



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA.

CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA DE SUPERFICIES NO SINGULARES
DE GRADO 3 EN $\mathbb{R}P^3$

TESINA
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRA EN CIENCIAS

PRESENTA:
MÓNICA DE NOVA VÁZQUEZ

DIRECTOR
DRA. ADRIANA ORTIZ RODRÍGUEZ
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, UNAM

MÉXICO, D. F. 17 DE SEPTIEMBRE DE 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Introducción	2
1. Preliminares	4
2. Superficies no singulares de grados 1 y 2 en $\mathbb{R}P^3$	9
3. Superficies no singulares de grado 3 en $\mathbb{R}P^3$	11
Bibliografía	21

Introducción

Uno de los objetivos de la Geometría Algebraica es estudiar los ceros de polinomios. Por ejemplo en el plano \mathbb{R}^2 las cónicas son conjuntos algebraicos, en particular, son curvas algebraicas pues son de dimensión 1. En el espacio \mathbb{R}^3 tenemos paraboloides, hiperboloides, esferas, como ejemplos de conjuntos algebraicos y más que eso, como superficies.

Cuando comenzamos a estudiar las curvas proyectivas reales en $\mathbb{R}P^2$ podemos darnos cuenta que las cónicas (no vacías) son proyectivamente equivalentes a cuatro tipos, a saber: la circunferencia, un par de rectas transversales, un punto y una recta doble. De hecho, si la cónica es no singular (es decir, que carece de puntos donde sus derivadas parciales se anulan), ésta es proyectivamente equivalente a una circunferencia. Incluso podemos dar una clasificación proyectiva de las curvas algebraicas singulares de grado 3 en $\mathbb{R}P^2$ (cuyo polinomio homogéneo es de grado 3).

Además, en el espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^3$ también podemos clasificar proyectivamente las superficies de grado 1 y de grado 2. En el capítulo 2 hablaremos sobre esta clasificación, profundizando en las superficies no singulares de grado 2.

Surge entonces el interés de clasificar las superficies no singulares de grado 3 en $\mathbb{R}P^3$. En el presente trabajo estudiamos dicha clasificación topológica.

Demostremos que solamente hay cinco tipos topológicos de superficies no singulares de grado tres en $\mathbb{R}P^3$, a saber: la unión disjunta de un plano proyectivo y una esfera, un plano proyectivo, la suma conexa de un plano proyectivo y un toro, la suma conexa de un plano proyectivo y dos toros, y por último, la suma conexa de un plano proyectivo y tres toros. También mostraremos que estos cinco tipos son realizables, es decir, que existen polinomios homogéneos de grado 3 que describen estas superficies. Esto es la demostración del Teorema de Clasificación de superficies no singulares de grado 3 en $\mathbb{R}P^3$; el cual fue desarrollado originalmente en la Proposición 5.6.4 de [1]. Un hecho importante en la demostración consiste en verificar que hay 5 tipos topológicos de curvas no singulares de grado 4 en $\mathbb{R}P^2$. A partir de esta última clasificación se obtendrá la de las superficies cúbicas.

En los preliminares se mencionan algunas definiciones y resultados que se usaran en los capítulos 2 y 3. Se usan términos que no se definen como carta, multiplicidad y curvas transversales pero pueden ser consultados en los capítulos 2 y 4 de [5].

Históricamente, las superficies cúbicas han sido estudiadas por diferentes autores, el primer artículo que trata la superficie cúbica fue hecho por Mossbrugger en 1841. La teoría de las rectas sobre una superficie cúbica fue estudiada primero entre los matemáticos Británicos Salmon y Cayley en 1849. Cayley observó que solamente una cantidad finita de rectas puede estar en la superficie y Salmon determinó que a lo más son veintisiete rectas.

Con este resultado comienza la investigación para clasificar las superficies cúbicas y en 1851 Schläfli consideró una clasificación de la superficie general de grado tres, en relación a la naturaleza de las veintisiete rectas. En 1862, August publicó una investigación más elaborada y un año después Schläfli hizo una clasificación de las superficies, dependiendo de la naturaleza de las singularidades.

En 1872, Clebsch y Klein, en la Univeridad de Göttingen, consideraron la cuestión de la forma de la superficie cúbica. Clebsch construyó un modelo de la *superficie diagonal* con veintisiete rectas. Klein exhibió un conjunto completo de modelos de superficies cúbicas en 1894, incluyendo el modelo de Clebsch.

Geiser mostró que la proyección de una superficie cúbica desde uno de sus puntos, en un plano paralelo al plano tangente en ese punto, es una curva cuártica; y además que toda curva cuártica puede ser generada de esta manera.¹

Así, la clasificación de superficies cubicas relaciona las investigaciones de las veintisiete rectas y las cuárticas, como veremos en la prueba del teorema 3.1.

¹cf. Henderson A., *The Twenty-Seven Lines Upon The Cubic Surface*, pp. 1-7.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo enunciaremos algunos resultados que se utilizarán en la prueba del teorema de clasificación de superficies cúbicas 3.1. Algunos de ellos serán probados y en caso contrario, se dan referencias.

Aunque solamente trabajáremos con los espacios proyectivos $\mathbb{R}P^2$ y $\mathbb{R}P^3$, daremos la definición en general, tomada del capítulo 2 de [5].

Definición 1.1 Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 1$, el *espacio proyectivo* asociado a \mathbb{R}^n está definido por

$$\mathbb{R}P^{n-1} := (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) / \sim,$$

donde $\bar{x} \sim \bar{y}$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{x} = \lambda\bar{y}$.

Cualquier espacio proyectivo puede ser descompuesto en un subespacio afín y un espacio proyectivo de menor dimensión. En efecto, para $\mathbb{R}P^n$ tal descomposición está dada tomando, para $l \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} U_l &:= \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{R}P^n : x_l \neq 0\}, \\ H_l &:= \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{R}P^n : x_l = 0\}. \end{aligned}$$

H_l es identificado con $\mathbb{R}P^{n-1}$ y U_l es identificado con \mathbb{R}^n con las siguientes aplicaciones mutuamente inversas

$$\begin{aligned} i_l : \mathbb{R}^n &\longrightarrow U_l, \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1 : \dots : x_{l-1} : 1 : x_l : \dots : x_n) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} j_l : U_l &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ (x_0 : \dots : x_{l-1} : x_l : \dots : x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_l}, \dots, \frac{x_{l-1}}{x_l}, \frac{x_{l+1}}{x_l}, \dots, \frac{x_n}{x_l} \right). \end{aligned}$$

De manera que $\mathbb{R}P^n \simeq \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}P^{n-1}$.

Definición 1.2 Una *superficie algebraica* en $\mathbb{R}P^3$ de grado m es el conjunto de ceros de un polinomio homogéneo de grado m en $\mathbb{R}[X, Y, Z, T]$.

Una superficie S es *no orientable* si contiene al menos una banda de Möbius, en otro caso es *orientable*. Tenemos una proposición que nos permite caracterizar a las superficies orientables (Proposición 5.1.7 de [1]).

Proposición 1.1 Sea $S \subseteq \mathbb{R}P^3$ una superficie no singular. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) S es orientable;
- b) toda recta transversal a S la interseca en un número par de puntos;
- c) $\mathbb{R}P^3 \setminus S$ tiene dos componentes conexas.

Corolario 1.1 Sea $S \subseteq \mathbb{R}P^3$ una superficie no singular de grado impar. Entonces S es no orientable y tiene exactamente una componente conexa S_0 no orientable.

Prueba. Supongamos que S es orientable, entonces cualquier recta transversal a S la interseca en un número par de puntos. Sean $l \subseteq \mathbb{R}P^3$ una recta y π un plano transversal a S que contiene a l . Entonces $\pi \cap S$ es una curva plana no singular. Como la cantidad de puntos de $l \cap \pi \cap S$ es par, entonces $\pi \cap S$ es de grado par. Al variar todos los planos con esta propiedad se tiene que el grado de S es par y esto es una contradicción. Así, S es no orientable.

