



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA**  
**ELÉCTRICA - CONTROL**

**CONTROL DE UN BIORREACTOR BASADO EN UN OBSERVADOR**  
**BIVALUADO**

**TESIS**  
**QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:**  
**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA**  
**FRANCISCO PÉREZ JIMÉNEZ**

**TUTOR PRINCIPAL**  
**DR. JAIME ALBERTO MORENO PÉREZ**  
**INSTITUTO DE INGENIERIA**

**MÉXICO, D.F. DICIEMBRE DE 2014**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**JURADO ASIGNADO**

Presidente: Dr. Espinosa Pérez Gerardo René  
Secretario: Dr. Álvarez Icaza Longoria Luis A.  
Vocal: Dr. Moreno Pérez Jaime Alberto  
1<sup>er</sup> Suplente: Dr. Álvarez Calderón Jesús  
2<sup>o</sup> Suplente: Dr. Rocha Cózatl Edmundo Gabriel

Lugar donde se realizó la tesis: Instituto de Ingeniería, UNAM

**TUTOR DE TESIS:**

-----  
Dr. Jaime Alberto Moreno Pérez



*A mis padres, Rafael Ventura Pérez Ramirez y Beatriz Jimenez Mascareñas, gracias por su apoyo incondicional.*



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	2
1.2. Motivación . . . . .	3
1.3. Planteamiento del problema . . . . .	4
1.4. Objetivo . . . . .	6
1.5. Organización de la tesis . . . . .	6
<b>2. Modelo del biorreactor en estudio</b>	<b>9</b>
2.1. Ley de Haldane . . . . .	10
2.2. Modelo . . . . .	11
2.3. Análisis de trayectorias . . . . .	13
<b>3. Métodos de observación y estimación</b>	<b>17</b>
3.1. Observador de Estado Bivaluado . . . . .	18
3.1.1. Sintonización de las ganancias del OEB . . . . .	19
3.1.2. Simulaciones con $k_2$ constante . . . . .	20
3.1.3. Simulaciones con $k_2$ variable . . . . .	20
3.2. Estimador para la Entrada Desconocida . . . . .	22
3.2.1. Sintonización de las ganancias del EED . . . . .	24
3.2.2. Simulaciones . . . . .	25
<b>4. Diseño del controlador</b>	<b>27</b>
4.1. Control Conmutado no Realimentado . . . . .	28
4.1.1. Procedimiento de diseño . . . . .	28
4.1.2. Fortalezas y debilidades . . . . .	30
4.2. Control Conmutado Realimentado . . . . .	32
4.2.1. Procedimiento de diseño . . . . .	35
4.2.2. Fortalezas y debilidades . . . . .	47
4.3. Discusión de resultados . . . . .	48
<b>5. Conclusiones</b>	<b>49</b>



# Capítulo 1

## Introducción

La biotecnología es la unificación de distintos procesos bioquímicos y tecnológicos. El objetivo principal por el cual estas ramas se relacionan es porque se espera obtener un producto, por ejemplo: gas metano, abono, biodiesel, vitamina C, leche, queso, vino, antibióticos, enzimas, azúcares, cultivo de células, etc. [4] [20]. La dificultad de controlar un sistema biológico depende de los organismos involucrados en el proceso, esto es porque dichos organismos son sensibles ante impurezas a diferencia de los procesos puramente químicos. Cuando un sistema biológico se encuentra en presencia de contaminantes su dinámica puede cambiar para protegerse y en otros casos puede mutar, lo cual no ocurre en un proceso de naturaleza esencialmente no biológica. Antes de controlar un sistema biológico se espera que el sistema ya haya sido identificado y entendido para obtener la máxima cantidad de producto.

Una dificultad que se presenta siempre al momento de diseñar un controlador para este tipo de procesos es que no se conocen a ciencia cierta los parámetros involucrados en la dinámica del biorreactor; en sí, los parámetros forman parte del núcleo del sistema, definen a cada sistema en particular, por lo cual el conocer su valor resulta útil para diseñar el controlador. Estos parámetros pueden ser constantes o variantes en el tiempo, para describir ritmos de cambio, como lo son la tasa de crecimiento bacteriano o la tasa de reacción. Los parámetros no pueden ser tomados a la ligera porque de ellos depende la eficiencia del biorreactor.

Las herramientas de observación y de estimación son bastante útiles en el estudio de sistemas biológicos porque permiten hacer la estimación de las variables de estado así como los parámetros del sistema que no pueden ser medidos [5] [10]. Esto es consecuencia del costo de los sensores o de tener que realizar una medición indirecta (fuera de línea) que hace que el tiempo requerido para realizar una medición pueda ser muy largo (considerando que en estos casos se toma una muestra y se lleva a caracterizar en el laboratorio) o en el peor de los casos que la variable de estado y/o el parámetro no puedan ser medidos. Esta es la razón principal por la cual los observadores y estimadores de parámetros resultan ser funcionales y prácticos. En todo biorreactor la *biomasa* es una variable de estado y ésta es

la razón por la cual se considera *vivo* al biorreactor. Sea medible o no, es necesario tener un conocimiento de esta para conocer el estado actual del biorreactor. Otra variable de estado que no puede faltar en un biorreactor es el *sustrato*, normalmente entendido como el alimento de la biomasa. En la actualidad se han desarrollado distintos algoritmos de observación para dichas variables, los cuales estiman los estados de forma asintótica [2] y otros de forma exacta [8] [16] [17].

En este trabajo de tesis el modelo del biorreactor que se abordará es un modelo simplificado que representa la dinámica básica de un biorreactor, donde se presentan trayectorias indistinguibles que hace que sea completamente inobservable también, como se verá más adelante. Contiene una entrada desconocida acoplada al estado no medido. Por lo anterior resulta un reto diseñar un controlador para maximizar la tasa de reacción del biorreactor.

## 1.1. Estado del arte

El modelo del biorreactor considerado ha sido objeto de análisis en distintas vertientes. En primer lugar hay estudios bien estructurados enfocados en la teoría de bifurcaciones, donde se desarrollan análisis sobre como los parámetros del modelo causan cambios en la estabilidad de sus puntos de equilibrio [1] [11]. En segundo lugar existen estudios sobre aplicaciones industriales donde se explica que se requieren grandes cantidades de células microbianas para obtener tasas de producción vialmente comerciales, así como de la relación que guardan estas células con el sustrato [4] [7] [9] [20]. En tercer lugar se han registrado estudios basados en la caracterización de la tasa de reacción mediante estimación paramétrica [6] [12] [14], y otros sobre la observación del estado donde la convergencia se da de forma asintótica [2] [6] [13]. En cuarto lugar se ha puesto atención en la estimación de entradas desconocidas donde se han encontrado algoritmos que poseen la característica de converger exactamente a la entrada en tiempo finito [16] [17].

El biorreactor en estudio ha sido objeto de control para maximizar su tasa de reacción utilizando distintas técnicas, de las cuales se destacan los controladores PID que son los más conocidos en la industria [1] [9] [19]. Otra corriente que se maneja en éste tipo de procesos son los controladores de búsqueda de extremos donde el control diseñado se satura entre su máximo y su mínimo, y el control no depende de la tasa de reacción [3] [18].

En la literatura existe un control para el mismo modelo del biorreactor donde se diseñó un control de realimentación de estado con estabilización global en el cual se maneja un punto de operación óptimo, de máxima producción para una concentración de sustrato en el lado isotónico de la curva generada por la ley de Haldane a una cierta tasa de reacción. El diseño del controlador evita el problema de observación bivaluada haciendo un análisis del modelo mediante dinámica no lineal con lo cual se logra la estabilización global [19]. Entonces la aportación de este trabajo de tesis esta concentrada en el aprovechamiento de un observador que delimita las dos posibles estimaciones del estado para diseñar un controlador del tipo “Extremum Seeking” con una estructura propia que se basa en la información

bivaluada del observador [3] [18].

El tema que se abordará a lo largo de esta tesis surge a partir de un artículo publicado en 2013 llamado “*A Bivaluated Observer for a Class of Uncertain Reactors*” [16], en el que se desarrolla un análisis de trayectorias para un modelo simplificado de un biorreactor en particular. Dicho análisis demuestra que el estado no medido es indistinguible, por ende, y en términos de observabilidad, el modelo es totalmente inobservable. Esto implica que el observador diseñado en ningún momento garantiza cuál es la trayectoria estimada correspondiente con la trayectoria del estado no medido. Adicionalmente el control tendrá que lidiar con la presencia de una entrada desconocida/perturbación que se encuentra acoplada al estado no medido donde se presenta el fenómeno de indistinguibilidad [16], con lo cual el control podrá estar en función de la estimación no unívoca de la perturbación mediante el Estimador para la Entrada Desconocida, ya que este dependerá del Observador de Estado Bivaluado.

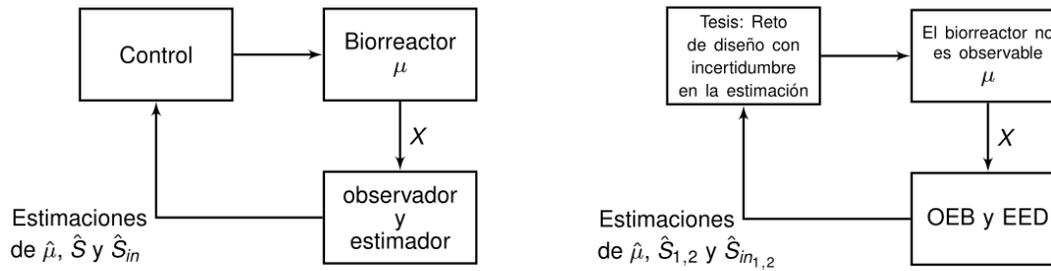
## 1.2. Motivación

En este trabajo de tesis se abordará un problema de control el cual tendrá que lidiar con la información de un observador que no es capaz de proveer una estimación unívoca del estado. En la literatura se pueden encontrar controladores basados en observadores que proveen estimaciones unívocas del estado facilitando de algún modo el diseño del controlador.

Desde el punto de vista de observación el modelo del biorreactor que se abordará es totalmente inobservable por lo cual no es posible diseñar un observador con la propiedad de unicidad en la estimación, el Observador de Estado Bivaluado es una herramienta que se diseñó para enfrentarse al problema de observación para el modelo en cuestión, siendo capaz de proporcionar un par de estimaciones que son solución del sistema. Ahora bien, el problema a resolver en esta tesis consiste en diseñar un control realimentado no negativo a pesar de la estimación no unívoca que brinda este observador [16].

En la Figura 1.1a se muestra el esquema de conexión de un control para el modelo de un biorreactor asumiendo que la única medición posible es la concentración de biomasa ( $X$ ), donde el control se encuentra en función de la observación de la concentración de sustrato ( $S$ ), la estimación de la tasa de reacción ( $\mu$ ) y de la entrada desconocida ( $S_{in}$ ). En la Figura 1.1b observe un esquema distinto donde se enfatiza que el modelo es no observable, que se tiene la medición de la concentración de biomasa y que el control a diseñar utiliza la información del Observador de Estado Bivaluado (OEB) implicando así que la estimación de la concentración de sustrato ( $S$ ) no es única, es decir, que se tiene un par de soluciones ( $\hat{S}_{1,2}$ ) para la misma tasa de reacción ( $\mu$ ) siendo esta gobernada por la ley de Haldane y estimada por el OEB. El control además se encuentra en función del Estimador para la Entrada Desconocida (EED), y al depender del par de estimaciones posibles de la concentración de sustrato tendrá solamente una estimación correcta de la entrada descono-

cida ( $S_{in}$ ). Los esquemas de las Figuras 1.1a y 1.1b asumen que la variable a controlar es la tasa de reacción y que la variable manipulada es la tasa de dilución; el caso a resolver en la tesis es diseñar un control que pueda lidiar con la información del OEB y del EED con objeto de maximizar la tasa de reacción del biorreactor.



(a) Control basado en la estimación unívoca del estado

(b) Control basado en la estimación no unívoca del estado

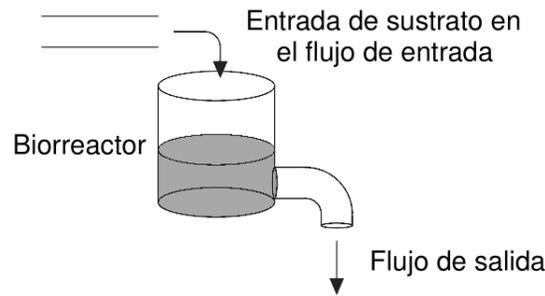
Figura 1.1: Esquemas de conexión para los casos en que el modelo del biorreactor considerado tiene la propiedad de ser observable y otro donde se presenta el fenómeno de indistinguibilidad.

El trabajo presente está enfocado en el estudio de un modelo particular de un biorreactor donde el objetivo de control es maximizar su tasa de reacción ( $\mu$ ), adicionalmente tomar la información de un observador multivaluado es responsabilidad de quien diseña el control, es por ello que tesis se pretende dar una respuesta a la siguiente pregunta ¿será posible diseñar un control positivo basado en el Observador de Estado Bivaluado para aumentar la tasa de reacción del biorreactor en presencia de una entrada desconocida? [16].

### 1.3. Planteamiento del problema

En la Figura 1.2 se ilustra el bosquejo simplificado de un biorreactor, dentro del contenedor se encuentran sus componentes principales, la *biomasa* (bacterias / materia orgánica) y el *sustrato* (alimento de las bacterias), se supone que al biorreactor le es suministrada una entrada de sustrato en el flujo de entrada.

En el presente trabajo se abordará un modelo que representa la dinámica simplificada de un biorreactor tipo *fed-batch*. Un biorreactor de este tipo inicialmente contiene una pequeña cantidad de *biomasa* (bacterias / materia orgánica) y *sustrato* (alimento de las bacterias), dando por hecho que el flujo de salida es nulo, se le agrega una entrada sustrato a una cierta tasa de dilución hasta ser llenado, en este punto se procede a vaciar el biorreactor para extraer el producto deseado y concluir con la función por la cual está diseñado el biorreactor, consecuentemente el procedimiento anterior se repite en lotes.

Figura 1.2: Biorreactor tipo *fed-batch*

Las reacciones químico-biológicas provocadas por la biomasa al consumir el sustrato son reflejadas en las variables involucradas en el proceso, con la intención de saber que sucede con estas variables empíricamente se realizan experimentos rutinarios observando que cambios se han generado, el problema es que por la falta de entendimiento no se puede asegurar a ciencia cierta qué sucederá después que el experimento ha concluido. En esta tesis se utilizará un modelo matemático simplificado que provee un mayor entendimiento del proceso en el que se asumirá lo siguiente:

- El modelo consta de dos estados: la concentración de biomasa y de sustrato, la primera se puede medir y la segunda no.
- El modelo considerado es completamente inobservable debido a que el estado no medido es indistinguible.
- El sustrato que ingresa al biorreactor se encuentra acoplado a la dinámica de la concentración de sustrato el cual en procesos reales es desconocido.
- El control o de forma equivalente *la tasa de dilución* en este tipo de procesos representa la variable de control debido a que es la relación del flujo de entrada de unidades  $[m^3h^{-1}]$  entre el volumen del biorreactor  $[m^3]$  (donde  $[m^3]$  son unidades de volumen en metros cúbicos y  $[h^{-1}]$  es el inverso del tiempo en horas). Debido a que la dinámica del volumen es una función puramente del flujo de entrada, se puede concluir que el control dado por la tasa de dilución siempre estará en función del flujo de entrada y sus unidades serán los henrios  $[Hz]$  o el inverso del tiempo  $[h^{-1}]$ .
- La *tasa de reacción* y sus sinónimos; *ritmo de consumo de sustrato* y la *razón de crecimiento específica de biomasa*, es un parámetro no medible regido por la ley de Haldane que está en función de la concentración de sustrato, dicho parámetro se puede entender del siguiente modo: *cuando la biomasa consume el sustrato se*

*producen distintas reacciones químico- biológicas que dan lugar a nuevos productos, entonces la tasa de reacción es un parámetro que describe dicho fenómeno.*

Lo que se pretende realizar es un controlador que de algún modo utilice la información del Observador de Estado Bivaluado para aumentar la tasa de reacción del biorreactor partiendo de las suposiciones siguientes:

- Existe solamente un tipo de bacterias, en otras palabras, no hay competencia entre bacterias por el mismo sustrato.
- Las concentraciones en el biorreactor son homogéneas.
- El biorreactor no tiene fugas.
- Ya existen lazos cerrados de control individuales que regulan algunas variables o inhibidores presentes en la reacción como el pH, la temperatura, la luz, la presión y el oxígeno, por lo cual no es necesario hacer un análisis más extenso.

El hecho de poder realizar un controlador para este sistema en particular es todo un reto, ya que la tasa de reacción se encuentra regida por la ley de Haldane y ésta se encuentra en función de la concentración de sustrato, por lo cual la dependencia del Observador de Estado Bivaluado en el control es fundamental, tomando en cuenta que la entrada desconocida tiene un peso considerable en la concentración de sustrato se desea utilizar el Estimador para la Entrada Desconocida para combatir los efectos que esta entrada pueda causar.

## 1.4. Objetivo

Mediante la información del Observador de Estado Bivaluado se desea diseñar como ejercicio de entendimiento un control para aumentar la tasa de reacción en un biorreactor tipo fed-batch sujeto a la ley de Haldane.

## 1.5. Organización de la tesis

En el capítulo dos inicialmente se exhiben los puntos principales que se contemplarán para que el modelo tenga validez que se darán por hecho en los capítulos posteriores. Una vez entendidos los puntos se presentará el parámetro conocido como tasa de reacción / tasa de crecimiento específica asociado al consumo de sustrato / transformación de sustrato en producto, se asume que la ley de Haldane rige dicho parámetro y es la única no linealidad que se encontrará en el modelo. La cantidad de procesos donde es viable asumir que el modelo es afín, se reduce a procesos donde la ley de Haldane toma lugar. Finalmente, se

explicará porque puede presentarse el fenómeno de distinguibilidad / indistinguibilidad en el modelo.

En el capítulo tres se mencionan las herramientas de observación y de estimación que pueden ser utilizadas para diseñar un controlador realimentado, en primera instancia se presenta el Observador de estado Bivaluado, donde se destacarán sus características principales, la dificultad de sintonizar sus ganancias así como la comparación entre la elección de una ganancia constante y una ganancia variable para compensar los efectos de la perturbación y algunas simulaciones. En segundo lugar se presentará el Estimador para la Entrada Desconocida, su dependencia con el Observador de Estado Bivaluado, su sintonización y una simulación para observar su desempeño.

