UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA

DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Fundamentos y Métodos de los Portafolios de Inversión

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Actuario

P R E S E N T A :

Soriano Villarreal Julio César

DIRECTOR DE TESIS:

M. en I. Jorge Luis Silva Haro

(2014)

Ciudad Universitaria, D. F.

1. Datos del alumno
Soriano
Villarreal
Julio César
55 45 30 69
Universidad Nacional Autónoma de
México
Facultad de Ciencias
Actuaría
408070038

2. Datos del tutor
M en I
Jorge Luis
Silva
Haro

3. Datos del sinodal 1
Dra.
María Araceli
Bernabé Rocha

4. Datos del sinodal 2
M en E
Marco Antonio
García Fernández

5. Datos del sinodal 3
Act.
Ana Lilia
Mendoza
Romero

6. Datos del sinodal 4
Act.
Alma Rosa
Bustamante
García

7. Datos del trabajo escrito
Fundamentos y métodos de los portafolios de inversión
115 p
2014

Agradecimientos

A mis padres y mentores Roberto y Teresa quienes me han dado tanto, por su cariño, apoyo y paciencia.

A mis hermanos cuyo respeto y admiración me hacen luchar por ser mejor cada vez.

A mis amigos y hermanos de vida, Octavio, Sandra, Eder, Israel y David por todo su apoyo durante y después de la carrera, gracias por no dejar me caer.

A Pau mi musa en muchos aspectos, por ser mi razón y darme una, por cambiar mi vida, pero sobre todo por tu sonrisa.

Contenido

Introducción

Actualmente la volatilidad e incertidumbre siempre están presentes en el día a día en los mercados financieros, lo que hace necesario que inversionistas, empresarios, administradores de fondos y/o riesgos, consideren distintas alternativas para controlar y administrar eficientemente los riesgos a los cuales se encuentran expuestos, así como para optimizar el rendimiento de sus portafolios.

La administración de riesgos es una disciplina que en últimas fechas ha tenido gran auge debido al comprobado beneficio que brinda el medir y monitorear las causas posibles que pueden llevar a un quebranto y con ello lograr una planeación más eficiente. Además de ser una herramienta fundamental para administrar riesgos en un los portafolios de inversión.

En el año de 1952 Harry Markowitz presentó un trabajo referente a la selección de inversiones, es decir, al problema de cómo asignar los recursos entre las diversas opciones disponibles lo cual inició el cambio del sistema de intermediación financiera y una renovación en la investigación científica dentro del campo de la economía financiera, centrada en la gestión del riesgo. El enfoque de Markowitz simplificó notablemente el problema de selección de inversiones al considerar los rendimientos de los activos y centrarse exclusivamente en la estadística de los resultados de las empresas emisoras y, más específicamente, en tres parámetros básicos de estas estadísticas: media, varianza y covarianzas de las tasas de rendimiento de los activos. El resultado más importante del enfoque de Markowitz es que permite deducir combinaciones de activos (portafolios) que simultáneamente cumplen con dos condiciones: (a) tienen la varianza mínima dentro de todas las combinaciones posibles que tienen un rendimiento esperado dado y (b) tienen el rendimiento esperado máximo dentro de todas las combinaciones posibles que tienen una varianza dada. Aquellas combinaciones que reúnen estos dos atributos se llaman portafolios "eficientes" y el conjunto de portafolios eficientes es conocido como la "frontera de portafolios eficientes". Los portafolios eficientes "dominan" todos los que no lo son y por ello este resultado reduce drásticamente el número de posibilidades de inversión a escoger por un inversionista hostil al riesgo y que toma una decisión de manera racional, es decir, considerando los parámetros de riesgo y rendimiento.

Para poder realizar un buen análisis de los portafolios de inversión es necesario tener fundamentos claros de los conceptos, definiciones y teoría de portafolios; esto con el fin de entender su relevancia en la administración de portafolios de inversión, se proseguirá a su implementación. Las cantidades de activos incluidos en un portafolio de inversión se enfocan mayoritariamente el retorno y en el grado de liquidez de éste, teniendo en un segundo plano el nivel de exposición al riesgo que enfrenta. Con el objetivo de reducir el riesgo se hará hincapié en el método de diversificación, donde encontraremos y plantearemos diferentes formas poder hacer que una portafolio consiga un mejor y más óptimo rendimiento con una menor (o mayor) exposición al riesgo teniendo en cuenta la aversión al riesgo de cada inversionista. Una vez habiendo analizando los procedimientos para diversificar un portafolio y con una adecuada y minuciosa la selección y asignación de activos con y sin riesgo, será más sencillo la creación de un portafolio de inversiones con un mejor rendimiento y una menor exposición al riesgo; un portafolio de inversión eficiente.

Con la necesidad de analizar si el portafolio y saber si cumple con las exceptivas creadas en torno a él, se planteará y desarrollará el análisis de la frontera eficiente. Considerando varios métodos y la evolución de los mismos, se hará énfasis en conocer cuál es el punto de equilibrio donde el rendimiento obtenido es equiparable con el riesgo que se corre, para así y en base a esto tomar la cartera que más se adecue al nivel de aversión al riesgo del inversionista, es decir la cartera que maximice su ganancia y reduzca el riesgo al que ésta expuesto. Un análisis más detallado se realiza con el modelo de Markowitz, necesario para saber si el portafolio seleccionado es eficiente. Este método permite conocer el portafolio con el mayor rendimiento y el menor riesgo. Para poder dar una noción clara del modelo de Markowitz, se partirá por la teoría en la que ésta basado, el planteamiento del modelo así como explicar sus metodologías y procedimientos y finalmente las modificaciones que se le han realizado (el modelo de Sharpe) y así validar la importancia del modelo de Markowitz como base en la administración de riesgos en un portafolio de inversión.

Con el paso del tiempo y partiendo del tomar el modelo de Markowitz como base para administración de portafolios de inversión, se han creado y desarrollado más modelos, todos estos modelos posteriores se han especializado y mejorando siendo así cada vez más variados y complejos; en los cuales se trata de incorporar diversos enfoques pero siempre si buscará conseguir el mismo fin, el cual es tener una cartera de activos que pueda brindar al inversionista el mayor rendimiento con el menor riesgo posible, aunque la medida de riesgo varia un poco dependiendo del modelo empleado. Los fundamentos que originan los diferentes modelos son diversos, pero siempre teniendo en cuenta que estos se han ido desarrollando partiendo del trabajo de Markowitz.

Actualmente el alto nivel de desarrollo cuantitativo que está siendo aplicado al área de las finanzas presenta cierta correlación con estos previos. Antiguamente en el área de las matemáticas financieras bastaba con manipular eficientemente la relación de valor presente para dominar relativamente el área. Pero hoy en día los desafíos son otros. Duración, Convexidad, Deltas, Value at Risk, Series Históricas, Teoría de Valores Extremos, Métodos de Simulación de Monte Carlo, etc., son algunos elementos que se deben manejar al momento de diseñar un portafolio.

Objetivos

Los objetivos de esta tesis son:

- Introducir al lector, al análisis de carteras de inversión, partiendo del planteamiento, desarrollando el análisis y construcción de los modelos.
- Presentar los portafolios de inversión como una alternativa de inversión, diseñada para ofrecer una oportunidad de participar en los beneficios de los mercados de capitales nacionales e internacionales.
- Proporcionar las herramientas necesarias para el diseño portafolios de inversión de acuerdo al nivel de riesgo que se esté dispuesto a tolerar, maximizando el rendimiento y minimizando el riesgo.
- Presentar las propuestas que se han elaborado para determinar la combinación óptima de un portafolio de activos riesgosos expuestos a diferentes fuentes de riesgo, es decir el riesgo sistemático y no sistemático.
- Dar una introducción y explicación de los algunos métodos y modelos, mientras se muestra el desarrollo, planteamiento, enfoque y evolución, y su implementación en la administración de riesgo de los portafolios de inversión.
- Profundizar en los diferentes modelos y familiarizar al lector con metodologías alternativas de medición del riesgo financiero y dar de manera teórica los conceptos y la estructura de los modelos y de los métodos alternativos de evaluación de riesgo para portafolios con múltiples activos.
- Facilitar la selección de objetivos de inversión a través de métodos de administración de riesgos de un portafolio de inversión.
- Proporcionar la metodología para la medición y valoración del desempeño de los portafolios de inversión con distintas clases de activos.

CAPÍTULO I: TEORÍA DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN

1.1 Definición de Portafolio de Inversión

También llamado Cartera de Inversión, es una selección de documentos o valores que se cotizan en el mercado bursátil (acciones, obligaciones, bonos, pagarés, CETES étc.) y en los que una persona o empresa deciden colocar o invertir su dinero. Los portafolios de inversión se integran con los diferentes instrumentos que el inversionista haya seleccionado. Para posteriormente hacer su elección, debe tomar en cuenta aspectos básicos como el nivel de riesgo que está dispuesto a correr y los objetivos que busca alcanzar con su inversión. Por supuesto, antes de decidir cómo se integrará el portafolio, será necesario conocer muy bien los instrumentos disponibles en el mercado de valores para elegir las opciones más convenientes, de acuerdo a sus expectativas.

Para tal objeto se identifican 4 categorías de instrumentos:

1. **Instrumentos de deuda o renta fija:** Son aquellos en los que se conoce el rendimiento, ya que éste ha sido fijado con anterioridad. La participación del Gobierno en los mercados de deuda es fundamental. No solamente porque le permite financiar gastos del gobierno, sino porque proporciona referencias de tasas de interés y plazos de inversión al resto del mercado. Estos instrumentos pueden encontrarse a corto, mediano y largo plazo.
2. **Instrumentos de renta variable:** Son aquellos en los que el rendimiento obtenido depende de muchos factores tanto internos de la compañía como externos. Generalmente, estos instrumentos se adquieren a mediano y largo plazo aun cuando no tienen una fecha de vencimiento establecida.
3. **Productos Derivados:** Son activos que da cobertura al inversionista contra los riesgos como pueden ser la subida inesperada del precio del producto y el alza de las tasas de interés, entre otras.
4. **Metales:** Son oro y plata que generalmente el inversionista adquiere a largo plazo.

1.2 Clasificación de Portafolios de Inversión con respecto a la construcción

Existen diversos tipos de portafolios de inversión que varían con respecto al perfil de inversionista y su aversión al riesgo, con la finalidad de que se tenga en cuenta su existencia se harán mención de los más empleados:

- Portafolios de Inversión Individual

En los portafolios de inversión individual, los sujetos económicos entregan recursos a un agente institucional para ser colocados por éste en inversiones mediante las cuales aquellos puedan alcanzar determinados objetivos económicos como beneficiario de la gestión. Las inversiones así realizadas corresponden al portafolio individual del usuario, y son, por ende, manejadas en forma independiente con respecto a las de otros portafolios individuales o colectivos.

- Portafolios de Inversión Colectiva

Mediante los portafolios de inversión colectiva los operadores aglutinan los recursos individuales de múltiples sujetos económicos para luego invertirlos colectivamente. La rentabilidad de los inversionistas depende del comportamiento de las inversiones, siendo de su cargo el riesgo de las pérdidas que pueda generar la operación del fondo. El estado no garantiza los dineros recibidos por los administradores de este tipo de portafolios.

- **Fondos de Inversión**

Un "fondo de inversión" es un portafolio de valores mobiliarios, tales como acciones y bonos de emisores privados o públicos, adquiridos inicialmente con dineros aportados por los inversionistas, denominados "suscriptores". Entre otras definiciones, Lawrence J. y Michael D. definen un fondo de inversión como un tipo de organización de servicios financieros que recibe dinero de sus accionistas o participes e invierte en esos fondos a su vez en una cartera de títulos diversificada. En un sentido abstracto, se puede definir un fondo de inversión como el producto financiero vendido al público por una empresa de inversión. Es decir, la empresa de inversión construye y dirige una cartera de títulos y vende intereses de propiedad (participaciones) de esa cartera a través de un instrumento conocido como fondo de inversión.

- Fondos de Valores

Un "Fondo de valores" es una cartera mobiliaria construida y administrada por una sociedad comunista de bolsa, protagonista por excelencia del mercado bursátil, cuyo objeto consiste en estimular y desarrollar el mercado de valores, ofreciendo al público alternativas de inversión.

- Fondo Común Fiduciario

Un fondo común fiduciario es estructuralmente similar a un fondo de inversión o a un fondo de valores, pero su perfil de maduración y sus políticas de inversión son usualmente de corto plazo, con énfasis en valores de renta fija, rasgos estos que le dan al fondo común fiduciario un perfil de producto sustituto de los depósitos bancarios y permiten diferenciarlo de los otros esquemas de inversión mencionados, que suelen tener horizontes más amplios en cuanto a la naturaleza y a la maduración de las inversiones.

Por otro lado, los fondos comunes ya sean de inversión o de valores pueden ser abiertos o cerrados. Los fondos comunes de inversión que gestionan las Sociedad Fiduciarias pueden ser ordinarios o especiales. Se llama fondo común ordinario al patrimonio autónomo que ordinariamente puede gestionar cualquier Sociedad Fiduciaria por el solo hecho de serlo. Cada Sociedad Fiduciaria solo puede gestionar un solo fondo común de inversión ordinario.

- Fondos de Pensiones

Los fondos de pensiones son instituciones que forman parte del sistema de seguridad social de un país, su actividad es de interés público por tratarse de instrumentos establecidos para atender las necesidades que en esa materia tienen los trabajadores luego de su retiro definitivo de la actividad laboral. Por otro lado, frente a su finalidad principal los fondos de pensiones permiten incrementar el ahorro nacional, y se constituyen en fuentes importantes de liquidez para fortalecer los mercados de capital.

1.2.3 Tipos de Portafolios de Inversión Según Tolerancia al Riesgo de Inversión

A continuación se presentará los tipos de Portafolios de inversión, definidos según las expectativas y tolerancia al riesgo del Inversión. Estos conceptos fueron determinados en conjunto con la empresa Bio Financial Consulting Group.

Conservador (Cauteloso): Su objetivo es preservar el Capital con máxima seguridad

Moderado (Balanceado): Una combinación entre renta y crecimiento, basado en la diversificación de activos financieros para mitigar el riesgo.

Crecimiento: Busca apreciación del capital invertido, con mayor ponderación hacia las acciones y fondos.

Crecimiento agresivo: 100% Renta Variable, selecciona acciones de pequeña y mediana capitalización, asume gran volatilidad.

Portafolio especulativo: Puede hacer cualquier cosa, muy basado en rumores y datos, gran riesgo buscando grandes retornos. (Serrano, 2010)

1.3 Índice Benchmark para Portafolios

Un *benchmark* es un índice que se utiliza como referencia para valorar si la gestión de una cartera de inversiones ha sido correcta o no, bajo un análisis comparativo de rentabilidad y riesgo. La palabra *benchmark* procede del inglés que significa literalmente "punto de referencia" o "parámetro".

Si la rentabilidad se queda por debajo de ese índice, quiere decir que el gestor de esa cartera de inversiones no ha logrado obtener la rentabilidad que está ofreciendo el mercado de valores y, si está por encima, quiere decir que el gestor ha logrado, con su estrategia, obtener una rentabilidad superior a la que está ofreciendo dicho mercado.

Utilizar, por tanto, un índice *benchmark* es básico, no sólo para el propio gestor, sino también para el inversionista, ya que servirá como control de la magnitud comparativa de los rendimientos obtenidos, así como medida de eficiencia en la gestión en función del riesgo asumido medido por la volatilidad de la cartera en comparación con la del índice.

En el lenguaje financiero el *benchmark* se refiere al "mercado testigo", es decir, al punto que sirve como referencia para medir el rendimiento de las inversiones que se realizan. Se denomina así al instrumento financiero utilizado como parámetro para evaluar la eficiencia de la gestión de un portafolio financiero en comparación con emisiones del mismo tipo o en el mismo mercado.

Es decir, se trata de un indicador financiero compuesto por un portafolio de instrumentos representativo de algún sector del mercado, que sirve como referencia para comparar el rendimiento de las distintas sociedades de inversión. Cabe resaltar que cada fondo utiliza como marco de referencia un *benchmark* distinto, que se ajusta mejor a su objetivo de inversión.

Las ventajas de utilizar un índice de comparación del desempeño de un fondo son: el *benchmark* define claramente el destino de inversión del fondo, y por otra parte, el inversionista adquiere una herramienta con la cual comparar y evaluar el desempeño del portafolio. Asimismo, es posible dimensionar el potencial de crecimiento del fondo, así como las volatilidades o fluctuaciones inherentes al índice, que serán replicadas por el portafolio y entregar al cliente toda esta información que le permitirá tomar una mejor decisión de inversión.

1.4 Conociendo el Perfil del Inversionista

Este pilar es el primero que debe definir un ahorrador inclusive antes de establecer el por qué y para qué invertir su capital en un portafolio de inversión pues es el riesgo que estará dispuesto a afrontar.

Para recordar y en términos generales, existen tres perfiles de inversionista en orden ascendente a la tolerancia al riesgo: conservador, moderado o medio y agresivo. Considerando que el riesgo y los beneficios suelen estar directamente relacionados en el mundo financiero.

Éste parece ser un paso fácil y obvio, en el fondo el perfil de inversión es un evidente y claro reflejo de la personalidad y actitud que posee cada persona y en muchas ocasiones el propio mercado o la marcha de las inversiones será la que decantará el estilo de una persona con tendencia a un lado o al otro.

Como se mencionó anteriormente, un aspecto crucial en la administración y asesoramiento de inversiones es determinar el perfil de riesgo del inversionista, o lo que también se le conoce como el nivel de tolerancia al riesgo del inversionista. Lo que se necesita conocer es la función de utilidad del cliente o cual de todos los portafolios de la frontera eficiente es el más adecuado para el inversionista.

Para iniciar la estructuración de un portafolio de inversión, el inversionista deberá tener muy claro los siguientes aspectos:

Aversión al riesgo: Este es el primer aspecto a ser considerado por todo inversionista. Ello va a determinar la estrategia de inversión, la táctica de asignación de activos financieros y el nivel de tolerancia previsto en situaciones extremas (crisis).

La aversión al riesgo consiste en el desagrado por el riesgo de parte de los inversionistas. En el ámbito de las decisiones de inversión las preferencias de los inversionistas son un aspecto crucial a tener en cuenta. Es obvio que cada inversionista tendrá sus propios gustos o preferencias, pero existen al menos dos rasgos que suelen caracterizar a todos los inversionistas. Por un lado, está el comportamiento racional de todo inversionista por el que se presupone que éste siempre preferirá más riqueza a menos. Por otro lado, es de general aceptación que los inversionistas son enemigos o adversos del riesgo, e intentan evitar en la medida de sus posibilidades el tener que asumirlo "gratuitamente". Así, por ejemplo, ante dos oportunidades de inversión igualmente rentables, se preferirá la menos arriesgada. Un inversionista riesgo-adverso considerará inversiones arriesgadas sólo si éstas le proporcionan compensación por el riesgo asumido vía una prima de riesgo. En conclusión, la aversión al riesgo implica la exigencia de una mayor rentabilidad cuanto mayor sea el riesgo asumido en las inversiones, lo cual no significa renunciar a opciones arriesgadas.

Actualmente, en el mercado existen diversos *test* empleados por los asesores de inversiones para cuantificar el grado de aversión al riesgo de cada inversionista.

Como resultado, se podrá esbozar la *función de utilidad esperada* de cada inversionista, lo que proporciona una aproximación más exacta al nivel de riesgo que puede tolerar. Teóricamente, la pendiente de la *utilidad marginal* determinará el grado de aversión al riesgo de cada inversionista.

Rentabilidad esperada: Es importante tener claro cuánto se desea obtener de ganancia en cada inversión. Esta tasa referencial está vinculada al nivel de riesgo que se desea asumir. Un inversionista con una elevada aversión al riesgo exigirá una mayor rentabilidad por cada unidad adicional de riesgo que asuma en comparación con un inversionista que tenga un menor nivel de aversión.

Horizonte de tiempo de la inversión: Debido a que la duración de los ciclos bursátiles no se pueden predecir con certeza, los fondos a ser invertidos deben ser excedentes del inversionista. Por ello, se debe tener claro por cuánto tiempo se podrá disponer de dichos fondos. Esto es importante para definir la estrategia a seguir.

El perfil se puede determinar de varias maneras: vía cuestionario o vía cálculo matemático. Comencemos por explorar la forma vía cuestionario o lo que se conoce como *test del inversionista*.

Test del inversionista

El test del inversionista consiste en un cuestionario que se le realiza al cliente para determinar su perfil de riesgo[1]. Las distintas respuestas a cada pregunta tienen un puntaje y la suma de estos determinará el perfil del cliente: si es conservador, moderado o agresivo.

Determinación matemática del perfil de riesgo del inversionista: versión 1

Caracterización del perfil de riesgo del inversionista. Así como se calculaba el rendimiento de un activo entre el valor de un activo de un periodo menos el periodo de referencia y esa diferencia en relación con el día de referencia, este concepto también puede ser usado para analizar qué es lo que espera el inversionista de su inversión.

Así su rendimiento esperado será:

$$R = \frac{w_{t+1} + w_t}{w_t}$$

Donde w_t denota riqueza, esta ecuación reescrita es:

[1]Marcelo A. Elbaum, Administración de Carteras de Inversión 2da edición, ed. Macchi Grupo Editorial S.A. 2006. pág. 42-45

$$W_0(1+r) = W_1 \ \ con \ \ t = 0$$

Donde w_0 es la riqueza inicial y w_1 la riqueza esperada. Así el inversionista espera ver crecer su riqueza inicial. Sin embargo, ante varios portafolios alternativos no solo no sabe qué rendimiento recibirá, sino que además percibe que existen diferentes riesgos ante esas alternativas. De esta manera, tanto la media como la varianza serán valores aleatorios para el inversionista. De aquí se desprende que un inversionista reacio al riesgo requerirá un rendimiento muy alto para correr un poco más de riesgo.

Determinación matemática del perfil de riesgo del inversionista: versión 2

Forma de encontrar el punto óptimo, según el inversionista para eso en esta versión se la va a formalizar matemáticamente. Un supuesto que se hará es que el cliente tiene una tolerancia al riesgo constante alrededor de un rango de portafolios alternativos cerca del elegido. Así se puede representar la función de utilidad con una ecuación para una línea recta, en el ámbito de riesgo-retorno de la siguiente forma:

$$\bar{R}_p = a + b\sigma_p^2$$

$$\bar{R}_p = u_i + 1/\tau\sigma_p^2$$

Siendo $1/\tau$ la pendiente de la curva de indiferencia, y a su vez, siendo τ el nivel de tolerancia al riesgo del cliente.

Si se toma la desviación estándar en vez de varianza, las curvas de indiferencia[2] son convexas. El τ se calcula de la siguiente manera:

$$\tau = 2\left[\left(\bar{r}_c - r_f\right)\sigma_s^2\right] / \left(\bar{r}_s - r_f\right)^2$$

Siendo $\bar{r}_c$ el retorno del portafolio elegido por el cliente, $\bar{r}_s$ y r_f el retorno del portafolio de mercado y de la tasa libre de riesgo, respectivamente. Mientras que σ_s^2 es la varianza del portafolio de mercado (la tasa libre de riesgo no tiene varianza).

Supongamos que un cliente se le da una serie de 10 portafolios alternativos compuestos por distintas participaciones entre un portafolio de mercado y un portafolio de bonos libres de riesgo. Por ejemplo, 100% portafolio riesgoso y 0% libre de riesgo, 80% portafolio riesgoso y 20% libre de riesgo y así sucesivamente.

Suponiendo que el portafolio de mercado tiene un retorno de $r_s = 12\%$ y el libre de riesgo de $r_f = 7.5\%$ y la varianza del portafolio riesgoso $\sigma_s^2 = 225$.

A su vez el cliente puede elegir un portafolio que tiene 50% de portafolio riesgoso y 50% de activos libres de riesgo. Esto le proporcionaría un retorno de 0.5×12%+0.5×7.5% = 9.75%.

Si se remplaza en la fórmula de τ, el resultado da un valor de $\tau = 50$.

[2] Para una mejor comprensión del tema ver el Anexo: Curvas de indiferencia.

Por lo tanto, la curva de indiferencia del cliente tendrá la siguiente forma:

$$R_p = u_i + 1/50\,\sigma_p^2$$

En vez de varianza sería desviación estándar, y el portafolio óptimo para el cliente será el que tenga la misma pendiente que la función de utilidad, en este caso 1/50. Esto daría un punto de la frontera y por tanto las proporciones del portafolio óptimo para el perfil de riesgo del inversionista.

1.5 Construcción de un Portafolio de Inversión

Un portafolio de inversiones puede contener diferentes clases de activos financieros, como es el caso de acciones, bonos fondos institucionales, entre otros. Para lograr dicho portafolio es necesario tomar en consideración dos variantes principales: el rendimiento esperado del activo financiero y el nivel de riesgo asociado ha dicho rendimiento; estos puntos los desarrollemos en capítulos posteriores.

El punto de partida para la estructura de un portafolio de inversiones es el grado de aversión al riesgo del inversionista. A mayor aversión al riesgo, menor será la disposición para asumir riesgos, y por tanto menor deberá ser en rendimiento exigido (y viceversa). En la medida que el portafolio de inversión refleje dicha aversión al riesgo, se afrontarán más eficientemente las fluctuaciones en el mercado.

A partir de la inflación del nivel de riesgo a asumir, el inversionista deberá estructurar la estrategia de asignación de activos (portafolio estratégico) tomando en cuenta el objetivo del portafolio (rentabilidad esperada) que compensa el riesgo por asumir. No obstante, el contexto bajo el cual se estructura un portafolio puede originar oportunidades de inversión que difieran parcialmente del portafolio estratégico. En este sentido, la táctica de asignación de activos puede contemplar una estructura de portafolio diferente al portafolio estratégico inicial, aunque en el mediano plazo se deberá retornar a la siguiente estructura.

Una vez definidos estos pasos previos, la implementación del portafolio deberá realizarse de manera rápida y al menor costo posible. Finalmente, la evaluación constante del portafolio deberá evitar una desviación con respecto al nivel de riesgo-rendimiento inicialmente planteado como estrategia.

Estructuración de un Portafolio

Todo individuo que desee administrar un portafolio de inversión deberá seguir un proceso de estructuración e implementación de portafolio denominado *Proceso de Asignación de Activos (Asset Allocation Process)*. Este proceso involucra cuatro pasos secuenciales:

I. Determinación del perfil del inversionista
II. Estrategia de asignación de activos
III. Táctica de asignación de activos
IV. Implementación y evaluación del portafolio

A continuación vamos a revisar cada uno de estos conceptos con el objetivo de brindar las herramientas básicas de inversión para administrar un portafolio de inversión.

I.- Perfil del Inversionista

Como se mencionó en la sección anterior este es el pilar y lo primero que se debe definir, inclusive antes de establecer el por qué y para qué invertir en un portafolio de inversión.

II.- Estrategia de Asignación de Activos

En la medida que el inversionista conozca su perfil, podrá evaluar las diferentes alternativas de inversión que ofrece el mercado (mapeo del mercado). Una herramienta importante para administrar el nivel de riesgo al cual el inversionista desea exponerse es la *diversificación*. La diversificación permite disminuir la exposición a los llamados *riesgos específicos*, aunque ello significa aceptar una menor rentabilidad esperada.

No obstante, el grado de diversificación es inversamente proporcional al tamaño de los fondos invertidos en el portafolio de inversión. Esto significa que si el fondo a invertir es pequeño, los mayores costos de transacción afectarán el rendimiento de la cartera. Para estos casos, es mejor invertir en fondos mutuos u otros inversionistas institucionales, o adoptar una estrategia de inversión agresiva que involucre un mayor nivel de riesgo por asumir (inversión en pocas acciones). La elección final dependerá del perfil de riesgo del inversionista.

A continuación se presentan los principales activos financieros según su nivel de riesgo asociado (orden ascendente):

- Deuda Soberana (deuda emitida por los gobiernos)
- Emisiones de Deuda (certificados de depósito, bonos, instrumentos de corto plazo)
- Fondos Mutuos (renta fija, renta variable, mixtos)
- Renta Variable (acciones)
- *Commodities* / Monedas
- Fondos de Inversión y Fondos de Cobertura (*Hedge Funds)*

Para estructurar un portafolio de inversión se deben tomar en cuenta principalmente dos variables: el *rendimiento esperado* y el *riesgo asociado*.

Los asesores de inversiones e inversionistas institucionales cuantifican dichas variables con el objetivo de optimizar sus portafolios de inversión (*cartera óptima*).

Un inversionista particular deberá identificar el rendimiento esperado que desea obtener y asociarlo a su perfil de riesgo. Estos dos aspectos le permitirán encontrar la mezcla adecuada de activos financieros (*Benchmark Allocation*).

Una vez elegido el portafolio, el inversionista puede elegir la estrategia a emplear acorde con su perfil. Entre las principales estrategias podemos mencionar:

Buy & Hold **(Comprar y mantener):** Es una estrategia de inversión a largo plazo poco agresiva. Busca mantener el portafolio de inversiones durante un horizonte largo de tiempo (meses o incluso varios años). Los valores elegidos tienen usualmente sólidos fundamentos que no conllevan demasiado riesgo y cuentan con un potencial de crecimiento futuro.

Blue Chips **(Compañías sólidas y de *renombre*):** Es una estrategia de inversión a largo plazo poco agresiva. Consiste en comprar compañías sólidas (*Blue Chips*) que usualmente forman parte de los índices bursátiles del mercado y mantenerlas por un horizonte de tiempo prolongado.

Gr*owth* **(Estrategia de crecimiento)**: Es una estrategia de inversión de largo plazo medianamente agresiva. Consiste en identificar empresas incipientes con potencial de crecimiento elevado en el futuro. El riesgo se deriva de la posibilidad que no se cumplan las expectativas de crecimiento.

Value **(Estrategia de buscar "gangas")**: Es una estrategia de largo plazo medianamente agresiva. Consiste en buscar buenas compañías que coticen por debajo de su valor fundamental (valor intrínseco) o por debajo del promedio del mercado (método de múltiplos comparables). El riesgo asociado se vincula a la posibilidad que la compañía no se recupere y termine desapareciendo.

Income **(Estrategia de dividendos)**: Es una estrategia de mediano y largo plazo poco agresiva. Consiste en comprar acciones de compañías estables, cuyo valor de mercado no sea volátil y que además pagan dividendos elevados (elevado dividend yield). Bajo esta estrategia, el inversionista no busca ganancias de capital significativas en el corto plazo, sino que está más interesado en la renta periódica que puede obtener de los dividendos que espera recibir en el tiempo. De alguna forma, se asemeja a la compra de un bono.

Invest Against Dumb Money **(Invertir contra el dinero tonto)**: Estrategia de corto plazo agresiva. El dinero tonto (dinero de los aficionados que invierten) es una contraposición al smart money (dinero que mueven los profesionales que invierten en Bolsa). La estrategia consiste en invertir en la misma dirección del smart money y en contra del dinero tonto.

Esta estrategia se basa en que cuando una noticia buena (mala) se hace pública, muchos aficionados ante la euforia (temor) comprarán (venderán) las acciones, con el consecuente incremento (reducción) en el precio de la acción, para luego recuperar un nivel cercano al que tenía antes de la noticia.

Esta estrategia se usa en el intradía (day trade), esperando el movimiento luego de la noticia y operando luego en la dirección contraria los demás.

Contrarian Investing **(Teoría de la Opinión Contraria)**: Estrategia de corto o medio plazo muy agresiva. Consiste en invertir en contra de la tendencia del mercado y en contra del consenso de los analistas. Se basa en la posibilidad que una acción se encuentre sobre vendida o sobre comprada debido al accionar del mercado. Usualmente se emplea cuando nos encontramos en los extremos del mercado, es decir, cerca de un cambio de tendencia o cuando se van a producir correcciones o rebotes técnicos.

High Risk **(Alto riesgo)**: Estrategia de corto o medio plazo muy agresiva. Consiste en comprar acciones cuyo precio de cotización es sumamente bajo, las cuales suelen ser sumamente volátiles, buscando vender después de obtener una rentabilidad aceptable, o buscando cortar las pérdidas si el precio del valor disminuye un cierto porcentaje.

III.- Táctica para la Asignación

La parte táctica en la asignación de activos para un portafolio se basa en que no siempre el contexto del mercado proporciona las condiciones necesarias para invertir en el portafolio establecido en la estrategia (Benchmark Allocation).

Dependiendo del contexto, el inversionista se puede permitir temporalmente comprar activos financieros en diferente proporción a lo inicialmente planteado (portafolio estratégico). No obstante, en el mediano/largo plazo, el inversionista deberá tender hacia la estrategia central de su portafolio (rebalancing).

Para analizar esto, es necesario conocer el ya mencionado valor intrínseco o fundamental de las empresas y buscar las diferencias (misspricing) con los precios de mercado que puedan elevar la rentabilidad en el corto o mediano plazo. Todo ello tomando en consideración el contexto por el que atraviesa dicho mercado.

IV.- Implementación y Evaluación del Portafolio

Una vez definido el portafolio, se deberá buscar implementarlo eficientemente. Ello significa, comprar los valores en el momento adecuado (minimizando el tiempo de implementación) y al menor costo posible (pocas operaciones para reducir los costos de transacción).

Posteriormente, la evaluación del portafolio deberá ser periódica, buscando que se mantenga la relación riesgo – rentabilidad planteada como estrategia central inicial.

De manera complementaria, existen diversas herramientas de evaluación que emplean los asesores de inversiones y los inversionistas institucionales, como por ejemplo el índice de Sharpe, el Modelo Treynor-Black, el Indicador M2, entre otros. En General.

