UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

SELECCIONES CONTINUAS, UNA VISIÓN GENERAL.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
PEDRO PASCASIO SÁNCHEZ FERNÁNDEZ

DIRECTOR DE LA TESIS
DR. ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM.

MÉXICO, D. F. 5 DE JUNIO DE 2014.

Agradezco el apoyo recibido por
DGAPA-PAPIIT-UNAM Proyecto IN 115312.

Índice general

Introducción

El siguiente trabajo tiene como propósito establecer una visión general de los conceptos que aparecen a partir de los resultados publicados por E. Michael en una serie de artículos publicados entre 1951 y 1959. Tomando como punto de partida los primeros intentos hechos por F. Hausdorff y L. Vietoris para dotar de una topología a los hiperespacios de subconjuntos cerrados de un espacio topológico X, Michael se enfocó a la tarea de determinar bajo qué condiciones, dada una función continua ϕ de un espacio topológico X al espacio de subconjuntos cerrados de un espacio Y con la topología de Vietoris, se puede encontrar una selección continua, es decir, una función continua de X a Y tal que $f(x) \in \phi(x)$ para todo $x \in X$.

Una gran cantidad de artículos y resultados han sido publicados a partir del primer artículo de Michael, sobre todo en la segunda mitad del siglo XX, muchos de los cuales se enfocan en el caso particular en el que se toman selecciones de un espacio X en los hiperespacios de X.

En este trabajo nos enfocaremos precisamente a este caso particular, teniendo como objetivo mostrar los principales resultados en los cuales se determinan las condiciones bajo las cuales existen estas selecciones así como mostrar la utilidad que tienen estos resultados para caracterizar ciertos tipos de espacios, sobre todo en lo que se refiere a propiedades de ordenabilidad y compacidad.

Este trabajo tiene como objetivo también reunir muchos de los resultados más elementales e indispensables en el estudio de las selecciones continuas y de esta manera servir como punto de partida para un estudio más amplio del tema.

Pedro Pascasio Sánchez Fernández, verano de 2014.

Capítulo 1

Topologías en hiperespacios

1.1. Espacios de subconjuntos

Para llevar a cabo el estudio de las selecciones continuas es primordial tomar como punto de partida el estudio de los hiperespacios. Comenzaremos con las principales definiciones y resultados al respecto tomando como fuente a E. Michael [11]. Los resultados de esta sección preliminar son casi en su totalidad provenientes de dicha publicación. En este capítulo nos dedicaremos a presentar la topología de Vietoris para hiperespacios de un espacio topológico X así como establecer bajo qué condiciones las características de un espacio se proyectan a sus hiperespacios.

Diremos que una propiedad topológica se proyecta de un espacio base a un hiperespacio siempre que, el hecho de que dicha propiedad aparezca en el espacio base, implica que la propiedad tambin aparece en el hiperespacio.

A lo largo de todo el trabajo se usaran de manera indistinta las notaciones $Cl(U)$ y $\overline{U}$ para denotar la cerradura de un conjunto U, y utilizaremos la notación $Cl_X(U)$ cuando no sea claro con respecto a qué espacio se va a tomar la cerradura.

El primer paso es seleccionar ciertas familias de subconjuntos de un espacio topológico X y dotarlos de una notación adecuada para el desarrollo de este trabajo. Las colecciones de subconjuntos que nos serán de mayor interés son las siguientes:

Definición 1.1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Definimos:*

- $\mathcal{A}(X) = \{E \subset X : E \neq \varnothing\}$
- $\mathcal{CL}(X) = \{E \subset X : E \text{ es cerrado y no vacío}\}$
- $\mathcal{F}_n(X) = \{E \in \mathcal{CL}(X) : E \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\}$
- $\mathcal{F}(X) = \{E \in \mathcal{CL}(X) : E \text{ es finito}\}$
- $\mathcal{K}(X) = \{E \in \mathcal{CL}(X) : E \text{ es compacto}\}$

Una vez que hemos establecido las familias de subconjuntos con las cuales trabajaremos, buscamos dar a estas colecciones una topología que cumpla ciertas características para poder llamarla "aceptable" y una vez hecho esto, llamaremos a las colecciones de subconjuntos, con la topología "aceptable", hiperespacios.

Definición 1.1.2. *Sea $\mathcal{S}$ uno de los conjuntos definidos en 1.1.1. Dada una topología τ sobre $\mathcal{S}$, llamaremos al espacio $(\mathcal{S}, \tau)$ un hiperespacio de X.*

El primero en definir una topología "aceptable" para las colecciones de subconjuntos fue F. Hausdorff, quien estableció una métrica para las familias de subconjuntos cerrados de espacios métricos. Llamamos a esta métrica "métrica de Hausdorff" y la definimos a continuación.

Definición 1.1.3. *Si (X, d) es un continuo (espacio métrico, compacto y conexo), definimos la métrica de Hausdorff para $\mathcal{CL}(X)$ como sigue: Si $A \in \mathcal{CL}(X)$ y $\epsilon > 0$ sea $B(\epsilon, A) = \{x \in X : \text{ existe } a \in A \text{ con } d(a, x) < \epsilon\}$, entonces, si $A, A' \in \mathcal{CL}(X)$, la distancia $H(A, A') = \inf\{\epsilon > 0 : A \subset B(\epsilon, A') \text{ y } A' \subset B(\epsilon, A)\}$.*

Debido a la clara limitación que presenta la métrica de Hausdorff para un estudio más general de los espacios de subconjuntos, ya que no puede ser definida para espacios no metrizables, nos vemos en la necesidad de buscar una forma de dar una topología aceptable a una colección más amplia de espacios. La alternativa más adecuada la obtenemos gracias a L. Vietoris, quien en su trabajo de 1923 define la topología que ahora lleva su nombre.

La siguiente notación, atribuida a E. Michael, es muy importante ya que será utilizada con gran frecuencia en el transcurso de este capítulo y sirve de herramienta para definir una base para la topología de Vietoris.

Definición 1.1.4. *Si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una colección de subconjuntos de un espacio topológico X, entonces $\langle U_i\rangle_{i\in I} = \{E \in \mathcal{CL}(X) : E \subset \bigcup_{i\in I} U_i,\ y\ E \cap U_i \neq \varnothing$ para toda $i \in I\}$*

En el siguiente resultado veremos que, efectivamente, los conjuntos que acabamos de definir conforman una base para una topología en los espacios de subconjuntos.

Teorema 1.1.5. *Las colecciones de la forma $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ con $n \in \mathbb{N}$ y con U_i abierto en X para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, forman una base para una topología en $\mathcal{CL}(X)$.*

Demostración. Sean $\mathcal{U} = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$, $\mathcal{V} = \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle$ y sean $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$. Entonces, $\mathcal{U}\cap\mathcal{V} = \langle U_1\cap V, \ldots, U_n\cap V, V_1\cap U, \ldots, V_m\cap U\rangle$. □

Nos encontramos ahora en condiciones de definir la topología de Vietoris.

Definición 1.1.6. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Definimos la topología de Vietoris (topología finita) τ_v^X en $\mathcal{CL}(X)$ como la topología generada por las colecciones de la forma $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ con $n \in \mathbb{N}$ y con U_i abierto en X para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. En caso de que no exista confunción con respecto al espacio al que nos referimos, escribiremos simplemente τ_v.*

Como se menciono arriba, estamos interesados en topologías "aceptables" para trabajar con hiperespacios. A continuación definimos qué es una topología aceptable.

Definición 1.1.7. *Si (X, τ) es un espacio topológico, decimos que una topología en $\mathcal{CL}(X)$ es aceptable si $\{E \in \mathcal{CL}(X) : E \subset A\}$ es cerrado para todo conjunto cerrado $A \subset X$, y abierto para todo abierto $A \subset X$.*

Fácilmente se puede ver que la topología generada por la métrica de Hausdorff es aceptable, pero ya que lo que nos interesa es trabajar con la topología de Vietoris, a continuación veremos que esta topología también es aceptable.

Lema 1.1.8. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces:*

1. *$\{E \in \mathcal{CL}(X) : E \subset A\}$ es cerrado en $(\mathcal{CL}(X), \tau_v)$ si $A \subset X$ es cerrado.*

2. *$\{E \in \mathcal{CL}(C) : E \cap A \neq \varnothing\}$ es cerrado en $(\mathcal{CL}(X), \tau_v)$ si $A \subset X$ es cerrado.*

Demostración. 1. Sea $\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{CL}(X) : E \subset A\}$. Consideremos el conjunto $\langle X \setminus A, X\rangle$ el cual está formado por todos los cerrados en X que intersectan a $X \setminus A$, es decir, todos los cerrados que no están contenidos en A. Como A es cerrado en X, $\langle X \setminus A, X\rangle = \mathcal{CL}(X) \setminus \mathcal{A}$ es un abierto en $\mathcal{CL}(X)$.

2. Consideremos el conjunto $\langle X \setminus A\rangle$, el cual está formado por todos los cerrados contenidos en $X \setminus A$. Como A es cerrado en X, $\langle X \setminus A\rangle$ es abierto en $\mathcal{CL}(X)$ y su complemento es $\{E \in \mathcal{CL}(X) : E \cap A \neq \varnothing\}$.

□

Proposición 1.1.9. *La topología de Vietoris es la topología aceptable más gruesa en $\mathcal{CL}(X)$.*

Demostración. Sea τ una topología aceptable en $\mathcal{CL}(X)$ y sea $\mathcal{U} = \langle U_1, \dots, U_n\rangle$ un abierto en τ_V. Sean $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$, $\mathcal{U}^* = \{E \subset \mathcal{CL}(X) : E \subset U\}$ y $\mathcal{U}_i = \{E \subset \mathcal{CL}(X) : E \cap U_i \neq \varnothing\}$, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{U}^* \cap \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i$. Como τ_V es una topología aceptable, por 1.1.8, $\mathcal{U}^*$ y $\mathcal{U}_i$ son abiertos en τ, por lo tanto $\mathcal{U} \in \tau$ y $\tau_V \subset \tau$. □

Cabe mencionar que la topología de Vietoris no es la única topología aceptable para los espacios de subconjuntos de un espacio topológico X, tenemos, por ejemplo, la topología de Fell (J.M. Fell, 1962), la cual dejaremos de lado para enfocarnos únicamente a la topología de Vietoris.

El siguiente resultado constituye una herramienta muy útil para probar más adelante muchos hechos importantes acerca de la topología τ_V.

Lema 1.1.10. *1. $\langle U_1, \dots, U_n\rangle \subset \langle V_1, \dots, V_m\rangle$ si y sólo si $\bigcup_{i=1}^n U_i \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$, y para cada V_i existe un U_j tal que $U_j \subset V_i$*

2. En la topología de Vietoris para $\mathcal{CL}(X)$, se tiene que $Cl(\langle U_1, \dots U_n\rangle) = \langle \overline{U_1} \dots, \overline{U_n}\rangle$.

3. Si $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ es una base de vecindades para x en X, entonces $\{\langle U_\alpha\rangle\}_{\alpha \in A}$ es una base de vecindades para $\{x\}$ en $\mathcal{CL}(X)$.

Demostración. 1. Primero supongamos que $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subset \langle V_1, \ldots, V_m\rangle$. Sea $x \in \bigcup_{i=1}^n U_i$ y sea $x_i \in U_i$ para cada i. Entonces $\{x\} \cup \{x_i\}_{i=1}^n \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subset \langle V_1 \ldots, V_m\rangle$, así que $x \in V_j$ para alguna $j \in \{1, \ldots, m\}$. Ahora, supongamos que para cada j, existe $x_j \in U_j$ tal que $x_j \notin V_i$ para alguna i. Entonces $\{x_j\}_{j=1}^n \in \langle U_i, \ldots, U_n\rangle$, pero como $\{x_j\}_{j=1}^n \cap V_i = \varnothing$, $\{x_j\}_{j=1}^n \notin \langle V_1, \ldots, V_m\rangle$ lo cual es una contradicción.
Para probar la suficiencia, sea $E \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$, como $\bigcup_{i=1}^n U_i \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$, $E \subset \bigcup_{i=1}^m V_i$ y como para todo V_i existe U_j tal que $U_j \subset V_i$, se tiene que $E \cap V_i \neq \varnothing$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

2. Sea $\mathcal{A} = \langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n}\rangle$. Entonces $\mathcal{CL}(X) \setminus \mathcal{A} = \{E \in \mathcal{CL}(X) : E \cap \overline{U_i} = \varnothing$ para algún $i = 1, \ldots, n$ o $E \cap (\mathcal{CL}(X) \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}) \neq \varnothing\}$. Para cada i, $\{E \in \mathcal{CL}(X) : E \cap \overline{U_i} = \varnothing\}$ es un abierto en $\mathcal{CL}(X)$. Como $\bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}$ es cerrado en X, $\langle X, X \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}\rangle$ es abierto en $\mathcal{CL}(X)$ y $\mathcal{CL}(X) \setminus \mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n \langle X \setminus \overline{U_i}\rangle \cup \langle X, X \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}\rangle$, así que $\langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n}\rangle$ es cerrado. Por 1), $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subset \langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n}\rangle$, así que basta probar que $\langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n}\rangle \subset Cl\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Sea $E \in \langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n}\rangle$ y sea $\mathcal{V} = \langle V_1, \ldots, V_m\rangle$ una vecindad de E en $\mathcal{CL}(X)$. Para cada $j = 1, \ldots, m$ existe $x_j \in V_j$ tal que $x_j \in V_j \cap U_i$ para alguna $i = 1, \ldots, n$. También, para cada $i = 1, \ldots, n$ existe $x \in E \cap \overline{U_i}$ y un V_j tal que $x \in V_j$, así que podemos tomar un $x_i \in V_j \cap U_i$. Sea $F = \{x_j\}_{j=1}^m \cup \{x_i\}_{i=1}^n$, entonces $F \in \mathcal{V} \cap \langle U_i, \ldots U_n\rangle$ y por lo tanto $E \in Cl\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$.

3. Sea $x \in X$ y $\langle V_1, \ldots, V_n\rangle$ un abierto en $\mathcal{CL}(X)$ con $\{x\} \in \langle V_1, \ldots, V_n\rangle$, entonces $\bigcap_{i=1}^n V_i \neq \varnothing$ y $x \in \bigcap_{i=1}^n V_i$. Sea $U \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que $x \in U \subset \bigcap_{i=1}^n V_i$, entonces si $F \subset U$ es cerrado, $F \subset \bigcap_{i=1}^n V_i$ y $\{x\} \in \langle U\rangle \subset \langle V_1, \ldots, V_n\rangle$.

□

A continuación se prueban propiedades importantes de algunos subconjuntos de $\mathcal{CL}(X)$.

Proposición 1.1.11. *Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces:*

1. *$\mathcal{F}(X)$ es denso en $(\mathcal{CL}(X), \tau_v)$.*

2. *Si X es Hausdorff, entonces $\mathcal{F}_n(X)$ es cerrado en $(\mathcal{CL}(X), \tau_v)$ para toda $n \geq 1$.*

3. *La función natural $pr : X^n \to \mathcal{F}_n(X)$, definida como $pr((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, es continua.*

Demostración. 1. Sea $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ un abierto en $\mathcal{CL}(X)$ y para cada i, sea $x_i \in U_i$, entonces sea $E = \{x_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{F}(X)$ y $E \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$.

2. Sea $E \in \mathcal{CL}(X) \setminus \mathcal{F}_n(X)$. E tiene al menos $n+1$ elementos. Sea $\{x_i\}_{i=1}^{n+1} \subset E$, con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. Para cada i existen U_i y V_i abiertos con $x_i \in U_i$ y $\{x_j\}_{j\neq i} \subset V_i$ y $U_i \cap V_i = \varnothing$. Para cada i, sea $W_i = U_i \cap (\bigcap_{j\neq i} V_j)$, entonces $x_i \in W_i$ para toda i y $W_i \cap W_j = \varnothing$ si $i \neq j$, así que $\mathcal{A} = \langle W_1, \ldots, W_{n+1}, X\rangle$ es una vecindad de E en $\mathcal{CL}(X)$ y si $F \in \mathcal{A}$, F tiene al menos $n+1$ puntos, por lo tanto $\mathcal{A} \cap \mathcal{F}_n(X) = \varnothing$ y $\mathcal{CL}(X) \setminus \mathcal{F}_n(X)$ es abierto en $(\mathcal{CL}(X), \tau_v)$.

3. Sea $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ y $pr(x_1, \ldots, x_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sea $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ una vecindad de $\{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{F}_n(X)$. Sea $V_i = \bigcap\{U_j : x_i \in U_j\}$, entonces $\bigcup_{i=1}^n V_i \subset \bigcup_{j=1}^m U_i$ y para cada j existe i tal que $V_i \subset U_j$, así que, por 1.1.10 $\langle V_1 \ldots, V_n\rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$. Por último, sea $V = \prod_{i=1}^n V_i$, $(x_1, \ldots, x_n) \in V$, y si $(y_1, \ldots, y_n) \in V$, $pr(y_1, \ldots, y_n) \in \langle V_i\rangle \subset \langle U_i\rangle$.

□

Concluimos este capítulo con los siguientes resultados, de los cuales el primero muestra que, en el caso de espacios regulares, la union de los elementos de un subconjunto compacto del hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$ es un cerrado en el espacio base y en un espacio Hausdorff, la union de elementos de un subconjunto compacto del hiperespacio $\mathcal{K}(X)$ es un compacto en el espacio base. El segundo nos aporta un criterio muy útil para determinar la conexidad de la union de una colección de subconjuntos como subconjunto de un hiperespacio.

Teorema 1.1.12. *1. Sea (X, τ) un espacio topológico regular, entonces si $\mathcal{B} \in \mathcal{K}(\mathcal{CL}(X), \tau_v)$, se tiene que $(\bigcup_{E\in\mathcal{B}} E) \in \mathcal{CL}(X)$.*

2. Sea (X, τ) es un espacio topológico. Si $\mathcal{B} \in \mathcal{K}(\mathcal{K}(X), \tau_v)$ entonces $(\bigcup_{E\in\mathcal{B}} E) \in \mathcal{K}(X)$

Demostración. 1. Sean $\mathcal{B} \in \mathcal{K}(\mathcal{CL}(X))$, $A = \bigcup_{E\in\mathcal{B}} E$, y $x \in \overline{A}$. Sea $\mathcal{F}$ la colección de todas las vecindades cerradas de x y si $F \in \mathcal{F}$ sea $\mathcal{U}_F = \mathcal{B} \cap \{E \in \mathcal{CL}(X) : E \cap F \neq \varnothing\}$, entonces $\mathcal{U}_F$ es una subcolección de cerrados de $\mathcal{B}$. Sea $\{\mathcal{U}_{F_i}\}_{i=1}^n$ una familia finita de subcolecciones de $\mathcal{B}$, se tiene que $\bigcap_{i=1}^n F_i$ es una vecindad cerrada de x, así que $\{\mathcal{U}_F : F \in \mathcal{F}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, y como $\mathcal{B}$ es compacto, existe

$\mathcal{D} \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{U}_F \subset \mathcal{B}$. Como X es regular, x está en cada elemento de $\mathcal{D}$, por lo tanto, $x \in A$.

2. Sea $A = \bigcup_{E \in \mathcal{B}} E$, con $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}(\mathcal{K}(X))$. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de A. Ahora, sea $E \in \mathcal{B}$, entonces E es un subespacio compacto de X, así que existe una subcubierta finita $\{U_{E,1}, \ldots, U_{E,n(E)}\}$ de $\mathcal{U}$ que cubre E y cuyos elementos intersectan a E. Entonces, para cada $E \in \mathcal{B}$, $\mathcal{U}_E = \langle U_{E,1}, \ldots, U_{E,n(E)} \rangle$ es una vecindad abierta de E, y entonces $\{\mathcal{U}_E\}_{E \in \mathcal{B}}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ es compacto, existe una subcolección finita $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de $\mathcal{B}$ tal que $\{\mathcal{U}_{E_1}, \ldots, \mathcal{U}_{E_m}\}$ es una cubierta de $\mathcal{B}$. Por lo tanto. $\{\mathcal{U}_{E_i,j}\}_{i=1,\ldots,m}^{j=1,\ldots,n(E_i)}$ es una subcubierta finita de A.

□

Proposición 1.1.13. *Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{CL}(X)$ tal que $\mathcal{B}$ es conexo con la topología de Vietoris. Si al menos uno de los elementos de $\mathcal{B}$ es conexo, entonces $\bigcup_{E \in \mathcal{B}} E$ es conexo en X.*

Demostración. Sea $E' \in \mathcal{B}$ conexo y supongamos que $B = \bigcup_{E \in \mathcal{B}} E$ no es conexo. Sean U, V abiertos no vacios de X tales que $B \subset U \cup V$ y $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \varnothing$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $E' \subset U$. Supongamos, también que existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $A \cap U \neq \varnothing$ y $A \cap V \neq \varnothing$, de lo contrario $\langle U \rangle$, $\langle V \rangle$ son ajenos y $\mathcal{B} \subset \langle U \rangle \cup \langle V \rangle$. Consideremos los abiertos $\langle U \rangle \cup \langle V \rangle$ y $\langle U, V \rangle$. Es claro que estos dos abiertos son ajenos y como $E' \subset U$, se tiene que $E' \in \langle U \rangle \cup \langle V \rangle$. También, como $A \cap U$ y $A \cap V$ son no vacios, $A \in \langle U, V \rangle$, así que $\langle U \rangle \cup \langle V \rangle$ y $\langle U, V \rangle$ es una separacion de $\mathcal{B}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\bigcup_{E \in \mathcal{B}} E$ es conexo. □

Capítulo 2

Propiedades topológicas de los hiperespacios

En este capítulo analizaremos qué propiedades de un espacio base X y bajo qué condiciones, se proyectan a sus hiperespacios, o, como veremos en muchos casos, se debilitan.

2.1. Compacidad

La primera propiedad topológica que veremos es la compacidad, y para esto nos apoyaremos en el teorema de las subbases de Alexander, el cual afirma que si $\mathcal{P}$ es una subbase para X, entonces X es compacto si y sólo si toda cubierta de X formada por elementos de $\mathcal{P}$ tiene una subcubierta finita. En vista de lo anterior, resulta indispensable definir una subbase de abiertos para la topología de Vietoris.

Lema 2.1.1. *Sea $[U] = \{F \in \mathcal{CL}(X) : F \cap U \neq \varnothing\}$, entonces, la colección*

$$\mathcal{S} = \{[U] : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\langle U \rangle : U \text{ es abierto en } X\}$$

es una subbase para la topología de Vietoris.

Demostración. Por definición, $\langle U \rangle$ es abierto en $\mathcal{CL}(X)$ para todo abierto $U \subset X$. Si $U \subset X$ es abierto, $\mathcal{CL}(X) \setminus [U] = \{F \in \mathcal{CL}(X) : F \subset X \setminus U\}$. Por 1.1.8, $\mathcal{CL}(X) \setminus [U]$ es cerrado y por lo tanto $[U]$ es abierto en $\mathcal{CL}(X)$.
Sea $\mathcal{V} = \langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ un abierto en $\mathcal{CL}(X)$, entonces, si $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, se tiene

que $\mathcal{V} = \langle V \rangle \cap \bigcap_{i=1}^{n}[V_i]$, por lo tanto, $\mathcal{S}$ es una subbase para la topología de Vietoris. □

Ya que tenemos una subbase para la topología de Vietoris, podemos utilizar el lema de Alexander para probar el siguiente resultado.

