UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA DE EXTENSIONES AUTOADJUNTAS Y TRIPLETES DE FRONTERA PARA OBTENER EXTENSIONES DE OPERADORES DE STURM-LIOUVILLE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

MAX ROBERTO ORTEGA DEL VECCHYO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. RAFAEL RENÉ DEL RÍO CASTILLO
2014
México, D.F.

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno Ortega Del Vecchyo Max Roberto 55 35 03 02 15 Universidad Nacional Autónoma de México Facultad de Ciencias Matemáticas 306512786
2. Datos del tutor Dr. Rafael René Del Río Castillo
3. Datos del sinodal 1 Dr. Luis Octavio Silva Pereyra
4. Datos del sinodal 2 Dr. Ricardo Alberto Weder Zaninovich
5. Datos del sinodal 3 Dra. Diana Avella Alaminos
6. Datos del sinodal 4 Dr. Carlos Villegas Blas
7. Datos de la tesis Teoría de extensiones autoadjuntas y tripletes de frontera para obtener extensiones de operadores de Sturm-Liouville 95 pp. 2014

Agradecimientos

A mi Jefa, mi Jefe, y mi Broder. Porque se rifan.

A los profesores más influyentes en mi formación durante mis estudios en la Facultad: Diana Avella, Héctor Méndez y Ana Irene Ramirez, porque su innegable capacidad como profesores y calidad humana hizo maravillosa mi experiencia en la Facultad.

A Rafael Del Río, por su gran apoyo y paciencia para culminar mis estudios.

A mi grandiosa familia, porque son la neta: Yeya, Gaby, La Mujer, Chelis, Carito, Mayté, Bernardo, Tito, Beto, Noemí, Chucho, Yuya, Alain, Berny, Valeria, Juan Luis, Renato, Mimí, Carlo, Luis Carlos. Y al Chícharo.

A Berny y a Emilio.

A mis amigos y amigas en orden de aparición: Chino, Sebo, Pirata, Chucho, Adriana, Andrea, Marcela, Kirby, Tania, Betito, Negro, Doctor, Charly, Renas, Pablo, Negrilli, Vecino, Cha, Escoponi, Jager, Tort, Artemisa.

Y a todos los que se me olvidaron.

Índice general

Introducción

La gran mayoría de las ramas de estudio de las matemáticas han sido desarrolladas con el propósito de aplicarlas como soporte teórico de otras disciplinas. Frecuentemente la comunidad matemática aprecia en la rama de estudio generada un valor por sí sola y continúa su desarrollo abstracto, como derivación de su fuente original.

El análisis funcional no es la excepción: surgió del estudio de espacios de funciones orientado a establecer las propiedades de transformaciones en estos espacios de funciones (como la transformación de Fourier) y actualmente es la base fundamental de varias especialidades dentro de la física cuántica; además, el análisis funcional es también una disciplina atractiva por sí sola para el matemático teórico, siendo la continuación directa del álgebra lineal.

Ésta tesis pretende acercar al lector a un problema de naturaleza teórica del análisis funcional que concierne al estudio de la física cuántica con un enfoque particular: los operadores autoadjuntos son objetos fundamentales en las matemáticas y de particular importancia en la física cuántica gracias al teorema espectral y al teorema de Stone. Es por eso que dado un operador, es de gran interés verificar que el operador con el que se está tratando es autoadjunto, o bien que existe una extensión de él que sí lo sea. El análisis funcional es una rama de las matemáticas que se encarga principalmente en el estudio de los operadores, por lo tanto el problema de encontrar operadores autoadjuntos es una tarea del análisis funcional. Para encontrar a los operadores autoadjuntos utilizamos la teoría de los tripletes de frontera, una aplicación que no es muy común pero sí bastante útil para ciertos tipos de operadores.

El teorema espectral para operadores autoadjuntos permite el desarrollo del cálculo funcional, y el teorema de Stone muestra una relación biunívoca entre operadores autoadjuntos y grupos de evolución unitarios fuertemente continuos, los cuales representan la evolución de los estados cuánticos en el tiempo, es decir, las soluciones de ecuaciones de Schrhödinger. Los operadores autoadjuntos son un subconjunto propio de los operadores simétricos que cuentan exclusivamente con las dos propiedades señaladas en los teoremas mencionados. Si el operador simétrico fuera acotado, su extensión continua a todo el espacio de Hilbert sería autoadjunta. Sin embargo, los operadores diferenciales y la gran mayoría de los operadores en las aplicaciones no son acotados, y por esta razón se desarrolló una teoría con nuevos conceptos a partir de los cuales podemos determinar las extensiones autoadjuntas de un operador simétrico determinado.

La primera parte de esta tesis se encarga de presentar ésta teoría. En los primeros dos capítulos presentamos a los conceptos involucrados en este estudio junto con propiedades que esclarecen su importancia y relación con los demás conceptos en una forma concisa, sintética y al alcance de cualquier estudiante familiarizado con los resultados más elementales del análisis funcional. Tras elaborar las nociones en juego del presente estudio, en la segunda parte exponemos dos teorías de extensiones autoadjuntas: la teoría de extensión de Von Neumann, y los tripletes de frontera. De las dos, la teoría de Von Neumann es la que se emplea más frecuentemente en la literatura. Sin embargo, los tripletes de frontera resultan bastante útiles en especial para operadores diferenciales, lo cual mostramos al aplicarlos a operadores de Sturm-Liouville en el último capítulo de este trabajo. En la tercera parte aplicamos toda la teoría antes desarrollada a los operadores de Sturm-Liouville, un tipo de operador diferencial bastante conocido en la física, y obtendremos sus extensiones autoadjuntas a partir de los tripletes de frontera. Para esta tercera parte es recomendable que el lector esté familiarizado con resultados elementales de ecuaciones diferenciales ordinarias y de teoría de la medida, pues aunque esta tesis pretende ser lo más auto-suficiente posible (los resultados que se usan que no se hayan probado antes muy probablemente se presentan en el apéndice), algunas proposiciones de estos temas sólo son mencionadas con una referencia. En términos generales, esta tesis fue escrita para poder ser leída por cualquier estudiante de matemáticas (o una disciplina afín) que tenga una noción básica del análisis funcional.

El eje fundamental que ha orientado este texto es responder a la siguiente pregunta: ¿Cuándo podemos asegurar que un operador determinado es autoadjunto, o tiene extensiones autoadjuntas? Eso no implica que el lector que no esté interesado en esta pregunta no encuentre nada de provecho en este texto: la gama de conceptos y resultados es bastante amplia para que pueda encontrar los cimientos necesarios para su interés particular del análisis funcional aplicado. Esta tesis pretende recalcar la relación íntima que existe entre el análisis funcional y otras ramas de estudio dentro de las matemáticas y la física, y se propone, en su mejor lectura, ya sea como una introducción al análisis funcional aplicado, o como un estudio de un problema específico de la mecánica cuántica utilizando métodos diferentes a los usuales.

Sobre la notación

Tradicionalmente, la notación $T : A \to B$ significa que T es una función con dominio $D(T) = A$ y contradominio B. En el contexto de este trabajo, como se hace en gran parte de los textos sobre el tema, esta notación significa algo ligeramente distinto, pues el dominio no es estrictamente todo el conjunto con el cual se está trabajando, $T : A \to B$ es una función con dominio $D(T) \subseteq A$ y contradominio B. Esto es una cuestión tan sólo práctica, que surge de la importancia de determinar los dominios con precisión. Como se entenderá a lo largo del texto, operadores con la misma regla de correspondencia pueden tener propiedades muy diferentes, según el dominio en el que estén definidos.

En todo el texto, los operadores considerados actúan en espacios de Hilbert, es decir, para todo T operador lineal, se considera que $T : H_1 \to H_2$, donde H_i es un espacio de Hilbert. También, decimos que T es un operador en un espacio de Hilbert H si $T : H \to H$ con $D(T) \subseteq H$. Observemos que, esencialmente, operador lineal es lo mismo que transformación lineal, pero el primero suele usarse con más frecuencia para casos en los que $D(T) \subseteq H$ (como sucede en nuestro contexto), mientras que decir que $T : H_1 \to H_2$ es una transformación lineal suele sugerir que $D(T) = H_1$. En algunos casos, omitiremos la palabra "lineal" cuando está claro que se trata de un operador lineal. También, $Tx = T(x)$, y muchas veces los elementos de H los denotamos como f, g en lugar de x, esto simplemente porque en las aplicaciones, los espacios considerados suelen ser espacios de funciones. Nosotros usaremos de manera indistinta x o f.

Un operador $T : H_1 \to H_2$ tiene inversa si existe $T^{-1} : H_2 \to H_1$ tal que $T^{-1}(Tx) = x$, $D(T^{-1}) = R(T)$. Por lo tanto un operador T tiene inversa si y sólo si es inyectivo.

Dados tres operadores T y S de H_1 a H_2 y P de H_2 a H_3 , definimos a $T+S$ como $D(T+S) = D(S) \cap D(T)$ con $(T+S)x = Tx+Sx$, y a PT como $D(PT) = \{x \in H_1 \mid Tx \in D(P)\}$ y $(PT)x = P(Tx)$. Abreviamos $(T - \lambda)$ para referirnos al operador $(T - \lambda I)$ (donde I es la identidad en H_1) con $D((T - \lambda I)) = D(T)$ y $(T - \lambda I)x = Tx - \lambda x$. Escribimos $T \subseteq S$ si S es una extensión de T, es decir, $D(T) \subseteq D(S)$ y $T(x) = S(x)$ para todo $x \in D(T)$

Finalmente, a un operador T se le llama operador diferencial si su regla de correspondencia se puede describir a través de una expresión diferencial, por ejemplo, $T(f) = f'$

Parte I

Fundamentos del análisis funcional aplicado

Capítulo 1

Tipos de operadores

Todos los conceptos introducidos en este capítulo son los cimientos del análisis funcional que conciernen a nuestro estudio. Son todos conceptos tanto fundamentales como básicos, y es indispensable entender sus propiedades y relaciones entre ellos, y tal es el propósito de este primer capítulo.

1.1. Operadores cerrados

Dentro de operadores lineales, los operadores acotados son la clase de la cual se cuenta con la mayor cantidad de resultados, es por esto que es una gran ventaja si el operador con el que se esta trabajando resulta ser acotado. Desafortunadamente, en las aplicaciones, muy pocos operadores suelen ser acotados. Muchos operadores diferenciales son discontinuos, por ejemplo, la derivada. Sin embargo, éstos mismos resultan ser operadores cerrados, o cerrables, y tal es el caso de la mayoría de los operadores que conciernen a las aplicaciones del análisis funcional.

Dado un operador lineal $T : H_1 \to H_2$, Definimos al espacio $H_1 \oplus H_2$ como el el espacio $H_1 \times H_2 = \{(h_1, h_2) \mid h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$ con las operaciones usuales $(h_1, h_2) + (k_1, k_2) = (h_1 + k_1, h_2 + k_2)$, $\lambda(h_1, h_2) = (\lambda h_1, \lambda h_2)$, y el producto interior

$$\langle (h_1,h_2), (k_1, k_2)\rangle_{H_1 \oplus H_2} = \langle h_1, k_1\rangle_1 + \langle h_2, k_2\rangle_2 \tag{1.1.1}$$

el cual induce a la norma[1]

$$\|(h_1, h_2)\|_{H_1 \oplus H_2} = \sqrt{\|h_1\|^2 + \|h_2\|^2} \tag{1.1.2}$$

donde cada uno de los productos interiores son operaciones en el correspondiente espacio de Hilbert. A $H_1 \oplus H_2$ se le llama la suma ortogonal de H_1 y H_2. Es trivial verificar que $H_1 \oplus H_2$ es un espacio de Hilbert.

[1] Se pueden considerar otros productos interiores que induzcan normas equivalentes, pero esta funciona bien para nuestro propósito.

Definición 1.1 Sea $T : H_1 \to H_2$ un operador lineal. definimos a $G(T) = \{(h, T(h)) \mid h \in D(T)\} \subseteq H_1 \oplus H_2$ Como la gráfica de T.

La definición de gráfica puede claramente extenderse a funciones que no sean operadores lineales. Como T es lineal esto implica que $G(T)$ es un subespacio de $H_1 \oplus H_2$, esto lo denotamos como $G(T) \leq H_1 \oplus H_2$. Entonces la gráfica de T es un subespacio en donde está toda la información del operador de T. A todo operador le corresponde un solo subespacio, pero no todo subespacio es la gráfica de un operador. Aquí damos una condición necesaria y suficiente para que un subespacio de $H_1 \oplus H_2$ sea la gráfica de un operador lineal:

Lema 1.1 Sea S un subespacio de $H_1 \oplus H_2$, entonces S es la gráfica de un operador lineal T sí y sólo sí $(0_{H_1}, 0_{H_2})$ es el único elemento de S tal que su primera entrada es 0_{H_1}.

Demostración.

Es evidente que si S es la gráfica de un operador lineal T, entonces $(0_{H_1}, 0_{H_2})$ es un elemento de S, y por ser T función, es el único. Por otro lado, si $(0_{H_1}, 0_{H_2})$ es el único elemento de S cuya primer entrada es 0_{H_1}, entonces si $(x, y), (x, z) \in S \Longrightarrow (0, y-z) \in S \Longrightarrow y = z$ eso quiere decir que S representa la gráfica de una función f, el hecho de que S sea un subespacio implica que $(\lambda x, \lambda f(x)), (y, f(y)) \in S \Rightarrow (\lambda x + y, \lambda f(x) + f(y)) \in S \Longrightarrow f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)\ \forall x, y \in D(f), \lambda \in K$. ■

Definición 1.2 Decimos que T es un operador cerrado si $G(T)$ es un subconjunto cerrado de $H_1 \oplus H_2$

Ahora, gran parte de los operadores con los que estamos familiarizados son cerrados, por ejemplo, los operadores de dimensión finita, lo cual es evidente con la siguiente proposición (ya que los operadores de dimensión finita son continuos, y los espacios de dimensión finita son cerrados). Muchas veces es más conveniente tratar con la siguiente definición alternativa, que es, estrictamente, la definición de que el subespacio $G(T)$ sea cerrado.

Proposición 1.2 $T : H_1 \to H_2$ es un operador cerrado sí y sólo si para toda (x_n) sucesión de elementos de $D(T)$ tal que $(x_n) \to x$, si (Tx_n) es una sucesión convergente, entonces $x \in D(T)$ y $Tx_n \to Tx$

Demostración.

Si T es cerrado, entonces dada (x_n) que cumple las hipótesis, $(x_n, T(x_n))$ es una sucesión de elementos de $G(T)$ que converge. Como $G(T)$ es cerrado, $(x_n, T(x_n)) \to (x, y) \in G(T)$, es decir, $x \in D(T)$ y $(x, y) = (x, T(x))$. Entonces se tiene que $T(x_n) \to T(x)$.

Inversamente, si $(x_n, T(x_n))$ es una sucesión convergente de $G(T)$, entonces $(x_n) \to x$ y $T(x_n) \to y$, por lo que estamos suponiendo esto implica que $x \in D(T)$ y $T(x) = y$, entonces $(x_n, T(x_n)) \to (x, T(x)) \in G(T)$, es decir, $G(T)$ es cerrado ■

En la prueba anterior las equivalencias del tipo $(x_n, T(x_n)) \to (x, y) \Leftrightarrow (x_n) \to x$ y $T(x_n) \to y$ suceden gracias al tipo de norma que se eligió para $H_1 \oplus H_2$.

Es útil saber que las transformaciones cerradas y las acotadas no tienen ninguna relación de inclusión entre ellas, esto quiere decir que es posible construir transformaciones que sean de un tipo, y no del otro:

Ejemplo 1.1

- T acotado no cerrado: Considera a l_2 el espacio de sucesiones en $\mathbb{R}$ con la norma $\|(x_n)\| = \sqrt{\sum x_n^2}$. Sea $T : l_2 \to l_2$ con

  $$D(T) = \{(x_n) \in l_2 \mid x_n \neq 0 \text{ para una cantidad finita de n's}\}$$

  y $T((x_n)) = (x_n)$. T es acotado con norma 1, pero T no es cerrado: Consideremos la sucesión (y_n) en $D(T)$ definida por

  $$y_n(m) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \textbf{si } m \leq n \\ 0 & \textbf{si } m > n \end{cases}$$

Donde $y_n(m)$ representa el m'ésimo término de la sucesión y_n. Es claro que $y_n \to (\frac{1}{r})_{r\in\mathbb{N}}$, la sucesión $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots,) \in l_2$, porque $\|y_n - (\frac{1}{r})\| = \sqrt{\sum_{m=n}^{\infty}(\frac{1}{m+1})^2}$, entonces para $T : l_2 \to l_2$, tenemos una sucesión de elementos (y_n) en $D(T)$ tal que $(y_n) \to (\frac{1}{r})$, por lo que $y_n = T(y_n) \to (\frac{1}{r})$, pero $(\frac{1}{r}) \notin D(T)$, por lo que la Proposición 1.2. implica que T no es cerrado.

- T cerrado no acotado:

Sea $T : C[0,1] \to C[0,1]$ donde $C[0,1]$ está equipado con la norma sup, i.e. $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}$. Definimos $D(T) = \{f \in C[0,1] \mid f' \in C[0,1]\}$ con $T(f) = f'$ para todo $f \in D(T)$. Resulta trivial verificar que se trata de un operador lineal (al igual que con todos los operadores diferenciales).

Para ver que T no es acotado, consideremos la sucesión (x_n) en $D(T)$ definida por $x_n(t) = t^n$, entonces $Tx_n = nt^{n-1}$, por lo que $\|x_n\| = 1$ y $\|Tx_n\| = n$, es decir, T no está acotado.

Dejamos como ejercicio para el lector verificar que T es cerrado, hecho que deriva de la norma que elegimos para $C[0,1]$ y de la Proposición 1.2.

Notemos que en el primer inciso del ejemplo anterior, $D(T)$ no es cerrado. Si a una transformación T se le pide que, además de ser acotada, tenga dominio cerrado, ésta si resulta ser cerrada. La prueba de este enunciado es inmediata usando la definición alternativa dada por la Proposición 1.2. Siempre que se tenga un operador lineal acotado $t : H_1 \to H_2$, se puede tomar una extensión lineal de t, $T : H_1 \to H_2$ con $D(T) = \overline{D(t)}$ definiendo $T(x) = \lim T(x_n)$ si $x_n \to x$, o bien utilizando el teorema B.L.T. (Por "bounded linear transformation") que se encuentra en [RS80], página 9. Entonces se tendría que T es cerrado.

El teorema de la gráfica cerrada, junto con la proposición que concluye esta esta sección, determinan la relación que existe entre operadores cerrados, operadores continuos, y operadores con dominio cerrado. Con los resultados que se obtienen, veremos que cualquiera de estas dos condiciones implica la tercera, por ejemplo, un operador continuo y con dominio cerrado es un operador cerrado, como se observó en el párrafo anterior. Esta relación nos interesa porque en particular implica que un operador cerrado no acotado (como muchos operadores diferenciales) no puede estar definido en un subespacio cerrado (por ejemplo, en todo H_1) Ahora, con el propósito de obtener la implicación: operador continuo y cerrado entonces su dominio es cerrado, definimos una nueva norma para $D(T)$:

Definición 1.3 Sea $T : H_1 \to H_2$ un operador lineal, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_j$ y $\| \cdot \|_j$ representan el producto punto y norma inducida en H_j. Definamos un producto interno en $D(T)$ como

$$\langle x, y \rangle_T = \langle x, y \rangle_1 + \langle Tx, Ty \rangle_2 \qquad \text{Para } x, y \in D(T) \tag{1.1.3}$$

Es trivial verificar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ es en efecto un producto interno. Éste induce a la norma

$$\|x\|_T = \sqrt{\|x\|_1^2 + \|Tx\|_2^2} \qquad \text{Para } x \in D(T) \tag{1.1.4}$$

A esta norma se le llama la norma de la gráfica. Omitiremos los subíndices de las normas cuando sea claro qué norma se está manejando.

Lema 1.3 $T : H_1 \to H_2$ es un operador cerrado si y sólo si $(D(T), \| \cdot \|_T)$ es completo, i.e. $(D(T), \langle \cdot, \cdot \rangle_T)$ es un espacio de Hilbert

Demostración.

Por las definiciones (1,1,2) y (1,1,4), la transformación $\varphi : (D(T), \| \cdot \|_T) \to G(T)$ definida por $\varphi x = (x, Tx)$ es una biyección isométrica. Por lo tanto $(D(T), \| \cdot \|_T)$ es completo si y sólo si $G(T)$ es cerrado ■

Proposición 1.4 Si T es un operador acotado, entonces T es cerrado si y sólo si $D(T)$ es cerrado

Demostración.

Para todo $x \in D(T)$ se tiene

$$\|x\| \leq \|x\|_T = \sqrt{\|x\|^2 + \|Tx\|^2} \leq \sqrt{\|x\|^2(1 + \|T\|^2)} \leq \|x\| \sqrt{1 + \|T\|^2}$$

Entonces (x_n) es una sucesión de Cauchy respecto a la norma de H_1 sí y sólo si lo es respecto a la norma T. Entonces, por el lema anterior, T es cerrado si y sólo si $(D(T), \| \cdot \|_T)$ es completo, y esto pasa si y sólo si $(D(T), \| \cdot \|)$ es completo, si y sólo si $D(T)$ es cerrado ■

Aunque ya habíamos probado una de las implicaciones de la proposición anterior en el párrafo siguiente al Ejemplo 1.1, en la demostración anterior mostrar una de las equivalencias es igual de sencillo que mostrar las dos.

Para concretar las equivalencias que buscamos con el teorema de la gráfica cerrada, necesitamos introducir dos de los conceptos más importantes de este trabajo, y las relaciones que existen entre ellos.

1.2. Cerradurras, operadores adjuntos

1.2.1. Operadores cerrables

La propiedad de ser un operador cerrable es más débil que ser continuo, y es bastante útil pues nos da un operador cerrado que extiende al operador original. En el camino nos encontraremos con varios operados cerrables, y nos serán de gran utilidad las propiedades vistas en este capítulo, sobre todo las desglosadas en el Teorema 1.9.

Para ciertos operadores lineales T, existe el operador cerradura $\overline{T}$ que cumple $T \subseteq \overline{T}$ y que es cerrado, similarmente a como sucede con la cerradura de subconjuntos de espacios métricos. Pero a diferencia de éstos últimos, no todos los operadores lineales tienen cerradura, pues como veremos existen operadores T tales que no existe ningún operador cerrado S que cumple $T \subseteq S$. Este contraste no debe resultar sorpresivo, pues los conceptos considerados son de una naturaleza completamente diferente, aunque los conceptos de análisis matemático sirvieron de inspiración para bautizar a los operadores de distintas clases, y es la cerradura en el espacio métrico $H_1 \oplus H_2$ lo que define a la cerradura de un operador, como se verá a continuación.

Definición 1.4 Decimos que un operador T es cerrable si existe S operador cerrado tal que $T \subseteq S$

Claramente todo operador cerrado es cerrable. Posiblemente de la definición no es muy claro la existencia de operadores que no sean cerrables, pues es fácil encontrar un subespacio de $H_1 \oplus H_2$ que sea cerrado y contenga a $G(T)$. Sin embargo para que un operador no sea cerrable, debe suceder que cada uno de estos subespacios no sea gráfica de ningún operador. Antes de ver un ejemplo de un operador no cerrable, veamos algunas equivalencias de la definición:

Proposición 1.5 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es cerrable
2. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $D(T)$ tal que $(x_n) \to 0$ y $T(x_n) \to y$, entonces $y = 0$
3. La cerradura de $G(T)$ es la gráfica de un operador lineal

Demostración.

$1 \to 3$

Sea S un operador cerrado tal que $T \subseteq S$, entonces $G(T) \subseteq G(S)$, por definición de cerradura de un conjunto, se tiene entonces $\overline{G(T)} \subseteq G(S)$, y como $\overline{G(T)} \leq H_1 \oplus H_2$ se sigue del Lema 1.1 que $\overline{G(T)}$ es la gráfica de un operador.

$3 \to 1$

$\overline{G(T)} = G(S)$ para un operador S, entonces S es cerrado y $T \subseteq S$, i.e. T es cerrable

$2 \to 3$

Sea $(0, y) \in \overline{G(T)}$, si (x_n) es tal que $(x_n, T(x_n)) \to (0, y)$, entonces $y = 0$, y por el Lema 1.1 se tiene 3

3→2

Si (x_n) es como se pide en 2., como $(0, y) \in \overline{G(T)}$ el cual es gráfica de un operador, el mismo lema implica que $y = 0$ ■

Definición 1.5 Dado un operador cerrable T, definimos a la cerradura de T, $\overline{T}$, como el operador cuya gráfica está determinada por $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.

Por su definición a partir de $\overline{G(T)}$, $D(\overline{T})$ está definido como el conjunto de $x \in H_1$ para el cual existe $(x_n) \to x$ sucesión de $D(T)$ tal que $T(x_n) \to y \in H_2$. $\overline{T}(x) = y$ y $\overline{T}$ está bien definida porque $\overline{G(T)}$ es gráfica de un operador. Este operador claramente es cerrado y cumple que $T \subseteq \overline{T}$, y también es el mínimo operador cerrado que cumple esta contención, pues cualquier subespacio cerrado que contenga a $G(T)$ debe contener a $\overline{G(T)}$

Corolario 1.6 Todo operador continuo es cerrable

Demostración.

Si $(x_n) \to 0$ es una sucesión de elementos en $D(T)$, entonces $T(x_n) \to T(0) = 0$, y T es cerrable por la Proposición 1.5 ■

De hecho, la Proposición 1.5 descubre a la cerrabilidad como una debilitación de la continuidad en el siguiente sentido: sea (x_n) una sucesión de elementos en $D(T)$ tal que $(x_n) \to 0_{H_1}$. Si el operador es continuo, implica que $T(x_n) \to 0_{H_2}$, es decir, la continuidad en el 0_{H_1}, que en operadores lineales es equivalente a ser continua en todo el dominio. Sin embargo, si T es cerrable, no podemos deducir que $T(x_n) \to 0_{H_2}$, necesitamos pedir además que la sucesión $T(x_n)$ sea convergente para que la sucesión converja a 0_{H_2}. Ser cerrable es pedir que si $T(x_n)$ converge, lo haga a 0_{H_2}, como lo hacen los operadores continuos.

