UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DINÁMICA Y TOPOLOGÍA DE FELL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

I V Á N A X E L L G Ó M E Z R A M O S

DIRECTOR DE TESIS:

DR. GERARDO ACOSTA GARCÍA

2014

Ciudad Universitaria, D. F.

1. Datos del alumno
Gómez
Ramos
Iván Axell
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
408075930

2. Datos del tutor
Dr.
Gerardo
Acosta
García

3. Datos del sinodal 1
Dra.
Patricia
Pellicer
Covarrubias

4. Datos del sinodal 2
Dr.
Héctor
Méndez
Lango

5. Datos del sinodal 3
Dr.
Jorge Marcos
Martínez
Montejano

6. Datos del sinodal 4
Dr.
Jefferson Edwin
King
Dávalos

7. Datos del trabajo escrito
Dinámica y Topología de Fell
113 p
2014

Agradecimientos

A Rosalba, por ser mi principal ejemplo y apoyarme aún en aquellas ocasiones en las que era fácil dudar, te quiero mamá.

A Gerardo, por ser una excelente persona a la cual admiro y respeto profundamente. Por haber aceptado dirigir esta tesis, sin su infinita paciencia y apoyo jamás habría terminado un texto como el presente.

A los sinodales, Héctor, Paty, Jorge y Jefferson, por haberse tomado la molestia de leer mi trabajo.

A Hector y Jorge por la cantidad de observaciones que sirvieron para aclarar lo que intentaba decir con mi desafortunada manera de escribir. En particular a Jorge por el ingenioso remedio a un problema de notación.

Una mención especial para Paty por todas aquellas veces que tuvo que leer mis correcciones soportando mi nulo conocimiento matemático y por la disposición para resolver mis dudas sobre los problemas que en el camino fueron surgiendo.

A Lene y Lucero pues siempre han tenido tiempo cuando necesito hablar con alguien. El tiempo que pasamos juntos siempre termina arreglando mis días terribles.

A Tania, Héctor, Aida, Sofía, Luis, Fernando, Thalia, Melissa, Rocío, Narla y, en general a todos aquellos que siguen cerca a pesar de que me he convertido en un ser antisocial. Ustedes son los que me animan a seguir mejorando.

Por último, pero no por ello menos importante, agradezco a la Facultad de Ciencias por facilitarme los recursos para concluir esta tesis de manera satisfactoria y por darme la posibilidad de adentrarme en el fascinante mundo de las Matemáticas.

Índice General

Prefacio

El presente trabajo se enmarca en las áreas de los Sistemas Dinámicos Discretos, la Teoría de Hiperespacios y la Topología de Conjuntos. Aunque el trabajo es lo más autocontenido posible, se espera que el lector tenga una formación básica en dichas teorías. En cuanto a la Topología de Conjuntos, por ejemplo, no damos la definición de espacio topológico, espacio metrizable, función continua, ni del interior, la cerradura y la frontera de un conjunto. Tampoco definimos los axiomas de separación más utilizados, como son las propiedades T_1, T_2, T_3 y T_4. En cambio presentamos, principalmente en el Capítulo 1, las nociones de base de un espacio topológico, de vecindad de un punto, de compacidad, compacidad local y conexidad, entre otras. Con respecto a la Teoría de Hiperespacios y los Sistemas Dinámicos Discretos, lo que se requiere para comprender el presente trabajo, se encuentra aquí escrito.

Un *sistema dinámico* es una pareja (X, f), donde X es un espacio topológico y $f\colon X \to X$ es una función continua. Al conjunto X que aparece en la pareja (X, f), le llamamos *espacio base* del sistema dinámico, mientras que a la función f se le conoce como la *función base* de dicho sistema dinámico. Dado un punto $x \in X$, al conjunto $\{x, f(x), f(f(x)), \ldots, \}$ se le llama la *órbita de x bajo f*.

Durante los últimos años, algunos trabajos en el estudio de sistemas dinámicos consisten en construir, a partir de un sistema dinámico dado (X, f), un nuevo sistema dinámico cuyo espacio base es una colección de subconjuntos especiales de X, y su función base es la que considera las imágenes de dichos subconjuntos bajo f. Este proceso de estudiar las imágenes de subconjuntos de X bajo f, es lo que comúnmente se conoce como el estudio de la *dinámica colectiva*. Uno de los intereses principales en la dinámica colectiva, es encontrar relaciones entre las propiedades del sistema original y el sistema construido o inducido por la colección de subconjuntos de X antes mencionada. También es interesante encontrar relaciones entre el sistema dinámico inducido y el sistema original. El Capítulo 3 del presente trabajo está dedicado a esto.

Las familias de subconjuntos especiales de un espacio topológico X, son llamadas *hiperespacios* de X. El presente escrito se interesa principalmente en dos hiperespacios de X, a saber 2^X, el de los subconjuntos cerrados de X y $CL(X)$, el de los subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Notemos que $CL(X) \subseteq 2^X$ y que, para estudiar un sistema dinámico que tenga a alguno de $CL(X)$ o 2^X como espacio base, basta con dotar a 2^X de una buena topología y, posteriormente, considerar en $CL(X)$ la topología de subespacio. Ocasionalmente utilizaremos, para un número natural n, el hiperespacio $F_n(X)$ de los subconjuntos no vacíos de X, con a lo más n puntos. También aparecerá el hiperespacio $K(X)$, de los subconjuntos compactos de X.

Tenemos muchas maneras de darle a 2^X una topología. Podríamos elegir la topología indiscreta, la discreta, la cofinita, etc. Como bien sabemos de nuestros cursos de Topología, la topología que le demos a un conjunto determinará sus propiedades. Por lo general buscamos que una buena topología produzca un espacio con un buen axioma de separación, algún buen axioma de numerabilidad, un buen axioma de compacidad y, si la suerte nos sonríe, una buena propiedad de conexidad. En el mejor de los casos, esperamos que la topología dada produzca un espacio metrizable. Entre las buenas topologías que se le pueden dar a 2^X hay dos distinguidas, la *topología de Vietoris* y la *topología de Fell*, siendo la primera la más estudiada y aplicada generalmente a $CL(X)$ y a $CL(X) \cap K(X)$. La topología de Vietoris, que denotamos por τ_V, la presentamos en la Definición 2.4, en el Capítulo 2. La de Fell, denotada por τ_F, aparece en la Definición 2.7 del Capítulo 2. De hecho, el objetivo de dicho capítulo, es estudiar los espacios topológicos

$$(CL(X), \tau_V), \quad (2^X, \tau_F) \quad \text{y} \quad (CL(X), \tau_F).$$

En la Sección 2.2 presentamos una base para τ_V (Teorema 2.3) y una base para τ_F (Teorema 2.8). Posteriormente, en la Sección 2.3, mostramos una condición que la cumplen los espacios T_2, bajo la cual $\tau_F \subseteq \tau_V$. También probamos que si X es compacto, entonces $\tau_V \subseteq \tau_F$. Por tanto, cuando X es un espacio compacto y T_2, la topología de Vietoris coincide con la de Fell. A partir de este momento resulta importante, si queremos que las topologías de Vietoris y de Fell sean distintas, no suponer que el espacio topológico X sea compacto y T_2 a la vez.

Ya que sabemos que las topologías de Fell y de Vietoris son distintas, nos interesa ahora determinar si 2^X y $CL(X)$ poseen propiedades topológicas similares cuando se les imponen dichas topologías. En la Sección 2.4, vemos condiciones bajo las cuales $(2^X, \tau_V)$ contiene una copia topológica de X. Lo mismo realizamos para $(2^X, \tau_F)$. Posteriormente, en la Sección 2.5, vemos que $(2^X, \tau_F)$ siempre es un espacio compacto (Teorema 2.18). También vemos que si X es compacto, entonces $(CL(X), \tau_F)$ es compacto (Corolario 2.19). Como probamos en el Teorema 2.22, si X es un espacio T_2 entonces $(CL(X), \tau_V)$ es compacto si y sólo si X es compacto. Así pues, para obtener una propiedad en $CL(X)$, en este caso la compacidad, las condiciones que hay que pedirle a X difieren, si deseamos en $CL(X)$ la topología de Vietoris o la de Fell. Esto es lo que sucede en general y es de esperarse.

En la Sección 2.6 estudiamos condiciones en X para que 2^X y $CL(X)$ posean un buen axioma de separación, considerando tanto la topología de Vietoris como la de Fell. Vemos que $(2^X, \tau_F)$ y $(CL(X), \tau_F)$ siempre son T_1 (Proposición 2.25), mientras que $(CL(X), \tau_V)$ siempre es T_0. Después mostramos los axiomas de separación que se obtienen en $(2^X, \tau_F)$ y $(CL(X), \tau_F)$, cuando suponemos que X es localmente compacto. En la Sección 2.7 vemos si la primero numerabilidad y la segundo numerabilidad en X, se relaciona con dichas propiedades en 2^X y $CL(X)$. Probamos, por ejemplo, que cuando X es T_1, de la primero numerabilidad en $(CL(X), \tau_V)$ se obtiene la primero numerabilidad en X (Teorema 2.33). Por otro lado, cuando X es T_2, de la primero numerabilidad en $(CL(X), \tau_F)$, se obtiene la primero numerabilidad en X (Teorema 2.34). Un resultado importante de dicha sección es el Teorema 2.41, donde probamos que si X es un espacio localmente compacto y segundo numerable, entonces $(2^X, \tau_F)$ es T_2 y segundo numerable. Posteriormente vemos que cuando X es localmente compacto y segundo numerable, los hiperespacios $(2^X, \tau_F)$ y $(CL(X), \tau_F)$ son metrizables (Teorema 2.44).

En la Sección 2.8 vemos condiciones en X que implican que 2^X y $CL(X)$ son conexos, cuando se les da la topología de Vietoris y también cuando se considera la topología de Fell. Por ejemplo, cuando X es conexo y T_1, resulta que $(CL(X), \tau_V)$ es conexo (Teorema 2.46). Por otra parte, cuando X es conexo y T_2, sucede que $(CL(X), \tau_F)$ es conexo (Proposición 2.49). También mostramos que si X es conexo, T_2 y no compacto entonces $(2^X, \tau_F)$ es conexo (Proposición 2.51). Otro resultado interesante de este sección es el Teorema 2.55, en el cual vemos que cuando X es T_1, la conexidad de $(2^X, \tau_F)$ se deriva de la conexidad de $(2^Y, \tau_F)$, para cada componente conexa Y de X. Conviene mencionar que una buena parte de los resultados que probamos en la Sección 2.8, se presentan en forma detallada y diferente de como aparecen originalmente en la literatura.

En la Sección 2.9 vemos condiciones en X bajo las que es posible definir en $CL(X)$ una métrica, cuya topología inducida es la de Vietoris. También vemos condiciones en X bajo las que es posible definir en 2^X (y, por tanto en $CL(X)$) una métrica cuya topología inducida es la de Fell. Buena parte de los resultados que utilizamos en este capítulo se apoyan en teoremas que enunciamos en el Capítulo 1. El Capítulo 1 del presente trabajo, contiene una buena parte de resultados propios de la Teoría de Conjuntos, de la Topología General y de los Sistemas Dinámicos Discretos, que utilizamos en los capítulos 2 y 3. La Subsección 1.3.3, que habla sobre espacios localmente compactados y sobre la compactación por un punto, es importante para justificar resultados que aparecen en la Sección 2.9 y en el Capítulo 3. En la Sección 1.4, presentamos lo que significa que dos sistemas dinámicos sean *topológicamente conjugados* y lo que es una *propiedad dinámica*. Luego, en la Definición 1.40, consideramos las propiedades dinámicas de ser una función topológicamente transitiva, ser una función débilmente mezclante y ser una función mezclante, y estudiamos las relaciones entre ellas.

En el Capítulo 3 abordamos el tema de la dinámica colectiva. Nuestro primer objetivo es dar condiciones, bajo las cuales, si (X, f) es un sistema dinámico, entonces la función $CL^f : CL(X) \to CL(X)$ definida para cada $A \in CL(X)$ como $CL^f(A) = f(A)$, sea continua cuando en $CL(X)$ consideramos la topología de Vietoris, y también cuando consideramos la topología de Fell. Esto lo realizamos en la Sección 3.3. Aplicando estas condiciones, el sistema dinámico (X, f) induce los sistemas dinámicos $((CL(X), \tau_V), CL^f)$ y $((CL(X), \tau_F), CL^f)$. Toca ahora estudiar relaciones entre el sistema dinámico original y sus sistemas dinámicos inducidos. Consideramos el caso del sistema dinámico inducido con la topología de Fell y, en las dos últimas secciones del Capítulo 3, vemos que si P es una de las tres propiedades dinámicas que dimos en la Definición 1.40, entonces existe una propiedad dinámica Q, distinta de P, de modo que el sistema dinámico (X, f) satisface la propiedad Q si y sólo si el sistema dinámico inducido $((CL(X), \tau_F), CL^f)$ satisface la propiedad P. Cuando P es la propiedad de ser una función topológicamente transitiva, Q es la propiedad de ser una función c-topológicamente transitiva. De manera similar, cuando P es la propiedad de ser una función débilmente mezclante, Q es la propiedad de ser una función c-débilmente mezclante. Finalmente, cuando P es la propiedad de ser una función mezclante, sucede que Q es la propiedad de ser una función c-mezclante.

El trabajo aquí presentado no abarca todo lo que existe en la literatura con respecto al estudio topológico de los hiperespacios $(2^X, \tau_F)$ y $(CL(X), \tau_F)$. Tampoco se presenta todo lo que hay sobre relaciones dinámicas entre los sistemas dinámicos (X, f) y $((CL(X), \tau_F), CL^f)$. Propiedades dinámicas interesantes, como la densidad de los puntos periódicos o la entropía y sus variantes, han quedado fuera de este trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Introducción

A lo largo de este capítulo haremos las convenciones necesarias de notación que usaremos posteriormente. También presentaremos algunas definiciones y las demostraciones de resultados que se utilizarán más adelante. Si un resultado aparece sin demostración, entonces daremos una referencia adecuada.

1.2. Preliminares de Teoría de Conjuntos

El símbolo $\mathbb{N}$ representará al conjunto de los números naturales, mientras que $\mathbb{R}$ denotará el conjunto de los números reales. Un conjunto X será llamado *finito* cuando es vacío o bien se le pueda poner en biyección con el conjunto $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, para alguna $n \in \mathbb{N}$. Diremos que X es *numerable* cuando exista una biyección entre X y $\mathbb{N}$ y *contable* si el conjunto X es finito o numerable. Si X no es contable, decimos que X es *no numerable.*

Dados un conjunto X y un subconjunto A de X, denotaremos el complemento de A en X como $X \setminus A$. Si queda claramente establecido el espacio sobre el que se toma el complemento, se denotará como A^c.

En este trabajo vamos a suponer cierto el *Axioma de Elección*, del cual se conoce que entre sus equivalencias se encuentra el *Lema de Zorn.* El siguiente resultado que afirma lo anterior se prueba en [8, Teorema 2.1, p. 31].

Teorema 1.1. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

Axioma de Elección *Para cada colección indexada de conjuntos no vacíos, existe una función que a cada índice le asigna un elemento del correspondiente miembro de la colección.*

Lema de Zorn *Sea X un conjunto distinto del vacío y preordenado bajo r (i.e., r es reflexiva y transitiva). Si cada cadena en X (subconjunto del conjunto preordenado en el que cualesquiera dos elementos se relacionan) tiene una cota superior, entonces X tiene al menos un elemento maximal.*

Teorema de Zermelo *Cualquier conjunto tiene un buen orden (i.e., existe un orden total en el que cualquier subconjunto propio y no vacío tiene un elemento mínimo).*

A lo largo del presente escrito, en ocasiones será necesario notar si dos conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad. En esto nos enfocaremos durante la mayor parte de esta sección y, para ello, utilizaremos ideas bastante básicas de la Teoría de Conjuntos.

Definición 1.2. Si A y B son conjuntos tales que existe una biyección entre A y B, se dice que A *es equipotente a* B, lo cual denotamos como $A \sim B$. Si A y B son equipotentes, se dice que A tiene la *misma cardinalidad* que B.

La cardinalidad de un conjunto B es denotada como $|B|$. La cardinalidad del conjunto $\mathbb{N}$ se denota por $\aleph_0$. Si existe una función inyectiva $f\colon A \to B$, decimos que la cardinalidad de A es *menor o igual que* la de B, cosa que se escribe como $|A| \leq |B|$ o bien por $|B| \geq |A|$. Si los conjuntos A y B no son equipotentes y, además, $|A| \leq |B|$, entonces decimos que la cardinalidad de A es *menor que* la de B, cosa que denotamos por $|A| < |B|$ o bien por $|B| > |A|$. Notemos que si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$. Notemos también que un conjunto X es no numerable si y sólo si X contiene un conjunto infinito de cardinalidad mayor que $\mathbb{N}$. En otras palabras, X es no numerable si y sólo si $|X| > \aleph_0$. Por consiguiente, un conjunto C es contable si y sólo si $|C| \leq \aleph_0$.

Usando el Axioma de Elección se verá que también existe una relación entre las funciones suprayectivas de un conjunto a otro y sus cardinalidades.

Lema 1.3. *Sean A y B dos conjuntos. Si existe alguna función suprayectiva $f\colon A \to B$, entonces $|B| \leq |A|$.*

Demostración. Al ser f suprayectiva de A en B, el conjunto de imágenes inversas $\{f^{-1}(b) \mid b \in B\}$ es una colección no vacía de conjuntos no vacíos.

Por el Axioma de Elección, existe un conjunto E tal que, para cada $b \in B$, hay un solo elemento a_b en E tal que $f(a_b) = b$. Definamos $g\colon B \to A$ tal que $g(b) = a_b$. De esta manera g es una función inyectiva, entonces $|B| \leq |A|$. □

El Lema 1.3 nos permite comparar cardinalidades de conjuntos dados.

Proposición 1.4. *Sean A y B dos conjuntos, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $|A| \leq |B|$.

2) Existe una función $f\colon A \to B$ inyectiva.

3) Existe una función $g\colon B \to A$ suprayectiva.

Demostración. La equivalencia entre *1)* y *2)* de la Proposición 1.4 es por definición, mientras que la implicación de *3)* a *1)* se cumple usando el Lema 1.3. Sólo falta mostrar que *2)* implica *3)* lo que es sencillo pues, como $f\colon A \to B$ es una función inyectiva, cada elemento $a \in A$ tiene asignado un único elemento en B, de modo que, tomando un elemento a_0 en A, definimos $g\colon B \to A$ como:

$$g(b) = \begin{cases} a & \text{si existe } a \in A \text{ tal que } f(a) = b; \\ a_0 & \text{si no existe } a \in A \text{ tal que } f(a) = b. \end{cases}$$

la cual claramente es una función bien definida y suprayectiva. □

Introducimos una última definición antes de meternos de lleno en el asunto de "medir" la cantidad de elementos de un conjunto.

Definición 1.5. Para cualesquiera dos conjuntos A y B, definimos las operaciones:

$$|A| + |B| = |(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})| \quad \text{y} \quad |A| \cdot |B| = |A \times B|.$$

También decimos que κ es un *cardinal* si existe un conjunto A tal que $\kappa = |A|$.

Con esta notación, es fácil notar que si κ y λ son cardinales tales que $\kappa = |K|$ y $\lambda = |L|$, entonces se tiene que:

$$\kappa + \lambda = |\,(K \times \{0\}) \cup (L \times \{1\})| \quad \text{y} \quad \kappa \cdot \lambda = |K \times L|.$$

Si el lector se interesa en asuntos de cardinalidad o encuentra demasiado escueta la información proporcionada en este texto, puede hallar una introducción al tema en [2]. Ahí mismo puede encontrarse la demostración del siguiente resultado ([2, Corolario 1, p. 109]).

Lema 1.6. *Sean κ y λ dos cardinales, uno infinito y el otro no cero. Entonces $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \text{máx}\,\{\kappa, \lambda\}$.*

Entre las curiosidades que nos permiten obtener los lemas mencionados anteriormente, se encuentran aquellas que nos indican que podemos unir conjuntos contables una cantidad contable de veces, o realizar el producto finito de conjuntos contables, y obtener un conjunto cuya cardinalidad es igualmente contable.

Proposición 1.7. *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(a) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *es numerable.*

(b) El producto finito de conjuntos contables es contable.

(c) La unión contable de conjuntos contables es contable.

Demostración. *(a)* La cardinalidad de $\mathbb{N}$ es $\aleph_0$. El Lema 1.6 nos dice, por tanto, que $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \text{ máx}\,\{\aleph_0, \aleph_0\} = \aleph_0$. Luego el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

(b) Sean A y B dos conjuntos contables, lo que significa que $|A|$ y $|B|$ son menores o iguales a $\aleph_0$. Si A o B son vacíos, entonces $A \times B$ es vacío. Entonces, supongamos que tanto A como B no son vacíos. Usando a $\mathbb{N}$ como un conjunto de cardinalidad $\aleph_0$, la Proposición 1.4 nos dice que existen funciones suprayectivas $f\colon \mathbb{N} \to A$ y $g\colon \mathbb{N} \to B$.

Definamos la función $h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A \times B$ como $h((n,m)) = (f(n), g(m))$ y sea $(x,y) \in A \times B$. Como f y g son suprayectivas, existe $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $f(n) = x$ y $g(m) = y$. De donde $h((n,m)) = (f(n), g(m)) = (x,y)$, por lo que h es suprayectiva. Usando una vez más la Proposición 1.4 y el hecho de que encontramos una función suprayectiva del conjunto numerable $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $A \times B$, obtenemos que $|A \times B| \leq \aleph_0$. Esto prueba que $A \times B$ es contable. Utilizando inducción se tiene que el producto finito de conjuntos contables es contable.

(c) Sean C un conjunto contable y $\{A_n \mid n \in C\}$ una familia no vacía de conjuntos contables no vacíos. Para cada $n \in C$, como A_n es contable, la Proposición 1.4 dice que existe $f_n\colon \mathbb{N} \to A_n$ suprayectiva. Como C también es contable, por el mismo resultado, existe $g\colon \mathbb{N} \to C$ suprayectiva. Consideremos la función $h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in C} A_n$ definida como $h((k,m)) = f_{g(k)}(m)$. Notemos que h está bien definida pues si $(k,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, entonces

$$g(k) \in C \quad \text{y} \quad h((k,m)) = f_{g(k)}(m) \in A_{g(k)} \subseteq \bigcup_{n \in C} A_n.$$

Ahora, sea $a \in \bigcup_{n \in C} A_n$. Entonces existe $m \in C$ tal que $a \in A_m$. Como f_m es suprayectiva, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $f_m(s) = a$. Pero g es también suprayectiva y $m \in C$, por tanto existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $g(k) = m$. De donde $h((k,s)) = f_{g(k)}(s) = f_m(s) = a$. Esto prueba que h es suprayectiva. La Proposición 1.4 nos dice que $\bigcup_{n \in C} A_n$ es un conjunto contable. $\square$

Al tener la Proposición 1.7, el lector puede estar tentado a suponer que el producto numerable de conjuntos contables es una colección contable. Lamentablemente tal supuesto es falso, incluso en un ejemplo tan simple como el producto numerable del conjunto $X = \{0, 1\}$ consigo mismo. Dicho ejemplo está explicado a detalle en [21, Teorema 7.7].

Para finalizar esta sección, presentamos un último resultado que no es trivial, pues acota la cantidad de cierto tipo de conjuntos en un conjunto contable.

Teorema 1.8. *Sea C un conjunto contable. Entonces*

$$\mathcal{S} = \{D \subseteq C \mid D \text{ es un subconjunto finito de } C\}$$

es una colección contable.

Demostración. Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n = \{D \subseteq C \mid |D| \leq n\}$. Obviamente $\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$. Mostraremos que cada $\mathcal{A}_n$ es contable. Para esto, sea $n \in \mathbb{N}$ y definamos, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ a $C_i = C$. Consideremos la función $f_n \colon \prod_{i=1}^{n} C_i \to \mathcal{A}_n$ definida como

$$f_n((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

la cual claramente es suprayectiva. Además, como $\prod_{i=1}^{n} C_i$ es un producto finito de conjuntos contables, por la parte *(b)* de la Proposición 1.7, es contable. Con lo anterior, hemos hallado una función suprayectiva del conjunto contable $\prod_{i=1}^{n} C_i$ a $\mathcal{A}_n$. La Proposición 1.4 nos dice que $\mathcal{A}_n$ es contable. Luego, por la parte *(c)* de la Proposición 1.7, $\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ es contable. $\square$

1.3. Nociones de Topología

En la presente sección y a lo largo de este trabajo, las letras X, Y y Z simbolizarán espacios topológicos. Si es sensible la necesidad de hacer explícita la topología con que se ha equipado a, digamos X, entonces se simbolizará al espacio como (X, τ) donde τ es dicha topología.

Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Con $Int_X(A)$ representaremos al interior del conjunto A en X, y con $Cl_X(A)$ a la cerradura de A en X. Si no hay posibilidad de confusión sobre el espacio en el que efectuamos la operación, entonces $Int_X(A)$, $Int(A)$ y A° se usarán como iguales, lo mismo que $Cl_X(A)$, $Cl(A)$ y $\overline{A}$.

En esta sección mencionaremos algunos conceptos básicos de Topología General y mostraremos algunas propiedades de las cuales haremos uso en capítulos posteriores.

1.3.1. Bases, Vecindades y Peso de un Espacio

Introduciremos los conceptos que utilizaremos para definir *vecindades* de un punto, *subbases* y *bases* de un espacio topológico.

Definición 1.9. Dado un espacio topológico (X, τ), definimos:

a) Para $x \in X$, una *vecindad* de x, es un subconjunto $V \subseteq X$ para el que existe un abierto U de X tal que $x \in U \subseteq V$.

b) Una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es llamada una *base* para X, si cada abierto no vacío de X puede ser representado como la unión de una subfamilia de $\mathcal{B}$.

c) Una familia $\mathcal{P} \subseteq \tau$ es llamada una *subbase* para X si la familia de todas las intersecciones finitas $U_1 \cap \cdots \cap U_n$, con $U_i \in \mathcal{P}$ para $1 \leq i \leq n$, es una base para X.

Existen vecindades de un punto con propiedades adicionales. Por ejemplo, una *vecindad abierta* de $x \in X$ es una vecindad de x que, además, es un subconjunto abierto de X. Una *vecindad cerrada* de x es una vecindad de x que es un subconjunto cerrado de x.

Tratar con bases hace mucho más fácil el estudio de un espacio topológico, ya que un espacio con su topología está determinado por su base y un mismo espacio puede tener muchas bases diferentes, de entre las cuales es posible encontrar algunas que cumplan propiedades especiales. Por ejemplo, dado un espacio topológico (X, τ), la topología con que se equipa podría ser no numerable, y aún así, es factible que posea una base contable. Si tal base es considerada, trabajar con ella nos ahorra una gran cantidad de esfuerzo en el estudio de las propiedades de dicho espacio.

Proposición 1.10. *Para un espacio topológico* (X, τ) *y una familia* $\mathcal{B} \subseteq \tau$, *una definición alternativa para base es la siguiente:* $\mathcal{B}$ *es base de* X *si para cada punto* $x \in X$ *y todo abierto* V *de* X *tal que* $x \in V$, *existe* $U \in \mathcal{B}$ *tal que* $x \in U \subseteq V$.

Demostración. Para probar la Proposición 1.10, supongamos primero que $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es una base de X. Sean $x \in X$ y V un abierto de X tales que $x \in V$. Entonces V puede ser representado como la unión de una subfamilia $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$. Luego existe $U \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in U$ y U es un subconjunto de $\bigcup \mathcal{B}'$, donde precisamente $V = \bigcup \mathcal{B}'$. La implicación inversa se obtiene notando que si $x \in V$, existe un $U_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_x \subseteq V$. Debido a esto V queda cubierto con la unión de la familia $\{U_x \mid x \in V\}$, que es una subfamilia de $\mathcal{B}$. Es fácil notar que $\bigcup \{U_x \mid x \in V\} = V$. $\square$

El siguiente enunciado y su corolario son evidentes, pero es importante mencionarlos dada la cantidad de veces que se utilizarán a lo largo del texto.

Proposición 1.11. *Sea* X *un espacio topológico. Para cualquier* $A \subseteq X$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $x \in \overline{A}$.

b) Para cada vecindad U *de* x, *sucede que* $U \cap A \neq \emptyset$.

Demostración. Recordemos que la cerradura de un conjunto A es la intersección de todos los cerrados que contienen a A. Ambas demostraciones se harán por contrapuesta. Si existe una vecindad U de x tal que $U \cap A = \emptyset$, entonces al tomar un abierto V de X tal que $x \in V \subseteq U$, resulta que $V \cap A = \emptyset$. Luego $A \subseteq V^c$ y claramente $V^c \in \{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}$. Por lo tanto $\overline{A} \subseteq V^c$, de donde $x \notin \overline{A}$.

Si $x \notin \overline{A}$, entonces existe un cerrado F en X tal que $A \subseteq F$ y $x \notin F$, de donde $x \in U = X \setminus F$. Por tanto U es vecindad abierta de x disjunta a F, implicando que $U \cap A = \emptyset$. $\square$

Corolario 1.12. *Si* U *es un conjunto abierto de* X, $A \subseteq X$ *y* $U \cap \overline{A} \neq \emptyset$, *entonces* $U \cap A \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $x \in U \cap \overline{A}$. Entonces $x \in \overline{A}$ y, como U es una vecindad de x, la Proposición 1.11, implica que $U \cap A \neq \emptyset$. $\square$

Retomando el hecho de la posibilidad de tener distintas bases para un mismo espacio, una pregunta natural es si existe alguna base que sea “lo mas pequeña posible" en el sentido de cardinalidad, lo cual, en un afán de simplicidad lleva a querer encontrar esa base para trabajar con ella. Lamentablemente describir dicha base por lo general no es sencillo, pero se sabe que al menos existe una base que cumpla con esas características. Ello motiva la siguiente definición.

Definición 1.13. El conjunto de números cardinales de la forma $|\mathcal{B}|$ con $\mathcal{B}$ una base para el espacio X, tiene un elemento menor $|\mathcal{B}_0|$. El cardinal $|\mathcal{B}_0|$ es llamado el *peso* de X y lo denotamos como $\omega((X,\tau))$. Si no es relevante especificar cual topología es la que está equipada, denotaremos el peso de X sólo como $\omega(X)$.

Sean (X,τ) un espacio topológico y $p \in X$. Una *base local de X en p*, es una familia $\mathcal{B}_p \subseteq \tau$ tal que cada uno de sus elementos posee a p y, para cada abierto U en X con $p \in U$, existe $V \in \mathcal{B}_p$ de modo que $V \subseteq U$. Decimos que el espacio topológico (X,τ) es *primero numerable* si cada $p \in X$ posee una base local $\mathcal{B}_p$ contable. Si sucede que el espacio topológico (X,τ) tiene una base contable, decimos que es *segundo numerable*. De la Definición 1.13 es fácil ver que si X es segundo numerable, entonces una base $\mathcal{B}_0$ de cardinalidad mínima es a lo más numerable, de donde $\omega(X) \leq \aleph_0$.

Recordemos que un conjunto es contable si es finito o numerable. Deberíamos entonces decir "primero contable" y "segundo contable" en lugar de "primero numerable" y "segundo numerable", respectivamente. Sin embargo, por fuerza de la costumbre, optamos por la terminología como la indicamos en el párrafo anterior.

El peso de un espacio es utilizado, entre otras cosas, para tomar una base con características que nos sean favorables, y a partir de aquella base, extraer una de cardinalidad mínima que permita el estudio del espacio sin los inconvenientes del manejo de bases de cardinalidad "grande".

En los Teoremas 1.1.14 y 1.1.15 de [9], se prueban los siguientes enunciados.

Proposición 1.14. *Si $\omega(X) \leq m$, entonces para toda familia $\{U_s \mid s \in S\}$ de subconjuntos abiertos de X, existe un conjunto $S_0 \subseteq S$ tal que $|S_0| \leq m$ y $\bigcup_{s\in S_0} U_s = \bigcup_{s\in S} U_s$.*

Proposición 1.15. *Si $\omega(X) \leq m$ entonces, para cada base $\mathcal{B}$ de X, existe una base $\mathcal{B}_0$ de X tal que $|\mathcal{B}_0| \leq m$ y $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$.*

1.3.2. Espacios Compactos

Supongamos que X es un espacio topológico. Una *cubierta* de X es una familia $\mathfrak{F} = \{F_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ de subconjuntos de X tal que

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha.$$

Si $\mathfrak{F} = \{F_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ es una cubierta de X y $\Upsilon \subseteq \Gamma$ es tal que

$$X = \bigcup_{\alpha \in \Upsilon} F_\alpha,$$

entonces la familia $\mathfrak{C} = \{F_\alpha \mid \alpha \in \Upsilon\}$ se llama una *subcubierta* de $\mathfrak{F}$. Si además Υ es un conjunto finito, entonces $\mathfrak{C}$ es una *subcubierta finita* de X. En el caso que Υ sea contable, $\mathfrak{C}$ será llamada *subcubierta contable* de X. Si todo elemento de la cubierta $\mathfrak{F}$ es un subconjunto abierto de X, nos referiremos a $\mathfrak{F}$ como una *cubierta abierta* de X. Si $Y \subseteq X$, una colección $\mathfrak{B}$ de abiertos de X se dice que *cubre a* Y si la union de sus elementos contiene a Y.

Existen conjuntos a los que dadas cubiertas abiertas, se les pueden extraer subcubiertas con ciertas propiedades:

Definición 1.16. Decimos que X es un espacio *compacto* si toda cubierta abierta de X posee una subcubierta finita. El espacio X será llamado de *Lindelöf* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta contable.

Si tomamos a $Y \subseteq X$ y queremos mostrar que Y es compacto o bien de Lindelöf, deberíamos mostrar que toda cubierta abierta de Y posee una subcubierta finita o bien contable. Esto se hace de la manera natural, como se indica en el siguiente resultado.

Lema 1.17. *Sea $Y \subseteq X$. Entonces Y es compacto (respectivamente, de Lindelöf) si y sólo si cada familia de abiertos de X, que cubre a Y, posee una colección finita (respectivamente, contable) que cubre a Y.*

Demostración. Mostraremos el lema sólo para el caso de la compacidad, pues el caso de Lindelöf presenta una demostración muy similar.

$\Rightarrow$] Supongamos que Y es compacto y que $\mathfrak{C} = \{A_i \mid i \in J\}$ es una colección de abiertos de X que cubre a Y (es decir $Y \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i$). Entonces $\{A_i \cap Y \mid i \in J\}$ es una cubierta de Y con abiertos en Y. Como Y es compacto existe una subcubierta finita $\{A_{i_1} \cap Y, \ldots, A_{i_n} \cap Y\}$ que cubre a Y. Por tanto $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\}$ es una colección finita de $\mathfrak{C}$ que cubre a Y.

$\Leftarrow$] Sea $\mathfrak{B} = \{B_i \mid i \in J\}$ una cubierta de Y cuyos elementos son abiertos en Y. Para cada $i \in J$ elegimos un conjunto abierto A_i en X tal que $B_i = A_i \cap Y$. La colección $\{A_i \mid i \in J\}$ es una colección de abiertos de X que cubre a Y. Por hipótesis, existe una subcolección finita $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\}$ que cubre a Y. Entonces $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_n}\}$ es una subcubierta finita de $\mathfrak{B}$ que cubre a Y, de donde Y es compacto. $\square$

El lema anterior nos permite trabajar con subespacios compactos sin necesidad de usar abiertos relativos, lo que ahorra bastante trabajo. Por otra parte, en el estudio de compactos, es bien sabido que bajo ciertas condiciones, existe una relación entre los conjuntos cerrados y los compactos. La demostración del siguiente resultado se encuentra en [30, Teorema 17.5].

Proposición 1.18. *Sean (X, τ) un espacio topológico y Y un subconjunto de X. Entonces se cumple:*

1) *si Y es cerrado en X y X es compacto, entonces Y es compacto;*

2) *si Y es compacto y X es T_2, entonces Y es cerrado.*

Hasta ahora solo hemos visto resultados que nos dicen cuando un espacio o subespacio es compacto. El siguiente teorema, cuya demostración puede verse en [30, Teorema 17.7], indica que la compacidad se preserva bajo las funciones continuas.

Teorema 1.19. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua. Si X es compacto entonces $f(X)$ es compacto.*

Si suponemos además que f es suprayectiva, el Teorema 1.19 indica que Y es un espacio compacto. Por tanto, la compacidad es una propiedad topológica.

Haciendo uso del Lema de Zorn, mostraremos un resultado no trivial en Topología General, que nos indica que todos los espacios que no son compactos, poseen unas cubiertas bastante especiales.

Teorema 1.20. *Sea X un espacio topológico. Si X no es compacto, entonces existe una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1) *$\mathcal{M}$ es una cubierta abierta de X que no posee una subcubierta finita.*

2) Si $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos en X tal que $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X que posee una subcubierta finita.

3) Si $M \in \mathcal{M}$ y $U_1, U_2 \ldots, U_n$ son subconjuntos abiertos en X tales que $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \subseteq M$, entonces $U_i \in \mathcal{M}$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demostración. Como X no es compacto, existe una cubierta abierta $\mathcal{C}$ de X que no posee subcubiertas finitas. Consideremos la familia $\mathfrak{C}$ de todas las cubiertas abiertas de X que no poseen subcubiertas finitas. Claramente $\mathfrak{C} \neq \emptyset$, pues $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$. Ordenemos a $\mathfrak{C}$ por la relación de inclusión $\subseteq$. Supongamos que $\mathfrak{D}$ es una cadena en $\mathfrak{C}$, (i.e., $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}$ y cualesquiera dos elementos en $\mathfrak{D}$ son comparables bajo la relación de inclusión $\subseteq$). Si $\mathfrak{D}$ es el vacío, es claro que cualquier elemento de $\mathfrak{C}$ sirve como cota superior para $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{C}$, en particular $\mathcal{C}$ es dicha cota. De tal modo, supongamos que $\mathfrak{D} \neq \emptyset$ y sea

$$\mathcal{W} = \bigcup_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \mathcal{D} = \{V \mid V \in \mathcal{D}, \text{ para alguna } \mathcal{D} \in \mathfrak{D}\}.$$

Observemos que si $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ y $V \in \mathcal{D}$, entonces V es un abierto en X, pues $\mathcal{D}$ es una cubierta abierta de X. Así se tiene que cada elemento de $\mathcal{W}$ es un abierto en X. Como también $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{W}$, para $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, resulta que $\mathcal{W}$ es una cubierta abierta de X. Notemos que $\mathcal{W}$ no posee subcubiertas finitas, pues si tuviera una subcubierta finita $\{V_1, \ldots, V_n\}$, como $V_i \in \mathcal{W}$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\mathcal{D}_i \in \mathfrak{D}$ tal que $V_i \in \mathcal{D}_i$. Pero la familia $\mathfrak{D}$ es una cadena, por tanto existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{D}_j$, de donde concluimos que $\{V_1, \ldots, V_n\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{D}_j$ para X, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{D}_j$ sea un elemento de $\mathfrak{C}$. Por tanto $\mathcal{W}$ no posee subcubiertas finitas.

