



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Nuevos modelos ondulatorios para sistemas elásticos en una y dos  
dimensiones y su comparación con el experimento

T E S I S

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

M. en C. JOHN ALEXANDER FRANCO VILLAFañE

TUTOR:

Dr. RAFAEL ALBERTO MÉNDEZ SÁNCHEZ

Instituto de Ciencias Físicas

MÉXICO, D. F. NOVIEMBRE 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## **Agradecimientos**

*Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo financiero que recibí durante mi doctorado, asimismo por los apoyos económicos recibidos para estancias de investigación por parte de los proyectos CONACyT No. 79613, DGAPA-UNAM PAPIIT No. IN111311 y No. IN114014, PAEP 2011, 2012 y 2013.*

*Quiero expresar mi total agradecimiento al director de tesis doctoral, Dr. Rafael Alberto Méndez Sánchez, por su confianza, dedicación y apoyo brindado en el desarrollo este trabajo, por el respeto a mis sugerencias e ideas y por la dirección y el rigor que facilitaron la conclusión de las mismas. También agradezco al Dr. Thomas H. Seligman, miembro de mi comité tutorial, por su valiosa orientación y oportuna ayuda durante el desarrollo de esta investigación.*

*Del mismo modo agradezco a mis compañeros del Grupo de Ondas y Materiales por su apoyo personal y académico, especialmente a la Dra. Gabriela Báez Juárez y al Dr. Moisés Martínez Mares por sus útiles consejos durante estos años.*

*Esta tesis no hubiera sido posible sin el amparo y cariño de mi esposa Lina Marieth, agradezco su paciencia, comprensión y solidaridad con este proyecto. Gracias a mis padres Herminsul y Aura Nelly, a mi hermano Herminsul, a pesar de la distancia siempre estuvieron al tanto de mi proceso. Las palabras nunca serán suficientes para testimoniar mi aprecio y gratitud a mi familia.*

## Resumen

Los fenómenos elásticos tienen extraordinaria importancia en muchos campos de investigación tanto aplicada como fundamental: sismología, biomecánica, mecánica estructural, caos ondulatorio, ingeniería de los materiales, ingeniería aeroespacial y automotriz, entre muchos otros. A pesar de ser un campo de investigación ampliamente estudiado existen aún muchos problemas teóricos y experimentales no resueltos. En esta tesis estudiaremos desde la propagación de ondas elásticas en sistemas cuasi-unidimensionales (varillas) y cuasi-bidimensionales (placas) con dimensiones del orden de metros hasta la respuesta de cuencas sedimentarias cuyas dimensiones son del orden de kilómetros. Introduciremos absorción en un modelo teórico que permite entender la respuesta resonante para ondas compresionales y torsionales en varillas. Esto constituye un primer acercamiento al estudio del coeficiente de transmisión y/o reflexión con absorción en sistemas elásticos y tiene un excelente acuerdo con el experimento. Proponemos luego una teoría de coeficientes de corte variables para ondas flexionales en varillas que reproduce mejor los resultados experimentales por debajo y por encima de la frecuencia crítica, en comparación con el caso de coeficientes estáticos, aumentando el debate sobre los valores apropiados del coeficiente de corte de Timoshenko. Luego formulamos un modelo de estados umbral en un sistema elástico bidimensional que replica cualitativamente la respuesta sísmica observada en el Valle de México. De esta manera se amplía el intervalo de validez del fenómeno de estados umbral a cerca de 20 órdenes de magnitud. También adaptamos el método numérico de la expansión en ondas planas, para estudiar las vibraciones dentro del plano en placas elásticas reproduciendo, en forma excelente, las mediciones experimentales de ondas en el plano llevadas a cabo en una placa rectangular de aluminio. Este método numérico es también utilizado para diseñar un cristal mecánico bidimensional en una placa de aluminio con una celda unitaria no homogénea para ondas en el plano. Este sistema exhibe una brecha, o banda prohibida, en la región audible para ondas mecánicas en el plano. Esto muestra la existencia de bandas prohibidas debido al cambio periódico de espesor en ondas mecánicas en placas. Los modelos elásticos planteados en esta tesis permiten explicar algunos fenómenos observados en el laboratorio para ondas elásticas en sólidos y son un punto de partida para futuros avances teórico-experimentales en el estudio de las vibraciones en sistemas cuasi-unidimensionales y cuasi-bidimensionales.

## **Abstract**

The elastic phenomena are extremely important in many fields of both applied and fundamental research: seismology, biomechanics, structural mechanics, wave chaos, materials engineering, aerospace and automotive engineering, among many others. Despite being a field of investigation extensively studied there are still many unresolved theoretical and experimental problems. In this thesis we will study since the propagation of elastic waves in quasi-one-dimensional systems (rods) and quasi-two-dimensional (plates) with dimensions of the order of meters until the response of sedimentary basins whose dimensions are of the order of kilometers. Absorption phenomena will be introduced through a theoretical model that allows us to understand the resonant response to compressional and torsional waves in rods. This is a first approach to the study of the coefficient of transmission and/or reflection with absorption in elastic systems and has an excellent agreement with experiments. Then we propose a theory of variable shear coefficients for flexural waves into rods that best reproduces the experimental results below and above the critical frequency, compared to the case of static shear coefficient, increasing the discussion on appropriate values of Timoshenko's shear coefficient. Then we formulate a model of doorways states in a two-dimensional elastic system that replicates qualitatively the observed seismic response in the Valley of Mexico. Thus the range of validity of the doorways state phenomenon is enlarged about 20 orders of magnitude. Also we adapt the plane wave expansion method to study the in-plane vibration of plates reproducing with a excellent agreement the experimental measurements on a rectangular aluminum plate. This numerical method is also used to design a two-dimensional mechanical crystal into a aluminum plate with an inhomogeneous unit cell. This system exhibits a band gap in the audible region for in-plane mechanical waves. This shows the existence of band gaps due to periodic thickness change of plates for in-plane waves. The elastic models proposed in this thesis can explain some phenomenons observed in the laboratory for elastic waves in solids and are a starting point for further theoretical and experimental advances in the study of vibrations in quasi-one-dimensional and quasi-two-dimensional systems.

## Símbolos utilizados

- Densidad del material  $\rho$ .
- Módulo de Young o módulo de extensión  $E$ .
- Coeficiente o razón de Poisson  $\nu$ .
- Módulo de corte

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

- Coeficiente de corte de Timoshenko  $\kappa$ .
- Espesor de la placa  $h$ .
- Módulo de rigidez extensional

$$C = \frac{Eh}{1 - \nu^2}.$$

- Vector de desplazamiento  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ .
- Tensor de deformación

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

- Tensor de esfuerzos en el plano

$$N_{ij} = C(1 - \nu) \left( e_{ij} + \frac{\nu}{1 - \nu} e_{kk} \delta_{ij} \right).$$

## Abreviaturas

- GOyM: Grupo de Onda y Materiales.
- LVEyMC: Laboratorio de Vibraciones Elásticas y Medios Continuos.
- PWE: expansión en ondas planas.
- ARS: espectroscopia acústica resonante.
- EARSC: espectroscopio acústico resonante sin contacto.
- VNA: analizador vectorial de redes.
- EMAT: transductor electromagnético-acústico.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Símbolos utilizados</b>	<b>IV</b>
<b>Abreviaturas</b>	<b>IV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Vibraciones elásticas en varillas</b>	<b>5</b>
2.1. Respuesta resonante con absorción para ondas compresionales y torsionales en varillas . . . . .	6
2.1.1. Comparación con el experimento . . . . .	9
2.2. Coeficiente de corte de Timoshenko por encima de la frecuencia crítica . . . . .	9
2.3. Conclusiones y comentarios del capítulo . . . . .	14
<b>3. Modelo de estados umbral elásticos</b>	<b>15</b>
3.1. Estado umbral elástico . . . . .	15
3.1.1. Descripción de un estado umbral . . . . .	16
3.1.2. Descripción del modelo . . . . .	17
3.2. Modelo de estados umbral elásticos en la respuesta sísmica de cuencas sedimentarias cubiertas por lodo . . . . .	20
3.3. Conclusiones y comentarios del capítulo . . . . .	23
<b>4. Expansión en ondas planas para vibraciones elásticas en el plano</b>	<b>24</b>
4.1. Método de ondas planas para vibraciones en el plano . . . . .	25
4.2. Coeficientes de Fourier para el método de ondas planas . . . . .	28
4.3. Conclusiones y comentarios del capítulo . . . . .	29
<b>5. Pruebas y aplicaciones del método de ondas planas en vibraciones elásticas</b>	<b>30</b>
5.1. Pruebas del método de ondas planas en sistemas solubles analíticamente . . . . .	30
5.1.1. Sistema homogéneo infinito . . . . .	31
5.1.2. Guía de ondas unidimensional . . . . .	33
5.2. Comparación del método de ondas planas con otros métodos numéricos: placa rectangular . . . . .	37
5.3. Ondas planas para vibraciones en el plano: placa rectangular . . . . .	39

---

5.4. Cálculo de bandas prohibidas en cristales elástico para ondas en el plano . . . .	42
5.4.1. Propuesta experimental . . . . .	47
5.5. Conclusiones y comentarios del capítulo . . . . .	48
<b>6. Conclusiones</b>	<b>50</b>
<b>Apéndices</b>	
<b>A. Espectroscopia acústica resonante</b>	<b>52</b>
A.1. Descripción del espectroscopio acústico resonante . . . . .	52
A.2. Fundamentos de los transductores electromagnético-acústicos . . . . .	53
A.3. Espectro de resonancias de una varilla uniforme . . . . .	56
A.3.1. Parámetros elásticos medidos experimentalmente . . . . .	57
A.4. Espectro de resonancias para ondas en el plano en una placa rectangular uniforme	59
<b>B. Desarrollo del método de ondas planas para vibraciones en el plano</b>	<b>61</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El estudio de las vibraciones en medios elásticos constituye un problema clásico que se conoce desde la época de Galileo. Pero fue solo hasta el siglo XIX cuando se formularon las ecuaciones que describen el movimiento de los cuerpos elásticos [1]. Muchos nombres notables de la ciencia han trabajado en elasticidad en algún momento: Navier, Lord Kelvin, Rayleigh, entre otros; al igual que al menos dos premios Nobel en física: Einstein con su convenio de suma y Born en su tesis doctoral.

A pesar de ser un campo de investigación ampliamente estudiado existen muchos problemas teóricos y experimentales no resueltos, inclusive en el régimen lineal. Por una parte, las ecuaciones que gobiernan el movimiento elástico no tienen soluciones cerradas más que en algunas geometrías simples [2, 3], mientras que por otra parte, más allá de las técnicas y dispositivos experimentales requeridos, los fenómenos elásticos poseen propiedades en el laboratorio que hacen su análisis muy complicado debido al acoplamiento de múltiples modos de vibración aún en una pieza homogénea rectangular [4] o esférica [5]; y tienen una dinámica de rayos compleja [5, 6]. Sin embargo, los fenómenos elásticos tienen extraordinaria importancia en muchos campos de investigación tanto aplicada como fundamental: sismología [7], biomecánica [8], mecánica estructural [9], caos ondulatorio [10], ingeniería de los materiales [11], ingeniería aeroespacial y automotriz [12], entre muchos otros.

Alrededor del mundo muchos grupos trabajan en elasticidad con enfoque en ciencia fundamental<sup>1</sup>. En México, desde hace más de una década, existe el Laboratorio de Vibraciones Elásticas y Medios Continuos (LVEyMC), cuyo grupo de investigación ha obtenido importantes resultados en varillas elásticas [13–23]. Más recientemente, se ha creado el Grupo de Ondas y Materiales (GOyM) [24–28], constituido por varios investigadores y estudiantes de diferentes universidades (UNAM, UAM y BUAP) con el propósito de estudiar de forma teórica, numérica y experimental las vibraciones elásticas en diferentes sistemas. Como miembro del GOyM, he participado

---

<sup>1</sup> Algunos notables entre otros: N. Søndergaard (SWE), G. Tanner, V. Krylov, N.I. Stephen (UK), R. L. Waver, M. M. Sigalas (USA), E. N. Economou (GRC), C. S. Ellegaard (DNK), F. Mortessagne (FRA), D. J. Gorman (CAN).

en varios proyectos teórico-experimentales estudiando algunos problemas que dan lugar a esta tesis.

Estudiaremos aquí desde la propagación de ondas elásticas en sistemas cuasi-unidimensionales y cuasi-bidimensionales del orden de metros, como varillas y placas (homogéneas y con estructura), respectivamente, hasta la respuesta de sistemas del orden de kilómetros como cuencas sedimentarias.

En el capítulo 2 estudiaremos la propagación de ondas elásticas en varillas. Las varillas constituyen un ejemplo unidimensional de la elasticidad y tienen un amplio interés fundamental, en parte por su cercanía al caso cuántico en sus modos torsional y compresional, permitiendo observar múltiples fenómenos de la física del estado sólido unidimensional [14, 15, 18, 21, 22]. Adicionalmente, permiten el estudio de sistemas que incluyen pérdidas o absorción [26], situación de notable interés en la actualidad [29–32].

El GOyM recientemente logró obtener experimentalmente la magnitud y la fase de la respuesta de una varilla a una excitación sinusoidal, yendo un paso más allá del trabajo [13] hecho por el LVEyMC, por lo que en este capítulo se introduce un modelo con absorción que reproduce la respuesta observada de las vibraciones elásticas compresional y torsional, mostrando en forma cerrada que en el régimen de resonancias aisladas la respuesta de la varilla toma la forma de la curva de Breit-Wigner. Esto constituye un primer acercamiento al estudio del coeficiente de transmisión y/o reflexión con absorción en sistemas elásticos.

Por otro lado, a partir de los recientes resultados experimentales del LVEyMC [20], se propone una teoría de coeficientes de corte variables para ondas flexionales que reproduce mejor los resultados por debajo y por encima de la frecuencia crítica en comparación con el caso de uno o dos coeficientes fijos, enriqueciendo el amplio debate [16, 33–39] sobre los valores apropiados del coeficiente de corte.

En el capítulo 3 presentaremos un modelo bidimensional de estados umbral elásticos, que permite entender la respuesta sísmica de cuencas sedimentarias cubiertas por lodo, modelo que en algún momento se pretende implementar a escala experimental. Las ondas elásticas, con longitudes de onda del orden de kilómetros, son esenciales para entender la respuesta sísmica de muchos sitios alrededor del mundo. En el caso de una cuenca sedimentaria cubierta por lodo, basados tanto en trabajos previos [40–42] como en la física nuclear [43–45], donde fue originalmente observado, proponemos un modelo de estados umbral aplicado a un sistema elástico bidimensional que reproduce cualitativamente la respuesta sísmica observada en el Valle de México<sup>2</sup> ampliando así la escala del fenómeno de estados umbral cerca de 20 órdenes de magnitud.

En el capítulo 4, continuando con los sistemas elásticos cuasi-bidimensionales, presentaremos una adaptación del método numérico de las ondas planas (PWE), propuesto originalmente para ondas electromagnéticas [46, 47] pero utilizado también en sistemas elásticos [48–51]; el cual

<sup>2</sup> Los datos fueron proporcionados por el Centro Nacional de Prevención de Desastres (CENAPRED).

será aplicado aquí para resolver las ecuaciones que describen las vibraciones en el plano de placas delgadas. Dado el elevado costo del software comercial (por ejemplo ANSYS y COMSOL), superior a los 20.000 USD, y la necesidad del GOyM de simular sistemas elásticos bidimensionales, se hace necesario recurrir al software libre (por ejemplo SALOME-MECA) o bien a construir un código. En esta tesis, escogimos el segundo camino, la construcción del software, permitiendo así sacar provecho de lo más reciente en tecnología computacional: combinación de GPUs y CPUs para optimizar las tareas de cómputo requeridas.

En el capítulo 5 iniciaremos verificando la implementación del PWE para ondas en el plano (sección 5.1) con dos sistemas infinitos que se pueden resolver analíticamente: una placa homogénea y una guía de ondas unidimensional. Luego, verificaremos el PWE con una placa rectangular finita con condiciones a la frontera libres y fijas. Los resultados son comparados con otros métodos [52–55] obteniendo un excelente acuerdo. En la sección 5.3 aplicaremos el método PWE para calcular el espectro y los modos normales de vibración dentro del plano de una placa de aluminio rectangular con condiciones de frontera libre que replica, en forma excelente, las mediciones experimentales realizadas por el GOyM [25, 28].

También aplicaremos el método PWE a un cristal elástico con una celda unitaria no homogénea. La propagación de ondas elásticas en medios no homogéneos es un problema de gran interés debido a sus importantes implicaciones no sólo en tecnología sino también en ciencia fundamental. La estructura de bandas electrónica en sólidos [56] ha sido estudiada extensamente por muchos años y se han encontrado múltiples aplicaciones entre ellas por ejemplo, en fotones [57–59]. En el caso elástico, desde la década pasada [60], los estudios teóricos y experimentales han ido en aumento. En el caso de placas delgadas, en el rango del ultrasónico, existen varios trabajos teóricos y experimentales que demuestran la existencia de bandas prohibidas [61–63]. Consideraremos aquí una celda no homogénea con ranuras y calcularemos por el PWE su estructura de bandas mostrando cómo surgen las banda prohibidas. Daremos una propuesta experimental de una placa no homogénea finita con ranuras que da lugar a una banda elástica prohibida en la región audible, propuesta que dio origen a una tesis de Maestría actualmente en desarrollo.

Cada capítulo termina con sus respectivas conclusiones, mientras que a partir de la página 50 finalizamos la tesis dando unas conclusiones generales que enmarcan todo el trabajo realizado. Adicionalmente incluimos un par de apéndices:

En el apéndice A se encuentra una descripción detallada acerca de cómo funciona el espectroscopio acústico resonante sin contacto (EARSC), incluida una descripción profunda del funcionamiento de los transductores electromagnéticos-acústicos (EMATs), y las técnicas de espectroscopia acústica resonante (ARS, por sus sigla en inglés) requeridas para detectar los modos de vibración en varillas y en placas. Los montajes y las técnicas experimentales son descritos minuciosamente. En el apéndice B se explica, con todo detalle, cómo se aplica el método PWE para resolver el movimiento armónico de placas elásticas con modos de vibraciones en el plano. Se muestra como se reduce la ecuación bidimensional, que describe el movimiento en el plano,

---

a un problema de eigenvalores generalizado que es truncado para un número finito de ondas planas. Este sistema de ecuaciones puede resolverse numéricamente para obtener así las frecuencias y modos normales del sistema.

## Capítulo 2

# Vibraciones elásticas en varillas

El estudio de las varillas es importante tanto en física como en ingeniería, ya que existen múltiples desafíos teóricos y experimentales aún no resueltos [10] además de diversas aplicaciones en mecánica de estructuras y en tecnología [64].

A bajas frecuencias una varilla elástica, como la que se muestra en la figura 2.1, puede vibrar con tres tipos de movimientos: compresional, torsional y flexional; una animación de los tres tipos de movimiento pueden verse en la Ref. [65]. A nivel local, tal como se mencionó en la introducción, dos grupos experimentales trabajan continuamente para resolver múltiples problemas de física en varillas: el Laboratorio de Vibraciones Elásticas y Medios Continuos (LVEyMC) [13–23], en Cuernavaca, y el Grupo de Ondas y Materiales (GOyM) [24, 26–28], en México DF.

El GOyM desarrolló un espectroscopio para medir vibraciones elásticas en sólidos no ferromagnéticos, similar al desarrollado por el LVEyMC, con la ventaja de permitir mediciones de la magnitud y la fase de la respuesta. En la primera parte de este capítulo desarrollaremos un modelo que describe las observaciones experimentales realizadas [24] con la inclusión de absorción tanto para ondas compresionales como torsionales en varillas. Los detalles sobre como se mide la respuesta resonante de una varilla se dan en el apéndice A.3.

Recientemente [20] el LVEyMC logró caracterizar las vibraciones flexionales por debajo y por encima de la frecuencia crítica de Timoshenko en una varilla homogénea. En virtud de esto, en la segunda parte de este capítulo daremos un desarrollo teórico para ajustar el coeficiente de corte de Timoshenko por debajo y por encima de la frecuencia crítica, cuyo valor aún permanece en debate [16, 33–39].

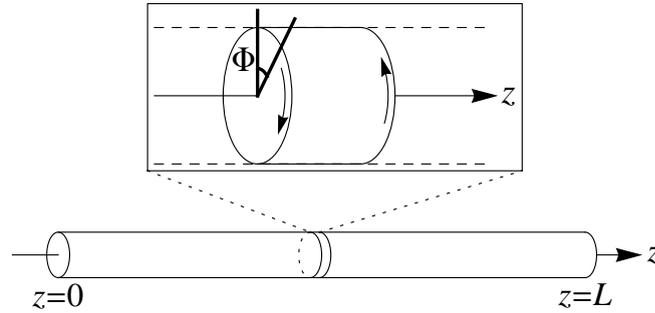


FIGURA 2.1: Varilla uniforme con sección transversal circular. En la parte superior se muestra una vista ampliada donde se observa el ángulo de giro  $\Phi$  definido para las torsiones, mientras las flechas indican el torque.

## 2.1. Respuesta resonante con absorción para ondas compresionales y torsionales en varillas

Es conocido [2] que las compresiones y las torsiones en una varilla uniforme, de longitud  $L$ , están descritas por la ecuación de onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

donde  $\Phi$  puede ser el desplazamiento longitudinal de la varilla, para el caso compresional, o bien el ángulo de giro, en el caso torsional, ver figura 2.1. La velocidad  $c$  para las compresiones esta dada por  $\sqrt{E/\rho}$  y por  $\sqrt{G/\rho}$  en el caso torsional. Las cantidades  $\rho$ ,  $E$  y  $G$  representan la densidad, el módulo de Young y el módulo de corte de la varilla, respectivamente. Si la varilla es libre en uno de sus extremos, digamos  $z = 0$ , se satisface la siguiente condición a la frontera

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (2.2)$$

Esta es la condición a la frontera habitual en los experimentos, ya que la varilla no permanece sujeta en ningún extremo, solo soportada en alguno de sus nodos<sup>1</sup>. En el otro extremo de la varilla ( $z = L$ ), consideremos una excitación sinusoidal<sup>2</sup> de intensidad  $F_0$  y frecuencia  $\omega$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=L} = F_0 \exp(i\omega t). \quad (2.3)$$

Usando separación de variables es posible escribir

$$\Phi(z, t) = \phi(z) \exp(i\omega t),$$

<sup>1</sup> Los detalles experimentales se dan en el apéndice A.

<sup>2</sup> Este es el caso de una excitación a través de los EMATs como se explica en el apéndice A.2.

y la ecuación (2.1) independiente del tiempo puede escribirse como

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\phi = 0, \quad (2.4)$$

con soluciones

$$\phi(z) = C_1 \exp(ikz) + C_2 \exp(-ikz). \quad (2.5)$$

Aquí  $k = \omega/c$  es el número de onda y  $\phi(z)$  es el desplazamiento longitudinal para ondas compresionales (o ángulo de giro para ondas torsionales) independiente del tiempo. Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  pueden ser evaluadas como sigue. De la condición a la frontera (2.2) se obtiene

$$\left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z=0} = ik(C_1 - C_2) = 0, \quad (2.6)$$

es decir,  $C_1 = C_2$ . Por otra parte, usando (2.3) se obtiene

$$\phi(z) = -\frac{F_0}{k \sin(kL)} \cos(kz). \quad (2.7)$$

De esta última ecuación es posible ver que  $\phi(z)$  tiende a infinito cuando  $\sin(kL) = 0$ , o bien cuando  $kL = n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Esto resulta en un número infinito de soluciones,  $k_n = n\pi/L$ , que corresponden a las frecuencias de los modos normales

$$f_n = \frac{nc}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.8)$$

La indeterminación en la respuesta (2.7) se debe a la falta de pérdidas y/o absorción en el sistema. Esto puede incluirse de forma fenomenológica agregando al vector de onda una parte imaginaria, esto es  $k = k_R + ik_I$ , donde  $k_R$  y  $k_I$  son la parte real e imaginaria de  $k$ , respectivamente. La parte imaginaria  $k_I$  es un parámetro que fija la intensidad de la absorción en el sistema, en general depende de la frecuencia en una forma complicada [66], y no puede ser tomada como constante en un amplio rango de frecuencias. De esta manera la respuesta de la varilla con absorción es entonces

$$\phi(z) = -\frac{F_0}{k} \left[ \frac{\cos(k_R z) \cosh(k_I z) - i \sin(k_R z) \sinh(k_I z)}{\sin(k_R L) \cosh(k_I L) + i \cos(k_R L) \sinh(k_I L)} \right]. \quad (2.9)$$

Para  $z = 0$  la intensidad de la respuesta es

$$|\phi(z=0)|^2 = \frac{F_0^2}{(k_R^2 + k_I^2)[\sin^2(k_R L) + \sinh^2(k_I L)]}. \quad (2.10)$$

En lo que sigue mostraremos que la ecuación (2.10), cerca de las frecuencias de resonancia, puede ser escrita como una Lorentziana o curva de Breit-Wigner. Este régimen es conocido como régimen de resonancias aisladas. Cuando  $k_R L = n\pi + \delta$  con  $\delta \ll 1$ , es decir, cerca de la

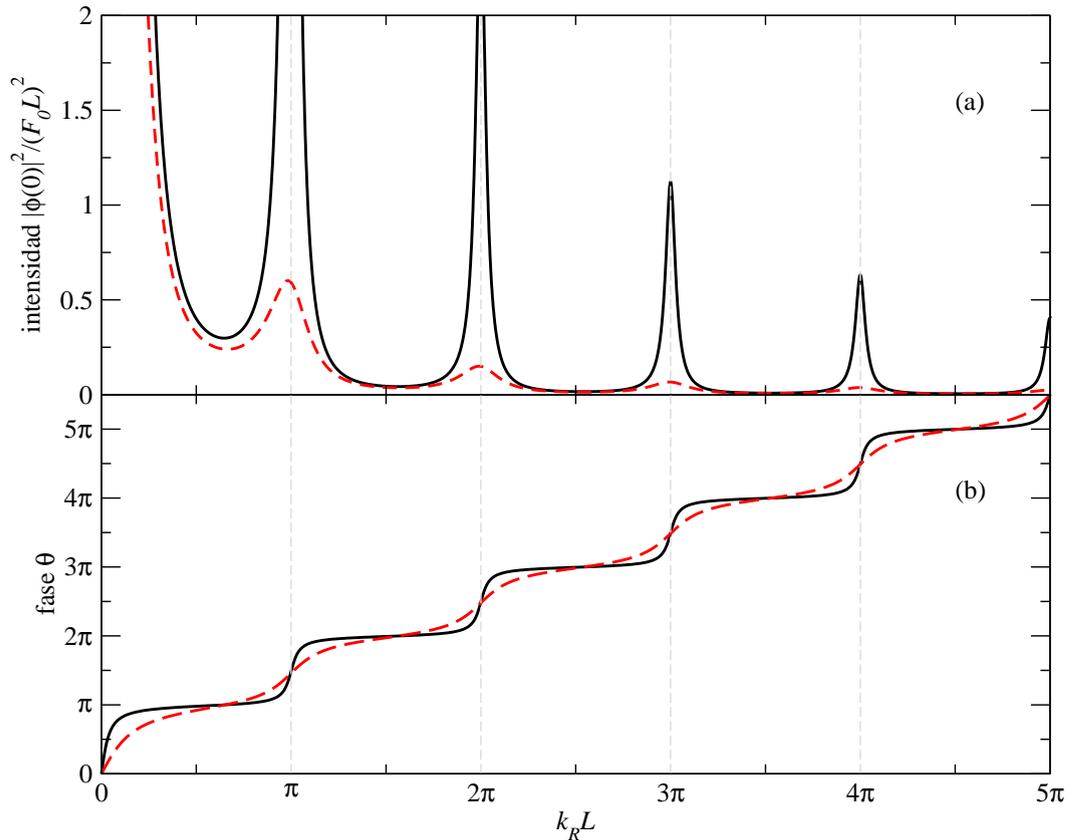


FIGURA 2.2: a) Intensidad  $|\phi(z = 0)|^2 / (F_0 L)^2$ , ecuación (2.10), y b) fase  $\theta$ , ecuación (2.12), como función de  $k_R L$ . La línea continua (negra) corresponde a  $k_I L = 0.1$  mientras que la discontinua (roja) corresponde a  $k_I L = 0.4$ .

resonancia, y para absorción débil, en este caso  $k_I L \ll 1$ , ecuación (2.10) se reduce a

$$|\phi(z = 0)|^2 \approx A_n \frac{\Gamma/2}{(f - f_n)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (2.11)$$

Donde  $A_n = cF_0^2 / 2k_I n^2 \pi^3$  y  $\Gamma = k_I c / \pi$ . Aquí,  $f_n$  y  $\Gamma$  son el centro y el ancho de la resonancia, respectivamente.

