



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS  
(ASTRONOMÍA).

**DINÁMICA DE CHOQUES INTERNOS EN JETS  
RELATIVISTAS POR FUENTES VARIABLES.**

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO(A) EN CIENCIAS (ASTROFÍSICA)

PRESENTA:

**ADRIANA GONZÁLEZ JUÁREZ.**

ASESORAS:

**DRA. S. JANE ARTHUR CHADWICK.**

**DRA. SUSANA LIZANO SOBERÓN.**

CENTRO DE RADIOASTRONOMÍA Y ASTROFÍSICA, UNAM.

MORELIA MICHOACÁN, NOVIEMBRE DE 2014.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice general

<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
<b>2. Métodos Numéricos.</b>	<b>5</b>
2.1. Código Newtoniano. . . . .	6
2.1.1. Ecuaciones de la Hidrodinámica Compresible Clásica. . . . .	6
2.1.2. Discretización en el espacio y el tiempo. . . . .	7
2.1.3. Método de Godunov. . . . .	8
2.1.4. Paso de tiempo. . . . .	10
2.1.5. Orden espacial. . . . .	10
2.1.6. Orden de tiempo. . . . .	11
2.1.7. Condiciones de frontera. . . . .	11
2.1.8. Procedimiento esquemático. . . . .	12
2.1.9. Problema de prueba para el código, régimen clásico. . . . .	13
2.2. Código Relativista. . . . .	15
2.2.1. Sistema de Ecuaciones Hidrodinámicas Relativistas. . . . .	17
2.2.2. Paso de tiempo. . . . .	18
2.2.3. Problemas de prueba para el código, régimen relativista. . . . .	18
<b>3. Solución Analítica.</b>	<b>25</b>
3.1. Dinámica de choques en jets relativistas. . . . .	25
3.1.1. Solución de ecuaciones relativistas para un perfil de velocidad de doble escalón. . . . .	26
3.1.2. Solución de ecuaciones relativistas para un perfil de velocidad con variación sinusoidal. . . . .	31

<b>4. Simulaciones Numéricas.</b>	<b>37</b>
4.1. Hidrodinámica de superficies de trabajo y estructuras de choque interno, límite clásico. . . . .	38
4.1.1. Condiciones Iniciales del Fluido. . . . .	38
4.1.2. Evolución hidrodinámica. . . . .	39
4.1.3. Estructura de choque interno. . . . .	40
4.1.4. Dinámica de las estructuras de choque interno. . . . .	46
4.1.5. Luminosidades. . . . .	52
4.1.6. Comparación con resultados previos. . . . .	64
4.2. Hidrodinámica de superficies de trabajo y estructuras de choque interno, límite relativista. . . . .	70
4.2.1. Condiciones Iniciales del Fluido. . . . .	70
4.2.2. Evolución hidrodinámica. . . . .	71
4.2.3. Estructura de choque interno. . . . .	73
4.2.4. Dinámica de las superficies de trabajo. . . . .	73
4.2.5. Luminosidades. . . . .	76
4.2.6. Luminosidades relativistas y clásicas. . . . .	86
4.2.7. Comparación con resultados previos. . . . .	86
<b>5. Resumen y Trabajo a Futuro.</b>	<b>88</b>
5.0.8. Trabajo a Futuro. . . . .	91
<b>A. Análisis Dimensional.</b>	<b>93</b>
<b>Bibliografía.</b>	<b>96</b>

# Índice de figuras

2.1.	Esquema gráfico del método de Volúmenes Finitos. Se observa una celda $x_i$ de tamaño $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ , cuya solución aproximada al tiempo $t_n$ es $\mathbf{Q}_i^n$ . Se hace evolucionar un paso de tiempo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ y se encuentra la nueva solución aproximada $\mathbf{Q}_i^{n+1}$ . . . . .	8
2.2.	Familia de soluciones para el problema de Riemann. Se denotan los estados derecho e izquierdo por las etiquetas $L$ y $R$ , y por un asterisco a las cantidades resueltas. . . . .	9
2.3.	Problema de prueba de Sod en el régimen clásico. Solución numérica para el caso que combina una onda de choque (que evoluciona hacia la derecha) y una de rarefacción (que evoluciona hacia la izquierda), en dos instantes de tiempo. El primer pánel (de arriba hacia abajo) muestra a la variable de velocidad, el segundo de densidad y el tercero de presión, con su discontinuidad inicial en $x = 0.5$ . La línea continua grafica el tiempo $t = 1.78 \times 10^{-2}$ y la línea punteada un tiempo evolucionado $t = 6.99 \times 10^{-2}$ ; las etiquetas R, S y C en el segundo pánel de la variable de densidad, identifican a las ondas de rarefacción, de choque y a la discontinuidad de contacto, respectivamente. . . . .	14

2.4. Problema de prueba de Sod en el régimen clásico. Comparación entre la solución numérica y analítica para el caso que combina una onda de choque (que evoluciona hacia la derecha) y una de rarefacción (que evoluciona hacia la izquierda). El primer pánel (de arriba hacia abajo) muestra a la variable de velocidad, el segundo de densidad y el tercero de presión, con su discontinuidad inicial en $x = 0.5$ . En los tres p�neles se grafica el tiempo evolucionado $t = 6.98 \times 10^{-2}$ ; la solución numérica corresponde a la línea segmentada y la solución analítica a la línea continua. Se han utilizado 1000 celdas. . . . .	16
2.5. Problema de prueba de Sod. Solución numérica relativista para el caso que combina una onda de choque (que evoluciona hacia la derecha) y una de rarefacción (que evoluciona hacia la izquierda) en dos instantes de tiempo. El primer pánel (de arriba hacia abajo) muestra a la variable de velocidad, el segundo de densidad y el tercero de presión, con discontinuidad inicial en $x = 0.5$ . La línea continua grafica el tiempo $t = 1.001 \times 10^{-1}$ y la línea punteada un tiempo evolucionado $t = 3.005 \times 10^{-1}$ . . . . .	20
2.6. Problema de prueba de Sod. Soluciones numérica y exacta relativistas, para el caso que combina una onda de choque (que evoluciona hacia la derecha) y una de rarefacción (que evoluciona hacia la izquierda), en el instante de tiempo $t = 3.005 \times 10^{-1}$ . El primer pánel (de arriba hacia abajo) muestra a la variable de velocidad, el segundo de densidad y el tercero de presión, con discontinuidad inicial en $x = 0.5$ . La línea continua grafica a la solución exacta y la línea punteada a la solución numérica. . . . .	21

2.7.	Problema relativista de prueba de Schneider. Se presenta el caso que combina una onda de choque (que evoluciona hacia la derecha) y una de rarefacción (que evoluciona hacia la izquierda) en dos instantes de tiempo; el primer pánel (de arriba hacia abajo) muestra a la velocidad, el segundo a la densidad y el tercero a la presión, con discontinuidad inicial en $x = 0.5$ . La línea continua grafica el tiempo $t = 1.001 \times 10^{-1}$ y la línea punteada un tiempo evolucionado $t = 3.002 \times 10^{-1}$ . . . . .	22
2.8.	Problema de prueba de Schneider. Soluciones numérica y exacta relativistas para el caso que combina una onda de choque (que evoluciona hacia la derecha) y una de rarefacción (que evoluciona hacia la izquierda) en el instante de tiempo $t = 3.002 \times 10^{-1}$ . El primer pánel (de arriba hacia abajo) muestra a la variable de velocidad, el segundo de densidad y el tercero de presión, con discontinuidad inicial en $x = 0.5$ . La línea continua grafica a la solución exacta y la línea punteada a la solución numérica. . . . .	24
3.1.	Función de escalón doble. Aquí $\beta_0$ es un valor constante, diferente de cero, de la velocidad de inyección del fluido; $\beta_l$ ( $0 < \beta_l < \beta_0$ ) es un valor constante con que se ha inyectado material a una velocidad baja y $\beta_r$ ( $> \beta_0$ ) a una velocidad alta; $\eta$ es un valor constante ( $< 1$ ), $\tau$ es el tiempo de inyección y $2\Delta\tau$ la duración de la inyección. . . . .	26
3.2.	Superficie de trabajo $WS$ en un tiempo $t$ y posición $x_{WS}(t)$ , estructurada por dos frentes de choque (líneas verticales continuas) y una discontinuidad de contacto (línea vertical discontinua). Aquí $\tau_l$ y $\tau_r$ son los tiempos en que el material lento y rápido, respectivamente, fueron inyectados y $\Delta\tau$ el lapso que duró la inyección. . . . .	27

3.3.	Dinámica de la superficie de trabajo para una función de doble escalón. En ambos paneles, la línea horizontal describe su evolución a velocidad constante que finaliza en $\tilde{t} = \tilde{t}_l^c$ (el tilde representa al tiempo normalizado por $\Delta\tau$ ) y la curva, la evolución subsecuente con una dinámica distinta, una fase acelerada, que termina a su vez en $\tilde{t} = \tilde{t}_r^c$ . El panel superior corresponde a los valores de la velocidad y el inferior a los factores de Lorentz que se van alcanzando durante la fase acelerada, graficados en función del tiempo $\tilde{t}$ . . . . .	32
3.4.	Gráfica de la velocidad de inyección como función de $\tau$ . Con líneas punteadas se grafica la función a minimizar (3.24) y con línea continua la función $\beta(\tau)$ (ecuación 3.23). Se indica el mínimo de la función que corresponde al valor de $\tau_i$ , alrededor del cual se buscan numéricamente los valores de $\tau_l$ y $\tau_r$ . . . . .	34
3.5.	Velocidad analítica de la superficie de trabajo como función del tiempo normalizado a $t^c$ , el tiempo en el que se formó la WS. Ambas gráficas muestran la dinámica de la superficie de trabajo con línea continua (central), del material rápido con línea punteada superior y del material lento con línea segmentada inferior. El primer panel (de arriba hacia abajo), muestra un caso de perturbación grande a la velocidad de $\eta = 0.25$ y el inferior, en la misma escala, un caso de perturbación menor $\eta = 0.1$ . Las velocidades $\beta_{l,r}$ tienden a la de la WS, la velocidad de la WS tiende al valor constante $\beta_0$ . . . . .	36
4.1.	Velocidad, densidad y presión en función de la posición para la evolución de una perturbación sinusoidal. La línea continua representa la perturbación positiva, la línea punteada representa la perturbación negativa. En este modelo $\gamma = 1.001$ y la amplitud de la perturbación es $\eta = 0.1$ . Están graficados los resultados a los cuatro tiempos: $t_1 = 32$ , $t_2 = 132$ , $t_3 = 250$ , $t_4 = 350$ . Ver descripción en el texto. . . . .	41
4.2.	Misma información que la figura 4.1 pero para $\gamma = 5/3$ y $\eta = 0.1$ . . .	42
4.3.	Misma información que la figura 4.1 pero para $\gamma = 1.001$ y $\eta = 0.5$ . .	43

4.4.	Misma información que la figura 4.1 pero para $\gamma = 5/3$ y $\eta = 0.5$ . . . . .	44
4.5.	Pulso del modelo de inyección rápido-lento. Se etiquetan por $A, B, C, D$ y $E$ los límites que dividen al pulso en secciones, las cuales determinan el comportamiento del material y la formación de estructuras internas, en función de la velocidad que tiene el material antes de integrarse a la malla computacional en $t = t_0$ . . . . .	45
4.6.	Pulso del modelo de inyección lento-rápido. Los límites que dividen al pulso en sus secciones correspondientes, están ahora etiquetados por $V, W, X, Y$ y $Z$ . . . . .	46
4.7.	Posición como función del tiempo, del centro de masa indicada por la línea central de color más oscuro y sus choques izquierdo (línea punteada inferior) y derecho (línea continua superior), para el valor de $\gamma = 1.001$ en el pánel superior y $\gamma = 5/3$ en el pánel inferior, para una perturbación positiva a la velocidad de amplitud 10 %. El cero del tiempo corresponde al instante en que todo el pulso se ha incorporado a la malla computacional. . . . .	48
4.8.	Se muestra la información de la Figura 4.7 pero para una amplitud de la perturbación de 50 %. . . . .	49
4.9.	Posición como función del tiempo, del centro de masa de la estructura de choque indicada por la línea central de color más oscuro y sus choques izquierdo (línea punteada inferior) y derecho (línea continua superior), para el valor de $\gamma = 1.001$ en el pánel superior y $\gamma = 5/3$ en el pánel inferior, para una perturbación negativa a la velocidad de amplitud 10 %. El cero del tiempo corresponde al instante en que todo el pulso se ha incorporado a la malla computacional. . . . .	50
4.10.	Se muestra la información de la Figura 4.9, para una amplitud de la perturbación del 50 %. . . . .	51

4.11. Velocidades del centro de masa (indicada por la gráfica central de color más oscuro), y de sus choques izquierdo (gráfica punteada inferior) y derecho (gráfica punteada superior), para el valor de $\gamma = 1.001$ (pánel superior) y $\gamma = 5/3$ (pánel inferior), en el caso de la perturbación positiva a la velocidad de amplitud 10%. . . . .	53
4.12. Misma información que en la Figura 4.11, en el caso de la perturbación positiva de amplitud 50%. . . . .	54
4.13. Misma información que en la Figura 4.11, en el caso de una perturbación negativa, de amplitud 10%. . . . .	55
4.14. Misma información que en la Figura 4.13, en el caso de una perturbación negativa, de amplitud 50%. . . . .	56
4.15. Luminosidades del caso positivo (pánel superior) y negativo (pánel inferior), con $\gamma = 5/3$ , y perturbación del 10%. . . . .	59
4.16. Misma información que en la Figura 4.15 pero para una amplitud de la perturbación del 50%. . . . .	60
4.17. Luminosidades del caso positivo (pánel superior) y negativo (pánel inferior), con $\gamma = 1.001$ , y perturbación del 10%. . . . .	61
4.18. Misma información que en la Figura 4.17 pero para una amplitud de la perturbación del 50%. . . . .	62
4.19. Energía total, interna y luminosidad como función del tiempo, para el caso rápido-lento, un valor de $\gamma = 5/3$ y una perturbación a la velocidad del 50%. . . . .	65
4.20. Misma información que en la figura 4.19, para el caso lento-rápido. . .	66
4.21. Misma información que en la figura 4.19, para un valor de $\gamma = 1.001$ . . .	67
4.22. Misma información que en la figura 4.21, para el caso lento-rápido. . .	68
4.23. Condición de frontera de tipo chorro de ingreso sinusoidal, densidad y presión. Aquí se muestra la evolución de los perfiles como función de la posición en los tres tiempos característicos $t_1 = 21.22$ , $t_2 = 42.56$ y $t_3 = 62.36$ , correspondientes a la velocidad inicial $\beta_0 = 0.5$ . La línea continua identifica al caso positivo, mientras que la línea punteada identifica su contraparte negativa. . . . .	74

4.24. Misma información que en la figura 4.23 pero para una velocidad inicial de $\beta_0 = 0.9$ , en los tres tiempos característicos $t_1 = 24.06$ , $t_2 = 40.69$ y $t_3 = 58.83$ . . . . .	75
4.25. Se muestran las posiciones del centro de masa indicada por la recta central de color más oscuro y sus choques izquierdo y derecho con líneas punteadas, en los casos positivo y negativo, para los dos valores de velocidad inicial $\beta_0 = 0.5$ , $\beta_0 = 0.9$ . . . . .	77
4.26. Se muestran las velocidades del centro de masa de la superficie de trabajo indicada por la recta central de color más oscuro y sus choques izquierdo y derecho, en el caso de las ondas positiva y negativa, para los dos valores de velocidad inicial $\beta_0 = 0.5$ , $\beta_0 = 0.9$ . . . . .	78
4.27. Curvas de luz para los dos pulsos: onda positiva (línea continua) y onda inversa (línea punteada), en los casos de velocidad inicial baja $\beta_0 = 0.5$ y alta $\beta_0 = 0.9$ . Recordar que <i>Tiempo</i> = 0 corresponde al instante en que la perturbación está completa dentro del dominio computacional. . . . .	81
4.28. Densidad de energía, energía interna y luminosidad como función del tiempo, para el caso de baja velocidad ( $\beta_0 = 0.5$ ) y perturbación positiva a la velocidad. . . . .	82
4.29. Misma información que en la Figura 4.28, para el caso de alta velocidad ( $\beta_0 = 0.9$ ). . . . .	83
4.30. Misma información que en la Figura 4.28, para el caso de baja velocidad ( $\beta_0 = 0.5$ ) y perturbación negativa. . . . .	84
4.31. Misma información que en la Figura 4.28, para el caso de alta velocidad ( $\beta_0 = 0.9$ ) y perturbación negativa. . . . .	85
5.1. Ejemplos de curvas de luz de brotes de rayos gama de larga duración, tomados de la Figura 1 de Borgonovo et al (2007). . . . .	91

# Resumen.

En esta tesis se estudia la formación y dinámica de las estructuras de choque internas que resultan de variaciones en la velocidad de inyección de un flujo supersónico inicialmente uniforme, manteniendo al flujo de masa constante.

Se piensa que las estructuras de choque internas son responsables de la emisión en líneas ópticas de los nudos en los jets que emanan de las estrellas de baja masa en formación, y también de los llamados brotes de rayos gamma de larga duración, que se cree provienen de los jets relativistas producidos durante el colapso del núcleo de las estrellas masivas, hacia el final de sus vidas.

El trabajo de esta tesis consta de dos ejes principales: una parte analítica, en donde se estudia la formación de la superficie de trabajo (estructura de choque interno) para el caso sencillo de una perturbación a la velocidad con forma de doble escalón y otro caso en donde la perturbación de la velocidad tiene forma sinusoidal. De este trabajo se puede identificar el tiempo crítico en el cual se forma la superficie de trabajo. También, se encuentra que a tiempos tardíos la velocidad de la superficie de trabajo tiende a un valor constante. Las velocidades del material lento y rápido asociados a la superficie de trabajo, tienden asintóticamente a la de la superficie de trabajo.

El segundo eje es un estudio numérico de la formación y evolución de estructuras de choque internas en jets no relativistas y jets relativistas. En ambos casos se realizan simulaciones numéricas con códigos computacionales que resuelven las ecuaciones de la hidrodinámica compresible clásica o relativista, según el caso, escritas en su forma de conservación. Se utilizan métodos tipo Godunov de orden mayor que son métodos de volumen finito de captura de choques.

Con los resultados numéricos es posible caracterizar la estructura interna de los nudos determinada por sus choques y estudiar su comportamiento hidrodinámico mediante la evolución de sus velocidades, densidades y presiones. Se identifica la posición de la estructura de choques con su centro de masa y se observa que la velocidad de éste tiende a la del flujo uniforme. Se investiga la conversión de energía cinética en energía interna debida a la formación de choques, la cual puede asociarse a las luminosidades que se observan en los objetos astrofísicos correspondientes. Se encuentra que en el régimen clásico, la luminosidad máxima se genera justo cuando se empiezan a formar los choques, mientras que en el relativista hay un retraso entre el inicio de formación de los choques y el máximo de la luminosidad.

# Capítulo 1

## Introducción.

El presente trabajo se ubica en el campo de la astrofísica de altas energías, en el estudio particular de modelos que consideran a las estructuras de choque observadas en los jets, una evidencia de la variabilidad de sus fuentes en la velocidad de inyección de material (Raga et al., 1990). El estudio se hace numéricamente tanto en el régimen clásico como en el relativista y analíticamente en el régimen relativista. La finalidad de éste, es aportar un conjunto de modelos nuevos que contribuyan al enriquecimiento del tema en la literatura actual.

Un jet astrofísico es un flujo de material colimado, de alta velocidad, emitido a lo largo de los ejes de rotación de algún objeto cósmico. Hay jets muy poderosos que salen de los núcleos de las galaxias activas, pero en esta tesis el enfoque es sobre los jets estelares. Durante el proceso de formación de las estrellas de baja masa, como nuestro sol, el material que está acretado por la estrella desde un disco de acreción pierde su momento angular en exceso mediante un viento. Este viento puede ser colimado por el campo magnético (no se sabe bien cómo es el proceso de colimación de estos jets, pero el consenso es que el campo magnético juega un papel importante, p.ej. Kwan & Tademaru, 1988) y sale de los polos del eje de rotación en forma de un jet de alta velocidad [100 a 300 km s<sup>-1</sup>, (Bacciotti & Eisloffel, 1999)]. El jet luego impacta sobre el medio ambiente. Por otro lado, el proceso del colapso del núcleo de una estrella masiva ( $> 35M_{\odot}$ ) al final de su vida, puede dar origen a un jet altamente relativista. Este jet resulta del material eyectado durante la formación de un objeto

compacto (hoyo negro o estrella de neutrones) y su disco de acreción (Paczynski, 1986). En este caso, la pérdida de momento angular del sistema resulta en un flujo colimado de velocidades relativistas y ultrarelativistas ( $\simeq c$ , hasta 0.9999 veces la velocidad de la luz).

Los jets que salen de las estrellas de baja masa en etapa de formación pueden ser observados en emisión térmica a radiofrecuencias, y los choques internos dan origen a nudos que se observan en líneas de emisión ópticas. Se observan que los nudos viajan aproximadamente a la velocidad del flujo del jet (Eisloffel & Mundt, 1992). Las distancias típicas entre la estrella y el primer nudo son de orden 100 UA ( $10^{15}$  cm) [ver Rubini et al., 2007]. Los jets que se originan del colapso del núcleo de una estrella masiva primero viajan por la envoltura de la estrella en colapso y salen de la superficie. Después, emergen en el material circundante, que generalmente es el viento estelar de la estrella progenitora, y en este medio viajan con velocidad constante. Los choques internos que pueden formarse dentro del jet en esta segunda etapa se piensa que dan origen a los brotes de rayos gamma que duran de 1 a 1000 segundos, con duración típica de 30 segundos (Rees & Mészáros, 1994). A diferencia de la emisión que proviene de los jets de las estrellas de baja masa, que es debido a procesos térmicos, la emisión de rayos gamma es emisión sincrotrón, que se debe a un proceso no térmico y proviene de los electrones que están acelerados en un campo magnético.

Los choques internos son el resultado de variaciones en la velocidad del jet o en la tasa de pérdida de masa del motor central. En el caso de los jets de las estrellas de baja masa que producen jets no relativistas, a los cuales se les llamará en adelante jets clásicos, Raga et al. (1990) realizó un estudio de la formación y propagación de los choques internos con la suposición de una fuente variable. Otros autores han llevado a cabo tanto estudios analíticos como numéricos de la formación de estructuras internas en estos objetos. Se resalta el trabajo de Cantó et al. (2000), en donde derivaron soluciones paramétricas analíticas para el problema de la formación de choques internos en un jet hipersónico, debidos a una fuente con velocidad de inyección variable con variación dependiente de tiempo de manera sinusoidal.

Los choques internos en los jets relativistas, como los que salen del colapso del núcleo de una estrella masiva, han sido estudiados por varios autores (Mészáros 2002, Piran 2004, Gehrels et al. 2009, entre otros). Si las velocidades tienen variaciones muy grandes, los choques internos también pueden tener velocidades altas dentro del jet y se formarían muy cerca de la estrella. En cambio, si las variaciones de las velocidades no son tan grandes, los choques internos serían más débiles, no tendrían emisión térmica y su luminosidad por los procesos no térmicos no sería muy eficiente (Kobayashi et al., 1997). Recientemente, Mendoza et al. (2009) estudiaron la formación de choques internos en un flujo hipersónico relativista en una dimensión en donde la velocidad de inyección tiene variación temporal de forma sinusoidal. Realizaron una aproximación analítica, simulaciones numéricas y obtuvieron la luminosidad de la estructura de choques internos en función de tiempo, que tiene forma parecida a los brotes de rayos gamma. El trabajo de Cantó et al. (2013), contribuyó al desarrollo del formalismo de los choques internos en jets, al considerar la no conservación de momento lineal por pérdidas radiativas; cuando un porcentaje de la masa relativista inyectada es irradiada, su valor es afectado significativamente haciendo que el factor de Lorentz decrezca, y por tanto el momento no puede conservarse.

En esta tesis se lleva a cabo un estudio de la formación y propagación de choques internos en flujos no relativistas y también en flujos relativistas, en una dimensión, que se puede aplicar a los jets de estrellas jóvenes de baja masa y a los jets del colapso del núcleo de estrellas masivas respectivamente. No se pretende llevar a cabo una investigación detallada de algún objeto en particular sino buscar similitudes y diferencias entre los dos tipos de jet en cuanto a la evolución y dinámica de los choques internos y de la luminosidad que producen. En particular, se estudian dos tipos de variación temporal de la velocidad de inyección sinusoidal: uno que empieza por reducir la velocidad y otro que empieza por aumentar la velocidad de inyección de material, y se describen las diferencias entre los efectos sobre la dinámica tanto para el caso no relativista como para el caso relativista. Este estudio se realiza mediante simulaciones numéricas con métodos numéricos apropiados para la hidrodinámica clásica y para

la hidrodinámica relativista. También se hace un estudio analítico del caso cuando la variación en la velocidad de inyección tiene forma de escalón.

La organización de esta tesis es lo siguiente. En el capítulo 2 se describen los métodos numéricos que se utilizan para llevar a cabo las simulaciones. En el capítulo 3 se desarrolla el formalismo analítico para describir la dinámica de la superficie de trabajo que resulta de una variación tipo escalón en la velocidad de inyección del flujo. En el capítulo 4 se presentan los resultados de las simulaciones numéricas. El capítulo 5 presenta el resumen de los resultados y sugerencias para trabajo a futuro.

# Capítulo 2

## Métodos Numéricos.

En el presente capítulo se describen de manera general, los dos Códigos Numéricos utilizados en el desarrollo de este trabajo. Ambos resuelven las ecuaciones de la hidrodinámica en una dimensión, con simetría plana, en un sistema de referencia Euleriano, en dos diferentes regímenes de la física: Newtoniana y Relativista, respectivamente.

El código de hidrodinámica clásica (es decir, el código no relativista), resuelve las ecuaciones de la dinámica de gases en su forma conservativa, usando el método de Godunov (Godunov, 1959). Este método consiste en resolver el problema de Riemann en cada interfase entre celdas computacionales en donde se supone una distribución lineal de las variables primitivas en cada celda y se utiliza un método de Runge-Kutta para la integración en el tiempo, por lo que el algoritmo es de segundo orden en el espacio y en el tiempo.

El código relativista, es el programa rPPM escrito por Martí & Müller (2003), que resuelve el sistema de ecuaciones de la hidrodinámica especial relativista RHD (*Relativistic Hydrodynamics*, por sus siglas en inglés), también en su forma conservativa. El método consiste en resolver el problema de Riemann relativista en cada interfase entre celdas computacionales y se emplea un Método de Reconstrucción espacial Parabólico por Partes PPM (*Piecewise Parabolic Method*, por sus siglas en inglés) para las variables primitivas, lo cual lo convierte en un algoritmo de tercer orden en el espacio

y de segundo orden en el tiempo.

## 2.1. Código Newtoniano.

### 2.1.1. Ecuaciones de la Hidrodinámica Compresible Clásica.

Se trata del conjunto de ecuaciones (2.2) de Euler de la dinámica de gases, en coordenadas cartesianas, en una dimensión espacial (es decir, no hay flujo en la coordenada ‘y’ ni en la coordenada ‘z’), y con simetría plana, escritas en forma conservativa, esto es, compuestas por una derivada temporal y la divergencia de un flujo  $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ . Aquí  $\mathbf{q}$  es el vector de las variables conservadas: densidad  $\rho$ , momento por unidad de volumen  $\rho v$  y energía total  $E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho v^2 = \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho v^2$  por unidad de volumen,

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix},$$

con  $v$  la velocidad y  $p$  la presión del fluido. Para cerrar el sistema de ecuaciones se supone la ecuación de estado de un gas ideal,

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (2.1)$$

donde  $\varepsilon$  es la energía interna específica y  $\gamma$  el cociente de las capacidades caloríficas a presión y volumen constantes  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

Así, el vector de flujos está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{q}) &= \begin{pmatrix} \rho v \\ p + \rho v^2 \\ v(E + p) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q_2 \\ \frac{q_2^2}{q_1} + (\gamma - 1)[q_3 - \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{q_1}] \\ \frac{q_2}{q_1}[q_3 + (\gamma - 1)(q_3 - \frac{1}{2}\frac{q_2^2}{q_1})] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El sistema conservativo es por tanto,

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q})}{\partial x} = 0, \quad (2.2)$$

el cual es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales para las variables conservadas que son funciones de la posición y el tiempo.

### 2.1.2. Discretización en el espacio y el tiempo.

Para resolver el sistema de ecuaciones 2.2 de forma numérica, se reparte el dominio espacial en intervalos o celdas con dominio  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ . Se define:

$$\mathbf{Q}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{q}(x, t_n) dx \quad (2.3)$$

como el valor promedio de la solución exacta  $\mathbf{q}(x, t_n)$ , definida para toda  $x$ , en el  $i$ -ésimo intervalo  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  en el tiempo  $t_n$ .

Para obtener la aproximación a la solución  $\mathbf{Q}_i^{n+1}$  en el nuevo tiempo  $t_{n+1}$ , se integra la ley de conservación (2.2) en un intervalo espacial  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  y sobre un paso de tiempo  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ ,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} dt dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} dt dx = 0; \quad (2.4)$$

para obtener

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{q}(x, t_{n+1}) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{q}(x, t_n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i-1/2}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_{i+1/2}, t)) dt,$$

lo cual se puede expresar como

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i+1/2} - \mathbf{F}_{i-1/2}]. \quad (2.5)$$

Aquí

$$\mathbf{F}_k \simeq \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{q}(x_k, t)) dt, \quad (2.6)$$

con  $k = i \pm 1/2$ , es una aproximación al flujo promediado en el tiempo, en las fronteras  $x = x_k$ . Este procedimiento se conoce como un método de volúmenes finitos; a diferencia de un método de diferencias finitas, el cual simplemente discretiza las derivadas de la ecuación 2.2, la ventaja de un método de volúmenes finitos es que las integrales de la ecuación 2.4 son finitas, aún cuando haya ondas de choque. La clave de todo esquema numérico es la manera de calcular los flujos numéricos  $\mathbf{F}_k$ .

Hay que asegurar que el método es estable y que la dispersión y difusión numérica son mínimas. En este trabajo, se utiliza el método de Godunov y se encuentran los flujos  $\mathbf{F}_k$  mediante la solución de un problema de Riemann entre cada par de celdas computacionales.

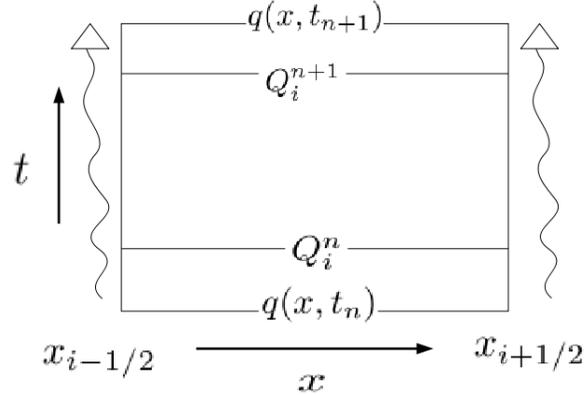


Figura 2.1: Esquema gráfico del método de Volúmenes Finitos. Se observa una celda  $x_i$  de tamaño  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ , cuya solución aproximada al tiempo  $t_n$  es  $\mathbf{Q}_i^n$ . Se hace evolucionar un paso de tiempo  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  y se encuentra la nueva solución aproximada  $\mathbf{Q}_i^{n+1}$ .

### 2.1.3. Método de Godunov.

El método de Godunov consiste en definir una función constante por pedazos compuesta de los valores promedio  $\mathbf{Q}_i^n$  en cada intervalo  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , de manera que cada interfase entre celdas constituye un problema de Riemann. Por lo tanto, cualquiera de las variables hidrodinámicas densidad, velocidad y presión puede ser distinta en cada lado de la interfase. Esta situación inicial es arbitraria y debe resolverse dinámicamente en un sistema de ondas y un estado resuelto entre ellas.

La solución a un problema de Riemann, se compone de una familia de ondas que viajan hacia afuera de la interfase original. Cabe mencionar que el fluido en cada lado de la interfase original no se mezcla y la interfase entre fluidos se resuelve como una discontinuidad de contacto a través de la cual la velocidad y presión son continuas,

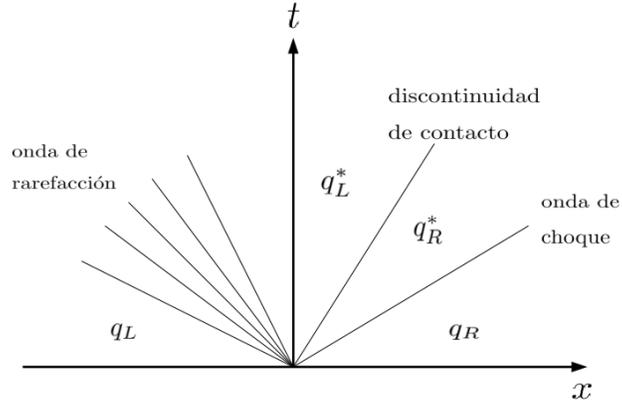


Figura 2.2: Familia de soluciones para el problema de Riemann. Se denotan los estados derecho e izquierdo por las etiquetas  $L$  y  $R$ , y por un asterisco a las cantidades resueltas.

aunque las densidades pueden ser distintas. Para sistemas no lineales, las ondas que viajan hacia la derecha e izquierda de la discontinuidad de contacto pueden ser ondas de choque o de rarefacción. En la Figura 2.2 se observa una solución típica a un problema de Riemann.

La solución de la estructura entre las ondas izquierda y derecha se obtiene al identificar si cada onda es una rarefacción o un choque. Luego se utiliza el hecho de que tanto la presión como la velocidad son continuas a través de una discontinuidad de contacto y por lo tanto uniformes en la zona  $*$  del diagrama. Esto permite iterar la solución para la presión  $p_*$  en esta región y las velocidades de las ondas izquierda y derecha dados los estados iniciales  $q_L$  y  $q_R$ .

El resultado del problema de Riemann es obtener los valores de  $\rho$ ,  $v$  y  $p$  en el estado resuelto en la posición de la interfase que corresponde al origen en la Figura 2.2. Cuál de las posibilidades  $q_L$ ,  $q_L^*$ ,  $q_R$  y  $q_R^*$  se utiliza, depende de la velocidad de la discontinuidad y las ondas de choque y rarefacción en la malla computacional. Luego se utilizan estos valores de  $\rho$ ,  $v$  y  $p$  para evaluar el flujo en la posición de la interfase.