Como $\mathcal{W}$ es una cubierta abierta de X y no posee subcubiertas finitas, $\mathcal{W} \in \mathfrak{C}$. Pero también sucede que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{W}$ para cada $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$. Entonces $\mathcal{W}$ es una cota superior para $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{C}$. Hemos probado así que cualquier cadena $\mathfrak{D}$ en $\mathfrak{C}$ posee una cota superior en $\mathfrak{C}$. Usando el Lema de Zorn, deducimos que $\mathfrak{C}$ posee un elemento maximal $\mathcal{M}$. Ya que $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$, $\mathcal{M}$ satisface *1)*. Como la relación en $\mathfrak{D}$ es la contención, si $\mathcal{U}$ es una familia de abiertos de X tal que $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X tal que $\mathcal{V} \notin \mathfrak{C}$. Por tanto, $\mathcal{U}$ posee una subcubierta finita. Esto muestra que $\mathcal{M}$ satisface *2)*.

Para probar que $\mathcal{M}$ cumple *3)*, supongamos que M y $U_1, U_2 \ldots, U_n$ son como se indica en *3)*. Supongamos además que $U_i \notin \mathcal{M}$ para ninguna i. Definimos $\mathcal{M}_i = \mathcal{M} \cup \{U_i\}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{M}_i$ para $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Además como $\mathcal{M}$ es una cubierta abierta para X, resulta que $\mathcal{M}_i$ también lo es. Aplicando *2)* a cada familia $\mathcal{M}_i$, deducimos que cada cubierta $\mathcal{M}_i$ de X posee una subcubierta finita. De donde, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, existen $n_i \in \mathbb{N}$ y $M_{i_1}, M_{i_2}, \dots, M_{i_{n_i}} \in \mathcal{M}$ tales que:

$$X = M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \cdots \cup M_{i_{n_i}} \cup U_i. \tag{α}$$

Tomemos ahora un punto x en X. Si x está en cada U_i, entonces x está en la intersección, de donde por hipótesis, $x \in M$. Si existe algún U_i tal que $x \notin U_i$, entonces, utilizando (α) para dicho índice i, existe $j \in \{1, 2, \dots, n_i\}$ tal que $x \in M_{i_j}$. Con lo cual hemos probado que

$$X \subseteq (U_1 \cap \cdots \cap U_n) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n_i} M_{i_j} \right) \subseteq M \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n_i} M_{i_j} \right).$$

Por tanto $\mathcal{M}$ tiene como una subcubierta finita a la unión de M con los M_{i_j}, contradiciendo que $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$. La contradicción vino de suponer que $U_i \notin \mathcal{M}$ para ninguna i. Luego existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $U_i \in \mathcal{M}$ y así hemos probado *3)*. $\square$

Como consecuencia del resultado anterior podemos determinar cuando un espacio es compacto, fijándonos solo en elementos de una de sus subbases.

Teorema 1.21 (**Lema de la Subbase de Alexander**). *Sean X un espacio topológico y $\mathcal{S}$ una subbase para X. Entonces X es compacto si y sólo si cualquier cubierta de X, formada por elementos de $\mathcal{S}$, posee una subcubierta finita.*

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $\mathfrak{C}$ una cubierta de X por elementos de $\mathcal{S}$. Como los subbásicos son abiertos en X, $\mathfrak{C}$ es una cubierta abierta del compacto X, de donde $\mathfrak{C}$ posee una subcubierta finita.

$\Leftarrow$] Supongamos que X no es compacto. Entonces, por el Teorema 1.20, existe una familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de X, con las propiedades *1), 2)* y *3)* de dicho teorema. Vamos a probar ahora que la intersección $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ es una cubierta abierta de X. Que los elementos de $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ son abiertos de X es evidente, pues tanto los elementos de $\mathcal{S}$ como los de $\mathcal{M}$ son abiertos en X. Como $\mathcal{M}$ es una cubierta abierta de X, dado un punto $x \in X$, existe $U \in \mathcal{M}$ tal que $x \in U$. Ya que $\mathcal{S}$ es una subbase para X, existen $S_1, S_2, \dots, S_n \in \mathcal{S}$ tales que $x \in S_1 \cap \cdots \cap S_n \subseteq U$. Por *3)* del Teorema 1.20, existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $S_i \in \mathcal{M}$. Entonces S_i es un elemento de $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ tal que $x \in S_i$, de donde $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ es una cubierta abierta de X. Pero $\mathcal{S} \cap \mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$, entonces por hipótesis, $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ tiene una subcubierta finita $\mathcal{F}$. Como los elementos de $\mathcal{F}$ están en $\mathcal{M}$, entonces $\mathcal{F}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{M}$. Esto contradice la propiedad *1)* del Teorema 1.20. Como la contradicción viene de suponer que X no es compacto, deducimos que X es compacto. $\square$

La condición de compacidad se porta de buena manera, en el sentido que la comparten espacios "cercanos" a un espacio compacto

Teorema 1.22. *Sea X un espacio topológico. Supongamos que $W, K \subseteq X$ son tales que K es compacto y, para cada $y \in W$, tenemos que $\overline{\{y\}} \cap K \neq \emptyset$. Entonces $W \cup K$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una familia de abiertos en X que cubre a $W \cup K$. Entonces $\mathcal{C}$ es una familia de abiertos en X cuya unión contiene al compacto K. Luego existen $n \in \mathbb{N}$ y $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ tales que $K \subseteq C_1 \cup \cdots \cup C_n$.

Dada $y \in W$, tenemos que $\overline{\{y\}} \cap K \neq \emptyset$, por lo que $\overline{\{y\}} \cap C_j \neq \emptyset$ para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$. Como C_j es abierto en X, el Corolario 1.12 nos dice que $y \in C_j$. Esto implica que $W \subseteq C_1 \cup \cdots \cup C_n$. Por tanto $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ es una colección finita de elementos de $\mathcal{C}$ que cubre a $W \cup K$, probando así que $W \cup K$ es compacto. $\square$

1.3.3. Espacios Localmente Compactos

En ocasiones no es posible encontrar espacios compactos que nos ayuden a resolver un problema en cuestión. En tal caso, se buscarán espacios que aunque no cumplan con la maravilla de ser compactos, satisfagan una versión "local" de compacidad. Los espacios con dicha propiedad son los que se describen en la siguiente definición.

Definición 1.23. Un espacio topológico X es *localmente compacto* si para cada $x \in X$ y todo abierto V de X con $x \in V$, existe una vecindad compacta G de x tal que $G \subseteq V$.

Notemos que una *vecindad compacta* de un punto $x \in X$ es una vecindad de x que, además, es un subconjunto compacto de X. La anterior definición nos proporciona varias vecindades compactas de cada punto en un espacio localmente compacto. Sin embargo, para algunos espacios, podemos decir que cumple con la definición tan pronto encontremos una vecindad compacta para sus puntos.

Proposición 1.24. *Sea X un espacio T_2. Entonces X es localmente compacto si y sólo si cada punto de X posee una vecindad compacta.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio T_2. Si X es localmente compacto y $x \in X$ entonces, como X es un abierto de X que tiene al punto x, existe una vecindad compacta G de x tal que $x \in G \subseteq X$. Esto prueba que en cualquier espacio localmente compacto X, cada punto de X posee una vecindad compacta.

Ahora supongamos que cada punto de X posee una vecindad compacta. Sean $x \in X$ y U un abierto en X tales que $x \in U$. Por hipótesis existe una vecindad compacta K de x. Como X es T_2 y K es un subconjunto compacto de X, por la parte *2)* de la Proposición 1.18, K es cerrado en X. Sea $V = (K \cap U)^\circ$. Notemos que V es abierto en X. Como U y K son vecindades de x, la intersección $K \cap U$ también es una vecindad de x. Por tanto V es una vecindad abierta de x. Notemos que $V \subseteq K^\circ \subseteq K$ por lo que la cerradura de V en X, denotada por $Cl_X(V)$, es un subconjunto cerrado en el conjunto compacto K. Luego, por la parte *1)* de la Proposición 1.18, $Cl_X(V)$ es compacto. En vista de que los subespacios de espacios T_2 son T_2, el conjunto $Cl_X(V)$ es compacto y T_2. Por tanto $Cl_X(V)$ es T_3 (ver [30, Teorema 17.10]). Usando que V es una vecindad de x en $Cl_X(V)$, existe un abierto W de $Cl_X(V)$ tal que $x \in W \subseteq Cl_{Cl_X(V)}(W) \subseteq V$. Es claro que $Cl_{Cl_X(V)}(W)$, al ser cerrado dentro del compacto $Cl_X(V)$, es también un compacto. Además, por ser W un abierto en $Cl_X(V)$, existe un abierto W_0 de X tal que $W = W_0 \cap Cl_X(V)$. Afirmamos que

$$W_0 \cap Cl_X(V) = W_0 \cap V.$$

Es claro que $W_0 \cap V \subseteq W_0 \cap Cl_X(V)$. Por otra parte $W_0 \cap Cl_X(V) \subseteq W_0$ y $W_0 \cap Cl_X(V) = W \subseteq V$, por lo que $W_0 \cap Cl_X(V) \subseteq W_0 \cap V$. Esto prueba que $W = W_0 \cap Cl_X(V) = W_0 \cap V$. Como consecuencia de esto, W es abierto en X. Luego $Cl_{Cl_X(V)}(W)$ es una vecindad compacta de x contenida en U. Lo anterior muestra que X es localmente compacto. □

Corolario 1.25. *Los espacios compactos y T_2 son localmente compactos.*

Es evidente que es mucho más fácil lidiar con espacios compactos. De ahí que si el espacio donde trabajamos no es compacto, busquemos una forma de hacerlo comportarse como si lo fuera y, al mismo tiempo, no perder muchas de sus propiedades topológicas en el proceso. Afortunadamente existen formas de ver cumplido tal objetivo. Una de ellas es conocida como la compactación de un espacio; en el caso de que nuestro espacio sea T_2 y localmente compacto, existe una forma de hacerlo compacto agregándole únicamente un punto. Este resultado es conocido como el Teorema de la Compactación de Alexandroff ([8, Teorema 8.4, p. 246]).

Definición 1.26. Sean X y Y dos espacios topológicos. Decimos que Y es una *compactación* de X, si Y es compacto y Y posee un subespacio denso que es homeomorfo a X. Cuando X es localmente compacto y T_2, a la compactación que resulta del Teorema de la Compactación de Alexandroff, se le llama la *compactación por un punto* de X.

Para un espacio X no compacto, T_2 y localmente compacto, su compactación por un punto es la que hace de X un espacio compacto cuando se le agrega un punto. Vamos a denotar dicha compactación como ωX o bien como $X \cup \{\infty\}$, siendo ω o ∞ el punto que se agrega a X para hacerlo compacto.

Existen relaciones conocidas entre un espacio X localmente compacto y T_2 y su compactación ωX. Una de ellas dice que el espacio ωX también es T_2 (y, como ωX es compacto, tenemos que ωX es compacto y T_2, luego también es T_4). Otro resultado dice que si X es localmente compacto y T_2, entonces X es segundo numerable si y sólo si su compactación ωX es metrizable ([8, Teorema 8.6, p. 247]).

En lo que resta de la subsección, el interés será fijado en sólo una propiedad de las funciones entre espacios localmente compactos y sus compactaciones. Para formularlo, requerimos de la siguiente definición.

Definición 1.27. Sean X y Y dos espacios topológicos y $f\colon X \to Y$ una función. Entonces

a) f es *cerrada* si para todo cerrado F en X, su imagen directa $f(F)$ es un cerrado en Y.

b) f es *propia* si f es continua y para todo compacto $K \subseteq Y$, se cumple que $f^{-1}(K)$ es un subespacio compacto de X.

La definición en la parte b) es poco utilizada en la forma que la tenemos. Es mucho más conocida la noción de *función perfecta*, que es como se define a una función continua y cerrada de X en Y con fibras $f^{-1}(y)$ compactas, para cada $y \in Y$. En el Corolario 1.31, mostraremos una situación en la que las funciones propias resultan ser perfectas.

Proposición 1.28. *Si $f\colon X \to Y$ es continua donde X compacto y Y es T_2, entonces f es cerrada.*

Demostración. Para probar el enunciado, tomemos un cerrado A en el compacto X. La Proposición 1.18 nos dice que A es compacto. Luego $f(A)$ es un subespacio compacto de Y que es un espacio T_2. Por tanto, aplicando de nuevo la Proposición 1.18, $f(A)$ es cerrado en Y. $\square$

Teorema 1.29. *Sean X y Y dos espacios topológicos localmente compactos y T_2. Consideremos que $X \cup \{\omega\}$ y $Y \cup \{\xi\}$ representan las respectivas compactaciones por un punto de X y de Y. Supongamos que $f\colon X \to Y$ es una función propia. Definimos la función $f^*\colon X \cup \{\omega\} \to Y \cup \{\xi\}$ como sigue: $f^*(x) = f(x)$ si $x \in X$ y $f^*(\omega) = \xi$. Entonces f^* es continua.*

Demostración. Sabemos que f^* es continua en x si para toda vecindad V de $f^*(x)$ en $Y \cup \{\xi\}$ se tiene que $(f^*)^{-1}(V)$ es vecindad de x en $X \cup \{\omega\}$. Claramente f^* siempre es continua en cada punto x de X. Ahora veamos que f^* es continua en ω. Sea V una vecindad abierta de ξ en $Y \cup \{\xi\}$. Por tanto $(Y \cup \{\xi\}) \setminus V$ es un cerrado dentro del compacto $Y \cup \{\xi\}$. Luego $(Y \cup \{\xi\}) \setminus V$ es compacto. Como f es propia y podemos pensar que $(Y \cup \{\xi\}) \setminus V$ es un subconjunto compacto de Y, sucede que $f^{-1}((Y \cup \{\xi\}) \setminus V)$ es un subconjunto compacto de X. Como f y f^* coinciden cuando no intervienen los puntos especiales ω y ξ, resulta que $(f^*)^{-1}((Y \cup \{\xi\}) \setminus V)$ es un subconjunto compacto de $X \cup \{\omega\}$, el cual es T_2. Por tanto

$$(f^*)^{-1}((Y \cup \{\xi\}) \setminus V) = (X \cup \{\omega\}) \setminus (f^*)^{-1}(V)$$

es cerrado en $X \cup \{\omega\}$. Luego $(f^*)^{-1}(V)$ es abierto en $X \cup \{\omega\}$. Esto prueba que f^* es continua en ω. □

Dada una función propia $f\colon X \to Y$, si agregamos condiciones a los espacios X y/o Y, es posible obtener propiedades adicionales para dicha función. Tales propiedades son bastante simples pero serán utilizadas en demostraciones posteriores, de ahí el interés en mencionarlas.

Proposición 1.30. *Sean X y Y dos espacios localmente compactos y T_2. Si $f\colon X \to Y$ es una función propia, entonces f es cerrada y $f(X)$ es localmente compacto.*

Demostración. Tal como en el Teorema 1.29, tomaremos las compactaciones por un punto $X \cup \{\omega\}$ y $Y \cup \{\xi\}$ de X y de Y, respectivamente, además de la función $f^*\colon X \cup \{\omega\} \to Y \cup \{\xi\}$ definida en dicho teorema. Como X y Y son T_2 y localmente compactos, sus compactaciones $X \cup \{\omega\}$ y $Y \cup \{\xi\}$ también son T_2. Como f es propia, por el Teorema 1.29, f^* es continua.

Para mostrar que f es una función cerrada, supongamos que $A \subseteq X$ es cerrado. Entonces $A \cup \{\omega\}$ es cerrado en el conjunto compacto $X \cup \{\omega\}$. Luego $A \cup \{\omega\}$ es compacto, por lo que

$$f^*(A \cup \{\omega\}) = f(A) \cup \{\xi\}$$

es compacto en $Y \cup \{\xi\}$, pues f^* es continua. Como $Y \cup \{\xi\}$ es T_2, resulta que $f(A) \cup \{\xi\}$ es cerrado en $Y \cup \{\xi\}$. Entonces el complemento de $f(A)$ en Y es abierto, por lo que $f(A)$ es cerrado en Y, completando la prueba de que f es cerrada. En particular $f(X)$ es un cerrado en Y, que es localmente compacto. Como los subconjuntos cerrados de espacios localmente compactos son localmente compactos ([8, Teorema 6.5, p. 239]), $f(X)$ es localmente compacto. □

Corolario 1.31. *Sean X y Y dos espacios topológicos localmente compactos y T_2. Si $f: X \to Y$ es una función propia, entonces f es cerrada y, para cada $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(y)$ es compacto.*

Demostración. El resultado anterior dice que f es cerrada. Por hipótesis f es propia y es evidente que cada unitario $\{y\}$ es compacto. Luego $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$ es compacto. □

Proposición 1.32. *Sea $f: X \to Y$ una función continua con Y un espacio T_2 y X compacto. Entonces f es propia.*

Demostración. Sea K un subconjunto compacto del espacio Y, que es T_2. La Proposición 1.18 nos dice que K es cerrado en Y. Entonces $Y \setminus K$ es abierto en Y. Utilizando la continuidad de f y el buen comportamiento de f^{-1}, es claro que $f^{-1}(Y \setminus K) = X \setminus f^{-1}(K)$ es abierto en X, de donde $f^{-1}(K)$ es cerrado en el espacio X, que es compacto. Por la Proposición 1.18, $f^{-1}(K)$ es compacto. Por tanto f es propia. □

Corolario 1.33. *Sean X y Y dos espacios localmente compactos y T_2. Consideremos que $X \cup \{\omega\}$ y $Y \cup \{\xi\}$ representan las respectivas compactaciones por un punto de X y de Y. Entonces toda función continua $g: X \cup \{\omega\} \to Y \cup \{\xi\}$ es cerrada y propia.*

Demostración. Sabemos que $X \cup \{\omega\}$ es compacto, $Y \cup \{\xi\}$ es T_2 y g es continua. Por la Proposición 1.32, g es propia. Usando que g es una función propia entre espacios localmente compactos y T_2 (pues los espacios compactos y T_2 son localmente compactos), el Corolario 1.31 garantiza que g es cerrada. □

1.3.4. Metrizabilidad

Entre los espacios topológicos más fáciles de estudiar, se encuentran aquellos cuya topología es inducida por la noción de lo comúnmente conocido como distancia. Tales espacios son llamados *metrizables.* Y los espacios que admiten una distancia se llaman *métricos*. De cursos básicos de topología son conocidas varias propiedades relacionadas con dichos espacios, por ejemplo, que cualquier espacio metrizable es T_2, que la metrizabilidad es un invariante topológico o que cualquier espacio metrizable es primero numerable, de modo que daremos por conocidas varias cuestiones relacionadas a la metrizabilidad. El lector interesado puede ver las demostraciones de las afirmaciones anteriores en el Capítulo IX de [8].

En la presente subsección mencionaremos tres resultados que involucran la metrizabilidad de un espacio topológico. El siguiente teorema se encuentra probado en [30, Teorema 16.11].

Teorema 1.34. *Para un espacio metrizable X, los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) X es segundo numerable.

b) X es de Lindelöf.

c) X es separable.

En el mismo texto encontramos la demostración del Teorema de Metrización de Urysohn ([30, Teorema 23.1]), el cual corresponde al siguiente enunciado. Recordemos que un espacio topológico X es *regular* si para cada $x \in X$ y toda vecindad abierta V de x en X, existe una vecindad cerrada G de x tal que $G \subseteq V$.

Teorema 1.35. *Para un espacio X que es T_1, los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) X es regular y segundo numerable.

b) X es separable y metrizable.

c) X puede ser encajado en el cubo de Hilbert, es decir, en el producto cartesiano $\prod_{i=1}^{\infty} I_i$ con la topología producto, donde $I_i = [0,1]$ con la topología usual, para cada $i \in \mathbb{N}$.

Como resultado final de la sección para un espacio metrizable, damos una equivalencia para la compacidad del espacio en términos de sucesiones. Su demostración puede verse en [21, Teorema 28.2].

Proposición 1.36. *Para un espacio metrizable X, los siguientes enunciados son equivalentes:*

a) X es compacto.

b) Cada sucesión de elementos de X, posee una subsucesión convergente.

1.4. Nociones de Sistemas Dinámicos

Un *sistema dinámico* consta de un espacio topológico X y una función continua f, donde f se aplica sobre el espacio X y su imagen está contenida en X (i.e. $f\colon X \to X$). Un sistema dinámico será representado como una pareja (X, f). Durante el resto de la presente sección, a menos que se diga otra cosa, todas las funciones de las que se hagan mención, serán continuas.

Dada una función $f\colon X \to X$, una vez aplicada la función se puede aplicar una y otra vez, y así considerar las iteraciones f^n. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces la *n-ésima iteración* de f es la composición de esa función consigo misma n veces. Así

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}}.$$

Consideramos a f^0 como la función identidad en X, definida como $f^0(x) = x$ para cada $x \in X$. Notemos que $f^1 = f$. La composición de una función g con una función f se denotará indistintamente como $f \circ g$ o bien fg.

En la presente sección daremos un breve repaso de algunas nociones y resultados propios de los Sistemas Dinámicos. Esto nos permitirá tener las herramientas necesarias para clarificar los resultados de los siguientes capítulos.

Definición 1.37. Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos. Si existe un homeomorfismo $h\colon X \to Y$ que satisface la relación de conjugación $h \circ f = g \circ h$, entonces se dice que (X, f) y (Y, g) son sistemas *topológicamente conjugados* bajo h.

En el caso de que (X, f) y (Y, g) estén conjugados topológicamente bajo h, para abreviar diremos que (X, f) y (Y, g) están conjugados bajo h. Si no existe posibilidad de confusión respecto a la función de conjugación, se dirá simplemente que (X, f) y (Y, h) están conjugados.

Definición 1.38. Una propiedad P es una *propiedad dinámica* si se preserva bajo conjugación. Es decir, si cuando un sistema dinámico (X, f) posee la propiedad P, resulta que cualquier otro sistema dinámico (Y, g) conjugado con (X, f) también tiene la propiedad P.

Recordemos que si $f\colon X \to X$ es una función continua, entonces un punto p de X se llama un *punto fijo* de f si $f(p) = p$. La propiedad de “tener un punto fijo” es dinámica. Para ver esto supongamos que el sistema dinámico (X, f) es tal que f posee un punto fijo p. Supongamos que el sistema dinámico (Y, g) es conjugado con (X, f) bajo $h\colon X \to Y$. Entonces $h(p) = h(f(p)) = g(h(p))$, por lo que $h(p)$ es un punto fijo de g. Esto implica que el sistema dinámico (Y, g) es tal que g posee un punto fijo.

Más adelante, en la presente sección, daremos otros ejemplos de propiedades dinámicas. De momento consideramos el siguiente resultado, que involucra la conjugación.

Proposición 1.39. *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos que están conjugados bajo h. Entonces, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, se cumple $h \circ f^n = g^n \circ h$.*

Demostración. Por inducción sobre n. Para $n = 1$, $h \circ f = g \circ h$ es la definición de sistemas conjugados. Supongamos que se cumple $h \circ f^n = g^n \circ h$. Mostraremos que $h \circ f^{n+1} = g^{n+1} \circ h$. Usando la asociatividad de la composición de funciones, así como la hipótesis de inducción, tenemos que

$$h \circ f^{n+1} = (h \circ f^n) \circ f = (g^n \circ h) \circ f = g^n \circ (h \circ f) = g^n \circ (g \circ h) = g^{n+1} \circ h.$$

Entonces el resultado se cumple para toda $n \in \mathbb{N}$. □

Ahora vamos a definir tres de las propiedades dinámicas más interesantes en la Teoría de Sistemas Dinámicos.

Definición 1.40. Sea (X, f) un sistema dinámico.

a) f es *topológicamente transitiva* (o simplemente *transitiva*) si se cumple que para cualesquiera dos abiertos y no vacíos U y V de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

b) f es *débilmente mezclante* si para cualesquiera dos parejas (U_1, U_2) y (V_1, V_2) de abiertos no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \neq f^n(U_2) \cap V_2$.

c) f es *mezclante* si para cualesquiera dos abiertos y no vacíos U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$.

Con las definiciones anteriores, si tomamos una función $f\colon X \to X$, y queremos que existan puntos en abiertos distintos tales que en algún momento, es decir luego de cierta iteración de f, se encuentren relacionados de alguna manera (donde esa manera sea, por ejemplo, la de encontrarse dentro del mismo abierto), se arregla pidiendo que una función sea transitiva. Tal definición, aunque interesante en la Teoría de Sistemas Dinámicos, tiene como limitante que funciona únicamente para una pareja dada de abiertos y nada asegura que, para dos parejas de abiertos, sea posible encontrar una iteración común de la función tal que podamos relacionar puntos en dichos abiertos de la manera antes mencionada.

Afortunadamente, si f es una función débilmente mezclante, entonces es posible encontrar una iteración de la función tal que puntos de parejas de abiertos se encuentren relacionados. Una vez más, un problema aparece, pues existe la posibilidad de asomarse al comportamiento de la función en uno de los momentos en que podría suceder que las parejas de abiertos no estén relacionados de la manera descrita con los puntos en su interior. Tal problema, como es de esperarse, lo arregla la noción de función mezclante, ya que ésta dice que una vez encontrada una iteración de la función que cumpla lo que queremos, entonces los abiertos estarán relacionados para alguno de sus puntos y cualquier iteración siguiente de la función.

Comentaremos ahora un resultado popular sobre las implicaciones entre las nociones anteriores

Proposición 1.41. *Sea $f\colon X \to X$ una función continua.*

a) Si f es mezclante, entonces f es débilmente mezclante.

b) Si f es débilmente mezclante, entonces f es transitiva.

Demostración. Supongamos que f es mezclante. Tomemos dos parejas (U_1, U_2) y (V_1, V_2) de abiertos no vacíos de X. Como U_1 y V_1 son abiertos no vacíos de X y f es mezclante, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ para cualquier $N \geq m_1$. De manera análoga tomamos $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ para cualquier $N \geq m_2$. Tal y como se espera, haciendo $n = \text{máx}\{m_1, m_2\}$ tenemos que f es débilmente mezclante. Esto prueba *a)*.

Ahora supongamos que f es débilmente mezclante. Dada una pareja (U, V) de abiertos no vacíos de X, construimos las parejas (U, V) y (V, U). Usando la debilidad mezclante de f, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Luego f es transitiva. Esto prueba *b)*. $\square$

También es conocido que ninguna de las implicaciones de regreso, enunciadas en la proposición anterior, es cierta en general. Por ejemplo, una rotación de ángulo irracional con respecto a 2π de la circunferencia unitaria S^1 en S^1, es un ejemplo de función transitiva que no es débilmente mezclante. Un ejemplo de una función débilmente mezclante que no es mezclante es un poco más complicado, pero el lector interesado puede hallarlo en [16, Teorema 1.3, p. 308].

Las funciones transitivas poseen la propiedad enunciada en el siguiente resultado.

Proposición 1.42. *Si $f\colon X \to X$ es una función transitiva y U es un abierto no vacío de X, entonces $f^{-i}(U) \neq \emptyset$, para cada $i \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea U un abierto no vacío de X. Como X y U son abiertos no vacíos de X y f es transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(X) \cap U \neq \emptyset$. Entonces existe $x \in X$ tal que $f^n(x) \in U$. Notemos que $f^{n-1}(x)$ es un elemento de X tal que $f(f^{n-1}(x)) = f^n(x) \in U$, por lo que $f^{n-1}(x) \in f^{-1}(U)$. Esto prueba que $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Con esto hemos demostrado que la imagen inversa de cada abierto no vacío de X es, de nueva cuenta, un abierto no vacío de X. Consecuentemente, para cada $i \in \mathbb{N}$, el conjunto $f^{-i}(U)$ es un abierto no vacío de X. □

La condición de ser débilmente mezclante involucra parejas de abiertos no vacíos. El siguiente resultado muestra que la idea puede extenderse a colecciones finitas de abiertos.

Teorema 1.43 (Teorema De Furstenberg). *Sea (X, f) un sistema dinámico. Entonces f es débilmente mezclante si y sólo si para cualesquiera dos colecciones $(U_1, \ldots, U_k)$ y $(V_1, \ldots, V_k)$ de abiertos no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.*

Demostración. Por inducción sobre k. La base $k = 2$ es la definición de función débilmente mezclante. Como hipótesis de inducción, supondremos que cada vez que tengamos dos colecciones $(U_1, U_2, \ldots, U_s)$ y $(V_1, V_2, \ldots, V_s)$, de s abiertos no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Mostraremos que se cumple lo deseado para $s + 1$. Tomemos entonces dos colecciones $(U_1, \ldots, U_s, U_{s+1})$ y $(V_1, \ldots, V_s, V_{s+1})$ de $s + 1$ abiertos no vacíos de X. Usando las parejas de abiertos (U_s, V_s) y (U_{s+1}, V_{s+1}) y que f es débilmente mezclante, obtenemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_s) \cap U_{s+1} \neq \emptyset$ y $f^n(V_s) \cap V_{s+1} \neq \emptyset$.

Dado que la imagen inversa de abiertos bajo una función continua es un abierto, se tiene que $U = U_s \cap f^{-n}(U_{s+1})$ y $V = V_s \cap f^{-n}(V_{s+1})$ son abiertos no vacíos de X. Entonces $(U_1, \ldots, U_{s-1}, U)$ y $(V_1, \ldots, V_{s-1}, V)$ son dos colecciones de s abiertos y no vacíos de X. Por la hipótesis de inducción, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq s - 1$ y $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Ahora tomamos $x \in U = U_s \cap f^{-n}(U_{s+1})$ tal que $f^m(x) \in V = V_s \cap f^{-n}(V_{s+1})$. Claramente $f^n(x) \in U_{s+1}$ y $f^n(f^m(x)) \in V_{s+1}$, pero $f^n(f^m(x)) = f^m(f^n(x))$, concluyendo que $f^m(U_{s+1}) \cap V_{s+1} \neq \emptyset$. Así, el resultado es válido para $s+1$ y la inducción se cumple. $\square$

A pesar de que en los siguientes capítulos trabajaremos con espacios no tan restrictivos como los intervalos, es importante mencionar que, para funciones sobre intervalos, las nociones de mezclado y mezclado débil coinciden, contrario a lo que sucede en general como hemos visto en anteriores ejemplos. No sólo eso, también el concepto de mezclado y transitividad son muy cercanos: si f es transitiva y no mezclante sobre un intervalo I, entonces el intervalo puede ser dividido en dos subintervalos tales que en cada uno de ellos f^2 sea mezclante.

Tales afirmaciones forman parte del Teorema 1.46 y no serán mostradas en el presente texto, pero es de esperar que el lector pueda interesarse por ellas y decida consultar lo afirmado. Antes de enunciar dicho teorema, es necesario definir qué es una función totalmente transitiva

Definición 1.44. Sea X un espacio topológico y $f\colon X \to X$ una función continua. Se dice que f es *totalmente transitiva* si $f^n\colon X \to X$ es transitiva para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es evidente que si f es totalmente transitiva, para $n = 1$ se tiene que f es transitiva. De donde transitividad total implica transitividad. Como seguramente ya se intuye, existe un ejemplo donde la implicación inversa no se cumple: sean $f\colon X \to X$ una función continua y $x_1 \in X$ tal que $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ esté formado por las iteraciones de x_1 bajo f de la siguiente forma: $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$ y $f(x_3) = x_1$. Tenemos que (A, f) es un sistema dinámico donde f es transitiva, pero f no es totalmente transitiva, pues f^3 es la identidad.

Usando el Teorema de Furstenberg mostraremos que existe una relación entre las definiciones anteriores y la de transitividad total

Proposición 1.45. *Sea X un espacio topológico y $f\colon X \to X$ una función continua. Si f es débilmente mezclante, entonces f es totalmente transitiva.*

Demostración. Sean (U, V) y (U', V') dos parejas de abiertos no vacíos de X y $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$W = (U', f^{-1}(U'), \ldots, f^{-(n-1)}(U'), V', f^{-1}(V'), \ldots, f^{-(n-1)}(V'))$$

y

$$W' = (\underbrace{U, \ldots, U}_{n \text{ veces}}, \underbrace{V, \ldots, V}_{n \text{ veces}}).$$

Como U' y V' son abiertos no vacíos, por la Proposición 1.42, $f^{-i}(U')$ y $f^{-i}(V')$ son abiertos no vacíos para toda $i \in \mathbb{N}$. Luego W y W' son colecciones de abiertos no vacíos de X con la misma cantidad de elementos, a saber $2n$.

Usando el Teorema 1.43 sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^k(U) \cap U' \neq \emptyset \neq f^k(V) \cap V'$$
$$\text{y } f^k(U) \cap f^{-i}(U') \neq \emptyset \neq f^k(V) \cap f^{-i}(V') \text{ para } 1 \leq i \leq n-1.$$

De esta manera, para $1 \leq i \leq n-1$, tenemos que

$$U \cap f^{-k}(U') \neq \emptyset \neq U \cap f^{-k}(f^{-i}(U')) \ \text{ y } \ V \cap f^{-k}(V') \neq \emptyset \neq V \cap f^{-k}(f^{-i}(V')).$$

Es decir

$$U \cap f^{-k}(U') \neq \emptyset \neq U \cap f^{-(k+i)}(U')) \ \text{ y } \ V \cap f^{-k}(V') \neq \emptyset \neq V \cap f^{-(k+i)}(V').$$

Como $1 \leq i \leq n-1$, debe existir un $0 \leq j \leq n-1$ tal que $k+j$ es múltiplo de n. Tomemos ese j y escribamos $k+j = np$ para algún $p \in \mathbb{N}$. Se sigue que

$$U \cap f^{-np}(U') \neq \emptyset \ \text{ y } \ V \cap f^{-np}(V') \neq \emptyset.$$

Finalmente, eso nos dice que $f^{np}(U) \cap U' \neq \emptyset \neq f^{np}(V) \cap V'$. De donde f^n es una función transitiva. Como n era arbitrario, concluimos que f es totalmente transitiva. □

Al conocer la Proposición 1.45, el lector puede preguntarse si la implicación inversa es cierta o si, como se acostumbra, existe una función totalmente transitiva que no sea débilmente mezclante. De manera casi milagrosa, el ejemplo de la rotación irracional que vimos al terminar la Proposición 1.41, funciona perfecto para mostrar que transitividad total no implica mezclado débil [1, Proposición 3.3, p. 596].

Para terminar la sección, enunciaremos el resultado prometido. La demostración puede encontrarse en [23, p. 12–20].

Teorema 1.46. *Sea $f : [a,b] \to [a,b]$ una función transitiva. Entonces se cumple uno y sólo uno de los siguientes casos:*

- *f es mezclante.*
- *Existe $c \in (a,b)$ tal que, si $J=[a,c]$ y $K=[c,b]$, entonces $f(J)=K$ y $f(K)=J$; además, c es el único punto fijo de f y tanto $f^2|_J$ como $f^2|_K$ son mezclantes.*

De tal modo, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *f^2 es transitiva.*
2. *f es totalmente transitiva.*
3. *f es débilmente mezclante.*
4. *f es mezclante.*
5. *Para toda $\epsilon > 0$ y cualquier subintervalo no degenerado J, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq N$, se cumple $f^n(J) \supseteq [a+\epsilon, b-\epsilon]$.*

Capítulo 2

Topología de Fell

2.1. Introducción

En la Sección 1.4 dimos una introducción al estudio de los Sistemas Dinámicos. A pesar de que normalmente este tipo de estudio se ocupa únicamente de puntos en un espacio, cobra un gran interés conocer como se relaciona dicha forma de tomar iteraciones de una función aplicado a un punto de X, con lo que sucede a subconjuntos de X al tomar sus sucesivas imágenes bajo la función f. Es de conocimiento general que una forma de realizar dicho estudio es tomar alguna colección de subconjuntos de un espacio X, darle alguna topología interesante y aplicar una función que llamaremos "inducida" por f, de la misma forma que lo haríamos en el caso del sistema dinámico (X, f).

Dado un espacio topológico X, un *hiperespacio de* X es una familia de subconjuntos de X, con alguna propiedad especial. Entre los hiperespacios de X más comunes están 2^X, el de los subconjuntos cerrados de X; $CL(X)$, el de los subconjuntos cerrados y no vacíos de X; $K(X)$, formado por los subconjuntos compactos y no vacíos de X; $F(X)$, la familia de los subconjuntos cerrados y no vacíos de X que son finitos; y $C(X)$, el de los subconjuntos cerrados, conexos y no vacíos de X. Existen diversos estudios sobre varios hiperespacios, sin embargo en el caso de dinámica, es bastante usual partir de un sistema dinámico (X, f), tomar al hiperespacio $CL(X)$, asignarle una buena topología y posteriormente definir una función g en términos de f, de tal modo que $(CL(X), g)$ sea nuevamente un sistema dinámico.

Al trabajar con dinámica en el hiperespacio $CL(X)$ de un espacio topológico X, es común utilizar la topología de Vietoris (que denotamos por

τ_V), o bien la métrica de Hausdorff, cuando X se supone metrizable y compacto. En [13, Teoremas 3.1 y 3.2] se prueba que si X es compacto y metrizable, la topología τ_V coincide con la topología inducida por la métrica de Hausdorff.