Ahora veamos que sólo tiene una componente no orientable. Supongamos que S_0 y S_1 son componentes no orientables. Sea π un plano transversal a S_0 y a S_1 , entonces $\pi \cap S_0$ y $\pi \cap S_1$ son curvas planas no singulares de grado impar. Esto implica que cada una contiene una pseudorecta. Pero cualquier par de pseudorectas se intersectan, entonces S es singular, lo que es una contradicción. ■

En la prueba del teorema de clasificación 3.1, calcularemos la característica de Euler de ciertas superficies. Recordemos que una *triangulación* de una superficie compacta S , consiste de una familia finita de subconjuntos cerrados $\{T_1, \dots, T_n\}$ que cubren a S , y una familia de homeomorfismos $\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i$ con $i = 1, \dots, n$, donde cada T'_i es un triángulo en \mathbb{R}^2 . Los subconjuntos T_i son llamados “triángulos” y además, cualesquiera dos distintos, o son disjuntos, o tienen ya sea un vértice en común, o una arista en común.

Si v es el número total de vértices, e el número de aristas y f el número de caras entonces se define la *característica de Euler* de S como

$$\chi(S) = v - e + f.$$

Además, las superficies compactas no singulares se clasifican mediante el siguiente teorema (Capítulo 1, Teorema 5.1 de [6]).

Teorema 1.1 *Cualquier superficie compacta no singular es homeomorfa a una esfera, o a una suma conexa de toros, o a una suma conexa de planos proyectivos.*

Proposición 1.2 Sean S_1 y S_2 dos superficies compactas no singulares en $\mathbb{R}P^3$. Las características de Euler de S_1 , S_2 , $S_1 \cup S_2$ y $S_1 \# S_2$ (suma conexa) están relacionadas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \chi(S_1 \cup S_2) &= \chi(S_1) + \chi(S_2) - \chi(S_1 \cap S_2), \\ \chi(S_1 \# S_2) &= \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2. \end{aligned}$$

Teorema 1.2 Sean S_1 y S_2 dos superficies compactas no singulares. Entonces S_1 y S_2 son homeomorfas si y sólo si sus características de Euler son iguales y ambas son orientables o ambas son no orientables.

Teorema 1.3 *La característica de Euler es invariante bajo homotopía.*

Como \mathbb{R}^n es homotópico a un punto tenemos que $\chi(\mathbb{R}^n) = 1$. Y usando la Proposición 1.2 e inducción, obtenemos la característica de Euler de las siguientes superficies:

<i>Superficie</i>	<i>Característica de Euler</i>
Suma conexa de n toros	$2 - 2n$
Suma conexa de n planos proyectivos	$2 - n$
Suma conexa de un plano proyectivo y n toros	$1 - 2n$

En la introducción mencionamos el resultado sobre las superficies cúbicas no singulares y las veintisiete rectas que contienen, puede ser consultado en el Capítulo 5 de [5].

Proposición 1.3 *Sea $S \subseteq \mathbb{R}P^3$ una superficie algebraica no singular de grado 3. Entonces S contiene solamente un número finito de rectas (a lo más 27).*

A continuación se mencionarán algunos resultados sobre curvas algebraicas en $\mathbb{R}P^2$, en particular sobre cúbicas.

Definición 1.3 *Sea $l \subseteq \mathbb{R}P^2$ una curva algebraica difeomorfa a S^1 . Si $\mathbb{R}P^2 \setminus l$ tiene dos componentes conexas y una de ellas es difeomorfa a un disco, decimos que l es un *óvalo*. Si $\mathbb{R}P^2 \setminus l$ es conexo, decimos que l es una *pseudo recta*.*

Teorema 1.4 (Bézout) [3],[4] *Sean C y C' dos curvas planas de grados d y d' respectivamente, sin componentes comunes. Entonces C y C' se intersectan en a lo más dd' puntos contados con multiplicidad.*

De esta manera, si C es una curva de grado d y l es una recta que no está contenida en C , entonces l intersecta a C en a lo más d puntos contados con multiplicidad.

Proposición 1.4 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}P^2$ una curva algebraica irreducible y singular, cuyo polinomio homogéneo es irreducible y de grado 3. Entonces C tiene exactamente un punto singular, el cual es de multiplicidad dos. Además es proyectivamente equivalente a una de las siguientes curvas:*

- a) $C = \{-x^3 + (y^2 - x^2)z = 0\}$,
- b) $C = \{-x^3 + y^2z = 0\}$,
- c) $C = \{x^3 + y^3 + (x^2 + y^2)z = 0\}$.

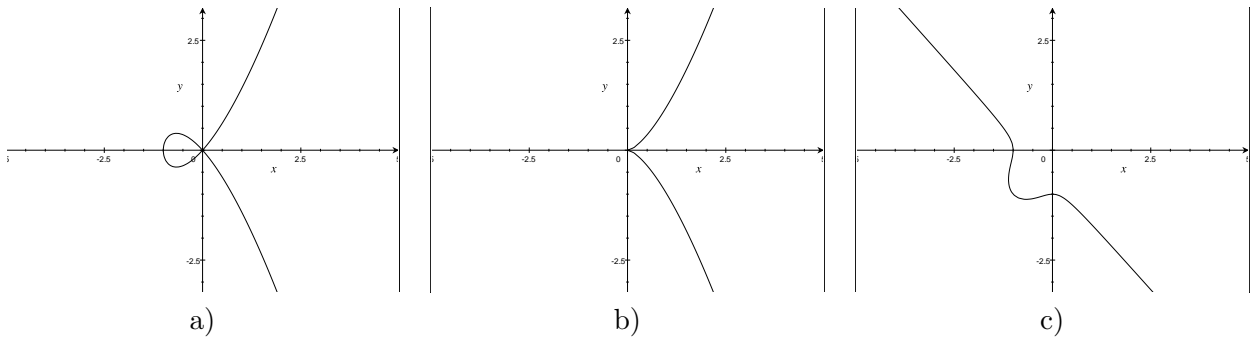


Figura 1.1: Gráficas en la carta $z = 1$

Al final de la prueba del teorema de clasificación de superficies cúbicas 3.1, se utiliza la construcción de Harnack, herramienta que prueba el Segundo Teorema de Harnack (Teorema 5.3.11 de [1]).

Teorema 1.5 *Sea $m \in \mathbb{N}$. Entonces existe una curva algebraica plana $C_m \subseteq \mathbb{R}P^2$ de grado m con $\frac{(m-2)(m-1)}{2} + 1$ componentes conexas.*

La prueba se realiza por inducción y utilizando el siguiente lema (Lema 5.3.7 de [1]).

Lema 1.1 Sean C_1 y C_2 dos curvas algebraicas en $\mathbb{R}P^2$ descritas por los ceros de los polinomios homogéneos $F(X, Y, Z)$ y $G(X, Y, Z)$ respectivamente. Y sea q un punto en C_1 , es decir, $F(q) = 0$.

1. Si q no es punto singular de C_1 , entonces existe un disco D alrededor de q tal que la curva H , descrita por los ceros del polinomio homogéneo $F(X, Y, Z) + \epsilon G(X, Y, Z)$ con $\epsilon > 0$, es no singular y conexa en D . Además su comportamiento es:
 - a) Si $G(q) \neq 0$, la curva H no contiene al punto q (Figura 1.2 a)).
 - b) Si $G(q) = 0$, la curva H es no singular en q y es transversal a C_1 (Figura 1.2 b)).
2. Si q es un punto singular de C_1 de multiplicidad 2 y $G(q) \neq 0$, entonces existe un disco D alrededor de q tal que la curva H es no singular en D y $D \cap H$ consiste de dos componentes conexas (Figura 1.2 c)).

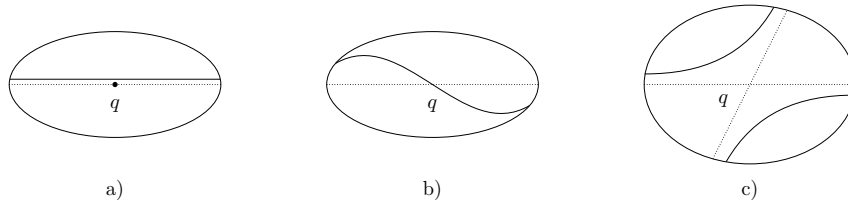


Figura 1.2: La curva H en el disco D .

