Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

# El problema de Katowice

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO

PRESENTA:
ALBERTO SANTANA CRUZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA

Cd. Universtitaria, D. F.

2014

**Hoja de datos del jurado**

1. Datos del alumno
   Santana
   Cruz
   Alberto
   55947505
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   305167682

2. Datos del tutor
   Dr.
   Roberto
   Pichardo
   Mendoza

3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   Ángel
   Tamariz
   Mascarúa

4. Datos del sinodal 2
   Dra.
   Gabriela
   Campero
   Arena

5. Datos del sinodal 3
   Dr.
   Jorge Marcos
   Martínez
   Montejano

6. Datos del sinodal 4
   Dr.
   Ulises Ariet
   Ramos
   García

7. Datos del trabajo escrito
   El Problema de Katowice
   XII + 61 pp
   2014

# *Dedicatoria:*

*A mis padres Josefina y Alberto, les agradezco por todo el cariño que me han brindado desde el primer día de mi vida y por todo el apoyo que me han brindado.*

*A mi hermana Kenia, le agradezco por su apoyo y por todos los momentos maravillosos que hemos compartido desde nuestra infancia. Siempre agradeceré a mis padres por haber traído al mundo una hermana tan maravillosa como tú.*

*A mis tíos y primos, por todo su apoyo y motivación que me han brindado.*

*A la Universidad Nacional Autónoma de México, por haberme abierto las puertas desde mi entrada a la ENP plantel 1, hasta mi egreso en la Facultad de Ciencias.*

*Al Dr. Roberto Pichardo, quien además de ser un gran asesor de tesis, también ha sido un excelente profesor. Gracias por todo el tiempo que me has dedicado en clase y en las tutorías.*

*A mis sinodales Ángel, Gabriela, Jorge y Ariet, por el tiempo que dedicaron en la revisión de mi tesis y por sus excelentes consejos para mejorarla.*

*A mis profesores de la facultad, por todas sus enseñanzas.*

*A la Dirección General de Divulgación de la Ciencia, por darme una beca como anfitrión en la sala de matemáticas de Universum. En particular agradezco a Ramón Hernández, por su gran apoyo para adquirir esta beca.*

*A mis amistades de la prepa, especialmente a Lizbeth y Diego, por todo su apoyo y los grandes momentos que hemos compartido.*

*A mis amistades de Universum, especialmente a Verónica Nancy, Paola, Diana Aurora, Andrea y Arlensiu, gracias por su amistad y por todos los momentos maravillosos que hemos compartido.*

*A mis amistades de la Facultad de Ciencias, especialmente a mi buen amigo Rodrigo Cepeda, con quien comparto ese gusto por los misterios que encierran las matemáticas y en particular, la teoría de conjuntos.*

# Introducción

Este trabajo trata sobre un problema abierto en teoría de conjuntos y topología. Para abordar este problema, denotemos por $\omega$ al cardinal de los números naturales y por $\omega_1$ al menor cardinal mayor que $\omega$. Consideremos los órdenes parciales $\langle \mathcal{P}(\omega), \subseteq \rangle$ y $\langle \mathcal{P}(\omega_1), \subseteq \rangle$, donde $\mathcal{P}(\omega)$ y $\mathcal{P}(\omega_1)$ son los conjuntos potencia de $\omega$ y $\omega_1$, respectivamente. Un resultado elemental, es que los órdenes parciales anteriores no pueden ser isomorfos, pues cualquier isomorfismo entre ellos tendría que mandar un sucesor inmediato del conjunto vacío en un sucesor inmediato de $\emptyset$. Sin embargo, esto último es imposible, pues $\mathcal{P}(\omega)$ posee una cantidad numerable de sucesores inmediatos de $\emptyset$, a saber, todos los subconjuntos unipuntuales de $\omega$, mientras que $\mathcal{P}(\omega_1)$ contiene una cantidad más que numerable de dichos conjuntos.

Pensando en lo dicho en el párrafo anterior, definamos una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(\omega)$, de tal modo que cada clase de equivalencia agrupe a aquellos subconjuntos de $\omega$ que sólo difieran entre sí por una cantidad finita de elementos; en otras palabras, convengamos en identificar a todos los subconjuntos de $\omega$ que sólo difieren en una cantidad finita de elementos. Así, todos los subconjuntos finitos de $\omega$ quedarán agrupados en la clase de equivalencia del conjunto vacío, en particular, los conjuntos unipuntuales de $\mathcal{P}(\omega)$ estarán en esta clase de equivalencia. Denotemos por $\mathcal{P}(\omega)/fin$ a la familia de las clases de equivalencia dada por la relación anterior.

Si elegimos un representante para cada clase de equivalencia de $\mathcal{P}(\omega)/fin$, podemos definir un orden parcial en $\mathcal{P}(\omega)/fin$ de tal modo que una clase de equivalencia sea menor que otra siempre que el representante de la primera esté contenido en el representante de la segunda, salvo por una cantidad finita de elementos. Además, este orden parcial siempre será el mismo sin importar a quien elijamos como los representantes de las clases de equivalencia. En particular, tendremos que la clase de equivalencia del conjuntos vacío será el elemento mínimo en este orden parcial.

Análogamente, podemos definir la misma relación de equivalencia sobre $\mathcal{P}(\omega_1)$ para obtener el conjunto $\mathcal{P}(\omega_1)/fin$ y definir un orden parcial en él, de la misma forma que lo hicimos con $\mathcal{P}(\omega)/fin$. La pregunta natural es la siguiente:

*¿Son isomorfos los órdenes parciales $\mathcal{P}(\omega)/fin$ y $\mathcal{P}(\omega_1)/fin$?*

Un resultado sobre $\mathcal{P}(\omega)/fin$ y $\mathcal{P}(\omega_1)/fin$ hace referencia a que estos conjuntos tienen cardinalidad $2^\omega$ y $2^{\omega_1}$, respectivamente. Si suponemos que $\mathcal{P}(\omega)/fin$ y $\mathcal{P}(\omega_1)/fin$ son isomorfos, una consecuencia sería la igualdad $2^\omega = 2^{\omega_1}$. Por esta razón, la respuesta a la pregunta anterior es negativa en presencia de la Hipótesis del Continuo. Sin embargo, existen modelos de ZFC en los que se satisface la igualdad $2^\omega = 2^{\omega_1}$. Así, podemos preguntarnos lo siguiente:

*¿Es consistente con ZFC que los órdenes parciales $\mathcal{P}(\omega)/fin$ y $\mathcal{P}(\omega_1)/fin$ sean isomorfos?*

La respuesta a la pregunta anterior es desconocida. Al problema anterior se le conoce como *El problema de Katowice*, nombre que recibió porque fue planteado y discutido en un seminario de topología que se llevó acabo en la Universidad de Silecia, en la ciudad de Katowice, Polonia, durante la década de los 70's. Hay autores que le atribuyen esta pregunta a Marian Turzanski.

Este problema también tiene una versión topológica equivalente. Para esto, pensemos en $\omega$ como un espacio topológico discreto y denotemos por $\beta\omega$ a la compactación de Stone-Čech de $\omega$. Denotemos por $\omega^*$ al conjunto $\beta\omega \setminus \omega$. Consideremos a $\omega^*$ con la topología heredada por $\beta\omega$. Análogamente, podemos obtener al espacio topológico $\omega_1^*$. El problema de Katowice resulta ser equivalente a responder la siguiente pregunta:

*¿Es consistente con ZFC que los espacios topológicos $\omega^*$ y $\omega_1^*$ sean homeomorfos?*

El problema de Katowice puede generalizarse para el caso de dos cardinales arbitrarios $\kappa$ y $\lambda$. Sin embargo, en 1978, B. Balcar y R. Frankiewicz demostraron que de existir cardinales $\kappa$ y $\lambda$ tales que $\mathcal{P}(\kappa)/fin$ y $\mathcal{P}(\lambda)/fin$ sean isomorfos, nesesariamente $\kappa, \lambda \in \{\omega, \omega_1\}$.

Aunque este problema sigue sin tener una solución, hay considerables avances en su posible solución. En particular, se ha estudiado cuáles son las consecuencias de suponer que el problema tenga una respuesta afirmativa. Algunas de estas consecuencias son las siguientes:

1. La igualdad $2^\omega = 2^{\omega_1}$.

2. La existencia de ciertos subconjuntos del orden parcial $\mathcal{P}(\omega)/fin$ llamados Q-sucesiones fuertes y cuya cardinalidad sea $\omega_1$.

3. La existencia de una familia dominante de funciones en $\omega^\omega$ que tenga cardinalidad $\omega_1$.

Uno de los modelos más conocidos en el que se satisface la primera condición, es el modelo ZFC+MA($\omega_1$), donde MA($\omega_1$) se refiere al axioma de Martin para $\omega_1$. Es natural preguntarse cómo se relaciona este axioma con el problema de Katowice. Sin embargo, una consecuencia de MA($\omega_1$) es que toda familia dominante de funciones de $\omega^\omega$ tiene cardinalidad mayor que $\omega_1$. Por lo tanto, la tercera condición es falsa en este modelo.

Por otra parte, en 1985, Juris Steprans demostró que bajo MA($\omega_1$), no existen Q-sucesiones fuertes con cardinalidad $\omega_1$ (véase [8]). Sin embargo, él y Shelah demostraron de forma independiente que es consistente con ZFC la existencia de una Q-sucesión fuerte con cardinalidad $\omega_1$.

Uno de los resultados más destacados sobre la posible solución del problema de Katowice, fue el que David Chodounský publicó en su artículo *"Strong Q-sequences and small* $\mathfrak{d}$*"* (véase [1]). En él, demostró la existencia de un modelo de ZFC en el cual existe una Q-sucesión fuerte con cardinalidad $\omega_1$ y una familia dominante de funciones con cardinalidad $\omega_1$.

En el presente trabajo, estudiaremos algunas de las consecuencias del problema de Katowice en los modelos ZFC y ZFC+MA($\omega_1$).

En el primer capítulo, desarrollaremos la teoría previa necesaria para poder plantear a detalle el problema de Katowice en sus dos versiones. En particular, a partir de un conjunto arbitrario $X$, construiremos el orden parcial $\mathcal{P}(X)/fin$ y el espacio topológico $X^*$.

En el segundo capítulo estudiaremos las implicaciones que tiene el problema de Katowice en ZFC. Probaremos la equivalencia entre las dos versiones del problema de Katowice y veremos que las condiciones 1, 2 y 3 son consecuencia de suponer que tiene una respuesta afirmativa. Por último, demostraremos que si $\kappa$ y $\lambda$ son cardinales tales que $\kappa < \lambda$ y $\mathcal{P}(\kappa)/fin$ es isomorfo a $\mathcal{P}(\lambda)/fin$, entonces $\kappa = \omega$ y $\lambda = \omega_1$.

En el tercer capítulo demostraremos que el Problema de Katowice tiene una respuesta negativa en el modelo ZFC+MA($\omega_1$). Demostraremos que en este modelo, se satisface la condición 1, pero fallan las condiciones 2 y 3.

Es importante mencionar que para la lectura de este trabajo, se recomienda haber cursado los dos primeros cursos de Teoría de conjuntos y los dos primeros cursos de Topología, conforme a los programas de estudio establecidos por la Facultad de Ciencias de la UNAM.

# Índice general

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1. Introducción

Este capítulo tiene como principal finalidad presentar los resultados básicos que nos permitirán formular el Problema de Katowice de manera precisa en el capítulo siguiente. También será conveniente desarrollar el material sobre filtros y ultrafiltros que no necesariamente se cubre en los cursos de licenciatura de la facultad. Esto será con el propósito de emplear los ultrafiltros sobre un conjunto $X$ para construir la compactación de Stone-Čech del espacio topológico que resulta de equipar a $X$ con la topología discreta, pues esta construcción nos servirá para establecer un equivalente topológico del Problema de Katowice.

## 1.2. Notaciones y definiciones

Para nuestro objetivo, tomaremos como base los siguientes textos [5] y [3]. Seguiremos la notación y las definiciones de los textos anteriores salvo por los siguientes casos:

1. Dada una función entre conjuntos $f : X \longrightarrow Y$, si $a \subseteq X$, entonces $f[a] = \{f(x) : x \in a\}$. Por ejemplo, si $f : \{0, \{0\}\} \longrightarrow \{1, 2\}$ es la función $f = \{(0, 1), (\{0\}, 2)\}$, entonces $f(\{0\}) = 2$ y $f[\{0\}] = \{f(0)\} = \{1\}$.

2. Dado un conjunto $X$ y un cardinal $\kappa$, denotaremos por $[X]^\kappa$ a la familia de todos los subconjuntos de $X$ con cardinalidad $\kappa$. Por otra parte, $[X]^{<\kappa}$ denotará a la familia de todos los subconjuntos de $X$ con cardinalidad menor que $\kappa$.

3. Dados dos conjuntos $X$ y $Y$, el símbolo $X^Y$ representará a la familia de funciones de $Y$ en $X$.

4. Dado un espacio topológico $X$ y $a \subseteq X$, denotaremos la cerradura de $a$ como $a^-$.

5. Denotaremos por $\omega$ al conjunto de los números naturales: $\{0, 1, 2, 3, ...\}$. Por otra parte, $\omega_1$ denotará al menor ordinal cuya cardinalidad es mayor que la cardinalidad de $\omega$.

6. La Hipótesis del continuo, CH, es la igualdad $\mathfrak{c} = \omega_1$ (donde $\mathfrak{c}$ denota a la cardinalidad de los números reales). Gracias a los trabajos de Gödel y Cohen se sabe que CH es independiente de ZFC, la axiomática usual de la teoría de conjuntos.

## 1.3. Órdenes parciales y el Lema de Zorn

En esta sección presentaremos el material necesario sobre órdenes parciales para entender el contenido del resto de la tesis.

**Definición 1.3.1.** *Sean $X$ un conjunto y $\leq$ una relación en $X$, decimos que $\langle X, \leq \rangle$ es un orden parcial si:*

1. *Para cada $x \in X$, $x \leq x$ (reflexividad).*
2. *Si $x, y \in X$ son tales que $x \leq y$ y $x \leq y$, entonces $x = y$ (antisimetría).*
3. *Si $x, y, z \in X$ son tales que $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$ (transitividad).*

**Definición 1.3.2.** *Sea $\langle X, \leq \rangle$ un orden parcial.*

1. *$x \in X$ es una cota superior de $a \subseteq X$ si para cada $y \in a$ se tiene que $y \leq x$.*
2. *$x \in X$ es una cota inferior de $a \subseteq X$ si para cada $y \in a$ se tiene que $x \leq y$.*
3. *$x \in X$ es el supremo de $a \subseteq X$ (y lo denotamos por $\sup(a)$), si es una cota superior de $a$ y para cada $y \in X$, cota superior de $a$, se tiene que $x \leq y$.*
4. *$x \in X$ es el ínfimo de $a \subseteq X$ (y lo denotamos por $\inf(a)$), si es una cota inferior de $a$ y para cada $y \in X$, cota inferior de $a$, se tiene que $y \leq x$.*

**Definición 1.3.3.** *Sean $\langle X, \leq_X \rangle$ y $\langle Y, \leq_Y \rangle$ órdenes parciales. Diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo si: para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene $f(x) \leq_Y f(y)$, siempre que $x \leq_X y$.*

**Definición 1.3.4.** *Sean $\langle X, \leq_X \rangle$ y $\langle Y, \leq_Y \rangle$ órdenes parciales. Un isomorfismo entre $X$ y $Y$ es una función biyectiva $f : X \longrightarrow Y$ tal que:*

1. *Para cualesquiera $x, y \in X$, si $x \leq_X y$ entonces $f(x) \leq_Y f(y)$.*
2. *Para cualesquiera $x, y \in Y$, si $x \leq_Y y$ entonces $f^{-1}(x) \leq_X f^{-1}(y)$.*

*Si existe un isomorfismo entre $X$ y $Y$, decimos que son isomorfos.*

El siguiente resultado se puede resumir diciendo que “un isomorfismo manda supremos en supremos e ínfimos en ínfimos”.

**Proposición 1.3.5.** *Sean* $\langle X, \leq_X \rangle$ *y* $\langle Y, \leq_Y \rangle$ *ordenes parciales. Si* $f : X \longrightarrow Y$ *es un isomorfismo y* $a \subseteq X$*, entonces:*

1. $f(\sup a) = \sup(f[a])$*, siempre que* $\sup(a)$ *exista.*
2. $f(\text{ínf}\, a) = \text{ínf}(f[a])$*, siempre que* $\text{ínf}(a)$ *exista.*

Demostración:

Inciso 1. Sea $x = \sup(a)$, entonces $y \leq_X x$, para cada $y \in a$. Dado que $f$ es un isomorfismo, tenemos que $f(y) \leq_Y f(x)$, para cada $y \in a$. Así, $f(x)$ es una cota superior de $f[a]$. Ahora bien, supongamos que $z \in Y$ es una cota superior de $f[a]$ tal que $z \leq_Y f(x)$. Como $f$ es un isomorfismo, se sigue que $f^{-1}(z) \leq_X x$. Además, como $z$ es cota superior de $f[a]$ y $f$ es isomorfismo, tenemos que $y \leq_X f^{-1}(z)$, para cada $y \in a$. Por esto último, $f^{-1}(z) = x$ y $f(x) = z$. Por lo tanto, $f(x) = \sup(a)$.

Inciso 2. La prueba es semejante a la del inciso anterior y por esta razón la omitimos. □

**Definición 1.3.6.** *Sea* $\langle X, \leq \rangle$ *un orden parcial.*

1. $x, y \in X$ *son comparables si* $x \leq y$ *o* $y \leq x$*.*
2. $\mathcal{C} \subseteq X$ *es una cadena si para cualesquiera dos de sus elementos se tiene que son comparables.*
3. $x \in X$ *es maximal si para cada* $y \in X$*:* $x \leq y$ *implica que* $x = y$*.*

La siguiente proposición fue presentada por Max August Zorn en su artículo *“A Remark on Method in Transfinite Algebra”* (véase [11]) y es un enunciado equivalente al Axioma de Elección.

**Proposición 1.3.7** (Lema de Zorn)**.** *Si* $\langle X, \leq \rangle$ *es un orden parcial tal que* $X \neq \emptyset$ *y toda cadena no vacía tiene una cota superior, entonces* $X$ *tiene un elemento maximal.*

## 1.4. Filtros y ultrafiltros

Como se mencionó en la introducción, el fin de esta sección es exponer a detalle el material sobre filtros que necesitaremos más adelante.

**Definición 1.4.1.** *Sea* $\mathcal{A} \neq \emptyset$ *una familia de conjuntos no vacíos. Decimos que* $\mathcal{A}$ *tiene la propiedad de la intersección finita si para cualquier* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$*, finito y no vacío, se obtiene que* $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$*.*

**Definición 1.4.2.** *Sea $\mathcal{A} \neq \emptyset$ una familia de conjuntos. Decimos que $\mathcal{A}$ es cerrado bajo intersecciones finitas si para cualquier $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, finito y no vacío, se obtiene que $\bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{A}$.*

**Definición 1.4.3.** *Sea $X$ un conjunto y $F$ una familia no vacía de subconjuntos de $X$. Decimos que $F$ es un filtro de $X$ si:*

1. *$\emptyset \notin F$.*
2. *Para cualesquiera $a, b \in F$ se tiene que $a \cap b \in F$.*
3. *Si $a \in F$ y $a \subseteq b \subseteq X$, entonces $b \in F$.*

Es inmediato de la definición anterior que todo filtro tiene la propiedad de la intersección finita. Lo que no es tan obvio es que toda familia que tenga la propiedad de la intersección finita puede ser extendida a un filtro. Para probar esto requerimos de un lema.

**Lema 1.4.4.** *Sea $\mathcal{A}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Si $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la intersección finita, entonces*

$$S = \{\bigcap \mathcal{B} : \emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \text{ y } \mathcal{B} \text{ es finito}\}$$

*es una familia de conjuntos no vacíos, cerrada bajo intersecciones finitas y tal que $\mathcal{A} \subseteq S$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la intersección finita, se sigue que los elementos de $S$ son no vacíos. Por otra parte, observamos que si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A = \bigcap\{A\} \in S$, así: $\mathcal{A} \subseteq S$. Además, la intersección finita de elementos de $S$, es una intersección finita de elementos de $\mathcal{A}$; esto implica que $S$ es cerrado bajo intersecciones finitas. De este modo, el lema se sigue. $\square$

**Proposición 1.4.5.** *Sean $X$ un conjunto y $\mathcal{A}$ una familia no vacía de subconjuntos no vacíos de $X$. Si $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la intersección finita, entonces existe un filtro $F$ en $X$ tal que $\mathcal{A} \subseteq F$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado que $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de la intersección finita, por el lema 1.4.4 sabemos que existe $S$, una familia de conjuntos no vacíos, cerrada bajo intersecciones finitas y tal que $\mathcal{A} \subseteq S$. Así, probaremos que el conjunto

$$F = \{a \subseteq X : \exists\, c \in S(c \subseteq a)\}$$

es un filtro que contiene a $\mathcal{A}$. Comencemos por observar que $F$ es una familia de conjuntos no vacíos, porque cada elemento de $F$ contiene un elemento de $S$. Si $a, b \in F$, existen $c, d \in S$ tales que $c \subseteq a$ y $d \subseteq b$, pero $c \cap d \in S$ y $c \cap d \subseteq a \cap b$, así $a \cap b \in F$. Además, si $a \in F$ y $b \subseteq X$ es tal que $a \subseteq b$, entonces existe $c \in S$ tal que $c \subseteq a \subseteq b$ y por ende, $b \in F$. De esta forma, $F$ es un filtro y $\mathcal{A} \subseteq S \subseteq F$. $\square$

Ahora centraremos nuestro estudio en una clase particular de filtro:

**Definición 1.4.6.** *Sea $X$ un conjunto y $U$ un filtro de $X$. Decimos que $U$ es un ultrafiltro en $X$ si ningún filtro de $X$ lo contiene propiamente, es decir, no existe $F$, filtro en $X$, tal que $U \subseteq F$ y $U \neq F$.*

Una consecuencia del Axioma de Elección es que cada filtro puede ser extendido a un ultrafiltro, tal y como lo muestra la prueba del resultado siguiente.

**Proposición 1.4.7.** *Si $F$ es un filtro en el conjunto $X$, entonces existe $U$, un ultrafiltro en $X$, tal que $F \subseteq U$.*

Demostración: Consideremos la siguiente familia de filtros en $X$:

$$\mathcal{F}_X = \{G \subseteq X : G \text{ es un filtro en } X \text{ y } F \subseteq G\}$$

Tenemos que $\langle \mathcal{F}_X, \subseteq \rangle$ es un orden parcial. Por otra parte, observamos que si existe $U \in \mathcal{F}_X$, $\subseteq$-maximal en $\langle \mathcal{F}_X, \subseteq \rangle$, entonces para cada filtro $G$ en $X$ tal que $U \subseteq G$, se tiene que $F \subseteq U \subseteq G$ y por ende, $G \in \mathcal{F}_X$. De esta forma, la maximalidad de $U$ implica que $G = U$, de lo que se seguirá que $U$ es un ultrafiltro. Así, por el Lema de Zorn (véase el teorema 1.3.7), bastará con probar que toda cadena no vacía de $\mathcal{F}_X$ esta acotada superiormente en $\mathcal{F}_X$.

Sea $\mathcal{C}$ una cadena no vacía de $\mathcal{F}_X$. Veamos que $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}_X$. Para esto, observamos que los elementos de $\bigcup \mathcal{C}$ son no vacíos, porque cada elemento de $\mathcal{C}$ es un filtro. Ahora bien, para $a, b \in \bigcup \mathcal{C}$, existen $G, H \in \mathcal{C}$ tales que $a \in G$ y $b \in H$, pero como $\mathcal{C}$ es una cadena, tenemos que $G$ y $H$ son comparables. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $G \subseteq H$. Entonces $a, b \in H$ y por ende, $a \cap b \in H \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Por otra parte, si $a \in \bigcup \mathcal{C}$ y $b \subseteq X$ es tal que $a \subseteq b$, existe algún filtro $G \in \mathcal{C}$ tal que $a \in G$, de lo que se concluye que $b \in G \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Además, como $\mathcal{C}$ es no vacía, existe $G \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}_X$, de donde $F \subseteq G \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}_X$. □

**Lema 1.4.8.** *Sea $U$ un ultrafiltro en el conjunto $X$. Si $a \subseteq X$ es tal que $a \cap b \neq \emptyset$ para cada $b \in U$, entonces $a \in U$.*

Demostración: Dado que $a$ intersecta a cada elemento de $U$, tenemos que $U \cup \{a\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Así, por el lema 1.4.5 existe un filtro $F$ tal que $U \subseteq U \cup \{a\} \subseteq F$. Como $U$ es un ultrafiltro, se sigue que $a \in F = U$. □

Presentamos ahora una caracterización de los ultrafiltros.

**Proposición 1.4.9.** *Si $U$ es un filtro en el conjunto $X$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *$U$ es un ultrafiltro en $X$*

2. *Para cada $a \subseteq X$: $a \in U$ o $X \setminus a \in U$.*

Demostración: Veamos que el inciso 1 implica al inciso 2. Tomemos $a \subseteq X$ arbitrario y supongamos que $a \notin U$. Por lo anterior y dado que $U$ es un ultrafiltro, ningún elemento de $U$ esta contenido en $a$, pues si existiera $b \in U$ tal que $b \subseteq a$, se seguiría que $a \in U$. Pero esto significa que si $b \in U$, entonces $(X \setminus a) \cap b \neq \emptyset$. Así, $X \setminus a$ es un conjunto que intersecta a cada elemento de $U$ y por el lema 1.4.8 concluimos que $X \setminus a \in U$.

Ahora veamos que el inciso 2 implica al insiso 1. Supongamos que $U$ es un filtro que satisface 2. Sea $F$ un filtro tal que $U \subseteq F$ y fijemos $a \in F$. Sabemos que $a \in U$ o $X \setminus a \in U$. Dado que $F$ es un filtro y $a \cap (X \setminus a) = \emptyset$, no puede ocurrir que $X \setminus a \in U \subseteq F$. Así, necesariamente $a \in U$, de lo que concluimos que $F \subseteq U$ y $U$ es un ultrafiltro. □

Una forma fácil de obtener ultrafiltros es como sigue.

**Definición 1.4.10.** *Sean $X$ un conjunto y $x \in X$. Definimos:*

$$x^\star = \{a \subseteq X : x \in a\}$$

**Proposición 1.4.11.** *Sea $X$ un conjunto. Entonces para cada $x \in X$, $x^\star$ es un ultrafiltro de $X$.*

Demostración: Sea $x \in X$, por la proposición 1.4.9 bastará con probar que cada $a \subseteq X$ satisface $a \in x^\star$ o $X \setminus a \in x^\star$. Para esto consideremos $a \subseteq X$ arbitrario. En el caso en que $x \in a$ se tiene que $a \in x^\star$. Por otra parte si $x \notin a$, necesariamente $x \in X \setminus a$ y $X \setminus a \in x^\star$. □

**Definición 1.4.12.** *Sea $U$ un ultrafiltro en el conjunto $X$. Decimos que $U$ es un ultrafiltro principal en $X$ si $U = x^\star$, para alguna $x \in X$.*

**Proposición 1.4.13.** *Sea $U$ un ultrafiltro en el conjunto $X$. Entonces $U$ es un ultrafiltro principal en $X$ si y sólo si $U$ contiene algún elemento finito.*

Demostración: Si $U$ es un ultrafiltro y existe $a \in U$ finito, sea $\{x_i : i \leq n\}$ una enumeración de los elementos de $a$. Bastará con probar que $x_i^\star \subseteq U$ para alguna $i$, pues $x_i^\star$ es un ultrafiltro y lo anterior implica que $x_i^\star = U$. Por reducción al absurdo, supongamos que $x_i^\star \setminus U \neq \emptyset$ para cada $i$, entonces existe $a_i \in x_i^\star$ tal que $a_i \notin U$. Por la proposición 1.4.9, $X \setminus a_i \in U$ y $x_i \notin X \setminus a_i$. Así, $\emptyset = a \cap (\bigcap_{i \leq n} X \setminus a_i) \in U$ y esto último contradice que $U$ es un ultrafiltro. Por lo tanto, $U = x_i$ para alguna $i$.