Previo al diseño de un portafolio de inversión óptimo es claro que se necesita realizar una estrategia de inversión. Estableciendo una analogía, la estrategia desarrollada sería que la llevara por el camino correcto hacia un portafolio óptimo de inversión. Dicha estrategia servirá como apoyo y ayuda a la hora de definir como armar un portafolio óptimo conformado por activos financieros y que en conjunto le ofrezcan el mejor equilibrio posible entre riesgo y rendimiento, teniendo en cuenta cada una de sus características particulares.

En el armado de un portafolio o cartera de inversión, es de gran importancia identificar claramente a los objetivos que se piensa llegar y a su vez el plazo necesario para alcanzar lo trazado. Por otro lado, también se deberá fijar el monto a invertir y el riesgo que el inversionista estará dispuesto a someterse y escoger los tipos de inversiones y combinaciones de ellas que se realizarán dentro del portafolio.

Es indispensable y fundamental hacer un seguimiento periódico que permita analizar el desempeño del portafolio, comparando el comportamiento de las inversiones con otras similares del mercado y de esta manera determinar si se están cumpliendo los resultados esperados por el inversionista.

Existen factores de alerta para someter al portafolio en una rigurosa evaluación y establecer si su continuación es viable o deberán hacerse modificaciones," algunos de estos factores son la existencia de inestabilidad política o social, subida drástica de la inflación, cambios fiscales relevantes o de los organismos de control del mercado, variaciones abruptas del tipo de cambio, cambios en las tasas de interés altamente llamativos o movimientos del mercado con incrementos o decrementos muy significativos".

Realizar periódicamente adecuaciones del portafolio teniendo en cuenta los factores antes mencionados es una estrategia que siempre se debe tener presente para minimizar el riesgo.

1.6 Tasa de Rentabilidad

Una medida clave para el éxito de las inversiones es la tasa a la que han crecido los fondos durante el periodo de inversión. El total de la rentabilidad del periodo *(RP)* de una acción depende del aumento (o disminución) en el precio de una acción en el periodo de inversión, así como de cualquier ingreso por dividendo derivado de la acción. La tasa de rentabilidad se define como la cantidad ganada durante un periodo de inversión (apreciación del precio y dividendos) por unida *d* invertida.[3]

$$RP = \frac{Precio\ Final - Precio\ Inicial + Dividendo\ en\ efectivo}{Precio\ inicial}$$

En la definición anterior se hace la suposición de que el dividendo se paga al final del periodo de tenencia, pero en medida que se reciban los dividendos está definición ignorar los ingresos por re inversión entre el dividendo final y el final del periodo de tenencia. Se recomienda tener en cuenta que la rentabilidad de los dividendos se llama rentabilidad por dividendos y entonces la rentabilidad por dividendos más la plusvalías es la rentabilidad del periodo de tenencia (RP).

La rentabilidad del periodo de tenencia es una forma simple y poco ambigua de medir la rentabilidad de la inversión en periodos múltiples. Pero lo que nos interesa conocer es la media de rentabilidad de periodos de tiempo más largos, un ejemplo sería el caso donde se quiera medir el *performance*[4] de un fondo de inversión durante un periodo anterior de 5 años. En este caso, la valoración de la rentabilidad resulta más ambigua.

1.6.1 La Tasa Interna de Retorno (TIR)

La tasa interna de rentabilidad es un método de valoración de inversiones que mide la rentabilidad de los cobros y los pagos actualizados, generados por una inversión, en términos relativos, es decir en porcentajes. La TIR establece el valor actual del flujo de caja de la cartera

---

[3] Zvi Bodie, Kane, Alex, Marcus, Alan J, Gómez, Susana, traductor; Principios de Inversiones 5ta edición, Madrid; México ed. McGraw-Hill, 2004.

[4]La *Performance* es un concepto habitual en la literatura relacionada con la administración de carteras, se debe entender como la rentabilidad ofrecida por "ésta" o por "aquél" dado un determinado riesgo.

igual al coste inicial de establecimiento de la cartera (entiéndase como el desembolso inicial), por lo tanto este periodo de interés satisface la siguiente ecuación:

$$A = \frac{Q_1}{(1+k)} + \frac{Q_2}{(1+k)^2} + \cdots + \frac{Q_n}{(1+k)^n}$$

$$\Rightarrow\ -A + \frac{Q_1}{(1+k)} + \frac{Q_2}{(1+k)^2} + \cdots + \frac{Q_n}{(1+k)^n} = 0$$

Siendo:

K= la Tasa Interna de Retorno o TIR que en este caso es la incógnita.

Q_i = los Flujos netos de caja de cada periodo, con $i = 1,2, \dots, n$

A = el desembolso inicial.

En el caso en que la inversión tenga flujos de caja constantes $(Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n = Q)$ y la duración ilimitada, se llega a la siguiente expresión tras el límite cuando "n" tiende a infinito, es decir:

$$0 = -A + \frac{Q_1}{(1+K)} + \frac{Q_2}{(1+K)^2} + \cdots$$

$$\Rightarrow\ -A + \frac{Q}{K} = 0\ \Rightarrow K = \frac{Q}{A}$$

En este caso se produce una relación con el plazo de recuperación cuyo cálculo, si los flujos de caja son constantes, es:

$$P = \frac{A}{Q}$$

donde P es el plazo.

Por lo tanto si cumplen las condiciones citadas, la TIR es el inverso del plazo de recuperación, es decir:

$$P = \frac{A}{Q} \Leftrightarrow K = \frac{Q}{A} \Rightarrow K = TIR = \frac{1}{P}$$

Para fines prácticos la TIR permitirá determinar si una inversión es financieramente factible de realizar, así como realizar la jerarquización entre varios proyectos.

a) Factibilidad: Son Factibles aquellas inversiones que tengan una TIR superior a la rentabilidad que se exige a la inversión, "k" esta rentabilidad puede calcularse de distintas formas.

b) Jerarquización: Entre las inversiones factibles es preferible la que tenga una TIR más elevada.

Tomando como referencia las inversiones simples, es decir aquellas que tienen un desembolso inicial negativo y todos los flujos de caja positivos, puede representarse la TIR de una inversión. Para ello se representa el Valor Presente Neto (VPN) en el eje de las ordenadas y el tipo de descuento en el eje de las abscisas.

Punto de corte en el eje de las ordenadas. Se obtiene para un tipo de descuento con *k* igual a cero.

$$VPN(k=0) = -A + \frac{Q_1}{(1+0)} + \frac{Q_2}{(1+0)^2} + \cdots + \frac{Q_n}{(1+0)^n} \ldots = -A + \sum_{j=1}^{n} Q_j$$

-Asíntota. Para calcularla se determina el VPN cuando "*k*" es infinito:

$$VPN(k=\infty) = -A + \frac{Q_1}{(1+\infty)} + \frac{Q_2}{(1+\infty)^2} + \cdots + \frac{Q_n}{(1+\infty)^n} \ldots = -A$$

-Decreciente. Para comprobarlo se calcula la primera derivada con respecto a "*k*" y se observa que es menor que cero.

$$\frac{\partial VPN(k)}{\partial k} < 0 \ \ para \ \ (0 \leq k < \infty)$$

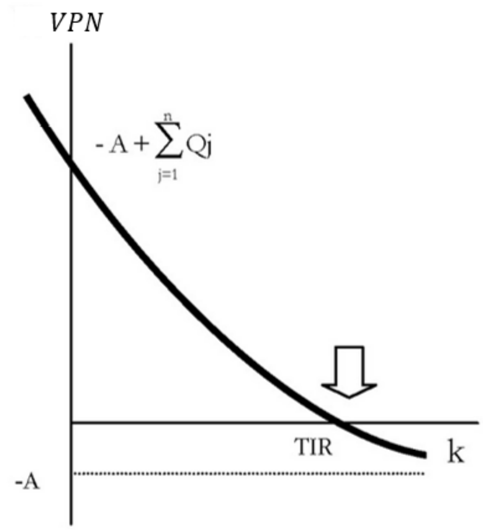
-Cóncava con respecto al sentido positivo del eje de abscisas. Se comprueba mediante la segunda derivada respecto a "*k*".

$$\frac{\partial^2 VPN(k)}{\partial k^2} > 0 \ \ para \ \ (0 \leq k < \infty)$$

La TIR de la inversión se obtiene determinado el tipo de descuento "k" que hace el VPN igual a cero. Este tipo de descuento coincide con el punto de corte con el eje de las abscisas.

$$0 = -A \frac{Q_1}{(1+k)} + \frac{Q_2}{(1+k)^2} + \cdots + \frac{Q_n}{(1+k)^n} \ldots \Rightarrow k = TIR$$

La representación gráfica quedaría de la siguiente forma:



El cálculo de la TIR se complica cuando se realizan inversiones con flujos de caja diferentes y con una larga duración, ya que es necesario resolver ecuaciones con grado "n-esimo". Una posible solución, consiste en realizar un cálculo aproximado por defecto según la siguiente expresión:

$$r^* = \left[\sum_{j=1}^{n} Q_j \Big/ A\right]^{\left(\sum_{j=1}^{n} Q_j \Big/ \sum_{j=1}^{n} JQ_j\right)} - 1$$

Actualmente este inconveniente se ha reducido gracias a la utilización de calculadoras financieras o de programas informáticos, que incluyen funciones que calculan la TIR con tan solo introducir el valor del desembolso inicial y de los flujos de caja.

Posible Inconsistencia

Al calcular la TIR hay que resolver una ecuación de grado "*n*" por lo que se acepta la solución positiva y se descartan las restantes soluciones imaginarias, nulas o negativas por carecer de sentido económico. Sin embargo, en inversiones con uno o más flujos de caja negativos (inversiones no simples) la resolución de la TIR puede llevar a que no se obtenga ninguna solución positiva o varias positivas. En esta situación se dice que la TIR es inconsistente; una Posible Solución a este Problema se consigue calculando la TIR modificada. La Tasa Interna de Retorno Modificada (TIRM) es un método de valoración de inversiones que mide la rentabilidad de una inversión en términos relativos (en porcentaje), cuya principal cualidad es que elimina el problema de la inconsistencia que puede surgir al aplicar la TIR. La TIRM tiene dos limitaciones importantes, a saber:

a) Los flujos de caja positivos se reinvierten en la misma tasa de costo de capital;
b) En algunos proyectos se producen varios resultados.

La TIRM determina si una inversión es: rentable, indiferente o insatisfactoria de acuerdo a los resultados: mayor, igual o menor que la tasa de costo de capital o tasa de retorno de una inversión alternativa.

La hipótesis de Reinversión de los Flujos Netos de Caja

Dadas las similitudes de cálculo con el VPN, este método comparte el supuesto de que los flujos de caja se reinvierten al tipo de descuento que este caso es la propia TIR. Así, si se utiliza un tipo de reinversión diferente "K^*" con el que se capitalizan los flujos de caja hasta "*n*", y posteriormente se actualiza el importe obtenido hasta el momento actual al tipo "*k*" se obtiene la siguiente expresión:

$$VPN = -A + \frac{Q_1(1+K^*)^{n-1} + Q_2(1+K^*)^{n-2} + \cdots + Q_{n-1}(1 * K^*) + Q_n}{(1+K)^n}$$

Puede comprobarse que esta expresión sólo coincide con el VPN cuando el tipo de reinversión "k" es igual al descuento "K", que en este caso sería la propia TIR.

Beneficios

Los beneficios de la TIR son los siguientes: Se concentra en los flujos netos de efectivo del proyecto al considerarse la tasa interna de retorno como una tasa efectiva. Así mismo, este indicador se ajusta al valor del dinero en el tiempo y puede compararse con la tasa mínima de aceptación de rendimiento, tasa de oportunidad, tasa de descuento o costo de capital. Así mismo hay que tener en cuenta que la TIR, no determina maximizar la inversión pero si maximizar la rentabilidad del proyecto.

1.7 Inflación y Tasas de Rentabilidad Actuales

1.7.1 Inflación

En cualquier momento, los precios de algunos bienes pueden subir mientras que los precios de otros bienes pueden bajar; la tendencia general en los precios se mide examinando los cambios en el índice de precios al consumidor o IPC. El IPC mide el costo de compra de unos cuantos bienes que se consideran representativos de la "canasta básica" de una familia urbana típica compuesta por cuatro miembros. El incremento en el coste de esta canasta de la compra estandarizada es indicativo de una tendencia general a precios más altos. La tasa de inflación o la tasa a la cual suben los precios se mide como la tasa de incremento del IPC.

Existen diversos motivos para el surgimiento de la inflación. La inflación de demanda se produce cuando el sector productivo no logra adaptar su oferta a la demanda general y, por lo tanto, decide subir los precios.

La inflación de costos, en cambio, tiene lugar cuando se incrementan los costos de los productores (por el aumento de los salarios, los impuestos o las materias primas) y éstos trasladan dichos aumentos a los precios con la intención de mantener los beneficios.

La inflación conocida con el nombre de autoconstruida aparece cuando los productores se anticipan a un potencial aumento de precios, con un ajuste de su conducta actual.

Clasificación de la inflación de acuerdo a su magnitud

Existen diferentes categorías en las cuales es posible clasificar la inflación tomando en cuenta la magnitud del aumento:

Inflación moderada: Se trata del aumento de los precios que se da de manera lenta y progresiva. En este caso, los precios suelen mantener una relativa estabilidad, lo cual genera confianza en los consumidores, inclinándolos a depositar sus ahorros en cuentas bancarias, con la esperanza de que el valor de su dinero no cambie a lo largo del tiempo. Se trata de un incremento sutil que, si bien se percibe, consigue que muchos se acomoden y tomen decisiones que lamentarán cuando la situación empeore.

Inflación galopante: Esto se da cuando los precios aumentan las tasas en dos o tres dígitos en un periodo promedio de un año. Sobra decir que cuando un país sufre tal fenómeno, tienen lugar una serie de importantes cambios a nivel económico. Por lo general, la gente busca conservar el dinero indispensable para conseguir la subsistencia y cambiar el resto por alguna moneda fuerte, como puede ser el dólar o el euro. Cuanto más desesperada se torna la situación, más difícil resulta llevar a cabo este plan de ahorro, dada la excesiva demanda de moneda extranjera.

Hiperinflación: Se trata de un caso anormal y excesivo, que puede llegar a un incremento del 1000% por año. Es una situación que deja en evidencia una tremenda crisis de la economía de un país, ya que se combina la pérdida de valor de su dinero con la disminución del poder adquisitivo y se vive un profundo desconcierto, que lleva a muchas personas a intentar gastar todo lo posible antes de que la moneda pierda su valor absolutamente. Entre las razones que llevan a un país a sufrir esta clase de inflación se encuentran la financiamiento de los gastos del gobierno emitiendo dinero de manera descontrolada, y la ausencia de un sistema efectivo de regulación de los ingresos y egresos.

1.7.2 Tipo de Interés Nominal e Interés Real

Existen dos tipos de interés, el nominal – la tasa de crecimiento del dinero – y el interés real – la tasa de crecimiento del poder adquisitivo –, que Fluctúan entre ellos. Para tener una idea más clara de cada tipo de interés a continuación se dará un abreve explicación.

Tipo de Interés Nominal: El tipo de interés nominal es el porcentaje que es pagado en concepto de interés sobre una cantidad de dinero acordada, sin tener en cuenta otros gastos de cualquier tipo. Es decir, es un tipo de interés bruto sobre una cantidad de dinero, se aplica sobre tal cantidad sin tener otra cosa en cuenta. Este puede ser pagado en cada cuota, o al final de la devolución del préstamo, hay varias maneras que quedarán determinadas entre el prestamista y el prestatario.

Tipo de Interés Real: El tipo de interés real es aquel rendimiento neto que obtendremos sobre la cesión de una cantidad de dinero, una vez que hayamos corregido los efectos de la inflación. Es decir, cuando se realiza un préstamo, esa cantidad de dinero no tiene el mismo valor en el momento presente que en el futuro cuando sea devuelta, esto es debido a la pérdida del valor adquisitivo del dinero por efecto de la inflación. Es decir, con una cantidad de dinero dada, no se puede comprar la misma cantidad de bienes hoy, que dentro de 5 años. Para calcular el interés real, debemos de restarle al tipo de interés nominal la tasa de inflación.

Si a R le llamamos tipo de interés nominal, r el tipo real e i la tasa de inflación, entonces decimos que:

$$r \approx R - i$$

Expresado en palabras, una aproximación del tipo de interés real es el tipo de interés nominal reducido por la pérdida de poder adquisitivo resultante de la inflación.

En realidad la relación exacta entre el tipo de interés real y el tipo de interés nominal procede de:

$$1 + r = \frac{1 + R}{1 + i}$$

En palabras, el factor de crecimiento de su poder adquisitivo, $1 + r$, iguala el factor de crecimiento del dinero, $1 + R$, dividido entre el nuevo nivel de precios que es $1 + i$ su valor en el anterior periodo. La relación exacta se puede acordar como:

$$r = \frac{R - i}{1 + i}$$

Que muestra que la regla aproximada subestima la tasa real por el factor $1 + i$. La regla de aproximación es más precisa para las tasas de inflación pequeñas y es completamente exacta para tipos compuestos continuos.

Siempre se puede calcular el tipo real después de anunciarse la tasa de inflación (publicada por el Banco de México), no obstante la tasa real futura se desconoce y se tiene que fiar de las expectativas. En otras palabras, como la inflación futura es arriesgada, la tasa real de rentabilidad es arriesgada incluso si la tasa nominal no tiene riesgo.

1.7.2.1 El Equilibrio del Tipo de Interés Nominal

Como se ha visto el interés de la rentabilidad de los activos es aproximadamente igual al tipo nominal menos la tasa de inflación. Lo que realmente nos interesa estudiar es la rentabilidad real, ya que a medida que se espera que la inflación aumente los inversionistas demandarán tipos nominales de rentabilidad más altos en sus inversiones. Este tipo más alto es necesario para mantener la rentabilidad real esperada, ofrecida por un inversionista.

Si tomamos la notación *E(i)* para explicar la expectativa actual de la tasa de inflación que prevalecerá durante los próximos periodos, la siguiente ecuación conocida como la ecuación de Fisher nos muestra la relación.

$$R = r + E(i)$$

Esto no quiere decir que el aumento del tipo de interés nominal compensa el incremento de la tasa de inflación, y da a los inversionistas un crecimiento del poder adquisitivo a un tipo real. La evidencia de la ecuación de Fisher es que en los periodos de inflación alta coinciden con los tipos nominales altos.

1.7.3 Otras Tasas

Tasa de Interés del Crédito Otorgado: Se refiere al promedio de las tasas de interés de los créditos otorgados en el periodo de referencia. Se expresa en términos anuales simples.

Tasa de Interés Implícita o Efectiva: Se refiere al promedio de las tasas de interés de los créditos vigentes durante el periodo de referencia. Esta tasa es igual a los intereses devengados en el periodo de referencia dividido por el saldo promedio de la cartera de crédito vigente.

Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio: Es la tasa a la cual los bancos se prestan entre sí en el mercado interbancario. Para los bancos cuya captación es insuficiente para financiar sus créditos, la TIIE representa la tasa a la cual pueden pedir prestado el faltante en el mercado interbancario. Para los bancos cuya captación de depósitos excede a su cartera de crédito, la TIIE representa la tasa de interés a la cual pueden prestar sus excedentes en el mercado interbancario (costo de oportunidad). En ambos casos, la TIIE significa el costo de los recursos para otorgar créditos.

Tasa de Interés Ajustada al Riesgo: Esta tasa se calcula restando la prima de riesgo de la tasa de interés activa.

CAPÍTULO II: LA DIVERSIFICACIÓN Y EL MANEJO DEL RIESGO EN UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN

2.1 Definición de Riesgo y el Riesgo de un Activo

Riesgo

Es la incertidumbre sobre el resultado futuro de una inversión. En finanzas, el riesgo se refleja a través de modificaciones no previstas en los precios de los activos o en resultados no esperados.

Riesgo de un activo

Las medidas más conocidas de un activo son su varianza y su desviación estándar. Éstas representan la desviación de la media o dicho de otra manera, lo que se espera de que los rendimientos esperados se desvíen respecto del valor más probable o medio esperado. Al riesgo que corre un activo en finanzas se le conoce como volatilidad, que debe de entenderse como la "fluctuación" que puede sufrir un activo en el tiempo.

Otras definiciones de interés

Riesgo sistemático: Está asociado a factores de la economía que afectan a todos los activos, y no puede diversificarse.

Riesgo no sistemático o idiosincrásico: Está causado por factores de cada activo y se puede eliminar parcial o totalmente mediante diversificación.

Tolerancia al riesgo: La tolerancia al riesgo mide la volatilidad (riesgo) que los inversionistas están dispuestos a asumir a cambio de esperar un mayor rendimiento. Una empresa con tolerancia al riesgo va a buscar proyectos o inversiones con mayor potencial de rendimiento aunque existe mayor probabilidad de pérdida de capital.

Volatilidad: La volatilidad nos informa sobre la magnitud media de las fluctuaciones en torno al valor esperado de ésta y por tanto, sobre la incertidumbre que existe sobre si se alcanzará o no dicho rendimiento. En otras palabras, la volatilidad mide si un valor cuando sube lo hace un 50% en un día, o un 10 % (y cuando baja, lo mismo).

Una volatilidad baja señala que la oscilación de los rendimientos es escasa, y la cartera relativamente segura, mientras que una volatilidad elevada se corresponde con un riesgo mayor. La desviación típica proporciona una medida global e intuitiva del riesgo, y por ello puede emplearse para comparar distintas inversiones, independientemente de su heterogeneidad.

Rentabilidad: La rentabilidad del accionista es la relación que se establece entre lo que se ha invertido en una determinada acción y el rendimiento económico o resultado que proporciona. El rendimiento que un accionista puede obtener de una acción se mide computando los dividendos percibidos, las plusvalías o revalorizaciones en su cotización, así como las ventajas que puedan obtenerse por el carácter preferente de las ampliaciones de capital vía derechos de suscripción preferente.

2.2 Relación Riesgo/Rendimiento

Es difícil comprender adecuadamente el riesgo en el contexto de las inversiones sin considerar al mismo tiempo la noción de rendimiento. El rendimiento de una inversión es el cambio del valor acumulado del activo o de la cartera (aumento del precio e ingresos procedentes de los dividendos o intereses) durante un período de tiempo determinado. Invertir exige exponer un capital y no estar seguro de su repago o rendimiento. Un sinónimo de incertidumbre es la ignorancia del resultado futuro. Un inversionista está expuesto al riesgo básicamente porque ignora el comportamiento futuro del rendimiento de su inversión.

Un concepto asociado con la incertidumbre es la volatilidad. La Teoría moderna de portafolios o MPT por sus siglas en inglés (Modern Portfolio Theory), utiliza el concepto de volatilidad y lo equipara con el riesgo. La variable cuya volatilidad mide la MPT es el rendimiento esperado. Es decir que, desde el punto de vista de la MPT, es importante comprender cuán lejos del promedio pueden hallarse los rendimientos esperados de una cartera, o cuanto mejores o peores que el promedio histórico serán los mejores y peores años de una inversión, y mientras más lejos estén del promedio, mayores serán la volatilidad y el riesgo.

Otro concepto vinculado con el análisis de la volatilidad y del riesgo es la varianza, que puede ser definida como el parámetro que mide la dispersión aleatoria de la distribución de probabilidad de una variable; es decir que la varianza mide la diferencia promedio existente entre las observaciones.

La volatilidad de una inversión se mide gracias a la desviación normal de su tasa de rendimiento. La desviación normal es una medida estadística que permite clasificar los activos en función de su riesgo y rendimientos esperados. La desviación normal se calcula como la raíz cuadrada positiva de la varianza.

La MPT comienza con el supuesto de que todos los inversionistas rechazan el riesgo, es decir que, si es posible, tratan de evitarlo. Puesto que la volatilidad es una medida del riesgo, a medida que aumenta la volatilidad el riesgo de pérdidas en la inversión aumenta. La volatilidad también depende del tiempo. Si las fluctuaciones en un proceso aleatorio son independientes, la volatilidad aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la unidad de tiempo. Esto significa que el riesgo aumenta a medida que el período de tiempo aumenta.

Así pues, considerando el supuesto de que los inversionistas rechazan el riesgo, una persona preferiría una inversión de baja volatilidad a largo plazo a una inversión de alta volatilidad a corto plazo.

2.3 Aversión al Riesgo y Prima de Riesgo

Todas las inversiones suponen grado de incertidumbre sobre la rentabilidad del periodo de tenencia futuro y en la mayoría de los casos esa incertidumbre es considerable. Las fuentes de riesgo de la inversión van desde fluctuaciones macroeconómicas a las fortunas cambiantes en varias industrias, y a desarrollos inesperados de activos específicos.

Cuando intentamos cuantificar el riesgo nos encontramos con la problemática de desconocer la rentabilidad posible del periodo y el no saber con certeza que probabilidades hay; una manera sencilla de tratar con estas cuestiones es trazar una lista de posibles resultados económicos o escenarios y especificar tanto la probabilidad de cada escenario y la rentabilidad del periodo (RP). Por tanto a este enfoque se le conoce como análisis del escenario. Es decir el análisis de escenarios es un proceso de elaboración de una lista de posibles escenarios económicos especificando la posibilidad de cada uno, así como la rentabilidad del periodo que se generará en cada caso. La lista de las posibles RP asociadas a una probabilidad se le llama probabilidad de distribución de rentabilidad por periodo.

La probabilidad de distribución nos permite trazar medidas tanto para la retribución como para el riesgo de la inversión. La retribución de la inversión es su rentabilidad esperada, en la que se puede pensar como la medida de RP que se obtendría si repetimos muchas veces una inversión en el activo. La rentabilidad esperada es la medida de la RP y solemos referirnos a ella como la *media del rendimiento*.

Para calcular la rentabilidad esperada de los datos proporcionados, nombramos los escenarios con una letra *s* y marcamos la RP de cada escenario como r(s), con probabilidad p(s). La rentabilidad esperada, marcada como E(r), es la media ponderada de la rentabilidad en todos los posibles escenarios, s=1,…,S, con ponderación equivalente a la probabilidad de cada escenario particular.

$$E(r) = \sum_{s=1}^{S} p(s) r(s)$$

La incertidumbre que rodea a la inversión es una función de la magnitud de las posibles “sorpresas”. Para resumir el riesgo a un sencillo número, nos hacemos valer de la definición que se dio en primer capítulo de la varianza, teniendo así la función en términos de esta:

$$Var(r) = \sigma^2 = \sum_{s=1}^{S} p(s)[r(s) - E(r)]^2$$

Elevamos al cuadrado las desviaciones porque si no lo hiciéramos, las desviaciones negativas compensarían las desviaciones positivas, con el resultado de que la desviación esperada de la media de rendimiento sea posiblemente cero. Las desviaciones del cuadrado son necesariamente positivas. Por supuesto que al elevar al cuadrado implica exagerar las grandes desviaciones (positivas o negativas) y desenfatiza las pequeñas.

Otro resultado de elevar al cuadrado las desviaciones es que la varianza tiene una dimensión de porcentaje cuadrático. Para dar a la medida de riesgo la misma dimensión que la rentabilidad esperada (%), utilizamos la desviación típica, definida como la raíz cuadrada de la varianza:

$$SD(r) \equiv \sigma = \sqrt{Var(r)}$$

Una desventaja potencial del empleo de la varianza y de las desviaciones estándar como valoración de riesgo es que tratan las desviaciones positivas y negativas de la rentabilidad esperada de forma simétrica. Por supuesto, en la práctica los inversionistas no tendrían problemas con las sorpresas positivas, y una valoración natural del riesgo se centraría sólo en los malos resultados. No obstante si la distribución de la rentabilidad es simétrica, (es decir, la probabilidad de sorpresas negativas es aproximadamente igual a la probabilidad de sorpresas positivas del mismo nivel), la desviación típica se acercaría a la valoración del riesgo que se concentra exclusivamente en las desviaciones negativas. En el caso especial en el que la distribución de rentabilidades sea aproximadamente normal la desviación típica se adecuaría perfectamente a la valoración del riesgo.

Ahora que se tiene una noción de como poder cuantificar el riesgo nos enfocaremos en determinar cuánto invertir en un fondo de acciones que cotizan en mercado de valores. Para esto comenzaremos enfocándonos en conocer la rentabilidad esperada para compensar el riesgo implicado en la inversión de dinero en acciones.

Evaluamos la retribución como la diferencia de la *RP* esperada en fondo de acciones que cotizan y la rentabilidad sin riesgo, es decir, la rentabilidad que puede obtener dejando el dinero en activos sin riesgo como son los Certificados de la Tesorería (CETES), fondos de mercado de dinero o en el banco.

Prima de Riesgo: Es la rentabilidad adicional que toda inversión debe proporcionar al inversionista como consecuencia de tener que asumir éste cierto nivel de riesgo. Normalmente se obtiene como la diferencia entre la rentabilidad de la inversión arriesgada y la rentabilidad libre de riesgo. Así, cuanto mayor sea el nivel de riesgo asociado a una inversión, mayor será la prima de riesgo exigida a la misma.

La tasa de rentabilidad de los CETES también varía a lo largo del tiempo. No obstante, sabemos la tasa de rentabilidad que obtendrán los CETES al principio del periodo, mientras que no podemos saber la que se obtendrá en los activos de riesgo hasta el final del periodo de tenencia. Por tanto, para estudiar la prima de riesgo de los activos con riesgo, calculamos una serie de rendimientos diferenciales, es decir, rendimientos por encima de la rentabilidad de los CETES en cada periodo. Una posible estimación de la prima de riesgo de cualquier activo es la media histórica de esos rendimientos superiores.

El grado en que los inversionistas desean colocar fondos en acciones depende de la aversión al riesgo. Parece evidente que los inversionistas tienen aversión al riesgo en el sentido de que si la prima de riesgo fuera cero, nadie querría invertir en acciones. En teoría, siempre debe haber una prima de riesgo positiva sobre las acciones con el fin de inducir a los inversionistas que tienen aversión al riesgo a que mantengan el suministro existente de acciones en lugar de colocar todo su dinero en activos sin riesgo.

De hecho, la prima de riesgo es lo que distingue el juego de la especulación. Los inversionistas que quieren aceptar riesgos porque esperan obtener una prima de riesgo están especulando. La especulación se lleva a cabo a pesar del riesgo porque el especulador considera que existe una relación favorable entre riesgo y rentabilidad. En cambio, el juego es la asunción del riesgo sin más finalidad que el disfrute con el propio riesgo.

A veces resulta útil cuantificar el grado de aversión al riesgo de un inversionista. Para hacerlo, supongamos carteras basadas tanto en la rentabilidad esperada, $E(r_p)$ como la volatilidad de la rentabilidad evaluada por la varianza σ_p^2. Si apreciamos que la rentabilidad sin riesgo de los CETES es r_f, entonces la prima de riesgo de una cartera es $E(r_p) - r_f$. Los inversionistas con aversión al riesgo demandarán rentabilidades esperadas más altas para colocar sus recursos en carteras con mayor volatilidad; esa prima de riesgo será mayor cuanto mayor sea la aversión al riesgo. Por lo tanto si cuantificamos el riesgo de aversión con el parámetro A, tiene sentido afirmar que la prima de riesgo que solicita un inversionista en una cartera dependerá tanto de la aversión al riesgo A como del riesgo de la cartera σ_p^2.

Escribiremos la prima de riesgo que solicita un inversionista de una cartera como una función de su aversión al riesgo.

$$E(r_p) - r_f = {}^1\!/_2\, A\sigma_p^2.$$

La ecuación anterior describe la forma como los inversionistas desean relacionar el riesgo con la rentabilidad esperada. Como criterio de referencia, sabemos que la rentabilidad tiene que ser igual sólo a la tasa sin riesgo. Es necesaria una prima de riesgo ${}^1\!/_2\, A\sigma_p^2$ para inducir a los inversionistas a establecer una cartera general que tenga una volatilidad positiva. El término ${}^1\!/_2$ es sólo un factor de escala escogido por conveniencia y no tiene impacto real en el análisis.

Ocurre que si el inversionista considera el riesgo frente a la rentabilidad en forma específica en la ecuación. Entonces podemos deducir su aversión al riesgo si observamos primas de riesgo y volatilidades de las carteras reales. Si despejamos A de la ecuación tenderemos:

$$A = \frac{E(r_p) - r_f}{{}^1\!/_2\, \sigma_p^2}$$

En la práctica no podemos observar la prima de riesgo que los inversionistas esperan obtener. Sólo podemos ver la rentabilidad real después del hecho, además los diferentes inversionistas pueden tener distintas expectativas sobre el riesgo y la rentabilidad de varios activos. Para finalizar las dos ecuaciones anteriores se aplican sólo a la varianza de la cartera general de un inversionista. Se debe tener en cuenta que la relación exacta entre riesgo y rentabilidad en los mercados de capitales no se conoce con exactitud, solo se proveen aproximaciones.

2.4 Riesgo de un Portafolio

Como se mencionó anteriormente la desviación de valores de la media era la volatilidad y eso se relacionaba con el concepto de riesgo. El cálculo del riesgo de un portafolio no es tan sencillo como el caso del rendimiento, dado que no sólo influye el promedio ponderado de las variaciones de cada activo sino que también influye la correlación entre los mismos, que permiten disminuir el riesgo total del portafolio.

Esto se puede ver mejor con un hecho real, como lo que paso después del atentado terrorista del 11 de septiembre de 2001 en Nueva York. A raíz de la disminución de vuelos, las acciones de las empresas de aerolíneas se desplomaron, sin embargo, las acciones de las empresas de armamento se apreciaron. Sin sacar ningún cálculo la correlación entre ambos sectores se puede considerar una correlación negativa, es decir cuando sube uno baja el otro.

