



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

DINÁMICA NO LINEAL Y LAS RUTAS AL  
CAOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICA

PRESENTA:  
LUISA MÁRQUEZ RENTERÍA

DIRECTOR DE TESIS:  
DR. PEDRO EDUARDO MIRAMONTES VIDAL



2014

Ciudad Universitaria, D. F.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



## Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno

Márquez

Rentería

Luisa

55 30 17 39 50

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

30669456-1

2. Datos del tutor

Dr.

Pedro Eduardo

Miramontes

Vidal

3. Datos del sinodal 1

Dr.

Jefferson Edwin

King

Dávalos

4. Datos del sinodal 2

Dra.

María de los Ángeles

Sandoval

Romero

5. Datos del sinodal 3

Dra.

Catherine

García

Reimbert

## IV

### 6. Datos del sinodal 4

M. en C.

José Luis

Gutiérrez

Sánchez

### 7. Datos del trabajo escrito

Dinámica no lineal y las rutas al caos

103p

2014

# Índice general

Índice de figuras	VII
Índice de tablas	IX
Introducción	1
<b>1. Sistemas dinámicos</b>	<b>3</b>
1.1. Estabilidad de los sistemas dinámicos . . . . .	5
1.1.1. Puntos fijos . . . . .	6
1.1.2. Ciclos límite . . . . .	15
1.1.3. Atractores extraños . . . . .	20
<b>2. Caos determinista</b>	<b>27</b>
2.1. Exponentes de Liapunov . . . . .	29
2.2. Secciones de Poincaré . . . . .	32
2.2.1. Construcción de las secciones de Poincaré . . . . .	33
2.2.2. Tipos de secciones de Poincaré . . . . .	34

2.2.3. Estabilidad de ciclos límite . . . . .	39
2.3. Bifurcaciones . . . . .	43
2.3.1. Diagramas de bifurcación . . . . .	43
2.3.2. Bifurcación tangente . . . . .	45
2.3.3. Bifurcación horquilla . . . . .	49
2.3.4. Bifurcación de Hopf . . . . .	52
<b>3. Feigenbaum</b>	<b>55</b>
3.1. Oscilador de Duffing . . . . .	56
3.2. El mapeo logístico . . . . .	63
3.2.1. Universalidad y renormalización . . . . .	73
<b>4. Cuasiperiodicidad</b>	<b>79</b>
4.1. Mapeo del círculo . . . . .	81
<b>5. Intermitencia</b>	<b>87</b>
5.1. Intermitencia en el sistema de Lorenz . . . . .	90
5.2. Intermitencia en el mapeo logístico . . . . .	93
<b>6. Conclusiones</b>	<b>97</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>101</b>

# Índice de figuras

1.1. Retrato fase y series de tiempo del péndulo simple . . . . .	7
1.2. Nodo estable . . . . .	9
1.3. Nodo inestable . . . . .	9
1.4. Nodo estrella estable . . . . .	9
1.5. Nodo estrella inestable . . . . .	10
1.6. Foco estable . . . . .	10
1.7. Foco inestable . . . . .	10
1.8. Centro . . . . .	11
1.9. Punto silla . . . . .	11
1.10. Caracterización de los puntos críticos . . . . .	13
1.11. Diagrama fase del sistema 1.5 . . . . .	15
1.12. Ciclos límite . . . . .	16
1.13. Sistema lineal asociado a la ecuación de Van der Pol . . . . .	18
1.14. Diagramas fase de la ecuación de Van der Pol . . . . .	19
1.15. Series de tiempo de la ecuación de Van der Pol . . . . .	19



1.16. Esquema del proceso de estirado y plegado . . . . .	21
1.17. Diagrama fase del atractor de Lorenz para $\sigma = 10$ , $b = 3$ y $r = 30$ . . .	24
1.18. Diagrama del mapeo de Hénon . . . . .	25
1.19. Atractor de Hénon . . . . .	26
1.20. Ampliación del atractor de Hénon . . . . .	26
2.1. Exponentes de Liapunov del mapeo de Hénon para $b = 0.3$ . . . . .	32
2.2. Sección de Poincaré . . . . .	33
2.3. Sección de Poincaré de alguna función periódica . . . . .	35
2.4. Dos frecuencias en un toroide . . . . .	36
2.5. Diagrama de la sección de Poincaré de alguna función periódica . . .	37
2.6. Diagrama de la sección de Poincaré de alguna función cuasiperiódica .	38
2.7. Diagrama de la sección de Poincaré de alguna función aperiódica . . .	38
2.8. Construcción de la Sección de Poincaré de un ciclo límite . . . . .	39
2.9. Sección de Poincaré de un ciclo límite estable . . . . .	41
2.10. Sección de Poincaré de un ciclo límite inestable . . . . .	41
2.11. Secciones de Poincaré de ciclos límite semiestables . . . . .	42
2.12. Diagrama de bifurcación y exponentes de Liapunov del mapeo de Hénon	44
2.13. Comportamiento de un punto crítico en una bifurcación tangente . . .	46
2.14. Bifurcación horquilla . . . . .	50
2.15. Comportamiento de un ciclo límite en una bifurcación de Hopf . . . .	54

3.1. Series de tiempo y secciones de Poincaré del oscilador de Duffing para $k = 0.3$ y $\omega = 1.2$ . . . . .	62
3.2. Respuesta caótica en el oscilador de Duffing para $k = 0.3$ , $\omega = 1.2$ y $\Gamma = 0.5$ . . . . .	63
3.3. Series de tiempo y diagramas fase de la ecuación de Duffing 3.1. La secciones de Poincaré para $t = 0, 2\pi, \dots$ son representadas por los puntos. . . . .	64
3.4. Sección de Poincaré para $t = 0, \frac{2\pi}{\omega}, \frac{4\pi}{\omega}, \dots$ de la ecuación de Duffing 3.1 para $k = 0.3$ , $\omega = 1.2$ y $\Gamma = 0.5$ . . . . .	65
3.5. Doblamiento de periodo de la ecuación de Duffing en $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$ . . . . .	65
3.6. Primera iteración del mapeo logístico para $\mu = 0.7$ . . . . .	67
3.7. Diagrama de bifurcación del mapeo logístico para $0 < \mu < \frac{3}{4}$ . . . . .	68
3.8. Primera y segunda iteración del mapeo logístico para $\mu = 0.7$ . . . . .	70
3.9. Mapeo logístico $\mu = 0.75$ . . . . .	70
3.10. Mapeo logístico con $\mu = 0.785$ . . . . .	71
3.11. Diagrama de bifurcación del mapeo logístico . . . . .	73
3.12. Constantes de Feigenbaum . . . . .	74
3.13. Método gráfico para localizar los puntos de ciclos superestables . . . . .	75
3.14. Renormalización de un mapeo unimodal . . . . .	77
4.1. Esquema de la evolución de atractores de la ruta al caos por cuasiperiodicidad . . . . .	81
4.2. Diagrama de bifurcación del mapeo del círculo . . . . .	85
4.3. Exponente de Liapunov para el mapeo del círculo . . . . .	85

5.1. Esquema de los tres tipos de transiciones al caos por intermitencia . .	88
5.2. Evolución de los puntos fijos del sistema de Lorenz . . . . .	91
5.3. Mapeo de retorno de Lorenz . . . . .	93
5.4. Tercera iteración de la ecuación 3.22 . . . . .	94
5.5. Gráfica de $f^{(3)}(x)$ tangente a la diagonal . . . . .	95
5.6. Serie de tiempo del mapeo logístico para $\mu = 0.9570$ . . . . .	96
5.7. Detalle del diagrama de bifurcación del mapeo logístico . . . . .	96
5.8. Exponentes de Liapunov para el mapeo logístico . . . . .	96

# Lista de Tablas

1.1. Caracterización de los puntos críticos . . . . .	12
2.1. Espectro de exponentes de Liapunov y atractores asociados en un espacio estado de tres dimensiones . . . . .	31



# Introducción

En la época posterior a Newton se pensaba que una vez que se encontraran las leyes generales que regían cualquier fenómeno, como la ley de gravitación universal, y se conocía un estado, entonces podía conocerse cualquier estado en cualquier tiempo, ya sea pasado, presente o futuro. Esto es lo que se conoce como *determinismo*, Laplace lo explica muy bien en una frase que hizo que esta idea se conociera como *determinismo laplaciano*:

“Al tiempo que se conocen las leyes que gobiernan los fenómenos estudiados, podemos predecir el futuro del sistema estudiado con certeza”.

Esta afirmación fue un modelo de pensamiento durante más de 100 años desde su surgimiento en el siglo XVIII y llevó al determinismo laplaciano a ser el esquema dominante y casi exclusivo en la ciencias. Pero a finales del siglo XIX comenzó el descubrimiento de sistemas en los que resultaba imposible predecir con exactitud un comportamiento (cualquier sistema no lineal), como las ecuaciones de Newton para la interacción de tres o más partículas.

Es por eso que hoy en día el determinismo no lo es todo. El azar se opone al determinismo; mientras la información completa sobre un sistema determinista se reduce a las condiciones iniciales y a una serie de ecuaciones que definen su evolución, un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias, determinadas por el azar, que evolucionan en función de sus variables. Por otro lado, los sistemas caóticos no permiten la predicción aunque sean deterministas, ya que trayectorias que están próximas en el inicio se separan muy rápido y llegan a destinos muy distintos. En estos casos se diferencia el determinismo de la predictibilidad, pues pequeños cambios iniciales en los sistemas caóticos se amplifican con el tiempo y dan lugar a diferencias macroscópicas. Este comportamiento es conocido como *efecto mariposa*.

Los fenómenos en la naturaleza pueden ser modelados por sistemas dinámicos, que son estructuras matemáticas cuyo estado viene definido por una serie de variables de estado que dependen del tiempo, así como por una serie de leyes que expresan las variaciones de las variables de estado a lo largo del tiempo y que, en algunos casos particulares, suelen ser un sistema de ecuaciones diferenciales.

Los sistemas dinámicos son representados geoméricamente en el espacio fase que pueden tener conjuntos de puntos que atraigan las trayectorias del sistema, a estos conjuntos se les conoce como atractores y se clasifican según su comportamiento. En particular, los llamados atractores extraños, son producto de autoscilaciones que dan lugar a inestabilidades locales. De todo esto se habla en el capítulo 1.

Más que una simple oposición, orden y caos establecen entre sí un juego complejo. El caos surge del orden, y un cierto orden puede surgir del caos en circunstancias especiales. Se puede hablar de un borde del caos ya que el mismo puede ocurrir con la complejidad de un sistema (no linealidad, dimensión mayor o igual a tres, etcétera). Para saber si un sistema se encuentra en ese “borde” se utilizan herramientas tanto analíticas como geométricas, mismas de las que se habla en el capítulo 2.

Del orden se puede pasar al caos (en sistemas no lineales de al menos tres variables), a través de tres caminos principales que suponen la desestabilización de atractores de regímenes periódicos por perturbaciones, que en lugar de amortiguarse y desaparecer, se amplifican. Estos tres caminos son *duplicación de periodo*, también conocida como la transición al caos de *Feigenbaum* y de la que se habla en el capítulo 3; *cuasi-periodicidad* o escenario de *Ruelle-Takens-Newhouse* y que se estudia en el capítulo 4 e *intermitencia*, a la que también se le llama escenario de *Pomeau-Manneville* y que se ve en el capítulo 5.

Este trabajo no pretende indagar con profundidad en el estudio de las transiciones al caos, sino dar una introducción y los conocimientos previos necesarios para entenderla, intentando hacer poco uso de teoremas y conceptos avanzados y, en su lugar, utilizar ejemplos y esquemas.

# Capítulo 1

## Sistemas dinámicos

Los *sistemas dinámicos* se denominan así porque están descritos por un conjunto de ecuaciones (sistema) cuyos parámetros varían respecto a alguna variable (dinámico), que usualmente es el tiempo. Los parámetros internos de un sistema dinámico siguen una sucesión de reglas temporales.

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar de acuerdo a varios criterios; pueden ser discretos o continuos, lineales o no lineales, entre muchas otras maneras, que definen la forma en la que está formulado el sistema, ya sea por una ecuación diferencial o una ecuación en diferencias, por sistemas lineales o no, si incluye estímulos externos o dependientes del tiempo. Si el sistema está modelado por una ecuación diferencial o de cualquiera de los tipos anteriores se dice que es determinista, pues permite conocer el estado del sistema para cualquier tiempo futuro (o pasado).

En los *sistemas dinámicos continuos* el tiempo puede tomar un valor cualquiera dentro de un rango predeterminado, es decir, varía continuamente y se expresan con ecuaciones diferenciales, las cuales pueden ser ordinarias (EDOs), parciales (EDPs) o ecuaciones diferenciales con retraso (EDRs). Para estos sistemas el caos se puede presentar con  $n$  grados de libertad (sistema de  $n$  ecuaciones), siempre y cuando  $n \geq 3$  para EDOs y EDPs.

En cambio, en los *sistemas dinámicos discretos* el tiempo sólo puede tomar valores dentro de un conjunto numerable (varía discretamente) y se describen por medio de ecuaciones de diferencias (EDs), las cuales son expresiones que relacionan dis-



tintas sucesiones, siendo una de ellas desconocida, son parecidas a las ecuaciones diferenciales, pero en vez de funciones hay sucesiones. A estas ecuaciones se les conoce también como mapeos iterados. A diferencia de los sistemas continuos, en los sistemas discretos, el caos se puede presentar con un grado de libertad, es decir, se rige por una única ecuación de diferencias.

Como ejemplo se encuentran los autómatas celulares (A.C.) que son sistemas dinámicos donde el espacio y el tiempo varían discretamente; son muy útiles, por ejemplo, en física es una de las técnicas para simular ciertos fenómenos de dinámica de fluidos; en biología son utilizados para estudios de reproducción, auto-organización y evolución, entre otros; en química para el estudio cinético de las reacciones y en la simulación del crecimiento de los cristales y en ciencias de la computación, donde los autómatas celulares han sido de gran ayuda en la construcción de modelos que sirven para estudiar fácilmente el procesamiento de información en paralelos y para el diseño de computadoras.

Un autómata celular tiene las siguientes características y elementos:

1. El espacio está formado por un conjunto finito de celdas distribuidas en una rejilla regular  $n$ -dimensional y cada división homogénea de arreglo es llamada célula.
2. Cada celda puede estar en un único estado en determinado instante de tiempo, el cual debe estar definido en un conjunto de estado asociado al espacio del autómata. El conjunto de estados es finito, se le llama *alfabeto* y puede ser expresado en valores o colores.
3. La vecindad de una celda está formada por las celdas adyacentes y define el conjunto contiguo de células y su posición respecto a cada una de ellas. A cada vecindad diferente le corresponde un elemento del conjunto de estados.
4. Para la configuración inicial se asigna un estado a cada una de las células del espacio de evolución inicial del sistema; el estado de las celdas está determinado por un conjunto de reglas de evolución comunes a todas las celdas.
5. Estas reglas de evolución determinan el comportamiento del autómata celular. A esta regla se le llama *función de transición*.

Por otro lado, un *sistema dinámico es lineal* si la función que lo representa cumple con que la suma y el producto de soluciones es solución, en otras palabras, si se

conocen dos soluciones para un sistema lineal, la suma o el producto de ellas también resuelve el sistema.

Es por ésto que los sistemas lineales son sencillos de analizar y trabajar, ya que la solución del sistema se puede lograr simplificando el problema a la suma de las soluciones con condiciones más sencillas.

Para sistemas dinámicos lineales, tanto continuos como discretos, existen métodos que transforman las ecuaciones diferenciales o de diferencias en ecuaciones algebraicas.

Los *sistemas no lineales* representan comportamientos que no están sujetos al principio de superposición. Es por esto que son difíciles, a veces imposibles, de resolver y es muy complicado predecir sus comportamientos respecto a sus variables de estado; algunos sistemas no lineales tienen soluciones exactas o integrables, mientras que otros presentan comportamientos impredecibles, que será lo que entenderemos como caos.

Por último cabe mencionar que si un sistema conserva el volumen en el espacio fase se le llama *sistema conservativo* y si no lo hace es un *sistema disipativo*, el cual suele contar con conjuntos en el espacio fase que “atraen” las trayectorias próximas, contrayendo las áreas entre ellas haciéndolas converger. Estos conjuntos se llaman *atractores* y representan el comportamiento asintótico del sistema, es decir, la forma de comportarse a largo plazo.

## 1.1. Estabilidad de los sistemas dinámicos

Puede ser difícil, o hasta imposible, encontrar la solución explícita de un sistema dinámico, en especial cuando es no lineal. A veces, lo único que interesa saber es el comportamiento cualitativo de las soluciones como la periodicidad o si existe el límite cuando el tiempo tiende a infinito, por lo que es mejor recurrir a la información cualitativa del sistema, evitando la previa resolución del mismo.

Las propiedades cualitativas son estudiadas geoméricamente con el fin de visualizar el comportamiento de las soluciones y deducir características importantes de éstas sin necesidad de acudir a desarrollos analíticos. Una de las formas de visualizar el comportamiento de las variables de estado de un sistema dinámico es con las *series*

de tiempo cuyas gráficas son de una variable de estado  $x$  contra tiempo  $t$ , para un sistema dinámico  $x^{(n)} = f(x^{(n-1)}, \dots, x', x, t)$ .

Otro de los principales métodos de análisis cualitativo es el *retrato fase* que es una representación geométrica de todas las trayectorias de un sistema dinámico. Cada variable se representa como un eje de un espacio multidimensional y cada punto del espacio representa el posible estado de las variables del sistema. Está descrito por un campo vectorial que rige el recorrido de las variables del sistema en el tiempo (trayectoria o flujo). El espacio donde se encuentra el retrato fase se llama *espacio fase* y se utiliza para obtener directamente de la ecuación diferencial propiedades como la estabilidad o la periodicidad. [12] [2]

El sistema 1.1 es el sistema derivado de la ecuación del péndulo  $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$  y la figura 1.1a) muestra su retrato fase. La figura 1.1b) y 1.1c) muestra su serie de tiempo respecto a la variable  $x$  y  $y$  respectivamente.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2 \sin x \end{aligned} \tag{1.1}$$

Los espacios fase pueden contener subconjuntos de puntos, ciclos o ambos - llamados *singularidades*- que atraen o repelen a las trayectorias que pasan cerca de éstos. Son lo que más interesa determinar del sistema, pues su comportamiento define la estabilidad del sistema.

### 1.1.1. Puntos fijos

Los *puntos fijos* o *críticos*, que representaremos como  $x_s$ , son singularidades del campo vectorial para las que se cumple

$$\dot{x}_s = 0$$

lo que significa que el campo vectorial que determina la dirección de las trayectorias en el espacio fase es nulo en estos puntos y los eigenvalores  $\lambda$  del polinomio característico asociado al sistema determinan la forma en la que interactúan las trayectorias con el punto fijo.

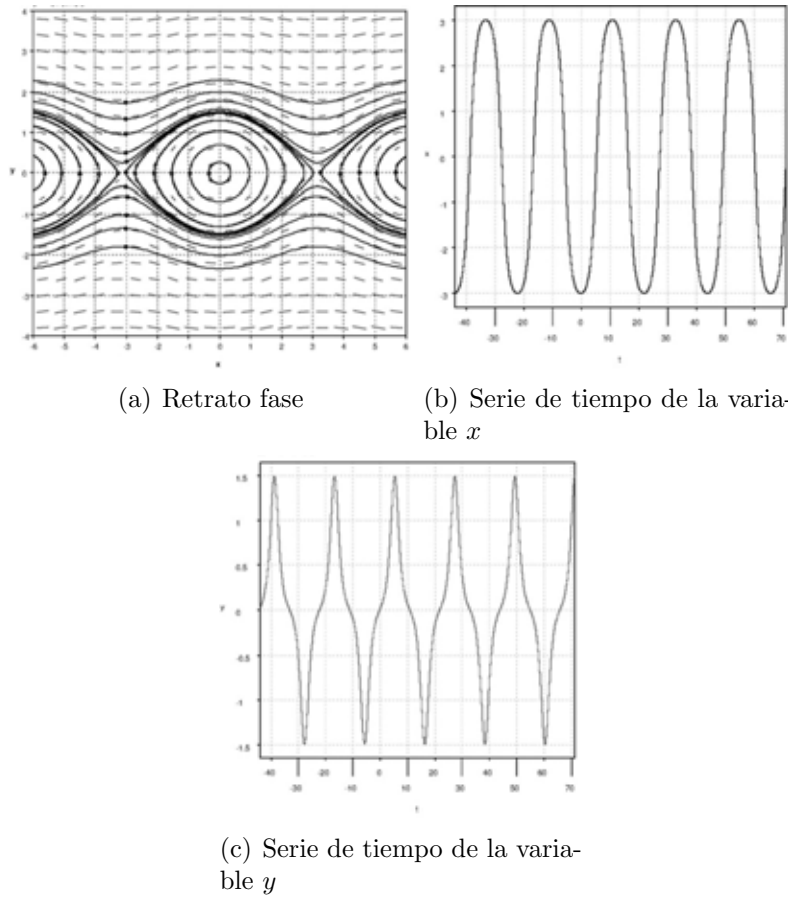


Figura 1.1: Retrato fase y series de tiempo del péndulo simple

Si una trayectoria comienza cerca de una singularidad y se aproxima a ésta, entonces la singularidad se dice que es *estable*, *un sumidero* o *un atractor*. Si dicha región atrae a todas las trayectorias del espacio fase se dice que es un *atractor global*.

En cambio, una singularidad es *inestable*, *repulsor* o *fuentes* cuando no es estable, es decir, las trayectorias que inician cercanas a ella divergen conforme pasa el tiempo.

La estabilidad de las singularidades determina la estabilidad del sistema. En sistemas lineales las singularidades sólo son puntos llamados *puntos fijos*. El análisis de estos puntos es sencillo; basta con calcular los eigenvalores a partir de la ecuación característica del sistema y analizar la relación que hay entre ellos.

Por otro lado, en los sistemas no lineales, las singularidades no sólo pueden ser puntos fijos, sino también ciclos límite o regiones llamadas *atractores extraños*, los cuales están ligados al movimiento caótico y están presentes tanto en los sistemas dinámicos continuos (tales como el sistema de Lorenz) como en algunos sistemas discretos (por ejemplo el mapeo de Hénon). Más adelante en la sección 1.1.3, se hablará con más detalle de este tipo de atractores. A diferencia de los sistemas lineales, el análisis de los puntos fijos es un poco más complicado, se puede hacer linealizando el sistema alrededor de cada una de las singularidades y analizando cada sistema linealizado por separado, pero se puede simplificar estudiando la matriz jacobiana.

$$J(Y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

del sistema

$$Y' = F(Y) = \begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2 = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1.3)$$

evaluada en cada punto fijo  $Y_s = (y_{1s}, y_{2s}, \dots, y_{ns})$ . La matriz resultante se analiza como si fuera la matriz asociada de un sistema lineal. Por lo que los resultados obtenidos para los sistemas lineales también son de gran utilidad para los no lineales que se aproximan a uno lineal de forma local.

Los puntos fijos están determinados por el comportamiento de las trayectorias alrededor de éstos, ya sea que el sistema sea lineal o no, y están íntimamente relacionados con los valores propios  $\lambda$  de la matriz asociada al sistema. Dentro del estudio cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales, la caracterización de los puntos de equilibrio de los sistemas de dos ecuaciones  $\dot{X} = AX$ , donde  $A$  es una matriz de  $2 \times 2$  y  $X$  es un vector columna de  $2 \times 1$ , son la base para determinar la estabilidad de sistemas de dos o más ecuaciones.

Los puntos de equilibrio pueden ser:

*Nodo estable*: Todas las órbitas se dirigen al punto y tienden a él. Los eigenvalores son reales, negativos y distintos entre sí. Figura 1.2

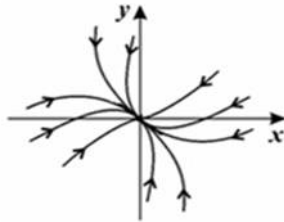


Figura 1.2: Nodo estable

*Nodo inestable*: Las trayectorias salen del punto y divergen. Los eigenvalores son reales, positivos y diferentes entre ellos. Figura 1.3

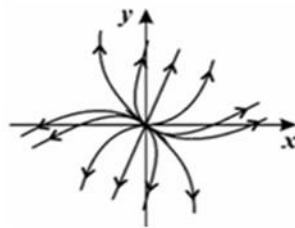


Figura 1.3: Nodo inestable

*Nodo estrella estable*: Las trayectorias convergen al punto con la misma tasa de rapidez. Los eigenvalores son reales iguales y negativos. Figura 1.4

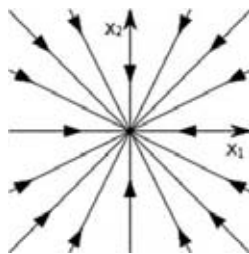


Figura 1.4: Nodo estrella estable

*Nodo estrella inestable:* Las trayectorias divergen al punto con la misma tasa de rapidez. Los eigenvalores son reales iguales y positivos. Figura 1.5

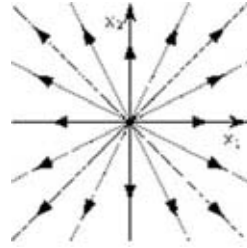


Figura 1.5: Nodo estrella inestable

*Foco estable:* Todas las órbitas tienden a él en espiral. Los eigenvalores son complejos conjugados con parte real negativa. Figura 1.6

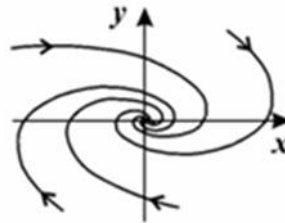


Figura 1.6: Foco estable

*Foco inestable:* Las órbitas se alejan de él en espiral. Los eigenvalores son complejos conjugados con parte real positiva. Figura 1.7

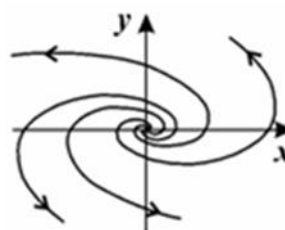


Figura 1.7: Foco inestable

*Centro:* Todas las órbitas próximas al punto son cerradas, ninguna entra ni sale. Este punto es neutralmente estable. Los eigenvalores del sistema son imaginarios puros. Figura 1.8

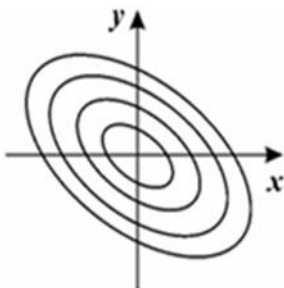


Figura 1.8: Centro

*Punto silla:* Inicialmente las trayectorias tienden al punto, pero después divergen. Es un punto inestable. Los eigenvalores son reales de signo opuesto. Figura 1.9

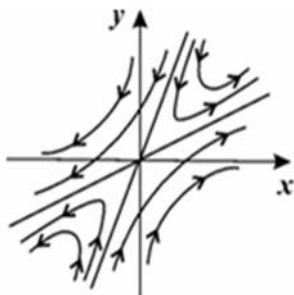


Figura 1.9: Punto silla

Otra forma de saber qué tipo de punto fijo se tiene, es estudiando la relación entre la traza y el determinante de la matriz asociada al sistema. Sea  $A$  la matriz asociada al sistema  $\dot{X} = AX$ , tal que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

entonces

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a + d)\lambda - (ad - bc)$$



de donde

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}$$

Ahora, sean

$$p = \text{Tr}(A) = a + d$$

$$q = \det(A) = ad - bc$$

y

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = p^2 - 4q$$

Observemos que  $p^2 - 4q$  es una parábola en el plano  $p$  contra  $q$  y que según sea el signo de  $p$ ,  $q$  y  $\Delta$ , será el signo de la parte real de los valores propios. La tabla 1.1 y la figura 1.10 resumen e ilustran la relación entre los signos de  $p$ ,  $q$  y  $\Delta$  y los tipos de puntos críticos.