En esta tesis se utiliza una solución completa (conocida en la literatura como

“exacta”) al problema de Riemann, pero existen muchos resolvedores de Riemann aproximados que no requieren iteraciones y por lo tanto pueden resultar más eficientes. Ver Toro (2010) para mayores detalles.

#### 2.1.4. Paso de tiempo.

Se tiene que limitar el tamaño del paso de tiempo  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ , para que las ondas que surgen de los diferentes problemas de Riemann (es decir, de las diferentes interfases), no interactúen en el interior de una celda. Se utiliza el criterio

$$\Delta t = CFL \underset{i}{\text{mín}} \left[ \frac{\Delta x_i}{|v_i| + C_{si}} \right], \quad (2.7)$$

donde  $v_i$  es la velocidad del gas,  $C_{si}$  es la velocidad del sonido en la celda  $i$  y se toma el mínimo sobre todas las celdas.  $CFL$  es una constante  $< 1$  y es una restricción sobre el paso de tiempo conocida como la condición Courant, Friedrichs y Lewy (Toro, 2010), que asegura la estabilidad en todo el dominio computacional.

#### 2.1.5. Orden espacial.

La solución a primer orden en el espacio y el tiempo se obtiene al considerar la aproximación a  $\mathbf{q}(x, t)$  como una función constante por pedazos e integrando sobre un paso de tiempo  $\Delta t$ . El método de Godunov es exacto solamente a primer orden en el espacio y en el tiempo puesto que supone que los datos son constantes por pedazos en las celdas de la malla.

La solución a segundo orden en el espacio se obtiene de considerar la aproximación a  $\mathbf{q}(x, t)$  como una función lineal por pedazos. Una función lineal por pedazos puede construirse de la forma

$$\bar{\mathbf{q}}^n(x, t_n) = \mathbf{Q}_i^n + \sigma_i^n(x - \bar{x}_i),$$

donde  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ,  $\bar{x}_i = (x_i + x_{i+1})/2$  es el punto medio de una celda  $C_i$  y  $\sigma_i^n$  es la pendiente de la solución en dicha celda. Escoger  $\sigma_i^n = 0$  daría una función constante por pedazos, se requiere entonces escoger una pendiente que se aproxime a primer

orden a la derivada verdadera  $\partial q/\partial x$  en la celda  $C_i$ .

Cuando la solución no es suave, la función lineal por pedazos puede dar origen a discontinuidades que generan oscilaciones. Para evitarlas debe acotarse la pendiente del ajuste lineal utilizando un valor más pequeño; esta pendiente se obtiene promediando los gradientes numéricos entre las celdas vecinas. En este trabajo, el acotador de pendiente implementado es Minmod, donde la pendiente se determina como

$$\sigma_i^n = \text{minmod} \left( \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x_i}, \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x_i} \right), \quad (2.8)$$

y la función minmod está definida por

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b| \text{ y } ab > 0, \\ b & \text{si } |b| < |a| \text{ y } ab > 0, \\ 0 & \text{si } ab \leq 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

es decir, si  $a$  y  $b$ , las pendientes delante y detrás de la interfase, tienen el mismo signo, entonces la función elige al valor absoluto más pequeño; en el caso en que las pendientes tengan signos distintos, entonces a la pendiente se le asigna el valor cero.

### 2.1.6. Orden de tiempo.

El segundo orden en el tiempo se obtiene mediante un procedimiento de paso fraccional tipo Runge-Kutta de dos pasos; en el primer paso se obtiene una solución sobre la mitad de paso de tiempo  $\Delta t/2$ , luego se utiliza esta solución para obtener una nueva evaluación de los flujos y se integra sobre el paso de tiempo completo  $\Delta t$ .

### 2.1.7. Condiciones de frontera.

Por último, el tratamiento para calcular los flujos en las fronteras de un dominio acotado, en donde no se tiene información de celdas vecinas para actualizar a las que se encuentran dentro del dominio computacional, consiste en incluir celdas adicionales llamadas *fantasmas* cuyos valores se fijan al inicio de cada paso de tiempo, pero no son integradas durante la evolución temporal. Los esquemas de primer orden necesitan sólo una celda fantasma a cada lado del dominio, mientras que los esquemas

de segundo orden requieren dos celdas fantasmas a cada lado. También se imponen condiciones a estas fronteras para evitar que señales externas lleguen al dominio y para permitirle a las ondas que viajan hacia afuera que salgan del dominio sin generar reflexiones. A este tipo de condiciones se les llama Condiciones de frontera de flujo hacia afuera o de Salida.

### 2.1.8. Procedimiento esquemático.

Para resolver el esquema numérico 2.5:

- El programa recibe condiciones iniciales, el conjunto de magnitudes de las variables primitivas  $\rho$ ,  $v$  y  $p$ , y se poblan las variables conservadas en cada celda  $[x_{1-1/2}, x_{i+i/2}]$  del dominio computacional.
- Se llenan las celdas fantasmas con los valores apropiados a las condiciones de frontera deseadas.
- Se evalúa el paso de tiempo según la ecuación 2.7
- Se resuelve el problema de Riemann en cada interfase entre celdas y se calculan los flujos.
- Se hace la primera integración numérica sobre un medio paso de tiempo y se obtienen los nuevos valores de las variables conservadas en cada celda.
- Se evalúan los nuevos valores de las variables primitivas y sus gradientes lineales en cada celda, se interpolan a las posiciones de las interfases, se resuelven los nuevos problemas de Riemann y se calculan los flujos correspondientes.
- Se hace la segunda integración numérica sobre un paso de tiempo completo con los nuevos valores de los flujos.
- Se regresa al primer paso del procedimiento y se repite hasta llegar al tiempo de evolución total deseado.

### 2.1.9. Problema de prueba para el código, régimen clásico.

Para probar el funcionamiento del código, se usaron las condiciones iniciales que corresponden al problema de Tubo de Choque definido por Sod (1978), el cual tiene una solución exacta. El problema de Tubo de Choque representa una clase especial de problema de Riemann, en que el estado inicial en ambos lados de la discontinuidad están en reposo; su utilidad como herramienta para probar códigos numéricos radica en que su evolución hidrodinámica involucra ondas de choque y rarefacciones y la solución se puede obtener analíticamente.

Las condiciones iniciales corresponden a un dominio partido por la mitad, esto es, un estado derecho constante  $q_R$  de baja presión y densidad y un estado izquierdo constante  $q_L$  de presión y densidad alta (ecuaciones 2.10), con velocidad cero en ambos lados.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_R &= \begin{pmatrix} \rho_R \\ v_R \\ p_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{q}_L &= \begin{pmatrix} \rho_L \\ v_L \\ p_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

A este problema le imponemos condiciones de frontera de salida.

Para un valor de  $\gamma = 5/3$  y un dominio espacial  $0 \leq x \leq 1$ , que se cubre con 1000 celdas, se muestra a continuación la evolución de las variables hidrodinámicas en el orden de velocidad, densidad y presión. El conjunto de valores iniciales produce una combinación de dos tipos de ondas, una de rarefacción y otra de choque. La onda de rarefacción viaja dentro de la región de alta densidad moviéndose hacia la izquierda mientras que la onda de choque se mueve dentro de la región de baja densidad hacia la derecha (ver Figura 2.3).

En esta Figura 2.3, se nota que la velocidad y presión son constantes en cada

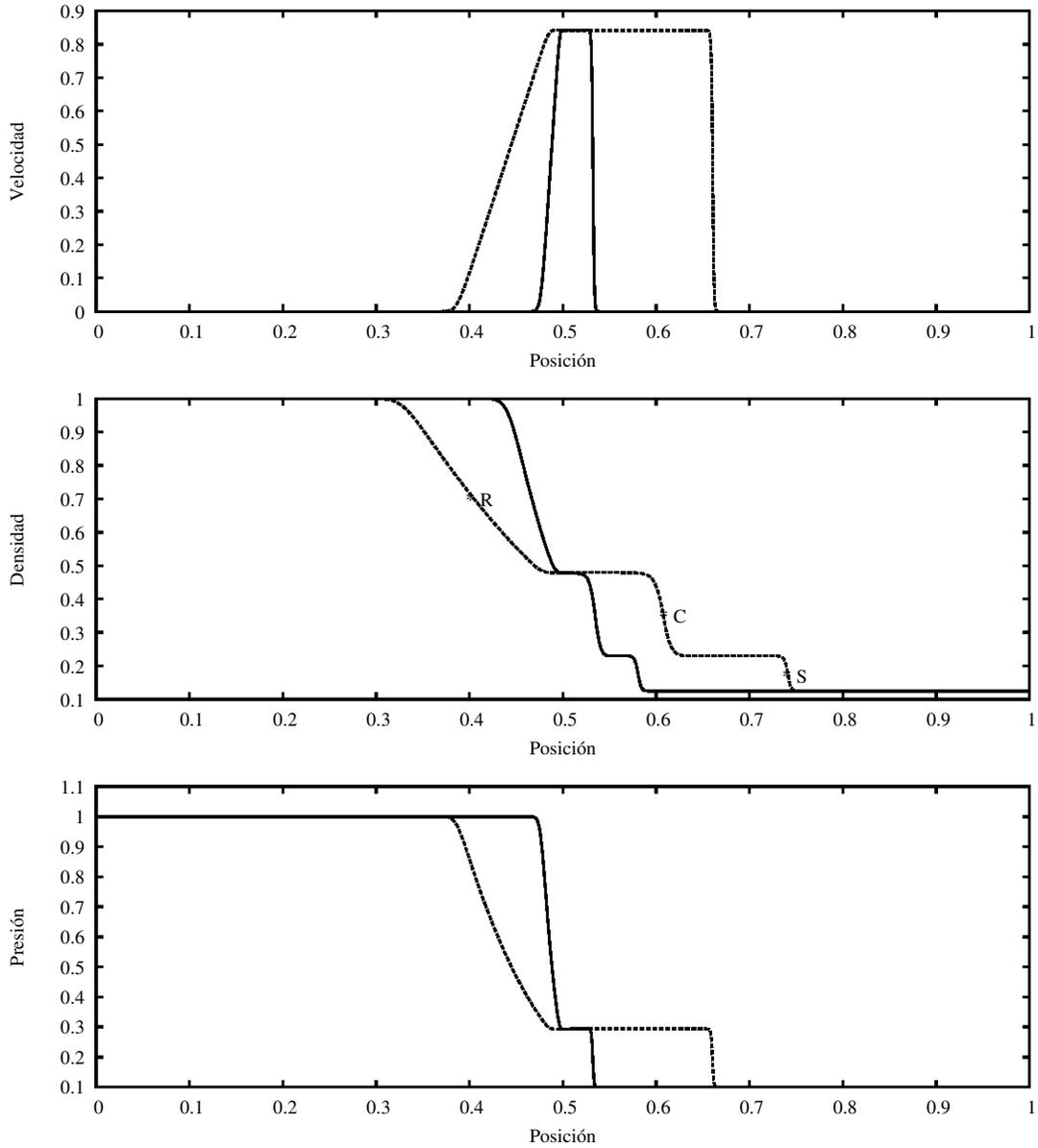


Figura 2.3: Problema de prueba de Sod en el régimen clásico. Solución numérica para el caso que combina una onda de choque (que evoluciona hacia la derecha) y una de rarefacción (que evoluciona hacia la izquierda), en dos instantes de tiempo. El primer pánel (de arriba hacia abajo) muestra a la variable de velocidad, el segundo de densidad y el tercero de presión, con su discontinuidad inicial en  $x = 0.5$ . La línea continua grafica el tiempo  $t = 1.78 \times 10^{-2}$  y la línea punteada un tiempo evolucionado  $t = 6.99 \times 10^{-2}$ ; las etiquetas R, S y C en el segundo pánel de la variable de densidad, identifican a las ondas de rarefacción, de choque y a la discontinuidad de contacto, respectivamente.

lado de la discontinuidad de contacto y que el gas detrás de la onda de choque tiene velocidad, densidad y presión uniformes. El choque avanza a velocidad constante en el medio.

Se incluye finalmente una comparación entre la solución numérica anterior (Figura 2.3) y su solución analítica (ver Figura 2.4) como complemento a la prueba de funcionamiento del código. Se observa en las tres variables hidrodinámicas, una superposición entre las dos soluciones. Esto permite verificar que tanto la posición del frente de choque como la posición de la onda de rarefacción y la discontinuidad de contacto son comparables a las posiciones que la solución exacta reporta; y que las variables de densidad, velocidad y presión, tienen los saltos correctos en las ondas de choque, discontinuidad de contacto y rarefacción.

## 2.2. Código Relativista.

Para el desarrollo de esta sección se ha empleado el Código Relativista rPPM de Martí & Müller (2003), el cual se encuentra disponible a la comunidad.

El Método de reconstrucción espacial Parabólico por Partes PPM (*Piecewise Parabolic Method*, por sus siglas en inglés), es una extensión del método de orden mayor de Godunov, usado extensamente en la hidrodinámica clásica. Resuelve el sistema de ecuaciones de hidrodinámica relativista escrito en forma de conservación a partir de la solución del correspondiente problema de Riemann. El esquema rPPM utiliza una interpolación parabólica de variables primitivas dentro de las celdas numéricas. Utiliza restricciones de monotonidad (parecidas al acotador de pendientes que se describen en la sección 2.1.5) y empinadores de discontinuidades para asegurar que las ondas de choque y discontinuidades de contacto estén bien definidas y libres de oscilaciones.

A diferencia de la hidrodinámica clásica, el obtener los valores de las variables primitivas de los valores de las variables conservadas, no es tan sencillo y se requiere iterar.

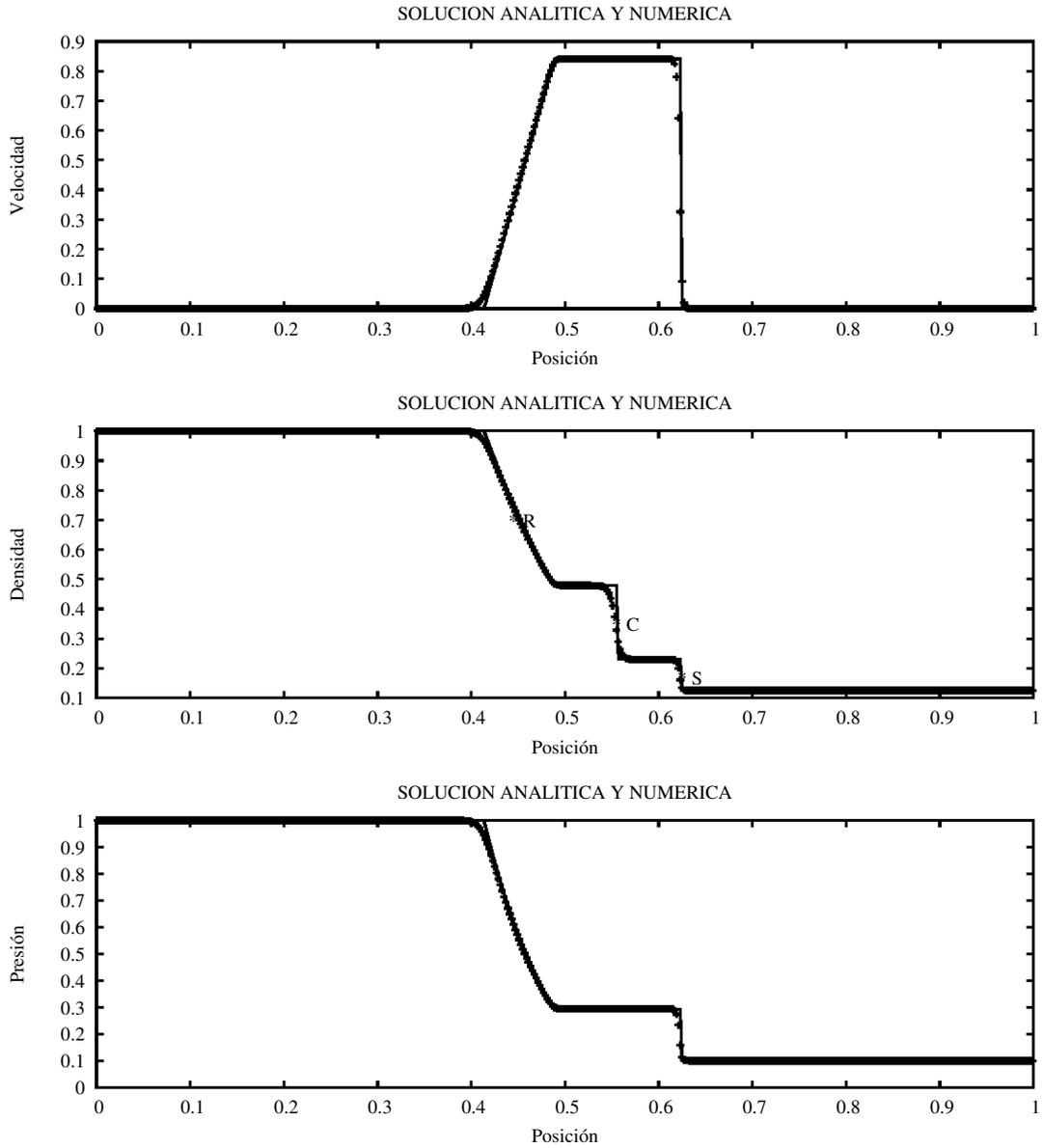


Figura 2.4: Problema de prueba de Sod en el régimen clásico. Comparación entre la solución numérica y analítica para el caso que combina una onda de choque (que evoluciona hacia la derecha) y una de rarefacción (que evoluciona hacia la izquierda). El primer pánel (de arriba hacia abajo) muestra a la variable de velocidad, el segundo de densidad y el tercero de presión, con su discontinuidad inicial en  $x = 0.5$ . En los tres pánels se grafica el tiempo evolucionado  $t = 6.98 \times 10^{-2}$ ; la solución numérica corresponde a la línea segmentada y la solución analítica a la línea continua. Se han utilizado 1000 celdas.

### 2.2.1. Sistema de Ecuaciones Hidrodinámicas Relativistas.

Se trata de un sistema de 3 ecuaciones, con las 4 variables: densidad de masa  $D$ , densidad de momento  $S$ , densidad de energía  $\tau$  y presión  $p$ , siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial Dv}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(Sv + p)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial(S - Dv)}{\partial x} &= 0,\end{aligned}\tag{2.11}$$

donde  $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$  es el factor de Lorentz, en un sistema de unidades en que la velocidad de la luz  $c = 1$ , la densidad relativista de la masa en reposo es  $D = \rho\Gamma$ , la densidad de momento  $S = \rho h\Gamma^2 v$ , la densidad de energía  $\tau = \rho h\Gamma^2 - p - \rho\Gamma$  y  $h = 1 + \varepsilon + \frac{p}{\rho}$  es la entalpía específica, con  $\varepsilon$  la energía interna específica.

Dicho sistema de ecuaciones se cierra con la inclusión de la ecuación de estado que se ha supuesto tiene la forma  $p = p(\rho, \varepsilon)$ . Para un gas ideal

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon,\tag{2.12}$$

donde  $\gamma$  es el cociente de las capacidades caloríficas a presión y volumen constantes.

Se identifican a la densidad  $\rho$ , presión  $p$ , velocidad  $v$  y energía interna  $\varepsilon$ , como las variables primitivas, y a las densidades  $D$ ,  $S$  y  $\tau$ , como las cantidades conservadas; así, el vector de variables conservadas  $\mathbf{u}$ , el vector de flujos  $\mathbf{F}$  y el esquema de volúmenes finitos escrito como uno de diferencias finitas en su forma conservativa, son:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (D, S, \tau), \\ \mathbf{F} &= (Dv, Sv + p, S - Dv), \\ \Rightarrow \mathbf{u}_i^{n+1} &= \mathbf{u}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \{\mathbf{F}_{i-1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2}\}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Aquí,  $\mathbf{u}_i^n$  y  $\mathbf{u}_i^{n+1}$  son los valores promediados en el espacio del vector de estado  $\mathbf{u}$  en la celda  $i$  en los tiempos  $t^n$  y  $t^{n+1}$ , el promedio se calcula como en la ecuación 2.3 del caso clásico;  $\mathbf{F}_{i\pm 1/2}$  son los flujos promediados en el tiempo de las celdas a la derecha

e izquierda de la celda  $i$ , los cuales son calculados al resolver el problema de Riemann relativista.

### 2.2.2. Paso de tiempo.

Igual que en el caso clásico, se considera la máxima velocidad de onda característica en cada celda. Por lo tanto, el paso de tiempo es

$$\Delta t = \min_i \frac{\Delta x_i}{|\lambda_i|}, \quad (2.14)$$

con

$$\lambda_i = \frac{|v_i| \pm C_{si}}{1 \pm v_i C_{si}}, \quad (2.15)$$

donde  $\Delta x_i$  es el tamaño de la celda  $i$ ,  $C_{si}$  es la velocidad del sonido y  $v_i$  la velocidad del fluido.

### 2.2.3. Problemas de prueba para el código, régimen relativista.

Para probar el funcionamiento de este código, se utiliza nuevamente el problema de Tubo de Choque, en las versiones de Sod, de Schneider (1993) y sus soluciones analíticas. En ambos casos, el dominio espacial es  $0 \leq x \leq 1$  y se cubre con 2000 celdas; se utiliza el valor de  $\gamma = 1.4$  en el problema de Sod y de  $\gamma = 5/3$  en el otro caso.

#### El problema relativista de Tubo de Choque.

Los estados iniciales para el problema de Tubo de Choque en su versión relativista son las ecuaciones 2.10,

$$\mathbf{u}_R = \begin{pmatrix} \rho_R \\ v_R \\ p_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.0 \\ 0.1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ v_L \\ p_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}.$$

Se origina una onda de choque que viaja hacia la derecha y una de rarefacción que viaja hacia la izquierda (ver Figura 2.5), un comportamiento análogo al observado en el régimen clásico.

Se incluye la comparación entre la solución numérica y la solución exacta de este problema en la Figura 2.6, donde se observa que las velocidades numéricas de las ondas de choque y rarefacción, son comparables con las que la solución analítica reporta.

### El problema relativista de Schneider.

El problema relativista de Schneider corresponde a la inyección de masa y energía térmica en el lado izquierdo de la malla computacional, que pueden considerarse como las condiciones iniciales de una explosión fuerte. La evolución del fluido en tales condiciones da origen a un cambio muy brusco en la magnitud de la densidad y por lo tanto se espera generar una onda de choque fuerte que viaja a la derecha y una onda de rarefacción que viaja hacia la izquierda, igual que en el tubo de choque de Sod clásico, pero con una diferencia de 8 órdenes de magnitud en la presión de los dos lados de la interfase.

Para este caso, el conjunto de condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_R &= \begin{pmatrix} \rho_R \\ v_R \\ p_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1. \\ 0.0 \\ 6.6 \times 10^{-7} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_L &= \begin{pmatrix} \rho_L \\ v_L \\ p_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10. \\ 0.0 \\ 13.33 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

da lugar a la combinación de onda de choque y rarefacción esperada, y además, a una región de alta densidad delimitada por la discontinuidad de contacto y el choque (ver Figura 2.7). Diferencias importantes en la presión de un fluido generan cambios bruscos en la densidad y choques muy energéticos.

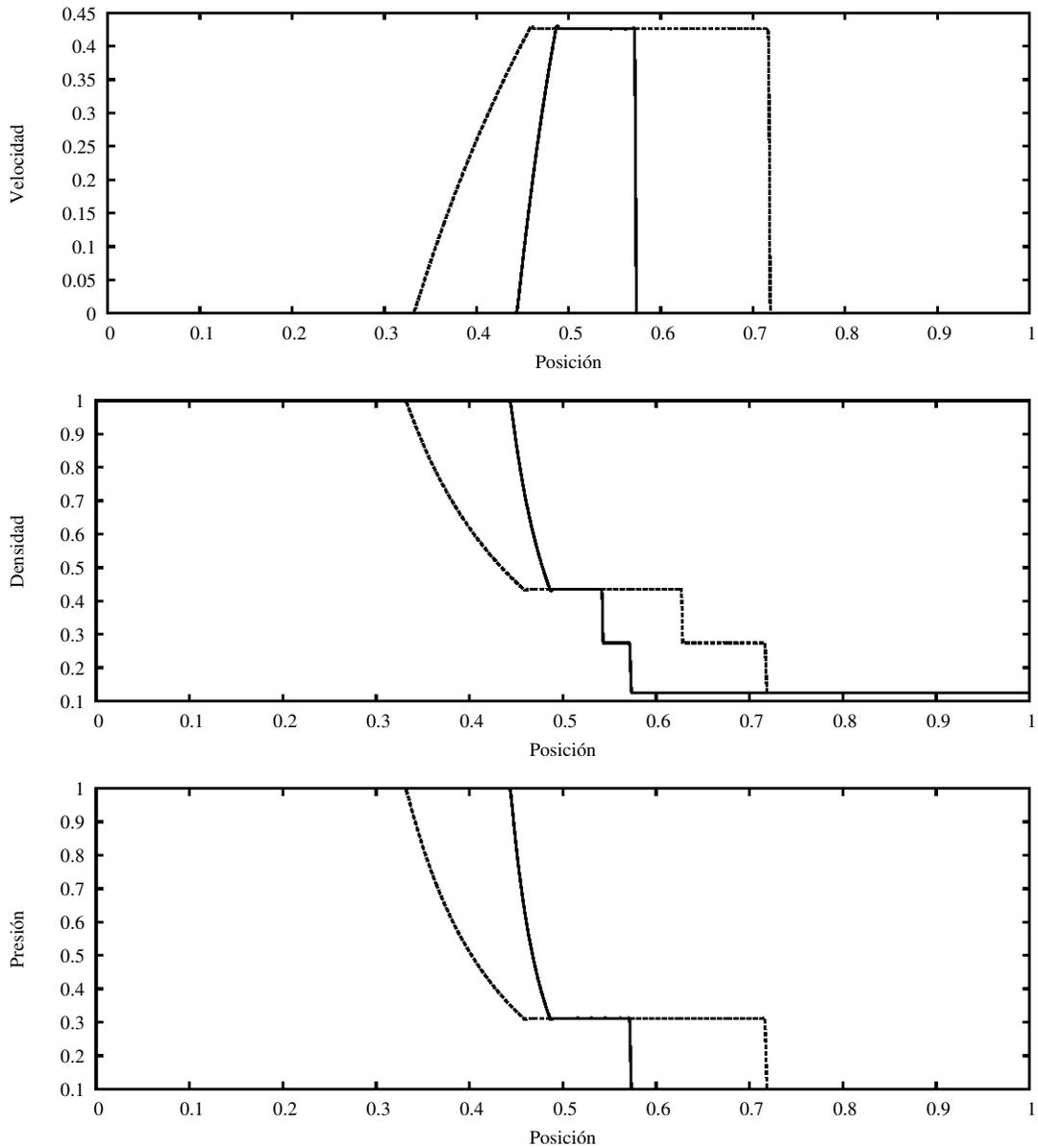


Figura 2.5: Problema de prueba de Sod. Solución numérica relativista para el caso que combina una onda de choque (que evoluciona hacia la derecha) y una de rarefacción (que evoluciona hacia la izquierda) en dos instantes de tiempo. El primer p panel (de arriba hacia abajo) muestra a la variable de velocidad, el segundo de densidad y el tercero de presi on, con discontinuidad inicial en  $x = 0.5$ . La línea continua grafica el tiempo  $t = 1.001 \times 10^{-1}$  y la línea punteada un tiempo evolucionado  $t = 3.005 \times 10^{-1}$ .

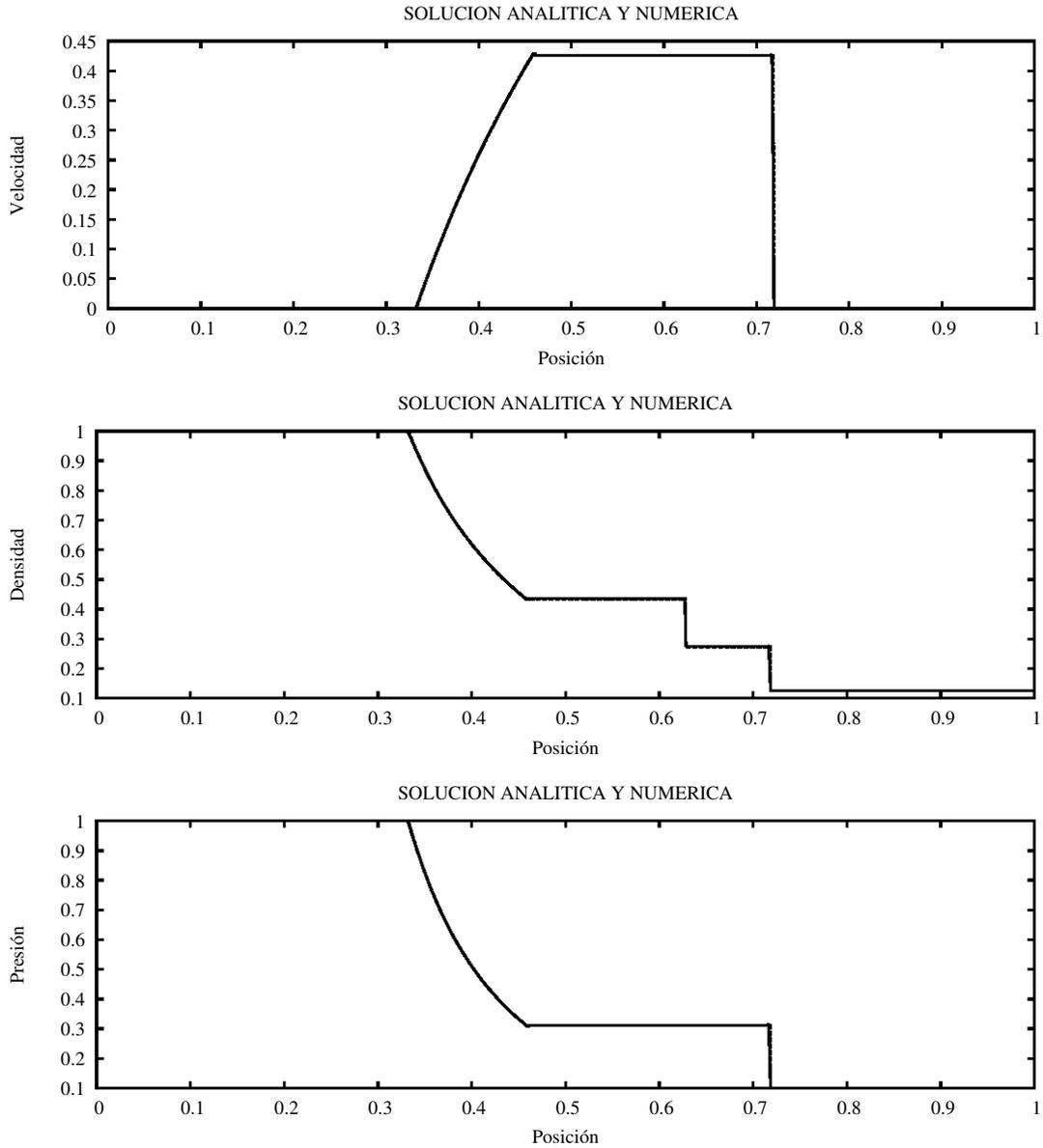


Figura 2.6: Problema de prueba de Sod. Soluciones numérica y exacta relativistas, para el caso que combina una onda de choque (que evoluciona hacia la derecha) y una de rarefacción (que evoluciona hacia la izquierda), en el instante de tiempo  $t = 3.005 \times 10^{-1}$ . El primer pánel (de arriba hacia abajo) muestra a la variable de velocidad, el segundo de densidad y el tercero de presión, con discontinuidad inicial en  $x = 0.5$ . La línea continua grafica a la solución exacta y la línea punteada a la solución numérica.

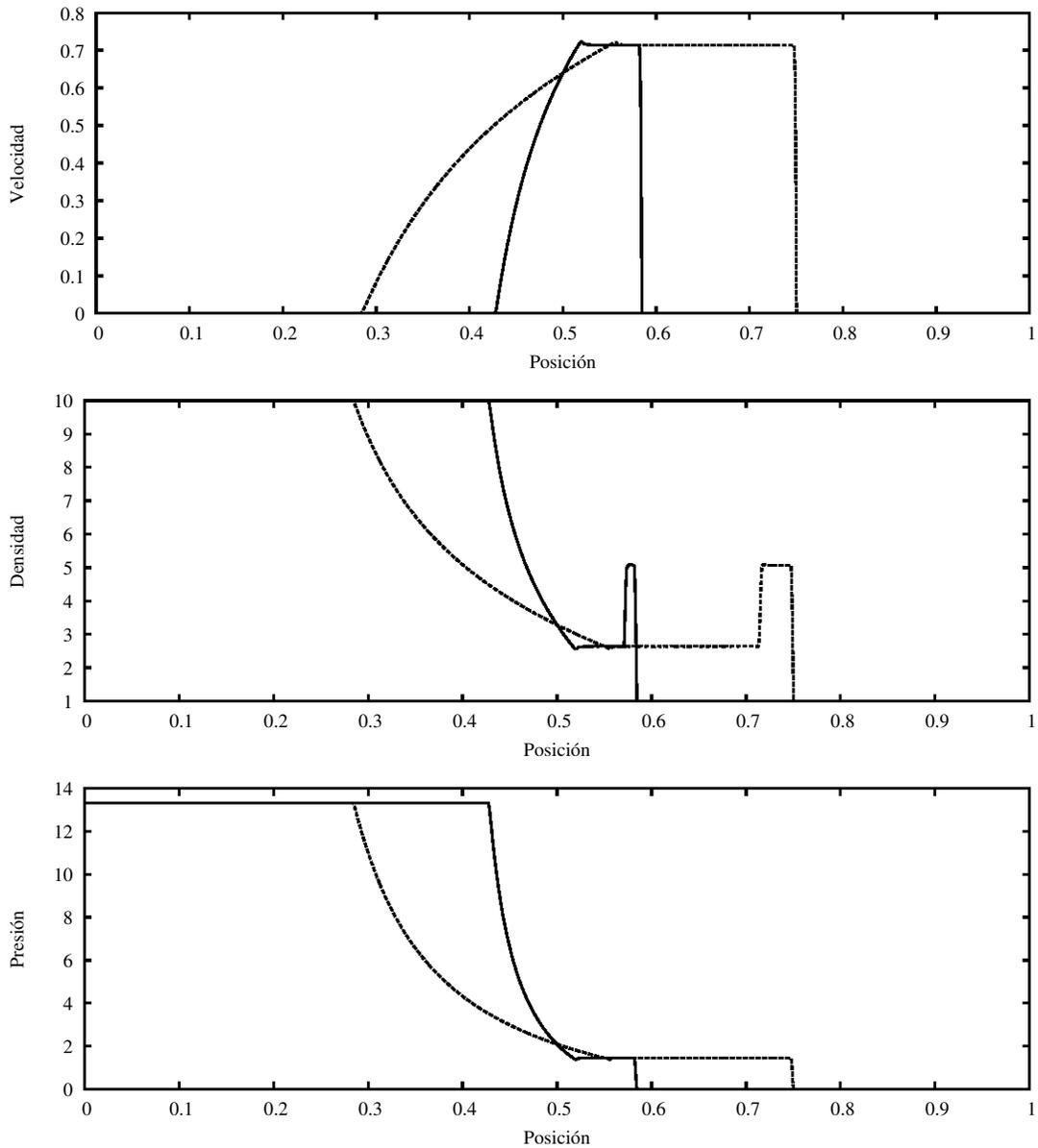


Figura 2.7: Problema relativista de prueba de Schneider. Se presenta el caso que combina una onda de choque (que evoluciona hacia la derecha) y una de rarefacción (que evoluciona hacia la izquierda) en dos instantes de tiempo; el primer pánel (de arriba hacia abajo) muestra a la velocidad, el segundo a la densidad y el tercero a la presión, con discontinuidad inicial en  $x = 0.5$ . La línea continua grafica el tiempo  $t = 1.001 \times 10^{-1}$  y la línea punteada un tiempo evolucionado  $t = 3.002 \times 10^{-1}$ .