A pesar de que ambas empresas tendrán ganancias en un ciclo económico completo (crecimiento + recesión), las ganancias son muy volátiles. Un inversionista que posea cualquiera de esas empresas tendrá ganancias volátiles, pero si ambas empresas son poseídas en montos iguales, las ganancias del conjunto se volverán estables. Es decir, su correlación negativa se hace que poseyendo ambas acciones, dando lugar al concepto de diversificación, que tiende a disminuir el riesgo.

La diversificación se mide entonces, con las medidas de dispersión de la media. Así la varianza de un portafolio de 2 activos puede expresarse como la siguiente formula:

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \times \sigma_1^2 + w_2^2 \times \sigma_2^2 + 2 \times w_1 \times w_2 \times \sigma_{12}$$

Es decir, la varianza del portafolio depende de la covarianza que existe entre ellos; w_1^2 representa la proporción al cuadrado del cada activo y σ_i^2 representa la varianza de cada activo.

La covarianza entre los activos es σ_{12} que mide cómo se relacionan dos activos, pero cada uno respecto a su media.

La ecuación de la covarianza muestral es la siguiente;

$$\sigma_{12} = \sum \frac{(R_1 - \bar{R}_1) \times (R_2 - \bar{R}_2)}{n}$$

El problema que tiene la covarianza es que está expresada en unidades de la media, por lo que se hace difícil hacer comparaciones entre covarianzas para saber si dos pares de activos están poco o muy relacionados. Para solucionar este problema se usa el coeficiente de correlación, que en realidad es la covarianza estandarizada. O sea que es igual al coeficiente de la covarianza (σ_{12}) respecto del producto de sus desvíos estándares. O sea:

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \times \sigma_2}$$

El coeficiente de correlación puede tomar valores entre -1 y 1. Si dos activos tiene correlación igual a 1, es que tiene correlación perfecta, o sea que cuando el precio de un activo sube 10% el otro sube 10%; si dos activos tienen correlación igual a -1 es perfecta pero inversa, o sea que cuando un activo sube 10% el otro baja 10%. Luego existen todas las correlaciones en el medio y posteriores al 10% hasta llegar al 100% o más.

La varianza de un portafolio de 2 activos usando el coeficiente de correlación se puede escribir como sigue:

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \times \sigma_1^2 + w_2^2 \times \sigma_2^2 + 2 \times w_1 \times w_2 \times \sigma_1 \times \sigma_2 \times \rho_2$$

La fórmula general para realizar el cálculo del riesgo de un portafolio de *n* activos es la siguiente:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} W_j^2 \times \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} W_j \times W_k \times \sigma_{jk}$$

Una de las cosas más importantes en el cálculo de la varianza del portafolio es la matriz de varianzas y covarianzas o la matriz de correlaciones. Éstas son las que van a mostrar la relación entre los activos.

Matriz de correlaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1k} \\ \rho_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \rho_{n1} & & & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de varianzas y covarianzas:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1k} \\ & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & & \\ & & \sigma_3^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

En conjunto, para calcular la combinación riesgo de una cartera, según el procedimiento aquí empleado, hacen falta *n* esperanzas matemáticas del rendimiento, *n* varianzas y $(n^2 - n)/2$ covarianzas.

2.5 Asignación de Activos en Carteras con Riesgo y sin Riesgos

Hasta ahora se ha observado que las inversiones con mayor riesgo ofrecen mayores rentabilidades medias: por lo que se pueden construir carteras utilizando valores de todas las clases de activos. Algunas de las carteras pueden tener activos libres de riesgo y otras acciones de alto riesgo.

La forma más directa de controlar el riesgo de una cartera es a través de la fracción de la cartera invertida en obligaciones del Banco de México y otros de valores seguros del mercado de dinero frente a los activos de riesgo. Éste es un ejemplo de una elección de asignación de activos, una elección entre muchas clases de inversiones, en lugar de entre valores específicos dentro de una clase de activos. Debemos de considerar que la asignación de activos es la parte más importante para la elaboración de una cartera de inversión.

Por tanto, comenzaremos nuestro estudio sobre la relación riesgo/rentabilidad de los inversionistas examinando la elección de asignación de activos más básica: la elección de cuánta parte de la cartera colocar en valores del mercado de dinero sin riesgo frente a otras clases de valores del mercado con riesgo.

En la práctica, la mayor parte de los inversionistas tratan una gama más amplia de instrumentos de mercado de dinero como si fueran activos sin riesgo. Muchos de los instrumentos del mercado de dinero son virtualmente inmunes al riesgo del tipo de interés (las fluctuaciones inesperadas en los precios de una obligación debido a los cambios en los tipos de interés del mercado) a causa de sus vencimientos cortos, y todos son bastante seguros en términos de impacto o riesgo de crédito.

Para tener una noción de los tipos de activos con riesgo y sin riesgo a continuación se dará una breve interpretación de ellos.

Activos de Riesgo:

Son aquellos activos financieros que no tienen unos derechos de pago fijos establecidos por contrato. Por tanto, el inversionista no conoce con certeza los flujos de dinero que va a recibir ni el momento en que los recibirá. Estos flujos de dinero se denominan dividendos y, normalmente, no hay un vencimiento del contrato preestablecido.

Cuando se cambia el patrimonio de la cartera de riesgo a los activos sin riesgo, no cambiamos las proporciones relativas de los activos de riesgo dentro de la cartera de riesgo. Lo que hacemos es reducir la ponderación relativa de la cartera de riesgo como un total a favor de los activos sin riesgo.

Activos sin Riesgo:

Un activo libre de riesgo es aquél que promete una rentabilidad cierta, es decir, está libre del riesgo de insolvencia de su emisor y su riesgo, medido por su varianza o desviación típica, es cero. Su relación con otros activos financieros, como las acciones es nula, por lo que es un título interesante para diversificar el riesgo de las carteras. En la práctica, el activo libre de riesgo suele corresponderse con los títulos de deuda pública, algunos de los cuales son: CETES, BONDES, Bonos M, Bonos IPAB, BREM´s entre otros.

2.5.1 Rentabilidad de una Cartera

Ahora que hemos especificado la cartera de riesgo y los activos sin riesgo, podemos examinar las combinaciones de riesgo/rendimiento que resultan de varias asignaciones de inversiones estos dos activos. Encontrar la combinación disponible de riesgo y rentabilidad es la parte técnica de la asignación de activos, se consideran las oportunidades para los inversiones dadas las características de los mercados de activos en los que pueden invertir.

Una vez que el inversionista ya ha obtenido el rendimiento esperado y el riesgo de cada activo en particular, se puede pasar a calcular el rendimiento de las diversas combinaciones que haga de los mismos, es decir, de las características que pueda formar.

El rendimiento de una cartera muestra la rentabilidad obtenida por término medio por cada unidad monetaria invertida en la cartera durante un determinado período de tiempo. Y vendrá dado por una media aritmética ponderada calculada de las siguientes formas:

$$R_p = X_1R_1 + X_2R_2 + \cdots + X_nR_n \qquad (Certeza)$$

$$E_p = X_1E_1 + X_2E_2 + \cdots + X_nE_n \qquad (Incertidumbre)$$

donde:

X = indica la fracción del presupuesto de inversión destinada a la inversión

n = el número de valores;

R_i = el rendimiento del título *i*;

E_i = la esperanza del rendimiento del mismo título;

Y la suma X_i deberá ser igual a la unidad.

Así, para calcular el rendimiento esperado de una cartera compuesta por *n* activos financieros podremos utilizar el denominado vector de rendimientos esperados. Éste consiste en una columna de números donde cada fila representa el rendimiento esperado de un activo de la cartera. Así, por ejemplo, para una cartera de *n* títulos:

$$E_i = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}$$

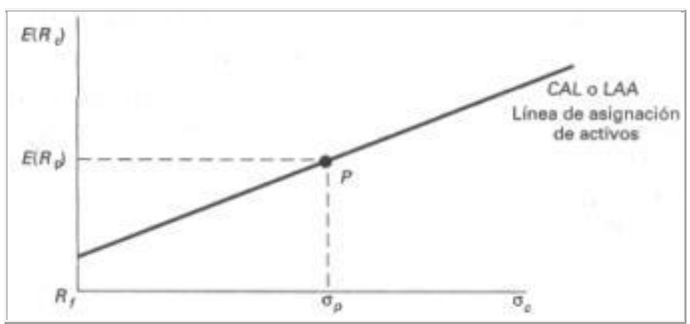
Debido a que el rendimiento esperado de una cartera es una media ponderada de los rendimientos esperados de los activos, la contribución de cada uno de éstos al rendimiento esperado de la cartera dependerá del valor de su rendimiento esperado y de la parte proporcional del valor de mercado inicial de la cartera. Nada más es relevante. Así que si un inversionista desea el mayor rendimiento posible deberá invertir todo su presupuesto únicamente en el activo que proporcione el mayor rendimiento esperado. Aunque, como veremos más adelante, esta política es muy arriesgada puesto que ese activo financiero será también el más arriesgado, así que los inversionista que no deseen correr ese riesgo deberán diversificar sus carteras, esto es, adquirir más de un activo.

2.5.2 Línea de Asignación de Activos

Podemos combinar un activo con riesgo y un activo sin riesgo de infinitas maneras, dependiendo del peso que demos a cada uno en la cartera. Las carteras resultantes tendrán diferente rentabilidad y riesgo.

Si hacemos un gráfico de la rentabilidad y riesgo de cada una de estas carteras compuestas por distintas proporciones de activo con riesgo, obtendremos lo que se conoce como línea de asignación de activos o Capital Allocation Line (CAL). En ordenadas aparece la rentabilidad esperada de la cartera completa formada por activo con y sin riesgo; en abscisas aparece su riesgo. La pendiente S iguala el incremento en la rentabilidad esperada que puede obtener un inversionista por unidad de desviación típica adicional. En otras palabras, muestra la rentabilidad extra por riesgo extra. Por esta razón, la pendiente también se llama ratio de recompensa por volatilidad. Existe una relación entre la rentabilidad de una cartera y su riesgo.

El punto R_f de la recta, representa una cartera formada al 100% por activos sin riesgo. El punto P representa una cartera formada al 100% por activos con riesgo. Las carteras a la derecha de P representan carteras compradas con fondos que fueron tomados prestados a una rentabilidad libre de riesgo.

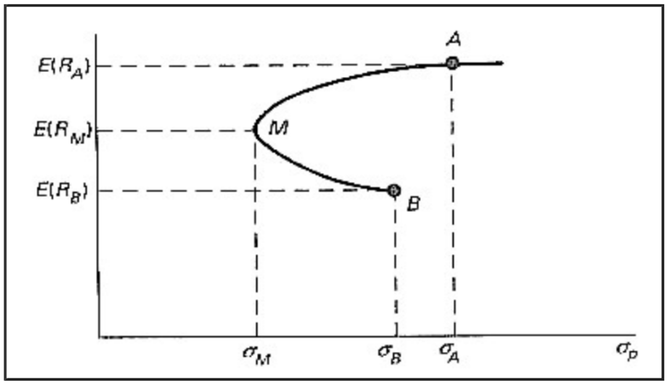


En realidad la razón de compensación por volatilidad es la misma para cualquier cartera completa que el trazado en la línea de asignación de activos. Mientras que las combinaciones riesgo/rentabilidad difieren, la razón de retribución al riesgo es constante.

2.5.2.1 Curva de Oportunidades de Inversión

Hasta ahora lo que sea realizado es la combinación de un activo sin riesgo con una cartera con riesgo determinado con anterioridad. Ahora vamos a ver cómo podemos llegar a una diversificación eficiente, es decir, cómo podemos obtener una cartera que nos dé el mínimo riesgo para cada nivel de rentabilidad esperada.

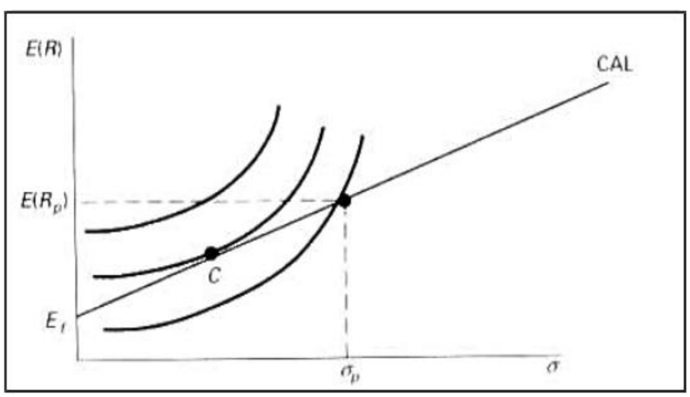
Para facilitar la exposición, nos referiremos a la combinación de sólo dos activos con riesgo a la hora de formar la cartera. Si dibujamos los puntos rentabilidad/riesgo obtenidos sobre un eje de coordenadas, obtendremos la curva de oportunidades de inversión o frontera de eficiencia.



Gráficamente, vemos que las carteras por debajo del punto M son ineficientes, pues para cada una de ellas existe otra por arriba con el mismo riesgo y mayor rentabilidad. Podemos, entonces, suprimir esa parte de la curva. La cartera de riesgo mínimo se encuentra en el punto M de la figura.

Cartera óptima para cada inversionista

Puede ser que la cartera óptima así encontrada no sea satisfactoria para el nivel de riesgo del inversionista, porque éste prefiera un menor o mayor nivel de riesgo. Entran aquí en juego las curvas de utilidad. Por lo que la situación será la siguiente: tenemos un activo sin riesgo y una cartera óptima; combinando ambos obtenemos la línea de asignación de activos. Todo esto nos lo da el mercado. Lo que aporta el inversionista es su grado de aversión al riesgo representado por las curvas de utilidad. La cartera óptima para un inversionista particular será aquella en la que su curva de utilidad sea tangente a la línea de asignación de activos.



Por lo tanto, un gestor de carteras propondrá a todos los inversionistas la misma cartera con riesgo. La única diferencia entre dos inversionistas es que el más adverso al riesgo invertirá más en activo sin riesgo y menos en la cartera óptima, y viceversa.

2.5.3 Tolerancia al Riesgo y Asignación de Activos

Los asesores financieros deben determinar la tolerancia al riesgo de cada inversionista para poder planear y poder desarrollar mejores y más eficientes carteras de activos. El problema de la asignación de activos radica en conocer cuál es el punto óptimo, cómo determinarlo y cuánto riesgo se debe asumir para obtener una ganancia mayor al riesgo que se corre.

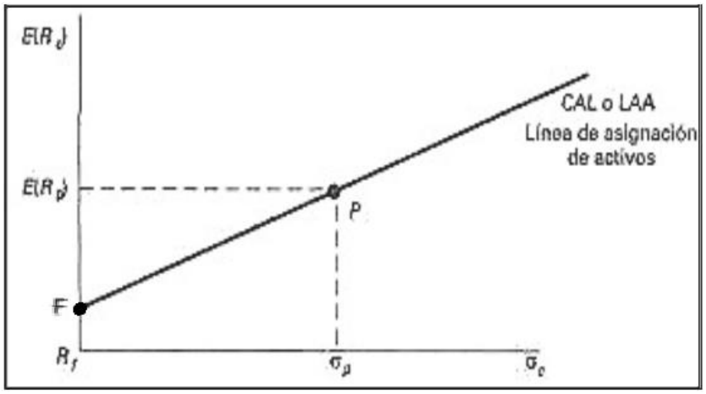
Esto es exactamente la tolerancia al riesgo, es decir, la resistencia de los inversionistas a que las inversiones realizadas puedan salir mal y no se obtengan los resultados esperados.

La tolerancia al riesgo mide la volatilidad (riesgo) que los inversionistas están dispuesta a asumir a cambio de esperar un mayor rendimiento. Un inversionista con tolerancia al riesgo va a buscar carteras de inversión con mayor potencial de rendimiento aunque exista mayor probabilidad de pérdida de capital.

La teoría central es que la cartera de inversión debe de minimizar el riesgo y al mismo tiempo maximizar el rendimiento, plantear una combinación perfecta de activos con riesgo y activos sin riesgo, que sean el punto donde agregar una unidad de riesgo proveerá rendimientos marginales, este punto se encuentra en la curva de frontera eficiente, la que se debe determinar por medio de un análisis de optimización con varias combinaciones de asignación de recursos a las diferentes activos en el mercado tomando en cuenta la correlación entre los activos y obligaciones del portafolio y así lograr la diversificación óptima.

Hasta ahora hemos desarrollado la CAL, el grafico de todas las combinaciones posibles de riesgo/rentabilidad disponibles para asignar la cartera completa entre una cartera de riesgo y una cartera con activos sin riesgo. El inversionista que confronte la CAL ahora tiene que elegir una combinación optima del conjunto de elecciones factibles. Esta combinación conlleva intercambiar riesgo y rentabilidad. Los inversionistas individuales con diferentes niveles de aversión al riesgo, con una línea de asignación de activos idéntica, escogerán diferentes posiciones con el activo de riesgo. Especialmente, los inversionistas con mayor aversión al riesgo elegirán mantener menos activos con riesgo y más sin riesgo.

Para ser más gráficos, escogerán carteras cercanas al punto F en la CAL (siguiente figura). Los inversionistas más tolerantes al riesgo escogerán puntos cercanos a *P*, con mayores rentabilidades esperadas y mayores riesgos. Elegirán carteras a la derecha del punto *P*. estas carteras apalancadas proporcionan incluso mayores rentabilidades esperadas, pero también mayores riesgos.



La elección de asignación de activos del inversionista también dependerá de la relación riesgo/rentabilidad. Si aumenta la recompensa del rendimiento por riesgo, entonces los inversionistas podrán decidir adoptar posiciones más arriesgadas. Por ejemplo, supongamos que un inversionista vuelve a evaluar la probabilidad de distribución de la cartera de riesgo y que ahora se da cuenta de que existen mayores rentabilidades esperadas sin que aumente la desviación típica. Esto supone un incremento en la razón de recompensación por volatilidad o, de forma equivalente, un aumento en la pendiente de la CAL. Como resultado, este inversionista escogerá una posición, más alta y, es decir, una posición mayor en la cartera de riesgo.

Una responsabilidad del asesor financiero es sentar alternativas de oportunidad de inversión a sus clientes, obtener una valoración de la tolerancia al riesgo del cliente y ayudarle a determinar la cartera completa apropiada. Por lo que debe de tener en cuenta que cuando se realiza la planeación estratégica de largo plazo, la combinación de activos debe considerar todos los factores, entender la diferencia entre éstos, ayudará a los asesores financieros a desarrollar una cartera estratégica con los riesgos más adecuados a su circunstancia y tener la certeza de lograr sus objetivos.

2.6 La Diversificación y el Riesgo de la Cartera

En vez de analizar el riesgo a nivel de cada valor, la teoría moderna de portafolios o MPT propone medir el riesgo a nivel de la cartera. Una cartera puede ser definida como una canasta o grupo de instrumentos que presenta, de forma completa y acumulada, un perfil riesgo rendimiento que responde a los objetivos y tolerancia de riesgo del inversionista.

Por tanto, cuando se considera el riesgo desde la perspectiva de la MPT, una decisión de inversión no se basa en la evaluación del perfil de riesgo rendimiento de un instrumento determinado, sino en cómo dicho instrumento afecta el riesgo general de la cartera.

Por ejemplo, siguiendo los consejos tradicionales de inversión, se identifican los valores de varias compañías basándose en el análisis fundamental de las compañías (proyecciones de flujo de caja, estados financieros, estructura de capital, producto, mercado, etc.). Se determina que estas compañías presentan características extraordinarias de riesgo-rendimiento. Basándose exclusivamente en una filosofía de selección de los valores, podríamos concluir que habría que invertir todo nuestro capital disponible en dichos valores. Sin embargo, de forma intuitiva, esto no parece prudente.

También, intuitivamente, parece lógico diversificar las inversiones para reducir el riesgo. La MPT formaliza estas impresiones en un modelo matemático que considera cuáles serán los resultados de una serie de inversiones o cartera teniendo en cuenta la correlación de los rendimientos esperados de los instrumentos que constituyen la cartera.

Una cartera invertida en varios instrumentos cuyos rendimientos tengan una baja correlación tendrá un rendimiento esperado igual al promedio ponderado de los rendimientos de cada instrumento. Sin embargo, la volatilidad de la cartera será inferior al promedio ponderado de las volatilidades de los diferentes instrumentos. Es decir, que el rendimiento esperado ponderado general no cambia y el riesgo disminuye. En resumen, la MPT sugiere que los inversionistas deberían elegir carteras y no valores individuales y que la diversificación mejora el perfil acumulado riesgo-rendimiento de una cartera.

Esto significa que gracias a la diversificación un inversionista puede reducir el riesgo de mercado invirtiendo en instrumentos financieros cuyos rendimientos esperados no estén correlacionados entre sí. La reducción del riesgo es "gratuita" puesto que los rendimientos esperados no se ven afectados.

Se pueden esperar importantes beneficios de la diversificación de más de uno o dos valores. Mientras mayor sea el número de riesgos sin correlación a que está expuesta una cartera, más bajo será el riesgo total de mercado de dicha cartera.

Una combinación atractiva de instrumentos financieros para un inversionista prudente y capaz, podría ser una proporción de instrumentos con rendimientos esperados altos y un alto riesgo, combinados con una proporción de instrumentos con rendimientos más bajos pero con correlaciones bajas (o negativas) de tal manera que sus fluctuaciones se anulen mutuamente. La cartera resultante tendrá una tasa de rendimiento promedio alta y menos fluctuaciones negativas que los activos que tengan el mismo nivel de riesgo.

La MPT considera todas las combinaciones de instrumentos financieros del mercado y los gráficos de las tasas de rendimiento y las desviaciones normales. El resultado es una región limitada por una curva cuya pendiente es positiva. La línea superior izquierda o "frontera" de la región mencionada corresponde a un grupo especial de carteras que Markowitz llamó la frontera eficiente. Markowitz la llamó eficiente porque para un nivel de riesgo determinado (desviación normal) cualquier punto de esta línea (o frontera) presenta una combinación de activos (o carteras) que tienen la mayor tasa de rendimiento posible.

Las carteras más altamente diversificadas o carteras “óptimas” pueden ser definidas como carteras que:

- Para un nivel de riesgo determinado (definido por la volatilidad o la desviación normal) tienen el mayor rendimiento esperado.
- Para cualquier nivel de rendimiento esperado, tiene el riesgo más bajo (definido por la volatilidad o la desviación normal).

Para que la diversificación funcione, no basta con añadir instrumentos a una cartera. En vez de ello, es necesario identificar las concentraciones de riesgo y reducirlas, añadiendo al mismo tiempo otros activos no correlacionados.

En resumen, gracias a los modelos basados en la MPT es posible construir una cartera que tenga un nivel de riesgo menor al riesgo ponderado promedio de los activos que dicha cartera contiene. El objetivo es identificar un nivel aceptable de tolerancia del riesgo y luego hallar una cartera con el rendimiento esperado máximo para dicho nivel de riesgo.

Clases de activos para la diversificación de una cartera

En teoría podemos calcular la frontera eficiente generada por todos los valores del mercado mundial. Pero el universo de inversión es muy importante y podría ser una tarea casi imposible determinar la volatilidad, rendimiento esperado y correlaciones de todos estos instrumentos.

Todos los activos financieros, desde los valores de renta fija, las acciones y los bienes raíces hasta los productos estructurados y los productos financieros derivados, son instrumentos financieros que representan derechos económicos respecto a beneficios futuros inciertos. Los valores pasan de relativamente simples (es decir obligaciones con la promesa de reembolso del capital al vencimiento y una tasa de interés durante un período de tiempo determinado) a muy complejos (notas estructuradas y productos financieros derivados).

Los valores son emitidos por empresas y son distribuidos al público a través de intermediarios financieros tales como los bancos de inversión. Una vez que han sido "vendidos" los valores pueden muchas veces ser negociados en el mercado secundario. Los valores también pueden ser negociados a través de intermediarios en las bolsas.

Los valores están agrupados en clases o en subclases de instrumentos que comparten características comunes. Las principales clases de activos empleadas por los inversionistas institucionales son: Acciones de la Bolsa Mexicana de Valores, Acciones extranjeras, acciones de mercados emergentes, valores de renta fija del Banco de México, valores de renta fija extranjeros, obligaciones de alto rendimiento, obligaciones indexadas a la inflación, bienes raíces, acciones de empresas que no cotizan en bolsa y efectivo.

Los inversionistas utilizan las clases de activos para estimar la mejor asignación de sus inversiones puesto que el número de correlaciones es bajo y que el resumen de su información estadística es bastante preciso.

2.6.1 Reducción del Riesgo vía Diversificación

Diversificar significa dividir una inversión entre una variedad de activos. La diversificación ayuda a reducir el riesgo porqué las diferencias entre inversiones tiene alzas y bajas en forma independiente una de otra. Por lo general, las combinaciones de estos activos cancelarán las fluctuaciones de cada uno de ellos, y por lo tanto reducirán el riesgo.

Si consideramos que tenemos N activos e invertimos la misma proporción en cada uno de ellos 1/N, la fórmula de varianza de un portafolio se puede reescribir así:

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{1}{N}\right)\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\sigma_j^2}{N}\right] + \left(\frac{N-1}{N}\right)\sum_{j=1}^{n}\times\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\times \ldots\ldots\times\left[\frac{\sigma_{jk}}{(N\times(N-1))}\right]$$

Los términos que están entre corchetes son medias o promedios. En el primer caso es simple de ver. En el segundo, hay *N* valores de *j* y *(N-1)* de valores de k y hay *(N-1)* valores de k, ya que *k* no puede ser igual a *j* por lo que hay 1 valor menos de *k* que de *j* (la covarianzas de *j* y *j* es la varianza). Por lo tanto hay un total de *N(N-1)* covarianzas que sale de la matriz de varianza y covarianza. Por lo tanto el segundo término es la suma de las covarianzas dividido entre el número total de covarianzas. Reemplazando las sumas por medias o promedios tenemos:

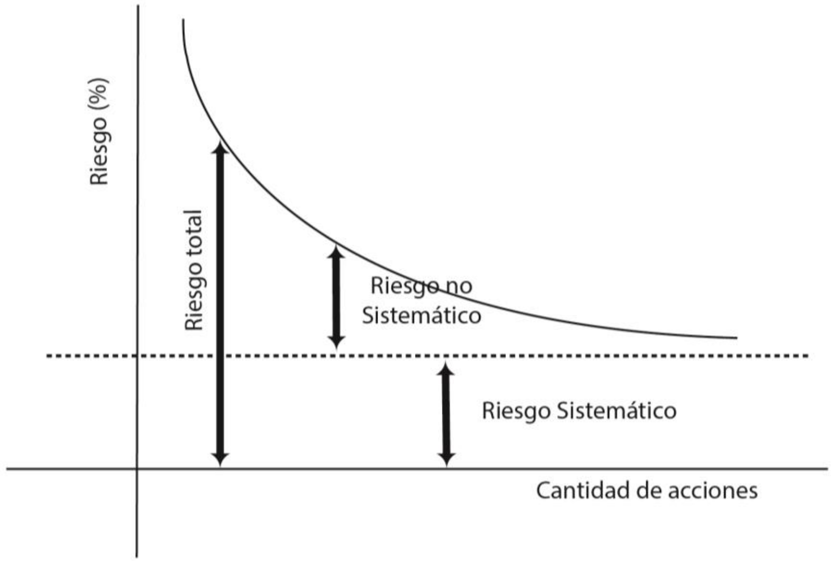
$$\sigma_p^2 = \left(\frac{1}{N}\right)\bar{\sigma}_j^2 + \frac{N-1}{N\times\bar{\sigma}_{jk}}$$

Si $N \rightarrow \infty$; entonces:

$$\frac{1}{N} = 0\ y\ \frac{N-1}{N} = 1$$

Por la tanto: $\sigma_p^2 = \bar{\sigma}_j^2$

Esta es una expresión más realista de lo que ocurre cuando invertimos en un portafolio de activos. La contribución de la varianza de los activos individuales a la varianza del portafolio es 0 (primera parte de la formula). Sin embargo, la contribución de las covarianzas, a medida que crece *N*, se asemeja a la media de las covarianzas. Entonces, se puede decir que el riesgo individual de cada activo se puede eliminar o diversificar: esto es lo que se llama riesgo no sistemático; pero la contribución al riesgo total provocado por las covarianzas no, esto es lo que se llama riesgo sistemático o de mercado. Esto implica que la mínima varianza se obtiene para portafolios bien diversificados y es igual a la covarianza promedio de todos los activos de la población. En conclusión, si bien existen beneficios de la diversificación, el riesgo de un portafolio no se puede eliminar totalmente sino más bien minimizar.



Riesgo Sistemático y Riesgo no Sistemático

La rentabilidad de un valor mobiliario está afectado por dos tipos de riesgos: Un riesgo propio o "específico" que depende de las características específicas de la entidad o empresa emisora, naturaleza de sus actividad productiva, competencia de la gerencia, solvencia financiera etc. y este tipo de riesgo también se le conoce como "no sistemático o no diversificable" y un segundo tipo de riesgo, llamado "Sistemático o de Mercado", que no depende de las características individuales del título, sino de otros factores (coyuntura económica general) que inciden sobre el comportamiento de los precios en el mercado de valores. A este segundo tipo de riesgo también se le denomina como "No Diversificable", ya que no será posible eliminarlo mediante la diversificación, dada la correlación existente entre la rentabilidad del título en cuestión con las rentabilidades de otros títulos a través del Índice Bursátil que resume la evolución del mercado.

Cuando un inversionista compra títulos en el mercado de valores con el fin de reducir el riesgo, tiene sentido la diversificación si las rentabilidades de los diferentes títulos adquiridos no están correlacionados, o tienen distinto grado de correlación con el índice del mercado.

El modelo más conocido para estimar la rentabilidad y el riesgo de los valores mobiliarios es el llamado "Modelo de Mercado" de Sharpe, que sirve de base al "Modelo Diagonal". En dicho modelo se parte de la dependencia estadística de tipo lineal existente entre la rentabilidad de los títulos y la del Índice General.

Uno de los criterios para la clasificación de los activos financieros es el basado en el coeficiente beta de Sharpe o coeficiente de volatilidad. Según este criterio, los activos financieros se suelen clasificar en tres grandes grupos o categorías:

1.- Activos "poco volátiles" o "defensivos", que son aquellos cuya beta o coeficiente de volatilidad es inferior a la unidad.

2.- Activos "muy volátiles" o "agresivos", que son aquellos cuya beta o coeficiente de volatilidad es superior a la unidad.

3.- Activos de "volatilidad normal" o "neutros", que son aquellos cuya beta o coeficiente de volatilidad es igual a la unidad.

Más adelante cuando se presente el cálculo de la frontera eficiente y modelo de Markowitz se señalará como diversificar el riesgo sistemático y no sistemático así como el cálculo de las Betas y las Alfas.

2.6.2 Procedimientos para Diversificar

Para conformar un portafolio de inversiones diversificado es necesario tener claro los siguientes puntos

- **Cuánto dinero se invertirá.**

En la medida en que se tenga mayor capital para invertir, mayor será la posibilidad para adquirir diferentes activos. Existen topes mínimos, que limitan a aquellos que quieren ser participantes de ciertas negociaciones.

Las instituciones financieras, por ejemplo, tienen un músculo financiero fuerte que les permite obtener ciertos beneficios de participación para ofertas de bonos privados y públicos, que para el resto de inversionistas minoritarios no son alcanzables directamente.

Sin embargo, es bueno aclarar que luego de realizar cualquier inversión tanto inversionistas minoritarios como mayoritarios tienen los mismos derechos y por consiguiente su utilidad está medida por la misma rentabilidad para uno como para el otro inversionista.

- **Qué tipo de inversionista es el que conforma el portafolio.**

Si el inversionista es conservador, tendrá una fijación pos los activos de renta fija, conformando un portafolio 100% por papeles comerciales, bonos privados y CETES. Existe un riesgo mínimo, pero a su vez la rentabilidad también lo es.

Si el inversionista es moderado, su portafolio estaría repartido en un 90% renta fija y un 10% destinado a renta variable, datos sacados de la experiencia observada en los inversionistas actuales, sin embargo esta distribución no es exacta, solamente sirve para establecer la diferencia frente al inversionista moderado que no se atreve a invertir en renta variable.

Si el inversionista es agresivo, no tiene limitaciones para invertir en renta variable, sin embargo, para “asegurar” de cierta forma su capital, destina entre un 60% y 70% a renta fija y el resto a renta variable.

- **Que tipos de activos desea elegir.**

Definido el monto y el perfil del inversionista y a su vez la proporción que se destinará para activos de renta fija y de renta variable, se debe elegir preferentemente activos de diferentes sectores de la economía, por ejemplo: acciones de empresas energéticas, o de petróleo, de producción y de comercialización de productos alimenticios, del sector financiero, entre muchos otros.

Dependiendo además del conocimiento que tenga el inversionista puede incorporar dentro de su portafolio además de divisas, el uso de derivados que permiten invertir menores cantidades de dinero con rentabilidades interesantes con la valoración o desvalorización del activo subyacente.

- **A qué plazos se desea realizar las inversiones.**

Si su propósito es invertir a largo plazo y a bajo riesgo lo que se recomienda es invertir en deuda pública, por ejemplo los certificados de la tesorería (CETES) a 364 días, si es a largo plazo y con un riesgo mayor puede realizar compra venta de acciones, si es mediano plazo, en títulos estatales o en bonos comerciales y en acciones líquidas.