En el presente capítulo estudiamos una topología con la cual se pueden obtener propiedades que con bastante dificultad se obtendrían con τ_V. Incluso bajo ciertas condiciones, la topología que veremos, respeta los resultados ya conocidos cuando se aplica la topología de Vietoris. La topología a la que nos referimos es la llamada topología de Fell (que denotaremos por τ_F).

En las siguientes secciones se hará un estudio sobre la topología de Fell, mencionaremos varias relaciones entre las topologías τ_V y τ_F. Veremos que 2^X con la topología de Fell es un espacio compacto. Describiremos la topología τ_F en términos de una subbase y de una base. Posteriormente analizaremos algunos axiomas de separación, de numerabilidad y de conexidad en los hiperespacios $(2^X, \tau_F)$ y $(CL(X), \tau_F)$. Dejamos para el capítulo siguiente el estudio de la dinámica en los hiperespacios antes mencionados.

2.2. Hiperespacios y Topología de Fell

Sea (X, τ) un espacio topológico. Considerando a todos los cerrados de dicho espacio se define la familia:

$$2^X = \{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado en } X\}.$$

Notemos que $\emptyset \in 2^X$. Podemos excluir de la definición de 2^X al conjunto vacío, para así obtener la familia:

$$CL(X) = \{F \in 2^X \mid F \neq \emptyset\}.$$

También se trabajará con la colección de los subconjuntos compactos y no vacíos de X:

$$K(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ es compacto en } X \text{ y } A \neq \emptyset\}.$$

Para darle una topología a las familias 2^X y $CL(X)$, consideramos primero los conjuntos $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ que se definen a continuación.

Notación 2.1. Sea $\mathcal{H}$ una familia finita de subconjuntos de X. Denotamos por $\langle \mathcal{H} \rangle$ al conjunto de todos los subconjuntos cerrados de X, contenidos en la unión de $\mathcal{H}$ y que intersectan a cada elemento de $\mathcal{H}$, es decir:

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \left\{F \in 2^X \mid F \subseteq \bigcup \mathcal{H} \text{ y } F \cap H \neq \emptyset \text{ para cada } H \in \mathcal{H}\right\}.$$

Notemos que, para toda $n \in \mathbb{N}$ y cada familia finita $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ de subconjuntos no vacíos de X, sucede que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \subseteq 2^X$. Por otro lado si $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ es una familia de subconjuntos de X, entonces

a) si para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sucede que $U_i = \emptyset$, entonces $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \emptyset$;

b) si X es T_1 y $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \emptyset$, entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $U_i = \emptyset$.

Más aún, como el vacío es un conjunto finito, es posible que la familia $\mathcal{F}$ de la Notación 2.1 sea vacía. En ese caso, el conjunto $\langle \mathcal{F}\rangle$ es la colección de los subconjuntos cerrados de X, contenidos en $\bigcup \emptyset = \emptyset$ y que intersectan a cada elemento de $\mathcal{F}$. Por vacuidad, cualquier cerrado intersecta a cualquier elemento de $\mathcal{F}$. Sin embargo, el único cerrado que se queda contenido en la unión de $\mathcal{F}$ es el vacío. De todo esto, podemos afirmar que si $\mathcal{F}$ es la familia vacía, entonces $\langle \mathcal{F}\rangle = \{\emptyset\}$. En este caso, tal familia se denotará como $\mathcal{F}_\emptyset$ y tenemos $\langle \mathcal{F}_\emptyset\rangle = \{\emptyset\}$.

En el siguiente resultado enunciamos otras propiedades fundamentales de los conjuntos anteriormente definidos.

Lema 2.2. *Sean X un espacio topológico no vacío, $n, m \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n \subseteq X$ y $V_1, V_2, \ldots, V_m \subseteq X$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

a) $\langle X\rangle = CL(X)$;

b) $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m\rangle = \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m\rangle$, *donde* $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ *y* $V = \bigcup_{j=1}^m V_j$.

Demostración. Para probar *a)* notemos que $\langle X\rangle \subseteq CL(X)$. Supongamos ahora que $F \in CL(X)$. Entonces $F \subseteq X$, por lo que $F \cap X = F \neq \emptyset$. Por tanto $F \in \langle X\rangle$.

Para probar *b)*, supongamos que $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $V = \bigcup_{j=1}^m V_j$. Notemos que

$$\bigcup_{i=1}^{n}(U_i \cap V) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cap V = U \cap V$$

y

$$\bigcup_{j=1}^{m}(V_j \cap U) = \left(\bigcup_{j=1}^{m} V_j\right) \cap U = V \cap U.$$

Entonces

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n}(U_i\cap V)\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{m}(V_j\cap U)\right)=U\cap V. \tag{α}$$

Supongamos ahora que la intersección de $\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle$ y $\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle$ es no vacía.

$\subseteq$] Sea $F\in\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle$. Entonces $F\in 2^X$, $F\subseteq U$, $F\subseteq V$ y $F\cap U_i\neq\emptyset\neq F\cap V_j$ para $1\leq i\leq n$ y $1\leq j\leq m$. Así

$$F\subseteq U\cap V=\left(\bigcup_{i=1}^{n}(U_i\cap V)\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{m}(V_j\cap U)\right).$$

Como $F\cap U_i\neq\emptyset$ y $F\subseteq V$, entonces $\emptyset\neq F\cap U_i\subseteq F\cap(V\cap U_i)$ para toda $i\in\{1,\ldots,n\}$. Análogamente $\emptyset\neq F\cap V_j\subseteq F\cap(U\cap V_j)$ para cada $j\in\{1,\ldots,m\}$. Usando lo anterior y (α) se tiene que

$$F\in\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle.$$

Esto prueba que $\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle\neq\emptyset$ y que, además

$$\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle\subseteq\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle.$$

Ahora supongamos que $\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle\neq\emptyset$.

$\supseteq$] Sea $F\in\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle$. Luego $F\in 2^X$ y $\emptyset\neq F\cap(V\cap U_i)\subseteq F\cap U_i$ con cualquier $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. También $\emptyset\neq F\cap(U\cap V_j)\subseteq F\cap V_j$ para toda $1\leq j\leq m$. Además, por definición,

$$F\subseteq\left(\bigcup_{i=1}^{n}(V\cap U_i)\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{m}(U\cap V_j)\right).$$

Usando (α) obtenemos que $F\subseteq U\cap V$. En consecuencia, $F\subseteq U$, $F\subseteq V$, $F\cap U_i\neq\emptyset$ para cada $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ y $F\cap V_j\neq\emptyset$ para toda $j\in\{1,2,\ldots,m\}$. Por tanto $F\in\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle$. Esto prueba que $\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle\neq\emptyset$ y que, además,

$$\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle\subseteq\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle.$$

De esta manera probamos que

$$\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle=\langle U_1,U_2,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,V_2,\ldots,V_m\rangle.$$

$\square$

Del lema anterior se deduce el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *La familia*

$$\mathcal{B}_V = \{\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \mid \{U_1, \ldots, U_n\} \text{ es una colección finita de abiertos de } X\}$$

es una base para una topología τ_V *de* 2^X.

Demostración. Usando la parte *a)* del Lema 2.2, así como el hecho de que $\mathcal{F}_\emptyset$ y $\{X\}$ son colecciones finitas de abiertos en X, tenemos que $CL(X) = \langle X\rangle \in \mathcal{B}_V$ y $\{\emptyset\} = \langle \mathcal{F}_\emptyset\rangle \in \mathcal{B}_V$. Luego $2^X = CL(X) \cup \{\emptyset\} = \langle X\rangle \cup \langle \mathcal{F}_\emptyset\rangle$. Esto muestra que la unión de los elementos de $\mathcal{B}_V$ es 2^X.

Es claro que la intersección de $\langle \mathcal{F}_\emptyset\rangle$ con cualquier otro elemento de $\mathcal{B}_V$ tiene que estar contenido en $\{\emptyset\}$. Por tanto, tal intersección es vacía o es el unitario del vacío. Si la intersección es vacía, se puede ver como $\langle X, \emptyset\rangle$. Si la intersección es el unitario del vacío, se puede ver como $\langle \mathcal{F}_\emptyset\rangle$. Ambas opciones son elementos de $\mathcal{B}_V$.

Por tanto, podemos suponer que $\langle U_1, U_2 \ldots, U_n\rangle$, y $\langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle$ son elementos de $\mathcal{B}_V$. Entonces cada uno de los conjuntos U_i y V_j es abierto en X. Luego los conjuntos $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ y $V = \bigcup_{j=1}^m V_j$ son abiertos en X. Esto implica que cada uno de los conjuntos $V \cap U_i$ y $U \cap V_j$ es abierto en X. Aplicando el inciso *b)* del Lema 2.2, deducimos que la intersección

$$\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m\rangle = \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m\rangle,$$

es un elemento de $\mathcal{B}_V$. Esto muestra que la intersección de cada dos elementos de $\mathcal{B}_V$ es, de nueva cuenta, un elemento de $\mathcal{B}_V$. Por consiguiente, $\mathcal{B}_V$ es base de alguna topología en 2^X. $\square$

Como $CL(X) \subset 2^X$ y τ_V es una topología para 2^X, una manera natural de darle una topología a $CL(X)$, es considerar la topología relativa de 2^X a $CL(X)$. Dicha topología la denotaremos también por τ_V, en lugar de $(\tau_V)_{|CL(X)}$. Los elementos básicos de $CL(X)$ son los de la familia

$$\mathcal{B}'_V = \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap CL(X) \mid \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \in \mathcal{B}_V\}.$$

Definición 2.4. La topología τ_V indicada en el Teorema 2.3, y aplicada a 2^X o bien a $CL(X)$, se llama la *topología de Vietoris*. A los básicos de dicha topología, es decir a los elementos de $\mathcal{B}_V$ y a los de $\mathcal{B}'_V$, se les llama *vietóricos* de 2^X o bien de $CL(X)$, según corresponda. Si $\tilde{V} = \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle \in \mathcal{B}_V$ o bien $\tilde{V} = \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle \cap CL(X) \in \mathcal{B}'_V$, entonces los conjuntos V_i, con $1 \leq i \leq m$, se llaman las *entradas* de $\tilde{V}$.

La topología de Vietoris fue definida en 1921 por Leopold Vietoris. Suele definirse, por lo general, para $CL(X)$ y también se le llama la *topología finita* de $CL(X)$. A los espacios topológicos $(2^X, \tau_V)$ y $(CL(X), \tau_V)$ se les llama *hiperespacios* de X.

En el siguiente lema se muestra que, sin perder generalidad, siempre podemos suponer que dos elementos vietóricos poseen el mismo número de entradas.

Lema 2.5. *Sea X un espacio topológico. Si $\tilde{U} = \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ y $\tilde{V} = \langle V_1, \dots, V_m \rangle$ son dos vietóricos de 2^X, entonces podemos escribir $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$ de tal forma que tengan el mismo número de entradas. La misma conclusión obtenemos si suponemos que $\tilde{U} = \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap CL(X)$ y $\tilde{V} = \langle V_1, \dots, V_m \rangle \cap CL(X)$ son vietóricos de $CL(X)$.*

Demostración. Si tomamos a $\tilde{U}$ y queremos aumentarle la cantidad de entradas, basta con tomar cualquiera de ellas y repetirla. De ese modo $\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \langle U_1, U_2 \dots, U_n, U_n, \dots, U_n \rangle$, donde la entrada U_n se repite un número finito de veces. Así, tomando $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$, sin perder generalidad supongamos que $n < m$. Repitiendo $m - n$ veces la entrada U_n, podemos escribir a ambos vietóricos con el mismo número de entradas. $\square$

Ahora indicamos una notación que nos servirá para facilitar la redacción.

Notación 2.6. Sea (X, τ) un espacio topológico. A cada $A \subseteq X$ le asignamos los siguientes subconjuntos de 2^X:

$$A^- = \{F \in 2^X \mid A \cap F \neq \emptyset\} \quad \text{y} \quad A^+ = \{F \in 2^X \mid F \subseteq A\}.$$

Más generalmente, para una colección α no vacía de subconjuntos de X, definimos

$$\alpha^- = \{F \in 2^X \mid F \cap U \neq \emptyset \text{ para todo } U \in \alpha\}.$$

Informalmente hablando, decimos que cada $F \in A^-$ le "pega" a A y que cada $F \in A^+$ "esquiva" a $X \setminus A$ (pues está contenido en A). Por tanto, los conjuntos A^- son "partes que pegan" y los A^+ son "partes que esquivan".

Notemos que $\emptyset \in A^+$, para cada $A \subseteq X$. Además los elementos A^- y A^+ se pueden escribir como sigue, en términos de vietóricos de 2^X:

$$A^- = \langle X, A \rangle \quad \text{y} \quad A^+ = \langle A \rangle \cup \{\emptyset\}.$$

Si $A \subseteq X$ es no vacío, puede suceder que el conjunto vacío es el único subconjunto cerrado de X que está contenido en A. En dicha situación tenemos que $\langle A \rangle = \emptyset$.

En el caso de $CL(X)$, lo correcto es escribir $A^- \cap CL(X)$ y $A^+ \cap CL(X)$ para referirse a los conjuntos $\{F \in CL(X) \mid A \cap F \neq \emptyset\}$ y $\{F \in CL(X) \mid F \subseteq A\}$, respectivamente. Sin embargo, a menos que pueda causar confusión, escribiremos A^- y A^+ en lugar de $A^- \cap CL(X)$ y $A^+ \cap CL(X)$, respectivamente. En [22, Notación 4.3, p. 54], A^- se denota como $\Lambda(U)$ y A^+ como $\Gamma(U)$. Por lo que hemos visto, dados un subconjunto abierto O de X y un subconjunto compacto K de X, tenemos que

$$\langle X, O\rangle = \left\{F \in 2^X \mid F \cap O \neq \emptyset\right\} = O^-$$

y

$$\langle X \setminus K\rangle \cup \{\emptyset\} = \left\{F \in 2^X \mid F \subseteq X \setminus K\right\} = (X \setminus K)^+.$$

Notemos que

$$\emptyset^- = \langle X, \emptyset\rangle = \emptyset, \qquad X^- = \langle X, X\rangle = \langle X\rangle = CL(X),$$

$$\emptyset^+ = \langle\emptyset\rangle \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \quad \text{y} \quad X^+ = \langle X\rangle \cup \{\emptyset\} = CL(X) \cup \{\emptyset\} = 2^X.$$

Con los conjuntos de la forma O^- y $(X \setminus K)^+$, donde O es un subconjunto abierto de X y K es un subconjunto compacto de X, podemos crear a la topología que nos interesa, y es la que describimos a continuación.

Definición 2.7. Sea X un espacio topológico. La *topología de Fell* en 2^X, denotada por τ_F, es aquella que tiene como subbase la familia $\mathcal{S}_F$ de los conjuntos

$$O^- = \langle X, O\rangle = \left\{F \in 2^X \mid F \cap O \neq \emptyset\right\}$$

y

$$(X \setminus K)^+ = \langle X \setminus K\rangle \cup \{\emptyset\} = \left\{F \in 2^X \mid F \subseteq X \setminus K\right\},$$

donde O es un subconjunto abierto de X y K es un subconjunto compacto de X.

Notemos que los elementos subbásicos de τ_F, son las colecciones formadas por los subconjuntos cerrados de X que le pegan a un abierto de X, junto con aquellos que esquivan a un subconjunto compacto de X. Como hicimos con la topología de Vietoris en $CL(X)$, para simplificar la notación, la topología de Fell en el subespacio $CL(X)$ de 2^X se denotará por τ_F, en lugar de $(\tau_F)_{|CL(X)}$. Los elementos subbásicos de $CL(X)$, con la topología de Fell, describen la familia $\mathcal{S}'_F$ de los conjuntos

$$\langle X, O\rangle \cap CL(X) = \{F \in CL(X) \mid F \cap O \neq \emptyset\}$$

y

$$\langle X \setminus K \rangle \cap CL(X) = \{F \in CL(X) \mid F \subseteq X \setminus K\},$$

donde O es un subconjunto abierto de X y K es un subconjunto compacto de X.

La topología de Fell también se conoce como la *H-topología*, la *topología de Choquet-Matheron* o la *topología débil de Vietoris* de 2^X. Fue formalmente definida por James M. G. Fell en 1962 como la H-topología de 2^X (ver [10]), aunque en un artículo publicado en 1961 la utiliza para resolver una aplicación particular del Análisis Funcional en la Teoría de las C^*-álgebras. En 2008 Ji-Chen y Paolo Vitolo presentaron en [7], un estudio sistemático de la topología de Fell en 2^X. Muchos de los resultados que probamos en el presente capítulo fueron mencionados originalmente en [7].

El objetivo del presente capítulo es, por tanto, presentar propiedades topológicas de los espacios $(2^X, \tau_F)$ y $(CL(X), \tau_F)$, los cuales también podemos llamar *hiperespacios* de X. Nuestro primer objetivo es obtener una base para $(2^X, \tau_F)$. Usando la definición de la familia α^- que dimos en la Notación 2.6, así como el inciso *b)* del Lema 2.2, para cualesquiera dos subconjuntos U_1 y U_2 de X sucede que:

$$U_1^- \cap U_2^- = \langle X, U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle = \langle X, U_1, U_2 \rangle = \{U_1, U_2\}^-.$$

En general si $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, U_2, \ldots, U_n \subseteq X$, entonces

$$U_1^- \cap U_2^- \cap \cdots \cap U_n^- = \langle X, U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^-. \tag{2.1}$$

Supongamos ahora que $K_1, K_2 \subseteq X$ y que $K = K_1 \cup K_2$. Entonces

$$\begin{aligned}(X \setminus K_1)^+ \cap (X \setminus K_2)^+ &= (\langle X \setminus K_1 \rangle \cup \{\emptyset\}) \cap (\langle X \setminus K_2 \rangle \cup \{\emptyset\}) = \\ &(\langle X \setminus K_1 \rangle \cap \langle X \setminus K_2 \rangle) \cup \{\emptyset\} = \langle (X \setminus K_1) \cap (X \setminus K_2) \rangle \cup \{\emptyset\} = \\ &= \langle X \setminus (K_1 \cup K_2) \rangle \cup \{\emptyset\} = \langle X \setminus K \rangle \cup \{\emptyset\} = (X \setminus K)^+.\end{aligned}$$

Es decir, $(X \setminus K_1)^+ \cap (X \setminus K_2)^+ = (X \setminus K)^+$. En general, si $m \in \mathbb{N}$, $K_1, K_2, \ldots, K_m \subset X$ y $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_m$, entonces

$$(X \setminus K_1)^+ \cap (X \setminus K_2)^+ \cap \cdots \cap (X \setminus K_m)^+ = \langle X \setminus K \rangle \cup \{\emptyset\} = (X \setminus K)^+. \tag{2.2}$$

Notemos que si cada conjunto K_i es compacto, entonces la unión K es un subconjunto compacto de X. Ahora bien, si $\mathcal{U}$ es un básico no vacío de $(2^X, \tau_F)$, entonces $\mathcal{U}$ es una intersección finita de elementos en $\mathcal{S}_F$. Dicha intersección la podemos dividir en la intersección de elementos que son de la forma U^-, con U abierto en X, y la intersección de elementos que son de la forma $(X \setminus K)^+$, con K compacto en X. Utilizando (2.1) y (2.2), deducimos que $\mathcal{U}$ es de una de las tres formas siguientes:

a) $\langle X, U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ con $n \in \mathbb{N}$ y cada U_i es un abierto de X (cuando en la intersección que define a $\mathcal{U}$ no hay elementos de la forma $(X \setminus K)^+$, con K compacto en X).

b) $\langle X \setminus K \rangle \cup \{\emptyset\}$ con K un compacto de X (cuando en la intersección que define a $\mathcal{U}$ no hay elementos de la forma U^-, con U abierto en X).

c) $\langle X, U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap (\langle X \setminus K \rangle \cup \{\emptyset\})$ con $n \in \mathbb{N}$, U_i abierto en X para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y K compacto (cuando en la intersección que define a $\mathcal{U}$ hay tanto elementos de la forma U^- con U abierto en X, como elementos de la forma $(X \setminus K)^+$, con K compacto en X).

Como $\langle X \rangle = CL(X)$, los elementos descritos en a), b) y c) pueden resumirse en un único tipo, a saber los de la forma c). En efecto, a partir de un elemento de la forma c) con $K = \emptyset$, obtenemos uno de la forma a) y, haciendo $U_1 = U_2 = \cdots = U_n = X$, obtenemos uno de la forma b). Naturalmente si $\mathcal{U} = \emptyset$, entonces $\mathcal{U}$ satisface a) con $U_1 = U_2 = \cdots = U_n = \emptyset$. Esto muestra el siguiente resultado, que aparece originalmente en [10].

Teorema 2.8. *Sea X un espacio topológico. Una base para la topología τ_F de 2^X es la familia:*

$$\mathcal{B}_F = \{\langle X, U_1, \ldots, U_n \rangle \cap (\langle X \setminus K \rangle \cup \{\emptyset\}) \mid K \subseteq X \textit{ es compacto, } n \in \mathbb{N} \textit{ y } \\ U_i \subseteq X \textit{ abierto en } X \textit{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Notemos que los conjuntos de la forma a) se pueden escribir como

$$\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^-,$$

donde $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X. Los de la forma b) se pueden escribir como $(X \setminus K)^+$, donde K es un subconjunto compacto de X y, los de la forma c) se escriben, por tanto, como

$$\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^- \cap (X \setminus K)^+,$$

donde $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X y K es un subconjunto compacto de X. De esta manera, la base $\mathcal{B}_F$ se puede describir como sigue:

$$\mathcal{B}_F = \{\alpha^- \cap (X \setminus K)^+ \mid \alpha \text{ es una familia finita de abiertos de } X \\ \text{y } K \text{ es un subconjunto compacto de } X\}.$$

Terminamos la presente sección indicando que la topología de Vietoris para $CL(X)$ se puede dar en términos de una subbase.

Teorema 2.9. *Sea X un espacio topológico. Entonces una subbase para la topología de Vietoris τ_V en $CL(X)$ la constituye la familia*

$$\mathcal{S}_V = \{U^- \mid U \textit{ es abierto en } X\} \cup \{V^+ \mid V \textit{ es abierto en } X\}.$$

Demostración. Notemos que, en $CL(X)$, $V^+ = \langle V \rangle$, para cada $V \subseteq X$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ así como n subconjuntos $U_1, U_2, \ldots, U_n$ de X. Hagamos $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Vamos a probar que

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap CL(X) = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^- \cap \langle U \rangle. \tag{2.3}$$

Tomemos $F \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap CL(X)$. Entonces $F \in CL(X)$ y $F \subseteq U$. Por tanto $F \in \langle U \rangle$. Además $F \cap U_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego $F \in \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^-$. Se sigue que $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \subseteq \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^- \cap \langle U \rangle$. Supongamos ahora que $A \in \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^- \cap \langle U \rangle$. Entonces $A \in CL(X)$, $A \subseteq U$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego $A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap CL(X)$. De esta manera se prueba que $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^- \cap \langle U \rangle \subseteq \langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$, mostrando así (2.3).

Combinando (2.1) con (2.3), tenemos que

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = U_1^- \cap U_2^- \cap \cdots \cap U_n^- \cap \langle U \rangle.$$

Entonces cada elemento de la base $\mathcal{B}_V$ de τ_V es una intersección finita de elementos de la familia $\mathcal{S}_V$. Por otra parte, cada elemento de la familia $\mathcal{S}_V$ pertenece a $\mathcal{B}_V$, pues $U^- = \langle X, U \rangle$ y $V^+ = \langle V \rangle$. Además, por la parte *b)* del Lema 2.2, la intersección de dos elementos de $\mathcal{B}_V$ es un elemento de $\mathcal{B}_V$. Por consiguiente, cualquier intersección finita de elementos de $\mathcal{S}_V$ es un miembro de $\mathcal{B}_V$. Esto prueba que la familia $\mathcal{B}_V$ es justo la de las intersecciones finitas de los elementos de $\mathcal{S}_V$. Por tanto, $\mathcal{S}_V$ es una subbase para τ_V. □

Del Teorema 2.9 se infiere que los elementos subbásicos de τ_V son las colecciones formadas por los subconjuntos cerrados de X que le pegan a un abierto de X, junto con las colecciones formadas por cerrados que esquivan a un subconjunto cerrado de X.

Teorema 2.10. *Sean X un espacio topológico y $B \subseteq X$ un subconjunto cerrado de X. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{H} = \{A \in CL(X) \mid A \subseteq B\}$$

es cerrado en $(CL(X), \tau_V)$.

Demostración. Sea $U = X \setminus B$. Como B es cerrado en X, U es abierto en X. Además

$$CL(X) \setminus \mathcal{H} = \{A \in CL(X) \mid A \nsubseteq B\} = \{A \in CL(X) \mid A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset\} = \\ = \{A \in CL(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\} = U^-.$$

Por el Teorema 2.9, U^- es abierto en $(CL(X), \tau_V)$. Luego $CL(X) \setminus \mathcal{H}$ es abierto en $(CL(X), \tau_V)$. Es decir, $\mathcal{H}$ es cerrado en $(CL(X), \tau_V)$. □

Una prueba similar a la efectuada en el teorema anterior, hace ver que si B es cerrado en X, entonces el conjunto $\{A \in CL(X) \mid A \cap B \neq \emptyset\}$ es cerrado en $(CL(X), \tau_V)$.

2.3. Comparando τ_V y τ_F

Ya que hemos puesto las subbases de τ_V y de τ_F en términos de la subbase de la otra topología, un pensamiento que surge inmediatamente es el querer saber si existe alguna relación entre la topología de Fell y la de Vietoris. Afortunadamente sí existe tal relación y lo único que necesitamos es la siguiente definición.

Definición 2.11. Un espacio topológico X es *KC* si todo subconjunto compacto de X es cerrado en X.

La propiedad KC se encuentra entre los axiomas de separación T_2 y T_1. En efecto, por la parte *2)* de la Proposición 1.18, en un espacio T_2 todo subconjunto compacto es cerrado. En otras palabras, los espacios T_2 son KC. Por otro lado si X es KC y $x \in X$, entonces como $\{x\}$ es compacto dicho conjunto también es cerrado. Luego $\{x\}$ es cerrado para cada $x \in X$. De esta manera X es T_1. Esto muestra que los espacios KC son T_1.

El siguiente resultado aparece probado originalmente en [10].

Teorema 2.12. *En 2^X las siguientes afirmaciones se cumplen:*

a) Si X es un espacio KC, entonces $\tau_F \subseteq \tau_V$.

b) Si X es un espacio compacto, entonces $\tau_V \subseteq \tau_F$.

Demostración. Para probar *a)*, recordemos que los elementos de $\mathcal{S}_F$, los subbásicos de τ_F, tienen la forma U^- o bien $(X \setminus K)^+$, donde K es un compacto y U es abierto en X. Si K es un compacto en X, entonces K es cerrado pues X es KC, de donde $X \setminus K$ es abierto en X. Por tanto

$$(X \setminus K)^+ = \langle X \setminus K \rangle \cup \{\emptyset\} = \langle X \setminus K \rangle \cup \langle \mathcal{F}_\emptyset \rangle$$

es la unión de dos elementos en $\mathcal{S}_V$, la subbase de τ_V. Por tanto $(X \setminus K)^+ \in \tau_V$. Como también $U^- = \langle X, U \rangle$ está en la subbase de τ_V para cada abierto U de X, tenemos que $\mathcal{S}_F \subseteq \tau_V$, implicando que $\tau_F \subseteq \tau_V$.

Para el enunciado restante, sea V un abierto en X. Entonces $K = X \setminus V$ es cerrado en X, que es compacto. La Proposición 1.18 nos dice que K es compacto, por lo tanto $(X \setminus K)^+ = V^+ \in \mathcal{S}_F$. Pero también $U^- \in \mathcal{S}_F$ para todo abierto U de X, por lo que $\mathcal{S}_V \subseteq \mathcal{S}_F$. Deducimos así que $\tau_V \subseteq \tau_F$. □

De los resultados anteriores, sucede que si X compacto y T_2, entonces τ_F coincide con τ_V. Entonces, para trabajar con algo distinto a la topología de Vietoris, en adelante trataremos con espacios topológicos que no cumplan al mismo tiempo ser KC y compactos. En el Teorema 2.50 mostramos un ejemplo de un espacio topológico (X, τ) que, entre otras propiedades, es compacto, T_1 y no KC. Para dicho espacio X, probamos que en el hiperespacio $CL(X)$ se tiene que $\tau_V \subseteq \tau_F$ y $\tau_F \nsubseteq \tau_V$.

Las dos topologías que hemos visto hasta ahora, tienen una similitud: ambas son topologías "*hit-and-miss*", es decir, ambas tienen en sus subbases a conjuntos de la forma A^- y A^+ (los que pegan y los que esquivan). En el caso de τ_V tiene como subbase a los conjuntos U^- y U^+, donde U es un abierto de X. Mientras que τ_F tiene como subbase a los conjuntos U^- y $(X \setminus K)^+$, con U abierto y K un compacto de X, respectivamente.

Existen otras topologías para 2^X, llamadas "*hit-or-miss*", donde solo se pide que su subbase tenga elementos de la forma A^- y/o B^+ para $A, B \subseteq X$. A continuación describimos tres de ellas.

Topología Baja de Vietoris. Su subbase consiste de conjuntos de la forma U^-, para todo subconjunto abierto U de X.

Topología Alta de Vietoris. Su subbase consiste de conjuntos U^+, con U abierto en X.

Topología Alta de Fell. Su subbase consiste de conjuntos U^+, para cada subconjunto U de X tal que $X \setminus U$ es compacto.

En el presente texto, por lo general nos interesaremos únicamente en la topología de Fell sobre 2^X y $CL(X)$.

2.4. Admisibilidad

En la Teoría de Hiperespacios, en donde a la familia $CL(X)$ se le da la topología de Vietoris, es bastante conocido que si X es un espacio T_1, entonces $CL(X)$ contiene una copia de X, es decir, un subconjunto homeomorfo a X. Dicho subconjunto se denota por $F_1(X)$ y se define como sigue:

$$F_1(X) = \{\{x\} \mid x \in X\}.$$

Cuando a las familias 2^X y $CL(X)$ se les dan otras topologías, se busca que éstas satisfagan propiedades que no se alejan tanto de las que se conocen para la topología de Vietoris. En nuestro caso, buscamos topologías en 2^X y $CL(X)$ que en cierto sentido posean a X como subconjunto. Dichas topologías reciben el nombre que se indica en la siguiente definición.

Definición 2.13. Sea X un espacio topológico. Una topología τ en 2^X es *admisible* si la función $i\colon X \to (2^X, \tau)$, definida para cada $x \in X$ como $i(x) = Cl_X(\{x\}) = \overline{\{x\}}$, es un encaje (es decir, un homeomorfismo de X en $i(X)$).

Si X es un espacio T_1, entonces la función i definida anteriormente es la que a cada $x \in X$ le asigna su unitario $\{x\}$. En tal situación, $i(X) = F_1(X)$. Además, cuando X es T_1 resulta que $F_1(X) \subseteq 2^X$.

Como deseamos trabajar con la topología de Fell, es razonable desear conocer las condiciones que deben cumplirse para que dicha topología sea admisible, y también cuáles son las diferencias que se pueden establecer con la topología de Vietoris. Esto queda resuelto en la siguiente proposición, probada originalmente en [7].

Proposición 2.14. *Sea X un espacio T_1. Entonces se cumple:*

a) τ_V es admisible.

b) τ_F es admisible si y sólo si X es KC.

Demostración. Como X es T_1, para cualquier $x \in X$ se cumple $i(x) = \{x\} \in F_1(X)$. Además es claro que i es biyectiva, como función de X en $F_1(X)$. Para probar *a)* vamos a mostrar primero que i, como función de X a $F_1(X)$ es continua. Sea $U \subseteq X$. Entonces

$$\begin{aligned} U^+ \cap F_1(X) = \{A \in F_1(X) \mid A \subseteq U\} = \\ = \{A \in F_1(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\} = U^- \cap F_1(X). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} i^{-1}\left(U^+ \cap F_1(X)\right) = \{x \in X \mid i(x) \in U^+ \cap F_1(X)\} = \\ = \{x \in X \mid \{x\} \subseteq U\} = U. \end{aligned}$$

Si U es un abierto en X, deducimos que $U^+ \cap F_1(X)$ es un abierto subbásico de $F_1(X)$ (que coincide con $U^- \cap F_1(X)$). Notemos que $i^{-1}(U^+ \cap F_1(X)) = U$, entonces i es continua.

Ahora, para $i\colon X \to F_1(X)$, consideremos a g su función inversa, definida para $\{x\} \in F_1(X)$ como $g(\{x\}) = x$. Si U es un subconjunto de X, tenemos que

$$\begin{aligned} g^{-1}(U) = \{\{x\} \in F_1(X) \mid g(\{x\}) \in U\} = \{\{x\} \in F_1(X) \mid x \in U\} = \\ = \{\{x\} \in F_1(X) \mid U \cap \{x\} \neq \emptyset\} = U^- \cap F_1(X). \end{aligned}$$

Si U es abierto de X, es obvio que $U^- \cap F_1(X)$ es un subbásico de $F_1(X)$ y ya que $g^{-1}(U) = U^- \cap F_1(X)$, deducimos que g es continua. De donde $i\colon X \to F_1(X)$ y su inversa son funciones continuas. Esto prueba que i es un homeomorfismo y, por consiguiente, τ_V es admisible.

Para probar *b)*, supongamos que X es KC y sean V, K un abierto y un compacto de X respectivamente. Ya que X es KC, tenemos que $U = X \setminus K$ es abierto en X. Siguiendo el proceder del inciso anterior es fácil observar que

$$i^{-1}\left(V^- \cap F_1(X)\right) = i^{-1}\left(V^+ \cap F_1(X)\right) = V.$$

Sustituyendo V por $U = X \setminus K$, obtenemos

$$i^{-1}\left((X \setminus K)^+ \cap F_1(X)\right) = i^{-1}\left(U^+ \cap F_1(X)\right) = U = X \setminus K.$$

En ambos casos, la imagen inversa de un subbásico de $F_1(X)$ es abierto, por tanto $i\colon X \to (F_1(X), \tau_F)$ es continua. Consideremos una vez más a g, la inversa de i, definida como $g(\{x\}) = x$ para cualquier $\{x\} \in F_1(X)$.

Tomando a $U \subseteq X$, al igual que en el inciso anterior $g^{-1}(U) = U^- \cap F_1(X)$. Si U es un abierto, entonces podemos deducir que g es continua y por tanto i es un homeomorfismo.

Finalmente, supongamos que τ_F es admisible. Mostraremos que X es un espacio KC. Sea K un compacto de X, por tanto $(X \setminus K)^+ \cap F_1(X)$ es abierto en $(F_1(X), \tau_F)$. Ya que τ_F es admisible, la función $i\colon X \to (F_1(X), \tau_F)$ es un encaje. En particular, i es continua. Lo anterior significa que $i^{-1}\left((X \setminus K)^+ \cap F_1(X)\right) = X \setminus K$ es abierto en X, de donde K es cerrado en X. Esto prueba que X es KC. □

Como ya indicamos, el inciso *a)* de la Proposición 2.14 implica que si X es T_1, entonces X es homeomorfo a $(F_1(X), \tau_V)$. Mientras tanto, *b)* implica que X es homeomorfo a $(F_1(X), \tau_F)$ si y sólo si X es KC. Esto nos da una idea de la importancia de pedir que el espacio que estudiemos sea al menos KC. De tal modo al trabajar con τ_F en su hiperespacio, la "copia" de X en 2^X que vimos se puede obtener, nos permite conocer características de X. Obviamente si X es T_2, automáticamente tenemos que τ_F es admisible.

Si X es T_2, es conocido que $F_1(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_V)$. Dicho resultado también es cierto cuando consideramos la topología de Fell. Incluso la demostración que presentamos a continuación, para la topología de Fell, también aplica para la topología de Vietoris.

Teorema 2.15. *Si X es un espacio T_2, entonces $F_1(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_F)$.*

Demostración. Sea $A \in CL(X) \setminus F_1(X)$. Entonces A posee al menos dos elementos a y b. Como X es T_2, existen abiertos U y V en X tales que $a \in U$, $b \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Notemos que $\{U, V\}^-$ es un abierto en $(CL(X), \tau_F)$ tal que $A \in \{U, V\}^- \subseteq CL(X) \setminus F_1(X)$. Esto muestra que $CL(X) \setminus F_1(X)$ es abierto en $(CL(X), \tau_F)$ y, por tanto, $F_1(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_F)$. □

Si X es T_2, entonces claramente también es KC. Luego, por la Proposición 2.14, τ_F es admisible. Entonces X es homeomorfo a $F_1(X)$. Por el Teorema 2.15, $F_1(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_F)$. Esto significa que X se puede dibujar dentro de $CL(X)$ como un subconjunto cerrado.

El Teorema 2.15 se puede generalizar como sigue. Recordemos que para un conjunto A, el símbolo $|A|$ representa la cardinalidad de A. Para un espacio topológico X, definamos

$$F_n(X) = \{A \subseteq X \mid 1 \leq |A| \leq n\}.$$

Si X es T_1, entonces $F_n(X) \subseteq CL(X)$, por lo que en $F_n(X)$ podemos considerar tanto la topología de Vietoris como la de Fell. Es conocido que si X es T_2, entonces $F_n(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_V)$ [20, Teorema 2.4.2, p. 156]. Una prueba similar a la realizada en el Teorema 2.15, muestra que si X es T_2, entonces $F_n(X)$ también es cerrado en $(CL(X), \tau_F)$.

Ahora vamos a probar que, en los espacios KC, se cumple el recíproco del Teorema 2.15.