Veamos dos ejemplos de operadores no cerrables, uno muy sencillo, y otro que recordaremos más adelante. En los dos ejemplos, se ve que $(0, e) \in \overline{G(T)}$ con $e \neq 0$, es decir, $\overline{G(T)}$ no es la gráfica de un operador lineal. Recordemos que un funcional de H es un operador $f : H \to K$ definido en todo H, donde K es el campo del espacio de Hilbert

Ejemplo 1.1

1. Sea H_1 un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un conjunto ortonormal. Considera a $D =< \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} >$ el subespacio generado por el conjunto ortonormal. Construimos un operador no cerrable para D. Consideremos la sucesión $(\frac{x_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ y sea $e \in D, e \neq 0_{H_1}$. Entonces definimos al operador $T : D \to D$ a partir de la base, como $T(x_n) = ne$. Ahora como $\|\frac{x_n}{n}\| = \frac{1}{n}$, se tiene que $\frac{x_n}{n} \to 0$. También $T(\frac{x_n}{n}) = \frac{T(x_n)}{n} = \frac{ne}{n} = e$, por lo tanto $T(\frac{x_n}{n}) \to e \neq 0$. Entonces por la Proposición 1.5 se tiene que T no es cerrable.

2. Sea H_1 un espacio de Hilbert de dimensión infinita (por ejemplo, $L^2([0, 1])$) y sea $D \subseteq H_1$ un subespacio de dimensión infinita. Toma a $f : D \to \mathbb{C}$

un funcional lineal de D no acotado [2] y sea $e \in H_1 \setminus 0_{H_1}$. Definimos a $T : H_1 \to H_1$ con $D(T) = D$ como $T(x) = f(x)e$. Veamos que esta T no es cerrable: Como f no es acotada, existe una sucesión (x_n) en D tal que $(x_n) \to 0$ y $(f(x_n))$ no converge a 0. Esto quiere decir que existe una $k > 0$ tal que hay una subsucesión (y_n) de (x_n) que cumple $|f(y_n)| > k$ para toda n Tomando a $z_n = f(y_n)^{-1}y_n$, como $|f(y_n)^{-1}| < k^{-1}$ tenemos que $z_n \to 0$, y $T(z_n) = f(y_n)^{-1}f(y_n)e = e \neq 0$. Por lo que la Proposición 1.5 implica que T no es cerrable.

1.2.2. Operadores adjuntos

Consideremos el caso de dimensión finita, es decir, si $T : V \to W$, con $dim(V) = n$, $dim(W) = m$ y $D(T) = V$, donde V y W son espacios con producto interno. Es un teorema elemental de álgebra lineal que para todo funcional lineal $f : V \to K$ donde K es el campo del espacio V, existe un $y_f \in V$ tal que $f(x) = \langle x, y_f\rangle$ para todo $x \in V$. Usando este hecho, se prueba también que para toda transformación lineal $T : (V, \langle,\rangle_V) \to (W, \langle,\rangle)$, existe una transformación lineal $T^* : (W, \langle,\rangle) \to (V, \langle,\rangle)$ (con $D(T^*) = W$) tal que $\langle x, T^*(y)\rangle_V = \langle T(x), y\rangle_W$, a esta transformación se le llama el adjunto de T. Para pruebas de estos sencillos hechos, junto con otras características de la transformación descrita, ver [Fri03] páginas 357-360.

Para espacios de Hilbert, el primer teorema es cierto también, y se le conoce como el teorema de representación de Riesz. Es decir, para un espacio de Hilbert H, f es un funcional acotado de H si y sólo si $\exists y \in H$ tal que $f(x) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in H$, con $\|y\| = \|f\|$ (Ver apéndice)

En los espacios de Hilbert, dada $T : H_1 \to H_2$, a partir del producto interno de cada uno de los espacios de Hilbert, se define al operador adjunto $T^* : H_2 \to H_1$, pero a diferencia del caso de dimensión finita, donde siempre se puede definir a tal operador, aquí se debe de pedir que $D(T)$ sea denso en H_1. La necesidad de esta condición se verá cuando verifiquemos que T^* es una función, sin embargo, hay que aclarar algunos aspectos sobre esta condición. Es importante especificar el espacio en el que se está trabajando, pues operadores con el mismo dominio y regla de correspondencia, tendrán operadores adjuntos o no si se ven como $T : \overline{D(T)} \to H_2$ ó $T : H_1 \to H_2$. Es decir, todo operador lineal tiene un operador adjunto $T^* : H_2 \to \overline{D(T)}$. Si $D(T)$ es cerrado, es un espacio de Hilbert, entonces aunque no sea denso, T tiene operador adjunto pues se puede ver como un operador $T : D(T) \to H_2$, pero las valuaciones de T^* caen en $D(T)$, no en todo H_1.

Sea $T : H_1 \to H_2$ un operador lineal tal que $\overline{D(T)} = H_1$. Consideremos al conjunto

$$D^* = \{y \in H_2 \mid \exists z_y \in H_1 \text{ tal que } \langle x, z_y\rangle_1 = \langle Tx, y\rangle_2 \text{ para todo } x \in D(T)\}$$

[2]Por ejemplo, sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto ortonormal de D, que existe por ser D de dimensión infinita, y define $f(e_n) = n$. En el espacio de funciones $L_2([0,1])$ es más sencillo considerar, por ejemplo, si $a \in \mathbb{R}$ fijo, para todo $g \in D$, $f(g) = g(a)$

Y definimos a la relación $T^* = \{(y, z_y) \mid y \in D^*\}$ viéndola como un conjunto de pares ordenados. Veamos primero que T^* es una función, es decir, que si (y, w) y (y, z) están en T^*, entonces $w = z$. Se tiene que $\langle x, w\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$ para todo $x \in D(T)$, por lo que $\langle x, w-z\rangle = 0$ para todo $x \in D(T)$. Como $D(T)$ es denso, y la función $\langle *, w - z\rangle$ es continua (ver apéndice) se tiene que $w - z \in H_1^{\perp}$, en particular $\|w - z\| = 0$, i.e. $w = z$.

Por lo tanto, con un ligero abuso de notación, $T^* : H_2 \to H_1$ con $D(T^*) = D^*$ y $T^*y = z_y$ es una función. Si $y, w \in D(T^*)$, como $\langle x, z_y + \lambda z_w\rangle = \langle x, z_y\rangle + \overline{\lambda}\langle x, z_w\rangle = \langle Tx, y\rangle + \overline{\lambda}\langle Tx, w\rangle = \langle Tx, y + \lambda w\rangle$, se tiene que $y + \lambda w \in D(T^*)$ y $T^*(y + \lambda w) = z_y + \lambda z_w$. Es decir, T^* es un operador lineal.

Definición 1.7 Llamamos a T^* el operador adjunto de T.

Por definición, estos operadores cumplen la igualdad $\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle$ para todo $x \in D(T)$, $y \in D(T^*)$. En el caso en el que $H_1 = H_2$, puede ser que T también cumpla esta igualdad, es decir, para todo $x, y \in D(T)$, $\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle$. En este caso, por definición de $D(T^*)$, se tendría que $y \in D(T^*)$ y $T^*y = Ty$, es decir, $T \subseteq T^*$.

Definición 1.8 Decimos que T es simétrico si $T \subseteq T^*$. Si $T = T^*$, entonces decimos que T es autoadjunto

La igualdad $T = T^*$ significa que $D(T)$ es el conjunto de todos los elementos $y \in H_1$ para los cuales existe un elemento $z_y \in H_1$ tal que $\langle x, z_y\rangle = \langle Tx, y\rangle$ para todo $x \in D(T)$.

Que T sea simétrico equivale a pedirle a T que tenga dominio denso y que cumpla

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \qquad \text{para todo } x, y \in D(T) \tag{1.2.1}$$

A un operador T se le llama Hermitiano si cumple (1.2.1), independientemente de si $D(T)$ es denso o no. Aunque no trabajaremos con operadores Hermitianos, lo mencionamos para hacer notar que, si $T \in \mathbb{B}(H)$, entonces es equivalente pedir que T sea Hermitiano, simétrico o autoadjunto.

Los operadores simétricos y autoadjuntos son actores centrales de este trabajo. Muchos operadores con los que trabajamos resultan ser simétricos, y como lo hemos expresado en la introducción, nos interesa obtener las extensiones autoadjuntas de estos operadores simétricos. Estudiaremos más a fondo ambos tipos de operadores en el siguiente capítulo.

Regresando al operador adjunto T^*, $D(T^*)$ es en general un conjunto difícil de determinar por su definición. El único elemento que podemos asegurar que está en D^* es 0_2, y en efecto hay algunos operadores T para los cuales $D(T^*) = \{0_{H_2}\}$ (el lector interesado en un ejemplo puede revisarlo en [Wei80] página 69, ejemplo 3), aunque como veremos, los operadores cerrables con dominio denso, que abarcan gran parte de los operadores de nuestro interés, cumplen que $D(T^*)$ es denso en H_2. El teorema de representación de Riesz puede ayudar a determinar los elementos de $D(T^*)$, puesto que:

$$y \in D(T^*) \iff \langle Tx, y\rangle = \langle x, u\rangle \text{ para algún } u \in H_1 \iff \tag{1.2.2}$$
$$\text{la función } P : x \to \langle Tx, y\rangle \text{ es un funcional lineal continuo}$$

Ejemplo 1.2 Con las mismas hipótesis del Ejemplo 1.1 inciso 2, supongamos que $D(T)$ es denso en H_1. Queremos determinar $D(T^*)$, es decir, todos los $y \in H_1$ para los cuales el funcional $P : x \to \langle Tx, y\rangle = f(x)\langle e, y\rangle$ es continuo. Si $\langle e, y\rangle \neq 0$, entonces P es un múltiplo de f, que es no continuo, por lo tanto P no es continuo. Si $\langle e, y\rangle = 0$, $P = 0$, donde el 0 se entiende como la función que manda todos los elementos al 0_K, por lo tanto P es continuo. Por lo tanto, $D(T^*) = e^\perp \doteq \{y \in H_1 \mid \langle e, y\rangle = 0\}$. Para todo $x \in D(T),\ y \in D(T^*)$, $\langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle = f(x)\langle e, y\rangle = 0$, y como $D(T)$ es denso, se tiene que $\langle x, T^*y\rangle = 0$ para todo $x \in H_1,\ y \in D(T^*)$, por lo tanto se tiene que $T^*y = 0$ para toda $y \in D(T^*)$.

Veamos las propiedades esenciales del operado adjunto,

Proposición 1.7 Sean S y T operadores lineales de H_1 a H_2 tales que $D(T),\ D(S)$ son densos en H_1, entonces se cumple lo siguiente:

1. T^* es un operador cerrado
2. $R(T)^\perp = N(T^*)$
3. Si $D(T^*)$ es denso en H_2, entonces $T \subseteq T^{**}$, donde $T^* = (T^*)^*$
4. $T \subseteq S \implies S^* \subseteq T^*$
5. $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*,\ \lambda \in \mathbb{C}$
6. Si $D(T+S)$ es denso en H_1, entonces $(T+S)^* \supseteq T^* + S^*$
7. Si S es continuo, con $D(S) = H_1$, entonces $(T+S)^* = T^* + S^*$

Demostración.

1.

Sea (y_n) una sucesión en $D(T^*)$ tal que $(y_n) \to y \in H_2$, y $(T^*y_n) \to z$. Nos basta probar que $y \in D(T^*)$ y $T^*y = z$. Es decir, queremos la igualdad $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$ para todo $x \in D(T)$, pero por la continuidad del producto interior (ver Apéndice), se tiene que si $(y_n) \to y$, $\langle Tx, y_n\rangle \to \langle Tx, y\rangle$ y $\langle x, T^*y_n\rangle \to \langle x, z\rangle$. pero estas dos sucesiones son la misma pues $\langle Tx, y_n\rangle = \langle x, T^*y_n\rangle$, entonces deben de converger al mismo límite, es decir, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$

2.

$y \in R(T)^\perp \iff \langle Tx, y\rangle = \langle x, 0\rangle = 0\ \forall x \in D(T) \iff y \in D(T^*),\ T^*y = 0$

3.

Sea $x \in D(T)$, entonces para todo $y \in D(T^*)$, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \implies \langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \implies x \in D(T^{**}),\ T^{**}x = Tx$

4.

Si $y \in D(S^*)$, entonces para todo $x \in D(T)$, $\langle Tx, y\rangle = \langle Sx, y\rangle = \langle x, S^*y\rangle$, entonces $y \in D(T^*)$ y $T^*y = S^*y$

5.

Para todo $x \in D(T)$, $y \in D(T^*)$, tenemos que $\langle x, \overline{\lambda}T^*y\rangle = \lambda\langle x, T^*y\rangle = \lambda\langle Tx, y\rangle = \langle \lambda Tx, y\rangle$, entonces $y \in D((\lambda T)^*)$ y $(\lambda T)^*y = \overline{\lambda}T^*y$. Con esto probamos que $(\lambda T)^* \supseteq \overline{\lambda}T^*$, pero si $y \in D((\lambda T)^*)$, entonces $\langle \lambda Tx, y\rangle = \langle x, (\lambda T)^*y\rangle \implies \langle Tx, y\rangle = \langle x, \frac{(\lambda T)^*}{\overline{\lambda}}y\rangle \implies y \in D(T^*)$, así que la demostración anterior prueba en efecto $(\lambda T)^* = \overline{\lambda}T^*$

6.

Si $y \in D(T^*) \cap D(S^*) = D(T^* + S^*)$, $x \in D(T + S)$. entonces $\langle x, (T^* + S^*)y\rangle = \langle x, T^*y + S^*y\rangle$, y como $D(T+S)$ es denso, usando la propiedad de que el único vector ortogonal a todos es el cero, entonces $(T^*+S^*)y - T^*y - S^*y = 0$, que es lo que buscábamos

7.

Por el inciso anterior basta probar que $D((T+S)^*) \subseteq D(T^*+S^*)$. Notemos que como S es acotada, el inciso 5 junto con la desigualdad de Cauchy nos garantiza que $D(S^*) = H_2$, con lo que tenemos $D(T^* + S^*) = D(T^*)$. También $D(S+T) = D(T)$ y $D(T^* + S^*) = D(T^*)$. Sea $y \in D((T+S)^*)$, $x \in D(T+S)$. $\langle Tx, y\rangle = \langle (T+S)x, y\rangle - \langle Sx, y\rangle = \langle x, (T+S)^*y - S^*y\rangle$, por lo que $y \in D(T^*) = D(T^* + S^*)$. ■

Por el inciso 1 tenemos que todo operador autoadjunto es cerrado. Si $D(T^*)$ es denso, el adjunto de T^* se puede definir, y cuando T^{**} existe, es una extensión de T. De hecho, veremos en el próximo teorema que $\overline{T} = T^{**}$.

Con el propósito de obtener dicho teorema, que es un conjunto de propiedades útiles de las relaciones entre todos los conceptos que hemos visto hasta ahora, utilizaremos el "método de la gráfica" que consiste en tomar dos operadores auxiliares U y V con dominio $H_1 \oplus H_2$ y contradominio $H_2 \oplus H_1$ definidos por

$$U(x, y) = (y, x),\ V(x, y) = (-y, x)$$

Por cómo definimos el producto interno en $H_1 \oplus H_2$, estas transformaciones son unitarias, es decir, $\langle U(x), U(y)\rangle = \langle x, y\rangle = \langle V(x), V(y)\rangle$ (note que en este caso, x y y representan pares ordenados de $H_1 \oplus H_2$) y son biyectivas. Estos hechos implican que para todo $S \leq H_1 \oplus H_2$, se tiene que

$$V(S)^{\perp} = V(S^{\perp})$$

pues si $y = V(x)$ con $x \in H_1 \oplus H_2$, $y \in V(S)^{\perp} \iff 0 = \langle V(x), V(s)\rangle = \langle x, s\rangle\ \forall s \in S \iff x \in S^{\perp}$ y $y \in V(S^{\perp})$. Esto nos da flexibilidad para mover el símbolo de perpendicular según nos convenga, y aplica para toda transformación unitaria, en particular también para $-V^{-1}$. También es directo notar que si $T : H_1 \to H_2$, y $S \leq H_1 \oplus H_2$, pasa que

$$U(G(T)) = G(T^{-1})$$

$$U(\overline{S}) = \overline{U(S)}$$

Usaremos la próxima identidad, que prueba de paso una vez más que los operadores adjuntos son cerrados, usando el hecho de que todos los complementos ortogonales de un conjunto son subespacios cerrados (Ver apéndice)

Lema 1.8 Para todo $T : H_1 \to H_2$ con $\overline{D(T)} = H_1$, tenemos que $G(T^*) = V(G(T))^\perp$

Sean $(y, T^*y) \in G(T^*)$ y $(-Tx, x) \in V(G(T))$, entonces $\langle (y, T^*y), (-Tx, x)\rangle = \langle T^*y, x\rangle - \langle y, Tx\rangle = \langle y, Tx\rangle - \langle y, Tx\rangle = 0$. Por lo tanto tenemos que $(y, T^*y) \in V(G(T))^\perp$. Por otro lado, si $(z, y) \in V(G(T))^\perp$, entonces $0 = \langle (z, y), (-Tx, x)\rangle = \langle y, x\rangle - \langle z, Tx\rangle \implies \langle y, x\rangle = \langle z, Tx\rangle \implies z \in D(T^*)$ y $T^*z = y$. ■

Si el operador T cuenta con las condiciones necesarias para que la combinación de adjuntos e inversas tenga sentido, una demostración análoga puede probar que: $G(T^{**}) = -V^{-1}(G(T^*))^\perp$ y $G((T^{-1})^*) = (-V^{-1})(G(T^{-1})^\perp)$

Teorema 1.9 Sea $T : H_1 \to H_2$ un operador con $\overline{D(T)} = H_1$

1. T es cerrable si y sólo si $D(T^*)$ es denso en H_2
2. Si T es cerrable, entonces $(\overline{T})^* = T^*$ y $\overline{T} = T^{**}$
3. T es cerrado si y sólo si $T = T^{**}$
4. Supongamos que $N(T) = \{0\}$ y $R(T)$ es denso en H_2, entonces T^* es invertible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
5. Si T es cerrable y $N(T) = \{0\}$, entonces T^{-1} es cerrable si y sólo si $N(\overline{T}) = \{0\}$. Si esto pasa, se tiene que $(\overline{T})^{-1} = \overline{(T^{-1})}$
6. Si T es invertible, entonces T es cerrado si y sólo si T^{-1} es cerrado

Demostración.

1.

Supongamos que T es cerrable. Sea $x \in D(T^*)^\perp$, si probamos que $x = 0$, tenemos entonces que $D(T^*)^\perp = \{0\}$, lo cual implica $\overline{D(T^*)} = D(T^*)^{\perp\perp} = H_2$, que es lo que buscamos (la primera igualdad es una propiedad del ortogonal de un subespacio ortogonal que se puede verificar en el apéndice). Como $x \in D(T^*)^\perp$, $(-x, 0) \in G(T^*)^\perp$, $(0, x) = V^{-1}(-x, 0) \in V^{-1}(G(T^*)^\perp) = V^{-1}(V(G(T))^{\perp\perp}) = V^{-1}(V(G(T)^{\perp\perp})) = G(T)^{\perp\perp} = \overline{G(T)}$, donde la segunda igualdad es por el Lema 1.8, y la tercera es porque V es unitaria. Como $\overline{G(T)}$ es la gráfica de un operador, y $(0, x) \in \overline{G(T)}$, el Lema 1.1 implica que $x = 0$

Inversamente, si $D(T^*)$ es denso, sea $(0, x) \in \overline{G(T)}$, como $(0, x) \in V^{-1}(G(T^*)^\perp)$, entonces $(-x, 0) \in G(T^*)^\perp$, i.e. $x \in D(T^*)^\perp$, y puesto que $\langle x, \cdot\rangle$ es una función continua (Ver apéndice) $x \in \overline{D(T^*)}^\perp = H_2^\perp = \{0\}$

2.

Usando el Lema 1.8, para probar que $T^* = \overline{T}^*$, veamos que las gráficas de T^* y $\overline{T}^*$ coinciden. $G(\overline{T}^*) = V(G(\overline{T}))^\perp = V(\overline{G(T)})^\perp = V(\overline{G(T)}^\perp) = V(G(T)^\perp) = G(T^*)$. De la misma forma veamos que $G(\overline{T}) = G(T^{**})$:

$$
\begin{aligned}
G(T^{**}) = -V^{-1}(G(T^*))^{\perp} &= -V^{-1}(V(G(T))^{\perp})^{\perp} \\
&= -V^{-1}V(G(T)^{\perp\perp}) = -\overline{G(T)} = \overline{G(T)} = G(\overline{T})
\end{aligned}
$$

3.

Por el inciso 2, T es cerrado $\iff T = \overline{T} = T^{**}$

4.

Primero, verifiquemos que los operadores en cuestión existen. Como $R(T)$ es denso, la Proposición 1.7 inciso 2, implica que $\{0\} = \overline{R(T)}^{\perp} = R(T)^{\perp} = N(T^*)$, por lo tanto T^* es invertible. También $R(T) = D(T^{-1})$ es denso, por lo que T^{-1} tiene operador adjunto $(T^{-1})^* : H_1 \to H_2$. Veamos que $G((T^*)^{-1}) = G((T^{-1})^*)$:

$$
\begin{aligned}
&G((T^*)^{-1}) = U^{-1}(G(T^*)) = U^{-1}(V(G(T))^{\perp}) = U^{-1}V(G(T)^{\perp}) \\
&= V^{-1}U(G(T)^{\perp}) = V^{-1}(U(G(T))^{\perp}) = V^{-1}(G(T^{-1})^{\perp}) = -V^{-1}(G(T^{-1})^{\perp}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = G((T^{-1})^*)
\end{aligned}
$$

5.

$(0.x) \in \overline{G(T^{-1})} = \overline{U(G(T))} = U(\overline{G(T)}) = U(G(\overline{T}))$, si y sólo si $(x, 0) \in G(\overline{T})$, i.e. $x \in N(\overline{T})$, por lo que el Lema 1.1 y la Proposición 1.5 y implican que T^{-1} es cerrable si y sólo si $N(T^{-1}) = \{0\}$.

En caso de que T^{-1} sea cerrable, tenemos que $G(\overline{T^{-1}}) = \overline{G(T^{-1})} = \overline{UG(T)} = UG(\overline{T}) = G((\overline{T})^{-1})$, de donde se obtiene el resultado.

6.

El resultado se sigue del hecho que U saca cerraduras, $T = \overline{T}$ si T es cerrado y $U(G(T)) = G(T^{-1})$, $G(T) = U^{-1}(G(T^{-1}))$ ■

Veamos ahora algunos corolarios del teorema anterior y de las proposiciones vistas.

Sea $T : H_1 \to H_2$ un operador cerrable con $\overline{D(T)} = H_1$. Con los resultados obtenidos, podemos ver a los espacios H_1 y H_2 como suma directa de espacios conocidos, y también nos da una igualdad útil para los siguientes capítulos:

Dado un subespacio cerrado $S \leq H$ de un espacio de Hilbert, entonces $H = S \oplus S^{\perp}$ (ver apéndice). Por el teorema anterior, inciso 2, tenemos que $\overline{T} = T^{**}$, y aplicando la Proposición 1.7 tanto a T como a T^* tenemos que

$$N(T^*) = R(T)^{\perp} \qquad N(\overline{T}) = R(T^*)^{\perp} \tag{1.2.3}$$

$$H_2 = N(T^*) \oplus \overline{R(T)} \qquad H_1 = N(\overline{T}) \oplus \overline{R(T^*)}$$

Corolario 1.10 Si T es un operador autoadjunto tal que $N(T) = \{0\}$, entonces T^{-1} es también autoadjunto

Demostración.

Por la Proposición 1.7 inciso 2 tenemos que $R(T)^{\perp} = N(T) = \{0\}$, entonces $R(T)$ es denso, así que aplicando el inciso 4 del Teorema 1.9 tenemos que $T^{-1} = (T^{-1})^{*}$ ■

Veamos ahora el teorema de la gráfica cerrada. Ya tenemos todas las herramientas necesarias para su prueba, a excepción del teorema de acotación uniforme, que incluimos en el apéndice con una prueba bastante elemental, pero demasiado larga para incluirla en esta sección.

1.2.3. Teorema de la gráfica cerrada

Teorema 1.11 (De la gráfica cerrada) Sea $T : H_1 \to H_2$ un operador cerrado con $D(T)$ cerrado, entonces T es acotada.

Demostración.

Podemos asumir que $D(T) = \overline{D(T)} = H_1$, pues como $D(T)$ es un espacio de Hilbert, T se puede ver como un operador $T : D(T) \to H_2$ (sin alterar sus características), por lo que T tiene adjunto $T^{*} : H_2 \to D(T)$. Usando la desigualdad de Cauchy, dado $g \in D(T^{*})$ con $\|g\| \leq 1$, para toda $f \in H_1$ tenemos que $|\langle T^{*}g, f\rangle| = |\langle g, Tf\rangle| \leq \|Tf\|$. Para el conjunto de funcionales $L = \{L_g \mid g \in D(T^{*}), \|g\| \leq 1\}$ definidos por $L_g f = \langle T^{*}g, f\rangle$, tenemos que $|L_g(f)| \leq \|Tf\|$ para todo $f \in H_1$, por lo que L es puntualmente acotado (es decir, que para todo $f \in H_1$, existe $c = \|Tf\|$ tal que $L_g f \leq \|Tf\|$ para todo $L_g \in L$). Usando el Teorema de Acotación Uniforme (ver apéndice) tenemos que existe $C \geq 0$ tal que $\|T^{*}g\| = \|L_g\| \leq C$ para todo $g \in D(T^{*})$ tal que $\|g\| \leq 1$. La primera igualdad es una característica de los funcionales definidos a partir de productos interiores, se puede verificar en el apéndice. Esto implica que T^{*} es acotado, con $\|T^{*}\| \leq C$. También es cerrado como lo señala la Proposición 1.7 inciso 1. Por la Proposición 1.4 tenemos que $D(T^{*})$ es cerrado. Dado que T es cerrado, es también cerrable, por lo que Teorema 1.9 inciso 1 garantiza que $D(T^{*})$ es denso, por lo que $D(T^{*}) = \overline{D(T^{*})} = H_2$, en resumen, T^{*} es un transformación acotada, cerrada con $D(T^{*}) = H_2$, aplicando el mismo proceso de esta demostración a T^{*} en lugar de T, obtenemos que T^{**} es una transformación acotada, cerrada con $D(T^{*}) = H_1$, pero por el Teorema 1.9 inciso 2 tenemos que $T = \overline{T} = T^{**}$. ■

El Teorema de la Gráfica Cerrada y la Proposición 1.4 nos dan el siguiente resultado

Corolario 1.12 Sea $T : H_1 \to H_2$ operador lineal, entonces de las siguientes tres condiciones, cualesquiera dos implica la tercera.

- T es cerrado
- $D(T)$ es cerrado
- T es acotado

Este teorema le da sentido a la definición de operadores $T : H_1 \to H_2$ con $D(T) \neq H_1$, puesto que gran parte de los operadores en la práctica son no acotados y cerrados, por lo que su dominio debe de ser forzosamente no cerrado (!) y, por lo tanto diferente de H_1. Si $D(T) = H_1$ entonces $D(T)$ es cerrado, y por lo tanto T es acotado sí y sólo si es cerrado, es decir, en el contexto de operadores con $D(T) = H_1$, la definición de cerrado es simplemente una equivalencia a ser acotado.