Una gráfica de  $|\phi(z = 0)|^2$  como función de  $k_R L$  es mostrada en la figura 2.2(a) para dos valores diferentes de la intensidad de absorción  $k_I$ . Como se puede observar en esta figura la intensidad de la respuesta muestra picos en  $k_R L = n\pi$ , que corresponden a los modos normales. La altura de los picos decrece cuadráticamente como función de  $k_R L$ . Adicionalmente se puede apreciar en la misma figura que el ancho de las resonancias incrementa con  $k_I$ . Esto es válido solamente cuando el parámetro de absorción  $k_I$  es constante y mientras  $k_I L \ll 1$ ; lo cual es cierto sólo localmente alrededor de las frecuencias resonantes. De este modo, cada resonancia tiene un valor diferente de  $k_I$ .

Para evaluar la fase de las resonancias escribiremos  $\phi$  en su forma polar

$$\phi(z = 0) = |\phi(z = 0)| \exp(i\theta)$$

donde

$$\tan \theta = \frac{k_R \cos(k_R L) \sinh(k_I L) + k_I \sin(k_R L) \cosh(k_I L)}{k_R \sin(k_R L) \cosh(k_I L) - k_I \cos(k_R L) \sinh(k_I L)}. \quad (2.12)$$

Una gráfica de la fase  $\theta$  como función de  $k_R L$  es mostrada en la figura 2.2(b). De nuevo, en el régimen de resonancias aisladas, es posible obtener una expresión aproximada para la fase:

$$\theta \approx \arctan\left(\frac{\Gamma/2}{f - f_n}\right). \quad (2.13)$$

De esta última ecuación se puede observar que la fase cambia en una cantidad de  $\pi$  por cada resonancia. Las ecuaciones (2.8), (2.11) y (2.13) describen las oscilaciones normales de una varilla tanto compresionales como torsionales. La ecuación (2.8) predice el espectro de resonancias, mientras las ecuaciones (2.11) y (2.13) determinan la forma de estas resonancias tanto en magnitud como en fase, respectivamente.

### 2.1.1. Comparación con el experimento

En la figura 2.3 se puede observar tanto la amplitud como la fase de oscilación para diferentes tipos de ondas medidas al rededor de algunas de las frecuencias de resonancia en una varilla con sus respectivos ajustes Lorentzianos. Como es predicho por la ecuación (2.11), la respuesta de las vibraciones elásticas en una varilla al rededor de las frecuencias de resonancia tiene una forma de Breit-Wigner, cuyo ancho  $\Gamma$  se explica por la absorción que tienen las ondas debido al medio ambiente (aire) que rodea la varilla y otros efectos internos y externos. De hecho, las ondas compresionales ( $\Gamma = 0.39$  Hz) y flexionales ( $\Gamma = 0.49$  Hz) se acoplan mas fuertemente al aire que las ondas torsionales ( $\Gamma = 0.09$  Hz), esto debido a que en el aire los esfuerzos cortantes o de cizalla producidos por las ondas torsionales en una varilla circular no pueden propagarse, opuesto a lo que ocurre con las vibraciones en el aire producidas por las ondas compresionales y flexionales.

## 2.2. Coeficiente de corte de Timoshenko por encima de la frecuencia crítica

La ecuación que describe el movimiento flexional en una varilla se conoce como ecuación de Timoshenko [2], es de cuarto orden y mezcla derivadas espaciales con temporales. En este capítulo usaremos un refinamiento [35] de la teoría de Timoshenko que incluye dos coeficientes de

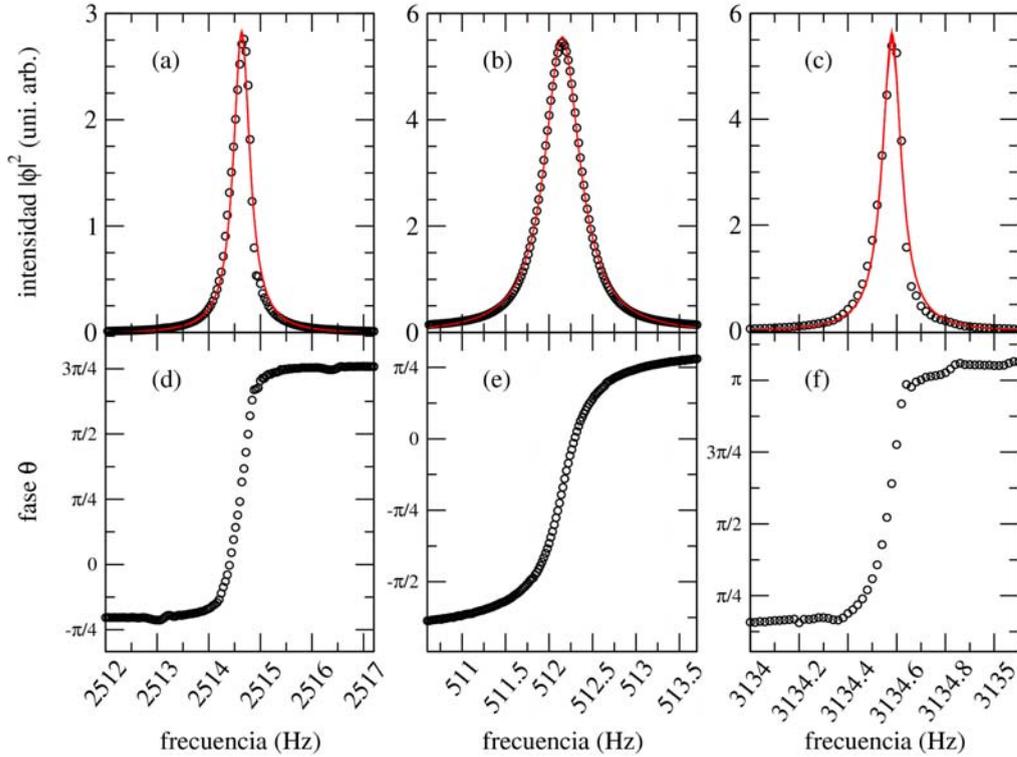


FIGURA 2.3: Algunas resonancias medidas en una varilla de aluminio de longitud  $L = 1$  m y sección circular de diámetro  $D = 1.27$  cm. Los paneles superiores corresponde a la amplitud de la oscilación mientras los inferiores a la fase. Las curvas solidas corresponden a ajustes Lorentzianos con parámetros: (a) compresional  $\Gamma = 0.39$  Hz y  $f_r = 2514.6$  Hz; (b) flexional  $\Gamma = 0.49$  Hz y  $f_r = 512.2$  Hz; y (c) torsional  $\Gamma = 0.09$  Hz y  $f_r = 3134.6$  Hz. Aquí  $f_r$  y  $\Gamma$  son el centro y el ancho del ajuste Lorentziano respectivamente.

corte  $\kappa_1$  y  $\kappa_3$

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{I}{A} \left( 1 + \frac{E}{\kappa_3 G} \right) \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\rho I}{\kappa_1 GA} \frac{\partial^4 \xi}{\partial t^4} = 0. \quad (2.14)$$

donde  $\xi$  representa el movimiento transversal, mientras  $A$  y  $I$  son el área de la sección transversal y el segundo momento de área, respectivamente. Al igual que en la sección anterior, podemos usar separación de variables, es decir,

$$\xi(z, t) = \chi(z) e^{i\omega t}, \quad (2.15)$$

donde  $\chi(z)$  es la amplitud del desplazamiento transversal independiente del tiempo. Con esta última expresión la ecuación de Timoshenko, independiente del tiempo, puede escribirse como

$$\frac{d^4 \chi}{dz^4} + \frac{\rho \omega^2}{M_r} \frac{d^2 \chi}{dz^2} + \frac{\rho^2 \omega^2}{\kappa_3 GE} (\omega^2 - \omega_c^2) \chi = 0, \quad (2.16)$$

donde  $M_r$  es el módulo reducido definido por

$$\frac{1}{M_r} = \frac{1}{E} + \frac{1}{\kappa_1 G}, \quad (2.17)$$

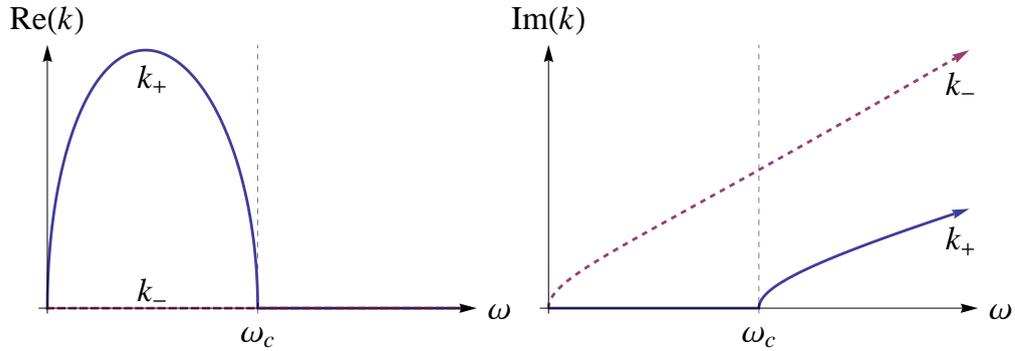


FIGURA 2.4: Comportamiento de los vectores de onda como función de la frecuencia de las soluciones estacionarias de la ecuación de Timoshenko; ecuación (2.21).

y

$$\omega_c = 2\pi f_c = \sqrt{\frac{\kappa_3 GA}{\rho I}}; \quad (2.18)$$

$f_c$  es conocida como la frecuencia crítica de Timoshenko, discutiremos más adelante el significado físico de esta cantidad.

Para una varilla libre, de longitud  $L$ , las condiciones a la frontera que dan lugar a momentos y fuerzas de corte nulas en la frontera, pueden escribirse en términos del desplazamiento independiente del tiempo como sigue [20, 67, 68]

$$\left. \frac{d^2 \chi}{dz^2} \right|_{z=0,L} = -\frac{\rho \omega^2 \chi}{\kappa_3 G} \Big|_{z=0,L}, \quad (2.19)$$

$$\left. \frac{d^3 \chi}{dz^3} \right|_{z=0,L} = -\frac{\rho \omega^2}{M_r} \left. \frac{d\chi}{dz} \right|_{z=0,L}. \quad (2.20)$$

Nótese que las ecuaciones (2.19) y (2.20) dependen de la frecuencia; en el límite de bajas frecuencias el término derecho de las ecuaciones se puede despreciar frente al término izquierdo de las mismas, reduciéndose así a las condiciones de frontera de Bernoulli-Euler [16].

Por tratarse de una ecuación de cuarto orden las soluciones de (2.16), pueden escribirse como sigue

$$\chi(z) = C_1 \exp(k_+ z) + C_2 \exp(-k_+ z) + C_3 \exp(k_- z) + C_4 \exp(-k_- z), \quad (2.21)$$

donde las  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$  y  $4$ ) son constantes a determinar por las condiciones a la frontera, mientras que

$$k_{\pm}^2(\omega) = \frac{\rho \omega^2}{2M_r} \left[ -1 \pm \sqrt{1 - \frac{4M_r^2}{\kappa_3 GE} \left( 1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right)} \right]. \quad (2.22)$$

Es posible observar de la ecuación anterior y en la figura 2.4 que la frecuencia crítica separa el comportamiento de las soluciones en dos regímenes: cuando  $\omega < \omega_c$  existen dos ondas exponenciales y dos ondas viajeras en la ecuación (2.21) ya que  $k_+$  es real y  $k_-$  es imaginario. Cuando

$\omega > \omega_c$  todos los términos en la ecuación (2.21) son ondas viajeras. El espectro de frecuencias puede ser obtenido insertando la ecuación (2.21) en las condiciones a la frontera (2.19) y (2.20) dando lugar a un conjunto de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas ( $C_1, C_2, C_3,$  y  $C_4$ ); los modos normales de vibración flexional son entonces aquellos valores de la frecuencia para los que  $\det \mathbb{P} = 0$ , con

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} (k_+^2 + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G}) & (k_+^2 + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G}) & (k_-^2 + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G}) & (k_-^2 + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G}) \\ (k_+^2 + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G})e^{k_+L} & (k_+^2 + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G})e^{-k_+L} & (k_-^2 + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G})e^{k_-L} & (k_-^2 + \frac{\rho\omega^2}{\kappa G})e^{-k_-L} \\ (k_+^3 + \frac{\rho\omega^2 k_+}{M_r}) & -(k_+^3 + \frac{\rho\omega^2 k_+}{M_r}) & (k_-^3 + \frac{\rho\omega^2 k_-}{M_r}) & -(k_-^3 + \frac{\rho\omega^2 k_-}{M_r}) \\ (k_+^3 + \frac{\rho\omega^2 k_+}{M_r})e^{k_+L} & -(k_+^3 + \frac{\rho\omega^2 k_+}{M_r})e^{-k_+L} & (k_-^3 + \frac{\rho\omega^2 k_-}{M_r})e^{k_-L} & -(k_-^3 + \frac{\rho\omega^2 k_-}{M_r})e^{-k_-L} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Encontrando las raíces del determinante de la ecuación (2.23) se calcularon los primeros 24 modos normales flexionales de una varilla de sección transversal rectangular, con una longitud  $L = 0.500$  m, altura  $a = 0.0252$  m y ancho  $b = 0.0504$  m. Las constantes elásticas de la varilla, tomadas de la Ref. [20], fueron  $G = 26.92$  GPa,  $E = 67.42$  GPa y  $\rho = 2699.04$  kg/m<sup>3</sup>. Se utilizaron varios valores del coeficiente de Timoshenko ( $\kappa = \kappa_1 = \kappa_3$ ), encontrados en la literatura, que llamaremos casos A, B, C, D, y E; estos valores se dan en la tabla 2.1. Los resultados obtenidos se compararon con los resultados experimentales de la Ref. [20]. El error entre los resultados experimentales y la teoría con los diferentes valores de  $\kappa_1$  y  $\kappa_3$  se muestra en la figura 2.5 en la cual puede apreciarse que hay una excelente concordancia entre la teoría y el experimento observándose un error creciente con respecto a la frecuencia hasta la frecuencia crítica  $f_c$  en torno al modo 13. El error entre los diferentes casos crece hasta un valor próximo al 3%. Por encima de la frecuencia crítica se observan errores mayores que los obtenidos por de bajo de ella. Los “mejores” coeficientes de Timoshenko se determinaron utilizando ajustes por mínimos cuadrados de tres formas diferentes: con un coeficiente independiente  $\kappa = \kappa_1 = \kappa_3$  (caso F); con  $\kappa_1$  y  $\kappa_3$  como coeficientes independientes (caso G); y, debido al cambio de régimen introducido por la frecuencia crítica, con cuatro coeficientes,  $\kappa_1$  y  $\kappa_3$  para  $f < f_c$  y  $\tilde{\kappa}_1$  y  $\tilde{\kappa}_3$  para  $f > f_c$  (caso H). Como se puede ver en la figura 2.5, en el caso de H, el error es menor al 0,5% para todas las resonancias por debajo y por encima de la frecuencia crítica. Este resultado sugiere que el valor de los coeficientes de corte de Timoshenko es diferente por debajo y por encima de la frecuencia crítica, ampliando el debate sobre los valores apropiados de estos coeficientes.

caso	símbolo	coeficiente(s) de Timoshenko	
A	◆	$\kappa = 5/6$	
B	▲	$\kappa = 0.83945$	
C	○	$\kappa = 10(1 + \nu)/(12 + 11\nu)$	
D	□	$\kappa = 5(1 + \nu)/(6 + 5\nu)$	
E	◇	$\kappa_1 = 10(1 + \nu)/(12 + 11\nu), \kappa_3 = 5(1 + \nu)/(6 + 5\nu)$	
F	●	$\kappa = 0.8291$	
G	■	$\kappa_1 = 0.80811, \kappa_3 = 0.83292$	
H	×	debajo $f_c$	$\kappa_1 = 0.82003, \kappa_3 = 0.84651$
		encima $f_c$	$\tilde{\kappa}_1 = 0.81687, \tilde{\kappa}_3 = 0.81923$

TABLA 2.1: Diferentes valores del(os) coeficiente(s) de Timoshenko usados para comparar los resultados teóricos, calculados por las raíces del  $\det \mathbb{P} = 0$ , con las medidas realizadas en la Ref. [20]. Los valores usados en los casos F, G y H fueron calculados por el método de mínimos cuadrados.

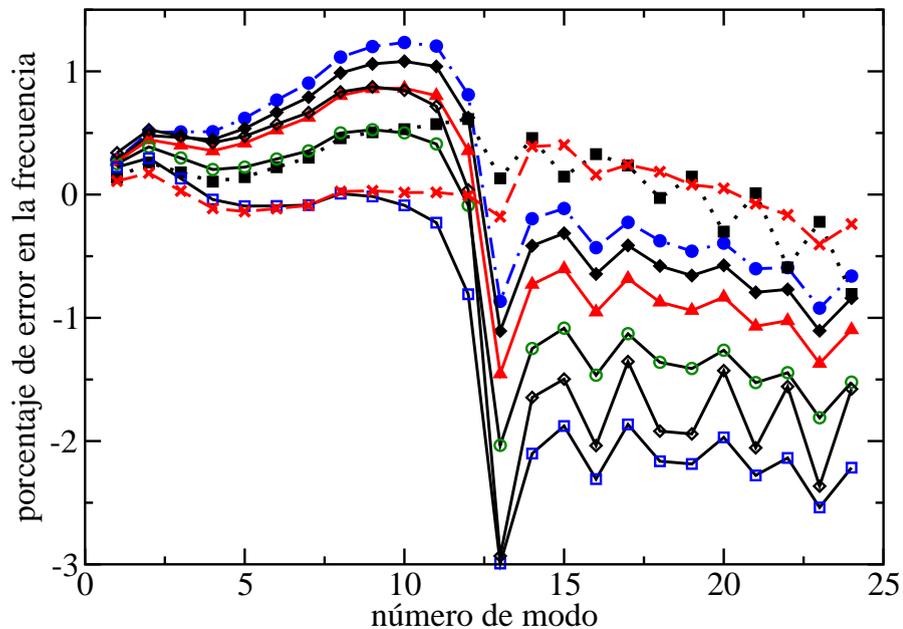


FIGURA 2.5: Error porcentual en frecuencia entre los resultados experimentales de la Ref. [20] y las predicciones de la teóricas de flexiones para diferentes valores del(os) coeficiente(s) de Timoshenko. La varilla de aluminio de sección transversal rectangular, tiene una longitud  $L = 0.500$  m, altura  $a = 0.0252$  m y ancho  $b = 0.0504$  m. Los símbolos utilizados hacen referencia a la tabla 2.1.

### **2.3. Conclusiones y comentarios del capítulo**

- La respuesta de una varilla vibrante incluyendo absorción alrededor de sus frecuencias de resonancia se caracteriza por una curva de la forma Breit-Wigner o Lorentziana.
- Los ajustes Lorentzianos a algunas resonancias obtenidas experimentalmente en una varilla para diferentes tipos de vibración muestran un acuerdo excelente.
- Los resultados de los coeficientes de corte de Timoshenko sugieren que dichos coeficientes tiene valores diferentes por debajo y por encima de la frecuencia crítica.
- Del trabajo presentado en este capítulo se obtuvieron tres publicaciones Refs. [[24](#), [27](#), [69](#)].

## Capítulo 3

# Modelo de estados umbral elásticos

El concepto de estado umbral fue introducido en la física nuclear a mediados del siglo XX [43–45], sin embargo, muchos fenómenos ondulatorios pueden ser descritos por un modelo de estados umbral, desde la física cuántica hasta sistemas ondulatorios clásicos. Recientemente, los estados umbral han sido observados en átomos y moléculas [70], agregados metálicos [71], puntos cuánticos [72], fullerenos [73], cavidades de microondas [74, 75] y varillas elásticas [19], entre otros.

El fenómeno de estado umbral ocurre cuando un estado “distinto” se acopla a un sistema con muchos estados densamente distribuidos. El acoplamiento, o *strength function* por su nombre en inglés, en el caso más simple, toma la forma de la curva de Breit-Wigner o Lorentziana [45]. En la primera parte de este capítulo introduciremos un modelo de estados umbral para sistemas elásticos bidimensionales con aplicación en ondas compresionales propagándose en placas delgadas (capítulos 4 y 5) o membranas elásticas. Luego mostraremos como el modelo de estados umbral elásticos permite entender la respuesta sísmica de cuencas sedimentarias cubiertas por lodo como la del Valle de México<sup>1</sup>, reproduciendo así la respuesta espectral de los acelerogramas medidos y proporcionados por el Centro Nacional de Prevención de Desastres (CENAPRED) en eventos sísmicos recientes.

### 3.1. Estado umbral elástico

Iniciaremos esta sección presentando lo que se entiende por estado umbral en física, para seguidamente introducir un modelo bidimensional de estados umbral para ondas compresionales propagándose en placas delgadas o membranas elásticas.

---

<sup>1</sup> Existen muchas otras cuencas similares a la del Valle de México como San Francisco (U.S.A), Auckland (U.S.A), Kyoto (Japon) y Cali (Colombia), entre otras.

### 3.1.1. Descripción de un estado umbral

De forma abstracta, sin hacer relación explícita a la física que describe el fenómeno (ondas clásicas o cuánticas), consideremos un sistema “denso” descrito por  $H_0$  con un conjunto de modos normales  $\phi_n$ , etiquetados por  $n$  de forma que

$$H_0\phi_n = \omega_n^2\phi_n, \quad (3.1)$$

siendo  $\omega_n$  las frecuencias propias del sistema “denso”. Sea  $\phi_D$  un estado “distinto” de  $H_0$  con frecuencia  $\omega_D$  que se acopla al sistema “denso” por una interacción  $V$ , de modo que el sistema completo: denso + distinto, es descrito por

$$H = H_0 + V. \quad (3.2)$$

Nótese que el estado “distinto”  $\phi_D$  no es un modo normal del sistema completo  $H$ . El sistema completo puede ser fácilmente diagonalizable, siendo  $\omega_i$  las frecuencias normales de  $H$ , resulta

$$\omega_D^2 - \omega_i^2 = \sum_n \frac{V^2}{\omega_n^2 - \omega_i^2}. \quad (3.3)$$

Mientras el acoplamiento, o función de intensidad<sup>2</sup>, esta dado por

$$A(\omega_i) = |\langle \phi_D, \phi_i \rangle|^2 = \left( 1 + \sum_n \frac{V^2}{\omega_n^2 - \omega_i^2} \right)^{-1}. \quad (3.4)$$

En un caso simple donde el sistema “denso” posee un espectro uniformemente distribuido con un espaciamiento  $\Omega$ , esto es  $\omega_n = n\Omega$ , la expresión anterior se reduce a una forma Breit-Wigner o Lorentziana.

El estado “distinto” es lo que se conoce como estado umbral y su acoplamiento o función de intensidad  $A$  describe una amplia variedad de fenómenos. Por ejemplo, en la Ref. [76], establecieron numéricamente que en una cavidad acústica rígida con una membrana elástica en su superficie, los modos de vibración normales en la membrana actúan como estados umbral, mientras el mar de estados “denso” consta de las resonancias dentro de la cavidad. Recientemente, en la Ref. [19], se estableció experimentalmente la existencia de estados umbral en una varilla elástica con una pequeña muesca. La muesca divide la varilla en dos regiones, una mucho mas grande que la otra. Los modos de vibración compresional en la región pequeña actúan como estados de umbral mientras excitan al sistema “denso” correspondiente a la región mucho mas grande de la varilla; la muesca regula la interacción entre ambas regiones.

Por otro lado, en microondas [75], se mostró experimental y teóricamente que en una cavidad rectangular de microondas con una pequeña barrera en su interior existe un estado “distinto”,

<sup>2</sup> En ingles *strength function*.

que corresponde a una super-cicatriz<sup>3</sup>, el cual actúa como estado umbral de entrada para los modos normales de la cavidad.

Una vez establecido lo que se entiende por estado umbral y sistema “denso” pasaremos a describir el modelo de estados umbral elásticos.

### 3.1.2. Descripción del modelo

Las ondas compresionales en una membrana elástica o en una placa delgada, están bien descritas por la ecuación de Helmholtz bidimensional

$$\nabla^2 \phi_i + k_i^2 \phi_i = 0, \quad (3.5)$$

donde  $\phi_i$  es la amplitud de la vibración y  $k_i = 2\pi f_i/\alpha$  es el módulo del vector de onda, siendo  $f_i$  la frecuencia de vibración y  $\alpha$  la velocidad de las ondas compresionales en el medio. En el modelo de estados umbral que proponemos en este capítulo, el sistema “denso” corresponde al conjunto de modos normales  $\phi_i$  para una frontera dada, y el estado umbral es una onda plana monocromática. En la siguiente sección daremos una interpretación de este estado umbral. El acoplamiento o función de intensidad esta dado por la siguiente ecuación:

$$A(f_i) = \left| \int \exp(i\mathbf{k}_D \cdot \mathbf{r}) \phi_i(x, y) dx dy \right|^2, \quad (3.6)$$

donde la integración se extiende sobre toda la región definida por la frontera elegida,  $\mathbf{r} = (x, y)$  es un punto en dicha región,  $\phi_i$  es el  $i$ -ésimo modo normal calculado por el método de elemento finito, con condiciones a la frontera de Newmann<sup>4</sup>. En la ecuación anterior  $\mathbf{k}_D$  es el vector de onda del estado umbral con magnitud  $k_D = 2\pi f_D/\alpha$ , donde  $f_D$  es la frecuencia del estado umbral. En las figuras 3.1, 3.2 y 3.3 se observan las funciones de intensidad para diferentes fronteras: rectangular, estadio e irregular<sup>5</sup>, respectivamente. La función de intensidad  $A$  se muestra robusta e independiente de la frontera elegida. En la figura 3.4 se muestran los resultados obtenidos para diferentes valores del factor de calidad  $Q$ . Valores pequeños de  $Q$  equivalen a analizar la respuesta del sistema con una baja resolución, permitiendo observar otra característica de los estados umbral que lucen como una resonancia gigante, mientras que valores altos de  $Q$  permiten ver la estructura fina del sistema. Como es habitual, el factor de calidad es introducido de manera fenomenológica al ajustar curvas Lorentzianas alrededor de las frecuencias normales  $f_i$ . En la figura 3.5 se muestra como la amplitud de los picos de la respuesta  $A(f_i)$  presenta ligeros

<sup>3</sup> En la física del caos ondulatorio se denomina estado cicatriz a un estado propio de un billar que exhibe un incremento de la norma al cuadrado de la función de onda a lo largo de una órbita periódica clásicamente inestable. Super-cicatriz se refiere a un estado cicatriz en un billar pseudo-integrable que no desaparece a altas energías, es decir, en el límite semiclásico.

<sup>4</sup> Las condiciones a la frontera no son relevantes para el modelo de estados umbral, los resultados son cualitativamente similares con condiciones a la frontera de Dirichlet.

