funciones continuas  $V_n(x)$  y  $\dot{V}_n(x)$  (en ambos casos) son homogéneas de grados  $m_{V_n} = 3 - p$  y  $m_{\dot{V}_n} = 2$ , c.r. a la dilatación (46). Con este hecho, la derivada  $\dot{V}_n$  puede acotarse en función de  $V_n$ . Del Lema A.3, se concluye que la desigualdad (54) se cumple  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , donde  $\kappa_n = \min_{\{x: V_n(x)=1\}}\{-\dot{V}_n(x)\}$ . Recuerde que  $\kappa_n > 0$ , ya que  $-\dot{V}_n(x)$  es p.d.. Como  $p \in [0, 1)$  implica que  $\frac{2}{3-p} \in [2/3, 1)$ , estabilidad en tiempo finito del origen se concluye inmediatamente.

**Prueba de la Proposición 4.4.** Se obtiene de la desigualdad (54). Para una  $n$  arbitraria, utilizando el principio de comparación [46], para  $V_0 = V_n(x_n(0))$ , la solución  $V_n(t)$  satisface  $V_n(t) \leq (V_0^{(1-p)/(3-p)} - \frac{1-p}{3-p}\kappa_n t)^{\frac{3-p}{1-p}}$ ,  $\forall p \in [0, 1)$ . Esta expresión permite obtener la cota del tiempo de convergencia (55) fijando  $V_n(t) = 0$ .

**Prueba del Teorema 4.15 y del Teorema 4.16.** Es directa de la Proposición 4.1. Solo se debe probar el último paso. Por argumentos de inducción, se obtiene que  $\forall p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1)$ ,

$$\dot{V}_n \leq -(k_n - \rho_n)|s_{n,d}|\sigma_n|^{\frac{\alpha_{n+1}}{2-p}} - k_{n-1}^{\frac{3-p}{\alpha_n}} \mathcal{V}_{n-1} + \Phi_n(x) - (K_m K(t, x) - \Xi(t, x))|s_{n,d}|\sigma_n|^{\frac{\alpha_{n+1}}{2-p}}.$$

Eligiendo  $k_n$  suficientemente grande y  $K_m K(t, x) \geq \Xi(t, x)$ ,  $\dot{V}_n$  se hace n.d..

**Prueba del Teorema 4.17 y del Teorema 4.18.** Es directa de la Proposición 4.2. Solo hay que probar el último paso. Por argumentos de inducción, se obtiene que  $\forall p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1)$ ,

$$\dot{V}_n \leq -(k_n - \rho_n)|s_{n,d}|^{\frac{2}{d_n}} - k_{n-1}^{\frac{3-p}{\alpha_n}} \mathcal{V}_{n-1} + \Phi_n^s(x) - (K_m K(t, x) - \Xi(t, x))|s_{n,d}|^{\frac{2}{d_n}}.$$

Eligiendo  $k_n$  suficientemente grande y  $K_m K(t, x) \geq \Xi(t, x)$ ,  $\dot{V}_n$  se hace n.d..



*“La simplicidad consiste en sustraer lo que es lógico y añadir lo específico.”*

— John Maeda [61]

En este capítulo se presentan nuevas clases de controladores discontinuos que mejoran la robustez y velocidad de convergencia de las trayectorias del sistema  $\Sigma_T$ , y cuyo diseño está basado en una FLCR.

### 5.1. GENERALIDADES

Los MDOS poseen características muy atractivas para su empleo como controladores. Sin embargo, hay otros puntos que destacar de estos algoritmos: la velocidad de convergencia es lenta para condiciones iniciales arbitrariamente grandes, no es posible cambiar el tipo de convergencia a través de los parámetros del controlador, solo pueden proveer estabilidad semiglobal y solamente pueden compensar perturbaciones acopladas acotadas por alguna constante conocida. Además, las pruebas se hacen con ayuda de métodos geométricos.

Hasta ahora, los algoritmos más estudiados han sido los MDSO. Por ejemplo, en [72], [31], [95], [92] se estudian el algoritmo Twisting y Terminal a través de una FL débil restringiendo la posibilidad de estimar el tiempo de convergencia y hacer otra clase de extensiones. En [65] se propone una FL para el AST generalizado permitiendo estimar el tiempo de convergencia y sintonizar las ganancias. Un análisis similar no ha sido posible para los algoritmos por MDOS.

Generalmente, muchos controladores propuestos tienen *a priori* una estructura fija, lo cual restringe la posibilidad de manipular el tipo de convergencia del algoritmo o compensar perturbaciones que pueden crecer con el estado.

El CMDT rápidos, propuesto en [96], brinda mejor velocidad de convergencia a las trayectorias del sistema en comparación con el CMDT clásico, [63]. Un CMDT rápidos emplea una SD terminal que contiene términos lineales responsables de una convergencia más rápida durante el modo deslizante. Aunque hay una mejora en la velocidad de convergencia, esta clase de controladores posee los mismos problemas de implementación que un CMDT.

Recientemente, el método que se utiliza en la comunidad de CMDT es el diseño de CMD clásico junto con una Fdes [31], [95], [92]. La Fdes se usa para reescribir, o desingularizar, la SD terminal (rápida), con el objetivo de obtener leyes de control no singulares. Las dos técnicas más conocidas que emplean esta idea son el CMDTNS y CMDTRNS. Esta última mejora la velocidad de convergencia usando señales de control que no se hacen singulares en ningún conjunto del espacio de estados. Hasta ahora, este enfoque ha resultado satisfactorio para sistemas de segundo orden. Sin embargo, para sistemas de orden arbitrario la extensión de la idea de desingularizar la SD terminal (rápida) ya no es obvia y el diseño del controlador parece complicarse conforme el orden del sistema crece, [93], [94]. Un hecho importante, es que en el contexto exclusivo de MDOS nunca se ha tratado de mejorar la velocidad de convergencia.

Para desarrollar una nueva clase de controladores discontinuos que garanticen mejor velocidad de convergencia, y que además, aseguren convergencia en tiempo finito, se necesita de una nueva metodología de diseño. El [Capítulo 4](#) mostró que el MB junto con el empleo de Fdes permite obtener de forma recursiva leyes de

*El controlador de tiempo fijo propuesto en [73] tiene una estructura fija y poco flexible.*

*Para lograr obtener controladores bien definidos en todo el espacio de estados utilizando CMDT, algunos métodos alternativos se han propuestos en [62], [91].*



control no singulares que garantizan convergencia en tiempo finito. Es razonable tratar de utilizar esta idea para diseñar controladores discontinuos con velocidad de convergencia mejorada.

En este trabajo se adoptan dos enfoques para obtener controladores discontinuos con velocidad de convergencia deseada. El primero se basa en una estrategia de conmutación entre dos controladores con distintos tipos de convergencia. Una adecuada estrategia de conmutación para el sistema controlado permite, entre otras cosas, mejorar la velocidad de regulación y tiempo de convergencia cuando se compara con el caso en que solo se usa un controlador, sin comutarlo con otros controladores, [1].

El segundo enfoque se basa en la noción de homogeneidad en el bi-límite [2]. Dicho enfoque garantiza estabilización global del origen del sistema controlado y permite obtener una sola estructura de control con la velocidad de convergencia deseada. La herramienta principal para el diseño del controlador son las nociones de homogeneidad estándar a través del empleo de aproximaciones homogéneas. En particular, la noción de homogeneidad en el 0-límite cuando las trayectorias de estado están cerca del origen y la noción de homogeneidad en el  $\infty$ -límite cuando las trayectorias de estado están lejos del origen.

### 5.1.1. *Objetivos*

El objetivo principal de este capítulo es diseñar, mediante una FLCR, controladores discontinuos que mejoran la velocidad de convergencia en comparación con los controladores discontinuos presentados en el [Capítulo 4](#). Particularmente, se abarcan los siguientes puntos:

- (O1) Se utiliza el método propuesto del capítulo anterior para diseñar una ley de control homogénea, en la cual, dependiendo del valor que tomen sus parámetros, se pueden asignar diferentes tipos de convergencia: racional, exponencial y en tiempo finito. A este controlador lo denominaremos control homogéneo generalizado (CHG) y su diseño incluye robustez antescierta clase de perturbaciones no acopladas.
- (O2) Se desarrolla un controlador híbrido que mejora la velocidad de convergencia. En este sentido, se construye una ley de control que combina el CHG y los controladores discontinuos del capítulo anterior mediante una ley de conmutación. El esquema asegura que el origen del sistema controlado es ETF y resulta ser robusto ante perturbaciones acopladas.
- (O3) Finalmente, se construye un controlador robusto que brinda diferentes velocidades de convergencia sin necesidad de usar una ley de conmutación. La ley de control resultante es robusta ante cierta clase de perturbaciones no acopladas si se encuentran acotadas por cierta clase de funciones conocidas.

Estrictamente hablando, las familias de controladores propuestas ya no hacen que el campo vectorial asociado al sistema en lazo cerrado sea homogéneo de algún grado. Sin embargo, las aproximaciones homogéneas de ambos controladores si hacen homogéneo al campo vectorial del sistema en lazo cerrado. Esto permite determinar el tipo de convergencia presente en el sistema controlado.

## 5.2. DISEÑO DE UNA CLASE DE CONTROL NO HOMOGÉNEO MEDIANTE FLCR

En forma similar al capítulo anterior, primero se presentan los resultados del diseño de control discontinuo cuando se conoce la FLC, o la FLCR, para el sistema

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)(u + \rho(t, x)). \quad (72)$$

*Las características del sistema (72) se han definido en el [Capítulo 3](#).*

Hay que recordar que  $f(t, x) = f_n(x) + \Delta_u(t, x)$  y  $g(t, x) = g_n(x)\xi(t, x)$ . Las funciones  $\rho(t, x)$  y  $\Delta_u(t, x)$  modelan a las perturbaciones acopladas y no acopladas. Como para todo  $x$ ,  $f(t, x)$  está uniformemente acotada en  $t$ ,  $\Delta_u(t, x)$  también se encuentra uniformemente acotada en  $t$ ,  $\forall t \geq 0$ . Para generalizar algunos resultados del capítulo anterior, se requieren las siguientes hipótesis

- H'0: El origen  $x = 0$  es un punto de equilibrio del sistema nominal (perturbado).
- H'1: La función escalar  $\xi(t, x)$  satisface  $\xi(t, x) \geq \gamma$ , siendo  $\gamma > 0$  una constante conocida.
- H'2: El vector  $\Delta_u(t, x)$  es desvaneciente en el origen. Si  $x \rightarrow 0$  entonces  $\Delta_u(t, x) \rightarrow 0$ ,  $\forall t \geq 0$ . Por lo tanto,  $f(t, x)$  es desvaneciente en el origen.
- H'3:  $\rho(t, x)$  pertenece a la clase de funciones  $\mathcal{W}_1 = \{\rho(t, x) \in \mathbb{R} : |\rho(t, x)| \leq C_0 + C_\infty |L_{g_n} V|^q, C_0, C_\infty \geq 0\}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$ , donde  $q \in (0, \infty)$ .
- H'4: El campo vectorial del sistema nominal

$$\dot{x} = f_n(x) + g_n(x)\xi(t, x)u(x), \tag{73}$$

y su FLC es homogénea en el bi-límite, es decir, existen dos aproximaciones homogéneas de grado  $l_0 \in \mathbb{R}$  y  $l_\infty \in \mathbb{R}$ , siendo  $l_0 < l_\infty$ , del sistema (73), y las cuales se denotan como

$$\sum_{N_0} : \dot{x}_0 = f_{0n}(x) + g_0(x)\xi(t, x)u_0(x), \quad \sum_{N_\infty} : \dot{x}_\infty = f_{\infty n}(x) + g_\infty(x)\xi(t, x)u_\infty(x). \tag{74}$$

tales que las aproximaciones de su FLC  $V_0$  y  $V_\infty$  tienen grados de homogeneidad  $m_0$  y  $m_\infty$ . El sistema  $\sum_{N_0}$  y  $V_0$  son homogéneas c.r. a una dilatación, y  $\sum_{N_\infty}$  y  $V_\infty$  son homogéneas c.r. a otra dilatación.

- H'5: Existe una FLCR homogénea en el bi-límite de grados  $m_0$  y  $m_\infty$ , cuando las perturbaciones no acopladas y acopladas están actuando sobre el sistema.

- H'6: Existen constantes positivas  $d_i, i = 1, \dots, n-1$ , tales que  $|\Delta_{ui}(t, x)| \leq d_i (\|x\|_{r_0, p}^{l_0 + r_i^0} + \|x\|_{r_\infty, p}^{l_\infty + r_i^\infty})$ , lo cual establece que las perturbaciones son dominadas por funciones homogéneas en el bi-límite. Las funciones  $\Delta_{ui}(t, x)$  son las componentes del vector  $\Delta_u(t, x)$ .

La hipótesis **H'6** asegura que el sistema en lazo cerrado esté dominado por uno homogéneo en el bi-límite.

### 5.2.1. Control discontinuo homogéneo en el bi-límite

Para diseñar una entrada de control solo se necesita contar con una FLCR. Si no se imponen condiciones adicionales, solamente es posible asegurar que el origen del sistema en lazo cerrado es local y AE. En este caso, la desventaja más grande es la imposibilidad de caracterizar el tipo de convergencia de las trayectorias del sistema. El tipo de convergencia puede determinarse si se impone alguna condición extra al sistema y al controlador discontinuo. Para ello, se utiliza el concepto de aproximación homogénea en el 0-límite y el  $\infty$ -límite.

**Teorema 5.1** *Sea  $V(x)$  una FLC homogénea en el bi-límite de grados  $m_0$  y  $m_\infty$ , y  $u = -k_0 [L_{g_n} V]^0 - k_\infty [L_{g_n} V]^q, q \in (0, \infty)$ , la entrada de control discontinua para el sistema nominal (73). Si  $f_n(x)$  y  $g_n(x)$  son campos vectoriales homogéneos en el bi-límite de grados  $l_0$  y  $l_\infty$ , y si las ganancias  $k_0$  y  $k_\infty$  se eligen suficientemente grandes, entonces el origen  $x = 0$  es GAE. Además, (i) si  $l_0 < l_\infty < 0$ , el origen es ETF; (ii) si  $l_0 < 0$  y  $l_\infty = 0$ , el origen es ETFdE; (iii) si  $l_0 < 0 < l_\infty$ , el origen es ETFj;*

*Nuevamente, se hace uso de las propiedades de homogeneidad ponderada presentadas en el Capítulo 2.*

Teorema 5.1 muestra como diseñar un control discontinuo para el sistema en lazo cerrado, cuando el campo vectorial de sistema (73) es dominado por uno que es homogéneo en el bi-límite y cuando se cuenta con la FLCR. El grado de homogeneidad  $l_0 < 0$  de la aproximación en el 0-límite del campo vectorial del sistema en lazo cerrado asegura convergencia en tiempo finito.

**Teorema 5.2** Sea  $V(x)$  una FLCR homogénea en el bi-límite de grados  $m_0$  y  $m_\infty$ , y  $u = -k_0[L_{g_n}V]^0 - k_\infty[L_{g_n}V]^q$ ,  $q \in (0, \infty)$ . Bajo las hipótesis **H'3** y **H'6**, si las ganancias  $k_0$  y  $k_\infty$  se eligen suficientemente grandes, entonces el origen  $x = 0$  de (72) es RGAE. Además, los puntos **(i)-(iii)** del Teorema 5.1 se cumplen.

El origen del sistema en lazo cerrado es GETF si las perturbaciones (acopladas y no acopladas) están uniformemente acotadas por funciones conocidas y homogéneas en el bi-límite, y que preservan los grados de homogeneidad en el bi-límite del sistema nominal.

Para finalizar, nuevamente se restringe el análisis al sistema  $\Sigma_T$  (40) descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + w_i(t, x), & \forall i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= b(t, x)u + w_n(t, x), \end{aligned} \quad (75)$$

siendo  $n$  el orden del sistema. Las incertidumbres no acopladas definen el siguiente vector  $\Delta_u(t, x) = [w_1(\cdot), \dots, w_{n-1}(\cdot), 0]^T$ . Las hipótesis adicionales son

**H'7**: Las funciones  $b(t, x)$  y  $w_m(t, x)$  satisfacen  $b(t, x) \in [K_m, K_M]$ ,  $K_M \geq K_m > 0$ , y  $|w_m(t, x)| \leq C_0 + C_\infty \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right|^q$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall t \geq 0$ , con  $q \in (0, \infty)$ .

**H'8**: Para toda  $i = 1, \dots, n-1$ , existen constantes positivas  $\rho_i$  tales que

$$|\Delta_{ui}(t, x)| \leq \rho_i \left[ (|x_1|^{\frac{l_0+r_1^0}{r_1^0}} + \dots + |x_i|^{\frac{l_0+r_i^0}{r_i^0}}) + (|x_1|^{\frac{l_\infty+r_1^\infty}{r_1^\infty}} + \dots + |x_i|^{\frac{l_\infty+r_i^\infty}{r_i^\infty}}) \right].$$

El lado derecho de la desigualdad es homogéneo en el bi-límite de grados  $l_0$  y  $l_\infty$ , es decir,

$$\begin{aligned} \rho_i (|e^{r_1^0} x_1|^{\frac{l_0+r_1^0}{r_1^0}} + \dots + |e^{r_i^0} x_i|^{\frac{l_0+r_i^0}{r_i^0}}) &= \rho_i e^{l_0+r_i^0} (|x_1|^{\frac{l_0+r_1^0}{r_1^0}} + \dots + |x_i|^{\frac{l_0+r_i^0}{r_i^0}}) \\ \rho_i (|e^{r_1^\infty} x_1|^{\frac{l_\infty+r_1^\infty}{r_1^\infty}} + \dots + |e^{r_i^\infty} x_i|^{\frac{l_\infty+r_i^\infty}{r_i^\infty}}) &= \rho_i e^{l_\infty+r_i^\infty} (|x_1|^{\frac{l_\infty+r_1^\infty}{r_1^\infty}} + \dots + |x_i|^{\frac{l_\infty+r_i^\infty}{r_i^\infty}}). \end{aligned} \quad (76)$$

Para poder construir una FLC homogénea en el bi-límite para el sistema (75) se necesita hallar cuales son los vectores de pesos  $r_0$  y  $r_\infty$  correctos para que el campo vectorial del sistema en lazo cerrado sea homogéneo en el bi-límite de grados  $l_0$  y  $l_\infty$ .

Considere que el sistema (75) está perturbado únicamente por términos acoplados, es decir, con  $\Delta_u(t, x) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ .

**Teorema 5.3** Considere que la hipótesis **H'7** se cumple. Sea  $V(x)$  una FLCR homogénea en el bi-límite de grados  $m_0$  y  $m_\infty$ ,  $f_{0n}(x)$  de grado homogéneo  $l_0$ ,  $f_{\infty n}(x)$  de grado homogéneo  $l_\infty$ , y  $u = -k_0 \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right]^0 - k_\infty \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right]^q$ ,  $q \in (0, \infty)$ , la entrada de control discontinua. Entonces, si  $\Delta_u(t, x) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ ,

- (I) la ID asociada a  $\Sigma_{N0}$  es homogénea de grado  $l_0 < 0$  y los pesos  $r_{0,i}$  cumplen  $(n+1-i)l_0 + r_{0,i} = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .
- (II)  $\Sigma_{N\infty}$  es homogéneo de grado  $l_\infty$  arbitrario y los pesos  $r_{\infty,i}$  cumplen  $(n+1-i)l_\infty + r_{\infty,i} = m_\infty q$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .

La hipótesis **H'8** es ligeramente diferente a la condición **H'6**, ya que no está en la forma de alguna norma.

(III) Si las ganancias  $k_0$  y  $k_\infty$  se eligen suficientemente grandes, el origen  $x = 0$  de (75) es RGAE. Además, se cumplen los puntos (i)-(iii) del Teorema 5.1.

Las aproximaciones homogéneas en el 0-límite y en el  $\infty$ -límite tienen distinto grado de homogeneidad c.r. a diferentes vectores de peso. El término discontinuo es el responsable de la estabilización robusta y en tiempo finito ante perturbaciones no desvanecientes.

La aproximación homogénea en el 0-límite de la parte discontinua de la ley de control únicamente puede ser de grado  $l_0 < 0$ .

**Teorema 5.4** Sea  $V(x)$  una FLCR homogénea en el bi-límite de grados  $m_0$  y  $m_\infty$ , y  $u = -k_0 \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right]^0 - k_\infty \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right]^q$ ,  $q \in (0, \infty)$ , la entrada de control discontinua. Bajo las hipótesis **H'7** y **H'8**, si las ganancias  $k_0$  y  $k_\infty$  se eligen suficientemente grandes, entonces el origen  $x = 0$  de (75) es RGAE. Además, sólo se cumplen los puntos (i)-(iii) del Teorema 5.1.

### 5.2.2. Control continuo homogéneo en el bi-límite

**Teorema 5.5** Sea  $V(x)$  una FLC homogénea en el bi-límite de grados  $m_0$  y  $m_\infty$ , y  $u = -k_0 [L_{g_n} V]^p - k_\infty [L_{g_n} V]^q$ , con  $p \in (0, \infty)$ ,  $q \in (0, \infty)$ , y  $p < q$ , la entrada de control para el sistema nominal (73). Si los grados de homogeneidad en el bi-límite de  $f_n(x)$  y  $g_n(x)$  satisfacen  $l_0 = l_{0f} = l_{0g} + (m_0 + l_{0g})p$  y  $l_\infty = l_{\infty f} = l_{\infty g} + (m_\infty + l_{\infty g})q$ , y si las ganancias  $k_0$  y  $k_\infty$  se eligen suficientemente grandes, entonces el origen  $x = 0$  de (73) es GAE.

En ausencia de perturbaciones, todo sistema que cumpla las hipótesis del Teorema anterior es estabilizable globalmente por un controlador continuo homogéneo en el bi-límite. Para el caso perturbado, hay que cambiar la hipótesis **H'3** por la siguiente

Si se permite que  $p = 0$ , se recupera el resultado del Teorema 5.1.

**H''3:**  $\rho(t, x)$  pertenece a la clase de funciones  $\mathcal{W}_2 = \{\rho(t, x) \in \mathbb{R} : |\rho(t, x)| \leq C_0 [L_{g_n} V]^p + C_\infty [L_{g_n} V]^q, C_0, C_\infty \geq 0\}$ , con  $p \in (0, \infty)$ ,  $q \in (0, \infty)$ , y  $p < q$ .

**Teorema 5.6** Considere que **H''3** y **H'6** se cumplen. Sea  $V(x)$  una FLCR homogénea en el bi-límite de grados  $m_0$  y  $m_\infty$ , y  $u = -k_0 [L_{g_n} V]^p - k_\infty [L_{g_n} V]^q$ ,  $p \in (0, \infty)$ ,  $q \in (0, \infty)$ , y  $p < q$ , la entrada de control. Si los grados de homogeneidad en el bi-límite de  $f_n(x)$  y  $g_n(x)$  satisfacen Teorema 5.5 y si las ganancias  $k_0$  y  $k_\infty$  se eligen suficientemente grandes, entonces el origen  $x = 0$  de (72) es RGAE.

Para establecer los resultados para el sistema (75), hay que cambiar ligeramente la hipótesis **H'7**,

**H''7:** Las funciones  $b(t, x)$  y  $w_m(t, x)$  satisfacen  $b(t, x) \in [K_m, K_M]$ ,  $K_M \geq K_m > 0$ , y  $|w_m(t, x)| \leq C_0 [L_{g_n} V]^p + C_\infty [L_{g_n} V]^q$ ,  $C_0, C_\infty \geq 0$ ,  $p \in (0, \infty)$ ,  $q \in (0, \infty)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \geq 0$ . Los parámetros  $p$  y  $q$  cumplen  $p < q$ .

**Teorema 5.7** Considere que **H'7** se cumple. Sea  $V(x)$  una FLC homogénea en el bi-límite de grados  $m_0$  y  $m_\infty$ ,  $f_{0n}(x)$  de grado homogéneo  $l_0$ ,  $f_{\infty n}(x)$  de grado homogéneo  $l_\infty$ , y  $u = -k_0 \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right]^p - k_\infty \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right]^q$ ,  $p \in (0, \infty)$ ,  $q \in (0, \infty)$  y  $p < q$ , la entrada de control continua. Entonces, cuando  $\Delta_u(t, x) = 0, \forall t \geq 0$ ,

(I)  $\Sigma_{N0}$  es homogéneo de grado  $l_0$  arbitrario y los pesos  $r_{0,i}$  cumplen  $(n+1-i)l_0 + r_{0,i} = m_0 p, \forall i = 1, \dots, n$ .

(II)  $\Sigma_{N\infty}$  es homogéneo de grado  $l_\infty$  arbitrario y los pesos  $r_{\infty,i}$  cumplen  $(n+1-i)l_\infty + r_{\infty,i} = m_\infty q, \forall i = 1, \dots, n$ .

(III) Si las ganancias  $k_0$  y  $k_\infty$  se eligen suficientemente grandes, el origen  $x = 0$  de (75) es RGAE.

En el caso de que existan perturbaciones no acopladas se cuenta con el siguiente resultado.

**Teorema 5.8** Sea  $V(x)$  una FLCR homogénea en el bi-límite de grados  $m_0$  y  $m_\infty$ , y  $u = -k_0 \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right]^p - k_\infty \left[ \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right]^q$ ,  $p \in [0, \infty)$ ,  $q \in [0, \infty)$  y  $p < q$ , la entrada de control. Bajo las hipótesis **H'7** y **H'8**, si las ganancias  $k_0$  y  $k_\infty$  se eligen suficientemente grandes, entonces el origen  $x = 0$  de (75) es RGAE.

Los puntos (i)-(iii) del Teorema 5.1 se cumplen para el controlador continuo si  $l_0 < 0$ .

Nuevamente, el diseño de controladores discontinuos no homogéneos se reduce a hallar una FLCR apropiada. En las siguientes secciones se aborda al problema de diseñar leyes de control discontinuas para mejorar la velocidad de convergencia del sistema no lineal  $\Sigma_T$  utilizando una FLCR (véase Subsección 5.3.1).

### 5.3. CONTROLADOR HOMOGÉNEO GENERALIZADO (CHG)

En esta sección se propone un controlador homogéneo que permite obtener diferentes tipos de convergencia eligiendo correctamente el valor de sus parámetros.

Para ello, se define la Fdes como  $\sigma_i = \left[ x_i \right]^{\frac{2-p}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{2-p}{\alpha_i}} \left[ \sigma_{i-1} \right]^{\frac{\alpha_i-1}{\alpha_i}} \zeta_{i-1}$ , con  $\sigma_1 = x_1$ ,  $\alpha_i = (i-2)p - (i-3)$ ,  $\zeta_i = \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i}$ ,  $\beta_i = (i-2)q + (3-i)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , y donde  $p \in [0, 1)$  y  $q \in [p, 2)$ .

Considere el sistema dinámico descrito por (75), donde los términos de perturbación están uniformemente acotados por funciones conocidas en  $t$ ,  $\forall t \geq 0$ , y satisfacen la siguiente condición.

**Suposición 5.1** Para cada  $i = 1, \dots, n$ , y alguna  $p \in [0, 1)$ ,  $q \in [1, 2)$ , las perturbaciones pertenecen a la clase  $\mathcal{W}_3 = \{w_i \in \mathbb{R} : |w_i(t, x)| \leq \rho_i |\sigma_i|^{\frac{\alpha_i}{2-p}} \zeta_i, \rho_i \geq 0\}$ .

Para los resultados de esta sección se considera que la perturbación acoplada  $w_n(t, x)$  satisface la Suposición 5.1. Esta condición caracteriza a una gran variedad de perturbaciones. Por ejemplo:

- (I) para cualquier  $q \geq p$  y  $p \in [0, 1)$ , las perturbaciones están acotadas por funciones continuas.
- (II) para  $q \in [p, 1)$  y  $p \in [0, 1)$ , las perturbaciones están acotadas por funciones continuas que no escapan a infinito en tiempo finito .
- (III) para  $q \in [1, 2)$  y  $p \in [0, 1)$ , las perturbaciones están acotadas por funciones continuas que escapan a infinito en tiempo finito .
- (IV) para  $q = p = (n-2)/(n-1)$ , las cotas de  $w_i(t, x)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , son funciones continuas, pero la perturbación acoplada  $w_n(t, x)$  está acotada por una constante positiva.
- (v) para  $p \in [0, 1)$  y  $q = 1$ , las cotas de  $w_i(t, x)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , son funciones continuas que crecen similar a una función lineal.

Bajo la Suposición 5.1, es posible diseñar la siguiente clase de controladores por retroalimentación de estado con tipo de convergencia garantizada para el sistema (75).

**Teorema 5.9** Considere que la Suposición 5.1 se cumple globalmente, con  $p \in [0, 1)$ , si  $n = 1$ , y  $p \in \left[ \frac{n-2}{n-1}, 1 \right)$ , si  $n \geq 2$ . Elija la ley de control homogénea

$$u = -k_n \left[ \sigma_n \right]^{\frac{\alpha_n}{2-p}} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}. \quad (77)$$

Entonces, existen ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , suficientemente grandes tales que el origen es  $x = 0$  del sistema (75) en lazo cerrado es RGAE. Además, las siguientes afirmaciones son ciertas: (i) si  $q \in (1, 2)$ , el origen es RE; (ii) si  $q = 1$ , el origen es EE; (iii) si  $q \in [p, 1)$ , el origen es ETF.

El modelo exacto de las perturbaciones no se requiere, es suficiente con conocer solamente una cota de las mismas.

Si la Suposición 5.1 se satisface localmente, entonces, solo puede garantizarse estabilidad local.

**Comentario 5.1** Las ganancias se pueden obtener de forma explícita hasta orden dos. Para  $n = 1$ , elija  $K_m k_1 > \rho_1$ . Para  $n = 2$ , elija  $\tilde{k}_1 = k_1 - \rho_1 > 0$ , y

$$K_m k_2 > \frac{2-p}{2-q} \frac{2 \cdot 2^{\frac{1-p}{2-p}}}{2+q-p} \cdot \left[ 2^{\frac{1-p}{2-p}} \left[ \frac{q-p}{2+q-p} \frac{2^{\frac{2(1-p)}{2-p}}}{\theta_{21} k_1 \tilde{k}_1} \right]^{q-p} + \frac{\rho_1}{2} \left[ \frac{1+q-p}{2+q-p} \frac{2^{\frac{1-p}{2-p}} \rho_1}{\theta_{22} k_1 \tilde{k}_1} \right]^{1+q-p} \right] k_1^{2-p} + \rho_2. \quad (78)$$

donde las constantes  $\theta_{21}$  y  $\theta_{22}$  cumplen  $\theta_{21} + \theta_{22} = 1$ .

El CHG garantiza diferentes tipos de convergencia del sistema en lazo cerrado dependiendo del valor que tome el parámetro  $q$  c.r. al parámetro  $p \in [0, 1)$ . El campo vectorial del sistema en lazo cerrado con el controlador (77) es homogéneo de grado  $l = q - 1$ , c.r. a la dilatación

$$\Delta_\epsilon^r x = (\epsilon^{2-q} x_1, \epsilon^1 x_2, \epsilon^q x_3, \dots, \epsilon^{\beta_n} x_n), \quad \forall \epsilon > 0. \quad (79)$$

Para diferentes valores de  $q$ , el campo vectorial es homogéneo de algún grado. Esta importante particularidad es interesante, debido a que de la misma estructura de control es posible recuperar, controladores discontinuos, continuos, exponenciales y racionales, todos homogéneos. Generalmente, solo es posible diseñar una ley de control tal que el sistema en lazo cerrado tiene cierto grado de homogeneidad positivo o negativo. Recuerde que para grados de homogeneidad positivos, las trayectorias del sistema convergen asintóticamente al origen pero además, cualquier vecindad del origen es ATFj. Para grados de homogeneidad negativos, existe convergencia en tiempo finito.

Las ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , se diseñan suficientemente grandes en el orden del índice, es decir,  $k_1 \ll k_2 \ll \dots \ll k_n$ . En seguida, se presentan algunos controladores para  $n \leq 4$ ,

- (1)  $v_1 = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{2-q}}, k_1 > 0, \forall q \in [0, 2)$ ;
- (2)  $v_2 = -k_2 [\sigma_2]^{\frac{q}{2-p}}, \sigma_2 = [x_2]^{2-p} + k_1^{2-p} [x_1]^{\frac{2-p}{2-q}}, p \in [0, 1), y \forall q \in (p, 2)$ ;
- (3)  $v_3 = -k_3 [\sigma_3]^{\frac{p}{2-p} \frac{2q-1}{q}}, \sigma_3 = [x_3]^{\frac{2-p}{p}} + k_2^{\frac{2-p}{p}} [\sigma_2]^{\frac{q}{p}}, p \in [1/2, 1), y \forall q \in (p, 2)$ ;
- (4)  $v_4 = -k_4 [\sigma_4]^{\frac{2p-1}{2-p} \frac{3q-2}{2q-1}}, \sigma_4 = [x_4]^{\frac{2-p}{2p-1}} + k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} [\sigma_3]^{\frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q}}, y \forall p \in [2/3, 1), \forall q \in (p, 2)$ .

Diferentes leyes de control derivan del Teorema 5.9. Por supuesto, una vez que la ley de control se haya elegido, el sistema (75) es robusto ante cierta clase de perturbaciones acopladas y no acopladas. Cabe resaltar que, ningún controlador reportado en la literatura tiene la flexibilidad de recuperar tantos controladores homogéneos de la misma estructura de control.

**Controlador discontinuo homogéneo con convergencia en tiempo finito.** Los controladores discontinuos del Teorema 4.11, introducidos en el capítulo anterior, se obtienen fijando  $q = p = \frac{n-2}{n-1}$ . Estos controladores rechazan perturbaciones acopladas no desvanecientes.

**Controlador continuo homogéneo con convergencia en tiempo finito.** Del CHG se recupera un clase importante de controladores con convergencia en tiempo finito si uno selecciona los parámetros  $q \in [p, 1)$  y  $p \in [0, 1)$ , si  $n = 1$ , ó  $p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1)$ ,  $\forall n \geq 2$ . Estos controladores no son robustos ante perturbaciones acopladas no desvanecientes.

**Controlador homogéneo con convergencia exponencial.** Eligiendo los parámetros  $q = p = 1$ , se recupera el bien conocido controlador por retroalimentación de estados lineal. Sin embargo, existe otro controlador que no tiene estructura lineal y que es capaz de garantizar convergencia exponencial. Considere que  $q = 1$  y  $p \in (\frac{n-2}{n-1}, 1)$ ,

*El Teorema 5.9 solamente da condiciones de suficiencia sobre las ganancias.*



entonces,  $\sigma_i = [\chi_i]^{\frac{2-p}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{2-p}{\alpha_i}} [\sigma_{i-1}]^{\frac{\alpha_i-1}{\alpha_i}}$ , donde  $\sigma_1 = x_1$  y  $\alpha_i = (i-2)p - (i-3)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .

**Corolario 5.1** *Considere que la Suposición que 5.1 se cumple globalmente, con  $q = 1$  y  $p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1)$ . Elija la ley de control homogénea*

$$u_{\text{exp}} = -k_n [\sigma_n]^{\frac{\alpha_{n+1}}{2-p}}. \quad (80)$$

Entonces, existen ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , suficientemente grandes tales que el origen  $x = 0$  del sistema (75) es robusto y EE.

**Comentario 5.2** *Para  $n = 1$ , seleccione  $K_m k_1 > \rho_1$ . Para  $n = 2$ , seleccione  $\tilde{k}_1 = k_1 - \rho_1 > 0$ , y  $K_m k_2$  se obtiene de (78) con  $q = 1$ .*

Algunos controladores derivados del Corolario 5.1 son:

$$\begin{aligned} (1) \quad v_1 &= -k_1 [\chi_1] & (2) \quad v_2 &= -k_2 [\sigma_2]^{\frac{1}{2-p}}, \sigma_2 = [\chi_2]^{2-p} + k_1^{2-p} [\chi_1]^{2-p}, p \in [0, 1), \\ (3) \quad v_3 &= -k_3 [\sigma_3]^{\frac{p}{2-p}}, \sigma_3 = [\chi_3]^{\frac{2-p}{p}} + k_2^{\frac{2-p}{p}} [\sigma_2]^{\frac{1}{p}}, p \in [1/2, 1), \\ (4) \quad v_4 &= -k_4 [\sigma_4]^{\frac{2p-1}{2-p}}, \sigma_4 = [\chi_4]^{\frac{2-p}{2p-1}} + k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} [\sigma_3]^{\frac{p}{2p-1}}, p \in [2/3, 1). \end{aligned}$$

**Controlador con la propiedad de atractividad en tiempo fijo.** Los controladores con la propiedad de atractividad en tiempo fijo se obtiene cuando los parámetros se eligen como  $q > 1$  y  $p \in [0, 1)$ , si  $n = 1$ , o  $p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1)$ ,  $\forall n \geq 2$ .

Fijando  $p = 1$  y  $q > 1$ , se recupera una clase de controladores racionales. Esta clase de controladores se utilizan para diseñar una SD en el Capítulo 7.

### 5.3.1. La FLCR del sistema

A continuación se presenta la FLCR que permite obtener el controlador (77). La Proposición 5.1 establece cual es la forma explícita la FLCR que demuestra la estabilidad y robustez del sistema en lazo cerrado con el controlador propuesto.

**Proposición 5.1** *La función continua y diferenciable*

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{\alpha_n}{3-p} |\chi_n|^{\frac{3-p}{\alpha_n}} + k_{n-1}^{\frac{d_n}{\alpha_n}} [\sigma_{n-1}]^{\frac{d_n}{2-p} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}} \zeta_{n-1} \chi_n + \frac{d_n}{3-p} k_{n-1}^{\frac{3-p}{\alpha_n}} |\sigma_{n-1}|^{\frac{3-p}{2-p} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}} \zeta_{n-1} \\ &\quad + \delta_{n-1} V_{n-1}^{\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}} \zeta_{n-1}, \quad \delta_{n-1} = k_{n-1}^{\frac{3-p}{\alpha_n}}, \end{aligned} \quad (81)$$

con  $V_1 = \frac{\alpha_1}{3-p} |\chi_1|^{\frac{3-p}{\alpha_1}}$ , es una FLCR global para el sistema (75).

El estado virtual  $\sigma_n$ , la ley de control  $u$ , la FLCR  $V_n$  y su derivada  $\dot{V}_n$ , son homogéneas c.r. a la dilatación (79), es decir,  $\sigma_n(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{\beta_n} \sigma_n(x)$ ,  $u(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{\beta_{n+1}} u(x)$ ,  $V_n(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{\frac{3-p}{\alpha_n} \beta_n} V_n(x)$ ,  $\dot{V}_n(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{\frac{\omega_n}{\alpha_n}} \dot{V}_n(x)$ , donde  $\omega_n = (2n-3)q - (2(n-3) + p)$ . El tipo de convergencia de las trayectorias queda caracterizada por dicha FLCR.

**Proposición 5.2** *Elija la ley de control (77). Entonces, la derivada c.r. al tiempo  $\dot{V}_n$  de la FLCR a lo largo de las trayectorias del sistema (75) satisface la desigualdad diferencial*

$$\dot{V}_n \leq -\kappa_n V_n^{\frac{\omega_n}{(3-p)\beta_n}}(x), \quad (82)$$

donde  $\kappa_n$  es un escalar que depende de las ganancias  $(k_1, \dots, k_n)$  y de las constantes  $(\rho_1, \dots, \rho_n)$ .

**Comentario 5.3** *Cuando  $n = 1$ , la derivada  $\dot{V}_1$  satisface  $\dot{V}_1 \leq -(\frac{3-p}{2-p})^{\frac{2+q-p}{3-p}} \alpha_{11} V_1^{\frac{2+q-p}{3-p}}$ , con  $\alpha_{11} = k_1 - \rho_1$ . Note que  $\forall p \in [0, 1)$   $q > 1$ , se cumple  $\frac{2+q-p}{3-p} > 1$ , entonces, se concluye que el origen es RE. Por otro lado,  $\frac{2+q-p}{3-p} < 1$ ,  $\forall p \in [0, 1)$ , si  $p \leq q < 1$ , entonces, se concluye que el origen es ETF.*

La desigualdad (82) caracteriza el tipo de convergencia de las trayectorias del sistema en lazo cerrado.

Básicamente, si el exponente

(I)  $\frac{\omega_n}{(3-p)\beta_n} < 1$ , la convergencia es en tiempo finito.

(II)  $\frac{\omega_n}{(3-p)\beta_n} = 1$ , la convergencia es exponencial.

(III)  $\frac{\omega_n}{(3-p)\beta_n} > 1$ , la convergencia es racional, pero además, la atractividad en tiempo fijo es garantizada.

Con la ayuda de la FLCR se puede obtener una estimación del tiempo de convergencia.

**Proposición 5.3** *Elija la ley de control (77). Entonces,  $\forall p \in [0, 1)$  si  $n = 1$ , y  $\forall p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1)$  si  $n \geq 2$ , cualquier trayectoria del sistema (75) iniciada con cualquier estado inicial  $x_n(0) \in \mathbb{R}^n$  converge al origen*

(I) *racionalmente  $\forall q \in (1, 2)$ , y el tiempo de convergencia  $T(x_n(0))$  de cualquier trayectoria, con  $x_n(0) \in B_r^c$ , a una vecindad  $B_r$  satisface*

$$T(x_n(0)) \leq \frac{(3-p)\beta_n}{(q-1)\alpha_n \kappa_n} \left[ r^{-\frac{(q-1)\alpha_n}{(3-p)\beta_n}} - V_n^{-\frac{(q-1)\alpha_n}{(3-p)\beta_n}}(x_n(0)) \right]. \quad (83)$$

*Además, el tiempo de convergencia está acotado por una constante de tiempo fijo*

$$T_r = \frac{(3-p)\beta_n}{(q-1)\alpha_n \kappa_n} r^{-\frac{(q-1)\alpha_n}{(3-p)\beta_n}}; \quad (84)$$

(II) *exponencialmente para  $q = 1$ ;*

(III) *en tiempo finito  $\forall q \in [p, 1)$ , y el tiempo de convergencia satisface*

$$T(x_n(0)) \leq \frac{(3-p)\beta_n}{(1-q)\alpha_n \kappa_n} V_n^{\frac{(1-q)\alpha_n}{(3-p)\beta_n}}(x_n(0)). \quad (85)$$

### 5.3.2. Mejoramiento de la robustez del CHG

En general, el controlador (77) es continuo cuando el parámetro  $q \in (p, 1)$ , por lo que el sistema en lazo cerrado no es robusto ante perturbaciones acopladas que no desvanecen en el origen. Para resolver este problema se hace uso de la técnica conocida como rediseño de Lyapunov. Dicha técnica permite mejorar la robustez del sistema en lazo cerrado en presencia de perturbaciones acopladas y acotadas.

**Suposición 5.2** *La perturbación acoplada satisface  $|w_n(t, x)| \leq C + \rho_n |\sigma_n|^{\frac{\alpha_n}{2-p}} \zeta_n$ , con  $C, \rho_n \geq 0$ .*

Observe que la perturbación acoplada puede crecer en función del estado, pero además, la perturbación no necesariamente desvanece en el origen.

**Teorema 5.10** *Considere que las Suposiciones 5.1 y 5.2 se cumplen. Elija la ley de control*

$$u_{l_2} = -k_d [\sigma_n]^0 - k_n [\sigma_n]^{\frac{\alpha_n}{2-p} \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}}. \quad (86)$$

*donde los parámetros  $q$  y  $q$  se eligen como en el Teorema 5.9. Entonces, existen ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , suficientemente grandes y  $k_d > \rho_m$ , tales que el origen del sistema (75) es RGAE.*

El resultado anterior es válido para el caso en donde solo aparezcan perturbaciones acopladas. Observe que se ha introducido un término discontinuo a la ley de control para mejorar sus propiedades de robustez ante perturbaciones acopladas y que no necesariamente se desvanecen en el origen del sistema.

El campo vectorial asociado al sistema en lazo cerrado con la ley de control (86) ya no es homogéneo. Sin embargo, el parámetro  $l_2 = q - 1$  sigue determinando el tipo de convergencia y por lo tanto,

*Cuando hay atractividad en tiempo fijo, el tiempo de convergencia de cualquier trayectoria a una vecindad del origen está uniformemente acotada por un constante.*

*Para más detalles sobre el rediseño de Lyapunov, el lector puede consultar [46].*

*Las observaciones hechas para la Suposición 5.1, son válidas para la parte de la cota de la perturbación que depende de los estados.*



- (I) si los parámetros se seleccionan como  $q \in [p, 1)$ , las trayectorias llegarán en tiempo finito;
- (II) si el parámetro  $q = 1$ , las trayectorias llegarán exponencialmente al origen,
- (III) si el parámetro  $q \in (1, 2)$ , las trayectorias llegarán en tiempo fijo a una vecindad del origen.

La función (81) es una FLCR, por lo tanto, se puede utilizar para estudiar la estabilidad en el caso con perturbaciones acopladas.

#### 5.4. VELOCIDAD DE CONVERGENCIA MEJORADA: CONTROL HÍBRIDO

El CHG puede combinarse a través de un algoritmo híbrido de control con el objetivo de mejorar la velocidad de convergencia de los controladores discontinuos del **Capítulo 4**. La idea básica es combinar dichos controladores discontinuos con convergencia en tiempo finito con los controladores racionales o exponenciales. Básicamente, se busca combinar dos controladores que tienen distintos tipos de convergencia. Desafortunadamente, el diseño solo funciona para el caso con perturbaciones acopladas, es decir, cuando  $\Delta_u(t, x) = 0, \forall t \geq 0$ . En este caso, el sistema (75) queda descrito por

*Recuerde que tales controladores garantizan convergencia en tiempo finito al origen.*

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1}, & \forall i &= 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= b(t, x)u + w_n(t, x), \end{aligned} \quad (87)$$

donde la perturbación se considera solamente acotada, es decir,  $|w_n(t, x)| \leq \rho_m$ . Por propósitos de claridad, se redefine la función  $V_n(x)$  como  $V_{n, l_2}(x)$ . El subíndice  $l_2$ , representa el grado de homogeneidad del sistema retroalimentado por el CHG. Si el parámetro  $l_2 = 0$ , la función  $V_{n, 0}$  representa la FLCR para el sistema cuando se requiere estabilidad exponencial. Para el caso en que  $l_2 \in [-1, 0)$ , la función  $V_{n, l_2}$  define la FLCR del sistema cuando se necesita estabilidad en tiempo finito. Particularmente, para el caso cuando  $p = q = (n-1)/(n-2)$ , la FLCR sirve para diseñar controladores discontinuos y para diferenciarla de las demás funciones se denotará por  $V_{n, d}(x)$ . Tomando en cuenta lo anterior, se define la ley de conmutación entre dos controladores con diferente tipo de convergencia como

$$u = \vartheta(u_d, u_{l_2}, A) := \begin{cases} u_{l_2} & \text{si } V_{n, d}(x) > A, \\ u_d & \text{si } V_{n, d}(x) \leq A, \end{cases} \quad (88)$$

donde  $u_d$  es el controlador homogéneo discontinuo (4.11) y  $u_{l_2}$  es el controlador descrito por (86). La superficie donde conmutan los controladores está determinada por  $A$ . Como la ley de control  $u_{l_2}$  garantiza convergencia robusta al origen ante perturbaciones acopladas, las trayectorias cruzarán el conjunto de nivel  $V_{n, d}(x) = A$ . En ese instante, el control discontinuo entra en acción y como  $V_{n, d}(x) \leq A$  es un región invariante positiva y atractiva para el sistema con control  $u_d$  ( $\dot{V}_{n, d} < 0$ ), cualquier trayectoria en esta región converge al origen en tiempo finito.

*La idea para realizar la conmutación ha sido tomada de [Adamy and Flemming \[1\]](#).*

La ley de conmutación (88) permite mejorar, en general, la velocidad de convergencia de los controladores discontinuos presentados en el **Capítulo 4**. Como ejemplos ilustrativos se presentan dos casos de interés.

**Controlador discontinuo con convergencia rápida.** El siguiente controlador asegura convergencia exponencial a una vecindad del origen, y una vez dentro de dicha vecindad, las trayectorias convergen al origen en tiempo finito.

**Proposición 5.4** *Sea el orden del sistema  $n \geq 2$  y  $A > 0$ . Considere que el parámetro  $l_2 = 0$ , es decir, el parámetro  $q$  del controlador (86) es igual a 1. Entonces, el controlador  $u = \vartheta(u_d, u_{l_2}, A)$  estabiliza el sistema (87) en tiempo finito globalmente.*

A pesar de que el controlador  $u_d$  asegura convergencia al origen en tiempo acotado cuando  $V_{n,d}(x) \leq A$ , la convergencia del controlador  $u_{l_2=0}$  a una vecindad del origen es en tiempo no acotado si la condición inicial no inicia en un conjunto compacto. Por lo tanto, cuando se utiliza esta ley de control, el tiempo de convergencia crece cuando las condiciones iniciales en el sistema se incrementan. Un controlador de tiempo fijo puede compensar esta desventaja.

**Controlador de tiempo fijo.** La propiedad de atractividad en tiempo fijo en el controlador (86) se obtiene al seleccionar  $q \in (1, 2)$  y  $p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1)$ . Por simplicidad, se toma  $p = \frac{n-1}{n-2}$ , por lo que,  $\sigma_i = [x_i]^{\frac{2-p}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{2-p}{\alpha_i}} [\sigma_{i-1}]^{\frac{\alpha_i-1}{\alpha_i}} \zeta_{i-1}$ , donde  $\sigma_1 = x_1$  y  $\alpha_i = (i-2)p - (i-3), \forall i = 2, \dots, n$ .

**Proposición 5.5** *Sea el orden del sistema  $n \geq 2$  y  $B > 0$ . Considere que el parámetro  $l_2 > 1$ , es decir, que el parámetro  $q$  del controlador (86) cumple  $q \in (1, 2)$ . Entonces, la ley de control  $u = \vartheta(u_d, u_{l_2}, B)$  estabiliza el sistema (87) en tiempo fijo.*

*Eligiendo el parámetro  $q$  como en la Proposición 5.5, el tiempo de convergencia a cualquier vecindad del origen se garantiza en tiempo fijo sin importar que tan grande haya sido el estado inicial de la trayectoria.*

5.5. NUEVA CLASE DE CONTROLADORES DISCONTINUOS

Para mejorar la velocidad de convergencia del sistema (75) sin tener que usar un control híbrido, se necesita de una nueva clase controladores discontinuos que garanticen que el sistema en lazo cerrado tenga las propiedades deseadas con una misma estructura de control.

5.5.1. La FLCR del sistema

Defina la Fdes  $\sigma_i = [x_i]^{\frac{2-p}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{2-p}{\alpha_i}} \sigma_{(i-1)u}$ ,  $\sigma_{iu} = \mu\sigma_i + \eta[\sigma_i]^{\frac{\alpha_i}{\alpha_i+1}} \zeta_i$ ,  $\sigma_{1u} = \mu x_1 + \eta[x_1]^{\frac{2-p}{2-q}}$ , y  $\alpha_i = (i-2)p - (i-3)$ ,  $\zeta_i = \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i}$ ,  $\beta_i = (i-2)q + (3-i), \forall i = 1, \dots, n$ . (75). Los parámetros  $\mu$  y  $\eta$  son, en general, constantes positivas. Para generar la nueva ley de control se utiliza la siguiente FLCR para el sistema.

**Proposición 5.6** *La función continua y diferenciable*

$$V_n = \frac{\alpha_n}{3-p} |x_n|^{\frac{3-p}{\alpha_n}} + k_{n-1}^{\frac{\alpha_n}{\alpha_n}} [\sigma_{(n-1)u}]^{\frac{\alpha_n}{2-p}} x_n + \frac{\alpha_n}{3-p} k_{n-1}^{\frac{\alpha_n}{\alpha_n}} |\sigma_{(n-1)u}|^{\frac{3-p}{2-p}} + \delta_{n-1} (\mu V_{n-1} + \eta V_{n-1}^{\frac{\alpha_n-1}{\alpha_n}} \zeta_{n-1}), \delta_{n-1} = k_{n-1}^{\frac{3-p}{\alpha_n}} \tag{89}$$

con  $\mu, \eta \geq 0$ , es una FLCR global para el sistema (75).

En el sentido estricto, la FLCR (89) ya no es homogénea. Sin embargo, tiene propiedades de homogeneidad en el bi-límite. De hecho, esta función es una generalización de la FLCR (45) y la (81), las cuales son homogéneas c.r. a diferentes dilataciones. Por un lado, la FLCR (45) se recupera si  $\mu = 1$  y  $\eta = 0$ , mientras que la FLCR (81) se obtiene al fijar  $\mu = 0$  y  $\eta = 1$ .

5.5.2. Caso con perturbaciones acopladas

Primero, se presenta el caso en que solamente existen perturbaciones acopladas en el sistema (75) (cuando  $w_i(t, x) = 0, \forall i = 1, \dots, n-1, \forall t \geq 0$ ). No solo se mejora la velocidad de convergencia de las trayectorias del sistema, sino también, la robustez ante una clase más amplia de perturbaciones.

**Suposición 5.3** *Sea  $n \geq 2$ . Para algunas  $p \in [0, 1], q \in [1, 2)$  y  $\mu, \eta \geq 0$ , la perturbación acoplada pertenece a la clase  $\mathcal{W} = \{w_n(t, x) \in \mathbb{R} : |w_n(t, x)| \leq \rho_n \mu + \rho_{nu} \eta |\sigma_n|^{\frac{\alpha_n}{2-p}} \zeta_n, \rho_n, \rho_{nu} \geq 0\}, \forall t \geq 0$ .*

Cuando la constante  $\eta = 0$ , el término acoplado se encuentra acotado por una constante y puede que no desvanezca en el origen. Cuando  $\eta > 0$ , la perturbación acoplada se encuentra acotada por un función que puede crecer con el estado pero que no necesariamente desvanece en el origen. De hecho,

*Únicamente en el caso  $\eta = 0$ , el CMDOS propuestos en [56] puede emplearse.*

- (I) para  $q \in [p, 1]$  y  $p \in [0, 1)$ , las perturbaciones están acotadas por funciones que no escapan a infinito en tiempo finito .
- (II) para  $q \in (1, 2)$  y  $p \in [0, 1)$ , las perturbaciones están acotadas por funciones que escapan a infinito en tiempo finito .

**Teorema 5.11** Considere que la Suposición 5.3 se cumple con  $p = \frac{n-2}{n-1}$ , y  $q \in (p, 2)$ . Elija el controlador discontinuo

$$u = -k_n \mu [\sigma_n]^0 - k_{nu} \eta [\sigma_n]^{\frac{\alpha_n}{2-p}} \zeta_n, \quad \forall n \geq 2. \quad (90)$$

Entonces, existen ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , y  $k_{nu}$  suficientemente grandes tales que el origen  $x = 0$  del sistema (75) es robusto y globalmente ETF.

Esto se verá con mayor detalle en la Subsección 5.5.5.

**Comentario 5.4** Para el caso  $n = 2$ , las ganancias se obtienen de forma explícita.

Si la Suposición 5.3 se satisface localmente, el Teorema 5.11 solo asegura estabilidad local y en tiempo finito. El campo vectorial asociado al sistema en lazo cerrado con el controlador (90) ya no es homogéneo. Sin embargo, dependiendo del valor que adquiera el parámetro  $q$  c.r. a  $p \in [0, 1)$ , distintos tipos de convergencia se presentan en el sistema en lazo cerrado. La aproximación homogénea del campo vectorial cerca del origen tiene grado de homogeneidad  $l_0 = p - 1$  y la aproximación homogénea del campo vectorial lejos del origen tiene grado de homogeneidad  $l_\infty = q - 1$ . Entonces, para distintos valores de  $p$  y  $q$  del controlador, el sistema en lazo cerrado es homogéneo en el bi-límite y garantiza mayor velocidad de convergencia y rechazo a una clase de perturbaciones más amplia que solamente sus puras aproximaciones homogéneas.

La ley de control (90) posee una característica interesante. De la misma estructura de control, es posible recobrar controladores homogéneos y homogéneos en el bi-límite.

Las condiciones sobre las ganancias son relativamente conservadoras.

Las ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , se diseñan suficientemente grandes de tal manera que  $k_n > \dots > k_2 > k_1 > 0$ . Las ganancias no se han fijado *a priori* y pueden calcularse mediante la FLCR. Enseguida, se listan algunos controladores para  $n \leq 4$ ,

$$(2) \quad v_2 = -k_2 (\mu [\sigma_2]^0 + \eta [\sigma_2]^{\frac{q}{2-p}}), \quad \sigma_2 = [x_2]^{2-p} + k_1^{2-p} \sigma_{1u}, \quad \sigma_{1u} = \mu x_1 + \eta [x_1]^{\frac{2-p}{2-q}}, \quad \forall p = 0, q \in [p, 2);$$

$$(3) \quad v_3 = -k_3 (\mu [\sigma_3]^0 + \eta [\sigma_3]^{\frac{p}{2-p} \frac{2q-1}{q}}), \quad \sigma_3 = [x_3]^{\frac{2-p}{p}} + k_2^{\frac{2-p}{p}} \sigma_{2u}, \quad \sigma_{2u} = \mu \sigma_2 + \eta [\sigma_2]^{\frac{q}{p}}, \quad \forall p = 1/2, q \in [p, 2);$$

$$(4) \quad v_4 = -k_4 (\mu [\sigma_4]^0 + \eta [\sigma_4]^{\frac{2p-1}{2-p} \frac{3q-2}{2q-1}}), \quad \sigma_4 = [x_4]^{\frac{2-p}{2p-1}} + k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} \sigma_{3u}, \quad \sigma_{3u} = \mu \sigma_3 + \eta [\sigma_3]^{\frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q}}, \quad \forall p = 2/3, q \in [p, 2).$$

**Controladores homogéneos.** Eligiendo los parámetros  $\mu = 0$  y  $\eta = 1$ , se obtiene el CHG. Por lo que, todos los controladores de la Sección anterior se recuperan. A continuación, se enuncian algunas leyes de control no homogéneas derivadas del Teorema 5.11.

**Controlador discontinuo con decaimiento exponencial.** Para obtener este controlador solo hay que fijar el parámetro  $q = 1$ . Con esta elección de los parámetros se tiene que  $\sigma_i = [x_i]^{\frac{2-p}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{2-p}{\alpha_i}} \sigma_{(i-1)u}$ ,  $\sigma_{iu} = \mu \sigma_i + \eta [\sigma_i]^{\frac{\alpha_i}{\alpha_i+1}}$ ,  $\sigma_{1u} = \mu x_1 + \eta [x_1]^{\frac{2-p}{1}}$ , donde  $\alpha_i = (i-2)p - (i-3)$ ,  $\forall i = 2, \dots, n$ .

**Corolario 5.2** Considere que  $n \geq 2$  y que la Suposición 5.3 se cumple con  $p = \frac{n-2}{n-1}$  y  $q = 1$ . Elija el controlador

$$u = -k_n \mu [x_n]^{\frac{2-p}{\alpha_n}} + k_{n-1}^{\frac{2-p}{\alpha_n}} \sigma_{n-1}^0 - k_{nu} \eta [\sigma_n]^{\frac{\alpha_n}{2-p}}. \quad (91)$$

Entonces, existen ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , y  $k_{nu}$  suficientemente grandes tales que el origen  $x = 0$  del sistema (75) es ETFdE.

Una vez que la ley de control es elegida, el sistema (75) es robusto a cierta clase de perturbaciones acopladas.

**Controlador discontinuo de tiempo fijo.** Si se elige el parámetro  $q \in (1, 2)$ , se obtienen los controladores discontinuos de tiempo fijo.

**Corolario 5.3** Considere que  $n \geq 2$  y que la Suposición 5.3 se cumple con  $p = \frac{n-2}{n-1}$  y  $q \in (1, 2)$ . Elija el controlador

$$u = -k_n \mu \left[ |x_n|^{\frac{2-p}{\alpha_n}} + k_{n-1}^{\frac{2-p}{\alpha_n}} \sigma_{i-1} \right]^0 - k_{nu} \eta \left[ \sigma_n \right]^{\frac{\alpha_i}{2-p}} \zeta_n. \quad (92)$$

Entonces, existen ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , y  $k_{nu}$  suficientemente grandes tales que el origen  $x = 0$  del sistema (75) es ETFj.