Teorema 2.1.2. *X es compacto si y sólo si $\mathcal{CL}(X)$ es compacto.*

Demostración. Si X es compacto, probaremos que $\mathcal{CL}(X)$ es compacto utilizando el lema de Alexander. Sea $\mathcal{S}$ la subbase definida en 2.1.1 y sea $\{[U_i]\}_{i\in I} \cup \{\langle V_j\rangle\}_{j\in J}$ una cubierta de $\mathcal{CL}(X)$ formada por elementos de $\mathcal{S}$. Primero veremos que $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{V_j\}_{j\in J}$ es una cubierta abierta para X. Supongamos que existe $x \in X$ tal que $x \notin \bigcup_{i\in I} U_i \cup \bigcup_{j\in J} V_j$ y sea $F_x = \bigcap\{F \in \mathcal{CL}(X) : x \in F\}$, entonces, F_x es un cerrado. $F_x \not\subset V_j$ para toda $j \in J$, de lo contrario $x \in V_j$, así que debe existir $i \in I$ tal que $F_x \in [U_i]$, es decir $F_x \cap U_i \neq \varnothing$, pero $x \notin U_i$ de lo cual se sigue que $x \in (X \setminus U_i) \cap F_x$, que es cerrado, pero como F_x es el cerrado más pequeño que contiene a x, resulta que $F_x = (X \setminus U_i) \cap F_x$, entonces tenemos que $F_x \cap U_i = \varnothing$, contradiciendo la suposición inicial. Por lo tanto $\{U_i\}_{i\in I} \cup \{U_j\}_{j\in J}$ es una cubierta de abiertos para X.
Ahora consideremos al conjunto cerrado $F^* = X \setminus \bigcup_{i\in I} U_i$. Entonces $F^* \in \bigcup_{j\in J}\langle V_j\rangle$, así que existe $j_o \in J$ tal que $F^* \subset V_{j_o}$. De lo anterior, se tiene que $X \subset \bigcup_{i\in I} U_i \cup V_{j_o}$. Como X es compacto, existe $I' \subset I$ finito tal que $X \subset \bigcup_{i\in I'} U_i \cup V_{j_0}$. Para ver que $\{[U_i]\}_{i\in I'} \cup \langle V_{j_0}\rangle$ es una cubierta de abiertos para $\mathcal{CL}(X)$, sea $F \in \mathcal{CL}(X)$ tal que $F \subset V_{j_0}$, entonces $F \in \langle V_{j_0}\rangle$. Por otro lado, si $F \not\subset V_{j_0}$, entonces $F \cap \bigcup_{i\in I'} U_i \neq \varnothing$, así que $F \cap U_i \neq \varnothing$ para alguna $i \in I'$ y por lo tanto $F \in [U_i]$. Por el lema de Alexander, $\mathcal{CL}(X)$ es compacto.

Para ver que la condición es suficiente, basta observar que X es homeomorfo a un subespacio de $\mathcal{CL}(X)$, $\{\{x\} : x \in X\}$, y por lo tanto si $\mathcal{CL}(X)$ es compacto, también lo es X. □

La siguiente propiedad que analizaremos es la compacidad local. Los siguientes resultados son en parte gracias a Michael [11] pero nos apoyamos en [2], sobre todo para corregir la proposición de Michael que afirma que "*X es localmente compacto si y sólo si $\mathcal{CL}(X)$ es localmente compacto*".

Lema 2.1.3. *Sea X un espacio regular y $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \subset \mathcal{CL}(X)$. Si $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ es compacto en $\mathcal{CL}(X)$, entonces $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ es compacto en X.*

Demostración. Primero veremos que U es cerrado en X. Supongamos lo contrario, entonces existe una red $(a_i)_{i\in I}$ en U la cual converge a un punto $a \in X \setminus U$. Para cada $j = \{1,\dots,n\}$ sea $x_j \in U_j$ y para cada $i \in I$ sea $C_i = \{x_1,\dots,x_n,a_i\}$, entonces la red $(C_i)_{i\in I}$ converge en $\mathcal{CL}(X)$ a $C = \{x_i,\dots,x_n,a\}$, así que $C \notin U$ y por lo tanto $C \notin \langle U_i,\dots,U_n\rangle$ lo cuál contradice el hecho de que $\langle U_1,\dots,U_n\rangle$ es compacto.
Ahora supongamos que U no es compacto en X. Como U es cerrado, existe una red $(a_i)_{i\in I}$ en U la cual no tiene puntos de acumulación en X. Entonces para cada $x \in X$ existe un abierto W_x con $x \in W_x$ tal que $a_i \notin W_x$ a partir de alguna $i \in I$. Sea $C_i = \{x_1,\dots,x_n,a_i\}$, con $x_j \in U_j$ para cada $j = \{1,\dots,n\}$. Mostraremos que $(C_i)_{i\in I}$ no tiene puntos de acumulación en $\mathcal{CL}(X)$, para lo cual procederemos por casos. Sea $C \in \mathcal{CL}(X)$.

- Caso 1. $C \subset \{x_1,\dots,x_n\}$. Entonces si $W = \bigcup_{i=1}^n W_{x_i}$, $\langle W\rangle$ es una vecindad de C en $\mathcal{CL}(X)$ y $C_i \notin \langle W\rangle$ a partir de alguna $i \in I$.

- Caso 2. Existe $x_0 \in C \setminus \{x_1\dots,x_n\}$. Fijemos una vecindad W^* de x_0 tal que $x_1,\dots,x_n \notin W_0$ y sea $W' = W^* \cap W_{x_0}$, entonces $C_i \cap W' = \varnothing$ a partir de alguna $i \in I$.

□

Lema 2.1.4. *1. Si X es localmente compacto y si $A \in \mathcal{K}(X)$ entonces existe un abierto U, con $U \supset A$ tal que $\overline{U}$ es compacto.*

2. *Sea X un espacio regular y $A \in \mathcal{CL}(X)$. Entonces A tiene una vecindad compacta en $\mathcal{CL}(X)$ si y sólo si existe un abierto U en X tal que $A \subset U$ y $\overline{U}$ es compacto.*

Demostración. 1. Para cada $x \in A$, sea U_x una vecindad abierta de x tal que $\overline{U_x}$ es compacto, entonces $\bigcup_{x\in A} U_x$ es una cubierta de abiertos para A y como A es compacto, existe un subconjunto finito $\{x_1,\dots,x_n\} \subset A$ tal que $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$ es una cubierta finita de A, entonces $\overline{U} = \bigcup_{i=1}^n \overline{U}_{x_i}$ es compacto y $A \subset U \subset \overline{U}$.

2. Primero supongamos que A tiene una vecindad compacta en $\mathcal{CL}(X)$. Entonces, existen abiertos $U_1,\dots U_n \in X$ tales que $A \in \langle U_1,\dots,U_n\rangle$ y $Cl_{\mathcal{CL}(X)}\langle U_1,\dots,U_n\rangle$ es compacto en $\mathcal{CL}(X)$. Para cada $j \in \{1,\dots,n\}$ fijemos un punto $x_j \in U_j \cap A$. Como $\langle A, x_1,\dots,x_n\rangle$ es cerrado en $\mathcal{CL}(X)$

y está contenido en $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, entonces es compacto. Por el lema 2.1.3, A es compacto.
Como X es regular, existe $B \subset X$ abierto tal que $A \subset B \subset \overline{B} \subset U$. Entonces $\langle \overline{B}, x_1, \ldots, x_n \rangle$ es un cerrado en $\mathcal{CL}(X)$ contenido en $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, y entonces es compacto. Nuevamente, por el lema 2.1.3. $\overline{B}$ es compacto.

Para probar la otra implicación, supongamos que existe un abierto U en X tal que $A \subset U$, $\overline{U}$ es compacto en X y $\langle \overline{U} \rangle$ es una vecindad de A en $\mathcal{CL}(X)$. Por 2.1.2, como $\overline{A}$ es compacto, se tiene que $\langle \overline{A} \rangle = \mathcal{CL}(A)$ es compacto.

□

Corolario 2.1.5. *1. Un espacio regular X es localmente compacto si y sólo si para toda $x \in X$, $\{x\}$ tiene una vecindad compacta en $\mathcal{CL}(X)$*

2. Si X es localmente compacto, entonces $\mathcal{K}(X)$ es abierto en $\mathcal{CL}(X)$.

Demostración. 1. Como $\{x\} \in \mathcal{CL}(X)$, el resultado se sigue del lema 2.1.4

2. Este resultado se sigue de 2.1.4 y 1.1.8.

□

A continuación veremos la implicación más importante de la compacidad local de X en el hiperespacio $\mathcal{CL}(X)$.

Teorema 2.1.6. *Para un espacio regular X, son equivalentes:*

1. *X es compacto,*
2. *$\mathcal{CL}(X)$ es localmente compacto,*
3. *X tiene una vecindad compacta en $\mathcal{CL}(X)$,*
4. *$\mathcal{CL}(X)$ es compacto.*

Demostración. Las implicaciones 1)⇒2) y 3)⇒4) son consecuencias inmediatas de 2.1.4, mientras que 2)⇒3) y 4)⇒1) se siguen del hecho de que X es homeomorfo a un subconjunto cerrado de $\mathcal{CL}(X)$, específicamente $\{\{x\} : x \in X\}$. □

2.2. Axiomas de numerabilidad

Toca el turno ahora a los axiomas de numerabilidad. Lo primero que veremos será para qué hiperespacios estas propiedades se proyectan.

Proposición 2.2.1. *1. X es separable si y sólo si $\mathcal{CL}(X)$ es separable.*

2. X es segundo numerable si y sólo si $\mathcal{K}(X)$ es segundo numerable.

3. X es primero numerable si y sólo si $\mathcal{K}(X)$ es primero numerable.

Demostración. 1. Supongamos que X es separable, y sea $D = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso en X. Sea $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ un abierto en $\mathcal{CL}(X)$, entonces, para cada U_j existe un $x_j \in D \cap U_j$ y $\{x_j\}_{j=1}^n \in \mathcal{U}$. Por lo tanto, la colección de todos los subconjuntos finitos de D es un denso numerable en $\mathcal{CL}(X)$.
Por el otro lado, sea $\mathcal{D} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un denso numerable en $\mathcal{CL}(X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos un $x_n \in A_n$. Sea $D = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y sea $U \subset X$ un abierto, entonces $\langle U\rangle$ es un abierto en $\mathcal{CL}(X)$ y existe un $A_j \in \langle U\rangle$, lo cual implica que $A_j \subset U$, por lo tanto $x_j \in A_j \subset U$ y como D es numerable, X es separable.

2. Primero supongamos que $\mathcal{K}(X)$ es segundo numerable. Sea $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $\mathcal{U}_n = \langle U_1^n, \ldots, U_{k(n)}^n\rangle$ una base numerable para $\mathcal{K}(X)$ y sea $U_n = \bigcap_{i=1}^{k(n)} U_i^n$. Veremos que la colección $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base para X. Si $x \in X$, sea $\mathcal{U}_n$ tal que $\{x\} \in \mathcal{U}_n = \langle U_1^n, \ldots, U_{k(n)}^n\rangle$, entonces $x \in \bigcap_{i=1}^{k(n)} U_i^n = U_n$. Ahora, sean U_n y U_m abiertos y $y \in U_n \cap U_m$, entonces $\{y\} \in \mathcal{U}_m \cap \mathcal{U}_n$ y como $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base para $\mathcal{K}(X)$, existe $\mathcal{U}_t$ tal que $y \in \mathcal{U}_t \subset \mathcal{U}_m \cap \mathcal{U}_n$, y por 1.1.10, si $U_j^n \in \mathcal{U}_n$ y $U_k^m \in \mathcal{U}_m$, existen $U_r^t, U_s^t \in \mathcal{U}_t$ tales que $U_r^t \subset U_j^n$ y $U_s^t \subset U_k^m$, por lo tanto $\bigcap_{i=1}^{k(t)} U_i^t \subset U_m \cap U_n$, así que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base numerable para X.
Para demostrar la otra implicación, sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base para X y consideremos la familia de todas las colecciones $\langle U_j\rangle_{j\in J}$ con $J \subset \mathbb{N}$ finito. Sea $F \in \mathcal{K}(X)$ y para cada $x \in F$, sea U_x un abierto básico tal que $x \in U_x$, como F es compacto, existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset F$ tal que $F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$, así que $F \in \langle U_i, \ldots, U_n\rangle$. Fijemos $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ y $\langle V_1, \ldots, V_m\rangle$ y sea $F \in \langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m\rangle$. Para cada $x \in F$, $x \in U_{i_x} \cap V_{j_x}$ para algún $U_{i_x} \in \{U_i\}_{i=1}^n$ y $V_{j_x} \in \{V_j\}_{j=1}^m$, y como U_i y U_j son abiertos basícos en X, existe W_{ij_x} tal que $x \in W_{ij_x} \subset U_{i_x} \cap V_{j_x}$, entonces $\{W_{ij_x} : x \in F\}$

es una cubierta para F, y como F es compacto, existe una subcubierta finita $\{W_{ij_{x_k}}\}_{k=1}^{s}$ y por 1.1.10 $F \in \langle W_{ij_{x_k}} \rangle \subset \langle U_i \rangle \cap \langle V_j \rangle$, así que $\{\langle U_i \rangle\}$ es una base para $\mathcal{CL}(X)$.

3. Supongamos que $\mathcal{K}(X)$ es primero numerable y sea $x \in X$ y $\{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^{n}$ una base numerable para $\{x\}$ en $\mathcal{CL}(X)$. Si U es una vecindad de x en X, entonces $\langle U \rangle$ es una vecindad de $\{x\}$ en $\mathcal{CL}(X)$, así que existe una vecindad $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \in \{\mathcal{U}_i\}_{i=1}^{n}$ de $\{x\}$ tal que $\{x\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subset \langle U \rangle$, entonces $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i \subset U$ así que $\{\bigcap_{i=1}^{n} U_i : U_i \in \mathcal{U}_j$ para alguna $j\}$ es una base local numerable para x en X.
   Por el otro lado, sea $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ una base local numerable para $x \in X$. Sea $F \in \mathcal{K}(X)$ y $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ una vecindad de F. Para cada $x \in F$ existe U_x tal que $x \in U_x \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_n$, entonces $F \subset \bigcup_{x \in F} U_x$ y por compacidad existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset F$ tal que $F \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$ así que $\{F\} \in \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_n} \rangle \subset \langle V_i, \ldots, V_n \rangle$, por lo tanto todos los abiertos de la forma $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ forman una base local numerable para F.

□

En seguida se prueba que si el hiperespacio de cerrados de un espacio X es segundo numerable, entonces el espacio debe ser compacto.

Teorema 2.2.2. *Si $(\mathcal{CL}(X), \tau_v)$ es segundo numerable, entonces (X, τ) es compacto.*

Demostración. Supongamos que X no es compacto, entonces, dado que X es segundo numerable, tampoco es numerablemente compacto, así que existe $A \subset X$ numerable tal que A es cerrado y discreto en X. Observemos que $\mathcal{CL}(A) \subset \mathcal{CL}(X)$. Sea τ_v^A la topología de Vietoris en $\mathcal{CL}(A)$, entonces es facil ver que el espacio $(\mathcal{CL}(A), \tau_v^A)$ es igual al espacio $\mathcal{CL}(A)$ visto como subespacio de $(\mathcal{CL}(X), \tau_v^X)$. Consideremos a $\mathcal{CL}(A)$ con la topología inducida, entonces, dado que $\mathcal{CL}(A)$ es un subespacio de $\mathcal{CL}(X)$ también es 2°-numerable. Sea $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ una base para $\mathcal{CL}(A)$ y para cada $E \subset A$ sea $\mathcal{U}_E$ un abierto básico tal que $E \in \mathcal{U}_E \subset \langle E \rangle$. Si $E_1 \neq E_2$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $E_1 \setminus E_2 \neq \varnothing$, entonces $E_2 \in \mathcal{U}_{E_2}$ y $E_2 \notin \mathcal{U}_{E_1}$ así que $\mathcal{U}_{E_2} \neq \mathcal{U}_{E_1}$. Por lo anterior $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ no puede ser numerable, lo cual es una contradicción. □

2.3. Axiomas de separación

A continuación veremos los axiomas de separacón. Veremos que algunas de las propiedades de separación se debilitan al pasar del espacio base a $\mathcal{CL}(X)$ pero, en general, permanecen intactas al pasar a $\mathcal{K}(X)$.

Teorema 2.3.1. *1. $\mathcal{CL}(X)$ siempre es T_0.*

2. Si X es T_1 entonces $\mathcal{CL}(X)$ es T_1.

3. X es regular si y sólo si $\mathcal{CL}(X)$ es Hausdorff.

Demostración. 1. Sean $E, F \in \mathcal{CL}(X)$, $E \neq F$. Entonces $E \in \langle X, X \setminus F\rangle$ y $F \notin \langle X, X \setminus F\rangle$, por lo tanto $\mathcal{CL}(X)$ es T_0.

2. Sean $E, F \in \mathcal{CL}(X)$, $E \setminus F \neq \varnothing$ y $x \in E \setminus F$. Igual que en el caso anterior, $E \in \langle X, X\setminus F\rangle$ y $F \notin \langle X, X\setminus F\rangle$. Como X es T_1, $\{x\} \in \mathcal{CL}(X)$ y $X \setminus \{x\}$ es un abierto tal que $F \in \langle X \setminus \{x\}\rangle$ y $E \notin \langle X \setminus \{x\}\rangle$.

3. Primero supongamos que X es regular. Sean $E, F \in \mathcal{CL}(X)$, $x \in E\setminus F$, entonces existe U, V abiertos en X tales que $x \in U$, $F \subset V$ y $U\cap V = \varnothing$, así que $F \in \langle V\rangle$, $E \in \langle X, U\rangle$ y $\langle V\rangle \cap \langle X, U\rangle = \varnothing$.
Por otro lado, si X no es regular, sea $E \in \mathcal{CL}(X)$ y $x \notin E$ tales que E y x no pueden ser separados por abiertos de X. Sea $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n\rangle$ un abierto en $\mathcal{CL}(X)$ que contiene a E y $\mathcal{V} = \langle V_1, \ldots, V_m\rangle$ un abierto que contiene a $E \cup \{x\}$, entonces $\{x\} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, así que $\mathcal{CL}(X)$ no es Hausdorff.

□

Para el caso de espacios completamente regulares, necesitaremos recordar la definición de Espacio de Stone.

Definición 2.3.2. *Un espacio topológico X es un espacio de Stone si, siempre que $x_0, x_1 \in X$ con $x_0 \neq x_1$ existe una función continua $f{:}X \to \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) = 0$ y $f(x_1) = 1$.*

El siguiente lema será muy importante para ver lo que ocurre con los espacios completamente regulares.

Lema 2.3.3. *Sea X un espacio topológico, $\overline{\mathbb{R}}$ los reales extendidos y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Definamos las funciones $f_+, f_- : \mathcal{CL}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ como $f_+(E) = \sup_{x\in E} f(x)$y $f_-(E) = \inf_{x\in E} f(x)$, para $E \in \mathcal{CL}(X)$. Si f es continua, entonces f_+ y f_- también lo son.*

Demostración. Sean $E \in \mathcal{CL}(X)$, $x = f_+(E)$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe $U \subset X$ abierto tal que $f(U) \subset (x - \frac{\epsilon}{2}, x + \frac{\epsilon}{2})$. Sea $F \in \langle U \rangle$, entonces, para toda $y \in F$ se tiene que $y \in U$, así que $f(y) \in (x - \frac{\epsilon}{2}, x + \frac{\epsilon}{2})$, por lo tanto $f_+(F) \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$.
Ahora supongamos que $f_+(E) = \infty$, entonces para toda $\Delta > 0$ existe una vecindad U de x tal que, para toda $y \in U$, $f(y) > \Delta$. Sea $F \in \langle U \rangle$, entonces $f_+(F) = \sup_{y \in F} f(y) > \Delta$.
Los casos para $-\infty$ y para f_- se prueban de manera análoga. □

Teorema 2.3.4. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es completamente regular si y sólo si $\mathcal{CL}(X)$ es un espacio de Stone.*

Demostración. Supongamos que X es completamente regular. Sean $A, B \in \mathcal{CL}(X)$, $A \neq B$. Supongamos también que $B \setminus A \neq \varnothing$ y $x \in B \setminus A$. Si $f : X \to [0, 1]$ es continua y tal que $f(x) = 1$ y $f(A) = 0$, entonces por 2.3.3, la función f_+ es continua y se cumple que $f_+(B) = 1$ y $f_+(A) = 0$.
Ahora supongamos que $\mathcal{CL}(X)$ es un espacio de Stone. Sea $A \subset X$ cerrado y sea $x \in X \setminus A$. Sea $F : \mathcal{CL}(X) \to [0, 1]$ continua y tal que $F(A) = 1$ y $F(A \cup \{x\}) = 0$. Definamos $f : X \to [0, 1]$ como $f(y) = F(A \cup \{y\})$, entonces f es continua y se tiene que $f(A) = 1$ y $f(x) = 0$. □

Teorema 2.3.5. *Si $\mathcal{CL}(X)$ es regular, entonces X es normal.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{CL}(X)$ es regular. Sea $E \in \mathcal{CL}(X)$ y $U \subset X$ un abierto que contiene a E, entonces $\langle U \rangle$ es una vecindad abierta de E en $\mathcal{CL}(X)$ y como $\mathcal{CL}(X)$ es regular, existe una vecindad $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$ de E tal que $E \in \langle V_1, \ldots, V_n \rangle \subset \langle \overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_n \rangle \subset \langle U \rangle$. Sea $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, entonces por 1.1.10, se tiene que $E \subset V \subset \overline{V} \subset U$, por lo tanto X es normal. □

Teorema 2.3.6. *X es Hausdorff y compacto si y sólo si $\mathcal{CL}(X)$ es compacto y Hausdorff.*

Demostración. Por 2.1.2, $\mathcal{CL}(X)$ es compacto y como X es regular, por 2.3.1 $\mathcal{CL}(X)$ es Hausdorff. □

Ahora veremos lo que ocurre con los axiomas de separación en el caso del hiperespacio $\mathcal{K}(X)$. Veremos que la existencia de cualquier axioma de separación en el espacio base X implicara la existencia de dicho axioma en $\mathcal{K}(X)$, y es claro que los axiomas de separación, siendo hereditarios, pasan de $\mathcal{K}(X)$ a X ya que X es siempre homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathcal{K}(X)$.

Teorema 2.3.7. *1. X es Hausdorff si y sólo si $\mathcal{K}(X)$ es Hausdorff.*

2. X es un espacio de Stone si y sólo si $\mathcal{K}(X)$ es un espacio de Stone.

3. X es regular si y sólo si $\mathcal{K}(X)$ es regular.

Demostración. 1. Sea X un espacio Hausdorff. Sean $E, F \in \mathcal{K}(X)$, $E \setminus F \neq \varnothing$ y $x \in E \setminus F$. Sean $U, V \subset X$ abiertos tales que $x \in U$, $F \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$, entonces $F \in \langle V \rangle$, $E \in \langle X, U \rangle$ y $\langle X, U \rangle \cap \langle V \rangle = \varnothing$.

2. Sea X un espacio de Stone, y sean $E, F \in \mathcal{K}(X)$ con $F \neq E$. Supongamos que $x \in E \setminus F$, como F es compacto, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(F) = 0$, entonces, por 2.3.3, $f_+ : \mathcal{K}(X) \to [0,1]$ es continua, $f_+(E) = 1$ y $f_+(F) = 0$.