<sup>5</sup> Esta forma corresponde a una frontera definida en línea discontinua en la figura 3.6.

cambios como función del ángulo formado entre el vector de onda  $\mathbf{k}_D$  del estado umbral y el eje horizontal. Es notable que la estructura de la función de intensidad permanece inalterada al cambiar el ángulo como puede verse en la misma figura.

A continuación, en la sección 3.2 mostraremos como el modelo de estados umbral elásticos, introducido en esta sección, permite explicar la respuesta sísmica observada en cuencas sedimentarias cubiertas por lodo, como la cuenca del Valle de México.

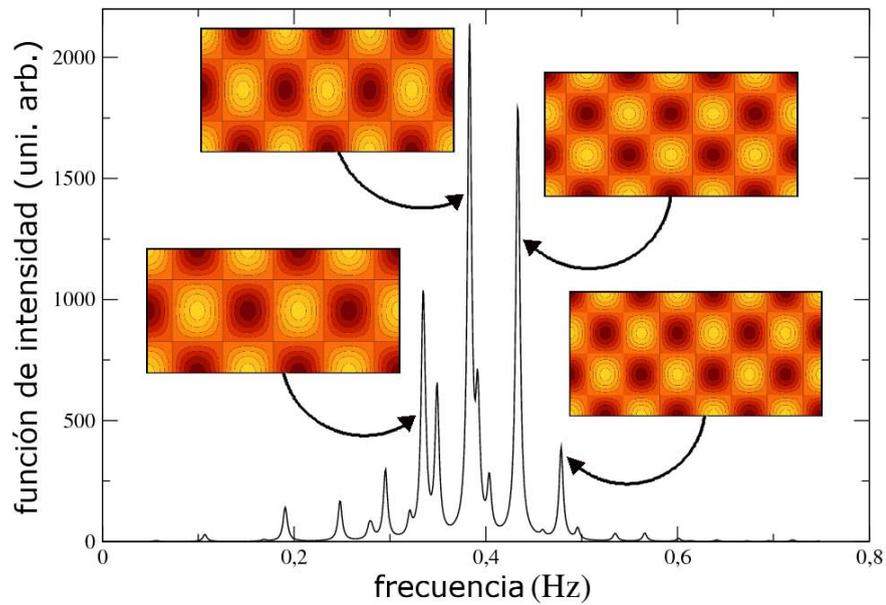


FIGURA 3.1: Acoplamiento  $A$  como función de la frecuencia  $f_i$  para un frontera rectangular. Algunas amplitudes de vibración se muestran en el interior de la figura. La frecuencias del estado umbral es de  $f_D = 0.4$  Hz.

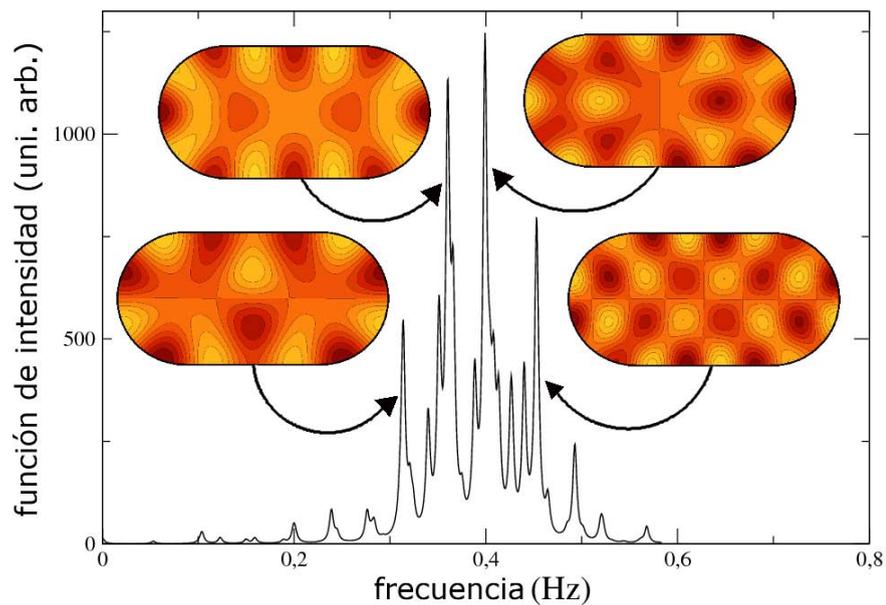


FIGURA 3.2: Acoplamiento  $A$  como función de la frecuencia  $f_i$  para un frontera en forma de estadio. Algunas amplitudes de vibración se muestran en el interior de la figura. El área del estadio y la frecuencia del estado umbral son los mismos que los usados en la figura 3.1.

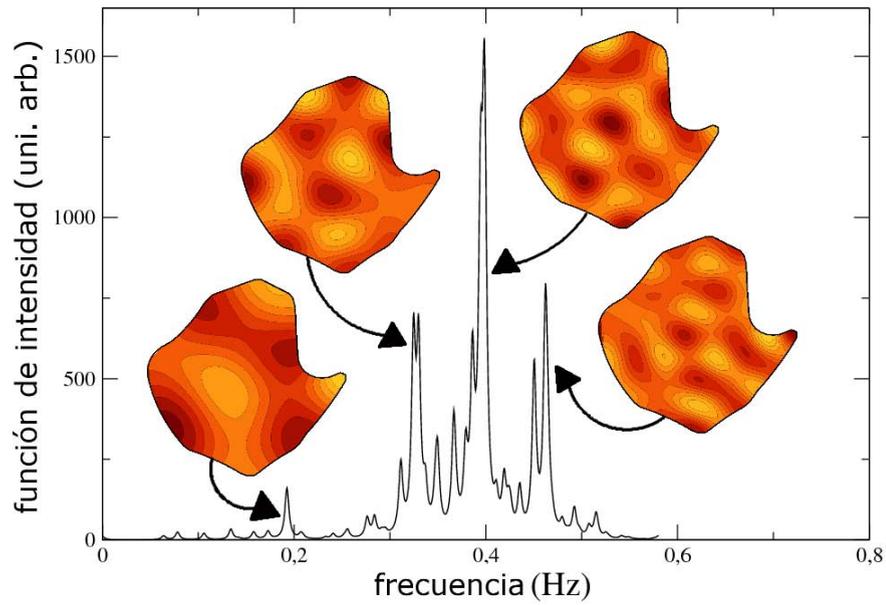


FIGURA 3.3: Acoplamiento  $A$  como función de la frecuencia  $f_i$  para un frontera irregular. Algunas amplitudes de vibración se muestran en el interior de la figura. El área de la frontera irregular y la frecuencia del estado umbral son los mismos que los usados en la figura 3.1.

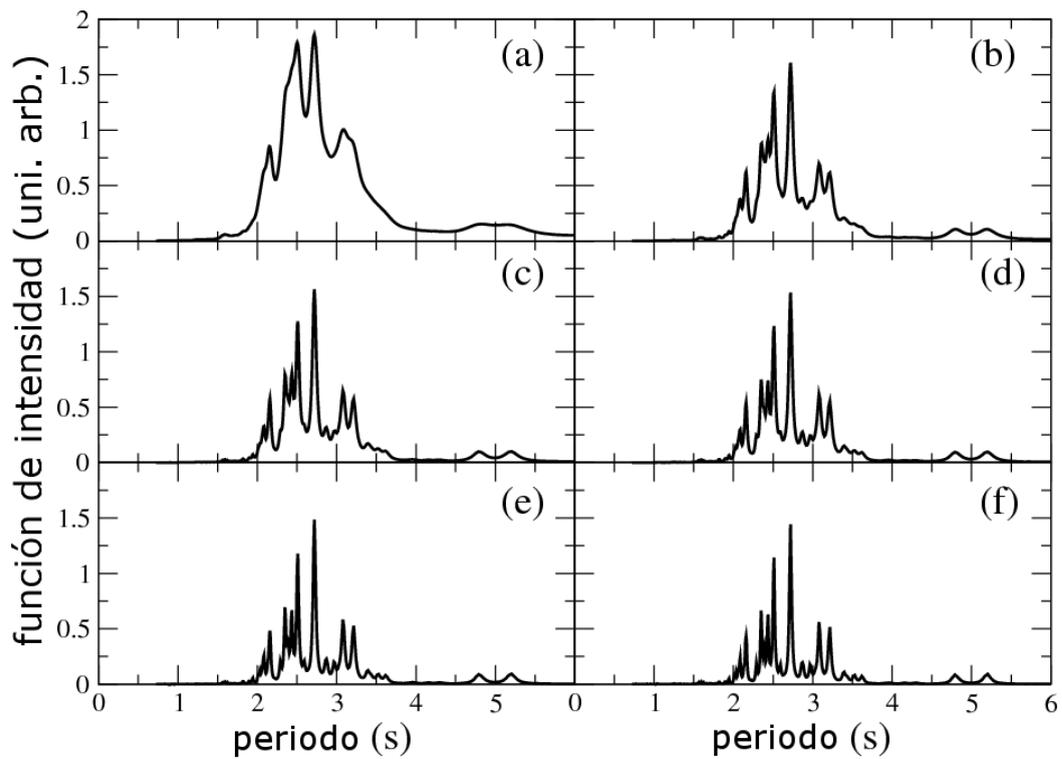


FIGURA 3.4: Acoplamiento  $A$  para diferentes valores del factor de calidad con una frontera irregular: (a)  $Q = 20$ , (b)  $Q = 40$ , (c)  $Q = 50$ , (d)  $Q = 60$ , (e)  $Q = 80$  y (d)  $Q = 100$ .

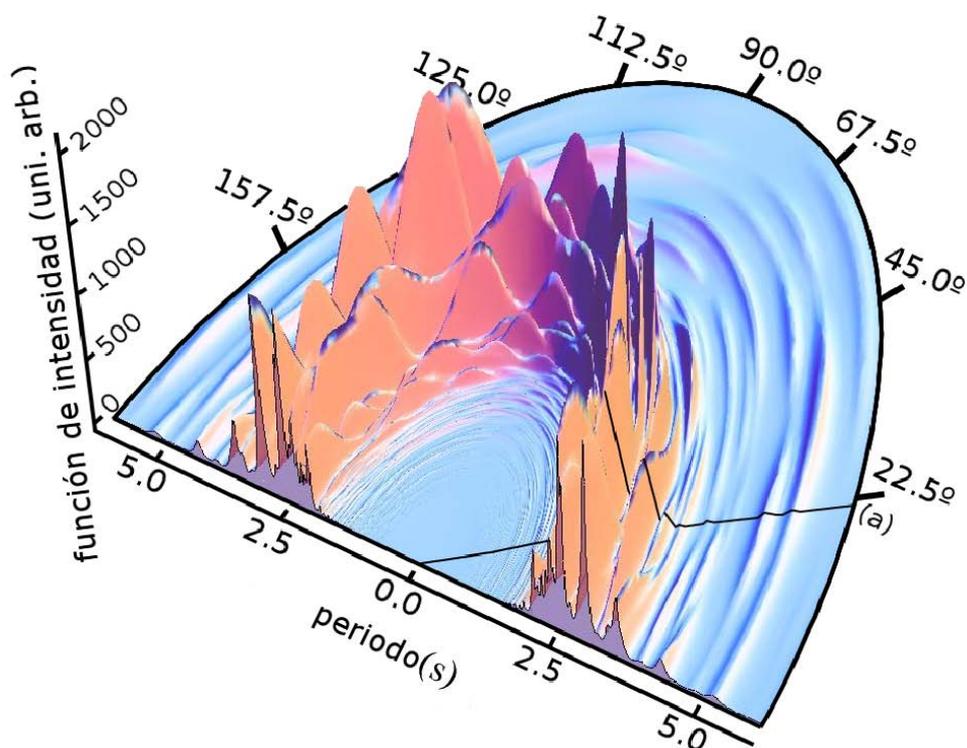


FIGURA 3.5: Acoplamiento  $A$  para diferentes valores del ángulo formado entre el vector de onda  $\mathbf{k}$  del estado umbral y el eje horizontal. La línea marcada por (a) indica un ángulo de incidencia relacionado con la figura 3.6.

### 3.2. Modelo de estados umbral elásticos en la respuesta sísmica de cuencas sedimentarias cubiertas por lodo

Una cuenca sedimentaria, como la que existe en el Valle de México, se muestra en la figura 3.6 con un corte transversal mostrado en la figura 3.7. Desde el punto de vista elástico, la región sedimentaria permite la propagación de ondas tanto compresionales como transversales con velocidades  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ , respectivamente. En contraste, la capa delgada de lodo que cubre la región sedimentaria de forma efectiva sólo permite la propagación de ondas compresionales (de velocidad  $\alpha_0 = 1500$  m/s); debido a que las ondas transversales se propagan muy lento en el lodo, esto es  $\alpha_0 \gg \beta_0$ . Por tanto, la capa de lodo se comporta como una membrana elástica<sup>6</sup>, es decir, el movimiento de las compresiones en el lodo resulta bien descrito por la ecuación (3.5).

La región del lodo, también llamada zona del Lago, esta acotada por el sedimento y otras estructuras construidas sobre él, como el aeropuerto de la ciudad de México. La frontera exacta del Lago no esta bien establecida, sin embargo, se estima [40] que tiene la forma mostrada por la línea punteada en la figura 3.6. Esta forma irregular es la que se usó en las secciones anteriores. Por otro lado, desde hace algún tiempo [78, 79] se conoce que en un evento sísmico las ondas transversales (referidas como  $S$  en la figura 3.7) pueden excitar ondas de superficie en la

<sup>6</sup> Esta es una suposición habitual para el tratamiento de la cuenca del Valle de México [40].

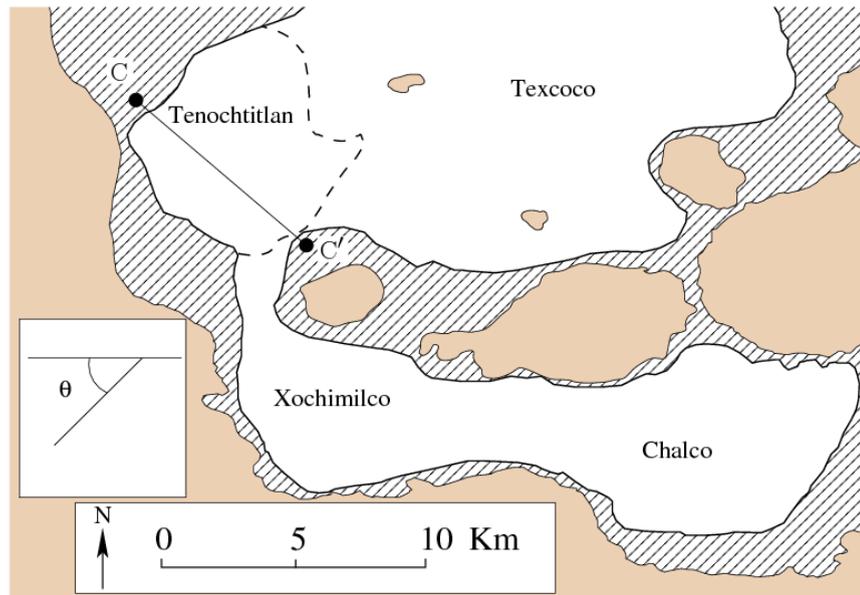


FIGURA 3.6: Esquema geológico de la cuenca del Valle de México. Estructura sedimentaria (región rayada) rodeada por roca (región en color), cubierta por una delgada capa de lodo (región blanca). En línea discontinua se observa la frontera irregular utilizada en los cálculos numéricos mostrados en las figuras 3.3, 3.4 y 3.5. Figura adaptada de la Ref. [77].

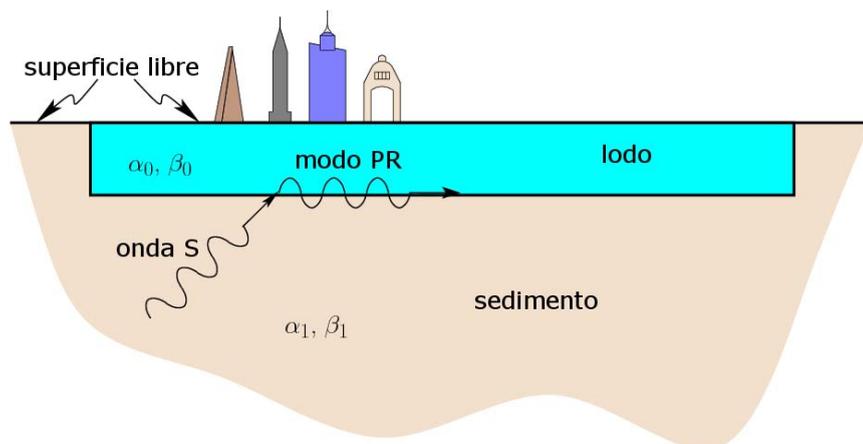


FIGURA 3.7: Corte transversal del esquema geológico mostrado en la figura 3.6, línea C a C', que explica la excitación del modo acoplado PR.

interfase entre el sedimento y el lodo, siendo conocidas estas ondas de superficie como ondas de Rayleigh. Estas ondas de Rayleigh se pueden acoplar a las ondas compresionales en el lodo, siempre que se cumpla la condición  $0.91\beta_1 < \alpha_0$  [79], dando lugar a un modo acoplado conocido como modo PR, que se propaga en la interfase entre el sedimento y el lodo a velocidad  $\alpha_0$ . Proponemos aquí que la respuesta sísmica de la cuenca del Valle de México se puede explicar por el modelo de estados umbral elásticos introducido en la sección anterior. La región con frontera punteada en la figura 3.6, es decir, la zona del Lago, se comporta como una membrana elástica con múltiples modos normales de vibración siendo el sistema “denso”; mientras el estado umbral es el modo acoplado PR, descrito anteriormente. Por lo tanto, el acoplamiento o

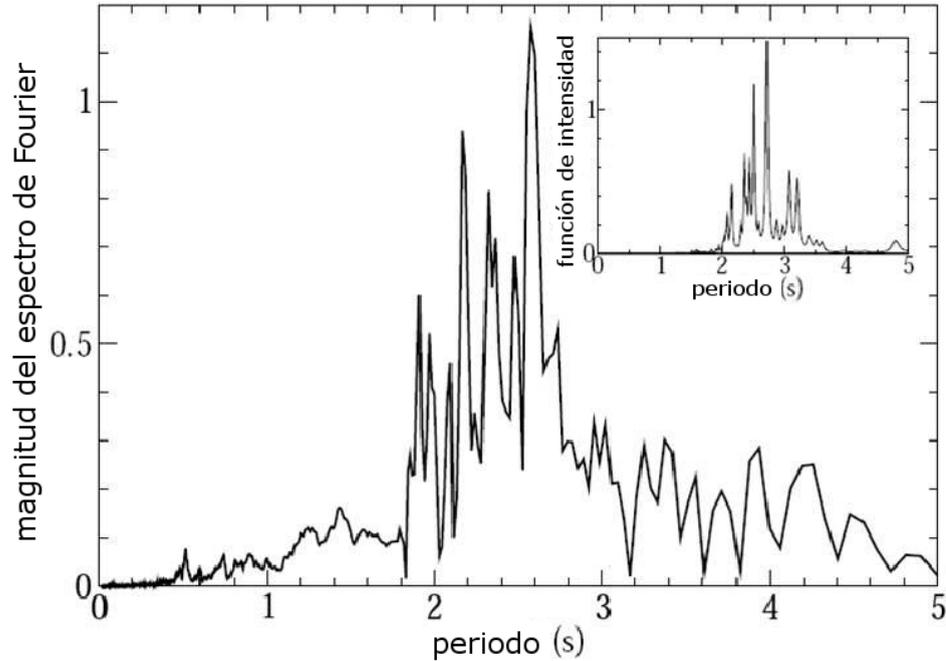


FIGURA 3.8: Amplificación espectral de la cuenca del Valle de México durante el evento sísmico del 11/enero/1997, magnitud  $M_s = 7.1$ . Los datos fueron proporcionados por el CENAPRED. En el recuadro se muestran los resultados obtenidos con el modelo de estados umbral elásticos. El recuadro se reproduce de nuevo en la figura 3.9.

función de intensidad  $A(f_i)$  entre el modo PR y los modos normales del Lago es lo que asociamos con la respuesta espectral de la cuenca del Valle de México; es decir, con las transformadas de Fourier de los acelerogramas registrados en la zona del Lago.

El estado umbral, es decir, el modo PR, lo caracterizamos por una onda plana monocromática con vector de onda  $\mathbf{k}_D = 2\pi f_D/\alpha_0(\cos \theta, \sin \theta)$ . El ángulo  $\theta$ , mostrado en la figura 3.6, es estimado por la dirección de incidencia del sismo; es decir, por la línea que une el epicentro con la zona del Lago. La frecuencia  $f_D$  corresponde con la frecuencia dominante del Lago, equivalente a 0.4 Hz.

La figura 3.8 muestra una comparación entre la respuesta espectral registrada en la zona del Lago y la obtenida con nuestro modelo. La amplitud  $A(f_i)$  o el acoplamiento del modo PR con los modos normales del lago se observan en la figura 3.9, además de algunos modos normales de vibración identificados en la figura. Como podemos observar en la figura 3.8, la respuesta sísmica de la cuenca del Valle de México es cualitativamente reproducida por el modelo de estados umbral elástico introducido en este capítulo. Una comparación cuantitativa no tiene lugar puesto que la forma exacta de la zona del Lago y las condiciones a la frontera del mismo no son conocidas apropiadamente.

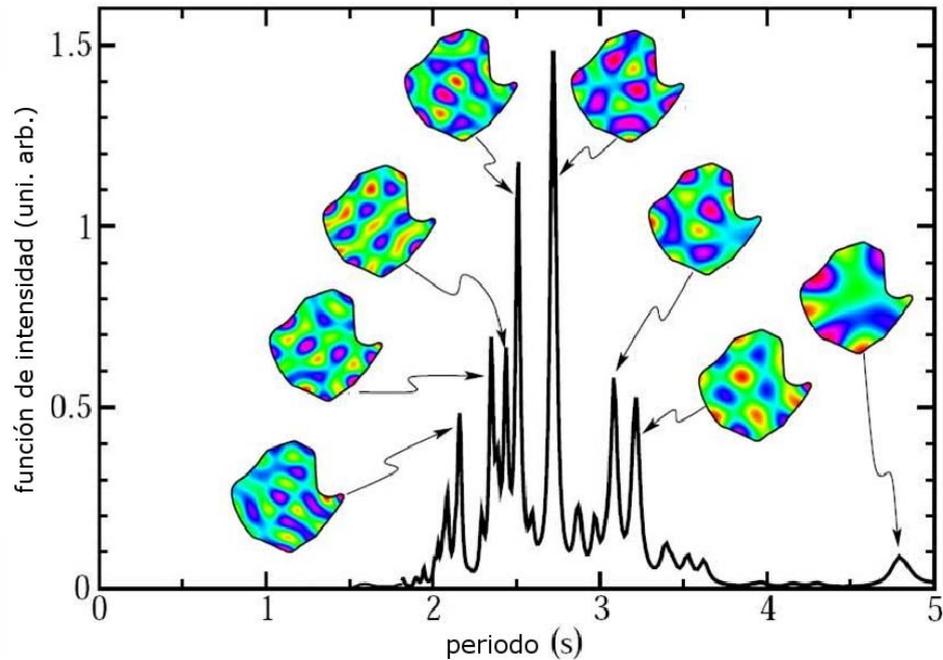


FIGURA 3.9: Acoplamiento  $A(v_i)$  como función del período  $T_i = f_i^{-1}$ . En la figura se muestran algunos modos normales del Lago.

### 3.3. Conclusiones y comentarios del capítulo

- Introducimos un modelo de estados umbral elásticos cuya respuesta es independiente de la geometría de la frontera utilizada. Bien sea esta integrable o caótica, simétrica o arbitraria.
- El modelo de estados umbral elásticos permite explicar la respuesta sísmica de cuencas sedimentarias cubiertas por lodo.
- Dimos evidencia de que el fenómeno de estados umbral no solamente ocurren en sistemas de dimensiones de núcleos ( $\sim 1$  fm) o cavidades de microondas ( $\sim 1$  m) sino también en sistemas del orden de kilómetros, es decir, cubre cerca de 20 órdenes de magnitud.
- De este capítulo se desprenden dos publicaciones [80] y [81].

## Capítulo 4

# Expansión en ondas planas para vibraciones elásticas en el plano

En este capítulo desarrollamos un método numérico para estudiar la propagación de ondas elásticas dentro del plano para una placa delgada<sup>1</sup>. Con excepción de algunos casos particulares, que veremos en el siguiente capítulo, las ecuaciones que describen el movimiento elástico en el plano no se pueden resolver analíticamente, por lo que, para realizar estudios con este tipo de ondas, se requiere el desarrollo de un método numérico. Recientemente, Ref. [25], el GOyM logró medir con mucha precisión más de 90 modos normales de vibración en el plano de una placa rectangular por lo que un método numérico para comparar las mediciones se hace necesario. En este capítulo se desarrollará el método de ondas planas, o PWE por sus siglas en inglés (*plane wave expansion*). El método PWE se refiere a una técnica computacional para resolver ecuaciones diferenciales parciales a través de la formulación de un problema de eigenvalores [82]. Este método es popular en estudios de cristales fotónicos (fonónicos) para obtener la relación de dispersión de cristales artificiales [83–86].

El método PWE aprovecha la periodicidad de los cristales para expandir sus propiedades mecánicas (tales como densidad  $\rho$ , módulo de Young  $E$ , entre otros) y variables dependientes (como el desplazamiento del sólido  $\mathbf{u}$ ) en series de Fourier, transformando así la ecuación diferencial que rige el movimiento en un problema de eigenvalores. El método PWE permite calcular los

<sup>1</sup> Formalmente las ecuaciones para ondas en el plano en placas delgadas son idénticas a las que describen el mismo movimiento en placas muy gruesas, sin embargo, los parámetros mecánicos son diferentes. Mientras la velocidad de las ondas transversales es la misma tanto en placas delgadas como gruesas, la velocidad de las ondas longitudinales es diferente. En placas delgadas es

$$\alpha = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}},$$

mientras en placas gruesas esta dada por

$$\alpha = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}.$$

modos estacionarios del sistema, dejando por fuera efectos transientes o movimientos forzados. En la siguiente sección presentaremos el método PWE para resolver la ecuación de ondas en el plano para un placa delgada. En el apéndice B se hace una extensión detallada de como se transforma la ecuación diferencial en un problema de eigenvalores.

#### 4.1. Método de ondas planas para vibraciones en el plano

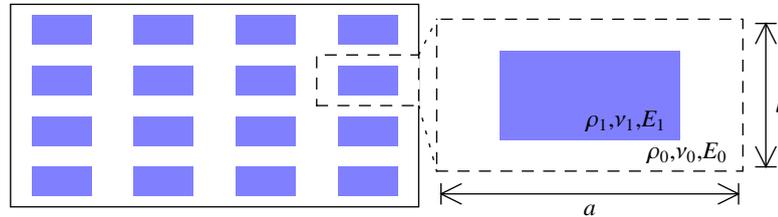


FIGURA 4.1: Diagrama esquemático del sistema calculado con el método de ondas planas. Una celda rectangular de lados  $a$  y  $b$  es repetida periódicamente en el plano. En la celda se aprecian dos materiales, en color, el material etiquetado como 1, rodeado por otro material etiquetado por 0.

En esta sección desarrollaremos el PWE para una celda rectangular como la mostrada en el lado derecho de la figura 4.1, especificando de antemano que la geometría del sistema no es importante para los planteamientos que vamos a realizar a continuación<sup>2</sup>. La celda unitaria (figura 4.1), de dimensiones  $a \times b$ , esta compuesta por un material etiquetado como 1, en color y en el centro de la celda, rodeado por otro material etiquetado como 0, comúnmente conocido como material de soporte o anfitrión. La celda unitaria es repetida periódicamente en ambas direcciones generando así un cristal periódico infinito bidimensional.