En el capítulo cuatro se muestran las estrategias de control que fueron diseñadas con el objetivo de aumentar la tasa de crecimiento específica, la lógica que se sigue de ambos controladores es un tanto parecida, el control conmutado no realimentado que switchea entre dos valores constantes relacionados con la tasa de dilución máxima y la mínima, es un control que depende únicamente de la estimación de la tasa de reacción, el diseño del algoritmo es similar al de modos deslizantes por la característica de ser robusto ante perturbaciones, que no cuenta con una superficie de deslizamiento, que su su lógica de conmutación esta sujeta a la comparación del valor actual y anterior de la tasa de dilución que al aumentar su frecuencia de conmutación logra reducir matemáticamente los errores entre lo que se espera y lo que se obtiene. A diferencia del control no realimentado se diseñó un controlador realimentado basado en la misma lógica de conmutación el cual retroalimenta el estado basándose en la información del Observador de Estado Bivaluado y del Estimador para la Entrada Desconocida.



# Capítulo 2

## Modelo del biorreactor en estudio

En el presente trabajo se analizará el modelo en estudio concentrado la atención en cuanto a la tasa de reacción del biorreactor, la tasa de reacción es un parámetro clave muy utilizado en este tipo de procesos, porque provee información sobre la relación del sustrato consumido por la biomasa al producir productos. También, una parte del estudio se concentrará en la observación de las trayectorias de la concentración de sustrato que se pueden generar por medio de la tasa de reacción siendo estas soluciones de una tasa de reacción dada. Ahora bien, con objeto de presentar el modelo en una sección posterior asuma los siguientes puntos:

1. Se cuenta con un modelo simplificado de estados: la biomasa y el sustrato.
2. La ley de Haldane gobierna al parámetro de la tasa de reacción.
3. La concentración de la entrada desconocida generalmente es superior en magnitud a la concentración del sustrato dentro del biorreactor, lo cual en procesos reales se cumple frecuentemente.
4. Las concentraciones se asumen homogéneas en todas partes.
5. Variables como el pH, la temperatura, la luz, la presión atmosférica, la concentración de oxígeno han sido cuidadosamente caracterizadas y se han creado lazos cerrados de control que las mantienen en ciertos valores que no afectan a la tasa de reacción.
6. El modelo considera un solo tipo de bacterias, por tal motivo una competencia entre distintas bacterias no pueden competir por el mismo alimento.
7. Se considera que la existencia de contaminantes es despreciable en el flujo de entrada.

En las secciones siguientes se mostrará en qué consiste la ley de Haldane así como su relación con la tasa de reacción, el modelo del biorreactor y un breve análisis sobre las trayectorias del mismo.

## 2.1. Ley de Haldane

La ley de Haldane describe el ritmo de crecimiento específico de biomasa (la tasa de reacción) causada por una cierta concentración de sustrato ( $S$ ). Con el propósito de esclarecer la filosofía que abarca esta ley se da por hecho que el biorreactor contiene biomasa, luego supone que si la concentración de sustrato es baja (incapaz de abastecer a todas las bacterias) el crecimiento específico de la biomasa crecerá a un ritmo bajo, por lo que, en ausencia sustrato no hay crecimiento de biomasa; para el caso en que la concentración de sustrato es alta (las bacterias se sobrealimentan) lo que implica un decremento en la formación de bacterias. Luego se puede pensar que existe una concentración intermedia que lleva a la producción de bacterias a su nivel máximo posible reflejado en su tasa de crecimiento específica.

Lo mencionado anteriormente se encuentra resumido en la ecuación (2.1)

$$\mu(S) = \frac{\mu_0 K_I S}{S^2 + K_I S + K_S K_I}, \quad (2.1)$$

en primer lugar, observe que la tasa de crecimiento específica ( $\mu(S)$ ) está en función de la concentración de sustrato ( $S$ ) (desde ahora considere concentraciones de sustrato físicamente posibles:  $S \geq 0$  y asuma que  $\mu(S) \geq 0$ ) como es de esperarse; en segundo lugar, para que la tasa de crecimiento específica concuerde con la descripción inicial tome los siguientes límites  $S \rightarrow 0 = \mu(S) \rightarrow 0$  y  $S \rightarrow \infty = \mu(S) \rightarrow 0$ , el primero indica que si la concentración de sustrato tiende a cero el crecimiento de biomasa será muy bajo o se anulará, el segundo límite es físicamente inalcanzable pero demuestra que el crecimiento específico de biomasa irá disminuyendo en la medida que la concentración de sustrato vaya en aumento. Finalmente, la ley de Haldane tiene un máximo en

$$\mu^* = \frac{\mu_0 \sqrt{K_S K_I}}{2K_S + \sqrt{K_S K_I}} \quad \text{cuando} \quad S^* = \sqrt{K_S K_I}.$$

Los parámetros cinéticos  $\mu_0$  [ $h^{-1}$ ],  $K_I$  [ $mg/l$ ] y  $K_S$  [ $mg/l$ ] (donde  $h$  es el tiempo en horas y  $mg/l$  son miligramos por litro) son conocidos como tasa de crecimiento de Haldane, constante de inhibición y constante de Michaelis Melten. La información que se obtiene de dichos parámetros se encuentra relacionada con el complejo enzima-sustrato (combinación entre la enzima y el sustrato), la enzima tiene la función de aumentar la afinidad entre el reactante (sustrato) en el proceso de catalización, y al incrementarse dicha afinidad la velocidad de convertir sustratos a productos es un tanto más rápida [7]. Otro factor que se considera en la ley de Haldane es la inhibición, que como su nombre lo indica, impide que se lleven a cabo las reacciones del complejo enzima-sustrato. Ahora bien, como estos parámetros varían de un proceso a otro, en esta tesis se considerarán los valores mostrados en el Cuadro 2.1.

A modo de ilustrar la ley de Haldane, la gráfica de la Figura 2.1 muestra los cambios que

Parámetro	Cantidad	Unidades
$\mu_0$	0.072	$h^{-1}$
$K_I$	50	$mg/l$
$K_S$	2	$mg/l$

Cuadro 2.1: Parámetros cinéticos de la ley de Haldane

se generan en la tasa de crecimiento específica para distintas concentraciones de sustrato. El valor máximo que la tasa de crecimiento específica puede alcanzar ( $\mu^*$ ) se da cuando la concentración de sustrato es  $S = S^* = 10[mg/l]$ , así mismo cuando  $S = 0[mg/l]$  no hay crecimiento de biomasa y cuando la concentración es muy grande la tasa de reacción es baja.

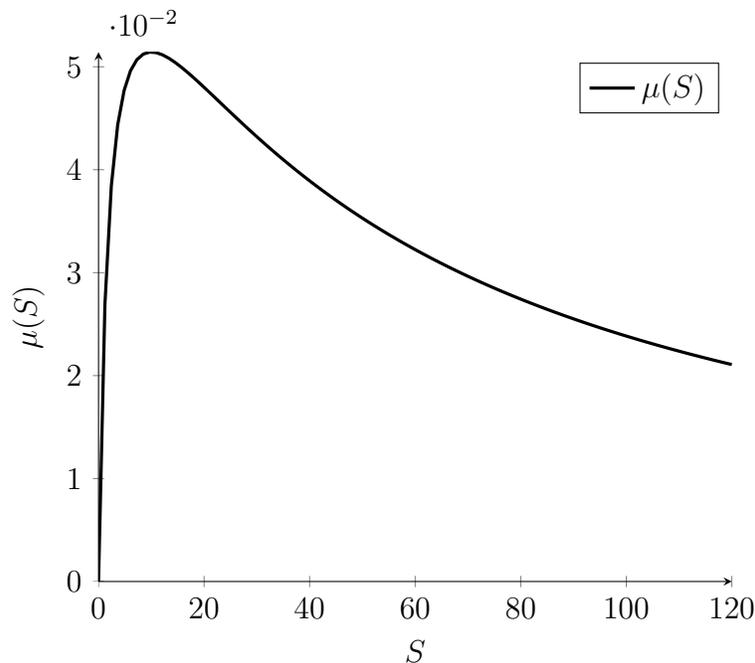


Figura 2.1: Ley de Haldane.

## 2.2. Modelo

En el trabajo presente se abordará el modelo de un biorreactor tipo fed-batch para todos los análisis, siendo éste un modelo reducido de segundo orden cuya única no linealidad es la tasa de crecimiento específica / tasa de reacción ( $\mu(S)$ ). Debido a que el modelo resulta un tanto general, la variedad de procesos en los que la ley de Haldane gobierna a la tasa de

reacción no está limitada, puesto que ejemplos de biorreactores fed-batch / fermentadores pueden ser encontrados en la literatura [20]. El sistema descrito en (2.2) muestra el modelo del biorreactor en estudio [2] [7], cuyas variables principales se describen a continuación:

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \mu(S)X - k_d X - DX \\ \dot{S}(t) &= -\beta\mu(S)X + D(S_{in}(t) - S)\end{aligned}\quad (2.2)$$

donde:

- Las concentraciones de biomasa ( $X$ ) y sustrato ( $S$ ) son los estados, ambas concentraciones son positivas y sus unidades son miligramos por litro [ $mg/l$ ].
- La concentración de biomasa se puede medir.
- La concentración de sustrato *no* se puede medir.
- Se asume que la tasa de reacción ( $\mu(S)$ ) está gobernada por la ley de Haldane, adicionalmente asuma que los parámetros de los cuales esta ley depende ya han sido caracterizados y corresponden con los mostrados en el Cuadro 2.1.
- Se cuenta con un control positivo que se lleva a cabo a través de la tasa de dilución ( $D$ ), recuerde que ésta última es una relación entre el flujo de entrada ( $F_{in}$ ) y el volumen en el biorreactor ( $V$ ) como se puede observar a continuación

$$D = \frac{F_{in}}{V} \left[ \frac{m^3 h^{-1}}{m^3} = \frac{1}{h} \right],$$

la dinámica del volumen es realmente simple debido a que ésta solamente depende de sus condiciones iniciales y el flujo de entrada del modo siguiente

$$\frac{dV}{dt} = F_{in}$$

entonces se pueden concluir dos cosas:

- La primera es que mientras el biorreactor no haya sido completamente llenado es posible controlar el biorreactor.
  - La segunda es que el control también se puede dar regulando el flujo de entrada, el caso es que la forma más conveniente de realizar el control es regulando la tasa de dilución por que ésta ya toma en cuenta el flujo de entrada y el volumen del biorreactor.
- Se puede controlar solamente un estado por el hecho de que el rango de la matriz de controlabilidad no es de rango completo ( $\rho(C) = 1$ ).

- $S_{in}$  es la entrada de sustrato que se administra en el flujo de entrada la cual en procesos reales no es conocida, esto se debe a que dicho flujo de entrada principalmente contiene sustrato el cual se encuentra mezclado con otras sustancias, para reforzar esta idea considere un biorreactor para una planta de tratamiento de aguas residuales donde el influente contiene al sustrato en la entrada y otras sustancias como es el caso de los catalizadores, que tienen como propósito aumentar la afinidad entre las bacterias y el sustrato, véase constante de Michaelis Melten [7], note además que las unidades de la entrada de sustrato desconocida son miligramos por litro  $[mg/l]$  al igual que las unidades de la concentración del sustrato.
- El modelo considera que las condiciones iniciales de biomasa y sustrato son físicamente posibles, en otras palabras  $X_0$  y  $S_0$  son mayores a cero.
- Se considera que la tasa de mortalidad de biomasa ( $K_d$ ) es nula, debido a que se consideran concentraciones homogéneas, ausencia de contaminantes y que en procesos industriales es despreciable.
- El coeficiente del consumo de sustrato por la biomasa ( $\beta$ ) se considera conocido siendo su valor  $2[adim]$ .
- $\mu(S)X$  y  $\beta\mu(S)X$  son los términos de crecimiento y consumo de biomasa.

*En resumen, se asume que se cuenta con un solo sensor dedicado a medir la concentración de biomasa, sin embargo la concentración de sustrato, la tasa de reacción y la entrada de sustrato en el flujo de entrada no se pueden medir [16].* Con respecto al objetivo planteado, resulta un tanto complicado poder diseñar un control debido a que el estado relacionado a la tasa de reacción no puede ser medido, por tal motivo se realizará un análisis de las trayectorias para tener un entendimiento más completo del modelo en cuestión.

## 2.3. Análisis de trayectorias

Con el objetivo de analizar qué trayectoria sigue el estado no medido (la concentración de sustrato), suponga que de algún modo fuera posible tener la medición de la tasa de crecimiento específica, entonces se podría utilizar la ecuación (2.1) para conocer el par de soluciones del estado como se muestra a continuación:

$$S = \frac{K_I(\mu_0 - \mu) \pm \zeta}{2\mu},$$

ahora bien, si  $\zeta = \sqrt{K_I^2(\mu_0 - \mu)^2 - 4K_S K_I \mu^2}$  cada solución se puede expresar en términos de la otra del siguiente modo

$$S_1 = S_2 - \frac{\zeta}{\mu}, \quad \text{y} \quad S_2 = S_1 + \frac{\zeta}{\mu},$$

renombrando ambas soluciones considere que la trayectoria  $S_1$  corresponde a la concentración de sustrato dentro del intervalo  $[0, S^*]$  mientras que la trayectoria  $S_2$  corresponde a una concentración finita de sustrato en el intervalo  $[S^*, \infty)$ , con la información que se ha generado hasta ahora se puede tomar la primera conclusión: *las trayectorias  $S_1$  y  $S_2$  serán iguales únicamente cuando  $\zeta = 0$  para la concentración  $S_1 = S_2 = S^*$  implicando que la tasa de crecimiento específica se encuentre en su valor máximo  $\mu = \mu^*$* . Con objeto de formar una idea de los análisis siguientes, en la Figura 2.2 se evalúan ambas trayectorias en la tasa de crecimiento específica.

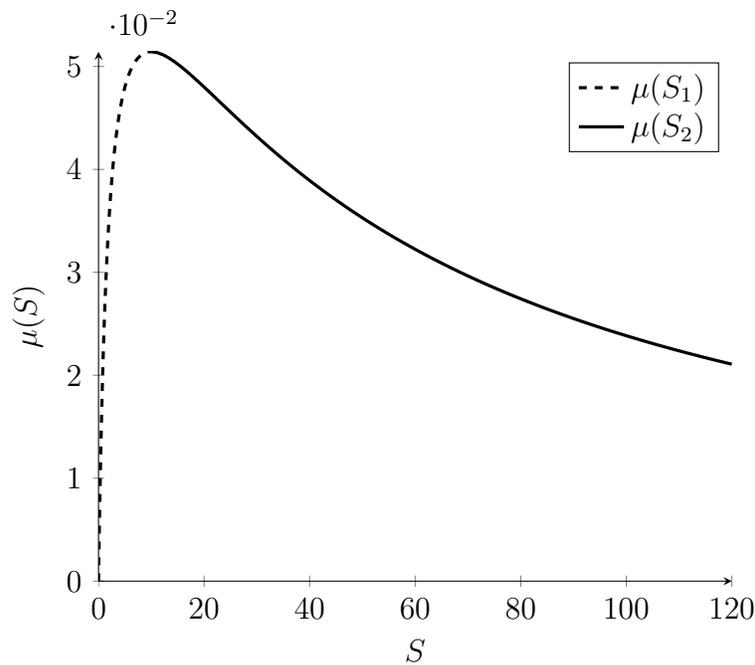


Figura 2.2: Tasa de crecimiento específica evaluada en los intervalos  $S_1$  y  $S_2$ .

De la Figura 2.2 note que la trayectoria que sigue la concentración del sustrato ( $S(t)$ ) no está forzada a ser la solución final de una de las dos soluciones para todo tiempo futuro, por tal motivo considere los casos en que un *cruce* toma lugar. Se considera que la trayectoria que sigue la concentración de sustrato  $S(t)$  ha pasado por un cruce entre soluciones cuando  $S(t) = S_1(t)$  se incrementa pasando por el punto donde  $S(t) = S^*$  hasta  $S(t) = S_2(t)$  (de aquí se puede inferir el otro caso, cuando  $S(t) = S_2(t)$  se reduce pasando por  $S^*$  y llegando a  $S(t) = S_1(t)$ ), el caso es que si se mira la tasa de crecimiento específica, solamente se vería que en algún momento  $\mu(S)$  se incremento en algún instante de tiempo pasando por su máximo  $\mu^*$  y luego se decremento, por lo cual no se puede asegurar que para todo tiempo

futuro  $S(t)$  siga la trayectoria generada por  $S_1(t)$  o por  $S_2(t)$ .

Suponga ahora que si la tasa de crecimiento específica  $\mu(S)$  fuera conocida, se desearía conocer la trayectoria que sigue la concentración de sustrato actual  $S(t)$ , el punto es que a partir de la tasa de crecimiento específica se obtiene un par de soluciones para la concentración de sustrato  $(S_1(t), S_2(t))$  que no es suficiente para reconocer si  $S(t)$  es  $S_1(t)$  o es  $S_2(t)$ , es por ello que se dice que el modelo presenta trayectorias indistinguibles lo cual puede ser entendido del modo siguiente:

“Se dice que el modelo 2.1 presenta *trayectorias indistinguibles* cuando no es posible identificar al estado de forma unívoca, esto es en parte porque al evaluar cualquiera de las soluciones posibles  $(S_1(t), S_2(t))$  en la dinámica del biorreactor resulta imposible determinar cual es la trayectoria verdadera que sigue el estado, así como identificar algún cambio notable en la dinámica de la concentración de biomasa ( $X$ ) puesto que ésta depende de la tasa de crecimiento específica y subsecuentemente de las soluciones de la concentración de sustrato” [16].