Es de aclarar que existen infinidad de combinaciones, las variables para la conformación de una cartera de inversión diversificada son muchas, sólo determinando una estrategia de inversión puede elegirse el camino dentro del abanico de posibilidades de inversión.

Elección de un portafolio óptimo

Teniendo en claro cuál es el conjunto de activos que facilitarían el desarrollo de la estrategia definitiva de inversión, es necesario realizar lo siguiente:

- Elección de activos que impliquen un mínimo riesgo. Esto se realiza observando previamente la volatilidad histórica del activo, la calificación del emisor, la liquidez del activo y en general la probabilidad que tiene de desvalorarse.
- Habiendo seleccionado aquellos que infieren menor riesgo, se toman aquellos que mayor rentabilidad arrojarían en el plazo establecido dentro de la estrategia.
- Se establece como la correlación de un activo frente a los demás.
- Se establece el portafolio resultante, donde se hallan las cantidades ideales que maximicen las utilidades del portafolio basados en mayor rentabilidad y mínimo riesgo.

2.7 Diversificación de Múltiples Activos Riesgosos

La importancia de la diversificación

La ventaja de tener una cartera de inversión diversificada implica, según Markowitz, la reducción en el riesgo, ya que la pérdida en algún sector accionario puede compensarse con las ganancias de otro sector que éste presente dentro de la composición de la cartera.

La diversificación depende del coeficiente de correlación (o covarianza) entre las ganancias de los activos que comprenden la cartera. El coeficiente de correlación representa la dirección y fuerza de la relación entre dos activos, y éste puede tomar valores entre -1 y 1.

En la diversificación se persigue que el coeficiente de correlación entre los activos sea negativo o cercano a cero (covarianza negativa), ya que esto hace que se reduzca el riesgo del portafolio y se compensen las pérdidas con las ganancias de otras acciones presentes en la cartera. Esto trae consigo el ejecutar una determina la estrategia de inversión, integrar la política de inversiones con las expectativas de los inversionistas, reaccionar a tiempo a la incertidumbre de los mercados y la capacidad para determinar dónde se encuentran las oportunidades de inversión más rentables.

Las tres normas de las carteras de dos activos arriesgados

Supóngase que una proporción denominada w_B se invierte en el fondo de obligaciones y el resto $1 - w_B$ denominado w_S, se invierte en el fondo de acciones. Las propiedades de la cartera se determinan por las tres reglas siguientes, que aplican las normas de las combinaciones que rigen las estadísticas de variables aleatorias.

Norma 1: La tasa de rentabilidad de la cartera es la media ponderada de la rentabilidad de los valores con las proporciones de inversión como ponderaciones.

$$r_p = w_B r_B + w_S w_S$$

Norma 2: La tasa de rentabilidad esperada de la cartera es una media ponderada de la rentabilidad esperada de los valores componentes con la misma proporción de la cartera que las ponderaciones. Simbólicamente, la fórmula de la ecuación es:

$$E(r_p) = w_B E(r_B) + w_S E(w_S)$$

Las dos primeras normas son sencillas expresiones lineales. Esto no es así en el caso de la varianza de la cartera, tal y como se muestra en la norma 3.

Norma 3: La varianza de la tasa de rentabilidad en la cartera de dos activos arriesgados es:

$$\sigma_p^2 = (w_B \sigma_B)^2 + (w_S \sigma_S)^2 + 2(w_B \sigma_B)(w_S \sigma_S)\rho_{BS}$$

Dónde ρ_{BS} es la interrelación entre la rentabilidad del fondo de acciones y del fondo de obligaciones.

La varianza de la cartera es una suma de las contribuciones de la varianza de los valores de dicha cartera más un término que incluye el coeficiente de interrelación entre las rentabilidades de los títulos de la cartera. Si la interrelación entre la combinación de los valores es pequeña o negativa, habrá una mayor tendencia a que se compensen mutuamente las variabilidades de la rentabilidad de los dos activos. Esto reducirá el riesgo de la cartera. Adviértase que en la ecuación de la norma 3, la varianza de la cartera es menor cuando el coeficiente de relación es menor, incluso negativo es mejor.

La fórmula que describe la varianza de la cartera es más complicada que la que describe la rentabilidad de la cartera. Sin embargo, esta complicación tiene una virtud, el tremendo potencial de beneficios de la diversificación.

Propiedad de Separación

Antes de haber escogido la combinación de activos riesgosos y libres de riesgo apropiada para los valores de la cartera (cartera de riesgo óptimo); el gestor de la cartera ofrecerá la misma cartera arriesgada para todos sus clientes, independientemente de su grado de aversión al riesgo. Ésta aparece sólo cuando los inversionistas eligen su punto deseado en la CAL. La mayor parte de los clientes con aversión al riesgo invertirán más en activos sin riesgo y menos en la cartera de riesgo óptimo que los clientes con aversión al riesgo, pero ambos utilizarán la cartera de riesgo óptimo.

El resultado se denomina *propiedad de separación*, y fue propuesto por James Tobin (1958), Novel de Economía en 1983. Esto implica que la elección de una cartera se puede separar en dos tareas diferentes. La primera tarea que es la determinación de una cartera de riesgo óptimo, es puramente técnica. Según los datos introducidos, la mejor cartera arriesgada es la misma para todos los clientes, independientemente de la aversión al riesgo. Sin embargo, la segunda tarea, la construcción una cartera completa de activos libres de riesgo y depende de las preferencias personales. En este caso el cliente es el que elige.

Por supuesto la cartera arriesgada óptima para los distintos clientes puede variar debido a las restricciones de la cartera tales como los requisitos de rentabilidad de dividendos, las consideraciones fiscales u otras preferencias de los clientes, aun así algunas carteras serán suficientes para cubrir la demanda de una amplia gama de inversionistas. La técnica de optimización (informatizada) es la parte más fácil de la construcción de la cartera.

2.7.1 Reducción del Riesgo a través de la Diversificación

La asignación de activos implica la elección de cuánta parte de la cartera colocar en valores de mercado de dinero sin riesgo frente a una cartera arriesgada. Sencillamente partimos de que la cartera está por un fondo de acciones y otro de activos monetarios en determinadas proporciones. Por supuesto, los inversionistas necesitan decidir qué proporción de sus carteras han de asignar a las acciones frente al mercado de obligaciones. Esto también es una decisión de asignación de activos. La decisión de la asignación de activos tiene que hacerse antes que la elección de unas acciones o de un fondo de inversión en particular.

Cuando la diversificación es realizada a nivel internacional un gran porcentaje del riesgo no diversificable (sistemático) al interior del país se transforma en riesgo diversificable (no sistemático), esto permite que dicho riesgo sea eliminado sin tener que sacrificar parte de los retornos que se esperan obtener de dicha inversión.

La proporción del riesgo que es diversificable depende del grado de correlación de los resultados obtenidos por las instituciones que respaldan los instrumentos financieros que integran el portafolio, es decir, si a todas las empresas les va bien o mal al mismo tiempo, el grado de diversificación del riesgo que se puede lograr invirtiendo en diferentes compañías es muy bajo. Por el contrario, cuando algunas empresas andan bien, otras andan mal y viceversa, se puede eliminar un gran porcentaje del riesgo diversificando el portafolio.

2.7.2 Diversificación Internacional

El concepto de la diversificación va más allá de invertir los recursos en diferentes instrumentos dentro del país; la lógica de diversificar un portafolio invirtiendo parte de los recursos en diferentes países no es distinta de la lógica de diversificar un portafolio invirtiendo en diferentes instrumentos dentro del país.

Diversificar internacionalmente es como tener los huevos en distintas canastas, distintas bodegas y en distintas ciudades, con esto el riesgo de perder los recursos se minimiza aún más que con la diversificación inicial (nacional) que consistía tan solo en tener muchas canastas en diversas bodegas "pero en la misma ciudad". Con la nueva diversificación es decir ubicando las canastas en diferentes bodegas y en diferentes ciudades el riesgo es mínimo pues continuando con el ejemplo inicial un incendio que acabe con todo es menos probable aún, en este caso.

La importancia de la diversificación internacional radica en el hecho de que esta alternativa permitirá un acceso instantáneo a una fuente infinita de tipos de instrumentos financieros que están disponibles en el mercado internacional, adicionalmente, esta alternativa permitirá ampliar la diversificación del portafolio de inversiones hacia instrumentos, que por sus características implicarían una drástica reducción del riesgo de la cartera de inversiones.

2.7.3 Efecto del Riesgo Cambiario en la Diversificación Internacional

Se entiende por riesgo cambiario el riesgo asociado a las variaciones del tipo de cambio que afecta a una inversión realizada en una moneda de distinta denominación a la que el inversionista utiliza para satisfacer sus necesidades de consumo.

En el caso de invertir en un portafolio diversificado internacionalmente, el riesgo cambiario consistirá en la probabilidad de una reevaluación del dólar en términos reales. Es decir, una disminución del tipo de cambio real. En este caso, las inversiones realizadas en moneda extranjera perderían parte de su valor al ser convertidas a dólares.

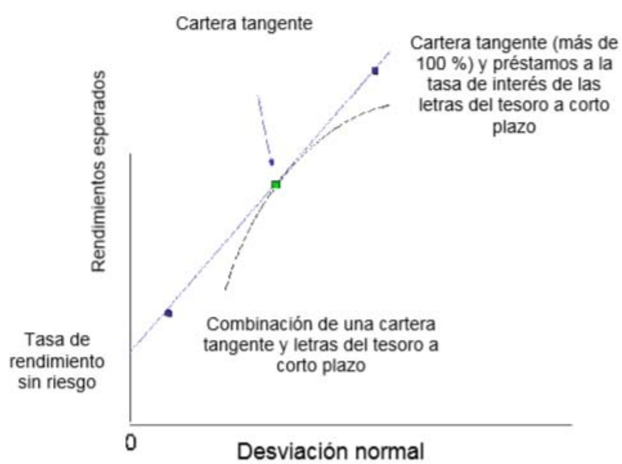
La existencia de riesgo cambiario no necesariamente invalida los argumentos a favor de la diversificación internacional. Es posible que la reducción de riesgo a través de la diversificación internacional sea mayor que el aumento de riesgo provocado por las variaciones del tipo de cambio.

Hasta el día de hoy, no se conocen estudios específicos realizados que ayuden a dilucidar si el riesgo cambiario contrasta los beneficios de la diversificación internacional.

Cabe mencionar que según un estudio realizado por Solnick y Noetzlier (1981) muestra que la volatilidad de los retornos de acciones medida en dólares no es sustancialmente mayor que la volatilidad de los retornos medida en moneda local. Es así que se puede considerar que el riesgo cambiario es una magnitud insignificante comparada con la reducción de riesgo a través de la diversificación internacional.

2.7.4 La Cartera Eficiente

El activo sin riesgo no tiene correlación con otros valores y por tanto no permite una diversificación, pero es posible combinarlo con carteras que están en la frontera eficiente y crear así una serie de carteras eficientes con características de riesgo-rendimiento superiores. Esta noción de apalancamiento de la frontera eficiente gracias al activo sin riesgo fue explorada por James Tobin en 1958.



Tobin llamó a la línea que va desde el punto correspondiente a la tasa de rendimiento de los activos sin riesgos en el eje Y hasta el punto de tangencia con la frontera eficiente, y luego más allá, la frontera súper eficiente o la Línea del mercado de capital (Capital Market Line (CML)).

La CML presenta una serie de carteras que combinan una proporción de la cartera tangente, con una posición "larga" de los activos sin riesgo o con préstamos (posición "corta") a la tasa de interés de los activos sin riesgo para invertir más del 100 por ciento en la cartera tangente.

Las carteras a la izquierda de la cartera tangente tienen un riesgo menor al de las carteras en la frontera eficiente, pero rendimientos esperados ligeramente mayores.

En los años sesenta William Sharpe, que trabajaba con la MPT de Harry Markowitz y se basaba en las características idealizadas del mercado, sugirió que la cartera súper eficiente de Tobin debía ser la cartera teórica de mercado; es decir todos los activos de mayor riesgo del mundo combinados con los activos sin riesgo.

Un ejemplo sería el caso del modelo de Sharpe, el Modelo de formación de los precios de los activos de capital (Capital Asset Pricing Model (CAPM)), donde el riesgo de la cartera se descompone en riesgo sistemático y específico. El riesgo sistemático es el riesgo de la tenencia de una cartera teórica de mercado por el cual un inversionista es compensado, mientras que riesgo específico es único a un activo particular, y puesto que puede ser diversificado, el inversionista no recibe ninguna compensación por él.

En los años sesenta la aproximación más cercana a la cartera ponderada en función del capital era el S&P500 porque los Estados Unidos eran el mercado más importante del mundo. Así pues, desde los años sesenta hemos observado un interés creciente de los inversionistas por alternativas de inversión basadas en índices de mercado.

Desde un punto de vista práctico, el problema de la inversión puede ser reducido a algo tan simple como elegir entre un pequeño número de índices de mercado publicados o invertir en fondos de índices, en vez de tratar de analizar y de invertir en un número inmenso de valores y obligaciones individuales. Invertir en un índice es como asignar la inversión a los mismos instrumentos y en las mismas proporciones que están presentes en el mercado durante un período determinado. Sin embargo, esto supone que el mercado es eficiente y que los precios de mercado reflejan una evaluación razonable por parte de los inversionistas. Es decir que mientras más baja sea la correlación del activo en relación con la cartera, mayor es el potencial de desplazar la frontera eficiente hacia la izquierda y mayor el "valor" del activo.

CAPÍTULO III: LA FRONTERA EFICIENTE Y MODELO DE MARKOWITZ

La teoría moderna de selección de portafolios se inició con Harry Markowitz en el año de 1952, esta teoría se basa principalmente en la diversificación, concepto fundamental para la construcción de portafolios óptimos, es decir, para la estructuración de combinaciones de activos con las mejores relaciones de riesgo-rendimiento. Dicho riesgo implícito en el portafolio, es evaluado por medio de la estimación de la varianza de los rendimientos esperados asociados con los activos que conforman el mismo.

El diversificar, ampliando el número de activos en los que se invierte, ayuda a reducir el riesgo, pero es claro, que nunca se llegará a eliminar este riesgo, por completo, ya que siempre existirán factores macroeconómicos que afectan a todas las industrias, hecho que implica una exposición permanente al riesgo, que no es diversificable. Pero también es importante notar, que un número exagerado de activos en una cartera, son difíciles de gestionar, por lo tanto, se recomienda un número prudente de éstos; este número es aquel, que al incluir un activo adicional, la reducción en el nivel de riesgo ya no es significativa.

También es importante notar, que no existen limitaciones para la creación de portafolios, estos se ajustan a los criterios de rentabilidad y riesgo de cada inversionista.

3.1 Criterio de la Media-Varianza

Los inversionistas desean carteras con altas rentabilidades esperadas y baja volatilidad. Estas preferencias significan que podemos comparar carteras utilizando un enfoque de media-varianza de la siguiente manera. Se dice que la cartera A domina a la cartera B si todos los inversionistas prefieren A sobre B. Ése será el caso si tiene rentabilidades medias más alta y menor varianza;

$$\Rightarrow E(r_A) \geq E(r_B) \quad y\ A\ domina\ B\ si \quad \sigma_A \leq \sigma_B$$

Las carteras que estén por debajo de la cartera de varianza mínima en la figura pueden rechazarse por ineficientes. Todas las carteras de la parte pendiente a la baja de la curva están “dominadas” por la cartera que ésta directamente encima de ella en la parte pendiente al azar de la curva, ya que esa cartera tiene una mayor rentabilidad esperada y una desviación típica igual. La mejor elección entre las carteras en la parte pendiente al azar de la curva no es tan evidente, porque en esa región las mayores rentabilidades esperadas están acompañadas de mayores riesgos.

La mejor elección dependerá de la voluntad del inversionista de relacionar el riesgo con la rentabilidad esperada. Hasta ahora se ha considerado una interrelación de cero rentabilidades de acciones y de obligaciones. Sabemos que las interrelaciones bajas ayudan a la diversificación y que un coeficiente de interrelación más alto de acciones y obligaciones da como resultado una reducción de la diversificación efectiva.

Partiendo de la norma 3 de carteras de dos activos arriesgados [5]se tiene que el coeficiente es 1, 0 simplifica la ecuación para la varianza de la cartera. Si volvemos a retomarla podremos observar que la situación $\rho_{BS} = 1$ en dicha ecuación significa que podemos "completar la elevación al cuadrado" de las cantidades $w_B\sigma_B$ y $w_S\sigma_S$ para obtener:

$$\sigma_p^2 = (w_B\sigma_B + w_S\sigma_S)^2$$

Y por tanto:

$$\sigma_p = w_B\sigma_B + w_S\sigma_S$$

La desviación típica de la cartera es una media ponderada de las desviaciones típicas de los títulos de la cartera sólo en el caso especial de una interrelación positiva perfecta. En esta circunstancia, no hay ganancias procedentes de la diversificación. Cualesquiera que sean las proporciones de acciones y obligaciones, tanto la media de la cartera como la desviación típica son simples medias ponderadas. En este caso ninguna cartera se puede descartar por ineficiente y la elección de las carteras depende solamente de la preferencia al riesgo. La diversificación en el caso de la interrelación positiva perfecta no es efectiva.

La interrelación positiva perfecta es el único caso en el cual no hay ventajas por la diversificación. Siempre que $\rho < 1$, la desviación típica de la cartera estándar es menor que la media ponderada de las desviaciones típicas de los títulos de la cartera. Por tanto, hay ventajas para la diversificación cuando la rentabilidad de los activos está interrelacionada de manera menos perfecta.

El análisis realizado hasta ahora ha estudiado tanto las ventajas de la diversificación muy atractiva ($\rho_{BS} < 0$) como la falta de ventajas ($\rho_{BS} = 1{,}0$). Para ρ_{BS} en esa gama, las ventajas estarán en algún lugar intermedio. Tenido esto en cuanta podemos decir que teniendo un punto medio, es decir, $\rho_{BS} = 0.5$ es mucho mejor para la diversificación que una interrelación positiva perfecta y bastante peor que una interrelación de cero.

El coeficiente de interrelación realista entre las acciones y las obligaciones basadas en experiencia histórica está actualmente en torno al 0.20. La rentabilidad esperada y las desviaciones típicas que hemos asumido hasta ahora también reflejan la experiencia histórica.

También es posible la interrelación negativa de un par de activos. Cuando la interrelación negativa está presente, hay mayores beneficios por la diversificación. Comencemos de nuevo con un extremo. Con una interrelación negativa perfecta sustituimos $\rho_{BS} = -1{,}0$ nuevamente en la ecuación de la norma 3 de carteras de dos activos arriesgados y simplificamos de la misma forma que con la interrelación perfecta positiva. Aquí también podemos completar la elevación al cuadrado, pero esta vez con diferentes resultados:

$$\sigma_p^2 = (w_B\sigma_B - w_S\sigma_S)^2$$

[5] Capitulo II, Tema: Diversificación de Múltiples Activos Riesgosos

Y, por tanto,

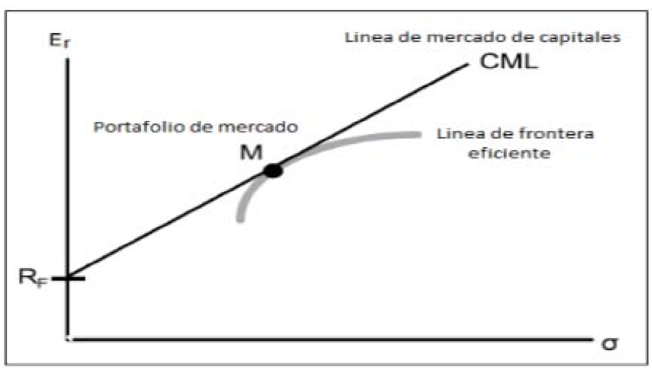
$$\sigma_p = |w_B\sigma_B - w_S\sigma_S|$$

La ecuación resultante anterior llama al valor absoluto de $w_B\sigma_B - w_S\sigma_S$, ya que la solución implica el valor porque las desviación típica nunca es negativa.

Con una interrelación negativa perfecta las ventajas de diversificación se estiran al máximo. La ecuación anterior señala las proporciones que reducirán la desviación típica de la cartera hasta llegar a cero.

3.2 La Cartera Óptima

Del teorema de la separación de Tobin, se desprende que el portafolio óptimo, en la línea de frontera eficiente, será igual para todos los inversionistas que componen el mercado. Este portafolio óptimo se encuentra ubicado en el punto de tangencia que se genera, entre la línea que une el punto de rentabilidad-riesgo asociado con el activo libre de riesgo y la frontera eficiente de Markowitz, a este portafolio se le denomina portafolio de mercado, y a esta línea, que se prolonga aún más después del punto de tangencia, se le conoce como Capital Market Line o Línea de Mercado de Capitales (CML).[6]



La CML es la relación lineal entre el rendimiento esperado y el riesgo total para las diversas composiciones del portafolio de mercado y varias proporciones de préstamo o endeudamiento libres de riesgo.

Este activo libre de riesgo, generalmente, es un valor indicado por el gobierno de cada país, con un vencimiento que coincide con el horizonte de tiempo de análisis del estudio, con una rentabilidad

[6] Katherine Betancourt Bejarano, Carlos Mario García Díaz, Viviana Lozano Riaño, Teoría de Markowitz con Metodología EWMA para la Toma de Decisión Sobre cómo Invertir su Dinero; Publicado en Atalntic Review of Economics -1st Volume -2013; Universidad Piloto de Colombia, Colombia.

segura y sin ninguna inquietud acerca de su valor terminal, por consiguiente, su desviación estándar es cero, lo mismo que sus covarianzas con otros activos riesgosos.

Es así como la nueva frontera eficiente es esta Línea de Mercado de Capitales (CML), en la cual los inversionistas encontrarán los mejores portafolios, y de este conjunto, escogerán su portafolio óptimo, de acuerdo a la rentabilidad esperada y al nivel de riesgo que se esté dispuesto a asumir. Todo esto es posible, ya que, al incorporar el activo libre de riesgo en la construcción de la nueva frontera eficiente, el inversionista podrá obtener un portafolio de menor riesgo y menor rentabilidad en comparación con el portafolio de mercado, si combina el activo libre de riesgo con activos riesgosos (parte inferior de la CML, antes del punto de tangencia). Así mismo, el endeudamiento libre de riesgo deja al inversionista superar la rentabilidad del portafolio de mercado, al invertir todo su dinero más el prestado en el portafolio de activos riesgosos (parte superior de la CML, después del punto de tangencia).

Construcción de portafolios óptimos

Para llevar a cabo la construcción de los portafolios eficientes, se sugieren los siguientes pasos:

- Recopilar la información diaria de los precios históricos de los activos que se van a analizar. Como mínimo un horizonte de estudio de dos años.
- Completar los datos de los días festivos con el último precio de cotización inmediatamente anterior al festivo, asumiendo éste como un día hábil.
- Se calcula la rentabilidad de forma diaria (R_t), por cada activo *k*, con base en los precios; donde *t* representa el día específico de cotización del activo, p_t representa el precio del activo en el día *t* y p_{t-1} representa el precio del activo del día hábil inmediatamente anterior al día *t*:

$$R_t = In\left[\frac{p_t}{p_{t-1}}\right]$$

- Se realiza el cálculo de la rentabilidad promedio de cada activo *k*, donde *n* representa la cantidad de datos que conforman cada una de las series de rentabilidad de cada activo *k*:

$$\bar{R}_k = \sum_{t=1}^{n} \frac{R_t}{n}$$

Hasta este momento, se tendría una matriz de información de rendimientos promedio $\bar{R}_{k_{1\times m}}$donde *m* representa el número de activos riesgosos que se han elegido para hacer parte del conjunto de posibilidades de inversión dentro de la estructuración de los diferentes portafolios:

$$\left(\bar{R}_{1,1}\ \bar{R}_{1,2} \ldots\ \bar{R}_{1,m}\right)$$

- Se construye una matriz de información $W_{m\times q}$ de pesos iníciales, donde m sigue siendo el número de activos riesgosos y q representa el número de portafolios que se pretenden construir; y dado que los pesos con que se inicializa el modelo influyen en la obtención de un mínimo y en la rapidez con la que se converge hacia éste, entonces se aconseja que la inicialización de pesos se haga con valores positivos cercanos a cero y menores que uno, ya que los pesos que se buscan tienen esta característica:

$$W = \begin{pmatrix} W_{1,1} & W_{1,2} & \dots & W_{1,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{m,1} & W_{m,2} & \dots & W_{m,q} \end{pmatrix}$$

- Las matrices $\bar{R}_{k_{1\times m}}$ y $W_{m\times q}$ se multiplican para determinar el vector de elementos de (rendimiento esperado por cada portafolio). Como en este caso hay q portafolios, luego hay q rendimientos esperados:

$$\left(E\left(R_p\right)_{1,1}\ E\left(R_p\right)_{1,2} \dots E\left(R_p\right)_{1,q}\right)$$

- Se calcula la matriz de varianzas y covarianzas (VARCOVAR), por metodología EWMA (modelo de suavizamiento exponencial). Para hacer énfasis sobre el hecho de que la metodología de cálculo de varianzas y covarianzas es por EWMA, y no por el método tradicional, se ha decidido poner el superíndice E sobre cada uno de los elementos de la matriz VARCOVAR, la cual es una matriz simétrica $m \times m$; por otro lado, es importante aclarar que la construcción de esta matriz se explica en apartados posteriores, con mayor detalle:

$$\begin{pmatrix} {\sigma_1^2}^E & {\sigma_{1,2}}^E & \dots & {\sigma_{1,m}}^E \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ {\sigma_{m,1}}^E & {\sigma_{m,2}}^E & \dots & {\sigma_m^2}^E \end{pmatrix}$$

- Se calcula el riesgo asociado a cada portafolio (σ_p), por separado, con base en la matriz VARCOVAR, esto equivale a multiplicar las matrices $\omega'_{p_{1\times m}}$, $\sigma^E_{ij_{m\times m}}$ y $\omega_{p_{m\times 1}}$ donde ω_p es el vector columna conformado por el conjunto de pesos referidos al portafolio p, y ω'_p es el vector transpuesto respectivo:

$$\approx \sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} W_i W_j \sigma_{ij}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Desarrollado este proceso base, se prosigue a la construcción de diferentes portafolios eficientes, a partir de la solución de un problema de optimización, con las siguientes restricciones comunes a todos: (1) No se permiten operaciones apalancadas, por lo tanto, la suma de los pesos debe ser igual a 1; y (2) Las ventas en corto no son permitidas, por lo tanto, los pesos deben ser mayores o iguales a cero; así:

$$\min_{W_i} \sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} W_i W_j \sigma_{ij}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$sujeto\ a{:}\,(1)\ \sum_{i=1}^{m} W_i = 1$$

$$(2) W_i \geq 0\ \forall i = 1,2,\dots,m$$

Luego, adicionando determinadas restricciones al anterior problema de optimización, se logra la construcción de diversos portafolios tales como:

Portafolios eficientes con expectativas de rendimiento

Para este caso, igualmente, se busca minimizar el riesgo del portafolio σ_p, sujeto a la siguiente restricción adicional, además de las dos restricciones anteriormente expuestas:

$$E(R_p) = K$$

Con *K* es la expectativa de rendimiento esperado, asociada con un tipo de inversionista específico.

Portafolio con el mínimo retorno

Para este caso, se busca minimizar el retorno esperado $E(R_p)$, sujeto a las dos restricciones inicialmente expuestas.

Portafolio con el máximo de retorno

Para este caso, se maximiza el retorno esperado $E(R_p)$, sujeto a las dos restricciones inicialmente expuestas.

Portafolio tangente

Éste se construye a partir del índice o razón de Sharpe (*IS)*, el cual calcula el exceso de rentabilidad sobre la tasa de interés libre de riesgo $E(R_p) - R_f$, logrado por el portafolio, por unidad de volatilidad o riesgo propio del portafolio σ_p; este índice se obtiene por medio de la siguiente fórmula:

$$IS_p = \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma_p}$$

Donde $E(R_p)$ es igual al rendimiento esperado del portafolio, R_f es el rendimiento promedio del activo libre de riesgo y σ_p es la volatilidad del portafolio.

Para aplicar este índice se manejan los rendimientos históricos, cuando el valor del IS es positivo y grande, indica altos niveles de rendimiento y baja variabilidad, mientras que si el valor del IS es negativo y grande, indica rendimientos inferiores a la tasa libre de riesgo y baja variabilidad. Este índice estipula que tan bueno es el desempeño del portafolio si se le compara con el respectivo índice del portafolio de referencia.

El problema de optimización para conseguir el portafolio tangente, utilizando el índice o razón de Sharpe, consiste en maximizar IS, sujeto a las dos restricciones inicialmente expuestas.

De esta manera, se construyen todos los portafolios que se deseen, y se conforma la frontera eficiente. Es claro que, como se mencionó en los pasos previos, este proceso de optimización, requiere del cálculo de la matriz de varianzas y covarianzas asociada con los activos que hacen parte del portafolio, la cual se construye de la siguiente manera:

Matriz Varianza Covarianza

Para el cálculo de la matriz Varianza-Covarianza, lo cual es pieza fundamental en el cálculo del riesgo de un portafolio, se utiliza la metodología EWMA (modelo de suavizamiento exponencial). Este modelo, cuando se aplica para medir la volatilidad de un activo, emplea un promedio ponderado de los rendimientos pasados de una serie de tiempo, con el fin de pronosticar o proyectar un comportamiento futuro, por lo general, de corto plazo.

Como ya se sabe, este modelo asigna una mayor ponderación a las observaciones más recientes, es decir, que a medida que estos datos van convirtiéndose en datos más rezagados de la serie, su importancia va siendo menor, de esta forma, se esperan proyecciones y estimaciones más precisas, en momentos en que el mercado financiero presenta volatilidades.

Cálculo de la Varianza por EWMA

La varianza se halla mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{(t-1)}^2 + (1-\lambda)r_{(t-2)}^2$$

Dónde:

σ_t^2 = La varianza para el momento *t*

λ = Constante de suavizamiento entre 0 y 1

r = La rentabilidad

Con lo anterior se verifica que la "varianza es igual a lambda veces la volatilidad del día anterior, más uno menos lambda veces el cuadrado de la rentabilidad del día anterior, es decir, que si en el día la volatilidad es alta, esto lleva a que haya un incremento en la volatilidad que se estima" para el día siguiente.

En la anterior formula, se debe elegir una constante de suavizamiento *(λ)*, que debe ubicarse entre cero y uno, por lo general, en la mayoría de casos se emplea *λ= 0,9411*. También es claro que, entre más pequeño sea el valor del λ, se le está asignando mayor peso a los datos más recientes, en busca de una respuesta rápida a los cambios del activo.

Se pueden realizar diversos procesos con respecto a la selección de lambda para lograr un mejor suavizamiento; en este caso, se utilizó el estadístico de Suma de Cuadrados del Error (SCE) para llevar a cabo dicha selección, el cual se calcula estimando la varianza por la metodología EWMA, probando diferentes valores de lambda, y posteriormente, se elige la lambda que haya arrojado la menor SCE.

Para determinar el estadístico de SCE, se halla el valor del error en cada momento del tiempo y para cada activo, a partir de la siguiente fórmula:

$$\varepsilon_t = r_t^2 \sigma_t^2$$

Posteriormente, se suman todos estos errores elevados al cuadrado, lo que se conoce como SCE, por cada lambda que se prueba y activo.

Seleccionada la lambda de menor SCE, se conoce la varianza estimada por la metodología EWMA; para el caso de la covarianza, donde el activo en cuestión se asocia con cada uno de los demás activos que hacen parte del portafolio, se tomó la decisión de trabajar con el lambda de menor SCE, que resulta de comparar los lambdas de menor SCE de cada uno de los dos activos involucrados.

Este procedimiento, realizado sobre cada serie de rentabilidad para el cálculo de la varianza, y entre pares de series para el cálculo de la covarianza, conlleva a la matriz VARCOVAR.

Cálculo de la Covarianza por EWMA

A partir del método EWMA, la covarianza, se expresa de la siguiente forma:

$$\sigma_{ij(t)} = \lambda \sigma_{ij(t-1)} + (1-\lambda)\sigma_{i(t-1)}\sigma_{j(t-1)}$$

La cual involucra dos series, en este caso, la serie de rendimientos de dos activos, los cuales están designados como *i* y *j*.

Es importante notar que tanto para la varianza, como para la covarianza, se requieren valores iníciales de $\sigma_{(t-1)}^2$ y de $\sigma_{ij(t-1)}$, para ello, según revisión bibliográfica, se tomó como valor inicial cero.

3.3 Análisis de retorno Total

Existen diversa alternativas para el cálculo del retorno esperado de cierto activo, las cuales deben considerar una proyección del precio del instrumento para el horizonte de inversión deseado. Una proyección tradicional ha sido el considerar que el retorno promedio histórico es un buen estimador del retorno esperado, con lo cual podría decirse que:

$$E(R) = \frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T} R_{t-j}$$

Considerando el fenómeno de *reversión a la media*[7] que existe en los retornos, parece ser una buena aproximación; sin embargo, es poco realista al ser un resultado estadístico que no incorpora el hecho de que el horizonte de inversión no es T, sino, generalmente, sólo una función de T. Puede ser el caso de que el punto del retoro histórico promedio, donde no toma en consideración la trayectoria que ha seguido el proceso en los últimos periodos.