Como ejemplo de la construcción de Harnack vamos a construir una curva de grado 3 con dos componentes conexas y otra de grado 4 con cuatro componentes conexas.

Para $m = 3$ consideremos $F(X, Y, Z) = Y(X^2 + Y^2 - Z^2)$ y $G(X, Y, Z) = (X - 2Z)(X - 3Z)(X - 4Z)$, cuyas gráficas en la carta $Z = 1$ se ven como en la Figura 1.3.

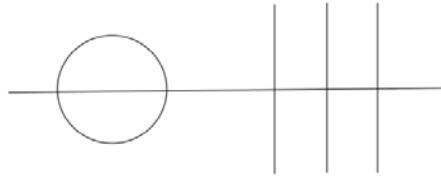


Figura 1.3: Gráficas de $F = 0$ y $G = 0$.

Aplicando el lema anterior para una $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeña, obtenemos una curva C_3 de grado 3 con dos componentes conexas cuyo polinomio homogéneo está dado por $F(X, Y, Z) + \epsilon G(X, Y, Z)$ (Figura 1.4).

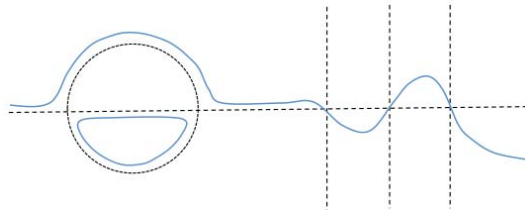


Figura 1.4: Gráfica de C_3 en azul.

Para $m = 4$, partimos de la curva C_3 , es decir, tomamos el polinomio $F'(X, Y, Z) = YF(X, Y, Z)$ y $G'(X, Y, Z) = L_1(X, Y, Z)L_2(X, Y, Z)L_3(X, Y, Z)L_4(X, Y, Z)$, donde $L_i(X, Y, Z)$ es un polinomio homogéneo de grado 1, cuyos ceros describen una recta transversal a la recta E (descrita por el polinomio $Y = 0$), y no toca puntos de $C_3 \cap E$.

Así, la curva C_4 está definida por el polinomio $F'(X, Y, Z) + \epsilon'G'(X, Y, Z)$, es de grado 4 y tiene cuatro componentes conexas (Figura 1.5).

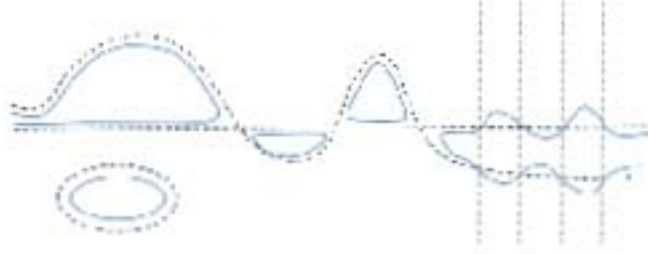


Figura 1.5: Gráfica de C_4 en azul.

Capítulo 2

Superficies no singulares de grados 1 y 2 en $\mathbb{R}P^3$

Las superficies de grado 1 en $\mathbb{R}P^3$ son descritas por polinomios homogéneos en $\mathbb{R}[X, Y, Z, T]$ de la forma

$$F(X, Y, Z, T) = aX + bY + cZ + dT,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y alguno de ellos no es cero.

Si $F(X, Y, Z, T) = X$, entonces el conjunto de los ceros de este polinomio homogéneo es precisamente cuando $X = 0$. Y como se mencionó en los preliminares tenemos que $\mathbb{R}P^3 \simeq \mathbb{R}^3 \cup \mathbb{R}P^2$, donde justamente $F = 0$ es identificado con $\mathbb{R}P^2$. Por lo tanto, la superficie es un plano proyectivo.

Si tomamos el cambio proyectivo de coordenadas

$$\begin{aligned} X &= a\bar{X} + b\bar{Y} + c\bar{Z} + d\bar{T}, \\ Y &= \bar{Y}, \\ Z &= \bar{Z}, \\ T &= \bar{T}, \end{aligned}$$

tenemos que $X = 0$ es proyectivamente equivalente a $aX + bY + cZ + dT = 0$. De manera que podemos concluir que todas las superficies de grado 1 en $\mathbb{R}P^3$ son proyectivamente equivalentes al plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$.

Ahora bien, las superficies de grado 2 en $\mathbb{R}P^3$ son descritas por polinomios homogéneos de la forma

$$F(X, Y, Z, T) = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dT^2 + eXY + fXZ + gXT + hYZ + iYT + jZT,$$

y en forma matricial tenemos que

$$F(X, Y, Z, T) = \begin{pmatrix} X & Y & Z & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & e/2 & f/2 & g/2 \\ e/2 & b & h/2 & i/2 \\ f/2 & h/2 & c & j/2 \\ g/2 & i/2 & j/2 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix}.$$

Como las matrices simétricas con coeficientes reales son diagonalizables, entonces transformamos a $F(X, Y, Z, T)$ en un polinomio de la forma

$$F(X, Y, Z, T) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \lambda_4 T^2,$$

con $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Nuestro objetivo es clasificar las superficies no singulares, de manera que $\lambda_i \neq 0$ para toda i , pues de no ser así, tendría puntos singulares. Además, con el cambio proyectivo de coordenadas

$$X = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}}\bar{X}, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}}\bar{Y}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_3|}}\bar{Z}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_4|}}\bar{T},$$

$F(X, Y, Z, T)$ tiene todos los coeficientes 1 y los signos pueden ser positivo o negativo. De manera que dadas las diferentes combinaciones de signos, tenemos los siguientes casos

$$\begin{array}{cccc} (+, +, +, +) & (+, +, +, -) & (+, +, -, +) & (+, -, +, +) \\ (-, +, +, +) & (+, +, -, -) & (+, -, +, -) & (+, -, -, +) \\ (-, +, +, -) & (-, +, -, +) & (-, -, +, +) & (+, -, -, -) \\ (-, +, -, -) & (-, -, +, -) & (-, -, -, +) & (-, -, -, -) \end{array}$$

Mediante transformaciones proyectivas reducimos aún más estos casos, pues todos los que tienen un signo negativo son proyectivamente equivalentes, los que tienen dos signos negativos pertenecen a otra clase y por último los que tienen tres. Así, tenemos los siguientes cinco casos

$$+X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 \tag{2.1}$$

$$+X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2 \tag{2.2}$$

$$+X^2 + Y^2 - Z^2 - T^2 \tag{2.3}$$

$$+X^2 - Y^2 - Z^2 - T^2 \tag{2.4}$$

$$-X^2 - Y^2 - Z^2 - T^2 \tag{2.5}$$

Sin embargo, si multiplicamos por -1 tenemos que (2.1) y (2.5) describen la misma superficie, así como (2.2) y (2.4). Finalmente tenemos solamente tres casos para analizar.

Si $F(X, Y, Z, T) = X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2$ y nos fijamos en la carta $T = 1$ tenemos que $X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales. Y si $T = 0$ tampoco hay intersección, por lo que ésta es la superficie vacía.

Si $F(X, Y, Z, T) = X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2$, en la carta $T = 1$ tenemos que $X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 = 0$ describe una esfera. Y no hay intersección con $T = 0$. Por lo tanto, la superficie es una esfera.

Por último, si $F(X, Y, Z, T) = X^2 + Y^2 - Z^2 - T^2$, en la carta $T = 1$ tenemos que $X^2 + Y^2 - Z^2 - 1 = 0$ describe un hiperboloide de un manto. Además, en $T = 0$ obtenemos $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$ que describe una circunferencia. Por lo tanto, la superficie es un toro.

Concluimos así que toda superficie no singular de grado 2 en $\mathbb{R}P^3$ es proyectivamente equivalente al vacío, o a una esfera, o a un toro.

