UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TÓPICOS EN TEORÍA DE LOCALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

LUIS EDUARDO GARCÍA HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. LUIS ÁNGEL ZALDÍVAR CORICHI

México D.F. 2014

1. Datos del Alumno
    García
    Hernández
    Luis Eduardo
    26162594
    Universidad Nacional Autónoma de México
    Facultad de Ciencias
    Matemáticas
    308056567

2. Datos del Tutor
    M. en C.
    Zaldívar
    Corichi
    Luis Ángel

3. Datos del Sinodal 1
    Dr.
    Marmolejo
    Rivas
    Francisco

4. Datos del Sinodal 2
    Dr.
    Tamariz
    Mascarúa
    Ángel

5. Datos del Sinodal 3
    Dr.
    Ríos
    Montes
    José

6. Datos del Sinodal 4.
    M. en C.
    Medina
    Bárcenas
    Mauricio Gabriel

7. Datos del trabajo escrito
    Tópicos en Teoría de Locales
    102 pp.
    2014

Índice general

Introducción

Para un espacio topológico (X, τ), la estructura topológica τ satisface ciertas propiedades asociadas a operadores de retículas.

La estructura $(\tau, \bigcup, int(\bigcap), \emptyset, X)$ es una retícula completa que satisface, para cualesquiera $V \in \tau$ y $\mathcal{U} \subseteq \tau$, la siguiente ley distributiva:

$$(*) \qquad V \cap \left(\bigcup \mathcal{U}\right) = \bigcup \{V \cap U \mid U \in \mathcal{U}\}.$$

Abstrayendo esta noción a retículas completas que satisfacen esta ley distributiva infinita, se construye la categoría de locales cuyos objetos son retículas completas que satisfacen $(*)$ y donde los morfismos son los dualizados de los morfismos de retículas que abren supremos arbitrarios.

Esta nueva noción es de un gran interés puesto que un local resulta ser una estructura algebraicas donde se puede desarrollar teoría inspirada en la topología y de manera reciproca también.

Puesto que un espacio topológico se define a nivel conjuntista sólo por su estructura de abiertos independientemente de los puntos del conjunto, el estudio del espacio se puede hacer mediante el análisis de la estructura en dicha topología, es decir, se puede estudiar al espacio dejando de lado a los puntos y estudiar *topología libre de puntos*.

Los resultados en la teoría de locales están ligados de manera directa a la topología en el sentido descrito anteriormente, sin embargo, a diferencia de los espacios topológicos, los locales en muchas ocasiones permiten hacer pruebas puramente constructivas.

En el presente trabajo se pretende hacer una introducción a la teoría de locales y presentar resultados en esta categoría. Para ello se tomaron como recursos fundamentales los trabajos de P. T. Johnstone, J. Picado, A. Pulrt y H. Simmons.

En la categoría de locales, denotada por **Loc**, es posible generalizar nociones inspiradas en la topología como lo son las ideas de punto, subespacios abiertos y cerrados, axiomas de separación, espacios de Stone, elementos compactos, producto y el teorema Tychonoff entre otros.

El capítulo *Preliminares* desarrolla la herramienta previa a emplearse a lo largo del trabajo. Se trabaja con las nociones de retícula, álgebras booleanas, ideales, filtros además de presentar una pequeña parte de teoría de categorías para utilizar el lenguaje categórico en los capítulos posteriores, esta seccion del trabajo se basa en materiales de S. Mac Lnae y H. Simmons.

El segundo capítulo *Marcos y Locales* desarrolla tópicos importantes en la teoría de locales. En este se da una relación de los espacios topológicos y los locales a nivel categórico, se generaliza el teorema de representación de Stone, se expresa la generalización de subespacio y se construye el producto y coproducto de locales.

Por último en el capítulo *Teorema de Tychonoff en* **Loc** se demuestra este famoso teorema en la categoría de locales, resultado que, a diferencia de lo que ocurre para espacios topológicos, no depende del famoso Axioma de elección. Este capítulo se inspira en el famoso artículo "*The Tychonoff theorem without axiom of choice*" de P. T. Johnstone y publicado en 1981.

Capítulo 1

Preliminares

Para iniciar se desarrolla la teoría básica de las nociones fundamentales presentadas del trabajo, además de introducir de manera breve el lenguaje categórico y algunos resultados relevantes de la teoría de categorías.

Este capítulo facilita la exposición de los dos capítulos posteriores mediante el desarrollo de herramientas poderosas para el trabajo de la teoría principal a estudiar.

1.1 Órdenes y Retículas

En está sección se dan las definiciones fundamentales y resultados básicos de órdenes y las distintas variantes de retículas. Algunos de los resultados desarrollados a lo largo de la sección se inspiran en [8].

Definición 1.1.1. Un *orden parcial* es una pareja ordenada $(A, \leq)$ tal que $\leq$ es una relación binaria sobre el conjunto A que cumple lo siguiente

(i) $a \leq a$ para todo $a \in A$ (reflexiva).

(ii) Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$ (antisimétrica).

(iii) Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$ (transitiva).

Una función $f : A \to B$ entre órdenes parciales es *morfismo de órdenes parciales* si para cualesquiera elementos $a, b \in A$ con $a \leq b$ se satisface que $f(a) \leq f(b)$.

Para un subconjunto $S \subseteq A$ de un orden parcial y un elemento $a \in A$, se dice que a es una *cota superior* de S si $a \geq s$ para cualquier $s \in S$. Si además a satisface que es menor o igual que cualquier otra cota superior de S diremos que a es *supremo* de S.

De la antisimetría de A, se tiene que los supremos de subconjuntos son únicos, por lo tanto, si S tiene supremo, al elemento supremo se le denota por $\bigvee S$. De manera dual se pueden definir los conceptos de *cota inferior* e *ínfimo*, y al ínfimo de un subconjunto S se le denota por $\bigwedge S$.

Para el conjunto vacío se satisface que cualquier elemento $a \in A$ es cota superior e inferior de $\emptyset$, por lo tanto, si existen los elementos $\bigvee \emptyset$ y $\bigwedge \emptyset$ estos satisfacen ser elementos extremales en el orden, es decir, para cualquier $b \in A$ se cumple que $\bigvee \emptyset \leq b \leq \bigwedge \emptyset$. A los elementos $\bigvee \emptyset$ y $\bigwedge \emptyset$ se les denota por 0_A y 1_A, respectivamente.

Dadas las nociones de supremo e ínfimo podemos definir la idea de retícula y las funciones que relacionan a estas estructuras.

Definición 1.1.2. Una *retícula* es un orden parcial $(A, \leq)$ equipado con dos operaciones binarias $\wedge, \vee : A \times A \to A$ y dos elementos $0_A, 1_A \in A$ tales que para cualesquiera elementos $a, b \in A$ se satisface que

- $\vee(a, b) = a \vee b$ es supremo del conjunto $\{a, b\}$.
- $\wedge(a, b) = a \wedge b$ es ínfimo del conjunto $\{a, b\}$.
- Para todo $c \in A$ se cumple que $0_A \leq c \leq 1_A$.

Para dos retículas A y B un *morfismo de retículas* de A a B es una función $f : A \to B$ que preserva los operadores $\vee$, $\wedge$ y respeta los elementos distinguidos 0,1.

Ejemplo 1.1.3. Para un conjunto X, el conjunto potencia 2^X ordenado con la contención cumple que los operadores unión e intersección son operadores supremo e ínfimo en este orden. Los subconjuntos $\emptyset$ y X son el mínimo y máximo de este orden.

Ejemplo 1.1.4. Para M un R-módulo se cumple que $Sub_R(M)$ el conjunto de los submódulos de M, ordenados por la contención, forman una retícula. Los operadores supremo e ínfimo son el módulo generado por la unión (que equivale a la suma de módulos) y la intersección, respectivamente. Los objetos distinguidos son el módulo M y $\{0\}$.

Ejemplo 1.1.5. Cualquier orden total $\mathcal{P}$ finito con mínimo y máximo elemento es retícula. En particular la retícula formada por dos elementos $\{0, 1\}$ con orden $0 \leq 1$ es retícula, a esta retícula se le denota por $\underline{2}$.

Notemos que esta definición conjuntista dada en 1.1.2 de las operaciones con respecto al orden es equivalente a la noción de ciertas estructuras algebraicas por medio del siguiente resultado.

Teorema 1.1.6. *Sea $(A, \vee, 0)$ un monoide conmutativo en el que cada elemento es idempotente. Entonces existe un único orden parcial $(A, \leq)$ tal que 0 es el mínimo elemento de A y $\vee$ es una operación supremo compatible con el orden $\leq$.*

Demostración. Sean $a, b \in A$, definamos la relación $\leq$ de la siguiente manera

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

Por ser idempotente cada elemento de A tenemos que $a \vee a = a$, por lo tanto $a \leq a$. Supongamos que $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $b = a \vee b = a$. Consideremos $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $b = a \vee b$ y $c = b \vee c$, por lo tanto

$$a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c,$$

entonces $a \leq c$.

De lo anterior se deduce que la relación definida es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Puesto que para cada $a \in A$ se tiene que $a \vee 0 = a$, 0 es el mínimo elemento en este orden.

Para concluir mostremos que $a \vee b$ es supremo de los elementos a, b. Por ser idempotente cada elemento se cumple que

$$a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b \;\text{ y }\; b \vee (b \vee a) = (b \vee b) \vee a = b \vee a,$$

entonces $a, b \leq a \vee b$.

Supongamos que $a \leq c$ y $b \leq c$, entonces $c = a \vee c$ y $c = b \vee c$, por lo tanto

$$c = c \vee c = (a \vee c) \vee (b \vee c) = (c \vee c) \vee (a \vee b) = c \vee (a \vee b)$$

entonces $a \vee b$ es el supremo de a y b. □

A la estructura descrita en el teorema anterior se le conoce por *semiretícula superior* y a una estructura similar con operación ínfimo se le conoce por *semiretícula inferior*. Un *morfismo de semireticulas* es una función entre dos semiretículas del mismo tipo que preserva el operador de las semiretículas.

De este resultado se sigue que si $(A, \vee, 0)$ y $(A, \wedge, 1)$ son monoides conmutativos con cada elemento idempotente, entonces $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es retícula si los órdenes inducidos por el teorema anterior son opuestos. Una manera para que los operadores $\vee$ y $\wedge$ sean compatibles en este sentido nos la da el siguiente teorema.

Teorema 1.1.7. *Sean $(A, \vee, 0)$ semiretícula superior y $(A, \wedge, 1)$ semiretícula inferior. Entonces $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es retícula si y sólo si para cada par de elementos $a, b \in A$ se satisfacen las siguientes identidades*

- $a \wedge (a \vee b) = a$
- $a \vee (a \wedge b) = a$

Estas identidades son llamadas leyes de absorción.

Demostración. Si A es retícula, claramente ocurren las leyes de absorción. Veamos que las leyes de absorción implican que los órdenes definidos por los dos monoides son opuestos. Sean $\leq$ el orden definido por $(A, \vee, 0)$ y $\leq'$ el orden definido por $(A, \wedge, 1)$. Tomemos $a, b \in A$ y supongamos que $a \leq b$, entonces $a \vee b = b$, por lo tanto

$$a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$$

luego $b \leq' a$.

Por otro lado si $b \leq' a$, entonces $a = a \wedge b$, por lo tanto

$$a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b$$

luego $a \leq b$. □

Además de la leyes de absorción, en una retícula es posible que se satisfagan más identidades. Entre una de las más importantes está la ley distributiva.

Definición 1.1.8. Una retícula A es *retícula distributiva* si para elementos $a, b, c \in A$ arbitrarios se cumple la identidad

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

No todas las retículas son distributivas, sin embargo si una retícula A es distributiva, entonces se satisface la identidad dual.

Lema 1.1.9. *Sea A una retícula distributiva. Entonces para $a, b, c \in A$ arbitrarios ocurre*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Demostración. Veamos que utilizando las leyes de absorción y la ley distributiva ocurre la siguiente cadena de igualdades.

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] \\ &= a \vee [(a \vee b) \wedge c] \\ &= a \vee [(a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \\ &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) \\ &= a \vee (b \wedge c)\end{aligned}$$

□

Proposición 1.1.10. *Sean a, b, c elementos de una retícula distributiva A. Entonces si existe $x \in A$ tal que $x \wedge a = b$ y $x \vee a = c$ éste es único.*

Demostración. Sean x y y elementos de A que satisfacen $x \wedge a = y \wedge a = b$ y $x \vee a = y \vee a = c$. Puesto que $x \vee a = c = y \vee a$ se tiene que $c \geq x$, y, por lo tanto, $c \geq x \vee y$. Utilizando las leyes de absorción y la distributividad tenemos que

$$\begin{aligned}x = x \vee (x \wedge a) = x \vee b &= x \vee (y \wedge a) \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee a) \\ &= (x \vee y) \wedge c = x \vee y\end{aligned}$$

donde la última igualdad ocurre por el hecho antes demostrado.

Análogamente se tiene que $y = x \vee y$, por lo tanto $x = y$. □

La noción de retícula se puede fortalecer de la siguiente manera.

Definición 1.1.11. Un orden parcial A *es retícula completa superior* si para cualquier $S \subseteq A$ subconjunto, existe $\bigvee S$. De manera dual A es *retícula completa inferior* si para todo $S \subseteq A$, existe $\bigwedge S$. Un orden parcial es *retícula completa* si es simultáneamente retícula completa superior e inferior.

Puesto que una retícula completa A satisface que para cualquier subconjunto S existen $\bigvee S$ y $\bigwedge S$, en particular para cualesquiera dos elementos $a, b \in A$ se cumple que existen $\bigvee\{a, b\}$ y $\bigwedge\{a, b\}$, por lo tanto A también es retícula en el sentido usual.

De hecho para una retícula ser completa es equivalente a ser retícula completa superior o inferior.

Teorema 1.1.12. *Sea A un orden parcial, entonces A es retícula completa si y sólo si A es retícula completa superior.*

Demostración. Si suponemos que A es retícula completa, entonces el resultado es inmediato. Supongamos que A es retícula completa superior. Sea $S \subseteq A$. Consideremos $S^{\wedge}$ el siguiente conjunto

$$S^{\wedge} = \{a \in A \mid a \leq s \ , \forall s \in S\}.$$

Veamos que el elemento $\bigvee S^{\wedge}$ es el ínfimo del conjunto S. Notemos que para cualquier $s \in S$, el elemento s es cota superior de $S^{\wedge}$ por lo tanto $s \geq \bigvee S^{\wedge}$, puesto que s fue arbitrario, se sigue que $\bigvee S^{\wedge}$ es cota inferior de S.

Por otro lado para cualquier c cota inferior de S se cumple que $c \in S^{\wedge}$, por lo tanto $c \leq \bigvee S^{\wedge}$. Entonces $\bigvee S^{\wedge}$ es ínfimo de S. □

Un debilitamiento de la noción de retícula completa es la siguiente.

Definición 1.1.13. Para un orden parcial A, un subconjunto $B \subset A$ distinto del vacío es *conjunto dirigido* si para todo par de elementos $b, b' \in B$ existe un elemento $c \in B$ tal que $b, b' \leq c$.

Definición 1.1.14. Una retícula A es *completa superiormente por conjuntos dirigidos* si para cualquier $D \subseteq A$ subconjunto dirigido existe el supremo de D en A.

Claramente toda retícula completa superior es retícula completa superior por conjuntos dirigidos, sin embargo el recíproco no necesariamente se cumple. Veamos una equivalencia que involucra a estos conceptos.

Teorema 1.1.15. *Un orden parcial A es retícula completa superior si y sólo si A es completa superiormente por conjuntos dirigidos y existen supremos de familias finitas.*

Demostración. Lo único que es necesario demostrar es que si A es completa superiormente por conjuntos dirigidos y con supremos de familias finitas entonces es retícula completa. Sea $S \subseteq A$. Si S es vacío entonces existe $\bigvee S$ supremo de S por existir el supremo de familias finitas. Supongamos que $S \neq \emptyset$, consideremos S_D el conjunto de supremos de subfamilias finitas de S. El conjunto S_D es dirigido puesto que el supremo de $\bigvee R, \bigvee T \subset S$ para R, T finitos es el supremo del conjunto finito $R \cup T$. Luego existe $\bigvee S_D$ el cual claramente es supremo de S. □

Para la noción de retícula completa podemos definir una generalización de la ley distributiva de la manera siguiente.

Definición 1.1.16. Decimos que una retícula completa A satisface la *Ley distributiva infinita (LDI)* si para todo $a \in A$ y todo $S \subseteq A$ se cumple lo siguiente:

$$a \wedge \left(\bigvee S\right) = \bigvee\{a \wedge s \mid s \in S\}$$

Ejemplo 1.1.17. Para una semiretícula inferior A, decimos que un subconjunto $S \subseteq A$ es cerrado inferiormente si para todo $a \in A$ se cumple que $a \in S$ si existe $s \in S$ con $a \leq s$. Consideremos al siguiente conjunto

$$\mathcal{D}A = \{S \subseteq A \mid S \text{ es cerrado inferiormente}\}$$

ordenado con la contención. Entonces $\mathcal{D}A$ es retícula completa con las operaciones intersección y unión arbitrarias. Además $\mathcal{D}A$ satisface la LDI por coincidir las operaciones con los operadores conjuntistas de unión e intersección.

Por otro lado para B una retícula completa que sastisface la LDI y $g : A \to B$ morfismo de semiretículas inferiores se cumple que la función $\overline{g} : \mathcal{D}A \to B$ tal que para $S \in \mathcal{D}A$

$$\overline{g}(S) = \bigvee_B \{g(s) \mid s \in S\}$$

es morfismo que abre supremos arbitrarios e ínfimos finitos.

1.2 Álgebras Booleanas y de Heyting

Cierta clase especial de retículas importantes son las álgebras booleanas y las álgebras de Heyting, estructuras que están equipadas con operadores adicionales y los cuales tienen propiedades específicas con respecto a los operadores $\vee$ y $\wedge$ de la retícula asociada. Para esta sección se utilizaron recursos del capítulo de preliminares de [8].

Por la proposición 1.1.10 si para un elemento $a \in B$ de una retícula distributiva B existe a' tal que $a \vee a' = 1$ y $a \wedge a' = 0$, entonces a' es único. En este caso al elemento a' se le llama *complemento* de a. De aquí surge la siguiente definición.

Definición 1.2.1. Una retícula distributiva B es un *álgebra booleana* si todo elemento de B tiene complemento. Para B y C álgebras booleanas un *morfismo de álgebras booleanas* $f : B \to C$ es un morfismo de retículas entre B y C.

Ejemplo 1.2.2. Para un conjunto X, el conjunto potencia 2^X es álgebra booleana puesto que las operaciones conjuntistas de unión e intersección se distribuyen entre sí, además que el complemento de $U \subseteq X$ está dado por el subconjunto $X \setminus U$.

Ejemplo 1.2.3. Para un espacio topológico (X, τ) la familia $\overline{\tau} \subseteq \tau$ de abiertos que son cerrados es álgebra booleana puesto que en este caso los operadores que dan estructura de álgebra booleana son los operadores conjuntistas de la unión, intersección y complemento. Para el espacio X la familia $\overline{\tau}$ se denota por $\mathcal{OC}X$.

La definición 1.2.1 es equivalente a que una retícula distributiva B esté equipada con una operación unitaria $\neg : B \to B$ tal que para cualquier $a \in B$ el elemento $\neg(a) = \neg a$ sea el complemento de a. Esta operación tiene las siguientes propiedades.

Proposición 1.2.4. *(Leyes de D'Morgan) Para todo par de elementos $a, b \in B$ de un álgebra booleana B se cumple lo siguiente:*

- $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$
- $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$

Demostración. Utilizando la ley distributiva se tiene que

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg b) &= [(a \wedge b) \wedge \neg a] \vee [(a \wedge b) \wedge \neg b] \\ &= [(a \wedge \neg a) \wedge b] \vee [(b \wedge \neg b) \wedge a] \\ &= [0 \wedge b] \vee [0 \wedge a] = 0 \vee 0 = 0.\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b) &= [a \vee (\neg a \vee \neg b)] \wedge [b \vee (\neg a \vee \neg b)] \\ &= [(a \vee \neg a) \vee \neg b] \wedge [(b \vee \neg b) \vee \neg a] \\ &= [1 \vee \neg b] \wedge [1 \vee \neg a] = 1 \wedge 1 = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto el elemento $\neg a \vee \neg b$ es complemento de $a \wedge b$, luego por la unicidad de los complementos se sigue la primer identidad.

La segunda identidad se obtiene de aplicar la primera a los elementos $\neg a, \neg b$ y del hecho de que para todo $c \in A$, $c = \neg\neg c$. $\square$

Para un álgebra booleana se puede definir la diferencia simétrica.

Definición 1.2.5. Para un álgebra booleana B se define el operador $+ : B \times B \to B$ que para cualesquiera elementos $a, b \in B$ les asocia el siguiente elemento

$$+(a, b) = a + b = (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b).$$

Este operador es la *diferencia simétrica* de B.

Notemos las siguientes propiedades de la diferencia simétrica.

Proposición 1.2.6. *Para cualesquiera $a, b \in B$ elementos de un álgebra booleana B se cumple lo siguiente:*

- $a + b = (b \wedge \neg a) \vee (a \wedge \neg b)$
- $\neg(a + b) = (\neg a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$

Demostración. Para la primera, utilizando la distributividad se cumple

$$\begin{aligned} a + b &= (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b) \\ &= [(a \vee b) \wedge \neg a] \vee [(a \vee b) \wedge \neg b] \\ &= [(a \wedge \neg a) \vee (b \wedge \neg a)] \vee [(a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg b)] \\ &= 0 \vee (b \wedge \neg a) \vee (a \wedge \neg b) \vee 0 \\ &= (b \wedge \neg a) \vee (a \wedge \neg b) \end{aligned}$$

que es la identidad buscada.

La segunda es una simple aplicación a la definición de la diferencia simétrica de la leyes de D'Morgan. $\square$

La diferencia simétrica relaciona a las álgebras booleanas con estructuras algebraicas, justamente con cierta clase especial de anillos.

Definición 1.2.7. Un anillo $(B, +, \wedge, 0, 1)$ con uno es *anillo booleano* si todo elemento es idempotente, es decir, para todo $a \in B$ se tiene que $a \wedge a = a^2 = a$.

Lema 1.2.8. *Sean $a, b, c \in B$ elementos de un álgebra booleana B, entonces se cumple que*

(*i*) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(*ii*) $a + b = b + a$

(*iii*) $a + 0 = a$

(*iv*) $a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c$

(*v*) $a + a = 0$

Demostración. Demostremos los puntos del lema en base de las proposiciones 1.2.4. y 1.2.6.

(*i*) Utilizando los lemas antes mencionados y la distributividad se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
a + (b + c) &= [a \wedge \neg(b + c)] \vee [(b + c) \wedge \neg a] \\
&= [a \wedge ((b \wedge c) \vee (\neg b \wedge \neg c))] \vee [((b \wedge \neg c) \vee (c \wedge \neg b)) \wedge \neg a] \\
&= [(a \wedge (b \wedge c)) \vee (a \wedge (\neg b \wedge \neg c))] \\
&\quad \vee [((b \wedge \neg c) \wedge \neg a) \vee ((c \wedge \neg b) \wedge \neg a)] \\
&= [((a \wedge \neg b) \wedge \neg c) \vee (c \wedge (a \wedge b))] \\
&\quad \vee [((b \wedge \neg a) \wedge \neg c) \vee (c \wedge (\neg a \wedge \neg b))] \\
&= [((a \wedge \neg b) \wedge \neg c) \vee ((b \wedge \neg a) \wedge \neg c)] \\
&\quad \vee [(c \wedge (a \wedge b)) \vee (c \wedge (\neg a \wedge \neg b))] \\
&= [((a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a)) \wedge \neg c] \vee [c \wedge ((a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b))] \\
&= [(a + b) \wedge \neg c] \vee [c \wedge \neg(a + b)] = (a + b) + c.
\end{aligned}$$

(*ii*) Esto se sigue inmediatamente de la simetría en la definición del operador y la conmutatividad de los operadores $\vee$ y $\wedge$.

(*iii*) De la definición de diferencia simétrica

$$a + 0 = (a \wedge 1) \vee (0 \wedge \neg a) = a \vee 0 = a.$$

(iv) De nuevo de la distributividad se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
(a \wedge b) + (a \wedge c) &= [(a \wedge b) \wedge \neg(a \wedge c)] \vee [(a \wedge c) \wedge \neg(a \wedge b)] \\
&= [(a \wedge b) \wedge (\neg a \vee \neg c)] \vee [(a \wedge c) \wedge (\neg a \vee \neg b)] \\
&= [((a \wedge b) \wedge \neg a) \vee ((a \wedge b) \wedge \neg c)] \\
&\quad \vee [((a \wedge c) \wedge \neg a) \vee ((a \wedge c) \wedge \neg b)] \\
&= [((a \wedge \neg a) \wedge b) \vee (a \wedge (b \wedge \neg c))] \\
&\quad \vee [((a \wedge \neg a) \wedge c) \vee (a \wedge (c \wedge \neg b))] \\
&= [(0 \wedge b) \vee (a \wedge (b \wedge \neg c))] \vee [(0 \wedge c) \vee (a \wedge (c \wedge \neg b))] \\
&= [a \wedge (b \wedge \neg c)] \vee [a \wedge (c \wedge \neg b)] = a \wedge [(b \wedge \neg c) \vee (c \wedge \neg b)] \\
&= a \wedge (b + c).
\end{aligned}$$

(v) De la definición de la diferencia simétrica

$$a + a = (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge \neg a) = 0 \vee 0 = 0.$$

□

Teorema 1.2.9. *Dada un álgebra booleana $(B, \vee, \wedge, \neg)$, la estructura $(B, +, \wedge, 0, 1)$, con $+$ la diferencia simétrica, es anillo booleano.*

Demostración. Por $(i), (ii), (iii)$ del lema 1.2.8, la terna $(B, +, 0)$ es grupo conmutativo, (iv) de este mismo lema implica que $(A, +, \wedge, 0)$ es anillo y del hecho de que $a \wedge 1 = a$ para todo a, se sigue que 1 es uno de este anillo. Puesto que el operador $\wedge$ en una retícula es idempotente se tiene que el producto de este anillo es idempotente. □

Entonces dada una álgebra booleana podemos construir un anillo booleano. La construcción recíproca también es válida.

Lema 1.2.10. *Sea B un anillo booleano, entonces B satisface lo siguiente:*

(i) *B es conmutativo.*

(ii) *Para todo $a \in B$, $a + a = 0$.*

Demostración. Veamos que para todo $a, b \in B$ se tiene que

$$\begin{aligned}
a + b = (a + b)^2 &= a^2 + ab + ba + b^2 \\
&= a + b + ab + ba
\end{aligned}$$

por lo tanto $ab + ba = 0$, de donde sustituyendo $b = a$ se llega a la identidad $a + a = a^2 + a^2 = 0$, entonces $-ba = ba$ y por lo tanto $ab = ba$. □

Teorema 1.2.11. *Sea* $(B, +, \wedge, 0, 1)$ *un anillo booleano. Entonces existen operaciones* $\vee$, *y* $\neg$ *que hacen a* $(B, \vee, \wedge, \neg)$ *un álgebra booleana.*

Demostración. Por el lema 1.2.10 la terna $(B, \wedge, 1)$ es monoide conmutativo, entonces por la demostración del teorema 1.1.6 se cumple que B es semiretícula inferior con operador ínfimo $\wedge$ y con orden parcial dado por $a \leq b$ si y soló si $a \wedge b = a$. Puesto que para todo $a \in B$ se cumple que $a \wedge 0 = 0$ y $a \wedge 1 = a$, se cumple que 0 y 1 son el mínimo y máximo de este orden parcial.

Definamos la operación supremo para dos elementos $a, b \in B$ de la siguiente manera

$$a \vee b = a + b + (a \wedge b).$$

De las definiciones de $\wedge$ y $\vee$ se sigue que 0 y 1 son el mínimo y máximo elemento de la retícula B.

Demostremos que $a \vee b$ es supremo el orden $\leq$. Veamos que se satisface

$$a \wedge (a + b + (a \wedge b)) = a^2 + (a \wedge b) + (a^2 \wedge b) = a + (a \wedge b) + (a \wedge b) = a$$

por lo tanto $a \leq a + b + (a \wedge b)$. De manera análoga se tiene que $b \leq a + b + (a \wedge b)$ de donde se sigue que $a + b + (a \wedge b)$ es cota superior del conjunto $\{a, b\}$. Ahora supongamos que $c \in B$ es tal que $a, b \leq c$, entonces $a \wedge c = a$ y $b \wedge c = b$, de donde se sigue

$$c \wedge (a + b + (a \wedge b)) = (c \wedge a) + (c \wedge b) + (c \wedge a \wedge b) = a + b + (a \wedge b).$$

De esto se concluye que $a + b + (a \wedge b)$ es la mínima cota superior de a, b en el orden $\leq$.

