



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

Defectos Topológicos en Geometrotermodinámica

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

PRESENTA:

ANA LUCÍA BÁEZ CAMARGO AGUILAR

DIRECTOR DE TESIS:

DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS



México, D. F.

Noviembre 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Hoja de Datos del Jurado

## 1. Datos del alumno

Báez Camargo

Aguilar

Ana Lucía

55624055

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Física

305766955

## 2. Datos del Tutor

Dr.

Hernando

Quevedo

Cubillos

## 3. Datos del sinodal 1

Dra.

Myriam

Mondragón

Ceballos

## 4. Datos del sinodal 2

Dr.

César Simón

López

Monsalvo

## 5. Datos del sinodal 3

Dr.

Erick Leonardo

Patiño

Jaidar

## 6. Datos del sinodal 4

Dr.

Pablo

Barberis

Blostein

## 7. Datos del trabajo escrito

Defectos Topológicos en Geometrotermodinámica

123p

2014

# Contenido

<b>Contenido</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>VI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Termodinámica . . . . .	1
1.2. Formalismos matemáticos en Termodinámica . . . . .	2
1.3. Geometrotermodinámica . . . . .	2
1.4. Estructura de la tesis . . . . .	3
<b>2. Breve Introducción a la Topología Algebraica.</b>	<b>5</b>
2.1. Grupo Fundamental . . . . .	6
2.2. Grupos de homología . . . . .	20
2.2.1. Homología relativa . . . . .	27
2.2.2. Secuencias exactas . . . . .	30
2.2.3. El subgrupo de Torsión y los grupos de homología con coefi- cientes no enteros . . . . .	33
2.2.4. La fórmula de Kunneth . . . . .	35
2.2.5. El teorema de Euler-Poincaré . . . . .	35
2.2.6. Homología Singular . . . . .	37
2.3. Homotopía de orden superior . . . . .	38
2.4. Cohomología de De Rham . . . . .	41
2.4.1. Teorema de Stokes . . . . .	42
2.4.2. Los grupos de cohomología de De Rham . . . . .	43

2.4.3. Dualidad de $H_p(M)$ y $H^p(M)$ . . . . .	44
2.4.4. El producto cuña . . . . .	46
2.4.5. Superioridad de cohomología frente a homología . . . . .	47
2.5. Defectos topológicos . . . . .	47
2.6. Referencias . . . . .	49
<b>3. Fundamentos de Geometrotermodinámica.</b>	<b>50</b>
3.1. El espacio fase y la estructura de contacto . . . . .	50
3.2. El espacio de estados de equilibrio . . . . .	52
3.3. Transformaciones de Legendre . . . . .	54
3.4. La estructura Riemanniana de la GTD . . . . .	57
3.5. Geodésicas en GTD . . . . .	60
3.6. Gas Ideal . . . . .	60
3.6.1. Gas Ideal Molar . . . . .	61
3.6.2. Gas ideal en densidad volumétrica . . . . .	63
3.7. Referencias . . . . .	65
<b>4. Tercera Ley y topología en GTD</b>	<b>66</b>
4.1. Tercera Ley de la Termodinámica . . . . .	66
4.2. Topología del gas ideal en GTD . . . . .	66
4.2.1. Geodésicas en el espacio de estados de equilibrio del gas ideal	67
4.2.2. Defectos topológicos en el espacio de estados de equilibrio del gas ideal . . . . .	71
4.3. Mezcla de un número finito de gases ideales . . . . .	73
4.3.1. El espacio de estados de equilibrio para $n$ gases ideales y sus defectos topológicos . . . . .	74
4.4. Referencias . . . . .	78
<b>5. Conclusiones y futura investigación</b>	<b>79</b>
5.1. Conclusiones de esta tesis . . . . .	79
5.2. Futura investigación . . . . .	81
5.3. Referencias . . . . .	81
<b>A. Introducción a Teoría de Grupos.</b>	<b>82</b>
A.1. Referencias . . . . .	87

<b>B. Topología y Geometría Diferencial.</b>	<b>88</b>
B.1. La variedad diferenciable y sus componentes . . . . .	88
B.2. Mapeos entre variedades . . . . .	91
B.3. Inmersiones, encajes y subvariedades . . . . .	92
B.3.1. Las inmersiones y las subvariedades inmersas . . . . .	93
B.3.2. Los encajes y las subvariedades encajadas . . . . .	94
B.3.3. Las sumersiones . . . . .	94
B.4. Tensores . . . . .	94
B.4.1. Álgebra Tensorial . . . . .	94
B.5. Formas diferenciales . . . . .	96
B.6. Derivadas . . . . .	97
B.6.1. Derivada exterior . . . . .	97
B.6.2. Derivada de Lie . . . . .	97
B.6.3. Derivada covariante . . . . .	99
B.7. Variedad Riemanniana . . . . .	101
B.7.1. Curvatura . . . . .	101
B.8. Referencias . . . . .	102
<b>C. Termodinámica clásica.</b>	<b>103</b>
C.1. Sistema termodinámico . . . . .	103
C.2. Leyes de la Termodinámica . . . . .	105
C.2.1. Ley cero de la termodinámica . . . . .	105
C.2.2. Primera ley de la Termodinámica . . . . .	105
C.2.3. Segunda ley de la Termodinámica . . . . .	106
C.2.4. Tercera ley de la Termodinámica . . . . .	108
C.3. Ecuación fundamental . . . . .	109
C.3.1. Potenciales termodinámicos . . . . .	110
C.3.2. Ecuación de Euler y ecuación de Gibbs-Duhem . . . . .	111
C.4. El gas ideal . . . . .	111
C.5. Referencias . . . . .	113

# Agradecimientos

Agradezco primeramente a mi madre por darme la vida, por ser sabia luz de mi camino y por su amor incondicional. Gracias a mis abuelos, Josefina y Gustavo, por ser fuente de inspiración y ejemplos de vida. Gracias a mi hermano por ser mi cómplice, mi apoyo y mi coach. Agradezco a mis tíos Laura, Jorge, Gus y Gaby por escuchar mis locuras, en especial a mi primo Batán, por sus excelentes preguntas y genuina curiosidad.

Agradezco de corazón a mi tutor, el Dr. Hernando Quevedo, ya que sin su apoyo, orientación y paciencia infinita, esta tesis no habría visto la luz. Gracias por compartir su conocimiento y entusiasmo por la ciencia y la vida.

Así mismo, quiero agradecer al Dr. Eduardo Nahmad por haberme iniciado en el apasionante mundo de la topología con una de las mejores clases que tuve en la carrera.

No puedo dejar de agradecer al Dr. César López-Monsalvo por su apoyo a lo largo de todo el trabajo. Sus preguntas, comentarios y observaciones fueron de vital importancia para el desarrollo del mismo.

Agradezco los comentarios y crítica a mi tesis del Dr. Leonardo Patiño; de mi hermano, el Fís. Daniel Flores; así como de Iker Martínez, los cuales impulsaron una mejor redacción y entendimiento del trabajo.

Quiero agradecer a todos mis amigos, por su apoyo, compañía, consejos, porras, risas y fiestas. A Mafer Berumen por compartir conmigo la aventura de la carrera y

ser un imán de optimismo en los momentos más difíciles. A Marianitz por llevar la música en el corazón y la alegría a flor de piel. A la Roja por ser la mejor compañera de viaje. A Zar por mostrarme el mundo a través de su lente. A Tupac por las pláticas de ciencia y su buen gusto en películas. A Jorge por el apoyo en momentos cruciales.

Hay muchas más personas a las que me encantaría agradecer: Citlali, Pepe Wi-cho, Karen, mi hermanito Alex, Irene, Chucho, Marthita, Iker Loic, Alessandro, Trini, Girón, Danny Lucette, mi cuñis, Luz, a todos mis buddies y a mis amigos del call center por dejarme trabajar ahí. Una disculpa a quienes no menciono, mi memoria puede fallar, pero en mi corazón siempre están.

Agradezco a CONACyT la beca recibida.

A la UNAM, como semillero de grandes mentes y espíritus, gracias por darme la oportunidad de florecer.

*AXCANTÉOTL (dios del ahora):*

*En su afán de atinar con lo eterno,  
piensa y no piensa Quetzalcóatl  
que Tula y la Toltecáyotl  
podrán escapar  
del torrente del tiempo...  
Voy a ver  
qué hace Quetzalcóatl  
cuando descubra  
que es sólo una inquieta burbuja del tiempo,  
¡una burbuja brillante  
en la que, por fin,  
el tiempo se refleja a sí mismo!*

Miguel León-Portilla

# 1

## Introducción

El objetivo de esta tesis es clasificar los defectos topológicos asociados a la tercera ley de la Termodinámica. Para estudiar estos defectos se utilizan los grupos de homotopía, homología y cohomología. El presente capítulo tiene como intención motivar el estudio de la Geometrotermodinámica [GTD], así como presentar un resumen de este formalismo.

### 1.1. Termodinámica

La Termodinámica es una teoría que describe propiedades de la materia a nivel macroscópico como la temperatura, el volumen, la presión, etc. Esta teoría se rige por cuatro leyes que se obtuvieron empíricamente. La ley cero impone como condición de equilibrio la igualdad de temperaturas de los sistemas. La primera ley habla de la conservación de la energía de un sistema que sufre un proceso. La segunda ley señala la dirección en que se llevan a cabo los procesos termodinámicos e introduce una nueva variable termodinámica: la entropía; la cual describe lo irreversible de los sistemas termodinámicos. Finalmente, la tercera ley proporciona un punto de referencia absoluto para la determinación de la entropía.

Existen varias maneras de enunciar la tercera ley; la que se empleará en esta tesis es: “Es imposible alcanzar la entropía mínima mediante un número finito de procesos cuasiestáticos”.

## 1.2. Formalismos matemáticos en Termodinámica

A lo largo de la historia, la Física ha cambiado su lenguaje desde lo empírico a la utilización de matemáticas cada vez más complejas. Lo anterior es con el objetivo de generalizar las leyes físicas para utilizarlas en el mayor número de sistemas posibles. En particular, la Termodinámica nace de la pura experiencia. El desarrollo de tecnologías que reemplazaron el trabajo manual por maquinaria, llevó a la necesidad de un conocimiento profundo de las leyes de la Termodinámica.

La utilización de Geometría en Termodinámica empieza con Gibbs [10], en 1871. En este artículo, Gibbs presentó a la primera ley de la Termodinámica como una forma diferencial, de manera que interpretó los estados de equilibrio de un sistema termodinámico como una superficie. Más tarde, Caratheodory [3] formuló las leyes de la Termodinámica de forma axiomática utilizando formas diferenciales de Pfaff y el concepto de proceso adiabático. En 1973, Hermann [12] propuso un espacio fase termodinámico con una estructura de contacto y Mrugala [18] extendió estos estudios. Dos años más tarde, Weinhold [25] introduce otro objeto geométrico: una métrica Riemanniana. Además, Ruppeiner [24] introdujo una métrica Riemanniana distinta a la de Weinhold que trata la teoría de fluctuaciones termodinámicas. Esta motivación dió origen al formalismo de la GTD, cuyo objetivo (al igual que los otros formalismos) es una formulación geométrica de la Termodinámica Clásica. Quevedo [22] propone que las transformaciones de Legendre están asociadas a la estructura de contacto y a la métrica Riemanniana.

## 1.3. Geometrotermodinámica

En este formalismo se hacen las siguientes suposiciones.

1. Las leyes de la Termodinámica se deben cumplir.
2. Existe una ecuación fundamental, la cual describe al sistema termodinámico.
3. La termodinámica es invariante de Legendre; es decir, que la misma información

termodinámica puede ser expresada en diferentes formas matemáticas, cada una de ellas representada mediante un potencial termodinámico.

4. Si el sistema tiene transiciones de fase, debe ser posible observarlo en este formalismo.

La GTD permite estudiar los fenómenos termodinámicos desde un punto de vista geométrico. La base de la GTD es una variedad diferenciable que tiene una estructura de contacto y una métrica Riemanniana, llamada espacio fase termodinámico  $\mathcal{T}$ . En este espacio se encuentra la forma diferencial de Gibbs, la cual es invariante ante transformaciones de Legendre. Una variedad encajada en el espacio fase es conocida como el espacio de estados de equilibrio  $\mathcal{E}$ . El encaje induce una métrica sobre el espacio de estados de equilibrio a partir de la métrica del espacio fase.

De esta forma, la GTD representa una formulación geométrica invariante de la termodinámica. Los espacios  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{E}$  se relacionan vía el encaje  $\varphi$ .

## 1.4. Estructura de la tesis

Esta tesis se centra en investigar los defectos topológicos que se presentan a partir de introducir la tercera ley de la Termodinámica al espacio de estados de equilibrio de la GTD. Para lograrlo, se estudiarán los grupos de homotopía, homología y cohomología. Además, se analizará el gas ideal en GTD, incluyendo las tres leyes de la Termodinámica y sus geodésicas. Al estudiar sus geodésicas se encontrarán las regiones definidas por las segunda y tercer leyes de la Termodinámica. Finalmente, se utilizarán los resultados de este sistema para clasificar topológicamente la tercera ley.

Además se analizará una mezcla finita, no interactuante de gases ideales y se clasificará topológicamente la tercera ley en el espacio de estados de equilibrio de este sistema.

En el segundo capítulo se estudiarán las herramientas matemáticas para resolver el problema planteado. Se dará una breve introducción a la topología algebraica, que es la rama de las matemáticas que estudia la topología del espacio a partir los grupos homotopía, homología y cohomología. Para este capítulo es muy conveniente tener frescos conceptos de la teoría de grupos, por lo que, existe un apéndice como apoyo.

En el tercer capítulo se mostrará detalladamente el formalismo de la GTD. Para este capítulo es necesario entender conceptos de Geometría diferencial y Riemanniana que se exponen en el apéndice B. Además, se incluirá como ejemplo los cálculos del gas ideal en GTD y se demostrará que los resultados obtenidos con este formalismo concuerdan con la Termodinámica clásica. Los conceptos de Termodinámica clásica se encuentran en el apéndice C

El capítulo cuatro aborda el problema de la tesis. Primero se estudiará un gas ideal y se observará la topología del espacio de estados de equilibrio de este sistema. También se hará un análisis similar para una mezcla no interactuante de un número finito de gases ideales.

El quinto capítulo está dedicado a las conclusiones de la tesis, así como diversas propuestas para futuras investigaciones.

Es importante notar que este es un acercamiento nuevo para describir la tercera ley de la Termodinámica y es mucho más general en el sentido de que no es necesaria la geometría para poder describirla, sino solamente la topología del espacio la define.

## 2

# Breve Introducción a la Topología Algebraica.

La Topología es una rama de las Matemáticas muy amplia, la cual ha sido bien aprovechada por los físicos. Esta rama se encarga de encontrar diferencias y similitudes entre distintos espacios topológicos. Por ejemplo, para la topología, un cuadrado y un círculo tienen las mismas propiedades topológicas, mientras que, si al círculo le hacemos un hoyo en el centro, entonces es distinto al círculo completo.

En Física se trabaja frecuentemente con espacios topológicos. Así en mecánica Newtoniana se trabaja en un espacio Euclídeo metrizable (el cual es un conjunto equipado con una función distancia), en mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana los espacios fase de ambas son espacios topológicos y en Relatividad se trabaja con una variedad diferenciable, la cual es un espacio topológico.

Para que las leyes físicas se cumplan en todos los marcos de referencia, necesitamos que estos marcos sean espacios topológicamente equivalentes, es decir, *homeomorfos*. Dos espacios son homeomorfos, si existe un *homeomorfismo* entre ellos.

homeo

**Definición 1.** Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos, y sea  $h$  una función de  $X$  a  $Y$ . Entonces  $h$  es un homeomorfismo si es biyectiva, continua y su inversa es continua.

Existe un concepto muy importante en Topología que está relacionado con los espacios homeomorfos: el *invariante topológico*. Este concepto es de gran utilidad en Física, pues los físicos suelen hacer transformaciones a los sistemas de manera que sea más fácil resolver un problema. El hecho de saber que alguna propiedad es

invariante, garantiza que no se pierde información del sistema al hacer una transformación.

invtopo

**Definición 2.** Sea  $P$  una propiedad del espacio topológico  $X$ . Decimos que  $P$  es un invariante topológico si y sólo si, dados  $Y$  un espacio topológico y  $h$  un homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$ , se tiene que  $Y$  satisface la propiedad  $P$ .

Lo anterior nos dice que existen propiedades de un espacio topológico que no cambian cuando utilizamos otro espacio. Esto es la maravilla que los físicos encontraron en los espacios topológicos. Un ejemplo de invariante topológico es la propiedad metrizable, es decir, un espacio es metrizable si es homeomorfo a un espacio métrico. En mecánica Newtoniana, todos los marcos de referencia inerciales cumplen las leyes de Newton, por lo que es necesario que estos marcos sean espacios métricos homeomorfos entre sí, de manera que un cambio de coordenadas no afecte la información física del sistema.

Además de este tipo de invariantes topológicos, existen otros que son de tipo algebraico (como los grupos, anillos, etc.), los cuales son estudiados por la topología algebraica. En este capítulo, estudiaremos estos tipos de invariantes topológicos, a saber, los grupos de homotopía, homología y cohomología. Al final del capítulo veremos cómo se relacionan con la Física.

En este trabajo se incluye un apéndice sobre teoría de grupos, para aquellos lectores que quieran aprender o simplemente recordar este bonito tópico. En el apéndice se definen los conceptos básicos que se necesitan para estudiar los grupos antes mencionados, por lo que se recomienda al lector entender bien estos conceptos.

## 2.1. Grupo Fundamental

Comencemos con una introducción al grupo fundamental. La mayor parte de esta sección se extrajo del libro <sup>Nash</sup> [21]. El lector interesado puede consultar este gran libro para enriquecer el análisis aquí presentado.

Si se tienen dos espacios topológicos  $X_1$  y  $X_2$  como muestra la figura 2.1, podemos encontrar sus diferencias topológicas conociendo el número de agujeros que tienen cada uno de ellos.

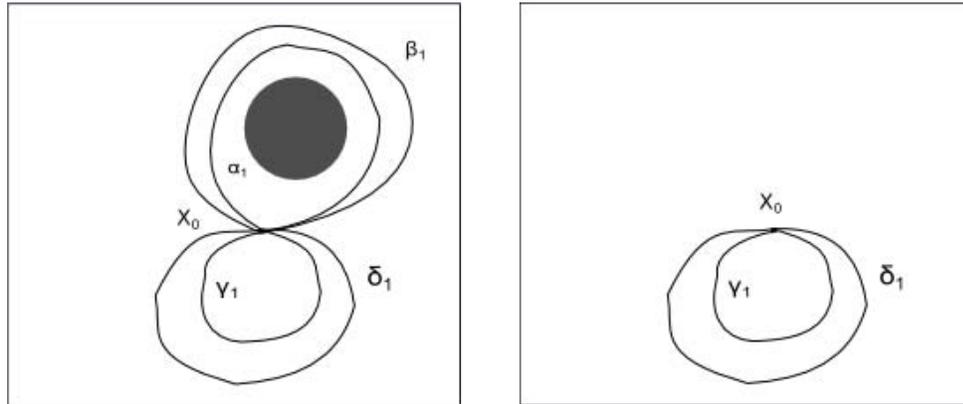


Figura 2.1: Dos espacios topológicos, uno de los cuales tiene un agujero. Se observan loops  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ ,  $\delta_1$  y  $\gamma_1$  homotópicos entre sí, respectivamente. Los loops  $\alpha_1$  y  $\delta_1$  no son homotópicos entre sí.

Figura1

En la figura 2.1 se observan distintos caminos nombrados con letras griegas, los cuales se llaman trayectorias. Una *trayectoria*  $\alpha(t)$  en un espacio topológico  $X$  es un mapeo continuo  $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = x_0$  y  $\alpha(1) = x_1$ . Además un espacio topológico  $X$  es *conexo por trayectorias* si siempre existe una trayectoria que une dos puntos  $x_0, x_1 \in X$

Notemos que el concepto de un espacio conexo por trayectorias es más fuerte que el de un espacio conexo, es decir, si un espacio es conexo por trayectorias implica que es conexo, mientras que la otra implicación no necesariamente se cumple. Un ejemplo muy conocido es el llamado seno del topólogo. La figura 2.2 muestra la gráfica de la curva  $\tilde{C}$  dada por la unión de las curvas:

$$C = \left\{ \left( x, \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right), x \in (0, 1] \right\} \text{ y } \partial C = \{ (0, y), y \in [-1, 1] \} \quad (2.1)$$

sentop

Como adherencia de una función continua, la curva  $\tilde{C}$  es un espacio conexo, pero no es conexo por trayectorias. Lo anterior se debe a que no existe ninguna trayectoria

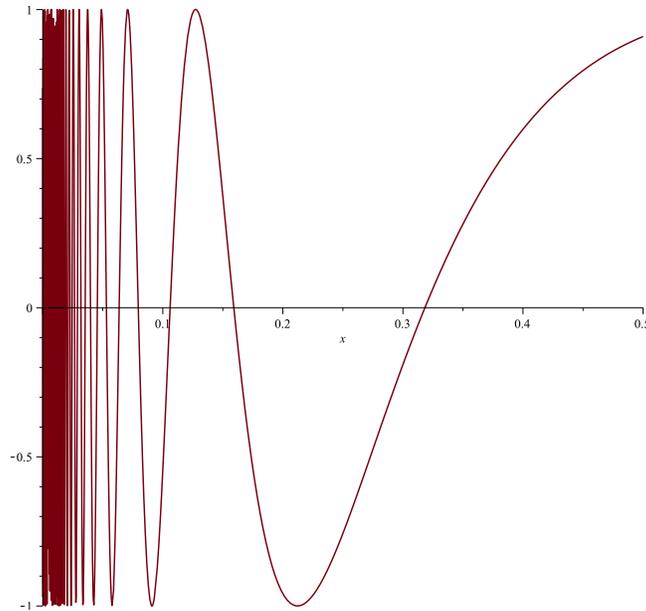


Figura 2.2: Gráfica de la función conocida como seno del topólogo. Esta gráfica es conexa pero no conexa por trayectorias

senotopo

que una los puntos  $(1, \text{sen}(1))$  y  $(0, 0)$ .

Figura 1

Por otro lado, en la figura 2.1 se observa que todas las trayectorias dibujadas empiezan y terminan en un sólo punto, llamado *punto base*. A este tipo de trayectorias se les da el nombre de *trayectorias cerradas* o *loops*. Entonces el *loop inverso* con punto base  $x_0 \in X$  está definido como  $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$  y el *loop constante*  $c$  como  $c(t) = x_0$  para  $0 \leq t \leq 1$  en ambos casos.

Si se tienen dos loops  $\alpha_1, \delta_1$  con el mismo punto base como se muestra en la figura 1, entonces el producto de loops  $\alpha * \delta$  significa empezar el recorrido primero por el loop  $\alpha$  y luego por  $\delta$ . Este producto se define de la siguiente manera.

loopproduct

**Definición 3.** Sea  $X$  un espacio topológico conexo por trayectorias. El producto  $\gamma$  de dos loops con punto base  $x_0 \in X$  está definido como:

$$\gamma(t) = \alpha * \beta = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Ahora es importante buscar diferencias y similitudes entre todos los loops que existen en un espacio topológico arbitrario. Para lograrlo es necesario definir la noción de homotopía. Intuitivamente, la homotopía es una función que deforma continuamente un loop  $\alpha$  en uno  $\beta$ .

homotoloops

**Definición 4.** Sea  $X$  un espacio topológico conexo por trayectorias. Dos loops  $\alpha$  y  $\beta$  con base en  $x_0 \in X$  son homotópicos ( $\alpha \simeq \beta$ ) si existe un mapeo continuo  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \alpha(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ H(t, 1) &= \beta(t) & 0 \leq t \leq 1 \\ H(0, s) &= H(1, s) = x_0 & 0 \leq s \leq 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

$H$  es la homotopía entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

En otras palabras, la variable  $s$  en  $H(t, s)$  varía continuamente en el intervalo  $[0, 1]$ , por lo que el loop  $\alpha$  se deforma continuamente en el loop  $\beta$ . La homotopía  $H(t, s)$  para cierto  $s$  fijo, al variar  $t$  se obtiene un loop entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Entonces, al variar  $s$ , se obtienen distintos loops entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Por eso algunos autores utilizan la notación  $\alpha_s(t)$  tal que  $\alpha_0(t) = \alpha(t)$  y  $\alpha_1(t) = \beta(t)$ . La figura 2.3 explica lo anterior.

Una característica importante de la homotopía es que es una relación de equivalencia. Esta característica se establece en el lema 1.

releq

**Lema 1.** Sea  $X$  un espacio topológico conexo por trayectorias. Si  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$  representan loops basados en  $x_0 \in X$  entonces:

1.  $\alpha_0 \simeq \alpha_0$
2.  $\alpha_0 \simeq \beta_0 \Rightarrow \beta_0 \simeq \alpha_0$
3.  $\alpha_0 \simeq \beta_0, \beta_0 \simeq \gamma_0 \Rightarrow \alpha_0 \simeq \gamma_0$

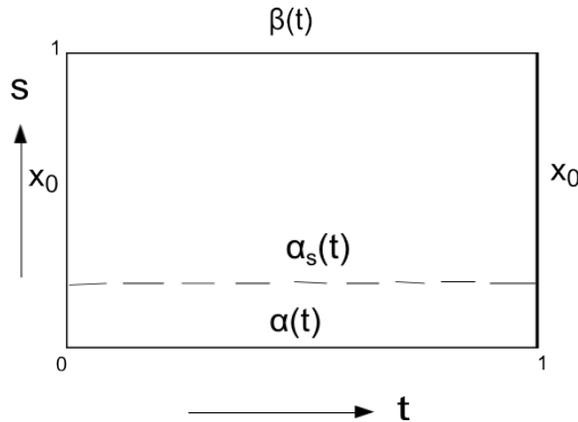


Figura 2.3: Diagrama de la homotopía entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Aquí  $x_0$  es el punto base,  $s$  y  $t$  son las variables de la homotopía que se mueven entre  $[0, 1]$  respectivamente. La línea punteada es un loop dado por  $H(t, s) = \alpha_s(t)$ .

Figura2

$$4. \alpha_0 \simeq \alpha_1 \Rightarrow \alpha_0^{-1} \simeq \alpha_1^{-1}$$

$$5. \alpha_0 \simeq \alpha_1, \beta_0 \simeq \beta_1 \Rightarrow \alpha_0 * \beta_0 \simeq \alpha_1 * \beta_1$$

Al ser la homotopía una relación de equivalencia, se puede hablar de clases de equivalencia donde miembros de una misma clase son homotópicos entre sí. El conjunto de estas clases de equivalencia (llamadas *clases de homotopía*) de loops con base en  $x_0$  lo denotaremos como  $\pi_1(X, x_0)$ . Si  $[\alpha]$  y  $[\beta]$  son dos clases de homotopía en  $\pi_1(X, x_0)$  entonces el *producto entre clases* se define como:

$$[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta] \quad (2.4)$$

Se puede demostrar que el conjunto de clases de homotopía de loops con base en  $x_0$ ,  $\pi_1(X, x_0)$ , con la ley del producto anterior es un grupo. A este grupo se le conoce como el *primer grupo de homotopía* así como el *grupo fundamental*.

Parece que el grupo fundamental,  $\pi_1(X, x_0)$ , depende del punto base  $x_0$ . ¿Qué sucede si existe otro punto base en  $X$ ?

togpoiso

**Teorema 1.** Si  $X$  es un espacio topológico conexo por trayectorias y  $x_0, x_1 \in X$ , entonces  $\pi_1(X, x_0)$  y  $\pi_1(X, x_1)$  son isomorfos.

Recordemos que un *isomorfismo* es un morfismo u homomorfismo biyectivo. Es decir, es un mapeo entre dos estructuras algebraicas similares (en este caso grupos) el cual es biyectivo.

Para poder demostrar este teorema se necesita definir el producto entre dos trayectorias. Este producto se puede definir solamente si el punto final de una trayectoria es el punto inicial de la otra trayectoria.

pathproduct

**Definición 5.** La regla del producto entre dos trayectorias  $\gamma$  y  $\alpha$  se puede construir sólo si  $\gamma(1) = \alpha(0)$  y se define como:

$$\gamma * \alpha = \begin{cases} \gamma(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \alpha(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Intuitivamente, como el espacio  $X$  es conexo por trayectorias, entonces existe una trayectoria  $\gamma$  que conecta los puntos  $x_0$  y  $x_1$ , así como su trayectoria inversa  $\gamma^{-1}$  la cual va en sentido contrario a la original, como se muestra en la figura 2.4.