3. Sea X un espacio regular y sea $A \in \mathcal{K}(X)$ y $\langle U_1, \ldots, u_b \rangle$ una vecindad abierta de A en $\mathcal{CL}(X)$. Sea $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, entonces $A \subset U$ y como X es regular, existe un abierto V tal que $A \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Para cada $i \in \{i, \ldots, n\}$ tomemos un $x_i \in U_i \cap A$. Como X es regular, para cada i existe una vecindad V_i de x_i tal que $\overline{V}_i \subset U_i$, así que por 1.1.10, $\langle V, V_1, \ldots, V_n \rangle$ es una vecindad abierta de A en $\mathcal{CL}(X)$ tal que $Cl(\langle V, V_1, \ldots V_n \rangle) = \langle \overline{V}, \overline{V}_1 \ldots, \overline{V}_n \rangle \subset \langle U_1, \ldots U_n \rangle$.

□

2.4. Conexidad

En lo que respecta a la conexidad, los siguientes resultados muestran bajo que condiciones un subconjunto arbitrario de $\mathcal{CL}(X)$ es conexo o hereda la conexidad. Es de suma importancia ya que muchos de los resultados que probaremos más adelante referentes a ordenabilidad dependen en gran medida de la conexidad de los espacios.

Teorema 2.4.1. *Sea $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}(X)$. Si alguno de los espacios X, $\mathcal{F}(X)$, o $\mathcal{S}$ es conexo, entonces todos son conexos.*

Demostración. Supongamos primero que X es conexo, entonces si $n \in \mathbb{N}$, X^n es conexo y por 1.1.11 se tiene que $\mathcal{F}_n(X)$ es imagen continua bajo la función pr de X^n, y por lo tanto $\mathcal{F}_n(X)$ también es conexo. Ahora, sean $E, F \in \mathcal{F}(X)$ tales que $|E| = n$ y $|F| = m$, entonces, si $n_0 = \text{máx}\{m, n\}$, $E, F \in \mathcal{F}_{n_0}(X)$ el cual es conexo, por lo tanto $\mathcal{F}(X)$ es conexo. Por 1.1.11, $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}(X) = cl(\mathcal{F}(X))$, entonces $\mathcal{S}$ y $\mathcal{A}(X)$ son conexos.

Por último, si $\mathcal{F}_n(X)$ ó $\mathcal{S}$ son conexos, dado que

$$X = \bigcup_{E \in \mathcal{F}_n(X)} E = \bigcup_{E \in \mathcal{S}} E$$

por 1.1.13, X es conexo. □

Definición 2.4.2. *Si* $\{U_i\}_{i \in I}$ *es una colección de subconjuntos de un espacio topológico* X*, entonces* $\langle U_i \rangle_{i \in I}^{+} = \{E \in \mathcal{A}(X) : E \subset \bigcup_{i \in I} U_i, E \cap U_i \neq \varnothing$ *para todo* $i \in I\}$.

Proposición 2.4.3. *Sean* $A_1, \ldots, A_n$ *subconjuntos conexos de* X*. Si* $\mathcal{F}(X) \cap \langle A_1, \ldots, A_n \rangle^{+} \subset \mathcal{S} \subset \langle \overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n} \rangle^{+}$*, entonces* $\mathcal{S}$ *es conexo.*

Demostración. Por 2.4.1, $\mathcal{F}(A_i)$ es conexo para cada $i = 1, \ldots, n$ y por otro lado $\mathcal{F}(A_i) \times \cdots \times \mathcal{F}(A_n)$ es un subconjunto conexo de $[\mathcal{A}(X)]^n$. Ahora, $\mathcal{F}(X) \cap \langle A_1, \ldots, A_n \rangle^{+}$ es la imagen de $\mathcal{F}(a_i) \times \cdots \times \mathcal{F}(A_n)$ bajo la función $pr : [\mathcal{A}(X)]^n \to \mathcal{A}(X)$ y entonces $\mathcal{F}(A_1) \cap \langle A_1, \ldots, A_n \rangle^{+}$ es conexo y por lo tanto, por 1.1.10, $\mathcal{S}$ es conexo. □

Teorema 2.4.4. *Sea* $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{K}(X)$*, entonces* X *es localmente conexo si y sólo si* $\mathcal{S}$ *es localmente conexo.*

Demostración. Primero, supongamos que X es localmente conexo. Si $E \in \mathcal{K}(X)$, y $\mathcal{U}$ es una vecindad de E en $\mathcal{A}(X)$, entonces podemos encontrar abiertos conexos $U_1, \ldots, U_n$ tales que $E \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subset \mathcal{U}$. Se sigue ahora, por la proposición 2.4.3, que $\mathcal{S}$ también es localmente conexo.

Ahora supongamos que $\mathcal{S}$ es localmente conexo. Sea $x \in X$, y sea U una vecindad de x. Entonces existe una vecindad conexa $\mathcal{B}$ de $\{x\}$ en $\mathcal{S}$ tal que $\mathcal{B} \subset \langle U \rangle$. Se tiene que $V = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$ es una vecindad de x, $V \subset U$ y por 1.1.13 $\mathcal{B}$ es conexo, ya que $\{x\} \in \mathcal{B}$ y $\{x\}$ es conexo. □

Para finalizar esta sección, veremos lo que ocurre con ciertas propiedades referentes a conexidad. Podemos observar nuevamente cómo muchas de estas propiedades se comparten naturalmente entre el espacio base X y el hiperespacio $\mathcal{K}(X)$. Recordemos que un espacio X es totalmente disconexo si cualesquiera dos puntos distintos pueden ser separados por conjuntos cerrado-abiertos.

Proposición 2.4.5. *1. X es 0-dimensional si y sólo si $\mathcal{K}(X)$ es 0-dimensional.*

2. X es totalmente disconexo si y sólo si $\mathcal{K}(X)$ es totalmente disconexo.

3. X es discreto si y sólo $\mathcal{K}(X)$ es discreto.

4. X no tiene puntos aislados si sólo si $\mathcal{CL}(X)$ no tiene puntos aislados.

5. La colección de elementos conexos de $\mathcal{CL}(X)$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{CL}(X)$.

Demostración. 1. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una base de cerrado-abiertos para X. Probaremos que las colecciónes finitas de la forma $\{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle\}$ con $U_i \in \mathcal{U}$ es una base de cerrado-abiertos para $\mathcal{K}(X)$. Primero, por definición, $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ es abierto en $\mathcal{K}(X)$ y se tiene que, por 1.1.10 $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n} \rangle = Cl\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Ahora, sea $E \in \mathcal{K}(X)$, entonces, para cada $x \in E$ tomemos un $U_x \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U_x$, así que $E \subset \bigcup_{x \in E} U_x$ y como E es compacto existe $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$ tal que $E \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$ y $E \in \langle U_{x_1}, \ldots, U_{x_n} \rangle$. Finalmente, si $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\langle V_1, \ldots V_m \rangle$ son abiertos, con $U_i, V_j \in \mathcal{U}$ y $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle \neq \varnothing$, sea $F \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$. Para cada $x \in F$, sea $W_x = \bigcap\{U_i : x \in U_i\} \cap \bigcap\{V_i : x \in V_i\}$. Se tiene que $W_x \neq \varnothing$ y $\{W_x : x \in F\}$ es una cubierta abierta para F, entonces existe $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset F$ tal que $F \subset \bigcup_{i=1}^k W_{x_i}$ y $F \in \langle W_{x_1}, \ldots, W_{x_k} \rangle$ así que por 1.1.10 $\langle W_{x_1}, \ldots, W_{x_k} \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$, por lo tanto $\mathcal{K}(X)$ es cero-dimensional.

2. Primero supongamos que X es totalmente disconexo. Sean $E, F \in \mathcal{K}(X)$, $E \neq F$ y $x \in E \setminus F$. Para cada $y \in F$, existen U_y y V_y cerrados-abiertos en X tales que $x \in U_y$ y $y \in V_y$, entonces $F \subset \bigcup_{y \in F} V_y$, y como F es compacto existe $\{y_1, \ldots, y_n\} \subset F$ tal que $F \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$,

$x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ y entonces $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ es una vecindad cerrada-abierta de x. De lo anterior se tiene que $F \in \langle X \setminus U, X \rangle$ que es un cerrado-abierto en $\mathcal{K}(X)$ y $E \notin \langle X \setminus U, X \rangle$, por lo tanto $\mathcal{K}(X)$ es totalmente disconexo.
Por otro lado, si $\mathcal{K}(X)$ es totalmente disconexo, sean $x, y \in X$. Existe una vecindad cerrada-abierta de $\{x\}$, $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ tal que $\{y\} \notin \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, entonces $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es un cerrado-abierto en X que separa a x y a y.

3. Si X es discreto, sea $E \in \mathcal{K}(X)$, entonces E es finito, así que $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = E$, por lo tanto E es abiero en $\mathcal{K}(X)$.
Si $\mathcal{K}(X)$ es discreto, sea $x \in X$, entonces $\langle x \rangle$ es abierto en $\mathcal{K}(X)$ y por lo tanto x es abierto en X.

4. Supongamos primero que X no tiene puntos aislados. Sea $E \in \mathcal{K}(X)$ y sea $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ una vecindad abierta de E en $\mathcal{K}(X)$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, tomemos un $x_i \in U_i$ de tal manera que $\{x_i\}_{i=1}^{n} \neq E$, lo cual es posible ya que X no tiene puntos aislados, entonces $\{x_i\}_{i=1}^{n} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y por lo tanto $\mathcal{K}(X)$ no tiene puntos aislados.
Ahora supongamos que $\mathcal{K}(X)$ no tiene puntos aislados y sean $x \in X$ y U una vecindad de x, entonces $\{x\} \in \langle U \rangle$, así que existe $F \in \langle U \rangle$ tal que $F \neq \{x\}$, así $F \subset U$ y X no tiene puntos aislados.

5. Sea $E \in \mathcal{CL}(X)$ disconexo, entonces existen abiertos $U, V \subset X$ tales que $E \subset U \cup V$, $E \cap U \neq \varnothing$, $E \cap V \neq \varnothing$, y $U \cap \overline{V} = \overline{U} \cap V = \varnothing$, entonces $E \in \langle U, V \rangle$. Si $F \in \langle U, V \rangle$, entonces $F \subset U$ y $F \subset V$ y como U y V son mutuamente ajenos, F es disconexo, por lo tanto $\{E \in \mathcal{CL}(X) : E \text{ es disconexo } \}$ es abierto en $\mathcal{CL}(X)$.

$\square$

Capítulo 3

Selecciones continuas

Ahora veremos la parte más importante de este trabajo, es decir, las selecciones continuas. En este capítulo definiremos lo que son las selecciones continuas y veremos cómo la propiedad de tener una selección continua, está íntimamente relacionada con la propiedad de ser ordenable, lo cual trataremos en la primera sección.

En la segunda sección nos enfocaremos en ver cómo se comportan los espacios compactos, o con propiedades parecidas a la compacidad, ante la existencia de selecciónes continuas. Mostraremos nuevamente consecuencias al respecto de tener un orden lineal y caracterizaremos algunos espacios compactos a partir del hecho de que estos espacios tengan, o no, una o más selecciones continuas

En la tercera y última sección, nos dedicaremos a observar ciertas condiciones para asegurar la existencia de selecciones continuas en espacios de funciones continuas.

Para comenzar, introduciremos la definición formal de lo que entenderemos por una selección continua.

Definición 3.0.6. *Sea $\mathcal{G} \in \mathcal{CL}(X)$. Una función $f : \mathcal{G} \to X$ es una selección continua si f es continua con la topología de Vietoris y $f(E) \in E$ para todo $E \in \mathcal{G}$.*

Algunos autores utilizan el término selección para referirse en general a las selecciones continuas, asumiendo que dicha selección es siempre continua con la topología de Vietoris, y así lo haremos en lo que resta de este trabajo.

A lo largo de este capítulo, consideraremos selecciones no sólo en $\mathcal{CL}(X)$, si no que, en ocaciones, revisaremos lo que pasa para otras subcolecciones de $\mathcal{CL}(X)$. En particular, será de mucho interés estudiar las selecciones para $\mathcal{F}_2(X)$, y por lo tanto, les daremos un nombre específico.

Definición 3.0.7. *Llamamos a una selección continua $f : \mathcal{F}_2 \to X$ una selección débil.*

El siguiente resultado nos proporciona una herramienta muy útil para trabajar con selecciones débiles, ya que nos permite trabajar con la topología producto en X^2 en lugar de la topología de Vietoris en $\mathcal{F}_2(X)$.

Proposición 3.0.8. *X tiene una selección débil si y sólo si existe una función continua $g : X^2 \to X$ tal que , para todo $x, y \in X$*

1. *$g(x,y) = g(y,x)$ y*

2. *$g(x,y) \in \{x,y\}$.*

Dicha función también será llamada una selección débil.

Demostración. Primero supongamos que X tiene una selección débil f. Definamos $g(x,y) = f(\{x,y\})$. Sea $(x,y) \in X^2$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $g(x,y) = f(\{x,y\}) = x$. Sea U un abierto en X tal que $x \in U$, entonces existe un abierto $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ en $\mathcal{F}_2(X)$ tal que $\{x,y\} \in \mathcal{U}$ y $f(\mathcal{U}) \subset U$. Sean $U_x = \bigcap\{U_i : x \in U_i\}$ y $U_y = \bigcap\{U_i : y \in U_i\}$, entonces U_x y U_y son abiertos no vacíos en X. Sea $V = U_x \times U_y$, entonces V es un abierto en X^2 que contiene a (x,y). Sea $(a,b) \in V$, se tiene que $a \in U_x$ y $b \in U_y$, además $\{a,b\} \in \mathcal{U}$, así que $g(a,b) = f(\{a,b\}) \in U$, lo cual implica que $g(V) \subset U$, por lo tanto g es continua en X.
Ahora supongamos que se cumplen las condiciones (1) y (2). Definamos $f(\{x,y\}) = g(x,y)$. Para ver que f es una selección, por (1) y (2) sólo basta ver que f es continua con la topología de Vietoris. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(\{x,y\}) = x$ y sea $U \subset X$ un abierto tal que $x \in U$, entonces existe $V = V_1 \times V_2 \subset X^2$, con V_1, V_2 abiertos en X tal que $g(V) \subset U$. Sea $\mathcal{V} = \langle V_1, V_2 \rangle$, entonces es claro que $\{x,y\} \in \mathcal{V}$ y si $\{a,b\} \in \mathcal{V}$ podemos suponer, otra vez sin pérdida de generalidad, que $a \in V_1$ y $b \in V_2$, así que $(a,b) \in V$ y $f(\{a,b\}) = g(a,b) \in U$, de lo cual se tiene $f(\mathcal{V}) \subset U$ y por lo tanto f es una selección continua. $\square$

3.1. Selecciónes y orden

Como se mencionó anteriormente, en esta sección veremos cómo, en ciertos casos, la propiedad de ser ordenable es equivalente con tener una selección continua para algún hiperespacio de subconjuntos cerrados.

Para el desarrollo de esta sección comenzaremos recordando algunas definiciones y estableciendo la notación adecuada.

Definición 3.1.1.

- *Un espacio topológico* (X, τ) *es un espacio linealmente ordenado si existe un orden lineal* $\leq$ *tal que la topología generada por* $\leq$*,* $\tau_{\leq}$*, coincide con* τ*.*

- *Un espacio topológico es un espacio ordenado generalizado (o subordenable) si puede ser encajado como subespacio en un espacio linealmente ordenado.*

- *Un espacio* (X, τ) *es débilmente ordenable si existe un orden lineal* $\leq$ *en* X *tal que* $\tau_{\leq} \subset \tau$*.*

Definición 3.1.2. *Si* $\leq$ *es una relación de orden en* X*, entonces,*

- $I_*(x) = \{t \in X : t \leq x\}$

- $I^*(x) = \{t \in X : t \geq x\}$.

La siguiente definición será utilizada con mucha frecuencia, ya que es la base para definir un orden a partir de una selección débil.

Definición 3.1.3. *Si* $f : \mathcal{F}_2(X) \to X$ *es una selección débil, podemos definir una relación* $\leq_f$ *en* X *de manera que* $x \leq_f y$ *si* $f(\{x, y\}) = x$*.*

Como veremos en el lema siguiente, la relación $\leq_f$ es transitiva y, por lo tanto, resulta ser un orden lineal.

En los siguientes resultados, veremos cómo la existencia de una selección débil en un espacio conexo, garantiza la existencia de un orden débil y, en general, las consecuencias de la existencia de selecciones en espacios conexos. La situación, en general, se resume en el hecho de que la existencia de una selección siempre implica la existencia de un orden débil, y la selección asígna a cada cerrado su elemento mínimo con respecto a ese orden lineal.

Lema 3.1.4. *Si X es conexo y existe una selección débil $f : \mathcal{F}_2(X) \to X$, entonces:*

1. *Para todo $x \in X$, $I_*(x)$ y $I^*(x)$ son abiertos en X.*

2. *$\leq_f$ es un orden lineal en X.*

3. *La topología de orden en X es más gruesa que τ.*

4. *Existe exactamente una selección débil g además de f en X, dada por*

$$g(\{x\}) = x,\ g(\{x,y\}) = \begin{cases} x & si\ f(\{x,y\}) = y \\ y & si\ f(\{x,y\}) = x \end{cases}$$

Demostración.

1. Sea $t \in I_*(x)$, entonces $t <_f x$, es decir, $f(\{t,x\}) = t$. Sea $U \subset X$ una vecindad de t tal que $x \notin U$, entonces, como f es continua, existe un abierto $\langle V_1, V_2\rangle$ en $\mathcal{F}_2(X)$ tal que $\{t,x\} \in \langle V_1, V_2\rangle$ y $t \in V_1$, $x \in V_2$ y si $E \in \langle V_1, V_2\rangle$ entonces $f(E) \in U$. Entonces si $t' \in V_1$, $f(\{t',x\}) \in U$, y como $x \notin U$, $f(\{t',x\}) = t'$, así que $t' <_f x$ y por lo tanto $t' \in I_*(x)$.
   Si $t \in I^*(x)$, entonces $x >_f t$ y $f(\{x,t\}) = x$. Sean U, V abiertos en X y tales que $x \in U$, $t \in V$ y $U \cap V = \varnothing$. Como f es continua, existe un abierto $\langle W_1, W_2\rangle$ de $\{t,x\}$ tal que $x \in W_1$ y $t \in W_2$, y si $E \in \langle W_1, W_2\rangle$ entonces $f(E) \in U$. Sea $W = W_2 \cap V$, entonces $\langle W_1, W\rangle \subset \langle W_1, W_2\rangle$ así que si $E \in \langle W_1, W\rangle$, $f(E) \in U$. Si $t' \in W$, $f(\{x,t'\}) \in U$, entonces $f(\{x,t)\} = x$ ya que $t' \in V$ y $U \cap V = \varnothing$, por lo tanto $x <_f t'$.

2. Basta ver que $<_f$ es transitiva. Sean $x, y, z \in X$ tales que $x <_f y$, y $y <_f z$, entonces $z \in I^*(y)$, así que $X \setminus I^*(y) \subset X \setminus \{z\}$, lo cual implica que $I_*(y) \cup \{y\} \subset I_*(z) \cup I^*(z)$. Como X es conexo, $I_*(y) \cup \{y\}$ es conexo y como $I_*(z)$ y $I^*(z)$ son abiertos por 1), y el hecho de que $I_*(z) \cap I^*(z) = \varnothing$, tenemos que $I_*(y) \cup \{y\} \in I_*(z)$ ya que $y \in I_*(z)$. Como $x \in I_*(y)$, entonces $x \in I_*(z)$ y por lo tanto $x <_f z$.

3. Por 1), $I_*(x)$ y $I^*(x)$ son abiertos en X, por lo tanto generan una topología más gruesa.

□

Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{CL}(X)$ y existe una selección continua $f : \mathcal{G} \to X$, podemos definir el orden $<_f$ como el orden inducido por la selección $f|_{\mathcal{F}(X)_2}$.

Lema 3.1.5. *1. Si para alguna $n \in \mathbb{N}$ existe una selección $f : \mathcal{F}_n(X) \to X$, entonces $f(E)$ es el primer elemento de E bajo el orden $\leq_f$ para toda $E \in \mathcal{F}_n(X)$.*

2. Si $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{CL}(X)$ y si existe una selección $f : \mathcal{G} \to X$, entonces $f(E)$ es el primer elemento bajo el orden $\leq_f$ de E para todo $E \in \mathcal{G}$.

Demostración. 1. Sean $B \in \mathcal{F}_n(X)$, $x, y \in B$ y $x <_f y$. Sea $\mathcal{Q} = \{E \in \mathcal{F}_n(X) : f(E \cup \{x, y\}) = y\}$. Primero veremos que $\mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{Q}$ es abierto. Sea $E \in \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{Q}$, entonces $f(E \cup \{x, y\}) = z$ para algún $z \neq y$. Sea U una vecindad de z tal que $y \notin U$. Como f es continua, existe una vecindad $\mathcal{N} = \langle N_1, \ldots, N_k \rangle$ de $E \cup \{x, y\}$ tal que si $F \in \mathcal{F}_n(X) \cap \mathcal{N}$, entonces $f(F) \in U$. Sea $\mathcal{M}$ una vecindad de E generada por los N_i que son vecindades de algún punto de E. Como los únicos N_i que no generan a $\mathcal{M}$ son aquellos que son vecindades de x o de y, se tiene que si $F \in \mathcal{F}_n(X) \cap \mathcal{M}$, entonces $F \cup \{x, y\} \in \mathcal{N}$ lo cual implica que $f(F \cup \{x, y\}) \in U$ y como $y \notin U$, $F \in \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{Q}$.

Ahora veremos que $\mathcal{Q}$ es abierto. Sea $E \in \mathcal{Q}$, entonces $f(E \cup \{x, y\}) = y$. Sean U, V abiertos en X tales que $y \in U$, $(E \cup \{x, y\}) \setminus \{y\} \in V$ y $U \cap V = \varnothing$, lo cual es posible ya que E es finito. Como f es continua, existe una vecindad $\mathcal{N} = \langle N_1, \ldots, N_k \rangle$ de $E \cup \{x, y\}$ tal que si $F \in \mathcal{N} \cap \mathcal{F}_n(X)$, entonces $f(F) \in U$. Sea $\mathcal{M} = \langle M_1, \ldots, M_j \rangle$ una vecindad de E construida como en el paso anterior, y sea $\mathcal{M}' = \langle M_1 \cap V, \ldots, M_j \cap V \rangle$. Entonces si $F \in \mathcal{F}_n(X) \cap \mathcal{M}$ se tiene que $F \cup \{x, y\} \in \mathcal{N}$ y así, $f(F \cup \{x, y\}) \in U$, y como $F \cup \{x, y\} \cap U = y$, $f(F \cup \{x, y\}) = y$, por lo tanto $F \in \mathcal{Q}$.

Como $\mathcal{F}_n(X)$ es conexo por 2.4.1 y por el hecho de que $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{Q}$ son abiertos ya que $\{x, y\} \in \mathcal{F}_n(X) \setminus \mathcal{Q}$, tenemos que $\mathcal{Q} \neq \varnothing$, y por lo tanto $f(B) \neq y$ así que $f(B) \leq_f z$ para todo $z \in B$.