Se presenta también la comparación entre la solución numérica y la solución exacta de este problema en la Figura 2.8, donde se verifica que los resultados son comparables entre ambas soluciones.

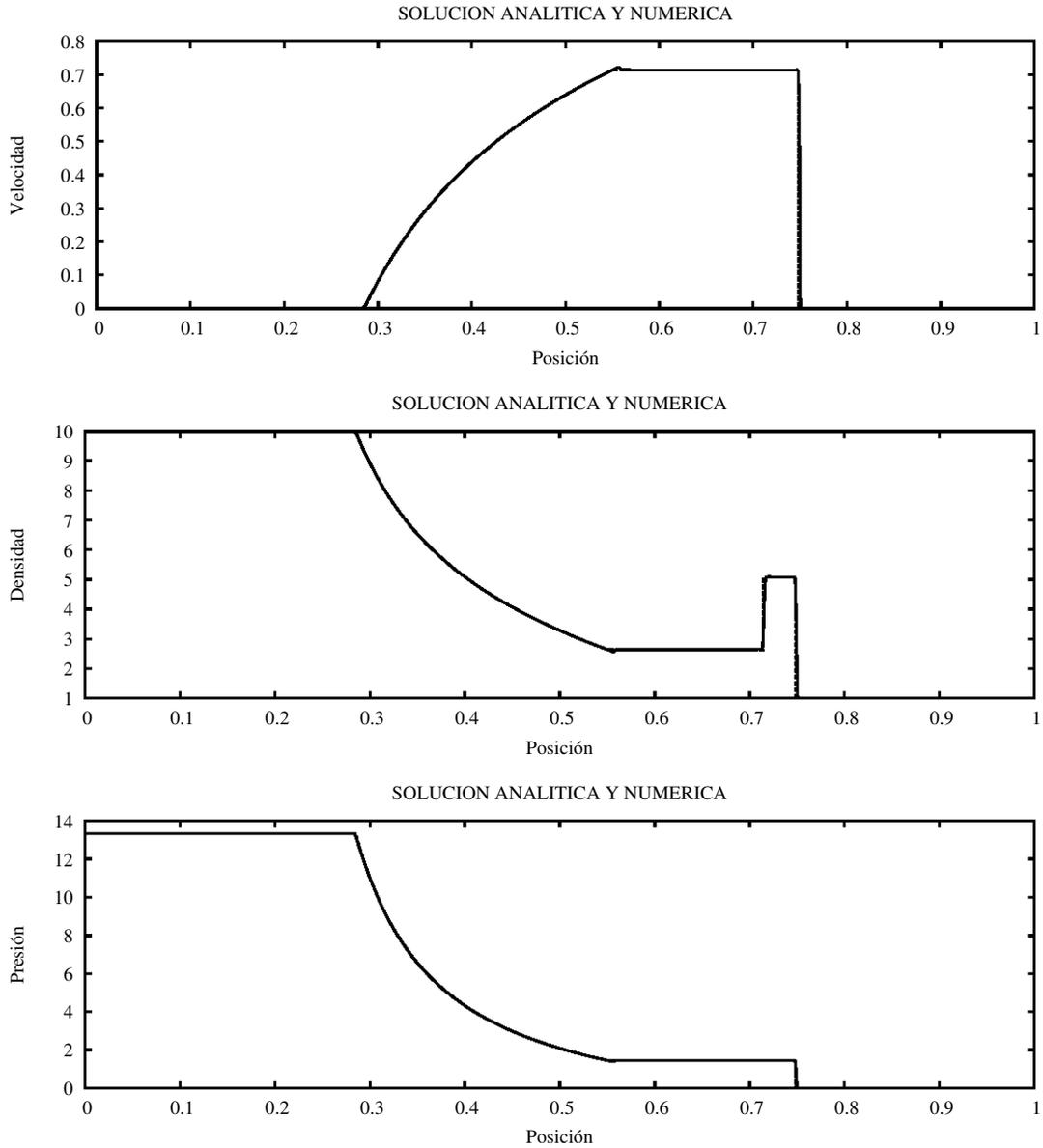


Figura 2.8: Problema de prueba de Schneider. Soluciones numérica y exacta relativistas para el caso que combina una onda de choque (que evoluciona hacia la derecha) y una de rarefacción (que evoluciona hacia la izquierda) en el instante de tiempo  $t = 3.002 \times 10^{-1}$ . El primer pánel (de arriba hacia abajo) muestra a la variable de velocidad, el segundo de densidad y el tercero de presión, con discontinuidad inicial en  $x = 0.5$ . La línea continua grafica a la solución exacta y la línea punteada a la solución numérica.

# Capítulo 3

## Solución Analítica.

En este capítulo se presenta el estudio analítico-relativista de la dinámica de los choques internos en jets. Se muestra en primera instancia, el caso de una función de doble escalón como la fuente que varía en el tiempo, a modo de ejemplo, en el cual se obtiene que la dinámica de la superficie de trabajo está compuesta de una fase con velocidad constante y otra acelerada. Se presenta también una función  $\beta(\tau)$ , con variación sinusoidal en el tiempo, la cual da origen a una dinámica en que las velocidades de los choques tienden a la velocidad de la superficie de trabajo.

### 3.1. Dinámica de choques en jets relativistas.

La teoría sobre la dinámica de choques internos en jets no relativistas, con dependencia temporal en la velocidad de inyección y en la tasa de pérdida de masa, fue resuelta por Cantó, Raga & D'Alessio (2000). Mendoza et al. (2009) aplicaron este formalismo de conservación de momento al caso de jets relativistas, cuyos resultados fueron comparados con observaciones de curvas de luz de GRBs, suponiendo una variación sinusoidal. Cantó et al. (2013), notaron que en los flujos relativistas, la consideración de conservación de momento es errónea: la energía que está radiándose cambia la masa relativista, puesto que el factor de Lorentz decrece ante pérdidas de la energía. Presentan entonces un nuevo formalismo que describe la dinámica de los choques internos en un jet relativista, tomando en cuenta el cambio de momento por radiación, aplican este formalismo para el caso particular en que la velocidad de

inyección y la tasa de pérdida de masa son funciones-escalón del tiempo y obtienen soluciones analíticas.

### 3.1.1. Solución de ecuaciones relativistas para un perfil de velocidad de doble escalón.

Aplicando el Formalismo de Cantó et al. (2013), se propone el estudio inicial de un modelo sencillo de inyección de material en un fluido relativista, representado por la función de un escalón doble (*Double Step Function Variability*, ver Figura 3.1). El objetivo es entender la física implicada, como base para el estudio posterior de un perfil de velocidad sinusoidal que toma en cuenta el cambio de momento debido a la radiación.

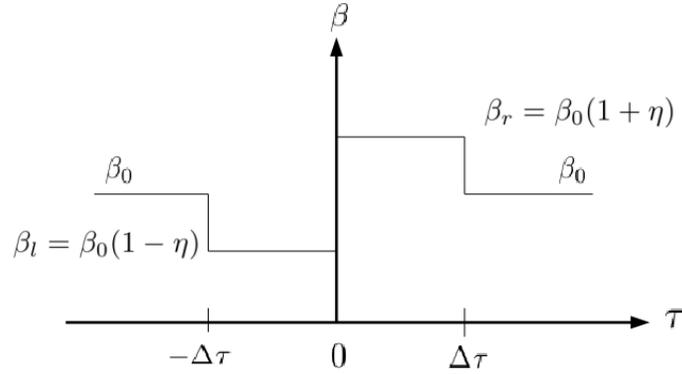


Figura 3.1: Función de escalón doble. Aquí  $\beta_0$  es un valor constante, diferente de cero, de la velocidad de inyección del fluido;  $\beta_l$  ( $0 < \beta_l < \beta_0$ ) es un valor constante con que se ha inyectado material a una velocidad baja y  $\beta_r$  ( $> \beta_0$ ) a una velocidad alta;  $\eta$  es un valor constante ( $< 1$ ),  $\tau$  es el tiempo de inyección y  $2\Delta\tau$  la duración de la inyección.

La idea es la siguiente: se tiene material lento<sup>1</sup>, que ha sido inyectado en el pasa-

<sup>1</sup>Todas las magnitudes relacionadas con el material lento se identificarán con la etiqueta-subíndice  $l$  y para el material rápido con la etiqueta-subíndice  $r$ .

do durante el intervalo  $\tau \in [-\Delta\tau, 0]$ ; se inyecta después material rápido<sup>1</sup> durante otro intervalo  $\tau \in [0, \Delta\tau]$ . Cuando el material rápido, moviéndose a una velocidad  $\beta_r = \beta_0(1+\eta)$ , alcanza al material lento que se mueve a velocidad  $\beta_l = \beta_0(1-\eta)$ , donde la constante  $\eta$  es pequeña ( $\eta < 1$ ), se origina una estructura denominada superficie de trabajo  $WS$  (*Working Surface*, por sus siglas en inglés, ver Figura 3.2), delimitada por dos frentes de choque. Para  $\tau < -\Delta\tau$  y  $\tau > \Delta\tau$  el material se mueve a velocidad  $\beta_0$ . Las velocidades denotadas con la letra griega  $\beta$ , corresponden a velocidades adimensionalizadas, donde

$$\beta = \frac{v}{c},$$

con  $v$  la velocidad del fluido y  $c$  la velocidad de la luz, respectivamente.

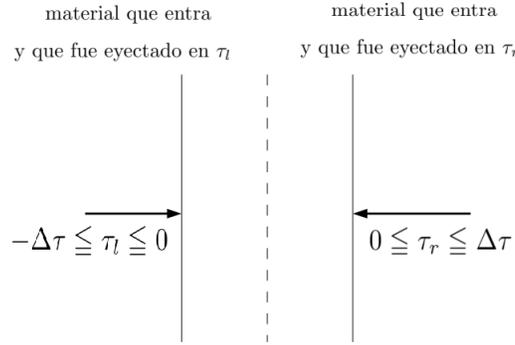


Figura 3.2: Superficie de trabajo  $WS$  en un tiempo  $t$  y posición  $x_{WS}(t)$ , estructurada por dos frentes de choque (líneas verticales continuas) y una discontinuidad de contacto (línea vertical discontinua). Aquí  $\tau_l$  y  $\tau_r$  son los tiempos en que el material lento y rápido, respectivamente, fueron inyectados y  $\Delta\tau$  el lapso que duró la inyección.

Siguiendo el formalismo de Cantó et al. (2013), minimizando la expresión

$$\frac{x_i}{c} = \left[ \frac{\beta(\tau)^2}{d\beta(\tau)/d\tau} \right]_{min}, \quad (3.1)$$

se encuentran la posición inicial  $x_i$  y el tiempo  $\tau_i$  inicial del cual se forma la superficie de trabajo. Por su parte, el tiempo inicial  $t_i$ , se obtiene a partir de la ecuación para el flujo libre,

$$\tau_i = t_i - \frac{x_{WS}}{c\beta_{WS}}, \quad (3.2)$$

donde  $\beta_{WS}$  es la velocidad a la que se mueve la superficie de trabajo, que es intermedia a  $\beta_l$  y  $\beta_r$  ( $\beta_l < \beta_{WS} < \beta_r$ ).

La dinámica de la superficie de trabajo está descrita por las ecuaciones de energía y momento que toman en cuenta la pérdida de masa por la radiación emitida, por unidad de tiempo  $L(t)$  (Cantó et al. 2013),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m_{WS}(t)\Gamma_{WS}(t)) &= \frac{d}{dt} \int_{\tau_l}^{\tau_r} \dot{m}(\tau)\Gamma(\tau)d\tau - \frac{L(t)}{c^2}, \\ \frac{d}{dt}(m_{WS}(t)\Gamma_{WS}(t)\beta_{WS}(t)) &= \frac{d}{dt} \int_{\tau_l}^{\tau_r} \dot{m}(\tau)\Gamma(\tau)\beta(\tau)d\tau - \frac{L(t)}{c^2}\beta_{WS}(t),\end{aligned}$$

donde el factor de Lorentz es  $\Gamma_{WS}(t) = 1/\sqrt{1 - \beta_{WS}(t)^2}$ ; la masa inyectada a la superficie de trabajo,  $m_{WS}(t) = -\dot{m}\tau_l(t) + \dot{m}\tau_r(t)$ , es una función del tiempo donde las tasas de pérdida de masa se suponen constantes, esto es,  $\dot{m}(\tau_r) = \dot{m}(\tau_l) = \dot{m}$ ; y, el último término en el lado derecho de la ecuación de momento, es el cambio de momento debido a la pérdida de masa relativista por radiación. Estas ecuaciones se pueden combinar para obtener la expresión:

$$m_{WS}\gamma_{WS}(t)\frac{d\beta_{WS}}{dt} = -\dot{m}\gamma_l(\beta_l - \beta_{WS})\frac{d\tau_l}{dt} + \dot{m}\gamma_r(\beta_r - \beta_{WS})\frac{d\tau_r}{dt}, \quad (3.3)$$

que corresponde a la ecuación para la velocidad de la superficie de trabajo, misma que no depende de la energía radiada  $L(t)$ . Además, puesto que  $\beta_r = \beta_0(1 + \eta)$  y  $\beta_l = \beta_0(1 - \eta)$ , y aplicando la definición del factor de Lorentz, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\Gamma_r &= \frac{1}{[1 - \beta_0^2(1 + \eta)^2]^{1/2}}, \\ \Gamma_l &= \frac{1}{[1 - \beta_0^2(1 - \eta)^2]^{1/2}},\end{aligned}$$

donde es posible ver que  $\Gamma_r > \Gamma_l$ .

Ahora, a un tiempo  $t$ , el material que entra a la superficie de trabajo fue inyectado en los tiempos  $\tau_l$  y  $\tau_r$ . Estos tiempos se relacionan a partir de la definición de velocidad de flujo libre dada en la ecuación (3.2), y se obtienen las expresiones

$$\tau_l = t - \frac{x_{WS}}{c\beta_l(\tau_l)}, \quad (3.4)$$

$$\tau_r = t - \frac{x_{WS}}{c\beta_r(\tau_r)}, \quad (3.5)$$

que tienen por derivadas las relaciones

$$\frac{d\tau_l}{dt} = 1 - \frac{\beta_{WS}}{\beta_l}, \quad (3.6)$$

$$\frac{d\tau_r}{dt} = 1 - \frac{\beta_{WS}}{\beta_r}. \quad (3.7)$$

Sustituyendo tales derivadas en la ecuación combinada (3.3), se tiene una nueva ecuación diferencial para la velocidad de la superficie de trabajo:

$$m_{WS}\Gamma_{WS}(t)\frac{d\beta_{WS}}{dt} = -\dot{m}\Gamma_l\frac{(\beta_l - \beta_{WS})^2}{\beta_l} + \dot{m}\Gamma_r\frac{(\beta_r - \beta_{WS})^2}{\beta_r}. \quad (3.8)$$

La solución  $\frac{d\beta_{WS0}}{dt} = 0$  de esta ecuación (3.8), es la solución para la velocidad en su fase de velocidad constante  $\beta_{WS0}$ . Se definen las cantidades  $a = \frac{\beta_r}{\beta_l}$ ,  $r = \frac{\Gamma_r}{\Gamma_l}$  y  $\lambda = \sqrt{\frac{r}{a}}$ , con lo cual

$$\lambda(\beta_r - \beta_{WS0}) = \pm(\beta_{WS0} - \beta_l). \quad (3.9)$$

La solución correcta, correspondiente al signo positivo de (3.9), en conjunto con la consideración de orden  $\beta_l < \beta_{WS0} < \beta_r$ , implica que la velocidad de la superficie de trabajo en su fase de velocidad constante, según Cantó et al. (2013) es:

$$\beta_{WS0} = \frac{\lambda\beta_r + \beta_l}{1 + \lambda} \quad (3.10)$$

$$\Rightarrow \Gamma_{WS0} = \frac{1 + \lambda}{\sqrt{(\frac{\lambda}{\Gamma_r})^2 + 2\lambda(1 - \beta_r\beta_l + \frac{1}{\Gamma_l^2})}}. \quad (3.11)$$

La fase de velocidad constante termina cuando el material rápido se ha incorporado por completo a la WS, lo cual sucede en el tiempo crítico correspondiente  $\tilde{t}_r^c$  (ver abajo, ecuación 3.12). El material rápido se ha incorporado en su totalidad cuando  $\tau_r = \Delta\tau$ ; sustituyendo esto en la ecuación (3.5), y utilizando la normalización

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t}{\Delta\tau}, \\ \tilde{\tau} &= \frac{\tau}{\Delta\tau}, \\ \tilde{x} &= \frac{x}{c\Delta\tau}, \\ \tilde{m}_{WS} &= \frac{m_{WS}}{\dot{m}\Delta\tau}, \end{aligned}$$

es posible definir un tiempo crítico  $\tilde{t}_r^c$

$$\tilde{t}_r^c = \frac{a(1 + \lambda)}{a - 1}. \quad (3.12)$$

Análogamente, utilizando ahora la ecuación (3.4), el material lento está completamente incorporado cuando  $\tau_l = -\Delta\tau$ , lo cual sucede en otro tiempo crítico  $\tilde{t}_l^c$ :

$$\tilde{t}_l^c = \frac{\lambda + 1}{\lambda(a - 1)}. \quad (3.13)$$

Al comparar estos tiempos críticos, se encuentra que  $\tilde{t}_r^c = \sqrt{\frac{\Gamma_r \beta_r}{\Gamma_l \beta_l}} \tilde{t}_c^l$ , lo cual significa que  $\tilde{t}_r^c > \tilde{t}_l^c$ ; es decir, le toma más tiempo al material rápido terminar de incorporarse a la superficie de trabajo, y, por lo tanto, es el choque lento el que desaparece primero de la estructura de choque. Ahora es claro que a partir de  $\tilde{t} > \tilde{t}_l^c$ , la dinámica de la superficie ya no puede ser descrita como una evolución a velocidad constante, sino que se inicia una fase acelerada porque se sigue inyectando material rápido.

El formalismo de Cantó et al. (2013), presenta también la solución para la velocidad de la superficie de trabajo en una fase acelerada, para tiempos posteriores al tiempo crítico lento ( $\tilde{t} > \tilde{t}_l^c$ ), en cuyo caso se tiene que  $d\tau_l/dt = 0$ . La masa en reposo de la superficie de trabajo es  $m_{WS} = \dot{m}\tau_r + \dot{m}\Delta\tau = \dot{m}\Delta\tau(\tilde{\tau}_r + 1)$ , entonces al escribir la velocidad de la superficie de trabajo en la ecuación combinada (3.3) como función de  $\tilde{\tau}_r$ , se obtiene

$$\frac{d\beta_{WS}}{d\tilde{\tau}_r} = \frac{\Gamma_r(\beta_r - \beta_{WS})}{\Gamma_{WS}(\tilde{\tau}_r + 1)}. \quad (3.14)$$

Cuando  $\beta_{WS} = \beta_r$ , la ecuación anterior (3.14), tiene solución de velocidad constante, que es trivial porque no se generan choques; cuando  $\beta_{WS} \neq \beta_r$  en cambio, la integración puede hacerse mediante el método de separación de variables como

$$\frac{2(\Gamma_r - \beta_{WS}\beta_r\Gamma_r + 1/\Gamma_{WS})}{(\beta_r - \beta_{WS})} = C^{II}(\tilde{\tau}_r + 1), \quad (3.15)$$

que es una ecuación cuadrática en la velocidad  $\beta_{WS}(\tilde{\tau}_r)$  y tiene por solución

$$\begin{aligned} \beta_{WS}(\tilde{\tau}_r) &= \frac{\beta_r \mathcal{T}^2 - 4\mathcal{T} + 4\beta_r}{\mathcal{T}^2 - 4\beta_r \mathcal{T} + 4} \\ \Rightarrow \Gamma_{WS}(\tilde{\tau}_r) &= \Gamma_r \left( \frac{\mathcal{T}^2 - 4\beta_r \mathcal{T} + 4}{\mathcal{T}^2 - 4} \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde la función del tiempo  $\mathcal{T}(\tilde{\tau}_r)$  es

$$\mathcal{T}(\tilde{\tau}_r) = \frac{C^{II}(\tilde{\tau}_r + 1)}{\gamma_r}. \quad (3.17)$$

La constante  $C^{II}$  se obtiene de pedir que  $\beta_{WS}$  sea continua en  $\tilde{\tau}_r^c$  (es decir, que  $\beta_{WS}(\tilde{\tau}_r^c) = \beta_{WS0}$ ), donde  $\tilde{\tau}_r^c$  es el tiempo de eyección para una fase acelerada

$$\tilde{\tau}_r^c = \tilde{t}_l^c \left( 1 - \frac{\beta_{WS0}}{\beta_r} \right) = \frac{1}{a\lambda}; \quad (3.18)$$

así finalmente, la constante  $C^{II}$  es

$$C^{II} = \frac{2a\lambda(\Gamma_r - \beta_{WS0}\beta_r\Gamma_r + 1/\Gamma_{WS0})}{(1 + a\lambda)(\beta_r - \beta_{WS0})}. \quad (3.19)$$

Tomando la derivada en el tiempo  $\tilde{t}$  de la función  $\mathcal{T}$  (ecuación 3.17), e integrando por separación de variables se obtiene que

$$\frac{\mathcal{T}^2}{2} - 4\beta_r\mathcal{T} + 4\ln\mathcal{T} = \frac{4C^{II}}{\beta_r\Gamma_r^3}\tilde{t} + D^{II}, \quad (3.20)$$

de donde es posible despejar el tiempo  $\tilde{t}$  y con esto graficar la velocidad de la superficie de trabajo como función de éste (ver Figura 3.3). La constante  $D^{II}$  se obtiene evaluando la expresión anterior en el tiempo  $\tilde{t}_l^c$  (ecuación 3.13), y en  $\tilde{\tau}_r^c$ ; así

$$D^{II} = \frac{\mathcal{T}_c^2}{2} - 4\beta_r\mathcal{T}_c + 4\ln\mathcal{T}_c - \frac{4C^{II}}{\beta_r\Gamma_r^3} \frac{(\lambda + 1)}{\lambda(a - 1)}, \quad (3.21)$$

donde la función para el tiempo crítico  $\mathcal{T}_c$  es

$$\mathcal{T}_c = \mathcal{T}(\tilde{\tau}_r^c) = C^{II} \frac{(b + a\lambda)}{a\lambda\Gamma_r}. \quad (3.22)$$

En la gráfica de la Figura 3.3, puede observarse el comportamiento de las soluciones para la velocidad de la superficie de trabajo en sus fases constante y acelerada que se han trabajado aquí, como función del tiempo normalizado  $\tilde{t}$ , que es el tiempo real (físico). Pueden observarse también los factores de Lorentz que se van alcanzando durante la etapa de aceleración, en la que el valor máximo corresponde a  $\Gamma = 127.62$ . Con ayuda de estas gráficas es posible saber (numéricamente) cuándo terminan de incorporarse los materiales lento y rápido a la superficie de trabajo, y por lo tanto, cuándo desaparecen los choques. La fase acelerada termina cuando  $\tilde{\tau}_r = 1$ , cuando se ha incorporado el material rápido completamente.

### 3.1.2. Solución de ecuaciones relativistas para un perfil de velocidad con variación sinusoidal.

A continuación se va a considerar una variación de la velocidad de inyección sinusoidal  $\beta(\tau)$  y una tasa de pérdida de masa  $\dot{m}$  constante, para obtener las ecuaciones

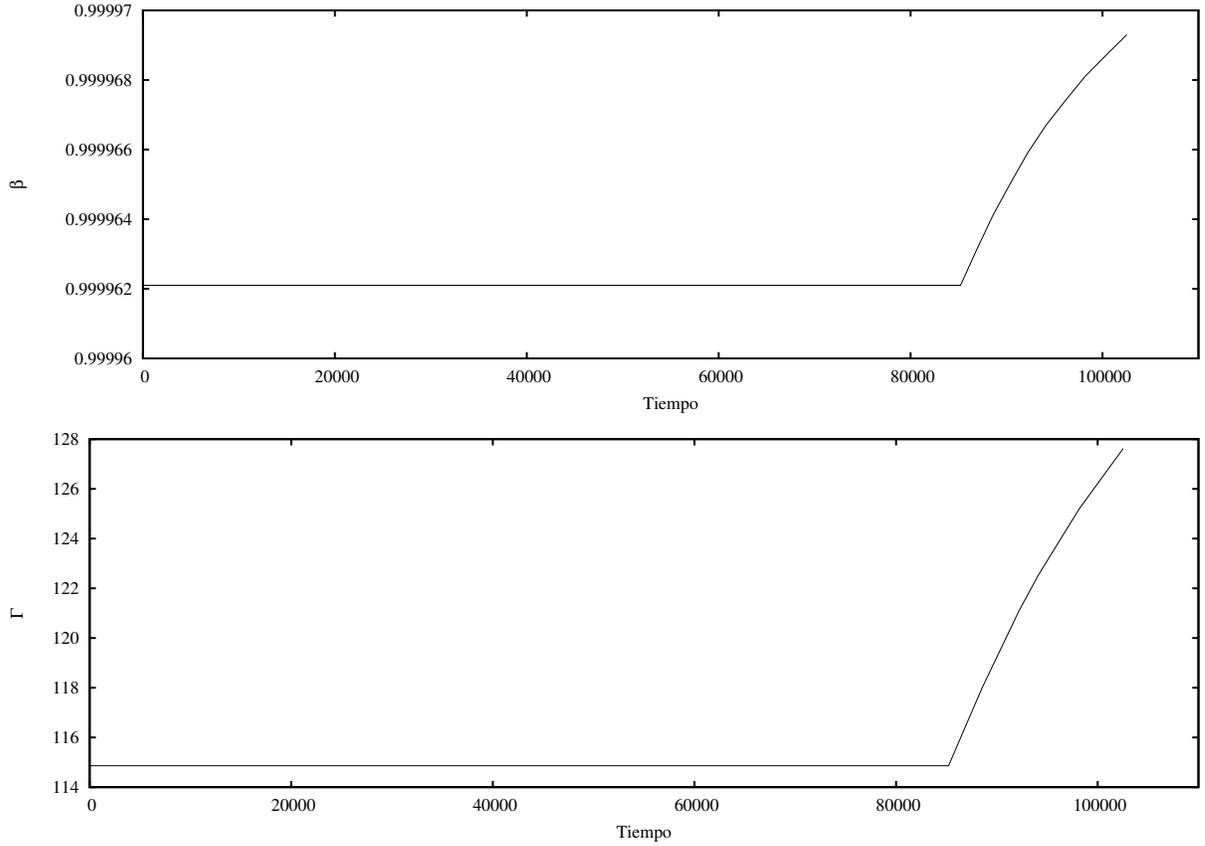


Figura 3.3: Dinámica de la superficie de trabajo para una función de doble escalón. En ambos paneles, la línea horizontal describe su evolución a velocidad constante que finaliza en  $\tilde{t} = \tilde{t}_i^c$  (el tilde representa al tiempo normalizado por  $\Delta\tau$ ) y la curva, la evolución subsecuente con una dinámica distinta, una fase acelerada, que termina a su vez en  $\tilde{t} = \tilde{t}_r^c$ . El panel superior corresponde a los valores de la velocidad y el inferior a los factores de Lorentz que se van alcanzando durante la fase acelerada, graficados en función del tiempo  $\tilde{t}$ .

analíticas del tiempo de eyección  $\tau_i$ , de la posición  $x_i$  y de la formación del choque  $t_i$ , iniciales correspondientes. Así:

$$\beta(\tau) = \beta_0(1 + \eta \sin(\omega\tau)), \quad (3.23)$$

donde la velocidad  $\beta_0$ , la perturbación  $\eta$  y la frecuencia  $\omega$  son constantes.

En esta sección se utilizará la normalización siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t}{\omega^{-1}}, \\ \tilde{\tau} &= \frac{\tau}{\omega^{-1}}, \\ \tilde{x} &= \frac{x}{c\omega^{-1}}, \\ \tilde{m}_{WS} &= \frac{m_{WS}}{\dot{m}\omega^{-1}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (3.23) en la ecuación (3.1), se obtiene que la función a minimizar está dada por:

$$x_i = \left[ \frac{\beta_0(1 + \eta \sin(\omega\tau_i))^2}{\omega\eta \cos(\omega\tau_i)} \right]_{min}. \quad (3.24)$$

De minimizar el lado izquierdo de (3.24) se obtiene la condición para  $\tau_i$  siguiente

$$\sin^{-1}(\sin(\omega\tau_i)) = \sin^{-1} \left[ \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8\eta^2}}{2\eta} \right]. \quad (3.25)$$

Ahora, del hecho de que, mediante las identidades trigonométricas adecuadas,

$$\sin(\omega\tau_i) = \sin(2\pi + \omega\tau_i), \quad (3.26)$$

la función minimizada tiene dos soluciones, esto es, dos mínimos. Se toma el mínimo en el que la perturbación crece con  $\tau$  (ver Figura 3.4), para determinar la posición  $x_i$  y  $\tau_i$ . Además, se tiene que tomar el signo negativo para que el argumento de la función sinusoidal sea menor que 1. El tiempo de formación de la WS es finalmente:

$$\tau_i = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left[ \frac{1 - \sqrt{1 + 8\eta^2}}{2\eta} \right]. \quad (3.27)$$

Sustituyendo  $\tau_i$  en la ecuación (3.24) se obtiene la posición del choque

$$x_i = \frac{\beta_0}{\omega\eta} \frac{(1 + \eta \sin(\omega\tau_i))^2}{\cos(\omega\tau_i)}. \quad (3.28)$$

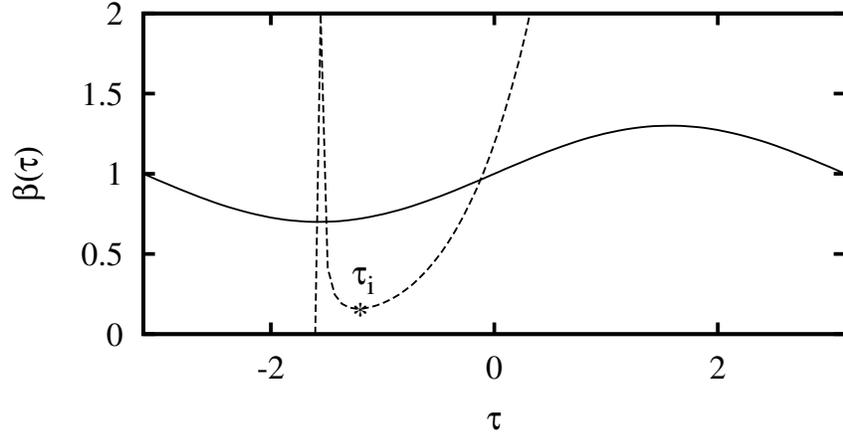


Figura 3.4: Gráfica de la velocidad de inyección como función de  $\tau$ . Con líneas punteadas se grafica la función a minimizar (3.24) y con línea continua la función  $\beta(\tau)$  (ecuación 3.23). Se indica el mínimo de la función que corresponde al valor de  $\tau_i$ , alrededor del cual se buscan numéricamente los valores de  $\tau_l$  y  $\tau_r$ .

Por último, sustituyendo (3.23) en (3.2):

$$t_i = \tau_i + \frac{1}{\omega\eta} \frac{(1 + \eta \sin(\omega\tau_i))}{\cos(\omega\tau_i)}. \quad (3.29)$$

Una vez encontrado  $\tau_i$ , se procede a buscar en una vecindad de radio  $\epsilon$ , las raíces  $\tau_r$  y  $\tau_l$  de la ecuación (3.23), de manera que la masa en reposo de la WS es

$$m_{WS} = \int_{\tau_l}^{\tau_i} \dot{m} d\tau + \int_{\tau_i}^{\tau_r} \dot{m} d\tau = \dot{m}(\tau_r - \tau_l), \quad (3.30)$$

es decir,  $\tilde{m}_{WS} = \tilde{\tau}_r - \tilde{\tau}_l$ .