Capítulo 3

Superficies no singulares de grado 3 en $\mathbb{R}P^3$

Para $k \in \mathbb{N}$, sea P_k “un plano proyectivo real con k asas” (es decir, una superficie homeomorfa a la suma conexa de un plano proyectivo y k toros) y (P, S^2) la unión disjunta $A \cup B$ (en $\mathbb{R}P^3$) de una superficie A homeomorfa a un plano proyectivo P y otra superficie B homeomorfa a la esfera S^2 .

A continuación probaremos el Teorema de clasificación de superficies no singulares de grado 3 en $\mathbb{R}P^3$ (Proposición 5.6.4 de [1]).

Teorema 3.1 *Sea $S \subset \mathbb{R}P^3$ una superficie algebraica real no singular de grado 3. Entonces S tiene uno de los siguientes cinco tipos topológicos:*

$$(P, S^2), P, P_1, P_2, P_3.$$

Además, para cada uno de estas cinco clases, existe una superficie algebraica no singular de grado 3 en $\mathbb{R}P^3$ de tal tipo topológico.

Prueba. Como S es no singular y de grado 3 entonces tiene solamente una componente no orientable S_0 por el Corolario 1.1. Además, por la Proposición 1.3 podemos suponer que el punto $a_0 = [0, 0, 0, 1]$ está en S_0 y no está en ninguna recta $D \subset S_0$.

Entonces, si $[X, Y, Z, T]$ son coordenadas homogéneas en $\mathbb{R}P^3$, el polinomio F que define a S , tiene la siguiente forma

$$F(X, Y, Z, T) = Q_3(X, Y, Z) + 2Q_2(X, Y, Z)T + Q_1(X, Y, Z)T^2,$$

donde Q_i es un polinomio homogéneo de grado i ($1 \leq i \leq 3$) y $Q_1 \neq 0$ ya que S es no singular en a_0 . Así, podemos suponer que $Q_1(X, Y, Z) = Z$ (bajo un cambio proyectivo de coordenadas, si es necesario).

Sea $\pi : \mathbb{R}P^3 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ la proyección lineal definida por $\pi([X, Y, Z, T]) = [X, Y, Z]$. Si $M = [\xi, \chi, \zeta]$ es un punto en $\mathbb{R}P^2$, entonces $\pi^{-1}(M) \cup \{a_0\}$ es la recta D que describimos en forma paramétrica como

$$D = \left\{ [X : Y : Z : T] \in \mathbb{R}P^3 \mid [X, Y, Z, T] = \lambda[\xi, \chi, \zeta, 0] + \mu[0, 0, 0, 1], \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

La recta D intersecta a S en a lo más tres puntos, siendo uno de ellos a_0 . En efecto,

$$\begin{aligned} F(\lambda\xi, \lambda\chi, \lambda\zeta, \mu) &= \lambda^3 Q_3(\xi, \chi, \zeta) + 2\lambda^2 Q_2(\xi, \chi, \zeta)\mu + \lambda\zeta\mu^2 \\ &= \lambda[\lambda^2 Q_3(\xi, \chi, \zeta) + 2\lambda Q_2(\xi, \chi, \zeta)\mu + \zeta\mu^2], \end{aligned}$$

y se anula si y sólo si $\lambda = 0$ o bien $\lambda^2 Q_3(\xi, \chi, \zeta) + 2\lambda Q_2(\xi, \chi, \zeta)\mu + \zeta\mu^2 = 0$. Notemos que $\zeta = 0$ si y sólo si la intersección en a_0 es de multiplicidad 2.

Si $\lambda = 0$ entonces $\mu \neq 0$ (ya que $[0, 0, 0, 0] \notin \mathbb{R}P^3$) y obtenemos el punto a_0 .

Si $\lambda \neq 0$ entonces $\lambda^2 Q_3(\xi, \chi, \zeta) + 2\lambda Q_2(\xi, \chi, \zeta)\mu + \zeta\mu^2 = 0$. Así,

$$Q_3(\xi, \chi, \zeta) + 2\frac{\mu}{\lambda}Q_2(\xi, \chi, \zeta) + \zeta\frac{\mu^2}{\lambda^2} = 0.$$

Si $\zeta \neq 0$, tenemos que

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{-Q_2(\xi, \chi, \zeta) \pm \sqrt{Q_2^2(\xi, \chi, \zeta) - \zeta Q_3(\xi, \chi, \zeta)}}{\zeta}.$$

En general μ/λ toma dos valores (pueden ser reales o complejos). Antes de continuar con la prueba necesitamos los siguientes lemas.

Lema 3.1 *Si S es no singular y a_0 no está en ninguna recta $D \subset S$, entonces la ecuación $Q_2^2(X, Y, Z) - ZQ_3(X, Y, Z) = 0$ define una curva no singular C_4 (puede ser vacía) de grado 4 en $\mathbb{R}P^2$.*

Prueba. Primero veamos que no existe un punto $P = [\zeta, \chi, Z_0]$ en $\mathbb{R}P^2$ tal que $Z_0 = 0$, $Q_2(P) = 0$ y $Q_3(P) = 0$. Supongamos que sí, es decir, supongamos que $P = [\xi, \chi, 0]$ y $Q_2(\xi, \chi, 0) = Q_3(\xi, \chi, 0) = 0$, entonces

$$D = \left\{ [X, Y, Z, T] = \lambda[\xi, \chi, 0, 0] + \mu[0, 0, 0, 1] \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

es una recta contenida en S y $a_0 \in D$, lo que es una contradicción.

Denotamos $F_1(X, Y, Z) = Q_2^2(X, Y, Z) - ZQ_3(X, Y, Z)$, el cual es un polinomio homogéneo de grado 4.

Ahora veamos que C_4 es no singular. Supongamos que existe un punto $b = [x : y : z] \in C_4$ tal que

$$\begin{aligned} F_1(b) &= 0, \\ F_{1X}(b) &= 2Q_2(b)Q_{2X}(b) - zQ_{3X}(b) = 0, \\ F_{1Y}(b) &= 2Q_2(b)Q_{2Y}(b) - zQ_{3Y}(b) = 0, \\ F_{1Z}(b) &= 2Q_2(b)Q_{2Z}(b) - zQ_{3Z}(b) - Q_3(b) = 0. \end{aligned}$$

Si $z = 0$ entonces $Q_2(b) = 0$ ya que $F_1(b) = 0$ y por $F_{1Z}(b) = 0$ tenemos que $Q_3(b) = 0$ lo cual no es posible, por lo que $z \neq 0$. Luego, como $F_1(b) = 0$, tenemos que $Q_3(b) = Q_2^2(b)/z$.

Consideramos

$$b' = [x, y, z, t] \in \mathbb{R}P^3, \quad \text{donde } t = -\frac{Q_2(b)}{z}.$$

Notemos que b' está en S ya que

$$\begin{aligned} F(b') &= Q_3(b) + 2Q_2(b)\left(\frac{-Q_2(b)}{z}\right) + z\left(-\frac{Q_2(b)}{z}\right)^2 \\ &= Q_3(b) - \frac{Q_2^2(b)}{z} = 0. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} F_X(b') &= Q_{3X}(b) - 2Q_{2X}(b)\frac{Q_2(b)}{z} = 0 \\ F_Y(b') &= Q_{3Y}(b) - 2Q_{2Y}(b)\frac{Q_2(b)}{z} = 0 \\ F_Z(b') &= Q_{3Z}(b) - 2Q_{2Z}(b)\frac{Q_2(b)}{z} + \frac{Q_2^2(b)}{z^2} = 0 \\ F_T(b') &= 2Q_2(b) - 2Z\left(-\frac{Q_2(b)}{z}\right) = 0. \end{aligned}$$

Por lo que, b' es un punto singular de S , lo que es una contradicción. Concluimos que C_4 es una curva no singular de grado 4 en $\mathbb{R}P^2$. ■

El interior de un óvalo L es la componente conexa que está en $\mathbb{R}P^2 \setminus L$ y que es difeomorfa a un disco abierto. Decimos que un óvalo L es *exterior* si no está en el interior de cualquier otro óvalo [2].