Una segunda metodología que si considera la trayectoria que han seguido los retornos, es la estimación de modelos de series de tiempo ARIMA, o modelos autorregresivos integrados de medias móviles con orden *p*, *d*, y *q*. Econométricamente se describen por:

$$\Delta^d r_{t+1} = \delta_0 + \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \Delta^d r_{t-1} + \sum_{j=0}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}\, \varepsilon_{t+1}$$

Dónde: *p* indica el número de rezagos a considerar en la parte autorregresiva del proceso; *q* indica el número de rezagos de la parte media móvil del proceso, y *d* indica el número de veces que una variables debe ser diferenciada para que se estacionaria (Δ indica diferencia). Este mecanismo, si bien es más complejo que usar la media histórica de los retornos, es más preciso, pero requiere del manejo de software econométrico especializado.

Un de las herramientas más simples en el diseño de un portafolio de inversión es el análisis de retorno total. Dado que los parámetros que se van a considerar en la elección de una cartera óptima se refiere a valores esperados de retornos y riesgos para distintos activos alternativos, el análisis de retorno total responde a la pregunta de cuál será este retorno esperado, sin considerar explícitamente la dimensión riesgo, para un horizonte de tiempo predefinido (de 1 día o 1 año, por ejemplo).

Sea p, el precio de un activo en el periodo t, mientras el flujo de rentabilidad asociada a este activo (ya sea dividendos/precio o cupones) y el monto asociado a la rentabilidad de este flujo se definen f_t y $i_t \cdot f_p$ respectivamente. Estos parámetros permiten definir cuál será el retorno total de invertir en este activo:

$$RT_{t+1} = \frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} + f_t + i_t \cdot f_p$$

De los tres componentes que explican el retorno de un activo, la variación de precio es el que posee una mayor ponderación, mientras que la menor ponderación corresponde al elemento de retorno asociado a la reinversión de los flujos, resultado que se potencia para horizontes de inversión relativamente breves.

Para cierta clase de activos, como los activos de renta fija, existe una internalización explicita de flujos en el precio de transacción de los instrumentos, puesto que éstos incorporan proporcionalmente el cupón acumulado a la fecha de transacción. Sin embargo, para activos de renta variable la situación es deferente. Es el precio de mercado el que internaliza implícitamente

[7] Reversión a la media indica que la serie de retornos presenta un proceso que se desvía "transitoriamente" de un retorno promedio de largo plazo, el cual servirá de atractor de los retornos de corto plazo, y por ende, definirá la dinámica de los precios del activo analizado.

el dividendo futuro descontado, dividendo que a su vez es esperado, lo cual le da la categoría de renta variable al instrumento en cuestión.

Apliquemos este concepto a una cartera de renta fija. Consideremos activos alternativos cuya madurez remanente va de 1 a 10 años. En este caso se debe proyectar los precios de cada categoría de instrumentos e incorporar los retornos incrementales asociados a los cupones y la reinvención de éstos. Para efectos de identificación del tramo de la curva a invertir, solamente es relevante el efecto cambio de precio; sin embargo, si lo que se desea es ir un paso más allá y considerar los retornos esperados como insumo en un análisis de optimización más completo, es necesario considerar todos los componentes del retorno total, para así permitir una comparación insesgada de retornos de distintas economías.

La proyección de los precios para los distintos activos de renta puede deducirse de la comparación de la curva de rendimiento esperada con la curva de rendimiento actual, debido a la relación existente entre cambio en rendimientos y variación de pecios, dad por la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta P_{t+1}}{P_t} = -D^* \cdot \Delta y_{t+1}$$

Es así como el cambio en los retornos (Δy) ponderados por la duración modificada (D^*), permite proyectar el efecto precio para los instrumentos disponibles en el espectro de la curva de rendimiento.

Para fines de exposición, se asumirá que la duración es, aproximadamente, tres cuartos de la madurez remanente y que el flujo (cupón) y los retornos de la reinversión de este flujo se aproximan al rendimiento actual del instrumento. Con esta simplificación, el índice de retorno total se puede expresar como:

$$RT_{t+1} \cong -D_t^* \cdot \Delta y_{t+1} + y_t$$

La decisión de acortar la duración del portafolio se potencia si se introducen penalizaciones por concepto de riesgo, pues no es difícil demostrar que aquellos activos con mayor duración tienen mayor volatilidad en sus precios:

$$\sigma\left(\frac{\Delta p}{p}\right) = D^* \cdot \sigma(\Delta y)$$

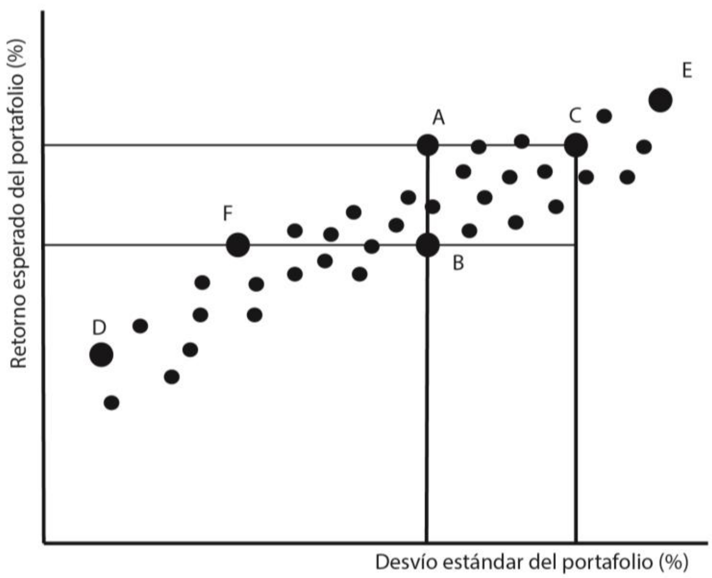
Una vez definido el vector de retornos esperados al incluir los supuestos en el movimiento de la estructura de tasas de interés, de acuerdo con la evolución prevista de los fundamentos, debemos especificar la estructura de riesgo del portafolio para generar un espacio de inversiones disponibles. Este concepto conocido como la frontera eficiente, concepto que se definirá y explicará en la siguiente sección.

3.4 Frontera Eficiente

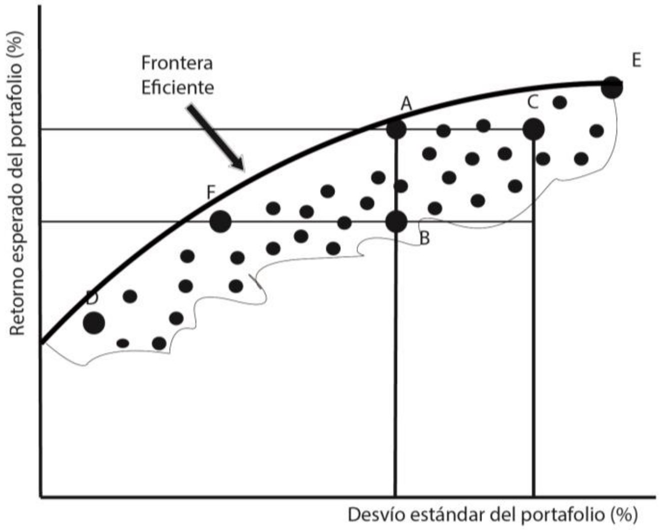
Mediante las fórmulas anteriores de cálculo de rendimiento y varianza de un portafolio podemos calcular infinidad de portafolios. Un portafolio pude consistir en un solo activo, 100 o

1000 activos. Si hubiera un universo de 1000 activos, para calcular el riesgo y retorno de todos los portafolios posibles se requeriría de 1000 retornos (N), 1000 desviaciones estándar (N) y 499.500 covarianzas $(N^2 - N)/2$ (este número sale de la matriz de varianzas y covarianzas que es de N filas por N columnas, siendo N^2 las parámetros a estimar. Los de la diagonal sin las N varianzas, quedando $N^2 - N$ covarianzas para estimar; pero como la matriz es simétrica, se puede dividir por 2), un total de 501.500 estimaciones. (La fórmula es $(N^2 - 3N)/2$, que surge de sumar $N + N + (N^2 - N)/2$).

Dicho de otra manera la frontera eficiente contiene los portafolios óptimos desde el punto de vista rendimiento/riesgo que dominan a otros activos. Si él portafolio se coloca en un gráfico donde el eje de horizontal sea el riesgo, o sea la desviación estándar del portafolio, y el eje vertical sea el rendimiento del portafolio, ello nos dará una nube de puntos, como se ve en la figura que sigue con los riesgos y retornos de los distintos portafolios.



Se puede apreciar en la figura anterior que hay portafolios que tienen un mejor perfil de riego/retorno que otros, o dicho de otra manera, hay portfolios que dominan a otros. Por ejemplo, el punto E es el que tiene más alto retorno, pero también tiene el mayor retorno, pero también tiene el mayor riesgo; por el contrario el punto D tiene el menor riesgo pero también tiene el retorno más bajo. Existen otros puntos interesante por ejemplo A tiene casi el mismo retorno que E pero mucho menos riesgo; C está a la misma altura que A pero con mucho mayor riesgo, lo que quiere decir que entre C y A se elegiría A. lo mismo pasa con B, entre B y A es preferible A por tener mayor rendimiento por el mismo riesgo; mientras que entre B y F es preferible F, por tener el mismo rendimiento pero con menor riesgo, por la tanto podemos convenir que nadie elegiría el portafolio B, pues es dominado por otros. Uniendo los puntos DFAE tenemos lo que se conoce como frontera eficiente, como se muestra a continuación.



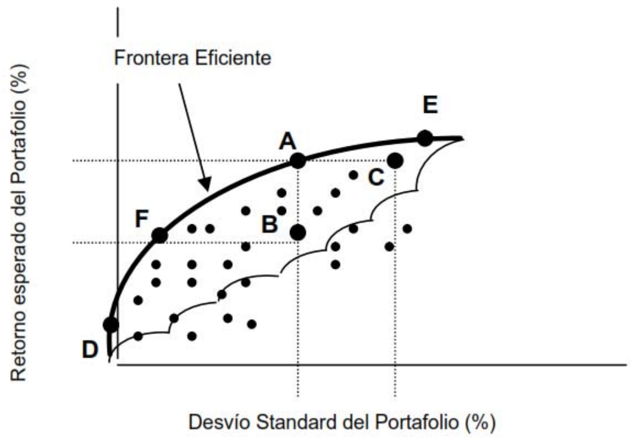
La mayor o menor concavidad de la curva dependerá de la correlación que exista entre los distintos activos. Si la correlación entre los activos es 1, la frontera eficiente será una línea recta. A medida que la correlación disminuye se torna más cóncava. Si bien los portafolios de la frontera eficiente alcanzan un máximo de diversificación se cuestiona cual es el portafolio óptimo; siendo así que este varía de acuerdo con la preferencia respecto del riesgo del inversionista.

3.5 Cálculo de la Frontera Factible y la Frontera Eficiente

Para poder determinar la frontera eficiente se necesita primero determinar los activos elegibles. En segundo lugar se necesita contar con los siguientes datos de dichos activos:

- Rendimiento esperado de cada uno de los activos.
- Riesgo o desviación estándar esperado de cada uno de los activos.
- Matriz de varianzas y covarianzas o matriz de correlaciones entre todos los activos.

La forma de cálculo de la frontera eficiente surge de resolver un problema de programación lineal que podría ser planteado de la siguiente manera: tomando como ejemplo el cálculo para el punto F de la frontera del gráfico siguiente:



Función objetivo: minimización del riesgo suponiendo un rendimiento dado F

Variables aleatorias: Determinación de las proporciones de cada uno de los activos que componen el portafolio

Sujeto *a* de las siguientes restricciones:

La Suma de todas las ponderaciones debe ser igual a 1, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad (A)$$

Las restricciones son limitadas pues dependerán de las limitaciones de inversión que tenga el portafolio. Por ejemplo, otra restricción es que no se pueda estar en corto en ningún activo, otra podría ser que no se pueda invertir más de *X%* en un determinado activo; y así sucesivamente.

El riesgo viene dado por la suma de todos los productos obtenidos de multiplicar cada varianza o covarianza $(\sigma_i^2 \ o \ \sigma_{ij})$ de pares de valores pertenecientes al portafolio, por el producto de las proporciones de dichos valores en el portafolio, es decir:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} x_1\sigma_1^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \ \text{ ó } \ \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} \qquad (B)$$

$$\sigma_p = \bar{V}\sigma^2 p \ \rightarrow RIESGO$$

El rendimiento esperado del portafolio se calcula de la suma de los productos entre el riesgo esperado de cada valor por su proporción en el portafolio, esto es:

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i \qquad (Rendimiento\ Esperado\ del\ portafolio) \quad (C)$$

Dónde:

$\boldsymbol{\sigma_p^2}$ Es la Varianza del portafolio *p*, es decir, el nivel de riesgo.

$\boldsymbol{X_i}$ Es la proporción a invertir en el activo *i*.

$\boldsymbol{\sigma_i^2}$ Es la Varianza del activo *i*.

$\boldsymbol{E_p}$ Es el rendimiento esperado del portafolio.

$\boldsymbol{E_i}$ Es el rendimiento esperado del activo *i*, obtenido como el promedio de los rendimientos del activo en un periodo de tiempo.

La varianza del portafolio también se puede obtener mediante su forma de cálculo matricial, como a continuación se muestra:

$$\sigma_p^2 = [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n]\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1k} \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nk} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

$$= [X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n]\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1k} \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Varianza del Portafolio (Calculada matricialmente) (D)

La matriz cuadrada *k×n* es la Matriz de covarianza de los instrumentos, que en su diagonal contienen a la varianza de cada instrumento dentro del portafolio.

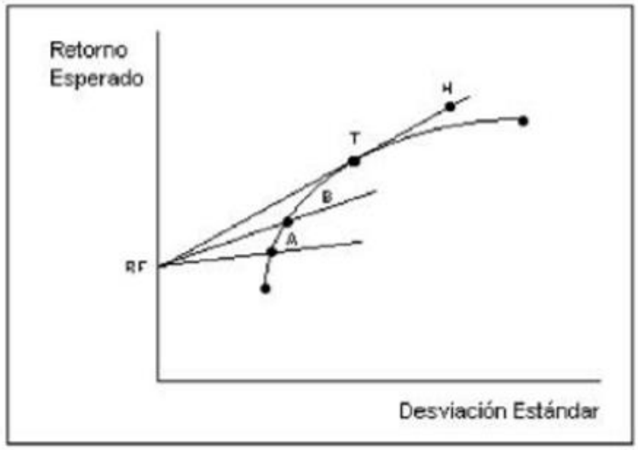
Una característica muy importante de la frontera eficiente y que se debe cumplir siempre es la concavidad, ya que si existiera un tramo convexo siempre habría un punto intermedio el cual ofrece mejor desempeño que algún de los puntos ubicados en la línea cóncava.

3.5.1 Existencia de Activos Libres de Riesgo en la Frontera Eficiente

Cuando existe la posibilidad de comprar activos libres de riesgo como puede ser el caso de los Certificados de la Tesorería (CETES) en México, o pedir préstamos a tasa libres de riesgo, la frontera eficiente cambia de forma. Si por ejemplo, un inversionista hubiera escogido el portafolio E (en la figura anterior), y existiera un activo libre de riesgo con un retorno igual a R_f, entonces la recta $R_f - A$ indicaría todas las combinaciones posibles que podrían formarse entre el activo libre de riesgo y el portafolio de títulos riesgosos.

Sin embargo, estas combinaciones no son las óptimas. Si en lugar del portafolio E se escogiera el portafolio D, entonces las combinaciones del $R_f - B$, superarían a las de $R_f - A$ debido a que se podría obtener una mayor rentabilidad para cada nivel de riesgo.

De esta manera, es posible determinar infinidad de portafolios del conjunto eficiente que podrían entrar en combinación con el activo libre de riesgo, pero solamente existe un portafolio óptimo.



En el gráfico anterior se puede apreciar que el portafolio óptimo T es aquel que maximiza la pendiente de la recta que une el punto asociado al activo libre de riesgo y la frontera eficiente inicial.

Como se mencionó en el capítulo 2, la existencia de un solo portafolio óptimo determina la "Propiedad de Separación". Esta propiedad afirma que la combinación óptima de activos riesgosos para un inversionista puede ser determinada sin tener conocimiento alguno de las preferencias hacia el riesgo y rentabilidad del inversionista.

De esta forma el nuevo conjunto eficiente estaría dado por el rayo $R_f - T - H$. En el tramo $R_f - T$, el inversionista destina parte de sus recursos tanto al activo libre de riesgo como al portafolio de valores riesgosos y estaría en posición de poder presentar parte de sus recursos que no utilizó.

En el tramo $T - H$, el inversionista, para adquirir mayor rentabilidad se endeuda a la tasa R_f, e invierte un monto mayor a sus recursos iniciales en portafolio T.

3.6 El Modelo de Selección de Carteras de Markowitz

En las secciones anteriores se han analizado el caso de carteras formadas por dos activos financieros cualesquiera que tienen diferentes combinaciones rendimiento/riesgo. Ahora se procederá a analizar el caso general que consiste en que disponiendo de una gran cantidad de activos con distintos rendimientos esperados y riesgos, pudiendo elegir las mejores combinaciones de los mismos, es decir, las mejores carteras. Y para ello lo realizaremos a través de la denominada Teoría de Selección de Carteras (Portfolio Selection Theory) que fue desarrollada por Harry Markowitz (premio Nobel de 1990) durante la década de los años cincuenta. Su trabajo es la primera formalización matemática de la idea de la diversificación de inversiones, es decir, el riesgo puede reducirse sin cambiar el rendimiento esperado de la cartera. Para ello se parte de los siguientes supuestos básicos en su modelo:

1. El rendimiento de cualquier título o cartera es descrito por una variable aleatoria subjetiva, cuya distribución de probabilidad para el período de referencia es conocida por el inversionista. El rendimiento del título o cartera será medido a través de su esperanza matemática.
2. El riesgo de un título, o cartera, viene medido por la varianza (o desviación típica) de la variable aleatoria representativa de su rendimiento.
3. El inversionista preferirá aquellos activos financieros que tengan un mayor rendimiento para un riesgo dado, o un menor riesgo para un rendimiento conocido. A esta regla de decisión se la denomina conducta racional del inversionista.

Según esta teoría, se trata de buscar primeramente cuáles son las carteras que proporcionan el mayor rendimiento para un riesgo dado, al mismo tiempo que soportan el mínimo riesgo para un rendimiento conocido. A estas carteras se las denomina eficientes. El conjunto de carteras eficientes se puede determinar resolviendo los programas cuadráticos y paramétricos.

El modelo de Markowitz es un referente teórico en el campo de la teoría de selección de carteras. Está desarrollado sobre la base del comportamiento racional de carteras, es decir, el inversionista desea la rentabilidad y rechaza el riesgo. Por tanto, para él una cartera será eficiente si proporciona la máxima rentabilidad posible para un riesgo dado o de forma equivalente, si presenta el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad.

Markowitz define una cartera eficiente con tres condiciones:

- Debe presentar la máxima rentabilidad dentro de su clase de riesgo.
- Debe tener el riesgo mínimo de su clase de rentabilidad.
- Debe ser legítima[8].

El modelo de cálculo para obtener el conjunto eficiente, supone que se pueden obtener resultados con proporciones negativas para uno o varios títulos que constituyen la cartera. Cuando esto ocurre, para cualquier clase de rentabilidad esperada la cartera, quiere decir que se debe apalancar en una proporción igual a la negativa encontrada y con una tasa de interés igual a la de la rentabilidad del título cuyo peso dio negativo.

Supuestos básicos

El tanto de rentabilidad de una inversión resume adecuadamente los resultados de la misma, los inversionistas consideran los distintos tantos de rentabilidad en términos de probabilidad, esto es, una distribución de probabilidades de los mismos.

---

[8] Una cartera es legítima cuando no contenga títulos con proporciones negativas. Desde un punto de vista financiero quiere decir que no se admiten los apalancamientos o ventas en el corto plazo.

Las estimaciones del riesgo de los inversionistas son proporcionales a la rentabilidad prevista. Los inversionistas tienden a basar sus decisiones en sólo dos parámetros de la distribución de probabilidad de la rentabilidad: la rentabilidad esperada y la varianza o desviación estándar de los rendimientos.

Para cualquier clase de riesgo, los inversionistas prefieren un tanto de rentabilidad más alto a uno bajo, y entre todos los títulos con rentabilidades iguales, así prefieren los riesgos más bajos.

Todo inversionista que se ajuste a los anteriores supuestos preferirá las carteras eficientes de Markowitz.

3.6.1 Construcción del Modelo de Markowitz

El modelo no aconseja en cuantos ni en cuales activos invertir. En cambio resuelve, una vez elegido el número y los activos que conforman el portafolio, que cantidades invertir en cada uno que ellos de acuerdo al axioma de la media y la varianza.

El problema básico se reduce por tanto a:

Maximizar $EU\ (r_P, \sigma_P)$ funciones de utilidad, sujeto a: $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

Al seleccionar acciones (o activos) que minimizan el riesgo para cada nivel de rentabilidad o maximizar la rentabilidad para cada nivel de riesgo de acuerdo con las preferencias de los inversionistas (conservadores o inversionistas agresivos) la frontera eficiente de Markowitz se obtiene resolviendo el problema:

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Sujeto a:

$$1)\bar{r}_p = \sum_{j=1}^{n} w_i \bar{r}_i \qquad , \qquad 2)\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \dots . \qquad y \qquad 3) w_i \geq 0$$

Este problema introduce una variable exógena $\bar{r}_p$ (el rendimiento del portafolio) la cual hace que la solución sea un conjunto de portafolios eficientes en lugar de una solución única.

Como se puede observar el modelo de Markowitz no busca minimizar el riesgo ni tampoco maximizar la utilidad del portafolio. En el primer caso la solución sería no invertir en acciones y en el segundo seria invertir en el activo con mayor rendimiento sin importar el riesgo. En cambio, busca encontrar dentro del conjunto factible una combinación óptima de riesgo y rentabilidad, de acuerdo a la preferencia de los inversionistas. Antes es necesario reducir este conjunto al de portafolios eficientes. Cuando entran en juego las preferencias del inversionista, la solución debe ser única, se elige una combinación de riesgo y rendimiento entre el conjunto eficiente.

La solución al anterior problema puede arrojar portafolios ineficientes en el sentido de que no siempre el portafolio de varianza mínima (riesgo mínimo) es siempre el portafolio con máximo rendimiento para dicho nivel, es más puede mostrarse que la solución al problema anterior cae en un punto de inflexión.

La clave está en darle valores a $\bar{r}_{pk}$ (portafolio k-esimo del mercado) por encima del portafolio de mínimo riesgo. Este portafolio de riesgo son restricciones a vender en corto se determina según la literatura del portafolio restando la restricción $\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{r}_i$ al problema anterior.

Una vez que el problema es resuelto con alguna técnica de programación matemática, se logra obtener la proporción de cada activo dentro de la cartera de inversiones y que satisfacen las restricciones planteadas en el modelo, sin considerar las condiciones de no negatividad para las ponderaciones de los activos. Para este estudio se resuelve el problema por medio de la técnica de Multiplicadores de Lagrange.

El modelo de Markowitz necesita entradas o inputs, los retornos esperados de los activos que integrarán la cartera y la matriz de varianza-covarianza entre los retornos de los activos

El rendimiento o retorno promedio, es la estimación del retorno esperado y que se expresa como:

$$\bar{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} R_{i,t}$$

Donde:

$R_{i,t}$: es el retorno del activo i al tiempo t.

T : es el periodo o ventana de tiempo sobre la cual se está considerando el rendimiento o el retorno promedio.

La matriz de varianza covarianza representa toda la variabilidad y, por ende, el riesgo de los activos financieros. Su estimación precisa es fundamental en la determinación de la cartera eficiente en el modelo de media-varianza, ya que contiene la información acerca de la volatilidad de los activos financieros, así como de los co-movimientos entre los mismos.

Una de las críticas al modelo es que no considera la volatilidad de una serie financiera suponiendo que la varianza es constante en el tiempo (homocedasticidad), por el contrario es muy frecuente la heterocedasticidad, es decir, la varianza tiene cambios sistemáticos en el tiempo

3.6.3 Modificaciones a la Frontera Eficiente Combinando Activos Riesgosos con Activos Libres de Riesgo

Por lo visto hasta ahora en la determinación de la frontera eficiente, los portafolios solo se han mostrado como combinaciones de activos riesgosos; por lo que a continuación se verá cómo se modifica la frontera eficiente al combinar activos riesgosos y activos libres de riesgo.

Si un activo libre de riesgo se combinara con un o riesgoso, el retorno y riesgo del portafolio resultante sería simplemente el riesgo y el retorno de cada uno ponderado por su participación. Esto es así pues la varianza del activo libre de riesgo $\sigma_f^2 = 0$ y la covarianza con el activo riesgoso es 0, $\sigma_{rf} = 0$.

Supóngase que $R_f = 5\%$ y el activo riesgoso $\bar{R}_m = 10\%$ y $\sigma_m = 10\%$y él cuadro que se muestra a continuación:

Combinaciones de activo libre de riesgo y un activo riesgoso

Combinación (%)		Retorno Esperado (%)	Desviación estándar (%)
Activo libre de riesgo	Activo riesgoso		
100	0	15,00	0,00
75	25	16,25	5,00
50	50	17,50	10,00
25	75	18,75	15,00
0	100	20,00	20,00

Se puede ver claramente cómo el retorno y el riesgo de los distintos portafolios son los promedios ponderados de los retornos y riesgos de los activos individuales.

Analizando detenidamente podemos observar que se han elegido tres posibles portafolios riesgosos que están sobre la frontera eficiente: A, B y M. Éstos son combinados con un activo libre de riesgo (el portafolio R). Las líneas que los conectan, representan las combinaciones posibles entre portafolios riesgosos y activo libre de riesgo. Recordemos que se pueden trazar como líneas rectas, ya que la varianza y retorno se esta combinación es simplemente un promedio ponderado. Estos portafolios dominan a todos los portafolios riesgosos debajo del A, ya que por cada portafolio hay uno en la línea R-A que tiene el mismo riesgo y más retorno o el mismo retorno y menor riesgo.

A su vez, la línea que conecta R y B domina a R-A, así podemos seguir trazando líneas que dominan a otras hasta llegar a la que es tangente a la frontera eficiente, en este caso el punto M, que es la línea que domina a todos los portafolios (téngase presente que la combinación R-D no es eficiente, pues ya pasa por debajo de R-M). en lenguaje común invertir en un activo libre de riesgo lo podemos asimilar a “prestar”, y como hasta ahora no se puede estar corto en un activo riesgoso, la nueva frontera eficiente vendrá dada por la línea recta R-M y luego por la curva *R-M*.

3.7 Modificaciones de la Frontera Eficiente Introduciendo la Posibilidad de “Irse Corto” en el Activo Riesgoso y la Capital Market Line (CML)

El proceso por el que uno vende un activo que no tiene se llama “irse corto” o “*Short Selling*”. Para ello se alquila el activo por un tiempo determinado y se lo vende en el mercado, para hacerse del efectivo con la intención de recomprarlo más barato en el futuro. Por el alquiler se paga una tasa de interés; en definitiva, es tomar prestado dinero (*Borrowing*).

Si suponemos que se puede presentar y tomar prestado a la misma tasa, uno puede tomar activos libres de riesgo, venderlos y con el efectivo invertir en activos riesgosos. Así se podría extender la tabla anterior y, por ejemplo, podría tomarse prestado un 25% (o sea invertir -25% en activos libre de riesgo) e invertir en activos riesgosos (la inversión en activos riesgosos sería de 125% de dinero que posee). De esta manera lo que está haciendo es extendiendo la línea recta de la frontera eficiente. Lo que generara una nueva frontera eficiente, caracterizada por una línea recta; se denomina *Capital Market Line* (CML). La misma muestra la relación retorno-riesgo para portafolios eficientes cuando prestar y tomar prestado (*short Selling*) es posible a la misma tasa (libre de riesgo).

Todos los otros portafolios que no utilicen el portafolio M y lo combinen con un portafolio libre de riesgo (presentando y tomando prestado) estarán por debajo de le la *Capital Market Line*. Luego que para el CAPM, el M es el portafolio o el índice accionario.

La ecuación de la Capital Market Line se puede ver de la siguiente manera:

Retorno del portafolio $\bar{R}_c$:

$$\bar{R}_c = (1 - X)R_f + X\bar{R}_M$$

Donde X es la inversión en el activo riesgoso y puede ser > 1. Porque se asume que el inversionista puede tomar prestado a la tasa libre de riesgo e invertir más que sus fondos originales en el activo M.

Riesgo o desvió:

$$\sigma_c = \left[(1 - X)^2\sigma_f^2 + X^2\sigma_M^2 + 2X(1 - X)\sigma_M\sigma_f\rho_{Mf}\right]^{1/2}$$

Como $\sigma_f = 0 \rightarrow \sigma_c = (X^2\sigma_M^2)^{1/2} = y$ resolviendo para X, se tiene: $X = \sigma_c/\sigma_M$.

Sustituyendo en la ecuación de rendimiento se tiene:

$$\bar{R}_c = \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_M}\right)R_f + \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_M}\right)\bar{R}_M$$

Reagrupando tenemos la siguiente fórmula:

$$\bar{R}_c = R_f + \left[\frac{R_M - R_f}{\sigma_M}\right]\sigma_c$$

La cual es una línea recta con dos componentes muy importantes: el primero R_f es la intersección vertical dada por la tasa libre de riesgos, que en general se le conoce como la "*recompensa por esperar*", dado que es libre de riesgo, no hay peligro de no cobrar y lo único que hay que hacer es esperar el cobro. El segundo componente $\left[\left((R_M - R_f)/\sigma_M\right)\right]\sigma_c$ es la dependiente y se le conoce como la "recompensa por unidad de riesgo asumido" en donde $\left((R_M - R_f)/\sigma_M\right)$ es lo que se conoce como "precio del riesgo" y a σ_c se le conoce como la cantidad de riego que se toma. O sea que la CML se puede pensar como "precio del riesgo" por "cantidad de riesgo" a tomar. El "precio del riesgo" es lo que el mercado demanda en su conjunto por intervenir en activos riesgosos. Del CML se introduce un teorema muy importante para las finanzas. Todos los inversionistas querrán invertir en portafolios sobre la frontera eficiente, en qué parte de la línea se sitúen dependerá de su actitud ante el riesgo. Cada inversionista tendrá el mismo portafolio riesgoso pero tendrá diferente cantidad prestada (o sea en la parte izquierda de la CML) o tomara (parte derecha de la CML) según su grado de aversión al riesgo.

3.8 Ampliación del Modelo de Markowitz: el Modelo Diagonal de Sharpe

William Sharpe propone el que se ha denominado modelo diagonal, de índice simple o de mercado. Este supone que las relaciones entre las rentabilidades de los diferentes títulos se deben únicamente a la relación que todos tienen con un índice de mercado. El Modelo de Mercado surgió como caso particular del Modelo Diagonal, que fue resultado de un proceso de simplificación que Sharpe realizó del modelo de su maestro Markowitz.

El Modelo de Markowitz implicaba un dificultoso cálculo ente la necesidad de conocer de forma adecuada todas las covarianzas existentes entre cada pareja de títulos. Para evitar esta complejidad, Sharpe propone relacionar la evolución de la rentabilidad de cada activo financiero con un determinado índice, normalmente macroeconómico, únicamente. Este fue el denominado modelo diagonal, debido a que la matriz de varianzas y covarianzas sólo presenta valores distintos de cero en la diagonal principal, es decir, en los lugares correspondientes a las varianzas de las rentabilidades de cada título. Como se ha indicado, el modelo de mercado es un caso particular del diagonal. Dicha particularidad se refiere al índice de referencia que se toma, siendo tal el representativo de la rentabilidad periódica que ofrece el mercado de valores.

La intención es mostrar la tendencia de cómo, en promedio va a variar el retorno del activo respecto del retorno del mercado. Esto se realiza mediante el análisis de regresión, mediante la siguiente ecuación:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \epsilon_i$$

Dónde:

R_i Es el rendimiento del activo por un periodo.

R_m Es el rendimiento del índice del mercado por un periodo.

β_i Es el *Beta*, pendiente de la curva, sensibilidad del activo respecto al índice.

α_i Es el Alfa, la intercepción del activo, la parte no relacionada con el índice.

ϵ_i Es el rendimiento no explicado por los factores no identificados por el modelo, en general es igual a cero[9].

[9] Es la perturbación aleatoria del modelo econométrico-financiero planteado por Sharpe. Su sentido se refiere a la parte de rentabilidad restante que no se explica por el modelo debidamente, por tanto, a otros factores no contemplados por el modelo y por lo tanto casi no considerado.

Tal y como está enunciado el modelo, cuanto mayor sea el valor de este parámetro dependiente más bruscas serán las variaciones soportadas por la rentabilidad del activo analizado y, por tanto, mayor riesgo asociado tendrá el título en cuestión.

También el retorno esperado para el periodo siguiente se puede apreciar mediante la ecuación de excesos de retornos sobre el bono del tesoro americano (Spread Over Treasueries). O sea que la ecuación se puede escribir también así:

$$R_i - R_f = \alpha_i + \beta_i\left(R_m - R_f\right) + \epsilon_i$$

La ecuación anterior se denomina línea característica de un activo (characteristic line for a segurity). O sea que el retorno del activo tendría tres componentes:

α_i Es el alfa, o sea la parte no sistemática que no depende del mercado.

$\beta_i\left(R_m - R_f\right)$ Es el segundo componente que es el retorno en exceso del retorno de mercado multiplicado por la Beta y,

ϵ_i Es el tercero; es el término de error azaroso (random error term). Tiene un retorno medio de cero y una varianza denotada por $\sigma_{\epsilon i}^2$.