### 5.5.3. Caso con perturbaciones no acopladas

La familia de controladores del Teorema 5.11 puede compensar cierta clase de perturbaciones no acopladas  $w_i(t, x)$ .

**Suposición 5.4** Sea  $n \geq 2$ . Para algunas  $p \in [0, 1], q \in [1, 2)$ , y  $\mu, \eta \geq 0$ , las perturbaciones no acopladas pertenecen a la clase  $\mathcal{W}_4 = \{w_i(t, x) \in \mathbb{R} : |w_i(t, x)| \leq \rho_i |\mu \sigma_i + \eta [\sigma_i]^{\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}} \sigma_i^{\frac{\alpha_{i+1}}{2-p}}|, \rho_i \geq 0\}$ , con  $i = 1, \dots, n-1$ .

La Suposición 5.4 caracteriza un variedad de perturbaciones aún más grande que las descritas en la Suposición 5.1.

Cabe destacar que

- (I) la clase de perturbaciones de la Suposición 5.1 está contenida en la Suposición 5.4, solo hay que hacer  $\mu = 0$ ;
- (II) cuando  $q = 1$ , la perturbaciones crecen como un función lineal lejos del origen;
- (III) cuando  $q \in (1, 2)$ , las perturbaciones pueden crecer tan rápido, que pueden hacer que las trayectorias del sistema escapen a infinito en tiempo finito;
- (IV) las perturbaciones no solo son grandes lejos del origen, también son más grandes que una perturbación lineal cerca del origen.

Bajo la Suposición 5.4 existe una clase de controladores que es capaz de mejorar la velocidad de convergencia de las trayectorias del sistema en lazo cerrado en presencia de perturbaciones cuyas cotas son funciones homogéneas en el bi-límite.

**Teorema 5.12** Considere que  $n \geq 2$ , y que las Suposiciones 5.4 y 5.3 se cumplen con  $p = \frac{n-2}{n-1}$  y  $q \in [p, 2)$ . Elija el controlador discontinuo (90). Entonces, existen ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , y  $k_{nu}$  suficientemente grandes tales que el origen  $x = 0$  del sistema (75) es RGAE. Además, las siguientes afirmaciones son ciertas: **(i)** si  $q \in [p, 1)$ , el origen es ETF; **(ii)** si  $q = 1$ , el origen es ETFdE; **(iii)** si  $q \in (1, 2)$ , el origen es ETFj.

Una consecuencia directa del Teorema 5.12 es que la estabilización global en tiempo finito de un sistema en la forma de retroalimentación estricta

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_i), \quad 1 \leq i < n, \\ \dot{x}_n &= u + f_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (93)$$

de una sola entrada puede lograrse a través de una retroalimentación de los estados discontinua.

**Corolario 5.4** Considere el sistema (93), donde para cada  $i$ ,  $f_i : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^0$  con  $f_i(0, \dots, 0) = 0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ . Entonces, (93) se puede estabilizar localmente en tiempo finito a través de la ley de control discontinua (90).

Para que el resultado sea global, las funciones  $f_i$  deben satisfacer ciertas cotas. Para nuestro caso, la estabilización global se logra si las Suposiciones 5.3 y 5.4 se cumplen globalmente.

La FLC permite caracterizar el tipo de convergencia de las trayectorias del sistema en lazo cerrado.

**Proposición 5.7** *Elija el controlador discontinuo (90). Entonces, la derivada c.r. al tiempo de la FLCR a lo largo de las trayectorias satisface la desigualdad diferencial*

$$\dot{V}_n \leq -\kappa_n (\mu V_n^{\frac{2}{3-p}}(x) + \eta V_n^{\frac{\alpha_n}{(3-p)\beta_n}}(x)), \quad (94)$$

donde  $\kappa_n$  es un parámetro que depende de las ganancias  $(k_1, \dots, k_n, k_{nu})$  y de las constantes  $(\rho_1, \dots, \rho_n, \rho_{nu})$ .

De la desigualdad diferencial (94) se puede obtener una estimación del tiempo de convergencia.

**Proposición 5.8** *Seleccione la ley de control (90). Entonces, cualquier trayectoria del sistema (75) iniciada con algún estado inicial  $x_n(0) \in \mathbb{R}^n$  converge al origen en un tiempo finito menor a*

$$T(x_n(0)) \leq \begin{cases} \frac{3-p}{(1-p)\kappa_n\mu} r^{\frac{1-p}{3-p}} + \frac{(3-p)\beta_n}{(1-q)\alpha_n\kappa_n\eta} V_n^{\frac{(1-q)\alpha_n}{(3-p)\beta_n}}(x_n(0)) & \text{si } q \in (p, 1), \\ \frac{3-p}{(1-p)\kappa_n\eta} \ln(1 + \frac{\eta}{\mu} V_n^{\frac{1-p}{3-p}}(x_n(0))) & \text{si } q = 1, \end{cases} \quad (95)$$

además, si  $q \in (1, 2)$ , el tiempo  $T(x_n(0))$  está acotado por la constante de tiempo fijo

$$T_r = \frac{3-p}{(1-p)\kappa_n\mu} r^{\frac{1-p}{3-p}} + \frac{(3-p)\beta_n}{(q-1)\alpha_n\kappa_n\eta} r^{-\frac{(q-1)\alpha_n}{(3-p)\beta_n}}, \quad (96)$$

donde  $r > 0$  es una constante positiva.

#### 5.5.4. Extensiones y observaciones importantes

A continuación se presentan dos extensiones de los resultados presentados en secciones anteriores. Primero, se presenta un resultado que es consecuencia directa de la Proposición 5.6.

**Teorema 5.13** *Considere que la Suposición 5.4 se cumple y que  $|w_n(t, x)| \leq \rho_n \mu |\sigma_n|^{\frac{\alpha_n+1}{2-p}} + \rho_{nu} \eta |\sigma_n|^{\frac{\alpha_n}{2-p}} \zeta_n$ , con  $p \in [0, 1)$  si  $n = 1$ , y con  $p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1)$ , si  $n \geq 2$ . Elija el controlador*

$$u = -\kappa_n \mu [\sigma_n]^{\frac{\alpha_n+1}{2-p}} - \kappa_{nu} \eta [\sigma_n]^{\frac{\alpha_n}{2-p}} \zeta_n. \quad (97)$$

Entonces, existen ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , y  $k_{nu}$  suficientemente grandes tales que el origen  $x = 0$  del sistema (75) es RGAE. Además, las siguientes afirmaciones se cumplen: **(i)** si  $q \in [p, 1)$ , el origen es ETF; **(ii)** si  $q = 1$ , el origen es ETFdE; **(iii)** si  $q \in (1, 2)$ , el origen es ETFj.

El resultado anterior contiene a la clase de controladores discontinuos presentados en el Teorema 5.12, y además, también posee una clase de controladores continuos homogéneos en el bi-límite cuando  $p \in (\frac{n-2}{n-1}, 1)$ . Enseguida se presentan unos cuantos controladores, derivados del resultado previo

- (1)  $v_1 = -k_1 (\mu [x_1]^{\frac{1}{2-p}} + \eta [x_1]^{\frac{1}{2-q}}), \forall p \in [0, 1), q \in [p, 2);$
- (2)  $v_2 = -k_2 (\mu [\sigma_2]^{\frac{p}{2-p}} + \eta [\sigma_2]^{\frac{q}{2-p}}), \sigma_2 = [x_2]^{2-p} + k_1^{2-p} \sigma_{1u}, \sigma_1 = \mu x_1 + \eta [x_1]^{\frac{2-p}{2-q}}, \forall p \in [0, 1), q \in [p, 2);$
- (3)  $v_3 = -k_3 (\mu [\sigma_3]^{\frac{2p-1}{2-p}} + \eta [\sigma_3]^{\frac{p}{2-p} \frac{2q-1}{q}}), \sigma_3 = [x_3]^{\frac{2-p}{p}} + k_2^{\frac{2-p}{p}} \sigma_{2u}, \sigma_{2u} = \mu \sigma_2 + \eta [\sigma_2]^{\frac{q}{p}}, \forall p \in [1/2, 1), q \in [p, 2);$
- (4)  $v_4 = -k_4 (\mu [\sigma_4]^{\frac{3p-2}{2-p}} + \eta [\sigma_4]^{\frac{2p-1}{2-p} \frac{3q-2}{2q-1}}), \sigma_4 = [x_4]^{\frac{2-p}{2p-1}} + k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} \sigma_{3u}, \sigma_{3u} = \mu \sigma_3 + \eta [\sigma_3]^{\frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q}}, \forall p \in [2/3, 1), q \in [p, 2).$

Cabe remarcar que las extensiones que se presentan no son posibles sin el uso de una FLCR. En ausencia de perturbaciones no acopladas, el Teorema 5.13 sigue siendo válido.

Además, se pueden diseñar algoritmos de ganancia variable.

**Teorema 5.14** *Considere que la Suposición 5.4 se cumple y que  $|w_n(t, x)| \leq (\rho_n + \Xi(t, x))\mu$ , con  $\rho_n \geq 0$ , y donde  $\Xi(t, x) \geq 0, \forall t \geq 0$ , es una función conocida. Elija la ley de control discontinua*

$$u = -(K(t, x) + k_n)\mu[\sigma_n]^0 - k_{nu}\eta[\sigma_n]^{\frac{\alpha_n}{2-p}}\zeta_n, p = \frac{n-2}{n-1}, n \geq 2. \quad (98)$$

Si las ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , y  $k_{nu}$  se eligen suficientemente grandes, y  $K_m K(t, x) \geq \Xi(t, x)$ , entonces el origen  $x = 0$  del sistema (75) es ETF.

El término continuo del controlador (98) garantiza el tipo de convergencia deseada.

**Teorema 5.15** *Considere que la Suposición 5.4 se cumple y que  $|w_n(t, x)| \leq (\rho_n|\sigma_n|^{\frac{\alpha_{n+1}}{2-p}} + \Xi(t, x))\mu$ , con  $\rho_m \geq 0$ , y donde  $\Xi(t, x) \geq 0, \forall t \geq 0$ , es una función conocida. Elija la ley de control continua*

$$u = -(K(t, x) + k_n)[\sigma_n]^{\frac{\alpha_{n+1}}{2-p}} - k_{nu}\eta[\sigma_n]^{\frac{\alpha_n}{2-p}}\zeta_n, \quad (99)$$

Si las ganancias  $k_1, \dots, k_n$ , y  $k_{nu}$  se eligen suficientemente grandes, y  $K_m K(t, x) \geq \Xi(t, x)$ , entonces el origen  $x = 0$  del sistema (75) es ETF.

Los controladores (97) y (99) son continuos cuando  $p \in (\frac{n-2}{n-1}, 1)$ . Obviamente, no pueden rechazar perturbaciones no desvanecientes y acopladas como lo hace una ley de control discontinua.

#### 5.5.5. Controlador para sistemas de segundo orden

Un control por MDSO es eficaz para contrarrestar perturbaciones acotadas mientras se preserva la convergencia en tiempo finito del sistema controlado, [58], [63], [8]. Por otro lado, estos controladores no tienen una velocidad de convergencia rápida.

Cuando el orden del sistema es  $n = 2$  y considerando solo perturbaciones acopladas, el sistema (75) queda descrito por

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(t, x) + g(t, x)u, \quad (100)$$

donde  $x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$  define el vector de estados y  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada de control. Generalmente, se considera que  $f(t, x)$  y  $g(t, x)$  son funciones inciertas, y que dichas funciones se encuentran uniformemente acotadas, es decir.

$$|f(t, x)| \leq C, \quad K_m \leq g(t, x) \leq K_M, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t \geq 0, \quad (101)$$

donde  $C, K_m, K_M$  son constantes positivas. La función  $f(t, x)$  modela a las perturbaciones que no necesariamente desvanecen en el origen  $x = 0$ . Un control por MDSO asegura que las trayectorias del sistema (100) convergen al origen  $x = 0$  en tiempo finito bajo la condición (101). Por ejemplo, el controlador Suboptimal [8], el controlador Twisting [58], el controlador con ley de convergencia prescrita [58], el CMDT [63], [91], [96], y el CMDTNS [31], [95].

La estabilización en tiempo finito el sistema (100) se hace bajo la siguiente condición de crecimiento de los términos de perturbación.

**Suposición 5.5** *Existen constantes  $\rho, \rho_u, \mu, \eta \geq 0, K_M \geq K_m > 0$  tales que  $\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t \geq 0$ ,*

$$|f(t, x)| \leq (\rho + \Xi(t, x))\mu + \rho_u\eta|\sigma_2|^q, \quad K_m \leq g(t, x) \leq K_M, \quad (102)$$

para alguna  $q \in (0, 2)$ , donde  $\sigma_2 = [x_2]^2 + k_1^2\sigma_1$ ,  $\sigma_1 = \mu x_1 + \eta[x_1]^{\frac{2}{2-q}}$  y  $\Xi(t, x)$  es una función positiva conocida.

Las soluciones del sistema (100) se entienden en el sentido de Filippov [32].



La condición (102) generaliza a la condición (101) permitiendo recuperar una gran variedad de perturbaciones,

(I) cuando  $C = \rho\mu$  y  $w(t, x) = \eta = 0$ , la condición (102) se reduce a la condición (101).

(II) cuando  $\eta > 0$ , las perturbaciones crecen en función del estado.

El siguiente controlador es capaz de estabilizar el origen del sistema (100) en tiempo finito.

Cuando la Suposición 5.5 sólo se cumple localmente, el Teorema 5.16 sigue siendo válido localmente.

**Teorema 5.16** *Considere que la Suposición (5.5) se cumple globalmente. Elija el controlador discontinuo*

$$u = -(K(t, x) + k_2)\mu[\sigma_2]^0 - k_{2u}\eta[\sigma_2]^{\frac{q}{2}}, q \in (0, 2), \quad (103)$$

entonces, el origen  $x = 0$  del sistema (100) es globalmente ETF si las ganancias se eligen tal que

(I)  $K_m K(t, x) \geq \Xi(t, x)$ ,  $k_2 K_m > 2k_1^2 + \rho$ ,  $K_m k_{2u} > \frac{8}{4-q^2} \left(\frac{2q}{(2+q)\eta}\right)^{\frac{q}{2}} k_1^{2-q} + \rho_u$ , y  $k_1 > 0$ .

Cada término del controlador (103) tiene una influencia diferente sobre el sistema en lazo cerrado. El término discontinuo es responsable de la convergencia robusta y en tiempo finito. La ley de control es discontinua en  $\sigma = 0$ , o, equivalentemente, cuando  $s_2 = x_2 + k_1[\sigma_1]^{\frac{1}{2}} = 0$ . En este sentido, ambos  $s_2 = 0$  y  $\sigma_2 = 0$  definen la misma curva  $x_2 = -k_1[\sigma_1]^{\frac{1}{2}}$ . El término continuo del controlador se encarga de mejorar la velocidad de convergencia y de las nuevas propiedades de robustez. De cualquier estado inicial, las trayectorias de estado del sistema en lazo cerrado el controlador (103), no sólo convergen al origen en tiempo finito, sino también lo hacen más rápidamente y robustamente ante cierta clase de perturbaciones crecientes. Es un rasgo distintivo, ya que ningún control por MDSO homogéneo puede converger tan rápido como lo hace (103). Asignando diferentes valores de los parámetros  $(\eta, \mu, q)$  se obtienen algunos casos importantes:

Solo los controladores no homogéneos son capaces de mejorar la velocidad de convergencia en ausencia de ganancia variable.

(I) Cuando  $\eta, \mu > 0$  y  $q = 1$ , se obtiene el control por MDSO rápido  $v = -k_2\mu[s_{f2}]^0 - k_3\eta[s_{f2}]^{\frac{1}{2}}$ , el cual es robusto a perturbaciones que satisfacen  $|w(t, x)| \leq \rho\mu + \rho_u\eta|s_{f2}|^{\frac{1}{2}}$ , donde  $s_{f2} = [x_2]^2 + k_1^2 s_{11}$  y  $s_{11} = \mu x_1 + \eta[x_1]^2$ . Este controlador proporciona convergencia rápida y en tiempo finito. La ley de control tiene un término que es discontinuo en el conjunto  $[x_2]^2 + k_1^2 s_{11} = 0$ . De hecho, es discontinua en el mismo conjunto como  $x_2 + k_1[s_{11}]^{\frac{1}{2}} = 0$ . Ambos conjuntos definen la misma curva cuando  $x_2 = -k_1[s_{11}]^{\frac{1}{2}}$ . La Figura 5 compara la SD terminal rápida clásica [96] con el conjunto donde se hace discontinuo el controlador (103). Hay una diferencia importante entre el controlador propuesto en [96] y el controlador  $v = -k_2\mu[s_{f2}]^0 - k_3\eta[s_{f2}]^{\frac{1}{2}}$ , y es que, en este último las señales de control están bien definidas para todo  $t \geq 0$ . El controlador  $v$  puede ser sintonizado para tener un desempeño similar al controlador propuesto en [96], al menos en una vecindad del origen.

(II) Los controladores de tiempo fijo se derivan del Teorema 5.16, con  $q \in (1, 2)$  y  $\eta, \mu > 0$ . La Figura 5 muestra la variedad donde el controlador es discontinuo. Las ganancias se pueden ajustar para garantizar convergencia dentro de un tiempo fijo preestablecido  $T_p$ . Fijando  $\mu = \eta = 1$ , las ganancias se eligen de la siguiente manera

Las formulas (105) y (104) dan un ajuste de las ganancias muy conservador. Recuerde que, la FLCR solo permite obtener condiciones suficientes, no necesarias, para asegurar la estabilidad en tiempo finito.

$$K_m k_2 = \left(\frac{d_0}{3^{2/3}+1} + 2\right) k_1^2 + \rho, K_m k_{2u} = \frac{2}{2-q} \left(\frac{4(k_1^2 - 2\frac{q}{2+q})}{(3\frac{2+q}{3} + 2\frac{q}{2})k_1^{2+q}(4-q)} + \frac{4}{2+q}\right) k_1^2 + \rho_u,$$

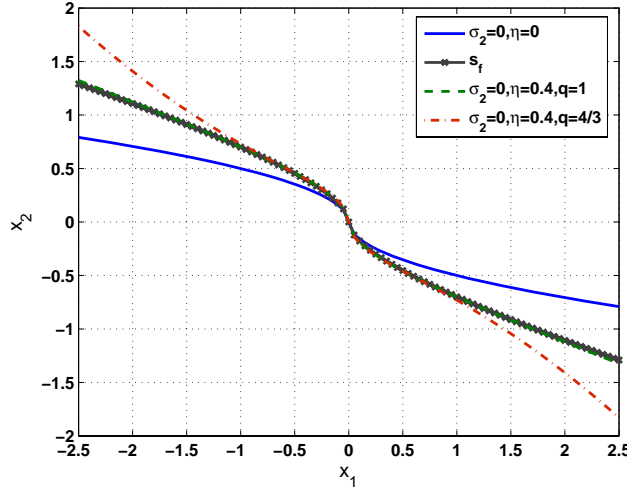


Figura 5.: La SD  $[x_2]^2 + k_1^2 x_1 = 0$ , ( $k_1 = 0.5$ ) (línea solida); la SD terminal rápida clásica  $s_f = x_2 + 0.5[x_1]^{1/2} + 0.125x_1$  (línea 'x'); la SD  $\sigma_2 = [x_2]^2 + k_1^2 \sigma_1 = 0$ , ( $q = 1$ ) (línea '- -'); y la SD de tiempo fijo  $\sigma_2 = 0$ , ( $q > 1$ ) (línea '- .').

(104)

donde

$$k_1 = \left( \left[ \frac{[(2-q)^{1/q}(4-q)^{1/q}\chi(q)]^q}{2^{1/q}T_p} \right] + \frac{2q}{(2+q)k_1^{2-q}} \right)^{1/q},$$

$$\chi(q) = \frac{3q(2^{\frac{2}{3}} + (2/3)^{\frac{2}{3}})^{\frac{q-1}{q}} [2^{\frac{q-1}{3}} (2^{\frac{2+q}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} (2/3)^{\frac{2+q}{3}})]^{1/q}}{(q-1)2^{\frac{4-q}{2q}} 2^{\frac{2q+1}{3q}} (2/3)^{\frac{q-1}{q}}}.$$

(105)

El Apéndice F contiene el desarrollo de las formulas (104) y (105).

Una vez que se eligen los parámetros  $T_p > 0$  y  $q \in (1,2)$ , la ganancia  $k_1$  se obtiene como el punto de intersección de la función  $y_1 = k_1$  y de la función  $y_2 = [((2-q)^{1/q}\chi(q)/(2^{1/q}T_p))]^q + 2q/[(2+q)k_1^{2-q}]^{1/q}$ . Las ganancias del controlador de tiempo fijo propuesto por Polyakov [73] (CTFP) también se diseñan en base a una constante de tiempo fijo, pero su estructura de control es poco flexible y no tienen propiedades de homogeneidad en el bi-límite.

- (III) El controlador homogéneo discontinuo  $u = -k_2[[x_2]^2 + k_1^2 x_1]^0$  se obtiene cuando  $\mu_u = 0$  and  $K(t,x) = 0$ , ver Sección 4.4.2. Si  $K(t,x) \neq 0$ , se obtiene la versión de ganancia variable para este algoritmo.
- (IV) El controlador homogéneo  $u = -k_2[\sigma_2]^{1/2}$ ,  $\sigma_2 = [x_2]^2 + k_1^2[x_1]^2$  con convergencia exponencial se obtiene si  $\mu = 0$  y  $\eta = q = 1$ .
- (v) El controlador homogéneo  $u = -k_2[\sigma_2]^{q/2}$ ,  $\sigma_2 = [x_2]^2 + k_1^2[x_1]^{2/q}$ , con la propiedad atractividad en tiempo fijo a una bola  $B_r$ , se obtiene si  $\mu = 0$ ,  $\eta = 1$  y  $q \in (1,2)$ .
- (VI) Cuando  $\mu = 0$ ,  $\eta > 0$  y  $q \in (0,1)$ , se recuperan los controladores continuos y homogéneos con convergencia en tiempo finito.

La FLCR permite estimar el tiempo de convergencia, lo cual no es posible para la mayoría de los controladores por MDSO.

**Corolario 5.5** *Seleccione la ley de control (103). Entonces, cualquier trayectoria del sistema (100), iniciada con estado inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ , converge al origen dentro de un tiempo finito menor a*



$$T(x_0, r) \leq \begin{cases} \frac{3}{\kappa\mu} r^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{(1-q)\kappa\eta} (V^{\frac{1-q}{3}}(x_0) - r^{\frac{1-q}{3}}) & \forall q \in (0, 1), \\ \frac{3}{\kappa\eta} \ln(1 + \frac{\eta}{\mu} V^{\frac{1}{3}}(x_0)) & q = 1, \end{cases}$$

además, si  $q \in (1, 2)$ , el tiempo  $T(x_0)$  está acotado por la constante de tiempo fijo

$$T_p = \frac{3}{\kappa\mu} r^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{(q-1)\kappa\eta} r^{-\frac{q-1}{3}}, \quad \forall q \in (1, 2), \quad (106)$$

donde  $r > 0$  y  $\kappa$  es una constante positiva que depende de  $k_1, k_2, k_{2u}, \rho, \rho_u$ .

Con el controlador (103), el origen del sistema (100) es globalmente ETF. Pero hasta ahora, no se sabe si las trayectorias golpean la superficie  $\sigma_2 = 0$ .

**Proposición 5.9** *Elija la ganancia variable  $K_m K(t, x) \geq \frac{k_1^2}{2-q} \frac{\eta}{\mu} |x_1|^{\frac{q}{2-q}} + \Xi(t, x)$ . Entonces, las trayectorias del sistema convergen a la SD  $\sigma_2 = 0$  en tiempo finito desde cualquier punto en el plano fase.*

Para el controlador (103), solo es posible asegurar la existencia de un modo deslizante a través de la correcta elección de la ganancia variable. Además, no es posible compensar perturbaciones que crezcan más fuertemente que un término cuadrático en el estado  $x_2$  usando solo términos crecientes que sean homogéneos en el  $\infty$ -límite. Hay que usar ganancia variable para poder lograrlo. Esto se verifica fácilmente de la condición (102). Considere que  $w(t, x) = 0$  y que  $x_1 \rightarrow 0$ , entonces la condición (102) se reduce a  $|f(t, x)| \leq \rho\mu + \rho_u\eta|x_2|^q, \forall q \in (0, 2)$ . Como  $q \in (0, 2)$ , términos cuadráticos no pueden ser compensados por la ley de control (103) si  $K(t, x) = 0$ .

Finalmente, si solo se considera que hay ganancias constantes en la ley de control y que no actúan perturbaciones  $w(t, x)$  que crecen en función de estado, el conjunto de ganancias dado en el Teorema (5.16) aún garantiza la existencia del modo deslizante, al menos localmente.

**Proposición 5.10** *Considere que  $w(t, x) = 0$  en la Suposición (5.5). Si la ganancia variable  $K(t, x) = 0$ , el conjunto de ganancias dado en el Teorema 5.16 asegura que las trayectorias del sistema siempre convergen en tiempo finito a  $\sigma_2 = 0$ , al menos localmente.*

Con ganancia constante, la región de atracción del modo deslizante se puede hacer arbitrariamente grande si  $k_2$  y  $\mu$  se hacen suficientemente grandes. Lamentablemente, esto tiene como consecuencia un incremento considerable del efecto de chattering.

### 5.5.6. Ejemplo Académico

*Note que hay un término cuadrático que no puede ser compensado globalmente por un control por MDSO tradicional (es decir, con ganancia constante).*

Considere un sistema Euler-Lagrange de un grado de libertad con fricción de Coulomb, [12], descrito por

$$(1 + \cos^2(p))\ddot{p} - 0.5 \sin(2p)\dot{p}^2 + a \operatorname{sign}(\dot{p}) + g \sin(p) = u.$$

El objetivo de control es para asegurar seguimiento en tiempo finito de la trayectoria  $p_d = 0.1 \cos(5\pi t)$  antes de un tiempo fijo  $T_p = 3$ . Los estados  $p$  y  $\dot{p}$  se consideran medibles. Defina  $e_1 = p - p_d$  y  $e_2 = \dot{p} - \dot{p}_d$ . Entonces, el sistema se puede reescribir como

$$\dot{e}_1 = e_2, \quad \dot{e}_2 = \frac{1}{1 + \cos^2(p)} u + f(p),$$

donde  $f(p) = (0.5 \sin(2p)\dot{p}^2 - a \operatorname{sign}(\dot{p}) - g \sin(p) - \ddot{p}_d)/(1 + \cos^2(p))$ . Es más o menos claro que  $|f(p)| \leq \rho + w(e_2)$ , con  $\rho = 35.85$  y  $w(e_2) = 0.354|e_2|^2 + 1.111|e_2|$ . Se comparan

*Para la simulación:  
 $a = 0.5, g = 9.8,$   
 $p(0) = [10\pi, 1.75\pi]^T$   
 y tiempo de muestreo  
 $\tau = 0.001$  con el método  
 de integración Euler.*

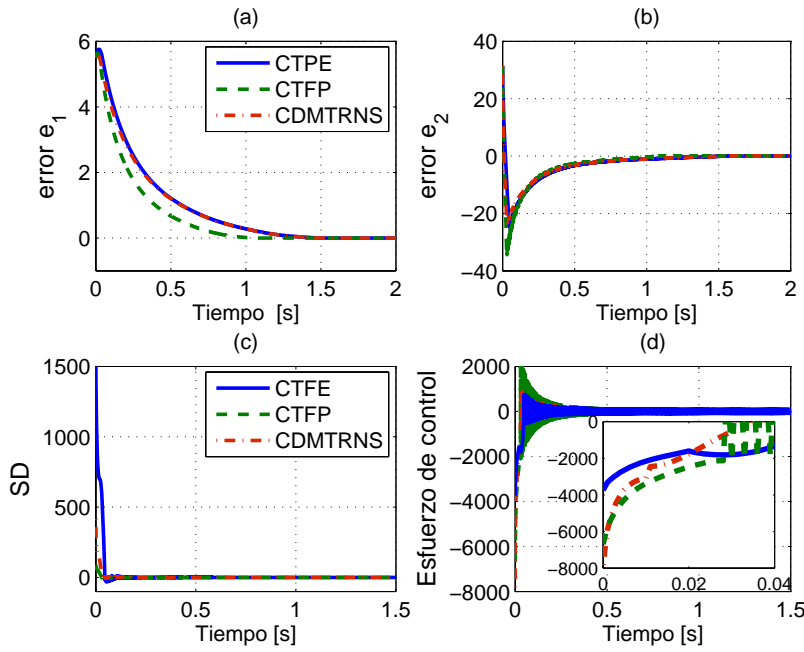


Figura 6.: Resultados de Simulación: (a) error de seguimiento  $e_1$ ; (b) error de seguimiento  $e_2$ ; (c) las superficies deslizantes  $\sigma_2, s, s_1$  y (d) el esfuerzo de control.

1. el controlador (103) (CTFE) con  $\sigma_2 = [e_2]^2 + k_1^2(e_1 + [e_1]^{2-q})$  y  $\mu = \eta = 1$ ,  $q = 1.2$ ,  $\rho = 35.85$ ,  $\rho_u = 0$ ,  $K_m = 0.5$ ,  $K_m K(t, x) = w(q)$ ,  $k_1 = 1.886$ ,  $k_2 = 85.93$  y  $k_{2u} = 19$ .
2. el controlador reportado en [73] (CTFP),

$$u = -\frac{1}{K_m} \left( \frac{\alpha_1 + 3\beta_1 e_1^2 + 2\gamma(q)}{2} [s]^0 + [\alpha_2 s + \beta_2 [s]^3]^{1/2} \right),$$

donde  $s = e_2 + [(e_2)^2 + \alpha_1 e_1 + \beta_1 [e_1]^3]^{1/2}$ ,  $\frac{\alpha_1}{2} = \alpha_2 = \frac{\beta_1}{2} = \beta_2 = \frac{64}{T_{\max}^2}$ ,  $T_{\max} = 3$  y  $\gamma_q = \rho + w(q)$ .

3. el CMDTRNS, propuesto en [92],

$$u = -\frac{1}{K_m} \left[ \frac{1}{\beta_n \gamma_2} [e_2]^{2-\gamma_2} (1 + \alpha_n \gamma_1 |e_1|^{\gamma_1-1}) - K_1 [s_1]^0 - K_2 s_1 \right],$$

con  $s_1 = e_1 + \alpha_n [e_1]^{\gamma_1} + \beta_n [e_2]^{\gamma_2}$ ,  $1 < \gamma_2 < 2$ ,  $\gamma_1 > \gamma_2$ ,  $K_1 = w(q) + \rho$ ,  $K_2 = 8$ ,  $\alpha_n = 0.91$ ,  $\beta_n = 0.2813$ ,  $\gamma_2 = 1.98$  y  $\gamma_1 = 3$ .

Las superficies deslizantes se diseñaron para tener casi el mismo desempeño. Por lo tanto, el comportamiento dinámico es bastante similar. El error de seguimiento se representa en la Figura 6.(a) y la Figura 6.(b). Cualquiera de estos controladores logra que las trayectorias de estado hagan seguimiento de la referencia deseada en tiempo fijo, aunque la propiedad de tiempo fijo no está formalmente probada para el sistema en lazo cerrado con el CMDTRNS. Experimentos de simulación muestran que el diseño de la constante de tiempo fijo propuesto en [73] es conservador, por lo que el esfuerzo de control es más grande que el utilizado por el CTFE, Figura 6.(d). Además, el CMDTRNS requiere más esfuerzo de control que los demás, véase la Figura 6.(d).

*Las ganancias del CTFE fueron ajustadas por simulación y usando el Teorema 5.16.*

*La superficie no lineal  $\sigma_2$  tiene la misma estructura que la superficie  $s_1$ . Sin embargo,  $\sigma_2$  no se recupera a partir de  $s_{nl}$ , porque para eso, hay que fijar  $\gamma_2 = 2$  y  $\gamma_1 = 2$ . El valor de  $\gamma_2$  no satisface las condiciones dadas para  $s_{nl}$ , [92].*

## 5.6. RESUMEN DEL CAPÍTULO

Es posible mejorar la velocidad de convergencia de los controladores presentados en el capítulo anterior. Únicamente se ha mejorado la velocidad de convergencia de

uno de los controladores usando dos enfoques ligeramente diferentes; sin embargo, la velocidad de convergencia de cualquier controlador del [Capítulo 4](#) puede mejorarse con cualquiera de los métodos presentados.

El primer enfoque está basado en un control híbrido, que conmuta entre dos controladores con distintos tipos de convergencia. Aquí, solo es posible compensar perturbaciones acopladas.

El segundo enfoque está basado en la idea de homogeneidad en el bi-límite y no hay necesidad de conmutar entre dos controladores con diferentes tipos de convergencia. Una sola estructura de control diseñada apropiadamente, permite mejorar la velocidad de convergencia. Los controladores presentados poseen mejor velocidad de convergencia y robustez ante cierta clase de perturbaciones no acopladas que los controladores del [Capítulo 4](#). De esta familia de controladores pueden derivarse algoritmos homogéneos y no homogéneos con diferentes propiedades de estabilidad y robustez. Hasta ahora, no se habían propuesto controladores de tiempo finito con velocidad de convergencia mejorada para sistemas con grado relativo mayor a dos, implementables para un CMDOS, excepto los obtenidos por el CMDTRNS [92].

Nuevamente, el diseño de los controladores está basado completamente en la construcción de FLCR mediante el MB combinado con Fdes. Permitiendo, entre otras cosas: asegurar la existencia de ganancias (suficientemente grandes), estimar el tiempo de convergencia, caracterizar el tipo de convergencia y proponer algoritmos de ganancia variable con velocidad de convergencia garantizada. En el caso de orden dos, siempre es posible hallar explícitamente el conjunto de ganancias. Para sistemas de orden mayor a dos el diseño de las ganancias ya no es directo. El problema radica en que los resultados de homogeneidad ya no pueden ser aplicados para hallar una parametrización de las ganancias.

*Un CMDTRNS no posee propiedades de homogeneidad en el bi-límite.*

### 5.7. PRUEBA DE LOS TEOREMAS Y PROPOSICIONES DEL CAPÍTULO

La siguiente representación del sistema (75) será útil para las demostraciones de los Teoremas

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u + \rho(t, x). \quad (107)$$

donde  $f(t, x) = f_n(x) + \Delta_u(t, x)$ , con  $f_n(x) = [x_2, \dots, x_n, 0]^T$  y  $\Delta_u(t, x) = [w_1, \dots, w_{n-1}, 0]^T$ ,  $g(t, x) = [0, \dots, 0, b(t, x)]^T$  y  $\rho(t, x) = [0, \dots, 0, w_n(t, x)]^T$ .

**Prueba del Teorema 5.1.** Los sistemas  $\Sigma_{N_0}$  y  $\Sigma_{N_\infty}$  deben cumplir

$$\begin{aligned} f_{0n}(\Delta_\epsilon^{r_0} x) + g_0(\Delta_\epsilon^{r_0} x)u_0(\Delta_\epsilon^{r_0} x) &= \epsilon^{l_0} \Delta_\epsilon^{r_0} (f_{0n}(x) + g_0(x)u_0(x)), \\ f_{\infty n}(\Delta_\epsilon^{r_\infty} x) + g_\infty(\Delta_\epsilon^{r_\infty} x)u_\infty(\Delta_\epsilon^{r_\infty} x) &= \epsilon^{l_\infty} \Delta_\epsilon^{r_\infty} (f_{\infty n}(x) + g_\infty(x)u_\infty(x)), \end{aligned}$$

donde  $u_0 = -k_0 \text{sign}(L_{g_0} V_0)$  y  $u_\infty = -k_\infty [L_{g_\infty} V_\infty]^q$  son las aproximaciones homogéneas de  $u$ . Por el Teorema 4.3 el sistema  $\Sigma_{N_0}$  es homogéneo de grado  $l_0$  c.r a  $\Delta_\epsilon^{r_0} x$ , y por el Teorema 4.7  $\Sigma_{N_\infty}$  es homogéneo de grado  $l_\infty$  c.r a  $\Delta_\epsilon^{r_\infty} x$ . Además,

$$\dot{V}(x) = L_{f_n} V + L_{g_n} V \cdot \xi(t, x) \cdot u.$$

Como  $V(x)$  es una FLC, (I) cuando  $L_{g_n} V = 0 \Rightarrow \dot{V}(x) = L_{f_n} V < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Además, como  $\dot{V}(x)$  es una función homogénea en el bi-límite, también  $L_{g_0} V_0 = 0 \Rightarrow \dot{V}_0(x) = L_{f_{0n}} V_0 < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , y  $L_{g_\infty} V_\infty = 0 \Rightarrow \dot{V}_\infty(x) = L_{f_{\infty n}} V_\infty < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

(II) Cuando  $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : L_{g_n} V \neq 0\}$ , las funciones  $L_{f_n} V$  y  $L_{g_n} V$  son homogéneas en el bi-límite de grados  $m_0 + l_0$  y  $m_\infty + l_\infty$ . Como todos los puntos del Lema A.6 se cumplen, existe  $k^* \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_{f_{0n}} V_0 \leq k^* |L_{g_0} V_0|$ ,  $L_{f_{\infty n}} V_\infty \leq k^* |L_{g_\infty} V_\infty|^{q+1}$ ,  $L_{f_n} V \leq k^* (|L_{g_n} V| + |L_{g_n} V|^{q+1})$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, junto con **H'1**, se obtiene  $\dot{V}(x) \leq -(k_0 \gamma - k^*) |L_{g_n} V| - (k_\infty \gamma - k^*) |L_{g_n} V|^{q+1} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Eligiendo  $k_0 \gamma > k^*$  y  $k_\infty \gamma > k^*$ , la derivada  $\dot{V}(x)$  es n.d..

*Para consultar el Lema A.6 vaya al Apéndice A.*

Por **(I)** y **(II)**,  $\dot{V}(x) < 0$  y el origen es GAE. Finalmente, **(i)** se concluye del Corolario 2.1, ya que las aproximaciones homogéneas en el 0-límite y  $\infty$ -límite son de grado negativo; **(ii)** también se concluye del Corolario 2.1, ya que la aproximación homogénea en el 0-límite es de grado negativo y la aproximación homogénea en el  $\infty$ -límite es de grado cero; **(iii)** se concluye del Corolario 2.2.

**Prueba del Teorema 5.2.** Considerando  $\mathbf{H}'1$  y  $\mathbf{H}'3$ , la derivada temporal de la FLCR a lo largo de las trayectorias del sistema (72) satisface

$$\dot{V}(x) = L_{f(t,x)}V + L_{g_n}V \cdot \xi(t,x) \cdot (u + \rho(t,x)) \leq L_N V + L_{\Delta_u} V,$$

donde  $L_N V = L_{f_n}V - (k_0 - C_0)\gamma|L_{g_n}V| - (k_\infty - C_\infty)\gamma|L_{g_n}V|^{q+1}$ . Como  $V(x)$  es una FLCR, **(I)** cuando  $L_{g_n}V = 0 \Rightarrow \dot{V}(x) = L_{f(t,x)}V < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . La función  $\dot{V}(x)$  es homogénea en el bi-límite, por lo tanto,  $L_{g_0}V_0 = 0 \Rightarrow \dot{V}_0(x) = L_{f_{0n}}V_0 < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , y  $L_{g_\infty}V_\infty = 0 \Rightarrow \dot{V}_\infty(x) = L_{f_{\infty n}}V_\infty < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Esto significa que  $\dot{V}(0), \dot{V}_0$  y  $\dot{V}_\infty$  son n.d. a pesar de las perturbaciones no acopladas.

**(II)** Cuando  $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : L_{g_n}V \neq 0\}$ , se sabe que  $L_{f_n}V$  y  $L_{g_n}V$  son homogéneas en el bi-límite de grados  $m_0 + l_0$  y  $m_\infty + l_\infty$ . De la hipótesis  $\mathbf{H}'6$  y del Lema A.5, existen constantes  $\sigma_i$  tales que

$$L_{\Delta_u}V = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial x_i} \Delta_{ui}(t,x) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial V}{\partial x_i} \right| |\Delta_{ui}(t,x)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sigma_i (\|x\|_{r,p}^{m_0+l_0} + \|x\|_{r,p}^{m_\infty+l_\infty}).$$

Por los mismos argumentos del resultado anterior,  $L_N V$  es n.d. si  $k_0\gamma > k^* + C_0\gamma$  y  $k_\infty\gamma > k^* + C_\infty\gamma$ . Del Lema A.5, existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_N V \leq -\lambda(\|x\|_{r,p}^{m_0+l_0} + \|x\|_{r,p}^{m_\infty+l_\infty})$ . Tomando en cuenta lo anterior, se obtiene  $\dot{V}(x) \leq L_N V + L_{\Delta_u}V \leq -(\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sigma_i)(\|x\|_{r,p}^{m_0+l_0} + \|x\|_{r,p}^{m_\infty+l_\infty})$ .

Como  $\dot{V}(x)$  es n.d. si  $\lambda > \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sigma_i$ . El parámetro  $\lambda$  se hace suficientemente grande haciendo  $k_0$  y  $k_\infty$  suficientemente grandes. Entonces,  $x = 0$  es RGAE. Los puntos **(i)**-**(iii)** del Teorema 5.1.

**Prueba del Teorema 5.3.** El punto **(i)** y **(ii)** son directos del Teorema 4.5 y 4.9, considerando que  $u_0 = -k_0 \text{sign}(L_{g_0}V_0)$  y  $u_\infty = -k_\infty [L_{g_\infty}V_\infty]^q$  son las aproximaciones homogéneas de  $u(x)$ , y que  $C_0$  y  $C_\infty |\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}|^q$  son las aproximaciones homogéneas de la cota de  $w_n(t,x)$ . Con  $\mathbf{H}'1, \mathbf{H}'7$  y  $\Delta_u(t,x) = 0, \forall t \geq 0$ , la derivada temporal de  $V$  a lo largo de las trayectorias de (107) satisface

$$\dot{V}(x) = L_{f_n}V + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \cdot (b(t,x)u + w_n(t,x)) \leq L_{f_n}V - L_U V$$

donde  $L_U V = (K_m k_0 - C_0) |\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}| + (K_m k_\infty - C_\infty) |\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}|^{q+1}$ . El resto de la prueba es similar a los puntos **(I)** y **(II)** de la demostración del Teorema 5.1. Entonces, existe  $k^* \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_{f_{0n}}V_0 \leq k^* |\frac{\partial V_0(x)}{\partial x_n}|, L_{f_{\infty n}}V_\infty \leq k^* |\frac{\partial V_\infty(x)}{\partial x_n}|^{q+1}, L_{f_n}V \leq k^* (|\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}| + |\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}|^{q+1}), \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, se obtiene  $\dot{V}(x) \leq -(K_m k_0 - C_0 - k^*) |\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}| - (K_m k_\infty - C_\infty - k^*) |\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}|^{q+1} < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . La derivada  $\dot{V}(x)$  es n.d. si  $K_m k_0 > C_0 + k^*$  y  $K_m k_\infty > C_\infty + k^*$ .

Por lo tanto, el origen es RGAE. Los **(i)**-**(iii)** se concluyen de igual forma que en el Teorema 5.1.

**Prueba del Teorema 5.4.** Considerando  $\mathbf{H}'7$  y  $\mathbf{H}'8$ , la derivada temporal de la FLCR a lo largo de las trayectorias del sistema (107) satisface

$$\dot{V}(x) = L_{f(t,x)}V + L_{b(t,x)}V \cdot (b(t,x)u + w_n(t,x)) \leq L_N V + L_{\Delta_u(t,x)}V,$$

donde  $L_N V = L_{f_n}V - V(K_m k_0 - C_0) |\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}| - (K_m k_\infty - C_\infty) |\frac{\partial V(x)}{\partial x_n}|^{q+1}$  es n.d. si  $K_m k_0 > k^* + C_0$  y  $K_m k_\infty > k^* + C_\infty$ . El resto de la prueba es similar a los puntos **(I)** y **(II)** de la demostración del Teorema 5.2. Entonces, existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_N V \leq -\lambda(\|x\|_{r,p}^{m_0+l_0} + \|x\|_{r,p}^{m_\infty+l_\infty})$ , y existen constantes  $\sigma_i$  tales que

$$L_{\Delta_u}V = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial x_i} \Delta_{ui}(t,x) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i (|\chi_i|^{\frac{l_0+r_{0i}}{r_{0i}}} + \dots + |\chi_i|^{\frac{l_0+r_{0i}}{r_{0i}}}) \\ + (|\chi_1|^{\frac{l_\infty+r_{\infty 1}}{r_{\infty 1}}} + \dots + |\chi_i|^{\frac{l_\infty+r_{\infty i}}{r_{\infty i}}}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \sigma_i (\|x\|_{r,p}^{m_0+l_0} + \|x\|_{r,p}^{m_\infty+l_\infty}).$$

Véase el Apéndice A para conocer el Lema A.5.

Tomando en cuenta lo anterior, se obtiene que  $\dot{V}(x) \leq L_N V + L_{\Delta u} V \leq -(\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \sigma_i)(\|x\|_{r,p}^{m_0+l_0} + \|x\|_{r,p}^{m_\infty+l_\infty})$ . La derivada  $\dot{V}(x)$  es n.d. si  $\lambda > \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \sigma_i$ .

Entonces,  $x = 0$  es RGAE. La última afirmación de concluye del Teorema 5.2.

**Prueba del Teorema 5.5.** Las aproximaciones en el 0-límite y el  $\infty$ -límite del sistema nominal son  $\Sigma_{N_0}$  y  $\Sigma_{N_\infty}$ , con aproximaciones homogéneas  $u_0 = -k_0 \text{sign}(L_{g_0} V_0)$  y  $u_\infty = -k_\infty [L_{g_\infty} V_\infty]^q$ . Aplicando el Teorema 4.7 a los sistemas  $\Sigma_{N_0}$  y  $\Sigma_{N_\infty}$  se obtiene que  $l_0 = l_{0f} = l_{0g} + (m_0 + l_{0g})p$ , y  $l_\infty = l_{\infty f} = l_{\infty g} + (m_\infty + l_{\infty g})q$ . Ahora con **H'1**, la derivada temporal de la FLC satisface

$$\dot{V}(x) = L_{f_n} V + L_{g_n} V \cdot \xi(t, x) \cdot u \leq L_{f_n} - L_U V,$$

donde  $L_U V = k_0 \gamma |L_{g_n} V|^{p+1} + k_\infty \gamma |L_{g_n} V|^{q+1}$ . Como  $V(x)$  es una FLC, **(I)** cuando  $L_{g_n} V = 0 \Rightarrow \dot{V}(x) = L_{f_n} V < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Además, como  $\dot{V}(x)$  es una función homogénea en el bi-límite, también  $L_{g_0} V_0 = 0 \Rightarrow \dot{V}_0(x) = L_{f_{0n}} V_0 < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , y  $L_{g_\infty} V_\infty = 0 \Rightarrow \dot{V}_\infty(x) = L_{f_{\infty n}} V_\infty < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

**(II)** Cuando  $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : L_{g_n} V \neq 0\}$ , las funciones  $L_{f_n} V$  y  $L_U V$  son homogéneas en el bi-límite de grados  $m_0 + l_0$  y  $m_\infty + l_\infty$ . Todos los puntos del Lema A.6 se cumplen, entonces existe  $k^* \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_{f_{0n}} V_0 \leq k^* |L_{g_0} V_0|^{p+1}$ ,  $L_{f_{\infty n}} V_\infty \leq k^* |L_{g_\infty} V_\infty|^{q+1}$ ,  $L_{f_n} V \leq k^* (|L_{g_n} V|^{p+1} + |L_{g_n} V|^{q+1}), \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Por lo tanto, la derivada  $\dot{V}(x) \leq L_{f_n} - L_U V$  es n.d. eligiendo  $k_0 \gamma > k^*$  y  $k_\infty \gamma > k^*, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Por **(I)** y **(II)**,  $\dot{V}(x) < 0$  y el origen es GAE.

**Prueba del Teorema 5.6.** Considerando **H'1** y **H''3**, la derivada temporal de la FLCR a lo largo de las trayectorias del sistema (72) satisface

$$\dot{V}(x) = L_{f(t,x)} V + L_{g_n} V \cdot \xi(t, x) \cdot (u + \rho(t, x)) \leq L_{f_n} V + L_{\Delta u} V,$$

donde  $L_N V = L_{f_n} V - (k_0 - C_0) \gamma |L_{g_n} V| - (k_\infty - C_\infty) \gamma |L_{g_n} V|^{q+1}$  es n.d. si  $k_0 \gamma > k^* + \rho_0 \gamma$  y  $k_\infty \gamma > k^* + \rho_\infty \gamma$ , y además, es homogénea en el bi-límite de grados  $m_0 + l_0$  y  $m_\infty + l_\infty$ . Como  $V(x)$  es una FLCR, **(I)** cuando  $L_{g_n} V = 0 \Rightarrow \dot{V}(x) = L_{f(t,x)} V < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . La función  $\dot{V}(x)$  es homogénea en el bi-límite, por lo tanto,  $L_{g_0} V_0 = 0 \Rightarrow \dot{V}_0(x) = L_{f_{0n}} V_0 < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , y  $L_{g_\infty} V_\infty = 0 \Rightarrow \dot{V}_\infty(x) = L_{f_{\infty n}} V_\infty < 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Esto significa que  $\dot{V}(0), \dot{V}_0$  y  $\dot{V}_\infty$  son n.d. a pesar de las perturbaciones no acopladas.

**(II)** Cuando  $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : L_{g_n} V \neq 0\}$ , de la hipótesis **H'6** y del Corolario 2.2, existen constantes  $\sigma_i$  tal que

$$L_{\Delta u} V = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial x_i} \Delta_{ui}(t, x) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial V}{\partial x_i} \right| |\Delta_{ui}(t, x)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sigma_i (\|x\|_{r,p}^{m_0+l_0} + \|x\|_{r,p}^{m_\infty+l_\infty})$$

Por el Lema A.5, existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_N V \leq -\lambda (\|x\|_{r,p}^{m_0+l_0} + \|x\|_{r,p}^{m_\infty+l_\infty})$ . Tomando en cuenta lo anterior,  $\dot{V}(x) \leq L_N V + L_{\Delta u} V \leq -(\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sigma_i) \|x\|_{r,p}^{m_0+l_0}$ . La derivada  $\dot{V}(x)$  es n.d. si  $\lambda > \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sigma_i$ , lo cual siempre es posible haciendo  $k_0$  y  $k_\infty$  suficientemente grandes.

Por **(I)** y **(II)**,  $\dot{V}(x) < 0$  y el origen es RGAE.

**Prueba del Teorema 5.7.** Los puntos **(i)** y **(ii)** se obtienen aplicando el Teorema 4.9 a los sistemas  $\Sigma_{N_0}$  y  $\Sigma_{N_\infty}$ . Bajo las hipótesis **H''7** y  $\Delta_u(t, x) = 0, \forall t \geq 0$ , la derivada temporal de  $V$  a lo largo de (107) satisface

$$\dot{V}(x) = L_{f_n} V + \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \cdot (b(t, x)u + w_n(t, x)) \leq L_{f_n} V - L_U V,$$

donde  $L_U V = (K_m k_0 - C_0) \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right|^{p+1} + (K_m k_\infty - C_\infty) \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right|^{q+1}$ . El resto de prueba es similar a los puntos **(I)** y **(II)** de la prueba del Teorema 5.5. Existe  $k^* \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_{f_{0n}} V_0 \leq k^* \left| \frac{\partial V_0(x)}{\partial x_n} \right|^{p+1}$ ,  $L_{f_{\infty n}} V_\infty \leq k^* \left| \frac{\partial V_\infty(x)}{\partial x_n} \right|^{q+1}$ ,  $L_{f_n} V \leq k^* \left( \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right|^{p+1} + \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right|^{q+1} \right), \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces, la derivada  $\dot{V}(x) \leq L_{f_n} - L_U V$  es n.d. eligiendo  $K_m k_0 > k^* + C_0$  y  $K_m k_\infty > k^* + C_\infty$ . Por lo tanto, el origen es RGAE.

**Prueba del Teorema 5.8.** Considerando  $H''7$ , la derivada temporal de la FLCR a lo largo de las trayectorias del sistema (107) satisface

$$\dot{V}(x) = L_{f(t,x)}V + L_{b(t,x)}V \cdot (u + w_n(t, x)) \leq L_N V + L_{\Delta_u(t,x)}V, \quad (108)$$

con  $L_N = L_{f_n}V - (K_m k_0 - C_0) \left| \frac{\partial V_\infty(x)}{\partial x_n} \right|^{p+1} - (K_m k_\infty - C_\infty) \left| \frac{\partial V_\infty(x)}{\partial x_n} \right|^{q+1}$ . El resto de prueba es similar a los puntos (I) y (II) de la prueba del Teorema 5.6. Entonces, existe  $k^* \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_{f_{0n}}V_0 \leq k^* \left| \frac{\partial V_0(x)}{\partial x_n} \right|^{p+1}$ ,  $L_{f_{\infty n}}V_\infty \leq k^* \left| \frac{\partial V_\infty(x)}{\partial x_n} \right|^{q+1}$ ,  $L_{f_n}V \leq k^* \left( \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right|^{p+1} + \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \right|^{q+1} \right)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , y además, existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tal que  $L_N V \leq -\lambda (\|x\|_{r,p}^{m_0+l_0} + \|x\|_{r,p}^{m_\infty+l_\infty})$ , y constantes  $\sigma_i$  tales que  $L_{\Delta_u}V \leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \sigma_i (\|x\|_{r,p}^{m_0+l_0} + \|x\|_{r,p}^{m_\infty+l_\infty})$ . Tomando en cuenta lo anterior, se obtiene  $\dot{V}(x) \leq L_N V + L_{\Delta_u}V \leq -(\lambda - \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \sigma_i) \|x\|_{r,p}^{m+1}$ . La derivada  $\dot{V}(x)$  es n.d. si  $\lambda > \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i \sigma_i$ . Por lo tanto,  $x = 0$  es RGAE.

**Prueba de la Proposición 5.1 y del Teorema 5.9.** La prueba de ambos resultados se hace en forma simultánea combinando el MB con el uso de Fdes. La prueba se hace por inducción.

*Paso 1:* Considere el sistema  $\dot{x}_1 = v_1 + w_1$ , donde  $v_1 = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{2-q}}$ . El parámetro  $q \in [0, 2)$ , lo cual implica  $\frac{1}{2-q} \in [\frac{1}{2}, \infty)$ . Teniendo en cuenta lo anterior,

$$\dot{x}_1 = v_1 + w_1 = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{2-q}} + w_1. \quad (109)$$

La estabilidad del sistema se estudia con la FLCR  $V_1 = \frac{2-p}{3-p} |x_1|^{\frac{3-p}{2-q}}$ ,  $p \in [0, 1]$ ,  $q \in [p, 2)$ . Tomando la derivada c.r. al tiempo de  $V_1$  a lo largo de las trayectorias de (109) y bajo la Suposición 5.1, se obtiene

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} (v_1 + w_1) \leq -\frac{2-p}{2-q} a_{11} |x_1|^{\frac{2+q-p}{2-q}},$$

donde  $a_{11} = k_1 - \rho_1$ . La derivada  $\dot{V}_1$  es n.d. si  $a_{11} > 0$ .

*Paso 2:* Considere el sistema de segundo orden

$$\dot{x}_1 = x_2 + w_1, \quad \dot{x}_2 = v_2 + w_2. \quad (110)$$

se define la Fdes  $s_{2d} = [x_2]^{2-p} + k_1^{2-p} [x_1]^{\frac{2-p}{2-q}}$  para construir la FLCR en vez de usar la variable  $s_2 = x_2 - v_1$ . Se introduce un grado de libertad  $p \in [0, 1]$  para tener más flexibilidad en el diseño del controlador. Cuando  $s_2 = s_{2d} = 0$ , dichos conjuntos definen la misma curva  $x_2 = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{2-q}}$ . Además, la Fdes  $s_{2d}$  pertenece a  $C^1$ . La FLCR se construye de la siguiente manera  $V_2 = \Phi_2(x_2, x_1) + \delta_1 V_1^\alpha$ ,  $\delta_1 = k_1^{3-p}$ , donde  $\Phi_2(x_2, x_1) = \int_{v_1}^{x_2} [\tau_2]^{2-p} + k_1^{2-p} [x_1]^{\frac{2-p}{2-q}} d\tau_2$ . Por lo tanto,

$$V_2 = \frac{1}{3-p} |x_2|^{3-p} + k_1^{2-p} [x_1]^{\frac{2-p}{2-q}} x_2 + \frac{2-p}{3-p} k_1^{3-p} |x_1|^{\frac{3-p}{2-q}} + \delta_1 V_1. \quad (111)$$

Tomando la derivada c.r. al tiempo de  $V_2$  a lo largo de las trayectorias de (110), se obtiene

$$\dot{V}_2 = s_{2d}(v_2 + w_2) + \frac{2-p}{2-q} k_1^{2-p} s_{2d} |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} \dot{x}_1 + \frac{2-p}{2-q} k_1^{3-p} |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} [x_1]^{\frac{1}{2-q}} \dot{x}_1,$$

donde  $\dot{x}_1 = -k_1 [x_1]^{\frac{1}{2-p}} + s_2 + w_1$ . En este caso  $\sigma_2 = s_{2d}$ . Aplicando la ley del control  $v_2 = -k_2 [s_2]^{\frac{q}{2-p}}$  y bajo la Suposición 5.1, se llega a

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -(k_2 - \rho_2) |\sigma_2|^{\frac{2+q-p}{2-p}} - \frac{2-p}{2-q} k_1^{3-p} (k_1 - \rho_1) |x_1|^{\frac{2+q-p}{2-q}} \\ &\quad + \frac{2-p}{2-q} k_1^{2-p} [|s_2|^2 |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} + \rho_1 |x_1|^{\frac{1+q-p}{2-q}} |s_2|], \end{aligned}$$

Del Lema A.1 y del Lema A.2, se obtienen las siguientes desigualdades  $|s_2|^2 \leq$

*V<sub>2</sub> es p.d. por construcción y de clase C<sup>1</sup>.*

*Véase el Apéndice A para conocer Lema A.1 y Lema A.2.*



$$2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} |\sigma_2|^{\frac{2}{2-p}},$$

$$|s_2|^2 |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} \leq 2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} \left( \frac{q-p}{2+q-p} \gamma_1^{-\frac{2+q-p}{2-p}} |x_1|^{\frac{2+q-p}{2-q}} + \frac{2}{2+q-p} \gamma_1^{\frac{2+q-p}{2}} |\sigma_2|^{\frac{2+q-p}{2-q}} \right),$$

$$|x_1|^{\frac{1+q-p}{2-q}} |s_2| \leq 2^{\frac{1-p}{2-p}} \left( \frac{1+q-p}{2+q-p} \gamma_2^{-\frac{2+q-p}{1+q-p}} |x_1|^{\frac{2+q-p}{2-q}} + \frac{1}{2+q-p} \gamma_2^{\frac{2+q-p}{1}} |\sigma_2|^{\frac{2+q-p}{2-q}} \right).$$

Con ayuda de estas desigualdades se obtiene que

$$\dot{V}_2 \leq -a_{22} |\sigma_2|^{\frac{2+q-p}{2-p}} - \frac{2-p}{2-q} k_1^{2-p} a_{21} |x_1|^{\frac{2+q-p}{2-q}}, \quad (112)$$

donde  $a_{22} = k_2 - \rho_2 - 2^{\frac{1-p}{2-p}} \frac{2-p}{2-q} k_1^{2-p} \left[ 2^{\frac{1-p}{2-p}} \frac{2}{2+q-p} \gamma_1^{\frac{2+q-p}{2}} + \frac{\rho_1}{2+q-p} \gamma_2^{\frac{2+q-p}{1}} \right]$ ,  $a_{21} = k_1(k_1 - \rho_1) - 2^{\frac{1-p}{2-p}} \left[ 2^{\frac{1-p}{2-p}} \frac{q-p}{2+q-p} \gamma_1^{-\frac{2+q-p}{q-p}} + \frac{1+q-p}{2+q-p} \gamma_2^{-\frac{2+q-p}{1+q-p}} \rho_1 \right]$ . Para hallar una condición más explícita de las ganancias, considere que  $a_{22}$  y  $a_{21}$  se pueden reescribir como  $a_{22} = b_{22}^1 + b_{22}^2$ , y  $a_{21} = b_{21}^1 + b_{21}^2$ , donde

$$b_{22}^1 = \theta_{11} \tilde{k}_2 - 2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} \frac{2-p}{2-q} k_1^{2-p} \frac{2}{2+q-p} \gamma_1^{\frac{2+q-p}{2}}, \quad b_{21}^1 = \theta_{21} k_1 a_{11} - 2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} \frac{q-p}{2+q-p} \gamma_1^{-\frac{2+q-p}{q-p}},$$

$$b_{22}^2 = \theta_{12} \tilde{k}_2 - 2^{\frac{1-p}{2-p}} \frac{2-p}{2-q} k_1^{2-p} \frac{\rho_1}{2+q-p} \gamma_2^{\frac{2+q-p}{1}}, \quad b_{21}^2 = \theta_{22} k_1 a_{11} - 2^{\frac{1-p}{2-p}} \frac{1+q-p}{2+q-p} \gamma_2^{-\frac{2+q-p}{1+q-p}} \rho_1,$$

siendo  $\tilde{k}_2 = k_2 - \rho_2$ , y los parámetros  $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22}$ , constantes que satisfacen  $\theta_{11} + \theta_{12} = 1$  y  $\theta_{21} + \theta_{22} = 1$ . Combinando  $b_{22}^1$  y  $b_{21}^1$  es posible mostrar que  $\gamma_1$  siempre existe si y sólo si las ganancias satisfacen

Para obtener (113), básicamente se checa cuando  $b_{22}^1 > 0$  y  $b_{21}^1 > 0$ , y se verifica cuando existe  $\gamma_1^{2+q-p} > 0$ .

$$\theta_{11} \tilde{k}_2 > \frac{2-p}{2-q} \frac{2}{2+q-p} 2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} \left[ \frac{q-p}{2+q-p} \frac{2^{\frac{2(1-p)}{2-p}}}{\theta_{21} k_1 a_{11}} \right]^{q-p} k_1^{2-p}, \quad (113)$$

de manera similar, combinando  $b_{22}^2$  y  $b_{21}^2$  es posible mostrar que  $\gamma_2$  siempre existe si y sólo si las ganancias satisfacen

Observe que  $\theta_{11} \tilde{k}_2 + \theta_{12} \tilde{k}_2 = \tilde{k}_2$ .

$$\theta_{12} \tilde{k}_2 > \frac{2-p}{2-q} \frac{\rho_1}{2+q-p} 2^{\frac{1-p}{2-p}} \left[ \frac{1+q-p}{2+q-p} \frac{2^{\frac{1-p}{2-p}} \rho_1}{\theta_{22} k_1 a_{11}} \right]^{1+q-p} k_1^{2-p}.$$

Por lo tanto,  $\dot{V}_2$  es n.d. si las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  satisfacen la condición (78).