Las ecuaciones que describen el movimiento en el plano en la teoría clásica de ondas en el plano para placas delgadas son [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde  $h$  es el espesor de la placa. Las cantidades  $u_x(x, y)$  y  $u_y(x, y)$  son los desplazamientos en las direcciones  $X$  y  $Y$ , respectivamente. El vector de desplazamiento es por consiguiente  $\mathbf{u}(x, y) = (u_x, u_y)$ . Las relaciones entre los esfuerzos de la placa  $N_{ij}$  y las deformaciones  $e_{ij}$  están

<sup>2</sup> Como se verá en la sección 4.2 modificar la geometría es equivalente a cambiar los coeficientes de Fourier de la expansión.

dadas por

$$\begin{aligned} N_{xx} &= C(e_{xx} + \nu e_{yy}), \\ N_{yy} &= C(e_{yy} + \nu e_{xx}), \\ N_{xy} &= C(1 - \nu)e_{xy}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde  $C$  es el módulo de rigidez extensional dado por

$$C = \frac{Eh}{1 - \nu^2}. \quad (4.3)$$

El tensor de deformación se puede escribir en términos de los desplazamientos como sigue

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \text{y} \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (4.4)$$

Ya que las propiedades mecánicas del sistema de la figura 4.1 son periódicas, se puede entonces realizar la siguiente expansión en series de Fourier para los parámetros elásticos que aparecen en las ecuaciones (4.1) y (4.2):

$$C = \sum_{\mathbf{G}} \hat{\alpha}_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad (4.5)$$

$$C\nu = \sum_{\mathbf{G}} \hat{\beta}_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad \text{y} \quad (4.6)$$

$$\rho h = \sum_{\mathbf{G}} \hat{\eta}_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}). \quad (4.7)$$

Aquí  $\mathbf{r} = (x, y)$  es la posición y  $\mathbf{G} = 2\pi(p/a, q/b)$  es un vector de la red recíproca con  $p$  y  $q$  enteros. Los desplazamientos  $u_x$  y  $u_y$  son también periódicos y deben satisfacer la condición de Bloch, por lo tanto

$$u_x = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \sum_{\mathbf{G}} \phi_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad (4.8)$$

$$u_y = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \sum_{\mathbf{G}} \psi_{\mathbf{G}} \exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}), \quad (4.9)$$

donde  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  es el vector de onda y  $\omega$  la frecuencia angular.

Insertando las expansiones (4.5) a (4.9) en las ecuaciones (4.1) se obtiene, para cada  $\mathbf{G}$ ,

$$\sum_{\mathbf{G}'} M_{xx}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \phi_{\mathbf{G}'} + M_{xy}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \psi_{\mathbf{G}'} = \omega^2 \sum_{\mathbf{G}'} \hat{\eta}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} \phi_{\mathbf{G}'}, \quad (4.10)$$

$$\sum_{\mathbf{G}'} M_{yx}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \phi_{\mathbf{G}'} + M_{yy}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') \psi_{\mathbf{G}'} = \omega^2 \sum_{\mathbf{G}'} \hat{\eta}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} \psi_{\mathbf{G}'}. \quad (4.11)$$

En el apéndice B se describe en detalle como se obtienen las ecuaciones anteriores a partir de las expansiones (4.5)-(4.9). Las expresiones  $M_{ij}$  están dadas por

$$M_{xx}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'})(k_y + G'_y)(k_y + G_y) + \hat{\alpha}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}(k_x + G'_x)(k_x + G_x), \quad (4.12)$$

$$M_{xy}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'})(k_x + G'_x)(k_y + G_y) + \hat{\beta}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}(k_x + G_x)(k_y + G'_y), \quad (4.13)$$

$$M_{yx}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'})(k_x + G_x)(k_y + G'_y) + \hat{\beta}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}(k_x + G'_x)(k_y + G_y), \quad (4.14)$$

$$M_{yy}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'})(k_x + G'_x)(k_x + G_x) + \hat{\alpha}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}(k_y + G'_y)(k_y + G_y). \quad (4.15)$$

Las ecuaciones (4.10) y (4.11) pueden escribirse en forma matricial como un problema de eigenvalores generalizado con un número infinito de columnas y filas como sigue

$$\begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{N} & 0 \\ 0 & \mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

siendo  $\phi$  y  $\psi$  vectores infinitos con entradas  $\phi_{\mathbf{G}'}$  y  $\psi_{\mathbf{G}'}$  respectivamente, y

$$\mathbf{N} = \hat{\eta}_{\mathbf{G}-\mathbf{G}'}. \quad (4.17)$$

Para resolver numéricamente el problema de eigenvalores generalizado (4.16), es necesario trun-car las expansiones de Fourier en algún número finito  $\mathbf{G}_{\max}$  de ondas planas, correspondiente a una frecuencia de corte  $\omega_{\text{corte}} \propto |\mathbf{G}_{\max}|$ . Esto define la longitud de onda mas pequeña usada para describir las variaciones en la celda de los parámetros mecánicos. En general  $\mathbf{G}_{\max}$ , depende de la naturaleza del contraste entre los materiales, por ejemplo entre 0 y 1 en la figura 4.1, y no sobre el tamaño de la celda unitaria.

La frecuencia de corte  $\omega_{\text{corte}}$  se escoge de tal manera que las frecuencias propias del sistema convergen como función del número de ondas planas. Esta convergencia está asegurada ya que las matrices  $M_{ij}$  son matrices de Toeplitz<sup>3</sup> por lo que sus eigenvalores convergen asintóticamente con respecto al tamaño de la matriz [87].

El problema de eigenvalores fue resuelto usando un algoritmo en paralelo ejecutado sobre una combinación optimizada de GPU's y CPU's en Fortran, logrando diagonalizar matrices de dimensión cercana a 3000 en tiempos menores a 1 minuto con eigenvalores y eigenvectores<sup>4</sup>.

Como se mencionó, al inicio de este capítulo, la geometría de la celda unitaria define los coeficientes de las expansiones (4.5) a (4.9). En la siguiente sección se muestra como calcular analíticamente los coeficientes de Fourier para la celda unitaria con la geometría de la figura 4.1. Para celdas con forma irregular es necesario calcular los coeficientes de forma numérica.

<sup>3</sup> A es una matriz de Toeplitz si sus elementos  $i, j$ , denotados por  $A_{i,j}$  satisfacen la relación  $A_{i,j} = A_{i+1,j+1}$ .

<sup>4</sup> La estación de trabajo utilizada tiene 2 tarjetas GPUs Nvidia Tesla C2050, 2 CPUs AMD Opteron 6176 SE de 12 núcleos cada uno y 64 GB en memoria RAM DDR3.

## 4.2. Coeficientes de Fourier para el método de ondas planas

Los coeficientes de Fourier en la expansión del método de ondas planas dependen completamente de la celda unitaria que se va a estudiar. En esta sección estudiaremos una celda como la que se muestra en la figura 4.1. Dada una celda unitaria todos los coeficientes de Fourier se calculan de la misma forma, por lo tanto los generalizaremos aquí por el escalar  $P(x, y)$ , que sería cualquiera de los parámetros  $C$ ,  $C\nu$  o  $\rho h$ . El escalar  $P(x, z)$  puede escribirse para la celda unitaria (figura 4.1) en la forma

$$P(x, y) = P_0 + (P_1 - P_0)\Theta[L_x/2 - |x|]\Theta[L_y/2 - |y|], \quad (4.18)$$

donde  $P_0$  y  $P_1$  etiquetan los medios 0 y 1 respectivamente y corresponden al valor que toma el parámetro elástico en dicho medio.  $L_x$  y  $L_y$  corresponden a las dimensiones horizontal y vertical del medio 1 respectivamente.  $\Theta[\chi]$  es la función de Heaviside<sup>5</sup>.

Calculemos la transformada de Fourier de  $P$ :

$$\hat{P}(G_x, G_y) = \frac{1}{ab} \iint P(x, y)e^{-i(G_x x + G_y y)} dx dy, \quad (4.19)$$

donde  $G_x = 2\pi n/a$  y  $G_y = 2\pi m/b$ , siendo  $n, m \in \mathbb{Z}$  números enteros. En el caso en que  $G_x = G_y = 0$  se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{P}(0, 0) - P_0 &= \frac{1}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \Theta[L_x/2 - |x|] dx \times \int_{-b/2}^{b/2} \Theta[L_y/2 - |y|] dy, \\ \hat{P}(0, 0) - P_0 &= \frac{L_x L_y}{ab} (P_1 - P_0). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Esta última ecuación puede reescribirse en términos del factor de llenado definido como  $ff = L_x L_y / ab$ :

$$\hat{P}(0, 0) - P_0 = (P_1 - P_0)ff \quad (4.21)$$

Notemos que la integral de la función  $e^{-i(G_x x + G_y y)}$  en la celda unitaria es nula, esto es

$$\begin{aligned} \iint e^{-i(G_x x + G_y y)} dx dy &= \int_{-a/2}^{a/2} e^{-iG_x x} dx \int_{-b/2}^{b/2} e^{-iG_y y} dy \\ &= \frac{\sin(G_x a/2)}{G_x/2} \times \frac{\sin(G_y b/2)}{G_y/2} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

---

<sup>5</sup>  $\Theta[\chi] = \begin{cases} 0, & \chi < 0 \\ 1, & \chi > 0 \end{cases}$

siempre que al menos uno de los  $G_j$  sea diferente de cero. Esto porque  $G_x b/2$  o  $G_y a/2$  es siempre un múltiplo entero de  $\pi$ . Por lo tanto, para  $G_x \neq 0$  y  $G_y = 0$ :

$$\begin{aligned}\hat{P}(G_x, 0) &= \frac{1}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} \Theta[L_x/2 - |x|] e^{-iG_x x} dx \times \int_{-b/2}^{b/2} \Theta[L_y/2 - |y|] dy \\ &= \frac{\sin(G_x L_x/2)}{G_x L_x/2} (P_1 - P_0) f f.\end{aligned}\quad (4.23)$$

Equivalentemente para  $G_x = 0$  y  $G_y \neq 0$ :

$$\hat{P}(0, G_y) = \frac{\sin(G_y L_y/2)}{G_y L_y/2} (P_1 - P_0) f f.\quad (4.24)$$

En forma resumida y compacta podemos escribir

$$\hat{P}(0, 0) - P_0 = (P_1 - P_0) f f,\quad (4.25)$$

$$\hat{P}(G_x, 0) = \frac{\sin(G_x L_x/2)}{G_x L_x/2} (P_1 - P_0) f f,\quad (4.26)$$

$$\hat{P}(0, G_y) = \frac{\sin(G_y L_y/2)}{G_y L_y/2} (P_1 - P_0) f f,\quad (4.27)$$

$$\hat{P}(G_x, G_y) = \frac{\sin(G_x L_x/2)}{G_x L_x/2} \frac{\sin(G_y L_y/2)}{G_y L_y/2} (P_1 - P_0) f f.\quad (4.28)$$

Las ecuaciones anteriores corresponden a los coeficientes de Fourier de la función  $P(x, y)$  y son los que se utilizan para construir el sistema de eigenvalores B.18 que resulta del método de ondas planas.

### 4.3. Conclusiones y comentarios del capítulo

- Construimos exitosamente un método numérico, el método de ondas planas, para el estudio de las oscilaciones elásticas en el plano en placas.

## Capítulo 5

# Pruebas y aplicaciones del método de ondas planas en vibraciones elásticas

En este capítulo verificaremos y aplicaremos en diferentes sistemas el método PWE desarrollado en el capítulo 4. En la sección 5.1 compararemos los resultados utilizando el método PWE con dos sistemas que se pueden resolver analíticamente: una placa homogénea infinita y una guía de ondas unidimensional con diferentes condiciones a la frontera. Luego, en la sección 5.2, mostraremos como modificando los parámetros de la celda unitaria es posible aplicar el método PWE a sistemas finitos (placa homogénea) con diferentes condiciones a la frontera; y compararemos los resultados obtenidos con otros métodos numéricos reportados en la literatura.

En la sección 5.3 aplicaremos el método PWE para calcular el espectro y los modos normales de vibración en el plano de una placa de aluminio rectangular con condiciones de frontera libre, que réplica de forma excelente las mediciones experimentales obtenidas por el GOyM. Por otro lado, en la sección 5.4 aplicaremos el método PWE a un cristal elástico infinito con una celda unitaria no homogénea, calculando su estructura de bandas y mostrando como surge una banda prohibida debido a la presencia de canales en la celda. Finalizaremos la sección con algunas predicciones para una propuesta experimental de una placa finita no homogénea con canales, que da lugar a una banda elástica prohibida en la región audible, propuesta que dio origen a una tesis de maestría actualmente en desarrollo.

### 5.1. Pruebas del método de ondas planas en sistemas solubles analíticamente

Pondremos a prueba el método PWE (capítulo 4) con sistemas que pueden tratarse analíticamente. Estudiaremos dos sistemas, uno infinito y otro semi-infinito. Ambos sistemas encuentran

múltiples aplicaciones cuando la longitud de onda de la excitación es muy pequeña comparada con la longitud de la placa; es decir, donde las fronteras del material influyen muy poco. Este es el caso, por ejemplo, de oscilaciones de alta frecuencia en las corazas navales, edificios, estructuras relativamente pequeñas como discos duros o sistemas de almacenamiento de datos por medios mecánicos, entre muchos otros.

### 5.1.1. Sistema homogéneo infinito

Estudiaremos aquí, utilizando el método PWE, la propagación de ondas en el plano para una placa elástica infinita homogénea y compararemos los resultados numéricos con los que se pueden obtener analíticamente. En una placa elástica infinita no existe frontera alguna, por lo tanto, no presenta superficies finitas donde alguna condición a la frontera deba aplicarse. Buscamos entonces soluciones de las ecuaciones (4.1) que representen la propagación de una onda plana, esto es  $u_x = U \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$  y  $u_y = V \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ . Substituyendo en (4.1) resulta

$$\begin{aligned} \left( \frac{Eh}{1-\nu^2} k_x^2 + \frac{Eh}{2(1+\nu)} k_y^2 - \rho h \omega^2 \right) U + \frac{Eh}{2(1-\nu)} k_x k_y V &= 0, \\ \frac{Eh}{2(1-\nu)} k_x k_y U + \left( \frac{Eh}{2(1+\nu)} k_x^2 + \frac{Eh}{1-\nu^2} k_y^2 - \rho h \omega^2 \right) V &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Las soluciones no triviales del sistema de ecuaciones anterior exigen que

$$\begin{vmatrix} \frac{Eh}{1-\nu^2} k_x^2 + \frac{Eh}{2(1+\nu)} k_y^2 - \rho h \omega^2 & \frac{Eh}{2(1-\nu)} k_x k_y \\ \frac{Eh}{2(1-\nu)} k_x k_y & \frac{Eh}{2(1+\nu)} k_x^2 + \frac{Eh}{1-\nu^2} k_y^2 - \rho h \omega^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.2)$$

o, lo que es lo mismo, después de dividir entre  $4(1-\nu)^2/(Eh)^2$ ,

$$\left( \frac{2}{1+\nu} k_x^2 + \frac{1-\nu}{1+\nu} k_y^2 - 2(1-\nu) \frac{\rho}{E} \omega^2 \right) \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} k_x^2 + \frac{2}{1+\nu} k_y^2 - 2(1-\nu) \frac{\rho}{E} \omega^2 \right) - k_x^2 k_y^2 = 0. \quad (5.3)$$

La ecuación anterior corresponde a la relación de dispersión de las vibraciones en el plano para una placa homogénea infinita y puede tratarse analíticamente. Para el análisis de (5.3) es conveniente introducir las cantidades

$$\bar{k}^2 = \frac{(k_y/k_x)^2 + 1}{1+\nu} \quad \text{y} \quad \bar{\omega}^2 = \frac{\rho}{E} \left( \frac{\omega}{k_x} \right)^2. \quad (5.4)$$

Con  $\bar{k}$  y  $\bar{\omega}$ , la relación de dispersión (5.3), después de algunas simplificaciones menores se puede describir como sigue

$$\bar{\omega}^4 - \frac{3-\nu}{2(1-\nu)} \bar{k}^2 \bar{\omega}^2 + \frac{1}{2(1-\nu)} \bar{k}^4 = \left( \bar{\omega}^2 - \frac{\bar{k}^2}{2} \right) \left( \bar{\omega}^2 - \frac{\bar{k}^2}{1-\nu} \right) = 0. \quad (5.5)$$

La ecuación (5.5) implica que las vibraciones en el plano, en una placa homogénea infinita, posee dos ramas bien establecidas:  $\bar{\omega}^2 = \bar{k}^2/2$  y  $\bar{\omega}^2 = \bar{k}^2/(1 - \nu)$ . Retornando a las variables originales previas a las definiciones (5.4), la primera rama esta dada por

$$\omega^2 = \beta^2(k_x^2 + k_y^2), \quad \text{donde} \quad \beta^2 = \frac{E}{2\rho(1 + \nu)}, \quad (5.6)$$

correspondiente a un movimiento con velocidad  $\beta$ . Mientras la segunda rama

$$\omega^2 = \alpha^2(k_x^2 + k_y^2), \quad \text{donde} \quad \alpha^2 = \frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}, \quad (5.7)$$

corresponde a un movimiento con velocidad  $\alpha$ . Ambos tipos de movimiento no presentan dispersión y tienen su origen en la descripción de los sólidos en tres dimensiones (ecuaciones de Navier [2]). En el bulto existen dos tipos de movimiento bien conocidos: transversal y longitudinal. La velocidad  $\beta$  en la ecuación (5.6) es la misma que la velocidad transversal del sólido tridimensional, mientras que la velocidad  $\alpha$  en la ecuación (5.7) difiere de la velocidad longitudinal del sólido tridimensional por un factor de  $(1 - \nu)^2/(1 - 2\nu)$  (véase nota al pie de la pagina 24). A menos que se especifique lo contrario, identificaremos a  $\beta$  como la velocidad de las ondas transversales y a  $\alpha$  como la velocidad de las ondas longitudinales en placas elásticas al igual que se hizo en el capítulo 3.

La relación de dispersión calculada anteriormente se muestra en la figura 5.1. La rama transversal se representa por círculos negros, mientras por cuadrados rojos a la rama longitudinal. Los parámetros elásticos utilizados se muestran en la leyenda de la figura. Los resultados numéricos mostrados como puntos azules fueron calculados usando el método PWE descrito en el capítulo anterior. Los puntos  $\Gamma$ ,  $X$  y  $M$ , hacen referencia a la red recíproca del sólido y son conocidos como puntos críticos [88] en la física del estado sólido. Corresponden a  $\Gamma \rightarrow \mathbf{k} = (0, 0)$ , centro de la zona de Brillouin,  $X \rightarrow \mathbf{k} = (\pi/a, 0)$ , centro de una cara, y  $M \rightarrow \mathbf{k} = (\pi/a, \pi/b)$ , centro de un eje. En el caso de la placa infinita homogénea los puntos críticos tienen sentido al considerar la placa como la unión infinita de celdas unitarias de dimensiones  $a \times b$ .

Para representar una placa homogénea infinita en el método de PWE hemos puesto el medio 1 igual al medio 0 en la celda unitaria de la figura 4.1. Los resultados numéricos mostrados fueron conseguidos con 625 ondas planas. Como se puede apreciar en la figura 5.1, el método PWE reproduce apropiadamente el espectro de frecuencias de las ondas en el plano para un sistema homogéneo infinito, aún para un número reducido de ondas planas. Sin embargo, no permite distinguir directamente entre los modos transversal y longitudinal. Es posible distinguirlos numéricamente calculando del espectro obtenido la velocidad de fase o de grupo, que resultan ser iguales ya que el sistema no es dispersivo, o bien identificando la forma del desplazamiento análogamente como en la Ref. [86].

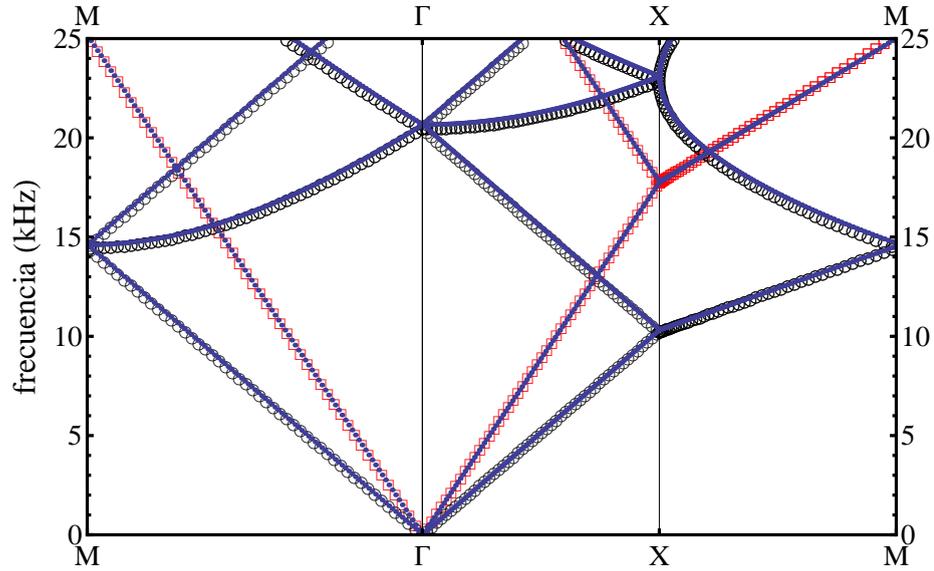


FIGURA 5.1: Comparación numérica analítica de la estructura de bandas para ondas en el plano en una placa homogénea infinita. Los parámetros utilizados son:  $E = 69.8$  GPa,  $\rho = 2722$  Kg/m<sup>3</sup> y  $\nu = 0.33$ . Los puntos azules corresponden al cálculo numérico por el método de ondas planas, los cuadrados rojos corresponden a la rama longitudinal, mientras los círculos negros corresponden a la rama transversal.

### 5.1.2. Guía de ondas unidimensional

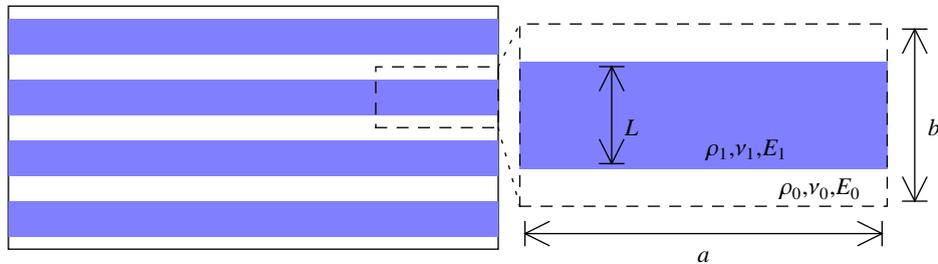


FIGURA 5.2: Diagrama esquemático de un conjunto de guías de ondas elásticas unidimensional (en color) idénticas representadas por el método de ondas planas. Una celda rectangular de lados  $a$  y  $b$  es repetida periódicamente en el plano. En la celda se aprecian dos materiales, en color, el material etiquetado como 1 correspondiente al material constitutivo de la guía, rodeado por otro material etiquetado por 0 correspondiente al vacío en el caso de frontera libre.

En esta sección se describirán los canales de propagación de una guía de ondas elásticas tanto en forma analítica como por el método PWE. Calcularemos las frecuencias de corte de los canales de transmisión de la guía con condiciones a la frontera libres y fijas. Consideremos una guía de ondas elásticas, como alguna de las que se muestran en la figura 5.2, definida en la región  $-\infty < x < \infty$  y  $0 \leq y \leq L$ . Dada la geometría de la guía, las ondas elásticas pueden propagarse libremente en la dirección  $X$  y están cuantizadas con respecto a la dirección  $Y$  debido al tamaño

finito de la guía en esta dirección.

Dada la simetría de la guía (traslación en la dirección  $X$ ), los canales de transmisión no pueden depender de la coordenada  $x$ . Por lo tanto, las componentes del vector de desplazamiento  $u_x$  y  $u_y$ , en las ecuaciones (4.1), son independientes de  $x$ . Estamos interesados en soluciones armónicas de la forma  $u_x = U(y) \exp(i\omega t)$  y  $u_y = V(y) \exp(i\omega t)$ , por lo que el conjunto de ecuaciones (4.1) se reduce a:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2 U, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 V. \quad (5.9)$$

Las ecuaciones anteriores están desacopladas y muestran que la guía elástica puede transmitir en dos tipos de vibración no acoplada: transversal y longitudinal<sup>1</sup>. Las condiciones a la frontera impuestas en la guía definen las funciones  $U(y)$  y  $V(y)$  así como su espectro de frecuencias. En el caso libre

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0,L} = 0 \quad \text{o} \quad \left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{y=0,L} = 0,$$

el movimiento transversal esta dado por

$$U(y) = U_0 \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right), \quad V = 0 \quad \text{y} \quad f_t(n) = \frac{\beta}{2L}n, \quad (5.10)$$

mientras el movimiento longitudinal esta dado por

$$V(y) = V_0 \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right), \quad U = 0 \quad \text{y} \quad f_l(n) = \frac{\alpha}{2L}n. \quad (5.11)$$

Aquí  $f_i(n) = \omega/2\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) son el conjunto de frecuencias de corte, transversal o longitudinal, según corresponda. En el caso de condiciones a la frontera fijas  $U(y = 0, L) = V(y = 0, L) = 0$  los resultados son equivalentes al caso libre, pero la función coseno es reemplazada por la función seno y el desplazamiento constante  $n = 0$  no es solución. Por lo tanto, el primer modo para el caso fijo corresponde a  $n = 1$  y no a  $n = 0$ , como en el caso libre.

Para representar la guía de ondas a través del método PWE, consideremos una celda unitaria como la que se muestra en la figura 5.2 cuya longitud horizontal coincide con el tamaño de la celda  $a$ , mientras en el eje vertical la dimensión del medio 1 es igual a  $L$  y el tamaño de celda  $b$  es siempre mayor que  $L$ . El medio 1 correspondería entonces a la guía de ondas, mientras el medio 0 propiciaría las condiciones a la frontera, como discutiremos mas adelante. Al repetir periódicamente la celda unitaria en el plano, se generaría un conjunto infinito de guías de onda como se esquematiza en la figura 5.2.

Eligiendo apropiadamente las propiedades del medio 0, el conjunto de guías de onda es desacoplado y las vibraciones de una guía en particular no afecta a las demás ya que entre guías no

<sup>1</sup> Los dos tipos de vibración en el plano para la guía de ondas elástica tienen su origen en las dos ramas del sistema homogéneo infinito.

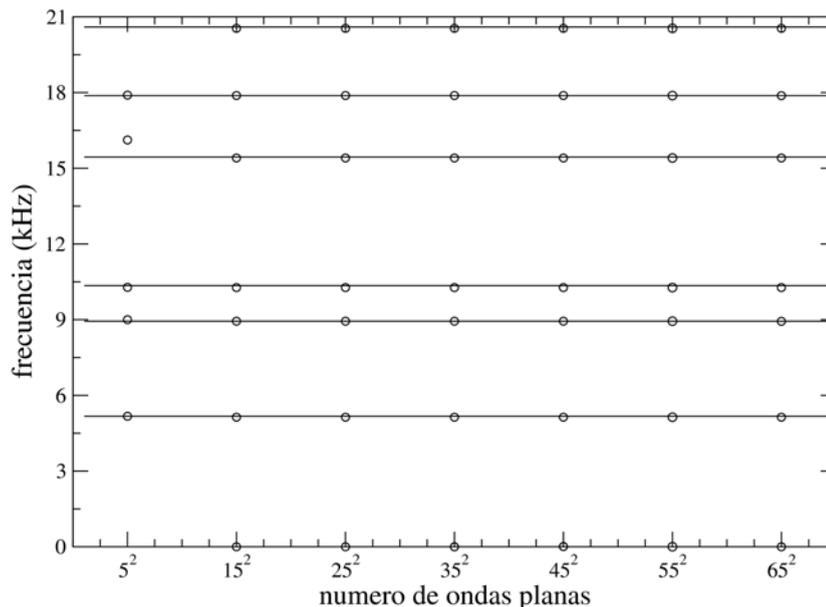


FIGURA 5.3: Convergencia del método de ondas planas para las frecuencias de corte en el plano en una guía de ondas de ancho  $L = 0.3$  m. Los círculos corresponden a los cálculos numéricos y las líneas continuas a los resultados analíticos. Los parámetros son los mismos que los usados en la figura 5.1.

existe propagación de ondas. Los resultados obtenidos por el método PWE corresponden de esta forma al movimiento de una única guía de ondas.