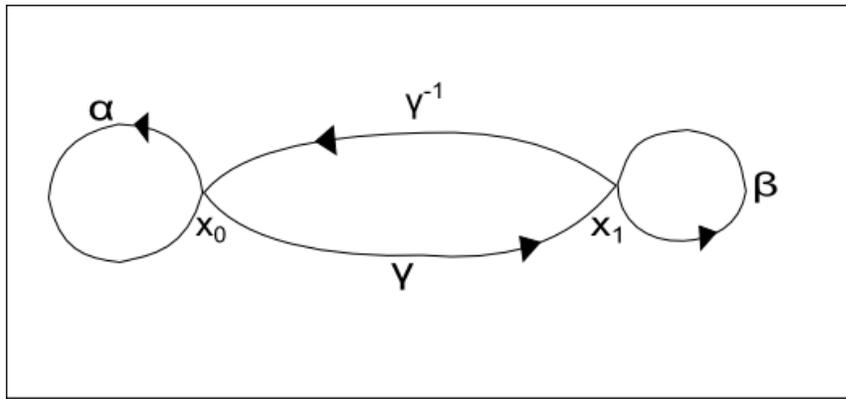


Figura 2.4: Dos loops  $\alpha$  y  $\beta$  con distintos puntos base  $x_0$  y  $x_1$ , respectivamente. Los loops están conectados por trayectorias  $\gamma$  y  $\gamma^{-1}$  los cuales sirven para construir los isomorfismos  $\sigma_\gamma$  y  $\sigma_{\gamma^{-1}}$ , estableciendo así que el grupo fundamental no depende del punto base.

pathloop

Con estos elementos, se pueden construir los siguientes isomorfismos:

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_1) \\ ([\alpha], x_0) &\mapsto ([\gamma^{-1} * \alpha * \gamma], x_1),\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\gamma^{-1}} : \pi_1(X, x_1) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ ([\beta], x_1) &\mapsto ([\gamma * \alpha * \gamma^{-1}], x_0),\end{aligned}\tag{2.7}$$

con lo cual se prueba que estos dos grupos son isomorfos.

El teorema [I](#) nos dice que el grupo fundamental  $\pi_1(X, x_0)$  depende, módulo un isomorfismo, del espacio  $X$  y no del punto base  $x_0$ . Además, el isomorfismo dado no es único, pues depende de la trayectoria  $\gamma$  que se escoja. Es por este hecho que es común encontrar al grupo fundamental denotado como  $\pi_1(X)$ .

Ahora extenderemos nuestro análisis a dos espacios topológicos con el fin de responder a la pregunta: ¿El grupo fundamental es un invariante topológico?

**Definición 6.** *Dos espacios  $X$  e  $Y$  tienen el mismo tipo de homotopía si existen mapeos continuos  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tal que:*

$$f \circ g \simeq 1_Y, \quad g \circ f \simeq 1_X.\tag{2.8}$$

El que dos espacios tengan el mismo tipo de homotopía significa que son topológicamente parecidos, es decir, que contienen el mismo número y tipo de huecos. Por lo que se puede establecer el siguiente teorema.

**Teorema 2.** *Si  $X$  e  $Y$  son dos espacios conexos por trayectorias con el mismo tipo de homotopía, entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo a  $\pi_1(Y, y_0)$  con  $x_0 \in X$  e  $y_0 \in Y$ .*

El teorema [2](#) se prueba encontrando los isomorfismos:

$$f^* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y) \quad \text{y} \quad g^* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X).\tag{2.9}$$

Para encontrarlos, se utiliza el siguiente lema.

lemmatoisoesp

**Lema 2.** Sea  $F : X \times I \rightarrow Y$  una homotopía entre dos mapeos  $f_i : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_i)$  con  $i = 0, 1$  y  $\gamma$  una trayectoria que va de  $y_0$  a  $y_1$  en  $Y$ , entonces:

$$\sigma_\gamma \circ f_0^* = f_1^* \quad \text{donde} \quad f_i^* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_i) \quad (2.10)$$

es un homomorfismo de grupos inducido por:

$$f_i^* : ([\alpha], x_0) \mapsto ([f(\alpha)], f(x_0)) \quad (i = 0, 1) \quad (2.11)$$

y

$$\sigma_\gamma : ([\alpha], y_0) \mapsto ([\gamma^{-1} * \alpha * \gamma], y_1) \quad [\alpha] \in \pi_1(Y, y_0) \quad (2.12)$$

El lema 2 no se demostrará en este trabajo. La demostración se puede encontrar en el libro "Topology and Geometry for physicists" de Nash C. y Sen S. Aquí sólo daremos una explicación de lo que este lema significa.

Si se tienen dos espacios topológicos  $X$  y  $Y$  conexos por trayectorias y se tiene que  $Y$  tiene dos puntos bases, entonces el lema 2 establece que el diagrama conmutativo 2.5 se cumple:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_0^*} & \pi_1(Y, y_0) \\ & \searrow \sigma_\gamma \circ f_0^* & \downarrow \sigma_\gamma \\ & & \pi_1(Y, y_1) \end{array}$$

Figura 2.5: Diagrama conmutativo de los homomorfismos de los grupos fundamentales de los espacios  $X$  y  $Y$ . El lema 2 establece que este diagrama se cumple y con ello se demuestra el teorema 2 y el corolario 1. Entonces se concluye que el grupo fundamental es un invariante topológico.

dc

Ya que sabemos lo que este lema significa podemos probar el teorema 2. Como  $X$  e  $Y$  tienen el mismo tipo de homotopía, existen mapeos continuos  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tal que se cumple la ecuación (2.8). Entonces del lema 2 se sigue que:

$$\begin{aligned}\sigma_\gamma \circ 1_y^* &= (f \circ g)^* = f^* \circ g^* \\ \sigma_{\gamma^{-1}} \circ 1_x^* &= (g \circ f)^* = g^* \circ f^*\end{aligned}\tag{2.13}$$

Como se dijo anteriormente,  $\sigma_\gamma$  y  $\sigma_{\gamma^{-1}}$  son isomorfismos y se puede demostrar que  $1_y^*$  y  $1_x^*$  también lo son. Por lo tanto,  $f^*$  y  $g^*$  son isomorfismos con lo cual se prueba el teorema.

Recordemos que si  $X$  es homeomorfo a  $Y$ , entonces existen  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tal que:

$$f \circ g = 1_Y, \quad g \circ f = 1_X.\tag{2.14}$$

Notemos que  $1_Y$  y  $1_X$  son siempre homotópicos a ellos mismos, por lo que el siguiente corolario al teorema 2 se cumple.

invtop

**Corolario 1.** Si  $X$  e  $Y$  son dos espacios topológicos conexos por trayectorias y homeomorfos, entonces  $\pi_1(X, x_0)$  es isomorfo a  $\pi_1(Y, y_0)$

Recordando la definición de invariante topológico vista al inicio del capítulo, es inmediato que el corolario 1 establece que el grupo fundamental es un invariante topológico. Este resultado es muy importante e interesante pues facilita el trabajo cuando se quiere conocer el grupo fundamental de algún espacio, sobre todo cuando es difícil calcularlo. El hecho de que el grupo fundamental sea un invariante topológico nos permite utilizar un espacio homeomorfo donde los cálculos son más sencillos.

Es importante destacar que el teorema 2 y el corolario 1 establecen que si dos espacios son homeomorfos entonces tienen el mismo tipo de homotopía, pero el reverso no se cumple. Si dos espacios tienen el mismo tipo de homotopía, no necesariamente son homeomorfos. Por ejemplo, el disco  $\mathbb{D}^2$  y un punto tienen el mismo tipo de homotopía, pero no son homeomorfos.

Anteriormente se definió lo que es homotopía entre dos loops de un mismo espacio, pero ahora es momento de definir homotopía entre dos espacios topológicos. Esto con el fin de encontrar más similitudes entre espacios.

esptos

**Definición 7.** Dos mapeos continuos  $\alpha_1, \alpha_2 : X \rightarrow Y$  son homotópicos si  $\alpha_1$  se puede deformar en  $\alpha_2$ , es decir, si existe  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  continua tal que:

$$F(x, 0) = \alpha_1, \quad F(x, 1) = \alpha_2. \quad (2.15)$$

Una herramienta muy útil para el cálculo del grupo fundamental de distintos espacios es el llamado *retracto por deformación*. A continuación se explica por qué.

retract

**Definición 8.** Un subconjunto  $A \subset X$  es un retracto de  $X$  si existe un mapeo continuo, llamado *retracción*,  $r : X \rightarrow A$  tal que:

$$r(a) = a \quad \forall a \in A \quad (2.16)$$

defretract

**Definición 9.** Un subconjunto  $A \subset X$  es un retracto por deformación si existe una retracción  $r : X \rightarrow A$  y una homotopía  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  tal que:

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= x \\ H(x, 1) &= r(x) \\ H(a, t) &= a, \quad a \in A, 0 \leq t \leq 1. \end{aligned} \quad (2.17)$$

defretiso

**Teorema 3.** Si  $X$  es un espacio topológico conexo por trayectorias y  $A$  un retracto por deformación de  $X$ , entonces  $\pi_1(X, a)$  es isomorfo a  $\pi_1(A, a)$  con  $a \in A$ .

La demostración se sigue del teorema [2](#) <sup>toisoesp</sup> pues  $A$  y  $X$  tienen el mismo tipo de homotopía.

El teorema [3](#) <sup>defretiso</sup> es muy útil, pues conociendo el grupo fundamental de un espacio podemos conocer el grupo fundamental de otro espacio si éste se puede deformar en el otro.

ejdefret

**Ejemplo 1.** La  $(n - 1)$ -esfera es un retracto por deformación de  $D^n - \{0\}$ . Esto se observa a partir de la homotopía

$$H(x, t) = (1 - t)x + t \frac{x}{|x|} \quad \text{donde } t \in [0, 1], \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.18)$$

Notemos que  $H$  es continua,  $H(x, 0) = x$ ,  $H(x, 1) = \frac{x}{|x|}$  y si  $x \in S^{n-1}$ , entonces  $H(x, t) = x$  para toda  $t$  en el intervalo. La figura 2.6 muestra el caso para  $n = 2$ .

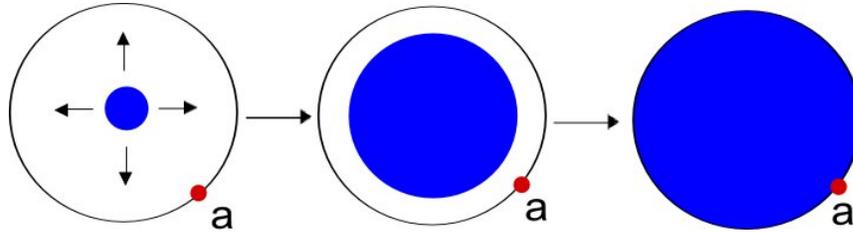


Figura 2.6: Retracto por deformación del disco unitario sin el origen,  $D^n - 0$ , al círculo unitario,  $S^1$ . Los grupos fundamentales de ambos espacios son isomorfos.

Se puede demostrar que para un  $x_0$  en  $\mathbb{R}^2$ , existe un círculo  $C \in \mathbb{R}^2$  que es un retracts por deformación de  $\mathbb{R}^2 - \{x_0\}$ . Cabe destacar que el círculo  $C$  y el círculo unitario  $S^1$  son homotópicos entre sí, por lo que el grupo fundamental de ambos, es el mismo.

Hasta aquí ya tenemos una buena idea de lo que es el grupo fundamental, sólo falta aprender a calcularlo. Para esto necesitamos los simplex. Intuitivamente, un simplex es la generalización de un triángulo a distintas dimensiones, de modo que, un 0-simplex es un punto y un 1-simplex es una recta. Además, un 2-simplex es un triángulo (con su interior), un 3-simplex es un tetrahedro, etc.

simplex

**Definición 10.** Un  $m$ -simplex  $\sigma^m$ , es el conjunto de puntos  $x$  en  $\mathbb{R}^n$  definido como:

$$\sigma^m = \left\{ x = \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \right\}. \quad (2.19)$$

donde  $x_0, \dots, x_m$  son los vértices del simplex y son puntos independientes, es decir, los  $m$  vectores  $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_m - x_0$  son linealmente independientes.

A las  $\lambda_i$  se les conoce como las *coordenadas baricéntricas* del simplex. Si  $\lambda_i \neq 0$  para toda  $i$  entonces  $\{x\}$  representa el interior del  $m$ -simplex. Si, por el contrario,  $\lambda_j = 0$  entonces  $\{x\}$  representa una cara del  $m$ -simplex opuesta al vértice  $x_j$ .

Cuando varios simplex se juntan, sin importar sus dimensiones, de una manera adecuada se obtiene un objeto llamado *complejo simplicial*. La siguiente definición muestra cómo se deben juntar los simplex para formar un complejo simplicial.

comsim

**Definición 11.** *Un complejo simplicial  $K$  es una colección finita de simplex en  $\mathbb{R}^n$  tal que:*

1. Si  $\sigma^p \in K$  entonces todas las caras de  $\sigma^p$  están en  $K$
2. Si  $\sigma^p, \sigma^q \in K$  entonces  $\sigma^p \cap \sigma^q$  ó  $\sigma^p \cap \sigma^q$  es una cara en común de  $\sigma^p$  y  $\sigma^q$

La dimensión del complejo simplicial  $K$  es la dimensión máxima de los simplex en  $K$ . La siguiente figura muestra la diferencia entre un complejo simplicial y una figura muy parecida, pero que no cumple con la definición.

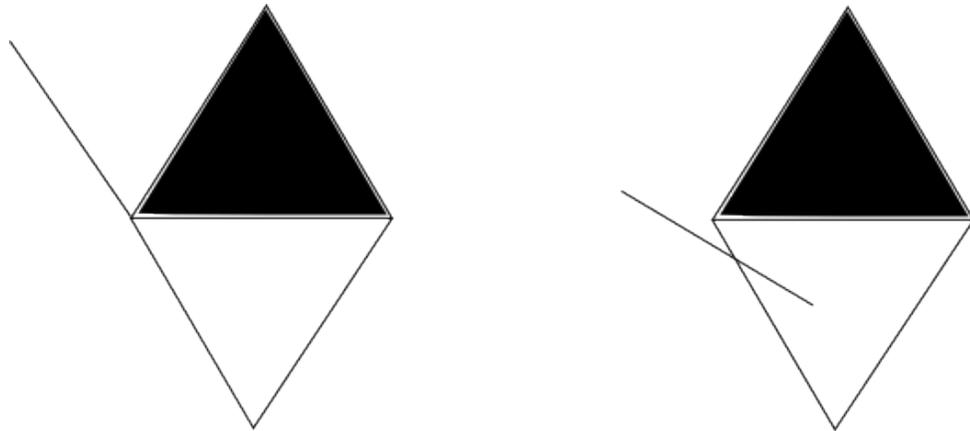


Figura 2.7: La figura de la izquierda es un complejo simplicial, pues los  $p$ -simplex están pegados correctamente, es decir, las intersecciones entre ellos es una cara común. La figura de la derecha no es un complejo simplicial porque la intersección del 1-simplex con la frontera del 2-simplex no es una cara.

simcom

En este trabajo se usarán los complejos simpliciales *conexos por trayectorias*, esto es, que para cada par de vértices  $u$  y  $v$  existe una secuencia de vértices  $v_0, v_1, \dots, v_n$

tal que  $v_0 = u$  y  $v_n = v$  y además para toda  $i = 0, \dots, n - 1$ , se cumple que,  $\{v_i, v_{i+1}\}$  es un 1-simplex de  $K$ .

**Definición 12.** La unión del complejo simplicial  $K$  con el espacio topológico Euclideo se llama *polyhedro asociado a  $K$* . Un *polyhedro* es *conexo por trayectorias* si su complejo simplicial asociado lo es.

**Teorema 4.** Sea  $K$  un *polyhedro conexo por trayectorias* con  $a_0$  vértice de  $K$ . Sea  $L$  un *subpolyhedro de dimensión 1* contraíble y que contiene todos los vértices de  $K$ . Sea  $G$  el grupo generado por los símbolos  $g_{ij}$  (uno por cada 1-simplex  $\{a_i, a_j\}$ ) los cuales cumplen la relación  $g_{ij}g_{jk}g_{ik}^{-1} = 1$  (uno por cada 2-simplex ordenado  $\{a_i, a_j, a_k\}$  de  $K - L$ ). Si  $\{a_i, a_j\} \in L$  entonces  $g_{ij} = 1$ , por lo que  $G$  es isomorfo a  $\pi_1(K, a_0)$ .

En el teorema 4 se pide como hipótesis que el complejo simplicial sea ordenado. Un simplex es *ordenado* si todos los vértices de  $K$  están ordenados de la forma  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{m+1}$  entonces cada simplex  $\sigma^n \in K$  se puede escribir como  $\{a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}\}$  donde  $i_0 < i_1 < \dots < i_n$ .

Este teorema relaciona el grupo fundamental,  $\pi_1(K, a_0)$ , con un grupo  $G$  generado por 1-simplex de  $K$ . Es importante notar que los elementos de  $\pi_1(K, a_0)$  son loops con base en  $a_0$ , mientras que los elementos de  $G$  son aristas de  $K$ . Entonces, la idea es reemplazar los loops que existen en  $K$  por unos loops en las aristas de  $K$ , los cuales se llaman *edge loops*. La siguiente figura muestra lo anterior para un 2-simplex.

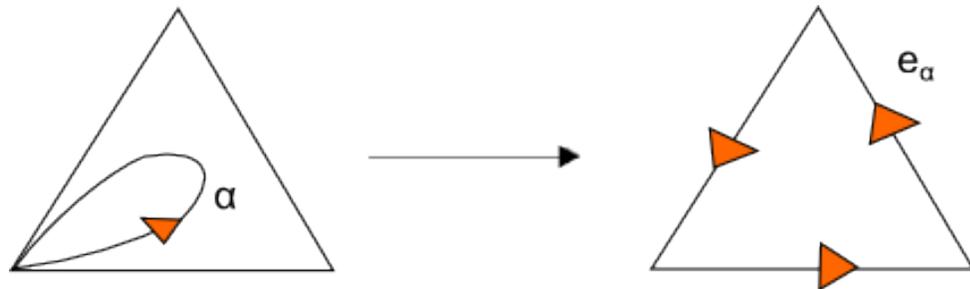


Figura 2.8: La figura de la izquierda muestra el loop  $\alpha$ , el cual es reemplazado por el edge loop  $e_\alpha$ . Si se tiene un *polyhedro  $K$* , el teorema 4 nos dice que, su grupo fundamental es isomorfo al grupo generado por los 1-simplex de  $K$ .

edge loop

Por lo anterior, es fácil ver que el teorema <sup>poly</sup>4 es muy útil, pues para determinar el grupo fundamental de un espacio topológico  $X$ , simplemente hay que encontrar un polyhedro homeomorfo a  $X$  y utilizar el corolario <sup>invtop</sup>1; el cual nos dice que si dos espacios topológicos (conexos por trayectorias) son homeomorfos, entonces sus grupos fundamentales son isomorfos.

Un espacio topológico  $X$  homeomorfo a un polyhedro  $K$  se le conoce como *triangulable* y el polyhedro se le llama *triangulación de  $X$* . Este polyhedro no es único, por lo que, si  $X$  es triangulable entonces puede tener varias triangulaciones.

tri **Ejemplo 2.** Se calculará el grupo fundamental de la circunferencia  $S^1$ . Primero hay que triangular a  $S^1$ , como se muestra en la figura.

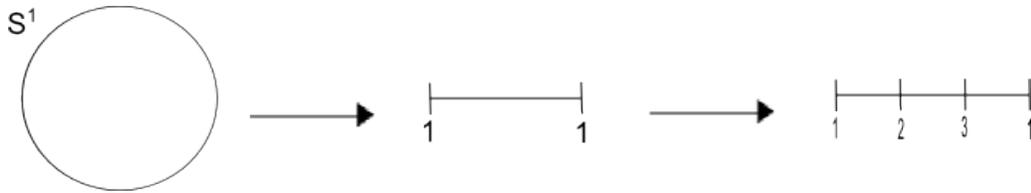


Figura 2.9: Triangulación del círculo. Al triangular el círculo se obtiene un polyhedro  $K$  y se puede aplicar el teorema <sup>poly</sup>4 para calcular su grupo fundamental. Como el círculo  $S^1$  y  $K$  son homeomorfos y el grupo fundamental es un invariante topológico, entonces sus grupos fundamentales son isomorfos.

gpofucirc

Entonces el polyhedro  $K$  y el subpolyhedro  $L$  son:

$$\begin{aligned} K &= \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 3\} \cup \{2, 3\}, \\ L &= \{1, 3\} \cup \{2, 3\}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

entonces

$$g_{13} = g_{23} = 1; \quad g_{12} = g \tag{2.21}$$

Por lo que,  $\pi_1(K, x_0)$  es isomorfo al grupo generado por un elemento,  $g$ , el cual es isomorfo a  $Z$ . Utilizando el corolario <sup>invtop</sup>1 se llega a la conclusión de que:

$$\pi_1(S^1, x_0) \simeq Z \tag{2.22}$$

Por último se presenta el siguiente teorema, el cual nos habla de qué sucede con el producto de dos espacios y su grupo fundamental.

gpofundeprod

**Teorema 5.** *El grupo fundamental del producto de dos espacios topológicos conexos por trayectorias  $X$  y  $Y$  es isomorfo al producto directo de sus grupos fundamentales, es decir,*

$$\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \quad (2.23)$$

Recordemos que el *producto directo* de dos grupos  $(G, *)$  y  $(H, \cdot)$ , denotado por  $G \times H$ , es el conjunto de pares ordenados  $(g, h)$  con  $g \in G$  y  $h \in H$  tal que:

$$(g, h) \times (g', h') = (g * g', h \cdot h') \quad (2.24)$$

Además, si los grupos son abelianos con respecto a la adición, a este producto se le llama *suma directa* y se denota como  $G \oplus H$ .

toro

**Ejemplo 3.** *Sabemos que el toro  $T^2$  es homeomorfo a  $S^1 \times S^1$ . Entonces es fácil conocer su grupo fundamental siguiendo el teorema 5 y el ejemplo 2 pues:*

$$\pi_1(T^2, t_0) = \pi_1(S^1 \times S^1, x_0 \times y_0) \simeq \pi_1(S^1, x_0) \oplus \pi_1(S^1, y_0) \simeq Z \oplus Z \quad (2.25)$$

## 2.2. Grupos de homología

Empecemos este análisis con la misma figura que empezamos la sección anterior. Las diferencias topológicas entre los espacios de la siguiente figura los estudiamos con loops y la homotopía. Ahora notemos que la frontera de  $X_2$  es la frontera de una región conexa, mientras que la de  $X_1$  no. Ésta sólo consiste en las orilla de la región entre  $v_1, v_2, v_3$ .

Notemos que en los dos casos, la orilla forma un loop, el cual no tiene frontera por ser una trayectoria cerrada. Por lo que, la existencia de un loop que no es frontera de una región, implica la existencia de un agujero dentro del loop.

En otras palabras, una superficie cerrada de dos dimensiones tiene un hoyo, si su frontera no es frontera de una región conexa. Para los *grupos de homología simplicial*,

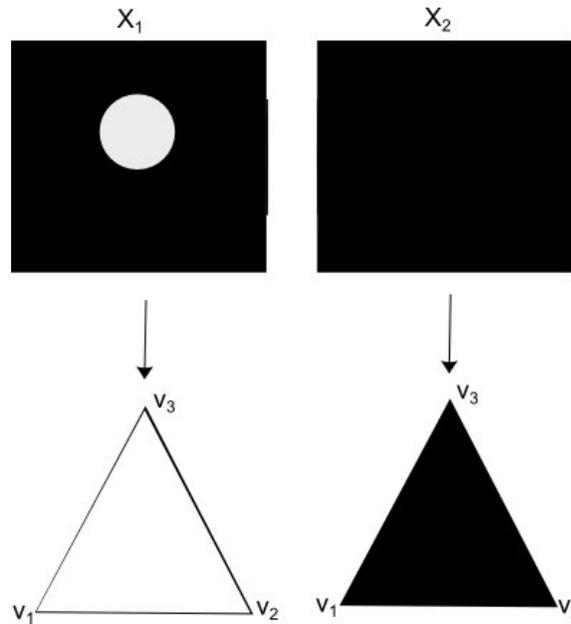


Figura 2.10: Dos espacios topológicos, uno de los cuales tiene un agujero.  $X_1$  es homeomorfo a la frontera de un triángulo, mientras que  $X_2$  es homeomorfo al triángulo completo. Los grupos de homología se enfocan en las fronteras de regiones.

fig\_1\_homo1

se considerará espacios topológicos triangulables, por lo que seguiremos utilizando los simplex.

Un  $m$ -simplex orientado con  $m > 1$  se obtiene al dar un orden a sus vértices. La clase de equivalencia de las permutaciones pares da como resultado un simplex orientado positivamente, mientras que de la clase de equivalencia de las permutaciones impares resulta un simplex orientado negativamente.

orientedsimplex

**Ejemplo 4.** Tomemos el caso de  $\sigma^2 = [v_0, v_1, v_2]$  entonces

$$\begin{aligned} +\sigma^2 &= [v_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2, v_0] = [v_2, v_0, v_1] \\ -\sigma^2 &= [v_0, v_2, v_1] = [v_2, v_1, v_0] = [v_1, v_0, v_2]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Un complejo simplicial cuyos simplex están orientados, recibe el nombre de *complejo simplicial orientado*.

chaingp

**Definición 13.** Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión  $n$  que contiene  $l_p$ ,  $p$ -simplex. El grupo  $p$ -cadena de  $K$ ,  $C_p(K)$ , es un grupo abeliano libre, generado por los  $p$ -simplex orientados de  $K$ . Si  $p > n$  entonces  $C_p(K) = \{0\}$ . Un elemento  $c_p \in C_p(K)$  llamado  $p$ -cadena se escribe como:

$$c_p = \sum_{i=1}^{l_p} a_i \sigma_i^p, \quad a_i \in Z \quad (2.27)$$

donde

$$\sigma_i^p + (-\sigma_i^p) = 0; \quad \forall i, p \quad (2.28)$$

Además se cumple que

$$c_p + c'_p = \sum_{i=1}^{l_p} a_i \sigma_i^p + \sum_{i=1}^{l_p} b_i \sigma_i^p = \sum_{i=1}^{l_p} (a_i + b_i) \sigma_i^p. \quad (2.29)$$

La definición del grupo cadena exige que éste sea un grupo abeliano libre. Recordemos que, un *grupo abeliano libre*  $G$  de rango  $r$  es un grupo finito generado por  $r$  elementos linealmente independientes.

opfrontera

**Definición 14.** El operador frontera  $\partial_p$  es un mapeo dado por  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  tal que

1. Es lineal, es decir,

$$\partial_p \left[ \sum_{i=1}^{l_p} a_i \sigma_i^p \right] = \sum_{i=1}^{l_p} a_i \partial \sigma_i^p. \quad (2.30)$$

2. Para un simplex orientado  $\sigma^p = [v_0, v_1, \dots, v_p]$

$$\partial[v_0, \dots, v_p] = \sum_{j=0}^p (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p] \quad (2.31)$$

donde  $[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p]$  representa al  $(p-1)$ -simplex al quitar el vértice  $v_j$ .

3. La frontera de una 0-cadena es cero,

$$\partial \sigma_0 = 0. \quad (2.32)$$

Es fácil ver que el operador frontera es un homomorfismo de  $C_p(K)$  en  $C_{p-1}(K)$ , recordando que un *homomorfismo de grupos*  $G_1, G_2$  es una función  $f : G_1 \rightarrow G_2$  si

$$f(x + y) = f(x) + f(y); \quad x, y \in G_1. \quad (2.33)$$

Se puede demostrar que la frontera de una región no tiene frontera propia, es decir,

$$\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0. \quad (2.34)$$

**Definición 15.** Si  $z_p \in C_p(K)$  satisface que

$$\partial_p z_p = 0 \quad (2.35)$$

entonces  $z_p$  es llamado un *p-ciclo*. El conjunto de *p-ciclos*  $Z_p(K)$  es un subgrupo de  $C_p(K)$  y se conoce como el grupo *p-ciclos*.

**Definición 16.** Si  $b_p \in C_p(K)$  tal que

$$\partial c_{p+1} = b_p; \quad c_{p+1} \in C_{p+1}(K) \quad (2.36)$$

entonces  $b_p$  es una *p-frontera*. El conjunto de *p-fronteras*  $B_p(K)$  es un subgrupo de  $C_p(K)$  y se le llama el grupo *p-frontera*.