Corolario 1.13 si $T : H_1 \to H_2$ es un operador cerrable tal que $D(T) = H_1$, entonces T es acotado.

Demostración.

$D(\overline{T}) = H_1$, por lo que $T = \overline{T}$. ■

Esto implica que, en el contexto de $D(T) = H$, las propiedades de ser acotado, cerrado o cerrable son todas equivalentes.

Corolario 1.14 Si $T \in \mathbb{B}(H)$, entonces $T^* \in \mathbb{B}(H)$ con $\|T\| = \|T^*\|$.

Demostración.

Por el Corolario 1.12 T es cerrado. T^* es cerrado por la Proposición 1.7 inciso 1, y también $\overline{D(T^*)} = H$ por el Teorema 1.9, inciso 1. Si probamos que T^* es acotada, entonces por el Corolario 1.12 tenemos que $D(T^*) = H$ y, por lo tanto, $T^* \in \mathbb{B}(H)$. Sea $y \in D(T^*)$, $\|y\| = 1$. Tenemos que

$$\|T^*y\|^2 = \langle T^*y, T^*y\rangle = \langle y, T(T^*y)\rangle \leq \|y\|\|T(T^*y)\| \leq \|T\|\|T^*y\|$$

Por lo tanto $\|T^*y\| \leq \|T\|$ y entonces T^* es acotado con $\|T^*\| \leq \|T\|$, por lo que $T^* \in \mathbb{B}(H)$ La misma demostración sustituyendo a T por T^* nos da la desigualdad $\|T^{**}\| \leq \|T^*\|$ (T^{**} existe porque T es cerrable), pero la Proposición 1.9 inciso 3 nos dice que $T = T^{**}$, por lo que $\|T^*\| = \|T\|$ ■

Bibliografía escencial del capítulo 1

[BN00] Capítulo 16.
[Wei80] Capítulos 4 y 5.

Capítulo 2

El espectro, operadores autoadjuntos

En el caso de dimensión finita, cuando tratábamos con un operador $T : X \to X$, con $dim(X) = n$, dado $x \in D(T)$, $x \neq 0$ y λ un escalar, decíamos que x es un eigenvector respecto a λ si $Tx = \lambda x$, lo cual pasa si y sólo si $(T - \lambda)x = 0$, si y sólo si $(T - \lambda)$ no es inyectiva, si y sólo si $(T - \lambda)$ no tiene inverso. Al correspondiente λ se le llama eigenvalor. También uno puede probar que T tiene a lo más n eigenvalores. Con estas definiciones, uno puede categorizar a los elementos del campo K (del espacio vectorial X) respecto a si son eigenvalores o no, es decir, si $(T - \lambda)^{-1}$ existe o no. Si E es el conjunto de los eigenvalores, esta simple división del campo es $K = E \cup E^c$ donde $|E| \leq n$. Si tenemos la suerte de que nuestro operador es normal, es decir, $TT^* = T^*T$ (trivialmente condición más débil que ser autoadjunto) el poderoso teorema espectral nos permite escribir a nuestro operador T como una combinación lineal de proyecciones ortogonales, y a X como una suma directa de eigenespacios ortogonales entre sí. Éstas descripciones nos permiten, comprender mejor el funcionamiento del operador y manipularlo con más facilidad. Discutimos más a fondo sobre los teoremas espectrales en el capítulo 4 del presente trabajo. En el caso de dimensión finita, los eigenvalores son los que determinan la descomposición, y es un resultado que, aunque poderoso, no requiere de muchas herramientas para probar. Suele estar dentro de los resultados vistos en un primer curso de álgebra lineal.

Sin embargo, si tenemos que X es de dimensión infinita, todo este análisis se vuelve mucho más complejo, a tal grado que se considera una rama particular de estudio dentro del análisis funcional, llamada teoría espectral.

Hay muchos factores que sugieren que en el caso de dimensión infinita, la complejidad de este análisis será mayor. Para empezar, hay operadores para los que existen una cantidad infinita de eigenvalores, tantos como el cardinal de los reales. Esto insinúa que la descomposición de un operador puede no ser tan sencilla como lo es en el caso de dimensión infinita, y en efecto es así. Resultará indispensable categorizar a los elementos del campo K en más subconjuntos, no solamente respecto a si $(T-\lambda)^{-1}$ existe o no, sino también considerar como $R(T-\lambda) = D(T-\lambda)^{-1}$ está definido en X.

El análisis nos genera teoremas de descomposición espectrales pero con mucha más diversidad que en el caso finito dimensional: hay uno para operadores acotados normales, para acotados autoadjuntos, para no-acotados normales, para compactos. Hay por lo menos siete diferentes teoremas de descomposición espectral, a diferencia del caso finito dimensional, donde sólo existen dos (normal y autoadjunto), que son bastante similares entre sí.

En este capítulo introducimos los conceptos básicos de la teoría espectral, y veremos la propiedades espectrales de los operadores cerrados en general, así como herramientas que nos servirán para criterios de autoadjuntidad. También veremos más a fondo a los operadores simétricos y autoadjuntos, con sus correspondientes propiedades espectrales.

Durante todo este capítulo, siempre que nos refiramos a un operador T en un espacio de Hilbert H, mientras que no se especifique lo contrario, estamos suponiendo que el espacio de Hilbert es complejo, éstos son los espacios de Hilbert en los que el estudio del espectro es interesante.

2.1. Puntos de regularidad y números de deficiencia

Definición 2.1 Decimos que λ es un punto regular de T si existe $c_\lambda > 0$ tal que

$$\|(T-\lambda)x\| \geq c_\lambda \|x\| \qquad \text{para todo } x \in D(T) \tag{2.1.1}$$

Denotamos al conjunto de puntos regulares como $\pi(T)$, y lo llamamos el dominio regular. Notemos que esta desigualdad es opuesta a la que se necesitaría para ver que $T-\lambda$ es acotado.

Recordemos que la dimensión de $S \leq H$ se define como la cardinalidad de una base ortonormal de S

Definición 2.2 Para todo $\lambda \in \pi(T)$ llamamos a $R(T-\lambda)^\perp$ el espacio de deficiencia de T en λ y a su dimensión $d_\lambda(T) \equiv dim R(T-\lambda)^\perp$ el número de deficiencia de T en λ.

Las definiciones anteriores juegan un papel muy importante en la teoría de extensiones autoadjuntas que desarrollamos en el capítulo 3. Veamos algunas propiedades de estos conceptos. En algunos libros, definen como índice de deficiencia lo que nosotros definimos como número de deficiencia, pero nosotros reservaremos ese término para cuando consideremos operadores simétricos

Proposición 2.1 Para T un operador lineal en H, $\lambda \in \mathbb{C}$, se cumple lo siguiente

1. $\lambda \in \pi(T)$ si y sólo si $(T-\lambda)^{-1}$ existe y es acotado, y la igualdad (2.1.1) se cumple con $c_\lambda = \|(T-\lambda)^{-1}\|^{-1}$

2. Si $\lambda_0 \in \pi(T)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda - \lambda_0| < c_{\lambda_0}$, donde c_{λ_0} es un real que cumple la desigualdad (2.1.1) para λ_0, entonces $\lambda \in \pi(T)$. Es decir que $\pi(T)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$.

3. Si T es cerrable, entonces $\pi(\overline{T}) = \pi(T)$, y para todo $\lambda \in \pi(T)$, $R(\overline{T}-\lambda) = \overline{R(T-\lambda)}$ y $d_\lambda(\overline{T}) = d_\lambda(T)$

4. Si T es cerrado, y $\lambda \in \pi(T)$, entonces $R(T-\lambda)$ es un subespacio cerrado de H

Demostración.

1.

Sea $\lambda \in \pi(T)$, entonces por (2.1.1) tenemos que $(T-\lambda)$ es un operador inyectivo, es decir, $(T-\lambda)^{-1}$ existe. Ahora para $y \in D((T-\lambda)^{-1}) = R(T-\lambda)$, tenemos que $y = (T-\lambda)x$, entonces $\|(T-\lambda)^{-1}y\| = \|x\| \leq c_\lambda^{-1}\|(T-\lambda)x\| = c_\lambda^{-1}\|y\|$, donde la desigualdad es gracias a (2.1.1). Por lo tanto $(T-\lambda)^{-1}$es un operador lineal acotado.

Ahora, si $T-\lambda$ tiene un inverso acotado, tomando de nuevo a $y \in D((T-\lambda)^{-1}) = R(T-\lambda)$, con $y = (T-\lambda)x$, tenemos que $\|x\| = \|(T-\lambda)^{-1}y\| \leq \|(T-\lambda)^{-1}\|\|y\| = \|(T-\lambda)^{-1}\|\|(T-\lambda)x\|$ por lo que se cumple (2.1.1) con $\|(T-\lambda)^{-1}\|^{-1}$ y $\lambda \in \pi(T)$

2.

Sean λ, λ_0 y c_{λ_0} como en las hipótesis, $x \in D(T)$ entonces $\|T-\lambda x\| = \|(T-\lambda_0)x + (\lambda_0-\lambda)x\| \geq \|(T-\lambda_0)x\| - \|(\lambda_0-\lambda)x\| \geq [c_{\lambda_0} - (\lambda_0-\lambda)]\|x\|$ por lo que $\lambda \in \pi(T)$

3.

Claramente $\pi(\overline{T}) \subseteq \pi(T)$ directo de (2.1.1). Ahora si $\lambda \in \pi(T)$, $x \in D(\overline{T})$, entonces por la explicación dada después de la Definición 1.5, tenemos que existe (x_n) sucesión de $D(T)$ tal que $(x_n) \to x$, $Tx_n \to \overline{T}x$, como $\|(\overline{T}-\lambda)x_n\| = \|(T-\lambda)x_n\| \geq c_\lambda\|x_n\|$ para todo n, tenemos que $\|(\overline{T}-\lambda)x\| \geq c_\lambda\|x\|$, por lo que $\lambda \in \pi(\overline{T})$.

Veamos ahora que $R(\overline{T}-\lambda) = \overline{R(T-\lambda)}$. Sea $y \in \overline{R(T-\lambda)}$, entonces existe (y_n) sucesión de $R(T-\lambda)$ tal que $(T-\lambda)x_n = y_n \to y$. Como $\lambda \in \pi(T)$, tenemos que $\|x_n - x_m\| \leq c_\lambda^{-1}\|(T-\lambda)(x_n-x_m)\| = \|y_n - y_m\|$, y como (y_n) es una sucesión de Cauchy, (x_n) también lo es. Como x_n está en un espacio de Hilbert, tomamos x el elemento al que (x_n) converge. entonces $Tx_n = y_n + \lambda x_n \to y + \lambda x$, por lo que de nuevo el párrafo siguiente a la Definición 1.5 garantiza que $x \in D(\overline{T})$ y $\overline{T}x = y + \lambda x$, por lo que $y = (\overline{T}-\lambda)x \in R(\overline{T}-\lambda)$, con lo que tenemos $R(\overline{T}-\lambda) \supseteq \overline{R(T-\lambda)}$. Si $y \in R(\overline{T}-\lambda)$, entonces $y = (\overline{T}-\lambda)x$, tomando (x_n) sucesión en $D(T)$ tal que $(x_n) \to x$ y $Tx_n \to \overline{T}x$ tenemos que $(T-\lambda)x_n \to (\overline{T}-\lambda)x = y$ por lo que $y \in \overline{R(T-\lambda)}$.

Como el complemento ortogonal de un conjunto S es igual al complemento ortogonal de la cerradura $\overline{S}$, tenemos que

$R(\overline{T}-\lambda) = \overline{R(T-\lambda)} \implies (R(\overline{T}-\lambda))^\perp = (R(T-\lambda))^\perp \implies d_\lambda(T) = d_\lambda(\overline{T})$

4.

Es directo del inciso anterior ■

Corolario 2.2 Si T es un operador en H cerrable con $D(T)$ denso, y $\lambda \in \pi(T)$, entonces $H = R(\overline{T} - \lambda) \oplus N(T^* - \overline{\lambda})$

Demostración.

Por (1.2.2) aplicado a $T - \lambda$, y usando la Proposición 2.1, inciso 3, tenemos que $H = N(T^* - \overline{\lambda}) \oplus \overline{R(T - \lambda)} = N(T^* - \overline{\lambda}) \oplus R(\overline{T} - \lambda)$ ■

Usaremos el siguiente lema para probar la Proposición 2.4, un resultado clásico que nos ayuda a entender mejor la naturaleza de los números de deficiencia. Este lema nos permite una prueba muy directa de tan útil resultado

Lema 2.3 Si F y G son subespacios de un espacio de Hilbert H, F cerrado, tales que $dimF < dimG$ entonces existe un vector no nulo $y \in G \cap F^{\perp}$.

Demostración.

Como F es cerrado, tenemos que $H = F \oplus F^{\perp}$(ver apéndice). Sea $\phi : G \to F$ con $D(\phi) = G$ la proyección en F (Es decir, para todo $g \in G$, $\phi(g) = f_g$ donde $g = f_g + f_g^{\perp} \in F \oplus F^{\perp}$). Tenemos que ϕ no es inyectiva, porque si lo fuera $\dim G = \dim \phi(G) \leq \dim F$ lo cual contradice nuestra hipótesis. Por lo tanto $\exists y \in G \setminus \{0\}$ tal que $\phi(y) = 0$, es decir, $y = f_y + f_y^{\perp} = 0 + f_y^{\perp} \in F^{\perp}$, por lo que $y \in G \cap F^{\perp}$■

Proposición 2.4 Sea T un operador cerrable en H. Entonces el número de deficiencia de $d_\lambda(T)$ es constante en cada componente conexa por trayectorias del conjunto abierto $\pi(T)$

Nota: La Proposición 2.4 se puede probar sin pedir que T sea cerrable, vea [Wei80] página 230. Sin embargo, esa prueba es más truculenta pues necesita más herramientas cuyo desarrollo desviaría el camino del presente trabajo, y en nuestro caso, pedir que T sea cerrable es suficientemente general.

Demostración.

Usando la Proposición 2.1 inciso 3, Podemos suponer que T es cerrada pues los números de deficiencia de $\overline{T}$ y de T coinciden.

Supongamos que $\lambda_0 \in \pi(T)$ y que λ es tal que $|\lambda_0 - \lambda| < c_{\lambda_0}$, la Proposición 2.1 inciso 2 nos dice que $\lambda \in \pi(T)$, veamos que $d_\lambda(T) = d_{\lambda_0}(T)$

Supongamos que $d_\lambda(T) \neq d_{\lambda_0}(T)$, si $d_\lambda(T) < d_{\lambda_0}(T)$ por el Lema 2.3 existe un vector no nulo $y \in R(T - \lambda_0)^{\perp}$ tal que $y \in R(T - \lambda)^{\perp\perp} = \overline{R(T - \lambda)} = R(T - \lambda)$ donde la última desigualdad es por la Proposición 2.1 inciso 4, entonces $y = (T - \lambda)x$. Como $y \in R(T - \lambda_0)^{\perp}$ tenemos que

$$\langle (T - \lambda)x, (T - \lambda_0)x \rangle = 0 \tag{2.1.2}$$

Si hubiéramos supuesto que $d_\lambda(T) > d_{\lambda_0}(T)$ tendríamos que $y \in R(T - \lambda)^{\perp} \cap R(T - \lambda_0)$ y por lo tanto (2.1.2) se cumpliría también.

Usando (2.1.2) tenemos que

$$\|(T-\lambda_0)x\|^2 = \langle (T-\lambda_0)x - (T-\lambda)x, (T-\lambda_0)x\rangle = \langle (\lambda-\lambda_0)x, (T-\lambda_0)x\rangle$$
$$\leq |\lambda-\lambda_0|\|x\|\|T-\lambda_0 x\|$$

Por lo tanto $\|(T-\lambda_0)x\| \leq |\lambda-\lambda_0|\|x\|$. Como $y \neq 0$, $x \neq 0$, y $|\lambda_0 - \lambda| < c_{\lambda_0}$, entonces $|\lambda_0-\lambda|\|x\| < c_{\lambda_0}\|x\|$, por lo que

$$|\lambda-\lambda_0|\|x\| < c_{\lambda_0}\|x\| \leq \|(T-\lambda_0)x\| \leq |\lambda-\lambda_0|\|x\|$$

Lo cual es una contradicción, que viene de suponer $d_\lambda(T) \neq d_{\lambda_0}(T)$ (independientemente de si $d_\lambda(T) < d_{\lambda_0}(T)$ ó $d_\lambda(T) > d_{\lambda_0}(T)$ pues de la desigualdad sólo utilizamos (2.1.2)) por lo que $d_\lambda(T) = d_{\lambda_0}(T)$

Finalizamos la demostración utilizando un resultado elemental de topología que no engaña a la intuición, se encuentra en [Will04] página 195. Tomemos a $\lambda_1, \lambda_2 \in \pi(T)$ dentro de la misma componente conexa por trayectorias, que llamaremos C. Eso significa que existe una trayectoria p de λ_1 a λ_2 dentro de la componente. Considera al conjunto $\chi = \{B(\mu, c_\mu) \mid \mu \in C\}$ donde $B(\mu, c_\mu) = \{\kappa \in \pi(T) \mid |\mu-\kappa| \leq c_\mu\}$. Entonces χ es una cubierta abierta de C. El teorema de [Will04] nos dice que hay un subconjunto finito (porque p es compacto) de χ tal que es una cadena de λ_1 a λ_2. Como para todo c en la cadena, sus elementos tienen el mismo número de deficiencia, entonces todos los elementos de la cadena tienen el mismo número de deficiencia, por lo tanto $d_{\lambda_1}(T) = d_{\lambda_2}(T)$ ■

2.2. Espectro y resolvente de operadores cerrados

En esta sección, asumimos que T es un operador cerrado en un espacio de Hilbert complejo H

Definición 2.3 Decimos que $\lambda \in \mathbb{C}$ está en el conjunto resolvente $\rho(T)$ si el operador $T-\lambda$ tiene inverso continuo definido en todo H, es decir, $T-\lambda$ es biyectivo y $(T-\lambda)^{-1}$ es continuo. A la función $(T-\lambda)^{-1}$ se le llama el resolvente de T en λ. El espectro de T se define como $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Notemos que si $(T-\lambda)^{-1}$ esta definida en todo H, entonces el Corolario 1.12 nos dice que $(T-\lambda)^{-1}$ es acotado si y sólo si es cerrado, por el Teorema 1.9 tenemos que $(T-\lambda)^{-1}$ es cerrado si y sólo si $(T-\lambda)$ es cerrado, lo cual equivale a pedir que T es cerrado (la prueba de este hecho es bastante directa usando la Proposición 1.2). Por lo tanto si T no es cerrado, y $(T-\lambda)^{-1}$ está definido en todo H, entonces $(T-\lambda)^{-1}$ no es acotado, por lo que en este caso, $\rho(T) = \emptyset$ y $\sigma(T) = \mathbb{C}$.

En general, para operadores no necesariamente cerrados, se define al conjunto resolvente de T como el conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales $(T-\lambda)^{-1}$ existe, es continuo, y está definido en un conjunto denso de H (no necesariamente todo H). El Corolario 1.12 muestra que si T es cerrado, y λ es tal que cumple esta definición, entonces $D((T-\lambda)^{-1}) = \overline{D((T-\lambda)^{-1})} = H$, por lo cual nuestra Definición 2.3 es consistente con la general, y ésta nos resulta más práctica para nuestro estudio.

Proposición 2.5 Para todo operador cerrado T, $\rho(T) = \{\lambda \in \pi(T) \mid d_\lambda(T) = 0\}$, y $\rho(T)$ es un subconjunto abierto, por lo que $\sigma(T)$ es cerrado

Demostración.

Si $\lambda \in \rho(T)$, entonces la Proposición 2.1 inciso 1 implica que $\lambda \in \pi(T)$. También $R(T-\lambda) = H$ y $R(T-\lambda)^\perp = \{0\}$, por lo que $d_\lambda(T) = 0$. Si $\lambda \in \pi(T)$ con $d_\lambda(T) = 0$, entonces $R(T-\lambda)^\perp = \{0\}$, por lo que $R(T-\lambda) = R(T-\lambda)^{\perp\perp} = H$ por la Proposición 2.1 inciso 4, es decir, por el Corolario 1.12, $\lambda \in \rho(T)$. Para todo $\lambda \in \rho(T)$, $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda - \mu| < c_\lambda$, la demostración de la Proposición 2.4 nos dice que $d_\mu(T) = d_\lambda(T) = 0$, entonces $\mu \in \rho(T)$ ■

Gracias a las equivalencias del fuerte Corolario 1.12, veremos que en nuestra definición de conjunto resolvente, podemos omitir el requisito de que $(T-\lambda)^{-1}$ es continuo

Proposición 2.7 Sea T un operador cerrado, entonces $\rho(T)$ es el conjunto de números complejos λ tales que $(T-\lambda)$ es una biyección de $D(T)$ a H.

Demostración.

Basta probar que para todo λ tal que $(T-\lambda)$ es biyectivo, $(T-\lambda)^{-1}$ es continuo. Como T es cerrado, $(T-\lambda)$ también lo es. Por el Teorema 1.9, inciso 6, tenemos que $(T-\lambda)^{-1}$es cerrado, y por hipótesis $D((T-\lambda)^{-1}) = R(T-\lambda) = H$ que es un cerrado de H, por lo que el Corolario 1.12 implica que $(T-\lambda)^{-1}$ es continuo ■

La siguiente proposición determina el espectro del operador adjunto a partir del espectro del operador original, y viceversa. También nos muestra que el espectro de un operador autoadjunto es un conjunto inmutable bajo conjugación compleja.

Proposición 2.8 Sea T un operador cerrado con $D(T)$ denso, $\lambda \in \mathbb{C}$. entonces $\lambda \in \sigma(T) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$. Además, $((T-\lambda)^{-1})^* = (T^* - \overline{\lambda})^{-1}$

Demostración.

Probemos que $\lambda \in \sigma(T) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(\overline{T})$ viendo que $\lambda \in \rho(T) \iff \overline{\lambda} \in \rho(\overline{T})$

Sea $\lambda \in \rho(T)$, entonces por el Teorema 1.9 inciso 4 tenemos que $(T-\lambda)^* = T^* - \overline{\lambda}$ es invertible, y $((T-\lambda)^{-1})^* = (T^* - \overline{\lambda})^{-1}$ (la segunda afirmación de nuestra proposición). Como $\lambda \in \rho(T)$, $(T-\lambda)^{-1} \in \mathbb{B}(H)$, y por el Corolario 1.14, $((T-\lambda)^{-1})^* \in \mathbb{B}(H)$, entonces $(T^* - \overline{\lambda})^{-1} \in \mathbb{B}(H)$, es decir, $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$. Ahora sustituyendo en la prueba anterior a T por T^*, λ por $\overline{\lambda}$ y usando la igualdad $T = T^{**}$ del Teorema 1.9 inciso 3 tenemos que $\overline{\lambda} \in \rho(T^*)$ implica $\lambda \in \rho(T)$, i.e. $\lambda \in \sigma(T) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(\overline{T})$ ■

Vamos ahora a clasificar diferentes partes del espectro. Esta descomposición del espectro es crucial para el análisis funcional aplicado en general, por ejemplo, en mecánica cuántica el Hamiltoniano es un operador autoadjunto no acotado en un espacio de Hilbert, y el espectro puntual del Hamiltoniano corresponde a los niveles de energía de los estados del sistema. El espectro se suele dividir en tres conjuntos: El espectro puntual $\sigma_p(T)$, el espectro continuo $\sigma_c(T)$ y el espectro residual $\sigma_r(T)$, aunque a veces las últimas dos tienen definiciones ligeramente diferentes dependiendo del autor.

El espectro es el complemento del resolvente, es decir, es el complemento del conjunto de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales $T - \lambda$ es biyectiva por la Proposición 2.7. Entonces $\lambda \in \sigma(T)$ si y sólo si $T - \lambda$ no es inyectiva ó $T - \lambda$ no es suprayectiva; el espectro puntual es el conjunto de escalares para el cual no es inyectivo. La definición del espectro puntual suele ser la misma en toda la literatura.

Definición 2.5 El espectro puntual de T, denotado como $\sigma_p(T)$, es el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $T - \lambda$ no es un operador inyectivo, es decir, existe $x \in D(T)$ tal que $Tx = \lambda x$. A λ se le llama un eigenvalor, y a todos los x que bajo T son igual a λx se les llama eigenvectores. La multiplicidad de λ es $dim(N(T - \lambda))$

Supongamos que $\lambda \notin \sigma_p(T)$, es decir, $(T - \lambda)^{-1}$ existe. Consideremos el primer caso para $\sigma_r(T)$: si $R(T - \lambda)$ es cerrado. Como T es cerrado, el Teorema 1.9 inciso 6 implica que $(T - \lambda)^{-1}$ lo es también, y por el Corolario 1.12 tenemos que $R(T - \lambda)$ es cerrado $\Longleftrightarrow (T - \lambda)^{-1}$ es acotado. Entonces debemos de pedir adicionalmente que $R(T - \lambda) \neq H$ para que $\sigma_r(T) \cap \rho(T) = \emptyset$

Definición 2.6

1. El espectro residual de T , denotado como $\sigma_r(T)$, es el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $T - \lambda$ tiene un inverso acotado definido en un subespacio cerrado propio de H

2. El espectro continuo de T, denotado como $\sigma_c(T)$, es el conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $T - \lambda$ tiene un inverso y $R(T - \lambda)$ no es cerrado

Nota: Para la definición de espectro residual, algunos libros quitan la condición de que el inverso de $T - \lambda$ sea acotado. Pero en este contexto resulta útil nuestra definición, porque como veremos, la Proposición 2.17 nos dice que si T es un operador autoadjunto, $\sigma_r(T) = \emptyset$. También notemos que $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \pi(T) \mid d_\lambda(T) \neq 0\}$ y que, por la Proposición 2.4, $\sigma_r(T)$ es abierto.

Por el proceso que llevamos para definirlas, es claro que las tres partes del espectro descritas arriba son ajenas por pares, y que el espectro es la unión de estas tres partes.

Un resultado útil de operadores acotados, es que dado $T \in B(H)$, entonces el espectro es no vacío y para todo $\lambda \in \sigma(T)$, $\|\lambda\| \leq \|T\|$. La prueba de este hecho se encuentra en [RS80] página 192, y no la presentamos aquí porque para nuestro propósito, basta un resultado menos general para operadores autoadjuntos que mostramos en el capítulo cuatro, aunque es bastante práctico tener presente el resultado mencionado.

2.3. Operadores simétricos y autoadjuntos

Nos interesa saber, dado un operador simétrico, si es autoadjunto ó si tiene extensiones autoadjuntas que nos sean útiles. Veremos a continuación algunos criterios sencillos de autoadjuntidad.