*Paso i - 1:* Se define la Fdes como  $s_{id} = [x_i]_{\alpha_i}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} [\sigma_{i-1}]_{\alpha_i}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \zeta_{i-1}$ ,  $d_i = i - (i-1)p$ ,  $\forall i = 2, \dots, n$ , donde  $\sigma_1 = x_1$  y  $\sigma_i = [x_i]_{\alpha_i}^{\frac{2-p}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{2-p}{\alpha_i}} [\sigma_{i-1}]_{\alpha_i}^{\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}} \zeta_{i-1}$ ,  $\alpha_i = (i-2)p - (i-3)$ ,  $\forall i = 2, \dots, n$ . Todas estas representaciones definen el mismo conjunto cuando  $s_i = s_{id} = \sigma_i = 0$ . La Fdes  $s_{id}$  es de clase  $C^1$ , y permite construir la FLCR

$$V_i = W_i + \delta_{i-1} V_{i-1}^{\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \zeta_{i-1}}, \quad \forall i = 2, \dots, n, \quad (114)$$

donde  $W_i = \int_{v_{i-1}}^{x_i} \left( [\tau_i]_{\alpha_i}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} [\sigma_{i-1}]_{\alpha_i}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \zeta_{i-1} \right) d\tau_i$ . La FLCR (114) es p.d. y pertenece a la clase  $C^1$  por construcción. Su forma explícita se da en la expresión (81). La función  $s_{id}$  se ha elegido para que  $V_i$  sea homogénea de grado  $m_{V_i} = \frac{(3-p)\beta_i}{\alpha_i}$  c.r. a la dilatación (79). Con todo lo anterior, se asume que el controlador  $v_{i-1}$  estabiliza el sistema (75) de orden  $(i-1)$  y que la FLCR  $V_{i-1}$ , la cual es p.d. por construcción, lo asegura, debido a que su derivada  $\dot{V}_{i-1}$  es n.d..

La función  $V_i$  se define explícitamente en (89).

*Step i:* Tomando la derivada c.r. al tiempo de la FLCR, a lo largo de las trayectorias del sistema (75), se obtiene

$$\dot{V}_i = s_{id} [v_i + w_i] + \frac{d_i}{2-p} \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \sigma_{i-1} k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} s_i |\sigma_{i-1}|^{\frac{d_i}{2-p} \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}} \zeta_{i-1}^{-1} \dot{\sigma}_{i-1}$$

$$+ \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \zeta_{i-1} \delta_{i-1} V_{i-1}^{\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \zeta_{i-1}^{-1}} \left( \sum_{j=2}^i \frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{j-1}} \dot{x}_{j-1} \right).$$

Facilmente se deduce que  $\sum_{j=2}^i \frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{j-1}} x_{j-1} = \dot{V}_{i-1} + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{i-1}} s_i$ , donde  $\frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{i-1}} = s_{(i-1)d}$ . Como  $x_i = s_i + v_{i-1}$ , no es difícil mostrar que  $\dot{\sigma}_{i-1} = \sum_{j=2}^i \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_{j-1}} (x_j + w_{j-1}) = \Psi_{(i-1)n} + \frac{2-p}{\alpha_{i-1}} |x_{i-1}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{\alpha_{i-1}}} s_i + \Psi_{(i-1)\rho}$ , donde las funciones

$$\Psi_{(i-1)\rho} = \sum_{j=2}^i \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_{j-1}} w_{j-1}, \quad \Psi_{(i-1)n} = \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_{j-1}} x_j + \frac{2-p}{\alpha_{i-1}} |x_{i-1}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{\alpha_{i-1}}} v_{i-1}.$$

Acorde con la Suposición 5.1, se tiene que  $\Psi_{(i-1)\rho} \leq \Delta_{(i-1)\rho}$ , donde  $\Delta_{(i-1)\rho} = \sum_{j=2}^i \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_{j-1}} w_{j-1}$ , que se evalúa en  $w_{j-1} = \rho_{j-1} |\sigma_{j-1}|^{2-p} \zeta_{j-1}$ . Tomando en cuenta todo lo anterior, y aplicando la ley de control  $v_i$  definida en (77), se llega a

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -(k_i - \rho_i) |s_{id}| |\sigma_i|^{\frac{\alpha_i+1}{2-p}} \zeta_i - \frac{d_i}{2-p} \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \zeta_{i-1} k_{i-1}^{\frac{3-p}{\alpha_i}} \mathcal{V}_{i-1} + \Phi_i^{\text{chg}}, \\ \Phi_i^{\text{chg}} &= \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \zeta_{i-1} k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} \left[ \frac{d_i}{\alpha_{i-1}} |x_{i-1}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{\alpha_{i-1}}} |s_i|^2 |\sigma_{i-1}|^{\frac{(2-p)(q-p)+(i-2)(1-p)\beta_i \alpha_{i-1}}{(2-p)\alpha_i \beta_{i-1}}} + s_i \Upsilon_{i-1} \right], \end{aligned} \quad (115)$$

donde la función  $\Upsilon_{i-1} = \frac{d_i}{2-p} |\sigma_{i-1}|^{\frac{(2-p)(q-p)+(i-2)(1-p)\beta_i \alpha_{i-1}}{(2-p)\alpha_i \beta_{i-1}}} (\Psi_{(i-1)n} + \Delta_{(i-1)\rho}) + k_{i-1} V_{i-1}^{\frac{q-p}{\alpha_i \beta_{i-1}}} \sigma_{i-1}$ , y  $\mathcal{V}_{i-1} = -V_{i-1}^{\frac{q-p}{\alpha_i \beta_{i-1}}} \dot{V}_{i-1} \geq 0$ , ya que  $\dot{V}_{i-1} \leq 0$ . Al ser  $V_i$  una FLCR, la derivada  $\dot{V}_i$  cumple con el Lema A.6, y por lo tanto existe  $k_i$  suficientemente grande tal que  $\dot{V}_i$  se hace n.d..

*Paso  $i = n$ :* Por argumentos de inducción, se llega a (115) valuada en  $i = n$ . Nuevamente, la derivada  $\dot{V}_n$  se hace n.d. eligiendo el valor de  $k_n$  suficientemente grande.

**Prueba de la Proposición 5.2.** Las funciones continuas  $V_n(x)$  y  $\dot{V}_n(x)$  son homogéneas de grado  $m_{V_n} = \frac{(3-p)\beta_n}{\alpha_n}$  y  $m_{\dot{V}_n} = \frac{\omega_n}{\alpha_n}$ , c.r. a la dilatación (79). Del Lema A.3, se llega a que (82) se cumple  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , donde  $\kappa_n = \min_{\{x: V_n(x)=1\}} \{-\dot{V}_n(x)\}$ . Note que la constante  $\kappa_n > 0$  ya que  $-\dot{V}_n(x)$  es p.d..

Véase el Apéndice A para conocer el Lema A.3.

**Prueba de la Proposición 5.3.** Es directa de la desigualdad (82) y del principio de comparación, [46]. Para cualquier  $v_0 = V_n(x_n(0))$ , la solución  $V_n(t)$  satisface la desigualdad diferencial

- (I)  $V_n(t) \leq (v_0^{\frac{(q-1)\alpha_n}{(3-p)\beta_n}} + \frac{(q-1)\alpha_n}{(3-p)\beta_n} \kappa_n t)^{-\frac{(3-p)\beta_n}{(q-1)\alpha_n}}$ , ya que  $q \in (1, 2)$  y  $p \in [0, 1]$  implican  $\frac{\omega_n}{(3-p)\beta_n} > 1$ . Esta expresión permite estimar una cota del tiempo de convergencia. De hecho, cualquier trayectoria con estado inicial  $x_n(0)$  alcanza el conjunto de nivel  $V_n = r$  ( $0 < r < v_{n0}$ ), en un tiempo determinado por (83). Además, como el  $\lim_{v_0 \rightarrow \infty} T(x_n(0), r) = T_r$ , el tiempo de convergencia  $T(x_n(0), r)$  de cualquier trayectoria tiene una constante de tiempo fijo (84), es decir,  $T(x_n(0), r) \leq T_r$ .
- (II)  $V_n(t) \leq v_0 \exp(-\kappa_n t)$ , como  $q = 1$  y  $p \in [0, 1]$  implican  $\frac{\omega_n}{(3-p)\beta_n} = 1$ . Por lo tanto, el origen es EE.
- (III)  $V_n(t) \leq (v_0^{\frac{(1-q)\alpha_n}{(3-p)\beta_n}} - \frac{(1-q)\alpha_n}{(3-p)\beta_n} \kappa_n t)^{\frac{(3-p)\beta_n}{(1-q)\alpha_i}}$ ,  $\forall q \in [p, 1)$ . Ya que,  $q \in [p, 1)$ , con  $p \in [0, 1)$  si  $n = 1$ , y  $p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1)$  si  $n \geq 2$ , implican  $\frac{\omega_n}{(3-p)\alpha_n} < 1$ . La desigualdad (85) se obtiene fácilmente de esta expresión.

**Prueba del Teorema 5.10.** La prueba emplea la misma FLCR definida en la Proposición 5.1. El paso que hay que probar es  $i = n$ . Bajo la Suposición (5.2) y con el controlador (86), se obtiene

$$\dot{V}_n \leq -(k_n - \rho_n) |s_{nd}| |\sigma_n|^{\frac{\alpha_n+1}{2-p}} \zeta_n - (k_d - \rho_m) |s_{nd}| - \frac{d_n}{2-p} \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \zeta_{n-1} k_{n-1}^{\frac{3-p}{\alpha_n}} \mathcal{V}_{n-1} + \Phi_n^{\text{chg}}(x).$$

Eligiendo  $k_n$  suficientemente grande y  $k_d > \rho_m$ ,  $\dot{V}_n$  se hace n.d..



**Prueba de la Proposición 5.4.** Considere los siguientes conjuntos  $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : V_{n,l_2} \leq E\}$  y  $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : V_{n,d} \leq A\}$ . Defínase,  $E := \min_{\{V_{n,d}=A\}} V_{n,l_2} > 0$ . Acorde con esta condición, se cumple  $S_1 \subset S_2$ . La afirmación de la Proposición se obtiene integrando  $\dot{V}_{n,0}$  y  $\dot{V}_{n,d}$  en los intervalos apropiados. De la Proposición 5.3 se sabe que la convergencia es exponencial, pero además, se puede estimar el tiempo que le toma a la trayectoria iniciada en  $x_n(0) \in \mathbb{R}^n$  en llegar al conjunto  $S_2$  como  $T_1(x_n(0)) = \frac{1}{\kappa_n} \ln\left(\frac{V(x_n(0))}{E}\right)$ .

Cuando las trayectorias llegan a  $S_2$ , es decir, cuando  $V_{n,d} = B$ , por la Proposición 5.3, las trayectorias alcanzarán el origen en un tiempo finito menor a  $T_2(B) \leq \frac{(3-p)\beta_n}{(1-q)\alpha_n \kappa_n} B^{\frac{(1-q)\alpha_n}{(3-p)\beta_n}}$ .

Por lo tanto, las trayectorias del sistema convergen al origen en un tiempo finito menor a  $T_f = T_1 + T_2$  que depende del valor del estado inicial  $x_n(0)$ .

**Prueba de la Proposición 5.5.** Usando los mismos argumentos de la demostración anterior, únicamente hay que integrar  $\dot{V}_{n,l_2}$  y  $\dot{V}_{n,d}$  en los intervalos apropiados. De la Proposición 5.3 se sabe que  $l_2 > 0$  implica  $q \in (1, 2)$ , por lo que existe atractividad en tiempo fijo. Además, el tiempo que le toma a la trayectoria iniciada en  $x_n(0) \in \mathbb{R}^n$  en llegar al conjunto  $S_2$  se determina en (83). Cuando las trayectorias llegan a  $S_2$  ( $V_{n,d} = B$ ), las trayectorias alcanzan el origen en un tiempo finito determinado por (85). Por lo tanto, las trayectorias del sistema convergen al origen en un tiempo finito antes de un tiempo fijo

$$T_p = \frac{(3-p)\beta_n}{(1-q)\alpha_n \kappa_n} B^{\frac{(1-q)\alpha_n}{(3-p)\beta_n}} + \frac{(3-p)\beta_n}{(q-1)\alpha_n \kappa_n} E^{-\frac{(q-1)\alpha_n}{(3-p)\beta_n}}.$$

**Prueba de la Proposición 5.6, del Teorema 5.11, del Teorema 5.12 y del Teorema 5.13.** Todos estos resultados se prueban en forma simultánea y en forma inductiva usando el MB y una Fdes.

*Paso 1:* Se tiene  $\dot{x}_1 = v_1 + w_1$ . Básicamente, existen dos leyes de control a elegir. Primero, considere que  $v_1 = -k_1[\sigma_{1u}]^{1/(2-p)}$ , donde  $\sigma_{1u} = \mu x_1 + \eta[x_1]^{\frac{2-p}{q}}$ , con  $p \in [0, 1]$  y  $q \in [p, 2)$ , por lo tanto,

$$\dot{x}_1 = -k_1[\sigma_{1u}]^{\frac{1}{2-p}} + w_1. \quad (116)$$

La estabilidad del sistema (116) se estudia con ayuda de la FLCR  $V_1 = \frac{2-p}{3-p}|\mu x_1 + \eta[x_1]^{\frac{2-p}{q}}|^{\frac{3-p}{2-p}}$ . Tomando la derivada c.r. al tiempo de  $V_1$  a lo largo de las trayectorias de (116) y bajo la Suposición 5.4, se obtiene

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(v_1 + w_1) \leq -a_{11}(\mu + \frac{2-p}{2-q}\eta|x_1|^{\frac{q-p}{2-q}})|\sigma_{1u}|^{\frac{2}{2-p}}, \quad a_{11} = k_1 - \rho_1.$$

La derivada es n.d. para cualquier  $a_{11} > 0$ . Ahora, considere  $v_1 = -k_1\sigma_{1u}$ ,  $\sigma_{1u} = \mu[x_1]^{\frac{1}{2-p}} + \eta_1[x_1]^{\frac{1}{2-q}}$ . Usando otra FLCR  $V_1 = \frac{2-p}{3-p}\mu|x_1|^{\frac{3-p}{2-p}} + \frac{2-q}{3-p}\eta_1|x_1|^{\frac{3-p}{2-q}}$ , se tiene que la derivada satisface

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}(v_1 + w_1) \leq -a_{11}(\mu[x_1]^{\frac{1}{2-p}} + \eta_1[x_1]^{\frac{1+q-p}{2-q}})(\mu[x_1]^{\frac{1}{2-p}} + \eta_1[x_1]^{\frac{1}{2-q}}) < 0,$$

la cual es n.d. para cualquier  $a_{11} > 0$ .

*Paso 2:* Considere el sistema de segundo orden

$$\dot{x}_1 = x_2 + w_1, \quad \dot{x}_2 = v_2 + w_2. \quad (117)$$

Defina las variables  $s_2 = x_2 - v_1$ ,  $v_1 = -k_1[\sigma_{1u}]^{1/(2-p)}$ ,  $\sigma_{1u} = \mu x_1 + \eta[x_1]^{\frac{2-p}{q}}$ , y la Fdes  $s_{2d} = [x_2]^{2-p} + k_1^{2-p}\sigma_{1u} = \sigma_2$ . Cuando  $s_2 = s_{2d} = 0$ , dichas funciones definen la misma curva  $x_2 = -k_1[\sigma_{1u}]^{\frac{1}{2-q}}$ . Además, la Fdes  $s_{2d}$  pertenece a  $C^1$ . La FLCR se construye de la siguiente manera  $V_2 = \Phi_2(x_2, x_1) + \delta_1 V_1$ ,  $\delta_1 = k_1^{3-p}$ , donde  $\Phi_2(x_2, x_1) = \int_{v_1}^{x_2} [\tau_2]^{2-p} + k_1^{2-p}[\tau_2]^{\frac{2-p}{q}} d\tau_2$ . Por lo tanto,

$$V_2 = \frac{1}{3-p} |x_2|^{3-p} + k_1^{2-p} \sigma_{1u} x_2 + \frac{2-p}{3-p} k_1^{3-p} |\sigma_{1u}|^{\frac{3-p}{2-p}} + \delta_1 V_1, \delta_1 = k_1^{3-p},$$

y  $V_1 = \frac{2-p}{3-p} |\sigma_{1u}|^{\frac{3-p}{2-p}}$ . Tomando la derivada c.r. al tiempo de  $V_2$  a lo largo de las trayectorias de (117), se obtiene

$$\dot{V}_2 = s_{2d}(v_2 + w_2) + k_1^{2-p} s_2 \dot{\sigma}_{1u} + k_1^{3-p} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \dot{x}_2.$$

donde  $\frac{\partial V_1}{\partial x_1} \dot{x}_2 = \dot{V}_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} s_2$ , y  $\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = [\sigma_{1u}]^{\frac{1}{2-p}} (\mu + \frac{2-p}{2-q} \eta |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}})$ . Como  $x_2 = -k_1 [\sigma_{1u}]^{\frac{1}{2-p}} + s_2$ , se deduce que  $\dot{\sigma}_{1u} = \frac{\partial \sigma_{1u}}{\partial x_1} \dot{x}_1 = \frac{\partial \sigma_{1u}}{\partial x_1} (x_2 + w_1)$ ,  $\frac{\partial \sigma_{1u}}{\partial x_1} = (\mu + \frac{2-p}{2-q} \eta |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}})$ . Entonces, bajo la Suposición 5.4, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & s_{2d}(v_2 + w_2) - k_1^{3-p} a_{11} (\mu + \frac{2-p}{2-q} \eta |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}}) |\sigma_{1u}|^{\frac{2}{2-p}} \\ & + k_1^{2-p} |s_2|^2 (\mu + \frac{2-p}{2-q} \eta |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}}) + k_1^{2-p} s_2 (\mu + \frac{2-p}{2-q} \eta |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}}) \rho_1 |\sigma_{1u}|^{1/(2-p)}. \end{aligned} \quad (118)$$

Existen dos formas de elegir la ley de control. Primero, si se aplica el control  $v_2 = -k_2 [\sigma_{2u}]^{\frac{p}{2-p}}$ ,  $\sigma_{2u} = \mu \sigma_2 + \eta [\sigma_2]^{\frac{q}{p}}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -(k_2 - \rho_2) (\mu |\sigma_2|^{\frac{2}{p}} + \eta |\sigma_2|^{\frac{2-p+q}{p}})^{\frac{p}{2-p}} - k_1^{3-p} a_{11} (\mu + \frac{2-p}{2-q} \eta |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}}) |\sigma_{1u}|^{\frac{2}{2-p}} \\ & + k_1^{2-p} |s_2|^2 (\mu + \frac{2-p}{2-q} \eta |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}}) + k_1^{2-p} s_2 (\mu + \frac{2-p}{2-q} \eta |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}}) \rho_1 |\sigma_{1u}|^{\frac{1}{2-p}}. \end{aligned}$$

Del Lema A.1 y del Lema A.2, se obtienen las siguientes desigualdades  $|s_2|^2 \leq 2^{-\frac{2(1-p)}{2-p}} |\sigma_2|^{\frac{2}{2-p}}$ ,

$$\begin{aligned} |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} |s_2|^2 & \leq 2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} \left( \frac{q-p}{2+q-p} \gamma_1^{-\frac{2+q-p}{q-p}} |x_1|^{\frac{2+q-p}{2-q}} + \frac{2}{2+q-p} \gamma_1^{\frac{2+q-p}{2}} |\sigma_2|^{\frac{2+q-p}{2-p}} \right), \\ s_2 |\sigma_{1u}|^{\frac{1}{2-p}} & \leq 2^{\frac{1-p}{2-p}} \left( \frac{1}{2} \gamma_2^{-2} |\sigma_{1u}|^{\frac{2}{2-p}} + \frac{1}{2} \gamma_2^2 |\sigma_2|^{\frac{2}{2-p}} \right), \\ s_2 |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} |\sigma_{1u}|^{\frac{1}{2-p}} & \leq 2^{\frac{1-p}{2-p}} \left( \frac{1+q-p}{2+q-p} \gamma_3^{-\frac{2+q-p}{1+q-p}} (|x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} |\sigma_{1u}|^{\frac{1}{2-p}})^{\frac{2+q-p}{1+q-p}} + \frac{1}{2+q-p} \gamma_3^{\frac{2+q-p}{1}} |\sigma_2|^{\frac{2+q-p}{2-p}} \right), \end{aligned} \quad (119)$$

Definiendo  $\omega_0 = (|x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} |\sigma_{1u}|^{\frac{1}{2-p}})^{\frac{2+q-p}{1+q-p}} / (|x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} |\sigma_{1u}|^{\frac{2}{2-p}})$ , se observa que  $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \omega_0 = \eta^{-\frac{q-p}{(2-p)(1+q-p)}}$ , y  $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \omega_0 = 0$ . Fijando a  $\omega_{0\max} = \max\{\omega_0\}$ , se cumple que  $(|x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} |\sigma_{1u}|^{\frac{1}{2-p}})^{\frac{2+q-p}{1+q-p}} \leq \omega_{0\max} (|x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} |\sigma_{1u}|^{\frac{2}{2-p}})$ . De forma similar, definiendo  $\omega_{00} = |x_1|^{\frac{2}{2-q}} / |\sigma_{1u}|^{\frac{2}{2-p}}$ , se obtiene que  $\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \omega_{00} = \eta^{-\frac{2}{2-p}}$ , y  $\lim_{x_1 \rightarrow 0} \omega_{00} = 0$ , y  $|x_1|^{\frac{2+q-p}{2-q}} \leq \eta^{-\frac{2}{2-p}} |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} |\sigma_{1u}|^{\frac{2}{2-p}}$ . Considerando lo anterior, se llega a que

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -(k_2 - \rho_2) (\mu + \eta |\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}})^{\frac{p}{2-p}} |\sigma_2|^{\frac{2}{2-p}} - k_1^{3-p} a_{11} (\mu + \frac{2-p}{2-q} \eta |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}}) |\sigma_{1u}|^{\frac{2}{2-p}} + \Phi_2(x), \\ \Phi_2(x) & = k_1^{2-p} (A\mu + \frac{2-p}{2-q} B\eta |\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}}) |\sigma_2|^{\frac{2}{2-p}} + k_1^{2-p} (C\mu + \frac{2-p}{2-q} D\eta) |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} |\sigma_{1u}|^{\frac{2}{2-p}}, \end{aligned}$$

donde  $A = 2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} + 2^{-\frac{1}{2-p}} \gamma_2^2 \rho_1$ ,  $B = 2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} \frac{2}{2+q-p} \gamma_1^{\frac{2+q-p}{2}} + 2^{\frac{1-p}{2-p}} \frac{2+q-p}{2+q-p} \gamma_3^{\frac{2+q-p}{1}} \rho_1$ ,  $C = 2^{-\frac{1}{2-p}} \gamma_2^{-2} \rho_1$ , y  $D = 2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} \frac{q-p}{2+q-p} \gamma_1^{-\frac{2+q-p}{q-p}} \eta^{-\frac{2}{2-p}} + 2^{\frac{1-p}{2-p}} \frac{1+q-p}{2+q-p} \gamma_3^{-\frac{2+q-p}{1+q-p}} \rho_1 \omega_{0\max}$ .

Definiendo la función  $\omega_1 = \frac{A\mu + B \frac{2-p}{2-q} \eta |\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}}}{(\mu + \eta |\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}})^{\frac{p}{2-p}}}$ , se observa que  $\lim_{\sigma_2 \rightarrow \infty} \omega_1 = \frac{2-p}{2-q} B \eta^{\frac{2(1-p)}{2-p}}$ , y  $\lim_{\sigma_2 \rightarrow 0} \omega_1 = A \mu^{\frac{2(1-p)}{2-p}}$ . Entonces,  $\omega_1$  está acotada por arriba y por abajo por dos constantes. Fijando  $\omega_{1\max} = \max\{\omega_1\}$ , se concluye que  $A\mu + B \frac{2-p}{2-q} \eta |\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}} \leq \omega_{1\max} (\mu + \eta |\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}})^{\frac{p}{2-p}}$ . Tomando en cuenta este hecho, se llega a

$$\dot{V}_2 \leq -a_{22} (\mu + \eta |\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}})^{\frac{p}{2-p}} |\sigma_2|^{\frac{2}{2-p}} - k_1^{2-p} (a_{21} \mu + \frac{2-p}{2-q} b_{21} \eta |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}}) |\mu x_1 + \eta x_1^{\frac{2}{2-q}}|^{\frac{2}{2-p}},$$

donde  $a_{22} = k_2 - \rho_2 - k_1^{2-p} \omega_1 \text{máx}$ ,  $a_{21} = k_1 a_{11} - C$ , y  $b_{21} = k_1 a_{11} - D$ . La función  $\dot{V}_2$  es n.d. si  $a_{21} > 0$ ,  $a_{22} > 0$  y  $b_{21} > 0$ . Por otro lado, si se aplica la ley de control  $v_2 = -k_2 \mu [\sigma_2]^{2-p} + k_{2u} \eta [\sigma_2]^{2-q}$  y bajo la Suposición 5.3, se obtiene que

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -(k_2 - \rho_2) \mu |\sigma_2|^{2-p} - (k_{2u} - \rho_{2u}) \eta |\sigma_2|^{\frac{2+q-p}{2-p}} \\ &\quad - k_1^{3-p} a_{11} \left( \mu + \frac{2-p}{2-q} \eta |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} \right) |\sigma_{1u}|^{2-p} + \Phi_2(x). \end{aligned}$$

Con ayuda de las desigualdades (119) y siguiendo un procedimiento similar al Paso 2 de la prueba de la Proposición 5.1, se obtiene que  $\dot{V}_2$  es n.d. si las ganancias satisfacen

$$\begin{aligned} k_1 &> \rho_1, \quad k_2 - \rho_2 > \left[ 2^{\frac{2(1-p)}{2-p}} + 2^{-\frac{2}{2-p}} \frac{\rho_1^2}{k_1 a_{11}} \right] k_1^{2-p}, \\ k_{2u} - \rho_{2u} &> \frac{2-p}{2-q} \frac{2 \cdot 2^{\frac{1-p}{2-p}}}{2+q-p} \\ &\quad \left[ 2^{\frac{1-p}{2-p}} \left[ \frac{q-p}{2+q-p} \frac{2^{\frac{2(1-p)}{2-p}}}{\theta_{21} k_1 a_{11}} \right]^{\frac{q-p}{2-p}} + \frac{\rho_1}{2} \left[ \frac{1+q-p}{2+q-p} \frac{2^{\frac{1-p}{2-p}} \rho_1}{\theta_{22} k_1 a_{11}} \right]^{1+q-p} \right] \frac{k_1^{2-p}}{\eta^{\frac{q-p}{2-p}}}, \end{aligned} \quad (120)$$

donde las constantes  $\theta_{21}$  y  $\theta_{22}$  cumplen  $\theta_{21} + \theta_{22} = 1$ .

Paso i – 1: Se define la siguiente Fdes

$$s_{id} = [x_i]^{d_i/\alpha_i} + k_{i-1}^{d_i/\alpha_i} [\sigma_{(i-1)u}]^{\frac{d_i}{2-p}}, \quad \sigma_{iu} = \mu_i \sigma_i + \eta_i [\sigma_i]^{\frac{\alpha_i}{\alpha_i+1} \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i}}, \quad (121)$$

con  $\sigma_i = [x_i]^{\frac{2-p}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{2-p}{\alpha_i}} \sigma_{(i-1)u}$ ,  $\alpha_i = (i-2)p - (i-3)$ ,  $d_i = i - (i-1)p$ ,  $\forall i = 2, \dots, n$ , y  $\sigma_{1u} = \mu_1 x_1 + \eta_1 [x_1]^{\frac{2-p}{2-q}}$ . Cuando  $s_i = s_{id} = \sigma_i = 0$ , las funciones definen el mismo conjunto. En contraste con  $s_i$ , la Fdes  $s_{id}$  es de clase  $C^1$ , y permite construir la FLCR

$$V_i = W_i + \delta_{i-1} (\mu V_{i-1} + \eta V_{i-1}^{\frac{\alpha_i-1}{\alpha_i}} \zeta_{i-1}), \quad \forall i = 2, \dots, n, \quad (122)$$

donde  $W_i = \int_{v_{i-1}}^{x_i} ([\tau_i]^{\frac{d_i}{\alpha_i}} + k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} [\sigma_{(i-1)u}]^{\frac{d_i}{2-p}} \frac{\alpha_i-1}{\alpha_i} \zeta_{i-1}) d\tau_i$ , y  $\delta_{i-1} > 0$ . Por construcción, la FLCR (122) es p.d., de clase  $C^1$  y su forma explícita está dada por la expresión (89). Ahora, suponga que el controlador  $v_{i-1}$  estabiliza el sistema (75) de orden  $(i-1)$  y que la FLC  $V_{i-1}$ , que es p.d. y cuya derivada  $\dot{V}_{i-1}$  es n.d., lo asegura.

Paso i: Tomando en la derivada c.r. al tiempo de la FLC  $V_i$ , definida en (89), a lo largo de las trayectorias de (75), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &= s_{id} [v_i + w_i] + \frac{d_i}{2-p} k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} s_i |\sigma_{(i-1)u}| \dot{\sigma}_{(i-1)u} \\ &\quad + \delta_{i-1} \left( \mu + \eta \frac{\alpha_i-1}{\alpha_i} \zeta_{i-1} V_{i-1}^{\frac{\alpha_i-1}{\alpha_i}} \zeta_{i-1}^{-1} \right) \left( \sum_{j=2}^i \frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{j-1}} \dot{x}_{j-1} \right), \end{aligned}$$

donde  $\sum_{j=2}^i \frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{j-1}} x_j = \dot{V}_{i-1} + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{i-1}} s_i$ , con  $\frac{\partial V_{i-1}}{\partial x_{i-1}} = s_{(i-1)d}$ . Además,  $\dot{\sigma}_{(i-1)u} = (\mu + \frac{\alpha_i-1}{\alpha_i} \zeta_{i-1} \eta [\sigma_{i-1}]^{\frac{q-p}{\alpha_i \beta_{i-1}}}) \dot{\sigma}_{i-1}$ , donde  $\dot{\sigma}_{i-1} = \sum_{j=2}^i \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_{j-1}} (x_j + w_{j-1}) = \Psi_{(i-1)n} + \frac{2-p}{\alpha_{i-1}} |x_{i-1}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{\alpha_{i-1}}} s_i + \Psi_{(i-1)\rho}$ . La función  $\Psi_{(i-1)\rho} = \sum_{j=2}^i \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_{j-1}} w_{j-1}$ , y la función  $\Psi_{(i-1)n} = \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_{j-1}} x_j + \frac{2-p}{\alpha_{i-1}} |x_{i-1}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{\alpha_{i-1}}} v_{i-1}$ . Acorde con la Suposición 5.4, se cumple  $\Psi_{(i-1)\rho} \leq \Delta_{(i-1)\rho}$ , donde  $\Delta_{(i-1)\rho} = \sum_{j=2}^i \frac{\partial \sigma_{i-1}}{\partial x_{j-1}} w_{j-1}$ , se evalúa en  $w_{j-1} = \rho_{j-1} |\sigma_{(j-1)u}|^{\frac{\alpha_j}{2-p}} \zeta_{i-1}$ . Tomando en cuenta todo lo anterior, y aplicando la ley de control  $v_i = -k_i [\mu \sigma_i + \eta [\sigma_i]^{\frac{\alpha_i}{\alpha_i+1} \zeta_i}]^{\frac{\alpha_i+1}{2-p}}$ , y bajo la Suposición 5.4, se llega a que

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -(k_i - \rho_i) |s_{id}| |\sigma_{iu}|^{\frac{\alpha_i+1}{2-p}} - \delta_{i-1} \left( \mu V_{i-1} + \frac{\alpha_i-1}{\alpha_i} \zeta_{i-1} \eta \mathcal{V}_{u(i-1)} \right) + \Phi_i(x), \\ \Phi_i(x) &= \frac{d_i}{\alpha_{i-1}} k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} |s_i|^2 \left( \mu + \frac{\alpha_i-1}{\alpha_i} \zeta_{i-1} \eta |\sigma_{i-1}|^{\frac{q-p}{\alpha_i \beta_{i-1}}} \right) |\sigma_{(i-1)u}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{2-p}} |x_{i-1}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{\alpha_{i-1}}} \\ &\quad + k_{i-1}^{\frac{d_i}{\alpha_i}} s_i \Upsilon_{i-1}, \end{aligned}$$

El método propuesto en el Capítulo 4 para construir una FCLR se ha modificado acorde a Andrieu et al. [2].

(123)

donde la función  $\Upsilon_{i-1} = \frac{d_i}{2-p} |\sigma_{(i-1)u}|^{\frac{(i-2)(1-p)}{2-p}} (\mu + \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \zeta_{i-1} \eta |\sigma_{i-1}|^{\frac{q-p}{\alpha_i \beta_{i-1}}}) (\Psi_{(i-1)n} + \Delta_{(i-1)\rho}) + k_{i-1} (\mu + \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \zeta_{i-1} \eta V_{u(i-1)}^{\frac{q-p}{\alpha_i \beta_{i-1}}}) s_{(i-1)d}$ , y las funciones  $\mathcal{V}_{i-1} = -\dot{V}_{i-1} \geq 0$ ,  $\mathcal{V}_{u(i-1)} = -V_{i-1}^{\frac{q-p}{\alpha_i \beta_{i-1}}} \dot{V}_{i-1} \geq 0$ , ya que  $\dot{V}_{i-1} \leq 0$ . Las funciones  $V_i$  y  $\dot{V}_i$  son homogéneas en el bi-límite. Cuando  $\eta = 0$ , se recobra la función homogénea de la Proposición 4.1, y cuando  $\mu = 0$ , se obtiene la función homogénea de la Proposición 5.1. Por lo tanto, la derivada  $\dot{V}_i$  es un función homogénea en el bi-límite que satisface todos los puntos el Lema A.6. Entonces, existe  $k_i$  suficientemente grande tal que  $\dot{V}_i$  se hace n.d..

*Paso i = n:* Para el último paso, se elije  $v_n = -k_n \mu [\sigma_n]^{\frac{\alpha_n+1}{2-p}} - k_{nu} \eta [\sigma_n]^{\frac{\alpha_n}{2-p}} \zeta_n$ . Por argumentos de inducción y acorde a la Suposición 5.3, se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -(K_m k_n - \rho_n) \mu |s_{nd}| |\sigma_n|^{\frac{\alpha_n+1}{2-p}} - (K_m k_{nu} - \rho_{nu}) \eta |s_{nd}| |\sigma_n|^{\frac{\alpha_n}{2-p}} \zeta_n \\ &\quad - \delta_{n-1} (\mu \mathcal{V}_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \zeta_{n-1} \eta \mathcal{V}_{u(n-1)}) + \Phi_n(x), \end{aligned}$$

la cual se hace n.d. eligiendo los valores de  $k_n$  y  $k_{nu}$  suficientemente grandes.

**Prueba de la Proposición 5.7.** Las funciones  $V_i(x)$  y  $\dot{V}_i(x)$  tienen propiedades de homogeneidad en el bi-límite [2].

(I) Cuando  $\eta = 0$ , las funciones continuas  $V_n(x)$  y  $\dot{V}_n(x)$  son homogéneas de grados  $m_{V_n} = 3-p$  y  $m_{\dot{V}_n} = 2$ , c.r. a la dilatación  $\delta_\epsilon^r(x) = (\epsilon^{2-p} x_1, \epsilon^1 x_2, \dots, \epsilon^{\alpha_n} x_n)$ . Del

Lema A.3, se concluye que  $\dot{V}_n \leq -\kappa_{fn} V_n^{\frac{2}{3-p}}(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , donde  $\kappa_{fn} = \min_{\{x: V_n(x)=1\}} \{-\dot{V}_n(x)\}$ .

(II) Cuando  $\mu = 0$ , las funciones  $V_n(x)$  y  $\dot{V}_n(x)$  son homogéneas de grados  $m_{V_n} = \frac{(3-p)\beta_n}{\alpha_n}$  y  $m_{\dot{V}_n} = \frac{\omega_n}{\alpha_n}$  c.r. a la dilatación (79). Del Lema A.3 se concluye que  $\dot{V}_n \leq -\kappa_{un} V_n^{\frac{\omega_n}{(3-p)\beta_n}}(x)$  se cumple  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , donde  $\kappa_{un} = \min_{\{x: V_n(x)=1\}} \{-\dot{V}_n(x)\}$ . En este caso,  $\frac{\omega_n}{(3-p)\beta_n} < 1$ , para cualquier  $q \in [p, 1)$ ;  $\frac{\omega_n}{(3-p)\beta_n} > 1$ , para cualquier  $q \in (1, 2)$ ; y  $\frac{\omega_n}{(3-p)\beta_n} = 1$ , si  $q = 1$ .

Por lo tanto, del Lema A.5, existe una constante  $\kappa_n$  tal que (94) se cumple.

**Prueba de la Proposición 5.8.** De la desigualdad (94) y del principio de comparación, [46], la solución  $V_n(t)$ , con  $V_0 = V_n(x_n(0))$ , satisface la desigualdad diferencial

$$(I) \quad V_n(t) \leq \min\{V_{nf}, V_{nu}\}, \text{ donde } V_{nf} = (V_0^{\frac{1-p}{3-p}} - \frac{1-p}{3-p} \kappa_n \mu t)^{\frac{3-p}{1-p}} \text{ y } V_{nu} = (V_0^{\frac{(1-q)\alpha_n}{(3-p)\beta_n}} - \frac{(1-q)\alpha_n}{(3-p)\beta_n} \kappa_n \eta t)^{\frac{(3-p)\beta_n}{(1-q)\alpha_n}}, \forall q \in [p, 1). \text{ Como, } q \in [p, 1), \text{ con } p \in [0, 1) \text{ si } n = 1, \text{ y } p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1) \text{ si } n \geq 2, \text{ esto implica } \frac{\omega_n}{(3-p)\beta_n} < 1.$$

$$(II) \quad V_n(t) \leq \exp(-\kappa \eta t) [V_0^{\frac{1-p}{3-p}} - \frac{\mu}{\eta} [\exp(\frac{1-p}{3-p} \eta t) - 1]]^{\frac{3-p}{1-p}}. \text{ Ya que } q = 1 \Rightarrow \frac{\omega_n}{(3-p)\beta_n} = 1.$$

$$(III) \quad V_n(t) \leq \min\{V_{nf}, V_{nu}\}, \text{ donde } V_{nu} = (V_0^{-\frac{(q-1)\alpha_n}{(3-p)\beta_n}} + \frac{(q-1)\alpha_n}{(3-p)\beta_n} \kappa_n \eta t)^{-\frac{(3-p)\beta_n}{(q-1)\alpha_n}}, \forall p \in [0, 1) \text{ y } q \in (1, 2), \text{ lo cual implica } \frac{\omega_n}{(3-p)\beta_n} > 1.$$

Para estimar una cota de tiempo de convergencia de (I) y (II) se siguen los siguientes pasos:

(A1) Con la función  $V_{nu}$  se calcula el tiempo  $T_2(x_0, r)$  que le toma a una trayectoria con estado inicial  $x_0$ , perteneciente a un conjunto de nivel  $V_{nu}(x_n(0))$ , en llegar al conjunto de nivel  $V_{nu} = r > 0$ , para alguna  $0 < r < V_{nu}(x_n(0))$ .

(A2) Con la función  $V_{nf}$  se calcula el tiempo  $T_1(r)$  que le toma a la trayectoria en llegar a  $V_{nf} = 0$  desde el conjunto de nivel  $V_{nf}(x_n(0)) = r$ . Esto significa que se estima el tiempo en el que se alcanza el punto  $x = 0$ .

(A3) El tiempo total cumple  $T(x_0) \leq T_1(r) + T_2(x_0, r)$ .

Conforme al algoritmo anterior se obtienen las estimaciones (95). Además, cuando  $q \in (1, 2)$ , el tiempo  $T(x_0)$  tiene una constante de tiempo fijo (96), es decir,  $T(x_0) \leq T_p$ .

**Prueba del Teorema 5.14 y del Teorema 5.15.** La prueba es directa de la Proposición 5.6. Sólo se debe probar el último paso. Así que por argumentos de inducción se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -(k_n - \rho_n)\mu|s_{nd}|\sigma_n|^{\frac{\alpha_{n+1}}{2-p}} - (k_{nu} - \rho_{nu})\eta|s_{nd}|\sigma_n|^{\frac{\alpha_n}{2-p}} \zeta_n \\ &\quad - \delta_{n-1}(\mu\mathcal{V}_{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\zeta_{n-1}\eta\mathcal{V}_{u(n-1)}) + \Phi_n(x) - (K_m K(t, x) - \Xi(t, x))\mu|s_{nd}|\sigma_n|^{\frac{\alpha_{n+1}}{2-p}}. \end{aligned}$$

Hay que elegir  $k_n$  y  $k_{nu}$  suficientemente grandes, y  $K_m K(t, x) \geq \Xi(t, x)$ , para que  $\dot{V}_n$  sea n.d..

**Prueba del Teorema 5.16.** Es un caso particular del Teorema 5.14 cuando  $n = 2$ .

**Prueba de la Proposición 5.9.** La FLC de la Proposición 5.6 garantiza que todos las trayectorias decrecen al origen en tiempo finito pero no permite saber si entran al modo deslizante  $\sigma_2 = 0$ . Para hallar las condiciones bajo las cuales existe el modo deslizante considere la función  $V = 0.5|\sigma_2|^2$ . La derivada c.r. al tiempo satisface

$$\dot{V} = \sigma_2[2|x_2|\dot{x}_2 + k_1^2(\mu + \frac{2}{2-q}\eta|x_1|^{\frac{q}{2-q}})\dot{x}_1] \leq -2|x_2|[a\mu|\sigma_2| + b\eta|\sigma_2|^{\frac{q+2}{2}}] - 2c|x_2||\sigma_2|, \quad (124)$$

donde  $a = K_m k_2 - \frac{k_1^2}{2} - \rho$ ,  $b = K_m k_{2u} - \rho_u$ , y  $c = (K_m K(t, x) - \Xi(t, x))\mu - \frac{k_1^2}{2-q}\eta|x_1|^{\frac{q}{2-q}}$ . La derivada es n.d. para cualquier  $x_2 \neq 0$ . Las trayectorias del sistema no pueden estar en el conjunto  $D = \{(x_2, x_1) : \{x_2 = 0\} \setminus \{x_1 = x_2 = 0\}\}$ , debido a que el campo vectorial del sistema en lazo cerrado es transverso a este conjunto, [32]. Por lo tanto, las trayectorias del sistema decrecen hasta que el origen es alcanzado en tiempo finito. Si  $K_m K(t, x)\mu > \frac{k_1^2}{2-q}\eta|x_1|^{\frac{q}{2-q}} + \Xi(t, x)\mu$ , entonces (124) se reduce a

$$\dot{V} \leq -2|x_2|[a\mu|\sigma_2| + a\eta|\sigma_2|^{\frac{q+2}{2}}].$$

La cual es negativa si  $K_m k_2 > \frac{k_1^2}{2} + \rho$  y  $K_m k_{2u} > \rho_u$ . Las ganancias del Teorema (5.16) satisfacen estas condiciones. Por lo tanto, cualquier trayectoria llega la SD  $\sigma_2 = 0$  en tiempo finito.

**Prueba de la Proposición 5.10.** En este caso la derivada (124) satisface  $\dot{V} \leq -2|x_2||\sigma_2|\Lambda$ ,

donde  $\Lambda := a\mu + [b|\sigma_2|^{\frac{q}{2}} - \frac{k_1^2}{2-q}|x_1|^{\frac{q}{2-q}}]\eta$ . Como la función  $\Lambda$  no es positiva para cualquier  $x_2, x_1$ , se necesita determinar para que puntos existe el modo deslizante. La derivada  $\dot{V}$  es negativa en todos aquellos puntos  $x = \{(x_2, x_1) : \Lambda > 0\}$ . Con este conjunto se puede calcular la región de atracción del modo deslizante. Para ello se asume que se presenta el modo deslizante,  $\sigma_2 = 0$ , en el conjunto  $\Lambda > 0$ , con lo cual se obtiene la condición

$$R = [a\frac{(2-q)\mu}{\eta k_1^2}]^{\frac{2-q}{q}} > |x_1|.$$

Por lo tanto, una estimación de la región de atracción es  $\Omega_R = \{(x_1, x_2) : |x_1| < R, |x_2| < k_1(\mu R + \eta R^{\frac{2}{2-q}})^{1/2}\}$ . La región de atracción del modo deslizante se puede hacer arbitrariamente grande si  $k_2$  y  $\mu$  se eligen suficientemente grandes, logrando que cualquier trayectoria alcance el modo deslizante de casi cualquier punto en el plano fase. Cuando  $K_m k_2 = \frac{k_1^2}{2} + \rho$ , el origen es el único punto de atracción.

## Parte II

### ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO FIJO VÍA CONTROL POR MODOS DESLIZANTES (CMD)

Esta segunda parte se enfoca en el diseño de controladores de tiempo fijo a través del método brindado por la técnica clásica de CMD.



*“He oído de él, viajero misterioso que recorre caminos jamás vistos, jamás imaginados.”*

— Alan H. Cruz [22]

El motivo principal de desarrollar controladores con convergencia en tiempo fijo nace de la estabilización de los sistemas conmutados o con algún tiempo vida estrictamente positivo. Este tipo de sistemas están compuesto de varios subsistemas y una regla (discreta o dependiente del estado) que decide como debe ser la conmutación entre ellos. Para esta clase de sistemas, el controlador debe ser capaz de cumplir con el objetivo de control durante el tiempo de vida de cada sistema sin importar cual haya sido la condición inicial, de no ser así el sistema puede llegar a desestabilizarse.

Las dos características atrayentes de la estabilización en tiempo fijo son: (a) la velocidad de convergencia se mejora enormemente, tanto que el tiempo de convergencia esta uniformemente acotado por una constante que no depende del estado inicial; (b) incluir términos de alto orden en la estructura de control ayuda a compensar perturbaciones crecientes que pueden escapar a infinito en tiempo finito. A pesar de que el CMD y el CMDOS son técnicas poderosas empleadas en la estabilización de sistemas no lineales, estas no pueden garantizar convergencia en tiempo fijo ni compensar perturbaciones crecientes, ya que utilizan entradas de control acotadas.

En este capítulo se realiza el diseño de controladores de tiempo fijo usando la metodología clásica del CMD. Este diseño clásico consiste en hallar la entrada de control que lleva a las trayectorias de estado del sistema a la SD en tiempo finito, [87]. La principal desventaja del CMD es que produce el fenómeno de *chattering*, restringiendo las posibilidades de implementación en la práctica del CMDPO. El efecto del *chattering* producido en los sistemas controlados puede atenuarse mediante el empleo de MDOS [56], y entre los cuales se encuentra el controlador super-twisting. Este controlador permite reducir dicho efecto, y además, provee robustez c.r. a perturbaciones continuas que tienen derivada acotada, es decir, hay robustez ante señales que satisfacen la condición de Lipschitz c.r. al tiempo, [53].

Usando el CMD clásico, con la aplicación de un CMDPO, o un controlador super-twisting, el tiempo de convergencia a la SD crece con el incremento de la condición inicial. Incluso si la trayectoria comienza en la SD, el tiempo de convergencia a una vecindad del origen sobre la SD crece en función de la condición inicial sobre dicha superficie. Esto se debe a que convencionalmente la SD es un hiperplano lineal que conduce a la estabilidad exponencial de las trayectorias.

Usar una SD no lineal en vez de una SD lineal en un CMD puede llegar a mejorar el desempeño deseado del sistema en lazo cerrado, y que no siempre se puede lograr usando sólo superficies deslizantes lineales, (véase [9], [7], y sus referencias).

Los diferenciadores y observadores propuestos en [23], [24] aseguran convergencia en tiempo fijo independientemente del valor de la condición inicial de error. La simple aplicación de estos algoritmos al diseño de CMD, no garantiza convergencia en tiempo fijo a una vecindad del origen del sistema controlado, solo asegura convergencia en tiempo fijo a la SD, [25].

*Generalmente, el comportamiento conmutado se presentan en sistemas híbridos pero no se limita solamente a ellos. Se puede presentar en cualquier modelo cuya validez está limitada a un intervalo de tiempo que es finito.*

*Al tiempo entre conmutaciones se le conoce como “modo de operación”, que es el tiempo en el cual esta activo cierto subsistema.*

*Los controladores introducidos en el Capítulo 8 sí aseguran que cada subsistema es ETFj.*

*Sólo es posible usar un MDPO en sistemas donde el switcheo es el modo natural de trabajo en el sistema.*



## 6.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS

Considere el siguiente sistema controlable de segundo orden con una entrada de control

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + u + w(x, t),\end{aligned}\tag{125}$$

donde  $x = [x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$  es el vector de estados,  $u \in \mathbb{R}$  es la entrada de control, los parámetros  $a_{11}$ ,  $a_{12} \neq 0$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  son constantes y  $w(x, t)$  es una perturbación acoplada, posiblemente no desvaneciente, que actúa sobre el sistema. El CMD clásico estabiliza el sistema (125) bajo la hipótesis de que la perturbación esté acotada por alguna constante, es decir,  $|w(x, t)| \leq \rho_0$ , siendo  $\rho_0 > 0$  conocida. Como el sistema se encuentra en la forma normal, es posible aplicar la técnica de CMD sin necesidad de transformar el sistema, [87].

*La condición  $a_{12} \neq 0$  asegura que el sistema sea controlable.*

Supóngase que se quiere diseñar una SD lineal. Para el sistema (125), se diseña como

$$s = x_2 + c_1x_1 = 0.$$

Mediante una ley de control discontinua, el modo deslizante  $s = 0$  se alcanza en tiempo finito, [87]. Al establecerse el modo deslizante, la dinámica del sistema queda descrita por el sistema reducido

$$\dot{x}_1 = (a_{11} - a_{12}c_1)x_1, \tag{126}$$

donde la constante  $c_1$  se elige para asegurar el eigenvalor deseado de (126). Una vez seleccionada la SD, la entrada de control debe garantizar que cualquier trayectoria llegue a la SD en tiempo finito, y así, lograr que se establezca el modo deslizante a pesar de la presencia de perturbaciones (acopladas). La ley de control que garantiza la existencia del modo deslizante se diseña de tal manera que la condición de suficiencia  $s\dot{s} < -n|s|$ , se cumpla, [87]. Para el sistema (125), una ley de control que satisface esta condición es

$$u = -(c_1a_{11} + a_{21})x_1 - (c_1a_{12} + a_{22})x_2 - Q|s|^0, \tag{127}$$

donde  $Q$  se elige tomando en cuenta la cota superior de la incertidumbre, es decir,  $Q > \rho_0$ . Mientras que la ley de control garantiza convergencia en tiempo finito a la SD, en el modo deslizante las trayectorias convergen exponencialmente al origen. Cabe mencionar que las trayectorias del sistema si entran a una vecindad del origen en tiempo finito. Pero, si el valor de la condición inicial se hace cada vez más grande, el tiempo de convergencia a dicha vecindad del origen también se incrementa. Esto hace que sea imposible determinar el tiempo en que las trayectorias alcanzan alguna vecindad del origen independientemente del valor que tenga el estado inicial.

*Con una SD lineal, cuando el valor de la condición inicial tiende a ser infinito, el tiempo de convergencia también tiende a ser infinito.*

El problema a considerar en este capítulo es utilizar la técnica de CMD para diseñar leyes de control discontinuas, capaces de asegurar que cualquier vecindad  $B_r$  del origen del sistema lineal (125) sea ATFj, independientemente de las variaciones en la condición inicial y de las perturbaciones que actúan sobre el sistema. Tomando en cuenta lo anterior:

- (1) Se diseña una SD no lineal tal que, cuando se establezca el modo deslizante  $s = 0$ , las trayectorias de estado converjan asintóticamente al origen, pero que además, asegure que cualquier vecindad de radio  $r$  arbitrario es ATFj.
- (2) Se diseña la ley de control discontinua que garantiza la existencia del modo deslizante en un tiempo fijo. Cualquier trayectoria del sistema, con condición inicial  $x_0$ , bajo la acción del control converge a la SD en un tiempo fijo, a pesar de la presencia de cierta clase de perturbaciones. En particular, se proponen dos tipos de controladores de tiempo fijo:

- (A) Un controlador de tiempo fijo basado en un MDPO o controlador relé (Subsección 6.3.1).
- (B) Un controlador de tiempo fijo absolutamente continuo basado en una generalización del controlador super-twisting (Subsección 6.3.2).

Ambos controladores son robustos ante variaciones en la condición inicial y cada uno es robusto ante una clase diferente de perturbaciones;

- (2) Finalmente, se estima la constante de tiempo fijo en función del radio de una vecindad centrada en el origen y de la cotas de las perturbaciones para ambos controladores.

La metodología utilizada en este capítulo se basa en el enfoque de FL propuesto en Moreno and Osorio [66], Moreno [65] y Cruz-Zavala et al. [24].

## 6.2. SUPERFICIE DESLIZANTE (SD) UNIFORME

La SD que se propone es la siguiente

$$s = x_2 + c_1 x_1 + c_2 |x_1|^q = 0, \quad (128)$$

Cuando en (128) el parámetro  $q = 1$ , se recupera la SD lineal.

donde  $c_1, c_2 > 0$  y  $q > 0$  son constantes positivas. Si el parámetro  $q > 1$ , la velocidad de convergencia de las trayectorias en el modo deslizante es tan grande, que el tiempo de convergencia a una vecindad del origen está uniformemente acotado c.r. a la condición inicial, es decir, dicha vecindad es ATFj.

Introduciendo  $(s, x_1)$  como nuevas variables de estado y aplicando la entrada de control

$s$  queda definida por (128).

$$\begin{aligned} u &= u_{eq} + v, \\ u_{eq} &= -[c_1(a_{11} - a_{12}c_1) + (a_{21} - a_{22}c_1)]x_1 - (a_{12}c_1 + a_{22})s + (c_1 a_{12} + a_{22})c_2 |x_1|^q \\ &\quad - qc_2 |x_1|^{q-1} [(a_{11} - a_{12}c_1)x_1 - a_{12}c_2 |x_1|^q + a_{12}s], \end{aligned} \quad (129)$$

al sistema (125), se obtiene la siguiente representación

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (a_{11} - a_{12}c_1)x_1 - a_{12}c_2 |x_1|^q + a_{12}s, \\ \dot{s} &= v + w(x, t). \end{aligned} \quad (130)$$

El termino  $u_{eq}$  compensa la dinámica nominal (o conocida) del sistema. La dinámica del sistema (125), en el modo deslizante (cuando  $s = 0$ ), está gobernada por la EDO

$$\dot{x}_1 = (a_{11} - a_{12}c_1)x_1 - a_{12}c_2 |x_1|^q. \quad (131)$$

El termino  $|x_1|^q$  contiene un exponente con valor mayor a uno, si  $q > 1$ , y es el encargado de acelerar la velocidad de convergencia al origen. Esto se debe a que este término es más fuerte mientras la condición inicial sea más grande. Como consecuencia, el tiempo de convergencia de cualquier trayectoria a una vecindad del origen posee una constante de tiempo fijo independientemente de la condición inicial que se tenga.

**Teorema 6.1** Si los parámetros  $c_1$  y  $c_2$  son seleccionadas tal que  $-\alpha = a_{11} - a_{12}c_1 < 0$  y  $\beta = a_{12}c_2 > 0$ , el origen del sistema reducido (131) es AE. Además, toda trayectoria converge a una vecindad del origen de radio  $r > 0$  antes de un tiempo fijo

$$T_r = \frac{1}{(q-1)\beta} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{\beta r^{q-1}}\right). \quad (132)$$

La constante  $T_r$  no depende de las condición inicial. Es evidente que  $\lim_{r \rightarrow 0} T_r = \infty$ . Este hecho contundente de debe a que la convergencia de las trayectorias al origen es asintótica.

Para todo estado inicial  $x_0$  sobre la SD las trayectorias del sistema (131) deslizan sobre ella asintóticamente al origen. Pero aún más interesante es que, cualquier trayectoria pertenecerá a una bola  $B_r = \{x_1 \in \mathbb{R} : |x_1| < r\}$ , centrada en el origen, para cualquier tiempo mayor a  $T_r$ , sin importar cual haya sido la condición inicial.

### 6.3. CONTROLADORES DE TIEMPO FIJO

Una vez especificada la SD y cuyo diseño está sujeto a los requerimientos de desempeño para el sistema, la nueva entrada de control  $v$  se diseña para hacer que las trayectorias alcancen la SD en tiempo fijo, y así, establecer el modo deslizante. Existen algunas leyes de control basadas en el diseño clásico que garantizan la existencia del modo deslizante (véase, por ejemplo [42]). Sin embargo, dichas leyes de control no tienen la propiedad de convergencia en tiempo fijo que nos interesa.

En Hung et al. [42], las leyes de control se obtienen a través del enfoque denominado reaching law, en el cual las dinámicas de switcheo son especificadas a priori y básicamente, están basadas en un MDPO.