Ahora bien, si $U$ es un ultrafiltro principal en $X$, por definición existe $x \in X$ tal que $U = x^\star$. De esta forma, $\{x\} \in U$ y $\{x\}$ es finito. □

Una pregunta natural es, ¿existen ultrafiltros que no sean principales? En presencia del Axioma de Elección la respuesta es afirmativa:

**Proposición 1.4.14.** *Para cualquier subconjunto infinito $a$ del conjunto $X$ existe $U$, un ultrafiltro en $X$, tal que $a \in U$ y $U$ no es un ultrafiltro principal.*

Demostración: Sea $a \subseteq X$ infinito, entonces existe $\{x_n : n \in \omega\} \subseteq a$ tal que $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$. Para cada $n \in \omega$ definamos $a_n = \{x_m : m \geq n\}$. Observamos que $\{a\} \cup \{a_n : n \in \omega\}$ tiene la propiedad de la intersección finita y por las proposiciones 1.4.5 y 1.4.7 existe un ultrafiltro $U$ tal que $\{a\} \cup \{a_n : n \in \omega\} \subset U$. Dado que $a_0 \in U$, basta con verificar que $U \neq x_i^\star$ para cada $i \in \omega$, pues si $x \in X \setminus a_0$, entonces $x \notin a_0 \in U$ y $U \neq x^\star$. Pero para cada $i \in \omega$, $x_i \notin a_{i+1} \in U$ y $U \neq x_i^\star$. □

## 1.5. La compactación de Stone-Čech de un espacio topológico

En esta sección, damos un recuento rápido de las nociones básicas que son parte del contenido de los cursos de Topología I y II.

**Definición 1.5.1.** *Sea $X$ un espacio topológico.*

1. *$X$ es Hausdorff si para cualesquiera $x, y \in X$ existen $u, v \subseteq X$, abiertos, tales que $x \in u$, $y \in v$ y $u \cap v = \emptyset$.*
2. *$X$ es regular si es Hausdorff y para cualesquiera $c \subseteq X$, cerrado, y $x \in X \setminus c$ existen $u, v \subseteq X$, abiertos, tales que $x \in u$, $c \subseteq v$ y $u \cap v = \emptyset$.*
3. *$X$ es completamente regular si es Hausdorff y para cualesquiera $c \subseteq X$, cerrado, y $x \in X \setminus c$ existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$, para cada $y \in c$.*
4. *$X$ es normal si es Hausdorff y para cualesquiera $c, d \subseteq X$, cerrados, existen $u, v \subseteq X$, abiertos, tales que $c \subseteq u$, $d \subseteq v$ y $u \cap v = \emptyset$.*

A las propiedades expuestas en la definición anterior se les conoce como Axiomas de Separación. En [3, Chap. VII] se estudian detalladamente estas propiedades. En particular, se satisface la siguiente secuencia de implicaciones:

$$\text{Normal} \Rightarrow \text{Completamente regular} \Rightarrow \text{Regular} \Rightarrow \text{Hausdorff}$$

**Definición 1.5.2.** *Sean $X$ un espacio topológico. Un conjunto $D$ es denso en $X$ si para cada $u \subseteq X$, abierto, se tiene que $D \cap u \neq \emptyset$. Diremos que $X$ es separable si posee un subconjunto denso y numerable.*

**Definición 1.5.3.** *Sea $X$ un espacio topológico. Una cubierta abierta de $X$ es una familia $\mathcal{B}$, de abiertos de $X$, tal que $X = \bigcup \mathcal{B}$. Diremos que $X$ es compacto si toda cubierta abierta de $X$ tiene una subcubierta finita.*

**Definición 1.5.4.** *Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos. Un encaje de $X$ en $Y$ es un homeomorfismo entre $X$ y un subespacio topológico de $Y$.*

**Definición 1.5.5.** *Sea $X$ un espacio topológico. Una compactación de $X$ es una pareja ordenada $\langle Y, h_Y \rangle$ tal que:*

1. *$Y$ es un espacio topológico Hausdorff y compacto.*
2. *$h_Y$ es un encaje de $X$ en $Y$ tal que $h_Y[X]$ es denso en $Y$.*

**Definición 1.5.6.** *Sea $X$ un espacio topológico. Dos compactaciones $\langle Y, h_Y \rangle$ y $\langle Z, h_Z \rangle$ de $X$, son equivalentes si existe un homeomorfismo $f : Y \longrightarrow Z$ tal que $f \circ h_Y(x) = h_Z(x)$, para cada $x \in X$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_Z"] \arrow[d, "h_Y"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

**Lema 1.5.7.** *Sean $X$ y $Y$ espacios topológicos, con $Y$ Hausdorff. Si $D \subseteq X$ es denso en $X$ y $f, g : X \longrightarrow Y$ son funciones continuas tales que $f \restriction D = g \restriction D$, entonces $f = g$.*

Demostración: Bastará con verificar que si $x \in X \setminus D$, entonces $f(x) = g(x)$. Por reducción al absurdo, supongamos que $f(x) \neq g(x)$. Como $Y$ es Hausdorff, existen abiertos $u$ y $v$ tales que $f(x) \in u$, $g(x) \in v$ y $u \cap v = \emptyset$. Dado que $f$ y $g$ son continuas, $f^{-1}[u]$ y $g^{-1}[v]$ son abiertos en $X$. Así, $f^{-1}[u] \cap g^{-1}[v]$ es un abierto en $X$ y es no vacío, pues $x \in f^{-1}[u] \cap g^{-1}[v]$. Además, sabemos que $D$ es denso. Por lo anterior, $D \cap (f^{-1}[u] \cap g^{-1}[v]) \neq \emptyset$. Entonces existe $y \in D \cap (f^{-1}[u] \cap g^{-1}[v])$. Por esto último, $f(y) \in u$, $g(y) \in v$ y $f(y) = g(y)$, contradiciendo que $u \cap v = \emptyset$. □

El siguiente teorema garantiza que todo espacio completamente regular posee una compactación de Stone-Čech. La prueba de este resultado no aparece en este trabajo. Sin embargo, en la sección 1.7 construiremos, empleando ultrafiltros, la compactación de Stone-Čech de un espacio discreto.

**Proposición 1.5.8** (Stone-Čech)**.** *Sea $X$ un espacio topológico completamente regular. Entonces existe una compactación $\langle \beta X, h_{\beta X} \rangle$ de $X$ que cumple lo siguiente:*

1. *Para cada espacio topológico $Y$, compacto y Hausdorff, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, entonces existe una función continua $g : \beta X \longrightarrow Y$ tal que $f = g \circ h_{\beta X}$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_{\beta X}"'] & Y \\ \beta X \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

2. *Cualquier otra compactación que cumpla la propiedad anterior es equivalente a $\beta X$.*

Demostración: La prueba del inciso 1 puede ser consultada en [3, Chap. XI Theorem 8.2], por lo que sólo demostraremos el inciso 2. Para esto, sea $\langle Y, h_Y \rangle$ una compactación de $X$, que cumpla la propiedad del inciso 1. Como $Y$ es compacto, Hausdorff y $h_Y : X \longrightarrow Y$ es continua, existe una función continua $f : \beta X \longrightarrow Y$, tal que $h_Y = f \circ h_{\beta X}$. Por otra parte, dado que $\beta X$ es compacto, Hausdorff y $h_{\beta X} : X \longrightarrow \beta X$ es continua, se tiene que existe una función continua $g : Y \longrightarrow \beta X$ tal que $h_{\beta X} = g \circ h_Y$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_Y"] \arrow[d, "h_{\beta X}"'] & Y \\ \beta X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "h_{\beta X}"] \arrow[d, "h_Y"'] & \beta X \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Probaremos que $g = f^{-1}$, de esto se seguirá que $f$ es un homeomorfismo. Veamos que $g \circ f = Id_{\beta X}$. Como $h_{\beta X}[X]$ es denso en $\beta X$, bastará con probar que $g \circ f(x) = x$, para cada $x \in h_{\beta X}[X]$ (véase el lema 1.5.7). Así, tomemos $x \in h_{\beta X}[X]$. Entonces existe $y \in X$ tal que $h_{\beta X}(y) = x$. Por esto último, $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(h_{\beta X}(y))) = g(h_Y(y)) = h_{\beta X}(y) = x$. De forma análoga se prueba que $f \circ g = Id_Y$ y por esta razón lo omitimos. Así, $g = f^{-1}$.

Además, sabemos que $f \circ h_{\beta X} = h_Y$. Por lo tanto $\langle \beta X, h_{\beta X} \rangle$ y $\langle Y, h_Y \rangle$ son compactaciones equivalentes. $\square$

## 1.6. El orden parcial $\mathcal{P}(X)/fin$

En esta sección, $X$ denotará un conjunto arbitrario.

**Definición 1.6.1.** *Sean $a, b \subseteq X$. Diremos que $a$ esta casi contenido en $b$ (y lo escribimos como $a \subseteq^* b$) si $a \setminus b$ es finito. Diremos que $a$ y $b$ son casi iguales (y lo escribimos como $a =^* b$) si $a \subseteq^* b$ y $b \subseteq^* a$.*

Observamos que si $a$ y $b$ son conjuntos tales que $a \subseteq b$, entonces $a \setminus b = \emptyset$ y $a \subseteq^* b$. Así, la contención de conjutos implica a la casi contención. Por esto último, si dos conjuntos son iguales, entonces también son casi iguales. Además, para $a$ y $b$ conjuntos cualesquiera, $a \subseteq^* b$ siempre que $a$ sea finito.

**Proposición 1.6.2.** *Sean $a, b, c \subseteq X$ cualesquiera, entonces:*

1. *$a \subseteq^* a$ (reflexividad de $\subseteq^*$).*
2. *Si $a \subseteq^* b$ y $b \subseteq^* c$, entonces $a \subseteq^* c$ (transitividad de $\subseteq^*$).*
3. *$a =^* a$ (reflexividad de $=^*$).*
4. *Si $a =^* b$, entonces $b =^* a$ (simetría de $=^*$).*
5. *Si $a =^* b$ y $b =^* c$, se sigue que $a =^* c$ (transitividad de $=^*$).*

Demostración:

Inciso 1. La reflexividad de $\subseteq^*$ se sigue porque $a \subseteq a$.

Inciso 2. Supongamos que $a \subseteq^* b$ y $b \subseteq^* c$. Entonces $a \setminus b$ y $b \setminus c$ son conjuntos finitos. Por otra parte, se tiene que $a \setminus c \subseteq (a \setminus b) \cup (b \setminus c)$ y por ende, $a \setminus c$ es un conjunto finito.

Inciso 3. La reflexividad de $=^*$ es una consecuencia directa del inciso 1.

Inciso 4. La simetría de $=^*$ es una consecuencia directa de la definición de $=^*$.

Inciso 5. Supongamos que $a$, $b$ y $c$ son conjuntos tales que $a =^* b$ y $b =^* c$, entonces $a \subseteq^* b \subseteq^* c$ y $c \subseteq^* b \subseteq^* a$. Así, por la transitividad de $\subseteq^*$, $a \subseteq^* c$ y $c \subseteq^* a$. Por lo tanto, $a =^* c$. □

Por la proposición anterior, se tiene que $=^*$ define una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(X)$. Para cada $a \in \mathcal{P}(X)$, consideremos su clase de equivalencia

$$[a] = \{b \in \mathcal{P}(X) : b =^* a\}$$

Definamos a la familia de clases de equivalencia:

$$\mathcal{P}(X)/fin = \{[a] : a \in \mathcal{P}(X)\}$$

Como $=^*$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(X)$, tenemos que $\mathcal{P}(X)/fin$ es una partición de $\mathcal{P}(X)$.

**Lema 1.6.3.** *Sean $a, b \subseteq X$, entonces: $a \subseteq^* b$ si y sólo si para cualesquiera $c \in [a]$ y $d \in [b]$, se tiene que $c \subseteq^* d$.*

Demostración: Supongamos que $a \subseteq^* b$. Sean $c \in [a]$ y $d \in [b]$ cualesquiera. Entonces $c =^* a$ y $d =^* b$, en particular $c \subseteq^* a$ y $b \subseteq^* d$. Como $a \subseteq^* b$, tenemos que $c \subseteq^* a \subseteq^* b \subseteq^* d$. Así, por la transitividad de $\subseteq^*$, concluimos que $c \subseteq^* d$.

Ahora bien, si para cualesquiera $c \in [a]$ y $d \in [b]$ se tiene que $c \subseteq^* d$, entonces $a \subseteq^* b$, pues $a \in [a]$ y $b \in [b]$. □

**Definición 1.6.4.** *Dados $[a], [b] \in \mathcal{P}(X)/fin$, $[a] \leq^* [b]$ siempre que $a \subseteq^* b$.*

Por el lema anterior, observamos que $\leq^*$ esta bien definido, debido a que no depende de los representantes que tomemos para las clases de equivalencia.

**Proposición 1.6.5.** *$\langle \mathcal{P}(X)/fin, \leq^* \rangle$ es un orden parcial.*

Demostración: Si $[a], [b] \in \mathcal{P}(X)$ son tales que $[a] \leq^* [b]$ y $[b] \leq^* [a]$, entonces $a \subseteq^* b$ y $b \subseteq^* a$; de esto se sigue que $a =^* b$ y $[a] = [b]$. Además, por la reflexividad y transitividad de $\subseteq^*$, se tiene que $\leq^*$ es reflexiva y transitiva. $\square$

Observemos que $[\emptyset] = \text{ínf}(\mathcal{P}(X)/fin)$ y $[X] = \sup(\mathcal{P}(X)/fin)$. Esto se sigue porque $[\emptyset] \leq^* [a] \leq^* [X]$, para cada $a \subseteq X$. Así, para $[b]$ y $[c]$ cotas inferior y superior de $\mathcal{P}(X)/fin$, respectivamente, tenemos que $[b] \leq^* [\emptyset]$ y $[X] \leq^* [c]$. Por lo anterior, $[\emptyset] = [b]$ y $[X] = [c]$.

**Proposición 1.6.6.** *Para cualesquiera $a, b \subseteq X$:*

1. $[a \cap b] = \text{ínf}(\{[a], [b]\})$.
2. $[a \cup b] = \sup(\{[a], [b]\})$.
3. $[\emptyset] = [a]$ *si y sólo si $a$ es finito.*
4. *Si* $[\emptyset] = [a \cap b]$ *y* $[X] = [a \cup b]$, *entonces* $[b] = [X \setminus a]$.

DEMOSTRACIÓN:

Inciso 1. Como $a \cap b \subseteq a$ y $a \cap b \subseteq b$, se sigue que $[a \cap b]$ es cota inferior de $\{[a], [b]\}$. Ahora bien, si $[c]$ es una cota inferior de $\{[a], [b]\}$, tenemos que $c \subseteq^* a$ y $c \subseteq^* b$. Por esto último, $c \setminus a$ y $c \setminus b$ son finitos. Así, $c \setminus (a \cap b) = (c \setminus a) \cup (c \setminus b)$ es finito y $[c] \leq^* [a \cap b]$.

Inciso 2. Como $a \subseteq a \cup b$ y $b \subseteq a \cup b$, se sigue que $[a \cup b]$ es cota superior de $\{[a], [b]\}$. Ahora bien, si $[c]$ es una cota superior de $\{[a], [b]\}$, tenemos que $a \subseteq^* c$ y $b \subseteq^* c$. Por esto último, $a \setminus c$ y $b \setminus c$ son finitos. Así, $(a \cup b) \setminus c = (a \setminus c) \cup (b \setminus c)$ es finito y $[a \cup b] \leq^* [c]$.

Inciso 3. Si $a$ es finito, entonces $a \subseteq^* \emptyset$. De esta forma, $a =^* \emptyset$ y $[a] = [\emptyset]$. Ahora bien, si $[a] = [\emptyset]$, entonces $a \subseteq^* \emptyset$ y $a \setminus \emptyset = a$ es finito.

Inciso 4. Supongamos que $[\emptyset] = [a \cap b]$ y $[X] = [a \cup b]$. Demostraremos que $b \subseteq^* X \setminus a$ y $X \setminus a \subseteq^* b$. Observamos que se satisfacen las igualdades $b \setminus (X \setminus a) = a \cap b$ y $(X \setminus a) \setminus b = X \setminus (a \cup b)$. Así, bastará con probar que $a \cap b$ y $X \setminus (a \cup b)$ son finitos. Dado que $[a \cap b] = [\emptyset]$, del inciso anterior se sigue que $a \cap b$ es finito. Además, como $[a \cup b] = [X]$, tenemos que $X \subseteq^* a \cup b$ y $X \setminus (a \cup b)$ es finito. $\square$

En lo que se refiere a isomorfismos tenemos el siguente resultado.

**Proposición 1.6.7.** *Sea $f : \mathcal{P}(X)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(Y)/fin$ un isomorfismo. Si $a, b \subseteq X$ y $c, d \subseteq Y$ son tales que $f([a]) = [c]$ y $f([b]) = [d]$, entonces:*

1. $f([\emptyset]) = [\emptyset]$ *y* $f([X]) = [Y]$.
2. *$a$ es finito si y solo si $c$ es finito.*
3. *$a \subseteq^* b$ si y solo si $c \subseteq^* d$.*

4. $f([a \cap b]) = [c \cap d]$ *y* $f([a \cup b]) = [c \cup d]$.

5. $f([X \setminus a]) = [Y \setminus c]$.

DEMOSTRACIÓN:

Inciso 1. Como $[\emptyset] = \text{ínf}(\mathcal{P}(X)/fin)$ y $f$ es un isomorfismo, la proposición 1.3.5 implica que $f([\emptyset]) = \text{ínf}(f[\mathcal{P}(X)/fin]) = \text{ínf}(\mathcal{P}(Y)/fin) = [\emptyset]$. Además, $[X] = \sup(\mathcal{P}(X)/fin)$. Por esto último:

$$f([X]) = \sup(f[\mathcal{P}(X)/fin]) = \sup(\mathcal{P}(Y)/fin) = [Y]$$

Inciso 2. Si $a$ es finito, entonces $[a] = [\emptyset]$. Como $f$ es un isomorfismo, $[c] = f([a]) = f([\emptyset]) = [\emptyset]$ y $c$ es finito. Ahora bien, si $c$ es finito, entonces $[c] = [\emptyset]$. Dado que $f$ es un isomorfismo, $[a] = f^{-1}([c]) = f^{-1}([\emptyset]) = [\emptyset]$.

Inciso 3. Si $a \subseteq^* b$, entonces $[a] \leq^* [c]$ y $[c] = f([a]) \leq^* f([b]) = [d]$. Por esto último, $c \subseteq^* d$. Ahora bien, si $c \subseteq^* d$, entonces $[c] \leq^* [d]$. Así, $[a] = f^{-1}([c]) \leq^* f^{-1}([d]) = [b]$ y $a \subseteq^* b$.

Inciso 4. Por la proposición 1.6.6, sabemos que $[a \cap b] = \text{ínf}(\{[a], [b]\})$ y $[c \cap d] = \text{ínf}(\{[c], [d]\}) = \text{ínf}(\{f([a]), f([b])\})$. Así, la proposición 1.3.5 implica que $f([a \cap b]) = [c \cap d]$. Análogamente se prueba que $f([a \cup b]) = [c \cup d]$, por esta razón omitimos la prueba.

Inciso 5. Por los incisos 1, 2 y 4 de la proposición 1.6.6, bastará con verificar las igualdades $\text{ínf}(\{f([X \setminus a]), [c]\}) = [\emptyset]$ y $\sup(\{f([X \setminus a]), [c]\}) = [Y]$. Como $[\emptyset] = \text{ínf}(\{[X \setminus a], [a]\})$ y $[X] = \sup(\{[X \setminus a], [a]\})$, se tiene que:

$$[\emptyset] = f([\emptyset]) = f(\text{ínf}\{[X \setminus a], [a]\}) = \text{ínf}(\{f([X \setminus a], [c]\})$$

$$[Y] = f([X]) = f(\sup\{[X \setminus a], [a]\}) = \sup(\{f([X \setminus a]), [c]\})$$

□

## 1.7. La compactación de Stone-Čech de un espacio discreto

En esta sección, $X$ denotará un espacio topológico discreto. Denotemos como $\beta X$ al conjunto de todos los ultrafiltros en $X$. Nuestro objetivo en esta sección, será definir una topología para $\beta X$ y un encaje $h_{\beta X} : X \longrightarrow \beta X$, de modo que $\langle \beta X, h_{\beta X} \rangle$ resulte ser la compactación de Stone-Čech de $X$.

Para cada $a \subseteq \beta X$, definamos:

$$a^\circ = \{U \in \beta X : a \in U\}$$

Los siguientes resultados nos servirán para definir en $\beta X$ la topología que deseamos.

**Lema 1.7.1.** *Para cualesquiera $a, b \subseteq X$ y $x \in X$:*

1. $\{x\}^\circ = \{x^\star\}$.
2. $a^\circ \cap b^\circ = (a \cap b)^\circ$.
3. $\beta X = a^\circ \cup (X \setminus a)^\circ$.

Demostración:

Inciso 1. Si $U \in \{x\}^\circ$, entonces $\{x\} \cap c \neq \emptyset$, para cada $c \in U$. Por esto último, $U \subseteq x^\star$. Como $U$ es un ultrafiltro, tenemos que $U = x^\star$. Por otra parte, es claro que $\{x^\star\} \subseteq \{x\}^\circ$, pues $\{x\} \in x^\star$.

Inciso 2. Observemos que para cada $U \in \beta X$, $a, b \in U$ si y sólo si $a \cap b \in U$. Por esto último, $U \in a^\circ \cap b^\circ$ si y sólo si $U \in (a \cap b)^\circ$.

Inciso 3. Claramente $a^\circ \cup (X \setminus a)^\circ \subseteq \beta X$. Ahora bien, si $U \in \beta X$, por la proposición 1.4.9, tenemos que $a \in U$ o $X \setminus a \in U$. Así, $U \in a^\circ \cup (X \setminus a)^\circ$. □

**Lema 1.7.2.** *Sea $\mathcal{A} \neq \emptyset$ una familia finita de subconjuntos de $X$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$
2. $\beta X = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} (X \setminus a)^\circ$.

Demostración: Veamos que el inciso 1 implica al inciso 2. Supongamos que $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$ y fijemos $U \in \beta X$. Como $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset \notin U$ y $\mathcal{A}$ es finito, no puede ocurrir que $a \in U$ para cada $a \in \mathcal{A}$. De esta forma, existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $a \notin U$, es decir, $U \notin a^\circ$. Pero sabemos que $U \in \beta X = a^\circ \cup (X \setminus a)^\circ$; entonces $U \in (X \setminus a)^\circ \subseteq \bigcup_{a \in \mathcal{A}} (X \setminus a)^\circ$.

Ahora veamos que el inciso 2 implica al inciso 1. Supongamos que $\beta X = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} (X \setminus a)^\circ$. Por lo anterior, para cada $U \in \beta X$, existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $U \in (X \setminus a)^\circ$. Así, $a \notin U$ y por ende, $\bigcap \mathcal{A} \notin U$. Como elegimos $U \in \beta X$ arbitrario, si existiera $x \in \bigcap \mathcal{A}$, tendríamos que $\bigcap \mathcal{A} \in x^\star \in \beta X$, por lo que $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$. □

Recordemos que $\mathcal{B}$, una familia de subconjuntos de $\beta X$, es base para una topología en $\beta X$ si se cumple lo siguiente:

1. $\bigcup \mathcal{B} = \beta X$

2. Para cualesquiera conjuntos $A, B \in \mathcal{B}$ y $U \in A \cap B$, existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $U \in C \subseteq A \cap B$.

La prueba de esto puede consultarse en [3, III Theorem 3.2].

**Proposición 1.7.3.** *La familia $B_{\beta X} = \{a^\circ : a \subseteq X\}$ es base para una topología en $\beta X$. Además, $\beta X$ con esta topología es un espacio Hausdorff y compacto.*

Demostración: Observemos que para cualesquiera $a^\circ, b^\circ \in B_{\beta X}$, se tiene que $a^\circ \cap b^\circ = (a \cap b)^\circ \in B_{\beta X}$. Por otra parte, para cada $U \in \beta X$, existe $a \in U$ y por ende, $U \in a^\circ$. Lo anterior implica que $B_{\beta X}$ es la base de una topología en $\beta X$.

Ahora consideremos la topología generada por $B_{\beta X}$. Dados $U, V \in \beta X$ distintos, supongamos sin pérdida de generalidad que existe $a \in U \setminus V$. De esta forma, $U \in a^\circ$ y $V \notin a^\circ$. Por el inciso 3 del lema 1.7.1, $V \in (X \setminus a)^\circ$. Además, $a^\circ$ y $(X \setminus a)^\circ$ son abiertos ajenos que contienen a $U$ y a $V$, respectivamente, pues por el inciso 2 del lema 1.7.1, tenemos que $a^\circ \cap (X \setminus a)^\circ = \emptyset^\circ = \emptyset$. Por lo tanto, $\beta X$ es Hausdorff.

Por último veamos que $\beta X$ es compacto. Bastará con probar que toda cubierta de abiertos básicos tiene una subcubierta finita. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $I \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $\mathcal{A} = \{a^\circ : a \in I\}$ es una cubierta de $\beta X$, sin subcubiertas finitas. Definamos $\mathcal{B} = \{X \setminus a : a \in I\}$. Como la unión finita de elementos de $\mathcal{A}$ no es $\beta X$, por el lema 1.7.2, la intersección finita de elementos de $\mathcal{B}$ es no vacía, es decir, $\mathcal{B}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Por las proposiciones 1.4.5 y 1.4.7, $\mathcal{B}$ puede ser extendido a un ultrafiltro $U$ en $X$. Así, $U \in \beta X = \bigcup_{a \in I} a^\circ$ y por ende $U \in a^\circ$, para alguna $a \in I$. Por lo anterior, $a \in U$. Pero $X \setminus a \in \mathcal{B} \subseteq U$, entonces $a, X \setminus a \in U$ y $\emptyset = a \cap (X \setminus a) \in U$, contradiciendo que $U$ es un ultrafiltro. □

**Proposición 1.7.4.** *Sea $h_{\beta X} : X \longrightarrow \beta X$, dada por $h_{\beta X}(x) = x^\star$. Entonces $\langle \beta X, h_{\beta X} \rangle$ es una compactación de $X$.*

Demostración: Por la proposición 1.7.3, bastará con probar que $h_{\beta X}$ es un encaje y $h_{\beta X}[X]$ es denso en $\beta X$. Comencemos probando que $h_{\beta X}$ es un encaje. Si $x, y \in X$ son tales que $x \neq y$, entonces $\{y\} \notin x^\star$ y por ende, $x^\star \neq y^\star$. Por lo anterior, $h_{\beta X}$ es inyectiva. Como $X$ es un espacio discreto, la imagen inversa de cualquier abierto de $h_{\beta X}[X]$ es abierto en $X$. Así, $h_{\beta X}$ es continua. Ahora bien, para cada $a \subseteq X$, tenemos que $h_{\beta X}[a] = \{x^\star : x \in a\} = \bigcup_{x \in a} \{x^\star\}$. Por el inciso 1 del lema 1.7.1, $h_{\beta X}[a] = \bigcup_{x \in a} \{x\}^\circ$ y por ende, $h_{\beta X}[a]$ es abierto. De esta forma, $h_{\beta X}$ es una función abierta en $\beta X$, en particular, es abierta en $h_{\beta X}[X]$. Por lo tanto, $h_{\beta X}$ es un encaje.

Falta probar que $h_{\beta X}[X]$ es denso en $\beta X$. Para esto, bastará con probar que cada abierto básico de $\beta X$ intersecta a $h_{\beta X}[X]$. Así, tomemos $a \subseteq X$, no vacío. Como $a \neq \emptyset$, existe $x \in a$. De esta forma, $a \in x^\star$ y por ende $x^\star \in a^\circ$. Por lo tanto, $x^\star \in h_{\beta X}[X] \cap a^\circ$. □

Ahora sólo nos falta probar que nuestro $\beta X$ tiene la propiedad universal, es decir, que satisface el inciso 1 de la proposición 1.5.8. Con esta idea en mente, convengamos en que, por el resto de la sección, $Y$ será un espacio topológico compacto y Hausdorff.