En esta sección suponemos que los operadores T actúan sobre un espacio de Hilbert complejo H

Como lo mencionamos en la Definición 1.8, T con $D(T)$ denso en H es simétrico si y sólo si $T \subseteq T^*$. Esto equivale a pedirle a T que tenga domino denso y que cumpla

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \qquad \text{para todo } x, y \in D(T) \tag{2.3.1}$$

El siguiente lema da una caracterización sencilla de los operadores simétricos

Lema 2.9 Sea T un operador en un espacio de Hilbert complejo H con $D(T)$ denso en H. Entonces T es simétrico si y sólo si $\langle Tx, x \rangle$ es real para todo $x \in D(T)$

Demostración.

Si T es simétrico, entonces por propiedades del producto interior tenemos que $\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$, por lo tanto $\langle Tx, x \rangle$ es real para todo $x \in D(T)$. Inversamente, si $\langle Tz, z \rangle$ es real para todo $z \in D(T)$, entonces dados $x, y \in D(T)$ tenemos que

$$\begin{aligned} 4\langle Tx, y \rangle &= \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle + i\langle T(x+iy), x+iy \rangle \\ -i\langle T(x-iy), x-iy \rangle &= \langle x+y, T(x+y) \rangle - \langle x-y, T(x-y) \rangle + i\langle x+iy, T(x+iy) \rangle \\ &\quad - i\langle x-iy, T(x-iy) \rangle = 4\langle x, Ty \rangle \end{aligned}$$

donde la primera y la última igualdad se obtienen simplemente desarrollando las sumas y restas de los productos internos, y la segunda viene de la hipótesis de que $\langle Tz, z \rangle$ es real ■

Definición 2.7 Para todo operador simétrico T, decimos que:

1. T está semiacotado inferiormente (resp. semiacotado superiormente) si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in D(T)$, $\langle Tx, x \rangle \geq m\langle x, x \rangle = m\|x\|^2$ (resp. $\langle Tx, x \rangle \leq m\|x\|^2$). A cada m que cumpla esto se le llama una cota inferior (cota superior) de T.

2. T es positivo, lo que denotamos como $T \geq 0$, si $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in D(T)$.

Lema 2.10 Todo operador simétrico T es cerrable, y $\overline{T}$ es simétrico

Demostración.

Si T es un operador simétrico, entonces $T \subseteq T^*$. Como T^* es cerrado (Proposición 1.7, inciso 1) tenemos que T es cerrable y que $\overline{T} \subseteq T^*$. Por el Teorema 1.9, inciso 2, $\overline{T}^* = T^*$, así que $\overline{T}$ es simétrico, y se tiene que $T \subseteq \overline{T} = T^{**} \subseteq T^*$ ■

Teorema 2.11 (Hellinger-Toeplitz) Si T es un operador simétrico en H con $D(T) = H$, entonces T es continuo

Demostración.

Por el Lema 2.10, T es cerrable, pero como $D(T) = H$, entonces $\overline{T} = T$. Por lo que el Corolario 1.12 implica que T es acotado ■

Veamos algunas propiedades espectrales de los operadores simétricos

Proposición 2.12 Si T es un operador simétrico en H, entonces

1. $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \pi(T)$, y $\|(T-\lambda)^{-1}\| \leq |Im\lambda|^{-1}$ $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

2. Si T es semiacotada inferiormente (resp. semiacotada superiormente) y m es una cota inferior (resp. cota superior) de T, entonces $(-\infty, m) \subseteq \pi(T)$ (resp. $(m, +\infty) \subseteq \pi(T)$)

3. Si $\lambda \in \pi(T)$, entonces $R(T^* - \overline{\lambda}) = H$

Demostración

1.

Sea $\lambda = \alpha + i\beta$ y $x \in D(T)$, entonces

$$\begin{aligned}\|(T-\lambda)x\|^2 &= \langle (T-(\alpha+i\beta))x, (T-(\alpha+i\beta))x\rangle = \langle (T-\alpha)x - i\beta x, (T-\alpha)x - i\beta x\rangle \\ &= \|(T-\alpha)x\|^2 + \|\beta x\|^2 - i\beta(\langle x, (T-\alpha)x\rangle - \langle (T-\alpha)x, x\rangle)\end{aligned}$$

Pero $\langle x, (T-\alpha)x\rangle - \langle (T-\alpha)x, x\rangle = \langle x, Tx\rangle - \langle Tx, x\rangle - \alpha(\langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle) = 0$, entonces $\|(T-\lambda)x\|^2 = \|(T-\alpha)x\|^2 + |\beta|^2\|x\|^2$, es decir, $\|(T-\lambda)x\|^2 \geq |\beta|^2\|x\|^2$, por lo que si $\beta \neq 0$, $\lambda \in \pi(T)$. Por la Proposición 2.1 $(T-\lambda)^{-1}$ existe, entonces para todo $y \in R(T-\lambda)$, $\|(T-\lambda)x\| \geq |\beta|\|x\| \implies \|y\| \geq |\beta|\|(T-\lambda)^{-1}y\| \implies \|(T-\lambda)^{-1}\| \leq |\beta|^{-1}$

2.

Si $\lambda \in (-\infty, m)$, entonces $m - \lambda > 0$, y $(m-\lambda)\|x\|^2 \leq \langle (T-\lambda)x, x\rangle \leq \|(T-\lambda)x\|\|x\|$, por lo que $(m-\lambda)\|x\| \leq \|(T-\lambda)x\|$ y $\lambda \in \pi(T)$. La prueba para el caso en el que T es semiacotado superiormente es análoga.

3.

Sea $y \in H$. Veamos que existe u tal que $(T^* - \overline{\lambda})u = y$. Definimos a un funcional lineal F_y en $D(F_y) = R(T-\lambda)$ tal que $F_y((T-\lambda)x) = \langle x, y\rangle$. F_y está bien definida porque como $\lambda \in \pi(T)$, $T-\lambda$ es inyectiva. También F_y es acotada porque si $1 \geq \|(T-\lambda)x\| \geq c_\lambda\|x\|$, donde la última desigualdad es por (2.1.1), entonces $|F_y((T-\lambda)x)| = |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \leq \frac{\|y\|}{c_\lambda}$. Entonces podemos extender F_y a $\overline{R(T-\lambda)}$.[1]

Nombrando también F_y a la extensión, el teorema de representación de Riesz implica que existe un $u \in H$ tal que $F_y((T-\lambda)x) = \langle (T-\lambda)x, u\rangle$ entonces $\langle (T-\lambda)x, u\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in D(T-\lambda)$, por lo que $u \in D((T-\lambda)^*)$ y $(T-\lambda)^* u = (T^* - \overline{\lambda})u = y$ ■

La Proposición anterior nos muestra lo simple que es el dominio regular $\pi(T)$ de un operador simétrico, y los números de deficiencia dentro de éste. Recordemos que por la Proposición 2.4 el número de deficiencia de los elementos de cada componente conexa por trayectorias dentro de $\pi(T)$ es constante. Así que la Proposición 2.12, inciso 1, nos garantiza que en el caso de que T es simétrico, el número de deficiencia es constante para el semiplano superior $S = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + ib \text{ con } b > 0\}$ y el inferior $I = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + ib \text{ con } b < 0\}$. Más aún, si existe algún $\lambda \in \mathbb{R} \cap \pi(T)$, por ejemplo, si T es semiacotada superior o inferiormente por el inciso 2 de la proposición anterior, tendríamos que el número de deficiencia es constante en todo $\pi(T)$

Definición 2.8 Para T un operador simétrico, se les llama índices de deficiencia a los siguientes números cardinales:

$$\begin{aligned} d_+(T) = d_\lambda(T) = dim R(T-\lambda)^\perp \quad \text{con } Im\lambda > 0 \\ d_-(T) = d_\lambda(T) = dim R(T-\lambda)^\perp \quad \text{con } Im\lambda < 0 \end{aligned}$$

Por (1.2.3) tenemos que $d_+(T) = dimN(T^* - \overline{\lambda}) = dimN(T^* + i)$ con $Im\lambda > 0$, $d_-(T) = dimN(T^* - \overline{\lambda}) = dimN(T^* - i)$ con $Im\lambda < 0$. Algunas veces denotamos a los índices de deficiencia como un par ordenado (a,b), $a = d_+(T)$ y $b = d_-(T)$

Proposición 2.13 Si T es un operador simétrico, y existe $\lambda \in \mathbb{R} \cap \pi(T)$ entonces $d_+(T) = d_-(T)$

Demostración

Consecuencia directa de la Proposición 2.4 y la Proposición 3.2 ■

Lema 2.14 Si T es un operador simétrico, entonces se cumple

1. Todo eigenvalor de T es real

2. Eigenvectores de distintos eigenvalores son ortogonales entre sí

Demostración

[1] Esto se puede probar por tres caminos diferentes: como consecuencia al teorema de Hahn-Banach, ver [BN00] página 197, ó por el teorema BLT que se encuentra en [RS80], al cual ya hemos hecho referencia. Pero la más útil para tener presente en el caso en el que tratan con espacios de Hilbert, es la nota a pie que está en [BN00] página 496, pues ahí se demuestra que toda transformación acotada $T : X \to Y$ donde X es un espacio de Hilbert, y Y es un espacio de Banach, con $D(T)$ cualquier subespacio de X, se puede extender a todo X preservando su norma

1.

Sea x un eigenvector de λ, es decir, $x \in N(T-\lambda)$, entonces $\langle Tx, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle$, pero por el Lema 2.9 $\langle Tx, x\rangle$ es real, por lo tanto $\lambda = \frac{\langle Tx,x\rangle}{\|x\|}$

2.

Sean $x \in N(T-\lambda)$ y $y \in N(T-\mu)$ con $\mu \neq \lambda$, entonces como μ es real tenemos que $\mu\langle x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, lo cual implica que $\langle x, y\rangle = 0$
■

La siguiente es la noción más importante de nuestro trabajo.

Definición 2.9 Decimos que un operador T es autoadjunto si $T = T^*$. Si $\overline{T} = (\overline{T})^* = T^*$, decimos que T es esencialmente autoadjunto

Notemos algunas características de los operadores autoadjuntos:

- Si T es autoadjunto, T es cerrado (porque T^* siempre lo es) y simétrico
- Un operador simétrico T es autoadjunto si y sólo si $D(T) = D(T^*)$, y es esencialmente autoadjunto si $D(\overline{T}) = D(T^*)$ (Puesto que $(\overline{T})^* = T^*$)
- Si T es un operador autoadjunto, y S es un operador simétrico tal que $T \subseteq S$, entonces $T = S$, pues si $T \subseteq S$, entonces por la Proposición 1.7 $S \subseteq S^* \subseteq T^* = T$ entonces $S = T$

El siguiente resultado nos servirá para desarrollar un criterio que determina si el operador simétrico con el que estamos tratando es en efecto autoadjunto

Proposición 2.15 Sea T un operador simétrico, entonces

$$D(T^*) = D(\overline{T}) \dotplus N(T^*-\lambda) \dotplus N(T^*-\overline{\lambda}) \qquad \text{para } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$
$$\dim D(T^*)/D(\overline{T}) = d_+(T) + d_-(T)$$

Donde $\dotplus$ es la suma directa de subespacios

Demostración.

Basta con probar la contención $D(T^*) \subseteq D(\overline{T}) \dotplus N(T^*-\lambda) \dotplus N(T^*-\overline{\lambda})$ puesto que la otra es obvia, y $\dim D(T^*)/D(\overline{T}) = d_+(T) + d_-(T)$ es una consecuencia directa de $D(T^*) = D(\overline{T}) \dotplus N(T^*-\lambda) \dotplus N(T^*-\overline{\lambda})$. Abreviamos $N_\lambda = N(T^*-\lambda)$ y $N_{\overline{\lambda}} = N(T^*-\overline{\lambda})$.

Sea $x \in D(T^*)$. Por el Corolario 2.2 y la Proposición 2.12 tenemos que

$$H = R(\overline{T}-\lambda) \oplus N_{\overline{\lambda}} \tag{2.3.2}$$

Entonces para $(T^*-\lambda)x \in H$, tenemos que $\exists x_0 \in D(\overline{T}), x' \in N_{\overline{\lambda}}$ tales que $(T^*-\lambda)x = (\overline{T}-\lambda)x_0 + x'$. Como $\lambda \notin \mathbb{R}$, podemos considerar a $x_- = (\overline{\lambda}-\lambda)^{-1}x'$. Entonces, por el Teorema 1.9 y el Lema 2.10 tenemos que T^* extiende a $\overline{T}$, por lo que la ecuación anterior se puede ver como

$$(T^*-\lambda)(x-x_0) = x' \implies (T^*-\lambda)(x-x_0-x_-) = 0$$

Por lo que definiendo $x_+ = x - x_0 - x_- \in N_\lambda$, tenemos que $x = x_0 + x_+ + x_- \in D(\overline{T}) \oplus N_\lambda \oplus N_{\overline{\lambda}}$.

Para ver que la suma es directa, supongamos que $x_0 + x_+ + x_- = 0$ donde $x_0 \in D(\overline{T}), x_+ \in N_\lambda, x_- \in N_{\overline{\lambda}}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}(T^* - \lambda)(x_0 + x_+ + x_-) &= (\overline{T} - \lambda)x_0 + (\overline{\lambda} - \lambda)x_- = 0 \\ &\implies (\overline{T} - \lambda)x_0 = (\lambda - \overline{\lambda})x_- \in R(\overline{T} - \lambda) \cap N_{\overline{\lambda}}\end{aligned}$$

Entonces por (2.3.2) tenemos que $x_- = 0$, entonces $(\overline{T} - \lambda)x_0 = 0$. Como $\overline{T}$ es simétrico, y λ no es real, el Lema 2.14 garantiza que $x_0 = 0$. Por lo tanto $x_+ = 0$ y entonces la suma es directa. ■

Para un operador simétrico T, sabemos que es esencialmente autoadjunto si y sólo si $D(\overline{T}) = D(T^*)$. Entonces usando la proposición anterior, tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.16 Sea T un operador simétrico. Entonces T es esencialmente autoadjunto si y sólo si $d_+(T) = d_-(T) = 0$. En particular si existe $\lambda \in \pi(T) \cap \mathbb{R}$ (que incluye a los operadores semiacotados), tenemos que T es esencialmente autoadjunto si y sólo si para algún $\lambda \in \pi(T)$, $N(T^* - \lambda) = \{0\}$ ó $\overline{R(T - \lambda)} = H$.

Demostración.

La primera afirmación es directa de la Proposición 2.15. El caso particular se sigue de la Proposición 2.13 ■

El Corolario anterior implica que para un operador simétrico cerrado T, es autoadjunto si y sólo si $d_+(T) = d_-(T) = 0$

Para el caso autoadjunto, la siguiente proposición simplifica la tarea de determinar el espectro, mostrando que el dominio regular y el conjunto resolvente coinciden

Teorema 2.17 Para un operador autoadjunto T en un espacio de Hilbert H, $\lambda \in \mathbb{C}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\lambda \in \rho(T)$
2. $\lambda \in \pi(T)$
3. $R(T - \lambda) = H$

Demostración.

Como $T = T^*$, el Corolario 2.2 nos da

$$R(T - \lambda)^\perp = N(T - \overline{\lambda}) \tag{2.3.3}$$

Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, entonces por la Proposición 2.12 tenemos que $\lambda \in \pi(T)$, lo que implica que $N(T - \lambda) = \{0\} = N(T - \overline{\lambda})$, pero por (2.3.3) tenemos que $\overline{R(T - \lambda)} = H$. Por la Proposición 2.1, $R(T - \lambda)$ es cerrado, entonces

$R(T-\lambda) = H$, por lo que la Proposición 2.7 implica que $\lambda \in \rho(T)$. Entonces, cuando $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, las tres condiciones se satisfacen.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$:

$1 \implies 2$

Trivial, pues $\rho(T) \subseteq \pi(T)$

$2 \implies 3$

Por (2.3.3) tenemos que $R(T-\lambda)^{\perp} = N(T-\lambda) = 0$, por lo que $\overline{R(T-\lambda)} = H$, pero $R(T-\lambda)$ es cerrado por la Proposición 2.1

$3 \implies 1$

Por (2.3.3), $N(T-\lambda) = \{0\}$, entonces $\lambda \in \rho(T)$ por la Proposición 2.7 ■

Con el Teorema anterior, y uniendo lo que sabemos de $\pi(T)$ por la Proposición 2.12 tenemos que para todo operador autoadjunto, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \rho(T)$, o bien, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Veremos que el inverso también es cierto, para lo cual necesitamos la siguiente proposición

Proposición 2.18 Sea T un operador simétrico, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Entonces T es autoadjunto si y sólo si $R(T-\lambda) = R(T-\overline{\lambda}) = H$

Demostración.

Supongamos que $R(T-\lambda) = R(T-\overline{\lambda}) = H$. Como T es simétrico, tenemos que $T \subseteq T^*$. Para probar $T = T^*$ basta ver que $D(T^*) \subseteq D(T)$. Sea $x \in D(T^*)$, entonces existe $y \in D(T)$ tal que $(T-\lambda)y = (T^*-\lambda)x$, y como $T \subseteq T^*$ entonces $y \in D(T^*)$ y $Ty = T^*y$, por lo que $(T^*-\lambda)(y-x) = (T^*-\lambda)y - (T^*-\lambda)x = (T-\lambda)y - (T-\lambda)y = 0$, usando la Proposición 1.7, inciso 2, $y - x \in N(T^*-\lambda) = R(T-\overline{\lambda})^{\perp} = \{0\}$, por lo tanto $x = y \in D(T)$

Ahora, si T es autoadjunto y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \rho(T)$, por la Proposición 2.17 $D((T-\lambda)^{-1}) = R(T-\lambda) = H$ ■

Se puede probar que dadas las hipótesis de la proposición anterior, si $R(T-\lambda_+) = R(T-\lambda_-) = H$ para algún par $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ con $Im\lambda_+ > 0, Im\lambda_- < 0$, entonces para todo μ_+, μ_- con $Im\mu_+ > 0, Im\mu_- < 0$ se tiene que $R(T-\mu_+) = R(T-\mu_-) = H$, así que la elección de λ en la proposición anterior es indiferente. Nosotros no lo mostramos en el presente trabajo, pero el lector interesado puede referirse a [Wei80] página 121. También, en la demostración se ve que es suficiente pedir que $R(T-\lambda) = \overline{R(T-\overline{\lambda})} = H$ para ver que T es autoadjunto.

La proposición anterior, nos da el siguiente útil corolario

Corolario 2.19 Sea T un operador simétrico cerrado. Entonces T es autoadjunto si y sólo si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$

Demostración.

T es autoadjunto si y sólo si para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ se tiene que $R(T-\lambda) = H$ (Proposición 2.18) y $(T-\lambda)^{-1}$ existe (Proposición 2.12 y Proposición 2.17), es decir, por la Proposición 2.7 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \rho(T)$, ó $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ ■

Proposición 2.20 Si T es un operador autoadjunto, entonces $\lambda \in \sigma_p(T)$ si y sólo si $\overline{R(T-\lambda)} \neq H$

Demostración.

Sea $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Por el Corolario 1.19 tenemos que $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\overline{\lambda} \notin \sigma_p(T)$. Por lo que $R(T-\lambda)^{\perp} = N(T^* - \overline{\lambda}) = N(T - \overline{\lambda}) = \{0\}$, es decir $\overline{R(T-\lambda)} = H$. Inversamente, si λ es tal que $\overline{R(T-\lambda)} = H$. Por el Corolario 2.19 tenemos que para todo $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $R(T-\mu) = H$, por lo que también se tiene $\overline{R(T-\overline{\lambda})} = H$, entonces $N(T-\lambda) = N(T^* - \lambda) = R(T-\overline{\lambda})^{\perp} = \{0\}$, por lo que $\lambda \notin \sigma_p(T)$ ■

Como nota respecto a los resultados obtenidos a partir del Corolario 2.16, es oportuno recalcar que se pueden hacer algunas ligeras modificaciones a los enunciados:

- En el Corolario 2.16, se puede debilitar la condición de T ser simétrico a ser Hermitiano
- En la Proposición 2.18, también se puede debilitar de T simétrico a Hermitiano, permitir que λ sea un real, y que $R(T-\overline{\lambda})$ sea solamente denso en H

Pueden revisarse estos resultados en [SK12], Proposición 3.9 y 3.11. Con esto se pueden obtener enunciados equivalentes al Corolario 2.16 y Corolario 2.19 para operadores Hermitianos cerrados, sustituyendo la condición de que T sea simétrico a que T sea Hermitiano y cerrado. Véase [SK12] página 44.

Recapitulando, dado un operador simétrico T, sucede que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \pi(T)$, y puesto que los números de deficiencia son constantes en cada componente conexa por trayectorias, entonces debe haber un número de deficiencia que corresponde al semiplano superior y otro al inferior del plano complejo, los cuales definimos como los índices de deficiencia $d_+(T)$ y $d_-(T)$. Un operador simétrico es esencialmente autoadjunto si $d_+(T) = d_-(T) = 0$, entonces si se tiene un operador simétrico cerrado, los índices de deficiencia determinan si es autoadjunto o no. También, otra forma de identificar un operador autoadjunto es fijarse en su espectro, pues si T es cerrado, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ si y sólo si T es autoadjunta. Un operador autoadjunto cumple que $\pi(T) = \rho(T)$, por lo que $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, y $d_+(T) = d_-(T) = 0$, donde las últimas dos son condiciones necesarias y suficientes para la autoadjuntidad si T es cerrado.

Con esto hemos visto algunos criterios para determinar si un operador es autoadjunto, y las características fundamentales de estos operadores. Muchas veces si el operador que tenemos no resulta ser autoadjunto, nos interesa saber si podemos obtener una extensión que sí lo sea. En el siguiente capítulo, veremos cuándo y cómo podemos extender un operador simétrico a uno autoadjunto.

Bibliografía escencial del capítulo 2

[SK12] Capítulos 2 y 3.
[Wei80] Capítulos 5 y 8.

Parte II

Extensiones autoadjuntas

Capítulo 3

Teorías de extensión

3.1. Teoría de extensión de Von Neumann

En este capítulo analizaremos las extensiones simétricas cerradas de operadores simétricos, para lo cual nos basaremos en la transformación de Cayley, como lo hizo originalmente el matemático John Von Neumann. Con los resultados del presente capítulo, seremos capaces de determinar cuáles son los operadores que tienen extensiones autoadjuntas y las daremos explícitamente.

Al igual que en el capítulo anterior, suponemos que todos los operadores están sobre un espacio de Hilbert complejo

3.1.1. Operador de Cayley

En el campo de los números complejos, la transformación de Möbius definida como $z \to (z-i)(z+i)^{-1}$ manda a la recta real al círculo unitario $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, y al semiplano superior (respectivamente inferior) al interior de $\mathbb{T}$ (respectivamente exterior). El operador de Cayley es una transformación análoga a este operador en su regla de correspondencia, y relaciona biyectivamente a los operadores simétricos con los operadores isométricos V tales que $R(I-V)$ es denso.

Definición 3.1 Decimos que un operador T es isométrico (o es una isometría) si $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in D(T)$. Si además pedimos que $D(T) = R(T) = H$, entonces decimos que T es unitario

De la definición es directo que cada operador isométrico T es inyectivo, pues si $Tx = Ty$, $0 = \|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| = \|x-y\|$, y T^{-1} es una isometría. También T es acotado con norma 1, por lo que el Corolario 1.12 nos dice que T es cerrado si y sólo si $D(T)$ es cerrado.

A la igualdad

$$4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$$

Se le conoce como la identidad de polarización, y aplica para todo espacio de Hilbert complejo. Para probarla basta con desarrollar el lado derecho de la igualdad. De ésta, tenemos que un operador T es isométrico si y sólo si $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in D(T)$

Para V un operador isométrico, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in D(V)$, tenemos que

$$\|(V-\lambda)x\| \geq |\|Vx\| - |\lambda|\|x\|| = |1-|\lambda||\|x\|$$

Entonces por la definición de $\pi(T)$, $\mathbb{C}\setminus\mathbb{T} \subseteq \pi(T)$. Así que por la Proposición 2.4, los números de deficiencia son constantes en el interior de $\mathbb{T}$ y en el exterior de $\mathbb{T}$.

Definición 3.2 Para todo operador isométrico V, a los números cardinales

$$d_i(V) = d_\lambda(V) = \dim R(V-\lambda)^\perp \text{ con } \|\lambda\| < 1$$

$$d_e(V) = d_\lambda(V) = \dim R(V-\lambda)^\perp \text{ con } \|\lambda\| > 1$$

se les llama los índices de deficiencia de V.

Los índices de deficiencia de un operador isométrico tienen una expresión sencilla dada por el siguiente lema

Lema 3.1 $d_i(V) = \dim R(V)^\perp$ y $d_e(V) = \dim D(V)^\perp$, por lo que $d_i(V) = d_e(V^{-1})$ y $d_e(V) = d_i(V^{-1})$

Demostración.

La primera igualdad es trivial pues $d_i(V) = d_0(V) = \dim R(V)^\perp$

Ahora sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $\|\lambda\| < 1$, $\lambda \neq 0$ y $x \in D(V)$. Entonces como $(V^{-1}-\lambda)Vx = (I-\lambda V)x = (V-\lambda^{-1})(-\lambda x)$, se tiene que $R(V^{-1}-\lambda) = R(V-\lambda^{-1})$, por lo que

$$\begin{aligned} d_e(V) = \dim R(V-\lambda^{-1})^\perp = \dim R(V^{-1}-\lambda)^\perp = d_i(V^{-1}) &= \dim R(V^{-1})^\perp \\ &= \dim D(V)^\perp \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 3.2 Si V es un operador isométrico tal que $R(I-V)$ es denso en H, entonces $N(I-V) = \{0\}$

Demostración.

Sea $x \in N(I-V)$, $v \in D(V)$, entonces $\langle (I-V)v, x\rangle = \langle v, x\rangle - \langle Vv, x\rangle = \langle v, x\rangle - \langle Vv, Vx\rangle = \langle v, x\rangle - \langle v, x\rangle = 0$. Como $R(I-V)$ es denso, se tiene que $x = 0$ $\blacksquare$

Ahora, dado un operador simétrico T, por la Proposición 2.12 sabemos que $-i \in \pi(T)$, por lo que $(T+i)^{-1}$ existe.

Definición 3.3 Dado un operador simétrico T, decimos que el operador $V_T = (T-i)(T+i)^{-1}$ es la transformación de Cayley de T.

Entonces V_T está definida en $R(T+i)$ por $V_T(T+i)x = (T-i)x$, por lo cual es claro que $D(V_T) = R(T+i)$, y $R(V_T) = R(T-i)$. Veamos las propiedades que nos serán útiles de V_T

Proposición 3.3 Sea T un operador simétrico, V_T su transformación de Cayley, entonces

1. V_T es un operador isométrico, con $R(I-V_T) = D(T)$
2. $T = i(I+V_T)(I-V_T)^{-1}$
3. T es cerrado si y sólo si V_T es cerrado
4. Si S es un operador simétrico en H, entonces $T \subseteq S \iff V_T \subseteq V_S$
5. $d_i(V_T) = d_+(T)$ y $d_e(V_T) = d_-(T)$

Demostración.