Por otra parte, las derivadas de las ecuaciones (3.4) y (3.5) que corresponden a este caso, en su forma adimensional son:

$$\frac{d\tilde{\tau}_l}{d\tilde{t}} = \frac{\left(1 - \frac{\beta_{WS}}{\beta_l}\right)}{\left(1 - \frac{\tilde{x}_{WS}}{\beta_l^2} \frac{d\beta_l}{d\tilde{\tau}_l}\right)}, \quad (3.31)$$

$$\frac{d\tilde{\tau}_r}{d\tilde{t}} = \frac{\left(1 - \frac{\beta_{WS}}{\beta_r}\right)}{\left(1 - \frac{\tilde{x}_{WS}}{\beta_r^2} \frac{d\beta_r}{d\tilde{\tau}_r}\right)}. \quad (3.32)$$

De esta manera, sustituyendo los resultados (3.30), (3.31) y (3.32), en la ecuación combinada para la velocidad de la superficie de trabajo (3.3), se obtiene la nueva

expresión para la velocidad de la WS, también adimensional:

$$(\tilde{\tau}_r - \tilde{\tau}_l)\Gamma_{WS} \frac{d\beta_{WS}}{d\tilde{t}} = \Gamma_r[\beta_r - \beta_{WS}] \frac{\left(1 - \frac{\beta_{WS}}{\beta_r}\right)}{\left(1 - \frac{\tilde{x}_{WS}}{\beta_r^2} \frac{d\beta_r}{d\tilde{\tau}_r}\right)} - \Gamma_l[\beta_l - \beta_{WS}] \frac{\left(1 - \frac{\beta_{WS}}{\beta_l}\right)}{\left(1 - \frac{\tilde{x}_{WS}}{\beta_l^2} \frac{d\beta_l}{d\tilde{\tau}_l}\right)}, \quad (3.33)$$

que es una ecuación diferencial para la velocidad que, en conjunto con la ecuación

$$x_{\tilde{WS}} = \frac{d\beta_{WS}}{d\tilde{t}}, \quad (3.34)$$

y las soluciones de las ecuaciones algebraicas (3.4) y (3.5) para  $\tilde{\tau}_l$  y  $\tilde{\tau}_r$ , conforman el sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas, que se resuelve numéricamente.

Dos soluciones para diferentes velocidades iniciales y perturbaciones positivas se presentan en la Figura 3.5; las velocidades de inyección  $\beta_l$  y  $\beta_r$  tienden a la de la superficie de trabajo y después ésta tiende a la velocidad constante  $\beta_0$  durante su evolución; estas tendencias se notan con más facilidad cuando la perturbación  $\eta$  es pequeña.

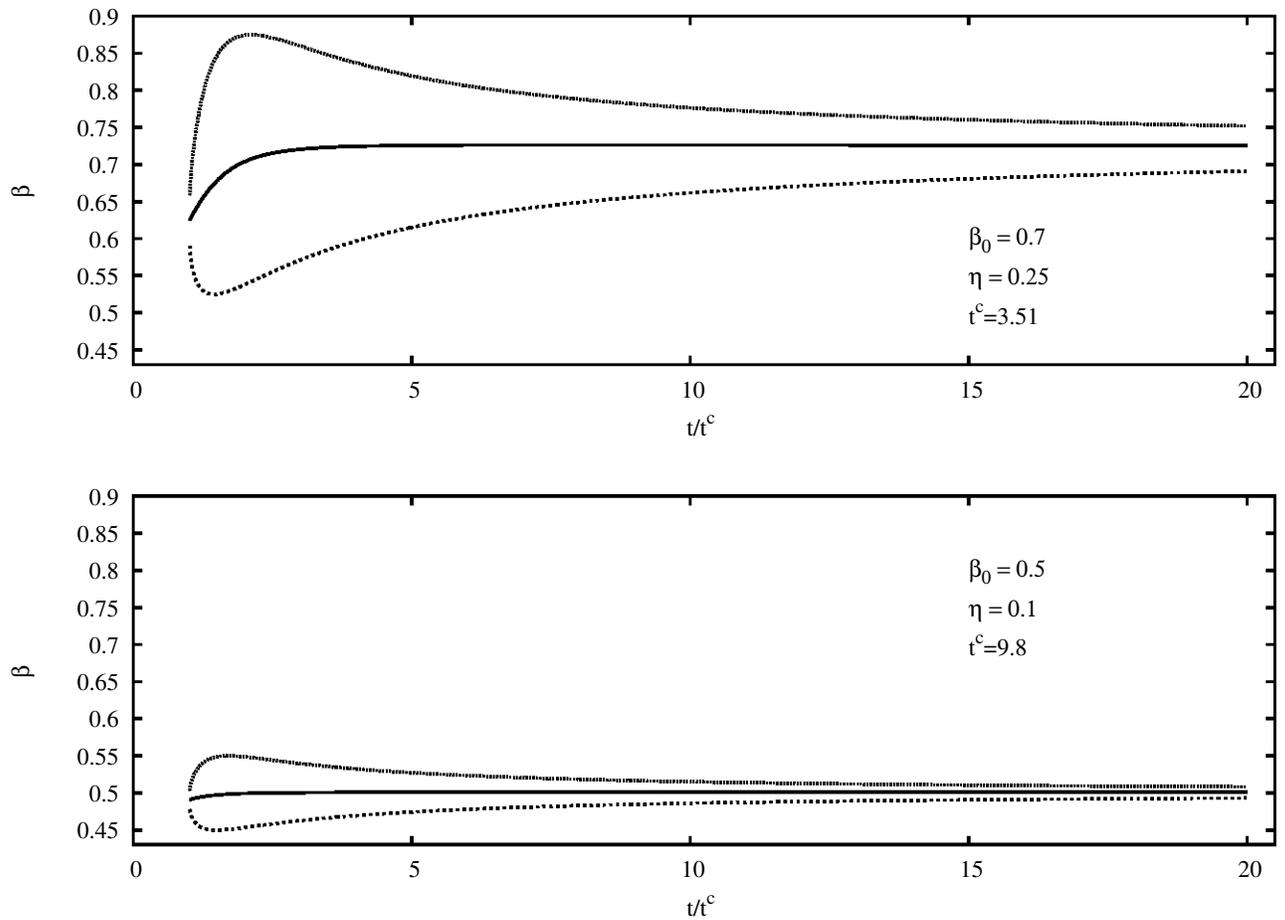


Figura 3.5: Velocidad analítica de la superficie de trabajo como función del tiempo normalizado a  $t^c$ , el tiempo en el que se formó la WS. Ambas gráficas muestran la dinámica de la superficie de trabajo con línea continua (central), del material rápido con línea punteada superior y del material lento con línea segmentada inferior. El primer pánel (de arriba hacia abajo), muestra un caso de perturbación grande a la velocidad de  $\eta = 0.25$  y el inferior, en la misma escala, un caso de perturbación menor  $\eta = 0.1$ . Las velocidades  $\beta_{l,r}$  tienden a la de la WS, la velocidad de la WS tiende al valor constante  $\beta_0$ .

# Capítulo 4

## Simulaciones Numéricas.

Este capítulo compila el estudio numérico de la dinámica de choques en jets hipersónicos, tanto relativistas como clásicos (no relativistas), impulsados por una fuente variable. En la primera sección, se presenta el comportamiento de las variables hidrodinámicas: densidad, velocidad y presión en función de la posición y el tiempo, para un gas ideal, impulsado por una fuente, bajo el régimen de la hidrodinámica clásica, cuya variación en la velocidad es una perturbación de tipo sinusoidal. Se definen dos casos: se le llama “perturbación positiva” al caso en que la velocidad inicialmente aumenta y luego decrece de manera sinusoidal y se le llama “perturbación negativa” al caso opuesto. Se consideran dos valores distintos del cociente de las capacidades caloríficas y dos amplitudes de perturbación. En el caso relativista, se presenta la hidrodinámica que resulta de un flujo hipersónico con una variación en la velocidad, también una función con perturbación sinusoidal positiva y otra negativa, ahora para dos valores de velocidad inicial. La variación en la velocidad de inyección da origen ondas de choque (Rees, 1978) y en este capítulo se describe el desarrollo de las estructuras internas que se forman en el fluido.

## 4.1. Hidrodinámica de superficies de trabajo y estructuras de choque interno, límite clásico.

Se utiliza el código numérico de hidrodinámica compresible clásica descrito en la sección 2.1 del Capítulo 2, para seguir la evolución de la estructura interna que se forma cuando hay una fluctuación sinusoidal en la velocidad de un flujo hipersónico.

### 4.1.1. Condiciones Iniciales del Fluido.

Se considera inicialmente un fluido adiabático con condiciones uniformes para la densidad  $\rho_0 = 1.0$ , la velocidad  $v_0 = 0.9$  y la presión  $p_0 = 0.001$ . A un tiempo  $t = 1$ , se inyecta material mediante la fluctuación en la velocidad  $v$  en función del tiempo  $t$ ,

$$v = \begin{cases} v_0(1 \pm \eta \sin(t - 1)) & \text{si } 1 < t < 1 + 2\pi, \\ v_0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $v_0$  es un valor constante de la velocidad de inyección correspondiente al valor de la condición inicial y  $\eta$  es un parámetro que define la amplitud de la perturbación; se consideran los valores  $\eta = 0.1$  y  $\eta = 0.5$  en este trabajo.

La perturbación empieza en  $t = 1$  para que cualquier posible ruido numérico debido a la inicialización de los valores de las variables hidrodinámicas en la malla computacional se amortigüen antes de inyectar la perturbación. Se hace énfasis en que es un solo pulso el que se inyecta a la malla computacional.

La velocidad del sonido de un fluido uniforme es  $C_s^2 = \gamma p_0 / \rho_0$ , por lo que el número de Mach, definido por  $M_0 = v_0 / C_s$ , donde  $v_0$  es la velocidad del fluido, es  $M_0 = 28.44$  cuando  $\gamma = 1.001$  y  $M_0 = 22.02$  cuando  $\gamma = 5/3$ . Es decir, el fluido uniforme inicial en ambos casos es altamente supersónico.

La fluctuación en la velocidad  $v$  se introduce en la malla computacional como una condición de frontera izquierda de entrada. La condición para la frontera derecha es simplemente de flujo saliente ya que todas las velocidades son positivas.

Para todos los modelos abordados, el dominio espacial  $x$  va de 0 a 400 y se ha cubierto con 1000 celdas igualmente espaciadas. Los modelos presentados tienen unidades arbitrarias pero se pueden recuperar valores físicos al relacionar el tamaño, velocidad y densidad de los modelos con sus similares obtenidos de observaciones y así definir cantidades características que permiten dimensionalizar los resultados. Este conjunto de ecuaciones se trabajan en el Apéndice del trabajo.

### 4.1.2. Evolución hidrodinámica.

Se resuelven las ecuaciones de conservación [2.2] para la hidrodinámica compresible por el método descrito en el Capítulo 2 y con las condiciones iniciales y de frontera descritas en la sección anterior. Este procedimiento da como resultados los valores de las cantidades conservadas  $\rho$ ,  $\rho v$ ,  $E$  en cada celda de la malla computacional a cada tiempo de integración. De las cantidades conservadas es fácil obtener los valores de las variables hidrodinámicas  $\rho$ ,  $v$  y  $p$ . Las Figuras 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4, muestran estas variables hidrodinámicas en función de la posición en cuatro instantes de tiempo que son representativos de la evolución general de cada variable. Se presentan los casos cuando la perturbación a la velocidad es de un 10% ( $\eta = 0.1$ ) y cuando es del 50% ( $\eta = 0.5$ ) y para ambos valores del cociente de calores específicos, es decir, los casos  $\gamma = 1.001$  y  $\gamma = 5/3$ . Puesto que las velocidades siempre son positivas, las estructuras avanzan de izquierda a derecha conforme pasa el tiempo y, por lo tanto, para ahorrar espacio, se grafican juntos 4 tiempos, en cada figura.

Los perfiles de todas las variables originados por una perturbación del 10% ( $\eta = 0.1$ ), son más suaves y por lo tanto originan choques más débiles que en el caso  $\eta = 0.5$ . Se puede notar que, en el caso de la perturbación positiva, a tiempos tempranos, se forman dos choques y luego al evolucionar en el tiempo éstos se separan. El caso de la perturbación negativa, inicia con un flujo convergente que da origen a un pico en la presión, a partir del cual se originan dos ondas que se van separando con el tiempo.

La amplitud de los picos de todos los perfiles de presión, disminuye como función

del tiempo, aunque mantiene mayores magnitudes para la perturbación más grande ( $\eta = 0.5$ ). El factor de compresión en una onda de choque (desde el sistema de referencia del choque) está dado por

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{(\gamma - 1)M^2 + 2},$$

donde 2 y 1 indican densidad post-choque y pre-choque, el número de Mach relativo es  $M = M_0 - M_s$ , con  $M_0$  el número de Mach del fluido y  $M_s$  es el número de Mach del choque (ambos números de Mach medidos en un sistema de referencia de reposo); este número  $M$  es pequeño debido a que las perturbaciones en la velocidad no son grandes. Para una perturbación dada, se esperaría un factor de compresión más alto en los casos  $\gamma = 1.001$  que en los casos  $\gamma = 5/3$  y esto es justamente lo que se aprecia en las figuras. De igual manera, se esperaría que las perturbaciones mayores, es decir,  $M$  mayor, darían origen a compresiones mayores para ambos valores de  $\gamma$ ; esto también se observa en las figuras.

Si se pone atención en los centros de las estructuras, el patrón que se observa es que los choques de la perturbación positiva se separan más que los choques generados por la perturbación negativa, (respecto de los centros de las ondas).

Como se puede notar, las estructuras que surgen de la evolución hidrodinámica son más complejas que una sola superficie de trabajo; se originan también estructuras de choque internas en las que ondas de rarefacción también tienen lugar.

### 4.1.3. Estructura de choque interno.

En esta sección se explica la diferencia entre lo que se entiende en este trabajo por superficie de trabajo (WS) y estructura de choque interno. Como se describió en el capítulo 3, una WS, es la estructura compuesta por dos choques, una discontinuidad de contacto y material interno chocado, que se forma cuando un flujo supersónico impacta un medio ambiente (Cantó et al. 2013). Las estructuras de choque interno en cambio, se componen por ondas de choque separadas, por ejemplo, por una zona de rarefacción o por ondas interactuantes (Raga et al. 2009).

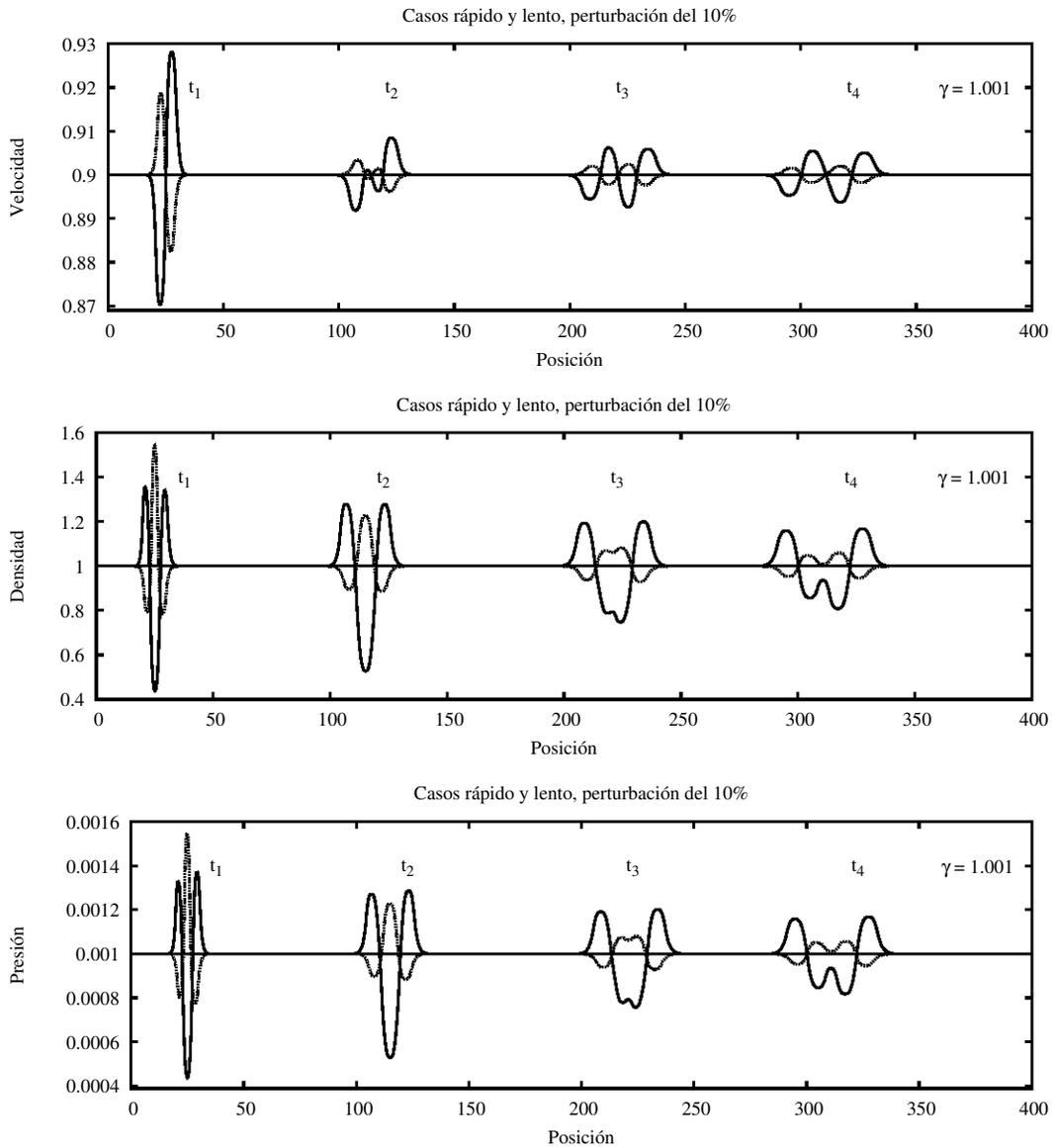


Figura 4.1: Velocidad, densidad y presión en función de la posición para la evolución de una perturbación sinusoidal. La línea continua representa la perturbación positiva, la línea punteada representa la perturbación negativa. En este modelo  $\gamma = 1.001$  y la amplitud de la perturbación es  $\eta = 0.1$ . Están graficados los resultados a los cuatro tiempos:  $t_1 = 32$ ,  $t_2 = 132$ ,  $t_3 = 250$ ,  $t_4 = 350$ . Ver descripción en el texto.

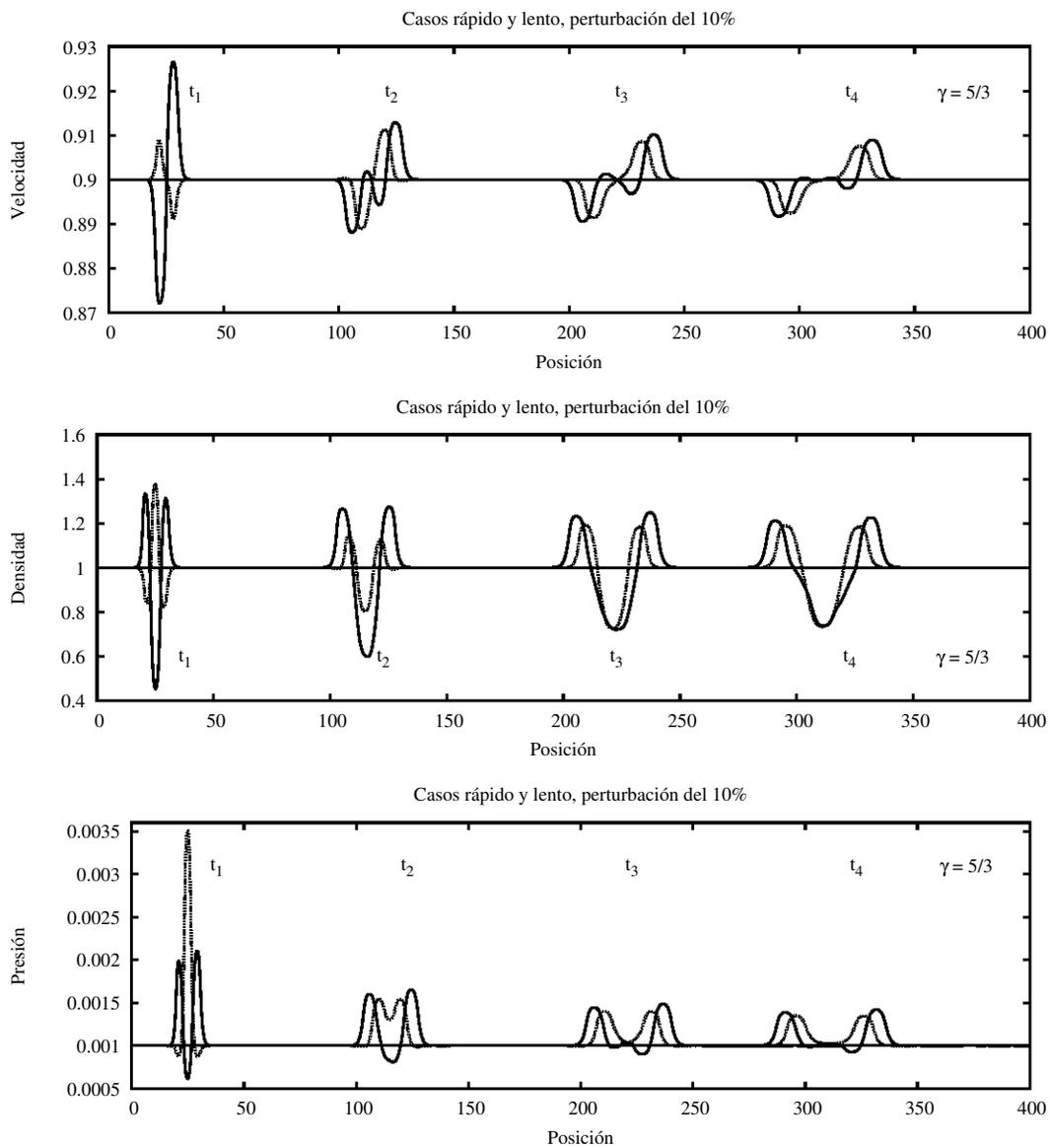


Figura 4.2: Misma información que la figura 4.1 pero para  $\gamma = 5/3$  y  $\eta = 0.1$ .

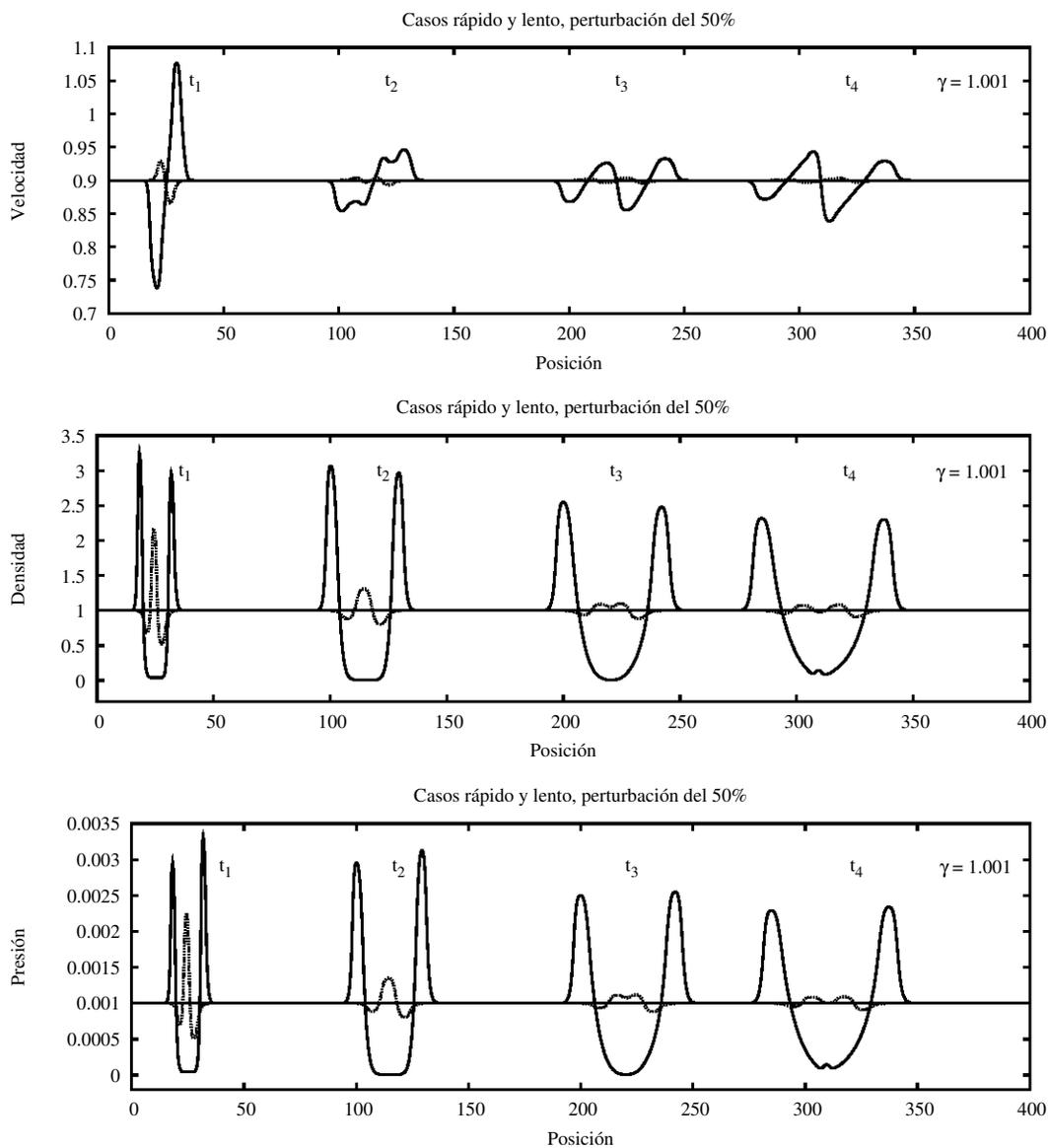


Figura 4.3: Misma información que la figura 4.1 pero para  $\gamma = 1.001$  y  $\eta = 0.5$ .

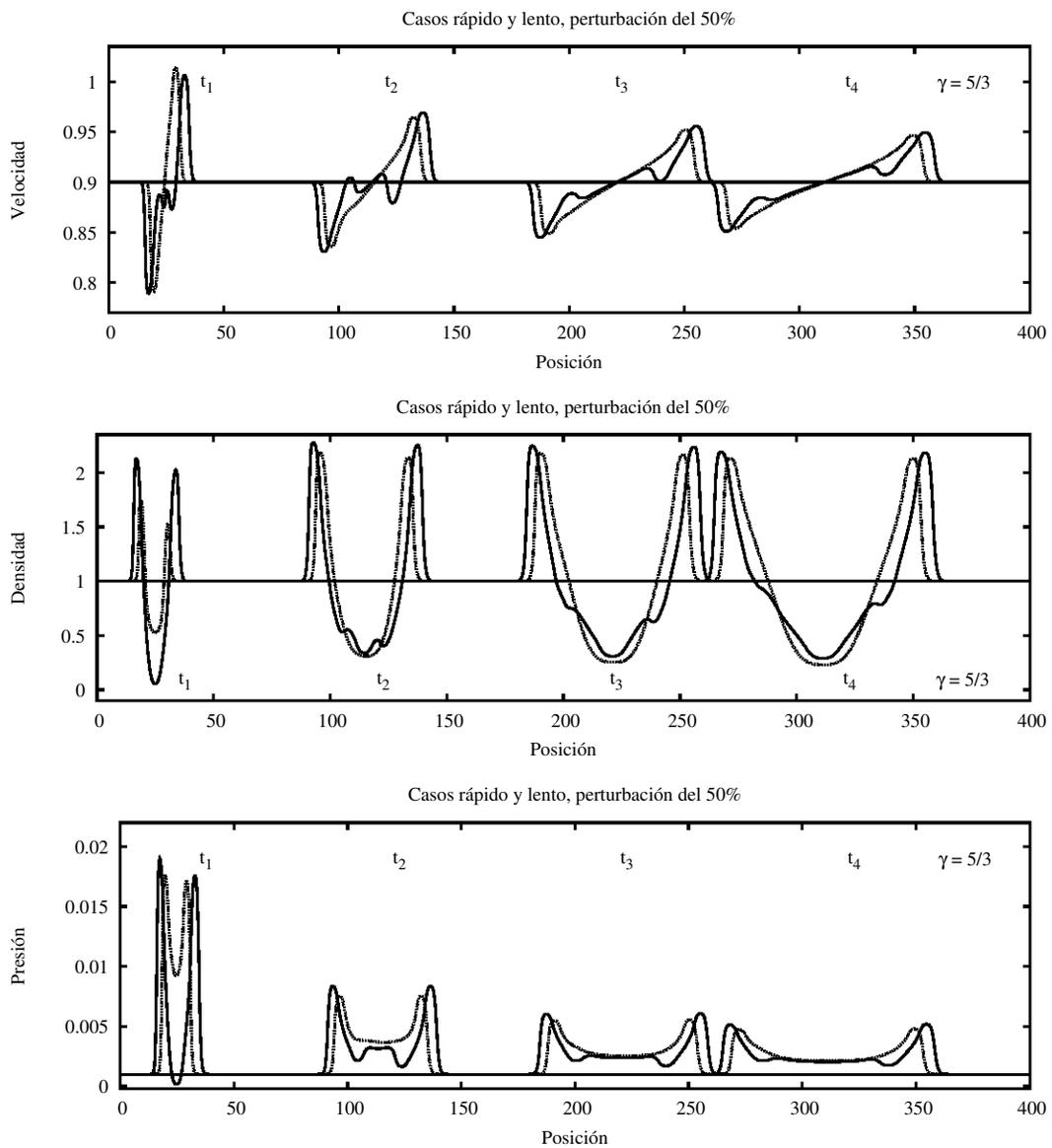


Figura 4.4: Misma información que la figura 4.1 pero para  $\gamma = 5/3$  y  $\eta = 0.5$ .

Las perturbaciones en la velocidad que están considerándose, implican que la velocidad del material tiene un valor distinto en cada punto durante el tiempo de inyección. En el pulso de los modelos rápido-lento (la perturbación positiva; ver Figura 4.5), la onda entra a la malla computacional con una velocidad que inicia incrementándose, de manera que se empieza a formar un choque inmediatamente en el punto indicado por la etiqueta  $A$  y luego todo el material de  $A$  a  $B$  se incorpora a este choque porque las velocidades son cada vez mayores. La velocidad del material entre  $B$  y  $C$  está disminuyendo y por lo tanto no se integra a la onda de choque formada, el material entonces, se va estirando conforme pasa el tiempo, se trata de una zona de rarefacción. Finalmente, entre los puntos etiquetados por  $D$  y  $E$  la velocidad del material está aumentando nuevamente con lo que se forma un segundo choque que con el tiempo alcanza al material entre los puntos  $C$  y  $D$ .

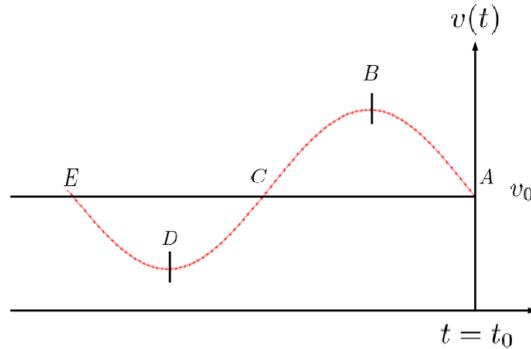


Figura 4.5: Pulso del modelo de inyección rápido-lento. Se etiquetan por  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$  los límites que dividen al pulso en secciones, las cuales determinan el comportamiento del material y la formación de estructuras internas, en función de la velocidad que tiene el material antes de integrarse a la malla computacional en  $t = t_0$ .

En el pulso de los modelos lento-rápido (ver Figura 4.6), el material entre  $V$  y  $W$  está disminuyendo su velocidad por lo que no se forma un choque de inmediato y esta zona se estira. Hasta el punto  $W$ , donde el material aumenta su velocidad, se empieza a formar un choque al cual se incorpora todo el material entre  $W$  e  $Y$ ; éste es el que se observa como un pico central en las estructuras de las variables de presión

y densidad, a tiempos tempranos (ver Figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4). La zona entre  $Y$  y  $Z$  es una zona de rarefacción.

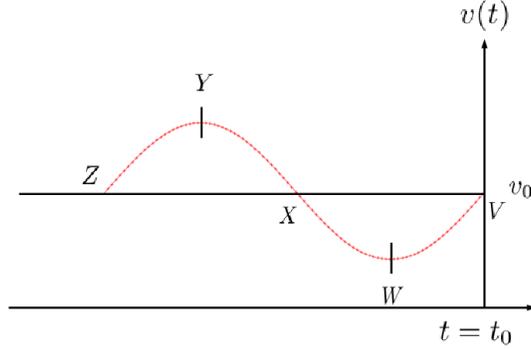


Figura 4.6: Pulso del modelo de inyección lento-rápido. Los límites que dividen al pulso en sus secciones correspondientes, están ahora etiquetados por  $V, W, X, Y$  y  $Z$ .

#### 4.1.4. Dinámica de las estructuras de choque interno.

En esta sección se toma como el inicio de la dinámica de la estructura de choque interno, el tiempo en que todo el pulso se ha incorporado a la malla computacional. Dado que la inyección del pulso inicia en  $t = 1$  (ver Sección 4.1.1) y tiene un periodo total de  $2\pi$  en las unidades arbitrarias de las simulaciones, esto corresponde al tiempo  $t = 1 + 2\pi$ . Para facilitar la relación de algún patrón en la dinámica con el periodo del pulso inicial, se describe la dinámica posterior en unidades de  $\pi$ .

Para identificar los choques componentes de las estructuras, se utilizan los cambios abruptos en la magnitud de la variable de presión, mayores a una tolerancia de 0.05. La búsqueda de éstos en la malla computacional se hace, de izquierda a derecha para determinar a un choque izquierdo, y de derecha a izquierda para determinar un choque derecho. Una vez identificados, se guarda su posición en cada paso de tiempo y se calcula el centro de masa entre estas dos posiciones.

Las Figuras 4.7, 4.8, 4.9 y 4.10 muestran las posiciones de los choques derecho, izquierdo y centro de masa de las estructuras internas como función del tiempo, para

todos los modelos considerados, es decir, perturbaciones positivas y negativas de amplitudes de  $\eta = 0.1$  y  $\eta = 0.5$ , y para valores de  $\gamma = 5/3$  y  $\gamma = 1.001$ . Las gráficas reportadas parecen ser líneas rectas, lo que indica que las velocidades de las componentes son aproximadamente constantes.