La complementación de a es $a + 1$ puesto que

$$a \wedge (a + 1) = a^2 + a = a + a = 0$$

y

$$a \vee (a + 1) = a + a + 1 + (a \wedge (a + 1)) = 1.$$

Por último veamos la distributividad. Para $a, b, c \in B$ se cumple

$$\begin{aligned}
a \wedge (b \vee c) = a(b + c + bc) &= ab + ac + abc \\
&= ab + ac + a^2bc \\
&= ab + ac + (ab)(ac) \\
&= ab \vee ac = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).
\end{aligned}$$

□

Los teoremas 1.2.11 y 1.2.9 establecen el siguiente resultado.

Corolario 1.2.12. *Los anillos booleanos son equivalentes a las álgebras booleanas.*

Demostración. Sea $(A, +', \wedge, 0, 1)$ anillo booleano, consideremos la álgebra booleana asociada $(A, \vee, \wedge, \neg)$. Notemos que la diferencia simétrica definida por esta álgebra es de hecho el operador $+'$

$$\begin{aligned} a + b &= (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg a) \\ &= (a(1 +' b)) \vee (b(1 +' a)) \\ &= (a +' ab) \vee (b +' ab) \\ &= a +' b +' ab +' ab +' (a +' ab)(b +' ab) \\ &= a +' b +' 0 +' ab +' a^2 b +' ab^2 +' ab \\ &= a +' b +' ab +' ab +' ab +' ab = a +' b \end{aligned}$$

Del teorema 1.2.11 se sigue que la operación producto y los elementos distinguidos se preservan.

Por otro lado si $(B, \vee', \wedge, \neg')$ es álgebra booleana, el anillo booleano asociado por el teorema 1.2.11 $(B, +, \wedge, 0, 1)$ se corresponde con la álgebra con los siguientes operadores.

- Para $a \in B$

$$\neg a = a + 1 = (a \wedge 0) \vee (\neg' a \wedge 1) = 0 \vee (\neg' a) = \neg' a$$

- Para $b \in B$

$$\begin{aligned} a \vee b = a + b + a \wedge b = a + b \wedge (1 + a) &= a + (b \wedge \neg' a) \\ &= [a \vee' (b \wedge \neg' a)] \wedge [\neg' a \vee' \neg' (b \wedge \neg' a)] \\ &= [(a \vee' b) \wedge (a \vee' \neg' a)] \wedge [\neg' a \vee' (\neg' b \vee' a)] \\ &= [a \vee' b] \wedge [(\neg' a \vee a) \vee' \neg' b] = [a \vee' b] \wedge [1 \vee' \neg' b] \\ &= [a \vee' b] \wedge 1 = a \vee' b. \end{aligned}$$

Por lo tanto los operadores coinciden con los operadores de la álgebra inicial y del teorema 1.2.9 los elementos distinguidos se preservan.

Por último si $f : A \to B$ es morfismo de álgebras booleanas es claro de la definición de la diferencia simétrica que f también resulta ser morfismo de los anillos asociados, de manera recíproca si $f : A \to B$ es morfismo de anillos booleanos, de la definición de los operadores $\vee'$ y $\neg'$ se tiene que f también es morfismo de álgebras booleanas. $\square$

Un debilitamiento de la noción de álgebra booleana es el de álgebra de Heyting.

Definición 1.2.13. Una retícula A es *álgebra de Heyting* si está equipada con una función $\succ\colon A \times A \to A$, llamada *implicación* del álgebra, tal que para cualesquiera a y b el elemento $\succ(a, b) = (a \succ b)$ está caracterizado por la siguiente propiedad:

$$\forall c \in A, \;\; a \wedge c \leq b \Leftrightarrow c \leq (a \succ b)$$

La definición de una álgebra de Heyting no nos da información sobre la posible distributividad en la retícula, sin embargo al contar con la implicación, la retícula debe ser distributiva.

Lema 1.2.14. *Toda álgebra de Heyting es retícula distributiva.*

Demostración. Sean A álgebra de Heyting y $a, b, c \in A$ elementos arbitrarios. Consideremos $d \in A$, entonces

$$\begin{aligned} d \geq a \wedge (b \vee c) &\Leftrightarrow (a \succ d) \geq b \vee c \\ &\Leftrightarrow (a \succ d) \geq b \text{ y } (a \succ d) \geq b \\ &\Leftrightarrow a \wedge b \leq d \;\text{ y }\; a \wedge c \leq d \\ &\Leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq d. \end{aligned}$$

Tomando $d = a \wedge (b \vee c)$ y siguiendo la equivalencia en el sentido derecho obtenemos que $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$. De manera inversa tomando $d = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ y siguiendo la equivalencia en sentido izquierdo obtenemos que $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$, por lo tanto se concluye la igualdad. $\square$

De hecho cualquier álgebra booleana B cumple para cualesquiera dos elementos $a, b \in B$, el mayor elemento c con la propiedad $a \wedge c \leq B$ es el elemento $b \vee \neg a$.

Proposición 1.2.15. *Toda álgebra booleana es álgebra de Heyting.*

Demostración. Sea $(A, \vee, \wedge, \neg)$ álgebra booleana, y consideremos $a, b \in A$. Definamos el operador $\succ\colon A \times A \to A$ para cualesquiera $a, b \in A$ de la siguiente manera

$$(a \succ b) = \neg a \vee b.$$

Sea c tal que $a \wedge c \leq b$, por lo tanto

$$\begin{aligned} b \vee \neg a &\geq (a \wedge c) \vee \neg a \\ &= (a \vee \neg a) \wedge (c \vee \neg a) \\ &= 1 \wedge (c \vee \neg a) \\ &= c \vee \neg a \geq c \end{aligned}$$

y por otro lado, si $c \leq \neg a \vee b$, se tiene

$$\begin{aligned} a \wedge c &\leq a \wedge (\neg a \vee b) \\ &= (a \wedge \neg a) \vee (a \wedge b) \\ &= 0 \vee (a \wedge b) \\ &= a \wedge b \leq b. \end{aligned}$$

luego $b \vee \neg a$ resulta ser implicación en esta retícula. $\square$

Para una retícula completa A es equivalente ser álgebra de Heyting a que satisfaga la LDI.

Teorema 1.2.16. *Sea A retícula completa, entonces A satisface la LDI si y sólo si A es álgebra de Heyting.*

Demostración. Supongamos que A satisface la LDI. Para $a, b \in A$ definamos su implicación de la siguiente manera

$$(a \succ b) = \bigvee \{c \mid a \wedge c \leq b\}.$$

Por la construcción $a \wedge d \leq b$ implica que $d \leq (a \succ b)$. De manera recíproca, si $d \leq (a \succ b)$, entonces

$$\begin{aligned} a \wedge d \leq a \wedge (a \succ b) &= a \wedge \left(\bigvee \{c \mid a \wedge c \leq b\} \right) \\ &= \bigvee \{a \wedge c \mid a \wedge c \leq b\} \leq b. \end{aligned}$$

De manera inversa supongamos que A es álgebra de Heyting. Sean $a \in A$ y $S \subseteq A$. Puesto que $\bigvee S \geq s$ para toda $s \in S$ se tiene que

$$a \wedge \left(\bigvee S \right) \geq a \wedge s$$

para toda $s \in S$, por lo tanto $a \wedge (\bigvee S)$ es cota superior del conjunto $\{a \wedge s \mid s \in S\}$. Ahora sea $b \in A$ tal que $b \geq a \wedge s$ para toda $s \in S$, entonces por la implicación en el álgebra de Heyting tenemos que $(a \succ b) \geq s$ para cualquier $s \in S$ y por lo tanto

$$(a \succ b) \geq \bigvee S,$$

entonces $b \geq a \wedge (\bigvee S)$, de donde se sigue que $a \wedge (\bigvee S)$ es supremo del conjunto $\{a \wedge s \mid s \in S\}$. $\square$

1.3 Ideales y Filtros

Puesto que las estructuras reticulares se pueden asociar a objetos algebraicos es natural dar una definición de la noción de ideal. Esta teoría es de gran utilidad para considerar construcciones de nuevos objetos basados en una retícula. De igual manera que la sección anterior, parte de los resultado de esta sección se basan en [8].

Definición 1.3.1. Un subconjunto $I \subseteq A$ de una semiretícula superior es *cerrado inferiormente* (también *sección inferior*) si para todo $a \in I$ y $c \in A$, $c \leq a$ implica que $c \in I$.

No todo conjunto es cerrado inferiormente, sin embargo no es muy difícil encontrar el mínimo conjunto cerrado inferiormente que lo contiene.

Definición 1.3.2. Sean A orden parcial y $S \subseteq A$. La *cerradura inferior* de S es el conjunto

$$\{a \in A \mid \ \exists s \in S, a \leq s\}.$$

A este conjunto se le denota por $\downarrow(S)$.

Definición 1.3.3. Un subconjunto no vacío $I \subseteq A$ es *ideal* si es un conjunto cerrado inferiormente y satisface que para todo $a, b \in I$ se cumple que $a \vee b \in I$.

Puesto que la semiretícula cumple ser ideal podemos definir un ideal minimal que contenga a cualquier subconjunto.

Definición 1.3.4. Sea $S \subseteq A$ un subconjunto de una semiretícula superior A. Se define

$$\langle S \rangle = \bigcap \{I \mid S \subseteq I,\ I \text{ es ideal}\}.$$

Este conjunto es el *ideal generado* por S.

Algunos ejemplos importantes son los siguientes.

Ejemplo 1.3.5. Sean A una semiretícula superior y $a \in A$, entonces $\downarrow (a) = \{b \in A \mid b \leq a\}$ es ideal. Este ideal de manera análoga a la teoría de anillos lo llamaremos *ideal principal* generado por a.

En este ejemplo para una retícula se puede ver fácilmente que para cualesquiera $a, b \in A$ se cumple que

$$\downarrow (a) \cap \downarrow (b) = \downarrow (a \wedge b), \ \langle \downarrow (a) \cup \downarrow (b) \rangle = \downarrow (a \vee b)$$

Ejemplo 1.3.6. Sean X un espacio topológico Hausdorff y $\mathcal{C}X$ el conjunto de subconjuntos cerrados de X. Si consideramos $\mathcal{K}X$ los elementos compactos de $\mathcal{C}X$ este es ideal de la retícula $(\mathcal{C}X, \cup, \cap)$.

Un hecho importante de este concepto es que la intersección arbitraria de ideales resulta ideal (justo como ocurre en la teoría de anillos).

Proposición 1.3.7. *Sean A semiretícula superior y $\mathfrak{F}$ una familia de ideales de A, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones*

(*i*) $\bigcap \mathfrak{F}$ *es ideal.*

(*ii*) *Si* $\mathfrak{F} = \{I, J\}$, *entonces* $\bigcap \mathfrak{F} = I \cap J = I \wedge J = \{i \wedge j \mid i \in I, j \in J\}$.

Demostración. (*i*) Claramente $0 \in \bigcap \mathfrak{F}$, entonces $\bigcap \mathfrak{F} \neq \emptyset$. Sean $a \in A$ e $i \in \bigcap \mathfrak{F}$ tales que $a \leq i$. Puesto que $i \in \bigcap \mathfrak{F}$ se cumple que para todo $I \in \mathfrak{F}$ se tiene que $i \in I$, luego como $a \leq i$, se cumple que $a \in I$ para todo $I \in \mathfrak{F}$ y por lo tanto $a \in \bigcap \mathfrak{F}$, luego $\bigcap \mathfrak{F}$ es cerrado inferiormente.

De manera análoga si $i, j \in \bigcap \mathfrak{F}$ se cumple que para todo $I \in \mathfrak{F}$ se tiene $i, j \in I$, entonces, como cada I es ideal, también $i \vee j \in I$ para cada $I \in \mathfrak{F}$, con lo cual $i \vee j \in \bigcap \mathfrak{F}$. De esto se concluye que $\bigcap \mathfrak{F}$ es ideal.

(*ii*) Si $k \in I \cap J$, entonces $k \in I, J$, por lo tanto $k = k \wedge k \in I \wedge J$, entonces $I \cap J \subseteq I \wedge J$. Sean $i \in I$ y $j \in J$, como $i \wedge j \leq i, j$ e I, J son cerrados inferiormente se cumple que $i \wedge j \in I, J$, por lo tanto $i \wedge j \in I \cap J$, luego $I \wedge J \subseteq I \cap J$ de donde se tiene la igualdad.

□

De hecho el inciso (ii) de la proposición anterior es cierta para conjuntos I, J cerrados inferiormente.

Así como en la teoría de anillos, los ideales reticulares están relacionados con los elementos nulos de morfismos de semiretículas, es decir con los elementos que bajo el morfismo son 0.

Lema 1.3.8. *Sean A y B semiretículas superiores, entonces*

(i) *Para cualquier $f : A \to B$ morfismo de semiretículas el conjunto $\mathcal{K}er f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$ es un ideal de A.*

(ii) *Para todo $I \subseteq A$ ideal existen una semiretícula C y un morfismo de semiretículas $f : A \to C$ tales que $I = \mathcal{K}er f$.*

(iii) *Si A es una retícula distributiva, existen una retícula distributiva C y un morfismo de retículas $f : A \to C$ tales que $I = \mathcal{K}er f$.*

Demostración. Claramente todo $f : A \to B$ morfismo de semiretícula satisface que $f(0) = 0$ por lo tanto $\mathcal{K}er f \neq \emptyset$. Por otro lado f también es morfismo de órdenes parciales puesto que el orden se puede definir mediante el operador $\vee$, usemos este hecho en (i).

(i) Veamos que $\mathcal{K}er f$ cumple las dos condiciones necesarias para ser ideal. Sean $a, b \in \mathcal{K}er f$, entonces por ser morfismo de semiretículas

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = 0 \vee 0 = 0$$

por lo tanto $a \vee b \in \mathcal{K}er f$. Por otro lado si $c \leq a$ entonces $0 \leq f(c) \leq f(a) = 0$, lo cual implica que $c \in \mathcal{K}er f$.

(ii) Definamos la relación $\equiv_I$ sobre A de la siguiente manera

$$a \equiv_I b \Leftrightarrow \text{ existen } i, j \in I, \text{ con } a \vee i = b \vee j.$$

Veamos que esta relación es de equivalencia.

Sea $a \in A$, por ser I ideal se cumple que $0 \in I$, entonces puesto que $a \vee 0 = a = a \vee 0$ se tiene que $a \equiv_I a$ y por lo tanto la relación es reflexiva.

Puesto que la definición es simétrica para cualesquiera dos elementos $a, b \in A$ se tiene que la relación es simétrica.

Sean a, b, c tales que $a \equiv_I b$ y $b \equiv_I c$, entonces existen $i, i', j, j' \in I$ tales que $a \vee i = b \vee j$ y $b \vee i' = c \vee j'$, entonces

$$a \vee (i \vee i') = (a \vee i) \vee i' = (b \vee j) \vee i' = (b \vee i') \vee j = (c \vee j') \vee j = c \vee (j' \vee j)$$

y por ser ideal I tenemos que $i \vee i', j' \vee j \in I$, por lo tanto $a \equiv_I c$.

Definamos $C = A/_{\equiv_I}$ como el conjunto de las clases de equivalencia inducidas por $\equiv_I$. La relación $\equiv_I$ cumple que para todo a, b, c, d con $a \equiv_I b$ y $c \equiv_I d$ se satisface que $a \vee c \equiv_I b \vee c \equiv_I b \vee d$. Por lo tanto, la función $\vee_C : C \times C \to C$ que para las clases $[x], [y] \in C$ se calcula de la siguiente forma

$$[x] \vee_C [y] = [x \vee y]$$

cumple estar bien definida y ser un operador que da estructura de semiretícula a C.

Definamos $f : A \to C$ como la proyección sobre las clases de equivalencia. Por lo anterior f es morfismo de semiretículas que adicionalmente satisface para $b \in A$ que

$$\begin{aligned} f(b) = [0] &\Leftrightarrow \text{ existen } i, j \in I \text{ con } b \vee i = 0 \vee j = j \\ &\Leftrightarrow \text{ existe } j \in I \text{ con } b \leq j \end{aligned}$$

pero por ser I ideal, la última condición es equivalente a que $b \in I$, entonces $\mathcal{K}er f = I$.

(*iii*) Si A es retícula distributiva tomemos $a \equiv_I b$ e $i, j \in I$ tales que $a \vee i = b \vee j$, entonces para cualquier $c \in A$ se cumple

$$(a \wedge c) \vee (i \wedge c) = (a \vee i) \wedge c = (b \vee j) \wedge c = (b \wedge c) \vee (j \wedge c).$$

Además por ser I ideal se tiene que $i \wedge c, j \wedge c \in I$, debido a que son elementos menores a i, j, respectivamente.

De lo anterior se deduce que $a \wedge c \equiv_I b \wedge c$, luego si $c \equiv_I d$, aplicando este resultado obtenemos

$$a \wedge c \equiv_I b \wedge c \equiv_I b \wedge d.$$

Por lo tanto la función $\wedge_C : C \times C \to C$ tal que para $[x], [y] \in C$ satisface

$$[x] \wedge_C [y] = [x \wedge y]$$

está bien definida.

Los operadores $\vee_C, \wedge_C$ respetan las leyes de absorción y la ley distributiva puesto que $\vee, \wedge$ las satisfacen, entonces la estructura $(C, \vee_C, \wedge_C, [0], [1])$ resulta ser una retícula distributiva.

$\square$

De manera dual a la definición de ideal se puede definir el concepto de filtro como sigue.

Definición 1.3.9. Un subconjunto $F \subseteq A$ de una semiretícula superior es *cerrado superiormente* (también *sección superior*) si para todo $a \in F$ y $c \in A$, $c \geq a$ implica que $c \in F$.

Definición 1.3.10. Un subconjunto no vacío $F \subseteq A$ es *filtro* si es un conjunto cerrado superiormente y satisface que para todo $a, b \in F$ se cumple que $a \wedge b \in F$.

Ejemplo 1.3.11. Para un elemento $a \in A$ en una semiretícula inferior A, el conjunto $\uparrow(a) = \{x \in A \mid a \leq x\}$ es un filtro. Este filtro es el *filtro principal* generado por a.

Ejemplo 1.3.12. Sean (X, τ) espacio topológico y $x \in X$ un punto. El conjunto $\mathcal{N}_x = \{U \in \tau \mid x \in U\}$ de las vecindades abiertas de x es un filtro de la retícula τ.

Un resultado dual a 1.3.8 que involucra a la noción de filtro es el siguiente.

Corolario 1.3.13. *Sean A y B semiretículas inferiores, entonces*

(i) *Para cualquier $f : A \to B$ morfismo de semiretículas, el conjunto $f^1 = \{a \in A \mid f(a) = 1\}$ es un filtro de A.*

(ii) *Para todo $F \subseteq A$ filtro existen una semiretícula C y un morfismo de semiretículas $f : A \to C$ tal que $F = f^1$*

(iii) *Si A es retícula distributiva, existen una semiretícula C y un morfismo de retículas $f : A \to C$ tal que $F = f^1$*

Demostración. Para (i) el resultado se sigue de aplicar (i) de la proposición 1.3.8 a las semiretículas superiores A' y B' obtenidas de invertir el orden a A y B.

Mientras que para (ii) e (iii) solo se hacen las construcciones de (ii) e (iii) de la proposición 1.3.8 para A' la estructura obtenida por invertir el orden a A. $\square$

Con estás definiciones introducimos la noción de ideal primo en una retícula.

Definición 1.3.14. Un subconjunto I de una retícula A es *ideal primo* si es ideal y además $F = A \setminus I$ es filtro. De manera dual un filtro F de A es *filtro primo* si su complemento es ideal.

Definición 1.3.15. Un elemento a de una retícula es *irreducible* si el ideal principal generado $\downarrow(a)$ es primo.

Ejemplo 1.3.16. Para un espacio topológico X y un punto $x \in X$, se cumple que el abierto $X \setminus \overline{\{x\}}$ es un abierto irreducible en la retícula formada por los conjuntos abiertos del espacio.

La definición de ideal primo se puede dar mediante algunas de sus equivalencias. Notemos algunas de ellas en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.17. *Para un ideal I de una retícula A son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *El complemento de I es filtro*

(ii) $1_A \notin I$ *y para todo* $a, b \in A$, $a \wedge b \in I$ *implica* $a \in I$ *o* $b \in I$.

(iii) *Existe un único morfismo de retículas* $f : A \to \{0, 1\}$ *tal que* $I = \mathcal{K}er f$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Puesto que el complemento de $F = A \setminus I$ es filtro se tiene que $1_A \in F$, por lo tanto $1_A \notin I$. Por otra parte si $a, b \notin I$, entonces $a, b \in F$ y por ser filtro $a \wedge b \in F$, entonces $a \wedge b \notin I$ lo cual es equivalente a que $a \wedge b \in I$ implica $a \in I$ o $b \in I$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Definamos $f : A \to \{0, 1\}$ como

$$f(a) = \begin{cases} 0, & \text{si } a \in I \\ 1, & \text{si } a \notin I. \end{cases}$$

Por (ii) $f(1_A) = 1$, además de que $f(0_A) = 0$ puesto que $0_A \in I$.

Sean $x, y \in A$, entonces consideremos los siguientes tres casos.

Caso 1. $f(x) = f(y) = 0$

Puesto que $x \wedge y \leq x$ y $x, y \in I$ se tiene que $x \wedge y \in I$ por ser ideal, entonces

$$f(x) \wedge f(y) = 0 = f(x \wedge y)$$

Ahora $x, y \in I$ implica que $x \vee y \in I$, por ser I ideal, entonces

$$f(x) \vee f(y) = 0 = f(x \vee y)$$

Caso 2. $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$

Puesto que $x \in I$ de la misma manera que en el caso anterior $x \wedge y \in I$, entonces

$$f(x) \wedge f(y) = 0 = f(x \wedge y)$$

Ahora $x \vee y \in I$ implica $x, y \in I$ por ser ideal, sin embargo $y \notin I$, entonces $x \vee y \notin I$, luego

$$f(x) \vee f(y) = 1 = f(x \vee y)$$

Caso 3. $f(x) = f(y) = 1$

Puesto que $x, y \notin I$ se tiene por (ii) que $x \wedge y \notin I$, entonces

$$f(x) \wedge f(y) = 1 = f(x \wedge y)$$

Ahora $x \vee y \in I$ implica $x, y \in I$ por ser ideal, pero $x.y \notin I$, por lo tanto $x \vee y \notin I$, entonces

$$f(x) \vee f(y) = 1 = f(x \vee y)$$

Por lo anterior f resulta ser morfismo de retículas y es único por que un morfismo de retículas con codominio $\{0, 1\}$ está determinado por los elementos que van a dar al 0.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sea I ideal, por (iii) existe $f : A \to \{0, 1\}$ tal que $I = \mathcal{K}erf$. Por el corolario 1.3.13. $F = f^1$ es filtro, y justamente por tomar f valores en $\{0, 1\}$ se tiene que F es complemento de I. $\square$

Por lo tanto un elemento x de una retícula es irreducible cuando para cualesquiera y, z si $x \geq y \wedge z$ implica que $x \geq y$ o $x \geq z$.

Un concepto más fuerte al de ideal y filtro primo es la noción de ideal y filtro completamente primo en una retícula completa.

Definición 1.3.18. Para una retícula completa A e $I \subset A$, decimos que I es *ideal completamente primo* (abreviado *i.c.p.*) si es ideal y además se satisface, para todo $\mathcal{P} \subseteq A$, lo siguiente:

$$\bigwedge \mathcal{P} \in I \Rightarrow \mathcal{P} \cap I \neq \emptyset$$

Definición 1.3.19. Para una retícula completa A y $F \subset A$, decimos que F es *filtro completamente primo* (abreviado *f.c.p.*) si es filtro y además se satisface, para todo $\mathcal{P} \subseteq A$, lo siguiente:

$$\bigvee \mathcal{P} \in F \Rightarrow \mathcal{P} \cap F \neq \emptyset.$$

Para esta noción, de manera similar a la proposición 1.3.17, existe una equivalencia de los filtros completamente primos, morfismos de retículas y elementos irreducibles.

Proposición 1.3.20. *Para F un subconjunto de una retícula completa A son equivalentes las afirmaciones siguientes:*

(i) *F es filtro completamente primo.*

(ii) *Existe un único morfismo de retículas $f : A \to \{0,1\}$ que abre supremos arbitrarios tal que $A \setminus F = \mathcal{K}er f$.*

(iii) *Existe un único elemento $x \in A$ irreducible tal que $A \setminus F = \downarrow (x)$.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Puesto que F es filtro completamente primo, en particular es filtro primo, entonces por la proposición 1.3.17 existe un único morfismo de retículas $f : A \to \{0,1\}$ tal que $A \setminus F = \mathcal{K}er f$. Veamos que f respeta supremos arbitrarios. Consideremos $\mathcal{P} \subseteq A$ y notemos los siguientes casos.

Caso 1. $\bigvee \mathcal{P} \in F$

Entonces por ser F filtro completamente primo existe $a \in A$ tal que $a \in \mathcal{P} \cap F$ de donde se sigue $f(a) = 1$ y por lo tanto

$$f\left(\bigvee \mathcal{P}\right) = 1 = f(a) = \bigvee \{f(b) \mid b \in \mathcal{P}\}$$

Caso 2. $\bigvee \mathcal{P} \notin F$

Si $a \in \mathcal{P} \cap F$, por ser F cerrado superiormente se tendría que $a \leq \bigvee \mathcal{P} \in F$, lo cual es una contradicción, entonces $\mathcal{P} \cap F = \emptyset$ y por lo tanto $\mathcal{P} \subseteq A \setminus F$ de donde se sigue que para todo $a \in \mathcal{P}$, $f(a) = 0$, y por lo tanto

$$\bigvee \{f(b) \mid b \in \mathcal{P}\} = 0 = f\left(\bigvee \mathcal{P}\right)$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Consideremos

$$\bigvee \mathcal{K}erf = \bigvee \{a \in A \mid f(a) = 0\} = x$$

Por respetar f supremos arbitrarios se cumple que:

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\bigvee \{a \in A \mid f(a) = 0\}\right) \\ &= \bigvee \{f(a) \mid f(a) = 0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De la definición de x se sigue que para todo $a \in A$, $f(a) = 0$ implica $a \leq x$, de manera recíproca si $b \leq x$ se tiene que por ser f morfismo de retículas

$$0 \leq f(b) \leq f(x) = 0$$

luego, para cada $b \in \downarrow (x)$ se satisface $f(b) = 0$, por lo tanto

$$A \setminus F = \mathcal{K}erf = \downarrow (x).$$

Por otro lado para cualesquiera $y, z \in A$ tales que $x \geq y \wedge z$ se satisface que

$$0 = f(x) \geq f(y \wedge z) = f(y) \wedge f(z)$$

entonces alguno de $f(y)$ y $f(z)$ es igual a cero (de lo contrario su ínfimo sería uno), sin pérdida de generalidad $f(y) = 0$, por lo tanto $x \geq y$ de donde se concluye que x es irreducible.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Claramente F es filtro por ser complemento del ideal principal primo $\downarrow (x)$. Sea $\mathcal{P} \subseteq A$ tal que $\mathcal{P} \cap F = \emptyset$, entonces usando (iii) se tiene que $\mathcal{P} \subseteq \downarrow (x)$ con x elemento irreducible, luego $\bigvee \mathcal{P} \leq x$, entonces $\bigvee \mathcal{P} \notin F$. Tomando la contrapositiva de lo anterior se concluye que F es filtro completamente primo. $\square$

No todo ideal es ideal primo, sin embargo podemos extender cualquier ideal a un ideal primo mediante una aplicación del Lema de Zorn.

Lema 1.3.21. *Sean $I \subseteq A$ ideal de una retícula distributiva A y $F \subseteq A$ filtro tal que $I \cap F = \emptyset$. Existe un ideal $\bar{I}$ maximal con respecto a la propiedad de contener a I y ser disjunto de F.*

Demostración. Consideremos $\mathfrak{I}$ la familia de ideales que contienen a I y que son disjuntos de F. Veamos que toda cadena de ideales en $\mathfrak{I}$ está acotada superiormente. Consideremos $\mathfrak{I}' = \{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cadena de ideales en $\mathfrak{I}$ indicada por Λ un orden total. Sea $I' = \bigcup \mathfrak{I}'$, veamos que I' es ideal.