#### 6.3.1. Controlador Uniforme de Primer Orden (CUPO)

La ley de control se diseña para que las trayectorias del sistema lleguen a la SD en tiempo fijo, incluso en presencia de perturbaciones. Una vez allí, se deslizan a lo largo de la SD (128) y el sistema es invariante ante perturbaciones acopladas. Las perturbaciones que soportará el sistema dependen de la ley de control seleccionada. Primero se considera que  $w(x, t)$  pertenece a la clase  $\mathcal{W}_1 = \{w \in \mathbb{R} : |w(x, t)| \leq \rho_0 + \rho_{02} |s| + \rho_{03} |s|^{q_v}, \rho_0, \rho_{02}, \rho_{03} > 0, q_v > 1\}$ . Tenga en cuenta que estas funciones están uniformemente acotadas en  $t, \forall t > 0$ . Note que la perturbación puede no desvanecer en el origen e incluso puede llegar a ser discontinua.

**Teorema 6.2** *Suponga que la perturbación  $w(x, t) \in \mathcal{W}_1$ . Entonces, la ley de control (129), con*

$$v = -Q_0 [s]^0 - K_2 s - K_3 [s]^{q_v}, \quad q_v > 1, \tag{133}$$

donde  $Q_0 > \rho_0$ ,  $K_2 > \rho_{02}$ , y  $K_3 > \rho_{03}$  son constantes positivas, asegura el modo deslizante. Además, la SD  $s = 0$  es ETFj, y de cualquier estado inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ , las trayectorias alcanzan el modo deslizante, en presencia de perturbaciones  $w(x, t) \in \mathcal{W}_1$ , antes de un tiempo fijo

$$T_f = \frac{2}{(q_v - 1)\kappa_{03}} r_s^{-\frac{1}{2}(q_v - 1)} + \frac{2}{\kappa_{02}} \ln\left(\frac{\kappa_{02}}{\kappa_{01}} r_s^{\frac{1}{2}} + 1\right), \tag{134}$$

donde  $\kappa_{01} = \sqrt{2}(Q_0 - \rho_0)$ ,  $\kappa_{02} = 2(K_2 - \rho_{02})$ ,  $\kappa_{03} = 2^{(q_v + 1)/2}(K_3 - \rho_{03})$ , y  $r_s$  es la raíz real positiva de la ecuación

$$r_s^{\frac{1}{2}} + (\kappa_{01}/\kappa_{02}) = (\kappa_{03}/\kappa_{02}) r_s^{\frac{q_v}{2}}. \tag{135}$$

Distintas leyes de control pueden derivarse a partir de (133), [42]. Además, el término asociado a la ganancia  $K_3 > 0$  permite la convergencia en tiempo fijo la SD y compensa perturbaciones que pueden crecer más rápidamente que un término lineal en  $s$ . El término con ganancia  $K_2 > 0$  hace posible compensar perturbaciones con crecimiento lineal en  $s$ .

#### 6.3.2. Controlador Super-Twisting Uniforme (CSTU)

Las principal desventaja de utilizar un relé (o controladores unitarios) en la ley de control para asegurar el modo deslizante es que produce el efecto de *chattering*. Para eliminar la componente de alta frecuencia de estos controladores usualmente se usa un filtro junto con el control basado en un MDPO. Otro enfoque para hacer frente a este problema, es utilizar MDOS. Dentro de la categoría de MDOS se encuentran

El valor de  $r_s$  minimiza a  $T_f$ . La expresión (135) se halla fácilmente calculando el mínimo de (134). La ecuación tiene solución explícita para ciertos valores de  $q_v$ , por ejemplo, para  $q_v = 3/2$  y  $q_v = 2$ .

Los controladores unitarios son de la forma TAL.

El filtro permite el paso de frecuencias bajas.

los MDSO, [58]. A esta categoría pertenece el super-twisting, ampliamente utilizado como un controlador emphabsolutamente continuo, pues depende de la variedad deslizante, es efectivo para aliviar el efecto de chattering y asegura todas las propiedades principales de un CMDPO para un sistema con perturbaciones acopladas continuas que son Lipschitz c.r. al tiempo. Con base en las ventajas mencionadas, en esta sección se desarrolla un controlador de tiempo fijo basado en el Super-Twisting generalizado. El controlador super-twisting uniforme (CSTU) que se propone está descrito por

$$v = -k_1 \phi_1(s) - k_2 \int_0^t \phi_2(s) dt, \quad (136)$$

donde  $k_1, k_2$  son las ganancias a ser diseñadas

$$\begin{aligned} \phi_1(s) &= \mu_1 [s]^{\frac{1}{2}} + \mu_2 s + \mu_3 [s]^{\frac{3}{2}}, \\ \phi_2(s) &= \frac{1}{2} \mu_1^2 [s]^0 + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 [s]^{\frac{1}{2}} + (\mu_2^2 + 2\mu_1 \mu_3) s + \frac{5}{2} \mu_2 \mu_3 [s]^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \mu_3^2 [s]^2, \end{aligned}$$

con  $\mu_1, \mu_2$  y  $\mu_3$  siendo constantes positivas. Del CSTU se recupera el controlador Super-Twisting, si  $\mu_2 = \mu_3 = 0$ , y las ganancias se eligen tal que  $k_1, k_2 > 0$ . La nueva ley de control (136) hereda las propiedades de robustez del controlador Super-Twisting, y además, contiene términos de alto orden que proporcionan convergencia en tiempo fijo a la SD. A diferencia de la perturbaciones que puede compensar el CUPO, el CSTU solo es capaz de compensar perturbaciones  $w(x, t)$  que pertenecen a la clase  $\mathcal{W}_2$ , definida por  $\mathcal{W}_2 = \{w \in \mathbb{R} : |g_1(x, t)| \leq \rho_1 |\phi_1(s)|, \left| \frac{d}{dt} g_2(x, t) \right| \leq \rho_2 |\phi_2(s)|\}$ , siendo  $\rho_1, \rho_2 \geq 0$  constantes conocidas, y donde

$$w(x, t) = g_1(x, t) + g_2(x, t),$$

es una decomposición de la señal de perturbación. Teniendo en cuenta que las perturbaciones  $w(x, t) \in \mathcal{W}_2$  y que el controlador  $v$  se elige como en (136), la dinámica del sistema (130) puede extenderse como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (a_{11} - a_{12}c_1)x_1 - a_{12}c_2 [x_1]^q + a_{12}s, \\ \dot{s} &= -k_1 \phi_1(s) + s_1 + g_1(x_1, x_2, t), \\ \dot{s}_1 &= -k_2 \phi_2(s) + \frac{d}{dt} g_2(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (137)$$

Las ganancias  $(k_1, k_2)$  deben elegirse de tal forma que exista solución a la desigualdad matricial lineal (DML)

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + R + \epsilon I & PB \\ B^T P & -\Theta \end{bmatrix} < 0, \quad (138)$$

para algunos  $\theta_1, \theta_2 \geq 0$ ,  $\epsilon > 0$ , y  $P = P^T > 0$  siendo un matriz simétrica p.d., donde  $R = (\theta_1 \rho_1^2 + \theta_2 \rho_2^2) C^T C$ ,

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0]^T, \Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (139)$$

Esto garantiza que el origen del subsistema  $(s, s_1)$  es globalmente ETF, [65]. Para poder estimar la constante de tiempo fijo, debe elegirse alguna  $\delta$  que cumpla las desigualdades

$$\delta > (4/27k_2)^{\frac{1}{3}}, 7\delta k_2(k_1 - \rho_1) > 4(3)^{\frac{3}{2}} \rho_2^{\frac{7}{4}} \delta^{\frac{7}{4}} + (k_1 + \rho_1)^{\frac{7}{3}} + 4(k_2 + \rho_2)^{\frac{7}{6}}. \quad (140)$$

**Teorema 6.3** *Suponga que la perturbación  $w(x, t) \in \mathcal{W}_2$ . Entonces, la ley de control (129), con  $v$  definida en (136), asegura el modo deslizante. Además, la SD  $s = 0$  es ETFj, y de cualquier estado inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ , las trayectorias alcanzan el modo deslizante, aún en presencia de perturbaciones  $w(x, t) \in \mathcal{W}_2$ , antes de un tiempo fijo*

$$T_{st} = \frac{6}{\kappa_3} r_{ss}^{-\frac{1}{6}} + \frac{2}{\kappa_2} \ln\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} r_{ss}^{\frac{1}{2}} + 1\right), \quad (141)$$

*El algoritmo super-twisting generalizado fue originalmente propuesto por Moreno [65].*

*La clase de funciones  $\mathcal{W}_2$  representa una clase de funciones continuas. Perturbaciones modeladas por funciones discontinuas no pueden ser soportadas por el controlador (136).*

*Esto hecho se debe a que se usan dos funciones de Lyapunov para mostrar la estabilidad en tiempo fijo del subsistema  $(s, s_1)$ .*

donde

$$\kappa_1 = \frac{\mu_1^2 \epsilon}{2(\lambda_{\max}\{P\} + C_2)^{\frac{1}{2}}}, \kappa_2 = \frac{\mu_2 \epsilon}{(\lambda_{\max}\{P\} + C_2)}, \kappa_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{14}} \frac{v_{\min} C_3}{(\lambda_{\max}\{P\} + C_2)^{\frac{7}{6}}}, v_{\min} = \frac{3}{2} \mu_3^{\frac{2}{3}}, \quad (142)$$

siendo  $\epsilon$ ,  $\lambda_{\max}\{P\}$ ,  $C_2$  y  $C_3$  constantes positivas que dependen de los parámetros  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , y  $r_{ss}$  es la raíz real positiva de la ecuación

Elegir  $r_{ss}$  como en (143) minimiza a  $T_{st}$ .

$$r_{ss}^{\frac{1}{2}} + (\kappa_1/\kappa_2) = (\kappa_3/\kappa_2)r_{ss}^{\frac{2}{3}}. \quad (143)$$

Ambos controladores garantizan que las trayectorias del sistema (125) convergen al modo deslizante en tiempo finito, teniendo en cuenta las respectivas perturbaciones que puede soportar cada controlador. Es un hecho que, independientemente del estado inicial, los controladores de tiempo fijo llevan las trayectorias del sistema a la SD antes de un tiempo  $T_f > 0$  ó  $T_{st} > 0$ . En el modo deslizante, las trayectorias convergen en un tiempo  $T_r$  a una vecindad arbitraria del origen de la radio  $r > 0$ . Como resultado, las trayectorias del sistema permanecerán en una bola arbitraria  $B_r$ ,  $\forall t \geq T_r$ . Por lo tanto, se puede concluir que cualquier  $B_r$ , centrada en el origen, es un conjunto ATFj para el sistema en lazo cerrado con el CUPO, o el CSTU, a pesar de la perturbación  $w(x, t)$  perteneciente a la clase de  $\mathcal{W}_1$ , ó  $\mathcal{W}_2$ , respectivamente.

Con base en el análisis previo, se formula el siguiente Teorema.

**Teorema 6.4** *Suponga que se elige la SD uniforme (128) y que la perturbación  $w(x, t) \in \mathcal{W}_1$  (resp.  $w(x, t) \in \mathcal{W}_2$ ). Elija el CUPO (resp. el CSTU). Entonces, cualquier bola  $B_r$  del sistema (125) es ATFj y cualquier trayectoria, con estado inicial  $x_0 \in B_r^c$ , pertenecerá a  $B_r$  antes de un tiempo fijo  $T_p = T_r + T_{f/st}$ .*

Para cualquier tiempo mayor a la constante  $T_p$ , cualquier trayectoria pertenece a una bola  $B_r$ .

### 6.3.3. Estimación del tiempo fijo

Es posible estimar la constante de tiempo fijo a una vecindad del origen de radio  $r$  con cualquiera de los dos controladores propuestos.

**Estimación del Tiempo fijo con el CUPO.** Una forma de estimar la constante de tiempo fijo es usando el Teorema 6.4. En este caso

$$T_p = T_r + T_f, \quad (144)$$

donde

$$T_r = \frac{1}{(q-1)\beta} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{\beta r^{q-1}}\right), \text{ y } T_f = \frac{2}{(q_v-1)\kappa_{03}} r_s^{-\frac{1}{2}(q_v-1)} + \frac{2}{\kappa_{02}} \ln\left(\frac{\kappa_{02}}{\kappa_{01}} r_s^{\frac{1}{2}} + 1\right).$$

$T_r$  define la constante de tiempo fijo para cualquier trayectoria en el modo deslizante y  $T_f$  define la constante de tiempo fijo en la que cualquier trayectoria ya se encuentra en modo deslizante. La estimación dada por (144) es relativamente conservadora, y se debe a que se hace la estimación en dos partes. Como se verá en el siguiente Capítulo, es posible hacer un diseño de ganancias para el CUPO dada alguna constante de tiempo fijo  $T_f$ . Sin embargo, la constante de tiempo fijo  $T_p$  para el sistema en lazo cerrado sigue siendo conservadora.

Para estimar  $T_f$ , hay que calcular  $\kappa_{01}$ ,  $\kappa_{02}$ ,  $\kappa_{03}$ , y obtener  $r_{ss}$  a partir de (135) y luego sustituir todos los valores correspondientes en la expresión (144).

**Estimación del Tiempo fijo con el CSTU.** En este caso, la estimación de la constante de tiempo fijo es

$$T_p = T_r + T_{st}, \quad (145)$$

donde

$$T_r = \frac{1}{(q-1)\beta} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{\beta r^{q-1}}\right), \text{ y } T_{st} = \frac{6}{\kappa_3} r_{ss}^{-\frac{1}{6}} + \frac{2}{\kappa_2} \ln\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} r_{ss}^{\frac{1}{2}} + 1\right).$$

Análogamente,  $T_r$  define la constante de tiempo fijo para cualquier trayectoria en el modo deslizante y  $T_f$  define la constante de tiempo fijo en la que cualquier trayectoria ya se encuentra en modo deslizante. La estimación dada por (145) es mucho más conservadora que la estimada en (144) y se debe, en gran parte, a que la FL que se utiliza para mostrar la estabilidad en tiempo fijo de la SD uniforme aplicando el CSTU da cotas muy conservadoras sobre la constante  $T_{st}$ . La cota es tan conservadora que no es posible utilizarla para hacer el diseño de ganancias del CSTU dada alguna constante de tiempo fijo  $T_{st}$ . Para estimar  $T_{st}$  se deben seguir los siguientes pasos:

1. Encuentre  $P = P^T > 0$  y  $\epsilon > 0$  tal que la DML (138) se satisfice. Elija  $\delta$  de tal manera que las desigualdades (140) se satisfaga. Luego, hay que obtener  $C_2$  y  $C_3$  para calcular  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\kappa_3$ . Las constantes  $C_2$  y  $C_3$  están dadas por

$$C_2 = \delta k_2 + z_M^2/3, \quad C_3 = 2(1 - 9\rho_2\delta/y_m)/21,$$

donde  $z_M = \gamma_0^{\frac{2}{3}}$  es la raíz real positiva de la ecuación  $2 + 3\delta(1 - k_2)z_M = z_M^3$  y  $y_m$  es la raíz real positiva de la ecuación  $3\rho_2\delta + 7(\gamma_1 - 1/21)y_m = 4\rho_2\delta y_m^{\frac{7}{4}}$ ,  $\gamma_1 = \delta k_2(k_1 - \rho_1) - (k_1 + \rho_1)^{\frac{7}{3}}/7 - 4(k_2 + \rho_2)^{\frac{7}{6}}/7$ .

2. Calcule  $r_{ss}$  a partir de (143) y sustituya todos los valores correspondientes en la expresión (141).

#### 6.4. EJEMPLO ACADÉMICO

Esta sección se ilustra la eficacia de los controladores propuestos en un ejemplo académico. Considere un sistema híbrido lineal con tiempo de vida estrictamente positivo modelado por la ecuación  $\dot{x} = A_q x + b(u + w(t))$ , donde  $x \in \mathbb{R}^2$  es el estado continuo,  $q \in [1, 2]$  es el estado discreto que indexa a los subsistemas

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ ,  $w(t) = 0.5 \sin(2t) + 0.5 \cos(5t)$ , y la entrada de control  $u$  queda descrita por (129). El objetivo de control consiste en estabilizar el origen  $x = 0$  del sistema en tiempo fijo. La dinámica del sistema cambia cada 4 segundos. Si sólo se mide el estado  $x_1$ , los pares de  $[C, A_1]$  y  $[C, A_2]$  son observables con el vector de salida de  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ . En este caso, es posible diseñar un observador (diferenciador) uniforme [24], que proporciona los estados del sistema a más tardar en un segundo. Por lo tanto, se puede encender el controlador después de haber transcurrido un segundo.

Las superficies para cada sistema se diseñan como  $s_{A_1} = x_2 + x_1 + 0.5[x_1]^{\frac{3}{2}}$  y  $s_{A_2} = x_2 + 2x_1 + [x_1]^{\frac{3}{2}}$ . Se comparan tres controladores:

CMDPO  $v = -M_0[s]^0$ , con  $M_0 = 4$ .

CUPO  $v = -Q_0[s]^0 - K_2 s - K_3[s]^{\frac{3}{2}}$ , con  $Q_0 = 4$ ,  $K_2 = 2$ ,  $K_3 = 1$ .

CSTU  $v = -k_1 \phi_1(s) - k_2 \int_0^t \phi_2(s) dt$ , con  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 1$ ,  $\mu_3 = 0.5$ .

Observe que, con el CMDPO la perturbación  $w(t) \in \mathcal{W}_1$ , con  $\rho_0 = 1$ ,  $\rho_{02} = \rho_{03} = 0$ , y  $q_v > 1$ , mientras que con el CSTU, la perturbación  $w(t) \in \mathcal{W}_2$ , con  $\rho_1 = 0$  y  $\rho_2 = 1$ . Para este caso, cuando  $\rho_1 = 0$ , las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  se eligen en el conjunto

*Tanto  $A_1$  como  $A_2$  son matrices inestables.*

*Para la simulación numérica se ha considerado: condición inicial  $x(0) = [1.5, 1]^T$ , y tiempo de muestreo  $\tau = 0.001$ .*

*Para más detalles sobre la sintonización, el lector consultar Moreno [65].*



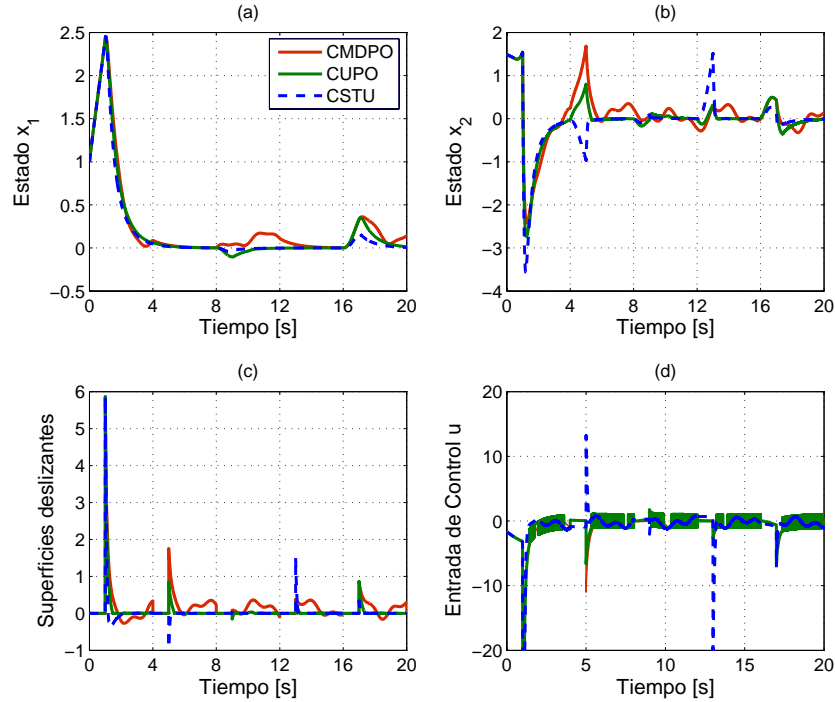


Figura 7.: (a) y (b) muestran el estado  $x_1$  y el estado  $x_2$  con: el CMDPO (línea roja), el CUPO (línea verde) y el CSTU (línea azul); (c) Superficies deslizantes y (d) Entradas de Control.

$\kappa = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 < k_1 \leq 2\sqrt{\rho_2}, k_2 > 0.25k_1^2 + 4\rho_2/k_1^2\} \cup \{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 | k_1 > 2\sqrt{\rho_2}, k_2 > 2\rho_2\}$ . Se seleccionan  $k_1 = 2$  y  $k_2 = 4$ .

Los resultados de la simulación se muestran en la [Figura 7](#). Claramente, tanto el CUPO y el CSTU aseguran la existencia del modo deslizante, pero no el CMDPO. Además, el CSTU alivia el efecto de chattering. No obstante, el valor de la señal de control del CUPO y del CSTU se incrementa notablemente durante la respuesta transitoria, véase la [Figura 7](#).(d). Esto es una consecuencia natural de la propiedad de la convergencia en tiempo fijo, ya que la acción de control tiene que ser muy fuerte para atraer a las trayectorias del sistema que están muy alejadas del origen, a una vecindad del mismo arbitrariamente rápido. La velocidad de convergencia es tan arbitrariamente rápida que el tiempo de convergencia está acotado por una constante.

La [Figura 8](#).(a) muestra una SD lineal, las superficies no lineales  $s_{A_1} = 0$  y  $s_{A_2} = 0$ . Teniendo en cuenta que la acción de control se inicia desde  $t = 0$  en el primer modo de operación (durante los primeros 4 segundos), la [Figura 8](#).(b) pone en evidencia que el tiempo de convergencia a las superficies crece hasta el infinito con el crecimiento de la condición inicial usando el CMDPO, mientras que el tiempo de convergencia tiene una constante de tiempo fijo al utilizar el CUPO y el CSTU.

Finalmente, la [Figura 8](#).(c) muestra el tiempo de convergencia real del sistema con su estimación al aplicar el CUPO. La cota superior de la estimación es aproximadamente el doble de la cota superior del verdadero tiempo de convergencia. Por otro lado, la mejor estimación del tiempo de convergencia utilizando el CSTU fue  $T_p = 301,34[s]$ . Hay una sobreestimación del tiempo fijo al aplicar el CSTU.

## 6.5. RESUMEN DEL CAPÍTULO

Se ha propuesto una SD no lineal que asegura, durante el modo deslizante, la convergencia de las trayectorias del sistema a cualquier vecindad arbitrariamente



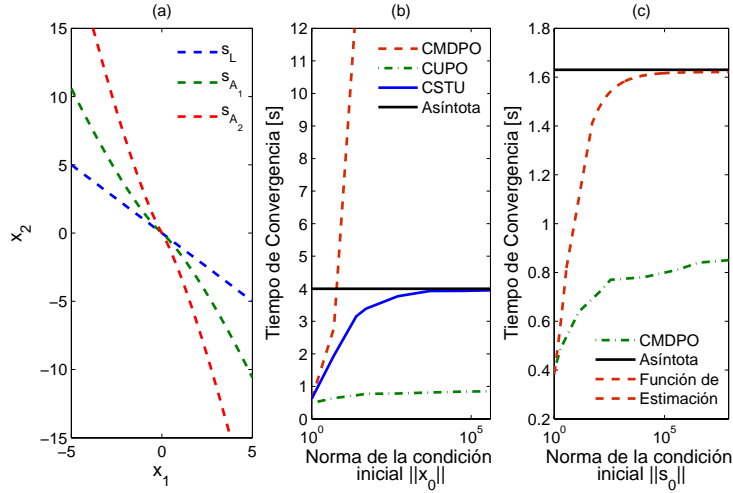


Figura 8.: (a) La SD lineal  $s_L = x_2 + x_1 = 0$ , la SD uniforme  $s_{A_1} = 0$  y la SD uniforme  $s_{A_2} = 0$ ; (b) tiempo de convergencia a la SD durante el primer modo de operación (datos de simulación); (c) comparación entre el tiempo de convergencia real y el estimado.

pequeña del origen en un tiempo fijo independientemente de la condición inicial sobre la superficie. Se han propuesto dos tipos de controladores de tiempo fijo. Se diseñó el CUPO como una generalización de un MDPO, y que hereda todas sus propiedades de robustez. Adicionalmente, el CUPO proporciona convergencia de las trayectorias en tiempo fijo a la SD en presencia de cierta clase de perturbaciones. Para reducir el efecto de chattering producido por el CUPO, se propone un controlador absolutamente continuo llamado CSTU. Al igual que el primero, este controlador garantiza convergencia en tiempo fijo de las trayectorias a la SD pero en presencia de otra clase de perturbaciones.

El enfoque basado en FL permitió mostrar las propiedades de la SD y de los controladores, y estimar el tiempo de convergencia a la SD y una vecindad arbitrariamente pequeña del origen.

## 6.6. PRUEBA DE LOS TEOREMAS Y PROPOSICIONES DEL CAPÍTULO

**Prueba del Teorema 6.1.** Bajo las condiciones  $-\alpha = a_{11} - a_{12}c_1 < 0$  y  $\beta = a_{12}c_2 > 0$ , el sistema reducido tiene un punto de equilibrio AE. Esto se muestra fácilmente usando la FL  $V_s = |x_1|$ . La derivada a lo largo de las trayectorias de (131) satisface  $\dot{V}_s = -\alpha V_s - \beta V_s^q$ ,  $V_s(x_1(0)) = v_0 \geq 0$ . Entonces,  $\dot{V}_s$  es n.d.. Para valores de  $q > 1$ , las soluciones a la EDO para  $V_s$  están dadas por

$$V_s^{1-q}(t) = \exp(-(1-q)\beta t)v_0^{1-q} - \frac{\alpha}{\beta} \exp(-(1-q)\beta t) [\exp((1-q)\beta t) - 1].$$

Por lo tanto, el tiempo  $T_s$  que le toma a una trayectoria iniciada en un estado inicial  $x_1(0)$  en llegar a un conjunto de nivel  $V_s = r$ , con  $0 < r < V_s(x_1(0))$ , se calcula como

$$T_1(v_0, r) = \frac{1}{(q-1)\beta} \left[ \ln \left( \frac{\beta v_0^{q-1}}{\alpha + \beta v_0^{q-1}} \right) - \ln \left( \frac{\beta r^{q-1}}{\alpha + \beta r^{q-1}} \right) \right]. \quad (146)$$

El tiempo  $T_1(v_0, r)$  depende de los parámetros  $\alpha, \beta, r$ , y está uniformemente acotado por una constante que es independiente de la condición inicial  $x_1(0) \in v_0$ . Lo anterior se deduce al calcular  $\lim_{v_0 \rightarrow \infty} T_1(v_0, r) = T_r$ . Por lo tanto se concluye que el tiempo  $T_1(v_0, r)$  de cualquier trayectoria está uniformemente acotado por (132) independientemente de la condición inicial, es decir,  $T_1(v_0, r) \leq T_r$ .

*Para obtener la cota (132) solo hay que aplicar la propiedad de potencia de los logaritmos en (146).*

**Prueba del Teorema 6.2.** Hay que mostrar que la ley de control propuesta garantiza que las trayectorias de estado llegan a  $s = 0$  en tiempo finito antes de algún tiempo fijo  $T_f > 0$ . Para ello, se usa la función cuadrática  $V = 0.5s^2$ . Como  $\dot{V} = s(v + w(x, t))$ , aplicando el control (133) y teniendo en cuenta el hecho de que  $w(x, t) \in \mathcal{W}_1$ , se obtiene  $\dot{V} \leq -(Q_0 - \rho_0)|s| - (K_2 - \rho_{02})|s|^2 - (K_3 - \rho_{03})|s|^{q_v+1}$ . Esta desigualdad diferencial puede ser reescrita en términos de la función  $V$ , como  $\dot{V} \leq q - \kappa_{01}V^{1/2} - \kappa_{02}V - \kappa_{03}V^{(q_v+1)/2}$ , donde  $\kappa_{01} = \sqrt{2}(Q_0 - \rho_0)$ ,  $\kappa_{02} = 2(K_2 - \rho_{02})$ ,  $\kappa_{03} = 2^{(q_v+1)/2}(K_3 - \rho_{03})$ . Lo que implica  $\dot{V} < 0$ , para  $Q_0 > \rho_0$ ,  $K_2 > \rho_{02}$ ,  $K_3 > \rho_{03}$ . Es evidente que cada trayectoria converge a  $s = 0$  en tiempo finito.

Después de llegar a  $s = 0$ , la trayectoria se desliza a lo largo de la SD.

Por último, hay que mostrar que existe alguna constante  $T_f > 0$  tal que, sin importar que tan grande sea el valor de la condición inicial, las trayectorias de estado  $x(t)$  no pueden dejar la variedad  $s = 0$ ,  $\forall t \geq T_f$ . Como  $V(t)$  tiene que satisfacer las desigualdades diferenciales  $\dot{V} \leq -\kappa_{01}V^{1/2} - \kappa_{02}V$  y  $\dot{V} \leq -\kappa_{03}V^{(q_v+1)/2}$ , el valor de  $V(t)$  está por debajo de la solución de ambas desigualdades. La solución de la EDO  $\dot{v} = -\kappa_1v^{1/2} - \kappa_2v$ ,  $v(0) = v_0 \geq 0$ , es

$$v(t)^{\frac{1}{2}} = \exp(-2\kappa_{02}t/2)v_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\kappa_{01}}{\kappa_{02}} \exp(-\kappa_{02}t/2) [\exp(\kappa_{02}t/2) - 1],$$

y la solución a la EDO  $\dot{v} = -\kappa_{03}v^{(q_v+1)/2}$ ,  $v(0) = v_0 \geq 0$ , para  $q_v > 1$ , está dada por  $v(t) = (v_0^{-\frac{1}{2}(q_v-1)} + (q_v - 1)\kappa_{03}t/2)^{-\frac{2}{q_v-1}}$ . Ahora, aplicando el principio de comparación [46], dado que  $V(s(t)) \leq v(t)$  cuando  $V_0 = V(s(x_0)) \leq v_0$ , la solución de  $V(t)$  satisface

$$V(t) \leq \min\{V_1 = \exp(-\frac{1}{2}\kappa_{02}t)[V_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\kappa_{01}}{\kappa_{02}}[\exp(\frac{1}{2}\kappa_{02}t) - 1]]^2, \\ V_2 = (V_0^{-\frac{1}{2}(q_v-1)} + (q_v - 1)\kappa_{03}t/2)^{-\frac{2}{q_v-1}}\}.$$

Con estas expresiones el tiempo de convergencia se estima usando el algoritmo de la prueba de la Proposición 5.8.

(A1) La cota superior del tiempo  $T_2(x_0, r_s)$  en la cual se alcanza el conjunto de nivel  $V_2 = r_s$  ( $0 < r_s < V_0$ ), se calcula de  $V_2 = r_s$ , como  $T_2(x_0, r_s) = \frac{2}{(q_v-1)\kappa_{03}}(r_s^{-\frac{1}{2}(q_v-1)} - V_0^{-\frac{1}{2}(q_v-1)})$ .

(A2) Iniciando del conjunto de  $V_1 = r_s$ , la cota superior del tiempo  $T_1(r_s)$  en la cual se alcanza el punto  $s = 0$ , se calcula de  $V_1 = 0$ , como  $T_1(r_s) = \frac{2}{\kappa_{02}} \ln(\frac{\kappa_{02}}{\kappa_{01}}r_s^{\frac{1}{2}} + 1)$ .

(A3) El tiempo que tarda en converger cualquier trayectoria iniciada en  $x_0 \in V_0$  a la SD cumple

$$T(x_0) \leq T_1(r_s) + T_2(x_0, r_s) = \frac{2}{\kappa_{02}} \ln(\frac{\kappa_{02}}{\kappa_{01}}r_s^{\frac{1}{2}} + 1) + \frac{2}{(q_v-1)\kappa_{03}}(r_s^{-\frac{1}{2}(q_v-1)} - V_0^{-\frac{1}{2}(q_v-1)}).$$

El tiempo de convergencia  $T(x_0)$  está uniformemente acotado por la constante  $T_f$ , es decir,  $T(x_0) \leq T_f$ . Elegir  $r_s$  como la raíz real positiva de (135) asegura la mejor estimación para  $T_f$ .

**Prueba del Teorema 6.3.** Considere la siguiente función continua

$$W(s, s_1) = V_1(\zeta) + V_2(s, s_1), \tag{147}$$

como una candidata a FL. La función  $V_1(\zeta) = \zeta^T P \zeta$  es cuadrática en el vector  $\zeta = [\phi_1(s) \quad s_1]^T$ ,  $P = P^T > 0$  es una matriz simétrica p.d., solución a la DML (138). La función  $V_2(s, s_1) = \delta k_2 |\phi_1(s)|^2 - [\phi_1(s)]^{\frac{2}{3}} [s_1]^{\frac{4}{3}} + \delta |s_1|^2$ , donde  $\delta$  es una constante positiva que satisface la desigualdades en (140). Para probar el Teorema 6.3, se usa del siguiente resultado que muestra que el subsistema  $(s, s_1)$  de (137) es robusto ante la presencia de perturbaciones  $w(x, t) \in \mathcal{W}_2$  cuando las ganancias  $(k_1, k_2)$  y  $\delta$  se seleccionan apropiadamente.

Se utiliza un enfoque basado en FL para mostrar la convergencia en tiempo fijo de las trayectorias del sistema a la SD uniforme.

**Proposición 6.1** La función (147) es una FL robusta para el subsistema  $(s, s_1)$  de (137). Además, la derivada  $\dot{W}(s, s_1)$  de la FL tomada a lo largo de las trayectorias del subsistema satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{W}(s, s_1) \leq -\kappa_1 W^{\frac{1}{2}}(s, s_1) - \kappa_2 W(s, s_1) - \kappa_3 W^{\frac{7}{6}}(s, s_1), \quad (148)$$

donde  $\kappa_1, \kappa_2$  y  $\kappa_3$  están definidas en (142).

**Demostración 1** Primero se muestra que  $V_2(s, s_1)$  es p.d.. Del Lema A.1, se obtiene que  $\gamma_{00}$  y  $\gamma_{01}$  son constantes positivas que satisfacen  $-\gamma_{00}^3 |\phi_1(s)|^2 / 3 - 2\gamma_{00}^{-\frac{3}{2}} |s_1|^2 / 3 \leq -[\phi_1(s)]^{\frac{2}{3}} [s_1]^{\frac{4}{3}} \leq \gamma_{01}^3 |\phi_1(s)|^2 / 3 + 2\gamma_{01}^{-\frac{3}{2}} |s_1|^2 / 3$ . Usando estas desigualdades, la función  $V_2$  queda acotada  $\forall (s, s_1)$  por

$$\alpha_1(\gamma_{00})|\phi_1(s)|^2 + \alpha_2(\gamma_{00})|s_1|^2 \leq V_2(s, s_1) \leq \alpha_2(\gamma_{01})|\phi_1(s)|^2 + \alpha_4(\gamma_{01})|s_1|^2,$$

donde  $\alpha_1(\gamma_{00}) = (\delta\kappa_2 - \gamma_{00}^3/3)$ ,  $\alpha_2(\gamma_{00}) = (\delta - 2\gamma_{00}^{-\frac{3}{2}}/3)$ ,  $\alpha_3(\gamma_{01}) = (\delta\kappa_2 + \gamma_{01}^3/3)$  y  $\alpha_4(\gamma_{01}) = (\delta + 2\gamma_{01}^{-\frac{3}{2}}/3)$ . Se observa que,  $V_2(s, \sigma)$  es p.d. si y solo si.  $\alpha_1(\gamma_{00}) > 0$  y  $\alpha_2(\gamma_{00}) > 0$ , lo cual siempre es posible si  $\delta$  satisface (140). Con lo anterior,

$$C_1 \|\zeta\|_2^2 = C_1(|\phi_1(s)|^2 + |s_1|^2) \leq V_2(s, s_1) \leq C_2(|\phi_1(s)|^2 + |s_1|^2) = C_2 \|\zeta\|_2^2, \quad (149)$$

donde  $C_1 = \delta\kappa_2 - z_m^2/3$  y  $C_2 = \delta\kappa_2 + z_M^2/3$  son constantes positivas,  $z_m = \gamma_{00}^{\frac{3}{2}}$  es la raíz real positiva de la ecuación de  $2 + 3\delta(\kappa_2 - 1)z_m = z_m^3$ , y  $z_M = \gamma_{01}^{\frac{3}{2}}$  es la raíz real positiva de la ecuación  $2 + 3\delta(1 - \kappa_2)z_M = z_M^3$ . Recordando que, el término de perturbación  $w(x, t) \in \mathcal{W}_2$ , la derivada de  $V_2$  c.r. al tiempo satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\frac{\phi_1'(s)}{|\phi_1(s)|^{\frac{4}{3}}} \{2\delta\kappa_2(\kappa_1 - g_1)|\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}} - 2g_2\delta|\phi_1(s)|^{\frac{4}{3}}|s_1| - \frac{2}{3}(\kappa_1 + g_1)|\phi_1(s)||s_1|^{\frac{4}{3}} \\ &\quad - \frac{4}{3}(\kappa_2 + g_2)|\phi_1(s)|^2|s_1|^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}|s_1|^{\frac{7}{3}}\}. \end{aligned}$$

Usando el Lema A.1, se obtienen las desigualdades

$$\begin{aligned} |\phi_1(s)|^{\frac{4}{3}}|s_1| &\leq 4\gamma_1^{\frac{7}{4}}|\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}}/7 + 3\gamma_1^{-\frac{7}{3}}|s_1|^{\frac{7}{3}}/7, \quad \forall \gamma_1 > 0, \\ |\phi_1(s)||s_1|^{\frac{4}{3}} &\leq 3\gamma_2^{\frac{7}{2}}|\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}}/7 + 4\gamma_2^{-\frac{7}{4}}|s_1|^{\frac{7}{3}}/7, \quad \forall \gamma_2 = (\kappa_1 + \rho_1)^{\frac{4}{7}} > 0, \\ |\phi_1(s)|^2|s_1|^{\frac{1}{3}} &\leq 6\gamma_3^{\frac{7}{6}}|\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}}/7 + \gamma_3^{-7}|s_1|^{\frac{7}{3}}/7, \quad \forall \gamma_3 = (\kappa_2 + \rho_2)^{\frac{1}{7}} > 0, \end{aligned}$$

que hacen que

$$\dot{V}_2(s, s_1) \leq -v_1(s)(\psi_1|\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}} + \psi_2|s_1|^{\frac{7}{3}}),$$

con  $v_1(s) = |\phi_1(s)|^{-\frac{1}{3}} \phi_1'(s)$ ,  $\psi_1 = 2(\gamma_1 - 4\rho_2\delta\gamma_1^{\frac{7}{4}}/7)$ ,  $\psi_2 = 2(1 - 9\rho_2\delta\gamma_1^{-\frac{7}{3}})/21$ ,  $\gamma_1 = \delta\kappa_2(\kappa_1 - \rho_1) - (\kappa_1 + \rho_1)^{\frac{7}{3}}/7 - 4(\kappa_2 + \rho_2)^{\frac{7}{6}}/7$ , y donde  $\gamma_1$  siempre existe si y sólo si  $(7\gamma_1/8\rho_2\delta)^{\frac{4}{7}} > \gamma_1 > (9\rho_2\delta)^{\frac{3}{7}}$ . Para probar que  $\dot{V}_2$  es n.d., se necesita que  $\psi_1, \psi_2 > 0$ , lo cual es siempre posible si la desigualdad (140) se satisface. Note que la función  $v_1(s) > 0$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$ , y que

$$\begin{aligned} \lim_{|s| \rightarrow \infty} v_1(s) &= \frac{\frac{1}{2}\mu_1|s|^{-\frac{1}{2}} + \mu_2 + \frac{3}{2}\mu_3|s|^{\frac{1}{2}}}{(\mu_1|s|^{\frac{1}{2}} + \mu_2|s| + \mu_3|s|^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{\mu_1}{2}|s|^{-1} + \mu_2|s|^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\mu_3}{(\mu_1|s|^{-1} + \mu_2|s|^{-\frac{1}{2}} + \mu_3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2}\mu_3^{\frac{2}{3}}, \\ \lim_{|s| \rightarrow 0} v_1(s) &= \frac{\frac{3}{2}\mu_1^{\frac{2}{3}}}{|s|^{\frac{1}{3}}} = \infty. \end{aligned}$$

Por lo que el mínimo de  $v_{\min} = \min_{s \in \mathbb{R}} v_1(s)$  existe y es positivo. Esto conduce a  $\dot{V}_2(s, s_1) \leq -v_1(s)(\psi_1|\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}} + \psi_2|s_1|^{\frac{7}{3}}) \leq -v_{\min} C_3(|\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}} + |s_1|^{\frac{7}{3}})$ , donde  $C_3 = 2(1 - 9\rho_2\delta/\gamma_m)/21$

Véase el Apéndice A para conocer el Lema A.1.

Para mostrar que  $V_2(s, \sigma)$  es p.d., se checa cuando  $\alpha_1(\gamma_{00}) > 0$  y  $\alpha_2(\gamma_{00}) > 0$  y se verifica cuando existe  $\gamma_{00}^3 > 0$ .

Las ecuaciones para  $z_m$  y  $z_M$  resultan de hacer  $\alpha_1(\gamma_{00}) = \alpha_2(\gamma_{00})$  y  $\alpha_3(\gamma_{01}) = \alpha_4(\gamma_{01})$ .

La función  $\phi_1'(s) = \mu_1|s|^{-\frac{1}{2}}/2 + \mu_2 + 3\mu_3|s|^{\frac{1}{2}}/2$ .

Para mostrar que  $\dot{V}_2$  es n.d., se checa cuando  $\psi_1 > 0$  y  $\psi_2 > 0$ , y se verifica cuando existe  $\gamma_1^7 > 0$ , que se traduce en la desigualdad (140).

Véase el Apéndice A para conocer el Lema A.4.

y  $y_m = \gamma_1^{\frac{7}{3}}$  es la raíz real positiva de  $3\rho_2\delta + 7(\Upsilon_1 - 1/21)y_m = 4\rho_2\delta y_m^{\frac{7}{4}}$ . Del Lema A.4, se encuentra que  $(1/2)^{\frac{1}{14}} (|\phi_1(s)|^2 + |s_1|^2)^{\frac{7}{6}} \leq (|\phi_1(s)|^{\frac{7}{3}} + |s_1|^{\frac{7}{3}})$ . Usando esta desigualdad junto con la desigualdad (149), se obtiene que la derivada  $\dot{V}_2(s, s_1)$  satisfice

$$\dot{V}_2 \leq -(1/2)^{\frac{1}{14}} v_{\min} C_3 (|\phi_1(s)|^2 + |s_1|^2)^{\frac{7}{6}} \leq -(1/2)^{\frac{1}{14}} v_{\min} C_3 (\|\zeta\|_2^2)^{\frac{7}{6}}.$$

Para el siguiente análisis, hay que presentar el subsistema (137) en una forma conveniente. Usando el vector  $\zeta$ , el subsistema (137) queda reescrito como

$$\dot{\zeta} = \phi_1'(s) (A\zeta + B\bar{\rho}), \quad \bar{\rho} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, t) \\ \frac{d}{dt} g_2(x_1, x_2, t) \\ \phi_1'(s) \end{bmatrix}_{s=\phi^{-1}(\zeta)},$$

donde A y B se definen en (139). Para tomar en cuenta un gran variedad de perturbaciones, se asume que las componentes (en las coordenadas transformadas) de los términos de perturbación  $\bar{\rho}(t, \zeta)$  satisfacen las condiciones de sector ( para  $i = 1, 2, \forall t \geq 0 \forall \zeta \in \mathbb{R}^2$ )

$$\omega_i(\bar{\rho}_i, \zeta) = -\bar{\rho}_i^2(t, \zeta) + \rho_i^2 \zeta_i^2 = \begin{bmatrix} \bar{\rho}_i \\ \zeta_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \rho_i^2 C^T C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\rho}_i \\ \zeta_i \end{bmatrix} \geq 0,$$

donde C está definida en (139). Lo cual significa que las perturbaciones  $w(x, t) \in \mathcal{W}_2$  se pueden expresar como condiciones de sector (en coordenadas  $\zeta$ ), es decir,  $|\bar{\rho}_i(t, \zeta)| \leq \rho_i |\phi_i(s)|$  en las variables originales, es equivalente a  $|\bar{\rho}_i(t, \zeta)| \leq \rho_i |\zeta_i|$ , siendo  $\rho_i > 0$ , en las coordenadas transformadas. De lo anterior, defina  $\omega(\bar{\rho}, \zeta) = \theta_1 \omega_1(\bar{\rho}_1, \zeta) + \theta_2 \omega_2(\bar{\rho}_2, \zeta) \geq 0, \forall \theta_1, \theta_2 \geq 0$ . La función  $\omega(\bar{\rho}, \zeta)$  puede ser representada como

$$\omega(\bar{\rho}, \zeta) = \begin{bmatrix} \bar{\rho}(t, \zeta) \\ \zeta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\Theta & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\rho}(t, \zeta) \\ \zeta \end{bmatrix}, \tag{150}$$

con  $\Theta$  y R como en (139). La derivada de la FL  $V_1(\zeta)$  es <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \phi_1' \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{\rho} \end{bmatrix} \leq \phi_1' \left\{ \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{\rho} \end{bmatrix} + \omega(\bar{\rho}, \zeta) \right\} \\ &= \phi_1' \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + R & PB \\ B^T P & -\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \bar{\rho} \end{bmatrix} \leq -\phi_1' \epsilon \|\zeta\|_2^2. \end{aligned}$$

Si la DML (138) tiene solución,  $\dot{V}_1$  es n.d.. Como  $\lambda_{\min}\{P\} \|\zeta\|_2^2 \leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max}\{P\} \|\zeta\|_2^2$ , donde  $\|\zeta\|_2^2 = \phi_1^2(s) + \sigma^2 = \mu_2^2 |s|^2 + \mu_3^2 |s|^3 + 2\mu_1 \mu_3 |s|^{\frac{5}{2}} + \mu_1^2 |s| + 2\mu_1 \mu_2 |s|^{\frac{3}{2}} + 2\mu_1 \mu_3 |s|^2 + s_1^2$  es la norma Euclideana de  $\zeta$ , se puede verificar que la desigualdad  $(\mu_1 |s|^{\frac{1}{2}})^{-1} \geq (\|\zeta\|_2)^{-1}$  siempre se cumple. Como  $\phi_1'(s) = \mu_1 |s|^{-\frac{1}{2}}/2 + \mu_2 + 3\mu_3 |s|^{\frac{1}{2}}/2$ , inmediatamente se obtiene

$$\dot{V}_1 \leq -\phi_1'(s) \epsilon \|\zeta\|_2^2 \leq -(\mu_1^2/2) \epsilon \|\zeta\|_2 - \mu_2 \epsilon \|\zeta\|_2^2 - (3\mu_3/2) \epsilon |s|^{\frac{1}{2}} \|\zeta\|_2^2.$$

Gracias a la negatividad definida de las funciones  $\dot{V}_1(\zeta)$  y  $\dot{V}_2(s, \sigma)$ , se concluye que

$$\dot{W}(s, s_1) = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 \leq -\frac{\mu_1^2}{2} \epsilon \|\zeta\|_2^{\frac{1}{2}} - \mu_2 \epsilon \|\zeta\|_2^2 - \frac{3\mu_3}{2} \epsilon |x_1|^{\frac{1}{2}} \|\zeta\|_2^2 - (1/2)^{\frac{1}{14}} v_{\min} C_3 (\|\zeta\|_2^2)^{\frac{7}{6}}.$$

Ambas funciones de Lyapunov satisfacen  $\lambda_{\min}\{P\} \|\zeta\|_2^2 \leq V_1(\zeta) \leq \lambda_{\max}\{P\} \|\zeta\|_2^2$  y  $C_1 \|\zeta\|_2^2 \leq V_2(s, s_1) \leq C_2 \|\zeta\|_2^2$ , entonces, la función  $W(s, s_1)$  puede acotarse por arriba como  $W(s, s_1) \leq (\lambda_{\max}\{P\} + C_2) \|\zeta\|_2^2$ . Con ayuda de esta cota se obtiene la expresión (148).

<sup>1</sup> La función es continua pero no localmente Lipschitz. Estrictamente hablando, el segundo método de Lyapunov ya no es válido para el análisis. Sin embargo, si se satisfacen todas las condiciones del Teorema de Zubov [177], Teorema 20.2, pág. 568], es decir, (a)  $V_1$  es diferenciable casi en todas partes (la derivada se obtiene de forma usual en todo los puntos donde haya diferenciabilidad), (b) si la derivada de  $V_1$  es n.d. casi en todas partes, entonces  $V_1$  es monótona decreciente y converge a zero.

Es claro que cualquier trayectoria converge a cero en tiempo finito. Con el resultado de la Proposición 6.1 se prueba inmediatamente el Teorema. Como  $W(t)$  satisface ambas desigualdades diferenciales  $\dot{W}(s, s_1) \leq -\kappa_1 W^{\frac{1}{2}}(s, s_1) - \kappa_2 W(s, s_1)$  y  $\dot{W}(s, s_1) \leq -\kappa_3 W^{\frac{7}{6}}(s, s_1)$ , el valor de  $W(t)$  está por debajo de la solución de cualquiera de las dos desigualdades. Note que la solución a la EDO  $\dot{v} = -\kappa_1 v^{\frac{1}{2}} - \kappa_2 v$ ,  $v(0) = v_0 \geq 0$ , es similar a (28) y que la solución a la EDO  $\dot{v} = -\kappa_3 v^{\frac{7}{6}}$ ,  $v(0) = v_0 \geq 0$ , está dada por  $v(t) = (v_0^{-\frac{1}{6}} + \kappa_3 t/6)^{-6}$ . Del principio de comparación [46], se tiene que  $W(s(t), s_1(t)) \leq v(t)$ , cuando  $W_0 = W(s(x_0), s_1(x_0)) \leq v_0$ . Entonces,

$$W(t) \leq \min \left\{ \exp\left(-\frac{1}{2}\kappa_2 t\right) \left[ W_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \left[ \exp\left(\frac{1}{2}\kappa_2 t\right) - 1 \right] \right]^2, (W_0^{-\frac{1}{6}} + \kappa_3 t/6)^{-6} \right\}.$$

El tiempo de convergencia se estima en forma similar a la propuesta en la prueba del Teorema 6.2. Primero, se calcula una cota superior  $T_2(x_0, r_{ss})$  del tiempo de convergencia de una trayectoria con estado inicial  $x_0 \in W_0$  en el cual se alcanza el conjunto de nivel  $W(s, s_1) = r_{ss}$  ( $0 < r_{ss} < W_0$ ). Luego, comenzado con estado inicial perteneciente al conjunto de nivel  $W = r_{ss}$ , se calcula una cota superior  $T_1(r_{ss})$  en la cual se alcanza el punto  $s = 0$ . Finalmente, cualquier trayectoria llega a la SD dentro de un tiempo que cumple

$$T(x_0) \leq T_2(x_0, r_{ss}) + T_1(r_{ss}) = \frac{6}{\kappa_3} (r_{ss}^{-\frac{1}{6}} - W_0^{-\frac{1}{6}}) + \frac{2}{\kappa_2} \ln\left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} r_{ss}^{\frac{1}{2}} + 1\right).$$

El tiempo de convergencia  $T(x_0)$  está uniformemente acotado por la constante  $T_{st}$ , es decir,  $T(x_0) \leq T_{st}$ . La mejor estimación de  $T_{st}$  se consigue al elegir  $r_{ss}$  como la raíz real positiva de (143).

**Prueba del Teorema 6.4.** Es directa de los Teoremas 6.3, 6.2, y 6.1.



*Piensa como piensan los sabios,  
mas habla como la gente sencilla.*

— Aristóteles

En el capítulo anterior se propuso una nueva clase de SD no lineal para un sistema de segundo orden. La principal característica de esta SD es que asegura que una vecindad del sistema reducido es ATFj. Este capítulo presenta el diseño de dos superficies deslizantes uniformes para el sistema  $\Sigma_T$ . La ley de control a aplicar es una extensión de los controladores de tiempo fijo propuesto en el [Capítulo 6](#). Ambos proporcionan convergencia en tiempo fijo de las trayectorias del sistema a la SD y robutez ante cierta clase de perturbaciones. Cada SD se construye utilizando el MB y las propiedades de homogeneidad. Esto permite tener un diseño recursivo de la SD y caracterizar la propiedad de ATFj.

### 7.1. OBJETIVOS Y ESTRUCTURA DEL CAPÍTULO

En este capítulo se considera el sistema  $\Sigma_T$  de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_{i+1} + w_i(t, x), \forall i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= f(x, t) + u + w_n(t, x).\end{aligned}\tag{151}$$

Aquí,  $f(x, t)$  representa la dinámica conocida del sistema y  $b(x, t)$  se ha considerado como una constante de valor igual a uno. Todas las perturbaciones se consideran como funciones uniformemente acotadas en  $t$ ,  $\forall t \geq 0$ .

El objetivo principal consiste en diseñar una ley de control discontinua que garantice que las trayectorias del sistema controlado (151) lleguen en tiempo fijo a una vecindad del origen a pesar de la presencia de cierta clase perturbaciones no acopladas y de variaciones de la condición inicial en el sistema. Para resolver dicho problema se usa el método de diseño clásico por CMD [87], por lo que, antes de diseñar la ley de control, es necesario construir la SD. Además, la técnica de CMD sólo asegura rechazo completo de perturbaciones que están acopladas a la entrada control. Entonces, se hace imprescindible determinar cuál es la clase de perturbaciones no acopladas  $w_i(x, t)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , bajo las cuales el sistema en lazo cerrado sigue siendo AE.

La primera parte de este capítulo se centra en el diseño de controladores de tiempo fijo cuando únicamente existen perturbaciones acopladas. Se diseñan dos superficies deslizantes con la finalidad de que el origen del sistema reducido sea AE, pero además, que cualquier vecindad del origen de radio  $r > 0$  sea ATFj. Las superficies deslizantes se diseñan bajo criterios de homogeneidad y FLC homogéneas. Posteriormente, se diseñan las leyes de control discontinuas que establecen el modo deslizante en tiempo fijo. Básicamente, los controladores de tiempo fijo presentados en el [Capítulo 6](#) son extendidos al sistema (151). El empleo de los controladores de tiempo fijo asegura que las trayectorias del sistema llegarán en tiempo finito a la SD antes de algún tiempo fijo, sin importar cual haya sido la condición inicial. La única hipótesis que se hace sobre la perturbación acoplada  $w_n(x, t)$  es que está acotada por una función conocida.

La segunda parte muestra que los controladores propuestos pueden compensar cierta clase de perturbaciones no acopladas, preservando la propiedad de atractividad en tiempo fijo del sistema en lazo cerrado.

*La motivación se ha omitido debido a que es esencialmente la misma del capítulo anterior.*

*Nuevamente, los conceptos del Capítulo 2 serán de gran utilidad.*

*La cota superior de  $w_n(t, x)$  dependerá del tipo de controlador que se emplee.*



## 7.2. SD UNIFORME DE ORDEN N

Para un sistema de una sola entrada, la estructura general de una SD de orden arbitrario está descrita por

$$\sigma_n = x_n + \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0, \quad \sigma_n \in \mathbb{R}. \quad (152)$$

Para tener una representación adecuada del sistema (151), se definen  $(x_1, \dots, x_{n-1}, \sigma_n)$  como nuevas variables de estado. Con este cambio de coordenadas y aplicando la ley de control

$$u = u_{eq} + v, \quad u_{eq} = -f(x, t) - \frac{d}{dt} \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (153)$$

el sistema (151) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + w_i(x, t), & \forall i = 1, \dots, n-2, \\ \dot{x}_{n-1} &= \sigma_n - \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + w_{n-1}(x, t), \\ \dot{\sigma}_n &= v + w_n(x, t). \end{aligned} \quad (154)$$

El término  $u_{eq}$  compensa la dinámica conocida del sistema. Cuando las trayectorias del sistema entran en el modo deslizante ( $\sigma_n = 0$ ), se debe asegurar que el origen del sistema reducido (155) sea RGAE, pero además, que alguna vecindad arbitraria de radio  $r > 0$  sea ATFj. Durante el modo deslizante, el comportamiento del sistema (151) se rige por la dinámica del sistema reducido

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + w_i(x, t), & \forall i = 1, \dots, n-2, \\ \dot{x}_{n-1} &= -\varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + w_{n-1}(x, t). \end{aligned} \quad (155)$$

El sistema anterior tendrá la propiedad de atractividad en tiempo fijo si la función  $\varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$  contiene términos de alto orden en su estructura. Dichos términos son responsables de proporcionar una constante de tiempo fijo al tiempo de convergencia. Es evidente que el diseño de la SD se reduce a encontrar una función  $\varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$  adecuada que hace global y RE el origen de (155).

## 7.3. CASO CON PERTURBACIONES ACOPLADAS

*Primero se analiza el caso cuando  $w_i(x, t) = 0, \forall i = 1, \dots, n-1$ .*

Si las perturbaciones acopladas no actúan sobre el sistema (151), estabilizar el origen del sistema reducido (155) es equivalente a estabilizar el origen del siguiente sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} \quad \forall i = 1, \dots, \eta, \\ \dot{x}_\eta &= v_\eta, \end{aligned} \quad (156)$$

donde  $v_\eta \in \mathbb{R}$  es la ley de control auxiliar que se pretende diseñar. La función  $\varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$  de la SD (152), se obtiene haciendo

$$v_\eta = -\varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Para construir la ley de control  $v_\eta$  nuevamente se utilizan las técnicas que se han venido manejando: el MB y homogeneidad. El MB permite diseñar una ley de control  $v_\eta$  que estabiliza asintóticamente el sistema (87) en forma recursiva. Si además, la ley de control  $v_\eta$  se elige de modo que el sistema retroalimentado tenga grado de homogeneidad positivo, el origen del sistema reducido es global y RE, y el campo vectorial tiene la propiedad de atractividad en tiempo fijo. La construcción explícita de ley la de control  $v_\eta$ , en consecuencia de la SD uniforme, se basa en la integración de ambos métodos proveyendo un diseño recursivo.

*La teoría de homogeneidad ayuda a caracterizar el tipo de convergencia.*

**Proposición 7.1** Para el sistema (156), suponga que  $\sigma_i = x_i + v_{i-1}$ ,  $i = 2, \dots, \eta$ . Elija la ley de control

$$\begin{aligned} v_1 &= -k_1 [x_1]^{2-q} & , \text{ si } \eta = 1, \\ v_\eta &= -\sum_{j=2}^{\eta} \frac{\partial v_{\eta-1}}{\partial x_{j-1}} x_j - k_\eta [\sigma_\eta]^{\frac{\alpha_\eta+1}{\alpha_\eta}} & , \text{ si } \eta \geq 2, \end{aligned} \quad (157)$$

siendo  $\alpha_\eta = (\eta - 2)q + (3 - \eta)$  y  $q \in (1, 2)$ . Si se eligen las ganancias  $k_\eta > \alpha_\eta/(q + 1)$ ,  $k_j > 2/(q + 1)$ ,  $\forall j = 3, \dots, \eta - 1$ , y  $k_1 > q/(q + 1)$ , entonces, el origen  $x = 0$  de (156) es global y RE.

Cuando el origen del sistema reducido es global y RE, la propiedad de atractividad en tiempo fijo está garantizada. La prueba de la Proposición 7.1 se hace usando la siguiente FLC homogénea.