Para lograr las condiciones de frontera libre en el método de ondas planas, hacemos que los parámetros elásticos del medio 0:  $E_0$  y  $\rho_0$ , tiendan a ser nulos, generando así un medio ficticio que imita el vacío. En la figura 5.3 se puede apreciar como el método PWE logra una excelente convergencia en las primeras frecuencias de corte de la guía de ondas con respecto al número de ondas planas<sup>2</sup>. En la figura 5.4 mostramos los primeros canales de transmisión de la guía libre calculados usando el método PWE. Las frecuencias de corte y la forma de los canales de transmisión obtenidos coinciden, como es de esperarse, con los resultados calculados analíticamente, ecuaciones (5.10) y (5.11).

Para lograr las condiciones de frontera fijas, en el método de ondas planas, hacemos que los parámetros elásticos del medio 0:  $E_0$  y  $\rho_0$ , tiendan a infinito, generando así un medio ficticio impenetrable. Los resultados de la guía de ondas por el método PWE con frontera fija son mostrados en la figura 5.4. Las frecuencias de corte y la forma de los canales de transmisión obtenidos coinciden, como en el caso libre, con los resultados calculados analíticamente, ecuaciones (5.10) y (5.11) con la función seno en lugar de coseno.

<sup>2</sup> Los parámetros del vacío ficticio utilizados fueron  $E_0 = 10^5$  Pa y  $\rho_0 = 10^{-4}$  Kg/m<sup>3</sup>. Empíricamente notamos que una razón entre los parámetros elásticos de los medios 1 y 0 de cuatro ordenes de magnitud es suficiente para que las ondas no puedan propagarse fuera del medio 1.

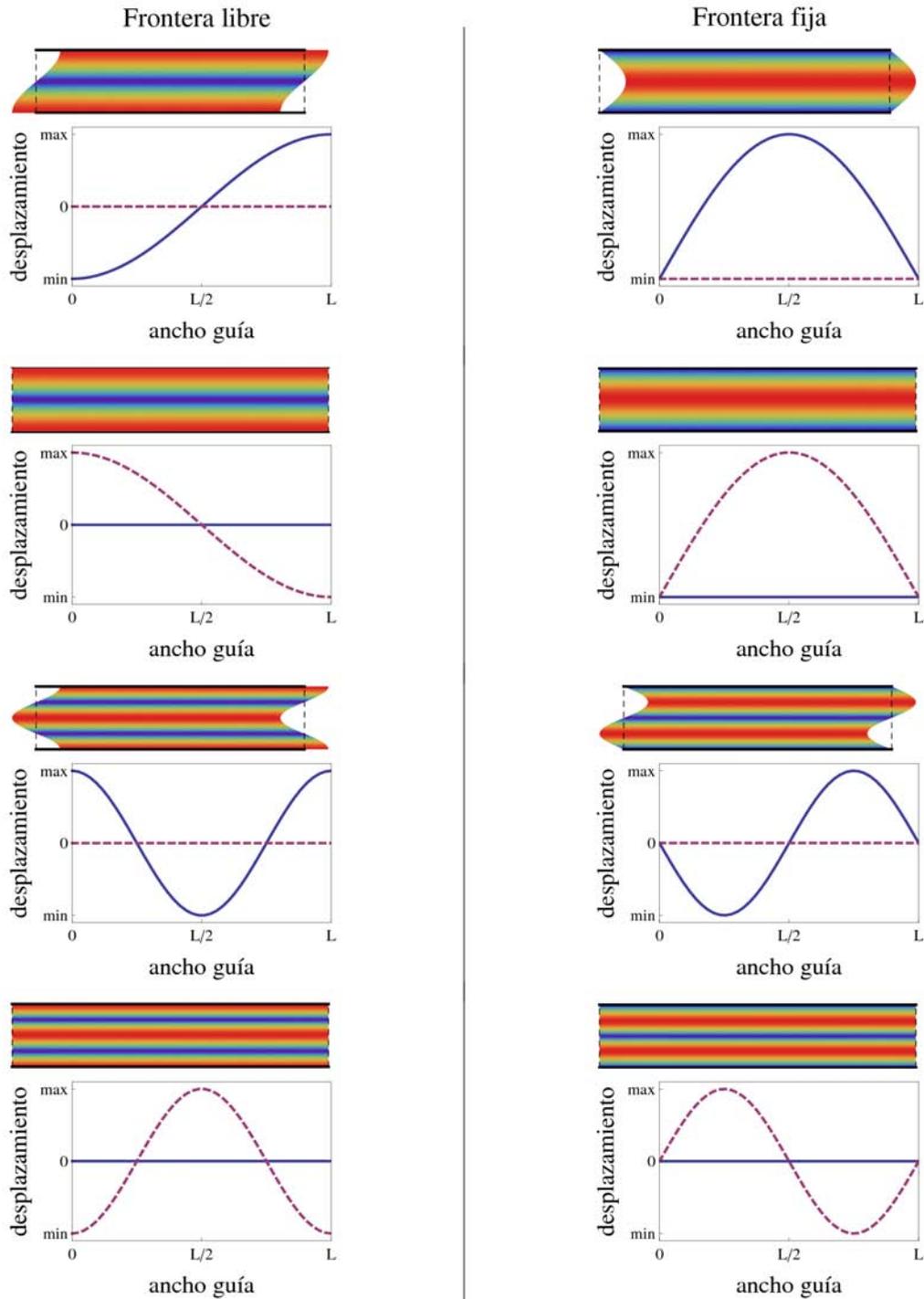


FIGURA 5.4: Funciones de onda de los primeros canales de transmisión para ondas en el plano calculados por el método PWE en una guía de ondas unidimensional. Las funciones de onda se muestran como mapas de densidad a color y representan el desplazamiento total  $\sqrt{u^2 + v^2}$  como una función de la posición desplazada:  $(x + u, y + v)$ . Las líneas continuas representan el desplazamiento horizontal  $u$ , mientras las punteadas el desplazamiento vertical  $v$  para los diferentes modos.

## 5.2. Comparación del método de ondas planas con otros métodos numéricos: placa rectangular

El método PWE puede ser adaptado para estudiar las vibraciones elásticas en medios finitos usando la idea introducida en la sección anterior de un medio ficticio muy blando ( $\rho_0, E_0 \rightarrow 0$ ) o muy duro ( $\rho_0, E_0 \rightarrow \infty$ ) para alcanzar las condiciones de frontera deseadas. En esta sección estudiaremos los modos normales de vibración en el plano de una placa homogénea rectangular, compararemos los resultados obtenidos por el método PWE con los resultados obtenidos por otros métodos numéricos, como el tratamiento energético de Rayleigh-Ritz [52] y métodos de superposición [53–55].

Consideremos una placa homogénea de dimensiones espaciales  $L_x \times L_y$ . Para tratar la placa por el método PWE consideraremos una celda unitaria como la mostrada en la figura 4.1 de la página 25, con  $a > L_x$  y  $b > L_y$ . El medio etiquetado como 1 corresponde al material del que constituye la placa, mientras el medio 0 corresponde al medio ficticio que representa las condiciones a la frontera deseadas.

A continuación se muestra una comparación de los resultados obtenidos usando el método PWE con respecto a otros métodos numéricos, para tanto condiciones a la frontera libres, tabla 5.1, como fijas, tabla 5.2. Para ambas condiciones a la frontera y diferente relación de aspecto los resultados obtenidos utilizando el método PWE concuerdan muy bien con los resultados obtenidos por otros métodos: Du y Bardell [52, 55], Gorman I [53] y Gorman II [89]. Los elementos en blanco en las columnas de los métodos de referencia corresponden a modos normales no reportados en los respectivos trabajos. La diferencia porcentual (columna %Dife.) en el caso libre no supera el 0.2 %, mientras que en el caso fijo es inferior al 1.4 %. Esta diferencia en precisión con respecto a las condiciones a la frontera tiene que ver con la convergencia del método PWE, el método converge mucho más rápido en el caso libre que en el caso fijo. Los resultados aquí presentados nos permiten verificar el método PWE para ondas en el plano en placas elásticas finitas, lo que nos permite utilizar el método para comparar con modos normales medidos en una placa rectangular, como veremos en la siguiente sección.

Modo	relación de aspecto $L_x/L_y = 1$					relación de aspecto $L_x/L_y = 2$				
	PWE	Gorman I		Du y Bardell		PWE	Gorman I		Du y Bardell	
	$\Omega$	$\Omega$	%Dife.	$\Omega$	%Dife.	$\Omega$	$\Omega$	%Dife.	$\Omega$	%Dife.
1	2.321	2.320	0.043	2.321	0.000	1.958	1.956	0.112	1.954	0.205
2	2.474	2.472	0.081	2.472	0.081	2.963	2.960	0.101	2.961	0.068
3	2.474	2.472	0.081	2.472	0.081	3.270	3.268	0.061	3.267	0.092
4	2.631	2.628	0.114	2.628	0.114	4.728	4.726	0.042	4.726	0.042
5	2.990	2.988	0.067	2.987	0.100	4.786	4.784	0.042	4.784	0.042
6	3.454	3.452	0.058	3.452	0.058	5.208	5.208	0.000	5.205	0.058
7	3.724	3.724	0.000			5.259	5.258	0.019		
8	3.724	3.724	0.000			5.369	5.370	-0.019		
9	4.305	4.306	-0.023			6.150	6.148	0.033		
10	4.970	4.970	0.000			6.448				
11	4.970	4.970	0.000			6.597	6.596	0.015		
12	5.047	5.046	0.020			6.750				
13	5.257	5.258	-0.019			6.858	6.856	0.029		
14	5.288	5.286	0.038			7.452				
15	6.044					7.944	7.948	-0.050		
16	6.100	6.100	0.000			8.546				
17	6.100	6.100	0.000			8.667				

TABLA 5.1: Frecuencias normales adimensionales  $\Omega = \omega L_x \sqrt{\rho(1 - \nu^2)}/E$  de vibraciones en el plano de un placa con diferente relación de aspecto y condiciones a la frontera completamente libres. Los resultados obtenidos por el método de ondas planas (PWE) son comparados con otros métodos numéricos. Los resultados etiquetados como “Gorman I” fueron tomados de la Ref. [53] mientras los resultados nombrados “Du y Bardell” fueron tomados de las Refs. [55] y [52], respectivamente.

Modo	relación de aspecto $L_x/L_y = 1$					relación de aspecto $L_x/L_y = 2$				
	PWE	Gorman II		Du y Bardell		PWE	Gorman II		Du y Bardell	
	$\Omega$	$\Omega$	%Dife.	$\Omega$	%Dife.	$\Omega$	$\Omega$	%Dife.	$\Omega$	%Dife.
1	3.551	3.555	-0.113	3.555	-0.113	4.794	4.789	0.104	4.789	0.104
2	3.551	3.555	-0.113	3.555	-0.113	6.348	6.379	-0.486	6.379	-0.486
3	4.241	4.235	0.142	4.235	0.142	6.703	6.712	-0.134	6.712	-0.134
4	5.187	5.185	0.039	5.185	0.039	7.101	7.049	0.738	7.049	0.738
5	5.846	5.859	-0.222	5.859	-0.222	7.650	7.608	0.552	7.608	0.552
6	5.949	5.894	0.933	5.895	0.916	8.180	8.140	0.491	8.140	0.491
7	5.949	5.894	0.933			8.987	8.998	-0.122		
8	6.659	6.708	-0.730			9.535	9.515	0.210		
9	7.104					9.861				
10	7.104					10.640				
11	7.280	7.281	-0.014			11.260	11.250	0.089		
12	7.572	7.597	-0.329			11.700	11.570	1.124		
13	7.865	7.800	0.833			11.900	11.740	1.363		
14	8.610					12.200				
15	8.610					12.430				
16	8.698	8.718	-0.229			13.000				
17	8.738					13.020	12.930	0.696		

TABLA 5.2: Frecuencias normales adimensionales  $\Omega = \omega L_x \sqrt{\rho(1 - \nu^2)}/E$  de vibraciones en el plano de un placa con diferente relación de aspecto y condiciones a la frontera completamente fijas. Los resultados obtenidos por el método de ondas planas (PWE) son comparados con otros métodos numéricos. Los resultados etiquetados como “Gorman II” fueron tomados de la Ref. [89] mientras los resultados llamados “Du y Bardell” fueron tomados de las Refs. [55] y [52], respectivamente.

### 5.3. Ondas planas para vibraciones en el plano: placa rectangular

En esta sección compararemos el espectro calculado por el método PWE con los resultados experimentales obtenidos para una placa rectangular de aluminio por el M. en C. A. Arreola y que pueden encontrarse a detalle en la Ref. [25].

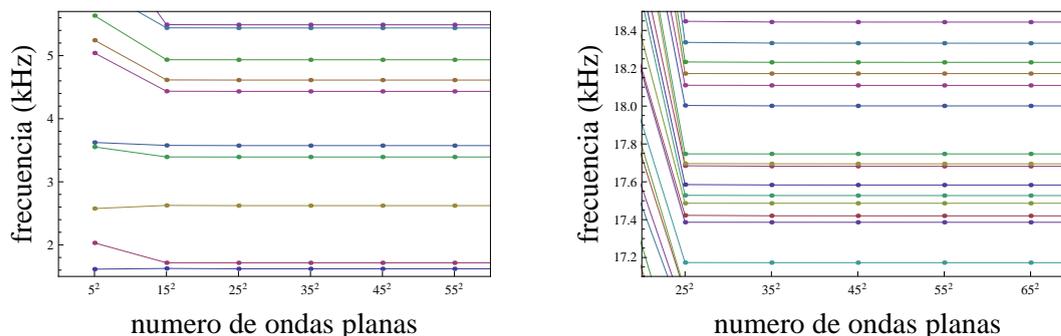


FIGURA 5.5: Convergencia del método de ondas planas para los modos normales mas bajos (parte izquierda) y para altas frecuencias (parte derecha).

Consideremos una placa de aluminio rectangular de dimensiones  $1474 \text{ mm} \times 355 \text{ mm} \times 6.35 \text{ mm}$ . En el apéndice A.4 se describe en detalle como se midieron los modos en el plano de esta placa rectangular. Para modelar la placa de aluminio por el método PWE procedemos como se describió en la sección anterior (5.2). El medio 1 corresponde a la placa de aluminio en la celda unitaria de la figura 4.1 (página 25), mientras el medio 0 corresponde al vacío ficticio<sup>3</sup>, de este modo se replican las condiciones a la frontera libres en las que se llevó a cabo el experimento. En la figura 5.5 se muestran algunas frecuencias normales como función del número de ondas planas para la placa de aluminio. Se puede observar que  $15 \times 15$  ondas planas es suficiente para obtener una adecuada convergencia del método a bajas frecuencias mientras  $25 \times 25$  ondas planas son necesarias para obtener resultados similares a altas frecuencias. Los parámetros del aluminio fueron  $E = 69 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.33$  y una densidad medida de  $2708 \pm 2 \text{ kg/m}^3$ . Todos los resultados numéricos mostrados a continuación se obtuvieron usando el método PWE con  $45 \times 45$  ondas planas. El espectro calculado por el método PWE de la placa rectangular y su correspondiente comparación con el espectro medido se muestra en la tabla 5.3 y en la figura 5.6.

El acuerdo entre el modelo de ondas planas y el experimento es excelente no solo a bajas frecuencias sino también a altas frecuencias. La diferencia entre teoría y experimento se muestra en la figura 5.7 como función del número de modos normales. La diferencia es siempre menor al 2%, un valor muy notable para más de 90 modos normales.

En la figura 5.8 se muestran algunas amplitudes de onda obtenidas por el método PWE de las resonancias mostradas en la parte inferior derecha de la figura 5.6. La posición de cada punto  $(x, y)$  es movida al punto  $(x + u_x(x, y), y + u_y(x, y))$  con  $u_x(x, y)$  y  $u_y(x, y)$  siendo los desplazamientos en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente. La escala de color esta dada por la

<sup>3</sup> Los detalles del vacío ficticio se dan en la nota al pie de la página 35.

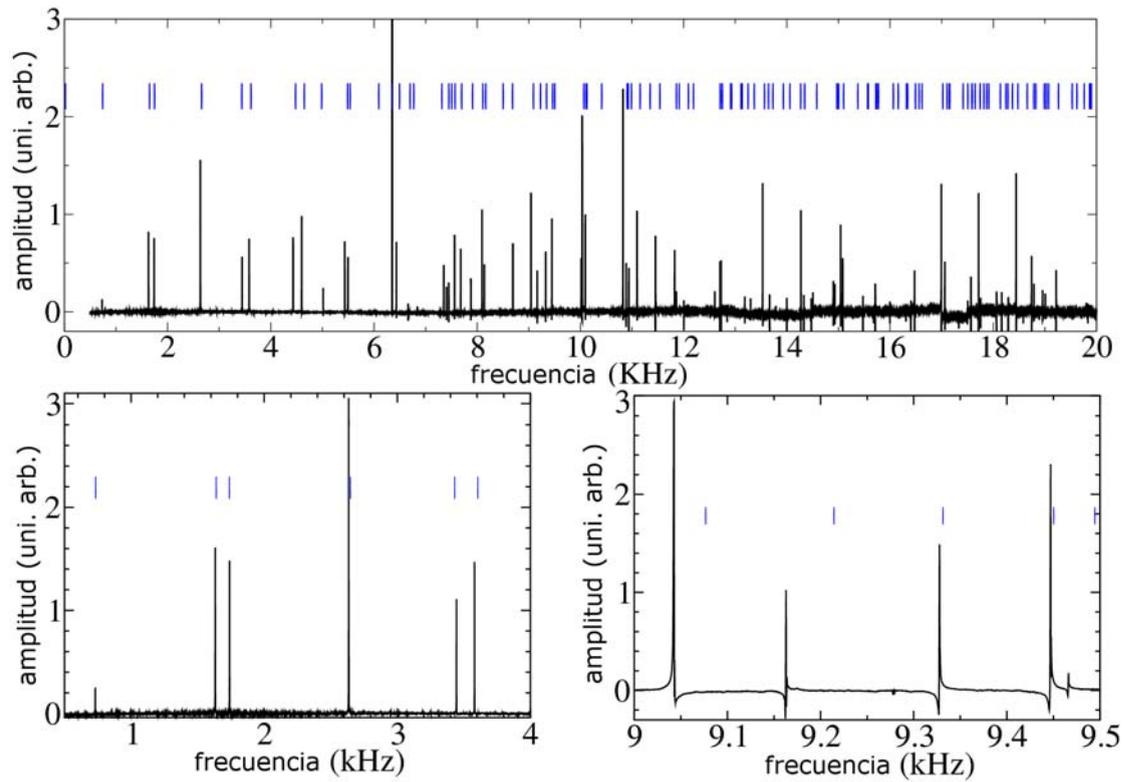


FIGURA 5.6: Espectro experimental de una placa rectangular de aluminio de dimensiones 1474 mm × 355 mm × 6.35 mm comparado con el espectro obtenido por el método de ondas planas representado en líneas verticales a color. La parte inferior corresponde a una ampliación del espectro a bajas e intermedias frecuencias.

amplitud de desplazamiento total  $\sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ . Los resultados obtenidos en esta sección muestran el significativo alcance del modelado de sistemas elásticos finitos a través del método PWE. En lo que sigue aplicaremos el método PWE a un cristal elástico infinito.

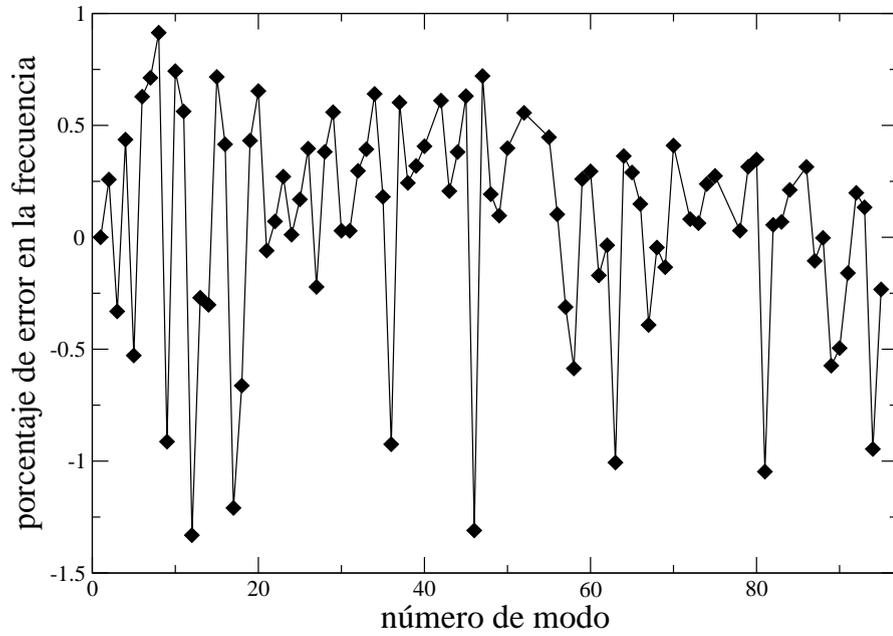


FIGURA 5.7: Error porcentual entre las resonancias medidas y las calculadas por el método de ondas planas como función de el número de modos normales.

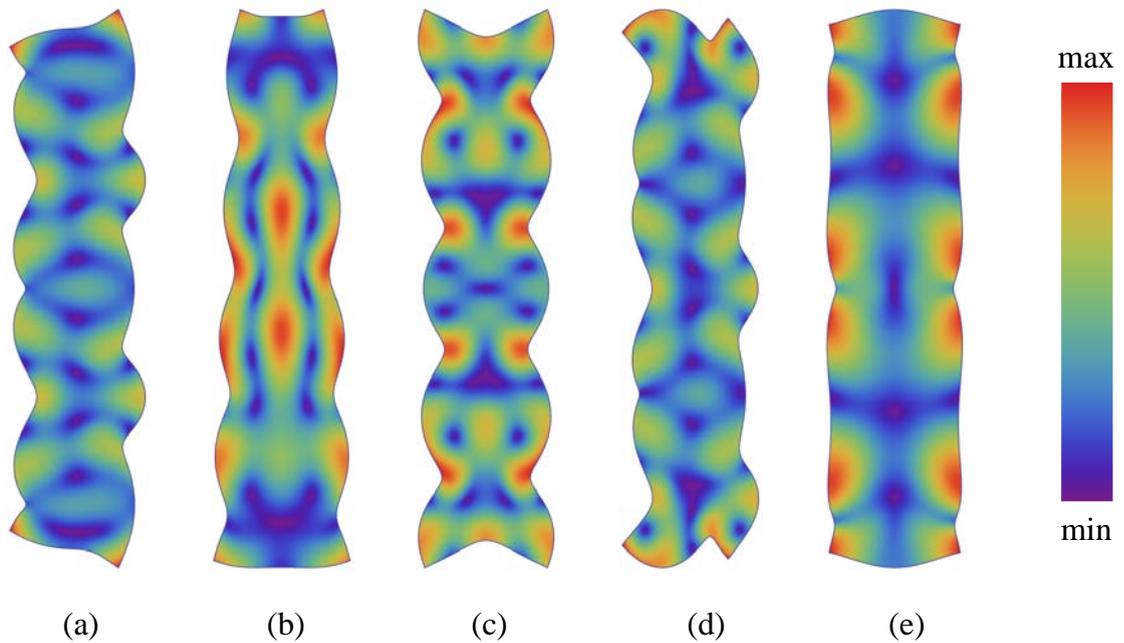


FIGURA 5.8: Amplitudes de onda obtenidas por el método de ondas planas para los modos en el plano (28 a 32 en la tabla 5.3) de una placa rectangular de dimensiones 1474 mm × 355 mm, correspondiente a las resonancias de la parte inferior derecha de la figura 5.6: (a)  $f_{28} = 9076$  Hz, (b)  $f_{29} = 9214$  Hz, (c)  $f_{30} = 9331$  Hz, (d)  $f_{31} = 9450$  Hz, and (e)  $f_{32} = 9494$  Hz.

Modo	Medido (Hz)	PWE (Hz)	Error (%)	Modo	Medido (Hz)	PWE (Hz)	Error (%)	Modo	Medido (Hz)	PWE (Hz)	Error (%)
1	730	730.0	0.00	33	10015	10054.4	0.39	65	14910	14953.2	0.29
2	1632	1636.2	0.26	34	10035	10099.3	0.64	66	14938	14960.2	0.15
3	1740	1734.2	-0.33	35	10094	10112.2	0.18	67	15053	14994.0	-0.39
4	2634	2645.5	0.44	36	10496	10398.9	-0.92	68	15094	15087.1	-0.05
5	3445	3426.8	-0.53	37	10827	10892.2	0.60	69	15387	15366.5	-0.13
6	3580	3602.5	0.63	38	10886	10912.4	0.24	70	15485	15548.5	0.41
7	4434	4465.6	0.71	39	10939	10973.9	0.32	71	15674	15567.1	-0.68
8	4598	4640.0	0.91	40	11098	11143.1	0.41	72	15695	15707.7	0.08
9	5017	4971.2	-0.91	41	11455	11339.7	-1.01	73	15721	15730.9	0.06
10	5435	5475.4	0.74	42	11465	11525.0	0.52	74	15726	15763.5	0.24
11	5497	5527.9	0.56	43	11825	11849.4	0.21	75	16009	16052.9	0.27
12	6167	6084.9	-1.33	44	11859	11904.2	0.38	76	16105	16144.5	0.25
13	6350	6332.9	-0.27	45	12005	12080.7	0.63	77	16317	16306.6	-0.06
14	6353	6333.8	-0.30	46	12339	12177.4	-1.31	78	16323	16327.8	0.03
15	6435	6481.1	0.72	47	12605	12695.9	0.72	79	16429	16480.8	0.32
16	6660	6687.7	0.42	48	12705	12729.4	0.19	80	16490	16547.3	0.35
17	6839	6756.3	-1.21	49	12732	12737.3	0.04	81	16782	16606.3	-1.05
18	7352	7303.3	-0.66	50	12844	12895.1	0.40	82	17003	17012.4	0.06
19	7405	7437.0	0.43	51	13015	12916.4	-0.76	83	17054	17089.7	0.21
20	7449	7497.7	0.65	52	13028	13100.4	0.56	84	17078	17136.2	0.34
21	7561	7556.5	-0.06	53	13095	13123.3	0.22	85	17100	17146.3	0.27
22	7681	7686.4	0.07	54	13185	13234.3	0.37	86	17348	17402.6	0.31
23	7877	7898.4	0.27	55	13300	13359.5	0.45	87	17515	17496.5	-0.11
24	8094	8094.9	0.01	56	13541	13554.9	0.10	88	17575	17574.6	-0.00
25	8138	8151.8	0.17	57	13675	13632.4	-0.31	89	17682	17580.5	-0.57
26	8457	8490.5	0.40	58	13800	13719.1	-0.59	90	17723	17635.3	-0.49
27	8692	8672.7	-0.22	59	13886	13922.2	0.26	91	17763	17734.6	-0.16
28	9042	9076.5	0.38	60	14007	14048.2	0.29	92	17766	17801.2	0.20
29	9163	9214.2	0.56	61	14281	14256.7	-0.17	93	17832	17855.9	0.13
30	9328	9330.7	0.03	62	14339	14333.9	-0.04	94	18070	17899.1	-0.95
31	9447	9449.7	0.03	63	14482	14336.2	-1.01	95	18171	18128.7	-0.23
32	9466	9494.1	0.30	64	14515	14567.7	0.36				

Tabla 5.3: Frecuencias normales de vibración en el plano de una placa rectangular de dimensiones 1474 mm × 355 mm × 6.35 mm medidas con el espectroscopio acústico resonante sin contacto y calculadas con el método de ondas planas.