Claramente I' es cerrado inferiormente por ser unión de conjuntos cerrados inferiormente.

Veamos que es cerrado por $\vee$. Sean $a, b \in I'$, entonces existen $\lambda, \mu \in \Lambda$ tales que $a \in I_\lambda$ y $b \in I_\mu$, puesto que Λ es orden total, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\lambda \leq \mu$, por lo tanto $I_\lambda \subseteq I_\mu$, entonces $a, b \in I_\mu$, entonces por ser I_μ ideal se tiene que $a \vee b \in I_\mu \subseteq I'$.

Por lo anterior I' es ideal y claramente es cota superior de $\mathfrak{I}'$, entonces por el lema de Zorn, existe un ideal maximal en $\mathfrak{I}$. $\square$

Teorema 1.3.22. *Sean $I \subseteq A$ ideal de una retícula distributiva A y $F \subseteq A$ tales que $I \cap F = \emptyset$. Entonces existe un ideal primo $\bar{I}$ tal que $I \subseteq \bar{I}$ e $\bar{I} \cap F = \emptyset$.*

Demostración. Consideremos $\bar{I}$ un ideal maximal dado por el lema 1.3.21 que contiene a I y es disjunto de F. Sean $x, y \in A$ tales que $x \wedge y \in \bar{I}$. Consideremos

$$J_x = \{z \vee i \mid i \in \bar{I}, z \leq x\} \text{ y } J_y = \{z \vee i \mid i \in \bar{I}, z \leq y\}.$$

Veamos que J_x es un ideal que contiene a $\bar{I}$. Claramente $\bar{I} \subseteq J_x$ puesto que para cada $i \in \bar{I}$ se cumple que $i = 0 \vee i$, el cual es elemento de J_x.

Sean $b \in A$ y $z \vee i \in J_x$ tal que $b \leq z \vee i$, entonces

$$b = b \wedge (z \vee i) = (b \wedge z) \vee (b \wedge i)$$

el cual pertenece a J_x por tenerse que $b \wedge z \leq z \leq x$ y $b \wedge i \in \bar{I}$ por ser $\bar{I}$ cerrado inferiormente, por lo tanto J_x es cerrado inferiormente.

Por otro lado para $z, z' \leq x$ e $i, j \in \bar{I}$, z, z' están acotados superiormente por x se tiene que $z \vee z' \leq x$ y además $i \vee j \in \bar{I}$ por ser ideal $\bar{I}$, entonces

$$(z \vee i) \vee (z' \vee j) = (z \vee z') \vee (i \vee j)$$

pertenece a J_x, de donde se concluye que J_x es ideal. De manera análoga J_y es un ideal que contiene a $\bar{I}$.

Si $J_x \cap F \neq \emptyset$ y $J_y \cap F \neq \emptyset$ entonces existen $x' \leq x$, $y' \leq y$ y $j, k \in I$ tales que $x' \vee j, y' \vee k \in F$, luego por ser filtro tenemos que

$$(x' \vee j) \wedge (y' \vee k) = (x' \wedge y') \vee (x' \wedge k) \vee (y' \wedge j) \vee (j \wedge k)$$

pertenece a F, sin embargo también pertenece a $\bar{I}$ por ser supremo de elementos en $\bar{I}$, luego $\bar{I} \cap F \neq \emptyset$ lo cual es absurdo, entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $J_x \cap F = \emptyset$ y por lo tanto $J_x \in \Im$.

Puesto que $\bar{I}$ es maximal e $\bar{I} \subseteq J_x$ se tiene que $J_x = \bar{I}$, entonces $x = x \vee 0 \in J_x = \bar{I}$, por lo tanto $\bar{I}$ es primo. $\square$

Cuando un ideal I es maximal con respecto a ser ajeno al filtro $F = \{1\}$, diremos que I es ideal maximal. Del teorema anterior podemos concluir el siguiente corolario.

Corolario 1.3.23. *Sean A retícula distributiva e $I \subseteq A$ ideal maximal, entonces I es ideal primo.*

Demostración. Aplicando el teorema al ideal I y al filtro $F = \{1\}$ tenemos que $\bar{I}$ es primo, sin embargo por ser maximal I se cumple que $I = \bar{I}$, entonces I es primo. $\square$

El corolario anterior asegura que todo ideal maximal es primo, sin embargo no se cumple en general que para cualquier retícula distributiva A todo ideal primo es maximal.

Un hecho importante para la clase de álgebra booleanas es que sí se cumple que la noción de ideal maximal es equivalente a la de ideal primo.

Teorema 1.3.24. *Sean B álgebra booleana e $I \subseteq B$ ideal. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones*

(i) $\forall a \in B$, $a \in I$ *ó* $\neg a \in I$.

(ii) *I es ideal maximal*

(iii) *I es ideal primo*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que $b \notin I$, entonces $\neg b \in I$. Sea $J = \langle I \cup \{b\} \rangle$, puesto que $\neg b, b \in J$ se cumple que $b \vee \neg b = 1 \in J$, por lo tanto $J = B$. El ideal I es propio puesto que $0 \in I$ y por hipótesis se tiene que $\neg 0 = 1 \notin I$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Esto es justamente el corolario 1.3.23.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sea $a \in B$, entonces puesto que $a \wedge \neg a = 0 \in I$ se cumple que $a \in I$ ó $\neg a \in I$ por ser primo I. $\square$

Para concluir esta sección veamos que los ideales de una retícula distributiva ordenados con la contención cumplen ser una retícula que satisface la *LDI*. Para ello mostremos el siguiente lema.

Lema 1.3.25. *Sean A retícula distributiva y $S \subseteq A$, entonces se cumple que*

$$\langle S \rangle = \left\{ \bigvee T \mid T \text{ es finito y } T \subseteq \downarrow (S) \right\}.$$

Demostración. Veamos que el siguiente conjunto

$$J = \left\{ \bigvee T \mid T \text{ es finito y } \ T \subseteq\downarrow(S) \right\}$$

es un ideal.

Sean T finito tal que $T \subseteq\downarrow (S)$ y $a \in A$ tal que $a \leq \bigvee T$, entonces $a \wedge (\bigvee T) = a$, por otro lado, al ser T finito y A retícula distributiva, se cumple que

$$a \wedge \left(\bigvee T \right) = \bigvee \{a \wedge t \mid t \in T\}.$$

Puesto que toda $t \in T$ es menor que algún elemento en S y $a \wedge t \leq t$ se tiene que $a = \bigvee\{a \wedge t \mid t \in T\}$ y $\{a \wedge t \mid t \in T\} \subseteq\downarrow (S)$, entonces $a \in J$.

Sean $T, U \subseteq\downarrow (S)$ finitos, entonces $T \cup U \subseteq\downarrow (S)$, luego

$$\left(\bigvee T \right) \vee \left(\bigvee U \right) = \bigvee (T \cup U)$$

por lo tanto J es cerrado por $\vee$, entonces J es ideal.

Puesto que para todo elemento $s \in S$ se cumple que $s = \bigvee\{s\}$ se cumple que $S \subseteq J$. Además es claro que cualquier ideal que contenga a S debe contener a J, por lo tanto $\langle S \rangle = J$. $\square$

Definición 1.3.26. Para una retícula A se denota por $\mathcal{I}(A)$ el conjunto de todos los ideales de A.

Teorema 1.3.27. *Sea A retícula distributiva. Entonces la quinteta $(\mathcal{I}(A), \langle \bigcup \_\_ \rangle, \bigcap, \{0\}, A)$ es retícula completa que satisface la LDI.*

Demostración. Sea $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{I}A$. Por la proposición 1.3.7 se tiene que $\bigcap \mathfrak{I}$ es ínfimo de $\mathfrak{I}$ y por la definición de ideal generado se tiene que $\langle \bigcup \mathfrak{I} \rangle$ es supremo de $\mathfrak{I}$ en $\mathcal{I}(A)$, además para todo $I \in \mathcal{I}(A)$ se cumple $\{0\} \subseteq I \subseteq A$, por lo tanto $\{0\}, A$ son el mínimo y el máximo, respectivamente de $\mathcal{I}(A)$. Resta probar que $\mathcal{I}(A)$ satisface la *LDI*. Sean $I \in \mathcal{I}(A)$ y $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{I}(A)$, entonces por (ii) de 1.3.7, el lema 1.3.25 y del hecho de que $\bigcup \mathfrak{F}$ coincide con su cerradura inferior se tiene que

$$\begin{aligned}
I \cap \left\langle \bigcup \mathfrak{F} \right\rangle &= I \wedge \left\langle \bigcup \mathfrak{F} \right\rangle \\
&= \left\{ i \wedge \left(\bigvee T \right) \mid i \in I,\, T \subseteq \bigcup \mathfrak{F},\, T \text{ finito} \right\} \\
&= \left\{ \bigvee \{ i \wedge t \mid t \in T\} \mid i \in I,\, T \subseteq \bigcup \mathfrak{F},\, T \text{ finito} \right\}
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\left\langle\bigcup\{I\cap J\mid J\in\mathfrak{F}\}\right\rangle &= \left\langle I\cap\left(\bigcup\mathfrak{F}\right)\right\rangle\\ &= \left\langle I\wedge\left(\bigcup\mathfrak{F}\right)\right\rangle\\ &= \left\langle\left\{i\wedge t\mid i\in I, t\in\bigcup\mathfrak{F}\right\}\right\rangle\\ &= \left\{\bigvee\{i_p\wedge t_p\mid p\in\{1,2,\ldots,n\}\}\mid i_p\in I, t_p\in\bigcup\mathfrak{F}\right\}\end{aligned}$$

Entonces consideremos $i\in I$, $T\subseteq\bigcup\mathfrak{F}$ con T finito con n elementos, luego $\bigvee\{i\wedge t\mid t\in T\}$ se puede representar como

$$\bigvee\{i_p\wedge t_p\mid p\in\{1,2,\ldots,n\}, i_p=i, t_p \text{ son los elementos de } T\}.$$

Por lo tanto de las representaciones de $I\cap\langle\bigcup\mathfrak{F}\rangle$ y $\langle\bigcup\{I\cap J\mid J\in\mathfrak{F}\}\rangle$ se concluye que $I\cap\langle\bigcup\mathfrak{F}\rangle\subseteq\langle\bigcup\{I\cap J\mid J\in\mathfrak{F}\}\rangle$.

Para la otra contención veamos que para todo $J\in\mathfrak{F}$ se cumple $J\subseteq\langle\bigcup\mathfrak{F}\rangle$, entonces

$$\begin{aligned}I\cap J\subseteq I\cap\left\langle\bigcup\mathfrak{F}\right\rangle &\Rightarrow \bigcup\{I\cap J\mid J\in\mathfrak{F}\}\subseteq I\cap\left\langle\bigcup\mathfrak{F}\right\rangle\\ &\Rightarrow \left\langle\bigcup\{I\cap J\mid J\in\mathfrak{F}\}\right\rangle\subseteq I\cap\left\langle\bigcup\mathfrak{F}\right\rangle\end{aligned}$$

luego $\mathcal{I}(A)$ satisface la LDI. □

1.4 Categorías

En esta sección se definen conceptos fundamentales de la teoría de categorías además de demostrar algunos resultados importantes de esta teoría. Las definiciones y resultados principales de esta sección se inspiran en [5], miestras que una buena variedad de los ejemplos se pueden encontrar en [4].

Definición 1.4.1. Una *precategoría* es una pareja ordenada $(\mathscr{A},\mathscr{F})$ con $\mathscr{A}$ la clase de los objetos de la precategoría, $\mathscr{F}$ la clase de flechas o morfismos de la precategoría junto con dos funcionales $dom, cod:\mathscr{F}\to\mathscr{A}$ dos funcionales llamados dominio y codominio, respectivamente.

Definimos para una precategoría $(\mathscr{A},\mathscr{F})$ los siguientes conceptos

(*i*) $A\times_\circ A=\{(f,g)\in\mathscr{F}\times\mathscr{F}\mid cod(f)=dom(g)\}$

(*ii*) Para $a, b \in \mathscr{A}$, $Hom_{\mathscr{A}}(a,b) = \{f \in \mathscr{F} \mid dom(f) = a, cod(f) = b\}$

Una *categoría* es una precategoría $(\mathscr{A}, \mathscr{F})$ equipada con dos funcionales $\circ : A \times_\circ A \to \mathscr{F}$ e $id : \mathscr{A} \to \mathscr{F}$ que cumplen

- $\circ(f,g) = g \circ f \in Hom_{\mathscr{A}}(dom(f), cod(g))$,
- $dom(id(a)) = cod(id(a)) = a$,

que adicionalmente satisfacen los axiomas

- (Asociatividad) Para cualesquiera $f, g, h \in \mathscr{F}$ tales que $(f,g),(g,h) \in \mathscr{A} \times_\circ \mathscr{A}$ se cumple que
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$
- (La ley de la identidad) Para cada $a \in \mathscr{A}$ y $f, g \in \mathscr{F}$ con $(f,g) \in \mathscr{A} \times_\circ \mathscr{A}$ y $cod(f) = dom(g) = a$ se satisface que
$$id(a) \circ f = f \text{ y } g \circ id(a) = g.$$

Para referirnos a una categoría $(\mathscr{A}, \mathscr{F})$ solo escribiremos $\mathscr{A}$ la clase de los objetos y de ser necesario nos referiremos a $\mathscr{F}$ como la clase de morfismos, por otro lado $id(a)$ también se denotará por id_a.

Ejemplo 1.4.2. La clase de todos los conjuntos y morfismos funciones de conjuntos es una categoría. Esta categoría se denota por **SET**.

Ejemplo 1.4.3. La clase de todos los órdenes parciales con morfismos funciones que respetan orden es una categoría. Esta categoría se denota por **POS**.

Ejemplo 1.4.4. La clase de todas las retículas superiores y de retículas inferiores con morfismos funciones que respetan los operadores supremo e ínfimo, respectivamente, son categorías. Estas categorías se denotan por **USLat** y **DSLat**, respectivamente.

Ejemplo 1.4.5. Un orden parcial $(A, \leq)$ tiene estructura de categoría con objetos los elementos de A y flechas dadas por lo siguiente

$$Hom(a,b) = \begin{cases} \leq, \text{ si } a \leq b \\ \emptyset \text{ si } a \not\leq b \end{cases}.$$

Esta estructura es categoría con la noción de componer justamente la transitividad del orden. Los morfismos de una categoría son las generalizaciones de funciones entre conjuntos.

Ejemplo 1.4.6. La clase de retículas con morfismos de retículas es categoría. A esta categoría se le denota por **Lat**. Si los objetos de esta categoría se restringen a las retículas distributivas la categoría se denota por **DLat**. Y para la restricción a las álgebras booleanas esta categoría se denota por **Bool**.

Ejemplo 1.4.7. La clase de espacios topológicos con morfismos funciones continuas es una categoría. Esta categoría se denota por **Top**.

Ejemplo 1.4.8. Dada un categoría $\mathscr{C}$ se define $\mathscr{C}^{op}$ como la categoría que coincide con los objetos y morfismos de $\mathscr{C}$ pero tal que las funciones dom, cod se invierten, es decir que $dom_{\mathscr{C}^{op}}(f) = cod_{\mathscr{C}}(f)$ y $cod_{\mathscr{C}^{op}}(f) = dom_{\mathscr{C}}(f)$ para cualquier morfismo, esta flecha con dominio y codominio intercambiado se denota por f^{op}. La composición de f^{op} y g^{op} es $f^{op} \circ g^{op} = (g \circ f)^{op}$.

En una categoría $\mathscr{C}$ se definen algunos morfismos especiales en base de que cumplan propiedades específicas.

Definición 1.4.9. Sean $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ una categoría y $f \in \mathscr{F}$.

- Se dice que f es *epimorfismo* si para todo par de morfismos g y h se satisface que
$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.$$
- Se dice que f es *monomorfismo* si para todo par de morfismos g y h se satisface que
$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h.$$
- Se dice que f es *isomorfismo* si existe $g \in \mathscr{F}$ tal que $domg = codf$, $codg = domf$ y se satisface
$$f \circ g = id_{domg} \quad g \circ f = id_{domf}.$$

- Se dice que f es *epimorfismo extremal* si es epimorfismo y se cumple que para cualquier factorización $f = g \circ h$ con g monomorfismo ocurre que g es isomorfismo.

- Se dice que f es *monomorfismo extremal* si es monomorfismo y se cumple que para cualquier factorización $f = g \circ h$ con h epimorfismo ocurre que h es isomorfismo.

Un elemento de $Hom_{\mathscr{C}}(a, b)$ se denota por $f : a \to b$. Con esta notación se representan gráficamente objetos y morfismos. Por ejemplo para $f : a \to b$, $g : b \to c$ se representan los morfismo y su composición mediante el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "g"] & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & c. \end{tikzcd}$$

En general en un diagrama, una flecha seguida de otra flecha (la conexión de flechas) representa el morfismo obtenido de componer. Diremos que un diagrama conmuta si todas las ecuaciones dadas por conexiones de flechas son iguales.

Con estos diagramas también se representan igualdades con ecuaciones de morfismo, por ejemplo si f, g, h, k son morfismos tales que $f \circ g = h \circ k$, la ecuación anterior es equivalente a decir que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r, "k"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

donde cada punto representa los respectivos objetos domino y codomino de las flechas involucradas.

Así como en la teoría de conjuntos las funciones son objetos que relacionan a los conjuntos, definimos una noción similar para categorías.

Definición 1.4.10. Sean $(\mathscr{C}, \mathscr{F}), (\mathscr{D}, \mathscr{G})$ categorías. Decimos que una funcional $\mathcal{F}$ es *funtor covariante* de $\mathscr{C}$ en $\mathscr{D}$, denotado por $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, si se satisfacen las siguientes afirmaciones:

(i) $\mathcal{F}$ tiene clase dominio $\mathscr{C} \cup \mathscr{F}$ y clase codominio $\mathscr{D} \cup \mathscr{G}$.

(ii) $\mathcal{F}(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{D}$ y $\mathcal{F}(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{G}$.

(iii) Para toda $f : a \to b$, se cumple $\mathcal{F}f \in Hom_{\mathscr{D}}(F(a), F(b))$.

(iv) Para cualesquiera $f, g \in \mathscr{F}$ con $(f, g) \in \mathscr{C} \times_{\circ} \mathscr{C}$ se satisface $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$.

(v) Para toda $c \in \mathscr{C}$ se tiene que $\mathcal{F}(id(c)) = id(\mathcal{F}(c))$.

Para $a \in \mathscr{C}$ y $f \in \mathscr{F}$ a la evaluación de $\mathcal{F}$ en a y f se denota también como $\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}a$ y $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}f$, respectivamente.

Si en *(iii)* de la definición anterior se voltea el orden de las entradas en el Hom y en *(iv)* se invierte la composición de las flechas, se dice que $\mathcal{F}$ es *funtor contravariante*. A partir de ahora todos los funtores considerados serán covariantes a menos que se diga lo contrario.

Ejemplo 1.4.11. Para cualquier categoría de objetos con cierta estructura la asignación que es constante pero olvida estructura es funtor. A este funtor en general se le llama el *el funtor que olvida*.

Ejemplo 1.4.12. Para una categoría $\mathscr{C}$ y un objeto de la categoría $A \in \mathscr{C}$ la funcional $Hom(A, \_\_) : \mathscr{C} \to \mathbf{SET}$ que a cada objeto $B \in \mathscr{C}$ le asigna el conjunto $Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ y a cada flecha $f : B \to C$ le asocia la función entre conjuntos $f \circ \_\_ : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{C}}(A, C)$ es funtor. Este funtor se denota por $Hom(A, \_\_)$.

Ejemplo 1.4.13. En topología algebraica la asiganción a un espacio topológico (X, x_0) con un punto distinguido con $\pi(X, x_0)$ su grupo fundamental es un funtor que a una función continua $f : X \to Y$ le asocia la función $\pi(f) : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, y_0)$ tal que

$$\pi(f)[\alpha] = [f \circ \alpha].$$

Ejemplo 1.4.14. Para una categoría $\mathscr{C}$ el funtor $\mathcal{O}p : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{op}$ que en cada objeto es constante y cada flecha $f : A \to B$ le asigna la flecha opuesta $f^{op} : B \to A$ es funtor contravariante.

Ejemplo 1.4.15. La funcional $\mathcal{I}$: **DLat** $\to$ **CLat** que a cada retícula distributiva D le asocia $\mathcal{I}A$ el conjunto de sus ideales y a cada morfismo de retículas distributivas $f : A \to B$ la asocia $f^{-1} : \mathcal{I}B \to \mathcal{I}A$ es un funtor. Este funtor es llamado *funtor ideal*.

Los funtores así como las funciones pueden componerse. Algo a notar es que aplicar un funtor seguido de otro sigue siendo funtor por respetarse las identidades y las composiciones.

Proposición 1.4.16. *Sean $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$ categorías y $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $\mathcal{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ funtores covariantes. La funcional de la categoría $\mathscr{C}$ a la categoría $\mathscr{E}$ que para cada $a \in \mathscr{C}$ y f morfismo de $\mathscr{C}$ asocia a el objeto $\mathcal{G}(\mathcal{F}(a))$ y el morfismo $\mathcal{G}(\mathcal{F}(f))$ de $\mathscr{E}$ es funtor. A este funtor se le llama funtor composición de $\mathcal{F}$ con $\mathcal{G}$ el cual se denota por $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$.*

Demostración. Veamos que para cualquier $a \in \mathscr{C}$, se cumple

$$(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(id_a) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(id_a)) = \mathcal{G}(id_{\mathcal{F}a}) = id_{\mathcal{G}(\mathcal{F}a)} = id_{(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})a}.$$

Entonces $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ respeta identidades.

Por otro lado para f, g morfismos de $\mathscr{C}$, tales que tiene sentido la composición $g \circ f$, se satisface

$$\begin{aligned}(\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(g \circ f) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(g \circ f)) &= \mathcal{G}(\mathcal{F}g \circ \mathcal{F}f)\\ &= \mathcal{G}(\mathcal{F}g) \circ \mathcal{G}(\mathcal{F}f)\\ &= ((\mathcal{G} \circ \mathcal{F})g) \circ ((\mathcal{G} \circ \mathcal{F})f)\end{aligned}$$

por lo tanto $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ respeta la composición de donde se sigue que es funtor. □

Al funtor $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ también se le denota por $\mathcal{G}\mathcal{F}$.

Otro concepto fundamental es el de transformación natural, la cual es una noción de comparación entre funtores.

Definición 1.4.17. Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores entre las categorías $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ y $(\mathscr{D}, \mathscr{G})$. Una *transformación natural* de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$, denotada por $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, es una funcional $\alpha : \mathscr{C} \to \mathscr{G}$ tal que satisface

(i) Para toda $a \in \mathscr{C}$, $\alpha(a) = \alpha_a \in Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}(a), \mathcal{G}(a))$.

(ii) Para cualesquiera $a, b \in \mathscr{C}$ y $f \in Hom_{\mathscr{C}}(a, b)$ se cumple que $\mathcal{G}(f) \circ \alpha_a = \alpha_b \circ \mathcal{F}(f)$.

Una transformación natural $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un *isomorfismo natural* cuando α es una familia de isomorfismos de la categoría $\mathscr{D}$. Dos categorías $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ son *equivalentes* si existen funtores $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $\mathcal{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ e isomorfismos naturales $\alpha : \mathcal{F} \circ \mathcal{G} \to I_{\mathscr{C}}$, $\beta : I_{\mathscr{D}} \to \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$. Por otro lado si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son funtores contravariantes las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son *duales.*

Ejemplo 1.4.18. Para una categoría arbitraria $\mathscr{C}$ y dos objetos $A, B \in \mathscr{C}$ los funtores $Hom(A, \_)$ y $Hom(B, \_)$ están relacionados naturalmente para cualquier flecha $f : B \to A$, es decir que la familia de flechas $\{f_C = \_ \circ f \mid C \in \mathscr{C}\}$ es una transformación natural. Esto se sigue puesto que el siguiente diagrama cunmuta para cada $g : C \to C'$ por la asociatividad de la composición

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{C}}(A,C) \arrow[r, "f_C = _\circ f"] \arrow[d, "g\circ_"'] & Hom_{\mathscr{C}}(A,C) \arrow[d, "g\circ_"] \\
Hom_{\mathscr{C}}(A,C') \arrow[r, "f'_C = _\circ f"] & Hom_{\mathscr{C}}(A,C')
\end{tikzcd}$$

Una transformación natural es una familia de flechas que es *natural* en los objetos de la categoría $\mathscr{C}$, es decir que se satisface (ii). Esto es equivalente a que para cualesquiera $a, b \in \mathscr{C}$ y $f \in Hom_{\mathscr{C}}(a, b)$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\alpha_a"] \arrow[d, "\mathcal{F}f"'] & Ga \arrow[d, "\mathcal{G}f"] \\
Fb \arrow[r, "\alpha_b"'] & Gb.
\end{tikzcd}$$

Así como en los funtores existe una composición, en las transformaciones naturales también la hay.

Proposición 1.4.19. *Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D}$ dos categorías, $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtores y $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, $\beta : \mathcal{G} \to H$ transformaciones naturales, entonces se cumple que la familia*

$$\{\beta_a \circ \alpha_a : \mathcal{F}a \to \mathcal{H}a \mid a \in \mathscr{C}\}$$

es transformación natural de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{H}$. A esta transformación natural se le denota por $\beta \circ \alpha$, la composición vertical de transformaciones naturales.

Demostración. Claramente para toda $a \in \mathscr{C}$ se tiene que $(\beta \circ \alpha)(a) = \beta_a \circ \alpha_a \in Hom_{\mathscr{D}}(Fa, Ha)$. Sean $a, b \in \mathscr{C}$ y $f : a \to b$ morfismo. De la naturalidad de β y α, los cuadrado izquierdo y derecho del siguiente diagrama conmutan

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}a \arrow[r, "\alpha_a"] \arrow[d, "\mathcal{F}f"'] & \mathcal{G}a \arrow[r, "\beta_a"] \arrow[d, "\mathcal{G}f"'] & \mathcal{H}a \arrow[d, "\mathcal{H}f"] \\ \mathcal{F}b \arrow[r, "\alpha_b"'] & \mathcal{G}b \arrow[r, "\beta_b"'] & \mathcal{H}b \end{tikzcd}$$

entonces podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}f \circ (\beta_a \circ \alpha_a) &= (\mathcal{H}f \circ \beta_a) \circ \alpha_a \\ &= (\beta_b \circ \mathcal{G}f) \circ \alpha_a \\ &= \beta_b \circ (\mathcal{G}f \circ \alpha_a) \\ &= \beta_b \circ (\alpha_b \circ \mathcal{F}f) \\ &= (\beta_b \circ \alpha_b) \circ \mathcal{F}f \end{aligned}$$

por lo tanto el rectángulo grande conmuta, entonces $\beta \circ \alpha$ es transformación natural. □

A diferencia de los funtores, las transformaciones naturales tienen una segunda composición.