2. Sea $E \in \mathcal{G}$ y $f(E) = y$. Supongamos que y no es el elemento mínimo de E, entonces existe $x \in E$ tal que $x <_f y$. Tenemos que $I^*(x)$ es una vecindad de y, entonces por la continuidad de f, existe una vecindad $\mathcal{N}$ de E tal que si $F \in \mathcal{G} \cap \mathcal{N}$, entonces $f(F) \in I^*(x)$. Como $\mathcal{F}(X)$ es denso en $\mathcal{G}$ por 1.1.11, existe $F \in \mathcal{G} \cap \mathcal{N}$ finito con $x \in F$, entonces $f(F) = z \in I^*(x)$ y $z \neq x$, así que $x <_f z$. Supongamos que $|F| = n$, entonces $F \in \mathcal{F}_n(X)$ y $f|_{\mathcal{F}_n(X)}$ es una selección continua, así que por 1), $z <_f x$, lo cual es una contradicción.

$\square$

Lema 3.1.6. *Supongamos que todas las componentes de X son abiertas. Se cumple:*

1. *Si existe una selección débil $f : \mathcal{F}_2(X) \to X$, entonces existe un orden lineal en X que genera una topología más gruesa que τ.*

2. *Si existe una selección $f : \mathcal{CL}(X) \to X$. entonces existe un orden lineal en X la cual genera una topología más gruesa que τ y tal que todo subconjunto cerrado con la topología τ tiene un elemento mínimo.*

Demostración. 1. Primero demos un buen orden $<_c$ al conjunto de las componentes conexas de X. Denotemos por $C(x)$ a la componente que contiene a x. Para cada componente C de X, $f : \mathcal{F}_2(C) \to X$ es una selección débil y podemos definir el orden $<_f$ en $\mathcal{F}_2(C)$ como en 3.1.3. Definimos ahora una relación en X como sigue:

$$x < y \text{ si } \begin{cases} f(\{x, y\}) = x & \text{si } x \text{ y } y \text{ están en la misma componente} \\ C(x) <_c C(y) & \text{si } x \text{ y } y \text{ están en distinta componente.} \end{cases}$$

La relación anterior es claramente un orden lineal, y para cada $x \in X$,

$$I_*(x) = \{t \in C(x) : t < x\} \cup \bigcup_{C <_C C(x)} C \text{ y}$$

$$I^*(x) = \{t \in C(x) : t > x\} \cup \bigcup_{C(x) <_C C} C$$

son abiertos en X y por lo tanto inducen una topología más gruesa.

2. Para cada componente C de X, f es una selección para $\mathcal{F}(C)$. Si definimos un orden en X, como en 1), basta ver que cada cerrado relativo a τ tiene un elemento mínimo. Sea $A \subset X$ cerrado y sea C la menor componente de X que contiene algún punto de A, entonces $A \cap C$ es un cerrado no vacío de C y tiene, por 3.1.5 un elemento mínimo y que es también, por la definición de la relación de orden, elemento mínimo de A.

□

A continuación revisaremos la situación opuesta, es decir, las consecuencias de que un espacio tenga un orden cuya topología sea más gruesa que la original. En este caso veremos que la existencia de dicho odren garantiza la existencia de una selección continua para una familia determinada de subconjuntos cerrados.

Lema 3.1.7. *Supongamos que existe un orden lineal en X tal que la topología de orden es más gruesa que τ y sea $\mathcal{R}(X) = \{E \in \mathcal{CL}(X) :$ para todo $F \in \mathcal{CL}(X), E \cap F$ es vacío o tiene un elemento mínimo$\}$. Entonces:*

1. *$f : \mathcal{R}(X) \to X$, definida como $f(E)$ =elemento mínimo de E, es una selección.*
2. *$\mathcal{K}(X, \tau) \subset \mathcal{R}(X)$.*

Demostración.

1. Sea $E \in \mathcal{R}(X)$ y sea $f(E) = x$. Sea U una vecindad de x en τ. Debemos encontrar una vecindad $\mathcal{N}$ de E tal que si $F \in \mathcal{N} \cap \mathcal{R}(X)$, entonces $f(F) \in U$. Si $E \subset U$, entonces $\mathcal{N} = \langle U \rangle$ cumple con la condición, entonces supongamos que $E \not\subset U$, así que $E \cap (X \setminus U) \neq \varnothing$. Sea $y \in E \cap (X \setminus U)$ y consideremos 2 casos:
   - Caso 1. No existe $z \in X$ tal que $x < z < y$. Sea $N_1 = \{t : t < y\} \cap U$, $N_2 = \{t : t > x\}$. Entonces N_1 y N_2 son abiertos en τ, $x \in N_1$, $y \in N_2$ y $E \subset N_1 \cup N_2$, así que $\mathcal{N} = \langle N_1, N_2 \rangle$ es una vecindad de E. Si $t_1 \in N_1$ y $t_2 \in N_2$, entonces $t_1 < t_2$ y se tiene que si $F \in \mathcal{N} \cap \mathcal{R}(X)$, entonces $f(F) \in N_1 \subset U$.
   - Caso 2. Si existe $z \in X$ tal que $x < z < y$, sean $N_1 = U$, $N_2 = \{t : t < z\} \cap U$ y $N_3 = \{t : t > z\}$. Entonces N_1, N_2 y N_3 son abiertos en τ.
2. Sea $E \in \mathcal{K}(X)$, entonces $E \cap F$ es compacto en τ para todo $F \in \mathcal{CL}(X)$ y también es compacto con la topología del orden y entonces E tiene un elemento mínimo, así que $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{R}(X)$.

$\square$

Gracias a los resultados anteriores, podemos establecer el siguiente teorema que revela la cercana relación entre selecciones continuas y ordenabilidad.

Teorema 3.1.8. *Sea (X, τ) un espacio Hausdorff tal que todas las componentes de X son conexas.*

1. *Existe una selección continua $f : \mathcal{CL}(X) \to X$ si y sólo si existe un orden lineal en X tal que la topología del orden es más gruesa y todo cerrado relativo a τ tiene un elemnto mínimo.*
2. *Existe una selección $f : \mathcal{K}(X) \to X$ si y sólo si existe un orden lineal en X tal que la topología del orden es más gruesa que τ.*

Ahora veremos bajo qué condiciones una selección débil puede ser extendida a otros hiperespacios que contienen a $\mathcal{F}_2(X)$.

Proposición 3.1.9. *Si X es un espacio conexo y si existe una selección débil $f : \mathcal{F}_2(X) \to X$, entonces:*

1. *Existe una extención de f a $\mathcal{K}(X)$.*
2. *Si todo $E \in \mathcal{CL}(X)$ tiene un elemento mínimo, entonces existe una extención de f a $\mathcal{CL}(X)$.*
3. *Si $\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{CL}(X)$, entonces cualquier extención a $\mathcal{G}$ es única.*
4. *Para toda $n \in \mathbb{N}$, cualquier extención a $\mathcal{F}_n(X)$ es única.*

Demostración. 1. Por 3.1.4, $<_f$ es un orden lineal en X y por 3.1.4 la topología del orden inducida por $<_f$ es más gruesa que τ, así que por 3.1.7 existe una selección $\hat{f} : \mathcal{R}(X) \to X$ tal que $\hat{f}(E)$ es el mínimo elemento de E con respecto a $<_f$ para todo $E \in \mathcal{R}(X)$. Por 3.1.7 $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{R}(X)$ así que $\hat{f}|_{\mathcal{K}(X)} = f$.

2. Por 1), f tiene una extensión única $\hat{f}$ a $\mathcal{R}(X)$, pero $\mathcal{R}(X) = \mathcal{CL}(X)$.

3. Por 3.1.5, si $\hat{f}$ es una extensión de f a $\mathcal{G}$ y $E \in \mathcal{G}$, $\hat{f}(E)$ es el elemento mínimo de E con respecto a $<_f$, así que $\hat{f}|_{\mathcal{F}_2(X)} = f$.

4. Por 3.1.5, si existe una extensión $\hat{f}$ de f a $\mathcal{F}_n(X)$ y $E \in \mathcal{F}_n(X)$, entonces $\hat{f}(E)$ es el mínimo elemento de E con respecto a $<_f$, así que $\hat{f}|_{\mathcal{F}_2(X)} = f$. $\square$

Corolario 3.1.10. *Si X es un espacio conexo y si existe una selección débil $f : \mathcal{F}_2(X) \to X$, entonces existe una única extención de f a $\mathcal{G} \subset \mathcal{CL}(X)$ si $\mathcal{G}$ satisface alguna de las siguientes condiciones:*

1. *$\mathcal{G} = \mathcal{F}_n(X)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$,*
2. *$\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{K}(X)$,*
3. *$\mathcal{F}(X) \subset \mathcal{G}$ y todo $E \in \mathcal{CL}(X)$ tiene un elemento mínimo.*

Otro aspecto importante que debemos abordar es el saber cuantas selecciones continuas puede tener un hiperespacio determinado, ya que más adelante esto nos ayudara a caracterizar ciertos espacios a partir del número de selecciones que existen. Para esto, introduciremos la siguiente definición

Definición 3.1.11. *Si X es un espacio topológico y $\mathcal{G}$ es un hiperespacio de X, denotaremos por $\mathcal{S}el(\mathcal{G})$ al conjunto de todas las selecciones continuas para el hiperespacio $\mathcal{G}$ y por $\#\mathcal{S}el(\mathcal{G})$ al número de selecciones continuas de $\mathcal{G}$.*

Proposición 3.1.12. *Sea X un espacio conexo. Sea $\#\mathcal{S}el(\mathcal{G})$ el número máximo de selecciones diferentes que existen de un subconjunto fijo $\mathcal{G}$ de $\mathcal{CL}(X)$ a X. Entonces:*

1. *Si $\mathcal{F}_2(X) \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{K}(X)$, entonces $\#\mathcal{S}el(\mathcal{G}) = 0$ o $\#\mathcal{S}el(\mathcal{G}) \geq 2$.*

2. *Si $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}(X)$, o si $\mathcal{G} = \mathcal{F}_n(X)$ para alguna n, entonces $\#\mathcal{S}el(\mathcal{G}) \leq 2$.*

Demostración.

1. Por 3.1.4, si X tiene una selección débil, necesariamente debe existir otra distinta, y por 3.1.9 cada una de estas selecciones se puede esxtender a $\mathcal{G}$.

2. Por la parte 3 y 4 de 3.1.9, cualquier selección débil se extiende de manera única a $\mathcal{G}$, por lo tanto el número máximo de dichas selecciones será 2.

□

3.2. Selecciones continuas y compacidad

El objetivo de esta sección es estudiar espacios compactos, o con propiedades similares, desde el punto de vista de las selecciones continuas. Comenzaremos con resultados al respecto de la existencia de un orden lineal dada una selección débil en el caso de espacios compactos, tal y como se hizo anteriormente para espacios conexos. Veremos que lo mismo ocurre en el caso de espacios casi compactos, para los cuales su compactación de Stone-Čech es ordenable si y sólo si tiene una selección continua. También proporcionaremos ejemplos que son de gran utilidad para determinar ciertos espacios que no pueden tener selecciones continuas, en particular, el espacio de los reales y el de los números racionales. Por último nos encargaremos de caracterizar espacios compactos, a partir del número de selecciones continuas que existen en el hiperespacio de subconjuntos cerrados de dicho espacio.

Anteriormente, vimos como la existencia de una selección débil en un espacio conexo, o cuyas componentes son abiertas, garantiza la existencia de un orden en dicho espacio, y viceversa, la existencia de un orden lineal que genere una topología más débil, garantiza la existencia de una selección.

El caso para espacios compactos es similar, pero probarlo resulta algo un poco más complejo. A continuación presentamos un resultado importante el cual nos proporciona una construcción para obtener un orden lineal siempre que se tenga un espacio compacto con una selección débil. Este resultado lo encontramos en el trabajo de Jan Van Mill y Ever Wattel [14] y en el se presenta una construcción a detalle del orden lineal requerido a través de definir, para cada punto, uno a uno los intervalos de la forma $I^*(x)$ y $I_*(x)$. Su importancia y relevancia para el estudio de las selecciones continuas es indiscutible.

Teorema 3.2.1. *Si X es un espacio compacto y tiene una selección débil $f : X^2 \to X$, entonces X es ordenable.*

Demostración. Para cada $x \in X$ definamos

$$B_x = \{y \in X : f(y, x) = y\}$$

y

$$A_x = \{y \in X : f(y, x) = x\}.$$

Notemos que A_x y B_x son ambos cerrrados. $A_x \cup B_x = X$ y $A_x \cap B_x = \{x\}$. Sea $\prec$ un buen orden en X. Para cada $x \in X$ construiremos de manera recursiva conjuntos cerrados $L_x, U_x \subset X$ tales que

1. $L_x \cup U_x = X$ y $L_x \cap U_x = \{x\}$
2. Si $y \prec x$ y $x \in L_y$, entonces $L_x \subset L_y \setminus \{y\}$,
3. Si $y \prec x$ y $x \in U_y$, entonces $U_x \subset U_y \setminus \{y\}$,
4. Si $z \in L_x$ y $z \notin \bigcup\{L_y : y \prec x \text{ y } x \in U_y\}$ entonces $z \in B_x$,
5. Si $z \in U_x$ y $z \notin \bigcup\{U_y : y \prec x \text{ y } x \in L_y\}$ entonces $z \in A_x$.

Sea x_0 el primer elemento de X y sean $L_{x_0} = B_{x_0}$ y $U_{x_0} = A_{x_0}$. Supongamos que hemos definido ya L_y y U_y para todo $y \prec x$ de manera que satisfagan las condiciones 1) a 5). Sea $E = \{y \prec x : x \notin L_y\}$ y $F = \{y \prec x : x \notin U_y\}$. Sea $Z = X \setminus (\bigcup_{y \in E} L_y \cup \bigcup_{y \in F} U_y)$. Si $\kappa = |E|$, sea $\leq$ el orden de los cardinales y definamos para cada $\xi < \kappa$ puntos $y_\xi \in E$ de la siguiente manera.

1. 6) $y_0 = min(E)$,
2. 7) $y_\zeta = min(\{x\} \cup \{y \in E : y_\mu \prec y$ para todo $\mu < \zeta$ y $y \notin \bigcup_{\mu < \zeta} L_{y_\mu}\})$.

Sea $\xi < \kappa$ el primer ordinal tal que $y_\xi = x$.

- Afirmación 1. Si $\xi_0 \leq \xi$ entonces $\bigcup\{L_y : y \in E$ y $y \prec y_{\xi_0}\} = \bigcup_{\mu < \xi_0} L_{y_\mu}$. Sea $y \in \{z \in E : z \prec y_{\xi_0}\} \setminus \{y_\mu : \mu < \xi_0\}$ y sea $\mu \leq \xi_0$ el primer ordinal tal que $y \prec y_\mu$. Como $y_\rho \prec y$ para todo $\rho < \mu$ y como $y \neq y_\mu$, por 7), $y \in \bigcup_{\rho < \mu} L_{y_\rho}$. Elijamos $\rho < \mu$ de manera que $y \in L_{y_\rho}$. Como $y_\rho \prec y$, por 2), $L_y \subset L_{y_\rho} \subset \bigcup_{\delta < \xi_0} L_{y_\delta}$.

- Afirmación 2. Si $\mu_0 < \mu_1 < \xi$ entonces $L_{y_{\mu_0}} \subset L_{y_{\mu_1}} \setminus \{y_{\mu_1}\}$. Por 7) $y_{\mu_1} \notin L_{y_{\mu_0}}$. Por lo anterior, $y_{\mu_1} \in U_{y_{\mu_0}}$, y entonces, por 3), $U_{y_{\mu_1}} \subset U_{y_{\mu_0}} \setminus \{y_{\mu_0}\}$. Por 1), $L_{y_{\mu_0}} \subset L_{y_{\mu_1}} \setminus \{y_{\mu_1}\}$.

- Afirmación 3. Si $\mu_0 < \mu_1 < \xi$ entonces $L_{y_{\mu_1}} \setminus L_{y_{\mu_0}} \subset A_{y_{\mu_0}}$. Tomemos $t \in L_{y_{\mu_1}} \setminus L_{y_{\mu_0}}$. Como $t \in U_{y_{\mu_0}}$ y, por 5),

$$U_{y_{\mu_0}} \subset \bigcup\{U_y : y \prec y_{\mu_0} \text{ y } y_{\mu_0} \in L_y\} \cup A_{y_{\mu_0}},$$

podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $t \in U_z$ para algún $z \prec y_{\mu_0}$ con $y_{\mu_0} \in L_z$. Supongamos que $y_{\mu_1} \in L_z$. Como $y_{\mu_0} \prec y_{\mu_1}$, y como $z \prec y_{\mu_0}$, se tiene por 2) que $L_{y_{\mu_1}} \subset L_z \setminus \{z\}$. Por lo anterior. $t \in L_z \setminus \{z\}$ y $t \in U_z$, contradiciendo 1). Esto muestra que $y_{\mu_1} \notin L_z$ lo que implica que $y_{\mu_1} \in U_z$. Como $z \prec y_{\mu_1}$, por 3), $U_{y_{\mu_1}} \subset U_z$ y por lo tanto $x \in U_z$. Si, además $x \in L_z$, entonces $x = z$ lo cual es imposible ya que $z \prec x$. Concluimos que $x \notin L_z$, o de manera equivalente, $z \in E$. Sea $\epsilon \leq \mu_0$ el mínimo ordinal tal que $z \preceq y_\epsilon$. Como $y_\delta \prec z$ para toda $\delta < \epsilon$, por 7), se tiene que $z = y_\epsilon$ o $z \in L_{y_\delta}$ para algún $\delta < \epsilon$. Si $z = y_\epsilon$, entonces $y_{\mu_0} \in L_{y_\epsilon}$, lo cual contradice, por la afirmacion 2, que $z \prec y_{\mu_0}$.

Por lo tanto, $z \in L_{y_\delta}$ para algún $\delta < \epsilon$. Entonces $z \in L_{y_\delta} \subset L_{y_{\mu_0}} \setminus \{y_{\mu_0}\}$. Como $z \prec y_{\mu_0}$ y como $y_{\mu_0} \in L_z$, por 2), se tiene también que

$$L_{y_{\mu_0}} \subset L_z \setminus \{z\},$$

lo cual implica que $z \in L_{y_{\mu_0}} \subset L_z \setminus \{z\}$, llegando a una contradicción.

- Afirmación 4. Si $t \in Cl_X(\bigcup_{y \in E} L_y) \setminus \bigcup_{y \in E} L_y$, entonces t es un punto de acumulación de la red $\{y_\mu : \mu < \xi\}$.
  Supongamos lo contrario y tomemos una vecindad cerrada C de t que no intersecta a
  $$Cl_X\{y_\mu : \mu < \xi\}.$$
  Por la afirmación 1, es claro que existe un subconjunto cofinal $G \subset \xi$ con la propiedad de que, para cada $\mu \in G$, existe un punto $c_\mu \in C \cap L_{y_\mu}$ tal que
  $$\mu = \min\{\delta < \xi : c_\mu \in L_{y_\delta}\}.$$
  Tomemos $\mu \in G$. Afirmamos que $c_\mu \in B_{y_\mu}$. De otra forma, por 4) existe $y \prec y_\mu$ tal que $c_\mu \in L_y$ y $y_\mu \in U_y$. Como $y \prec y_\mu$ y $y_\mu \in U_y$, por 3), $U_{y_\mu} \subset U_y \setminus \{y\}$ lo cual implica que $L_y \subset L_{y_\mu}$. Por lo anterior, $x \notin L_y$, ya que $x \notin L_{y_\mu}$, o de manera equivalente, $y \in E$. Por la afirmación 1 podemos encontrar $\delta < \mu$ tal que $c_\mu \in L_{y_\delta}$, lo cual es una contradicción ya que $\mu = \min\{\delta < \xi : c_\mu \in L_{y_\delta}\}$. Esto implica que, para toda $\mu \in G$ se tiene que $f(c_\mu, y_\mu) = c_\mu$.
  Sea (c, y) un punto de acumulación de la red $\{(c_\mu, y_\mu)\}_{\mu \in G}$. Entonces $c \in C$ y $y \notin C$, y como $f(c_\mu, y_\mu) = c_\mu \in C$ para todo $\mu \in G$ es claro que $f(c, y) = c$. Ahora tomemos $\mu \in G$ de manera arbitraria. Para $\delta > \mu$ se tiene, por la afirmación 3, que $f(y_\mu, c_\delta) = y_\mu$. Entonces $f(c, y_\mu) = f(y_\mu, c) = y_\mu$. Esto implicaría que $f(c, y) = y$, y como $y \neq c$, esto es una contradicción.

- Afirmación 5. Si t y u son ambos puntos de acumulación de la red $\{y_\mu : \mu < \xi\}$, entonces $t = u$.
  Sean C y D vecindades cerradas ajenas de t y u respectivamente. Claramente existe un subconjunto cofinal $G \subset \xi$ y para cada $\mu \in G$ existen puntos
  $$c_\mu \in C \cap \{y_\lambda : \lambda < \xi\} \text{ y } d_\mu \in D \cap \{y_\lambda : \lambda < \xi\}$$

tales que si $\mu, \delta \in G$ y $\mu < \delta$ entonces

$$c_\mu \prec d_\mu \prec c_\delta.$$

Sea (t', u') un punto de acomulación de la red $\{(c_\mu, d_\mu)\}_{\mu \in G}$, entonces $t' \in C$ y $u' \in D$. Por la afirmación 3, $f(c_\mu, d_\mu) = c_\mu$ y en consecuencia, $f(u', t') = t'$. Fijemos $\mu \in G$. Para cada $\delta > \mu$ tenemos, por la afirmacion 3, que $f(d_\mu, c_\delta) = d_\mu$. Como $t' \in Cl_X\{c_\delta : \delta > \mu\}$ esto implica que

$$f(d_\mu, t') = d_\mu.$$

Como $(u', t') \in Cl_{X^2}\{(d_\mu, t') : \mu \in G\}$, esto implica que $f(u', t') = u'$. Como $u' \neq t'$, se tiene una contradicción.

- Afirmación 6. $\bigcup_{y \in E} L_y$ tiene a lo más un punto frontera.
  Se sigue de las afirmaciones 4 y 5.

- Afirmación 7. Si $t \in Z$ y $\mu < \xi$, entonces $t \in A_{y_\mu}$.
  Como $t \notin L_{y_\mu}$, claramente $t \in U_{y_\mu}$. Entonces, por 5), si $t \notin A_{y_\mu}$, así que $t \in U_y$ para algún $y \prec y_\mu$ con $y_\mu \in L_y$. Si $x \in L_y$, entonces $x \notin U_y$ ya que, como $x \neq y$, $Z \cap U_y = \varnothing$ lo cual contradice que $t \in Z \cap U_y$. Por lo tanto $y \in E$. Por la afirmación 1

$$\bigcup \{L_y : y \in E \text{ y } y \prec y_\mu\} = \bigcup_{\delta < \mu} L_{y_\delta}.$$

  Entonces $y_\mu \in L_{y_\delta}$ para algún $\delta < \mu$, lo cual contradice 7).

Una vez probadas las afirmaciones anteriores, procedemos a definir los conjuntos L_x y U_x.

