



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA – INSTRUMENTACIÓN

MODELOS ACÚSTICOS Y AURALIZACIÓN DEL ECO DE LA PIRÁMIDE DE
KUKULKÁN EN CHICHÉN-ITZÁ, YUCATÁN.

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:
SEBASTIAN MAURICIO PALACIOS ROMERO

TUTOR PRINCIPAL
DR. FELIPE ORDUÑA BUSTAMANTE
Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico

MÉXICO, D. F. DICIEMBRE 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

JURADO ASIGNADO:

Presidente: Dr. Rendón Garrido Pablo Luis

Secretario: Dr. Padilla Longoria Pablo

Vocal: Dr. Orduña Bustamante Felipe

1^{er.} Suplente: Dr. Ruíz Boullosa Ricardo

2^{d o.} Suplente: Dr. Cordourier Maruri Héctor Alfonso

Lugar o lugares donde se realizó la tesis: Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, UNAM.

TUTOR DE TESIS:

Dr. Orduña Bustamante Felipe

Felipe Orduña B

FIRMA

AGRADECIMIENTOS

O	A	M	O	T	E	L	J	N	F	F	S	S	K	A	A	R	K	U	N
S	Z	R	C	A	Q	G	S	X	O	R	F	M	V	A	Z	G	B	V	Y
L	W	V	R	W	U	T	L	Y	U	D	Ñ	D	A	T	Z	L	W	W	O
X	E	J	Z	N	A	L	R	P	Q	Q	S	Z	P	C	N	S	Z	K	F
C	T	Ñ	B	Z	Y	C	O	F	C	N	X	H	K	Ñ	R	N	K	K	T
D	D	N	A	M	A	M	X	Z	N	Y	S	A	J	P	Z	T	Z	P	Z
H	D	P	W	L	S	T	Ñ	P	J	X	A	Q	O	P	Z	S	D	Y	E
C	W	J	O	V	L	G	W	K	I	G	J	W	M	Q	N	P	G	H	M
P	Y	R	H	T	R	J	L	V	Q	B	B	W	A	O	D	X	D	Y	R
I	Q	X	F	U	H	I	H	G	O	B	Ñ	I	I	J	M	X	S	J	K
W	E	D	X	M	X	T	L	N	P	O	K	Y	U	Z	S	S	E	Z	X
I	W	J	V	O	U	A	Z	S	M	B	W	F	W	E	Ñ	N	K	N	Y
X	U	H	B	M	R	F	C	H	D	Ñ	E	Q	G	Z	O	S	E	H	O
Y	P	Q	S	L	C	G	R	X	K	L	L	L	Z	Y	B	I	A	E	E
M	D	K	U	L	M	A	Y	R	I	L	K	D	L	X	Z	T	Z	Q	M
D	T	D	O	D	A	P	A	P	I	G	I	E	B	O	C	H	Z	I	Y
S	S	I	O	B	M	S	E	S	W	H	M	P	Ñ	L	O	L	Y	Q	R
S	B	R	F	Ñ	P	K	A	W	Ñ	F	X	Ñ	H	Q	E	C	Ñ	I	J
I	T	Q	G	D	V	K	A	P	I	F	X	B	H	Q	F	W	J	Q	X
P	F	W	H	E	T	B	Ñ	S	M	Z	K	R	T	T	U	A	Y	K	T
C	L	G	B	D	Y	T	I	V	D	V	B	D	U	P	D	Ñ	F	J	M
O	F	M	Q	H	Y	K	R	X	L	I	A	B	V	Y	L	Z	T	A	T
H	S	O	Ñ	H	E	K	V	N	E	I	A	B	T	R	V	B	T	Q	Ñ
E	F	N	M	P	C	L	B	E	I	V	X	O	L	Y	H	A	N	K	C
R	F	K	P	C	F	P	P	Q	D	O	A	W	Y	C	K	B	L	B	D
T	D	S	Ñ	Q	I	K	D	Ñ	A	K	F	I	L	U	H	S	L	Z	W
X	G	S	X	Ñ	O	E	U	J	N	D	X	N	C	M	T	F	O	R	J
S	R	F	H	R	I	Z	A	Ñ	F	J	E	W	U	U	W	T	G	F	B
P	Z	Q	A	T	H	W	S	I	N	J	M	E	K	Z	M	A	F	U	S
R	Y	X	J	R	C	M	I	I	B	Z	I	L	Y	Y	F	I	Z	C	Y

Índice general

Índice de figuras

Resumen XI

Introducción XIII

1. Antecedentes	1
1.1. David Lubman	1
1.2. Nico F. Declercq	2
1.3. Frans A. Bilsen	2
1.4. Ultimos reportes	3
2. Fundamentos teóricos	5
2.1. Fundamentos Acústicos	6
2.2. Principio de Huygens	6
2.3. Reflexión debida a una barrera lisa y rígida	7
2.4. Radiación de fuentes acústicas	8
2.5. Fuente puntual monopolar	8
2.5.1. Fuentes extendidas	10
2.5.2. Fuente lineal	10
2.5.3. Pistón rectangular	12
2.6. Fundamentos de señales y sistemas	14
2.6.1. Análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo.	14
2.7. Respuesta al impulso y función de respuesta en frecuencia	14
2.7.1. Magnitud y Fase de $H(i\omega)$	15
2.7.2. Retraso de grupo.	16
2.7.3. Cepstrum.	16
2.8. Espectrograma	17

2.9. Análisis de una señal formada por dos pulsos	18
3. Desarrollo y Resultados	23
3.1. La pirámide de Kukulcán	23
3.2. Procesamiento de grabaciones del fenómeno “Cola de quetzal”	24
3.3. Modelado de la pirámide de Kukulcán.	27
3.3.1. Influencia del piso	30
3.4. Modelado de la radiación acústica de la escalinata.	31
3.4.1. Construcción de escalinata con fuente puntual monopolar	31
3.4.2. Construcción de escalinata con fuente lineal	36
3.4.3. Construcción de escalinata con piston rectangular.	40
3.4.4. Construcción de escalinata con arreglos de fuentes.	44
3.5. Resultados generales	51
3.6. Auralización	54
4. Conclusiones	57
4.1. Conclusiones generales.	57
4.2. Conclusiones respecto a los modelos.	58
4.2.1. Situación particular de alineación entre la pirámide y receptor/fuente.	58
4.3. Conclusiones acerca del procesamiento.	59
4.4. Perspectivas y trabajo futuro	59
A. Descripción de la programación en Matlab	61
B. Auralización	65
Bibliografía	

Índice de figuras

1.1.	A la izquierda, el espectrograma del eco de un aplauso debido a la pirámide de Kukulcán. A la derecha, el espectrograma del canto de un quetzal. .	2
1.2.	Comparación de espectrogramas de eco barrido y eco sintetizado. a) Espectrograma de canto de quetzal. b) Epectrograma de eco sintetizado mediante “repetition pitch”.	3
1.3.	Simulación de frentes de onda	4
2.1.	Construcción de un frente de onda circular. Dado un frente de onda circular AB se desarrollará en un tiempo posterior un frente de onda circular CD como resultado de la suma de la radiación de cada una de las fuentes puntuales constituyentes del frente AB.	6
2.2.	En el límite cuando el número de fuentes puntuales sobre los frentes de onda tiende a infinito, se puede considerar cada frente como una fuente extendida.	7
2.3.	Reflexión de un frente de onda circular debido a una barrera rígida. a) campo cercano. b)campo lejano.	8
2.4.	Una fuente puntual monopolar generará frentes de ondas esféricas concéntricas.	9
2.5.	Construcción de la fuente lineal mediante el caso límite de un arreglo lineal formado por un número infinito de monopolos.	11
2.6.	a)Arreglo lineal de N fuentes y de longitud L . b)Fuente lineal. Donde r' es la distancia entre el punto Q' y cada elemento diferencial dx a lo largo de la línea y θ es el ángulo entre r y la recta normal al eje longitudinal de la fuente. Se observa que si $r \gg L$, r' es prácticamente idéntico a r	11
2.7.	Representación del pistón rectangular, de dimensiones $a \times b$, como la distribución continua de monopolos.	13

2.8. Pistón rectangular de dimensiones $a \times b$ cuya superficie coincide con el plano XY y su centro geométrico esta en el origen del sistema de referencia. ϕ es el ángulo azimutal y θ es la colatitud.	13
2.9. Relación entrada-salida para un sistema lineal.	15
2.10. Cepstrum de una serie armónica.	17
2.11. Ejemplos de espectrogramas.	17
2.12. Señal $s(t)$ formada por dos pulsos separados τ en el tiempo.	18
2.13. Gráfica de la magnitud de $S(\omega)$	19
2.14. Cepstrum de $S(\omega)$	19
2.15. Gráficas de fase de $S(\omega)$. a) Ponderación $\alpha = 1$. b) Ponderación $\alpha \rightarrow 0$	20
2.16. Retardo de grupo de $S(\omega)$	21
3.1. Pirámide de Kukulkán.	24
3.2. Esquema del eco de la pirámide.	24
3.3. Situación en la que se hicieron las grabaciones. Posición en metros de la fuente F(0,30,1.8) y del receptor R(0,20,1.8).	25
3.4. Forma general de los audios grabados $S(t)$. Sonido directo de la fuente $x(t)$. Eco de la pirámide $y(t)$	25
3.5. Espectrograma del eco grabado en Chichén-Itzá.	26
3.6. Eco de la pirámide.	27
3.7. a) Localización de la pirámide respecto al sistema de referencia, donde el ancho de la escalinata es $a=8.5$ metros. b) Escalinata con $N=91$ escalones. Cada escalón con dimensiones $d=0.256$ metros.	27
3.8. Esquema y secuencia del fenómeno “Cola de quetzal”. a) Generación y propagación. b) Incidencia. c) Reflexión/Radiación d) Propagación e) Recepción.	28
3.9. Influencia del piso.	30
3.10. Esquema de construcción de la escalinata utilizando monopolos localizados en el vértice de cada escalón.	31
3.11. a) Respuesta al impulso. b) Acercamiento a las primeras reflexiones en la respuesta al impulso. T es el retardo relativo entre cada reflexión.	33
3.12. Casos extremos para el recorrido fuente \rightarrow monopolo \rightarrow receptor.	33
3.13. Espectrograma de la síntesis del eco de la pirámide construida con fuentes puntuales monopulares.	34
3.14. Magnitud de la respuesta en frecuencia de la síntesis del eco de la pirámide construida con fuentes puntuales monopulares. Se muestran las bandas armónicas, donde $f_1 = 526.3$ Hz y $f_2 = 714.2$ Hz.	35
3.15. Cepstrum de la señal $s(t)$	35
3.16. Construcción de escalera con fuente lineal.	36
3.17. Fuente lineal en el espacio.	37

3.18. Respuesta al impulso, modelo de fuente lineal. a)Receptor y fuente enfrente del centro geométrico de la línea, $\bar{F} = (0, 30, 1.8)$ y $\bar{R} = (0, 20, 1.8)$. b)Receptor y fuente desplazados $\bar{F} = (4.25, 30, 1.8)$ y $\bar{R} = (4.25, 20, 1.8)$	39
3.19. Magnitud de la respuesta en frecuencia del modelo basado en fuentes lineales, donde la fuente y el receptor no están localizados en frente del centro geométrico de la línea. $\bar{F} = (4.25, 30, 1.8)$ y $\bar{R} = (4.25, 20, 1.8)$	40
3.20. Construcción escalinata con pistones rectangulares	40
3.21. Pistón rectangular en el espacio.	41
3.22. Comparación entre las envolventes de la respuesta al impulso obtenida del modelo de pistones y monopolos. a) RI obtenida del modelo de pistones. b) RI obtenida del modelo de monopolos.	44
3.23. Magnitud de la respuesta en frecuencia de la síntesis del eco de la pirámide construida con pistones. Se muestran las bandas armónicas, donde $f_1 = 526.3$ Hz y $f_2 = 714.2$ Hz.	44
3.24. Arreglo de M fuentes lineales en cada escalón.	45
3.25. Secuencia esquemática de una onda incidente sobre el arreglo de fuentes lineales en cada escalón.	46
3.26. Respuesta al impulso del modelo con arreglo de fuentes lineales. a)Arreglo de 5 fuentes lineales por escalón. b)Arreglo de 25 fuentes lineales por escalón.	47
3.27. Arreglo de H×W fuentes monopulares en cada escalón.	48
3.28. Respuesta al impulso obtenida con un arreglo de 3×10 monopolos en cada escalón, además se muestra un zoom para evidenciar la problemática de definir un retraso entre espigas.	49
3.29. Resultados del análisis de la síntesis con arreglo de 3×10 monopolos por escalón. a)Función de magnitud. b)Cepstrum.	50
3.30. Espectrograma de la síntesis con arreglo de 3×10 monopolos por escalón.	50
3.31. Envolventes de las respuestas al impulso de los diferentes modelos para la construcción de la escalinata sin considerar los efectos del piso.	51
3.32. Función de Fase de la síntesis con modelo basado en monopolos	52
3.33. a)Longitud de la respuesta al impulso. b)Acercamiento a la función de magnitud, donde $\Delta f = 6.38$ Hz, es el periodo del rizo.	53
3.34. a)Magnitud de la respuesta en frecuencia, donde se muestra el ancho de banda en el que esta definida. b)Rizo en cepstrum debido a la forma y ancho de banda de la magnitud de la respuesta en frecuencia.	53
3.35. Esquema del procesamiento para llegar a la auralización de los modelos acústicos propuestos para el eco de la pirámide de Kukulcán.	55
A.1. Esquema general del funcionamiento del programa principal de cálculo de la radiación acústica de la pirámide.	63

Resumen

El fenómeno acústico llamado “Cola de quetzal” es bien conocido por aquellos que han tenido la experiencia de aplaudir frente a la escalinata de la pirámide de Kukulkán en Chichén-Itzá, Yucatán. El efecto acústico consiste en el peculiar eco generado por la escalinata de la pirámide. La sensación sonora que genera este eco en el escucha, es muy parecida a la del canto de un pájaro quetzal y ésta es la razón por la cual Lubman [9] denominó el fenómeno acústico como “Cola de quetzal”.

Uno de los primeros reportes acerca de fenómenos acústicos debidos a escalinatas fue hecho por Christian Huygens en 1693, quien estando entre la escalinata de piedra y la fuente de agua, en el jardín del castillo de Chantilly en Francia, escuchó que el sonido proveniente de la escalinata tenia cierto tono musical mientras la fuente estuviera brotando. Huygens apunto que este tono era originado por la reflexión del ruido de la fuente sobre la escalinata y que el mecanismo era el mismo que el de cualquier sonido, o ruido, que reiterado en pequeños intervalos iguales produce un tono, tal como ocurre en un órgano de tubos.

Respecto a la descripción del fenómeno “Cola de quetzal”, en la relativamente escasa literatura disponible se han reportado distintas aproximaciones, desde modelos basados en dispersión de ondas, como el que desarrolla Declercq [5], y *repetition pitch*, mostrados en los trabajos de Bilsen [2] y Cordurier [4], hasta la solución mostrada por Garza [7], para la distribución de presión acústica de un escenario simplificado donde ocurre el fenómeno. El hecho de que existen muchos sitios arqueológicos mayas donde se escuchan fenómenos acústicos interesantes y que además el pájaro quetzal sea un animal muy importante para esta cultura, ha provocado una variedad de discusiones y estudios acerca de la intencionalidad de los constructores para generar el fenómeno “Cola de quetzal”.

El particular eco generado por la pirámide es explicado en el presente trabajo mediante distintas aproximaciones, todas estas, considerando que la pirámide actúa como un conjunto de fuentes sonoras radiantes. Así tenemos que la pirámide se construye situando una fuente puntual monopolar, lineal o pistón por cada escalón. Además se configuran modelos donde cada escalón es construido con arreglos de fuentes lineales y monopolares. También se hacen construcciones que incluyen el efecto del piso. La intención fundamental detrás de la decisión de usar este tipo de aproximaciones es construir

modelos acústicos simples y de bajo costo computacional para su simulación y auralización (versión audible). Teniendo como ejemplo el caso de Huygens, y de muchos otros reportes importantes en el campo de la Acústica que se han hecho escuchando, se presenta la auralización como una herramienta de análisis de los modelos propuestos.

Por otra parte, se hace el análisis de grabaciones *in situ* del fenómeno acústico.

Introducción

El peculiar eco que se escucha debido a la reflexión de un aplauso sobre la pirámide de Kukulkán tiene el efecto inmediato de animar la curiosidad. Se sabe de diversos fenómenos acústicos en sitios arqueológicos y de objetos maya, lo cual propone que el sonido era un aspecto importante para esta cultura. Además, el hecho de que el eco de la pirámide sea tan parecido al canto del pájaro quetzal, animal relacionado con Quetzalcóatl (una de las principales deidades de la cultura mesoamericana), estimula la imaginación. En medio del juego que solemos tener con aquello que ha atrapado nuestra atención se revela una multitud de posibilidades para explicar y atender el asunto. Entonces, ¿cómo analizar el eco de la pirámide de Kukulkán? -Una respuesta, que al mismo tiempo es el objetivo de este trabajo de tesis, es: realizar un estudio sistemático, de la acústica del eco de la pirámide, basado en modelos fisico-matemáticos de fuentes acústicas. Este estudio consiste en la construcción de modelos simples para la escalinata de la pirámide basados en tres distintas fuentes acústicas: fuentes puntuales monopolares, fuentes lineales o pistones rectangulares. Para cada una de estas aproximaciones se analizará su función de respuesta en frecuencia y su respuesta al impulso. También será posible auralizar (versión audible, [anexo digital]) los resultados obtenidos, esto con la intención de incluir el sentido del oído como una herramienta de análisis de los modelos. El carácter humanista del fenómeno acústico no será abordado de ninguna manera en el desarrollo de esta tesis; no se discutirá acerca de la intencionalidad detrás del eco de la pirámide. Se utilizara Matlab para todo el cálculo y procesamiento.

El capítulo 1 contiene una revisión de los trabajos previos sobre la acústica del eco de la pirámide de Kukulkán. Se hace una breve descripción de los trabajos de Lubman [9], Declercq [5] y Bilsen [2]. Después se reporta la idea general del trabajo basado en el método de elemento finito abordado por Garza et al. [7] y se termina con la referencia de la minuciosa revisión de Ruiz [15] y su modelo propuesto.

En el capítulo 2 se disponen todos los fundamentos teóricos necesarios para lograr el objetivo de esta tesis, es decir, los fundamentos para realizar un estudio basado en fuentes acústicas que permitan la construcción de modelos simples para el eco de la pirámide de Kukulkán. En las primeras secciones se revisan los fundamentos de propagación y reflexión de ondas acústicas. Posteriormente se muestra un esbozo de la deducción de los modelos matemáticos para la radiación de fuentes monopolares, fuentes lineales y

radiación de un pistón rectangular. En las últimas secciones se revisan los conceptos básicos para el estudio de sistemas y señales, como la respuesta impulso y función de respuesta en frecuencia, después se muestran herramientas y ejemplos de análisis tales como función de magnitud y fase, retraso de grupo, cepstrum y espectrograma.

En el capítulo 3 se muestra la construcción y resultados del procesamiento de los modelos de la escalinata. Se comienza con la descripción de las dimensiones de la pirámide y las generalidades del modelado del fenómeno acústico. Después se muestran los resultados del procesamiento de grabaciones *in situ*. Posteriormente se presenta el desarrollo de la construcción de la escalinata, la cual se hace localizando una fuente monopolar, lineal o pistón rectangular para modelar cada escalón. También se construye la escalinata con un arreglo de fuentes por cada escalón (monopolos y líneas). El capítulo finaliza con una descripción del proceso para obtener la versión audible de cada uno de los modelos y una serie de comentarios de los resultados obtenidos.

En el capítulo 4 se organiza una serie de conclusiones y perspectivas para trabajo futuro.

Capítulo 1

Antecedentes

A continuación se hace una revisión de los trabajos más relevantes que han estudiado el fenómeno acústico “Cola de quetzal”.