**Proposición 7.2** La función continua y diferenciable

$$V_\eta = \frac{2-q}{2} |x_1|^{2-q} + \sum_{j=2}^{\eta} \frac{\alpha_j}{2} |\sigma_j|^{\frac{2}{\alpha_j}}, \quad (158)$$

es una FLC global para el sistema (156), y la derivada c.r. al tiempo de (158) a lo largo de las trayectorias del sistema satisface

$$\dot{V}_\eta \leq -\left(k_1 - \frac{q}{q+1}\right) |x_1|^{\frac{q+1}{2-q}} - \sum_{j=2}^{\eta-1} \left(k_j - \frac{2}{q+1}\right) |\sigma_j|^{\frac{q+1}{\alpha_j}} - \left(k_\eta - \frac{\alpha_\eta}{q+1}\right) |\sigma_\eta|^{\frac{q+1}{(\eta-2)q+(3-\eta)}}. \quad (159)$$

Además, la derivada  $\dot{V}_\eta$  cumple la desigualdad diferencial

$$\dot{V}_\eta \leq -\gamma V_\eta^{\frac{q+1}{2}}, \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha_\eta^{(q+1)/2}}{2^{\frac{q+1}{2}} C_3} \eta^{\frac{q-1}{2}}, \quad (160)$$

donde  $C_3 = \min\{k_1 - \frac{q}{q+1}, k_j - \frac{2}{q+1}, k_\eta - \frac{\alpha_\eta}{q+1}\}$ .

La variable  $\sigma_i$ , la ley de control  $v_\eta$ , la FLC  $V_\eta$  y su derivada  $\dot{V}_\eta$  son funciones homogéneas c.r. a la dilatación

$$\Delta_\epsilon^r x = (\epsilon^{2-q} x_1, \epsilon^1 x_2, \epsilon^q x_3, \dots, \epsilon^{\alpha_\eta} x_\eta) \quad (161)$$

es decir, se cumple  $\sigma_i(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{\beta_i} \sigma_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, \eta$ ,  $v_\eta(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{\alpha_\eta+1} v_\eta(x)$ ,  $V_\eta(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^2 V_\eta(x)$  y  $\dot{V}_\eta(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{q+1} \dot{V}_\eta(x)$ . Note que, la FLC  $V_\eta$  y su derivada  $\dot{V}_\eta$  conservan su grado de homogeneidad. La desigualdad (160) permite concluir que el origen del sistema es global y RE, cuando  $q \in (1, 2)$ , y estimar una constante de tiempo fijo para el tiempo de convergencia.

**Proposición 7.3** Elija la ley de control (157). Entonces, cualquier trayectoria del sistema (156), iniciada con estado inicial  $x_\eta(0) \in \mathbb{R}^\eta$ , converge a una vecindad del origen de radio  $r$  ( $0 < r < V_\eta(x_\eta(0))$ ) antes de un tiempo fijo

$$T_r = \frac{2}{(q-1)\gamma} \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{q-1}{2}}, \quad q \in (1, 2). \quad (162)$$

Observe que  $T_r$  no depende del estado inicial  $x_\eta(0) \in V_\eta(x_\eta(0))$  y que el  $\lim_{r \rightarrow 0} T_r = \infty$ . Esto se debe a que las trayectorias convergen asintóticamente al origen.

### 7.3.1. Primera SD uniforme

Con ayuda de la Proposición 7.1 se construye la siguiente SD.

*El grado de homogeneidad de las funciones  $V_\eta$  y  $\dot{V}_\eta$  podría variarse a cada paso del diseño. En este caso, se ha decidido conservar el mismo grado de homogeneidad.*

**Teorema 7.1** *Elija la SD uniforme*

$$\begin{aligned} \sigma_2 = x_2 + v_1 = 0, v_1 = k_1 [x_1]^{2-\frac{1}{q}}, & \quad \text{si } n = 2, \\ \sigma_n = x_n + v_{n-1} = 0, v_{n-1} = \sum_{j=2}^{n-1} \frac{\partial v_{n-2}}{\partial x_{j-2}} x_j + k_{n-1} [\sigma_{n-1}]^{\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}}, & \quad \text{si } n \geq 3, \end{aligned} \tag{163}$$

y seleccione las ganancias  $k_1 > \frac{q}{q+1}$ ,  $k_j > \frac{2}{q+1}, \forall j = 3, \dots, \eta - 1$ , y  $k_\eta > \frac{\alpha_\eta}{q+1}$ . Entonces, el origen del sistema reducido es global y RE, y cualquier trayectoria converge a una vecindad del origen de radio  $r > 0$  (independientemente del estado inicial sobre la SD) antes de un tiempo fijo

$$T_r = \frac{\alpha_\eta^{(q+1)/2}}{(q-1)C_3} \left(\frac{\eta}{2r}\right)^{\frac{q-1}{2}}, q \in (1, 2), \tag{164}$$

donde  $C_3 = \min\{k_1 - \frac{q}{q+1}, k_j - \frac{2}{q+1}, k_\eta - \frac{\alpha_\eta}{q+1}\}$ , y  $\eta = n - 1$ .

El Teorema 7.1 muestra como se debe construir la SD uniforme de orden arbitrario. Una vez en el modo deslizante, la Proposición 7.1 muestra que cualquier trayectoria del sistema (156) que desliza sobre la SD, estarán en el interior de una bola  $B_r = \{x : V_\eta(x) < r\}$ , para todo tiempo mayor a  $T_r$ , sin importar en que instante de tiempo se haya entrado en el modo deslizante. Sin embargo, una vez que las trayectorias están en el interior de dicha bola, las trayectorias convergen asintóticamente hacia el origen.

**Diseño del Tiempo fijo.** El resultado de la Proposición 7.3 permite realizar el diseño de la constante de tiempo fijo para el sistema reducido. Una vez seleccionada una vecindad de radio  $r$  y un tiempo fijo  $T_r$ , se puede hallar un conjunto de ganancias que garantizan que cualquier trayectoria de (156) converge antes del tiempo fijo  $T_r$  a la vecindad del origen de radio  $r$ . Tales ganancias se eligen como

$$\begin{aligned} k_1 &\geq \frac{\alpha_\eta^{\frac{q+1}{2}}}{(q-1)T_r} \left(\frac{\eta}{2r}\right)^{\frac{q-1}{2}} + \frac{q}{q+1}, \quad k_\eta \geq \frac{\alpha_\eta^{\frac{q+1}{2}}}{(q-1)T_r} \left(\frac{\eta}{2r}\right)^{\frac{q-1}{2}} + \frac{\alpha_\eta}{q+1}, \\ k_j &\geq \frac{\alpha_\eta^{\frac{q+1}{2}}}{(q-1)T_r} \left(\frac{\eta}{2r}\right)^{\frac{q-1}{2}} + \frac{2}{q+1}, \quad j = 3, \dots, \eta - 1, \end{aligned} \tag{165}$$

Una vez fijados los parámetro  $r$  y  $T_r$ , para el sistema reducido de orden  $\eta$ , el conjunto de ganancias (165) asegura la convergencia de las trayectorias del sistema reducido a la vecindad del origen de radio deseado. El diseño de las ganancias de la SD, dada una constante de tiempo fijo, es relativamente conservador.

**Ejemplo 7.1** *Considere un sistema reducido de segundo orden,*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = v_2,$$

donde  $v_2 = -\frac{1}{2-\frac{1}{q}}k_1|x_1|^{2-\frac{1}{q}}x_2 - k_2[x_2 + k_1|x_1]^{2-\frac{1}{q}}]^q$ . Las ganancias  $k_1$  y  $k_2$  se calculan como:  $k_1 = k_{\min} + q/(q + 1), k_2 \geq k_{\min} + 1/(q + 1)$ , donde  $k_{\min} = \frac{1}{(q-1)T_r} \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{q-1}{2}}$ .

La Figura 9 muestra el conjunto de posibles ganancias que garantizan el tiempo fijo  $T_r$ . Se observa que existe una combinación de parámetros  $(k_1, k_2, q)$  que ofrece la misma constante de tiempo fijo  $T_r$  para la vecindad requerida de radio  $r$ .

### 7.3.2. Segunda SD uniforme

La estructura de la SD (163) es demasiado complicada. Conforme el orden del sistema crece, los términos de tal superficie son cada más complejos. Existen términos que quizás no son necesarios en el diseño de la SD. El siguiente resultado asegura la propiedad deseada con un estructura de la SD más simple. Defina  $\sigma_1 = x_1$  y  $\sigma_i = x_i + k_{i-1}[\sigma_{i-1}]^{\zeta_{i-1}}, i = 2, \dots, \eta$ , donde el exponente  $\zeta_i = \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}$ , y  $\alpha_i = (i - 2)q + (3 - i)$ , con  $q \in (1, 2)$ .

*Este instante de tiempo puede entenderse como el momento en el que la trayectoria empieza a deslizar sobre la superficie.*

*Las ganancias en (165) se obtienen de la igualdad (164).*

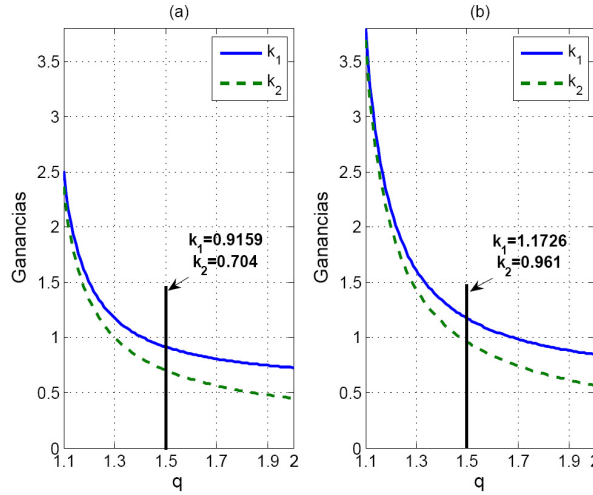


Figura 9.: (a) Con  $T_r = 5, r = 3$  y (b) con  $T_r = 3, r = 2$ .

**Teorema 7.2** *Elija la SD uniforme*

$$\sigma_n = x_n + \varphi_{n-1} = 0, \varphi_{n-1} = k_{n-1} [\sigma_{n-1}]^{\zeta_{n-1}}, q \in (1, 2). \quad (166)$$

Entonces, existen ganancias  $k_1, \dots, k_\eta$ , suficientemente grandes tales que el origen del sistema reducido (156) es global y RE. Además, cualquier trayectoria alcanza una vecindad del origen de radio  $r > 0$  (sin importar el estado inicial sobre la SD) antes de un tiempo fijo

$$T_r = \frac{2\alpha_\eta}{(q-1)\kappa_\eta} r^{-\frac{q-1}{2\alpha_\eta}}, \quad (167)$$

siendo  $\kappa_\eta$  una constante positiva que depende de las ganancias  $(k_1, \dots, k_\eta)$ .

**Comentario 7.1** Las ganancias de la SD tienen una forma explícita hasta orden tres. Para  $n = 2$ , seleccione  $k_1 > 0$ . Para  $n = 3$ , seleccione  $k_2 > \frac{1}{2-q} \frac{2}{1+q} \left(\frac{q-1}{1+q}\right)^{\frac{q-1}{2}} k_1^{2-q}$ , y  $k_1 > 0$ .

La nueva SD tiene una estructura recursiva más sencilla que la propuesta en (163). El campo vectorial del sistema reducido con la SD (166) es homogéneo de grado positivo c.r. a la dilatación (161), si el valor del parámetro  $q \in (1, 2)$ . Esto asegura la propiedad de atractividad en tiempo fijo para una bola de radio  $r$ .

Las ganancias se determinan de forma recursiva. Hay que determinar todas las ganancias anteriores  $(k_{\eta-1}, \dots, k_1)$  para poder estimar la ganancia correspondiente  $k_\eta$ . El Teorema 7.2 establece la existencia de una gran familia de SD con la propiedad de atractividad en tiempo fijo. Enseguida, se enlistan algunas superficies evaluadas para  $n \leq 5$ ,

$$\begin{aligned} (\text{SU2}) \quad \sigma_2 &= x_2 + \varphi_1, \varphi_1 = k_1 [x_1]^{\frac{1}{2-q}} & (\text{SU3}) \quad \sigma_3 &= x_3 + \varphi_2, \varphi_2 = k_2 [\sigma_2]^q \\ (\text{SU4}) \quad \sigma_4 &= x_4 + \varphi_3, \varphi_3 = k_3 [\sigma_3]^{\frac{2q-1}{q}} & (\text{SU5}) \quad \sigma_5 &= x_5 + \varphi_4, \varphi_4 = k_4 [\sigma_4]^{\frac{3q-2}{2q-1}} \end{aligned}$$

Si se considera a  $v_\eta = -k_{i-1} [\sigma_{i-1}]^{\zeta_{i-1}}$  como ley de control, dicha ley representaría un controlador homogéneo con la propiedad de atractividad en tiempo fijo, cuya estructura es mucho más simple y flexible en el diseño que los controladores propuestos por Polyakov [73].

**Proposición 7.4** *La función continua y diferenciable*

$$V_\eta = \delta_{\eta-1} V_{\eta-1}^{\zeta_{\eta-1}} + \frac{1}{2} |\sigma_\eta|^2, \delta_{\eta-1} = k_{\eta-1}^2, \quad (168)$$

donde  $V_1 = 0.5|x_1|^2$ , es una FLCR para el sistema reducido cuando se usa la SD (163). Además, la derivada c.r. al tiempo de (168) a lo largo de las trayectorias del sistema reducido satisface

$$\dot{V}_\eta \leq -\kappa_\eta V_\eta^{\frac{\beta_\eta}{2\alpha_\eta}}(x), \beta_\eta = (2\eta - 3)q + (5 - 2\eta). \quad (169)$$

Si se elige  $q = 1$ , la SD uniforme se reduce a una SD lineal y, solamente en este caso, el origen del sistema reducido es EE.

Los controladores presentados en [73] no cumplen con ningún criterio de homogeneidad.

La SD  $\sigma_\eta$ , la FLCR  $V_\eta$  y su derivada  $\dot{V}_\eta$  son homogéneas c.r. a la dilatación (161). De hecho, se cumple que

$$\sigma_\eta(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{\alpha_\eta} \sigma_\eta(x), \quad V_\eta(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{2\alpha_\eta} V_\eta(x), \quad \dot{V}_\eta(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{\beta_\eta} \dot{V}_\eta(x).$$

Es este caso, tanto la FLCR  $V_\eta$  como su derivada  $\dot{V}_\eta$  cambian su grado de homogeneidad según sea el orden el sistema. Finalmente, como para cualquier  $q \in (1, 2)$  se cumple que  $\frac{\beta_\eta}{2\alpha_\eta} > 1$ , de la desigualdad diferencial (169) es posible concluir que el sistema es global y RE, y una constante de tiempo fijo puede ser determinada para el tiempo de convergencia.

**Proposición 7.5** *Elija la SD del Teorema 7.2. Entonces, cualquier trayectoria del sistema reducido (156), iniciada con condición inicial  $x_\eta(0) \in \mathbb{R}^\eta$ , converge a una vecindad del origen de radio  $r$  ( $0 < r < V_\eta(x_\eta(0))$ ) en un tiempo finito menor a*

$$T(x_\eta(0), r) \leq \frac{2\alpha_\eta}{(q-1)\kappa_\eta} (r^{-\frac{q-1}{2\alpha_\eta}} - V_\eta^{-\frac{q-1}{2\alpha_\eta}}(x_\eta(0))). \quad (170)$$

Además, el tiempo de convergencia está uniformemente acotado por

$$T_r = \frac{2\alpha_\eta}{(q-1)\kappa_\eta} r^{-\frac{q-1}{2\alpha_\eta}}, \quad \forall q \in (1, 2). \quad (171)$$

**Comentario 7.2** *Para  $\eta = 1$ ,  $T_r = \frac{2(2-q)}{(q-1)\kappa_1} (1/r)^{\frac{q-1}{2(2-q)}}$ ,  $\forall q \in (1, 2)$ , donde  $\kappa_1 = k_1$ .*

El parámetro  $\Lambda_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , depende de como se elijan las ganancias anteriores  $(k_{n-1}, \dots, k_1)$ .

Para sintonizar las ganancias de la SD del Teorema 7.2, estas deben satisfacer:  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > \frac{1}{2-q} \frac{2}{1+q} (\frac{q-1}{1+q})^{\frac{q-1}{2}} k_1^{2-q}$ ,

$$k_i > \Lambda_{i-1}, \quad \forall i = 3, \dots, \eta - 1, \quad \text{y } k_\eta > \Lambda_{\eta-1}. \quad (172)$$

El correspondiente valor de  $\Lambda_{i-1}$ ,  $i = 3, \dots, \eta$ , se puede obtener numéricamente a través de la FLCR (168) con la fórmula:

Los máximos de la expresión (173) son funciones de las ganancias  $(k_1, \dots, k_{i-1})$ .

$$\Lambda_{i-1} = \max_{x \in S} \left\{ \frac{-\sigma_i \frac{\partial v_{i-1}}{\partial \sigma_{i-1}} \hat{\sigma}_{i-1} + \zeta_{i-1} \delta_{i-1} V_{i-1}^{\frac{q-1}{\alpha_{i-1}}} [\dot{V}_{i-1} + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial \sigma_{i-1}} \sigma_i]}{|\sigma_i| |\sigma_i|^{q_i}} \right\}, \quad (173)$$

donde  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_{r,2} = 1\}$  es la esfera homogénea unitaria con vector de pesos  $r = \{2-q, 1, \dots, (n-2)q - (n-3)\}$ , recuerde que  $q \in (1, 2)$ . Para obtener las ganancias, hay que evaluar el lado derecho de la expresión (173), y elegir las ganancias  $k_i$  tal que la desigualdades en (172) se cumplan. Una manera apropiada de calcular las ganancias es parametrizándolas en términos de la ganancia  $k_1$ , permitiéndose obtener curvas de sintonización solamente para la ganancia  $k_n$ . Al contrario de lo que sucede con la sintonización de los controladores discontinuos, la fórmula (173) sí permite diseñar la ganancia  $k_n$  a través de la FLCR.

Las restricciones que se obtienen sobre la ganancia  $k_n$  no son tan conservadoras.

La **Tabla 3** presenta una posible parametrización de las ganancias para (SU2) y (SU3) con distintos valores del parámetro  $q$ . De forma análoga a lo presentado en el **Capítulo 4**, la expresión (173) permite obtener una estructura para el diseño de las ganancias. A través de la formula (173), se puede obtener una parametrización de  $\Lambda_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, \eta$ , en términos de la ganancia  $k_1$ , por lo que el sistema de desigualdades (172) se reduce a

$$k_i > \beta_{i-1} k_1^{\frac{2-q}{\alpha_i}}, \quad \forall i = 2, \dots, \eta, \quad (174)$$

y donde los parámetros  $\beta_{i-1}$ ,  $i = 2, \dots, n$ , son las constantes que se obtienen de evaluar la expresión (173), y que resultan ser suficientemente grandes en el orden de índice, es decir,  $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_{\eta-1}$ .

q	(SU2)	(SU3)
$\frac{3}{2}$	$k_2 \geq \beta_1 k_1^{1/2}, \beta_1 = 1.1$	$k_2 = \beta_1 k_1^{1/2}, k_3 \geq \beta_2 k_1^{1/3},$ $\beta_1 = 2, \beta_2 = 5.25$
$\frac{4}{3}$	$k_2 \geq \beta_1 k_1^{2/3}, \beta_1 = 1$	$k_2 = \beta_1 k_1^{2/3}, k_3 \geq \beta_2 k_1^{1/2},$ $\beta_1 = 2, \beta_2 = 3.45$
$\frac{5}{4}$	$k_2 \geq \beta_1 k_1^{3/4}, \beta_1 = 0.95$	$k_2 = \beta_1 k_1^{3/4}, k_3 \geq \beta_2 k_1^{3/5},$ $\beta_1 = 2, \beta_2 = 3$

Cuadro 3.: Parametrización de las ganancias con FLCR.

**Diseño del tiempo fijo.** Para alguna vecindad de radio  $r$  y algún tiempo  $T_r$  dados, es posible hallar un conjunto de ganancias que garantizan que cualquier trayectoria de (156) pertenecerá a una vecindad del origen de radio  $r$  antes de un tiempo fijo  $T_r$ . Para este caso, las ganancias deben seleccionarse tal que la solución a la ecuación

$$\kappa_\eta = \frac{2\alpha_\eta}{(q-1)T_r} r^{-\frac{q-1}{2\alpha_\eta}}, \quad (175)$$

exista para algún conjunto de ganancias que satisfacen la restricción (172), y para alguna  $q \in (1, 2)$ . La ecuación es altamente no lineal como para hallar una solución analítica para las ganancias en función de los parámetros  $(r, T_r)$ . Para obtener una posible solución a este problema se debe:

1. Fijar los parámetros  $r, T_r$ , y  $q$ , dependiendo del orden del sistema reducido.
2. Elegir las ganancias  $(k_{\eta-1}, \dots, k_1)$  tal que las condiciones establecidas por el Teorema 7.2 se cumplan. De esta forma, solamente la ganancia  $k_\eta$  será ajustada.
3. Hallar la ganancia  $k_\eta$  que satisface la ecuación (175), sujeta a la restricción (172). Geométricamente, las soluciones de (175) son el punto de intersección de las gráficas entre una constante, a la derecha, y una función, a la izquierda de la ecuación (175).

*Una alternativa es usar la parametrización de las ganancias  $k_1, \dots, k_{\eta-1}$ , en términos de la ganancia  $k_1$ . De esta forma, únicamente hay que ajustar las ganancias  $k_1$  y  $k_\eta$ .*

**Ejemplo 7.2** Considere el sistema reducido de segundo orden  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = v_2$ , con  $v_2 = -k_2[\sigma_2]^q$ ,  $q = 3/2$  y alguna  $k_1$  fija. La ganancia  $k_2$  es calculada para  $r = 2$  y  $T_r = 3$  de (175), es decir,

$$\kappa_2(k_2) = b_2 = \frac{2}{(q-1)T_r} \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{q-1}{2}},$$

sujeta a ser  $k_2 \geq 1.1k_1^{1/2}$ . Esta expresión tiene una interpretación gráfica simple: la gráfica de la función  $\kappa_2(k_2)$  tiene que intersectar la línea constante descrita por  $b_2$  para algún valor  $k_2$ . La Figura 9 muestra los valores posibles de la ganancia  $k_2$  que garantizan el tiempo fijo  $T_r$  para dos valores de  $k_1$ . Se observa que existe un conjunto de valores  $(k_1, k_2, 3/2)$  que, aparentemente, dan el mismo valor  $T_r$  para la vecindad de radio  $r$ . Sin embargo, las ganancias  $(k_1, k_2)_{k_1=1} = (1, 1.6947)$  son mayores que  $(k_1, k_2)_{k_1=0.6} = (0.6, 1.4678)$ , por lo que el tiempo fijo real usando  $(k_1, k_2)_{k_1=1}$  es más pequeño que el estimado con  $(k_1, k_2)_{k_1=0.6}$ . En este sentido, las ganancias  $(k_1, k_2)_{k_1=1}$  están sobreestimadas.

### 7.3.3. Controladores de tiempo fijo

Falta diseñar la nueva entrada de control  $v$ . Los siguientes apartados describen dos controladores capaces de asegurar el modo deslizante en un tiempo fijo independientemente de cual haya sido el estado inicial del sistema. Los controladores que se presentan son una extensión de los controladores introducidos en el Capítulo 6.

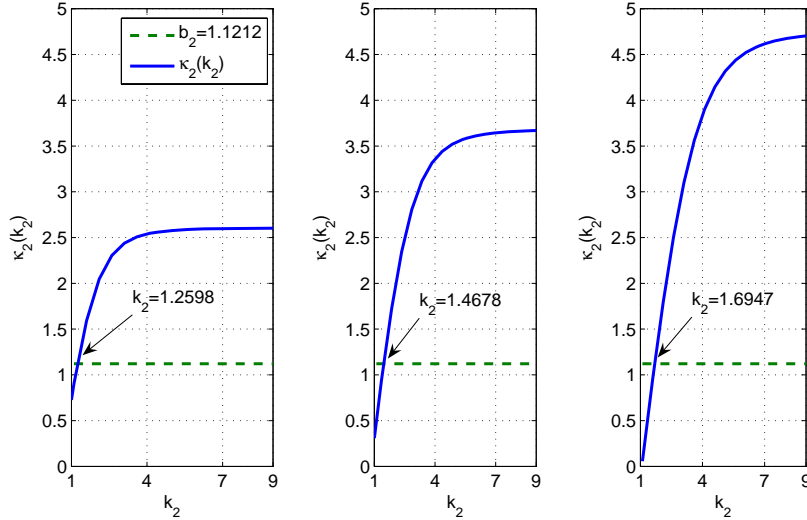


Figura 10.: (a)  $(k_1 = 0.3, k_2)$  con  $T_r = 3$  y  $r = 2$ ; (b)  $(k_1 = 0.6, k_2)$  con  $T_r = 3$  y  $r = 2$ ; y (c)  $(k_1 = 1, k_2)$  con  $T_r = 3$  y  $r = 2$ , se considera que  $k_{2\min} = 1.1k_1^{1/2}$ .

**CUPO de orden arbitrario.** El controlador que se propone garantiza que las trayectorias del sistema en lazo cerrado llegan a la SD en tiempo fijo, incluso en presencia de cierta clase de perturbaciones. La clase de perturbaciones acotadas que soporta este controlador pertenecen a la siguiente clase de funciones  $\mathcal{W}_1 = \{w_n \in \mathbb{R} : |w_n(x, t)| \leq \rho_0 + \rho_{02} |\sigma_n| + \rho_{03} |\sigma_n|^{q_v}, \rho_0, \rho_{02}, \rho_{03} > 0, q_v = \zeta_n\}$ ,  $\zeta_n = \frac{\alpha_n + 1}{\alpha_n}$ , y  $\alpha_n = (n - 2)q + (3 - n)$ , con  $q \in (1, 2)$ . La clase  $\mathcal{W}_1$  toma en cuenta funciones que no desvanecen en el origen, incluyendo a aquellas funciones que son discontinuas y crecientes, y que además, pueden escapar a infinito en tiempo finito. Las perturbaciones acopladas que pertenecen a la clase  $\mathcal{W}_1$  son compensadas por el siguiente controlador.

**Teorema 7.3** *Suponga que la perturbación  $w_n(x, t) \in \mathcal{W}_1$ . Elija la ley de control (153), con*

$$v = -Q_0[\sigma_n]^0 - K_2\sigma_n - K_3[\sigma_n]^{q_v}, \quad q_v = \zeta_n, \tag{176}$$

donde  $Q_0 > \rho_0$ ,  $K_2 > \rho_{02}$ ,  $K_3 > \rho_{03}$  son constantes positivas. Entonces la SD (163) (resp., la SD (166)) es ETFj, y de cualquier estado inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , las trayectorias convergen a  $\sigma_n = 0$  en tiempo finito antes de un tiempo fijo

$$T_f = \frac{2}{(q_v - 1)\kappa_{eq}} \omega^{-\frac{1}{2}(q_v - 1)} + \frac{2}{\kappa_{eq}} \ln(\omega^{\frac{1}{2}} + 1), \tag{177}$$

donde  $\kappa_{eq} = \min\{\sqrt{2}(Q_0 - \rho_0), 2(K_2 - \rho_{02}), 2^{\frac{q_v + 1}{2}}(K_3 - \rho_{03})\}$  y  $\omega$  es la raíz real positiva de la ecuación

$$\omega^{\frac{1}{2}} + 1 = \omega^{\frac{q_v}{2}}. \tag{178}$$

El parámetro  $\zeta_n$  depende  $q$ , y  $\zeta_n > 1$  con  $q \in (1, 2)$ . Cuando en el controlador  $Q_0 = K_2 = 0$ , y en ausencia de la perturbación acoplada  $w_n(x, t)$ , el sistema en lazo cerrado es homogéneo de grado positivo. Las ganancias  $K_2 > 0$  y  $K_3 > 0$  permiten compensar perturbaciones que crecen como un término lineal en la variable  $\sigma_n$  y más rápido que un término lineal en  $\sigma_n$ . El resultado establece la existencia del modo deslizante en tiempo fijo aun cuando las perturbaciones acopladas no desvanezcan en el origen. Si se conocen las cotas de los términos de perturbación y el tiempo fijo  $T_f$  en el que se desea llegar a la SD, las ganancias se eligen de la siguiente forma

La función  $\sigma_n$  está definida por las expresiones (163) ó (166), dependiendo de la SD que se haya elegido.

El valor de  $\omega$  minimiza a  $T_f$ . La expresión (178) se obtiene de igual forma que la ecuación (135) del Capítulo 6.

El cálculo de las ganancias en (179) es directo de la expresión (177)



$$\begin{aligned} Q_0 &\geq \frac{\sqrt{2}}{T_f} K_1 + \rho_0, K_2 \geq \frac{1}{T_f} K_1 + \rho_{02}, K_3 \geq \frac{2^{-\frac{1}{2}(q_v-1)}}{T_f} K_1 + \rho_{03}, \\ K_1 &= \frac{1}{(q_v-1)} \omega^{-\frac{1}{2}(q_v-1)} + \ln(\omega^{\frac{1}{2}} + 1). \end{aligned} \quad (179)$$

Para el controlador (176) es posible hallar una forma explícita las ganancias en función de las constantes  $r$  y  $T_f$ . Para sintonizar las ganancias ( $Q_0, K_2, K_3$ ) primero se fija el parámetro  $q_v$ . Posteriormente, se encuentra el valor de  $\omega$  de (178) y se sustituye en  $K_1$ . Finalmente, se sustituyen las constantes  $r$  y  $T_f$  en (179).

**Controlador Uniforme de Segundo Orden (CUSO).** Un controlador relé en la ley de control produce el fenómeno de *chattering*; en cambio, los controladores basados en MDOS permiten reducirlo. Nuevamente, en un intento por aliviar este efecto mientras se garantiza el modo deslizante en tiempo fijo, se propone un controlador inspirado en el CSTU, pero que se ha extendido a un sistema de orden arbitrario. La ley de control  $v$  propuesta tiene la siguiente estructura

$$v = -k_{1s} \phi_1(\sigma_n) - k_{2s} \int_0^t \phi_2(\sigma_n) dt, \quad (180)$$

donde  $\sigma_n$  es la SD (definida por la expresión (163) ó (166)),  $k_{1s}, k_{2s}$  son las ganancias a ser diseñadas, y las funciones

$$\begin{aligned} \phi_1(\sigma_n) &= \mu_1 |\sigma_n|^{\frac{1}{2}} + \mu_2 \sigma_n + \mu_3 |\sigma_n|^{q_v}, \\ \phi_2(\sigma_n) &= \frac{1}{2} \mu_1^2 |\sigma_n|^0 + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 |\sigma_n|^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2} + q_v\right) \mu_1 \mu_3 |\sigma_n|^{q_v-1/2} + \mu_2^2 \sigma_n \\ &\quad + (q_v + 1) \mu_2 \mu_3 |\sigma_n|^{q_v} + q_v \mu_3^2 |\sigma_n|^{2q_v-1}, \end{aligned}$$

con  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0$ , y  $q_v = \zeta_n > 1$ . Ahora, se considera que la perturbación acoplada puede descomponerse de la siguiente manera  $w(x, t) = \xi_{1n}(x, t) + \xi_{2n}(x, t)$ . En contraste con la clase perturbaciones que puede compensar el CUPO, el CUSO puede rechazar perturbaciones que pertenecen a la siguiente clase de funciones  $\mathcal{W}_2 = \{w_n(x, t) \in \mathbb{R} : |\xi_{1n}(x, t)| \leq \rho_{1s} |\phi_{1s}(\sigma_n)|, \left| \frac{d}{dt} \xi_{2n}(x_1, t) \right| \leq \rho_{2s} |\phi_2(\sigma_n)|, \rho_{1s}, \rho_{2s} \geq 0\}$ . A esta clase pertenecen solamente funciones continuas. En ausencia de perturbaciones no acopladas, la dinámica del sistema (154), junto con el controlador (180) y las perturbaciones acopladas  $w_n(x, t) \in \mathcal{W}_2$ , queda representada por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = -v_{n-1} + \sigma_n \\ \dot{\sigma}_n &= -k_{1s} \phi_1(\sigma_n) + \sigma_{n+1} + \xi_{1n}(x_1, \dots, x_n, t), \\ \dot{\sigma}_{n+1} &= -k_{2s} \phi_2(\sigma_n) + \frac{d}{dt} \xi_{2n}(x_1, \dots, x_n, t), \end{aligned} \quad (181)$$

para  $n \geq 2$ . Las ganancias ( $k_{1s}, k_{2s}$ ) deben elegirse de tal forma que la DML

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + R + \epsilon I & P B \\ B^T P & -\Theta \end{bmatrix} < 0, P = P^T > 0, \quad (182)$$

donde  $R = (\theta_1 \rho_{1s}^2 + \theta_2 \rho_{2s}^2) C^T C$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ ,

$$A = \begin{bmatrix} -k_{1s} & 1 \\ -k_{2s} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (183)$$

se cumpla para algunos  $\theta_1, \theta_2 \geq 0$  y  $\epsilon > 0$ . Esto garantiza que el origen del subsistema ( $\sigma_n, \sigma_{n+1}$ ) es globalmente ETF, [65]. Para estimar la constante de tiempo fijo, se debe elegir alguna  $\delta > 0$  que cumpla las desigualdades

$$\begin{aligned} \theta_{2s} \theta_{3s} &> \theta_{2s} + \theta_{3s}, \forall \theta_{2s}, \theta_{3s} > 0, \\ \delta &> [(2q_v - 1)^{2q_v-1} / (2q_v)^{2q_v} k_2]^{1/2q_v}, \\ \delta k_{2s} k_1 &> n_0 (\rho_{2s} \delta)^{\frac{3q_v-1}{2q_v-1}} + n_1 k_1^{\frac{3q_v-1}{q_v}} + n_2 k_2^{\frac{3q_v-1}{2q_v}}, \end{aligned} \quad (184)$$

*El controlador Super-Twisting se recupera si  $\mu_2 = \mu_3 = 0$  y las ganancias se eligen  $k_{1s}, k_{2s} > 0$ , la ley de control  $v$  hereda las propiedades de robustez del controlador Super-Twisting. Además,  $v$  contiene términos responsables de la convergencia en tiempo fijo.*

*Cuando  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , el sistema en lazo cerrado es homogéneo de grado positivo.*

donde  $\underline{k}_1 = k_{1s} - \rho_{1s}$ ,  $\bar{k}_1 = k_{1s} + \rho_{1s}$ ,  $\bar{k}_2 = k_{2s} + \rho_{2s}$ ,

$$n_0 = (2q_v - 1)(2q_v^2/\Lambda)^{\frac{q}{2q_v-1}} \left(\frac{1}{3q_v-1}\right)^{\frac{3q_v-1}{2q_v-1}}, n_1 = \left(\frac{1}{3q_v-1}\right)^{\frac{3q_v-1}{q_v}} [\theta_{2s}(2q_v - 1)]^{\frac{2q_v-1}{q_v}}/2,$$

$$n_2 = \left(\frac{2q_v-1}{3q_v-1}\right)^{\frac{3q_v-1}{2q_v}} [\theta_{3s}(q_v - 1)]^{\frac{q_v-1}{2q_v}}.$$

Este hecho se debe a que se usan dos funciones de Lyapunov para mostrar la estabilidad en tiempo fijo del subsistema  $(\sigma_n, \sigma_{n+1})$ . En el caso de que las desigualdades (184) no se cumplan, si la DML se satisface, el origen del subsistema  $(\sigma_n, \sigma_{n+1})$  sigue siendo globalmente ETF.

**Teorema 7.4** *Suponga que  $w_n(x, t) \in \mathcal{W}_2$ . Elija la ley de control (153) con  $v$  como en (180), donde  $(k_{1s}, k_{2s})$  satisfacen la DML (182) y la desigualdad (184). Entonces la SD (163) (rep., la SD (166)) es ETFj, y de cualquier estado inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , las trayectorias convergen a  $\sigma_n = 0$  en tiempo finito antes de un tiempo fijo*

$$T_s = \frac{2q_v}{(q_v-1)\kappa_{s3}} \omega_s^{-\frac{q_v-1}{2q_v}} + \frac{2}{\kappa_{s2}} \ln\left(\frac{\kappa_{s2}}{\kappa_{s1}} \omega_s^{\frac{1}{2}} + 1\right), \tag{185}$$

donde

$$\kappa_{s1} = \frac{\mu_1^2 \epsilon}{2(\lambda_{\max}\{P\} + C_2)^{\frac{1}{2}}}, \kappa_{s2} = \frac{\mu_2 \epsilon}{(\lambda_{\max}\{P\} + C_2)}, \kappa_{s3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q_v-1}{2(3q_v-1)}} \frac{q_v \mu_3^{1/q_v} C_3}{(\lambda_{\max}\{P\} + C_2)^{\frac{3q_v-1}{2q_v}}}, \tag{186}$$

siendo  $C_2$  y  $C_3$  constantes positivas que dependen de los parámetros  $k_{1s}$ ,  $k_{2s}$ ,  $\rho_{1s}$ ,  $\rho_{2s}$  y  $\omega_s$  es la raíz real positiva de la ecuación

$$\omega_s^{\frac{1}{2}} + (\kappa_{s1}/\kappa_{s2}) = (\kappa_{s3}/\kappa_{s2}) \omega_s^{\frac{2}{3}}. \tag{187}$$

Desafortunadamente, este resultado no puede aplicarse para fines de diseño, debido a que la estimación del tiempo fijo (185) es muy conservadora [26]. Por lo tanto, aparece el problema de encontrar una mejor estimación del tiempo fijo cuando se utiliza el controlador (180).

Los dos controladores propuestos aseguran convergencia en tiempo fijo de cualquier trayectoria a la SD. Sin embargo, el sistema en lazo cerrado, con las superficies deslizantes y los controladores propuestos, solamente tiene la propiedad de atracción en tiempo fijo. Esto significa que, independientemente de cual sea el valor del estado inicial, cualquier trayectoria pertenecerá a una vecindad del origen de radio  $r$  para todo  $t > T_f$ , o para todo  $t > T_s$ , si la perturbación acoplada  $w_n(x, t) \in \mathcal{W}_1$ , ó  $w_n(x, t) \in \mathcal{W}_2$ .

**Teorema 7.5** *Suponga que solamente existen perturbaciones acopladas y elija el CUSO, o el CUPO, (con la SD (163) ó la SD (166)). Entonces, cualquier bola  $B_r$  del sistema (151) es ATFj y cualquier trayectoria pertenecerá a  $B_r$  antes de un tiempo fijo  $T_p = T_r + T_{f/s}$ .*

El parámetro  $T_r$  es la constante de tiempo fijo durante el modo deslizante y  $T_{f/s}$  es la constante de tiempo fijo que tiene el tiempo de convergencia de cualquier trayectoria a la SD. El parámetro  $T_{f/s}$  está determinado por  $T_f$ , si se usa el CUPO, o por  $T_s$ , si se usa el CUSO.

**Diseño del tiempo fijo del sistema en lazo cerrado.** Una manera de diseñar la constante de tiempo fijo del sistema en lazo cerrado es de la siguiente manera:

- (I) Hallar las ganancias del controlador que garantizan el modo deslizante antes de la constante de tiempo fijo  $T_f$  ó  $T_s$ .
- (II) Hallar las ganancias de la SD tal que cualquier trayectoria del sistema reducido logre converger a una bola  $B_r$  antes de una constante de tiempo fijo  $T_r$ .
- (III) El tiempo fijo total es  $T_p = T_r + T_{f/s}$ .

El valor de  $\omega_s$  minimiza a  $T_s$ .

## 7.4. CASO CON PERTURBACIONES NO ACOPLADAS

En esta última parte se presenta el caso en que hay perturbaciones no acopladas en el sistema reducido. La conclusión principal que se obtiene es que, cuando se usa la SD (166) para el sistema reducido es posible rechazar por completo cierta clase de perturbaciones no acopladas.

## 7.4.1. Robustez de la segunda SD uniforme

Se define la siguiente variable  $\sigma_i = x_i + k_{i-1} [\sigma_{i-1}]^{\zeta_{i-1}}$ ,  $\forall i = 2, \dots, n$ , y  $\sigma_1 = x_1$ , donde  $\zeta_i = \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}$ , con  $\alpha_i = (i-2)q + (3-i)$ . Suponga que las perturbaciones no acopladas están acotadas por funciones conocidas que satisfacen la siguiente condición.

**Suposición 7.1** Para cada  $i = 1, \dots, n-1$ , y alguna  $q \in (1, 2)$ , las perturbaciones pertenecen a la clase de funciones  $\mathcal{W} : \{w_i \in \mathbb{R} : |w_i(x, t)| \leq \rho_i |\sigma_i|^{\zeta_i}, \rho_i \geq 0\}$ .

**Teorema 7.6** Considere que la Suposición 7.1 se cumple globalmente para el sistema reducido (155) y elija la SD (163). Entonces, el origen  $x = 0$  de (155) es RGAE para cualquier ganancia  $k_1, \dots, k_n$ , suficientemente grandes.

**Comentario 7.3** Las ganancias de la SD tienen forma explícita para órdenes pequeños. Para  $n = 2$ , elija  $k_1 > \rho_1$ . Para  $n = 3$ , elija las ganancias  $a_{11} = k_1 - \rho_1 > 0$ , y  $k_2 > \frac{1}{2-q} \frac{2}{1+q} \left[ \left( \frac{q-1}{1+q} \frac{1}{\theta_{21} k_1 a_{11}} \right)^{\frac{q-1}{2}} + \frac{\rho_1}{2} \left( \frac{q}{1+q} \frac{\rho_1}{\theta_{22} k_1 a_{11}} \right)^{\frac{q}{1}} \right] k_1 + \rho_2$ . Para  $n \geq 4$ , las ganancias satisfacen  $k_1 > \rho_1$ ,  $k_2 > \frac{1}{2-q} \frac{2}{1+q} \left[ \left( \frac{q-1}{1+q} \frac{1}{\theta_{21} k_1 a_{11}} \right)^{\frac{q-1}{2}} + \frac{\rho_1}{2} \left( \frac{q}{1+q} \frac{\rho_1}{\theta_{22} k_1 a_{11}} \right)^{\frac{q}{1}} \right] k_1 + \rho_2$ , y  $k_i > \Lambda_{i-1} + \rho_i$ ,  $\forall i = 3, \dots, n$ , donde  $\Lambda_{i-1}$  es un parámetro que depende de las ganancias  $(k_{i-1}, \dots, k_1)$  y de las constantes  $(\rho_1, \dots, \rho_{i-1})$ .

La Proposición 7.5 sigue siendo válida para el caso perturbado. Solo que ahora el parámetro  $\kappa_n$  también dependerá de las constantes  $\rho_i, i = 1, \dots, n$ . Esto indica que durante el modo deslizante, las trayectorias del sistema reducido (155) convergen en tiempo fijo a una vecindad del origen, siempre que las perturbaciones no acopladas cumplan globalmente con la Suposición 7.1.

## 7.4.2. Robustez del sistema en lazo cerrado

Cualquiera de los controladores de tiempo fijo presentados (el CUPO ó el CUSO) garantizan que el origen del sistema en lazo cerrado es RGAE en presencia de perturbaciones no acopladas  $w_i(x, t) \in \mathcal{W}$ . Tanto el CUPO como CUSO, garantizan el modo deslizante ( $\sigma_n = 0$ ) en tiempo fijo. Cuando se presenta el modo deslizante, el Teorema 7.2 garantiza estabilidad asintótica del sistema reducido, las trayectorias del sistema convergen a una bola arbitraria  $B_r$  ( $r > 0$ ) antes de una constante de tiempo fijo  $T_r$ . Entonces, se puede concluir que cualquier bola  $B_r$  del sistema retroalimentado con el CUPO (o el CUSO) es ATFj, incluso en presencia de perturbaciones acopladas y no acopladas. Lo anterior queda formalmente expresado en el siguiente Teorema.

**Teorema 7.7** Considere que existen perturbaciones no acopladas que satisfacen la Suposición 7.1. Elija el CUSO (o el CUPO) con la SD (166). Entonces, cualquier bola  $B_r$  del sistema (151) es ATFj, y cualquier trayectoria pertenecerá a  $B_r$  antes de un tiempo fijo  $T_p = T_r + T_f/s$ .

Para cualquier tiempo mayor a la constante  $T_p$ , cualquier trayectoria pertenece a una bola  $B_r$ .

También se puede demostrar que la SD (163) es robusta ante cierta clase de perturbaciones no acopladas.

Las constantes  $\theta_{21}$  y  $\theta_{22}$  deben satisfacer  $\theta_{21} + \theta_{22} = 1$ .

El parámetro  $\Lambda_{i-1}$  se obtiene numéricamente. Véase la sintonización para controladores discontinuos del Capítulo 4.

Dependiendo de la ley de control que se haya elegido, las perturbaciones acopladas pertenecen a  $\mathcal{W}_1$  ó  $\mathcal{W}_2$

## 7.5. EJEMPLO ACADÉMICO

A continuación se compara el desempeño de los controladores de tiempo fijo y de las superficies que se han presentado en este capítulo. Considere un sistema de tercer orden que conmuta cada 8 segundos cuyo modelo está descrito por  $\dot{x} = A_j x + b(u + w_n(t))$ , donde  $x \in \mathbb{R}^3$  es el estado continuo, el vector  $b^T = [0 \ 0 \ 1]$ , la perturbación  $w_n(t) = 0.5 \sin(8t) + 0.2 \cos(5t)$ , y  $j \in [1, 2]$  es el estado discreto que indexa los subsistemas

Para propósitos de simulación, se toman condiciones iniciales  $x(0) = [-1.5, 2.5, -1.5]^T$  y tiempo de muestreo  $\tau = 0.001$ .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

El objetivo de control es estabilizar robustamente el origen  $x = 0$  del sistema con tiempo fijo  $T_p = 5.5$  a una vecindad de radio  $r = 2$ . El controlador se enciende 2.5 segundos después de cada conmutación para emular un observador que recupera el estado medido a más tardar en 2.5 segundos. El diseño del tiempo fijo se divide en dos etapas: (a) definir las ganancias del controlador que aseguran el modo deslizante a más tardar  $T_f = 5$  ó  $T_s = 5$  unidades de tiempo y (b) definir las ganancias de la SD para que cualquier trayectoria del sistema reducido llegué a una bola  $B_{r=2}$  a más tardar en  $T_r = 3$  unidades de tiempo. La ley de control  $u$  queda determinada por (153), donde la SD es una de las siguientes superficies

Se pueden usar los observadores uniformes de Angulo et al. [3].

Para la simulación  $T_r = 3$ . De la Figura 9.(b), fijando  $q = 1.5$ , se obtiene  $(k_1, k_2) = (1.161, 0.961)$ .

(S1)  $\sigma_3 = x_3 + \frac{1}{2-q} k_1 |x_1|^{\frac{q-1}{2-q}} x_2 + k_2 [x_2 + k_1 |x_1|^{\frac{1}{2-q}}]^q$ . En este caso, la función  $\frac{d\varphi_2(x_1, x_2)}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} x_3$ , con

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} &= \frac{q-1}{(2-q)^2} k_1 |x_1|^{\frac{2q-3}{2-q}} x_2 + \frac{q}{2-q} k_2 k_1 |s_2|^{q-1} |x_1|^{\frac{q-1}{2-q}}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{2-q} k_1 |x_1|^{\frac{q-1}{2-q}} + q k_2 |s_2|^{q-1}. \end{aligned}$$

De la Figura 10, se tiene que las ganancias  $(k_1, k_2) = (0.6, 1.4678)$  garantizan un  $T_r = 3$  a la vecindad de radio  $r = 2$ .

(S2)  $\sigma_3 = x_3 + k_2 [x_2 + k_1 |x_1|^{\frac{1}{2-q}}]^q$ , y ahora

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} x_3 = \frac{q}{2-q} k_2 k_1 |s_2|^{q-1} |x_1|^{\frac{q-1}{2-q}} x_2 + q k_2 |s_2|^{q-1} x_3.$$

y  $v$  es uno de los siguientes controladores

CMDPO  $v = -M_0 \text{sign}(\sigma_3)$ , con  $M_0 = 10$ .

CUPO  $T_f = 5$  y  $q_v = 5/4$ . Por lo tanto,  $\omega = 9.4839$ ,  $Q_0 \geq 1.9517$ ,  $K_2 \geq 0.8851$  y  $K_3 \geq 0.8116$ ,

La sintonización del CUSO se hace a partir de simulaciones.

CUSO  $T_s = 5$  y  $q_v = 11/10$ . Por lo tanto,  $(k_{1s}, k_{2s}) = (2\sqrt{10}, 10)$  con  $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0.2, \mu_3 = 0.15$ .

Con el CUPO, la perturbación  $w(t) \in \mathcal{W}_1$ , con  $\rho_0 = 0.7, \rho_{02} = \rho_{03} = 0$ , y  $q_v > 1$ . Cuando se usa el CSTU, la perturbación  $w(t) \in \mathcal{W}_2$ , con  $\rho_{1s} = 0$ , y  $\rho_{2s} = 5$ . Para ambas superficies, los controladores mantienen la sintonización de sus ganancias ya que las constantes  $T_f$  y  $T_s$  con cambian.

Los resultados de la simulación se muestran en la Figura 11 y la Figura 13, para (S1), y en la Figura 12 y Figura 13, para (S2). Solo el CUPO y el CSTU garantizan el modo deslizante en tiempo fijo a costa del esfuerzo de control, Figura 11.(d) y Figura 12.(d). Para tener propiedad de convergencia en tiempo fijo las magnitudes de las señales de control deben ser considerablemente grandes. Este efecto también

<sup>1</sup> Cuando  $\rho_{1s} = 0$ , las ganancias  $k_{1s}$  y  $k_{2s}$  se eligen en el conjunto  $\kappa = \{(k_{1s}, k_{2s}) \in \mathbb{R}^2 | 0 < k_{1s} \leq 2\sqrt{\rho_{2s}}, k_{2s} > 0.25k_{1s}^2 + 4\rho_{2s}/k_{1s}^2\} \cup \{(k_{1s}, k_{2s}) \in \mathbb{R}^2 | k_{1s} > 2\sqrt{\rho_{2s}}, k_{2s} > 2\rho_{2s}\}$ , véase [65].

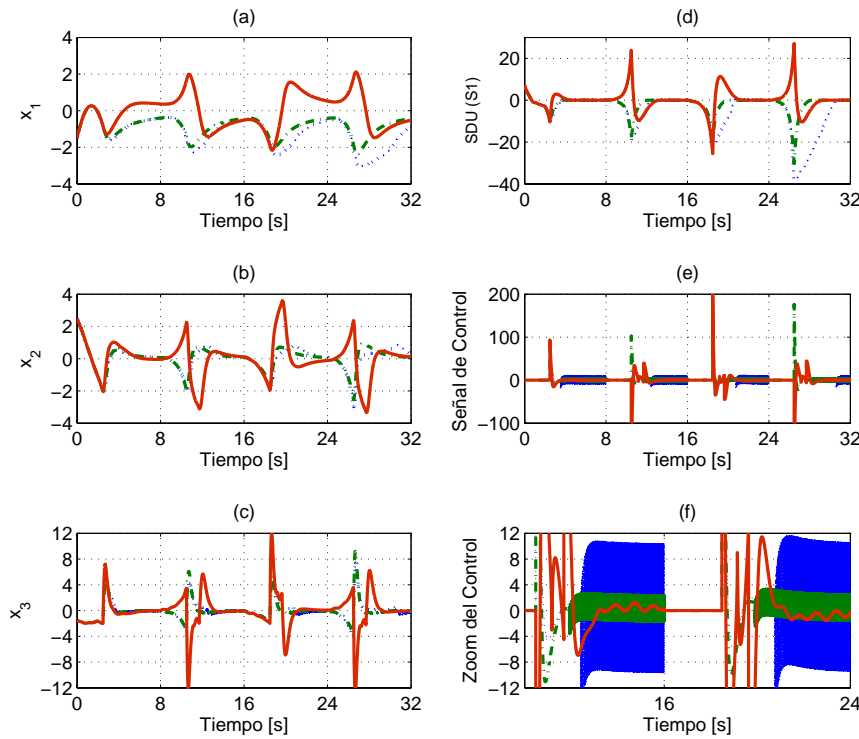


Figura 11.: (a), (b) y (c) son los estados del sistema controlados por el CMDPO (línea punteada), el CUPU (línea segmentada) y el CUSO (línea solida); (d) SD ( $S_1$ ); (e) señales de control de cada controlador y (f) acercamiento de las señales de control.

se observa en el incremento de la respuesta transitoria, véase la [Figura 12.\(d\)](#). Sólo el CSTU reduce el efecto de chattering pero el esfuerzo de control es mayor que el utilizado por el CUPU, [Figura 12.\(e\)](#) y [Figura 12.\(f\)](#). Además, la ganancia del CMDPO es mayor, en comparación con el término discontinuo del CUPU, como consecuencia, el fenómeno de chattering se incrementa. El comportamiento es bastante similar para cualquiera de las dos superficies, aunque es notable destacar que la magnitud del control es considerablemente menor con la SDU ( $S_2$ ).

La [Figura 13](#) muestra el tiempo de convergencia real que le toma a las trayectorias de estado en llegar a la SD ( $S_1$ ) y ( $S_2$ ) usando el CUPU. Con la SD ( $S_1$ ), el diseño de  $T_f$  no es tan conservador si se conoce la cota exacta de la perturbación. Las simulaciones muestran que el diseño de  $T_p$  es un poco conservador, ya que el tiempo fijo  $T_p$  para la bola  $B_{r=2}$  es aproximadamente de 4.3 segundos, lo que en comparación con el diseño original es casi la mitad del tiempo fijo predeterminado.

En contraste con el diseño anterior, el diseño de  $T_f$  resulta conservador para la SD ( $S_2$ ) aunque se conozca la cota exacta de la perturbación. La [Figura 13.\(c\)](#) muestra la constante de tiempo fijo real  $T_p = 3.15$  [s] para la bola  $B_{r=2}$ . En general, el diseño de la constante  $T_p$  es conservador.

## 7.6. RESUMEN DEL CAPÍTULO

Las dos SD uniformes garantizan que, durante el modo deslizante, cualquier vecindad del origen del sistema reducido es ATFj, es decir, las trayectorias convergen a cualquier vecindad del origen en tiempo fijo independientemente de cuando se haya iniciado el modo deslizante. Una de las superficies tiene una estructura simple y conserva la propiedad de atractividad en tiempo fijo.

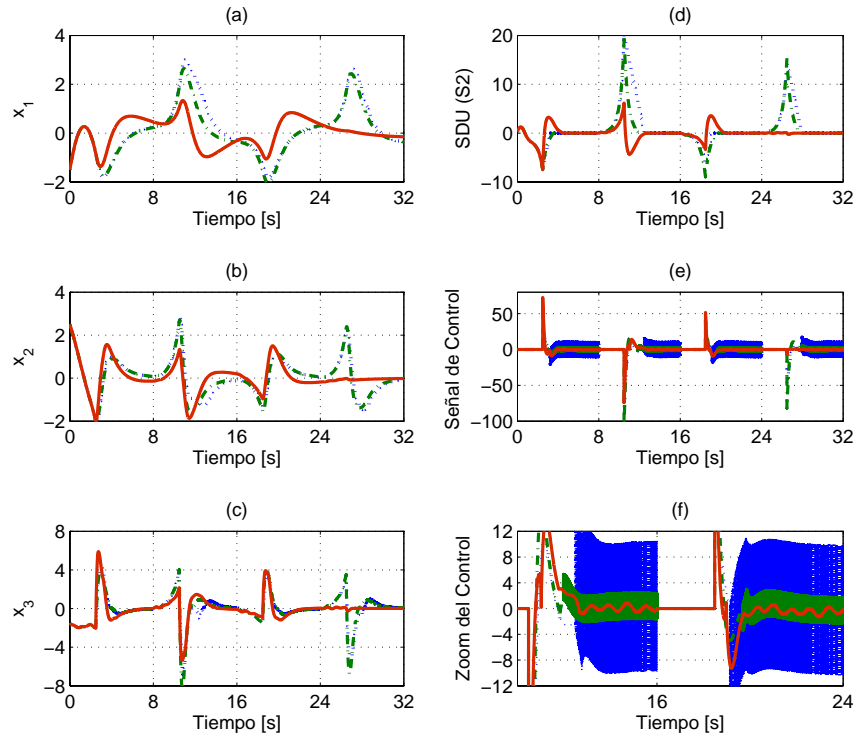


Figura 12.: (a), (b) y (c) son los estados del sistema aplicando el CMDPO (línea punteada), el CUPO (línea segmentada) y el CUSO (línea solida); (d) SDU ( $S_2$ ); (e) señales de control de cada controlador y (f) acercamiento de las señales de control.

Los controladores de tiempo fijo del [Capítulo 6](#) se han generalizado a un sistema de orden arbitrario. Los controladores de tiempo fijo están basados en un MDPO y en MDSO, heredando todas sus propiedades, y además, incluyen términos de alto orden en su estructura para garantizar la convergencia en tiempo fijo a alguna de las superficies presentadas. Cada uno de los controladores de tiempo fijo es robusto c.r. a cierta clase de perturbaciones acopladas. Se ha mostrado que el esquema de control es robusto ante cierta clase de perturbaciones no acopladas. Sin embargo, únicamente se logra estabilidad robusta y asintótica del origen del sistema en lazo cerrado.

Las propiedades del sistema reducido y las propiedades del sistema en lazo cerrado se han estudiado a través de alguna FLC. Estas funciones permiten obtener un conjunto de ganancias y estimar el tiempo de convergencia. Dichas estimaciones permiten diseñar las ganancias que garantizan cierto tiempo fijo  $T_p$  a una bola dada de radio  $r$  cuando se utiliza el CUPO. Sin embargo, se necesita de una mejor sintonización de las ganancias para asegurar el tiempo fijo requerido.

### 7.7. PRUEBA DE LOS TEOREMAS Y PROPOSICIONES DEL CAPÍTULO

**Prueba de la Proposición 7.2 y de la Proposición 7.1.** Estos resultados se demuestran simultáneamente usando el MB. La demostración es por inducción.

*Paso 1:* Se tiene el sistema  $\dot{x}_1 = v_1$ . Suponga que  $v_1 = -k_1 [x_1]^{1/(2-q)}$ , donde  $v_1$  es la ley de control y  $q \in (1, 2)$ . Esto implica que  $1/(2 - q)$  es mayor que uno, y

$$\dot{x}_1 = -k_1 [x_1]^{1/(2-q)}, \tag{188}$$

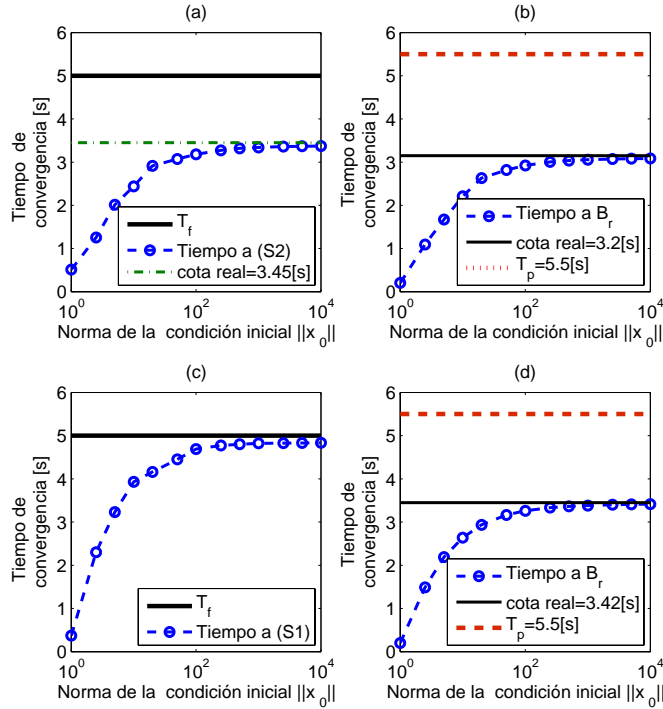


Figura 13.: (a) Tiempo que le toma a las trayectorias en llegar a (S2); (b) tiempo de convergencia (datos de simulación) a la bola  $B_{r=2}$  comparado con la constante de tiempo fijo  $T_p = 5.5$ ; (c) tiempo que le toma a las trayectorias en llegar a (S1); y (d) tiempo de convergencia (datos de simulación) a la bola  $B_{r=2}$  comparado con  $T_p = 5.5$ .

es AE. Usando la FLC  $V_1 = \frac{2-q}{2}|x_1|^{\frac{2}{2-q}}$ , la derivada de  $V_1$  a lo largo de las trayectorias de (188), se obtiene

$$\dot{V}_1 = -\frac{dV_1}{dx_1}v_1 = -k_1[x_1]^{\frac{q}{2-q}}[x_1]^{\frac{1}{2-q}} = -k_1|x_1|^{\frac{q+1}{2-q}}.$$

La función  $\dot{V}_1$  es n.d. si  $k_1 > 0$  y puede ser reescrita como  $\dot{V}_1 = -k_1(2/(2-q))^{(q+1)/2}V_1^{\frac{q+1}{2}}$ .