Formalmente tenemos que considerar dos casos, uno si ξ es sucesor y otro si ξ es limite. Podemos suponer que ξ es ordinal límite.
Como $L_{y_\mu} \setminus \{y_\mu\}$ es abierto para cada $\mu < \xi$, por las afirmaciones 1) y 2), $\bigcup_{y \in E} L_y$ debe tener un punto límite a, y por la afirmación 6, a es único.
Usando el mismo procedimiento, pero ahora para F y restringiéndonos de nuevo al caso límite, podemos encontrar un ordinal límite η y para cada $\mu < \eta$ un punto $z_\mu \in F$ tal que

1. Si $\mu < \delta$ entonces $U_{z_\mu} \subset U_{z_\delta}$.

2. $\bigcup_{\mu<\eta} U_{z_\mu} = \bigcup_{y\in F} U_y$, y

3. si $t \in Z$ y $\mu < \eta$ entonces $t \in B_{z_\mu}$.

Nuevamente encontramos que $\bigcup_{y\in F} U_y$ tiene un único punto frontera, digamos b, y que este punto es un punto de acomulación de la red $\{z_n : \mu < \eta\}$. Notemos que por 1), 2) y 3), $y \in E$ y $y' \in F$ implica que $L_y \cap U_{y'} = \varnothing$.
Caso 1. $a = b$. Probaremos que $Z = \{x\} = \{a\} = \{b\}$. Para ello, supongamos que $t \in Z$. Por la afirmación 7, $f(y_\mu, t) = y_\mu$ para toda $\mu < \xi$, y en consecuencia $f(a, t) = t$ ya que a es punto límite de $\{y_\mu\}_{\mu<\xi}$. Por otro lado, por 10), $f(t, z_\mu) = t$ para todo $\mu < \eta$. Por el mismo argumento $f(t, a) = f(t, b) = t$, así que se tiene que $t = a$.
Entonces concluimos que $a = b = x$ y $Z = \{x\}$. Ahora definamos

$$L_x = \bigcup_{y\in E} L_y \cup \{x\} \text{ y } U_x = \bigcup_{y\in F} U_y \cup \{x\}.$$

una verificación sencilla muestra que nuestra hipótesis de inducción se satisface.
Caso 2. $a \neq b$ y $x \notin \{a, b\}$. Definamos $L_x = \bigcup_{y\in E} L_y \cup (Z \cap B_x)$ y $U_x = \bigcup_{y\in F} U_y \cup (Z \cap A_x)$. Observemos que L_x y U_x son cerrados ya que $a \in Z \cap B_x$ y $b \in Z \cap A_x$. Una vez más, se ve fácilmente que la hipótesis inductiva se cumple.
Caso 3. $x = a$ y $a \neq b$. Definamos $L_x = \bigcup_{y\in E} L_y \cup \{x\}$ y $U_x = \bigcap_{\mu<\xi} U_{y_\mu}$.
Caso 4. $x = b$ y $a \neq b$. Similar al caso 3.

Para terminar la prueba, definamos $x \leq y$ si y sólo si $x \in L_y$. Entonces $\leq$ es un orden lineal que genera la topología de X ya que X es compacto y para cada $x \in X$ los conjuntos $\{y \in X : y \leq x\}$ y $\{y \in X : x \leq y\}$ son cerrados.
$\square$

En general, como menciona Miyazaki [12], el teorema anterior no es valido si cambiamos compacidad por alguna otra propiedad topológica, por ejemplo, la propiedad de Lindelof, sin embargo tomando ciertas consideraciones encontramos resultados que son muy similares y en los cuales podemos dejar de lado la compacidad.

El primer ejemplo de lo dicho anteriormente lo presentamos en este importante teorema el cual nos proporciona un interesante criterio para determinar cuándo la compactación de Stone-Čech de un espacio Tychonoff tiene una selección débil.

Teorema 3.2.2. *Si X es un espacio Tychonoff tal que X^2 es pseudocompacto, entonces X tiene una selección débil si y sólo si βX tiene una selección débil.*

Demostración. La necesidad es inmediata, solo basta restringir la seleccin débil de βX a X..
Para probar la suficiencia, supongamos que X tiene una selección débil. Sea $f : X^2 \to X$ una selección débil, es decir, que cumple com las condiciones de la proposición 3.0.8. Como X es Tychonoff, podemos tomar la extención $\beta f : \beta X^2 \to \beta X$. Como X^2 es pseudocompacto, por 4.1.3, $\beta X^2 = \beta X \times \beta X$ (ver apéndice), así que βf es una función continua de $\beta X \times \beta X$ en βX. Veremos que βf es una selección continua. Sean $x, y \in \beta X$. Consideremos 2 casos:

- Caso 1. $x, y \in X$. En este caso, βf es una selección continua ya que βf es una extensión de f.

- Caso 2. $x \in X$ y $y \in \beta X \setminus X$. Sea $\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \subset X$ una red que converge a y en βX. Entonces $\{(x, y_\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$ es una red en X^2 que converge a (x, y) en $(\beta X)^2$ y $\beta f(x, y_\alpha) \in \{x, y_\alpha\}$. Supongamos que $\beta f(x, y) = z$ para alguna $z \in \beta X$ de tal forma que $x \neq y \neq z$. Tomemos abiertos ajenos U_x, U_y y U_z que contienen a x, y, z respectivamente en βX. Como $z = \lim \beta f(x, y_\alpha)$, existe un $\alpha \in \Gamma$ tal que $\beta f(x, y_{\alpha'}) \in U_z$ para toda $\alpha' \geq \alpha$. Por otro lado, como $(x, y) = \lim(x, y_\alpha)$, existe $\beta \in \Gamma$ tal que $(x, y_{\beta'}) \in U_x \times U_y$ para toda $\beta' \geq \beta$, es decir, $\beta f(x, y'_\beta) \in U_x$ o $\beta f(x, y'_\beta) \in U_y$. Entonces para $\gamma \geq \alpha, \beta$ se tiene que $\beta f(x, y_\gamma) \in (U_x \cap U_z) \cup (U_y \cap U_z)$, lo cual es una contradicción por la manera en que elegimos a U_x, U_y, U_z. La contradicción anterior implica que $\beta f(x, y) \in \{x, y\}$. Finalmente, $\beta f(x, y) = \lim \beta f(x, y_\alpha) = \lim \beta f(y_\alpha, x) = \beta f(y, x)$.

- Caso 3 $x, y \in \beta X \setminus X$. Se prueba de manera análoga al caso anterior.

□

Como consecuencia del teorema anterior podemos concluir además que para un espacio Tychonoff X tal que X^2 es pseudocompacto, son equivalentes:

- X es debilmente ordenable,
- X tiene una selección débil,
- βX tiene una selección débil,
- βX tiene una selección continua, y
- βX es ordenable.

En los siguientes resultados, revisaremos los espacios casi compactos, es decir, espacios que difieren de su compactación de Stone-Čech por un punto.

Definición 3.2.3. *Un espacio Tychonoff no compacto X es casi compacto si* $|\beta X \setminus X| = 1$

Nuestro siguiente objetivo será ver qué características debe tener un espacio casi compacto para que su compactación de Stone-Čech sea ordenable o tenga una selección continua.

Lema 3.2.4. *Sea X un espacio casi compacto con $\{x\} = \beta X \setminus X$. Supongamos que βX es ordenable. Entonces la topología de βX puede ser generada por un orden lineal $\ll$ tal que x es el elemento mínimo de βX bajo $\ll$.*

Demostración. Sea $<$ un orden lineal que genera la topología en βX. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que x no es un elemento máximo de $(\beta X, <)$, de lo contrario podemos tomar a $\ll$ como el orden inverso de $<$. Supongamos entonces que x no es un elemento máximo ni mínimo de $(\beta X, <)$. Denotemos por $(-\infty, x)_<$ al conjunto $\{y \in X : y < x\}$ y por $(x, \infty)_<$ al conjunto $\{y \in X : x < y\}$. Entonces $X = (-\infty, x)_< \cup (x, \infty)_<$. Claramente $A = (-\infty, x)_<$ y $B = (x, \infty)_<$ son conjuntos nulos en X con $X = A \oplus B$. Como X es casi compacto, alguno de los subespacios A o B, digamos A, debe ser compacto. Obviamente x es un elemento máximo bajo $<$ de $A \cup \{x\}$, y elemento mínimo de $\{x\} \cup B$. Como A es compacto, $B \cup \{x\}$ es cerrado-abierto en βX. Definamos un nuevo orden $\ll$ en βX como sigue. Para cualesquiera $p, q \in \beta X$

$$p \ll q \Leftrightarrow \begin{cases} p < q & \text{si } p, q \in A \\ p > q & \text{si } p, q \in B \cup \{x\} \\ p \in A & \text{y } q \in B \cup \{x\} \end{cases}$$

Como $B \cup \{x\}$ y A forman una cubierta cerrada-abierta de βX, la topología del orden generada por $\ll$ es igual que la topología generada por $<$. □

Como consecuencia inmediata, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.2.5. *Sea X un espacio casi compacto con $\{x\} = \beta X \setminus X$. Supongamos que βX es ordenable. Entonces X puede ser ordenado con un orden lineal $<$ que cumple las siguientes condiciones:*

- *Todo subconjunto cerrado de X tiene un elemento mínimo bajo $<$.*
- $(-\infty, q]_<$ *es compacto para cada $q \in X$.*

Finalmente, podemos ver el panorama completo en lo que a espacios casi compactos se refiere.

Teorema 3.2.6. *Para un espacio casi compacto X son equivalentes:*

1. *βX tiene una selección débil.*
2. *βX tiene una selección continua.*
3. *βX es ordenable.*
4. *X es ordenable.*
5. *X es ordenable por un orden $<$ de tal manera que todo subconjunto cerrado de X tiene un elemento mínimo bajo $<$.*
6. *X es débilmente ordenable por un orden $<$de manera que todo subconjunto cerrado de X tiene un elemento mínimo bajo $<$.*
7. *X tiene una selección continua.*
8. *X tiene una selección débil.*
9. *X es debilmente ordenable.*

Demostración. Los espacios casi compactos son pseudocompactos y localmente compactos. Las equivalencias $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 8 \Leftrightarrow 9$ se siguen del teorema 3.2.2. Las implicaciones $3 \Rightarrow 5$ del teorema 3.2.4. Finalmente $5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 8$ y $3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 9$ son triviales. □

Ahora veremos que todo espacio métrico completo cero-domensional tiene una selección continua. Para este propósito debemos introducir el concepto de espacio topológicamente bien ordenado.

Definición 3.2.7. *Si X es un espacio linealmente ordenado, un subespacio $A \subset X$ es un subespacio topológicamente bien ordenado de X si todo subconjunto cerrado no vacío en A tiene un primer elemento.*

Como consecuencia del teorema 4.2.5 (ver apéndice) obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.8. *Todo espacio métrico completo cero-dimensional X puede ser encajado como un subespacio cerrado topológicamente bien ordenado en un espacio linealmente ordenado L.*

Finalmente, como corolario del teorema anterior, obtenemos el siguiente resultado el cual establece que todo espacio cero-dimensional y métrico completo tiene una selección continua.

Corolario 3.2.9. *Si X es un espacio métrico completo cero-dimensional, entonces existe una selección continua para $\mathcal{CL}(X)$.*

Hasta el momento hemos visto como la propiedad de tener una selección continua está íntimamente relacionada con el hecho de que el espacio tenga un orden lineal. Ahora veremos como las selecciones continuas constituyen también una herramienta para caracterizar a ciertos tipos de espacios.
Comenzaremos viendo cómo las selecciones continuas resultan sumamente efectivas para caracterizar distintos tipos de intervalos, para lo cual veremos primero los siguientes lemas.

Lema 3.2.10. *Supongamos que (X, τ) es conexo, localmente conexo y tiene una selección continua. Entonces $\tau = \tau_<$, donde $\tau_<$ es el orden definido en 3.1.3.*

Demostración. Como (X, τ) es localmente conexo, es Hausdorff. Sea $<$ el orden lineal definido en 3.1.3. Mostraremos que $\tau_< = \tau$. La inclusion $\tau_< \subset \tau$ es clara por 3.1.4. Para probar la otra contención, tomemos un abierto arbitrario $V \in \tau$ y un $x \in V$. Como X es localmente conexo, podemos encontrar U y W en τ y un conjunto C τ-conexo tales que $x \in U \subset C \subset W \subset V$. Como C es τ-conexo y $\tau_< \subset \tau$, C también es $\tau_<$-conexo. Notemos que $C \neq x$, de lo contrario $\{x\} = U \in \tau$, y entonces (X, τ) no seria conexo.
Ahora consideremos dos casos.

- Caso 1. x es un elemento mínimo de X con respecto al orden $<$. Como C es τ-conexo y $x \in C \neq \{x\}$, se sigue que existe algún $c \in X$ con $[x, c) \subset C \subset V$. Como x es un elemento mínimo con el orden $<$, se tiene que $[x, c) = (-\infty, c) \in \tau_<$.

- Caso 2. x es un elemento máximo de X con el orden $<$. Este caso es análogo al caso 1.

- Caso 3. x no es un elemento máximo ni mínimo de X con el orden $<$. Como $\tau_< \subset \tau$, por 3.1.4, los conjuntos $F^- = \{y \in X \setminus W : y < x\}$ y $F^+ = \{y \in X \setminus W : y > x\}$ son τ-cerrados. Tomando, si es necesario un W más pequeño, podemos afirmar sin pérdida de generalidad que $F^+ \neq \varnothing$ y $F^- \neq \varnothing$.
  Veremos que $x \neq \sup F^-$, de lo contrario, si $x = \sup F^-$, como $F^- = \{y \in X \setminus W : y < x\}$ y $C \subset W$, se sigue del hecho de que C sea $\tau_<$-conexo, que $C \subset \{y \in X : y \geq x\}$. En particular, $x \in U \subset C \subset \{y \in X : x \geq y\}$. Como $U \in \tau$, y $(x, \infty) \subset \tau_< \subset \tau$, concluimos que $[x, \infty) \in \tau$. Como $(\infty, x) \in \tau_< \subset \tau$ y (X, τ) es conexo, se sigue que $(-\infty, x) = \varnothing$, es decir, x es un elemento mínimo de X bajo $<$, lo cual es una contradicción.
  Ahora veremos que $x \neq \text{ínf}\, F^-$, ya que de lo contrario, y de manera similar llegaríamos a la conclusión de que x es un elemento máximo de X bajo el orden $<$.
  De los dos hechos anteriores, se tiene que existen $a, b \in X$ tales que $x \in (a, b) \subset U \subset V$, lo cual completa la prueba.

$\square$

En la sección anterior vimos que un espacio conexo puede tener máximo dos selecciones continuas. Cuando es el caso que el espacio tenga exactamente dos selecciones continuas, el espacio debe ser compacto y ordenable.

Teorema 3.2.11. *Sea X un espacio conexo, Hausdorff. Entonces $\#\mathcal{S}el(\mathcal{CL}(X)) = 2$ si y sólo si X es compacto y ordenable.*

Demostración. Si $(X, <)$ es un espacio conexo, compacto, Hausdorff y ordenable, entonces las funciones $\phi, \psi : \mathcal{CL}(X) \to X$ dadas por $\phi(F) = \text{mín}\, F$ y $\psi(F) = \text{máx}\, F$ son selecciones continuas, las cuales son distintas si X tiene al menos dos puntos. Por 3.1.4 se sigue que estas son las únicas selecciones para X.
Supongamos ahora que X es un espacio conexo, Hausdorff con exactamente dos selecciones. Sea $<$ el orden lineal en X definido en 3.1.3. Como X tiene exactamente dos selecciones, estas deben ser ϕ y ψ, así que todo subconjunto cerrado de X tiene un elemento mínimo y un elemento máximo.

Si $F \subset X$ es $\tau_<$-cerrado, entonces también es un τ-cerrado, y por la afirmación anterior, existen $\min F = \inf F \in F$ y $\max F = \sup F \in F$, entonces, para todo $A \subset X$, existen $\inf A$ y $\sup A$, así que $(X, \tau_<)$ es compacto.
Finalmente, para ver que $\tau_< = \tau$ probaremos que todo τ-cerrado F es también $\tau_<$-cerrado. Sea F τ-cerrado y supongamos que $x \in Cl_{\tau_<}(F)$. Entonces $x \in Cl_{\tau_<}(F^+)$ o $x \in Cl_{\tau_<}(F^-)$, lo cual significa que $x = \sup F^-$ o $x = \inf F^+$. Como $\tau_< \subset \tau$, F^- y F^+ son τ-cerrados, y $\sup F- = \max F^- \in F^- \subset F$ y $\inf F^+ = \min F^+ \in F^+ \subset F$. En cualquier caso se tiene que $x \in F$. Por lo tanto F es $\tau_<$-cerrado. □

También tenemos dos casos en las que el número de selecciones continuas pueden ser más de dos, o ninguna.

Lema 3.2.12. *Supongamos que $(X, \prec)$ es un espacio conexo, localmente conexo, linealmente ordenado con al menos dos puntos.*

1. *Si X no tiene elemento máximo ni mínimo con el orden $\prec$, entonces $\#\mathcal{S}el(\mathcal{CL}(X)) = 0$*

2. *El número total de selecciones continuas en $(X, \prec)$ es igual al número de elementos maximales y minimales de X con el orden $\prec$.*

Demostración. Sea $<$ el orden lineal como en 3.1.3. Por el lema 3.2.10 se sigue que $<$ y $\prec$ generan la misma topología. Por 4.3.6 (ver apéndice) se tiene que $<$ y $\prec$ deben ser iguales o inversos. Así que el resultado se sigue de 3.1.4. □

Como consecuencia de los resultados anteriores, podemos afirmar lo siguiente acerca de los intervalos de la forma $(0, 1)$ y $[0, 1)$.

Corolario 3.2.13.

- *$(0, 1)$ no tiene selección continua.*
- *$[0, 1)$ tiene exactamente una selección continua.*

A continuación damos la definición de la Recta de Alexandroff, la cual no debe resultar desconocida para todos aquellos familiarizados con la topología general, pero ya que será relevante en los siguientes resultados, lo definimos formalmente.

Definición 3.2.14. *La Recta de Alexandroff o Recta larga (Long line) L se define como el espacio ordenado $\omega_1 \times [0, 1)$ con el orden lexicográfico.*

Ya estamos ahora en condiciones de dar una caracterización de los intervalos de la forma $[0,1]$ y $[0,1)$ a partir de la existencia de selecciones continuas.

Teorema 3.2.15. *Un espacio X conexo por trayectorias, Hausdorff y tal que $\#\mathcal{S}el(\mathcal{CL}(X)) \neq 0$, es homeomorfo a un punto, al intervalo $[0,1)$, al intervalo $[0,1]$ o a la Recta de Alexandroff.*

Demostración. Supongamos que (X,τ) es un espacio Hausdorff conexo por trayectorias que tiene una selección continua. Sea $<$ el orden lineal de 3.1.3. Diremos que un subconjunto C de X es convexo si $[a,b] \subset C$ siempre que $a,b \in C$ y $a < b$.
Primero veremos que si $a,b \in X$ y $a < b$, entonces $[a,b]$ es homeomorfo a $[0,1]$ (*). Para esto, sea $f : [0,1] \to (X,\tau)$ una función continua e inyectiva, con $f(0) = a$ y $f(1) = b$, la cual existe ya que (X,τ) es conexo por trayectorias. Como $\tau_< \subset \tau$, por el lema 3.1.4, $f([0,1])$ es un subconjunto $\tau_<$-conexo de X. Como todo subconjunto conexo de un espacio linealmente ordenado es convexo, $[a,b] \subset f([0,1])$. La contención contraria $f([0,1]) \subset [a,b]$ se sigue del teorema del valor medio y del hecho de que f es inyectiva. Así que f es una función continua, inyectiva y tal que $f([0,1]) = [a,b]$.
Ahora, sea L^* el espacio obtenido de identificar el elemento mínimo de dos copias ajenas de la recta de Alexandroff. Probaremos que (X,τ) no contiene un subconjunto convexo homeomorfo a L^* (**). Supongamos por el contrario que Z es un subconjunto convexo de (X,τ) que es homeomorfo a L^*, así que que Z debe ser igual a alguno de los subconjuntos X, $(-\infty,c)$, (c,∞), $(-\infty,c]$, $[c,\infty)$, (c,d), $(c,d]$, $[c,d)$ ó $[c,d]$, para algunos $c,d \in X$ tales que $c < d$. Por la primera parte de la prueba, los intervalos propios quedan descartados, y $Z = X$ también ya que, por el lema 3.2.12, dado que L^* es conexo, localmente conexo, ordenable y sin elementos mínimo o máximo, L^* no tiene selección continua. Por lo anterior, debe existir algún $c \in X$ tal que Z es igual a $(-\infty,c), (c,\infty), (-\infty,c]$ o $[c,\infty)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que Z es igual a $(-\infty,c)$ o a $(-\infty,c]$. Como $Z \neq X$, existe $b \in X$ con $c < b$. Tomemos un $a < c$ y consideremos $Y = Z \cap [a,b]$ con la topología inducida por (X,τ). Por la afirmación (*), $[a,b]$ es homeomorfo a $[0,1]$, así que Y es un espacio métrico separable. Ahora notemos que para todo espacio métrico separable $Y \subset L^*$, el complemento $L^* \setminus Y$ de Y en L^* no es conexo. Por otro lado, $Z \setminus Y = (-\infty,a)$ es conexo por trayectorias, lo cual contradice el hecho de que Z es homeomorfo a L^*.
Por inducción transfinita en $\alpha < \omega_1$ tratemos de tomar dos sucesiones $a_\alpha \in X$

y $b_\alpha \in X$ tal que $a_\beta < a_\alpha < b_\alpha < b_\beta$. Si nuestra inducción llegara a ω_1, entonces podríamos ver que $Z = \bigcup\{[a_\beta, b_\beta] : \beta < \omega_1\}$ sería un subconjunto convexo de X homeomorfo a L^*, los cual es una contradicción con (**). Entonces nuestra inducción debe terminar en algún ordinal numerable $\alpha < \omega_1$. Como $Y = \{[a_\beta, b_\beta] : \beta < \alpha\}$ es un subconjunto convexo de X, se debe cumplir alguna de las siguientes situaciones:

1. $Y = X$, o

2. Existe algún $c \in X$ tal que Y es igual a $(-\infty, c), (c, \infty), (-\infty, c]$ ó $[c, \infty)$.

Supongamos que se cumple 1), es decir $Y = X$. Por la afirmación (*) se sigue que Y es homeomorfo a alguno de los espacios $(0,1), [0,1)$ ó $[0,1]$. El primer caso es imposible ya que X tiene una selección continua. Así que si se cumple 1), X debe ser homeomorfo a $[0,1)$ ó $[0,1]$.
Supongamos ahora que se cumple 2), y supongamos también, sin pérdida de generalidad, que $Y = [c, \infty)$. Ahora usamos inducción transfinita en $\alpha < \omega_1$ nuevamente para tratar de encontrar una sucesión $c_\alpha \in X$ tal que $c_0 = c$ y $c_\beta \leq c_\alpha$ para todo $\alpha < \beta$. Si nuestra inducción termina en algún $\alpha < \omega_1$, entonces el mismo argumento que antes muestra que $X = \bigcup\{(-\infty, c_\beta] : \beta < \alpha\}$ es homeomorfo a $[0,1)$ ó $[0,1]$. Supongamos ahora que la inducción llega a ω_1. Entonces es fácil ver por la afirmación (*) que $Z = \bigcup\{[c_\beta, \infty) : \beta < \omega_1\}$ será homeomorfo a la recta de Alexandroff. Si $Z = X$, la prueba está completa, así que sólo falta probar que $X \setminus Z \neq \varnothing$ no puede pasar. De hecho, si esto ocurriera, entonces debería existir algún $d \in X$ tal que $Z = (d, \infty)$. Tomemos algún $e \in X$ arbitrario y tal que $d < e$. Por la construcción, existe algún $\alpha < \omega_1$ tal que $c_\beta < e$ para todo $\beta \geq \alpha$. Como cada uno de los conjuntos $(c_{\beta+1}, c_\beta)$ es abierto en X, la familia $\{(c_{\beta+1}, c_\beta) : \beta > \alpha\}$ es una familia no numerable de subconjuntos abiertos, ajenos 2 a 2 de $[d, e]$, lo cual contradice el hecho de que $[d, e]$ es homeomorfo a $[0,1]$ por la afirmación (*). Lo anterior completa la prueba. $\square$

En lo que respecta a la ordenabilidad de espacios localmente conexos, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.16. *Un espacio localmente conexo X con al menos una selección continua debe ser ordenable.*

Demostración. Sea X un espacio localmente conexo. Entonces todas las componentes conexas de X son cerrado-abiertos en X. Sea C una componente conexa de X. Como C es cerrado en X, C debe tener una selección continua. Como C es conexo y localmente conexo, la topología de C debe ser generada por algún orden lineal $<_C$. Como cada componente C es cerrado-abierto, podemos pegar las componentes de X para obtener un orden lineal $<$ que genera la topología de X. $\square$

Lema 3.2.17. *Un espacio Y tal que $\#\mathcal{S}el(\mathcal{CL}(Y)) = 1$ debe ser conexo.*

Demostración. Supongamos que Y tiene una selección continua y $Y = Y_0 \oplus Y_1$ donde Y_0 y Y_1 son no vacíos. Como Y_0 y Y_1 son cerrados en Y, existen selecciónes continuas $f_0 : \mathcal{CL}(Y_0) \to Y_0$ y $f_1 : \mathcal{CL}(Y_1) \to Y_1$. Ahora, para cada $i \in \{0, 1\}$ podemos definir una selección continua $g_i : \mathcal{F}(Y) \to Y$ como sigue: $g_i(F) = f_j(F)$ si $j \in \{0, 1\}$ y $F \subset Y_j$, y $g_i(F) = f_i(F \cap Y_1)$ si $F \cap Y_j \neq \varnothing$ para $j \in \{0, 1\}$. Como $g_0(Y) \in Y_0$ y $g_1(Y) \in Y_1$, estas selecciones son diferentes. $\square$

Teorema 3.2.18. *Un espacio localmente conexo X tiene exactamente una selección continua si y sólo si X es conexo y su topología puede ser generada por un orden lineal $<$ tal que:*

1. *Todo conjunto cerrado F tiene un elemento mínimo con respecto al orden $<$, y*

2. *X debe ser un punto, o X no tiene elemento máximo con respecto al orden X.*

Demostración. Si $(X, <)$ es conexo, localmente conexo y satisface 1) y 2), entonces X tiene exactamente una selección continua por los lemas 3.2.10 y 3.2.12.
Para probar la otra implicación, supongamos que X es localmente conexo y tiene exactamente una selección continua. Por 3.2.17, X es conexo. Por los lemas 3.1.4, 3.2.10 y 3.2.12 existe un orden lineal en X que satisface las condiciones 1) y 2). $\square$

El siguiente teorema nos da condiciones necesarias y suficientes para que un espacio sea homeomorfo al intervalo $[0, 1)$ a partir de la existencia de selecciones continuas.