**Definición 1.7.5.** *Sean $U \in \beta X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Decimos que $\lim_{x \to U} f(x) = y$ si para cada $u \subseteq Y$, abierto para el cual $y \in u$, se tiene que $f^{-1}[u] \in U$.*

**Lema 1.7.6.** *Sean $U \in \beta X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Entonces existe un único $y \in Y$ tal que $y = \lim_{x \to U} f(x)$. Además:*

$$\{y\} = \bigcap_{a \in U} f[a]^-$$

Demostración: Primero probaremos la existencia. Como $U$ es un ultrafiltro, para cualesquiera $a, b \in U$ tenemos que $a \cap b \neq \emptyset$. De esta forma, la familia $\{f[a] : a \in U\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Definamos:

$$S = \bigcap_{a \in U} f[a]^-$$

Como $Y$ es compacto, se sigue que cualquier familia de subconjuntos cerrados de $Y$ con la propiedad de la intersección finita, tiene una interseción no vacía (véase [3, XI Theorem 3.1]). Por esto último, $S \neq \emptyset$. Elijamos $y \in S$. Demostraremos que $\lim_{x \to U} f(x) = y$. Para esto, sea $u \subseteq Y$, abierto tal que $y \in u$. Por el lema 1.4.8, bastará con verificar que $f^{-1}[u] \cap a \neq \emptyset$, para cada $a \in U$, pues de esto se siguirá que $f^{-1}[u] \in U$. Fijemos $a \in U$. Como $y \in S$, tenemos que $y \in f[a]^-$. Por esto último, $u \cap f[a] \neq \emptyset$. Así, existe $x \in a$ tal que $f(x) \in u$. Por lo tanto, $x \in f^{-1}[u] \cap a \neq \emptyset$.

Ahora probaremos la unicidad. Para esto, tomemos $z \in Y$ tal que $z \neq y$. Bastará con probar que existe $v \subseteq Y$, abierto para el cual $z \in v$ y $f^{-1}[v] \notin U$. Como $Y$ es Hausdorff y $y \neq z$, existen $u$ y $v$, abiertos tales que $y \in u$, $z \in v$ y $u \cap v = \emptyset$. De la igualdad $y = \lim_{x \to U} f(x)$, se sigue que $f^{-1}[u] \in U$. Además, observemos que $f^{-1}[u] \cap f^{-1}[v] = \emptyset$, pues $u \cap v = \emptyset$. Así, $f^{-1}[v] \notin U$. $\square$

Consideremos $h : X \longrightarrow Y$, una función continua. Definamos $f : \beta X \longrightarrow Y$, mediante $f(U) = \lim_{x \to U} h(x)$, para cada $U \in \beta X$. Notemos que el lema anterior garantiza que $f$ está bien definida.

**Proposición 1.7.7.** *La función $f$ definida anteriormente es continua y satisface que $h = f \circ h_{\beta X}$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "h_{\beta X}"'] & Y \\ \beta X \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración: Comencemos probando la continuidad de $f$. Para esto, tomemos $U \in \beta X$ y $u \subseteq Y$ tales que $f(U) \in u$ y $u$ es un abierto. Como $f(U) = \lim_{x \to U} h(x)$, por el lema 1.7.6, $\bigcap_{a \in U} h[a]^- = \{f(U)\} \subseteq u$. Entonces $Y \setminus u \subseteq Y \setminus \bigcap_{a \in U} h[a]^- = \bigcup_{a \in U} Y \setminus h[a]^-$. Por otra parte, $Y \setminus u$ es un subconjunto cerrado del espacio compacto $Y$ y por ende, $Y \setminus u$ es compacto. Así, existe $\mathcal{A} \subseteq U$, finito, para el cual $Y \setminus u \subseteq \bigcup_{a \in \mathcal{A}} Y \setminus h[a]^-$. Notemos que la contención anterior es equivalente a que $\bigcap_{a \in \mathcal{A}} h[a]^- \subseteq u$. Además, $\bigcap \mathcal{A} \in U$, pues $\mathcal{A}$ es finito y $U$ es filtro. Por esto último, $(\bigcap \mathcal{A})^\circ$ es un abierto en $\beta X$ tal que $U \in (\bigcap \mathcal{A})^\circ$. Veamos que $f[(\bigcap \mathcal{A})^\circ] \subseteq u$. Para esto, fijemos $V \in (\bigcap \mathcal{A})^\circ$. Observemos que $\mathcal{A} \subseteq V$, pues $V$ es un ultrafiltro y $\bigcap \mathcal{A} \subseteq a$, para cada $a \in \mathcal{A}$. Además, $f(V) = \lim_{x \to V} h[x]$ y por el lema 1.7.6, $\{f(V)\} = \bigcap_{a \in V} h[a]^-$. Así, $\{f(V)\} = \bigcap_{a \in V} h[a]^- \subseteq \bigcap_{a \in \mathcal{A}} h[a]^- \subseteq u$. Por lo tanto, $f[(\bigcap \mathcal{A})^\circ] \subseteq u$.

Ahora veamos que $h = f \circ h_{\beta X}$. Tomemos $x \in X$ arbitrario. Basta probar que para cada abierto $u$ de $Y$ tal que $h(x) \in u$, se tiene que $h^{-1}[u] \in x^\star$, pues de esto se seguirá que $h(x) = f(x^\star)$. En efecto, si $u$ es un abierto tal que $h(x) \in u$, entonces $x \in h^{-1}[u] \in x^\star$. Por lo tanto, $h(x) = f(x^\star)$. $\square$

# Capítulo 2

# El problema de Katowice en ZFC

## 2.1. Introducción

Consideremos los cardinales $\omega$ y $\omega_1$. Es consistente con ZFC que $|\mathcal{P}(\omega)| = |\mathcal{P}(\omega_1)|$ (véase el capítulo 3). Así, podemos plantear la siguiente pregunta: ¿es consistente con ZFC que $\langle \mathcal{P}(\omega), \subseteq \rangle$ y $\langle \mathcal{P}(\omega_1), \subseteq \rangle$ sean isomorfos? La respuesta es negativa.

Para probar lo anterior, por reducción al absurdo, supongamos que existe $f : \mathcal{P}(\omega_1) \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)$, un isomorfismo. Demostraremos que para cada $\alpha \in \omega_1$ existe $n \in \omega$ tal que $f(\{\alpha\}) = \{n\}$. Como $f$ es inyectiva, lo anterior implicaría que existe una correspondencia uno a uno entre $\omega_1$ y un subconjunto de $\omega$, pero esto contradiría que $\omega < \omega_1$. Para esto, fijemos $\alpha \in \omega_1$. Como $f$ es un isomorfismo, si $a \in \mathcal{P}(\omega_1)$ es tal que $a \subseteq f(\{\alpha\})$ y $a \neq f(\{\alpha\})$, entonces $\emptyset \subseteq f^{-1}(a) \subseteq \{\alpha\}$ y $f^{-1}(a) \neq \{\alpha\}$. Por lo anterior, necesariamente $f^{-1}(a) = \emptyset$ y por ende, $a = \emptyset$. Hemos probado que el único subconjunto propio de $f(\{\alpha\})$ es el vacío. Por esto último, debe existir $n \in \omega$ tal que $f(\{\alpha\}) = \{n\}$.

Llamaremos átomos a los conjuntos que constan de un único elemento. De la prueba anterior, observamos que la causa por la cual $\mathcal{P}(\omega)$ y $\mathcal{P}(\omega_1)$ no son isomorfos, es que $\mathcal{P}(\omega)$ tiene sólo una cantidad numerable de átomos, mientras que $\mathcal{P}(\omega_1)$ tiene una cantidad más que numerable de átomos. Podemos plantear la siguiente pregunta: ¿es consistente con ZFC que los órdenes parciales $\langle \mathcal{P}(\omega)/fin, \leq^* \rangle$ y $\langle \mathcal{P}(\omega_1)/fin, \leq^* \rangle$ sean isomorfos? Observamos que $\mathcal{P}(\omega)/fin$ y $\mathcal{P}(\omega_1)/fin$ agrupan a todos los átomos en la clase del conjunto vacío (véase la proposición 1.6.6). La respuesta a esta última pregunta es desconocida y se le llama *El problema de Katowice*. Esta pregunta fue formulada y discutida en un seminario de topología que se realizó en la Universidad de Silesia, en la ciudad de Katowice, Polonia, durante la década de los 70's.

## 2.2. El problema de Katowice y CH

En este capítulo, $\kappa$ y $\lambda$ serán dos cardinales infinitos. Denotaremos por $\mathcal{K}(\kappa,\lambda)$ al enunciado: *"$\mathcal{P}(\kappa)/fin$ y $\mathcal{P}(\lambda)/fin$ son isomorfos"*. Por otra parte, $\mathcal{K}(\kappa,\lambda,f)$ denotará al enunciado: *"$f:\mathcal{P}(\kappa)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda)/fin$ es un isomorfismo"*. Esta notación será para facilitar y sintetizar la redacción de varios resultados que probaremos en lo posterior.

De ahora en adelante, cuando escribamos $[a]\in\mathcal{P}(\kappa)/fin$ daremos por hecho que $a\subseteq\kappa$.

**Proposición 2.2.1.** *Sea $\kappa$ un cardinal arbitrario. Entonces $|[a]|=\kappa$, para cada $[a]\in\mathcal{P}(\kappa)/fin$.*

Demostración: Dado que $\kappa$ tiene exactamente $\kappa$ subconjuntos finitos (véase [5, Ch. 1 Corollary 10.13]), bastará con probar que se satisface la siguiente igualdad:

$$[a]=\{(a\setminus b)\cup c:(b,c)\in[\kappa]^{<\omega}\times[\kappa]^{<\omega}\}$$

Tomemos $d\in[a]$ arbitrario. Entonces $d\subseteq^* a$ y $a\subseteq^* d$. Definamos $b=a\setminus d$ y $c=d\setminus a$. Así, $b$ y $c$ son finitos. Además, $(a\setminus b)\cup c=(a\cap d)\cup(d\setminus a)=d$.

Ahora bien, tomemos $b,c\subseteq\kappa$, finitos. Entonces $a\subseteq^* a\setminus b\subseteq^*(a\setminus b)\cup c$ y $(a\setminus b)\cup c\subseteq^* a\setminus b\subseteq^* a$. Por lo tanto, $a=^*(a\setminus b)\cup c$. $\square$

La siguiente proposición prueba que $\mathcal{K}(\omega,\omega_1)$ no se satisface cuando suponemos que CH es verdadera. Por lo tanto, es consistente que $\mathcal{K}(\omega,\omega_1)$ sea falsa.

**Proposición 2.2.2.** *$\mathcal{K}(\omega,\omega_1)$ implica que $\mathfrak{c}=2^{\omega_1}$.*

Demostración: Observemos que $\mathcal{P}(\omega)=\bigcup(\mathcal{P}(\omega)/fin)$. Por la proposición 2.2.1, $\mathfrak{c}=|\mathcal{P}(\omega)|=|\bigcup_{[a]\in\mathcal{P}(\omega)/fin}[a]|=|\mathcal{P}(\omega)/fin|\cdot\omega$. Así, necesariamente $|\mathcal{P}(\omega)/fin|=\mathfrak{c}$. Por un argumento análogo, se sigue que $2^{\omega_1}=|\mathcal{P}(\omega_1)/fin|$. Si suponemos $\mathcal{K}(\omega,\omega_1)$, entonces existe una función biyectiva entre $\mathcal{P}(\omega)/fin$ y $\mathcal{P}(\omega_1)/fin$. Por lo tanto, $\mathfrak{c}=|\mathcal{P}(\omega)/fin|=|\mathcal{P}(\omega_1)/fin|=2^{\omega_1}$. $\square$

El resultado anterior puede generalizarse para cardinales arbitrarios $\kappa$ y $\lambda$, es decir, $\mathcal{K}(\kappa,\lambda)$ implica que $2^\kappa=2^\lambda$. Sin embargo, en la proposición 2.5.12 probaremos que si $\kappa$ y $\lambda$ satisfacen $\mathcal{K}(\kappa,\lambda)$, entonces $\kappa,\lambda\in\{\omega,\omega_1\}$.

## 2.3. Una equivalencia del problema de Katowice

Tomemos $\beta\kappa$ y $\beta\lambda$, las compactaciones de Stone-Čech de $\kappa$ y $\lambda$ tal y como fueron descritas en la sección 1.7.

**Definición 2.3.1.** *Para cada $a\subseteq\kappa$, definamos $a^*=a^\circ\setminus\{\alpha^\star:\alpha\in\kappa\}$.*

Como todo ultrafiltro de $\kappa$ tiene a $\kappa$ como elemento, observemos que $\beta\kappa = \kappa^\circ$ (véase sección 1.7). Por lo anterior, $\kappa^* = \beta\kappa \setminus \{\alpha^\star : \alpha \in \kappa\}$. Consideremos $\kappa^*$ con la topología heredada por $\beta\kappa$.

**Definición 2.3.2.** *$\kappa^*$ es el residuo de la compactación de Stone-Čech de $\kappa$.*

Nuestro objetivo en esta sección será demostrar que el enunciado $\mathcal{K}(\kappa, \lambda)$ es equivalente a que $\kappa^*$ y $\lambda^*$ son homeomorfos. En particular, el problema de Katowice es equivalente a la pregunta: ¿es consistente con ZFC que $\omega^*$ y $\omega_1^*$ sean homeomorfos?

Lo que haremos ahora será desarrollar algunas propiedades topológicas del residuo $\kappa^*$ con la intención de usar éstas para probar la equivalencia enunciada arriba.

**Proposición 2.3.3.** *Para cualesquiera $a, b \subseteq \kappa$, $a \subseteq^* b$ si y sólo si $a^* \subseteq b^*$. En particular, $a =^* b$ es equivalente a la igualdad $a^* = b^*$.*

Demostración: Supongamos que $a \subseteq^* b$ y tomemos $U \in a^*$. Entonces $a \in U$ y $U \neq \alpha^\star$, para cada $\alpha \in \kappa$. Para probar que $U \in b^*$, por el lema 1.4.8, bastará con verificar que $b \cap c \neq \emptyset$, para cada $c \in U$. Así, fijemos $c \in U$. Observemos que por el lema 1.4.13, $U$ no tiene elementos finitos. En particular, $a \cap c \in U$ es infinito. Como $a \subseteq^* b$, tenemos que $a \cap c \subseteq^* a \subseteq^* b$. Pero como $a \cap c$ es infinito, necesariamente $(a \cap c) \cap b$ es infinito, pues $(a \cap c) \setminus b$ es finito. Por lo tanto, $c \cap b \neq \emptyset$, y por ende, $b \in U$.

Ahora supongamos que $a \setminus b$ es infinito. Demostraremos que $a^* \setminus b^* \neq \emptyset$. Por la proposición 1.4.14, existe $U$, ultrafiltro tal que $a \setminus b \in U$ y $U \neq \alpha^\star$, para cada $\alpha \in \kappa$. Por lo anterior, $U \in a^* \setminus b^*$. □

**Proposición 2.3.4.** *Para cualesquiera $U \in \kappa^*$ y $a \in U$, tenemos que $[a] \subseteq U$.*

Demostración: Tomemos $c \in [a]$. Como $c =^* a$, la proposición 2.3.3 nos garantiza que $U \in a^* = c^*$. Por lo tanto, $c \in U$. □

**Proposición 2.3.5.** *Si $F \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ es finito, entonces $(\bigcup F)^* = \bigcup\{a^* : a \in F\}$.*

Demostración: Sea $U \in (\bigcup F)^*$. Por reducción al absurdo, supongamos que $U \notin a^*$, para cada $a \in F$. Si $a \in F$, como $U$ es un ultrafiltro y $a \notin U$, se tiene que $\kappa \setminus a \in U$ (véase la proposición 1.4.9). Dado que $F$ es finito y $U$ es filtro, se sigue que $\bigcap_{a \in F}(\kappa \setminus a) \in U$. Así, $\emptyset = (\bigcup F) \cap (\bigcap_{a \in F}(\kappa \setminus a)) \in U$, contradiciendo que $U$ es un ultrafiltro.

Ahora bien, sea $U \in \beta\kappa$ tal que $U \in a^*$, para alguna $a \in F$. Como $a \subseteq \bigcup F$, se tiene que $\bigcup F \in U$, pues $U$ es un filtro. Por lo tanto, $U \in (\bigcup F)^*$. □

**Lema 2.3.6.** *Si $a \subseteq \kappa$, entonces $a^\circ = \{\alpha^\star : \alpha \in a\}^-$, donde la cerradura se está tomando en $\beta\kappa$. En particular, $a^\circ$ es abierto y cerrado en $\beta\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $S = \{\alpha^\star : \alpha \in a\}$. Veamos que $a^\circ \subseteq S^-$. Para esto, tomemos $U \in a^\circ$. Bastará con probar que para cada $u$, abierto en $\beta\kappa$ tal que $U \in u$, se tiene que $u \cap S \neq \emptyset$ (véase [3, Chap. III Definition 4.3]). Fijemos $u$, abierto tal que $U \in u$. Entonces existe $b \subseteq \kappa$ tal que $U \in b^\circ \subseteq u$, pues todo abierto es unión de básicos. Así, $U \in a^\circ \cap b^\circ = (a \cap b)^\circ$ (véase el lema 1.7.1). En particular, $a \cap b \neq \emptyset$. Sea $\gamma \in a \cap b$. Entonces $b \in \gamma^\star$ y por ende, $\gamma^\star \in b^\circ \subseteq u$. Como $\gamma \in a$, concluimos que $\gamma^\star \in u \cap S$.

Ahora probaremos que $S^- \subseteq a^\circ$. Para esto, tomemos $U \in S^-$. Por el lema 1.4.8, basta probar que $a \cap b \neq \emptyset$, para cada $b \in U$, pues así obtendremos que $U \in a^\circ$. Fijemos $b \in U$. Entonces $U \in b^\circ$ y $b^\circ$ es abierto. Como $U \in S^-$, se tiene que $b^\circ \cap S \neq \emptyset$. Luego existe $\gamma \in a$ tal que $\gamma^\star \in b^\circ$. Por lo anterior, $b \in \gamma^\star$, y por ende, $\gamma \in b \cap a$. □

**Lema 2.3.7.** *Sean $\alpha \in \kappa$ y $a \subseteq \kappa$. Entonces:*

1. *$\{\alpha^\star\}$ es abierto y cerrado en $\beta\kappa$.*
2. *$a^* = a^\circ \cap \kappa^*$.*
3. *$a^*$ es compacto en $\beta\kappa$.*

DEMOSTRACIÓN:

Inciso 1. Por el inciso 1 del lema 1.7.1, $\{\alpha^\star\} = \{\alpha\}^\circ$. Así, por el lema 2.3.6, $\{\alpha^\star\}$ es abierto y cerrado.

Inciso 2. Observemos que se satisface los siguiente:

$$a^* = a^\circ \setminus \{\gamma^\star : \gamma \in \kappa\} = a^\circ \cap (\beta\kappa \setminus \{\gamma^\star : \gamma \in \kappa\}) = a^\circ \cap \kappa^*$$

Inciso 3. Por el lema 2.3.6, $a^\circ$ es cerrado. Además, $\{\gamma^\star : \gamma \in \kappa\} = \bigcup_{\gamma\in\kappa}\{\gamma^\star\}$ y por el inciso 1, $\{\gamma^\star : \gamma \in \kappa\}$ es abierto. De esta forma, $\kappa^* = \beta\kappa \setminus \{\gamma^\star : \gamma \in \kappa\}$ es cerrado. Además, por el inciso 2, $a^* = a^\circ \cap \kappa^*$. Entonces $a^*$ es cerrado. Así, como $a^*$ es un subconjunto cerrado del compacto $\beta\kappa$, concluimos que $a^*$ también es compacto. □

**Proposición 2.3.8.** *La familia $B_{\kappa^*} = \{a^* : a \subseteq \kappa\}$ es base para la topología de $\kappa^*$. Además, los elementos de $B_{\kappa^*}$ son subconjuntos compactos de $\kappa^*$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $\{a^\circ : a \subseteq \kappa\}$ es base de $\beta\kappa$, $\{a^\circ \cap \kappa^* : a \subseteq \kappa\}$ es base para la topología de $\kappa^*$ (véase [3, Chap. III Theorem 7.2]). Tomemos $a \subseteq \kappa$. Por el inciso 2 del lema 2.3.7, $a^* = a^\circ \cap \kappa^*$. Además, por el inciso 3 del lema 2.3.7, sabemos que $a^*$ es compacto en $\beta\kappa$. Así, como $a^* \subseteq \kappa^* \subseteq \beta\kappa$, concluimos que $a^*$ es un subconjunto compacto de $\kappa^*$. □

Para nuestro objetivo, nos interesa demostrar la siguiente proposición:

**Proposición 2.3.9.** *$\mathcal{K}(\kappa, \lambda)$ implica que $\kappa^*$ y $\lambda^*$ son homeomorfos.*

Dividiremos la prueba de la proposición anterior en tres lemas: 2.3.10, 2.3.11 y 2.3.12. En ellos, supondremos que $\mathcal{K}(\kappa, \lambda, f)$ y tomaremos $h : \kappa^* \longrightarrow \lambda^*$ tal que para cada $U \in \kappa^*$:

$$h(U) = \{b \subseteq \lambda : \exists a \in U(f([a] = [b])\}$$

**Lema 2.3.10.** *$h$ esta bien definida.*

Demostración: Fijemos $U \in \kappa^*$. Probaremos, en primer lugar que $h(U)$ no contiene subconjuntos finitos de $\lambda$. Por la proposición 1.4.13, tenemos que todos los elementos de $U$ son infinitos. Sea $c \in h(U)$. Por lo anterior, existe $a \in U$, conjunto infinito, tal que $f([a]) = [c]$ y por ende, $[a] \neq [\emptyset]$ (véase la proposición 1.6.6). Como $f$ es un isomorfismo, por la proposción 1.6.7, tenemos que $[c] \neq [\emptyset]$. Por lo tanto, cada elemento de $h(U)$ es infinito y en particular, $\emptyset \notin h(U)$.

Ahora probaremos que $h(U)$ es un filtro. Si $c, d \in h(U)$, existen $a, b \in U$ tales que $f([a]) = [c]$ y $f([b]) = [d]$. Como $U$ es filtro, se sigue que $a \cap b \in U$. De esta forma, por la proposición 1.6.7, $f([a \cap b]) = [c \cap d]$ y por ende, $c \cap d \in h(U)$. Finalmente, si $c \in h(U)$ y $d \subseteq \lambda$ satisfacen $c \subseteq d$, entonces existen $a, b \in U$ de tal modo que $f([a]) = [c]$, $f([b]) = [d]$ y además, $[c] \leq^* [d]$. Como $U$ es un filtro y $a \subseteq a \cup b$, tenemos que $a \cup b \in U$. Por la proposición 1.6.7, $f([a \cup b]) = [c \cup d]$. Por lo tanto, $d = c \cup d \in h(U)$.

Para probar que $h(U)$ es un ultrafiltro, demostraremos que $c \in h(U)$ o $\lambda \setminus c \in h(U)$, para cada $c \subseteq \lambda$ (véase la proposición 1.4.9). Para esto, fijemos $c \subseteq \lambda$. Como $f$ es un isomorfismo, existe $a \subseteq \kappa$ tal que $f([a]) = [c]$. Si $c \notin h(U)$, entonces $a \notin U$. Dado que $U$ es un ultrafiltro, de la proposición 1.4.9 tenemos que $\kappa \setminus a \in U$. Además, por la proposición 1.6.7, $f([\kappa \setminus a]) = [\lambda \setminus c]$ y por ende, $\lambda \setminus c \in h(U)$.

Hemos demostrado que $h(U)$ es un ultrafiltro en $\lambda$ tal que todo elemento de $h(U)$ es infinito. Así, por la proposición 1.4.13, $h(U) \neq \alpha^\star$, para cada $\alpha \in \lambda$. Por lo tanto, $h(U) \in \lambda^*$. □

**Lema 2.3.11.** *$h$ es continua.*

Demostración: Basta probar que para cualesquiera $U \in \kappa^*$ y $u$, abierto de $\lambda^*$ tal que $h(U) \in u$, existe $v$, abierto de $\kappa^*$ tal que $U \in v$ y $h[v] \subseteq u$. Para esto, fijemos $U \in \kappa^*$ y $u$, abierto de $\lambda^*$ tal que $h(U) \in u$. Entonces existe $b \subseteq \lambda$ para el cual $h(U) \in b^* \subseteq u$ y por ende, $b \in h(U)$. Así, existe $a \in U$ que satisface $f([a]) = [b]$. Por esto último, $U \in a^*$. Veamos que $h[a^*] \subseteq b^*$. Fijemos $V \in a^*$. Como $a \in V$ y $f([a]) = [b]$, se tiene que $b \in h(V)$ y por ende, $h(V) \in b^*$. De esta forma, $v = a^*$ es un abierto de $\kappa^*$ tal que $U \in v$ y $h[v] \subseteq b^* \subseteq u$. Por lo tanto, $h$ es continua. □

**Lema 2.3.12.** *$h$ es un homeomorfismo.*

Demostración: Por la proposición 2.3.11, sabemos que $h$ es continua. Definamos $g : \lambda^* \longrightarrow \kappa^*$ tal que para cada $V \in \lambda^*$:

$$g(V) = \{a \subseteq \kappa : \exists b \in V(f^{-1}([b]) = [a])\}$$

Como $f^{-1}$ también es un isomorfismo, se tiene que $g$ está bien definida y es continua, pues $g$ resulta de cambiar $\mathcal{K}(\kappa, \lambda, f)$ por $\mathcal{K}(\lambda, \kappa, f^{-1})$ y $h$ por $g$ en las proposiciones 2.3.10 y 2.3.11.

Demostraremos que $g = h^{-1}$. Para esto, veamos que $g \circ h = Id_{\kappa^*}$. Sea $U \in \kappa^*$; probaremos que $g(h(U)) = U$. Si $a \in g(h(U))$, por definición, existe $b \in h(U)$ tal que $f^{-1}([b]) = [a]$. Como $b \in h(U)$, existe $c \in U$ tal que $f([c]) = [b]$. Dado que $f$ es un isomorfismo, se sigue que $[c] = [a]$ y por la proposición 2.3.4, $a \in [c] \subseteq U$. Así, $g(h(U)) \subseteq U$ y además, $g(h(U))$ es un ultrafiltro. Por la maximalidad de los ultrafiltros, concluimos que $g(h(U)) = U$. Análogamente se prueba que $h \circ g = Id_{\lambda^*}$ y de esta forma, $g = h^{-1}$. □

Para probar que $\mathcal{K}(\kappa, \lambda)$ es equivalente a que $\kappa^*$ y $\lambda^*$ sean homeomorfos, nos resta probar el recíproco de la proposición 2.3.9:

**Proposición 2.3.13.** *Si $\kappa^*$ y $\lambda^*$ son homeomorfos, entonces $\mathcal{K}(\kappa, \lambda)$*

Dividiremos la prueba de la proposición anterior en cuatro lemas: 2.3.14, 2.3.15, 2.3.16 y 2.3.17. En ellos, supondremos que $h : \kappa^* \longrightarrow \lambda^*$ es un homeomorfismo.

**Lema 2.3.14.** *Para cada $a \subseteq \kappa$ existe $b \subseteq \lambda$ tal que $h[a^*] = b^*$.*

Demostración: Sea $a \subseteq \kappa$. Por la proposición 2.3.8, $a^*$ es un abierto compacto en $\kappa^*$. Como $h$ es un homeomorfismo, $h[a^*]$ es un abierto compacto en $\lambda^*$. Así, existe $S \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ tal que $h[a^*] = \bigcup_{c \in S} c^*$ (véase la proposición 2.3.8). Dado que $h[a^*]$ es compacto, existe $F \subseteq S$, finito, tal que $h[a^*] = \bigcup_{c \in F} c^*$. Por la proposición 2.3.5, $h[a^*] = \bigcup_{c \in F} c^* = (\bigcup F)^*$. Tomando $b = \bigcup F$, concluimos que $h[a^*] = b^*$. □

Para cada $a \subseteq \kappa$, fijemos $q(a) \subseteq \lambda$ tal que $h[a^*] = q(a)^*$.

**Lema 2.3.15.** *Sean $a, b \subseteq \kappa$. Si $a =^* b$, entonces $q(a) =^* q(b)$.*

Demostración: Como $a =^* b$, por la proposición 2.3.3, $a^* = b^*$ y por ende, $h[a^*] = h[b^*]$. Entonces $q(a)^* = q(b)^*$ y nuevamente por la proposición 2.3.3, concluimos que $q(a) =^* q(b)$. □

Definamos $f : \mathcal{P}(\kappa)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda)/fin$ de la siguiente forma: $f([a]) = [q(a)]$, para cada $a \subseteq \kappa$.

**Lema 2.3.16.** *$f$ está bien definida y es un homomorfismo.*

Demostración: Sean $a, b \subseteq \kappa$ tales que $[a] = [b]$. Como $a =^* b$, por el lema anterior, $q(a) =^* q(b)$. Así, $f([a]) = [q(a)] = [q(b)] = f([b])$. Por esto último, $f$ está bien definida.