1.

Sea $y \in D(V_T) = R(T+i)$, $y = (T+i)x$, Como se tiene que

$$\begin{aligned}\|(T \pm i)x\|^2 = \langle (T \pm i)x, (T \pm i)x\rangle &= \|Tx\|^2 + \|x\|^2 \pm i\langle x, Tx\rangle \mp i\langle Tx, x\rangle \\ &= \|Tx\|^2 + \|x\|^2\end{aligned}$$

Dónde en la última igualdad usamos el hecho de que T sea simétrico, entonces $\|(T+i)x\| = \|(T-i)x\|$, de donde $\|V_T y\| = \|(T-i)x\| = \|(T+i)x\| = \|y\|$.

También, $(I-V_T)y = (T+i)x - (T-i)x = 2ix$, de donde se tiene que $R(I-V_T) = D(T)$.

2.

Usando la misma notación que en la prueba anterior, tenemos que $(I-V_T)y = 2ix$. También, usando el Lema 3.2 tenemos que $(I-V_T)^{-1}$ existe. Por lo tanto, $(I-V_T)^{-1}x = \frac{-iy}{2}$. Entonces para todo $x \in D(T)$, se tiene que

$$Tx = \frac{1}{2}((T+i)x + (T-i)x) = \frac{1}{2}(I+V_T)y = i(I+V_T)\frac{-iy}{2} = i(I+V_T)(I-V_T)^{-1}x$$

Es decir, $T \subseteq i(I+V_T)(I-V_T)^{-1}$. Pero para todo $x \in D(i(I+V_T)(I-V_T)^{-1})$, $x \in D((I-V_T)^{-1}) = R(I-V_T) = D(T)$, por lo tanto, $T = i(I+V_T)(I-V_T)^{-1}$.

3.

Si T es cerrado, entonces por la Proposición 2.1, inciso 4, $R(T+i) = D(V_T)$ es cerrado, por lo que usando el Corolario 1.12 tenemos que V_T es cerrado. Inversamente, si V_T es cerrado, entonces $R(V_T) = R(T-i)$ es cerrado (Porque $0 \in \pi(V_T)$), por lo que usando la Proposición 2.1, inciso 3, $R(T-i) = \overline{R(T-i)} = R(\overline{T}-i)$, Pero $(T-i)$ y $(\overline{T}-i)$ son inyectivas y $(T-i) \subseteq (\overline{T}-i)$, por lo que forzosamente $(T-i) = (\overline{T}-i)$, y $T = \overline{T}$.

4.
$T \subseteq S \iff (T - i) \subseteq (S - i) \iff V_T \subseteq V_S$ donde la última implicación es debido a que $V_T(T + i)x = (T - i)x$ y $D(V_T) = R(T + i)$

5.
$$d_i(V_T) = \dim R(V_T)^{\perp} = \dim R(T - i)^{\perp} = d_+(T)$$

$$d_e(V_T) = \dim D(V_T)^{\perp} = \dim R(T + i)^{\perp} = d_-(T) \blacksquare$$

Ahora, veremos que entre operadores simétricos y operadores isométricos con $R(I - V)$ denso la transformación de Cayley es una biyección.

Sea V un operador isométrico tal que $R(I - V)$ es denso. Entonces por el Lema 3.2, $I - V$ es invertible. Consideremos al operador $T_V = i(I + V)(I - V)^{-1}$, $D(T_V) = R(I - V)$, es decir, para todo $y \in D(V)$, tenemos que $T_V(I - V)y = i(I + V)y$

Proposición 3.4 T_V es un operador simétrico cuya transformación de Cayley es V

Demostración.

$D(T_V) = R(I - V)$ es un conjunto denso. Sea $x \in D(T_V)$, $x = (I - V)y$ con $y \in D(V)$, entonces

$$\langle T_V x, x\rangle = \langle T_V(I - V)y, (I - V)y\rangle = \langle i(I + V)y, (I - V)y\rangle$$
$$= i[\|y\|^2 - \|Vy\|^2 + \langle Vy, y\rangle - \langle y, Vy\rangle] = i(i2Im(\langle Vy, y\rangle) = -2Im\langle Vy, y\rangle \in \mathbb{R}$$

Por lo que el Lema 2.9 implica que T_V es simétrico.

Puesto que $T_V(I - V)y = i(I + V)y$, tenemos que $(T_V + i)x = i(I + V)y + i(I - V)y = 2iy$ por lo que $R(T_V + i) = D(V)$. Sustituyendo a x en lo anterior, se tiene que

$$(T_V + i)(I - V)y = i(I + V)y + iy - iVy = 2iy$$

Además, tenemos que

$$(T_V - i)(I - V)y = i(I + V)y - iy + iVy = 2iVy$$

Por lo que para toda $y \in D(V)$,

$$Vy = \frac{1}{2i}(2iVy) = \frac{1}{2i}(T_V - i)(I - V)y = (T_V - i)(T_V + i)^{-1}y$$

Donde $(T_V + i)^{-1}$ existe puesto que T_V es simétrica y $-i \in \pi(T_V)$. Por lo tanto tenemos que $V \subseteq (T_V - i)(T_V + i)^{-1}$. Pero dado que $D((T_V - i)(T_V + i)^{-1}) \subseteq D(T_V + i)^{-1} = R(T_V + i) = D(V)$, entonces en efecto $V = (T_V - i)(T_V + i)^{-1}$, es decir, V es la transformación de Cayley de T_V $\blacksquare$

Juntando los resultados anteriores, obtenemos el teorema más importante de esta sección.

Teorema 3.5 La transformación de Cayley es una biyección entre el conjunto de todos los operadores simétricos definidos en H y los operadores isométricos V en H para los cuales $R(I - V)$ es denso en H. Su inversa es la transformación $V \to i(I + V)(I - V)^{-1}$

Demostración.

La transformación de Cayley es inyectiva por la Proposición 3.3 inciso 2, y es suprayectiva por la Proposición 3.4 ■

Recordemos que un operador T es unitario si y sólo si es isométrico y $D(T) = R(T) = H$

Corolario 3.6 Un operador simétrico T es autoadjunto si y sólo si V_T es unitario

Demostración.

Por la Proposición 2.18, T es autoadjunto si y sólo si $R(T - i) = R(T + i) = H$, y como $D(V_T) = R(T + i)$ y $R(V_T) = R(T - i)$, entonces lo anterior se cumple si y sólo si V_T es unitario ■

Corolario 3.7 Un operador unitario V es la transformación de Cayley de un operador autoadjunto si y sólo si $N(I - V) = \{0\}$

Demostración.

Por el Teorema 3.5 y el Corolario 3.6, V es la transformación de Cayley de un operador autoadjunto si y sólo si $R(I-V)$ es denso. Usando el Lema 3.2, y dado que V es unitaria, tenemos que $R(I - V)$ es denso si y sólo si $N(I - V) = \{0\}$ ■

Corolario 3.8 Sea T un operador simétrico. Si alguno de los índices de deficiencia $d_+(T)$ ó $d_-(T)$ es finito, entonces todo operador simétrico S en H tal que $S \supseteq \overline{T}$ es cerrado

Demostración.

Asumimos sin pérdida de generalidad que $d_-(T) < \infty$, pues el otro caso es análogo. Por la Proposición 3.3, inciso 4, como $\overline{T} \subseteq S$, $V_{\overline{T}} \subseteq V_S$. Como $V_{\overline{T}}$ es continua por definición, y cerrada por la Proposición 3.3, entonces $D(V_{\overline{T}}) = R(\overline{T}+i)$ es cerrado, por lo que usando (1.2.3) tenemos que $H = D(V_{\overline{T}}) \oplus N(T^* - i)$, por lo que existe un subespacio $M \leq N(T^* - i)$ tal que $D(V_S) = D(V_{\overline{T}}) \oplus M$, (completamos la base ortonormal de $D(V_S)$ a una base ortonormal de $D(V_{\overline{T}})$, ver el apéndice). Como $d_-(T) = \dim N(T^* - i) < \infty$, M es finito dimensional. Por lo tanto, $D(V_S)$ es cerrado, al igual que S por la Proposición 3.3, inciso 3. ■

3.1.2. El teorema de Von Neumann

Cuando decimos que S es una extensión simétrica (o autoadjunta) de T, queremos decir que S es un operador simétrico (o autoadjunto) y que $T \subseteq S$.

Lema 3.9 Sea S un operador autoadjunto, T un operador simétrico. Entonces S es una extensión autoadjunta de T si y sólo si S es una restricción de T^*

Demostración.

$T \subseteq S \implies S = S^* \subseteq T^*$, y $S \subseteq T^* \implies S = S^* \supseteq T^{**} = \overline{T} \supseteq T$ ■

Proposición 3.10 Sea T un operador simétrico. Entonces existe una relación biyectiva entre las extensiones simétricas de T y las extensiones isométricas de V_T

Demostración.

Si S es una extensión simétrica de T, entonces por la Proposición 3.3 tenemos que $V_T \subseteq V_S$. Inversamente, si $V_T \subseteq V$ entonces $R(I - V_T) \subseteq R(I - V)$ por lo que $R(I - V)$ es denso, entonces V es la transformación de Cayley de algún operador simétrico S, y de nuevo por la Proposición 3.3 debemos tener $T \subseteq S$ ■

La razón por la cual hemos hecho todo este desarrollo respecto a la transformación de Cayley es por que nos da la alternativa de encontrar las extensiones simétricas de T vía las extensiones isométricas de V_T. Esto nos permitirá desarrollar, a lo largo de esta sección, los teoremas para determinar si hay o no extensiones simétricas o autoadjuntas de un operador dado, y cuáles son. El próximo teorema nos da explícitamente todas las extensiones simétricas cerradas de un operador simétrico.

Teorema 3.11 Sea T un operador simétrico. Supongamos que $M_+ \leq R(T + i)^\perp = N(T^* - i)$ y $M_- \leq R(T - i)^\perp = N(T^* + i)$ son subespacios cerrados de H tales que $\dim M_+ = \dim M_-$ y que U es una isometría de M_+ a M_-. Definimos a T_U como $T_U = T^* \mid_{D(T_U)}$ con $D(T_U) = D(\overline{T}) \dotplus (I - U)M_+$, es decir,

$$T_U(x + (I - U)y) = \overline{T}x + iy + iUy \qquad \text{para } x \in D(\overline{T}),\ y \in M_+$$

para $x \in D(\overline{T})$ y $y \in M_+$. Entonces T_U es un operador simétrico cerrado tal que $T \subseteq T_U$, y toda extensión cerrada simétrica de T en H es de esta forma. También, $d_\pm(T) = d_\pm(T_U) + dim M_\pm$.

Demostración.

Podemos suponer que T es cerrado, dado que T y $\overline{T}$ comparten las mismas extensiones cerradas simétricas, y $(\overline{T})^* = T^*$. Si V_T es la transformación de Cayley de T, por la Proposición 3.10, buscamos a todas los operadores isométricos cerrados V tales que $V_T \subseteq V$. Por el Corolario 1.12 pedir que V es cerrado es equivalente a pedir que $D(V)$ sea cerrado. Entonces, dado que $H = R(T+i) \oplus R(T+i)^{\perp}$por la Proposición 2.1, inciso 4, y recordando que $D(V_T) = R(T+i)$, entonces buscamos precisamente a subespacios cerrados $M_+ \leq R(T+i)^{\perp}$ y $M_- \leq R(T-i)^{\perp}$, y a una isometría U de M_+ a M_- (lo cual implica que $\dim M_+ = \dim M_-$) para poder definir a la extensión de V_T como $D(V) = D(V_T) \oplus M_+$ con $Vy = V_T y$ para $y \in D(V_T)$, y $Vy = Uy$ para $y \in M_+$, siendo claro así que todas la extensiones de V_T tienen esta forma. Entonces eligiendo arbitraria y aleatoriamente a una de estas V, y aplicándole la transformación inversa de Cayley obtenemos $T_U = i(I+V)(I-V)^{-1}$ (La nombramos T_U porque cada V es determinada por su correspondiente U) con

$$D(T_U) = (I-V)(D(V_T) \oplus M_+) = (I-V_T)D(V_T) \dot{+} (I-U)M_+ = D(T) \dot{+} (I-U)M_+$$

Donde la segunda igualdad es porque $V_T \subset V$, la tercera es porque $T = i(I + V_T)(I - V_T)^{-1}$, y la suma es directa porque $(I - V)$ es inyectivo por el Lema 3.2. Entonces por construcción de T_U y por la Proposición 3.3, inciso 4, tenemos que $T \subseteq T_U$, con T_U simétrica, por lo que $T_U \subseteq T_U^* \subseteq T^*$, entonces

$$T_U(x + (I-U)y) = T^*(x + (I-U)y) = \overline{T}x + iy + iUy \tag{3.1.1}$$

para $x \in D(\overline{T})$, $y \in M_+$ tal cual como lo señala el teorema. Como esto fue para cualquier V arbitraria, entonces tenemos que toda extensión de T debe ser de la forma señalada.

Como $D(V) = D(V_T) \oplus M_+$, entonces $D(V_T)^{\perp} = D(V)^{\perp} \oplus M_+$, también por el Lema 3.1 y la Proposición 3.3 inciso 5, tenemos que $d_-(T_V) = d_e(V) = \dim D(V)^{\perp}$ y $\dim D(V_T)^{\perp} = d_e(V_T) = d_-(T)$ por lo que

$$d_-(T) = \dim D(V_T)^{\perp} = \dim(D(V)^{\perp} \oplus M_+) = d_-(T_U) + \dim M_+$$

Análogamente, como $R(V_T) = R(T - i)$, se tiene $R(V) = R(V_T) \oplus M_-$ entonces $R(V_T)^{\perp} = R(V)^{\perp} \oplus M_-$, y dado que $d_+(T) = d_i(V_T) = \dim R(V_T)^{\perp}$ y $\dim R(V)^{\perp} = d_i(V) = d_+(T_V)$ entonces

$$d_+(T) = \dim R(V_T)^{\perp} = \dim(R(V)^{\perp} \oplus M_-) = d_+(T_U) + \dim M_- \quad \blacksquare$$

El siguiente teorema de Von Neumann es uno de los resultados más importantes de este trabajo, porque responde completamente a una de las preguntas que nos conciernen. Es una continuación del teorema anterior, y usa la misma notación de éste último

Teorema 3.12 Sea T un operador simétrico en H

1. Si $d_+(T) = d_-(T)$, entonces todas las extensiones autoadjuntas de T se describen por los operadores T_U definidos en el Teorema 3.11 cuando el operador isométrico U es tal que $D(U) = N(T^* - i)$ y $R(U) = N(T^* + i)$

2. T tiene extensiones autoadjuntas en H si y sólo si $d_+(T) = d_-(T)$

Demostración.

1.

Podemos suponer de nuevo que T es cerrado por la Proposición 2.1 inciso 3, y porque todas las extensiones autoadjuntas de T son extensiones autoadjuntas de $\overline{T}$. Bajo la notación de la demostración del teorema anterior, por el Corolario 3.6, T_V es autoadjunto si y sólo si V es unitario, pero V es unitario si y sólo si $D(V) = R(V) = H = R(T-i) \oplus R(T-i)^{\perp} = R(T+i) \oplus R(T+i)^{\perp}$, como V es extensión de V_T la cual es una isometría con $D(V_T) = R(T+i)$ y $R(V_T) = R(T-i)$, V es unitario si y sólo si U es isometría con $D(U) = M_+ = R(T+i)^{\perp}$ y $D(U) = M_- = R(T-i)^{\perp}$, de donde el enunciado se sigue. Nótese que toda extensión autoadjunta forzosamente debe ser de la forma descrita en el enunciado del Teorema 3.11 porque los operadores autoadjuntos son cerrados.

2.

Todo operador isométrico V tal que $D(V)$ y $R(V)$ son cerrados debe cumplir, por ser inyectivo, que $\dim D(V) = \dim R(V)$ (pues una base de $D(V)$ bajo V va a una base en $R(V)$), entonces por la demostración del inciso anterior, T tiene extensiones autoadjuntas si y sólo si existe U isometría tal que $D(U) = \dim R(T+i)^{\perp}$ y $R(U) = \dim R(T-i)^{\perp}$, si y sólo si $\dim R(T+i)^{\perp} = \dim R(T-i)^{\perp}$, i.e. $d_-(T) = d_+(T)$ ■

Corolario 3.13 Todo operador simétrico T en H tiene una extensión autoadjunta en un espacio probablemente más grande que H

Demostración.

Consideremos al operador $S = T \oplus (-T)$ en el espacio de Hilbert $K = H \oplus H$ (ver la discusión inicial en la sección 1.1). S^* existe porque $D(S) = D(T) \oplus D(-T)$ es denso en K. Ahora[1], $D(S^*) = D(T^*) \oplus D((-T)^*)$ y $S^* = T^* \oplus (-T)^*$, por lo que se tiene $N(S^* \pm i) = N(T^* \pm i) \oplus N(T^* \mp i)$, es decir, $d_-(S) = d_+(S)$ y entonces por el Teorema 3.12 S tiene una extensión autoadjunta A en K. Si vemos a T como un operador actuando en $H \oplus \{0\}$ en lugar de H, entonces tenemos que $T \subseteq S \subseteq A$ ■

Recopilando lo obtenido, para un operador simétrico T tenemos tres posibilidades:

- Si $d_+(T) = d_-(T) = 0$, entonces por el Corolario 2.16 $\overline{T}$ es autoadjunto, y como existen tantas extensiones autoadjuntas como isometrías entre $R(T+i)^{\perp} = \{0\}$ y $R(T-i)^{\perp} = \{0\}$, como es descrito en el Teorema 3.11 y 3.12, entonces $\overline{T}$ es la única extensión autoadjunta de T en H

- Si $d_+(T) = d_-(T) \neq 0$, entonces hay infinitas isometrías de $N(T^* - i)$ a $N(T^* + i)$ por lo que hay infinitas extensiones autoadjuntas de T en H

[1] Es directo ver que para todo $x \in D(T^*)$, $(x,0),(0,x) \in D(S^*)$ por lo que $D(S^*) \supseteq D(T^*) \oplus D((-T)^*) = D$ y $S^* \mid_D = T^* \oplus (-T)^*$. Basta ver que $D = D(S^*)$. Entonces $(x,y) \in D(S^*) \iff \exists (x',y') \in K$ tal que $\langle x, Tz\rangle + \langle y, -Tz'\rangle = \langle (x,y),(Tz,-Tz')\rangle_K = \langle (x',y'),(z,z')\rangle_K = \langle x',z\rangle + \langle y',z'\rangle$ para todo $(z,z') \in D(S)$, en particular, para todo $(z,0),(0,z)$ con $z \in D(T)$, en cuyo caso se obtiene que $\langle x,Tz\rangle = \langle x',z\rangle$ y $\langle y,-Tz\rangle = \langle y',z\rangle$, i.e. $(x,y) \in D(T^*) \oplus D((-T)^*)$

- Si $d_+(T) \neq d_-(T)$, entonces no hay extensiones autoadjuntas de T en H.

Con este resultado podemos no sólo determinar, sino construir usando el procedimiento del Teorema 3.11 a las extensiones autoadjuntas de muchos operadores que ya conocemos, por ejemplo los operadores semiacotados, o en general cualquier operador simétrico T tal que $\exists\lambda \in \pi(T) \cap \mathbb{R}$, puesto que los índices de deficiencia son constantes en componentes conexas (ver Proposición 2.4 y 2.12 inciso 2).

3.2. Tripletes de frontera

En esta sección desarrollamos la teoría de extensiones autoadjuntas a partir de tripletes de frontera, que suele ser particularmente útil para operadores diferenciales.

3.2.1. Relaciones lineales

Las relaciones lineales son, a grandes rasgos, una generalización de los operadores lineales. Recordemos del capítulo 1 que todo operador T de H_1 a H_2 puede verse como un subespacio lineal de $H_1 \oplus H_2$, puesto que la gráfica $G(T) \leq H_1 \oplus H_2$ describe por completo el comportamiento de T. Es por eso que en esta sección muchas veces nos referiremos a $G(T)$ como T, y viceversa. Toda gráfica de un operador T cumple la condición del Lema 1.1. Si quitamos esta última condición, lo que obtenemos es una relación lineal.

Definición 3.4 Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert, si $S \leq H_1 \oplus H_2$ decimos que S es una relación lineal de H_1 a H_2.

Para una relación lineal M, se definen a los siguientes conjuntos:

- $D(S) = \{x \in H_1 \mid (x, y) \in S\}$
- $R(S) = \{y \in H_2 \mid (x, y) \in S\}$
- $N(S) = \{x \in H_1 \mid (x, 0) \in S\}$
- $M(S) = \{y \in H_2 \mid (0, y) \in S\}$

Donde $D(S)$ es el dominio de S, $R(S)$ es el rango de S, $N(S)$ es el núcleo de S, y $M(S)$ es la parte multivariada de S. Notemos que por el Lema 1.1, S es la gráfica de un operador si y sólo si $M(S) = \{0\}$

Como hemos visto en el Ejemplo 1.1 y en la Proposición 1.5, no todo operador T es cerrable, puesto que existen operadores para los que $\overline{G(T)}$ es una relación lineal pero no es la gráfica de un operador, es decir, $M(\overline{G(T)}) \neq \{0\}$. La operación cerradura no es cerrada en el espacio de operadores. También es necesario pedir que T esté densamente definido para poder definir a T^*, o más bien, para que T^* sea un operador. Para S una relación lineal, definimos a la cerradura $\overline{S}$, al adjunto S^* y a la inversa S^{-1} de una relación lineal como

- $\overline{S} = \overline{\{(x,y) \in S\}}$ (es decir, la cerradura en $H_1 \oplus H_2$)
- $S^* = \{(y,x) \in H_2 \oplus H_1 \mid \langle y,v\rangle_{H_2} = \langle x,u\rangle_{H_1}$ para todo $(u,v) \in S\}$
- $S^{-1} = \{(y,x) \in H_2 \oplus H_1 \mid (x,y) \in H_1 \oplus H_2\}$

Es claro que estos tres conjuntos son relaciones lineales, entonces, las tres operaciones se pueden aplicar a cualquier relación lineal, y al aplicarlas el resultado es también una relación lineal, a diferencia del caso de operadores. También es claro que si S es un operador cerrable, con adjunto ó con inversa, la gráfica de su cerradura, adjunto ó inversa corresponden a los subespacios propuestos. Decimos que T es cerrada si $T = \overline{T}$. Definimos para S, P relaciones lineales de H_1 a H_2, R relación lineal de H_2 a H_3 y $\alpha \in K$ a las siguientes relaciones lineales

- $\alpha S = \{(x, \alpha y) \mid (x,y) \in S\}$
- $S + P = \{(x, y+z) \mid (x,y) \in S, (x,z) \in P\}$
- $RS = \{(x,y) \mid (x,z) \in S, (z,y) \in R\}$

De la misma forma, se puede verificar que estos subespacios corresponden a la gráfica del producto por escalar, la suma y composición de operadores respectivamente. En la generalidad de relaciones lineales, se siguen cumpliendo gran parte de las igualdades y contenciones que hemos desarrollado para operadores, entre las que se encuentran las siguiente

$$S^{**} = \overline{S},\ (S^{-1})^* = (S^*)^{-1},\ R(S)^{\perp} = N(S^*) \tag{3.2.1}$$

$$D(S)^{\perp} = M(S^*),\ D(S^*) = M(\overline{S}) \tag{3.2.2}$$

Las prueba de todas las igualdades en (3.2.1) son bastante similares a las correspondientes en operadores que hemos dado en capítulos anteriores (usando el "método de la gráfica"), por lo que las omitimos. Probamos aquí la primera de (3.2.2) (la segunda resulta consecuencia de ésta): $x \in D(S)^{\perp} \iff \langle x,s\rangle = 0\ \forall s \in S \iff \langle 0,v\rangle = \langle x,u\rangle\ \forall (u,v) \in S \iff (0,x) \in S^* \iff x \in M(S^*)$.

Notemos que justamente lo que nos dice la igualdad $D(S)^{\perp} = M(S^*)$ es que si tu operador S no está definido densamente, entonces S^* no es la gráfica de un operador.

Recordemos que dados dos subespacios cerrados $S \subseteq P$, definimos a $P \ominus S$ como el subespacio tal que $P = S \oplus (P \ominus S)$, es decir, el complemento ortogonal de S en P (Este subespacio siempre existe porque S y P son cerrados, ver apéndice). Nos gustaría tener, dada una relación lineal T, el máximo subespacio $S \subseteq T$ tal que T es la gráfica de un operador. Dada T relación lineal cerrada de H_1 en H_2, definimos a dos subespacios de $H_1 \oplus H_2$

$$T_\infty := \{(0,y) \in T\},\ T_s = T \ominus T_\infty$$

Es decir, $T = T_s \oplus T_\infty$. Nótese que T_s es un subespacio cerrado (porque T es cerrado) tal que $M(T_s) = \{0\}$, es decir, es la gráfica de un operador cerrado. Por eso a T_s se le llama la parte operador de T.

Similarmente al caso de operadores, se definen a los siguientes conceptos

Definición 3.5 Sea T una relación lineal en un espacio de Hilbert H

- Si T es cerrada, decimos que $\lambda \in \mathbb{C}$ está en el conjunto resolvente $\rho(T)$ si $(T-\lambda)^{-1} \in \mathbb{B}(H)$ (Es decir, $(T-\lambda)^{-1}$ es la gráfica de un operador acotado con dominio H). Llamamos a $(T-\lambda)^{-1}$ el resolvente de T en λ. el espectro de T se define como el conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$
- Decimos que T es Hermitiana si $T \subseteq T^*$. T es simétrica si es Hermitiana y su dominio es denso. T es autoadjunta si $T = T^*$

En la definición del conjunto resolvente, podemos omitir el requisito de que $(T-\lambda)^{-1}$ sea acotado, de la misma forma que pasa en el caso de operadores como lo muestra la Proposición 2.7.

Proposición 3.14 Para una relación lineal cerrada T en un espacio de Hilbert H, $\lambda \in \rho(T)$ si y sólo si $N(T-\lambda) = \{0\}$ y $R(T-\lambda) = H$

Demostración.

Notemos que se cumplen las dos igualdades:

$$N(T-\lambda) = M((T-\lambda)^{-1}),\ R(T-\lambda) = D((T-\lambda)^{-1}) \tag{3.2.3}$$

Puesto que $x \in N(T-\lambda) \iff (x,0) \in T-\lambda \iff (0,x) \in (T-\lambda)^{-1} \iff x \in M((T-\lambda)^{-1})$.

$x \in R(T-\lambda) \iff (y,x) \in T-\lambda \iff (x,y) \in (T-\lambda)^{-1} \iff x \in D((T-\lambda)^{-1})$.