Proposición 1.4.20. *Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$ categorías, $\mathcal{F}, \mathcal{H} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $\mathcal{G}, \mathcal{K} : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ funtores y $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ y $\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{K}$ trasformaciones naturales. Entonces la familia de flechas $\{\mathcal{K}\alpha_a \circ \beta_{\mathcal{F}a} \mid a \in \mathscr{C}\}$ es transformación natural del funtor $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ al funtor $\mathcal{H} \circ \mathcal{K}$. A esta transformación se le denota por $\beta \bullet \alpha$, la composición horizontal de transformaciones naturales.*

Demostración. Primero notemos que por la naturalidad de β, para todo $a, b \in \mathscr{C}$ y flecha $f : a \to b$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}\mathcal{F}a \arrow[r, "\beta_{\mathcal{F}a}"] \arrow[d, "\mathcal{H}\mathcal{F}f"'] & \mathcal{K}\mathcal{F}a \arrow[d, "\mathcal{K}\mathcal{F}f"] \\ \mathcal{H}\mathcal{F}b \arrow[r, "\beta_{\mathcal{F}b}"'] & \mathcal{K}\mathcal{F}b. \end{tikzcd}$$

Por otro lado de la naturalidad de α, en los diagramas siguientes el primero conmuta. Puesto que $\mathcal{K}$ preserva las composiciones, al aplicar $\mathcal{K}$ al primer diagrama el segundo diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}a \arrow[r, "\alpha_a"] \arrow[d, "\mathcal{F}f"'] & \mathcal{G}a \arrow[d, "\mathcal{G}f"] & {} \arrow[r, mapsto, "\mathcal{K}"] & {} & \mathcal{K}\mathcal{F}a \arrow[r, "\mathcal{K}\alpha_a"] \arrow[d, "\mathcal{K}\mathcal{F}f"'] & \mathcal{K}\mathcal{G}a \arrow[d, "\mathcal{K}\mathcal{G}f"] \\
\mathcal{F}b \arrow[r, "\alpha_b"'] & \mathcal{G}b & & & \mathcal{K}\mathcal{F}b \arrow[r, "\alpha_b"'] & \mathcal{K}\mathcal{G}b.
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto el cuadrado izquierdo y el cuadrado derecho del siguiente diagrama conmutan

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}\mathcal{F}a \arrow[r, "\beta_{\mathcal{F}a}"] \arrow[d, "\mathcal{H}\mathcal{F}f"'] & \mathcal{K}\mathcal{F}a \arrow[r, "\mathcal{K}\alpha_a"] \arrow[d, "\mathcal{K}\mathcal{F}f"'] & \mathcal{K}\mathcal{G}a \arrow[d, "\mathcal{K}\mathcal{G}f"] \\
\mathcal{H}\mathcal{F}b \arrow[r, "\beta_{\mathcal{F}b}"'] & \mathcal{K}\mathcal{F}b \arrow[r, "\alpha_b"'] & \mathcal{K}\mathcal{G}b
\end{tikzcd}$$

de donde se sigue que el rectángulo grande conmuta, luego $\beta \bullet \alpha$ es natural. $\square$

Algo importante a notar es que de la naturalidad de β el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}\mathcal{F}a \arrow[r, "\beta_{\mathcal{F}a}"] \arrow[d, "\mathcal{H}\alpha_a"'] & \mathcal{K}\mathcal{F}a \arrow[d, "\mathcal{K}\alpha_a"] \\
\mathcal{H}\mathcal{G}a \arrow[r, "\beta_{\mathcal{G}a}"'] & \mathcal{K}\mathcal{G}a
\end{tikzcd}$$

por lo tanto $\mathcal{K}\alpha_a \circ \beta_{\mathcal{F}a} = \beta_{\mathcal{G}a} \circ \mathcal{H}\alpha_a$, entonces la trasformación $\beta \bullet \alpha$ tiene dos definiciones equivalentes en función de los funtores involucrados.

La idea de naturalidad es básicamente contar con morfismos que cumplan la igualdad en ecuaciones de morfismos.

Un par de conceptos que se puede definir en categorías y que generaliza ideas de funciones que respetan alguna propiedad de manera universal son los siguientes.

Definición 1.4.21. Sean $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ funtor y $c \in \mathscr{D}$. Una *flecha universal* de c a $\mathcal{F}$ es un par ordenado (r, u) con $r \in \mathscr{C}$ y $u : c \to \mathcal{F}r$ morfismo tal que para todo $d \in \mathscr{C}$ y morfismo $f : c \to \mathcal{F}d$, existe un único morfismo $f' : r \to d$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}r \arrow[dd, dashed, "\mathcal{F}f'"] & & r \arrow[dd, dashed, "f'"] \\
c \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & & \\
 & \mathcal{F}d & & d.
\end{tikzcd}$$

De manera dual, una flecha universal de $\mathcal{F}$ a c es una pareja (r, u) con $r \in \mathscr{C}$ y $u : \mathcal{F}r \to c$ morfismo tal que para todo $d \in \mathscr{C}$ y morfismo $g : \mathcal{F}c \to d$, existe un único morfismo $f' : d \to r$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}r \arrow[dl, "u"'] & & r \\ c & & & \\ & \mathcal{F}d \arrow[ul, "g"] \arrow[uu, dashed, "\mathcal{F}g'"'] & & d. \arrow[uu, dashed, "g'"'] \end{tikzcd}$$

Una caracterización de la noción de flecha universal está dada por el siguiente teorema.

Teorema 1.4.22. *Sean $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ y $(\mathscr{D}, \mathscr{G})$ categorías. Para un funtor $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ el par (r, u) es una flecha universal de c a $\mathcal{F}$ si y sólo si para toda $d \in \mathscr{C}$ la función*

$$\phi_d : Hom_{\mathscr{C}}(r, d) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(c, \mathcal{F}d)$$

$$f \longmapsto \mathcal{F}f \circ u$$

es una biyección entre los conjuntos $Hom_{\mathscr{C}}(r, d)$ y $Hom_{\mathscr{D}}(c, \mathcal{F}d)$ que es natural en d, es decir que para todo $d, d' \in \mathscr{C}$ y $f : d \to d'$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(r, d) \arrow[r, "\phi_d"] \arrow[d, "f\circ\_"] & Hom_{\mathscr{D}}(c, \mathcal{F}d) \arrow[d, "\mathcal{F}f\circ\_"] \\ Hom_{\mathscr{C}}(r, d') \arrow[r, "\phi_{d'}"'] & Hom_{\mathscr{D}}(c, \mathcal{F}d') \end{tikzcd}$$

donde $f \circ \_$ y $\mathcal{F}f \circ \_$ es componer con f y $\mathcal{F}f$, respectivamente.

De manera recíproca si para $r \in \mathscr{C}$ y $c \in \mathscr{D}$ se tiene para toda $d \in \mathscr{C}$ una ϕ_d biyección de $Hom_{\mathscr{C}}(r, d)$ y $Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}r, \mathcal{F}d)$ que es natural en el sentido del diagrama anterior, entonces existe una única flecha $u : c \to \mathcal{F}r$ que hace al par (r, u) una flecha universal de c a $\mathcal{F}$ y que define a ϕ_d para toda d.

Demostración. La afirmación de que (r, u) es flecha universal de c a $\mathcal{F}$ es justamente que ϕ_d sea biyección. Ahora puesto que el funtor $\mathcal{F}$ respeta composiciones se tiene que para cualesquiera$f : d \to d'$ y $g : r \to d$ se cumple que $\mathcal{F}(f \circ g) \circ u = \mathcal{F}f \circ (\mathcal{F}g \circ u)$ que se puede rescribir como

$$(\phi_{d'} \circ (f \circ \_\_))(g) = ((\mathcal{F}f \circ \_\_) \circ \phi_d)(g)$$

que es justamente la naturalidad.

Para la segunda parte del teorema sea $u = \phi_r(id_r)$, veamos que este morfismo hace al par (r, u) una flecha universal. Sean $d \in \mathscr{C}$ y $f : c \to \mathcal{F}d$. Por la naturalidad de ϕ, para todo morfismo $g : r \to d$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(r,r) \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "g\circ\_"] & Hom_{\mathscr{D}}(c,\mathcal{F}r) \arrow[d, "\mathcal{F}g\circ\_"] \\ Hom_{\mathscr{C}}(r,d) \arrow[r, "\phi_d"'] & Hom_{\mathscr{D}}(c,\mathcal{F}d) \end{tikzcd}$$

conmuta, en particular evaluando en id_r se concluye que

$$\phi_d(g) = \phi_d(g \circ id_r) = \mathcal{F}g \circ \phi_r(id_r) = \mathcal{F}g \circ u.$$

Por ser ϕ_d biyección existe un único $f' : r \to d$ tal que $\phi_d(f') = f$ pero por lo anterior $\phi_d(f') = \mathcal{F}f' \circ u$, entonces existe un único f' tal que $f = \mathcal{F}f' \circ u$ que es justamente que u sea flecha universal. La unicidad se sigue de que u debe de ser, según la definición de ϕ en base de la flecha universal, justamente $\phi_r(id_r)$ la cual es única por ser biyección ϕ_r. $\square$

Con este teorema podemos concluir el siguiente corolario, que resulta ser el teorema dual.

Corolario 1.4.23. *Sean $(\mathscr{C},\mathscr{F})$ y $(\mathscr{D},\mathscr{G})$ categorías. Para un funtor $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ el par (r,u) es una flecha universal de $\mathcal{F}$ a c si y sólo si para cada $d \in \mathscr{C}$ la función*

$$\phi_d : Hom_{\mathscr{C}}(d,r) \longrightarrow Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}d,c)$$

$$g \longmapsto u \circ \mathcal{F}g$$

es una biyección entre los conjuntos $Hom_{\mathscr{C}}(d,r)$ y $Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}d,c)$ que es natural en d, es decir que para todo $d,d' \in \mathscr{C}$ y $f : d \to d'$ el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(d,r) \arrow[r, "\phi_d"] & Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}d,c) \\ Hom_{\mathscr{C}}(d',r) \arrow[r, "\phi_{d'}"'] \arrow[u, "\_\circ f"] & Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}d',c) \arrow[u, "\_\circ\mathcal{F}f"'] \end{tikzcd}$$

donde $\_\circ f$ y $\_\circ \mathcal{F}f$ es precomponer con f y $\mathcal{F}f$, respectivamente.

De manera recíproca si para $r \in \mathscr{C}$ y $c \in \mathscr{D}$ se tiene para toda $d \in \mathscr{C}$ una ϕ_d biyección de $Hom_{\mathscr{C}}(d,r)$ y $Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}d,\mathcal{F}r)$ que es natural en el sentido del diagrama anterior, entonces existe una única flecha $u : \mathcal{F}r \to c$ que hace al par (r,u) una flecha universal de c a $\mathcal{F}$ y que define a ϕ_d para toda d.

Demostración. Aplicando el teorema 1.4.22 a las categorías $\mathscr{C}^{op}$ y $\mathscr{D}^{op}$, al funtor $\mathcal{F}^{op}: \mathscr{C}^{op} \to \mathscr{D}^{op}$ y a la pareja (r, u^{op}) y dualizando. $\square$

Con la noción de flechas universales podemos definir una generalización de la unión e intersección conjuntista para las estructuras categóricas.

Definición 1.4.24. Sean $\mathscr{J}, \mathscr{C}$ categorías y $\mathscr{C}^{\mathscr{J}}$ la categoría con objetos $\{\mathcal{F} : \mathscr{J} \to \mathscr{C} \mid \mathcal{F} \text{ funtor}\}$ y morfismos transformaciones naturales entre los funtores. Sea $\Delta : \mathscr{C} \to \mathscr{C}^{\mathscr{J}}$ el funtor que a cada objeto $c \in \mathscr{C}$ le asocia $\Delta c : \mathscr{J} \to \mathscr{C}$ el funtor constante en c, es decir que para cualesquiera $i, j \in \mathscr{J}$ y $p : i \to j$, $\Delta c(i) = \Delta c(j) = c$ y $\Delta c(f) = id_c$; mientras que para cada morfismo $f : c \to d$ de la categoría $\mathscr{C}$, Δf es la transformación natural

$$\{f_j : (\Delta c)(j) \to (\Delta d)(j) \mid j \in \mathscr{J}, f_j = f\}.$$

Una flecha universal (r, u) de un funtor $\mathcal{F}$ a Δ es *diagrama colímite* del funtor $\mathcal{F}$. Al objeto r se le denota por $\varinjlim \mathcal{F}$ o $Colim\, \mathcal{F}$ y es el objeto *colímite.* Una flecha universal (r, u) de Δ a un funtor $\mathcal{F}$ es *diagrama límite* del funtor $\mathcal{F}$. Al objeto r se le denota por $\varprojlim \mathcal{F}$ o $Lim\, \mathcal{F}$ y es el objeto *límite.*

La idea de colímite y límite de un funtor $\mathcal{F}$ son objetos $\varinjlim \mathcal{F}$, $\varprojlim \mathcal{F}$ junto con morfismos $\{u_j : \mathcal{F}j \to \varinjlim \mathcal{F} \mid j \in \mathscr{J}\}$ y $\{v_j : \varprojlim \mathcal{F} \to \mathcal{F}j \mid j \in \mathscr{J}\}$ tales que para toda $i, j \in \mathscr{J}$ y $f : i \to j$ los diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}i \arrow[rr, "\mathcal{F}f"] \arrow[dr, "u_i"'] & & \mathcal{F}j \arrow[dl, "u_j"] \\ & \varinjlim \mathcal{F} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{F}i \arrow[rr, "\mathcal{F}f"] & & \mathcal{F}j \\ & \varprojlim \mathcal{F} \arrow[ul, "v_i"] \arrow[ur, "v_j"'] & \end{tikzcd}$$

conmutan, y si existen otros objetos $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ y morfismos

$$\{u'_j : \mathcal{F}j \to \mathcal{X} \mid j \in \mathscr{J}\}, \{v'_j : \mathcal{Y} \to \mathcal{F}j \mid j \in \mathscr{J}\}$$

con las mismas propiedades, entonces existen únicos morfismos

$$f_{\mathcal{X}} : \varinjlim \mathcal{F} \to \mathcal{X} \text{ y } g_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \to \varprojlim \mathcal{F}$$

tal que todos los triángulos de los siguientes diagramas conmutan

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}i \arrow[rr, "\mathcal{F}f"] \arrow[dr, "u_i"] \arrow[ddr, "u'_i"'] & & \mathcal{F}j \arrow[dl, "u_j"'] \arrow[ddl, "u'_j"] \\
& \varinjlim \mathcal{F} \arrow[d, dashed, "f_{\mathcal{X}}"'] & \\
& \mathcal{X} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}i \arrow[rr, "\mathcal{F}f"] & & \mathcal{F}j \\
& \varprojlim \mathcal{F} \arrow[ul, "v_i"'] \arrow[ur, "v_j"] & \\
& \mathcal{Y} \arrow[uul, "v'_i"] \arrow[uur, "v'_j"'] \arrow[u, dashed, "g_{\mathcal{Y}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo 1.4.25. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{J}$ categorías con $\mathscr{J}$ discreta. Si $\mathcal{F} \in \mathscr{C}^{\mathscr{J}}$ los objetos $\varinjlim \mathcal{F}$, $\varprojlim \mathcal{F}$ son llamados *coproducto* y *producto*, respectivamente, y se les denota por

$$\coprod \mathcal{F} = \coprod_{j \in \mathscr{J}} \mathcal{F}j \text{ y } \prod \mathcal{F} = \prod_{j \in \mathscr{J}} \mathcal{F}j.$$

Estos objetos generalizan la noción de productos y coproductos en la categoría **SET**.

Para concluir la sección veamos un concepto central en la teoría de categorías.

Definición 1.4.26. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías. Una *adjunción* de $\mathscr{C}$ sobre $\mathscr{D}$ es una tripleta ordenada $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi) : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ donde $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $\mathcal{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ son funtores y ϕ es funcional tal que

$$\phi_{c,d} : Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}c, d) \to Hom_{\mathscr{C}}(c, \mathcal{G}d)$$

es biyección entre $Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}c, d)$ y $Hom_{\mathscr{C}}(c, \mathcal{G}d)$ que es natural en c y d para cualesquiera c, d.

En la definición anterior el funtor $\mathcal{F}$ se dice adjunto izquierdo de $\mathcal{G}$ y se le denota por $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$. Si para los funtores $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ existe la ϕ que los relacionan, diremos que los funtores son adjuntos.

Ejemplo 1.4.27. Para la categoría **SET**, los funtores $A \times \_\_$ y $Hom_{SET}(A, \_\_)$ son funtores adjuntos con biyección natural dada por la familia de funciones

$$\{\varphi_{B,C} : Hom_{\mathbf{SET}}(A \times B, C) \to Hom_{\mathbf{SET}}(B, Hom_{\mathbf{SET}}(A, C)) \mid B, C \in \mathbf{SET}\}$$

tal que para la función $g : A \times B \to C$, $\varphi_{B,C}(g)(b) = g(\_\_, b)$ es función evaluada en elementos de B que asigna funciones de A en C.

Un resultado importante que se tiene para dos funtores adjuntos está dado por el siguiente teorema.

Teorema 1.4.28. *Dadas $\mathscr{C}$,$\mathscr{D}$ categorías y $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi) : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ adjunción se cumplen las siguientes afirmaciones:*

(i) *(Unidad) Existe $\eta : I_{\mathscr{C}} \to \mathcal{G}\mathcal{F}$ transformación natural tal que para cualesquiera $c \in \mathscr{C}$, $d \in \mathscr{D}$ y $f : \mathcal{F}c \to d$ se satisface*

$$\phi(f) = \mathcal{G}f \circ \eta_c$$

(ii) *(Counidad) Existe $\varepsilon : \mathcal{F}\mathcal{G} \to \mathcal{I}_{\mathscr{D}}$ transformación natural tal que para cualesquiera $c \in \mathscr{C}$, $d \in \mathscr{D}$ y $g : c \to \mathcal{G}d$ se satisface*

$$\phi^{-1}(g) = \varepsilon_d \circ \mathcal{F}g$$

(iii) *(Identidades triangulares) Las transformaciones naturales η y ε cumplen que los siguientes diagramas conmutan*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F} \arrow[dr, "\varepsilon\mathcal{F}"] & \\
\mathcal{F} \arrow[ur, "\mathcal{F}\eta"] \arrow[rr, "Id_{\mathcal{F}}"'] & & \mathcal{F}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G} \arrow[dr, "\mathcal{G}\varepsilon"] & \\
\mathcal{G} \arrow[ur, "\eta\mathcal{G}"] \arrow[rr, "Id_{\mathcal{G}}"'] & & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

Donde $\mathcal{F}\eta = Id_{\mathcal{F}} \bullet \eta$, $\varepsilon\mathcal{F} = \varepsilon \bullet Id_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{G}\varepsilon = Id_{\mathcal{G}} \bullet \varepsilon$ y $\eta\mathcal{G} = \eta \bullet Id_{\mathcal{G}}$.

Demostración. (i) Para todo $c \in \mathscr{C}$ sea $\eta_c = \phi_{c,\mathcal{F}c}(id_{\mathcal{F}c})$ el morfismo de c a $\mathcal{G}\mathcal{F}c$. Sea $f : \mathcal{F}c \to d$, de la naturalidad de ϕ se tiene que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}c, \mathcal{F}c) \arrow[r, "\phi_{c,\mathcal{F}c}"] \arrow[d, "\mathcal{G}f\circ_"'] & Hom_{\mathscr{C}}(c, \mathcal{G}\mathcal{F}c) \arrow[d, "f\circ_"] \\
Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}c, d) \arrow[r, "\phi_{c,d}"'] & Hom_{\mathscr{C}}(c, \mathcal{G}d)
\end{tikzcd}$$

entonces, evaluado en $id_{\mathcal{F}c}$ obtenemos que

$$(1) \qquad \phi_{c,\mathcal{F}c}(f) = \phi_{c,\mathcal{F}c}(f \circ id_c) = \mathcal{G}f \circ \phi_{c,\mathcal{F}c}(id_{\mathcal{F}c}) = \mathcal{G}f \circ \eta_c$$

Para mostrar la naturalidad de η consideremos $c, c' \in \mathscr{C}$ y $p : c \to c'$. De la naturalidad de ϕ el diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}c',\mathcal{F}c') \arrow[r, "\phi_{c',\mathcal{F}c'}"] \arrow[d, "\_\circ \mathcal{F}p"'] & Hom_{\mathscr{C}}(c',\mathcal{G}\mathcal{F}c') \arrow[d, "\_\circ p"] \\ Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}c,\mathcal{F}c') \arrow[r, "\phi_{c,\mathcal{F}c'}"'] & Hom_{\mathscr{C}}(c,\mathcal{G}Fc') \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces evaluando en $id_{\mathcal{F}c'}$, tenemos que

$$\phi_{c,\mathcal{F}c'}(id_{\mathcal{F}c'} \circ \mathcal{F}p) = \phi_{c,\mathcal{F}c'}(\mathcal{F}p) = \eta_{c'} \circ p$$

pero por (1) tenemos que $\phi_{c,\mathcal{F}c'}(\mathcal{F}p) = \mathcal{G}\mathcal{F}p \circ \eta_c$, por lo tanto $\mathcal{G}\mathcal{F}p \circ \eta_c = \eta_{c'} \circ p$, que es justamente la naturalidad de η.

(ii) De manera dual para todo $d \in \mathscr{D}$ definimos ε_d el morfismo de $\mathcal{F}\mathcal{G}d$ a d tal que $\phi_{\mathcal{G}d,d}(\varepsilon_d) = id_{\mathcal{G}d}$. Sea $g : \mathcal{G}d \to c$, de la naturalidad de ϕ se tiene que el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}\mathcal{G}d,d) \arrow[r, "\phi_{\mathcal{G}d,d}"] \arrow[d, "\mathcal{F}g\circ \_"'] & Hom_{\mathscr{C}}(\mathcal{G}d,\mathcal{G}d) \arrow[d, "g\circ \_"] \\ Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}c,d) \arrow[r, "\phi_{c,d}"'] & Hom_{\mathscr{C}}(c,\mathcal{G}d) \end{tikzcd}$$

entonces, evaluado en ε_d obtenemos que

$$g = g \circ id_{\mathcal{G}d} = g \circ \phi_{\mathcal{G}d,d}(\varepsilon_d) = \phi_{c,\mathcal{F}c}(\mathcal{F}g \circ \varepsilon_d)$$

Entonces aplicando $\phi^{-1}_{c,\mathcal{F}c}$ se concluye que

$$\phi^{-1}_{c,\mathcal{F}c}(g) = \mathcal{F}g \circ \varepsilon_d \tag{2}$$

Para mostrar la naturalidad de ε consideremos $d, d' \in \mathscr{C}$ y $q : d' \to d$. De la naturalidad de ϕ el diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathscr{C}}(\mathcal{G}d',\mathcal{G}d') \arrow[r, "\phi^{-1}_{\mathcal{G}d',d'}"] \arrow[d, "\mathcal{G}q\circ \_"'] & Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}\mathcal{G}d',d') \arrow[d, "q\circ \_"] \\ Hom_{\mathscr{C}}(\mathcal{G}d',\mathcal{G}d) \arrow[r, "\phi^{-1}_{\mathcal{G}d',d}"'] & Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}Gd',d) \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces evaluando en $id_{\mathcal{G}d'}$ tenemos que

$$\phi^{-1}_{\mathcal{G}d',d'}(id_{\mathcal{G}d'} \circ \mathcal{G}q) = \phi^{-1}_{\mathcal{G}d',d'}(\mathcal{G}q) = q \circ \varepsilon_{d'}$$

pero por (2) $\phi^{-1}_{\mathcal{G}d',d}(\mathcal{G}q) = \varepsilon_d \circ \mathcal{F}\mathcal{G}q$, entonces $q \circ \varepsilon_{d'} = \varepsilon_d \circ \mathcal{F}\mathcal{G}q$, que es justo la naturalidad de ε.

(iii) Para toda $d \in \mathscr{D}$, de la definición de ε_d se tiene que $\phi_{\mathcal{G}d,d}(\varepsilon_d) = Id_{\mathcal{G}d}$ pero por (1) se tiene que

$$Id_{\mathcal{G}d} = \phi_{\mathcal{G}d,d}(\varepsilon_d) = \mathcal{G}\varepsilon_d \circ \eta_{\mathcal{G}d.}$$

De manera similar se tiene que para cada $c \in \mathscr{C}$ se satisface

$$Id_{\mathcal{F}d} = \phi^{-1}_{c,\mathcal{F}c}(\eta_c) = \varepsilon_{\mathcal{F}c} \circ \mathcal{F}\eta_c.$$

Por lo tanto $\mathcal{G}\varepsilon \circ \eta\mathcal{G}$ y $\varepsilon\mathcal{F} \circ \mathcal{F}\eta$ son las transformaciones naturales identidad del funtor $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$, respectivamente.

□

De manera inversa la existencia de dichas transformaciones con las propiedades (i), (ii) e (iii) implica que $\mathcal{F} \dashv \mathcal{G}$.

Teorema 1.4.29. *Sean $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ categorías, $\mathcal{F} : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $\mathcal{G} : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ y ϕ funcional entre los morfismos de las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *La terna $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi) : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es adjunción.*

(ii) *Existen transformaciones naturales $\eta : I_{\mathscr{C}} \to \mathcal{G}\mathcal{F}$ y $\varepsilon : \mathcal{F}\mathcal{G} \to I_{\mathscr{D}}$ tales que para cualesquiera $f : \mathcal{F}c \to d$ y $g : c \to \mathcal{G}d$ se satisface (i) y (ii) del teorema 1.4.28 y que conmutan los diagramas del inciso (iii) del mismo teorema.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Es justamente el teorema 1.4.28.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sean $c \in \mathscr{C}$, $d \in \mathscr{D}$ y cualesquiera morfismos $f : \mathcal{F}c \to d$, $g : c \to \mathcal{G}d$. Definamos $\phi_{c,d}(f) = \mathcal{G}f \circ \eta_c$ y $\varphi_{c,d}(g) = \varepsilon_d \circ \mathcal{F}g$ funciones entre $Hom_{\mathscr{D}}(\mathcal{F}c, d)$ y $Hom_{\mathscr{C}}(c, \mathcal{G}d)$. De la naturalidad de ε el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}\mathcal{G}\mathcal{F}c \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{F}c}"] \arrow[d, "\mathcal{F}\mathcal{G}f"'] & \mathcal{F}c \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{F}\mathcal{G}d \arrow[r, "\varepsilon_d"'] & d,
\end{tikzcd}$$

entonces

$$f \circ \varepsilon_{\mathcal{F}c} = \varepsilon_d \circ \mathcal{F}\mathcal{G}f. \tag{3}$$

De la definición de ϕ y φ junto con (3) tenemos

$$\begin{aligned}
(\varphi_{c,d} \circ \phi_{c,d})(f) = \varphi_{c,d}(\phi_{c,d}(f)) &= \varphi_{c,d}(\mathcal{G}f \circ \eta_c) \\
&= \varepsilon_d \circ \mathcal{F}(\mathcal{G}f \circ \eta_c) \\
&= \varepsilon_d \circ \mathcal{F}\mathcal{G}f \circ \mathcal{F}\eta_c \\
&= f \circ \varepsilon_{\mathcal{F}c} \circ \mathcal{F}\eta_c \\
&= f \circ (\varepsilon\mathcal{F} \circ \mathcal{F}\eta)_c \\
&= f
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de que $(\varepsilon\mathcal{F} \circ \mathcal{F}\eta)_c = Id_{\mathcal{F}c}$.

Por otro lado de la naturalidad de η el diagrama

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}cg \arrow[d, "\mathcal{G}\mathcal{F}"] \\
\mathcal{G}d \arrow[r, "\eta_{\mathcal{G}d}"'] & \mathcal{G}\mathcal{F}\mathcal{G}d
\end{tikzcd}$$

conmuta, por lo tanto

$$\mathcal{G}\mathcal{F}g \circ \eta_c = \mathcal{F}\mathcal{G}f = \eta_{\mathcal{G}d} \circ g \tag{4}$$

entonces, de nuevo usando la definición de ϕ y φ junto con (4) tenemos que

$$\begin{aligned}
(\phi_{c,d} \circ \varphi_{c,d})(g) = \phi_{c,d}(\varphi_{c,d}(g)) &= \phi_{c,d}(\varepsilon_d \circ \mathcal{F}g) \\
&= \mathcal{G}(\varepsilon_d \circ \mathcal{F}g) \circ \eta_c \\
&= \mathcal{G}\varepsilon_d \circ \mathcal{G}\mathcal{F}g \circ \eta_c \\
&= \mathcal{G} \circ \eta_{\mathcal{G}d} \circ g \\
&= (\mathcal{G}\varepsilon \circ \eta\mathcal{G})_d \circ g \\
&= g
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por que se satisface $(\mathcal{G}\epsilon \circ \eta\mathcal{G})_d = Id_{\mathcal{G}d}$.

De esto concluimos que $\phi_{c,d}$ es invertible con inversa $\varphi_{c,d}$, por lo tanto $\phi_{c,d}$ es biyección.

Sean $c \in \mathscr{C}$ fijo y $d \in \mathscr{D}$ arbitrario, puesto que $\phi_{c,d}$ es biyección y $\phi_{c,d}(f) = \mathcal{G}f \circ \eta_c$, para toda $f : c \to \mathcal{G}d$, existe una única $f' : \mathcal{F}c \to d$ tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{G}\mathcal{F}c \arrow[d, dashed, "\mathcal{G}f'"] \\
c \arrow[ur, "\eta_c"] \arrow[r, "f"'] & \mathcal{G}d
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}c \arrow[d, dashed, "f'"] \\
d
\end{tikzcd}
$$

es decir que $(\mathcal{F}c, \eta_c)$ es flecha universal de c a $\mathcal{G}$, luego por el teorema 1.4.22., $\phi_{c,d}$ es natural en d.