1.1. David Lubman

Lubman[9] hizo la comparación entre el eco debido a la escalinata de la pirámide y el canto de un quetzal. En la figura 1.1 se muestran los espectrogramas de las grabaciones reportadas en este trabajo. Ambos espectrogramas consisten esencialmente en tres curvas en la que cada una de estas hace un barrido descendente en frecuencia. Estas curvas son armónicos de una curva fundamental que es enmascarada por el ruido. Las curvas en orden ascendente corresponden a el segundo, tercero y cuarto armónico.

Lubman apunta que el fenómeno se debe a la versión acústica de la difracción de Bragg. La Ley de Bragg permite estudiar las direcciones en las que la difracción de rayos X, sobre la superficie periódica de un cristal, produce interferencias constructivas. La versión acústica de este fenómeno considera a la escalinata como la estructura periódica a la cual inciden ondas en el rango de audio. Lubman hace el cálculo según la ley de Bragg para las dimensiones de la pirámide y construye el eco barrido correspondiente al segundo armónico, además indica que las interferencias constructivas, esencialmente, están determinadas por las dimensión de los escalones. En este caso, se tiene que estas interferencias favorecen el reforzamiento de frecuencias que coinciden con las principales componentes del canto del quetzal.

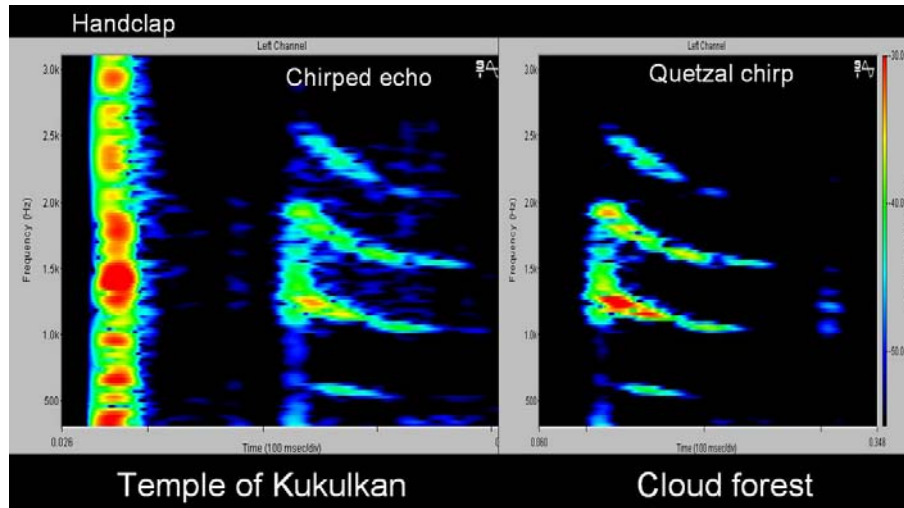


Figura 1.1: A la izquierda, el espectrograma del eco de un aplauso debido a la pirámide de Kukulcán. A la derecha, el espectrograma del canto de un quetzal.

1.2. Nico F. Declercq

Declercq[5] propone una descripción del fenómeno mediante el estudio de la difracción de las ondas considerando la escalinata como una superficie rugosa y haciendo uso de la teoría de Claeys y Leroy[3], la cual considera que la dispersión de la onda es debida al plano tangente en cada punto de la superficie rugosa. La solución mediante esta aproximación es válida para el caso en el que la longitud de onda, de la onda incidente, es del mismo orden de magnitud que el del periodo de corrugación, y que la amplitud de la corrugación no debe exceder la longitud de la onda incidente. Las condiciones anteriores se determinan mediante las dimensiones de los escalones de la pirámide, y para los cálculos de Declercq, se obtiene una aproximación valida a frecuencias de incidencia por debajo de 5000Hz. Declercq añade el efecto del piso y del tipo de sonido incidente a sus análisis, concluyendo que el piso no añade un efecto considerable al eco, mientras que por el contrario, el eco es fuertemente dependiente del tipo de sonido incidente.

1.3. Frans A. Bilsen

Bilsen[2] propone que este eco barrido se debe a una secuencia de reflexiones y lo predice correctamente en términos de *repetition pitch*. Cuando un sonido se combina con sus repeticiones retardadas, se obtiene una señal compuesta que tiene un espectro “ondulado”. En particular, el espectro de ruido blanco combinado con una repetición, tiene máximos en los múltiplos de una frecuencia “fundamental” correspondiente al

recíproco del tiempo de retardo; esto genera la percepción de un tono. Con esta idea se propone que el efecto de la “Cola del quetzal” es producido por la superposición múltiple de la señal (aplauso) retrasada. Estos retrasos se deben a las reflexiones debidas a cada escalón, los cuales forman una serie que se percibe como un sonido tonal[4]. Conocidas las dimensiones de los escalones y de la pirámide, es posible calcular los retrasos de cada uno de las reflexiones y simular el eco producido. En la figura 2 podemos observar la comparación entre los resultados de la simulación mediante *repetition pitch* reportada por Cordourier[4] y la grabación, de Declercq, del canto del quetzal.

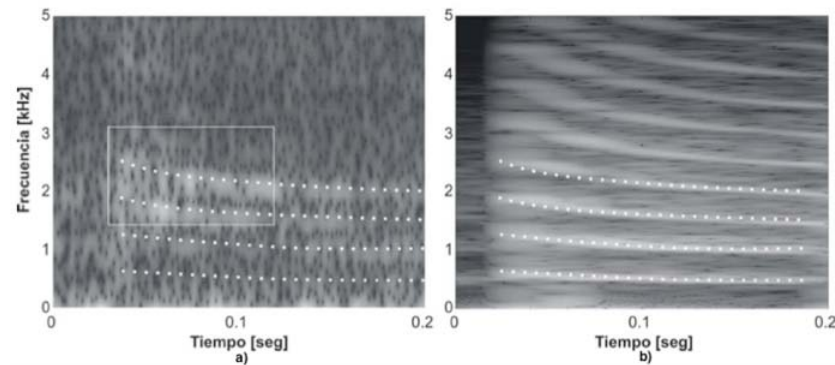


Figura 1.2: Comparación de espectrogramas de eco barrido y eco sintetizado. a) Espectrograma de canto de quetzal. b) Espectrograma de eco sintetizado mediante “repetition pitch”.

1.4. Ultimos reportes

Clara Garza y sus colaboradores[7] plantean un modelo de frentes de onda y realizan simulación computacionales. En las simulaciones, consideran condiciones de frontera conocidas como condiciones de Neumann, la cuales corresponden a superficies ideales, completamente reflejantes. La simulación es una secuencia en tiempo del campo acústico en frente de la escalinata. Podemos observar en la figura 3 el momento inicial de la simulación, donde tenemos en blanco el perfil de la escalinata (geometría simplificada) y el punto rojo de máxima intensidad es la fuente, que en este caso genera un pulso.

En este trabajo se reporta la evolución de la presión acústica para un escenario simplificado en 2 dimensiones.

En la tesis “Análisis del efecto “Cola de quetzal” en “El Castillo” de Chichén Itzá, Yucatán” [15], se hace una revisión minuciosa y detallada de los trabajos antes mencionados además de proponer un modelo, que el mismo autor describe como una continuación del modelo de *repetition pitch*, basado en fuentes puntuales monopulares. La idea

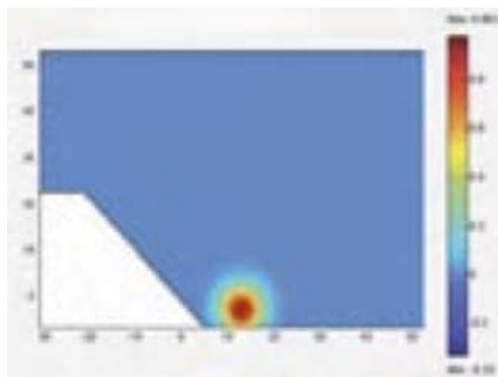


Figura 1.3: Simulación de frentes de onda

fundamental de este modelo es construir el eco a partir de la radiación acústica debida a un conjunto de monopolos, cada uno de los cuales está ubicado en el arista (fillo) de cada uno de los escalones de la pirámide. El primer modelo con fuentes acústicas desarrollado en esta tesis (sección 3.4.1) sigue esta misma idea.

Capítulo **2**

Fundamentos teóricos

2.1. Fundamentos Acústicos

En las siguientes secciones se desarrollarán los principios básicos de propagación de ondas acústicas y modelos de fuentes radiantes. Los resultados mostrados están basados, para la propagación de ondas, en el trabajo de French[6] y para las fuentes radiantes en varios textos de acústica general[1] [8] [14] [10].

2.2. Principio de Huygens

Se basa en el tratamiento general de la perturbación como algo que se propaga, de un punto a otro adyacente, a través de un medio.

Un foco emisor es aquel elemento que introduce una perturbación en un medio, es decir una fuente emisora de ondas.

Para una onda que se transmite en un medio, como se muestra en la figura 2.1, se tiene que cada uno de los puntos sobre su frente de onda puede considerarse como un nuevo foco emisor que radia con la misma velocidad y frecuencia, que el frente de onda del que procede, y cuya envolvente en un instante posterior constituye el nuevo frente de onda.

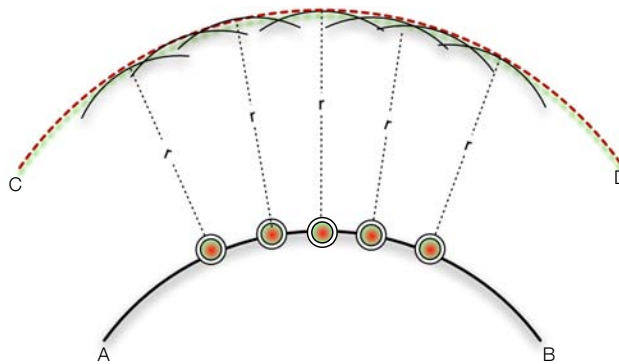


Figura 2.1: Construcción de un frente de onda circular. Dado un frente de onda circular AB se desarrollará en un tiempo posterior un frente de onda circular CD como resultado de la suma de la radiación de cada una de las fuentes puntuales constituyentes del frente AB.

Todo punto alcanzado por el frente de onda se comporta como un nuevo foco emisor y el conjunto de estos nuevos focos constituyen el nuevo frente de onda. La distribución continua de estos focos puntuales sobre el frente de onda, construyen lo que llamaremos una fuente emisora extendida, es decir, una superficie radiante, véase la figura 2.2.

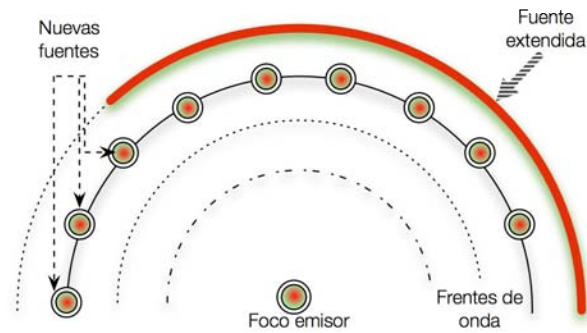


Figura 2.2: En el límite cuando el número de fuentes puntuales sobre los frentes de onda tiende a infinito, se puede considerar cada frente como una fuente extendida.

2.3. Reflexión debida a una barrera lisa y rígida

La barrera lisa y rígida es un elemento que se opone inconmensurablemente a la propagación de la perturbación que un frente de onda representa, es decir, no hay transmisión a través de ella y todo lo que respecta a la perturbación, es reflejado.

Cuando un punto de la barrera es alcanzado por uno de los focos constituyentes del frente de onda, éste se comporta como un foco emisor que genera una perturbación opuesta, dando lugar a la reflexión total de la onda. De esta forma tenemos que cada punto sucesivo a lo largo de la barrera, conforme es alcanzado por el frente de onda, resulta ser una nueva fuente. El conjunto de todos los puntos de la barrera alcanzados por el frente de onda en un mismo instante, puede ser considerado como una fuente extendida que radia una onda en retroceso respecto al frente de onda original.

El punto en el que el frente de onda, producido por la fuente mostrada en la figura 2.3.a, toca la barrera por primera vez, se genera una fuente secundaria en A, la cual radia en dirección opuesta; tiempo después el frente ha avanzado y coincide en los puntos B y B' de la barrera, generando simultáneamente dos fuentes secundarias. Lo mismo sucederá cuando el frente se mueva hasta coincidir en C y C'. Con esta geometría tenemos que mientras el frente avanza e incide sobre la barrera, se producirán un par de fuentes secundarias en cada instante. Cuando la situación geométrica, entre el frente de onda y la barrera, permite que en un instante se genere una distribución continua de fuentes secundarias, se produce una fuente extendida. En la figura 2.3.b podemos observar que los frentes de onda más alejados de la fuente se aproximan a frentes planos. Ésta es la condición de frentes de onda circulares en campo lejano. En estas condiciones tenemos que cuando el frente de onda plano incide sobre la barrera, se genera una fuente extendida, que en este caso es una fuente lineal.

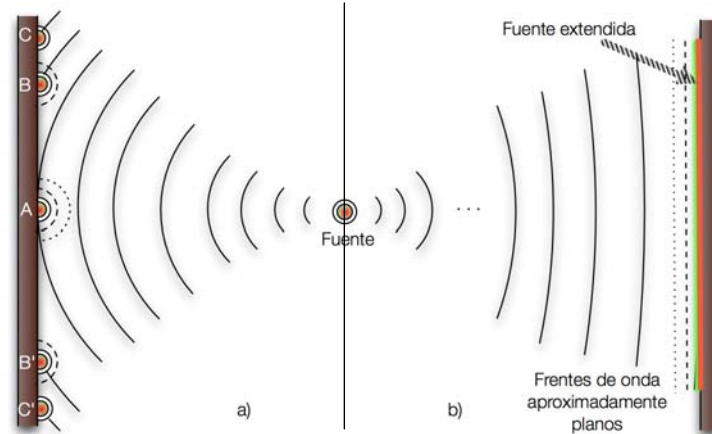


Figura 2.3: Reflexión de un frente de onda circular debido a una barrera rígida. a) campo cercano. b) campo lejano.

2.4. Radiación de fuentes acústicas

Existe un muy diverso conjunto de fuentes acústicas, desde instrumentos musicales y bocinas hasta la propia voz humana. Para el estudio analítico de las características de las fuentes se comienza utilizando modelos matemáticos de fuentes acústicas ideales. Se consideran geometrías sencillas y simplificaciones físicas. Las condiciones ideales más generales que se aplicarán al estudio de las siguientes fuentes acústicas es que éstas radian en un medio infinito, homogéneo e isotrópico y todas son congruentes con las condiciones de la acústica lineal.

2.5. Fuente puntual monopolar

La fuente más sencilla de ondas acústicas es una esfera pulsante cuyo radio varía sinusoidalmente con el tiempo, es decir, la esfera pulsa en un movimiento armónico. La esfera puede ser aproximada a un punto en el caso en el que la longitud de onda, asociada a la frecuencia de vibración, es pequeña respecto al radio. En estas condiciones es llamada fuente puntual monopolar. Considerando un flujo irrotacional, la fuente generará ondas esféricas cuyo comportamiento estará modelado por la ecuación de onda

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

donde Φ es la función potencial de velocidad y c la velocidad del sonido.

El operador nabla en coordenadas esféricas se reduce a

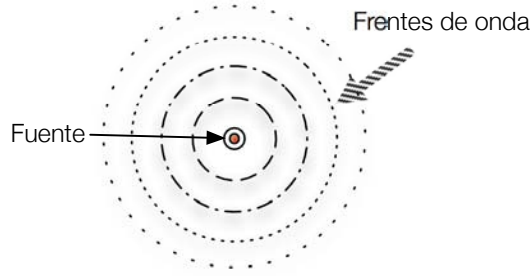


Figura 2.4: Una fuente puntual monopolar generará frentes de ondas esféricas concéntricas.

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

La solución general de la ecuación 2.1 tendrá la forma

$$r\phi = f(r - ct) + g(r + ct)$$

y en campo libre, donde solo se produce una onda esférica que se aleja de la fuente, será

$$\phi(r, t) = -\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Definiendo a q como una medida de que tanta masa mueve la fuente, es decir, como la amplitud de radiación y ρ_o como la densidad constante del medio, se tiene que

$$\phi(r, t) = -\frac{1}{4\pi\rho_o r} q\left(t - \frac{r}{c}\right). \quad (2.2)$$

Utilizando la ecuación de movimiento (Euler)

$$\rho_o \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla P = 0,$$

se calcula la presión p , como

$$p = -\rho_o \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Si suponemos que la fuente es armónica

$$q = q_0 e^{i\omega t}$$

y sustituyendo 2.2 en 2.3, la presión en un punto que esta a una distancia r de la fuente estará dada por

$$p(r, t) = i\omega \frac{q_0}{4\pi r} e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}$$

$$p(r, t) = ik \frac{q_0 c}{4\pi} \cdot \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r};$$

tomando únicamente la porción espacial tenemos

$$p(r) = ik \frac{q_0 c}{4\pi} \cdot \frac{e^{-ikr}}{r}$$

$$p(r) = ikA \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (2.4)$$

En adelante se utilizara este resultado, el cual corresponde a la solución para la ecuación de Helmholtz, para la deducción de la radiación de las fuentes extendidas.

Los frentes de onda generados por la fuente puntual monopolar se pueden considerar planos en el campo lejano, el cual esta definido cuando $kr \gg 1$.

2.5.1. Fuentes extendidas

La radiación de la fuente puntual monopolar se utiliza como elemento básico para la representación de fuentes más complejas. Debido a que la ecuacion de Helmholtz es lineal es posible configurar espacialmente una distribución de fuentes monopolares y obtener la representación de una fuente extendida como la suma de las presiones producidas por las fuentes individuales.

2.5.2. Fuente lineal

La radiación acústica de una línea puede ser obtenida mediante el arreglo lineal de N fuentes puntuales monopolares que radían todas en fase y con la misma amplitud

de radiación. En la figura 2.5 se muestra la fuente lineal como el caso límite en el que en un arreglo lineal de longitud L , N tiende a infinito y d , que es la distancia entre monopolos, tiende a cero.

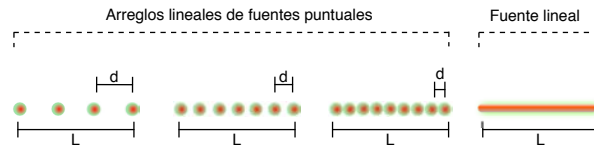


Figura 2.5: Construcción de la fuente lineal mediante el caso límite de un arreglo lineal formado por un número infinito de monopolos.

El campo acústico asociado al arreglo lineal de la figura 2.6.a se calcula como la suma de las presiones de cada monopolo. La presión total en el punto Q , debida al arreglo, es

$$p(r') = \sum_{n=1}^N ikA \frac{e^{-ikr'_n}}{r'_n}.$$

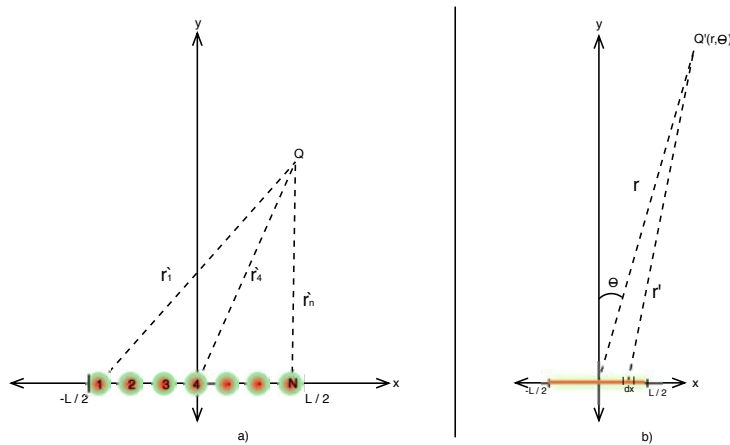


Figura 2.6: a) Arreglo lineal de N fuentes y de longitud L . b) Fuente lineal. Donde r' es la distancia entre el punto Q' y cada elemento diferencial dx a lo largo de la línea y θ es el ángulo entre r y la recta normal al eje longitudinal de la fuente. Se observa que si $r \gg L$, r' es prácticamente idéntico a r .