Ahora bien, para $a, b \subseteq \kappa$ con $[a] \leq^* [b]$, tenemos que $a \subseteq^* b$. Por la proposición 2.3.3, $a^* \subseteq b^*$ y por ende, $h[a^*] \subseteq h[b^*]$. De esta forma, $q(a)^* = h[a^*] \subseteq h[b^*] = q(b)^*$. Así, por la proposicón 2.3.3, $q(a) \subseteq^* q(b)$. De esta forma, $f([a]) = [q(a)] \leq^* [q(b)] = f([b])$, de lo que se concluye que $f$ es un homomorfismo. □

**Lema 2.3.17.** *$f$ es un isomorfismo.*

Demostracón: Por la proposicón anterior, $f$ es un homomorfismo. Dado que $h^{-1} : \lambda^* \longrightarrow \kappa^*$ es un homeomorfismo, para cada $a \subseteq \lambda$ existe $r(a) \subseteq \kappa$ tal que $h^{-1}[a^*] = r(a)^*$. Definamos $g : \mathcal{P}(\lambda)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa)/fin$ como $g([a]) = [r(a)]$, para cada $a \subseteq \lambda$. Los argumentos empleados anteriormente garantizan que $g$ está bien definida y es un homomorfismo.

Demostraremos que $g = f^{-1}$. Veamos que $g \circ f = Id_{\mathcal{P}(\kappa)/fin}$. Para esto, fijemos $a \subseteq \kappa$. Como $f([a]) = [q(a)]$, se tiene que $g(f([a])) = [r(q(a))]$. Por otra parte, $h[a^*] = q(a)^*$ y por ende, $a^* = h^{-1}[h[a^*]] = h^{-1}[q(a)^*] = r(q(a))^*$. De esta forma, $a^* = r(q(a))^*$ y por la proposición 2.3.3, $a =^* r(q(a))$. Por lo tanto, $[a] = [r(q(a))] = g(f([a]))$. Análogamente se prueba que $f \circ g = Id_{\mathcal{P}(\lambda)/fin}$. □

## 2.4. Q-sucesiones fuertes

Naturalmente, una forma de acercarnos a una respuesta negativa del problema de Katowice es investigar qué consecuencias tiene el suponer que $\mathcal{K}(\omega, \omega_1)$ es cierto y ver si alguna de éstas es contradictoria. Esta sección expone resultados que van en esta dirección.

Sean $[a], [b] \in \mathcal{P}(\kappa)/fin$ arbitrarios. Denotaremos por $[a] \wedge [b]$ al ínfimo de $\{[a], [b]\}$. Además, $[a] <^* [b]$ significará que $[a] \leq^* [b]$ y $[a] \neq [b]$.

Recordemos que para cualesquiera $[a], [b] \in \mathcal{P}(\kappa)/fin$, por la proposición 1.6.6, $[a] \wedge [b] = [a \cap b]$. Además, si $\mathcal{K}(\kappa, \lambda, f)$, entonces existen $[c], [d] \in \mathcal{P}(\lambda)/fin$ tales que $f([a]) = [c]$ y $f([b]) = [d]$. Como $f$ es un isomorfismo, del inciso 4 de la proposición 1.6.7 se sigue que $f([a] \wedge [b]) = [c] \wedge [d] = f([a]) \wedge f([b])$.

**Lema 2.4.1.** *$\kappa$ tiene una partición $\{a_\alpha : \alpha \in \kappa\} \subseteq [\kappa]^\kappa$.*

Demostración: Como $\kappa \cdot \kappa = \kappa$, existe una función biyectiva $f : \kappa \times \kappa \longrightarrow \kappa$. Definamos $a_\alpha = f[\{\alpha\} \times \kappa]$, para cada $\alpha \in \kappa$. Fijemos $\alpha, \beta \in \kappa$. Como $f$ es inyectiva, $a_\alpha \cap a_\beta = \emptyset$, siempre que $\alpha \neq \beta$, pues $(\{\alpha\} \times \kappa) \cap (\{\beta\} \times \kappa) = \emptyset$.

Por otra parte, la suprayectividad de $f$ implica que:

$$\kappa = f[\kappa \times \kappa] = f[\bigcup_{\alpha \in \kappa} (\{\alpha\} \times \kappa)] = \bigcup_{\alpha \in \kappa} f[\{\alpha\} \times \kappa] = \bigcup_{\alpha \in \kappa} a_\alpha$$

Dado que $|a_\alpha| = |\{\alpha\} \times \kappa|$, concluimos que $\{a_\alpha : \alpha \in \kappa\} \subseteq [\kappa]^\kappa$ es una partición de $\kappa$. □

Del lema anterior, observemos que si elegimos $b_\alpha \subseteq a_\alpha$, para cada $\alpha \in \kappa$, entonces $b = \bigcup_{\alpha \in \kappa} b_\alpha$ satisface que $b \cap a_\alpha = b_\alpha$, para cada $\alpha \in \kappa$. Nuestro objetivo en esta sección será estudiar las consecuencias de esta propiedad cuando suponemos $\mathcal{K}(\kappa, \lambda)$, especialmente cuando $\mathcal{K}(\omega, \omega_1)$.

**Definición 2.4.2.** *Sea $S \subseteq \mathcal{P}(\kappa)/fin$. Decimos que $S$ es una Q-sucesión fuerte si satisface lo siguiente: para cada función $e : S \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa)/fin$ tal que*

$$\forall [a] \in S (e([a]) \leq^* [a])$$

*existe $[b] \in \mathcal{P}(\kappa)/fin$ de tal modo que $e([a]) = [a] \wedge [b]$, para cada $[a] \in S$.*

La función $e$ mencionada en la definición anterior puede verse como una función que elige un subconjunto de $a$, para cada $[a] \in S$, tal y como puede deducirse del lema siguiente.

**Lema 2.4.3.** *Si $[a], [b] \in \mathcal{P}(\kappa)/fin$ son tales que $[a] \leq^* [b]$, entonces existe $c \subseteq b$ tal que $[a] = [c]$.*

Demostración: Dado que $[a] \leq^* [b]$, tenemos que $a \subseteq^* b$ y por ende, $a \setminus b$ es un conjunto finito. Consideremos $c = a \cap b$. Observamos que $c \subseteq^* a$. Por otra parte, $a \setminus c = a \setminus b$ es finito, en otras palabras, $a \subseteq^* c$. Así, $c =^* a$. Por lo tanto, $[a] = [c]$ y $c \subseteq b$. □

La noción de Q-sucesión fuerte tiene como idea central la de "uniformizar". Expliquemos esta frase. En primer lugar, el lema previo nos dice que la función $e$ de la definición 2.4.2, esencialmente, elige un pedazo de $a$, para cada $a$ que satisfaga $[a] \in S$. De este modo, lo que hace el conjunto $b$ del que habla la definición antes mencionada es uniformizar la selección hecha por $e$, es decir, pegar adecuadamente todos los pedazos que $e$ eligió.

**Proposición 2.4.4.** *$\mathcal{P}(\kappa)/fin$ tiene una Q-sucesión fuerte de cardinalidad $\kappa$.*

Demostración: Por el lema 2.4.1, $\kappa$ tiene una partición $\{a_\alpha : \alpha \in \kappa\} \subseteq [\kappa]^\kappa$. Definamos $S = \{[a_\alpha] : \alpha \in \kappa\}$. Sean $\alpha, \beta \in \kappa$ tales que $\alpha \neq \beta$, entonces $a_\alpha \cap a_\beta = \emptyset$. De esta forma, $[a_\alpha] \neq [a_\beta]$, pues $a_\alpha, a_\beta \in [\kappa]^\kappa$. Así, $|S| = \kappa$.

Ahora probaremos que $S$ es una Q-sucesión fuerte. Para esto, fijemos $e : S \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa)/fin$, una función tal que $e([a_\alpha]) \leq^* [a_\alpha]$, para cada $\alpha \in \kappa$. Tomemos $\alpha \in \kappa$ arbitraria. Por el lema 2.4.3, existe $b_\alpha \subseteq a_\alpha$ tal que $e([a_\alpha]) = [b_\alpha]$. Así, definamos $b = \bigcup_{\alpha \in \kappa} b_\alpha$. Veamos que $e([a_\alpha]) = [a_\alpha \cap b]$, para cada $\alpha \in \kappa$.

En efecto, si $\alpha \in \kappa$, entonces $a_\alpha \cap b_\beta = \emptyset$, para cada $\beta \in \kappa \setminus \{\alpha\}$, pues $b_\beta \subseteq a_\beta$. De esta forma, $a_\alpha \cap b = a_\alpha \cap b_\alpha = b_\alpha$. Por lo tanto, $e([a_\alpha]) = [b_\alpha] = [a_\alpha \cap b]$. $\square$

Expresado en forma coloquial, el resultado siguiente dice que las Q-sucesiones fuertes son "ajenas por pares".

**Proposición 2.4.5.** *Sea $S \subseteq \mathcal{P}(\kappa)/fin$ una Q-sucesión fuerte. Si $[a], [b] \in S$ son tales que $[a] \neq [b]$, entonces $[a] \wedge [b] = [\emptyset]$.*

Demostración: Por reducción al absurdo, supongamos que existen $[a], [b] \in S$ tales que $[a] \neq [b]$ y $[a] \wedge [b] \neq [\emptyset]$. De esta forma, $[a \cap b] \neq [\emptyset]$ y por ende, $a \cap b$ es infinito. Por lo anterior, existen $c, d \subseteq a \cap b$, conjuntos infinitos tales que $c \cap d = \emptyset$. Observamos que $[c] <^* [a \cap b]$, pues $c \subseteq^* a \cap b$ y $d \subseteq (a \cap b) \setminus c$ es infinito. Análogamente, $[d] <^* [a \cap b]$. Definamos $e : S \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa)/fin$ de la siguiente forma: $e([a]) = [c]$, $e([b]) = [d]$ y $e([k]) = [k]$, para cada $[k] \in S \setminus \{[a], [b]\}$. Como $S$ es una Q-sucesión fuerte, existe $[l] \in \mathcal{P}(\kappa)/fin$ tal que $e([k]) = [k] \wedge [l]$, para cada $[k] \in S$. En particular, $[c] = [a] \wedge [l]$ y $[d] = [b] \wedge [l]$. Así, $c =^* a \cap l$ y $d =^* b \cap l$. Veamos que $d \subseteq^* a \cap l \subseteq^* c$. Como $d \subseteq a \cap b$, tenemos que $d \setminus (a \cap l) = d \setminus l = d \setminus (b \cap l)$ y por ende, $d \setminus (a \cap l)$ es finito, pues $d \subseteq^* b \cap l$. De esta forma, $d \subseteq^* a \cap l$. Además, $a \cap l \subseteq^* c$, pues $c =^* a \cap l$. Por lo tanto, $d \subseteq^* a \cap l \subseteq^* c$, pero esto último contradice que $d$ es un conjunto infinito tal que $d \cap c = \emptyset$. $\square$

Observemos que si $[a] \wedge [b] = [\emptyset]$, entonces $a$ y $b$ son casi ajenos, es decir, $a \cap b$ es un conjunto finito.

Los dos resultados siguientes nos muestran cómo, a partir de una Q-sucesión fuerte, se puede obtener otras Q-sucesiones fuertes.

**Proposición 2.4.6.** *Sea $S$ una Q-sucesión fuerte de $\mathcal{P}(\kappa)/fin$. Si $R \subseteq S$, entonces $R$ es una Q-sucesión fuerte de $\mathcal{P}(\kappa)/fin$.*

Demostración: Sea $e : R \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa)/fin$, una función tal que $e([a]) \leq^* [a]$, para cada $[a] \in R$. Definamos $g : S \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa)/fin$ de tal modo que $g \restriction R = e$ y $g([a]) = [a]$, para cada $[a] \in S \setminus R$. Como $S$ es una Q-sucesión fuerte, existe $[b] \in \mathcal{P}(\kappa)/fin$ tal que $g([a]) = [a] \wedge [b]$, para cada $[a] \in S$. En particular, $e([a]) = g([a]) = [a] \wedge [b]$, para cada $[a] \in R$. $\square$

**Proposición 2.4.7.** *Sean $S$ una Q-sucesión fuerte de $\mathcal{P}(\kappa)/fin$ y $b \subseteq \kappa$. Entonces $R = \{[a] \wedge [b] : [a] \in S\}$ es una Q-sucesión fuerte de $\mathcal{P}(\kappa)/fin$.*

Demostración: Tomemos $e : R \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa)/fin$, una función arbitraria tal que $e([a] \wedge [b]) \leq^* [a] \wedge [b]$, para cada $[a] \in S$. Definamos $g : S \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa)/fin$ como $g([a]) = e([a] \wedge [b])$, para cada $[a] \in S$. Dado $[a] \in S$, observamos que $g([a]) = e([a] \wedge [b]) \leq^* [a] \wedge [b] \leq^* [a]$. Como $S$ es una Q-sucesión fuerte, lo anterior implica que existe $[c] \in \mathcal{P}(\kappa)/fin$ tal que $g([a]) = [a] \wedge [c]$, para cada $[a] \in S$. Fijemos $[a] \in S$. Entonces, $e([a] \wedge [b]) = g([a]) = [a] \wedge [c]$. Además, $e([a] \wedge [b]) \wedge [b] = e([a] \wedge [b])$, pues $e([a] \wedge [b]) \leq^* [a] \wedge [b] \leq^* [b]$. Por lo tanto,

$e([a] \wedge [b]) = ([a] \wedge [c]) \wedge [b] = ([a] \wedge [b]) \wedge [c]$, para cada $[a] \in S$. □

Como mencionamos al principio de la sección: la existencia de ciertas Q-sucesiones fuertes es una consecuencia de suponer que $\mathcal{K}(\omega, \omega_1)$ es cierto. De manera precisa, tenemos:

**Proposición 2.4.8.** *$\mathcal{K}(\omega_1, \omega)$ implica que $\mathcal{P}(\omega)/fin$ tiene una Q-sucesión fuerte de cardinalidad $\omega_1$.*

Demostración: Sea $f : \mathcal{P}(\omega_1)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)/fin$ un isomorfismo. Por la proposición 2.4.4, existe $S$, una Q-sucesión fuerte en $\mathcal{P}(\omega_1)/fin$ de cardinalidad $\omega_1$. Demostraremos que $f[S]$ es una Q-sucesion fuerte en $\mathcal{P}(\omega)/fin$. Para esto, sea $e : f[S] \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)/fin$ una función tal que $e(f([a])) \leq^* f([a])$, para cada $[a] \in S$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f\restriction S"] \arrow[d, "f^{-1}\circ e\circ f"'] & f[S] \arrow[d, "e"] \\ f^{-1}\circ e\circ f[S] & e\circ f[S] \arrow[l, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Como $f^{-1}$ también es un isomorfismo, tenemos que $f^{-1} \circ e \circ f([a]) \leq^* [a]$, para cada $[a] \in S$, pues $e(f([a])) \leq^* f([a])$. Entonces existe $[b] \in \mathcal{P}(\omega)/fin$ tal que $f^{-1} \circ e \circ f([a]) = [a] \wedge [b]$, para cada $[a] \in S$. Fijemos $[a] \in S$ y veamos que $e \circ f([a]) = f([a]) \wedge f([b])$. En efecto, $f([a] \wedge [b]) = f([a]) \wedge f([b])$ y por ende, $e \circ f([a]) = f([a]) \wedge f([b])$, pues $f^{-1} \circ e \circ f([a]) = [a] \wedge [b]$. Por lo tanto, $f[S]$ es una Q-sucesión fuerte de $\mathcal{P}(\omega)/fin$. □

En vista de la proposición 2.4.4, es natural preguntarse si la existencia de Q-sucesiones fuertes como las mencionadas en la proposición anterior puede deducirse de ZFC. Nuestro siguiente resultado nos muestra que la respuesta es negativa.

**Proposición 2.4.9.** *Si $\mathcal{P}(\omega)/fin$ tiene una Q-sucesión fuerte $S$ de cardinalidad $\omega_1$, entonces $\mathfrak{c} = 2^{\omega_1}$.*

Divideremos la prueba de la proposición anterior en los siguientes lemas: 2.4.10, 2.4.11 y 2.4.12. En ellos, supondremos que $S$ es una Q-sucesión fuerte tal que $|S| = \omega_1$ y $[\emptyset] \notin S$. También definamos:

$$E = \{e \in (\mathcal{P}(\kappa)/fin)^S : \forall [a] \in S(e([a]) \in \{[\emptyset], [a]\}\}$$

donde $(\mathcal{P}(\kappa)/fin)^S$ denota a la familia de funciones de $S$ en $\mathcal{P}(\kappa)/fin$.

**Lema 2.4.10.** $|E| = 2^{\omega_1}$

Demostración: Como $|S| = \omega_1$, bastará con probar que $|E| = |2^S|$. Para cada $e \in E$, definamos $f_e : S \longrightarrow 2$ de la siguiente forma:

$$f_e([a]) = \begin{cases} 0 & \text{si } e([a]) = [\emptyset] \\ \\ 1 & \text{si } e([a]) = [a] \end{cases}$$

Observamos que $f_e$ está bien definida porque $[a] \neq [\emptyset]$, para cada $[a] \in S$. Veamos que $F : E \longrightarrow 2^S$ definida como $F(e) = f_e$ es una función biyectiva.

Sean $e_1, e_2 \in E$ funciones tales que $e_1 \neq e_2$. Entonces existe $[a] \in S$ tal que $e_1([a]) \neq e_2([a])$. Dado que $e_1([a]), e_2([a]) \in \{[\emptyset], [a]\}$, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $e_1([a]) = [\emptyset]$ y $e_2([a]) = [a]$. De esta forma, $f_{e_1}([a]) = 0 \neq 1 = f_{e_2}([a])$, pues $[a] \neq [\emptyset]$. Así, $F$ es inyectiva.

Ahora bien, sea $f \in 2^S$. Consideremos $e \in E$, la siguiente función:

$$e([a]) = \begin{cases} [\emptyset] & \text{si } f([a]) = 0 \\ \\ [a] & \text{si } f([a]) = 1 \end{cases}$$

Observemos que $F(e) = f$. Por lo tanto $F$ es suprayectiva. □

**Lema 2.4.11.** *Si $e \in E$, existe $[b_e] \in \mathcal{P}(\omega)/fin$ tal que $e([a]) = [a] \wedge [b_e]$, para cada $[a] \in S$.*

Demostración: Observamos que $e([a]) \leq^* [a]$, para cada $[a] \in S$. Como $S$ es una Q-sucesión fuerte, existe $[b_e] \in \mathcal{P}(\omega)/fin$ tal que $e([a]) = [a] \wedge [b_e]$, para cada $[a] \in S$. □

**Lema 2.4.12.** *Sea $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)/fin$, dada por $f(e) = [b_e]$. Entonces $f$ es inyectiva.*

Demostración: Sean $e_1, e_2 \in E$ con $e_1 \neq e_2$. Entonces existe $[a] \in S$ tal que $e_1([a]) \neq e_2([a])$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $e_1([a]) = [\emptyset]$ y $e_2([a]) = [a]$. De esta forma, $[a] \wedge [b_{e_1}] = e_1([a]) = [\emptyset]$ y $[a] \wedge [b_{e_2}] = e_2([a]) = [a]$. Así, necesariamente $[b_{e_1}] \neq [b_{e_2}]$. □

Observamos que $2^{\omega_1} \leq \mathfrak{c}$ se sigue de los lemas anteriores. Esto es porque $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)/fin$ es una función inyectiva donde $|E| = 2^{\omega_1}$ y $|\mathcal{P}(\omega)/fin| = \mathfrak{c}$ (véase la prueba de la proposición 2.2.2). Además, como $\omega < \omega_1$, tenemos que $\mathfrak{c} = 2^{\omega} \leq 2^{\omega_1}$. Por lo tanto, la proposición 2.4.9 se sigue.

Las Q-sucesiones fuertes también están relacionadas con el problema de metrización de Moore. Para esto, recordemos que un refinamiento de un espacio topológico $X$ es una familia $\mathcal{F} = \{\mathcal{A}_n : n \in \omega\}$, de cubiertas abiertas del espacio $X$ tales que para cualquier punto $p \in X$ y cualquier cerrado $c \subseteq X$ que satisfagan $p \notin c$, existe $n \in \omega$ tal que si $u \in \mathcal{A}_n$ y $p \in u$, entonces $u \cap c = \emptyset$. Si además $\mathcal{A}_{n+1} \subseteq \mathcal{A}_n$, entonces diremos que $\mathcal{F}$ es un refinamiento anidado. Así, diremos que un espacio topológico es un espacio de Moore si es regular y tiene un refinamiento anidado.

Un resultado referente a los espacios de Moore es que todo espacio métrico es un espacio de Moore. Sin embargo, no todo espacio de Moore es un espacio métrico. La pregunta natural es la siguiente: ¿bajo qué condiciones un espacio de Moore es metrizable? En particular, el problema de metrización de Moore plantea la siguiente pregunta: ¿todo espacio de Moore y normal es metrizable?. En [4, Theorem 5], se prueba que una consecuencia de CH es que todo espacio de Moore que satisface ser normal y separable, también es metrizable.

La siguiente definición es necesaria para comprender la relación entre los espacios de Moore y las Q-sucesiones fuertes.

**Definición 2.4.13.** *Sea $X$ un espacio topológico. Decimos que $X$ es un Q-conjunto si para cualquier $M \subseteq X$ se tiene que $M$ puede expresarse como la intersección de una familia numerable de abiertos de $X$.*

Recordemos que un espacio $X$ es localmente compacto si es Hausdorff y para cada $p \in X$ existe un abierto $u$ tal que $p \in u$ y $u^-$ es compacto. El siguiente resultado es una versión del teorema de la categoría de Baire:

**Proposición 2.4.14** (Baire)**.** *En un espacio topológico localmente compacto $X$, la intersección contable de abiertos densos de $X$ es denso en $X$.*

La prueba de la proposición anterior puede ser consultada en [3, Chap. XI Theorem 10.1].

**Proposición 2.4.15.** *Consideremos a $\mathbb{R}$, la recta real con la topología usual y $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, el conjunto de los números racionales con la topología heredada por $\mathbb{R}$.*

1. *$\mathbb{Q}$ no puede expresarse como la intersección de una familia contable de abiertos de $\mathbb{R}$. En particular, $\mathbb{R}$ no es un Q-conjunto.*

2. *Si $X \subseteq \mathbb{R}$ es contable, entonces $X$ es un Q-conjunto.*

DEMOSTRACIÓN:

Inciso 1. Por reducción al absurdo, supongamos que existe una familia contable de abiertos $\mathcal{A}$ tal que $\mathbb{Q} = \bigcap \mathcal{A}$. Dado que $\mathcal{A}$ es contable, existe una biyección entre los elementos de $\mathcal{A}$ y $\mathbb{Q}$. Así, $\mathcal{A} = \{u_r : r \in \mathbb{Q}\}$. También observemos que $\mathbb{Q} \subseteq u_r$, para cada $r \in \mathbb{Q}$, pues $\mathbb{Q} = \bigcap \mathcal{A}$. Definamos $\mathcal{B} = \{u_r \setminus \{r\} : r \in \mathbb{Q}\}$ y veamos que los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos densos en $\mathbb{R}$. Para esto, fijemos $r \in \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{R} \setminus \{r\}$ es abierto en $\mathbb{R}$, se sigue que $u_r \setminus \{r\} = u_r \cap (\mathbb{R} \setminus \{r\})$ es abierto. Si $v$ es un abierto de $\mathbb{R}$, entonces $v$ contiene una cantidad infinita de números racionales y por ende, existe algún $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \neq r$ y $q \in v$. Por lo anterior, $q \in v \cap (u_r \setminus \{r\})$, pues $\mathbb{Q} \subseteq u_r$. Así, $\mathcal{B}$ es una familia de abiertos densos de $\mathbb{R}$. Dado que $\bigcap \mathcal{A} = \mathbb{Q}$, se sigue que:

$$\bigcap \mathcal{B} = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}} (u_r \setminus \{r\}) = (\bigcap_{r \in \mathbb{Q}} u_r) \setminus \mathbb{Q} = \emptyset$$

Pero lo anterior contradice la proposición 2.4.14, pues llegamos a que $\emptyset$ es una intersección contable de abiertos densos en $\mathbb{R}$.

Inciso 2. Fijemos $A \subseteq X$ y veamos que $A$ puede expresarse como la intersección de una familia contable de abiertos de $X$. Dado que $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ es un abierto de $\mathbb{R}$, para cada $x \in X \setminus A$, se tiene que $X \setminus \{x\} = X \cap (\mathbb{R} \setminus \{x\})$ es un abierto de $X$. Como $X$ es contable, el resultado se sigue de la igualdad $A = \bigcap\{X \setminus \{x\} : x \in X \setminus A\}$. □

Nuestro siguente resultado contiene una relación interesante entre el problema de Katowice y la conjetura de Moore.

**Proposición 2.4.16.** *$\mathcal{K}(\omega, \omega_1)$ implica la existencia de un espacio de Moore normal y separable que no es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\mathcal{K}(\omega, \omega_1)$ es cierto y fijemos $S$, una Q-sucesión fuerte de cardinalidad $\omega_1$ en $\mathcal{P}(\omega)/fin$. En [1, Fact. 2.3], se explica cómo usar $S$ para obtener un subespacio $X$ del conjunto ternario de Cantor que es un Q-conjunto y satisface $|X| = \omega_1$. Ahora, según [9, Example F] se puede emplear a $X$ para construir un espacio de Moore normal y separable que no es metrizable. □

En la proposición 3.5.9 se probará que hay un modelo de ZFC en el que no existen Q-sucesiones fuertes y en la proposición 3.6.1 se argumentará que en ese mismo modelo de ZFC la recta real tiene un Q-conjunto de cardinalidad $\omega_1$.

## 2.5. Una reducción fundamental

Nuestro objetivo en esta sección será demostrar que si $\kappa$ y $\lambda$ son cardinales tales que $\mathcal{K}(\kappa, \lambda)$, entonces $\kappa, \lambda \in \{\omega, \omega_1\}$. Para alcanzar este objetivo requeriremos de algunas definiciones y resultados.

**Definición 2.5.1.** *Sean $f, g \in \omega^\omega$. Diremos que $f$ domina a $g$ (y lo escribimos como $g \leq^* f$) si existe algún $n \in \omega$ tal que $g(i) \leq f(i)$, para cada $i \in \omega$ con $n \leq i$. Diremos que $f$ domina a $g$ de forma estricta (y lo escribimos como $g <^* f$) si existe algún $n \in \omega$ tal que $g(i) < f(i)$, para cada $i \in \omega$ con $n \leq i$.*

Aunque utilizamos el simbolo $\leq^*$ para denotar dos órdenes distintos (uno en $\mathcal{P}(X)/fin$ y otro en $\omega^\omega$), podemos diferenciar cada caso por el contexto.

Sean $f, g, h \in \omega^\omega$ cualesquiera. Si $f <^* g <^* h$, entonces existen $n, m \in \omega$ tales que $f(i) < g(i)$ y $g(j) < h(j)$, siempre que $i, j \in \omega$, con $n < i$ y $m < j$. En particular, tenemos que $f(i) < g(i) < h(i)$, para cada $i \in \omega$ que satisface $\max\{n, m\} < i$. Por lo anterior, $<^*$ es transitiva. Análogamente, $\leq^*$ es transitiva. Además, si ocurre que $f <^* g \leq^* h$ ó $f \leq^* g <^* h$, entonces tendremos que $f <^* h$.

Observemos que $\leq^*$ no satisface ser antisimétrica. Para ver esto, definimos las funciones $f, g \in \omega^\omega$ como $f(0) = 0$, $g(0) = 1$ y $1 = f(x) = g(x)$, para cada $x \in \omega \setminus \{0\}$. De esta forma, $f \leq^* g$ y $g \leq^* f$, pero $f \neq g$. Además, $\leq^*$ es reflexiva y $<^*$ es antirreflexiva, es decir, para cada $f \in \omega^\omega$ se tiene que $f \leq^* f$, pero no ocurre $f <^* f$.

Recordemos que si $\delta$ es un ordinal, entonces la pertenencia, $\in$, define una relación binaria en $\delta$ que es transitiva y falla en ser reflexiva y antisimétrica. De este modo, dado un conjunto $S \subseteq \omega^\omega$, diremos que el tipo de orden de $S$ es el ordinal $\delta$ si existe una función biyectiva $\phi : \delta \longrightarrow S$ de tal modo que para cualesquiera $\alpha, \beta \in \delta$ se satisface que $\phi(\alpha) <^* \phi(\beta)$ siempre y cuando $\alpha \in \beta$.