Si $\lambda \in \rho(T)$, por (3.2.3) tenemos que $N(T-\lambda) = \{0\}$ y $R(T-\lambda) = H$.

Inversamente, si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $N(T-\lambda) = \{0\}$ y $R(T-\lambda) = H$, entonces por (3.2.3) $M((T-\lambda)^{-1}) = \{0\}$ y $D((T-\lambda)^{-1}) = H$, es decir, $(T-\lambda)^{-1}$ es la gráfica de un operador con dominio H. Como T es cerrado, $T-\lambda$ y $(T-\lambda)^{-1}$ también lo son, por lo que el Corolario 1.12 implica que $(T-\lambda)^{-1}$ es acotado ■

El objetivo de esta subsección es, además de presentar los conceptos básicos de las relaciones lineales, dar una biyección similar a la que se da entre operadores simétricos e isométricos con la transformación de Cayley en el Teorema 3.5 en la generalidad de relaciones lineales, resultado que presentamos en la Proposición 3.16.

Denotamos como $\mathcal{S}(H)$ al conjunto de todos los operadores autoadjuntos B que actúan en un subespacio cerrado $H_B \subseteq H$. para todo $B \in S(H)$, $R(B) \subseteq H_B$. Denotamos a la proyección ortogonal de H en H_B como P_B

Proposición 3.15 Existe una correspondencia biunívoca entre los operadores $B \in S(H)$ y las relaciones lineales autoadjuntas $\mathcal{B}$ en H dada por

$$\mathcal{B} = G(B) \oplus (\{0\} \oplus (H_B)^{\perp}) = \{(x, Bx+y) \mid x \in D(B), y \in (H_B)^{\perp}\} \tag{3.2.4}$$

Donde B es la parte operador de $\mathcal{B}$, y $(H_B)^{\perp}$ es la parte multivariada de $\mathcal{B}$

Demostración.

Primero notemos que $\mathcal{B}$ en (3.2.4) es en efecto una relación autoadjunta para $B \in \mathcal{S}(H)$, puesto que

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^* &= \{(x,y) \in H \oplus H \mid \langle x, v\rangle = \langle y, u\rangle \text{ para todo } (u,v) \in \mathcal{B}\} \\ &= \{(x,y) \in H \oplus H \mid \langle x, Bu + w\rangle = \langle y, u\rangle \text{ para todo } u \in D(B), w \in (H_B)^{\perp}\} \\ &= \{(x, Bx + y) \mid x \in D(B), y \in (H_B)^{\perp}\} = \mathcal{B}\end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad deriva directamente del hecho de que B es un operador autoadjunto. Inversamente, sea $\mathcal{B}$ una relación autoadjunta en H, sea $B := \mathcal{B}_s$ y $H_B := M(\mathcal{B})^{\perp}$. Usando (3.2.2) tenemos que $D(B)^{\perp\perp} = D(\mathcal{B})^{\perp\perp} = M(\mathcal{B})^{\perp} = H_B$, es decir, $D(B)$ es un subespacio denso de H_B. Por definición de $\mathcal{B}_s$, tenemos que $\mathcal{B}_s = G(B) \perp \{0\} \oplus M(\mathcal{B})$, lo que implica $R(B) \subseteq M(\mathcal{B})^{\perp} = H_B$, es decir, B es un operador definido densamente en H_B. Dado que $\mathcal{B}$ es una relación autoadjunta, es trivial probar que B es autoadjunta también, y que $\mathcal{B}$ es la construcción a partir de B en (3.2.4) ■

Proposición 3.16 Una relación lineal $\mathcal{B}$ en H es autoadjunta si y sólo si hay un operador unitario V en H tal que

$$\mathcal{B} = \{(x,y) \in H \oplus H \mid (I - V)y = i(I + V)x\} \tag{3.2.5}$$

V es único, y se le llama la transformación de Cayley de $\mathcal{B}$, y todo operador unitario es la transformación de Cayley de alguna relación autoadjunta.

Demostración.

Sea $\mathcal{B}$ autoadjunta, y $B \in S(H)$ su correspondiente operador autoadjunto de la Proposición 3.15, por el Corolario 3.6, tenemos que $V_B = (B - i)(B + i)^{-1}$ es un operador unitario en H_B. Entonces $Vx = (I - P_B)x + V_B P_B x$, $x \in H$ define un operador unitario que cumple (3.2.5).

También, si V es un operador que cumple (3.2.5), entonces V actúa como la identidad en $(I - P_B)H$ y como la transformación de Cayley de B en H_B, por lo tanto, V es única.

Inversamente, sea V un operador unitario, y consideremos a V_0 como la restricción de V a $N(I - V)^{\perp}$, entonces se tiene que $N(I - V_0) = \{0\}$, y por el Corolario 3.7, V_0 es la transformación de Cayley de un operador autoadjunto B en H_B, tal que $B = i(I + V_0)(I - V_0)^{-1}$, entonces $\mathcal{B}$ definida por la Proposición 3.15 es autoadjunta, y es tal que cumple (3.2.5) ■

3.2.2. Tripletes de frontera

Durante esta subsección, T representa un operador simétrico en un espacio de Hilbert H

Definición 3.6 Un triplete de frontera para T^* es una tercia $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ donde $\mathcal{K}$ es un espacio de Hilbert, $\Gamma_0 : D(T^*) \to \mathcal{K}$, $\Gamma_1 : D(T^*) \to \mathcal{K}$ son funciones lineales definidas en todo $D(T^*)$ tales que

1. $[x,y]_{T^*} := \langle T^*x, y\rangle - \langle x, T^*y\rangle = \langle \Gamma_1 x, \Gamma_0 y\rangle_{\mathcal{K}} - \langle \Gamma_0 x. \Gamma_1 y\rangle_{\mathcal{K}}$ para todo $x, y \in D(T^*)$

2. La función $x \to (\Gamma_0 x, \Gamma_1 x)$ de $D(T^*)$ a $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ es suprayectiva

A $\mathcal{K}$ se le llama espacio frontera de T^*.

Notemos que si $\Gamma_+ := \Gamma_1 + i\Gamma_0$ y $\Gamma_- := \Gamma_1 - i\Gamma_0$, la condición 1 de la definición anterior puede sustituirse por

$$2i[x,y]_{T^*} = \langle \Gamma_- x, \Gamma_- y\rangle_{\mathcal{K}} - \langle \Gamma_+ x, \Gamma_+ y\rangle_{\mathcal{K}} \text{ para todo } x, y \in D(T^*) \tag{3.2.6}$$

Si Γ_+ y Γ_- son funciones de $D(T^*)$ a $\mathcal{K}$ que cumplen (3.2.6) y tales que $x \to (\Gamma_- x, \Gamma_+ x)$ es suprayectiva, entonces definiendo $\Gamma_1 = (\Gamma_+ + \Gamma_-)/2$ y $\Gamma_0 = (\Gamma_+ - \Gamma_-)/2i$ tenemos que $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ es un triplete de frontera de T^*. En este caso también llamaremos a $(\mathcal{K}, \Gamma_+, \Gamma_-)$ un triplete de frontera, es decir, para probar que $(\mathcal{K}, \Gamma_a, \Gamma_b)$ es un triplete de frontera hay que probar ya sea la condición 1 de la definición 3.6 ó (3.2.6), aparte de la condición 2.

La razón por la cual se les llama tripletes de frontera, es que usualmente en operadores diferenciales, las funciones Γ_0 y Γ_1 suelen mandar a cada función a los valores de ésta, o su derivada, en los puntos extremos delimitados por el dominio del operador diferencial, también el espacio de Hilbert se le denota $\mathcal{K}$ porque usualmente éste es un campo. Esto se verá más claro cuando apliquemos la teoría aquí desarrollada a operadores de Sturm-Liouville.

Al final de este capítulo, en el Teorema 3.20 veremos que T^* tiene un triplete de frontera si y sólo si T tiene índices de deficiencia iguales (es decir, por el Teorema 3.12, si y sólo si T tiene extensiones autoadjuntas)

Definición 3.7 Decimos que un operador cerrado S es una extensión propia de T si $T \subseteq S \subseteq T^*$. Dos extensiones propias S_1 y S_2 son disjuntas si $D(S_1) \cap D(S_2) = D(\overline{T})$, y son transversales si $D(S_1) + D(S_2) = D(T^*)$

Entonces por el Lema 3.9 las extensiones autoadjuntas de un operador T son extensiones propias de T. Veremos que existe una relación biyectiva entre las extensiones propias de T y las relaciones lineales cerradas que hay en $\mathcal{K}$ (es decir, subespacios cerrados de $\mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$) para $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ triplete de frontera de T^*, y en particular, las extensiones autoadjuntas de T le corresponden relaciones lineales autoadjuntas en $\mathcal{K}$. Estos resultados se acumulan en el Teorema 3.18.

Las siguientes definiciones utilizan los conceptos principales de este capítulo: relaciones lineales y tripletes de frontera. El Teorema 3.18 muestra el porqué introducimos tales conceptos, dándonos herramientas para encontrar extensiones autoadjuntas. Aunque por ahora no hemos probado que existan tripletes de frontera, lo haremos más adelante y por lo pronto suponemos su existencia.

Sea $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ un triplete de frontera para T^*. Sea $\mathcal{B}$ una relación lineal en $\mathcal{K}$, denotamos por $T_{\mathcal{B}}$ a la restricción de T^* al dominio

$$D(T_{\mathcal{B}}) := \{x \in D(T^*) \mid (\Gamma_0 x, \Gamma_1 x) \in \mathcal{B}\} \tag{3.2.7}$$

Si $\mathcal{B}$ es la gráfica de un operador B en $\mathcal{K}$, entonces el requisito $(\Gamma_0 x, \Gamma_1 x) \in \mathcal{B}$ significa que $B\Gamma_0 x - \Gamma_1 x = 0$, es decir, $D(T_{\mathcal{B}}) = N(B\Gamma_0 - \Gamma_1)$.

Para un operador lineal S tal que $S \subseteq T^*$, definimos a su espacio frontera como $\mathcal{B}(S) = \{(\Gamma_0 x, \Gamma_1 x) \mid x \in D(S)\}$. Claramente se tiene que $\mathcal{B}(T_{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}$ (Igualdad por la cual el uso del símbolo $\mathcal{B}$ tanto para la relación lineal como para el espacio frontera no debe resultar confuso)

Proposición 3.17 Sea $\mathcal{B}$ una relación lineal en $\mathcal{K}$, $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ un triplete de frontera para T^* y S un operador lineal en H tal que $T \subseteq S \subseteq T^*$ y $\mathcal{B}(S) = \mathcal{B}$ (Por ejemplo, $T_{\mathcal{B}}$ cumple las condiciones de S). Entonces

1. $S^* = T_{\mathcal{B}^*}$
2. $\overline{S} = T_{\overline{\mathcal{B}}}$
3. Si S es cerrado, entonces $\mathcal{B}$ es cerrado
4. $\overline{T} = T_{\{(0,0)\}}$, es decir $D(\overline{T}) = \{x \in D(T^*) \mid \Gamma_0 x = \Gamma_1 x = 0\}$

Demostración.

1. Notemos que T^* es una extensión de S^* puesto que $T \subseteq S \subseteq T^*$ implica $\overline{T} \subseteq S^* \subseteq T^*$. Sea $y \in D(T^*)$. $y \in D(S^*)$ si y sólo si para todo $x \in D(S)$, tenemos que $\langle T^* x, y\rangle = \langle Sx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$, lo cual equivale por la Definición 3.6 a $\langle \Gamma_1 x, \Gamma_0 y\rangle = \langle \Gamma_0 x, \Gamma_1 y\rangle$, es decir, $\langle v, \Gamma_0 y\rangle = \langle u, \Gamma_1 y\rangle$ para todo $(u, v) \in \mathcal{B}$, lo que a su vez equivale a $(\Gamma_0 y, \Gamma_1 y) \in \mathcal{B}^*$ por la definición de adjunto de una relación lineal, y por (3.2.7) ésto último significa que $y \in D(T_{\mathcal{B}^*})$. Es decir, hemos probado que $D(S^*) = D(T_{\mathcal{B}^*})$, y dado que ambos son restricciones de T^*, tenemos que $S^* = T_{\mathcal{B}^*}$.

2. Dado que $\mathcal{B}^{**} = \overline{\mathcal{B}}$ (Ver (3.2.1)), aplicamos el índice anterior a S^* y a $\mathcal{B}^*$ (se puede dado que S^* cumple que $\mathcal{B}(S^*) = \mathcal{B}(T_{\mathcal{B}^*}) = \mathcal{B}^*$), y obtenemos $\overline{S} = S^{**} = T_{\mathcal{B}^{**}} = T_{\overline{\mathcal{B}}}$

3. Supongamos que S es cerrada, entonces $S \subseteq T_{\mathcal{B}} \subseteq T_{\overline{\mathcal{B}}} = \overline{S} = S$, donde las primeras dos contenciones son por definición de los operadores $T_{\mathcal{B}}$, B relación lineal. Entonces tenemos que $T_{\mathcal{B}} = T_{\overline{\mathcal{B}}}$, lo que implica por la definición (3.2.7) y el inciso 2 de la definición 3.6 que $\mathcal{B} = \overline{\mathcal{B}}$

4. Para el caso $\mathcal{B} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$, tenemos que $\mathcal{B}^* = \{(0,0)\}$, y $T_{\mathcal{B}} = T^*$, por lo que usando el inciso 1, $\overline{T} = T^{**} = T_{\mathcal{B}}^* = T_{\mathcal{B}^*} = T_{\{(0,0)\}}$ ■

Teorema 3.18 Si $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ es un triplete de frontera para T^*, entonces existe una correspondencia biunívoca entre todas las relaciones lineales cerradas $\mathcal{B}$ en $\mathcal{K}$ y todas las extensiones propias de T dada por $\mathcal{B} \leftrightarrow T_{\mathcal{B}}$, Además, si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_0$ son relaciones lineales cerradas en $\mathcal{K}$, tenemos que:

1. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_0 \iff T_{\mathcal{B}} \subseteq T_{\mathcal{B}_0}$
2. $T_{\mathcal{B}}$ y $T_{\mathcal{B}_0}$ son disjuntas si y sólo si $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}_0 = \{(0,0)\}$
3. $T_{\mathcal{B}}$ y $T_{\mathcal{B}_0}$ son transversales si y sólo si $\mathcal{B} + \mathcal{B}_0 = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$
4. $T_{\mathcal{B}}$ es simétrica si y sólo si $\mathcal{B}$ es simétrica

5. $T_{\mathcal{B}}$ es autoadjunta si y sólo si $\mathcal{B}$ es autoadjunta

Demostración.

Si $\mathcal{B}$ es una relación lineal cerrada, entonces por la Proposición 3.17 inciso 2 $T_{\mathcal{B}}$ es cerrada, y por el inciso 4 de la misma, $T \subseteq T_{\mathcal{B}} \subseteq T^*$. Inversamente, si S es un operador cerrado tal que $T \subseteq S \subseteq T^*$, por la Proposición 3.17 inciso 3 tenemos que $\mathcal{B}(S)$ es cerrado, y por el inciso 2, $S = T_{\mathcal{B}(S)}$, con lo que se tiene la correspondencia.

1. Es directo por la definición (3.2.7) puesto que $\mathcal{B}(T_{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}(T_{\mathcal{B}_0}) = \mathcal{B}_0$. También se tiene 2. y 3. directo de las definiciones, y aplicando 1.

4. $T_{\mathcal{B}}$ es simétrica si y sólo si $T_{\mathcal{B}} \subseteq (T_{\mathcal{B}})^* = T_{\mathcal{B}^*}$ (la última igualdad por la Proposición 3.17, inciso 1), lo que equivale, por el inciso 1, a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^*$, es decir, $\mathcal{B}$ es simétrico.

5. $T_{\mathcal{B}}$ es autoadjunta si y sólo si $T_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}^*}$, es decir, por el inciso 1, si y sólo si $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$ ■

Por la Proposición 3.15 y el Teorema 3.18, tenemos que existe una relación biunívoca entre los operadores en $S(\mathcal{K})$ y las extensiones autoadjuntas de T. recordemos de la Proposición 3.15 que $S(\mathcal{K})$ es el conjunto de los operadores autoadjuntos B que actúan en un subespacio cerrado $\mathcal{K}_B \subseteq \mathcal{K}$, y P_B es la proyección en $\mathcal{K}_B$. Muchas veces resulta más conveniente describir a las extensiones autoadjuntas de un operador dado a través de los operadores en $S(\mathcal{K})$ (donde $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ es un triplete de frontera) en lugar de usar relaciones lineales, y tal será el caso cuando describamos las extensiones autoadjuntas de los operadores de Sturm-Liouville. Por eso es conveniente usar la Proposición 3.15 y el Teorema 3.18 para asignar una extensión autoadjunta T_B a cada $B \in S(\mathcal{K})$:

Sea $B \in S(\mathcal{K})$, $\mathcal{B} = G(B) \oplus (\{0\} \oplus (\mathcal{K}_B)^\perp)$ su relación lineal dada por la Proposición 3.15, y definimos al operador $T_B = T_{\mathcal{B}} \subseteq T^*$, es decir, $D(T_B) = D(T_{\mathcal{B}}) = \{x \in D(T^*) \mid (\Gamma_0 x, \Gamma_1 x) \in \mathcal{B}\} = \{x \in D(T^*) \mid \Gamma_0 x \in D(B) \text{ y } \Gamma_1 x = B\Gamma_0 x + h\} = \{x \in D(T^*) \mid \Gamma_0 x \in D(B) \text{ y } B\Gamma_0 x = P_B \Gamma_1 x\}$ donde $h \in (\mathcal{K}_B)^\perp$. **Es decir, las extensiones autoadjuntas de T están definidas por los operadores T_B con dominio**

$$D(T_B) = \{x \in D(T^*) \mid \Gamma_0 x \in D(B) \text{ y } B\Gamma_0 x = P_B \Gamma_1 x\} \tag{3.2.8}$$

donde $B \in S(\mathcal{K})$. Esta fórmula será nuestra herramienta principal para descifrar a las extensiones autoadjuntas que nos conciernen.

Usando el Teorema 3.18, consideramos a la extensión autoadjunta T_0 de T que le corresponde a la relación lineal autoadjunta $\mathcal{B}_0 = \{0\} \oplus \mathcal{K}$, es decir,

$$D(T_0) = D(T_{\mathcal{B}_0}) = \{x \in D(T^*) \mid (\Gamma_0 x, \Gamma_1 x) \in \{\{0\} \oplus \mathcal{K}\}\} = N(\Gamma_0)$$

Por el Corolario 2.19 tenemos que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \rho(T_0)$. El siguiente lema técnico nos ayuda a mostrar las condiciones necesarias y suficientes que se deben de cumplir para que exista un triplete de frontera de T^*

Lema 3.19 $D(T^*) = D(T_0) \dotplus N(T^* - \mu)$ con $\mu \in \rho(T_0)$.

Demostración.

Si probamos las siguientes dos igualdades

$$D(T^*) = D(\overline{T}) \dot{+} (T_0 - \mu)^{-1} N(T^* - \overline{\mu}) \dot{+} N(T^* - \mu) \tag{3.2.9}$$

$$D(T_0) = D(\overline{T}) \dot{+} (T_0 - \mu)^{-1} N(T^* - \overline{\mu}) \tag{3.2.10}$$

Se tendría el resultado que buscamos (notemos que se puede aplicar $(T_0 - \mu)^{-1}$ a cualquier elemento de H porque $\mu \in \rho(T_0)$, en particular, a todo $N(T^* - \lambda)$). Veamos que se cumple la primera. Si $x = x_0 + (T_0 - \mu)^{-1} y_1 + y_2$ con $x_0 \in D(\overline{T}), y_1 \in N(T^* - \overline{\mu}), y_2 \in N(T^* - \mu)$, $x_0, y_2 \in D(T^*)$ y $(T_0 - \mu)^{-1} y_1 \in D(T_0 - \mu) \subseteq D(T^* - \mu)$ por lo que $x \in D(T^*)$. Inversamente, sea $x \in D(T^*)$. Como $\mu \in \rho(T_0)$. $\mu \in \pi(T)$ (La desigualdad (2.1.1) se cumple para $T_0 - \mu$ por la Proposición 2.5) Así que usando el Corolario 2.2 tenemos que

$$H = R(\overline{T} - \mu) \oplus N(T^* - \overline{\mu}) \tag{3.2.11}$$

Por lo que existen $x_0 \in D(\overline{T})$ y $y_1 \in N(T^* - \overline{\mu})$ tales que $(T^* - \mu)x = (\overline{T} - \mu)x_0 + y_1$. Definiendo a $y_2 := x - x_0 - (T_0 - \mu)^{-1} y_1$, tenemos que

$$(T^* - \mu) y_2 = (T^* - \mu)x - (\overline{T} - \mu)x_0 - (T_0 - \mu)(T_0 - \mu)^{-1} y_1 = y_1 - y_1 = 0$$

(pudimos aplicar $T^* - \mu$ a y_2 gracias a que $\overline{T} \subseteq T^*$ y $T_0 \subseteq T^*$) es decir, $y_2 \in N(T^* - \mu)$, por lo que tenemos que $x = x_0 + (T_0 - \mu)^{-1} y_1 + y_2 \in D(\overline{T}) + (T_0 - \mu)^{-1} N(T^* - \overline{\mu}) + N(T^* - \mu)$. Entonces hemos probado que

$$D(T^*) = D(\overline{T}) + (T_0 - \mu)^{-1} N(T^* - \overline{\mu}) + N(T^* - \mu)$$

Sólo falta ver que la suma es directa. Supongamos que $x_0 + (T_0 - \mu)^{-1} y_1 + y_2 = 0$ con $x_0 \in D(\overline{T}), y_1 \in N(T^* - \overline{\mu}), y_2 \in N(T^* - \mu)$. Entonces

$$0 = (T^* - \mu)(x_0 + (T_0 - \mu)^{-1} y_1 + y_2) = (\overline{T} - \mu)x_0 + y_1$$

Pero por (3.2.11) tenemos que $(\overline{T} - \mu)x_0 \perp y_1$, por lo que la ecuación anterior implica que $(\overline{T} - \mu)x_0 = y_1 = 0$, entonces $0 = (T_0 - \mu)^{-1}(\overline{T} - \mu)x_0 = x_0$, por lo que $y_2 = -x_0 - (T_0 - \mu)^{-1} y_1 = 0$, es decir, se tiene (3.2.9)

Ahora probemos (3.2.10). Como la desigualdad en (3.2.9) es directa, basta probar que $D(T_0) = D(\overline{T}) + (T_0 - \mu)^{-1} N(T^* - \overline{\mu})$. Como claramente tenemos que $D(\overline{T}) \subseteq D(T_0)$ y $(T_0 - \mu)^{-1} N(T^* - \overline{\mu}) \subseteq D(T_0)$ entonces tenemos la inclusión $D(T_0) \supseteq D(\overline{T}) + (T_0 - \mu)^{-1} N(T^* - \overline{\mu})$. Sea $x \in D(T_0)$. Entonces usando (3.2.9) se tiene que $x = x_0 + (T_0 - \mu)^{-1} y_1 + y_2$, con $x_0 \in D(\overline{T}), y_1 \in N(T^* - \overline{\mu}), y_2 \in N(T^* - \mu)$. Dado que $x_0 + (T_0 - \mu)^{-1} y_1 \in D(T_0)$, entonces se tiene que $y_2 \in D(T_0)$, por lo que $(T_0 - \mu) y_2 = (T^* - \mu) y_2 = 0$, pero $T_0 - \mu$ es inyectiva porque $\mu \in \rho(T_0)$, entonces $y_2 = 0$, por lo que $x \in D(\overline{T}) \dot{+} (T_0 - \mu)^{-1} N(T^* - \overline{\mu})$ ■

Notemos que en el Lema anterior, T_0 pudo haber sido cualquier extensión autoadjunta de T.

Teorema 3.20 T^* tiene un triplete de frontera $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ si y sólo si $d_-(T) = d_+(T)$. Además, $d_-(T) = d_+(T) = dim(\mathcal{K})$

Demostración.

Supongamos que $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ es un triplete de frontera para T^*. Sea $z \in \rho(T_0) \cap \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (ver la definición de T_0 justo antes del Lema 3.19), Si probamos que Γ_0 restringida a $N(T^* - z)$ es una biyección en $\mathcal{K}$, se tendría que $d_-(T) = \dim N(T^* - i) = \dim(\mathcal{K}) = \dim N(T^* + i) = d_+(T)$ con lo que se prueba la primera implicación del teorema. Por el Lema 3.19 tenemos que $D(T^*) = D(T_0) \dotplus N(T^* - \mu)$. Como Γ_0 es tal que $\Gamma_0(D(T^*)) = \mathcal{K}$ y $\Gamma_0(D(T_0)) = 0$, entonces se tiene que $\Gamma_0(N(T^* - \mu)) = \mathcal{K}$. Sólo falta ver que Γ_0 es inyectiva en $N(T^* - \mu)$. Si $x \in N(T^* - \mu)$ es tal que $\Gamma_0 x = 0$, entonces $x \in D(T_0) \cap N(T^* - \mu)$, pero la suma $D(T^*) = D(T_0) \dotplus N(T^* - \mu)$ es directa, por lo que $x = 0$, por lo que se tiene que en efecto que $\Gamma_0|_{N(T^*-z)}$ es una biyección a $\mathcal{K}$.

Inversamente, supongamos que $d_-(T) = d_+(T)$. Eso implica que existe una isometría biyectiva W de $N(T^* - i)$ a $N(T^* + i)$ (dado que ambos son de la misma dimensión, basta con mandar una base ortonormal a otra base ortonormal). Para todo $x \in D(T^*)$, dado que $D(T^*) = D(\overline{T}) \dotplus N(T^* - i) \dotplus N(T^* + i)$ por la Proposición 2.15, existen $x_0 \in D(\overline{T})$, $x_+ \in N(T^* - i)$ $x_- \in N(T^* + i)$ tales que $x = x_0 + x_+ + x_-$. Definimos a $Q_\pm x = x_\pm$. Proponemos a

$$\mathcal{K} = N(T^* + i) \quad \Gamma_+ = 2WQ_+ \quad \Gamma_- = 2Q_-$$

Como triplete de frontera ($N(T^* + i)$ es cerrado porque $T^* + i$ lo es, y el producto en $\mathcal{K}$ es el mismo producto que en H). Veamos que cumple la condición (3.2.6). Sean $x = x_0 + x_+ + x_-$, $y = y_0 + y_+ + y_-$ vectores de $D(T^*)$. Distribuyendo las sumas, es directo ver que

$$\begin{aligned}[x, y]_{T^*} = [x_0 + x_+ + x_-, y_0 + y_+ + y_-]_{T^*} &= \langle T^*(x_0 + x_+ + x_-), y_0 + y_+ + y_-\rangle \\ &- \langle x_0 + x_+ + x_-, T^*(y_0 + y_+ y_-)\rangle = 2i\langle x_+, y_+\rangle - 2i\langle x_-, y_-\rangle\end{aligned}$$

Usando esta ecuación, y el hecho de que W es una isometría, se tiene que

$$\begin{aligned}2i[x, y]_{T^*} = 4\langle x_-, y_-\rangle - 4\langle x_+, y_+\rangle &= 4\langle x_-, y_-\rangle - 4\langle Wx_+, Wy_+\rangle \\ &= \langle \Gamma_- x, \Gamma_- y\rangle - \langle \Gamma_+ x, \Gamma_+ y\rangle\end{aligned}$$

Es decir, la condición (3.2.6) se cumple. Sólo falta probar la condición 2 de la Definición 3.6. Sean $u_1, u_2 \in \mathcal{K}$. Tomando a $x = \frac{u_1 + W^{-1}u_2}{2}$, tenemos que $\Gamma_+ 2x = 2WQ_+ u_1 + 2WQ_+ W^{-1} u_2 = 2u_2$ y $\Gamma_- 2x = 2Q_- u_1 + 2Q_- W^{-1} u_2 = 2u_1$. Por lo que $(\Gamma_- x, \Gamma_+ x) = (u_1, u_2)$. Es decir, $(\mathcal{K}, \Gamma_+, \Gamma_-)$ es un triplete de frontera ■

Bibliografía escencial del capítulo 3

[SK12] Capítulo 13 y 14.
[Wei80] Capítulo 8.