Denotamos por “ p ” una curva real no singular en $\mathbb{R}P^2$ que consiste únicamente de p óvalos exteriores, y por “ $1/p$ ” a una curva real no singular formada por p óvalos exteriores contenidos en el interior de un óvalo.

Lema 3.2 *Existen cinco tipos topológicos de curvas no vacías y no singulares de grado 4 en $\mathbb{R}P^2$, a saber,*

$$\{“1”, “2”, “3”, “4”, “1/1”\}.$$

Además son las únicas clases posibles (Figura 3.1).

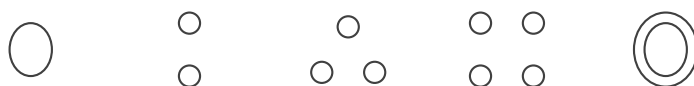


Figura 3.1: Tipos topológicos de curvas no vacías y no singulares de grado 4 en $\mathbb{R}P^2$.

Prueba. Primero tenemos que los cinco tipos topológicos son realizables. En efecto,

$$G_1 : x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - z^4 = 0.$$

$$G_2 : x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 10x^2z^2 + 6y^2z^2 + 9z^4 = 0.$$

$$G_3 : \frac{1}{4}x^4 - x^4z - \frac{1}{4}x^2z^2 + \frac{17}{16}x^2y^2 - 4xy^2z + \frac{11}{4}y^2z^2 + \frac{1}{4}y^4 + 4xz^3 - \frac{5}{2}z^4 = 0.$$

$$G_4 : \frac{1}{4}x^4 + \frac{17}{16}x^2y^2 - \frac{5}{4}x^2z^2 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{5}{4}y^2z^2 + \frac{5}{4}z^4 = 0.$$

$$G_5 : x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 5x^2z^2 - 5y^2z^2 + 4z^4 = 0.$$

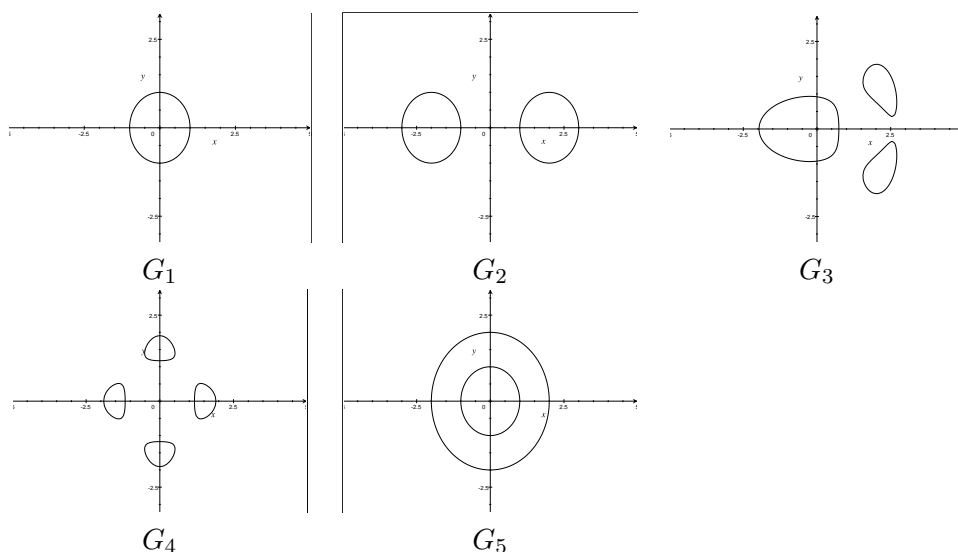


Figura 3.2: Gráficas en la carta $z = 1$

Sus gráficas (en la carta $z = 1$) son las que se muestran en la Figura 3.2

Ahora veamos que son las únicas clases. Con uno y dos óvalos, G_1 , G_2 y G_5 son las únicas configuraciones que podemos tener. Veamos que cualquier otra configuración con 4 óvalos conduce a contradecir el Teorema de Bézout (las configuraciones de 3 óvalos están contenidas en algunas de éstas).

Supongamos que C_4 tiene una configuración de 4 óvalos alineados, entonces podemos trazar una recta que intersecte a los cuatro óvalos (ver Figura 3.3), es decir, existen ocho puntos de intersección. La recta es de grado 1, mientras que C_4 es de grado 4 y el Teorema de Bézout nos dice que su intersección debe constar de a lo más 4 puntos. Estamos contradiciendo este teorema y por tanto, C_4 no puede tener esta configuración.



Figura 3.3: $|C_4 \cap l| = 8$

Las demás configuraciones aparecen en la Figura 3.4, donde l es la recta azul; cada una de ellas contradice el Teorema de Bézout.

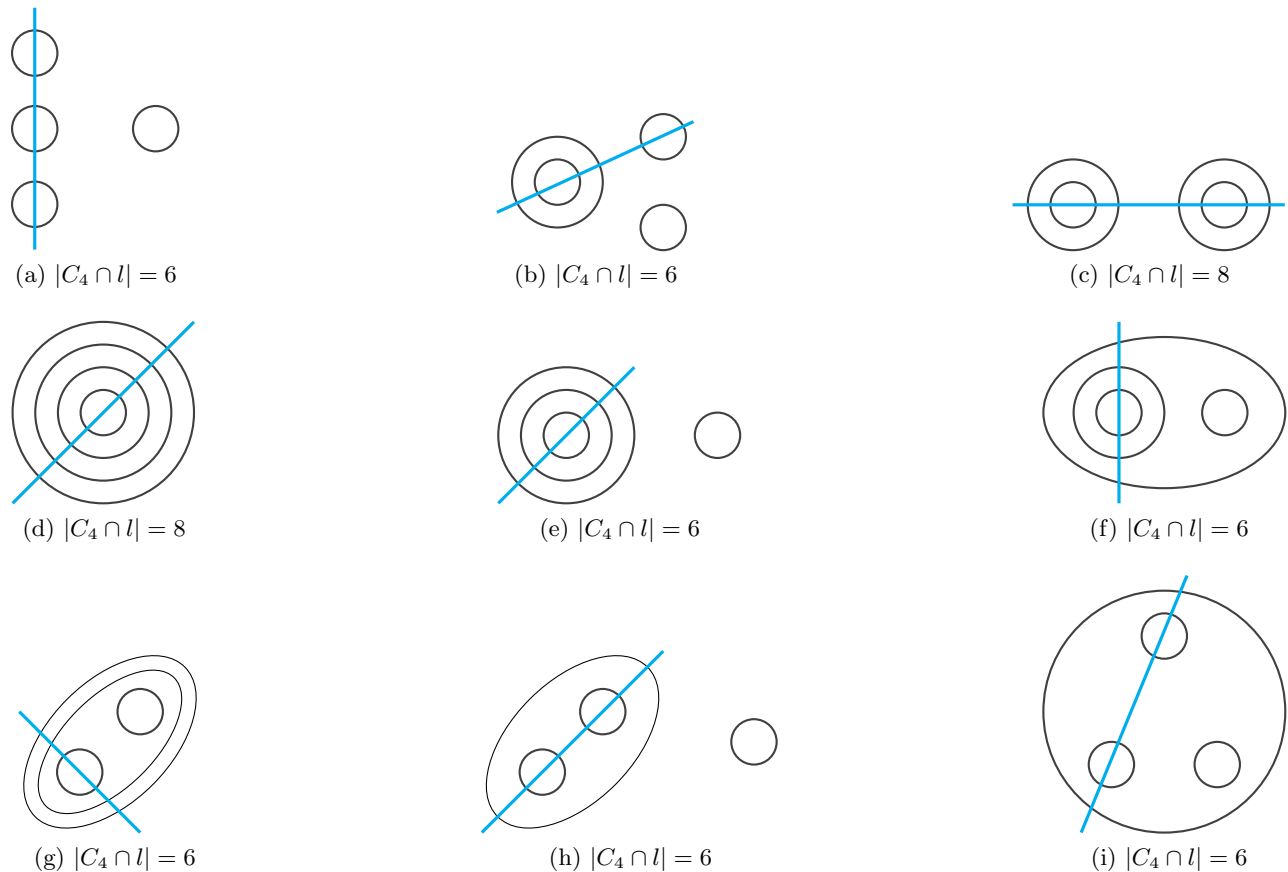


Figura 3.4: Configuraciones de 4 óvalos

Por lo tanto, C_4 con cuatro óvalos sólo puede tener la configuración de G_4 . Análogamente para la configuración con 3 óvalos. ■

Ahora estamos listos para mostrar lo siguiente:

a) Los seis tipos topológicos de curvas no singulares de grado 4

$$\{\emptyset, "1/1", "1", "2", "3", "4"\}$$

corresponden a los cinco tipos topológicos $(P, S^2), P, P_1, P_2, P_3$ de S . Tanto \emptyset como $"1/1"$ corresponden a (P, S^2) y los otros están en correspondencia ordenada.

b) Cada uno de estos cinco tipos son realizables.