Puntos críticos			
$q$	$p$	$\Delta$	Tipo de punto
$q > 0$	$p > 0$	$\Delta > 0$	Nodo inestable
		$\Delta = 0$	Nodo estrella inestable
		$\Delta < 0$	Foco inestable
	$p = 0$	$\Delta < 0$	Centro, estable
	$p < 0$	$\Delta > 0$	Nodo estable
		$\Delta = 0$	Nodo estrella estable
$\Delta < 0$		Foco estable	
$q < 0$	$p < 0, p = 0, p > 0$	$\Delta > 0$	Punto silla, inestable

Cuadro 1.1: Caracterización de los puntos críticos

En general, el atractor es un conjunto de puntos, al que el sistema evoluciona después de un tiempo suficientemente largo. A la vecindad del atractor a la que converge cualquier sistema abierto que lo contenga se llama *cuenca de atracción* y sus propiedades geométricas pueden ser bastante complicadas; en algunos casos las fronteras son muy irregulares, formando lo que es llamado *límites de cuencas fractales*; en otros casos, las cuencas de atracción se cruzan, como si estuvieran entrelazadas, haciendo que cualquier punto en una cuenca sea cercano a otro punto en otra cuenca de atracción, a esto se le llama *cuenca de atracción perforada*.

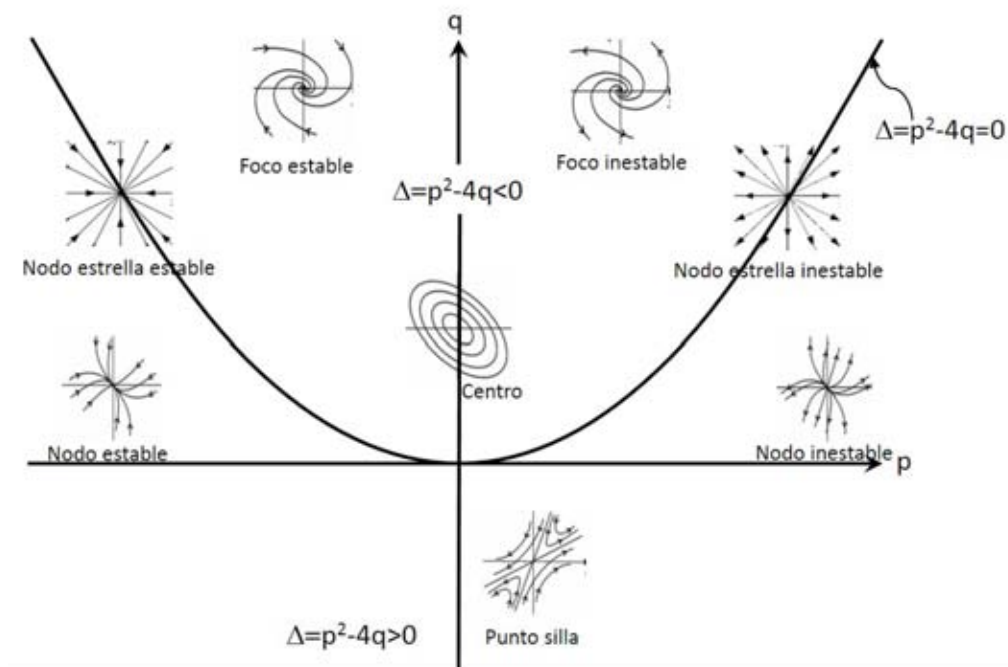


Figura 1.10: Caracterización de los puntos críticos

Si todos los autovalores de la matriz  $A$  asociada al sistema tienen parte real distinta a cero, se dice que el sistema es *hiperbólico* y al número de valores propios con parte real negativa se llama *índice de estabilidad*.

**Ejemplo 1.** Sea el sistema

$$\begin{cases} x' = y(13 - x^2 - y^2) \\ y' = 12 - x(13 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad (1.5)$$

Los puntos fijos se obtienen resolviendo

$$x' = y(13 - x^2 - y^2) = 0 \quad (1.6)$$

$$y' = 12 - x(13 - x^2 - y^2) = 0 \quad (1.7)$$

De 1.6 se tiene que o  $y = 0$  o  $13 - x^2 - y^2 = 0$ , pero si  $13 - x^2 - y^2 = 0$ , entonces la ecuación 1.7 es igual a 12, por lo que  $y$  sólo puede ser cero.

Sustituyendo  $y$  en 1.6, queda que

$$\begin{aligned} 12 - x(13 - x^2) &= x^3 - 13x + 12 \\ &= (x - 1)(x - 3)(x + 4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces los puntos fijos son  $P_1 = (-4, 0)$ ,  $P_2 = (1, 0)$  y  $P_3 = (3, 0)$

La traza de la matriz jacobiana asociada al sistema es cero para cualquier punto, por lo que sólo queda evaluar el determinante en cada punto  $P_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \det(J_{P_i}) &= -\frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial x} \Big|_{P_i} \\ &= -(13 - x^2 - 3y^2)(-13 + 3x^2 + y^2) \Big|_{P_i} \end{aligned}$$

Para  $P_1 = (-4, 0)$

$$\begin{aligned} \det(J_{P_1}) &= -(13 - x^2 - 3y^2)(-13 + 3x^2 + y^2) \Big|_{P_1} \\ &= 105 > 0 \end{aligned}$$

El punto  $(-4, 0)$  es centro.

Para  $P_2 = (1, 0)$

$$\begin{aligned} J_{P_2} &= -(13 - x^2 - 3y^2)(-13 + 3x^2 + y^2) \Big|_{P_2} \\ &= 120 > 0 \end{aligned}$$

El punto  $(1, 0)$  es centro.

Para  $P_3 = (3, 0)$

$$\begin{aligned} J_{P_3} &= (-13 - x^2 - 3y^2)(-13 + 3x^2 + y^2) \Big|_{P_3} \\ &= -56 < 0 \end{aligned}$$

El punto  $(3, 0)$  es punto silla.

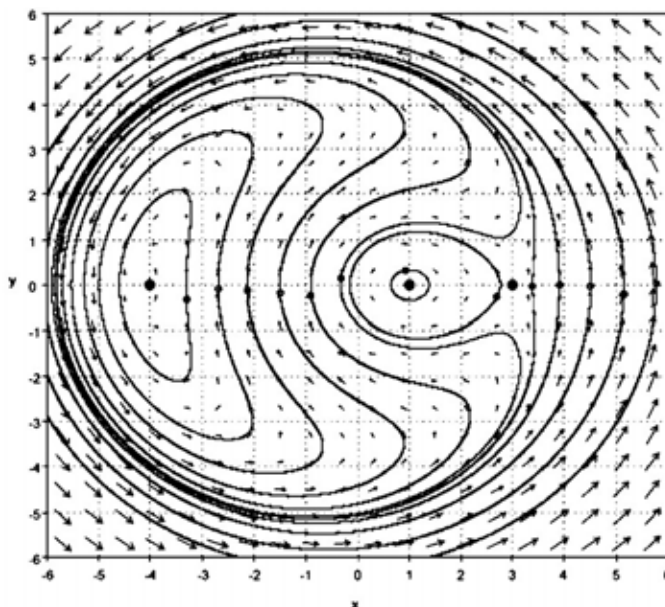


Figura 1.11: Diagrama fase del sistema 1.5

### 1.1.2. Ciclos límite

Los sistemas no lineales de dos o más ecuaciones pueden tener soluciones periódicas, que en el espacio fase son curvas cerradas alrededor de un punto centro. Cuando trayectorias no cerradas se acercan o se alejan en espiral hacia esa solución periódica y convergen a ésta cuando  $t \rightarrow \infty$ , se tiene un *ciclo límite*.

Se dice que es un *ciclo estable* (figura 1.12a) si todas las trayectorias vecinas se acercan a él y si todas se alejan entonces es un *ciclo inestable* (figura 1.12b); hay otros casos donde algunas trayectorias se alejan y otras se acercan, cuando esto pasa se dice que es un *ciclo semiestable* (figura 1.12c,d). Cuando las trayectorias no se acercan ni se alejan, el ciclo límite es *neutralmente estable*. La estabilidad de ciclos límite se le conoce como *estabilidad orbital*, pues la trayectoria límite es una órbita periódica. En la sección 2.2.3 veremos cómo determinar la estabilidad de un ciclo límite.

Los ciclos límite sólo pueden ocurrir en sistemas no lineales de dos o más dimensiones, ya que si un sistema lineal tiene órbitas cerradas, éstas corresponden a la dinámica provocada por un punto fijo centro, por lo tanto no son aisladas y no

pueden tener ciclos límite.

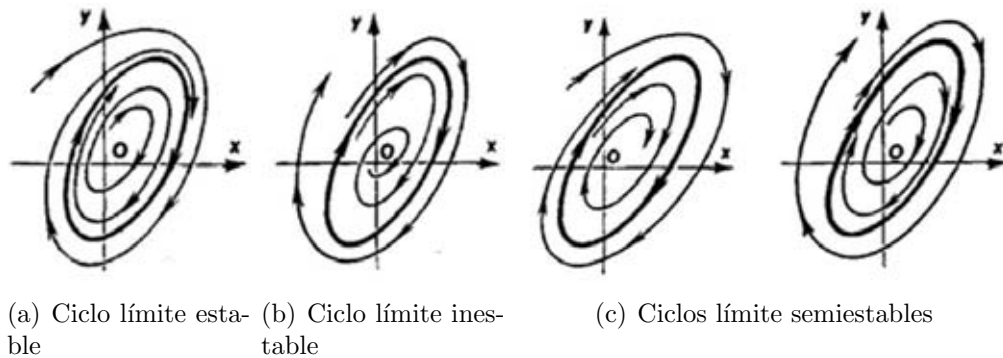


Figura 1.12: Ciclos límite

Para saber si un sistema tiene ciclos límite se recurre a los teoremas y técnicas respectivos, aquí dispondremos de dos teoremas muy útiles y conocidos, uno debido a Poincaré-Bendixon y el otro a Liénard:

### Teorema 1. Poincaré-Bendixon

Sea

- $R$  un subconjunto cerrado y acotado del plano que no contiene puntos fijos;
- $\frac{dx}{dt} = f(x)$  un campo vectorial continuamente diferenciable en un conjunto abierto contenido en  $R$ ;
- $C$  una trayectoria confinada en  $R$

Entonces  $C$  es una órbita cerrada, o gira en espiral hacia una órbita cerrada o a un punto fijo cuando  $t \rightarrow \infty$ . En cualquier caso,  $R$  contiene una órbita cerrada. [2]

### Teorema 2. Liénard

Sea  $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$  Si  $f(x)$  y  $g(x)$  satisfacen:

- I)  $f(x)$  y  $g(x)$  son continuamente diferenciables para todo  $x$
- II)  $g(x)$  es una función impar. i.e.  $g(-x) = -g(x)$  para todo  $x$

- III)  $g(x) > 0$  para todo  $x > 0$
- IV)  $f(x)$  es una función par. i.e.  $f(x) = f(-x)$  para todo  $x$
- V) la función impar  $F(x) = \int_0^x f(u)du$ :
- Tiene exactamente una raíz positiva en  $x = a$
  - Es negativa para  $0 < x < a$
  - Es positiva y no decreciente para  $x > a$
  - $F(x) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$

Entonces el sistema tiene un único ciclo límite estable en torno al origen del plano fase. [4]

### Ejemplo 2. La ecuación de Van der Pol

Consideremos la ecuación

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0 \quad (1.8)$$

donde el parámetro  $\mu > 0$ .

Convertimos la ecuación a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden mediante el cambio de variable  $y = x'$ :

$$x' = y \equiv f(x, y) \quad (1.9)$$

$$y' = \mu(1 - x^2)y - x \equiv g(x, y) \quad (1.10)$$

El único punto fijo del sistema asociado a la ecuación 1.8 es el punto  $(x, y) = (0, 0)$ , lo cual corresponde a la condición de no oscilación. Para saber si el punto es estable o inestable es necesario obtener el determinante de la matriz jacobiana del sistema dado por las ecuaciones 1.9 y 1.10 evaluado en el punto  $(x, y) = (0, 0)$ , que corresponde al sistema lineal cerca del origen:

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2x\mu y - 1 & \mu(1 - x^2) \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

Su determinante es

$$|J_{(0,0)}| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \right| = 1$$

y su traza es  $0 + \mu = \mu$ .

Como  $TrJ = \mu$ ,  $\det J = 1 > 0$  y  $\mu$  es positivo entonces el punto es inestable. Ahora, el punto es un foco cuando  $\mu < 2$ , pues  $\Delta = \mu^2 - 4 < 0$  figura 1.13a, y es un nodo cuando  $\mu \geq 2$  ya que para esos valores  $\Delta = \mu^2 - 4 \geq 0$  (figura 1.13b). Por lo tanto, cuando  $x$  es pequeña el sistema es inestable alrededor del origen.

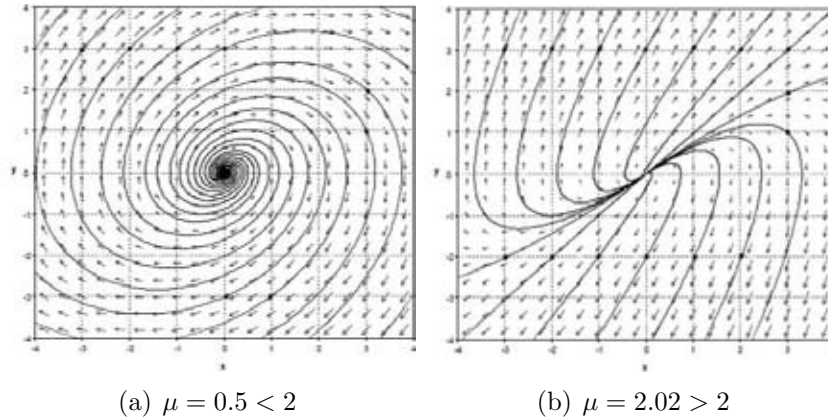


Figura 1.13: Diagramas de fase del sistema lineal asociado a la ecuación de Van der Pol para  $\mu = 0.5 < 2$  y  $\mu = 2.02 > 2$

Cuando  $x$  es grande, el término  $x^2$  de la ecuación 1.8 es el dominante. Si consideramos a  $f(x) = -\mu(1 - x^2)$  y a  $g(x) = x$  entonces la ecuación de Van der Pol cumple con el teorema de Liénard (Teo.2) pues

- I)  $f(x)$  y  $g(x)$  y sus derivadas son continuas para todo  $x$
- II)  $f(x)$  es una función par,  $g(x)$  es una función impar para todo  $x$   $g(x) > 0$ .
- III) la función impar  $F(x) = \int_0^x f(u)du$ :
  - a) Tiene exactamente una raíz positiva en  $x = \sqrt{3}$
  - b) Es negativa para  $0 < x < \sqrt{3}$
  - c) Es positiva y no decreciente para  $x > \sqrt{3}$

d)  $F(x) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$

Entonces el sistema tiene un único ciclo límite estable en torno al origen. Figura 1.14

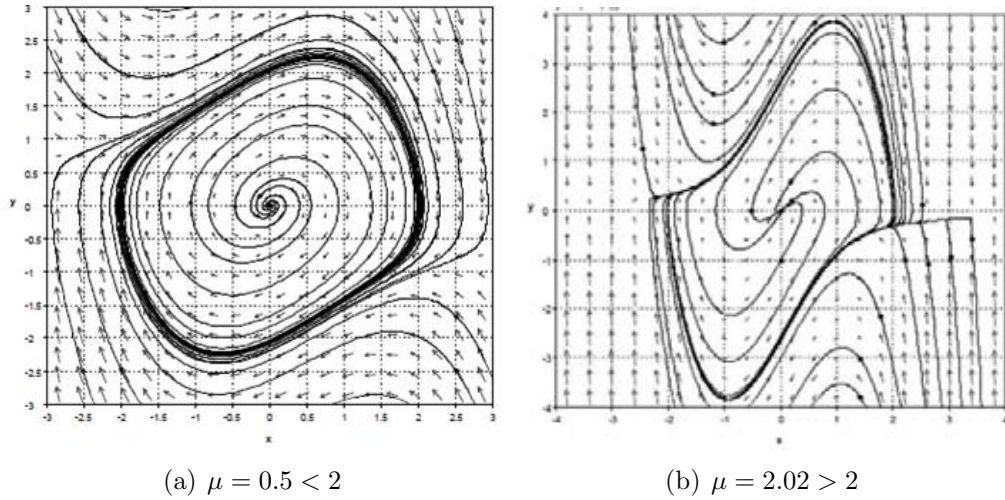


Figura 1.14: Diagramas fase de la ecuación de Van der Pol para  $\mu = 0.5 < 2$  y  $\mu = 2.02 > 2$

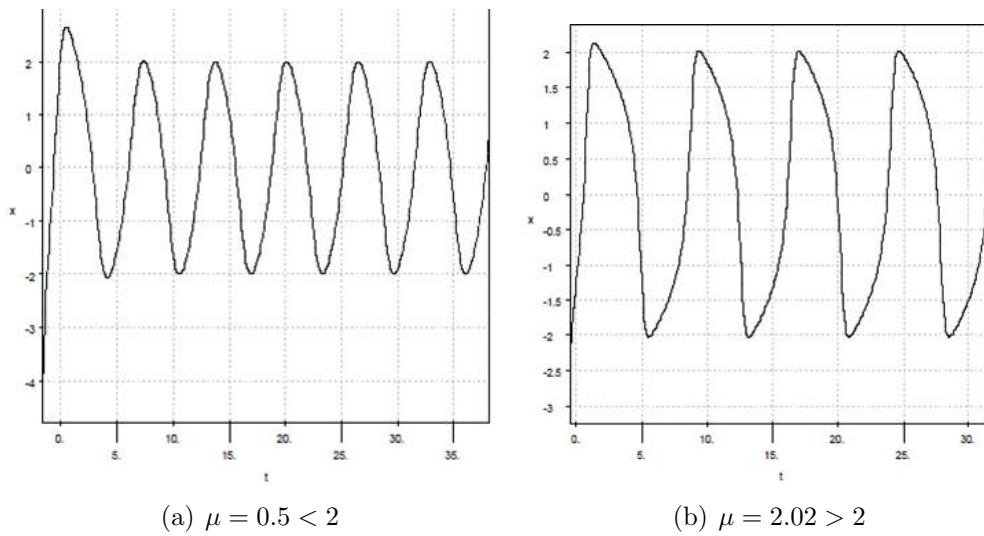


Figura 1.15: Series de tiempo de la ecuación de Van der Pol para  $\mu = 0.5 < 2$  y  $\mu = 2.02 > 2$



La clasificación de los puntos de equilibrio y ciclos límite se estudia en casi todos los libros sobre ecuaciones diferenciales ordinarias, en particular en los libros [1], [2] y [3].

### 1.1.3. Atractores extraños

Un sistema puede tener varios atractores, y según sean las condiciones iniciales, será el atractor correspondiente a determinada dinámica. El conjunto de todas las condiciones iniciales que convergen en un atractor dado es lo que se llama *cuenca de atracción*, la cual puede llegar a tener una geometría muy complicada. Si un punto pertenece a un atractor  $A$ , la evolución de ese punto también pertenece a  $A$ , eso es que el atractor es invariante bajo la dinámica del sistema, además los puntos en una cuenca de atracción dada se mueven hacia el atractor  $A$  de forma asintótica. Así, un atractor  $A$  es el conjunto invariante más pequeño que no se puede separar en dos o más subconjuntos con distintas cuencas de atracción.

El término *atractor extraño* sirve para especificar las peculiaridades que puede llegar a tener una cuenca de atracción. Estos atractores sí son “raros” si se comparan con puntos fijos o con ciclos límite, pues están caracterizados por una geometría fractal (cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas) [7] y pueden ser caóticos, aunque no necesariamente.

La complicada geometría que rige a los atractores extraños hace que sus órbitas cercanas tengan un movimiento aperiódico y sensible a las condiciones iniciales. En ocasiones surge un atractor extraño porque la trayectoria viaja de repulsor a repulsor sin tender a infinito, haciendo una órbita aperiódica, debido a la presencia de diferentes ciclos límite y puntos fijos tipo silla, como es el caso del sistema de Lorenz. Ejemplo 3.

Por otro lado, casi todos los atractores extraños se generan con un proceso de estiramiento y plegado, cuya iteración causa que el sistema sea caótico. En una dirección, los atractores mantienen su tamaño, mientras que en la otra se encogen hasta ser un “hilo” muy delgado y de longitud casi constante. Cuando el sistema es caótico, la dinámica se estira continuamente y se pliega en un pequeño volumen inicial, transformando al atractor en una “hebra” cada vez más delgada cuya longitud crece exponencialmente. Este es el proceso de *estirado y plegado*, el cual es más evidente en sistemas discretos como el mapeo de Hénon. Ejemplo 4. El *estirado* hace que las

condiciones iniciales se separen exponencialmente rápido, mientras que el *plegado* causa mezclas en el espacio fase. La figura 1.16 muestra un esquema de este proceso. [8] [13]

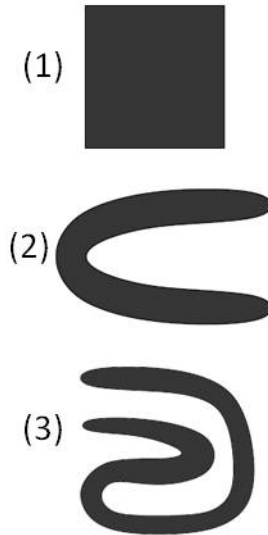


Figura 1.16: Esquema del proceso de estirado y plegado

Para dejar más claro lo anterior, se muestran dos ejemplos (ejemplo 3 y ejemplo 4). El primero es el sistema continuo del que se obtiene el famosos *atractor de Lorenz* y el segundo un sistema discreto conocido como *mapeo de Hénon*.

### Ejemplo 3. Sistema de Lorenz

Sea el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(-x + y) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (1.11)$$

donde los parámetros  $\sigma$ ,  $r$  y  $b$  son reales positivos.

Localizando los puntos fijos:

$$\sigma(-x + y) = 0 \quad (1.12)$$

$$rx - y - xz = 0 \quad (1.13)$$

$$-bz + xy = 0 \quad (1.14)$$

de 1.12 se tiene que  $x = y$ ; sustituyendo  $y$  en 1.13 y 1.14 se obtiene

$$x(r - 1 - z) = 0 \quad (1.15)$$

$$x^2 - bz = 0 \quad (1.16)$$

por lo que, de 1.15,  $x = 0$  o  $r - 1 - z = 0$ :

- Si  $x = 0$ , entonces, de 1.16,  $z = 0$ .
- Si  $r - 1 - z = 0$ , entonces  $z = r - 1$ . Sustituyendo  $z$  en 1.16 se obtiene  $x = \pm\sqrt{b(r-1)}$  y como  $x = y$ , entonces  $y = \pm\sqrt{b(r-1)}$ . Por lo que  $x$  y  $y$  son reales sólo cuando  $r > 1$ .

Cuando  $r > 1$  hay tres puntos críticos:  $P_1 = (0, 0, 0)$ ,  $P_2 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$  y  $P_3 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ , los cuales coinciden cuando  $r = 1$ . Y cuando  $r < 1$ , el punto  $P_1 = (0, 0, 0)$  es la única singularidad.

De lo anterior se hace evidente que a medida que  $r$  crece, pasando por el valor uno, el punto crítico  $P_1$  en el origen se ramifica y aparecen los puntos  $P_2$  y  $P_3$ .

Sigue determinar el comportamiento local de las soluciones. Para simplificar el trabajo, se tomarán valores fijos de los parámetros  $\sigma$  y  $b$ , pues es  $r$  el que modifica el comportamiento del sistema al ser variado. Sea  $\sigma = 10$  y  $b = 3$ .

El sistema lineal cerca de los puntos críticos  $P_i$  donde  $i = 1, 2, 3$ , es

$$J_{P_i} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -3 \end{pmatrix} \Big|_{P_i} \quad (1.17)$$

Cerca de  $P_1$  (el origen), la matriz asociada al sistema lineal es:

$$J_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -3 \end{pmatrix} \Big|_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Sus valores propios están determinados por

$$\begin{vmatrix} -(10 + \lambda) & 10 & 0 \\ r - z & -(1 + \lambda) & -x \\ y & x & -(3 + \lambda) \end{vmatrix} = -[\lambda + 3][\lambda^2 + 11\lambda - 10(r - 1)]$$

de donde

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = \frac{1}{2}(-\sqrt{40r + 81} - 11), \lambda_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{40r + 81} - 11)$$

Cuando  $r < 1$  los tres eigenvalores son negativos, por lo que el origen es asintóticamente estable para la aproximación lineal y para el sistema original 1.11. Cuando  $r = 1$ ,  $\lambda_3 = 0$  y cuando  $r > 1$ ,  $\lambda_3$  es positivo. Entonces todas las soluciones que se inician cerca del origen tienden a crecer, salvo las que se encuentran en el plano  $\lambda_1\lambda_2$ .