**Definición 2.5.2.** *Decimos que un conjunto $S \subseteq \omega^\omega$ es dominante si para cada $g \in \omega^\omega$ existe $f \in S$ tal que $g \leq^* f$. Si además, $S$ es bien ordenado por $<^*$ y tiene tipo de orden $\delta$, entonces diremos que $S$ es una $\delta$-escala.*

Si $S$ es una $\delta$-escala, por definición existe una función biyectiva $\phi : \delta \longrightarrow S$ con las características mencionadas en el párrafo que precede a la definición 2.5.2. Si hacemos $f_\alpha = \phi(\alpha)$, para cada $\alpha < \delta$, entonces $S = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ y además, para cualesquiera $\alpha, \beta < \delta$ se tiene que $f_\alpha <^* f_\beta$ si y sólo si $\alpha < \beta$. De este modo, cada vez que escribamos "$S = \{f_\alpha : \alpha < \delta\}$ es una $\delta$-escala" entenderemos que la bicondicional anterior se verifica.

**Proposición 2.5.3.** *A lo más existe un cardinal regular $\kappa$ tal que para dicho $\kappa$ existe una $\kappa$-escala.*

Demostración: Por reducción al absurdo, supongamos que hay dos cardinales regulares $\kappa$ y $\lambda$ con $\kappa < \lambda$ para los cuales existen $S_\kappa = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$, una $\kappa$-escala, y $S_\lambda = \{g_\alpha : \alpha < \lambda\}$, una $\lambda$-escala. Para cada $\alpha < \kappa$ existe $\beta(\alpha) < \lambda$ tal que $f_\alpha \leq^* g_{\beta(\alpha)}$, pues $S_\lambda$ es dominante. Como $\kappa < \lambda$ y $\{\beta(\alpha) : \alpha < \kappa\}$ es una sucesión de ordinales menores que $\lambda$, por la regularidad de $\lambda$, se sigue que existe un ordinal $\beta < \lambda$ tal que $\beta(\alpha) < \beta$, para cada $\alpha < \kappa$. Dado que $S_\kappa$ es dominante, existe $\gamma < \kappa$ para el cual $g_\beta \leq^* f_\gamma$. Así, $g_\beta \leq^* f_\gamma \leq^* g_{\beta(\gamma)}$. Pero como $S_\lambda$ es una $\lambda$-escala, entonces $g_{\beta(\gamma)} <^* g_\beta$. De este modo, tenemos que $g_\beta \leq^* g_{\beta(\gamma)} <^* g_\beta$, lo cual es una contradicción. □

**Lema 2.5.4.** *Sean $\kappa$ un cardinal regular y $T = \{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \omega^\omega$ una familia dominante tal que $f_\alpha \leq^* f_\beta$, siempre que $\alpha < \beta < \kappa$. Entonces $T$ contiene una $\kappa$-escala.*

Demostración: Definiremos una familia de funciones $\{g_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq T$ que resultará ser una $\kappa$-escala. Tomemos $g_0 = f_0$. Por inducción, supongamos que para algún ordinal $\alpha < \kappa$ hemos definido $\{g_\beta : \beta < \alpha\} \subseteq T$, de tal modo que $g_\gamma <^* g_\beta$ cuando $\gamma < \beta < \alpha$ y tal que $f_\beta \leq^* g_\beta$, para cada $\beta < \alpha$. Deseamos encontrar una función $g_\alpha$ tal que $g_\beta <^* g_\alpha$, para cada $\beta < \alpha$. Dado que $T$ es dominante, para cualquier $\beta < \alpha$ existe un ordinal $\gamma(\beta) < \kappa$ tal que $g_\beta \leq^* f_{\gamma(\beta)}$. Como $\kappa$ es un cardinal regular y $\{\gamma(\beta) : \beta < \alpha\}$ es una succesión de ordinales en $\kappa$, existe un ordinal $\delta < \kappa$ para el cual $\gamma(\beta) < \delta$, siempre que $\beta < \alpha$. De esta forma, $g_\beta \leq^* f_{\gamma(\beta)} \leq^* f_\delta$, para cada $\beta < \alpha$. Dado que $T$ es dominante, existe una función $f \in T$ tal que $f_\delta + f_\alpha + 1 \leq^* f$. Definamos $g_\alpha = f$. Así, $f_\alpha \leq^* g_\alpha$ y $g_\beta \leq^* f_\delta <^* g_\alpha$, para cada $\beta < \alpha$.

Definamos $S = \{g_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Sólo nos resta demostrar que $S$ es dominante. En efecto, sea $g \in \omega^\omega$. Como $T$ es dominante, existe $\alpha \in \kappa$ tal que $g \leq^* f_\alpha$. Dado que $f_\alpha \leq^* g_\alpha$, concluimos que $g_\alpha$ domina a $g$. □

**Lema 2.5.5.** *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función biyectiva. Entonces la función $h : \mathcal{P}(X)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(Y)/fin$ definida como $h([a]) = [f[a]]$, para cada $a \subseteq X$, es un isomorfismo.*

Demostración: Veamos que $h$ está bien definida. Para esto, tomemos $a, b \in \mathcal{P}(X)$ tales que $[a] = [b]$. Entonces $a =^* b$, de lo que se sigue $f[a] =^* f[b]$. De esta forma, $[f[a]] = [f[b]]$, es decir, $h([a]) = h([b])$.

Para ver que $h$ es biyectiva, definamos $g : \mathcal{P}(Y)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(X)/fin$ dada por $g([a]) = [f^{-1}[a]]$, para cada $a \subseteq Y$. Demostraremos que $g = h^{-1}$. Bastará con probar que $g \circ h = Id_{\mathcal{P}(X)/fin}$ y $h \circ g = Id_{\mathcal{P}(Y)/fin}$. Tomemos $a \subseteq X$ arbitrario. Veamos que $g \circ h([a]) = [a]$. En efecto:

$$g \circ h([a]) = g(h([a]) = g([f[a]]) = [f^{-1}[f[a]]] = [a]$$

Por lo tanto, $g \circ h = Id_{\mathcal{P}(X)/fin}$. De forma análoga se sigue que $h \circ g = Id_{\mathcal{P}(X)/fin}$, con lo que concluimos que $h$ es biyectiva y $g = h^{-1}$.

Ahora bien, sean $[a], [b] \in \mathcal{P}(X)/fin$ tales que $[a] \leq^* [b]$. Veamos que $h([a]) \leq^* h([b])$. Dado que $[a] \leq^* [b]$, se sigue que $a \subseteq^* b$ y por ende, $f[a] \subseteq^* f[b]$. De lo anterior concluimos que $h([a]) = [f[a]] \leq^* [f[b]] = h([b])$. Análogamente se prueba que $g([a]) \leq^* g([b])$, es decir, que $h^{-1}([a]) \leq^* h^{-1}([b])$. Por lo tanto, $h$ es un isomorfismo. □

Una conexión interesante entre el problema de Katowice y la existencia de escalas es como sigue.

**Proposición 2.5.6.** *Si $\kappa$ es un cardinal regular no numerable tal que $\mathcal{K}(\omega, \kappa)$, entonces existe una $\kappa$-escala.*

Demostración: Como $|\omega| = |\omega \times \omega|$ y $|\kappa| = |\omega \times \kappa|$, de $\mathcal{K}(\omega, \kappa)$ podemos suponer que existe un isomorfismo $\phi : \mathcal{P}(\omega \times \kappa)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(\omega \times \omega)/fin$. Para cada $n \in \omega$, definamos $W_n = \{n\} \times \kappa$ y $w_n = \{n\} \times \omega$. Veamos que existe un isomorfismo $h : \mathcal{P}(\omega \times \kappa)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(\omega \times \omega)/fin$ tal que $h([W_n]) = [w_n]$.

Para esto, elijamos $u_n \subseteq \omega \times \omega$, tal que $\phi([W_n]) = [u_n]$. Como $W_n$ es infinito, por las proposiciones 1.6.6(3) y 1.6.7(1), $u_n$ es un conjunto infinito. Notemos que si $n \neq m$, entonces $[u_n \cap u_m] = \phi([W_n \cap W_m]) = \phi([\emptyset]) = [\emptyset]$ (véase la proposición 1.6.7). Así, $u_n \cap u_m =^* \emptyset$. De este modo, la familia $\{u_n : n \in \omega\}$ es casi ajena. Por otra parte, $(\omega \times \omega) \setminus (\bigcup_{n\in\omega} u_n)$ es a lo más numerable. Si $(\omega \times \omega) \setminus (\bigcup_{n\in\omega} u_n)$

es infinito, sea $\{x_n : n \in \omega\}$ una enumeración de sus elementos y definamos $v_n = (u_n \setminus \bigcup_{i<n} u_i) \cup \{x_n\}$. Si $(\omega \times \omega) \setminus (\bigcup_{n\in\omega} u_n)$ es finito, sea $\{x_n : n < m\}$ una enumeración de sus elementos y definamos $v_n = (u_n \setminus \bigcup_{i<n} u_i) \cup \{x_n\}$, para cada $n < m$, y $v_n = u_n \setminus \bigcup_{i<n} u_n$ cuando $m \leq n$. En cualquiera de los casos anteriores, dado que $u_i \cap u_n =^* \emptyset$, para cada $i < n$, tenemos que $[u_n] = [v_n]$. De esta forma, la familia $\{v_n : n \in \omega\}$ es una partición de $\omega \times \omega$ cuyos elementos son infinitos. Por lo anterior, existe una función biyectiva $e : \omega \times \omega \longrightarrow \omega \times \omega$ tal que $e[v_n] = w_n$. Definamos $g : \mathcal{P}(\omega \times \omega)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(\omega \times \omega)/fin$ como $g([a]) = [e[a]]$ para cada $a \subseteq \omega \times \omega$. Del lema 2.5.5 tenemos que $g$ es un isomorfismo. Sea $h$ la función $g \circ \phi$, entonces $h$ es un isomorfismo tal que:

$$h([W_n]) = g(\phi([W_n])) = g([u_n]) = g([v_n]) = [e[v_n]] = [w_n]$$

Ahora bien, para cada $\alpha \in \kappa$ definamos $A_\alpha = \omega \times [\alpha, \kappa)$. Seleccionemos $a_\alpha \subseteq \omega \times \omega$ tal que $h([A_\alpha]) = [a_\alpha]$ y sea $f_\alpha : \omega \longrightarrow \omega$ definida como $f_\alpha(n) = \min\{i \in \omega : (n, i) \in a_\alpha\}$, para cada $n \in \omega$. Veamos que $f_\alpha$ esta bien definida. Sea $n \in \omega$. Bastará con verificar que $w_n \cap a_\alpha$ es no vacío. Como $W_n \cap A_\alpha$ es infinito, tenemos que $[W_n \cap A_\alpha] \neq [\emptyset]$ (véase la proposición 1.6.6(3)). De esta forma, $[w_n \cap a_\alpha] = h([W_n \cap A_\alpha]) \neq [\emptyset]$ (véase las proposiciones 1.6.6(3) y 1.6.7(4)). Por esto último, $w_n \cap a_\alpha$ es infinito.

Demostraremos que $\{f_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ contiene una $\kappa$-escala. Para esto, bastará con probar que la familia de funciones anterior satisface las condiciones del lema 2.5.4.

Sean $\alpha < \beta < \kappa$. Veamos que $f_\alpha \leq^* f_\beta$. Claramente $A_\beta \subseteq A_\alpha$ y por ende, $[A_\beta] \leq^* [A_\alpha]$. Luego, $[a_\beta] = h([A_\beta]) \leq^* h([A_\alpha]) = [a_\alpha]$. Así, $a_\beta \subseteq^* a_\alpha$ y esto significa que $a_\beta \setminus a_\alpha$ es finito. Definamos $m = \max\{i \in \omega : \exists j \in \omega((i, j) \in a_\beta \setminus a_\alpha)\}$. Así, si $n \in \omega$ satisface que $m + 1 \leq n$, entonces $(n, f_\beta(n)) \in a_\beta$ y por ende, $(n, f_\beta(n)) \in a_\alpha$, pues no existe $j \in \omega$ tal que $(n, j) \in a_\beta \setminus a_\alpha$. De esta forma, $f_\alpha(n) \leq f_\beta(n)$. Por lo tanto, $f_\alpha \leq^* f_\beta$.

Resta demostrar que $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es dominante. Para esto, tomemos $f \in \omega^\omega$ arbitraria. Definamos $b_f = \{(n, i) : i \leq f(n)\}$ y seleccionemos un conjunto $B_f \subseteq \omega \times \kappa$ tal que $h([B_f]) = [b_f]$. Para cada $n \in \omega$ tenemos que $w_n \cap b_f$ es finito. De esta forma:

$$[W_n \cap B_f] = h^{-1}([w_n \cap b_f]) = h^{-1}([\emptyset]) = [\emptyset]$$

De lo anterior se tiene que $W_n \cap B_f$ es finito. Dado que $B_f = \bigcup_{n\in\omega} W_n \cap B_f$, se sigue que $B_f$ es numerable. Consideremos el conjunto:

$$S = \{\gamma < \kappa : \exists i \in \omega((i, \gamma) \in B_f)\}$$

Observamos que $S$ es un subconjunto numerable de $\kappa$, pues $B_f$ es una familia numerable de parejas ordenadas y $S$ es el conjunto formado por las segundas coordenadas de los elementos de $B_f$. Como $\kappa$ es un cardinal regular no numerable, existe un ordinal $\delta < \kappa$ tal que $\gamma < \delta$, para cada $\gamma \in S$. De esta forma, $A_\delta \cap B_f = \emptyset$. Entonces:

$$[a_\delta \cap b_f] = h([A_\delta \cap B_f]) = h([\emptyset]) = [\emptyset]$$

De lo anterior se sigue que $a_\delta \cap b_f$ es finito. Por esto último, existe algún $m \in \omega$ tal que para cada $n \in \omega$ que satisface $m \leq n$ se tiene $w_n \cap (a_\delta \cap b_f) = \emptyset$. Veamos que $f <^* f_\delta$. En efecto, para cada $n \in \omega$, con $m \leq n$, tenemos que $(n, f_\delta(n)) \in w_n \cap a_\delta$. Luego, $(n, f_\delta(n)) \notin b_f$ y por ende, $f(n) < f_\delta(n)$. Por lo tanto, $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es dominante. □

En resultados posteriores será importante deducir la existencia de isomorfismos a partir de hipótesis del tipo $\mathcal{K}(\kappa, \lambda)$. Por esta razón incluimos el lema siguiente.

**Lema 2.5.7.** *Sea $f : \mathcal{P}(\kappa)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda)/fin$ un isomorfismo. Si $X \subseteq \kappa$ y $Y \subseteq \lambda$ son conjuntos tales que $f([X]) = [Y]$, entonces los conjuntos $\mathcal{P}(X)/fin$ y $\mathcal{P}(Y)/fin$ son isomorfos.*

Demostración: Dado un conjunto $a \subseteq X$, denotaremos por $[a]_X$ a su clase de equivalencia en $\mathcal{P}(X)/fin$, mientras que $[a]_\kappa$ denotará su clase de equivalencia en $\mathcal{P}(\kappa)/fin$. Similarmente, para $b \subseteq Y$ usaremos $[b]_Y$ y $[b]_\lambda$ para denotar a las clases de $b$ en $\mathcal{P}(Y)/fin$ y $\mathcal{P}(\lambda)/fin$, respectivamente.

Definamos $g : \mathcal{P}(X)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(Y)/fin$ como sigue: para cada $a \subseteq X$ sea $g([a]_X) = f([a]_\kappa) \cap \mathcal{P}(Y)$. Veamos que $g$ está bien definida. Para cualesquiera $a$ y $b$ subconjuntos de $X$ tales que $[a]_X = [b]_X$ se sigue que $a =^* b$ y por ende, $[a]_\kappa = [b]_\kappa$. Así:

$$g([a]_X) = f([a]_\kappa) \cap \mathcal{P}(Y) = f([b]_\kappa) \cap \mathcal{P}(Y) = g([b]_X)$$

Por lo anterior, $g$ no depende del representante de la clase de equivalencia. Ahora bien, afirmamos que si $a \subseteq X$, existe $\overline{a} \subseteq Y$ tal que $g([a]_X) = [\overline{a}]_Y$. En efecto, si $s \subseteq \kappa$ es tal que $f([a]_\kappa) = [s]_\lambda$, entonces:

$$f([a]_\kappa) = f([a]_\kappa \wedge [X]_\kappa) = [s]_\lambda \wedge [Y]_\lambda = [s \cap Y]_\lambda \tag{2.1}$$

Así, tomemos $\overline{a} = s \cap Y$. De esta forma, $g([a]_X) = [\overline{a}]_\lambda \cap \mathcal{P}(Y) = [\overline{a}]_Y$.

Ahora veamos que $g$ es una función biyectiva. Para esto, definamos una función $h : \mathcal{P}(Y)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(X)/fin$ de la siguiente forma: para cada $b \subseteq Y$ sea $h([b]_Y) = f^{-1}([b]_\lambda) \cap \mathcal{P}(X)$. Por un argumento análogo al del párrafo anterior tenemos que $h$ está bien definida.

Probaremos que $h = g^{-1}$. Veamos que $h \circ g = Id_{\mathcal{P}(X)/fin}$. Si $a \subseteq X$, entonces existe $\overline{a} \subseteq Y$ tal que $g([a]_X) = [\overline{a}]_Y$. Bastará con verificar que $f([a]_\kappa) = [\overline{a}]_\lambda$, pues de esto se seguirá que:

$$h(g([a]_X)) = h([\overline{a}]_Y) = f^{-1}([\overline{a}]_\lambda) \cap \mathcal{P}(X) = [a]_\kappa \cap \mathcal{P}(X) = [a]_X$$

Elijamos $b \subseteq \lambda$ tal que $f([a]_\kappa) = [b]_\lambda$. Observemos que:

$$[\overline{a}]_Y = g([a]_X) = f([a]_\kappa) \cap \mathcal{P}(Y) = [b]_\lambda \cap \mathcal{P}(Y)$$

Dado que $\overline{a} \in [\overline{a}]_Y$, se tiene que $\overline{a} \in [b]_\lambda \cap \mathcal{P}(Y)$ y por ende, $\overline{a} =^* b$, pues $\overline{a} \in [b]_\lambda$. De lo anterior se sigue que $[\overline{a}]_\lambda = [b]_\lambda = f([a]_\kappa)$. De esta forma, $h \circ g = Id_{\mathcal{P}(X)/fin}$. Análogamente, se verifica que $g \circ h = Id_{\mathcal{P}(Y)/fin}$. Por lo tanto, $g$ es biyectiva.

Ahora bien, sean $a$ y $b$ subconjuntos de $X$ tales que $[a]_X \leq^* [b]_X$. Probaremos que $g([a]_X) \leq^* g([b]_X)$. Como $a \subseteq^* b$, entonces $[a]_\kappa \leq^* [b]_\kappa$. De esta forma, $f([a]_\kappa) \leq^* f([b]_\kappa)$. Sean $s, t \subseteq \lambda$ tales que $f([a]_\kappa) = [s]_\lambda$ y $f([b]_\kappa) = [t]_\lambda$. Así, $s \subseteq^* t$, de lo que se sigue $\overline{a} = s \cap Y \subseteq^* t \cap Y = \overline{b}$ (véase la igualdad 2.1). De lo anterior concluimos que $g([a]_X) = [\overline{a}]_Y \leq^* [\overline{b}]_Y = g([b]_X)$. Por lo tanto, $g$ preserva orden. De modo semejante se verifica que $h$ también preserva $\leq^*$ y por ende, $g$ es un isomorfismo. □

El resultado siguiente es una consecuencia del lema 2.5.5.

**Lema 2.5.8.** *Si $\mathcal{P}(X)/fin$ y $\mathcal{P}(Y)/fin$ son isomorfos con $|X| = \kappa$ y $|Y| = \lambda$, entonces $\mathcal{K}(\kappa, \lambda)$.*

Demostración: Sea $f : \mathcal{P}(X)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(Y)/fin$ un isomorfismo. Como $|X| = \kappa$, por el lema 2.5.5, existe un isomorfismo $g : \mathcal{P}(\kappa)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(X)/fin$. Por otra parte, dado que $|Y| = \lambda$, nuevamente por el lema 2.5.5, tenemos que existe un isomorfismo $h : \mathcal{P}(Y)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda)/fin$. Por lo tanto, $h \circ f \circ g$ es un isomorfismo entre $\mathcal{P}(\kappa)/fin$ y $\mathcal{P}(\lambda)/fin$. □

Recordemos cómo se define el orden lexicográfico. Tal vez convenga usar un poco de lenguaje coloquial antes de dar la definición formal: podemos pensar a las ternas de ordinales como palabras de tres letras y para colocar ordenadamente a estas palabras en el diccionario tendríamos que ir "letra por letra". De manera formal el orden lexicográfico se define de la siguiente manera: para cualesquiera $(\alpha, \beta, \gamma)$ y $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$, ternas de ordinales, tendremos que $(\alpha, \beta, \gamma) \prec (\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ cuando ocurre alguna de las siguientes condiciones:

1. $\alpha < \overline{\alpha}$
2. $\alpha = \overline{\alpha}$ y $\beta < \overline{\beta}$
3. $\alpha = \overline{\alpha}$, $\beta = \overline{\beta}$ y $\gamma < \overline{\gamma}$

Además, para cualquier clase no vacía de ternas de ordinales (que no necesariamente sea conjunto), es posible encontrar una terna que satisface ser un elemento $\prec$-mínimo de esta clase. Para verificar esto último, comencemos por observar que si $\mathbb{A}$ es una clase de ordinales y $\alpha \in \mathbb{A}$, entonces $(\alpha+1) \cap \mathbb{A}$ es un conjunto no vacío. De hecho, $\min((\alpha+1) \cap \mathbb{A})$ es el primer elemento de la clase $\mathbb{A}$. Ahora bien, si $\mathbb{A}$ es una clase de ternas de ordinales y $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{A}$, entonces $((\alpha+1) \times (\beta+1) \times (\gamma+1)) \cap \mathbb{A}$ es un conjunto. Denotemos por $S$ al conjunto anterior. Si tomamos $\min S$, entonces también es el primer elemento de la clase $\mathbb{A}$. Observemos que si $\overline{\alpha}$ es el mínimo ordinal que aparece en la primera coordenada de alguna de las ternas de $S$, $\overline{\beta}$ es el mínimo ordinal que aparece en la segunda coordenada de alguna de las ternas de $S$ que tienen por primera coordenada a $\overline{\alpha}$, y $\overline{\gamma}$ es el mínimo ordinal que aparece en la tercera coordenada de alguna de las ternas de $S$ con $\overline{\alpha}$ como primera coordenada y $\overline{\beta}$ como segunda coordenada, entonces $\min S = (\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$.

**Lema 2.5.9.** *Si $\kappa$, $\lambda$ y $\mu$ son cardinales tales que $\kappa < \lambda < \mu$ y $\mathcal{K}(\kappa, \mu)$, entonces $\mathcal{K}(\kappa, \lambda)$.*

Demostración: Por reducción al absurdo, supongamos que existe una terna de cardinales que no cumple lo anterior. Entonces existe una terna de cardinales $(\kappa, \lambda, \mu)$ la cual es $<$-mínima con respecto a que satisface $\kappa < \lambda < \mu$ y $\mathcal{K}(\kappa, \mu)$, pero no satisface $\mathcal{K}(\kappa, \lambda)$.

Sea $h : \mathcal{P}(\mu)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(\kappa)/fin$ un isomorfismo. Como $\lambda \subseteq \mu$, existe un conjunto $a \subseteq \kappa$ tal que $h([\lambda]) = [a]$, y por el lema 2.5.7, tenemos que $\mathcal{P}(\lambda)/fin$ y $\mathcal{P}(a)/fin$ son isomorfos. Sea $\theta = |a|$, por el lema 2.5.8, se sigue que $\mathcal{K}(\lambda, \theta)$. Observamos que $\theta \leq \kappa$, pues $a \subseteq \kappa$. Probaremos que $\theta < \kappa$. Si ocurriera que $\theta = \kappa$, entonces $\mathcal{K}(\lambda, \kappa)$, lo cual contradice nuestra suposición original. Además, no puede ocurrir que $\mathcal{K}(\theta, \kappa)$, porque $\mathcal{K}(\theta, \lambda)$ y no ocurre que $\mathcal{K}(\lambda, \kappa)$. De esta forma, $(\theta, \kappa, \lambda)$ es una terna de cardinales tal que $\theta < \kappa < \lambda$ y $\mathcal{K}(\theta, \lambda)$, pero no ocurre $\mathcal{K}(\theta, \kappa)$. $\square$

El siguiente resultado será empleado varias veces en el resto de esta sección.

**Proposición 2.5.10.** *Si $\kappa$ es un cardinal infinito tal que $\mathcal{K}(\kappa, \kappa^+)$, entonces $\mathcal{K}(\kappa, \omega)$.*

Demostración: Sea $\lambda$ el menor cardinal tal que $\mathcal{K}(\kappa, \lambda)$, entonces $\lambda \leq \kappa$, pues $\mathcal{K}(\kappa, \kappa)$. Veamos que $\mathcal{K}(\lambda, \lambda^+)$. Si $\lambda = \kappa$ o $\kappa = \lambda^+$, lo anterior se sigue porque $\mathcal{K}(\kappa, \kappa^+)$ y $\mathcal{K}(\lambda, \kappa)$. Por otra parte, si $\lambda < \lambda^+ < \kappa$, del lema 2.5.9 se sigue que $\mathcal{K}(\lambda, \lambda^+)$.

Así, sea $h : \mathcal{P}(\lambda)/fin \longrightarrow \mathcal{P}(\lambda^+)/fin$ un isomorfismo. Fijemos $\alpha \in \lambda$ y seleccionemos $a_\alpha \subseteq \lambda^+$ tal que $h([\alpha]) = [a_\alpha]$. Por los lemas 2.5.7 y 2.5.8, se sigue que $\mathcal{K}(|\alpha|, |a_\alpha|)$. Como $a_\alpha \subseteq \lambda^+$, tenemos que $|a_\alpha| \leq \lambda^+$. Veamos que $|a_\alpha| < \lambda$. Supongamos que $|a_\alpha| \in \{\lambda, \lambda^+\}$. En cualquier caso inferimos $\mathcal{K}(|\alpha|, \lambda)$, pues $\mathcal{K}(|\alpha|, |a_\alpha|)$ y $\mathcal{K}(\lambda, \lambda^+)$. Por esto último, $\mathcal{K}(\lambda, \kappa)$ implica que $\mathcal{K}(|\alpha|, \kappa)$, con $|\alpha| < \lambda$, pues $\alpha \in \lambda$. Sin embargo, lo anterior contradice que $\lambda$ es el menor cardinal que satisface $\mathcal{K}(\lambda, \kappa)$.

Definamos $a = \lambda^+ \setminus (\bigcup_{\alpha\in\lambda} a_\alpha)$ y elijamos $b \subseteq \lambda$ tal que $h([b]) = [a]$. Observamos que $|a| = \lambda^+$, pues $\bigcup_{\alpha\in\lambda} a_\alpha$ es la unión de $\lambda$ conjuntos de cardinalidad menor a $\lambda$. Por otra parte, para cada $\alpha \in \lambda$ se tiene que $a \cap a_\alpha = \emptyset$. De esta forma:

$$h([b \cap \alpha]) = h([b] \wedge [\alpha]) = [a] \wedge [a_\alpha] = [a \cap a_\alpha] = [\emptyset]$$

De lo anterior se sigue que $b \cap \alpha$ es finito. Además, $b = \bigcup_{\alpha\in\lambda} b \cap \alpha$. Así, $b$ es una unión creciente de conjuntos finitos y por ende, $b$ es a lo más numerable. Sin embargo, $b$ no puede ser finito, pues $a$ es infinito y $h([b]) = [a] \neq [\emptyset]$. Por esto último, $b$ es numerable. Dado que $h([b]) = [a]$ con $|b| = \omega$ y $|a| = \lambda^+$, por los lemas 2.5.7 y 2.5.8, tenemos que $\mathcal{K}(\omega, \lambda^+)$. De esto se infiere que $\mathcal{K}(\omega, \lambda)$, pues si $\omega < \lambda$, por el lema 2.5.9, se tiene que $\mathcal{K}(\omega, \lambda)$. Por otra parte, si $\omega = \lambda$, entonces $\mathcal{K}(\omega, \lambda)$. Así, $\mathcal{K}(\omega, \lambda)$ y como $\mathcal{K}(\lambda, \kappa)$, concluimos que $\mathcal{K}(\omega, \kappa)$. □

**Lema 2.5.11.** $\mathcal{K}(\omega_1, \omega_2)$ *es falso.*

DEMOSTRACIÓN: Por reducción al absurdo, supongamos que $\mathcal{K}(\omega_1, \omega_2)$. Por la proposición 2.5.10, $\mathcal{K}(\omega, \omega_1)$, pues $\omega_2 = \omega_1^+$. Por lo anterior, y dado que $\mathcal{K}(\omega_1, \omega_2)$, se tiene que $\mathcal{K}(\omega, \omega_2)$. Como $\mathcal{K}(\omega, \omega_1)$ y $\mathcal{K}(\omega, \omega_2)$, por la proposición 2.5.6, existen una $\omega_1$-escala y una $\omega_2$-escala, lo cual contradice la proposición 2.5.3. □

Estamos listos para probar el resultado central de esta sección.