Definamos el *exterior* E de C_4 (en $\mathbb{R}P^2$) como el conjunto de puntos de $\mathbb{R}P^2$ donde $F_1 \geq 0$. Observemos que E contiene a la recta $Z = 0$ ya que $F_1(X, Y, Z) = Q_2^2(X, Y, Z) - ZQ_3(X, Y, Z)$.

Recordemos que F_1 se construyó a partir del discriminante de μ/λ , de manera que E es el conjunto de puntos $p \in \mathbb{R}P^2$ tales que la recta que pasa por p y a_0 intersecta a S en tres puntos reales (no necesariamente distintos y a_0 es uno de ellos). Denotemos por H al plano $Z = 0$ y sea $C := H \cap S$.

Nuevamente, necesitamos un par de lemas para continuar con la prueba del teorema.

Lema 3.3 El conjunto C es una curva cúbica irreducible (ya que S es de grado tres), cuya ecuación es $Q_3(X, Y, 0) + 2Q_2(X, Y, 0)T = 0$ y tiene un punto singular de multiplicidad 2 en a_0 .

Prueba. No puede tener otro punto singular, pues si lo tuviera, la recta que une a_0 con este otro punto singular debería ser componente de C para no contradecir Bézout y entonces esta recta estaría contenida en S . Esto es una contradicción ya que la recta contiene a a_0 . Además, si suponemos que C no es irreducible entonces debe ser la unión de una cónica y una recta (tangente a la cónica en a_0 , por la multiplicidad del punto) o bien la unión de tres rectas. En cualquier caso tendríamos que a_0 pertenece a una recta contenida en S . ■

Por tanto, C es proyectivamente equivalente a alguna forma de la Proposición 1.4. Si C es proyectivamente equivalente al inciso a), entonces es homeomorfa a la Figura 3.5 ("Tipo (a)") y además $\chi(C) = -1$ (por triangulación).

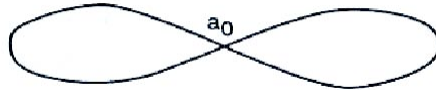


Figura 3.5: Tipo (a)

Si C es proyectivamente equivalente al inciso b), entonces es homeomorfa a la Figura 3.6 ("Tipo (b)") y $\chi(C) = 0$ pues es homeomorfa a una circunferencia.

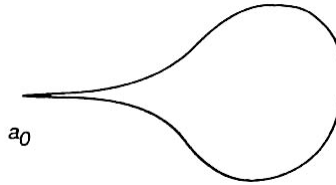


Figura 3.6: Tipo (b)

Y por último, si C es proyectivamente equivalente a c), entonces es homeomorfa a la Figura 3.7 ("Tipo (c)"), donde $\chi(C) = 1$ ya que es homeomorfa a una circunferencia y un punto.



Figura 3.7: Tipo (c)

Para calcular la característica de Euler de S necesitamos demostrar un lema, de tal forma que esta característica estará en función de C_4 , su exterior, y la característica de C .

Lema 3.4 Sea $D_1 \subseteq \mathbb{R}P^2$ la recta $Z = 0$. Entonces $\pi|(S \setminus C)$ es un cubriente de dos hojas de $E \setminus D_1$ ramificado a lo largo de $C_4 \setminus D_1$.

Prueba. Si $M = [\xi, \chi, \zeta] \in \mathbb{R}P^2$ entonces $\pi^{-1}(M) \cup \{a_0\}$ es la recta D dada por

$$D = \left\{ [X, Y, Z, T] = \lambda[\xi, \chi, \zeta, 0] + \mu[0, 0, 0, 1] \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

y $D \cap S$ consiste de tres puntos reales y distintos (incluyendo a_0) si y sólo si $M \in E \setminus D_1$ y $M \notin C_4$ (ya que C_4 es justamente el conjunto de ceros del discriminante de μ/λ). ■

Notemos que la recta D_1 es una bitangente real a C_4 , donde los puntos de contacto N y N' están definidos por

$$\begin{cases} Z = 0 \\ Q_2(X, Y, 0) = 0, \end{cases}$$

ya que $Q_2(X, Y, 0)$ describe la naturaleza de las tangentes a C en a_0 .

Caso 1: C_4 es de tipo “4” (es decir, C_4 está compuesta de cuatro óvalos exteriores).

Tenemos que $E \setminus D_1$ es conexo y, por el Lema 3.4, $S \setminus C$ es conexo. Así, la cerradura de $S \setminus C$ es conexa pero esta cerradura es precisamente S . Concluimos que S es conexa.

Luego, existen tres casos a considerar dependiendo de la naturaleza de N y N' . Analicemos estos casos.

α) N y N' son reales y distintos (Figura 3.8).

Consideremos \tilde{D}_1 una vecindad tubular de D_1 en $\mathbb{R}P^2$ y sea $\tilde{C} = \pi^{-1}(\tilde{D}_1) \cap S$. Como los espacios son compactos, podemos triangular y entonces al calcular la característica de Euler, por el Lema 3.4, tenemos que $\chi(S \setminus \tilde{C}) = 2\chi(E \setminus \tilde{D}_1) - \chi(C_4 \setminus \tilde{D}_1)$. Pero la característica de Euler es invariante bajo homotopía, de manera que

$$\chi(S \setminus C) = 2\chi(E \setminus D_1) - \chi(C_4 \setminus D_1).$$

$C_4 \setminus D_1$ en realidad es $C_4 \setminus \{N, N'\}$, que es homeomorfo a la unión disjunta de dos circunferencias y dos intervalos, por lo que $\chi(C_4 \setminus D_1) = 2$. Y por otro lado, tenemos que los discos son homotópicos a un punto, así, los discos tangentes a D_1 podemos contraerlos a los puntos N y N' . Entonces $E \setminus D_1$ es homeomorfo a \mathbb{R}^2 con dos hoyos, porque $\mathbb{R}P^2 \setminus D_1$ es homeomorfo a \mathbb{R}^2 . Sabemos que $\chi(\mathbb{R}^2) = 1$ y al remover dos hoyos obtenemos que la característica de Euler disminuye en dos, es decir, $\chi(E \setminus D_1) = -1$. Por lo que $\chi(S \setminus C) = -4$.

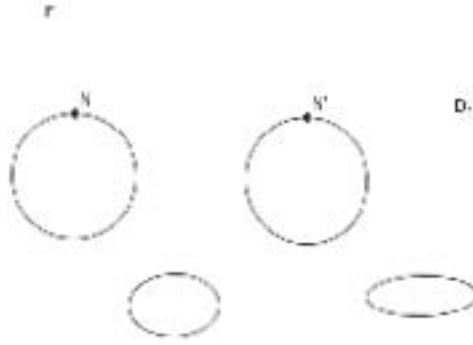


Figura 3.8: N y N' reales y distintos

En este caso $Q_2(X, Y, 0)$ tiene dos soluciones, haciendo que C tenga dos tangentes reales en a_0 , es decir, C es del tipo (a). Entonces $\chi(C) = -1$, lo que implica que $\chi(S) = \chi(S \setminus C) + \chi(C) = -5$. Por el Teorema 1.2, la superficie S es homeomorfa a P_3 .