Cuando el "modelo de mercado" es usado para representar el movimiento conjunto de los activos individuales respecto del índice, los retornos medidos y varianzas de los activos particulares, así como las covarianzas entre los mismos, se calculan como sigue.

Retorno medio:

$$\bar{R}_i = \alpha_i + \beta_i\bar{R}_m$$

En este caso el retorno medio de $\epsilon_i = 0$ por definición.

Varianza de los retornos medios:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_i^2 + \sigma_{\epsilon i}^2$$

Covarianza de los retornos entre los activos *i* y *j*:

$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_j\sigma_m^2$$

Cabe destacar dos cosas:

a) La varianza de un activo tiene dos componentes: un riesgo único ($\sigma_{\epsilon i}^2$) y un riesgo sistemático o relacionado con el valor de mercado $\beta_i^2\sigma_i^2$.
b) La covarianza depende sólo del riesgo del mercado y esto es a lo que se hacía referencia al principio del modelo del mercado. Para estos modelos (modelos de un solo índice) la única razón por la cual los activos se mueven juntos es la respuesta común a los movimientos de índice de mercado.

En particular, Sharpe distingue cuatro tipos de activos en función de valor de β_i que tienen:

- Son títulos normales aquellos cuyo parámetro toma el valor unidad o uno cercano a la misma. $\beta_i = 1$
- Son títulos agresivos los que tienen un valor asociado de β_i superior a la unidad. $\beta_i > 1$
- Son títulos defensivos aquellos activos cuyo β_i es positivo pero inferior a uno. $0 < \beta_i < 1$
- Son títulos contrarios a la evolución del mercado aquellos que tienen $\beta_i < 0$ es decir, para todos aquellos $\beta_i$negativos. Este extremo es importante, por un lado, ya que obliga a considerar que el riesgo asociado a un título será mayor cuanto mayor sea el valor absoluto del parámetro β_i, ya que en el rango negativo de valores posibles cuanto más negativo sea dicho valor mayor es la variación soportada por la rentabilidad del título y, por tanto, mayor el riesgo asociado. Por otro lado, sin embargo, la evidencia empírica indica que es francamente complicado encontrar activos financieros que se comporten de forma contraria al mercado y mucho menos de forma sistemática, es decir, en el largo plazo.

Calculo de la frontera eficiente usando el “modelo de mercado”

A partir de ahora ya se cuentan con todos los elementos para poder realizar el cálculo de la frontera eficiente de una manera más simple que usando la técnica de Markowitz. Recordemos que para calcularla necesitamos el retorno y riesgo de cada activo así como sus covarianza. Por medio de esta técnica, se reduce al número de cálculos para resolver cada uno de estos elementos.

El retorno de cada uno de los activos se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$R_i = \alpha_i + \left[R_f + \left(R_m - r_f\right)\beta_i\right]$$

Y como ya vimos anteriormente, la varianza de cada activo se calcula así:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon i}^2$$

Y la covarianza entre los distintos activos se calcula:

$$\sigma_{ij} = \beta_i\beta_j\sigma_m^2$$

Ose que usando este modelo los datos necesarios se vuelven: tasa libre de riesgo 1 dato, retorno esperado del índice 1 dato, varianza de índice 1 dato; alfa de cada activo *N* datos; beta de cada activo *N* datos y varianza de término de cada error de cada activo N datos. Por lo tanto para un portafolio de 1,000 activos, se requieren 3,003 estimaciones, contra las 501,500 estimaciones que requería la técnica de Markowitz.

3.9 Diversificación: riesgo sistemático y no sistemático

Se ha visto que la varianza o desviación estándar tiene dos componentes

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon i}^2$$

El primer componente $\left(\beta_i^2\sigma_m^2\right)$, es lo que se denomina riesgo de mercado o sistemático del activo. El segundo componente $\left(\sigma_{\epsilon i}^2\right)$ no está relacionado con los movimientos del mercado y se denomina riesgo único, no sistemático. Este último se calcula despejándolo de la fórmula anterior.

$$\sigma_{\epsilon i}^2 = \sigma_i^2 - \beta_i^2\sigma_m^2$$

El riesgo de mercado se puede pensar como las variantes de la economía que afectan a casi todos los activos por igual; entre ella cabe destacar los efectos de la devaluación de un amoneda, la subida de las tasas de interés en el mercado, etc. El riesgo único puede verse como el riesgo propio de cada empresa, es decir, son movimientos independientes de lo que pase con el índice.

La diversificación (como se vio anteriormente) permite reducir o casi eliminar el riesgo único, pero no el riesgo de mercado o sistemático. O sea, incluyendo diversos activos en un portafolio, las subidas y bajadas de cada uno se compensan y anulan el riesgo único. Pero no puede escapar al riesgo de mercado, como es el caso cuando las condiciones de la economía se deterioran. Esto también se puede ver así.

El retorno de un portafolio es:

$$R_p - R_f = \alpha_i + \beta_p\left(R_m - R_f\right) + \epsilon_p$$

Siendo

$$\beta_i = \sum_{i=1}^{n} X_i\beta_i$$

O sea, el beta del portafolio es el promedio ponderado de los activos individuales. Lo mismo ocurre para el término del error. La desviación

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2\sigma_m^2 + \sigma_{\epsilon p}^2$$

Siendo

$$\sigma_{\epsilon p}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2\sigma_{\epsilon i}^2$$

*asumiendo que los términos de los errores entre los activos no están correlacionados.

A su vez la proporción de X invertida la escribimos como *1/N*, la ecuación queda:

$$\sigma_{\epsilon p}^2 = \sum_{i01}^{n} (1/N)_i^2\sigma_{\epsilon i}^2$$

O ampliándola:

$$\sigma_{\epsilon p}^2 = (1/N)[(\sigma_{\epsilon 1}^2 + \sigma_{\epsilon 2}^2 + \cdots \sigma_{\epsilon N}^2)/N]$$

Lo que está entre corchetes es al media del riesgo único, pero el riesgo único del portafolio es sólo 1/N. por lo tanto, a medida que N es más grande dicho riesgo se reduce sustancialmente. Se dice que un portafolio que tiene 20 o 25 activos tiene un riesgo único ínfimo.

Retomando el primer término de la ecuación, como el beta del portafolio es el promedio ponderado delos beta, la diversificación lleva a reducir el riesgo de mercado al incluir más activos en el portafolio.

La implementación de esto es que si un inversionista espera un retorno por soportar el riesgo, es al riesgo sistemático o de mercado que tiene el activo el que es importante para evaluarlo (por ser el único que se recompensa). Si bien hay dos medidas de riesgo, desviación estándar (riesgo total) y beta (riesgo sistemático), el beta sería una medida más adecuada para medir los activos. Y en él se basa el Capital Asset Pricing Model (CAPM) para valuar activos.

3.9.1 Cálculo del Beta (y el Alfa)[10]

El cálculo del beta se realiza vía análisis de regresión, utilizando la siguiente ecuación:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \epsilon_i$$

El procedimiento es graficar una serie de puntos R_{it} versus R_{mt} luego encontrar un alinea recta que minimice la suma de las desviaciones cuadradas de la línea en forma vertical. La pendiente de la recta será el beta mientras que la intersección será la alfa. Mas formalmente la formula seria.

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}[(R_{it} - \bar{R}_{it})(R_{mt} - \bar{R}_{mt})]}{\sum_{i=1}^{n}(R_{mt} - \bar{R}_{mt})^2}$$

$$\alpha_i = R_{it} - \beta_i R_{mt}$$

Los valores estimados de alfa y beta vía análisis de regresión son estimaciones de los verdaderos valores; por lo tanto están sujetos a error, tampoco son estacionarios en el tiempo, pero son una buena aproximación.

El tamaño correcto de la muestra dependerá de la información que se quiera obtener. Cuanto más larga sea la serie, más estable resultara la misma, y viceversa. No debe olvidarse que lo que se busca es calcular el beta futuro y de la población, por lo tanto el beta que se obtiene de la muestra debe servir como base para la determinación final.

Así como el beta es una medida de riesgo que mide la relación entre el retorno del activo y el mercado, también se sabe que el riesgo de la firma está determinado por una combinación de fundamentos de la firma y las características de mercado del activo. Esto puede calcular el beta de una empresa que no cotiza en la bolsa o el beta de un sector de un holding.

---

[10] Elbaum, Marcelo A. Administración de Carteras de Inversión 2da edición, ed. Macchi Grupo Editorial S.A. 2006. Pág. 152-154

La mejor forma para calcular el beta es complementar la estimación del beta usando datos históricos (vía regresión) con datos fundamentales de la compañía.

3.10 Indicadores de Desempeño de los Portafolios

Índice de Sharpe

Este índice llamado así por el economista William Sharpe que fue quien lo desarrolló, indica cual ha sido el rendimiento promedio que ha obtenido un portafolio por unidad de riesgo incurrido, utilizando como medida de riesgo la desviación estándar de los retornos del portafolio. La expresión de Sharpe se calcula de la siguiente forma:

$$S = \frac{(r_p - r_f)}{\sigma_p}$$

Dónde:

S = es el índice de Sharpe, el cual mide el rendimiento del portafolio por unidad de riesgo.

r_p = es el rendimiento del portafolio seleccionado.

r_f = es el rendimiento del activo libre de riesgo.

σ_p = es la desviación estándar del portafolio seleccionado.

Por tanto mientras mayor sea el índice de Sharpe, mejor habrá sido la gestión del administrador del portafolio y mayor ganancia tendrá el poseedor del portafolio.

Índice de Treynor

Este índice indica el rendimiento de un portafolio por unidad de riesgo incurrida, empleando como medida de riesgo el parámetro β del modelo CAPM, denominado riesgo sistemático o no diversificable. La expresión de Treynor se expresa matemáticamente de la siguiente manera:

$$T = \frac{(r_p - r_f)}{\beta}$$

Dónde:

T = es el índice de Treynor y mide el rendimiento del portafolio por unidad de riesgo.

r_p = es el rendimiento del portafolio por unidad de riesgo.

r_f = es el rendimiento del activo libre de riesgo.

β = es el parámetro del modelo del CAPM.

Alfa de Jensen

Este índice trata de establecer si un determinado portafolio ha obtenido un rendimiento sistemáticamente superior al que le corresponde por nivel de riesgo asumido. Para esto se estima una regresión en la cual se relaciona el diferencial de rendimiento del fondo a evaluar con el rendimiento de un activo libre de riesgo y el diferencial del rendimiento de la cartera de mercado con el activo libre de riesgo. Su ecuación es la siguiente:

$$r_{pt} - r_{ft} = \alpha - \beta\left(r_{mt} - r_{ft}\right) + \varepsilon_t$$

Dónde:

r_{pt} = es el rendimiento del portafolio.

r_{ft} = es el rendimiento del activo libre de riesgo.

r_{mt} = es el rendimiento del mercado.

β = es la sensibilidad del portafolio a las fluctuaciones en el mercado de valores.

ε_t = es un término de error que se compara como ruido blanco.

α = es el índice de Jensen.

Esta α mide la existencia de un rendimiento extraordinario, superior o inferior al predicho por el modelo CAPM tradicional y la línea del mercado de capitales anteriormente explicada. El rendimiento requerido para una acción de acuerdo a este modelo es el rendimiento del activo sin riesgo más una prima por riesgo proporcional al nivel de riesgo sistemático de la acción. Es de esta manera entonces que el parámetro α permite evaluar la existencia de selectividad de un portafolio. Valores positivos del α reflejarán una selección positiva, lo cual implica una habilidad de los administradores del portafolio para encontrar e incorporar en la cartera valores subvaluados.

Modelo EGARCH-M

Este modelo establece una relación funcional entre el diferencial de rentabilidad de un activo financiero o un portafolio de inversiones (r_p), un activo libre de riesgo (r_f) y la varianza condicional del diferencial de estos rendimientos. De esta forma, modelo posibilita estimar la evolución de la prima por riesgo a través del tiempo. A través del modelo de máxima verosimilitud, se estima simultáneamente la varianza condicional de los retornos y el rendimiento del activo o portafolio. Su especificación funcional es la siguiente:

$$R_{p_t} - R_{f_t} = \theta + X_t'\varphi + \lambda\sigma_t^2 + \varepsilon_t$$

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \beta\log(\sigma_{t-1}^2) + \alpha\left|\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right| + \gamma\left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}\right)$$

El exceso de retorno $(R_{p_t} - R_{f_t})$ depende de una constante (θ), un conjunto de variables exógenas dadas por el vector X_t', la varianza o desviación estándar condicional de los rendimientos (σ_t^2), precisamente es este parámetro el de mayor importancia en el análisis del modelo y que resulta estadísticamente significativo, indicaría que la varianza condicional es una de las variables independientes para determinar la media de rendimientos en los fondos de inversión.

A su vez la varianza condicional depende de tres variables: una constante (ω), la predicción de la varianza del periodo anterior (σ_{t-1}^2) y la información pasada sobre la volatilidad del activo, que está dado por el residuo de la ecuación de la media ε_{t-1} y la cual nos servirá para medir la magnitud de shocks positivos sobre el rendimiento esperado. La ecuación tiene una especificación logarítmica con el fin de asegurar la no negatividad de la varianza condicional para cualquier valor real de las variables independientes.

CAPÍTULO IV: MARCO DE REFERENCIA: MODELOS DE EQUILIBRIO GENERAL

Introducción

En este capítulo se describirán las diferentes metodologías para la medición del riesgo. Como se ha mencionado anteriormente, en el enfoque de Markowitz, el riesgo es tomado como la desviación estándar de los precios de los activos a lo largo de un intervalo de tiempo.

Además de las metodologías para estimar el riesgo, existen otras metodologías que también se describirán en este capítulo, las cuales se enfoque principalmente en la sección de activos a fin de obtener el portafolio óptimo que tenga el máximo rendimiento con mínimo riesgo.

Se describirán únicamente los modelos que se utilizan para estimar el nivel de riesgo de un portafolio de activos financieros.

4.1 Métodos para Estimar el Riesgo

Como se mencionó antes el riesgo es la posibilidad de que el rendimiento del portafolio sea distinto al rendimiento esperado. El modelo de Markowitz es sólo un apoyo para realizar la selección de los instrumentos de inversión que componen el portafolio, sin embargo, es necesario mencionar que la teoría existen sobre portafolios de inversión es muy amplia y el modelo de Markowitz no es el único empleado[11].

A continuación se mencionan cada uno de estos métodos alternativos de evaluación del riesgo, cabe señalar que ninguno de estos modelos tiene como objetivo la selección eficiente de activos, sino más bien, la medición de riesgo.

4.1.1 Capital Assets Pricing Model (CAPM)

Este método fue desarrollado por Sharpe en 1963 y se basa en el análisis de las variaciones de los precios con respecto a los precios del mercado considerando también cifras históricas. CAPM considera el riesgo sistemático, sin tratar a ningún instrumento aisladamente buscando de esta manera la compensación de los riesgos.

Como todo modelo está basado en sus supuestos. Los cuales son:[12]

1. No existen costos de transacción.
2. Los activos son infinitamente divisibles.
3. No existen impuestos a los bienes personales, por lo tanto para el inversionista es distinto tener ganancias por dividendos o por capital.

[11] Yesika Correa Jaime, Métodos de Optimización en la Construcción de Carteras de inversión, Tesis, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México 2013.

[12] Elbaum, Marcelo A. Administración de Carteras de Inversión 2da edición, ed. Macchi Grupo Editorial S.A. 2006. Pág. 156

4. Existe competencia perfecta y ningún inversionista puede afectar el precio de un activo.
5. Los inversionistas evalúan los portafolios a los fines de tomar decisiones mirando solo el rendimiento esperado y su desviación estándar sobre un horizonte temporal de un periodo.
6. Los individuos pueden irse short (venderse) ilimitadamente.
7. Los inversionistas pueden prestar y tomar prestado ilimitadamente la tasa libre de riesgo.
8. Todos los inversionistas tienen el mismo horizonte temporal de un periodo.
9. Todos los inversionistas tienen idénticas expectativas respecto a los inputs necesarios para tomar decisiones de portafolio. Ellos son retorno, varianza y covarianza.
10. Todos los activos tienen un mercado. Todos, incluyendo el capital humano, tienen un mercado.

Según el CAPM todos los inversionistas tendrán portafolios sobre la capital market line y todos los portafolios eficientes estarán sobre la CML. Esta ecuación establece la relación entre rendimiento y desviación estándar para portafolios eficientes, pero no describe la relación para portafolios no eficientes o activos individuales. Los activos individuales siempre van a estar debajo de la CML, pues un activo riesgoso individual, cuando es tomado solo, es un portafolio eficiente. A su vez el CAPM no implica una relación particular entre retorno esperado y desviación estándar (o sea riesgo total) de un activo particular.

Dado que a los inversionistas solo les interesa el retorno y el riesgo, las únicas medidas que se deben tener en cuenta son el retorno y el beta.

Postulados del CAPM

Según el CAPM todos los activos deberán estar sobre una línea recta (la Security Market Line) cuyas coordenados son el retorno y beta. Si existe un activo que este por arriba o por debajo de ella, existirá un portafolio que tenga cero riesgo y cero inversión neta que de ganancias con respecto a este activo y esta situación seguirá hasta que se arbitre el precio del activo.

Como hemos visto, bajo los supuestos de CAPM todos los individuos tendrán portafolio de mercado y el retorno y beta de él, y se tomará éste como un punto de la security market line. Como necesitamos dos puntos para trazar una línea recta, el segundo punto será la tasa libre de riesgo, cuyo beta es igual a cero.

La ecuación de la recta quedaría de la siguiente forma:

$$\bar{R}_i = a + b\beta_i$$

Un punto sobre la línea recta es el activo libre de riesgo con $\beta = 0$

$$\bar{R}_f = a + b(0) \rightarrow \bar{R}_f = a$$

El segundo punto de la recta es el portafolio de mercado con $\beta = 1$

$$\bar{R}_M = a + b(1) \rightarrow (\bar{R}_M - a) = b$$

Sustituyendo tendremos la siguiente ecuación:

$$\bar{R}_i = R_f + \beta_i(\bar{R}_i - R_f)$$

Que es la security market line.

Para poder implementar esta fórmula el CAPM involucra tres elementos:

$\boldsymbol{R_f}$ Que es la tasa libre de riesgo denominada como tasa pura de interés. Para el caso de México se usa la tasa CETES (a 28, 91 y 180 días) emitida por el Banco de México.

$\boldsymbol{\bar{R}_M - R_f}$ Que es el precio de mercado de valores en exceso de la tasa libre de riesgo. En General se calcula como la diferencia de la tasa esperada de rendimiento y la tasa libre de riesgo.

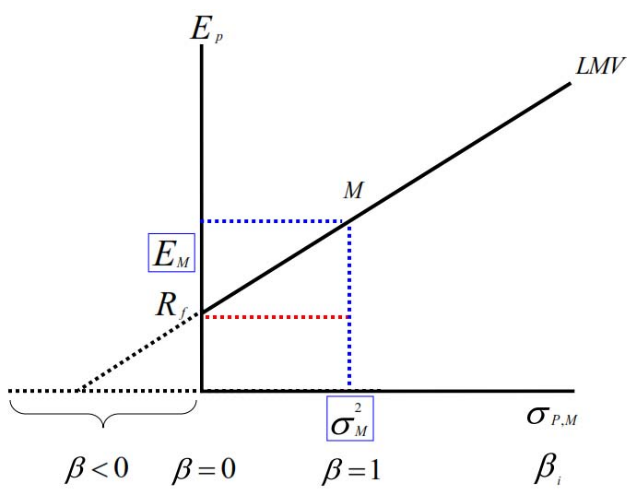
$\boldsymbol{\beta_i}$ Que es el Riesgo Sistemático, es decir, el factor de ajuste de la prima de riesgo.

Procedimiento matemático del modelo CAPM

El CAPM tiene como principal objetivo estimar la rentabilidad de cada activo en función de su riesgo, así como determinar un indicador adecuado que nos permita obtener un estimador eficiente del riesgo.

Es importante destacar que en el modelo CAPM el riesgo específico o no sistemático no se tiene en cuenta puesto que éste puede reducirse mediante la diversificación.

Por tanto, existe una relación creciente (positiva) entre el nivel de riesgo, la beta y el nivel de rendimiento esperado de los activos. Es decir, a mayor riesgo, mayor rendimiento.



La línea de valores del mercado de valores (LMV) se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$E_P = R_f + \frac{E_M - F_f}{\sigma_M^2}\sigma_{P,M}$$

En donde podemos comprobar que la rentabilidad esperada del activo E_P está en función de la tasa libre de riesgo R_f la cual representa el valor del dinero en el tiempo.

Por otra parte, se observa que existe una relación positiva entre E_P y la covarianza del activo con la cartera de mercado $\sigma_{P,M}$, lo que implica que la rentabilidad esperada de equilibrio de cualquier activo es directamente proporcional al nivel del riesgo sistemático.

Al igual que en CML, la cartera de mercado está representada por el punto de intersección M. Por tanto, los activos que se encuentren a la derecha de este punto poseen un mayor riesgo que la cartera de mercado y por tanto, mayor rentabilidad. En el caso opuesto estarán los activos que se sitúen a la izquierda.

Un concepto nuevo que introduce el Modelo CAPM es el coeficiente beta que nace cuando relacionamos el riesgo sistemático ($\sigma_{P,M}$) con el riesgo del mercado (σ_M^2). Así, tenemos que:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{P,M}}{\sigma_M^2}$$

El coeficiente beta β_i se define como la volatilidad de la rentabilidad de un activo ante movimientos de la rentabilidad del mercado. Es decir, mide el riesgo sistemático de un activo en comparación con el riesgo de mercado.

- Si $\beta_i = 0$, la rentabilidad esperada del activo i será igual al rendimiento de equilibrio de un activo libre de riesgo.
- Si $\beta_i = 1$, representa el riesgo de la cartera de mercado, ya que la covarianza con ella misma es igual a la varianza.
- Si $\beta_i > 1$, indica que la rentabilidad del activo tendrá un riesgo superior a la rentabilidad del mercado (activos agresivos).
- Si $\beta_i < 1$, indica que la rentabilidad del activo tendrá un riesgo inferior a la rentabilidad del mercado (activos defensivos).

A partir de la LMV también se pueden calcular el rendimiento esperado de las carteras. Para ello es necesario estimar la beta de la cartera a través de la medida de las betas de cada título, ponderadas por la parte del presupuesto invertido en las mismas, por tanto:

$$\beta_P = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \cdots + X_n\beta_n$$

Por lo tanto la ecuación de la MLV para cualquier cartera se estima de la siguiente forma:

$$E_P = R_f + (E_M - R_f)\beta_P$$

Esta metodología es una Herramienta que nos permite obtener el rendimiento esperado de un activo en función de su riesgo sistemático.

CAPM condicional

La lógica e intuitiva teoría que soporta al CAPM hace que hoy en día siga siendo utilizado, a pesar de que los resultados empíricos ofrecidos por muchos trabajos que lo analizan no lo apoyen (Banz (1981), Reinganum (1981), Gibbons (1982), Basu (1983), Shanken (1985), Rubio (1988)). Quizás el problema no esté en la especificación del modelo en sí mismo, sino en la falta de realismo en los supuestos que lo sustentan. Por ejemplo, el CAPM es un modelo de un único periodo y, sin embargo, en las pruebas realizadas sobre el mismo es necesario utilizar series temporales de datos, lo cual implica suponer que las betas de los activos se mantienen constantes en el tiempo. Esto es poco razonable, ya que la rentabilidad esperada y las betas dependen de la información disponible en cada momento del tiempo y, por tanto, varían con el mismo.

Desde este punto de vista, Jagannathan y Wang (1996) asumen una versión condicional del CAPM estático en la que se consideran los cambios en las variables debidos al conocimiento de nueva información para contrastar la capacidad del modelo en la explicación de las variaciones en sección cruzada de la rentabilidad media de un conjunto de carteras. Según esta versión del modelo, la rentabilidad esperada de los activos, basada en la información disponible hasta ese momento de tiempo (I_{t-1}), está linealmente relacionada con su beta, en este caso condicional.

$$E(R_{it}|I_{t-1}) = \gamma_{0_{t-1}} + \gamma_{1_{t-1}}\beta_{it-1} \qquad (1)$$

Siendo

$$\beta_{it-1} = \frac{Cov(R_{it}, R_{mt}|I_{t-1})}{Var(R_{mt}|I_{t-1})} \qquad (2)$$

Dónde se denota con $\gamma_{0_{t-1}}$ la rentabilidad esperada condicionalmente de una cartera de beta cero y $\gamma_{1_{t-1}}$ la prima de Riesgo condicional del mercado.

Tomando expectativas en ambos lados de (1), podemos escribir la rentabilidad esperada incondicional de cualquier activo como función lineal de su beta esperada y de la sensibilidad beta-prima, de forma que tenemos un modelo incondicional de dos factores, en el que se espera obtener una mayor rentabilidad de aquellos activos para los cuales se espere no sólo un mayor riesgo beta, sino también una mayor variabilidad de ese riesgo asociado a los cambios en la prima de riesgo esperada.

Por último, tan sólo falta aproximar la prima por riesgo condicional para tener caracterizadas todas las variables. En este sentido, está generalmente aceptado que los precios de los activos varían con el ciclo de negocios. Así podemos suponer que ocurre también con la prima por riesgo e intentar predecirla a partir de variables que contengan información sobre el ciclo de negocios futuro. Jagannathan y Wang (1996) utilizan como predictor del ciclo un diferencial entre tipos de interés. Nosotros hemos escogido la rentabilidad de los dividendos pagados por las empresas (DY) y el cociente entre valor contable y valor de mercado (BM), ambos considerados de forma agregada, por su mostrada capacidad en la predicción de la rentabilidad futura. Así, supondremos que la prima por riesgo es función lineal de estas variables y el modelo a contrastar será:

$$E(R_{it}) = \gamma_0 + \gamma_m\beta_i + \gamma_{mb}\beta_i^{mb} + \gamma_{dy}\beta_i^{dy} \qquad (3)$$

Si observamos los estadísticos descriptivos de los factores de este modelo (tabla 1), podemos ver que BM y DY presentan fuerte dependencia temporal con autocorrelaciones todavía de 0.5 después de 20 retardos, así como también una importante correlación entre ellas (0.94), que será tenida en cuenta a la hora de estimar el modelo.

TABLA 1. Estadísticos descriptivos. Factores CAPM Condicional.

			Autocorrelaciones					Correlaciones		
	Media	Desvia.	1	2	5	12	20	Rm	MB	DY
Rm	2.3007	7.4186	0.275	-0.024	0.021	0.074	-0.044	1	0.1047	0.0648
BM	130.97	94.254	.987	0.974	0.927	0.8113	0.560	0.1047	1	0.9397
DY	4.168	2.275	0.975	0.948	0.875	0.723	0.454	0.648	0.9397	1

Los estadísticos de esta tabla se refieren a los tres factores considerados en el modelo que se estudia: la rentabilidad de un índice equiponderado de todos los activos de la muestra (Rm), el cociente entre valor contable y valor de mercado agregado (BM) y la rentabilidad por dividendos (DY) también agregada, obtenidos con datos del mercado español de capitales en el periodo comprendido entre enero de 1982 y diciembre de 1998. La media y la desviación estándar están expresadas en tantos por cien.

4.1.2 Modelo de Tres Factores de *Fama* y *French*

Dada la débil relación encontrada entre rentabilidades de activos y su beta con el mercado (Sharpe (1964), Lintner (1965)) o su beta con el consumo (Breeden (1979)), Fama y French (1993) proponen un modelo de valoración que emplea otras variables para intentar explicar las rentabilidades en sección cruzada. En base a la evidencia anterior hallada por autores como Banz (1981), que encuentran un efecto tamaño en las rentabilidades, o Basu (1983) y Rosenberg, Reid y Lansteim (1985) que muestran la relación existente entre éstas y ratios financieros como el beneficio respecto del precio o el cociente entre el valor contable y el valor de mercado (BM), estos autores, en su trabajo de 1992, realizan regresiones de sección cruzada de las rentabilidades de carteras con distinto criterio de formación sobre tales variables, además de la beta de mercado. Sus principales resultados fueron: la beta no contiene información sobre los cambios en las rentabilidades de sección cruzada, existe efectivamente una relación negativa y significativa entre las rentabilidades y el tamaño de las carteras, y una relación positiva y significativa entre las rentabilidades y el cociente valor contable-valor de mercado de las mismas. Como conclusión, plantean la posibilidad de que las pendientes de la regresión de sección cruzada de las rentabilidades sobre el tamaño y el cociente sean rentabilidades que aproximen factores de riesgo común relacionados con estas características.

Con el trabajo de 1992 como punto de partida, Fama y French (1993) proponen un modelo que relaciona las rentabilidades esperadas de los activos con tres factores de riesgo. El primero de ellos es una cartera de coste cero que produce la rentabilidad en exceso de la cartera de mercado sobre un activo libre de riesgo, y los otros dos son carteras de los activos existentes en la economía relacionadas dos características de los mismos, que son el tamaño (*SMB*) y el cociente BM (*HML*). La relación propuesta es la siguiente:

$$E(R_{it}) - R_{ft} = \beta_i^m E\left(R_{mt} - R_{ft}\right) + \beta_i^{SMB} E(SMB_t) + \beta_i^{HML} E(SML_t)$$

Dónde R_{it} es el tipo de interés libre de riesgo.

Para la construcción de los factores, cada año se ordenan los activos de la muestra en función de su valor de mercado en diciembre del año anterior, asignándolos a dos grupos: pequeños (*S*) y grandes (*B*). Del mismo modo y de forma independiente, se clasifican los activos en tres grupos según su cociente valor contable-valor de mercado en diciembre del año anterior: alto ratio (*H*), medio (*M*) y bajo (*L*). De las intersecciones entre los grupos de tamaño y BM surgen seis carteras (*SH*, *SM*, *SL*, *BH* *BM* y *BL*), donde, por ejemplo, la artera *SH* está formada por los activos que pertenecen al grupo pequeño según tamaño y además al grupo de alto BM. *SMB* es una cartera que replica al factor tamaño y se obtiene como diferencia entre la rentabilidad media de las tres carteras de activos pequeños (*SH*, *SM* y *SL*) y la rentabilidad media de las carteras de activos grandes (*BH*, *BM* y *BL*). HML_t *Es* una cartera que replica al factor BM y se obtiene como diferencia entre la rentabilidad media de las dos carteras con alto ratio (*SH* y *BH*) menos la de las carteras con bajo ratio (*SL* y *BL*).

En la tabla 2, se presenta un resumen de los principales estadísticos descriptivos de las diez carteras utilizadas como variables dependientes así como de los factores de riesgo de este modelo. Como podemos ver en su parte superior, la rentabilidad media de las carteras disminuye conforme aumentamos el tamaño de las mismas, encontrando una diferencia de más de un 1% mensual entre las dos carteras extremas. Así ocurre también en lo que se refiere a su variabilidad, aunque las desviaciones estándares de las carteras 3 a la 9 son aproximadamente las mismas. En el bloque inferior de la tabla aparecen los estadísticos referidos a los factores de riesgo. La rentabilidad de la cartera de mercado se ha obtenido como media aritmética de las rentabilidades de todos los activos de la muestra. Presenta una media y una desviación que coinciden prácticamente con las medias de estos momentos entre las diez carteras. Los factores de tamaño y BM ofrecen rentabilidades medias mucho más pequeñas y similares (en torno al 0.5 %) y con desviaciones relativamente altas. Ninguno de los tres factores presenta relación temporal, ofreciendo autocorrelaciones prácticamente iguales a cero a partir del segundo retardo. En cuanto a las correlaciones cruzadas, como cabría esperar dada su construcción, *SMB* y *HML* apenas están correlacionados (0.07), mientras que las correlaciones entre estos factores y el mercado son 0.46 y 0.32 respectivamente.

TABLA 2. Estadísticos descriptivos. Factores Fama y French.

Cartera	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Media	3.2114	2.2247	2.0441	2.4008	2.3980	2.1631	1.8641	1.9853	1.7048	1.9068
Desvia.	11.586	9.2031	8.6187	7.8377	8.2204	7.8311	7.5755	7.7369	7.2984	6.4555
					Autocorrelaciones			Correlaciones		
	Media	Desvia.	1	2	5	12	20	Rm	SMB	HML
Rm	2.2007	7.4186	0.275	-0.024	0.021	0.074	-0.044	1	0.4622	0.3258
SML	0.5089	3.3995	0.054	0.050	0.060	0.261	0.028	0.4622	1	0.0703
HML	0.5089	3.6996	0.090	0.092	-0.021	0.028	-0.018	0.3258	0.0703	1

Los estadísticos de esta tabla se refieren a datos del mercado español de capitales en el periodo comprendido entre enero de 1982 y diciembre de 1998. En la parte superior se presentan las rentabilidades medias y las desviaciones estándares, ambas expresadas en tantos por cien, de diez carteras de tamaño construidas con todos los activos de la muestra que constituirán las variables a explicar por los modelos contrastados en este trabajo. En el bloque inferior, los estadísticos se refieren a tres factores de riesgo: la rentabilidad de un índice equiponderado de los activos de la muestra y los factores de tamaño ratio valor contable-valor de mercado de Fama y French (1993).