**Proposición 2.5.12.** *Si* $\kappa$ *y* $\lambda$ *son cardinales distintos tales que* $\mathcal{K}(\kappa, \lambda)$*, entonces* $\kappa, \lambda \in \{\omega, \omega_1\}$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, sin perdida de generalidad, que $\kappa < \lambda$. De esta forma, $\kappa^+ \leq \lambda$. Si $\kappa^+ = \lambda$, entonces $\mathcal{K}(\kappa, \kappa^+)$. Por otro lado, si $\kappa^+ < \lambda$, el lema 2.5.9 y la hipótesis $\mathcal{K}(\kappa, \lambda)$ implican que $\mathcal{K}(\kappa, \kappa^+)$. Así, $\mathcal{K}(\kappa, \kappa^+)$ y por la proposición 2.5.10, se sigue que $\mathcal{K}(\omega, \kappa)$.

Veamos que $\kappa = \omega$. Si no ocurre lo anterior, tendríamos que $\omega < \omega_1 \leq \kappa$. Si $\omega_1 = \kappa$, se infiere que $\mathcal{K}(\omega_1, \omega_2)$, pues $\mathcal{K}(\kappa, \kappa^+)$, contradiciendo el lema 2.5.11. Por otra parte, si $\omega_1 < \kappa$, por el lema 2.5.9 se sigue que $\mathcal{K}(\omega, \omega_1)$, pues $\mathcal{K}(\omega, \kappa)$. Pero en este caso, $\omega_1 < \omega_2 \leq \kappa$. Si $\omega_2 = \kappa$, tenemos que $\mathcal{K}(\omega, \omega_2)$, pues $\mathcal{K}(\omega, \kappa)$. Por otro lado, si $\omega_2 < \kappa$, entonces por el lema 2.5.9 también se sigue que $\mathcal{K}(\omega, \omega_2)$. En cualquier caso se concluye que $\mathcal{K}(\omega, \omega_1)$ y $\mathcal{K}(\omega, \omega_2)$ y por ende, $\mathcal{K}(\omega_1, \omega_2)$; contradiciendo el lema 2.5.11. Por lo tanto, $\kappa = \omega$.

Nos resta probar que $\lambda = \omega_1$. Como $\omega = \kappa < \lambda$, tenemos que $\omega_1 \leq \lambda$. Si ocurriera que $\omega_1 < \lambda$, entonces tendríamos que $\omega_1 < \omega_2 \leq \lambda$. Dado que $\mathcal{K}(\kappa, \lambda)$ y $\kappa = \omega$, se tiene que $\mathcal{K}(\omega, \lambda)$. Por un argumento análogo al del parrafo anterior, concluimos que $\mathcal{K}(\omega, \omega_1)$ y $\mathcal{K}(\omega, \omega_2)$. Por esto último, $\mathcal{K}(\omega_1, \omega_2)$, lo cual contradice el lema 2.5.11. Así, $\lambda = \omega_1$. □

# Capítulo 3

# El problema de Katowice y MA($\omega_1$)

## 3.1. Introducción

Como vimos en el capítulo anterior, algunas de las consecuencias de suponer que $\mathcal{K}(\omega, \omega_1)$ es cierto son las siguientes:

1. $2^{\omega_1} = \mathfrak{c}$ (proposición 2.2.2).
2. Existe una Q-sucesión fuerte de cardinalidad $\omega_1$ (proposición 2.4.8).
3. Hay una $\omega_1$-escala (proposición 2.5.6).

Uno de los modelos más populares donde se se satisface la igualdad $2^{\omega_1} = \mathfrak{c}$, es el modelo ZFC+MA($\omega_1$), donde MA($\omega_1$) se refiere al Axioma de Martin para el cardinal $\omega_1$. La pregunta natural es la siguente: ¿es consistente con ZFC+MA($\omega_1$) que $\mathcal{K}(\omega, \omega_1)$? En este capítulo veremos que la respuesta a la pregunta anterior es negativa. En general, demostraremos que los incisos 2 y 3 fallan en ZFC+MA($\omega_1$).

## 3.2. El Axioma de Martin

Esta sección es una brevísima introducción a MA. Para simplificar la redacción, convengamos en que $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ denotará un orden parcial.

**Definición 3.2.1.**

1. *Decimos que $p, q \in \mathbb{P}$ son compatibles si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.*
2. *Dos elementos de $\mathbb{P}$ son incompatibles si no son compatibles.*
3. *Una anticadena de $\mathbb{P}$ es un conjunto $A \subseteq \mathbb{P}$ donde cualesquiera dos elementos diferentes de $A$ son incompatibles.*

4. *Diremos que $\mathbb{P}$ satisface la condición de la cadena contable (o que $\mathbb{P}$ es ccc) si toda anticadena de $\mathbb{P}$ es contable.*

**Definición 3.2.2.** *Decimos que $G \subseteq \mathbb{P}$ es un filtro de $\mathbb{P}$ si satisface lo siguiente:*

1. *Para cualesquiera $p, q \in G$ existe $r \in G$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$.*

2. *Para cualesquiera $p \in G$ y $q \in \mathbb{P}$ que satisfagan $p \leq q$, se sigue que $q \in G$.*

**Definición 3.2.3.** *Un conjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es denso en $\mathbb{P}$ si para cualquier $p \in \mathbb{P}$ existe $q \in D$ tal que $q \leq p$. Si $\mathcal{D}$ es una familia de conjuntos densos en $\mathbb{P}$ y $G$ es un filtro en $\mathbb{P}$ que intersecta a cada $D \in \mathcal{D}$, diremos que $G$ es $\mathcal{D}$-genérico.*

**Definición 3.2.4.** *Sea $\kappa$ un cardinal. MA($\kappa$) denotará al siguiente enunciado: para cualquier $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, orden parcial con la ccc, y $\mathcal{D}$, una familia de a lo más $\kappa$ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, existe un filtro $G$ de $\mathbb{P}$ tal que $G$ es $\mathcal{D}$-genérico.*

A MA($\kappa$) se le conoce como el Axioma de Martin para $\kappa$.

En [5, III Lema 2.6] puede encontrarse una prueba en ZFC de que MA($\kappa$) es verdadero cuando $\kappa \leq \omega$ y falso cuando $\mathfrak{c} \leq \kappa$. La consistencia de ZFC implica que ZFC+MA($\kappa$) es consistente para cada cardinal $\kappa$ con $\omega \leq \kappa < \mathfrak{c}$. Una prueba de esto aparece en [5, VII Theorem 6.3]. Denotaremos como MA al enunciado: para cada $\kappa < \mathfrak{c}$ se sigue MA($\kappa$). Al enunciado MA se le conoce como Axioma de Martin.

## 3.3. MA($\omega_1$) y la igualdad $\mathfrak{c} = 2^{\omega_1}$

Nuestro objetivo en esta sección será demostrar que en ZFC+MA($\omega_1$) se satisface la igualdad $2^{\omega_1} = \mathfrak{c}$.

**Definición 3.3.1.** *Una familia de conjuntos $\mathcal{A}$ es casi ajena si para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$, distintos, se tiene que $a \cap b$ es finito.*

Recordemos que $[\omega]^{<\omega}$ denota a la familia de todos los subconjuntos finitos de $\omega$, mientras que $[\omega]^{\omega}$ denota a la familia de todos los subconjuntos infinitos de $\omega$. Por otra parte, $2^{<\omega}$ denotará a la familia de funciones cuyo dominio es un número natural y tal que su imagen está contenida en $\{0, 1\}$, mientras que $2^{\omega}$ denotará a la familia de todas las funciones con dominio $\omega$ e imagen contenida en $\{0, 1\}$. Comparando las cardinalidades de los conjuntos anteriores tenemos que $|[\omega]^{<\omega}| = |2^{<\omega}| = \omega$ y $|[\omega]^{\omega}| = |2^{\omega}| = \mathfrak{c}$.

**Lema 3.3.2.** *$[\omega]^{\omega}$ contiene una familia casi ajena de cardinalidad $\omega_1$.*

Demostración: Para cada $f \in 2^{\omega}$ definamos $a_f = \{f \restriction n : n \in \omega\}$. Fijemos $f, g \in 2^{\omega}$. Claramente $|a_f| = \omega$. Además, si $f \neq g$, entonces existe $n \in \omega$ tal que $f(n) \neq g(n)$. De esta forma, $a_f \cap a_g \subseteq \{f \restriction m : m \leq n\} \cup \{g \restriction m : m \leq n\}$. Por esto último, $a_f \cap a_g$ es finito. Así, $\{a_f : f \in 2^{\omega}\}$ es una familia casi ajena de subconjuntos infinitos de $2^{<\omega}$.

Dado que $|2^{<\omega}| = \omega$ existe una función biyectiva $h : 2^{<\omega} \longrightarrow \omega$. Por lo anterior, $\{h[a_f] : f \in 2^\omega\} \subseteq [\omega]^\omega$ y es una familia casi ajena. Por lo tanto, $[\omega]^\omega$ contiene una familia casi ajena de cardinalidad $\omega_1$, pues $|2^\omega| = \mathfrak{c}$ y $\omega_1 \leq \mathfrak{c}$. $\square$

Por el resto de este capítulo escribiremos MA($\omega_1$) en aquellos resultados donde haremos uso de este axioma.

**Proposición 3.3.3** (MA($\omega_1$))**.** $2^{\omega_1} = \mathfrak{c}$.

Demostración: Sea $\{b_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ la familia obtenida por el lema anterior. Fijemos $X \subseteq \omega_1$ y definamos $\mathbb{P}_X$ como la familia de todas las funciones $p$ tales que:

1. $p \subseteq \omega \times \{0, 1\}$.
2. $b_\alpha \cap \text{dom}(p)$ es finito, para cada $\alpha \in X$.
3. $p^{-1}[\{1\}]$ es finito.

Ahora definamos un orden $\leq_X$ de la siguiente forma: para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}_X$, $p \leq_X q$ si $q \subseteq p$. Aplicaremos MA($\omega_1$) al orden parcial $\langle \mathbb{P}_X, \leq_X \rangle$.

Comencemos por verificar que $\mathbb{P}_X$ es ccc. Para esto, veamos cómo se comportan dos elementos $p, q \in \mathbb{P}_X$ que son incompatibles. Dado que no existe $r \in \mathbb{P}_X$ tal que $r \leq_X p$ y $r \leq_X q$, no existe $r \in \mathbb{P}_X$ tal que $p \subseteq r$ y $q \subseteq r$. Claramente $p \cup q$ satisface los incisos 1, 2 y 3. Por esta razón no puede ocurrir que $p \cup q$ sea una función, pues $p \cup q$ sería un elemento de $\mathbb{P}$ que contiene a $p$ y $q$. Así, existe $n \in \text{dom}(p) \cap \text{dom}(q)$ tal que $p(n) \neq q(n)$. De esta forma, $\{p(n), q(n)\} = \{0, 1\}$, de lo que se sigue que $p^{-1}[\{1\}] \neq q^{-1}[\{1\}]$. Por lo anterior, si existiera $A$, una anticadena no numerable de $\mathbb{P}_X$, entonces tendríamos que $\{p^{-1}[\{1\}] : p \in A\}$ sería una familia no numerable de subconjuntos finitos de $\omega$, contradiciendo que $|[\omega]^{<\omega}| = \omega$.

Para cada $\alpha \in \omega_1 \setminus X$ definamos $D_\alpha = \{p \in \mathbb{P}_X : b_\alpha \subseteq \text{dom}(p)\}$. Veamos que $\{D_\alpha : \alpha \in \omega_1 \setminus X\}$ es una familia de densos en $\mathbb{P}_X$. Para esto, fijemos $\alpha \in \omega_1 \setminus X$ y $q \in \mathbb{P}_X$. Tomemos $p = q \cup \{(n, 0) : n \in b_\alpha \setminus \text{dom}(q)\}$. Claramente $p \subseteq \omega \times \{0, 1\}$ es una función y $p^{-1}[\{1\}] = q^{-1}[\{1\}]$; por lo tanto, $p^{-1}[\{1\}]$ es finito. Además, $b_\beta \cap b_\alpha$ es finito, para cada $\beta \in X$. Dado que $b_\beta \cap \text{dom}(p) = (b_\beta \cap \text{dom}(q)) \cup (b_\beta \cap b_\alpha)$, tenemos que $b_\beta \cap \text{dom}(p)$ es finito. Por lo tanto, $p \in D_\alpha$ y $p \leq_X q$.

Ahora bien, para cualesquiera $\alpha \in X$ y $n \in \omega$ definamos:

$$D_{\alpha,n} = \{p \in \mathbb{P}_X : |p^{-1}[\{1\}] \cap b_\alpha| > n\}$$

Veamos que $\{D_{\alpha,n} : (\alpha, n) \in X \times \omega\}$ es una familia de conjuntos densos en $\mathbb{P}_X$. Para esto, fijemos $\alpha \in X$, $n \in \omega$ y $q \in \mathbb{P}_X$. Dado que $|b_\alpha| = \omega$ y

$b_\alpha \cap \mathrm{dom}(q)$ es finito (véase el inciso 2), podemos elegir $a \subseteq b_\alpha \setminus \mathrm{dom}(q)$ de tal modo que $|a| = n+1$. Tomemos $p = q \cup \{(m,1) : m \in a\}$. Claramente, $b_\beta \cap \mathrm{dom}(p) = (b_\beta \cap \mathrm{dom}(q)) \cup (b_\beta \cap a)$ es finito para cada $\beta \in X$. Además, $p^{-1}[\{1\}] = q^{-1}[\{1\}] \cup a$ es finito y $n+1 < |a| \leq |p^{-1}[\{1\}]|$. Por lo tanto, $p \in D_{\alpha,n}$ y $p \leq_X q$.

Definamos:

$$\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \omega_1 \setminus X\} \cup \{D_{\alpha,n} : (\alpha,n) \in X \times \omega\}$$

Es claro que $|\mathcal{D}| = \omega_1$. Por MA($\omega_1$) tenemos que existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico. Sea $G_X$ este filtro y tomemos $g_X = \bigcup G_X$. Veamos que $g_X$ es una función cuyo dominio es un subconjunto de $\omega$ tal que $X = \{\alpha \in \omega_1 : |b_\alpha \cap g_X^{-1}[\{1\}]| = \omega\}$.

Si $(n,i),(n,j) \in g_X$, entonces existen $p,q \in G_X$ tales que $(n,i) \in p$ y $(n,j) \in q$. Dado que $G_X$ es un filtro, existe $r \in G_X$ tal que $r \leq_X p$ y $r \leq_X q$. De esta forma, $(n,i),(n,j) \in r$. Como $r$ es una función, $i = j$. Por lo tanto, $g_X$ es una función y $\mathrm{dom}(g_X) = \bigcup\{\mathrm{dom}(p) : p \in G_X\} \subseteq \omega$.

Veamos que se satisface la siguiente igualdad:

$$X = \{\alpha \in \omega_1 : |b_\alpha \cap g_X^{-1}[\{1\}]| = \omega\} \tag{3.1}$$

Para esto, tomemos $\alpha \in X$. Fijemos $n \in \omega$. Dado que $G_X$ es un filtro $\mathcal{D}$-genérico, existe $p_n \in G_X \cap D_{\alpha,n}$, y de esto se infiere que $n < |b_\alpha \cap p_n^{-1}[\{1\}]| \leq |b_\alpha \cap g_X^{-1}[\{1\}]|$, pues $p_n \subseteq g_X$. Como elegimos $n \in \omega$ arbitrario, concluimos que $|b_\alpha \cap g_X^{-1}[\{1\}]| = \omega$. Así, se satisface que:

$$X \subseteq \{\alpha \in \omega_1 : |b_\alpha \cap g_X^{-1}[\{1\}]| = \omega\}$$

Para verificar la contención inversa, probaremos que para cada $\alpha \in \omega_1 \setminus X$ se tiene que $|b_\alpha \cap g_X^{-1}[\{1\}]| < \omega$. Tomemos $\alpha \in \omega_1 \setminus X$. Así, existe $p \in G_X \cap D_\alpha$, pues $G_X$ es $\mathcal{D}$-genérico. De esto se infiere que $b_\alpha \subseteq \mathrm{dom}(p) \subseteq \mathrm{dom}(g_X)$ y que $p^{-1}[\{1\}]$ es finito. Por esto último, $b_\alpha \cap g_X^{-1}[\{1\}] = b_\alpha \cap p^{-1}[\{1\}]$ es finito, pues $p \subseteq g_X$.

Ahora definamos $h : \mathcal{P}(\omega_1) \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)$ de la siguiente forma: para cada conjunto $X \subseteq \omega_1$ hagamos $h(X) = g_X^{-1}[\{1\}]$. Probaremos que $h$ es inyectiva, pues de esto se seguirá que $2^{\omega_1} = |\mathcal{P}(\omega_1)| \leq |\mathcal{P}(\omega)| = \mathfrak{c}$. Para esto, fijemos $X, Y \subseteq \omega_1$ tales que $X \neq Y$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que existe $\alpha \in X \setminus Y$. Como $\alpha \in X$, de la igualdad 3.1 se sigue que $|b_\alpha \cap g_X^{-1}[\{1\}]| = \omega$. Dado que $\alpha \in \omega_1 \setminus Y$, tenemos que $|b_\alpha \cap g_Y^{-1}[\{1\}]| < \omega$. De esta forma, $|b_\alpha \cap h(Y)| < \omega = |b_\alpha \cap h(X)|$. Por lo tanto, $h(X) \neq h(Y)$. $\square$

## 3.4. $\mathrm{MA}(\omega_1)$ y $\omega_1$-escalas

Nuestro objetivo en esta sección será demostrar que $\mathcal{K}(\omega,\omega_1)$ falla cuando suponemos $\mathrm{MA}(\omega_1)$. Para esto, demostraremos que $\mathrm{MA}(\omega_1)$ implica que no existe una familia dominante con cardinalidad $\omega_1$. En particular, $\mathrm{MA}(\omega_1)$ implica que no existen $\omega_1$-escalas. Por la proposición 2.5.6, concluiremos que $\mathcal{K}(\omega,\omega_1)$ es falso bajo $\mathrm{MA}(\omega_1)$.

Denotemos por $\omega^{<\omega}$ a la familia de funciones cuyo dominio es un número natural y cuya imagen es un subconjunto de $\omega$. Tenemos que $|\omega^{<\omega}| = \omega$.

**Proposición 3.4.1** ($\mathrm{MA}(\omega_1)$)**.** *Si $\mathcal{A}$ es una familia de funciones en $\omega^\omega$ tal que $|\mathcal{A}| \leq \omega_1$, entonces existe una función $f_\mathcal{A} \in \omega^\omega$ tal que $f <^* f_\mathcal{A}$, para cada $f \in \mathcal{A}$. En particular, $\mathcal{A}$ no es dominante.*

Demostración: Sea $\mathcal{A} \subseteq \omega^\omega$ tal que $|\mathcal{A}| \leq \omega_1$. Denotemos por $\mathbb{P}$ a la familia de las parejas $p = (f_p, F_p)$ tales que $f_p \in \omega^{<\omega}$ y $F_p$ es un subconjunto finito de $\mathcal{A}$.

Para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$ definamos $p \leq_\mathbb{P} q$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $f_q \subseteq f_p$
2. $F_q \subseteq F_p$
3. $f(n) < f_p(n)$ siempre que $f \in F_q$ y $n \in \mathrm{dom}(f_p) \setminus \mathrm{dom}(f_q)$.

Comencemos por verificar que $\mathbb{P}$ es ccc con el orden anterior. Supongamos que $p, q \in \mathbb{P}$ son tales que $f_p = f_q$. Si definimos $r = (f_p, F_p \cup F_q)$, entonces $r$ satisface que $r \leq_\mathbb{P} p$ y $r \leq_\mathbb{P} q$ (la condición 3 se cumple por vacuidad). Por lo anterior, cualesquiera dos elementos de $\mathbb{P}$ que coinciden en su primera coordenada son compatibles. Ahora bien, sea $A$ un subconjunto no numerable de $\mathbb{P}$. Entonces existe $B \subseteq A$, no numerable, tal que $f_p = f_q$, para cualesquiera $p, q \in B$, pues $|\omega^{<\omega}| = \omega$. En particular, $A$ tiene dos elementos compatibles. Por lo anterior, toda anticadena de $\mathbb{P}$ es numerable.

Para cada $f \in \mathcal{A}$ definamos:

$$D_f = \{p \in \mathbb{P} : f \in F_p\}$$

Veamos que $D_f$ es denso en $\mathbb{P}$. Para esto, fijemos $q \in \mathbb{P}$. Si elegimos $p = (f_q, F_q \cup \{f\})$, entonces $p \leq_\mathbb{P} q$ y $p \in D_f$.

Ahora bien, para cada $n \in \omega$ definamos:

$$D_n = \{p \in \mathbb{P} : n \in \mathrm{dom}(f_p)\}$$

Fijemos $q \in \mathbb{P}$ para probar que $D_n$ es denso en $\mathbb{P}$. Si $n \in \mathrm{dom}(f_q)$, entonces $q \leq_\mathbb{P} q$ y $q \in D_n$. Por otra parte, si $n \notin \mathrm{dom}(f_q)$, definamos $g : n+1 \longrightarrow \omega$ de la siguiente forma:

$$g(i) = \begin{cases} f_q(i) & \text{si } i \in \mathrm{dom}(f_q) \\ 1 + \sum_{f \in F_q} f(i) & \text{si } i \in (n+1) \setminus \mathrm{dom}(f_q) \end{cases}$$

Por lo anterior, $f_q \subseteq g$. Además, $f(i) < g(i)$ para cualesquiera $f \in F_q$ y $i \in (n+1) \setminus \mathrm{dom}(f_q)$. Tomemos $p = (g, F_q)$. Entonces $p \leq_{\mathbb{P}} q$ y $p \in D_n$.

Definamos:

$$\mathcal{D} = \{D_f : f \in \mathcal{A}\} \cup \{D_n : n \in \omega\}$$

Observamos que $\mathcal{D}$ es una familia de $\omega_1$ conjuntos densos en $\mathbb{P}$. Por MA($\omega_1$), existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico. Sea $G$ este filtro y tomemos $f_{\mathcal{A}} = \bigcup_{p \in G} f_p$. Por un razonamiento análogo al que se utilizó en la proposición 3.3.3, tenemos que $f_{\mathcal{A}} \subseteq \omega \times \omega$ es una función. Como $G$ es $\mathcal{D}$-genérico, existe $p \in D_n \cap G$, para cada $n \in \omega$. Así, $n \in \mathrm{dom}(f_p) \subseteq \mathrm{dom}(f_{\mathcal{A}})$, pues $f_p \subseteq f_{\mathcal{A}}$. Por lo anterior, $\mathrm{dom}(f) = \omega$.

Resta verificar que $f <^* f_{\mathcal{A}}$, para cada $f \in \mathcal{A}$. Para esto, fijemos $f \in \mathcal{A}$. Como $G$ es $\mathcal{D}$-genérico, existe $p \in D_f \cap G$. Sea $n = \mathrm{dom}(f_p)$. Demostraremos que $f(i) < f_{\mathcal{A}}(i)$, para cada $i \in \omega \setminus n$. Fijemos $i \in \omega \setminus n$. Dado que $G$ es $\mathcal{D}$-genérico, existe $q \in D_i \cap G$. Entonces existe $r \in G$ tal que $r \leq_{\mathbb{P}} q$ y $r \leq_{\mathbb{P}} p$, pues $G$ es un filtro. De esta forma, $f_q \subseteq f_r \subseteq f_{\mathcal{A}}$. Además, $i \in \mathrm{dom}(f_q) \subseteq \mathrm{dom}(f_r)$. Así, $i \in \mathrm{dom}(f_r) \setminus n$. Por esto último, $f(i) < f_r(i) = f_{\mathcal{A}}(i)$, pues $r \leq_{\mathbb{P}} p$ y $f \in F_p$. □

## 3.5. MA($\omega_1$) y Q-sucesiones fuertes

Como mencionamos al inicio de este capítulo, otra de las razones por la cual $\mathcal{K}(\omega, \omega_1)$ falla bajo MA($\omega_1$) es que este axioma implica que en $\mathcal{P}(\omega)/fin$ no existen Q-sucesiones fuertes de cardinalidad $\omega_1$. En esta sección probaremos este último resultado. Antes de esto, es conveniente hablar sobre árboles en $\omega$ y probar algunas de sus propiedades básicas.

**Definición 3.5.1.** *Sean $T \subseteq \omega$ y $\leq_T \subseteq T \times T$. Diremos que $\langle T, \leq_T \rangle$ es un árbol si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *$\langle T, \leq_T \rangle$ es un orden parcial.*
2. *Para cada $x \in T$ el conjunto $\{y \in T : y \leq_T x\}$ es finito y $\leq_T$ induce un orden total en él.*
3. *Existe $z \in T$ tal que $z \leq_T x$, para cada $x \in T$. A este elemento lo llamaremos la raíz de $T$.*

La noción de árbol anterior es un caso particular de una definición más general que puede ser consultada en [5, II Definition 5.1], pero para los fines de la presente sección, este tipo de árboles nos serán suficientes.

**Definición 3.5.2.** *Sean $\langle T, \leq_T \rangle$ un árbol y $x \in T$.*

1. *Denotaremos por* $T(x)$ *al conjunto* $\{y \in T : y \leq_T x\}$.

2. *La altura de* $x$ *es la cardinalidad de* $T(x)$ *y la denotamos por* $\mathrm{ht}(x,T)$ *(usaremos* $\mathrm{ht}(x)$ *cuando no haya riesgo de ambigüedad con respecto al árbol del que estemos hablando).*

3. *El* $n$*-esimo nivel de* $T$ *es el conjunto* $\{x \in T : \mathrm{ht}(x,T) = n\}$ *y lo denotamos por* $\mathrm{Lev}(n,T)$ *(usaremos* $\mathrm{Lev}(n)$ *cuando no haya riesgo de ambigüedad con respecto al árbol del que estemos hablando).*

4. *La altura de* $T$ *es el supremo del conjunto* $\{n \in \omega : \mathrm{Lev}(n,T) \neq \emptyset\}$ *y la denotamos por* $\mathrm{ht}(T)$.

5. *Un sucesor inmediato de* $x$ *es un elemento* $y \in T$ *tal que* $x \neq y$, $x \leq_T y$, *pero no existe* $z \in T \setminus \{x,y\}$ *tal que* $x \leq_T z \leq_T y$.

6. *Una rama de* $T$ *es un conjunto* $R \subseteq T$ *tal que* $\leq_T$ *induce un buen orden en* $R$*, pero* $\leq_T$ *no induce un buen orden en* $R \cup \{x\}$*, para cada* $x \in T \setminus R$.

7. *Una rama de* $T$ *es cofinal si tiene cardinalidad* $\mathrm{ht}(T)$.

El concepto de altura que dimos en la definición anterior difiere del que encontramos en [5], sin embargo esta forma de definir la altura funciona mejor para la presente sección.

**Definición 3.5.3.** *Sea* $\langle T, \leq_T\rangle$ *un árbol.*

1. $T$ *es de ramificación finita si cada uno de sus elementos tiene a lo más una cantidad finita de sucesores inmediatos.*

2. $T$ *es binario si cada uno de sus elementos tiene a lo más dos sucesores inmediatos.*

3. $T$ *es bien podado si cada uno de sus elementos tiene al menos un sucesor inmediato.*

En la siguiente proposición veremos algunas propiedades básicas de los árboles.

**Proposición 3.5.4.** *Sea* $\langle T, \leq_T\rangle$ *un árbol.*

1. *Para cualesquiera* $x, y \in T$, $x \leq_T y$ *si y sólo si* $T(x) \subseteq T(y)$.

2. *Sean* $x, y \in T$ *tales que* $\mathrm{ht}(x) = \mathrm{ht}(y)$. *Si* $x$ *y* $y$ *son* $\leq_T$*-comparables, entonces* $x = y$.

3. *Para cualesquiera* $x, y \in T$ *existe* $z \in T$ *tal que* $T(x) \cap T(y) = T(z)$.