La fuente lineal mostrada en la figura 2.6.b puede ser considerada como una distribución continua de monopolos, por lo que la presión será la integral a lo largo de la línea L. (La esencia de este desarrollo fue consultado en *Fundamentals of Acoustics*[8])

$$p(r') = \int_L ikA \frac{e^{-ikr'}}{r'} dL$$

Cuando el punto Q' esta lo suficientemente lejos de la línea ($r \gg L$), la presión será

$$p(r, \theta) = ik \frac{A}{r} e^{-ikr} \int_{-L/2}^{L/2} e^{ikx \sin \theta} dx$$

$$p(r, \theta) = ik \frac{A}{r} e^{-ikr} \text{sinc} \left(\frac{1}{2} kL \sin \theta \right). \quad (2.5)$$

La ecuación [2.5] es valida para campo lejano, él cual se estima como:

$$\frac{r_{min}}{L} \sim \frac{1}{4} \frac{L}{\lambda}$$

donde r_{min} es una aproximación de la distancia a la cual comienza el campo lejano y L es la longitud de la línea.

2.5.3. Pistón rectangular

La radiación de un pistón rectangular plano montado sobre una pantalla infinita se puede representar como la distribución continua de monopolos que cubren una geometría rectangular.

La presión en un punto del espacio generada por la radiación acústica de un pistón, de dimensiones a por b , puede obtenerse dividiendo la superficie del pistón en diferenciales de superficie ds , cada uno de los cuales actúa como una fuente monopolar. El arreglo de monopolos que conforman la cara del piston radian en fase y con la misma *strength*, vease la figura 2.7. La radiación en el punto Q'' , mostrado en la figura 2.8, estará dada por

$$p(r, \theta, \phi) = \int_s ikA \frac{e^{-ikr}}{r} ds.$$

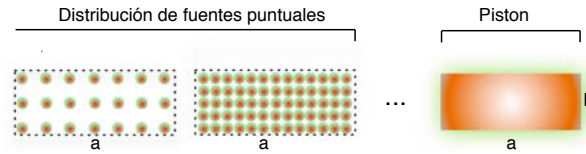


Figura 2.7: Representación del pistón rectangular, de dimensiones $a \times b$, como la distribución continua de monopolos.

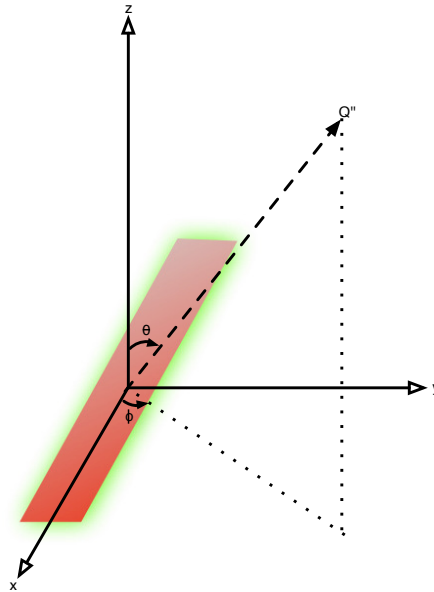


Figura 2.8: Pistón rectangular de dimensiones $a \times b$ cuya superficie coincide con el plano XY y su centro geométrico esta en el origen del sistema de referencia. ϕ es el ángulo azimutal y θ es la colatitud.

El campo lejano para las fuentes extendidas se define en términos de la longitud mas grande de la geometría de la fuente. Para el pistón rectangular, en el caso en el que $a > b$, la distancia mínima aproximada a partir de la cual se considera campo lejano es

$$\frac{r_{min}}{a} \sim \frac{a}{4\lambda}.$$

En condiciones de campo lejano la presión en el punto Q'' será

$$p(r, \theta, \varphi) = ikabA/r \cdot \text{sinc} \left(\frac{1}{2}ka \sin(\theta) \cos \varphi \right) \text{sinc} \left(\frac{1}{2}kb \sin(\theta) \sin \varphi \right) e^{ikr} \quad (2.6)$$

Este resultado puede se ser consultado en *Handbook of Acoustics*[14].

2.6. Fundamentos de señales y sistemas

2.6.1. Análisis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Un sistema lineal e invariante en el tiempo es aquel en el que un corrimiento en el tiempo de la señal de entrada provoca, únicamente, un corrimiento en el tiempo de la señal de salida; y en el que además se cumple la propiedad de superposición: si una entrada consiste en la suma de varias señales, entonces la salida será la suma de las respuestas del sistema a cada una de estas señales. En las secciones siguientes se mostrarán algunas propiedades y análisis de estos sistemas. Los desarrollos expuestos están basados en literatura de análisis y procesamiento de señales [11] [12] [13].

2.7. Respuesta al impulso y función de respuesta en frecuencia

Una señal cualquiera $x(t)$ se puede construir a partir de una secuencia de impulsos unitarios, es decir, una señal puede ser considerada como la suma ponderada de funciones impulso unitarios desplazados. Esto corresponde a la representación de una función arbitraria como una combinación lineal de impulsos unitarios desplazados $\delta(t - \tau)$ y escalados por la función $x(\tau)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau.$$

Si $x(t)$ es la señal de entrada a un sistema lineal, la salida $y(t)$ deberá ser la superposición de las respuestas a cada uno de los impulsos unitarios desplazados que constituyen a $x(t)$. Si además el sistema es invariante en el tiempo, las respuestas a los impulsos desplazados deberán ser versiones de la respuesta a la función impulso unitario $\delta(t)$ desplazadas de igual forma

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau,$$

es decir, se trata de la convolución entre $x(t)$ y $h(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t), \tag{2.7}$$

donde $h(t)$ es la respuesta a $\delta(t)$, en otras palabras, la respuesta del sistema a la función impulso. La función $h(t)$ caracteriza por completo al sistema.

Tomando la transformada de Fourier de la ecuación [2.7] se obtiene la caracterización del sistema en el dominio de la frecuencia, véase la figura 2.9,

$$y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(i\omega) = X(i\omega) \cdot H(i\omega).$$

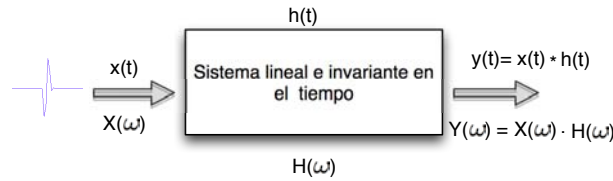


Figura 2.9: Relación entrada-salida para un sistema lineal.

La función $H(i\omega)$ es la función de respuesta en frecuencia del sistema y esta definida como:

$$H(i\omega) = \frac{Y(i\omega)}{X(i\omega)}. \quad (2.8)$$

Multiplicando por el conjugado de la señal de entrada al denominador y al numerador de la ecuación [2.8], se obtiene una versión de la función de respuesta en frecuencia, la cual tiene ventajas ante la presencia de ruido en la señal de salida

$$H(i\omega) = \frac{Y(i\omega)}{X(i\omega)} \cdot \frac{X^*(i\omega)}{X^*(i\omega)},$$

$$H(i\omega) = \frac{S_{xy}(i\omega)}{S_{xx}(\omega)},$$

donde S_{xy} es conocido como el espectro cruzado y S_{xx} como el autoespectro de $X(j\omega)$.

2.7.1. Magnitud y Fase de $H(i\omega)$.

En general la función de respuesta en frecuencia de un sistema es compleja y puede ser escrita en términos de su magnitud y fase

$$H(i\omega) = |H(i\omega)| e^{i\angle H(i\omega)}.$$

La magnitud de una función compleja describe su contenido de frecuencias; proporciona información acerca de las magnitudes relativas de las componentes de frecuencia que contiene la función.

La fase describe, de manera semejante, las fases relativas de las componentes de frecuencia.

El efecto que un sistema tiene sobre la señal de entrada $X(i\omega)$ consiste, por una parte, en el escalamiento de las magnitudes de las componentes de frecuencia de la señal de entrada

$$|Y(i\omega)| = |H(i\omega)| \cdot |X(i\omega)|;$$

y por otra, la adición de la fase de la función de transferencia $\angle H(i\omega)$ a la fase de la señal de entrada

$$\angle Y(i\omega) = \angle H(i\omega) + \angle X(i\omega).$$

Este cambio de fase se interpreta como un desplazamiento en el tiempo de las componentes de frecuencia de la señal de salida respecto a la de entrada.

2.7.2. Retraso de grupo.

El retraso de grupo es una medida del retardo relativo de las componentes de frecuencia que experimenta la señal de salida de un sistema respecto a la señal de entrada. Esta medida permite visualizar en tiempo los retardos asociados a los cambios de fase que produce el sistema sobre la señal de entrada. El retraso de grupo está definida como el negativo de la derivada de la fase, de la función de transferencia, respecto a la frecuencia

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} [\angle H(i\omega)].$$

En general la fase $\angle H(i\omega)$ es expresada como una función módulo 2π , donde los valores que puede tomar la función se restringen al intervalo $[-\pi, \pi]$, lo cual genera discontinuidades, provocando que la función sea no diferenciable en algunos puntos. Debido a lo anterior es necesario que, para el cálculo del retraso de fase, se utilice la función de fase extendida. Ésta función se obtiene mediante la adición o sustracción de un múltiplo entero de 2π en cada una de las discontinuidades, de esta manera la función es diferenciable en todo punto.

2.7.3. Cepstrum.

El cepstrum de potencia está definido como la transformada inversa de Fourier del logaritmo de la magnitud al cuadrado, de la transformada de Fourier de una función en el dominio del tiempo. Este análisis proporciona información acerca de las estructuras periódicas presentes en la magnitud de la transformada de Fourier. De esta forma tenemos que el cepstrum, de la respuesta al impulso $h(t)$ de un sistema, da información acerca de las estructuras periódicas presentes en la magnitud de la función de respuesta en frecuencia $|H(i\omega)|$

$$c(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ \log |H(i\omega)|^2 \}.$$

El cepstrum puede ser utilizado para la detección de ecos en señales de tiempo ya que estos producen estructuras periódicas en la magnitud de su transformada de Fourier.

Si $G(f) = |H(i\omega)|$, con $\omega = 2\pi f$, tiene la forma de la figura 2.10, la cual está compuesta por una serie de pulsos separados $\frac{1}{\delta}$ [hertz], se traducirá en el cepstrum como

una serie de pulsos separados δ [segundos], distancia que representa el retardo relativo entre reflejos de un eco en la señal de tiempo.

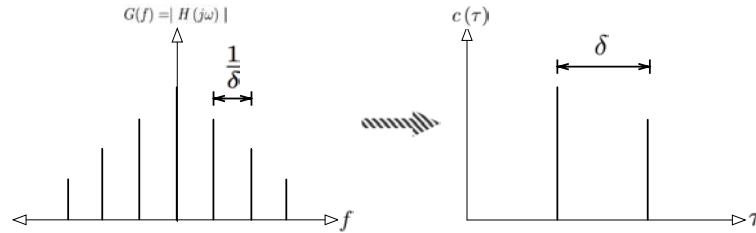


Figura 2.10: Cepstrum de una serie armónica.

2.8. Espectrograma

El espectrograma muestra el desarrollo temporal del contenido de frecuencias de una señal. En términos generales se obtiene calculando, por bloques, la transformada de Fourier de una señal en tiempo. El espectrograma es una representación en 3 dimensiones donde el eje horizontal es el tiempo, el vertical la frecuencia y mediante una escala de colores se representa la amplitud.

En la figura 2.11 se muestra el espectro de dos señales. En el inciso a) se muestra el espectro de un tono de 100 hertz; en el inciso b) se muestra el espectro de una señal que hace un barrido en frecuencia, es decir, una señal que cambia de frecuencia de manera continua a lo largo del tiempo desde 0-400 hertz, ambas con una escala de azul a rojo representando de la mínima a la máxima amplitud respectivamente.

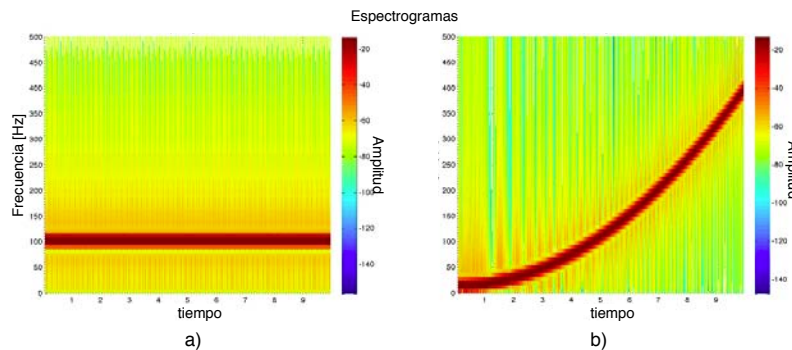


Figura 2.11: Ejemplos de espectrogramas.

2.9. Análisis de una señal formada por dos pulsos

Una señal en el tiempo formada por dos pulsos separados por τ segundos, como la que se muestra en la figura 2.12, puede ser representada analíticamente como

$$s(t) = \delta(t) + \alpha \cdot \delta(t - \tau),$$

donde $\alpha \cdot \delta(t - \tau)$ es una replica retrasada y ponderada de $\delta(t)$.

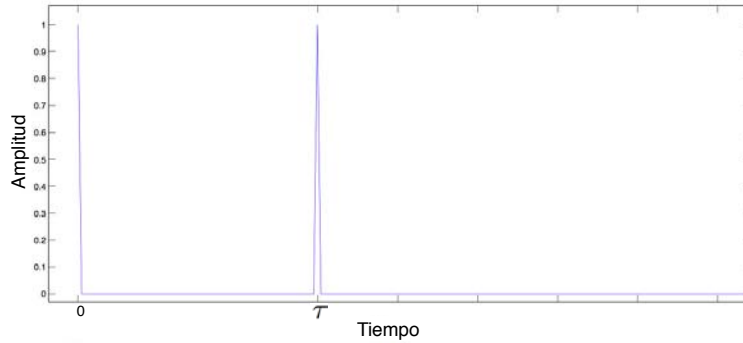


Figura 2.12: Señal $s(t)$ formada por dos pulsos separados τ en el tiempo.

El análisis en frecuencia de la señal esta definido por

$$\mathcal{F}\{s(t)\} = S(\omega) = 1 + \alpha \cdot e^{-i\omega\tau},$$

donde la magnitud es

$$|S(\omega)| = (1 + \alpha \cdot e^{-i\omega\tau})(1 + \alpha \cdot e^{i\omega\tau})$$

$$|S(\omega)| = 1 + \alpha(e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau}) + \alpha^2$$

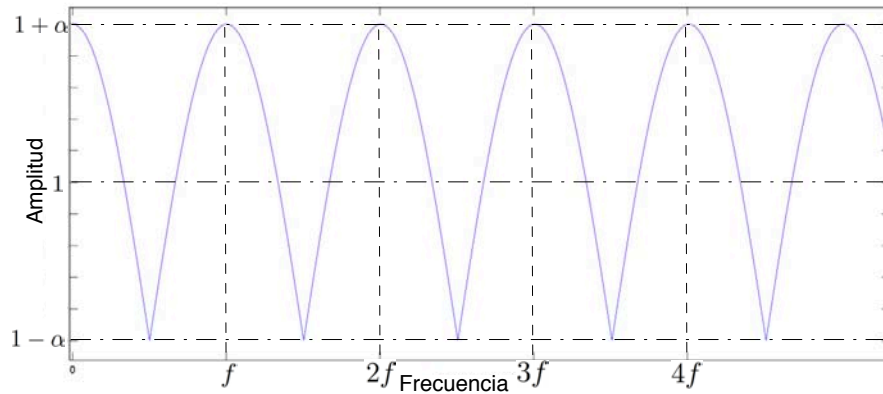
$$|S(\omega)| = 1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos(\omega\tau) \quad (2.9)$$

y la fase

$$S(\omega) = 1 + \alpha(\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau))$$

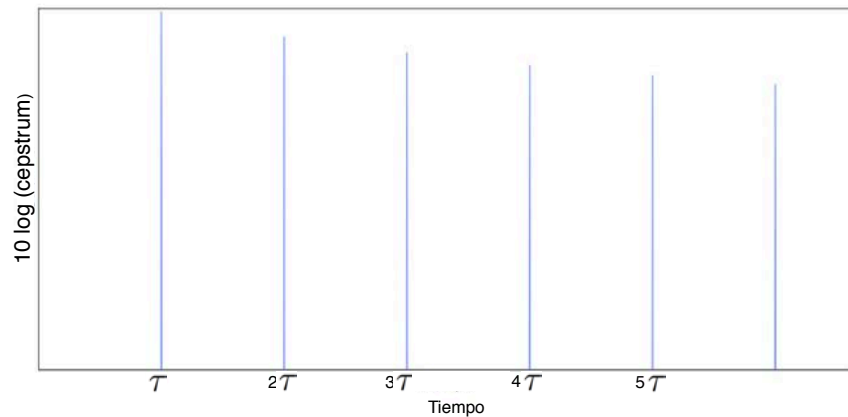
$$\angle S(\omega) = \arctan\left(\frac{-\alpha \sin(\omega\tau)}{1 + \alpha \cos(\omega\tau)}\right).$$

Según la ecuación [2.9] la función de magnitud es periódica y tendrá valores máximos para múltiplos enteros de una frecuencia f , véase la figura 2.13, definida por $f = 1/\tau$.

Figura 2.13: Gráfica de la magnitud de $S(\omega)$

Los máximos y mínimos de la función de magnitud están definidos por α . Si la amplitud de la réplica tiende a cero, el recorrido de la función se hace cada vez menor hasta el caso en el que no hay oscilación y la magnitud permanece constante para todas las frecuencias.

La estructura periódica de la magnitud de $S(\omega)$ genera una serie de espigas retardadas τ en el cepstrum, véase la figura 2.14.

Figura 2.14: Cepstrum de $S(\omega)$.

La función de fase de $S(\omega)$ tiene periodo, a lo largo del eje de frecuencia, de f . La variación de la constante de ponderación α , además de tener efecto en el recorrido, tiene efecto sobre la forma de onda de la función de fase. En la figura 2.15a) se observa la

forma de onda, para cuando $\alpha = 1$, la cual se transforma, conforme α tiende a cero, en la forma de onda mostrada en la 2.15b), conservando siempre el periodo.