4.1.3 Modelo de Factores múltiples (Multiple Factor Model)

Este Modelo plantea la hipótesis de que una acción no solamente es sensible a los cambios en el mercado, sino que busca explicar las variaciones en una serie de factores más amplia, que incluyen los cambios en el mercado pero que no se limita a ello. Entre los demás factores explicativos encontramos el precio del petróleo, las tasas de interés, la inflación, etc. La metodología utiliza análisis de regresión, con lo cual el aporte principal del mismo es ampliar el número de variables que determinan el riesgo de una acción.

Ahora bien, supóngase que para todo momento en el tiempo los rendimientos de los activos con riesgo, determinando por la influencia de diversos factores con la siguiente estructura

$$R_i = \alpha_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + \cdots + b_{im}F_m + e_i \quad \forall i = 1,2,\ldots,n \qquad (1)$$

Dónde:

R_i = rendimiento del activo *i*.

α_i = rendimiento esperado del activo *i*, no correlacionado con los factores de riesgo.

b_{im} =sensibilidad del activo *i* a la realización del factor *m*.

F_m = realización del factor *m*.

e_i =rendimiento aleatorio del activo *i*, no correlacionado con los factores de riesgo.

Por definición se tiene que:

$$i)\ Var(e_i) = \sigma_{ei}^2, i = 1,2,\ldots,n;$$

$$ii)\ Var(F_m) = \sigma_{Fm}^2, m = 1,2,\ldots,m.$$

Por los supuestos del modelo se tiene también que:

$$iii) E(e_i) = 0, \forall i;$$

$$iv) E\left[e_i\big(F_m - E(F_m)\big)\right] = o, \forall i, \forall m.$$

Si los rendimientos de los activos se relacionan única y exclusivamente por los *m* factores son únicamente, y no otros, los que producen el movimiento conjunto en los precios de los activos, y de ahí en sus rendimientos, tanto el rendimiento esperado independiente, α_i, como el rendimiento aleatorio, e_i, también independiente, son ambos rendimientos únicos para cada activo y entonces el rendimiento aleatorio corresponde al riesgo también único (no sistemático) de cada activo siendo independientes entre sí, entre cada empresa, por lo que se puede plantear como hipótesis.

$$v)\ E\big(e_i, e_j\big) = 0, \forall i, \forall j, i \neq j.$$

Adicionalmente, si el modelo se restringe a que los m factores no estén correlacionados entre sí, se puede agregar también la hipótesis:

$$vi)\ E\left[\left(F_k - E(F_k)\right)\left(F_l - E(F_l)\right)\right] = 0, \forall k, \forall l, k \neq l.$$

Entonces, debido a iii), al tomar los valores esperados de ambos miembros de (1) se tiene que el rendimiento esperado del activo i es:

$$E(R_i) = a_i + b_{i1}E(F_1) + b_{i2}E(F_2) + \cdots + b_{im}E(F_m) \qquad (2)$$

Es decir, el rendimiento esperado para el inversionista es función del rendimiento autónomo[13] y los rendimientos que debe obtener dado el nivel de exposición a las fuentes causales del riesgo.

La covarianza entre los rendimientos de los activos *i* y *j*, en virtud de *iv), v)* y *vi),* resulta ser:

$$\sigma_{ij} = b_{i1}b_{j1}\sigma_{F1}^2 + b_{i1}b_{j2}\sigma_{F2}^2 + \cdots + b_{im}b_{jm}\sigma_{Fm}^2 \qquad (3)$$

Ahora bien, puesto que para un portafolio el rendimiento esperado, $E\left(R_p\right)$, está dado por:

$$E\left(R_p\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i),$$

Donde w_i es la proporción del portafolio invertida en el activo *i*; bajo la estructura lineal multifactorial se tiene que:

$$E\left(R_p\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i[a_i + b_{i1}E(F_1) + \cdots + b_{im}E(F_m)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i a_i + \sum_{i=1}^{n} w_i b_{i1}E(F_1) + \cdots + \sum_{i=1}^{n} w_i b_{im}E(F_m) \qquad (5)$$

Es decir, el rendimiento esperado del portafolio es un promedio de los rendimientos autónomos de los activos más los rendimientos promedio atribuibles a la influencia de los factores dadas las exposiciones de los activos a dichos factores. Estos promedios son ponderados y los pesos de ponderación están dados por la proporción del portafolio invertida en cada uno de los activos.

Para el caso general multifactorial, este no correlaciona los factores, la varianza del portafolio está dada por:

$$\sigma_p^2 = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} B_{Pk}B_{Pl}\sigma_{kl} + \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{ei}^2 \qquad (6)$$

Dónde:

[13] En ausencia de la influencia de los factores de riesgo, este componente puede interpretarse como la tasa libre de riesgo.

$B_{Pk} = \sum_{i=1}^{n} w_i b_{ik}$ = beta del portafolio respecto del factor *k*,

$B_{Pl} = \sum_{i=1}^{n} w_i b_{il}$ = beta del portafolio respecto del factor *l*,

$\sigma_{kl} =$ Covarianza de los factores *k* y *l*,

$\sigma_{ei}^2 =$ Varianza de los errores del activo *i* que pueden obtenerse de una regresión.

Si se supone que prevalece *v)*, tenemos como resultado que:

$$B_{pk} B_{Pl} \sigma_{kl} = 0 \; \forall k \neq l, \qquad (7)$$

Y como puede apreciarse, el número de términos contenidos en la doble suma del primer término del miembro derecho (6) se reduce considerablemente pues se eliminan los covarianzas entre los factores y permanecen sólo las varianzas de cada factor, lo que resulta sumamente ventajoso para efectos de cálculo.[14]

Una vez que se ha formalizado la estructura general de un modelo multifactorial y se han enunciado los principales resultados de los supuestos que se han postulado, se procederá a optimizar el portafolio dado la influencia de diversos factores de riesgo.

Proceso de Optimización

Suponiendo que existen n activos riesgosos, entre los cuales se puede seleccionar y que los rendimientos de estos activos obedecen a un proceso como el que se describió anteriormente, el problema de selección de portafolio cuando se desea formar el portafolio de mínimo riesgo al mismo tiempo que se controlan los niveles de exposición de los activos a los diversos factores de riesgo se puede plantear como:

$$\min_{w} \frac{1}{2} \sigma_P^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} B_{Pk} B_{Pl} \sigma_{kl} + \sum_{i=l}^{n} w_i^2 \, \sigma_{ei}^2 \right\} \qquad (8)$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{ccc} B_{P1} & = & B_{P1}^*, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{Pm} & = & B_{Pm}^*, \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

[14] Esta es una ventaja de contar con los factores no correlacionados (ortogonales). La otra es que la ortogonalidad garantiza que ningún factor es una combinación lineal de otros y que, por lo tanto, al no existir tal asociación lineal o multicolinealidad, se puede obtener estimaciones no sesgadas y consistentes de los parámetros mediante los métodos tradicionales, como el de regresión mínimo cuadrática.

Las primeras *m* restricciones corresponden a los niveles deseados de exposición del portafolio a los *m* factores de riesgo y última restricción correspondiente a la restricción presupuestal que implica distribuir totalmente el presupuesto de invertir entre los *n* activos riesgosos.

Como es bien sabido, este problema cuadrático con restricciones lineales, puede resolverse mediante el método de multiplicadores de Lagrange, por lo que la función objetivo, (8), se convierte en:

$$\min_{w,\lambda_1,\lambda_2,\gamma} L = \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} B_{Pk}B_{Pl}\sigma_{kl} + \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_{ei}^2\right\} + \lambda_1(B_{P1}^* - B_P) + \cdots + \lambda_m(B_{Pm}^* - B_{Pm}) + \gamma\left(1 - \sum_{i=1}^{n} w_i\right) \qquad (9)$$

Que para proporcionar un valor óptimo (mínimo) de la función tiene como condiciones de primer orden:

$$\frac{dL}{dw_i} = \frac{dL}{d\lambda_1} = \cdots = \frac{dL}{d\lambda_m} = \frac{dL}{d\gamma} = 0 \qquad (10)$$

Al derivar parcialmente y ordenando adecuadamente se obtiene:

$$\frac{dL}{d\gamma} = -w_1 - w_2 - \cdots - w_n + 1 = 0 \qquad (11)$$

Que permite formar un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son $w_P\ i = 1,2,\dots,n, \lambda_m, m = 1,2,\dots,M\ y\ \gamma$, que, por lo tanto, puede resolverse por cualquiera de los métodos estándar que se han diseñado para tal efecto.

4.1.4 Método APT (Arbitrage Pricing Theory)

Este modelo fue diseñado por Stephen A. Ross, el cual no sólo considera que los indicadores de precio del mercado son el único factor determinante en el riesgo, sino que también considera a otros factores tales como la producción industrial, la inflación, las tasas de interés, el precio del petróleo cambios en las reservas internacionales, entre otros. Al igual que el CAPM, el ATP es un modelo de equilibrio acerca de cómo se determinan los precios de los activos financieros. Esta teoría se basa en la idea de que en un mercado financiero competitivo el arbitraje[15] asegurará que los activos sin riesgo proporcionen el mismo rendimiento esperado.

El modelo se basa en la idea de que los precios de los activos se ajustan conforme los inversionistas construyen carteras de valores que persiguen la consecución de beneficios de arbitraje. Cuando ya no existan dichas oportunidades se alcanzará el equilibrio en los precios de los activos financieros.

[15] Recuérdese que arbitraje es una operación consistente en comprar un activo determinado en el mercado en que se encuentre más barato y simultáneamente venderlo en el más caro. Con ello se consigue un beneficio sin riesgo.

Según esta teoría la rentabilidad de cada acción depende por un lado de las influencias exógenas de una serie de factores macroeconómicos y, por otro, de una serie de perturbaciones específicas de cada compañía en particular. Así, para cada acción hay dos fuentes de riesgo. La primera es la que proviene de los efectos macroeconómicos que no pueden ser eliminados mediante la diversificación. La segunda es que el riesgo proviene de posibles sucesos que son específicos de cada empresa; éste tipo de riesgo es eliminable a través de la diversificación. De esta manera, la prima por el riesgo esperado de una acción es afectada por el riesgo macroeconómico y no por el riesgo específico.

El modelo no dice cuáles son esos factores macroeconómicos o por qué son económicamente relevantes sino que sólo señala que hay una relación entre ellos y los rendimientos de los activos financieros. En todo caso los cinco factores más comúnmente utilizados son:

a) El nivel de actividad industrial
b) La tasa de interés real a corto plazo, medida por la diferencia entre el rendimiento de las Letras del Tesoro y el Índice de Precios al Consumo (IPC).
c) La tasa de inflación a corto plazo, medida por las variaciones en el IPC
d) La tasa de inflación a largo plazo, medida por la diferencia entre el rendimiento hasta el vencimiento entre la Deuda Pública a largo y a corto plazo.
e) El riesgo de insolvencia medido por la diferencia entre el rendimiento hasta el vencimiento de los bonos empresariales a largo plazo calificados como AAA y los BBB.

Consideremos un ATP como modelo de múltiples betas, basado en el siguiente proceso generador de los rendimientos:

$$R_{it} = E(R_{it}) + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} F_{kt} + e_{it} \qquad i = 1,2,\dots,N$$

En el que F_{kt} son las innovaciones en los factores de riesgo sistemático.

La versión en equilibrio del ATP anterior implica, por tanto, que el rendimiento esperado de los activos sea función lineal y creciente de las betas asociadas a los factores de riesgo, suponiendo la existencia de un activo de riesgo.

$$E(R_{it}) = R_{ft} + \sum_{k=1}^{K} \lambda_{ik}\, \beta_{ik}$$

Siendo λ_{ik} las primeras primas de riesgo esperadas de los factores.

Combinando las dos expresiones:

$$R_{it} - R_{ft} = \sum_{k=1}^{K} \tilde{F}_{kt} \beta_{ik} + e_{it}$$

Dónde $\tilde{F}_{kt} = \lambda_{kt} + F_{kt}$ es la prima de riesgo realizada por el factor k, que, por otro lado no es observable.

La ATP tendrá una utilidad para el inversionista siempre que éste pueda:

a) Identificar un número razonable de factores macroeconómicos,
b) medir la prima de riesgo esperada en cada facto y
c) medir la sensibilidad del rendimiento del activo con relación a cada factor.

Una vez definidos los factores pasaríamos a calcular un modelo de regresión multivariable a través del que obtendríamos las *betas* de cada factor. Calculadas éstas podríamos obtener el valor del rendimiento esperado de cada acción, es decir, su costo de oportunidad del capital (al que habría que añadirle si fuesen necesarios los costos de emisión de dichas acciones).

Los supuestos de este modelo son más generales que los del CAPM (no hay supuestos sobre las preferencias del inversionista y son mínimos los referentes a las distribuciones de probabilidad) y sus conclusiones son menos específicas porque tanto el número de factores como su naturaleza no están especificados (ni siquiera se sabe qué factores serán valorados en el equilibrio). El CAPM puede ser visto como un caso particular de la APT; el CAPM dice que uno de los factores es la cartera de mercado y es el único que es valorado. Este es un resultado directo del teorema de la separación: todos los inversionistas, sin tener en cuenta sus diferencias, dividen su riqueza entre dos tipos de fondos, uno sin riesgo y el otro es la cartera de mercado. Las *betas* de la APT dependen de las mismas variables que la del CAPM: tipo de negocio y apalancamientos operativo y financiero.

El ATP tiene las siguientes ventajas con respecto al CAPM:

- No está limitado a ninguna distribución particular de los rendimientos
- No es requerido un equilibrio general, sino, solamente un equilibrio parcial entre los rendimientos de los activos.
- No es necesario un portfolio de mercado.

Este último punto se basa en la principal crítica al CAPM. Según varios autores la imposibilidad material de obtener el verdadero portafolio de mercado y, en consecuencia, tener que usar un Proxy (generalmente el S&P500), que no, necesaria y exactamente, estará en la frontera de eficiencia, puede generar falta de correlación entre los betas y los rendimientos. Sin embargo el método ATP no es suficiente para tomar decisiones en cuanto al principal problema en la selección de un portafolio de inversión, es decir, no permite tomar la decisión de la proporción idónea que debe tener los instrumentos de inversión que compondrán al portafolio.

4.1.5 Modelo Intertemporal sin Consumo

A partir de la función de utilidad establecida por Epstein y Zin (1989) y Weil (1989) en la que las preferencias de los individuos no se suponen independientes en el tiempo ni entre los distintos estados de la naturaleza, obtienen un modelo multifactorial maximizando la utilidad esperada de la riqueza sujeta a una restricción presupuestaria que se aproxima log-linealmente mediante su expansión de Taylor alrededor del ratio medio entre la riqueza no consumida y la total. A partir de ahí, y añadiendo algún supuesto adicional como es la normalidad logarítmica en las variables, consigue establecer un modelo en el que la rentabilidad esperada de los activos en exceso sobre un activo libre de riesgo es función lineal de un conjunto de factores que vienen representados en forma de covarianzas entre la rentabilidad de los activos y la del mercado, en el caso del primer factor, y entre la rentabilidad de los activos y otras variables con capacidad de predicción para la rentabilidad futura.

$$E_t(R_{it}) - R_{ft} = b_m \sigma_{im} + b_{sc} \sum_{k=1}^{K} \lambda_k \sigma_{ik,t}$$

$$con \quad \sigma_{im,t} = \sigma_{i1,t} = Cov(r_{it}, \varepsilon_{1t}) \;\; y \;\; \sigma_{ik,t} = cov(r_{it}, \varepsilon_{kt}) \, , \forall k = 1, \dots k$$

$r_{it} = In(R_{it} + 1) \; y \; \varepsilon_{kt}$ Los errores del siguiente vector autoregresivo K-dimencional:

$$Z_t = AZ_{t-1} + \varepsilon_t$$

En el que el primer componente de Z_t es la rentabilidad del mercado y el resto, como hemos dicho antes, variables que sean capaces de predecir la rentabilidad. Por último, λ_k son los precios con los que se pondera cada factor de riesgo y resultan de una combinación de los parámetros del VAR de la ecuación referida a tal factor. La principal contribución de este modelo a la teoría de valoración intertemporal es la no utilización de datos de consumo, que, en general, están medidos con error.

Podemos reescribir la primera ecuación en términos de betas multiplicando y dividiendo cada covarianza por la varianza del error del factor que se trate.

$$E_t(R_{it}) - R_{ft} = \gamma_1 \beta_{\varepsilon i}^1 + \gamma_2 \beta_{\varepsilon i}^2 + \cdots + \gamma_K \beta_{\varepsilon i}^K$$

La equivalencia entre los parámetros de esta ecuación y el modelo original es la siguiente:

$$\gamma_m = \frac{b_m + b_{sc}\lambda_1}{Var(\varepsilon_{1t})} \;\; y \;\; \gamma_k = b_{sc} \frac{\lambda_k}{Var(\varepsilon_{kt})} \, , \forall k = 2, \dots, K$$

Siendo

$$\beta_{\varepsilon i}^m = \frac{Cov(r_{it}, \varepsilon_{1t})}{Var(\varepsilon_{1t})} \;\; y \;\; \beta_{\varepsilon i}^k = \frac{Cov(r_{it}, \varepsilon_{kt})}{Var(\varepsilon_{kt})} \, , \forall k = 2, \dots, K$$

Como variables del VAR, además de rentabilidad del mercado, se ha escogido para fines prácticos el cociente entre valor contable y valor de mercado agregado y la rentabilidad por dividendos agregada, tanto por la capacidad de predicción de la rentabilidad que muestran como por un probado mejor comportamiento del modelo que las incluye. Por tanto, aquí vamos a analizar el siguiente modelo de tres factores:

$$E_t(R_{it}) - R_{ft} = \gamma_m \beta_{\varepsilon i}^m + \gamma_{bm} \beta_{\varepsilon i}^{bm} + \gamma_{dy} \beta_{\varepsilon i}^{dy}$$

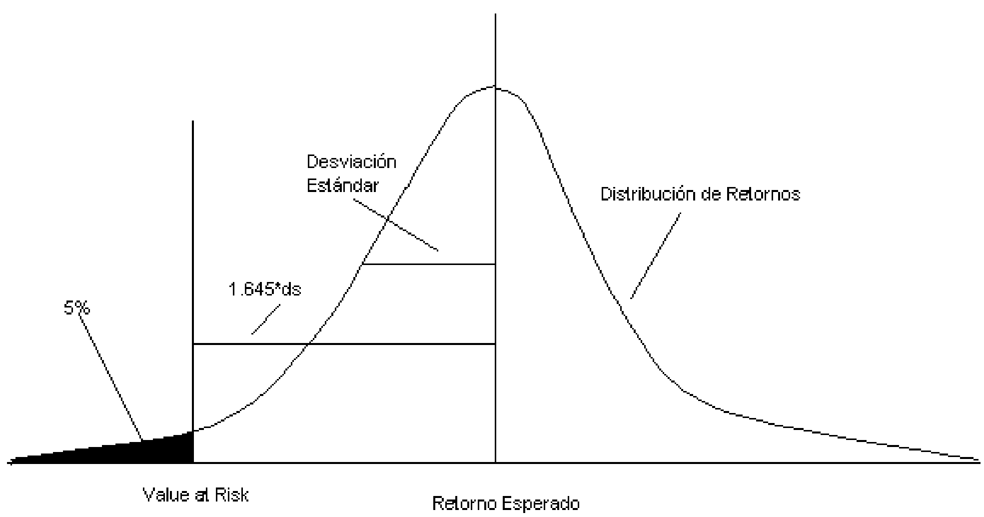
En un principio, podríamos pensar que se trata del mismo modelo del apartado anterior: la versión del CAPM condicional en la que se utiliza el cociente BM y la rentabilidad de los dividendos como predictores de la prima por riesgo. Sin embargo, la filosofía de cada uno de ellos hace que se trate de modelos completamente diferentes. En el modelo analizado aquí, las betas de BM y de DY surgen de la sustitución de la variable consumo en un modelo intertemporal por otras que contengan información sobre la rentabilidad futura. Por ello, las variables explicativas del mismo no son las covarianzas entre la rentabilidad de las carteras y los factores, sino las covarianzas entre la rentabilidad de las carteras y las innovaciones en los factores, es decir, y los errores del VAR. En el CAPM condicional, la aparición de estas betas como riesgos adicionales al de mercado, se debe a su característica condicional, mediante la cual se permite que la beta y la prima por riesgo cambien con la información disponible en cada momento del tiempo, información que, en este caso, aportan estas dos nuevas variables.

4.1.6 Valoración del Riesgo (Value at Risk)

El concepto de valoración del riesgo (VaR), proviene de la necesidad de cuantificar con determinado nivel de significancia o incertidumbre el monto o porcentaje de pérdida que un portafolio enfrentará en un período predefinido de tiempo. Su medición tiene fundamentos estadísticos y el VaR determinar la cantidad máxima que es posible perder con un determinado nivel de significancia del 5%, esto significa que el 5% de las veces, o el 1 de 20 veces (es decir, una vez al mes con datos diarios, o una vez cada 5 meses con datos mensuales)el retorno del portafolio caerá más de lo que señala el Var en un determinado periodo de tiempo; normalmente los periodos usados para el cálculo del valor del VaR son: un día, diez días, un mes o un año.

Si consideramos una serie de retornos históricos de un portafolio que posee un número n de activos, es factible visualizar la distribución de densidad de aquellos retornos a través del análisis del histograma. Es común encontrar fluctuaciones de retornos en torno a un valor medio que no necesariamente es cero (este concepto en estadística se denomina proceso con reversión a la media) y cuya distribución se aproxima a una normal. Leves asimetrías (skewness) son a veces percibidas en los retornos, pero desde un punto de vista práctico es suficiente asumir simetría en la distribución. Una vez generada la distribución se debe calcular aquel punto del dominio de la función de densidad que deja un 5% del área en su rango inferior.

Este punto en el dominio de la distribución se denomina VaR, y se presenta en la siguiente figura.



En la medida que deseamos un 5% como área de pérdida, debemos multiplicar a la desviación estándar de la serie de retornos por 1.645. Es decir, si el retorno esperado para un portafolio es de 4% y la desviación estándar es de 2%, entonces el VaR (con un nivel de significancia del 5%)

indicará que este portafolio podría sufrir una pérdida superior a 1.645*2=3.29% en sus retornos esperados, pasando de 4% a 0.71% o menos, solamente el 5% de las veces (1 de 20 veces).

Existen diversas alternativas para generar la matriz de varianzas y covarianzas con la cual se cuantifica el VaR. Existen metodologías de simulación de retornos que permiten hacer un cálculo estimativo del VaR, las cuales se enlistan a continuación y se da una explicación resumida de cada una de ellas.

El Método de Varianza Covarianza o Método Delta-Normal

El método más simple de cálculo del VaR es el método delta-normal. Este consiste en asumir que los retornos tienen una distribución normal e idénticamente distribuida de manera que si los retornos esperados para un portafolio de n activos se definen como:

$$E(R_P) = \omega' E(R)$$

Entonces la varianza del portafolio se representa por:

$$\sigma_P \equiv \omega' E(\Sigma)\omega$$

Donde tal como se revisó en la sección de determinación de la frontera eficiente, ω es un vector columna de ponderadores no negativos que suman uno, y Σ define la matriz de varianzas y covarianzas para los retornos de los n activos.

El algoritmo para calcular el VaR partiría definiendo la matriz de varianzas y covarianzas con la base histórica de retornos (se puede incluir alguna valoración de desviaciones estándar por medio de las volatilidades implícitas de opciones). Una vez que se tiene la ponderación de los instrumentos se procede a calcular el VaR para el portafolio especificado considerando un nivel de significancia establecido, de por ejemplo un 5%, lo que implica un ajuste de la volatilidad de 1.645:

$$VaR_{P \equiv 1.645\sqrt{\omega' E(\Sigma)\omega} \cdot \sqrt{\Delta t}}$$

El cálculo del VaR va con relación a la frecuencia de la base de datos, lo que necesario el ajuste por el parámetro Δt. Si la frecuencia de la base de datos de retornos es diaria y se desea calcular el VaR para 5 días en adelante (una semana) entonces se debe multiplicar por $\sqrt{5}$. El siguiente cuadro resume las correcciones que se deben realizar dependiendo del horizonte de análisis para una base de retornos diaria (W es el momo del portafolio)

Tabla 3 de Correlaciones por horizonte de análisis

Estadístico	1 Día	Semana	Mes	Año
Retorno	μ_d	$5\mu_d$	$20\mu_d$	$240\mu_d$
Varianza	σ_d^2	$5\sigma_d^2$	$20\sigma_d^2$	$240\sigma_d^2$
Desv. Estándar	σ_d	$\sigma_d\sqrt{5}$	$\sigma_d\sqrt{20}$	$\sigma_d 240$
$VaR_{(\alpha=1.645)}$	$-\alpha\sigma_d W$	$-\alpha\sigma_d\sqrt{5}W$	$-\alpha\sigma_d\sqrt{20}W$	$-\alpha\sigma_d\sqrt{240}W$

Podemos generalizar el cálculo de VaR para periodos diferentes t_1, t_2 como:

$$VaR_1 = -\alpha\sigma\sqrt{\Delta t_1}W$$

$$VaR_2 = -\alpha\sigma\sqrt{\Delta t_2}W$$

De manera que podamos ajustar el VaR para diferentes periodos por:

$$VaR_2 = -\alpha\sigma\sqrt{\Delta t_2}W = -\alpha\sigma\sqrt{\Delta t_1}W.\frac{\sqrt{\Delta t_2}}{\sqrt{\Delta t_1}}$$

Con lo cual se llega finalmente a:

$$VaR_2 = VaR_1\sqrt{\left(\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}\right)}$$

Es decir, por ejemplo el VaR para un día es de \$20.000, entonces para una semana y un mes será de \$44.721 y \$89.443, respectivamente. Esta metodología de reconversiones se puede utilizar para todos los métodos ya anteriormente mencionados.

Método de Simulación Histórica

Una segunda alternativa consiste en aplicar el vector de ponderadores de inversión vigentes a una serie representativa de retornos históricos, de manera de generar una secuencia de valores de portafolio que pueden ser representados estadísticamente por un histograma. A partir de esta secuencia de valoración histórica que define una cierta distribución de probabilidades, se procede a calcular el VaR.

Consiste en retroceder en el tiempo, tal como durante los 250 días últimos y aplicar procesos actuales a una serie temporal de rendimientos de activos.

$$R_{p,k} = \sum_{i=1}^{K} w_{i,t}R_{i,k} \qquad {\scriptstyle k=1,2,\ldots,t}$$

Observemos que los pesos $w_t$se mantienen en sus valores actuales. Este rendimiento no representa una cartera real sino más bien reconstruye la historia de una cartera hipotética utilizando la posición actual. El enfoque, a veces, se denomina “bootstrapping: autocontrolador” porque implica utilizar la distribución real de los datos históricos recientes (sin remplazamiento).

Más generalmente, la valoración global requiere un conjunto de precios completos, tal como curva de rendimiento, en lugar de rendimientos exactos. Los precios futuros hipotecarios para k escenarios se obtienen aplicando los cambios históricos en los precios para el nivel actual de los precios:

$$S_{i,k}^{*} = S_{i,0} + \Delta S_{i,k}, i = 1,2, \ldots K$$

Un nuevo valor de la cartera $V_{p,k}^{*}$ se obtiene entonces del conjunto global de precios hipotéticos, quizás incorporando relaciones no lineales $V_k^{*} = V(S_{i,k}^{*})$.observemos que para capturar el “riesgo vega”, debido a las volatilidades cambiantes, el conjunto de los precios puede incorporar las unidades de volatilidad implícita. Esto crea el rendimiento hipotético correspondiente a la simulación k.

$$R_{p,k} = \frac{V_k^* - V_0}{V_0}$$

Entonces, el VaR se obtiene de la distribución completa de los rendimientos hipotéticos donde a cada escenario histórico se le asigna el mismo peso$(1/t)$.

Como siempre, la elección del periodo muestral refleja un intercambio entre usar tamaños maestrales más largos o más cortos. Los intervalos más largos incrementan la exactitud de los estimadores pero podrían utilizar datos irrelevantes, por eso pierden importantes cambios en el proceso subyacente.

Modelo de Montecarlo

Las simulaciones Monte Carlo (MC) cubren un amplio rango de valores posibles en variables aleatorias y de gran importancia para las correlaciones. En breve, el método procede en dos etapas. En primer lugar, el director del riesgo especifica un proceso estocástico para las variables financieras así como para los parámetros del proceso; los parámetros tales como el riesgo y las correlaciones se pueden deducir de los datos históricos o de las opciones. En segundo lugar, la trayectoria de precios ficticios se simula para todas las variables de interés. En cada horizonte considerado, la cartera se cotiza utilizando diariamente la valoración completa como en el método de simulación histórica $V_k^* = V\left(S_{i,k}^*\right)$. Cada una de estas "seudo" realizaciones se utiliza entonces para recopilar una distribución de rendimientos, de la cual se puede medir un número del VAR.

Por tanto el método (MC) es similar al método de simulación histórica, excepto en que los cambios hipotéticos en los precios ΔS_i para el activo i; se crean mediante extracciones aleatorias de un proceso estocástico preesfecificado en lugar de los cambios hipotéticos en los precios muestrados de los datos históricos.

En términos generales este método da más importancia a los posibles *shochs* del mercado utilizando modelos matemáticos para predecirlos. Los pasos para implementarlo son:

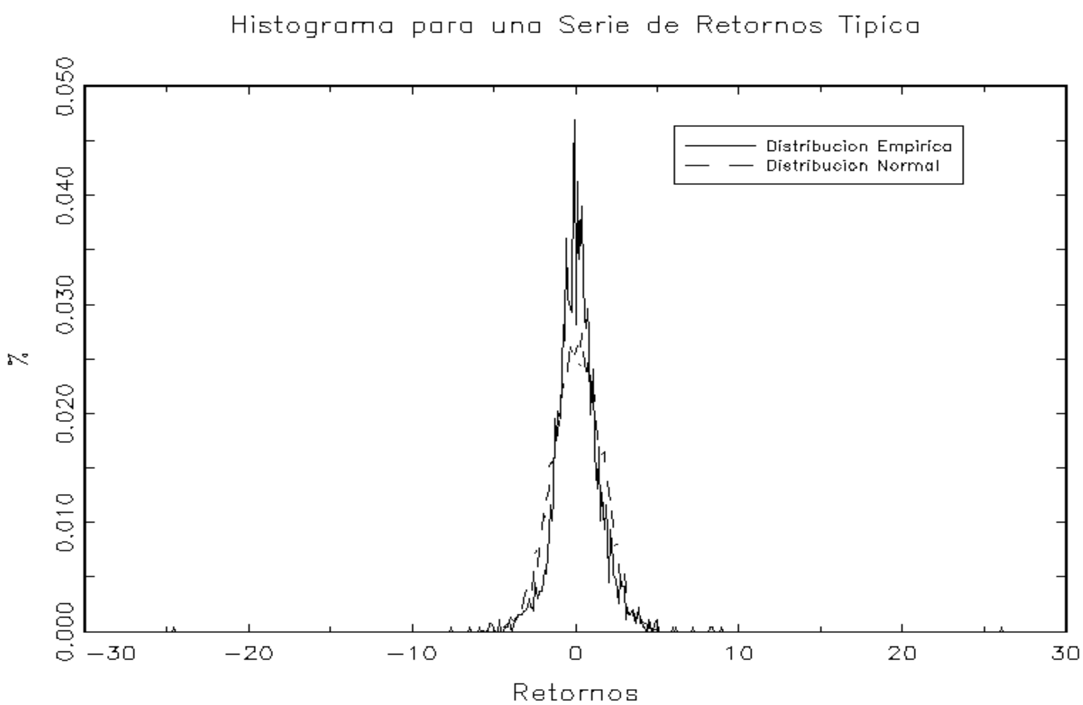
1. Utilizar las variaciones pasadas de los factores de riesgo (tales como los tipos de interés, por ejemplo) con objeto de generar una ecuación que las modele. Dicho modelo suele ser generado a través de un análisis de regresión. Con ello podemos generar un rango de valores futuros de los tipos de interés a través de la generación de números aleatorios.
2. Simular el comportamiento de los factores de riesgo en el periodo próximo. Dados los valores actuales y una distribución de números aleatorios que prediga los valores futuros, el modelo debería estar en condiciones de calcular un posible valor futuro por cada factor de riesgo. Esta operación será repetida varios miles de veces con lo que podremos confeccionar una distribución de probabilidad.
3. Cada uno de estos valores tiene una probabilidad de ocurrencia asignada basada en la distribución aleatoria utilizada para realizar la simulación. Los valores serán jerarquizados de mayor a menor. Si elegimos un nivel de confianza del 95%, cuando la probabilidad acumulada de la distribución alcance el 5%, ese valor indicara el VaR.

Los modelos de Montecarlo modelan las variaciones en los factores de riesgo más bien que los cambios en los activos individuales. La simulación Montecarlo es útil: a) debido a que el número de factores de riesgo es mucho más pequeño que el número de activos que uno desearía modelar; y b) debido a su flexibilidad, que permite alterar la distribución de probabilidad cuando sea necesario.

4.1.7 Método de Situaciones Extremas (Stress-Testeing)

Es común asumir que los retornos son procesos estocásticos estacionarios que obedecen a una cierta distribución normal. Sin embargo la existencia frecuente de *outliers*[16] debilita tal supuesto. El método de Stress-Testing incrementa la ponderación de los eventos extremos negativos en la secuencia de valoración del portafolio. Por medio de la recreación de escenarios adversos históricos, o la simple creación de eventos negativos, este método cuantifica los cambios probables en los valores del portafolio.