Notemos que el grupo *p-ciclos* es el kernel del operador frontera, así como el grupo *p-frontera* es la imagen del operador frontera, es decir,

$$Z_p(K) = \text{Ker} \partial_p; \quad B_p(K) = \text{Im} \partial_{p+1}. \quad (2.37)$$

Por otro lado, de la definición 14 sabemos que  $\partial_0 c = 0$ , por lo que

$$Z_0(K) = C_0(K). \quad (2.38)$$

Aunado a esto, el grupo frontera de máxima dimensión está definido como el

grupo trivial.

$$B_n(K) = \{0\}. \quad (2.39)$$

Recordando que la frontera de una región no tiene frontera, podemos ver que

$$\partial b_p = 0 \quad (2.40)$$

para toda  $b_p \in B_p(K)$ . Entonces todos los elementos del grupo p-frontera satisfacen la condición del grupo p-ciclos, por lo que,

$$B_p(K) \subset Z_p(K). \quad (2.41)$$

Para poder encontrar los agujeros de dimensión  $p + 1$ , es necesario quitar los elementos del grupo p-frontera del grupo p-ciclos. Esto se logra introduciendo el grupo de homología, el cual se define de la siguiente manera.

homologygp

**Definición 17.** Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión  $n$ . El grupo de homología de orden  $p$  está definido como

$$H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K). \quad (2.42)$$

Cada elemento del grupo de homología es una clase de equivalencia  $[z_p]$  llamada *clase de homología*. Dos p-ciclos  $z_p$  y  $z'_p$  están en la misma clase si  $z_p - z'_p \in B_p(K)$ , entonces se dice que  $z_p$  y  $z'_p$  son homólogos. Es importante notar que,  $H_p(K)$  sí es un grupo, ya que  $Z_p(K)$  y  $B_p(K)$  son grupos abelianos y el cociente de dos grupos es un grupo.

Intuitivamente, el grupo de homología de orden  $p$  ( $H_p(K)$ ), es un objeto algebraico que depende del número de hoyos con dimensión  $p + 1$  con los que cuenta el espacio.

El siguiente teorema muestra que los grupos de homología son invariantes topológicos. Para esto es importante recordar que si dos espacios tienen el mismo tipo de homotopía, entonces son homeomorfos.

invtopholo

**Teorema 6.** Si  $X$  y  $Y$  son dos espacios con el mismo tipo de homotopía, entonces  $H_p(X)$  es isomorfo a  $H_p(Y)$  para toda  $p = 0, 1, \dots, n$ .

holotri

**Teorema 7.** Si  $K_1$  y  $K_2$  son triangulaciones del mismo espacio topológico  $K$ , entonces  $H_p(K_1)$  es isomorfo a  $H_p(K_2)$  para toda  $p = 0, 1, \dots, n$ .

El teorema [7](#) nos dice claramente que los grupos de homología no dependen de la triangulación del espacio.

logocont

**Teorema 8.** Si  $K$  es contraíble, es decir tiene el mismo tipo de homotopía que un punto, entonces:

$$H_p(K) = \begin{cases} \{0\} & p \neq 0 \\ \mathbb{Z} & p = 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

homocirc

**Ejemplo 5.** Vamos a calcular los grupos de homología de  $S^1$ . Recordemos que  $S^1$  es homeomorfo a la frontera del triángulo o 2-simplex. En otras palabras,  $K = S^1 = \partial\sigma^2$ . Como  $\dim K = 1$  entonces,

$$C_p(S^1) = \{0\} \quad p > 1. \quad (2.44)$$

Por lo que,

$$H_p(S^1) = \{0\} \quad p > 1. \quad (2.45)$$

Ahora, calculemos  $H_0(S^1)$ . Usando la ecuación [2.38](#), sabemos que sólo hay que calcular el grupo 0-cadena. Cualquier elemento de este grupo puede escribirse como:

$$a_0[v_0] + b_0[v_1] + c_0[v_2], \quad a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{Z} \quad (2.46)$$

Entonces  $Z_0(K)$  tiene tres generadores independientes, por lo que,

$$C_0(K) = Z_0(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^3. \quad (2.47)$$

Por otro lado, si  $\mathbf{b}_0 \in B_0(K)$  entonces  $\mathbf{b}_0 = \partial\mathbf{c}_1$  donde,

$$\mathbf{c}_1 = a_1[v_0, v_1] + b_1[v_0, v_2] + c_1[v_1, v_2]. \quad (2.48)$$

cad

Por lo que,

$$\partial \mathbf{c}_1 = a_1([v_1] - [v_0]) + b_1([v_2] - [v_0]) + c_1([v_2] - [v_1]) = (a_1 - c_1)[v_1] - (a_1 + b_1)[v_0] + (b_1 + c_1)[v_2]. \quad (2.49)$$

Entonces,

$$\mathbf{b}_0 = a_0[v_0] + b_0[v_1] + c_0[v_2]. \quad (2.50)$$

Con

$$1. a_0 = a_1 - b_1$$

$$2. b_0 = a_1 - c_1$$

$$3. c_0 = b_1 + c_1$$

$$4. a_0 + b_0 + c_0 = 0.$$

(2.51)

Entonces  $B_0(K)$  tiene dos generadores independientes, por lo que:

$$B_0(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (2.52)$$

Por lo tanto,

$$H_0(K) = \mathbb{Z} \quad (2.53)$$

Para calcular  $H_1(K)$  tenemos que encontrar  $Z_1(K)$  y  $B_1(K)$ . Sabemos que si  $z_1 \in Z_1(K)$  entonces  $z_1 \in C_1(K)$  tal que  $\partial z_1 = 0$ . Por el cálculo anterior sabemos que  $z_1$  es de la forma de la ecuación 2.48, mientras que  $\partial z_1$  es de la forma de la ecuación 2.49. Para que se cumpla la condición de que  $\partial z_1 = 0$ , es necesario que:

$$z_1 = a_1[v_0, v_1] - a_1[v_0, v_2] + a_1[v_1, v_2]. \quad (2.54)$$

Como este grupo tiene un sólo generador, entonces,

$$Z_1(K) = \mathbb{Z} \quad (2.55)$$

Por otro lado, sabemos que no existen 2-simplex en  $S^1$ , así que,

$$B_1(S^1) = \{0\}. \quad (2.56)$$

Por lo tanto,

$$H_1(S^1) = \mathbb{Z}. \quad (2.57)$$

Es importante notar que por el teorema [8](#), el simplex  $\sigma^2$  tiene como grupos de homología:

$$H_p(K) = \begin{cases} \{0\} & p \neq 0 \\ \mathbb{Z} & p = 0. \end{cases} \quad (2.58)$$

Un teorema muy útil para evitar muchos cálculos es el siguiente,

H\_0conexo **Teorema 9.** Si  $K$  es conexo entonces,

$$H_0(K) = \mathbb{Z}. \quad (2.59)$$

### 2.2.1. Homología relativa

Como se puede apreciar, calcular los grupos de homología es un trabajo pesado aún cuando se tengan a la mano los teoremas anteriores. Otra forma de simplificar los cálculos es considerar un subpolyhedro  $L \subset K$  y relacionar los grupos de homología  $H_p(K)$  con  $H_p(L)$ , lo cual se logra al definir los *grupos de homología relativos*  $H_p(K; L)$ , donde cualquier elemento de  $K$  que es también elemento de  $L$  se puede pensar como el elemento neutro de  $H_p(K; L)$ .

De manera más formal, sean  $K$  un complejo simplicial y  $L \subset K$  un subcomplejo simplicial. Además, sean  $C_p(K)$  y  $C_p(L)$  sus grupos cadena respectivamente, entonces se tiene que el *grupo  $p$ -cadena relativo* con coeficientes enteros es el grupo cociente

$$C_p(K; L) = C_p(K) / C_p(L); \quad p > 0, \quad (2.60)$$

donde cada miembro de  $C_p(K; L)$  es una *clase lateral*, es decir,

$$c_p + C_p(L) \quad \text{donde } c_p \in C_p(K). \quad (2.61)$$

El *operador frontera relativo* es el mapeo  $\bar{\partial}_p : C_p(K; L) \rightarrow C_{p-1}(K; L)$ , definido

como,

$$\bar{\partial}_p(C_p(K; L)) = \partial_p C_p + C_{p-1}(L). \quad (2.62)$$

En analogía con la ecuación (2.37), se tiene que el grupo de  $p$ -ciclos relativo  $Z_p(K; L)$  es el kernel del operador frontera relativo. Para  $p = 0$ ,

$$Z_0(K; L) = C_0(K; L). \quad (2.63)$$

Además, el grupo de  $p$ -fronteras relativo  $B_p(K; L)$  es la imagen de  $C_{p+1}(K; L)$  bajo el homomorfismo del operador frontera relativo. Una vez definidos los grupos de  $p$ -cadenas y  $p$ -ciclos relativos, se puede definir el grupo de homología relativo como el grupo cociente,

$$H_p(K; L) = Z_p(K; L) / B_p(K; L) \quad p > 0 \quad (2.64)$$

de forma que, los elementos  $h_p \in H_p(K; L)$  son de la forma  $h_p = z_p + C_p(L)$ . Se requiere que  $\partial z_p$  sea una  $(p-1)$ -cadena en  $L$  y no necesariamente que  $z_p$  sea un  $p$ -ciclo.

Por construcción, el grupo de homología relativo es indiferente al subpolyhedro  $L$ . Entonces, si quitamos el interior de  $L$ , el grupo de homología que nos queda debería ser isomorfo al grupo completo. Esto es lo que nos dice el teorema de escisión, el cual se presenta a continuación y es muy útil al hacer cálculos.

teo\_de\_escision

**Teorema 10.** *Sea  $L \subset K$  tal que  $L$  es cerrado. Si  $L_0$  es un subpolyhedro abierto de  $L$  tal que  $\bar{L}_0 \subset \overset{\circ}{L}$  entonces*

$$H_p(K; L) \simeq H_p(K - L_0, L - L_0), \quad \forall p. \quad (2.65)$$

Ahora veremos cómo se relacionan los grupos de homología  $H_p(K)$ ,  $H_p(L)$  y  $H_p(K; L)$

### Relación entre los grupos $H_p(L)$ y $H_p(K)$

Como  $L \subset K$  existe una relación muy natural entre sus grupos de homología dada por el homomorfismo de inclusión de sus grupos cadena correspondientes, es

decir, sea

$$i : C_p(L) \rightarrow C_p(K) \quad (2.66)$$

definido por:

$$i[C_p] = c_p \quad c_p \in C_p(L) \subset C_p(K). \quad (2.67)$$

El mapeo (2.66) induce el homomorfismo de grupo:

$$i^* : H_p(L) \rightarrow H_p(K) \quad (2.68)$$

### Relación entre los grupos $H_p(K)$ y $H_p(K; L)$

Consideremos el homomorfismo

$$j : C_p(K) \rightarrow C_p(K; L), \quad (2.69)$$

definido de la siguiente manera

$$j[C_p] = c_p + C_p(L) \quad c_p \in C_p(K). \quad (2.70)$$

Notemos que por la ecuación (2.70)

$$j[\partial C_p] = \partial c_p + C_{p-1}(L), \quad (2.71)$$

mientras que,

$$\bar{\partial}[j[C_p]] = \bar{\partial}[c_p + C_p(L)] = \partial c_p + C_{p-1}(L), \quad (2.72)$$

donde  $\bar{\partial}$  es el operador frontera relativo definido en la ecuación (2.62). De las ecuaciones (2.71) y (2.72) podemos ver que,

$$j\partial = \bar{\partial}j, \quad (2.73)$$

entonces

$$j(\partial z_p) = \bar{\partial}j(z_p), \quad \text{donde } z_p \in H_p(K). \quad (2.74)$$

Sabemos que  $\partial z_p = 0$ , entonces  $\bar{\partial}j(z_p) = 0$ . Lo anterior implica que  $j(z_p) \in Z_p(K; L)$ . Entonces usando el mapeo  $j$  dado por (2.70) es posible inducir el homo-

morfismo de grupo,

$$j^* : H_p(K) \rightarrow H_p(K; L), \quad \forall p. \quad (2.75) \quad \text{j\_morphism}$$

### Relación entre los grupos $H_p(K; L)$ y $H_{p-1}(L)$

Esta relación entre grupos de homología es la más interesante de todas, ya que crea una correspondencia entre grupos de homología de distinto orden.

Consideremos  $z_p \in C_p(K; L) \subset H_p(K; L)$  entonces,

$$\bar{\partial}z_p = \partial z_p + C_{p-1}(L) = 0, \quad (2.76)$$

donde  $\partial z_p$  es un elemento  $c_{p-1} \in C_{p-1}(L)$ .

Cabe destacar que  $c_{p-1}$  no es una cadena solamente, sino que además es un  $(p-1)$ -ciclo, pues  $\partial c_{p-1} = \partial^2 z_p = 0$ . Entonces  $\partial z_p$  determina a un único miembro de  $H_{p-1}(L)$ , por lo que, se puede definir el siguiente morfismo de grupo:

$$\partial^* : H_p(K; L) \rightarrow H_{p-1}(L), \quad (2.77) \quad \text{d\_morphism}$$

dado por,

$$\bar{\partial}^*([z_p + C_p(L)]) = [\partial z_p]; \text{ donde } [z_p + C_p(L)] \in H_p(K; L), [\partial z_p] \in H_{p-1}(L). \quad (2.78)$$

Las tres relaciones anteriores tienen la capacidad de crear secuencias de grupos por medio de los morfismos descritos en las ecuaciones (2.68), (2.75) y (2.77). inclusion morphism

#### 2.2.2. Secuencias exactas

**Definición 18.** *La secuencia homológica del complejo  $K$  y el subcomplejo  $L$  es la secuencia de grupos y homomorfismos:*

$$\cdots \xrightarrow{\partial^*} H_p(L) \xrightarrow{i^*} H_p(K) \xrightarrow{j^*} H_p(K; L) \xrightarrow{\partial^*} H_{p-1}(L) \xrightarrow{i^*} \cdots \quad (2.79) \quad \text{homology\_se}$$

Se puede demostrar que la secuencia homológica del complejo  $K$  y  $L$  es *exacta*, es decir, la imagen de cada homomorfismo es igual al kernel del siguiente. Las secuencias

exactas permiten comparar los grupos y homomorfismos entre éstos. Por ejemplo, si uno tiene la siguiente secuencia exacta

$$\{0\} \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} \{0\}, \quad (2.80)$$

donde  $\{0\}$  denota al grupo trivial, entonces  $g$  es un isomorfismo.

El siguiente ejemplo explica cómo se pueden determinar grupos de homología a partir de las secuencias exactas y el Teorema de escisión.

escision

**Ejemplo 6.** Sea  $H_p(S^1)$  el grupo de homología del círculo unitario. Definimos  $A^1 = S^1 - [n]$ , donde  $[n]$  denota al polo norte del círculo y  $B^1 = S^1 - [s]$ , donde  $[s]$  denota al polo sur. Entonces,

$$\begin{aligned} A^1 \cup B^1 &= S^1 \\ X^1 &= A^1 \cap B^1 = R_1 \cup R_2, \end{aligned} \quad (2.81)$$

donde  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ . La figura [2.11](#) muestra lo anterior de manera geométrica.

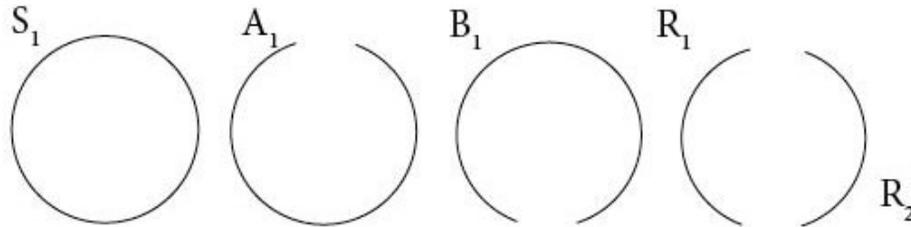


Figura 2.11: La unión de  $A^1$  y  $B^1$  es el círculo unitario  $S^1$ . Al hacer las secuencias exactas de los  $p$ -ésimos grupos de homología de  $A_1$ ,  $B_1$  y  $S_1$  se concluye que el  $p$ -ésimo grupo de homología de  $S^1$  es trivial.

escision\_pi

Consideremos ahora las siguientes secuencias exactas para  $p > 1$ ,

$$\dots \xrightarrow{\partial^*} H_p(A^1) \xrightarrow{i^*} H_p(S^1) \xrightarrow{j^*} H_p(S^1; A^1) \xrightarrow{\partial^*} H_{p-1}(A^1) \xrightarrow{i^*} H_{p-1}(S^1) \xrightarrow{j^*} \dots \quad (2.82)$$

y

$$\dots \xrightarrow{\partial^*} H_p(X^1) \xrightarrow{i^*} H_p(B^1) \xrightarrow{j^*} H_p(B^1; X^1) \xrightarrow{\partial^*} H_{p-1}(X^1) \xrightarrow{i^*} H_{p-1}(B^1) \xrightarrow{j^*} \dots \quad (2.83)$$

Notemos ahora que  $A^1$  y  $B^1$  son contraíbles, entonces, por el teorema [8](#) tenemos que,

$$H_p(A^1) = H_p(B^1) = \{0\} \quad \text{para } p > 0, \quad (2.84)$$

lo cual implica que las secuencias [\(2.82\)](#) y [\(2.83\)](#) ahora sean,

$$\begin{aligned} \{0\} &\xrightarrow{i^*} H_p(S^1) \xrightarrow{j^*} H_p(S^1; A^1) \xrightarrow{\partial^*} \{0\} \\ \{0\} &\xrightarrow{i^*} H_p(B^1, X^1) \xrightarrow{j^*} H_p(X^1) \xrightarrow{\partial^*} \{0\}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

De acuerdo a la ecuación [\(2.80\)](#) tenemos que el  $j^*$  es un isomorfismo, por lo que

$$\begin{aligned} H_p(S^1) &\simeq H_p(S^1, A^1) \\ H_p(B^1, X^1) &\simeq H_{p-1}(X^1). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Si quitamos el punto  $[s]$  de  $S^1$  y  $A^1$ , entonces  $S^1$  se convertirá en  $A^1$  y  $A^1$  se convertirá en  $X^1$ . Entonces, por el teorema de escisión [6](#), se tiene que

$$H_p(S^1, A^1) \simeq H_p(S^1 - [s], A^1 - [s]) \simeq H_p(B^1, X^1), \quad (2.87)$$

entonces,

$$H_p(S^1) \simeq H_{p-1}(X^1), \quad p > 1. \quad (2.88)$$

Notemos además que  $X^1$  se puede reducir a dos puntos  $[t], [q]$ , por lo tanto

$$H_{p-1}(X^1) \simeq H_{p-1}([t] \cup [q]) = \{0\}, \quad (2.89)$$

ya que el espacio creado por dos puntos es de dimensión cero y  $C_p([t] \cup [q]) = \{0\}$ .

En resumen, regresando en la secuencia tenemos que,

$$\{0\} \simeq H_{p-1}([t] \cup [q]) \simeq H_{p-1}(X^1) \simeq H_p(B^1, X^1) \simeq H_p(S^1, A^1) \simeq H_p(S^1). \quad (2.90)$$

Por lo que el  $p$ -ésimo grupo de homología del círculo unitario es isomorfo al grupo trivial.

### 2.2.3. El subgrupo de Torsión y los grupos de homología con coeficientes no enteros

Recordemos que el  $p$ -ésimo grupo de homología está definido por el grupo de  $p$ -ciclos y el grupo de  $p$ -fronteras, los cuales pertenecen al grupo de  $p$ -cadenas. Los elementos del grupo de  $p$ -cadenas  $C_p(K)$ , son una combinación lineal de los  $p$ -simplex orientados de  $K$  multiplicados por coeficientes enteros.

Por otro lado, aunque  $Z_p(K)$  y  $B_p(K)$  son grupos Abelianos libres (pues son subgrupos de  $C_p(K)$ ), no significa que  $H_p(K)$  lo sea también. De hecho, por el teorema fundamental de los grupos Abelianos finitamente generados [\[F thm\\_Ab\\_gps\]](#), la forma más general de escribir al  $p$ -ésimo grupo de homología del complejo simplicial  $K$  es

$$H_p(K) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_m \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_r}, \quad (2.91)$$

donde los primeros  $m$  términos forman un grupo Abeliano libre de rango  $m$  y los siguientes  $r$  forman el llamado *subgrupo de torsión* de  $H_p(K)$ . Entonces el subgrupo de torsión es el que está formado por la suma directa de los subgrupos cíclicos finitos. Llamemos  $G_p$  al subgrupo de rango  $m$  y  $T_p$  al subgrupo de torsión. Intuitivamente, el subgrupo de torsión nos dice cómo se tuerce el espacio  $K$ .

Por ejemplo, los grupos de homología del plano proyectivo son [\[Nash 21\]](#),

$$\begin{aligned}
H_0(P) &= \mathbb{Z} \\
H_1(P) &= \mathbb{Z}/2 \\
H_k(P) &= \{0\}, \quad k > 1.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

El grupo  $H_1(P)$  pertenece al subgrupo de torsión, al ser un grupo cíclico finitamente generado (de orden 2), el cual refleja que el plano proyectivo se tuerce.

Es posible generalizar el grupo cadena al introducir, como coeficientes de los  $p$ -simplex, elementos de un grupo Abeliano  $G$  arbitrario. Entonces un elemento del grupo cadena definido sobre el grupo Abeliano  $G$ ,  $c_p \in C_p(K, G)$ , se escribe

$$c_p = \sum_{i=1}^{l_p} g_i \sigma_i^p, \quad g_i \in G. \tag{2.93}$$

Con este grupo cadena, se pueden construir los correspondientes grupos de homología  $H_p(K, G)$ . Es posible probar que si se conocen los grupos  $H_p(K)$  y  $G$  entonces se pueden determinar los grupos  $H_p(K, G)$ .

Es necesario destacar que si los coeficientes enteros del grupo cadena se reemplazan por coeficientes racionales o reales, entonces los grupos  $H_p(K, \mathbb{Q})$  y  $H_p(K, \mathbb{R})$  contienen menos información que aquellos con coeficientes enteros. Esto es porque  $H_p(K, \mathbb{Q})$  y  $H_p(K, \mathbb{R})$  no tienen subgrupo de torsión.

Por ejemplo, si tomamos un elemento del subgrupo de torsión  $t_p \in T_p(K)$  y considerando que este subgrupo es un grupo cíclico finito ( $nt_p = 0$  para alguna  $n$ ), entonces para cadenas con coeficientes racionales la ecuación  $nt_p = 0$  implicaría que  $t_p = 0$ . Por lo que, el grupo  $H_p(K, \mathbb{Q})$  no tiene subgrupo de torsión. Es posible mostrar que  $H_p(K, \mathbb{R})$  tampoco cuenta con un subgrupo de torsión. A veces es bueno trabajar con grupos de homología que no tienen el subgrupo de torsión, porque es preferible perder información y ganar simplicidad.

### 2.2.4. La fórmula de Kunneth

El teorema [5](#) nos dice que si tenemos dos espacios  $X$  y  $Y$  entonces se puede obtener el grupo fundamental del producto de ambos, es decir

$$\pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) = \pi_1(X, x_0) \oplus \pi_1(Y, y_0). \quad (2.94)$$

¿Existirá un teorema o fórmula análoga a los grupos de homología? La respuesta, afortunadamente, es sí; aunque es más complicado. Para simplificar un poco la fórmula se utilizarán grupos de homología con coeficientes racionales, de esta forma no habrán subgrupos de torsión. Por lo que, el análogo al teorema [5](#) es la *Fórmula de Kunneth*:

$$H_p(X \times Y; \mathbb{Q}) = \bigoplus_{k+q=p} H_k(X; \mathbb{Q}) \otimes H_q(Y; \mathbb{Q}) \quad (2.95)$$

toro\_Kunneth

**Ejemplo 7.** Utilizaremos el mismo caso que el ejemplo [3](#) y obtendremos los grupos de homología del toro  $T^2$ . Recordemos que  $T^2 = S^1 \times S^1$  y que los grupos de homología de  $S^1$  son

$$H_p(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, 1 \\ \{0\} & p \neq 0, 1 \end{cases} \quad (2.96)$$

Usando la fórmula de Kunneth [\(2.95\)](#) se tiene que

$$\begin{aligned} H_0(T^2) &= H_0(S^1 \otimes S^1) = H_0(S^1) \otimes H_0(S^1) = \mathbb{Z} \\ H_1(T^2) &= H_0(S^1) \otimes H_1(S^1) \oplus H_1(S^1) \otimes H_0(S^1) = \mathbb{Z}^2 \\ H_2(T^2) &= H_0(S^1) \otimes H_2(S^1) \oplus H_1(S^1) \otimes H_1(S^1) \oplus H_2(S^1) \otimes H_0(S^1) = \mathbb{Z} \\ H_p(T^2) &= \{0\}, \quad \text{para } p > 3. \end{aligned} \quad (2.97)$$

### 2.2.5. El teorema de Euler-Poincaré

Recordemos que  $H_p(K)$  nos da información sobre el número de hoyos  $p + 1$ -dimensional que tiene el espacio. Esta característica se obtiene del subgrupo Abeliano libre  $G_p \subset H_p(K)$ . El rango  $b_p(K)$  de  $G_p(K)$  cuenta el número de dichos agujeros y recibe el nombre de *p-ésimo número de Betti* de  $K$ . De esta forma

1.  $b_0$  es el número de componentes conectadas
2.  $b_1$  es el número de hoyos de dimensión 2
3.  $b_2$  es el número de hoyos, en este caso, vacíos tridimensionales
4.  $b_p$  es el número de hoyos de dimensión  $p + 1$ .

**Ejemplo 8.** En el ejemplo [toro\\_Kunneth](#) 7 obtuvimos los grupos de homología del toro  $T^2$ . Ahora veremos cuáles son los números de Betti del 2-toro.

$$\begin{aligned} H_0(T^2) = \mathbb{Z} &\Rightarrow b_0(K) = 1 \\ H_1(T^2) = \mathbb{Z}^2 &\Rightarrow b_1(K) = 2 \\ H_2(T^2) = \mathbb{Z} &\Rightarrow b_2(K) = 1. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Los números de Betti concuerdan con la apreciación que tenemos de un toro: una componente conectada, dos agujeros de dimensión 2 (el que forma la dona y el que está dentro del cilindro) y un vacío tridimensional (el que forma el cilindro).

El teorema de Euler-Poincaré relaciona la característica de Euler con los números de Betti. Recordemos que la característica de Euler, para un subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^3$ , que es homeomorfo a un polyhedro  $K$  tridimensional se define como

$$\chi(K) = (\text{número de vértices en } K) - (\text{número de bordes en } K) + (\text{número de caras en } K). \tag{2.99}$$

E-P\_thm

**Teorema 11.** Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión  $n$  y sean  $l_p$  el número de  $p$ -simplex en  $K$ , donde  $p = 0, 1, \dots, n$ . Entonces

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^n (-1)^p l_p = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p(K). \tag{2.100}$$

E-P\_thm\_eq

La primera igualdad es la característica de Euler generalizada para un polyhedro  $K$  de dimensión  $n$ .

### 2.2.6. Homología Singular

r\_Homology\_section

Todo el análisis anterior se le llama *homología simplicial*, aunque es importante mencionar que también existe la *homología singular*. La homología singular se puede entender como “hacer el análisis cuando los triángulos son curvos”.

Para espacios topológicos arbitrarios se toman los *p-simplex singulares*  $\lambda_i^p$  en  $X$ , los cuales se definen como mapeos continuos,

$$\lambda_i^p : \Delta_p \rightarrow X, \quad (2.101)$$

singular\_si

donde  $\Delta_p$  son los p-simplex normales. Los mapeos  $\lambda_i^p$  no necesariamente son invertibles, por esta razón reciben el nombre de singulares.

El *grupo cadena singular*  $S_p(X)$  es el conjunto de elementos que tienen la forma siguiente:

$$s_p = \sum \lambda_i^p g_i, \quad g_i \in G \quad (2.102)$$

singular\_ch

donde  $G$  es un grupo Abeliano.