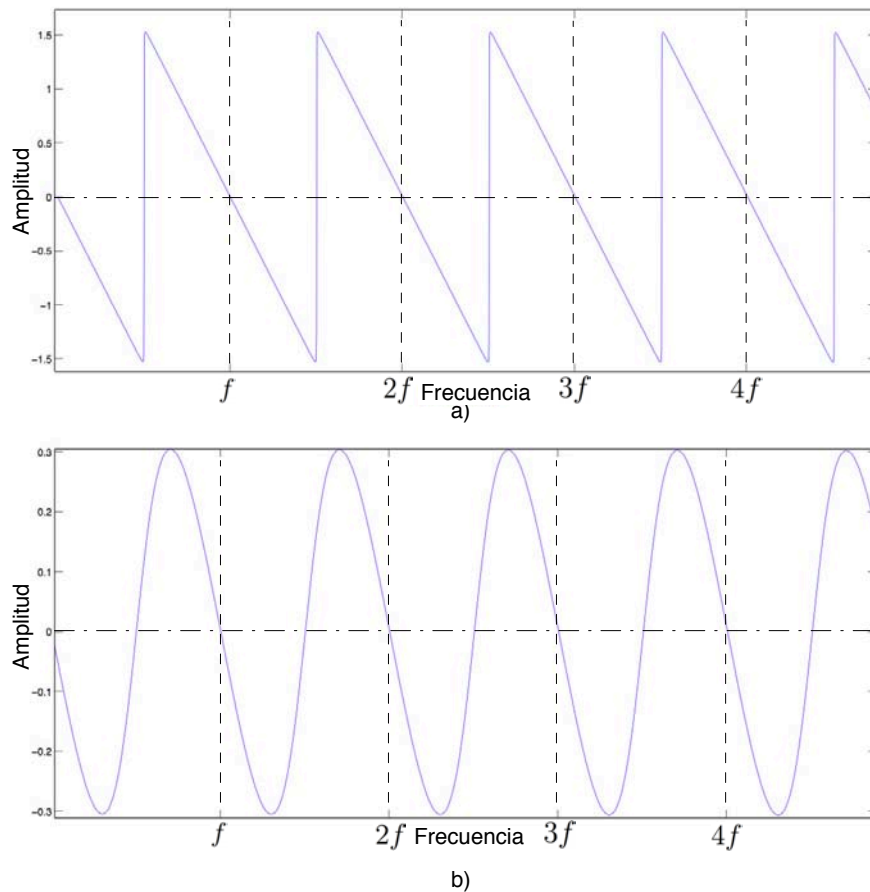
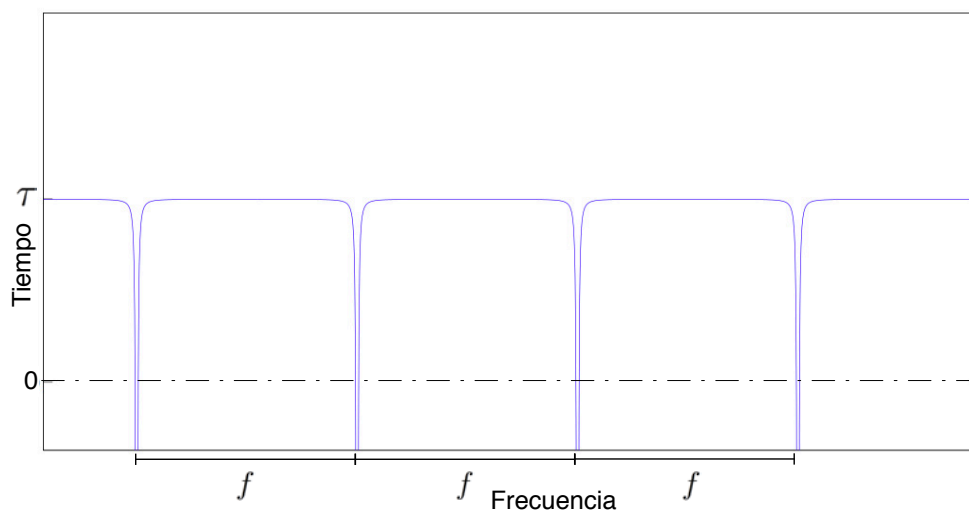


Figura 2.15: Gráficas de fase de $S(\omega)$. a) Ponderación $\alpha = 1$. b) Ponderación $\alpha \rightarrow 0$.

El retardo de grupo tendrá mínimos separados f a lo largo del eje de frecuencia. Estos mínimos coinciden con los máximos de la función de fase. Para cualquier otro valor de frecuencia, el retardo de grupo estará definido por la separación de los pulsos τ en la función $s(t)$, véase la figura 2.16.

Figura 2.16: Retardo de grupo de $S(\omega)$.

Capítulo 3

Desarrollo y Resultados

La dirección de este desarrollo apunta al modelado de la radiación acústica de la pirámide de Kukulcán mediante modelos de fuentes acústicas simples: monopolos, líneas, pistones, arreglos de fuentes lineales o arreglos de monopolos. La intención no es obtener una descripción detallada de la radiación total de la pirámide sino aproximaciones mediante la suma de efectos de fuentes simples. Esta manera de abordar la cuestión de la radiación acústica de la pirámide, y comprensión de tan peculiar eco, tiene el propósito de escatimar cómputo en los procesos de cálculo y auralización de las distintas aproximaciones. Por otra parte, también se analizan grabaciones *in situ* del fenómeno “Cola de quetzal”.

Todo el procesamiento y cálculo para los resultados de los modelos de la pirámide es realizado en MATLAB.

3.1. La pirámide de Kukulcán

Chichén-Itzá es uno de los sitios arqueológicos más importantes de la cultura maya. En esta antigua ciudad situada en el sureste de México, en la península de Yucatán, se encuentra la pirámide de Kukulcán.

La pirámide consta de nueve plataformas superpuestas. En su parte superior descansa una construcción con tres cámaras. Su base es cuadrada y mide 55.3 metros por lado; su altura es de 24 metros, hasta la última plataforma, más 6 metros de la construcción superior. En cada cara tiene amplias escalinatas de 8.5 metros de ancho limitadas en ambos lados por alfardas (bajos pasamanos). Cada escalinata está formada por 91 escalones de 0.263 metros, tanto de altura como de profundidad, figura 3.7b). El particular eco producido por la pirámide, cuando un sonido impulsivo (aplauzo) incide sobre ella, es el fenómeno llamado “Cola de quetzal”.



Figura 3.1: Pirámide de Kukulcán.

3.2. Procesamiento de grabaciones del fenómeno “Cola de quetzal”

En octubre del 2009, el Dr. Felipe Orduña Bustamante¹ y un grupo de estudiantes, grabaron el eco de la pirámide de Kukulcán. Las grabaciones fueron hechas a medio día (a una temperatura ambiente de al rededor de 30 °C) y en condiciones típicas del sitio arqueológico, es decir, con la afluencia normal de visitantes. Estas condiciones se alejan por mucho de la situación ideal de aislamiento del fenómeno en estudio, por lo que el registro del eco de la pirámide es ruidoso.

El fenómeno acústico puede ser entendido mediante la analogía con un sistema lineal e invariante en tiempo, tal como se muestra en la figura 3.2. El sonido impulsivo es la señal de entrada $x(t)$; la pirámide, actúa como el sistema; y el eco, es la señal de salida $y(t)$.

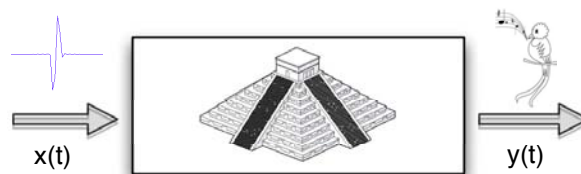


Figura 3.2: Esquema del eco de la pirámide.

¹Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico UNAM, Circuito Exterior CU, Mexico D.F, C.P 04510. Mexico. Tel: (+52-55) 5622-8602 Ext. 1191 Fax: (+52-55) 5622-5675, email: felipe.orduna@ccadet.unam.mx

Usualmente la “Cola de quetzal” se escucha cuando alguien aplaude enfrente de la escalinata de la pirámide; para las grabaciones se utilizó la explosión de un globo como fuente acústica y una grabadora digital portátil² como receptor. Se realizaron 5 grabaciones estéreo. La fuente y el receptor se localizaron justo enfrente de la escalinata a 30 metros y 20 metros respectivamente, ambos a una altura de 1.8 metros del piso, véase la figura 3.3.

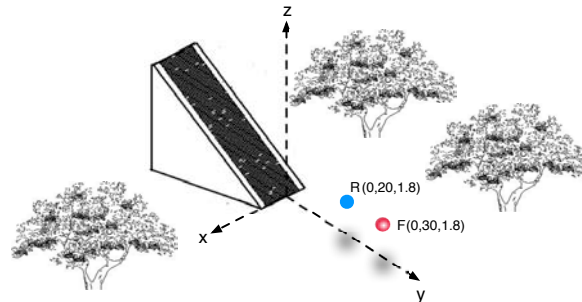


Figura 3.3: Situación en la que se hicieron las grabaciones. Posición en metros de la fuente $F(0,30,1.8)$ y del receptor $R(0,20,1.8)$.

Los archivos de audio grabados contienen el sonido directo de la fuente $x(t)$ y el eco de la pirámide $y(t)$, como puede observarse en la figura 3.4.

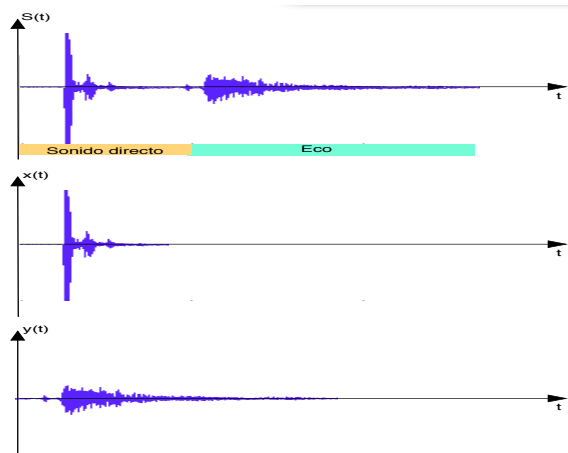


Figura 3.4: Forma general de los audios grabados $S(t)$. Sonido directo de la fuente $x(t)$. Eco de la pirámide $y(t)$.

²Tascam DR-100, grabación formato WAV, 16 bits, frecuencia de muestreo 44. kHz.

La función de respuesta en frecuencia del sistema $H(i\omega)$ se calcula como el cociente de: el promedio de los espectros cruzados $E[S_{xy}(i\omega)]$ entre el promedio de los auto-espectros $E[S_{xx}(i\omega)]$, de las señales tomadas de todas las grabaciones

$$H(i\omega) = \frac{E[S_{xy}(i\omega)]}{E[S_{xx}(i\omega)]}.$$

La respuesta al impulso del sistema se calcula como

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(i\omega)\}.$$

Resultados

El espectrograma obtenido del procesamiento de los audios, muestra, inmerso en ruido, el barrido en frecuencia del eco de la pirámide, véase la figura 3.5. Éste resultado coincide con lo mostrado en la sección 2.8, donde se indica que el espectrograma del eco de la pirámide consiste en una serie de curvas que hacen un barrido descendente en frecuencia. La posición y forma de estas curvas sugieren que son parte de una serie armónica de una curva fundamental que corre de alrededor de 700 Hz a 500 Hz. La respuesta al impulso (eco de la piramide) se muestra en la figura 3.6.

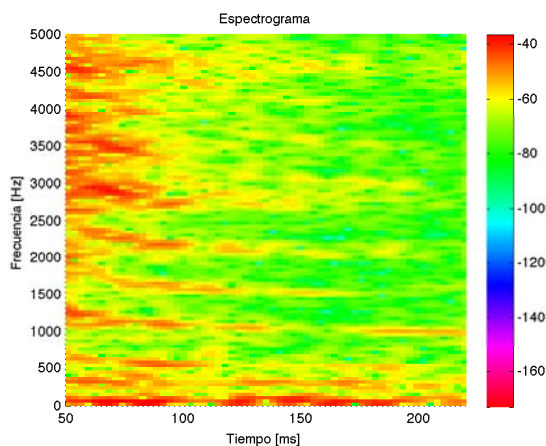


Figura 3.5: Espectrograma del eco grabado en Chichén-Itzá.

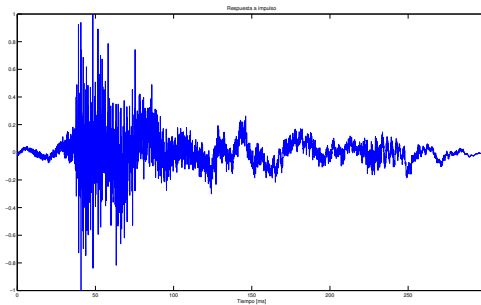


Figura 3.6: Eco de la pirámide.

3.3. Modelado de la pirámide de Kukulkán.

El sistema de referencia para el modelado de la pirámide se muestra en la figura 3.7a); se define la altura a lo largo del eje z ; el ancho en dirección del eje x y la profundidad en dirección del eje y . El origen se localiza en la base del primer escalón y a la mitad de su ancho.

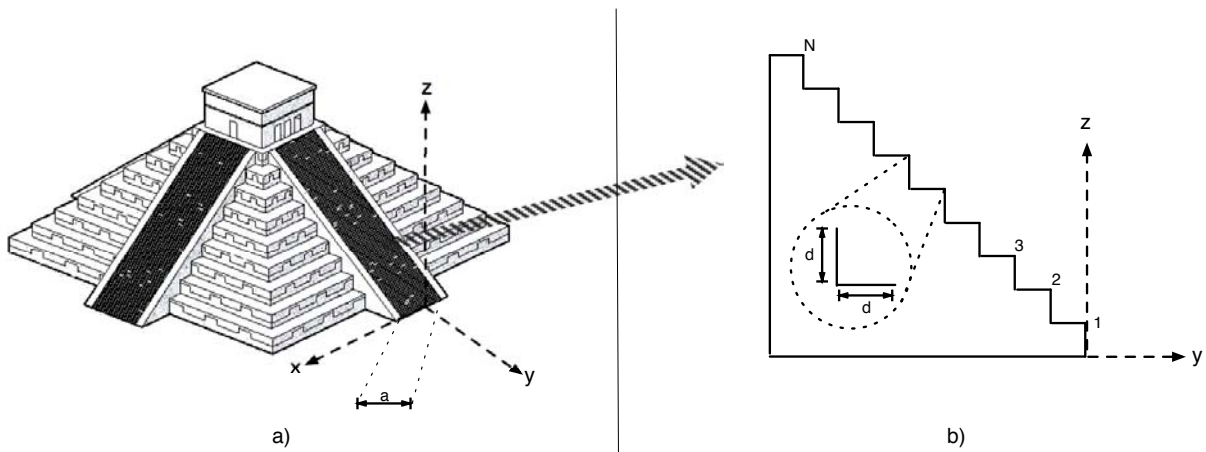


Figura 3.7: a) Localización de la pirámide respecto al sistema de referencia, donde el ancho de la escalinata es $a=8.5$ metros. b) Escalinata con $N=91$ escalones. Cada escalón con dimensiones $d=0.256$ metros.

La evidencia empírica de que el fenómeno acústico ocurre con mucha mayor intensidad cuando se aplaude justo en frente de la escalinata, y que el efecto decrece rápidamente en cualquier otra dirección, permite adjudicar esencialmente el peculiar

eco a la presencia de la escalinata y es posible, en una primer aproximación, despreciar el efecto de las plataformas y las alfardas. De esta forma tenemos que el escenario en el que ocurre el fenómeno acústico contiene una escalinata y una persona que aplaude y escucha el eco, en otras palabras, una fuente acústica que genera un sonido impulsivo y un receptor que “escucha” el eco. En el caso general donde la fuente y el receptor no necesariamente están en la misma posición, la acción sucede así:

Generación y propagación. La fuente acústica origina una perturbación en el medio, la cual se propaga como un frente de onda esférico.

Incidencia. El frente de onda incide sobre la escalinata, la cual se comporta como una barrera rígida y lisa.

Reflexión/Radiación. Según el principio de Huygens, cada punto de la escalinata que es alcanzado por el frente de onda, puede ser considerado como una nueva fuente que radia en sentido opuesto a la onda incidente, generando de esta manera parte del eco.

Propagación. La suma de la radiación de las nuevas fuentes forma el eco total, el cual se propaga en dirección a la fuente/receptor.

Recepción. El eco llega al receptor y “escucha” el fenómeno “Cola de quetzal”, véase 3.8.

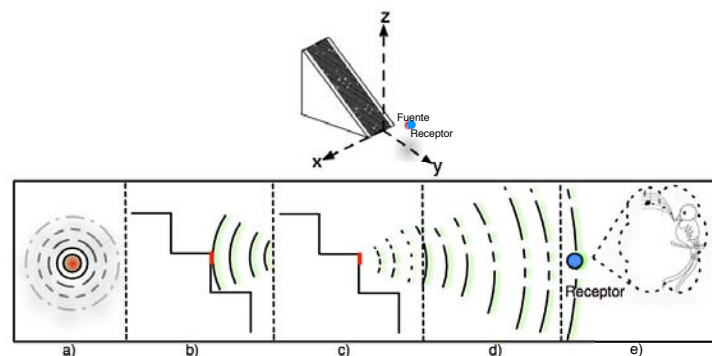


Figura 3.8: Esquema y secuencia del fenómeno “Cola de quetzal”. a) Generación y propagación. b) Incidencia. c) Reflexión/Radiación d) Propagación e) Recepción.

En una apreciación mas general ocurren dos eventos: La fuente radiando y después, la escalinata radiando. A medida que el frente de onda va incidiendo en la pirámide, esta comienza a radiar. En otras palabras, la radiación de cada sección de la pirámide es activada cuando el frente de onda incide sobre ella.

Primer evento: La fuente radiando. El frente de onda, generado por la fuente, se transmitirá como una onda esférica, y la presión asociada a ésta, será

$$FR(r_F) = \frac{e^{-ikr_F}}{r_F},$$

donde r_F es la distancia entre la fuente acústica y una sección de la pirámide.

Para la situación en las que fueron hechas las grabaciones, véase la figura 3.3, se tiene que la distancia mas corta entre la fuente y la pirámide es de 30.03 metros. La frecuencia mínima a la que esta distancia se puede considerar campo lejano tiene que cumplir que $kr \gg 1$, entonces

$$2\pi r_F \gg \lambda$$

$$2\pi(30.03 \text{ m}) \gg \lambda$$

$$188.7 \text{ m} \gg \lambda.$$

Si $\lambda = 1.8$ metros, es decir, dos ordenes de magnitud más pequeña, se puede considerar ondas incidentes planas para frecuencias mayores a $f = 194$ hertz.

Segundo evento: La pirámide radiando. Cada sección de la pirámide irá radiando según sea alcanzado por el frente de onda incidente. La descripción de una sección de la pirámide radiando **PR**, esta formada por el producto de una función de directividad **D** y un término onda radial $A = \frac{e^{-ikr}}{r}$. Entonces se tiene que

$$PR = D \cdot A$$

$$PR = D \cdot \frac{e^{-ikr_R}}{r_R},$$

donde r_R es la distancia entre la sección radiante de la pirámide y el receptor.

El modelo total estará dado por el producto de los dos eventos generales

$$Q = FR \cdot PR$$

$$Q = D \cdot \frac{e^{-ik(r_R+r_F)}}{(r_R + r_F)}, \quad (3.1)$$

donde Q corresponde a la función de respuesta en frecuencia de una sección radiante de la pirámide

$$Q = H(i\omega)$$

y cuya respuesta al impulso se calcula como la transformada inversa de Fourier de Q

$$\mathcal{F}^{-1}\{Q\}.$$

3.3.1. Influencia del piso

El modelo del fenómeno acústico con influencia del piso es la suma del eco debido a la fuente F mas el eco debido a una fuente imagen FI , véase la figura 3.9. La radiación asociada a la fuente FI tiene que ser atenuada según las características acústicas del material del piso. En la zona arqueológica de Chichén-Itzé el piso es esencialmente tierra compactada. No se tiene registro de la caracterización acústica de este tipo de piso por lo que en base a la experiencia se decidió utilizar un coeficiente de reflexión $G = 0.7$.

Entonces, el eco con influencia del piso, para cualquiera de las aproximaciones, se calcula como

$$Q = D \cdot \frac{e^{-ik(r_R+r_F)}}{(r_R + r_F)} + G \cdot D \cdot \frac{e^{-ik(r_R+r_{FI})}}{(r_R + r_{FI})}.$$

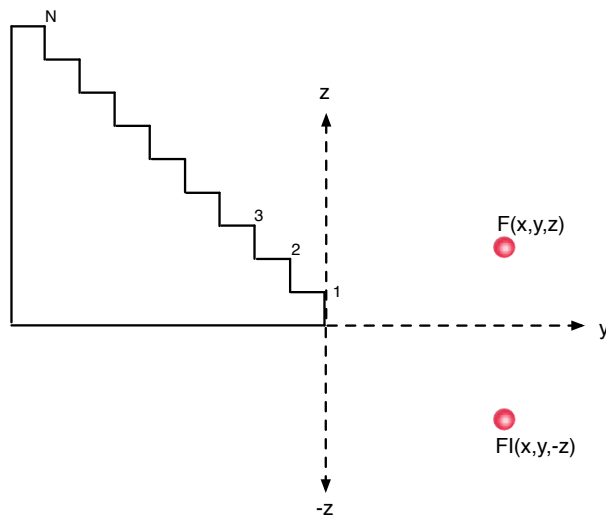


Figura 3.9: Influencia del piso.