Capítulo 4

Teoremas de operadores autoadjuntos

El camino que hemos recorrido en este trabajo nos llevó a introducir muchas nuevas definiciones y conceptos, todo esto con la meta en mente de lograr métodos para obtener operadores autoadjuntos. Gran parte de lo que hemos hecho hasta ahora en este trabajo, se ha enfocado a encontrar operadores autoadjuntos, ya sea probando que se está trabajando con uno, o que podemos dar una extensión del operador con el que trabajamos que sí sea autoadjunto. Insistimos tanto en estos operadores, porque tienen propiedades exclusivas que no comparten con los operadores simétricos. En este capítulo presentamos dos teoremas que vuelven a los operadores autoadjuntos actores principales dentro del análisis funcional aplicado: El Teorema espectral y el Teorema de Stone.

4.1. Teorema espectral

Aquí introducimos dicho teorema, enfatizando en la comprensión de éste más que en las sutilezas técnicas que se utilizan en el desarrollo hacia este teorema. Lo hacemos de esta forma porque no es el propósito de este trabajo el estudio de este resultado, sin embargo, es importante comprender el teorema y reconocerlo como una de las peculiaridades de los operadores autoadjuntos que nos motiva a buscarlos con tanta insistencia. Para una explicación más profunda y completa de teoremas espectrales, medidas espectrales y en general de teoría espectral, se puede consultar el capítulo 7 en [Wei80], para el cual ya contamos con las herramientas suficientes para su comprensión, con lo visto en el presente trabajo hasta ahora.

Para asimilar con más facilidad el teorema espectral para operadores autoadjuntos no acotados, recordemos algunos de los teoremas espectrales para operadores más sencillos que se ven durante el estudio de análisis funcional, e inclusive desde álgebra lineal:

Recordemos que un operador T es normal si y sólo si $TT^* = T^*T$, por lo que todo operador autoadjunto es normal, pero no todo operador simétrico es normal

Teorema (Espectral en caso finito dimensional) Sea $T : X \to X$ una transformación (operador) normal donde $D(T) = X$ es un espacio con producto interno, con $dimX = n \in \mathbb{N}$, entonces para X existe una base ortonormal $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ de eigenvectores de T, para estos eigenvalores existen proyecciones ortogonales $E_1, E_2, ..., E_k$ tales que

1. E_i es la proyección ortogonal en $N(T - \lambda_i)$
2. $E_i \neq 0$ y $E_i E_j = 0$ para todo $i, j \leq k, i \neq j$
3. $\sum_{j=1}^{k} E_j = I$
4. $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j E_j = T$

Se puede verificar el resultado en [BN00] Teorema 2,2, y Teorema 2.6. El resultado importante es el inciso 4, que nos permite descomponer al operador en una combinación lineal sencilla, y es ésta la meta de todos los teoremas espectrales. Recordando la definición de conjunto resolvente y de espectro (con sus correspondientes subdivisiones) que se encuentran la sección 2.2, es directo ver que en el caso de dimensión finita, sucede que $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, con $|\sigma_p(T)|$ finito. Entonces el teorema espectral mencionado arriba puede ser reformulado como $\sum_{\lambda_j \in \sigma(T)} \lambda_j E_j = T$. Señalamos esto porque es justamente el espectro el conjunto clave que determina cuáles elementos hay en la descomposición de los operadores para todos los teoremas espectrales

En el caso de arriba la descripción de T es sencilla, porque contamos con un número finito de elementos en el espectro, y por lo tanto un número finito de proyecciones ortogonales (de hecho, se pueden debilitar las condiciones del teorema anterior, sustituyendo la condición de que X sea finito dimensional por $R(T)$ finito dimensional, y T acotada. Ver [BN00] página 430). Si tenemos que $|\sigma(T)|$ no es finito, la descomposición de T requiere de más cuidados:

El siguiente paso en dificultad, es $|\sigma(T)|$ numerable. Esto pasa para operadores compactos T, es decir, operadores para los cuales conjuntos acotados van, bajo T, a conjuntos cuya cerradura es compacta. Los operadores compactos son operadores acotados, y su espectro es casi igual a su espectro puntual, pues $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$, y si además se tiene que T es normal, entonces se tiene el siguiente teorema:

Teorema (Espectral para operadores normales compactos) Sea T un operador normal compacto en un espacio de Hilbert complejo H, entonces H tiene una base ortonormal de eigenvectores de T tal que $N(T)^{\perp}$ tiene una base a lo más numerable de eigenvectores, a los que les corresponden una cantidad a lo más numerable de eigenvalores $\{\lambda_1, \lambda_2 ...\}$. Sean $\{E_1, E_2, ...\}$ las proyecciones ortogonales a los eigenespacios correspondientes (i.e., $E_i = N(T - \lambda_i)$). Entonces se tiene que

$$T = \sum_i \lambda_i E_i$$

En la prueba del teorema se nota que la expresión $\sum_i \lambda_i E_i$ tiene sentido, es decir, que la serie converge en la norma de $B(H)$

Las ideas aquí presentadas sobre operadores compactos se exponen con claridad en [Wei80] secciones 6.1 y 7.1. El teorema anterior le da mucha importancia a los operadores compactos por su similitud con el teorema espectral para operadores con dominio de dimensión finita. Existen operadores autoadjuntos compactos (Ver [BN00] página 445) por lo que para este caso particular, tendremos una descomposición espectral sencilla para el operador autoadjunto a tratar.

Si contamos con un operador T autoadjunto cuyo espectro no es numerable, no será posible representar a T como una serie ó combinación lineal de proyecciones ortogonales. Notando la analogía que hay entre la cardinalidad del espectro, y el número de proyecciones a tratar en los teoremas espectrales anteriores, uno podría intuir que en este caso, se involucrarán una cantidad no numerable de proyecciones ortogonales, y haciendo un esfuerzo de imaginación aún mayor, se podrá intuir que se sustituirá a la serie por alguna especie de integral, una integral que represente un operador. En efecto, el resultado de los teoremas espectrales en estos casos representan a un operador a través de una integral, pero cabe recalcar que evidentemente las integrales aquí mostradas son de una naturaleza muy diferente a las integrales usuales de cálculo, y se usa el mismo símbolo porque la forma de describirlas tiene mucha semejanza a la forma en la que se describen integrales de Riemann a partir de sumas parciales (inclusive de Lebesgue, pero no se verá eso en este trabajo) como lo veremos a continuación.

En el análisis desarrollado a continuación, nos basamos principalmente en los capítulos 4 y 5 de [SK12], en donde se explica la construcción de las integrales desde un punto de vista muy general, con todas los obstáculos técnicos considerados y probados. Nosotros evitaremos gran parte del desarrollo e inclusive las pruebas, puesto que nuestro única meta es comprender el teorema espectral y la integral/operador que ahí se presenta. El lector interesado en el desarrollo completo puede referirse a [SK12].

Para entender el teorema espectral de operadores autoadjuntos en general, necesitamos introducir la noción de resolución de la identidad, que es la requerida familia de proyecciones espectrales. Recordemos de la definición 2.7 inciso 2, que T es positivo, lo que denotamos como $T \geq 0$ si y sólo si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in D(T)$. Escribimos $T \geq S$ si y sólo si $T - S \geq 0$

Definición Una resolución de la identidad de un espacio de Hilbert H es una familia de proyecciones ortogonales $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ que cumple

1. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \implies E(\lambda_1) \leq E(\lambda_2)$
2. $\lim_{\lambda \to \lambda_0^+} E(\lambda)x = E(\lambda_0)x$ para todo $x \in H, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ (continuidad por la derecha)
3. $\lim_{\lambda \to -\infty} E(\lambda)x = 0$ y $\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)x = x$ para todo $x \in H$

La condición 1 es equivalente a $\lambda_1 \leq \lambda_2 \implies M_1 \subseteq M_2$ donde $R(E(\lambda_1)) = M_1$ y $R(E(\lambda_2)) = M_2$, la cual a su vez es equivalente a $\lambda_1 \leq \lambda_2 \implies E(\lambda_1)E(\lambda_2) = E(\lambda_2)E(\lambda_1) = E(\lambda_1)$ (Ver Teorema 22.4 de [BN00]), es decir, en una resolución de la identidad, el espacio respecto al cual se hace la proyección ortogonal va creciendo conforme λ crece, y por la condición 3 tiende a la identidad (proyección en todo el espacio) por el lado positivo, y a la 0 (proyección en el 0) por el lado negativo.

Dada una resolución de la identidad $\{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, nuestro objetivo es definir a los operadores $\int_I \lambda\ dE$ y $\int_{\mathbb{R}} \lambda\ dE$, donde $I = [a, b]$, lo cual se hace de forma similar a la construcción de la integral de Riemann:

Sea $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, y sea P una partición de I, es decir, una secuencia $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_n\}$ tal que $a - 1 < \lambda_0 < a < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = b$.[1]

Con $|P| = \text{máx}_k |\lambda_k - \lambda_{k-1}|$, elegimos a $z_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ y definimos a la suma de Riemann

$$S(\lambda, P) = \sum_{k=1}^{n} z_k(E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1}))$$

Los siguientes teoremas nos garantizan la existencia del operador buscado, mostrándolo como el límite de sumas de Riemann tal cual como se hacen las integrales de cálculo en reales. Omitimos la demostración, que se puede consultar en [SK12] página 64-66, junto con algunas propiedades esenciales para el cálculo con estos operadores, pero que para nuestro propósito son prescindibles.

Teorema Sea $E = \{E(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ una resolución de la identidad, con $D(E(\lambda)) = H$ espacio de Hilbert, entonces

1. Si I es un intervalo acotado cerrado, existe un operador continuo $\int_I \lambda\ dE$ en H que está determinado por la siguiente propiedad: Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $|P| < \delta(\epsilon) \implies \| \int_I \lambda\ dE - S(\lambda, P)\| < \epsilon$.

2. Existe un operador $\int_{\mathbb{R}} \lambda\ dE$ tal que

$$(\int_{\mathbb{R}} \lambda\ dE)x = \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} (\int_{[a,b]} \lambda\ dE)x$$

Por la Proposición 4.17, inciso 2 de [SK12], los operadores $\int_I \lambda\ dE$ y $\int_{\mathbb{R}} \lambda\ dE$ son autoadjuntos. El teorema espectral es el inverso de esta afirmación. Primero veamos una particularidad de los operadores autoadjuntos acotados:

Lema Para todo operador autoadjunto acotado T, existe un intervalo acotado I tal que $\sigma(T) \subseteq I$

Demostración.

[1] el hecho de que pidamos $a - 1 < \lambda_0 < a$ en lugar de $a < \lambda_0$ es una sutileza técnica que deriva del hecho de que $E(\lambda_0^-) = \text{lím}_{\lambda\to\lambda_0^-} E(\lambda)$ es una proyección que puede ser diferente de $E(\lambda_0)$. La condición 2 de la Definición de resolución de identidad garantiza que $E(b) = E(b^+)$ por lo que no tenemos que considerar $\lambda_n > b$.

Por la desigualdad de Cauchy, tenemos que $|\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\|\|x\|$ para todo $x \in D(T)$. Usando este hecho y el Lema 2.9, tenemos que $M = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ y $m = \text{ínf}_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ son ambos reales. Veamos que $\sigma(T) \subseteq [m, M]$:

Si probamos que para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [m, M]$, $\lambda \in \pi(T)$, por el Teorema 2.17 se sigue el resultado. Supongamos que $\lambda > M$, i.e., $\lambda = M + \epsilon$ con $\epsilon > 0$. Entonces

$$\langle (T - \lambda)x, x\rangle = \langle Tx, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle \leq M\langle x, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle = -\epsilon\langle x, x\rangle \leq 0$$

Para todo $x \in D(T)$, donde la primera desigualdad surge de $\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle \leq M$. Tomando valores absolutos tenemos que $|\langle (T-\lambda)x, x\rangle| \geq \epsilon\|x\|^2$, pero como $|\langle (T - \lambda)x, x\rangle| \leq \|(T - \lambda)x\|\|x\|$, se sigue que $\|(T - \lambda)x\| \geq \epsilon\|x\|$ para todo $x \in D(T)$, es decir, $\lambda \in \pi(T)$. El caso en el que $\lambda < m$ es análogo ■

Teorema (Espectral para operadores autoadjuntos acotados) Sea T un operador autoadjunto acotado en un espacio de Hilbert H, I un intervalo compacto en $\mathbb{R}$ tal que $\sigma(T) \subseteq I$. Entonces existe una única resolución a la identidad E, donde cada $E(\lambda) \in E$ actúa en H, tal que

$$T = \int_I \lambda \, dE$$

La demostración de este teorema se encuentra en [SK12], aunque no viene enunciada tal cual como lo hacemos aquí, puesto que ahí se habla de medidas espectrales en lugar de resoluciones a la identidad, pero por la Proposición 4.6 de [SK12] vemos que las dos versiones son equivalentes. La versión no necesariamente acotada, cuya demostración se encuentra también en [SK12], dice así:

Teorema (Espectral para operadores autoadjuntos) Sea T un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert H. Entonces existe una única resolución a la identidad E, donde cada $E(\lambda) \in E$ actúa en H, tal que

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE$$

Al igual que en los casos más sencillos expuestos al principio de este capítulo, el espectro determina al conjunto donde se considera la integral. Por eso no debe resultar tan sorprendente que un teorema espectral para un operador normal, puesto que su espectro no estaría necesariamente contenido en los reales, involucre a una "integral compleja". Para ver más detalles de esto, véase [BN00] capítulo 28.

El teorema espectral para operadores autoadjuntos no puede ser aplicado para operadores simétricos en general. Las implicaciones de este teorema son de gran utilidad para el desarrollo del cálculo funcional, que es de gran importancia en las aplicaciones, y de ahí la principal razón por la cual buscamos con tanta insistencia operadores autoadjuntos.

4.2. Teorema de Stone

En esta sección veremos otra característica de los operadores autoadjuntos que es de particular importancia para la mecánica cuántica, específicamente, para el estudio de la ecuación de Schrödinger. De la misma forma como se ha hecho en la sección anterior, omitiremos gran parte de las pruebas, y nos enfocaremos en presentar los conceptos involucrados, haciendo hincapié en su importancia. Esta sección está basada principalmente en [Oli09] Capítulo 5.

Una ecuación de Schrödinger es una ecuación de la forma

$$i\frac{d\xi}{dt}(t) = T\xi(t) \quad \xi(0) = \xi \in D(T)$$

Con T un operador autoadjunto en H, donde t suele tomar el papel del tiempo. En la mecánica cuántica esta ecuación es de gran importancia. Es por esto que hacemos la siguiente definición que nos será útil para encontrar las soluciones de la ecuación de Schrödinger

Definición Decimos que una función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{B}(H)$ es un grupo de evolución unitario en H si $G(t)$ es un operador unitario en H y $G(t+s) = G(t)G(s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Además, para todo grupo de evolución unitario $G(t)$, definimos al generador infinitesimal de $G(t)$ como el operador T tal que

$$D(T) := \{\xi \in H \mid \exists \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(G(h) - I)\xi\}$$

y $T\xi := i \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(G(h) - I)\xi$ para todo $\xi \in D(T)$

Proposición Sea $G(t)$ un grupo de evolución unitario, entonces su generador infinitesimal T es Hermitiano (es decir, $\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle$ para todo $x, y \in D(T)$) y para $\xi \in D(T)$ la curva en H $\xi(t) := G(t)\xi$ es la única solución de

$$i\frac{d\xi}{dt}(t) = T\xi(t) \quad \xi(0) = \xi$$

La demostración se puede revisar en [Oli09] página 122

Dado $T \in \mathbb{B}(H)$, $z \in \mathbb{C}$, podemos definir al operador e^{zT} a partir de la serie

$$e^{zT} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j T^j}{j!}$$

Puesto que es convergente respecto a la norma de $\mathbb{B}(H)$. Se puede probar que si $T \in \mathbb{B}(H)$ es un operador autoadjunto, entonces la función $t \to e^{-itT}$ es un grupo de evolución unitario tal que T es su generador infinitesimal (Ver [Oli09] sección 5.2)

Definición Decimos que un grupo de evolución unitario $G(t)$ es

1. uniformemente continuo si $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to t_0} \|G(t) - G(t_0)\|_{\mathbb{B}(H)} = 0$

2. fuertemente continuo si $\lim_{t \to t_0} G(t)\xi = G(t_0)\xi$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, $\xi \in H$

Teorema Si $G(t)$ es un grupo de evolución unitario en H, entonces se tiene que $G(t)$ es uniformemente continuo si y sólo si existe $T \in \mathbb{B}(H)$ tal que $G(t) = e^{-itT} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(-itT)^j$

Demostración en [Oli09], Teorema 5.2.3

Una situación que se da frecuentemente en la mecánica cuántica, es que un operador autoadjunto es dado y se busca construir un grupo de evolución unitario para el cual T sea su generador infinitesimal.

Teorema Si T es autoadjunto, existe un grupo de evolución unitario fuertemente continuo $U(t)$ para el cual T es su generador infinitesimal, en este caso escribimos $U(t) = e^{-itT}$, $t \in \mathbb{R}$

Notemos que e^{-itT} descrito en el Teorema anterior coincide con el e^{-itT} definido anteriormente para T acotado. El Teorema de Stone es el inverso del Teorema anterior.

Teorema Si $U(t)$ es un grupo de evolución unitario fuertemente continuo en H, entonces su generador infinitesimal T es autoadjunto, es decir, $U(t) = e^{-itT}$

Las demostraciones de ambos Teoremas se encuentran en [Oli09] Sección 5.3. Con estos dos teoremas se tiene entonces que existe una correspondencia biunívoca entre operadores autoadjuntos en H y grupos de evolución unitarios fuertemente continuos, y esta es una de las motivaciones por las que se desea tener operadores autoadjuntos.

Bibliografía escencial del capítulo 4

[RS80] Capítulo 8
[BN00] Capítulos 24, 25, 28 y 29.

Parte III

Operadores de Sturm-Liouville

En esta tercera parte de la presente tesis, aplicaremos todos los resultados obtenidos anteriormente a un tipo de operadores diferenciales (i.e. que su regla de correspondencia es una expresión diferencial) de particular interés para la matemática aplicada, llamados operadores de Sturm-Liouville. Dada la naturaleza multidisciplinaria de este tema, se usarán resultados relativamente básicos de otras ramas de estudio, por ejemplo, de ecuaciones diferenciales con coeficientes de funciones continuas, y teoría de la medida: el espacio de Hilbert $L^2(a,b)$. Para el lector que no este familiarizado con este espacio, lo hemos presentado en el apéndice, ejemplo A1, junto con sus propiedades que nos resultan indispensables. Si durante la lectura de esta parte encuentra alguna característica que desconoce sobre el espacio $L^2(a,b)$, vea el ejemplo A1.

Capítulo 5

Operadores de Sturm-Liouville

En este capítulo desglosaremos las características generales de los operadores de Sturm-Liouville

5.1. Operador mínimo y máximo, índices de deficiencia

Una expresión diferencial de la forma

$$\mathcal{L}f = -f'' + qf \tag{5.1.1}$$

con q función continua de (a, b) a $\mathbb{R}$ es una expresión de Sturm-Liouville. Cabe recalcar que algunos autores consideran expresiones más generales, comúnmente $\mathcal{L}f = \frac{1}{r(x)}(pf')' + qf$ (Ver [Wei05]), pero gran parte de los fenómenos interesantes suceden dentro de nuestra propuesta.

Nosotros estudiaremos el comportamiento de tal expresión visto como operador en el espacio de Hilbert $L^2(a, b)$, con $-\infty \leq a < b \leq \infty$

Deseamos crear un operador T cuya regla de correspondencia sea la expresada por (5.1.1), por lo que necesitamos dar un dominio $D(T) \subseteq L^2(a, b)$. Todo $f \in D(T)$ debe cumplir, por lo menos, que f y f' sean diferenciables, y que $Tf \in L^2(a, b)$, pero también resulta conveniente pedir que f y f' sean localmente absolutamente continuas:

Recordemos que una función $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, $[a, b]$ intervalo acotado, es una función absolutamente continua si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| < \delta$, $a_i, b_i \in [a, b]$ entonces $\sum_{i=1}^{n} |f(a_i) - f(b_i)| < \epsilon$. Denotamos al conjunto de las funciones absolutamente continuas en $[a, b]$ como $AC[a, b]$. Si definiéramos a $AC(a, b)$, de la definición obtendríamos que toda $f \in AC(a, b)$ puede ser extendida a a y a b, por lo que $AC[a, b]$ y $AC(a, b)$ son esencialmente el mismo espacio. Las características que nos interesan de las funciones absolutamente continuas son la siguientes:

1. Una función f en $[a, b]$ es absolutamente continua si y sólo si existe $h \in L^1(a, b)$ tal que $f(x) - f(a) = \int_a^x h(t)\ dt$. En este caso f es diferenciable c.t.p. (abreviación de "casi en todas partes", es decir en todo $[a, b]$ excepto en un conjunto de medida cero respecto a la medida de Lebesgue. Ver Ejemplo A1) y $f' = h$ c.t.p. en $[a, b]$, La h con estas características es única.

2. Para todo $f, g \in AC[a, b]$, se cumple la fórmula de integración por partes, i.e. $\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx$. Es claro que $AC[a, b] \subseteq L^1(a, b)$ porque toda función absolutamente continua es continua, por lo que $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ es un conjunto acotado para todo $f \in AC[a, b]$

Los anteriores son resultados esenciales dentro de la teoría de la medida que deben estar en cualquier libro del tema. Se pueden verificar, por ejemplo, en [Coh13] página 173.

En general todos los operadores a tratar tendrán la misma regla de correspondencia expresada en (5.1.1), lo que los diferencia es su dominio. Definimos al operador máximo T_{max}, $T_{max}f = \mathcal{L}f$, con

$$D(T_{max}) = \{f \in L^2(a, b) \mid f \in AC[\alpha, \beta],\ f' \in AC[\alpha, \beta] \\ \text{para todo } [\alpha, \beta] \subset (a, b),\ \mathcal{L}f \in L^2(a, b)\}$$

El operador T_0 se define como $D(T_0) = C_0^\infty(a, b)$, $T_0 f = \mathcal{L}f$, donde

$$C_0^\infty(a, b) = \{f : (a, b) \to \mathbb{C} \mid f^{(n)} \text{ existe para todo } n \in \mathbb{N},\ \text{y existe } K \subset (a, b) \\ \text{compacto tal que } f(x) = 0\ \forall x \in (a, b) \setminus K\}$$

es decir, las funciones que tienen derivadas de todos los grados y que tienen soporte compacto.

Dada $f \in C_0^\infty(a, b)$, como f es continua y de soporte compacto, tenemos que $\int_a^b |f(x)|^2 \leq \int_a^b k^2$ donde $|f(x)| < k$ para todo x, por lo que $C_0^\infty(a, b) \subset L^2(a, b)$. Similarmente se puede ver que $\mathcal{L}f \in L^2(a, b)$. La propiedad 1 sobre funciones absolutamente continuas muestra que $f^{(n)} \in AC[\alpha, \beta]$. En síntesis, $D(T_0) \subseteq D(T_{max})$.

A continuación verificamos que T_0 es cerrable, con lo que definimos al operador mínimo T_{min} como la cerradura del operador T_0.

Lema 5.1 T_0 es cerrable, $T_{min} = \overline{T_0}$ es un operador simétrico y $(T_{min})^* = T_{max}$

Demostración.

Sea $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$, $f \in D(T_{max})$. Entonces usando la propiedad 2 sobre funciones absolutamente continuas, y el hecho de que el soporte de φ es compacto (lo que implica que $\lim_{x\to a}\varphi^{(n)}(x) = \lim_{x\to b}\varphi^{(n)}(x) = 0$), tenemos que

$$\langle T_0\varphi, f\rangle = \int_a^b [\varphi''(x){+}q(x)\varphi(x)]\overline{f(x)}\,dx = \lim_{\alpha\to a^+,\beta\to b^-}\int_\alpha^\beta [\varphi''(x){+}q(x)\varphi(x)]\overline{f(x)}\,dx$$

$$= \lim_{\alpha\to a^+,\beta\to b^-}\int_\alpha^\beta \varphi(x)[\overline{f''(x)}{+}q(x)\overline{f(x)}] = \int_a^b \varphi(x)[\overline{f''(x)}{+}q(x)\overline{f(x)}] = \langle \varphi, T_{max}f\rangle$$

Como $D(T_0)$ es denso en $L^2(a,b)$ (ver Proposición A11) tenemos que T_0 es simétrico, y por lo tanto cerrable con $\overline{T_0} = T_{min}$ simétrico (Lema 2.10) y la ecuación anterior nos dice que $T_{max} \subseteq (T_0)^*$. Como $T_{min}^* = (\overline{T_0})^* = T_0^*$ (Teorema 1.9, inciso 2) tenemos que $T_{max} \subseteq T_{min}^*$.