Ahora para $d \in \mathscr{D}$ fijo y $c \in \mathscr{C}$ arbitrario, puesto que $\varphi_{c,d}$ es biyección y $\varphi_{c,d}(g) = \varepsilon_d \circ \mathcal{F}g$, para todo $g : \mathcal{F}c \to d$, existe una única $g' : c \to \mathcal{G}d$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}\mathcal{G}d \arrow[dl, "\varepsilon_d"'] \\
d & \mathcal{F}c \arrow[l, "g"] \arrow[u, dashed, "\mathcal{F}g'"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{G}d \\
c. \arrow[u, dashed, "g'"]
\end{tikzcd}
$$

Luego $(\mathcal{G}d, \varepsilon_d)$ es flecha universal de $\mathcal{F}$ a d, entonces por el corolario 1.4.23., $\varphi_{c,d}$ es natural en c y por lo tanto $\phi_{c,d}$ también lo es. $\square$

Capítulo 2

Marcos y Locales

En este capítulo se desarrollan los resultados básicos de la teoría de Marcos y Locales, estructuras algebraicas inspiradas en la topología. Por otra parte, en estas nuevas estructuras, se abordan problemas semejantes a los que se tienen para espacios topológicos como lo son la creación de productos y coproductos, la dualidad de una clase especial de locales con una clase especial de espacios topológicos entre otros.

2.1 Marcos y el funtor Ω^{op}

En esta breve sección se trabaja con la definición de un marco y un par de nociones asociadas a estas estructuras, además de construir un funtor que relaciona a los espacios topológicos con los marcos. Las ideas explicadas aquí se basan en [1] junto con [6].

Definición 2.1.1. Un *marco* es un retícula completa A que satisface la LDI, es decir para cada $a \in A$ y $S \subset A$ se cumple que

$$a \wedge \left(\bigvee S\right) = \bigvee \{a \wedge s \mid s \in S\}.$$

Una función $f : A \to B$ entre dos marcos A y B es morfismo de marcos si f es morfismo de retículas que abre supremos arbitrarios.

Definición 2.1.2. La categoría cuya clase de objetos son los marcos y morfismos son morfismos de marcos es la *categoría de marcos.* Esta categoría se denota por **Frm**.

Por el teorema 1.2.16, la noción de marco coincide con el concepto de álgebra de Heyting completa, es decir a cualquier marco se le puede asociar un operador implicación. De manera más general se cumple lo siguiente.

Proposición 2.1.3. *Sean $A, B \in$ **Frm** y $f : A \to B$ morfismo de marcos. Entonces existe $f_* : B \to A$ función que para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$ satisface lo siguiente:*

$$f(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq f_*(b).$$

Demostración. Para $b \in B$ definamos

$$f_*(b) = \bigvee \{a \in A \mid f(a) \leq b\}.$$

De la definición de f_* se tiene que para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$, $f(a) \leq b$ implica que $a \leq f_*(b)$, para el recíproco notemos que al ser f morfismo de marcos se satisface que

$$\begin{aligned} f(f_*(b)) &= f\left(\bigvee \{a \in A \mid f(a) \leq b\}\right) \\ &= \bigvee \{f(a) \mid a \in A,\ f(a) \leq b\} \\ &\leq b \end{aligned}$$

por lo tanto si $a \leq f_*(b)$, aplicando f y usando lo anterior obtenemos que

$$f(a) \leq f(f_*(b)) \leq b.$$

□

Un ejemplo importante de estos objetos está dado de la siguiente manera.

Ejemplo 2.1.4. Sean (X, τ) un espacio topológico y $\Omega^{op}(X) = (\tau, \bigcup, int\left(\bigcap\right), \emptyset, X)$. Claramente para todo $\mathcal{U} \subseteq \tau$, $\bigcup \mathcal{U}$ e $int\left(\bigcap \mathcal{U}\right)$ son supremo e ínfimo de la familia σ. Puesto que la operación supremo arbitrario e ínfimo finito coincide con las operaciones conjuntistas usuales se cumple que para cualesquiera $U \in \tau$ y $\mathcal{V} \subseteq \tau$ se satisface:

$$U \wedge \left(\bigvee \mathcal{V}\right) = U \cap \left(\bigcup \mathcal{V}\right) = \bigcup \{U \cap V \mid V \in \mathcal{V}\} = \bigvee \{U \wedge V \mid V \in \mathcal{V}\}$$

por lo tanto $\Omega^{op}(X)$ satisface la LDI, entonces es marco.

Por otro lado dada una función continua $f : X \to Y$ entre espacios topológicos X e Y, la función

$$\begin{aligned}\Omega^{op}(f) : \Omega^{op}(Y) &\longrightarrow \Omega^{op}(X)\\ V &\longmapsto f^{-1}(V)\end{aligned}$$

es morfismo de marcos, puesto que la imagen inversa de una función respeta uniones arbitrarias e intersecciones finitas. Además $\Omega^{op}(Id_X) = id_{\Omega^{op}(X)}$ y para $g : \Omega^{op}(Y) \to \Omega^{op}(Z)$, $\Omega^{op}(f \circ g) = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = \Omega^{op}(g) \circ \Omega^{op}(f)$.

Con lo anterior hemos demostrado que Ω^{op} : **Top** $\to$ **Frm** es funtor contravariante.

El ejemplo 2.1.4. muestra que todo espacio topológico está relacionado con su marco de abiertos. Estudiemos algunas propiedades de los marcos asociados a cierta clase especial de espacios topológicos.

Definición 2.1.5. Sea (X, τ) espacio topológico. Decimos que X es *sobrio* si cumple el axioma de separación T_0 y además se cumple que para todo $U \in \tau$, U es irreducible en el marco de sus abiertos si y sólo si existe $x \in X$ tal que $U = X \setminus \overline{\{x\}}$.

Veamos el siguiente resultado que relaciona los morfismos de marcos asociados a espacios sobrios.

Lema 2.1.6. *Sean Y espacio topológico sobrio y X espacio topológico arbitrario. Para cualquier $h : \Omega^{op}Y \to \Omega^{op}X$ morfismo de marcos, existe una única función continua $f : X \to Y$ tal que $\Omega^{op}(f) = h$.*

Demostración. Consideremos $x \in X$ y

$$\mathcal{V}_x = \{V \in \Omega^{op}Y \mid x \notin h(V)\}$$

Sea $V_x = \bigcup \mathcal{V}_x$, notemos que por ser h morfismo de marcos

$$h(V_x) = h\left(\bigcup \mathcal{V}_x\right) = \bigcup\{h(V) \mid V \in \mathcal{V}_x\}$$

entonces $x \notin h(V_x)$ por ser unión de conjuntos que no contienen a x, luego para todo $V \in \Omega^{op}Y$, $x \notin h(V)$ si y sólo si $V \subseteq V_x$, lo cual es equivalente a que $x \in V$ si y sólo si $V \nsubseteq V_x$. Veamos que V_x es irreducible. Sean $V, V' \in \Omega^{op}Y$ tales que $V_x \supseteq V \cap V'$, entonces aplicando h y usando que respeta $\cap$ tenemos que $h(V_x) \supseteq h(V) \cap h(V')$. Si $x \in h(V) \cap h(V')$, entonces $x \in h(V_x)$, lo cual es absurdo, por lo tanto podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x \notin h(V)$, entonces de la definición V_x, se cumple que $V_x \supseteq V$, lo cual implica que V_x es irreducible.

Puesto que Y es sobrio debe existir un $y \in Y$ tal que $V_x = Y \setminus \overline{\{y\}}$, este y es único por ser Y espacio T_0, entonces definiendo $f(x) = y$ para toda $x \in X$ obtenemos una función $f : X \to Y$. Para $V \in \Omega^{op}Y$ y $x \in X$, se satisfacen las equivalencias

$$\begin{aligned} x \in h(V) \Leftrightarrow V \not\subseteq V_x &\Leftrightarrow V \not\subseteq Y \setminus \overline{\{f(x)\}} \\ &\Leftrightarrow f(x) \in V \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(V) \end{aligned}$$

por lo tanto $h(V) = f^{-1}(V)$, de donde se sigue que f es continua. Además esta última igualdad también implica que $\Omega^{op} f = h$. La unicidad de f se sigue de la unicidad de los y en los irreducibles V_x. □

Una aplicación de este resultado es el siguiente corolario.

Corolario 2.1.7. *Para todo $X, Y \in$ **Top** espacios sobrios, se satisface que*

$$Hom_{\mathbf{Top}}(X, Y) \cong Hom_{\mathbf{Frm}}(\Omega^{op}Y, \Omega^{op}X)$$

vía el funtor Ω^{op}.

Demostración. La proposición 2.1.6 establece que para cada

$$h \in Hom_{\mathbf{Frm}}(\Omega^{op}X, \Omega^{op}Y)$$

existe una única $f \in Hom_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ tal que $\Omega^{op}(f) = h$, lo cual es equivalente a que $Hom_{\mathbf{Top}}(X, Y)$ está en relación biyectiva con $Hom_{\mathbf{Frm}}(\Omega^{op}Y, \Omega^{op}X)$ vía Ω^{op}. □

Notemos que para un espacio topológico X y un punto $x \in X$, el punto x se puede representar como la función $f_x : \{*\} \to X$ tal que $f_x(*) = x$. Mediante el funtor Ω^{op} esto se traduce a $h_x = \Omega^{op}(f_x) : \Omega^{op}X \to \underline{2}$ morfismo de marcos tal que

$$h_x(U) = \{*\} \Leftrightarrow f_x^{-1}(U) = \{*\} \Leftrightarrow x \in U \quad \text{y} \quad h_x(V) = \emptyset \Leftrightarrow x \notin V.$$

Veamos que estos morfismos determinan también al espacio topológico.

Proposición 2.1.8. *Sea X espacio topológico sobrio. Definimos*

$$Pt(X) = \{h : \Omega^{op}X \to \underline{2} \mid h \text{ morfismo de marcos}\}$$

entonces, la siguiente pareja

$$(Pt(X), \xi_X = \{\Sigma_U = \{h \in Pt(X) \mid h(U) = 1\} \mid U \in \Omega^{op}X\})$$

es espacio topológico homeomorfo a X.

Demostración. Veamos que para todo $\mathcal{U} \subseteq \Omega^{op}X$, por ser $Pt(X)$ conjunto de morfismo de marcos, se cumple que

$$\begin{aligned} h \in \Sigma_{\bigcup\mathcal{U}} \Leftrightarrow h\left(\bigcup\mathcal{U}\right) = 1 &\Leftrightarrow \bigvee\{h(U) \mid U \in \mathcal{U}\} = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists\, U \in \mathcal{U},\ h(U) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists\, U \in \mathcal{U},\ h \in \Sigma_U \\ &\Leftrightarrow h \in \bigcup\{\Sigma_U \mid U \in \mathcal{U}\} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\bigcup\{\Sigma_U \mid U \in \mathcal{U}\} = \Sigma_{\bigcup\mathcal{U}}$, de donde se sigue que ξ_X es cerrado bajo uniones arbitrarias. Por otro lado para $U, U' \in \Omega^{op}X$, también se tiene que

$$\begin{aligned} h \in \Sigma_{U\cap U'} \Leftrightarrow h(U \cap U') = 1 &\Leftrightarrow h(U) \wedge h(U') = 1 \\ &\Leftrightarrow h(U) = h(U') = 1 \\ &\Leftrightarrow h \in \Sigma_U \cap \Sigma_{U'}. \end{aligned}$$

entonces $\Sigma_{U\cap U'} = \Sigma_U \cap \Sigma_{U'}$, de donde se sigue que ξ_X es cerrado bajo interseciones finitas. Además es claro que $\Sigma_X = Pt(X)$ y $\Sigma_\emptyset = \emptyset$, por lo tanto ξ_X es una topología para $Pt(X)$.

Por el lema 2.1.6, se cumple que para cada $h \in Pt(X)$ existe $f_h : \{*\} \to X$ única tal que $h = \Omega^{op}f$, sea $f_h(*) = x_h$ y de manera recíproca para cada $x \in X$ la función $f_x : \{*\} \to X$ tal que $f_x(*) = x$ induce un elemento $h_x \in Pt(x)$, entonces la función $\varphi : Pt(X) \to X$ dada por $\varphi(h) = x_h$ para cada $h \in Pt(X)$ es biyectiva. Por otro lado

$$h \in \Sigma_U \Leftrightarrow h(U) = 1 \Leftrightarrow f_h^{-1}(U) = 1 \Leftrightarrow x_h \in U$$

luego

$$U = \{x_h \mid h \in \Sigma_U\} = \varphi(\Sigma_U)$$

de donde se concluye que φ es abierta y biyectiva, aplicando φ^{-1} a esta identidad se deduce que φ es continua y por lo tanto es homeomorfismo. $\square$

2.2 Locales y el funtor Pt.

En esta sección se define la categoría de *Locales*, categoría que se relaciona de manera covariante con la categoría **Top**, además de defninir la generalización de punto para un local. De igual manera que la sección anterior una parte del material de esta sección se basa en [1] y [6] junto con [2].

Según el ejemplo 2.1.4 el funtor Ω^{op} es contravariante. Entonces para conseguir un funtor covariante definamos la siguiente categoría.

Definición 2.2.1. Sea **Loc** = **Frm**^{op} la categoría opuesta de **Frm**. Esta categoría es llamada *la categoría de locales*. Para $f : A \to B$ morfismo de locales denotaremos por f^* al morfismo de marcos $f^* : B \to A$ tal que $f = (f^*)^{op}$.

Definición 2.2.2. Definamos $\Omega = (\Omega^{op})^{op}$, entonces Ω es funtor entre la categoría de espacios topológicos y la categoría de locales.

La definición y parte de la afirmación dadas en la proposición 2.1.8 se pueden extender a cualquier local de la siguiente manera.

Definición 2.2.3. Para $A \in \mathbf{Loc}$ y $a \in A$ definimos

$$Pt(A) = \{h : \underline{2} \to A \mid h \text{ morfismo de locales}\}$$

$$\Sigma_a = \{h \in Pt(A) \mid h^*(a) = 1\}.$$

Los elementos del conjunto $Pt(A)$ son los *puntos del local*.

Proposición 2.2.4. *Para cualquier local A la pareja*

$$(Pt(A), \{\Sigma_a \mid a \in A\})$$

es espacio topológico.

Demostración. Observemos que $\Sigma_{1_A} = Pt(A)$ y $\Sigma_{0_A} = \emptyset$. Ahora sea $\mathcal{P} \subset A$. Entonces se satisfacen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} h \in \Sigma_{\bigvee \mathcal{P}} \Leftrightarrow h^*\left(\bigvee \mathcal{P}\right) = 1 &\Leftrightarrow \bigvee \{h^*(a) \mid a \in \mathcal{P}\} = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists\ a \in \mathcal{P},\ h^*(a) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists\ a \in \mathcal{P},\ h \in \Sigma_a \\ &\Leftrightarrow h \in \bigcup \{\Sigma_a \mid a \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\bigcup\{\Sigma_a \mid a \in P\} = \Sigma_{\bigvee \mathcal{P}}$, entonces $\{\Sigma_a \mid a \in A\}$ es cerrado bajo uniones arbitrarias.

Por otro lado para $a, b \in A$ se cumple que

$$\begin{aligned} h \in \Sigma_{a\wedge b} \Leftrightarrow h^*(a \wedge b) = 1 &\Leftrightarrow h^*(a) \wedge h^*(b) = 1 \\ &\Leftrightarrow h^*(a) = h^*(b) = 1 \\ &\Leftrightarrow h \in \Sigma_a \cap \Sigma_b \end{aligned}$$

entonces $\Sigma_{a\wedge b} = \Sigma_a \cap \Sigma_b$.

De lo anterior se sigue que $\{\Sigma_a \mid a \in A\}$ es cerrado bajo interseciones finitas y por lo tanto es topología para $Pt(A)$. $\square$

Corolario 2.2.5. *Para todo local A se satisface*

- *Para cualquier $\mathcal{P} \subseteq A$*

$$\Sigma_{\bigvee \mathcal{P}} = \bigcup \{\Sigma_x \mid x \in \mathcal{P}\}$$

- *Para cualesquiera $a, b \in A$*

$$\Sigma_{a\wedge b} = \Sigma_a \cap \Sigma_b$$

Además para dos locales A, B y un morfismo $f : A \to B$ podemos construir la siguiente función entre los espacios topológicos PtA y PtB.

Proposición 2.2.6. *Sean $A, B \in$ **Loc** locales y $f : A \to B$ morfismo de locales. La función $Pt(f) : PtA \to PtB$ definida de la siguiente forma*

$$Pt(f)(h) = f \circ h$$

es función continua.

Demostración. Sea $b \in B$, utilizando que para cada $h \in PtA$, se cumple $(f \circ h)^* = h^* \circ f^*$, tenemos

$$\begin{aligned} Pt(f)^{-1}(\Sigma_b) &= \{h \in PtA \mid f \circ h \in \Sigma_b\} \\ &= \{h \in PtA \mid (f \circ h)^*(b) = 1\} \\ &= \{h \in PtA \mid (h^* \circ f^*)(b) = h^*(f^*(b)) = 1\} \\ &= \Sigma_{f^*(b)} \end{aligned}$$

por lo tanto la imagen inversa de un abierto en PtA es abierto en PtB, luego $Pt(f)$ es continua. $\square$

En base de las proposiciones 2.2.4 y 2.2.6 podemos concluir lo siguiente:

Corolario 2.2.7. *Para* $A, B \in \mathbf{Loc}$ *y* $f : A \to B$ *morfismo, la asignación*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & & Pt(A) \arrow[d, "Pt(f)"] \\ B & \overset{Pt}{\longmapsto} & Pt(B) \end{tikzcd}$$

es funtor entre de la categoría **Loc** *y* **Top**.

Demostración. Las proposiciones 2.2.4 y 2.2.6 muestran que $Pt(\mathbf{Loc}) \subseteq$ **Top**. Observemos que para cualesquiera local A y $h \in PtA$ se cumple

$$Pt(id_A)(h) = id_A \circ h = h$$

entonces $Pt(id_A) = id_{PtA}$.

Por otro lado para B, C locales y $f : A \to B$, $g : B \to C$ morfismos tenemos

$$\begin{aligned} Pt(g \circ f)(h) = (g \circ f) \circ (h) &= g \circ (f \circ h) \\ &= g \circ (Pt(f)(h)) \\ &= Pt(g)(Pt(f)(h)) \\ &= (Pt(g) \circ Pt(h))(h) \end{aligned}$$

por lo tanto $Pt(g \circ f) = Pt(g) \circ Pt(f)$. Entonces Pt respeta identidades y composiciones de donde se sigue el resultado. □

La definición del funtor Pt se puede hacer de manera equivalente mediante los siguientes conceptos.

Definición 2.2.8. Para un $A \in \mathbf{Loc}$ y $a \in A$ un elemento, definimos

- (Versión vía filtros)

$$Pt^F A = \{F \subset A \mid F \text{ es f.c.p.}\} \text{ y } \Sigma_a^f = \{F \in Pt^F A \mid a \in F\}$$

- (Versión vía irreducibles)

$$Pt^i A = \{x \in A \mid x \text{ es irreducible}\} \text{ y } \Sigma_a^i = \{x \in Pt^i A \mid a \not\leq x\}$$

Teorema 2.2.9. *Sean $A, B \in$* **Loc** *locales y $f : A \to B$ morfismo de locales. Entonces se satisface lo siguiente:*

(i) *Los espacios $(Pt^F A, \{\Sigma_a^f \mid a \in A\})$ y $(PtA, \{\Sigma_a \mid a \in A\})$ son homeomorfos y para $F \in Pt^F A$*

$$Pt^F f(F) = (f^*)^{-1}(F)$$

(ii) *Los espacios $(Pt^i A, \{\Sigma_a^i \mid a \in A\})$ y $(PtA, \{\Sigma_a \mid a \in A\})$ son homeomorfos y para $i \in Pt^i A$*

$$Pt^i f(i) = (f^*)_*(i)$$

Demostración. (i) Definamos $\phi_A : Pt^F A \to PtA$ tal que para cada F filtro completamente primo de A, $\phi_A(F) = h_F$ es morfismo de locales de manera que para un $a \in A$ se satisface:

$$h_F^*(a) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \in F \\ 0 \text{ si } a \notin F. \end{cases}$$

La proposición 1.3.20 nos dice que ϕ_A está bien definida entre los espacios $Pt^F A$ y PtA y que es biyectiva, veamos que es continua y abierta. La función $\phi'_A : PtA \to Pt^F A$ tal que para cada $h \in PtA$, $\phi'_A(h) = \{a \in A \mid h^*(a) = 1\}$ es inversa izquierda de la función biyectiva ϕ_A, entonces se cumple que $\phi'_A = \phi_A^{-1}$.

Consideremos $a \in A$

$$(1) \qquad \phi_A^{-1}(\Sigma_a) = \{F \mid h_F^*(a) = 1\} = \{F \mid a \in F\} = \Sigma_a^f$$

por lo tanto es continua, por otro lado de de la biyectividad de ϕ_A aplicando ϕ_A a (1) tenemos que

$$\phi_A(\Sigma_a^f) = \Sigma_a$$

de donde se sigue que ϕ_A es abierta y por lo tanto homeomorfismo.

Por ser ϕ_A y ϕ_B homeomorfismo, tenemos que $Pt^F f$ para estos espacios es la función que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Pt^F A \arrow[r, "Pt^F f"] \arrow[d, "\phi_A"'] & Pt^F B \\ PtA \arrow[r, "Ptf"'] & PtB \arrow[u, "\phi_B^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} Pt^F f(F) = \phi_B^{-1}(Ptf(h_F)) = \phi_B^{-1}(f \circ h_F) &= \{b \in B \mid (f \circ h_F)^*(b) = 1\} \\ &= \{b \in B \mid h_F^*(f^*(b)) = 1\} \\ &= \{b \in B \mid f^*(b) \in F\} \\ &= (f^*)^{-1}(F) \end{aligned}$$

(ii) Definamos $\varphi_A : PtA \to Pt^iA$ para cada $h \in PtA$ de la siguiente manera

$$\varphi_A(h) = \bigvee\{a \in A \mid h^*(a) = 0\}.$$

De nuevo la proposición 1.3.20. nos dice que φ_A está bien definida entre los espacios PtA y Pt^iA, además de que es biyectiva. Además puesto que toda $h \in PtA$ es morfismo de locales se tiene que

$$h^*(\varphi_A(h)) = \{h^*(a) \mid h^*(a) = 0\} = 0$$

Notemos que si $g \in PtA$ es tal que $a \leq \varphi_A(g)$, entonces

$$g^*(a) \leq g^*(\varphi_A(g)) = 0$$

por lo tanto $g^*(a)) = 0$. Si $h \in \Sigma_a$ es tal que $a \leq \varphi(h)$ por lo anterior $h^*(a) = 0$ lo cual es falso puesto que $h^*(a) = 1$, por lo tanto $\varphi_A(\Sigma_a) \subseteq \Sigma_a^i$. De manera inversa si $x \in \Sigma_A^i$, entonces $h_x^*(a) = 1$, por lo tanto $h_x \in \Sigma_a$ y entonces $x = \varphi_A(h_x) \in \varphi_A(\Sigma_a)$, entonces

$$\varphi_A(\Sigma_a) = \Sigma_a^i. \tag{2}$$

Aplicando φ_A^{-1} a (2) y usando la biyectividad se concluye que

$$\varphi_A^{-1}(\Sigma_a^i) = \Sigma_a$$

entonces φ_A es abierta y continua, por lo tanto homeomorfismo. Consideremos $\varphi'_A : Pt^iA \to PtA$ tal que para cada $i \in Pt^iA$, $\varphi'_A(i) = h_i$ es el morfismo de locales de manera que para $a \in A$ se satisface:

$$h_i^*(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \not\leq a \\ 0 & \text{si } a \leq i \end{cases}$$

La función φ'_A es inversa derecha de la función biyectiva φ_A, entonces $\varphi'_A = \varphi_A^{-1}$. Por ser φ_A y φ_B homeomorfismo, tenemos que Pt^if es la función que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
Pt^iA \arrow[r, "Pt^if"] \arrow[d, "\varphi_A^{-1}"'] & Pt^iB \\
PtA \arrow[r, "Ptf"'] & PtB \arrow[u, "\varphi_B"']
\end{tikzcd}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
Pt^if(i) = \varphi_B(Ptf(h_i)) = \varphi_B(f \circ h_i) &= \bigvee\{b \in B \mid (f \circ h_i)^*(b) = 0\} \\
&= \bigvee\{b \in B \mid h_i^*(f^*(b)) = 0\} \\
&= \bigvee\{b \in B \mid f^*(b) \leq \varphi_A(h_i) = i\} \\
&= (f^*)_*(i).
\end{aligned}$$

□

A pesar de que la noción de un punto está definida para cualquier local, una característica de ciertos locales es que el conjunto de sus puntos es vacío, lo cual nos dice que efectivamente esta categoría es más compleja que la de espacios topológicos.

Ejemplo 2.2.10. Sea B un álgebra booleana que tenga la propiedad de que para todo $b \in B \setminus \{0\}$ existe $b' \in B \setminus \{0\}$ tal que $b > b'$ (una álgebra con estas propiedad se dice *álgebra sin átomos*), entonces $Pt(B) = \emptyset$. No existen puntos para locales de este tipo puesto que en las álgebras booleanas los irreducibles coinciden con los elementos maximales, sin embargo un elemento maximal cumple que entre su complemento y el cero no hay un elemento intermedio, por lo tanto para una álgebra sin átomos se cumple que el conjunto de irreducibles es vacío.

2.3 Teorema de representación de Stone.

El teorema de representación de Stone es un resultado clásico que relaciona a cierto conjunto de espacios topológicos especiales y a las álgebras boolenas. En esta sección demostraremos que este teorema es un corolario de un resultado categórico entre **Loc** y **Top**. Para esto nos basaremos en la teoría desarrollada en [8], material que centra gran parte de su contenido en el estudio del tipo de relaciones categóricas entre **Top** y **Loc**.

Teorema 2.3.1. *El funtor Pt es adjunto izquierdo de Ω.*

Demostración. Probemos la adjunción vía la equivalencia dada por el teorema 1.4.29 de la sección de categorías. Definamos para $X \in \mathbf{Top}$ a $\eta_X : X \to Pt\Omega(X)$ la función que a cada $x \in X$ le asocia el morfismo de locales $\eta_X(x)$ que para un $U \in \Omega(X)$ se satisface que

$$\eta_X(x)^*(U) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{si } x \notin U. \end{cases}$$

Notemos que para cada $U \in \Omega(X)$

$$\begin{aligned} \eta_X^{-1}(\Sigma_U) &= \{x \in X \mid \eta_X(x) \in \Sigma_U\} \\ &= \{x \in X \mid \eta_X(x)^*(U) = 1\} \\ &= \{x \in X \mid x \in U\} = U \end{aligned} \tag{1}$$

Por lo tanto η_X es función continua.

Veamos que $\eta = \{\eta_X \mid X \in \mathbf{Top}\}$ es transformación natural del funtor $I_{\mathbf{Top}}$ al funtor $Pt\Omega$. Sea $f : X \to Y$ función continua entre los espacios topológicos X y Y. Notemos que

$$(Pt\Omega f \circ \eta_X)(x) = (Pt((f^{-1})^{op}) \circ \eta_X)(x) = (f^{-1})^{op} \circ \eta_X(x)$$

entonces para cada $V \in \Omega(Y)$ se tiene que

$$\begin{aligned} ((f^{-1})^{op} \circ \eta_X(x))^*(V) &= ((\eta_X(x))^* \circ f^{-1})(V) \\ &= \eta_X(x)(f^{-1}(V)) \\ &= \eta_Y(f(x))(V) \end{aligned}$$

donde la última igualdad ocurre puesto que $x \in f^{-1}(V) \Leftrightarrow f(x) \in V$. Luego el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & Pt\Omega(X) \arrow[d, "Pt\Omega f"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & Pt\Omega(Y) \end{tikzcd}$$

cunmuta, por lo tanto $\eta : I_{\mathbf{Top}} \to Pt\Omega$ es transformación natural.

Para cada $A \in \mathbf{Loc}$ definamos $\varepsilon_A^* : A \to \Omega PtA$ de manera que para un $a \in A$ se cumple que $\varepsilon_A^*(a) = \Sigma_a$, por el corolario 2.2.5 se satisface que $\varepsilon_A = (\varepsilon_A^*)^{op}$ es morfismo en la categoría $\mathbf{Loc}$. Sea $\varepsilon = \{\varepsilon_A \mid A \in \mathbf{Loc}\}$, veamos que esta familia de morfismos es transformación natural del funtor ΩPt al funtor $I_{\mathbf{Loc}}$.