β) N y N' no son reales.

En este caso tenemos que $C_4 \cap D_1 = \emptyset$ y entonces $\chi(S \setminus C) = 2\chi(E \setminus D_1) - \chi(C_4)$. Pero $\chi(C_4) = 0$ ya que es homeomorfa a 4 circunferencias y $\chi(E \setminus D_1) = -3$ ya que es homeomorfo a \mathbb{R}^2 con cuatro hoyos. Así, $\chi(S \setminus C) = -6$.

$Q_2(X, Y, 0)$ no tiene factores lineales en este caso y así C es del tipo (c) con $\chi(C) = 1$ y por tanto, $\chi(S) = -5$, teniendo que S es homeomorfa a P_3 .

γ) $N = N'$.

En este caso tenemos que $C_4 \cap D_1 = \{N\}$ y $\chi(S \setminus C) = 2\chi(E \setminus D_1) - \chi(C_4 \setminus D_1)$. Por un lado, $\chi(E \setminus D_1) = -2$ ya que es homeomorfo a \mathbb{R}^2 con 3 hoyos. Por otro lado $\chi(C_4 \setminus D_1) = 1$ por ser homeomorfo a 3 circunferencias y un intervalo. Entonces $\chi(S \setminus C) = -5$.

Luego, $Q_2(X, Y, 0)$ tiene solución doble, es decir, C es del tipo (b), por lo que $\chi(C) = 0$ y por tanto, $\chi(S) = -5$. Haciendo nuevamente a S homeomorfa a P_3 .

Caso 2: C_4 es de tipo “3” (es decir, consta de tres óvalos exteriores).

Por un razonamiento análogo al caso 1, S es conexa.

α) N y N' son reales y distintos.

Tenemos igualmente que $\chi(S \setminus C) = 2\chi(E \setminus D_1) - \chi(C_4 \setminus D_1)$. Donde $\chi(E \setminus D_1) = 0$ ya que es homeomorfo a \mathbb{R}^2 con un hoyo y $\chi(C_4 \setminus D_1) = 2$ por ser homeomorfo a una circunferencia y dos intervalos. Así, $\chi(S \setminus C) = -2$.

La curva C es de tipo (a) con $\chi(C) = -1$, entonces $\chi(S) = -3$. Por el Teorema 1.2, la superficie S es homeomorfa a P_2 .

β) N y N' no son reales.

Tenemos que $C_4 \cap D_1 = \emptyset$ y $\chi(S \setminus C) = 2\chi(E \setminus D_1) - \chi(C_4)$ pero $\chi(C_4) = 0$ ya que es homeomorfo a tres circunferencias y $\chi(E \setminus D_1) = -2$ por ser homeomorfo a \mathbb{R}^2 con tres hoyos. Así $\chi(S \setminus C) = -4$ y por último como C es de tipo (c) entonces $\chi(C) = 1$. Por lo tanto, $\chi(S) = -3$ y entonces S es

homeomorfa a P_2 .

γ) $N = N'$.

Tenemos que $\chi(E \setminus D_1) = -1$ ya que es homeomorfo a \mathbb{R}^2 con dos hoyos y $\chi(C_4 \setminus D_1) = 1$ ya que es homeomorfo a un intervalo y dos circunferencias. Así, $\chi(S \setminus C) = -3$ y además $\chi(C) = 0$ por ser de tipo (b). Por tanto, $\chi(S) = -3$, haciendo a S homeomorfa a P_2 .

Caso 3: C_4 es de tipo “2” (es decir, consta de dos óvalos exteriores).

En este caso S también es conexa por el mismo razonamiento del caso 1.

α) N y N' son reales y distintos.

De $\chi(S \setminus C) = 2\chi(E \setminus D_1) - \chi(C_4 \setminus D_1)$ tenemos que $\chi(E \setminus D_1) = 1$ ya que es homeomorfo a \mathbb{R}^2 y $\chi(C_4 \setminus D_1) = 2$ por ser homeomorfo a dos intervalos. Así, $\chi(S \setminus C) = 0$.

$\chi(C) = -1$, entonces $\chi(S) = -1$. Por lo que S es homeomorfa a P_1 .

β) N y N' no son reales.

Tenemos que $C_4 \cap D_1 = \emptyset$ y $\chi(S \setminus C) = 2\chi(E \setminus D_1) - \chi(C_4)$ pero $\chi(C_4) = 0$ ya que es homeomorfo a dos circunferencias y $\chi(E \setminus D_1) = -1$ por ser homeomorfo a \mathbb{R}^2 con dos hoyos. Así $\chi(S \setminus C) = -2$ y $\chi(C) = 1$. Por lo tanto, $\chi(S) = -1$ y entonces S es homeomorfa a P_1 .

γ) $N = N'$.

Tenemos que $\chi(E \setminus D_1) = 0$ ya que es homeomorfo a \mathbb{R}^2 con un hoyo y $\chi(C_4 \setminus D_1) = 1$ ya que es homeomorfo a un intervalo y una circunferencia. Así, $\chi(S \setminus C) = -1$ y $\chi(C) = 0$. Por tanto, $\chi(S) = -1$. Así, S es homeomorfa a P_1 .

Caso 4: C_4 es de tipo “1” (es decir, consta de un óvalo).

S vuelve a ser conexa pero la naturaleza de N y N' solo puede ser reales iguales, o bien, no reales.

α) N y N' no son reales.

Tenemos que $C_4 \cap D_1 = \emptyset$ y $\chi(S \setminus C) = 2\chi(E \setminus D_1) - \chi(C_4)$ pero $\chi(C_4) = 0$ ya que es homeomorfo a una circunferencia y $\chi(E \setminus D_1) = 0$ por ser homeomorfo a \mathbb{R}^2 con un hoyo. Así $\chi(S \setminus C) = 0$ y $\chi(C) = 1$. Por lo tanto, $\chi(S) = 1$ y entonces S es homeomorfa a P .

β) $N = N'$.

Tenemos que $\chi(E \setminus D_1) = 1$ ya que es homeomorfo a \mathbb{R}^2 y $\chi(C_4 \setminus D_1) = 1$ ya que es homeomorfo a un intervalo. Así, $\chi(S \setminus C) = 1$ y por tanto, $\chi(S) = 1$, haciendo a S homeomorfa a P .

Caso 5: C_4 es de tipo “1/1” (es decir, consta de un óvalo $C_{4,1}$ dentro de otro óvalo $C_{4,2}$).

En este caso, tenemos que el exterior E consta del exterior de $C_{4,2}$ y el interior de $C_{4,1}$, a los que denotaremos E_2 y E_1 respectivamente. Así, tenemos que E no es conexo y por tanto, S no puede ser conexa. Ahora bien, como E_1 es conexo entonces su levantamiento es conexo, digamos S_1 . Además $E_2 \setminus D_1$ es conexo, de manera que su levantamiento, digamos S_2 , es conexo, ya que $S_2 \setminus C$ lo es; por lo que su cerradura también, pero justo su cerradura es S_2 . Tenemos que $S = S_1 \cup S_2$.

Como en el caso anterior, N y N' sólo pueden ser reales iguales o no reales.

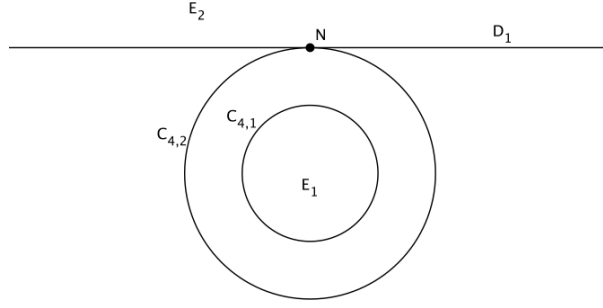


Figura 3.9: $N = N'$

$\alpha)$ N y N' no son reales.