El fenómeno de distinguibilidad/indistinguibilidad considera que si al evaluar un par de trayectorias  $(S_1(t), S_2(t))$  en ambos estados con condiciones iniciales dentro del intervalo cerrado  $t \in [0, T]$  del modo siguiente

$$\begin{aligned} (X_1(t), S_1(t)) &= \eta(t, t_0, (X_{10}, S_{10}), (D(t), S_{in_1}(t))) \\ (X_2(t), S_2(t)) &= \eta(t, t_0, (X_{20}, S_{20}), (D(t), S_{in_2}(t))) \end{aligned} ,$$

se puede concluir que

1. Si  $X_1(t) = X_2(t)$  las trayectorias son distinguibles
2. Si  $X_1(t) \neq X_2(t)$  las trayectorias son indistinguibles

de tal modo que si el par  $(S_1(t), S_2(t))$  es solución de la ley de Haldane (2.1) para el modelo considerado sus trayectorias serán indistinguibles, luego entonces  $\mu(S_1) \equiv \mu(S_2)$ . Evidentemente la falta de un sensor para medir la concentración de sustrato evitaría el problema de indistinguibilidad pero éste no es el caso (debido a que no se pueda costear el sensor o que no exista un sensor para realizar dicha medición); de hecho, el objetivo considera la ausencia del sensor, pero aún así que se puede calcular el par de valores posibles de la concentración de sustrato mediante el Observador de Estado Bivaluado  $(\hat{S}_1(t), \hat{S}_2(t))$ , y que con dichos valores se puede realizar la estimación de la entrada desconocida, mediante un estimador diseñado para tal fin.



# Capítulo 3

## Métodos de observación y estimación

El caso que se abordará a continuación parte de la suposición en que no es posible medir la concentración de sustrato, ya sea porque la medición de  $S$  pueda: 1) Tomar mucho tiempo, en el caso de que se deba extraer una muestra para llevar a cabo el proceso de caracterización en el laboratorio, 2) Que el proceso de medición afecte al estado, esto es, que se tengan que extraer muestras las cuales reducen los niveles de concentración de ambos estados. 3) Que el sensor no se pueda montar en el sistema. 4) Que no sea posible costear el sensor. 5) Que no sea posible realizar la medición de la concentración de sustrato.

El Observador de Estado Bivaluado (OEB) es una herramienta con la estructura de un algoritmo tipo *super-twisting* que proporciona la estimación del parámetro de la tasa de reacción  $\mu$  junto con el par de trayectorias estimadas posibles de la concentración de sustrato  $\hat{S}_1$  y  $\hat{S}_2$ , el Estimador para la Entrada Desconocida (EED) es un algoritmo tipo *super-twisting* también, que provee una estimación distinta de la entrada desconocida  $\hat{S}_{in_1}$  y  $\hat{S}_{in_2}$  asociadas a las estimaciones generadas por el Observador de Estado Bivaluado [16]. Ambos, el Observador de Estado Bivaluado y el Estimador para la Entrada Desconocida asumen las propiedades siguientes:

1. Robusto ante perturbaciones.
2. El estimador converge en tiempo finito.
3. El estimador en tiempo finito es exacto.
4. Sintonización de cuatro grados de libertad para el OEB y ocho para el EED.

El control que se habrá de diseñar en esta tesis deberá considerar como perturbación a la entrada desconocida puesto que puede cambiar la dinámica del sistema de forma no esperada. El hecho de conocer su valor resultaría conveniente en cuanto al diseño del controlador porque afecta directamente a la concentración de sustrato  $S$  y por ende a la tasa de reacción  $\mu$ , por esta razón es necesario estimar la entrada desconocida.

### 3.1. Observador de Estado Bivaluado

El observador de estado bivaluado (OEB) fue diseñado con el propósito de brindar las dos trayectorias estimadas de la concentración substrato posibles ( $\hat{S}_1$  y  $\hat{S}_2$ ). La ecuación 3.1 muestra la estructura del observador.

$$OEB : \begin{cases} \dot{\hat{X}}(t) = -k_1\phi_1(e_X) + \hat{\mu}X - K_dX - DX \\ \dot{\hat{\mu}}(t) = -k_2X\phi_2(e_X) \\ \hat{S}_i = \frac{K_I(\mu_0 - \hat{\mu}(t)) \pm \xi}{2\hat{\mu}(t)} \\ \xi = \sqrt{K_I^2(\mu_0 - \hat{\mu}(t))^2 - 4K_S K_I \hat{\mu}^2(t)} \end{cases} \quad (3.1)$$

donde

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, k_1 > 0, k_2 > 0 \\ e_X &= \hat{X} - X, \gamma_1 > 0, \gamma_2 \geq 0 \\ \phi_1(e_X) &= \gamma_1 \sqrt{e_X} \operatorname{sign}(e_X) + \gamma_2 e_X \\ \phi_2(e_X) &= \frac{\gamma_1^2}{2} \operatorname{sign}(e_X) + \frac{3}{2} \gamma_1 \gamma_2 \sqrt{e_X} \operatorname{sign}(e_X) + \gamma_2^2 e_X \end{aligned}$$

El algoritmo propuesto es un algoritmo tipo “super-twisting”, donde se asume la existencia de un sensor que permite medir la concentración de biomasa  $X$ . Los parámetros  $\phi_1$  y  $\phi_2$  se les conoce como términos de estabilización no lineal, y las ganancias  $(k_1, k_2, \gamma_1, \gamma_2)$  representan los grados de libertad para lograr una estimación exacta en tiempo finito [8] [15].

Las condiciones necesarias para aplicar este observador son:

1. Que la primera derivada del parametro variante/tasa de reacción  $\mu$  debe estar acotada.
2. Que el parámetro  $\mu$  sea de grado relativo 1 con respecto a la variable que se puede medir, en este caso, la concentración de biomasa ( $X$ ).
3. Que haya biomasa en el biorreactor ( $X > 0$ ).

Tomando en cuenta la dinámica de la concentración de biomasa y la derivada de la taza de crecimiento específica se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \mu X - K_d X - DX \\ \dot{\mu}(t) &= \frac{\partial \mu(S)}{\partial S} [-\beta \mu(S) X + D(S_{in}(t) - S)] \end{aligned} \quad ,$$

con lo cual, la dinámica del error esta dada por

$$\begin{aligned} \dot{e}_X(t) &= -k_1 \phi_1(e_X) + X e_\mu \\ \dot{e}_\mu(t) &= -k_2 X \phi_2(e_X) - \rho \end{aligned} \quad ,$$

donde  $e_X(t) = \hat{X} - X$ ,  $e_\mu(t) = \hat{\mu} - \mu$  y  $\rho = \frac{\partial \mu(S)}{\partial S} [-\beta \mu(S) X + D(S_{in}(t) - S)]$ .

Cuando la dinámica del error se ha reducido a cero la estimación del parámetro  $\mu$  es exacta, por ende el par de estimaciones posibles de la concentración de sustrato ( $\hat{S}_1, \hat{S}_2$ ) ya han convergido a las soluciones de la tasa de reacción  $\mu$  de la cual el biorreactor se encuentra sujeto.

### 3.1.1. Sintonización de las ganancias del OEB

El Observador de Estado Bivaluado consta de cuatro ganancias las cuales deben ser sintonizadas para que el algoritmo posea la propiedad de realizar una estimación exacta [8], cada una de las ganancias se explican a continuación

- $\gamma_1$  es la ganancia robusta no lineal que atrae a la dinámica del error fuertemente en las cercanías del origen.
- $\gamma_2$  es la ganancia lineal, que tiene la propiedad de atraer la dinámica del error al origen cuando la dinámica del error se encuentra alejada del origen.
- $k_1$  es la ganancia correspondiente a la velocidad de convergencia del estado medido  $X$ .
- $k_2$  es la ganancia que rechaza la perturbación, cuya magnitud depende de la perturbación  $\rho$ .

Con objeto de averiguar cuál es la sintonización del observador más adecuada se diseñó un par de ganancias constantes ( $k_1, k_2$ ) donde se observó que el término del producto  $k_2 X$  de (3.1) tiene una influencia significativa en cuanto al tiempo de convergencia del observador, esto es porque la concentración de biomasa puede llegar a debilitar el algoritmo como se mostrará más adelante en las Figuras 3.1 y 3.2. El hecho de que el regresor del algoritmo/concentración de biomasa  $X$  afecte la estimación de la tasa de reacción implica que la elección de la ganancia  $k_2$  deba ser muy fina. Para disminuir los efectos de  $X$  cuando se estima la tasa de reacción se diseñó una ganancia variable  $k_2(X)$  que atenúa los efectos del producto  $K_2 X$  del siguiente modo

$$k_2 = \frac{aX}{X^2 + 1}$$

donde  $a$  es una constante positiva.

La sintonización de las ganancias se realizó siguiendo un procedimiento de tres pasos:

- i) Poner todas las ganancias igual a la unidad.
- ii) Elegir el par de ganancias  $k_1$  y  $k_2$ .
- iii) Elegir el par de ganancias  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  para obtener una estimación más fina.

En cuanto al paso ii) si se elige la ganancia variable  $k_2(X)$ , se procederá a elegir las siguientes ganancias constantes  $k_1, a > 0$ .

### 3.1.2. Simulaciones con $k_2$ constante

En el Cuadro 3.1 se muestran los valores programados de las ganancias que se utilizarán en las posteriores simulaciones

Ganancia	Valor
$\gamma_1$	0.005
$\gamma_2$	8
$k_1$	30
$k_2$	0.001 0.0001

Cuadro 3.1: Ganancias del OEB con  $k_2$  constante.

Las Figuras 3.1 y 3.2 son simulaciones en las cuales se consideraron  $X_0 = 4000$  y  $S_0 = 2$  inicialmente con una entrada variante en el tiempo  $S_{in} = 600 + \sin(0.5t)$  a una tasa de dilución fija  $D = 0.2$ . En la Figura 3.1 la convergencia es exacta alrededor de cuatro horas, note de la simulación que siendo la ganancia  $k_2$  constante la estimación antes de ser exacta tiene variaciones muy grandes antes de converger y que si se reduce un orden de magnitud como se muestra en la Figura 3.2 su velocidad de convergencia es favorable pero después de un lapso de tiempo la estimación se pierde. Considerando el caso de la simulación de la Figura 3.1 la elección de las ganancias  $\gamma_{1,2}$  se realizó con tacto ya que ambas son constantes, en cuanto a la elección de  $\gamma_1$ , se puede fijar en valores pequeños porque la tasa de reacción satisface  $0 \leq \mu \leq 9/175$  y para  $\gamma_2$  se puede elegir una  $\gamma_2$  que le de más peso a la estimación cuando las condiciones iniciales de  $\hat{\mu}_0$  se encuentren alejadas de  $\mu$ .

### 3.1.3. Simulaciones con $k_2$ variable

En el Cuadro 3.2 se muestran los valores programados de las ganancias que se utilizarán en las posteriores simulaciones

Ganancia	Valor
$\gamma_1$	0.005
$\gamma_2$	8
$k_1$	30
$k_2$	$\frac{0.1X}{X^2+1}$

Cuadro 3.2: Ganancias del OEB con  $k_2$  variable.

Al utilizar la ganancia variable  $k_2(X)$  en la simulación de la Figura 3.3 se observó que el algoritmo es capaz de converger en un tiempo significativamente menor al que se obtuvo con

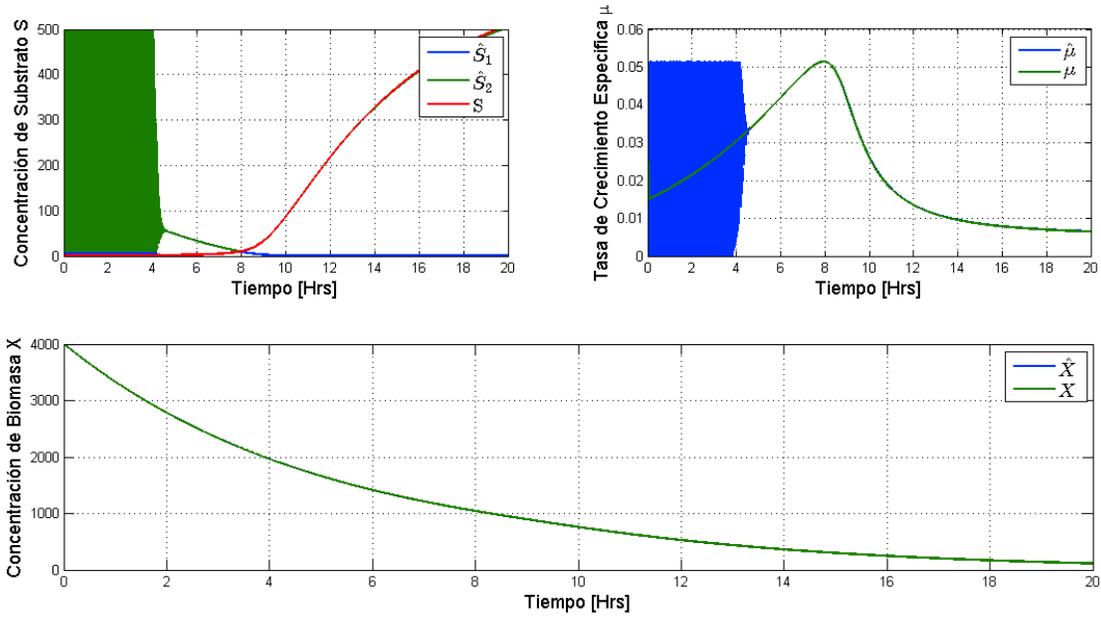


Figura 3.1: Simulación del OEB con  $k_2 = 0.001$

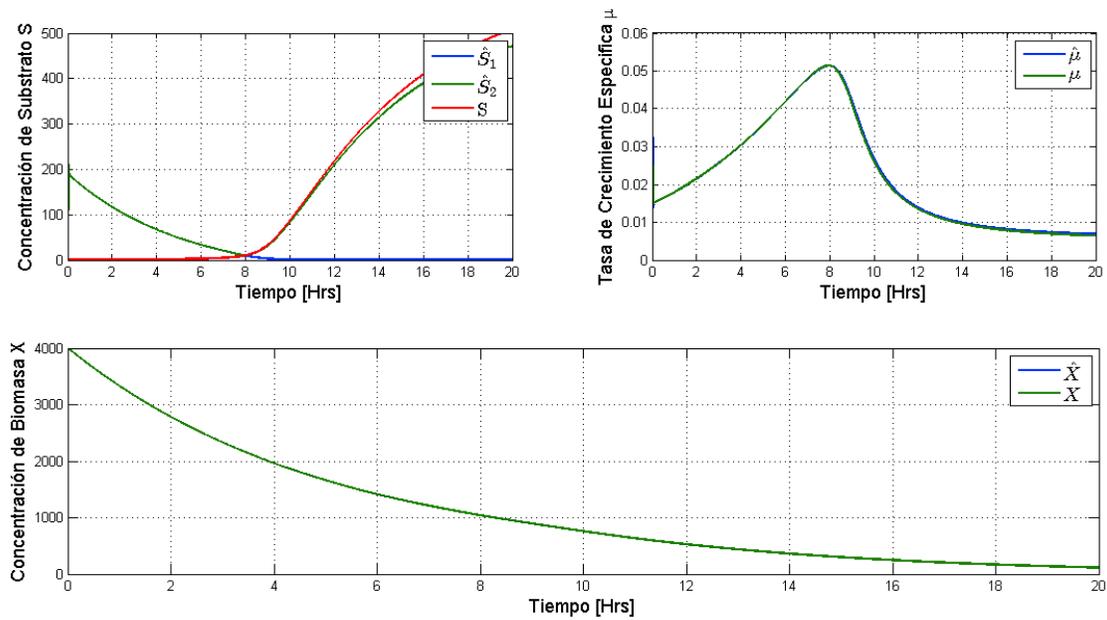


Figura 3.2: Simulación del OEB con  $k_2 = 0.0001$

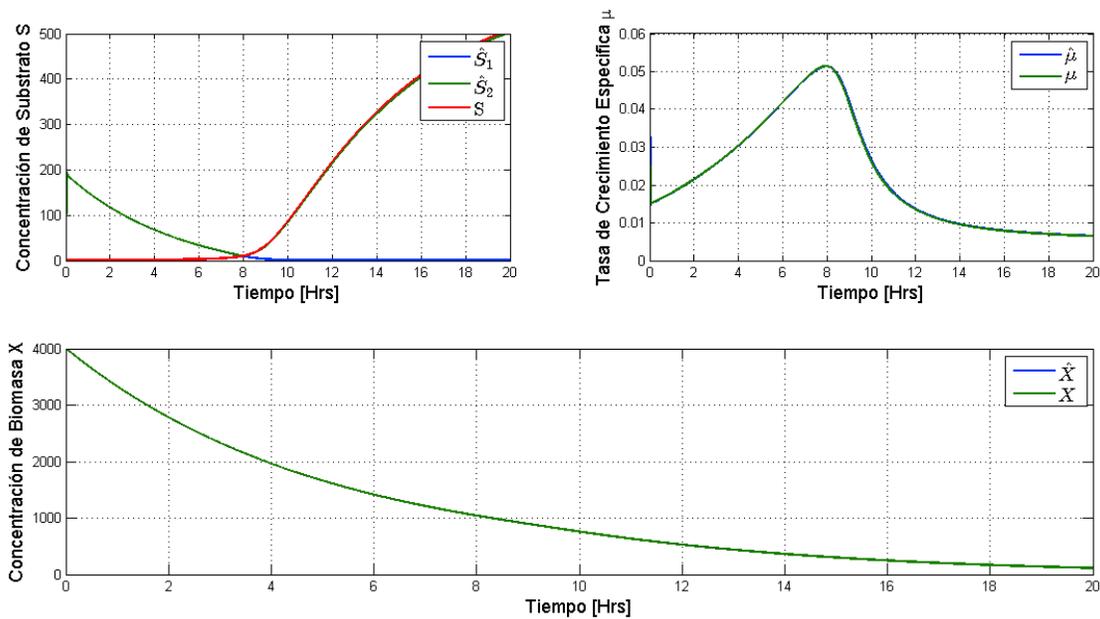


Figura 3.3: Simulación del OEB con  $k_2$  variable

la ganancia constante  $k_2 = 0.001$  (véase Figura 3.1) donde se conservan las propiedades de convergencia en tiempo finito y exactitud al parámetro de la tasa de reacción  $\mu$ , además se pudo constatar que el algoritmo converge exactamente sin que se pierda la propiedad de ser exacto en un instante de tiempo posterior como sucedió con la ganancia constante  $k_2 = 0.0001$ .

Al diseñar la ganancia variable  $k_2(X)$  se tomó en cuenta que si la tasa de dilución es mayor al valor máximo alcanzable por la tasa de reacción ( $D > \mu^* = \hat{9}/175$ ), la concentración de biomasa tenderá a disminuir en magnitud, observe

$$\dot{X} = \mu X - DX$$

Entonces para los casos en que la concentración de biomasa sea baja, ya sea por su condición inicial o porque dicha concentración se decrementó, el producto  $k_2 X$  de (3.1) provoca que el algoritmo se *debilite*, para fortalecer el algoritmo, la ganancia variable  $k_2$  le permite al observador estimar  $\hat{\mu}$  sin que las propiedades del algoritmo se pierdan (ver Figura 3.3).