Ahora veamos qué pasa alrededor  $P_2 = (\sqrt{3(r-1)}, \sqrt{3(r-1)}, r-1)$ . La matriz asociada al sistema lineal es:

$$J_{P_2} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{3(r-1)} \\ \sqrt{3(r-1)} & \sqrt{3(r-1)} & -3 \end{pmatrix}$$

Sus valores propios están determinados por

$$\begin{vmatrix} -(10 + \lambda) & 10 & 0 \\ 1 & -(1 + \lambda) & -\sqrt{3(r-1)} \\ \sqrt{3(r-1)} & \sqrt{3(r-1)} & -(3 + \lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 14\lambda^2 - 3\lambda(10-r) - 60(r-1) \quad (1.18)$$

Cuyas soluciones son dependientes de  $r$  de la siguiente manera:

- Para  $1 < r < r_1 \cong 1.2228$  se tienen tres eigenvalores reales negativos.
- Para  $r_1 < r < r_2 = 4.7057$  se tiene un eigenvalor real negativo y dos eigenvalores complejos con parte real negativa.
- Para  $r_2 < r$  se tiene un eigenvalor real negativo y dos eigenvalores complejos con parte real positiva.

Para el punto crítico  $P_3$  se obtienen los mismos resultados.

Entonces:

- Cuando  $0 < r < 1$ , el único punto crítico es  $P_1$ , el cual es asintóticamente estable.
- Cuando  $1 < r < r_1$ ,  $P_1$  es inestable y  $P_2$  y  $P_3$  son nodos estables.
- Cuando  $r_1 < r < r_2$ ,  $P_1$  es inestable y  $P_2$  y  $P_3$  son focos estables.
- Cuando  $r_2 < r$  Todos los puntos son inestables.

Ahora, consideremos soluciones para  $r > r_2$ , entonces  $P_1$  tiene un eigenvalor positivo y tanto  $P_2$  como  $P_3$  tienen eigenvalores complejos con parte real positiva, es decir, son focos inestables. Ya que ningún punto crítico es estable, cualquier trayectoria que se aproxime a uno de estos puntos será sobre un camino muy restringido, pues una mínima desviación provoca que la trayectoria se aleje, es decir, cualesquiera dos puntos cercanos en el espacio fase se separan exponencialmente y sus trayectorias acaban perdiendo toda correlación la una con la otra, de manera que existe la propiedad de sensibilidad a las condiciones iniciales. Por lo mismo, se podría esperar que la mayoría de las trayectorias diverja cuando  $t$  tiende a infinito, pero, por el contrario, todas las soluciones están acotadas, aún cuando  $t \rightarrow \infty$  y esto es cierto para todos los valores positivos de  $r$ . El conjunto que atrae todas las trayectorias es el *atractor extraño* del sistema de Lorenz. Se puede visualizar como una órbita que da algunas vueltas alrededor de  $P_2$  seguidas de algunas vueltas alrededor de  $P_3$  y así sucesivamente. Figura 1.17

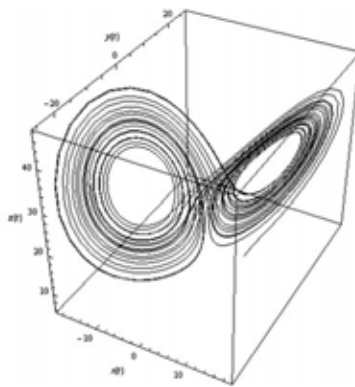


Figura 1.17: Diagrama fase del atractor de Lorenz para  $\sigma = 10$ ,  $b = 3$  y  $r = 30$

**Ejemplo 4. Mapeo de Hénon**

El mapeo de Hénon es en realidad una composición de tres mapeos. Primero, se curva la elipse de tal forma que preserve el área, luego se contrae en la dirección  $x$  y por último, se refleja respecto a la diagonal. Figura 1.18.

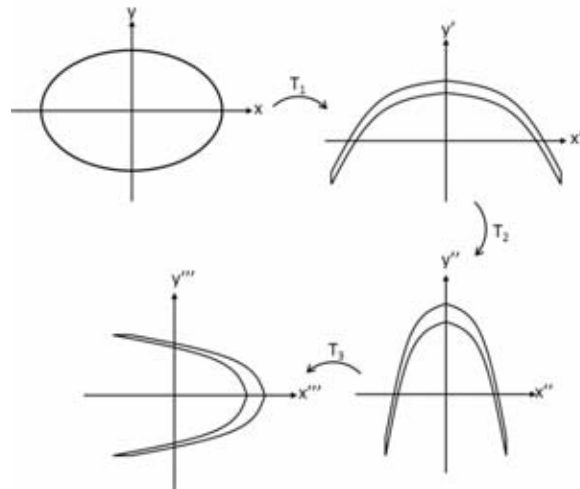


Figura 1.18: Diagrama del mapeo de Hénon

La composición de los tres mapeos es el *mapeo de Hénon* y está dado por el sistema:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 - ax_t^2 + y_t \equiv f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} &= bx_t \equiv g(x_t, y_t) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Donde  $a$  controla el término no lineal y  $b$  controla la disipación del sistema.

Calculemos la disipación del sistema mediante el determinante Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} -2ax_t & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b$$

Esto significa que, en cada iteración, las áreas se multiplican por  $|b|$ . Después de  $n$  iteraciones del mapeo, un área inicial  $A_0$  se convierte en un área  $A_n = A_0|b|^n$ .

El comportamiento del sistema cambiará según sean los parámetros  $a$  y  $b$ , pues si  $a$  es muy grande o pequeño las trayectorias irán al infinito (estirado) y la velocidad de contracción de áreas está definida por  $b$  (plegado). Al igual que Hénon, escogeremos  $a = 1.4$  y  $b = 0.3$  porque la iteración del mapeo para estos valores genera la existencia de un atractor extraño. Figura 1.19.

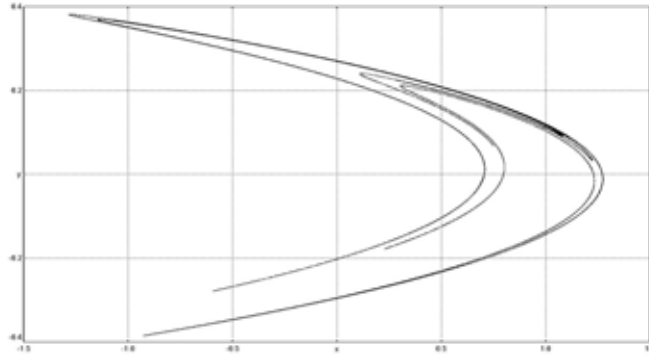


Figura 1.19: Atractor de Hénon para  $a = 1.4$  y  $b = 0.3$

El objeto que describe la órbita asintótica de este mapeo no depende de las condiciones iniciales. Es una figura similar al conjunto de Cantor, el cual presenta geometría fractal, que, para ciertos valores de los parámetros, tiene una región de confinamiento estable, es decir es un atractor y es conocida como el *atractor de Hénon*. En la figura 1.20 se puede apreciar la similitud con el conjunto de Cantor. [8]

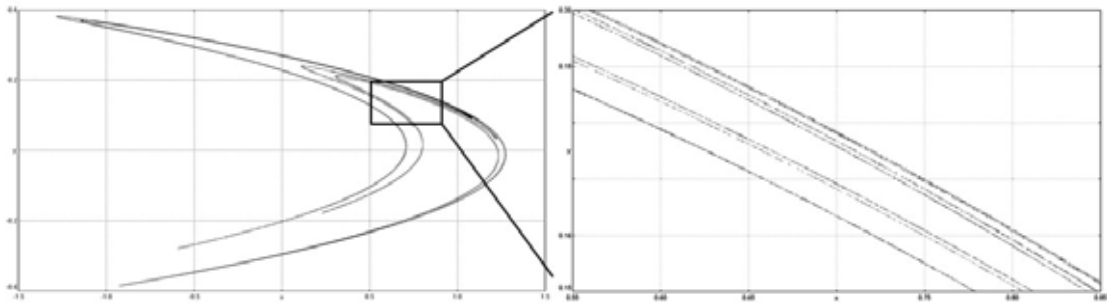


Figura 1.20: Ampliación del atractor de Hénon

## Capítulo 2

# Caos determinista

La palabra caos viene del latín *chaos* y ésta del griego  $\chi\alpha\omicron\sigma$ . En la Grecia antigua era considerado como el estado amorfo e indefinido anterior a la ordenación del cosmos, aquello que existió antes que el resto de los dioses y fuerzas elementales. Actualmente, esta palabra es utilizada para denotar un estado de desorden, confusión e, incluso, irregularidad. Sin embargo, en matemáticas se utiliza como el comportamiento supuestamente errático e impredecible de algunos sistemas dinámicos.

Por otro lado, la palabra “determinista” del latín *determiāre* se refiere a sistemas cuyo estado inicial precisa el estado futuro, es decir, sistemas que están definidos por la cadena *causa - consecuencia*. éstos pertenecen al determinismo, el cual postula que el desarrollo de los fenómenos naturales está definido del todo por las condiciones iniciales. Para los sistemas deterministas existen algoritmos que sirven para calcular el comportamiento futuro según las condiciones iniciales que se tengan.

Se podría suponer que estos sistemas son regulares pues sus estados evolucionan continuamente uno del otro. Pero, a finales del siglo XIX, el matemático francés Henri Poincaré descubrió que los sistemas mecánicos hamiltonianos pueden conducir a comportamientos caóticos, llegando a postular que “el azar no es más que la medida de la ignorancia del hombre”.

El descubrimiento de Poincaré fue considerado por muchos años como una peculiaridad; fue hasta siete décadas después, en 1963, que el meteorólogo Edward Lorenz encontró para su máquina del clima un sistema autónomo formado por tres



ecuaciones diferenciales no lineales, con tres parámetros. Para determinados valores de los parámetros observó que las trayectorias son impredecibles, pues cambios muy pequeños en las condiciones iniciales podían producir trayectorias muy dispares, como se vio en el ejemplo de atractores extraños 3. Así describió fenómenos utilizando la palabra *caos* para describir modelos de sistemas físicos que aparentan un comportamiento aleatorio aún habiendo suprimido la aleatoriedad. En las ecuaciones de Lorenz, lo importante es la no linealidad, la cual es una condición necesaria, pero no suficiente, para la presencia de caos determinista.

Entonces el caos determinista alude a movimientos irregulares producidos por sistemas no lineales cuya evolución en el tiempo está determinada en forma única a partir del conocimiento de su historia anterior, en términos generales, el caos determinista da lugar a trayectorias irregulares aparentemente aleatorias que, sin embargo, son deterministas.

Los sistemas caóticos tienen la propiedad de que las trayectorias se separan exponencialmente rápido en una región limitada del espacio fase que inicialmente era cerrada. Si se trata de resolver dichos sistemas, el resultado dependerá de la amplitud del tiempo y de la cantidad de dígitos decimales de los números irracionales, los cuales se distribuyen de forma irregular llevando a una trayectoria caótica. Lorenz llamó *efecto mariposa* a esta dependencia a las condiciones iniciales, porque el resultado de sus ecuaciones (que describen el flujo de aire en la atmósfera de la tierra) podría ser cambiado por el batir de alas de una mariposa.

Cabe recalcar que el caos determinista tiene grandes consecuencias en muchas ramas de la ciencia, algunos sistemas que presentan caos deterministas son el péndulo forzado, los fluidos cerca de una turbulencia, algunas reacciones químicas, el problema de los tres cuerpos, dinámica de poblaciones biológicas, etcétera, y es por eso que uno de los temas más importantes que trata esta teoría es el determinar los caminos específicos por los cuales los sistemas no lineales llegan a tener conjuntos caóticos en su evolución. Por ejemplo, en el sistema de Lorenz, el caos aparece con una serie de bifurcaciones; en cambio, en el mapeo de Hénon, el cambio del parámetro de control no genera una transición hacia el caos. Las herramientas necesarias para determinar si un sistema presentará caos o no es la materia de la que trata este capítulo.

## 2.1. Exponentes de Liapunov

Los exponentes de Liapunov miden el grado de caoticidad de un sistema, ya que actúan como cuantificador del comportamiento caótico. [8]

Un *atractor es caótico* si las trayectorias en él muestran *divergencia exponencial de trayectorias cercanas*, es decir, si dos trayectorias cercanas a un atractor caótico comienzan con separación  $d_0$  en el tiempo  $t = 0$  entonces las trayectorias divergen de modo que su separación al tiempo  $t$ , denotado por  $d(t)$ , satisface la expresión

$$d(t) = d_0 e^{\lambda t}$$

Donde el parámetro  $\lambda$  es el *exponente de Liapunov* para las trayectorias. Si  $\lambda > 0$ , se tiene comportamiento caótico.

Veamos como, para un espacio de estado de una dimensión, la distancia entre dos trayectorias se expande o se contrae exponencialmente en el tiempo. Sea  $x_0$  un punto inicial;  $x_0(t)$  la trayectoria que surge del mismo;  $x$  un punto cercano al punto inicial;  $x(t)$  la trayectoria que surge de  $x$  y sea  $s = x(t) - x_0(t)$  la distancia entre las dos trayectorias.

La ecuación de desarrollo del tiempo es

$$\dot{x}(t) = f(x)$$

La cual se puede expandir en series de Taylor, ya que estamos suponiendo que  $x$  es cercano a  $x_0$ . La expansión es

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \dots$$

El cambio de la distancia entre las dos trayectorias está dado por

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{x} - \dot{x}_0 \\ &= f(x) - f(x_0) \\ &= \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Que es el primer término derivado de la expansión en series de Taylor de  $f(x)$ .

La distancia  $s$  cambia exponencialmente en el tiempo, es decir,

$$s(t) = s(0)e^{\lambda t} \quad (2.2)$$

el número  $\lambda$  que satisface la ecuación 2.2 es el exponente de Liapunov [8].

Al derivar la ecuación 2.2 respecto a  $t$  tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \lambda[s(0)e^{\lambda t}] \\ &= \lambda s \end{aligned} \quad (2.3)$$

Igualando las ecuaciones 2.3 y 2.1 se tiene que

$$\lambda = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \quad (2.4)$$

Por lo que si  $\lambda > 0$ , las trayectorias divergen y si  $\lambda < 0$  convergen.

Cuando se tienen espacios de estado con dos o más dimensiones, se asocia un exponente de Liapunov por cada una de las direcciones en el espacio de estado que dan la tasa de expansión o contracción de las trayectorias. En particular, para  $n$  dimensiones, se deben definir  $n$  exponentes de Liapunov, los cuales son los eigenvalores de la matriz jacobiana evaluada en el punto del espacio de estado en cuestión.

En el caso especial para el cual la matriz jacobiana es diagonal, los tres eigenvalores y por ende los tres exponentes de Liapunov locales están dados por

$$\lambda_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \quad (2.5)$$

$$\lambda_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad (2.6)$$

$$\lambda_3 = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \quad (2.7)$$

donde las derivadas parciales son evaluadas en el punto en cuestión del espacio de estado.

La función de evolución de tiempo  $f(t)$  generalmente varía conforme  $x$  lo hace; es por esto que queremos que el valor de  $\lambda$  que se toma es un promedio que se toma sobre los distintos  $\lambda$  de la historia de la trayectoria. Si se conoce explícitamente la función de evolución de tiempo  $f(t)$  sólo se evalúa la derivada a lo largo de su trayectoria

y se encuentra el valor promedio. El conjunto de promedios de los exponentes de Liapunov para un sistema es llamado *espectro de los exponentes de Liapunov*.

Los sistemas caóticos tienen la característica de que al menos uno los promedios de los exponentes de Liapunov locales es positivo. La tabla 2.1 resume la relación entre el espectro de exponentes de Liapunov y atractores asociados en el espacio de estado de tres dimensiones.

Signos de $\lambda$ 's	Tipo de atractor
(-, -, -)	Punto fijo
(0, -, -)	Ciclo límite
(0, 0, -)	Toro cuasiperiódico
(+, 0, -)	Caótico

Cuadro 2.1: Espectro de exponentes de Liapunov y atractores asociados en un espacio estado de tres dimensiones

Una propiedad del comportamiento caótico es la divergencia de trayectorias cercanas, misma que es exponencial en la variable de tiempo para sistemas continuos, por lo que se puede concluir que la propiedad de ser caótico es una característica de un grupo de trayectorias. Para sistemas discretos, esta divergencia es exponencial como función del número de iteraciones para mapeos iterados. Sin embargo, una trayectoria cercana a un atractor caótico para un sistema cerrado regresa, con proximidad infinitesimal, a cualquier punto previo en la trayectoria en infinitas ocasiones. La divergencia de estos puntos con proximidad infinitesimal en una sola trayectoria corresponde a tiempos muy diferentes.

Formalmente, sea  $x_0$  un punto atractor y  $x_0 + \varepsilon$  un punto en la vecindad de  $x_0$ . Aplicando el mapeo iterado  $n$  veces a cada valor y consideremos el valor absoluto de la diferencia entre los dos resultados, i.e.

$$d_n \equiv |f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)|$$

Si el comportamiento es caótico,  $d_n$  crecerá exponencialmente con  $n$ , entonces

$$\frac{d_n}{\varepsilon} = \frac{|f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\varepsilon} \equiv e^{\lambda n}$$

o

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{|f^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(x_0)|}{\varepsilon} \quad (2.8)$$

Definiendo así el exponente de Liapunov para una trayectoria.

El exponente de Liapunov se puede ver geoméricamente en una gráfica de  $\lambda$  en función del parámetro del sistema. En la figura 2.1 se muestra la gráfica de los exponentes de Liapunov en función del parámetro  $a$  del mapeo de Hénon (sistema 1.19)

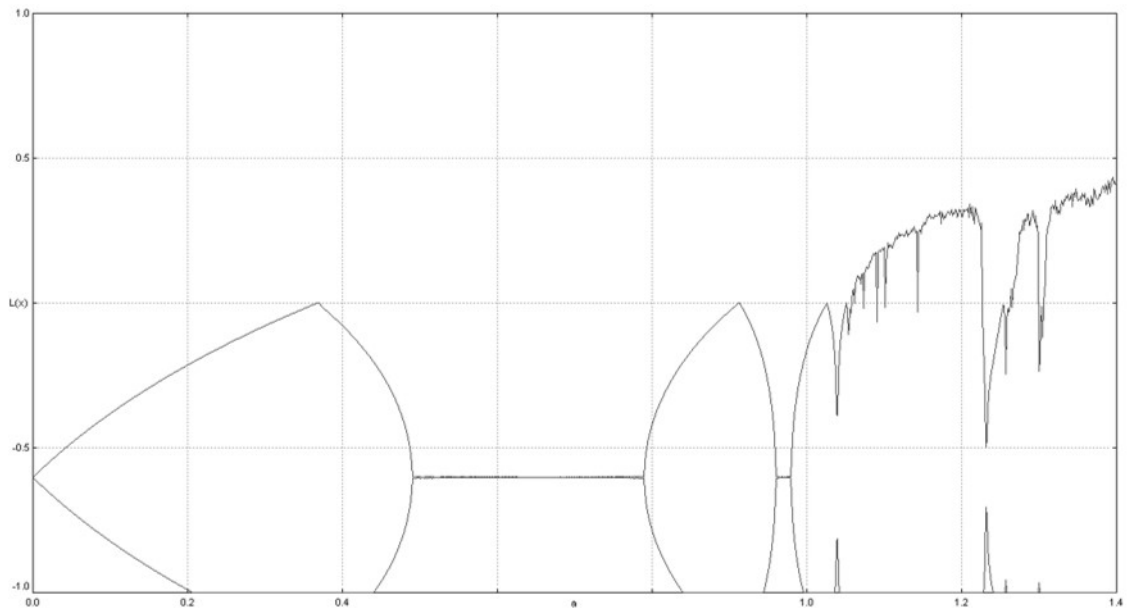


Figura 2.1: Exponentes de Liapunov del mapeo de Hénon para  $b = 0.3$

## 2.2. Secciones de Poincaré

La aplicación de Poincaré permite que un espacio de fase de dimensión  $n$  sea reducido a una representación de dimensión  $n - 1$ , la cual permite identificar la periodicidad de una trayectoria incluso cuando el comportamiento del espacio fase completo sea muy complicado. Estas aplicaciones también son valiosas para análisis más refinados que los que ofrece la simple visualización, porque preserva las propiedades de estabilidad de puntos y curvas. Por ejemplo, visualizar trayectorias de dimensión mayor a tres es imposible, pero al recurrir a la técnica de la sección o aplicación de Poincaré se puede obtener una representación gráfica y de gran utilidad de

la trayectoria. [11]

### 2.2.1. Construcción de las secciones de Poincaré

Sea  $\Gamma$  una función de dimensión 3. En lugar de estudiar directamente esa función, consideremos su intersección con el plano  $z = h$  que llamaremos  $S$  y observemos lo siguiente:

- Los puntos de intersección corresponden a  $\dot{z} < 0$  en  $\Gamma$  (en este caso).
- La altura  $h$  del plano  $S$  se escoge de forma que  $\Gamma$  cruza a  $S$  continuamente.
- Los puntos de intersección de  $\Gamma$  con  $S$  ( $P_0, P_1, P_2$ ), forman la sección de Poincaré de dimensión 2. Figura 2.2

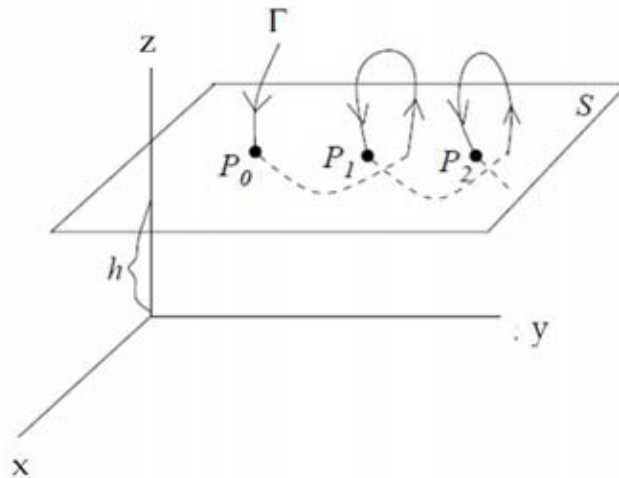


Figura 2.2: Sección de Poincaré de una función  $\Gamma$  de dimensión tres

La sección de Poincaré reduce una función continua a una función discreta (aunque el intervalo entre punto y punto no es necesariamente constante). Es una función continua  $T$  del plano  $S$  en sí mismo:

$$P_{k+1} = T(P_k) = T[T(P_{k-1})] = T^2(P_{k-1}) = \dots$$

y dado a que la función es determinista,  $P_0$  determina  $P_1$ ,  $P_1$  determina  $P_2$ , etcétera. Esencialmente, provee un medio para visualizar un atractor que de otra manera podría ser desordenado y posiblemente aperiódico. Las propiedades geométricas que tienen en común la función y su sección de Poincaré son:

- Disipación, las áreas deben de contraerse en la sección de Poincaré.
- Si la función tiene un atractor, se debe advertir en la sección de Poincaré

### 2.2.2. Tipos de secciones de Poincaré

En general, las funciones continuas se pueden clasificar en tres tipos:

1. Periódicas: Si los valores de una función  $f(x)$  se repiten conforme al añadir a la variable independiente  $x$  un determinado período  $P$ , o sea:  $f(x) = f(x + P)$
2. Cuasiperiódicas: Cuando una función  $f(x)$  se puede expresar como una suma finita de funciones  $f_n(x)$ , tales que los periodos de estas funciones sean todos inconmensurables entre sí. Por ejemplo, para  $a$  irracional,  $f(x) = \sin(ax) + \cos(x)$  es cuasiperiódica.
3. Aperiódicas: Cuando no son periódicas ni cuasiperiódicas.

#### Funciones periódicas

Sea  $P_0$  un punto fijo en el mapeo de Poincaré, i.e. :

$$P_0 = T(P_0) = T^2(P_0) = \dots$$

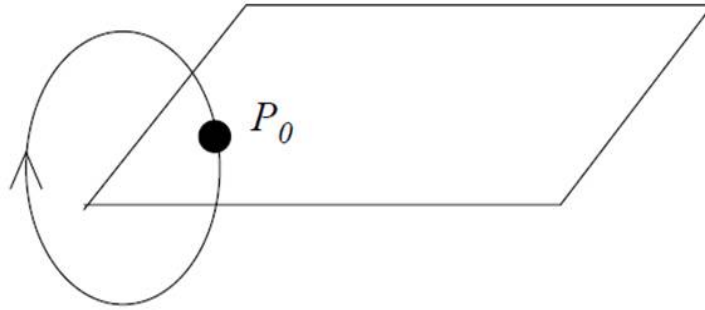


Figura 2.3: Sección de Poincaré de alguna función periódica

Veamos la estabilidad del  $P_0$ .

Para primer orden, el mapeo de Poincaré  $T$  es descrito por la matriz  $M$ , llamada matriz de Floquet, definida en la vecindad de  $P_0$ :

$$M_{ij} = \left. \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \right|_{P_0}$$

$M$  describe cómo un punto  $P_0 + \delta$  se mueve después de una intersección del mapeo de Poincaré. Aplicando la expansión de Taylor alrededor de este punto se tiene que:

$$T_i(P_0 + \delta) \simeq T_i(P_0) + \left. \frac{\partial T_i}{\partial x_1} \right|_{P_0} \delta_1 + \left. \frac{\partial T_i}{\partial x_2} \right|_{P_0} \delta_2, \quad i = 1, 2$$

Como  $T(P_0) = P_0$ ,

$$T(P_0 + \delta) \simeq P_0 + M\delta$$

Luego

$$T(T(P_0 + \delta)) \simeq P_0 + M^2\delta$$

Después de  $n$  iteraciones del mapeo queda:

$$T^n(P_0 + \delta) - P_0 \simeq M^n\delta$$



Siempre habrá una proyección sobre un vector propio, supongamos que  $\delta$  es un eigenvector de  $M$ . Entonces

$$M^n \delta = \lambda^n \delta$$

donde  $\lambda$  es el eigenvalor correspondiente.