4. *Si* $x, y \in T$ *son elementos distintos tales que* $x \leq_T y$, *entonces* $T(y)$ *contiene un sucesor inmediato de* $x$.

5. *Si $x \in T$ y $n \in \omega$ son tales que* $0 < n \leq ht(x)$*, entonces* $T(x) \cap \mathrm{Lev}(n) = 1$.
6. *Si $R$ es una rama de $T$ y $x \in R$, entonces $T(x) \subseteq R$.*
7. *Si $R$ es una rama de $T$ y $x, y \in R$ son tales que* $\mathrm{ht}(x) \leq \mathrm{ht}(y)$*, entonces* $x \leq_T y$.
8. *Si $R$ es una rama de $T$ y $x \in R$ es tal que* $\mathrm{ht}(x) < |R|$*, entonces $R$ contiene un sucesor inmediato de $x$.*
9. *Si $R$ es una rama de $T$ y $|R| < \omega$, entonces existe $x \in T$ tal que $R = T(x)$.*
10. *Si $R$ es una rama cofinal de $T$ y* $\mathrm{ht}(T) = \omega$*, entonces* $|\mathrm{Lev}(n) \cap R| = 1$*, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$.*
11. *Si $T$ es bien podado, entonces* $\mathrm{ht}(T) = \omega$ *y todas sus ramas son cofinales.*

Demostración:

Inciso 1. Sean $x, y \in T$ tales que $x \leq_T y$. Para cada $z \in T(x)$, tenemos que $z \leq_T x \leq_T y$. Así, $z \in T(y)$. Por lo tanto, $T(x) \subseteq T(y)$. Ahora bien, si $T(x) \subseteq T(y)$, entonces $x \in T(x) \subseteq T(y)$, de lo que concluimos que $x \leq_T y$.

Inciso 2. Sean $x, y \in T$, elementos $\leq_T$ comparables tales que $\mathrm{ht}(x) = \mathrm{ht}(y)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x \leq_T y$. Por el inciso 1, $T(x) \subseteq T(y)$. Pero $T(x)$ y $T(y)$ son finitos y tienen la misma cardinalidad, pues $\mathrm{ht}(x) = \mathrm{ht}(y)$. Así, necesariamente $T(x) = T(y)$. Por el inciso 1, $x \leq_T y$ y $y \leq_T x$. Por lo tanto, $x = y$.

Inciso 3. Sean $x, y \in T$. Del inciso 3 de la definición 3.5.1 se infiere que $T(x) \cap T(y) \neq \emptyset$. Dado que $T(x)$ es finito y totalmente ordenado, entonces $T(x) \cap T(y)$ también es finito y totalmente ordenado. Así, existe $z \in T(x) \cap T(y)$, un elemento $\leq_T$-máximo de $T(x) \cap T(y)$. Por lo anterior, para cada $r \in T(x) \cap T(y)$ tenemos que $r \leq_T z$. De esta forma, $T(x) \cap T(y) \subseteq T(z)$. Ahora bien, para cada $r \in T(z)$ se sigue que $r \leq_T z \leq_T x$ y $r \leq_T z \leq_T y$, por ende, $r \in T(x) \cap T(y)$. Entonces, $T(z) \subseteq T(x) \cap T(y)$. Por lo tanto, $T(z) = T(x) \cap T(y)$.

Inciso 4. Sean $x, y \in T$ elementos distintos tales que $x \leq_T y$. Así, por el inciso 1, $T(x) \subseteq T(y)$. Como $T(y)$ es finito y bien ordenado, existe un natural $n \in \omega$ tal que $n + 1$ y $T(y)$ son isomorfos. Sea $f : n + 1 \longrightarrow T(y)$ un isomorfismo y tomemos $m \in n + 1$ tal que $f(m) = x$. Como $f$ es un isomorfismo, claramente $f(n) = y$ y $m < n$, pues $x \leq_T y$ y $x \neq y$. De esta forma, $f(m + 1) \in T(y)$, pues $m + 1 \in n + 1$. Por lo anterior, $x = f(m) \leq_T f(m + 1)$. Veamos que $f(m + 1)$ es un sucesor inmediato de $x$. Si no lo fuera, existiría $z \in T \setminus \{x, f(m + 1)\}$ tal que $x \leq_T z \leq_T f(m + 1) \leq_T y$. Así, $z \in T(y)$. Dado que $f$ es un isomorfismo, se sigue que $m < f^{-1}(z) < m + 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $f(m+1) \in T(y)$ es un sucesor inmediato de $x$.

Inciso 5. Fijemos $n \in \omega$ tal que $0 < n \leq \text{ht}(x)$. Como $T(x)$ es finito y linealmente ordenado por $\leq_T$, existe un isomorfismo de orden $f : \langle T(x), \leq_T \rangle \longrightarrow \langle \text{ht}(x), \in \rangle$. De esta forma, podemos enumerar los elementos de $T(x)$ como $\{z_i : i < \text{ht}(x)\}$, de tal modo que $z_i < z_{i+1}$, para cada $i + 1 < \text{ht}(x)$. Hagamos $y = z_{n-1}$ y veamos que $T(x) \cap \text{Lev}(n) = \{y\}$. Por el inciso 1, $T(y) \subseteq T(x)$. Así, $T(y) = \{z_i : i < n\}$ y por ende, $y \in \text{Lev}(n)$. De esta forma, $y \in T(x) \cap \text{Lev}(n)$. Falta verificar que $T(x) \cap \text{Lev}(n) \subseteq \{y\}$. En efecto, si $t \in T(x) \cap \text{Lev}(n)$, entonces $x$ y $y$ son $\leq_T$ comparables, pues $T(x)$ es totalmente ordenado. Por el inciso 2 concluimos que $t = y$.

Inciso 6. Sean $R$ una rama de $T$ y $x \in R$. Veamos que $T(x) \subseteq R$. Fijemos $y \in T(x) \setminus \{x\}$. Bastará con probar que $R \cup \{y\}$ es bien ordenado, pues de la definición de rama se seguirá que $y \in R$. Para esto, sea $a \subseteq R$, no vacío. Si $y \notin a$, entonces $a \subseteq R$ tiene un elemento $\leq_T$-mínimo, pues $R$ es bien ordenado. Si $y \in a$, entonces $(a \setminus \{y\}) \cup \{x\} \subseteq R$ y es no vacío. Por lo anterior, existe $z \in (a \setminus \{y\}) \cup \{x\}$, $\leq_T$-mínimo en este conjunto. De esta forma, $z \leq_T x$, de lo que inferimos que $z \in T(x)$. Como $T(x)$ es bien ordenado por $\leq_T$, el conjunto $\{y, z\}$ tiene un elemento $\leq_T$-mínimo. Sea $r$ este elemento y observemos que $r \neq x$, pues $y \leq_T x$ y $y \neq x$. Veamos que $r$ es el elemento $\leq_T$-mínimo de $a$. Si $s \in a \setminus \{y\}$, entonces $r \leq_T z \leq_T s$, pues $z$ es el $\leq_T$-mínimo de $(a \setminus \{y\}) \cup \{x\}$. Por otra parte, $r \leq_T y$, con lo que concluimos que $r$ es el elemento $\leq_T$-mínimo de $a$. Por lo tanto, $R \cup \{y\}$ es bien ordenado.

Inciso 7. Sean $R$ una rama de $T$ y $x, y \in R$ tales que $\text{ht}(x) \leq \text{ht}(y)$. Como $R$ es bien ordenado, se sigue que $x \leq_T y$ o $y \leq_T x$. Bastará con probar que el caso $y \leq_T x$ implica que $x = y$. En efecto, si $y \leq_T x$, por el inciso 1 tenemos que $T(y) \subseteq T(x)$ y por ende, $\text{ht}(y) \leq \text{ht}(x)$. Dado que $\text{ht}(x) \leq \text{ht}(y) \leq \text{ht}(x)$, tenemos que $T(x)$ y $T(y)$ tienen la misma cardinalidad. Como $T(y) \subseteq T(x)$, se sigue que $T(x) = T(y)$. Por el inciso 1, concluimos que $x = y$.

Inciso 8. Sea $R$ una rama de $T$ y sea $x \in R$ de tal modo que $\text{ht}(x) < |R|$. Entonces existe $y \in R \setminus T(x)$. Como $\leq_T$ bien-ordena a $R$ y $y \notin T(x)$, tenemos que $x \leq_T y$ y $x \neq y$. Así, por el inciso 4, existe $z \in T(y)$ tal que $z$ es un sucesor inmediato de $x$. Por el inciso 6, concluimos que $z \in T(y) \subseteq R$.

Inciso 9. Como $R$ es finito y bien ordenado, existe $x \in R$ tal que $x$ es el elemento $\leq_T$-máximo de $R$. Veamos que $R = T(x)$. Por el inciso 6, $T(x) \subseteq R$. Si $y \in R$, entonces $y \leq_T x$ y por ende, $y \in T(x)$. Por lo tanto, $R = T(x)$.

Inciso 10. Sea $R$ una rama cofinal de $T$. Veamos que $|R \cap \text{Lev}(n)| \leq 1$, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$. Para esto, fijemos $n \in \omega \setminus \{0\}$. Si $x, y \in R \cap \text{Lev}(n)$, entonces $T(x)$ y $T(y)$ tienen cardinalidad $n$, pues $x, y \in \text{Lev}(n)$. Además, $x$ y $y$ son $\leq_T$-comparables, pues $R$ está linealmente ordenado y $x, y \in R$. Pero por el inciso 2, lo anterior sólo puede ocurrir si $x = y$. Así, $|R \cap \text{Lev}(n)| \leq 1$.

Ahora veamos que $R \cap \text{Lev}(n) \neq \emptyset$, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$. Como $R$ es infinito y bien ordenado, existe un ordinal $\alpha$ tal que $R$ tiene tipo de orden $\alpha$. De esta forma, $n \in \omega \leq \alpha$ y esto implica que existe $x \in R$ tal que $T(x)$ tiene tipo de orden $n$. Así, $|T(x)| = n$, de lo que inferimos que $x \in \mathrm{Lev}(n)$. Por lo tanto, $R \cap \mathrm{Lev}(n) \neq \emptyset$.

Inciso 11. Supongamos que $T$ es bien podado. Veamos que $\mathrm{Lev}(n) \neq \emptyset$, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$. Probémoslo por inducción. Sea $x \in T$ la raíz de $T$. Entonces $T(x) = \{x\}$ y de esta forma, $x \in \mathrm{Lev}(1)$. Ahora supongamos que $y \in \mathrm{Lev}(n)$. Como $T$ es bien podado, existe $z \in T$ tal que $z$ es un sucesor inmediato de $y$. Así, $T(z) = T(y) \cup \{z\}$ y por ende, $y \in \mathrm{Lev}(n+1)$.

Ahora veamos que todas las ramas de $T$ son cofinales. Para esto, probaremos que si $R \subseteq T$ es finito, entonces $R$ no es una rama de $T$. Como $R$ es bien ordenado, existe $n \in \omega$ tal que $R$ y $n+1$ son isomorfos. Sea $f : (n+1) \longrightarrow R$ un isomorfismo. Dado que $T$ es bien podado, todos sus elementos tienen un sucesor inmediato. En particular, existe $x \in T$, un sucesor inmediato de $f(n) \in R$. Por lo anterior, $f(n) \leq_T x$ y $f(n) \neq x$. Entonces no puede ocurrir que $x \in R$, pues $f(n)$ es el $\leq_T$-máximo de $R$. Por esto último, $R \cup \{x\}$ es bien ordenado. Así que $R$ no es una rama. □

Recordemos que la diferencia simétrica de dos conjuntos $a$ y $b$ es el conjunto

$$a\Delta b = (a \setminus b) \cup (b \setminus a) = (a \cup b) \setminus (a \cap b)$$

Un punto importante a resaltar es que $a\Delta b = \emptyset$ si y sólo si $a = b$. También observemos que $a =^* b$ si y sólo si $a\Delta b$ es finito.

Para probar que MA($\omega_1$) implica que no existen Q-sucesiones fuertes de cardinalidad $\omega_1$, nuestro primer paso será demostrar la siguiente proposición.

**Proposición 3.5.5.** *Sea $\langle T, \leq_T \rangle$ un árbol binario, bien podado y de altura $\omega$. Si $\mathcal{A}$ es una colección no contable de ramas cofinales de $T$, entonces la familia $\{[a] : a \in \mathcal{A}\}$ no es una Q-sucesión fuerte de $\mathcal{P}(\omega)/fin$.*

Demostración: Como $T$ es bien podado, todos los elementos de $T$ tienen algún sucesor inmediato. De esta forma, para cada $x \in T$ fijemos $t(x) \in T$, un sucesor inmediato de $x$. Para cada $a \in \mathcal{A}$ definamos:

$$R(a) = \{x \in a : t(x) \in a\}$$

Sea $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}(\omega)/fin$ la función dada por $f([a]) = [R(a)]$. De esta forma, $f([a]) \leq^* [a]$, pues $R(a) \subseteq a$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\{[a] : a \in \mathcal{A}\}$ es una Q-sucesión fuerte. Así, existe $A \subseteq \omega$ tal que $[R(a)] = [a] \wedge [A]$, para cada $a \in \mathcal{A}$.

Fijemos $a \in \mathcal{A}$ y hagamos algunas observaciones. Como $[R(a)] = [a] \wedge [A]$, tenemos que $R(a) =^* a \cap A$, es decir, $(a \cap A)\Delta R(a)$ es un subconjunto finito de $a$. Veamos que existe $x_a \in a$ para el cual se satisface la siguiente igualdad:

$$\{x \in a \cap A : x_a \leq_T x\} = \{x \in R(a) : x_a \leq_T x\} \tag{3.2}$$

Comencemos viendo el caso en que $(a \cap A)\Delta R(a) \neq \emptyset$. Como $(a \cap A)\Delta R(a)$ es un subconjunto finito de $a$ y $a$ es una rama en $T$, existe $y \in (a \cap A)\Delta R(a)$ un elemento $\leq_T$-máximo de este conjunto. Definamos $x_a \in a$ como el sucesor inmediato de $y$ en $a$ (véase el inciso 8 de la proposición 3.5.4). Veamos que $x_a$ verifica la igualdad 3.2. Para esto, fijemos $x \in T$ tal que $x_a \leq_T x$. Probaremos que $x \in a \cap A$ si y sólo si $x \in R(a)$. En efecto, como $y$ es el $\leq_T$-máximo de $(a \cap A)\Delta R(a)$, tenemos que $x \notin (a \cap A)\Delta R(a)$, pues $y \leq_T x_a \leq_T x$ y $y \neq x_a$. Pero si $x \in a \cap A$ o $x \in R(a)$, se sigue que $x \in (a \cap A) \cup R(a)$, de lo que se concluye que $x \in a \cap A \cap R(a)$, pues $x \notin (a \cap A)\Delta R(a)$. Por lo anterior, $x \in a \cap A$ si y sólo si $x \in R(a)$.

Ahora bien, supongamos que $(a \cap A)\Delta R(a) = \emptyset$. Esto último significa que $a \cap A = R(a)$. Para cada $x \in a$ tenemos que: $x \in a \cap A$ si y sólo si $x \in R(a)$. Observemos que los elementos de $\mathcal{A}$ son infinitos por ser ramas cofinales de un árbol de altura $\omega$. De esta forma, podemos elegir $x_a \in a$ arbitrario. Así, $x_a$ satisface la igualdad (3.2).

Como $T \subseteq \omega$, la familia $\{x_a : a \in \mathcal{A}\}$ es numerable. Dado que $\mathcal{A}$ no es contable, existen $a, b \in \mathcal{A}$ tales que $a \neq b$ y $x_a = x_b$. Por la proposición 2.4.5, $[a \cap b] = [\emptyset]$, de lo que se infiere que $a \cap b$ es un subconjunto finito de $a$. Además, $x_a = x_b \in a \cap b \neq \emptyset$. Así, existe $y \in a \cap b$, un elemento $\leq_T$-máximo de $a \cap b$. Como $a$ y $b$ son ramas cofinales de $T$, tenemos que $a$ y $b$ contienen un sucesor inmediato de $y$. Dado que $T$ es binario, $t(y) \in a \setminus b$ o $t(y) \in b \setminus a$, pues $y$ es el $\leq_T$-máximo de $a \cap b$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $t(y) \in a \setminus b$. De lo anterior tenemos que $t(y) \in a$ y por ende, $y \in R(a)$. Además, $x_a \leq_T y$, porque $x_a \in a \cap b$ y $y$ es el $\leq_T$-máximo de $a \cap b$. De esta forma, la igualdad (3.2) implica que $y \in a \cap A$. Por otro lado, como $t(y) \notin b$, se sigue que $y \notin R(b)$. Así, por la igualdad (3.2), se sigue que $y \notin b \cap A$, pues $x_b = x_a \leq_T y$. Dado que $y \in b$, concluimos que $y \notin A$, lo cual contradice que $y \in a \cap A$. $\square$

Para demostrar que $\mathrm{MA}(\omega_1)$ implica que no existen Q-sucesiones fuertes de cardinalidad $\omega_1$, nuestro plan será demostrar que, bajo $\mathrm{MA}(\omega_1)$, la existencia de una Q-sucesión fuerte no numerable contradice la proposición 3.5.5.

**Lema 3.5.6.** *Sean $T$, un árbol de altura $\omega$, y $R \subseteq T$ tales que:*

1. $|\mathrm{Lev}(n) \cap R| = 1$ *para cada* $n \in \omega \setminus \{0\}$.
2. *Para cada* $x \in R$ *se tiene que* $T(x) \subseteq R$.

*Entonces $R$ es una rama cofinal de $T$.*

Demostración: Comencemos verificando que $R$ es bien ordenado. Fijemos $a \subseteq R$, no vacío. Sea $m = \min\{\mathrm{ht}(x) : x \in a\}$. Por el inciso 1, existe un único $y \in a$ tal que $\mathrm{ht}(y) = m$. Veamos que $y$ es el elemento $\leq_T$-mínimo de $a$. Si

$x \in a \setminus \{y\}$, entonces $\mathrm{ht}(y) < \mathrm{ht}(x)$. Bastará con verificar que $y \in T(x)$. Como $m < \mathrm{ht}(x)$, existe $z \in \mathrm{Lev}(m) \cap T(x)$ (véase el inciso 5 de la proposición 3.5.4). Por el inciso 2, $z \in T(x) \subseteq R$ y por ende, $z, y \in \mathrm{Lev}(m) \cap R$. Por el inciso 1, se concluye que $z = y$ y $y \in T(x)$.

Ahora veamos que $R \cup \{x\}$ no está bien ordenado por $\leq_T$, para cada $x \in T \setminus R$. Para esto, fijemos $x \in T \setminus R$. Sea $n = \mathrm{ht}(x)$. Por el inciso 1, existe $y \in \mathrm{Lev}(n) \cap R$. Dado que $x \in T \setminus R$, tenemos que $x \neq y$ y por el inciso 2 de la proposición 3.5.4, se infiere que $x$ y $y$ no son $\leq_T$-comparables, pues $\mathrm{ht}(x) = \mathrm{ht}(y)$. Como $y \in R$, concluimos que $R \cup \{x\}$ no es bien ordenado. Así, $R$ es una rama de $T$. Por el inciso 1, $|R| = \omega$ y por ende, $R$ es una rama cofinal de $T$. □

Como es de esperarse, nuestra prueba de que no hay Q-sucesiones fuertes de tamaño $\omega_1$ bajo MA($\omega_1$) empleará un orden parcial. Por esta razón empleamos el siguiente concepto.

**Definición 3.5.7.** *Sean $\langle T_1, \leq_1\rangle$ y $\langle T_2, \leq_2\rangle$ árboles. Decimos que $\langle T_2, \leq_2\rangle$ es una extensión de $\langle T_1, \leq_1\rangle$ si $T_1 \subseteq T_2$, $\leq_1 \subseteq \leq_2$ y $T_1(x) = T_2(x)$, para cada $x \in T_1$.*

De la definición anterior observemos que si $\langle T_2, \leq_2\rangle$ es una extensión de $\langle T_1, \leq_1\rangle$, entonces $\mathrm{Lev}(n, T_1) \subseteq \mathrm{Lev}(n, T_2)$, para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$.

Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia casi ajena. Observemos que si $a, b \in \mathcal{A}$ son tales que $a \neq b$, inferimos que exite $k \in \omega$ tal que $(a \setminus k) \cap (b \setminus k) = \emptyset$, pues $a \cap b$ es finito. En general, si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena finita, entonces existe $k \in \omega$ tal que para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$, distintos, se tiene que $(a \setminus k) \cap (b \setminus k) = \emptyset$.

**Proposición 3.5.8** (MA($\omega_1$))**.** *Sea $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ una familia casi ajena tal que $|\mathcal{A}| = \omega_1$. Entonces existen $\langle T, \leq_T\rangle$, un árbol binario bien podado de altura $\omega$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, un conjunto no contable, tales que para cada $a \in \mathcal{B}$, $T \cap a$ es una rama cofinal de $T$.*

Demostración: Definamos a $P$ como la familia de todas las ternas de la forma $p = (T_p, \leq_p, A_p)$ tales que:

1. $A_p$ es un subconjunto finito de $\mathcal{A}$.
2. $T_p$ es un subconjunto finito de $\bigcup A_p$.
3. $\langle T_p, \leq_p\rangle$ es un árbol binario.
4. Todas las ramas de $T_p$ tienen la misma cardinalidad.
5. $T_p \cap a$ es una rama de $T$, para cada $a \in A_p$.
6. Si $a, b \in A_p$ y $a \neq b$, entonces $a \cap T_p \neq b \cap T_p$.

**Afirmación 1:** Si $p \in P$ y $R$ es una rama de $T_p$, entonces existen $x \in T_p$ y $a \in A_p$ tales que $R = T_p(x) = T_p \cap a$.

Fijemos $p \in P$ y $R$, una rama de $T_p$. Como $R$ es finita, por el inciso 9 de la proposición 3.5.4, existe $x \in T_p$ tal que $R = T_p(x)$. Dado que $x \in T_p \subseteq \bigcup A_p$, existe $a \in A_p$ tal que $x \in T_p \cap a$. Veamos que $R = T_p \cap a$. Como $T_p \cap a$ es una rama de $T_p$ y $x \in T_p \cap a$, tenemos que $T_p(x) \subseteq T_p \cap a$ (véase el inciso 6 de la proposición 3.5.4). Para verificar la otra contención, sea $y \in T_p \cap a$. De esta forma, $x$ y $y$ son $\leq_p$ comparables. Si $y \leq_p x$, entonces $y \in T_p(x) = R$. En el caso en que $x \leq_p y$, se sigue que $T_p(x) \cup \{y\}$ es bien ordenado por $\leq_p$. Dado que $R = T_p(x)$ es una rama de $T_p$, concluimos que $R \cup \{y\} = R = T_p(x)$. Así, necesariamente $y = x \in R$.

El conjunto que vamos a usar para obtener a $T$ no es $P$, sino un subconjunto de $P$ que será definido más adelante.

Si $p \in P$, entonces $T_p$ es un árbol finito. De esta forma, $T_p \in [\omega]^{<\omega}$ y $\leq_p \in [\omega \times \omega]^{<\omega}$. Por lo anterior, $|\{\langle T_p, \leq_p\rangle : p \in P\}| \leq \omega$. Ahora bien, para cada $p \in P$ definamos:

$$B(p) = \{a \in \mathcal{A} : a \cap T_p \text{ es una rama de } T_p\}$$

Observemos que para cada $p \in P$, se tiene que $B(p) \subseteq \mathcal{A}$ y por ende, $|B(p)| \leq |\mathcal{A}| = \omega_1$.

Definamos:

$$S = \bigcup\{B(p) : p \in P \text{ y } |B(p)| \leq \omega\}$$

Dado que $B(p)$ está definido en términos de $\langle T_p, \leq_p\rangle$, sólo hay una cantidad contable de $B(p)$'s. Por lo anterior, $|S| \leq \omega$. Definamos $\mathcal{J} = \mathcal{A} \setminus S$. Como $|\mathcal{A}| = \omega_1$, inferimos que $|\mathcal{J}| = \omega_1$.

Ahora definamos:

$$\mathbb{P} = \{p \in P : \emptyset \neq A_p \subseteq \mathcal{J}\}$$

Fijemos $p \in P$ y hagamos algunas observaciones: $|B(p)| \leq \omega$ implica que $B(p) \subseteq S$ y por lo tanto, $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A} \setminus B(p)$. Por la condición 5 de la definición de $P$, $A_p \subseteq B(p)$. De esta forma, $A_p \cap \mathcal{J} = \emptyset$ y por ende, $p \notin \mathbb{P}$. Por lo anterior, $p \in \mathbb{P}$ implica que $|B(p)| = \omega_1$. También observemos que si $|B(p)| = \omega_1$, entonces $|B(p) \cap \mathcal{J}| = \omega_1$, pues $B(p) \setminus S \subseteq \mathcal{A} \setminus S = \mathcal{J}$ y $|S| \leq \omega$. Con esto queda probada la siguiente afirmación:

**Afirmación 2:** Para cada $p \in \mathbb{P}$, $|\mathcal{J} \cap B(p)| = \omega_1$.

Para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$ hagamos $p \leq_{\mathbb{P}} q$ si $\langle T_p, \leq_p\rangle$ es una extensión de $\langle T_q, \leq_q\rangle$ y $A_q \subseteq A_p$ (véase la definición 3.5.7).

**Afirmación 3:** $\mathbb{P}$ es ccc con el orden anterior.

Para probar la afirmación anterior, tomemos $C$, un subconjunto no contable de $\mathbb{P}$. Como $|\{\langle T_p, \leq_p\rangle : p \in P\}| \leq \omega$, existen $p, q \in C$ tales que $p \neq q$ y $\langle T_p, \leq_p\rangle = \langle T_q, \leq_q\rangle$. Verificaremos que $p$ y $q$ son compatibles en $\mathbb{P}$.

Afirmamos que no pueden existir $a, b, c \in A_p \cup A_q$, distintos entre sí, tales que $a \cap T_p = b \cap T_p = c \cap T_p$. En efecto, si pasara lo anterior, entonces $A_p$ o $A_q$ contendría al menos dos de los conjuntos $a$, $b$ y $c$, pero esto contradice que $p$ y $q$ satisfacen la propiedad 6 de la definición de $P$.

Ahora bien, como $A_p \cup A_q \subseteq \mathcal{A}$, tenemos que $A_p \cup A_q$ es casi ajena y es finita. De esta forma, existe $k \in \omega$ tal que $T_p \subseteq k$ y para cualesquiera $a, b \in A_p \cup A_q$, distintos, se tiene que $(a \setminus k) \cap (b \setminus k) = \emptyset$. Para cada $a \in A_p \cup A_q$ elijamos $x_a \in a \setminus k$. La elección de $x_a$ nos garantiza que si $b \in A_p \cup A_q$ es tal que $a \neq b$, entonces $x_a \neq x_b$. Definamos:

$$T_r = T_p \cup \{x_a : a \in A_p \cup A_q\}$$

También definamos el orden:

$$\leq_r = \leq_p \cup \{(t, x_a) : a \in A_p \cup A_q \wedge t \in (a \cap T_p) \cup \{x_a\}\}$$

Observamos que $\leq_r$ es una extensión de $\leq_p$ tal que $x_a$ es el elemento $\leq_r$-máximo de $(a \cap T_p) \cup \{x_a\}$, para cada $a \in A_p \cup A_q$.

Veamos que $\langle T_r, \leq_r\rangle$ es un árbol. Para esto, sea $x \in T_r$. Si $x \in T_p$, entonces $T_r(x) = T_p(x)$ es finito y totalmente ordenado por $\leq_r$. En el caso en que $x \in T_r \setminus T_p$, tenemos que $x = x_a$, para alguna $a \in A_p \cup A_q$. De esta forma, $T_r(x_a) = (a \cap T) \cup \{x_a\}$ es finito y totalmente ordenado por $\leq_r$. Resta verificar que la raíz de $T_p$ es la raíz de $T_r$. Para esto, sea $y$ la raíz de $T_p$ y fijemos $x \in T_r$. Si $x \in T_p$, entonces $y \leq_r x$, porque $\leq_r$ es una extensión de $\leq_p$ y $y \leq_p x$. Si $x \in T_r \setminus T_p$, entonces existe $a \in A_p \cup A_q$ tal que $x = x_a$. Dado que $a \cap T_p$ es una rama de $T_p$, inferimos que $y \in a \cap T_p$ y por ende, $y \leq_r x_a$. Así, $T_r$ es un árbol.