Teorema 2.16. *Sea X un espacio KC. Si $F_1(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_F)$, entonces X es T_2.*

Demostración. Para ver que X es T_2, sean $a, b \in X$ con $a \neq b$. Como X es KC, los subconjuntos finitos de X son cerrados en X. En particular $\{a, b\}$ es cerrado en X. Luego $\{a, b\} \in CL(X) \setminus F_1(X)$. Como el conjunto $CL(X) \setminus F_1(X)$ es abierto en $(CL(X), \tau_F)$, existe un abierto básico $\mathcal{A}$ en $(CL(X), \tau_F)$ tal que

$$\{a, b\} \in \mathcal{A} \subseteq CL(X) \setminus F_1(X).$$

Entonces $\mathcal{A} = \alpha^- \cap (X \setminus K)^+$, donde $\alpha = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ es una familia finita de subconjuntos abiertos y no vacíos de X, y K es un subconjunto compacto de X. Puesto que X es KC, el conjunto K es cerrado en X. Ahora bien, como $\{a, b\} \in (X \setminus K)^+$, tenemos que $\{a, b\} \subseteq X \setminus K$. Además $\{a, b\} \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$. En vista de que $\mathcal{A} \cap F_1(X) = \emptyset$, no puede suceder que a se encuentre en todos los conjuntos U_i, y tampoco puede suceder que b se encuentre en todos los conjuntos U_i. Para probar esto supongamos, por el contrario, que $a \in U_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces

$$\{a\} \in \alpha^- \cap (X \setminus K)^+ = \mathcal{A} \subset CL(X) \setminus F_1(X).$$

Si $b \in U_i$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces,

$$\{b\} \in \alpha^- \cap (X \setminus K)^+ = \mathcal{A} \subset CL(X) \setminus F_1(X).$$

Ambas situaciones son una contradicción. Con esto probamos que existen $i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $a \notin U_{i_1}$ y $b \notin U_{i_2}$. Como $\{a, b\} \cap U_{i_1} \neq \emptyset$ y $\{a, b\} \cap U_{i_2} \neq \emptyset$, resulta que $b \in U_{i_1}$ y $a \in U_{i_2}$. Consideremos ahora los conjuntos

$$U = (X \setminus K) \cap \left(\bigcap \{U \in \alpha \colon a \in U \right)$$

y

$$V = (X \setminus K) \cap \left(\bigcap \{U \in \alpha \colon b \in U \right).$$

Es claro que U y V son abiertos en X tales que $a \in U$ y $b \in V$. Si existe $z \in U \cap V$, entonces

$$\{z\} \in \alpha^- \cap (X \setminus K)^+ = \mathcal{A} \subset CL(X) \setminus F_1(X).$$

Esto es una contradicción, así que $U \cap V = \emptyset$. Esto prueba que X es T_2. $\square$

Corolario 2.17. *Sea X un espacio KC. Entonces X es T_2 si y sólo si $F_1(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_F)$.*

El corolario anterior aparece originalmente probado en [7].

2.5. Propiedades de Compacidad

Durante esta sección veremos algunos resultados que se pueden obtener para $(2^X, \tau_F)$ y $(CL(X), \tau_F)$, ligados a la noción de compacidad. En general, no se pedirá que el espacio X cumpla un axioma de separación. La mayor parte del tiempo, solo se pedirá que el espacio X sea localmente compacto. Primero mostraremos que, sin importar que tan patológico sea el espacio sobre el que trabajemos, el hiperespacio de los cerrados equipado con la topología de Fell es compacto. En la demostración del siguiente resultado y su corolario, probado el primero originalmente en [10, Lema 1, p. 473], el complemento de un subconjunto A de X, se representa por A^c, en lugar de $X \setminus A$.

Teorema 2.18. *Sea X un espacio topológico. Entonces $(2^X, \tau_F)$ es compacto.*

Demostración. Recordemos que una subbase para τ_F está formada por conjuntos de la forma U^- y $(K^c)^+$, con U abierto y K compacto en X. Para ver que $(2^X, \tau_F)$ es compacto, aplicaremos el Lema de la Subbase de Alexander (Teorema 1.21) a dicha subbase para $(2^X, \tau_F)$. Supongamos, por tanto, que $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de abiertos no vacíos de X y que $\{K_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ es una familia de compactos en X tales que

$$\mathcal{L} = \{U_\lambda^- \mid \lambda \in \Lambda\} \cup \{(K_\sigma^c)^+ \mid \sigma \in \Sigma\}$$

forma una cubierta abierta de 2^X bajo τ_F. Entonces

$$2^X = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda^-\right) \cup \left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma} (K_\sigma^c)^+\right).$$

Si $K_\sigma = \emptyset$ para alguna $\sigma \in \Sigma$, entonces $(K_\sigma^c)^+ = X^+ = 2^X$, por lo que $\mathcal{L}$ posee una subcubierta finita. Supongamos, por tanto, que $K_\sigma \neq \emptyset$ para cada $\sigma \in \Sigma$.

Es importante observar que la cubierta $\mathcal{L}$ debe tener elementos de la forma $U^- = \{F \in 2^X \mid F \cap U \neq \emptyset\}$ y también de la forma $(K^c)^+ = \{F \in 2^X \mid F \subseteq K^c\}$. En efecto, como $\emptyset \in 2^X$ y para ninguna $\lambda \in \Lambda$ sucede que $\emptyset \in U_\lambda^-$, concluimos que $\emptyset \in (K_{\sigma_0}^c)^+$, para alguna $\sigma_0 \in \Sigma$. Como $X \in 2^X$ y para ninguna $\sigma \in \Sigma$ sucede que $X \in (K_\sigma^c)^+$, tenemos que $X \in V_{\lambda_0}^-$, para alguna $\lambda_0 \in \Lambda$. Esto prueba lo que afirmamos, así que $\Lambda \neq \emptyset$ y $\Sigma \neq \emptyset$.

Vamos a probar ahora que las condiciones $\Lambda \neq \emptyset$ y $\Sigma \neq \emptyset$ implican que $\mathcal{L}$ posee una subcubierta finita. Para esto, mostraremos primero que

a) Existe $\sigma_* \in \Sigma$ tal que $K_{\sigma_*} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

Para probar a) supongamos que, por el contrario, para cualquier $\sigma \in \Sigma$ se cumple $K_\sigma \nsubseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Por lo tanto, para cada $\sigma \in \Sigma$ existe $x_\sigma \in K_\sigma$ tal que $x_\sigma \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Así, para toda $\lambda \in \Lambda$ y para cada $\sigma \in \Sigma$, $x_\sigma \notin U_\lambda$, de donde $\{x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\} \cap U_\lambda = \emptyset$.

Sea $A = \overline{\{x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}}$. Entonces $A \in 2^X$ por lo que $A \in U_{\lambda_1}^-$ para alguna $\lambda_1 \in \Lambda$ o bien $A \in (K_{\sigma_1}^c)^+$, para alguna $\sigma_1 \in \Sigma$. En el segundo caso tenemos que $x_{\sigma_1} \in A \subseteq K_{\sigma_1}^c$, lo cual es una contradicción con el hecho de que x_{σ_1} es un elemento de K_{σ_1}. En el primer caso, cuando $A \in U_{\lambda_1}^-$, se sigue que $A \cap U_{\lambda_1} \neq \emptyset$. Esto implica, por el Corolario 1.12, que $\{x_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\} \cap U_{\lambda_1} \neq \emptyset$. Entonces existe $\sigma_2 \in \Sigma$ tal que $x_{\sigma_2} \in U_{\lambda_1} \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Esto contradice la elección del punto x_{σ_2}. Por tanto, a) se cumple.

Ahora elijamos $\sigma_* \in \Sigma$ tal que $K_{\sigma_*} \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Como los conjuntos U_λ son abiertos y su unión cubre al compacto K_{σ_*}, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que $K_{\sigma_*} \subseteq \bigcup_{j=1}^n U_{\lambda j}$. Notemos que

$$2^X = (X \setminus K_{\sigma_*})^+ \cup \left(\bigcup_{j=1}^n U_{\lambda_j}^- \right).$$

Para probar esto, sea $F \in 2^X$. Si $F \subseteq X \setminus K_{\sigma_*}$, se encuentra en $(X \setminus K_{\sigma_*})^+$. Si F no está contenido en $X \setminus K_{\sigma_*}$, entonces $F \cap K_{\sigma_*} \neq \emptyset$, por lo que $F \cap U_{\lambda_j} \neq \emptyset$ para alguna $j \in \{1, \ldots, n\}$. Luego $F \in U_{\lambda_j}^-$. Esto muestra que $\{(K_{\sigma_*}^c)^+\} \cup \{U_{\lambda i}^- \mid 1 \leq i \leq n\}$ es una subcubierta finita de 2^X. Usando el Lema de la Subbase de Alexander (Teorema 1.21), $(2^X, \tau_F)$ es compacto. $\square$

Corolario 2.19. *Si X es compacto, entonces $(CL(X), \tau_F)$ es cerrado en $(2^X, \tau_F)$ y, por tanto, es compacto.*

Demostración. Supongamos que X es compacto. Entonces $(X \setminus X)^+$ es un abierto en $(2^X, \tau_F)$. Notemos que

$$(X \setminus X)^+ = \emptyset^+ = \{\emptyset\} = 2^X \setminus CL(X).$$

Por tanto, $2^X \setminus CL(X)$ es abierto en $(2^X, \tau_F)$. Es decir, $(CL(X), \tau_F)$ es cerrado en $(2^X, \tau_F)$. Por el Teorema 2.18, $(2^X, \tau_F)$ es compacto. Luego $(CL(X), \tau_F)$ también es compacto. □

En [10] el Teorema 2.18 se prueba utilizando redes. La prueba que hemos presentado utiliza, en su lugar, el Lema de la Subbase de Alexander.

Luego de la demostración del Teorema 2.23, mostramos que no es cierto que para cualquier espacio topológico X, $(CL(X), \tau_F)$ es cerrado en $(2^X, \tau_F)$.

En [13, p. 20] se muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.20. *Si X es un espacio metrizable, entonces $(CL(X), \tau_V)$ es compacto si y sólo si X es compacto.*

En [22, Teorema 4.13, p. 59] se utiliza el Lema de la Subbase de Alexander para mostrar que si X es un espacio metrizable y compacto, entonces $(CL(X), \tau_V)$ es compacto.

Teorema 2.21. *Sea X un espacio T_2. Si $(CL(X), \tau_F)$ es compacto, entonces X es compacto.*

Demostración. Como X es T_2, por el Teorema 2.15, $F_1(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_F)$. Ahora bien, si $(CL(X), \tau_F)$ es compacto, entonces $(F_1(X), \tau_F)$ también es compacto. En vista de que X es KC, por la Proposición 2.14, τ_F es admisible. Luego X es homeomorfo a $(F_1(X), \tau_F)$. Esto implica que X es compacto. □

Combinando el Corolario 2.19 y el Teorema 2.21, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.22. *Si X es un espacio T_2, entonces $(CL(X), \tau_F)$ es compacto si y sólo si X es compacto.*

El resultado anterior puede ser empleado para generalizar el Teorema 2.20.

Teorema 2.23. *Si X es un espacio T_2, entonces $(CL(X), \tau_V)$ es compacto si y sólo si X es compacto.*

Demostración. Como X es un espacio T_2, entonces $F_1(X)$ es cerrado en $(CL(X), \tau_V)$ (por [20, Teorema 2.4.2, p. 156]). Si $(CL(X), \tau_V)$ es compacto, resulta que $(F_1(X), \tau_V)$ es compacto. Puesto que X es T_1, por la Proposición 2.14, τ_V es admisible. Luego X es homeomorfo a $(F_1(X), \tau_V)$. Esto implica que X es compacto.

Ahora supongamos que X es compacto. En particular X es KC y compacto por lo que, según el Teorema 2.12, $\tau_F = \tau_V$. Además, por el Teorema 2.22, $(CL(X), \tau_F)$ es compacto. Luego $(CL(X), \tau_V)$ es compacto. □

El Teorema 2.23 nos permite dar un ejemplo de un espacio X tal que $(CL(X), \tau_F)$ no es cerrado en $(2^X, \tau_F)$. Tomamos a X un espacio T_2 y no compacto (como la recta de Sorgenfrey). Si $(CL(X), \tau_F)$ es compacto, entonces por el Teorema 2.21, X es compacto. Esto es una contradicción, así que $(CL(X), \tau_F)$ no es compacto. Ahora bien, por el Teorema 2.18, $(2^X, \tau_F)$ es compacto. Luego $(CL(X), \tau_F)$ no es cerrado en $(2^X, \tau_F)$. Lo anterior muestra que si X es un espacio T_2 y no compacto, entonces $(CL(X), \tau_F)$ no es cerrado en $(2^X, \tau_F)$. Como consuelo, durante la demostración de la Proposición 2.51, notaremos que si X no es compacto, al menos $(CL(X), \tau_F)$ es denso en $(2^X, \tau_F)$.

Terminamos la presente sección con el siguiente resultado, que se asemeja al Teorema 2.20.

Teorema 2.24. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto y metrizable si y sólo si $(CL(X), \tau_V)$ es compacto y metrizable.*

Demostración. El Teorema 4.9.7 de [20] dice que son equivalentes:

1. X es compacto y metrizable.
2. $(CL(X), \tau_V)$ es metrizable.
3. $(CL(X), \tau_V)$ es compacto y metrizable.

□

2.6. Axiomas de Separación

En la presente sección vamos a estudiar algunos axiomas de separación en los hiperespacios 2^X y $CL(X)$ con la topología de Fell. A partir de este momento, cuando trabajemos con el hiperespacio $CL(X)$, los elementos subbásicos α^- y $(X \setminus K)^+$ se considerarán contenidos en $CL(X)$.

Anteriormente vimos que $(2^X, \tau_F)$ es compacto sin pedir nada al espacio original X, otra de las propiedades que automáticamente se tienen bajo τ_F es la que se enuncia a continuación.

Proposición 2.25. *Si X es un espacio topológico, entonces $(2^X, \tau_F)$ es T_1.*

Demostración. Sean A, $B \in 2^X$ tales que $A \neq B$. Supongamos $A \nsubseteq B$. Entonces existe $a \in A \setminus B$ y se tiene que $B \neq X$. Claramente el unitario $\{a\}$ es un subconjunto compacto de X. Esto nos lleva a que $(X \setminus B)^-$ y $(X \setminus \{a\})^+$ son abiertos de $(2^X, \tau_F)$ tales que $A \in (X \setminus B)^-$, $B \notin (X \setminus B)^-$, $B \in (X \setminus \{a\})^+$ y $A \notin (X \setminus \{a\})^+$. Si $B \nsubseteq A$, procedemos de manera similar. Esto dice que $(2^X, \tau_F)$ es T_1. □

Así pues, para cualquier espacio topológico X, resulta que $(2^X, \tau_F)$ siempre es compacto y T_1. En el caso de la topología de Vietoris, es conocido que si X es un espacio topológico, entonces $(CL(X), \tau_V)$ es T_0. También se conoce que si X es T_1, entonces $(CL(X), \tau_V)$ es T_1. Por otra parte, si X es regular, entonces $(CL(X), \tau_V)$ es T_2. La demostración de las afirmaciones anteriores se encuentra en [20, Teorema 4.9, p. 163]. También se sabe que si X es T_1 y $(CL(X), \tau_V)$ es T_2, entonces X es T_3 ([17, Teorema 1.56, p. 28]).

Si en cambio solicitamos que el espacio X sea localmente compacto (ver Definición 1.23), se muestra que 2^X bajo τ_F es un espacio T_2, que aunado al Teorema 2.18 nos lleva al siguiente resultado.

Teorema 2.26. *Cuando X es localmente compacto, sucede que*

1) $(2^X, \tau_F)$ es T_2 y compacto.

2) $(CL(X), \tau_F)$ es T_2 y localmente compacto.

Demostración. Como se mencionó antes, el Teorema 2.18 muestra que $(2^X, \tau_F)$ es compacto. Para mostrar que el hiperespacio es T_2, sean A, $B \in 2^X$ tales que $A \neq B$. Sin perder generalidad $B \nsubseteq A$. Elijamos $b \in B \cap (X \setminus A)$ y, dado que X es localmente compacto, existe una vecindad compacta K de b, disjunta con A. Entonces $(Int_X(K))^-$ y $(X \setminus K)^+$ son vecindades disjuntas de B y A en $(2^X, \tau_F)$, respectivamente (pues $b \in B \cap Int_X(K)$, además de que al tener $A \cap K = \emptyset$, obtenemos $A \subseteq (X \setminus K)$. Esto prueba que $(2^X, \tau_F)$ es T_2.

Ahora la demostración de *2)*. Acabamos de mostrar que $(2^X, \tau_F)$ es T_2. También sabemos que $(2^X, \tau_F)$ es compacto (Teorema 2.18). Entonces $(2^X, \tau_F)$ es compacto y T_2, luego $(2^X, \tau_F)$ es localmente compacto. Ahora bien, como $(2^X, \tau_F)$ es T_1 el conjunto $\{\emptyset\}$ es cerrado en $(2^X, \tau_F)$. Así el complemento $2^X \setminus \{\emptyset\} = CL(X)$ es abierto en $(2^X, \tau_F)$. Como la compacidad local se hereda para subespacios abiertos ([8, Teorema 6.5, p. 239]), concluimos que $(CL(X), \tau_F)$ es localmente compacto. Puesto que la condición de ser T_2 se hereda a subespacios ([8, Teorema 1.3, p. 178]), $(CL(X), \tau_F)$ es T_2. Esto termina la prueba de *2)*. □

De lo anterior, la compacidad local es una condición en X que garantiza que $(CL(X), \tau_F)$ posee un axioma de separación tan útil como T_2. Como ya lo mencionamos, para obtener algo similar en el caso de τ_V, es necesario pedir que X sea regular.

El siguiente resultado es un recíproco parcial de la parte *2)* del Teorema 2.26.

Teorema 2.27. *Sea X un espacio topológico. Si $(CL(X), \tau_F)$ es T_2, entonces X es localmente compacto.*

Demostración. Supongamos que $(CL(X), \tau_F)$ es T_2. Para ver que X es localmente compacto, sean $x \in X$ y V un abierto de X tales que $x \in V$. Supongamos primero que X es el único abierto en X que contiene a x. Esto significa que $V = X$. Además V es compacto. Para ver esto, sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de V. Entonces existe un abierto O en la cubierta $\mathcal{C}$ tal que $x \in O$. Por tanto $O = X$. Así la cubierta $\mathcal{C}$ de V puede ser reducida a un único abierto, a saber O, de donde V es compacto. Esto implica que X es localmente compacto.

Supongamos ahora que X no es el único abierto en X que tiene a x. Entonces existe un abierto V_0 en X tal que $x \in V_0$ y $V_0 \neq X$. Luego $V \cap V_0$ es un abierto en X que tiene a x y es diferente de X. Esto significa que podemos trabajar con el abierto $V \cap V_0$ o bien, sin perder generalidad, suponer que $V \neq X$, cosa que haremos. Ahora bien, como $V \neq X$, tenemos que $X \setminus V \neq \emptyset$ (recordemos que $x \in V$). Sean

$$E = X \setminus V \quad \text{y} \quad F = (X \setminus V) \cup \overline{\{x\}}.$$

Como V es abierto, E es cerrado en X, lo que lleva a que F también es cerrado en X. Además $E \neq \emptyset$ y $F \neq \emptyset$ y, ya que $x \in V \cap F$, se tiene $E \neq F$. Por lo tanto $E, F \in CL(X)$ y son distintos. En vista de que $(CL(X), \tau_F)$ es T_2, existen abiertos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en $(CL(X), \tau_F)$ tales que

$$E \in \mathcal{A}, \quad F \in \mathcal{B} \quad \text{y} \quad \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset.$$

Sin perder generalidad, podemos suponer que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son abiertos básicos en $(CL(X), \tau_F)$. Entonces

$$\mathcal{A} = \alpha^- \cap (X \setminus K_1)^+ \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \beta^- \cap (X \setminus K_2)^+,$$

donde $\alpha = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ y $\beta = \{W_1, W_2, \dots, W_m\}$ son familias finitas de subconjuntos abiertos y no vacíos de X, mientras que K_1 y K_2 son subconjuntos compactos de X.

Como $X \setminus V = E \in \mathcal{A}$, entonces $X \setminus V \subseteq X \setminus K_1$ por lo que $K_1 \subseteq V$. Igualmente $(X \setminus V) \cup \overline{\{x\}} = F \in \mathcal{B}$ así que, en particular, $X \setminus V \subseteq X \setminus K_2$. Luego $K_2 \subseteq V$, de donde $K_1 \cup K_2 \subseteq V$. También tenemos que $(X \setminus V) \cap U_i = E \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $F \cap W_j \neq \emptyset$, para toda $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Esto significa que, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, sucede que

$$\emptyset \neq F \cap W_j = [(X \setminus V) \cup \overline{\{x\}}] \cap W_j = [(X \setminus V) \cap W_j] \cup [\overline{\{x\}} \cap W_j].$$

Esto prueba que

$$(X \setminus V) \cap W_j \neq \emptyset \text{ o bien } \overline{\{x\}} \cap W_j \neq \emptyset, \text{ para cada } j \in \{1, 2, \dots, m\}. \tag{2.4}$$

Afirmamos ahora que

1) existe $j_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$ tal que $\overline{\{x\}} \cap W_{j_0} \neq \emptyset$.

Para probar 1) supongamos que, por el contrario, $\overline{\{x\}} \cap W_j = \emptyset$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Entonces, por (2.4), $(X \setminus V) \cap W_j \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Luego $E = X \setminus V \in \beta^-$. Como también $E \in (X \setminus K_2)^+$, sucede que $E \in \beta^- \cap (X \setminus K_2)^+ = \mathcal{A}$. Por tanto $E \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Como esto contradice el hecho de que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ajenos, 1) se cumple.

La misma demostración que hicimos para probar 1), muestra que existen algunos W_j tales que $(X \setminus V) \cap W_j = \emptyset$. Para dichos W_j, por (2.4), sucede que $\overline{\{x\}} \cap W_j \neq \emptyset$. Esto nos permite definir al conjunto

$$G = \bigcap \left\{ W_j \mid j \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ y } \overline{\{x\}} \cap W_j \neq \emptyset \right\}.$$

Sea $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $\overline{\{x\}} \cap W_j \neq \emptyset$. Como W_j es abierto en X, el Corolario 1.12 dice que $\{x\} \cap W_j \neq \emptyset$, así que $x \in W_j$. Como tenemos una cantidad finita de conjuntos W_j, esto implica que G es un subconjunto abierto de X tal que $x \in G$. En particular, G es una vecindad abierta de x. Sea $W = V \cap G$. Notemos que W es un abierto en X tal que $x \in W \subseteq V$.

Afirmamos que

2) para toda $y \in W$, sucede que $\overline{\{y\}} \cap (K_1 \cup K_2) \neq \emptyset$.

Para mostrar 2), supongamos que existe $y \in W$ tal que $\overline{\{y\}} \cap (K_1 \cup K_2) = \emptyset$, entonces $\overline{\{y\}} \cap K_1 = \emptyset = \overline{\{y\}} \cap K_2$. De tal modo $\overline{\{y\}} \subseteq X \setminus K_1$ y $\overline{\{y\}} \subseteq X \setminus K_2$. Notemos que $E \cup \overline{\{y\}} \in CL(X)$. Además, como $E \subseteq X \setminus K_1$, sucede que $E \cup \overline{\{y\}} \subseteq X \setminus K_1$. Esto muestra que $E \cup \overline{\{y\}} \in (X \setminus K_1)^+$. Como $E \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tenemos que $(E \cup \overline{\{y\}}) \cap U_i \neq \emptyset$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por tanto $E \cup \overline{\{y\}} \in \alpha^-$. Esto prueba que

$$E \cup \overline{\{y\}} \in \alpha^- \cap (X \setminus K_1)^+ = \mathcal{A}.$$

Notemos ahora que $E \cup \overline{\{y\}} \in X \setminus K_2$, por lo que $E \cup \overline{\{y\}} \in (X \setminus K_2)^+$. Notemos también que $y \in W = V \cap G$, así que $y \in G$. Consideremos un elemento $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Si $\overline{\{x\}} \cap W_j \neq \emptyset$, entonces W_j es uno de los intersectandos que definen a G, por lo que $G \subseteq W_j$. Esto implica que $y \in W_j$ y, por consiguiente, $(E \cup \overline{\{y\}}) \cap W_j \neq \emptyset$. Si sucede que $\overline{\{x\}} \cap W_j = \emptyset$ entonces, por (2.4), $E \cap W_j \neq \emptyset$. En este caso también deducimos que $(E \cup \overline{\{y\}}) \cap W_j \neq \emptyset$. Con esto hemos probado que $E \cup \overline{\{y\}} \in \beta^-$. Por tanto

$$E \cup \overline{\{y\}} \in \beta^- \cap (X \setminus K_2)^+ = \mathcal{B}.$$

Como consecuencia de esto $E \cup \overline{\{y\}} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. En vista de que esto contradice el hecho de que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son ajenos, 2) se cumple.

Para finalizar, definamos $K = W \cup (K_1 \cup K_2)$. Recordemos que W es un subconjunto abierto de X tal que $x \in W \subseteq V$. Recordemos también que $K_1 \cup K_2 \subseteq V$. Luego $K \subseteq V$, así que $x \in W \subseteq K \subseteq V$. Como K_1 y K_2 son subconjuntos compactos de X, resulta que $K_1 \cup K_2$ es un subconjunto compacto de X. Además W es un subconjunto de X tal que, por 2), para toda $y \in W$, sucede que $\overline{\{y\}} \cap (K_1 \cup K_2) \neq \emptyset$. Entonces, por el Teorema 1.22, K es compacto. Esto prueba que X es localmente compacto. □

La prueba del Teorema 2.27 está incluida en [7, Teorema 1, p. 114]. En dicho artículo, los autores utilizan redes para probar que el conjunto

$K = W \cup (K_1 \cup K_2)$, que definimos al final de la demostración, es compacto. Como hemos visto, no es necesario utilizar redes, pues basta con recurrir al Teorema 1.22.

Recordemos que, para un espacio topológico X,

$$K(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ es compacto en } X \text{ y } A \neq \emptyset\}.$$

Si X es T_2 o bien KC, entonces $K(X) \subseteq CL(X)$ (ver Proposición 1.18). Se sigue que a $K(X)$ le podemos dar la topología de Fell y la de Vietoris, las cuales denotaremos por τ_F y τ_V en lugar que $(\tau_F)_{|K(X)}$ y $(\tau_V)_{|K(X)}$, respectivamente. En [20, Teorema 4.9.12] se prueba el siguiente resultado.

Proposición 2.28. *Sea X un espacio topológico. Entonces X es localmente compacto y T_2 si y sólo si $(K(X), \tau_V)$ es localmente compacto y T_2.*

Como ya mostramos que $(2^X, \tau_F)$ es T_2 si X es localmente compacto, lo siguiente es preguntar si podemos obtener otros axiomas de separación y cuales son las condiciones que debemos buscar para obtener tales axiomas. El siguiente resultado responde esto.

Teorema 2.29. *Sea X un espacio topológico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) *X es localmente compacto.*

b) *$(2^X, \tau_F)$ es T_4.*

c) *$(CL(X), \tau_F)$ es $T_{3\frac{1}{2}}$.*

d) *$(CL(X), \tau_F)$ es T_2.*

Demostración. Supongamos que se cumple *a)*. La primera parte del Teorema 2.26 nos dice que $(2^X, \tau_F)$ es T_2 y compacto, por lo que $(2^X, \tau_F)$ es T_4. Esto prueba *b)*.

Ahora supongamos que *b)* se cumple. Entonces $(2^X, \tau_F)$ es T_4, por lo que también es $T_3\frac{1}{2}$. Como ser $T_3\frac{1}{2}$ se hereda a subespacios ([30, Teorema 14.10]), deducimos que $(CL(X), \tau_F)$ es $T_3\frac{1}{2}$. Esto prueba *c)*.

Como los espacios $T_3\frac{1}{2}$ son T_2, claramente *c)* implica *d)*. Mientras que el Teorema 2.27 muestra que *d)* implica *a)*. Esto termina la demostración. □

Es claro que a la lista de propiedades que aparecen en el Teorema 2.29, podemos agregar la afirmación de que $(CL(X), \tau_F)$ es T_3. El Teorema 2.29 aparece originalmente probado en [5], sustituyendo el inciso *b)* por la afirmación de que $(CL(X), \tau_F)$ es T_3. Con esa sustitución, el Teorema 2.29 aparece en [7, Teorema 1, p. 114].

Con la topología de Vietoris, en [20, Teoremas 4.9.8, 4.9.10 y 4.9.11], se prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.30. *Sea X un espacio topológico. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) X *es* T_2 *si y sólo si* $K(X)$ *es* T_2*.*

2) X *es* T_3 *si y sólo si* $K(X)$ *es* T_3*.*

3) X *es* $T_{3\frac{1}{2}}$ *si y sólo si* $K(X)$ *es* $T_{3\frac{1}{2}}$*.*

Determinar condiciones no métricas en X, bajo las cuales, el hiperespacio $CL(X)$ es T_4, es un problema no trivial, tanto para la topología de Vietoris, como para la topología de Fell. Con la topología de Vietoris se tiene el siguiente resultado (ver [14] y [15]).

Teorema 2.31. *Suponiendo cierta la hipótesis del continuo, si* X *es un espacio* T_2*, entonces* X *es compacto si y sólo si* $(CL(X), \tau_V)$ *es* T_4*.*

Con la topología de Fell, tenemos el siguiente resultado, cuya demostración puede verse en [11, Teorema 1, p. 2194].

Teorema 2.32. *Sea* X *un espacio* T_2*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) X *es localmente compacto y de Lindelöf.*

2) $(CL(X), \tau_F)$ *es de Lindelöf.*

3) $(CL(X), \tau_F)$ *es* T_4*.*

2.7. Axiomas de Numerabilidad

En la presente sección vamos a considerar algunos axiomas de numerabilidad para los espacios 2^X y $CL(X)$, cuando se consideran la topología de Vietoris y la de Fell. En [26, p. 25], R. E. Smithson construyó un espacio primero numerable, T_2 y compacto X tal que $(CL(X), \tau_V)$ no es primero numerable. Tenemos, por otro lado, el siguiente resultado.

Teorema 2.33. *Si X es un espacio T_1 y $(CL(X), \tau_V)$ es primero numerable, entonces X es primero numerable.*

Demostración. Como la primero numerabilidad se hereda a subespacios, es claro que si $(CL(X), \tau_V)$ es primero numerable, entonces $(F_1(X), \tau_V)$ es primero numerable. Ahora bien, como τ_V es admisible (Teorema 2.14), $(F_1(X), \tau_V)$ es homeomorfo a X. Luego X es primero numerable. □

Como en los espacios KC la topología de Fell es admisible (Proposición 2.14), la demostración dada anteriormente es válida si suponemos que X es KC y $(CL(X), \tau_F)$ es primero numerable. Así tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.34. *Si X es un espacio KC y $(CL(X), \tau_F)$ es primero numerable, entonces X es primero numerable.*

Naturalmente, el ejemplo de R. E. Smithson es un espacio X primero numerable tal que $(CL(X), \tau_F)$ no es primero numerable, pues X es compacto, T_2 y entonces $\tau_F = \tau_V$.

La situación para 2^X, con la topología de Fell, y la primero numerabilidad no es trivial e involucra la siguiente noción.

Definición 2.35. Sean X un espacio topológico y $E \subseteq X$. Decimos que E es *hemicompacto* si existe una sucesión $(K_n)_n$ de subconjuntos compactos de E tal que si K es un subconjunto compacto de E, entonces $K \subseteq K_n$, para alguna $n \in \mathbb{N}$.

En [5, Lema 3.1, p. 71] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.36. *Sea X un espacio T_2 tal que $(CL(X), \tau_F)$ es primero numerable. Entonces X es separable y cada subconjunto no vacío y abierto en X es hemicompacto.*

En [7, Lema 2, p. 117] se mejora un poco el resultado anterior, para incluir espacios que no necesariamente son T_2. El resultado obtenido es el siguiente.

Teorema 2.37. *Sea X un espacio tal que $(CL(X), \tau_F)$ es primero numerable. Entonces cada subconjunto no vacío, abierto y propio de X, es hemicompacto.*

Recordemos que un espacio topológico X es *σ-compacto* si X puede verse como la unión contable de subespacios compactos. Utilizando el Teorema 2.36 y la noción de conjunto *compactamente segundo numerable* ([5, Definición 3.2, p. 72]), en [5, Teorema 3.3, p. 72] G. Beer prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.38. *Sea X un espacio T_2. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1) $(2^X, \tau_F)$ *es primero numerable.*

2) $(CL(X), \tau_F)$ *es primero numerable.*

3) X *es localmente compacto, compactamente segundo numerable y cada subconjunto abierto de* X *es* σ*-compacto.*

El resultado anterior se mejora en [7, Teorema 5, p. 120]. En [7, Teorema 3, p. 117] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.39. *Sea X un espacio primero numerable. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) $(CL(X), \tau_F)$ *es primero numerable.*

2) Cada subconjunto cerrado de X *es separable y cada subconjunto no vacío, abierto y propio de* X, *es hemicompacto.*

Probar éstos y los otros resultados que aparecen en la Sección 3 de [7], e involucran la primero numerabilidad en 2^X y/o $CL(X)$ con la topología de Fell, alargaría el presente trabajo. Nuestra intención con respecto a la primero numerabilidad ha sido la de presentar algunos de los resultados que se conocen, dando las respectivas referencias para que el lector interesado en sus demostraciones las consulte.

Con respecto a la segundo numerabilidad con la topología de Fell, en [5, Teorema 3.4, p. 73] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.40. *Si* (X, τ) *es un espacio* T_2, *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $(2^X, \tau_F)$ *es segundo numerable;*

2) $(2^X, \tau_F)$ *es seudometrizable;*

3) $(2^X, \tau_F)$ *es metrizable;*

4) $(CL(X), \tau_F)$ *es segundo numerable*

5) $(CL(X), \tau_F)$ *es seudometrizable;*

6) $(CL(X), \tau_F)$ *es metrizable;*

7) X *es localmente compacto y segundo numerable;*

8) X *posee una métrica, compatible con* τ, *bajo la cual todos los subconjuntos cerrados y acotados de* X *son compactos.*

A continuación vamos a probar algunos resultados que involucran la segundo numerabilidad de 2^X y la de $CL(X)$, con la topología de Fell, sin considerar que X es T_2.

Teorema 2.41. *Si* X *es un espacio localmente compacto y segundo numerable, entonces* $(2^X, \tau_F)$ *es* T_2 *y segundo numerable.*

Demostración. Como X es localmente compacto, por el Teorema 2.26, $(2^X, \tau_F)$ es T_2. Veamos que también es segundo numerable. Como X es segundo numerable, X posee una base contable $\mathfrak{B}_X = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $V_n \in \mathfrak{B}_X$. Vamos a escribir a V_n como una unión contable de interiores de compactos. Para esto, tomemos un elemento $x \in V_n$. Por la compacidad local de X en x, existe una vecindad compacta K_x de x tal que $K_x \subseteq V_n$. Como K_x es vecindad de x, existe un abierto contenido en K_x que tiene a x. Puesto que $(K_x)^\circ$, el interior de K_x en X, es el abierto más grande contenido en K_x, obtenemos $x \in (K_x)^\circ \subseteq K_x \subseteq V_n$. Notemos que

$$V_n = \bigcup_{x \in V_n} (K_x)^\circ = \bigcup_{x \in V_n} K_x. \tag{2.5}$$

Observemos también que $\omega(X) \leq \aleph_0$ y que $\{(K_x)^\circ \colon x \in V_n\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X. Entonces, por la Proposición 1.14, existe $S_n = \{x_{n_m} \mid m \in \mathbb{N}\} \subseteq V_n$ tal que $|S_n| \leq \aleph_0$ y

$$\bigcup_{x \in V_n} (K_x)^\circ = \bigcup_{x \in S_n} (K_x)^\circ.$$

Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $|S_n| = \aleph_0$ y, para simplificar la notación, escribiremos K_{nm} en lugar de $K_{x_{n_m}}$. Hagamos $\mathcal{R}_n = \{K_{nm} \mid m \in \mathbb{N}\}$. Entonces

$$\bigcup_{x \in V_n} (K_x)^\circ = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (K_{nm})^\circ. \tag{2.6}$$

De (2.5) y (2.6) se infiere que

$$V_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (K_{nm})^\circ = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_{nm}. \tag{2.7}$$

Como S es contable, hemos escrito a V_n como una unión contable de interiores de compactos. Ahora bien, para demostrar que $(2^X, \tau_F)$ posee una base contable definimos

$$\mathcal{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_n = \{K_{nm} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

y

$$\mathcal{F} = \left\{\bigcup P \mid P \text{ es subconjunto finito de } \mathcal{R}\right\}.$$

Recordemos que $\mathfrak{B}_X = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una base para X. Definimos ahora

$$\mathfrak{B}_{2^X} = \{\alpha^- \cap (X \setminus K)^+ \mid \alpha \text{ es un subconjunto finito de } \mathfrak{B}_X \text{ y } K \in \mathcal{F}\}.$$

Notemos que $\mathcal{R}$ es una colección de subconjuntos compactos de X, con interior no vacío. Además, por definición, $\mathcal{F}$ tiene como elementos a una unión finita de conjuntos compactos. Por tanto si $K \in \mathcal{F}$, entonces K es un subconjunto compacto de X.

Claramente $\mathcal{R}$ es contable y, como $\mathcal{F}$ está definido como una unión de subconjuntos finitos de un contable, el Teorema 1.8 nos dice que hay una cantidad contable de subconjuntos finitos de $\mathcal{R}$. Por consiguiente, $\mathcal{F}$ también es contable. Como $\mathfrak{B}_X$ es contable, aplicando de nuevo el Teorema 1.8, resulta que hay una cantidad contable de subconjuntos finitos de $\mathfrak{B}_X$. Entonces la familia $\mathfrak{B}_{2^X}$ está determinada por intersecciones entre elementos de conjuntos contables, con lo cual, $\mathfrak{B}_{2^X}$ es contable. Es claro que cada elemento de $\mathfrak{B}_{2^X}$ es abierto en $(2^X, \tau_F)$.

Vamos a probar ahora que $\mathfrak{B}_{2^X}$ es una base de $(2^X, \tau_F)$. Sean $A \in 2^X$ y $\mathcal{O} = \{U_1, U_2, \ldots, U_p\}^- \cap (X \setminus H)^+$ un abierto básico de $(2^X, \tau_F)$ tal que $A \in \mathcal{O}$. Entonces $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son subconjuntos abiertos de X, mientras que H es un subconjunto compacto de X. Además $A \subseteq X \setminus H$ y $A \cap U_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Tomemos un elemento $a_i \in A \cap U_i$ para $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Como $\mathfrak{B}_X$ es una base de X y, para $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, U_i es un subconjunto abierto de X tal que $a_i \in U_i$, existe $B_i \in \mathfrak{B}_X$ de modo que $a_i \in B_i \subseteq U_i$. Claramente $\alpha = \{B_1, B_2, \ldots, B_p\}$ es un subconjunto finito de $\mathfrak{B}_X$. Además

$$A \in \alpha^- \subseteq \{U_1, U_2, \ldots, U_p\}^-. \tag{2.8}$$

Como $A \subseteq X \setminus H$, tenemos que $H \subseteq X \setminus A$. Afirmamos que

a) existe $K \in \mathcal{F}$ tal que $A \in (X \setminus K)^+ \subseteq (X \setminus H)^+$.