La suma de dos elementos del grupo cadena singular se define como

$$\sum \lambda_i^p g_i + \sum \lambda_i^p h_i = \sum \lambda_i^p (g_i + h_i), \quad g_i, h_i \in G. \quad (2.103)$$

singular\_ch

El *operador frontera* de una cadena singular se define como

$$\partial \lambda^p = \sum_{r=0}^p (-1)^r \lambda^p \circ F^r, \quad (2.104)$$

singular\_bo

donde  $\lambda^p \circ F^r$  es una cara de  $\lambda^p$ . Es decir,

$$\begin{aligned} \lambda^p \circ F^r &: \Delta_{p-1} \rightarrow X \quad \text{y} \\ F^r &: \Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p. \end{aligned} \quad (2.105)$$

En este caso también se cumple que  $\partial^2 = 0$ . Ahora estamos listos para definir

los grupos de homología singular como

$$H_p(X, G) = \frac{\text{Ker}(\partial : S_p \rightarrow S_{p-1})}{\text{Im}(\partial : S_{p+1} \rightarrow S_p)}. \quad (2.106)$$

singular\_ho

### 2.3. Homotopía de orden superior

En este capítulo se dará un análisis de los grupos análogos al grupo fundamental, pero de  $n$  dimensiones. Es decir, de los grupos de homotopía de orden superior  $\pi_n(X, x_0)$ , de un espacio  $X$  con punto base  $x_0 \in X$ .

Recordemos que los elementos del grupo  $\pi_1(X, x_0)$  son las clases de homotopía de los loops en  $X$  con base en  $x_0 \in X$ . Para construir los grupos de homotopía de orden superior, primero hay que generalizar la noción de loop a  $n$ -dimensiones.

n\_loop

**Definición 19.** Sea  $I_n$  el cubo cerrado  $n$ -dimensional en el espacio Euclídeo. Si  $\alpha$  es un mapeo continuo dado por:

$$\alpha : I_n \rightarrow X, \quad (2.107)$$

tal que  $\alpha$  lleva la superficie  $\partial I_n$  en un punto  $x_0 \in X$ , entonces  $\alpha$  es llamada un  $n$ -loop en  $X$  con base en el punto  $x_0$ .

El  $n$ -loop  $\alpha$  se puede representar como  $\alpha(t_1, t_2, \dots, t_n)$  donde  $t_1, t_2, \dots, t_n$  son las coordenadas de un punto en  $I_n$  con  $0 < t_i < 1 \quad \forall i$ . Además,  $\alpha(t_1, t_2, \dots, t_n) = x_0$  si  $t_i = 0$  ó  $t_i = 1$  para toda  $i$ . Como  $t_i = 0$  ó  $t_i = 1$  entonces representan puntos en  $\partial I_n$ . La figura [2.12](#) explica geoméricamente lo anterior.

n\_loop\_pic

También es importante definir la ley del producto para dos  $n$ -loops, como a continuación se muestra.

n\_loop\_product

**Definición 20.** Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos  $n$ -loops basados en  $x_0 \in X$ . El producto  $\gamma = \alpha * \beta$  es el  $n$ -loop basado en  $x_0 \in X$  dado por:

$$\gamma(t_1, t_2, \dots, t_n) = \alpha * \beta(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \dots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases} \quad (2.108)$$

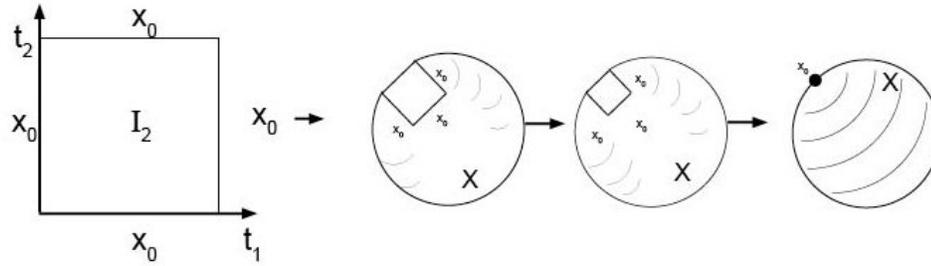


Figura 2.12: Un n-loop con  $n = 2$ . Los n-loops son la generalización de los loops y sirven para obtener los grupos de homotopía de orden superior.

n\_loop\_pic

La figura 2.13 muestra el producto de dos n-loops geoméricamente para  $n = 2$ .

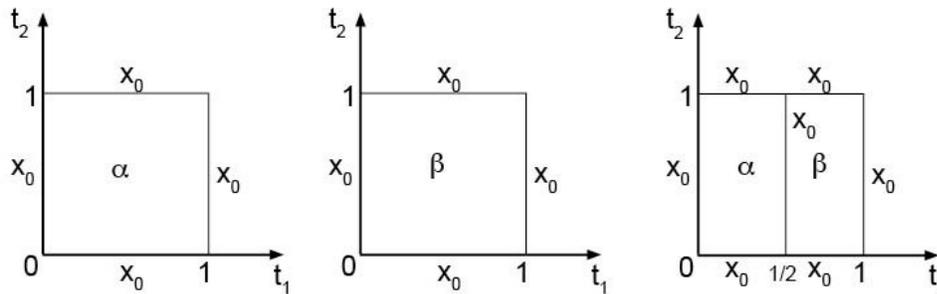


Figura 2.13: Producto de n-loops para  $n = 2$ . El n-ésimo grupo de homotopía es grupo con esta operación.

prod\_nloops

Así como los loops de una dimensión, los n-loops también pueden ser homotópicos entre sí ( $\alpha \simeq \beta$ ).

homotonloops

**Definición 21.** Dos n-loops  $\alpha$  y  $\beta$  basados en  $x_0$  son homotópicos, si existe un mapeo continuo  $H(s; t_1, t_2, \dots, t_n); \quad 0 \leq s \leq 1$  tal que:

$$\begin{aligned}
 H(0; t_1, \dots, t_n) &= \alpha(t_1, \dots, t_n) \\
 H(1; t_1, \dots, t_n) &= \beta(t_1, \dots, t_n) \\
 H(s; t_1, \dots, t_n) &= x_0 \quad \text{si } (t_1, \dots, t_n) \in \partial I_n \quad \forall s
 \end{aligned}
 \tag{2.109}$$

Análogamente al caso del grupo fundamental, la homotopía es una relación de

equivalencia, por lo que, el espacio de los  $n$ -loops se puede partir en clases disjuntas, donde miembros de una misma clase son homotópicos entre sí. Sea  $[\alpha]$  la clase de equivalencia de  $n$ -loops homotópicos al  $n$ -loop  $\alpha$ , ésta es llamada la *clase de homotopía*.

Si definimos el  $n$ -loop *constante* como

$$e : I_n \rightarrow x_0, \quad (2.110)$$

y el  $n$ -loop *inverso* como

$$\alpha^{-1}(t_1, \dots, t_n) = \alpha(1 - t_1, \dots, t_n), \quad (2.111)$$

entonces se puede demostrar que las clases de homotopía de los  $n$ -loops basados en  $x_0$  ( $[\alpha], [\beta], \dots$ ), forman un grupo con la ley del producto:

$$[\alpha] \circ [\beta] = [\alpha * \beta]. \quad (2.112)$$

Éste es el grupo de homotopía de dimensión  $n$ ,  $\pi_n(X, x_0)$  del espacio topológico  $X$  con punto base  $x_0$ .

Es importante notar que, a diferencia del grupo fundamental, los grupos de homotopía de orden superior son todos abelianos.

Muchos de los teoremas para el grupo fundamental, se pueden generalizar a los grupos de homotopía de orden superior, como:

**Teorema 12.** *Si  $X$  es conexo por trayectorias y  $x_0, x_1 \in X$ , entonces  $\pi_n(X, x_0)$  es isomorfo a  $\pi_n(X, x_1) \quad \forall n$ ,*

**Teorema 13.** *Si  $X$  es contraíble por una homotopía que deja  $x_0$  fijo, entonces*

$$\pi_n(X, x_0) = \{0\} \quad \forall n > 1, \quad (2.113)$$

**Teorema 14.** *Sea  $X$  y  $Y$  espacios topológicos con  $x_0 \in X$  y  $y_0 \in Y$ , entonces*

$$\pi_n(X \times Y; (x_0, y_0)) \simeq \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_n(Y, y_0). \quad (2.114)$$

Como se vio anteriormente, los grupos de homología y el grupo fundamental se pueden calcular, mientras que no existe ningún algoritmo para determinar  $\pi_n(X, x_0)$  para toda  $n$ , aún cuando  $X$  sea triangulable.

Por otro lado, el siguiente teorema debido a Hurewicz, establece que existe una relación entre los grupos de homología y los grupos de homotopía.

**Hurewicz** **Teorema 15.** *Los primeros grupos de homología no triviales donde  $n > 1$  y los primeros grupos de homotopía no triviales, tienen las mismas dimensiones y son isomorfos.*

El teorema **Hurewicz** 15 es de gran importancia, ya que se pueden calcular los grupos de homología, y de inmediato, determinar los grupos de homotopía de orden superior. Otro punto importante a destacar es que para  $n = 1$ , el teorema sólo se cumple cuando el grupo fundamental es abeliano.

Una aplicación de este teorema es el caso de la esfera ( $S^2$ ). Es posible calcular que  $H_1(S^2) = \{0\}$ ,  $H_2(S^2) = \mathbb{Z}$ , mientras que  $\pi_1(S^2) = \{0\}$ . Entonces se sigue que  $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ .

**Corolario 2.** *Si  $k = n$ , entonces*

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z} \quad \forall n. \quad (2.115)$$

Es importante destacar que, a diferencia de los grupos de homología  $H_n(S^k)$  para  $n > k$ , los grupos de homotopía  $\pi_n(S^k)$  no necesariamente son triviales. De hecho, E. Hopf demostró que,

$$\pi_3(S^2) = \mathbb{Z} \quad (2.116)$$

## 2.4. Cohomología de De Rham

Anteriormente se definieron los grupos de homología para espacios topológicos arbitrarios. Si consideramos que el espacio topológico sea una variedad diferenciable  $M$ , podemos definir un dual de los grupos de homología. Los grupos duales tienen

el nombre de *grupos de cohomología de De Rham*. Esta dualidad hace pensar que podemos usar los grupos de homología o cohomología sin importar el caso, pero la cohomología es mucho más poderosa que la homología.

### 2.4.1. Teorema de Stokes

Una de las principales herramientas matemáticas para estudiar la cohomología de De Rham es el teorema de Stokes el cual establece lo siguiente.

**Teorema 16.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable y compacta de dimensión  $n$  y sea  $\omega$  una  $(n - 1)$ -forma. Entonces*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (2.117)$$

El teorema de Stokes para variedades, nos permite integrar sobre un subconjunto de  $M$  que tiene menor dimensión, en vez de integrar sobre toda la variedad. Hay que tener en mente que nuestro objetivo es encontrar grupos duales a los de homología.

De la sección que habla sobre homología singular, se tiene que el grupo cadena singular  $S_p(X)$  se define como el conjunto de  $p$ -cadenas que tienen la forma de la ecuación (2.102)

$$s_p = \sum \lambda_i^p g_i, \quad g_i \in G, \quad (2.118)$$

donde  $\lambda_i^p : \Delta_p \rightarrow X$  son los  $p$ -simplex singulares y  $\Delta_p$  los simplex normales en  $\mathbb{R}^n$ .

Si ahora tomamos al espacio topológico  $X$  como una variedad  $n$ -dimensional diferenciable  $M$  y al grupo  $G$  como  $\mathbb{R}$ , entonces los  $p$ -simplex singulares  $\lambda_i^p$  se convierten en mapeos  $C^\infty$ . Entonces la  $p$ -cadena singular  $s_p$ , recibe ahora el nombre de  $p$ -cadena  $C^\infty$  y la denotamos simplemente  $c$ .

Si tenemos una  $p$ -cadena  $c$  y una  $p$ -forma  $\omega$  con  $0 \leq p \leq n$ , se define una integral de  $\omega$  sobre  $c$  de la siguiente manera,

$$\int_c \omega = \sum_i a_i \int_{\Delta^p} \lambda_i^* \omega \quad c = \sum_i a_i \lambda_i, \quad (2.119)$$

donde  $\lambda_i^*$  representa un pullback, por lo que  $\lambda_i^* \omega$  es una  $p$ -forma en  $\Delta^p$ . Ahora sí es posible enunciar el teorema de Stokes sobre cadenas.

chain\_Stokes

**Teorema 17.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $\omega$  una  $(p-1)$ -forma, es decir  $\omega \in \Lambda^{p-1}(M)$  y  $c \in C_p(M)$ , entonces*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \quad (2.120)$$

chain\_Stokes

La demostración del teorema 17 se puede encontrar en el libro [20]. Más adelante veremos por qué el teorema de Stokes es tan importante para la cohomología.

### 2.4.2. Los grupos de cohomología de De Rham

Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . El conjunto de  $p$ -formas cerradas ( $d\omega = 0$ ) se conoce como el *grupo de  $p$ -cociclos* y se denota como  $Z^p(M)$ , mientras que al conjunto de  $p$ -formas exactas ( $\omega = d\eta$ ) se define como el *grupo de  $p$ -cofronteras*,  $B_p(M)$ .

Notemos que ambos grupos forman espacios vectoriales con coeficientes reales y además  $B^p(M) \subset Z^p(M)$ , pues la derivada exterior cumple con la propiedad  $d^2 = 0$ .

cohomology\_gps

**Definición 22.** *El  $p$ -ésimo grupo de cohomología de De Rham está definido como*

$$H^p(M; \mathbb{R}) = \frac{Z^p(M)}{B^p(M)}, \quad (2.121)$$

$H^p(M; \mathbb{R})$  es trivial si  $p \leq -1$  ó  $p \geq n + 1$ .

Si  $\omega \in Z^p(M)$ , entonces  $[\omega] \in H^p(M)$  es la clase de equivalencia  $\{\omega' \in Z^p(M) \mid \omega' = \omega + d\eta, \eta \in \Lambda^{p-1}(M)\}$ . Esto nos dice que dos formas que difieren por una forma exacta son *cohomólogas*.

El hecho que  $B^p(M) \subset Z^p(M)$  quiere decir que todas las formas exactas son cerradas. El inverso no necesariamente se cumple pues, si así fuera, todos los grupos de cohomología serían triviales y no habría necesidad de esta teoría.

No obstante, se puede demostrar que si  $M$  es contraíble a un punto, entonces todas las formas cerradas en  $M$  son también exactas. Este resultado se conoce como el *Lema de Poincaré*.

Localmente, cualquier forma cerrada es exacta. La teoría de De Rham nos muestra un obstáculo a la exactitud global de las formas cerradas.

### 2.4.3. Dualidad de $H_p(M)$ y $H^p(M)$

Existe una relación entre el p-ésimo grupo de homología y el p-ésimo grupo de cohomología, dada por el teorema de Stokes [17](#). Para hacer notar esta relación definimos el producto interno como:

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : C_p(M) \times \Lambda^p(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (c, \omega) &\mapsto \langle c, \omega \rangle \equiv \int_c \omega. \end{aligned} \tag{2.122}$$

Entonces, el teorema de Stokes toma la forma

$$\langle c, d\omega \rangle = \langle \partial c, \omega \rangle. \tag{2.123}$$

De la ecuación [\(2.123\)](#), se ve claramente que el operador de derivada exterior  $d$  es el adjunto del operador frontera  $\partial$ . Esta característica da la idea de que existe una dualidad entre los grupos de homología y cohomología. Más aún, anteriormente se vieron secuencias exactas para los grupos de homología, pero también existen para grupos de cohomología. La ecuación [\(2.124\)](#) muestra las secuencias exactas de ambos grupos.

$$\begin{aligned}
& \dots \xrightarrow{\partial_{p+2}} C_{p+1}(M) \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p(M) \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}(M) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots \\
& \dots \xleftarrow{d_{p+2}} \Omega^{p+1}(M) \xleftarrow{d_{p+1}} \Omega^p(M) \xleftarrow{d_p} \Omega^{p-1}(M) \xleftarrow{d_{p-1}} \dots
\end{aligned} \tag{2.124}$$

exact\_seq\_c

de donde:

$$\begin{aligned}
H_p(M) &= \frac{Z_p(M)}{B_p(M)} = \frac{\ker \partial_p}{\operatorname{im} \partial_{p+1}} \\
H^p(M) &= \frac{Z^p(M)}{B^p(M)} = \frac{\ker d_{p+1}}{\operatorname{im} d_p}.
\end{aligned} \tag{2.125}$$

Con todas estas similitudes, podemos creer el siguiente teorema probado por Georges de Rham:

**Teorema 18. Teorema de De Rham**

*Si  $M$  es una variedad diferenciable compacta, entonces  $H_p(M)$  y  $H^p(M)$  son de dimensión finita. Más aún, el mapeo*

$$A : H_p(M) \times H^p(M) \rightarrow \mathbb{R} \tag{2.126}$$

*es bilineal y no degenerado. Por lo que,  $H^p(M)$  es el espacio vectorial dual de  $H_p(M)$ .*

Recordemos que si un espacio vectorial tiene dimensión finita, entonces es isomorfo a su espacio dual y cada isomorfismo define un producto bilineal no degenerado, lo que significa que  $H_p(M)$  es isomorfo a  $H^p(M)$ , entonces se tiene que el  $p$ -ésimo número de Betti está dado por

$$b^p(M) \equiv \dim H^p(M) = \dim H_p(M) = b_p(M). \tag{2.127}$$

Betti\_numbe

Así la característica de Euler toma la forma

$$\chi(M) = \sum_{p=1}^n (-1)^p b^p(K). \tag{2.128}$$

Euler\_cohon

Además, la fórmula de Kunneth para los grupos de cohomología está dada por,

$$H^p(M) = H^p(M_1 \times M_2) = \bigoplus_{k+q=p} H^k(M_1) \otimes H^q(M_2). \quad (2.129) \quad \text{co\_Kunneth}$$

#### 2.4.4. El producto cuña

Sea  $[\omega] \in H^p(M)$  y  $[\eta] \in H^q(M)$ , se define el producto cuña de  $[\omega]$  y  $[\eta]$  como

$$[\omega] \cup [\eta] = [\omega \wedge \eta], \quad (2.130) \quad \text{cup\_product}$$

donde  $[\omega \wedge \eta]$  es una  $(p+q)$ -forma, lo que implica que  $[\omega \wedge \eta] \in H^{p+q}(M)$ . Con lo cual se ve que el producto cuña es un mapeo de la forma

$$\cup : H^p(M) \times H^q(M) \rightarrow H^{p+q}(M). \quad (2.131) \quad \text{cup\_map}$$

Si definimos la suma de todos los grupos de cohomología de  $M$  como

$$H^*(M) = \bigoplus_{p>0} H^p(M), \quad (2.132)$$

entonces el producto cuña toma la forma

$$\cup : H^*(M) \times H^*(M) \rightarrow H^*(M). \quad (2.133) \quad \text{cup\_ring}$$

La ecuación <sup>cup\\_ring</sup>(2.133) convierte a  $H^*(M)$  en un anillo. Recordemos que un anillo es una estructura algebraica formada por un conjunto  $A$  y dos operaciones  $(A, \star, \circ)$  talque  $A$  bajo la operación  $\star$  forma un grupo, mientras que bajo la operación  $\circ$  es cerrado, asociativo y es distributiva respecto de  $\star$ .

El hecho de que  $H^*(M)$  sea un anillo es muy valioso, pues es posible que dos variedades  $M$  y  $N$  tengan los mismos grupos de cohomología pero sean topológicamente distintos. Esta diferencia se puede ver con el producto cuña; si obtenemos el producto cuña  $\cup$  para  $H^*(M)$  y  $H^*(N)$  se verá que son anillos distintos.

### 2.4.5. Superioridad de cohomología frente a homología

La cohomología es una herramienta más útil que la homología. Por principio, la homología utiliza el operador frontera  $\partial$ , el cual es un operador global, lo que implica que se necesite información global de la variedad. Por su parte, la cohomología utiliza el operador de derivada exterior, el cual es un operador diferencial de primer orden, por lo que, es un operador local y no se necesita información global de la variedad.

Otra razón por la cual la cohomología tiene ventaja sobre la homología es porque la cohomología tiene una estructura algebraica extra proporcionada por el producto cuña, la cual distingue un espacio de otro aún cuando sus grupos de cohomología sean los mismos.

Los grupos de homología no pueden tener una estructura de anillo, pues por la dualidad que existe entre  $H_p(M)$  y  $H^p(M)$ , la dirección del mapeo <sup>cup ring</sup> (2.133) cambia y entonces el dual del producto cuña es:

$$\cup^* : H_*(M) \rightarrow H_*(M) \times H_*(M), \quad (2.134) \quad \text{cup\_dual}$$

el cual no proporciona una estructura de anillo.

## 2.5. Defectos topológicos

La topología algebraica se ha utilizado en varios aspectos de la Física. Por ejemplo, en materia condensada, la teoría homotópica es el lenguaje natural para describir y clasificar los defectos en sistemas ordenados.

Un *medio ordenado* es un espacio físico en tres dimensiones considerado una variedad  $M^3$  suave y se asume que esta variedad es conexa, orientable y compacta con frontera  $\partial M^3$ .

Por otro lado, se introduce el concepto de *espacio de parámetro ordenado*  $V$ , el cual es el espacio formado por los posibles valores del *parámetro ordenado*. El parámetro ordenado es la medida del grado de orden en un sistema.

Existe un subconjunto  $\Sigma \subset M^3$  conocido como el *conjunto de defectos*. Fuera de  $\Sigma$  se puede construir un mapeo continuo dado por,

$$\psi : M^3 - \Sigma \rightarrow V, \quad (2.135)$$

donde  $\psi$  es el *campo de parámetro ordenado*.

El mapeo (2.135) nos dice que existe un mapeo continuo de la variedad al espacio de parámetro ordenado bien definido, siempre y cuando el conjunto de defectos no esté presente. Esto significa que, en el conjunto de defectos, el parámetro ordenado no está bien definido.

Estos defectos, llamados *defectos topológicos*, dependen de su dimensión. Existen *defectos de punto* o *monopolos*, *defectos de línea* o *vórtices* y *defectos de superficie* o *de pared*. Estos defectos son clasificados de acuerdo a los grupos de homotopía.

Un defecto topológico de dimensión  $m$  existe en un medio de dimensión  $d$  si el grupo de homotopía  $\pi_n(V; x_0)$  no es trivial, donde

$$n = d - m - 1. \quad (2.136)$$

### Ejemplo 9. *Cristal líquido nemático*

*El medio ordenado de este sistema consiste en moléculas largas en forma de elipsoides de revolución. El parámetro ordenado es la dirección de los ejes de revolución, entonces el espacio de parámetro ordenado es el espacio de las direcciones. Geométricamente, este espacio es una esfera  $S^2$  con las antípodas identificadas, es decir,  $V$  es el plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$ .*

*Se puede demostrar que  $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \frac{\mathbb{Z}}{2} = \mathbb{Z}_2$ , lo cual quiere decir que existe un defecto de línea en el cristal líquido.*

Los defectos topológicos se utilizan también para describir configuraciones estables de materia formadas en transiciones de fase en el universo temprano. A estos defectos se les conoce como defectos cosmológicos.

## 2.6. Referencias

Este capítulo se basó en el libro [21] <sup>Nash</sup>, aunque se complementó con las ideas expuestas en [20] <sup>Nakahara</sup>. También fue de gran ayuda estudiar las ideas algebraicas en [9] <sup>Fraleigh</sup> y las ideas sobre topología algebraica (desde un punto de vista más matemático y abstracto) en [11] <sup>Hatcher</sup> y [16] <sup>Massey</sup>.

Para las secciones sobre grupo fundamental, grupos de homotopía de orden superior y defectos topológicos, es recomendable el artículo [17] <sup>Mermin</sup>. En él se explican las ideas de los grupos de homotopía con un enfoque muy aplicado a la materia condensada.

# 3

## Fundamentos de Geometrotermodinámica.

En este capítulo explicaremos los fundamentos matemáticos de la Geometrotermodinámica (GTD). Como su nombre lo indica, la GTD es un programa que pretende dar una formulación geométrica de la termodinámica, por lo que es necesario estudiar las estructuras geométricas que la conforman.

Al final del trabajo se presenta un apéndice sobre Topología y Geometría diferencial con el objetivo de comprender mejor los conceptos mencionados en este capítulo.

### 3.1. El espacio fase y la estructura de contacto

Para incluir la geometría en los sistemas termodinámicos, es necesario introducir una variedad diferenciable  $\mathcal{T}$  de dimensión  $2n + 1$ , la cual se conoce como *el espacio fase termodinámico*. Se exige que  $\mathcal{T}$  tenga una dimensión de  $2n + 1$  porque se toman como coordenadas las variables extensivas, las intensivas y el potencial termodinámico.

Esta variedad está dotada de una *estructura de contacto*  $\xi \subset T\mathcal{T}$ , la cual es, una familia de hiperplanos maximalmente no-integrable que satisface

$$\xi = \ker(\Theta), \tag{3.1} \text{ hiperplanos}$$

donde  $\Theta \in T^*(\mathcal{T})$  es una 1-forma que satisface la condición de no integrabilidad

$$\Theta \wedge (d\Theta)^n \neq 0. \tag{3.2} \quad \text{nint}$$

La condición de no integrabilidad significa que no se puede foliar la variedad con foliaciones de codimensión 1. Por ejemplo,  $\mathbb{R}^3$  se puede foliar con planos uno sobre otro, pero si se equipa con una estructura de contacto entonces no es posible foliarlo, ya que los planos rotan de acuerdo a la estructura de contacto que se elija.

El objeto matemático presentado en las ecuaciones (3.1) y (3.2),  $\Theta$ , recibe el nombre de *forma de contacto* de la estructura de contacto sobre  $\mathcal{T}$ . Esta forma de contacto no es única. De hecho, cualquier 1-forma de contacto que defina la misma familia de hiperplanos de la ecuación (3.1), es equivalente a  $\Theta$ .

Entonces, la estructura de contacto  $\xi$  corresponde a una clase de equivalencia  $[\Theta]$  de 1-formas, las cuales satisfacen (3.2) y están relacionadas de la siguiente forma, para cualquier  $\Theta_1$  y  $\Theta_2$  en  $[\Theta]$ :

$$\Theta_1 \sim \Theta_2 \iff \Theta_2 = \lambda^2 \Theta_1 \tag{3.3}$$

para  $\lambda : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ . Es necesario que la estructura de contacto sea orientada, por lo que, se requiere que  $\lambda$  tenga solamente un signo, por eso es que se eleva al cuadrado.

Por otro lado, siempre se puede encontrar un conjunto de coordenadas locales para el espacio fase termodinámico,  $\mathcal{T}$ , de la forma  $Z^A = \{\Phi, I_1, \dots, I_n, E^1, \dots, E^n\}$ , tal que la forma de contacto se puede escribir como,

$$\Theta = d\Phi - I_a dE^a, \tag{3.4} \quad \text{Darboux}$$

en donde se utiliza la convención de Einstein. Lo anterior se conoce como el *teorema de Darboux* y al considerarlo, se puede dar una interpretación geométrica de la relación 3.2, ya que,  $\Theta \wedge (d\Theta)^n$  es la forma de volumen del espacio fase. La forma de contacto presentada en la ecuación (3.4) se conoce como *1-forma de Gibbs*.

Hasta el momento tenemos que el espacio fase termodinámico es una variedad

de contacto dado por el par  $(\mathcal{T}, \xi)$  donde  $\xi$  es la estructura de contacto. Es común que la variedad de contacto también se denote por el par  $(\mathcal{T}, [\Theta])$  para hacer énfasis en la clase de equivalencia de la forma de contacto. De hecho, en este trabajo se utilizará esta última notación.

Además del espacio fase termodinámico, es necesaria otra estructura geométrica llamada espacio de estados de equilibrio.

### 3.2. El espacio de estados de equilibrio

El *espacio de estados de equilibrio*  $\mathcal{E}$ , es una subvariedad integral de dimensión máxima encajada en el espacio fase termodinámico  $\mathcal{T}$ . Es decir, esta subvariedad está definida por el mapeo suave,

$$\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T}, \quad (3.5) \quad \text{encaje}$$

donde se cumple la llamada *condición isotrópica*:

$$\varphi^*(\Theta) = 0. \quad (3.6) \quad \text{isotropico}$$

donde  $\varphi^*$  es el *pullback* de  $\varphi$ . La condición isotrópica nos dice que los espacios tangentes a cada punto de la variedad  $\mathcal{E}$  están contenidos en la estructura de contacto. Utilizando las coordenadas del espacio fase  $Z^A = (\Phi, E^a, I_a)$ , se tiene que el encaje [3.5](#) encaje es de la forma,

$$\varphi : (E^a) \mapsto (\Phi(E^a), E^a, I_a), \quad (3.7) \quad \text{encajecoord}$$

por lo que, la condición isotrópica toma la forma,

$$\varphi^*(\Theta) = \varphi^*(d\Phi - I_a dE^a) = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} - I_a \right) dE^a = 0. \quad (3.8) \quad \text{ley1}$$

De esta última relación se obtiene de manera inmediata que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E^a} = I_a, \quad (3.9) \quad \text{eqtermo}$$

la cual es la condición de equilibrio termodinámico en el espacio de estados de equi-

librio. Hay que notar que las variables intensivas son duales a las extensivas en el sentido de la ecuación (3.9).