Sea $h : A \to B$ morfismo de locales, entonces

$$\begin{aligned}(\varepsilon_B \circ \Omega Pth)^*(b) &= (Pth^{-1} \circ \varepsilon_B^*)(b)\\ &= Pth^{-1}(\Sigma_b)\\ &= \Sigma_{h^*(b)}\\ &= \varepsilon_A^*(h^*(b))\end{aligned}$$

por lo tanto el siguiente diagrama en la categoría **Loc**

$$\begin{tikzcd} \Omega PtA \arrow[r, "\varepsilon_A"] \arrow[d, "\Omega Pth"'] & A \arrow[d, "h"] \\ \Omega PtB \arrow[r, "\varepsilon_B"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta y entonces $\varepsilon : \Omega Pt \to I_{\mathbf{Loc}}$ es transformación natural.

Notemos que para todo $a \in A \in \mathbf{Loc}$ y todo $h \in PtA$

$$\begin{aligned}((Pt\varepsilon_A \circ \eta_{PtA})(h))^*(a) &= (\varepsilon_A \circ \eta_{PtA}(h))^*(a)\\ &= ((\eta_{PtA}(h))^* \circ \varepsilon_A^*)(a)\\ &= (\eta_{PtA}(h))^*(\Sigma_a)\\ &= h^*(a)\end{aligned}$$

donde la última igualdad ocurre puesto que $h \in \Sigma_a \Leftrightarrow h^*(a) = 1$. De esto se sigue que

$$Pt\varepsilon_A \circ \eta_{PtA} = I_{PtA}. \tag{2}$$

Por otro lado para todo $X \in \mathbf{Top}$ y $U \in \Omega(X)$ se cumple que

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{\Omega(X)} \circ \Omega\eta_X)^*(U) &= (\varepsilon_{\Omega(X)} \circ (\eta_X^{-1})^{op})^*(U)\\ &= (\eta_X^{-1} \circ \varepsilon_{\Omega(X)}^*)(U)\\ &= \eta_X^{-1}(\Sigma_U)\\ &= U\end{aligned}$$

donde la última igualdad ocurre por (1), entonces se satisface que

$$\varepsilon_{\Omega(X)} \circ \Omega\eta_X = I_{\Omega(X)}. \tag{3}$$

De (2) y (3) se concluye que se satisfacen las identidades triángulares de una adjunción, es decir los diagramas

$$\begin{tikzcd} & \Omega Pt \Omega \arrow[dr, "\varepsilon\Omega"] & \\ \Omega \arrow[ur, "\Omega\eta"] \arrow[rr, "Id_\Omega"'] & & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Pt\Omega Pt \arrow[dr, "Pt\varepsilon"] & \\ Pt \arrow[ur, "\eta Pt"] \arrow[rr, "Id_{Pt}"'] & & Pt \end{tikzcd}$$

conmutan, entonces se cumple que $\Omega \dashv Pt$ con η y ε la unidad y counidad, respectivamente. □

En base de este teorema es posible dar una equivalencia entre subcategorías completas de **Top** y **Loc**, respectivamente. Antes de trabajar con la equivalencia demostremos algunos resultados previos.

Lema 2.3.2. *Para todo $A \in$ **Loc** se satisface que PtA es espacio topológico sobrio.*

Demostración. Hagamos la prueba con la construcción de Pt vía irreducibles. Sea $x \in A$ tal que Σ_x es irreducible en $\Omega(Pt^iA)$. Notemos que para cualesquiera $a, b \in Pt^iA$ se satisface lo siguiente

$$\begin{aligned} a \in \overline{\{b\}} &\Leftrightarrow \forall c \in A(a \in \Sigma_c \Rightarrow b \in \Sigma_c) \\ &\Leftrightarrow \forall c \in A(c \not\leq a \Rightarrow c \not\leq b) \\ &\Leftrightarrow \forall c \in A(c \leq b \Rightarrow c \leq a) \\ &\Leftrightarrow b \leq a. \end{aligned} \tag{1}$$

Lo anterior implica que si dos puntos a, b cumplen que $a \in \overline{\{b\}}$ y $b \in \overline{\{a\}}$ entonces $a = b$, lo cual implica que PtA es T_0. Ahora consideremos $y = \bigvee\{c \in A \mid \Sigma_c \subseteq \Sigma_x\}$, veamos que y es irreducible. Claramente $x \leq y$, entonces $\Sigma_x \subseteq \Sigma_y$, además por el corolario 2.2.5 se satisface que

$$\Sigma_y = \bigcup\{\Sigma_c \mid \Sigma_c \subseteq \Sigma_x\} \subseteq \Sigma_x.$$

De donde se concluye que $\Sigma_x = \Sigma_y$. Sean $w, z \in A$ tales que $y \geq w \wedge z$, entonces

$$\Sigma_x = \Sigma_y \supseteq \Sigma_{w \wedge z} = \Sigma_w \cap \Sigma_z$$

Luego como Σ_x es irreducible, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\Sigma_x \supseteq \Sigma_w$, por lo tanto $w \leq y$.

Utilizando la contrapositiva de (1) podemos concluir que para toda $p \in Pt^i A$ se cumple

$$p \notin \overline{\{y\}} \Leftrightarrow y \nleq p \Leftrightarrow p \in \Sigma_y = \Sigma_x$$

de donde se concluye que

$$\Sigma_x = Pt^i A \setminus \overline{\{y\}}.$$

□

Proposición 2.3.3. *Para un espacio* $X \in$ **Top** *son equivalentes las afirmaciones siguientes:*

(i) X *es espacio sobrio.*

(ii) η_X *es biyectiva.*

(iii) η_X *es homeomorfismo.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Aplicando el corolario 2.1.7 a los espacios sobrios X y $\{*\}$ se sigue que

$$X \cong Hom_{\mathbf{Top}}(\{*\}, X) \cong Hom_{\mathbf{Loc}}(\Omega(X), \underline{2})$$

y justamente la composición de estas biyecciones es η_X.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Para cada $U \in \Omega(X)$ por (1) del teorema 2.3.1. se cumple que

$$\eta_X^{-1}(\Sigma_U) = U$$

entonces por ser biyectiva podemos conluir de esto que

$$\eta_X(U) = \Sigma_U$$

y por lo tanto es biyección continua y abierta, entonces es homeomorfismo.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Por el lema 2.3.2. se tiene que $Pt\Omega(X)$ es sobrio, puesto que ser sobrio es una propiedad topológica, al ser $\eta_X : X \to Pt\Omega(X)$ homeomorfismo, se sigue que X es sobrio. □

Proposición 2.3.4. *Para un espacio* $A \in$ **Loc** *son equivalentes las afirmaciones siguientes:*

(i) *Existe* $X \in$ **Top** *tal que* $\Omega(X) \cong A$.

(*ii*) ε_A^* *es inyectiva.*

(*iii*) ε_A^* *es isomorfismo de marcos.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Por la ecuación (3) de la prueba del teorema 2.3.1 se concluye que $\varepsilon_A^* = \varepsilon_{\Omega(X)}$ es inyectiva.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Claramente ε_A^* es suprayectiva, entonces es biyectiva, puesto que todo morfismo biyectivo de marcos es isomorfismo de marcos se sigue el resultado.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Es claro puesto que del isomorfismo $\varepsilon_A^* : A \to \Omega PtA$ se sigue que $A \cong \Omega PtA$. □

Con estos resultados notemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.5. *La categoría* ***Sob*** *de espacios topológicos sobrios con morfismos funciones continuas es equivalente a la categoría* **SLoc** *de locales isomorfos al marco de abiertos de algún espacio topológico con flechas morfismos de locales vía la restricción de la adjunción dada por* Ω *y* Pt*.*

Demostración. Se sigue de aplicar el corolario 2.1.7 y las proposiciones 2.3.3 y 2.3.4 □

Definamos la noción de espacio coherente en la categoría **Loc**.

Definición 2.3.6. Un elemento $a \in A$ de una retícula completa A es *compacto* si para cualquier $S \subseteq A$ se satisface lo siguiente:

$$\bigvee S \geq a \Rightarrow \text{ existe } T \subseteq S \text{ finito, tal que } \bigvee T \geq a.$$

Para una retícula completa A el conjunto de elementos compactos se denota por $\mathcal{K}A$.

Definición 2.3.7. Un local A es *coherente* si se satisface lo siguiente

- Todo elemento es supremo de elementos en $\mathcal{K}A$.
- $\mathcal{K}A$ es cerrado bajo $\wedge$ y $1 \in \mathcal{K}A$.

Una caracterización de local coherente está dada mediante el siguiente teorema.

Teorema 2.3.8. *Para $A \in$ **Loc** son equivalentes las afirmaciones:*

(i) *A es coherente.*

(ii) *Existe D una retícula distributiva tal que A es isomorfo al local formado por los ideales de D.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Veamos que $\mathcal{K}A$ es retícula distributiva. Por ser A local coherente se tiene que $\mathcal{K}A$ es semiretícula inferior y $1 \in \mathcal{K}A$. Para $a, b \in \mathcal{K}A$ consideremos $S \subseteq A$ tal que $\bigvee S \geq a \vee b \geq a, b$, entonces por ser a y b compactos se cumple que existen $R, T \subseteq S$ finitos tales que $\bigvee R \geq a$ y $\bigvee T \geq b$, luego el conjunto finito $R \cup T$ satisface que $R \cup T \subseteq S$ y $\bigvee(R \cup T) \geq a \vee b$, por lo tanto $a \vee b \in \mathcal{K}A$. Por último, puesto que $\bigvee \emptyset = 0$ se sigue que $0 \in \mathcal{K}A$ y por lo tanto $\mathcal{K}A$ es retícula.

Sea $\mathcal{I}(\mathcal{K}A)$ el conjunto de ideales de $\mathcal{K}A$, por el teorema 1.3.27 se tiene que $\mathcal{I}(\mathcal{K}A)$ es un local.

Definamos la función $\phi : A \to \mathcal{I}(\mathcal{K}A)$ tal que para cada $a \in A$ se cumple lo siguiente:

$$\phi(a) = \downarrow(a) \cap \mathcal{K}A.$$

La función ϕ está bien definida puesto que el supremo finito de elementos compactos es compacto. Por otro lado definamos $\varphi : \mathcal{I}(\mathcal{K}A) \to A$ tal que para cada $I \in \mathcal{K}A$ se cumple lo siguiente:

$$\varphi(I) = \bigvee I.$$

Por ser A local coherente se tiene que cada elemento a es el supremo de los elementos compactos menores o iguales que él y por lo tanto

$$(\varphi \circ \phi)(a) = \varphi(\phi(a)) = \bigvee \phi(a) = a.$$

De manera inversa para $I \in \mathcal{K}A$ se tiene que

$$(\phi \circ \varphi)(I) = \downarrow\left(\bigvee I\right) \cap \mathcal{K}A.$$

Claramente $I \subseteq \downarrow (\bigvee I) \cap \mathcal{K}A$, supongamos que $k \in \downarrow (\bigvee I)$ con k compacto, entonces $k \leq \bigvee I$, luego existe $S \subseteq I$ finito tal que $k \leq \bigvee S$, pero al ser finito S e I un ideal se cumple que $\bigvee S \in I$, entonces $k \in I$ y por lo tanto

$$(\phi \circ \varphi)(I) = I$$

de esto se concluye que ϕ y φ son biyecciones que preservan orden, lo cual implica que son isomorfismos de marcos y por lo tanto A es isomorfo como local a $\mathcal{I}(\mathcal{K}A)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supongamos que D es retícula distributiva tal que A es isomorfo a los ideales de D, denotado por $\mathcal{I}(D)$. Veamos que

$$\mathcal{K}\mathcal{I}(D) = \{\downarrow (d) \mid d \in D\}. \tag{1}$$

Sean $d \in D$ y $\Im \subset \mathcal{I}(D)$ tales que

$$\downarrow (d) \subseteq \left\langle \bigcup \Im \right\rangle.$$

Por el lema 1.3.25 existe $\{d_1, d_2, \ldots, d_r\} \subset \bigcup \Im$ finito tales que $d = \bigvee\{d_1, d_2, \ldots, d_r\}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ consideremos $I_i \in \Im$ tal que $d_i \in I_i$. Puesto que $d = \bigvee\{d_1, d_2, \ldots, d_r\}$ se tiene que

$$d \in \left\langle \bigcup_{i=1}^{r} I_i \right\rangle$$

por lo tanto

$$\downarrow (d) \subseteq \left\langle \bigcup_{i=1}^{r} I_i \right\rangle$$

entonces $\downarrow (d)$ es compacto en $\mathcal{I}(D)$.

Sea $I \in \mathcal{I}(D)$ compacto, claramente

$$I = \left\langle \bigcup_{i \in I} \downarrow (i) \right\rangle$$

entonces existe $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\} \subset I$ finito tales que

$$I \subseteq \left\langle \bigcup_{j=1}^{s} \downarrow (i_j) \right\rangle$$

pero cada ideal generador del lado derecho está contenido en I por lo tanto ocurre la igualdad. De nuevo por el lema 1.3.25 se tiene que

$$\left\langle \bigcup_{j=1}^{s} \downarrow (i_j) \right\rangle = \downarrow \left(\bigvee \{i_1, i_2, \ldots, i_s\} \right).$$

De lo anterior concluimos que I es el ideal principal generado por $\bigvee\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$. De esto se sigue la igualdad (1).

Cualquier ideal $J \in \mathcal{I}(D)$ es el supremo de los ideales principales generados por los elementos de J, además para cada $e, f \in D$ se satisface que

$$\downarrow(e) \cap \downarrow(f) = \downarrow(e \wedge f).$$

Por último $D = \downarrow(1)$ el cual es compacto en $\mathcal{I}(D)$. De todo lo anterior se concluye que $\mathcal{I}(D)$ es coherente y por lo tanto A también. $\square$

Como aplicación de esta proposición tenemos que los locales coherentes y las retículas distributivas son equivalentes para ciertas categorías.

Definición 2.3.9. Para A, B locales coherentes y $h : A \to B$ morfismo de locales, h es *morfismo de locales coherentes* si la imagen de elementos compactos de B bajo h^* es un elemento compacto en A.

Definición 2.3.10. Se denota por **CoLoc** a la categoría con objetos locales coherentes y flechas morfismos de locales coherentes.

Teorema 2.3.11. *La categoría* **CoLoc** *es dual a la categoría* **DLat**.

Demostración. Definamos el funtor contravariante $\mathcal{K} : \mathbf{CoLoc} \to \mathbf{DLat}$ tal que para los objetos $A, B \in \mathbf{CoLoc}$ y el morfismo $h : A \to B$ hace la asignación

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "h"] & \overset{\mathcal{K}}{\longmapsto} & \mathcal{K}A \\ B & & \mathcal{K}B \arrow[u, "\mathcal{K}h = h^*|_{\mathcal{K}B}"'] \end{tikzcd}$$

Por ser h morfismos de locales coherentes se tiene que $\mathcal{K}h : \mathcal{K}B \to \mathcal{K}A$ está bien definida. La funcional $\mathcal{K}$ es funtor puesto que la restricción de morfismos de locales coherentes respeta composiciones.

Por otro lado definamos el funtor $\mathcal{I} : \mathbf{DLat} \to \mathbf{CoLoc}$ tal que a los objetos $D, E \in \mathbf{DLat}$ y el morfismo $g : D \to E$ realiza la asignación

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, "g"] & \overset{\mathcal{I}}{\longmapsto} & \mathcal{I}(D) \\ E & & \mathcal{I}(E) \arrow[u, "\mathcal{I}g"'] \end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{I}g$ es la flecha tal que para cada $I \in \mathcal{I}(D)$,

$$\mathcal{I}g^*(I) = \downarrow(g(I)).$$

Por ser g morfismo de retículas e I ideal se cumple que $g(I)$ es cerrado bajo $\vee$, luego $\mathcal{I}g^*(I)$ es ideal y por lo tanto está bien definida la función $\mathcal{I}g^*$. Consideremos $J \in \mathcal{I}(D)$, entonces por la proposición 1.3.7 y del hecho de que para subconjuntos $S, T \subseteq E$ se satisface que $\downarrow(S \wedge T) = \downarrow(S) \cap \downarrow(T)$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}g^*(I \cap J) &= \downarrow(g(I \cap J)) \\
&= \downarrow(g(I \wedge J)) \\
&= \downarrow(g(I) \wedge g(J)) \\
&= \downarrow(g(I)) \cap \downarrow(g(J)) \\
&= \mathcal{I}g^*(I) \cap \mathcal{I}g^*(J).
\end{aligned}$$

Ahora consideremos $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{I}(D)$, entonces por el lema 1.3.25, por ser g morfismo de retículas y del hecho de que $\mathfrak{F}$ es una familia de ideales se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}g^*\left(\left\langle \bigcup \mathfrak{F} \right\rangle\right) &= \downarrow\left(g\left(\left\langle \bigcup \mathfrak{F} \right\rangle\right)\right) \\
&= \downarrow\left(\left\{ g\left(\bigvee T\right) \mid T \subseteq \bigcup \mathfrak{F} \text{ finito} \right\}\right) \\
&= \downarrow\left(\left\{ \bigvee \{g(a_1), \ldots, g(a_n)\} \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\}, g(a_i) \in \bigcup_{K \in \mathfrak{F}} g(K) \right\}\right) \\
&= \left\langle \bigcup_{K \in \mathfrak{F}} g(K) \right\rangle \\
&= \left\langle \bigcup_{K \in \mathfrak{F}} \downarrow(g(K)) \right\rangle \\
&= \left\langle \bigcup_{K \in \mathfrak{F}} \mathcal{I}g^*(K) \right\rangle
\end{aligned}$$

por lo tanto $\mathcal{I}g^*$ es morfismo de marcos y entonces $\mathcal{I}g$ es morfismo de locales.

Para todo $d \in D$ se cumple que

$$\mathcal{I}g^*(\downarrow(d)) = \downarrow(g(d))$$

entonces $\mathcal{I}g$ es morfismo de locales coherentes.

Por último para mostrar que $\mathcal{I}$ es funtor veamos que si $k : E \to F$ es morfismo entre las retículas distributivas E y D, entonces para cualquier $I \in \mathcal{I}(D)$ se satisface

$$\begin{aligned}(\mathcal{I}k^* \circ \mathcal{I}g^*)(I) &= \downarrow (k(\downarrow (g(I))))\\ &= \downarrow (k(g(I)))\\ &= \mathcal{I}(k \circ g)^*(I).\end{aligned}$$

Para cualesquiera A y B locales coherentes, por la proposición 2.3.8, existe $\phi_A : \mathcal{IK}A \to A$ isomorfismo tal que $\phi_A(I) = \bigvee I$. Para un $h : A \to B$ morfismo de locales coherentes y cualquier $I \in \mathcal{IK}B$ se tiene que

$$\begin{aligned}\phi_A((\mathcal{IK}h)^*(I)) &= \phi_A((\mathcal{I}h^* |_{\mathcal{K}B})^*(I))\\ &= \phi_A(\downarrow (h^*(I))\\ &= \bigvee(\downarrow (h^*(I))\\ &= \bigvee(h^*(I))\\ &= h^* \left(\bigvee I\right)\\ &= (h^* \circ \phi_B)(I)\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se da puesto que h^* es morfismo de marcos.

Por lo tanto el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}\mathcal{IK}A \arrow[r, "\phi_A"] \arrow[d, "\mathcal{IK}h"'] & A \arrow[d, "h"] \\ \mathcal{IK}B \arrow[r, "\phi_B"'] & B.\end{tikzcd}$$

De manera recíproca para $D \in \mathbf{DLat}$ y dos elementos $d, e \in D$ se cumple que

$$\begin{aligned}\downarrow (d) \cap \downarrow (e) &= \downarrow (d \wedge e)\\ \langle \downarrow (d) \cup \downarrow (e) \rangle &= \downarrow (d \vee e)\end{aligned}$$

de donde se sigue que la función $\varphi_D : D \to \mathcal{KI}D$ tal que $\varphi_D(d) = \downarrow (d)$, es isomorfismo entre D y $\mathcal{KI}D$. Para E retícula distributiva y $g : D \to E$ morfismo, se tiene para todo $d \in D$ lo siguiente

$$(\mathcal{K}\mathcal{I}g)(\varphi_D(d)) = (\mathcal{I}g^*)(\downarrow(d)) = \downarrow(g(d)) = (\varphi_E \circ g)(d),$$

entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\varphi_D"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{K}\mathcal{I}D \arrow[d, "\mathcal{K}\mathcal{I}g."] \\ E \arrow[r, "\varphi_B"'] & \mathcal{K}\mathcal{I}E \end{tikzcd}$$

Por lo tanto se tiene que **CoLoc** y **DLat** son categorías duales vía los funtores $\mathcal{K}$ e $\mathcal{I}$. □

Para relacionar todos estos resultados con la categoría de espacios topológicos veamos la definición.

Definición 2.3.12. Un espacio $X \in$ **Sob** es *coherente* si el local $\Omega(X)$ es coherente. Un *morfismo de espacios coherentes* es una función continua $f : X \to Y$ tal que Ωf es morfismo de locales coherentes.

Definición 2.3.13. La categoría **CoTop** formada por objetos espacios topológicos coherentes y flechas morfismos de espacios coherentes es la *categoría de espacios coherentes*.

Entonces para relacionar la noción de espacio coherente y local coherente notemos el siguiente lema.

Lema 2.3.14. *Se satisface que* **CoLoc** $\subseteq$ **SLoc**.

Demostración. Sea $A \in$ **CoLoc**, por la proposición 2.3.8, se cumple que $A \cong \mathcal{I}\mathcal{K}A$. Veamos que los elementos irreducibles de $\mathcal{I}\mathcal{K}A$ son exactamente los ideales primos de $\mathcal{K}A$. Sea $I \subset \mathcal{K}A$ un ideal.

Supongamos que I es irreducible en $\mathcal{K}A$ consideremos $x, y \in \mathcal{K}A$ tales que $x \wedge y \in I$, entonces

$$\downarrow(x) \cap \downarrow(y) = \downarrow(x \wedge y) \subseteq I$$

luego por ser I irreducible $\downarrow(x) \subseteq I$ o $\downarrow(y) \subseteq I$ lo cual implica que $x \in I$ o $y \in I$ de donde se sigue que I es ideal primo.

De manera recíproca supongamos que I es un ideal primo. Sean J y $K \in \mathcal{K}A$ ideales tales que $I \supseteq J \cap K$, veamos que alguno de ellos está contenido en I. Supongamos que $J \not\subset I$, entonces sea $z \in J \setminus I$, puesto que

$J \wedge K = J \cap K \subseteq I$ se tiene para todo $w \in K$ que $z \wedge w \in I$, luego por ser I un ideal primo se tiene que $w \in I$, entonces $K \subseteq I$.

Por la proposicición 2.3.4, para ver que $\mathcal{IK}A \in$ **SLoc** basta probar que $\varepsilon^*_{\mathcal{IK}A}$ es inyectiva. Sean $J, K \in \mathcal{IK}A$ ideales distintos, sin pérdida de generalidad $J \not\subset K$. Consideremos $b \in J \setminus K$, entonces aplicando la proposición 1.3.21 para el ideal K y el filtro $\uparrow(b)$, existe $\overline{K}$ filtro primo tal que $K \subseteq \overline{K}$ y $b \notin \overline{K}$, por lo tanto $J \not\subset \overline{K}$ entonces

$$\overline{K} \in \Sigma^i_J \setminus \Sigma^i_K = \varepsilon^*_{\mathcal{IK}A}(J) \setminus \varepsilon^*_{\mathcal{IK}A}(K)$$

de donde se sigue que $\varepsilon^*_{\mathcal{IK}A}$ es inyectiva. □

Con todo esto se tiene la siguiente generalización del teorema de dualidad de Stone.

Teorema 2.3.15. *(Generalización del Teorema de Dualidad de Stone) La categoría* **CoTop** *es dual a la categoría* **DLat**.

Demostración. Por el teorema 2.3.11 las categorías **CoLoc** y **DLat** son duales. Por el lema 2.3.14 se tiene que **CoLoc** $\subset$ **SLoc**, entonces restringiendo la equivalencia dada por el teorema 2.3.5 a esta categoría obtenemos que **CoLoc** es equivalente a **CoTop** de donde se sigue el resultado. □

Un espacio X es *espacio cero dimensional* si existe una base de la topología conformada por conjuntos cerrado-abiertos. A un espacio cero dimensional, Hausdorff y compacto se le llama *espacio de Stone.* Para notar que esto es una generalización del teorema de dualidad de Stone usual demostremos los siguientes resultados.

Proposición 2.3.16. *Para un espacio topológico X son equivalentes las afirmaciones siguientes:*

(i) *X es espacio de Stone.*

(ii) *X es Hausdorff y coherente.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii) Por ser X espacio de Stone se tiene que es Hausdorff, compacto y cero-dimensional. Por ser compacto $X \in \mathcal{K}\Omega(X)$ y al ser Hausdorff la intersección de compactos es compacto, por lo tanto $\mathcal{K}\Omega(X)$ es retícula. Por último cualquier conjunto cerrado-abierto de X es abierto y compacto, entonces $\mathcal{K}\Omega(X)$ es base de X, lo cual implica que cualquier abierto de X es supremo (unión) de elementos en $\mathcal{K}\Omega(X)$. Entonces X es coherente y de la definición de espacio de Stone se tiene que es Hausdorff.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Como X es coherente $X \in \mathcal{K}\Omega(X)$, entonces X es compacto. Por ser X coherente se tiene que $\mathcal{K}\Omega(X)$ es base de X, pero justamente por ser X compacto Hausdorff se tiene que $\mathcal{K}\Omega(X)$ son los conjuntos cerrado-abiertos, por lo tanto X es cero-dimensional y entonces es espacio de Stone. $\square$

Proposición 2.3.17. *Para una retícula distributiva D son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *D es álgebra booleana.*

(ii) *$Pt\mathcal{I}(D)$ es Hausdorff.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sean I y J ideales primos distintos, sin pérdida de generalidad $J \not\subset I$, entonces consideremos $d \in J \setminus I$, por ser D álgebra booleana existe $\neg d$ el complemento de d, luego como $d \notin I$ y $d \wedge \neg d = 0 \in I$. Por ser I un ideal primo se tiene que $\neg d \in I$.

Si $\neg d \in J$ se tendría que $d \vee \neg d = 1 \in J$ lo cual es una contradicción a que J sea un ideal primo. De lo anterior se tiene que

$$I \in \Sigma_{\downarrow(d)} \text{ y } J \in \Sigma_{\downarrow(\neg d)}.$$

Supongamos que existe K tal que $K \in \Sigma_{\downarrow(d)} \cap \Sigma_{\downarrow(\neg d)}$, entonces existen $e \leq d$ y $e' \leq \neg d$ tales que $e, e' \notin K$, sin embargo $e \wedge e' \leq d \wedge \neg d = 0$ y por lo tanto $e \wedge e' = 0 \in K$ lo cual es una contradicción por ser K un ideal primo, por lo tanto $\Sigma_{\downarrow(d)} \cap \Sigma_{\downarrow(\neg d)} = \emptyset$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supongamos que $Pt\mathcal{I}(D)$ es Hausdorff, entonces los abiertos compactos de $Pt\mathcal{I}(D)$ resultan ser abiertos-cerrados y por lo tanto son elementos complementados, luego $\mathcal{K}\Omega(Pt\mathcal{I}(D))$ es retícula distributiva complementada lo cual es equivalente a que sea un álgebra booleana.

Por los teoremas 2.3.5 y 2.3.8 se tiene que

$$\mathcal{K}\Omega(Pt\mathcal{I}(D)) \cong \mathcal{K}\mathcal{I}(D) \cong D$$

de donde se sigue el resultado. $\square$

Concluimos la sección con el teorema clásico de dualidad de Stone.

Teorema 2.3.18. *(Dualidad de Stone) La categoría de espacios de Stone es dual a la categoría de álgebras booleanas.*

Demostración. Puesto que la imagen inversa de funciones continuas mandan conjuntos cerrado-abiertos en conjuntos cerrados-abiertos se cumple que cualquier función continua entre espacios de Stone es morfismo de espacios coherentes. Combinando las proposiciones 2.3.16 y 2.3.17 al restringir la dualidad del teorema 2.3.15 se obtiene que la categoría de espacios de Stone es dual a la categoría de álgebras booleanas. □

2.4 Sublocales, congruencias y núcleos.

En esta sección se estudia la noción de sublocal concepto que está inspirado en la idea de subespacio topológico en la categoría **Top**. Para ello se consultó [6] junto con [3].