3.4. Modelado de la radiación acústica de la escalinata.

El episodio en el que se le confieren todas las características particulares al eco es cuando la escalinata protagoniza la acción, es decir, en la *reflexión/radiación*. Ésta es la etapa en la que la escalinata puede ser sustituida por un modelo basado en fuentes acústicas simples. De esta manera tenemos que la escalinata puede ser modelada utilizando, como elemento constructivo, la fuente puntual monopolar, línea o pistón. La idea general es la obtención de la radiación total como la suma de las presiones acústicas asociadas a cada una de las fuentes de forma individual.

En las siguientes subsecciones se mostrara el desarrollo y resultados para los modelos sin influencia del piso.

3.4.1. Construcción de escalinata con fuente puntual monopolar

Una construcción simplificada de la escalinata, usando monopolos, es fijar una fuente puntual en cada uno de los escalones. En esta construcción se localizará un monopolo en el vértice de cada escalón, éstos estarán alineados, es decir, serán coplanares en el plano yz , tal como se muestra en la figura 3.10 . De esta forma tenemos que la escalinata se reducirá a un arreglo de monopolos que radían con la misma amplitud.

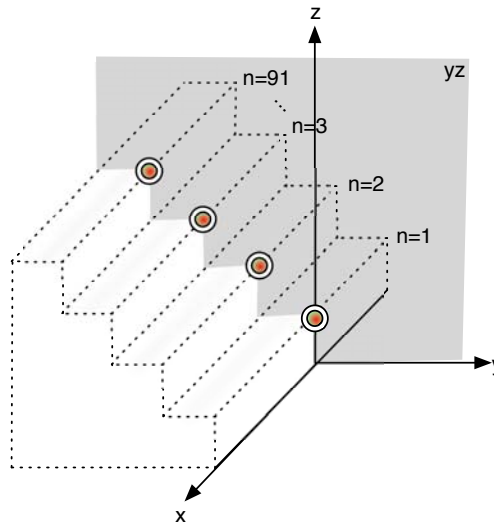


Figura 3.10: Esquema de construcción de la escalinata utilizando monopolos localizados en el vértice de cada escalón.

La expresión analítica para la radiación del monopolo asociado al n-ésimo escalón tendrá la forma de la ecuación [3.1], (la función de directividad es $D = 1$ debido a que la radiación es omnidireccional)

$$Q_n = \frac{e^{-ik(r_R+r_F)_n}}{(r_R + r_F)_n},$$

donde $(r_R + r_F)_n$ es la suma de las distancias entre en n-ésimo monopolo y, la fuente y el receptor. La radiación acústica total de la escalinata estará dada por la suma de los efectos asociados a la radiación de cada uno de los monopolos de forma individual

$$\sum_{n=1}^{91} Q_n = \sum_{n=1}^{91} \frac{e^{-ik(r_R+r_F)_n}}{(r_R + r_F)_n}.$$

Utilizando la situación de los audios grabados, véase la figura 3.3, tenemos: $\bar{F} = (0, 30, 1.8)$ y $\bar{R} = (0, 20, 1.8)$. Si d es la altura y profundidad del escalón, véase la figura 3.7, la posición del n-ésimo monopolo será

$$M_n(0, (1 - n) \cdot d, n \cdot d),$$

se puede calcular $(r_R + r_F)_n$ como

$$(r_R + r_F)_n = | M_n - F | + | M_n - R |.$$

Resultados

La respuesta al impulso calculada esta constituida por 91 pulsos, lo cuales estan directamente asociados a la radiación de cada escalón-monopolo, es decir, a las 91 reflexiones debidas a los escalones. Cada uno de estos pulsos tiene un retardo relativo T , respecto al pulso inmediato posterior, que varia desde 1.4 ms, para el par de escalones mas cercanos, hasta 1.9 ms para los mas lejanos, véase la figura 3.11.

Cada uno de los pulsos esta localizado en el tiempo según la relación de la distancia fuente→monopolo→receptor entre la velocidad de propagación, de esta forma se tiene que la diferencia de recorridos, fuente→monopolo→receptor para cada par consecutivo de monopolos, determinará el retraso T . En la figura 3.12, se muestra que el recorrido es creciente conforme al numero de monopolo, es decir, el recorrido es mayor conforme el monopolo se aproxima a la cima de la pirámide.

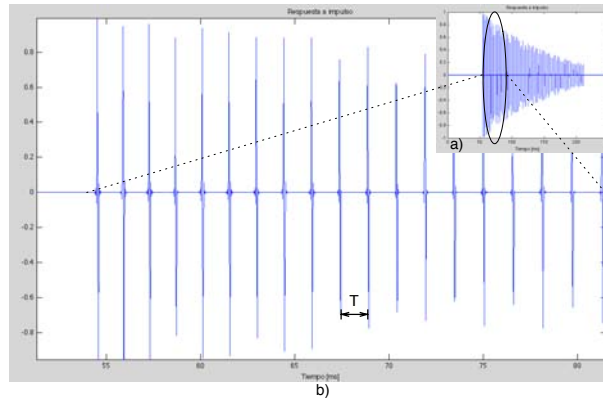


Figura 3.11: a) Respuesta al impulso. b) Acercamiento a las primeras reflexiones en la respuesta al impulso. T es el retardo relativo entre cada reflexión.

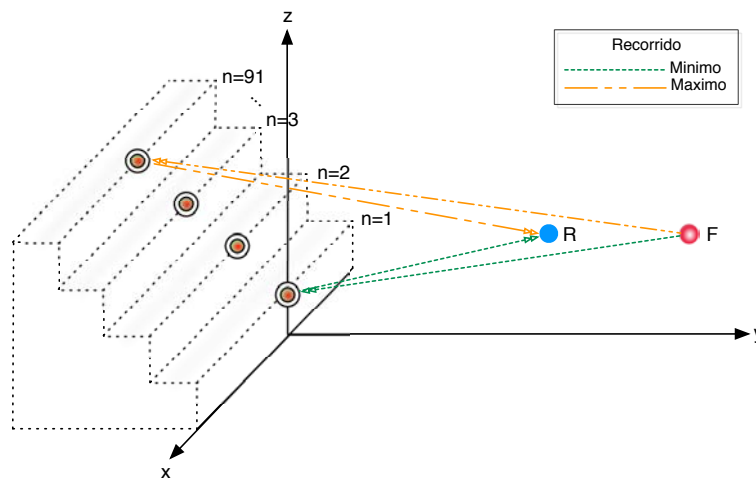


Figura 3.12: Casos extremos para el recorrido fuente \rightarrow monopolo \rightarrow receptor.

La diferencia de los recorridos asociados a los dos monopolos más cercanos a la fuente/receptor es de 0.484 metros, el cual corresponde con el retraso mínimo $R_m = 1.4$ ms. Para los monopolos más alejados la diferencia es de 0.6765 metros, ocasionando el máximo retraso $R_M = 1.9$ ms.

En el espectrograma de la figura 3.13 se muestran una serie de barridos descendentes armónicos cuya curva fundamental hace un recorrido en frecuencia desde 714 Hz a 526 Hz. Los límites de este barrido están definidos por el máximo y mínimo retraso de los reflejos en los escalones.

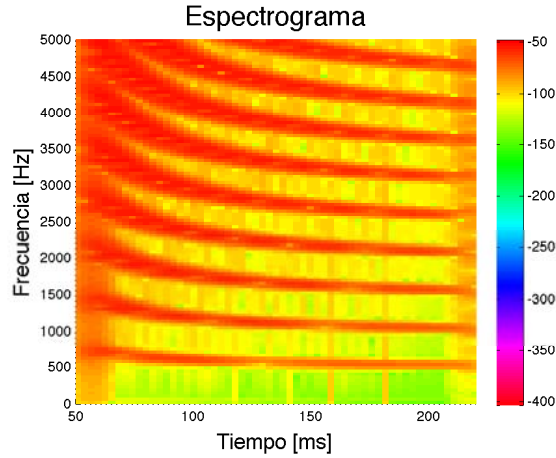


Figura 3.13: Espectrograma de la síntesis del eco de la pirámide construida con fuentes puntuales monopulares.

Límite inferior del barrido de frecuencia

$$f_1 = \frac{1}{R_M} = \frac{1}{1.9 \text{ ms}} = 526.3 \text{ Hz.}$$

Límite superior:

$$f_2 = \frac{1}{R_m} = \frac{1}{1.4 \text{ ms}} = 714.2 \text{ Hz.}$$

La magnitud de la función de respuesta en frecuencia es el resultado de la interferencia entre la radiación de los monopolos que construyen la pirámide. Estas interferencias generan reforzamiento y atenuación en la amplitud de ciertas frecuencias. Los resultados de la sección 2.9 muestran que la magnitud de la transformada de Fourier de una señal en el tiempo, formada por pulsos, será una función periódica. Los máximos de esta función coinciden con la serie armónica de f , la cual está definida por el retardo entre los pulsos de la señal en tiempo ($f = 1/\tau$). De esta manera tenemos que la magnitud es la suma de funciones periódicas. Los límites de frecuencia, definidos por la máxima y mínima separación (T), definen una banda fundamental de reforzamiento de amplitud para la función de magnitud. Enseguida se tienen regiones igualmente reforzadas, las cuales llamaremos bandas armónicas, definidas en el límite inferior por la serie armónica de f_1 y el límite superior por la serie armónica de f_2 . Después de la tercer banda armónica las interferencias son más caóticas debido a que las bandas se traslapan, véase la figura 3.14. La razón física de estas regiones de máxima amplitud es que la pirámide refuerza aquellas frecuencias para las cuales cabe un número exacto de longitudes de onda en el recorrido de la fuente a la pirámide y de la pirámide al receptor.

En el cepstrum de la figura 3.15 podemos observar la serie armónica de los retrasos R_M y R_m asociados a f_1 y f_2 . Como ya se ha apuntado anteriormente, éstos retrasos

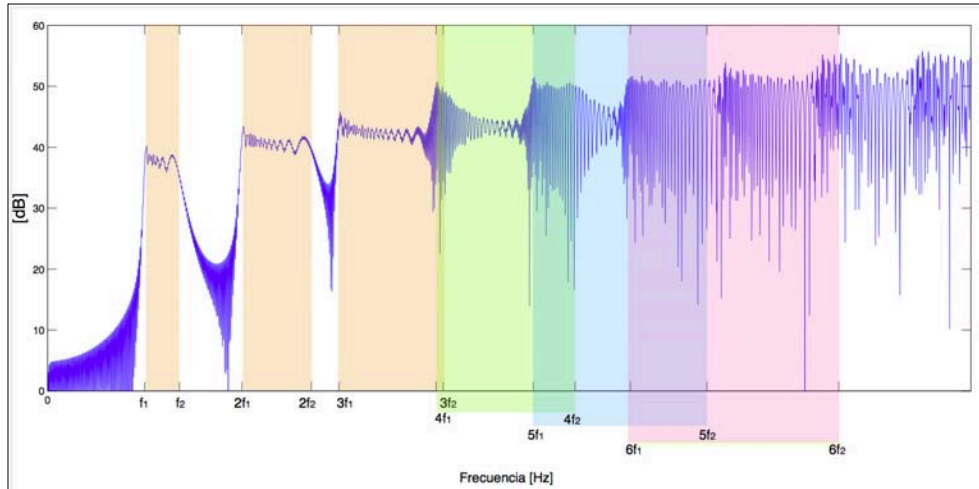


Figura 3.14: Magnitud de la respuesta en frecuencia de la síntesis del eco de la pirámide construida con fuentes puntuales monopulares. Se muestran las bandas armónicas, donde $f_1 = 526.3$ Hz y $f_2 = 714.2$ Hz.

están definidos por el máximo y mínimo retardo entre reflexiones debidas a escalones contiguos. Las espigas en el cepstrum que no corresponden con las series armónicas de R_M y R_m están asociadas a los retrasos entre reflexiones de escalones no contiguos.

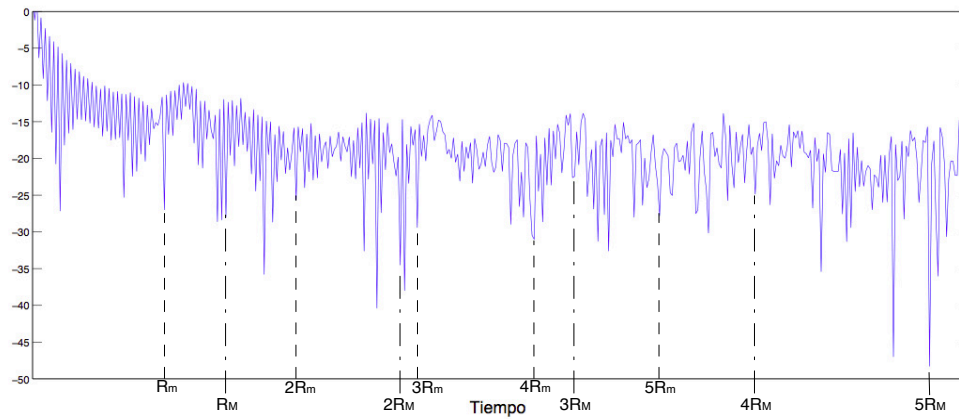


Figura 3.15: Cepstrum de la señal $s(t)$.

3.4.2. Construcción de escalinata con fuente lineal

La escalinata se construye localizando una fuente lineal a lo largo del arista (filo) de cada escalón tal como se muestra en la figura 3.16.

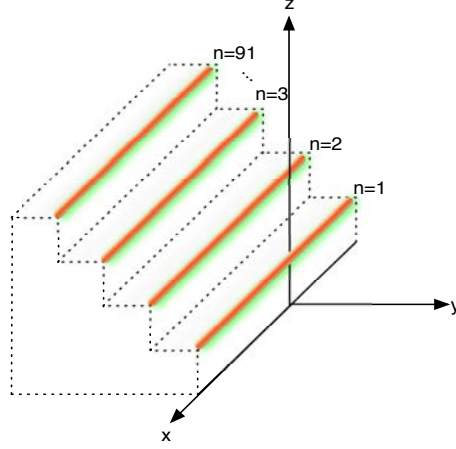


Figura 3.16: Construcción de escalera con fuente lineal.

La posición y orientación, de la fuente lineal mostrada en la figura 3.17, están definidas por la pareja de puntos p y q localizados en los extremos de la línea. El centro geométrico C de la fuente esta definido como

$$\bar{c} = \bar{p} + \frac{1}{2} |\bar{p} - \bar{q}| \hat{x}_L,$$

donde \hat{x}_L es el vector director de la línea

$$\hat{x}_L = \frac{\bar{q} - \bar{p}}{|\bar{q} - \bar{p}|}.$$

La relación espacial entre la línea radiante y cualquier otro punto P_0 , sea receptor o fuente, esta determinado por la distancia entre ellos (del centro geométrico \bar{c} al punto)

$$r = |\bar{P}_0 - \bar{c}|$$

y por el ángulo polar θ

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{(\bar{P}_0 - \bar{c}) \cdot \hat{x}_L}{r},$$

$$\theta = -\arccos\left(\frac{(\bar{P}_0 - \bar{c}) \cdot \hat{x}_L}{r}\right) + \frac{\pi}{2}.$$

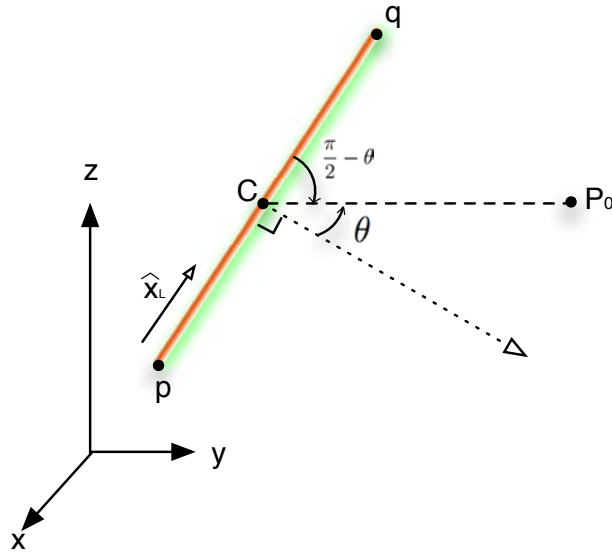


Figura 3.17: Fuente lineal en el espacio.

La posición de cualquier punto respecto a la línea está definida por las coordenadas polares $P_0(r, \theta)$ y de esta manera se define la posición del receptor y la fuente como $F(r_F, \theta_F)$ y $R(r_R, \theta_R)$ respectivamente.

La expresión para el cálculo de la radiación de la fuente lineal asociada al n -ésimo escalón tiene la forma de la ecuación [3.1]. Los términos de directividad y de onda radial se calculan como

$$D_n = \text{sinc} \left(\frac{1}{2} kl \sin \theta_{R_n} \right),$$

$$A_n = \frac{e^{-ik(r_R + r_F)_n}}{(r_R + r_F)_n},$$

donde $(r_R + r_F)_n$ es la suma de las distancias entre la n -ésima fuente lineal y la fuente y el receptor. θ_{R_n} es el ángulo polar entre la n -ésima línea y el receptor.

Las dimensiones de la escalinata están definidas por d y a , véase la figura 3.7. Las coordenadas del par de puntos que definen la posición de la n -ésima fuente lineal son

$$p_n \left(-\frac{a}{2}, (1-n) \cdot d, n \cdot d \right),$$

$$q_n \left(\frac{a}{2}, (1-n) \cdot d, n \cdot d \right)$$

y su centro geométrico

$$\bar{c}_n = \bar{p}_n + \frac{1}{2} |\bar{p}_n - \bar{q}_n| \hat{x}_{L_n}.$$

Utilizando la situación de los audios grabados, véase la figura 3.3, tenemos $\bar{F} = (0, 30, 1.8)$ y $\bar{R} = (0, 20, 1.8)$. Entonces $(r_R + r_F)_n$ se calcula como

$$(r_R + r_F)_n = |\bar{F} - \bar{c}_n| + |\bar{R} - \bar{c}_n|.$$

La radiación acústica total de la escalinata estará dada por la suma de los efectos asociados a cada una de las fuentes lineales de forma individual

$$\sum_{n=1}^{91} D_n \cdot A_n = \sum_{n=1}^{91} \text{sinc} \left(\frac{1}{2} kl \sin \theta_{R_n} \right) \cdot \frac{e^{-ik(r_R+r_F)_n}}{(r_R + r_F)_n}.$$

Ésta aproximación es valida en campo lejano, él cual esta definido por

$$\frac{r_{min}}{L} \sim \frac{1}{4} \frac{L}{\lambda}$$

$$\lambda \sim \frac{1}{4} \frac{L^2}{r_{min}}.$$

La distancia minima entre el receptor y la piramide es aproximadamente $r_{min} = 20.06$ metros. Entonces

$$\lambda \sim \frac{1}{4} \frac{(8.5)^2}{20.06}$$

$$\lambda \sim 0.9 \text{ m},$$

por lo que la aproximación es valida para frecuencias mayores a 387.6 hertz.

Resultados

Los resultados obtenidos con $\bar{F} = (0, 30, 1.8)$ y $\bar{R} = (0, 20, 1.8)$ son casi idénticos que los obtenidos con el modelo de construcción de la escalinata con fuentes monopulares, ésto debido a que la fuente y el receptor están localizadas justo en frente de la fuente lineal, es decir, están alineados con su centro geométrico. Bajo estas condiciones, que son las posiciones de las grabaciones *in situ*, no existe diferencia sustancial entre los modelos. La diferencia importante entre los modelos aparece cuando el receptor no esta justo enfrente del centro geométrico de la fuente lineal. Cuando el receptor se mueve en la dirección longitudinal de la línea, se manifiestan los efectos de la función de directividad de la línea y las diferencias respecto al modelo de fuentes monopulares.