### 3.2. Estimador para la Entrada Desconocida

Como se ha mencionado anteriormente, la entrada desconocida  $S_{in}(t)$  es una entrada de sustrato que se encuentra acoplada a la dinámica de la concentración de sustrato  $S$ , note

que cuando la tasa de dilución  $D > 0$  la concentración de sustrato  $S$  no es perturbada por  $S_{in}$  como se observa a continuación

$$\dot{S} = -\beta\mu X + D(S_{in} - S),$$

y que para  $D = 0$  la entrada desconocida  $S_{in}$  no afecta la dinámica de  $S$  y por tanto no hay nada que estimar, el caso que se abordará es cuando  $D > 0$  lo cual tiene sentido en un biorreactor tipo *fed-batch*, en (3.2) se muestra la estructura del Estimador para la Entrada Desconocida (EED)

$$EED : \begin{cases} \dot{\hat{G}}(t) = -l_{j1}\phi_1(e_{G_j}) - \beta\hat{\mu}X + D(\hat{S}_{in_j}(t) - \hat{S}_j) \\ \dot{\hat{S}}_{in_j}(t) = -l_{j2}D\phi_2(e_{G_j}) \end{cases} \quad (3.2)$$

donde

$$\begin{aligned} j &= 1, 2, l_{j1} > 0, l_{j2} > 0 \\ e_{G_j} &= \hat{G}_j - \hat{S}_j, \nu_{1j} > 0, \nu_{2j} \geq 0 \\ \phi_1(e_{G_j}) &= \nu_{1j}\sqrt{e_{G_j}} \operatorname{sign}(e_{G_j}) + \nu_{2j}e_{G_j} \\ \phi_2(e_{G_j}) &= \frac{\nu_{1j}^2}{2}\operatorname{sign}(e_{G_j}) + \frac{3}{2}\nu_{1j}\nu_{2j}\sqrt{e_{G_j}} \operatorname{sign}(e_{G_j}) + \nu_{2j}^2e_{G_j} \end{aligned}$$

El algoritmo propuesto esta basado en la información generada por el OEB ( $\hat{\mu}, \hat{S}_1, \hat{S}_2$ ), es un algoritmo tipo “super-twisting”, donde  $\phi_1(e_{G_j})$  y  $\phi_2(e_{G_j})$  son los términos de estabilización no lineal y la tasa de dilución ( $D$ ) es tomado como un parámetro variante en el tiempo. El algoritmo cuenta con ocho grados de libertad ( $l_{j1}, l_{j2}, \nu_{1j}, \nu_{2j}$ ), para  $j = 1$  el algoritmo está relacionado con la trayectoria  $\hat{S}_1$  y para  $j = 2$  con  $\hat{S}_2$ .

Para aplicar el algoritmo se asume lo siguiente:

- En tiempo finito,  $\hat{\mu}$  tiene exactamente el valor actual de  $\mu$  (basándose en la información que proporciona el sensor que mide la concentración de biomasa ( $X$ )).
- La entrada desconocida de sustrato está uniformemente acotada  $S_{in} < \eta$  y  $\dot{S}_{in} \leq \eta$
- La tasa de dilución  $D > 0$

En tiempo finito, el par de trayectorias ( $\hat{S}_1, \hat{S}_2$ ) debe satisfacer (3.3) y (3.4),

$$\dot{\hat{S}}_1 = -\beta\hat{\mu}X + D(\hat{S}_{in_1} - \hat{S}_1) \quad 0 \leq \hat{S}_1 \leq S^* \quad (3.3)$$

$$\dot{\hat{S}}_2 = -\beta\hat{\mu}X + D(\hat{S}_{in_2} - \hat{S}_2) \quad S^* \leq \hat{S}_2 \leq \eta \quad (3.4)$$

tomando las suposiciones anteriores y las ecuaciones (3.3) y (3.4), la dinámica del error está dada por

$$\begin{aligned}\dot{e}_{G_j}(t) &= -l_{j1}\phi_1(e_{G_j}) + D\hat{S}_{in_j}(t) \\ \dot{e}_{S_{in_j}}(t) &= -l_{j2}D\phi_2(e_{G_j}) + \eta\end{aligned}$$

donde  $e_{G_j}(t) = G_j - \hat{S}_j$ ,  $e_{S_{in_j}}(t) = S_{in} - \hat{S}_{in_j}$  y  $\eta$  es la cota superior de la derivada de la entrada desconocida.

La estimación de la entrada desconocida se da en pares  $(\hat{S}_j, \hat{S}_{in_j})$  y su tiempo de convergencia se retrasará un tanto en lo que converge el OEB, el hecho es que solamente uno de los dos pares corresponderá a la estimación correcta, mientras que en el otro par el EED no proporcionará información ninguna de dicha entrada.

### 3.2.1. Sintonización de las ganancias del EED

El EED al estar basado en la información del OEB estimará de forma exacta a la entrada desconocida ( $S_{in}$ ) solamente si se conoce cual es la trayectoria estimada  $(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  correcta que corresponde al valor exacto de la concentración de sustrato ( $S$ ), para ello se tienen 4 grados de libertad relacionados a las dinámicas (3.3) y (3.4).

Para sintonizar las ganancias lo que se realizó en primer lugar fue programar las ganancias  $l_{j1}$  y  $l_{j2}$ , y después se buscó que la ganancia lineal  $\nu_{2j}$  atrajera la trayectoria a las cercanías del origen sin pasarse del valor en la simulación, una vez hecho esto se bajo la ganancia  $\nu_{1j}$  para obtener una estimación mas fina del algoritmo. En los Cuadros 3.3 y 3.4 se muestran las ganancias a las que se programó cada estimador. Observe que en cada estimador la tasa de dilución ( $D$ ) no cambia tanto en cuanto a su orden de magnitud como sucedía en el OEB por lo cual no es necesario crear un nuevo par de ganancias  $l_{j2}$  variables.

Ganancia	Valor
$\nu_{11}$	0.1
$\nu_{21}$	100
$l_{11}$	1
$l_{12}$	10

Cuadro 3.3: Ganancias del EED basado en  $\hat{S}_1$ .

Ganancia	Valor
$\nu_{12}$	0.1
$\nu_{22}$	100
$l_{21}$	1
$l_{22}$	10

Cuadro 3.4: Ganancias del EED basado en  $\hat{S}_2$ .

El procedimiento de sintonización es similar al que se explicó en el OEB siguiendo ahora el procedimiento que se describe a continuación:

- i) Programar un estimador a la vez.
- ii) Poner todas las ganancias igual a la unidad.
- iii) Elegir el par de ganancias  $l_{j1}$  y  $l_{j2}$ .
- iv) Elegir el par de ganancias  $\nu_{j1}$  y  $\nu_{j2}$  para obtener una estimación más fina.

### 3.2.2. Simulaciones

En la Figura 3.4 se muestra una simulación de ambos estimadores para la entrada desconocida  $\hat{S}_{in_1}$  y  $\hat{S}_{in_2}$ , siendo esta variante en el tiempo  $S_{in} = 600 + 10 \sin(5\pi t)[mg/l]$ , considerando una tasa de dilución constante  $D = 0.7[h^{-1}]$ , las siguientes condiciones iniciales:  $S_0 = 49[mg/l]$ ,  $X_0 = 8000[mg/l]$  y  $S_{in_0} = S_{in_2_0} = 800[mg/l]$ , así como las estimaciones tomadas por el Observador de Estado Bivaluado  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{S}_1$  y  $\hat{S}_2$ . No olvide que cada estimación se dará por pares  $(\hat{S}_j, \hat{S}_{in_j})$  con  $j = 1, 2$  y la estimación de  $S_{in}$  será confiable siempre que  $S = S_j$ .

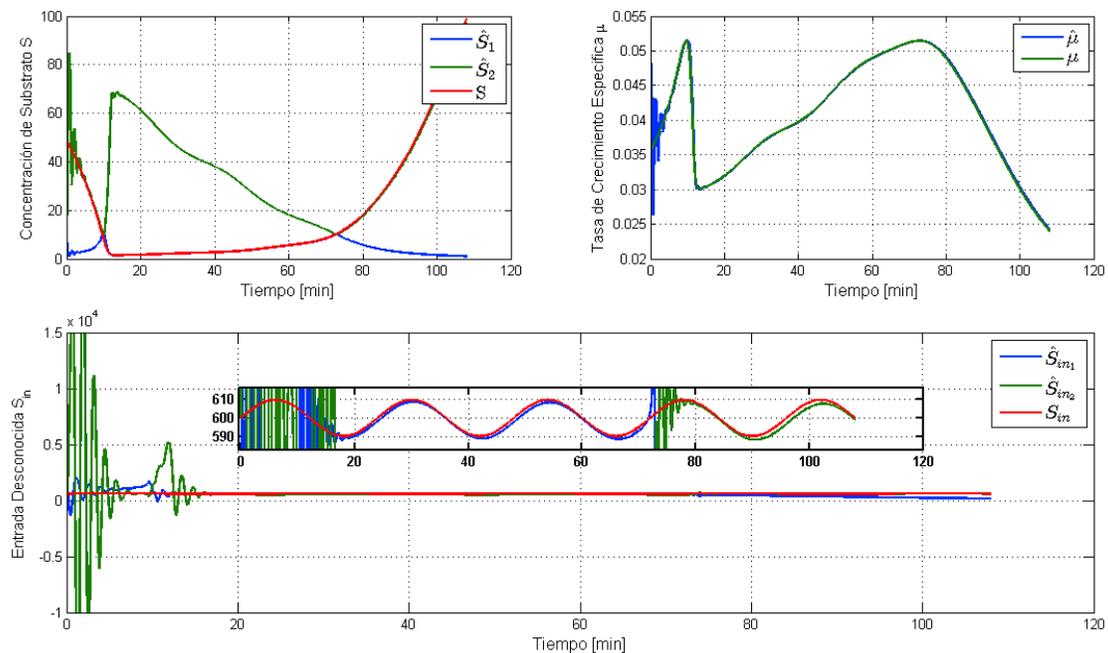


Figura 3.4: Simulación del EED con  $k_2$  variable

La información que proporciona el Observador de Estado Bivaluado  $(\hat{\mu}, (\hat{S}_1, \hat{S}_2))$  se muestra en la parte superior de la Figura 3.4, del lado izquierdo se muestra el par de estimaciones posibles  $(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  de la concentración de sustrato  $S$ , y del lado derecha se muestra la tasa de reacción  $\hat{\mu}$ . La simulación del Estimador para la Entrada Desconocida se muestra en la parte inferior de la imagen. Durante los primeros 10 minutos de simulación la concentración de sustrato es estimada por  $\hat{S}_2$  y converge a los 5 minutos, luego la estimación de  $S_{in}$  empezó a ser estimada por  $\hat{S}_{in_2}$  sin alcanzar la propiedad de exactitud, ya que sus condiciones iniciales se alejaron en el transitorio de convergencia del OEB y  $S$  disminuyó de una concentración  $S = S_2 > S^*$  del lado antitónico hasta  $S = S_1 < S^*$  de su lado isotónico. Ahora bien, dentro del intervalo de tiempo 10 y 72 minutos  $S$  se estima exactamente por  $\hat{S}_1$ , consecuentemente la estimación de  $S_{in}$  se estima exactamente por  $\hat{S}_{in_1}$  8 minutos después que ocurrió el cruce, o en el minuto 18 de simulación, hasta que  $S$  vuelve a cruzar por  $S^*$ . Durante el intervalo de tiempo comprendido entre 72 y 110 minutos la estimación de  $S_{in}$  se efectúa por el estimador  $\hat{S}_{in_2}$  de forma exacta 10 minutos después de que se produjo el último cruce.

El problema que surge al estimar  $S_{in}$  solamente se presenta cuando la trayectoria que sigue la concentración de sustrato cruza por  $S^*$ , de tal modo que mientras  $S < S^*$  el par  $(\hat{S}_1, \hat{S}_{in_1})$  corresponderá con la información correcta del estado y de la entrada desconocida, y para el caso en que  $S > S^*$  la estimación confiable será la proporcionada por el par  $(\hat{S}_2, \hat{S}_{in_2})$ .

# Capítulo 4

## Diseño del controlador

El objetivo planteado en esta tesis es el diseño de un control capaz de maximizar la tasa de reacción de un biorreactor que presenta trayectorias indistinguibles para el estado correspondiente a la concentración de sustrato  $S(t)$  que no se puede medir. La tasa de reacción  $\mu$  al estar relacionada directamente con la tasa de crecimiento específica asume que las reacciones químico-biológicas toman lugar cuando la biomasa consume el sustrato implicando un cambio en la producción de producto transformado, a su vez el producto obtenido es proporcional con el término de consumo de sustrato  $\beta\mu(S)X$ , entonces, al aumentar el consumo de sustrato en el bioreactor la cantidad de producto aumenta proporcionalmente siempre y cuando las condiciones ambientales a las que están expuestas las bacterias sean favorables en cuanto a mantener los índices bajos de contaminantes, así como crear lazos de control para mantener los niveles de pH, temperatura, luz, oxígeno entre otros inhibidores de tal modo que no afecten al proceso.

En cuanto a la resolución del objetivo planteado se diseñaron dos controladores, el primero es un control no realimentado que conmuta entre dos valores constantes y el segundo es un control retroalimentado que conmuta entre dos *sub-controles*, cada uno supone ser un control independiente y se basa en una concentración de sustrato distinta, de tal modo que cada control retroalimenta un estado distinto por el hecho de estar basado en el Observador de Estado Bivaluado y en el Estimador para la Entrada Desconocida. La filosofía que se maneja en éste control a diferencia del primer control, intenta reducir los efectos de desgaste en los actuadores haciendo que el control sea un tanto suave en comparación con el control no realimentado, una descripción del método que se seguirá en el diseño del control se muestra a continuación:

- En el *primer paso* se contesta la pregunta siguiente: ¿Cómo se resolvería el objetivo planteado si se pudiera medir la concentración de sustrato ( $S$ ), la tasa de consumo de sustrato ( $\mu$ ) y la entrada desconocida ( $S_{in}$ )? La respuesta consiste en dividir el control en dos, el primer controlador considera que la concentración de sustrato es  $S = S_1 < S^*$  cuyo objetivo es aumentar la concentración de sustrato hasta  $S^*$ , el

segundo controlador al asumir que la concentración de sustrato es  $S = S_2 > S^*$  se diseña para disminuir la concentración de sustrato hasta  $S^*$ . Con ambos controladores en mano se procede a aplicar un controlador, si la tasa de reacción aumenta, entonces el control aplicado es el correcto y además se puede saber cuál trayectoria estimada corresponde a la concentración de sustrato actual. Para el caso en que el control aplicado no aumente la tasa de reacción se procederá a conmutar por el segundo control y así sucesivamente.

- En el *segundo paso* se evalúa la información que brinda el Observador de Estado Bivaluado  $(\hat{\mu}, (\hat{S}_1, \hat{S}_2))$  en ambos controladores y se observa el desempeño del controlador.
- En el *tercer paso* se utiliza la información del estimador para la entrada desconocida  $(\hat{S}_{in_1}, \hat{S}_{in_2})$  y se observa el desempeño del controlador.
- De acuerdo a los resultados obtenidos en el tercer paso se realizó una modificación del algoritmo, la cual está basada en la interpretación de la información obtenida a partir del estimador para la entrada desconocida  $(\hat{S}_{in_1}, \hat{S}_{in_2})$ , en dicha estrategia se considera un tiempo de análisis de la entrada desconocida donde el control aplicado es considerado como una entrada constante o variable ( $D > 0$ ) antes de aplicar el control final, en dicha estrategia se busca además eliminar los puntos en los que el controlador se llega a saturar debido a cambios posibles de la concentración de sustrato al cruzar  $S^*$ , ya sea de una concentración baja ( $S < S^*$ ) a una concentración superior  $S > S^*$ .

## 4.1. Control Conmutado no Realimentado

El control conmutado no realimentado se basa en la filosofía de un control todo-nada, supone una conmutación entre dos valores, para el primero se considera su valor de saturación máximo  $D^*$  y la eliminación del control  $D_*$  para el segundo, por esa razón el control es no realimentado. El control entonces solamente requiere de la estimación de la variable de control, en este caso, la estimación de la tasa de reacción  $\hat{\mu}$ , además, el control precisa de un tiempo de comparación entre una muestra y otra con objeto de dejar al biorreactor reaccionar y con ello poder decidir cual control se debe aplicar.

### 4.1.1. Procedimiento de diseño

La técnica principalmente maneja lapsos de tiempo entre comparaciones que libremente son manipulados por el operador. Los lapsos de tiempo son utilizados para generar *pulsos*, cada que se cumple el tiempo de retraso fijado se generará un *pulso* para tomar la decisión de dejar el control actual o cambiar por el otro control -ya sea el control máximo ( $D^*$ ) o el

mínimo ( $D_*$ ). El control diseñado sigue la lógica mostrada en la Figura 4.1, observe que el diagrama de flujo contiene dos bloques que son habilitados por una señal que es generada por pulsos como se mencionó anteriormente, ahora bien, la lógica que sigue el esquema se muestra a continuación:

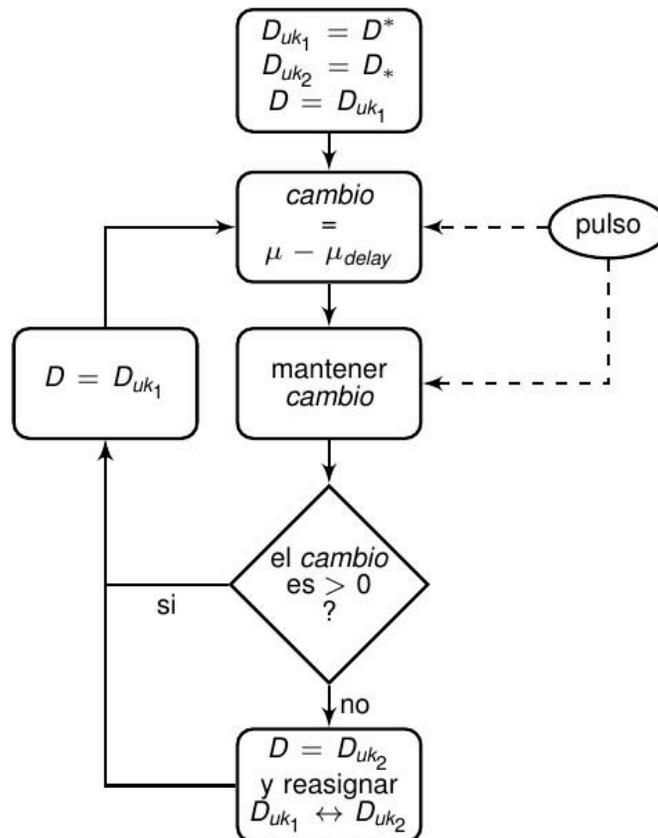


Figura 4.1: Lógica de selección para el controlador conmutado no realimentado.