### 5.4. Cálculo de bandas prohibidas en cristales elástico para ondas en el plano

En esta sección estudiaremos un sistema infinito: un cristal elástico con canales que da lugar a la aparición de bandas prohibidas. Luego daremos algunas predicciones para una propuesta experimental de una placa con una banda prohibida elástica para ondas en el plano que actualmente se encuentra en fase de construcción y medición como tesis de maestría <sup>4</sup>.

Reproduciremos aquí las ecuaciones (4.1)-(4.4) que describen la propagación de ondas en el

<sup>4</sup> La tesis de maestría se está desarrollando en el posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales en la UAM-Azcapotzalco por parte del Ing. F. Ramirez.

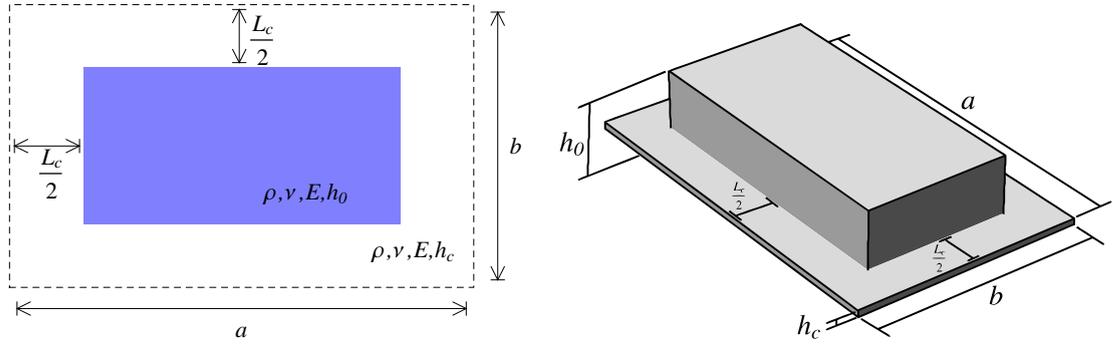


FIGURA 5.9: Diagrama esquemático de una celda unitaria rectangular de lados  $a$  y  $b$  que da lugar a una placa no homogénea infinita. El panel izquierdo corresponde a la celda bidimensional, mientras el panel derecho corresponde a una representación tridimensional de la celda. En la celda de la parte izquierda se aprecian dos regiones, en color una región de espesor  $h$  y dimensiones  $(a - L_c) \times (b - L_c)$ , rodeado por otra región del mismo material pero con un espesor menor  $h_c$ .

plano en una placa delgada

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ C \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{C}{2} (1 - \nu) \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] &= \rho h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{C}{2} (1 - \nu) \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ C \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \right] &= \rho h \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde  $C$  es

$$C = \frac{Eh}{1 - \nu^2}. \quad (5.13)$$

En la forma en la que están escritas, las ecuaciones (5.12) describen el movimiento en el plano tanto placas homogéneas como no homogéneas. Para manipular la estructura de bandas del sólido, es habitual cambiar las propiedades de los medios que conforman el sistema; es decir, cambiar tanto  $E$  como  $\nu$ . La propuesta en esta sección es aún mas simple: acanalar la placa homogénea y por tanto cambiar el espesor de la placa en determinadas regiones; es decir, crear una placa con canales. Proponemos entonces deshacer la homogeneidad de la placa cambiando el parámetro  $h$  en las ecuaciones (5.12) y (5.13), esto hace que  $h = h(x, y)$  sea una función de las coordenadas espaciales con dos valores  $h_c$  y  $h_0$ .

Para obtener la estructura de bandas de ondas en el plano utilizamos el método PWE. La celda unitaria propuesta se esquematiza en la parte izquierda de la figura 5.9. Todos los resultados mostrados en este capítulo se obtuvieron usando  $45 \times 45$  ondas planas, un valor muy razonable con respecto la convergencia del método PWE, como se observa en la figura 5.10. En esta figura se muestra como los modos normales de vibración en el plano, en el punto  $\Gamma$  ( $k_x = k_y = 0$ ) de la estructura de bandas, convergen con respecto al número de ondas planas para un cristal elástico formada por la repetición infinita de la celda unitaria de dimensiones  $a \times b$  (figura 5.9).

La estructura de bandas para diferentes razones  $h_c/h_0$ , esto es, la profundidad del canal con respecto al espesor de la placa homogénea, se muestra en la figura 5.11. Una primera banda

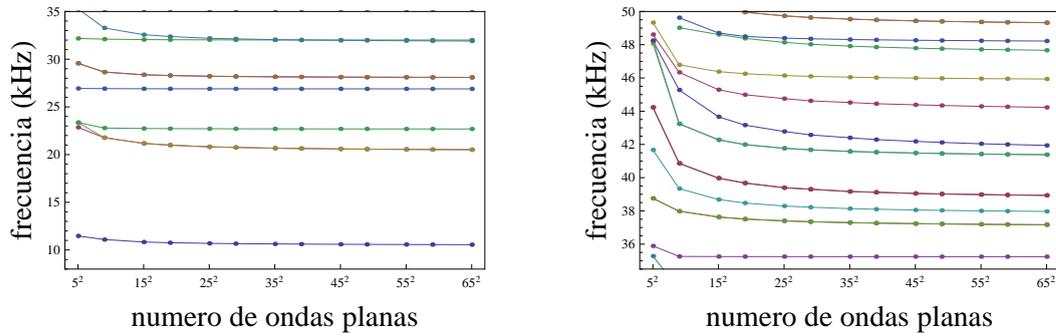


FIGURA 5.10: Convergencia en el punto  $\Gamma$  del método de ondas planas para los modos normales más bajos (parte izquierda) y para frecuencias más altas (parte derecha). Las celda unitaria se muestra en la figura 5.9.

elástica prohibida aparece a partir de una razón  $h_c/h_0 = 0.4$ . Al profundizar el canal, es decir, cuando  $h_c/h_0 \rightarrow 0$  el ancho de la primera banda prohibida se hace cada vez mayor al tiempo que surgen otras bandas prohibidas hasta recuperar los estados propios de la placa homogénea de dimensión  $(a - L_c) \times (b - L_c)$ . Las dimensiones usadas de la celda,  $a = b = 150$  mm, y el ancho del canal,  $L_c = 66$  mm, para calcular la estructura de bandas fijan las frecuencias de vibración en el plano cuya primera banda prohibida está diseñada para que aparezca en el rango audible. El surgimiento de una brecha elástica, debido a la profundidad del canal, es por supuesto independiente de las dimensiones de la celda utilizada.

La estructura de bandas para una razón fija  $h_c/h_0 = 0.1$  cambiando la longitud del canal  $L_c$  en una celda cuadrada ( $a = b = 150$  mm) se muestra en la figura 5.12. Desde la placa homogénea ( $L_c = 0$ ), se observa que es suficiente un canal de un tamaño superior al 5 % del tamaño de la celda para que se observe al menos una brecha elástica. En la practica el tamaño del canal se fijará por el cortador utilizado.

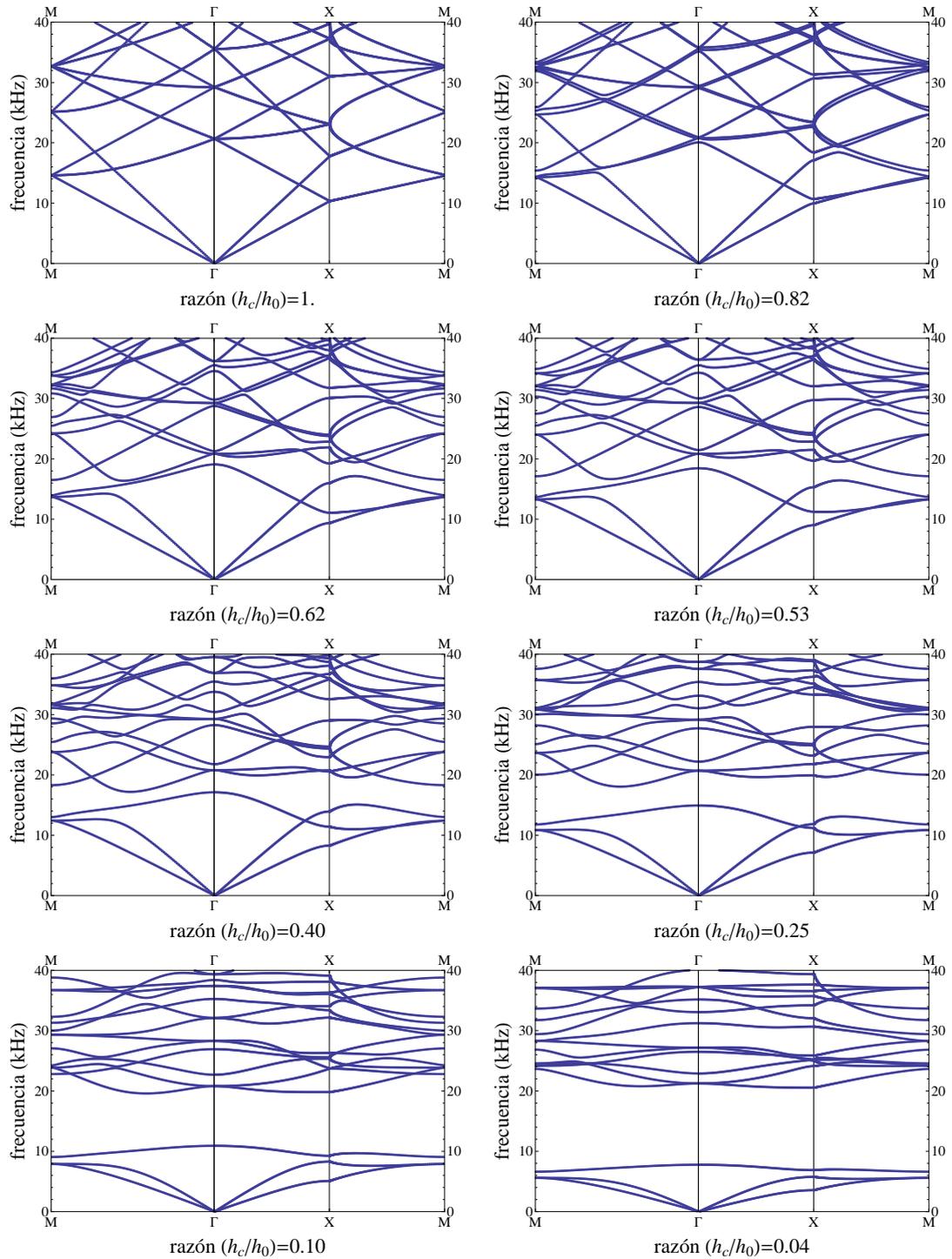


FIGURA 5.11: Estructura de bandas de ondas en el plano para una placa delgada con canales. Las múltiples partes de la figura representan diferentes relaciones entre los espesores  $h_c$  y  $h_0$  de una celda unitaria cuadrada (figura 5.9). La longitud del canal es igual a  $L_c = 66$  mm, mientras  $a = b = 150$  mm. Los parámetros elásticos corresponden al aluminio  $\rho = 2722$  Kg/m<sup>3</sup>,  $E = 69.8$  GPa y  $\nu = 0.33$ .

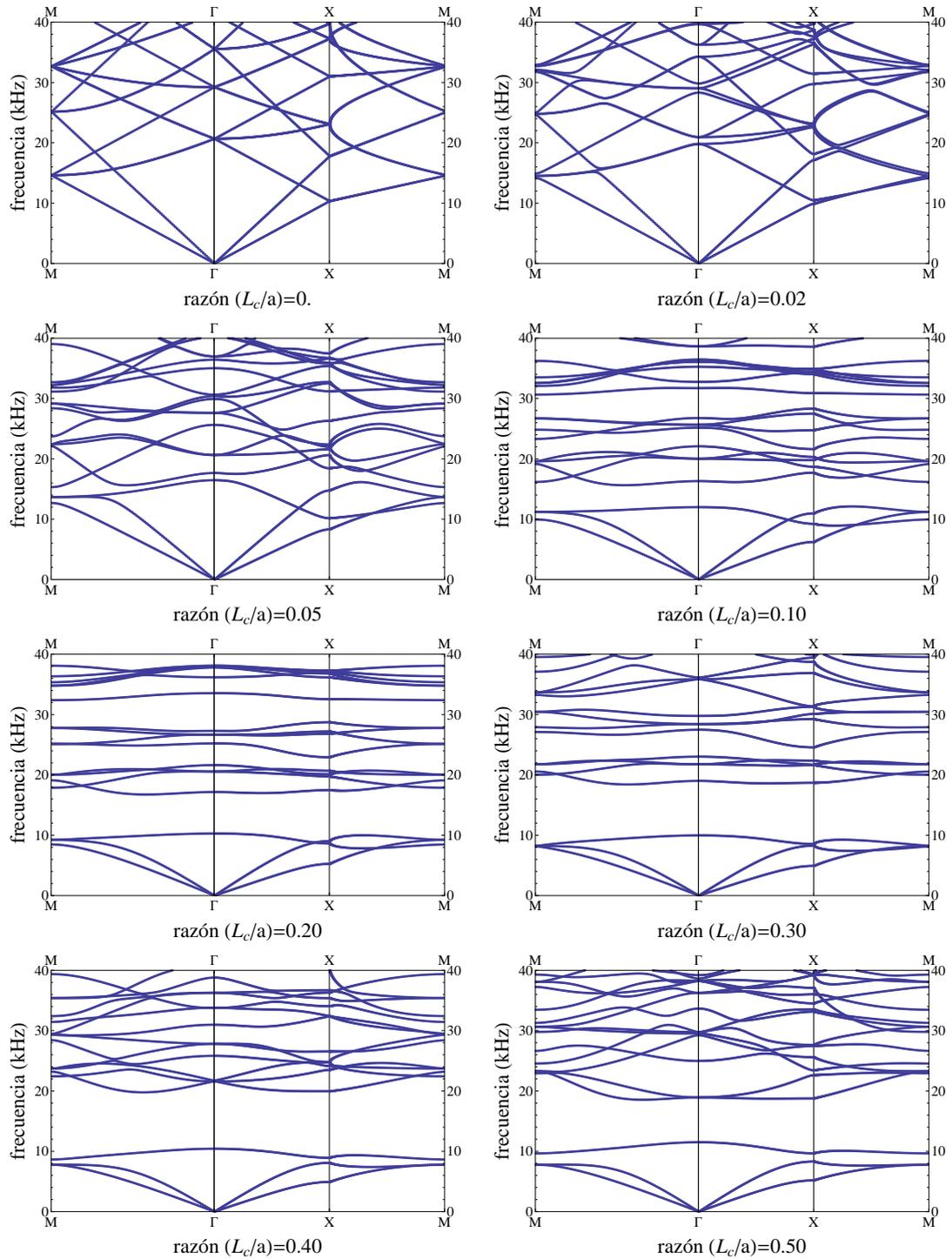


FIGURA 5.12: Estructura de bandas de ondas en el plano para una placa delgada con una razón entre espesores  $h_c/h_0 = 0.1$ . Las múltiples partes de la figura representan diferentes relaciones entre el tamaño del canal  $L_c$  y la longitud  $a$  de una celda cuadrada (figura 5.9). La longitud del canal cambia, mientras el tamaño de la celda  $a = b = 150$  mm permanece constante. Los parámetros elásticos son iguales a los utilizados en la figura 5.11.

### 5.4.1. Propuesta experimental

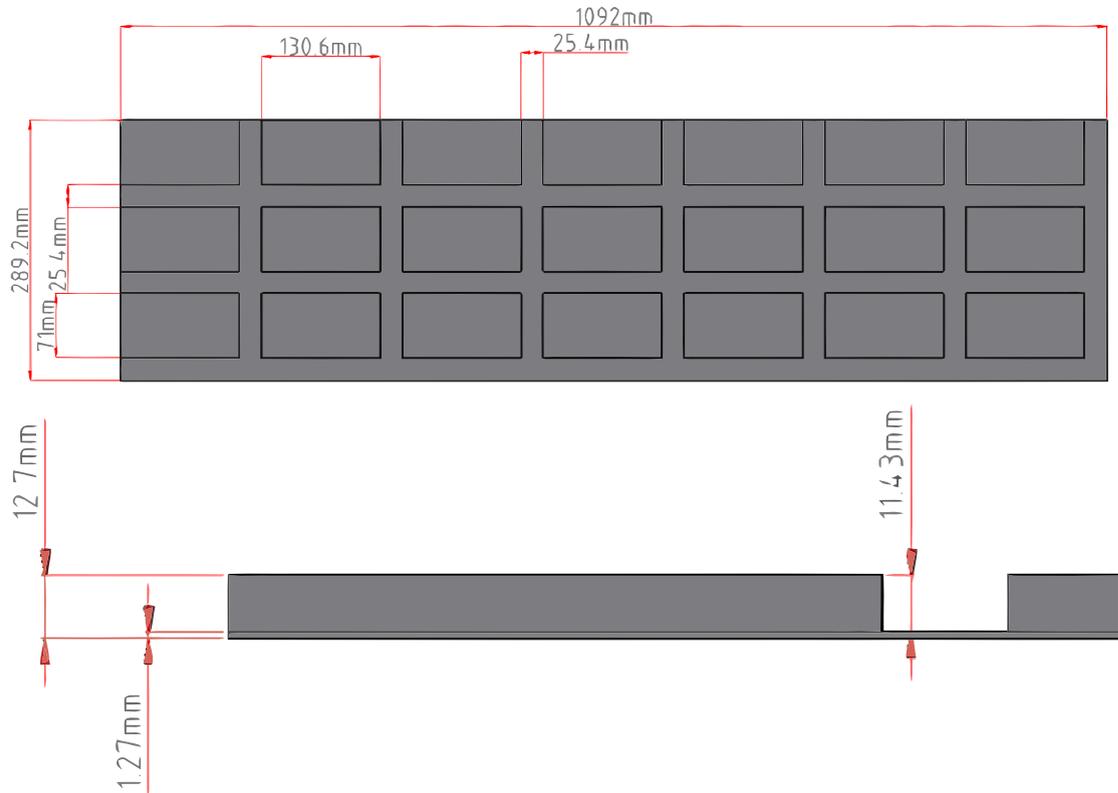


FIGURA 5.13: Diseño de una placa de aluminio con una banda prohibida para ondas en el plano en el rango audible. Vista aérea (parte superior) y de perfil (parte inferior) con sus respectivas dimensiones.

Los resultados anteriores demuestran que maquinando canales en una placa homogénea se induce una banda prohibida elástica para ondas en el plano. Esto nos permite proponer una placa que da lugar a una banda prohibida en el rango audible. Una placa de aluminio con sus respectivas dimensiones, de 21 celdas, se muestra en la figura 5.13. El número y las dimensiones de la celda se ajustan teniendo en cuenta el material disponible por el GOyM. El tamaño del canal es determinado por el tamaño del cortador,  $L_c = 25.4$  mm. En la figura 5.14 se muestra la estructura de bandas de la placa infinita (parte izquierda) calculado por el método PWE en comparación con las frecuencias normales de vibración calculadas para la placa de 21 celdas (parte derecha). Como se puede observar, 21 celdas son suficientes para que la placa tenga una banda elástica prohibida en la región audible, que puede ser medida utilizando los equipos disponibles, véase apéndice A. Con respecto a la placa infinita, el tamaño de la banda prohibida en la placa finita es menor. Esto porque las dimensiones de la placa finita dan lugar a estados resonantes debidos a las fronteras de la placa. Sin embargo, la banda elástica prohibida tiene el tamaño suficiente para ser medida experimentalmente en la placa de 21 celdas.

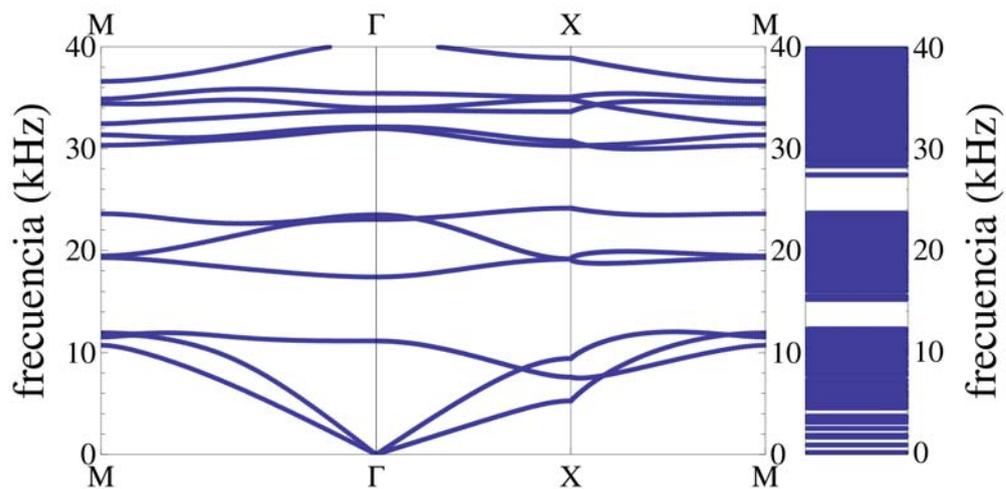


FIGURA 5.14: Comparación de las frecuencias normales de vibración en el plano de la placa infinita (parte izquierda) con respecto a la placa finita de 21 celdas (parte derecha). En la parte izquierda se muestra la estructura de bandas elástica de una placa de aluminio con una celda unitaria, como la mostrada en la figura 5.9, de dimensiones  $a = 156$  mm,  $b = 96.4$  mm,  $L_c = 25.4$  mm y  $h_c/h_0 = 0.1$ . En la parte derecha se muestran los modos normales de la placa finita de 21 celdas mostrada en la figura 5.13.

## 5.5. Conclusiones y comentarios del capítulo

- Describimos el espectro de las ondas en el plano en una placa homogénea infinita, identificando analíticamente los modos transversal y longitudinal. Comparamos el espectro analítico con el obtenido a través del método PWE verificando de esta forma el método para un sistema infinito.
- Estudiamos los modos normales de vibración en el plano de una guía elástica unidimensional tanto de forma analítica como con el método PWE, comprobando así el método para un sistema finito en una dirección e infinito en la otra con condiciones a la frontera libres y fijas.
- Comparamos los resultados obtenidos por el método de ondas planas para una placa finita con otros métodos numéricos para tanto condiciones a la frontera libres como condiciones a la frontera fijas obteniendo un excelente acuerdo.
- Calculamos con el método PWE el espectro de frecuencias y amplitudes de onda de las frecuencias normales de vibración en el plano en una placa rectangular libre. Comparamos los resultados numéricos con los resultados experimentales de una placa rectangular libre de aluminio. El acuerdo entre el modelo y el experimento es excelente, la diferencia es menor al 2 %.

- Demostramos por el método PWE la existencia de bandas prohibidas elásticas para ondas en el plano en placas debido al cambio de espesor en la placa, es decir, taladrando canales en la placa.
- Se propuso una placa finita de aluminio con sus dimensiones que exhibe una banda elástica prohibida en el rango audible.
- De este capítulo se desprende un trabajo sometido a revisión por parte de *Journal of Sound and Vibration* y una tesis de maestría en desarrollo.

## Capítulo 6

# Conclusiones

Se han introducido una serie de nuevos modelos ondulatorios para sistemas elásticos en una y dos dimensiones. En el caso unidimensional, por una parte, se introdujo un modelo con absorción para ondas compresionales y torsionales que explica la forma observada experimentalmente de las resonancias, resultando ser una curva de Breit-Wigner o Lorentziana (de este trabajo se obtuvieron dos publicaciones [24, 27]). Para ondas flexionales, por otra parte, generalizamos las ecuaciones de Timoshenko introduciendo dos coeficientes de corte variables, modelo que ajusta mejor los datos experimentales recientemente reportados [20], tanto por debajo como por encima de la frecuencia crítica, en comparación con los modelos de uno o dos coeficientes fijos [35, 38] (trabajo que se encuentra en proceso de publicación [69]).

En el caso bidimensional, se introdujo un modelo de estados umbral elásticos cuya respuesta es independiente de la geometría de la frontera utilizada, bien sea integrable, caótica o arbitraria, que explica cualitativamente la respuesta sísmica observada en cuencas sedimentarias cubiertas por lodo como la del Valle de México. De esta forma se extiende el fenómeno de estados umbral a cerca de 20 órdenes de magnitud (de este trabajo se obtuvieron dos publicaciones [80, 81]).

Se implementó exitosamente un método numérico, también en el caso bidimensional, el método de ondas planas buscando estudiar las excitaciones armónicas de vibraciones dentro del plano en placas. Verificamos el método con resultados analíticos obtenidos tanto para la placa homogénea infinita como la guía de ondas unidimensional, comparando también con resultados reportados [52–55] en una placa rectangular con diferentes condiciones a la frontera. Calculamos y contrastamos el espectro de frecuencias en el plano de una placa rectangular libre de aluminio con cerca de 100 modos obtenidos experimentalmente [25].

El acuerdo entre el modelo de ondas planas y el experimento es excelente, la diferencia es menor al 2 % (este trabajo se encuentra en proceso de publicación).

Demostramos la existencia en placas de bandas prohibidas para ondas elásticas dentro del plano debido al cambio periódico del espesor, es decir, creando de forma regular ranuras en la placa. A partir de estos resultados se propuso estudiar experimentalmente una placa finita de aluminio

que exhibe una banda elástica prohibida en el rango audible, el trabajo experimental es una tesis de maestría actualmente en desarrollo.

Los modelos elásticos planteados en esta tesis permiten explicar algunos fenómenos observados en el laboratorio para ondas elásticas en sólidos y son un punto de partida para futuros avances teórico-experimentales en el estudio de las vibraciones en sistemas cuasi-unidimensionales y cuasi-bidimensionales.

## Apéndice A

# Espectroscopia acústica resonante

La espectroscopia acústica resonante, o ARS por sus siglas en inglés (*acoustic resonance spectroscopy*), es un método que consiste en el estudio no destructivo de la dispersión de ondas acústicas o mecánicas en gases, líquidos y sólidos. Forzando la muestra a vibrar en diferentes frecuencias se excitan los múltiples modos normales de la misma, obteniendo así su espectro de resonancias. Usando ARS es posible caracterizar las propiedades mecánicas de una amplia variedad de materiales tales como polímeros [90], medios porosos [91], medios granulares [92], entre muchos otros. En este apéndice se describirá un espectroscopio acústico resonante sin contacto (EARSC)<sup>1</sup> implementado con el fin de estudiar experimentalmente por el método de ARS dos sistemas elásticos diferentes: varillas y placas. La forma de las resonancias de una varilla uniforme fueron utilizadas en el capítulo 2 como verificación del modelo de absorción introducido en el mismo, mientras las resonancias medidas en una placa rectangular fueron utilizadas en el capítulo 5 como una comprobación de las múltiples aplicaciones del método de ondas planas (capítulo 4).

### A.1. Descripción del espectroscopio acústico resonante

La figura A.1 muestra esquemáticamente el EARSC. Este consiste de un analizador de redes vectorial (ANRITSU MS4630B) o VNA por sus siglas en inglés (*vector network analyzer*), que se encarga de enviar una señal sinusoidal a una frecuencia establecida  $f$ . Esta señal es enviada inicialmente a un amplificador de audio (Cerwin-Vega CV900) y de allí a un transductor electromagnético-acústico (EMAT)<sup>2</sup> que se encarga de convertir la señal eléctrica en un movimiento mecánico en el sólido, forzándolo a vibrar a la frecuencia  $f$ . La vibración es detectada y de

<sup>1</sup> El espectroscopio desarrollado sigue el método planteado en la Ref. [13].

<sup>2</sup> En la siguiente sección se detalla como funcionan y configuran los EMATs.