Así,

Si  $|\lambda| < 1 \Rightarrow$  es linealmente estable.

Si  $|\lambda| > 1 \Rightarrow$  es linealmente inestable.

Se puede concluir que si se tiene que un mapeo periódico es inestable si uno de los eigenvalores de la matriz de Floquet cruza el círculo unitario en el plano complejo.

Ahora consideremos un flujo de dimensión 3 con dos frecuencias fundamentales  $f_1$  y  $f_2$ . El flujo se puede representar en un toroide  $T^2$ . Figura 2.4

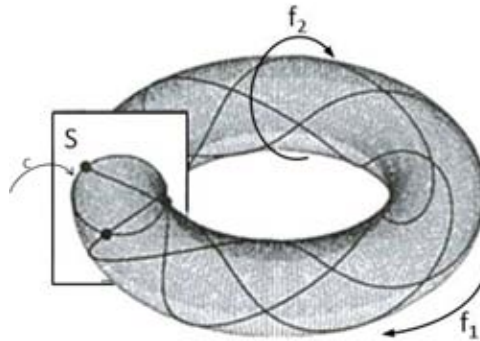


Figura 2.4: Dos frecuencias en un toroide

La sección de Poincaré del flujo para el plano  $S$  es la curva cerrada  $C$ , cuya forma depende de si  $\frac{f_1}{f_2}$  es racional o irracional. A  $\frac{f_1}{f_2}$  se le llama *parámetro de razón de frecuencia* y es denotado por  $\Omega$ .

Si  $\Omega$  es **racional**, entonces:

- $f_1$  y  $f_2$  son *frecuencias cerradas*.
- Hay un número finito de puntos a lo largo de la curva  $C$ .
- La trayectoria se repite después de  $n$  revoluciones y  $m$  rotaciones.  $n, m \in \mathbf{N}$ .
- La sección de Poincaré es periódica con periodo  $P = \frac{n}{f_1} = \frac{m}{f_2}$ .
- La sección de Poincaré contiene sólo  $n$  puntos. Entonces  $P_i = T^n(P_i)$
- Ejemplo,  $n = 8$

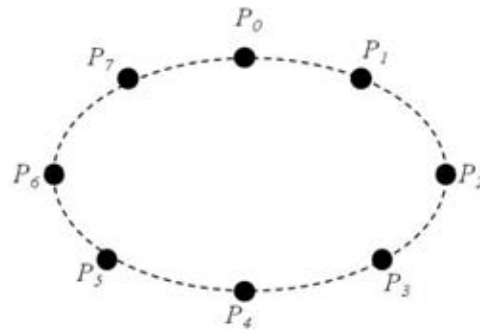


Figura 2.5: Diagrama de la sección de Poincaré de alguna función periódica

### Funciones cuasiperiódicas

Este caso se da cuando el flujo de dimensión 3 con dos frecuencias fundamentales  $f_1$  y  $f_2$  cuya relación  $\Omega = \frac{f_1}{f_2}$  es **irracional**. Aquí las frecuencias son llamadas *incommensurables*; la trayectoria en el toroide  $T^2$  nunca se repite exactamente; la curva  $C$  es continua y no gira interminablemente sino más bien  $T(C)$  es una curva finita a lo largo de  $C$ . Figura 2.6 [12]

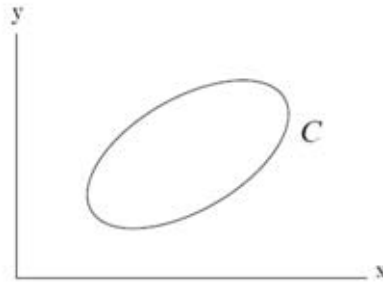


Figura 2.6: Diagrama de la sección de Poincaré de alguna función cuasiperiódica

### Funciones aperiódicas

Las funciones aperiódicas pueden no tener curvas como secciones de Poincaré razonablemente simples. En casos extremos, se puede tener una nube de puntos. Figura 2.7



Figura 2.7: Diagrama de la sección de Poincaré de alguna función aperiódica

Sin embargo, los sistemas deterministas aperiódicos con frecuencia muestra más orden. En algunos casos muestran desviaciones leves de curvas simples.

Tales situaciones surgen de fuertes disipaciones y la contracción resultante de áreas en el espacio fase. Para estos casos es útil definir una coordenada  $x$  que caiga más o menos en la curva, y estudiar las iteraciones de  $x$ . Esto se llama *mapeo de primer regreso*.

Los mapeos de primer regreso son reducciones a una dimensión del tipo de mapeos de Poincaré de dos dimensiones que hemos estado considerando. Tales mapeos son

de la forma

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

Un ejemplo de este tipo de mapeos es el **mapeo logístico**, el cual estudiaremos en la sección 3.2 del capítulo 3

### 2.2.3. Estabilidad de ciclos límite

Estudiar la estabilidad de los ciclos límite puede ser un tanto tedioso si se hace calculando los valores característicos; sería mucho más fácil estudiar el comportamiento de puntos fijos en una recta que nos diera la información de estabilidad que se necesita y la sección de Poincaré es justamente éso, pues revela si una función tiene atractores o repulsores y disminuye el estudio a un espacio de dimensión menor. Es por esto que el llamado *mapeo de Poincaré* será el método que estudiaremos para verificar la estabilidad de los ciclos límite.

Consideremos un ciclo límite  $C$  de dimensión 2, su sección de Poincaré se construye dibujando un segmento de línea  $S$  que atraviese el ciclo límite. Sea  $P$  el punto donde el ciclo límite cruza el segmento de línea (que va de izquierda a derecha). Figura 2.8

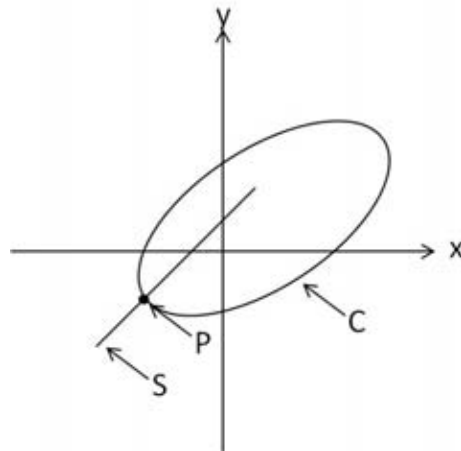


Figura 2.8: Construcción de la Sección de Poincaré de un ciclo límite

Si ahora empezamos una trayectoria en el espacio fase en un punto cercano al ciclo límite, entonces la trayectoria cruzará el segmento de línea de la sección de Poincaré en puntos distintos a  $P$ . Sea  $P_1$  el primer punto de cruce. Conforme la trayectoria evoluciona, cruzará el segmento de línea de Poincaré otra vez en los puntos  $P_2, P_3, P_4$ , etcétera. En principio, al encontrar  $P_1$ , se puede determinar el siguiente punto de cruce  $P_2$  integrando las ecuaciones que describen el sistema y encontrando una función  $F$  que relaciona a  $P_1$  con  $P_2$ :  $P_2 = F(P_1)$  (es claro que encontrar  $F$  equivale a resolver el sistema original de ecuaciones). En general  $F$  relaciona a  $P_{n+1}$  con  $P_n$  siendo la relación

$$P_{n+1} = F(P_n)$$

Cabe aclarar que la función  $F$  depende tanto de las ecuaciones originales que describen el sistema como de la elección del segmento de línea de Poincaré y es un mapeo iterado conocido como el *mapeo de Poincaré*

Para conocer la naturaleza del ciclo límite, se analiza la función  $F$  y sus derivadas.

Recordemos que

1. La sección de Poincaré reduce al problema original de dos dimensiones a un problema de una dimensión.
2. El mapeo de Poincaré  $F$  establece un relación iterativa (paso del tiempo en intervalos finitos) en lugar de una relación diferencial (paso del tiempo en forma infinitesimal).

$F$  da a  $P_{n+1}$  en términos de  $P_n$  y el intervalo de tiempo entre estos dos puntos es aproximadamente el tiempo que tarda el ciclo límite en dar una vuelta.

Como el punto  $P$  en el ciclo límite es un punto fijo, satisface  $P = F(P)$ , esto quiere decir que si una trayectoria cruza el segmento de línea exactamente en  $P$ , regresará a  $P$  en cada vuelta. ¿Qué pasa la distancia entre  $P_1$  y  $P$  conforme el sistema evoluciona?. Para contestar a esta pregunta usamos la expansión en series de Taylor alrededor del punto  $P$  de la ecuación  $P_2 - P = F(P_1) - F(P)$ :

$$P_2 - P = F(P) + \left. \frac{dF}{dP} \right|_P (P_1 - P + \dots - F(P))$$

Sea  $d_i = (P_i - P)$ , entonces

$$d_2 = \left. \frac{dF}{dP} \right|_P d_1 \quad (2.9)$$

y sea

$$M = \left. \frac{dF}{dP} \right|_P \quad (2.10)$$

$M$  es el *multiplicador característico* para el mapeo de Poincaré, también llamado *multiplicador de Floquet* o *multiplicador de Liapunov*.

En términos de  $M$ , la ecuación 2.9 queda como

$$d_2 = M d_1$$

En general

$$d_{n+1} = M^n d_1$$

Entonces se tiene un:

- **Ciclo límite atractor o estable**, si  $M < 1$  pues  $d_2 < d_1$ ,  $d_3 < d_2$ , etcétera. Los puntos de intersección se aproximan al punto fijo  $P$ , es decir si la secuencia de puntos se acerca a  $P$  conforme avanza el tiempo desde cualquier punto de inicio en la vecindad del ciclo límite. Figura 2.9

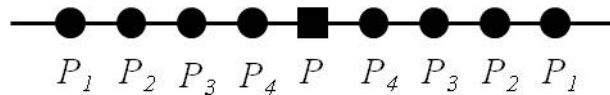


Figura 2.9: Sección de Poincaré de un ciclo límite estable

- **Ciclo límite repulsor o inestable**, Si  $M > 1$  entonces las distancias crecen con el paso del tiempo, o sea si la secuencia de puntos se aleja de  $P$ . Figura 2.10

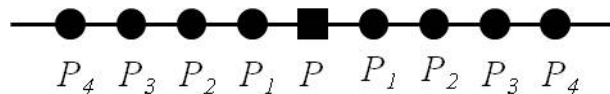


Figura 2.10: Sección de Poincaré de un ciclo límite inestable

- **Ciclo límite silla o semiestable**, si  $M = 1$ , pero la derivada del mapeo es mayor a 1 de un lado del ciclo y menor a 1 en el otro lado, i.e. si la secuencia de puntos se acerca a  $P$  por un lado y se aleja por otro. Figura 2.11

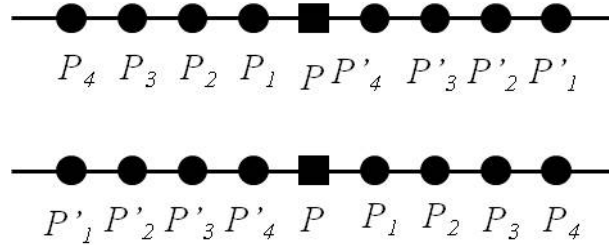


Figura 2.11: Secciones de Poincaré de ciclos límite semiestables

Para sistemas de tres o más dimensiones cada punto fijo en la sección de Poincaré corresponderá a un ciclo límite. Se puede caracterizar la estabilidad de estos puntos fijos encontrando los valores característicos asociados a la *matriz jacobiana de derivadas*, también conocida como la *matriz de Floquet* y que denotaremos como  $JM$ .

Para un sistema de la forma

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= F_1(x_n, y_n) \\y_{n+1} &= F_2(x_n, y_n)\end{aligned}$$

$JM$  es de la forma

$$JM = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

donde la matriz es evaluada en los puntos fijos del mapeo de Poincaré.

Una matriz de  $2 \times 2$  tiene dos valores característicos  $M_1, M_2$ . En general, los valores característicos de  $JM$   $M_1, M_2, \dots, M_n$  son los multiplicadores característicos o multiplicadores de Floquet y al igual que en los sistemas de dos dimensiones, el punto fijo es estable si el valor absoluto o la norma (pueden ser complejos) de cada multiplicador es menor que uno, inestable si todos los multiplicadores tienen valor absoluto mayor que uno o silla si son igual a uno.

Gráficamente, los multiplicadores complejos rotan alrededor del punto de intersección del ciclo límite. En el plano complejo, los valores característicos de un ciclo límite estarán dentro del círculo unitario, y éstos cambian conforme el parámetro de control varía. Si al menos uno de los multiplicadores cruza el círculo unitario hacia fuera del mismo, ocurre una bifurcación.

## 2.3. Bifurcaciones

La teoría de bifurcaciones estudia cómo cambian las soluciones de un sistema dinámico al cambiar los valores de un parámetro. Puede pasar que un pequeño cambio en los valores de los parámetros de un sistema dinámico tenga un gran impacto en la solución de un sistema dinámico. En general, una bifurcación ocurre cuando un sistema dinámico modifica cualitativamente su comportamiento al variar el parámetro control.

Las *bifurcaciones* ocurren para ciertos valores del parámetro. Los *valores de bifurcación* son los valores de los parámetros en los que las bifurcaciones pueden ocurrir y el parámetro variado se conoce como *parámetro de bifurcación*

En esta sección discutiremos tres tipos de bifurcación; tangente, de horquilla y la bifurcación de Hopf. Las primeras dos pueden ocurrir tanto en sistemas unidimensionales como bidimensionales, en cambio, la bifurcación de Hopf sólo ocurre en sistemas bidimensionales.

Por lo general, en una bifurcación, las propiedades locales de estabilidad de los puntos fijos, órbitas periódicas u otros conjuntos invariantes cambian.

Como herramienta para el estudio de bifurcaciones se utilizan los *diagramas de bifurcación* que son gráficas que dan la posición de los puntos fijos en función del parámetro.

### 2.3.1. Diagramas de bifurcación

Los retratos fase de un sistema dinámico representan todas las trayectorias del mismo, asociando un eje a cada una y donde cada punto del espacio representa el



posible estado de las variables del sistema, hay un espacio fase para cada valor fijo del parámetro de control. La recopilación de todos los retratos fase se representa en el *diagrama de bifurcación*, el cual representa a los puntos fijos y su estabilidad como función del parámetro. Es una manera de obtener una visión global del comportamiento de la dinámica de un sistema.

Para obtener estos diagramas de una función  $f(x, a)$ , donde  $a$  el parámetro a variar y  $x$  la variable, se toman los puntos fijos  $x_i$  de la función  $f$  y se grafican en función de  $a$ . Por ejemplo, para el mapeo de Hénon

$$x_{t+1} = 1 - ax_t^2 + bx_{t-1}$$

con  $b$  fijo en 0.3 se registra la estabilidad de los puntos fijos y sus bifurcaciones como función del parámetro  $a$ , el cual varía a lo largo del eje horizontal. Figura 2.12

Hay una relación muy estrecha entre los diagramas de bifurcación y las gráficas de los exponentes de Liapunov, pues ambos representan el comportamiento del sistema. La figura 2.12 muestra tanto el diagrama de bifurcación como la gráfica de exponente de Liapunov con su respectiva relación en el mapeo de Hénon

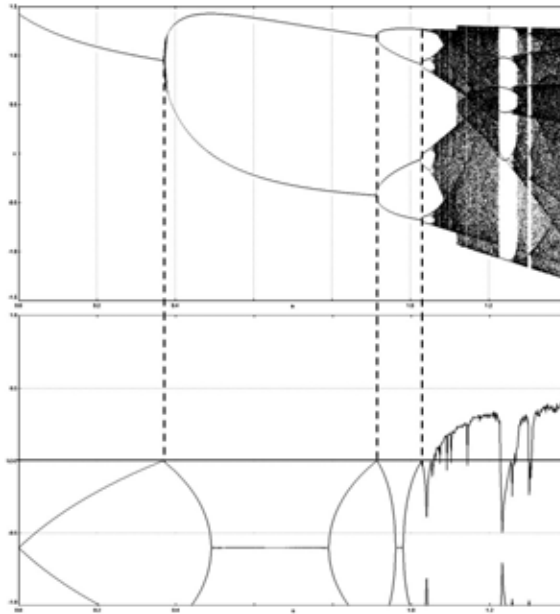


Figura 2.12: Diagrama de bifurcación y exponentes de Liapunov del mapeo de Hénon  $x_{t+1} = 1 - ax_t^2 + bx_{t-1}$  y su relación entre ellos

### 2.3.2. Bifurcación tangente

#### Sistemas de una dimensión

Esta bifurcación ocurre cuando dos puntos fijos aparecen o son destruidos. Conforme un parámetro varia, dos puntos fijos se mueven hacia el otro hasta que colisionan y se eliminan mutuamente.

Para tener una bifurcación tangente es necesario dos cosas:

1. Un punto fijo,  $f(x) = 0$
2. El punto fijo sea semiestable,  $f'(0) = 0$

En general las dos ecuaciones,  $f(x) = 0$  y  $f'(x) = 0$ , dan dos condiciones que se satisfacen en el punto de bifurcación  $(a_c, x_{sc})$ .

**Ejemplo 5.** Sea el sistema

$$x' = x^2 + \mu$$

donde  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Los puntos fijos del sistema cumplen la ecuación

$$x^2 + \mu = 0$$

por lo que

$$x^2 = -\mu$$

El parámetro de bifurcación es  $\mu$ , entonces,

- Si  $\mu < 0$ ,  $-\mu > 0$ , esto implica que la raíz cuadrada es un número real. Entonces hay dos puntos fijos, los cuales son  $x_{s1} = +\sqrt{-\mu}$  y  $x_{s2} = -\sqrt{-\mu}$ . Para este caso los retratos fase no cambian cualitativamente conforme  $\mu$  cambia dentro de este rango. El punto fijo  $x_{s2}$  siempre es estable y el punto fijo  $x_{s1}$  siempre es inestable. Figura 2.13(a)
- Si  $\mu = 0$  sólo hay un punto fijo,  $x_s = 0$ . La derivada de la ecuación es  $2x$ , entonces  $f'(x_s) = 0$ , por lo que este punto es semiestable. Figura 2.13(b)

- Si  $\mu > 0$  no hay puntos fijos, pues  $\sqrt{-\mu}$  no es un número real. Figura 2.13(c)

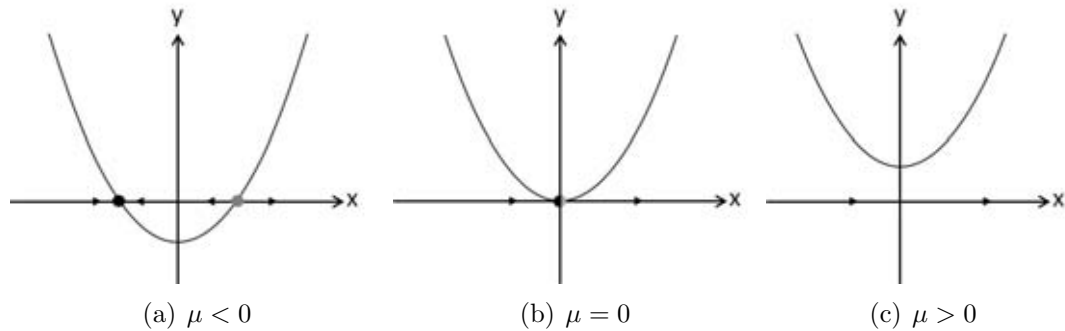


Figura 2.13: Comportamiento de un punto crítico en una bifurcación tangente

Conforme varía el parámetro  $\mu$  de negativo a positivo, dos puntos fijos se convierten en uno sólo en  $\mu = 0$ , el cual es un punto semiestable, para luego desaparecer. Este punto, en el que cambia el número de puntos fijos es el valor de bifurcación.

**Ejemplo 6.** Consideremos el sistema

$$x' = \mu - x - e^x = f(x)$$

donde  $\mu$  es el parámetro de bifurcación.

Sabemos que los puntos fijos satisfacen

$$\mu - x - e^x = 0$$

y como queremos que sean semiestables, se tienen también que

$$-1 + e^x = 0$$

Como

$$f'(x) = -1 + e^x = 0$$

entonces

$$x = 0$$

substituyendo este valor en la ecuación  $f(x) = \mu - x - e^x$  se tiene que  $\mu - 1 = 0$ , por lo que

$$\mu = 1$$

Así, la bifurcación tangente para este caso se da en el punto  $(\mu_c, x_{sc}) = (1, 0)$

### Sistemas de dos dimensiones

Explicaremos este caso con un ejemplo que puede ser la base de una generalización: Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = y - \mu x \\ y' = \frac{x^2}{1+x^2} - y \end{cases} \quad (2.11)$$

donde  $\mu$  es el parámetro, elegido positivo.

Al igual que en los sistemas de una dimensión, comenzamos por buscar los puntos fijos. Necesitamos que

$$y = \mu x, y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

luego

$$\mu x = \frac{x^2}{1+x^2} \implies x = 0 \text{ o } \mu = \frac{x}{1+x^2}$$

La condición  $x = 0$  da lugar al primer punto fijo  $P_{s1} = (0, 0)$ , para todos los valores de  $\mu$ .

Para  $\mu = \frac{x}{1+x^2}$ , tenemos

$$\mu x^2 - x + \mu = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\mu^2}}{2\mu}$$

lo que genera otros dos puntos fijos:

$$P_{s2} = \left( \frac{1 + \sqrt{1-4\mu^2}}{2\mu}, \frac{1 + \sqrt{1-4\mu^2}}{2} \right), P_{s3} = \left( \frac{1 - \sqrt{1-4\mu^2}}{2\mu}, \frac{1 - \sqrt{1-4\mu^2}}{2} \right)$$

Estos puntos fijos están definidos y son distintos sólo cuando  $1 - 4\mu^2 > 0$ , para lo cual es necesario que  $\mu < \frac{1}{2}$ .

Según sea el valor de  $\mu$  es el número de puntos fijos que tiene el sistema:

- Si  $\mu < \frac{1}{2}$  hay tres puntos fijos  $P_{s1}$ ,  $P_{s2}$  y  $P_{s3}$ .
- Si  $\mu = \frac{1}{2}$  hay dos puntos fijos,  $P_{s1}$  y  $P_{s2} = P_{s3}$ .
- Si  $\mu > \frac{1}{2}$  sólo hay un punto fijo,  $P_{s1}$ .

Conforme  $\mu$  crece, se pasa de tres puntos fijos a uno, es decir, desaparecen dos puntos fijos.

Veamos ahora la estabilidad de los puntos fijos. Calculamos el Jacobiano:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & -1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Evaluamos el Jacobiano en los distintos puntos fijos.

Para  $P_{s1}$

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

que tiene dos eigenvalores  $\lambda_1 = -\mu$  y  $\lambda_2 = -1$ . Ambos son estrictamente negativos para  $\mu > 0$ , entonces  $P_{s1}$  es un punto estable.

Para  $P_{s2}$

$$J(P_{s2}) = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ \mu(1 - \sqrt{1 - 4\mu^2}) & -1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Los eigenvalores asociados a esta matriz son

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\mu + 1) \pm \sqrt{(\mu + 1)^2 - 4\mu\sqrt{1 - 4\mu^2}}}{2}$$

Para  $\mu < \frac{1}{2}$  ambos son negativos, entonces el punto fijo  $P_{s2}$  es un nodo estable. Cuando  $\mu = \frac{1}{2}$ , uno de los eigenvalores es cero y el punto fijo se degenera.

Para  $P_{s3}$

$$J(P_{s3}) = \begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ \mu(1 + \sqrt{1 - 4\mu^2}) & -1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Los eigenvalores de la matriz son

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\mu + 1) \pm \sqrt{(\mu + 1)^2 + 4\mu\sqrt{1 - 4\mu^2}}}{2}$$

Para  $\mu < \frac{1}{2}$  uno de los eigenvalores es negativo y el otro positivo, entonces el punto fijo  $P_{s3}$  es un punto silla. Al igual que  $P_{s2}$ , cuando  $\mu = \frac{1}{2}$ , uno de los eigenvalores es cero y el punto fijo  $P_{s3}$  se degenera.

Resumiendo, para  $\mu < \frac{1}{2}$  se tienen dos puntos fijos,  $P_{s2}$  y  $P_{s3}$ . Uno de estos es punto silla (inestable), el otro es un punto estable. En  $\mu = \frac{1}{2}$  estos puntos se unen. Para  $\mu > \frac{1}{2}$ , ambos puntos desaparecen. Hay otro punto fijo  $P_{s1}$  que aparentemente no se ve afectado directamente por los valores de  $\mu$ .

### 2.3.3. Bifurcación horquilla

#### Sistemas de una dimensión

La bifurcación de horquilla consiste en que un único punto fijo se separa en tres, de los cuales, dos tienen la misma estabilidad que el punto fijo original y el otro estabilidad contraria. Es una bifurcación simétrica y, por ende, se encuentra en muchos sistemas que presentan simetría entre una parte positiva y otra negativa.

Las bifurcaciones horquilla se clasifican en dos importantes grupos:

1. Subcríticas. Cuando un punto fijo inestable bifurca en dos puntos fijos inestables y uno estable. Figura 2.14(a)
2. Supercríticas. Cuando un punto fijo estable bifurca en dos puntos fijos estables y uno inestable. Figura 2.14(b)

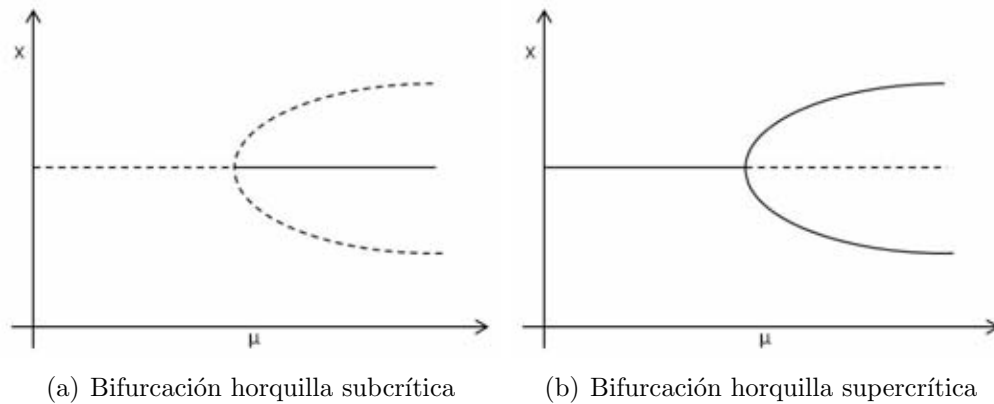


Figura 2.14: La curva continua representa comportamiento estable y la punteada comportamiento inestable

**Ejemplo 7.** Sea el sistema

$$x' = \mu x - x^3$$

Los puntos fijos están dados por

$$x_{s1} = 0, x_{s2} = +\sqrt{\mu} \text{ y } x_{s3} = -\sqrt{\mu}$$

Donde  $x_{s2}$  y  $x_{s3}$  están definidos sólo si  $\mu > 0$ .