La respuesta al impulso mostrada en la figura 3.18a) es prácticamente idéntica a la obtenida en el modelado mediante fuentes monopulares, por otra parte, si la fuente

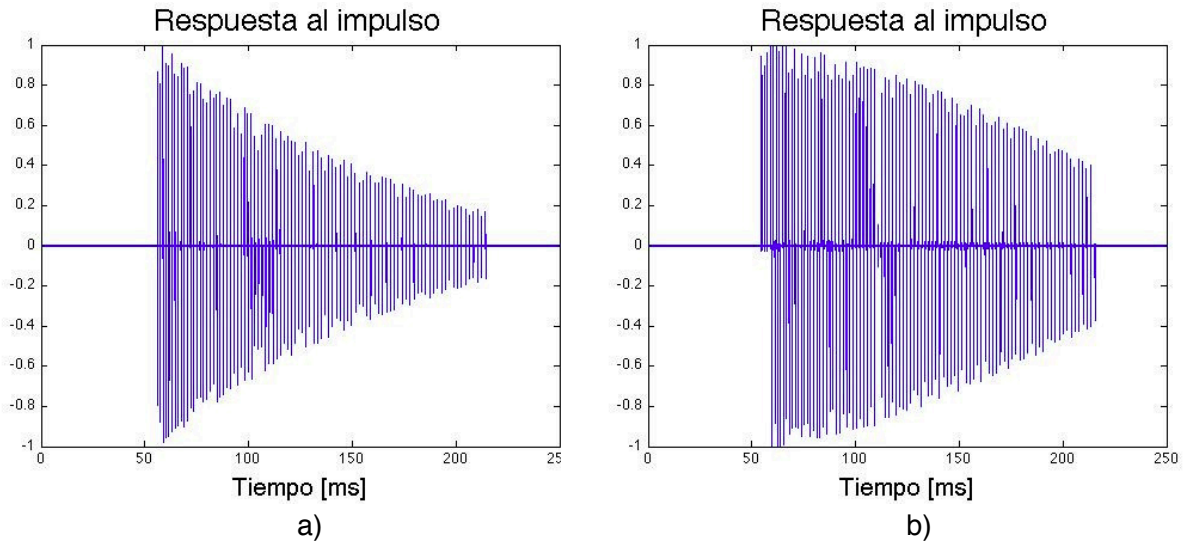


Figura 3.18: Respuesta al impulso, modelo de fuente lineal. a)Receptor y fuente enfrente del centro geométrico de la línea, $\bar{F} = (0, 30, 1.8)$ y $\bar{R} = (0, 20, 1.8)$. b)Receptor y fuente desplazados $\bar{F} = (4.25, 30, 1.8)$ y $\bar{R} = (4.25, 20, 1.8)$.

se desplaza en la dirección longitudinal de la línea, los resultados varían, véase la figura 3.18b). Las magnitudes asociadas a los reflejos de cada uno de los escalones varían en menor medida, es decir, la diferencia entre la magnitud de la mayoría de los reflejos es mucho menor. La función de directividad define una ponderación diferente para cada frecuencia y para cada dirección, provocando diferencias en la envolvente de la respuesta al impulso conforme el ángulo θ varía. En la figura 3.19 podemos observar que las interferencias son más caóticas y no conservan claramente la información acerca de los límites del barrido de frecuencia como lo observado en la aproximación monopolar (figura 3.14).

Éstos resultados pueden justificar el hecho de que el fenómeno “Cola de quetzal” es especialmente apreciable cuando la persona, que aplaude y escucha, está justo en frente de la escalinata de la pirámide, y que conforme se aleja de esa posición el fenómeno acústico desaparece rápidamente.

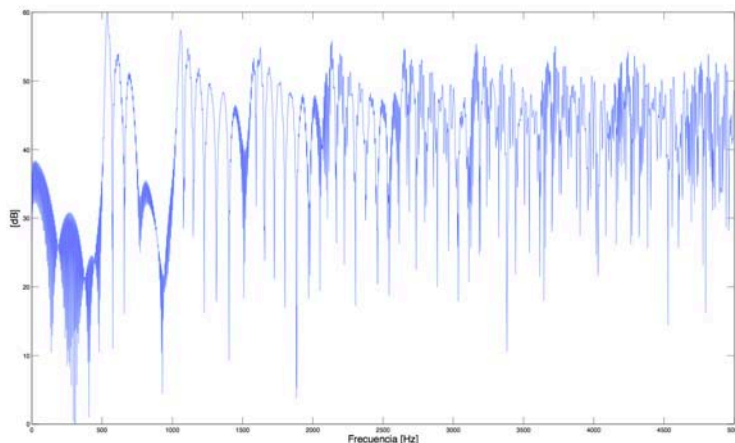


Figura 3.19: Magnitud de la respuesta en frecuencia del modelo basado en fuentes lineales, donde la fuente y el receptor no están localizados en frente del centro geométrico de la línea. $\bar{F} = (4.25, 30, 1.8)$ y $\bar{R} = (4.25, 20, 1.8)$.

3.4.3. Construcción de escalinata con piston rectangular.

La escalinata se construye localizando un pistón rectangular en la cara vertical de cada escalón, véase la figura 3.20.

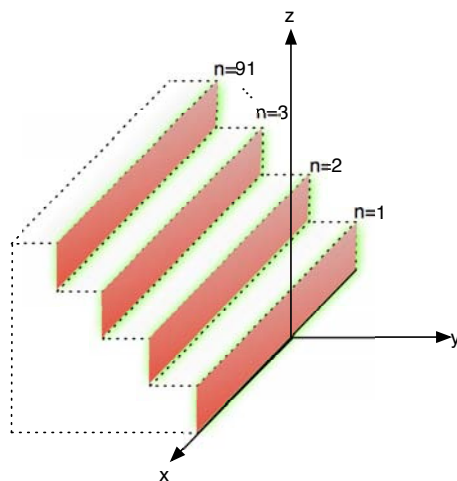


Figura 3.20: Construcción escalinata con piston rectangular

La posición y orientación de los pistones, mostrados en la figura 3.21, están definidas por los vectores de posición de tres de sus vértices, \bar{P}_1 , \bar{P}_2 y \bar{P}_3 . El orden en el que son definidos los vértices obedece a “la regla de la mano derecha” para determinar el eje de radiación del pistón.

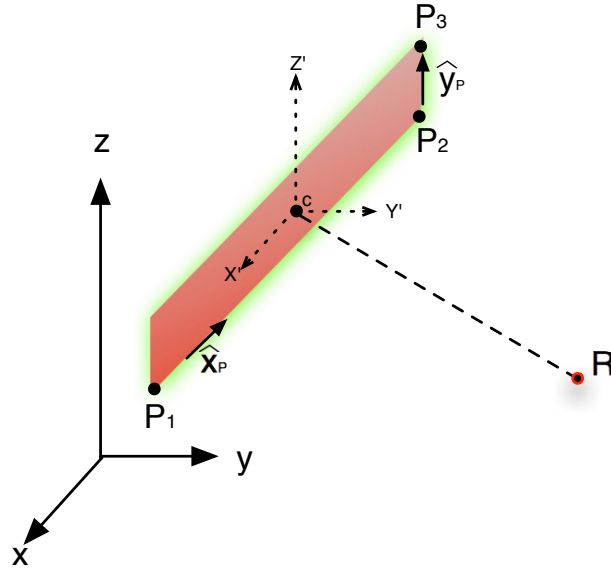


Figura 3.21: Pistón rectangular en el espacio.

Los vectores directores que definen el plano en el que se encuentra el pistón son

$$\hat{x}_P = \frac{\bar{P}_2 - \bar{P}_1}{|\bar{P}_2 - \bar{P}_1|},$$

$$\hat{y}_P = \frac{\bar{P}_3 - \bar{P}_2}{|\bar{P}_3 - \bar{P}_2|}$$

y la dirección del eje de radiación

$$\hat{z}_P = \hat{x}_P \times \hat{y}_P.$$

El centro geométrico del pistón está localizado por

$$\bar{c} = \bar{P}_1 + \frac{|\bar{P}_2 - \bar{P}_1|}{2} \hat{x}_P + \frac{|\bar{P}_3 - \bar{P}_2|}{2} \hat{y}_P.$$

La posición de un punto P_0 en relación al pistón está determinada por la posición del punto respecto al sistema de referencia definido por las direcciones \hat{x}_P , \hat{y}_P y \hat{z}_P con origen en el centro geométrico del pistón

$$\bar{P}_0 = \bar{c} + x' \hat{x}_P + y' \hat{y}_P + z' \hat{z}_P.$$

Las coordenadas del punto P_0 respecto al nuevo sistema de referencia, $P_0(x', y', z')$, se obtienen resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_P & \hat{y}_P & \hat{z}_P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \bar{P}_0 - \bar{c}.$$

De la misma manera se obtienen las coordenadas del receptor y la fuente, las cuales tienen que ser transformadas a coordenadas esféricas para utilizar la formulación de la radiación del pistón (ecuación [2.6]). Entonces, las coordenadas del receptor son $R(x', y', z') \rightarrow R(r_R, \theta_R, \phi_R)$ y las de la fuente $F(x', y', z') \rightarrow F(r_F, \theta_F, \phi_F)$.

La forma analítica de la radiación del pistón asociado al n -ésimo escalón tendrá la forma de la ecuación [3.1]. Los términos de directividad y de onda radial se calculan como

$$D_n = \text{sinc} \left(\frac{1}{2} k \cdot lx \cdot \sin(\theta_{R_n}) \cos \phi_{R_n} \right) \text{sinc} \left(\frac{1}{2} k \cdot ly \cdot \sin(\theta_{R_n}) \sin \phi_{R_n} \right),$$

$$A_n = \frac{e^{-ik(r_R+r_F)_n}}{(r_R + r_F)_n},$$

donde lx y ly definen el tamaño del pistón. $(r_R + r_F)_n$ es la suma de las distancias entre el n -ésimo pistón y, la fuente y el receptor.

Utilizando la situación de los audios grabados, véase la figura 3.3, tenemos $\bar{F} = (0, 30, 1.8)$ y $\bar{R} = (0, 20, 1.8)$. Entonces $(r_R + r_F)_n$ se calcula como

$$(r_R + r_F)_n = |\bar{F} - \bar{c}_n| + |\bar{R} - \bar{c}_n|.$$

La radiación acústica total de la escalinata se calcula como la sumatoria de la radiación de cada uno de los pistones

$$\sum_{n=1}^{91} D_n \cdot A_n = \sum_{n=1}^{91} \text{sinc} \left(\frac{1}{2} k \cdot lx \cdot \sin(\theta_{R_n}) \cos \phi_{R_n} \right) \text{sinc} \left(\frac{1}{2} k \cdot ly \cdot \sin(\theta_{R_n}) \sin \phi_{R_n} \right) \cdot \frac{e^{-ik(r_R+r_F)_n}}{(r_R + r_F)_n}.$$

Esta aproximación es válida en campo lejano, el cual está definido para el pistón en términos del mayor de sus lados

$$\frac{r_{min}}{L_x} \sim \frac{1}{4} \frac{L_x}{\lambda}$$

$$\lambda \sim \frac{1}{4} \frac{L_x^2}{r_{min}}.$$

La distancia mínima entre el receptor y la pirámide es aproximadamente $r_{min} = 20.07$ metros. Entonces se tiene que

$$\lambda \sim \frac{1 (8.5)^2}{4 \cdot 20.07}$$

$$\lambda \sim 0.9 \text{ m,}$$

por lo que la aproximación es válida para frecuencias mayores a 387.6 hertz.

Resultados

La respuesta al impulso está formada por 91 pulsos asociados, cada uno, a la radiación de cada pistón rectangular. Éstos pulsos tienen un retardo relativo T , respecto al pulso inmediato anterior, el cual varía desde 1.4 ms para los primeros pulsos, es decir, para los primeros escalones, hasta 1.9 ms para los últimos pulsos, los cuales están asociados a los últimos escalones. Éstos retardos coinciden con los obtenidos para el modelo de monopolos.

La función de directividad del pistón varía en dirección de la longitud y del ancho del pistón, es decir, el campo acústico radiado cambia según el receptor se mueve en dirección x y z del sistema de referencia.

La envolvente de la respuesta impulso cambia respecto a los modelos de monopolos y líneas, esto debido esencialmente a la variación en dirección z que ofrece el modelo de pistones. La dirección de máxima radiación del pistón es justo en frente de su centro geométrico, por lo que el pulso de máxima amplitud, de la respuesta impulso, es el 7° pulso, el cual corresponde a la radiación debida al escalón que está aproximadamente a la misma altura que el receptor. La amplitud de todos los demás pulsos varían según las funciones de directividad y de onda viajera, véase figura 3.22a).

Es importante notar que las amplitudes de los pulsos decrecen rápidamente, a partir aproximadamente del primer tercio de la respuesta al impulso. Ésto explica por que la función de magnitud mostrada en la figura 3.23, presenta interferencias mucho menos caóticas, especialmente apreciable de la cuarta banda armónica en adelante, que en los modelos de monopolos y fuente lineal.

En la sección 2.9, se vio que la amplitud de los pulsos (α) determina, de manera directamente proporcional, el recorrido de la función de magnitud, por lo que el efecto de la amplitud de los pulsos determina el grado de influencia en las interferencias que definen la respuesta en frecuencia del modelo de la escalinata. Entonces, para el pistón, se tiene que las interferencias debidas a los últimos escalones son menores que las interferencias debidas a los primeros.

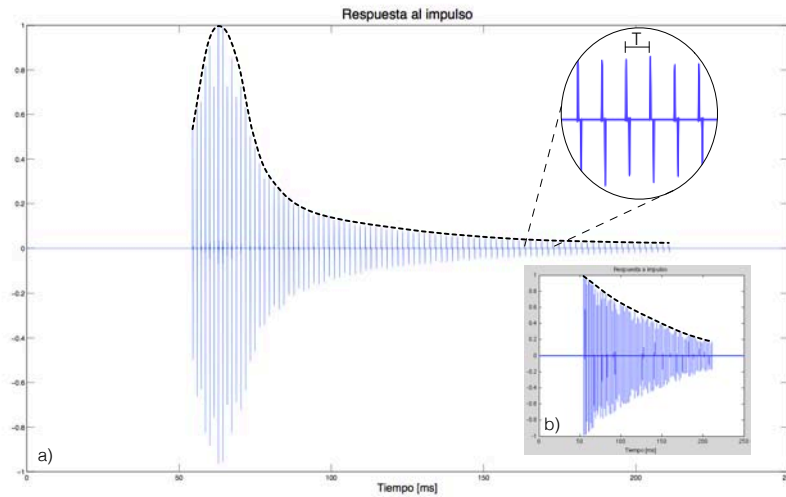


Figura 3.22: Comparación entre las envolventes de la respuesta al impulso obtenida del modelo de pistones y monopolos. a) RI obtenida del modelo de pistones. b) RI obtenida del modelo de monopolos.

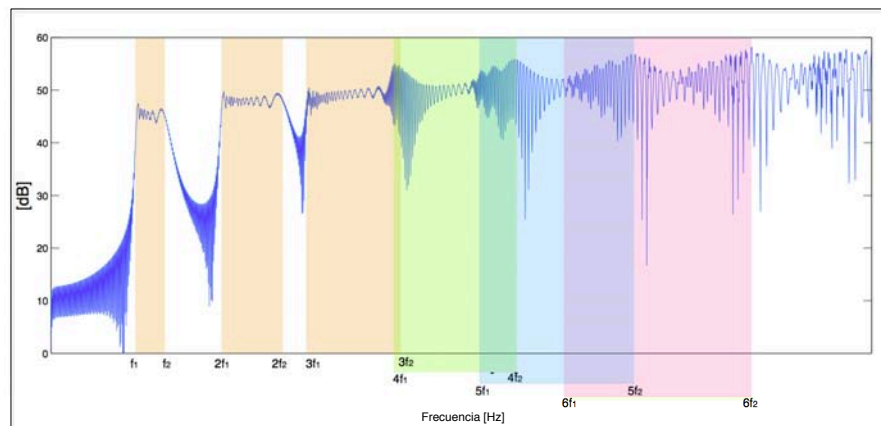


Figura 3.23: Magnitud de la respuesta en frecuencia de la síntesis del eco de la pirámide construida con pistones. Se muestran las bandas armónicas, donde $f_1 = 526.3$ Hz y $f_2 = 714.2$ Hz.

3.4.4. Construcción de escalinata con arreglos de fuentes.

La construcción con arreglos de fuentes brinda una aproximación para ondas incidentes no planas.

Arreglo de fuentes lineales.

La cara vertical de cada escalón es construida con un arreglo de M fuentes lineales, véase figura la 3.24. Ésta construcción emula una onda incidente cilíndrica cuyo eje geométrico corre a lo largo de la dirección del eje x .

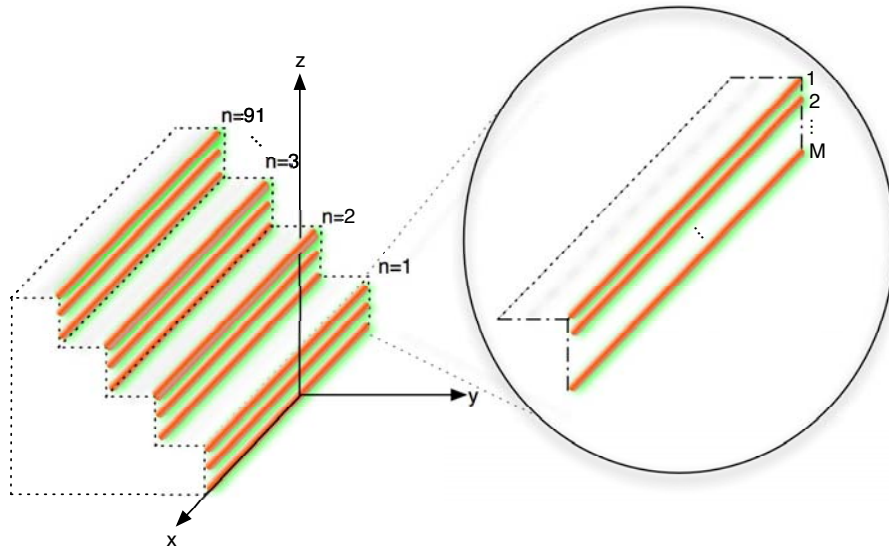


Figura 3.24: Arreglo de M fuentes lineales en cada escalón.

Las coordenadas del par de puntos que definen la posición de la m -ésima fuente lineal del arreglo en el n -ésimo escalón son

$$p_{mn}\left(-\frac{a}{2}, (1-n) \cdot d, (n \cdot d) - (m-1) \cdot \Delta_z\right),$$

$$q_{mn}\left(\frac{a}{2}, (1-n) \cdot d, (n \cdot d) - (m-1) \cdot \Delta_z\right),$$

donde Δ_z es la separación entre las fuentes que forma el arreglo de cada escalón

$$\Delta_z = \frac{d}{M-1}.$$

El procedimiento para el cálculo de la radiación de la escalinata es similar al visto en la sección 3.4.2. La radiación total es la suma de la radiación de cada una de las fuentes lineales que forman la escalinata.

Resultados

Conforme la onda incidente se encuentra con la escalinata, las fuentes lineales que construyen cada escalón se irán activando y comenzaran a radiar, véase la figura 3.25. La radiación debida a cada escalón esta compuesta por una serie de M pulsos, debidos a cada una de las lineas que componen el arreglo de fuentes asociado al escalón.

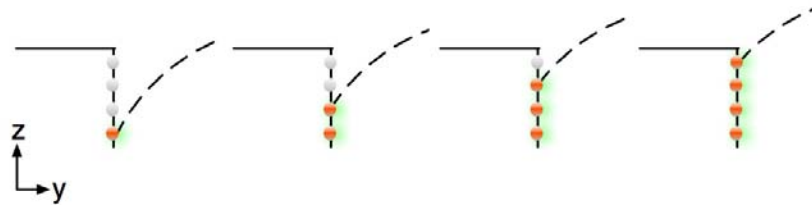


Figura 3.25: Secuencia esquemática de una onda incidente sobre el arreglo de fuentes lineales en cada escalón.