En las figuras 4.7 y 4.8 que corresponden a perturbaciones positivas, las variaciones que se observan a tiempos muy tempranos, son consecuencia de un periodo de ajuste en que se forma un choque y luego otro. En cada figura puede verse un comportamiento en que los choques tienden a separarse uno del otro conforme pasa el tiempo; la mayor separación se tiene en los casos  $\gamma = 5/3$ . Se observa también que la separación con el tiempo entre los choques, en el caso en que la perturbación es del 50 % ( $\eta = 0.5$ ), es mayor debido a que las velocidades son mayores.

Cuando la perturbación es negativa, la estructura de choque tarda más tiempo en formarse. En las Figuras 4.9 y 4.10, se observa que en las estructuras resultantes de perturbaciones negativas, los choques permanecen más cercanos entre sí en comparación con los casos correspondientes de las perturbaciones positivas.

En la figura 4.10, los choques parecen acercarse inicialmente y luego con el tiempo alejarse (como en el resto de los modelos), encontrándose la mayor separación entre choques para el caso  $\gamma = 5/3$ .

Se quiere ahora estudiar a las velocidades de los choques y de los centros de masa. Ya que la posición encontrada para una onda de choque puede permanecer fija por varios pasos de tiempo en una misma celda computacional, de calcular directamente las derivadas numéricas a las posiciones, se daría el caso en que dichas derivadas resulten iguales a cero durante varios pasos de tiempo. Para resolver este inconveniente, se decidió hacer un ajuste analítico a las gráficas de posiciones. Para evitar guiarse por la apariencia lineal de las gráficas de posiciones, la forma analítica adoptada, responde a un polinomio de cuarto orden, cuya primera derivada con respecto al tiempo se asume finalmente como la forma funcional de las velocidades. El ajuste se realiza entre los

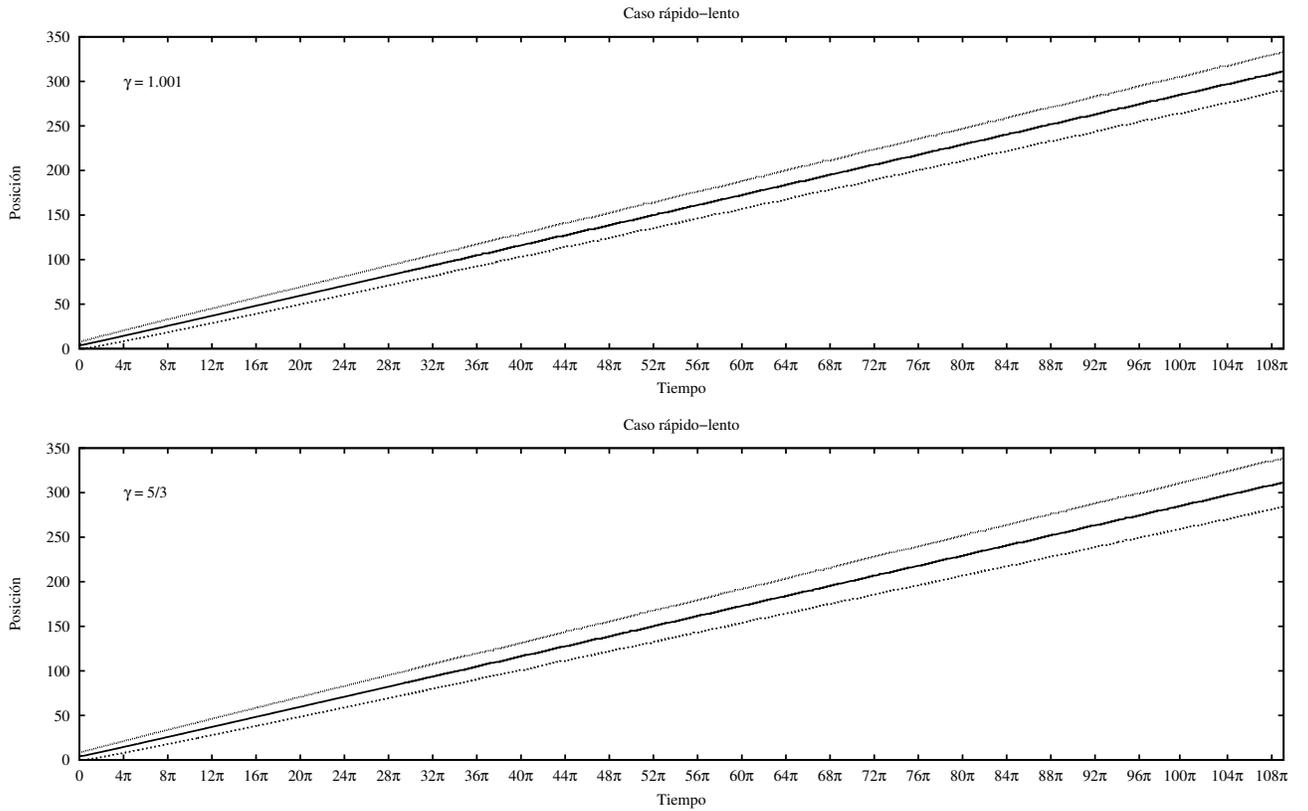


Figura 4.7: Posición como función del tiempo, del centro de masa indicada por la línea central de color más oscuro y sus choques izquierdo (línea punteada inferior) y derecho (línea continua superior), para el valor de  $\gamma = 1.001$  en el panel superior y  $\gamma = 5/3$  en el panel inferior, para una perturbación positiva a la velocidad de amplitud 10%. El cero del tiempo corresponde al instante en que todo el pulso se ha incorporado a la malla computacional.

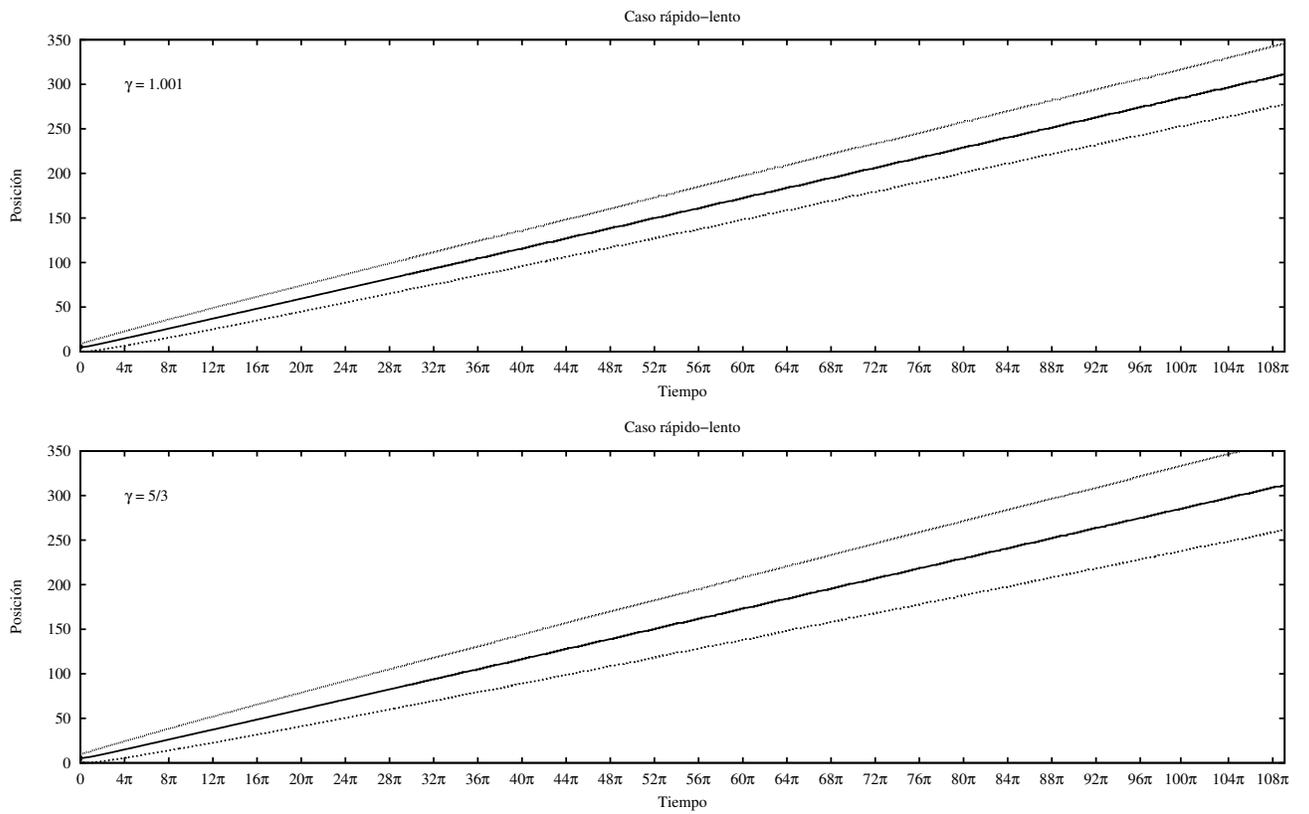


Figura 4.8: Se muestra la información de la Figura 4.7 pero para una amplitud de la perturbación de 50 %.

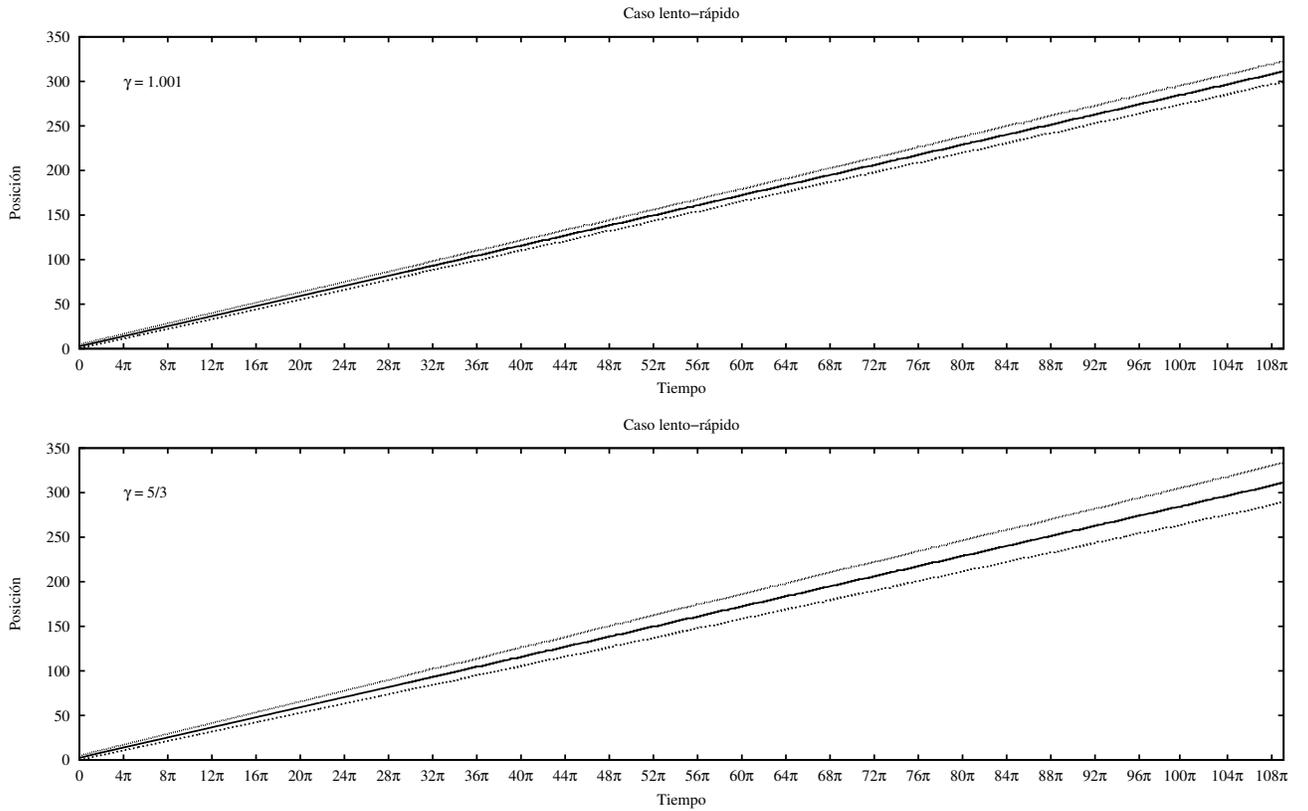


Figura 4.9: Posición como función del tiempo, del centro de masa de la estructura de choque indicada por la línea central de color más oscuro y sus choques izquierdo (línea punteada inferior) y derecho (línea continua superior), para el valor de  $\gamma = 1.001$  en el pánel superior y  $\gamma = 5/3$  en el pánel inferior, para una perturbación negativa a la velocidad de amplitud 10%. El cero del tiempo corresponde al instante en que todo el pulso se ha incorporado a la malla computacional.

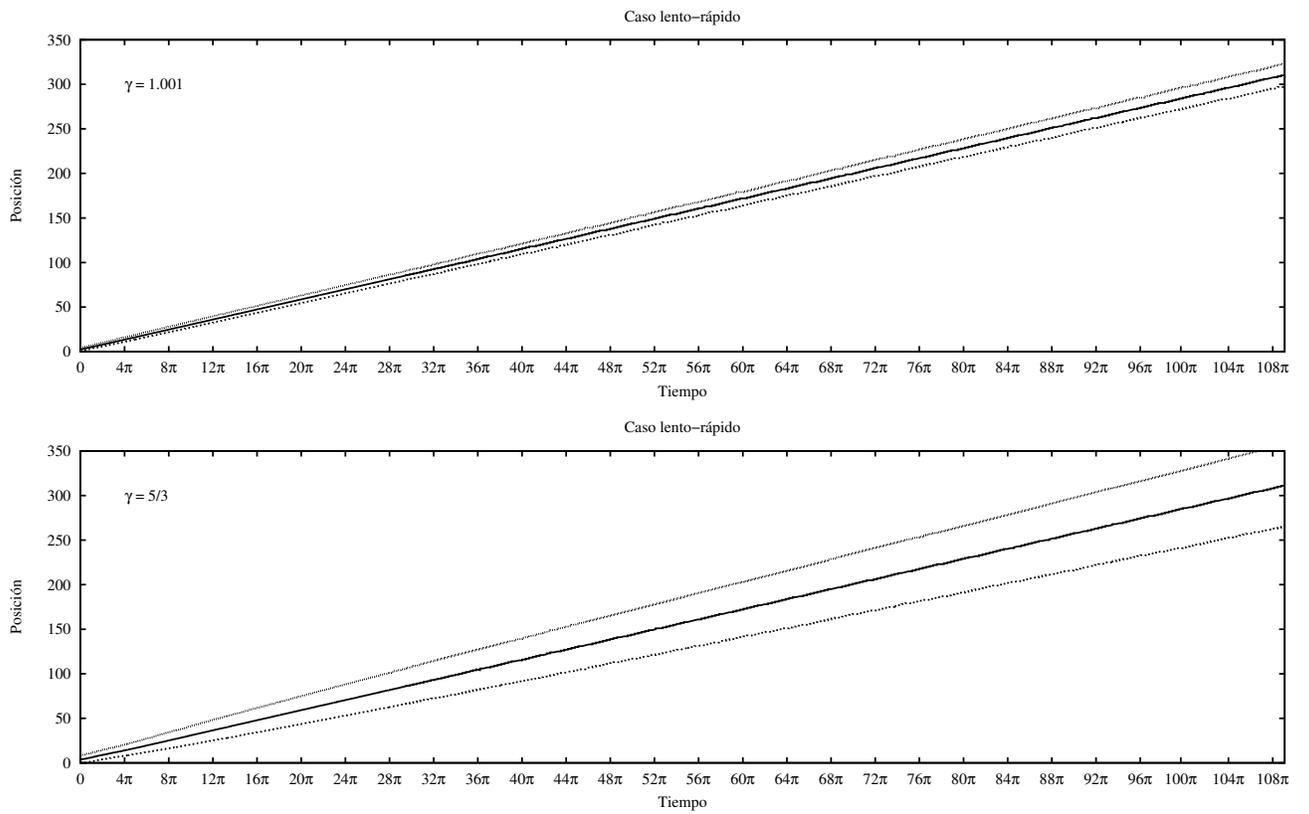


Figura 4.10: Se muestra la información de la Figura 4.9, para una amplitud de la perturbación del 50 %.

tiempos  $0\pi$  y  $108\pi$ . Las velocidades resultantes de derivar los ajustes polinómicos se presentan en las Figuras 4.11, 4.12, 4.13 y 4.14.

En las Figuras 4.11 y 4.12, se observa que a tiempos tempranos las velocidades de los choques se acercan a la velocidad del centro de masa y luego mantienen velocidades aproximadamente constantes, lo que es congruente con las gráficas de posiciones presentadas. A tiempos muy tardíos, las velocidades de las ondas de choque vuelven a acercarse a la del centro de masa, lo cual corresponde al ensanchamiento de los choques visto en las figuras 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4; esto podría deberse a la difusión numérica. Las ondas con perturbaciones positivas, muestran una tendencia con el tiempo de las velocidades de los choques, a la del centro de masa. Dicha tendencia es mayor para los casos  $\gamma = 1.001$  y para las amplitudes de la perturbación más bajas. Inicialmente, se nota que la velocidad del centro de masa es ligeramente inferior a la del flujo uniforme ( $v_0 = 0.9$ ), pero con el tiempo la alcanza.

En las Figuras 4.13 y 4.14 que representan los casos de perturbaciones negativas, las velocidades de las ondas de choque derecha e izquierda son más parecidas a la velocidad del centro de masa que en el caso de las perturbaciones positivas. La tendencia de la velocidad del centro de masa es acercarse a la velocidad del flujo uniforme,  $v_0$ .

#### 4.1.5. Luminosidades.

Luminosidad se define en Astronomía como la cantidad de energía radiada por unidad de tiempo. En los modelos presentados de la hidrodinámica clásica es posible calcular una luminosidad debido a que los choques formados como resultado de la inyección de material, convierten continuamente energía cinética en energía interna. Es esta energía interna la que se supone está disponible para ser radiada. Para que la pérdida de energía no afecte la dinámica, se supone que solamente es una fracción pequeña de la energía interna la que es radiada. En la práctica, la cantidad de energía radiada dependerá del tiempo de enfriamiento del gas chocado, el cual depende de las cantidades físicas del problema real.

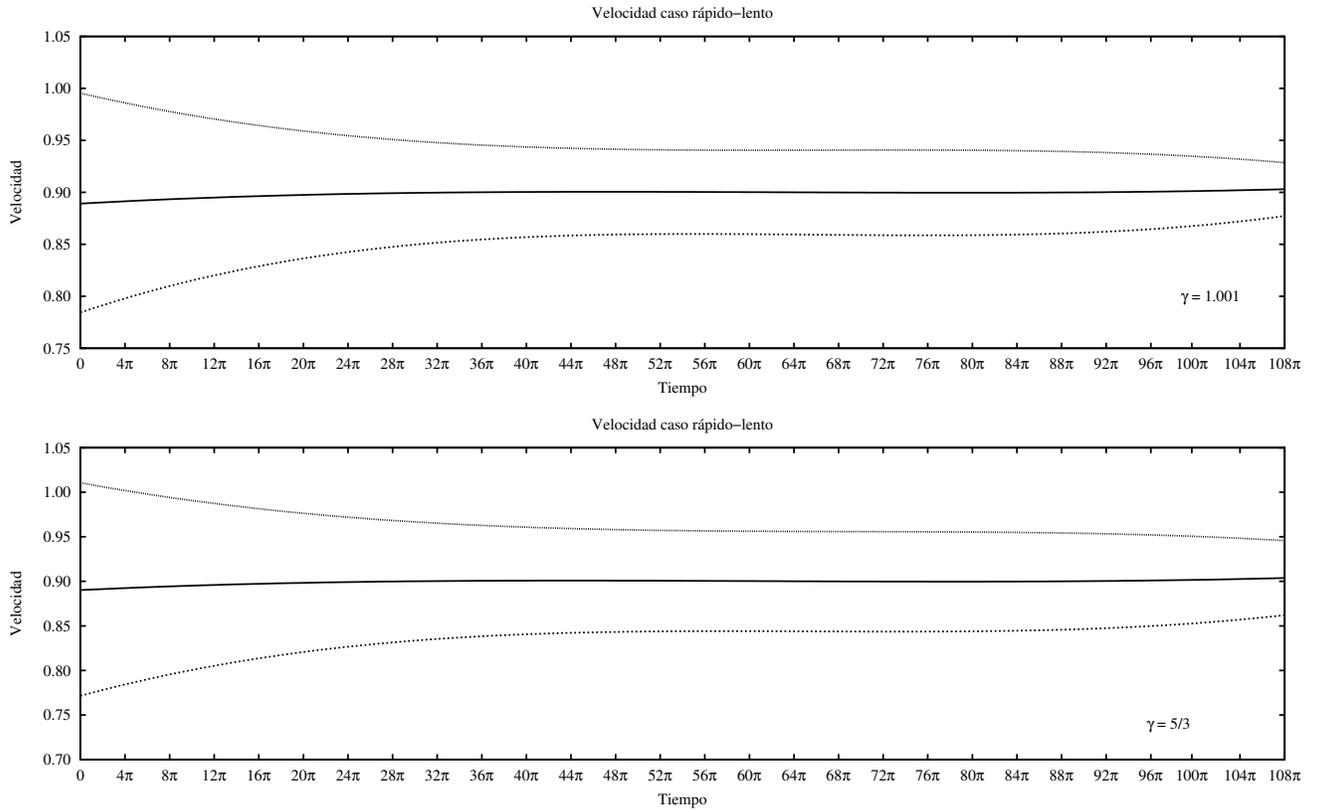


Figura 4.11: Velocidades del centro de masa (indicada por la gráfica central de color más oscuro), y de sus choques izquierdo (gráfica punteada inferior) y derecho (gráfica punteada superior), para el valor de  $\gamma = 1.001$  (pánel superior) y  $\gamma = 5/3$  (pánel inferior), en el caso de la perturbación positiva a la velocidad de amplitud 10%.

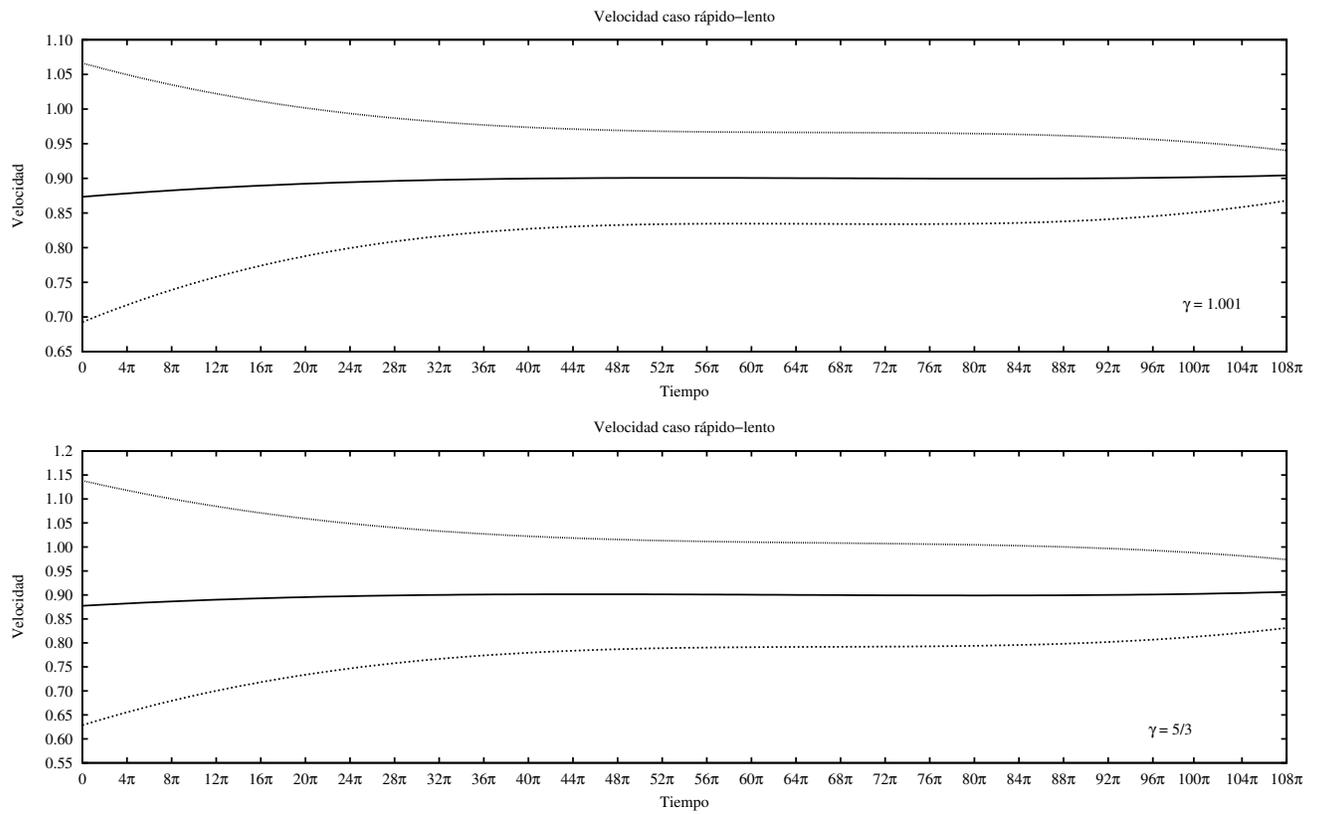


Figura 4.12: Misma información que en la Figura 4.11, en el caso de la perturbación positiva de amplitud 50%.

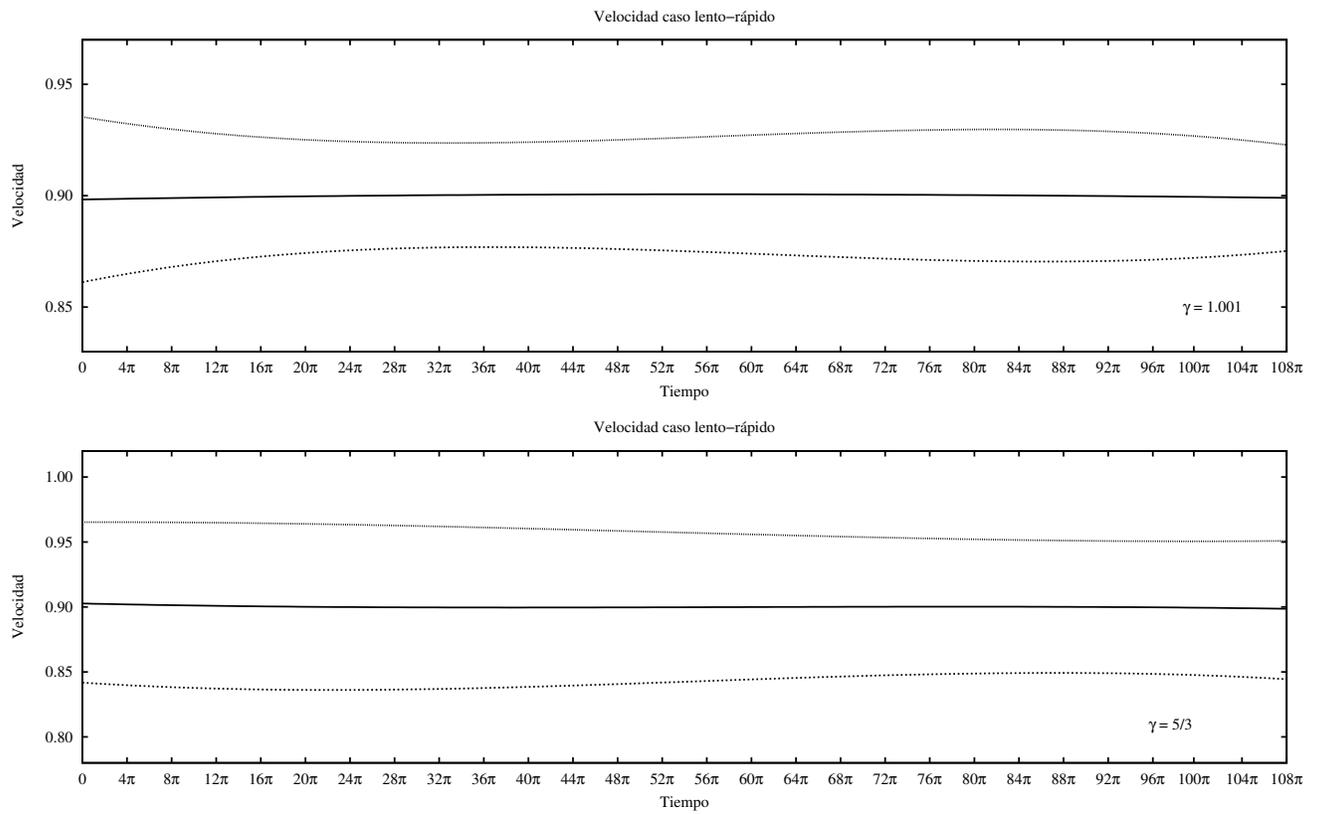


Figura 4.13: Misma información que en la Figura 4.11, en el caso de una perturbación negativa, de amplitud 10 %.

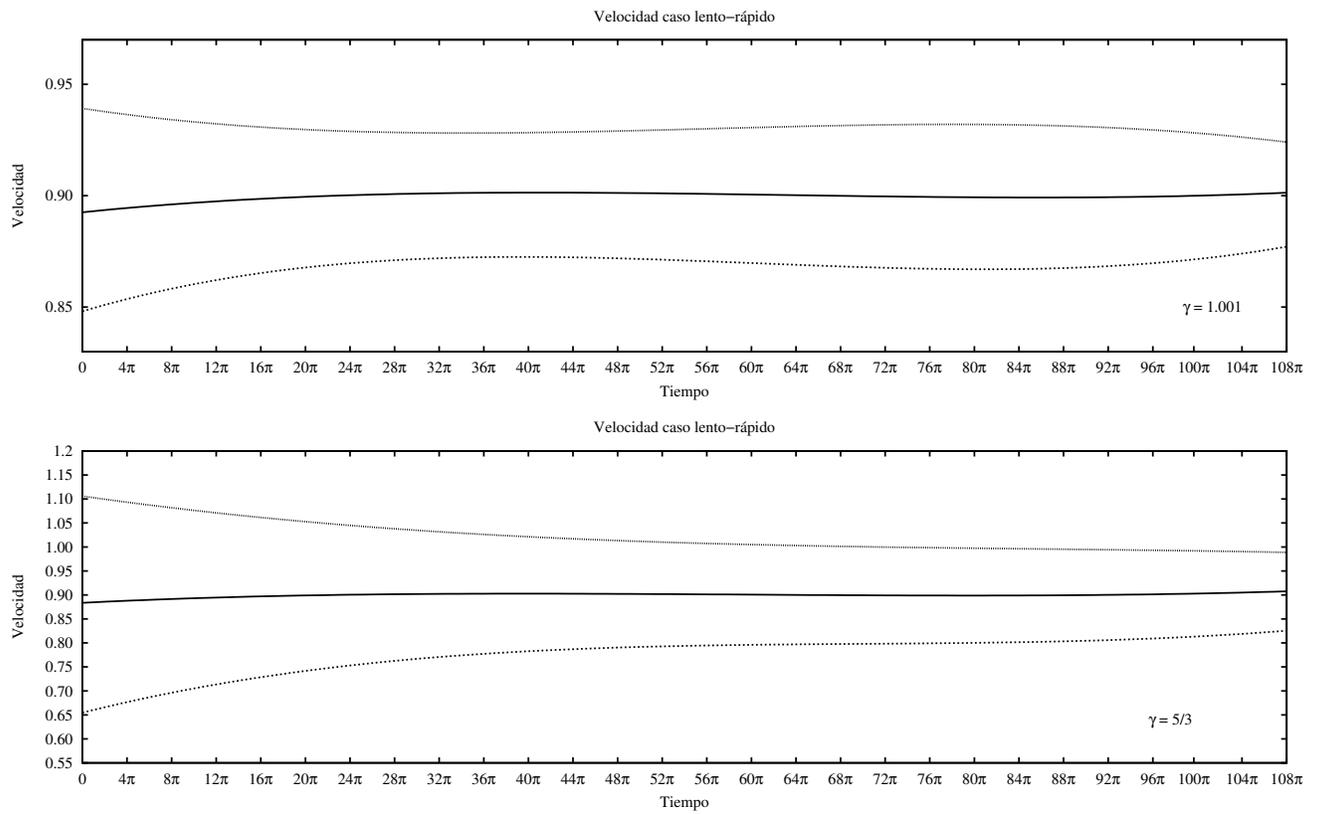


Figura 4.14: Misma información que en la Figura 4.13, en el caso de una perturbación negativa, de amplitud 50 %.

En trabajos como el de Cantó et al. (2000) se ha descrito un procedimiento para encontrar a la luminosidad. Se determina en primer lugar, la posición de los choques en cada paso de tiempo y se calcula después la energía cinética contenida entre los choques, como la suma,

$$E_{WS} = \sum_{i=I}^D \frac{1}{2} \rho_i v_i^2 \Delta x_i, \quad (4.2)$$

en donde  $I$  y  $D$  son las celdas que corresponden a las posiciones de los choques izquierdo y derecho, y la suma se hace sobre todas las celdas intermedias. Aquí  $\Delta x_i$  es el tamaño de una celda numérica.

Esta energía se resta de la energía cinética inicial  $E_0$  que tuvo el mismo material cuando fue inyectado, donde

$$E_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{2} \dot{m}(s) v(s)^2 ds. \quad (4.3)$$

Aquí,  $\dot{m}$  es la tasa de inyección de masa por unidad de área, considerada constante y de valor igual a la unidad, y el intervalo  $\tau_1$  a  $\tau_2$ , es el periodo durante el cual fue inyectado el material, ahora contenido en el intervalo espacial  $[I, D]$ . La velocidad  $v(s)$  está dada por la ecuación 4.1.

Así, la pérdida de energía del flujo es  $E_p \equiv E_0 - E_{WS}$ , y la luminosidad puede definirse como

$$L := d(E_0 - E_{WS})/dt, \quad (4.4)$$

donde  $dt$  es el tiempo transcurrido desde el inicio del pulso.