*Paso 2:* Se tiene el sistema de segundo orden

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = v_2, \quad (189)$$

Defina la variable de estado  $\sigma_2 = x_2 + v_1$ . Si se utilizan las coordenadas  $(x_1, \sigma_2)$ , (189) queda descrito por

$$\dot{x}_1 = -v_1 + \sigma_2, \dot{\sigma}_2 = v_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}x_2. \quad (190)$$

La ley de control  $v_2$  se obtiene a través de una FLC  $V_2 = V_1 + \frac{1}{2}|\sigma_2|^2$ . Tomando la derivada de  $V_2$  a lo largo de las trayectorias de (190), se tiene

$$\dot{V}_2 = -\frac{\partial V_1}{\partial x_1}v_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\sigma_2 + \sigma_2(v_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}x_2).$$

Del Lema A.1, se deriva la desigualdad  $\frac{dV_1}{dx_1}s_2 \leq |x_1|^{\frac{q}{2-q}}|s_2| \leq \frac{q}{q+1}|x_1|^{\frac{q+1}{2-q}} + \frac{1}{q+1}|s_2|^{q+1}$ . Para consultar el Lema A.1 revise el Apéndice A.

Con ayuda de esta desigualdad y eligiendo el control  $v_2 = -\frac{\partial v_1}{\partial x_1}x_2 - k_2[\sigma_2]^q$ , se obtiene

$$\dot{V}_2 \leq -(k_1 - \frac{q}{q+1})|x_1|^{\frac{q+1}{2-q}} - (k_2 - \frac{1}{q+1})|\sigma_2|^{q+1},$$

la cual es n.d. si  $k_1 > q/(q+1)$  y  $k_2 > 1/(q+1)$ .



*Paso i:* Defina las variables  $\sigma_1 = x_1$  y  $\sigma_i = x_i + v_{i-1}, \forall i = 2, \dots, \eta$ . La dinámica del sistema reducido, en las coordenadas  $(\sigma_1, \dots, \sigma_\eta)$ , está descrita por

$$\dot{\sigma}_1 = x_2, \dot{\sigma}_j = x_{j+1} - \sum_{k=2}^j \frac{\partial v_{j-1}}{\partial x_{k-1}} x_k, \forall j = 2, \dots, i. \quad (191)$$

La FLC (158) en su forma recursiva es  $V_i = V_{i-1} + \frac{\alpha_i}{2} |\sigma_i|^{\frac{2}{\alpha_i}}$ ,  $i = 2, \dots, \eta$ , donde  $\alpha_i = (i-2)q + (3-i)$ . Tomando la derivada de  $V_i$  a lo largo de las trayectorias de (191), se tiene

$$\dot{V}_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial V_{i-1}}{\partial \sigma_j} \dot{\sigma}_j + [\sigma_i]^{\frac{(i-1)+(2-i)q}{\alpha_i}} (v_i - \sum_{j=2}^i \frac{\partial v_{i-1}}{\partial x_{j-1}} x_j) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial V_{i-1}}{\partial \sigma_j} \dot{\sigma}_j - k_i |\sigma_i|^{\frac{q+1}{\alpha_i}}.$$

Recuerde que  $x_{j+1} = v_j + \sigma_{j+1}$ , donde la ley de control es  $v_j = \sum_{k=2}^j \frac{\partial v_{j-1}}{\partial x_{k-1}} x_k - k_j [\sigma_j]^{\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}}$ . Entonces,  $\dot{\sigma}_j = \sigma_{j+1} - k_j [\sigma_j]^{\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}}$ . Además, es un hecho que

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial V_{i-1}}{\partial \sigma_j} \dot{\sigma}_j = -k_1 |\sigma_1|^{\frac{q+1}{2-q}} - \sum_{j=2}^{i-1} k_j |\sigma_j|^{\frac{q+1}{\alpha_j}} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial V_{i-1}}{\partial \sigma_j} \sigma_{j+1},$$

ya que  $\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial V_{i-1}}{\partial \sigma_j} (-k_j [\sigma_j]^{\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}}) = \sum_{j=1}^{i-1} -k_j [\sigma_j]^{\frac{\delta_j}{\alpha_j}} [\sigma_j]^{\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}} = \sum_{j=1}^{i-1} -k_j |\sigma_j|^{\frac{q+1}{\alpha_j}}$ , donde  $\delta_j = (j-1) - (j-2)q, \forall j = 1, \dots, i-1$ . Observe que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial V_{i-1}}{\partial \sigma_j} \sigma_{j+1} &= \frac{\partial V_1}{\partial \sigma_1} \sigma_2 + \frac{\partial V_2}{\partial \sigma_2} \sigma_3 + \frac{\partial V_3}{\partial \sigma_3} \sigma_4 + \dots + \frac{\partial V_j}{\partial \sigma_j} \sigma_{j+1} \\ &= [\sigma_1]^{\frac{q}{2-q}} \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + [\sigma_3]^{\frac{2-q}{q}} \sigma_4 + \dots + [\sigma_j]^{\frac{\delta_j}{\alpha_j}} \sigma_{j+1} = \sum_{j=1}^{i-1} [\sigma_j]^{\frac{\delta_j}{\alpha_j}} \sigma_{j+1}, \end{aligned}$$

Nuevamente, del Lema A.1, se obtienen las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} |\sigma_1|^{2-q} |\sigma_2| &\leq \frac{q}{q+1} |\sigma_1|^{\frac{q+1}{2-q}} + \frac{1}{q+1} |\sigma_2|^{q+1}, \quad |\sigma_2| |\sigma_3| \leq \frac{1}{q+1} |\sigma_2|^{q+1} + \frac{q}{q+1} |\sigma_3|^{\frac{q+1}{q}}, \\ \dots, |\sigma_j|^{\frac{\delta_j}{\alpha_j}} |\sigma_{j+1}| &\leq \frac{\delta_j}{q+1} |\sigma_j|^{\frac{q+1}{\alpha_j}} + \frac{\alpha_{j+1}}{q+1} |\sigma_{j+1}|^{\frac{q+1}{\alpha_{j+1}}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\sum_{j=1}^{i-1} [\sigma_j]^{\frac{\delta_j}{\alpha_j}} \sigma_{j+1} \leq \frac{q}{q+1} |\sigma_1|^{\frac{q+1}{2-q}} + \sum_{j=2}^{i-2} \frac{2}{q+1} |\sigma_j|^{\frac{q+1}{\alpha_j}} + \frac{\alpha_{i-1}}{q+1} |\sigma_{i-1}|^{\frac{q+1}{\alpha_{i-1}}} + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial \sigma_{i-1}} \sigma_i$ . Lo anterior permite obtener

$$\dot{V}_i \leq \dot{V}_{i-1} + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial \sigma_{i-1}} \sigma_i - k_i |\sigma_i|^{\frac{q+1}{\alpha_i}}, \quad (192)$$

con  $\dot{V}_{i-1} \leq -(k_1 - \frac{q}{q+1}) |\sigma_1|^{\frac{q+1}{2-q}} - \sum_{j=2}^{i-2} (k_j - \frac{2}{q+1}) |\sigma_j|^{\frac{q+1}{\alpha_j}} - (k_{i-1} - \frac{\alpha_{i-1}}{q+1}) |\sigma_{i-1}|^{\frac{q+1}{\alpha_{i-1}}}$ .

Finalmente, como  $\frac{\partial V_{i-1}}{\partial \sigma_{i-1}} \sigma_i \leq |\sigma_{i-1}|^{\frac{\delta_{i-1}}{\alpha_{i-1}}} |\sigma_i|$ , aplicando una vez el Lema A.1 se obtiene (159).

La FLC (158) se acota por arriba como  $V_i \leq \frac{C_2}{2} (|\sigma_1|^{\frac{2}{2-q}} + \sum_{j=2}^i |\sigma_j|^{\frac{2}{\alpha_j}})$ , debido a que el máximo del conjunto  $\{2-q, 1, q, 2q-1, \dots, (i-1)q + (3-i)\}$  es  $C_2 = (i-2)q + (3-i), \forall q \in (1, 2)$ . La derivada de la FLC puede acotarse como  $\dot{V}_i \leq -C_3 (|\sigma_1|^{\frac{q+1}{2-q}} + \sum_{j=2}^i |\sigma_j|^{\frac{q+1}{\alpha_j}})$ . Del Lema A.4, se obtiene que  $(|\sigma_1|^{\frac{2}{2-q}} + \sum_{j=2}^i |\sigma_j|^{\frac{2}{\alpha_j}})^{\frac{q+1}{2}} \leq i^{\frac{q-1}{2}} (|\sigma_1|^{\frac{q+1}{2-q}} + \sum_{j=2}^i |\sigma_j|^{\frac{q+1}{\alpha_j}})$ . Esto muestra que  $\dot{V}_i \leq -C_3 (|\sigma_1|^{\frac{2}{2-q}} + \sum_{j=2}^i |\sigma_j|^{\frac{2}{\alpha_j}})^{\frac{q+1}{2}} = -\gamma V_i^{\frac{q+1}{2}}$ , que es la desigualdad (160).

*Paso i = n:* Por argumentos de inducción se obtiene (158). Esto concluye la prueba.

**Prueba de la Proposición 7.3.** Es inmediata de la desigualdad diferencial (160). Recordando que  $q+1 > 2, \forall q > 1$ , y usando el principio de comparación [46], para  $V_0 = V_\eta(x_\eta(0)), (x_0 = x_\eta(0))$ , la solución  $V_\eta(t)$  satisface  $V_\eta(t) \leq (V_0^{-(q-1)/2} - \frac{(q-1)}{2} \gamma t)^{-\frac{2}{q-1}}$ . Esta expresión permite estimar una cota del tiempo de convergencia. El tiempo  $T_1$  que le toma a cualquier trayectoria, iniciada con condición inicial

Véase el Apéndice A para consultar el Lema A.4.

$x_\eta(0)$ , en llegar al conjunto de nivel  $V_\eta = r$  ( $0 < r < V_\eta(x_0)$ ), satisface  $T_1(x_0, r) \leq \frac{2}{(q-1)\gamma} (r^{-\frac{q-1}{2}} - V_\eta^{-\frac{q-1}{2}}(x_0))$ . Como  $\lim_{x_0 \rightarrow \infty} T_1(x_0, r) = T_r$ , el tiempo de convergencia  $T_1(x_0, r)$  de toda trayectoria está acotado uniformemente por (171), es decir,  $T_1(x_0, r) \leq T_r$ .

**Prueba del Teorema 7.1.** Inmediata de la Proposición 7.1.

**Prueba del Teorema 7.2.** Es un caso particular del Teorema 7.6 cuando  $w_1 = \dots = w_\eta = 0$ .

**Prueba la Proposición 7.4 y del Teorema 7.6.** La demostración de estos resultados se hace en forma simultánea a través del MB. La dinámica del sistema reducido es

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_{i+1} + w_i(t, x), \quad \forall i = 1, \dots, \eta - 1, \\ \dot{x}_\eta &= v_\eta + w_\eta(t, x). \end{aligned} \quad (193)$$

Recuerde que  $v_\eta = -\varphi_{\eta, \eta} = n - 1$ . La ley de control auxiliar  $v_\eta$  se diseña para garantizar que el origen  $x = 0$  del sistema reducido es RGAE, bajo la hipótesis de que la perturbaciones  $w_i(t, x)$  cumplen con la Suposición 7.1. Enseguida se prueba que la retroalimentación de estados

$$v_i = -k_i \lceil \sigma_i \rceil^{\zeta_i}, \quad \zeta_i = \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} = \frac{(i-1)q + (2-i)}{(i-2)q + (3-i)}, \quad i = i, \dots, \eta, \quad (194)$$

estabiliza asintóticamente el origen del sistema (193) si  $q \in (1, 2)$ . Cuando  $q = 1$ , se recupera la retroalimentación de estados lineal y el origen es EE. La prueba se hace por inducción.

*Paso 1:* Se propone  $v_1 = -k_1 \lceil x_1 \rceil^{1/(2-q)}$ . El parámetro  $q \in (1, 2)$ , lo cual implica que  $1/(2-q)$  es mayor a uno. El sistema

$$\dot{x}_1 = v_1 + w_1 = -k_1 \lceil x_1 \rceil^{\frac{1}{2-q}} + w_1, \quad (195)$$

es AE. Tomando como FLC  $V_1 = 0.5|x_1|^2$ , la derivada c.r. al tiempo de  $V_1$  a lo largo de las trayectorias de (195) y bajo la Suposición 7.1, se obtiene

$$\dot{V}_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} (v_1 + w_1) \leq 2x_1 (-k_1 \lceil x_1 \rceil^{\frac{1}{2-q}} + \rho_1 |x_1|^{\frac{1}{2-q}}) \leq -\alpha_{11} |x_1|^{\frac{3-q}{2-q}},$$

con  $\alpha_{11} = k_1 - \rho_1$ .  $\dot{V}_1$  es n.d. si  $k_1 > \rho_1$  y puede ser rescrita como  $\dot{V}_1 = -\alpha_{11} V_1^{\frac{3-q}{2(2-q)}}$ . *Paso 2:* Se tiene el sistema de segundo orden

$$\dot{x}_1 = x_2 + w_1, \quad \dot{x}_2 = v_2 + w_2. \quad (196)$$

Defina una nueva variable de estado  $\sigma_2 = x_2 - v_1$ , que representa el error virtual entre  $v_1$  y  $x_2$ . En las coordenadas  $(x_1, \sigma_2)$ , el sistema (196) tiene la forma

$$\dot{x}_1 = v_1 + \sigma_2 + w_1, \quad \dot{\sigma}_2 = v_2 + w_2 - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \dot{x}_1. \quad (197)$$

La ley de control  $v_2$  se obtiene a través de la FLC  $V_2 = \frac{1}{2}|\sigma_2|^2 + \frac{1}{2}\delta_1 V_1^{\frac{1}{2-q}}$ ,  $\delta_1 = k_1^2$ . Recuerde que  $x_2 = v_1 + \sigma_2$ . Tomando la derivada c.r. al tiempo de  $V_2$  a largo de las trayectorias de (197) se llega a

$$\dot{V}_2 = \sigma_2 [v_2 - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} x_2] + \frac{\delta_1}{2(2-q)} V_1^{\frac{q-1}{2-q}} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} x_2.$$

Note que  $\frac{\partial V_1}{\partial x_1} x_2 = \dot{V}_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \sigma_2$ , con  $\dot{V}_1 = -2k_1 V_1^{(3-q)/2(2-q)}$  y  $\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = 2x_1$ . Además,  $\frac{\delta_1}{2(2-q)} V_1^{\frac{q-1}{2-q}} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} \sigma_2 - \sigma_2 (\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \dot{x}_1) = (\frac{\delta_1}{2-q} - \frac{k_1^2}{2-q}) \lceil x_1 \rceil^{\frac{q}{2-q}} \sigma_2 + \frac{k_1}{2-q} |x_1|^{\frac{q-1}{2-q}} |\sigma_2|^2 + \frac{k_1}{2-q} |x_1|^{\frac{q-1}{2-q}} \sigma_2 w_1$ . Bajo la Suposición 7.1,  $|w_1| \leq \rho_1 |x_1|^{\frac{1}{2-q}}$ . Aplicando la ley de control  $v_2 = -k_2 \lceil \sigma_2 \rceil^q$ , se obtiene

$$\dot{V}_2 \leq -(k_2 - \rho_2) |\sigma_2|^{q+1} - \frac{k_1^2}{2-q} \alpha_{11} V_1^{\frac{q-1}{2-q}} |x_1|^{\frac{3-q}{2-q}} + \frac{k_1}{2-q} |x_1|^{\frac{q-1}{2-q}} |\sigma_2|^2 + \frac{k_1}{2-q} \rho_1 |x_1|^{\frac{q}{2-q}} |\sigma_2|.$$

Observe que  $V_1^{\frac{q-1}{2-q}} |x_1|^{\frac{3-q}{2-q}} = V_1^{\frac{q+1}{2(2-q)}}$ . Este paso es un caso particular de la *Paso 2* de la prueba de la Proposición 5.1 cuando  $p = 1$ . De este hecho se concluye que la derivada de la FLCR es n.d. si se eligen las ganancias

$$k_1 > \rho_1, \quad k_2 > \frac{1}{2-q} \frac{2}{1+q} \left[ \left( \frac{q-1}{1+q} \frac{1}{\theta_{21} k_1 \alpha_{11}} \right)^{\frac{q-1}{2}} + \frac{\rho_1}{2} \left( \frac{q}{1+q} \frac{\rho_1}{\theta_{22} k_1 \alpha_{11}} \right)^{\frac{q}{2}} \right] k_1 + \rho_2.$$

donde las constantes  $\theta_{21}$  y  $\theta_{22}$  cumplen  $\theta_{21} + \theta_{22} = 1$ .

*Paso i - 1:* Defina las variables  $\sigma_1 = x_1$  y  $\sigma_i = x_i - v_{i-1}$ ,  $i = 2, \dots, \eta$ . En las coordenadas  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i)$ , el sistema (193) adquiere al forma

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_j &= v_j + w_j + \sigma_{j+1} - \frac{\partial v_{j-1}}{\partial \sigma_{j-1}} \dot{\sigma}_{j-1}, \quad \forall j = 1, \dots, i-1, \\ \dot{\sigma}_i &= v_i + w_i - \frac{\partial v_{i-1}}{\partial \sigma_{i-1}} \dot{\sigma}_{i-1}. \end{aligned} \tag{198}$$

Ahora, suponga que el controlador  $v_{i-1}$  estabiliza el sistema (198) de orden  $(i-1)$  y que la FLCR  $V_{i-1}$  lo garantiza, debido a que su derivada  $\dot{V}_{i-1}$  es n.d..

*Paso i:* Tomando al derivada c.r. al tiempo de la FLCR  $V_i$  (definida en (168)) a lo largo de las trayectorias del sistema (198), se obtiene

$$\dot{V}_i = \sigma_i [v_i + w_i - \frac{\partial v_{i-1}}{\partial \sigma_{i-1}} \dot{\sigma}_{i-1}] + \zeta_{i-1} \delta_{i-1} V_{i-1}^{\frac{q-1}{\alpha_{i-1}}} [\dot{V}_{i-1} + \frac{\partial V_{i-1}}{\partial \sigma_{i-1}} \sigma_i].$$

donde  $\frac{\partial V_{i-1}}{\partial \sigma_{i-1}} = \sigma_{i-1}$ . Haciendo el cálculo directo se deduce que  $\frac{\partial v_{i-1}}{\partial \sigma_{i-1}} \dot{\sigma}_{i-1} = -\zeta_{i-1} k_{i-1} |\sigma_{i-1}|^{\frac{q-1}{\alpha_{i-1}}} \dot{\sigma}_{i-1}$ , donde  $\dot{\sigma}_{i-1} = \Psi_{(i-1)n} + \sigma_i + \Psi_{(i-1)\rho}$ , con  $\Psi_{(i-1)n} = v_{i-1} - \frac{\partial v_{i-2}}{\partial \sigma_{i-2}} \dot{\sigma}_{i-2} |_{w_{i-2}=0}$  y  $\Psi_{(i-1)\rho} = w_{i-1} - \frac{\partial v_{i-2}}{\partial \sigma_{i-2}} \dot{\sigma}_{i-2} |_{v_{i-2}=0}$ . Bajo la Suposición 7.1, se tiene que  $\Psi_{(i-1)\rho} \leq \Delta_{(i-1)\rho}$ , donde la función  $\Delta_{(i-1)\rho} = \rho_{i-1} |\sigma_{i-1}|^{\zeta_{i-1}} - \frac{\partial v_{i-2}}{\partial \sigma_{i-2}} \dot{\sigma}_{i-2} |_{v_{i-2}=0}$ , se evalúa en  $w_{i-2} = \rho_{i-2} |\sigma_{i-2}|^{\zeta_{i-2}}$ . Tomando en cuenta todo lo anterior y aplicando la ley de control  $v_i$  dada en (194), se obtiene que

$$\dot{V}_i \leq -(k_i - \rho_i) |\sigma_i|^{\frac{\beta_i}{\alpha_i}} - \zeta_{i-1} \delta_{i-1} \mathcal{V}_{i-1} + \zeta_{i-1} k_{i-1} [|\sigma_i|^2 |\sigma_{i-1}|^{\frac{q-1}{\alpha_{i-1}}} + \sigma_i \Upsilon_{i-1}],$$

donde se ha definido  $\mathcal{V}_{i-1} = -V_{i-1}^{\frac{q-1}{\alpha_{i-1}}} \dot{V}_{i-1} \geq 0$ ,  $\Upsilon_{i-1} = |\sigma_{i-1}|^{\frac{q-1}{\alpha_{i-1}}} (\Psi_{(i-1)n} + \Delta_{(i-1)\rho}) + k_{i-1} V_{i-1}^{\frac{q-1}{\alpha_{i-1}}} \sigma_{i-1}$  y  $\beta_i = (2i-3)q + (5-2i)$ . Al ser  $V_i$  una FLCR, la derivada  $\dot{V}_i$  cumple con el Lema A.6. Las funciones que acotan a las perturbaciones no destruyen la homogeneidad del sistema en lazo cerrado, y de hecho, como las cotas son funciones homogéneas, existe  $k_i$  suficientemente grande tal que se logra que la derivada  $\dot{V}_i$  sea n.d..

Finalmente, para cualquier  $i$ , las funciones continuas  $V_i(x)$  y  $\dot{V}_i(x)$  son homogéneas de grados  $m_{V_i} = 2\alpha_i$  y  $m_{\dot{V}_i} = \beta_i$  c.r. a la dilatación (161). Con ayuda del Lema A.3, se concluye que la desigualdad (169) se cumple con  $\kappa_i = \min_{\{x: V_i(x)=1\}} \{-\dot{V}_i\}$ .

*Paso i = n:* Por argumentos de inducción se obtiene (168). Esto concluye la prueba.

**Prueba de la Proposición 7.5.** Con ayuda de la desigualdad (169) y del principio de comparación [46], se obtiene que para cualquier  $V_0 = V_\eta(x_0)$  ( $x_0 = x_\eta(0)$ ), la solución  $V_\eta(t)$  satisface  $V_\eta(t) \leq (V_0^{-\frac{q-1}{2\alpha_\eta}} - (\frac{q-1}{2\alpha_\eta}) \kappa_\eta t)^{-\frac{2\alpha_\eta}{q-1}}$ ,  $\forall q > 1$ . De esta expresión es posible estimar una cota del tiempo de convergencia. El tiempo  $T_1$  que requiere cualquier trayectoria iniciada en  $x_0$  en llegar al conjunto de nivel  $V_\eta = r$  ( $0 < r < V_\eta(x_0)$ ), está determinado por (170). Además, como  $\lim_{v_0 \rightarrow \infty} T_1(x_0, r) = T_r$ , el tiempo de convergencia  $T_1(x_0, r)$  está uniformemente acotado por (171), es decir,  $T_1(x_0, r) \leq T_r$ .

**Prueba del Teorema 7.3.** Defina  $V = 0.5\sigma_n^2$ . Para el sistema de orden arbitrario,  $\dot{V} = \sigma_n(v + w(t, x))$ . Considerando la ley de control (133) y  $w(t, x) \in \mathcal{W}_1$ , la derivada satisface  $\dot{V} \leq -(Q_0 - \rho_0) |\sigma_n| - (K_2 - \rho_{02}) |\sigma_n|^2 - (K_3 - \rho_{03}) |\sigma_n|^{q_v+1}$ . En términos de la función  $V$ , se tiene que  $\dot{V} \leq -\kappa_{01} V^{1/2} - \kappa_{02} V - \kappa_{03} V^{(q_v+1)/2}$ , donde  $\kappa_{01} =$

Para más detalles sobre el término  $\Delta_{(i-1)\rho}$  consulte el Apéndice E.

Véase el Apéndice A para conocer el Lema A.6.

Note que  $\kappa_i > 0$ , ya que  $-V_i(x)$  es p.d..

$\sqrt{2}(Q_0 - \rho_0)$ ,  $\kappa_{02} = 2(K_2 - \rho_{02})$ ,  $\kappa_{03} = 2^{(q_v+1)/2}(K_3 - \rho_{03})$ . Esto implica  $\dot{V} < 0$ , si  $Q_0 > \rho_0$ ,  $K_2 > \rho_{02}$ ,  $K_3 > \rho_{03}$ . Por lo tanto, las trayectorias llegan a  $\sigma_n = 0$  en tiempo finito.

Enseguida de muestra que existe una constante  $T_f > 0$ , tal que  $\forall t \geq T_f$ , las trayectorias  $x(t)$  nunca abandonan  $\sigma_n = 0$ . Defina  $\kappa_{eq} = \{\kappa_{01}, \kappa_{02}, \kappa_{03}\}$ , entonces  $\dot{V} \leq -\kappa_{eq}(V^{1/2} + V + V^{(q_v+1)/2})$ . Defina las desigualdades  $\dot{V} \leq -\kappa_{eq}V^{1/2} - \kappa_{eq}V$  y  $\dot{V} \leq -\kappa_{eq}V^{(q_v+1)/2}$ , el valor de  $V(t)$  está por debajo de la solución de ambas desigualdades. Utilizando el principio de comparación, [46], las soluciones de  $V(t)$  satisfacen  $V(t) \leq \min\{V_1, V_2\}$ , donde  $V_1 = \exp(-\frac{1}{2}\kappa_{eq}t)[V_0^{\frac{1}{2}} + 1 - \exp(\frac{1}{2}\kappa_{eq}t)]^2$ , y  $V_2 = [V_0^{-\frac{1}{2}(q_v-1)} + (q_v-1)\kappa_{eq}t/2]^{-\frac{2}{q_v-1}}$ , con  $V_0 = V(\sigma_n(x_0))$ . Para estimar una cota de tiempo de convergencia se siguen los pasos del algoritmo presentado en prueba de la Proposición 5.8 con  $r = \omega$ . Por lo tanto, el tiempo de convergencia cumple  $T(x_0) \leq T_1(\omega) + T_2(x_0, \omega)$ , donde  $T_1(\omega) = \frac{2}{\kappa_{eq}} \ln(\omega^{\frac{1}{2}} + 1)$  y  $T_2(x_0, \omega) = \frac{2}{(q_v-1)\kappa_{eq}} (\omega^{-\frac{1}{2}(q_v-1)} - V_0^{-\frac{1}{2}(q_v-1)})$ . Conforme a lo anterior, cualquier trayectoria alcanza la SD en un tiempo  $T(x_0)$  que está uniformemente acotado por la constante (177), es decir,  $T(x_0) \leq T_f$ .

**Prueba del Teorema 7.4.** Hay que mostrar que la SD se alcanza en tiempo finito y que el tiempo de convergencia tiene una constante de tiempo fijo. Para ello, se requiere el siguiente resultado.

**Proposición 7.6** Considere la función  $V_1(\zeta) = \zeta^T P \zeta$ , donde el vector  $\zeta = [\phi_1(\sigma_n) \quad \sigma_{n+1}]^T$  y  $P = P^T > 0$  es un matriz simétrica p.d., solución de la DML (182), y la función  $V_2(\sigma_n, \sigma_{n+1}) = \delta k_{2s} |\phi_1(\sigma_n)|^2 - [\phi_1(\sigma_n)]^{\frac{1}{q_v}} [\sigma_{n+1}]^{\frac{2q_v-1}{q_v}} + \delta |\sigma_{n+1}|^2$ , donde  $\delta$  es una constante positiva que satisface las desigualdades en (184) y  $q_v > 1$ . Entonces, la función  $W(\sigma_n, \sigma_{n+1}) = V_1(\zeta) + V_2(\sigma_n, \sigma_{n+1})$ , es una FL robusta para el subsistema  $(\sigma_n, \sigma_{n+1})$  de (181). Además, la derivada c.r. al tiempo de la función  $W$  a lo largo de las trayectorias del subsistema satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{W}(\sigma_n, \sigma_{n+1}) \leq -\kappa_{s1} W^{\frac{1}{2}}(\sigma_n, \sigma_{n+1}) - \kappa_{s2} W(\sigma_n, \sigma_{n+1}) - \kappa_{s3} W^{\frac{3q_v-1}{q_v}}(\sigma_n, \sigma_{n+1}), \quad (199)$$

donde  $\kappa_{s1}, \kappa_{s2}$  y  $\kappa_{s3}$  se definen en (186).

**Demostración 2** Primero se muestra que  $V_2$  es p.d. y su derivada es n.d.. Del Lema A.1, existen constantes  $\gamma_{00}$  y  $\gamma_{01}$  tal que,  $-\gamma_{00}^{2q_v} |\phi_1(\sigma_n)|^2 / 2q - (2q_v - 1) \gamma_{00}^{-\frac{2q_v}{2q_v-1}} |\sigma_{n+1}|^2 / 2q_v \leq -[\phi_1(\sigma_n)]^{\frac{1}{q_v}} [\sigma_{n+1}]^{\frac{2q_v-1}{q_v}} \leq \gamma_{01}^{2q_v} |\phi_1(\sigma_n)|^2 / 2q + (2q_v - 1) \gamma_{01}^{-\frac{2q_v}{2q_v-1}} |\sigma_{n+1}|^2 / 2q_v$ . Por lo tanto,  $\forall (\sigma_n, \sigma)$ , la función  $V_2$  puede acotarse como

$$\alpha_1(\gamma_{00}) |\phi_1(\sigma_n)|^2 + \alpha_2(\gamma_{00}) |\sigma_{n+1}|^2 \leq V_2(\sigma_n, \sigma_{n+1}) \leq \alpha_2(\gamma_{01}) |\phi_1(\sigma_n)|^2 + \alpha_4(\gamma_{01}) |\sigma_{n+1}|^2,$$

donde  $\alpha_1(\gamma_{00}) = (\delta k_2 - \gamma_{00}^{2q_v} / 2q_v)$ ,  $\alpha_2(\gamma_{00}) = (\delta - (2q_v - 1) \gamma_{00}^{-\frac{2q_v}{2q_v-1}} / 2q_v)$ ,  $\alpha_3(\gamma_{01}) = (\delta k_2 + \gamma_{01}^{2q_v} / 2q_v)$  and  $\alpha_4(\gamma_{01}) = (\delta + (2q_v - 1) \gamma_{01}^{-\frac{2q_v}{2q_v-1}} / 2q_v)$ . La función  $V_2(\sigma_n, \sigma_{n+1})$  es p.d. si y sólo si  $\alpha_1(\gamma_{00}) > 0$  y  $\alpha_2(\gamma_{00}) > 0$ . Lo cual es siempre posible si se satisface (184). Además,  $V_2$  puede acotarse como

$$C_1 \|\zeta\|_2^2 \leq V_2(\sigma, \sigma_{n+1}) \leq C_2 \|\zeta\|_2^2, \quad (200)$$

donde  $\|\zeta\|_2^2 = |\phi_1(\sigma_n)|^2 + |\sigma_{n+1}|^2$ ,  $C_1 = \delta k_{2s} - z_m^{2q_v-1} / 2q_v$  y  $C_2 = \delta k_{2s} + z_M^{2q_v-1} / 2q_v$  son constantes positivas,  $z_m = \gamma_{00}^{\frac{2q_v}{2q_v-1}}$  es la raíz real positiva de la ecuación  $(2q_v - 1) + 2q_v \delta (k_{2s} - 1) z_m = z_m^{2q_v}$ , y  $z_M = \gamma_{01}^{\frac{2q_v}{2q_v-1}}$  es la raíz real positiva de la ecuación

Para saber si  $V_2(\sigma_n, \sigma_{n+1})$  es p.d., se checa cuando  $\alpha_1(\gamma_{00}) > 0$  y  $\alpha_2(\gamma_{00}) > 0$  y se verifica cuando existe  $\gamma_{00}^3 > 0$ .

Las ecuaciones en  $z_m$  y  $z_M$  resultan de hacer  $\alpha_1(\gamma_{00}) = \alpha_2(\gamma_{00})$  y  $\alpha_3(\gamma_{01}) = \alpha_4(\gamma_{01})$ .

$(2q_v - 1) + 3\delta(1 - k_{2s})z_M = z_M^{2q_v}$ . Como la perturbación  $w_n(t, x) \in \mathcal{W}_2$ , la derivada  $\dot{V}_2$  satisface

$$\dot{V}_2 \leq -v_1(s) \{ 2\delta k_{2s} (k_{1s} - \rho_{1s}) |\phi_1(\sigma_n)|^{\frac{3q_v-1}{q_v}} - 2\rho_{2s} \delta |\phi_1(\sigma_n)|^{\frac{2q_v-1}{q_v}} |\sigma_{n+1}| - \frac{1}{q_v} \bar{k}_1 |\phi_1(\sigma_n)| |\sigma_{n+1}|^{\frac{2q_v-1}{q_v}} - \frac{2q_v-1}{q_v} \bar{k}_2 |\phi_1(\sigma_n)|^2 |\sigma_{n+1}|^{\frac{q_v-1}{q_v}} + \frac{1}{q_v} |\sigma_{n+1}|^{\frac{3q_v-1}{q_v}} \},$$

La función  $\phi'_1(s) = \mu_1 |\sigma_n|^{-\frac{1}{2}} / 2 + \mu_2 + q\mu_3 |\sigma_n|^{q-1}$ .

con  $v_1(\sigma_n) = |\phi_1(\sigma_n)|^{\frac{1-q_v}{q_v}} \phi'_1(\sigma_n)$ . Del Lema A.1, se obtienen las desigualdades

$$\begin{aligned} |\phi_1(\sigma_n)|^{\frac{2q_v-1}{3}} |\sigma_{n+1}| &\leq \frac{2q_v-1}{3q_v-1} \gamma_1^{\frac{3q_v-1}{2q_v-1}} |\phi_1(\sigma_n)|^{\frac{3q_v-1}{2q_v-1}} + \frac{q_v}{3q_v-1} \gamma_1^{-\frac{3q_v-1}{q_v}} |\sigma_{n+1}|^{\frac{3q_v-1}{q_v}}, \\ |\phi_1(\sigma_n)| |\sigma_{n+1}|^{\frac{2q_v-1}{q_v}} &\leq \frac{q_v}{3q_v-1} \gamma_2^{\frac{3q_v-1}{q_v}} |\phi_1(\sigma_n)|^{\frac{3q_v-1}{q_v}} + \frac{2q_v-1}{3q_v-1} \gamma_2^{-\frac{3q_v-1}{2q_v-1}} |\sigma_{n+1}|^{\frac{3q_v-1}{q_v}}, \\ |\phi_1(\sigma_n)|^2 |\sigma_{n+1}|^{\frac{q_v-1}{q_v}} &\leq \frac{2q_v}{3q_v-1} \gamma_3^{\frac{3q_v-1}{2q_v}} |\phi_1(\sigma_n)|^{\frac{3q_v-1}{2q_v}} + \frac{q_v-1}{3q_v-1} \gamma_3^{-\frac{3q_v-1}{q_v-1}} |\sigma_{n+1}|^{\frac{3q_v-1}{q_v}}, \end{aligned}$$

$\forall \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$ . Con ayuda de estas desigualdades y fijando  $\gamma_2 = (\theta_{2s} \frac{2q_v-1}{3q_v-1} \bar{k}_1)^{\frac{2q_v-1}{3q_v-1}}$  y  $\gamma_3 = (\theta_{3s} \frac{2q_v-1}{3q_v-1} (q_v - 1) \bar{k}_2)^{\frac{2q_v-1}{3q_v-1}}$ , se obtiene

$$\dot{V}_2(\sigma_n, \sigma_{n+1}) \leq -v_1(\sigma_n) (\psi_1 |\phi_1(\sigma_n)|^{\frac{3q_v-1}{q_v}} + \frac{1}{q_v} \psi_2 |\sigma_{n+1}|^{\frac{3q_v-1}{q_v}}),$$

Para mostrar que  $\dot{V}_2$  es n.d. se checa cuando  $\psi_1 > 0$  y  $\psi_2 > 0$ , y se verifica cuando existe  $\gamma_1^7 > 0$ , que se traduce en la desigualdad (184).

donde  $\psi_1 = 2(\gamma - \frac{2q_v-1}{3q_v-1} \rho_{2s} \delta \gamma_1^{\frac{3q_v-1}{2q_v-1}})$ ,  $\psi_2 = \Lambda - \frac{2q_v^2}{3q_v-1} \rho_{2s} \delta \gamma_1^{-\frac{3q_v-1}{q_v}}$ ,  $\gamma = \delta k_{2s} k_1 - n_1 \bar{k}_1^{\frac{3q_v-1}{q_v}} - n_2 \bar{k}_2^{\frac{3q_v-1}{2q_v}}$ ,  $\Lambda = 1 - \theta_2^{-1} - \theta_3^{-1}$ . El parámetro  $\gamma_1$  siempre existe si y sólo si cumple la desigualdad  $(\frac{3q_v-1}{2q_v-1} \frac{\gamma}{\rho_{2s} \delta})^{\frac{2q_v-1}{3q_v-1}} > \gamma_1 > (\frac{2q_v^2}{3q_v-1} \frac{\rho_{2s} \delta}{\Lambda})^{\frac{q_v}{3q_v-1}}$ . La función  $\dot{V}_2$  es n.d. si  $\psi_1, \psi_2 > 0$ , lo cual siempre es posible si las desigualdades (184) se cumplen. Además, la función  $v_1(\sigma_n) > 0$ , y tiene un mínimo con valor positivo,  $v_{\min} = \min_{\sigma_n \in \mathbb{R}} v_1(\sigma_n)$ , ya que  $\lim_{|\sigma_n| \rightarrow 0} v(\sigma_n) = \frac{1}{2} \mu_1^{\frac{1}{q_v}} / |\sigma_n|^{\frac{q_v-1}{q_v}} = \infty$ , y

$$\lim_{|\sigma_n| \rightarrow \infty} v_1(\sigma_n) = \frac{\frac{1}{2} \mu_1 |\sigma_n|^{-\frac{1}{2}} + \mu_2 + q\mu_3 |\sigma_n|^{q_v-1}}{(\mu_1 |\sigma_n|^{\frac{1}{2}} + \mu_2 |\sigma_n| + \mu_3 |\sigma_n|^{q_v})^{\frac{q_v-1}{q_v}}} = q_v \mu_3^{\frac{1}{q_v}}.$$

Lo anterior permite obtener

$$\dot{V}_2(\sigma_n, \sigma_{n+1}) \leq -v_{\min} C_3 (|\phi_1(\sigma_n)|^{\frac{3q_v-1}{q_v}} + |\sigma_{n+1}|^{\frac{3q_v-1}{q_v}}),$$

donde  $C_3 = [\Lambda - 2q_v^2 \rho_{2s} \delta \gamma_1^{-\frac{3q_v-1}{q_v}} / (3q_v - 1)] / q_v$  y  $y_m = \gamma_1^{\frac{3q_v-1}{q_v}}$  es la raíz real positiva de la ecuación  $2q_v \rho_{2s} \delta + (3q_v - 1)[2\gamma_1 - \Lambda / q_v] y_m = 2(2q_v - 1) \rho_{2s} \delta y_m^{\frac{3q_v-1}{2q_v-1}}$ . Del Lema A.4, se deduce que  $(1/2)^{\frac{q_v-1}{2(3q_v-1)}} (|\phi_1(\sigma_n)|^2 + |\sigma_{n+1}|^2)^{\frac{3q_v-1}{2q_v}} \leq |\phi_1(\sigma_n)|^{\frac{3q_v-1}{q_v}} + |\sigma_{n+1}|^{\frac{3q_v-1}{q_v}}$ . Finalmente, usando esta desigualdad junto con la desigualdad (200), se obtiene  $\dot{V}_2 \leq -(1/2)^{\frac{q_v-1}{2(3q_v-1)}} v_{\min} C_3 (\|\zeta\|_2^2)^{\frac{3q_v-1}{2q_v}}$ .

Véase el Apéndice A para conocer el Lema A.1.

Para más detalles consulte la Sección 6.6.

Ahora, hay que mostrar que  $V_1(\zeta)$  es n.d.. De un análisis similar al presentado en la demostración de la Proposición 6.1, y tomando en cuenta a (150), la derivada de la FL  $V_1(\zeta)$  satisface

$$\dot{V}_1 \leq \phi'_1 \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + R & PB \\ B^T P & -\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho} \end{bmatrix} \leq -\phi'_1 \epsilon \|\zeta\|_2^2.$$

La función  $V_1$  es continua pero no localmente Lipschitz. Se aplica el mismo argumento utilizado en la prueba del Teorema 6.3.

con  $\Theta$  y  $R$  como en (183). Si la DML (182) tiene solución,  $\dot{V}_1$  es n.d.. Como  $\lambda_{\min}\{P\} \|\zeta\|_2^2 \leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max}\{P\} \|\zeta\|_2^2$ , donde  $\|\zeta\|_2^2 = \phi_1^2(\sigma_n) + \sigma_{n+1}^2 = \mu_1^2 |\sigma_n| + 2\mu_1 \mu_2 |\sigma_n|^{3/2} + \mu_2^2 |\sigma_n|^2 + 2\mu_1 \mu_3 |\sigma_n|^{q_v+1/2} + 2\mu_2 \mu_3 |\sigma_n|^{q_v+1} + \mu_3^2 |\sigma_n|^{2q_v} + \sigma_{n+1}^2$  es la norma Euclídea de  $\zeta$ , se puede verificar que siempre se cumple la desigualdad  $(\mu_1 |s|^{1/2})^{-1} \geq (\|\zeta\|_2)^{-1}$ . Por lo tanto, inmediatamente se tiene que  $\dot{V}_1 \leq -(\mu_1^2/2) \epsilon \|\zeta\|_2 - \mu_2 \epsilon \|\zeta\|_2^2 - q_v \mu_3 \epsilon |\sigma_n|^{q_v-1} \|\zeta\|_2^2$ .

La negatividad definida de  $\dot{V}_1(\zeta)$  y  $\dot{V}_2(\sigma_n, \sigma_{n+1})$  implica que  $\dot{W}(\sigma_n, \sigma_{n+1}) = \dot{V}_1 + \dot{V}_2$ , es decir,

$$\dot{W}(\sigma_n, \sigma) \leq -\left(\frac{\mu_1^2}{2}\right)\epsilon \|\zeta\|_2^{\frac{1}{2}} - \mu_2\epsilon \|\zeta\|_2^2 - q_v\mu_3\epsilon|\sigma_n|^{q_v-1} \|\zeta\|_2^2 - (1/2)^{\frac{q_v-1}{2(3q_v-1)}} v_{\min} C_3 (\|\zeta\|_2^2)^{\frac{3q_v-1}{2q_v}}.$$

Cada FL satisface  $\lambda_{\min}\{P\}\|\zeta\|_2^2 \leq V_1(\zeta) \leq \lambda_{\max}\{P\}\|\zeta\|_2^2$  y  $C_1\|\zeta\|_2^2 \leq V_2(\sigma_n, \sigma_{n+1}) \leq C_2\|\zeta\|_2^2$ . Entonces, la función  $W(\sigma_n, \sigma_{n+1})$  puede acotarse por arriba como  $W(\sigma_n, \sigma_{n+1}) \leq (\lambda_{\max}\{P\} + C_2)\|\zeta\|_2^2$ , lo cual permite obtener la expresión (199).

Con la Proposición 6.1 se prueba inmediatamente el Teorema. De la desigualdad (199) se concluye que las trayectorias del sistema convergen en tiempo finito a  $\sigma_n = 0$ . Para encontrar la constante de tiempo fijo, observe que  $W(t)$  satisface las desigualdades diferenciales  $\dot{W}(\sigma_n, \sigma_{n+1}) \leq -\kappa_{s1}W^{\frac{1}{2}}(\sigma_n, \sigma_{n+1}) - \kappa_{s2}W(\sigma_n, \sigma_{n+1})$  y  $\dot{W}(\sigma_n, \sigma_{n+1}) \leq -\kappa_{s3}W^{\frac{2}{q_v}}(\sigma_n, \sigma_{n+1})$ , y el valor de  $W(t)$  debe estar por debajo de la solución de cualquiera de las dos desigualdades. En este caso, del principio de comparación [46], se tiene que con  $W_0 = W(\sigma_n(x_0), \sigma_{n+1}(x_0))$ , la solución  $W(t)$  satisface  $W(t) \leq \min\{W_1, W_2\}$ , donde  $W_1 = \exp(-\frac{1}{2}\kappa_{s2}t)[W_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\kappa_{s1}}{\kappa_{s2}}[\exp(\frac{1}{2}\kappa_{s2}t) - 1]]^2$ , y  $W_2 = (W_0^{-\frac{q_v-1}{2q_v}} + (q_v - 1)\kappa_{s3}t/2q_v)^{-\frac{2q_v}{q_v-1}}$ . La cota del tiempo de convergencia se obtiene aplicando el procedimiento propuesto en la prueba de la Proposición 5.8. Entonces, el tiempo de convergencia cumple  $T(x_0) \leq T_1(\omega_s) + T_2(x_0, \omega_s)$ , donde  $T_2(x_0, \omega_s) = \frac{2q_v}{(q_v-1)\kappa_{s3}}(\omega_s^{-\frac{q_v-1}{2q_v}} - W_0^{-\frac{q_v-1}{2q_v}})$  y  $T_1(\omega_s) = \frac{2}{\kappa_2} \ln([\kappa_{s2}/\kappa_{s1}]\omega_s^{\frac{1}{2}} + 1)$ , y además,  $T(x_0) \leq T_s$ , siendo  $T_s$  una constante. La mejor estimación de  $T_s$  se obtiene al elegir  $\omega_s$  como la raíz real positiva de (187).

**Prueba del Teorema 7.5 y del Teorema 7.7.** Como el Teorema 7.5 es un caso particular del Teorema 7.7, solamente se prueba este último. La dinámica del sistema queda gobernada por la EDO (155). Usando las coordenadas  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  y la ley de control (153), el sistema (151) queda descrito por

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_j &= v_j + w_j + \sigma_{j+1} - \frac{\partial v_{j-1}}{\partial \sigma_{j-1}} \dot{\sigma}_{j-1}, \quad \forall j = 1, \dots, n-1, \\ \dot{\sigma}_{n-1} &= v_{n-1} + w_{n-1} - \frac{\partial v_{n-1}}{\partial \sigma_{n-1}} \dot{\sigma}_{n-1} + \sigma_n, \\ \dot{\sigma}_n &= v + w_n(t, x), \end{aligned} \quad (201)$$

Considere que la ley del control  $v$  está dada por (133) y que la perturbación acoplada  $w_n(t, x) \in \mathcal{W}_1$ , es decir, cuando  $v = -Q_0[\sigma_n]^0 - K_2\sigma_n - K_3[\sigma_n]^{q_v}$ ,  $q_v = \zeta_n > 1$ . Para este caso se propone la FL

$$V_{LC} = \delta_\eta V_\eta^{\zeta_\eta} + (0.5)c_n|\sigma_n|^2, \quad \delta_\eta = k_\eta^2,$$

donde  $V_\eta$  se define en la Proposición 7.4, con  $\eta = n-1$ , y  $c_n > 0$ . Siguiendo el mismo procedimiento como en la Prueba del Teorema 7.6, la derivada de  $V_{LC}$  a lo largo de las trayectorias de (155), con la ley de control (133), satisface

$$\begin{aligned} \dot{V}_{LC} &= c_n\sigma_n[v + w_n] + \zeta_\eta\delta_\eta V_\eta^{\frac{q-1}{\alpha_\eta}} [\dot{V}_\eta + \sigma_n\sigma_\eta] \\ &\leq -\zeta_\eta\delta_\eta V_\eta + \zeta_\eta\delta_\eta V_\eta^{\frac{q-1}{\alpha_\eta}} \sigma_n\sigma_\eta - c_n(K_3 - \rho_{03})|\sigma_n|^{\frac{\beta_n}{\alpha_n}}. \end{aligned}$$

Del Lema A.3, se deriva la desigualdad  $\sigma_\eta V_\eta^{\frac{q-1}{\alpha_\eta}} \sigma_n \leq \lambda_{\eta 2}|\sigma_n|V_\eta^{\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_n}}$ , donde  $\lambda_{\eta 2} = \max_{\{x: V_\eta=1\}}\{|\sigma_\eta V_\eta^{\frac{q-1}{\alpha_\eta}}|\}$ . Aplicando a esta desigualdad el Lema A.1, se llega a

$$\dot{V}_{LC} \leq -\zeta_\eta\delta_\eta(1 - \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_n}\lambda_{\eta 2}\gamma_{\eta 2}^{\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_n}})V_\eta - [c_n(K_3 - \rho_{03}) - \zeta_\eta\delta_\eta \frac{\alpha_n}{\beta_n}\lambda_{\eta 2}\gamma_{\eta 2}^{\frac{\beta_n}{\alpha_n}}]|\sigma_n|^{\frac{\beta_n}{\alpha_n}}.$$

Elijiendo  $\gamma_{\eta 2} = [\lambda_{\eta 2}\theta_{\eta 2} \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_n}]^{\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_n}}$  y  $\theta_{\eta 2} \in (0, 1)$ , la función  $\dot{V}_n$  es n.d. para ganancias  $k_1, \dots, k_{n-1}$ , y  $c_n$  suficientemente grandes. Además, la función  $\dot{V}_{LC}$  satisface

$\dot{V}_{LC} \leq -\kappa_n V_{LC}^{\frac{\beta_n}{2\alpha_n}}(x)$ . Por lo tanto, con ayuda de la Proposición 7.5, se concluye que existe una constante de tiempo fijo.

Ahora, considere que la ley de control  $v$  está dada por (180) y que las perturbaciones acopladas  $w_n(t, x) \in \mathcal{W}_2$ . Se propone la FL

$$V_{LC} = \delta_\eta V_\eta^{\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_\eta}} + c_n W(\sigma_n, \sigma_{n+1}),$$

donde  $V_\eta$  queda definida por la Proposición 7.4,  $W$  por la Proposición 7.6, y  $c_n > 0$  es una constante que se elige apropiadamente. La derivada de  $V_{LC}$  a lo largo de las trayectorias de (201) con la ley de control (180) es

$$\dot{V}_{LC} \leq -c_n \dot{W} + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_\eta} \delta_\eta [V_\eta^{\frac{2(q-1)}{\alpha_\eta}} \sigma_\eta \sigma_n - \mathcal{V}_\eta], \quad \mathcal{V}_\eta = -V_\eta^{\frac{2(q-1)}{\alpha_\eta}} \dot{V}_\eta \geq 0,$$

donde  $3q_v - 1 = \iota_n / \alpha_n$ , y  $\iota_n = (2n - 1)q + (3 - 2n)$ . Del Lema A.3, se deriva la desigualdad  $V_\eta^{\frac{2(q-1)}{\alpha_\eta}} \sigma_\eta \leq \lambda_{\eta 2} \mathcal{V}_\eta^{\frac{(n+1)q-n}{\iota_n}}$ ,  $\lambda_{\eta 2} = \max_{\{x: \mathcal{V}_\eta(x)=1\}} |V_\eta^{\frac{2(q-1)}{\alpha_\eta}} \sigma_\eta|$ . Aplicando el Lema A.1 a esta desigualdad, se obtiene que  $|\sigma_n| \mathcal{V}_\eta^{\frac{(n+1)q-n}{\iota_n}} \leq \frac{(n+1)q-n}{\iota_n} \gamma_{\eta 2}^{-\frac{\iota_n}{(n+1)q-n}} \mathcal{V}_\eta + \frac{\alpha_n}{\iota_n} \gamma_{\eta 2}^{\frac{\iota_n}{\alpha_n}} |\sigma_n|^{\frac{\iota_n}{\alpha_n}}$ . De esta desigualdad, y del hecho de que  $\dot{W} \leq -q_v \mu_3 \epsilon |\sigma_n|^{q_v-1} \|\zeta\|_2^2 + \dot{V}_2(\sigma_n, \sigma_{n+1})$ , se llega a

$$\dot{V}_{LC} \leq -c_n q_v \mu_3 \epsilon |\sigma_n|^{q_v-1} \|\zeta\|_2^2 + c_n \dot{V}_2(\sigma_n, \sigma_{n+1}) - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_\eta} \delta_\eta b_{n\eta} \mathcal{V}_\eta + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_\eta} \delta_\eta \frac{\alpha_n}{\iota_n} \gamma_{\eta 2}^{\frac{\iota_n}{\alpha_n}} |\sigma_n|^{\frac{\iota_n}{\alpha_n}},$$

donde  $b_{n\eta} = 1 - \theta_{\eta 1}^{-1}$ , que se obtuvo fijando  $\gamma_{\eta 2} = \left(\frac{(n+1)q-n}{\iota_n} \theta_{\eta 1}\right)^{\frac{(n+1)q-n}{\iota_n}}$ . Como se cumple que  $\|\zeta\|_2^2 \geq \mu_3^2 |\sigma_n|^{2q_v}$ , entonces,

$$\dot{V}_{LC} \leq -b_{nn} |\sigma_n|^{\frac{\iota_n}{\alpha_n}} + c_n \dot{V}_2(\sigma_n, \sigma_{n+1}) - \alpha_\eta \delta_\eta b_{n\eta} \mathcal{V}_\eta,$$

donde  $b_{nn} = c_n q_v \mu_3^3 \epsilon - \alpha_\eta \delta_\eta \frac{\alpha_n}{\iota_n} \gamma_{\eta 2}^{\frac{\iota_n}{\alpha_n}}$ . La función  $\dot{V}_{LC}$  es n.d. si  $b_{nn} > 0$ , es decir, eligiendo  $c_n$  suficientemente grande. La parte derecha de la desigualdad anterior es homogénea de grado  $m_{V_n} = \iota_n$  c.r. a la dilatación (161) y  $V_n$  es homogénea de grado  $m_{V_n} = 2\alpha_{n+1}$ . Por lo tanto, se satisface  $\dot{V}_n \leq -\kappa_n V_n^{\frac{\alpha_n}{2\alpha_{n+1}}}(x)$ . Como  $\frac{\iota_n}{2\alpha_{n+1}} > 1$ ,  $\forall q \in (1, 2)$ , se concluye que existe una constante de tiempo fijo.



*“¿Qué es lo que hace hombre al hombre, sus orígenes,  
la forma en la que llega al mundo?  
Yo creo que no, son las decisiones que toma,  
no es como empieza algo sino como decide acabarlo.”*

— Frase de la película Hellboy

El enfoque con FL es una de las herramientas más poderosas y eficientes utilizadas para analizar el comportamiento dinámico de los sistemas no lineales. Además, dicho enfoque permite realizar el diseño de controladores (y observadores).

Se ha mostrado que el diseño de un CMDOS puede hacerse a través de la construcción explícita de una FLC. La construcción de la FLC involucra a la técnica de desingularización de funciones y al MB. De la integración de ambas resulta un método que permite diseñar tanto un CMDOS homogéneo como uno no homogéneo. El MB no requiere de las propiedades de homogeneidad para su aplicación; sin embargo, contar con dicha propiedad hace posible diseñar leyes de control que poseen una estructura anidada muy simple y caracterizar las propiedades de estabilidad que posee el sistema en lazo cerrado.

El desarrollo mostrado en este trabajo permite resolver el problema de construir un FL para un sistema retroalimentado con un CMDOS de forma sencilla mediante una modificación del MB, técnica ampliamente conocida en control no lineal. Esto conecta a la teoría de MDOS con los métodos clásicos empleados en la teoría de sistemas no lineales. Además, permite hacer ciertas extensiones (como algoritmos de ganancia variable) y estudiar otra clase de propiedades que no son posibles de analizar con otros enfoques. Propiedades de estabilidad entrada-estados y de pequeña ganancia en un sistema, no revisadas en este trabajo, son usualmente mostradas construyendo una FL. Estas y otras propiedades ahora podrán ser estudiadas para sistemas retroalimentados con un CMDOS.

Falta por explorar que tan flexible es la metodología propuesta y averiguar que tanto se puede extender su aplicación a otra clase de sistemas. Por ejemplo, la estabilidad de los diferenciadores propuestos en [56] no se estudia mediante una FL. Contar con una FL permitiría analizar otra clase de propiedades que pudieran tener estos algoritmos, más allá de la conocida convergencia en tiempo finito que poseen.



Parte III

APÉNDICES



## LEMAS

### A.1. LEMAS

Los siguientes lemas son ampliamente utilizados en el análisis del presente trabajo.

**Lema A.1** [65] Para cada número real  $p > 1$ ,  $q > 1$ , y  $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ , con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , la siguiente desigualdad se satisface:  $ab \leq c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q}$ .

**Lema A.2** Para cualquier  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , y  $p, q \in \mathbb{R}_+$ , tal que  $0 < p \leq q$ , se cumple  $|[x_2]^p + [x_1]^p|^{1/p} \leq 2^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} |[x_2]^q + [x_1]^q|^{1/q}$ . Además, la desigualdad se convierte en igualdad si y solo si  $p = q$  ó  $x_1 = x_2$ .

**Demostración 3** Los casos  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  ó  $x_1 = x_2 = 0$  son evidentes. Por lo que, la desigualdad se prueba para  $x_1 \neq 0$  y  $x_2 \neq 0$ . Introduciendo un cambio de variable  $z_1 = [x_1]^p$  y  $z_2 = [x_2]^p$ , la desigualdad es equivalente a

$$|s + 1|^r \leq 2^{r-1} |1 + [s]^r|, \quad r = q/p \geq 1. \quad (202)$$

donde  $s = z_1/z_2$ ,  $z \in \mathbb{R}$  y válida  $\forall z_2 \neq 0$  (ó  $x_2 \neq 0$ ). Defina la función  $f(s) = |s + 1|^r / |1 + [s]^r|$ , el objetivo es hallar el máximo de esta función. Note que  $\lim_{s \rightarrow 0} f(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 1$ . Existe un máximo, o mínimo, si  $|s|^{r-1} = 1$ , es decir, en los puntos  $s = \pm 1$ . Como  $f(s)$  no está definida en  $s = -1$ , con la regla de L'Hopital se concluye que  $\lim_{s \rightarrow -1} f(s) = 0$ . Para  $s = 1$ , se obtiene  $f(s) = 2^{r-1}$ . Por lo tanto,

$$0 \leq \frac{|s+1|^r}{|1+[s]^r|} \leq 2^{r-1}, \quad r = q/p \geq 1.$$

Lo que prueba la desigualdad (202). Cuando  $x_1 = x_2$ , (202) se reduce a  $2^r = 2^r$ . Finalmente, para  $p = q$ , se tiene  $|s + 1| \leq |1 + [s]|$ , por lo tanto  $|s + 1| = |1 + s|$ , ya que  $[s] = s$ .

**Lema A.3** [16]. Suponga que  $V_1$  y  $V_2$  son funciones continuas de variable real en  $\mathbb{R}^n$ , homogéneas c.r. al campo vectorial  $\nu$  con grados de homogeneidad  $l_1 > 0$  y  $l_2 > 0$ , respectivamente, y  $V_1$  es p.d.. Entonces, para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , se cumple

$$[\min_{z: V_1(z)=1} V_2(z)][V_1(x)]^{\frac{l_2}{l_1}} \leq V_2(x) \leq [\max_{z: V_1(z)=1} V_2(z)][V_1(x)]^{\frac{l_2}{l_1}}.$$

**Lema A.4** [10] Sean  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  y sea  $p, q \in [1, \infty)$ , donde  $p \leq q$ . Entonces,  $\sum_{i=1}^n x_i^q \leq (\sum_{i=1}^n x_i^p)^{q/p} \leq n^{q/p-1} \sum_{i=1}^n x_i^q$ .