La siguiente figura permite visualizar la función de distribución para una secuencia de retornos típica. Los outliers y el grado de simetría (skewness) y ancho de colas (leptokurtosis) es una característica ampliamente difundida en la literatura. La distribución empírica muestra un grado de leptokurtosis mayor al presente en la distribución normal. Sin embargo las colas de la distribución son más altas en el caso de la función de densidad empírica. Esto implica que si calculamos un VaR considerando la distribución normal, estaríamos subestimando la pérdida potencial del portafolio, puesto que el área bajo las colas es superior al implícito en la normal.



[16] Los *outlier*, son un valor atípico, es una observación que es numéricamente distante del resto de los datos. Las estadísticas derivadas de los conjuntos de datos que incluyen valores atípicos serán frecuentemente engañosas.

En la práctica el análisis de Stress-Testing se puede realizar de diversas formas. Una alternativa puede ser la elección de una secuencia de retornos para un período específico del tiempo que represente según el administrador de portafolio un escenario futuro probable. Es decir que si disponemos de retornos mensuales desde 1990 en adelante, consideremos por ejemplo solamente los períodos en que hubo guerra en el medio oriente, o los períodos de crisis económicas (efectos tequila y crisis asiática, entre otros), o los períodos de grandes fluctuaciones del valor del Yen, o períodos de fuertes correcciones de precios de acciones (crisis bursátiles), etc. En este contexto, claramente el valor del VaR calculado según las metodologías anteriormente mencionadas subestima las eventuales pérdidas del portafolio vigente.

Una segunda opción es simular eventos adversos que no necesariamente hayan estado presentes en la serie histórica. Este mecanismo se alimenta del análisis simultáneo de un grid multidimensional de diferentes eventos, cada uno de los cuales es ponderado por un vector de probabilidades, dando origen así a un vector de valoraciones de portafolios que permitirán el cálculo del VaR. En la práctica, su implementación se ve limitada a la valoración de eventos discretos, dejando gran parte de los shocks potenciales fuera del análisis. Este análisis de escenarios es incapaz de cubrir todas las posibilidades que pueden hacer disminuir el valor de un portafolio.

Adicionalmente, podemos efectuar un Stress-Testing manipulando la descomposición de la matriz de varianzas y covarianzas en correlaciones y desviaciones estándar. Este ejercicio implicaría modificar los valores que componen la matriz diagonal de desviaciones estándar, como también los valores de la matriz diagonal de correlaciones de retornos entre activos.

Por último, el método de Stress-Testing puede implementarse a través de la Teoría de Valores. Extremos (TVE) que consiste en el estudio de las colas de las distribuciones de probabilidad. A un nivel empírico cada vez es más común encontrar aplicaciones a las finanzas que asumen que los retornos se representan por una distribución como la t de Student. La ventaja de esta distribución es que presenta colas con mayor masa de probabilidad que la distribución normal, lo cual permite representar mejor a la distribución empírica de los retornos.

4.1.8 Teoría de Valores Extremos

La teoría de los valores extremos estudia, mediante métodos no paramétricos, las colas de una distribución que no necesariamente requiere ser conocida. El parámetro que asume las características de la cola de una distribución es el índice de cola (Tail Index), y existen diversos estimadores para este estadístico. En 1975 se propone que el tail index se defina por:

$$\hat{\alpha}_H = \left[\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} log(X_i) - log(X_{M+1})\right]^{-1}$$

Dónde $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq X_{(3)} \geq \cdots \geq X_{(M)} \geq \cdots \geq X_{(n)}$ son los estadísticos de orden y M es el índice de umbral, según el cual los $X_i > X_{M+1}$ son utilizados en la estimación del Tail Index. No existe una forma analítica que resuelva el problema de cómo escoger M óptimamente, sin embargo existe una forma analítica que sigue un procedimiento heurístico, y que consiste en computar un conjunto de $\hat{\alpha}_H$ para diferentes índices de umbral proponiendo escoger M de la región sobre la cual el parámetro $\hat{\alpha}_H$ presenta relativa estabilidad.

A continuación se presenta el estimador de Hill ($\hat{\alpha}_H$) aplicado a una serie de retornos accionarios, con la siguiente figura 2. Lamentablemente en la práctica no es tan fácil determinar el umbral M pues la función que representa al coeficiente de Hill no es monótona y presenta múltiples regiones de mesetas.

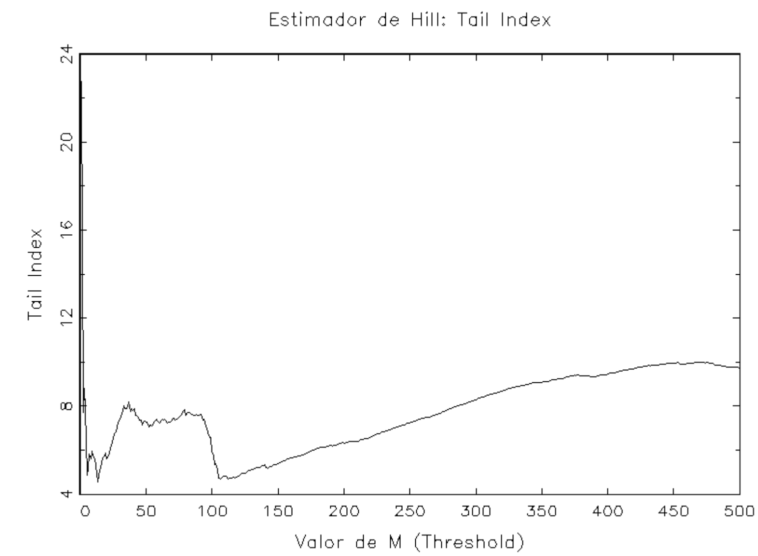


Figura 2

4.3 Métodos para la Optimización de Portafolios

Como se mencionó anteriormente, hay distintos modelos que pueden estimar el riesgo de un portafolio de inversiones, sin embargo con estos modelos no es posible determinar las proporciones que debe de tener el portafolio de cada activo con el fin de minimizar el riesgo y maximizar la rentabilidad. Por eso es necesario mostrar y comparar los diferentes modelos que se usan como alternativa al modelo de media-varianza propuesto por Markowitz.

Los modelos que se mencionan a continuación tienen en común que son problemas de optimización y que tienen cierta definición homogénea del riesgo del portafolio, por lo que es posible compararlos directamente.

4.3.1 Modelo de Desviación Media Absoluta (Mean Absolute Desviation)

El modelo de desviación media absoluta o MAD (por su siglas en inglés) propuesto por Konno y Yamazaki (1992), a diferencia del modelo de Media-Varianza de Markowitz no asume normalidad en el rendimiento de los activos. El modelo MAD también minimiza una medida de riesgo, donde la medida de riesgo en este caso es la desviación absoluta, para una desviación absoluta grande el riesgo se incrementa. Se determina de la siguiente manera:

$$MAD_p = E\left[|R_p - r_p|\right]$$

Dónde:

R_p Son los rendimientos del activo, pueden ser diarios, mensuales o anuales.

r_p Es el rendimiento promedio del activo.

Donde teóricamente es lo mismo que en el modelo media-varianza cuando los rendimientos de los precios de los activos son normalmente distribuidos. El modelo MAD es más fácil de implementar debido a que éste elimina la necesidad de calcular la matriz de varianzas y covarianzas.

Como se ha mencionado, ambos modelos minimizan una medida de riesgo, sin embargo el modelo MAD intenta reducir la desviación absoluta a diferencia de la varianza que minimiza el modelo media-varianza.

A continuación se describe matemáticamente el modelo MAD:

$$Min\left\{\frac{\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{j_t}X_t\right|}{T}\right\}$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} r_j X_j \geq \varphi M_0$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = M_0$$

Dónde:

a_{j_t} Es el rendimiento mensual o anual del activo menos el rendimiento promedio $\left(R_p - r_p\right)$ del activo j para el tiempo T.

Las restricciones del modelo MAD son las mismas que en el modelo de Markowitz. Cabe señalar que la fórmula del modelo MAD no tiene una solución analítica y por lo tanto debe ser aproximadamente con una aproximación numérica.

4.3.2 Modelo MAD Estocástico

A continuación se describirá el modelo de la desviación media peri de tipo estocástico, cabe señalar que el modelo MAD descrito en la sección anterior es un modelo de tipo determinista.

El modelo MAD estocástico toma en cuenta diversos escenarios con el fin de minimizar la distancia entre el rendimiento promedio y los rendimientos periódicos de cada activo, la fórmula matemática se enuncia a continuación:

$$\left(\frac{1}{3}\right)\sum_{s=1}^{3}\left(\frac{\sum_{s=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{jts}X_t\right|}{T}\right)$$

Sujeto a:

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n} r_{js}x_j\right) \geq \varphi M_0$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_0$$

$$x_j \geq 0\,, x_j \leq \mu_j$$

Dónde:

x_j Es la proporción del activo i a invertir del portafolio.

r_{js} Es el rendimiento promedio del activo j en el escenario s.

M_0 Es el total del monto a invertir.

φ Es el rendimiento mínimo que requiere el inversionista.

μ_j Es la mínima cantidad a invertir en el activo j.

a_{jts} Es el rendimiento periódico menos el rendimiento promedio del activo j en el momento t en el escenario s $(r_{jts} - r_{js})$.

T Es el número de años.

Cabe señalar que la restricción sobre el rendimiento mínimo es opcional, debido a que se puede restringir todavía más la inversión en cada uno de los activos dependiendo de las preferencias que se tengan sobre cada activo.

4.3.3 Modelo de Minimax de Young

En 1988 Young propuso el modelo de “Minimax” (MM) usando el mínimo rendimiento con medida de riesgo. El modelo MM es equivalente al modelo Media-Varianza de Markowitz si los rendimientos de los activos se distribuyen normal multivariado. El modelo MM es un modelo programación lineal, el cual se describe a continuación:

$$MaxM_p$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{N} w_j y_{j_t} - M_p \geq 0, \qquad t = 1,2, \dots, T$$

$$\sum_{j=1}^{N} w_j \bar{y}_j \geq G, \qquad t = 1,2, \dots, T$$

$$\sum_{j=1}^{N} w_j \leq W, \qquad t = 1,2, \dots, T$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \dots, N$$

Dónde:

y_{j_t} Es el rendimiento del activo j en el periodo t.

$\bar{y}_j$ Es el rendimiento promedio del activo j.

M_p Rendimiento mínimo del portafolio.

G Mínimo nivel de rendimiento.

w_j Es la proporción del activo.

W Es el total del monto a invertir.

Young define M_P de la siguiente manera: $M_P = \min_t \sum_{j=1}^{N} w_j y_{jt}$

Por lo que el anterior modelo es equivalente al siguiente modelo:

$$MaxE = \sum_{j=1}^{N} w_j \bar{y}_j$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{N} w_j \bar{y}_j \geq H\,, \qquad t = 1,2, \dots, T$$

$$\sum_{j=1}^{N} w_j \leq W\,, \qquad w_j \geq 0 \;\; j = 1,2, \dots, N$$

H Es el mínimo nivel del rendimiento del portafolio.

El objetivo del modelo es maximizar el rendimiento esperado sujeto a que el rendimiento del portafolio exceda al mínimo nivel del rendimiento, H. Young muestra que el modelo minimax tiene ventajas lógicas si los rendimientos no se distribuyen normalmente y cuando los inversionistas tienen una fuerte eversión al riesgo. Además, el modelo minimax es un problema lineal, así que puede ser resuelto mucho más rápido que el modelo de media-varianza.

Conclusiones

Existen diversas formas para la construcción de un portafolio de inversión pero siempre se debe tener presente los factores externos e internos que lo afectarán (como pueden ser las tasas de rentabilidad) siendo así necesario el ser más meticuloso al momento de hacer la selección de activos que conformaran él portafolio; también se deberían crear test's más específicos puesto que los que existen no son del todo precisos al momento de definir una postura, preguntas enfocadas a que tan cómodo se siente asumiendo cierto nivel de riesgo o cual sería su perdida máxima tolerable, permitirían poder tener un panorama más amplio de la visión del inversionista y así poder ser más preciso a la hora de seleccionar el nivel de aversión al riesgo y la posterior selección de activos.

Uno delos aspectos más importantes en la construcción de portafolios de inversión está en una buena diversificación, gracias a esto se logra reducir el riesgo del portafolio. Teniendo en cuenta cómo se puede realizar y cuáles son los beneficios, una diversificación eficiente puede ser muy útil al momento de que ocurran eventos desafortunados o en caso de no presentarse dichos eventos se obtendría una ganancia mayor. Y coloquialmente se podría entender como: "*nunca se debe poner todos los huevos en una sola canasta*".

Un portafolio diversificado permitirá al inversionista mejorar sus oportunidades de tener una mayor ganancia siendo consiente del riego proporcional; podemos escoger las diferentes proporciones de activos que conformarán la cartera y saber cuánto riesgo se va a asumir, esto lo podemos observar cuando nos fijamos en frontera eficiente donde si nos movemos a la izquierda o derecha podemos decir que cuanto se puede ganar y la proporción de riesgo, siendo así que una postura conservadora tendrá una menor ganancia con menor riesgo mientras que una postura más arriesgada brindara una mayor ganancia pero asumiendo un riesgo mucho mayor.

En el desarrollo de esta tesis fue de gran utilidad la teoría de portafolio de Markowitz el cual mostro que se puede diseñar un portafolio de inversión óptimo, explicando que es posible disminuir el riesgo de un portafolio de inversión mediante la diversificación y demostrando que al aumentar el número de activos que integran un portafolio se pude minimizar el riesgo de sufrir una perdida.

Se pudo observar que el modelo de Markowitz logra sintetizar la distribución de probabilidades de cada activo que conforman un portafolio través de la media y la varianza. Otras de las ventajas del modelo de Markowitz es que permite identificar la mejor relación rentabilidad/riesgo de dos o más activos en un portafolio de inversión.

Se debe hacer mención de que el método la Media-Varianza genera en promedio el menor riesgo entre todos los portafolios ofrecidos y esto se debe a que este siempre utiliza un mayor número de acciones de una inversión. Aun así se debe tener en consideración que el riesgo de un portafolio depende de la covarianza de los activos que la componen y no del riesgo promedio de los mismos.

Sin embargo, el modelo de Markowitz no es el único existente en lo que se refiere a la teoría de portafolios de inversión, por lo que también se destinó el Capítulo IV donde se mencionan brevemente los métodos alternativos de Medición del Riesgo; estos métodos surgen a partir de la aparición del modelo de Markowitz de Media-Varianza tratando de incorporar diferentes enfoques o como respuesta al intento de cubrir algunas deficiencias del modelo de Markowitz, como por ejemplo la el tiempo que se tarda en la resolución del problema de optimización, esto porque el modelo Media-Varianza utiliza matrices cuadráticas para medir el riesgo de los distintos activos financieros que constituyen el portafolio de inversión, mientras que los otros modelos son problemas lineales de optimización, por lo que el tiempo de resolución es menor.

Los diversos métodos han evolucionado de la mano con la demanda que existe en el mercado, partiendo de lo convencional como es el modelo de Markowitz, y se han enfocado en determinan las proporciones idóneas, para algún nivel de riesgo dado, con tal de maximizar los rendimientos esperados, sin embargo hay modelos de optimización que permiten además de medir el riesgo, seleccionar aquellos activos que tengan rendimientos atractivos y que permitan optimizar el rendimiento.

Estos modelos miden el riesgo de los activos y pero permiten seleccionar activos que tengan los rendimientos más atractivos siendo haciendo posible optimizar el rendimiento de una cartera de activos de inversión. Cada uno de los diversos métodos presentados tiene ventajas y desventajas. En la medida que el portafolio se analizado, se recomienda usar métodos simples como el delta-normal o simulación histórica, los cuales generan una matriz de riesgos en base a información de opciones o en base a retornos históricos.

Anexo: Herramientas de Estadística para el Diseño de Portafolios de Inversión

Para poder realizar el análisis de los portafolios de inversión primero se deberán tomar en cuenta algunos conceptos de probabilidad y de estadística que nos servirán para valorar el comportamiento de los portafolios de inversión; cada uno de los cuales tiene diferentes ventajas y desventajas. Estas medidas pueden variar considerablemente, por lo que resulta importante entender las siguientes diferencias:

Distribución de Probabilidad (Normal, Lognormal, etc.)

Medidas de Tendencia Central (Media, Mediana, Moda)

Medias de Rendimiento (Media Aritmética, Media Geométrica, Media Logarítmica)

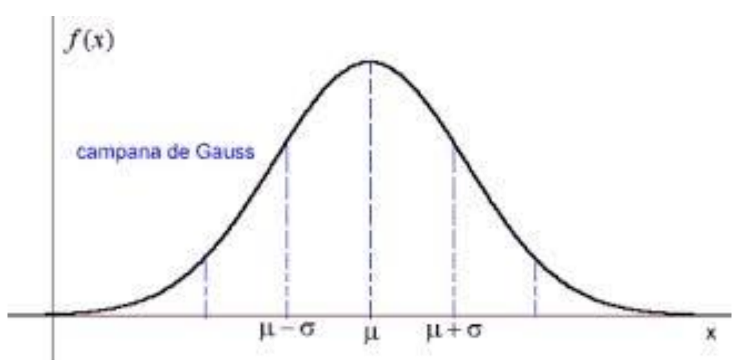
Medidas de Variabilidad y Correlación (Varianza, Desviación estándar, Covarianza)

Distribuciones de Probabilidad

Distribución normal

La distribución Normal o Gaussiana es una de las distribuciones teóricas más utilizada, esto es debido a la frecuencia con que algunos procesos habituales siguen de manera aproximada esta distribución. Esta familia de distribuciones con una forma común, están diferenciadas por su media y su varianza. La desviación estándar y la varianza están relacionadas entre sí, de manera que la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza. La distribución Normal Estándar se corresponde a una distribución con media de 0 y varianza de 1,(N(0,1)).

La desviación estándar es la medida de dispersión más importante, ya que se utiliza en muchos de los cálculos estadísticos habituales. Si consideramos que todo conjunto de datos con los que se trabaja, pertenece a una distribución de frecuencia considerada como Normal (curva de la frecuencias simétrica y mesokurtica, ni plana ni puntiaguda), entonces sabemos que el 68% de las mediciones se encuentran a no más de una desviación estándar de la media, y que aproximadamente el 95% de las mediciones se encuentra a no más de dos desviaciones estándar de la media.



La función de distribución de una Normal genérica (N(μ,σ)) es la siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

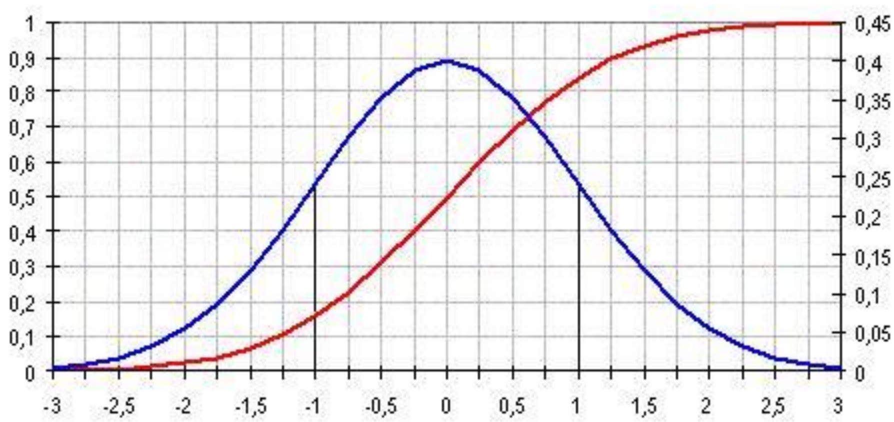
La función de densidad una función N(0,1) adoptara la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x)^2}{2}}$$

La función de distribución acumulada que calcula la acumulada tiene la siguiente forma:

$$F(x) = P(\varepsilon \leq X) = \int_{-\infty}^{X} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x)^2}{2}}$$

En la siguiente figura representamos tanto la función de densidad como la función de distribución de la N (0,1). Como se puede observar la función de densidad adopta una forma de campana, o *Gausiana,* donde la media coincide con el centro geográfico de la distribución y es donde la función tiene su máximo.



La función de densidad es asíntota en el eje de las abscisas y los puntos de inflexión coinciden en la media ± desviación típica; es decir, en +1 y en -1. Prácticamente toda la distribución (para ser exactos el 99.87%) cae dentro del rango comprendido entre la media y ±3 veces la desviación típica.

La Función de distribución adopta una forma *sigmoidea* con puntos de inflexión en ±1. La función de distribución toma valores entre 0 y 1.

Las distribución N(μ,σ) puede utilizarse como una distribución estandarizada N(0,1) ya que, si ξ se distribuye como una N(μ,σ) y ξ' se distribuye como una N(0,1), se demuestra que:

$$\xi = \mu + \sigma\xi'$$

Diversos análisis estadísticos demuestran que los retornos de los activos financieros tienen una distribución que no es perfectamente normal, sino que tienen lo que se llama colas pesadas o leptocurtosis: esto implica que las crisis y las euforias suceden más veces de lo que predice la distribución normal. Pero dado que esta desviación no es tan pronunciada, casi toda la teoría de las finanzas está construida sobre la base de que los rendimientos de los activos es normal.

Distribución Lognormal

En teoría de la probabilidad, una distribución logarítmica, lognormal, es una distribución de probabilidad continua de una variable aleatoria cuyo logaritmo se distribuye normalmente. Se trata de la densidad de probabilidad de una variable aleatoria log X distribuida según una función normal:

$X \cong N(\mu, \sigma) \qquad Y = e^x$

Con este cambio la variable quedará:

Función de distribución:

$$G(Y) = P(Y \leq y) = P(e^x \leq y) = P(X \leq \log y) = F(\log y)$$

Función de densidad:

$$g(y) = G'(y) = F'(\log y) \times (1/y)$$

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{1}{y} exp\left(-\frac{(logy - \mu)^2}{2\sigma^2}\right); \quad y \geq 0$$

También es conocida como ley de Galton-Mac, Aliester o ley del efecto proporcional, según Calot (1988).

Puede comprobarse que la mediana está comprendida entre la moda y la media y más cerca de la media que la moda, en particular, puede comprobarse que la mediana está casi dos veces más cerca de la moda.

La distribución lognormal es una probabilidad frecuente utilizada para expresar el comportamiento de observaciones con asimetría positiva, en donde la mayoría de los valores ocurren en las proximidades de un valor mínimo.

Esta distribución es característica en conjuntos de datos donde existe mayor frecuencia de valores pequeños, por la cual la media se desplaza hacia la derecha y esto hace que el mejor estadígrafo de posición de la moda y no la media aritmética. Esta consideración se valora, pero no se comparte en lo referente a la valoración del centro de los datos por considerarse que lo mismo puede hallarse con más exactitud en el valor de la mediana, la cual, se conoce, no es influida por valores extremos, lo cual no ocurre con la moda.

Medidas de Tendencia Central

Las medidas de tendencia Central se refieren al punto medio de una distribución, indicando así en torno a qué valor se distribuyen los datos.

Media: es el promedio aritmético del conjunto de datos

Mediana: aquel valor de la variable que deja la mitad de los elementos (ordenados de mayor a menor), por debajo y la otra mitad por encima. Es el valor que se encuentra "más en medio" de un conjunto de datos.

La mediana es representada por M_e y se puede hallar sólo para variables cuantitativas.

Moda: es el valor que tiene mayor frecuencia absoluta, se representa por M_0. Se puede hallar la moda para variables cualitativas y cuantitativas.

Si los datos se distribuyen normalmente, la media, la mediana y la moda son iguales.

Medidas de Rendimiento

Media Aritmética

La media aritmética se calcula sumando los rendimientos de un activo y dividiendo la suma por la cantidad de observaciones. La fórmula puede definirse de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Donde el rendimiento promedio de *x* es igual a la suma de los retornos (*x*) de los *i* rendimientos del activo para cada periodo y *n* es igual a la cantidad de observaciones o los periodos.

Media Geométrica

En casos particulares, tenemos que en el tiempo a veces los valores bajan y eso hace que el rendimiento tome valores negativos. Lo cual llevaría a una media aritmética que no representaría con exactitud lo que sucedió en el portafolio. Para solucionar eso, la matemática proporciona otro cálculo de media que evita estos problemas. Éste se conoce como media geométrica, que es usualmente usada para medir el rendimiento de portafolios en un periodo. El uso de la media geométrica resuelve este tipo de incidentes ya que su definición en términos de mercado, la caracteriza como la medida de retorno de dicha inversión. La definición de la misma la describe como la raíz *n* del producto de *n* observaciones. La fórmula se puede definir de la siguiente manera:

$$\hat{x} = \left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \right) - 1$$

En donde $\hat{x}$ es el producto del rendimiento para cada periodo de las *i* observaciones en *n* periodos.

Media Logarítmica

Otra forma de evitar los inconvenientes de la media aritmética es usar logaritmos naturales para el cálculo de los retornos y luego de la media aritmética.

Debe aclararse que estas son medidas del rendimiento pasado de un activo. En realidad lo que más importa a fines de la construcción de portafolios son los rendimientos esperados.

Medidas de Variabilidad y Correlación

Varianza

La Varianza muestral se define como la suma de los cuadrados de la desviación de cada una de las observaciones de la variable respecto de su media, dividida por el número de observaciones menos uno.

La expresión de la varianza muestral está definida como:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Mientras mayor sea la dispersión de las observaciones, mayor es la magnitud de las desviaciones respecto a la media aritmética y por ende, más alto el valor numérico de la varianza.

Desviación Estándar

La desviación estándar determina cuánto se desvía un punto de datos individual de la media del total de datos, donde la media es el promedio aritmético de los puntos de la muestra. La desviación estándar es determinada al sacar la raíz cuadrada de la varianza.

Siendo así la expresión de la desviación estándar muestral la siguiente:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Respecto a la desviación estándar se debe de tener presente lo siguiente

a) A mayor deviación estándar, mayor es la variabilidad del activo y, por lo tanto, mayor es su riesgo.
b) Es una medida estadística muy útil en la distribución de probabilidad del rendimiento del activo siga un patrón normal.

Covarianza

La Covarianza es una medida estadística que relaciona dos variables diferentes, estableciendo la relación que existe entre las dos. La covarianza es una herramienta muy importante a la hora de realizar regresiones lineales entre dos conjuntos de variables.

Por definición, mide el valor esperado del producto de las desviaciones con respecto a la media es decir, la covarianza es la media aritmética de los productos de las desviaciones de cada una de las variables respecto a sus medias respectivas.

La covarianza muestral se representa por:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}$$

La covarianza indica el sentido de la correlación entre las variables.

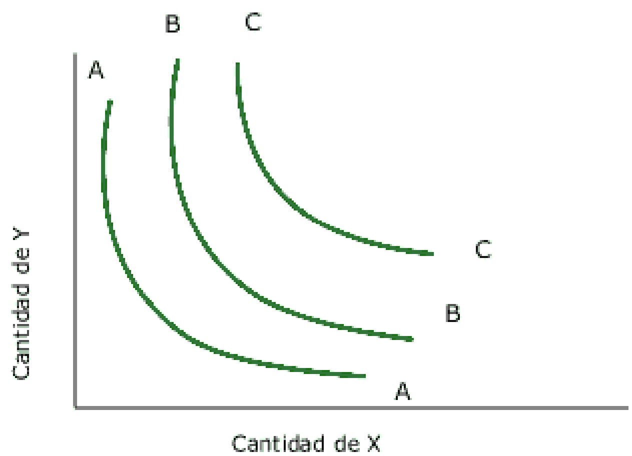
Si $\sigma_{xy} > 0$ la correlación es directa

Si $\sigma_{xy} < 0$ la correlación es inversa

La covarianza presenta como inconveniente, el hecho de que su valor depende de la escala elegida para los ejes. Es decir, la covarianza variará si expresamos la altura en metros o en centímetros. También variará si el dinero se expresa en euros o dólares.

Anexo: Curvas de indiferencia

Las curvas de indiferencia son un conjunto de combinaciones de bienes que proporcionan la misma utilidad al consumidor. Sobre una curva de indiferencia el consumidor es indiferente entre cualquiera de las canastas de bienes que se le presentan. El principal uso de las curvas de indiferencia es la representación de los patrones de demanda observables para los inversionistas en los paquetes de productos. Es decir, en cada punto de la curva, el consumidor no tiene preferencia por un conjunto u otro salvo por otra variable externa. Si representamos las curvas de indiferencias en dos dimensiones obtenemos la Figura.



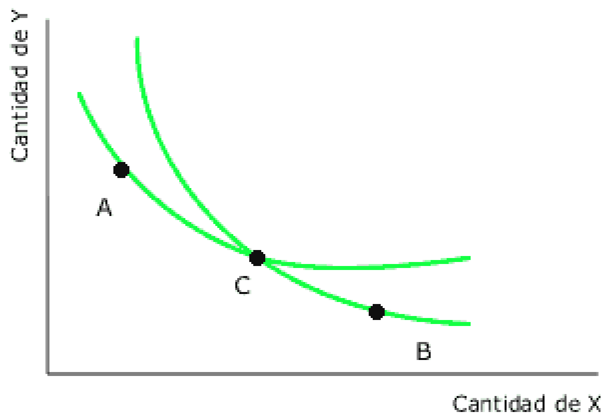
Las curvas de indiferencia regulares poseen las siguientes características:

- Tienen pendiente negativa

Se supone que si hablamos de cestas de dos bienes, siempre más es preferible a menos. Es decir, si tenemos una cesta de bienes (x_1, y_1) y otra cesta (x_2, y_2) tal que la segunda contiene la misma cantidad de uno de los bienes y más de uno de ellos, la segunda cesta será preferida a la primera. Este supuesto se denomina "preferencias monótonas". Este supuesto de preferencias monótonas implica que las curvas de indiferencia tienen pendiente negativa.

- Las curvas de indiferencia no se cortan entre sí.

Supongamos tres cestas de consumo, A, B y C, tales que A se encuentre en una de las curvas, B sobre la otra curva y C en la intersección de ambas, como vemos en la Figura. Partimos del supuesto de que las curvas de indiferencia allí dibujadas representan distintos niveles de utilidad, por lo que una de las cestas, por ejemplo la A es preferida a la B. Según la definición de curvas de indiferencia, sabemos que la cesta A es indiferente a la C y que la cesta C es indiferente a la cesta B. Si utilizamos el supuesto de transitividad, deberíamos obtener que las cestas A y B sean indiferentes. Pero como habíamos supuesto al principio A es preferida a B, con lo que demostramos que las curvas de indiferencia que representan distintos niveles de utilidad, no pueden cortarse.



- Son convexas al origen.

Esto es lo mismo que decir que se prefieren las cestas medias a las cestas con combinaciones extremas (nada de un bien y todo del otro bien). Una curva es convexa al origen cuando la línea que conecta dos puntos de la curva pasa por encima de la curva de indiferencia. Este supuesto no puede demostrarse desde los supuestos de las preferencias, sino que se basa en el principio de la diversidad en el consumo.

Este supuesto es útil en el sentido de encontrarnos con curvas de indiferencia que impliquen que el consumidor preferiría especializarse en el consumo de uno de los dos bienes. Estos son casos de estudio particulares. El caso de estudio general se refiere a aquel en que el consumidor desea intercambiar una parte de uno de los bienes por una parte del otro y terminar consumiendo una cierta cantidad de cada uno más que especializarse en el consumo de alguno de los dos. La relación marginal de sustitución

Bibliografía

Marcelo A. Elbaum; Administración de Carteras de Inversión 2da edición, ed. Macchi Grupo Editorial S.A. 2006.

Zvi Bodie, Alex Kane, Alan J. Marcus, Susana Gómez traductor, Principios de Inversiones 5ta edición, Madrid; México ed. McGraw-Hill, 2004.

John L. Maginn, Donal L. Tuttle, Managing Investment Portfolios: A Dinamic Proces, 2da edición, Editorial Warren, Gorham & Lamont Inc. 1990.

Belén Nieto, Los Modelos Multifactoriales de Valoración de Activos: Un Análisis Empírico Comparativo 1ra edición, Editor: Instituto Valenciano de Investigaciones Económicas, S.A. 2001.

Yesika Correa Jaime, Métodos de Optimización en la Construcción de Carteras de inversión, Tesis, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México 2013.

Juliana Borge Vergara, María Natalia Cervantes Luna, Portafolios de Inversión: Una Alternativa para el Aprovechamiento de los Recursos Remanentes de Tesorería, Tesis, Facultad de Administración; Universidad del Rosario; Bogotá, Colombia D.C. 2012.

Francisco López Herrera, Selección de Portafolios de Mínima Varianza Cuando están Expuestos a Diversos Factores de Riesgo, Nota Técnica, Revista Contaduría y Administración, No. 203. Octubre-Diciembre 2001.

Alaitz Mendizábal Zubeladia, Luis M. Miera Zabala, María Zubia Zubeladia, El Modelo de Markowitz en la Gestión de Carteras, Artículo, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea; España 2012.

Katherine Betancourt Bejarano, Carlos Mario García Díaz, Viviana Lozano Riaño, Teoría de Markowitz con Metodología EWMA para la Toma de Decisión Sobre cómo Invertir su Dinero; Publicado en Atalntic Review of Economics -1st Volume -2013; Universidad Piloto de Colombia, Colombia.

Juan Mascareñas, Gestión de Carteras II: Modelo de Valoración de Activos, Artículo; Versión 2012, Universidad Complutense de Madrid, http://www.ucm.es/info/jmas/load.htm

Christian Andew Johnson, Métodos de Evaluación del Riesgo para Portfolios de inversión No. 67, Banco Central de Chile Documentos de Trabajo Marzo del 2000, http://www.bcentral.cl/Estudios/DTBC/doctrab.htm