Esta forma de trabajar a las energías da como resultado luminosidades como las que se muestran en las Figuras 4.15, 4.16, 4.17 y 4.18. En la práctica esta manera de calcular las luminosidades a partir de los resultados numéricos no es muy sencilla y la dificultad principal radica en encontrar  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , los tiempos de inyección de las parcelas de gas que corresponden a las posiciones de los choques derecho e izquierdo. Los resultados presentados no son del todo satisfactorios, como se describen a continuación.

En la Figura 4.15, el caso de una perturbación del 10 % ( $\eta = 0.1$ ), se observa en el pánel superior, un pico que corresponde a la formación del primer choque antes de que todo el pulso entre a la malla computacional. La luminosidad disminuye después y se vuelve negativa cuando la rarefacción est  formándose; aumenta nuevamente con la formación del segundo choque. Los choques son débiles en este caso, por lo que la energía interna dentro de la estructura de choques es muy pequeña y al avanzar por la malla computacional, la energía cinética del material entre los choques es igual a la energía cinética total inyectada.

En el pánel inferior de la misma figura (4.15), el pico invertido corresponde a una baja en la luminosidad que es consecuencia de la formación de una zona de rarefacción y el aumento, a una onda de choque. La disminución subsecuente de la luminosidad se explica por el exceso perceptible de material con velocidades mayores a  $v_0$  que a velocidades menores (ver Figura 4.13); esta diferencia disminuye con el tiempo.

La Figura 4.16 que representa la perturbación del 50 % ( $\eta = 0.5$ ), el pico del pánel superior corresponde también a la formación del primer choque. En este caso, la disminución en la luminosidad es consecuencia de una rarefacción más profunda debida a que la perturbación es mayor. La luminosidad aumenta otra vez cuando se forma el segundo choque. En el pánel inferior, la baja en la luminosidad también se debe a una rarefacción, enseguida aumenta notablemente, pues dado que la perturbación es más grande, el choque que se forma es más fuerte. Otra pequeña zona de rarefacción tiene lugar antes de que el valor de la luminosidad se estabilice en cero.

El comportamiento que se observa en las Figuras 4.17 y 4.18, puede describirse de la misma forma en que se ha hecho en los casos de  $\gamma = 5/3$ .

La Figura 4.18 en particular, muestra luminosidades negativas. Una luminosidad negativa calculada como se define en 4.4, implicaría que la energía contenida dentro de la estructura de choque  $E_{WS}$ , es mayor que la energía inicial del material inyectado  $E_0$ , una vez que la estructura completa est  dentro de la malla numérica. Esto no es

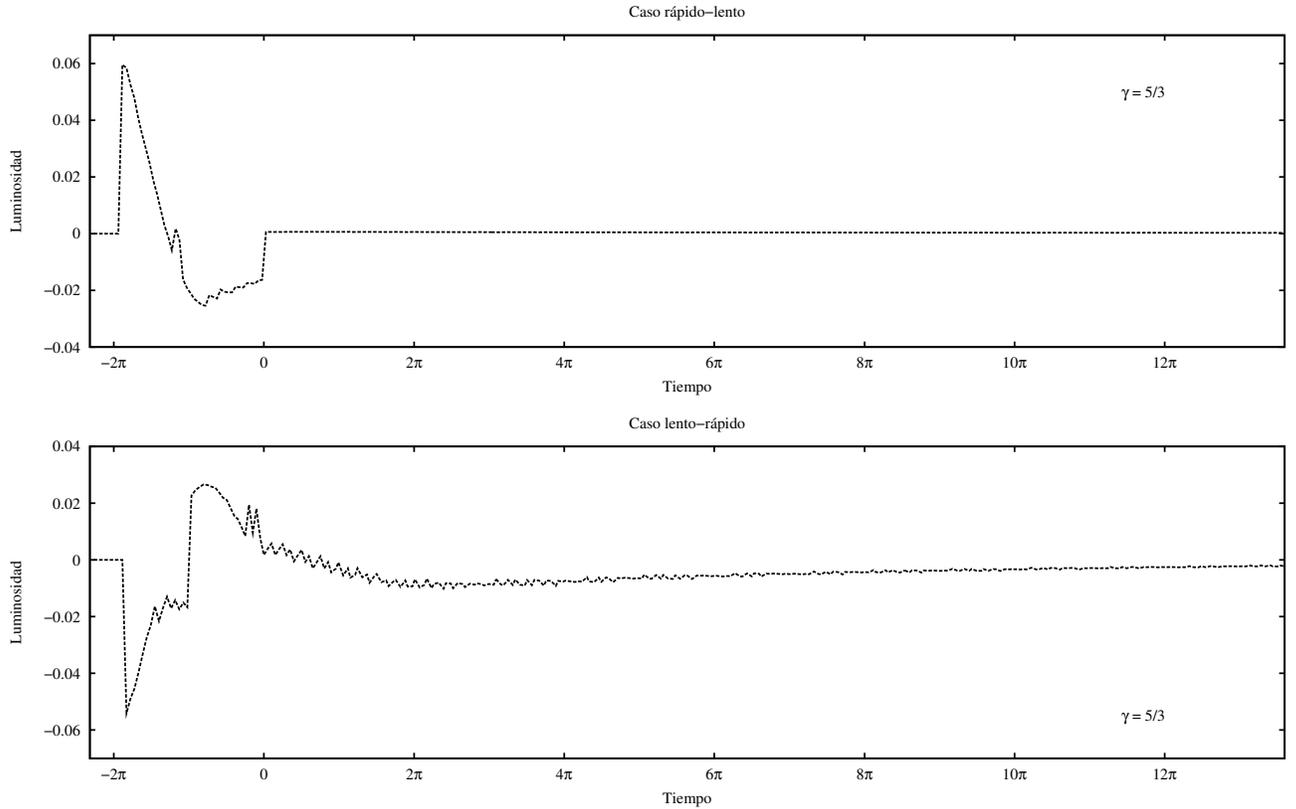


Figura 4.15: Luminosidades del caso positivo (pánel superior) y negativo (pánel inferior), con  $\gamma = 5/3$ , y perturbación del 10 %.

físicamente correcto; el comportamiento negativo de las luminosidades, se relaciona con posibles errores en el cálculo numérico de las posiciones de los choques, en este modelo en particular.

Se nota que la mayor variación de la luminosidad ocurre, en todos los casos, durante el periodo de inyección del pulso, cuando se están formando las ondas de choque y las rarefacciones. Cuando todo el pulso ya está dentro de la malla computacional, los cambios en la luminosidad son más suaves en función del tiempo y de menor amplitud. Entra nuevo material a la estructura de choque debido a que el choque derecho tiene velocidad mayor que  $v_0$  y el choque izquierdo tiene velocidad menor que  $v_0$ .

Las dificultades encontradas en calcular las luminosidades usando las ecuaciones

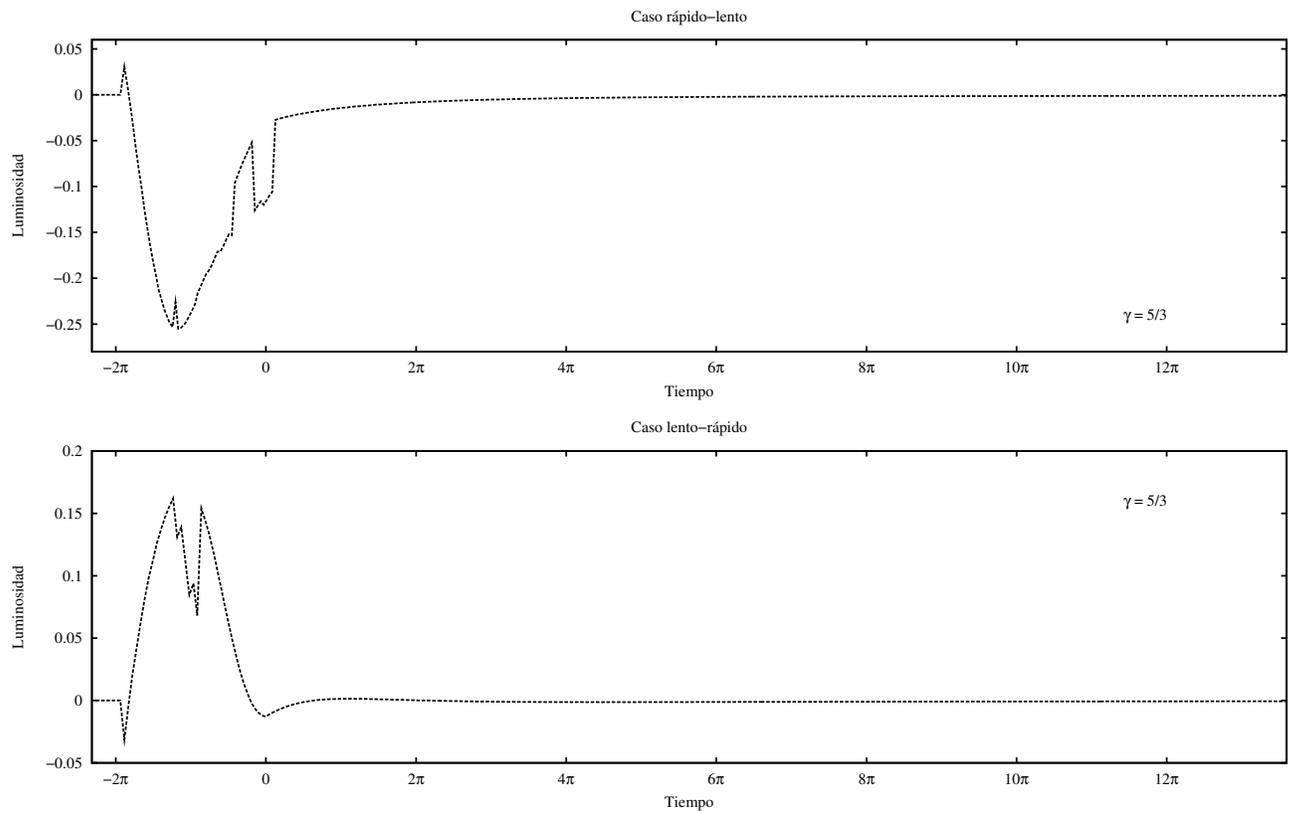


Figura 4.16: Misma información que en la Figura 4.15 pero para una amplitud de la perturbación del 50 %.

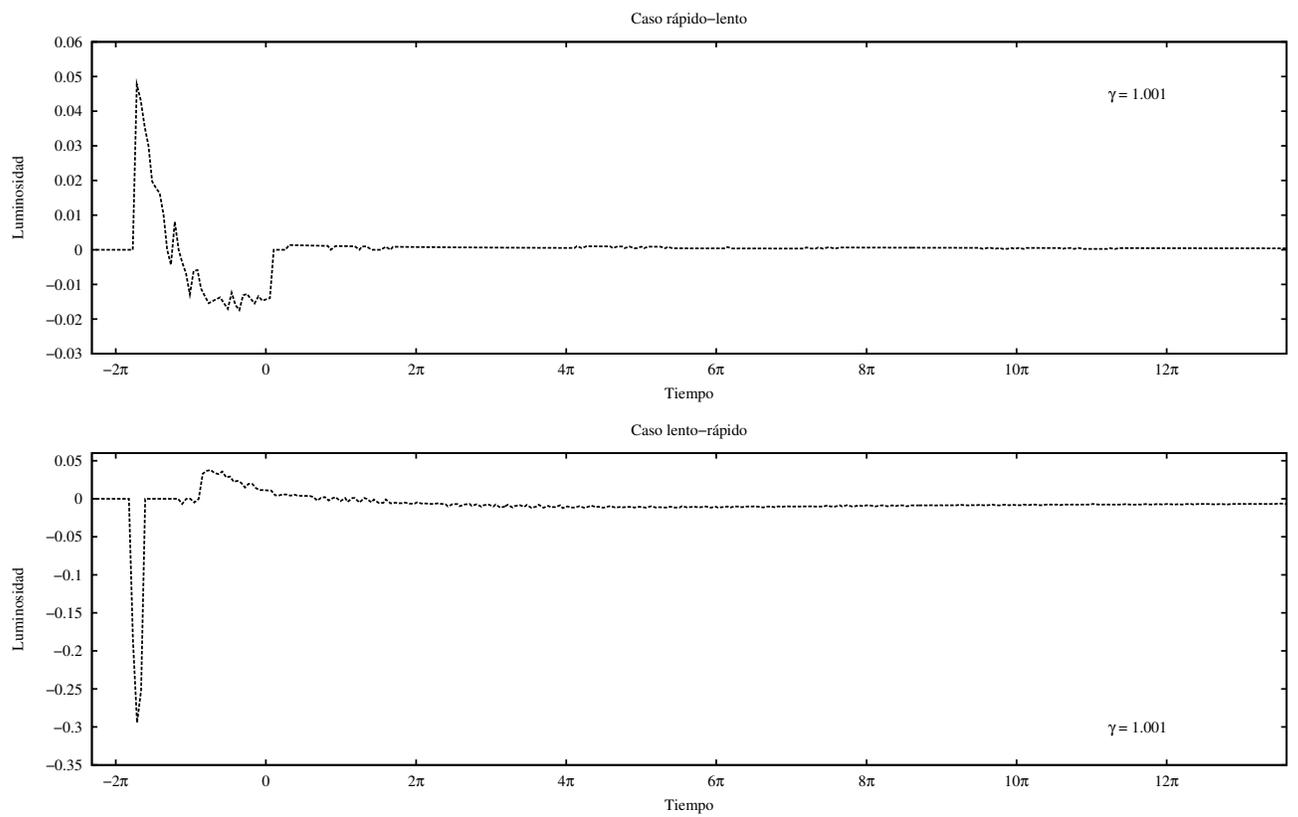


Figura 4.17: Luminosidades del caso positivo (pánel superior) y negativo (pánel inferior), con  $\gamma = 1.001$ , y perturbación del 10 %.

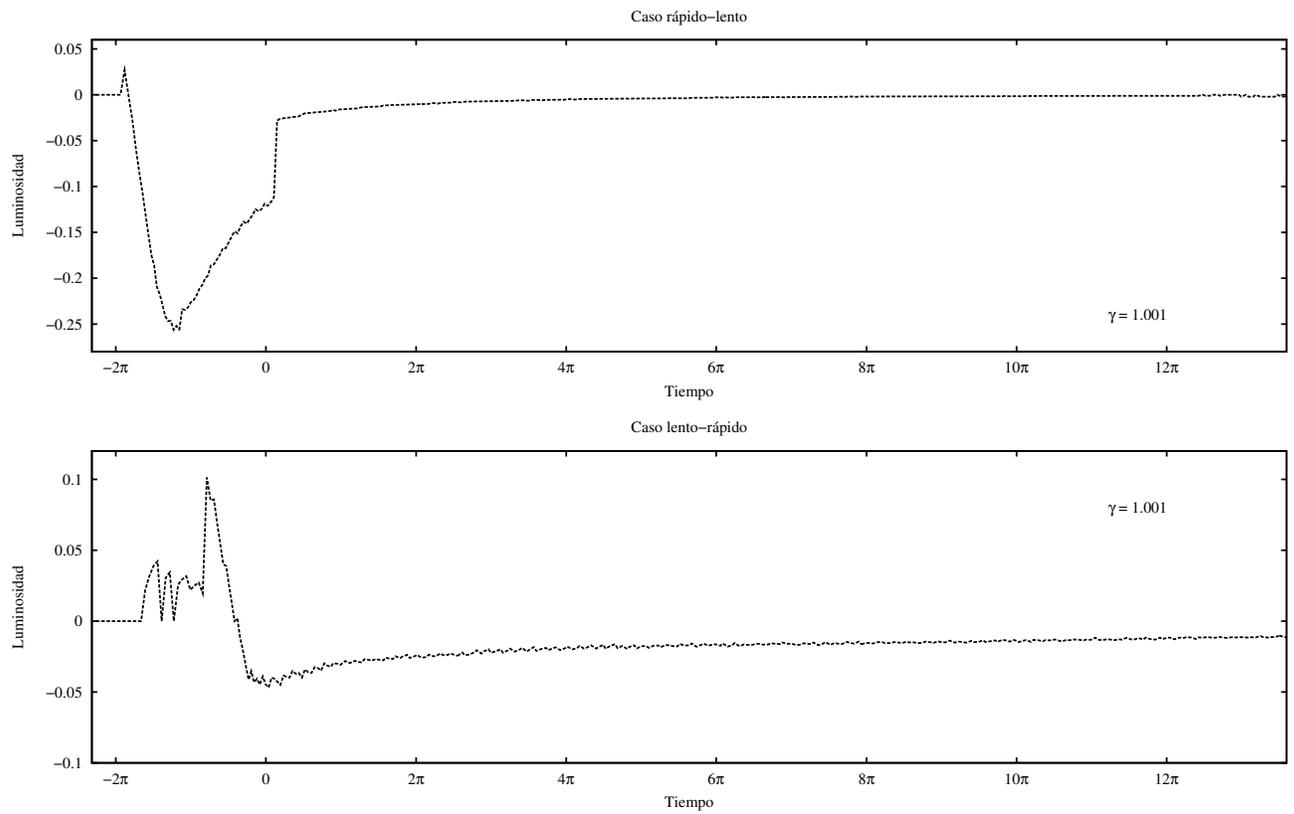


Figura 4.18: Misma información que en la Figura 4.17 pero para una amplitud de la perturbación del 50 %.

4.2, 4.3 y 4.4, llevaron a buscar otra manera de realizar esta tarea. Se aprovecha el hecho de que, salvo la duración del pulso sinusoidal y mientras la estructura de choque interno no sale de la malla computacional, la energía total de la simulación se conserva, con un valor antes del pulso y otro valor (mayor) después del pulso. El aumento en la energía total se debe únicamente a la inyección de energía cinética durante el pulso, no se inyecta energía interna. El cambio en la energía total por unidad de tiempo, es el resultado de la diferencia en el flujo de energía que entra a la malla computacional y el flujo que sale. Antes y después de la perturbación a la velocidad, esta diferencia es cero, por lo que la energía total tiene valores constantes en estos dos periodos. Durante la perturbación, el cambio en la energía total está dada por la integral respecto al tiempo de la diferencia en flujos

$$\Delta E_{total} = \int_1^t v \left( \frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) ds \Big|_{izquierda} - \int_1^t v \left( \frac{\gamma p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) ds \Big|_{derecha}. \quad (4.5)$$

Puesto que la presión es constante y despreciable, se considera solamente el flujo de la energía cinética

$$\Delta E_{total} = \frac{1}{2} \rho v \left[ \int_0^{t'} v^2(s) ds - \int_0^{t'} v_0^2(s) ds \right] \quad (4.6)$$

donde  $v(s)$  es la perturbación a la velocidad expresada en la ecuación 4.1. Aquí se utiliza el hecho de que el flujo de masa  $\rho v \equiv \dot{m}$  es constante, y que la velocidad del material que sale de la frontera derecha es uniforme. El tiempo está expresado tal que  $t' = t - 1$ .

El resultado es

$$\Delta E_{total} = \frac{1}{2} \dot{m} v_0^2 \left( \mp 2\eta [\cos(t') - 1] + \frac{\eta^2}{2} \left[ t' - \frac{1}{2} \sin 2t' \right] \right), \quad (4.7)$$

donde el signo negativo corresponde a la perturbación positiva, y el signo positivo corresponde a la perturbación negativa. El aumento de la energía interna es el resultado de la conversión de energía cinética en térmica que ocurre debido a las ondas de choque. La energía interna también puede disminuir en las zonas de rarefacción.

Los resultados de este procedimiento están mostrados en las Figuras 4.19, 4.21, 4.20 y 4.22. Cada una de ellas presenta tres paneles correspondientes a la cantidad

conservada (que es la energía total del fluido), la energía interna y la luminosidad. Las Figuras 4.19 y 4.21 corresponden a las perturbaciones positivas y negativa respectivamente, del caso  $\gamma = 5/3$  y amplitud de perturbación  $\eta = 0.5$ . Las figuras 4.20 y 4.22 corresponden a las perturbaciones positiva y negativa del caso  $\gamma = 1.001$ , también para  $\eta = 0.5$ . No se presentan los resultados para  $\eta = 0.1$  debido a que los choques son muy débiles.

Lo que se observa en las Figuras 4.19, 4.20, 4.21 y 4.22 es diferente a las luminosidades presentadas en las Figuras 4.16 y 4.18. En primer lugar, se nota que en los casos de las perturbaciones positivas (Figuras 4.19 y 4.21) la energía interna sigue aumentando, aún después del periodo de inyección. Por ende, estos modelos tienen luminosidades que son altas en  $Tiempo = 0$  y disminuyen paulatinamente con el tiempo. En las figuras correspondientes 4.16 y 4.18 (páneos superiores), las luminosidades tienen un comportamiento muy distinto. Se tiene mayor variación durante el periodo de inyección.

En el caso de las perturbaciones negativas (Figuras 4.20 y 4.22 ), la luminosidad llega a un máximo en la última etapa de la eyección y luego disminuye. Para el modelo con  $\gamma = 5/3$  incluso hay una etapa de luminosidad negativa, que sugiere la formación de una zona de rarefacción (presión más baja). Este comportamiento no se nota en las Figuras 4.16 y 4.18 de los casos correspondientes.

#### 4.1.6. Comparación con resultados previos.

En el trabajo de Cantó et al. 2000, se estudió el problema de un jet con variación periódica en la velocidad de inyección. Con base en la conservación de momento para las superficies de trabajo internas, derivaron un conjunto de soluciones analíticas para el fluido, con dependencias específicas del tiempo en la velocidad de inyección y en la densidad: una variación sinusoidal en la velocidad con tasa de inyección de masa constante y con densidad de inyección constante. En su trabajo consideraron únicamente lo que en la presente tesis se llama perturbación negativa.

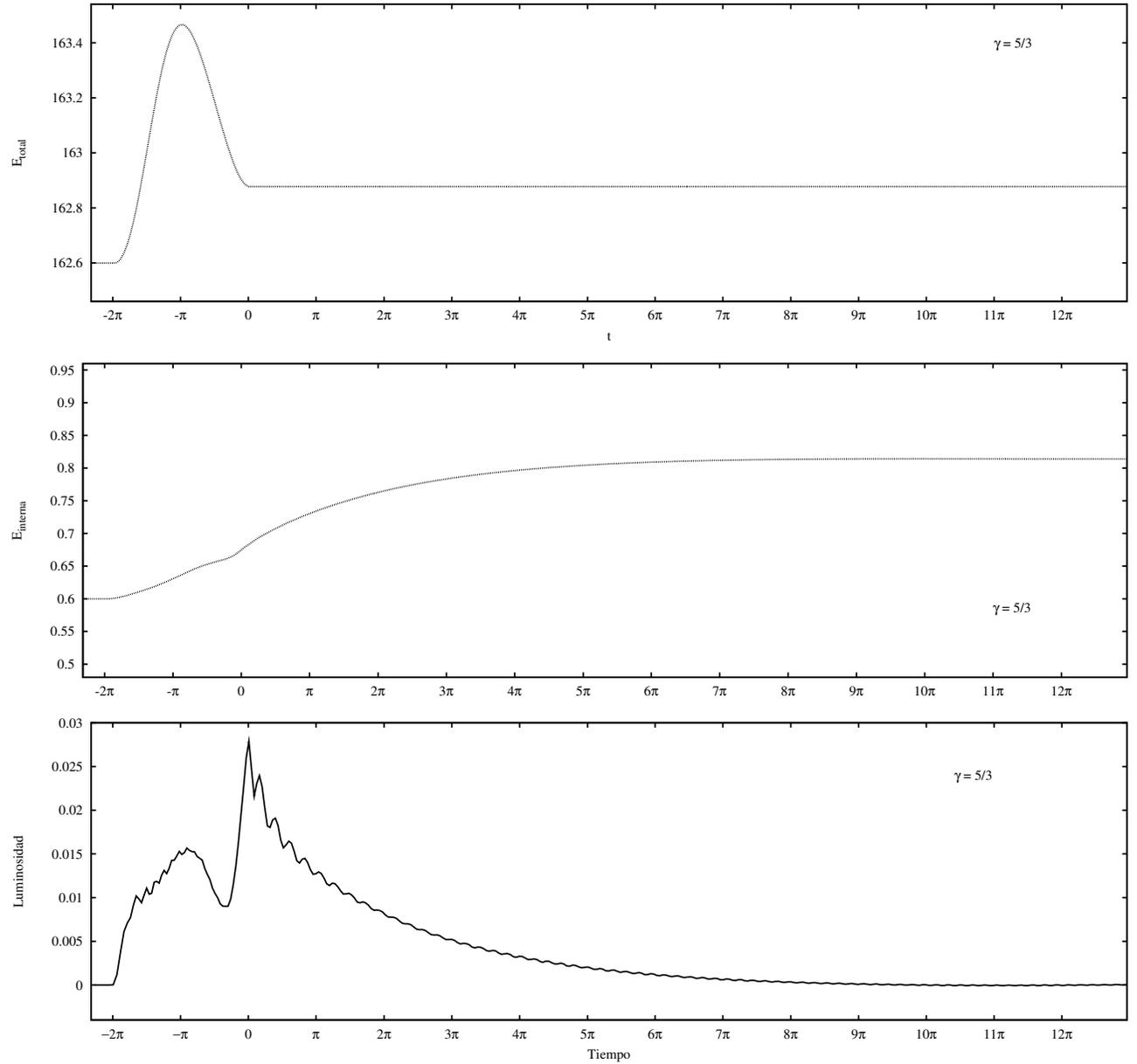


Figura 4.19: Energía total, interna y luminosidad como función del tiempo, para el caso rápido-lento, un valor de  $\gamma = 5/3$  y una perturbación a la velocidad del 50 %.

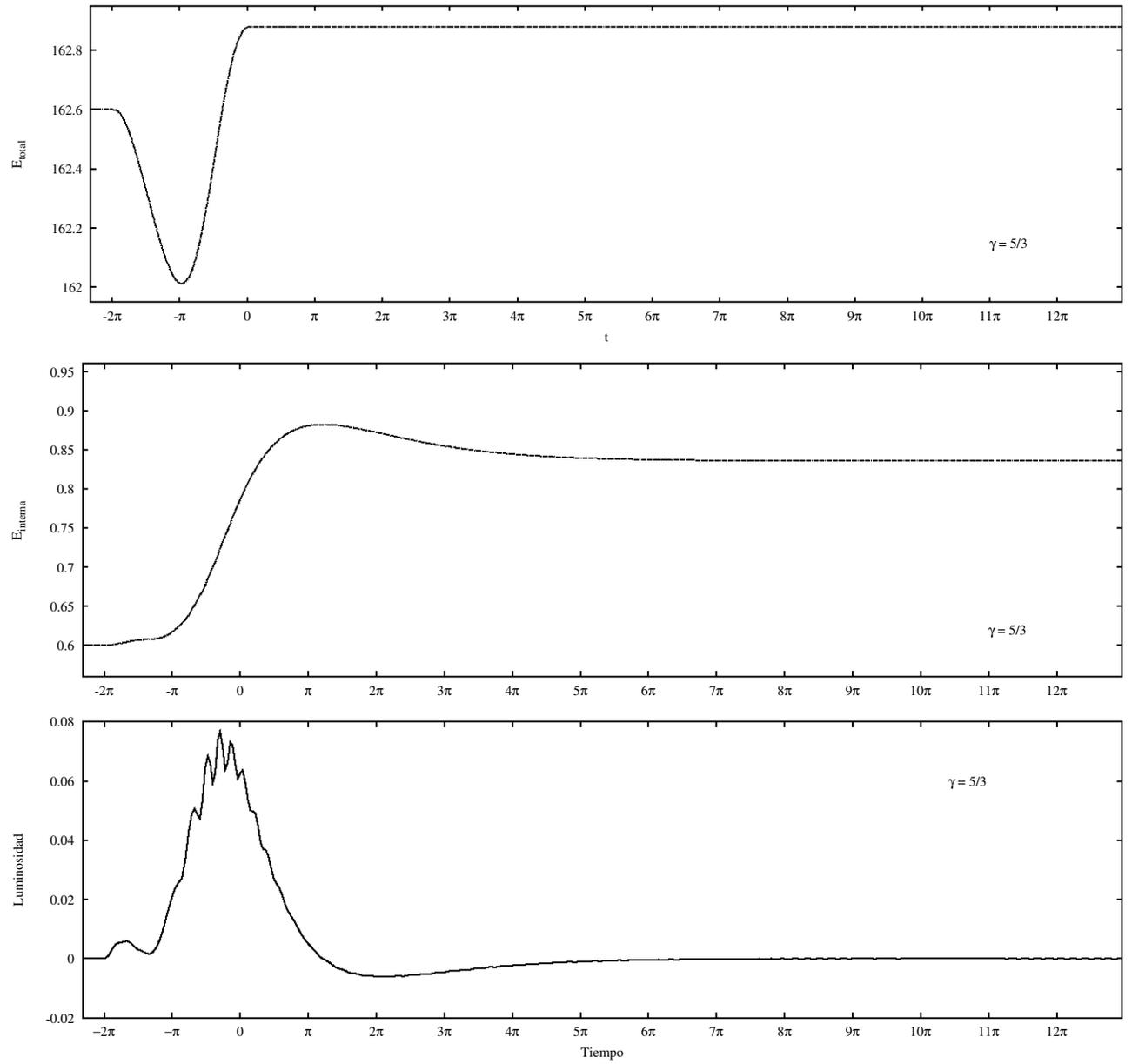


Figura 4.20: Misma información que en la figura 4.19, para el caso lento-rápido.

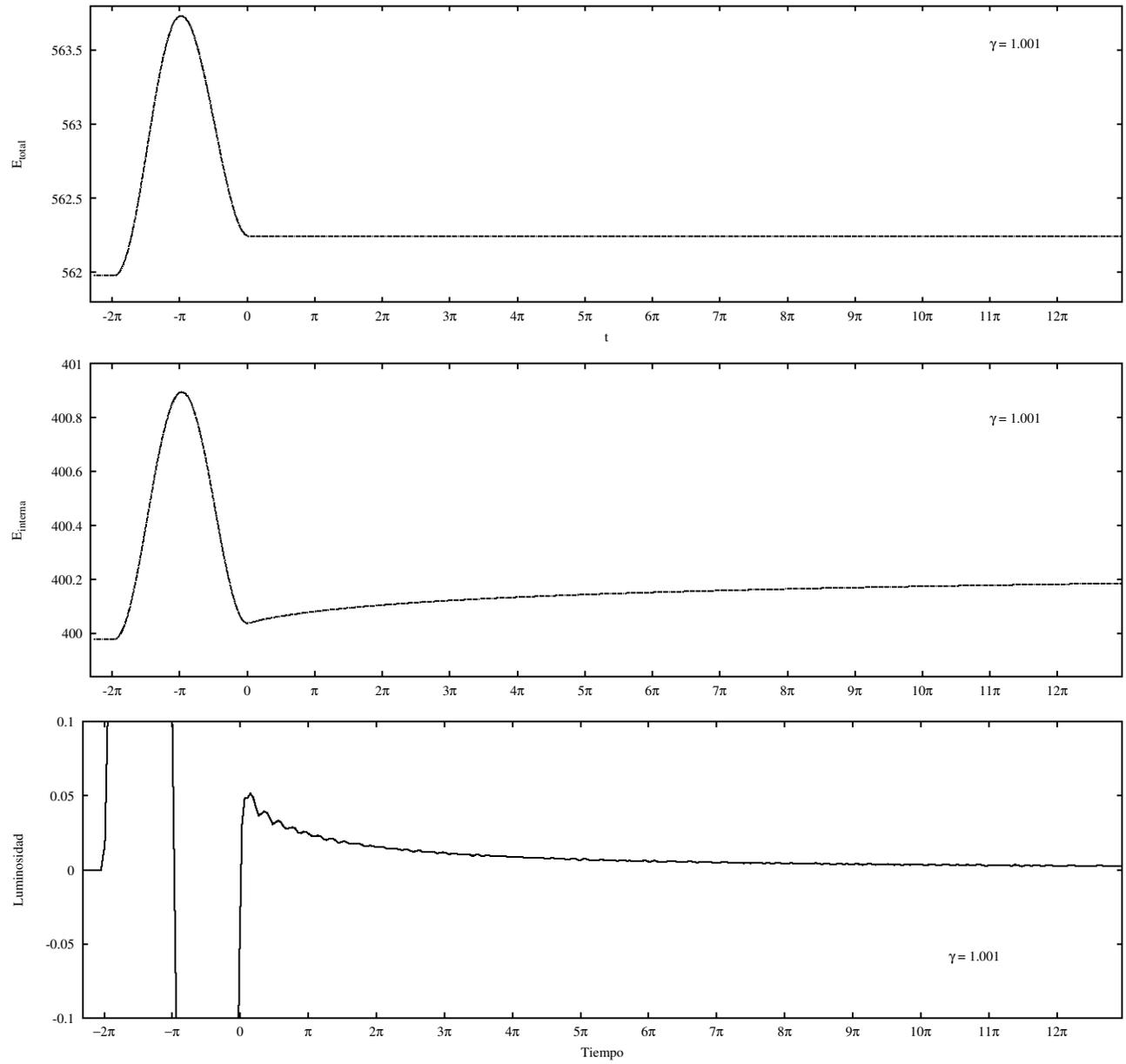


Figura 4.21: Misma información que en la figura 4.19, para un valor de  $\gamma = 1.001$ .