Para probar a) notemos que, al ser $\mathfrak{B}_X = \{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una base para X, el abierto $X \setminus A$ de X se puede escribir como una unión de elementos de $\mathfrak{B}_X$. Entonces existe un subconjunto J de $\mathbb{N}$ tal que $X \setminus A = \bigcup_{n \in J} V_n$. Ahora bien, por (2.7), para cada $n \in J$,

$$V_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (K_{nm})^\circ = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_{nm}.$$

Entonces con la unión de todos los elementos de la forma $(K_{nm})^\circ$, con $n \in J$, cubrimos a $X \setminus A$. También con la unión de todos los elementos de la forma K_{nm}, con $n \in J$, logramos cubrir a $X \setminus A$. En particular, como $H \subseteq X \setminus A$, para el conjunto compacto H sucede que $\mathcal{C} = \{(K_{nm})^\circ \mid n \in J \text{ y } m \in \mathbb{N}\}$ es una familia de abiertos en X tal que

$$H \subseteq \bigcup \{(K_{nm})^\circ \mid n \in J \text{ y } m \in \mathbb{N}\} = \bigcup \{K_{nm} \mid n \in J \text{ y } m \in \mathbb{N}\} = X \setminus A.$$

Entonces existe una subfamilia finita

$$\mathcal{C}_0 = \{(K_{n_1 m_1})^\circ, (K_{n_2 m_2})^\circ, \ldots, (K_{n_r m_r})^\circ\}$$

de $\mathcal{C}$ tal que

$$H \subseteq (K_{n_1 m_1})^\circ \cup (K_{n_2 m_2})^\circ \cup \cdots \cup (K_{n_r m_r})^\circ.$$

Hagamos $P = \{K_{n_1 m_1}, K_{n_2 m_2}, \ldots, K_{n_r m_r}\}$ y

$$K = K_{n_1 m_1} \cup K_{n_2 m_2} \cup \cdots \cup K_{n_r m_r}.$$

Entonces P es un subconjunto finito de $\mathcal{R}$ y $K \in \mathcal{F}$. Además $H \subseteq K$ por lo que $X \setminus K \subseteq X \setminus H$. Esto implica que $(X \setminus K)^+ \subseteq (X \setminus H)^+$. Ahora bien

$$K \subseteq \bigcup \{K_{nm} \mid n \in J \text{ y } m \in \mathbb{N}\} = X \setminus A,$$

por lo que $A \subset X \setminus K$. Esto implica que $A \in (X \setminus K)^+$ y, de esta manera, a) se cumple.

Usando (2.8) y a) tenemos que

$$A \in \alpha^- \cap (X \setminus K)^+ \subseteq \{U_1, U_2 \ldots, U_p\}^- \cap (X \setminus H)^+ = \mathcal{O}.$$

Como $\alpha^- \cap (X \setminus K)^+ \in \mathfrak{B}_{2^X}$ hemos probado así que $\mathfrak{B}_{2^X}$ es una base de $(2^X, \tau_F)$. Esto termina la demostración. $\square$

Supongamos que X es localmente compacto y segundo numerable. Entonces, por el Teorema 2.41, $(2^X, \tau_F)$ es T_2 y segundo numerable. Como el axioma de separación T_2 y la segundo numerabilidad son propiedades hereditarias, sucede que $(CL(X), \tau_F)$ es T_2 y segundo numerable. En el siguiente resultado vemos que el recíproco también es cierto.

Teorema 2.42. *Un espacio topológico X es localmente compacto y segundo numerable si y sólo si $(CL(X), \tau_F)$ es T_2 y segundo numerable.*

Demostración. Si X es localmente compacto y segundo numerable entonces, como ya hicimos ver, $(CL(X), \tau_F)$ es T_2 y segundo numerable. Supongamos ahora que $(CL(X), \tau_F)$ es T_2 y segundo numerable. Como $(CL(X), \tau_F)$ es T_2, por el Teorema 2.29, X es localmente compacto. Vamos a probar ahora que X es segundo numerable. Para esto, recordemos que $(CL(X), \tau_F)$ tiene como base a la familia

$$\begin{aligned}\mathcal{C} = \{\alpha^- \cap (X \setminus K)^+ \mid \alpha &\text{ es una colección finita de abiertos de } X \\ &\text{y } K \text{ es un subconjunto compacto de } X\}.\end{aligned}$$

Dada la segunda numerabilidad de $(CL(X), \tau_F)$, el peso del espacio es menor o igual a $\aleph_0$. Luego, por la Proposición 1.15, existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{B}$ es una base de $(CL(X), \tau_F)$ y la cardinalidad de $\mathcal{B}$ es menor o igual a $\aleph_0$. Sin perder generalidad, podemos escribir a la familia $\mathcal{B}$ como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} = \{\alpha_i^- \cap (X \setminus K_i)^+ \mid i \in \mathbb{N},\ &\text{cada } \alpha_i \text{ es una colección finita} \\ &\text{de abiertos en } X \text{ y cada } K_i \text{ es un subconjunto compacto de } X\}.\end{aligned}$$

Definimos $\mathcal{V} = \bigcup\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\mathcal{V}$ tiene como elementos a los miembros de cada familia finita α_i. Como toda unión contable de conjuntos finitos es contable, $\mathcal{V}$ es contable. Sea

$$\mathcal{F} = \left\{\bigcap \alpha \mid \alpha \text{ es subconjunto finito de } \mathcal{V}\right\}.$$

Como $\mathcal{V}$ es contable, el Teorema 1.8 nos dice que hay una cantidad contable de subconjuntos finitos de $\mathcal{V}$. Cada uno de ellos determina una intersección, por lo que $\mathcal{F}$ es contable. Notemos que cada elemento de $\mathcal{F}$ es abierto en X. Vamos a probar ahora que $\mathcal{F}$ es una base para X. Para esto, tomemos un elemento $x \in X$ y un abierto O de X tales que $x \in O$.

Supongamos primero que $O = X$. Como $\overline{\{x\}}$ es un cerrado no vacío de X, $X^+ = \{A \in CL(X) \mid A \subseteq X\} = CL(X)$ es un abierto en $(CL(X), \tau_F)$

que tiene a $\overline{\{x\}}$ y $\mathcal{B}$ es una base de $(CL(X), \tau_F)$, existe $\alpha_i^- \cap (X \setminus K_i)^+ \in \mathcal{B}$ tal que $\overline{\{x\}} \in \alpha_i^- \cap (X \setminus K_i)^+$. Entonces $\overline{\{x\}} \cap V \neq \emptyset$ para todo $V \in \alpha_i$. Usando el Corolario 1.12 deducimos que $x \in V$, para cada $V \in \alpha_i$. Entonces $x \in \bigcap \alpha_i \subseteq X = O$. Notemos que al ser α_i una colección finita de abiertos, la intersección $\bigcap \alpha_i$ también es un abierto de X y, al ser α_i un subconjunto finito de $\mathcal{V}$, tenemos que $\bigcap \alpha_i \in \mathcal{F}$. De esta manera, cuando $O = X$, hemos encontrado un elemento $A \in \mathcal{F}$ tal que $x \in A \subseteq O$.

Supongamos ahora que $O \neq X$. Como O es un abierto de X y es distinto de X, entonces los conjuntos $X \setminus O$ y $(X \setminus O) \cup \overline{\{x\}}$ son dos elementos de $CL(X)$, es decir dos subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Además, como $x \in O$ sucede que $X \setminus O \neq (X \setminus O) \cup \overline{\{x\}}$. Como $(CL(X), \tau_F)$ es T_2 y $\mathcal{B}$ es una base de $(CL(X), \tau_F)$, existen $i, j \in \mathbb{N}$ tales que:

$$X \setminus O \in \alpha_i^- \cap (X \setminus K_i)^+ \in \mathcal{B}, \quad (X \setminus O) \cup \overline{\{x\}} \in \alpha_j^- \cap (X \setminus K_j)^+ \in \mathcal{B}$$

y

$$(\alpha_i^- \cap (X \setminus K_i)^+) \cap (\alpha_j^- \cap (X \setminus K_j)^+) = \emptyset. \tag{2.9}$$

Notemos que α_i y α_j son colecciones finitas de subconjuntos abiertos de X. Además K_i y K_j son subconjuntos compactos de X. También $X \setminus O \subseteq X \setminus K_i$ y $(X \setminus O) \cup \overline{\{x\}} \subseteq X \setminus K_j$. En particular $X \setminus O \subseteq X \setminus K_j$, por lo que $X \setminus O \in (X \setminus K_j)^+$. Si $(X \setminus O) \cap W \neq \emptyset$ para cada $W \in \alpha_j$, entonces $X \setminus O \in \alpha_j^-$. Luego

$$X \setminus O \in (\alpha_i^- \cap (X \setminus K_i)^+) \cap (\alpha_j^- \cap (X \setminus K_j)^+).$$

Como esto contradice (2.9), existe $W_s \in \alpha_j$ tal que $(X \setminus O) \cap W_s = \emptyset$. Luego $X \setminus O \subseteq X \setminus W_s$, por lo que $W_s \subseteq O$. Ahora bien, como $(X \setminus O) \cup \overline{\{x\}} \in \alpha_j^-$, sucede que $((X \setminus O) \cup \overline{\{x\}}) \cap W_s \neq \emptyset$. Luego $\overline{\{x\}} \cap W_s \neq \emptyset$, pues $(X \setminus O) \cap W_s = \emptyset$. El Corolario 1.12 nos dice que $x \in W_s$. Tenemos, con todo, que W_s es un elemento de α_j tal que $x \in W_s \subseteq O$. Hagamos $\alpha = \{W_s\}$. Entonces α es un subconjunto finito de $\mathcal{V}$, por lo que $\bigcap \alpha = W_s$ es un elemento de $\mathcal{F}$. De esta manera, cuando $O \neq X$, hemos encontrado un elemento $W_s \in \mathcal{F}$ tal que $x \in W_s \subseteq O$.

De los dos casos anteriores se deduce que $\mathcal{F}$ es una base para $(CL(X), \tau_F)$. Esto prueba que $(CL(X), \tau_F)$ es segundo numerable. □

El Teorema 2.42 indica que la equivalencia mostrada entre las afirmaciones *4)* y *7)* del Teorema 2.40 se mantiene cierta en general, es decir sin suponer que X es T_2. Hasta donde hemos podido investigar, el Teorema 2.42 aparece por primera vez en este trabajo.

El siguiente resultado que presentamos, aparece originalmente en [7, Teorema 6, p. 120] y requiere de la siguiente definición.

Definición 2.43. Un *espacio polaco* es un espacio topológico no vacío y separable que puede metrizarse con una métrica completa, es decir una en la que toda sucesión de Cauchy es convergente.

Todo espacio métrico y compacto es polaco ([9, Teorema 4.3.28, p. 275]). Más aún, por [8, Corolario 2.4, p. 292], todo espacio localmente compacto, metrizable y separable es polaco. Utilizaremos este resultado en la demostración del siguiente teorema.

Teorema 2.44. *Sea X un espacio topológico no vacío. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

1) X es localmente compacto y segundo numerable.

2) $(2^X, \tau_F)$ es T_2 y segundo numerable.

3) $(2^X, \tau_F)$ es separable y metrizable.

4) $(CL(X), \tau_F)$ es un espacio polaco.

Demostración. Si *1)* es cierto entonces, por el Teorema 2.41, *2)* se cumple. Así *1)* implica *2)*.

Ahora supongamos que *2)* es cierto. Entonces $(2^X, \tau_F)$ es T_2 y segundo numerable. Por el Teorema 2.18, $(2^X, \tau_F)$ es compacto. Luego $(2^X, \tau_F)$ es compacto y T_2, por lo que es T_4. En particular, $(2^X, \tau_F)$ es T_3 y, por ende, también es regular. Tenemos así que $(2^X, \tau_F)$ es un espacio segundo numerable y regular. Luego, por el Teorema de Metrización de Urysohn (Teorema 1.35), $(2^X, \tau_F)$ es separable y metrizable. Esto termina la demostración de que *2)* implica *3)*.

Supongamos ahora que *3)* es cierto. Como $(2^X, \tau_F)$ es metrizable, en particular es T_2. Además, por el Teorema 2.18, $(2^X, \tau_F)$ es compacto. Entonces $(2^X, \tau_F)$ es un espacio compacto y T_2 y, por consiguiente, es localmente compacto. Ahora bien, como $(2^X, \tau_F)$ es T_1, el conjunto $\{\emptyset\}$ es cerrado en $(2^X, \tau_F)$. Luego su complemento en 2^X es abierto en $(2^X, \tau_F)$. Esto significa que $(CL(X), \tau_F)$ es un subespacio abierto del espacio localmente compacto

$(2^X, \tau_F)$. Entonces $(CL(X), \tau_F)$ es localmente compacto ([8, Teorema 6.5, p. 239]). Como la metrizabilidad se hereda a subespacios y la separabilidad se hereda a subespacios abiertos, tenemos que $(CL(X), \tau_F)$ es un espacio localmente compacto, metrizable y separable, así que es un espacio polaco. Esto prueba que *3)* implica *4)*.

Supongamos, por último, que *4)* es cierto. Entonces $(CL(X), \tau_F)$ es un espacio polaco. En particular $(CL(X), \tau_F)$ es metrizable y separable. Por el Teorema 1.34, $(CL(X), \tau_F)$ es segundo numerable y como es metrizable, en particular es T_2. Entonces $(CL(X), \tau_F)$ es T_2 y segundo numerable. Luego, por el Teorema 2.42, X es localmente compacto y segundo numerable. Esto prueba que *4)* implica *1)*. □

Terminamos la sección con el siguiente resultado, el cual combina lo enunciado en los teoremas 2.41 y 2.42.

Teorema 2.45. *Si X es localmente compacto y segundo numerable, entonces los hiperespacios $(2^X, \tau_F)$ y $(CL(X), \tau_F)$ son T_2, localmente compactos y segundo numerables.*

Demostración. Como X es localmente compacto, por el Teorema 2.26, $(CL(X), \tau_F)$ es localmente compacto y T_2. Utilizando ahora el Teorema 2.42, deducimos que $(CL(X), \tau_F)$ también es segundo numerable.

En el caso de $(2^X, \tau_F)$, por el Teorema 2.18, $(2^X, \tau_F)$ es compacto. Usando el Teorema 2.41, se sigue que $(2^X, \tau_F)$ también es segundo numerable y T_2. Entonces $(2^X, \tau_F)$ es compacto y T_2, así que es localmente compacto. □

2.8. Propiedades de Conexidad

El objetivo de esta sección es encontrar condiciones simples que pedirle a X, para garantizar que los hiperespacios 2^X y $CL(X)$ sean conexos con la topología de Fell. Para el caso de la topología de Vietoris, las condiciones que se piden son en realidad, muy sencillas. Para mostrar esto consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la familia

$$F_n(X) = \{A \subseteq X \mid 1 \leq |A| \leq n\}.$$

Cuando X es T_1, sucede que $F_n(X) \subseteq CL(X)$, por lo que en $F_n(X)$ podemos considerar la topología de Vietoris, que denotamos por τ_V, en lugar de $(\tau_V)_{|F_n(X)}$. Definimos ahora

$$F(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X).$$

Entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.46. *Supongamos que X es un espacio T_1 y conexo. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) $F_n(X)$ es conexo, para cada $n \in \mathbb{N}$;

2) $F(X)$ es un subconjunto conexo de $CL(X)$ y denso en $CL(X)$;

3) $(CL(X), \tau_V)$ es conexo.

Demostración. Supongamos que X es T_1 y que $n \in \mathbb{N}$. Consideremos la función $f_n \colon X^n \to F_n(X)$ definida, para cada $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$, como

$$f_n((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Es fácil ver que f_n es suprayectiva. Por el Teorema 2.9, una subbase para $(F_n(X), \tau_V)$ es la familia

$$\mathcal{S}_n = \{U^- \cap F_n(X) \mid U \text{ es abierto en } X\} \cup \{V^+ \cap F_n(X) \mid V \text{ es abierto en } X\},$$

donde

$$U^- \cap F_n(X) = \{A \in F_n(X) \mid A \cap U \neq \emptyset\}$$

y

$$V^+ \cap F_n(X) = \{A \in F_n(X) \mid A \subset V\}.$$

Sea U un abierto en X. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sea $U_i = \prod_{j=1}^{n} B_j$, donde $B_i = U$ y $B_j = X$ para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$. Es claro que cada U_i es un abierto en el producto cartesiano X^n. Hagamos $W = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Notemos que W es un abierto en X^n. Vamos a demostrar que

$$f_n^{-1}(U^- \cap F_n(X)) = W.$$

Para ver esto, sea $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in f_n^{-1}(U^- \cap F_n(X))$. Entonces

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = f_n((x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in U^- \cap F_n(X),$$

por lo que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cap U \neq \emptyset$. Esto implica que existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x_i \in U$, por lo que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U_i \subset W$. De esta manera $f_n^{-1}(U^- \cap F_n(X)) \subseteq W$. Si suponemos ahora que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in W$, entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U_i$. Por tanto $x_i \in U$. Esto implica que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cap U \neq \emptyset$, por lo que $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in f_n^{-1}(U^- \cap F_n(X))$. Luego $W \subseteq f_n^{-1}(U^- \cap F_n(X))$, así que $f_n^{-1}(U^- \cap F_n(X)) = W$.

Hasta el momento hemos demostrado que, para cada abierto subbásico de $(F_n(X), \tau_V)$ de la forma $U^- \cap F_n(X)$, con U abierto en X, su imagen inversa bajo f_n es un abierto en el producto cartesiano X^n. Vamos a probar que lo mismo sucede para los abiertos subbásicos de $(F_n(X), \tau_V)$, que son de la forma $V^+ \cap F_n(X)$, con V abierto en X. Tomemos entonces un abierto V en X. Entonces V^n es abierto en X^n. Además

$$\begin{aligned} f_n^{-1}(V^+ \cap F_n(X)) &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid f_n((x_1, \ldots, x_n)) \in V^+ \cap F_n(X)\} \\ &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n \mid \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in V^+ \cap F_n(X)\} \\ &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n \mid \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq V\} = V^n. \end{aligned}$$

Esto prueba que $f_n^{-1}(V^+ \cap F_n(X))$ es abierto en X^n. Por tanto $f_n \colon X^n \to F_n(X)$ es una función continua.

A partir de este momento, supongamos que X es T_1 y conexo. Como X es conexo, el producto cartesiano X^n es conexo. Además $F_n(X) = f_n(X^n)$ y f_n es una función continua, por lo que $F_n(X)$ es conexo. Esto prueba *1)*.

Para el segundo enunciado, por definición $F(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$ así que, de acuerdo con *1)*, $F(X)$ es una unión de subconjuntos conexos de $CL(X)$. Como $\emptyset \neq F_1(X) \subset F_n(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, sucede que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n(X) \neq \emptyset$. Por tanto, $F(X)$ es conexo. Para ver que es denso en $(CL(X), \tau_V)$, sea $\mathcal{U}$ un abierto no vacío en $(CL(X), \tau_V)$. Tomemos un elemento $A \in \mathcal{U}$ y un abierto básico $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$ en $(CL(X), \tau_V)$, tales que

$$A \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle \subseteq \mathcal{U}.$$

Entonces U_i es abierto y no vacío en X, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Dada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, tomemos un elemento $x_i \in U_i$. Entonces $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \in F_m(X) \subset F(X)$ y, además, $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \in \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle \subseteq \mathcal{U}$. Entonces $\mathcal{U} \cap F(X) \neq \emptyset$. Esto prueba que $F(X)$ es denso en $(CL(X), \tau_V)$ y, así, *2)* es cierto.

Finalmente, de acuerdo con *2)*, $Cl_{CL(X)}(F(X)) = CL(X)$. Además, por *2)* mismo, $F(X)$ es conexo. Como la cerradura de un conjunto conexo es conexa, se sigue que $(CL(X), \tau_V)$ es conexo. Esto prueba *3)*. □

En [20, Teorema 4.10, p. 165] se extiende el Teorema 2.46 de modo que podemos concluir el siguiente resultado.

Teorema 2.47. *Sean X un espacio T_1 y $\mathcal{E}$ tal que $F(X) \subseteq \mathcal{E} \subseteq CL(X)$. Si es conexo alguno de los espacios X, $\mathcal{E}$ o $F_n(X)$ (para alguna $n \in \mathbb{N}$),* *entonces todos los espacios X, $\mathcal{E}$ y $F_n(X)$ (para cada $n \in \mathbb{N}$) son conexos, considerando en $\mathcal{E}$ y en cada $F_n(X)$ la topología τ_V.*

Del Teorema 2.47 se sigue que si X es T_1 y $(CL(X), \tau_V)$ es conexo, entonces X es conexo. Combinando este resultado con el Teorema 2.46, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.48. *Sea X un espacio T_1. Entonces X es conexo si y sólo si $(CL(X), \tau_V)$ es conexo.*

Ahora vamos a considerar la conexidad de los hiperespacios, cuando se considera la topología de Fell. Comenzamos con el siguiente resultado.

Proposición 2.49. *Sea X un espacio KC. Si X es conexo, entonces el hiperespacio $(CL(X), \tau_F)$ es conexo.*

Demostración. Como X es KC, en particular, X es T_1. Si X es además conexo, entonces X es T_1 y conexo. Luego, por el Teorema 2.48, $(CL(X), \tau_V)$ es conexo. Ahora bien, como X es KC, el Teorema 2.12 indica que $\tau_F \subseteq \tau_V$. Esto implica que $(CL(X), \tau_F)$ es conexo. En efecto, si no es así, entonces existen dos abiertos no vacíos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ en $(CL(X), \tau_F)$ tales que $CL(X) = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ y $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Como $\tau_F \subseteq \tau_V$, $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son abiertos no vacíos en $(CL(X), \tau_V)$ cuya unión es $CL(X)$ y cuya intersección es vacía. Luego $(CL(X), \tau_V)$ no es conexo, lo cual es una contradicción. Por tanto, $(CL(X), \tau_F)$ es conexo. □

Podríamos pensar que si X es T_1 y conexo entonces, como sucede con la topología de Vietoris, el hiperespacio $(CL(X), \tau_F)$ es conexo. Esto no es así, tal y como hacemos ver en el siguiente resultado. Recordemos que un espacio topológico es *hereditariamente compacto* si todos sus subespacios son compactos.

Teorema 2.50. *Existe un espacio topológico (X, τ) con las siguientes propiedades:*

1) (X, τ) es T_1, conexo, hereditariamente compacto y no es KC;

2) en $CL(X)$ tenemos que $\tau_V \subseteq \tau_F$ y $\tau_F \nsubseteq \tau_V$;

3) $(CL(X), \tau_V)$ es conexo y $(CL(X), \tau_F)$ no es conexo.

Demostración. Supongamos que (X, τ) es un espacio topológico tal que X es infinito y τ es la topología del complemento finito, es decir,

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset X \mid X \setminus A \text{ es finito}\}.$$

Entonces (X, τ) es T_1 pues, para $x \in X$, el complemento $X \setminus \{x\}$ de $\{x\}$ es abierto, justo porque $X \setminus (X \setminus \{x\}) = \{x\}$ es finito. Entonces $\{x\}$ es cerrado en (X, τ), para cada $x \in X$. Esto prueba que (X, τ) es T_1. También (X, τ) es conexo. Para ver esto, supongamos que (X, τ) no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos abiertos y no vacíos U y V de (X, τ) tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Entonces $X \setminus U$ y $X \setminus V$ son dos subconjuntos finitos de X tales que $(X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X$. Luego X es finito. Como esto es una contradicción, (X, τ) es conexo.

Para ver que (X, τ) es hereditariamente compacto sean $A \subseteq X$ y $\mathcal{U} = \{U_s \colon s \in S\}$ una familia de abiertos en (X, τ) tales que $A \subset \bigcup_{s \in S} U_s$. Tomemos un elemento $a \in A$ y $s_0 \in S$ tales que $a \in U_{s_0}$. Entonces $X \setminus U_{s_0}$ es finito. En particular $(X \setminus U_{s_0}) \cap A$ es finito y, como cada elemento de dicho conjunto se encuentra en un miembro de $\mathcal{U}$, deducimos que A puede ser cubierto con una cantidad finita de elementos de $\mathcal{U}$. Luego A es compacto. Esto prueba que (X, τ) es hereditariamente compacto.

Consideremos un punto $p \in X$ y el conjunto infinito $A_p = X \setminus \{p\}$. Como (X, τ) es hereditariamente compacto, A_p es compacto. Si A_p es cerrado, entonces $X \setminus A_p = \{p\}$ es abierto. Luego $X \setminus \{p\} = A_p$ es finito. Como esto es una contradicción, A_p no es cerrado en (X, τ). Por tanto, (X, τ) no es KC. Esto termina la prueba de *1)*.

Ahora bien, como (X, τ) es T_1 y conexo, por el Teorema 2.48, $(CL(X), \tau_V)$ es conexo.

Como (X, τ) es compacto, por el Teorema 2.12, en 2^X sucede que $\tau_V \subseteq \tau_F$. Dicha contención se mantiene en $CL(X)$. Supongamos que B es un subconjunto no vacío de X, abierto en X y tal que $B \neq X$ (B puede ser, por ejemplo, el conjunto A_p que definimos antes). Como (X, τ) es hereditariamente compacto, B es compacto. Luego $(X \setminus B)^+ \cap CL(X) \in \tau_F$. Como B es abierto en (X, τ), el conjunto $X \setminus B$ es finito. Además

$$(X \setminus B)^+ \cap CL(X) = \{A \in CL(X) \mid A \subseteq X \setminus B\}.$$

Notemos que $X \notin (X \setminus B)^+ \cap CL(X)$. Por tanto $(X \setminus B)^+ \cap CL(X)$ es un subconjunto propio de $CL(X)$. También $(X \setminus B)^+ \cap CL(X) \neq \emptyset$ pues si $a \in X \setminus B$, entonces $\{a\} \in CL(X)$ y $\{a\} \subseteq X \setminus B$. Supongamos que $(X \setminus B)^+ \cap CL(X) \in \tau_V$. Como $X \setminus B$ es cerrado en X, por el Teorema 2.10, el conjunto $\{A \in CL(X) \mid A \subseteq X \setminus B\}$ es cerrado en $(CL(X), \tau_V)$. Entonces $(X \setminus B)^+ \cap CL(X)$ resulta ser un subconjunto no vacío y propio de $CL(X)$, que es tanto abierto como cerrado en el espacio conexo $(CL(X), \tau_V)$. Esto es una contradicción. Por tanto $(X\setminus B)^+\cap CL(X)$ no es abierto en $(CL(X),\tau_V)$. Esto muestra que $(X\setminus B)^+\cap CL(X)\in\tau_F\setminus\tau_V$, por lo que $\tau_F\nsubseteq\tau_V$. Así *2)* se cumple.

Para terminar la prueba de *3)*, basta mostrar que $(CL(X),\tau_F)$ no es conexo. Supongamos, como antes, que B es un subconjunto no vacío de X, abierto en X y tal que $B\neq X$. Entonces

$$B^-\cap CL(X)=\{A\in CL(X)\mid A\cap B\neq\emptyset\}$$

es un abierto en $(CL(X),\tau_F)$. Como $B\neq\emptyset$, si $a\in B$, entonces $\{a\}\in CL(X)$ y $\{a\}\cap B\neq\emptyset$. Por tanto $B^-\cap CL(X)\neq\emptyset$. Como $B\neq X$, para un elemento $c\in X\setminus B$ se tiene que $\{c\}\in CL(X)$ y $\{c\}\cap B=\emptyset$. Luego $B^-\cap CL(X)\neq CL(X)$. Como (X,τ) es hereditariamente compacto, B es compacto. Luego $(X\setminus B)^+\cap CL(X)$ es abierto en $(CL(X),\tau_F)$. Además

$$\begin{aligned}CL(X)\setminus(B^-\cap CL(X))&=\{A\in CL(X)\mid A\cap B=\emptyset\}=\\&=\{A\in CL(X)\mid A\subseteq X\setminus B\}=(X\setminus B)^+\cap CL(X).\end{aligned}$$

Por tanto $B^-\cap CL(X)$ es cerrado en $(CL(X),\tau_F)$. Hemos demostrado, así, que $B^-\cap CL(X)$ es un subconjunto no vacío y propio de $CL(X)$, que es tanto abierto como cerrado en $(CL(X),\tau_F)$. Esto muestra que $(CL(X),\tau_F)$ no es conexo y termina la demostración de *3)*. □

Del Teorema 2.50 se sigue que la hipótesis de que X es un espacio KC, dada en la Proposición 2.49, es esencial.

Regresando a la Proposición 2.49, al mostrar que $(CL(X),\tau_F)$ es conexo, podríamos pensar que $(2^X,\tau_F)$ debería ser conexo solicitando algo no tan alejado de lo que le pedimos a $CL(X)$. Sin embargo nuestra siguiente proposición, que originalmente aparece en [7, Proposición 4, p. 123], nos expone que las condiciones se endurecen bastante en el caso de los cerrados que incluyen al vacío.

Proposición 2.51. *Sea X un espacio conexo y KC. Entonces $(2^X,\tau_F)$ es conexo si y sólo si X no es compacto.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que X es compacto. Entonces en $(2^X,\tau_F)$ el conjunto $(X\setminus X)^+=\emptyset^+=\{\emptyset\}$ es abierto. Por otro lado, la Proposición 2.25 nos dice que $(2^X,\tau_F)$ es T_1. Por tanto, el unitario $\{\emptyset\}$ es un cerrado de $(2^X,\tau_F)$. De esta manera $\{\emptyset\}$ es un subconjunto propio y no vacío de 2^X, que es tanto abierto como cerrado en $(2^X,\tau_F)$. Luego $(2^X,\tau_F)$ no es conexo. Como esto es una contradicción, deducimos que X no es compacto.

$\Leftarrow$] Supongamos que X no es compacto. Vamos a probar que $CL(X)$ es denso en $(2^X, \tau_F)$. Sea $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^- \cap (X \setminus K)^+$ un abierto básico no vacío de $(2^X, \tau_F)$. Entonces cada U_i es abierto en X y K es compacto. Entonces $K \neq X$, por lo que $(X \setminus K)^+ \neq \emptyset^+ = \{\emptyset\}$. Esto implica que existe un elemento en $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}^- \cap (X \setminus K)^+$ que se encuentra en $CL(X)$. De esta manera se prueba que $CL(X)$ es denso en $(2^X, \tau_F)$. Ahora bien, como X es KC y conexo, por la Proposición 2.49, $(CL(X), \tau_F)$ es conexo. Entonces $2^X = Cl_{2^X}(CL(X))$ es conexo. $\square$

Supongamos que X es un espacio conexo y KC. Entonces, por la Proposición 2.51, la conexidad del hiperespacio $(2^X, \tau_F)$ es obtenida de la no compacidad de X. Ahora vamos a mostrar que si X es un espacio T_1, la conexidad del hiperespacio $(2^X, \tau_F)$ es obtenida de la conexidad de cada hiperespacio $(2^Y, \tau_F)$, donde Y es una componente conexa de X. Para probar esto necesitamos de algunos resultados y observaciones previos. Primero, si X es un espacio topológico y Y es una componente conexa de X, entonces Y es cerrado en X. Por tanto, $2^Y \subseteq 2^X$.

A menos que digamos lo contrario, en lo que resta de la presente sección, vamos a considerar que, para cada espacio topológico Z, 2^Z y $CL(Z)$ tienen la topología de Fell τ_F. Recordemos que si $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ es una familia de espacios topológicos ajenos dos a dos, entonces la *suma* de dichos espacios, denotada por $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$, es el conjunto $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ con la topología τ definida como sigue: un subconjunto U de $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ se encuentra en τ si y sólo si $U \cap X_i$ es abierto en X_i, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Es conocido que un subconjunto A de $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ es cerrado en $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ si y sólo si $A \cap X_i$ es cerrado en X_i, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ([9, Proposición 2.2.1, p. 74]). Por tanto, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, X_i es abierto y cerrado en $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$.

De [9, Teorema 3.2.3, p. 138] se infiere que $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ es compacto si y sólo si X_i es compacto, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Utilizando este resultado y [9, Proposición 2.2.3, p. 74], se sigue que un subespacio K de $X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$ es compacto si y sólo si $K \cap X_i$ es compacto, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ justo porque $K = (K \cap X_1) \oplus (K \cap X_2) \oplus \cdots \oplus (K \cap X_n)$.

Los lemas 2.52 y 2.54, que presentamos a continuación, aparecen en [7, Lema 8 y Lema 9, p. 123].

Lema 2.52. *Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una familia de espacios topológicos ajenos dos a dos. Supongamos que $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$.*

Entonces la función

$$\phi_n\colon CL(X_1) \times CL(X_2) \times \cdots \times CL(X_n) \to CL(X)$$

definida, para cada $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in CL(X_1) \times CL(X_2) \times \cdots \times CL(X_n)$, *como*

$$\phi_n(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

está bien definida y es continua.

Demostración. Para simplificar la notación, hagamos

$$\mathcal{C} = CL(X_1) \times CL(X_2) \times \cdots \times CL(X_n).$$

Tomemos un punto $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{C}$. Dada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, el conjunto A_i es cerrado y no vacío en X_i. Como X_i es cerrado en X, sucede que A_i es cerrado y no vacío en X. Entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es una unión finita de subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Luego, dicha unión es cerrada y no vacía. Esto muestra que $\phi_n(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in CL(X)$, así que ϕ_n está bien definida.

Para ver que ϕ_n es continua, haremos ver que la imagen inversa, bajo ϕ_n de cada abierto subbásico de $CL(X)$, es un abierto en $\mathcal{C}$. Supongamos primero que V es un abierto en X. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ hagamos $V_i = V \cap X_i$,

$$\mathcal{V}_i = CL(X_1) \times \cdots \times CL(X_{i-1}) \times V_i^- \times CL(X_{i+1}) \times \cdots \times CL(X_n)$$

y $\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}_i$. Como V es abierto en X, tenemos que V_i es abierto en X_i. Luego V_i^- es abierto en $CL(X_i)$. Esto implica que $\mathcal{V}_i$ es abierto en $\mathcal{C}$. Por lo tanto, $\mathcal{V}$ es abierto en $\mathcal{C}$. Vamos a probar que

$$\phi_n^{-1}(V^-) = \mathcal{V}.$$

Sea $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \phi_n^{-1}(V^-)$. Entonces $\phi_n(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in V^-$. Luego $\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \cap V \neq \emptyset$, por lo que $\bigcup_{j=1}^{n}(A_j \cap V) \neq \emptyset$. Sea $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $A_i \cap V \neq \emptyset$. Entonces

$$A_i \cap V_i = A_i \cap (V \cap X_i) = (A_i \cap X_i) \cap V = A_i \cap V \neq \emptyset.$$

Esto implica que $A_i \in V_i^-$. Luego $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{V}$. Hemos probado que $\phi_n^{-1}(V^-) \subseteq \mathcal{V}$.

Supongamos ahora que $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{V}$. Tomemos $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{V}_i$. Luego $A_i \in V_i^-$, por lo que

$$\emptyset \neq A_i \cap V_i = A_i \cap (V \cap X_i) = A_i \cap V,$$

es decir $A_i \cap V \neq \emptyset$. Luego $\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \cap V \neq \emptyset$, de donde $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \phi_n^{-1}(V^-)$. Esto prueba que $\mathcal{V} \subseteq \phi_n^{-1}(V^-)$. Por tanto, la imagen inversa bajo ϕ_n de todo abierto subbásico de $CL(X)$ de la forma V^-, con V abierto en X, es un abierto en $\mathcal{C}$.

Ahora sea K un subespacio compacto de X. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sea $K_i = K \cap X_i$. Entonces cada K_i es un subconjunto compacto de X_i, por lo que cada $(X_i \setminus K_i)^+$ es un subconjunto abierto de $CL(X_i)$. Esto implica que

$$\mathcal{H} = (X_1 \setminus K_1)^+ \times (X_2 \setminus K_2)^+ \times \cdots \times (X_n \setminus K_n)^+$$

es un subconjunto abierto de $\mathcal{C}$. Vamos a probar que

$$\phi_n^{-1}((X \setminus K)^+) = \mathcal{H}.$$

Para ver esto supongamos primero que $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \phi_n^{-1}((X \setminus K)^+)$. Entonces $\phi_n(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in (X \setminus K)^+$. Por tanto $\bigcup_{j=1}^n A_j \subseteq X \setminus K$. Dada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tenemos que $A_i \subseteq X \setminus K$ y $A_i \subseteq X_i$. Luego $A_i \cap K = \emptyset$, por lo que $A_i \cap K_i = A_i \cap (K \cap X_i) = (A_i \cap X_i) \cap K = A_i \cap K = \emptyset$. En consecuencia, $A_i \in (X_i \setminus K_i)^+$, de donde $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{H}$. Esto prueba que $\phi_n^{-1}((X \setminus K)^+) \subseteq \mathcal{H}$.

Supongamos ahora que $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathcal{H}$. Dada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tenemos que $A_i \in (X_i \setminus K_i)^+$, por lo que $\emptyset = A_i \cap K_i = A_i \cap K$. Por tanto $\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \cap K = \emptyset$. Esto implica que $\phi_n(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in (X \setminus K)^+$ o, lo que es lo mismo, que $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \phi_n^{-1}((X \setminus K)^+)$. Por tanto $\mathcal{H} \subseteq \phi_n^{-1}((X \setminus K)^+)$. Esto prueba que la imagen inversa, bajo ϕ_n, de todo abierto subbásico de $CL(X)$ de la forma $(X \setminus K)^+$, con K un subconjunto compacto de X, es abierto en $\mathcal{C}$. Por consiguiente, ϕ_n es una función continua. $\square$

El resultado presentado en el lema anterior es válido en el hiperespacio de los cerrados. Su enunciado queda como sigue.