**Lema A.5** [2] Sean  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\zeta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  dos funciones homogéneas en el bi-límite con los mismos pesos  $r_0$  y  $r_\infty$ , grados  $d_{\phi,0}$ ,  $d_{\phi,\infty}$  y  $d_{\zeta,0}$ ,  $d_{\zeta,\infty}$  y funciones de aproximación  $\eta_0$ ,  $\phi_\infty$  y  $\zeta_0$ ,  $\zeta_\infty$ . Si los grados satisfacen  $d_{\phi,0} \geq d_{\zeta,0}$ , y  $d_{\phi,\infty} \leq d_{\zeta,\infty}$  y las funciones  $\zeta$ ,  $\zeta_0$ , y  $\zeta_\infty$  son positivas definidas, entonces existe un  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  que satisface

$$\phi(x) \leq \lambda \zeta(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

**Lema A.6** [2] Sea  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos funciones homogéneas en el bi-límite, con vector de pesos  $r_0$  y  $r_\infty$ , grados  $m_0$  y  $m_\infty$ , y funciones de aproximación,  $\eta_0$ ,  $\eta_\infty$ , y  $\gamma_0$ ,  $\gamma_\infty$  tal que se cumple:

- (i)  $\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \gamma(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \eta(x) < 0\}$ ,
- (ii)  $\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \gamma_0(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \eta_0(x) < 0\}$ ,
- (iii)  $\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \gamma_\infty(x) = 0\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \eta_\infty(x) < 0\}$ ,

Entonces, existe  $\lambda^* \in \mathbb{R}_+$  tal que, para toda  $\lambda \geq \lambda^*$  y para toda  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,

$$\text{(I)} \quad n(x) - \lambda \gamma(x) < 0, \quad \text{(II)} \quad n_0(x) - \lambda \gamma_0(x) < 0, \quad \text{(III)} \quad n_\infty(x) - \lambda \gamma_\infty(x) < 0.$$

En Qian and Lin [79] se encuentra un resultado particular del Lema A.2.

El siguiente resultado muestra como se construye una FLC.

**Lema A.7** [78] *Considere el siguiente sistema en cascada*

$$\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = u. \quad (203)$$

Si existe una función  $C^1$ , propia y positiva  $V_1$ , y una función  $u_1$  de clase  $C^0$ , tal que:

- Posiblemente después de un cambio  $C^1$  de coordenadas- $z$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$  y  $\forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-2}$ , los números reales  $x_i$ , donde  $\frac{\partial u_1}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{n-1})$  no está definida, son aislados en  $\mathbb{R}$ ;
- existe una función  $C^0$  escalar  $\phi(y, x)$  tal que  $\phi(y, x) = 0 \Leftrightarrow y = u_1(x)$ ,  $\Phi(y, x)$  es  $C^1$  en  $\mathbb{R}^n$  y,  $\forall x \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\Phi \rightarrow +\infty$  si  $|y| \rightarrow +\infty$ , donde  $\Phi$  denota la antiderivada  $\Phi(y, x) = \int_0^y \phi(s, x) ds$ ;
- para todo  $x$  no igual a cero, se tiene que  $L_{k(u_1(x), z)} V_1(x) < 0$ .

Entonces

$$V(y, x) = \Phi(y, x) - \Phi(u_1(x), x) + \delta V_1^\alpha(x)$$

es una FLC para el sistema (203) para todo  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  tal que,  $V_1^\alpha$  es una función  $C^1$ ,  $\forall \delta \in \mathbb{R}_+$ .

El diseño de la FLC se reduce a encontrar una Fdes apropiada  $\phi$ .

**Lema A.8** *Para cualquier número real  $q \in (0, 2)$  y  $\mu, \eta, \gamma_1 \in \mathbb{R}_+$ , la siguiente desigualdad se satisface:  $|\sigma_1|^{\frac{2+q}{2}} \leq \lambda_u(\gamma_0 + \gamma_1|x|^{\frac{q}{2-q}})|\sigma_1|$ , donde  $\sigma_1 = \mu x + \eta[x]^{\frac{2}{2-q}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_u = \frac{(\mu+\eta)^{\frac{q}{2}}}{\gamma_0+\gamma_1}$ , y  $\gamma_0 = \frac{q\mu}{(2-q)\mu+2\eta}\gamma_1$ .*

**Demostración 4** *Defina la función  $f(x) = |\mu x + \eta[x]^{\frac{2}{2-q}}|^{q/2}/(\gamma_0 + \gamma_1|x_1|^{\frac{q}{2-q}})$ , el objetivo es hallar el máximo de esta función. Note que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \eta^{q/2}/\gamma_1$ . Existe un máximo o mínimo si  $|x|^{\frac{q}{2-q}} = \frac{(2-q)\gamma_0\mu}{(q\gamma_1\mu-2\gamma_0\eta)}$ . Para simplificar se fija  $\gamma_0 = \frac{q\mu}{(2-q)\mu+2\eta}$ , para que  $|x|^{\frac{q}{2-q}} = 1$ , y el máximo sea  $\lambda_u = \frac{(\mu+\eta)^{\frac{q}{2}}}{\gamma_0+\gamma_1}$ . Por lo tanto,*

$$0 \leq |\mu x + \eta[x]^{\frac{2}{2-q}}|^{q/2}/(\gamma_0 + \gamma_1|x_1|^{\frac{q}{2-q}}) \leq \lambda_u, \quad \forall q \geq (0, 2).$$

**A.2. OPERADOR**  $[z]^m = |z|^m \text{sign}(z)$ .

El operador está bien definido en  $z = 0$ , ya que  $|0|^m \text{sign}(0) = 0 \cdot \text{sign}(0) = 0$ , lo cual implica que la función es continua en  $z = 0$ ,  $\forall m > 0$ .

Este operador generaliza a las funciones impares en el caso de una variable. Por ejemplo,

(I) en el caso en el parámetro  $m$  es un número entero impar,  $[x]^1 = x$ ,  $[x]^3 = x^3$ ;

(II) si  $m$  es un número entero par, se cumple,  $[x]^2 = |x|x$ ,  $[x]^4 = |x|^3x$ , y es evidente que  $x^2 \neq [x]^2$ .

El operador cumple las siguientes propiedades

$$(C1) \quad \frac{d}{dx} [x]^m = m|x|^{m-1} \text{ y } \frac{d}{dx} |x|^m = m|x|^{m-1} \text{sign}(x) = m[x]^m.$$

(C2) con  $m = 0$ , se obtiene  $[z]^0 = \text{sign}(z)$ , que define a la función signo.

$$(C3) \quad |z|^m \cdot [z]^n = [z]^{m+n}, \text{ para toda } m, n \geq 0 \text{ y } z \in \mathbb{R}.$$

$$(C4) \quad [z]^m \cdot [z]^n = |z|^{m+n}, \text{ para toda } m, n \geq 0 \text{ y } z \in \mathbb{R}.$$

**B.1. CÁLCULOS EXPLÍCITOS: TEOREMA 4.13.**

**B.1.0.1. Sistema homogéneo de tercer orden**

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1(x, t)$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2(x, t)$ ,  $\dot{x}_3 = v_3 + w_3(x, t)$ .

Variables de estado:  $s_3 = x_3 + k_2[\sigma_2]^{2-p}$ ,  $\sigma_2 = [x_2]^{2-p} + k_1^{2-p}x_1$ .

Fdes:  $s_{3d} = [x_3]^{\frac{3-2p}{p}} + k_2^{\frac{3-2p}{p}}[\sigma_2]^{\frac{3-2p}{2-p}}$ ,  $\sigma_3 = [x_3]^{\frac{2-p}{p}} + k_2^{\frac{2-p}{p}}\sigma_2$ .

FLC:  $V_3 = \frac{p}{3-p}|x_3|^{\frac{3-p}{p}} + k_2^{\frac{3-2p}{p}}[\sigma_2]^{\frac{3-2p}{2-p}}x_3 + \frac{3-2p}{3-p}k_2^{\frac{3-p}{p}}|\sigma_2|^{\frac{3-p}{2-p}} + \delta_2V_2$ ,  $\delta_2 = k_2^{\frac{3-p}{p}}$ .

Derivada c.r. al tiempo de  $V_3$  a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\dot{V}_3 = ([x_3]^{\frac{3-2p}{p}} + k_2^{\frac{3-2p}{p}}[\sigma_2]^{\frac{3-2p}{2-p}})\dot{x}_3 + \frac{3-2p}{2-p}k_2^{\frac{3-2p}{p}}s_3|\sigma_2|^{\frac{1-p}{2-p}}\dot{\sigma}_2 + \delta_2(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial V_2}{\partial x_i}\dot{x}_i),$$

$$\dot{V}_3 = s_{3d}(v_3 + w_3) + \frac{3-2p}{2-p}k_2^{\frac{3-2p}{p}}s_3|\sigma_2|^{\frac{1-p}{2-p}}\dot{\sigma}_2 + \delta_2\dot{V}_2 + \delta_2\frac{\partial V_2}{\partial x_2}s_3,$$

ya que  $\sum_{i=1}^2 \frac{\partial V_2}{\partial x_i}\dot{x}_i = \frac{\partial V_2}{\partial x_1}(v_1 + s_2 + w_1) + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}(v_2 + s_3 + w_2) = \dot{V}_2 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}s_3$ , donde  $\dot{V}_2 < 0$  y  $\frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \sigma_2$ . Además,  $\dot{\sigma}_2 = \frac{2-p}{1} |x_2|^{1-p}(x_3 + w_2) + k_1^{2-p}(x_2 + w_1)$ . Como  $x_3 = s_3 - k_2[\sigma_2]^{2-p}$ , entonces  $\dot{\sigma}_2 \leq \frac{2-p}{1}|x_2|^{1-p}s_3 + \Psi_{2n} + \Delta_{2\rho}$ ,

$$\Psi_{2n} = -\frac{2-p}{1}k_2|x_2|^{1-p}[\sigma_2]^{\frac{p}{2-p}} + k_1^{2-p}x_2,$$

$$\Delta_{2\rho} = \frac{2-p}{1}\rho_2|x_2|^{1-p}|\sigma_2|^{\frac{p}{2-p}} + k_1^{2-p}\rho_1|x_1|^{\frac{1}{2-p}}.$$

Entrada de Control:  $v_3 = -k_3[\sigma_3]^{\frac{2p-1}{2-p}}$ ,  $p \in [1/2, 1)$ ,  $|w_3| \leq \rho_3|\sigma_3|^{\frac{2p-1}{2-p}}$ .

Después de algunas simplificaciones

$$\dot{V}_3 \leq -(k_3 - \rho_3)|s_{3d}||\sigma_3|^{\frac{2p-1}{2-p}} - \delta_2V_2 + \frac{3-2p}{1}k_2^{\frac{3-2p}{p}}|s_3|^2|\sigma_2|^{\frac{1-p}{2-p}}|x_2|^{1-p} + k_2^{\frac{3-2p}{p}}s_3\Upsilon_2,$$

donde  $V_2 = -\dot{V}_2 \geq 0$ , y  $\Upsilon_2 = \frac{3-2p}{2-p}|\sigma_2|^{\frac{1-p}{2-p}}[\Psi_{2n} + \Delta_{2\rho}] + k_2s_{2d}$ . Del Lema A.6, se concluye que  $\dot{V}_3$  es n.d. si la ganancia  $k_3$  se elige suficientemente grande. Además, por el Lema A.3,  $\dot{V}_3 \leq -\kappa_3V_3^{\frac{2}{3-2p}}$ , con  $\kappa_3 = \min_{\{x:V_3(x)=1\}}\{-\dot{V}_3\}$ .

Por homogeneidad:  $s_{3d}(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{3-2p}s_{3d}(x)$ ,  $v_3(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{2p-1}v_3(x)$ ,  $V_3(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{3-p}V_3(x)$ ,  $\dot{V}_3(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^2\dot{V}_3(x)$ , con  $\Delta_\epsilon^r x = (\epsilon^{2-p}x_1, \epsilon^1x_2, \epsilon^px_3)$ .

**B.1.0.2. Sistema homogéneo de cuarto orden**

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2$ ,  $\dot{x}_3 = x_4 + w_3$ ,  $\dot{x}_4 = v_4 + w_4$ .

Variables de estado:  $s_4 = x_4 + k_3[\sigma_3]^{\frac{2p-1}{2-p}}$ ,  $\sigma_3 = [x_3]^{\frac{2-p}{p}} + k_2^{\frac{2-p}{p}}\sigma_2$ .

Fdes:  $s_{4d} = [x_4]^{\frac{4-3p}{2p-1}} + k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}}[\sigma_3]^{\frac{4-3p}{2-p}}$ ,  $\sigma_4 = [x_4]^{\frac{2-p}{2p-1}} + k_3^{\frac{2-p}{2p-1}}\sigma_3$ .

FLC:  $V_4 = \frac{2p-1}{3-p}|x_4|^{\frac{3-p}{2p-1}} + k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}}[\sigma_3]^{\frac{4-3p}{2-p}}x_4 + \frac{4-3p}{3-p}k_3^{\frac{3-p}{2p-1}}|\sigma_3|^{\frac{3-p}{2-p}} + \delta_3V_3$ ,  $\delta_3 = k_3^{\frac{3-p}{2p-1}}$ .

Derivada c.r. al tiempo de  $V_4$  a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\dot{V}_4 = s_{4d}(v_4 + w_4) + \frac{4-3p}{2-p}k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}}s_4|\sigma_3|^{\frac{2(1-p)}{2-p}}\dot{\sigma}_3 + \delta_3(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_3}{\partial x_i}\dot{x}_i)$$

$$\dot{V}_4 = s_{4d}(v_4 + w_4) + \frac{4-3p}{2-p}k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}}s_4|\sigma_3|^{\frac{2(1-p)}{2-p}}\dot{\sigma}_3 + \delta_3\dot{V}_3 + \delta_3\frac{\partial V_3}{\partial x_3}s_4,$$



ya que  $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_3}{\partial x_i} \dot{x}_i = \dot{V}_3 + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} s_4$ , donde  $\dot{V}_3 < 0$ , y  $\frac{\partial V_3}{\partial x_3} = s_{3d}$ . Además,  $\dot{\sigma}_3 = \Psi_{3n} + \frac{2-p}{p} s_4 |x_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} + \Psi_{3\rho}$ ,  $\Psi_{3\rho} = k_2^{\frac{2-p}{p}} \left[ \frac{2-p}{1} |x_2|^{1-p} w_2 + k_1^{2-p} w_1 \right] + \frac{2-p}{p} |x_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} w_3 \leq \Delta_{3\rho}$ , entonces  $\dot{s}_{3d} \leq \Psi_{3n} + \frac{2-p}{p} s_4 |x_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} + \Delta_{3\rho}$ ,

$$\Psi_{3n} = k_2^{\frac{2-p}{p}} \left[ \frac{2-p}{1} |x_2|^{1-p} x_3 + k_1^{2-p} x_2 \right] - \frac{2-p}{p} k_3 |x_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} [s_{3d}]^{\frac{2p-1}{2-p}},$$

$$\Delta_{3\rho} = k_2^{\frac{2-p}{p}} \left[ \frac{2-p}{1} \rho_2 |x_2|^{1-p} |s_{2d}|^{\frac{2p-1}{2-p}} + k_1^{2-p} \rho_1 |x_1|^{\frac{1}{2-p}} \right] + \frac{2-p}{p} \rho_3 |x_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} |s_{3d}|^{\frac{2p-1}{2-p}}.$$

Entrada de control:  $v_4 = -k_4 [\sigma_4]^{\frac{3p-2}{2-p}}$ ,  $p \in [2/3, 1)$ ,  $|w_4| \leq \rho_4 |\sigma_4|^{\frac{3p-2}{2-p}}$ .

Después de algunas simplificaciones

$$\dot{V}_4 \leq -(k_4 - \rho_4) |s_{4d}| |\sigma_4|^{\frac{3p-2}{2-p}} - \delta_3 \mathcal{V}_3 + \frac{4-3p}{p} k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}} |s_4|^2 |\sigma_3|^{\frac{2(1-p)}{2-p}} |x_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} + k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}} s_4 \Upsilon_4,$$

donde  $\mathcal{V}_3 = -\dot{V}_3 \geq 0$ , y  $\Upsilon_3 = \frac{4-3p}{2-p} |\sigma_3|^{\frac{2(1-p)}{2-p}} [\Psi_{3n} + \Delta_{3\rho}] + k_3 s_{3d}$ . Del Lema A.6, se concluye que  $\dot{V}_4$  es n.d. si la ganancia  $k_4$  se elige suficientemente grande. Además, por el Lema A.3,  $\dot{V}_4 \leq -\kappa_4 V_4^{\frac{2}{3-p}}$ , con  $\kappa_4 = \min_{\{x: V_4(x)=1\}} \{-\dot{V}_4\}$ .

Por homogeneidad:  $s_{4d}(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{4-3p} s_{4d}(x)$ ,  $v_4(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{3p-2} v_4(x)$ ,  $V_4(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{3-p} V_4(x)$ ,  $\dot{V}_4(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^2 \dot{V}_4(x)$ , con  $\Delta_\epsilon^r x = (\epsilon^{2-p} x_1, \epsilon^1 x_2, \epsilon^p x_3, \epsilon^{2p-1} x_4)$ .

### B.1.0.3. Sistema homogéneo de quinto orden

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2$ ,  $\dot{x}_3 = x_4 + w_3$ ,  $\dot{x}_4 = x_5 + w_4$ ,  $\dot{x}_5 = v_5 + w_5$ .

Variables de estado:  $s_5 = x_5 + k_4 [\sigma_4]^{\frac{3p-2}{2-p}}$ ,  $\sigma_4 = [x_4]^{\frac{2-p}{2p-1}} + k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} \sigma_3$ .

Fdes:  $s_{5d} = [x_5]^{\frac{5-4p}{3p-2}} + k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} [\sigma_4]^{\frac{5-4p}{2-p}}$ ,  $\sigma_5 = [x_5]^{\frac{2-p}{3p-2}} + k_4^{\frac{2-p}{3p-2}} \sigma_4$ .

FLC:  $V_5 = \frac{3p-2}{3-p} |x_4|^{\frac{3p-2}{3p-2}} + k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} [\sigma_4]^{\frac{5-4p}{2-p}} x_4 + \frac{5-4p}{3-p} k_4^{\frac{3p-2}{3p-2}} |\sigma_4|^{\frac{3p-2}{2-p}} + \delta_4 V_4$ ,  $\delta_4 = k_4^{\frac{3p-2}{3p-2}}$ .

Derivada c.r. al tiempo de  $V_5$  a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\dot{V}_5 = s_{5d}(v_5 + w_5) + \frac{5-4p}{2-p} k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} s_5 |\sigma_4|^{\frac{3(1-p)}{2-p}} \dot{\sigma}_4 + \delta_4 \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial V_4}{\partial x_i} \dot{x}_i \right)$$

$$\dot{V}_5 \leq s_{5d}(v_5 + w_5) + \frac{5-4p}{2-p} k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} s_5 |\sigma_4|^{\frac{3(1-p)}{2-p}} \dot{\sigma}_4 + \delta_4 \dot{V}_4 + \delta_3 \frac{\partial V_4}{\partial x_4} s_5,$$

ya que  $\sum_{i=1}^4 \frac{\partial V_4}{\partial x_i} \dot{x}_i = \dot{V}_4 + \frac{\partial V_4}{\partial x_4} s_5$ , donde  $\dot{V}_4 < 0$ , y  $\frac{\partial V_4}{\partial x_4} = s_{4d}$ . Además,  $\dot{\sigma}_4 = \Psi_{4n} + \frac{2-p}{2p-1} s_5 |x_4|^{\frac{3(1-p)}{2p-1}} + \Psi_{4\rho}$ ,  $\Psi_{4\rho} \leq \Delta_{4\rho}$ ,

$$\Psi_{4n} = k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} k_2^{\frac{2-p}{p}} \left[ \frac{2-p}{1} |x_2|^{1-p} x_3 + k_1^{2-p} x_2 \right] + \frac{2-p}{p} k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} |x_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} x_4$$

$$- \frac{2-p}{2p-1} k_4 |x_4|^{\frac{3(1-p)}{2p-1}} [s_{4d}]^{\frac{3p-2}{2-p}},$$

$$\Delta_{4\rho} = k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} k_2^{\frac{2-p}{p}} \left[ \frac{2-p}{1} \rho_2 |x_2|^{1-p} |s_{2d}|^{\frac{2p-1}{2-p}} + k_1^{2-p} \rho_1 |x_1|^{\frac{1}{2-p}} \right] + \frac{2-p}{p} k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} \rho_3 |x_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} |s_{3d}|^{\frac{2p-1}{2-p}}$$

$$+ \frac{2-p}{2p-1} k_4 \rho_4 |x_4|^{\frac{3(1-p)}{2p-1}} |s_{4d}|^{\frac{3p-2}{2-p}}$$

Entrada de control:  $v_5 = -k_5 [\sigma_5]^{\frac{4p-3}{2-p}}$ ,  $p \in [3/4, 1)$ ,  $|w_5| \leq \rho_5 |\sigma_5|^{\frac{4p-3}{2-p}}$ .

Después de algunas simplificaciones

$$\dot{V}_5 = -(k_5 - \rho_5) |s_{5d}| |\sigma_5|^{\frac{4p-3}{2-p}} - \delta_4 \mathcal{V}_4 + \frac{5-4p}{2p-1} k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} |s_5|^2 |\sigma_4|^{\frac{3(1-p)}{2-p}} |x_4|^{\frac{3(1-p)}{p}} + k_4^{\frac{2-p}{3p-2}} s_5 \Upsilon_4,$$

donde  $\mathcal{V}_4 = -\dot{V}_4 \geq 0$ , y  $\Upsilon_4 = \frac{5-4p}{2-p} |\sigma_4|^{\frac{3(1-p)}{2-p}} [\Psi_{4n} + \Delta_{4\rho}] + k_4 s_{4d}$ . Del Lema A.6, se concluye que  $\dot{V}_5$  es n.d. si la ganancia  $k_5$  se elige suficientemente grande. Por el Lema A.3,  $\dot{V}_5 \leq -\kappa_5 V_5^{\frac{2}{3-p}}$ , con  $\kappa_5 = \min_{\{x: V_5(x)=1\}} \{-\dot{V}_5\}$ .

Por homogeneidad:  $s_{5d}(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{5-4p}s_{5d}(x)$ ,  $v_5(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{4p-3}v_5(x)$ ,  $V_5(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{3-p}V_5(x)$ ,  $\dot{V}_5(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^2\dot{V}_5(x)$ , con  $\Delta_\epsilon^r x = (\epsilon^{2-p}x_1, \epsilon^1x_2, \epsilon^px_3, \epsilon^{2p-1}x_4, \epsilon^{3p-2}x_5)$ .

## B.2. CÁLCULOS EXPLÍCITOS: TEOREMA 4.14

### B.2.0.4. Sistema homogéneo de tercer orden

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1(x, t)$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2(x, t)$ ,  $\dot{x}_3 = v_3 + w_3(x, t)$ .

Variable de estado:  $s_3 = x_3 + k_2[s_{2d}]^{\frac{p}{2-p}}$ ,  $s_{2d} = [x_2]^{2-p} + k_1^{2-p}x_1$ .

Fdes:  $s_{3d} = [x_3]^{\frac{3-2p}{p}} + k_2^{\frac{3-2p}{p}} [s_{2d}]^{\frac{3-2p}{2-p}}$ .

FLC:  $V_3 = \frac{p}{3-p}|x_3|^{\frac{3-p}{p}} + k_2^{\frac{3-2p}{p}} [s_{2d}]^{\frac{3-2p}{2-p}} x_3 + \frac{3-2p}{3-p} k_2^{\frac{3-p}{p}} |s_{2d}|^{\frac{3-p}{2-p}} + \delta_2 V_2$ ,  $\delta_2 = k_2^{\frac{3-p}{p}}$ .

Derivada c.r. al tiempo de  $V_3$  a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\dot{V}_3 = s_{3d}(v_3 + w_3) + \frac{3-2p}{2-p} k_2^{\frac{3-2p}{p}} s_3 |s_{2d}|^{\frac{1-p}{2-p}} \dot{s}_2 + \delta_2 \dot{V}_2 + \delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2} s_3,$$

donde  $\dot{V}_2 < 0$ , y  $\frac{\partial V_2}{\partial x_2} = s_{2d}$ . Además,  $\dot{s}_2 d = \frac{2-p}{1} |x_2|^{1-p} (x_3 + w_2) + k_1^{2-p} (x_2 + w_1)$ .

Como  $x_3 = s_3 - k_2 [s_{2d}]^{\frac{2-p}{2-p}}$ , entonces  $\dot{s}_2 d \leq \frac{2-p}{1} |x_2|^{1-p} s_3 + \Psi_{2n} + \Delta_{2\rho}$ ,

$$\Psi_{2n} = -\frac{2-p}{1} k_2 |x_2|^{1-p} [s_{2d}]^{\frac{p}{2-p}} + k_1^{2-p} x_2,$$

$$\Delta_{2\rho} = \frac{2-p}{1} \rho_2 |x_2|^{1-p} |s_{2d}|^{\frac{p}{2-p}} + k_1^{2-p} \rho_1 |x_1|^{\frac{1}{2-p}}.$$

Entrada de Control:  $v_3 = -k_3 [s_{3d}]^{\frac{2p-1}{3-2p}}$ ,  $p \in [1/2, 1)$ ,  $|w_3| \leq \rho_3 |s_{3d}|^{\frac{2p-1}{3-2p}}$ .

Después de algunas simplificaciones

$$\dot{V}_3 \leq -(k_3 - \rho_3) |s_{3d}|^{\frac{2}{3-2p}} - \delta_2 V_2 + \frac{3-2p}{1} k_2^{\frac{3-2p}{p}} |s_3|^2 |s_{2d}|^{\frac{1-p}{2-p}} |x_2|^{1-p} + k_2^{\frac{3-2p}{p}} s_3 \Upsilon_2,$$

donde  $V_2 = -\dot{V}_2 \geq 0$ , y  $\Upsilon_2 = \frac{3-2p}{2-p} |s_{2d}|^{\frac{1-p}{2-p}} [\Psi_{2n} + \Delta_{2\rho}] + k_2 s_{2d}$ . Del Lema A.6 se concluye que  $\dot{V}_3$  es n.d. si la ganancia  $k_3$  se elije suficientemente grande. Además,

por el Lema A.3,  $\dot{V}_3 \leq -\kappa_3 V_3^{\frac{2}{3-p}}$ , con  $\kappa_3 = \min_{\{x: V_3(x)=1\}} \{-\dot{V}_3\}$ .

Por homogeneidad:  $s_{3d}(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{3-2p}s_{3d}(x)$ ,  $V_3(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{3-p}V_3(x)$ ,  $\dot{V}_3(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^2\dot{V}_3(x)$ , con  $\Delta_\epsilon^r x = (\epsilon^{2-p}x_1, \epsilon^1x_2, \epsilon^px_3)$ .

### B.2.0.5. Sistema homogéneo de cuarto orden

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2$ ,  $\dot{x}_3 = x_4 + w_3$ ,  $\dot{x}_4 = v_4 + w_4$ .

Variable de estado:  $s_4 = x_4 + k_3 [s_{3d}]^{\frac{2p-1}{3-2p}}$ ,  $s_{3d} = [x_3]^{\frac{3-2p}{p}} + k_2^{\frac{3-2p}{p}} [s_{2d}]^{\frac{3-2p}{2-p}}$ .

Fdes:  $s_{4d} = [x_4]^{\frac{4-3p}{2p-1}} + k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}} [s_{3d}]^{\frac{4-3p}{3-2p}}$ .

FLC:  $V_4 = \frac{2p-1}{3-p} |x_4|^{\frac{3-p}{2p-1}} + k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}} [s_{3d}]^{\frac{4-3p}{3-2p}} x_4 + \frac{4-3p}{3-p} k_3^{\frac{3-p}{2p-1}} |s_{3d}|^{\frac{3-p}{3-2p}} + \delta_3 V_3$ ,  $\delta_3 = k_3^{\frac{3-p}{2p-1}}$ .

Derivada c.r. al tiempo de  $V_4$  a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\dot{V}_4 = s_{4d}(v_4 + w_4) + \frac{4-3p}{3-2p} k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}} s_4 |s_{3d}|^{\frac{1-p}{3-2p}} \dot{s}_3 d + \delta_3 \dot{V}_3 + \delta_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_3} s_4,$$

donde  $\dot{V}_3 < 0$ ,  $\frac{\partial V_3}{\partial x_3} = s_{3d}$ . Además,  $\dot{s}_3 d = \Psi_{3n} + \frac{3-2p}{p} s_4 |x_3|^{\frac{3(1-p)}{p}} + \Delta_{3\rho}$ ,  $\Psi_{3\rho} = \frac{3-2p}{2-p} k_2^{\frac{2-p}{p}} |s_{2d}|^{\frac{1-p}{2-p}} [\frac{2-p}{1} |x_2|^{1-p} w_2 + k_1^{2-p} w_1] + \frac{3-2p}{p} |x_3|^{\frac{3(1-p)}{p}} w_3 \leq \Delta_{3\rho}$ , donde

$$\Psi_{3n} = \frac{3-2p}{p} k_2^{\frac{2-p}{p}} |s_{2d}|^{\frac{1-p}{2-p}} [\frac{2-p}{1} |x_2|^{1-p} x_3 + k_1^{2-p} x_2] - \frac{3-2p}{p} k_3 |x_3|^{\frac{3(1-p)}{p}} [s_{3d}]^{\frac{2p-1}{3-2p}},$$

$$\Delta_{3\rho} = \frac{3-2p}{p} k_2^{\frac{2-p}{p}} |s_{2d}|^{\frac{1-p}{2-p}} [\frac{2-p}{1} \rho_2 |x_2|^{1-p} |s_{2d}|^{\frac{p}{2-p}} + k_1^{2-p} \rho_1 |x_1|^{\frac{1}{2-p}}] + \frac{3-2p}{p} \rho_3 |x_3|^{\frac{3(1-p)}{p}} |s_{3d}|^{\frac{2p-1}{3-2p}}.$$

1 Las mismas propiedades de homogeneidad de las funciones del Teorema anterior se cumplen para funciones  $s_{id}$ ,  $V_i(x)$ , y  $\dot{V}_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , del presente Teorema. Por lo tanto, este análisis se omite en los siguientes apartados.

Entrada de control:  $v_4 = -k_4 [s_{4d}]^{\frac{3p-2}{4-3p}}$ ,  $p \in [2/3, 1)$ ,  $|w_4| \leq \rho_4 |\sigma_4|^{\frac{3p-2}{4-3p}}$ .  
Después de algunas simplificaciones

$$\dot{V}_4 \leq -(k_4 - \rho_4) |s_{4d}|^{\frac{2}{4-3p}} - \delta_3 \mathcal{V}_3 + \frac{4-3p}{p} k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}} |s_4|^2 |s_{3d}|^{\frac{1-p}{3-2p}} |x_3|^{\frac{3(1-p)}{p}} + k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}} s_4 \Upsilon_4,$$

donde  $\mathcal{V}_3 = -\dot{V}_3 \geq 0$ , y  $\Upsilon_3 = \frac{4-3p}{3-2p} |s_{3d}|^{\frac{1-p}{3-2p}} [\Psi_{3n} + \Delta_{3\rho}] + k_3 s_{3d}$ . Del Lema A.6 se concluye que  $\dot{V}_4$  es n.d. si la ganancia  $k_4$  se elige suficientemente grande. Por el Lema A.3,  $\dot{V}_4 \leq -\kappa_4 V_4^{\frac{2}{3-2p}}$ , con  $\kappa_4 = \min_{\{x: V_4(x)=1\}} \{-\dot{V}_4\}$ .

#### B.2.0.6. Sistema homogéneo de quinto orden

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2$ ,  $\dot{x}_3 = x_4 + w_3$ ,  $\dot{x}_4 = x_5 + w_4$ ,  $\dot{x}_5 = v_5 + w_5$ .

Variable de estado:  $s_5 = x_5 + k_4 [s_{4d}]^{\frac{3p-2}{4-3p}}$ ,  $s_{4d} = [x_4]^{\frac{4-3p}{2p-1}} + k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}} [s_{3d}]^{\frac{4-3p}{3-2p}}$ .

Fdes:  $s_{5d} = [x_5]^{\frac{5-4p}{3p-2}} + k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} [\sigma_4]^{\frac{5-4p}{4-3p}}$ .

FLC:  $V_5 = \frac{3p-2}{3-p} |x_4|^{\frac{3-p}{3p-2}} + k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} [s_{4d}]^{\frac{5-4p}{4-3p}} x_4 + \frac{5-4p}{3-p} k_4^{\frac{3-p}{3p-2}} |s_{4d}|^{\frac{3-p}{4-3p}} + \delta_4 V_4$ ,  $\delta_4 = k_4^{\frac{3-p}{3p-2}}$ .

Derivada c.r. al tiempo de  $V_5$  a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\dot{V}_5 = s_{5d} (v_5 + w_5) + \frac{5-4p}{2-p} k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} s_5 |s_{4d}|^{\frac{1-p}{4-3p}} \dot{\sigma}_4 + \delta_4 \dot{V}_4 + \delta_3 \frac{\partial V_4}{\partial x_4} s_5,$$

donde  $\dot{V}_4 < 0$ , y  $\frac{\partial V_4}{\partial x_4} = s_{4d}$ . Además,  $\dot{s}_{4d} = \Psi_{4n} + \frac{4-3p}{2p-1} s_5 |x_4|^{\frac{5(1-p)}{2p-1}} + \Psi_{4\rho}$ ,  $\Psi_{4\rho} \leq \Delta_{4\rho}$ , donde

$$\Psi_{4n} = k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} k_2^{\frac{2-p}{p}} \left[ \frac{2-p}{1} |x_2|^{1-p} x_3 + k_1^{2-p} x_2 \right] + \frac{2-p}{p} k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} |x_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} x_4 - \frac{2-p}{2p-1} k_4 |x_4|^{\frac{3(1-p)}{2p-1}} [s_{4d}]^{\frac{3p-2}{2-p}},$$

$$\Delta_{4\rho} = k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} k_2^{\frac{2-p}{p}} \left[ \frac{2-p}{1} \rho_2 |x_2|^{1-p} |s_{2d}|^{\frac{p}{2-p}} + k_1^{2-p} \rho_1 |x_1|^{1-p} \right] + \frac{2-p}{p} k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} \rho_3 |x_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} |s_{3d}|^{\frac{2p-1}{2-p}} + \frac{2-p}{2p-1} k_4 \rho_4 |x_4|^{\frac{3(1-p)}{2p-1}} |s_{4d}|^{\frac{3p-2}{2-p}}$$

Entrada de control:  $v_5 = -k_5 [s_{5d}]^{\frac{4p-3}{5-4p}}$ ,  $p \in [3/4, 1)$ ,  $|w_5| \leq \rho_5 |\sigma_5|^{\frac{4p-3}{5-4p}}$ .

Después de algunas simplificaciones

$$\dot{V}_5 = -(k_5 - \rho_5) |s_{5d}|^{\frac{2}{5-4p}} - \delta_4 \mathcal{V}_4 + \frac{5-4p}{2p-1} k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} |s_5|^2 |s_{4d}|^{\frac{1-p}{4-3p}} |x_4|^{\frac{5(1-p)}{2p-1}} + k_4^{\frac{2-p}{3p-2}} s_5 \Upsilon_4,$$

donde  $\mathcal{V}_4 = -\dot{V}_4 \geq 0$ , y  $\Upsilon_4 = \frac{5-4p}{4-3p} |s_{4d}|^{\frac{1-p}{4-3p}} [\Psi_{4n} + \Delta_{4\rho}] + k_4 s_{4d}$ . Del Lema A.6 se concluye que  $\dot{V}_5$  es n.d. si la ganancia  $k_5$  se elige suficientemente grande. Por el Lema A.3,  $\dot{V}_5 \leq -\kappa_5 V_5^{\frac{2}{3-2p}}$ , con  $\kappa_5 = \min_{\{x: V_5(x)=1\}} \{-\dot{V}_5\}$ .



## CÁLCULOS EXPLÍCITOS: TEOREMA 5.9

### c.o.o.7. Sistema homogéneo de tercer orden

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2$ ,  $\dot{x}_3 = v_3 + w_3$ .

Variable de estado:  $s_3 = x_3 + k_2[\sigma_2]^{\frac{q}{2-p}}$ ,  $\sigma_2 = [x_2]^{2-p} + k_1^{2-p}[x_1]^{\frac{2-p}{2-q}}$ .

Fdes:  $s_{3d} = [x_3]^{\frac{3-2p}{p}} + k_2^{\frac{3-2p}{p}}[\sigma_2]^{\frac{3-2p}{2-p}\frac{q}{p}}$ ,  $\sigma_3 = [x_3]^{\frac{2-p}{p}} + k_2^{\frac{2-p}{p}}[\sigma_2]^{\frac{q}{p}}$ .

FLC:

$$V_3 = \frac{p}{3-p}|x_3|^{\frac{3-p}{p}} + k_2^{\frac{3-2p}{p}}[\sigma_2]^{\frac{3-2p}{2-p}\frac{q}{p}}x_3 + \frac{3-2p}{3-p}k_2^{\frac{3-p}{p}}|\sigma_2|^{\frac{3-p}{2-p}\frac{q}{p}} + \delta_2 V_2^{\frac{q}{p}}, \delta_2 = k_2^{\frac{3-p}{p}}.$$

Derivada c.r. al tiempo de  $V_3$  a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\dot{V}_3 = s_{3d}(v_3 + w_3) + \frac{3-2p}{2-p}\frac{q}{p}k_2^{\frac{3-2p}{p}}(x_3 + k_2[\sigma_2]^{\frac{q}{2-p}})|\sigma_2|^{\frac{(2-p)(q-p)+(1-p)q}{(2-p)p}}\dot{\sigma}_2 + \frac{q}{p}\delta_2 V_2^{\frac{q-p}{p}}\left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial V_2}{\partial x_i} \dot{x}_i\right),$$

$$\dot{V}_3 = s_{3d}(v_3 + w_3) + \frac{3-2p}{2-p}\frac{q}{p}k_2^{\frac{3-2p}{p}}s_3|\sigma_2|^{\frac{(2-p)(q-p)+(1-p)q}{(2-p)p}}\dot{\sigma}_2 + \frac{q}{p}\delta_2 V_2^{\frac{q-p}{p}}\dot{V}_2 + \frac{q}{p}\delta_2 V_2^{\frac{q-p}{p}}\frac{\partial V_2}{\partial x_2}s_3,$$

ya que  $\sum_{i=1}^2 \frac{\partial V_2}{\partial x_i} \dot{x}_i = \dot{V}_2 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}s_3$ , donde  $\dot{V}_2 < 0$ , y  $\frac{\partial V_2}{\partial x_2} = s_{2d}$ . Además,  $\dot{\sigma}_2 = (2-p)|x_2|^{1-p}(x_3 + w_2) + \frac{2-p}{2-q}k_1^{2-p}|x_1|^{\frac{q-p}{2-q}}(x_2 + w_1)$ . Como  $x_3 = s_3 - k_2[\sigma_2]^{\frac{q}{2-p}}$ , entonces,  $\dot{\sigma}_2 = \frac{2-p}{1}|x_2|^{1-p}s_3 + \Psi_{2n} + \Psi_{2\rho}$ ,

$$\Psi_{2n} = -\frac{2-p}{1}|x_2|^{1-p}k_2[\sigma_2]^{\frac{q}{2-p}} + \frac{2-p}{2-q}k_1^{2-p}|x_1|^{\frac{q-p}{2-q}}x_2,$$

$$\Psi_{2\rho} \leq \Delta_{2\rho} = \frac{2-p}{1}|x_2|^{1-p}\rho_2|\sigma_2|^{\frac{q}{2-p}} + \frac{2-p}{2-q}k_1^{2-p}\rho_1|x_1|^{\frac{1+q-p}{2-q}}.$$

Entrada de Control:  $v_3 = -k_3[\sigma_3]^{\frac{p}{2-p}\frac{2q-1}{q}}$ ,  $p \in [1/2, 1)$ ,  $|w_3| \leq \rho_3|\sigma_3|^{\frac{p}{2-p}\frac{2q-1}{q}}$ .

Después de algunas simplificaciones

$$\dot{V}_3 \leq -(k_3 - \rho_3)|s_{3d}||\sigma_3|^{\frac{p}{2-p}\frac{2q-1}{q}} - \frac{q}{p}\delta_2 V_2 + \frac{3-2p}{1}\frac{q}{p}k_2^{\frac{3-2p}{p}}|s_3|^2|\sigma_2|^{\frac{(2-p)(q-p)+(1-p)q}{(2-p)p}}|x_2|^{1-p} + \frac{q}{p}k_2^{\frac{3-2p}{p}}s_3\Upsilon_2,$$

donde  $\mathcal{V}_2 = -V_2^{\frac{q-p}{p}}\dot{V}_2$  y  $\Upsilon_2 = k_2 V_2^{\frac{q-p}{p}}s_{2d} + \frac{3-2p}{2-p}|\sigma_2|^{\frac{(2-p)(q-p)+(1-p)q}{(2-p)p}}(\Psi_{2n} + \Delta_{2\rho})$ .

Del Lema A.6, se concluye que  $\dot{V}_3$  es n.d. si la ganancia  $k_3$  se elije suficientemente grande. Por el Lema A.3,  $\dot{V}_3 \leq -\kappa_3 V_3^{\frac{3q-p}{(3-p)q}}$ , con  $\kappa_3 = \min_{\{x: V_3(x)=1\}}\{-\dot{V}_3\}$ .

Por homogeneidad:  $s_{3d}(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{\frac{(3-2p)q}{p}}s_{3d}(x)$ ,  $v_3(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{2q-1}v_3(x)$ ,  $V_3(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{\frac{(3-p)q}{p}}V_3(x)$ ,  $\dot{V}_3(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{\frac{3q-p}{p}}\dot{V}_3(x)$ , con  $\Delta_\epsilon^r x = (\epsilon^{2-q}x_1, \epsilon^1 x_2, \epsilon^q x_3)$ .

### c.o.o.8. Sistema homogéneo de cuarto orden

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2$ ,  $\dot{x}_3 = x_4 + w_3$ ,  $\dot{x}_4 = v_4 + w_4$ .

Variable de estado:  $s_4 = x_4 + k_3[\sigma_3]^{\frac{p}{2-p}\frac{2q-1}{q}}$ .

Fdes:  $s_{4d} = [x_4]^{\frac{4-3p}{2p-1}} + k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}}[\sigma_3]^{\frac{4-3p}{2-p}\frac{p}{2p-1}\frac{2q-1}{q}}$ ,  $\sigma_4 = [x_4]^{\frac{2-p}{2p-1}} + k_3^{\frac{2-p}{2p-1}}[\sigma_3]^{\frac{p}{2p-1}\frac{2q-1}{q}}$ .

FLC:

$$V_4 = \frac{2p-1}{3-p}|x_4|^{\frac{3-p}{2p-1}} + k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}}[\sigma_3]^{\frac{4-3p}{2-p}\frac{p}{2p-1}\frac{2q-1}{q}}x_4 + \frac{4-3p}{3-p}k_3^{\frac{3-p}{2p-1}}|\sigma_3|^{\frac{3-p}{2-p}\frac{p}{2p-1}\frac{2q-1}{q}} + \delta_3 V_3^{\frac{p}{2p-1}\frac{2q-1}{q}}, \delta_3 = k_3^{\frac{3-p}{2p-1}}$$

Derivada c.r. al tiempo de  $V_4$  a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{V}_4 &= s_{4d}(v_4 + w_4) + \frac{4-3p}{2-p} \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}} s_4 |\sigma_3|^{\frac{(2-p)(q-p)+2(1-p)(2q-1)p}{(2-p)(2p-1)q}} \dot{\sigma}_3 \\ &+ \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \delta_3 V_3^{\frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} - 1} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_3}{\partial x_i} \dot{x}_i \right), \\ \dot{V}_4 &= s_{4d}(v_4 + w_4) + \frac{4-3p}{2-p} \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}} s_4 |\sigma_3|^{\frac{(2-p)(q-p)+2(1-p)(2q-1)p}{(2-p)(2p-1)q}} \dot{\sigma}_3 \\ &+ \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \delta_3 V_3^{\frac{q-p}{(2p-1)q}} \dot{V}_3 + \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \delta_3 V_3^{\frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} - 1} \frac{\partial V_3}{\partial x_3} s_4,\end{aligned}$$

ya que  $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_3}{\partial x_i} \dot{x}_i = \dot{V}_3 + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} s_4$ , donde  $\dot{V}_3 \leq 0$ , y  $\frac{\partial V_3}{\partial x_3} = s_{3d}$ . Además,  $\dot{\sigma}_3 = \frac{q}{p} k_2^{\frac{2-p}{p}} |\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}} \left[ \frac{2-p}{1} |\chi_2|^{1-p} \dot{\chi}_2 + \frac{2-p}{2-q} k_1^{2-p} |\chi_1|^{\frac{q-p}{2-q}} \dot{\chi}_1 \right] + \frac{2-p}{p} |\chi_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} \dot{\chi}_3$ . Como  $\chi_4 = s_4 - k_3 |\sigma_3|^{\frac{p}{2-p} \frac{2q-1}{q}}$ , entonces,  $\dot{\sigma}_3 = \frac{2-p}{p} s_4 |\chi_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} + \Psi_{3n} + \Psi_{3\rho}$ ,

$$\begin{aligned}\Psi_{3n} &= -\frac{2-p}{p} k_3 |\chi_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} \left[ \sigma_3 \right]^{\frac{p}{2-p} \frac{2q-1}{q}} + \frac{q}{p} k_2^{\frac{2-p}{p}} |\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}} \left[ \frac{2-p}{1} |\chi_2|^{1-p} \chi_3 \right. \\ &+ \left. \frac{2-p}{2-q} k_1^{2-p} |\chi_1|^{\frac{q-p}{2-q}} \chi_2 \right], \\ \Psi_{3\rho} &\leq \Delta_{3\rho} = \frac{2-p}{p} \rho_3 |\chi_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} |\sigma_3|^{\frac{p}{2-p} \frac{2q-1}{q}} + \frac{q}{p} k_2^{\frac{2-p}{p}} |\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}} \left[ \frac{2-p}{1} |\chi_2|^{1-p} \rho_2 |s_{2u}|^{\frac{q}{2-p}} \right. \\ &+ \left. \frac{2-p}{2-q} k_1^{2-p} \rho_1 |\chi_1|^{\frac{1+q-p}{2-q}} \right]\end{aligned}$$

Entrada de Control:  $v_4 = -k_4 [\sigma_4]^{\frac{2p-1}{2-p} \frac{3q-2}{2q-1}}$ ,  $p \in [2/3, 1)$ ,  $|w_4| \leq \rho_4 |\sigma_4|^{\frac{2p-1}{2-p} \frac{3q-2}{2q-1}}$ .  
Después de algunas simplificaciones

$$\begin{aligned}\dot{V}_4 &\leq -(k_4 - \rho_4) |s_{4d}| |\sigma_4|^{\frac{2p-1}{2-p} \frac{3q-2}{2q-1}} - \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \delta_3 V_3 \\ &+ \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}} \left[ \frac{4-3p}{p} |s_4|^2 |\sigma_3|^{\frac{(2-p)(q-p)+2(1-p)(2q-1)p}{(2-p)(2p-1)q}} |\chi_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} + s_4 \Upsilon_3 \right],\end{aligned}$$

donde  $V_3 = -V_3^{\frac{q-p}{(2p-1)q}} \dot{V}_3$  y  $\Upsilon_3 = \frac{4-3p}{2-p} |\sigma_3|^{\frac{(2-p)(q-p)+2(1-p)(2q-1)p}{(2-p)(2p-1)q}} (\Psi_{3n} + \Delta_{3\rho}) + k_3 V_3^{\frac{q-p}{(2p-1)q}} \sigma_3$ .

Del Lema A.6, se concluye que  $\dot{V}_4$  es n.d. si la ganancia  $k_4$  se elije suficientemente grande. Por el Lema A.3,  $\dot{V}_4 \leq -\kappa_4 V_4^{\frac{5q-(2+p)}{(3-p)(2q-1)}}$ , con  $\kappa_4 = \min_{\{x: V_4=1\}} \{-\dot{V}_4\}$ .

Por homogeneidad:  $s_{4d}(\Delta_e^r x) = e^{\frac{(4-3p)(2q-1)}{2p-1}} s_{4d}(x)$ ,  $v_4(\Delta_e^r x) = e^{3q-2} v_4(x)$ ,  $V_4(\Delta_e^r x) = e^{\frac{(3-p)(2q-1)}{2p-1}} V_4(x)$ ,  $\dot{V}_4(\Delta_e^r x) = e^{\frac{5q-(2+p)}{2p-1}} \dot{V}_4(x)$ , con  $\Delta_e^r x = (e^{2-q} x_1, e^1 x_2, e^q x_3, e^{2q-1} x_4)$ .

c.o.o.g. Sistema homogéneo de quinto orden

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2$ ,  $\dot{x}_3 = x_4 + w_3$ ,  $\dot{x}_4 = x_5 + w_4$ ,  $\dot{x}_5 = v_5 + w_5$ .

Variable de estado:  $s_5 = x_5 + k_4 [\sigma_4]^{\frac{2p-1}{2-p} \frac{3q-2}{2q-1}}$ .

Fdes:  $s_{5d} = [x_5]^{\frac{5-4p}{3p-2}} + k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} [\sigma_4]^{\frac{5-4p}{2-p} \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1}}$ ,  $\sigma_5 = [x_5]^{\frac{2-p}{3p-2}} + k_4^{\frac{2-p}{3p-2}} [\sigma_4]^{\frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1}}$ .

FLC:

$$\begin{aligned}V_5 &= \frac{3p-2}{3-p} |\chi_4|^{\frac{3-p}{3p-2}} + k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} [\sigma_4]^{\frac{5-4p}{2-p} \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1}} \chi_4 + \frac{5-4p}{3-p} k_4^{\frac{3-p}{3p-2}} |\sigma_4|^{\frac{3-p}{2-p} \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1}} + \delta_4 V_4^{\frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1}}, \\ \delta_4 &= k_4^{\frac{3-p}{3p-2}}.\end{aligned}$$

Derivada c.r. al tiempo de  $V_5$  a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\begin{aligned}\dot{V}_5 &= s_{5d}(v_5 + w_5) + \frac{5-4p}{2-p} \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} s_5 |\sigma_4|^{\frac{(2-p)(q-p)+3(1-p)(3q-2)(2p-1)}{(2-p)(3p-2)(2q-1)}} \dot{\sigma}_4 \\ &+ \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} \delta_4 V_4^{\frac{q-p}{(3p-2)(2q-1)}} \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial V_4}{\partial x_i} \dot{x}_i \right), \\ \dot{V}_5 &= s_{5d}(v_5 + w_5) + \frac{5-4p}{2-p} \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} s_5 |\sigma_4|^{\frac{(2-p)(q-p)+3(1-p)(3q-2)(2p-1)}{(2-p)(3p-2)(2q-1)}} \dot{\sigma}_4 \\ &+ \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} \delta_4 V_4^{\frac{q-p}{(3p-2)(2q-1)}} \dot{V}_4 + \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} \delta_4 V_4^{\frac{q-p}{(3p-2)(2q-1)}} \frac{\partial V_4}{\partial x_4} s_5,\end{aligned}$$

ya que  $\sum_{i=1}^4 \frac{\partial V_4}{\partial x_i} \dot{x}_i = \dot{V}_4 + \frac{\partial V_4}{\partial x_4} s_5$ , donde  $\dot{V}_4 \leq 0$ , y  $\frac{\partial V_4}{\partial x_4} = s_{4d}$ . Como  $x_5 = s_5 - k_4 [\sigma_4]^{\frac{2p-1}{2-p} \frac{3q-2}{2q-1}}$ , entonces,  $\dot{\sigma}_4 = \frac{2-p}{2p-1} s_5 |x_4|^{\frac{3(1-p)}{2p-1}} + \Psi_{4n} + \Psi_{4\rho}$ ,

$$\begin{aligned} \Psi_{4n} &= -\frac{2-p}{2p-1} k_4 |x_4|^{\frac{3(1-p)}{2p-1}} [\sigma_4]^{\frac{2p-1}{2-p} \frac{3q-2}{2q-1}} + \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} |\sigma_3|^{\frac{q-p}{(2p-1)q}} \\ &\quad \left[ \frac{q}{p} k_2^{\frac{2-p}{p}} |\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}} \left[ \frac{2-p}{1} |x_2|^{1-p} x_3 + \frac{2-p}{2-q} k_1^{2-p} |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}} x_2 \right] + \frac{2-p}{p} |x_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} x_4 \right], \\ \Psi_{4\rho} &\leq \Delta_{4\rho} = \frac{2-p}{2p-1} \rho_4 |x_4|^{\frac{3(1-p)}{2p-1}} |\sigma_4|^{\frac{2p-1}{2-p} \frac{3q-2}{2q-1}} + \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} |\sigma_3|^{\frac{q-p}{(2p-1)q}} \\ &\quad \left[ \frac{q}{p} k_2^{\frac{2-p}{p}} |\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}} \left[ \frac{2-p}{1} |x_2|^{1-p} \rho_2 |\sigma_2|^{\frac{q-p}{2-p}} + \frac{2-p}{2-q} k_1^{2-p} \rho_1 |x_1|^{\frac{1+q-p}{2-q}} \right] + \frac{2-p}{p} |x_3|^{\frac{2(1-p)}{p}} \rho_3 |\sigma_3|^{\frac{2-p}{2-p} \frac{2q-1}{q}} \right]. \end{aligned}$$

Entrada de Control:  $v_5 = -k_5 [\sigma_5]^{\frac{3p-2}{2-p} \frac{4q-3}{3q-2}}$ ,  $p \in [3/4, 1)$ ,  $|w_5| \leq \rho_5 |\sigma_5|^{\frac{3p-2}{2-p} \frac{4q-3}{3q-2}}$ .

Después de algunas simplificaciones

$$\begin{aligned} \dot{V}_5 &\leq -(k_5 - \rho_5) |s_{5d}| |\sigma_5|^{\frac{3p-2}{2-p} \frac{4q-3}{3q-2}} - \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} \delta_4 \mathcal{V}_4 \\ &\quad + \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} k_4^{\frac{3-p}{3p-2}} \left[ \frac{5-4p}{2p-1} |s_5|^2 |\sigma_4|^{\frac{(2-p)(q-p)+3(1-p)(3q-2)(2p-1)}{(2-p)(3p-2)(2q-1)}} |x_4|^{\frac{3(1-p)}{2p-1}} + s_5 \Upsilon_4 \right], \end{aligned}$$

donde  $\mathcal{V}_4 = -V_4^{\frac{q-p}{(3p-2)(2q-1)}}$  y  $\Upsilon_4 = |\sigma_4|^{\frac{(2-p)(q-p)+3(1-p)(3q-2)(2p-1)}{(2-p)(3p-2)(2q-1)}} (\Psi_{4n} + \Delta_{4\rho}) + k_4 V_4^{\frac{q-p}{(3p-2)(2q-1)}} \sigma_4$ . Del Lema A.6, se concluye que  $\dot{V}_5$  es n.d. si la ganancia  $k_5$  se elije suficientemente grande. Por el Lema A.3,  $\dot{V}_5 \leq -\kappa_5 V_5^{\frac{7q-(4+p)}{(3-p)(3q-2)}}$ , con  $\kappa_5 = \min_{\{x: V_5=1\}} \{-\dot{V}_5\}$ .

Por homogeneidad:  $s_{5d}(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{\frac{(5-4p)(3q-2)}{3p-2}} s_{5d}(x)$ ,  $v_5(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{4q-3} v_5(x)$ ,  $V_5(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{\frac{(3-p)(3q-2)}{3p-2}} V_5(x)$ ,  $\dot{V}_5(\Delta_\epsilon^r x) = \epsilon^{\frac{7q-(4+p)}{3p-2}} \dot{V}_5(x)$ , con  $\Delta_\epsilon^r x = (\epsilon^{2-q} x_1, \epsilon^1 x_2, \epsilon^q x_3, \epsilon^{2q-1} x_4, \epsilon^{3q-2} x_5)$ .





D.O.O.10. *Sistema de tercer orden*

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2$ ,  $\dot{x}_3 = v_3 + w_3$ .

Variable de estado:  $s_3 = x_3 + k_2[\sigma_{2u}]^{\frac{p}{2-p}}$ .

Fdes:  $s_{3d} = [x_3]^{\frac{3-2p}{p}} + k_2^{\frac{3-2p}{p}} [\sigma_{2u}]^{\frac{3-2p}{2-p}}$ ,  $\sigma_3 = [x_3]^{\frac{2-p}{p}} + k_2^{\frac{2-p}{p}} \sigma_{2u}$ ,  $\sigma_{3u} = \mu\sigma_3 + \eta[\sigma_3]^{\frac{p(2q-1)}{q(2p-1)}}$ .

FLC:  $V_3 = \frac{p}{3-p}|x_3|^{\frac{3-p}{p}} + k_2^{\frac{3-2p}{p}} [\sigma_{2u}]^{\frac{3-2p}{2-p}} x_3 + \frac{3-2p}{3-p} k_2^{\frac{3-p}{p}} |\sigma_{2u}|^{\frac{3-p}{2-p}} + \delta_2(\mu V_2 + \eta V_2^{\frac{q}{p}})$ ,  $\delta_2 = k_2^{\frac{3-p}{p}}$ .

Derivada c.r. al tiempo de  $V_3$  a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= s_{3d}(v_3 + w_3) + \frac{3-2p}{2-p} k_2^{\frac{3-2p}{p}} s_3 |\sigma_{2u}|^{\frac{1-p}{2-p}} \dot{\sigma}_{2u} + \delta_2(\mu_2 + \eta_2 \frac{q-p}{p} V_2^{\frac{q-p}{p}}) (\sum_{i=1}^2 \frac{\partial V_2}{\partial x_i} \dot{x}_i), \\ \dot{V}_3 &= s_{3d}(v_3 + w_3) + \frac{3-2p}{2-p} k_2^{\frac{3-2p}{p}} s_3 |\sigma_{2u}|^{\frac{1-p}{2-p}} \dot{\sigma}_{2u} + \delta_2(\mu + \eta \frac{q}{p} V_2^{\frac{q-p}{p}}) \dot{V}_2 + \delta_2(\mu + \eta \frac{q}{p} V_2^{\frac{q-p}{p}}) \frac{\partial V_2}{\partial x_2} s_3, \end{aligned}$$

donde  $\dot{V}_2 < 0$ ,  $\frac{\partial V_2}{\partial x_2} = s_{2d}$ , y  $\dot{\sigma}_{2u} = \mu\dot{\sigma}_2 + \frac{q}{p}\eta|\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}}\dot{\sigma}_2$ , donde  $\dot{\sigma}_2 = \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} \dot{x}_2 = (2-p)|x_2|^{1-p}(x_3 + w_2) + k_1^{2-p}(\mu + \eta \frac{2-p}{2-q}|x_1|^{\frac{q-p}{2-q}})(x_2 + w_1)$ . Como  $x_3 = s_3 - k_2[\sigma_{2u}]^{\frac{q}{2-p}}$ , entonces,  $\dot{\sigma}_2 = \frac{2-p}{1}|x_2|^{1-p} s_3 + \Psi_{2n} + \Psi_{2\rho}$ ,

$$\begin{aligned} \Psi_{2n} &= -\frac{2-p}{1}|x_2|^{1-p} k_2 [\sigma_{2u}]^{\frac{p}{2-p}} + k_1^{2-p} (\mu + \eta \frac{2-p}{2-q} |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}}) x_2, \\ \Psi_{2\rho} &\leq \Delta_{2\rho} = \frac{2-p}{1}|x_2|^{1-p} \rho_2 |\sigma_{2u}|^{\frac{p}{2-p}} + k_1^{2-p} (\mu + \eta \frac{2-p}{2-q} |x_1|^{\frac{q-p}{2-q}}) \rho_1 |\sigma_{1u}|^{\frac{1}{2-p}}. \end{aligned}$$

Entrada de Control:  $v_3 = -k_3[\sigma_{3u}]^{\frac{2p-1}{2-p}}$ ,  $p \in [1/2, 1)$ ,  $|w_3| \leq \rho_3 |\sigma_{3u}|^{\frac{2p-1}{2-p}}$ .