Teorema 3.2.19. *Un espacio topológico X es homeomorfo a $[0, 1)$ si y sólo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

1. *X es infinito, Hausdorff, separable, conexo por trayectorias y tiene exactamente una selección continua.*

2. *X es infinito, separable, localmente conexo y tiene exactamente una selección continua.*

3. *X es infinito, métrico, localmente conexo y tiene exactamente una selección continua.*

Demostración. Para ver que la condición es necesaria, primero notemos que la recta de Alexandroff no es separable, y $[0,1]$ tiene dos selecciones, así que la parte 1) se sigue del teorema 3.2.15.
Para la parte 2), supongamos que X satisface la condición. Entonces la topología de X es generada por un orden lineal $<$ que satisface la condición del teorema 3.2.18. Ahora, observemos que un espacio ordenado infinito y separable $(X,<)$ que satisface la condición del teorema 3.2.18 es homeomorfo a $[0,1)$.
Para la parte 3), sea X infinito, métrico, localmente conexo y con exactamente una selección continua. Primero notemos que X debe ser conexo por 3.2.17. También X es completo por 3.3.6. Así que se puede concluir que X es conexo por trayectorias por los resultados ya conocidos de Menger y Moore que establecen que un espacio conexo, localmente conexo y métrico completo es conexo por trayectorias. Como L no es métrico, y $[0,1]$ tiene dos selecciones continuas, del teorema 3.2.15 se sigue que X es homeomorfo a $[0,1)$. $\square$

Ya vimos la utilidad de las selecciones continuas para caracterizar a los intervalos de números reales, ahora las utilizaremos para caracterizar a los espacios ordinales compactos.

Teorema 3.2.20. *Sea X un espacio Hausdorff compacto. Entonces son equivalentes:*

1. *X es homeomorfo a un espacio ordinal.*

2. *Existe una selección continua $\phi : \mathcal{CL}(X) \to X$ tal que $\phi(F)$ es un punto aislado de F para cada $F \in \mathcal{CL}(X)$.*

Demostración. 1$\Rightarrow$2. Sea $X = \delta + 1$ un espacio ordinal. Definamos una función $\phi : \mathcal{CL}(X) \to X$ de tal manera que $\phi(F)$ es el mínimo elemento de F con respecto al orden $<$ de los ordinales en X para cada $F \in \mathcal{CL}(X)$. Entonces ϕ satisface la condición 2.

2⇒1. Sea $\kappa = |X|$ la cardinalidad de X y κ^+ el cardinal más pequeño que sea mayor que κ. Definamos de manera recursiva una sucesión transfinita $\{x_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de puntos de X de manera que para cada $\alpha < \kappa^+$ se cumpla.

I $X_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$ es abierto en X,

II Si $Y_\alpha = X \setminus X_\alpha \neq \varnothing$, entonces $x_\alpha = \phi(Y_\alpha)$.

Esto es posible ya que $\phi(F)$ es un punto aislado de F para cada $F \in \mathcal{CL}(X)$. Sea $\delta_0 = \min\{\alpha < \kappa^+ : Y_\alpha = \varnothing\}$. Por la compacidad de X y por i), δ_0 debe ser un ordinal sucesor. Sea δ tal que $\delta_0 = \delta + 1$, entonces $X = \{x_\alpha : \alpha < \delta + 1\} = X_{\delta+1}$.
Por inducción sobre $\alpha < \delta + 1$ debemos mostrar que:

III $\overline{X_\alpha} \subset X_{\alpha+1}$ para cada $\alpha < \delta + 1$.

Supongamos que (iii) se cumple para cada $\beta < \alpha$, es decir, $\overline{X_\beta} \subset X_{\beta+1}$ para cada $\beta < \alpha$. Si α es un ordinal sucesor, sea $\alpha = \beta + 1$, entonces por hipótesis de inducción $\overline{X_\beta} \subset X_{\beta+1} = X_\alpha$, así que

$$\overline{X_\alpha} = \overline{X_\beta \cup \{x_\beta\}} = \overline{X_\beta} \cup \overline{\{x_\beta\}} \subset X_\alpha \cup \{x_\beta\} = X_\alpha \subset X_{\alpha+1}.$$

Supongamos que α es un ordinal límite. Supongamos también que $\overline{X_\alpha} \subset X_{\alpha+1}$ no se cumple. Entonces $F = \overline{X_\alpha} \setminus X_{\alpha+1}$ es un subconjunto cerrado no vacío de X. En particular, F es compacto.

- Afirmación 1. Para cada abierto V en X, con $F \subset V$, el conjunto $\{\beta < \alpha : x_\beta \in V\}$ es cofinal en α. Para probar esta afirmación, supongamos que $\{\beta : \beta < \alpha, x_\beta \in V\}$ no es cofinal en α. Entonces existe $\alpha_0 < \alpha$ tal que $\{x_\beta : \alpha_0 < \beta < \alpha\} \cap V = \varnothing$. Así que

  $$\varnothing \neq F = F \cap V = ((\overline{\{x_\beta : \beta < \alpha_0\}} \cup \overline{\{x_\beta : \alpha_0 < \beta < \alpha\}}) \setminus X_{\alpha+1}) \cap V = \varnothing,$$

  lo cuál es una contradicción.

- Afirmación 2. Si W es un abierto en X con $\{x_\alpha\} \cup F \subset W$, entonces el conjunto $\{\beta < \alpha : x_\beta \in W\}$ está eventualmente en α, esto es, existe un $\beta_0 < \alpha$ tal que $x_\beta \in W$ siempre que $\beta_0 < \beta < \alpha$. Para probar esta afirmación, supongamos que no se cumple. Entonces existe un abierto W en X tal que $\{x_\alpha\} \cup F \subset W$ y $A = \{\beta < \alpha : x_\beta \notin W\}$ es cofinal en α. Sea $X_A = \{x_\beta : \beta \in A\}$. Entonces $X_A \subset X_A \setminus W$, así que $\overline{X_A} \subset \overline{X_\alpha} \setminus W \subset \overline{X_\alpha} \setminus (F \cap \{x_\alpha\}) = X_{\alpha+1} \setminus \{x_\alpha\} = X_\alpha$. Entonces $\overline{X_A}$ tiene una cubierta abierta $\{\overline{X_A} \cap X_\beta : \beta < \alpha\}$ la cual no tiene subcubierta finita. Lo anterior contradice la compacidad de $\overline{X_A}$.

Notemos que $x_\alpha \notin F$. Sean U_0 y U_1 dos abiertos ajenos de X con $x_\alpha \in U_0$ y $F \subset U_1$. Como $\phi(Y_\alpha) = x_\alpha$, por la continuidad de ϕ existe una vecindad $\langle V_0, V_1, \ldots, V_n\rangle$ de Y_α en $\mathcal{CL}(X)$ tal que

IV) $\phi(\langle V_0, V_1, \ldots, V_n\rangle) \subset U_0$, y

V) si $V_i \cap F \neq \varnothing$, entonces $V_i \subset U_1$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Sean $U = \bigcup\{V_i : x_\alpha \in V_i\}$, $V = \bigcup\{V_i : V_i \cap F \neq \varnothing\}$ y $W = U \cup V$. Entonces W es abierto y contiene a $\{x_\alpha\} \cup F$, y también $V \subset U_1$ por V. Por las afirmaciones 1 y 2, el conjunto $\{\beta < \alpha : x_\beta \in V\}$ es cofinal en α y el conjunto $\{\beta < \alpha : x_\beta \in W\}$ esta eventualmente en α, Así que podemos encontrar $\beta < \alpha$ tal que $x_\beta \in V$ y $Y_\beta = \{x_\gamma : \beta \leq \gamma < \alpha\} \cup Y_\alpha \subset W$. Como $\varnothing \neq Y_\alpha \cap V_i \subset Y_\beta \cap V_i$ para $0 \leq 1 \leq n$. $Y_\beta \in \langle V_0, V_i, \ldots, V_n\rangle$. Entonces $x_\beta \in V \subset U_1$ y $x_\beta = \phi(Y_\beta) \in u_0$ por II y IV. Entonces U_0 y U_1 no son ajenos. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto se cumple III.
Ahora definamos una función $g : X \to \delta_0 = \delta + 1$ tal que $g(x_\alpha) = \alpha$ para cada $\alpha < \delta + 1$. Es obvio que g es una biyección de X en δ_0. Ahora, para mostrar que g es un homeomorfismo,, es suficiente probar que g es continua, ya que X es compacto.
Ahora, usando III, la continuidad de g se puede mostrar como sigue. Sea $\alpha < \delta + 1$.

- Caso 1. $\alpha = \beta + 1$ es un ordinal sucesor. Por III, $\overline{X_\beta} \subset X_{\beta+1} = X_\alpha$, así, $\overline{X_\alpha} = \overline{X_\beta \cup \{x_\beta\}} = \overline{X_\beta} \cup \overline{\{x_\beta\}} = \overline{X_\beta} \cup \{x_\beta\} \subset X_{\beta+1} \cup \{x_\beta\} = X_{\beta+1} = X_\alpha$. Entonces X_α es cerrado en X. Así que el conjunto unitario $\{x_\alpha\} = X_{\alpha+1} \setminus X_\alpha$ es abierto en X. Por lo tanto x_α es un punto aislado de X. Por lo tanto g es continua en x_α.

- Caso 2. α es un ordinal límite. Para cada $\beta < \alpha$, $X_{\alpha+1} \setminus \overline{X_\beta}$ es una vecindad abierta de x_α y está contenida en $\{x_\gamma : \beta \leq \gamma \leq \alpha\}$ por III. Por lo tanto g es continua en x_α.

□

Para finalizar esta sección, presentaremos dos resultados que resultan ser de gran utilidad como contraejemplos. Nos dispondremos a continuación a probar que los espacios $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ con su topología usual no pueden tener una selección continua. Comenzaremos con el caso de $\mathbb{R}$.

Proposición 3.2.21. *No existe selección continua para* $\mathcal{CL}(\mathbb{R})$

Demostración. Supongamos que f es una selección continua para $\mathcal{CL}(\mathbb{R})$ y consideremos el conjunto $\{0,1\}$. Supongamos que $f(\{0,1\}) = 1$. Primero observemos que $f(\{0,2\}) = 2$, ya que $\{0,1\}$ puede ser unido a $\{0,2\}$ por la trayectoria $g : I \to \mathcal{CL}(\mathbb{R})$ definida como $g(t) = \{0, 1+t\}$. Como f es continua, $f \cdot g(t) \geq 1$ para toda $t \in I$, así que $f(\{0,2\}) = 2$. Ahora, como $\{0,2\}$ puede ser unido a $\{0,1,2\}$ por la trayectoria $h : I \to \mathcal{CL}(\mathbb{R})$ definida como $h(t) = \{0,t,2\}$, como f es continua, se tiene que $f \cdot h(t) = 2$ para toda t, así que $f(\{0,1,2\}) = 2$. Continuando de manera recursiva, concluimos que

$$f(\{0,1,2,\ldots,n\}) = n$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$.
Sea $f(\{0,1,2,\ldots\}) = n_0$. Por la continuidad de f, se sigue que $f(A) \in (n_0 - 1, n_0 + 1)$ para todo A en alguna vecindad $\mathcal{U}$ de $\{0,1,2,\ldots\}$ en $\mathcal{CL}(\mathbb{R})$. Pero por la topología de $\mathcal{CL}(\mathbb{R})$, se tiene que $\{0,1,2,\ldots,n\}$ está en $\mathcal{U}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, lo cual es una contradicción. □

Lema 3.2.22. *Sea X un espacio topológico y f una selección continua en $\mathcal{CL}(X)$. Sean $A \in \mathcal{CL}(X)$ y U una vecindad de $f(A)$ en X. Entonces existe un subconjunto finito $F \subset A$ tal que $f(S) \in U$ siempre que $S \in \mathcal{CL}(X)$ y $F \subset S \subset A$. También, para cualquier punto de acomulación x en A, se puede elegir F de tal manera que $x \notin F$.*

Demostración. Por la continuidad de f, existe una vecindad $\mathcal{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ de A en $\mathcal{CL}(X)$ tal que $f(\mathcal{U}) \subset U$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, sea $x_i \in A \cap U_i$, y sea $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Entonces, si $F \subset S \subset A$, $S \in \mathcal{U}$, por lo tanto $f(S) \in U$. □

Teorema 3.2.23. *No existe selección continua para $\mathcal{CL}(\mathbb{Q})$.*

Demostración. Supongamos que f es una selección continua para $\mathcal{CL}(\mathbb{Q})$. Sea $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, construiremos de manera recursiva subconjuntos no vacíos F_n y A_n de $\mathbb{Q}$ de tal manera que F_n es infinito, A_n es cerrado-abierto y cumplen con lo siguiente:

1. $F_{n-1} \subset F_n \subset A_n \subset A_{n-1}$
2. $f(S) \neq r_n$ siempre que $S \in \mathcal{CL}(\mathbb{Q})$ y $F_n \subset S \subset A_n$
3. $f(A_n) \notin F_n$.

Sea $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces

$$\varnothing \neq F_n \subset B \subset A_n$$

por (1), y entonces $f(B) \neq r_n$ para toda n por (2). Como $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$, esto es imposible.

Ahora construyamos los conjuntos A_n y F_n para todo n. Para $n = 0$, sea $A_0 = \mathbb{Q}$, y sea $F_0 = \{y\}$ para alguna $y \in \mathbb{Q} \setminus \{f(\mathbb{Q})\}$. Ahora, supongamos que A_i y F_i han sido definidos para $0 \leq i \leq n$, y definamos A_{n+1} y F_{n+1}. Apliquemos el lema anterior a los conjuntos A_n, recordando que A_n es cerrado-abierto en $\mathbb{Q}$ y entonces cada $x \in A_n$ es un punto de acumulación de A_n. Procedemos ahora por casos.

- $f(A_n) \neq r_{n+1}$.En este caso, $\mathbb{Q} \setminus \{r_{n+1}\}$ es una vecindad de $f(A_n)$ en $\mathbb{Q}$, así que por el lema 3.2.22 existe un subconjunto finito $F \subset A_n$, con $f(A_n) \notin F$, tal que $f(S) \neq r_{n+1}$ siempre que $S \in \mathcal{F}(\mathbb{Q})$ y $F \subset S \subset A_n$. Sea $F_{n+1} = F \cup F_n$ y sea $A_{n+1} = A_n$.

- $f(A_n) = r_{n+1}$. Como $\mathbb{Q} \setminus F_n$ es una vecindad de $f(A_n)$ en $\mathbb{Q}$, por (3), el lema 3.2.22 nos permite obtener un conjunto finito $F' \subset A_n$, con $r_{n+1} \notin F'$, y tal que $f(S) \notin F_n$ siempre que $S \in \mathcal{F}(\mathbb{Q})$ y $F' \subset S \subset A$. Ahora, $r_{n+1} = f(A_n) \notin F_n$ por (3), así que podemos escoger un subconjunto A_{n+1} de A cerrado-abierto tal que $F' \cup F_n) \subset A_{n+1}$ y $r_{n+1} \notin A_{n+1}$. Ahora sea $F_{n+1} = F'$.

Ahora solo basta verificar que las condiciones (1), (2) y (3) se cumplen para $n + 1$.

1. Esta condición es clara.

2. Supongamos que $F_{n+1} \subset S \subset A_{n+1}$ y $S \in \mathcal{F}(\mathbb{Q})$. Si $f(A_n) \neq r_{n+1}$, entonces $F \subset S \subset A_n$, así que $f(S) \neq r_{n+1}$. Si $f(A_n) = r_{n+1}$, entonces $r_{n+1} \notin A_{n+1}$ y $f(S) \in S \subset A_{n+1}$, así que $f(S) \neq r_{n+1}$.

3. Si $f(A_n) \neq r_{n+1}$, entonces $f(A_{n+1}) = f(A_n) \notin (F \cup F_n) = F_{m+1}$. Si $f(A_n) = r_{n+1}$, entonces, como $F' \subset A_{n+1} \subset A_n$, tenemos que $f(A_{n+1}) \notin F_n = F_{n+1}$.

$\square$

3.3. Selecciones continuas en espacios de funciones continuas

En esta última sección, nos enfocaremos en el caso de las selecciones continuas en espacios de funciones continuas. Nuestro objetivo es establecer condiciones que aseguren la existencia de selecciones en este tipo de espacios. También veremos en qué casos podemos asegurar que no existirán selecciones continuas.

Primero probaremos un resultado que constituye un criterio para establecer cuándo un espacio métrico es completo a partir de la existencia de una selección continua vista desde un enfoque más general, es decir, dados dos espacios X y Y y una función continua (con la topología de Vietoris) $s : X \to \mathcal{G}$ con contradominio en una colección de subespacios cerrados de Y, decimos que una función continua $f : X \to Y$ es una selección continua si $f(x) \in s(x)$ para toda $x \in X$. Bajo los términos de esta definición, los resultados vistos hasta ahora se refieren al caso particular de selecciones donde $Y = X$.

Las siguientes definiciones y los obtenemos del artículo de Jan Van Mill, Jan Pelant y Roman Pol [15].

Definición 3.3.1. *Sea $\mathcal{S}$ una familia de subconjuntos ajenos en un espacio metrizable X. Decimos que $\mathcal{S}$ es una $\mathcal{M}$-familia si existe una suceción transfinita de conjuntos abiertos $G_o, G_1, \ldots, G_\xi, \ldots$, para $\xi \leq \kappa$, tal que $\mathcal{S}$ es igual a la colección*

$$\{\bigcup \mathcal{S} \cap G_\xi \setminus \bigcup_{\eta<\xi} G_\eta : \xi < \kappa\}.$$

Definición 3.3.2. *Si M es un espacio métrico, llamaremos M^* al espacio métrico completo tal que M es homeomorfo a un subespacio de M^*.*

Definición 3.3.3. *Decimos que un espacio topológico X es G_δ-absoluto si es un subconjunto G_δ en culalquier espacio métrico en el que pueda ser encajado.*

Lema 3.3.4. *Sean $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots$ familias de subconjuntos G_δ ajenos dos a dos en un espacio métrico M y tales que satisface las siguientes condiciones:*

1. *$\mathcal{S}_0 = \{M\}$, $\mathcal{S}_{n+1}$ refina a $\mathcal{S}_n$ y diam$\mathcal{S} \leq \frac{1}{n}$ para $S \in \mathcal{S}_n$, $n \geq 1$,*

2. *Si $S \in \mathcal{S}_n$ entonces $\mathcal{S}(S) = \{T \in \mathcal{S}_{n+1} : T \subset S\}$ es una $\mathcal{M}$-familia y $G(S) = S \setminus \mathcal{S}(S)$ es un G_δ absoluto.*

3. *Si $S_1 \supset S_2 \supset \ldots$, con $S_n \in \mathcal{S}_n$, entonces $\bigcap_n \overline{S_n} \subset M$, donde la cerradura es tomada en M^*.*

Entonces M es un espacio métrico completo.