Lema 2.53. *Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ y $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ una familia de espacios topológicos ajenos dos a dos. Supongamos que $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_n$. Entonces la función*

$$\phi_n \colon 2^{X_1} \times 2^{X_2} \times \cdots \times 2^{X_n} \to 2^X$$

definida, para cada $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in 2^{X_1} \times 2^{X_2} \times \cdots \times 2^{X_n}$*, como*

$$\phi_n(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

está bien definida, es continua y suprayectiva.

Demostración. La prueba de que ϕ_n está bien definida y es continua es similar a la la presentada en el Lema 2.52. Para ver que ϕ_n es suprayectiva, sea $A \in 2^X$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sea $A_i = A \cap X_i$. Entonces $A_i \in 2^{X_i}$ por lo que $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ es un elemento de $2^{X_1} \times 2^{X_2} \times \cdots \times 2^{X_n}$ tal que

$$\phi_n(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap X_i) = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i \right) = A \cap X = A.$$

Esto prueba que ϕ_n es suprayectiva. □

Lema 2.54. *Sea X un espacio T_1. Entonces la familia de todos los subconjuntos cerrados de X, que intersectan a lo más un número finito de componentes conexas de X, es densa en $(2^X, \tau_F)$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}$ es la familia de todos los subconjuntos cerrados de X, que intersectan a lo más un número finito de componentes conexas de X. Sea $\mathcal{U}$ un abierto básico y no vacío de $(2^X, \tau_F)$. Si el vacío es el único cerrado de X del que $\mathcal{U}$ es vecindad entonces, como $\emptyset \in \mathcal{A}$, sucede que $\mathcal{U} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Entonces podemos suponer que existe $A \in CL(X)$ tal que $\mathcal{U}$ es vecindad de A. Notemos que $\mathcal{U} = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}^- \cap (X \setminus K)^+$, donde cada V_i es abierto en X y K es un subconjunto compacto que X. Luego $A \subseteq X \setminus K$ y $A \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Podemos entonces tomar un punto $a_i \in A \cap V_i$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Sea $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Entonces $B \in CL(X)$, $B \cap V_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y, además $B \subseteq A \subseteq X \setminus K$. Luego $B \in \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}^- \cap (X \setminus K)^+ = \mathcal{U}$. Notemos que B intersecta a lo más n componentes conexas de X, por lo que $B \in \mathcal{A}$. Luego $\mathcal{U} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Esto prueba que $\mathcal{A}$ es denso en $(2^X, \tau_F)$. □

Estamos listos para probar el resultado mencionado en la página 67, que involucra la conexidad de 2^X y de 2^Y, donde Y es una componente conexa de X. En su demostración utilizaremos el hecho de que si $\{M_s \mid s \in S\}$ es una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico y, para cada $r, s \in S$ existe $t \in S$ tal que $M_t \cap M_r \neq \emptyset$ y $M_t \cap M_s \neq \emptyset$, entonces la unión $\bigcup_{s \in S} M_s$ es conexa.

Teorema 2.55. *Sea X un espacio T_1 tal que $(2^Y, \tau_F)$ es conexo para cada componente conexa Y de X. Entonces $(2^X, \tau_F)$ es conexo.*

Demostración. Notemos que el teorema que deseamos probar es trivial si X es conexo. Supondremos, por tanto, que X no es conexo. Afirmamos que

a) si X tiene un número finito de componentes conexas, entonces $(2^X, \tau_F)$ es conexo.

Para ver a), supongamos que $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ son las componentes conexas de X. Entonces X se puede escribir como la unión de la familia $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_m\}$ de subconjuntos abiertos de X, ajenos dos a dos. Luego, por [9, Proposición 2.2.4, p. 74], $X = Y_1 \oplus Y_2 \oplus \cdots \oplus Y_m$. Además, por hipótesis, 2^{Y_i} es conexo para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Por tanto $2^{Y_1} \times 2^{Y_2} \times \cdots \times 2^{Y_m}$ es conexo. Sea

$$\phi_m \colon 2^{Y_1} \times 2^{Y_2} \times \cdots \times 2^{Y_m} \to 2^X$$

la función definida, para cada $(A_1, A_2, \ldots, A_m) \in 2^{Y_1} \times 2^{Y_2} \times \cdots \times 2^{Y_m}$, como

$$\phi_m(A_1, A_2, \ldots, A_m) = \bigcup_{i=1}^{m} A_i.$$

Por el Lema 2.53, ϕ_m está bien definida, es continua y suprayectiva. Entonces

$$2^X = \phi_m\left(2^{Y_1} \times 2^{Y_2} \times \cdots \times 2^{Y_m}\right)$$

es la imagen continua de un conjunto conexo. Esto prueba a).

De a) se sigue que si Z es un espacio topológico con un número finito de componentes conexas, entonces 2^Z es conexo. También, por a), suponemos que X posee una cantidad infinita de componentes conexas. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{F}_n$ la colección de los subconjuntos cerrados de X que poseen exactamente n componentes conexas de X. Para toda $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, definimos

$$\mathcal{D}_n = \{F \in 2^X \mid F \text{ intersecta a lo más a } n \text{ componentes conexas de } X\}.$$

Supongamos que $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Afirmamos que

b) $\mathcal{D}_n = \bigcup_{Z \in \mathcal{F}_n} 2^Z$.

Para probar lo anterior, sea $F \in \mathcal{D}_n$. Entonces F intersecta a lo más a las componentes conexas $C_1, C_2, \ldots, C_m$ de X, con $m \leq n$. Como las componentes conexas de X forman una partición de X, tenemos que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} C_i$.

También las componentes conexas de X son cerradas en X y tenemos una infinidad de ellas. Entonces existe $Z_0 \in \mathcal{F}_n$ tal que $C_1, C_2, \ldots, C_m$ son componentes conexas de Z_0. Luego $F \in 2^{Z_0}$. Esto muestra que $\mathcal{D}_n \subseteq \bigcup_{Z \in \mathcal{F}_n} 2^Z$. Si suponemos ahora que $G \in \bigcup_{Z \in \mathcal{F}_n} 2^Z$, entonces existe $W \in \mathcal{F}_n$ tal que $G \in 2^W$. Notemos que W es un subconjunto cerrado de X con exactamente n componentes conexas de X. Además G es un subconjunto cerrado de W y, por tanto también de X, así que G intersecta a lo más n componentes conexas de X. Luego $G \in \mathcal{D}_n$. Esto prueba b).

Afirmamos ahora que

c) si $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}_n$, entonces existe $Z_3 \in \mathcal{F}_n$ tal que $2^{Z_3} \cap 2^{Z_1} \neq \emptyset$ y $2^{Z_3} \cap 2^{Z_2} \neq \emptyset$.

Para ver esto sean $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}_n$. Entonces Z_1 y Z_2 son subconjuntos cerrados de X con exactamente n componentes conexas de X. Sean C y D componentes conexas de Z_1 y Z_2, respectivamente. Como X tiene una infinidad de componente conexas, existe un subconjunto cerrado Z_3 de X con exactamente n componentes conexas, de modo que dos componentes conexas de Z_3 son justo C y D, si $C \cap D = \emptyset$, o bien una componente conexa de Z_3 es C, si $C = D$. Esto implica que $2^{Z_3} \cap 2^{Z_1} \neq \emptyset$ y $2^{Z_3} \cap 2^{Z_2} \neq \emptyset$, probando así c).

Ahora vamos a probar que

d) si $Z \in \mathcal{F}_n$, entonces 2^Z es conexo.

Para probar d) sea $Z \in \mathcal{F}_n$. Entonces Z es un subconjunto cerrado de X con exactamente n componentes conexas, es decir, con un número finito de componentes conexas. Entonces, por lo que mencionamos después de la prueba de a), 2^Z es conexo. Estro muestra d).

De c) y d) se sigue que $\bigcup_{Z \in \mathcal{F}_n} 2^Z$ es conexo. Luego, por b), $\mathcal{D}_n$ es conexo. Ahora definimos $\mathcal{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \mathcal{D}_n$. Entonces $\mathcal{D}$ es la familia de todos los subconjuntos cerrados de X, que intersectan a lo más un número finito de componentes conexas de X. Por el Lema 2.54, $\mathcal{D}$ es denso en 2^X. Como cada $\mathcal{D}_n$ es conexo y $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{D}_{n+1}$, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, sucede que $\bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \mathcal{D}_n$ es conexo. Entonces $\mathcal{D}$ es denso y conexo en 2^X. Luego, 2^X es conexo. $\square$

El Teorema 2.55 muestra condiciones en subespacios del hiperespacio 2^X, para que éste resulte ser conexo. En el siguiente resultado, mostramos condiciones en X, para garantizar que el hiperespacio $(2^X, \tau_F)$ es conexo.

Teorema 2.56. *Sea X un espacio topológico. Entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

1) *si X es KC y ninguna componente conexa de X es compacta, entonces $(2^X, \tau_F)$ es conexo;*

2) *si existe un subconjunto compacto, abierto y no vacío de X, entonces $(2^X, \tau_F)$ es disconexo;*

3) *sea X un espacio KC donde cada componente conexa de X es abierta. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

   3.1) *ninguna componente conexa de X es compacta;*

   3.2) *$(2^X, \tau_F)$ es conexo;*

   3.3) *ningún subconjunto abierto y no vacío de X es compacto.*

Demostración. Antes de probar *1)* veamos que la propiedad KC es hereditaria. Supongamos que X es un espacio KC y sea K un subespacio compacto de $Y \subseteq X$. Por tanto, K es un subespacio compacto de X. En vista de que X es KC, se sigue que K es cerrado en X. Luego $K \cap Y = K$ es cerrado en Y. Esto muestra que Y es KC.

Para probar *1)* supongamos que Y es una componente conexa de X. Como X es KC y dicha propiedad es hereditaria, sucede que Y es KC. Tenemos así que Y es conexo y KC. Además, por hipótesis, Y no es compacto. Luego, por la Proposición 2.51, 2^Y es conexo. Hemos probado que 2^Y es conexo, para cada componente conexa de Y. Por tanto, por el Teorema 2.55, 2^X es conexo.

Para probar *2)*, sea K un subconjunto compacto, abierto y no vacío de X. Como $K \neq \emptyset$, es claro que $X \notin (X \setminus K)^+$. Además $\emptyset \in (X \setminus K)^+$. Luego $(X \setminus K)^+$ es un subconjunto abierto, propio y no vacío de 2^X. Vamos a probar que $(X \setminus K)^+$ también es cerrado en 2^X. Sea $A \in 2^X \setminus (X \setminus K)^+$. Entonces $A \cap K \neq \emptyset$, de donde $A \in K^-$. En vista de que K es abierto en X, resulta que K^- es un subconjunto abierto de 2^X tal que $A \in K^-$.

Notemos que si $B \in K^-$, entonces $B \in 2^X$ y $B \cap K \neq \emptyset$, por lo que $B \notin (X \setminus K)^+$. Esto muestra que $K^- \subseteq 2^X \setminus (X \setminus K)^+$. Con esto probamos que $2^X \setminus (X \setminus K)^+$ es abierto en 2^X. Luego $(X \setminus K)^+$ es cerrado en 2^X. Esto implica que 2^X es disconexo.

Para probar *3)*, supongamos que X un espacio KC donde cada componente conexa de X es abierta. Si *3.1)* se cumple entonces, por *1)*, $(2^X, \tau_F)$ es conexo. Así *3.1)* implica *3.2)*.

Supongamos ahora que *3.2)* se cumple. Si existe un subconjunto compacto, abierto y no vacío de X sucede, por *2)*, que 2^X es disconexo. Esto contradice *3.2)*, así que ningún subconjunto abierto y no vacío de X es compacto. Esto prueba que *3.2)* implica *3.3)*.

Ahora supongamos que *3.3)* se cumple. Sea Y una componente conexa de X y supongamos que Y es compacto. Entonces Y es abierto, no vacío y compacto, contradiciendo *3.3)*. Luego ninguna componente conexa de X es compacta. Esto prueba que *3.3)* implica *3.1)* y, con esto, la prueba de *3)* termina. $\square$

2.9. Metrizabilidad y Convergencia

Esta sección está principalmente basada en el artículo [28]. Recordemos que si X es un espacio topológico, entonces

$$2^X = \{A \subseteq X \mid A \text{ es cerrado en } X\}, \quad CL(X) = \{A \in 2^X \mid A \neq \emptyset\}$$

y

$$K(X) = \{A \subseteq X \mid A \text{ es compacto y } A \neq \emptyset\}.$$

Notemos que $CL(X) \cap K(X)$ es la familia de los subconjuntos no vacíos de X que son cerrados y compactos. Es claro que a $CL(X) \cap K(X)$ le podemos dar la topología de Vietoris que denotaremos por τ_V, en lugar de $(\tau_V)_{|CL(X)\cap K(X)}$. También es claro que si X es KC, entonces $K(X) \subseteq CL(X)$. Si X es compacto y KC, entonces $CL(X) \cap K(X) = CL(X)$.

Vamos a indicar la manera usual de darle a $CL(X)$ una métrica cuya topología inducida es la de Vietoris. Posteriormente daremos condiciones, bajo las cuales, podemos definir una métrica en $CL(X)$ cuya topología inducida es la de Fell. Para realizar lo primero, requerimos de la siguiente noción.

Definición 2.57. Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $A \subseteq X$. Definimos la *distancia de x a A* como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Si r es un número real mayor que cero, la *nube de tamaño r* alrededor de $A \subseteq X$, denotada por $N(A, r)$, es el conjunto de puntos de X cuya distancia a A es menor a r. Es decir

$$N(A, r) = \{y \in X \mid d(y, A) < r\}.$$

Para un conjunto unitario $\{x\}$, la nube $N(\{x\}, r)$ será abreviada como $N(x, r)$. En el siguiente resultado mencionamos algunas propiedades de las nubes.

Teorema 2.58. *Supongamos que (X, d) es un espacio métrico.*

1) $N(D, \epsilon)$ es un abierto en X tal que $D \subseteq N(D, \epsilon)$, para cada $D \subseteq X$ y toda $\epsilon > 0$;

2) si $D \subseteq E$, entonces $N(D, \epsilon) \subseteq N(E, \epsilon)$, para cada $\epsilon > 0$;

3) si $\epsilon, \delta > 0$ son tales que $\epsilon \leq \delta$, entonces $N(D, \epsilon) \subseteq N(D, \delta)$, para cada $D \subseteq X$;

4) si $A \in K(X)$ y U es un abierto en X tal que $A \subseteq U$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $N(A, \epsilon) \subseteq U$.

Demostración. Si $x \in X$ y $\epsilon > 0$, definimos

$$B(x, \epsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}.$$

Es claro que cada conjunto de la forma $B(x, r)$ con $r > 0$, es abierto en X. No es difícil probar que, para cada $D \subseteq X$ y toda $\epsilon > 0$, tenemos que $N(D, \epsilon) = \bigcup_{x \in D} B(x, \epsilon)$. Por tanto $N(D, \epsilon)$ es un abierto en X tal que $D \subseteq N(D, \epsilon)$. Esto prueba *1)*.

La prueba de *2)* se sigue del hecho de que un elemento x de $N(D, \epsilon)$ dista de un punto de D en menos que ϵ. Como $D \subseteq E$, x también dista de un punto de E en menos que ϵ. Luego x se encuentra en $N(E, \epsilon)$.

La demostración de *3)* es trivial.

Para probar *4)* sean A y U como se indican. Para cada $a \in A$ tenemos que $a \in U$, así que al ser U un abierto en X, existe $\epsilon_a > 0$ tal que $B(a, \epsilon_a) \subseteq U$. Notemos que la familia $\{B(a, \frac{\epsilon_a}{2}) \mid a \in A\}$ es una cubierta abierta del espacio compacto A. Por tanto existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_i, \frac{\epsilon_{a_i}}{2}\right).$$

Sea $\epsilon = \min\left\{\frac{\epsilon_{a_i}}{2} \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}\right\}$. Tomemos $x \in N(A, \epsilon)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \epsilon$. Para dicho elemento a, existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a \in B(a_i, \frac{\epsilon_{a_i}}{2})$. Luego

$$d(x, a_i) \leq d(x, a) + d(a, a_i) < \epsilon + \frac{\epsilon_{a_i}}{2} \leq \frac{\epsilon_{a_i}}{2} + \frac{\epsilon_{a_i}}{2} = \epsilon_{a_i}.$$

Por tanto $x \in B(a_i, \epsilon_{a_i}) \subseteq U$. Esto prueba que $N(A, \epsilon) \subseteq U$. □

Con la noción de nube, es posible definir una métrica en el hiperespacio $CL(X)$, como indicamos a continuación.

Definición 2.59. Sea (X, d) un espacio métrico y acotado. La *métrica de Hausdorff* inducida por d en $CL(X)$, denotada por H_d, está definida como sigue: para cualesquiera $A, B \in CL(X)$,

$$H_d(A, B) = \inf\{r > 0 \mid A \subseteq N(B, r) \ \text{ y } \ B \subseteq N(A, r)\}.$$

Supongamos que (X, d) es un espacio métrico y acotado. En [13, Teorema 2.2, p. 11] se prueba que $H_d \colon CL(X) \times CL(X) \to [0, \infty)$ es, en efecto, una métrica en $CL(X)$. Es conocido que para cada $A, B \in CL(X)$,

$$H_d(A, B) = \max\left\{\sup\{d(a, B) \mid a \in A\}, \sup\{d(b, A) \mid b \in B\}\right\}.$$

En [13, Comentario 2.5, p. 13] se prueba que si (X, d) es un espacio métrico, entonces es posible restringir H_d a $K(X) \times K(X)$. En otras palabras, para calcular la métrica de Hausdorff en $CL(X)$, debemos pedir que la métrica d de X está acotada. Pero esto no es necesario si queremos calcular la métrica de Hausdorff entre elementos de $K(X)$.

En [24, Teorema 1.33, p. 18] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.60. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A, B \in K(X)$ y $\epsilon > 0$, entonces*

$$H_d(A, B) < \epsilon \quad \text{si y sólo si} \quad A \subseteq N(B, \epsilon) \text{ y } B \subseteq N(A, \epsilon).$$

A la topología inducida en $CL(X)$ por la métrica de Hausdorff, la denotaremos por τ_{H_d}. En [13, Teorema 3.1, p. 16] se prueba que si (X, d) es un espacio métrico, entonces $(CL(X) \cap K(X), \tau_V)$ es un espacio metrizable y, además, $\tau_V = \tau_{H_d}$. En [13, Teorema 3.2, p. 18] se prueba que si el espacio topológico (X, τ) es metrizable, entonces $(CL(X) \cap K(X), \tau_V)$ es metrizable y, además, si d es una métrica en X cuya topología inducida es τ, entonces $\tau_V = \tau_{H_d}$. Posteriormente, en [13, Teorema 3.4] se prueba que si

(X, τ) es un espacio T_1, entonces $(CL(X), \tau_V)$ es metrizable si y sólo si X es compacto y metrizable. En tal situación, X resulta ser compacto y KC así que $CL(X) \cap K(X) = CL(X)$. Por tanto, cuando (X, τ) es compacto y metrizable no sólo $(CL(X), \tau_V)$ es metrizable sino que también si d es una métrica en X cuya topología inducida es τ, entonces $\tau_V = \tau_{H_d}$.

Supongamos ahora que X es un espacio T_2, compacto y segundo numerable. Por el Teorema 1.35, X es metrizable. Luego X es compacto y metrizable y, como comentamos al final del párrafo anterior, la topología de Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff coinciden en $CL(X)$. Como X es compacto y T_2, por el Teorema 2.12, la topología de Vietoris coincide con la topología de Fell. Por consiguiente, cuando X es un espacio T_2, compacto y segundo numerable, la topología de Fell, la de Vietoris y la inducida por la métrica de Hausdorff son iguales en $CL(X)$.

Sabemos que los espacios localmente compactos y T_2 son espacios $T_{3\frac{1}{2}}$ (ver [30, Teorema 19.3, p. 163]). Notemos que si X es un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable, entonces, por el Teorema 1.35, X es metrizable. Supongamos que d es una métrica en X cuya topología inducida es la de X. Como X es localmente compacto y segundo numerable, por el Teorema 2.44, $(CL(X), \tau_F)$ es metrizable e incluso, por el Teorema 2.45, $(CL(X), \tau_F)$ es también un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Vamos a indicar cómo definir una métrica en $CL(X)$ cuya topología inducida es τ_F. Como X es localmente compacto y T_2, por el Teorema de la Compactación de Alexandroff ([8, Teorema 8.4, p. 246]), podemos considerar la compactación por un punto de X la cual, como indicamos en la Subsección 1.3.3, denotamos por ωX o bien por $X \cup \{\omega\}$. Naturalmente pensamos que X está encajado en ωX como un subconjunto abierto. Entonces a cada punto de X le corresponde un único punto en $\omega X \setminus \{\omega\}$ y viceversa.

Como ya indicamos en la Subsección 1.3.3 en la página 15, ωX es compacto y T_2. Más aún, como X es segundo numerable, ωX es metrizable ([8, Teorema 8.6, p. 247]). Además, como ωX es de Lindelöf (por ser compacto), por el Teorema 1.34, ωX es segundo numerable. Tenemos así que ωX es metrizable, compacto y segundo numerable. Sea $\widetilde{d}$ una métrica en ωX cuya topología inducida es la de ωX. Como ωX contiene una copia de X y d es una métrica en X cuya topología inducida es la de X, las métricas d y $\widetilde{d}$ deben ser consistentes en X (es decir, la distancia con respecto a d entre dos puntos x y y de X, debe ser la misma que la distancia con respecto a $\widetilde{d}$ entre los puntos de $\omega X \setminus \{\omega\}$ que se corresponden con x y y). En vista de que ωX

es un espacio metrizable, compacto y segundo numerable, el Corolario 1.25 nos dice que ωX es un espacio localmente compacto y segundo numerable. Usando el Teorema 2.40 sabemos que $(CL(\omega X), \tau_F)$ es metrizable y, más aún, la topología de Fell en $CL(\omega X)$ coincide con la de Vietoris y con la inducida por la métrica de Hausdorff $H_{\widetilde{d}}$ en en el hiperespacio $CL(\omega X)$, de los subconjuntos cerrados y no vacíos de $CL(X)$. Lo que falta es convencernos de que, restringiendo $H_{\widetilde{d}}$ a $CL(\omega X \setminus \{\omega\}) \times CL(\omega X \setminus \{\omega\})$, obtendremos una métrica en $CL(X)$ cuya topología inducida es τ_F.

Como X es T_2, en particular X es KC y T_1. Entonces, por la Proposición 2.14, τ_F es admisible. Esto significa que la función

$$h\colon X \to (2^X, \tau_F) \ \text{ definida por } \ h(x) = \{x\} \tag{2.10}$$

es un encaje. Entonces h se puede extender a ωX y, la prueba de esto, es como la que dimos en la Proposición 2.14.

Teorema 2.61. *Sea X un espacio T_2 y localmente compacto. Supongamos que $\omega X = X \cup \{\omega\}$ es la compactación por un punto de X. Entonces la función*

$$\tilde{h}\colon \omega X \to (2^X, \tau_F) \quad \textit{definida por} \quad \tilde{h}(y) = \begin{cases} \{y\}, & \textit{si } y \in \omega X \setminus \{\omega\}; \\ \emptyset, & \textit{si } y = \omega \end{cases}$$

es un encaje.

Los resultados anteriores indican que el espacio compacto $(2^X, \tau_F)$ contiene una copia de X y también una copia de ωX. Vamos a probar que el hiperespacio $CL(\omega X)$, con la topología de Vietoris, contiene una copia del hiperespacio 2^X, con la topología de Fell.

Ahora definimos la función $C\colon 2^X \to CL(\omega X)$ tal que, para cada $F \in 2^X$, $C(F) = F \cup \{\omega\}$. Es importante tener en cuenta el abuso de notación, ya que en la igualdad $C(F) = F \cup \{\omega\}$, los puntos de $F \subseteq \omega X$ en el lado derecho de la igualdad son los puntos de $F \subseteq X$ del lado izquierdo identificados bajo la compactación de Alexandroff. Es de esperar que no sea necesario mencionar a cada momento tal hecho. Vamos a probar que la función C es un encaje. Para esto, utilizaremos el siguiente resultado, cuya demostración puede verse en [25, Teorema 2.2].

Teorema 2.62. *Sea X un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Una sucesión $(F_n)_n$ de subconjuntos cerrados de X converge, en $(2^X, \tau_F)$ a un subconjunto cerrado F de X si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:*

(1) *si un subconjunto compacto K de X es tal que $K \cap F = \emptyset$, entonces $K \cap F_n = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, salvo un número finito de ellas;*

(2) *si un abierto U en X cumple $U \cap F \neq \emptyset$, entonces $U \cap F_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, salvo un número finito de ellas.*

En [18, Teorema 1-2-2, p. 6], se prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.63. *Sea X un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Una sucesión $(F_n)_n$ de subconjuntos cerrados de X converge, en $(2^X, \tau_F)$ a un subconjunto cerrado F de X si y sólo si se satisfacen las siguientes propiedades:*

(1) *para cada $x \in F$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq m$, existe $x_n \in F_n$ de modo que la sucesión $(x_n)_{n=m}^{\infty}$ así formada, converge a x;*

(2) *si $(F_{n_k})_k$ es una subsucesión de $(F_n)_n$ y $(x_{n_k})_k$ es una sucesión en X que converge a x y es tal que $x_{n_k} \in F_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces $x \in F$.*

Proposición 2.64. *Sea X un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Supongamos que $\omega X = X \cup \{\omega\}$ es la compactación por un punto de X. Entonces la función $C\colon (2^X, \tau_F) \to (CL(\omega X), \tau_V)$ definida, para $F \in 2^X$, como $C(F) = F \cup \{\omega\}$ es un encaje.*

Demostración. Es claro que la función C es inyectiva. Como X es localmente compacto y segundo numerable, por el Teorema 2.45, $(2^X, \tau_F)$ es T_2, localmente compacto y segundo numerable. De hecho, $(2^X, \tau_F)$ es compacto (Teorema 2.18). Ya comentamos que $(CL(\omega X), \tau_V)$ es metrizable (con la métrica de Hausdorff $H_{\tilde{d}}$), así que dicho espacio es T_2. Por tanto C es una función inyectiva de un espacio compacto a un espacio T_2. Si probamos que C es continua resultará, por [9, Teorema 3.1.13], que C es un homeomorfismo en su imagen. De esta manera tendremos que C es un encaje. Ahora bien, como X segundo numerable (por tanto, también primero numerable) y T_2, para ver que C es una función continua en un elemento $F \in 2^X$, basta verificar que para cada sucesión $(F_n)_n$ en 2^X que converge a F, sucede que la sucesión $(C(F_n))_n$ converge a $C(F)$ ([9, Proposición 1.6.15 y Proposición 1.6.17]).

De tal modo, supongamos que $(F_n)_n$ es una sucesión en 2^X que converge a $F \in 2^X$. Notemos que cada F_n es cerrado en el compacto ωX. Luego cada F_n es compacto. Por las mismas razones, F es compacto. Esto implica que

$F \cup \{\omega\} = C(F)$ y cada conjunto $F_n \cup \{\omega\} = C(F_n)$ son compactos. Entonces podemos considerar la métrica de Hausdorff $H_{\widetilde{d}}(C(F_n), C(F))$.

Para probar que la sucesión $(C(F_n))_n$ converge a $C(F)$ vamos a considerar dos casos, a saber cuando $F = \emptyset$ y cuando $F \neq \emptyset$. Supongamos primero que $F = \emptyset$. Entonces $C(F) = \{\omega\}$. Sea $r > 0$. Por la parte *1)* del Teorema 2.58, $N(\omega, r)$ es un abierto en ωX tal que $\omega \in N(\omega, r)$. Luego $\omega X \setminus N(\omega, r)$ es un cerrado en el compacto ωX, por tanto es compacto. Como $\omega \notin \omega X \setminus N(\omega, r)$, se sigue que $\omega X \setminus N(\omega, r)$ es un subespacio compacto de X. Además, de la condición $F = \emptyset$ se sigue que $F \cap (\omega X \setminus N(\omega, r)) = \emptyset$. Como la sucesión $(F_n)_n$ converge a F bajo τ_F, la primera parte del Teorema 2.62 dice que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq m$, $F_n \cap (\omega X \setminus N(\omega, r)) = \emptyset$. Luego $F_n \subseteq N(\omega, r)$, para cada $n \geq m$. Como también $\{\omega\} \subseteq N(\omega, r)$, tenemos que

$$C(F_n) = F_n \cup \{\omega\} \subseteq N(\omega, r) = N(C(F), r), \qquad \text{para cada } n \geq m.$$

Puesto que $\{\omega\} \subseteq F_n \cup \{\omega\} = C(F_n)$, usando *2)* del Teorema 2.58,

$$C(F) = \{\omega\} \subseteq N(\omega, r) \subseteq N(C(F_n), r), \quad \text{para cada } n \geq m.$$

Por el Teorema 2.60, $H_{\widetilde{d}}(C(F_n), C(F)) < r$, para toda $n \geq m$. Esto muestra que la sucesión $(C(F_n))_n$ converge a $C(F)$, y termina la prueba en el caso en que $F = \emptyset$.

Ahora supongamos que $F \neq \emptyset$. Sean $\epsilon > 0$ y $y \in F$. Como $F \subseteq X$ y $\omega \notin X$, se sigue que $y \neq \omega$. Puesto que ωX es T_2, existen abiertos ajenos U y V en ωX tales que $y \in U$ y $\omega \in V$. Debido a que $\{\omega\} \in K(\omega X)$, por la parte *4)* del Teorema 2.58, existe $r > 0$ tal que $N(\omega, r) \subseteq V$. Por la parte *3)* del Teorema 2.58 podemos suponer, sin perder generalidad, que $r < \epsilon$. Notemos que $y \notin N(\omega, r)$.

Sean $X_r = \omega X \setminus N(\omega, r)$ y $F' = X_r \cap F$. Es claro que $y \in F'$, por lo que $F' \neq \emptyset$. Como X_r es el complemento del abierto $N(\omega, r)$ de X, tenemos que X_r es cerrado en el compacto ωX. Luego X_r es compacto. En vista de que $\omega \notin X_r$, se sigue que X_r es un subespacio compacto de X. Puesto que X es T_2, también X_r es cerrado en X. Luego $F' = X_r \cap F$ es cerrado en X. Como $F' \subseteq X_r$ y X_r es compacto, tenemos que F' también es compacto. Usando argumentos como los que acabamos de utilizar, se tiene que $X_r \setminus N(F', r)$ es un subconjunto compacto de X.

Ya que $X_r \cap F = F' \subseteq N(F', r)$, sucede que $F \cap (X_r \setminus N(F', r)) = \emptyset$. Puesto que la sucesión $(F_n)_n$ converge a F bajo τ_F, la condición *(1)* del

Teorema 2.62 dice que existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq m_1$, se cumple $F_n \cap (X_r \setminus N(F', r)) = \emptyset$. Luego, $F_n \cap X_r \subseteq N(F', r)$ para cada $n \geq m_1$.

Además, de $F' \subseteq F$ y de la definición de la función C, tenemos que $C(F') \subseteq C(F)$. Utilizando esto y la parte *3)* del Teorema 2.58, tenemos que

$$\begin{aligned} N(C(F), r) &\supseteq N(C(F'), r) = N(F' \cup \{\omega\}, r) = N(F', r) \cup N(\omega, r) \\ &\supseteq (F_n \cap X_r) \cup N(\omega, r) \supseteq (F_n \cap X_r) \cup (F_n \cap N(\omega, r)) \cup \{\omega\} \\ &= F_n \cap (X_r \cup N(\omega, r)) \cup \{\omega\} = (F_n \cap \omega X) \cup \{\omega\} \\ &= F_n \cup \{\omega\} = C(F_n). \end{aligned}$$

Es decir que $C(F_n) \subseteq N(C(F), r)$ para toda $n \geq m_1$. Por otro lado, para cualquier punto $x \in F'$, como $F' \subseteq F$ la nube $N(x, \frac{r}{2})$ es un abierto de X que intersecta a F. Usando que la sucesión $(F_n)_n$ converge a F bajo τ_F, la parte *(2)* del Lema 2.62 dice que existe un entero $k(x)$ tal que para $n \geq k(x)$ se cumple $F_n \cap N(x, \frac{r}{2}) \neq \emptyset$. Es evidente que $\{N(x, \frac{r}{2}) \mid x \in F'\}$ es una cubierta abierta del compacto F', de donde existen $x_1, x_2 \ldots, x_s$ puntos de F' tales que

$$F' \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} N\left(x_i, \frac{r}{2}\right).$$

Sea $m_2 = \max\{k(x_i) \mid 1 \leq i \leq s\}$. Se sigue que para cualquier $n \geq m_2$, $F_n \cap N(x_i, \frac{r}{2}) \neq \emptyset$ para $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Ahora, la unión de las nubes de radio $\frac{r}{2}$ alrededor de los puntos x_i es una cubierta de F'. Entonces $F' \subseteq N(F_n, r)$ para $n \geq m_2$. Mas aún, por como definimos a X_r, se cumple que

$$F = F \cap (X_r \cup N(\omega, r)) = (F \cap X_r) \cup (F \cap N(\omega, r)) \subseteq (F' \cup N(\omega, r)) \setminus \{\omega\}.$$

Entonces para cualquier $n \geq m_2$

$$\begin{aligned} N(C(F_n), r) = N(F_n \cup \{\omega\}, r) = N(F_n, r) \cup N(\omega, r) \\ \supseteq F' \cup N(\omega, r) \supseteq F \cup \{\omega\} = C(F). \end{aligned}$$

En el segundo renglón de la última ecuación, usamos las dos contenciones que anteriormente habíamos razonado, con lo cual finalmente obtenemos que $C(F) \subseteq N(C(F_n), r)$, para cada $n \geq m_2$.

Tomando a $m = \max\{m_1, m_2\}$ se sigue que

$$C(F_n) \subseteq N(C(F), r) \quad \text{y} \quad C(F) \subseteq N(C(F_n), r), \qquad \text{para todo } n \geq m.$$

Luego, por el Teorema 2.60, $H_{\widehat{d}}(C(F_n), C(F)) < r < \epsilon$, para todo $n \geq m$. Esto prueba que la sucesión $(C(F_n))_n$ converge a $C(F)$, y termina la demostración. $\square$

Utilizando la métrica de Hausdorff $H_{\widetilde{d}}$ en $CL(\omega X)$, podemos considerar la función $\rho\colon 2^X \times 2^X \to [0,\infty]$ definida, para $A, B \in 2^X$ como

$$\rho(A,B) = H_{\widetilde{d}}(C(A), C(B)).$$

Ya que la función C es inyectiva (pues es un encaje), tenemos que ρ es una métrica en 2^X. Ahora podemos mostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.65. *La topología en 2^X inducida por la métrica ρ coincide con la topología de Fell. El encaje $C\colon (2^X, \tau_F) \to (CL(\omega X), \tau_H)$ es un encaje isométrico bajo las métricas ρ y $H_{\widetilde{d}}$.*

Demostración. Al tener que C es un encaje de 2^X en $CL(\omega X)$, fijémonos únicamente en ωX. Dadas las características de X, ωX es compacto y T_2. De tal forma sabemos que la topología inducida por la métrica de Hausdorff coincide con la topología de Fell en $CL(\omega X)$. $\square$

Capítulo 3

Dinámica en Hiperespacios

3.1. Introducción

Dados dos sistemas dinámicos (X, f) y (Y, g), puede pasar que una propiedad P que se cumpla en (X, f) implique que en (Y, g) se cumple otra propiedad Q. Incluso puede pasar que (X, f) satisface P si y sólo si (Y, g) satisface Q. Durante este capítulo, para un sistema dinámico (X, f), consideraremos como P a las propiedades de transitividad, mezclado y mezclado débil. $CL(X)$ equipado con la topología de Fell será el espacio Y. En la Sección 3.3 veremos una manera de definir, bajo condiciones especiales sobre X y sobre f, una función continua $CL^f : CL(X) \to CL(X)$. De esta manera, tomando a g como CL^f, tenemos dos sistemas dinámicos (X, f) y $(CL(X), CL^f)$. En el presente capítulo veremos que para cada una de las propiedades P (transitividad, mezclado y mezclado débil) existe una propiedad Q de modo que (X, f) cumple P si y sólo si $(CL(X), CL^f)$ cumple Q. También discutiremos lo que sucede cuando en $CL(X)$ consideramos la topología de Vietoris.

3.2. Primeras Consideraciones

Sean X un espacio topológico y $f : X \to X$ una función continua. Durante el resto del capítulo, a menos que sea explícitamente mencionado, trabajaremos con el sistema dinámico (X, f), al que llamaremos *sistema base*. Incluso, al espacio X le llamaremos *espacio base* y a f, *función base*. Diremos que f es *compatible* con una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, si para toda $A \in \mathcal{A}$ se cumple que $f(A) \in \mathcal{A}$. Como en el capítulo anterior, a partir de X podemos considerar el hiperespacio

$$CL(X) = \{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado en } X \text{ y } F \neq \emptyset\},$$

al cual le podemos dar tanto la topología de Vietoris como la de Fell. Independientemente de la topología que elijamos, es importante obtener condiciones bajo las que f sea compatible con $CL(X)$ pues, de esta manera, queda bien definida la función $CL^f : CL(X) \to CL(X)$ que a cada $F \in CL(X)$ le asigna el valor

$$CL^f(F) = f(F) = \{f(x) \mid x \in F\}.$$

Diremos que CL^f es la *función inducida de f en $CL(X)$*. Notemos que si $F \in CL(X)$, entonces $F \neq \emptyset$, así que $CL^f(F) = f(F) \neq \emptyset$. Si pedimos que f sea una función cerrada (Definición 1.27), entonces $CL^f(F) \in CL(X)$. Esto muestra que si f es una función cerrada, entonces f es compatible con $CL(X)$. Ya que tenemos esto, ahora debemos obtener condiciones bajo las que CL^f resulte ser continua cuando en $CL(X)$ consideramos la topología de Vietoris, y cuando consideramos la topología de Fell. A esto nos enfocaremos en la Sección 3.3. Una vez obtenido esto, tendremos dos sistemas dinámicos, a saber $((CL(X), \tau_V), CL^f)$ y $((CL(X), \tau_F), CL^f)$, a los que llamaremos *sistemas dinámicos inducidos* por el sistema base (X, f).