Después de algunas simplificaciones

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &\leq -(k_3 - \rho_3)(\mu + \eta|\sigma_3|^{\frac{q-p}{q(2p-1)}})^{\frac{2p-1}{2-p}} |\sigma_3|^{\frac{p+1}{2-p}} - \delta_2(\mu V_2 + \eta \frac{q}{p} V_{2u}) + \Phi_3(x), \\ V_2 &= -\dot{V}_2, \quad V_{u2} = V_2^{\frac{q-p}{p}} \dot{V}_2, \\ \Phi_3(x) &= \frac{3-2p}{1} k_2^{\frac{3-2p}{p}} |s_3|^2 (\mu + \frac{q}{p}\eta|\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}}) |\sigma_{2u}|^{\frac{1-p}{2-p}} |x_2|^{1-p} + k_2^{\frac{3-2p}{p}} s_3 \Upsilon_{21}, \\ \Upsilon_{21} &= \frac{3-2p}{2-p} |\sigma_{2u}|^{\frac{1-p}{2-p}} [\mu(\Psi_{2n} + \Delta_{2\rho}) + \frac{q}{p}\eta|\sigma_2|^{\frac{q-p}{p}} (\Psi_{2n} + \Delta_{2\rho})] + k_2(\mu + \eta \frac{q}{p} V_2^{\frac{q-p}{p}}) s_{2d}. \end{aligned}$$

Entrada de Control:  $v_3 = -k_3\mu[\sigma_3]^{\frac{2p-1}{2-p}} - k_{3u}\eta[\sigma_3]^{\frac{p}{2-p} \frac{2q-1}{q}}$ ,  $|w_3| \leq \rho_m \mu |\sigma_3|^{\frac{2p-1}{2-p}} + \rho_{mu}\eta |\sigma_3|^{\frac{p}{2-p} \frac{2q-1}{q}}$ ,  $p \in [1/2, 1)$ .

Después de algunas simplificaciones

$$\dot{V}_3 \leq -(k_3 - \rho_m)\mu |s_{3d}| |\sigma_3|^{\frac{2p-1}{2-p}} - (k_{3u} - \rho_{mu})\eta |s_{3d}| |\sigma_3|^{\frac{p}{2-p} \frac{2q-1}{q}} - \delta_2(\mu V_2 + \eta \frac{q}{p} V_{2u}) + \Phi_3(x).$$

En ambos casos, del Lema A.6, se concluye que  $\dot{V}_3$  es n.d. si las ganancias  $k_3$  y  $k_{3u}$  se eligen suficientemente grandes. Por el Lema A.5, existe  $\kappa_3$  tal que  $\dot{V}_3 \leq -\kappa_3(\mu V_3^{\frac{2}{3-p}} + \eta V_3^{\frac{3q-p}{(3-p)q}})$ .

D.O.O.11. *Sistema de cuarto orden*

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2$ ,  $\dot{x}_3 = x_4 + w_3$ ,  $\dot{x}_4 = v_4 + w_4$ .

Variable de estado:  $s_4 = x_4 + k_3[\sigma_3]^{\frac{2p-1}{2-p}}$ ,  $p \in [2/3, 1)$ .

$$\text{Fdes: } s_{4d} = [\chi_4]_{\frac{4-3p}{2p-1}} + k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}} [\sigma_{3u}]_{\frac{4-3p}{2-p}}, \sigma_4 = [\chi_4]_{\frac{2-p}{2p-1}} + k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} \sigma_{3u}, \sigma_{4u} = \mu \sigma_4 + \eta [\sigma_4]_{\frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1}}.$$

$$\text{FLC: } V_4 = \frac{2p-1}{3-p} |\chi_4|_{\frac{3-p}{2p-1}} + k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}} [\sigma_{3u}]_{\frac{4-3p}{2-p}} \chi_4 + \frac{4-3p}{3-p} k_3^{\frac{3-p}{2p-1}} |\sigma_{3u}|_{\frac{3-p}{2-p}} + \delta_3 (\mu V_3 + \eta V_3^{\frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q}}), \delta_3 = k_3^{\frac{4-3p}{2p-1}}.$$

Derivada c.r. al tiempo de  $V_4$  a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= s_{4d}(v_4 + w_4) + \frac{4-3p}{2-p} k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} s_4 |\sigma_{3u}|_{\frac{2(1-p)}{2-p}} \dot{\sigma}_{3u} + \delta_3 (\mu + \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \eta V_3^{\frac{q-p}{(2p-1)q}}) (\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_3}{\partial x_i} \dot{x}_i), \\ \dot{V}_4 &= s_{4d}(v_4 + w_4) + \frac{4-3p}{2-p} k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} s_4 |\sigma_{3u}|_{\frac{2(1-p)}{2-p}} \dot{\sigma}_{3u} \\ &+ \delta_3 (\mu + \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \eta V_3^{\frac{q-p}{(2p-1)q}}) \dot{V}_3 + \delta_3 (\mu + \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \eta V_3^{\frac{q-p}{(2p-1)q}}) \frac{\partial V_3}{\partial x_3} s_4, \end{aligned}$$

donde  $\dot{V}_3 < 0$ ,  $\frac{\partial V_3}{\partial x_3} = s_{3d}$  y  $\dot{\sigma}_{3u} = \mu \dot{\sigma}_3 + \frac{p(2q-1)}{q(2p-1)} \eta |\sigma_3|_{\frac{q-p}{(2p-1)q}} \dot{\sigma}_3$ , con  $\dot{\sigma}_3 = \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_1} \dot{x}_2 + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_2} \dot{x}_3 + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} \dot{x}_4 = k_2^{\frac{2-p}{p}} (\mu + \frac{q}{p} \eta |\sigma_2|_{\frac{q-p}{p}}) \dot{\sigma}_2 + \frac{2-p}{p} |\chi_3|_{\frac{2(1-p)}{p}} x_4$ . Como  $x_4 = s_4 - k_3 [\sigma_{3u}]_{\frac{2p-1}{2-p}}$ , entonces,  $\dot{\sigma}_3 = \Psi_{3n} + \Psi_{3\rho} + \frac{2-p}{p} |\chi_3|_{\frac{2(1-p)}{p}} s_4$ ,

$$\begin{aligned} \Psi_{3n} &= -\frac{2-p}{p} k_3 |\chi_3|_{\frac{2(1-p)}{p}} [\sigma_{3u}]_{\frac{2p-1}{2-p}} + k_2^{\frac{2-p}{p}} (\mu + \frac{q}{p} \eta |\sigma_2|_{\frac{q-p}{p}}) \dot{\sigma}_2 \\ \Psi_{3\rho} &= \frac{2-p}{p} \rho_3 |\chi_3|_{\frac{2(1-p)}{p}} |\sigma_{3u}|_{\frac{2p-1}{2-p}} + k_2^{\frac{2-p}{p}} (\mu + \frac{q}{p} \eta |\sigma_2|_{\frac{q-p}{p}}) \dot{\sigma}_2. \end{aligned}$$

Entrada de control:  $v_4 = -k_4 [\sigma_{4u}]_{\frac{3p-2}{2-p}}$ ,  $p \in [2/3, 1)$ ,  $|w_4| \leq \rho_4 |\sigma_{4u}|_{\frac{2p-1}{2-p}}$ .

Después de algunas simplificaciones

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &\leq -(k_4 - \rho_4) |s_{4d}| |\sigma_{4u}|_{\frac{2p-1}{2-p}} - \delta_3 (\eta V_3 + \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \eta V_{u3}) + \Phi_4(x), \\ V_3 &= -\dot{V}_3, V_{u3} = -V_3^{\frac{q-p}{(2p-1)q}} \dot{V}_3, \\ \Phi_4(x) &= \frac{4-3p}{p} k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} |s_4|^2 (\mu + \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \eta |\sigma_3|_{\frac{q-p}{q(2p-1)}}) |\sigma_{3u}|_{\frac{2(1-p)}{2-p}} |\chi_3|_{\frac{2(1-p)}{p}} + k_2^{\frac{4-3p}{2p-1}} s_4 \Upsilon_3, \\ \Upsilon_3 &= \frac{4-3p}{2-p} |\sigma_{3u}|_{\frac{2(1-p)}{2-p}} [\mu + \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \eta |\sigma_3|_{\frac{q-p}{(2p-1)q}}] (\Psi_{3n} + \Delta_{3\rho}) \\ &+ k_2 (\mu + \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \eta V_3^{\frac{q-p}{(2p-1)q}}) s_{3d}. \end{aligned}$$

Entrada de control:  $v_4 = -k_4 \mu [\sigma_4]_{\frac{3p-2}{2-p}} - k_{4u} \eta [\sigma_4]_{\frac{2p-1}{2-p} \frac{3q-2}{2q-1}}$ ,  $|w_4| \leq \rho_m \mu |\sigma_4|_{\frac{3p-2}{2-p}} + \rho_{mu} \eta |\sigma_4|_{\frac{2p-1}{2-p} \frac{3q-2}{2q-1}}$ ,  $p \in [2/3, 1)$ .

Después de algunas simplificaciones

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &\leq -(k_4 - \rho_m) |s_{4d}| |\sigma_4|_{\frac{3p-2}{2-p}} - (k_4 - \rho_{mu}) |s_{4d}| |\sigma_4|_{\frac{2p-1}{2-p} \frac{3q-2}{2q-1}} - \delta_3 (\eta V_3 + \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \eta V_{u3}) \\ &+ \Phi_4(x). \end{aligned}$$

En ambos casos, del Lema A.6, se concluye que  $\dot{V}_4$  es n.d. si las ganancias  $k_4$  y  $k_{4u}$  se elige suficientemente grande. Por el Lema A.5, existe  $\kappa_4$  tal que  $\dot{V}_4 \leq -\kappa_4 (\mu V_4^{\frac{2}{3-p}} + \eta V_4^{\frac{5q-(2+p)}{(3-p)(2q-1)}})$ .

D.O.O.12. Sistema de quinto orden

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2$ ,  $\dot{x}_3 = x_4 + w_3$ ,  $\dot{x}_4 = x_5 + w_4$ ,  $\dot{x}_5 = v_5 + w_5$ .

Variable de estado:  $s_5 = x_5 + k_4 [\sigma_{4u}]_{\frac{3p-2}{2-p}}$ ,  $p \in [3/4, 1)$ .

Fdes:  $s_{5d} = [\chi_5]_{\frac{5-4p}{3p-2}} + k_{f4}^{\frac{5-4p}{3p-2}} [\sigma_{4u}]_{\frac{5-4p}{2-p}}$ ,  $\sigma_5 = [\chi_5]_{\frac{2-p}{3p-2}} + k_4^{\frac{2-p}{3p-2}} \sigma_{4u}^{\frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1}}$ ,  $\sigma_{5u} = \mu \sigma_5 + \eta [\sigma_5]_{\frac{3p-2}{4p-3} \frac{4q-3}{3q-2}}$ .

$$\text{FLC: } V_5 = \frac{3p-2}{3-p} |\chi_4|^{\frac{3-p}{3p-2}} + k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} [\sigma_{4u}]^{\frac{5-4p}{2-p}} \chi_4 + \frac{5-4p}{3-p} k_4^{\frac{3-p}{3p-2}} |\sigma_{4u}|^{\frac{3-p}{2-p}} + \delta_4 (\mu V_4 + \eta V_4^{\frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1}}), \delta_4 = k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}}.$$

Derivada c.r. al tiempo de  $V_5$  a lo largo de las trayectorias del sistema:

$$\begin{aligned} \dot{V}_5 &= s_{5d}(v_5 + w_5) + \frac{5-4p}{3p-2} k_4^{\frac{2-p}{3p-2}} s_5 |\sigma_{4u}|^{\frac{3(1-p)}{2-p}} \dot{\sigma}_{4u} + \delta_4 (\mu + \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} \eta V_4^{\frac{q-p}{(3p-2)(2q-1)}}) (\sum_{i=1}^4 \frac{\partial V_4}{\partial x_i} \dot{x}_i), \\ \dot{V}_5 &= s_{5d}(v_5 + w_5) + \frac{5-4p}{3p-2} k_4^{\frac{2-p}{3p-2}} s_5 |\sigma_{4u}|^{\frac{3(1-p)}{2-p}} \dot{\sigma}_{4u} \\ &+ \delta_4 (\mu + \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} \eta V_4^{\frac{q-p}{(3q-2)(2q-1)}}) \dot{V}_4 + \delta_4 (\mu + \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} \eta V_4^{\frac{q-p}{(3q-2)(2q-1)}}) \frac{\partial V_4}{\partial x_4} s_5, \end{aligned}$$

$$\text{donde } \dot{V}_4 < 0, \frac{\partial V_4}{\partial x_4} = s_{4d}, \text{ y } \dot{\sigma}_{4u} = (\mu + \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} \eta |\sigma_4|^{\frac{q-p}{(3p-2)(2q-1)}}) \dot{\sigma}_4, \text{ con } \dot{\sigma}_4 = \frac{\partial \sigma_4}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \sigma_4}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial \sigma_4}{\partial x_3} \dot{x}_3 + \frac{\partial \sigma_4}{\partial x_4} \dot{x}_4 = k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} (\mu + \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \eta |\sigma_3|^{\frac{q-p}{(2p-1)q}}) \dot{\sigma}_3 + \frac{2-p}{2p-1} |\chi_4|^{\frac{3(1-p)}{p}} \chi_5.$$

$$\text{Como } x_5 = s_5 - k_4 [\sigma_{4u}]^{\frac{3p-2}{2-p}}, \text{ entonces, } \dot{\sigma}_{4u} = \frac{2-p}{2p-1} |\chi_4|^{\frac{3(1-p)}{p}} \chi_5 + \Psi_{4n} + \Psi_{4\rho},$$

$$\begin{aligned} \Psi_{4n} &= -\frac{2-p}{2p-1} k_4 |\chi_4|^{\frac{3(1-p)}{2p-1}} [\sigma_{4u}]^{\frac{3p-2}{2-p}} + k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} (\mu + \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \eta |\sigma_3|^{\frac{q-p}{(2p-1)q}}) \dot{\sigma}_3, \\ \Psi_{4\rho} &= \frac{2-p}{2p-1} \rho_4 |\chi_4|^{\frac{3(1-p)}{2p-1}} |\sigma_{4u}|^{\frac{3p-2}{2-p}} + k_3^{\frac{2-p}{2p-1}} (\mu + \frac{p}{2p-1} \frac{2q-1}{q} \eta |\sigma_3|^{\frac{q-p}{(2p-1)q}}) \dot{\sigma}_3. \end{aligned}$$

$$\text{Entrada de control: } v_5 = -k_5 [\sigma_{5u}]^{\frac{4p-3}{2-p}}, p \in [3/4, 1), |w_5| \leq \rho_5 |\sigma_{5u}|^{\frac{4q-3}{2-p}}.$$

Después de algunas simplificaciones

$$\begin{aligned} \dot{V}_5 &\leq -(k_5 - \rho_5) |s_{5d}| |\sigma_{5u}|^{\frac{4p-3}{2-p}} - \delta_4 (\mu V_4 + \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} \eta V_{u4}) + \Phi_5(x), \\ V_4 &= -\dot{V}_4, V_{u4} = -V_4^{\frac{q-p}{(3q-2)(2q-1)}} \dot{V}_4, \\ \Phi_5(x) &= \frac{5-4p}{2p-1} k_4^{\frac{5-4p}{3p-2}} |s_5|^2 (\mu + \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} \eta |\sigma_4|^{\frac{q-p}{(3p-2)(2q-1)}}) |\sigma_{4u}|^{\frac{3(1-p)}{2-p}} |\chi_4|^{\frac{3(1-p)}{2p-1}} + k_4^{\frac{2-p}{3p-2}} s_5 \Upsilon_4, \\ \Upsilon_4 &= \frac{5-4p}{2-p} |\sigma_{4u}|^{\frac{3(1-p)}{2-p}} [\mu + \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} \eta |\sigma_4|^{\frac{q-p}{(3p-2)(2q-1)}}] (\Psi_{3n} + \Delta_{3\rho}) + k_2 (\mu + \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} \eta V_3^{\frac{q-p}{(3p-2)(2q-1)}}) s_{4d}. \end{aligned}$$

$$\text{Entrada de control: } v_5 = -k_5 \mu [\sigma_5]^{\frac{4p-3}{2-p}} - k_5 \eta [\sigma_5]^{\frac{3p-2}{2-p} \frac{4q-3}{3q-2}}, |w_5| \leq \rho_m |\sigma_5|^{\frac{4p-3}{2-p}} - \rho_{m\eta} \eta |\sigma_5|^{\frac{3p-2}{2-p} \frac{4q-3}{3q-2}}, p \in [3/4, 1).$$

Después de algunas simplificaciones

$$\dot{V}_5 \leq -(k_5 - \rho_m) \mu |s_{5d}| |\sigma_5|^{\frac{4p-3}{2-p}} - (k_{5\eta} - \rho_{m\eta}) \eta |s_{5d}| |\sigma_5|^{\frac{3p-2}{2-p} \frac{4q-3}{3q-2}} - \delta_4 (\mu V_4 + \frac{2p-1}{3p-2} \frac{3q-2}{2q-1} \eta V_{u4}) + \Phi_5(x).$$

En ambos casos, del Lema A.6, se concluye que  $\dot{V}_5$  es n.d. si las ganancias  $k_5$  y  $k_{5\eta}$  se eligen suficientemente grandes. Por el Lema A.5, existe  $\kappa_5$  tal que  $\dot{V}_5 \leq$

$$-\kappa_5 (\mu V_5^{\frac{2}{3-p}} + \eta V_5^{\frac{7q-(4+p)}{(3-p)(3q-2)}}).$$



## CÁLCULOS EXPLÍCITOS: TEOREMA 7.6

E.O.O.13. *Sistema homogéneo de tercer orden*

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1(x, t)$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2(x, t)$ ,  $\dot{x}_3 = v_3 + w_3(x, t)$ .

Variable de estado:  $\sigma_3 = x_3 + k_2[\sigma_2]^q$ .

En las coordenadas  $(x_1, \sigma_2, \sigma_3)$ :

$$\dot{x}_1 = v_1 + w_1 + \sigma_2, \quad \dot{\sigma}_2 = v_2 + w_2 + \sigma_3 - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \dot{x}_1, \quad \dot{\sigma}_3 = v_3 + w_3 - \frac{\partial v_2}{\partial \sigma_2} \dot{\sigma}_2. \quad (204)$$

FLC:  $V_3 = \frac{1}{2}|\sigma_3|^2 + \delta_2 V_2^q$ ,  $\delta_2 = k_2^2$ .

Derivada c.r. al tiempo de  $V_3$  a lo largo de las trayectorias de (204):

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= \sigma_3[v_3 + w_3 + qk_2|\sigma_2|^{q-1}\dot{\sigma}_2] + q\delta_2 V_2^{q-1} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{\partial V_2}{\partial x_i} \dot{x}_i \right), \\ \dot{V}_3 &\leq \sigma_3[v_3 + w_3 + qk_2|\sigma_2|^{q-1}\dot{\sigma}_2] + q\delta_2 V_2^{q-1} \dot{V}_2 + q\delta_2 V_2^{q-1} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \sigma_3, \end{aligned}$$

ya que  $\sum_{i=1}^2 \frac{\partial V_2}{\partial x_i} \dot{x}_i = \dot{V}_2 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \sigma_3$ , donde  $\dot{V}_2 < 0$ , y  $\frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \sigma_2$ . Además,  $\dot{\sigma}_2 = \Psi_{2n} + \sigma_3 + \Psi_{2\rho}$ , donde

$$\Psi_{2n} = \frac{1}{2-q} k_1 |x_1|^{\frac{q-1}{2-q}} x_2 - k_2 [\sigma_2]^q, \quad \Psi_{2\rho} = w_2 - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} w_1 \leq \Delta_{2\rho} = \frac{1}{2-q} k_1 \rho_1 |x_1|^{\frac{q}{2-q}} + \rho_2 |\sigma_2|^q.$$

Entrada de Control:  $v_3 = -k_3 [\sigma_3]^{\frac{2q-1}{q}}$ ,  $q \in (1, 2)$ ,  $|w_3| \leq \rho_3 |\sigma_3|^{\frac{2q-1}{q}}$ .

Después de algunas simplificaciones

$$\dot{V}_3 \leq -(k_3 - \rho_3) |\sigma_3|^{\frac{3q-1}{q}} - q\delta_2 V_2 + qk_2 |\sigma_3|^2 |\sigma_2|^{q-1} + qk_2 \sigma_3 \Upsilon_2,$$

donde  $\Upsilon_2 = -V_2^{q-1} \dot{V}_2 \geq 0$ , y  $\Upsilon_2 = |\sigma_2|^{q-1} (\Psi_{2n} + \Delta_{2\rho}) + k_2 V_2^{q-1} \sigma_2$ . Del Lema A.6, se concluye que  $\dot{V}_3$  es n.d. si la ganancia  $k_3$  se elige suficientemente grande. Por el

Lema A.3,  $\dot{V}_3 \leq -\kappa_3 V_3^{\frac{3q-1}{2q}}$ , con  $\kappa_3 = \min_{\{x: V_3=1\}} \{-\dot{V}_3\}$ .

E.O.O.14. *Sistema homogéneo de cuarto orden*

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2$ ,  $\dot{x}_3 = x_4 + w_3$ ,  $\dot{x}_4 = v_4 + w_4$ .

Variable de estado:  $\sigma_4 = x_4 + k_3 [\sigma_3]^{\frac{2q-1}{q}}$ .

En las coordenadas  $(x_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ :

$$\dot{x}_1 = v_1 + w_1 + \sigma_2, \quad \dot{\sigma}_2 = v_2 + w_2 + \sigma_3 - \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \dot{x}_1, \quad \dot{\sigma}_3 = v_3 + w_3 - \frac{\partial v_2}{\partial \sigma_2} \dot{\sigma}_2, \quad \dot{\sigma}_4 = v_4 + w_4 - \frac{\partial v_3}{\partial \sigma_3} \dot{\sigma}_3. \quad (205)$$

FLC:  $V_4 = \frac{1}{2}|\sigma_4|^2 + \delta_3 V_3^{\frac{2q-1}{q}}$ ,  $\delta_3 = k_3^2$ .

Derivada c.r. al tiempo de  $V_4$  a lo largo de las trayectorias de (205):

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= \sigma_4[v_4 + w_4 + \frac{2q-1}{q} k_3 |\sigma_3|^{\frac{q-1}{q}} \dot{\sigma}_3] + \frac{2q-1}{q} \delta_3 V_3^{\frac{q-1}{q}} \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_3}{\partial x_i} \dot{x}_i \right), \\ \dot{V}_4 &\leq \sigma_4[v_4 + w_4 + \frac{2q-1}{q} k_3 |\sigma_3|^{\frac{q-1}{q}} \dot{\sigma}_3] + \frac{2q-1}{q} \delta_3 V_3^{\frac{q-1}{q}} \dot{V}_3 + \frac{2q-1}{q} \delta_3 V_3^{\frac{q-1}{q}} \frac{\partial V_3}{\partial \sigma_3} \sigma_4, \end{aligned}$$

ya que  $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial V_3}{\partial x_i} \dot{x}_i = \dot{V}_3 + \frac{\partial V_3}{\partial \sigma_3} \sigma_4$ , donde  $\dot{V}_3 < 0$ , y  $\frac{\partial V_3}{\partial \sigma_3} = \sigma_3$ . Además,  $\dot{\sigma}_3 = \Psi_{3n} + \sigma_4 + \Psi_{3\rho}$ ,  $\Psi_{3\rho} = w_3 - \frac{\partial v_2}{\partial \sigma_2} \dot{\sigma}_2$ ,

$$\begin{aligned} \Psi_{3n} &= \frac{q}{2-q} k_2 k_1 |\sigma_2|^{q-1} |x_1|^{\frac{q-1}{2-q}} x_2 + qk_2 |\sigma_2|^{q-1} x_3 - k_3 [\sigma_3]^{\frac{2q-1}{q}}, \\ \Psi_{3\rho} &\leq \Delta_{3\rho} = \frac{q}{2-q} k_2 k_1 \rho_1 |\sigma_2|^{q-1} |x_1|^{\frac{q}{2-q}} + qk_2 \rho_2 |\sigma_2|^{2q-1} + \rho_3 |\sigma_3|^{\frac{2q-1}{q}} \end{aligned}$$

Entrada de Control:  $v_4 = -k_4[\sigma_4]^{\frac{3q-2}{2q-1}}$ ,  $q \in (1, 2)$ ,  $|w_4| \leq \rho_4|\sigma_4|^{\frac{3q-2}{2q-1}}$ .  
Después de algunas simplificaciones:

$$\dot{V}_4 \leq -(k_4 - \rho_4)|\sigma_4|^{\frac{5q-3}{2q-1}} - \frac{2q-1}{q}\delta_4\mathcal{V}_3 + \frac{2q-1}{q}k_3|\sigma_4|^2|\sigma_3|^{\frac{q-1}{q}} + \frac{2q-1}{q}k_3\sigma_4\Upsilon_3,$$

donde  $\mathcal{V}_3 = -V_3^{\frac{q-1}{q}}\dot{V}_3 \geq 0$ , y  $\Upsilon_3 = |\sigma_3|^{\frac{q-1}{q}}(\Psi_{3n} + \Delta_{3\rho}) + k_3V_3^{\frac{q-1}{q}}\sigma_3$ . Del Lema A.6, se concluye que  $\dot{V}_4$  es n.d. si la ganancia  $k_4$  se elije suficientemente grande. Por el Lema A.3,  $\dot{V}_4 \leq -\kappa_4V_4^{\frac{5q-3}{2(2q-1)}}$ , con  $\kappa_4 = \min_{\{x:V_4=1\}}\{-\dot{V}_4\}$ .

E.O.O.15. *Sistema homogéneo de quinto orden*

Sistema:  $\dot{x}_1 = x_2 + w_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_3 + w_2$ ,  $\dot{x}_3 = x_4 + w_3$ ,  $\dot{x}_4 = x_5 + w_4$ ,  $\dot{x}_5 = v_5 + w_5$ .

Variable de estado:  $\sigma_5 = x_5 + k_4[\sigma_4]^{\frac{3q-2}{2q-1}}$ .

En las coordenadas  $(x_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1 + w_1 + \sigma_2, \quad \dot{\sigma}_2 = v_2 + \sigma_3 + w_2 - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\dot{x}_1, \quad \dot{\sigma}_3 = v_3 + w_3 - \frac{\partial v_2}{\partial \sigma_2}\dot{\sigma}_2, \\ \dot{\sigma}_4 &= v_4 + w_4 - \frac{\partial v_3}{\partial \sigma_3}\dot{\sigma}_3, \quad \dot{\sigma}_5 = v_5 + w_5 - \frac{\partial v_4}{\partial \sigma_4}\dot{\sigma}_4. \end{aligned} \quad (206)$$

FLC:  $V_5 = \frac{1}{2}|\sigma_5|^2 + \delta_4V_4^{\frac{3q-2}{2q-1}}$ ,  $\delta_4 = k_4^2$ .

Derivada c.r. al tiempo de  $V_5$  a lo largo de las trayectorias de (206):

$$\dot{V}_5 = \sigma_5[v_5 + w_5 + \frac{3q-2}{2q-1}k_4|\sigma_4|^{\frac{q-1}{2q-1}}\dot{\sigma}_4] + \frac{3q-2}{2q-1}\delta_4V_4^{\frac{q-1}{2q-1}}\dot{V}_4 + \frac{3q-2}{2q-1}\delta_4V_4^{\frac{q-1}{2q-1}}\frac{\partial V_4}{\partial x_4}\sigma_5,$$

donde  $\dot{V}_4 < 0$ , y  $\frac{\partial V_4}{\partial x_4} = \sigma_4$ . Además,  $\dot{\sigma}_4 = \Psi_{4n} + \sigma_5 + \Psi_{4\rho}$ ,

$$\begin{aligned} \Psi_{4n} &= \frac{2q-1}{2-q}k_3k_2k_1|\sigma_3|^{\frac{q-1}{q}}|\sigma_2|^{q-1}|x_1|^{\frac{q-1}{2-q}}x_2 + \frac{2q-1}{1}k_3k_2|\sigma_3|^{\frac{q-1}{q}}|\sigma_2|^{q-1}x_3 \\ &+ \frac{2q-1}{q}k_3|\sigma_3|^{\frac{q-1}{q}}x_4 - k_4[\sigma_4]^{\frac{3q-2}{2q-1}}, \\ \Psi_{4\rho} &\leq \Delta_{4\rho} = \frac{2q-1}{2-q}k_3k_2\rho_1|\sigma_3|^{\frac{q-1}{q}}|\sigma_2|^{q-1}|x_1|^{\frac{q-1}{2-q}} + \frac{2q-1}{1}k_3\rho_2|\sigma_3|^{\frac{q-1}{q}}|\sigma_2|^{2q-1} \\ &+ \frac{2q-1}{q}\rho_3|\sigma_3|^{\frac{3q-2}{q}} + \rho_4|\sigma_4|^{\frac{3q-2}{2q-1}}, \end{aligned}$$

Entrada de Control:  $v_5 = -k_5[\sigma_5]^{\frac{4q-3}{3q-2}}$ ,  $q \in (1, 2)$ ,  $|w_5| \leq \rho_5|\sigma_5|^{\frac{4q-3}{3q-2}}$ .

Después de algunas simplificaciones:

$$\dot{V}_5 \leq -(k_5 - \rho_5)|\sigma_5|^{\frac{7q-5}{3q-2}} - \frac{3q-2}{2q-1}\delta_5\mathcal{V}_4 + \frac{3q-2}{2q-1}k_4|\sigma_5|^2|\sigma_4|^{\frac{q-1}{q}} + \frac{3q-2}{2q-1}k_4\sigma_5\Upsilon_4,$$

donde  $\mathcal{V}_4 = -V_4^{\frac{q-1}{2q-1}}\dot{V}_4 \geq 0$ ,  $\Upsilon_4 = |\sigma_4|^{\frac{q-1}{2q-1}}\Psi_4 + k_4V_4^{\frac{q-1}{2q-1}}$ . Del Lema A.6, se concluye que  $\dot{V}_4$  es n.d. si la ganancia  $k_4$  se elije suficientemente grande. Por el Lemma A.3,  $\dot{V}_5 \leq -\kappa_5V_5^{\frac{7q-5}{2(2q-1)}}$ , con  $\kappa_5 = \min_{\{x:V_5=1\}}\{-\dot{V}_5\}$ .

## ESTIMACIÓN DE LA CONSTANTE DE TIEMPO FIJO: SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Para diseñar las ganancias dada una constante de tiempo fijo se necesita calcular una cota explícita de la derivada  $\dot{V}$ . Para orden dos, se cumple que

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}|x_2|^3 + k_1^2 \sigma_1 x_2 + \frac{4}{3} k_1^3 |\sigma_1|^{\frac{3}{2}}, \\ \dot{V} &\leq -a_{22} \mu |\sigma_2| - k_1^4 \mu |\sigma_1| - b_{22} \eta |\sigma_2|^{\frac{2+q}{2}} - \frac{2\eta}{2-q} k_1^2 b_{21} |x_1|^{\frac{2-q}{2}} |\sigma_1|, \end{aligned} \quad (207)$$

donde  $a_{22} = k_2 K_m - \rho - 2k_1^2$ ,  $b_{22} = k_{2u} K_m - \rho_u - 2k_1^2 \frac{4}{4-q^2}$ , y  $b_{21} = k_1^2 - 2 \frac{q}{2+q} \eta^{-1}$ .

Del Lema A.1, se deduce que  $-(\frac{2}{3} \gamma_l^{\frac{3}{2}} |\sigma_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \gamma_l^{-3} |x_2|^3) \leq |\sigma_1| |x_2| \leq \frac{2}{3} \gamma_u^{\frac{3}{2}} |\sigma_1|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \gamma_u^{-3} |x_2|^3$ . Por lo tanto, la función  $V$  cumple

$$a_1 |\sigma_1|^{\frac{3}{2}} + a_2 |x_2|^3 \leq V \leq b_1 |\sigma_1|^{\frac{3}{2}} + b_2 |x_2|^3,$$

donde  $a_1 = \frac{2}{3} k_1^2 (2k_1 - \gamma_l^{\frac{3}{2}})$ ,  $a_2 = \frac{1}{3} (1 - k_1^2 \gamma_l^{-3})$ ,  $b_1 = \frac{2}{3} k_1^2 (2k_1 + \gamma_u^{\frac{3}{2}})$ ,  $b_2 = \frac{1}{3} (1 + k_1^2 \gamma_u^{-3})$ . Por simplicidad se toman  $\mu = \eta$ ,  $\gamma_u = k_1^{3/2}$ , entonces  $b_1 = 2k_1^3$  y  $b_2 = 2/3$ . Aplicando el Lema A.4, un cálculo directo da

$$\begin{aligned} V^{\frac{2}{3}} &\leq (1/2)^{2/3} [(b_1^{\frac{2}{3}} + b_2^{\frac{2}{3}} k_1^2) |\sigma_1| + b_2^{\frac{2}{3}} |\sigma_2|], \\ V^{(2+q)/3} &\leq (0.5) 2^{\frac{q-1}{3}} [(b_1^{\frac{2+q}{3}} + 2^{\frac{q}{2}} b_2^{\frac{2+q}{3}} k_1^{2+q}) |\sigma_1|^{\frac{2+q}{2}} + 2^{\frac{q}{2}} b_2^{\frac{2+q}{3}} |\sigma_2|^{\frac{2+q}{2}}], \forall q \in [1, 2). \end{aligned}$$

Note que  $|\sigma_1|^{\frac{2+q}{2}} \leq \lambda_u [\delta_0 + \delta_1 |x_1|^{\frac{q}{2-q}}] |\sigma_1|$ , con  $\delta_0 = q, \delta_1 = (4-q), \lambda_u = 1/2 \frac{4-q}{2}$ ,  $\mu = \eta = 1$ , véase el Lema A.8. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V^{\frac{2+q}{3}} &\leq (0.5) 2^{\frac{q-1}{3}} (b_1^{\frac{2+q}{3}} + 2^{\frac{q}{2}} b_2^{\frac{2+q}{3}} k_1^{2+q}) \lambda_u \delta_0 |\sigma_1| + (0.5) 2^{\frac{q-1}{3}} \\ &\quad (b_1^{\frac{2+q}{3}} + 2^{\frac{q}{2}} b_2^{\frac{2+q}{3}} k_1^{2+q}) \lambda_u \delta_1 |x_1|^{\frac{q}{2-q}} |\sigma_1| + 2^{\frac{5q-2}{6}} b_2^{\frac{2+q}{3}} |\sigma_2|^{\frac{2+q}{2}}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mu V^{\frac{2}{3}} + \eta V^{\frac{2+q}{3}} &\leq (1/2)^{2/3} [(b_1^{\frac{2}{3}} + b_2^{\frac{2}{3}} k_1^2) |\sigma_1| + b_2^{\frac{2}{3}} |\sigma_2|] + (0.5) 2^{\frac{q-1}{3}} (b_1^{\frac{2+q}{3}} + 2^{\frac{q}{2}} b_2^{\frac{2+q}{3}} k_1^{2+q}) \lambda_u \delta_0 |\sigma_1| + \\ &\quad (0.5) 2^{\frac{q-1}{3}} (b_1^{\frac{2+q}{3}} + 2^{\frac{q}{2}} b_2^{\frac{2+q}{3}} k_1^{2+q}) \lambda_u \delta_1 |x_1|^{\frac{q}{2-q}} |\sigma_1| + 2^{\frac{5q-2}{6}} b_2^{\frac{2+q}{3}} |\sigma_2|^{\frac{2+q}{2}}. \end{aligned} \quad (208)$$

Para obtener la cota de  $\dot{V}$  en función de  $V$ , primero se igualan las funciones de bajo orden de  $\dot{V}$  en (207) y (208) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} a_{22} \mu |\sigma_2| + d_0 k_1^4 \mu |\sigma_1| &= \frac{a_{22}}{(0.5 b_2)^{\frac{2}{3}}} (0.5 b_2)^{\frac{2}{3}} \mu |\sigma_2| + \frac{d_0 k_1^4}{(0.5)^{2/3} (b_1^{\frac{2}{3}} + b_2^{\frac{2}{3}} k_1^2)} (0.5)^{2/3} (b_1^{\frac{2}{3}} + b_2^{\frac{2}{3}} k_1^2) \mu |\sigma_1| \\ &\geq \kappa_f \eta (0.5)^{2/3} [(b_1^{\frac{2}{3}} + b_2^{\frac{2}{3}} k_1^2) |\sigma_1| + b_2^{\frac{2}{3}} |\sigma_2|] = \kappa_f \eta V^{\frac{2}{3}}, \end{aligned}$$

donde  $\kappa_f = \min\{a_{22}/(0.5 b_2)^{\frac{2}{3}}, d_0 k_1^4 / [(0.5)^{2/3} (b_1^{\frac{2}{3}} + b_2^{\frac{2}{3}} k_1^2)]\}$ ,  $d_0 = 2/3$  y  $d_1 = 1/3$ , ya que  $d_0 + d_1 = 1$ . Fijando  $K_m k_2$  como en (104), se obtiene  $a_{22}/(0.5 b_2)^{\frac{2}{3}} = d_0 k_1^4 / [(0.5)^{2/3} (b_1^{\frac{2}{3}} + b_2^{\frac{2}{3}} k_1^2)]$ . Entonces,  $\kappa_f = d_0 k_1^2 / [(0.5)^{2/3} (2^{\frac{2}{3}} + (2/3)^{\frac{2}{3}})]$ . Ahora, de forma similar, se igualan los términos de alto orden de  $\dot{V}$  en (207) y (208), por lo tanto,

$$\begin{aligned} d_1 k_1^4 \mu |\sigma_1| + b_{22} \eta |\sigma_2|^{\frac{2+q}{2}} + \frac{2}{2-q} k_1^2 \eta b_{21} |x_1|^{\frac{q}{2-q}} |\sigma_1| &\geq \frac{d_1 k_1^4 (0.5) [2^{\frac{q-1}{3}} (b_1^{\frac{2+q}{3}} + 2^{\frac{q}{2}} b_2^{\frac{2+q}{3}} k_1^{2+q}) \lambda_u \delta_0]}{(0.5) 2^{\frac{q-1}{3}} (b_1^{\frac{2+q}{3}} + 2^{\frac{q}{2}} b_2^{\frac{2+q}{3}} k_1^{2+q}) \lambda_u \delta_0} \eta |\sigma_1| \\ + \kappa_u (0.5) \eta \cdot [2^{\frac{q-1}{3}} (b_1^{\frac{2+q}{3}} + 2^{\frac{q}{2}} b_2^{\frac{2+q}{3}} k_1^{2+q}) \lambda_u \delta_1 |x_1|^{\frac{q}{2-q}} |\sigma_1| + 2^{\frac{5q-2}{6}} b_2^{\frac{2+q}{3}} |\sigma_2|^{\frac{2+q}{2}}], \end{aligned}$$

*Para poder hacer el diseño se ha tomado  $\gamma_1 = 1$ . Consulte el Paso 2 de la Prueba de la Proposición 5.6.*

donde se ha elegido  $K_m k_{2u}$  como en (104) para obtener

$$\kappa_{u1} = \frac{b_{22}}{(0.5)2^{\frac{5q-2}{6}} b_2^{\frac{2+q}{3}}} = \frac{2^{-\frac{2}{q}} k_1^2 b_{21}}{(0.5)2^{\frac{q-1}{3}} (b_1^{\frac{2+q}{3}} + 2^{\frac{q}{2}} b_2^{\frac{2+q}{3}} k_1^{2+q}) \lambda_u \delta_1}.$$

Definiendo  $\kappa_u = \text{mín}\{\kappa_{u1}, 2d_1 k_1^4 / [2^{\frac{q-1}{3}} (b_1^{\frac{2+q}{3}} + 2^{\frac{q}{2}} b_2^{\frac{2+q}{3}} k_1^{2+q}) \lambda_u \delta_0]\}$ , se obtiene  $\dot{V} \leq -\kappa_f \eta V^{\frac{2}{3}} - \kappa_u \eta V^{\frac{2+q}{3}}$ ,  $\forall q \in (1, 2)$ . El tiempo de convergencia  $T(x_0)$  está acotado por un constante de tiempo fijo  $T_p$  como en (106), con  $\mu = \eta$ .  $T_p$  alcanza su mínimo cuando  $r = (\kappa_f / \kappa_u)^{3/q}$ , si  $\mu = \eta$ . Por lo tanto,

$$T_p = \frac{3}{\kappa_f \eta} \left(\frac{\kappa_f}{\kappa_u}\right)^{1/q} + \frac{3}{(q-1)\kappa_u \eta} \left(\frac{\kappa_u}{\kappa_f}\right)^{(q-1)/q} = \frac{3q}{\eta(q-1)} \left(\frac{\kappa_f^{1-q}}{\kappa_u}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Si  $\kappa_u = d_1 k_1^4 / [(0.5)2^{\frac{q-1}{3}} (b_1^{\frac{2+q}{3}} + 2^{\frac{q}{2}} b_2^{\frac{2+q}{3}} k_1^{2+q}) \lambda_u \delta_0]$ ,

$$T_p = \frac{q^{1/q} \chi(q)}{\eta d_1^{1/q} k_1} \Rightarrow k_1 = \frac{q^{1/q} \chi(q)}{\eta d_1^{1/q} T_p},$$

con  $\chi(q)$  como en (105). Si  $\kappa_u = \frac{2}{2-q} k_1^2 b_{21} / [(0.5)2^{\frac{q-1}{3}} (b_1^{\frac{2+q}{3}} + 2^{\frac{q}{2}} b_2^{\frac{2+q}{3}} k_1^{2+q}) \lambda_u \delta_1]$ , se obtiene

$$T_p = \frac{(2-q)(4-q)^{1/q} \chi(q) k_1^{\frac{2-q}{q}}}{\eta (2)^{1/q} b_{21}^{1/q}} \Rightarrow \frac{b_{21}}{k_1^{2-q}} = \left(\frac{(2-q)(4-q)^{1/q} \chi(q)}{\eta (2)^{1/q} T_p}\right)^q,$$

la cual es la ganancia mínima estimada en (105).



## PUBLICACIONES

---

### PUBLICACIONES EN CONGRESOS INTERNACIONALES:

1. Cruz-Zavala, Emmanuel, Moreno Jaime, A., Fridman, Leonid, Uniform Second Order Sliding Mode Observer for Mechanical Systems, In Proc. of the Variable Structure Systems Workshop, pp. 14–19, Mexico city, Mexico, 2010.
2. Cruz-Zavala, Emmanuel, Moreno Jaime, A., Fridman, Leonid, Uniform Robust Exact Differentiator, in Proc. Conference on Decision and Control, pp. 102–107, Atlanta, USA, 2010.
3. Cruz-Zavala, Emmanuel, Moreno Jaime, A., Fridman, Leonid, Adaptive Gains Super-Twisting Algorithm for Systems with Growing Perturbations, In the 18th IFAC World Congress, pp. 3039–3044, Milano, Italy, 2011.
4. Cruz-Zavala, Emmanuel, Moreno Jaime, A., Fridman, Leonid, Second-Order Uniform Sliding Exact Mode Control with Uniform Sliding Surface, 50th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 4616–4621, Florida, USA, 2011.
5. Cruz-Zavala, Emmanuel, Moreno Jaime, A., Fridman, Leonid, Asymptotic Stabilization in Fixed Time via Sliding Mode Control, 51th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 6460–6465, Hawaii, USA, 2012.
6. Cruz-Zavala, Emmanuel, Moreno Jaime, A., Fridman, Leonid, Fast Second-Order Sliding Mode Control design based on Lyapunov function, 52th IEEE Conference on Decision and Control, pp. 2858–2863, Florence, Italy, 2013.
7. Cruz-Zavala, Emmanuel, Moreno Jaime, A., Improved convergence rate of discontinuous finite-time controllers, In the 19th IFAC World Congress, pp. 8636–8641, Cape Town, South Africa, 2014.
8. Cruz-Zavala, Emmanuel, Moreno Jaime, A., A new class of fast finite-time discontinuous controllers, In Proc. of the Variable Structure Systems Workshop, pp. 1–6, Nantes, France, 2014.
9. Cruz-Zavala, Emmanuel, Moreno Jaime, A., An output feedback scheme for the terminal sliding controller based on Lyapunov functions, In Proc. of the XVI Latin American Control Conference, pp. 194–199, Quintana Roo, México, 2014.

### PUBLICACIONES EN CONGRESOS NACIONALES:

1. Cruz-Zavala, Emmanuel, Moreno Jaime, A., Fridman, Leonid, Diferenciador robusto exacto y uniforme, Nacional 2010 de la Asociación de México de Control Automático, 2010.
2. Cruz-Zavala, Emmanuel, Moreno Jaime, A., Fridman, Leonid, Estabilización en Tiempo Fijo via Modos Deslizantes, Nacional 2012 de la Asociación de México de Control Automático, 2012.
3. Cruz-Zavala, Emmanuel, Moreno Jaime, A., Fridman, Leonid, Estabilización en Tiempo Fijo de un sistema de segundo orden, Nacional 2013 de la Asociación de México de Control Automático, 2013.

## PUBLICACIONES EN REVISTA:

1. Cruz-Zavala, Emmanuel, Moreno Jaime, A., Fridman Leonid, Uniform Robust Exact Differentiator, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.56, no. 11, pp. 2727–2733, Nov. 2011.
2. Cruz-Zavala, Emmanuel, Moreno Jaime, A., Fridman Leonid, Uniform Sliding Mode Controllers and Uniform Sliding Surfaces, IMA Journal of Mathematical Control and Information, vol. 29, no. 4, pp. 491-505, 2012.

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] J. Adamy and A. Flemming. Soft variable-structure controls: a survey. *Automatica*, 40:1821–1844, 2004.
- [2] V. Andrieu, L. Praly, and A. Astolfi. Homogeneous approximation, recursive observer design and output feedback. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 47(4):1814–1850, 2008.
- [3] M.T. Angulo, J.A. Moreno, and L. Fridman. Robust exact uniformly convergent arbitrary order differentiator. *Automatica*, 49(8):2489–2495, 2013.
- [4] Z. Artstein. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Anal.*, 7:1163–1173, 1983.
- [5] J. Aubin and A. Cellina. *Differential inclusions: Set-valued maps and Viability Theory*. Springer, New York, 1984.
- [6] A. Bacciotti and L. Rosier. *Lyapunov functions and stability in control theory*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 2005.
- [7] B. Bandyopadhyay, A. Deepak, and K. S. Kim. *Sliding Mode Control Using Novel Sliding Surfaces*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 392, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [8] G. Bartolini, A. Ferrera, and E. Usai. Chattering avoidance by second-order sliding mode control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 43(2):241–246, 1998.
- [9] A. Bartoszewicz and A. Nowacka-Leverton. *Time-Varying Sliding Modes for Second and Third Order Systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 382, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [10] D. S. Bernstein. *Matrix Mathematics: theory, facts, and formulas*. Princeton University Press, New Jersey, 2009.
- [11] E. Bernuau, E. Efimov, W. Perruquetti, and A. Polyakov. On homogeneity and its application in sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, 351(4):1866–1906, 2014.
- [12] G. Besancon. Global output feedback tracking control for a class of Lagrangian systems. *Automatica*, 36:1915–1921, 2000.
- [13] S.P Bhat and D.S. Bernstein. Lyapunov analysis of finite-time differential equations. In *in Proceedings of the American Control Conference*, pages 1831–1832, Seattle, WA, 1995.
- [14] S.P. Bhat and D.S. Bernstein. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators. *IEEE Trans. Autom. Control*, 43:678–682, 1998.
- [15] S.P. Bhat and D.S. Bernstein. Finite-time stability of continuous autonomous systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38:751–766, 2000.
- [16] S.P Bhat and D.S. Bernstein. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 17(2):101–127, 2005.
- [17] T. Cai, L. Liu, J. Huang, and W Zhang. Globally asymptotical stabilization for a class of feedback linearizable differential inclusion systems. *IET Control Theory Appl.*, 5:1586–1596, 2010.

- [18] W.J. Cao and J.X. Xu. Nonlinear integral-type sliding surface for both with matched and unmatched uncertain systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 49(8):1355–1360, 2004.
- [19] F. Castaños and L. Fridman. Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 51(5):853–858, 2006.
- [20] F.H. Clarke, Y.S. Ledyaev, and R.J. Stern. Asymptotic stability and smooth Lyapunov functions. *Journal of Differential Equations*, 149:69–114, 1998.
- [21] J.M. Coron and L. Rosier. A relation between continuous time-varying and discontinuous feedback stabilization. *J. Math. Systems Estimation Control*, 4:67–84, 1994.
- [22] A.H. Cruz. *Sintiendo el Viaje*. Publicación Independiente, México, 2014.
- [23] E. Cruz-Zavala, J.A. Moreno, and L. Fridman. Uniform second-order sliding mode observer for mechanical systems,. In *IFAC 11th International Workshop on Variable Structure Systems*, pages 14–19, Mexico City, Mexico, 2010.
- [24] E. Cruz-Zavala, J.A. Moreno, and L. Fridman. Uniform robust exact differentiator. *IEEE Trans. Autom. Control*, 56(11):2727–2733, 2011.
- [25] E. Cruz-Zavala, J.A. Moreno, and L. Fridman. Adaptive gains super-twisting algorithm for systems with growing perturbations. In *18th IFAC World Congress*, pages 3039–3044, Milano, Italy, Agosto 28–Septiembre 2 2011.
- [26] E. Cruz-Zavala, J.A. Moreno, and L. Fridman. Uniform sliding mode controllers and uniform sliding surfaces. *IMA J. Math. Control & Information*, 29(4):491–505, 2012.
- [27] R. Engel and G. Kreisselmeier. A continuous-time observer which converges in finite-time. *IEEE Trans. Autom. Control*, 47:1202–1204, 2002.
- [28] A. Estrada and L. Fridman. Quasi-continuous hosm control for systems with unmatched perturbations. *Automatica*, 46:1916–1919, 2010.
- [29] A. Estrada and L. Fridman. Integral hosm semiglobal controller for finite-time exact compensation of unmatched perturbations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 55(11):2645–2649, 2010.
- [30] L. Faubourg and J.-B. Pomet. Control Lyapunov functions for homogeneous “Jurdjevic-Quinn” systems. *Control, Optim. Calculus Variations*, 5:293–311, 2000.
- [31] Y. Feng, X. Yu, and Z. Man. Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators. *Automatica*, 38:2159–2167, 2002.
- [32] A.F. Filippov. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Kluwer. Dordrecht, The Netherlands, 1988.
- [33] R.A. Freeman and P.V. Kokotović. *Robust Nonlinear control Design: State space and Lyapunov Techniques*. Modern Birkhauser Classics, Boston, 1996.
- [34] T. Gonzalez, J.A. Moreno, and L. Fridman. Variable gain super-twisting sliding mode control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 57(8):2100–2105, 2010.
- [35] S. Gutman. Uncertain dynamical systems-Lyapunov min-max approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 24:437–443, 1979.
- [36] W. Hahn. *Stability of motion*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

- [37] V. T. Haimo. Finite time controllers. *SIAM J. Contr. Optim.*, 24:760–77, 1986.
- [38] M. Harmouche, S. Laghrouche, and Y. Chitour. Robust and adaptive higher order sliding mode. In *IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control*, Hawaii, USA, Dec. 2012.
- [39] Y. Hong. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems. *Syst. Contr. Lett.*, 46:231–236, 2002.
- [40] J. Huang, L. Yu, and S. Xia. Stabilization and finite time stabilization of nonlinear differential inclusions based on control Lyapunov function. *Circuits Syst. Signal Process.*
- [41] X. Huang and W. Lin. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems. *Automatica*, 41:881–888, 2005.
- [42] J.Y. Hung, W. Gao, and J.C. Hung. Variable structure control: A survey. *IEEE Transaction on Ind. Electronics*, 40(3):2–22, 1993.
- [43] A. Isidori. *Nonlinear control systems*. Springer Verlag, Berlin, 1995.
- [44] M. James. Finite time observers and observability. In *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 770–771, 1990.
- [45] I. Kanellakopoulos, P.V. Kokotovic, and A.S. Morse. A toolkit for nonlinear feedback design. *Systems Control & Letters*, 18:83–92, 1992.
- [46] H.K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, New Jersey, third edition, 2002.
- [47] P.V. Kokotović. The joy of feedback: Nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems Magazine*, 12:7–17, 1992.
- [48] M. Krstić, I. Kanellakopoulos, and P.V. Kokotović. *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons, NY, 1995.
- [49] J. Kurzweil. On the releasability of the first theorem of Lyapunov concerning the stability of motion. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 24:19–77, 1956.
- [50] J. Kurzweil. On the inversion of Lyapunov’s second theorem on stability motion. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 24:19–772, 1963.
- [51] S. Laghrouche, F. Plestan, and A. Glumineau. Higher order sliding mode control based on integral sliding mode. *Automatica*, 43:531–537, 2007.
- [52] Y.S. Ledyev and E.D. Sontag. A Lyapunov characterization of robust stabilization. *Nonlinear Analysis*, 37:813–840, 1999.
- [53] A. Levant. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *Int. J. Control*, 58:1247–1263, 1993.
- [54] A. Levant. Universal single-input single-output SISO sliding mode controllers with finite time. *IEEE Trans. Autom. Control*, 46(9):1447–1451, 2001.
- [55] A. Levant. High-order sliding modes: differentiation and output-feedback control. *Int. J. Control*, 76(9):924–941, 2003.
- [56] A. Levant. Homogeneity approach to high-order sliding mode design. *Automatica*, 41:823–830, 2005.
- [57] A. Levant. Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers. *IEEE Trans. Autom. Control*, 50(11):1812–1816, 2005.

- [58] A. Levant. Construction principles of 2-sliding mode design. *Automatica*, 43: 576–586, 2007.
- [59] A. Levant. Adjustment of high-order sliding-mode controllers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19:1657–1672, 2009.
- [60] A.M. Lyapunov. *The general problem of the stability of motion*. Taylor & Francis, London, 1992.
- [61] J. Maeda. *Las leyes de la simplicidad: Diseño, tecnología, negocios, vida*. Dedisa, Barcelona, España, 2012.
- [62] Z. Man and X. Yu. Terminal sliding mode control for MIMO linear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems 1*, 44(11):1065–1070, 1997.
- [63] Z. Man, A. P. Paplinski, and H. R. Wu. A robust MIMO terminal sliding mode control for rigid robotic manipulators. *IEEE Trans. Autom. Control*, 39:2464–2468, 1994.
- [64] J.L. Massera. Contributions to stability theory. *Annals of Mathematics*, 64:182–206, 1956.
- [65] J.A. Moreno. Lyapunov approach for analysis and design of second order sliding mode algorithms. In L. Fridman, J. Moreno, and R. Iriarte, editors, *Sliding Modes after the first decade of the 21st Century*, Notes in Control and Information Sciences 412, pages 113–150. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011.
- [66] J.A. Moreno and M. Osorio. A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. In *47th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2856–2861, 2008.
- [67] J.A. Moreno and M. Osorio. Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm. *IEEE Trans. Autom. Control*, 57(4):1035–1040, 2012.
- [68] E. Moulay and W. Perruquetti. Finite-time stability of differential inclusions. *IMA J. Math. Control*, I(22), 2005.
- [69] H. Nakamura, Y. Yamashita, and H. Nishitani. Smooth Lyapunov functions for homogeneous differential inclusions. *SICE*, pages 1974–1979, 2002.
- [70] N. Nakamura, H. Nakamura, Y. Yamashita, and Nishitani. Homogeneous stabilization for input affine homogeneous systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 54(9):2271–2275, 2009.
- [71] Y. Orlov. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 43(4):1253–1271, 2005.
- [72] Y. V. Orlov. *Discontinuous systems: Lyapunov analysis and robust synthesis under uncertainty conditions*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009.
- [73] A. Polyakov. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 57(8):2106–2110, 2012.
- [74] A. Polyakov and L. Fridman. Stability notions and Lyapunov functions of sliding mode control systems. *Journal of the Franklin Institute*, 351:1831–1865, 2014.
- [75] A. Polyakov and A. Poznyak. Reaching time estimation for “super-twisting” second-order sliding mode controller via Lyapunov function designing. *IEEE Trans. Autom. Control*, 54(8):195–1955, 2009.

- [76] A. Polyakov and A. Poznyak. Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: “twisting” controller for second-order sliding mode realization. *Automatica*, 45(2):444–448, 2009.
- [77] A. Poznyak. *Advanced mathematical tools for automatic control engineers*, volume 1: Deterministic Techniques. Elsevier Science, 2007.
- [78] L. Praly, B. D’Andréa-Novel, and J.C. Coron. Lyapunov design of stabilizing controllers for cascaded systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 36:1177–1181, 1991.
- [79] C. Qian and W. Lin. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 46(7):1061–1079, 2001.
- [80] M. Rubagotti, A. Estrada, F. Castaños, A. Ferrara, and L. Fridman. Integral sliding mode control for nonlinear systems with matched and unmatched perturbations. *IEEE Trans. Autom. Control*, 56(11):2699–2704, 2011.
- [81] T. Sánchez and J.A. Moreno. Construction of Lyapunov functions for a class of higher order sliding mode algorithms. In *IEEE 51st Annual Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii, Dec. 2012.
- [82] S.S. Sastry and A. Isidori. Adaptive control of linearizable systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 34:1123–1131, 1989.
- [83] Y. Shtessel, C. Edwards, L. Fridman, and A. Levant. *Sliding Mode Control and Observation*. Birkhauser, Springer, New York, 2014.
- [84] S. Smirnov. *Introduction to the theory of differential inclusions*. Graduate Studies in Mathematics, SIAM, Philadelphia, 2002.
- [85] E.D. Sontag. A “universal” construction of Artstein’s theorem on nonlinear stabilization. *Syst. Contr. Lett.*, 13:117–123, 1989.
- [86] E.D. Sontag. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer-Verlag, NY, 2nd edition, 1998.
- [87] V. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [88] Y. Wang, Y. Feng, and X. Yu. High-order nonsingular terminal sliding mode control of uncertain multivariable systems. In *The 33rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON)*, pages 710–714, Taipei, Taiwan., Nov. 5-8 2007.
- [89] M. Won and J.K. Hedrick. Multi-surface sliding control of a class of uncertain nonlinear systems. *Int. J. Control*, 64(4):693–706, 1996.
- [90] J. Wu. Robust stabilization for single-input polytopic nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control.*, 51:1492–1496, 2006.
- [91] Y. Wu, X. Yu, and Z. Man. Terminal sliding mode control design for uncertain dynamic systems. *Syst. Control Lett.*, 34(5):281–288, 1998.
- [92] L. Yang and J. Yang. Nonsingular fast terminal sliding-mode control for dynamical systems. *Int. J. Robust. Nonlinear Control*, 21(16):281–288, 2010.
- [93] S. Yu, J. Du, X. Yu, and H. Xu. A novel recursive terminal sliding mode with finite-time convergence. In *Proceedings of the 17th World Congress*, pages 5945–5949, Seoul, Korea, July 6-11 . The International Federation of Automatic Control.

- [94] S. Yu, X. Yu, Z. Man, and Y. Feng. On singularity free recursive fast terminal sliding mode control. In *Proceedings of the 17th World Congress*, pages 163–166, Seoul, Korea, July 6–11 . The International Federation of Automatic Control.
- [95] S. Yu, X. Yu, B. Shirinzadeh, and Z. Man. Continuous finite-time control for robotic manipulators with terminal sliding mode. *Automatica*, 41:1957–1964, 2005.
- [96] X. Yu and Z. Man. Fast terminal sliding mode control design for nonlinear dynamical systems. *Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 49(2):261–264, February 2002.
- [97] V. Zuvov. *Methods of A.M. Lyapunov, and their Applications*. Noordhoff, Groningen, 1964.



## COLOFÓN

Este documento fue compuesto usando la tipografía look-and-feel `classicthesis` desarrollada por André Miede. El estilo está inspirado en el libro de Robert Bringhurst: *"The Elements of Typographic Style"*. El archivo `classicthesis` está disponible para  $\LaTeX$  y  $\text{LyX}$ en:

<http://code.google.com/p/classicthesis/>