- Inicialmente se debe contar con la caracterización adecuada de los actuadores ya que se requiere conocer cuales son sus valores de saturación: el máximo ( $D^*$ ) y el mínimo ( $D_*$ ). Mediante esta información se prosigue a diseñar dos variables de control adicionales que puedan conmutarse cuando se requiera ( $D_{uk1}$  y  $D_{uk2}$ ), esto es porque un control constante que hacía aumentar la tasa de reacción nunca será el definitivo cuando la concentración de sustrato cruce por  $S^*$ .
- Ahora bien, en el primer bloque se le asigna al control final  $D$  el primer control desconocido  $D_{uk1}$ , en este caso, el valor constante  $D^*$ .

- El segundo y tercer bloque son habilitados con el *pulso*, el segundo bloque toma el *cambio*: la resta entre el valor actual de la tasa de crecimiento específica ( $\mu$ ) y el valor retrasado que fijó el usuario ( $\mu_{delay}$ ), inmediatamente este valor se mantiene hasta el próximo pulso como se muestra en el tercer bloque.
- El control solamente se cambiará si el *cambio* no es positivo.
  - Si la tasa de reacción  $\mu$  ha aumentado, el *cambio* es positivo, luego no hay mas que dejar el mismo control y esperar hasta que sea generado un nuevo pulso donde se llevará a cabo una nueva comparación y con ello decidir si se deja o se cambia el control.
  - Si el control no ha aumentado se cambia el control, ahora  $D = D_{uk_2}$ , se reasignan los controles  $D_{uk_1}$   $D_{uk_2}$ , y se vuelve a esperar el próximo pulso donde se decidirá si se cambia el control.

Note que a menudo la concentración de sustrato pasará de  $S < S^*$  a  $S > S^*$  y de forma inversa, viéndose así pequeñas variaciones de  $\mu$  alcanzando su máximo  $\mu^*$ , esto se debe a que el control permanecerá aplicado hasta que un pulso sea generado de nuevo y se vuelva a revisar si  $\mu$  se ha incrementado o no. En las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4 se ilustra el progreso que se obtiene de aplicar el controlador Min-Max considerando un retraso de 15 minutos, de 5 minutos y de 2 minutos, las simulaciones se realizaron para un biorreactor bajo las suposiciones siguientes:

- Las condiciones iniciales del biorreactor son:  $X_0 = 300[mg/l]$  y  $S_0 = 200[mg/l]$ .
- Las condiciones iniciales del Observador de Estado Bivaluado son  $\hat{X}_0 = 300[mg/l]$  y  $\hat{\mu}_0 = \mu^*$ .

De las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4 observe como la tasa de reacción ( $\mu$ ) varía más tiempo en las cercanías de  $\mu^*$  en la medida que el operador reduzca el tiempo de retraso, el caso es que si en la Figura 4.4 el tiempo fuera menor a 2 minutos se podría alcanzar la perfección con una frecuencia infinita, lo cual físicamente no puede ser posible; adicionalmente, tampoco es posible mantener conmutando al controlador a frecuencias muy altas porque los actuadores se quemarían, por tal motivo la tarea de elegir la frecuencia de conmutación es responsabilidad del operador.

#### 4.1.2. Fortalezas y debilidades

Con la lógica que sigue el control diseñado note que solamente se requiere de la estimación de la tasa de reacción  $\hat{\mu}$ , y que, se puede elegir libremente la frecuencia de conmutación, con los resultados obtenidos en simulación se pueden argumentar las siguientes fortalezas y debilidades de aplicar ésta estrategia de control:

Fortalezas:

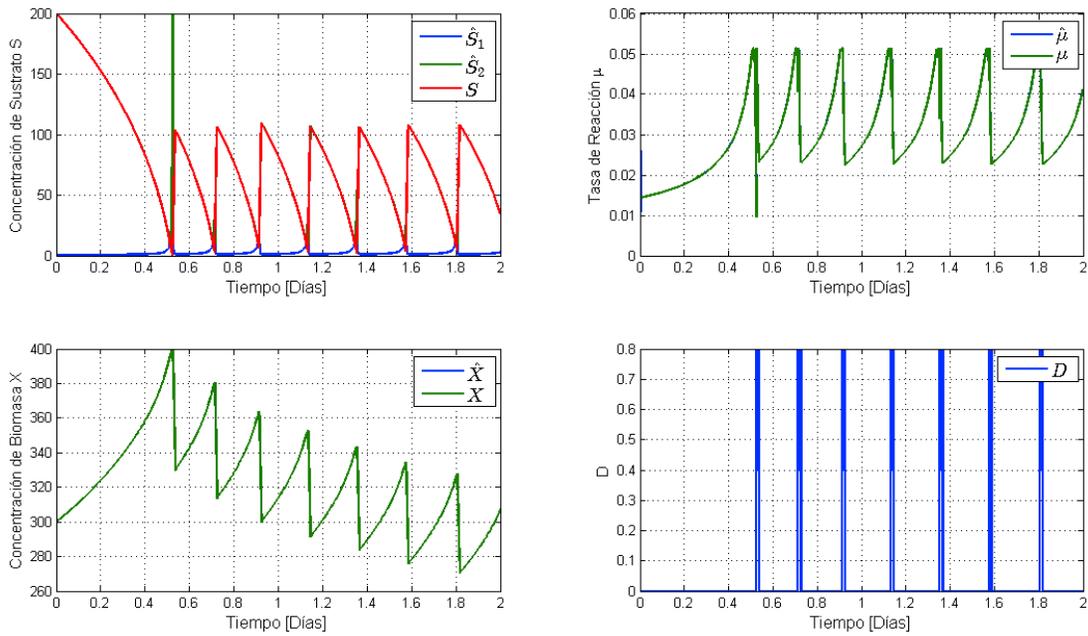


Figura 4.2: Control conmutado no realimentado con un retraso de 15 minutos

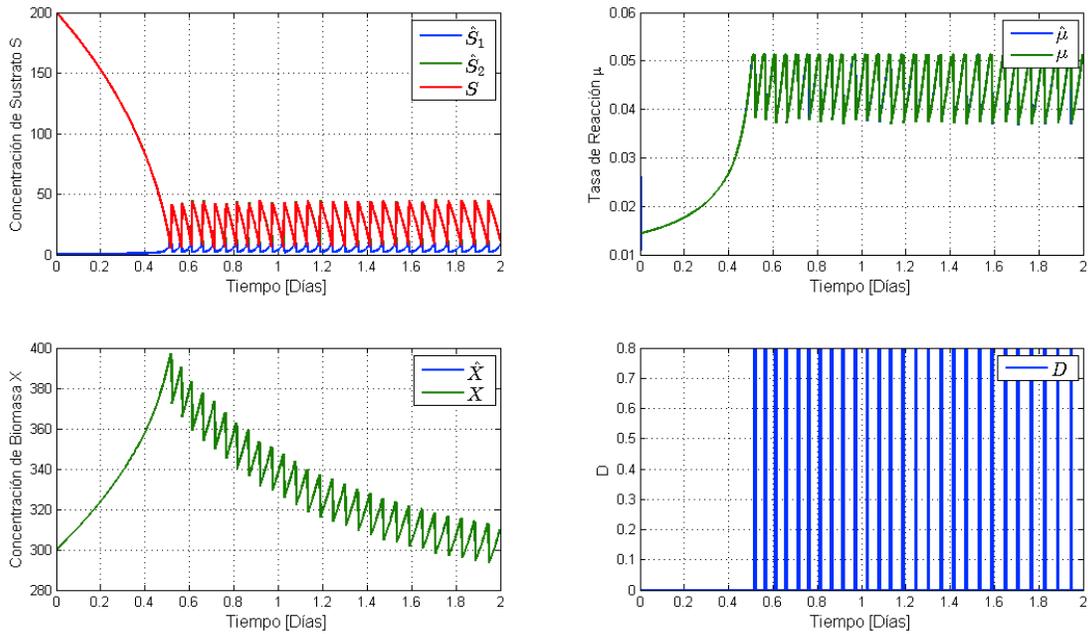


Figura 4.3: Control conmutado no realimentado con un retraso de 5 minutos

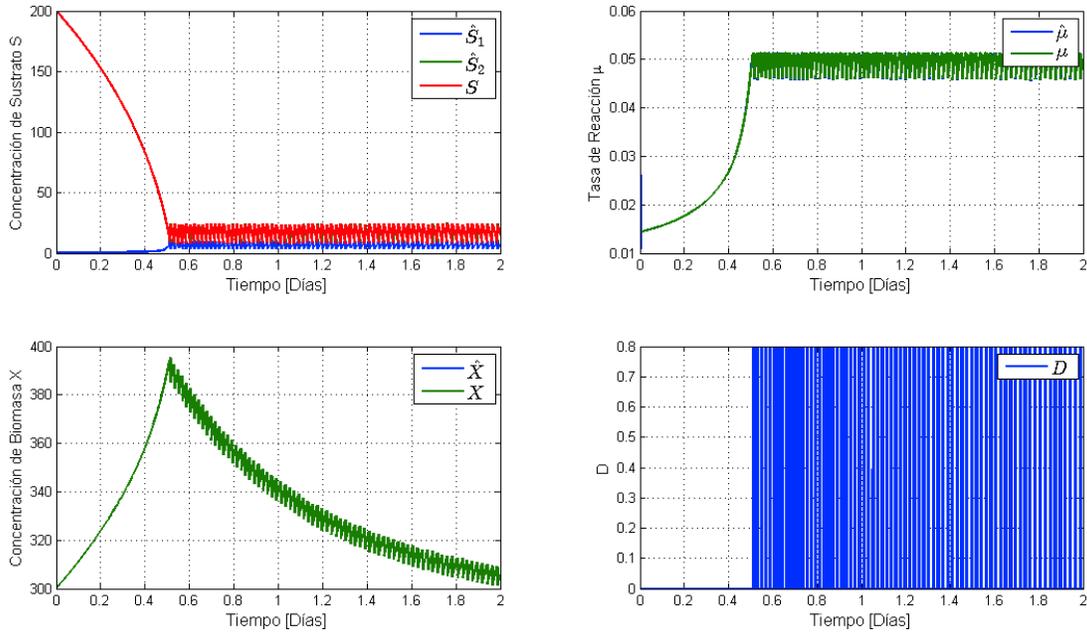


Figura 4.4: Control conmutado no realimentado con un retraso de 2 minutos

- Robustez ante perturbaciones/entradas de sustrato acotadas:  $S_{in} \leq \Delta$ .
- Aumentar la frecuencia de conmutación implica reducir la desviación de  $\mu$  con  $\mu^*$ .

Debilidades:

- Aumentar la frecuencia de conmutación implica una disminución reflejada en la vida útil de los actuadores por desgaste.

De las ventajas y desventajas presentadas se puede concluir que el control puede ser bastante robusto ante perturbaciones / entradas de sustrato acotadas. Con objeto de disminuir el error entre la variable de control y el valor de referencia deseado lo que se debe hacer es aumentar la frecuencia de conmutación y para un error cero se debe asumir una frecuencia infinita lo cual resulta físicamente imposible de lograr; entonces, a lo más que se puede aspirar con éste control es a un error acotado.

## 4.2. Control Conmutado Realimentado

La estrategia propuesta tiene como fin obtener un controlador suave, basado en la información que brinda el OEB ( $\hat{\mu}, \hat{S}_1, \hat{S}_2$ ) y el EED ( $\hat{S}_{in_1}, \hat{S}_{in_2}$ ). Para ello se considera en primera instancia el sistema ideal con las siguientes suposiciones:

- Se puede medir todo el estado (*concentraciones biomasa y sustrato*  $(X, S)$ ).
- Se puede medir el parámetro de la tasa de consumo de sustrato  $\mu$ .
- Se puede medir la entrada desconocida  $S_{in}$ .

El primer paso en la búsqueda de un controlador suave consiste en identificar cual es la concentración de sustrato actual ( $S$ ), ya sea que la concentración de sustrato sea baja  $S = S_1$  o grande ( $S = S_2$ ) con respecto al punto donde la eficiencia es máxima ( $S^*, \mu_{max}$ ) como se muestra en la Figura 4.5.

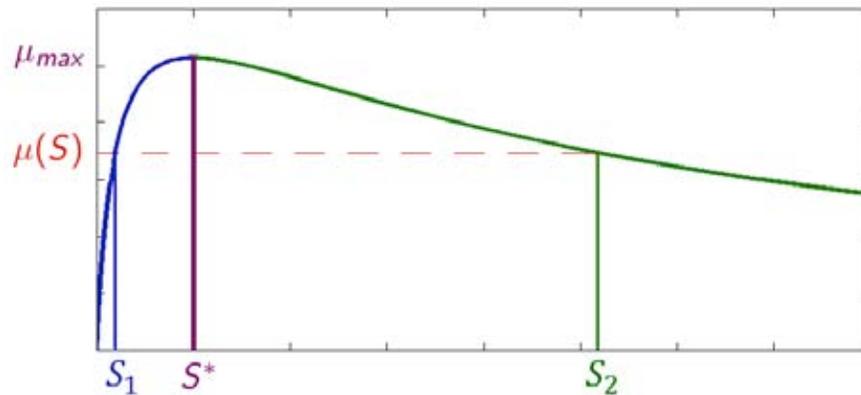


Figura 4.5: Intervalos de existencia para  $S_1$  y  $S_2$

Como se comentó anteriormente, para identificar cual es la concentración de sustrato actual se han de diseñar dos controladores uno para cuando  $S = S_1$  y otro para cuando  $S = S_2$ , la identificación consiste en aplicar uno de los dos controladores, si  $\mu$  aumenta se sigue aplicando el controlador actual, siguiendo con el esquema mostrado en la Figura 4.6, si esto no ocurre se aplica el controlador correspondiente a la concentración de sustrato complementaria. El caso en que  $S = S_1 = S_2 = S^*$ , es un caso que se considera improbable, debido a que para identificar la trayectoria en que  $S$  se encuentra uno de los dos controladores es aplicado de modo que es imposible mantener la tasa de consumo de biomasa en el máximo valor para el primer intervalo de tiempo.

Ahora bien, cuando ya se haya diseñado el controlador muy probablemente variante en el tiempo, se prueba el desempeño del controlador para el caso ideal, una vez hecho esto y considerando los siguientes puntos verdaderos en cuanto al observador de estado bivaluado:

- En tiempo finito  $\hat{\mu}$  tiene exactamente el valor de  $\mu$ .
- En tiempo finito  $\hat{S}_2$  tiene exactamente el valor de  $S_1$ .
- En tiempo finito  $\hat{S}_1$  tiene exactamente el valor de  $S_2$ .

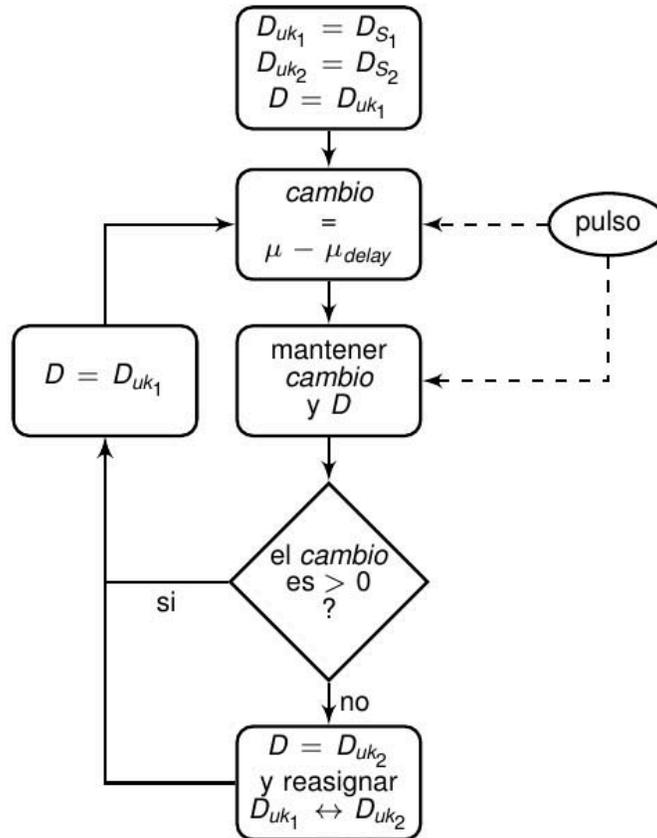


Figura 4.6: Lógica de selección para el control conmutado realimentado.

Luego, se procede con el segundo paso al evaluar el controlador  $(S_1, S_2, \mu)$  en sus respectivas estimaciones  $(\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{\mu})$ , finalmente se toman las siguientes suposiciones del estimador para la entrada desconocida:

- En tiempo finito la estimación  $\hat{S}_{in_1}$  es exactamente  $S_{in}$  solamente si  $S = S_1$ .
- En tiempo finito la estimación  $\hat{S}_{in_2}$  es exactamente  $S_{in}$  solamente si  $S = S_2$ .

El tercer paso consiste en evaluar  $S_{in}$  por  $\hat{S}_{in_1}$  ó  $\hat{S}_{in_2}$  según corresponda el controlador para  $S_1$  ó  $S_2$  y se observa el desempeño del controlador con respecto a los resultados obtenidos cuando la entrada desconocida  $S_{in}$  se consideraba medible.

Finalmente se realizará una modificación final del algoritmo para evitar posibles discontinuidades con respecto a la salida del controlador.