Demostración. Dada una $\mathcal{M}$-familia $\mathcal{S}$ de conjuntos G_δ en M, cada $S \in \mathcal{S}$ se puede extender a un G_δ S^* en el espacio métrico completo M^* de manera que $S \subset S^* \subset \overline{S}$ y tal que $\mathcal{S}^* = \{S^* : S \in \mathcal{S}\}$ es una $\mathcal{M}$-familia en M^*. Ahora, podemos obtener familias de conjuntos G_δ ajenos dos a dos $\mathcal{S}^* = \{S^* : S \in \mathcal{S}_n\}$ en M^* tales que $\mathcal{S}^*_{n+1}$ refina a $\mathcal{S}^*_n$ y para cada $S^* \in \mathcal{S}^*_n$, $\{T^* \in \mathcal{S}_{n+1} : T^* \subset S^*\}$ es una $\mathcal{M}$-familia.
Sea

$$G_n = \bigcup\{G(S) : S \in \mathcal{S}_n\}, H_n = \bigcup \mathcal{S}^*_n.$$

De manera recursiva, podemos verificar que para $i = 0, 1, \ldots, n$ cada $S^* \in \mathcal{S}^*_{n-1}$, los conjuntos $G_n \cap S^*$ y $H_n \cap S^*$ son G_δ en M^*. Para $i = n$ esto implica que G_n y H_n son G_δ en M^*. Como $\bigcap_n (G_0 \cup \ldots \cup G_{n-1} \cup H_n)$ es un G_δ en M^*, sólo basta verificar que $M = \bigcap_n (G_0 \cup \ldots \cup G_{n-1} \cup H_n)$.
Como $G_n \subset M$, tomemos un $x \in \bigcap_n H_n$. Entonces existe $S^*_i \in \mathcal{S}^*_i$ con $x \in \bigcap_{i \geq i} S^*_i$. Por lo tanto $S_1 \supset S_2 \subset \ldots$ y, por (3), $x \in M$. $\square$

Definición 3.3.5. *Sea M un espacio métrico. Denotamos por $\mathcal{D}(M)$ la colección de todos los subconjuntos cerrados y discretos $D \subset M$.*

Teorema 3.3.6. *Sea $f : M \to N$ una función continua de un espacio métrico M a un espacio Hausdorff N. Supongamos que todas las fibras de f son subespacios métricos completos de M. Si existe una función $s : \mathcal{D}(M) \to N$ continua con la topología de Vietoris en $\mathcal{D}(M)$ tal que $s(D) \in f(D)$ para todo $D \in \mathcal{D}(M)$, entonces M es completamente metrizable.*

Demostración. Sea $\mathcal{D}_f$ el subespacio de $\mathcal{D}$ que consiste de todos los $D \subset \mathcal{D}(M)$ para los cuales f es inyectiva. Debemos definir de manera recursiva familias $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \ldots$ de conjuntos localmente cerrados no vacíos ajenos dos a dos que satisfagan las condiciones (1) y (2) del lema anterior, y asociar a cada $S \in \mathcal{S}_n$ un conjunto finito $F(S) \in \mathcal{D}_f$ tal que

1. $f[F(S)] \cap \overline{f[S]} = \varnothing$. y si $D \in \mathcal{D}_f$, $D \subset S$, entonces $s(F(S) \cup D) \in f[D]$,

2. Si $S \in \mathcal{S}_n, T \subset \mathcal{S}_{n+1}, T \subset S$, entonces $F(T) \backslash S = F(S)$ y $F(T) \cap S \neq \varnothing$.

Para mostrar que M es completamente metrizable, es suficiente verificar que (1) y (2) implican la propiedad (3) del lema anterior. Para esto, sean $S_1 \supset S_2 \supset \ldots$ con $S_n \in \mathcal{S}_n$, sea $F_n = F(S_n)$ y $A = \bigcup_n F_n$. Por (1) y (2), $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$, $A \cap S_n \neq \varnothing$ para toda n, f es inyectiva en A, y como $A \setminus F_n \subset S_n$ y $diam S_n \to 0$, A es la imagen de una sucesión de Cauchy. Para mostrar que $\bigcap_n \overline{S_n} \subset M$ veremos que esta sucesión converge en M. Supongamos lo contrario, es decir, $A \in \mathcal{D}_f$. Por (1), $f[A] \cap \bigcap_n \overline{f[S_n]} = \varnothing$. Pero entonces $s(A) \notin \overline{f[S_n]}$ para alguna n y tomando $D = A \setminus F_n \subset S_n$ tenemos que $D \in \mathcal{D}_f$ y $s(F_n \cup D) \notin f[D]$, lo cual contradice (1).
Resta sólo construir las familias $\mathcal{S}_n$ y sus respectivos $F(S)$ para $S \in \mathcal{S}_n$. Supongamos que $\mathcal{S}_n$ ha sido definido, y fijemos un elemento arbitrario $T \in \mathcal{S}_n$ y sea $F = F(T)$. Para $n = 0$, tomemos $T = M$ y $F = \varnothing$.
Definamos una sucesión $\varnothing = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_\xi \subset \ldots$ de abiertos relativos en T con $G_\xi = \bigcup \{G_\lambda : \lambda < \xi\}$ para un ordinal límite ξ, mientras,

- (3) $S_\xi = G_{\xi+1} \setminus G_\xi$ es no vacío y tiene diámetro $\leq 1/(n+1)$,
- (4) $F_\xi \in \mathcal{D}_f$ es un subconjunto finito de $T \setminus S_\xi$ asociado a S_ξ,
- (5) la pareja $S = S_\xi$, $F(S) = F \cup F_\xi$ satisface (1).

Este proceso debe finalizar en algún ordinal λ, dando los elementos de $\mathcal{S}_{n+1}$ contenidos en T y sus correspondientes conjuntos finitos asociados. Finalmente debemos verificar que $G(T) = T \setminus G_\lambda$ es un conjunto G_δ absoluto.
Supongamos lo contrario. Entonces $G(T)$ no está contenido en ninguna fibra de f, así que existen $a, b \in G(T)$ con $f(a) \neq f(b)$. Por (1), $s(F \cup \{a, b\}) \in \{f(a), f(b)\}$ y podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $s(F \cup \{a, b\}) = f(b)$. Sea V una vecindad de $f(b)$ cuya cerradura no intersecta a $f[F \cup \{a\}]$. Por la continuidad de s existe una vecindad W de b en T con $diam W \leq 1/(n+1)$ y $f[W] \subset V$ tal que para todo $D \in \mathcal{D}_f$ contenido en W, $s(F \cup \{a\} \cup D \in V$, es decir, $s(F \cup \{a\} \cup D) \in f[C]$. Pero, entonces, haciendo $G_{\lambda+1} = W \cup G_\lambda$, $S_\lambda = G_{\lambda+1} \setminus G_\lambda$, $F_\lambda = \{a\}$, extenderíamos el proceso más allá del ordinal λ en el cual había terminado el proceso. □

Del teorema anterior, tenemos el siguiente hecho.

Teorema 3.3.7. *Sea M un espacio metrizable. Si existe una selección continua para $\mathcal{CL}(M)$, entonces M debe ser completamente metrizable.*

Como consecuencia del resultado anterior, tenemos el siguiente corolario, el cual, junto con los resultados que le siguen son tomados del articulo de Ángel Tamariz [16]. En primer lugar, consideraremos el caso en que el conjunto de funciones tiene como codominio un espacio metrizable.

Para continuar recordemos la siguiente definición.

Definición 3.3.8. *Un espacio Tychonoff X es un espacio fuertemente cero-dimensional si su compactación de Stone-Čech βX es totalmente disconexo.*

Corolario 3.3.9. *Si X es un espacio numerable y E un espacio metrizable, entonces se tiene que:*

1. *Si el espacio $C_p(X,E)$ tiene una selección continua para $\mathcal{F}(C_p(X,E))$, entonces X es discreto y E es completamente metrizable.*
2. *Si X es discreto y E es fuertemente cero-dimensional y completamente metrizable, entonces $C_p(X,E)$ tiene una selección continua para $\mathcal{F}(C_p(X,E))$.*

Demostración. 1. Como E tiene al menos dos puntos distintos, $C_p(X,2)$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de $C_p(X,E)$, así que, como $Sel\mathcal{F}(C_p(X,E)) \neq \varnothing$, se tiene que $Sel\mathcal{F}(C_p(X,2)) \neq \varnothing$. Entonces, es suficiente mostrar que X es discreto si $C_p(X,2)$ tiene una selección continua para $\mathcal{F}(C_p(X,2))$. Procedemos ahora por contradicción. Supongamos que $Sel\mathcal{F}(C_p(X,2)) \neq \varnothing$ y que X no es discreto. Sea x_0 un punto no aislado de X. Definamos una función $g : X \to \{0,1\}$ como $g(x) = 0$ si $x = x_0$ y $g(x) = 1$ si $x \neq x_0$. Es claro que g no es continua. Ahora, consideremos la traslación $\phi : \mathcal{CL}(X) \to \mathcal{CL}(X)$ dada por $\phi(f) = g + f \pmod 2$. La función $\phi : \mathcal{CL}(X) \to \mathcal{CL}(X)$ es un homeomorfismo. Se tiene que $D = \phi[C_p(X,2)]$ es un espacio G_δ denso en $\mathcal{CL}(X)$ ya que $C_p(X,2)$ es completamente metrizable por 3.3.6. Pero $\phi(f) \notin C_p(X,2)$ para toda $f \in C_p(X,2)$ ya que g no es continua. Por lo tanto, $D \cap C_p(X,2) = \varnothing$ lo cual es imposible ya que ambos conjuntos D y $C_p(X,2)$ son G_δ densos en $\mathcal{CL}(X)$, así que X es discreto.

2. Si X es discreto y E es fuertemente cero-domensional y completamente metrizable, entonces $C_p(X,E) = E^\omega$ también es fuertemente cero-dimensional y completamente metrizable, así que el resultado se sigue de 3.2.21.

□

Corolario 3.3.10. *Para todo espacio numerable X y todo espacio fuertemente cero-dimensional y completamente metrizable E, $C_p(X, E)$ tiene una selección continua para $\mathcal{K}(C_p(X, E))$.*

Demostración. El espacio E^X tiene una selección continua ϕ para $\mathcal{K}((E^X), \tau_v)$ por 3.2.21. Así que ϕ restringida a $\mathcal{K}(C_p(X, E))$ es una selección continua cuando consideramos la topología en $\mathcal{K}(C_p(X, E))$ heredada de la topología de Vietoris en $\mathcal{K}(E^X)$. Pero esta topología coincide con la topología de Vietoris en $\mathcal{K}(C_p(X, E))$. $\square$

Proposición 3.3.11. *Sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}(C_p(X))$ tal que $\mathcal{F}_2(C_p(X)) \subset \mathcal{G}$, entonces $C_p(X)$ tiene una selección continua para $\mathcal{G}$ si y sólo si X contiene solamente un punto.*

Demostración. Supongamos que X tiene al menos dos puntos, x_0 y x_1. Sea Y el subespacio $\{f \in C_p(X) : f(x_0) = 0\}$ de $C_p(X)$. La función $\psi : C_p(X) \to Y \times \mathbb{R}$ dada por $\psi(g) = (g - g(x_0), g(x_0))$ es un homeomorfismo. Supongamos también que $h \in Y$ es tal que $h(x_1) \neq 0$, entonces $\phi : \mathbb{R} \to Y$ dada por $\phi(t) = t \cdot h$ es un encage, entonces si X tiene más de dos puntos, $C_p(X)$ contiene un subespacio homeomorfo a $\mathbb{R}^2$ para el cual no existe una selección continua para $\mathcal{F}_2(X)$.
La otra implicación es obvia. $\square$

Definición 3.3.12. *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}(X)$. Decimos que $\mathcal{G}$ es una familia celular de subconjuntos de X si $A \cap B = \varnothing$ para cualesquiera $A, B \in \mathcal{G}$*
La celularidad de X denotada por $c(X)$ es el supremo de
$\{|\mathcal{G}| : \mathcal{G}$ es una familia celular de subconjuntos abiertos de $X\}$.

Si τ es un cardinal, denotamos por A_τ a la compactación por un punto del espacio discreto $D(\tau)$.

Proposición 3.3.13. *Sea E un espacio topológico. Si un espacio cero - dimensional X tiene una familia celular de subconjuntos con carnalidad $\kappa \geq \tau \geq \aleph_0$, entonces $C_p(X, E)$ tiene un subespacio homeomorfo a A_τ.*

Demostración. Sean a, b dos elementos distintos en E y sean $A, B \subset E$ subconjuntos abiertos tales que $a \in A$ y $b \in B$. Sea $\mathcal{G} = \{U_\lambda : \lambda < \tau\}$ una familia celular de abiertos en X. Como X es cero-dimensional y cada $U \in \mathcal{G}$

es no vacío, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que cada U_λ es cerrado-abierto. Para cada $\lambda < \tau$, sea f_λ una función definida como

$$f_\lambda = \begin{cases} a & \text{si } x \notin U_\lambda \\ b & \text{si } x \in U_\lambda \end{cases}$$

Como U_λ es cerrado-abierto, f_λ es continua. Ahora, notemos que el conjunto $D = \{f_\lambda : \lambda < \tau\}$ es relativamente discreto, si $x_\lambda \in U_\lambda$, entonces $[x_\lambda, B] \cap D = \{f_\lambda\}$. Ahora, consideremos a la función constante c_a tal que $c_a(x) = a$ para toda x. Tomemos un abierto arbitrario $W = [x_1, \ldots, x_k; V]$ que contiene a c_a. Entonces W contiene a todos los f_λ excepto por una cantidad finita. Por lo tanto $D \cup \{c_a\}$ es homeomorfo a A_τ. $\square$

Definición 3.3.14. *Sea X un espacio topológico. Si $x \in X$, se define la función cardinal $t(x, X)$ (estrechez de x en X) como $\min\{\kappa \geq \omega :$ para cada $A \subset X$ y cada $x \in \overline{A}$ existe $B \subset A$ con $|B| \leq \kappa$ y $x \in \overline{B}\}$, y definimos la estrechez del espacio X, $t(X)$ como $\sup\{t(x, X) : x \in X\}$.*

El siguiente resultado es bien conocido y su demostración puede consultarse en [6] 3.12.4 (d).

Lema 3.3.15. *Si X es un espacio ordenable generalizado (GO-space), entonces $t(X) = \chi(X)$*

Corolario 3.3.16. *Si X es cero-dimensional con $c(X) \geq \omega_1$ y E es un espacio topológico, entonces $Sel(\mathcal{F}_2(C_p(X, E)) = \varnothing$.*

Demostración. Por la proposición 3.3.13, $C_p(X, E))$ contiene un subespacio Y que es homeomorfo a A_{ω_1}. Si $Sel(\mathcal{F}_2(C_p(X, E))) \neq \varnothing$, entonces $Sel(\mathcal{F}_2(Y)) \neq \varnothing$. Pero, como Y es compacto, Y es ordenable por el teorema 3.2.1 lo cual no es posible por 3.3.15. $\square$

Definición 3.3.17. *Un espacio topológico X es un P-espacio si todo subconjunto G_δ en X es abierto.*

Lema 3.3.18. *Un espacio cero-dimensional X contiene una familia celular $\{B_n : n < \omega\}$ de conjuntos cerrado-abiertos tales que $\bigcup_{n<\omega} B_n$ no es cerrado si y sólo si X no es un P-espacio*

Demostración. Primero supongamos que X contiene una familia celular $\{B_n : n < \omega\}$ de cerrado-abiertos tal que $\bigcup_{n<\omega} B_n$ no es cerrado. Tomemos $A_n =$

$X \setminus B_n$. Se tiene que cada A_n es cerrado-abierto y $\bigcap_{n<\omega} A_n = X \setminus \bigcup_{n<\omega} B_n$ no es abierto ya que $\bigcup_{n<\omega} B_n$ no es cerrado.
Ahora supongamos que X no es un P-espacio. Entonces existe una suseción $\{A_n : n < \omega\}$ de conjuntos cerrado-abiertos tal que $\bigcap_{n<\omega} A_n$ no es abierto. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A_0 = X$ y $A_{n+1} \subset A_n$ con $A_{n+1} \neq A_n$ para cada n. Sea $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$ para cada $n < \omega$. Entonces $\{B_n : n < \omega\}$ es una familia celular de cerrado-abiertos y $\bigcup_{n<\omega} B_n = X \setminus \bigcap_{n<\omega} A_n$ no es cerrado. □

Lema 3.3.19. *Para un espacio cero-dimensional X, existe un espacio numerable no discreto Z y una función cociente $q : X \to Z$ si y sólo si X no es un P-espacio.*

Demostración. Si X no es un P-espacio, existe una familia celular $\{B_n : n < \omega\}$ de conjuntos cerrado-abiertos tal que $B = \bigcup_{n<\omega} B_n$ no es cerrado. Sea Z el espacio cociente de X obtenido de la partición $\{X \setminus B\} \cup \{B_n : n < \omega\}$. Sea p un representante de $X \setminus B$ y x_n un representante de B_n en Z. Entonces p es el único punto de Z que no es un punto aislado. Por lo tanto, Z es numerable y no es discreto.
Ahora supongamos que existe un espacio numerable y no discreto Z y una función cociente suprayectiva $q : X \to Z$. Como Z no es discreto, existe un punto $p \in Z$ que no es aislado. Como Z es numerable y cero-dimensional, existe una suseción $\{B_n : n < \omega\}$ de conjuntos cerrado-abiertos en Z tal que $\{p\} = \bigcap_{n<\omega} B_n$. Podemos tomar $(B_n)_{n<\omega}$ de tal manera que $B_0 = Z$ y $B_{n+1} \subset B_n$ con $B_{n+1} \neq B_n$ para toda n. Denotemos por A_n a los conjuntos $B_n \setminus B_{n+1}$ y por C_n al conjunto $q^{-1}[A_n]$. Como q es una función continua, cada C_n es cerrado-abierto. Además, $C_n \cap C_m = \varnothing$ si $n \neq m$. Tambien tenemos que $\bigcup_{n<\omega} C_n$ no es cerrado, de hecho $q^{-1}(p)$ no es abierto ya que p no es aislado, y $X = q^{-1}(p) \cup \bigcup_{n<\omega} C_n$. Finalmente aplicamos el lema 3.3.18. □

Teorema 3.3.20. *Sea X un espacio cero-dimensional que no es un P-espacio, y sea E un espacio completamente metrizable. Entonces $C_p(X, E)$ no tiene una selección continua para $\mathcal{F}((C_p(X, E))$.*

Demostración. Por el lema 3.3.19, existe un espacio numerable, no discreto Z y una función cociente suprayectiva $q : X \to Z$. Se puede ver que la función $q^{\#} : C_p(Z, E) \to C_p(X, E)$ definida por $q^{\#}(f) = f \circ q$ es un encage sobre un subconjunto cerrado de $C_p(X, E)$. Entonces, $C_p(X, E)$ no tiene una selección continua para $\mathcal{F}(C_p(Z, E))$ por el corolario 3.3.9. □

Definición 3.3.21. *Decimos que un espacio Tychonoff es Čech-completo si el residuo $\beta X \setminus X$ de su compactación de Stone-Čech es un conjunto F_σ en βX.*

El siguiente resultado es similar a lo probado por Arkhangel'skii en [1], corolario I.3.3, y que dice "$C_p(X)$ es Čech-completo si y sólo si X es numerable y discreto". La prueba de Arkhangel'skii se basa en los siguientes hechos:

1. Todo espacio Čech-completo es un espacio de tipo punto numerable,
2. $\mathbb{R}$ es un grupo topológico, y
3. si un subconjunto denso de un producto Tychonoff Z^τ tiene un subespacio propio no vacío y compacto K con $\chi(K, Y) \leq \aleph_0$, entonces $\tau \leq \aleph_0$.

De una manera semejante se puede probar:

Lema 3.3.22. *Para un espacio cero-dimensional X, el espacio $C_p(X, 2)$ es Čech-completo si y sólo si X es discreto y numerable.*

Teorema 3.3.23. *Sea X un espacio cero-dimensional y $\kappa \geq 2$. Entonces son equivalentes:*

1. *$C_p(X, \kappa)$ tiene una selección continua para $\mathcal{F}(C_p(X, \kappa))$,*
2. *$C_p(X, \kappa)$ es completamente metrizable.*
3. *X es numerable y discreto.*

Demostración.

- (3)⇒(2) es inmediato.
- (2)⇒(3). Por 3.3.22, como $C_p(X, 2)$ es un subconjunto cerrado de $C_p(X, \kappa)$, se sigue el resultado.
- (3)⇒(1). Esta implicación es consecuencia de 3.2.9.
- (1)⇒(3). Si $C_p(X, \kappa)$ tiene una selección continua para $\mathcal{F}(C_p(X, \kappa))$, entonces X debe ser un P-espacio y $c(X) \leq \omega$ por 3.3.20 y 3.3.16. Lo anterior implica que X tiene carácter numerable ya que X es cero-dimensional. Pero, como X es un P-espacio, no es discreto, y además κ^{ω_1} no tiene una selección continua. Por lo tanto $|X| \leq \aleph_0$.

□

Corolario 3.3.24. *Sea X un espacio cero-dimensional y E un espacio metrizable y fuertemente cero-dimensional. Entonces son equivalentes:*

1. *$C_p(X,E)$ tiene una selección continua para $\mathcal{F}(C_p(X,E))$,*

2. *$C_p(X,E)$ es completamente metrizable,*

3. *X es numerable y discreto y E es completamente metrizale.*

Demostración. De manera similar al teorema anterior, se puede probar que (2)$\Leftrightarrow$(3) y (3)$\Rightarrow$(1).
Ahora, si $C_p(X,E)$ tiene una selección continua para $\mathcal{F}(C_p(X,E))$, entonces $C_p(X,2)$ debe tener una selección continua para $\mathcal{F}(C_p(X,2))$. Pero lo anterior implica que X es numerable y discreto por 3.3.23. Entonces, el espacio métrico E^ω tiene una selección continua para $\mathcal{F}(E^\omega)$. Por lo tanto, por 3.3.7, E^ω es completamente metrizable y también lo es E. $\square$

Teorema 3.3.25. *Sea X un espacio separable y κ un cardinal. Entonces, $C_p(X,\kappa)$ es debilmente ordenable.*

Demostración. Sea D un subconjunto denso y numerable de X. La función $\pi : C_p(X,\kappa) \to \kappa^D$ definida como $f(g) = f|_D(g)$ es continua e inyectiva ya que $D \subset X$ es denso. Se tiene que el espacio de Baire $B(\kappa) = \kappa^D$ es ordenable, digamos por la relación $\leq$. Entonces la topología $\tau_\preceq$ en $C_p(X,\kappa)$ definida por la relación $\preceq$ determinada por $\leq$ y π como $f \preceq g$ si y sólo si $\pi(f) < \pi(g)$ está contenida en la topología de convergencia puntual de $C_p(X,\kappa)$, por lo tanto $C_p(X,\kappa)$ es debilmente ordenable. $\square$

Corolario 3.3.26. *Si X es separable y E es fuertemente cero-dimensional y metrizable, entonces $C_p(X,E)$ es debilmente ordenable.*

Demostración. El espacio E es un subconjunto del espacio de Baire $B(\kappa) = \kappa^\omega$, con κ igual al peso de E. Por lo anterior $C_p(X,E)$ es un subespacio de $C_p(X,\kappa^\omega)$. Como la propiedad de ser debilmente ordenable es hereditaria, $C_p(X,E)$ es debilmente ordenable si $C_p(X,\kappa^\omega)$ es debilmente ordenable. Como $C_p(X,\kappa^\omega)$ es homeomorfo a $C_p(\oplus_{n\in\mathbb{N}}X_n,\kappa)$, donde $\oplus_{n\in\mathbb{N}}X_n$ es la suma topológica de los espacios X_n y cada X_n es homeomorfo a X. Como X es separable, también lo es $\oplus_{n\in\mathbb{N}}$, entonces, el teorema 3.3.25 implica que $C_p(\oplus_{n\in\mathbb{N}},\kappa)$ es debilmente ordenable. $\square$

Definición 3.3.27. 1. *Un espacio X es $\mathbb{N}$-compacto si es homeomorfo a un subconjunto cerrado del producto $\prod \mathbb{N}$.*

2. *Para un espacio cero-dimensional X y un cardinal τ, una función $f : X \to 2$ es estrictamente τ-continua si para todo subconjunto F de X de cardinalidad $\leq \tau$ existe $g \in C(X, 2)$ tal que $g|F = f|F$.*

3. *Para un espacio cero-dimensional X, el número $t_2(X)$ será mínimo cardinal τ tal que toda función estrictamente τ-continua $f : X \to 2$ es continua.*

Las demostraciones de los siguientes dos lemas no son muy complicadas y se pueden encontrar en [3] y en [4].