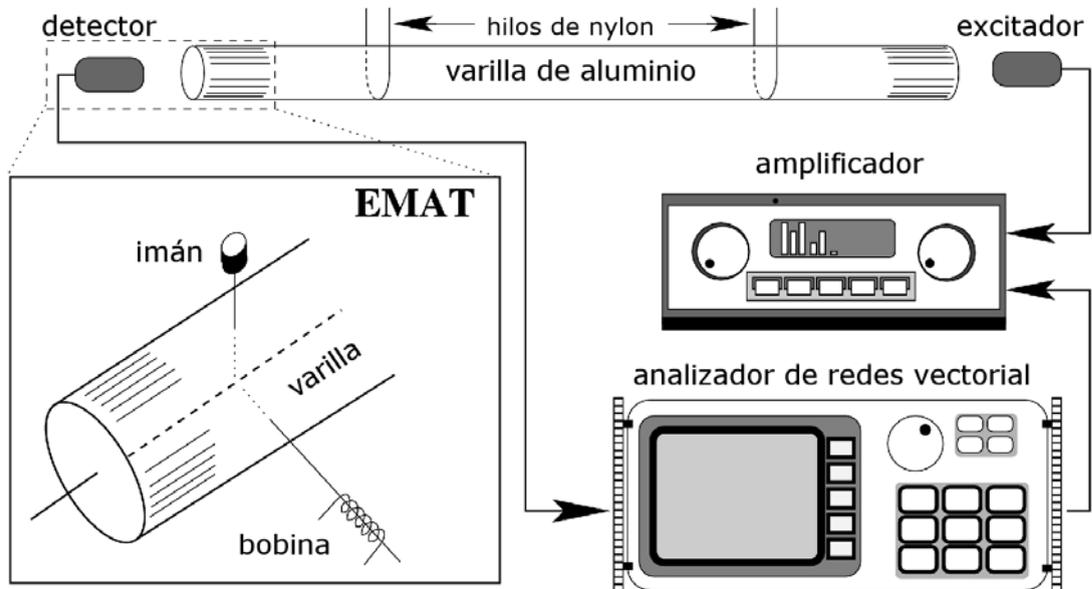


FIGURA A.1: Montaje del espectroscopio acústico resonante. En la figura se muestra un varilla como objeto de estudio. En el recuadro, se muestra como se posiciona el EMAT para detectar o excitar en la varilla ondas de torsión.

nuevo convertida en una señal eléctrica por un EMAT detector que envía la señal medida de regreso al VNA. El VNA realiza un proceso tipo amplificador sujeto en fase o *Lock-In*: se extrae de la señal detectada una señal con la misma fase y frecuencia de la señal enviada, esto permite eliminar toda fuente de ruido externo permaneciendo solo la señal de respuesta del sistema. De este modo es posible medir tanto la magnitud como la fase de la señal de respuesta. Este proceso se realiza para un intervalo de frecuencias  $f$ , las frecuencias resonantes o los modos normales del sólido se presentan entonces con una amplitud de vibración prominente alrededor de las frecuencias de resonancia, conocida como curva de resonancia. De este modo todo el conjunto VNA, amplificador, EMAT detector y EMAT excitador conforman el EARSC.

## A.2. Fundamentos de los transductores electromagnético-acústicos

En la figura A.2 se muestra un diagrama esquemático del transductor electromagnético-acústico (EMAT) que empleamos para excitar y medir vibraciones elásticas en sólidos metálicos no ferromagnéticos. El EMAT consta de una bobina y un imán que produce un campo magnético no homogéneo  $\mathbf{B}$ , discutiremos inicialmente como funciona este dispositivo para detectar vibraciones elásticas. Cuando la superficie  $S$  oscila en la misma dirección del eje de la bobina, el flujo magnético

$$\phi_B = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (\text{A.1})$$

a través de cualquier lazo, como el lazo  $l$  en la figura A.2, cambia. Esto, de acuerdo a la ley de Faraday, da lugar a una fuerza electromotriz (FEM) que a su vez genera una corriente parásita o

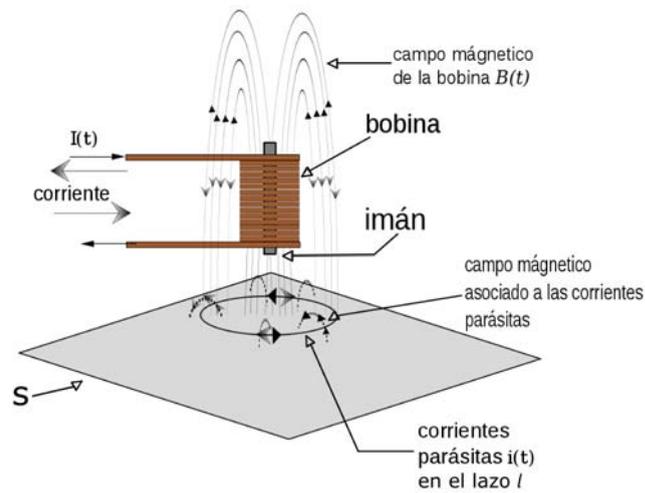


FIGURA A.2: Esquema del transductor electromagnético-acústico (EMAT). Figura adaptada de la Ref. [25].

de Foucault

$$i \propto \frac{d\phi_B}{dt}. \quad (\text{A.2})$$

El flujo  $\phi_B$  depende esencialmente de la separación entre el imán y la superficie  $S$ , denotemos por  $z$  a dicha distancia. Por lo tanto

$$\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{\partial\phi_B}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (\text{A.3})$$

podemos considerar en primera aproximación a  $\partial\phi_B/\partial z$  como una constante, lo que naturalmente requiere que el campo magnético varíe linealmente con  $z$ , esto se satisface apropiadamente usando un imán de campo fuerte y situando el EMAT muy cerca de la superficie  $S$ . La corriente parásita es por tanto proporcional a la velocidad de la superficie  $S$

$$i \propto \frac{dz}{dt}. \quad (\text{A.4})$$

Esta corriente oscilante da origen a un campo magnético  $\mathbf{B}_i$  proporcional a  $i$  que a su vez induce una FEM en las espiras de la bobina dando lugar a una corriente  $I$  en ellas. El campo  $\mathbf{B}_i$  está determinado por el producto de la corriente  $i$  y algún término vectorial  $\mathbf{G}$  que decrece con la distancia a la superficie  $S$ , llamaremos a esta distancia  $z'$ . La variación del flujo del campo  $\mathbf{B}_i$  por una de las espiras de la bobina puede escribirse entonces como la suma de dos términos

$$\frac{d\phi_{B_i}}{dt} = \frac{di}{dt} \iint_A \mathbf{G} \cdot d\mathbf{A} + i \frac{dz'}{dt} \iint_A \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z'} \cdot d\mathbf{A}. \quad (\text{A.5})$$

Supondremos en primera aproximación que  $\mathbf{G}$  es constante, por lo que el segundo término de la expresión anterior desaparece y por tanto la corriente en la bobina resulta proporcional a la

aceleración de la superficie  $S$  ya que  $i \propto dz/dt$ , esto es

$$I \propto \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (\text{A.6})$$

Si la superficie  $S$  varía de forma armónica con una frecuencia angular  $\omega$  entonces la corriente por la bobina será  $I \propto \omega^2 z$ . De esta forma el EMAT funciona como detector de las vibraciones en sólidos metálicos no ferromagnéticos. El requerimiento que  $\mathbf{G}$  sea constante, o lo que es lo mismo que  $\mathbf{B}_i$  varíe solo en el tiempo en la región donde interacciona con la bobina, se puede lograr usando para la detección un EMAT con una bobina lo más pequeña posible.

Por otro lado, no resulta difícil entender como el mismo dispositivo puede actuar como excitador cuando se aplica un voltaje alterno externo a la bobina del EMAT. En este caso, la corriente eléctrica que circula por la bobina origina un campo magnético, también alterno, el cual induce corrientes parásitas en la superficie metálica. La interacción vía fuerza de Lorentz entre el campo magnético del imán y las corrientes parásitas, generan una fuerza sobre la superficie de la varilla con la misma frecuencia del voltaje externo aplicado en la bobina del EMAT. De esta forma, cambiando la orientación del imán y la bobina se pueden excitar o detectar diferentes tipos de ondas mecánicas en el sólido. En la figura A.3 se pueden observar algunas configuraciones para detectar/excitar ondas (a) compresionales, (b) flexionales y (c) torsionales en una varilla de aluminio.

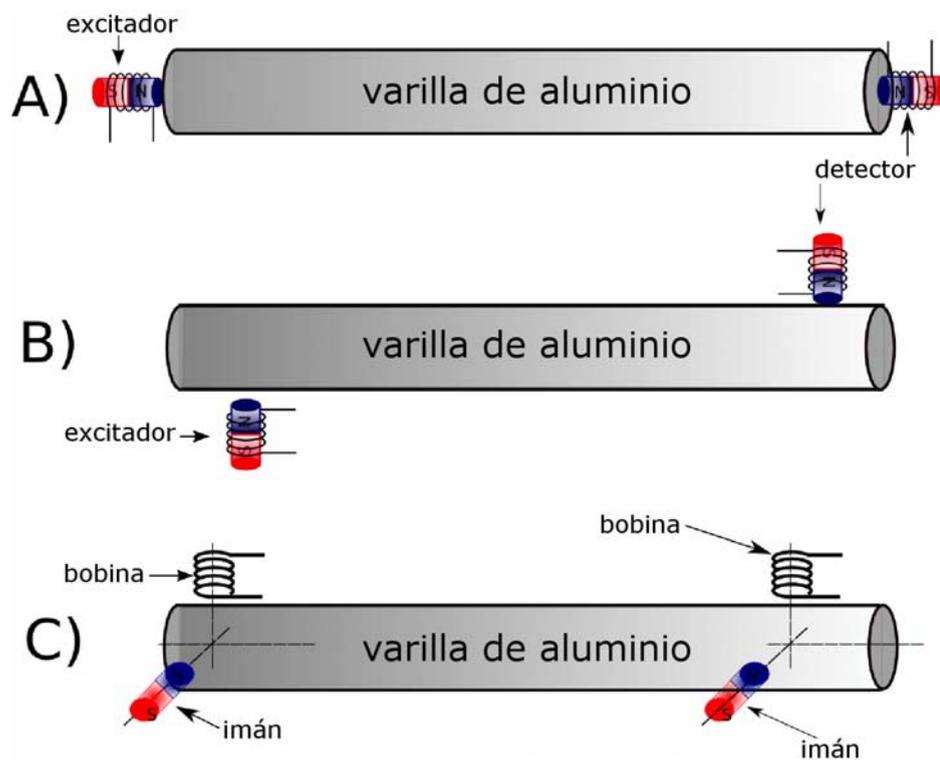


FIGURA A.3: Diagrama de la posición del EMAT para detectar o excitar: (a) ondas compresionales, (b) ondas flexionales y (c) ondas torsionales.

### A.3. Espectro de resonancias de una varilla uniforme

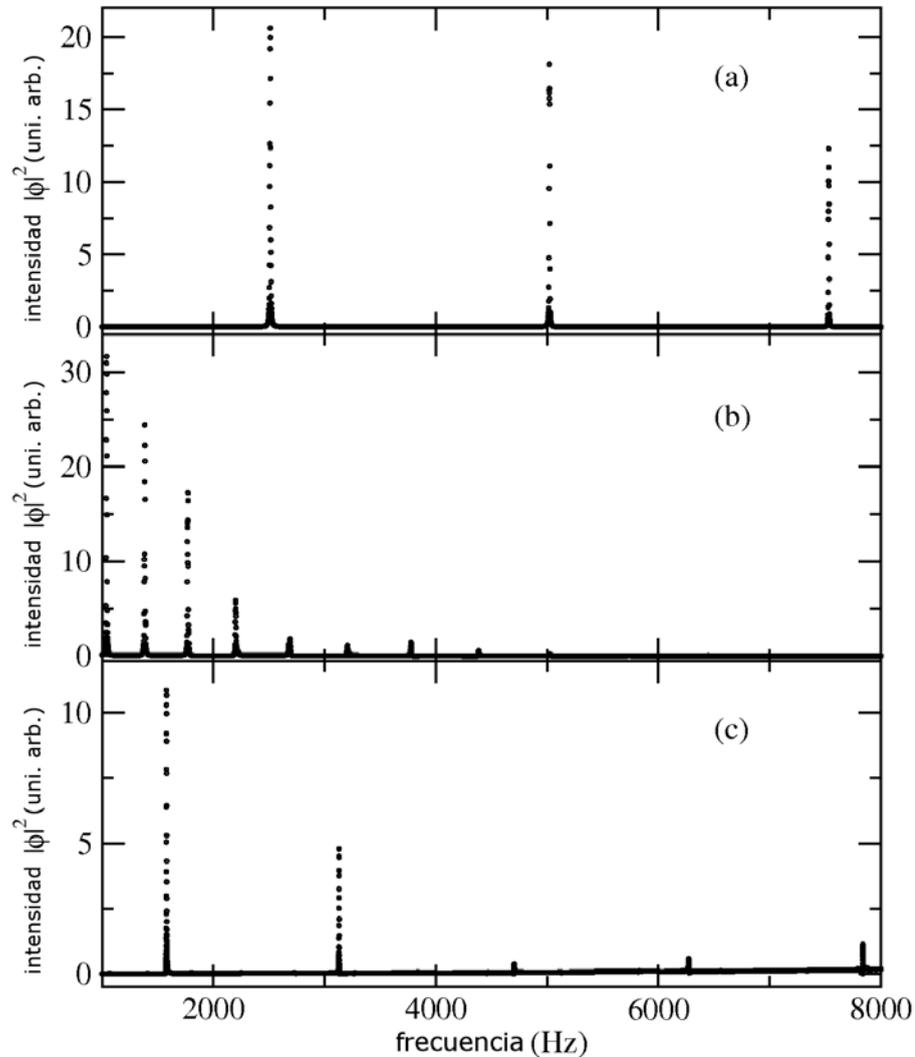


FIGURA A.4: Espectro medido usando el espectroscopio acústico resonante mostrado en la figura A.1. Aquí (a), (b) y (c) corresponden a vibraciones compresionales, flexionales y torsionales en una varilla de aluminio de longitud  $L = 1$  m y sección circular de diámetro  $D = 1.27$  cm.

El EARSC descrito en este apéndice fue utilizado para detectar los modos normales de vibración en una varilla de aluminio de longitud  $L = 1$  m y sección transversal circular de diámetro  $D = 1.27$  cm. Los resultados obtenidos por quien suscribe la tesis en colaboración con el M. en C. E. Flores fueron publicados en la Ref. [24]. En la figura A.4 se puede ver un espectro de resonancias medido con el EARSC en la varilla para tres tipos diferentes de vibración: (a) compresional, (b) flexional y (c) torsional. Los picos mostrados corresponden a la respuesta resonante del sistema. En la figura 2.3 del capítulo 2 se puede observar tanto la amplitud como la fase de la oscilación al rededor de algunas de las frecuencias de resonancia con sus respectivos ajustes Lorentzianos. Las frecuencias resonantes, medidas con el EARSC, se muestran en la figura A.5. Por un lado, como es de esperarse por la ecuación (2.8) del capítulo 2, las vibraciones compresional y torsional presentan un espectro de frecuencias lineal como función del

número de modos, cuya pendiente es útil para medir algunos parámetros mecánicos del sólido como lo veremos en la siguiente sección. Por otro lado, las frecuencias flexionales calculadas numéricamente (como se describe en la sección 2.2) concuerdan muy bien con los resultados experimentales. En la tabla A.1 se comparan algunas frecuencias de ondas flexionales medidas para la varilla con las calculadas numéricamente, así como su respectivo error relativo.

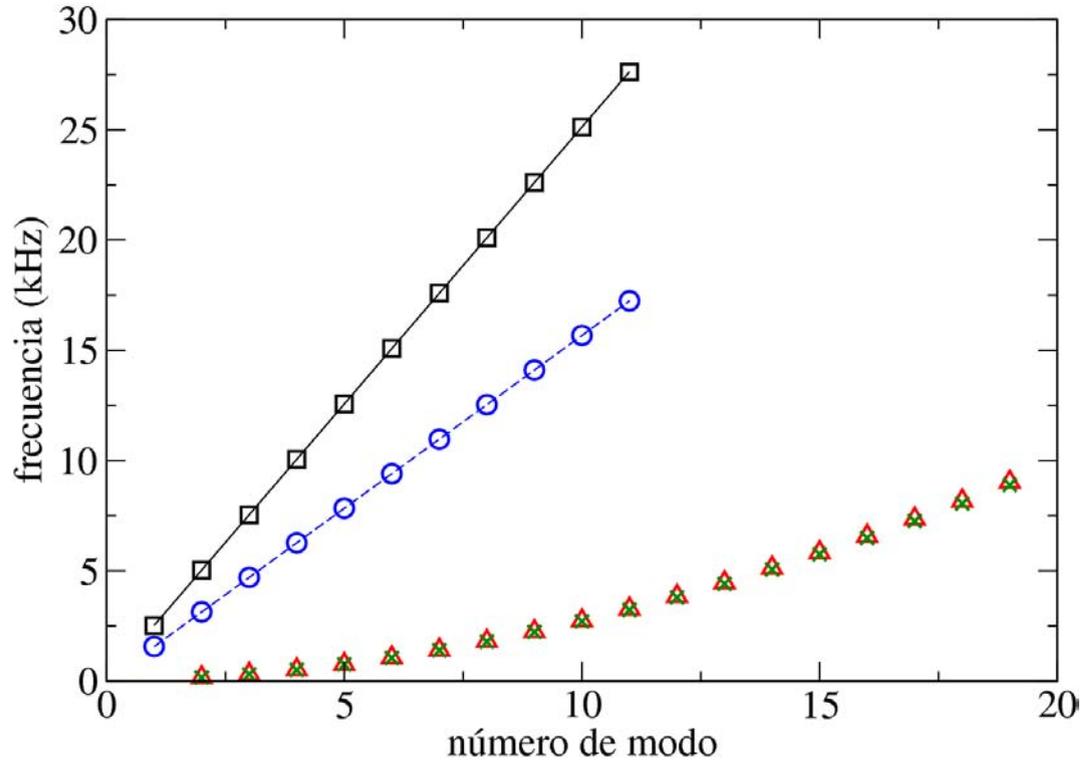


FIGURA A.5: Frecuencias resonantes medidas con el espectroscopio acústico resonante para la misma varilla de la figura A.4. Los resultados para las ondas compresionales están dados en cuadrados negros, para las ondas torsionales en círculos azules y para las flexiones en triángulos rojos. Las líneas sólida y discontinua corresponden a un ajuste lineal para las compresiones y torsiones respectivamente. Las cruces verdes corresponden a los modos flexionales calculados numéricamente (capítulo 2).

### A.3.1. Parámetros elásticos medidos experimentalmente

En general, a partir de los espectros resonantes medidos en un sólido usando el EARSC, es posible medir algunos de sus parámetros mecánicos como son: el módulo de Young ( $E$ ), el módulo de corte ( $G$ ), la razón de Poisson ( $\nu$ ) y el coeficiente de corte de Timoshenko ( $\kappa$ ). Para la varilla de aluminio que se ha utilizado en este apéndice de su espectro resonante, compresional y torsional (figura A.5), es directo medir tanto el módulo de Young como el módulo de corte y la razón de Poisson. La pendiente de  $f_n$  como función del número de modo  $n$  esta dada por la ecuación (2.8). De estas pendientes obtenemos las velocidades de las ondas compresional  $v_c = 5025 \pm 5$  m/s y torsional  $v_t = 3135 \pm 1$  m/s. Recordando que  $v_c = \sqrt{E/\rho}$ ,  $v_t = \sqrt{G/\rho}$  y

frecuencia medida (Hz)	frecuencia teórica (Hz)	error porcentual
164	156	4.5
312	306	1.9
512	505	1.4
763	753	1.3
1063	1049	1.3
1411	1393	1.3
1807	1784	1.3
2249	2221	1.3
2739	2703	1.3
3272	3229	1.3
3850	3798	1.4
4471	4409	1.4
5133	5061	1.4
5836	5753	1.4
6578	6483	1.4
7358	7250	1.5
8176	8054	1.5
9030	8892	1.5

TABLA A.1: Comparación teórico experimental del espectro flexional para una varilla de aluminio con sección transversal circular constante de diámetro  $D = 1.27$  cm y longitud  $L = 1$  m. Las mediciones experimentales se realizaron usando el EARSC descrito en el capítulo 2, mientras los resultados teóricos se obtuvieron al resolver la ecuación  $\det \mathbb{P} = 0$  siendo  $\mathbb{P}$  la expresión (2.23).

módulo de Young (GPa)	módulo de corte (GPa)	razón de Poisson	coef. de Timoshenko
$E = 68.6 \pm 0.3$	$G = 26.7 \pm 0.2$	$\nu = 0.28 \pm 0.02$	$\kappa = 0.87 \pm 0.01$

TABLA A.2: Parámetros mecánicos calculados a partir de las mediciones mostradas en la figura A.5 para una varilla de aluminio de sección transversal circular constante.

$G = E/2(1 + \nu)$ , usando el valor medido de la densidad de la varilla  $\rho = 2722 \pm 21$  kg/m<sup>3</sup> se obtienen los parámetros mecánicos  $E$ ,  $G$  y  $\nu$  mostrados en la tabla A.2 que coinciden muy bien con los reportados en la literatura [93]. Por otro lado, el espectro flexional junto con los valores medidos de  $E$  y  $G$  permiten medir el coeficiente  $\kappa$ <sup>3</sup>. Ya que el espectro de frecuencias flexional no es lineal, la medición de  $\kappa$  es un poco más elaborada que para los parámetros mecánicos mencionados anteriormente ( $E$ ,  $G$  y  $\nu$ ). Para medir el coeficiente calculamos numéricamente las frecuencias resonantes, como se muestra en el capítulo 2, para así ajustar por mínimos cuadrados el valor apropiado de  $\kappa$ . Las mediciones realizadas del módulo de Young y el módulo de corte se reportaron en la Ref. [27], mientras un estudio de la dependencia del coeficiente de corte de Timoshenko como función de la frecuencia se reportó en la Ref. [69].

<sup>3</sup> En la teoría convencional [2]  $\kappa$  es asumido como fijo, sin embargo, existe una fuerte evidencia experimental [20] y teórica [94, 95] de que su valor depende de la frecuencia.

#### A.4. Espectro de resonancias para ondas en el plano en una placa rectangular uniforme

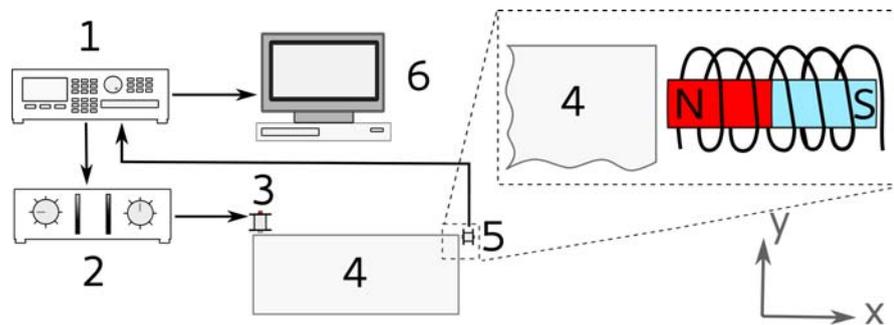


FIGURA A.6: Diagrama de bloques del montaje experimental. El analizador de redes vectorial o VNA (1) envía una señal sinusoidal al amplificador (2). La señal amplificada es enviada a el EMAT excitador (3) que genera una vibración mecánica en la placa de aluminio (4). Las vibraciones son medidas por el EMAT detector (5). La señal medida por el EMAT es enviada de vuelta al VNA. Los datos son adquiridos y almacenados en el computador (6).

Para medir los modos normales en el plano de una placa rectangular con condiciones a la frontera libres se utilizó el EARSC. Los resultados experimentales fueron obtenidos por el M. en C. A. Arreola. El montaje experimental es mostrado en la figura A.6. Una señal armónica de frecuencia  $f$  generada por el VNA, es enviada al amplificador de alta fidelidad donde es amplificada y entregada al EMAT excitador. La onda mecánica se propaga por la placa y es medida por el EMAT detector situado en uno de los bordes de la placa. Esta posición asegura una amplitud máxima de la vibración debido a las condiciones de frontera libre. El EMAT detector mide la respuesta de la placa a la frecuencia  $f$  y envía la señal directamente al VNA que a su vez envía los datos medidos a la computadora por medio de un puerto GPIB-USB para recolectarlos. La respuesta como función de la frecuencia es entonces obtenida, y los picos de la misma corresponden a las resonancias de la placa.

Las resonancias en el plano de la placa rectangular son excitadas y detectadas de forma selectiva usando la configuración de EMATs mostrada en la figura A.6. Los EMATs compuestos de una bobina y un imán situado de tal forma que el momento dipolar de ambos coincide, forman lo que llamaremos el eje de EMAT, en la figura A.6 el eje del EMAT detector apunta en la dirección X, mientras el eje del EMAT excitador apunta en la dirección Y. Se orientan de forma perpendicular para evitar efectos de interferencia entre el detector y el excitador. De esta forma se excitan preferentemente ondas en el plano dentro de la placa.

Debido a efectos elásticos, no es posible comprimir el material en una dirección sin que este se expanda en otra, esto es bien descrito por la razón de Poisson  $\nu$ , por lo tanto, al excitar ondas en el plano como lo describimos anteriormente estamos a su vez excitando ligeramente ondas fuera del plano. Sin embargo, la detección prioriza las ondas dentro del plano por lo que se espera que la amplitud de las ondas fuera del plano sea mucho más pequeña que las de dentro del plano.

Por otro lado, ya que las ondas fuera del plano se acoplan al aire que rodea la placa de forma más

fuerte que las que están dentro del plano, el ancho de las resonancias fuera del plano es mucho más grande que las de dentro del plano. Esto permite distinguir con seguridad las ondas dentro y fuera del plano en los espectros medidos que se mostraron en la figura 5.6 del capítulo 5.

En la tabla 5.3 de la página 42, se muestra una comparación de las frecuencias normales de vibración en el plano de una placa rectangular medidas con el montaje mostrado en la figura A.6 y las predicciones teóricas obtenidas usando el método de onda planas descrito en el capítulo 4.