En la figura 3.26a) podemos observar la respuesta al impulso, en el caso donde $M = 5$. Se tiene que cada una de los 91 impulsos asociados a la radiación de cada escalón, esta realmente formado por 5 pulsos ligeramente separados. Esta separación es diferente para cada escalón y esta definida por la relación de distancia entre la fuente y cada una de las lineas del arreglo. La distancia media T entre el conjunto de pulsos asociado a cada escalón varia de $1.4[ms]$ a $1.9[ms]$, es decir, de la misma manera que en los modelos de monopolo, fuente lineal y pistón. Conforme M crece, la región asociada a la radiación de cada escalón se hace mas densa y el resultado final se aproxima al par de espigas, por cada escalón, observadas en los modelos de monopolo, linea y pistón, véase la figura 3.26b).

La envolvente de las respuesta al impulso obtenida con el arreglo de fuentes lineales es similar a la obtenida con el modelo de pistones, lo cual, aunado al hecho de que los retardos T varían de la misma manera, hacen que las respuesta en frecuencia de ambos modelos sea parecida.

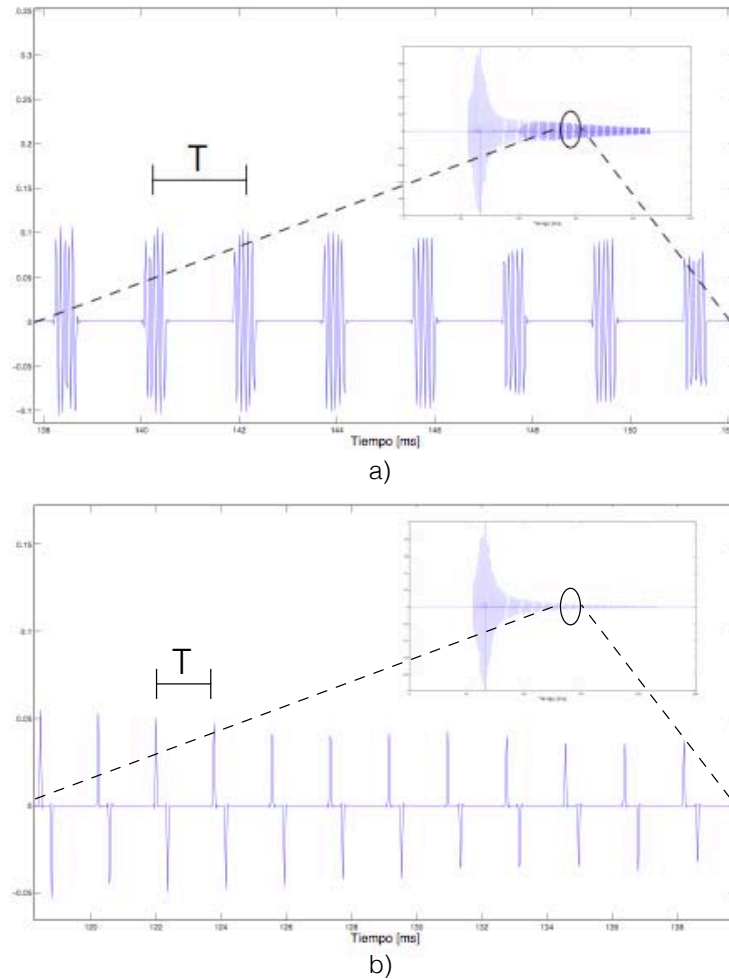


Figura 3.26: Respuesta al impulso del modelo con arreglo de fuentes lineales. a) Arreglo de 5 fuentes lineales por escalón. b) Arreglo de 25 fuentes lineales por escalón.

Arreglo de fuentes monopulares.

Cada escalón es construido con un arreglo de H renglones por W columnas, de fuentes monopulares, véase la figura 3.27. Con esta construcción tenemos una aproximación al caso de onda incidente esférica.

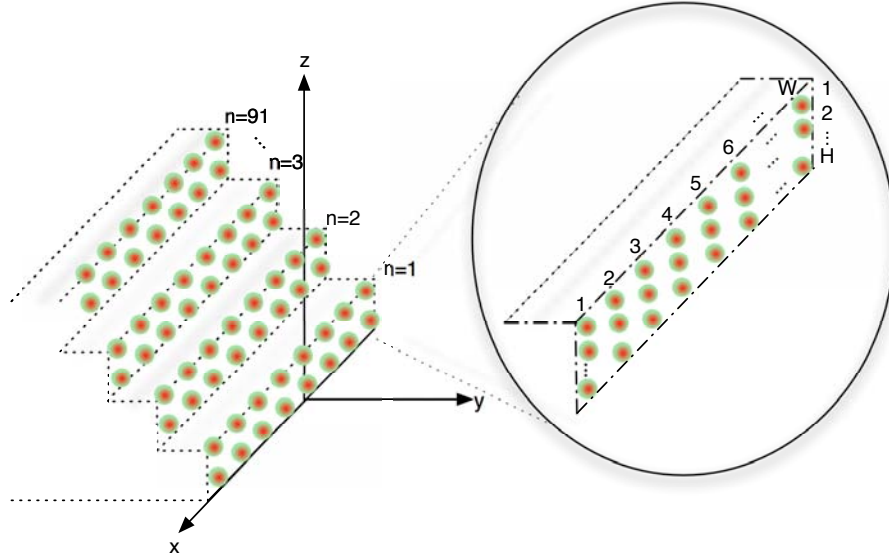


Figura 3.27: Arreglo de $H \times W$ fuentes monopoles en cada escalón.

Las coordenadas de la fuente monopolar localizada en el renglón h columna w del arreglo en el n -ésimo escalón son

$$p_{hwn} \left(-\frac{a}{2} + (w-1) \cdot \Delta_x, (1-n) \cdot d, (n \cdot d) - (h-1) \cdot \Delta_z \right),$$

donde

$$\Delta_z = \frac{d}{H-1},$$

$$\Delta_x = \frac{a}{W-1},$$

a y d definen las dimensiones de los escalones, véase figura 3.7.

El procedimiento para el cálculo de la radiación de la escalinata es similar al visto en la sección 3.4.1. La radiación total es la suma de la radiación de cada uno de las fuentes monopoles que forman la escalinata.

Resultados

Esta aproximación brinda una variedad de resultados dependientes de las dimensiones del arreglo de monopolos, además resultar ser la más versátil según varían las posiciones de la fuente y el receptor, es decir la radiación sintetizada varía según la posición de la fuente y el receptor en cualquier dirección.

Para las posiciones de fuente y receptor en las que fueron hechas las grabaciones *in situ*, figura 3.3, y con un arreglo de 3×10 monopolos en cada escalón, se tiene la respuesta al impulso mostrada en la figura 3.28. Es evidente que el grado de complejidad aumenta respecto a los otros modelos y es complicado diferenciar las regiones de la respuesta al impulso asociadas a la radiación de cada uno de los escalones y, mas aun, determinar un retraso T entre cada espiga.

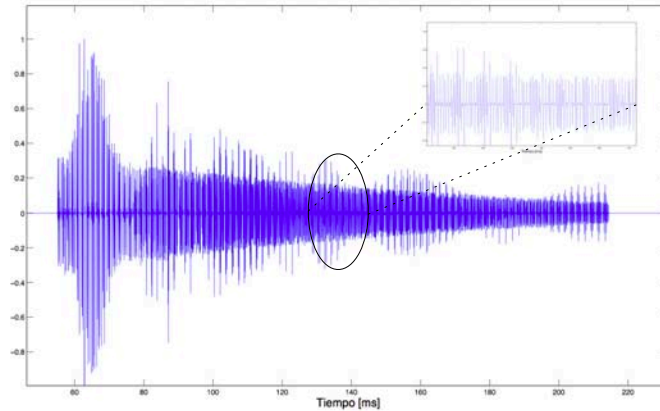


Figura 3.28: Respuesta al impulso obtenida con un arreglo de 3×10 monopolos en cada escalón, además se muestra un zoom para evidenciar la problemática de definir un retraso entre espigas.

En los análisis de magnitud y cepstrum no fue posible identificar estructuras o extraer información respecto al eco, véase la figura 3.29.

A pesar de lo anterior, el espectrograma muestra claramente las curvas armónicas del barrido de frecuencia que hace el eco, conservando el mismo recorrido que en las aproximaciones de monopolo, línea y pistón, véase figura 3.30.

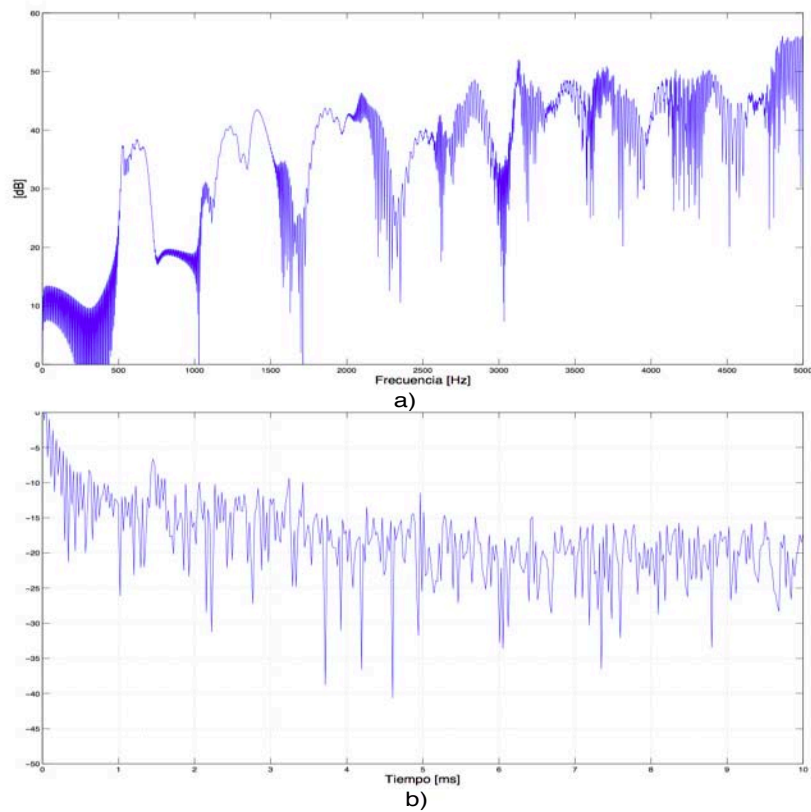


Figura 3.29: Resultados del análisis de la síntesis con arreglo de 3×10 monopolos por escalón. a) Función de magnitud. b) Cepstrum.

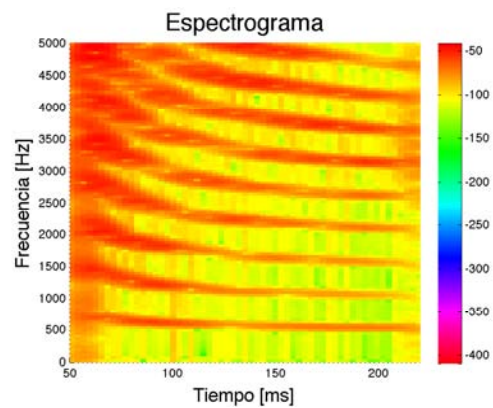


Figura 3.30: Espectrograma de la síntesis con arreglo de 3×10 monopolos por escalón.

3.5. Resultados generales

Envolventes de la respuesta al impulso

Una aspecto importante respecto a las diferencias entre los resultados obtenidos de las distintas construcciones de la escalinata es la envolvente de su respuesta al impulso. En la figura 3.31 se muestran las envolventes de las respuestas al impulso obtenidas para la construcción con monopolos, líneas y pistones. También se muestra la envolvente, del caso en el que el receptor no está localizado exactamente enfrente y en el centro de la escalinata, de la construcción con fuentes lineales. Se observa que los modelos de monopolo y línea son muy parecidos y ambos muestran claramente las características esenciales de la “Cola de quetzal”, por lo que éstas construcciones serán nuestra referencia. Sus envolventes son prácticamente idénticas para la posición de receptor frontal $R(0,20,1.8)$. En cuanto el receptor se mueve a otra posición $R(4.25,20,1.8)$, la envolvente cambia claramente respecto a la referencia y, como se apuntó anteriormente, las características esenciales del fenómeno “Cola de quetzal” tienden a desaparecer; el barrido de frecuencias es mucho menos definido y, empíricamente, el efecto desaparece. Por otra parte, cuando se hace la construcción con pistones la envolvente también cambia respecto a la referencia, pero en sentido diferente al caso anterior. El análisis de la construcción con pistones mostró que el barrido de frecuencias está mejor definido, por lo que se puede considerar como una mejor aproximación al fenómeno acústico; las bandas de reforzamiento visualizadas en la función de magnitud son más claras y la interferencia entre bandas es menor.

El efecto del piso no cambia sustancialmente las envolventes para las distintas construcciones de la escalinata.

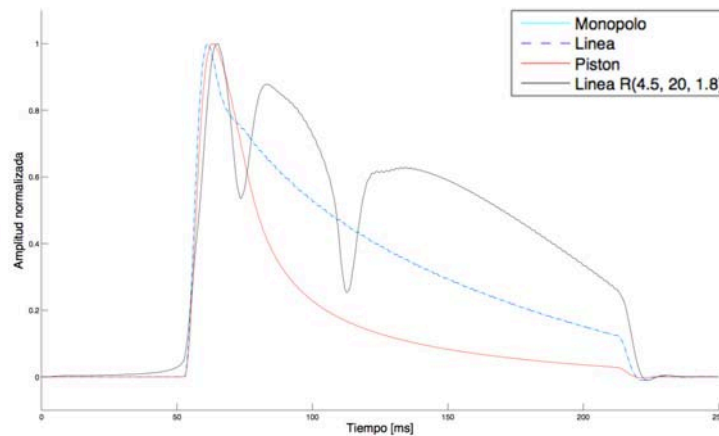


Figura 3.31: Envolventes de las respuestas al impulso de los diferentes modelos para la construcción de la escalinata sin considerar los efectos del piso.

Funcion de fase

El análisis de la función de fase de todos los modelos no brindó información valiosa acerca del fenómeno acústico. Esto debido principalmente al hecho de que, como se vio en la sección 2.9, la amplitud de cada uno de los pulsos de la señal en tiempo tiene un efecto sobre la forma de onda de la función de fase. Ésto provoca que la fase total, de cualquiera de los modelos, resulte de la suma de una variedad de formas de onda, generando así, una señal complicada de estudiar. A manera de ejemplo se muestra la función de fase del modelo de monopolos, véase la figura 3.32, donde podemos observar cierta estructura, la cual es inconsistente para todos los modelos. La posición de los picos o valles no obedece a ninguna correlación apreciable de los limites del barrido de frecuencias del eco o de cualquier otro aspecto notable. La forma de onda de la fase total está determinada por la interacción entre las distintas formas de onda, de las funciones de fase parciales, de cada una de las fuentes.

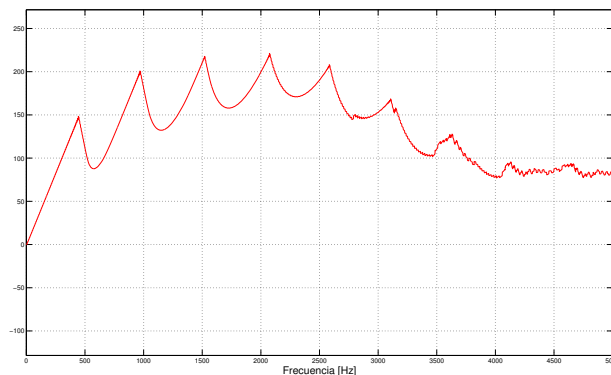


Figura 3.32: Función de Fase de la síntesis con modelo basado en monopolos

Funcion de magnitud

El acercamiento a la función de magnitud, de cualquiera de los modelos, mostrado en la figura 3.33b) rebela un rizo, el cual tiene un periodo, a lo largo del eje de frecuencia, de $\Delta f = 6.38$ Hz. Este rizo se debe a la longitud de la respuesta al impulso, la cual esta definida por la distancia temporal entre el pulso asociado al primer escalón y el último, véase la figura 3.33a).

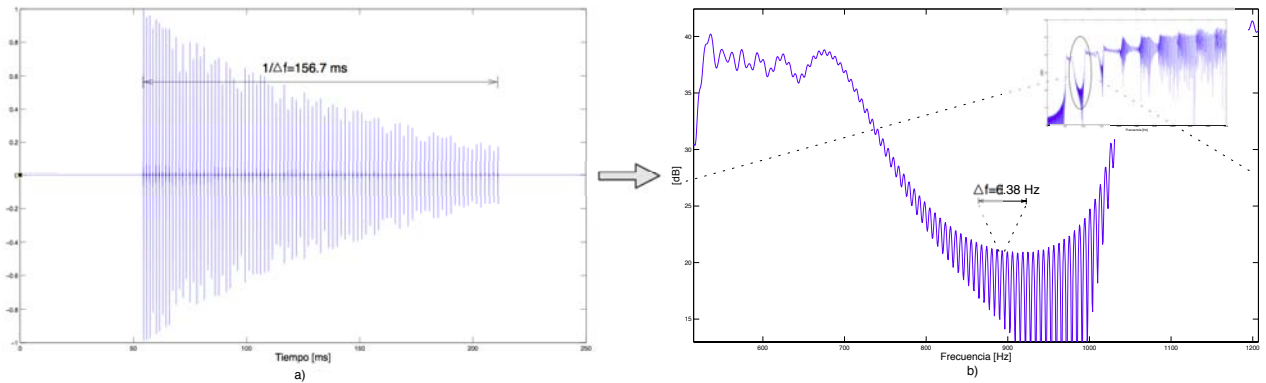


Figura 3.33: a) Longitud de la respuesta al impulso. b) Acercamiento a la función de magnitud, donde $\Delta f = 6.38$ Hz, es el periodo del rizo.

Cepstrum

Todas las expresiones analíticas para calcular la respuesta en frecuencia de los modelos fueron evaluadas de 0-22050 Hz y suavizada con una ventana hanning para evitar *aliasing*. Debido a este procesamiento se observa un rizo, en el cepstrum, de periodo 0.0453 ms el cual corresponde al inverso del ancho de banda, véase la figura 3.34.

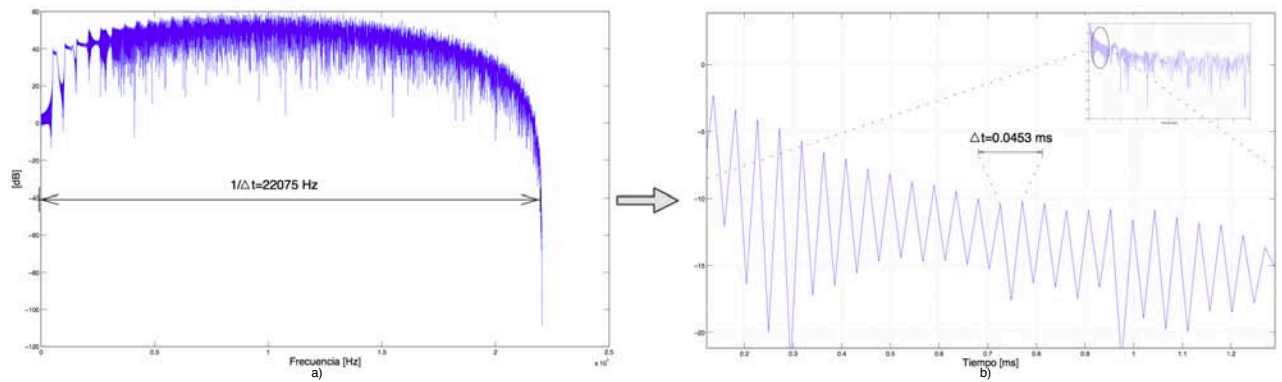


Figura 3.34: a) Magnitud de la respuesta en frecuencia, donde se muestra el ancho de banda en el que esta definida. b) Rizo en cepstrum debido a la forma y ancho de banda de la magnitud de la respuesta en frecuencia.