### 4.2.1. Procedimiento de diseño

#### Primer paso

Esta estrategia consiste en diseñar un par de controladores independientes, cada controlador considerará una dinámica distinta para la concentración de sustrato ( $S$ ), el primer controlador considera que  $S = S_1$  cuya dinámica es

$$\dot{S}_1 = -\beta\mu X + D(S_{in} - S_1), \quad 0 \leq S_1 \leq S^* \quad (4.1)$$

y el segundo considera que  $S = S_2$ , por lo cual

$$\dot{S}_2 = -\beta\mu X + D(S_{in} - S_2), \quad S^* \leq S_2 < S_{in} \quad (4.2)$$

Ambas dinámicas coinciden solamente en  $S = S_1 = S_2 = S^*$ , para ello existe solamente un controlador capaz de mantener a la concentración de sustrato  $S$  en  $S^*$ , por ejemplo si se diseña un controlador para  $S = S_1$  lo que se busca es que  $S_1$  aumente hasta  $S^*$  y se detenga justamente en  $S^*$ , de (4.1) note que cuando se alcanza  $S^*$  se tiene que  $S = S^*$  y  $\mu = \mu_{max}$ , entonces para que la concentración de sustrato permanezca constante en el punto donde eficiencia es máxima se debe aplicar el siguiente controlador

$$D = \frac{\beta\mu_{max}X}{S_{in} - S^*}.$$

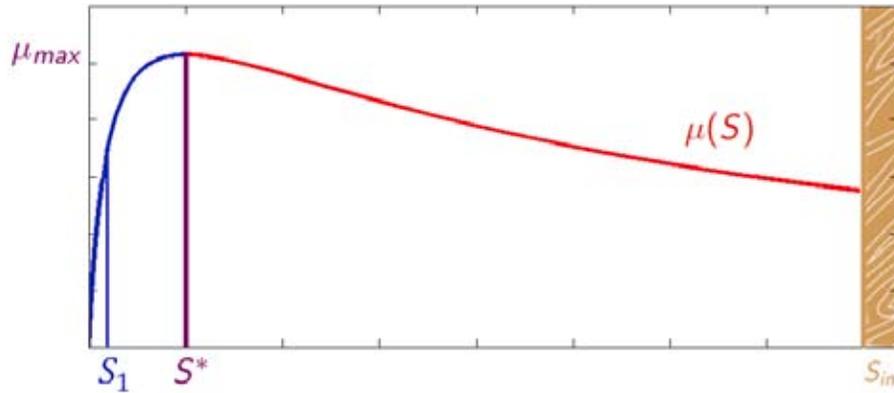
Para identificar cual es la concentración de sustrato actual ( $S$ ) se aplica cualquiera de los dos controladores al sistema real, luego se *observa* la tasa de crecimiento específica  $\mu$ , si ésta se encuentra aumentando se sigue aplicando el controlador actual, y en caso contrario se cambia (conmuta) al segundo controlador.

Considere que la concentración de sustrato obedece a  $S = S_1 < S^*$  como se muestra en la Figura 4.7, para aumentar la concentración de sustrato se debe tomar en cuenta la dinámica mostrada en (4.1), y a partir de ella se busca un controlador que no tenga discontinuidades, para ello, *se requiere que la cota inferior de la entrada desconocida ( $S_{in}$ ) sea mayor al valor máximo posible de la concentración de sustrato ( $S = S_2$ )*, esto es en parte porque en la dinámica de la concentración de sustrato se tiene que

$$\dot{S} = -\beta\mu X + D(S_{in} - S),$$

entonces para una entrada desconocida  $S_{in}$  menor a la máxima concentración de sustrato  $S$  que se puede tener, el origen de la dinámica de la concentración de sustrato ( $S = 0$ ) tiende a ser exponencialmente estable y aplicar un control  $D < 0$  para llevar a  $S$  hasta  $S^*$  no es posible. La razón que hace posible diseñar un controlador, es que, *en un biorreactor la entrada desconocida siempre es mayor en magnitud en comparación con la concentración de sustrato*.

Para la dinámica mostrada en (4.1), se ha propuesto un controlador con la siguiente estructura

Figura 4.7: Control para la trayectoria  $S_1$ 

$$D_{S_1} = \gamma\beta\mu X, \quad (4.3)$$

evaluando en (4.1) se tiene que

$$\dot{S}_1 = -\beta\mu X + \gamma\beta\mu X(S_{in} - S_1),$$

factorizando

$$\dot{S}_1 = \beta\mu X (-1 + \gamma(S_{in} - S_1)),$$

donde  $\gamma$  debe satisfacer:

- La desigualdad

$$\gamma < \frac{1}{S_{in} - S_1}.$$

- Y al alcanzar  $S_1 = S^*$ , aplicar

$$D_{S_1} = \frac{\beta\mu_{max}X}{S_{in} - S^*},$$

recuerde que en ese punto  $S_1 = S_2 = S^*$ .

La elección de  $\gamma$  debe ser cuidadosa y, puesto que una constante no puede lograr ambos objetivos es necesario que ésta sea una función de  $S_{in}$ ,  $S_1$  o  $S_2$ . Una  $\gamma$  que cumple con lo anterior se puede elegir como

$$\gamma = \frac{1}{S_{in} - S_2} \leq \frac{1}{S_{in} - S_1}, \quad (4.4)$$

observe que la desigualdad siempre se cumple, aun cuando  $S_1 = S_2$ , de modo que los dos puntos anteriores se satisfacen, sustituyendo (4.4) en (4.3) queda finalmente el controlador en función de  $(X, S_2, \mu, S_{in})$

$$D_{S_1} = \frac{\beta\mu X}{S_{in} - S_2}, \quad (4.5)$$

evaluando (4.5) en (4.1) y (4.2)

$$\dot{S}_1 = -\beta\mu X + \frac{\beta\mu X}{S_{in} - S_2}(S_{in} - S_1), \quad (4.6)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{S}_2 &= -\beta\mu X + \frac{\beta\mu X}{S_{in} - S_2}(S_{in} - S_2), \\ \dot{S}_2 &= 0 \end{aligned}, \quad (4.7)$$

note que cuando el control (4.5) es aplicado a la trayectoria equivocada ( $S = S_2$ ) la concentración de sustrato real permanecerá constante (véase ecuación (4.7)).

Sustituyendo ( $S_2 = S_1 + \frac{\zeta}{\mu}$ ) en (4.6)

$$\dot{S}_1 = -\beta\mu X + \frac{\beta\mu X}{S_{in} - S_1 - \frac{\zeta}{\mu}}(S_{in} - S_1),$$

cuando se ha alcanzado  $\dot{S}_1 = S^*$

$$\beta\mu X \left( S_{in} - S_1 - \frac{\zeta}{\mu} \right) = \beta\mu X (S_{in} - S_1),$$

la única posibilidad de que se cumpla lo anterior es que  $\zeta$  sea igual a cero

$$\zeta = \sqrt{K_I^2(\mu_0 - \mu)^2 - 4K_S K_I \mu^2} = 0$$

y para que esto suceda  $\mu = \mu_{max}$ , esto es en parte porque el control fue aumentando la concentración de sustrato  $S_1$  hasta  $S^*$ .

Ahora bien si  $S = S_2 > S^*$  como se muestra en la Figura 4.8, se debe aplicar un control que haga disminuir a  $S_2$  (véase ecuación (4.2)), como se muestra a continuación

$$D_{S_2} = \delta\beta\mu X, \quad (4.8)$$

note que la estructura de este controlador es bastante paracida a la que se diseñó para aumentar la concentración de sustrato  $S_1$ , sustituyendo (4.8) en (4.2)

$$\dot{S}_2 = -\beta\mu X + \delta\beta\mu X (S_{in} - S_2),$$

factorizando

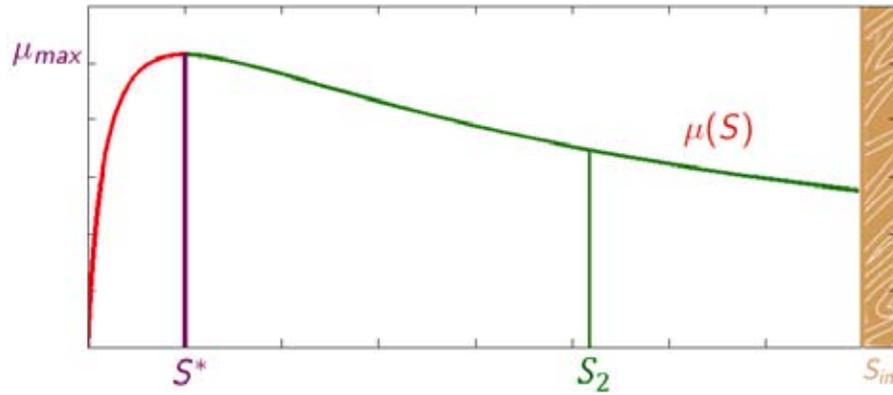


Figura 4.8: Control para la trayectoria  $S_2$

$$\dot{S}_2 = \beta\mu X(-1 + \delta(S_{in} - S_2)),$$

donde  $\delta$  debe satisfacer

- La desigualdad

$$\delta > \frac{1}{S_{in} - S_2}$$

- y que al alcanzar  $S_2 = S^*$ , aplicar

$$D_{S_2} = \frac{\beta\mu_{max}X}{S_{in} - S^*},$$

porque es el único controlador que puede mantener la concentración de sustrato en  $S_2 = S_1 = S^*$ .

De igual forma que para el caso anterior se busca una  $\gamma$  que cumpla con lo anterior, la cual se puede elegir como se muestra a continuación

$$\delta = \frac{1}{S_{in} - S_1} \geq \frac{1}{S_{in} - S_2},$$

finalmente

$$D_{S_2} = \frac{\beta\mu X}{S_{in} - S_1}, \quad (4.9)$$

evaluando (4.9) en (4.1) y (4.2)

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= -\beta\mu X + \frac{\beta\mu X}{S_{in} - S_1} (S_{in} - S_1), \\ \dot{S}_1 &= 0\end{aligned}\quad (4.10)$$

y

$$\dot{S}_2 = -\beta\mu X + \frac{\beta\mu X}{S_{in} - S_1} (S_{in} - S_2), \quad (4.11)$$

si el control (4.9) es aplicado a la trayectoria equivocada ( $S = S_1$ ) la concentración de sustrato real permanecerá constante (véase ecuación 4.10).

Sustituyendo ( $S_2 = S_1 - \frac{\zeta}{\mu}$ ) en (4.10)

$$\dot{S}_2 = -\beta\mu X + \frac{\beta\mu X}{S_{in} - S_2 + \frac{\zeta}{\mu}} (S_{in} - S_2),$$

cuando  $\dot{S}_2 = 0$

$$\beta\mu X \left( S_{in} - S_2 + \frac{\zeta}{\mu} \right) = \beta\mu X (S_{in} - S_2),$$

como se mostró anteriormente, al ir disminuyendo  $S_2$  hasta  $S^*$ , la tasa de crecimiento específica llega a su máximo valor  $\mu = \mu^*$ , con lo cual  $\zeta = 0$ , finalmente  $S_2 = S_1 = S^*$ . A continuación se presenta una simulación donde se tomarán tiempos de retraso de cinco minutos, la duración de la simulación es de quince días utilizando la información del Cuadro 4.1.

	Valor	Unidades
$X_0$	300	[mg/l]
$S_0$	200	[mg/l]
$S_{in}$	$600 + 20 \sin(0.2\pi t) + 18 \sin(0.3\pi t) + 3 \sin(0.5\pi t)$	[mg/l]

Cuadro 4.1: Condiciones iniciales y la entrada desconocida.

Sentado esto, la Figura 4.9 muestra el desempeño del controlador  $D(D_{S_1}, D_{S_2})$  reflejado en la tasa de reacción ( $\mu$ ) y los cambios que ocurren en los estados ( $X, S$ ), recuerde que cada cinco minutos se realiza una *verificación* para saber si ha aumentado o disminuido la tasa de reacción ( $\mu$ ) como se mencionó en el diagrama de flujo de la Figura 4.6, entonces en la primera verificación de  $\mu$  ya se ha reconocido que  $S = S_2$  y por ende se aplica el control  $D_{S_2}$ . Alrededor de siete días se da por hecho que el control ha logrado el objetivo deseado, además note que la concentración de biomasa al no ser controlada se decremента un tanto lo cual tiene un efecto positivo porque el Observador de Estado Bivaluado requiere de una concentración  $X > 0$  para su funcionamiento, con las gráficas de la Figura 4.9, se espera que en el paso dos se observen pequeñas diferencias al utilizar la información del Observador de Estado Bivaluado.

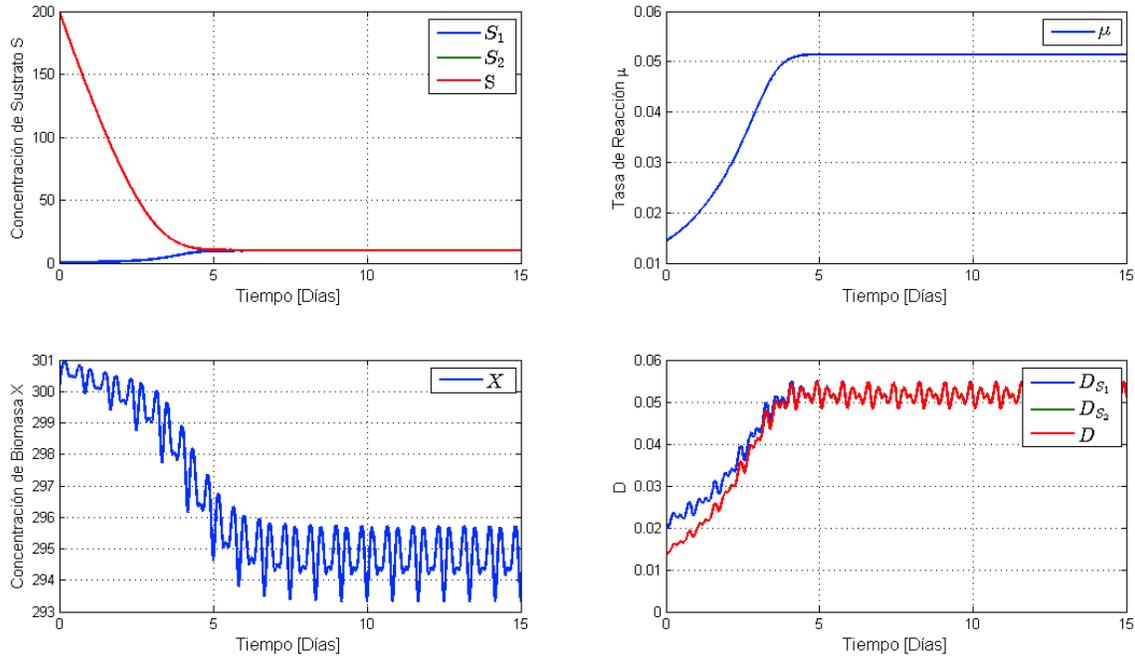


Figura 4.9: Paso 1. Control conmutado realimentado con un retraso de 5 minutos, suponiendo  $\mu(S)$ ,  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$ , y  $S_{in}(t)$  conocidas.

### Segundo paso

En el primer paso se obtuvo un controlador un tanto *suave*, en este caso se espera que el observador con la ganancia variable  $k_2$  tenga una respuesta favorable en cuanto al desempeño del controlador, en la Figura 4.10 se muestra una simulación del controlador donde ha considerado el mismo tiempo de retraso el mismo tiempo de simulación y los datos del cuadro 4.1, ahora bien, desde ahora los controladores estarán basados en el conocimiento de la concentración de biomasa ( $X$ ) y la entrada de sustrato ( $S_{in}$ ), como se mencionó anteriormente se dará por hecho que la tasa de crecimiento específica ( $\hat{\mu}$ ) y el par de concentraciones posibles de sustrato ( $\hat{S}_1, \hat{S}_2$ ) han sido estimadas por el Observador de Estado Bivaluado de forma exacta, de tal modo que los controladores (4.5) y (4.9) quedan del siguiente modo

$$D_{S_1} = \frac{\beta \hat{\mu} X}{S_{in} - \hat{S}_2} \quad (4.12)$$

y

$$D_{S_2} = \frac{\beta \hat{\mu} X}{S_{in} - \hat{S}_1}, \quad (4.13)$$

Observe de la Figura 4.10 que la respuesta del controlador es muy parecida a la obtenida en el primer paso porque de igual modo se alcanza  $\mu = \mu^*$  alrededor de siete días

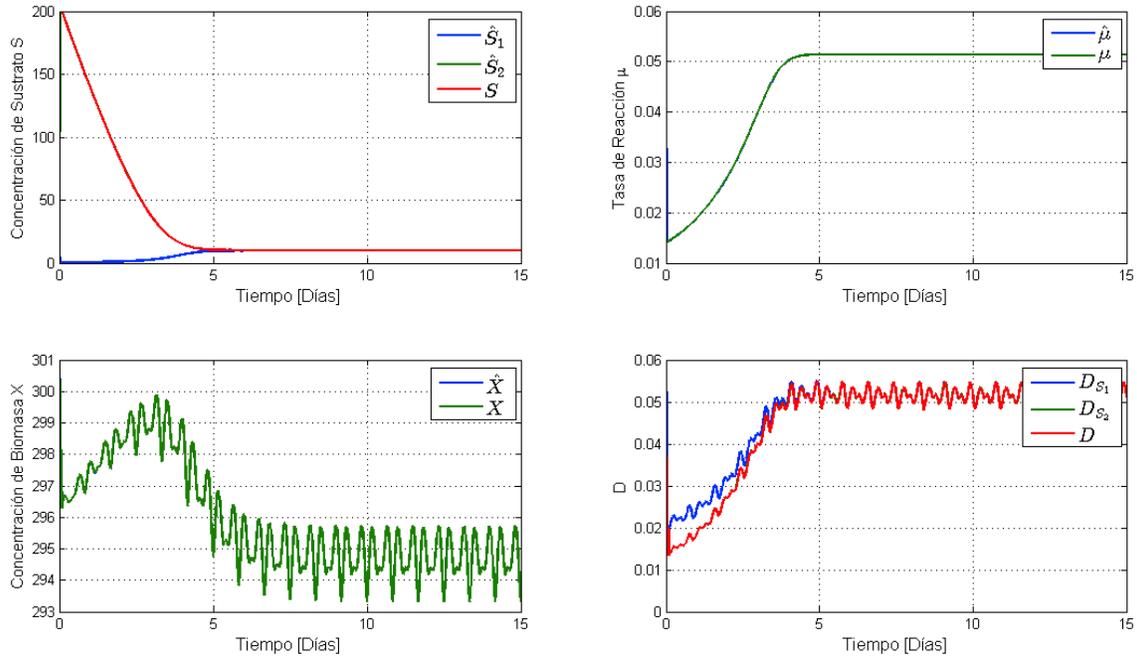


Figura 4.10: Paso 2. Control conmutado realimentado con un retraso de 5 minutos suponiendo  $S_{in}(t)$  conocida.