Recordemos que el i-peso de un espacio Z ($iw(Z)$) es el minimo cardinal κ tal que existe una función biyectiva y continua de Z sobre un espacio de peso κ.

Lema 3.3.28. *Si X y E son espacios cero-dimensionales y E es segundo numerable, entonces*

$$d(X) = iw_2(C_p(X, E)) = \psi(C_p(X, E)).$$

Lema 3.3.29. *Para un espacio $\mathbb{N}$-compacto X, $t_2(C_p(X, 2)) \leq \aleph_0$.*

Lema 3.3.30. *Sea Z un espacio cero-dimensional. Si $\mathcal{SEL}(\mathcal{F}_2(Z)) \neq \varnothing$, entonces $\psi(Z) \leq t_2(Z)$.*

Demostración. Sea $\phi : \mathcal{F}_2(X) \to Z$ una selección continua, y sea $<$ una relación en Z definida como $a < b$ si y sólo si $\phi(\{a, b\}) = a$. Por (ref), para cada $a \in Z$ los conjuntos $(a, \to) = \{x \in Z : a < x\}$ y $(\leftarrow, a) = \{x \in Z : x < a\}$ son abiertos. Ademaás, $Z = (\leftarrow, a) \cup \{a\} \cup (a, \to)$, $(\leftarrow, a) \cap (a, \to) = \varnothing$ y a es el unico elemento que pertenece a la frontera de cada uno de los conjuntos $(\leftarrow, a)$ y $(a, \to)$.
Denotemos por τ al cardinal $t_2(Z)$. Si $a \in Cl(a, \to)$, entonces existe $F \subset (a, \to)$ de cardinalidad $\leq \tau$ tal que $a \in ClF$. Supongamos lo contrario. Definamos $f : Z \to 2$ como sigue: $f(x) = 0$ si $x \in (\leftarrow, a) \cup \{a\}$ y $f(x) = 1$ si $x \in (a, \to)$. Sea H un subconjunto de Z de cardinalidad $\leq \tau$. Como $a \notin cl(H \cap (a, \to))$, existe un subconjunto cerrado-abierto V con $a \in V$ y $V \cap (H \cap (a, \to)) = \varnothing$. La función $g; Z \to 2$ definida como $g(x) = 0$ si $x \in (\leftarrow, a) \cup V$ y $g(x) = 1$ de otra forma, es una función continua y $g|H = f|H$. Pero f no es continua, contradiciendo la hipótesis $t_2(Z) = \tau$.
De manera similar, si $a \in Cl(\leftarrow, a)$, entonces existe $G \subset (\leftarrow, a)$ de cardinalidad $\leq \tau$ tal que $a \in ClG$. Observemos que si $a \notin Cl(a, \to)$, entonces $(\leftarrow, a) \cup$

$\{a\}$ es abierto, y si $a \notin Cl(\leftarrow, a)$, entonces el conjunto $\{a\} \cup (a, \rightarrow)$ es abierto. Por lo tanto, si $a \in Cl(\leftarrow, a) \cap Cl(a, \rightarrow)$, $\{a\} = \bigcap_{x \in F}(\leftarrow, x) \cap \bigcap_{x \in G}(x, \rightarrow)$. Si $a \in Cl(\leftarrow, a)$ y $a \notin Cl(a, \rightarrow)$, entonces $\{a\} = \bigcap_{x \in G}(x, \rightarrow) \cap [(\leftarrow, a) \cup \{a\}]$. Tendremos una situación similar si $a \notin Cl(\leftarrow, a)$ y $a \in Cl(a \rightarrow)$.Lo anterior quiere decir que en cualquier caso $\{a\}$ es un conjunto G_δ, incluyendo cuando a es un punto aislado. $\square$

Lema 3.3.31. *Para un espacio $\mathbb{N}$-compacto X, X es separable si existe una selección continua $\phi : \mathcal{F}_2(C_p(X, 2)) \rightarrow C_p(X, 2)$.*

Demostración. Como X es un espacio $\mathbb{N}$-compacto, $t_2(C_p(X, 2)) \leq \aleph_0$ (3.3.29). Ahora debemos aplicar el lema 3.3.30 y tenderemos que $\psi(C_p(X, 2)) \leq \aleph_0$. Pero lo anterior implica que X es separable (3.3.28). $\square$

Teorema 3.3.32. *Para un espacio $\mathbb{N}$-compacto X, y un espacio fuertemente cero-dimensional metrizable E, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es separable.*
2. *El espacio $C_p(X, E)$ es debilmente ordenable.*
3. *Existe una selección continua $\phi : \mathcal{K}(C_p(X, E)) \rightarrow C_p(X, E)$.*
4. *Existe una selección continua $\phi : \mathcal{F}_2(C_p(X, E)) \rightarrow C_p(X, E)$.*

Demostración. La implicación 1) $\Rightarrow$ 2) es consecuencia del corolario 3.3.26. Además, el lema 3.1.7 garantiza 2) $\Rightarrow$ 3). La implicación 3) $\Rightarrow$ 4) es trivial y si existe una selección continua $\phi : \mathcal{F}_2(C_p(X, E)) \rightarrow C_p(X, E)$, la restricción $\phi|\mathcal{F}_2(C_p(X, 2)) : \mathcal{F}_2(C_p(X, 2)) \rightarrow C_p(X, 2)$ también es continua. Por el lema 3.3.31, X debe ser separable. $\square$

Apéndice

En este apéndice, se mencionan algúnos resultados que se utilizaron a lo largo de este trabajo. El motivo para mencionarlos en esta sección adicional es mantener una secuencia congruente en la presentación de los resultados específicos relativos al objetivo principal, es decir, las selecciones continuas, y exponer a parte todos aquellos resultados que pudieran salirse en menor o mayor medida del tema principal.

4.1. Compactaciones de productos

Los siguientes resultados están orientados a probar que, si el producto de dos espacios Tychonoff es pseudocompacto, la compactación de Stone-Čech de su producto es homeomorfo al producto de sus compactaciones.

Primero, necesitaremos el siguiente lema tomado de la publicación de Irving Glicksberg [9]. Recordemos que una familia $F \subset C(X)$ de funciones reales de un espacio topológico X es llamada equicontinua si para toda $x \in X$ y toda $\epsilon > 0$, existe una vecindad U de x tal que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ para toda $f \in F$ y $x_0 \in U$.

Lema 4.1.1. *Si $X \times Y$ es pseudocompacto y $f \in C(X \times Y)$, entonces la familia $\{f(x, \cdot) : x \in X\}$ es equicontinua en Y. También se tiene que $\phi : Y \to C(X)$ dada por $\phi(y) = f(\cdot, y)$ es continua.*

Demostración. Como Y es pseudocompacto, basta probar que cualquier sucesión $\{f(x'_n, \cdot)\}$ es equicontinua en Y. Supongamos lo contrario. Entonces, para algún $y_0 \in Y$ y para algún $\epsilon > 0$, no existe ninguna vecindad W de y_0 tal que la condición

$$|f(x'_n, y) - f(x'_n, y_0)| < \epsilon \text{ para } y \in W$$

se cumpla para toda $n \in \mathbb{N}$. Tomemos ahora una subsucesión $\{x_n\}$ de $\{x'_n\}$ y vecindades abiertas V_n de x_n, W_n de y_0 de la siguiente manera. Sean $W_1 = Y$ y x_1 el primer x'_n para el cual la condición anterior no se cumple para $W = W_1$. Tomemos una vecindad $V_1 \times W_2$ de (x_1, y_0) en la cual f varia en menos que 1. Una vez elegidos $x_1, \ldots, x_k$, $V_1, \ldots, V_k$ y $W_1 \ldots, W_{k+1}$, tomamos x_{k+1} como el primer x'_n para el cual la condición de equicontinuidad falla para $W = W_{k+1}$, y tomemos una vecindad abierta $V_{k+1} \times W_{k+2}$ de (x_{k+1}, y_0) en la cual f varia en menos que $1/(k+1)$, con $\overline{W_{k+2}} \subset W_{k+1}$.
Por nuestra elección de x_n, podemos tomar un y_n en W_n para la cual $|f(x_n, y_n) - f(x_n, y_0)| \geq \epsilon$, y entonces podemos tomar una vecindad abierta $V'_n \times W'_n$ de (x_n, y_n) contenida en $V_n \times W_n$ en la cual $|f(x, y) - f(x, y_0)| > \epsilon/2$ para $(x, y) \in V'_n \times W'_n$. Por la pseudocompacidad de $X \times Y$, la sucesión $\{V'_n \times W'_n\}$ tiene un punto de acumulación (x', y') en $X \times Y$, de manera que, por continuidad, $|f(x', y') - f(x, y_0)| \geq \epsilon/2$. Por otro lado, $y' \in \bigcap_{j=1}^{\infty} W_j$ ya que, como y' es punto de acumulación de $\{W'_n\}$, si $y' \notin W_k$ entonces $y' \notin \overline{W_{k+1}}$, así que $\overline{W_{k+1}}$ es una vecindad de y' que intersecta sólo a una cantidad finita de W'_n. Por lo tanto, para $x \in V'_n \subset V_n$, $|f(x, y') - f(x, y_o)| < 1/n$ ya que (x, y') y (x, y_0) estan en $X_n \times W_{n+1}$. Como x' es un punto de acumulación de $\{V'_n\}$, $0 = |f(x', y') - f(x', y_0)| \geq \epsilon/2$, lo cual es una contradicción. $\square$

Lema 4.1.2. *Sean X y Y espacios completamente regulares y $f \in C(X \times Y)$. Si la función $\phi : Y \to C(X)$ dada por $\phi(y) = f(\cdot, y)$ es continua, entonces f tiene una extención continua a $\beta X \times Y$.*

Demostración. Sea $\psi : Y \to C(\beta X)$ dada por $\psi(y) = \beta f(\cdot, y)$, donde βf es la única extención continua de $f(\cdot, y)$ a $C(\beta X)$. Como ϕ es continua, entonces ψ también lo es. Ahora vermos que βf es una función continua en $\beta X \times Y$. Sean $(x_0, y_0) \in \beta X \times Y$ y $\epsilon > 0$. Como $\beta f(\cdot, y_0) \in C(\beta X)$, existe una vecindad V de x_0 tal que $|\beta f(x, y_0) - \beta f(x_0, y_0)| < \epsilon$ para toda $x \in V$. Como ψ es continua, existe una vecindad W de y_0 tal que $|\beta f(x, y) - \beta f(x, y_0)| > \epsilon$ para toda $y \in W$ y toda $x \in \beta X$. Por lo tanto, si $(x, y) \in V \times W$, entonces $|\beta f(x, y) - \beta f(x_0, y_0)| \leq |\beta f(x, y) - \beta f(x, y_0)| + |\beta f(x, y_0) - \beta f(x_0, y_0)| < 2\epsilon$. $\square$

Proposición 4.1.3. *Sean X y Y dos espacios Tychonoff. Si $X \times Y$ es pseudocompacto, entonces $\beta(X \times Y) = \beta X \times \beta Y$.*

Demostración. Si $X \times Y$ es pseudocompacto, entonces por los lemas 4.1.1 y 4.1.2 podemos extender a $f \in C(X \times Y)$ a una función continua en $\beta X \times Y$.

Como $\beta X \times Y$ contiene un subespacio denso y pseudocompacto, cualquier función continua es acotada en el subespacio denso y por lo tanto es acotada en el total, así que $\beta X \times Y$ es también pseudocompacto. Aplicando nuevamente los lemas anteriores, podemos extender a la función f a una función continua en $\beta X \times \beta Y$. □

4.2. Espacios topológicamente bien ordenados

En el capítulo 3, definimos a los espacios topológicamente bien ordenados como una herramienta para probar que todo espacio métrico completo y cero-dimensional tiene una selección continua. Los siguientes resultados, que obtenemos de Engelking, Heath y Michael [7] nos dan las herramientas que necesitamos para probar este importante resultado.

Lema 4.2.1. *Si m es un cardinal infinito, entonces existe un conjunto linealmente ordenado L_0 que no tiene primer ni último elemento y un subconjunto bien ordenado $W_0 \subset L_0$, ambos con carnalidad m.*

Demostración. Sea α un ordinal tal que $|\alpha| = m$ y consideremos a α con la topología discreta. Ahora sea L_0 el espacio obtenido al identificar el primer elemento de dos copias de α. Como m es infinito, se tiene que $|L_0| = m$. Si tomamos $W_0 = \alpha \subset L_0$, es claro que W_0 es un subconjunto bien ordenado de L_0 con cardinalidad m. □

Lema 4.2.2. *Sea L_n un conjunto bien ordenado para cada $n \in \mathbb{N}$, y sea $L = \prod_{n=1}^{\infty} L_n$ con el orden lexicográfico. Sea ω la topología del orden en L, y π la topología producto obtenida al darle a cada L_n la topología discreta. Entonces:*

1. *π es más fina que ω.*

2. *$\pi = \omega$ si cada L_n no tiene primer ni último elemento.*

3. *Si W_n es un subconjunto bien ordenado de L_n para cada n, entonces $W = \prod_{n=1}^{\infty} W_n$ es un subespacio topológicamente bien ordenado de L.*

Demostración.

1. Basta ver que si $x < a$ en L, entonces existe una π-vecindad U de x en L tal que $y < a$ para todo $y \in U$. Sea $n = \text{mín}\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq a_i\}$, así que $x_n < a_n$. Sea

$$U = \{y \in L : y_i = x_i \text{ para } i = 1, \ldots, n\}.$$

Entonces U cumple con lo requerido.

2. Por 1), sólo basta probar que ω es más fina que π. Para esto, debemos mostrar que si $x \in L$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $y_n = x_n$ para toda y en alguna ω-vecindad V de x en L. Tomemos $a, b \in L$ tal que $a_i = x_i = b_i$ para $1 \leq i \leq n$, y $a_{n+1} < x_{n+1} < b_{n+1}$. Entonces $a < x < b$ en L, y podemos tomar V como el intervalo abierto (a, b).

3. Por 1) es suficiente ver que todo subconjunto π-cerrado no vacío A de W tiene primer elemento. Tomemos elementos $x_n \in W_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, y subconjuntos no vacíos $S_n \subset A$, de manera recursiva como sigue:

   - $x_1 = \text{mín}\{y_1 : y \in A\}$,
   - $S_n = \{y \in A : y_i = x_i \text{ para } i = 1, \ldots, n-1\}$
   - $x_n = \text{mín}\{y_n : y \in S_n\}$.

   Esto siempre es posible ya que $A \subset W = \prod_{n=1}^{\infty} W_n$, y cada W_n es bien ordenado. Ahora, $x_1, x_2, \ldots$ son las coordenadas de un punto $x \in W$, y claramente $x \leq y$ para todo $y \in A$. Por ultimo debemos mostrar que $x \in A$. Para esto, sea

$$U = \{z \in L : z_i = x_i \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$$

   cualquier vecindad básica de x en L. Entonces $y \in U \cap A$ para todo y en S_{n+1}, así que $x \in \overline{A} = A$, lo cual completa la prueba.

□

Definición 4.2.3. *Sea X_i un espacio discreto de carnalidad $m \geq \aleph_0$ para $i \in \mathbb{N}$. Definimos el espacio de Baire de peso m como $B(m) = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$.*

Como consecuencia inmediata de los dos lemas anteriores, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.2.4. *Si m es un cardinal infinito, entonces existe un espacio linealmente ordenado L, y un subespacio cerrado topológicamente bien ordenado W de L tal que ambos son homeomorfos a $B(m)$.*

EL siguiente resultado es bien conocido y se puede encontrar en Engelking [6], pero ya que su prueba depende de muchos aspectos teóricos y resultados que quedan claros y son probados a detalle en el mismo libro, omitimos su prueba.

Teorema 4.2.5. *Si m es un cardinal infinito, entonces todo espacio métrico cero-dimensional de peso m puede ser encajado como un subconjunto cerrado en el espacio de Baire $B(m)$.*

4.3. Órdenes en espacios conexos

Definición 4.3.1. *Sea X un espacio topológico. Denotaremos por $P(X)$ al subespacio de $X \times X$ que contiene a todas las parejas (x, y) tales que $x \neq y$. Tambien definimos la función $\Lambda : P(X) \to P(X)$ como $\Lambda(x, y) = (y, x)$.*

Lema 4.3.2. *Si X es un espacio conexo y $P(X)$ no es conexo, entonces $P(X)$ está separado por dos componentes A y B tales que $\Lambda(A) = B$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir $P(X) = C_1 \cup C_2$ con $C_1 \neq \varnothing \neq C_2$, $C_1 \cap \overline{C_2} = \overline{C_1} \cap C_2 = \varnothing$ y $C_1 \cap \Lambda(C_1) \neq \varnothing$. Sea $D_1 = C_1 \cap \Lambda(C_1)$ y $D_2 = C_2 \cup \Lambda(C_2)$. Se tiene que

(1) $P(X) = D_1 \cup D_2$, $D_1 \neq \varnothing \neq D_2$, $D_1 \cap \overline{D_2} = \varnothing = \overline{D_1} \cap D_2$.

(2) $\Lambda(D_1) = D_1$, $\Lambda(D_2) = D_2$.

Sean $x \in X$, $M_x = \{y \in X : (x, y) \in D_1\}$ y $N_x = \{y \in X : (x, y) \in D_2\}$. Se sigue de (1) que

$$X \setminus x = M_x \cup N_x, \text{ y } M_x \cap \overline{N_x} = \varnothing = \overline{M_x} \cap N_x.$$

Como X es conexo, se tiene que $\overline{M_x} = M_x \cup \{x\}$ y $\overline{N_x} = N_x \cup \{x\}$ son conexos.

Sean $y \in M_x$ y $z \in N_x$. Se tiene que $(x, y) \in D_1$ y $y \notin N_x$. Entonces $\overline{N_x} \times \{y\} \subset P(X) = D_1 \cup D_2$. Como $N_x \times \{y\}$ es conexo y $(x, y) \in N_x \times \{y\}$, tenemos que $\overline{N_x} \times \{y\} \subset D_1$ y en particular $(z, y) \in D_1$. De manera similar tenemos que $\overline{M_x} \times \{y\} \subset D_2$ y entonces $(y, x) \subset D_2$. Lo anterior contradice a (2), así que alguno de los conjuntos M_x o N_x deben ser vacios.

Sea $(x, y) \in D_1$. Tenemos que $M_x \neq \varnothing$, entonces $M_x = X \setminus \{x\}$ y $(x, y') \in D_1$ para toda $y' \in X \setminus \{x\}$. Por (2) tenemos también que $(y', x) \in D_1$. Por lo anterior, $M_{y'} \neq \varnothing$ y entonces $M_{y'} = X \setminus \{y'\}$ para toda $y' \in X \setminus \{x\}$. Por lo tanto hemos probado que $M_x = X \setminus \{x\}$ para toda $x \in X$, así que $D_1 = P(X)$ y $D_2 = \varnothing$, lo cual contradice a (1) y así terminamos la prueba. □

Teorema 4.3.3. *Un espacio topológico conexo X es ordenable si y sólo si $P(X)$ no es conexo.*

Demostración. Primero supongamos que X es ordenable. Sean $A(X)$ el subconjunto de $P(X)$ que consiste de todos los puntos (x, y) tales que $x < y$ y $B(X)$ el subconjunto que consiste de todos los puntos tales que $y < x$. Es claro que $P(X) = A(X) \cup B(X)$ y $A(X) \cap B(X) = \varnothing$. También se tiene que $A(X)$ y $B(X)$ son abiertos y no vacios, por lo tanto $P(X)$ no es conexo.
Ahora, sea $(x, y) \in P(X)$. Es claro que Λ es un homeomorfismo de $P(X)$ en si mismo. Sean A, B subconjuntos de $P(X)$ tales que $P(X) = A \cup B$ y $\Lambda(A) = B$ los cuales existen por 4.3.2. Definamos una relación de orden $<$ de forma que $x < y$ si y sólo si $(x, y) \in A$. Resulta que $<$ es un orden lineal en X y así concluimos la prueba. □

Como corolario tenemos lo siguiente.

Corolario 4.3.4. *Si X es un espacio conexo y ordenado, entonces $A(X)$ y $B(X)$ son las componentes de $P(X)$.*

Proposición 4.3.5. *Sean X y Y dos espacios ordenados y conexos. Cualquier función inyectiva de X en Y preserva el orden o lo invierte.*

Demostración. Sea ϕ un afunción continua de X en Y. Si $(x, y) \in P(X)$, sea

$$\psi(x, y) = (\phi(x), \phi(y)).$$

Es claro que ψ es una función continua e inyectiva de $P(X)$ en $P(X)$. Por 4.3.4 se tiene que $\psi(A(X)) = A(Y)$ o $\psi(A(X)) = B(Y)$. En el primer caso, ϕ preserva el orden y en el segundo caso lo invierte. □

Teorema 4.3.6. *En un espacio topologico X, cualesquiera dos órdenes son identicos o son inversos uno del otro.*

Demostración. El resultado se sigue de 4.3.5 tomando $X = Y$ y tomando la función identidad. □

Bibliografía

[1] A.V. Arkhangel'skii, *Topological Function Spaces*, Kluwer Academic Publishers, Mathematics and its applications, vol. 78, Dordrecht, Boston, London, 1992.

[2] C. Constantini, S. Levi, J. Pelant, *Compactness and local compactness in hyperspaces*, Topology and its applications 123 (2002), 573-608.

[3] A. Contreras, *Espacios de funciones continuas del tipo* $C(X, E)$, Tesis doctoral, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2003.

[4] A. Contreras y A. Tamariz, *On some generalizations of compactness in spaces* $C_p(X, 2)$ *and* $C_p(X, \mathbb{Z})$, Bol. Soc. Mat. Mex. 9 (2003), 291-308.

[5] S. Eilenberg, *Ordered Topological Spaces*, American Journal of Mathematics, Vol. 63, No. 1. (Jan., 1941), 39-45.

[6] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin 1989.

[7] R. Engelking, R.W. Heath and E. Michael, *Topological Well-Ordering and Continuous Selections*, Inve. Math. 6 (1968), 150-158.

[8] S. Fujii, T. Nogura, *Characterizations of compact ordinal spaces via continuous selections*, Topology Appl. 91 (1999), no. 1, 65-69.

[9] I. Glicksberg, *Stone-Čech compactifications of products*, Trans. Amer. Mat. Soc. 90 (1959), 369-382.

[10] R. Kaufman, *Ordered sets and compact spaces*, Colloq. Math. 17 (1967), 35-39.

[11] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152, 182

[12] K. Miyazaki, *Continuous selections on almost compact spaces*, Sci. Math. Jpn., Vol. 4, (2001), 355-360.

[13] T. Nogura, D. Shakhmatov, *Characterizations of intervals via continuous selections*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 46 (1997, no.2, 317-328.

[14] J. Van Mill, E. Wattel, *Selections and orderability*, Proc. Amer. Mat. Soc. 83 (3) (1981), 601-605.

[15] J. van Mill, J. Pelant and R. Pol, *Selections that characterize topological completeness*, Fund. Math. 149 (1996), 127-141.

[16] A. Tamariz, *Continuous selections on spaces of continuous functions*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 47, 4(2006), 641-660.

Índice alfabético