La relación 3.8 conduce a la *primera ley de la Termodinámica*,

$$d\Phi - I_a dE^a = 0, \quad (3.10) \quad \boxed{\text{1ley}}$$

donde  $\Phi$  es el potencial termodinámico, las  $I_a$  son las coordenadas intensivas y las  $E^a$  son las coordenadas extensivas.

El sello distintivo de un sistema termodinámico en termodinámica clásica, está dado por la ecuación fundamental. Igualmente, para distinguir un sistema termodinámico de otro en el espacio de estados de equilibrio, es necesario saber la ecuación fundamental, la cual está dada por:

$$\Phi = \Phi(E^a). \quad (3.11) \quad \boxed{\text{ecfun}}$$

Además, el potencial termodinámico tiene que cumplir la condición de homogeneidad,

$$\Phi(\lambda E^a) = \lambda^\beta \Phi(E^a), \quad (3.12) \quad \boxed{\text{condhomo}}$$

para  $\lambda$  y  $\beta$  constantes. Al diferenciar esta expresión con respecto a  $\lambda$ , evaluando el resultado con  $\lambda = 1$  y utilizando la expresión 3.9 se llega a la identidad de Euler:

$$\beta \Phi(E^a) = \delta_a^b I_b E^a. \quad (3.13) \quad \boxed{\text{Euler}}$$

Calculando su derivada exterior se tiene,

$$\beta d\Phi(E^a) = d(\delta_a^b I_b E^a) = \delta_a^b (I_b dE^a + E^a dI_b), \quad (3.14) \quad \boxed{\text{devext}}$$

y se aplica 3.10,

$$\beta d\Phi(E^a) = \beta (I_a dE^a). \quad (3.15) \quad \boxed{\text{dev1ley}}$$

Un cálculo directo, al igualar 3.14 y 3.15 lleva a la relación generalizada de Gibbs-Duhem, la cual es:

$$(\beta - 1)\delta_a^b I_b dE^a = \delta_a^b E^a dI_b. \quad (3.16) \quad \boxed{\text{G-Dg}}$$

Al igualar  $\beta$  a 1 se obtiene la relación clásica de Gibbs-Duhem,

$$\delta_a^b E^a dI_b = 0. \quad (3.17) \quad \boxed{\text{G-D}}$$

### 3.3. Transformaciones de Legendre

Las transformaciones de Legendre son diffeomorfismos en el espacio fase de la GTD que preservan la estructura de contacto, por lo que se consideran una simetría de  $\mathcal{T}$ . Además, estas transformaciones son usadas comunmente en distintas ramas de la física como mecánica clásica, física estadística y termodinámica.

Algunas veces, es muy útil codificar la información contenida en una función de una manera diferente. Para lograr esto se pueden utilizar las transformaciones de Fourier, Laplace o Legendre, dependiendo del problema que uno está resolviendo.

Dada una  $\Phi(x)$ , la transformación de Legendre codifica la información de la función de manera conveniente, si dos condiciones se cumplen:

1. La función (o su negativa) es estrictamente convexa y suave.
2. Es más fácil medir o pensar en la derivada de  $\Phi$  con respecto a  $x$ , que en sólo  $x$ .

El primer punto habla de la convexidad de la función. Recordemos que, una función de una variable como  $\Phi(x)$  es convexa, si su segunda derivada es siempre positiva. Una consecuencia de esta condición es que, existe un mapeo inyectivo entre  $x$  y la derivada  $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ .

El segundo punto establece que la transformación de Legendre muestra cómo definir una función que contenga la misma información de  $x$ , pero como una función de  $\frac{d\Phi}{dx}$ .

Geoméricamente, si se tiene una función  $\Phi(x)$  convexa, es decir,  $\Phi''(x) > 0$ . Entonces, la transformación de Legendre de  $\Phi$  es una nueva función  $\tilde{\Phi}$  que depende de una nueva variable  $p$ , la cual se construye a partir de la figura 3.1.

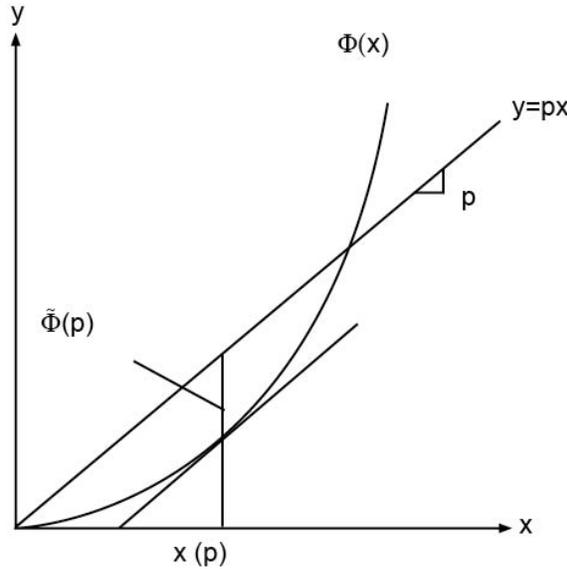


Figura 3.1: Transformación de Legendre.

LT\_pic

Se toma el punto  $x = x(p)$ , donde la curva está más alejada de la recta  $y = px$ . Para cada  $p$ , se define

$$F(p, x) = px - \Phi(x). \quad (3.18) \quad \text{F}$$

La función (3.18) tiene un máximo en el punto  $x(p)$ , es decir,  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  y  $\Phi'(x) = p$ . Entonces se define la transformada de Legendre de  $\Phi(x)$  como

$$\tilde{\Phi} = F(p, x(p)). \quad (3.19) \quad \text{Legendre}_T$$

En termodinámica, una transformación de Legendre corresponde a una redefinición del potencial termodinámico, al intercambiar el papel que juegan las variables extensivas por el rol de las intensivas. Es importante notar que el rol que juegan estas

variables, es físicamente relevante sólo en el espacio de estados de equilibrio, pues aquí es donde se lleva a cabo la termodinámica. En el espacio fase termodinámico  $\mathcal{T}$  es sólo un cambio de coordenadas.

Una *transformación parcial de Legendre* está definida con las siguientes relaciones:

$$\tilde{\Phi}_{(i)} \equiv \Phi - I_{(i)}E^{(i)}, \quad (3.20) \quad \text{TLpot}$$

$$\tilde{I}_{(i)} \equiv E^{(i)}, \quad (3.21) \quad \text{TLint}$$

$$\tilde{E}^{(i)} \equiv -I_{(i)}, \quad (3.22) \quad \text{TLExt}$$

$$\tilde{I}_j = I_j \quad y \quad \tilde{E}^j = E^j \quad \text{para } j \neq i. \quad (3.23) \quad \text{TLPint}$$

En la ecuación <sup>TLpot</sup>3.20, la notación no indica suma sobre  $i$  sino que se toman las  $i$ -ésimas variables intensivas y extensivas respectivamente. A esta transformación se le llama parcial porque solamente intercambia el  $i$ -ésimo par de variables termodinámicas. Una *transformación total de Legendre*, (*TLT*) por sus siglas en inglés, intercambia todos los pares de variables intensivas y extensivas.

Por otro lado, consideremos una función multivaluada  $F(\vec{x})$ , donde  $\vec{x}$  es un vector de  $m$  variables independientes  $x_1, \dots, x_m$ . Además, supongamos que  $F$  es convexa y suave a lo largo de todo el espacio  $m$ -dimensional. En todo punto  $\vec{x}$  habrá  $m$  pendientes,

$$s_m = \frac{\partial F}{\partial x_m} \equiv \partial_m F, \quad (3.24) \quad \text{pendientes}$$

y además existen  $m(m+1)/2$  segundas derivadas, las cuales se denotan por:  $\partial_m \partial_l F$  donde,

$$\partial_m \partial_l F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_m \partial x_l}. \quad (3.25) \quad \text{2deriv}$$

Estas segundas derivadas se pueden pensar como las componentes de una matriz simétrica. La condición de convexidad de la función  $F$ , restringe a todos los eigenva-

lores de esta matriz a ser positivos (o negativos). En el contexto de la termodinámica, la convexidad es la condición para la estabilidad en sistemas de equilibrio. Es por esto que se pide la condición de convexidad. En este caso, el signo depende de la representación del potencial. A la ecuación (3.26) se le conoce como la *Segunda Ley de la Termodinámica*.

$$\pm \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^a \partial E^b} \geq 0. \quad (3.26) \quad \boxed{2ley}$$

### 3.4. La estructura Riemanniana de la GTD

Existe una última estructura que añadir al programa de la GTD, dada por una métrica  $G$  no degenerada, la cual, induce una estructura Riemanniana en el espacio fase termodinámico  $\mathcal{T}$ . De esta forma, un sistema termodinámico se describe con una métrica  $G$ , llamada *métrica termodinámica* que cumple las siguientes condiciones,

1.  $G$  es invariante ante transformaciones que no modifiquen la estructura de contacto. En particular,  $G$  debe ser invariante ante transformaciones de Legendre.
2.  $G$  induce una métrica  $g$  en el espacio de estados de equilibrio  $\mathcal{E}$  utilizando el mapeo,

$$\varphi^*(G) = g. \quad (3.27) \quad \boxed{\text{pullbackg}}$$

La condición 1 hace que la métrica realmente describa un sistema termodinámico independientemente de las coordenadas utilizadas en  $\mathcal{T}$ , mientras que, la condición 2 establece la relación entre las geometrías de  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{E}$  usando las mismas herramientas utilizadas para definir los estados de equilibrio con la estructura de contacto.

Denotando como  $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{Z}^A)$  a la métrica obtenida de  $G$  al aplicar una transformación de Legendre <sup>TLpot</sup> <sup>TLPint</sup> 3.20 a 3.23 y definiendo  $G'(\tilde{Z}^A) = G(Z^A = \tilde{Z}^A)$  entonces, la invarianza de Legendre de  $G$  se logra al pedir que se cumpla la siguiente condición:

$$\tilde{G}(\tilde{Z}^A) = G'(\tilde{Z}^A). \quad (3.28) \quad \boxed{\text{invLeg}}$$

Bajo una transformación total de Legendre, las componentes de la métrica  $G$  se transforman como:

$$G \rightarrow \tilde{G} = \frac{\partial Z^C}{\partial \tilde{Z}^A} \frac{\partial Z^D}{\partial \tilde{Z}^B} G_{CD}, \quad (3.29)$$

donde la matriz de transformación es:

$$\frac{\partial Z^A}{\partial \tilde{Z}^B} = \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{Z}^{n+1} & -\tilde{Z}^{n+2} & \dots & -\tilde{Z}^{2n} & -\tilde{Z}^1 & -\tilde{Z}^2 & \dots & -\tilde{Z}^n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.30) \quad \text{matrix}$$

donde los índices  $A$  y  $B$  representan los renglones y las columnas de la matriz, respectivamente. Como el determinante de ésta es 1, entonces existe su matriz inversa con lo cual se determina un difeomorfismo correspondiente a una transformación total de Legendre.

Un importante problema que hay que tomar en cuenta al imponer invarianzas en las métricas es, si existen soluciones. En nuestro caso, hay que encontrar métricas que cumplan con la invarianza bajo transformaciones de Legendre y que sean de dimensión  $2n + 1$ .

Es fácil construir una métrica con estas características, si se considera la 1-forma de Gibbs dada por la ecuación 3.4. Entonces la *métrica de Gibbs* se define como:

$$G_G = \Theta_G \otimes \Theta_G. \quad (3.31) \quad \text{Gibbsmetric}$$

La invarianza de esta métrica se consigue a partir de la 1-forma de Gibbs. El problema con esta métrica es que no tiene ningún componente que dependa de algún  $dI_a$ , por lo que su determinante se anula y la solución para el sistema de ecuaciones que determina la métrica no es única. Es decir, la métrica de Gibbs es degenerada; pero es un buen comienzo para buscar métricas que cumplan las características que se piden.

Bajo el contexto de la GTD existen dos familias independientes de métricas para  $\mathcal{T}$ , las cuales se clasifican de acuerdo a sus propiedades de invarianza. La primera familia son métricas invariantes bajo transformaciones totales de Legendre y la segunda son métricas que son invariantes bajo transformaciones totales y parciales de Legendre. De manera que se escriben

$$G_T = \Theta_G \otimes \Theta_G + \Lambda(Z^A)(\xi^a_b E^b I_a)(\chi^c_d dE^d \otimes dI_c) \quad (3.32) \quad \text{T\_metrics}$$

y

$$G_P = \Theta_G \otimes \Theta_G + \Lambda(Z^A) \sum_{i=1}^n [(E^i I_i)^{2k+1} dE^i \otimes dI_i], \quad (3.33) \quad \text{P\_metrics}$$

donde  $\Lambda(Z^A)$  es una función arbitraria invariante de Legendre de las coordenadas  $Z^A$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  y  $\xi^a_b$ ,  $\chi^c_d$  son matrices diagonales constantes. Cabe destacar que estas matrices no son tensores, sólo sirven para definir la forma de las métricas. Por ejemplo, la elección  $\xi^a_b = \chi^a_b = \delta^a_b$ , se ha utilizado para describir sistemas con transiciones de fase de primer orden, mientras que para sistemas con transiciones de fase de segundo orden se ha utilizado  $\xi^a_b = \delta^a_b$  y  $\chi^a_b = \eta^a_b$  con  $\eta^a_b = \text{diag}[-1, 1, \dots, 1]$ . A estas métricas se les conocen como  $G_I$  y  $G_{II}$ , respectivamente (haciendo alusión a las transiciones de fase de primer y segundo orden).

Por su parte, la familia de métricas <sup>P\\_metrics</sup> (3.33) se le conoce como  $G_{III}$ . Un caso particular de  $G_T$  es la conocida como *métrica natural*  $G^\natural$ , la cual también es invariante ante cambios de representación y se define como

$$G^\natural = \Theta_G \otimes \Theta_G + \sum_{j \neq i} \left[ \frac{1}{E^i I_i} dE^a \otimes dI_a \right], \quad (3.34) \quad \text{G\_natural}$$

donde se excluye al  $i$ -ésimo par de coordenadas por ser las que se intercambian con el potencial termodinámico  $\Phi$  cuando pasamos de una representación a otra. Las representaciones más comunes son la energía interna y la entropía.

De esta forma, el espacio fase termodinámico  $(\mathcal{T}, [\Theta])$ , se convierte en una variedad de contacto Riemanniana  $(\mathcal{T}, [\Theta], G)$ , llamada *variedad fase termodinámica*.

La métrica inducida en el espacio de estados de equilibrio está dada por

$$g^h = \sum_{j \neq i} \left( E^j \frac{\partial \Phi}{\partial E^j} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^b \partial E^a} dE^a \otimes dE^b. \quad (3.35)$$

Ya que se tienen todos los componentes de la GTD, es natural preguntarse ¿Para qué sirve? La motivación principal de la GTD es que la curvatura asociada a la ecuación (3.35) contiene toda la información referente a la *interacción termodinámica* del sistema determinado por la ecuación fundamental  $\Phi(E^a)$ . Además las singularidades de curvatura se interpretan como transiciones de fase que sufre dicho sistema.

### 3.5. Geodésicas en GTD

De geometría diferencial, sabemos que, las geodésicas son curvas de longitud extremal  $x^a(\tau)$ , las cuales satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0 \quad (3.36)$$

donde  $\tau$  es un parámetro afín a lo largo de las geodésicas.

En el espacio de estados de equilibrio, cualquier curva representa un proceso cuasiestático. Se define una *geodésica termodinámica* como las soluciones a las ecuaciones geodésicas (3.36), que cumplen con las leyes de la Termodinámica. Es importante tener claro que no todo proceso cuasiestático es una geodésica y no toda geodésica es un proceso cuasiestático.

### 3.6. Gas Ideal

Empecemos el análisis con un gas ideal monoatómico. La ecuación fundamental de un gas ideal es

$$S(U, V, N) = N s_0 + NR \ln \left[ \left( \frac{U}{U_0} \right)^c \left( \frac{V}{V_0} \right) \left( \frac{N}{N_0} \right)^{-(c+1)} \right], \quad (3.37)$$

donde  $S$  es la entropía,  $U$  la energía interna,  $V$  el volumen,  $N$  el número de partículas del gas y  $s_0$  es una constante.

Para simplificar los cálculos y teniendo en cuenta que esta ecuación es homogénea de grado 1, podemos hacer el análisis con la representación de la entropía molar.

### 3.6.1. Gas Ideal Molar

La ecuación fundamental en la representación de la entropía molar es (citar Callen)

$$s(u, v) = s_0 + N_A \kappa_B c_v \ln(u) + N_A \kappa_B \ln(v), \quad (3.38) \quad \text{S\_ig}$$

donde  $N_A \kappa_B = 8,3144 \frac{J}{molK}$ ,  $c_v$  es una constante y  $s, u, v$  son la entropía, la energía interna y el volumen molar, respectivamente.

La 1-forma de Gibbs en la representación de la entropía tiene la forma

$$\Theta_s = ds - \frac{1}{T} du - \frac{P}{T} dv, \quad (3.39) \quad \text{1-forma\_ig}$$

donde  $T$  es la temperatura y  $P$  la presión. Por lo que, las coordenadas del espacio fase  $\mathcal{T}$  son  $(s, u, v, 1/T, P/T)$  y la métrica natural de este espacio es

$$G_s^{\natural} = \left( ds - \frac{1}{T} du - \frac{P}{T} dv \right)^2 + \frac{T}{vP} dud \left( \frac{1}{T} \right) + \frac{T}{vP} dvd \left( \frac{P}{T} \right). \quad (3.40) \quad \text{Gnat\_ig}$$

Entonces, la métrica natural en el espacio de estados de equilibrio de la GTD para el gas ideal nos da

$$g_s^{\natural} = \left( v \frac{\partial s}{\partial v} \right)^{-1} \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} du \otimes du + \left( v \frac{\partial s}{\partial v} \right)^{-1} \frac{\partial^2 s}{\partial v^2} dv \otimes dv. \quad (3.41) \quad \text{gnat\_igS}$$

De la ecuación (3.38) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial u} &= \frac{N \kappa_B c_v}{u}, & \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} &= -\frac{N \kappa_B c_v}{u^2} \\ \frac{\partial s}{\partial v} &= \frac{N \kappa_B}{v}, & \frac{\partial^2 s}{\partial v^2} &= -\frac{N \kappa_B}{v^2}. \end{aligned} \quad (3.42) \quad \text{parciales\_g}$$

Sustituyendo la ecuación (3.42) en la ecuación (4.1), donde  $c_v = \frac{3}{2}$  por ser un gas

monoatómico y haciendo  $N_A \kappa_B = 1$ , se tiene que

$$g_s^{\natural} = -\frac{3}{2} \frac{du^2}{u^2} - \frac{dv^2}{v^2}. \quad (3.43) \quad \text{gnat\_ig}$$

Recordemos que el tensor de curvatura está dado por

$$R^a{}_{bcd} = \frac{\partial \Gamma^a{}_{bd}}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma^a{}_{bc}}{\partial x^d} + \Gamma^a{}_{ec} \Gamma^e{}_{bd} - \Gamma^a{}_{ed} \Gamma^e{}_{bc}, \quad (3.44) \quad \text{R\_tensor}$$

donde  $\Gamma^a{}_{bc}$  son los símbolos de Christoffel o componentes de la conexión y se definen como

$$\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left( \frac{\partial g_{db}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d} \right). \quad (3.45) \quad \text{Christoffel}$$

Para la métrica (4.1) <sup>gnat\\_ig</sup> tenemos que

$$\begin{aligned} g_{uu} &= -\frac{3}{2u^2}; & g^{uu} &= -\frac{2u^2}{3} \\ g_{vv} &= -\frac{1}{v^2}; & g^{vv} &= -v^2 \\ g_{uv} &= 0; & g^{uv} &= 0. \end{aligned} \quad (3.46) \quad \text{metric\_comp}$$

Por lo que los símbolos de Christoffel son

$$\begin{aligned} \Gamma^v{}_{uu} &= \frac{1}{2} g^{vm} [g_{mu,u} + g_{um,u} - g_{uu,m}] = \frac{1}{2} g^{vv} [-g_{uu,v}] = 0 \\ \Gamma^v{}_{vu} &= \frac{1}{2} g^{vm} [g_{mv,u} + g_{um,v} - g_{vu,m}] = \frac{1}{2} g^{vv} [g_{vv,u}] = 0 \\ \Gamma^v{}_{uv} &= \frac{1}{2} g^{vm} [g_{mu,v} + g_{vm,u} - g_{uv,m}] = \frac{1}{2} g^{vv} [g_{vv,u}] = 0 \\ \Gamma^v{}_{vv} &= \frac{1}{2} g^{vm} [g_{mv,v} + g_{vm,v} - g_{vv,m}] = \frac{1}{2} g^{vv} [g_{vv,v}] = -\frac{1}{v} \\ \Gamma^u{}_{vv} &= \frac{1}{2} g^{um} [g_{mv,v} + g_{vm,v} - g_{vv,m}] = \frac{1}{2} g^{uu} [-g_{vv,u}] = 0 \\ \Gamma^u{}_{uv} &= \frac{1}{2} g^{um} [g_{mu,v} + g_{vm,u} - g_{uv,m}] = \frac{1}{2} g^{uu} [g_{uu,v}] = 0 \\ \Gamma^u{}_{vu} &= \frac{1}{2} g^{um} [g_{mv,u} + g_{um,v} - g_{vu,m}] = \frac{1}{2} g^{uu} [g_{uu,v}] = 0 \\ \Gamma^u{}_{uu} &= \frac{1}{2} g^{um} [g_{mu,u} + g_{um,u} - g_{uu,m}] = \frac{1}{2} g^{uu} [g_{uu,u}] = -\frac{1}{u}. \end{aligned}$$

Como la dimensión de la variedad es 2, entonces el tensor de curvatura  $R_{bcd}^a$  tiene una sola componente independiente, la cual hay que calcular. De la definición del tensor de curvatura (3.44) <sup>R\_tensor</sup> y sustituyendo los correspondientes símbolos de Christoffel, se tiene que

gnat\_Chris

$$R_{vuv}^u = \frac{\partial \Gamma_{vv}^u}{\partial x^u} - \frac{\partial \Gamma_{vu}^u}{\partial x^v} + \Gamma_{mu}^u \Gamma_{vv}^m - \Gamma_{mv}^u \Gamma_{vu}^m = 0. \quad (3.47)$$

gi\_curvatur

Al ver los cálculos, se tiene que todas las componentes del tensor de curvatura son cero; mientras que, existen símbolos de Christoffel que no son cero. El hecho de que la curvatura del espacio de estados de equilibrio (que es donde se lleva a cabo la termodinámica) sea cero, se interpreta como la ausencia de interacción termodinámica; la cual es una característica del gas ideal.

Por otro lado, la métrica natural del espacio fase <sup>Gnat\_ig</sup> (3.40) es invariante ante transformaciones de Legendre y ante cambios de representación, por lo que, la termodinámica es la misma aún cuando cambiemos de potencial o de representación.

### 3.6.2. Gas ideal en densidad volumétrica

Otra forma de expresar la ecuación fundamental del gas ideal es en densidad volumétrica y se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} S\left(\frac{U}{V}, \frac{N}{V}\right) &= \frac{N}{V} s_0 + \frac{N}{V} N_A \kappa_B c_v \ln\left(\frac{U}{V}\right) - (c_v + 1) \frac{N}{V} N_A \kappa_B \ln\left(\frac{N}{V}\right) \\ &= n s_0 + n \ln(u)^{c_v} + n \ln(n)^{-(c_v+1)}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

S\_ig\_v

Haciendo el mismo análisis tenemos que la métrica natural del espacio de estados de equilibrio es:

$$g_s^h = \left(n \frac{\partial s}{\partial n}\right)^{-1} \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} du \otimes du + \left(n \frac{\partial s}{\partial n}\right)^{-1} \frac{\partial^2 s}{\partial n \partial u} du \otimes dn + \left(n \frac{\partial s}{\partial n}\right)^{-1} \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial n} dn \otimes du + \left(n \frac{\partial s}{\partial n}\right)^{-1} \frac{\partial^2 s}{\partial n^2} dn \otimes dn. \quad (3.49)$$

Al hacer los cálculos se obtuvo que el denominador del escalar de curvatura es

$$Rs_{den} = 2n^{12}u^4c_v^2(c_v \ln(n) - c_v \ln(u) + c_v + \ln(n) - s_0 + 1). \quad (3.50)$$

Entonces, el escalar de curvatura diverge en función de  $c_v$  cuando

$$n = \exp[(c_v \ln(u) - c_v + s_0 - 1)/(c_v + 1)]. \quad (3.51)$$

La figura 3.2 muestra cómo varía el escalar de curvatura con respecto al número de partículas.

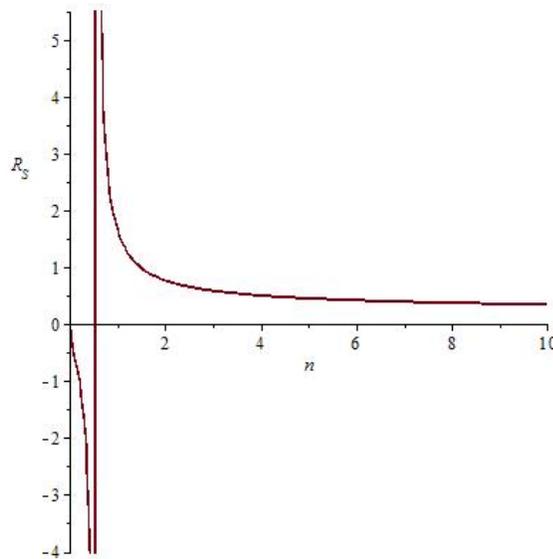


Figura 3.2: Escalar de curvatura  $R_S$  como función del número de partículas  $n$  cuando  $c_v = 3/2$ .

En la figura 3.2 se observa que existe una singularidad de la curvatura expresada por la ecuación (3.51). Además, se observa que la curvatura tiende a cero cuando el

número de partículas tiende a infinito, lo cual nos habla de un límite termodinámico. La figura 3.3 muestra al escalar  $R_S$  como función de  $u$  y  $n$ .

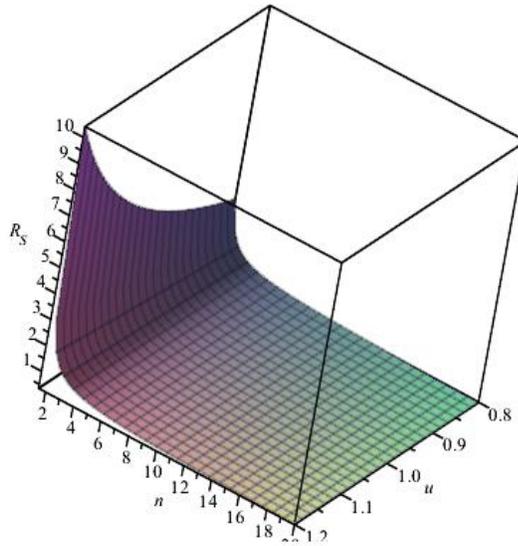


Figura 3.3: Escalar de curvatura  $R_S$  como función de la energía  $u$  y el número de partículas  $n$ , cuando  $c_v = 3/2$ .

ig\_dens\_3D

### 3.7. Referencias

Este capítulo es un recuento de todo lo que se ha investigado acerca de la GTD y cómo la entendemos. Está basado en los artículos [4], [6], [7]. Además, para explicar las transformaciones de Legendre se estudiaron [1] y [8].

# 4

## Tercera Ley y topología en GTD

En este capítulo se encontrarán las propiedades topológicas como consecuencia de la tercera ley de la termodinámica para un gas ideal y para una mezcla no interactuante de un número finito de gases ideales clásicos.

### 4.1. Tercera Ley de la Termodinámica

La tercera ley de la termodinámica o postulado de Nernst establece que “*es imposible alcanzar la entropía mínima mediante un número finito de procesos cuasiestáticos*”.

Esta ley proporciona un punto de referencia absoluto para la determinación de la entropía.

### 4.2. Topología del gas ideal en GTD

En el capítulo 3 se analizó el gas ideal. Se obtuvo que la métrica natural para este sistema es

$$g_s^h = -\frac{3}{2} \frac{du^2}{u^2} - \frac{dv^2}{v^2}, \quad (4.1) \quad \text{gnat\_ig}$$

y la curvatura del espacio de estados de equilibrio es cero.