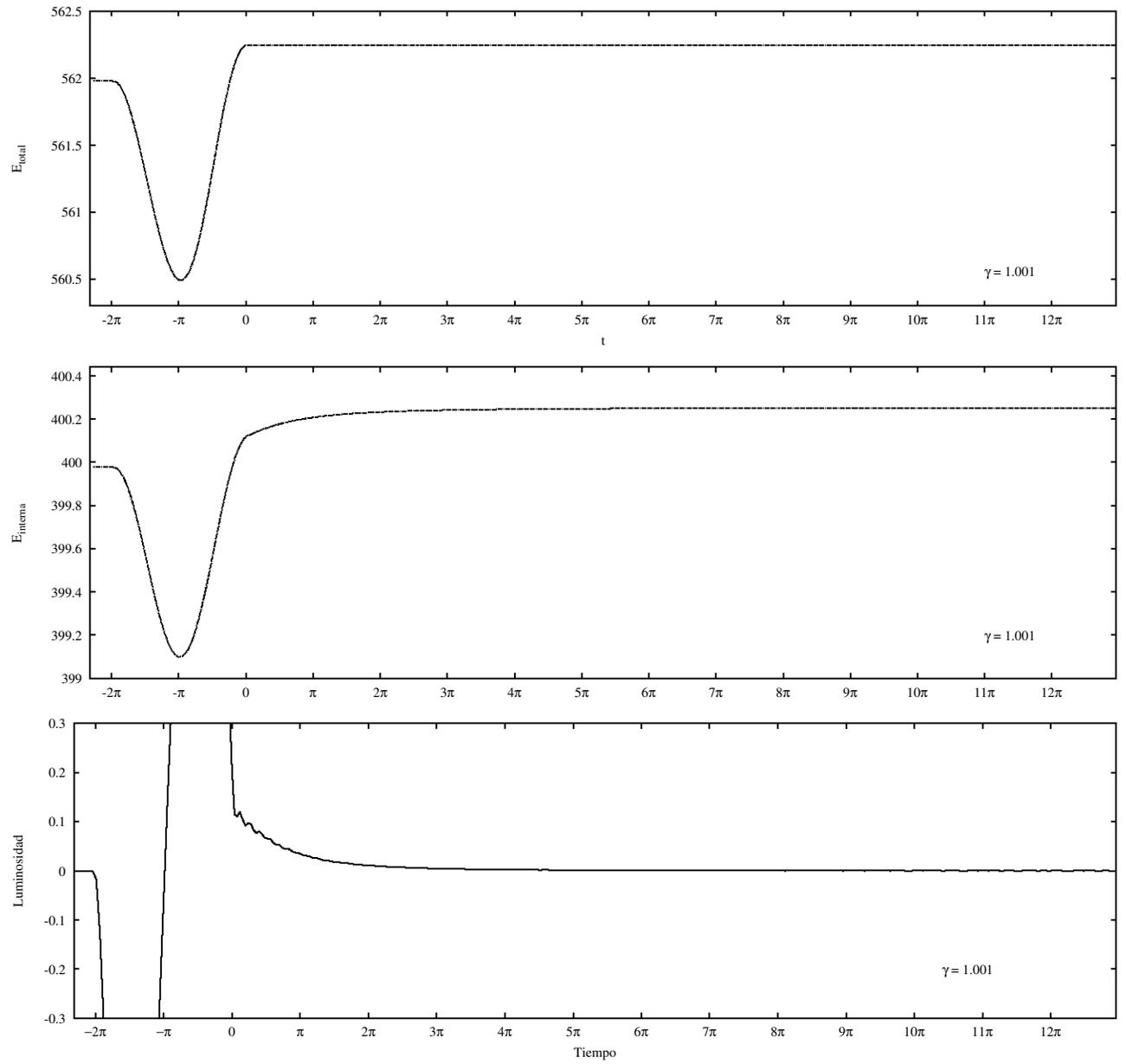


Figura 4.22: Misma información que en la figura 4.21, para el caso lento-rápido.

Por otra parte, tanto en el trabajo de Cantó et al. (2000) como en esta tesis, se considera una amplitud de perturbación de  $\eta = 0.5$ .

Mientras que las fórmulas analíticas de Cantó et al. (2000) solamente permiten conocer la posición y los tiempos de inyección y formación de las WS, las simulaciones numéricas permiten conocer la riqueza de la evolución dinámica de las estructuras internas que se forman como consecuencia de la variación en la velocidad de inyección. En el desarrollo analítico suponen, por ejemplo, que las WS son estructuras delgadas, en tanto que numéricamente se observa que en primer lugar los choques que se forman son débiles y también que las estructuras internas se ensanchan con el tiempo. En dicho trabajo, se reportaron como resultados: a) gráficas de la velocidad de las superficies de trabajo, b) de las velocidades de los choques, c) las densidades de los materiales que conforman estas estructuras, d) la luminosidad radiada por la WS trabajo, e) la fracción de la luminosidad total que es radiada por cada choque y f) la posición de la WS como función del tiempo.

Las posiciones de las WS fueron reportadas como líneas rectas en el trabajo analítico. Este comportamiento se comparte en el desarrollo numérico de esta tesis. En el caso de las velocidades, reportaron que la velocidad de la WS llega a un valor constante que es la velocidad del flujo uniforme, igual que en las simulaciones numéricas de esta tesis, y que la de los choques creció inicialmente y luego decreció como función del tiempo. En los modelos numéricos que se presentan, las velocidades de los choques también decrecen como función del tiempo, y son mucho más pequeñas relativamente a la velocidad del centro de masa que en el trabajo analítico. En el caso de las luminosidades, las curvas reportadas en este trabajo (obtenidas por el segundo método) comparten cualitativamente la forma característica con las que se muestran en Cantó et al. (2000).

## 4.2. Hidrodinámica de superficies de trabajo y estructuras de choque interno, límite relativista.

Se utiliza ahora la adaptación del código numérico de hidrodinámica relativista descrito en la sección 2.2 del Capítulo 2, para seguir nuevamente la evolución de la estructura interna que se forma cuando hay una fluctuación en la velocidad de un flujo relativista hipersónico.

### 4.2.1. Condiciones Iniciales del Fluido.

Se considera inicialmente un fluido adiabático uniforme, donde los valores iniciales para las variables hidrodinámicas son, densidad  $\rho_0 = 1.0$ , presión  $p_0 = 0.001$  y velocidades  $\beta_0 = 0.5$  y  $\beta_0 = 0.9$ . Aquí las velocidades están normalizadas por la velocidad de la luz  $c$ , tal que  $\beta = v/c$ , donde  $v$  es la velocidad del fluido. Se supone que el fluido es altamente relativista, con un valor para el cociente de capacidades caloríficas de  $\gamma = 4/3$ . La fluctuación en la velocidad de inyección está dada por

$$\beta = \begin{cases} \beta_0(1 \pm \eta \sin(t - 1)) & \text{si } 1 < t < 1 + 2\pi, \\ \beta_0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (4.8)$$

donde  $\beta_0$  es un valor constante de la velocidad de inyección correspondiente al valor de la condición inicial, y  $\eta$  es un parámetro que define la amplitud de la perturbación sinusoidal. En este caso se considera únicamente el valor  $\eta = 0.1$ .

La perturbación inicia en  $t = 1$  por las mismas razones expuestas para los modelos de hidrodinámica clásica. Se hace énfasis en que es un solo pulso, de duración  $2\pi$  en el tiempo adimensionalizado, el que se inyecta a la malla computacional.

La fluctuación en la velocidad  $\beta$  se introduce en la malla computacional como una condición de frontera izquierda de entrada. La condición para la frontera derecha es simplemente de flujo saliente ya que todas las velocidades son positivas. Aunque la velocidad de entrada fluctúe, el flujo de masa  $\dot{m} = \Gamma\rho\beta$  es constante, con valor  $\dot{m} = 1$ . Durante la inyección de la perturbación, se mantiene la presión constante, con valor

igual al del fluido uniforme. Así que, solamente se le está inyectando energía cinética al flujo, y no energía interna.

La velocidad del sonido relativista de un fluido uniforme, es la velocidad propia  $C_{s,p} = \Gamma C_s$ , donde  $C_s$  es la velocidad del sonido definida en la sección 4.1.1 y  $\Gamma$  el factor de Lorentz. El número de Mach relativista se define ahora como  $M_{0,r} = v_{0,p}/C_{s,p}$ , donde  $v_{0,p} = \Gamma\beta_0$  es la velocidad propia del fluido. Así,  $M_{0,r} = 16.02$  cuando  $\beta_0 = 0.5$  y  $M_{0,r} = 57.34$  cuando  $\beta_0 = 0.9$ , es decir, los fluidos uniformes iniciales son altamente supersónicos. Aquí el factor de Lorentz es  $\Gamma = 1/\sqrt{1 - \beta_0^2}$ , y toma los valores  $\Gamma_{0.5} = 1.15$  y  $\Gamma_{0.9} = 2.3$  cuando  $\beta_0 = 0.5$  y  $\beta_0 = 0.9$ , respectivamente.

Para los cuatro modelos que comprenden este estudio, la malla computacional consta de 2000 celdas igualmente espaciadas, sobre un dominio  $x$  que va de 0 a 70. Los modelos presentados tienen unidades arbitrarias, salvo la velocidad que está en unidades de la velocidad de la luz,  $c$ . Se pueden recuperar valores físicos al definir cantidades características que se pueden fijar con valores observados, los cuales permiten dimensionalizar los resultados de los modelos. Dicho tratamiento se aborda nuevamente en el Apéndice de este trabajo.

## 4.2.2. Evolución hidrodinámica.

Se resuelven las ecuaciones de conservación (ver 2.11 y 2.12) de la hidrodinámica relativista, por el método descrito en el capítulo 2 con las condiciones iniciales y de frontera descritas en la sección anterior. Este procedimiento da como resultados los valores de las cantidades conservadas  $D$ ,  $S$  y  $\tau$  en cada celda de la malla computacional a cada tiempo de integración. De las cantidades conservadas se obtienen los valores de las variables hidrodinámicas  $\rho$ ,  $\beta$  y  $p$ . Las Figuras 4.23 y 4.24 muestran estas variables hidrodinámicas en función de posición en tres instantes de tiempo (los mismos para cada figura), que permiten visualizar el comportamiento general de la perturbación durante su evolución temporal. Se presentan los casos en que la velocidad inicial es  $\beta_0 = 0.5$  y cuando  $\beta_0 = 0.9$ , ambos para una perturbación inicial del 10% ( $\eta = 0.1$ ) y un mismo cociente de calores específicos con valor  $\gamma = 4/3$ . Las

estructuras siempre avanzan de izquierda a derecha.

Se obtiene un conjunto de perfiles en que tienen lugar choques fuertes, los cuales se forman a tiempos más tempranos en el modelo de baja velocidad inicial que en el de alta. En el caso de la perturbación positiva se forman dos choques que se van separando con el paso del tiempo, mientras que en el caso de la perturbación negativa se origina un pico en la presión, a partir del cual se forman dos ondas que se van separando con el tiempo; este comportamiento de la perturbación negativa se observa con mayor claridad en el modelo de baja velocidad.

Conforme el tiempo avanza, la amplitud de los picos de presión disminuye debido al efecto amortiguador de las ondas acústicas reflejadas entre los picos.

La estructura de choque interno originada por la perturbación positiva es notablemente más ancha en comparación con la estructura resultante de la perturbación negativa. También se nota que para el caso de la velocidad inicial menor,  $\beta_0 = 0.5$ , hay cierta simetría en los perfiles de densidad y presión. Por otro lado, en el caso de mayor velocidad inicial,  $\beta_0 = 0.9$ , tanto los perfiles de densidad como los de presión son asimétricos para las perturbaciones positivas y negativas.

Se nota que, a pesar de que la amplitud de la perturbación del flujo inicial supersónico es pequeña ( $\eta = 0.1$ ), los choques que se forman en el caso relativista son mucho mejor definidos y fuertes que en el caso clásico. El factor de compresión en el caso relativista es

$$\begin{aligned} j &= \Gamma_s D_1 (C_s - \beta_1) \\ &= \Gamma_s D_2 (C_s - \beta_2), \end{aligned}$$

donde  $\Gamma_s$  es el factor de Lorentz para  $C_s$  la velocidad del sonido, 1 y 2 son etiquetas para indicar valores pre y post-choque,  $D = \rho \Gamma$  (con  $\Gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ ) es la densidad relativista de la masa en reposo y  $j > 0$  si el choque se propaga a la derecha. Se ve que el factor de compresión depende no solamente del número de Mach relativo (del

fluido y del choque) sino también del factor de Lorentz.

La naturaleza del código numérico, con la reconstrucción de variables de forma PPM, tiende a producir estructuras más empujadas (es decir, con menor grado de difusión numérica) en la malla computacional.

### **4.2.3. Estructura de choque interno.**

Las estructuras de choque interno se forman mediante el mismo proceso descrito en los modelos de la hidrodinámica clásica (ver Sección 4.1.4).

### **4.2.4. Dinámica de las superficies de trabajo.**

En esta sección se toma como el inicio de la dinámica de la estructura de choque interno el tiempo en que todo el pulso sinusoidal se ha incorporado a la malla computacional. Esto corresponde al tiempo  $t = 1 + 2\pi$  en las unidades arbitrarias de las simulaciones. Para facilitar la relación de algún patrón en la dinámica con el periodo del pulso inicial, se describe la evolución temporal de las posiciones y velocidades de los choques en unidades de  $\pi$ .

Para identificar los choques componentes de las estructuras, se utilizan nuevamente los cambios abruptos en la magnitud de la variable de presión mayores a una tolerancia de 0.1. Solamente son de interés los choques que delimitan las estructuras, y no los choques internos. La búsqueda de estos choques en la malla computacional se hace de izquierda a derecha para determinar un choque izquierdo y de derecha a izquierda para determinar un choque derecho. Una vez identificados, se guarda su posición en cada paso de tiempo y se calcula el centro de masa entre las posiciones de los choques límite de la estructura.

En la Figura 4.25 se muestran las posiciones en función del tiempo del centro de masa y de los dos choques límites (derecho e izquierdo) de la estructura de choque interno del flujo relativista. Se nota que en el caso de las perturbaciones positivas

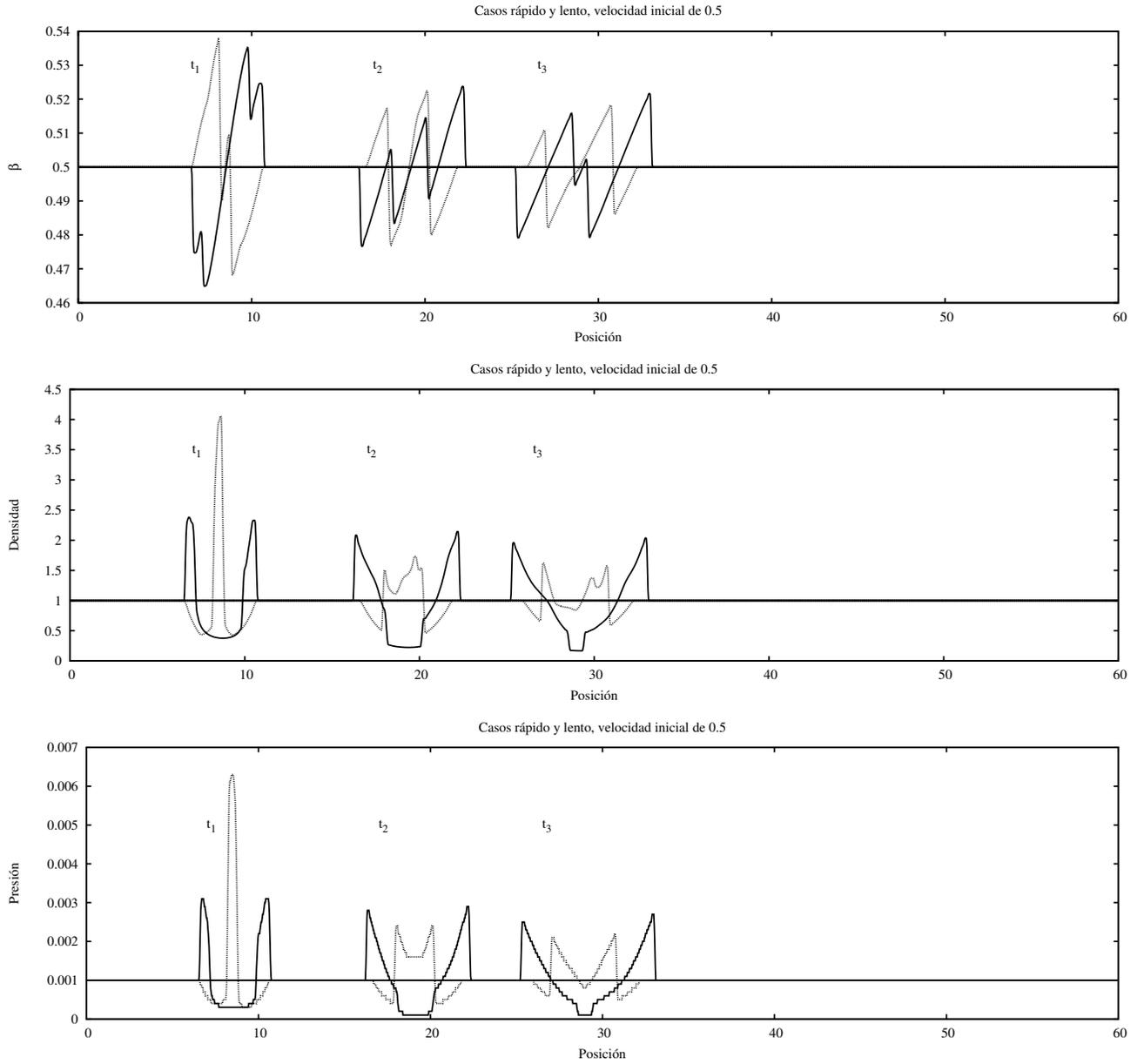


Figura 4.23: Condición de frontera de tipo chorro de ingreso sinusoidal, densidad y presión. Aquí se muestra la evolución de los perfiles como función de la posición en los tres tiempos característicos  $t_1 = 21.22$ ,  $t_2 = 42.56$  y  $t_3 = 62.36$ , correspondientes a la velocidad inicial  $\beta_0 = 0.5$ . La línea continua identifica al caso positivo, mientras que la línea punteada identifica su contraparte negativa.

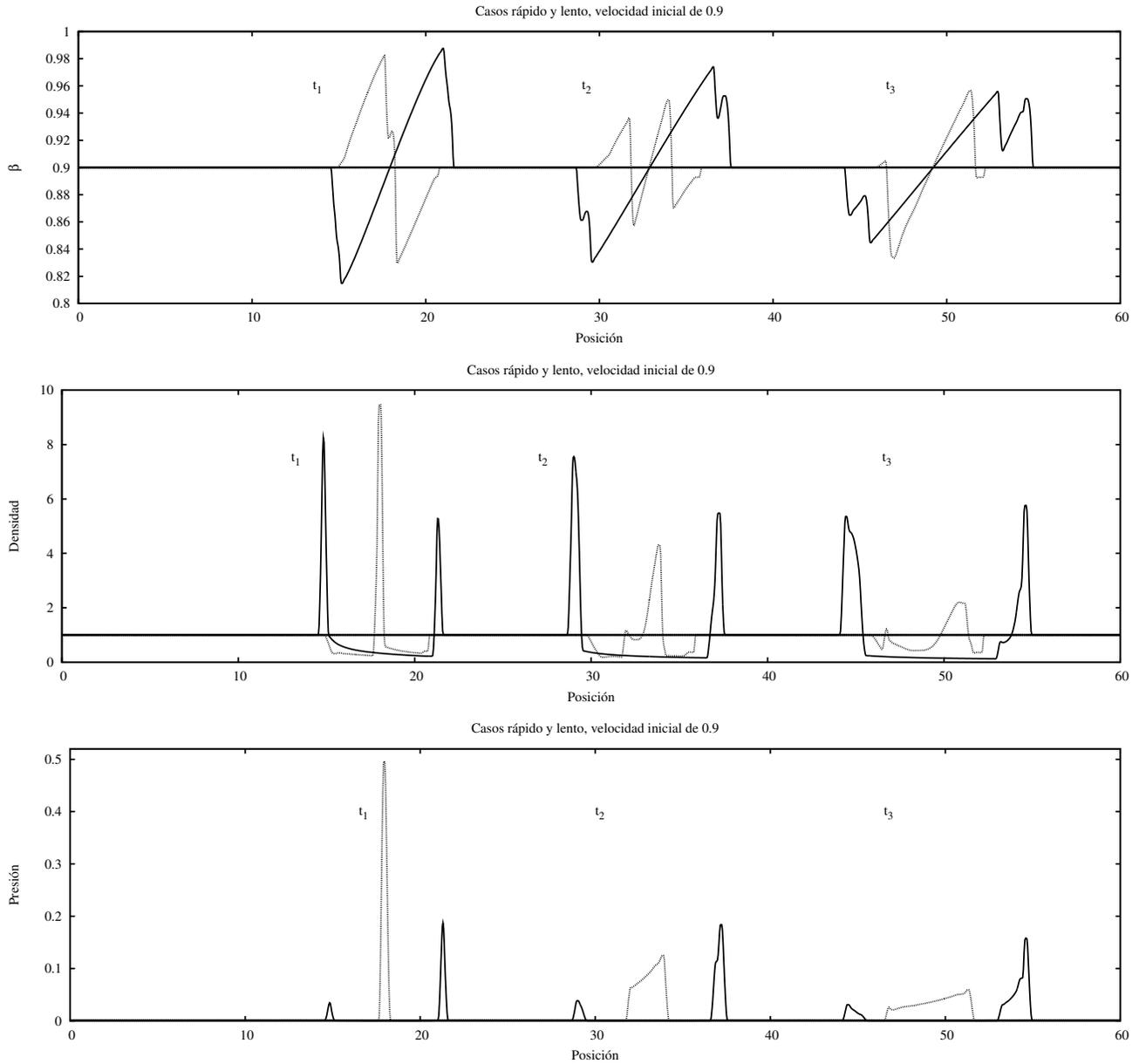


Figura 4.24: Misma información que en la figura 4.23 pero para una velocidad inicial de  $\beta_0 = 0.9$ , en los tres tiempos característicos  $t_1 = 24.06$ ,  $t_2 = 40.69$  y  $t_3 = 58.83$ .

(casos rápido-lento), las estructuras se ensanchan desde tiempos tempranos. En el caso de las perturbaciones negativas (casos lento-rápido) hay un periodo inicial en donde la estructura se adelgaza para luego empezar a ensancharse. También se nota la asimetría en las posiciones de los choques izquierdo y derecho con respecto al centro de masa de la estructura.

Como en el caso de los modelos de hidrodinámica clásica, es necesario realizar un ajuste a las posiciones presentadas en la sección anterior (4.2.3) para conocer la dinámica de la estructura. El ajuste correspondiente resulta en una función logaritmo más un polinomio de tercer orden, cuyas primeras derivadas corresponden en cada caso, a las velocidades de los choques y del centro de masa. Es necesario además determinar (al menos de manera aproximada), los tiempos críticos  $t_c$  en que la estructura se encuentra totalmente formada, pues es a partir de estos tiempos en que el ajuste se inicia. El dominio de dichos ajustes se encuentra indicado en las gráficas de velocidad con una etiqueta de inicio  $*I$  y otra de final  $*F$ .

Las velocidades de los choques de las perturbaciones positivas, se alejan inicialmente del valor de la velocidad del centro de masa, el resto de la evolución tienen un valor constante. La perturbación negativa de baja velocidad muestra una oscilación suave de ambos choques, mientras que el caso ultrarelativista muestra esta oscilación sólo en el caso del choque derecho, en tanto que el choque izquierdo mantiene una velocidad constante.

#### **4.2.5. Luminosidades.**

En los modelos relativistas, parte de la energía cinética es convertida en energía térmica por las ondas de choque. Un porcentaje muy pequeño (aproximadamente 10 %) de esta energía, que se supone no afecta la dinámica del fluido, será convertido en energía magnética detrás de los choques. El campo magnético es el responsable de acelerar a los electrones que producen radiación sincrotrón (van Eerten et al. 2013).

Finalmente, se incorporó al código el estimado de la luminosidad dado por el

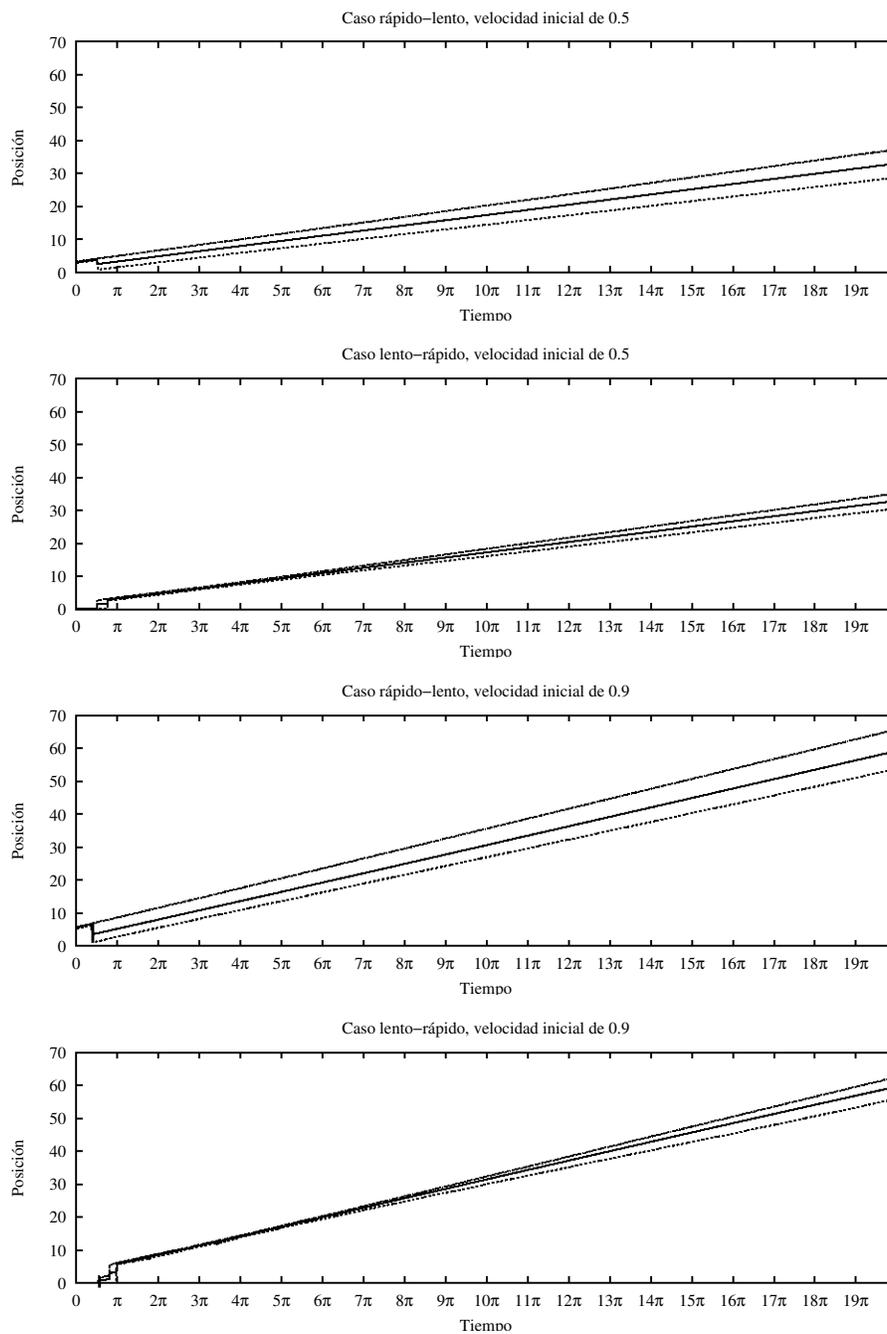


Figura 4.25: Se muestran las posiciones del centro de masa indicada por la recta central de color más oscuro y sus choques izquierdo y derecho con líneas punteadas, en los casos positivo y negativo, para los dos valores de velocidad inicial  $\beta_0 = 0.5$ ,  $\beta_0 = 0.9$ .

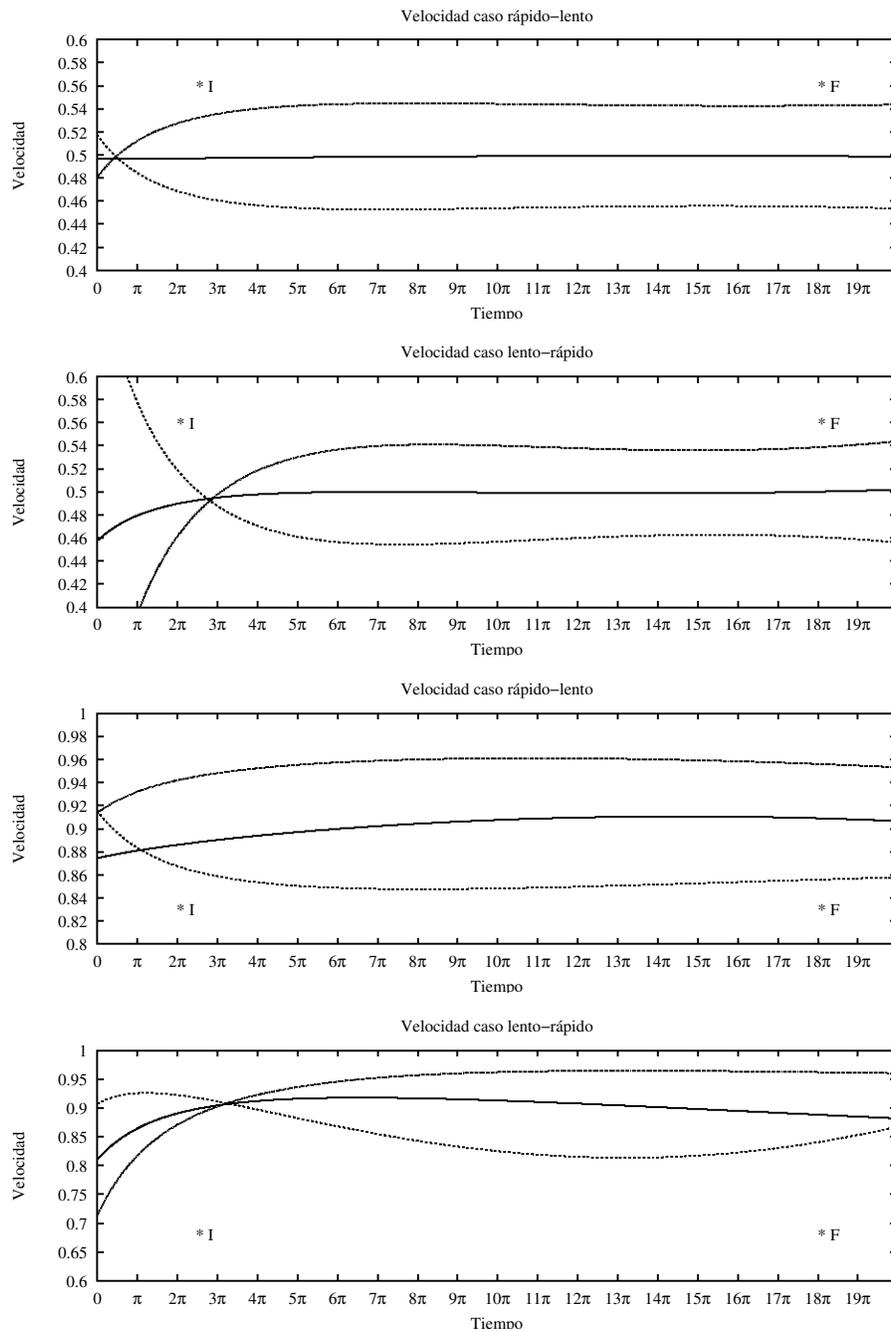


Figura 4.26: Se muestran las velocidades del centro de masa de la superficie de trabajo indicada por la recta central de color más oscuro y sus choques izquierdo y derecho, en el caso de las ondas positiva y negativa, para los dos valores de velocidad inicial  $\beta_0 = 0.5$ ,  $\beta_0 = 0.9$ .

formalismo de Cantó et al. (2000), donde hay que recordar que la pérdida de energía del flujo es  $E_p \equiv E_0 - E_{WS}$  (con  $E_0$  la energía inicial que tuvo el material cuando fue eyectado y  $E_{WS}$  la energía contenida dentro de la estructura de choque). Y suponiendo que toda la energía perdida es radiada, la luminosidad se definía como

$$L := d(E_0 - E_{WS})/dt,$$

y

$$E_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \dot{m}(s)\Gamma[\beta(s)]ds,$$

donde de  $\tau_1$  a  $\tau_2$  se tiene el intervalo de tiempo en que fue inyectado el material,  $\dot{m}$  es la tasa de pérdida de masa, considerada constante y de valor igual a la unidad y  $\beta(s)$  es la expresión de la perturbación sinusoidal (4.8). Por otra parte, la energía contenida dentro de la superficie de trabajo.  $E_{WS}$ , podía encontrarse mediante una suma sobre las celdas que la componen, cada una de tamaño  $\Delta x_i$ , así:

$$E_{WS} = \sum_{i=I}^D \rho_i \Gamma \Delta x_i. \quad (4.9)$$

Para integrar numéricamente el dominio indicado por (4.9), se requiere conocer los valores de los tiempos  $\tau_1$  y  $\tau_2$ , que a su vez necesitan de las posiciones de los choques, de la cabeza y la cola de la perturbación en cada instante de tiempo. Los choques deben encontrarse dentro de un intervalo  $[1, 2\pi + 1]$ , de manera que dentro de tal intervalo se realiza su búsqueda, se predicen las posiciones iniciales de la cabeza y cola y luego se considera el desplazamiento de la perturbación. Si al comparar la posición de la cabeza con la posición del choque por ejemplo, la primera tiene un valor mayor, se resta el tiempo correspondiente al segmento plano sobrante; si en cambio la posición del choque tiene un valor más grande que la posición predicha de la cabeza entonces el tiempo del segmento plano faltante se agrega; entonces se obtiene  $\tau_1$ . Un procedimiento equivalente es aplicado al lado de la cola para obtener  $\tau_2$ . La integración entonces puede realizarse numéricamente y se hace bajo un esquema tipo Römberg.

En la figura 4.27, se muestran los resultados obtenidos de aplicar el procedimiento antes explicado. En los casos de perturbación positiva se observa inicialmente un au-

mento en la luminosidad, consecuencia del choque que se forma inicialmente. En los casos de perturbación negativa el comportamiento inicial es una baja en la luminosidad que es consecuencia de la formación de una zona de rarefacción y luego cuando la velocidad del material aumenta, se forma un choque y la luminosidad aumenta.

Las luminosidades de las perturbaciones positivas alcanzan mayores valores que sus contrapartes negativas. Excepto en el caso de la onda negativa de alta velocidad, la luminosidad de los modelos decae como función del tiempo, mientras que en ese caso particular la luminosidad vuelve a aumentar y luego a disminuir como función del tiempo pero con magnitudes mayores.

Realizando el procedimiento alternativo para el cálculo de las luminosidades explicado en la sección 4.1.5 (derivada numérica centrada de la energía interna total con respecto al tiempo), se obtienen los resultados mostrados en las Figuras 4.28, 4.29, 4.30 y 4.31. Cada una de estas figuras presenta tres paneles correspondientes a la cantidad conservada (que es, en el límite relativista la densidad  $\tau$  de energía), la energía interna y la luminosidad del fluido. Cada una de las gráficas de luminosidad muestra ruido numérico que no es importante para la descripción cualitativa de los resultados presentados.