Ahora veamos que $T_r$ es binario. Como $T_p$ es binario, bastará con ver que no existen $x \in T_p$ y $a, b, c \in A_p \cup A_q$, distintos, tales que $x_a$, $x_b$ y $x_c$ sean sucesores inmediatos de $x$. Supongamos que sí existen. De esto se infiere que

$$T_p(x) = T_r(x_a) \setminus \{x_a\} = T_r(x_b) \setminus \{x_b\} = T_r(x_c) \setminus \{x_c\}$$

Lo anterior implica que $a \cap T_p = b \cap T_p = c \cap T_p$. Pero esto último contradice la afirmación hecha anteriormente. Así, $T_r$ es un árbol binario.

Tomemos $r = (T_r, \leq_r, A_p \cup A_q)$. De esta forma $T_r$ es un árbol tal que todas sus ramas provienen de una rama de $T_p$ más un elemento. Dado que todas las ramas de $T_p$ tienen la misma cardinalidad, inferimos que $r \in \mathbb{P}$. Además, $r \leq_{\mathbb{P}} p$

y $r \leq_{\mathbb{P}} q$. Entonces, $C$ no es anticadena. Por lo tanto, todas las anticadenas de $\mathbb{P}$ son numerables.

Sea $\{a_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una enumeración de los elementos de $\mathcal{J}$. Para cada $\alpha \in \omega_1$ definamos:

$$D_\alpha = \{p \in \mathbb{P} : \exists \beta \in \omega_1 \setminus \alpha(a_\beta \in A_p)\}$$

**Afirmación 4:** $D_\alpha$ es denso en $\mathbb{P}$

Para probar la afirmación anterior, fijemos $p \in \mathbb{P}$. Entonces $|B(p)| = \omega_1$ y por ende, $|\mathcal{J} \cap B(p)| = \omega_1$ (véase la afirmación 2). Por esto último, existe $\beta \in \omega_1 \setminus \alpha$ tal que $a_\beta \in \mathcal{J} \cap B(p)$. Así, $a_\beta \cap T_p$ es una rama de $T_p$. Ahora bien, como $A_p \cup \{a_\beta\} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $A_p \cup \{a_\beta\}$ es casi ajena. De esta forma, existe $k \in \omega$ tal que $T_p \subseteq k$ y para cualesquiera $a, b \in A_p \cup \{a_\beta\}$, distintos, se tiene que $(a \setminus k) \cap (b \setminus k) = \emptyset$. Para cada $a \in A_p \cup \{a_\beta\}$ elijamos $x_a \in a \setminus k$. Definamos:

$$T_q = T_p \cup \{x_a : a \in A_p \cup \{a_\beta\}\}$$

También definamos el orden:

$$\leq_q = \leq_p \cup \{(t, x_a) : a \in A_p \cup \{a_\beta\} \land t \in T_p \cap a\}$$

Observamos que $\leq_q$ es una extención de $\leq_p$ tal que $x \leq_q x_a$, siempre que $a \in A_p \cap \{a_\beta\}$ y $x \in a \cap T_p$. Usando un argumento equivalente al que empleamos en la prueba de la afirmación 3, se verifica que $T_q$ es un árbol. Veamos que $T_q$ es binario. Como $T_p$ es binario, bastará con verificar que no existen $x \in T_p$ y $a, b, c \in A_p \cup \{a_\beta\}$, distintos, tales que $x_a$, $x_b$ y $x_c$ sean sucesores inmediatos de $x$. Supongamos que sí existen. Como $a, b, c \in A_p \cup \{a_\beta\}$, se tiene que $A_p$ contiene al menos dos de estos conjuntos. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a, b \in A_p$. De esto se infiere que $T_p(x) = T_q(x_a) \setminus \{x_a\} = T_q(x_b) \setminus \{x_b\}$ y por ende, $a \cap T_p = b \cap T_p$. Pero esto último contradice que $T_p$ cumple la propiedad 6. Así, $T_q$ es un árbol binario. Tomemos $q = (T_q, \leq_q, A_p \cup \{a_\beta\})$. Como $A_p \cup \{a_\beta\} \subseteq \mathcal{J}$, se sigue que $q \in \mathbb{P}$. De esta forma, $q \in D_\alpha$ y $q \leq_{\mathbb{P}} p$. Por lo tanto, $D_\alpha$ es denso en $\mathbb{P}$.

Para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ definamos:

$$E_n = \{p \in \mathbb{P} : n \leq \mathrm{ht}(T_p)\}$$

**Afirmación 5:** $E_n$ es denso en $\mathbb{P}$

Para probar la afirmación anterior, fijemos $p \in \mathbb{P}$. Como $A_p \subseteq \mathcal{A}$, se tiene que $A_p$ es casi ajena. De esta forma, existe $k \in \omega$ tal que $T_p \subseteq k$ y para cualesquiera $a, b \in A_p$: si $a \neq b$, entonces $(a \setminus k) \cap (b \setminus k) = \emptyset$. Para cada $a \in A_p$ elijamos $x_a^1, x_a^2, ..., x_a^n \in a \setminus k$, distintos entre sí. Definamos:

$$T_q = T_p \cup \{x_a^i : a \in A_p, 0 < i \leq n\}$$

También definamos $\leq_q$, el orden que se obtiene por extender a $\leq_p$, de tal modo que para cualesquiera $a \in A_p$ y $x \in a \cap T_p$, se tenga que:

$$x \leq_q x_a^1 \leq_q x_a^2 \leq_q ... \leq_q x_a^n$$

Por lo anterior, $T_q$ es un árbol tal que para cada $a \in A_p$ se tiene que:

$$T_q(x_a^n) = (a \cap T_p) \cup \{x_a^1, x_a^2, ..., x_a^n\}$$

Observamos que $T_q(x_a^n)$ tiene cardinalidad $\text{ht}(T) + n$, para cada $a \in A_p$, pues del inciso 4 de la definición de $P$ sabemos que $a \cap T_p$ tiene cardinalidad $\text{ht}(T)$. Además, si $R$ es una rama de $T_p$, necesariamente $R = T_q(x_a^n)$ para alguna $a \in A_p$. Por esto último, todas las ramas de $T_q$ tienen cardinalidad $\text{ht}(T_p) + n$. Tomemos $q = (T_q, \leq_q, A_p)$. Como $A_p \subseteq \mathcal{J}$ es no vacío, $q \in \mathbb{P}$. Así, $q \in E_n$ y $q \leq_{\mathbb{P}} p$. Por lo tanto, $E_n$ es denso en $\mathbb{P}$.

Ahora definamos:

$$\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \cup \{E_n : n \in \omega \setminus \{0\}\}$$

Como $\mathcal{D}$ es una familia de densos en $\mathbb{P}$ tal que $|\mathcal{D}| = \omega_1$, entonces por MA($\omega_1$) existe un filtro $G \subseteq \mathbb{P}$ que intersecta a cada denso de la familia $\mathcal{D}$. Definamos:

$$T = \bigcup_{p \in G} T_p$$

También definamos

$$\leq_T = \bigcup_{p \in G} \leq_p$$

**Afirmación 6:** $\langle T, \leq_T \rangle$ es un árbol que extiende a $\langle T_p, \leq_p \rangle$, para cada $p \in G$.

Comencemos probando que $\langle T, \leq_T \rangle$ es un orden parcial. Si $x \in T$, entonces existe $p \in G$ tal que $x \in T_p$. Así, $(x,x) \in \leq_p \subseteq \leq_T$. Ahora bien, si $x, y \in T$ son tales que $x \leq_T y$ y $y \leq_T x$, existen $p, q \in G$ tales que $(x,y) \in \leq_p$ y $(y,x) \in \leq_q$. Dado que $G$ es filtro, existe $r \in G$ tal que $r \leq_{\mathbb{P}} p$ y $r \leq_{\mathbb{P}} q$. De esta forma, $(x,y), (y,x) \in \leq_r$. Como $\langle T_r, \leq_r \rangle$ es parcialmente ordenado, concluimos que $x = y$. Sean $x, y, z \in T$ tales que $x \leq_T y \leq_T z$. Existen $p, q \in G$ tales que $(x,y) \in \leq_p$ y $(y,z) \in \leq_q$. Dado que $G$ es un filtro, existe $r \in G$ tal que $r \leq_{\mathbb{P}} p$ y $r \leq_{\mathbb{P}} q$. Así, $(x,y), (y,z) \in \leq_r$ y por ende, $(x,z) \in \leq_r \subseteq \leq_T$. Por lo tanto, $\langle T, \leq_T \rangle$ es un orden parcial.

Fijemos $x \in T$ y $p \in G$ tales que $x \in T_p$. Veamos que $T(x) = T_p(x)$. Como $\leq_p \subseteq \leq_T$, se tiene que $T_p(x) \subseteq T(x)$. Resta verificar que $T(x) \subseteq T_p(x)$. Para esto, sea $y \in T(x)$. Entonces existe $q \in G$ tal que $(y,x) \in \leq_q$. Dado que $G$ es un filtro, existe $r \in G$ tal que $r \leq_{\mathbb{P}} p$ y $r \leq_{\mathbb{P}} q$. De esta forma, $\langle T_r, \leq_r \rangle$ es una extensión de los árboles $\langle T_p, \leq_p \rangle$ y $\langle T_q, \leq_q \rangle$. Así, $(y,x) \in \leq_q \subseteq \leq_r$ y por ende, $y \in T_r(x) = T_p(x)$. De esto concluimos que $T(x) = T_p(x)$.

Por lo probado en el párrafo anterior observamos que, si $x \in T$, entonces existe $p \in G$ tal que $T(x) = T_p(x)$. De esta forma, $T(x)$ es finito y totalmente ordenado por $\leq_T$, pues $\leq_p \subseteq \leq_T$.

Sea $y$ la raíz de $T_p$. Veamos que $y$ también es la raíz de $T$. Para esto, sea $z \in T$. Así, existe $q \in G$ tal que $z \in T_q$. Dado que $G$ es un filtro, existe $r \in G$ tal que $r \leq_{\mathbb{P}} p$ y $r \leq_{\mathbb{P}} q$. Por lo anterior, $y, z \in T_r$ y $T_r(y) = T_p(y) = \{y\}$. Sea $t$ la raíz de $T_r$. Veamos que $t = y$. En efecto, como $t \leq_r y$, tenemos que $t \in T_r(y) = \{y\}$. Entonces $(y, z) \in \leq_r \subseteq \leq_T$, pues $y = t$ es la raíz de $T_r$. Por lo tanto, $y \leq_T z$. Con esto concluimos que $T$ es un árbol. Además, $T$ extiende a $T_p$, para cada $p \in G$.

**Afirmación 7:** $T$ es un árbol binario, bien podado y de altura $\omega$.

Comencemos probando que $T$ es bien podado y de altura $\omega$. Si $x \in T$, entonces hay algún $p \in G$ tal que $x \in T_p$. Sea $n = \mathrm{ht}(x, T_p) + 1$. Como $G$ es $\mathcal{D}$-genérico, existe $q \in E_n \cap G$. De esta forma, podemos encontrar $r \in G$ tal que $r \leq_{\mathbb{P}} p$ y $r \leq_{\mathbb{P}} q$, pues $G$ es un filtro. Así, $x \in T_p \subseteq T_r$. Dado que $q \in E_n$, de esto se infiere que todas las ramas de $T_q$ tienen cardinalidad al menos $n$ (véase el inciso 4 de la definición de $P$). De esta forma, $T_r$ también es un árbol tal que todas sus ramas son de altura al menos $n$, pues $T_r$ es una extensión de $T_q$. Además, $\mathrm{ht}(x, T_r) = \mathrm{ht}(x, T_p) < n$, porque $T_r$ es una extensión de $T_p$. Así, $T_r(x)$ no puede ser una rama de $T_r$. Por lo anterior, existe $y \in T_r$ tal que $x \leq_r y$ y $x \neq y$. Por otra parte sabemos que $T$ es una extensión de $T_r$. De lo anterior se infiere que $x \in T_r(y) = T(y)$. Entonces por el inciso 4 de la proposición 3.5.4, existe $z \in T(y)$, un sucesor inmediato de $x$. Por lo tanto, $T$ es bien podado. Además, por el inciso 11 de la proposición 3.5.4, $T$ es de altura $\omega$.

Mostremos que $T$ es binario. Si no lo fuera, existirían $x \in T$ y $x_1, x_2, x_3 \in T$, distintos, tales que $x_1$, $x_2$ y $x_3$ son sucesores inmediatos de $x$. Así, existen $p, p_1, p_2, p_3 \in G$ tales que $x \in T_p$ y $x_i \in T_{p_i}$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Como $G$ es un filtro, existe $q \in G$ tal que $q \leq_{\mathbb{P}} p$ y $q \leq_{\mathbb{P}} p_i$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. De esta forma, $\langle T_q, \leq_q \rangle$ es una extensión de $\langle T_p, \leq_p \rangle$ y de $\langle T_{p_i}, \leq_{p_i} \rangle$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Por esto último, $x, x_1, x_2, x_3 \in T_q$ y por ende, $x_1$, $x_2$ y $x_3$ son sucesores inmediatos de $x$ en $T_q$. Así, $T_q$ no es un árbol binario, lo cual contradice que $q$ satisface la condición 3. Por lo tanto, $T$ es un árbol binario.

Ahora definamos:

$$\mathcal{B} = \bigcup_{p \in G} A_p$$

**Afirmación 8:** $\mathcal{B}$ es una familia no contable tal que $a \cap T$ es una rama cofinal de $T$, para cada $a \in \mathcal{B}$.

Veamos que $\mathcal{B}$ no es contable. Dado que $A_p \subseteq \mathcal{J}$, para cada $p \in \mathbb{P}$, tenemos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{J} = \{a_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Bastará con probar que para cada $\alpha < \omega_1$, existe $\beta \in \omega_1$ tal que $\alpha \leq \beta$ y $a_\beta \in \mathcal{B}$. Fijemos $\alpha < \omega_1$. Como $G$ es $\mathcal{D}$-genérico, existe $q \in G \cap D_\alpha$. De esta forma, existe $\beta \in \omega_1$ tal que $\alpha \leq \beta$ y $a_\beta \in A_q \subseteq \mathcal{B}$.

Veamos que $a \cap T$ es una rama cofinal de $T$, para cada $a \in \mathcal{B}$. Fijemos $a \in \mathcal{B}$. Probaremos que $a \cap T$ satisface las hipótesis del lema 3.5.6. Para esto, fijemos $n \in \omega \setminus \{0\}$ y veamos que $\mathrm{Lev}(n, T) \cap a \neq \emptyset$. Como $a \in \mathcal{B}$, entonces existe $p \in G$ tal que $a \in A_p$ y $a \cap T_p$ es una rama de $T_p$. Dado que $G$ es $\mathcal{D}$-genérico, existe $q \in G \cap E^n$. De esta forma, $n \leq \mathrm{ht}(T_q)$. Así, existe $r \in G$ tal que $r \leq_{\mathbb{P}} p$ y $r \leq_{\mathbb{P}} q$, porque $G$ es un filtro. Por lo anterior, $\langle T_r, \leq_r \rangle$ es una extensión de los árboles $\langle T_p, \leq_p \rangle$ y $\langle T_q, \leq_q \rangle$. Además, $a \in A_p \subseteq A_r$ y por ende, $a \cap T_r$ es una rama de $T_r$. Así, $|\mathrm{Lev}(n, T_r) \cap a| = 1$ (véase el inciso 5 de la proposición 3.5.4). Dado que $\langle T, \leq_T \rangle$ es una extensión de $\langle T_r, \leq_r \rangle$, se sigue que $\mathrm{Lev}(n, T) \cap a \neq \emptyset$, pues $\mathrm{Lev}(n, T_r) \subseteq \mathrm{Lev}(n, T)$.

Ahora veamos que para cada $n \in \omega \setminus \{0\}$ no puede ocurrir que $1 < |\mathrm{Lev}(n, T) \cap a|$. Fijemos $n \in \omega \setminus \{0\}$ y sean $x, y \in \mathrm{Lev}(n, T) \cap a$. Entonces existen $p, q, r \in G$ tales que $a \in A_p$, $x \in T_q$ y $y \in T_r$. Como $G$ es un filtro, existe $s \in G$ tal que $s \leq_{\mathbb{P}} p$, $s \leq_{\mathbb{P}} q$ y $s \leq_{\mathbb{P}} r$. Por lo anterior, $a \in A_p \subseteq A_s$ y $\langle T_s, \leq_s \rangle$ es una extensión de los árboles $\langle T_q, \leq_q \rangle$ y $\langle T_r, \leq_r \rangle$. Así, $a \cap T_s$ es una rama de $T_s$ y $x, y \in T_s$. De esta forma $x, y \in a \cap T_s$. Por otra parte, $\mathrm{ht}(x, T_s) = \mathrm{ht}(y, T_s) = n$, pues $\mathrm{ht}(x, T) = \mathrm{ht}(y, T) = n$ y $\langle T, \leq_T \rangle$ es una extensión de $\langle T_s, \leq_s \rangle$. Entonces $x, y \in \mathrm{Lev}(n, T_s)$. Como $a \cap T_s$ es una rama de $T_s$ y $x, y \in a \cap T_s$, del inciso 5 de la proposición 3.5.4 concluimos que $x = y$.

Por último, veamos que $a \cap T$ satisface la condición 2 del lema 3.5.6. Para esto, fijemos $x \in a \cap T$. Así, existen $p, q \in G$ tales que $a \in A_p$ y $x \in T_q$. Como $G$ es un filtro, existe $r \in G$ tal que $r \leq_{\mathbb{P}} p$ y $r \leq_{\mathbb{P}} q$. De esta forma, $x \in T_q \subseteq T_r$ y $a \in A_p \subseteq A_r$. Además, $a \cap T_r$ es una rama de $T_r$. Así, por el inciso 5 de la proposición 3.5.4, se sigue que $T_r(x) \subseteq a \cap T_r$. Dado que $\langle T, \leq_T \rangle$ es una extensión de $\langle T_r, \leq_r \rangle$, concluimos que $T(x) = T_r(x) \subseteq a \cap T$. Por lo tanto, $a \cap T$ es una rama cofinal de $T$. □

Finalmente estamos en posibilidades de probar el resultado principal de esta sección.

**Proposición 3.5.9.** MA($\omega_1$) *implica que no existen Q-sucesiones fuertes de cardinalidad* $\omega_1$ *en* $\mathcal{P}(\omega)/fin$.

DEMOSTRACIÓN: Por reducción al absurdo, supongamos que en $\mathcal{P}(\omega)/fin$ existe $S$, una Q-sucesión fuerte de cardinalidad $\omega_1$. Entonces $S \setminus \{[\emptyset]\}$ también es una Q-sucesión fuerte de cardinalidad $\omega_1$ (véase la proposición 2.4.6). Sea $\mathcal{A}$ un sistema completo de representantes para $S \setminus \{\emptyset\}$, es decir, $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ es tal que $\{[a] : a \in \mathcal{A}\} = S \setminus \{[\emptyset]\}$ y para cualesquiera $a, b \in \mathcal{A}$ se tiene que $a \neq b$ implica $[a] \neq [b]$. Así, por la proposición 2.4.5, $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena. De esta forma, por la proposición 3.5.8, existen un árbol $\langle T, \leq_T \rangle$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tales que:

1. $\langle T, \leq_T \rangle$ es binario, bien podado y de altura $\omega$.

2. $|\mathcal{B}| = \omega_1$.

3. $a \cap T$ es una rama cofinal de $T$, para cada $a \in \mathcal{B}$.

Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, se tiene que$\{[a] : a \in \mathcal{B}\}$ es una Q-sucesión fuerte de cardinalidad $\omega_1$ en $\mathcal{P}(\omega)/fin$ (véase la proposición 2.4.6). Así, por la proposición 2.4.7, $\{[a \cap T] : a \in \mathcal{B}\}$ es una Q-sucesión fuerte. Además, $[a \cap T] \neq [\emptyset]$ para cada $a \in \mathcal{B}$, pues $a \cap T$ es una rama cofinal de $T$ y $\mathrm{ht}(T) = \omega$. De esta forma, para cualesquiera $a, b \in \mathcal{B}$ tales que $a \neq b$, tenemos que $a \cap b$ es finito, porque $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ y $\mathcal{A}$ es casi ajena. Por lo anterior, $(a \cap T) \cap (b \cap T)$ es finito. Dado que $|a \cap T| = |b \cap T| = \omega$, concluimos que $[a \cap T] \neq [b \cap T]$. Por lo tanto, $\{[a \cap T] : a \in \mathcal{B}\}$ tiene cardinalidad $\omega_1$. Pero esto último contradice la proposición 3.5.5. $\square$

En el 2012, David Chodounský obtuvo un modelo de ZFC en donde existe una Q-sucesión fuerte de cardinalidad $\omega_1$ y en el cual existe una familia dominante de funciones cuya cardinalidad es $\omega_1$ (véase [1]).

## 3.6. MA y Q-conjuntos

En la sección 2.4 mencionamos algunas conexiones existentes entre los espacios de Moore y el problema de Katowice. De forma particular, hablamos de Q-conjuntos (véase definición 2.4.13). Para complementar dicha exposición hemos incluido esta sección.

En la siguiente proposición $\kappa$ denotará un cardinal infinito.

**Proposición 3.6.1** (MA($\kappa$))**.** *Todo espacio segundo numerable de Hausdorff cuya cardinalidad es a lo más $\kappa$ es un Q-conjunto.*

Demostración: Sea $X$ un espacio segundo numerable de Hausdorff tal que $|X| \leq \kappa$. Fijemos $M \subseteq X$. Probaremos que $M$ puede expresarse como la intersección de una familia contable de abiertos de $X$. Para esto, sea $\mathcal{B}$ una base numerable de $X$. Definamos $\mathbb{P}$ como la familia de parejas $p = (F_p, B_p)$ tales que:

1. $F_p$ es un subconjunto finito de $(X \setminus M) \times \omega$.

2. $B_p$ es un subconjunto finito de $\mathcal{B} \times \omega$.

3. Si $(x, n) \in F_p$ y $(U, n) \in B_p$, entonces $x \notin U$.

Para cualesquiera $p, q \in \mathbb{P}$ hagamos $p \leq_{\mathbb{P}} q$ si $F_q \subseteq F_p$ y $B_q \subseteq B_p$. Veamos que $\mathbb{P}$ con el orden anterior es ccc. Para esto, sea $A \subseteq \mathbb{P}$, no numerable. Probaremos que $A$ no es una anticadena. Como $|\mathcal{B} \times \omega| = \omega$ y $A$ es no numerable, necesariamente existen elementos distintos $p, q \in A$ tales que $B_p = B_q$. Definamos $r = (F_p \cup F_q, B_p)$. Claramente $r \in \mathbb{P}$ y es tal que $r \leq_{\mathbb{P}} p$ y $r \leq_{\mathbb{P}} q$.

Para cada $x \in X \setminus M$ definamos:

$$D_x = \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega((x,n) \in F_p)\}$$

Veamos que $D_x$ es denso en $\mathbb{P}$. Para esto, fijemos $q \in \mathbb{P}$. Como $F_q$ y $B_q$ son conjuntos finitos, existe algún $n \in \omega$ tal que ningún elemento de $F_q \cup B_q$ tiene como segunda coordenada a $n$. Elijamos $p = (F_q \cup \{(x,n)\}, B_q)$. Así, $p$ satisface las condiciones 1, 2 y 3 (la condición 3 se sigue porque ningún elemento de $B_q$ tiene a $n$ como segunda coordenada). De esta forma, $p \in D_x$ y $p \leq_{\mathbb{P}} q$.

Ahora bien, para cualesquiera $x \in M$ y $n \in \omega$ definamos:

$$E_x^n = \{p \in \mathbb{P} : \exists U \in \mathcal{B}((U,n) \in B_p \wedge x \in U)\}$$

Veamos que $E_x^n$ es denso en $\mathbb{P}$. Para esto, fijemos $q \in \mathbb{P}$. Como $X$ es Hausdorff, para cada $y \in \mathrm{dom}(F_q)$ (estamos pensando a $F_q$ como una relación y $\mathrm{dom}(F_q)$ es la familia de las primeras coordenadas de los elementos de $F_q$), existe $V_y$, abierto de $X$ tal que $x \in V_y$ y $y \notin V_y$ (la condición 1 nos garantiza que $x \notin \mathrm{dom}(F_q)$). Sea $U = \bigcap_{y \in \mathrm{dom}(F_q)} V_y$. Como $\mathrm{dom}(F_q)$ es finito, se tiene que $U$ es un abierto. Además, $\mathrm{dom}(F_q) \cap U = \emptyset$ y $x \in U$. Hagamos $p = (F_q, B_q \cup \{(U,n)\})$. Dado que $\mathrm{dom}(F_q) \cap U = \emptyset$, se sigue que $p$ satisface la condición 3. Así, $p \in E_x^n$ y $p \leq_{\mathbb{P}} q$.

Definamos:

$$\mathcal{D} = \{D_x : x \in X \setminus M\} \cup \{E_x^n : x \in M \wedge n \in \omega\}$$

Como $|X| \leq \kappa$, tenemos que $\mathcal{D}$ es una familia de a lo más $\kappa$ conjuntos densos en $\mathbb{P}$. Por MA($\kappa$) existe $G$, un filtro $\mathcal{D}$-genérico. Para cada $n \in \omega$ definamos

$$U_n = \bigcup \{U : \exists p \in G[(U,n) \in B_p]\}$$

Veamos que $M = \bigcap_{n \in \omega} U_n$. Comencemos verificando que $M \subseteq \bigcap_{n \in \omega} U_n$. Para esto, fijemos $x \in M$. Probaremos que $x \in U_n$, para cada $n \in \omega$. Sea $n \in \omega$ arbitrario. Como $G$ es $\mathcal{D}$-genérico, existe $p \in G \cap E_x^n$. De esta forma, existe $(U,n) \in B_p$ tal que $x \in U$, porque $p \in E_x^n$. Por lo anterior, $x \in U \subseteq U_n$, pues $p \in G$ y $(U,n) \in B_p$.

Resta verificar que $\bigcap_{n \in \omega} U_n \subseteq M$. Probaremos que $X \setminus M \subseteq X \setminus (\bigcap_{n \in \omega} U_n)$. Para esto, fijemos $x \in X \setminus M$. Dado que $G$ es $\mathcal{D}$-genérico, existe $p \in G \cap D_x$. Entonces existe $m \in \omega$ tal que $(x,m) \in F_p$. Veamos que $x \notin U_m$. Sea $U \in \mathcal{B}$ tal que existe $q \in G$ para el cual $(U,m) \in B_q$. Como $G$ es un filtro, existe $r \in G$ tal que $r \leq_{\mathbb{P}} p$ y $r \leq_{\mathbb{P}} q$. Así, $(x,m) \in F_p \subseteq F_r$ y $(U,m) \in B_q \subseteq B_r$. Por el inciso 3, $x \notin U$. Lo anterior implica que $x \notin U_m$ y por ende, $x \notin \bigcap_{n \in \omega} U_n$. $\square$

# Índice de Símbolos

# Índice alfabético

# Bibliografía


[1] CHODOUNSKÝ, DAVID. *Strong Q-sequences and small $\mathfrak{d}$,* Topology Appl. 159 (2012), 2942–2946.

[2] DE VRIES, HARM. *The Katowice Problem,* tesis de maestría, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden, 2012.

[3] DUGUNDJI, JAMES. *Topology.* Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass. 1966 xvi + 447 pp.

[4] JONES, F. B. *Concerning normal and completely normal spaces.* Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937)

[5] KUNEN, KENNETH. *Set Theory. A introduction to Independence Proofs,* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Company, 1980, xvi + 313 pp

[6] NYIKOS, PETER. *Čech-Stone Remainders of Discrete Spaces,* in: Open Problems in Topology II, Elliott Pearl, ed., Elsevier B.V., Amsterdam, 2007, 207–216.

[7] STEEN, L. A. Y SEEBACH, J. A., JR.*Counterexamples in Topology.* New York: Dover, 1995.

[8] STEPRANS, JURIS. *Strong Q-sequences and variations on Martin's axiom.* Canad. J. Math 37.4 (1985): 730–746.

[9] TALL, FRANKLIN D. *Normality versus collectionwise normality* en Handbook of set-theoretic topology, Kenneth Kunen y Jerry E. Vaughan (eds.), Elsevier B. V., Amsterdam, 1984, pp. 685–732.

[10] TODORCEVIC, STEVO *Topics in topology.* Lecture Notes in Mathematics, 1652, Springer-Verlag, Berlín, 1997.

[11] ZORN, MAX. *A remark on method in transfinite algebra.* Bulletin of the American Mathematical Society 41 (1935), no. 10, 667–670.