Saber que (X, f) induce los sistemas dinámicos $((CL(X), \tau_V), CL^f)$ y $((CL(X), \tau_F), CL^f)$, nos permite preguntarnos por relaciones entre dichos sistemas dinámicos. Si P y Q son propiedades dinámicas (ver Definición 1.38) y, por ejemplo, (X, f) posee la propiedad P, nos interesa determinar si alguno de $((CL(X), \tau_V), CL^f)$ o $((CL(X), \tau_F), CL^f)$ también posee la propiedad P, o bien si uno posee la propiedad P y el otro la propiedad Q, o bien ambos poseen la propiedad Q. También estamos interesados en saber si, conociendo que alguno de los sistemas dinámicos inducidos posee una propiedad dinámica, digamos P, se deduce que el sistema base también tiene la propiedad P, o bien la propiedad Q. Resolver situaciones como las que hemos planteado, significa hacer *dinámica en hiperespacios*. En el presente trabajo, nos enfocaremos en las propiedades dinámicas que consideramos en la Definición 1.40 y veremos que, cuando se las aplicamos al sistema dinámico inducido $((CL(X), \tau_F), CL^f)$, el sistema base (X, f) posee una propiedad dinámica.

Algunas propiedades dinámicas, como el ser una función transitiva, ser una función débilmente mezclante, ser una función mezclante, tener un punto fijo, tener un punto periódico, o bien tener un conjunto denso de puntos periódicos, no dependen de una métrica en el espacio X que aparece en el sistema dinámico base (X, f). Diremos que éstas son *propiedades dinámicas* *topológicas*. Para dichas propiedades, como ya hemos definido una topología en $CL(X)$ (la de Vietoris o bien la de Fell), podemos hacer dinámica en hiperespacios sin importarnos si en $CL(X)$ tenemos definida una métrica. Sin embargo, existen propiedades dinámicas, como la sensibilidad bajo condiciones iniciales o la transitividad por cadenas, que requieren de una métrica para poder hablar de ellas. Diremos que éstas son *propiedades dinámicas métricas*. Para hacer dinámica en hiperespacios con las propiedades dinámicas métricas, necesitamos garantizar primero que el correspondiente hiperespacio $CL(X)$ (cuando se considera con la topología de Vietoris o bien con la de Fell) sea metrizable y, más aún, que tengamos definida una métrica en $CL(X)$.

El Teorema 2.24 muestra que X es compacto y metrizable si y sólo si $(CL(X), \tau_V)$ también es metrizable. Por tanto, si el espacio X no es compacto, las propiedades dinámicas métricas, tales como la sensibilidad a condiciones iniciales o la entropía basada en métrica (las cuales son muy importantes en la Teoría de los Sistemas Dinámicos), no podrán utilizarse para hacer dinámica en hiperespacios con la topología de Vietoris. En este sentido se suele considerar que la topología de Vietoris no siempre resulta la mejor elección para hacer dinámica en hiperespacios de espacios métricos que no son compactos. Por supuesto que todo es cuestión de gustos, pues si por ejemplo, queremos hacer dinámica en hiperespacios de continuos (es decir, de espacios métricos, compactos, conexos y no vacíos), entonces la topología de Vietoris resulta muy conveniente, además de que dicha topología coincide con la de Fell, ya que el espacio base es compacto y T_2 (ver Teorema 2.12).

Supongamos ahora que X es un espacio localmente compacto y segundo numerable. Entonces del Teorema 2.44 se tiene que $(CL(X), \tau_F)$ es un espacio polaco. En particular $(CL(X), \tau_F)$ es metrizable. Más aun, por el Teorema 2.45, $(CL(X), \tau_F)$ es T_2, localmente compacto y segundo numerable. Esto implica que podemos hacer dinámica en hiperespacios con la topología de Fell, cuando el espacio base es localmente compacto y segundo numerable, utilizando en el hiperespacio $CL(X)$ tanto propiedades dinámicas topológicas como métricas. Luego podemos preguntarnos si del hecho de que el sistema dinámico inducido posea una propiedad dinámica métrica, se sigue que el sistema base posee una propiedad dinámica topológica. Esto nos da más libertad y, por dicha razón, suele considerarse que la topología de Fell es una mejor elección para hacer dinámica en hiperespacios de espacios topológicos localmente compactos y segundo numerables.

Terminamos la presente sección indicando que, para la función inducida

$CL^f: CL(X) \to CL(X)$, se cumple que si $F \in CL(X)$, entonces

$$(CL^f)^n(F) = f^n(F), \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Así, una vez que garanticemos que CL^f es una función continua, podremos decir que la órbita de F bajo CL^f, es análoga a la órbita del conjunto F bajo f en el sistema original.

3.3. La Función Inducida

Supongamos que (X, f) es un sistema dinámico y que f es una función cerrada. Como indicamos en la sección anterior, queda bien definida la función inducida $CL^f: CL(X) \to CL(X)$ que a cada $F \in CL(X)$ le asigna el valor $CL^f(F) = f(F)$. Ahora debemos encontrar condiciones para X, para f, o ambos, de manera que CL^f sea continua pensando que dicho hiperespacio posee la topología de Vietoris o bien la de Fell. Como muestra el siguiente resultado, si deseamos trabajar con la topología de Vietoris, no debemos pedir más.

Teorema 3.1. *Supongamos que (X, f) es un sistema dinámico y que f es una función cerrada. Entonces la función inducida $CL^f: (CL(X), \tau_V) \to (CL(X), \tau_V)$ es continua.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ es un abierto básico en $(CL(X), \tau_V)$. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y abiertos $W_1, W_2, \ldots, W_n$ en X tales que $\mathcal{U} = \langle W_1, W_2, \ldots, W_n \rangle$. Vamos a demostrar que

$$(CL^f)^{-1}(\langle W_1, W_2, \ldots, W_n \rangle) = \langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \ldots, f^{-1}(W_n) \rangle. \quad (3.1)$$

Para probar (3.1) no es necesario que f sea cerrada, dicha condición se ha utilizado implícitamente para justificar que CL^f está bien definida. Supongamos primero que

$$K \in (CL^f)^{-1}(\langle W_1, W_2, \ldots, W_n \rangle).$$

Entonces $K \in CL(X)$ y $CL^f(K) = f(K) \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_n \rangle$. Esto implica que $f(K) \subseteq W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_n$, por lo que

$$K \subseteq f^{-1}(f(K)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(W_i).$$

Tomemos ahora $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como $f(K) \in \langle W_1, W_2, \ldots, W_n \rangle$, resulta que $f(K) \cap W_i \neq \emptyset$. Esto implica que $K \cap f^{-1}(W_i) \neq \emptyset$. De esta manera K

es un subconjunto de $\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(W_i)$ que intersecta a cada conjunto $f^{-1}(W_i)$. Luego $K \in \langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \dots, f^{-1}(W_n)\rangle$. Esto prueba que

$$(CL^f)^{-1}(\langle W_1, W_2, \dots, W_n\rangle) \subseteq \langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \dots, f^{-1}(W_n)\rangle.$$

Para probar la otra contención, supongamos ahora que

$$K \in \langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \dots, f^{-1}(W_n)\rangle.$$

Entonces $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(W_i)$. Luego

$$f(K) \subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(W_i)\right) = \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(W_i)) \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_i.$$

Sea $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Como $K \in \langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \dots, f^{-1}(W_n)\rangle$, tenemos que $K \cap f^{-1}(W_i) \neq \emptyset$. Esto implica que $f(K) \cap W_i \neq \emptyset$. De esta manera $f(K)$ es un subconjunto de $\bigcup_{i=1}^n W_i$ que intersecta a cada conjunto W_i. Luego $f(K) \in \langle W_1, W_2, \dots, W_n\rangle$, de donde $K \in (CL^f)^{-1}(\langle W_1, W_2, \dots, W_n\rangle)$. Entonces

$$\langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \dots, f^{-1}(W_n)\rangle \subseteq (CL^f)^{-1}(\langle W_1, W_2, \dots, W_n\rangle).$$

Esto prueba (3.1), así que la imagen inversa bajo CL^f, del abierto básico $\mathcal{U}$, es el abierto básico $\langle f^{-1}(W_1), f^{-1}(W_2), \dots, f^{-1}(W_n)\rangle$. Luego CL^f es continua. $\square$

Dar condiciones bajo las que la función inducida $CL^f\colon (CL(X), \tau_F) \to (CL(X), \tau_F)$ sea continua, requiere más trabajo. Vamos a realizarlo, haciendo ver primero que la función inducida $2^f\colon (2^X, \tau_F) \to (2^X, \tau_F)$ definida, para $K \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$ como $2^f(K) = f(K)$, es continua. Notemos que no hemos indicado el valor que toma 2^f en el conjunto vacío y éste es, precisamente, parte del trabajo que se tiene que realizar para justificar que 2^f está bien definida y es continua, considerando en 2^X la topología de Fell. Para resolver esto, la siguiente definición es de gran ayuda.

Definición 3.2. Supongamos que X es un espacio T_2 y que $f\colon X \to X$ es una función. Decimos que

1) *f converge a $b \in X$ en el infinito*, si para toda sucesión $(x_n)_n$ de puntos de X que no tenga subsucesiones convergentes en X, sucede que la sucesión $(f(x_n))_n$ converge a b;

2) f *converge a infinito en el infinito*, si para toda sucesión $(x_n)_n$ de puntos de X que no posee subsucesiones convergentes en X, resulta que la sucesión $(f(x_n))_n$ tampoco tiene subsucesiones convergentes en X;

3) f *converge en el infinito*, si f cumple con 1) o bien con 2).

Notemos que si $f\colon X \to X$ es convergente a $b \in X$ en el infinito entonces, por la unicidad del límite en espacios T_2, no existe $c \in X \setminus \{b\}$ tal que f es convergente a c en el infinito. Por tanto, una función convergente en el infinito, converge a un único elemento de X en el infinito, o bien converge a infinito en el infinito.

Supongamos ahora que X es un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Como ya hemos indicado en los capítulos anteriores, al ser X un espacio localmente compacto y T_2, podemos considerar la compactación por un punto de X, la cual denotamos por ωX o bien por $X \cup \{\omega\}$. También ya indicamos que las condiciones impuestas en X, implican que ωX es compacto y metrizable. Sea $i\colon X \to \omega X$ el encaje natural definido por $i(x) = x$. Notemos que dada una función continua $g\colon X \to X$, es posible producir una función continua $\widehat{g}\colon \omega X \setminus \{\omega\} \to \omega X \setminus \{\omega\}$ que queda definida por $\widehat{g}(y) = g\left(i^{-1}(y)\right)$, para $y \in \omega X \setminus \{\omega\}$. Más aún, utilizando el encaje natural $i\colon X \to \omega X$, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.3. *Sea X un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Si una función continua $f\colon X \to X$ converge en el infinito, entonces f puede ser extendida a una función continua $\bar{f}\colon \omega X \to \omega X$, donde ωX es la compactación por un punto de X. Más aún, si b es el elemento de X tal que f converge a b en el infinito, entonces $\bar{f}(\omega) = i(b)$, mientras que si f converge a infinito en el infinito, entonces $\bar{f}(\omega) = \omega$.*

Demostración. Supongamos que $f\colon X \to X$ converge en el infinito. Como mencionamos en el párrafo anterior, podemos primero extender f a una función continua $\widehat{f}\colon \omega X \setminus \{\omega\} \to \omega X \setminus \{\omega\}$. Ahora vamos a extender $\widehat{f}$ a ωX y denotaremos dicha extensión como $\bar{f}$. Naturalmente $\bar{f}(x) = \widehat{f}(x)$ para cada $x \in \omega X \setminus \{\omega\}$. Para definir $\bar{f}$ en ω procedemos como sigue: en vista de que f converge en el infinito, existe un único elemento b de X tal que f converge a b en el infinito, o bien f converge a infinito en el infinito. En el primer caso, definimos $\bar{f}(\omega) = i(b)$ y, en el segundo caso, hacemos $\bar{f}(\omega) = \omega$.

Para probar que $\bar{f}\colon \omega X \to \omega X$ es continua, basta verificar que es continua en ω. Además, como ωX es segundo numerable y, por ende también primero numerable, la continuidad es equivalente a la continuidad por sucesiones. Supongamos entonces que $(x_n)_n$ es una sucesión en $\omega X \setminus \{\omega\}$ que converge a ω. Entonces $(x_n)_n$, vista como sucesión en X, no posee subsucesiones convergentes. Si f converge a b en el infinito, tenemos que $(f(x_n))_n$ converge a b. Como $\bar{f}(x_n) = \widehat{f}(x_n) = f\left(i^{-1}(x_n)\right) = f(x_n)$, la sucesión $(\bar{f}(x_n))_n$ converge a $i(b) = \bar{f}(\omega)$ en ωX. Esto muestra que $\bar{f}$ es continua en ω cuando f converge a b en el infinito.

Para el otro caso, recordemos que un espacio X es *secuencialmente compacto* si X es un espacio T_2 y cualquier sucesión de puntos en X posee una subsucesión convergente. Se sigue que un espacio compacto y métrico es secuencialmente compacto [9, Teorema 4.1.17, p. 256]. Sin embargo, tal como se ve en [9, Ejemplo 3.10.38, p. 210] no cualquier espacio compacto es secuencialmente compacto.

Supongamos que f converge a infinito en el infinito. Entonces la sucesión $(f(x_n))_n$ no posee subsucesiones convergentes en X. Sin embargo, como ωX es un espacio compacto y metrizable, la sucesión $(f(x_n))_n$ vista en ωX, posee una subsucesión convergente. Notemos que si alguna subsucesión convergente de $(f(x_n))_n$ converge a un elemento de $\omega X \setminus \{\omega\}$, entonces la sucesión $(f(x_n))_n$ posee una subsucesión convergente en X. Como esto es un absurdo, toda subsucesión convergente de $(f(x_n))_n$, converge a ω en ωX. En particular hemos demostrado para toda sucesión $(x_n)_n$ en $\omega X \setminus \{\omega\}$ que converge a ω, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que la sucesión $(\bar{f}(x_{n_k}))_k$ converge a $\omega = \bar{f}(\omega)$. Entonces $\bar{f}$ es continua en ω, cuando f converge a infinito en el infinito. De esta manera probamos que $\bar{f}$ es continua. $\square$

Intentando no crear un embrollo con la notación y en el entendido de que i denota al encaje de X en ωX, tomaremos la convención de escribir $\bar{f}(x) = f(x)$, para cada $x \in X$, en lugar de $\bar{f}(i(x)) = \widehat{f}(i(x)) = f(x)$.

Estamos en condiciones de definir formalmente a 2^f. Para esto supongamos que X es un espacio T_2 y que $f\colon X \to X$ es una función cerrada y que converge en el infinito. Definimos la función $2^f\colon 2^X \to 2^X$ como sigue:

a) si $F \in 2^X \setminus \{\emptyset\}$, entonces $2^f(F) = f(F)$;

b) si f converge a $b \in X$ en el infinito, entonces $2^f(\emptyset) = \{b\}$;

c) si f converge a infinito en el infinito, entonces $2^f(\emptyset) = \emptyset$.

De esta manera, la función 2^f está bien definida. Ahora daremos condiciones, bajo las cuales, $2^f\colon (2^X, \tau_F) \to (2^X, \tau_F)$ es continua. Recordemos que si X y Y son espacios topológicos, entonces una función $g\colon X \to Y$ es propia si g es continua y, para todo subespacio compacto K de Y, se cumple que $g^{-1}(K)$ es un subespacio compacto de X. Como probamos en la Proposición 1.30 , cuando X y Y son localmente compactos y T_2, del hecho de que $g\colon X \to Y$ sea propia, se sigue que g es cerrada.

Teorema 3.4. *Supongamos que X es un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Sea $f\colon X \to X$ una función propia tal que f converge a $b \in X$ en el infinito. Entonces la función inducida $2^f\colon (2^X, \tau_F) \to (2^X, \tau_F)$ es continua.*

Demostración. Como X es segundo numerable y localmente compacto, por el Teorema 2.41, $(2^X, \tau_F)$ es T_2 y segundo numerable. Entonces $(2^X, \tau_F)$ es primero numerable y, por tanto, la continuidad de 2^f equivale a la continuidad por sucesiones. Tomemos un elemento $F \in 2^X$. Para probar que 2^f es continua en F, sea $(F_n)_n$ una sucesión en 2^X que converge a F. Vamos a mostrar, utilizando el Teorema 2.62, que la sucesión $(2^f(F_n))_n$ en 2^X, converge a $2^f(F)$.

Supongamos primero que $F \neq \emptyset$. Entonces $2^f(F) = f(F)$ y, sin perder generalidad, podemos suponer que cada F_n es diferente del vacío. Sea K un subconjunto compacto de X tal que $2^f(F) \cap K = \emptyset$. Luego $f(F) \cap K = \emptyset$. Entonces $F \cap f^{-1}(K) = \emptyset$. Como f es propia, $f^{-1}(K)$ es un subconjunto compacto de X. Como la sucesión $(F_n)_n$ converge a F, por la parte *(1)* del Teorema 2.62, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_n \cap f^{-1}(K) = \emptyset$, para cualquier $n \geq m$. Así, $f(F_n) \cap K = \emptyset$, de donde $2^f(F_n) \cap K = \emptyset$. Por otro lado, si U es un subconjunto abierto de X tal que $2^f(F) \cap U \neq \emptyset$, entonces $f(F) \cap U \neq \emptyset$, por lo que debido a la continuidad de f, $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de X tal que $f^{-1}(U) \cap F \neq \emptyset$. La parte *(2)* del Teorema 2.62 indica que existe $s \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq s$, sucede que $F_n \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Luego $f(F_n) \cap U \neq \emptyset$, implicando que $2^f(F_n) \cap U \neq \emptyset$. De todo esto, por el Teorema 2.62, la sucesión $(2^f(F_n))_n$ converge a $2^f(F)$ bajo la topología de Fell.

Ahora supongamos que $F = \emptyset$. Como f es convergente a b en el infinito, $2^f(F) = 2^f(\emptyset) = \{b\}$. Sea K un subespacio compacto de X tal que $2^f(F) \cap K = \emptyset$. Entonces $b \notin K$. Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_n = \emptyset$, para cada $n \geq m$, entonces $2^f(F_n) = \{b\}$ siempre que $n \geq m$. Esto implica que $2^f(F_n) \cap K = \emptyset$, para toda $n \geq m$ que es lo que queremos. Si no existe un número natural m tal que $F_n = \emptyset$ para cada $n \geq m$, entonces es posible obtener una subsucesión de $(F_n)_n$ cuyos elementos se encuentran en $2^X \setminus \{\emptyset\}$. Para evitar trabajar con demasiados subíndices, podemos suponer, sin perder generalidad, que $F_n \neq \emptyset$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $2^f(F_n) = f(F_n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que no existe un número natural k tal que $2^f(F_n) \cap K = \emptyset$, para toda $n \geq k$. Entonces es posible obtener una subsucesión $(F_{n_i})_i$ de la sucesión $(F_n)_n$ tal que $2^f(F_{n_i}) \cap K \neq \emptyset$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Luego $f(F_{n_i}) \cap K \neq \emptyset$, para cada $i \in \mathbb{N}$ y, por tanto, existe una sucesión $(x_{n_i})_i$ en X tal que

$$x_{n_i} \in F_{n_i} \cap f^{-1}(K), \qquad \text{para cada } i \in \mathbb{N}.$$

Supongamos que la sucesión $(x_{n_i})_i$ tiene una subsucesión $(x_{n_{i_j}})_j$ convergente, digamos a un punto $x \in X$. Como $x_{n_{i_j}} \in F_{n_{i_j}}$ para toda $j \in \mathbb{N}$ y la subsucesión $(F_{n_{i_j}})_j$ de $(F_n)_n$ converge a F, sucede que $x \in F$, por la parte *(2)* del Teorema 2.63. Esto es una contradicción, pues estamos suponiendo que $F = \emptyset$. Por tanto, la sucesión $(x_{n_i})_i$ no posee subsucesiones convergentes. Como f es convergente a b en el infinito, la sucesión $(f(x_{n_i}))_i$ converge a b. Como $f(x_{n_i}) \in K$ y K es compacto, resulta que $b \in K$. Esto contradice el hecho de que $b \notin K$. La contradicción nace de suponer que no existe un número natural k tal que $2^f(F_n) \cap K = \emptyset$, para toda $n \geq k$. Por consiguiente, existe un número natural k tal que $2^f(F_n) \cap K = \emptyset$, para toda $n \geq k$.

Ahora tomemos un abierto U de X tal que $2^f(F) \cap U \neq \emptyset$. Entonces $b \in U$, pues $2^f(F) = 2^f(\emptyset) = \{b\}$.

Al igual que como hicimos cuando consideramos el compacto K, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $F_n = \emptyset$, para cada $n \geq m$, entonces $2^f(F_n) = \{b\}$ siempre que $n \geq m$. Luego $2^f(F_n) \cap U \neq \emptyset$, para todo $n \geq m$, que es lo que queremos. Si no existe un número natural m tal que $F_n = \emptyset$ para cada $n \geq m$, entonces es posible obtener una subsucesión de $(F_n)_n$ cuyos elementos se encuentran en $2^X \setminus \{\emptyset\}$. Para evitar trabajar con demasiados subíndices, podemos suponer, sin perder generalidad, que $F_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego $2^f(F_n) = f(F_n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, para cada número natural n, tomemos un elemento $x_n \in F_n$. Supongamos que la sucesión $(x_n)_n$ así formada, posee una subsucesión convergente. Esto implica (como hicimos ver cuando consideramos el compacto K), por la parte *(2)* del Teorema 2.63, que $F \neq \emptyset$. Como esto es una contradicción, la sucesión $(x_n)_n$ no posee subsucesiones convergentes. Como f es convergente a b en el infinito, la sucesión $(f(x_n))_n$ converge a b. Del hecho de que $b \in U$ y de la convergencia de la sucesión $(f(x_n))_n$ a b, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $f(x_n) \in U$, para todo $n \geq r$. Luego $2^f(F_n) \cap U \neq \emptyset$, para todo $n \geq r$. De todo esto, por el Teorema 2.62, la sucesión $(2^f(F_n))_n$ converge a $2^f(F)$ bajo la topología de Fell. $\square$

Teorema 3.5. *Sean X un espacio topológico y $f\colon X \to X$ una función. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1) Si X es KC y f es tal que $2^f\colon (2^X, \tau_F) \to (2^X, \tau_F)$ está bien definida y es continua, entonces f es continua.

2) Supongamos que X es un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Consideremos que f converge a b en el infinito. Entonces para todo subconjunto compacto K de X tal que $b \notin K$, el conjunto $f^{-1}(K)$ es compacto.

3) Supongamos que X es un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Consideremos que f es convergente a infinito en el infinito. Entonces para todo subconjunto compacto K de X, el conjunto $f^{-1}(K)$ es compacto.

Demostración. Para probar *1)*, consideremos la familia $F_1(X) = \{\{x\} \mid x \in X\}$. Debido a que X es KC, como hicimos ver en la demostración de la Proposición 2.14, las funciones $g_1\colon X \to F_1(X)$ y $g_2\colon F_1(X) \to X$ definidas, para $x \in X$, como $g_1(x) = \{x\}$ y $g_2(\{x\}) = x$ son homeomorfismos (de hecho g_1 es la inversa de g_2). Puesto que 2^f está bien definida y es continua, la restricción $(2^f)_{|F_1(X)}\colon F_1(X) \to F_1(X)$ es continua. Notemos que $(2^f)_{|F_1(X)}(\{x\}) = \{f(x)\}$, para cada $x \in X$. Esto implica que $f = g_2 \circ (2^f)_{|F_1(X)} \circ g_1$, por lo que f es continua.

Ahora supongamos que X es un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Como ya hemos indicado, esto implica que X es metrizable. Para probar *2)*, supongamos que f es convergente a b en el infinito. Sea K un subconjunto compacto de X tal que $b \notin K$. Si $f^{-1}(K) = \emptyset$, entonces $f^{-1}(K)$ es compacto. Consideremos, por tanto, que $f^{-1}(K) \neq \emptyset$. Más aún, supongamos que $f^{-1}(K)$ no es compacto. Como X es metrizable, el subespacio $f^{-1}(K)$ de X es metrizable y no compacto. Luego, por la Proposición 1.36, existe una sucesión $(x_n)_n$ en $f^{-1}(K)$ que no posee subsucesiones convergentes en X. Como f es convergente a b en el infinito, la sucesión $(f(x_n))_n$ converge a b. Como $f(x_n) \in K$, para cada $n \in \mathbb{N}$, resulta que $b \in K$ (usando la compacidad de K). En vista de que esto es una contradicción, $f^{-1}(K)$ es compacto. Esto prueba *2)*.

Para verificar *3)*, supongamos que f es convergente a infinito en el infinito. Sea K un subconjunto compacto de X. Para verificar que $f^{-1}(K)$ procedemos como en el párrafo anterior en donde, la situación importante se da cuando suponemos que $f^{-1}(K)$ es un subconjunto no vacío de X que no es compacto. Entonces, por la Proposición 1.36, existe una una sucesión $(x_n)_n$ en $f^{-1}(K)$ que no posee subsucesiones convergentes en X. Como f es convergente a infinito en el infinito, la sucesión $(f(x_n))_n$, de elementos en el conjunto compacto K, no posee subsucesiones convergentes. Esto contradice la Proposición 1.36 y muestra *3)*. $\square$

Aún falta ver que la función 2^f es continua si f converge a infinito en el infinito.

Teorema 3.6. *Supongamos que X es un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Sea $f\colon X \to X$ una función continua, cerrada que converge a infinito en el infinito. Entonces f es propia y la función inducida $2^f\colon (2^X, \tau_F) \to (2^X, \tau_F)$ es continua.*

Demostración. Como f es cerrada y converge a infinito en el infinito, la función inducida 2^f está bien definida y, además, $2^f(\emptyset) = \emptyset$. La parte *3)* del Teorema 3.5 dice que f es propia. Por la Proposición 3.3, si ωX es la compactación por un punto de X, entonces f puede ser extendida a una función continua $\bar{f}\colon \omega X \to \omega X$, de forma que $\bar{f}(\omega) = \omega$.

Ya que X es T_2, localmente compacto y segundo numerable, resulta que X es metrizable. Sea d una métrica en X cuya topología inducida es la de X. Como indicamos en la página 77, ωX también es metrizable. Sea $\widetilde{d}$ una métrica en ωX cuya topología inducida es la de ωX. Naturalmente pensamos que las métricas d y $\widetilde{d}$ son consistentes en X. Como hicimos ver, el hiperespacio $(CL(\omega X), \tau_V)$ es metrizable y, más aún, la topología de Fell en $CL(\omega X)$ coincide con la de Vietoris y con la inducida por la métrica de Hausdorff $H_{\widetilde{d}}$ en el hiperespacio $CL(\omega X)$, de los subconjuntos cerrados y no vacíos de ωX. Consideremos la función $C\colon (2^X, \tau_F) \to (CL(\omega X), \tau_V)$ definida, para $F \in 2^X$, como

$$C(F) = F \cup \{\omega\}.$$

Por la Proposición 2.64, C es un encaje. Además, la función $\rho\colon (2^X, \tau_F) \times (2^X, \tau_F) \to [0, \infty]$ definida, para $A, B \in 2^X$ como

$$\rho(A, B) = H_{\widetilde{d}}(C(A), C(B)),$$

es una métrica en 2^X cuya topología inducida es τ_F.

Notemos que $(\omega X, \bar{f})$ es un sistema dinámico. Como $\bar{f}\colon \omega X \to \omega X$ es una función continua y ωX es un espacio compacto y T_2, la Proposición 1.28 nos dice que la función $\bar{f}\colon \omega X \to \omega X$ es cerrada. Entonces, por el Teorema 3.1, la función inducida $CL^{\bar{f}}\colon (CL(\omega X), \tau_V) \to (CL(\omega X), \tau_V)$

es continua. Con todos estos elementos, podemos probar que la función inducida $2^f : (2^X, \tau_F) \to (2^X, \tau_F)$ es continua. Como hicimos ver en el primer párrafo de la demostración del Teorema 3.4, la continuidad de 2^f equivale a su continuidad por sucesiones. Tomemos un elemento $F \in 2^X$. Para probar que 2^f es continua en F, sea $(F_n)_n$ una sucesión en 2^X que converge a F. Vamos a mostrar que la sucesión $(2^f(F_n))_n$ en 2^X, converge a $2^f(F)$. Como la función $C\colon (2^X, \tau_F) \to (CL(\omega X), \tau_V)$ es continua, la sucesión $(C(F_n))_n$ converge a $C(F)$ en $(CL(\omega X), \tau_V)$. Como también la función inducida $CL^{\bar{f}} : (CL(\omega X), \tau_V) \to (CL(\omega X), \tau_V)$ es continua, la sucesión $(CL^{\bar{f}}(C(F_n)))_n$ converge a $CL^{\bar{f}}(C(F))$. Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, como $\bar{f}$ es una extensión de f,

$$\begin{aligned} CL^{\bar{f}}(C(F_n)) &= \bar{f}(C(F_n)) = \bar{f}(F_n \cup \{\omega\}) = \bar{f}(F_n) \cup \{\bar{f}(\omega)\} = \\ &= \bar{f}(F_n) \cup \{\omega\} = f(F_n) \cup \{\omega\} = 2^f(F_n) \cup \{\omega\} = C(2^f(F_n)) \end{aligned}$$

y, de forma similar, $CL^{\bar{f}}(C(F)) = 2^f(F) \cup \{\omega\} = C(2^f(F))$. De esta manera, en el hiperespacio $(CL(\omega X), \tau_V)$, la sucesión $(C(2^f(F_n)))_n$ converge a $C(2^f(F))$. Luego la sucesión de distancias $(H_{\tilde{d}}(C(2^f(F_n)), C(2^f(F))))_n$ converge a cero. Esto implica, de acuerdo con la definición de ρ, que la sucesión de distancias $(\rho(2^f(F_n), 2^f(F)))_n$ converge a cero. Por lo tanto, la sucesión $(2^f(F_n))_n$ converge a $2^f(F)$ en $(2^X, \tau_F)$. □

Combinando los teoremas 3.4 y 3.6, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.7. *Supongamos que X es un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Sea $f\colon X \to X$ una función propia que converge en el infinito. Entonces la función inducida $2^f : (2^X, \tau_F) \to (2^X, \tau_F)$ es continua.*

Con las condiciones impuestas a X y a f en el teorema anterior, el sistema dinámico (X, f) induce un sistema dinámico $((2^X, \tau_F), 2^f)$. Naturalmente, bajo las mismas condiciones, la función inducida

$$CL^f : (CL(X), \tau_F) \to (CL(X), \tau_F)$$

es continua. Sin embargo, como mostramos en el siguiente resultado, para probar la continuidad de CL^f no es necesario suponer que f converge en el infinito. Recordemos que $CL^f(F) = f(F)$, para cada $F \in CL(X)$.

Teorema 3.8. *Supongamos que X es un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Si $f\colon X \to X$ es una función propia, entonces la función inducida $CL^f : (CL(X), \tau_F) \to (CL(X), \tau_F)$ es continua.*

Demostración. Ya que $f\colon X \to X$ es propia y X es localmente compacto y T_2, la Proposición 1.30 nos dice que f es cerrada. También como X es localmente compacto y segundo numerable, por el Teorema 2.42, $(CL(X), \tau_F)$ es T_2 y segundo numerable. En particular $(CL(X), \tau_F)$ es primero numerable y, por tanto, la continuidad de $CL(f)$ equivale a la continuidad por sucesiones. Tomemos un elemento $F \in CL(X)$. Para probar que $CL(f)$ es continua en F, sea $(F_n)_n$ una sucesión en $CL(X)$ que converge a F. Vamos a mostrar, utilizando el Teorema 2.62, que la sucesión $(2^f(F_n))_n$ en 2^X, converge a $2^f(F)$.

Sea K un subconjunto compacto de X tal que $CL^f(F) \cap K = \emptyset$. La definición de CL^f indica que $f(F) \cap K = \emptyset$. Entonces $f^{-1}(K) \cap F = \emptyset$. Como f es propia, $f^{-1}(K)$ es un subconjunto compacto de X. La parte *(1)* del Teorema 2.62 nos dice que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq m$, se cumple $f^{-1}(K) \cap F_n = \emptyset$. Por la definición de CL^f lo anterior significa $CL^f(F_n) \cap K = \emptyset$, para cada $n \geq m$.

Por otro lado, sea U un subconjunto abierto de X tal que $CL^f(F) \cap U \neq \emptyset$. Esto lleva a que $F \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Como f es una función continua, $f^{-1}(U)$ es abierto en X. La parte *(2)* del Teorema 2.62 indica que existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $F_n \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ para cada $n \geq s$. Luego, casi todos los conjuntos $f(F_n)$ “le pegan” a U, es decir $CL^f(F_n) \cap U \neq \emptyset$, para toda $n \geq s$. Usando el Teorema 2.62, deducimos que $CL^f(F_n)$ converge a $CL^f(F)$ en $CL(X)$, por lo que CL^f es continua. $\square$

Con las condiciones impuestas a X y a f en el Teorema 3.8, el sistema dinámico (X, f) induce un sistema dinámico $((CL(X), \tau_F), CL^f)$.

3.4. Dinámica Colectiva

Supongamos que X es un espacio topológico y que $f\colon X \to X$ es una función continua y cerrada. Por el Teorema 3.1, la función inducida

$$CL^f\colon (CL(X), \tau_V) \to (CL(X), \tau_V)$$

es continua. En el 2005, J. Banks probó en [3] que si $\mathcal{H}$ es un subconjunto denso de $CL(X)$ y f es una función compatible con $\mathcal{H}$ (es decir, para toda $A \in \mathcal{H}$ se cumple que $f(A) \in \mathcal{H}$), entonces la función inducida $(CL^f)_{|\mathcal{H}}\colon (\mathcal{H}, \tau_V) \to (\mathcal{H}, \tau_V)$ está bien definida, es continua y, además, con τ_V aplicada a los sistemas dinámicos (X, f) y $(\mathcal{H}, (CL^f)_{|\mathcal{H}})$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1) (X, f) es débilmente mezclante;

2) $(\mathcal{H}, (CL^f)_{|\mathcal{H}})$ es débilmente mezclante;

3) $(\mathcal{H}, (CL^f)_{|\mathcal{H}})$ es transitivo.

También se prueba que (X, f) es mezclante si y sólo si $(\mathcal{H}, (CL^f)_{|\mathcal{H}})$ es mezclante.

Recordemos que en la Definición 1.40, hemos dado las definiciones de función topológicamente transitiva (o simplemente transitiva), de función débilmente mezclante y de función mezclante. Posteriormente probamos que las funciones mezclantes son débilmente mezclantes, y que las funciones débilmente mezclantes son transitivas. En el enunciado de J. Banks se está entendiendo que un sistema dinámico es mezclante (respectivamente débilmente mezclante, transitivo) si su función base es mezclante (respectivamente débilmente mezclante, transitiva).

Claramente, si tomamos a $CL(X)$ como el subconjunto denso de $CL(X)$, el resultado de J. Banks asegura que para $(CL(X), \tau_V)$, las propiedades de f mezclante y de f débilmente mezclante son, respectivamente, equivalentes a las propiedades de CL^f mezclante y CL^f débilmente mezclante. Sin embargo, esta equivalencia entre una función f y su función inducida, que se cumple cuando se consideran las propiedades dinámicas de ser mezclante o ser débilmente mezclante, no se cumple cuando la propiedad que nos interesa es la transitividad. En efecto, del mismo resultado de J. Banks, se infiere que si CL^f es transitiva, entonces f es transitiva, justo porque f es débilmente mezclante. En [24, Teorema 2.58] se muestra a detalle un ejemplo de una función transitiva $f\colon Y \to Y$, donde Y es la circunferencia unitaria, tal que su función inducida $CL^f\colon (CL(Y), \tau_V) \to (CL(Y), \tau_V)$ no es transitiva.

El caso de la función inducida CL^f, cuando se considera la topología de Fell, es completamente distinto. El objetivo del resto de este trabajo, es presentar los resultados que aparecen en [27]. Veremos que si P es una de las tres propiedades dinámicas que dimos en la Definición 1.40, entonces existe una propiedad dinámica Q, distinta de P, de modo que el sistema dinámico (X, f) satisface la propiedad Q si y sólo si el sistema dinámico inducido $((CL(X), \tau_F), CL^f)$ satisface la propiedad P. Para definir las propiedades del tipo Q, la siguiente noción será importante.

Definición 3.9. Sean X un espacio topológico y U un abierto no vacío de X. Si $X \setminus U$ es compacto, decimos que U es *co-compacto.*

Notemos que $X \setminus X = \emptyset$ es un compacto, por tanto X mismo es co-compacto. Si X es compacto, entonces todo subconjunto abierto y no vacío de X es co-compacto. Supongamos que X es ahora un espacio T_2 y localmente compacto. Entonces, como hemos indicado, podemos considerar la compactación por un punto de X, que denotamos por ωX o bien por $X \cup \{\omega\}$. No es difícil probar que un subconjunto abierto y no vacío U de X es co-compacto si y sólo si $U \cup \{\omega\}$ es una vecindad abierta de ω en ωX.

Consideremos ahora la siguiente definición.

Definición 3.10. Sea X un espacio topológico. Si U y V son abiertos no vacíos de X y al menos uno de ellos es co-compacto, decimos que (U, V) es una *pareja co-compacta* de X.

Anteriormente advertimos que X es co-compacto, luego (X, U) y (U, X) son parejas co-compactas, para cualquier subconjunto abierto y no vacío U de X. En adelante si decimos que (U, V) es una pareja co-compacta de X, entendemos que U y V son dos subconjuntos abiertos y no vacíos de X, en donde alguno de ellos es co-compacto.

3.4.1. Función c-mezclante

En la presente subsección, utilizando las parejas co-compactas, daremos una definición que se asemeje a lo que definimos como función mezclante. Recordemos que una función continua $f\colon X \to X$ es mezclante, si para cualesquiera dos abiertos y no vacíos U y V de X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$.