1. Si  $\mu < 0$  sólo hay un punto fijo  $x_{s1} = 0$ . Es estable.
2. Si  $\mu = 0$   $x_{s1} = x_{s2} = x_{s3} = 0$ , por lo que hay un punto fijo con multiplicidad tres y también es estable.
3. Si  $\mu > 0$  hay tres puntos fijos,  $x_{s1} = 0$ ,  $x_{s2} = +\sqrt{\mu}$  y  $x_{s3} = -\sqrt{\mu}$ .  $x_{s1}$  ya no es estable, pero  $x_{s2}$  y  $x_{s3}$  sí lo son.

Esta es una bifurcación horquilla supercrítica porque la familia no trivial de puntos fijos ocurre para valores del parámetro más grandes que el valor de bifurcación.

**Sistemas de dos dimensiones**

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = \mu x + y + \sin x \\ y' = x - y \end{cases}$$

donde  $\mu$  es el parámetro de bifurcación.

Es claro que  $P_{s1} = (0, 0)$  es un punto fijo para cualquier valor de  $\mu$  y la matriz jacobiana para este punto es

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \mu + 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyo eigenvector es  $\lambda^2 - \mu\lambda - (\mu + 2) = 0$  y los eigenvalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4(\mu + 2)}}{2} \\ &= \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4\mu + 8}}{2} \\ &= \frac{\mu \pm \sqrt{(\mu + 2)^2 + 4}}{2} \end{aligned}$$

los cuales son siempre números reales sin importar el valor de  $\mu$ .

Cuando  $\mu = -2$ ,

$$\frac{\mu + \sqrt{(\mu + 2)^2 + 4}}{2} = 0$$

por lo que uno de los eigenvalores es cero. Este valor de  $\mu$  es candidato a ser el valor de bifurcación.

Para  $\mu = -2$ , el punto fijo  $P_{s1}$  tiene un eigenvalor en el eje imaginario, a saber el cero, entonces sus propiedades de estabilidad pueden cambiar bajo pequeñas perturbaciones. Este es el caso para  $\mu < -2$ , el punto fijo  $P_{s1}$  es un nodo estable, mientras que para  $\mu > -2$ ,  $P_{s1}$  es un punto silla. Luego  $\mu = -2$  es un valor de bifurcación.

Para saber qué tipo de bifurcación es, veamos qué pasa para valores de  $\mu$  cercanos al valor de bifurcación, y para puntos  $(x, y)$  cercanos a  $P_{s1} = (0, 0)$ . Para esto



utilizaremos la aproximación de Taylor en la función seno.

$$\begin{cases} x' = \mu x + y + x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{R}(x^5) \\ y' = x - y \end{cases}$$

Una vez más, empezamos buscando los puntos fijos. Cerca de  $P_{s1}$  se puede ignorar los términos de  $\mathcal{R}(x^5)$ , entonces, utilizando de la segunda ecuación del sistema que  $y = x$ , la condición de los puntos fijos es

$$\begin{aligned} \mu x + x + x - \frac{x^3}{6} &= 0 \\ x[6(\mu + 2) - x^2] &= 0 \\ \Rightarrow x = 0 \text{ o } x^2 &= 6(\mu + 2) \end{aligned}$$

Si  $x = 0$  y  $y = x$  entonces se tiene el punto  $P_{s1} = (0, 0)$ , por lo que

$$x = \pm\sqrt{6(\mu + 2)}$$

Se han encontrado dos ramas aproximadas de puntos fijos para  $\mu \geq -2$ :

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{6(\mu + 2)}, \quad y_{2,3} = \pm\sqrt{6(\mu + 2)},$$

Así  $P_{s2} = (x_2, y_2)$  y  $P_{s3} = (x_3, y_3)$  son puntos fijos para  $\mu > -2$ , cercanos al valor de bifurcación. Esto es una bifurcación de horquilla supercrítica en el origen para  $\mu = -2$ . Para  $\mu < -2$  hay un único punto fijo cerca del origen. Para  $\mu = -2$  este punto es degenerado y para  $\mu > -2$  hay dos puntos fijos adicionales que se originan a partir de  $P_{s1}$ . Se puede verificar que  $P_{s2}$  y  $P_{s3}$  invierten la estabilidad de  $P_{s1}$  y se ha convertido en inestable.

### 2.3.4. Bifurcación de Hopf

Algunas bifurcaciones generan ciclos límite u otras soluciones periódicas. La bifurcación de Hopf es una de las más habituales en sistemas no lineales y provoca la aparición o desaparición de un ciclo límite. Dado que se pueden utilizar las secciones

de Poincaré para estudiar los ciclos límite y, para espacios de dos dimensiones, éstas son sólo segmentos de líneas, las bifurcaciones de ciclos límite se pueden estudiar por los mismos métodos utilizados para las bifurcaciones de sistemas dinámicos de una dimensión.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x[\mu - (x^2 + y^2)] \\ \dot{y} &= x + y[\mu - (x^2 + y^2)]\end{aligned}$$

El sistema tiene un punto de equilibrio en el origen; para que las trayectorias sean más claras, transformamos a coordenadas polares  $(r, \theta)$  mediante  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ . El sistema queda:

$$\dot{r} = r(\mu - r^2) \equiv h(r) \tag{2.16}$$

$$\dot{\theta} = 1 \tag{2.17}$$

La solución a la ecuación 2.17 es

$$\theta(t) = \theta_0 + t$$

lo que significa que el ángulo crece con el tiempo, mientras las trayectoria gira alrededor del origen.

Para la ecuación 2.16, cuando  $\mu < 0$ , hay un único punto fijo, el cual es  $r = 0$ . Ahora,  $h'(0) = \mu < 0$ , por lo tanto el punto fijo es estable ya que la derivada es negativa. De hecho es un foco estable, por lo que las soluciones son una espiral en el sentido de las agujas del reloj que confluyen en el origen a medida que aumenta  $t$ . Figura 2.15(a)

Cuando  $\mu > 0$  el punto fijo en el origen se vuelve inestable, pero ahora hay otro punto fijo en  $r = \sqrt{\mu}$ , el cual corresponde a un ciclo límite con periodo  $2\pi$  y aparece una órbita periódica de radio  $r = \sqrt{\mu}$ , de manera que todas las órbitas evolucionan hasta ella cuando  $t$  aumenta. Figura 2.15(c) Esto es una bifurcación de Hopf supercrítica, cuando el equilibrio original para  $\mu < 0$  se vuelve inestable al llegar al parámetro de bifurcación  $\mu = 0$  y nace el ciclo límite. Figura 2.15(b)

Por el contrario, una bifurcación de Hopf es subcrítica si el sistema tiene un equilibrio inestable para valores de  $\mu > 0$ , y para valores de  $\mu < 0$ , aparece un ciclo límite inestable, que rodea a un equilibrio estable.

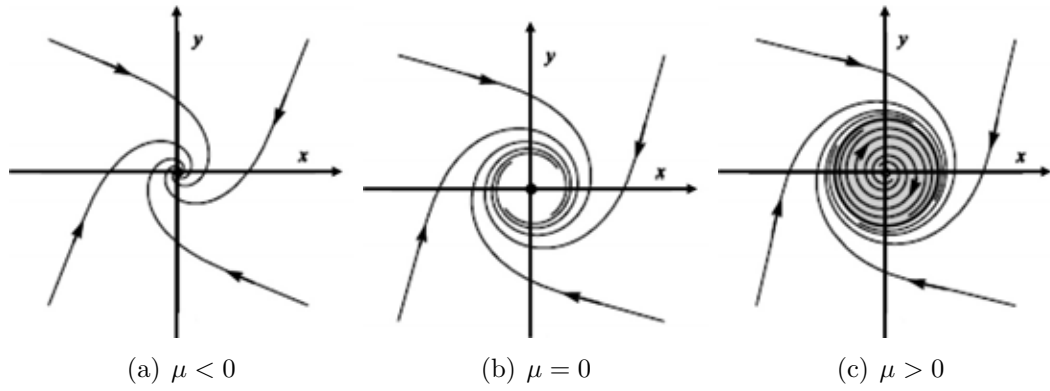


Figura 2.15: Comportamiento de un ciclo límite en una bifurcación de Hopf

# Capítulo 3

## Feigenbaum

Ya se han comentado algunas de las propiedades más significativas del caos, como la sensibilidad a las condiciones iniciales (un pequeño cambio en estas y el comportamiento a largo plazo es totalmente diferente) que Lorenz llamó “efecto mariposa”, característica que impide predecir con precisión el comportamiento que tendrá el sistema a largo plazo.

También se habló de la presencia del caos en un gran número de sistemas de diversas procedencias, cosa que no fue suficiente para que el caos determinista haya sido descubierto; esto se debe a la gran importancia que tienen las computadoras en el análisis de este tipo de sistemas, ya que los cálculos respectivos se requieren por millones y no es fácil distinguir el comportamiento caótico del que es únicamente aleatorio; las computadoras son para la teoría del caos como los microscopios para la biología, pues sin éstas no se puede explorar detalladamente a los sistemas caóticos.

Otra propiedad importante es la existencia de caminos universales hacia el caos, la manifestación del comportamiento caótico responde a pautas comunes. Este “orden interno” fue demostrado por Mitchell Feigenbaum en 1978 con la descripción de una ruta universal hacia el caos, que consiste en un incremento exponencial de la complejidad de la respuesta dinámica del sistema a medida que se varía alguno de los parámetros del mismo. Dicha respuesta pasa sucesivamente por fases de comportamiento periódico oscilatorio en las que el periodo de oscilación se incrementa exponencialmente hasta llegar a la situación de periodo infinito, es decir, caos. Esta ruta es conocida como el *escenario de Feigenbaum* o ruta al caos por *doblamiento de*

*periodo.*

Para explicar el comportamiento de esta ruta se expondrán dos ejemplos, uno continuo y otro discreto. El primero corresponde al *oscilador de Duffing* y el segundo al sistema es el *mapeo Logístico* que es el sistema de diferencias más simple que presenta doblamiento de periodo.

### 3.1. Oscilador de Duffing

La transición al caos por doblamiento de periodo se puede encontrar en sistemas continuos generados por tres o más ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, ya que es en los únicos sistemas en los que el caos se hace presente. Sin embargo, hay sistemas en el plano que se pueden forzar para que muestren respuestas caóticas, como lo es el oscilador de Duffing, el cual puede ser visto como un sistema de tercer orden simplemente por la introducción de una nueva variable  $z$ . Así es como el sistema forzado

$$\dot{x} = X(x, y, t), \quad \dot{y} = Y(x, y, t)$$

se puede reemplazar por un sistema autónomo de tercer orden

$$\dot{x} = X(x, y, z), \quad \dot{y} = Y(x, y, z), \quad \dot{z} = 1, \quad z(0) = 0$$

La ecuación de Duffing es

$$\ddot{x} + k\dot{x} - x + x^3 = \Gamma \cos \omega t \tag{3.1}$$

donde  $k > 0$  es la constante de amortiguación,  $\Gamma$  es resistencia forzada y  $\omega$  es la frecuencia forzada. La fuerza  $\Gamma \cos \omega t$  es una fuerza de inercia que se origina de la oscilación del sistema coordinado.

El sistema autónomo correspondiente ( $\Gamma = 0$ ) tiene sus puntos de equilibrio en  $(\pm 1, 0)$ , mismos que son espirales estables cuando  $0 < k < 2\sqrt{2}$  y nodos estables cuando  $k > 2\sqrt{2}$ , y en  $(0, 0)$  el cual es un punto silla. Conforme  $\Gamma$  crece desde cero, se espera que soluciones forzadas periódicas sean estables y se desarrollen desde  $x = \pm 1$  y no desde  $x = 0$ , con esto en mente, se proponen soluciones periódicas desplazadas  $\frac{2\pi}{\omega}$  radianes de la forma

$$x = c(t) + a(t) \cos \omega t + b(t) \sin \omega t \tag{3.2}$$

donde  $a(t)$  y  $b(t)$  representan amplitudes que varían lentamente.

Substituyendo 3.2 en 3.1 y los coeficientes de  $\cos \omega t$  y  $\sin \omega t$  y el término constante son igualados en ambos lados de 3.1 se tiene que

$$\ddot{c} + k\dot{c} = -c \left( c^2 - 1 + \frac{3}{2}r^2 \right), \quad (3.3)$$

$$k\dot{a} + 2\omega\dot{b} = -a \left( -1 - \omega^2 + 3c^2 + \frac{3}{4}r^2 \right) - k\omega b + \Gamma, \quad (3.4)$$

$$-2\omega\dot{a} + k\dot{b} = -b \left( -1 - \omega^2 + 3c^2 + \frac{3}{4}r^2 \right) + k\omega a, \quad (3.5)$$

donde  $r^2 = a^2 + b^2$ . Si ahora hacemos

$$\dot{c} = d,$$

entonces la ecuación 3.3 queda como

$$\dot{d} = -c \left( c^2 - 1 + \frac{3}{2}r^2 \right) - kd \quad (3.6)$$

Los puntos de equilibrio del sistema, el cual corresponde a oscilaciones estables, se obtienen igualando a cero el lado derecho de las ecuaciones 3.4 a 3.6. Se sigue que  $d = 0$  y

$$c \left( c^2 - 1 + \frac{3}{2}r^2 \right) = 0, \quad (3.7)$$

$$a \left( -1 - \omega^2 + 3c^2 + \frac{3}{4}r^2 \right) k\omega b = \Gamma, \quad (3.8)$$

$$b \left( -1 - \omega^2 + 3c^2 + \frac{3}{4}r^2 \right) k\omega a = 0, \quad (3.9)$$

$$(3.10)$$

Elevando al cuadrado y sumando 3.8 y 3.9 se tiene que

$$r^2 \left[ \left( -1 - \omega^2 + 3c^2 + \frac{3}{4}r^2 \right)^2 + k^2\omega^2 \right] = \Gamma^2 \quad (3.11)$$

Hay dos conjuntos de soluciones de 3.11 a considerar:

Solución A:  $c = 0$

$$r^2 \left[ \left( -1 - \omega^2 + \frac{3}{4}r^2 \right)^2 + k^2\omega^2 \right] = \Gamma^2 \quad (3.12)$$

Sea  $a = a_0, b = b_0, c = 0, d = 0$  un punto de equilibrio de 3.4 a 3.7. Sea  $a = a_0 + \xi, b = b_0 + \eta$ . Entonces para valores pequeños de  $|\xi|, |\eta|, |c|, |d|$ , las aproximaciones lineales de 3.4-3.7 son

$$k\dot{\xi} + 2\omega\dot{\eta} + A\xi + B\eta = 0 \quad (3.13)$$

$$-2\omega\dot{\xi} + k\dot{\eta} + C\xi + D\eta = 0 \quad (3.14)$$

$$\dot{c} = d \quad (3.15)$$

$$\dot{d} = c \left( 1 - \frac{3}{2}r_0^2 \right) - kd \quad (3.16)$$

donde  $r_0^2 = a_0^2 + b_0^2$  y

$$A = -1 - \omega^2 + \frac{9}{4}a_0^2 + \frac{3}{4}b_0^2,$$

$$B = k\omega + \frac{3}{2}a_0b_0,$$

$$C = -k\omega + \frac{3}{2}a_0b_0,$$

$$D = -1 - \omega^2 + \frac{3}{4}a_0^2 + \frac{9}{4}b_0^2$$

Las ecuaciones para  $\xi, \eta, c, d$  desacoplan, con  $\xi, \eta$  determinadas por 3.13 y 3.14, y  $c$  y  $d$  por 3.15 y 3.16.

Dado que  $k > 0$ , 3.15 y 3.16 tienen soluciones asintóticamente estables si y sólo si

$$r_0^2 > \frac{2}{3}$$

3.13 y 3.14 se pueden escribir en la forma

$$\dot{\xi} = P\xi$$

donde  $\xi = [\xi, \eta]^T$  y

$$P = \frac{1}{k^2 + 4\omega^2} \begin{bmatrix} -Ak + 2\omega C & -Bk + 2\omega D \\ -Ck - 2\omega A & -Dk - 2\omega B \end{bmatrix}$$

Los eigenvalores de  $P$  tienen parte real negativa, lo que implica estabilidad.

Solución  $B$ : Para  $4r \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$ ,  $c^2 = 1 - \frac{3}{2}r^2$

$$r^2 \left[ \left( -1 - \omega^2 + \frac{15}{4}r^2 \right)^2 + k^2\omega^2 \right] = \Gamma^2 \quad (3.17)$$

Para encontrar la estabilidad, con  $c^2 = 1 - \frac{3}{2}r^2$  y un valor elegido para  $\Gamma$  se resuelve 3.8 y 3.9  $a_0$  y  $b_0$ . Las ecuaciones 3.4-3.6 se linealizan en la vecindad de

$$\begin{aligned} a &= a_0 \\ b &= b_0 \\ c &= c_0 = \sqrt{\left[ 1 - \frac{3}{2}(a_0^2 + b_0^2) \right]} \\ d &= d_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sus perturbaciones son, respectivamente,  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  y  $d'$ . Después de un poco de álgebra se puede ver que satisfacen

$$\dot{u} = Qu$$

donde  $u = [a', b', c', d']$ ,

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & 0 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3a_0c_0 & -3b_0c_0 & -2c_0^2 & -k \end{bmatrix}$$



y

$$\begin{aligned}
q_{11} &= \frac{\left[(-2 - \omega^2 + \frac{15}{4}r_0^2 - \frac{3}{2}a_0^2)k + 3a_0b_0\omega\right]}{k^2 + 4\omega^2} \\
q_{12} &= \frac{\left[(4 - k^2 - 2\omega^2 - \frac{15}{2}r_0^2 + 3b_0^2)\omega - \frac{3}{2}a_0b_0k\right]}{k^2 + 4\omega^2} \\
q_{13} &= \frac{6c_0(2\omega b_0 - a_0k)}{k^2 + 4\omega^2} \\
q_{21} &= \frac{\left[(-4 + k^2 + 2\omega^2 + \frac{15}{2}r_0^2 - 3a_0^2)\omega - \frac{3}{2}a_0b_0k\right]}{k^2 + 4\omega^2} \\
q_{22} &= \frac{\left[(-2 - \omega^2 + \frac{15}{4}r_0^2 - \frac{3}{2}b_0^2)k - 3a_0b_0\omega\right]}{k^2 + 4\omega^2} \\
q_{23} &= \frac{6c_0(-2\omega a_0 - b_0k)}{k^2 + 4\omega^2}
\end{aligned}$$

Tenemos que los parámetros  $\omega$ ,  $k$  y  $r_0$  son especificados;  $\Gamma$  se calcula de 3.17;  $a_0$ ,  $b_0$  y  $c_0$  están dadas por 3.18; por lo que los eigenvalores de  $Q$  y por ende su estabilidad, se pueden calcular. Los cambios en la estabilidad se producen cuando dos eigenvalores tienen parte real igual a cero y dos parte real negativa. Para el cálculo de estos se escogieron  $k = 0.3$ ,  $\omega = 1.2$  y  $r_0 = 0.526$ , se tiene que

$$\Gamma \approx 0.314, \quad a_0 \approx -0.419, \quad b_0 \approx 0.317$$

y los eigenvalores de  $Q$  (todos complejos)

$$(-0.28 \pm 0.58i, \pm 0.53)$$

redondeados a dos decimales. Para  $\Gamma < 0.314$  al menos uno de los eigenvalores tiene parte real positiva, lo cual indica inestabilidad.

Las soluciones restante para  $r_0 < \sqrt{\frac{2}{3}}$  son inestables. Sin embargo, en  $\Gamma \approx 0.65$ , una solución estable de amplitud  $r_0 \approx 1.79$  aparece, lo que indica soluciones  $2\pi$ -periódicas estables para  $0 < \Gamma < 0.314$ , y para  $\Gamma > 0.65$ .

Una solución calculada para  $\Gamma = 0.2$ ,  $k = 0.3$  y  $\omega = 1.2$  se muestra en la figura 3.1(a) juntos con su retrato fase y la sección de Poincaré correspondiente

para los tiempos  $t = 0, 2\pi, \dots$ . Para  $\Gamma = 0.28$ , en el intervalo inestable, existe un subarmónico estable de periodo  $\frac{4\pi}{\omega}$ , como se muestra en la figura 3.1(b) con su mapeo de Poincaré. En  $\Gamma = 0.29$  aparece un subarmónico estable de periodo  $\frac{8\pi}{\omega}$ , un periodo con cuatro soluciones (figura 3.1(c)). Esta *cascada de doblamiento de periodo* es una secuencia de bifurcaciones que para  $\Gamma = 0.3$ , aproximadamente, ha doblado a infinito dejando una “oscilación” sin algún comportamiento periódico obvio. La solución está delimitada pero no es periódica. El mapeo de Poincaré se vuelve un conjunto acotado sin repeticiones evidentes, y es otro ejemplo de *atractor extraño*. Una muestra de solución y su correspondiente plano fase se muestran en la figura 3.2.

Cabe aclarar que cuando hablamos del *retrato fase*, para este caso, no es el verdadero, pues el estado del sistema está dado por  $(x, y, t)$  y no sólo por  $(x, y)$ , ya que se requiere de las tres variables para calcular la evolución del sistema, el *retrato fase* que aquí se comenta es una proyección de dos dimensiones de una trayectoria de tres.

Entre  $\Gamma = 0.30$  y  $0.36$  se observa una regularidad que no es obvia: La gráfica de la solución revela oscilaciones irregulares sin ningún patrón uniforme. Tales soluciones muestran comportamiento caótico. Cerca de  $\Gamma = 0.37$ , aparecen soluciones estables de periodo 5 (figura 3.3(a)). Otro régimen caótico sigue entre  $\Gamma = 0.37$  y cerca de  $0.65$ . La figura 3.2 muestra un segmento de la gráfica de la solución para  $\Gamma = 0.5$ . En una vecindad de  $\Gamma = 0.65$  aparecen más 2-periodos estables. En  $\Gamma \approx 0.73$  se tiene una solución estable de periodo 2 como se muestra en la figura 3.3(c).

Se puede obtener más información con las secciones de Poincaré apropiadas para el periodo que se busca:  $\frac{2\pi}{\omega}$  para la frecuencia forzada,  $\frac{4\pi}{\omega}$  para el doblamiento de periodo, y así sucesivamente. Las soluciones periódicas del periodo  $\frac{2\pi}{\omega}$  produce gráficas en el plano  $(x, y)$  teniendo un único punto fijo, el doblamiento de periodo dos puntos fijos, etcétera. Si se aplica el mismo procedimiento cuando hay caos, por ejemplo para  $\Gamma = 0.5$ , nos encontramos con que después de todo sí parece haber cierta estructura subyacente. La figura 3.4 muestra una sección de Poincaré para este caso. La secuencia mostrada es para cuando  $t$  es un múltiplo entero de  $2\pi$ . Los puntos caen en un conjunto fractal que interpretamos como una sección transversal de un *atractor extraño*. No hay puntos fijos en el régimen caótico, pero el conjunto juega un papel similar y el sistema exhibe una dependencia sensible a las condiciones iniciales.

En el oscilador de Duffing, conforme  $\Gamma$  crece de cero a  $0.27$  (para los valores de los parámetros  $k = 0.3$ ,  $\omega = 1.2$ ), la amplitud de la respuesta aumenta, tendiendo a

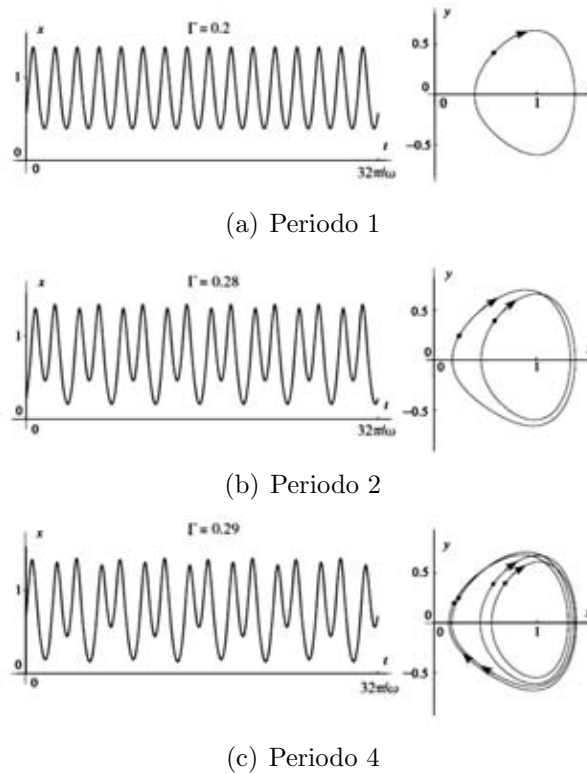


Figura 3.1: Series de tiempo y secciones de Poincaré del oscilador de Duffing para  $k = 0.3$  y  $\omega = 1.2$

llevar el punto en el plano de fase a la vecindad del ciclo límite inestable. La incursión del ciclo límite estable en el dominio del ciclo límite inestable, destruye la estabilidad del primero, lo cual se muestra como *doblamiento de periodo*. La secuencia de doblamiento de periodos de la solución periódica emerge del punto de equilibrio  $(1, 0)$  conforme  $\Gamma$  crece desde cero. En  $\Gamma \approx 0.27$  ocurre una bifurcación horquilla resultando en un 2-periodo estable mientras que el armónico original se vuelve inestable. Si estos doblamientos de periodo ocurren en  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$  (figura 3.5) entonces la progresión de la secuencia cumple con la ley universal

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_k - \Gamma_{k-1}}{\Gamma_{k+1} - \Gamma_k} = \delta = 4.66292 \dots$$

La constante universal  $\delta$  es conocida como la *constante de Feigenbaum*, que se verá con detalle un poco más adelante en 3.2.1.