Por un lado, tenemos que $\chi(S_1) = 2\chi(E_1) - \chi(C_{4,1})$ pero $\chi(E_1) = 1$ ya que es homeomorfo a un disco y $\chi(C_{4,1}) = 0$ ya que es homeomorfo a una circunferencia. De tal modo, $\chi(S_1) = 2$ por lo que es homeomorfa a la esfera S^2 .

Por otro lado, podemos llegar (con un razonamiento análogo a los casos anteriores) a que $\chi(S_2 \setminus C) = 2\chi(E_2 \setminus D_1) - \chi(C_{4,2})$. Donde $\chi(E_2 \setminus D_1) = 0$ ya que es homeomorfo a \mathbb{R}^2 con un hoyo y $\chi(C_{4,2}) = 0$ por ser homeomorfo a una circunferencia. Pero en este caso, C es homeomorfo a $S^1 \cup \{a_0\}$ por lo que $\chi(C) = 1$ y así, $\chi(S_2) = 1$, de modo que es homeomorfo a un plano proyectivo. Es decir, S es homeomorfa a (P, S^2) .

$\beta)$ $N = N'$ (Figura 3.9).

Como en el subcaso anterior, tenemos que S_1 es homeomorfo a una esfera. Ahora bien, $\chi(S_2 \setminus D_1) = 2\chi(E_2 \setminus D_1) + \chi(C_{4,2} \setminus D_1)$. Pero $\chi(E_2 \setminus D_1) = 1$ ya que es homeomorfo a \mathbb{R}^2 y $\chi(C_{4,2} \setminus D_1) = 1$ ya que es homeomorfo a un intervalo, así, $\chi(S_2 \setminus C) = 1$. Luego, como $\chi(C) = 0$ (por ser del tipo (b)), entonces $\chi(S_2) = 1$, por lo que S_2 es homeomorfa a P . Por lo tanto, S es homeomorfa a (P, S^2) .

Caso 6: C_4 es de tipo “ \emptyset ”.

Tenemos que el exterior E es $\mathbb{R}P^2$ y S es disconexa sobre $E \setminus D_1$, digamos $S = S_1 \cup S_2$ y supongamos que $a_0 \in S_1$. La naturaleza de N y N' sólo puede ser que no sean reales, por lo que C es del tipo (c) y por tanto, $\chi(C) = 1$.

Luego, tenemos que $\chi(S \setminus C) = 2\chi(E \setminus D_1) = 1$ ya que $\chi(E \setminus D_1) = \chi(\mathbb{R}P^2)$. De manera que $\chi(S) = \chi(S \setminus C) + \chi(C) = 3$.

Como $a_0 \in S_1$ entonces S_1 es no orientable y S_2 es orientable. Entonces, S_1 debe ser la suma conexa de un plano proyectivo y n toros, mientras que S_2 debe ser la suma conexa de m toros. Es decir, $\chi(S_1) = 1 - 2n$ y $\chi(S_2) = 2 - 2m$. Entonces $3 = 1 - 2n + 2 - 2m = 3 - 2(n + m)$, es decir, $n + m = 0$ y esto ocurre si y sólo si $n = m = 0$. Así, S_1 es homeomorfo a un plano proyectivo P y S_2 es homeomorfo a una esfera S^2 . Por lo tanto, S es homeomorfo a (P, S^2) .

Por último, demostremos que cada uno de los cinco tipos topológicos anteriores de superficies son realizables, es decir, representan una superficie de grado tres en $\mathbb{R}P^3$.

Mostremos que los cinco tipos topológicos de curvas no singulares de grado 4 en $\mathbb{R}P^2$ pueden ser realizados con una ecuación de la forma $Q_2^2 - Q_3Z = 0$, ya que entonces, la superficie S con ecuación $Q_3 + 2Q_2T + ZT^2 = 0$ tendrá el correspondiente tipo topológico. Usaremos los polinomios descritos

en el Lema 3.2 para C_4 de tipos “1”, “2” y “1/1”.

Para C_4 de tipo “1”, tenemos que la ecuación de G_1 es $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - z^4 = 0$, de modo que podemos tener $Q_2(X, Y, Z) = X^2 + Y^2$ y $Q_3(X, Y, Z) = Z^3$. Por lo tanto, S es homeomorfa a P y su ecuación es

$$Z^3 + 2(X^2 + Y^2)T + ZT^2 = 0.$$

Para C_4 de tipo “2”, tenemos que la ecuación de G_2 es $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 10x^2z^2 + 6y^2z^2 + 9z^4 = 0$, de modo que podemos tener $Q_2(X, Y, Z) = X^2 + Y^2$ y $Q_3(X, Y, Z) = 10X^2Z - 6Y^2Z - 9Z^3$. Por lo tanto, S es homeomorfa a P_1 y su ecuación es

$$10X^2Z - 6Y^2Z - 9Z^3 + 2(X^2 + Y^2)T + ZT^2 = 0.$$

Para C_4 de tipo “1/1”, tenemos que la ecuación de G_5 es $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 5x^2z^2 - 5y^2z^2 + 4z^4 = 0$, de modo que podemos tener $Q_2(X, Y, Z) = X^2 + Y^2$ y $Q_3(X, Y, Z) = 5X^2Z + 5Y^2Z - 4Z^3$. Por lo tanto, S es homeomorfa a (P, S^2) y su ecuación es

$$5X^2Z + 5Y^2Z - 4Z^3 + 2(X^2 + Y^2)T + ZT^2 = 0.$$

Para los casos que faltan (cuando C_4 es de tipo “3” y “4”) se usa la construcción de Harnack. Primero, para C_4 de tipo “3”, debemos construir una cubica $Q_3(X, Y, Z) = 0$ que sea una pseudorecta que corte a la recta $Z = 0$ en tres puntos reales. Tal cubica es

$$Q_3(X, Y, Z) = Z(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{100}(X - Y)(X - 2Y)(X - 3Y),$$

por lo que $F_1(X, Y, Z) = \frac{1}{100}(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - Q_3(X, Y, Z)Z$ es el polinomio de C_4 y por tanto, S es homeomorfa a P_2 y su ecuación es

$$\frac{1}{10}(X^2 + Y^2 + Z^2) + (Z(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{100}(X - Y)(X - 2Y)(X - 3Y))T + ZT^2 = 0.$$

Finalmente, para C_4 de tipo “4”, construimos $Q_3(X, Y, Z)$ de modo que sea una cubica que conste de un óvalo y una pseudorecta que intersekte a $Z = 0$ en tres puntos reales, a saber

$$Q_3(X, Y, Z) = Z(X^2 + Z^2 - Y^2) + \frac{1}{100}(X - 2Y)(X - 3Y)(X - 4Y),$$

por lo que $F_1(X, Y, Z) = \frac{1}{100}(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - Q_3(X, Y, Z)Z$ es el polinomio de C_4 y por tanto, S es homeomorfa a P_3 y su ecuación es

$$\frac{1}{10}(X^2 + Y^2 + Z^2) + (Z(X^2 - Y^2 + Z^2) + \frac{1}{100}(X - 2Y)(X - 3Y)(X - 4Y))T + ZT^2 = 0.$$

Concluimos que las superficies suaves de grado tres en $\mathbb{R}P^3$ sólo pueden ser de cinco tipos topológicos y éstos son realizables. ■

Bibliografía

- [1] Benedetti R. & Risler J. J., *Real Algebraic And Semi-algebraic Sets*, Paris, Edit. Hermann, 1990.
- [2] Camacho A. & Ortiz A., *On the realization problem of real algebraic plane curves as Hessian curves*, Journal of Geometry, 105 (2014), 495-506.
- [3] Gibson C. G., *Elementary Geometry of Algebraic Curves: An Undergraduate Introduction*, Cambridge, Edit. Cambridge University Press, 1998.
- [4] Henderson A., *The Twenty-Seven Lines Upon The Cubic Surface*, New York, Edit. Hafner Publishing, Co., 1911.
- [5] Hulek K., *Elementary Algebraic Geometry*, Germany, Edit. AMS, 2000.
- [6] Massey W., *Introducción a la Topología Algebraica*, Barcelona, Edit. Reverte, 1972.