Definición 3.11. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si para cualquier pareja co-compacta (U, V) de X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para toda $n \geq m$, se dice que f es *co-compactamente mezclante* o, simplemente, que f es *c-mezclante.*

Es evidente que si f es mezclante, entonces f es c-mezclante. Por otro lado, si X es compacto y f es c-mezclante, entonces f es mezclante, pues cualquier abierto tiene complemento cerrado en el compacto X y por tanto el abierto es co-compacto (ver Proposición 1.18).

Teorema 3.12. *Supongamos que X es un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Supongamos también que $f\colon X \to X$ es una función propia. Entonces la función inducida $CL^f\colon (CL(X), \tau_F) \to (CL(X), \tau_F)$ es mezclante si y sólo si f es c-mezclante.*

Demostración. Del Teorema 2.8, se sigue que una base para la topología τ_F de $CL(X)$ es la familia:

$$\mathfrak{B} = \{\langle X, U_1, \ldots, U_n\rangle \cap \langle X \setminus K\rangle \cap CL(X) \mid K \subseteq X \text{ es compacto, } n \in \mathbb{N} \text{ y } U_i \subseteq X \text{ abierto en } X \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Suponemos que f es c-mezclante. Para probar que $CL^f\colon (CL(X), \tau_F) \to (CL(X), \tau_F)$ es mezclante, sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos abiertos no vacíos en $CL(X)$. Tomemos dos elementos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en $\mathfrak{B}$ tales que $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ y $\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$, subconjuntos abiertos y no vacíos $U_1, U_2, \ldots, U_n$, $V_1, V_2, \ldots, V_m$ y subconjuntos compactos K_1 y K_2 de X, tales que $K_1 \neq X$, $K_2 \neq X$,

$$\mathcal{A} = \langle X \setminus K_1\rangle \cap \langle X, U_1, \ldots, U_n\rangle \cap CL(X)$$

y

$$\mathcal{B} = \langle X \setminus K_2\rangle \cap \langle X, V_1, \ldots, V_m\rangle \cap CL(X).$$

Sea $F \in \mathcal{A}$. Entonces $F \in CL(X)$, $F \subseteq X \setminus K_1$ y $F \cap U_j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, al tomar un punto en $F \cap U_j$ y debido a que todos los elementos de F están en el complemento de K_1, resulta que $U_j \setminus K_1 \neq \emptyset$. Como X es T_2 y K_1 es un subespacio compacto de X, por la Proposición 1.18, K_1 es cerrado en X. Luego $X \setminus K_1$ es abierto en X, de donde $U_j \setminus K_1 = U_j \cap (X \setminus K_1)$ es abierto en X. Esto prueba que, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $U_j \setminus K_1$ es un subconjunto abierto y no vacío de X.

Análogamente se observa que $V_s \setminus K_2$ es un subconjunto abierto y no vacío de X, para cada $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Como K_1 y K_2 son subconjuntos compactos de X, los subconjuntos abiertos y no vacíos $X \setminus K_1$ y $X \setminus K_2$ de X, son co-compactos. Entonces $(X \setminus K_1, V_s \setminus K_2)$ y $(U_j \setminus K_1, X \setminus K_2)$ son parejas co-compactas de X, para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y toda $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Como f es c-mezclante, para cada $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$, existe $M_s \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^r(X \setminus K_1) \cap (V_s \setminus K_2) \neq \emptyset, \text{ para todo } r \geq M_s.$$

Sea R_1 el máximo de los números naturales $M_1, M_2, \ldots, M_m$. Entonces, para cada $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$, se tiene que

$$f^r(X \setminus K_1) \cap (V_s \setminus K_2) \neq \emptyset, \text{ para toda } r \geq R_1.$$

Haciendo lo mismo con las parejas co-compactas $(U_j \setminus K_1, X \setminus K_2)$, encontramos un número natural R_2 tal que, para toda $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sucede que

$$f^r(U_j \setminus K_1) \cap (X \setminus K_2) \neq \emptyset \text{ para toda } r \geq R_2.$$

Sea M el máximo de los números naturales R_1 y R_2. Entonces $M \in \mathbb{N}$ y para cada $(s,j) \in \{1,2,\ldots,m\} \times \{1,2,\ldots,n\}$, sucede que

$$f^r(X \setminus K_1) \cap (V_s \setminus K_2) \neq \emptyset \neq f^r(U_j \setminus K_1) \cap (X \setminus K_2), \text{ para toda } r \geq M.$$

Supongamos que $r \geq M$ y, para cada $(s,j) \in \{1,2,\ldots,m\} \times \{1,2,\ldots,n\}$, tomemos un elemento $x_s \in X \setminus K_1$, así como $y_j \in U_j \setminus K_1$ tales que $f^r(x_s) \in V_s \setminus K_2$ y $f^r(y_j) \in X \setminus K_2$. Hagamos

$$F = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n\}.$$

Como X es un espacio T_2, los subconjuntos finitos de X son cerrados en X. Entonces $F \in CL(X)$. Más aún,

$$F \in \langle X \setminus K_1 \rangle \cap \langle X, U_1, \ldots, U_n \rangle \cap CL(X) = \mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$$

y

$$(CL^f)^r(F) = f^r(F) \in \langle X \setminus K_2 \rangle \cap \langle X, V_1, \ldots, V_m \rangle \cap CL(X) = \mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}.$$

Por tanto $(CL^f)^r(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ para toda $r \geq M$. Esto prueba que CL^f es mezclante.

Ahora supongamos que CL^f es mezclante. Para ver que f es c-mezclante, sea (U,V) una pareja co-compacta de X. Entonces U y V son subconjuntos abiertos y no vacíos de X. Sin perder generalidad, supongamos que U es co-compacto. Como V es un abierto no vacío y $X \setminus U$ es compacto, se sigue que tanto $\langle X \setminus (X \setminus U) \rangle \cap CL(X) = \langle U \rangle \cap CL(X)$ como $\langle X, V \rangle \cap CL(X)$ son abiertos básicos de $(CL(X), \tau_V)$. Usando que CL^f es una función mezclante, existe M tal que

$$(CL^f)^m(\langle U \rangle \cap CL(X)) \cap \langle X, V \rangle \cap CL(X) \neq \emptyset \text{ para toda } m \geq M.$$

Consideremos que $m \geq M$ y sea $A \in \langle U \rangle \cap CL(X)$ tal que $(CL^f)^m(A) \in \langle X, V \rangle \cap CL(X)$. Entonces $\emptyset \neq A \subseteq U$ y $f^m(A) \cap V \neq \emptyset$. Esto implica que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Por tanto, f es c-mezclante. $\square$

3.4.2. Función c-débilmente mezclante

Recordemos que una función continua $f \colon X \to X$ es débilmente mezclante si para cualesquiera dos parejas (U_1, U_2) y (V_1, V_2) de abiertos no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \neq f^n(U_2) \cap V_2$. Por el Teorema de Furstenberg (Teorema 1.43), f es débilmente mezclante si y sólo si para cualesquiera dos colecciones $(U_1, U_2, \ldots, U_k)$ y $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ de abiertos no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Esta propiedad, utilizando parejas co-compactas, es la base de la siguiente definición.

Definición 3.13. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que f es *co-compactamente débilmente mezclante* o, simplemente, que f es *c-débilmente mezclante*, si para un número finito de parejas co-compactas de X, a saber (U_i, V_i) con $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Es claro que si f es una función débilmente mezclante entonces f es c-débilmente mezclante. Razonando de la misma forma que en el comentario posterior a la Definición 3.11, tenemos que cuando X es compacto, c-mezclado débil y mezclado débil son conceptos equivalentes. Haciendo uso del Teorema 1.43, probaremos que existe una relación entre f y su función inducida en el hiperespacio $CL(X)$ si f es una función c-débilmente mezclante.

Teorema 3.14. *Supongamos que X es un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Supongamos también que $f\colon X \to X$ es una función propia. Entonces la función inducida $CL^f\colon (CL(X), \tau_F) \to (CL(X), \tau_F)$ es débilmente mezclante si y sólo si f es c-débilmente mezclante.*

Demostración. Para facilitar los cálculos, usaremos el Lema 2.5 en básicos de $CL(X)$, para asegurar que posean el mismo número de entradas. Supongamos que f es c-débilmente mezclante. Para probar que CL^f es débilmente mezclante, basta con verificar que si

$$\mathcal{A} = \langle X \setminus K_1 \rangle \cap \langle X, U_1, \ldots, U_n \rangle \cap CL(X),$$

$$\mathcal{B} = \langle X \setminus K_2 \rangle \cap \langle X, V_1, \ldots, V_n \rangle \cap CL(X),$$

$$\mathcal{C} = \langle X \setminus K_3 \rangle \cap \langle X, W_1, \ldots, W_n \rangle \cap CL(X)$$

y

$$\mathcal{D} = \langle X \setminus K_4 \rangle \cap \langle X, Z_1, \ldots, Z_n \rangle \cap CL(X)$$

son cuatro abiertos básicos y no vacíos de $(CL(X), \tau_F)$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$(CL^f)^M(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset \neq (CL^f)^M(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D}.$$

Entendemos que K_1, K_2, K_3 y K_4 son subconjuntos compactos y propios de X. Además, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ los conjuntos U_i, V_i, W_i y Z_i son abiertos y no vacíos en X. Como cada conjunto K_r es compacto y X es T_2, se tiene que cada conjunto abierto y no vacío $X \setminus K_r$ es co-compacto, para $r \in \{1, 2, 3, 4\}$. Como hicimos ver en la demostración del Teorema 3.12, para cada $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$, los conjuntos $V_j \setminus K_2$ y $U_j \setminus K_1$ son abiertos y no vacíos. Por tanto, para toda $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$(X \setminus K_1,\, V_j \setminus K_2) \quad \text{y} \quad (U_j \setminus K_1,\, X \setminus K_2)$$

son parejas co-compactas de X. Utilizando el mismo razonamiento, para cada $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$,

$$(X \setminus K_3, Z_j \setminus K_4) \quad \text{y} \quad (W_j \setminus K_3, X \setminus K_4)$$

son parejas co-compactas de X. Al tener un número finito de parejas co-compactas y a f una función c-débilmente mezclante, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene que

$$f^M(X \setminus K_1) \cap (V_j \setminus K_2) \neq \emptyset \neq f^M(U_j \setminus K_1) \cap (X \setminus K_2),$$

$$f^M(X \setminus K_3) \cap (Z_j \setminus K_4) \neq \emptyset \neq f^M(W_j \setminus K_3) \cap (X \setminus K_4).$$

Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tomamos $x_j \in X \setminus K_1$ tal que $f^M(x_j) \in V_j \setminus K_2$. También elegimos $y_j \in U_j \setminus K_1$ de modo que $f^M(y_j) \in X \setminus K_2$. Sea

$$F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n\}.$$

Claramente F es cerrado y no vacío en X, es decir, $F \in CL(X)$. Por la forma en que tomamos a los elementos de F, sabemos que

$$F \in \langle X \setminus K_1 \rangle \cap \langle X, U_1, \ldots, U_n \rangle \cap CL(X) = \mathcal{A}$$

y

$$(CL^f)^M(F) \in \langle X \setminus K_2 \rangle \cap \langle X, V_1, \ldots, V_n \rangle = \mathcal{B}.$$

Por tanto existe M tal que $(CL^f)^M(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Análogamente, utilizando ahora que para toda $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$,

$$f^M(X \setminus K_3) \cap (Z_j \setminus K_4) \neq \emptyset \neq f^M(W_j \setminus K_3) \cap (X \setminus K_4),$$

se concluye que $(CL^f)^M(\mathcal{C}) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Esto prueba que CL^f es débilmente mezclante.

Ahora supongamos que CL^f es débilmente mezclante. Para ver que f es c-débilmente mezclante, consideremos un número finito de parejas co-compactas de X, a saber (U_i, V_i) para $1 \leq i \leq s$. Como no sabemos cuales abiertos no vacíos de entre U_i y V_i son los de complemento compacto, podemos reordenar las parejas, de modo que $U_1, \ldots, U_t$ y $V_{t+1}, \ldots, V_s$ sean los abiertos co-compactos. Luego $\langle U_i \rangle \cap CL(X)$, $\langle X, V_i \rangle \cap CL(X)$, con $1 \leq i \leq t$, y $\langle V_j \rangle \cap CL(X)$, $\langle X, U_j \rangle \cap CL(X)$, con $t+1 \leq j \leq s$, son abiertos básicos de $(CL(X), \tau_F)$. Como CL^f es débilmente mezclante, el Teorema 1.43 nos dice que existe m tal que

$$(CL^f)^m(\langle U_i \rangle) \cap \langle X, V_i \rangle \neq \emptyset \qquad \text{con } 1 \leq i \leq t; \qquad (\alpha)$$
$$(CL^f)^m(\langle X, U_j \rangle) \cap \langle V_j \rangle \neq \emptyset \qquad \text{con } t+1 \leq j \leq s. \qquad (\beta)$$

De (α) tenemos que $f^m(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq t$ y, de (β), se sigue que $f^m(U_j) \cap V_j \neq \emptyset$ para $t+1 \leq j \leq s$. Notamos que $f^m(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ con $1 \leq i \leq s$. Entonces f es c-débilmente mezclante. □

3.4.3. Función c-transitiva

Hasta ahora las nuevas definiciones que implican a los conjuntos co-compactos, son relativamente parecidas a las ya conocidas (función mezclante y débilmente mezclante). En realidad no hemos visto nada nuevo a lo que se ha hecho en otros trabajos al mostrar que existe una relación entre las propiedades mencionadas para f y su función inducida.

Recordemos que una función $f: X \to X$ es transitiva si se cumple que para cualesquiera dos abiertos y no vacíos U y V de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Habíamos dicho que para $(CL(X), \tau_V)$ no había forma de relacionar el hecho de que f sea transitiva en el espacio X y que su inducida lo sea en $CL(X)$. Algo para remediar esto, y que supone un cambio en la costumbre mostrada hasta ahora, se consigue con la siguiente definición, que no es tan parecida a lo que conocemos como función transitiva.

Definición 3.15. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que f es *co-compactamente topológicamente transitiva* o, simplemente, que f es *c-transitiva*, si para cualesquiera dos colecciones de subconjuntos abiertos de X

$$\{U_1, O_1, O_2, \ldots, O_s\} \quad \text{y} \quad \{U_2, W_1, W_2, \ldots, W_t\}$$

que cumplan con las siguientes dos condiciones:

a) U_1 y U_2 son abiertos co-compactos de X;

b) $U_1 \cap O_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq s$ y $U_2 \cap W_j \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq t$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^m(U_1) \cap (W_j \cap U_2) \neq \emptyset, \quad \text{para cada } 1 \leq j \leq t$$

y

$$f^m(O_j \cap U_1) \cap U_2 \neq \emptyset, \quad \text{para cada } 1 \leq j \leq s.$$

De las definiciones 3.11, 3.13 y 3.15, mostraremos que si una función f es c-mezclante, la función es c-débilmente mezclante y que f c-débilmente mezclante implica que f es c-transitiva.

En efecto, supongamos que f es una función c-mezclante y (U_i, V_i) con $i \in \{1, \ldots, s\}$ son un número finito de parejas co-compactas. Como f es una función c-mezclante, para cada i existe $M_i \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para todo $m \geq M_i$. Tomando $M = \text{máx}\{M_i\}$ se tiene que $f^M(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$. Entonces f es c-débilmente mezclante. Ahora tomemos una función f c-débilmente mezclante y colecciones finitas de abiertos $\{U_1, O_1.O_2, \ldots, O_s\}$, $\{U_2, W_1, W_2, \ldots, W_t\}$ cumpliendo las condiciones de la Definición 3.15. Como U_2 y W_j con $1 \leq j \leq t$ son abiertos no vacíos es claro que cada $W_j \cap U_2$ es un abierto no vacío. Análogamente, cada $O_j \cap U_1$ con $1 \leq j \leq s$ es un abierto no vacío. Por otro lado, usando que U_1 y U_2 son abiertos co-compactos, es evidente que $(U_1, (W_j \cap U_2))$ es una pareja co-compacta para cada $1 \leq j \leq t$ y de igual forma lo son las parejas $((O_j \cap U_1), U_2)$ con $1 \leq j \leq s$. Como f es c-débilmente mezclante y la colección de las anteriores parejas co-compactas es finita, se sigue que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^m(U_1) \cap (W_j \cap U_2) \neq \emptyset \text{ para toda } 1 \leq j \leq t$$

y

$$f^m(O_j \cap U_1) \cap U_2 \neq \emptyset \text{ para toda } 1 \leq j \leq s.$$

Luego, f es c-transitiva.

Finalmente mostraremos que para $(CL(X), \tau_F)$, existe una relación entre la transitividad de la función inducida y la c-transitividad de la función original.

Teorema 3.16. *Supongamos que X es un espacio T_2, localmente compacto y segundo numerable. Supongamos también que $f\colon X \to X$ es una función propia. Entonces la función inducida $CL^f\colon (CL(X), \tau_F) \to (CL(X), \tau_F)$ es transitiva si y sólo si f es c-transitiva.*

Demostración. Supongamos primero que f es c-transitiva. Para ver que CL^f es transitiva, basta con verificar que para cualesquiera dos abiertos básicos y no vacíos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $(CL(X), \tau_F)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(CL^f)^m(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Hagamos

$$\mathcal{A} = \langle X, O_1, \dots, O_s \rangle \cap \langle X \setminus K_1 \rangle \cap CL(X)$$

y

$$\mathcal{B} = \langle X, W_1, \dots, W_t \rangle \cap \langle X \setminus K_2 \rangle \cap CL(X)$$

Entendemos que K_1 y K_2 son subconjuntos compactos y propios de X. También sabemos que cada conjunto O_j y todo conjunto W_i es abierto y no vacío en X. Consideremos las colecciones

$$(X \setminus K_1, O_1, O_2, \dots, O_s) \quad \text{y} \quad (X \setminus K_2, W_1, W_2, \dots, W_t).$$

Como ya hemos establecido, los conjuntos $U_1 = X \setminus K_1$ y $U_2 = X \setminus K_2$ son co-compactos de X. Así, la condición a) de la Definición 3.15 se cumple. Tomemos $F \in \mathcal{A}$. Entonces $F \in CL(X)$, $F \cap K_1 = \emptyset$ (por tanto $F \subseteq U_1$) y $F \cap O_j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Esto implica que $U_1 \cap O_j \neq \emptyset$, para toda $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Tomando ahora un elemento en $\mathcal{B}$ y realizando un análisis similar al que hicimos con F, obtenemos que $U_2 \cap W_j \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, 2, \dots, t\}$. Entonces la condición b) de la Definición 3.15 también se cumple. Como f es c-transitiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^m(U_1) \cap (W_j \cap U_2) \neq \emptyset, \quad \text{para cada } 1 \leq j \leq t$$

y

$$f^m(O_j \cap U_1) \cap U_2 \neq \emptyset, \quad \text{para cada } 1 \leq j \leq s.$$

Para cada $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ tomamos $x_i \in U_1$ tal que $f^m(x_i) \in W_i \cap U_2$. También, para toda $p \in \{1, 2, \dots, s\}$, tomamos $y_p \in O_p \cap U_1$ de modo que $f^m(y_p) \in U_2$. Definimos

$$D = \{x_1, x_2, \dots, x_t, y_1, y_2, \dots, y_s\}.$$

Como X es un espacio T_2, sabemos que D es un cerrado y no vacío. También es fácil notar que

$$D \in \langle X, O_1, \dots, O_s \rangle \cap \langle X \setminus K_1 \rangle \cap CL(X) = \mathcal{A}$$

y

$$(CL^f)^m(D) \in \langle X, W_1, \dots, W_t \rangle \cap \langle X \setminus K_2 \rangle \cap CL(X) = \mathcal{B}.$$

Lo anterior debido a que los x_i, y_p están en U_1 y los y_p están en O_p para $1 \leq i \leq t$ y $1 \leq p \leq s$. Además de que los $f^m(x_i)$, $f^m(y_p)$ viven en U_2 y los $f^m(x_i)$ están en los W_i. Con todo, hemos mostrado que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(CL^f)^m(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Esto prueba que CL^f es transitiva.

Ahora supongamos que CL^f es transitiva. Para ver que f es c-transitiva, sean

$$\{U_1, O_1, O_2, \ldots, O_s\} \quad \text{y} \quad \{U_2, V_1, V_2, \ldots, V_t\}$$

dos colecciones de subconjuntos abiertos de X que cumplan las condiciones a) y b) de la definición 3.15. Entonces U_1 y U_2 son abiertos en X tales que $X \setminus U_1$ y $X \setminus U_2$ son compactos. Luego

$$\mathcal{U} = \langle X, O_1, \ldots, O_s \rangle \cap \langle U_1 \rangle \cap CL(X)$$

y

$$\mathcal{V} = \langle X, V_1, \ldots, V_t \rangle \cap \langle U_2 \rangle \cap CL(X)$$

son abiertos básicos y no vacíos de $(CL(X), \tau_F)$. Como CL^f es transitiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$(CL^f)^m(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \emptyset.$$

Sea $F \in \mathcal{U}$ tal que $f^m(F) \in \mathcal{V}$. Como el hiperespacio es $CL(X)$, los cerrados son no vacíos, mostrando que $f^m(U_1) \cap (V_j \cap U_2) \neq \emptyset$ para $1 \leq j \leq t$ y $f^m(O_j \cap U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ con $1 \leq j \leq s$. Por tanto, f es c-transitiva. $\square$

Las demostraciones de los teoremas 3.12, 3.14 y 3.16, están dadas para espacios X que se suponen T_2, localmente compactos y segundo numerables, y para f una función propia. Dichos teoremas permanecen válidos si suponemos que X es T_2, compacto y segundo numerable. En esta situación, basta suponer que f sea continua y cerrada, para justificar que la función CL^f está bien definida. Ahora bien, como X es compacto y T_2, la topología de Vietoris y la de Fell son la misma en $CL(X)$. Por consiguiente, los resultados que hemos presentado para dinámica en el hiperespacio $CL(X)$ con la topología de Fell, se convierten en resultados de dinámica en el hiperespacio $CL(X)$ con la topología de Vietoris. Al suponer que X es compacto, decir que f es c-mezclante equivale a decir que f es mezclante. De manera similar, suponer que f es c-débilmente mezclante equivale a decir que f es débilmente mezclante.

De lo anterior, como consecuencia del Teorema 3.12, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.17. *Supongamos que X es un espacio T_2, compacto y segundo numerable. Supongamos también que $f\colon X \to X$ es una función continua y cerrada. Entonces la función inducida $CL^f\colon (CL(X), \tau_V) \to (CL(X), \tau_V)$ es mezclante si y sólo si f es mezclante.*

Y como consecuencia del Teorema 3.14, resulta el siguiente resultado.

Teorema 3.18. *Supongamos que X es un espacio T_2, compacto y segundo numerable. Supongamos también que $f\colon X \to X$ es una función continua y cerrada. Entonces la función inducida $CL^f\colon (CL(X), \tau_V) \to (CL(X), \tau_V)$ es débilmente mezclante si y sólo si f es débilmente mezclante.*

Los teorema anteriores son los obtenidos por J. Banks, y a los que nos referimos al principio de esta sección. Como moraleja de todo esto, comentamos que a través de resultados obtenidos de la dinámica en hiperespacios con la topología de Fell, es posible obtener resultados de dinámica en hiperespacios con la topología de Vietoris.

Consideremos a X, de nuevo, como un espacio T_2, compacto y segundo numerable, y a f como una función continua y cerrada, del Teorema 3.16 se sigue que f es una función c-transitiva si y sólo si CL^f es una función transitiva bajo la topología de Fell. Por las condiciones de X, el Teorema 2.12 dice que τ_F coincide con τ_V. Los resultados de J. Banks [3], garantizan que CL^f es transitiva si y sólo si f es débilmente mezclante. Por consiguiente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.19. *Supongamos que X es un espacio T_2, compacto y segundo numerable. Supongamos también que $f\colon X \to X$ es una función continua y cerrada. Entonces f es c-transitiva si y sólo si f es débilmente mezclante.*

Es importante notar que si X no es compacto, c-transitividad no es equivalente a mezclado débil. Esta afirmación la mostraremos en la siguiente sección que estudia algunas propiedades de las funciones c-transitivas.

3.5. Dinámica Individual

En esta corta sección exploraremos propiedades que son fácilmente demostrables para el caso de funciones c-mezclantes, c-débilmente mezclantes y c-transitivas. Además, dada una propiedad que posea una función transitiva, veremos si existe una propiedad similar para el caso en el que la función es c-transitiva, tal comparación será establecida para dos características muy selectas. Finalmente, probaremos que c-transitividad es en verdad un concepto nuevo y no una equivalencia de mezclado débil, la cual se da, por ejemplo, bajo las condiciones del Teorema 3.19.

Proposición 3.20. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico y* f *una función transitiva. Si* U *es un abierto no vacío de* X*, entonces* $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ *es un subconjunto denso de* X*.*

Demostración. Sea V un abierto no vacío de X. Ya que f es una función transitiva y U es un abierto no vacío, existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $f^s(U) \cap V \neq \emptyset$. Entonces existe un elemento en $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ que pertenece a V. $\square$

Para la c-transitividad tenemos un resultado similar.

Proposición 3.21. *Sean* (X, f) *un sistema dinámico y* f *una función c-transitiva. Si* U *es un subconjunto co-compacto de* X*,* $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ *es un subconjunto denso de* X*.*

Demostración. Sean U y V abiertos no vacíos de X tal que U es co-compacto. Consideremos los colecciones $\{U, X\}$ y $\{X, V\}$. Notemos que U y X son co-compactos y que $U \cap X \neq \emptyset \neq X \cap V$. De tal modo, satisfacen las condiciones de la Definición 3.15. Como f es c-transitiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\emptyset \neq f^m(U) \cap (X \cap V) = f^m(U) \cap V \ \text{ y } \ f^m(U \cap X) \cap X \neq \emptyset.$$

Es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier abierto V no vacío de X, $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$ es denso en X. $\square$

Corolario 3.22. *Sea* f *una función c-transitiva. Entonces* $f(X)$ *es un subconjunto denso de* X*.*

Demostración. X es co-compacto pues tiene complemento vacío. Usando la Proposición 3.21 obtenemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(X)$ es denso en X. Notemos que como $f\colon X \to X$ entonces $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(X) = X \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(X)) = X$.

Tenemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(X) = f(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(X)) = f(X)$. Concluimos que $f(X)$ es denso en X. $\square$

Para los siguientes resultados, recordamos que los sistemas dinámicos (X, f) y (Y, g) están topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo $h\colon X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$.

Proposición 3.23. *Las propiedades de mezclado, mezclado débil y transitividad son invariantes bajo conjugación topológica.*

Demostración. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas topológicamente conjugados por el homeomorfismo $h : X \to Y$. Supongamos que f es mezclante y sean U y V abiertos no vacíos de Y. Como h es continua y biyectiva, $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(V)$ son abiertos no vacíos de X. Usando que f es mezclante, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset \text{ para toda } n \geq M.$$

Tomamos a $x_n \in h^{-1}(U)$ tal que $f^n(x_n) \in h^{-1}(V)$ para cualquier $n \geq M$. Luego, $hf^n(x_n) \in V$ y usando la Proposición 1.39 obtenemos que $g^n h(x_n) \in V$ para cualquier $n \geq M$. Ya que $x_n \in h^{-1}(U)$, concluimos que $g^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para toda $n \geq M$. Por tanto, g es una función mezclante.

La idea es exactamente la misma para mostrar que si f es débilmente mezclante o transitiva, entonces g también lo es. □

En el caso de c-mezclado, c-mezclado débil y c-transitividad se mantiene un resultado similar.

Teorema 3.24. *Las propiedades de c-transitividad, c-mezclado débil y c-mezclado son invariantes bajo conjugación topológica.*

Demostración. Sea h un homeomorfismo de X en Y, ya que h es biyectiva, es claro que si U es un subconjunto de X, entonces $h(U^c) = (h(U))^c$.

Notemos que si U es co-compacto de X, entonces $h(X \setminus U)$ es un compacto, pues $h\colon X \to Y$ es continua. Como $h(X \setminus U) = Y \setminus h(U)$, tenemos que $Y \setminus h(U)$ es compacto. De manera similar se sigue que si $h(U)$ es co-compacto, entonces U es co-compacto.

Es decir, si h es un homeomorfismo de X en Y, U es co-compacto si y sólo si $h(U)$ es co-compacto.

Ahora, la prueba del teorema: sean (X, f) y (Y, g) sistemas topológicamente conjugados y f una función c-mezclante. Sea (U, V) una pareja co-compacta de Y y supongamos sin perder generalidad que U es co-compacto. Mostraremos que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $g^m(U) \cap V \neq \emptyset$ para toda $m \geq M$. Como U es co-compacto de Y y h es un homeomorfismo, se tiene que $h^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus h^{-1}(U)$ es compacto. Así, $h^{-1}(U)$ es co-compacto de X. Por otra parte, al ser V un abierto no vacío, sabemos que $h^{-1}(V)$ es un abierto no vacío de X. Usando que f es c-mezclante se tiene que existe M tal que

$$f^m(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset \text{ para toda } m \geq M.$$

Tomamos un $x_i \in h^{-1}(U)$ tal que $f^{M+i}(x_i) \in h^{-1}(V)$ para $i \in \mathbb{N}$. Luego, $hf^{M+i}(x_i) \in V$. Usando la Proposición 1.39 tenemos que $g^{M+i}h(x_i) \in V$, donde $h(x_i) \in U$. Por lo tanto $g^{M+i}(U) \cap V \neq \emptyset$ con $i \in \mathbb{N}$. Lo anterior muestra que g es c-mezclante.

Análogamente se muestra para los casos donde f es c-débilmente mezclante o f es c-transitiva. □

Los siguientes dos resultados exploran la relación entre c-transitividad y transitividad.

Teorema 3.25. *Sea (X, f) un sistema dinámico. Si f es una función c-transitiva, U es un co-compacto de X y V es un abierto no vacío de X, entonces se cumple:*

(a) *existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$;*

(b) *existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$.*

Demostración. (a) Sean $\mathcal{A} = \{U, X\}$ y $\mathcal{B} = \{X, V\}$ dos colecciones de abiertos de X. Sabemos que U es co-compacto por hipótesis. X es claramente un co-compacto y $U \cap X \neq \emptyset \neq X \cap V$. De tal forma, se cumplen las dos condiciones de la Definición 3.15. Como f c-transitiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^m(U) \cap (X \cap V) \neq \emptyset \text{ y } f^m(U \cap X) \cap V \neq \emptyset.$$

Es decir, $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$.

(b) Sean $\mathcal{A} = \{X, V\}$ y $\mathcal{B} = \{U, X\}$ colecciones de abiertos de X. U es un co-compacto por hipótesis y X es trivialmente co-compacto. Además, $X \cap V \neq \emptyset \neq U \cap X$, de donde se cumplen las condiciones para la definición de c-transitividad. Como f es c-transitiva, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(X) \cap (U \cap X) \neq \emptyset \text{ y } f^n(X \cap V) \cap U \neq \emptyset.$$

Entonces $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$. □

Corolario 3.26. *Sean X un espacio compacto y (X, f) un sistema dinámico. Si f es una función c-transitiva entonces f es transitiva.*

Demostración. Sean U y V abiertos no vacíos de X. Como X es compacto, $X \setminus U$ y $X \setminus V$ son compactos, pues son cerrados dentro de un compacto. Al tener a U y V co-compactos, podemos usar el Teorema 3.25 para encontrar una $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Obtuvimos que f es transitiva. □

Es evidente que c-mezclado débil no necesariamente implica mezclado débil pues en un espacio topológico X, existen abiertos no vacíos que no necesariamente tienen complemento compacto. Por ejemplo, sea $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ equipado con la topología discreta. Definimos $f\colon X \to X$ como

$$f(i) = i + 2 \text{ para cualquier } i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Ya que el espacio X es discreto y la función está definida para cada punto de X, es evidente que es continua. Como X tiene una cantidad infinita de puntos, se sigue que X no es compacto. Más aún, para que un subespacio Y de X sea compacto, es necesario que Y esté conformado por un número finito de puntos de X. Se sigue que si U es un abierto co-compacto de X, entonces U solo tiene un número finito de enteros no negativos fuera de U, es decir, solo tendrá fuera una cantidad finita de números pares y una cantidad finita de impares. Por tanto, U posee una cantidad infinita de números pares y una cantidad infinita de números impares. Tomamos a (U_1, V_1) una pareja co-compacta. Como es necesario que algun abierto de la pareja sea co-compacto, supongamos que V_1 es co-compacto y U_1 es un abierto no vacío, entonces existe $x \in U_1$. La definición de la función dice que habrá una cantidad infinita de iteraciones $f^{m_1}(x)$ tal que $f^{m_1}(x)$ es un elemento par o una cantidad infinita de iteraciones $f^{m_2}(x)$ tal que $f^{m_2}(x)$ es un número impar. Es decir, en este caso existe un natural N tal que $f^n(x)$ pertenece a V_1, para cualquier $n \geq N$. En el caso de que U_1 sea co-compacto, la infinidad de elementos en U_1 nos dice que existe algún natural $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ para cualquier $n \geq N$. De ambos casos, f es c-mezclante. Sabemos que si f es c-mezclante, entonces f es c-débilmente mezclante. Por tanto f es una función c-débilmente mezclante. Pero f no es una función débilmente mezclante, pues si U_0 es el abierto que únicamente contiene a 0 y U_1 es el abierto que sólo contiene a 1, la definición de la función nos dice que jamás existe un natural n tal que $f^n(U_0) \cap U_1 \neq \emptyset$. Entonces basta definir a las parejas (U_0, U_0) y (U_1, U_1) para mostrar que f no es débilmente mezclante.

De la Sección 3.4 sabemos que mezclado débil implica c-mezclado débil y que ésta a su vez implica c-transitividad. Por tanto, sabemos que mezclado débil implica c-transitividad. Si ocurriera que c-transitividad implica mezclado débil, entonces tendríamos que ser débilmente mezclante es una consecuencia de ser c-débilmente mezclante, algo que ya mostramos no ocurre en general. Concluimos que c-transitividad es una condición menos estricta que mezclado débil, de donde se obtiene que c-transitividad y mezclado débil verdaderamente son conceptos distintos.

Bibliografía

[1] LL. Alsedà, M. Del Río, J. Rodríguez, *Transitivity and dense periodicity for graph maps.* Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 9, No. 6. p. 577–598. (2003)

[2] J. A. Amor, *Teoría de Conjuntos para Estudiantes de Ciencias.* Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. (2011)

[3] J. Banks, *Chaos for induced hyperspace maps.* Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 25, No. 3. p. 681–685. (2005)

[4] G. Beer, *Topologies on Closed and Closed Convex Sets.* Mathematics and Its Applications, Vol. 268. Kluwer Academic Publishers. (1993)

[5] G. Beer, *On the Fell topology*, Set-Valued Analysis 1. p. 69–80. (1993)

[6] G. Beer, R. Tamaki, *The infimal value functional and the uniformization of hit-and-miss hyperspace topologies*, Proc. Amer. Math. Soc. 122. p. 601–611. (1994)

[7] Ji-Chen, P. Vitolo, *Fell topology on the hyperspace of a non-Hausdorff space*, Ricerce Math. 57. p. 111–125. (2008)

[8] J. Dugundji, *Topology.* Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics, Allyn and Bacon, Inc. (1978)

[9] R. Engelking, *General Topology.* Sigma Series in Pure Mathematics, Vol. 6. Helderman Verlag Berlin. (1989)

[10] J. M. G. Fell, *A Hausdorff topology for the closed subsets of a locally compact non-Hausdorff space*, Proc. Amer. Math. Soc. 13. p. 472–476. (1962)

[11] L'. Holá, S. Levi, J. Pelant, *Normality and paracompactness of the Fell topology*, Proc. Amer. Math. Soc. 121, No. 7. p. 2193–2197. (1999)

[12] K. Hur, J. R. Moon, C. J. Rhee, *Local connectedness in Fell topology.* J. Korean Math. Soc. 36, No. 6. p. 1047–1059. (1999)

[13] A. Illanes, S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces Fundamentals and Recent Advances.* Pure and Applied Mathematics, 216. Marcel Dekker, Inc. (1999)

[14] J. Keesling, *Normality and properties related to compactness in hyperspaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 24. p. 760–766. (1970)

[15] J. Keesling, *On the equivalence of normality and compactness in hyperspaces*, Pacific. J. Math. 33. p. 657–667. (1970)

[16] K. Lau, A. Zame, *On weak mixing of cascades.* Mathematical Systems Theory, 6. pp. 307–311. (1972)

[17] M. Madriz, *Conexidad en los Hiperespacios de Continuos Hausdorff*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. (2003)

[18] G. Matheron, *Random Sets and Integral Geometry.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc. (1975)

[19] M. M. McWaters, *Arcs, semigroups, and hyperspaces.* Canadian J. Math Vol. 20. p. 1207–1210. (1968)

[20] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 71. p. 152–182. (1951)

[21] J. Munkres, *Topology.* Massachusetts Institute of Technology. Prentice Hall, Inc. (2000)

[22] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An Introduction*, Marcel Dekker, New York, Basel. (1992).

[23] S. Ruette, *Chaos for continous interval maps.* Notas en la dirección: http://www.math.u-psud.fr/ ruette/articles/chaos-int.pdf

[24] A. Ramírez, *Dinámica en Hiperespacios*, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. (2012)

[25] G. Salinetti, R. Wets, *On the convergence of closed-valued measurable multifunctions.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol 266. p. 275–289. (1981)

[26] R. E. Smithson, *First countable hyperspaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 56. p. 325–328. (1976)

[27] G. Wei, Y. Wang, *Characterizing mixing, weak mixing and transitivity of induced hyperspace dynamical systems.* Topology and its Applications, 155. p. 56–68. (2007)

[28] G. Wei, Y. Wang, *On metrization of the hit-or-miss topology using Alexandroff compactification.* International Journal of Approximate Reasoning, 46. p. 47–64. (2007)

[29] A. Wilansky, *Between T_1 and T_2*. Amer. Math. Monthly, 74. p. 261–266. (1967)

[30] S. Willard, *General Topology.* Addison-Wesley Series In Mathematics. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1970)