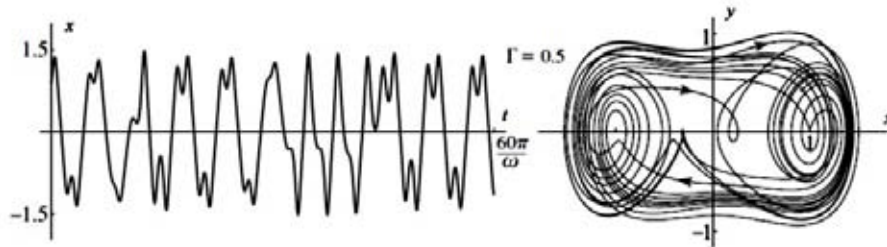


Figura 3.2: Respuesta caótica en el oscilador de Duffing para  $k = 0.3$ ,  $\omega = 1.2$  y  $\Gamma = 0.5$

## 3.2. El mapeo logístico

El mapeo logístico es utilizado en biología como modelo de población y en matemáticas es considerado como el sistema más simple que presenta doblamiento de periodo, este modelo y su transición al caos fue estudiado y publicado en la revista Nature por Robert M. May en 1976 [14], esta publicación ha sido la base para el modelo que se explicará a continuación.

El sistemas ecológico más simple de estudiar es una población que se reproduce en temporadas específicas y en las que sus generaciones no se sobrepongan. Particularmente, estos sistemas se presentan en poblaciones de insectos de zonas templadas. En esta situación, los datos de observación usualmente radican en información acerca del máximo, del promedio o del total de población de cada generación.

Lo que se busca entender con este modelo es la relación entre la magnitud de la población en la generación  $(t+1, x_{t+1})$  y la magnitud de la población en la generación anterior  $(t, x_t)$ . Esta relación se puede expresar de la forma general

$$x_{t+1} = f(x_t) \quad (3.19)$$

Donde la variable  $x$  representa a la población y la función no lineal  $f(x)$  representa los cambios entre generaciones.

En el contexto de poblaciones, la variable  $x$  presenta una tendencia a incrementar de una generación a otra cuando es pequeña, y a disminuir cuando es grande. Esto se traduce a que la función  $f(x)$  tiene las siguientes propiedades:

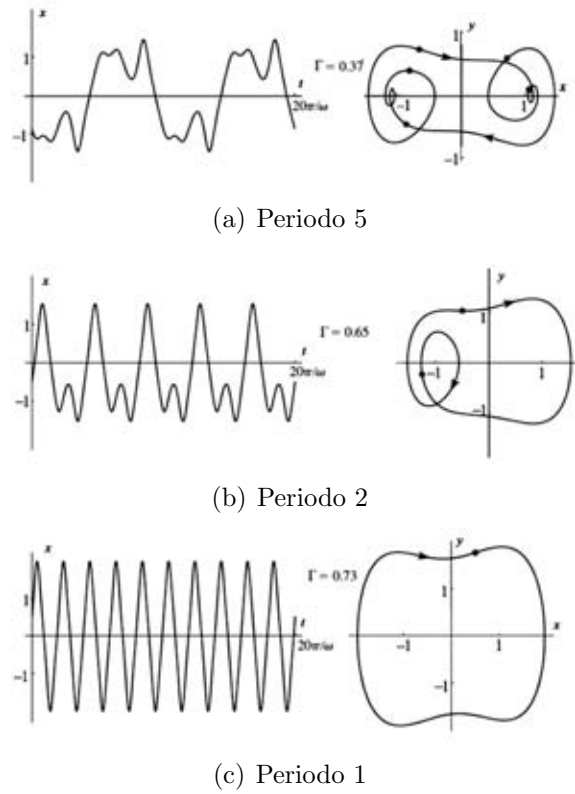


Figura 3.3: Series de tiempo y diagramas fase de la ecuación de Duffing 3.1. La secciones de Poincaré para  $t = 0, 2\pi, \dots$  son representadas por los puntos.

- $f(0) = 0$
- $f(x)$  crece de forma monótona conforme  $x$  incrementa dentro del intervalo  $0 < x < A$ , donde  $x = A$  es el máximo de  $f(x)$ .
- $f(x)$  decrece monótonamente cuando  $x > A$
- $f(x)$  tiene uno o más parámetros que “acentúan” su comportamiento no lineal y aumentan la pendiente de la joroba en la curva  $f(x)$ .

Un ejemplo más específico se puede obtener de la siguiente ecuación:

$$N_{t+1} = aN_t - bN_t^2 \quad (3.20)$$

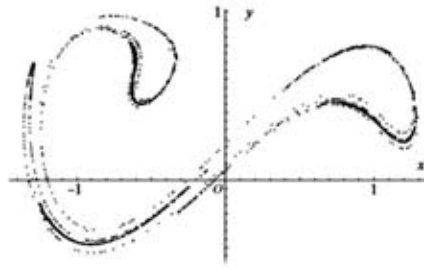


Figura 3.4: Sección de Poincaré para  $t = 0, \frac{2\pi}{\omega}, \frac{4\pi}{\omega}, \dots$  de la ecuación de Duffing 3.1 para  $k = 0.3, \omega = 1.2$  y  $\Gamma = 0.5$

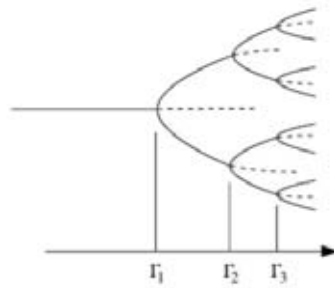


Figura 3.5: Doblamiento de periodo de la ecuación de Duffing en  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$

donde el parámetro  $a$  representa el crecimiento natural de la población y el parámetro  $b$  la reducción natural que se presenta por el hacimiento y la competencia de recursos.

Cuando  $b = 0$ , la ecuación 3.20 describe una población que sólo crece por un factor  $a$  cada año (crecimiento exponencial), para  $a > 1$ .

Para  $b \neq 0$ , el término cuadrático genera una curva de crecimiento con una joroba, en la cual la pendiente está dada por el parámetro  $a$ .

Si  $x = \frac{b}{a}N$  entonces

$$N = \frac{a}{b}x \quad (3.21)$$

Sustituyendo 3.21 en 3.20 obtenemos

$$\frac{a}{b}x_{t+1} = \frac{a}{b}x_t(a - b(\frac{a}{b}x_t))$$

Así nos queda la ecuación

$$x_{t+1} = x_t(a - ax_t)$$

Factorizando  $a$  y haciendo  $a = 4\mu$  llegamos a la forma

$$x_{t+1} = 4\mu x_t(1 - x_t) \tag{3.22}$$

conocida como *mapeo logístico*.

## Puntos fijos y estabilidad del mapeo logístico

Primero notemos que es necesario que:

1.  $x$  se debe mantener en el intervalo  $0 < x < 1$ , pues si llega a sobrepasar la unidad, las iteraciones divergen hacia  $-\infty$ , lo que se traduce en la extinción de la población.
2. El máximo de  $f(x)$  es  $\mu$  y lo alcanza cuando  $x = \frac{1}{2}$ .
3. Todas las trayectorias son atraídas a  $x = 0$  si  $\mu < \frac{1}{4}$ .

Ahora, los puntos fijos de  $x$  de la ecuación 3.22 son las soluciones algebraicas de la ecuación

$$x^* = 4\mu x^*(1 - x^*)$$

Por lo que existen dos puntos fijos:  $x^* = 0$  y  $x^* = 1 - \frac{1}{4\mu}$ . Donde el segundo punto fijo existe sólo si  $\mu > \frac{1}{4}$ , esto porque  $x_t > 0$  para todo  $t$ .

Entonces, la ecuación muestra un comportamiento dinámico no trivial sólo si  $\frac{1}{4} < \mu < 1$ ; de lo contrario la población se extingue.

Los puntos fijos también se pueden encontrar gráficamente localizando los puntos en donde la curva descrita por la 3.22 interseca la línea de  $45^\circ$  respecto al origen,

ahí  $x_{t+1} = x_t$  y corresponde a la situación crecimiento cero de la población, como se muestra en la figura 3.6.

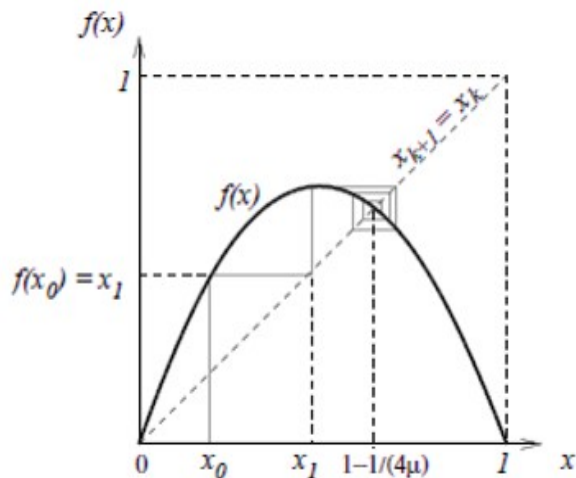


Figura 3.6: Primera iteración del mapeo logístico para  $\mu = 0.7$

Lo siguiente es ver la estabilidad de los puntos de equilibrio  $x^*$ . Recordemos que ésta depende de la pendiente de la curva  $f(x)$  en  $x^*$ , es decir de la derivada de la función  $f(x)$  evaluada en el punto fijo.

Cuando  $|f'(x^*)| = |4\mu(1 - 2x^*)| < 1$ , el punto de equilibrio  $x^*$  será estable, atrayendo todas las trayectorias a su vecindad.

Entonces, para  $x^* = 0$

$$f'(0) = 4\mu x'_t(1 - 2(0)) = 4\mu x'_t$$

como  $x'_t < 1$  entonces  $4\mu < 1$  por lo que la condición de estabilidad es

$$\mu < \frac{1}{4}$$

De igual forma, para  $x^* = 1 - \frac{1}{4\mu}$

$$f'(1 - \frac{1}{4\mu}) = 4\mu x'_t(1 - 2(1 - \frac{1}{4\mu}))$$



como  $x'_t < 1$  entonces  $-1 < 4\mu - 2 < 1$  por lo que la condición de estabilidad es

$$\frac{1}{4} < \mu < \frac{3}{4}$$

Por lo tanto, el punto de equilibrio no trivial es estable y atrae todas las trayectorias originadas en el intervalo  $0 < x < 1$ , siempre y cuando  $\frac{1}{4} < \mu < \frac{3}{4}$ . Figura 3.7

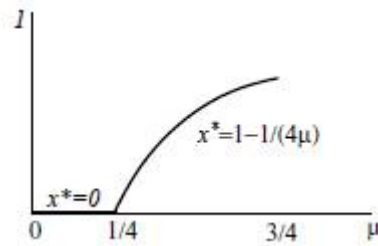


Figura 3.7: Diagrama de bifurcación del mapeo logístico para  $0 < \mu < \frac{3}{4}$

## Doblamiento de periodo del mapeo logístico

Para explicar el doblamiento de periodo, primero veamos algunas cosas importantes de las iteraciones.

La segunda iteración del mapeo 3.19 relaciona  $x_{t+2}$  con  $x_t$  y se puede expresar de la forma:

$$x_{t+2} = f[f(x_t)]$$

o, utilizando la notación más común

$$x_{t+2} = f^{(2)}(x_t) \tag{3.23}$$

En general, la  $n$ -ésima iteración relaciona  $x_{t+n} = f^{(n)}(x_t)$  con  $x_t$ .

El doblamiento de periodo depende de la relación de la pendiente de  $f^{(2)}(x^*)$  con la pendiente de  $f(x^*)$ :

Por definición,  $x_1 = f(x_0)$  y  $x_2 = f(x_1)$  entonces

$$x_2 = f^{(2)}(x_0)$$

Utilizando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} f^{(2)'}(x_0) &= \frac{d}{dx}f(f(x))|_{x_0} \\ &= f'(x_0)f'(f(x_0)) \\ &= f'(x_0)f'(x_1) \end{aligned}$$

En general,

$$f^{(n)'}(x_0) = f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{n-1}) \quad (3.24)$$

Ahora, supongamos que  $x_0 = x^*$ , un punto fijo de  $f$ . Entonces

$$x_1 = x_0 = x^*$$

y

$$f^{(2)'}(x^*) = f'(x^*)f'(x^*) = |f'(x^*)|^2$$

Entonces, ¿qué pasa con  $f(x)$  y  $f^{(2)}(x)$  en el mapeo logístico?

Justo antes de la transición, en  $\mu < \frac{3}{4}$ :

1.  $f^{(2)}(x)$  es simétrica cerca de  $x = \frac{1}{2}$ , al igual que  $f(x)$ .
2. Los puntos fijos de  $f(x)$  también son puntos fijos  $f^{(2)}(x)$  y si en  $f(x)$  son estables, también lo serán en  $f^{(2)}(x)$  Figura 3.8.

Exactamente en la transición, donde  $\mu = \frac{3}{4}$ ,

$$f'(x^*) = -1 \implies f^{(2)'}(x^*) = 1$$

por lo que  $f^{(2)}(x^*)$  es tangente al línea de  $45^\circ$ .

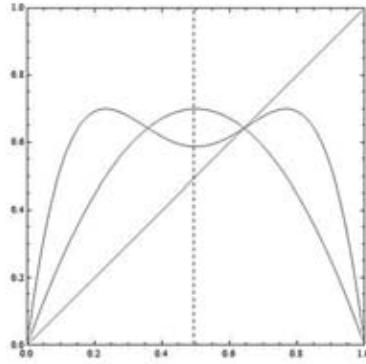


Figura 3.8: Primera y segunda iteración del mapeo logístico para  $\mu = 0.7$

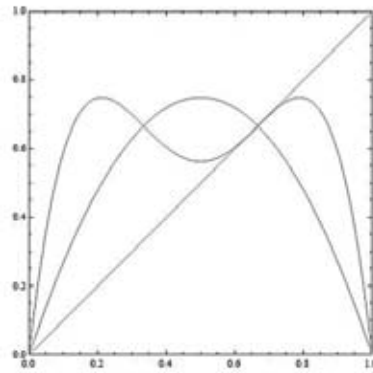


Figura 3.9: Mapeo logístico  $\mu = 0.75$

Después de la transición, donde  $\mu > \frac{3}{4}$ , los picos de  $f^{(2)}$  incrementan, los mínimos decrecen, y

$$f'(x^*) > 1 \implies f^{(2)'}(x^*) > 1$$

$f^{(2)}$  crea dos nuevos puntos fijos (bifurcación horquilla),  $x_1^*$  y  $x_2^*$ , tales que

$$x_1^* = f(x_2^*), \quad x_2^* = f(x_1^*)$$

Por lo tanto nos encontramos con un ciclo de periodo 2. El ciclo es estable porque

$$|f^{(2)'}(x_1^*)| < 1 \quad y \quad |f^{(2)'}(x_2^*)| < 1$$

De la ecuación 3.24 se obtiene que las pendientes en los puntos fijos de  $f^{(2)}$  son iguales:

$$f^{(2)'}(x_1^*) = f^{(2)'}(x_2^*)$$

ya que las oscilaciones de periodo 2 dan

$$f^{(2)'}(x_1^*) = f^{(2)'}(x_1^*)f^{(2)'}(x_2^*) = f^{(2)'}(x_2^*)f^{(2)'}(x_1^*) = f^{(2)'}(x_2^*)$$

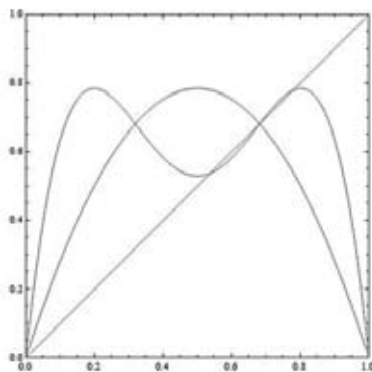


Figura 3.10: Mapeo logístico con  $\mu = 0.785$

En general, si  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  es un ciclo de periodo  $n$ , tal que

$$\begin{aligned} x_{t+1}^* &= f(x_t^*), t = 1, 2, \dots, n-1 \\ \text{y } x_t^* &= f(x_n^*) \end{aligned}$$

entonces cada  $x_t^*$  es punto fijo de  $f^{(n)}$ :

$$x_t^* = f^{(n)}(x_t^*), t = 1, 2, \dots, n$$

La igualdad de las pendientes es un comportamiento crucial:

- Así como el único punto fijo no trivial  $x^*$  de  $f(x)$  da lugar a dos puntos fijos estables  $x_1^*$  y  $x_2^*$  de  $f^{(2)}(x)$  cuando  $\mu$  incrementa más allá de  $\frac{3}{4}$ , tanto  $x_1^*$  como  $x_2^*$  dan lugar a dos puntos fijos estables  $f^{(4)}(x) = f^{(2)}(f^{(2)}(x))$  cuando  $\mu$  incrementa más aún.

- La bifurcación de *doblamiento de periodo* o *bifurcación horquilla* se deriva de la igualdad de los puntos fijos, porque cada punto fijo se vuelve inestable para el mismo valor del parámetro.

Por lo tanto se distingue una secuencia de bifurcaciones al incrementar los valores de  $\mu$ . En  $\mu = \mu_1 = \frac{3}{4}$ , hay una transición a un ciclo de periodo  $2^1$ .

Eventualmente,  $\mu = \bar{\mu}_1$ , donde el ciclo de periodo  $2^1$  es *superestable*, es decir,

$$f^{(2)'}(x_1^*) = f^{(2)'}(x_2^*) = 0$$

En  $\mu = \mu_2$ , el ciclo de periodo 2 bifurca a un ciclo de periodo  $2^2 = 4$ , y es superestable en  $\mu = \bar{\mu}_2$

Así se describe la secuencia

$$\mu_1 < \bar{\mu}_1 < \mu_2 < \bar{\mu}_2 < \mu_3 < \dots$$

donde

- $\mu_n$  es el valor de  $\mu$  en la transición a un ciclo de periodo  $2^n$
- $\bar{\mu}_n$  es el valor de  $\mu$  donde los ciclos de periodo  $2^n$  es *superestable*.  
Uno de los puntos fijos superestables es siempre  $x = \frac{1}{2}$

Notemos que en el caso  $\mu = \bar{\mu}_2$ , la función fundamental es  $f^{(2)}$  y su duplicación es  $f^{(4)} = f^{(2)}(f^{(2)})$ . En general, nos enfocamos en las composiciones

$$f^{(2^{n+1})} = f^{(2^n)}(f^{(2^n)})$$

De la inestabilidad de los puntos fijos de ciclos de periodo  $2^n$  siempre nacen ciclos de periodo  $2^{n+1}$ . Este fenómeno de bifurcación se ilustra en la figura 3.11 ejemplificando la ecuación 3.22. Los puntos fijos de varios periodos pueden surgir por procesos de bifurcación. A la izquierda, el punto básico estable se convierte en inestable y da lugar a una sucesión de bifurcaciones en forma de horquilla, para estabilizar los armónicos del periodo  $2^n$ ; ninguno de estos ciclos es estable más allá de  $\mu = 0.8925$ .

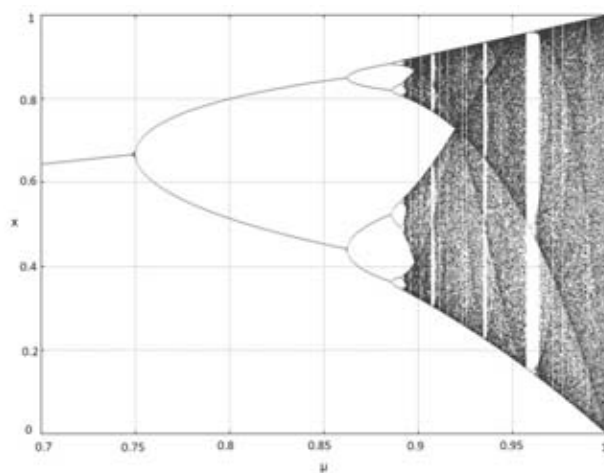


Figura 3.11: Diagrama de bifurcación del mapeo logístico

El proceso doblamiento de periodo ocurre *ad infinitum*, la “ventana” de valores de los parámetros de cualquier ciclo es estable disminuyendo progresivamente, por lo tanto, todo el proceso es convergente y se encuentra acotado superiormente por algún valor crítico del parámetro. Este valor crítico es un punto de acumulación de los ciclos de periodo  $2^{(n)}$ .

Por encima del punto de acumulación, existe un número infinito de puntos fijos con distintos periodos y de diferentes ciclos periódicos. De igual forma hay un incontable número de puntos iniciales  $x_0$  que producen trayectorias del todo aperiódicas; no importa cuánto tiempo se utilice en las series generadas por  $f(x)$ , el patrón nunca se repite, es decir, *caos*.

### 3.2.1. Universalidad y renormalización

Los mapeos unimodales, como lo es el mapeo logístico, comparten varias características cuantitativas que los hacen obedecer a leyes escalares, las más famosas son las determinadas por los números Feigenbaum  $\alpha$  y  $\delta$ . [8]

Sea  $f(x, \mu)$  un mapeo unimodal que presenta doblamiento de periodo como ruta al caos conforme  $\mu$  crece, y supóngase que  $x_m$  es el máximo de  $f$ . Sea  $\mu_n$  el valor de  $\mu$  en el cual nace el ciclo de periodo  $2^n$  y sea  $\bar{\mu}_n$  el valor al cual el  $2^n$ -ciclo es

superestable.

Cada incremento que  $\mu$  tiene de un doblamiento al próximo, se reduce en tamaño por un factor de  $\frac{1}{\delta}$ , es decir, si  $\Delta_n = \mu_n - \mu_{n-1}$  es la distancia entre valores de bifurcación consecutivos entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+2} - \mu_{n+1}} = \delta$$

es decir, las  $\mu_n$ 's convergen geoméricamente, con la distancia entre transiciones sucesivas encogiéndose por un factor constante y universal de  $\delta = 4.669\dots$  Figura 3.12

De igual forma, existe una ley universal escalar en dirección vertical. Sea  $d_n$  la distancia desde  $x_m$  al punto más cercano que esté en un ciclo de periodo  $2^n$ . Entonces la razón  $\frac{d_n}{d_{n+1}}$  tiende a un límite universal conforme  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = \alpha = -2.5029\dots$$

El signo negativo indica que el punto más cercano en el  $2^n$  - ciclo se encuentra alternadamente por encima y por debajo de  $x_m$  como se muestra en la figura 3.12. [10]

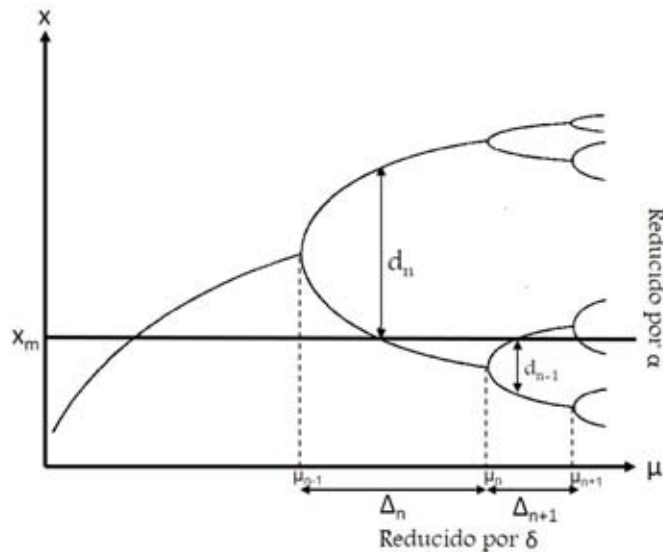


Figura 3.12: Esquema de las constantes de Feigenbaum  $\delta$  y  $\alpha$

Feigenbaum explicó el porqué  $\alpha$  y  $\delta$  son universales con lo que ahora se conoce como teoría de renormalización, misma que se basa en la autosimilitud de la dinámica, es decir, en la repetición del mismo proceso una y otra vez (nace un ciclo de periodo  $2^n$ , se vuelve superestable y luego pierde estabilidad en la bifurcación de doblamiento de periodo).

Para comprender los fundamentos de este comportamiento universal recordemos que un ciclo superestable de un mapeo unimodal siempre tiene a  $x_m$  (el máximo de  $f$ ) como uno de sus puntos, lo que hace que encontrar a  $\mu_n$  gráficamente sea sencillo, basta con trazar una línea horizontal en el plano donde se encuentra el diagrama de bifurcación a la altura de  $x_m$  y localizar sus intersecciones con el mismo, como se muestra en la figura 3.13.

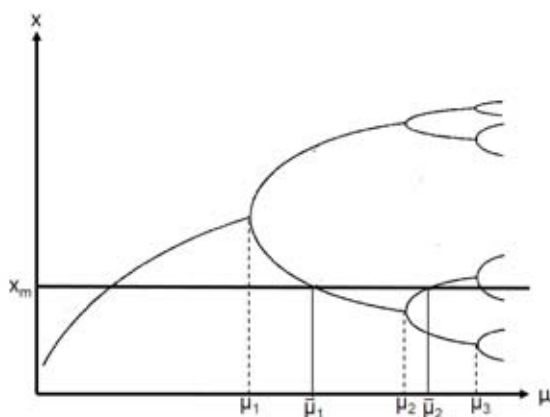


Figura 3.13: Método gráfico para localizar los puntos de ciclos superestables

Cualitativamente, la renormalización sigue el siguiente proceso; primero se compara  $f$  con su segunda iteración  $f^2$  en los valores correspondientes de  $\mu$  y luego se homogeneiza un mapeo dentro del otro cambiando la escala e revirtiendo ambos ejes. Figura 3.14

Por simplicidad, para describirlo cuantitativamente, traslademos el eje  $x$  a  $x_m$ , de esta forma quitamos  $x_m$  de  $f$ , luego reescalamos por un factor  $|\alpha| > 1$  e invertimos el mapeo reemplazando  $(x, y)$  por  $(-x, -y)$ . Las últimas dos operaciones se pueden llevar a cabo en un paso al definir  $\alpha < 0$ . Reescalar por  $\alpha$  equivale a reemplazar



$f^2(x, \bar{\mu}_1)$  por  $\alpha f^2\left(\frac{x}{\alpha}, \bar{\mu}_1\right)$ . Finalmente, la transformación es

$$f(x, \bar{\mu}_0) = \alpha f^2\left(\frac{x}{\alpha}, \bar{\mu}_1\right)$$

De esta forma  $f$  ha sido *renormalizada* al tomar su segunda iteración, reescalando  $x$  a  $\frac{x}{\alpha}$  y cambiando  $\mu$  al siguiente valor superestable.