Para espacios $X, Y \in \mathbf{Top}$ se cumple que si existe una función continua inyectiva $i : Y \to X$ tal que $\Omega(Y) = \{i^{-1}(U) \mid U \in \Omega(X)\}$, entonces Y se puede representar como un subespacio del espacio X. Por lo anterior definimos un sublocal de un local de la siguiente manera.

Definición 2.4.1. Para $A, B \in \mathbf{Loc}$ locales, un morfismo $h : B \to A$ es *sublocal* de A si el morfismo de marcos $h^* : A \to B$ es suprayectivo.

La naturaleza de los sublocales está relacionada con las nociones de epimorfismo y monomorfismo en la categoría **Loc**.

Proposición 2.4.2. *Para $h : A \to B$ morfismo entre los locales A y B se cumple lo siguiente:*

(i) *h es epimorfismo en* **Loc** *si y sólo si h^* es inyectiva.*

(ii) *h es monomorfismo extremal si y sólo si h^* es suprayectiva.*

Demostración. (i) Supongamos que h es epimorfismo, entonces h^* es monomorfismo. Consideremos $\mathbb{S} = \{0 < s < 1\}$ el marco con tres elementos y para un elemento $x \in B$ definamos $\sigma_x : \mathbb{S} \to B$ el morfismo de marcos tal que $\sigma_x(0) = 0_B, \sigma_x(1) = 1_B$ y $\sigma_x(s) = x$. Sean $a, b \in B$ tales que $h^*(a) = h^*(b)$, entonces para los morfismos de marcos σ_a y σ_b se satisface que $h^* \circ \sigma_a = h^* \circ \sigma_b$, luego por ser monomorfismo h^* se tiene que $\sigma_a = \sigma_b$ lo cual implica que $a = b$. Si h^* es inyectivo, entonces tiene inverso izquierdo que resulta ser morfismo de marcos, luego h^* es monomorfismo en **Frm** y por lo tanto h es epimorfismo en **Loc**.

(*ii*) Supongamos que h es monomorfismo extremal, entonces h^* es epimorfismo extremal. Se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & h^*[B] \arrow[dr, hook, "i"] & \\ B \arrow[ur, "h^*"] \arrow[rr, "h^*"'] & & A \end{tikzcd}$$

con i el morfismo inclusión. Por ser i inyectiva, por el inciso anterior, se tiene que i es monomorfismo en **Frm**. Al ser h epimorfismo extremal se tiene que i es isomorfismo luego i es suprayectivo de donde se sigue que $h^*[B] = A$ y entonces h^* es suprayectivo.

De manera inversa si h^* es suprayectivo y $h^* = k \circ j$ con k monomorfismo, al ser h^* suprayectivo se cumple que k también es suprayectivo, luego k es suprayectivo e inyectivo (por el inciso anterior k monomorfismo implica que es función inyectiva) y por lo tanto biyectivo, así k debe ser isomorfismo de marcos. Esto implica que h^* es epimorfismo extremal.

□

Ejemplo 2.4.3. Para un un local A y un elemento $a \in A$, de define el morfismo de marcos $\hat{a} : A \to \downarrow (a)$ tal que para $b \in A$, $\hat{a}(b) = a \wedge b$. Claramente este morfismo es un sublocal por ser suprayectiva la función. Este sublocal es llamado *sublocal abierto.*

Ejemplo 2.4.4. Para un un local A y un elemento $a \in A$, de define el morfismo de marcos $\breve{a} : A \to \uparrow (a)$ tal que para $b \in A$, $\hat{a}(b) = a \vee b$. Claramente este morfismo es un sublocal por ser suprayectiva la función. Este sublocal es llamado *sublocal cerrado.*

Definición 2.4.5. Para dos sublocales $h : B \to A$, $h' : B' \to A$ de A, se denota por $h \sqsubset h'$ al hecho de que exista $k : B \to B'$ un morfismo de locales tal que $h' \circ k = h$. Se dice que los sublocales son equivalentes si $h \sqsubset h'$ y $h' \sqsubset h$. Al conjunto de clases de equivalencia de sublocales de A con esta relación se le denota por $\mathcal{S}A$.

Según el inciso (*ii*) de la proposición 2.4.2 un sublocal es equivalente a un monomorfismo extremal en la categoría **Loc**. Dado un sublocal $h : B \to A$

de A es posible definir una relación sobre los elementos de A de la siguiente manera:

$$a \equiv_h b \Leftrightarrow h^*(a) = h^*(b).$$

Puesto que $\equiv_h$ se define mediante una igualdad de evaluaciones de morfismo de marcos resulta que $\equiv_h$ es relación de equivalencia que respeta supremos arbitrarios e ínfimos finitos. Con esta relación de equivalencia es posible definir una función $j_h : A \to A$ tal que para un $a \in A$ asocia al elemento

$$j_h(a) = \bigvee [a]_{\equiv_h} = \bigvee \{b \in A \mid a \equiv_h b\}.$$

Esta función satisface para todo $x, y \in A$

(*i*) $x \geq y$ implica que $j_h(x) \geq j_h(y)$

(*ii*) $j_h(j_h(x)) = j_h(x)$

(*iii*) $j_h(x) \geq x$

(*iv*) $j_h(x \wedge y) = j_h(x) \wedge j_h(y)$

justamente porque la relación $\equiv_h$ respeta supremos arbitrarios e ínfimos finitos.

Las nociones de sublocal, relación de equivalencia que respeta la estructura de marco y la de función que satisface los puntos anteriores son equivalentes.

Definición 2.4.6. Para un local A decimos que $\equiv_{\mathcal{C}}$ es *congruencia* sobre A si es relación de equivalencia y satisface lo siguiente:

- (compatible con $\bigvee$) Para $\mathcal{P} = \{x_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{I}\} \subseteq A$ y $\mathcal{Q} = \{y_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{I}\} \subseteq A$ tales que $x_\lambda \equiv_{\mathcal{C}} y_\lambda$, se cumple
$$\bigvee \mathcal{P} \equiv_{\mathcal{C}} \bigvee \mathcal{Q}.$$
- (compatible con $\wedge$) Para cualesquiera $a, b, c, d \in A$ tales que $a \equiv_{\mathcal{C}} b$ y $c \equiv_{\mathcal{C}} d$ se tiene
$$a \wedge c \equiv_{\mathcal{C}} b \wedge d.$$

El conjunto de congruencias es denotado por $\mathcal{C}A$.

Definición 2.4.7. Para un local A una función $j : A \to A$ es *núcleo* si satisface para todo $x, y \in A$ las siguientes propiedades

(i) (monotonía) $x \leq y$ implica que $j(x) \leq j(y)$.

(ii) (idempotente) $j(j(x)) = j(x)$.

(iii) (inflatoria) $j(x) \geq x$.

(iv) (respeta $\wedge$) $j(x \wedge y) = j(x) \wedge j(y)$.

El conjunto de núcleos es denotado por $\mathcal{N}A$.

Teorema 2.4.8. *Para un local A los siguientes conjuntos $\mathcal{S}A$, $\mathcal{C}A$ y $\mathcal{N}A$ están relacionados biyectivamente.*

Demostración. • $\mathcal{S}A \cong \mathcal{C}A$.

Para un sublocal $h : B \to A$ de A definamos la relación $\equiv_h$ tal que

$$a \equiv_h b \Leftrightarrow h^*(a) = h^*(b).$$

De la definición de $\equiv_h$ se sigue claramente que es relación de equivalencia y además, por ser h^* morfismo de marcos, $\equiv_h$ es compatible con $\bigvee$. Consideremos la función $\phi : \mathcal{S}A \to \mathcal{C}A$ tal que para cada h sublocal de A le asocia

$$\phi([h]) = \equiv_h .$$

La función ϕ está bien definida puesto que dos sublocales equivalentes definen la misma relación por existir un isomorfismo de marcos que los relaciona.

De manera recíproca para cada $\equiv_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}A$ consideremos la proyección canónica $p_{\mathcal{C}} : A \to A/\equiv_{\mathcal{C}}$. Veamos que $A/\equiv_{\mathcal{C}}$ el conjunto de clases de equivalencia es marco. Los operadores $\vee_{\mathcal{C}}$ y $\wedge_{\mathcal{C}}$ sobre $A/\equiv_{\mathcal{C}}$ tales que para cada $[a], [b] \in A/\equiv_{\mathcal{C}}$ satisfacen

$$[a] \vee_{\mathcal{C}} [b] = [a \vee b] \qquad\qquad [a] \wedge_{\mathcal{C}} [b] = [a \wedge b]$$

están bien definidos por ser $\equiv_{\mathcal{C}}$ congruencia. Por otro lado, por satisfacer $\vee$ y $\wedge$ las leyes de absorción, también lo hacen $\vee_{\mathcal{C}}$ y $\wedge_{\mathcal{C}}$, entonces por el teorema 1.1.7 $A/\equiv_{\mathcal{C}}$ resulta ser una retícula. Consideremos $\mathcal{P} = \{[a_i] \mid i \in \mathscr{I}\} \subseteq A/\equiv_{\mathcal{C}}$, entonces para toda $i \in \mathscr{I}$

$$[a_i] = \left[a_i \wedge \left(\bigvee_{i \in \mathscr{I}} a_i \right) \right]$$

y por lo tanto $\left[\bigvee_{i\in\mathscr{I}} a_i\right]$ es cota superior de $\mathcal{P}$. Consideremos $[x]$ cota superior de $\mathcal{P}$, entonces para todo $i \in \mathscr{I}$ se cumple que $a_i \wedge x \equiv_{\mathcal{C}} a_i$, luego por ser $\equiv_{\mathcal{C}}$ congruencia se tiene que

$$\begin{aligned} \bigvee\{a_i \mid i \in \mathscr{I}\} &\equiv_{\mathcal{C}} \bigvee\{x \wedge a_i \mid i \in \mathscr{I}\} \\ &\equiv_{\mathcal{C}} x \wedge \left(\bigvee\{a_i \mid i \in \mathscr{I}\} \right) \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da puesto que A es marco, entonces $[x] \geq [\bigvee\{a_i \mid i \in \mathscr{I}\}]$ de donde se tiene que $[\bigvee_A \mathcal{P}]$ es el supremo de $\mathcal{P}$. De lo anterior se tiene que $A/\equiv_{\mathcal{C}}$ es retícula completa superiormente, luego por el teorema 1.1.12. $A/\equiv_{\mathcal{C}}$ es retícula completa. La LDI se satisface en $A/\equiv_{\mathcal{C}}$ por ser A marco.

Definamos $\varphi : \mathcal{C}A \to SA$ que a cada $\equiv_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}A$ asocia a la clase

$$\{h \mid h \text{ es sublocal equivalente a } p_h^{op}\}.$$

Consideremos $\equiv_{\mathcal{D}} \in \mathcal{C}A$, entonces para $a, b \in A$

$$a \equiv_{\mathcal{D}} b \Leftrightarrow p_{\mathcal{D}}(a) = p_{\mathcal{D}}(b) \Leftrightarrow a \equiv_{p_{\mathcal{D}}^{op}} b$$

de donde se tiene que $\equiv_{\mathcal{D}} = \equiv_{p_{\mathcal{D}}}^{op} = (\phi \circ \varphi)(\equiv_{\mathcal{D}})$.

De manera inversa para un sublocal $h : B \to A$ con $\mathcal{H}$ los locales equivalentes a h se cumple que la función $k^* : A/\equiv_h \to B$ tal que a la clase $[a]$ le asocia

$$k^*([a]) = h^*(a)$$

está bien definida (puesto que todo elemento $\equiv_h$-equivalente a a tiene misma imagen bajo h^*) y es morfismo de marcos por ser h^* morfismo de marcos, además por ser h sublocal k^* es suprayectiva y de la definición de k^* también se sigue que es inyectiva, por lo tanto es isomorfismo de marcos. Justo k^* es morfismo de marcos que satisface

$$k^* \circ p_{\equiv_h} = h^*$$

por lo tanto $p_{\equiv_h} \in \mathcal{H}$ y entonces $(\varphi \circ \phi)(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

De esto se sigue que ϕ y φ son inversas la una de la otra y por lo tanto biyecciones de conjuntos.

- $\mathcal{C}A \cong \mathcal{N}A$.

Para $\equiv_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}A$ definamos $j_{\mathcal{C}} : A \to A$ la función tal que para un elemento $a \in A$ le asocia

$$j_{\mathcal{C}}(a) = \bigvee\{b \in A \mid b \equiv_{\mathcal{C}} a\} = \bigvee[a]$$

Sean $x, y \in A$, entonces por ser A marco

$$\begin{aligned} j_{\mathcal{C}}(x) \wedge j_{\mathcal{C}}(y) &= \left(\bigvee[x]\right) \wedge \left(\bigvee[x]\right) \\ &= \bigvee\left\{\left(\bigvee[x]\right) \wedge y' \mid y' \equiv_{\mathcal{C}} y\right\} \\ &= \bigvee\left\{\bigvee\{x' \wedge y' \mid x' \equiv_{\mathcal{C}} x\} \mid y' \equiv_{\mathcal{C}} y\right\} \\ &= \bigvee\{x' \wedge y' \mid x' \equiv_{\mathcal{C}} x, y' \equiv_{\mathcal{C}} y\} \\ &= \bigvee([x] \wedge [y]) \\ &= \bigvee([x \wedge y]) \\ &= j_{\mathcal{C}}(x \wedge y) \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue de que $\equiv_{\mathcal{C}}$ es congruencia. De lo anterior se deduce que $j_{\mathcal{C}}$ respeta $\wedge$ y en particular es monótona. Trivialmente es inflatoría y del hecho de que $x \equiv_{\mathcal{C}} \bigvee[x]$ se tiene que $j_{\mathcal{C}}(j_{\mathcal{C}}(x)) = \bigvee[x] = j_{\mathcal{C}}(x)$. De lo anterior se tiene que $j_{\mathcal{C}}$ es núcleo.

Definamos $\rho : \mathcal{C}A \to \mathcal{N}A$ tal que para cada $\equiv_{\mathcal{C}}$ congruencia

$$\rho(\equiv_{\mathcal{C}}) = j_{\mathcal{C}}.$$

De manera inversa para un núcleo j definamos $\equiv_j$ la relación tal que

$$a \equiv_j b \Leftrightarrow j(a) = j(b).$$

Puesto que j respeta $\wedge$, la relación $\equiv_j$ respeta $\wedge$. Veamos que $\equiv_j$ respeta supremos arbitrarios. Sea $\mathcal{P} \subseteq A$, por ser j inflatorio se tiene que para cada $y \in \mathcal{P}$,

$$\bigvee_{x \in \mathcal{P}} j(x) \geq j(y)$$

entonces $j\left(\bigvee_{x\in\mathcal{P}} j(x)\right)$ es cota superior de $j(\mathcal{P})$. Sea $z \in A$ tal que $j(z)$ es cota superior de $j(\mathcal{P})$, entonces para todo $y \in \mathcal{P}$ se tiene que $j(z) \geq j(y)$, por lo tanto $j(z) \geq \bigvee\{j(x) \mid x \in \mathcal{P}\}$ y entonces por ser monótono j e idempotente se cumple que

$$j(z) = j(j(z)) \geq j\left(\bigvee j(\mathcal{P})\right)$$

por lo tanto $j\left(\bigvee j(\mathcal{P})\right)$ es una mínima cota superior en la imagen de j. Además por ser monótono j se tiene que $j\left(\bigvee \mathcal{P}\right)$ es cota superior de $j(\mathcal{P})$, entonces de lo anterior se tiene que

$$j\left(\bigvee \mathcal{P}\right) \geq j\left(\bigvee j(\mathcal{P})\right)$$

por otro lado $j\left(\bigvee j(\mathcal{P})\right) \geq j(x) \geq x$ para todo $x \in \mathcal{P}$ y por lo tanto al aplicar supremo y j se obtiene la desigualdad opuesta a la desigualdad de arriba de donde se concluye que

$$(*) \qquad j\left(\bigvee \mathcal{P}\right) = j\left(\bigvee j(\mathcal{P})\right)$$

Sean $\mathcal{Q} = \{x_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{I}\}$ y $\mathcal{R} = \{y_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{I}\}$ subconjuntos de A tales que para toda λ se tiene $x_\lambda \equiv_j y_\lambda$, es decir $j(x_\lambda) = j(y_\lambda)$, por lo tanto

$$\bigvee j(\mathcal{Q}) = \bigvee j(\mathcal{R}).$$

Aplicando j se tiene que

$$j\left(\bigvee \mathcal{Q}\right) = j\left(\bigvee j(\mathcal{Q})\right) = j\left(\bigvee j(\mathcal{R})\right) = j\left(\bigvee \mathcal{R}\right)$$

de donde se concluye que $\bigvee \mathcal{Q} \equiv_j \bigvee \mathcal{R}$.

Definamos $\tau : \mathcal{N}A \to \mathcal{C}A$ tal que para $j \in \mathcal{N}A$, $\tau(j) = \equiv_j$.

Sea $\equiv_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}A$, entonces para cualesquiera $a, b \in A$

$$a \equiv_{\mathcal{C}} b \Leftrightarrow j_{\mathcal{C}}(a) = j_{\mathcal{C}}(b) \Leftrightarrow a \equiv_{j_{\mathcal{C}}} b$$

por lo tanto $\equiv_{\mathcal{C}} = \equiv_{j_{\mathcal{C}}} = (\tau \circ \rho)(\equiv_{\mathcal{C}})$.

De manera inversa para un $j \in \mathcal{N}A$ y para $a \in A$ se cumple

$$
\begin{aligned}
j_j(a) &= j_j\left(\bigvee\{x \in A \mid x \equiv_j a\}\right) \\
&= j_j\left(\bigvee\{x \in A \mid x \leq j(x) = j(a)\}\right)
\end{aligned}
$$

pero puesto que $j(j(a)) = j(a)$ se cumple que $j(a)$ es el máximo del conjunto $\{x \in A \mid x \leq j(x) = j(a)\}$ y por lo tanto $j_j(a) = j(a)$, entonces $j = (\rho \circ \tau)(j)$.

De esto se concAluye que ρ y τ son inversa la una de la otra y por lo tanto biyecciones.

□

La noción de un núcleo está relacionada con el conjunto de puntos fijos de él. Veamos que los puntos fijos de un núcleo forman un marco.

Teorema 2.4.9. *Para un $A \in$ **Loc** local y un núcleo $\nu : A \to A$ se satisface que $\nu(A) = A_\nu$ es marco con el orden heredado de A.*

Demostración. Notemos que por ser idempotente ν se cumple

$$
\begin{aligned}
A_\nu &= \{\nu(x) \mid x \in A\} \\
&\subseteq \{y \in A \mid \nu(y) = y\} \\
&= \{\nu(y) \in A \mid \nu(y) = y\} \\
&\subseteq A_\nu,
\end{aligned}
$$

entonces A_ν es justamente el conjunto de puntos fijos de ν. Veamos que por ser ν núcleo, para cualesquiera $a, b \in A$ se cumple que

$$\nu(a \wedge_A b) = \nu(a) \wedge_A \nu(b)$$

y por lo tanto A_ν es semiretícula inferior. Para una familia $\mathcal{P} \subseteq A$, por $(*)$ la prueba del teorema 2.4.8. se tiene que

$$\nu\left(\bigvee_{x \in \mathcal{P}} \nu(x)\right)$$

es una mínima cota superior de $\nu(\mathcal{P})$ en A_ν. Luego A_ν es retícula que también es retícula completa superiormente, entonces por el teorema 1.1.12 A_ν es retícula completa.

Sean $a, b \in A$, entonces por ser inflatorio ν se tiene que

$$\nu((a \succ \nu(b)) \geq (a \succ \nu(b))$$

por otro lado, se tiene que $a \leq \nu(a)$ y $a \wedge (a \succ \nu(b)) \leq \nu(b)$ entonces

$$\begin{aligned} a \wedge \nu((a \succ \nu(b))) &\leq \nu(a) \wedge \nu((a \succ \nu(b))) \\ &= \nu(a \wedge (a \succ \nu(b))) \\ &\leq \nu(\nu(b)) = \nu(b) \end{aligned}$$

por lo tanto $\nu((a \succ \nu(b)) \leq (a \succ \nu(b))$ de donde se tiene que

$$\nu((a \succ \nu(b)) = (a \succ \nu(b))$$

por lo tanto A_ν tiene implicación, entonces por el teorema 1.2.16. A_ν es marco. □

Algo que hay que notar es que el menor elemento de A_ν no necesariamente es 0_A, puesto que para un núcleo no se cumple necesariamente que $\nu(0_A) = 0_A$, entonces A_ν es marco contenido en A pero no es submarco necesariamente puesto que es posible que no se preserven los elementos distinguidos.

Un ejemplo relevante de nucleos es el siguiente.

Ejemplo 2.4.10. Para un local A y un elemento a se define la función $w_a : A \to A$ tal que para $b \in A$

$$w_a(b) = (a \succ (a \succ b)).$$

Este resulta ser un núcleo por las propiedades que satisface la implicación.

2.5 Producto y Coproducto en *Loc*.

En la categoría **Top** existe los productos y coproductos de familias arbitrarias, estos están dados por el producto topológico y la unión disjunta de espacios. El objetivo de esta sección es mostrar que en la categoría **Loc** también existen el producto y coproducto de familias arbitrarias de locales. La construcción del coproducto en **Loc** es relativamente simple, sin embargo, la construcción del producto requiere mas herramientas; esta construcción se basa en la teoría presentada en [8].

Teorema 2.5.1. *(Existencia de Coproductos) Para un familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathscr{I}}$ de locales, existe*

$$\coprod_{\lambda\in\mathscr{I}} A_\lambda.$$

Demostración. Consideremos $A = \prod_{\lambda\in\mathscr{I}} A_\lambda$ el producto cartesiano dotado con los operadores $\wedge_{\mathscr{I}}$ y $\bigvee_{\mathscr{I}}$ puntuales. Veamos que A es el coproducto de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathscr{I}}$ en la categoría **Loc**. Puesto que **Loc** es la categoría opuesta a **Frm**, es equivalente demostrar que A satisface la ley universal del producto en la categoría **Frm**.

Para cada $\lambda \in \mathscr{I}$ definamos $p_\lambda^* : A \to A_\lambda$ como la proyección de A sobre A_λ. Claramente p_λ^* es morfismo de locales puesto que A tiene los operadores puntuales, entonces veamos que

$$\{p_\lambda^* \mid \lambda \in \mathscr{I}\}$$

es la familia de morfismos que hacen a A el producto de los marcos $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathscr{I}}$. Consideremos $B \in$ **Frm** y

$$\{r_\lambda^* : B \to A_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{I}\}$$

familia de morfismos.

Definamos $p^* : B \to A$ tal que para $b \in B$

$$p^*(b) = (r_\lambda^*(b))_{\lambda\in\mathscr{I}}.$$

Puesto que $\{r_\lambda^* : B \to A_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{I}\}$ son morfismo de marcos y A tiene los operadores puntuales se sigue que p^* es morfismo de marcos, además para toda $b \in B$ y toda $\lambda \in \mathscr{I}$ se cumple que

$$(p_\lambda^* \circ p^*)(b) = p_\lambda^*((r_\mu(b))_{\mu\in\mathscr{I}}) = r_\lambda(b).$$

La unicidad de este morfismo se sigue del hecho que cada proyección debe coincidir con el respectivo morfismo r. De esto se sigue que A es el producto en **Frm** y por lo tanto es el coproducto en **Loc**. $\square$

La construcción de productos requiere de más herramientas y nuevos conceptos inspirados en la noción de ideal.

Definición 2.5.2. Para una semiretícula inferior una función $C : A \to 2^{2^A}$ es *función cubierta* de A si para cualesquiera $a, b \in A$ con $a \geq b$ se satisface lo siguiente:

(i) $S \in C(a) \Rightarrow S \subseteq \downarrow (a)$,

(ii) $S \in C(a) \Rightarrow \{b \wedge s \mid s \in S\} \in C(b)$.

Una función que satisface (ii) es llamada *ínfimo estable*. Un par (A, C) es un *cubriente*.

Definición 2.5.3. Un marco B es *generado por un cubriente* (A, C) si existe un morfismo de semiretículas inferiores $f : A \to B$ tal que para todo $a \in A$ se satisface la siguiente afirmación

$$(\bullet) \qquad S \in C(a) \Rightarrow f(a) = \bigvee_B \{f(s) \mid s \in S\}$$

y es universal con esta propiedad. Un morfismo f que satisface $(\bullet)$ es un morfismo que *convierte cubiertas de* C *en supremos*.

En la definición anterior se dice que B es generado por el cubriente (A, C) si existe $f : A \to B$ que convierte cubiertas de C en supremos y para cualquier marco B' y $f' : A \to B'$ morfismo que convierte cubiertas de C en supremos existe un único morfismo $\overline{f} : B \to B'$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, dashed, "\overline{f}"] \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"'] & B' \end{tikzcd}$$

Por último definamos la noción de ideal compatible con el concepto de función cubierta.

Definición 2.5.4. Para un cubriente (A, C), un subconjunto $I \subset A$ es $C-$*ideal* si I es cerrado inferiormente y satisface para cualesquiera $a \in A$, $S \in C(a)$ lo siguiente:

$$S \subseteq I \Rightarrow a \in I.$$

El conjunto de $C-$*ideales* se denota por $C\mathcal{I}d$.

Demostremos el siguiente teorema que describe la estructura del conjunto $C\mathcal{I}d$.

Teorema 2.5.5. *Para un cubriente* (A, C) *el conjunto* $C\mathcal{I}d$ *ordenado por la contención es un marco generado por* (A, C).

Demostración. Sea $\mathcal{D}A$ el conjunto de subconjuntos cerrados inferiormente de la semiretícula A. Por el ejemplo 1.1.17 se tiene que $\mathcal{D}A$ es marco. De la definición de C-ideal se sigue claramente que la intersección arbitraria de C-ideales es C-ideal, entonces definamos la siguiente función $j : \mathcal{D}A \to \mathcal{D}A$ tal que para $S \in \mathcal{D}A$,

$$j(S) = \bigcap\{I \in C\mathcal{I}d \mid S \subseteq I\}.$$

Veamos que j es núcleo del marco $\mathcal{D}A$. De la definición se tiene que para cualquier $S \in \mathcal{D}A$ se cumple que $S \subseteq j(S)$, puesto que el menor C-ideal que contiene al C-ideal $j(S)$ es el mismo se concluye que j es idempotente.

Sean $R, T \in \mathcal{D}A$, denotemos por $I = j(R \cap T)$. Puesto que $R \subseteq j(R)$ y $T \subseteq j(T)$ se tiene que $R \cap T \subseteq j(R) \cap j(T)$ y por lo tanto $j(R \cap T) \subseteq j(R) \cap j(T)$. Para la otra contención definamos el siguiente conjunto

$$R' = \{d \in A \mid \forall t \in T, d \wedge t \in I\}.$$

De la definición anterior se tiene que $R \subseteq R'$ y $T \cap R' = T \wedge R' \subset I$, veamos que $R' \in C\mathcal{I}d$. Por ser I cerrado inferiormente se tiene que R' es cerrado inferiormente. Consideremos $U \in C(a)$ tal que $U \subseteq R'$, luego para toda $t \in T$ se cumple que $\{u \wedge t \mid u \in U\} \subseteq I$, además $\{u \wedge t \mid u \in U\} \in C(a \wedge t)$ de la ínfimo estabilidad de C, entonces se tiene que $a \wedge t \in I$ por ser I un C-ideal. Por ser arbitrario $t \in T$ se cumple que $a \in R'$ y se sigue que R' es C-ideal. Definiendo de manera similar

$$T' = \{d \in A \mid \forall r \in R', d \wedge r \in I\}$$

se cumple que $R \subseteq R'$, $R' \cap T \subseteq I$ y R' es C-ideal. De esto se sigue que $j(R) \subseteq R'$, $j(T) \subseteq T'$ y

$$j(R) \cap j(T) \subseteq R' \cap T' \subseteq I = j(R \cap T)$$

de donde se deduce que j abre ínfimos y por lo tanto es núcleo.

Por la proposición 2.4.9 aplicada al núcleo j se sigue que $j(A) = C\mathcal{I}d$ es un marco.

Veamos que $C\mathcal{I}d$ está generado por (A, C). Definamos la función $f : A \to C\mathcal{I}d$ tal que para un elemento $a \in A$

$$f(a) = j(\downarrow(a))$$

el cual es morfismo de semiretículas inferiores por ser j núcleo.