(Figura 4.9), el observador converge en unos cuantos minutos lo cual es bastante práctico, esto en parte es debido a la ganancia variable  $K_2$  que disminuye significativamente el tiempo de convergencia del observador en comparación con una ganancia constante como se explicó en el capítulo tres. Note además que si fuera posible medir la entrada desconocida la tarea quedaría resuelta hasta este punto ya que los resultados son bastante aceptables. Para continuar con el procedimiento se evaluará la información del Estimador para la Entrada Desconocida tomando en cuenta que la tasa de reacción no se podrá mantener variando en una vecindad cercana de  $\mu^*$  puesto que cada controlador depende de dos estimaciones distintas de  $S_{in}$  donde la condición de grado relativo juega un papel importante porque solamente se cumple para uno de los dos estimadores a la vez, como se mencionó en el capítulo tres. Es por ello que se espera que al menos  $\mu$  alcance una vez su máximo antes de que ser controlada por el controlador que depende de un estimador que no había estimado la entrada desconocida  $S_{in}$ .

### Tercer paso

Este paso al igual que el anterior consiste en utilizar la información del Observador de Estado Bivaluado, ahora en éste caso se procederá a evaluar los controladores (4.12) y (4.13) con el par de estimaciones de la entrada desconocida  $(\hat{S}_{in1}, \hat{S}_{in2})$  como se muestra a continuación

$$D_{S_1} = \frac{\beta \hat{\mu} X}{\hat{S}_{in_1} - \hat{S}_2} \quad (4.14)$$

y

$$D_{S_2} = \frac{\beta \hat{\mu} X}{\hat{S}_{in_2} - \hat{S}_1}, \quad (4.15)$$

en la Figura 4.11 observe que el control final  $D$  tiene bastantes variaciones ya que es función de (4.14) y (4.15) los cuales son dependientes de una estimación donde se cumple la condición de grado relativo para un Estimador para la Entrada Desconocida y el otro donde no se cumple, el hecho de que el control  $D(D_{S_1}, D_{S_2})$  no sea capaz de aumentar la tasa de reacción y mantenerla en su máximo era de esperarse porque la dificultad aumenta lo suficiente como para pensar que no es posible utilizar un control que lidie con la información del Estimador para la Entrada desconocida una vez que  $S$  ha cruzado por  $S^*$  y se crea que controlador Min-Max es el único capaz de aumentar la tasa de reacción a su máximo con un error acotado. Lo que se puede resaltar de la figura además de lo evidente es que cuando se alcanzó el máximo ( $\mu^*$ ) el control aplicado continuó y *apagó* el crecimiento haciendo la tasa de reacción  $\mu = 0$ , el problema que surge en este punto es que el Observador de Estado Bivaluado no permite hacer una estimación de ningún estado para una tasa de reacción nula, recuerde que cálculo se realiza en el observador para obtener las soluciones que dan origen a una parte del estado (donde  $\hat{S}_1 \in [0, S^*]$  y  $\hat{S}_2 \in [S^*, \quad ]$ ) dependiendo de la trayectoria que sigue la concentración de sustrato actual  $S$  del modo siguiente

$$\hat{S}_{1,2} = \frac{K_I(\mu_0 - \hat{\mu}(t)) \pm \xi}{\hat{\mu}(t)},$$

y como  $\mu = 0$  el observador se satura a un valor de estimación mínimo  $\hat{\mu}_{min}$  implicando que no se pueda confiar ni en la estimación del estado  $S$  ni en la estimación de la concentración de sustrato en el flujo de entrada  $S_{in}$ . Para *subsananar* el problema se considerará en el paso siguiente una estrategia que tiene como objeto acotar el control para que no tenga variaciones inalcanzables en la señal de control, ya que el control como está hasta ahora envía señales de control físicamente no posibles, ya sean tasas de reacción demasiado grandes que no se le pueden pedir al flujo de entrada e incluso tasas de reacción negativas.

#### Cuarto paso

A lo largo de los pasos anteriores se ha visto que es posible aumentar la tasa de reacción mediante la utilización del Observador de Estado Bivaluado y el Estimador para la Entrada Desconocida aunque no sea viable aplicar la técnica por las dificultades que se presentaron en el tercer paso; ahora bien, este paso consiste en diseñar una especie de *banda limitante* para el controlador diseñado en el paso tres, esperando así que la señal de control no permanezca saturando al controlador y que tampoco se haga negativo, por esta razón considere los siguientes puntos:

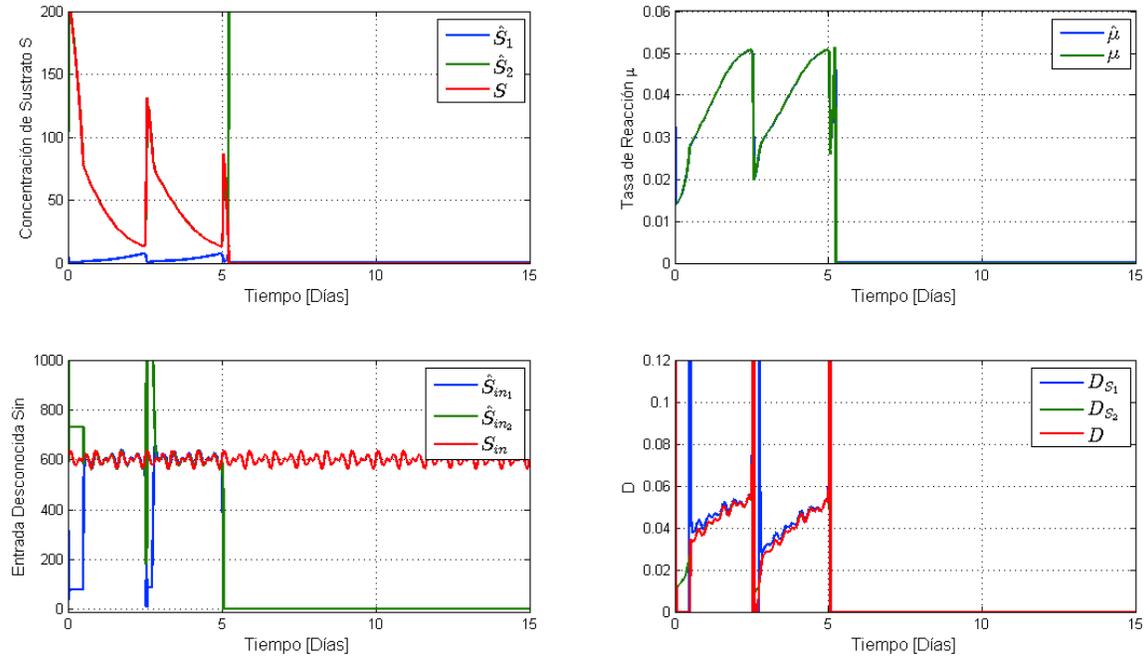


Figura 4.11: Paso 3. Control conmutado no realimentado con un retraso de 5 minutos.

- Que el control esté acotado por la banda limitante  $D_{lim}(D_{S_1}, D_{S_2})$ .
- Que la banda limitante del control ( $D_{lim}$ ) dependa solamente de la caracterización de la entrada desconocida, su valor promedio entre su máximo y su mínimo alcanzados, los cuales dan origen a las curvas siguientes

$$D = \frac{\beta \hat{\mu} X}{S_{in_p} \pm \eta - S^*},$$

donde  $\eta$  es una constante a elegir, cuyo valor dependerá de la tolerancia que se le desee dejar al control diseñado en el paso tres.

A lo que se espera llegar con dicha banda es mantener a la concentración de sustrato en la zona de cruce con  $S^*$  (ya sea de una concentración de sustrato  $S = S_1 < S^*$  a  $S = S_2 > S^*$  y de forma inversa), implicando que la tasa de reacción varíe en las cercanías de  $\mu^*$ , para dichos casos la condición de grado relativo se estará perdiendo en las estimaciones de  $\hat{S}_{in_1}$  y  $\hat{S}_{in_2}$  una y otra vez, sin olvidar que inmediatamente después de haberse producido un cruce la estimación no es exacta. Entonces, como el control final es dependiente de la entrada desconocida se consideró necesario tener una descripción de dicha entrada en el diseño de la banda limitante, por tal motivo el procedimiento que se debe seguir para aplicar la versión final del controlador  $D_{lim}$  está en función de los pasos siguientes:

- En primer lugar se aplica un control constante o variable  $D > 0$  durante un cierto periodo de tiempo para investigar cuales son los valores extremos de la entrada desconocida, como se mencionó anteriormente. El tiempo dependerá de la experiencia del operador a cargo del manejo del biorreactor y en caso de no contar con un operador con experiencia lo mas recomendable es dar un tiempo considerablemente grande para poder decidir cuando se han obtenido dichos valores ya que de estos valores dependerá la banda limitante.
- En segundo lugar se procede a evaluar la información recolectada en la banda limitante.
- Finalmente se aplica la versión limitada del controlador basándose en la lógica de la Figura 4.6.

Siguiendo con el procedimiento anterior, en la Figura 4.12 se ilustra una simulación tomando los datos del Cuadro 4.1 considerando un retraso de 5 minutos, un periodo de caracterización de la entrada desconocida de 1 día utilizando una señal variante de control  $D = 9/175 + 0.05 * 9/175 \sin(0.5\pi t)$  y una constante  $\eta = 10$  para la creación de la banda limitante, en dicha figura se puede apreciar que el control es capaz de mantener variando la concentración de sustrato en una vecindad de  $S^*$  como se esperaba. Adicionalmente note que el control aplicado en ningún instante de tiempo se sale de la banda. Durante el proceso de caracterización es indispensable tener un buen criterio para decidir que valores serán los utilizados al momento de crear la banda limitante. En la gráfica donde se estima la entrada desconocida se puede notar que  $S_{in}$  está siendo estimada por  $\hat{S}_{in_2}$ , debido a que la estimación  $\hat{S}_{in_1}$  toma valores bastante pequeños e incluso la estimación se hace negativa implicando que esa es la estimación incorrecta de la entrada desconocida donde no se cumple la propiedad de grado relativo del estimador como se explicó en el capítulo tres.

Una segunda simulación del mismo ejemplo se realizó cambiando solamente el tiempo de retraso considerando ahora treinta minutos (ver Figura 4.13), en la nueva simulación se observaron cambios significativos en tanto que es posible reducir el desgaste en actuadores teniendo una tasa de reacción semejante a la obtenida en la Figura 4.12 al hacer variar el control de cinco minutos a treinta minutos.

En la Figura 4.14 se realizó una tercera simulación para observar los cambios producidos si se tiene un retraso de treinta minutos aumentando ahora la banda limitante con  $\eta = 20$ , el hecho de aumentar  $\eta$  causa un efecto negativo en el desempeño del controlador puesto que en el momento que la concentración de sustrato cruza por  $S^*$  inmediatamente se cambia de controlador y es de esperarse que éste tomará el máximo valor que le permita la banda limitante alcanzar, implicando un cambio desfavorable porque la región entre  $\mu$  y  $\mu^*$  se incrementa en la medida que  $\eta$  vaya aumentando, ello no implica que decrementar  $\eta$  disminuya la región de error, ya que si  $\eta = 0$  no existirá una banda y el planteamiento dado hasta ahora no tendrá lugar. La señal del control aplicado en las Figuras 4.9 y 4.12 indica que el control en ningún instante de tiempo permanece constante y se ha observado

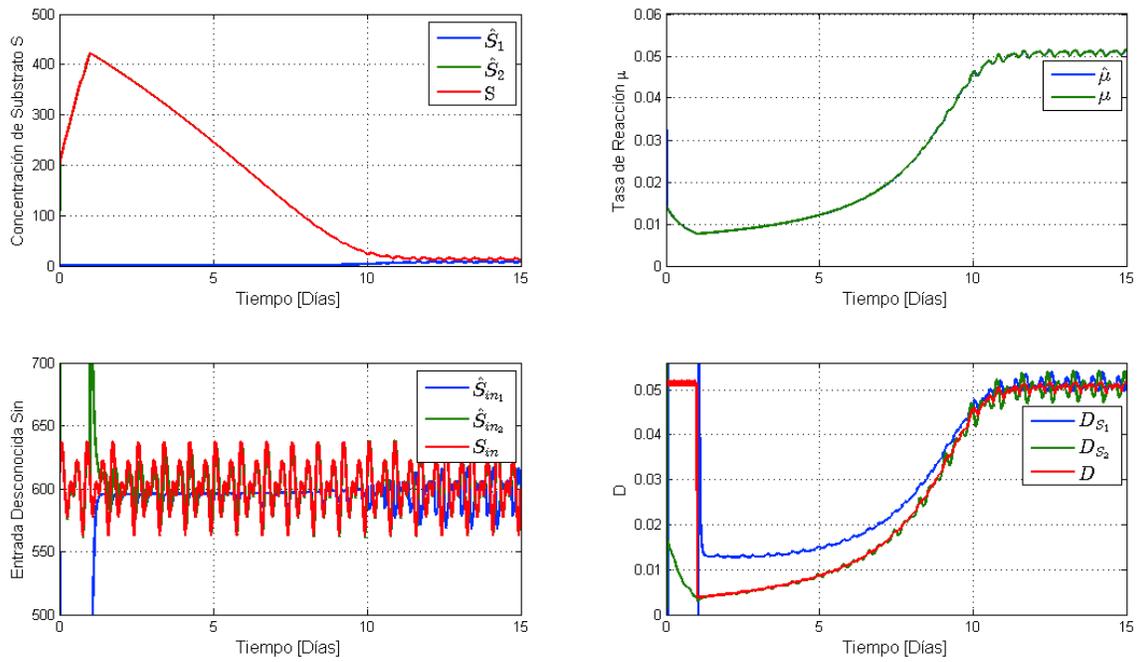


Figura 4.12: Control conmutado realimentado con un retraso de 5 minutos acotado por la banda limitante, considerando que  $\eta = 10$ .

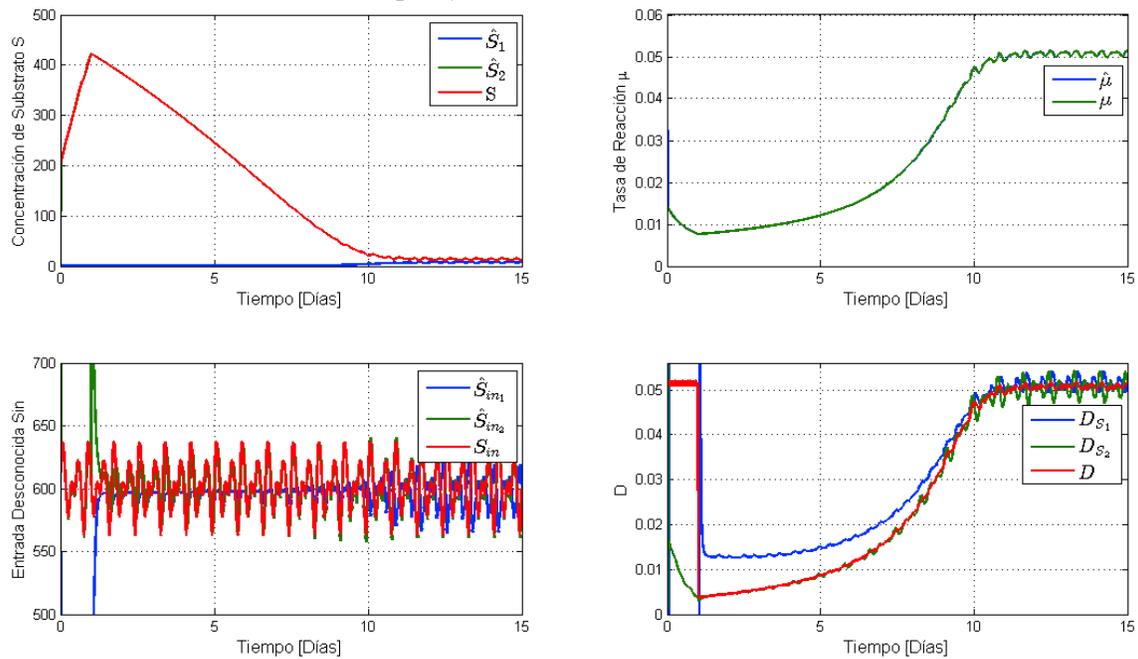


Figura 4.13: Control conmutado realimentado con un retraso de 30 minutos acotado por la banda limitante, considerando que  $\eta = 10$ .

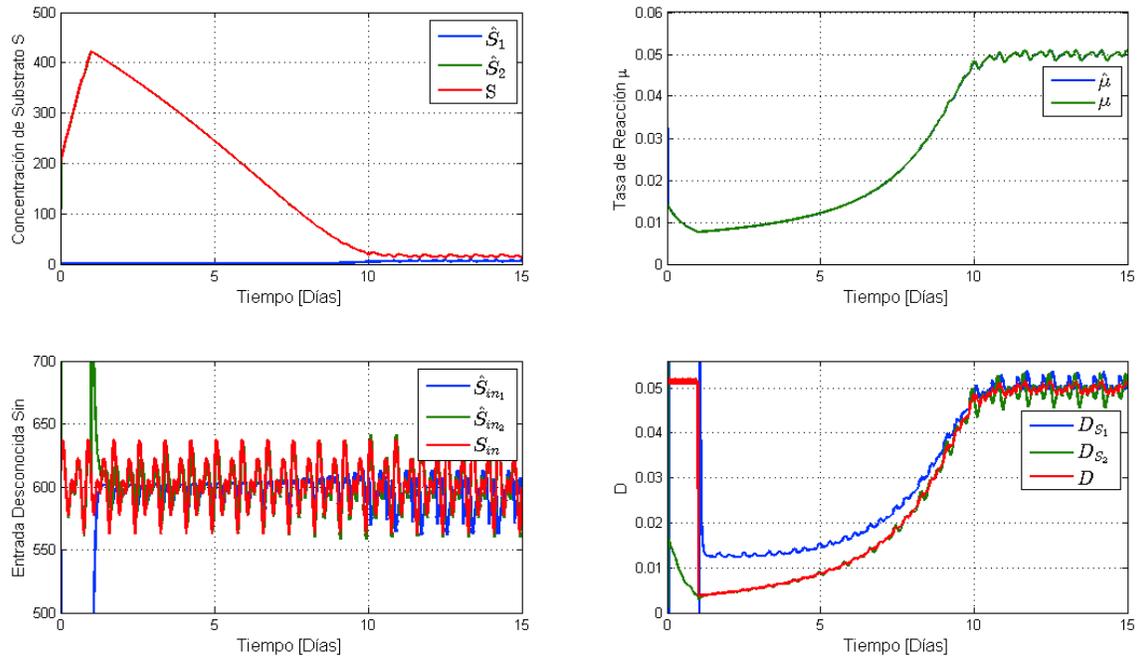


Figura 4.14: Control conmutado realimentado con un retraso de 30 minutos acotado por la banda limitante, considerando que  $\eta = 20$ .

además que sí es posible maximizar la tasa de reacción con un control conmutado basado en la información no unívoca que provee el Observador de Estado Bivaluado.