De la misma manera se puede renormalizar  $f^2$  para generar  $f^4$ ; también tiene un punto fijo superestable si cambiamos  $\mu$  por  $\bar{\mu}_2$ . Un razonamiento análogo al anterior lleva a

$$f^2\left(\frac{x}{\alpha}, \bar{\mu}_1\right) = \alpha^2 f^4\left(\frac{x}{\alpha^2}, \bar{\mu}_2\right)$$

Expresado en términos del mapeo original  $f(x, \bar{\mu}_0)$  la ecuación queda

$$f(x, \bar{\mu}_0) = \alpha^2 f^4\left(\frac{x}{\alpha^2}, \bar{\mu}_2\right)$$

Después de renormalizar  $n$  veces se tiene que

$$f(x, \bar{\mu}_0) = \alpha^n f^{2^n}\left(\frac{x}{\alpha^n}, \bar{\mu}_n\right)$$

Feigenbaum encontró numéricamente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n f^{2^n}\left(\frac{x}{\alpha^n}, \bar{\mu}_n\right) = g_0(x) \quad (3.25)$$

donde el límite sólo existe si  $\alpha = -2.5029\dots$  [12].

$g_0(x)$  es una *función universal* en un punto fijo superestable, lo que se refiere a que  $g_0$  sólo depende de  $f$  cerca de  $x = 0$ , ya que el reescalamiento del eje  $x$  muestra explícitamente que sólo el comportamiento de  $f^{2^n}(x, \bar{\mu}_{n+1})$  cerca de  $x = 0$  es importante pues es lo único que se mantiene en el argumento  $\frac{x}{\alpha^n}$  conforme  $n$  tiende a  $\infty$ .

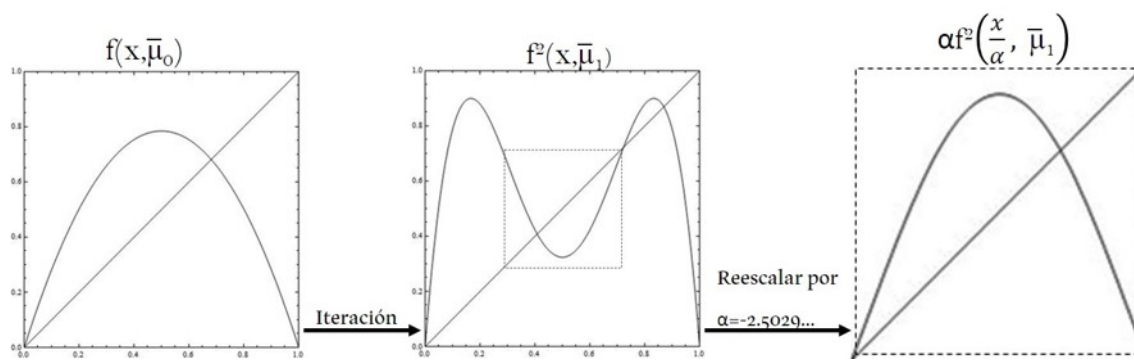


Figura 3.14: Renormalización de un mapeo unimodal



# Capítulo 4

## Cuasiperiodicidad

La ruta al caos por cuasiperiodicidad se presenta con el movimiento que describe la interacción de varias frecuencias y el acoplamiento no lineal de dos o más osciladores periódicos que transcurre sobre la superficie de un toroide. Esencialmente, consiste en un movimiento cuasiperiódico que pierde su estabilidad por una perturbación periódica no lineal convirtiendo un toro  $T^2$  en un atractor extraño.

A esta ruta también se le conoce como el escenario de Ruelle-Takens-Newhouse (RTN), pues ellos fueron los que mostraron, en 1978, que el movimiento regular se vuelve altamente inestable a favor del movimiento en un atractor extraño después de tres bifurcaciones de Hopf.

Un sistema puede empezar con un punto fijo atractor y conforme se va cambiando el parámetro de control puede llegar a presentarse una bifurcación de Hopf. A medida que cambia el parámetro de control, puede aparecer una segunda frecuencia. Si la segunda frecuencia  $f_2$  es inconmensurable con la primera ( $f_1$ ), es decir si  $\frac{f_1}{f_2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  entonces la trayectoria llegará a cubrir la superficie del toro  $T^2$ . Si se sigue variando al parámetro de control, puede aparecer una tercer frecuencia y así sucesivamente hasta que el comportamiento del sistema se vuelva aperiódico y caótico, es decir, la órbita da vueltas alrededor del toroide sin pasar nunca por el mismo punto y las órbitas cercanas transcurren próximas sin diverger ni converger con el paso del tiempo. Esto ocurre en, al menos, dos tipos de sistemas:

a) En un sistema no lineal con una frecuencia de oscilación “natural” -que depende

de la amplitud de las oscilaciones- dirigida por una frecuencia periódica externa, compitiendo estas dos frecuencias entre sí.

- b) En sistemas no lineales que desarrollan oscilaciones “espontáneamente” en dos o más frecuencias mientras se varía algún parámetro del sistema. En este caso la competencia se da entre las diferentes frecuencias del sistema.

En resumen, la teoría de Ruelle-Takens muestra que, mientras un parámetro de control es variado, puede ocurrir los siguientes eventos:

- El flujo laminar (velocidad constante) lleva a oscilaciones de frecuencia  $f_1$
- Una segunda bifurcación de Hopf añade una segunda frecuencia  $f_2$  inconmensurable con  $f_1$ .
- Una tercera bifurcación de Hopf añade una tercer frecuencia  $f_3$ .
- El toroide  $T^3$  se puede convertir en inestable y ser reemplazado por un atractor extraño.

Esto significa que, si un sistema presenta tres bifurcaciones de Hopf, empezando por una solución estacionaria, es “probable” que el sistema tenga un atractor extraño después de la tercera bifurcación. Si hay un atractor extraño, aparecerá algún ruido simultáneamente a la aparición de la tercer frecuencia y el toro  $T^3$  puede “destruirse” (en un atractor extraño) inmediatamente después de que el valor del parámetro de control es alcanzado. Figura 4.1.

Está claro que el caos debe ocurrir por lo menos después de dos bifurcaciones de Hopf, ya que producen movimiento sobre un toro bidimensional y en dos dimensiones no puede ocurrir caos.

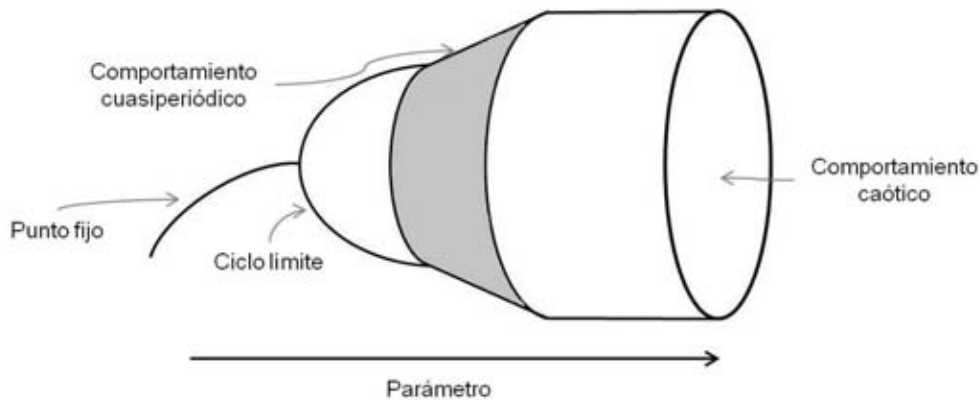


Figura 4.1: Esquema de la evolución de atractores de la ruta al caos por cuasiperiodicidad .

## 4.1. Mapeo del círculo

Ya mencionamos que la conversión de movimiento cuasiperiódico a movimiento caótico en un atractor extraño ocurre en un toro  $T^3$  cuando aparece la tercer frecuencia. Sin embargo, hay ocasiones en las que esta conversión pasa, aparentemente, desde un toro  $T^2$ . Esto es cuando el toro  $T^3$  es tan inestable que la tercer frecuencia incommensurable no se puede observar.

La transición de un movimiento cuasiperiódico en un toro  $T^2$  hacia el movimiento caótico también ha sido investigado en el estudio de mapeos simples, como es el caso del mapeo del círculo, cuya variable de iteración se interpreta como la medida de un ángulo que especifica cuando la trayectoria esta en un círculo. Su forma general puede ser escrita como

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n)$$

donde la función  $f(\theta)$  es periódica.

Para entender la dinámica del mapeo del círculo es necesario aclarar que cuando dos frecuencias  $f_1$  y  $f_2$  son commensurables sobre algún rango finito de parámetros de control  $\Omega$  y  $K$ , se dice son *frecuencias bloqueadas*. Para un estado general de frecuencia bloqueo, con  $w = \frac{p}{q}$  (razón de frecuencia), el intervalo  $\Omega(K)$  correspondiente

se puede calcular. Si se tiene un ciclo de periodo  $q$  con elementos  $\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_q^*$ :

$$f_{K,\Omega}^q(\theta_i^*) = p + \theta_i^* \quad (4.1)$$

lo cual es estable.

Al igual que en cualquier mapeo iterado, las trayectorias del mapeo del círculo se describe como una secuencia de la variable a iterar, en este caso la secuencia es  $\theta_1, \theta_2, \dots$ . Lo más común es medir  $\theta$  en unidades, tal que  $\theta = 1$  corresponda a una revolución completa alrededor del círculo y definirla modulo 1.

Para el caso sencillo en el que  $f(\theta)$  es lineal, el movimiento se representa por

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) \equiv \theta_n + \Omega \text{ mód } 1 \quad (4.2)$$

El mapeo mueve la trayectoria alrededor del círculo en pazos de tamaño  $\Omega$ .

El winding number (razón de frecuencia) para dichos mapeos, está dado por

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(\theta_0) - \theta_0}{n} \quad (4.3)$$

que mide el promedio del cambio de ángulo  $\theta$  por iteración en la ecuación 4.3 sin tomar el módulo 1 de  $\theta$

$w$  y  $\Omega$  son iguales para el mapeo lineal. Ecuación 4.2:

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\Omega + \theta_0 - \theta_0}{n} = \Omega$$

Por lo que si  $\Omega$  es un número racional (restringido al intervalo  $[0, 1]$ ),  $w$  es racional y la trayectoria es periódica, pero si  $\Omega$  es irracional, la trayectoria es cuasiperiódica.

En mapeos no lineales,  $w$  y  $\Omega$  son diferentes, pues para dos frecuencias  $f_1$  y  $f_2$ ,  $\Omega = \frac{f_1}{f_2}$ , pero si el movimiento no es lineal, entonces la frecuencia  $f_2$  decrecerá con el paso del tiempo, por lo que surge una nueva frecuencia  $f_2'$  y  $w = \frac{f_2'}{f_1}$ .

El siguiente mapeo, conocido como el *mapeo del círculo*, la no linealidad está dada por la función seno y describe la transición de cuasiperiodicidad al caos sólo por el movimiento de los ángulos  $\theta_n$ .

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n) \text{ mód } 1 \quad (4.4)$$

Donde:

- $\theta_n$  es módulo 1;
- $K$  provee una medida para la no linealidad de  $\sin(2\pi\theta_n)$  (el cual debe ser añadido para obtener una transición al caos). Cuando  $K = 0$  se reduce al mapeo lineal simple de la ecuación 4.2;
- $\Omega$  mide la tasa de rotación (ecuación 4.3);
- el uso de  $2\pi$  en el denominador es una convención ligada al uso de  $[0, 1]$  en el rango de valores para el ángulo.

Cabe recalcar que este mapeo tiene dos parámetros de control:  $\Omega$  y  $K$  relacionándose de la siguiente forma:

- Si  $K < 1$ , hay un único valor de  $\theta$  para cada valor de  $f(\theta)$  (el mapeo es invertible).
- Si  $K = 0$ , entonces  $\Omega = w$ .
- Si  $K = 1$ , ocurre un cambio en el comportamiento del mapeo y sus iteraciones.
- Si  $K > 1$ , algunos valores de  $\theta_{n+1}$  tienen más de un precursor  $\theta_n$ , es decir, no es invertible.
- El cambio de invertibilidad está ligado con la posibilidad de comportamiento caótico, pues induce el “plegado” (de estiramiento y plegado).

Ahora, los puntos fijos del mapeo del círculo satisfacen la ecuación:

$$\theta = \theta + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta)$$

o, equivalentemente, la ecuación

$$\frac{2\pi\Omega}{K} = \sin(2\pi\theta)$$

Entonces, si

$$K \geq 2\pi\Omega \tag{4.5}$$



debe haber al menos un punto fijo para el mapeo del círculo, pero ocurre sólo para ciertas combinaciones de  $K$  y  $\Omega$ .

La estabilidad de los puntos fijos, en caso de que haya, se calculan con la derivada del mapeo evaluada en esos puntos.

$$\frac{df}{d\theta} = 1 - K \cos(2\pi\theta)$$

Para que un punto fijo  $\theta^*$  sea estable es necesario que  $0 < K \cos(2\pi\theta^*) < 2$ , de lo contrario, será inestable, pues para  $K$  muy grande, la magnitud de la derivada es mayor a uno.

Entonces, para  $K < 1$ , el mapeo del círculo conduce a un comportamiento periódico ( $w$  racional, frecuencia de bloqueo) o por un comportamiento cuasiperiódico ( $w$  irracional). Conforme  $K$  se acerca a cero, la fracción del eje  $\Omega$ , en un espacio  $K\Omega$ , que ocupa la frecuencia de bloqueo se acerca a cero y casi todos los valores de  $\Omega$  conducen a un comportamiento cuasiperiódico.

Conforme  $K$  se aproxima a uno, la longitud la frecuencia de bloque aumenta y, en  $K = 1$ , la frecuencia de bloqueo ocupa, prácticamente, todo el eje  $\Omega$  y las trayectorias cuasiperiódicas ocurren para una fracción extremadamente pequeña del eje, haciendo que el comportamiento caótico se vuelva posible. De igual forma, la fracción del eje  $\Omega$  que se ocupa por un comportamiento cuasiperiódico se aproxima a uno cuando  $K$  se aproxima a cero.

Para  $K > 1$ , algunos valores de  $\Omega$  conducen al caos y otros a la frecuencia de bloqueo. En los caso que llevan al caos,  $w$  no existe porque el límite que lo define no existe (ecuación 4.3). Si  $\Omega$  produce frecuencia de bloqueo en  $K = 1$ , entonces el comportamiento general permanece periódico para  $K > 1$  con secuencias de doblamiento de periodo que conducen al comportamiento caótico conforme  $K$  crece.

En la diagrama de bifurcación del mapeo del círculo para  $\Omega = 0.5$ , se aprecia que el comportamiento caótico ocurre hasta el valor crítico  $K = 1$ . Figura 4.2. De igual forma, en la gráfica del exponente de Liapunov en función de  $K$  para el mapeo del círculo en  $\Omega = 0.60661$ , se ve que el exponente de Liapunov es cero para el comportamiento cuasiperiódico y positivo para el comportamiento caótico. Figura 4.3.

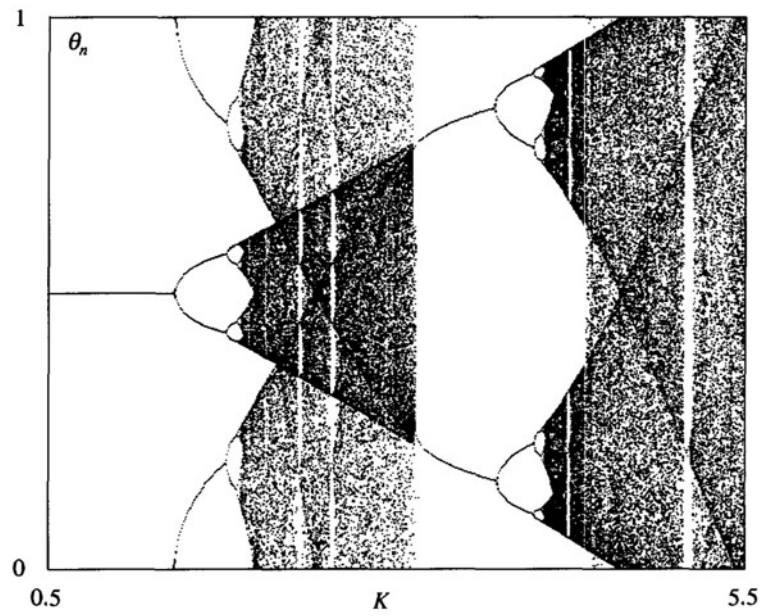


Figura 4.2: Diagrama de bifurcación del mapeo del círculo para  $\Omega = 0.5$

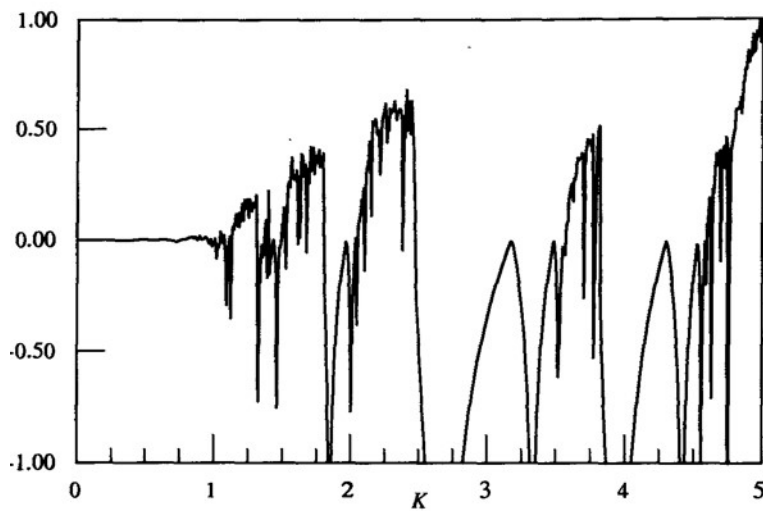


Figura 4.3: Gráfica del exponente de Liapunov como función de  $K$  para  $\Omega = 0.606661$  en el mapeo del círculo



# Capítulo 5

## Intermitencia

Los escenarios de doblamiento de periodo y cuasiperiodicidad presentan comportamientos del todo periódicos o del todo caóticos, en cambio, la transición al caos por intermitencia, también conocida como el escenario de Pomeau-Manneville, se caracteriza por tener comportamientos completamente periódicos para algunos parámetros críticos. Ocurre cuando periodos de comportamiento regular del sistema se ven interrumpidos por “explosiones” caóticas que aparecen a intervalos de tiempo de duración aleatoria.

Este comportamiento se genera cuando un punto fijo estable y uno inestable chocan entre sí anulándose mutuamente. En otras palabras, los puntos fijos “desaparecen” conforme el parámetro de control va cambiando. Así, el movimiento regular se va convirtiendo en movimiento irregular (de hecho caótico).

Este “choque” es en realidad una bifurcación y puede ocurrir en distintos escenarios; es por esto que se distinguen tres principales tipos de intermitencia determinados por la forma en la que los ciclos límite se vuelven inestables:

- **Intermitencia tipo I:** Bifurcación tangente.
- **Intermitencia tipo II:** Bifurcación de Hopf
- **Intermitencia tipo III:** Bifurcación de doblamiento de periodo (inversa).

Las tres transiciones se ilustran esquemáticamente en la figura 5.6. Cada tipo de

transición muestra distintas características en su comportamiento cerca del parámetro control. Por ejemplo, la escala del promedio de tiempo entre expansiones es de  $(r - r_c)^{-1}$  para el tipo II y tipo III, donde  $r$  es el parámetro a variar y  $r_c$  el valor del parámetro donde bifurca el sistema, y de  $(r - r_c)^{-\frac{1}{2}}$  para el tipo I. [16]

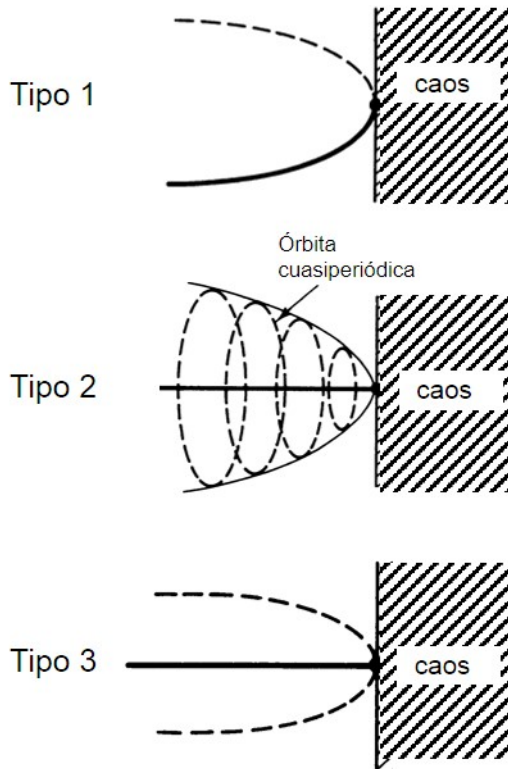


Figura 5.1: Esquema de los tres tipos de transiciones al caos por intermitencia

También puede pasar que el evento de bifurcación se dé por colisiones entre un atractor caótico y un punto fijo inestable o una órbita periódica. Tales colisiones llevan a cambios repentinos en el atractor caótico provocando su desaparición o un cambio brusco de tamaño. A este comportamiento se le conoce como *crisis*. Al igual que la intermitencia, hay tres tipos de crisis:

- *Crisis límite:* Un atractor caótico se destruye repentinamente cuando el atractor colisiona con una órbita periódica en su cuenca límite, es decir, conforme el parámetro sobrepasa el valor crítico. Seguido de una crisis límite se tiene caos transitorio.

- *Crisis interior*: El tamaño del atractor en el espacio fase aumenta de repente cuando la órbita periódica con la cual el atractor caótico colisiona está en el interior de su cuenca límite.
- *Crisis de fusión de atractor*: Dos o más atractores caóticos colisionan simultáneamente con una órbita periódica en la cuenca límite que los separa formando un único atractor caótico.

A diferencia de la crisis límite, después de una crisis interior o de una crisis de fusión de atractor, se tienen comportamientos que se pueden caracterizar como *intermitencia inducida por crisis*.

Una mayor profundización en los escenarios de crisis se da en [8], [?], [11], [16]

En la intermitencia, conforme va cambiando el parámetro de control, las explosiones ocurren con mayor frecuencia y la duración de las oscilaciones regulares decrece, hasta que el comportamiento es completamente caótico.

Las características generales de la intermitencia son las siguientes: Sea  $r$  el parámetro control y  $r_i$  el valor de bifurcación

- Para  $r < r_i$ , el sistema exhibe oscilaciones estables (ciclos límite).
- Para  $r > r_i$  ( $r - r_i$  pequeño), el sistema entra en el régimen *intermitente*: Oscilaciones estables son interrumpidas por fluctuaciones.
- Conforme  $r \rightarrow r_i$  desde arriba, las fluctuaciones se vuelven cada vez más raras, y desaparecen para  $r < r_i$ .
- La amplitud o duración de los intervalos entre fluctuaciones no varía, sólo su tiempo promedio.

Esta ruta fue encontrada por Pomeau y Manneville en 1979 al estudiar el sistema de Lorenz. Sin embargo, aunque haya sido descubierta en un sistema continuo, la intermitencia también está presente en sistemas discretos, como lo es el mapeo logístico, el cual tomaremos como ejemplo para una mejor explicación del comportamiento de esta transición al caos, además de presentar crisis.

## 5.1. Intermitencia en el sistema de Lorenz

Las ecuaciones de Lorenz que si bien no tienen un significado físico muy relevante, se han convertido en uno de los paradigmas del caos. Dicho sistema posee una simetría por reflexión  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ , el eje  $z$  es invariante y contiene tres parámetros positivos  $(\sigma, r, b)$  y dos términos no lineales:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(-x + y) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (5.1)$$

La localización de los equilibrios y el análisis de su estabilidad ya se hizo en el ejemplo 3 de la sección 1.1.3, así que resumiremos los resultados.

Este sistema tiene tres estados estables posibles (soluciones con  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ ). Uno es  $x = y = z = 0$  que denotaremos como  $P_1$  y otros dos, que denotamos como  $P_2$  y  $P_3$ , los cuales existen para  $r > 1$  y están dados por

$$P_2 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

$$P_3 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

En el ejemplo hecho anteriormente, se fijaron  $\sigma = 10$  y  $b = 3$ . Sin embargo, para el estudio que se hará en esta sección usaremos, al igual que Lorenz,  $\sigma = 10$  y  $b = \frac{8}{3}$ .

Cuando  $0 < r < 1$  el único punto fijo es  $P_1$  y es estable por lo que es el único atractor del sistema (figura 5.2(a)). Conforme  $r$  pasa a través de 1, uno de los eigenvalores de  $P_1$  se vuelve positivo y los otros dos se mantienen negativos, por lo que en  $r = 1$ ,  $P_1$  tiene una bifurcación horquilla dando lugar a  $P_2$  y  $P_3$  que son simétricas respecto al eje  $z$ .  $P_2$  y  $P_3$  son estables en su nacimiento con tres eigenvalores reales. Luego, cuando  $r > 1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  se vuelven atractores del sistema. La figura 5.2(b) muestra la situación para  $r$  ligeramente más grande que 1. Conforme  $r$  va creciendo más, dos de los eigenvalores reales estables (negativos) de  $P_2$  se vuelven eigenvalores complejos conjugados con partes reales negativas, para  $r = r_1$ . Lo mismo pasa para  $P_3$  por simetría. En este intervalo ( $r_1 < r$ ), las órbitas se aproximan en espiral a  $P_2$  y  $P_3$ , como se muestra en la figura 5.2(c). Hasta aquí, no hay dinámica caótica, ni siquiera hay atractores caóticos.