## Apéndice B

# Desarrollo del método de ondas planas para vibraciones en el plano

Utilizaremos el método de ondas planas para resolver las ecuaciones diferenciales (4.1) que describen el movimiento en el plano para placas delgadas<sup>1</sup>. La celda unitaria repetida infinitamente en las direcciones  $X$  y  $Y$  se muestra esquemáticamente en la figura 4.1. Esta corresponde a una celda unitaria rectangular, sin embargo, la teoría que a continuación se desarrolla no hace referencia alguna a la estructura interna de la celda, solo tiene en cuenta su periodicidad. La estructura de la celda juega un notable papel en los coeficientes de la expansión como se puede ver en la sección 4.2. A modo de presentar un desarrollo claro del método PWE para las ecuaciones diferenciales (4.1) que describen las vibraciones en el plano para placas delgadas, reescribiremos aquí dichas ecuaciones como sigue:

$$\rho h \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \nabla \left( \frac{C}{2} (1 - \nu) \right) \cdot \left( \nabla u_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} \right) + \frac{C}{2} (1 - \nu) \nabla^2 u_j + \nu C \frac{\partial}{\partial x_j} \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{u} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu C) \right], \quad (\text{B.1})$$

donde se deja explícito que los parámetros mecánicos  $\rho$ ,  $C$  y  $\nu$  dependen en general de las coordenadas. La variable muda  $j$  puede ser tanto  $x$  como  $y$ . Debido a la periodicidad del sistema podemos realizar las siguientes expansiones de Fourier tanto para el vector de desplazamiento

---

<sup>1</sup> Véase nota al pie en la pagina 24.

como para los parámetros mecánicos:

$$\mathbf{u} = e^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{B.2})$$

$$C = \sum_{\mathbf{G}'} \hat{\alpha}_{\mathbf{G}'} e^{i\mathbf{G}'\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{B.3})$$

$$Cv = \sum_{\mathbf{G}'} \hat{\beta}_{\mathbf{G}'} e^{i\mathbf{G}'\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{B.4})$$

$$\rho h = \sum_{\mathbf{G}'} \hat{\eta}_{\mathbf{G}'} e^{i\mathbf{G}'\cdot\mathbf{r}}. \quad (\text{B.5})$$

Donde definimos  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} = (\phi_{\mathbf{G}}, \psi_{\mathbf{G}})$ . Las expansiones en series de Fourier anteriores (B.2)-(B.5) permiten transformar la ecuación diferencial (B.1) en un problema de eigenvalores, como lo demostraremos en este apéndice. A continuación se listan algunas derivadas útiles que se obtienen de las expansiones anteriores:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} = ie^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} (k_j + G_j) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{B.6})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = ie^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \nabla \cdot \mathbf{u} = -e^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}) (k_j + G_j) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{B.8})$$

$$\nabla u_x = ie^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{G}} \phi_{\mathbf{G}} (\mathbf{k} + \mathbf{G}) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{B.9})$$

$$\nabla^2 u_x = -e^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{G}} \phi_{\mathbf{G}} (\mathbf{k} + \mathbf{G})^2 e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G})\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_j} = i \sum_{\mathbf{G}'} \hat{\alpha}_{\mathbf{G}'} G'_j e^{i\mathbf{G}'\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{B.11})$$

$$\nabla C = i \sum_{\mathbf{G}'} \hat{\alpha}_{\mathbf{G}'} \mathbf{G}' e^{i\mathbf{G}'\cdot\mathbf{r}}. \quad (\text{B.12})$$

Los resultados para  $u_y$  se obtienen cambiando en (B.9) y (B.10),  $x \rightarrow y$  y  $\phi_{\mathbf{G}} \rightarrow \psi_{\mathbf{G}}$ . Mientras para  $Cv$  y  $\rho h$  se obtienen reemplazando en (B.11) y (B.12)  $\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'} \rightarrow \hat{\beta}_{\mathbf{G}'}$  o  $\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'} \rightarrow \hat{\eta}_{\mathbf{G}'}$  según corresponda con su expansión.

Utilizando los resultados anteriores (B.2-B.12) es posible escribir la ecuación (B.1) para la coordenada  $x$ , como sigue:

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 e^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} \hat{\eta}_{\mathbf{G}'} \phi_{\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}+\mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}} &= -e^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} \frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}'}) \phi_{\mathbf{G}} (\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{G}' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}+\mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}} \\
 &- e^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} \frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}'}) (k_x + G_x) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{G}' e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}+\mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}} \\
 &- e^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} \frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}'}) \phi_{\mathbf{G}} (\mathbf{k} + \mathbf{G})^2 e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}+\mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}} \\
 &- e^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} \frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'} + \hat{\beta}_{\mathbf{G}'}) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}) (k_x + G_x) e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}+\mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}} \\
 &- e^{-i\omega t} \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} \hat{\beta}_{\mathbf{G}'} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}) G'_x e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{G}+\mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}}.
 \end{aligned}$$

Simplificando el término  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  que aparece en ambos lados de la ecuación se obtiene

$$\omega^2 \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} \hat{\eta}_{\mathbf{G}'} \phi_{\mathbf{G}} e^{i(\mathbf{G}+\mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{G}, \mathbf{G}'} \left[ \begin{array}{l} +\frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}'}) \phi_{\mathbf{G}} (\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{G}' \\ +\frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}'}) \phi_{\mathbf{G}} (\mathbf{k} + \mathbf{G})^2 \\ +\frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}'}) (k_x + G_x) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{G}' \\ +\frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'} + \hat{\beta}_{\mathbf{G}'}) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}) (k_x + G_x) \\ +\hat{\beta}_{\mathbf{G}'} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}) G'_x \end{array} \right] e^{i(\mathbf{G}+\mathbf{G}') \cdot \mathbf{r}}. \quad (\text{B.13})$$

La expresión para la coordenada  $y$  se obtiene cambiando en la ecuación anterior  $x \rightarrow y$  y  $\phi_{\mathbf{G}} \rightarrow \psi_{\mathbf{G}}$ . Hasta el momento se ha transformado la ecuación (B.1) en una doble suma infinita de ondas planas. Con el propósito de convertirla en un problema de eigenvalores, recurriremos a la siguiente propiedad: en una celda unitaria, la integral de volumen sobre la celda de una onda plana  $\exp(i\mathbf{G} \cdot \mathbf{r})$  siendo  $\mathbf{G}$  un vector de la red recíproca es nula excepto en el punto  $\Gamma$ , es decir, cuando  $\mathbf{G} = (0, 0)$ . En forma matemática se puede escribir como

$$\frac{1}{ab} \iint_{\text{celda}} e^{i(\mathbf{G}'-\mathbf{G}) \cdot \mathbf{r}} d^2 \mathbf{r} = \delta_{\mathbf{G}', \mathbf{G}}, \quad (\text{B.14})$$

donde  $a$  y  $b$  son las dimensiones de la celda (véase figura 4.1) y  $\delta$  es la delta de kronecker<sup>2</sup>. Multiplicando ambos lados de la ecuación (B.13) por  $\exp(-i\mathbf{G}'' \cdot \mathbf{r})$  e integrando en la celda unitaria, es posible eliminar la suma sobre  $\mathbf{G}'$  usando la propiedad (B.14), obteniéndose así

$$\omega^2 \sum_{\mathbf{G}} \hat{\eta}_{\mathbf{G}''-\mathbf{G}} \phi_{\mathbf{G}} = \sum_{\mathbf{G}} \left[ \begin{array}{l} +\frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{\mathbf{G}''-\mathbf{G}} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}''-\mathbf{G}}) \phi_{\mathbf{G}} (\mathbf{k} + \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{G}'' - \mathbf{G}) \\ +\frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{\mathbf{G}''-\mathbf{G}} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}''-\mathbf{G}}) \phi_{\mathbf{G}} (\mathbf{k} + \mathbf{G})^2 \\ +\frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{\mathbf{G}''-\mathbf{G}} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}''-\mathbf{G}}) (k_x + G_x) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} (\mathbf{G}) \cdot (\mathbf{G}'' - \mathbf{G}) \\ +\frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{\mathbf{G}''-\mathbf{G}} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}''-\mathbf{G}}) (k_x + G_x) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} (\mathbf{G}) \cdot (\mathbf{G}'' - \mathbf{G}) \\ +\frac{1}{2} (\hat{\alpha}_{\mathbf{G}''-\mathbf{G}} + \hat{\beta}_{\mathbf{G}''-\mathbf{G}}) \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} (\mathbf{G}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}) (k_x + G_x) \\ +\hat{\beta}_{\mathbf{G}''-\mathbf{G}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{G}} (\mathbf{G}) \cdot (\mathbf{k} + \mathbf{G}) (G''_x - G_x). \end{array} \right] \quad (\text{B.15})$$

<sup>2</sup>  $\delta_{\mathbf{G}', \mathbf{G}} = 1$  si y solo si  $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$ , o cero de otra forma.

En adelante reescribiremos a  $\mathbf{G}''$  como  $\mathbf{G}'$ . Después de algunas simplificaciones sobre la ecuación (B.16) es posible obtener

$$\begin{aligned} \omega^2 \sum_{\mathbf{G}} \hat{\eta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}} \phi_{\mathbf{G}} &= \sum_{\mathbf{G}} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}})(k_y + G_y)(k_y + G'_y) + \\ \hat{\alpha}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}}(k_x + G_x)(k_x + G'_x) \end{array} \right] \phi_{\mathbf{G}} \\ &+ \sum_{\mathbf{G}} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}})(k_y + G'_y)(k_x + G_x) + \\ \hat{\beta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}}(k_y + G_y)(k_x + G'_x) \end{array} \right] \psi_{\mathbf{G}}, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

para la coordenada  $x$ , mientras para la coordenada  $y$

$$\begin{aligned} \omega^2 \sum_{\mathbf{G}} \hat{\eta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}} \psi_{\mathbf{G}} &= \sum_{\mathbf{G}} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}})(k_x + G_x)(k_x + G'_x) + \\ \hat{\alpha}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}}(k_y + G_y)(k_y + G'_y) \end{array} \right] \psi_{\mathbf{G}} \\ &+ \sum_{\mathbf{G}} \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}})(k_x + G'_x)(k_y + G_y) + \\ \hat{\beta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}}(k_x + G_x)(k_y + G'_y) \end{array} \right] \phi_{\mathbf{G}}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

El sistema de ecuaciones (B.16) y (B.17) es un problema generalizado de eigenvalores infinito que puede escribirse en forma matricial como sigue

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{xx} & \mathbf{M}_{xy} \\ \mathbf{M}_{yx} & \mathbf{M}_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \omega^2 \mathbf{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad (\text{B.18})$$

donde las matrices  $\mathbf{M}_{ij}$  están definidas por:

$$\mathbf{M}_{xx}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}})(k_y + G_y)(k_y + G'_y) + \hat{\alpha}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}}(k_x + G_x)(k_x + G'_x), \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbf{M}_{xy}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}})(k_y + G'_y)(k_x + G_x) + \hat{\beta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}}(k_y + G_y)(k_x + G'_x), \quad (\text{B.20})$$

$$\mathbf{M}_{yx}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}})(k_x + G'_x)(k_y + G_y) + \hat{\beta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}}(k_x + G_x)(k_y + G'_y), \quad (\text{B.21})$$

$$\mathbf{M}_{yy}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = \frac{1}{2}(\hat{\alpha}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}} - \hat{\beta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}})(k_x + G_x)(k_x + G'_x) + \hat{\alpha}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}}(k_y + G_y)(k_y + G'_y), \quad (\text{B.22})$$

y la matriz de norma  $\mathbf{N}$  esta dada por:

$$\mathbf{N}(\mathbf{G}, \mathbf{G}') = \hat{\eta}_{\mathbf{G}'-\mathbf{G}}. \quad (\text{B.23})$$

De esta forma, se ha mostrado en este apéndice, como se puede aplicar el método PWE para resolver el movimiento armónico de las vibraciones en el plano para placas elásticas. Se redujo la ecuación (B.1) a un problema de eigenvalores generalizado (B.18) que puede ser truncado para un número finito de ondas planas, y resolverse numéricamente para obtener así las frecuencias y desplazamientos normales del sistema. En la sección 4.2, página 28, se mostró como calcular para una celda unitaria rectangular los coeficientes de Fourier de las expansiones (B.2)-(B.5).

# Bibliografía

- [1] I. Todhunter and K. Pearson. *A history of the theory of elasticity and of the strength of materials, from Galilei to the present time*. Cambridge, University Press, 1886.
- [2] K. F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids (Dover Books on Physics)*. Dover Publications, 1991.
- [3] Yi-Yuan Yu. *Vibrations of Elastic Plates*. Springer, 1996.
- [4] K. Schaadt, A. Tufaile, and C. Ellegaard. Chaotic sound waves in a regular billiard. *Phys. Rev. E*, 67(2), 2003.
- [5] N. Søndergaard, T. Guhr, M. Oxborrow, K. Schaadt, and C. Ellegaard. Counting function for a sphere of anisotropic quartz. *Phys. Rev. E*, 70(3), 2004.
- [6] M. Avlund, C. Ellegaard, M. Oxborrow, T. Guhr, and N. Søndergaard. Observation of periodic orbits on curved two-dimensional geometries. *Physical Review Letters*, 104(16), 2010.
- [7] J. Pujol. *Elastic wave propagation and generation in seismology*. Cambridge University Press, 2003.
- [8] L. A. Taber. *Nonlinear theory of elasticity: applications in biomechanics*. World Scientific, 2004.
- [9] J. T. Oden and E. A. Ripperger. *Mechanics of elastic structures*. McGraw-Hill New York, 1967.
- [10] G. Tanner and N. Søndergaard. Wave chaos in acoustics and elasticity. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40(50):R443–R509, 2007.
- [11] E. J. Mittemeijer. *Fundamentals of materials science: the microstructure–property relationship using metals as model systems*. Springer, 2010.
- [12] D. H. Hodges and G. A. Pierce. *Introduction to structural dynamics and aeroelasticity*, volume 15. Cambridge University Press, 2011.

- [13] A. Morales, L. Gutiérrez, and J. Flores. Improved eddy current driver-detector for elastic vibrations. *Am. J. Phys.*, 69(4):517, 2001.
- [14] A. Morales, J. Flores, L. Gutiérrez, and R. A. Méndez-Sánchez. Compressional and torsional wave amplitudes in rods with periodic structures. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 112(5):1961–1967, 2002.
- [15] A. Morales, R. A. Méndez-Sánchez, and J. Flores. Topological defects in 1D elastic waves. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 19(3):289–291, Aug 2003.
- [16] R. A. Méndez-Sánchez, A. Morales, and J. Flores. Experimental check on the accuracy of timoshenko’s beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, 279:508–512, 2005.
- [17] A. Díaz-de Anda, A. Pimentel, J. Flores, A. Morales, L. Gutiérrez, and R. A. Méndez-Sánchez. Locally periodic timoshenko rod: Experiment and theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117(5):2814–2819, 2005.
- [18] L. Gutiérrez, A. Díaz-de Anda, J. Flores, R. A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, and A. Morales. Wannier-stark ladders in one-dimensional elastic systems. *Physical Review Letters*, 97(11), 2006.
- [19] A. Morales, A. Díaz-de Anda, J. Flores, L. Gutiérrez, R. A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, and P. Mora. Doorway states in quasi-one-dimensional elastic systems. *EPL (Europhysics Letters)*, 99(5):54002, 2012.
- [20] A. Díaz-de Anda, J. Flores, L. Gutiérrez, R. A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, and A. Morales. Experimental study of the timoshenko beam theory predictions. *Journal of Sound and Vibration*, 331:5732–5744, 2012.
- [21] J. Flores, L. Gutiérrez, R. A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, P. Mora, and A. Morales. Anderson localization in finite disordered vibrating rods. *EPL (Europhysics Letters)*, 101(6):67002, 2013.
- [22] A. Díaz-de Anda, J. Flores, L. Gutiérrez, R. A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, and A. Morales. Emergence of acoustic and optical bands in elastic systems. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 134(6):4393, 2013.
- [23] R. A. Méndez-Sánchez, L. Gutiérrez, A. Morales, J. Flores, A. Díaz-de Anda, and G. Monsivais. Anderson localization phenomenon in one-dimensional elastic systems. *Acta physica polonica A*, 124(6):1063–1068, 2013.
- [24] J. A. Franco-Villafañe, E. Flores-Olmedo, G. Báez, O. Gandarilla-Carrillo, and R. A. Méndez-Sánchez. Acoustic resonance spectroscopy for the advanced undergraduate laboratory. *European Journal of Physics*, 33(6):1761–1769, 2012.

- [25] A. Arreola-Lucas. Estándar experimental de vibraciones fuera del plano en placas rectangulares. Master's thesis, Universidad Autónoma Metropolitana, Departamento de Ciencias Básicas, UAM-A, A. P. 21-267, 04000 México D. F., México, 2013.
- [26] G. Báez, M. Cobian-Suarez, A. M. Martínez-Arguello, M. Martínez-Mares, and R. A. Méndez-Sánchez. Scattering of elastic waves in a quasi-one-dimensional cavity: Theory and experiment. *Acta physica polonica A*, 124(6):1069–1073, 2013.
- [27] J. A. Franco-Villafañe, E. Flores-Olmedo, G. Báez, and R. A. Méndez-Sánchez. Evaluation of young's and shear moduli in rods using acoustic resonance spectroscopy. *AIP Conference Proceedings*, 1579:58–62, 2014.
- [28] A. Arreola, G. Báez, and R. A. Méndez-Sánchez. Quasi-one-dimensional modes in strip plates: Theory and experiment. *AIP Conf. Proc.*, (1579):63–66, 2014.
- [29] R. Méndez-Sánchez, U. Kuhl, M. Barth, C. Lewenkopf, and H. J. Stöckmann. Distribution of reflection coefficients in absorbing chaotic microwave cavities. *Physical Review Letters*, 91(17), 2003.
- [30] U. Kuhl, M. Martínez-Mares, R. Méndez-Sánchez, and H. J. Stöckmann. Direct processes in chaotic microwave cavities in the presence of absorption. *Physical Review Letters*, 94(14), 2005.
- [31] H. Schanze, H. J. Stöckmann, M. Martínez-Mares, and C. Lewenkopf. Universal transport properties of open microwave cavities with and without time-reversal symmetry. *Phys. Rev. E*, 71(1), 2005.
- [32] G. Báez, M. Martínez-Mares, and R. A. Méndez-Sánchez. Absorption strength in absorbing chaotic cavities. *Phys. Rev. E*, 78(3), 2008.
- [33] G. R. Cowper. The shear coefficient in timoshenko's beam theory. *J. Appl. Mech.*, 33(2): 335, 1966.
- [34] T. Kaneko. On timoshenko's correction for shear in vibrating beams. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 8(16):1927–1936, 1975.
- [35] N. G. Stephen and M. Levinson. A second order beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, 67(3):293–305, 1979.
- [36] J. D. Renton. A check on the accuracy of timoshenko's beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, 245(3):559–561, 2001.
- [37] J. R. Hutchinson. Shear coefficients for timoshenko beam theory. *J. Appl. Mech.*, 68(1): 87–92, 2001.

- [38] N. G. Stephen. On a check on the accuracy of timoshenko's beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, 257(4):809–812, 2002.
- [39] K. T. Chan, K. F. Lai, N. G. Stephen, and K. Young. A new method to determine the shear coefficient of timoshenko beam theory. *Journal of Sound and Vibration*, 330(14):3488–3497, 2011.
- [40] J. Flores, O. Novaro, and T. H. Seligman. Possible resonance effect in the distribution of earthquake damage in mexico city. *Nature*, 326(6115):783–785, 1987.
- [41] T. H. Seligman, J. M. Alvarez-Tostado, J. L. Mateos, J. Flores, and O. Novaro. Resonant response models for the valley of Mexico-i; the elastic inclusion approach. *Geophysical Journal International*, 99(3):789–799, 1989.
- [42] J. L. Mateos, J. Flores, O. Novaro, T. H. Seligman, and J. A. Alvarez-Tostado. Resonant response models for the valley of Mexico-ii. the trapping of horizontal p waves. *Geophysical Journal International*, 113(2):449–462, 1993.
- [43] M. Goldhaber and E. Teller. On nuclear dipole vibrations. *Phys. Rev.*, 74(9):1046–1049, Nov 1948.
- [44] G. E. Brown. *Unified theory of nuclear models and forces*. North-Holland, 1967.
- [45] A. Bohr and B. Mottelson. *Nuclear structure*. Benjamin, New York, 1975.
- [46] K. Ho, C. Chan, and C. Soukoulis. Existence of a photonic gap in periodic dielectric structures. *Physical Review Letters*, 65(25):3152–3155, 1990.
- [47] M. Plihal and A. Maradudin. Photonic band structure of two-dimensional systems: The triangular lattice. *Phys. Rev. B*, 44(16):8565–8571, 1991.
- [48] M. M. Sigalas and E. N. Economou. Elastic and acoustic wave band structure. *Journal of Sound and Vibration*, 158(2):377–382, 1992.
- [49] B. Manzanares-Martínez and F. Ramos-Mendieta. Surface elastic waves in solid composites of two-dimensional periodicity. *Phys. Rev. B*, 68(13), 2003.
- [50] B. Manzanares-Martínez and F. Ramos-Mendieta. Sagittal acoustic waves in phononic crystals: k-dependent polarization. *Phys. Rev. B*, 76(13), 2007.
- [51] B. Manzanares-Martínez, J. Flores, L. Gutiérrez, R. A. Méndez-Sánchez, G. Monsivais, A. Morales, and F. Ramos-Mendieta. Flexural vibrations of a rectangular plate for the lower normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 329(24):5105–5115, 2010.
- [52] N. S. Bardell, R. S. Langley, and J. M. Dunsdon. On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 191(3):459–467, 1996.

- [53] D. J. Gorman. Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method of superposition. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3-5):831–851, 2004.
- [54] D. J. Gorman. Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastic support normal to the boundaries. *Journal of Sound and Vibration*, 285(4-5):941–966, 2005.
- [55] J. Du, W. L. Li, G. Jin, T. Yang, and Z. Liu. An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges. *Journal of Sound and Vibration*, 306(3-5):908–927, 2007.
- [56] C. Kittel and P. McEuen. *Introduction to solid state physics*, volume 8. Wiley New York, 1976.
- [57] E. Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Physical Review Letters*, 58(20):2059–2062, 1987.
- [58] C. M. Soukoulis. Photonic band gaps and localization. *NATO ASI Series*, 1993.
- [59] J. D. Joannopoulos, P. R. Villeneuve, and S. Fan. Photonic crystals: putting a new twist on light. *Nature*, 386(6621):143–149, 1997.
- [60] D. García-Pablos, M. Sigalas, F. Montero de Espinosa, M. Torres, M. Kafesaki, and N. García. Theory and experiments on elastic band gaps. *Physical Review Letters*, 84(19):4349–4352, 2000.
- [61] X. Zhang, T. Jackson, E. Lafond, P. Deymier, and J. Vasseur. Evidence of surface acoustic wave band gaps in the phononic crystals created on thin plates. *Appl. Phys. Lett.*, 88(4):041911, 2006.
- [62] T. T. Wu, Z. G. Huang, T. C. Tsai, and T. C. Wu. Evidence of complete band gap and resonances in a plate with periodic stubbed surface. *Appl. Phys. Lett.*, 93(11):111902, 2008.
- [63] S. Mohammadi, A. A. Eftekhar, A. Khelif, W. D. Hunt, and A. Adibi. Evidence of large high frequency complete phononic band gaps in silicon phononic crystal plates. *Appl. Phys. Lett.*, 92(22):221905, 2008.
- [64] A. Ertas. *Engineering Mechanics and Design Applications: Transdisciplinary Engineering Fundamentals*. CRC Press, 2011.
- [65] R. A. Méndez-Sánchez. Illustrative animations of vibrations in rods. <http://www.fis.unam.mx/~mendez/animations.html>, 2012.
- [66] M. J. Crocker. *Handbook of Acoustics*. John Wiley, 1998.

- [67] M. Levinson and D. W. Cooke. On the two frequency spectra of timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration*, 84:319–326, 1982.
- [68] B. Geist and J. R. McLaughlin. Double eigenvalues for the uniform timoshenko beam. *Applied Mathematical Letters*, 10:129–134, 1997.
- [69] J. A. Franco-Villafaña and R. A. Méndez-Sánchez. On the accuracy of the timoshenko beam theory above the critical frequency: best shear coefficient. *arXiv:1405.4885*, 2014.
- [70] I. Kawata, H. Kono, Y. Fujimura, and A. Bandrauk. Intense-laser-field-enhanced ionization of two-electron molecules: Role of ionic states as doorway states. *Phys. Rev. A*, 62(3), 2000.
- [71] M. S. Hussein, V. Kharchenko, L. F. Canto, and R. Donangelo. Long-range excitation of collective modes in mesoscopic metal clusters. *Annals of Physics*, 284(1):178–194, 2000.
- [72] L. Baksmaty, C. Yannouleas, and U. Landman. Nonuniversal transmission phase lapses through a quantum dot: An exact diagonalization of the many-body transport problem. *Physical Review Letters*, 101(13), 2008.
- [73] I. Hertel, I. Shchatsinin, T. Laarmann, N. Zhavoronkov, H. H. Ritze, and C. Schulz. Fragmentation and ionization dynamics of c60 in elliptically polarized femtosecond laser fields. *Physical Review Letters*, 102(2), 2009.
- [74] E. Bogomolny and C. Schmit. Structure of wave functions of pseudointegrable billiards. *Physical Review Letters*, 92(24), 2004.
- [75] E. Bogomolny, B. Dietz, T. Friedrich, M. Miski-Oglu, A. Richter, F. Schäfer, and C. Schmit. First experimental observation of superscars in a pseudointegrable barrier billiard. *Physical Review Letters*, 97(25), 2006.
- [76] J. Flores, T. H. Seligman, J. M. Alvarez-Tostado, O. Novaro, and J. L. Mateos. Doorway states in classical physics. *Symmetries in Physics*, pages 239–251, 1992.
- [77] R. Marsal and M. Mazari. *The Subsoil of Mexico City*. UNAM, Ciudad de México, 1959.
- [78] W. S. Jardetzky, W. M. Ewing, and F. Press. *Elastic Waves in Layered Media*. McGraw Hill, 1957.
- [79] C. Lomnitz, J. Flores, O. Novaro, T. H. Seligman, and R. Esquivel. Seismic coupling of interface modes in sedimentary basins: A recipe for disaster. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 89(1):14–21, 1999.
- [80] J. A. Franco-Villafaña, J. Flores, J. L. Mateos, R. A. Méndez-Sánchez, O. Novaro, and T. H. Seligman. Doorway states and billiards. *AIP Conference Proceedings*, 1323(1): 91–97, 2010.

- [81] J. A. Franco-Villafañe, J. Flores, J. L. Mateos, R. A. Méndez-Sánchez, O. Novaro, and T. H. Seligman. Novel doorways and resonances in large-scale classical systems. *EPL (Europhysics Letters)*, 94(3):30005, 2011.
- [82] P. Griffin. The plane-wave expansion method. *Journal of Mathematical Physics*, 15(11):1913, 1974.
- [83] Y. Cao, Z. Hou, and Y. Liu. Convergence problem of plane-wave expansion method for phononic crystals. *Physics Letters A*, 327(2-3):247–253, 2004.
- [84] Z. Hou and B. M. Assouar. Modeling of lamb wave propagation in plate with two-dimensional phononic crystal layer coated on uniform substrate using plane-wave-expansion method. *Physics Letters A*, 372(12):2091–2097, 2008.
- [85] A. A. Kutsenko, A. L. Shuvalov, and A. N. Norris. Converging bounds for the effective shear speed in 2D phononic crystals. *Journal of Elasticity*, 113(2):179–191, 2013.
- [86] B. Manzanares-Martinez, F. Ramos-Mendieta, and A. Baltazar. Ultrasonic elastic modes in solid bars: An application of the plane wave expansion method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 127(6):3503, 2010.
- [87] Robert M. Gray. Toeplitz and circulant matrices: A review. *FNT in Communications and Information Theory*, 2(3):155–239, 2005.
- [88] Ibach H. and Lüth H. *Solid-State Physics: An Introduction to Principles of Materials Science*. Springer, 2002.
- [89] D. J. Gorman. Accurate analytical type solutions for the free in-plane vibration of clamped and simply supported rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 276(1-2):311–333, Sep 2004.
- [90] H. Tohmyoh, T. Imaizumi, and M. Saka. Acoustic resonant spectroscopy for characterization of thin polymer. *Rev. Sci. Instrum.*, 77:104901, 2006.
- [91] J. Cong, X. Wang, D. Xu, D. Chen, and C. Che. Experimental studies on the effects of porosity on acoustic resonance spectroscopy for synthetic porous rock samples in a cylindrical resonant cavity. *Chinese Science Bulletin*, 53(7):978–983, 2008.
- [92] L. Ostrovsky, A. Lebedev, A. Matveyev, A. Potapov, A. Sutin, I. Soustova, and P. Johnson. Application of three-dimensional resonant acoustic spectroscopy method to rock and building materials. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(4):1770, 2001.
- [93] S. H. Crandall, N. C. Dahl, and T. J. Lardner. *An Introduction to the Mechanics of Solids*. McGraw-Hill, 1978.

- 
- [94] N. G. Stephen. Mindlin plate theory: best shear coefficient and higher spectra validity. *Journal of Sound and Vibration*, 202(4):539–553, 1997.
- [95] A. J. Hull. Mindlin shear coefficient determination using model comparison. *Journal of Sound and Vibration*, 294:125–130, 2006.