### 4.2.1. Geodésicas en el espacio de estados de equilibrio del gas ideal

Como la curvatura de la métrica (4.1) es cero, entonces existen coordenadas donde la métrica toma una forma simple, a saber,

$$g_S = -d\xi^2 - d\eta^2 \quad \text{donde} \quad \xi = \ln u \sqrt{v^{3/2}} + \xi_0, \quad \eta = \ln v + \eta_0, \quad (4.2)$$

donde  $\xi_0$  y  $\eta_0$  son constantes tales que  $\xi$  y  $\eta$  son positivos o igual a cero. De esta manera, el espacio de estados de equilibrio se puede ver como el cuadrante positivo de  $\mathbb{R}^2$ . Además, cualquier sistema termodinámico tiene una energía y un volumen máximo, por lo que existirán valores máximos para estas nuevas variables  $\xi$  y  $\eta$ .

Esta forma de presentar la métrica es conveniente para el estudio de las geodésicas, las cuales representan curvas con longitud extremal. En el capítulo dos se dio a conocer las ecuaciones de las geodésicas (3.36), las cuales son

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0. \quad (4.3)$$

Para la métrica (4.2), todos los componentes de la conexión son cero, pues los componentes de la métrica son constantes y al derivarlos, se obtiene como resultado cero. Por lo que, las ecuaciones geodésicas son

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} &= 0 \\ \frac{d^2 \eta}{d\tau^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Resolviendo las ecuaciones diferenciales tenemos que las soluciones son

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_2 \tau + \xi_1 \\ \eta &= \eta_2 \tau + \eta_1, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde  $\xi_2, \xi_1, \eta_2$  y  $\eta_1$  son constantes. Entonces, las geodésicas se pueden representar por las rectas

$$\xi = c_2\eta + c_1. \quad (4.6)$$

Es posible elegir el parámetro afín  $\tau$  de manera que se incremente la entropía del proceso cuasiestático, por lo que se puede hablar de una “flecha de tiempo”.

La ecuación (4.6) implica que para cualquier estado inicial, siempre existirá una recta que conecte ese estado con cualquier otro en el plano  $\xi\eta$ . No obstante, no todas las soluciones a las ecuaciones geodésicas son procesos físicos, ya que podrían existir líneas que conecten estados de equilibrio que no son compatibles con las leyes de la Termodinámica.

Por ejemplo, la segunda ley de la Termodinámica establece que para cualquier proceso, el cambio en la entropía debe aumentar o anularse. De acuerdo con la ecuación (C.6) la cual es

$$\Delta S \geq 0, \quad (4.7)$$

y de la ecuación (4.12) se tiene que

$$\Delta s = \Delta\xi + \Delta\eta \geq 0. \quad (4.8)$$

Al igualar la ecuación (4.8) se obtendrán procesos adiabáticos, entonces

$$\Delta s = \xi_f - \xi_i + \eta_f - \eta_i = 0. \quad (4.9)$$

Al despejar  $\xi_f$  y  $\eta_f$  y dividir entre lo que queda del otro lado de la igualdad se obtiene

$$\frac{\xi_f}{\xi_i + \eta_i} + \frac{\eta_f}{\xi_i + \eta_i} = 1. \quad (4.10)$$

La ecuación (4.10) es una recta cuya pendiente es

$$\tan \alpha = \frac{-(\xi_i + \eta_i)}{\xi_i + \eta_i} = -1. \quad (4.11)$$

Esta recta divide al espacio de estados de equilibrio en dos regiones. La primera llamada *región de conectividad*, donde las geodésicas son procesos cuasiestáticos

que cumplen las leyes de la termodinámica, por lo que son mejor conocidas como geodésicas termodinámicas. La segunda región se conoce como *región de no conectividad* y se caracteriza porque las geodésicas en esta región no tienen significado físico, ya que violan la segunda ley de la Termodinámica. La figura 4.1 muestra el espacio de estados de equilibrio con las regiones de conectividad y no conectividad determinadas por la segunda ley de la Termodinámica.

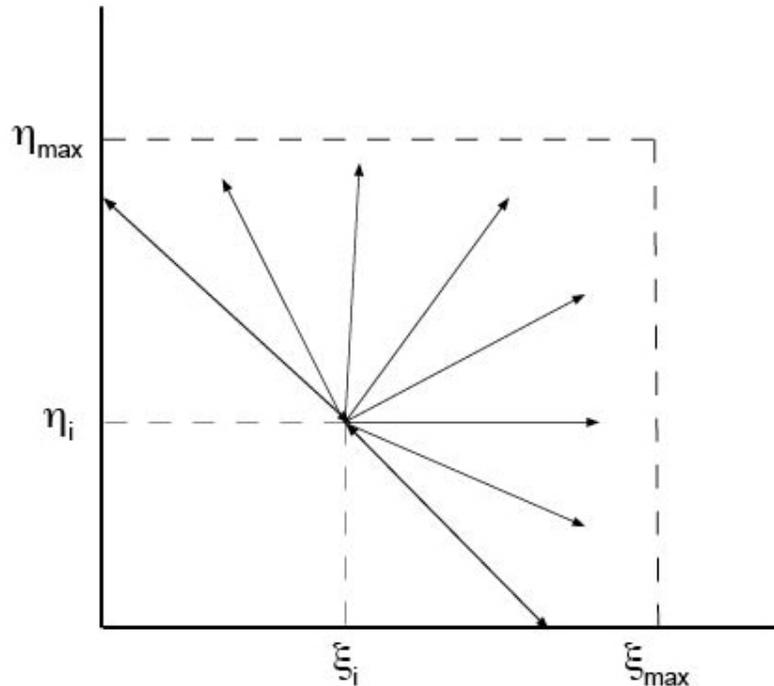


Figura 4.1: Segunda ley de la Termodinámica en el espacio de estados de equilibrio del gas ideal.

Por otro lado, la entropía mínima no se puede alcanzar por ningún proceso cuasiestático (como lo establece la tercera ley de la Termodinámica). Entonces se tiene que eliminar un punto (el punto de mínima entropía) del espacio de estados de equilibrio.

En este sistema coordinado, la ecuación (3.38) se ve como

$$s = s_0 + \xi + \eta - \xi_0 - \eta_0. \quad (4.12)$$

De la ecuación (4.12) se puede inferir que la entropía mínima se obtiene cuando  $\xi = \xi_0$  y  $\eta = \eta_0$ . Por lo que el punto de mínima entropía es  $(\xi_0, \eta_0)$ . En la figura 4.2 se aprecia el punto de mínima entropía que se elimina del espacio de estados de equilibrio. Como se observa en la figura, este espacio es el cuadrante positivo de  $\mathbb{R}^2$  pues  $\xi \geq 0$  y  $\eta \geq 0$ .

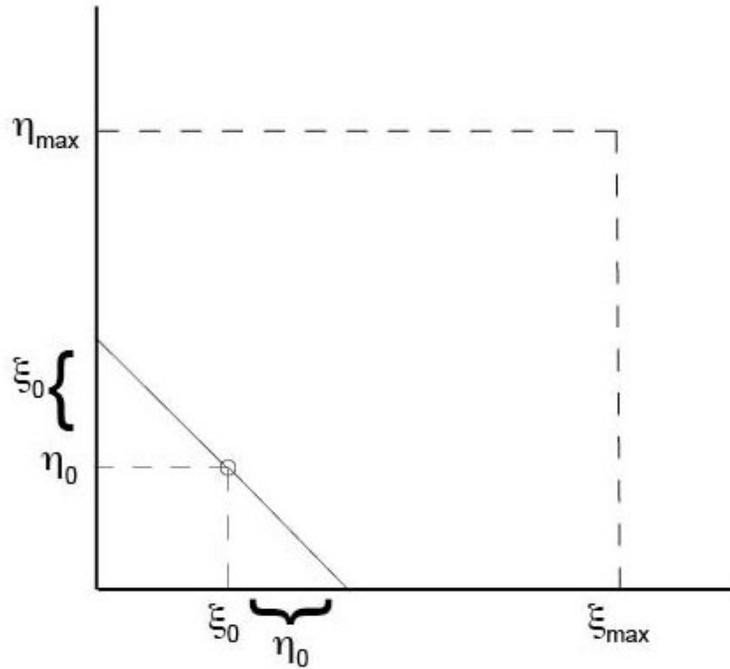


Figura 4.2: Tercera ley de la Termodinámica en el espacio de estados de equilibrio del gas ideal.

La recta que se observa en la figura 4.2, determina los puntos iniciales admisibles para cualquier proceso cuasiestático. Por debajo de esta recta con pendiente  $-1$  y que tocaría el punto de mínima entropía (si éste se encontrara en el espacio), ningún proceso cuasiestático puede iniciar. Esta recta se obtiene porque los puntos iniciales admisibles son  $s(\xi, \eta) > s_0$ . Entonces, para el punto  $s(0, \eta_0 + \varepsilon)$ , la ecuación (4.12) nos da

$$s = s_0 + (\eta_0 + \varepsilon) - \xi_0 - \eta_0 > s_0, \quad (4.13)$$

lo que implica que  $\varepsilon > \xi_0$ . Este resultado es análogo al punto  $s(\xi_0 + \varepsilon, 0)$  dando como resultado una recta con pendiente  $-1$ .

La figura [2y3a\\_pic](#) 4.3 muestra todas las regiones para un gas ideal determinadas por la segunda y tercera ley de la Termodinámica, con  $s_0(\xi_0, \eta_0)$  y un punto inicial  $(\xi_i, \eta_i)$ .

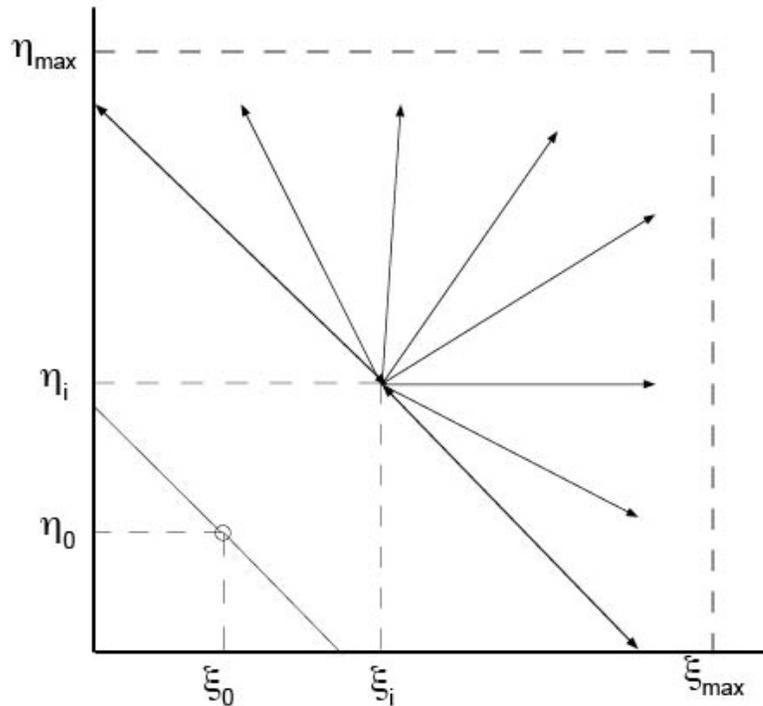


Figura 4.3: El espacio de estados de equilibrio del gas ideal con todas sus regiones definidas por las rectas de no conectividad y de no admisibilidad, definidas por la segunda y tercera ley de la Termodinámica, respectivamente.

[2y3a\\_pic](#)

#### 4.2.2. Defectos topológicos en el espacio de estados de equilibrio del gas ideal

El hecho de quitar un punto en el espacio de estados de equilibrio hace que la topología de esta variedad cambie. Como vimos en la sección anterior, el espacio de estados de equilibrio es el cuadrante positivo de  $\mathbb{R}^2$  (el cual es cerrado y acotado por

los valores  $\xi_{max}$  y  $\eta_{max}$ ) menos un punto  $s_0$ .

El teorema de Heine-Borel dice que si un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  es cerrado y acotado entonces también es compacto. Entonces el espacio de estados de equilibrio es una variedad compacta, por lo que se pueden utilizar todas las ideas del primer capítulo.

Además, como el espacio de estados de equilibrio es un subconjunto compacto de un espacio topológico ( $\mathbb{R}^2$ ), entonces con la topología inducida (la cual es la misma) es en sí un espacio topológico compacto. Por lo que, al tener la misma topología que  $\mathbb{R}^2$ , se puede analizar al espacio de estados de equilibrio como tal.

En el capítulo dos se introdujo el concepto de retracto por deformación y se dio de ejemplo la  $(n - 1)$ -esfera como retracto por deformación del disco unitario  $D^n - \{0\}$ . En particular, para  $n = 2$ , el retracto por deformación del disco unitario menos el origen es el círculo unitario  $S^1$ .

Se puede demostrar que para cualquier punto  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ , existe un círculo  $\mathcal{C}$  en  $\mathbb{R}^2$  que es el retracto por deformación de  $\mathbb{R}^2 - \{x_0\}$ . Además, el círculo  $\mathcal{C}$  tiene el mismo tipo de homotopía que el círculo unitario  $S^1$ .

Entonces se puede inferir que el retracto por deformación del espacio de estados de equilibrio menos el punto de mínima entropía  $\mathcal{E} - \{s_0\}$ , es un círculo  $\mathcal{C}$ . Al ser homeomorfo al círculo unitario  $S^1$  entonces su grupo fundamental es

$$\pi_1(\mathcal{E}) = \pi_1(\mathcal{C}) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}. \quad (4.14) \quad \text{fund\_gp\_E}$$

Así mismo para los grupos de homología del espacio de estados de equilibrio tenemos que

$$\begin{aligned} H_0(\mathcal{E}) &= H_0(\mathcal{C}) = H_0(S^1) = \mathbb{Z}, \\ H_1(\mathcal{E}) &= H_1(\mathcal{C}) = H_1(S^1) = \mathbb{Z}, \\ H_n(\mathcal{E}) &= H_n(\mathcal{C}) = H_n(S^1) = \{0\}, \end{aligned} \quad (4.15) \quad \text{homology\_gp}$$

para  $n \geq 2$ .

Como  $\pi_1(\mathcal{E})$  no es trivial, significa que existe un defecto topológico de punto en el espacio de estados de equilibrio, pues de la ecuación [2.136](#) in\_homotopy\_gp\_defect

$$n = d - m - 1, \quad (4.16)$$

donde  $n$  es el orden del grupo de homotopía,  $d$  es la dimensión del medio y  $m$  es la dimensión del defecto topológico. En nuestro caso,  $n = 1$  y  $d = 2$  pues la dimensión del espacio de estados de equilibrio es 2, lo que significa que  $m = 0$  y el espacio tiene un defecto de punto.

Por otro lado, recordemos que el  $p$ -ésimo número de Betti de un espacio es el rango del  $p$ -ésimo grupo de homología. Entonces,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 1$  y  $b_n = 0$  para  $n \geq 2$ , por lo que, el espacio de estados de equilibrio tiene una componente conectada y un agujero de dimensión 2.

Por lo que, la tercera ley de la Termodinámica define la topología del espacio de estados de equilibrio del gas ideal.

### 4.3. Mezcla de un número finito de gases ideales

Ya logramos saber qué hace la tercera ley de la termodinámica en un sistema particular como lo es un gas ideal. Esta ley cambia las propiedades topológicas del espacio de estados de equilibrio. Ahora consideremos otro sistema termodinámico. ¿Cómo afectaría la tercera ley de la termodinámica a la topología del espacio de estados de equilibrio de dicho sistema?

Consideremos una mezcla no interactuante de un número finito de gases ideales. Para un sistema compuesto por dos o más subsistemas se tiene el siguiente postulado [Callen](#) [2],

**Postulado 1.** *La entropía de un sistema compuesto es aditiva sobre los subsistemas.*

La entropía es una función continua, diferenciable y monótonamente creciente de la energía.

Por lo que, la ecuación fundamental para este sistema es:

$$S = S^{(1)} + S^{(2)} + \dots + S^{(n)}. \quad (4.17) \quad \text{ecfund\_ngi}$$

La entropía de cada subsistema es una función de las variables extensivas que conforman ese subsistema, es decir,

$$S^{(\alpha)} = S^{(\alpha)}(U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}, N^{(\alpha)}) \quad \text{con } \alpha = 1, \dots, n. \quad (4.18)$$

#### 4.3.1. El espacio de estados de equilibrio para $n$ gases ideales y sus defectos topológicos

En el artículo presentado por <sup>Vazquez</sup> [6] se obtiene un resultado muy útil para el análisis del espacio de estados de equilibrio de una familia de sistemas termodinámicos no interactuante, en particular se puede utilizar para una mezcla no interactuante de gases ideales.

El resultado consiste en considerar un sistema con  $n$  grados de libertad, el cual tiene una ecuación fundamental separable, es decir, de la forma

$$S(E^1, \dots, E^n) = S_1(E^1) + \dots + S_n(E^n), \quad (4.19) \quad \text{separable\_e}$$

donde  $S_1, \dots, S_n$  son funciones suaves. De la ecuación <sup>g natural</sup> (3.35), se obtiene una métrica diagonal

$$g = g_{11}(E^1)(dE^1)^2 + \dots + g_{nn}(E^n)(dE^n)^2. \quad (4.20) \quad \text{diagonal\_me}$$

La curvatura de esta métrica es cero, lo cual se puede ver a simple vista si hacemos un cambio de coordenadas  $g_{aa}(E^a)dE^a = dX^a$ . La métrica se convierte en

$$g = \delta_{ab}dX^a dX^b. \quad (4.21) \quad \text{flat\_form\_m}$$

Notemos que este procedimiento lo hicimos en la sección anterior para un gas

ideal con dos grados de libertad. Para una mezcla no interactuante de  $n$  gases ideales, la ecuación (4.17) y el resultado anterior nos dice que el espacio de estados de equilibrio es plano.

Si cada gas ideal tiene tres grados de libertad, entonces el sistema completo tiene  $3n$  grados de libertad, por lo que, el espacio de estados de equilibrio es homeomorfo a  $\mathbb{R}^{3n}$ . Por ejemplo, para dos gases ideales, la variedad  $\mathcal{E}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^6$ .

Por otro lado, en el artículo [23] <sup>Diego</sup> tiene como resultado que: “para una reacción química arbitraria con un número finito de elementos en un sistema cerrado, su correspondiente variedad de estados de equilibrio es de dimensión 2.” Esto se demuestra de la siguiente manera.

Consideremos una reacción química arbitraria



donde  $a_1, a_2, \dots$  son constantes y  $A_1, A_2, \dots$  compuestos. De manera más general, una reacción química se escribe como

$$\sum_{j=1}^{n+\dots} \nu_j A_j \rightleftharpoons 0, \quad (4.23)$$

donde  $\nu_1 = a_1, \nu_2 = a_2, \dots, \nu_{n+1} = -a_{n+1}, \dots$ . Los  $\nu_j$  son conocidos como *números estequiométricos*, los cuales calculan las relaciones cuantitativas entre los reactivos y los productos en una reacción química.

Cuando la reacción química está en equilibrio químico; es decir, cuando la entropía es máxima, entonces la ecuación de la reacción química es

$$\sum_{j=1}^{n+\dots} \nu_j A_j = 0, \quad (4.24)$$

Por ejemplo, para un sistema cerrado compuesto por dos subsistemas separados por una pared con un estado inicial  $S_1 = S_1(U_1, V_1, N_1)$  y  $S_2 = S_2(U_2, V_2, N_2)$ , y un estado final sin pared, la entropía total es  $S_T(S_1 + S_2)$ .

Recordemos que en un sistema cerrado la energía interna total  $U_T$ , el volumen total  $V_T$  y el número de moles total  $N_T$  son constantes. Además, el equilibrio químico se alcanza cuando la entropía es máxima. Es decir,

$$dS = 0 \quad \text{y} \quad d^2S < 0. \quad (4.25) \quad \text{chemical\_ec}$$

Entonces

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV - \frac{1}{T} \sum_j \mu_j dN_j = 0 \quad (4.26) \quad \text{dS}$$

Además,  $dU = 0 = dV$  ya que  $U$  y  $V$  son constantes. Entonces

$$dS = 0 \quad \iff \quad \frac{1}{T} \sum_j \mu_j dN_j = 0. \quad (4.27)$$

Notemos que

$$N_j(\xi) = N_j(0) + \nu_j \xi \quad (4.28)$$

con  $N_j(0) = cte$  y  $\xi \in [0, 1]$ . Entonces

$$N_j^f = N_j(1) = N_j(0) + \nu_j \quad (4.29)$$

y

$$dN_j = \nu_j d\xi. \quad (4.30)$$

Por lo que,

$$\frac{1}{T} \sum_j \mu_j dN_j = \frac{d\xi}{T} \sum_j \mu_j \nu_j = 0. \quad (4.31)$$

Por lo tanto

$$\sum_j \mu_j \nu_j = 0. \quad (4.32) \quad \text{eq\_quimico}$$

Este cambio de variables, en GTD se traduce en una reducción de la dimensión.

Si se tiene un sistema cerrado compuesto por  $n$  subsistemas, la ecuación fundamental es

$$S_T = \sum_{i=1}^n S_i(U_i, V_i, N_i). \quad (4.33) \quad \text{S\_T\_3n}$$

La dimensión del espacio fase es  $\dim(\mathcal{T}_{S_T}) = 6n + 1$  y la del espacio de estados de equilibrio es  $\dim(\mathcal{E}_{S_T}) = 3n$ . Si definimos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} N_i(\xi) &= N_i(0) + \nu_i \xi \\ V_i(\delta) &= V_i(0) + \kappa_i \delta \\ U_i(\eta) &= U_i(0) + \lambda_i \eta, \end{aligned} \quad (4.34) \quad \text{red\_dim}$$

entonces la entropía total se ve de la forma

$$S_T = \sum S_i(\eta, \delta, \xi). \quad (4.35) \quad \text{S\_T\_3}$$

Al reducir el número de grados de libertad de la ecuación (4.33) y así obtener la ecuación (4.35), la dimensión de este nuevo espacio es  $\dim(\mathcal{E}'_{S_T}) = 3$ . En otras palabras, se define un encaje  $\chi : \mathcal{E}'_{S_T} \rightarrow \mathcal{E}_{S_T}$  tal que se cumple (4.34). Además, la métrica  $g'$  de  $\mathcal{E}'_{S_T}$  es inducida por la métrica  $g$  de  $\mathcal{E}_{S_T}$ , es decir,

$$g' = \chi^*(g). \quad (4.36)$$

Para gases ideales se tiene que

$$U_i = cN_iRT = cRT(N_i(0) + \nu_i\xi), \quad (4.37)$$

entonces

$$U_T = \sum_i U_i = cRT \sum (N_i(0) + \nu_i\xi) \quad (4.38)$$

por lo que

$$U_i = \frac{U_T}{\sum(N_i(0) + \nu_i\xi)}(N_i(0) + \nu_i\xi) = \frac{U_T}{N_T}(N_i(0) + \nu_i\xi) = U_i(\xi). \quad (4.39)$$

Se observa que  $U_i = U_i(\xi)$ ,  $N_i = N_i(\xi)$  y  $V_i = V_i(\delta)$ , por lo que la entropía total se convierte en

$$S_T = S_T(U_i, V_i, N_i) = S_T(\xi, \delta). \quad (4.40)$$

ST\_eqspace

Al reducir el número de grados de libertad, la dimensión de la variedad de estados de equilibrio  $\mathcal{E}'_{S_T}$  es 2, por lo que ahora podemos trabajar en un espacio de dos dimensiones.

Para dos gases ideales se tenía que el espacio de estados de equilibrio era de dimensión 6, pero el resultado anterior nos dice que  $\mathcal{E}'$  es en realidad de dos dimensiones y homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , por ser una variedad con curvatura nula. Entonces el resultado es el mismo que para un gas ideal.

Análogamente para  $n$  gases ideales, se puede reducir la dimensión de  $3n$  a 2 y el espacio de estados de equilibrio es homeomorfo a  $\mathbb{R}^2$ , por lo que, se tiene el mismo resultado que para un gas ideal.

El hecho de reducir la dimensión del espacio de estados de equilibrio de  $3n$  a 2 y que esto sea posible en todos los sistemas termodinámicos o reacciones químicas hace que la tercera ley sí defina la topología del espacio, por lo que, este análisis no sólo es válido para un gas ideal o una mezcla finita de gases ideales.

## 4.4. Referencias

En este capítulo, lo concerniente a la Termodinámica clásica se obtuvo a partir de [Callen](#) [2]. Para explicar el gas ideal nos basamos en los resultados del artículo [Quevedo](#) [7].

Por otro lado, para la sección sobre una mezcla finita de gases ideales nos basamos en [Vazquez](#) [6] y [Bzago](#) [23].

# 5

## Conclusiones y futura investigación

### 5.1. Conclusiones de esta tesis

Esta tesis se centró en los defectos topológicos que se presentan al introducir la tercera ley de la Termodinámica al formalismo de la GTD.

Primero se estudiaron las herramientas matemáticas para clasificar estos defectos, es decir, la topología algebraica. En particular, se estudiaron los grupos de homotopía, homología y cohomología.

Además, se explicó el formalismo de la GTD, la cual relaciona la geometría y la termodinámica y como ejemplo se analizó el gas ideal en la GTD. De este análisis se encontró un resultado interesante; al hacer el análisis en densidades se encontró que la curvatura diverge en un cierto número de partículas y tiende a cero cuando el número de partículas tiende a infinito. Lo anterior nos habla de un límite termodinámico.

Al observar la topología del espacio de estados de equilibrio del gas ideal, se encontró que el grupo fundamental de esta variedad es

$$\pi_1(\mathcal{E}) = \mathbb{Z}, \tag{5.1}$$

y los grupos de homología son

$$\begin{aligned}
 H_0(\mathcal{E}) &= \mathbb{Z} \\
 H_1(\mathcal{E}) &= \mathbb{Z} \\
 H_p(\mathcal{E}) &= \mathbb{Z}; \quad p > 1.
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Esto significa que sus números de Betti son  $b_0 = 1$  y  $b_1 = 1$ , es decir, tiene una componente conectada y un hoyo de dimensión dos. Entonces la tercera ley de la termodinámica define la topología del espacio de estados de equilibrio del gas ideal.

También se vió que para una mezcla finita no interactuante de gases ideales, el espacio de estados de equilibrio sufre una reducción en la dimensión de manera que se obtiene un espacio de estados de equilibrio de dimensión 2. Por lo que, los defectos topológicos de este espacio son los mismos que para el gas ideal; es decir, es un defecto de punto, el punto de mínima entropía.

El hecho de reducir la dimensión del espacio de estados de equilibrio hace que, al quitar un punto de la variedad, el grupo fundamental no sea trivial. Lo anterior sucede porque al quitar un punto de una variedad con dimensión mayor a 2, la variedad sigue siendo simplemente conexa y por lo tanto su grupo fundamental es trivial.

En conclusión, la topología del espacio de estados de equilibrio da información termodinámica del sistema estudiado. Todos los espacios de equilibrio tienen al menos un agujero definido por el punto de mínima entropía.

La relación que se encontró entre la tercera ley de la Termodinámica y la topología del espacio de estados de equilibrio, es que la tercera ley hace que la topología del espacio no sea trivial.

Existen sistemas termodinámicos que presentan transiciones de fase. En GTD, las transiciones de fase son singularidades en el espacio de estados de equilibrio. Para cualquier sistema termodinámico podemos deducir si éste cuenta con transiciones de fase a partir del estudio de su topología y teniendo en cuenta la tercera ley.

## 5.2. Futura investigación

Es importante notar que en este trabajo el punto de mínima entropía se quitó “a mano” con ayuda de la segunda ley, pues ésta última no permite procesos donde la entropía disminuya en un sistema aislado. Un paso a seguir sería estudiar este mismo problema sólo con herramientas geométricas, como la incompletitud geodésica, de manera que el punto de mínima entropía sea encontrado y removido del espacio a partir de la matemática.

El saber que la topología del espacio de estados de equilibrio está definida por la Termodinámica, nos hace pensar en otros fenómenos físicos que podrían cambiar la topología de dicho espacio. Por ejemplo, las *transiciones de fase*.

Las transiciones de fase en el formalismo de la GTD son singularidades de curvatura del espacio de estados de equilibrio. Estas singularidades forman defectos topológicos en dicha variedad, las cuales pueden ser de punto o línea.

Con las herramientas matemáticas estudiadas en esta tesis, sería posible clasificar sistemas termodinámicos a partir de los defectos topológicos del espacio de estados de equilibrio. Es decir, sólo con la topología del espacio podría ser posible saber si un sistema tiene una transición de fase.