La Figura 4.15 muestra un ejemplo distinto en el que se considera un periodo de caracterización de la entrada desconocida de un día con una señal de control  $D = 9/175 + 0.05 * 9/175 \sin(0.5\pi t)$ , un retraso de 30 minutos. Los datos mostrados en el Cuadro 4.2 tomado el caso en que  $S_0 < S^*$ ,  $\eta = 10$  y todo en un lapso de 15 días. En el intervalo que se realiza la caracterización es posible indagar fácilmente cuál es el estimador correcto de la entrada desconocida, la estimación  $\hat{S}_{in_2}$  no puede ser la correcta porque presenta variaciones que para  $S_{in}$  son inaceptables por naturaleza, esto es porque su dinámica es lenta con cambios no bruscos en magnitud, los cuales son acotados y positivos, dando pie a elegir a  $\hat{S}_{in_1}$  como la estimación correcta de  $S_{in}$ .

	Valor	Unidades
$X_0$	600	[mg/l]
$S_0$	1	[mg/l]
$S_{in}$	$300 + 26 \sin(0.2\pi t) + 13 \sin(0.3\pi t) + 14 \sin(0.5\pi t)$	[mg/l]

Cuadro 4.2: Condiciones iniciales y la entrada desconocida del ejemplo.

Al comparar las Figuras 4.13 y 4.15 observe que el tiempo de retraso,  $\eta$  y la señal

de control para caracterizar la entrada desconocida son los mismos, para dos procesos en que sus condiciones iniciales  $(X_0, S_0)$  y sus entradas desconocidas son distintas, ahora bien note que resulta simple la forma de averiguar cuál es el estimado que corresponde con la entrada desconocida, y que aunque se pierde la estimación de la entrada desconocida instantes después de que ha ocurrido un cruce, el control nunca sobrepasa la banda limitante y cabe mencionar que un retardo de treinta minutos para el tiempo de simulación es bastante aceptable en cuanto al proceso involucrado. Observe que el único punto en que se presenta un salto significativo en el control es cuando ya se ha tomado la decisión de extraer la información de la banda limitante para luego aplicar la versión final del control.

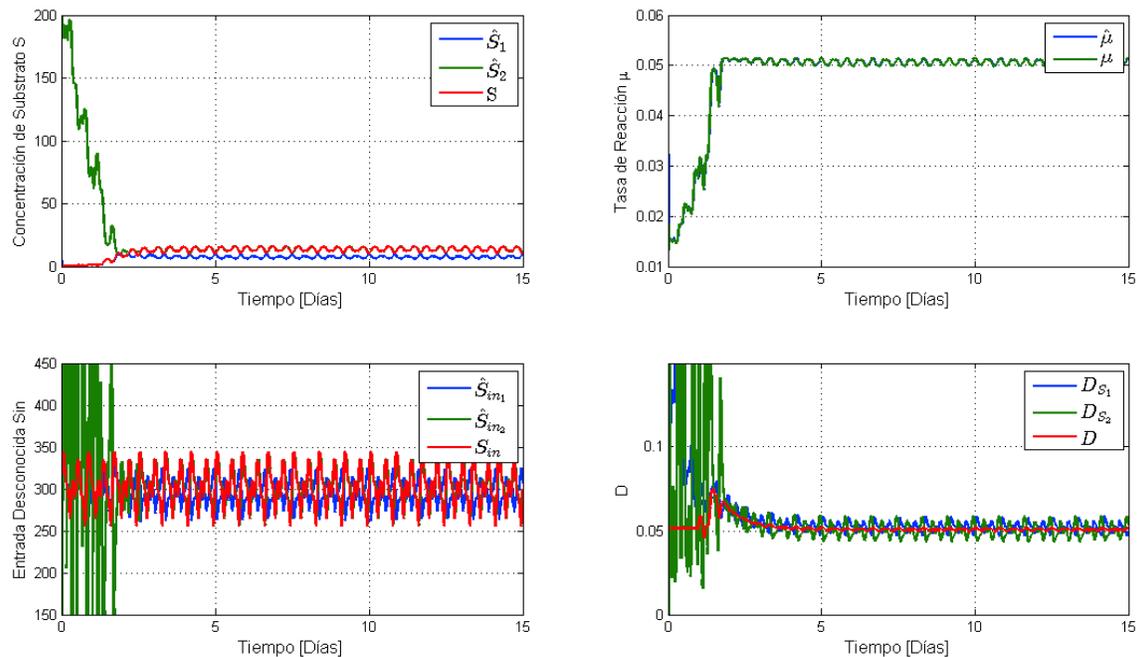


Figura 4.15: Ejemplo con un retraso de 30 minutos y  $\eta = 10$ .

### 4.2.2. Fortalezas y debilidades

De acuerdo a los resultados obtenidos, se observó que el control al ser dependiente de la incertidumbre de la entrada desconocida,

Fortalezas:

- Robustez ante perturbaciones/entradas de sustrato acotadas:  $S_{in} \leq \Delta$ .
- Es posible disminuir la frecuencia de conmutación ya que hacer esto no provoca cambios significativos en cuanto al desempeño del controlador.

Debilidades:

- No es posible mantener la tasa de reacción en su nivel máximo  $\mu^*$  porque se requeriría tener el valor exacto de la estimación de la tasa de reacción, lo cual no es posible ya que como se ha mencionado anteriormente los estimadores de la entrada desconocida no son exactos inmediatamente después de que se ha producido un cruce, el problema que surge es que se precisa la estimación exacta de la entrada desconocida cuando ya se ha distinguido cuál es la entrada de sustrato actual para evitar un cruce.

### 4.3. Discusión de resultados

En cuanto al objetivo planteado se diseñaron dos controladores para aumentar la tasa de reacción, los cuales se basaron en la información extraída del Observador de Estado Bivaluado, el control conmutado no realimentado precisó solamente la estimación de la tasa de reacción, mientras que el control conmutado realimentado requirió de toda la información del Observador de Estado Bivaluado y del Estimador para la entrada Desconocida, así como de una descripción preliminar de la entrada desconocida; de hecho, el control conmutado no realimentado al switchear entre el máximo y el mínimo produce un desgaste considerable a diferencia del control por realimentación de estados, para argumentar esto tome ambos controles sujetos a las condiciones del Cuadro 4.1, la Figura 4.4 muestra el desempeño del control conmutado no realimentado, fíjese que para alcanzar un desempeño como el de la Figura 4.13 se requeriría asignarle a la lógica de control un tiempo de retraso menor a un minuto lo cual no tiene sentido porque no es un tiempo suficiente como para que el biorreactor pueda reaccionar significativamente para realizar la comparación entre la  $\hat{\mu}$  y la anterior. Por otro lado, el control conmutado realimentado tiene un tiempo de retraso para comparar la tasa de reacción de treinta minutos lo cual es bastante aceptable ya que requiere de un mantenimiento en actuadores menor al que pueda precisar el control sin realimentación.

# Capítulo 5

## Conclusiones

Diseñar un controlador para el modelo del biorreactor en estudio fue todo un reto debido a que se cuenta únicamente con la medición de la concentración de biomasa, tal es el caso que se precisa tener un análisis general del biorreactor en estudio, así como de estimaciones exactas y en tiempo finito del estado no medido provenientes del Observador de Estado Bivaluado. Asumiendo que el observador converge exactamente a la tasa de reacción y a las estimaciones posibles de la concentración de sustrato, fue necesario realizar una sintonización rigurosa de sus ganancias porque la tasa de reacción es la variable de control y además el Estimador para la Entrada Desconocida depende de los estados estimados exactos posibles de la concentración de sustrato.

En primer lugar hay que hacer notar que el mismo problema ya ha sido atacado por Schaum donde se logra obtener una estabilización global al punto de operación mediante un control PI [19]. En dicho trabajo se observó que es posible controlar al biorreactor con solo tener la medición de la concentración de biomasa, del mismo modo que se presentó en éste trabajo, bajo la perspectiva de analizar puntos de equilibrio, teoría de bifurcaciones y dinámica no lineal. Un punto importante que cabe resaltar, es la posibilidad de combinar el trabajo de Schaum con el trabajo presente y lograr obtener resultados aún mejores, como puede ser la estabilización global aprovechando las propiedades de exactitud del observador mencionadas hasta ahora.

En segundo lugar, se observó que para sintonizar el Observador de Estado Bivaluado había que reducir los efectos de la concentración de biomasa en el observador cuando ésta aumentaba o disminuía de tres grados de magnitud en adelante, fue por ello que se diseñó una ganancia variable  $k_2$  en función de ésta concentración para evitar los casos en que al intentar reducir el tiempo de convergencia del observador con la ganancia  $k_2$  constante la estimación de la tasa de reacción  $\hat{\mu}$  se perdía. La diferencia que se observó cuando se cambió la ganancia fue clara, el tiempo de convergencia del observador disminuyó drásticamente, una estimación exacta que se daba después de varias horas se redujo a unos cuantos minutos, lo cual era benéfico porque de esa estimación dependía todo: las estimaciones posibles del estado no medido  $\hat{S}_1$  y  $\hat{S}_2$  y las del Estimador para la Entrada Desconocida  $\hat{S}_{in_1}$

y  $\hat{S}_{in2}$ .

En tercer lugar, teniendo los estimados posibles de la concentración de sustrato y el estimado de la tasa de reacción, se esperaba poder diseñar un control retroalimentado pero, no era obvio conocer cuál era la información correcta que se debía de utilizar para diseñar un control de este tipo. Por esa razón era necesario contar con un criterio lógico para saber si se tenía una concentración de sustrato menor o mayor a  $S^*$  y para no introducir la información incorrecta en la retroalimentación se reformuló la estrategia para aplicar un control no realimentado basado en una lógica de conmutación, es decir, que el control hace conmutar la tasa de dilución entre dos valores constantes, para una tasa de dilución cero se consideró un flujo de entrada nulo y para una tasa de dilución máxima se consideró un flujo de entrada finito por lo cual la tasa de dilución se acotó por un valor constante máximo. Teniendo estos valores en mano se requería que el control tuviera algún criterio de decisión para poder ser aplicado y lo que se decidió fue introducir una estrategia lógica basada en la comparación de la tasa de reacción entre su valor estimado actual y su valor anterior asumiendo un tiempo de retraso considerable donde fuera posible notar el incremento y/o decremento de la misma. Dicha lógica dice que si al aplicar un control la tasa de reacción aumenta se continúa aplicando el control en caso de que esto no suceda se aplica el otro control. Como se puede notar la lógica es similar a la de Dochain en su trabajo de “extremum Seeking” en cuanto a que dicha lógica no requiere ningún conocimiento de las concentraciones de biomasa o de sustrato a diferencia de Dochain que si requiere la medición de la concentración de biomasa [3]; sin embargo, durante las simulaciones se pudo observar que el tiempo de retraso entre una comparación y otra tiene una influencia que repercute en la vida útil de los actuadores. Esto se debe a que cuando ya se ha alcanzado el valor máximo de la tasa de reacción la conmutación entre una tasa de dilución mínima y máxima se da con más frecuencia, con objeto de mantener la concentración de sustrato en una vecindad que cruza por  $S^*$ , donde la tasa de reacción es máxima  $\mu^*$ , se requiere disminuir el tiempo de retraso entre una comparación y otra lo cual no puede ser posible debido a que siempre existirá un tiempo mínimo de retraso que depende de la velocidad del proceso para alcanzar a ver alguna diferencia. Entonces, a lo más que se puede llegar con este controlador es a una estabilización local ya que depende del tiempo elegido entre comparaciones de la tasa de reacción y el desgaste en los actuadores, por tal motivo, el control conmutado no realimentado no puede mantener la tasa de reacción en su máximo para todo tiempo futuro. Los resultados obtenidos en este trabajo son comparables a los que obtuvo Dochain porque la estrategia mostrada requiere de la excitación de la tasa de dilución  $D$  y ver como responde el sistema con lo cual se sabe que control debe ser aplicado.

Finalmente, se procedió a diseñar un controlador retroalimentado basado en la lógica de conmutación que sigue el control sin realimentar con el fin de saber cual era la información que se debía extraer del Observador de Estado Bivaluado mientras el controlador se diseñaba. A lo que se llegó fue a diseñar un par de controladores, cada uno para una concentración de sustrato distinta con un problema crucial y no tan fácil de resolver. Puesto que era necesario utilizar el Estimador para la Entrada Desconocida, pero solamente la

---

estimación donde se cumpliera la condición de grado relativo iba a estimar correctamente. Al realizar algunas simulaciones se podía predecir que el control no iba a poder mantener la concentración de sustrato en  $S^*$ , porque si  $S$  cruzaba por  $S^*$  se necesitaría utilizar el segundo controlador a fin donde la condición no se había cumplido, por lo cual se iba a tener un retraso en el tiempo de convergencia del estimador para llegar a una estimación exacta de la entrada desconocida nuevamente. Por esa razón se decidió crear una banda limitante para asegurar que el control se mantendría acotado lo cual no implicaría que  $\mu$  permaneciera en su máximo para todo tiempo futuro, pero lo que si se podía asegurar era mantener la concentración de sustrato variando en  $S^*$  donde  $\mu = \mu^*$  con un error acotado. Con el uso de la banda limitante se pudo resaltar una gran diferencia entre el control conmutado no realimentado y el realimentado, la diferencia se ve reflejada en el desempeño del controlador al momento de asignar el tiempo de retraso en la lógica de conmutación donde se realizan las comparaciones de la tasa de reacción, eligiendo un tiempo entre cinco y treinta minutos resulta difícil señalar cuales son las diferencias que el control conmutado realimentado presenta, mientras que con el sin realimentar la tasa de reacción se alejará de manera proporcional a medida que el tiempo entre comparaciones aumente.



# Bibliografía

- [1] Alvarez, Jose y Alvarez, J., *PI Regulation for a Class of Biorreactors: Stability and Performance*, Willey, International Journal of Robust and Nonlinear Control, México, 2012, pp 918-929.
- [2] Bastin, G. y Dochain, D., *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*, Elsevier, 1000 AE Amsterdam, The Netherlands, 1990.
- [3] Dochain, D., Perrier, M. y Guay, M., *Extremum Seeking Control and its Application to Process and Reaction Systems: A Survey*, Elsevier, 6th Vienna International Conference on Mathematical Modeling, Vol 82, 2011, pp 369-380.
- [4] Bremus C., *Tracking the Right Straight with the Aid of a Parallel Bioreactor*, Food Engineering & Ingredients, Vol. 33 issue 2, 2008, pp 37-40.
- [5] Chen, C.T., *Linear System Theory and Design*, 3a Ed., Oxford, New York, 1999.
- [6] Chiu, R., *Análisis y Desarrollo de Observador Empleando LMI Aplicado a Bioprocesos*, Department d Enginyeria de Sistemes i Automatica, España, 2009.
- [7] Dunn I.J., Heinzle E., Ingham, J. y Prenosil, J.E., *Biological Reaction Engineering: Dynamic Modelling Fundamentals with Simulation Examples*, Willey VCH, Alemania, 2003.
- [8] Guzman, E., y Moreno, J.A., *Super-Twisting Observer for Second Order Systems with time-varying coefficient*, Instituto de Ingeniería UNAM, 2014, pp 1-20.
- [9] Henson M.A., *Exploiting cellular biology to manufacture high-value products*, IEEE Control Systems, 2006, pp 54-62.
- [10] Khalil, H.K., *Nonlinear Systems*, 3a Ed., Prentice Hall, New jersey, 2002.
- [11] Lara, G. y Fermat R., *Dynamic Analisis of a Continuous Bioreactor: Structure and Equilibrium Bifurcation*, AMCA, Asociación de México de Control Automático, México, 2009, pp 1-5.

- [12] Mazzone, V., De Batista, H. y Sira, H., *Control de Bioprocesos Empleando Conceptos de Identificación Algebraica*, Universidad Nacional de Quilmes, Argentina, 2012, pp 1-5.
- [13] Mata J.L., Martínez, R., y Aguilar, R., *Differential Algebraic Estimator for the Monitoring of a Class of Partially Known Bioreactor Models*, Revista Mexicana de Ingeniería Química, México, 2011, pp 1-5.
- [14] Mendoza, I. y Moreno J.A., *Estimación de Tasa de Reacción en Bioprocesos con Observadores Tipo Super-Twisting*, Instituto de Ingeniería UNAM, México, 2012, pp 1-6.
- [15] Moreno, J.A., *A linear Framework for the Robust Stability Analysis of a Generalized Super Twisting Algorithm*, 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (ICEEE), México, 2009, pp 12-17.
- [16] Moreno, J.A. y Alvarez, J., *A bivaluated Observer for a Class of Uncertain Reactors*, Instituto de Ingeniería UNAM, México, 2013, pp 1-6.
- [17] Moreno, J.A., *Finite Time Converging Input Observers for Nonlinear Second-order Systems*, 52nd IEEE Conference on Decision and Control, 2013, pp 1-7.
- [18] Rapaport, A., Sieber, J., Rodriguez, S. y Desroches, M., *Extremum Seeking via Continuation Techniques for Optimizing Biogas Production in the Chemostat*, IFAC, Non-linear Control Systems, Vol. 9, Francia, 2013, pp 152-157.
- [19] Schaum, A., Alvarez, J., y Lopez, T., *Saturated PI Control of Continuous Bioreactors with Haldane Kinetics*, Elsevier, International journal of Robust and Nonlinear Control, México, 2011, pp 520-529.
- [20] Williams, J.A., *Keys to Bioreactor Selections*, Chemical Engineering Progress, 2002, pp 34-41.