Se observa en todos los casos que la variación en la densidad de energía  $\tau$ , sucede en el intervalo inicial de inyección  $[-2\pi, 0]$ , en donde dicha cantidad aumenta como consecuencia de la energía cinética que se está inyectando en la frontera izquierda de la malla computacional. De la misma forma que en los modelos con hidrodinámica clásica, el cambio en el total de energía en la malla computacional se debe a la diferencia entre el flujo de energía que entra por la frontera izquierda y el que sale de la frontera derecha integrado sobre un intervalo de tiempo.

Se observa que en los casos de menor velocidad inicial ( $\beta_0 = 0.5$ ) hay un pico en la luminosidad que corresponde a la formación del primer choque, durante el periodo de inyección, luego hay otro pico en la luminosidad a un tiempo de  $2\pi$  (caso positivo)

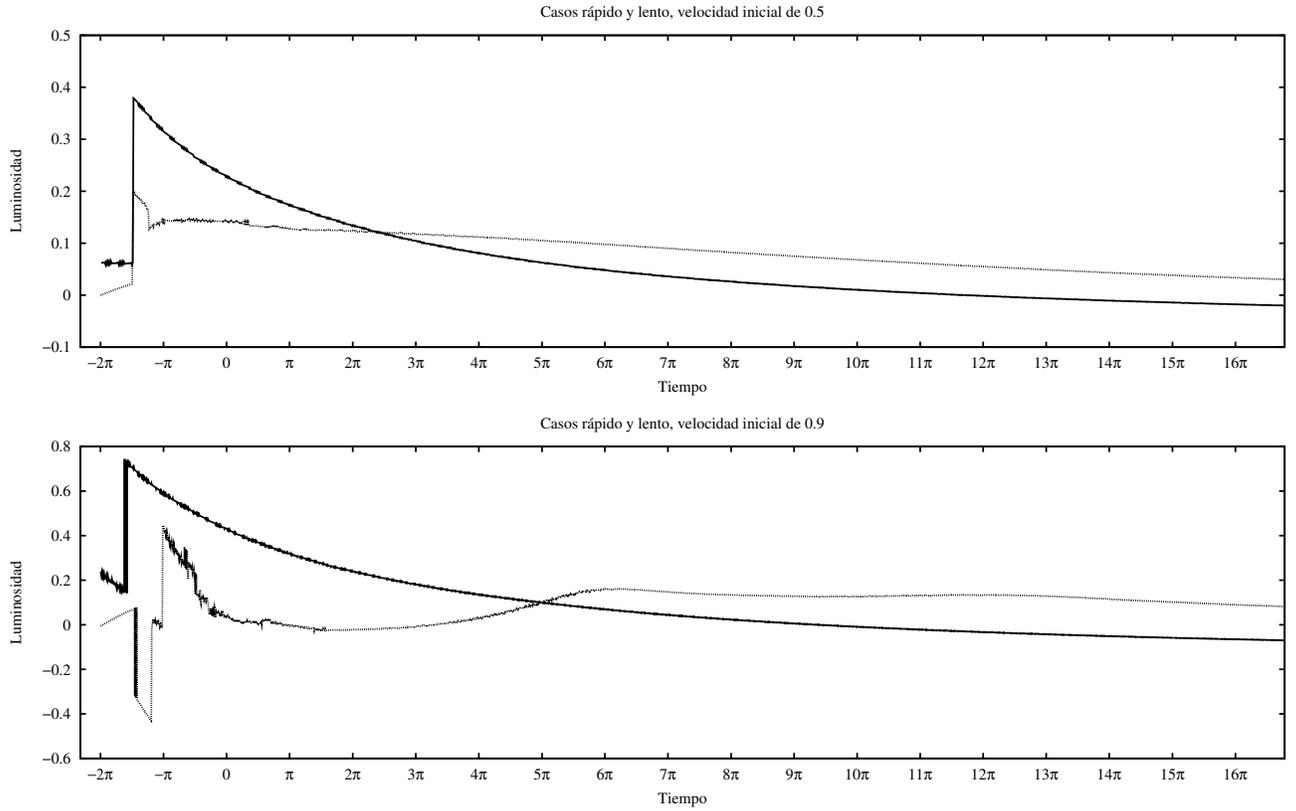


Figura 4.27: Curvas de luz para los dos pulsos: onda positiva (línea continua) y onda inversa (línea punteada), en los casos de velocidad inicial baja  $\beta_0 = 0.5$  y alta  $\beta_0 = 0.9$ . Recordar que  $Tiempo = 0$  corresponde al instante en que la perturbación está completa dentro del dominio computacional.

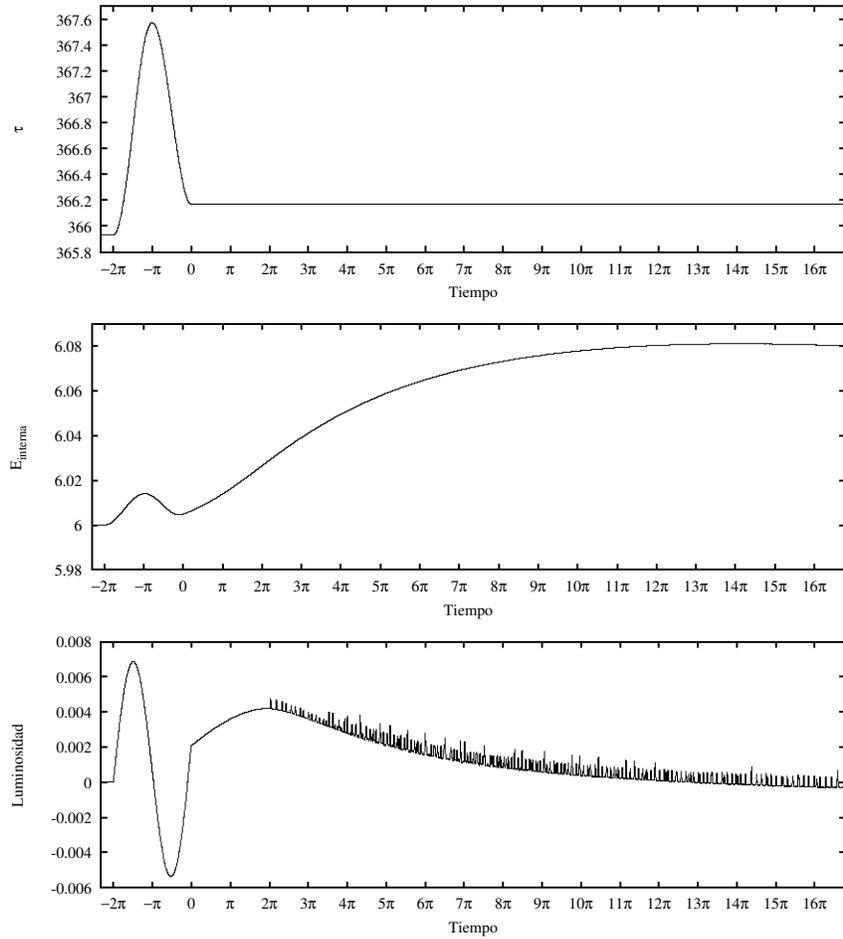


Figura 4.28: Densidad de energía, energía interna y luminosidad como función del tiempo, para el caso de baja velocidad ( $\beta_0 = 0.5$ ) y perturbación positiva a la velocidad.

a  $3\pi$  (caso negativo) , después de terminar el periodo de inyección. En los modelos de velocidad inicial mayor ( $\beta_0 = 0.9$ , Figuras 4.28 y 4.30), el máximo de la luminosidad ocurre entre  $3\pi$  y  $4\pi$ , después de terminar el periodo de inyección. El decaimiento en la luminosidad es más rápido para las perturbaciones negativas, para ambas velocidades iniciales. También las perturbaciones negativas producen un pico más alto en la luminosidad.

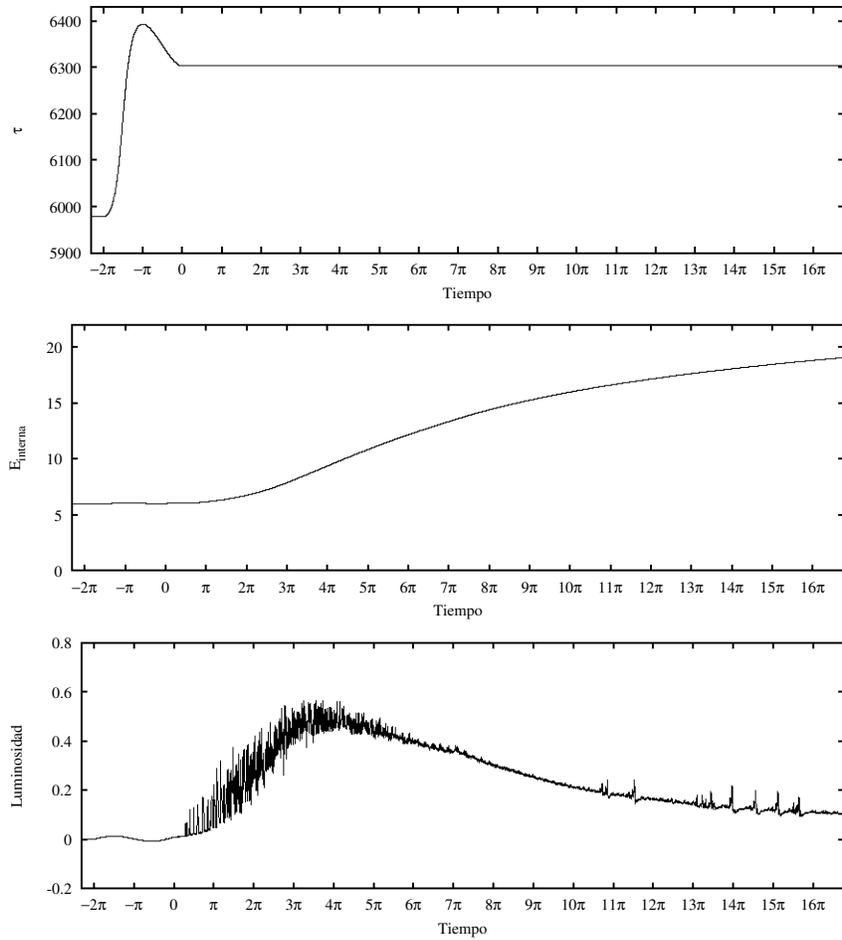


Figura 4.29: Misma información que en la Figura 4.28, para el caso de alta velocidad ( $\beta_0 = 0.9$ ).

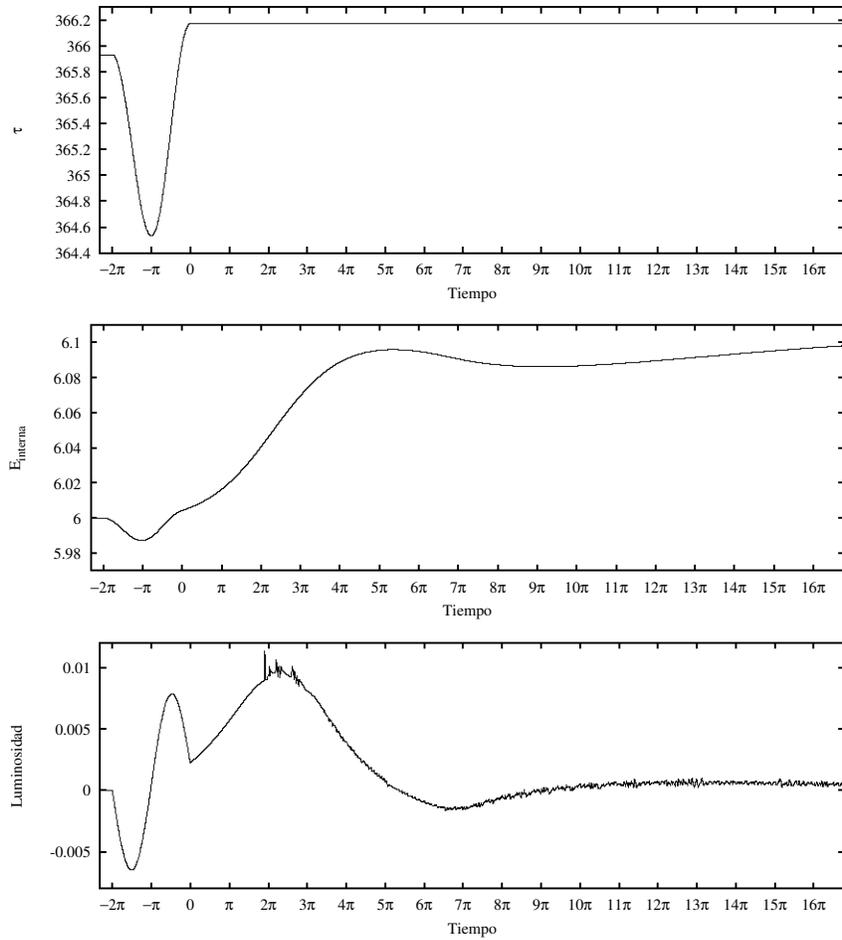


Figura 4.30: Misma información que en la Figura 4.28, para el caso de baja velocidad ( $\beta_0 = 0.5$ ) y perturbación negativa.

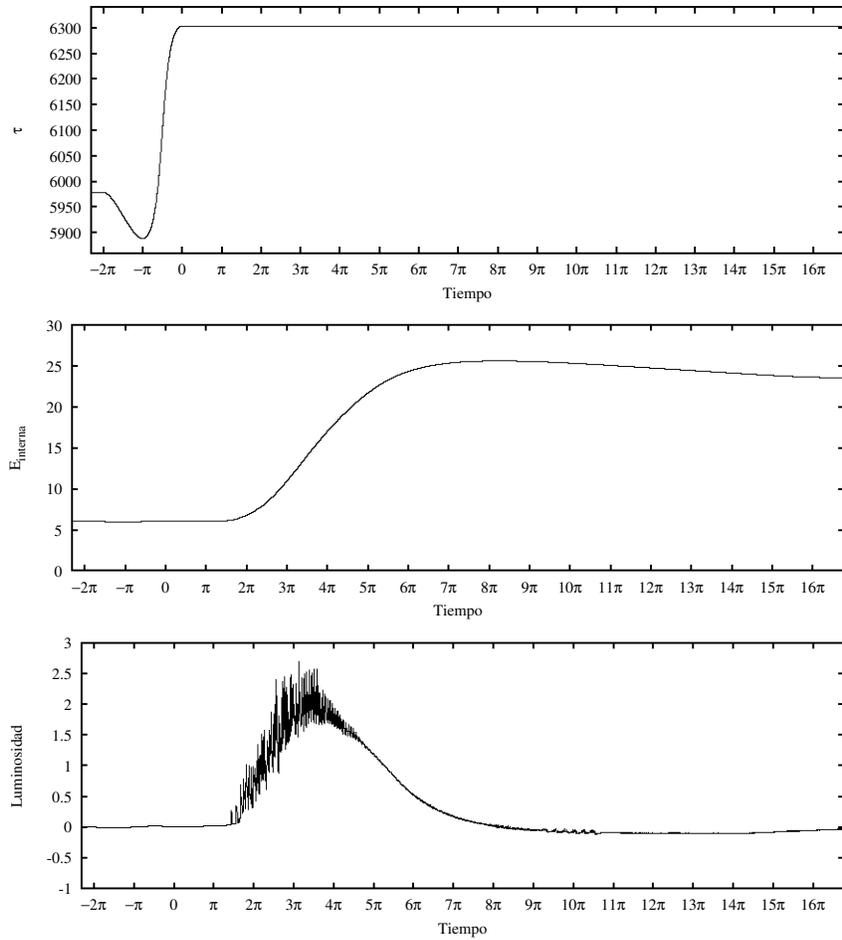


Figura 4.31: Misma información que en la Figura 4.28, para el caso de alta velocidad ( $\beta_0 = 0.9$ ) y perturbación negativa.

#### 4.2.6. Luminosidades relativistas y clásicas.

Se pueden comparar las Figuras 4.28 y 4.29, igual que 4.30 y 4.31 con sus contrapartes de la hidrodinámica clásica, Figuras 4.19, 4.20, 4.21 y 4.22. Las tendencias para las perturbaciones positivas son similares, y también las tendencias para las perturbaciones negativas. La diferencia principal es que en los casos relativistas, el pico en la luminosidad ocurre un tiempo ( $2\pi$  o  $4\pi$  según el caso) después de haber terminado el periodo de inyección, mientras que en los casos clásicos, el pico en la luminosidad ocurre justo al finalizar el periodo de inyección.

#### 4.2.7. Comparación con resultados previos.

En el trabajo de Cantó et al. (2013) se estudió el problema de la dinámica de choques internos en jets relativistas, con fuentes cuya velocidad de inyección y tasa de pérdida de masa dependen del tiempo y tomando en cuenta la no conservación de momento (a diferencia del régimen clásico). Encontraron soluciones analíticas para la velocidad de la WS y la energía radiada, en el caso particular de una función escalón. Modelaron los casos particulares de un pulso de material rápido, otro de material lento, y aplicaron estos modelos a curvas de luz de las dos fuentes de GRBs: GRB080413B y GRB070318.

Los resultados para las curvas de luz reportadas por el trabajo que se describe, coinciden con los resultados numéricos presentados en este capítulo, de manera cualitativa: las luminosidades tienen un aumento a tiempos tempranos y luego una disminución como función del tiempo.

En Mendoza (2009), se reporta que tanto la velocidad de la superficie de trabajo en función del tiempo, de su modelo analítico, son muy similares (en forma) a los de Cantó et al. (2000). Realizando la misma comparación, las velocidades de las WS analíticas y estructuras de choque internas, numéricas, de onda negativa en los casos relativistas de baja y alta velocidad, comparten tal similitud.

En cuanto a las luminosidades, la característica que se comparte con el trabajo analítico mencionado, es el incremento en la luminosidad, seguido de una caída. En el caso del trabajo de Mendoza (2009) en particular, las luminosidades han sido normalizadas y suavizadas mediante una ley de potencias, este tratamiento no fue implementado a las curvas de luz que se reportan. Aún así, las curvas de todos los modelos de esta tesis tienen la forma característica de dichos trabajos.

# Capítulo 5

## Resumen y Trabajo a Futuro.

Se presenta a continuación un resumen de los resultados de esta tesis.

Se estudió la dinámica de las superficies de trabajo que se forman en un flujo uniforme relativista cuando hay una perturbación en la velocidad. Se consideró el caso de una perturbación con forma funcional de doble escalón usando el formalismo desarrollado anteriormente por Cantó et al. (2013), en donde se toma en cuenta el cambio de momento debido a radiación. Se identifica un tiempo crítico en donde el material rápido termina de incorporarse a la superficie de trabajo y un tiempo crítico análogo para el material lento. Después, se estudió el caso de una perturbación sinusoidal en la velocidad. Se presentaron resultados para un valor alto de velocidad del flujo uniforme con amplitud grande de perturbación, y también para un valor bajo de velocidad del flujo uniforme con amplitud baja de la perturbación. En el primer caso, la velocidad de la superficie de trabajo tiende con el tiempo a una constante, pero de valor mayor que la del flujo uniforme. En el segundo caso, el valor asintótico de la velocidad es la del flujo uniforme.

En la parte numérica de esta tesis, se resolvieron las ecuaciones de la hidrodinámica clásica y relativista escritas en forma de conservación, usando esquemas tipo Godunov de alto orden en espacio y tiempo. En todos los casos se consideró una ecuación de estado de un gas ideal pero con valores diferentes del índice de las capacidades caloríficas,  $\gamma$ .

En los sistemas de ecuaciones de conservación no se incluyen términos particulares para las pérdidas radiativas, pues en el caso relativista ello implica hacer suposiciones acerca de la evolución del campo magnético detrás de la onda de choque y la distribución de energías de los electrones acelerados que dan origen a la pérdida de energía por radiación sincrotrón. En el caso clásico, modelar las pérdidas radiativas requiere hacer suposiciones acerca del estado de ionización del gas.

En el caso clásico o no relativista, se forman estructuras de choque debido a perturbaciones a la velocidad. La perturbación de amplitud pequeña da origen a choques débiles y la perturbación de amplitud más grande forma choques más fuertes pero que son todavía bastante débiles. En el caso relativista los choques que se forman siempre son fuertes aún cuando la amplitud de la perturbación sea pequeña.

Las estructuras de choque internas tienden a ensancharse con el tiempo (a tiempos tardíos son más anchas). Tal ensanchamiento tiene una dependencia, en el caso Newtoniano, con el factor de compresión (casos adiabáticos sufren menor compresión que aproximadamente isotérmicos), con la amplitud de la perturbación (más anchas a perturbaciones mayores) y del signo positivo de ésta (las ondas positivas son más anchas que en las ondas negativas). En el caso Relativista, las perturbaciones positivas forman estructuras de choque más extendidas (entre choque y choque) que las perturbaciones de signo negativo, que resultan en estructuras mucho más delgadas.

La comparación entre los modelos analíticos y numéricos no puede hacerse de manera directa debido a que, en primer lugar no es fácil determinar numéricamente la posición de un choque, ya que ocupa un número finito de celdas computacionales y en segundo lugar, numéricamente no es posible determinar un tiempo crítico, definido en los trabajos analíticos como aquél tiempo en que la estructura de choque se encuentra completamente formada. Por un lado, los choques “tardan” en formarse y no lo hacen al mismo tiempo, particularmente los casos de perturbaciones negativas (que además no se tratan de forma analítica). Por otra parte, hasta que la perturbación

completa no esté completamente dentro de la malla computacional, la dinámica de las estructuras de choque no está bien definida.

El modelo de choques internos resultantes de perturbaciones sinusoidales de un flujo altamente supersónico tiene resultados consistentes con los trabajos de otros autores (Raga et al., 1990). La velocidad del centro de masa de la estructura de choque interna es aproximadamente constante y similar a la del flujo supersónico constante. Los choques tienen velocidades relativas pequeñas con respecto a este flujo. En el caso relativista, se reporta que también las perturbaciones sinusoidales resultan en una estructura de choque que viaja con velocidad aproximadamente constante e igual a la del flujo supersónico. Los choques tienen velocidades pequeñas relativas al flujo. En ambos casos, la velocidad del centro de masa está inicialmente por debajo del valor del flujo constante y luego la alcanza. Los resultados numéricos son consistentes con los resultados analíticos de esta tesis para el caso de una amplitud de perturbación pequeña. No se ha explorado el caso de una amplitud mayor con simulaciones numéricas.

Se consideraron dos maneras de estimar las luminosidades de los modelos presentados; los cálculos que corresponden a la derivada numérica centrada de la energía interna total, son los resultados que se encuentran más apegados al comportamiento dinámico. Se encuentra que no hay pérdida de energía pues se trata de modelos adiabáticos y emulaciones de procesos isotérmicos, es decir, sistemas conservados. En el caso clásico, las luminosidades alcanzan su máximo en tiempos más tempranos comparados con el caso relativista, las perturbaciones positivas por su parte, hacen que estos máximos sean magnitudes mayores que los que alcanzan las perturbaciones negativas.

Los resultados numéricos - clásicos aportan información valiosa sobre la dinámica de modelos de choques internos en jets adiabáticos y aproximaciones isotérmicas, mientras que el régimen relativista permite conocer tal dinámica de forma exacta (analítica) y numérica, todos los casos modelados en condiciones de velocidades de

inyección sinusoidales y tasas de pérdida de masa constante.

En la Figura 5.1 se reproduce la Fig. 1 de Borgonovo et al. (2007), en donde se muestra una selección de curvas de luz observadas de GRBs de larga duración; ahí se aprecia que no hay una forma única característica para estas curvas, que pueden presentarse estructuras simples o muy complejas y por lo tanto, que las correspondientes a los modelos implementados aquí son resultados realistas posibles.

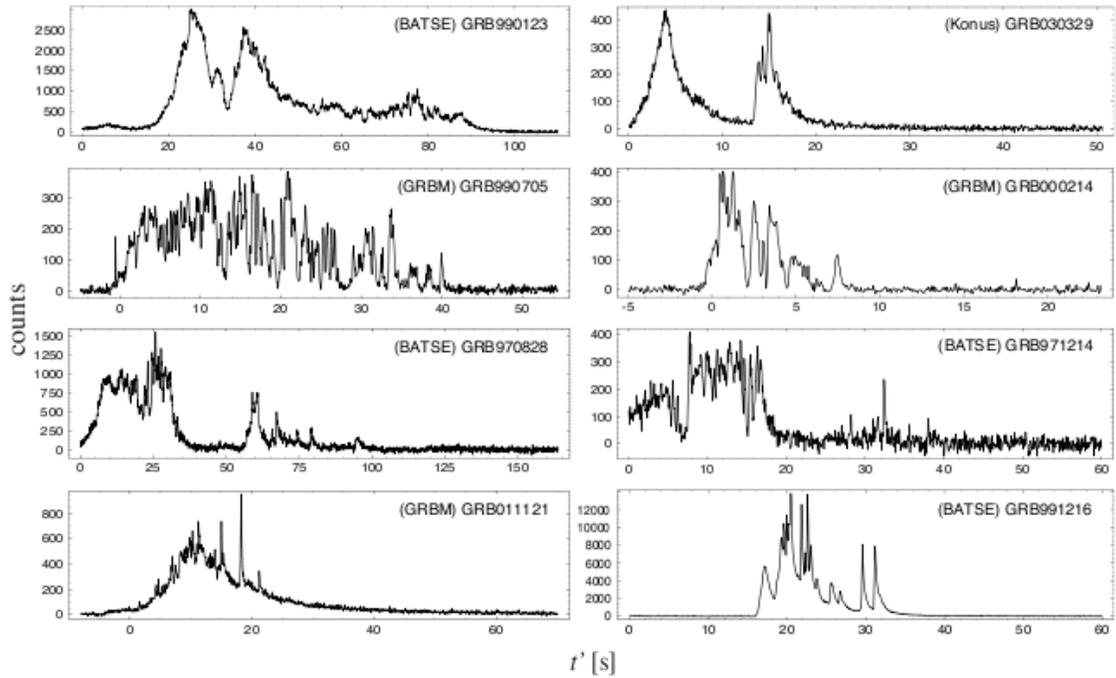


Figura 5.1: Ejemplos de curvas de luz de brotes de rayos gama de larga duración, tomados de la Figura 1 de Borgonovo et al (2007).

### 5.0.8. Trabajo a Futuro.

Las extensiones inmediatas del trabajo numérico desarrollado en esta tesis, consistirían en ampliar el estudio del espacio de parámetros en los modelos numéricos tales como  $\beta_0$  y  $\eta$  para comparar con soluciones analíticas. Se considerará también realizar simulaciones numéricas en dos dimensiones, para poder observar el efecto de

la eyección de material por los lados de las estructuras de choque internas.

Tanto en el caso de 1D y 2D (una y dos dimensiones), será importante hacer una comparación con observaciones tanto de jets no relativistas de estrellas jóvenes de baja masa, como de jets relativistas generados por el colapso del núcleo de estrellas masivas, con la intención de conocer la cercanía de los modelos numéricos propuestos con la realidad.

En ambos regímenes, el sistema de referencia de las simulaciones que se presentan en esta tesis, se ha ubicado en la fuente del jet. Los resultados relativistas podrían presentar resultados distintos si el sistema de referencia es el de algún observador, pues en ese caso, efectos como la contracción del tiempo y de la distancia podrían tener lugar.

Para incrementar la veracidad de las simulaciones que se presentan con fenómenos físicos, se considerará agregar términos de pérdida de energía a los sistemas de ecuaciones que representen procesos radiativos o conversión de energía magnética.

# Apéndice A

## Análisis Dimensional.

Un objeto astrofísico presenta ciertas cantidades observables como son su brillo o flujo de radiación, en algún rango de longitudes de onda o frecuencias y el lapso durante el cual se puede detectar. También es posible, a partir de ciertos tipos de observaciones y con algunas suposiciones físicas, derivar estimaciones de cantidades como la densidad electrónica  $n_e$ , las abundancias químicas y el estado de ionización. Dichas estimaciones llevan a la densidad de masa del material emisor,  $\rho_J = \mu m_H n_H$ , donde  $n_H$  es la densidad numérica de núcleos de hidrógeno,  $m_H$  es la masa del protón, y  $\mu$  es la masa promedio de una partícula en amu (unidades atómicas de masa), que depende de las abundancias.

Con espectroscopía se pueden obtener las velocidades radiales y en algunos casos también se tienen movimientos propios, o bien, velocidades tangenciales. Si se conoce la distancia al objeto, el flujo se puede convertir en una luminosidad, y el tamaño angular del objeto en el cielo, se convierte en un tamaño físico.

Se quiere definir a las variables hidrodinámicas densidad  $\rho$ , presión  $p$  y velocidad  $v$ , en términos de estas cantidades medibles. Esto se hace mediante un análisis dimensional.

En el caso de un jet estelar de velocidad no relativista, generalmente se trata de objetos relativamente cercanos. Se observan en líneas de emisión y normalmente se

tienen las velocidades radiales, las densidades y el tamaño angular de estos objetos. Las distancias a las regiones de formación estelar donde se encuentran estos jets son determinados, por lo que se pueden estimar los tamaños físicos.

En términos de la densidad  $\rho_J$ , la velocidad del jet  $v_J$  y el tamaño del jet  $d_J$ , las variables hidrodinámicas características se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}\rho_c &= \rho_J, \\ v_c &= v_J, \\ p_c &= \rho_c v_c^2,\end{aligned}\tag{A.1}$$

mientras que el tiempo característico es

$$t_c = \frac{d_J}{v_J}.\tag{A.2}$$

En el caso de un jet relativista, como los que dan origen a los brotes de rayos gamma, se tiene el flujo de radiación en un rango de frecuencias y la duración del brote. Se puede suponer que las velocidades son cercanas a la velocidad de la luz, por lo que esta velocidad es característica del sistema.

En términos del Flujo  $F_*$ , duración  $t_*$  y velocidad de la luz  $c$ , la densidad, presión y velocidad características se pueden expresar como combinaciones de las cantidades observables como:

$$\begin{aligned}\rho_c &= \frac{F_*}{c^3}, \\ p_c &= \frac{F_*}{c}, \\ v_c &= c,\end{aligned}\tag{A.3}$$

mientras que el tamaño del jet se puede expresar en términos de la longitud característica

$$d_c = ct_*.\tag{A.4}$$

Así como en el trabajo de Cantó et al. (2013), los modelos presentados en este trabajo, se estudian desde el sistema de referencia de la fuente. Sin embargo, en la

práctica, las observaciones son tomadas desde el sistema de referencia de un observador. Las escalas de tiempo son distintas para cada uno de estos sistema de referencia. De hacer un estudio como éste desde la visión de un observador, será necesario hacer correcciones relativistas en la duración de la emisión.

Una consideración más, es tomar en cuenta el incremento de la frecuencia que se recibe, como consecuencia del efecto Doppler que un jet relativista muestra al estar en la línea de visión del observador. En el caso particular en que el sistema sí se establece en el sistema de referencia de la fuente y si la estructura de choque es ópticamente delgada, el flujo que se observa en rayos gamma puede relacionarse con la luminosidad en rayos gamma.

# Bibliografía

- Arthur, S.J. 1991, PhD. thesis, University of Leeds.
- Bacciotti F., Eislöfel J., Mundt R., 1999, *Astron. Astrophys.*, 342, 717.
- Borgonovo L., Frontera F., Guidorzi C., Montanari E., Vetere L., Soffitta P., 2007, *A&A*, 465, 765.
- Cantó J., Lizano S., Fernández-López M., González R. F., Hernández-Gómez A., 2013, *MNRAS*, 4030, 2703.
- Cantó J., Raga A. C., D'Alessio P., 2000, *MNRAS*, 313, 656.
- Dyson, J. E., & Williams, D. A. 1997, *The physics of the interstellar medium*. Edition: 2nd ed. Publisher: Bristol: Institute of Physics Publishing, 1997.
- Eislöfel J., Mundt R., 1992, *Astronomische Gesellschaft Abstract Series*, 7, 117.
- Godunov S.K. 1959, *A Finite Difference Method for the Computation of Discontinuous Solutions*. *Mat. Sb.*, 47, 357.
- Kobayashi S., Piran T., Re'em S., 1997, *The Astrophysical Journal*, 490, 1.
- Kwan J., Tadamaru E., 1998, *The Astrophysical Journal*, 332, L41.
- Leveque, R. J. 2002, "Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems", Cambridge: University Press.
- Lora-Clavijo F. D., Cruz-Pérez J. P., Siddhartha Guzmán F., González J. A., 2013, *Revista Mexicana de Física*, E59, 28.
- Martí J. M., Müller E., 1994, *J. Fluid Mech.*, 258, 317.

- Martí J. M., Müller E., 1996, *Journal of Computational Physics*, 123, 1.
- Martí J. M., Müller E., 2003, *Living Rev. Relativity*, 6, 7.
- Mendoza S., Hidalgo J. C., Olvera D., Cabrera J. I., 2009, *MNRAS*, 395, 1403.
- Paczynski B., 1992, *Astrophysical Journal*, 308, L43.
- Piran T., 2004, *Reviews of Modern Physics*, 76, 4.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 1992, "Numerical Recipes in Fortran", Cambridge: University Press, 2nd ed.
- Raga A. C., Cantó J., Binette L., Calvet N., 1990, *The Astrophysical Journal*, 364, 601.
- Rees M. J., 1978, *MNRAS*, 184, 61P.
- Rees M. J., Mészáros P., 1994, *The Astrophysical Journal*, 430, L93.
- Rubini F., Lorusso S., Del Zanna L., Bacciotti F., 2007, *A&A*, 472, 855.
- Schneider V., Katscher U., Rischke D.H., Waldhauser B., Maruhn J.A., 1993, *J. Comput. Phys.*, 105, 92.
- Sod G.A., 1978, *Journal of Computational Physics*, 27, 1.
- Toro E. F., 2010, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluids Dynamics: A Practical Introduction*. Edition: 3rd ed. Publisher: Springer: University of Trento Publishing, 2010.
- van Eerten H. J., Leventis K., Meliani Z., Wijers R.A.M.J., Keppens R., 2010, *MNRAS*, 403, 300.