Por otro lado, podría ser posible comenzar el estudio de termodinámica fuera del equilibrio ya que el teorema de Kolmogórov-Arnold-Moser (KAM) nos dice que a pequeñas perturbaciones, la topología del espacio no sufre alteraciones.

## 5.3. Referencias

Para una mayor información sobre las transiciones de fase en GTD es posible consultar el artículo <sup>Bravetti\_bis</sup>[5]. Para el teorema de KAM sugiero ver el libro <sup>Jorge</sup>[13].

# A

## Introducción a Teoría de Grupos.

La teoría de grupos, como su nombre lo indica, estudia las estructuras algebraicas conocidas como grupos. Un grupo tiene menos estructura que un campo o un espacio vectorial pero son parte de la estructura de éstos, es decir, un campo y un espacio vectorial son a su vez grupos.

En Física, la teoría de grupos se aplica en varias situaciones. Por ejemplo, en Relatividad, las transformaciones de Lorentz forman un grupo, así como las rotaciones espaciales también forman un grupo.

Este apéndice pretende dar una breve introducción a la teoría de grupos, pues para comprender las nociones matemáticas expuestas en este trabajo, es necesario saber y comprender los conceptos expuestos aquí.

gpo **Definición 23.** *Un grupo  $\langle G, * \rangle$  es un conjunto  $G$ , cerrado bajo una operación binaria  $*$ , tal que los siguientes axiomas se cumplen:*

1.  $\forall a, b, c \in G$  se tiene,  $(a * b) * c = a * (b * c)$  asociativo
2.  $\exists e \in G$  tal que  $\forall x \in G$ ,  $e * x = x * e = x$  neutro
3.  $\forall a \in G$ ,  $\exists a' \in G$  tal que  $a * a' = a' * a = e$

Además, se conoce como *grupo Abelian* a los grupos cuya operación cumple con la propiedad conmutativa. En este apéndice, se considerarán únicamente grupos

Abelianos.

Es común encontrar grupos contenidos en grupos más grandes, los cuales reciben el nombre de *subgrupos*. Para que un subconjunto de un grupo sea un subgrupo tiene que cumplir dos cosas; la primera es que tenga estructura de grupo, es decir, que cumpla con la definición de grupo y la segunda es que la operación en este subconjunto sea la operación inducida del grupo.

ej\_subgp **Ejemplo 10.** Sea  $x$  un elemento de un grupo  $G$  y  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $nx$  denota a

$$\begin{aligned} & \underbrace{x + \cdots + x}_n, \quad \text{si } n > 0 \\ & \underbrace{(-x) + \cdots + (-x)}_{|n|}, \quad \text{si } n < 0. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Si  $n = 0$  entonces  $0x = 0$ . Si tomamos  $r$  elementos  $x_1, \dots, x_r \in G$ , entonces los elementos de  $G$  de la forma

$$n_1x_1 + \cdots + n_rx_r, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \quad 1 \leq i \leq r, \tag{A.2}$$

forman un subgrupo de  $G$ , al que denotaremos como  $H$ . Notemos que la operación de  $H$  es la operación inducida del grupo  $G$ .

Sea  $H$  un subgrupo de  $G$ , se dice que  $a, b \in G$  son *equivalentes* si

$$a - b \in H, \tag{A.3}$$

y se escribe  $a \sim b$ , lo cual es una relación de equivalencia. Sabemos que las relaciones de equivalencia crean clases de equivalencia que se denotan por corchetes, de manera que,  $[x]$  denota la clase de equivalencia donde pertenece  $x$ .

Consideremos dos relaciones de equivalencia  $\sim_L, \sim_R$  en  $G$  las cuales parten al grupo en dos. La relación de equivalencia  $\sim_L$  se define como

$$a \sim_L b \iff a + h = b, \quad a, b \in G \text{ y } h \in H, \tag{A.4} \span style="float: right;">L_rel$$

mientras que la relación  $\sim_R$  se define,

$$a \sim_R b \iff h + a = b, \quad a, b \in G \text{ y } h \in H. \quad (\text{A.5}) \quad \text{R\_rel}$$

coset **Definición 24.** A la clase de equivalencia creada a partir de la relación de equivalencia L\\_rel A.4 se le llama *clase lateral izquierda (coset izquierdo)* de  $H$  y se define como

$$a + H = \{a + h \mid h \in H\}. \quad (\text{A.6}) \quad \text{L\_coset}$$

Análogamente, a la clase de equivalencia creada por R\\_rel A.5 se les llama *clase lateral derecha (coset derecho)* de  $H$ , la cual está definida por

$$H + a = \{h + a \mid h \in H\}. \quad (\text{A.7}) \quad \text{R\_coset}$$

Cabe destacar que si  $G$  es grupo Abeliano, entonces la partición de  $G$  en clase lateral izquierda y derecha de  $H$  es la misma.

normal\_sbgp **Definición 25.** Se dice que un subgrupo  $H$  de un grupo  $G$  es *normal* si sus clases laterales izquierda y derecha coinciden, es decir

$$g + H = H + g, \quad \forall g \in G. \quad (\text{A.8}) \quad \text{normal\_sbgp}$$

Notemos que todos los subgrupos de grupos Abelianos son normales.

quotient\_gp **Definición 26.** Sea  $H$  un subgrupo normal. Las clases laterales de  $H$  forman un grupo  $G/H$  con la operación binaria

$$(a + H) + (b + H) = (a + b) + H, \quad (\text{A.9}) \quad \text{q\_gp\_op}$$

llamado el grupo cociente.

Intuitivamente, el grupo cociente, colapsa al subgrupo  $H$  al elemento neutro. Así, si  $H = G$  entonces  $G/G$  tiene sólo un elemento  $\{0\}$  y si  $H = \{0\}$  entonces  $G/H$  es simplemente  $G$ .

Regresando al ejemplo ei\_sbgp 10,  $H$  es el subgrupo de  $G$  generado por los generadores  $x_1, \dots, x_r$ . Si  $G$  es generado por un número finito de elementos  $x_1, \dots, x_r$ , entonces

$G$  se dice que es *finitamente generado*. Además, si  $n_1x_1 + \dots + n_rx_r = 0$  y  $n_1 = \dots = n_r = 0$ , entonces  $x_1, \dots, x_r$  son *linealmente independientes*. Con lo anterior tenemos que,

**Definición 27.** *Si  $G$  es un grupo finitamente generado por  $r$  elementos linealmente independientes, entonces  $G$  es un grupo Abeliano libre de rango  $r$ .*

La teoría de grupos busca obtener información de los grupos estudiados. Para lograrlo, uno encuentra mapeos entre un grupo conocido y el que se está estudiando. Estos mapeos son los famosos *homomorfismos de grupos*.

**Definición 28.** *Sean  $G_1$  y  $G_2$  grupos Abelianos. El mapeo  $f : G_1 \rightarrow G_2$  es un homomorfismo si*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in G_1. \quad (\text{A.10})$$

Si además  $f$  es biyectiva, entonces se le llama *isomorfismo* y se dice que  $G_1$  es isomorfo a  $G_2$  o simplemente  $G_1 \simeq G_2$ .

Sea  $f : G_1 \rightarrow G_2$  un homomorfismo, entonces definimos el *kernel* y la *imagen* de  $f$  como

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{x \mid x \in G_1, f(x) = 0\} \\ \text{Im } f &= \{x \mid x \in f(G_1) \subset G_2\}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Se puede demostrar que el kernel es un subgrupo de  $G_1$  y la imagen es un subgrupo de  $G_2$ . El hecho de que estos dos conjuntos formen subgrupos y estén relacionados por un homomorfismo, nos da la oportunidad de obtener información sobre ellos. El siguiente teorema nos dice cómo se relacionan.

hmorphism\_thm

**Teorema 19. (Teorema fundamental del homomorfismo)** *Sea  $f : G_1 \rightarrow G_2$  un homomorfismo, entonces*

$$G_1/\text{Ker } f \simeq \text{Im } f. \quad (\text{A.12})$$

Un último concepto que es necesario introducir es el de los grupos cíclicos. Si  $G$  es generado por un elemento  $x$ , es decir,  $G = \{0, \pm x, \pm 2x, \dots\}$  entonces es un *grupo*

cíclico. Si  $nx \neq 0$  para cualquier  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , entonces es un *grupo cíclico infinito*, mientras que, si  $nx = 0$  para algún  $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$  entonces es un *grupo cíclico finito*.

Sea  $G$  un grupo cíclico generado por un elemento  $x$  y sea  $f : \mathbb{Z} \rightarrow G$  un homomorfismo definido por  $f(n) = nx$ , donde  $f$  no necesariamente es uno a uno. Del teorema [19](#) tenemos que

$$G = \text{Im } f \simeq \mathbb{Z}/\text{Ker } f. \tag{A.13} \quad \text{cyclic}$$

Sea  $N$  el entero positivo más pequeño tal que  $Nx = 0$ , entonces

$$\text{Ker } f = \{0, \pm N, \pm 2N, \dots\} = N\mathbb{Z}, \tag{A.14}$$

entonces de la ecuación [\(A.13\)](#) tenemos que

$$G \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \tag{A.15}$$

Se puede probar que  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_N$ , por lo que

$$G \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_N \tag{A.16} \quad \text{iso\_cy\_gp}$$

Podemos ver de la ecuación [\(A.16\)](#) que si  $G$  es un grupo cíclico infinito, entonces  $\text{Ker } f = \{0\}$  y  $G \simeq \mathbb{Z}$ . Por lo que, cualquier grupo cíclico infinito es isomorfo a  $\mathbb{Z}$  y cualquier grupo cíclico finito es isomorfo a algún  $\mathbb{Z}_N$ .

Con el próximo teorema terminamos esta introducción a la teoría de grupos. Este teorema nos dice cómo es que cualquier grupo Abeliano finitamente generado se puede escribir en términos de grupos cíclicos.

[F\\_thm\\_Ab\\_gps](#)

**Teorema 20.** (*Teorema fundamental de los grupos Abelianos finitamente generados*) Sea  $G$  un grupo Abeliano finitamente generado (no necesariamente libre) con  $m$  generadores, entonces  $G$  es isomorfo a la suma directa de grupos cíclicos

$$G \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_r \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{k_p}, \tag{A.17} \quad \text{F\_thm\_Ab\_gp}$$

donde  $m = r + p$ . El número  $r$  es el rango de  $G$

## A.1. Referencias

La importancia de la teoría de grupos en esta tesis, radica en que los conceptos y resultados expuestos aquí, se aplican a los grupos de homotopía, homología y cohomología.

Se utilizó como base el libro <sup>Nakahara</sup>[20], con el fin de saber cuáles son los conceptos principales que uno, como estudiante de física, debe saber de la teoría de grupos. Además, para profundizar en el tema y con el fin de explicar mejor los conceptos, se utilizó el libro <sup>Fraleigh</sup>[9].

# B

## Topología y Geometría Diferencial.

El formalismo matemático de la GTD es bastante amplio y abarca distintas ramas de la matemática como la topología diferencial, la geometría diferencial y la geometría Riemanniana. Este apéndice está escrito con el objetivo de presentar los conceptos básicos que conforman la GTD.

### B.1. La variedad diferenciable y sus componentes

El principal objeto matemático sobre el que está basado la GTD es una variedad diferenciable. Para definir este objeto primero hay que saber lo que es un espacio topológico.

top\_space

**Definición 29.** Sean  $X$  un conjunto y  $\tau \subset 2^X$  una colección de subconjuntos de  $X$ . Entonces  $(X, \tau)$  se llama espacio topológico si y sólo si

1. El vacío y todo el conjunto se encuentran en la colección de subconjuntos, es decir,  $\emptyset \in \tau$  y  $X \in \tau$
2. La intersección finita de elementos de  $\tau$  está en  $\tau$ , es decir,  $U_1, \dots, U_n \in \tau$ , entonces  $\bigcap^n U_i \in \tau$
3. La unión infinita de elementos en  $\tau$  está en  $\tau$ , es decir,  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \tau$ , entonces  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$  donde  $A$  es una colección de índices.

A la colección  $\tau$  se le llama *topología* en  $X$ , a  $U \in \tau$  se le llama *abierto* en  $X$ . Además, si  $x \in U \subset \tau$  entonces  $U$  se le conoce como *vecindad* de  $x$ . Si  $\tau = 2^M$  entonces  $\tau$  se llama *topología discreta* de  $M$ .

Si  $(X, \tau_1)$  y  $(Y, \tau_2)$  son dos espacios topológicos, y existe una función  $f$  de  $X$  a  $Y$ , entonces  $f$  es un *homeomorfismo* si es biyectiva, continua y su inversa es continua. Además,  $X$  y  $Y$  se les conoce como *espacios homeomorfos*.

variedad

**Definición 30.** Sea  $M$  un espacio topológico. Decimos que  $M$  es una *variedad topológica de dimensión  $n$*  si cumple con:

1.  $M$  es Hausdorff: Para todo par de puntos  $p, q \in M$  existen subconjuntos abiertos y disjuntos  $U, V \subset M$  tal que  $p \in U$  y  $q \in V$
2.  $M$  es segundo numerable: Existe una base numerable para su topología
3.  $M$  es localmente Euclídeo: Todo punto de  $M$  tiene una vecindad homeomorfa a un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$

La variedad topológica sirve para estudiar propiedades topológicas de la variedad como conexidad o compacidad. Sin embargo, en toda la teoría de las variedades topológicas no se menciona el Cálculo Diferencial.

Para poder hablar de derivadas de funciones de variable real, curvas en la variedad y mapeos entre variedades, se necesita introducir un nuevo tipo de variedad llamada *variedad diferenciable*. Las variedades diferenciables son variedades topológicas con una estructura extra.

smooth\_manifold

**Definición 31.** El par  $(M, \Phi)$  es una *variedad diferenciable de clase  $C^\infty$  y dimensión  $n$*  si y sólo si  $M$  es una variedad topológica y  $\Phi$  es una colección de funciones que cumple

1.  $\{Dom \varphi \mid \varphi \in \Phi\}$  es una cubierta abierta de  $M$
2. Para toda  $\varphi \in \Phi$ ,  $\varphi$  es un homeomorfismo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$

3. Para toda  $\varphi, \psi \in \Phi$  con  $\text{Dom } \varphi \cap \text{Dom } \psi \neq \emptyset$ ,  
 $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\text{Dom } \varphi \cap \text{Dom } \psi) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo.

A  $\Phi$  se le llama atlas y sus elementos son conocidos como cartas.

Recordemos que un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable con inversa también diferenciable.

Una de las herramientas más importantes de las variedades diferenciables es la idea de la aproximación lineal. Lo anterior suena familiar del Cálculo, donde una función real de una variable se puede aproximar por una línea tangente, así como una curva parametrizada en  $\mathbb{R}^n$  puede aproximarse por su vector tangente. Para poder definir las aproximaciones lineales en una variedad diferenciable es necesario conocer el concepto de *espacio tangente* a la variedad en un punto.

Se define una *curva* en  $M$  como un mapeo continuo  $\gamma : (a, b) \in \mathbb{R} \rightarrow M$ . Si  $\gamma$  es una curva suave y  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  un mapeo continuo, entonces el *vector tangente* a la curva  $\gamma$  en el punto  $p \in (a, b)$  se define como

$$\gamma'(p) = \left[ \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \right]_p. \tag{B.1}$$

En otras palabras,  $\gamma'(p)$  es la diferencial en  $\gamma(p)$  que se obtiene al derivar una función a lo largo de  $\gamma$ , es decir, la derivada direccional. Al conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$  en un punto  $p$  se le llama *espacio tangente a  $M$  en  $p$*  y se le denota por  $T_pM$ .

Se puede demostrar que si  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , entonces para cualquier  $p \in M$ , el espacio tangente  $T_pM$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Si  $(\varphi, (x^i))$  es una carta con coordenadas  $x^i$  que contiene a  $p$ , entonces los vectores coordenados  $(\frac{\partial}{\partial x^1} |_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} |_p)$  forman una base para  $T_pM$ .

La unión de todos los espacios tangentes a cada punto de la variedad  $M$  se le conoce como *haz tangente*, es decir

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM. \tag{B.2}$$

Al ser  $T_p M$  un espacio vectorial entonces existe su espacio dual. El *espacio dual*  $T_p^* M$  de  $T_p M$ , es el espacio de funciones lineales  $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ . A los elementos de  $T_p^* M$  se les llama *covectores* o *1-formas* y al espacio dual se le conoce como *espacio cotangente*. De igual manera, a la unión de todos los espacios cotangentes se le conoce como *haz cotangente*.

Sean  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función arbitraria y  $v_p \in T_p M$  un vector tangente arbitrario en el punto  $p \in M$ . Se define la *diferencial de  $f$* ,  $df : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$df(v_p) = v_p(f). \quad (\text{B.3}) \quad \text{diferencial}$$

Al vector tangente lo hemos escrito utilizando las coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  y definiendo los vectores coordenados  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ . La dualidad que existe entre los espacios tangente y cotangente nos permite definir una base dual para  $T_p^* M$  a partir de la base coordenada  $x^i$ . Esta base se escribe en forma de diferencial y cumple que

$$dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta^i_j. \quad (\text{B.4}) \quad \text{covector}$$

Al utilizar esta base para  $T_p^* M$  podemos escribir para cualquier función que va de la variedad a los reales como

$$df = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) (f) dx^i. \quad (\text{B.5}) \quad \text{dif\_base}$$

Lo anterior permite escribir los vectores y covectores asociados a los espacios  $T_p M$  y  $T_p^* M$  conociendo algún sistema de coordenadas. Ahora que sabemos lo que es una variedad diferenciable y los elementos que la conforman, podemos estudiar mapeos que relacionan a dos variedades distintas.

## B.2. Mapeos entre variedades

Si tenemos dos variedades diferenciables distintas  $M$  y  $N$ , se dicen que son *difeomorfos* si existe un difeomorfismo  $\phi : M \rightarrow N$  entre ellas. Dado un punto  $p \in M$ , se define la *diferencial* o *pushforward* de  $\phi$  al mapeo  $\phi_* : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$  como

$$(\phi_*(v))_{\phi(p)}(f) = v(f \circ \phi), \quad (\text{B.6}) \quad \text{pushforward}$$

donde  $v \in T_p M$  y  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ . Coloquialmente, se utiliza el término “pushforward” ya que este mapeo “empuja” los vectores tangentes en  $M$  “hacia” los vectores tangentes en  $N$ . El pushforward es un mapeo lineal ya que:

$$[\phi_*(v + w)](f) = (\phi_*(v))(f) + (\phi_*(w))(f) \quad (\text{B.7})$$

y

$$[\phi_*(\alpha v)](f) = \alpha(\phi_*(f)). \quad (\text{B.8})$$

Por otro lado, el mapeo dual de la diferencial  $\phi_*$  es aquel que actúa sobre covectores y se le conoce como *pullback*. El pullback es el mapeo  $\phi^* : T_{\phi(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$  definido como

$$\phi^*(\omega)(v) = \omega(\phi_*(v)), \quad (\text{B.9})$$

pullback

para  $\omega \in T_{\phi(p)}^* N$  y  $v \in T_p M$ . A diferencia de  $\phi_*$ , el “pullback” transporta covectores en el sentido inverso al que tiene el difeomorfismo  $\phi$ , es decir, el pullback “jala” las 1-formas “de vuelta” al espacio cotangente de la variedad  $M$ .

Con estos mapeos entre variedades se pueden realizar cálculos explícitos al seleccionar una carta coordenada en cada variedad. En general, los mapeos entre variedades se comportan de manera similar a los mapeos entre espacios Euclidianos.

### B.3. Inmersiones, encajes y subvariedades

El pushforward, visto en la sección anterior, es la mejor aproximación lineal de un mapeo  $\phi$  cerca de un punto dado  $p$ . Se puede conocer bastante del mapeo  $\phi$  estudiando las propiedades algebraicas de su pushforward en cada punto. Una de ellas y quizá la más importante es su *rango*, es decir, la dimensión de su imagen.

Los mapeos cuyos pushforwards dan buena información local son aquellos cuyos pushforwards tienen rango constante. Existen tres tipos especiales de estos mapeos: las inmersiones (mapeos cuyos pushforwards son inyectivos), las sumersiones (mapeos cuyos pushforwards son suprayectivos) y los encajes (inmersiones inyectivas que

también son homeomorfismos).

Para el estudio de estos conceptos hay que utilizar el teorema de la función inversa y sus corolarios: el teorema del rango y el de la función implícita. Estos tres enunciados muestran que bajo las hipótesis adecuadas del rango, un mapeo se puede comportar localmente como su pushforward.

inverse\_thm

**Teorema 21. Teorema de la función inversa** Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables y  $\phi : M \rightarrow N$  un mapeo entre ellas. Sea  $p \in M$  tal que  $\phi_* : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N$  es biyectivo. Entonces existen vecindades conexas  $U_0$  de  $p$  y  $V_0$  de  $\phi(p)$  tal que  $\phi|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$  es un difeomorfismo.

rank\_thm

**Teorema 22. Teorema del rango** Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables de dimensión  $m$  y  $n$ , respectivamente. Sea  $\phi : M \rightarrow N$  un mapeo suave de rango  $k$ . Para cada  $p \in M$  existen coordenadas  $(x^1, \dots, x^m)$  centradas en  $p$  y  $(y^1, \dots, y^n)$  centradas en  $\phi(p)$  tal que

$$\phi(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0). \quad (\text{B.10})$$

### B.3.1. Las inmersiones y las subvariedades inmersas

Sean  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables tal que  $\dim M \leq \dim N$  y  $\phi : M \rightarrow N$  un mapeo suave entre las variedades. Se dice que  $\phi$  es una *inmersión* si su diferencial

$$\phi_* : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} N \quad (\text{B.11})$$

immersion

es inyectiva en cada punto de  $M$ . Una forma equivalente de ver que es una inmersión es por el rango de  $\phi$ , si  $\text{rango}(\phi) = \dim(M)$ , entonces  $\phi$  es una inmersión.

Una *subvariedad inmersa* es la imagen de una inmersión  $\phi : M \rightarrow N$  que es además inyectiva. Es decir, la diferencial del mapeo y el mismo mapeo  $\phi$  deben ser inyectivos.

### B.3.2. Los encajes y las subvariedades encajadas

Un *encaje* es una inmersión,  $\phi : M \rightarrow N$ , el cual es un homeomorfismo entre  $M$  y  $\phi(M) \subset N$ .

La imagen del encaje,  $\phi(M) \subset N$ , se le conoce como *subvariedad encajada* y se denota con el par  $(\phi, M)$ . Si  $M$  es una subvariedad encajada, la diferencia  $\dim(N) - \dim(M)$  es la llamada *codimensión* de  $M$  en  $N$ . Una *hipersuperficie encajada* es una subvariedad encajada de codimensión 1.

### B.3.3. Las sumersiones

Un mapeo  $\phi : M \rightarrow N$  es una *sumersión* si  $\phi_*$  es un mapeo suprayectivo en cada punto  $p \in M$ , o lo que es lo mismo, si  $\text{rango}(\phi) = \dim(N)$ .

Con las definiciones anteriores se puede probar que si  $\phi$  es suprayectiva, entonces se trata de una sumersión; si  $\phi$  es inyectiva, entonces es una inmersión; y si es biyectiva entonces se trata de un difeomorfismo.

## B.4. Tensores

La teoría de variedades diferenciables nos permite utilizar conceptos de Álgebra Lineal aplicados a este tipo de objetos matemáticos. El Cálculo nos explica cómo aproximar objetos diferenciables a objetos lineales. Esto es posible hacerlo en el lenguaje de variedades diferenciables, generalizando el concepto de objeto lineal a objeto multilineal. Los objetos matemáticos multilineales se conocen como *tensores*.

### B.4.1. Álgebra Tensorial

Sean  $V_1, \dots, V_k$  y  $W$  espacios vectoriales. El mapeo  $F : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$  es *multilineal*, si éste es lineal como función de cada variable por separado, es decir,

$$F(v_1, \dots, \alpha v_i, \beta v_l, \dots, v_k) = \alpha F(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + \beta F(v_1, \dots, v_l, \dots, v_k). \quad (\text{B.12})$$

multilinear

El producto punto en  $\mathbb{R}^n$  y el producto cruz en  $\mathbb{R}^3$  son ejemplos de funciones bilineales, mientras que el determinante es una función multilinear de  $n$  vectores en  $\mathbb{R}^n$ .

Para hablar de funciones multilineales es necesario conocer el lenguaje de los tensores. Entonces hay que definir primero lo que es un tensor y los tipos de tensores que existen. Un tensor es una generalización de vectores y vectores duales.

Sean  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita,  $V^*$  su espacio dual y  $k, l \in \mathbb{N}$ . Se define un *tensor* de rango  $(k, l)$  como la función multilinear:

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{l \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (\text{B.13})$$

covariant\_t

El símbolo  $\times$  denota al producto Cartesiano. Por convención, un 0-tensor es un número real, un vector es un tensor de rango  $(1, 0)$  y un covector es un tensor  $(0, 1)$ .

El conjunto de todos los tensores  $(k, l)$  forman un espacio vectorial bajo las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalar. Para definir una base para este espacio, se define una operación entre tensores conocida como *producto tensorial*. Si  $T$  es un tensor de rango  $(k, l)$  y  $S$  otro tensor de rango  $(m, n)$ , se define el tensor  $T \otimes S$  de rango  $(k + m, l + n)$  como

$$T \otimes S : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k+m \text{ veces}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{l+n \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{B.14})$$

tal que

$$T \otimes S(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, \dots, \omega^{(k+m)}, v^{(1)}, \dots, v^{(l)}, \dots, v^{(l+n)}) = T(\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, v^{(1)}, \dots, v^{(l)})S(\omega^{(k+1)}, \dots, \omega^{(k+m)}, v^{(l+1)}, \dots, v^{(l+n)}). \quad (\text{B.15})$$

La notación de los parentésis es para hacer evidente que  $\omega^{(i)}$  y  $v^{(i)}$  son vectores y 1-formas diferentes y no componentes de ellos. Ahora sí podemos construir una base para el espacio de todos los tensores de rango  $(k, l)$  haciendo productos tensoriales de vectores base y 1-formas de manera que un tensor arbitrario  $T$  se puede escribir como

$$T = T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \hat{e}_{(\mu_1)} \otimes \dots \otimes \hat{e}_{(\mu_k)} \otimes \hat{\theta}^{(\nu_1)} \otimes \dots \otimes \hat{\theta}^{(\nu_l)}. \quad (\text{B.16})$$

## B.5. Formas diferenciales

Un tipo muy especial de tensores son las *formas diferenciales* o simplemente *formas*. Una  $k$ -forma es un tensor de rango  $(0, k)$  completamente antisimétrico. Así las 0-formas son escalares, las 1-formas son los covectores y las  $k$ -formas se pueden construir a partir de las 1-formas con ayuda del *producto exterior* o *producto cuña*.

El producto cuña entre dos 1-formas es un mapeo de la forma

$$\alpha \wedge \beta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{B.17}) \quad \text{wedge\_p}$$

donde  $T_p M$  es el espacio tangente al punto  $p$  de la variedad  $M$  y  $\alpha \wedge \beta$  es una 2-forma tal que

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \alpha_i \beta_j \theta^{(i)} \wedge \theta^{(j)} \\ &= \alpha_i \beta_j (\theta^{(i)} \otimes \theta^{(j)} - \theta^{(j)} \otimes \theta^{(i)}), \end{aligned} \quad (\text{B.18}) \quad \text{wedge\_prod}$$

y tiene las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= -\beta \wedge \alpha \\ \alpha \wedge \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Se puede definir un álgebra con el producto cuña llamada *Álgebra exterior* o *Álgebra de Grassmann*  $\Lambda(M)$ , tal que todo en  $\Lambda(M)$  son combinaciones lineales de productos cuña. Entonces el álgebra de Grassmann se define como

$$\Lambda(M) = \bigoplus \Lambda^k(M), \quad (\text{B.20}) \quad \text{grassmann}$$

donde  $\Lambda^k(M)$  es el conjunto de las k-formas de  $M$ .

## B.6. Derivadas

En las variedades diferenciables existen distintos tipos de derivadas que se presentarán en esta sección.

### B.6.1. Derivada exterior

La *derivada exterior* es la extensión de la diferencial de una 0-forma a k-formas. La derivada exterior es el conjunto de mapeos

$$d : \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M), \quad (\text{B.21}) \quad \text{exterior\_de}$$

tal que se cumplen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} d(\omega + \mu) &= d\omega + d\mu \\ d(c\omega) &= cd\omega \\ d(\omega \wedge \mu) &= d\omega \wedge \mu + (-1)^k \omega \wedge d\mu \quad \forall \omega \in \Lambda^k(M), \mu \in \Lambda(M) \\ d(d\omega) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Es importante notar que en  $\mathbb{R}^3$  la derivada exterior para 0-formas es el gradiente, para 1-formas es el rotacional y para 2-formas es la divergencia.