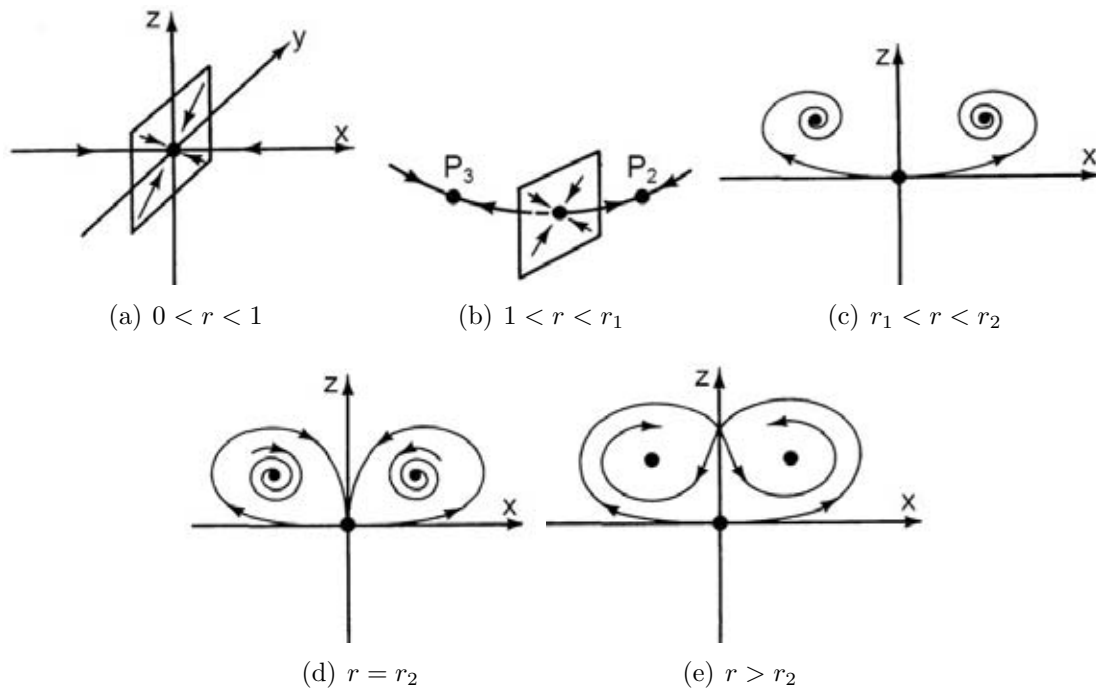


Figura 5.2: Evolución de los puntos fijos del sistema de Lorenz

Para ver que el caos surja se tiene que seguir aumentando  $r$ . Conforme esto pasa, la espiral inicial del conjunto inestable de  $P_1$  alrededor de  $P_2$  y  $P_3$  aumenta de tamaño hasta que en algún valor crítico  $r = r_2$ , se obtiene órbita homoclínica de  $P_1$  (puntos en la órbita que se aproximan a  $P_1$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ ), como se ve en la figura 5.2(d). Cuando  $r$  aumenta más allá de  $r_2$  se tiene un eigenvalor real negativo y dos complejos con parte real positiva para  $P_2$  y  $P_3$ , así es como surge caos transitorio, pues al pasar  $r_2$ ,  $P_2$  y  $P_3$  continúan siendo los únicos atractores. [15]. Conforme  $r$  aumenta aún, el caos transitorio se convierte en un atractor caótico por crisis en  $r = r_3 = 24.06$ . Aumentando más a  $r$ , los estados estables de  $P_2$  y  $P_3$  presentan una bifurcación de Hopf subcrítica en

$$r = r_4 = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

donde las partes reales de sus eigenvalores complejos conjugados pasan de negativo a positivo y para  $r > r_4$ ,  $P_2$  y  $P_3$  se vuelven inestables (siempre y cuando  $\sigma > b + 1$ ). Para el rango  $r_3 < r < r_4$ , hay tres posibles atractores ( $P_2$ ,  $P_3$  y un atractor caótico),



mientras que para  $r > r_4$  sólo está el atractor caótico de las ecuaciones de Lorenz (figura 1.17) [12] [15] [16].

En resumen:

- $0 < r < 1$ : El único punto crítico es  $P_1$ , el cual es estable.
- $r = 1$ :  $P_1$  presenta una bifurcación horquilla, perdiendo estabilidad (que nunca recupera) y dando lugar a  $P_2$  y  $P_3$
- $1 < r < r_1$ :  $P_2$  y  $P_3$  son estables.
- $r = r_2$ : Aparece una órbita homoclínica de  $P_1$
- $r_2 < r < r_3$ :  $P_2$  y  $P_3$  son focos estables y hay caos transitorio.
- $r_3 < r < r_4$ :  $P_2$ ,  $P_3$  y un atractor caótico por crisis son los posibles atractores
- $r = r_4$ :  $P_2$  y  $P_3$  sufre una bifurcación de Hopf subcrítica.
- $r_4 < r$ :  $P_2$ ,  $P_3$  son inestables y sólo queda un atractor caótico.

Para ver que el atractor del sistema no es periódico, Lorenz examinó el comportamiento de los *máximos sucesivos* de las trayectorias en dirección  $z$ , derivando un mapeo caótico unidimensional llamado *mapeo de retorno*, que es una manera de reducir la dinámica continua y tridimensional del sistema completo a la de un mapeo unidimensional, de manera similar a lo que se hace con el mapeo de Poincaré. La dinámica no trivial del sistema se mueve en conjunto con el máximo local de  $z$  y se puede visualizar graficando estos máximos de manera recurrente, es decir  $z_{k+1}$  contra  $z_k$ , donde se puede apreciar la contracción del volumen que sufre el sistema de Lorenz (es disipativo) por lo que cualquier órbita periódica debe ser inestable (figura 5.3). A cada tiempo  $t_n$ ,  $z$  alcanza su máximo local, es decir,  $z_n = z(t_n)$ . Hay que observar que los puntos no están aleatoriamente dispersos, sino organizados en una curva suave unidimensional y la pendiente de la tangente del mapeo es mayor que uno en todos lados, por lo que no puede haber puntos fijos. Además, la curva no es invertible, por lo que el caos es posible [11].

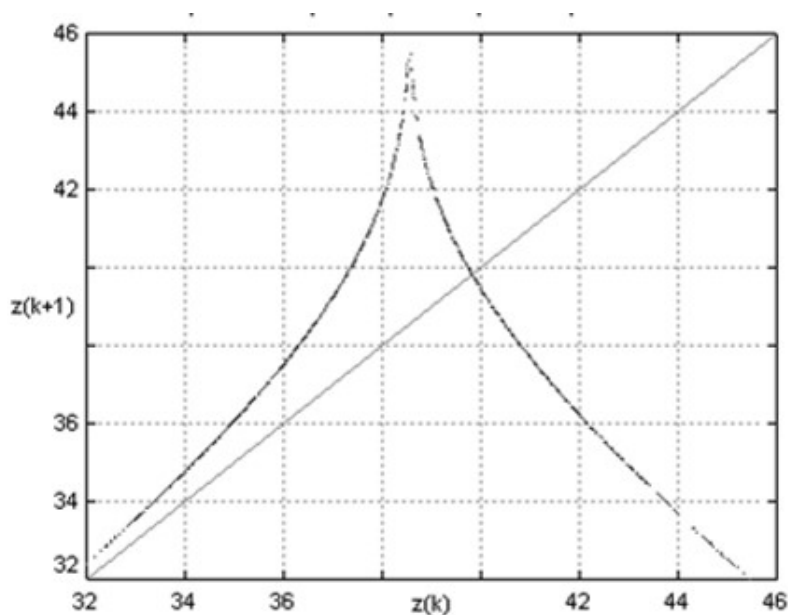


Figura 5.3: Mapeo de retorno de Lorenz

## 5.2. Intermitencia en el mapeo logístico

En la sección 3.2, se vio cómo  $n + 1$  iteraciones del mapeo logístico generaban órbitas de periodo  $2^n$  y que conducían al caos por doblamiento de periodo. Sin embargo, en este mapeo se pueden originar nuevos ciclos de periodo  $|k|$ , no necesariamente par.

La tercera iteración del mapeo es la clave para entender el nacimiento de un ciclo de periodo tres. Extendiendo la notación para la ecuación 3.23, las poblaciones de tres generaciones de separación están relacionadas por:

$$x_{t+3} = f^{(3)}(x_t) \quad (5.2)$$

El proceso general para obtener ciclos de periodo  $|k|$  es como sigue:

- La triple iteración de  $f(x)$  producirá una función  $f^{(3)}(x)$  con 4 jorobas, siempre y cuando  $f(x)$  tenga una joroba lo suficientemente empinada.

- Al principio la línea de  $45^\circ$  interseca a esta curva solamente en el punto  $x^*$  y en  $x = 0$ , como se aprecia en la figura 5.4(a)
- Conforme la joroba de  $f(x)$  se hace cada vez más empinada, las colinas y los valles en  $f^{(3)}(x)$  se pronuncian más, hasta que, simultáneamente, los dos primeros valles se hundan y la última colina alcance a tocar la línea de  $45^\circ$ , para luego interceptarla en seis nuevos puntos. Figura 5.4(b). Recordemos que la intersección de la gráfica con la línea de  $45^\circ$  corresponden a las soluciones de  $f^3(x) = x$ .
- Estos seis nuevos puntos se dividen en dos distintos ciclos de tres puntos.
- Se puede ver que la pendiente que determina la estabilidad de  $f^{(3)}(x)$  en 3 de estos puntos tienen un valor común en el origen, el cual es  $f^{(3)'} = 1$  y después crece más allá de 1. Este ciclo de periodo tres nunca es estable.
- La pendiente de  $f^{(3)}(x)$  en los otros tres puntos empieza en  $f^{(3)'} = 1$  y luego disminuye hacia cero, produciendo un ciclo estable de periodo tres.

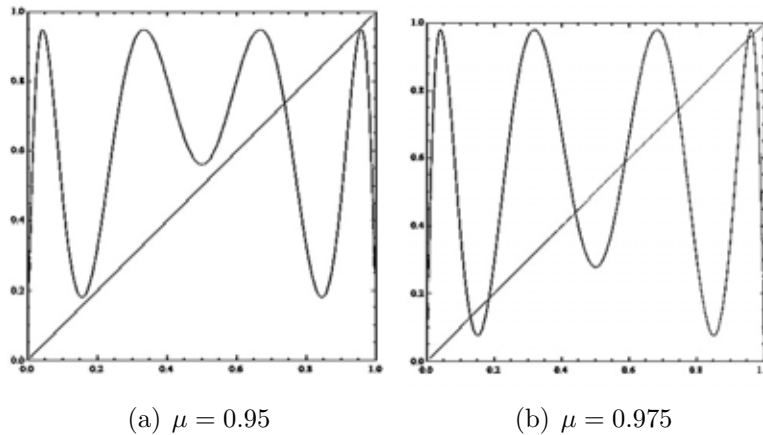


Figura 5.4: Tercera iteración de la ecuación 3.22

Ahora, para el valor de  $\mu = 0.95$  la gráfica interseca a la diagonal sólo en dos puntos, mientras que para  $\mu = 0.975$  ya la interseca en seis puntos más, entonces debe haber un valor de  $\mu$  intermedio ( $\frac{1+\sqrt{8}}{4}$ ), que llamaremos  $\mu_c$ , para el cual la gráfica de  $f^{(3)}(x)$  sea *tangente* a la línea de  $45^\circ$ . Figura 5.5. Ahí, los ciclos estables

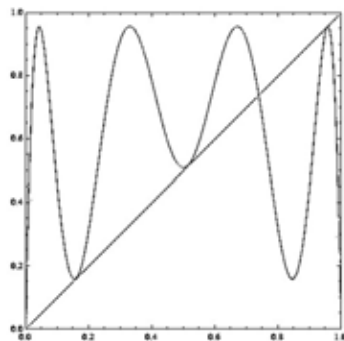


Figura 5.5: Gráfica de  $f^{(3)}(x)$  tangente a la diagonal

e inestables de periodo tres se separan y aparecen en una *bifurcación tangente*. Esta transición define el comienzo de la ventana periódica.

Para  $\mu < \mu_c$ , con  $\mu_c - \mu$  pequeño, el sistema se comporta de forma caótica. Conforme  $\mu$  se acerca a  $\mu_c$ , las fluctuaciones se vuelven cada vez más extrañas, se ve un fantasma del ciclo de periodo tres, pero este extraño comportamiento desaparece y el sistema regresa al ciclo de periodo tres. Figura 5.6. Esta actividad pasa una y otra vez y el tiempo que hay entre los comportamientos extraños es cada vez más menos, hasta que el comportamiento es completamente caótico.

Este proceso, en el cual hay momentos de estabilidad interrumpidos por momentos caóticos, es la *ruta al caos por intermitencia*, particularmente *intermitencia tipo I*. En el diagrama de bifurcación de este mapeo, fig. 3.11, se aprecian las zonas caóticas que son las que están llenas de puntos que se alternan con franjas blancas, sin puntos y unas cuantas líneas que son las regiones no caóticas. También se ve que dentro de estas franjas hay pequeños espacios caóticos, esto se debe a que el sistema presenta *crisis*, lo que provoca que cuando los puntos fijos inestables entran en las regiones caóticas repelen las trayectorias hacia las franjas. Figura 5.7. La gráfica 5.8 muestra el valor del exponente de Liapunov como función del parámetro  $\mu$ , se puede ver que el exponente de Liapunov cambia intermitentemente entre valores positivos (caóticos) y negativos (no caóticos).

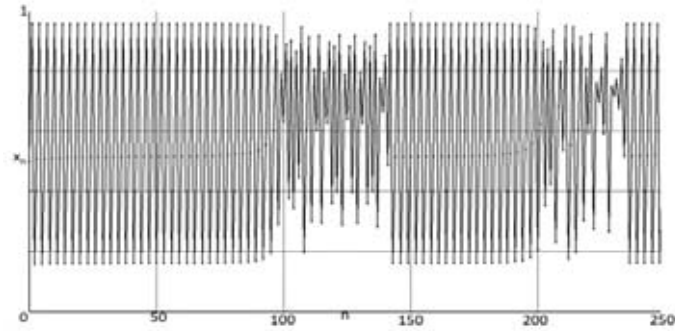


Figura 5.6: Serie de tiempo del mapeo logístico para  $\mu = 0.9570$

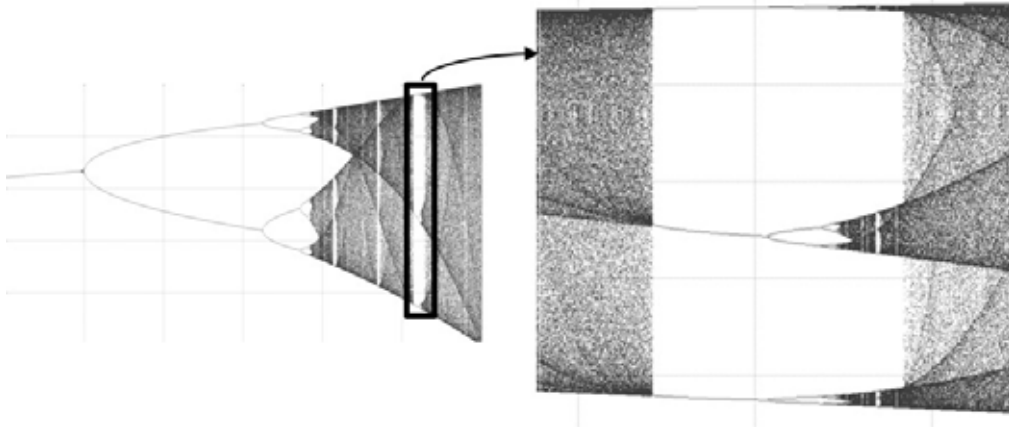


Figura 5.7: Detalle del diagrama de bifurcación del mapeo logístico

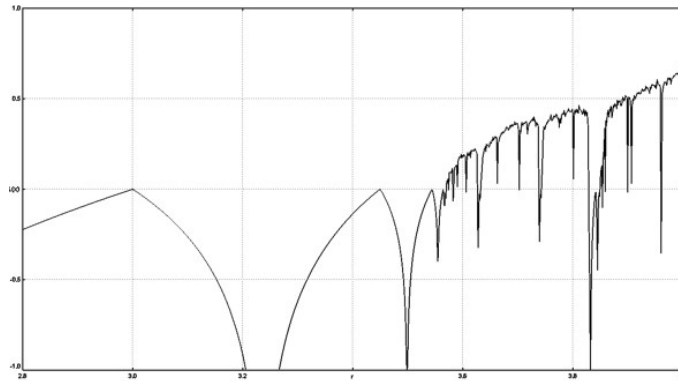


Figura 5.8: Gráfica de los exponentes de Liapunov para el mapeo logístico como función de  $\mu$

# Capítulo 6

## Conclusiones

El principal objetivo de este libro es ofrecer una introducción a las tres principales transiciones al caos determinista, para lograrlo se define desde lo que es un sistema dinámico y sus clasificaciones hasta las transiciones al caos en sí. Se da, de una forma no tan profunda pero sí explicativa, las bases necesarias para entender cómo funcionan, se estudian y encuentran las rutas al caos, ya sea en un sistema dinámico discreto o continuo.

En el primer capítulo se da la definición de lo que es un sistema dinámico, denominado como un conjunto de ecuaciones cuyos parámetros cambian respecto a alguna variable, que regularmente es el tiempo. Dichos parámetros siguen una sucesión de reglas temporales y éstos pueden ser discretos o continuos, lineales o no lineales, conservativos o disipativos, etcétera.

En los sistemas discretos el tiempo varía dentro de un conjunto numerable, mientras que en los continuos varía, valga la redundancia, continuamente. Los sistemas lineales presentan el principio de superposición y son realmente sencillos de analizar y trabajar, en cambio, los no lineales no están sujetos a este y regularmente presentan un comportamiento impredecible, que es lo que se entiende como caos. Por otro lado, los sistemas conservativos son aquellos que conservan el volumen en el espacio fase, mientras que los disipativos no lo hacen y la tasa de disipación puede ser calculada a través de la matriz jacobiana del sistema.

Algo muy importante dentro del estudio de los sistemas dinámicos es el saber la

estabilidad de las singularidades del sistema. En los sistemas lineales, éstas son sólo puntos fijos y su análisis se basa en el cálculo de los eigenvalores de la matriz asociada al sistema y en la relación entre ellos. En los no lineales, además de los puntos fijos, las singularidades pueden ser ciclos límite, que es cuando trayectorias no cerradas se acercan o se alejan en espiral a soluciones periódicas, o atractores extraños, que son un conjunto de órbitas y puntos con geometría fractal que y están ligados al movimiento caótico.

La mayoría de los atractores extraños se generan con un proceso de estiramiento y plegado, cuya iteración causa un sistema caótico. Un ejemplo muy famoso de atractor extraño en un sistema continuo es el atractor de Lorenz y de uno discreto el atractor de Hénon.

El caos determinista se refiere a movimientos irregulares producidos por sistemas no lineales que dan lugar a trayectorias que se separan exponencialmente rápido. La separación que existe entre dos trayectorias conforme a lo largo de la dinámica del sistema es medida por los exponentes de Liapunov y según sea la relación entre los exponentes obtenidos por cada trayectoria se tendrá un punto fijo, un ciclo límite, un toro cuasiperiódico o el sistema será caótico. También se tienen las secciones de Poincaré, que ayudan a la identificación de la periodicidad de una trayectoria con la reducción de una función continua a una función discreta, preservando las propiedades de estabilidad de puntos y curvas.

Otra útil forma de estudiar geoméricamente el comportamiento de un sistema dinámico es mediante los diagramas de bifurcación. Las bifurcaciones estudian cómo cambian las soluciones de un sistema dinámico al cambiar los valores de un parámetro control. Hay tres principales tipos de bifurcaciones, las cuales son horquilla, tangente y de Hopf. La primera se caracteriza por la separación de un punto fijo estable en dos estables y uno inestable, o de un inestable en uno estable y dos inestables, esta bifurcación se hace presente en el escenario de Feigenbaum para el caos o intermitencia tipo III. La segunda se identifica por la aparición o destrucción de dos puntos fijos y puede llevar al caos por intermitencia tipo I. La bifurcación de Hopf se da en sistemas de dos o más dimensiones y genera ciclos límites, la repetición de esta bifurcación, en un sistema de dos o más frecuencias produce caos por cuasiperiodicidad o intermitencia tipo II.

En el capítulo 3 se habló sobre la ruta al caos por doblamiento de periodo mediante el mapeo logístico, que es un modelo discreto de gran relevancia para la teoría del caos, pues según sea la órbita que se estudie será el escenario de bifurcación que

se encontrará; por otro lado, el sistema de Duffing también presenta doblamiento de periodo a pesar de ser un sistema de dos dimensiones, pues se fuerza, mediante la introducción de otra variable, a que sea de tres dimensiones para que se pueda presentar el caos.

La ruta al caos por cuasiperiodicidad se estudia en el capítulo 4, donde se explica que este escenario se da con la iteración de varias frecuencias y la acoplación no lineal de dos o más osciladores periódicos. Esta ruta fue encontrada por Ruelle, Takens y Newhouse en 1978 al mostrar que el movimiento regular se vuelve altamente inestable después de que el sistema presenta tres bifurcaciones de Hopf. Como ejemplo se trata el mapeo del círculo, mismo que tiene dos parámetros de control, y se muestra que al fijar uno y variar el otro se presenta una bifurcación que cambia el comportamiento del sistema de cuasiperiódico a caótico.

El capítulo 5 habla de las condiciones necesarias para que un sistema presente la ruta al caos por intermitencia. De manera más específica, se comenta que existen tres tipos principales de intermitencia, cada uno definido por el escenario de bifurcación que presenta, además de lo que se conoce como crisis, lo cual es en sí un escenario de bifurcación que provoca cambios repentinos en un atractor caótico. Si bien no se mostraron ejemplos de todo lo relacionado a este escenario, sí se muestran dos de los sistemas más representativos del caos: El sistema de Lorenz y el mapeo logístico.

Por último cabe mencionar que en las transiciones al caos no sólo están descritas en sistemas matemáticos sino que también es posible que se encuentren en sistemas físicos, sólo por mencionar algunos ejemplos, en el escenario de Feigenbaum se puede encontrar en láseres, plasmas o en algunas reacciones químicas; el de Ruelle-Takens se observa en la convención de Rayleigh-B´enard para fluidos con alto número de Prandtl (este número mide la razón entre la viscosidad y la difusión térmica del fluido), mientras que en el escenario de Pomeau-Manneville también se observa en el sistema Rayleigh-B´enard bajo condiciones particulares y en semiconductores accionados no lineales. [8]





# Bibliografía

- [1] Boyce, William E. y DiPrima, Richard C. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Limusa, S.A. de C.V. Grupo Noriega Editores, Distrito Federal, México. 4<sup>a</sup> Edición, 2000.
- [2] Jordan, Dominic William y Smith, Peter, *Nonlinear ordinary differential equations. An introduction for scientist and engineers*. Oxford University Press Inc, Nueva York, Estados Unidos de América. 4<sup>a</sup> Edición, 2007.
- [3] Blanchard, Paul; Devaney, Robert L. y Hall, Glen R. *Differential equations*. Thomson Brooks/Cole, Estados Unidos de América. 3<sup>a</sup> Edición, 2006.
- [4] Guckenheimer, John y Holmes, Phillip *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Springer, Estados Unidos de América. 27<sup>a</sup> Edición, 2002.
- [5] Tabor, M. *Chaos and integrability in nonlinear dynamics: An introduction* Wiley, Nueva York, Estados Unidos de América 1989
- [6] Larraza Hernández, Silvia y Palencia Gómez, Víctor José, *El oscilador de Van Der Pol*, Revista Multidisciplina, Vol. 5, 93-102, mayo 2010.
- [7] Mandelbrot, Benoit B., *The fractal geometry of nature*, W.H. Freeman and company, Nueva York, Estados Unidos de América. 1<sup>a</sup> Edición, 1977
- [8] Hillborn, Robert C., *Chaos and Nonlinear Dynamics, an introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press, New York, Estados Unidos de América 2<sup>a</sup> Edición, 2000.
- [9] Lorenz, Edward, *The essence of chaos*. University College London, United Kingdom 1<sup>a</sup> Edición, 1993.

- [10] Schuster, Heinz Georg, *Deterministic chaos, an introduction*. VCH Verlagsgesellschaft mbH, Weinheim, Alemania 3ª Edición, 1995.
- [11] Cencini, Massimo; Cecconi, Fabio y Vulpiani, Angelo, *Chaos, from simple models to complex systems*, Series on advances in statistical mechanics, vol. 17, World Scientific Publishing, Estados Unidos de América 2ª Edición, 2010.
- [12] Strogatz, Steven H. *Nonlinear dynamics and Chaos with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Perseus book publishing, L.L.C., Massachusetts, Estados Unidos de America. 1ª Edición, 1994.
- [13] Alligood, Kathleen T.; Sauer, Tim D. y Yorke, James A. *Chaos: An introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag New York, Inc., Nueva York, Estados Unidos de America. 1ª Edición, 1996.
- [14] May, Robert. M, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, Vol. 261, p459, 10 de junio de 1976.
- [15] Kaplan y Yorke, J.A. *Preturbulence: A regime observed in a fluid flow model of Lorenz*. Communications in Mathematical Physics Vol. 67, p93, 1979
- [16] Ott, Edward *Chaos in dynamical systems* Cambridge University Press 1ª Edición. 1993

Programas de computadora utilizados:

1. ***Wolfram Mathematica 8***: Para planos fase de tres dimensiones.
2. ***Pplane 2005.10***: Para plano fase de sistemas de dos ecuaciones.
3. ***Chaos for Java***: Para series de tiempo, mepeos de retorno y diagramas de bifurcación.