3.6. Auralización

La respuesta al impulso h sintetizadas en cada uno de los modelos se convolucionan con un sonido impulsivo $a(t)$ y el resultado $s(t)$ es auralizado. De esta manera se obtiene la versión audible de cada uno de los modelos

$$s(t) = a(t) * h(t).$$

La señal $a(t)$ fue extraída de una de las grabaciones *in situ*, es decir, se extrajo el sonido de la explosión del globo. Se utilizó esta señal $a(t)$ para obtener la simulación del eco con la misma señal de excitación que en el caso de las grabaciones *in situ*. El eco para cada uno de los modelos será el resultado de la convolución entre la explosión del globo y cada una de las respuestas al impulso sintetizadas.

El evento completo del fenómeno acústico contiene el sonido directo y el eco debido a la pirámide, por lo tanto las simulaciones están formadas primero por el sonido directo $a(t)$ y en seguida (con un retardo debido a la distancia entre la fuente/receptor y la pirámide) $s(t)$ calculado.

La frecuencia de muestreo utilizada es 44100 Hz y cada una de las señales dura aproximadamente 700 ms. La convolución se obtiene simplemente utilizando el comando *conv*, en Matlab. Con el resultado calculado y el sonido directo se construye la simulación total del fenómeno acústico “Cola de quetzal” y se guarda en formato WAV para posteriormente ser auralizado (escuchado). En la figura 3.35 se muestra un esquema del proceso que se sigue para llegar a la auralización de los modelos acústicos propuestos. Todos los archivos de audio procesados están disponibles en el anexo digital y en el apéndice B se encuentra la descripción de cada uno de los archivos de audio.

Resultados

El criterio de evaluación de cada construcción de la escalinata esta basado en la comparación de la auralización de cada modelo con el audio de la grabación *in situ* del fenómeno acústico. (Los resultados y comentarios aquí mostrados son únicamente la evaluación del autor de esta tesis)

La auralización de la construcción de la escalinata con los modelos de arreglo de líneas y pistón sin influencia del piso son las mejores aproximaciones al eco real de la pirámide. El barrido de frecuencias se percibe suave. A pesar de que el eco es muy breve se logra escuchar el desvanecimiento de éste y su final no es abrupto.

Las aproximaciones con monopolo y línea sin influencia del piso se escuchan exactamente igual. Se percibe un barrido de frecuencias brusco y sin dinámica, es decir, el eco comienza y termina abruptamente. Estas auralizaciones son una aproximación regular al sonido real del eco.

En la auralización del modelo de arreglo de monopolos se escucha un barrido de frecuencias brusco y sin dinámica, además surge un sonido áspero (frecuencias altas)

que se aleja del sonido real del eco, provocando que sea una mala aproximación auditiva.

El caso en el que el receptor está en $R(4.25,20,1.8)$ la sensación sonora es muy alejada del eco real. El barrido de frecuencias no se percibe claramente y el sonido es áspero y brusco.

La influencia del piso introduce aspereza en todos los construcciones de la escalinata ocasionando que estos modelos suenen artificiales y lejanos al eco real de la pirámide.

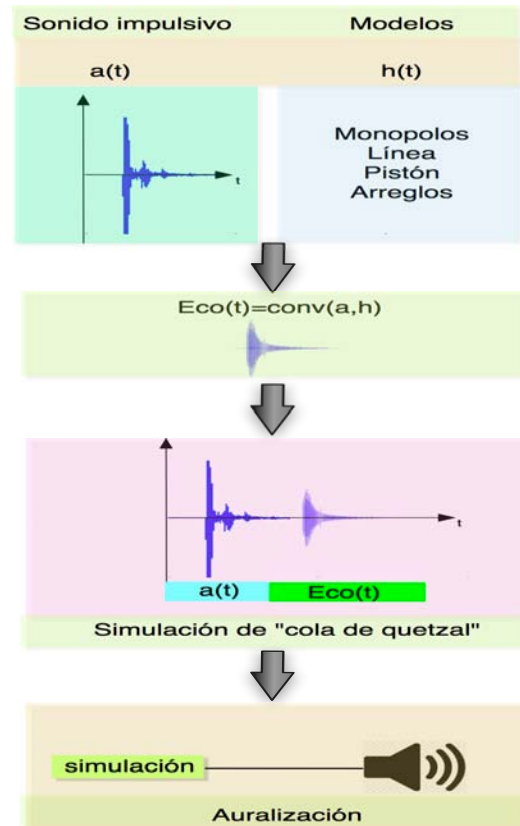


Figura 3.35: Esquema del procesamiento para llegar a la auralización de los modelos acústicos propuestos para el eco de la pirámide de Kukulkán.

Capítulo 4

Conclusiones

4.1. Conclusiones generales.

Los retardos entre las espigas de la repuesta al impulso sintetizadas son consistentes para todos los modelos. Estos retardos están definidos por el recorrido de las ondas sonoras; desde la fuente a la pirámide mas el recorrido del eco hacia el receptor. Estos retardos relativos T determinan los limites del barrido de frecuencias. Debido a lo anterior, todos los espectrogramas obtenidos son consistentes, en relación a la aparición de las mismas curvas armónicas, para todos los modelos.

Las curvas armónicas son zonas debidas al reforzamiento entre las reflexiones de cada uno de los escalones y corresponden a las frecuencias cuya longitud de onda cabe un número entero de veces entre la fuente/receptor y la pirámide.

En el análisis de las envolventes, y en la auralización de los modelos, se mostró que una envolvente que se desvanece suavemente, como en el caso del pistón y arreglo de lineas, tiene el efecto de definir mas claramente el barrido de frecuencias del fenómeno “Cola de quetzal”. Ademas la sensación sonora de un eco que se desvanece favorece a la aproximación del eco real. Apoyando esta conclusión esta la construcción de la escalinata con fuentes lineales para el caso en el que el receptor esta en $R(4.25, 20, 1.8)$, donde la envolvente tiene un comportamiento claramente diferente a la del pistón y el análisis de la función de magnitud muestra que el barrido de frecuencias no esta claramente definido, ademas de ser la peor aproximación auditiva al eco real de la pirámide.

4.2. Conclusiones respecto a los modelos.

Los modelos de fuente puntual monopolar, fuente lineal y pistón rectangular son útiles para ondas incidentes planas. El arreglo de fuentes lineales emula ondas incidentes cilíndricas mientras que el arreglo de monopolos entrega una aproximación para ondas incidentes esféricas.

Todos los modelos definen atenuación y retrasos, de las ondas sonoras, los cuales están determinados por las distancias entre la fuente, la pirámide y el receptor. La diferencia entre los modelos radica en relación a la variación del campo acústico obtenido conforme los ángulos polar y azimutal varían.

Para los arreglos de fuentes se tiene la virtud de que según la densidad de los arreglos se obtienen retrasos (desfases) para la radiación de un solo escalón, es decir, la superficie modelada de cada uno de los escalones puede radiar de forma desfasada.

En el arreglo de líneas, se añade la variación en función del ángulo azimutal, además conserva la dependencia del ángulo polar propia de cada línea.

El arreglo de monopolos considera la variación en función del ángulo polar y azimutal con la virtud de poder hacer tan denso el arreglo como se desee, para poder simular la situación donde se tienen diferenciales de superficie de la cara del escalón que radian de forma totalmente independiente al resto del escalón.

4.2.1. Situación particular de alineación entre la pirámide y receptor/fuente.

En las situación de los audios grabados, es decir, en el punto donde se escucha el efecto quetzal se tienen las siguientes conclusiones:

No hay diferencia alguna entre utilizar modelo de monopolos y líneas.

El modelo de pistones define mas claramente las zonas armónicas debido a la variación de la envolvente de la respuesta al impulso sintetizada, es decir, la amplitud de cada una de las reflexiones es importante para definir la calidad del barrido de frecuencias.

Los arreglos de fuentes añaden complejidad al análisis, conservando la información del barrido de frecuencias y añadiendo cambios en la forma de onda (color) de los resultados. De la misma manera actúa la influencia del piso; añade reflexiones y componentes frecuenciales de menos ponderación que el eco principal de la pirámide, añadiendo variaciones de forma de onda (mas color).

El proceso de auralización se introdujo como una herramienta de análisis a través del sentido del oído y se concluye lo siguiente: Todos los modelos conservan la calidad de tono descendente. La sensación sonora de los modelos es por mucho lejana a la experiencia de escuchar el eco real, esto debido esencialmente a que la experiencia de escuchar es multifactorial y la situación real del eco contiene una inmensidad de factores que construyen y colorean de manera muy particular. Los modelos de pistón y arreglo

de líneas sin influencia del piso son las mejores aproximaciones al eco real. Todos los modelos con influencia del piso se escuchan ásperos y artificiales.

4.3. Conclusiones acerca del procesamiento.

Los análisis fundados en la función de fase resultaron ser inherentemente “complejos” de analizar debido a la inconsistencia de las formas de onda para las diferentes aproximaciones, es decir, no se encontraron correspondencias claras entre los resultados y el fenómeno acústico.

Surgieron rizados en las funciones de magnitud y cepstrum, ambos debidos a cuestiones propias de procesamiento; el primero, debido a la longitud de las respuestas al impulso sintetizadas y el segundo, al dominio en el cual se evaluó las funciones de respuesta en frecuencia de los modelos.

El programa principal para realizar todos los cálculos y simulaciones de esta tesis funciona como una herramienta para el estudio de la acústica del eco de pirámide de Kukulcán, teniendo como versatilidad la posibilidad de situar la fuente y el receptor en cualquier punto del espacio y calcular la presión asociada a la pirámide construida con cualquiera de las fuentes acústicas propuestas en estas tesis. Además, es posible obtener resultados del eco cambiando el tipo de señal de excitación y auralizar todas estas posibilidades. Por otra parte, el programa sirve para analizar cualquier otra estructura que pueda ser construida con los elementos constitutivos y procedimientos desarrollados en esta tesis.

4.4. Perspectivas y trabajo futuro

Los audios grabados del fenómeno son útiles de forma parcial para la comparación y validación de los modelos, ya que contienen demasiado ruido, por lo que se sugiere realizar un procedimiento de grabación planeado y cuidado. Este procedimiento deberá contener grabaciones en diferentes posiciones, tales que permitan validar las diferencias entre los modelos y además deberán ser lo suficientemente cuidadas para que se realice una comparación entre los modelos y el eco real.

Otra aproximación es la construcción de modelos físicos a escala con los cuales se puedan experimentar y cuyos resultados permitan establecer la validez de los modelos sintetizados.

Desarrollar pruebas subjetivas de escucha de eco real y sintetizado para determinar la validez perceptiva de cada uno de los modelos.

Cada uno de los modelos puede crecer en complejidad a partir de los elementos constitutivos que ya fueron desarrollados y de esta manera modelar otros elementos de la pirámide, como las alfardas (bajos pasamanos) y todas las demás estructuras que

forman la pirámide. Además se pueden simular y estudiar otros efectos acústicos como difracción de borde.

Apéndice **A**

Descripción de la programación en Matlab

Lista de programas en Matlab que procesan y calculan los resultados obtenidos en esta tesis. Además, un esquema general de como funciona el programa principal para el cálculo de la radiación acústica de la pirámide. Todos los programas están disponibles en el anexo digital.

- `c_3modelos.m`.- Programa principal que calcula la radiación acústica de la pirámide de Kukulkán modelada con fuentes monopulares, lineales y pistones; muestra los resultados en gráficas. Además se guardan las respuestas al impulso de cada modelo en formato wav. Las variables de entrada para este código son:
 - `n`.- Numero de muestras para la simulación.
 - `fs`.- frecuencia de muestreo.
 - `c`.- velocidad de sonido.
 - `ye`.-Profundidad del escalón.
 - `ze`.-Altura del escalón.
 - `xe`.- Ancho de la escalinata.
 - `PR(x,y,z)`.- Posición del receptor.
 - `Pf(x,y,z)`.- Posición de la fuente.
 - `h`.-numero de renglones en el arreglo de monopolos.
 - `w`.-numero de columnas en el arreglo de monopolos.
 - `m`.- numero de fuentes en el arreglo de lineas.

- `f_EscaleraLinea` .- Función que construye la escalinata con fuentes acústicas lineales.
 - `f_EscaleraLineas` .-Función que construye la escalinata con un arreglo de m fuentes acústicas lineales en cada escalón
 - `f_EscaleraMonopolo` .-Función que construye la escalinata con fuentes acústicas monopolares.
 - `f_EscaleraMonopolos` .- Función que construye la escalinata con un arreglo de $h \times w$ fuentes puntuales monopolares en cada escalón
 - `f_EscaleraPiston` .-Función que construye la escalinata con pistones rectangulares.
 - `f_radiacionMonopolo` .-Función que calcula la radiación acústica de la fuente puntual monopolar.
 - `f_radiacionLinea` .- Función que calcula la radiación acústica de la fuente lineal.
 - `f_radiacionPiston.m` .-Función que calcula la radiación acústica del piston rectangular.
 - `f_ConvLinea.m` .- Función que convierte coordenadas rectangulares a coordenadas polares para utilizar la formulación de la radiación de la fuente lineal
 - `f_ConvVertices.m` .- Función que entrega las coordenadas de la posición relativa entre un punto y el centro geométrico de un pistón. Convierte de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas, esto para utilizar la formulación de la radiación acústica de un pistón.
 - `f_graficas.m` .-Función que procesa la respuesta al impulso. Calcula: Función de magnitud, fase, espectro, cepstrum, retardo de grupo y gráfica los resultados.
-

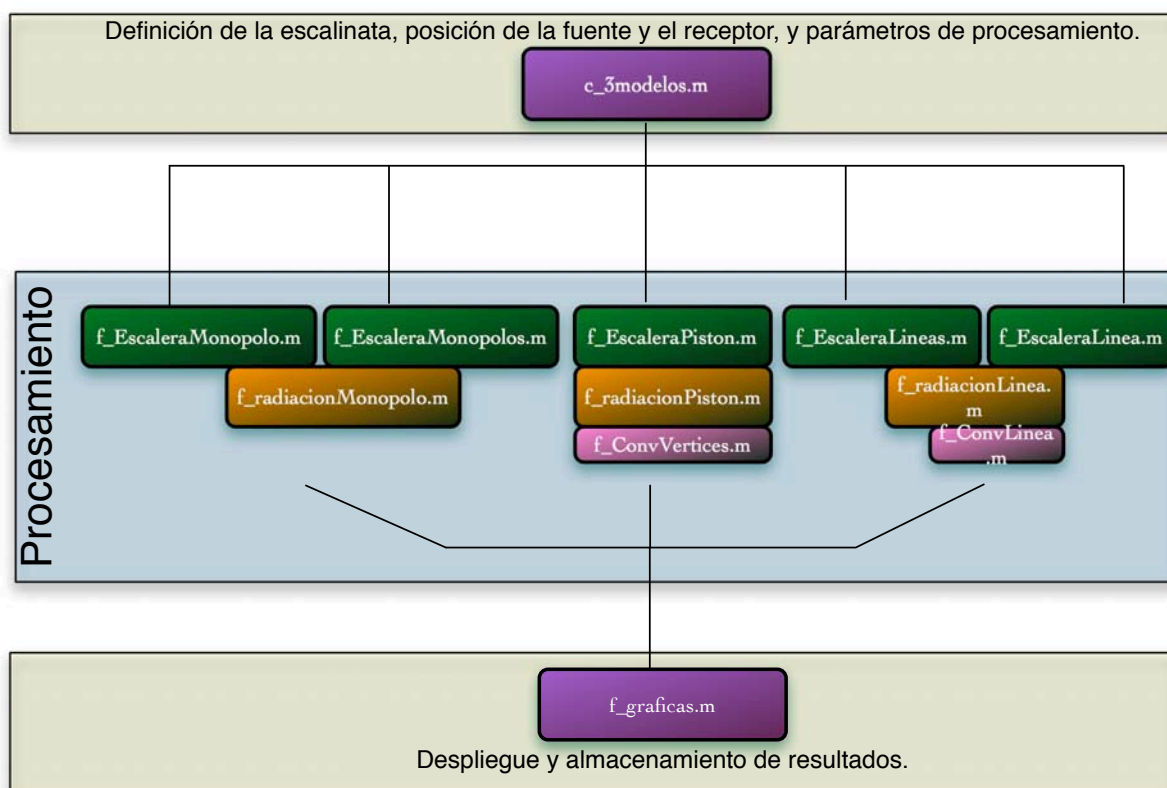


Figura A.1: Esquema general del funcionamiento del programa principal de cálculo de la radiación acústica de la pirámide.

Apéndice **B**

Auralización

Lista de archivos de audio que contienen la descripción de las auralizaciones de cada uno de los modelos propuestos en la tesis y una grabación in situ del eco de la pirámide de Kukulcán. Todos estos archivos están disponibles en el anexo digital.

- grabacion.wav .- Grabación in situ del eco de la pirámide de Kukulcan.
- aplauso.wav .- Aplauso utilizado para las auralizaciones de los modelos.
- Eco_monopolos.wav .-Modelo: Fuentes puntuales monopolares sin influencia del piso.
- Eco_monopolos_piso.wav .-Modelo: Fuentes puntuales monopolares con influencia del piso
- Eco_piston.wav .- Modelo: Pistones rectangulares sin influencia del piso.
- Eco_piston_piso.wav .-Modelo: Pistones rectangulares con influencia del piso.
- Eco_linea.wav .- Modelo: Fuentes lineales sin influencia del piso.
- Eco_linea_orilla.wav .- Modelo: Fuentes lineales sin influencia del piso con receptor en $R(4.25, 20, 1.8)$
- Eco_linea_piso.wav .- Modelo: Fuentes lineales con influencia del piso.
- Eco_arreglo_linea.wav .-Modelo: Arreglo de 5 fuentes lineales sin influencia del piso.
- Eco_arreglo_monopolos.wav .- Modelos: Arreglo de 3×10 monopolos sin influencia del piso.

- Eco_arreglo_monopolos_piso.wav .-Modelos: Arreglo de 3×10 monopolos con influencia del piso.
-

Bibliografía

- [1] *Elements of Acoustical Engineering*. D. Van Nostrand Company, Inc., second edition, 1957.
- [2] Frans A. Bilsen. Repetition pitch glide from the step pyramid at chichen itza. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 120(2), 2006.
- [3] M. Claeys and O. Leroy. ‘diffraction of plane waves by periodic surfaces. *Rev. Cethedec*, 72:183–193, 1982.
- [4] Hector Cordurier and Felipe Orduna. Programa de simulación acústica del “efecto quetzal” de las escalinaras de la pirámide de kulkulkan en chichen-itza, yucatan. *SOMI XXIV*, 2009.
- [5] Nico F. Declerecq and Joris Degrieck. A theoretical study of special acoustic effects caused by the staircase of the el castillo pyramid at the maya ruins of chichen-itza in mexico. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116:3328–35, 2004.
- [6] A. P. French. *Vibraciones y Ondas*. Reverté. s.a., 1974.
- [7] Clara Garza, Andrés Medina, Pablo Padilla, Alejandro Ramos, and Francisca Zalaquett. *Arqueoacustica maya. la necesidad del estudio sistemático de efectos acústicos en sitios arqueologicos*, 2010.
- [8] Lawrence E. Kinsler. *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley and Sons, Inc., fourth edition, 2000.
- [9] David Lubman. *Mayan pyramid*, 2009.
- [10] Philip M. Morse and Uno K. Ingard. *Theoretical Acoustics*. Mc Graw-Hill Book Company, 1968.
- [11] Alan V. Oppenheim and Alan S. Willsky. *Señales y Sistemas*. Prentice Hall, 1997.

- [12] R. B. Randall. *Frequency Analysis*. Brüel and Kjaer, third edition, 1987.
 - [13] R. B. Randall and Hee Jens. Cepstrum analysis. Technical report, Brüel and Kjaer, 1981.
 - [14] Rossing, editor. *Handbook of Acoustics*. Springer, 2007.
 - [15] Adrián Tonatiuh Ruiz Ruiz, 2009.
-