### B.6.2. Derivada de Lie

La *derivada de Lie* es una construcción matemática que relaciona campos vectoriales sobre una variedad. La derivada de Lie es un método para computar la derivada direccional. Al definir la diferencial  $df$ , para una función  $f$  con un vector tangente

$v_p \in T_p M$ , para obtener una derivada direccional de la función en el punto  $p \in M$ .

Ahora, generalizar la derivada direccional a un campo vectorial  $X$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es un trabajo más complejo, ya que los valores de  $X$  en distintos puntos de la variedad están en diferentes planos tangentes. Este problema se puede resolver si se reemplaza el vector  $v_p$  con un campo vectorial, de manera que se utiliza el flujo del campo vectorial para empujar los valores de  $X$  hacia  $p$  y luego derivar. Este resultado es la derivada de Lie de  $X$  con respecto al campo vectorial dado.

Para definir la derivada de Lie de manera formal, primero hay que tener en cuenta varios conceptos. Sea  $X$  un campo vectorial sobre  $M$  y sea  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  una curva en  $M$  tal que para todo punto  $p \in \text{Im}(\gamma)$  se tiene que  $\dot{\gamma} = \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_p$ , entonces  $\gamma$  se le llama *curva integral de  $X$* .

Es importante saber que todo campo vectorial en  $M$  define una única curva integral  $\gamma$  por cada punto  $p \in M$  tal que  $\gamma(0) = p$ . Además, una curva integral  $\gamma(t)$  es *completa* si está definida para toda  $t$ .

Por otro lado, un campo vectorial  $X$  define una familia de transformaciones de 1-parámetro  $\{h_s\}_{s \in \mathbb{R}}$  tal que para todo  $s$

$$h_s : M \rightarrow M, \tag{B.23} \quad \boxed{1\_p}$$

tal que para cada  $p$ ,  $h_s(p)$  es el punto sobre la curva integral de  $X$  que pasa por  $p$  a una distancia del parámetro  $s$ . Es decir, si  $\gamma(t)$  es la curva tal que  $\gamma(t_0) = p$  entonces  $h_s(p) = \gamma(t_0 + s)$ . Notemos que

$$\begin{aligned} h_{r+s} &= h_r \circ h_s = h_{s+r} \\ h_0 &= id \\ (h_s)^{-1} &= h_{-s}. \end{aligned} \tag{B.24} \quad \boxed{1\_parameter}$$

Esta familia de transformaciones inducida por  $X$  nos permite arrastrar funciones, vectores, 1-formas y, en general, campos tensoriales. Entonces, la derivada de Lie de

un campo vectorial  $X$  con respecto a otro campo vectorial  $Y$  es

$$(\mathcal{L}_Y X)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{(h_{-t})_* X_{h_t(p)} - X_p}{t} \right) \quad (\text{B.25})$$

La derivada de Lie existe para todo  $p$  y la asignación  $p \mapsto \mathcal{L}_Y(X)(p)$  es un campo vectorial. Notemos que esta definición no es muy útil para hacer cálculos, pero se puede demostrar que

$$(\mathcal{L}_Y X)_p = [Y, X]_p. \quad (\text{B.26})$$

### B.6.3. Derivada covariante

La derivada de Lie es muy útil en algunas ocasiones, pero no nos permite hacer *transportes paralelos*. En espacios curvos, los vectores tangentes a lo largo de una curva dependen de la curva y puede suceder que al cerrar la curva los vectores tangentes ya no sean paralelos. Intuitivamente, un transporte paralelo es aquel donde los vectores son paralelos a lo largo de toda la curva.

**Definición 32.** Sean  $X, Y, Z$  campos vectoriales sobre  $M$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in \mathbb{R}$ . Un operador

$$\begin{aligned} \nabla : TM \times TM &\rightarrow TM \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y, \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

que satisfice

1.  $\nabla_X(aY + Z) = a\nabla_X Y + \nabla_X Z$
2.  $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$
3.  $\nabla_{fX+aY} Z = f\nabla_X Z + a\nabla_Y Z$

se llama conexión lineal en  $M$  y  $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$  se llama derivada covariante de  $Y$  respecto a  $X$ .

Cuando  $\nabla_X Y = 0$  se dice que  $Y$  está *transportado paralelamente a lo largo de  $X$* . Además, sea  $\{e_a\}$  una base para  $TM$ . Como  $\nabla_{e_a} e_b \in TM$  entonces existe  $\Gamma^c_{ba} \in \mathbb{R}$  tal que  $\nabla_{e_a} e_b = \Gamma^c_{ba} e_c$ . Los escalares  $\Gamma^c_{ba}$  se llaman *coeficientes de la conexión*.

Con esta definición podemos ver que

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_{X^a e_a} (Y^b e_b) \\ &= X^a \nabla_{e_a} (Y^b e_b) \\ &= X^a e_a (Y^b) e_b + X^a (\nabla_{e_a} e_b) Y^b \\ &= (X(Y^c) + \Gamma^c_{ba} X^a Y^b) e_c,\end{aligned}\tag{B.28}$$

por lo que, la derivada covariante queda completamente especificada por los coeficientes de la conexión.

## Geodésicas

Con la noción de derivada covariante llega el concepto de *geodésica*. Las geodésicas son generalizaciones de rectas, curvas de longitud extremal.

geodesic\_deff

**Definición 33.** Sea  $X$  un campo vectorial. Las curvas integrales de  $X$  se llaman geodésicas si y sólo si

$$\nabla_X X = 0\tag{B.29}$$

geodesic\_de

En componentes, la ecuación general de una geodésica es

$$\frac{d^2 x^a}{d\tau^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0,\tag{B.30}$$

gral\_geodes

donde  $\tau$  se le conoce como el *parámetro afín*, es decir, que al transformar el parámetro  $t \rightarrow s(t)$  la ecuación (B.30) se preserva.

## B.7. Variedad Riemanniana

Una *variedad Riemanniana* es una variedad diferenciable equipada con una *métrica*, la cual nos da nociones de longitud de curvas, áreas, curvatura y cualquier otro concepto métrico basado en distancias.

**Definición 34.** Una *métrica Riemanniana* sobre una variedad diferenciable  $M$  es un dos tensor  $g : TM \times TM \rightarrow \mathbb{R}$  tal queda

1. Es *simétrica*, es decir,  $g(X, Y) = g(Y, X)$
2. Es *positiva definida*, es decir,  $g(X, X) > 0$  si  $X \neq 0$

Una métrica Riemanniana determina un producto interno en cada espacio tangente  $T_p M$ , lo cual se escribe  $g(X, Y) := \langle X, Y \rangle$  para  $X, Y \in T_p M$ . Si tenemos una base coordenada entonces  $g$  toma la forma

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad (\text{B.31})$$

donde los  $g_{ij}$  son conocidos como las componentes de la métrica.

Es posible demostrar que si uno tiene una variedad con métrica  $(M, g)$ , entonces existe una única conexión tal que

$$\nabla g = 0. \quad (\text{B.32})$$

En una base coordenada, los coeficientes de la conexión, toman la forma

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} \left( \frac{\partial g_{db}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d} \right) = \frac{1}{2} g^{ad} [g_{db,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d}]. \quad (\text{B.33})$$

A esta conexión se le llama *conexión métrica* y a sus coeficientes  $\Gamma_{bc}^a$  se les llama *símbolos de Christoffel*.

### B.7.1. Curvatura

Una característica de las variedades Riemannianas es el poder *medir* la curvatura de dicha variedad. Si se tiene una conexión métrica, entonces el *tensor de curvatura* o *tensor de Riemannian* se define como

$$\omega[R(X, Y)Z] = \omega[\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z]. \quad (\text{B.34})$$

En una base coordenada el tensor de Riemannian se escribe como

$$R_{bcd}^a = \frac{\partial \Gamma_{bd}^a}{\partial x^c} - \frac{\partial \Gamma_{bc}^a}{\partial x^d} + \Gamma_{mc}^a \Gamma_{bd}^m - \Gamma_{md}^a \Gamma_{bc}^m. \quad (\text{B.35})$$

## B.8. Referencias

Para la primera parte de este apéndice se utilizó el libro [19], mientras que para la parte de Geometría Diferencial se utilizó [15] y para estudiar Geometría Riemanniana, se utilizó [14].

# C

## Termodinámica clásica.

La termodinámica clásica es una teoría fenomenológica que describe propiedades de la materia a nivel macroscópico. Su objetivo es obtener relaciones entre propiedades macroscópicas de la materia, cuando ésta se somete a una variedad de procesos.

Esta teoría se desarrolló como una tecnología antes de convertirse en ciencia. Una de las motivaciones más grandes era poder calcular la cantidad de trabajo que se puede obtener al quemar cierta cantidad de combustible.

### C.1. Sistema termodinámico

Un *sistema termodinámico* es cualquier sistema macroscópico, al cual le asociamos parámetros termodinámicos. El sistema termodinámico y sus fronteras están determinados por el observador. La parte del universo que interactúa con el sistema se le conoce como *alrededores*. La interacción entre el sistema y sus alrededores se caracteriza por los intercambios mutuos de masa y energía. Dependiendo de esta interacción se caracteriza el sistema termodinámico como:

1. *Sistema cerrado*: Es aquel que puede intercambiar energía pero no puede intercambiar materia con sus alrededores.
2. *Sistema abierto*: Este sistema puede intercambiar materia y energía con sus alrededores.

3. *Sistema aislado*: No existe ningún tipo de interacción con sus alrededores.

Cuando los parámetros de un sistema termodinámico no varían con el tiempo se dice que el sistema está en *equilibrio termodinámico*. El asignar valores a los parámetros de un sistema nos define el *estado* de ese sistema. La termodinámica clásica sólo trata con sistemas que están en estado de equilibrio.

Además, los parámetros de un sistema termodinámico se clasifican en *variables extensivas e intensivas*. Las variables extensivas son aquellas que tienen la propiedad de ser *aditivas*, es decir, si un sistema se divide en varios subsistemas, entonces el valor total de la variable extensiva es la suma de los valores de dicho parámetro en cada uno de los subsistemas. Por su parte, las variables intensivas son aquellas que en cualquier subdivisión del sistema se tendrán los mismos valores.

Para un sistema en equilibrio termodinámico, la ecuación que relaciona las variables de estado que lo describen recibe el nombre de *ecuación de estado*. Esta ecuación es una relación funcional entre las variables termodinámicas del sistema. Si se definen  $I_a$  y  $E^a$  como las variables intensivas y extensivas respectivamente, entonces la ecuación de estado es una expresión donde una variable intensiva se muestra en términos de variables extensivas independientes, de esta forma:

$$I_{(i)} = I_{(i)}(E^a). \quad (\text{C.1})$$

La ecuación de estado define las características del sistema en un estado de equilibrio, pero el objetivo principal de la termodinámica es poder interpretar los cambios que experimenta un sistema. El cambio de un estado a otro se le conoce como *proceso termodinámico*. Si el estado inicial es un estado de equilibrio, entonces el proceso termodinámico se produce a partir de alteraciones en las condiciones externas del sistema. Un proceso es *cuasi-estático* si las condiciones externas cambian lentamente, de manera que el sistema está aproximadamente en equilibrio a cada instante. Por lo que, un proceso cuasi-estático es una sucesión densa de estados de equilibrio.

Un proceso es *reversible* si éste puede hacer que el sistema regrese a su estado original. Todo proceso reversible es cuasi-estático, pero el converso no siempre se cumple.

## C.2. Leyes de la Termodinámica

Las leyes de la Termodinámica son principios que se obtuvieron empíricamente los cuales conforman un modelo matemático. Estas leyes caracterizan las ecuaciones de estado de los distintos sistemas termodinámicos.

### C.2.1. Ley cero de la termodinámica

La ley cero de la termodinámica establece que: “*Dos sistemas en equilibrio térmico con un tercero, están en equilibrio entre sí*”.

La importancia de esta ley radica en que señala a la temperatura como una variable de estado e impone como condición de equilibrio la igualdad de temperaturas de los sistemas.

### C.2.2. Primera ley de la Termodinámica

La primera ley de la termodinámica es también conocida como el principio de conservación de la energía. Para poder enunciar este principio, es necesario definir lo que es *trabajo* y *calor*. Si tenemos un sistema con parámetros  $P$ ,  $V$  y  $T$ , el trabajo hecho en un proceso infinitesimal donde el volumen se incrementa  $dV$  está dado por:

$$dW = PdV. \tag{C.2} \text{ work}$$

Por su parte, el calor ( $Q$ ) es un tipo de energía que absorbe un sistema si su temperatura incrementa, mientras que no se hace trabajo sobre el sistema; es decir, si una cantidad  $\Delta Q$  de calor es absorbida por el sistema, entonces la temperatura también se incrementa de la siguiente manera

$$\Delta Q = C\Delta T. \tag{C.3} \text{ heat}$$

La constante  $C$  que se observa en la ecuación (C.3) se le conoce como la *capacidad calorífica* y depende del sistema así como del proceso termodinámico llevado a cabo.

Por ejemplo, las capacidades caloríficas  $C_V$  y  $C_P$  son muy comunes y están asociados a procesos termodinámicos de calentamiento con volumen y presión constante, respectivamente. La capacidad calorífica por mol en una sustancia es conocida como *calor específico*.

Al ser el calor una forma de energía, se debe incluir en el principio de conservación de la energía. Por lo que, la primera ley establece que para todo proceso termodinámico que comienza en un estado inicial ( $i$ ) y termina en un estado final ( $f$ ), el incremento en la *energía interna* del sistema es siempre el mismo; es decir

$$dU = dQ - dW. \quad (\text{C.4})$$

Es importante mencionar que  $dU$  es una diferencial exacta, es decir, que existe una función  $U$  cuya diferencial es precisamente  $dU$  y que la integral  $\int dU$  es independiente del camino de integración (solamente depende de los límites de integración de dicha integral).

La primera ley de la Termodinámica (C.4) <sup>first\_law</sup> contiene varias ideas importantes:

1. La existencia de una energía interna, intrínseca al sistema tratado. Puede ser que el sistema no se esté moviendo entonces su energía cinética es cero y su energía potencial permanece constante, sin embargo mediante un proceso termodinámico el sistema puede modificar su energía.
2. La definición de calor como un tipo de energía en tránsito.
3. La conservación de la energía.

### C.2.3. Segunda ley de la Termodinámica

La primera ley establece que todo proceso termodinámico debe satisfacer el principio de conservación de la energía, mas no restringe a ningún proceso termodinámico. Si sólo existiera este principio, se podría transformar calor en trabajo y viceversa. Sin embargo, por experiencia se sabe que existen procesos que no son viables en la naturaleza, como un gas que se expande y luego se comprime.

El propósito de la segunda ley es incorporar estas observaciones a la teoría de la Termodinámica. Para poder enunciar esta ley, primero es necesario presentar los tipos de procesos termodinámicos:

1. *Proceso isobárico*: es aquel que ocurre a presión constante. En este tipo de procesos, tanto el calor transferido como el trabajo realizado son diferentes de cero.
2. *Proceso isométrico*: es aquel proceso que ocurre a volumen constante. De esta manera, la primera ley queda como  $dU = dQ$ , lo cual significa que si se agrega calor manteniendo el volumen constante, entonces el calor absorbido sólo hace que la energía interna aumente.
3. *Proceso isocórico*: en este proceso el trabajo realizado a lo largo de él se anula  $dW = 0$ .
4. *Proceso isotérmico*: este proceso ocurre a temperatura constante.
5. *Proceso adiabático*: es aquel proceso donde el sistema no absorbe ni cede calor, es decir,  $dQ = 0$ . Cuando el proceso es reversible entonces también es un *proceso isoentrópico*.

Existen dos enunciados equivalentes para la segunda ley termodinámica:

1. **Enunciado de Clausius** “Es imposible construir una máquina que operando en ciclos no haga otra cosa que extraer una cierta cantidad de calor y llevarlo de un cuerpo frío a otro más caliente.”
2. **Enunciado de Kelvin** “Es imposible construir una máquina que operando en ciclos no haga otra cosa más que extraer calor de un cuerpo y convertirlo íntegramente en trabajo.”

Con estos dos enunciados se puede señalar la dirección en la que se llevan a cabo los procesos termodinámicos, ya que esta ley prohíbe la existencia de máquinas cien por ciento eficientes.

La segunda ley de la termodinámica introduce una nueva función termodinámica: la entropía. Esta función es de los parámetros extensivos, donde el cambio en la

entropía para cualquier proceso es mayor que el flujo de calor dividido entre la temperatura de equilibrio del sistema,

$$dS \geq \frac{dQ}{T}. \quad (\text{C.5}) \quad \text{entropy}$$

Cuando la ecuación (C.5) es una igualdad entonces el proceso termodinámico es reversible. Además, cuando se alcanza el máximo de la entropía, entonces el sistema alcanza el equilibrio.

Existe un enunciado equivalente de la segunda ley que dice “*En un sistema aislado, es imposible que ocurra un proceso si a éste se le asocia una disminución de la entropía total del sistema*”. Matemáticamente, este principio se expresa así

$$\Delta S \geq 0. \quad (\text{C.6}) \quad \text{2nd\_law}$$

Cuando se cumple la igualdad entonces el proceso que se observa es reversible e isoentrópico, es decir, es un proceso adiabático.

#### C.2.4. Tercera ley de la Termodinámica

La tercera ley de la Termodinámica o postulado de Nernst establece que “*es imposible alcanzar la temperatura del cero absoluto mediante un número finito de procesos termodinámicos.*” Existen varios enunciados equivalentes al anterior, por ejemplo:

1. “El proceso isoterma a  $T = 0$  es también isoentrópico y coincide con un valor mínimo y constante de la entropía.”
2. “Es imposible alcanzar la entropía mínima mediante un número finito de procesos termodinámicos.”

La importancia de la tercera ley radica en que proporciona un punto de referencia absoluto para la determinación de la entropía.

### C.3. Ecuación fundamental

La ecuación (C.1) <sup>lec\_edo</sup> muestra la forma de una ecuación de estado (la iésima variable intensiva). El conocer sólo una ecuación de estado no es suficiente para conocer todas las propiedades termodinámicas del sistema. De hecho, para conocer completamente al sistema, es necesario conocer todas las ecuaciones de estado, lo cual es equivalente a conocer la *ecuación fundamental*.

La ecuación fundamental es una relación funcional de la forma:

$$\Phi = \Phi(E^a). \quad (\text{C.7})$$

Observemos que la ecuación fundamental es una función que depende únicamente de las variables extensivas. Recordemos que las variables extensivas pueden ser el volumen, la entropía y el número de moles, pero dependiendo del sistema se pueden encontrar otros parámetros extensivos.

La forma diferencial de la ecuación fundamental es

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial E^a} dE^a, \quad (\text{C.8})$$

donde las variables intensivas se definen como

$$I_a = \frac{\partial\Phi}{\partial E^a}. \quad (\text{C.9})$$

Por ejemplo si la ecuación fundamental tuviera como variable dependiente a la energía interna, entonces ésta sería de la forma

$$U = U(S, E^1, E^2, \dots, E^m), \quad (\text{C.10})$$

y se le llama la representación de la energía. Si por el contrario se utilizara como variable dependiente a la entropía, entonces la ecuación tomaría la forma

$$S = S(U, E^1, E^2, \dots, E^m). \quad (\text{C.11})$$

En las ecuaciones (C.10) <sup>energy\_representation</sup> y (C.11) <sup>entropy\_representation</sup> al conjunto de variables independientes se le conoce como parámetros extensivos energéticos y entrópicos, respectivamente. Además,

las variables intensivas de ambas representaciones se obtienen al aplicar la ecuación [intensive\\_parameters](#) (C.9).

### C.3.1. Potenciales termodinámicos

Las transformaciones de Legendre vistas en el capítulo dos, se conocen como *potenciales termodinámicos*. A continuación se definen los potenciales más comunes.

El *potencial de Helmholtz* o *energía libre de Helmholtz* es la transformada parcial de Legendre de  $U$ , la cual reemplaza a la entropía por la temperatura. De esta manera, el potencial de Helmholtz depende de las variables  $T, V, N_1, N_2, \dots$ , y se define como

$$F = U - TS. \quad (\text{C.12}) \quad \text{Helmholtz}$$

La *entalpía* es la transformada parcial de Legendre de  $U$  que sustituye el volumen por la presión como variable independiente y se define como

$$H = U + PV. \quad (\text{C.13}) \quad \text{enthalpy}$$

La tercera transformación de Legendre de la energía interna  $U$  es el *potencial de Gibbs* o *energía libre de Gibbs*. Este potencial es la transformada de Legendre que reemplaza la entropía por temperatura y el volumen por presión al mismo tiempo, de manera que esta función se define como

$$G = F + PV = U - TS + PV. \quad (\text{C.14}) \quad \text{Gibbs}$$

Estos potenciales termodinámicos permiten expresar la ecuación fundamental de distintas maneras. Dependiendo del problema físico que se quiera resolver se puede escoger un potencial en particular.

La energía libre de Helmholtz se utiliza en procesos isotérmicos, donde el cambio en este potencial es una medida del trabajo hecho por el sistema. Se puede demostrar que para un sistema cerrado a temperatura constante, el estado de equilibrio se obtiene en un mínimo de  $F$ . Así mismo para la entalpía se establece que un sistema con una presión dada alcanzará el estado de equilibrio cuando la entalpía ( $H$ ) sea la

mínima.

Por su parte, el potencial de Gibbs se utiliza en sistemas que se encuentran a presión y temperatura constante. Al igual que con los potenciales  $F$  y  $H$  el estado de equilibrio es un mínimo de este potencial.

### C.3.2. Ecuación de Euler y ecuación de Gibbs-Duhem

Una de las características de la ecuación fundamental es que es homogénea de primer orden y esta propiedad permite escribirla de una manera muy conveniente conocida como la *ecuación de Euler*. En la representación de la entropía, la ecuación de Euler es de la forma

$$S = \sum_{j=0}^m I_j E^j. \quad (\text{C.15})$$

Por otro lado, la *ecuación de Gibbs-Duhem* presenta una relación entre las variables intensivas de un sistema de manera diferencial, la cual está definida como

$$\sum_{j=0}^m E^j dI_j = 0. \quad (\text{C.16})$$

Gibbs\_Duhem

La importancia de la ecuación de Gibbs-Duhem es que si conocemos dos ecuaciones de estado de un sistema con tres ecuaciones, es posible integrar la ecuación de Gibbs-Duhem para obtener la tercer ecuación de estado.

## C.4. El gas ideal

El gas ideal es un sistema termodinámico teórico, pero los gases reales se aproximan bastante a éste según las condiciones de presión y temperatura que tengan. El gas ideal está formado por partículas muy alejadas entre sí y se pueden considerar independientes unas de otras, de manera que no interactúan entre sí.

Un gas ideal está caracterizado por dos ecuaciones

$$\begin{aligned} PV &= NRT \\ U &= cNRT, \end{aligned} \tag{C.17}$$

donde  $c$  es una constante y  $R$  es la constante universal de los gases ( $R = N_A k_B = 8,3144 \text{ J/mol K}$ ). En gases monoatómicos  $c = \frac{3}{2}$ .

Las ecuaciones (C.17) permiten determinar la ecuación fundamental. El hecho de que una de las ecuaciones de estado contenga la energía nos permite utilizar la representación de la entropía. Reescribiendo estas ecuaciones, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{P}{T} &= R \frac{N}{V} = \frac{R}{v} \\ \frac{1}{T} &= cR \frac{N}{U} = \frac{cR}{u}, \end{aligned} \tag{C.18}$$

donde  $u$  y  $v$  son las densidades de energía y volumen, respectivamente. De estas dos ecuaciones, se puede encontrar la tercer ecuación de estado ( $\frac{\mu}{T}$  como función de  $u, v$ ) al integrar la ecuación de Gibbs-Duhem

$$d\left(\frac{\mu}{T}\right) = ud\left(\frac{1}{T}\right) + vd\left(\frac{P}{T}\right). \tag{C.19}$$

De manera que

$$d\left(\frac{\mu}{T}\right) = u\left(-\frac{cR}{u^2}\right)du + v\left(-\frac{R}{v^2}\right)dv = -cR\frac{du}{u} - R\frac{dv}{v}, \tag{C.20}$$

y al integrar se tiene

$$\frac{\mu}{T} - \left(\frac{\mu}{T}\right)_0 = -cR \ln\left(\frac{u}{u_0}\right) - R \ln\left(\frac{v}{v_0}\right), \tag{C.21}$$

donde  $u_0$  y  $v_0$  son parámetros de un estado termodinámico y  $\left(\frac{\mu}{T}\right)_0$  es una constante de integración.

Ahora, sustituyendo las tres ecuaciones de estado en la ecuación de Euler

$$S = \left(\frac{1}{T}\right) U + \left(\frac{P}{T}\right) V - \left(\frac{\mu}{T}\right) N, \quad (\text{C.22}) \quad \text{Euler\_eq}$$

se tiene la ecuación fundamental en la representación de la entropía

$$S = Ns_0 + NR \ln \left[ \left(\frac{U}{U_0}\right)^c \left(\frac{V}{V_0}\right) \left(\frac{N}{N_0}\right)^{-(c+1)} \right], \quad (\text{C.23}) \quad \text{ig\_fund\_eq}$$

donde

$$s_0 = (c+1)R - \left(\frac{\mu}{T}\right)_0. \quad (\text{C.24})$$

Si  $s_0$  se conoce entonces la ecuación (C.23) tendría toda la información termodinámica de un gas ideal en particular.

Existe otra forma de obtener la ecuación fundamental. Integrando la ecuación molar

$$ds = \left(\frac{1}{T}\right) du + \left(\frac{P}{T}\right) dv = \left(\frac{cR}{u}\right) du + \left(\frac{R}{v}\right) dv, \quad (\text{C.25})$$

se tiene que

$$s = s_0 + cR \ln \left(\frac{u}{u_0}\right) + R \ln \left(\frac{v}{v_0}\right). \quad (\text{C.26}) \quad \text{ig\_fund\_eq}$$

Las ecuaciones (C.23) y (C.26) son equivalentes. Al conocer la constante de integración  $s_0$  se obtendrá toda la información termodinámica del gas ideal estudiado.

## C.5. Referencias

Este capítulo se basó en el libro <sup>Callen</sup> [2].

# Bibliografía

- [1] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, 1989.
- [2] H. B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. John Wiley and Sons, 1985.
- [3] C. Caratheodory. Untersuchungen über die grundlagen der thermodynamik. *Mathematische Annalen*, 1909.
- [4] A. Bravetti et al. The conformal metric structure of geometrothermodynamics. *J. Math. Phys.*, 2013.
- [5] A. Bravetti et al. Legendre symmetry and first order phase transitions of homogeneous systems. *ArXiv.*, 2013.
- [6] A. Vazquez et al. Thermodynamic systems as extremal hypersurfaces. *J. Geom. Phys.*, 2010.
- [7] H. Quevedo et al. Invariant geometry of the ideal gas. *ArXiv.*, 2008.
- [8] R. Zia et al. Making sense of the legendre transform. *Am. J. Phys.*, 2009.
- [9] J. B. Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra*. Pearson, 2002.
- [10] J. A. Gibbs. Method of geometrical representation of the thermodynamic properties of substances by means of surfaces. *The Academy*, 1871.
- [11] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press., 2003.
- [12] R. Hermann. Geometry, physics and systems. *Marcel Dekker, New York*, 1973.
- [13] J. V. Jose and E. J. Saletan. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press., 2002.

- 
- [14] J. M. Lee. *Riemannian Manifolds: An introduction to curvature*. Springer, 2006.
- [15] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2006.
- [16] W. S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer, 1977.
- [17] N. D. Mermin. The topological theory of defects in ordered media. *Rev. Mod. Phys.*, 1979.
- [18] R. Mrugala. Geometrical formulation of equilibrium phenomenological thermodynamics. *Rep. Math. Phys.*, 1978.
- [19] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc., 2000.
- [20] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, 2003.
- [21] C. Nash and S. Sen. *Topology and Geometry for Physicists*. Academic Press, Inc., 1987.
- [22] H. Quevedo. Geometrothermodynamics. *Journal of Mathematical Physics*, 2007.
- [23] H. Quevedo and D. Tapias. Geometric description of chemical reactions. *ArXiv*, 2013.
- [24] G. Ruppeiner. Thermodynamics: A riemannian geometric model. *Phys. Rev.*, 1979.
- [25] F. Weinhold. Metric geometry of equilibrium thermodynamics i, ii, iii. *J. Chem. Phys.*, 1975.