Para $a \in A$ y $S \in C(a)$ se cumple que $a \in j\left(\bigcup\{j(\downarrow(s)) \mid s \in S\}\right)$ por ser $j\left(\bigcup\{j(\downarrow(s)) \mid s \in S\}\right)$ un C-ideal que contiene a S, entonces

$$j(\downarrow(a)) \subseteq j\left(\bigcup\{j(\downarrow(s)) \mid s \in S\}\right).$$

Para cualquier $s \in S$ se tiene que $a \geq s$ entonces $j(\downarrow(a)) \supseteq j(\downarrow(s))$, entonces

$$j(\downarrow(a)) \supseteq (\bigcup\{j(\downarrow(s)) \mid s \in S\}.$$

Al ser monotona j e idempotente se tiene

$$j(\downarrow(a)) \subseteq j\left(\bigcup\{j(\downarrow(s)) \mid s \in S\}\right).$$

de donde se concluye la igualdad entre los conjuntos.

Con lo anterior se deduce que f convierte cubiertas de C en supremos. Por último mostremos que f es universal con la propiedad de convertir cubiertas en supremos.

Sean B marco y $g : A \to B$ morfismo de semiretículas inferiores tal que g convierte cubiertas de C en supremos. Por el ejemplo 1.1.17 la función $\overline{g} : \mathcal{D}A \to B$ tal que para $S \in \mathcal{D}A$

$$\overline{g}(S) = \bigvee_B \{g(s) \mid s \in S\}$$

es morfismo que abre supremos arbitrarios, y por lo tanto existe $g_* : B \to \mathcal{D}A$ adjunto derecho de $\overline{g}$. Por la definición de adjunto derecho de morfismos de retículas se tiene que para cada $b \in B$

$$\begin{aligned}
g_*(b) &= \bigcup\{D \in \mathcal{D}A \mid \overline{g}(D) \leq b\} \\
&= \bigcup\left\{D \in \mathcal{D}A \;\middle|\; \bigvee_B \{g(a) \mid a \in D\} \leq b\right\} \\
&= \bigcup\{D \in \mathcal{D}A \mid \forall a \in D, g(a) \leq b\} \\
&= \{a \in A \mid g(a) \leq b\}.
\end{aligned}$$

Notemos que para $S \in C(a)$ tal que $S \subseteq g_*(b)$ se cumple que

$$g(a) = \bigvee_B \{g(s) \mid s \in S\} \leq b,$$

entonces $g(a) \in g_*(b)$ y por lo tanto $g_*(b)$ es C-ideal. Sea $a \in A$, por ser $\overline{g}$ y g_* adjuntos

$$(\overline{g} \circ g_*)(g(a)) \leq g(a). \tag{1}$$

Por ser $g_*(g(a))$ un C-ideal que contiene a $\downarrow(a)$ se cumple que $f(a) = j(\downarrow(a)) \subseteq g_*(g(a))$ y por (1) se deduce que

$$g(a) \leq \overline{g}(f(a)) \leq (\overline{g} \circ g_*)(g(a)) \leq g(a)$$

por lo tanto para cualquier $a \in A$ se cumple que $(\overline{g} \circ f)(a) = g(a)$, entonces

$$\overline{g} \circ f = g.$$

La unicidad se sigue de que para cualquier $I \in C\mathcal{I}d$ se satisface que

$$I = j\left(\bigcup_{a \in I} j(\downarrow(a))\right).$$

□

Como aplicación de esto ahora es posible demostrar la existencia de productos en **Loc**.

Teorema 2.5.6. *(Existencia de Productos) Para una familia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathscr{I}}$ de locales, existe*

$$\prod_{\lambda \in \mathscr{I}} A_\lambda.$$

Demostración. Es equivalente mostrar que existe un coproducto en **Frm** de la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathscr{I}}$. Definamos A como el siguiente subconjunto del producto de marcos de $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathscr{I}}$

$$A = \left\{(a_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{I}} \in \prod_{\lambda \in \mathscr{I}} A_\lambda \mid a_\lambda \neq 1_{A_\lambda} \text{ para una cantidad finita de índices}\right\}.$$

Claramente A es semiretícula inferior. Definamos para cada $\lambda \in \mathscr{I}$, el morfismo de semiretículas inferiores $q_\lambda : A_\lambda \to A$ que a cada $b \in A_\lambda$ asocia al punto $q_\lambda(b)$ que satisface en las proyecciones lo siguiente:

$$p_\mu^*(q_\lambda(b)) = \begin{cases} b & \text{si } \mu = \lambda \\ 1_{A_\lambda} & \text{si } \mu \neq \lambda \end{cases}$$

Sean $a = (a_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{I}} \in A$, $\mu \in \mathscr{I}$ y $S \subseteq A_\mu$, definimos el remplazo de a por S en la entrada μ-ésima.

$$S(a, \mu) = \{b \in A \mid p_\lambda^*(b) = p_\lambda^*(a), \text{ si } \lambda \neq \mu \text{ y } p_\mu^*(b) \in S\}.$$

De la misma forma para $a \in A$ definimos la cubriente de a de la siguiente manera

$$C(a) = \left\{ S(a,\mu) \mid \mu \in \mathscr{I}, S \subseteq A_\mu \text{ tal que } \bigvee_{A_\lambda} S = p_\mu^*(a) \right\}.$$

De la LDI para cada marco A_λ se sigue que la función C es función ínfimo estable y por lo tanto cubriente.

Sea $B = C\mathcal{I}d$, veamos que B satisface ser el coproducto en **Frm**. Consideremos la familia de morfismos

$$\mathcal{Q} = \{Q_\lambda = j(\downarrow (q_{\lambda \text{---}})) : A_\lambda \to C\mathcal{I}d \mid \lambda \in \mathscr{I}\},$$

veamos que Q satisface la propiedad universal de coproducto.

Sean $\mathcal{X}$ marco y una familia de morfismos

$$\{r_\lambda : A_\lambda \to \mathcal{X} \mid \lambda \in \mathscr{I}\}.$$

Entonces podemos definir $R : A \to \mathcal{X}$ tal que para cada $(a_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{I}} \in A$ se satisface lo siguiente:

$$R((a_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{I}}) = \bigwedge_{\mathcal{X}} \{r_\lambda(a_\lambda) \mid \lambda \in \mathscr{I}\}.$$

Esta R es morfismo de semiretículas inferiores por ser cada r_λ morfismo de marcos, por otro lado es claro que para cada $\lambda \in \mathscr{I}$ se satisface que $R \circ q_\lambda = r_\lambda$, entonces $R \circ q_\lambda$ respeta supremos arbitrarios por ser morfismo de marcos. Además R convierte cubiertas de C en supremos, para ello consideremos $\mu \in \mathscr{I}$, $S \subseteq A_\mu$ y $(a_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{I}}$ tal que $p_\mu^*((a_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{I}}) = a_\mu = \bigvee_{A_\mu} S$. Sea S' el conjunto de supremos finitos de S.

Si $R((a_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{I}}) = r_\mu(a_\mu)$ entonces $r_\mu(a_\mu) \leq r_\lambda(a_\lambda)$ para cada $\lambda \in \mathscr{I}$, luego para cada $s \in S$, $r_\mu(s) \leq r_\mu(a_\mu) \leq r_\lambda(a_\lambda)$ y por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} R((a_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{I}}) &= r_\mu \left(\bigvee_{A_\mu} S \right) \\ &= \bigvee_{\mathcal{X}} \{r_\mu(s) \mid s \in S\} \\ &= \bigvee_{\mathcal{X}} \{R(t) \mid t \in S(a,\mu)\} \end{aligned}$$

Por otro lado si $R((a_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{I}}) = r_\lambda(a_\lambda)$ con $\lambda \neq \mu$ entonces

$$r_\lambda(a_\lambda) < r_\mu(a_\mu) = \bigvee_{\mathcal{X}}\{r(s) \mid s \in S\} = \bigvee_{\mathcal{X}}\{r(s) \mid s \in S'\}$$

donde la última igualdad es por que S y S' tienen el mismo supremo. Por lo tanto existe $s' \in S'$ tal que $r_\lambda(a_\lambda) < r_\mu(s')$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} R((a_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{I}}) &= r_\mu(a_\mu) \\ &= \bigvee_{\mathcal{X}}\{R(t) \mid t \in S'(a,\mu), t \geq s'\} \\ &= \bigvee_{\mathcal{X}}\{R(t) \mid t \in S(a,\mu)\} \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que $\bigvee_{A_\mu} S = \bigvee_{A_\mu} S'$. En cualquier caso R transforma cubiertas de C en supremos y por el teorema 2.5.5 se tiene que existe un único $g : C\mathcal{I}d \to \mathcal{X}$ morfismo de marcos tal que

$$R = g \circ j(\downarrow (\_\_))$$

y componiendo con q_λ para cualquier λ obtenemos que

$$r_\lambda = R \circ q_\lambda = g \circ j(\downarrow (q_\lambda(\_\_))) = g \circ Q_\lambda$$

entonces la familia $\mathcal{Q}$ tiene la propiedad universal del coproducto y por lo tanto $C\mathcal{I}d$ es el producto de los locales $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathscr{I}}$ en **Loc**. $\square$

Capítulo 3

Teorema de Tychonoff en Loc

Para concluir veamos una "generalización" del clásico teorema de Tychonoff para espacios topológicos. En la categoría **Loc** también se satisface que el producto de locales es compacto precisamente cuando todos los factores son compactos. La prueba de este teorema se basa en las ideas encontradas en [7], trabajo famoso de P. T. Johnstone en el cual expone un poco de la teoría de locales que se puede desarrollar sin depender del axioma de elección.

3.1 Teorema de Tychonoff sin axioma de elección.

Definición 3.1.1. Un local A es *compacto* si $1_A \in \mathcal{K}A$.

Definición 3.1.2. Para $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathscr{I}}$ una familia de locales, $A_{\mathscr{I}}$ es la semiretícula inferior formada por los elementos del producto cartesiano que tienen una cantidad finita de coordenadas distintas de 1. Para la función cubierta C sobre A considerada en la construcción del coproducto en **Frm** se difine C_f la función tal que para $a \in A$

$$C_f(a) = \{S \subseteq A \mid S \in C(a), S \text{ finito}\}.$$

Se denota por $C_f\mathcal{I}d$ al marco formado por los $C_f - ideales$ inducidos por C_f.

Definición 3.1.3. Para un elemento $a = (a_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{I}} \in A_{\mathscr{I}}$, una familia $\Gamma \subseteq \mathscr{I}$ y elementos $\Delta = \{b_\mu \mid \mu \in \Gamma, b_\mu \in A_\mu\}$ el elemento $a_{(\Delta)}$ es el elemento en $A_{\mathscr{I}}$ que coordenada a coordenada satisface lo siguiente:

$$p_\mu^*(a_{(\Delta)}) = \begin{cases} b_\mu & \text{si } \mu \in \Delta \\ a_\mu & \text{si } \mu \notin \Delta. \end{cases}$$

Definición 3.1.4. Para un subconjunto $S \subseteq A_{\mathscr{I}}$ y $\Lambda \subseteq \mathscr{I}$, un elemento $(a_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{I}}$ es Λ-*generado por* S si $a_\lambda = 1_{A_\lambda}$ para cada $\lambda \in \mathscr{I} \setminus \Lambda$, para todo $\mu \in \Lambda$ existe $S_\mu \subseteq A_\mu$ tal que $\bigvee S_\mu = a_\mu$ y la familia $\{S_\mu \mid \mu \in \Lambda\}$ cumple que

$$\left\{ \bigwedge \{q_\mu(b_\mu) \mid \mu \in \Lambda\} \mid b_\mu \in S_\mu \right\} \subseteq S.$$

En la definición anterior diremos que $(a_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{I}}$ es Λ-*generado finitamente por* S si existen S_μ finitos que satisfacen las propiedades.

Lema 3.1.5. *Sean* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathscr{I}}$ *familia de locales y* $S \subseteq A_{\mathscr{I}}$ *subconjunto cerrado inferiormente. El conjunto*

$$f_S = \{a \in A_{\mathscr{I}} \mid a \ \textit{ es } \ \Lambda - \textit{generado finitamente por } S \textit{ para algún } \Lambda \textit{ finito}\}$$

es el C_f*-ideal generado por* S*.*

Demostración. Puesto que S es cerrado inferiormente, todo elemento menor a un Λ-generado finitamente también es Λ-generado finitamente, por lo tanto f_S es cerrado inferiormente. Ahora sea $a = (a_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{I}}$ un elemento Λ-generado finitamente por S con $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ y $\{S_i \subseteq A_{\lambda_i} \mid \lambda_i \in \Lambda\}$ la familia de subconjuntos tales que $\bigvee S_i = a_{\lambda_i}$ para cada $i \in \{1, 2, \cdot, n\}$.

Sean $J \in C_f\mathcal{I}d$ que contiene a S, $s_{1,i} \in S_i$ para $i \geq 2$ elementos arbitrarios fijos y $\Delta_1 = \{a_{\lambda_1}, s_{1,2}, s_{1,3}, \ldots, s_{1,n}\}$, entonces por ser a un elemento Λ-generado finitamente por S se tiene que

$$S_1(a_{(\Delta_1)}, \lambda_1) \in C_f(a_{(\Delta_1)})$$

por lo tanto, por ser J un $C_f\mathcal{I}d$, $S_1(a_{(\Delta_1)}, \lambda_1) \subseteq S \subseteq J$, entonces

$$a_{(\Delta_1)} = \bigvee S_1(a_{(\Delta_1)}, \lambda_1) \in J.$$

De la misma manera para $s_{i,2} \in S_i$ para $i \geq 3$ y $\Delta_2 = \{a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, s_{3,2}, \ldots, s_{n,2}\}$ se cumple $S_2(a_{(\Delta_2)}, \lambda_2) \subseteq J$ y $S_2(a_{(\Delta_2)}, \lambda_2) \in C_f(a_{(\Delta_2)})$, por lo tanto

$$a_{(\Delta_2)} = \bigvee S_2(a_{(\Delta_2)}, \lambda_2) \in J.$$

Por inducción se concluye que $a \in J$ y por lo tanto $f_S \subseteq J$, de donde se deduce que f_S está contenido en cualquier C_f-ideal que contiene a S.

Veamos que f_S es un C_f-ideal. De la definición de la cubierta C_f se cumple que f_S es C_f-ideal si es cerrado por $\vee$. Consideremos $b = (b_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{I}}, c = (c_\lambda)_{\lambda \in \mathscr{I}} \in f_S$ y $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k\} \subseteq \mathscr{I}$ finito tal que para cada $\lambda \in \mathscr{I} \setminus \Gamma$ se cumple $p_\lambda^*(b) = p_\lambda^*(c) = 1_{A_\lambda}$. Puesto que $b, c \in f_S$ y f_S es cerrado inferiormente para $\Delta = \{b_{\gamma_i} \wedge c_{\gamma_i} \mid i \geq 2\}$ se tiene que $b_{(\Delta)}, c_{(\Delta)} \in f_S$, por lo tanto para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ existen $R_i, T_i \subseteq A_{\gamma_i}$ finitos tales que

$$b_{\gamma_1} = \bigvee R_1 \text{ y } c_{\gamma_1} = \bigvee T_1$$

y cada $2 \leq i \leq k$

$$b_{\gamma_i} \wedge c_{\gamma_i} = \bigvee R_j = \bigvee T_j.$$

Definamos los siguientes conjuntos finitos $U_1 = R_1 \cup T_1$ y para cada $2 \leq i \leq k$, $U_i = R_i \wedge T_i = \{r \wedge t \mid r \in R_i, t \in T_i\}$, entonces se cumple que

$$\bigvee H_1 = b_{\gamma_1} \vee c_{\gamma_1}$$

$$\bigvee H_i = b_{\gamma_i} \wedge c_{\gamma_i}, \forall i \in \{2, 3, \ldots, k\}$$

y esta es una familia de conjuntos que satisfacen las condiciones para que $b_{(\Delta)} \vee c_{(\Delta)}$ sea un elemento Γ-generado por S, luego $b_{(\Delta)} \vee c_{(\Delta)} \in f_S$. Aplicando varias veces este argumento se concluye que para $\Delta_1 = \{b_{\gamma_1} \vee c_{\gamma_1}\}$ se cumple que $b_{(\Delta_1)}, c_{(\Delta_1)} \in f_S$ y repitiendo el proceso inductivamente sobre las coordenadas γ_i se tiene que $b \vee c \in f_S$ de donde se concluye que f_S es el C_f-ideal generado por S. $\square$

De hecho la prueba de que cada elemento Γ-generado finitamente pertenece a cualquier C_f-ideal se puede reproducir para que el elemento Γ-generado (no necesariamente de manera finita) pertenezca a cualquier C-ideal, para ello se utliza los mismos argumentos y la ley distributiva infinita.

Definición 3.1.6. Para un subconjunto S cerrado inferiormente de una retícula completa superior, el conjunto $\mathcal{D}S$ es el conjunto de supremos de subconjuntos dirigidos contenidos en S.

Lema 3.1.7. *Para S un subconjunto cerrado inferiormente de $A_{\mathscr{I}}$ asociado a la familia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathscr{I}}$ se cumple que*

(*i*) *$\mathcal{D}S$ está contenido en el C-ideal generado por S.*

(*ii*) *Si S es C_f-ideal, entonces $\mathcal{D}S$ es C_f-ideal.*

Demostración. (*i*) Sea $a = (a_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{I}} = \bigvee D$ con $D \subseteq S$ dirigido. Por ser D dirigido se tiene que para un $d' = (d'_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{I}} \in D$,

$$a = \bigvee\{d \in D \mid d \geq d'\}$$

pero puesto que $a, d' \in A_{\mathscr{I}}$ se cumple que existe un conjunto finito $\Gamma \subset \mathscr{I}$ tal que para todo $\lambda \in \mathscr{I} \setminus \Gamma$, $a_\lambda = d'_\lambda = 1_{A_\lambda}$, entonces con inducción sobre los elementos de Γ y con la misma herramienta del lema anterior, pero para cubiertas de C y C-ideales, se concluye que a pertenece a cualquier C-ideal que contiene a S.

(*ii*) Sean $b = (b_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{I}}, c = (c_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{I}} \in \mathcal{D}S$ tales que difieren solo en la entrada λ_1, consideremos el operador en $A_{\mathscr{I}}$ tal que para $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{I}}, y = (y_\lambda)_{\lambda\in\mathscr{I}} \in f_S$ asocia el elemento $x * y$ que coordenada a coordenada satisface

$$p^*_\mu(x * y) = \begin{cases} x_{\lambda_1} \vee y_{\lambda_1} & \text{si } \mu = \lambda_1 \\ x_\mu \wedge y_\mu & \text{si } \mu \neq \lambda_1 \end{cases}$$

Sean $B, C \subseteq S$ dirigidos tales que $b = \bigvee B$ y $c = \bigvee C$. Entonces el conjunto

$$B * C = \{b' * c' \mid b' \in B, c' \in C\}$$

es dirigido por ser $*$ operador que respeta el orden y ser B y C dirigidos. Por ser S un C_f-ideal se cumple que $B * C \subseteq S$ y entonces $\bigvee B * C \in \mathcal{D}S$, pero de la construcción y la ley distributiva infinita se tiene que $\bigvee B * C = b \vee c$. Aplicando esto inductivamente se sigue que $\mathcal{D}$ es cerrado por $\vee$ que es equivalente a ser C_f-ideal. □

Lema 3.1.8. *Para una familia de locales $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\mathscr{I}}$ compactos y $\mathcal{P} \subseteq C\mathcal{I}dA_{\mathscr{I}}$ se cumple que si $A_{\mathscr{I}}$ es generado como C-ideal por $\bigcup\mathcal{P}$, entonces $A_{\mathscr{I}}$ es generado como C_f-ideal por $\bigcup\mathcal{P}$.*

Demostración. Definamos para cada ordinal α el conjunto P_α de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P_0 &= f_{\bigcup \mathcal{P}} \\ P_{\beta+1} &= \mathcal{D}(P_\beta) \\ P_\delta &= \bigcup \{P_\alpha \mid \alpha < \delta\} \quad \delta \text{ ordinal límite.} \end{aligned}$$

Por el inciso (ii) de la proposición 3.1.7 se tiene que para todo ordinal P_α es un C_f-ideal. Del hecho de que $f_{\bigcup \mathcal{P}}$ está contenido en el C-ideal generado por $\bigcup \mathcal{P}$ y del inciso (i) del lema 3.1.7 se tiene que P_α está contenido en el C-ideal generado por $\bigcup \mathcal{P}$. Puesto que $(P_\alpha)_{\alpha \geq 0}$ es una sucesión creciente de subconjuntos de $A_{\mathscr{I}}$ indicada en los ordinales la sucesión se estabiliza en algún momento (puesto que lo ordinales son una clase propia), es decir, existe un γ tal que $P_\gamma = P_{\gamma+1}$.

Por el teorema 1.1.15 para un $S \subseteq A_{\mathscr{I}}$ cerrado inferiormente se satisface que S es C-ideal si y sólo si

$$S = \mathcal{D}S.$$

Sea γ el mínimo ordinal tal que

$$P_\gamma = P_{\gamma+1} = \mathcal{D}P_\gamma,$$

entonces por lo anterior se sigue que P_γ es C-ideal. Por ser γ el mínimo con esta propiedad y cumplirse que P_γ está contenido en el C-ideal generado por $\bigcup \mathcal{P}$ se tiene que P_γ debe ser el C-ideal generado por $\bigcup \mathcal{P}$.

Puesto que $\bigcup \mathcal{P}$ genera a $A_{\mathscr{I}}$ como C-ideal, se tiene que $1_{A_{\mathscr{I}}} \in P_\gamma$. Si γ es ordinal límite se cumple que

$$1_{A_{\mathscr{I}}} \in \bigcup \{P_\beta \mid \beta < \gamma\}$$

de donde se tendría que existe β' ordinal menor a γ que contiene a $1_{A_{\mathscr{I}}}$, lo cual implica que $P_{\beta'} = A_{\mathscr{I}}$, sin embargo esto es absurdo por la minimalidad de γ.

Por otro lado si $\gamma = \beta' + 1$ (ordinal sucesor) entonces existe $D \subseteq P_{\beta'}$ dirigido tal que $1_{A_{\mathscr{I}}} = \bigvee D$. Por ser dirigido D se cumple que para un $d' \in D$, $\bigvee D = \bigvee \{d \mid d \geq d'\}$ y puesto que d' sólo tiene una cantidad finita de coordenadas distintas de 1 se cumple que difiere de $1_{A_{\mathscr{I}}}$ en una cantidad finita de coordenadas. Supongamos que d' y $1_{A_{\mathscr{I}}}$ difieren las coordenadas de subconjunto $\Gamma \subseteq \mathscr{I}$.

Consideremos $D_\lambda = p^*_\lambda(D \cap \uparrow (d'))$ para cada $\lambda \in \Gamma$. Puesto que $1_{A_\mathscr{I}} = \bigvee D$ se cumple que $\bigvee D_\lambda = 1_{A_\lambda}$, luego al ser cada A_λ compacto existe una familia finita de $E_\lambda \subseteq D_\lambda$ tal que $\bigvee E_\lambda = 1_{A_\lambda}$, lo cual quiere decir que $1_{A_\mathscr{I}}$ es un elemento Γ-generado por $P_{\beta'}$ un C_f-ideal, por lo tanto $1_{A_\mathscr{I}} \in P_{\beta'}$ lo cual es una contradicción a la minimalidad de γ.

De lo anterior se tiene que γ no es ordinal límite ni ordinal sucesor, por lo tanto $\gamma = 0$ y por lo tanto

$$1_{A_\mathscr{I}} \in f_{\bigcup \mathcal{P}}$$

de donde se sigue que $\bigcup \mathcal{P}$ genera a $A_\mathscr{I}$ como C_f-ideal. $\square$

Teorema 3.1.9. *(Teorema de Tychonoff) Para una familia de locales* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathscr{I}}$ *se cumple que*

$$\prod_{\lambda \in \mathscr{I}} A_\lambda = C\mathcal{I}dA_\mathscr{I}$$

es compacto si y sólo si cada A_λ *es compacto.*

Demostración. Si $C\mathcal{I}A_\mathscr{I}$ es compacto, consideremos $\lambda \in \mathscr{I}$, y $S_\lambda \subseteq A_\lambda$ tal que $\bigvee_{A_\lambda} S = 1_{A_\lambda}$, entonces las familia de C-ideales

$$\{j(\downarrow (q_\lambda(s))) \mid s \in S_\lambda\}$$

claramente es una cubierta de $A_\mathscr{I}$ y por lo tanto existe una subfamilia finita que cubre a $A_\mathscr{I}$, sea $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subseteq S$ tal que

$$A_\mathscr{I} \in j\left(\bigcup_{i=1}^{k} j(\downarrow (q_\lambda(s_i)))\right)$$

pero para cualquier $d \in A_\mathscr{I}$ se cumple que $\downarrow (d)$ es C-ideal, por lo tanto

$$1_{A_\mathscr{I}} \in \left\langle \bigcup \{\downarrow (q_\lambda(s_i)) \mid i = 1, 2, \ldots, k\} \right\rangle = \downarrow \left(\bigvee \{s_i \mid i = 1, 2 \ldots, k\}\right)$$

de donde se tiene que

$$1_{A_\lambda} = \bigvee_{i=1}^{k} s_i.$$

De manera recíproca supongamos que cada A_λ es compacto. Consideremos $\mathcal{P} \subseteq C\mathcal{I}dA_\mathscr{I}$ un subconjunto de C-ideales tal que $\bigcup \mathcal{P}$ genera a $A_\mathscr{I}$ como C-ideal.

Por el lema 3.1.8 se cumple que $\bigcup \mathcal{P}$ genera a $A_\mathscr{I}$ como C_f-ideal, entonces $1_{A_\mathscr{I}} \in f_{\bigcup \mathcal{P}}$ por lo tanto existe un conjunto finito de índices Γ tal que existen subconjuntos finitos B_λ para $\lambda \in \Gamma$ de manera que $1_{A_{\mathscr{I}}}$ es Γ-generado finitamente por $\bigcup \mathcal{P}$ vía los conjunto B_λ, entonces

$$S = \left\{ \bigwedge \{q_\lambda(b_\lambda) \mid \lambda \in \Gamma\} \mid b_\lambda \in B_\lambda \right\} \subseteq \bigcup \mathcal{P}.$$

Además S es finito por ser Γ conjunto de índices finito y B_λ finito para toda $\lambda \in \Gamma$, por lo tanto existe una colección finita $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{P}$ tal que $S \subseteq \bigcup \mathcal{Q}$ y por lo tanto $1_{A_{\mathscr{I}}}$ es un elemento Γ-generado finitamente por $\bigcup \mathcal{Q}$ de donde se sigue que $A_{\mathscr{I}}$ es generado como C_f-ideal por $\bigcup \mathcal{Q}$.

De esto se concluye que $A_{\mathscr{I}}$ es generado como C-ideal por $\bigcup \mathcal{Q}$ con $\mathcal{Q}$ finito, entonces $C\mathcal{I}dA_{\mathscr{I}}$ es compacto. $\square$

El teorema de Tychonoff en **Loc** es independiente del axioma de elección puesto que la demostración y nociones empleadas son puramente constructivas. En este sentido se cumple que existe una gran cantidad de teoría en **Loc** que es libre del axioma de elección. De esta manera hay una diferencia esencial en la teoría que se tiene en la categoría **Top** con respecto a **Loc**.

Bibliografía

[1] J. Picado, y A. Pultr, *Frames and Locales: Topology without points*, Birkhäuser, 2012.

[2] H. Simmons, *A collection of notes on frames: The point space of a frame*, http://www.cs.man.ac.uk/ hsimmons/FRAMES/frames.html, 2006.

[3] H. Simmons, *A collection of notes on frames: The basics of frame theory*, http://www.cs.man.ac.uk/ hsimmons/FRAMES/frames.html, 2006.

[4] H. Simmons, *An Introduction to Category Theory*, Cambrige Universite Press, 2011.

[5] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

[6] M. C. Pedicchio y W. Tholen, *Categorical Foundations*, Cambrige Universite Press, 2004.

[7] P. T. Johnstone, "*Tychonoff's theorem without axiom of choice*", Fundamenta Mathematicae, vol. 113, 1981, pp.-21-35.

[8] P. T. Johnstone, *Stone Space*, Cambrige Universite Press, 1982.

[9] P. T. Johnstone, "*The point of pointless topology*", Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 8, 1983, pp.-41-43.

Índice alfabético