Verifiquemos que $T_{min}^* \subseteq T_{max}$. Sea $f \in D(T_{min}^*)$, $T_{min}^* f = g$. Puesto que $f, g \in L^2(a,b)$, y q es continua, tenemos que para todo intervalo $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$, $\int_\alpha^\beta q(t)f(t) - g(t)\ dt$ existe, lo que se denota como $qf - g \in L^1_{loc}(a,b)$. Por lo tanto, dada $c \in (a,b)$, definimos a la función

$$h(x) = \int_c^x \int_c^s q(t)f(t) - g(t)\ dt\ ds$$

Por la propiedad 1 de funciones absolutamente continuas tenemos que $h.h' \in AC[\alpha,\beta]$ para todo $[\alpha,\beta] \subseteq (a,b)$, $h'' = qf - g$ en (a,b) (estrictamente $h'' = qf-g$ c.t.p. pero en $L^2(a,b)$ funciones con igualdad c.t.p. se consideran idénticas, ver Ejemplo A1)

Ahora dada $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$, tenemos que $\overline{\varphi} \in D(T_{min})$, así que

$$\langle f, -\overline{\varphi}'' + q\overline{\varphi}\rangle = \langle f, T_{min}\overline{\varphi}\rangle = \langle T_{min}^* f, \overline{\varphi}\rangle = \langle g, \overline{\varphi}\rangle = \langle qf - h'', \overline{\varphi}\rangle$$

De donde se obtiene que $\langle f, \overline{\varphi}''\rangle = \langle h'', \overline{\varphi}\rangle$, es decir, integrando por partes, tenemos que $\int_a^b f(t)\varphi''(t)\ dt = \int_a^b h''(t)\varphi(t)\ dt = \int_a^b h(t)\varphi''(t)\ dt$, lo cual implica que la segunda derivada de $f - h$ es cero en (a,b), es decir, existen c_0, c_1 constantes tales que $f(x) = h(x) + c_0 + c_1 x$ en (a,b). Por lo tanto $f, f' \in AC[\alpha,\beta]$ para todo $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ y $f'' = h'' = qf - g$, por lo que $qf - f'' = g \in L^2(a,b)$, i.e. $f \in D(T_{max})$ y $g = T_{max}f$ ■

Tenemos entonces que el operador mínimo debe su nombre a tener la siguiente propiedad: si se define a un operador S en $L^2(a,b)$ con la regla de correspondencia $Sf = \mathcal{L}f$ con un dominio denso $D(S)$ tal que $D(\overline{S}) \subsetneq D(T_{min})$, entonces $T_{max} \subsetneq S^*$, pues la Proposición 1.7 inciso 4 garantiza que $T_{max} \subseteq S^*$, por lo que el Teorema 1.9 inciso 1 garantiza que S es cerrable , y si $T_{max} = S^*$ entonces $T_{min} = S^{**} = \overline{S}$, de donde se obtiene el resultado. Por lo tanto, los operadores S con tales hipótesis no nos interesan porque su adjunto no es un operador diferencial con las condiciones mínimas que requerimos (las condiciones implícitas en el dominio de T_{max}). Por lo tanto los operadores autoadjuntos T que le corresponden a la expresión (5.1.1), si es que existen, deben tener un dominio tal que $D(T_{min}) \subseteq D(T) \subseteq D(T_{max})$, $T = T_{max}|_{D(T)}$ por el Lema 3.9.

Definición 5.1 Decimos que la expresión $\mathcal{L}$ en (5.1.1) es regular en a, y que a es un punto regular si $a \in \mathbb{R}$ y $\int_a^c |q(x)|\ dx < \infty$ para algún (y por lo tanto para todo) $c \in (a, b)$. De lo contrario decimos que $\mathcal{L}$ es singular en a. Similarmente, decimos que $\mathcal{L}$ es regular en b, y que b es un punto regular si $b \in \mathbb{R}$ y $\int_c^b |q(x)|\, dx < \infty$ para algún (y por lo tanto para todo) $c \in (a, b)$, de lo contrario decimos que $\mathcal{L}$ es singular en b. Decimos que $\mathcal{L}$ es regular si es regular en a y regular en b, es decir, (a, b) es un intervalo acotado y q es integrable en (a, b).

Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $g : (a, b) \to \mathbb{C}$ continua. Decimos que f es una solución de la ecuación $\mathcal{L}f - \lambda f = g$ en (a, b) si f es una función en (a, b) tal que $f, f' \in AC[\alpha, \beta]$ donde $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ y $\mathcal{L}f(x) - \lambda f(x) = g(x)$ c.t.p. en (a, b)

El siguiente es un resultado esencial de ecuaciones diferenciales ordinarias, el lector que no este familiarizado con éste puede encontrarlo en cualquier texto sobre el tema, por ejemplo, [Cod89] Capítulo 3, secciones 2,3 y 6.

Teorema 5.2 Sea $c \in (a, b)$, ó c un punto regular, $g : (a, b) \to \mathbb{C}$ continua. Entonces para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ existe una única solución f de $\mathcal{L}f - \lambda f = g$ en (a, b) tal que $f(c) = c_1$, $f'(c) = c_2$

Notemos que el teorema anterior implica que el espacio de soluciones de $\mathcal{L}f - \lambda f = g$ es de dimensión dos (todas son combinaciones lineales de f_1 y f_2 donde $f_1((b-a)/2) = f_2'((b-a)/2) = 1$ y $f_2((b-a)/2) = f_1'((b-a)/2) = 0$). En particular para $g = 0$ tenemos a la ecuación

$$-f'' + qf = \lambda f \tag{5.1.2}$$

Una base para el espacio de soluciones de ésta última ecuación se llama un sistema fundamental $\{u_1, u_2\}$.

Gracias a la definición de $D(T_{max})$ y al Teorema 5.2, podemos reducir las posibilidades de los índices de deficiencia de T_{min} a tres posibles casos

Teorema 5.3 Los índices de deficiencia de T_{min} son $(0, 0)$, $(1, 1)$ ó $(2, 2)$

Demostración.

$N((T_{min})^* \pm i) = N(T_{max} \pm i)$ es el conjunto de soluciones f de (5.1.2) con $\lambda = \mp i$ tales que $f, \mathcal{L}f \in L^2(a, b)$, pero $\mathcal{L}f = \lambda f$, así que basta pedir sólo que $f \in L^2(a, b)$. Ésto implica, dado que el espacio de soluciones de (5.1.2) es de dimensión dos, que $d_\pm(T_{min}) = \dim(N(T_{max} \pm i)) \leq 2$. También es claro que $f \in N(T_{max} - i) \iff \overline{f} \in N(T_{max} + i)$, por lo que T_{min} tiene índices de deficiencia iguales ■

Notemos que por el Corolario 3.8, todo extensión simétrica de T_{min} es cerrada

Corolario 5.4 T_{min} tiene extensiones autoadjuntas

Demostración.

El Teorema 3.12 nos garantiza que T_{min} tiene extensiones autoadjuntas. De hecho, nos da explícitamente todas las extensiones autoadjuntas de T_{min} ■

Aunque el Teorema 3.12 exprese la extensiones autoadjuntas a partir de la teoría de extensión de Von Neumann, resulta más conveniente utilizar la teoría de los tripletes de frontera para determinarlas, como se verá más adelante. Por lo pronto, el Corolario 2.16 nos dice que $d_-(T_{min}) = d_+(T_{max}) = 0 \iff T_{min} = T_{max}$.

Nos gustaría determinar qué condiciones se deben cumplir para que T_{min} tenga ciertos índices de deficiencia. Con este propósito en mente, necesitaremos un resultado de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya demostración se encuentra, por ejemplo, en [Nai68], que enunciamos enseguida después de la próxima definición

Definición 5.2 Decimos que una función f en (a,b) está en L^2 cerca de a (respectivamente b) si existe $c \in (a,b)$ tal que $f \in L^2(a,c)$ (respectivamente $f \in L^2(c,b)$)

Notemos que si f es solución de (5.1.2), para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $f \in AC[\alpha,\beta]$ con $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$, lo que implica que $f \in L^2[\alpha,\beta]$, por lo que $f \in N(T_{max} - \lambda)$ si y sólo si $f \in L^2(a,b)$ si y sólo si f está en L^2 cerca de a y cerca de b.

Proposición 5.5 Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, g función en (a,b) en L^2 cerca de a (respectivamente b). Si $\mathcal{L}$ es regular en a (respectivamente b), y f es una función en (a,b) solución de $\mathcal{L}f - \lambda f = g$, entonces existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} f'(x)$ (respectivamente $\lim_{x\to b} f(x)$ y $\lim_{x\to b} f'(x)$), i.e. f y f' pueden extenderse a funciones en $[a,b)$ (respectivamente funciones en $(a,b]$).

Demostración en [Nai68] página 56.

Corolario 5.6 Supongamos que a es un punto regular en (a,b) de $\mathcal{L}$.

1. Para todo $f \in D(T_{max})$, f y f' se pueden extender en $[a,b)$

2. Si f es solución de (5.1.2) para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces f y f' se pueden extender en $[a,b)$, es decir, f y f' están en L^2 cerca de a

3. Si b también es un punto regular, entonces los índices de deficiencia de T_{min} son $(2,2)$

Demostración.

1. Como $f \in D(T_{max})$, $T_{max}f \in L^2(a,b)$, por lo que aplicando la Proposición 5.5 a $g = T_{max}f$, $\lambda = 0$, tenemos que $\mathcal{L}f = T_{max}f$, de donde se sigue el resultado.

2. Aplicando la Proposición 5.5 a $g = 0$

3. Por el inciso anterior tenemos que toda solución de (5.1.2) está en $L^2(a,b)$ ■

Claramente el corolario anterior tiene un análogo para b punto regular.

La siguiente definición será vital para expresar los dominios de las extensiones autoadjuntas. Dados $f, g \in D(T_{max})$, $c \in (a,b)$, definimos al bracket de Lagrange como $[f,g]_c = f(c)\overline{g'(c)} - f'(c)\overline{g(c)}$. Usando integración por partes, tenemos que $\forall f, g \in D(T_{max})$, $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$

$$\int_\alpha^\beta T_{max}f(x)\overline{g(x)} - f(x)\overline{T_{max}g(x)} = [f,g]_\beta - [f,g]_\alpha$$

Como $f, g \in D(T_{max})$, tenemos que la integral de $T_{max}f(x)\overline{g(x)} - f(x)\overline{T_{max}g(x)}$ en todo (a,b) es finita, puesto que $\int_a^b T_{max}f(x)\overline{g(x)} - f(x)\overline{T_{max}g(x)} = \langle T_{max}f, g\rangle - \langle f, T_{max}g\rangle$. Lo que implica que existen $[f,g]_a := \lim_{\alpha\to a}[f,g]_\alpha$, $[f,g]_b := \lim_{\beta\to b}[f,g]_\beta$. Por lo tanto tenemos que

$$[f,g]_{T_{max}} := \langle T_{max}f, g\rangle - \langle f, T_{max}g\rangle = [f,g]_b - [f,g]_a \tag{5.1.3}$$

para todo $f, g \in D(T_{max})$.

Lema 5.7 Si $f \in D(T_{min}), g \in D(T_{max})$, entonces $[f,g]_a = [f,g]_b = 0$

Demostración.

Probaremos el enunciado para $[f,g]_a$, la prueba para $[f,g]_b$ es análoga. Tomemos a $g_0 \in D(T_{max})$ tal que $g = g_0$ para alguna vecindad de a, y $g = 0$ para alguna vecindad de b. entonces tenemos que $[f,g]_a = [f,g_0]_a$, $[f,g_0]_b = 0$. Como $(T_{min})^* = T_{max}$, se tiene que $0 = \langle T_{max}g_0, f\rangle - \langle g_0, T_{min}f\rangle = [f,g_0]_b - [f,g_0]_a = -[f,g]_a$ ■

Proposición 5.8 Sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Entonces para cada uno de los puntos extremos de (a,b) (es decir, a ó b) existe una solución $f \neq 0$ de (5.1.2) tal que f está en L^2 cerca de ese punto.

Demostración.

Veamos que el enunciado se cumple para el punto extremo a, la prueba para el otro punto es análoga.

Tomemos a $c \in (a,b)$, y consideremos al operador mínimo correspondiente $T_{min,c}$ definido en el espacio $L^2(a,c)$ como $T_c f = \mathcal{L}f$ (donde $\mathcal{L}$ es la que corresponde en (5.1.2)). Elegimos a funciones $f, g \in C_0^\infty(a,b)$ tales que $f(c) = g'(c) = 0$ y $f'(c) = g(c) = 1$. Entonces, usando (5.1.3) y el Lema 5.7, tenemos que

$$\langle (T_{min,c})^* f, g\rangle - \langle f, (T_{min,c})^* g\rangle = \langle T_{max,c}f, g\rangle - \langle f, T_{max,c}, g\rangle = [f,g]_c = -1$$

(Haciendo un ligero abuso de notación, denotando a $f|_{(a,c)}$ y $g|_{(a,c)}$ por f y g, respectivamente). Es decir, $T_{max,c}$ no es simétrico, por lo que $T_{min,c}$ no es autoadjunto, eso implica que los índices de deficiencia de $T_{min,c}$ son $(1,1)$ ó $(2,2)$ ($d_-(T_{min}) = d_+(T_{max}) = 0 \iff T_{min} = T_{max}$). Por lo que $\exists f_0 \in N(T_{max,c} - \lambda)$, $f_0 \neq 0$. Sea $d \in (a,c)$, entonces aplicando el Teorema 5.2, existe una única solución f de $\mathcal{L}f = \lambda f$ en (a,b) tal que $f(d) = f_0(d)$ y $f'(d) = f_0'(d)$.

Por la unicidad del teorema, y dado que f_0 es solución de la ecuación en (a, c), entonces $f(x) = f_0(x)$ para todo $x \in (a, c)$, por lo que $f \neq 0$. Como $f_0 \in L^2(a, c)$, entonces f está en L^2 cerca de a ■

Corolario 5.9 Si uno de los puntos extremos de (a, b) es regular, entonces los índices de deficiencia de T_{min} son $(1, 1)$ ó $(2, 2)$.

Demostración.

Supongamos sin pérdida de generalidad que a es el punto regular. Por la proposición anterior, existe una solución $f \neq 0$ de (5.1.2) con $\lambda = i$ que está en L^2 cerca de b. Como a es punto regular, usando el Corolario 5.6 inciso 2, f está en L^2 cerca de a, por lo que $f \in L^2(a, b)$, i.e. $0 \neq f \in N(T_{max} - i)$, lo que implica por el Teorema 5.3 que los índices de deficiencia son $(1, 1)$ ó $(2, 2)$ ■

5.2. La alternativa de Weyl y sus consecuencias

En esta sección presentamos un resultado clásico muy importante para el análisis de los operadores de Sturm-Liouville.

Definición 5.3 Se define al Wronskiano de dos funciones derivables f, g en (a, b) como $W(f, g)_x = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$

Se puede probar que para $\{u, v\}$ sistema fundamental de una ecuación (5.1.2) se tiene que $W_x(u, v)$ es una constante diferente de 0 para $x \in (a, b)$ (Ver [Cod89] Capítulo 3 sección 4)

El siguiente resultado clásico es vital para el estudio de los operadores de Sturm-Liouville. Nos ayudará a precisar los índices de deficiencia de un operador dado.

Teorema 5.10 (Alternativa de Weyl) Sea d un punto extremo de (a, b). Entonces se tiene uno y sólo uno de los siguientes casos:

1. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, las soluciones de (5.1.2) están en L^2 cerca de d
2. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, existe una solución de (5.1.2) que no está en L^2 cerca de d.

En el caso 1 decimos que d está en el caso del círculo límite, para el caso 2 decimos que d está en el caso del punto límite. Si T es un operador con regla de correspondencia como el lado izquierdo de (5.1.2) , decimos que T esta en el caso del círculo límite (caso del punto límite) en d.[1]

Notemos que si se da el caso 2, por la Proposición 5.8, y dado que la dimensión del espacio de soluciones de (5.1.2) es de dimensión 2, tenemos que para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, existe una única (junto con sus multiplicaciones por constantes) solución de (5.1.2) diferente de 0 que está en L^2 cerca de d

[1]La causa de bautizar con un nombre tan exótico a estos casos tiene razón de ser en la demostración original propuesta por el matemático H. Weyl en su análisis a operadores de Sturm-Liouville

Demostración.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $d = a$. Basta con probar que si para un $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, todas las soluciones de (5.1.2) están en L^2 cerca de a, entonces esto mismo se cumple para toda $\lambda \in \mathbb{C}$. Sea u una solución de $\mathcal{L}u = \lambda u$, tenemos que demostrar que $u \in L^2(a, c)$ para alguna $c \in (a, b)$. Sea $\{u_1, u_2\}$ un sistema fundamental de $\mathcal{L}f = \lambda_0 f$. Entonces el Wronskiano $W(u_1, u_2)_x = c$ es una constante diferente de cero. Normalizando podemos suponer que $c = 1$ (multiplicando u_1 y u_2 por la constante $[u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)]^{-1}$). Dada una función continua g en (a, b), $c \in (a, b)$, definimos a la función f_g como

$$f_g(x) := u_1(x)\int_c^x u_2(t)g(t)\ dt - u_2(x)\int_c^x u_1(t)g(t)\ dt \quad \text{para todo } x \in (a, b) \tag{5.2.1}$$

Por el método de variación de constantes de ecuaciones diferenciales ordinarias (Ver [Cod89] capítulo 3, sección 6) sabemos que f_g es solución de la ecuación $\mathcal{L}f - \lambda_0 f = g$ en (a, b). denotando a $v = u + (\lambda_0 - \lambda)f_u$, tenemos que

$$\mathcal{L}v = \lambda u + (\lambda_0 - \lambda)(u + \lambda_0 f_u) = \lambda_0 v$$

Por lo tanto, existen α_1, α_2 constantes tales que $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, es decir,

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + (\lambda - \lambda_0)f_u \tag{5.2.2}$$

Fijando a $\varphi := \text{máx}\{|u_1|, |u_2|\}$, $\alpha = \text{máx}\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}$. Puesto que todas las soluciones de $\mathcal{L}f = \lambda_0 f$ están en L^2 cerca de a, tomemos a $e \in (a, b)$ tal que $\int_a^e u_1(t)^2\ dt < \infty$ y $\int_a^e u_1(t)^2\ dt < \infty$ (cualquier $e \in (a, b)$ cumple la propiedad). Notemos que $\int_a^e \varphi(t)^2\ dt \leq \int_a^e u_1(t)^2\ dt + \int_a^e u_2(t)^2\ dt < \infty$, por lo que $C := 8|\lambda - \lambda_0|^2 \int_a^e \varphi(t)^2\ dt < \infty$. Así que usando las igualdades (5.2.2), (5.2.1) para $g = u$, la desigualdad en reales $2ab \leq a^2 + b^2$ y la desigualdad de Hölder (en ese orden), obtenemos

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= |\alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + (\lambda - \lambda_0)f_u(x)|^2 \leq (|\alpha_1 u_1(x)| + |\alpha_2 u_2(x)| \\ &+ |(\lambda - \lambda_0)f_u(x)|)^2 \leq (2\alpha\varphi(x) + |\lambda - \lambda_0|[2\varphi(x)\int_e^x \varphi(t)|u(t)|\ dt])^2 \leq 8\alpha^2\varphi(x)^2 \\ &+ 8|\lambda - \lambda_0|^2\varphi(x)^2[\int_e^x \varphi(t)|u(t)|\ dt]^2 \leq 8\alpha^2\varphi(x)^2 + \varphi(x)^2 C\int_e^x |u(t)|^2\ dt \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Como $\int_a^e \varphi(t)^2\ dt < \infty$, existe $c \in (a, e)$ tal que $\int_a^c \varphi(t)^2 \leq (2C)^{-1}$. Fijando un $y \in (a, c)$, e integrando ambos lados de la ecuación (5.2.3) en (y, c), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_y^c |u(x)|^2 \leq 8\alpha^2\int_y^c \varphi(x)^2\ dx + 2C\int_y^c \varphi(x)^2(\int_y^e |u(t)|^2\ dt)\ dx \\ \leq 8\alpha^2\int_y^c \varphi(x)^2\ dx + \int_y^e |u(t)|^2\ dt \end{aligned}$$

Multiplicando por 2 y restando $\int_y^c |u(x)|^2$ en ambos lados de la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_y^c |u(x)|^2 \leq 16\alpha^2 \int_y^c \varphi(x)^2\ dx + \int_c^e |u(t)|^2\ dt \\ \leq 16\alpha^2 \int_a^c \varphi(x)^2\ dx + \int_c^e |u(t)|^2\ dt\end{aligned}$$

Puesto que u es continua en (a,b) y $e, c \in (a,b)$, tenemos que $\int_c^e |u(t)|^2\ dt < \infty$. Además, $\int_a^c \varphi(x)^2 \leq \int_a^e \varphi(t)^2\ dt < \infty$. Por lo tanto, el lado derecho de la ecuación anterior es un número real, y como y es arbitrario, tenemos que $\int_a^c |u(x)|^2 = \lim_{y\to a+} \int_y^c |u(x)|^2 < \infty$, es decir, u está en L^2 cerca de a ■

Por el Corolario 5.6, inciso 2, tenemos que si a es un punto regular, entonces a esta en el caso del círculo límite.

Utilizaremos los dos lemas siguientes para probar el importante Teorema 5.13

Lema 5.11 Supongamos que d es un punto regular de la expresión $\mathcal{L}$ en (a,b), entonces si $f \in D(T_{min})$, $f(a) = f'(a) = 0$

Demostración.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $d = a$. Sean $f \in D(T_{min})$, y $g_i \in C_0^\infty(a-1,b), i \in \{1,2\}$ tales que $g_1(c) = g_2'(c) = 0$ y $g_1'(c) = g_2(c) = 1$. Puesto que $g_i \in C_0^\infty(a-1,b)$, $g_i|_{(a,b)} \in D(T_{max})$, con un ligero abuso de notación, denotamos también como g_i a la restricción de g_i en (a,b). Por el Corolario 5.6 inciso 1, $f, f', g_1, g_1', g_2, g_2'$ se pueden extender por continuidad a a. Del Lema 5.7, tenemos que $[f,g]_a = f(a)g_i'(a) - f'(a)g_i(a) = 0$, por lo que tenemos que $f(a) = f'(a) = 0$ ■

Lema 5.12 Si T_{min} está en el caso del punto límite en a (respectivamente b), entonces $[f,g]_a = 0$ (respectivamente $[f,g]_b = 0$) para todo $f, g \in D(T_{max})$

Demostración.

Probamos el lema suponiendo sin pérdida de generalidad que b está en el caso del punto límite. Sea $c \in (a,b)$, y consideremos al operador mínimo $T_{min,c}$ definido con la misma expresión de T_{min} en el espacio $L^2(c,b)$. Como $c \in \mathbb{R}$ y q es continua en (a,b), tenemos que c es un punto regular de $T_{min,c}$. dado $\lambda \in \mathbb{C}$, por el Corolario 5.6, inciso 2 tenemos que toda solución de $\mathcal{L}f = \lambda f$ en (c,b) es L^2 cerca de c. Como T está en el caso del punto límite en b, sabemos que existe una única solución (junto con sus múltiplos) que está en L^2 cerca de b. Por lo tanto, $T_{min,c}$ tiene índices de deficiencia $(1,1)$, y por la Proposición 2.15, tenemos que $\dim D(T_{max,c})/D(T_{min,c}) = 2$.

Sean $f_1, f_2 \in C_0^\infty(a,b)$ tales que $f_1(c) = f_2'(c) = 0$ y $f_2(c) = f_1'(c) = 1$. Entonces se tiene que $f_1, f_2 \in D(T_{max,c})$ (abusando de la notación, f_i representa a $f_i|_{(c,b)}$). Por el Lema 5.11, para todo $h \in D(T_{min,c})$ se tiene que $h(c) = h'(c) =$

0, lo que implica que f_1 y f_2 son linealmente independientes módulo $D(T_{min,c})$, junto con $\dim D(T_{max,c})/D(T_{min,c}) = 2$ implica que

$$D(T_{max,c}) = D(T_{min,c}) + \mathrm{Lin}\{f_1, f_2\} \tag{5.2.4}$$

Donde $\mathrm{Lin}\{f_1, f_2\}$ es el subespacio generado por f_1 y f_2. Sean $f, g \in D(T_{max})$. Puesto que $T_{min,c} \subseteq T_{min}$ (viendo a $L^2(c,b)$ como subconjunto de $L^2(a,b)$), $f, g \in D(T_{max,c})$. Por (5.2.4) esto implica que existen $f_0, g_0 \in D(T_{min,c})$ tales que $f - f_0$ y $g - g_0$ valen 0 en alguna vecindad de b (puesto que f_1 y f_2 cumplen esta propiedad). es decir, $[f,g]_b = [f,g_0]_b = [f_0,g_0]_b$, pero como $f_0, g_0 \in D(T_{min,c})$, el Lema 5.7 implica que $[f_0,g_0]_b = 0$ ■

Teorema 5.13 Los índices de deficiencia del operador T_{min} en (a,b) son:

- (2,2) si a, b están en el caso del círculo límite
- (1,1) si sólo uno de los puntos extremos está en el caso del círculo límite
- (0,0) si a, b están en el caso del punto límite

Demostración.

Si a, b están en el caso del círculo límite, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, todas las soluciones de $\mathcal{L}f = \lambda f$ están en L^2 cerca de a y cerca de b, es decir, están en $L^2(a,b)$, por lo tanto, los índices de deficiencia son (2,2)

Si sólo uno de los puntos extremos está en el caso del círculo límite, supongamos sin pérdida de generalidad que a es está en el caso del círculo límite. Entonces por el Teorema 5.10, existe una única solución (junto con sus múltiplos) de $\mathcal{L}f = \lambda f$ que está en L^2 cerca de b. Como a está en el caso del círculo límite, entonces esta solución está en L^2 cerca de a, es decir, está en $L^2(a,b)$, por lo que los índices de deficiencia de T_{min} son (1,1)

Si tanto a como b están en el caso del punto límite, entonces por el Lema 5.12 $[f,g]_a = [f,g]_b = 0$ para todo $f, g \in D(T_{max})$, es decir, por (5.1.3), T_{max} es simétrico, por lo que $T_{max} \subseteq T_{max}^* = T_{min}^{**} = \overline{T_{min}} = T_{min} \subseteq T_{max}$, es decir, T_{min} es autoadjunto, por lo que los índices de deficiencia de T_{min} son (0,0) ■

Existen muchos criterios en la literatura para determinar si T_{min} está en el caso del círculo límite, ó en el del punto límite en un punto extremo d, a continuación mencionamos tres de los más importantes. Decimos que una propiedad $p(x)$ se cumple cerca de ∞ si se cumple para $x \geq \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario y fijo, similarmente para $-\infty$.

- Si existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $q(x) \geq C + \frac{3}{4}\frac{1}{(x-a)^2}$ para x cerca de a, entonces T_{min} está en el caso del punto límite en a. (análogamente a b)
- Si existe $\epsilon > 0$ tal que $|q(x)| \leq (\frac{3}{4} - \epsilon)\frac{1}{(x-a)^2}$ para x cerca de a, entonces T_{min} está en el caso del círculo límite en a. (análogamente a b)
- Si $b = \infty$, y existe $C \geq 0$ tal que $q(x) \geq -C|x|^2$ para x cerca de ∞, entonces T_{min} está en el caso del punto límite en ∞ (similarmente para $a = \infty$)

Estos resultados se pueden verificar, por ejemplo, en [DS63] capítulo 13.

5.3. Tripletes de frontera en operadores de Sturm-Liouville

5.3.1. Caso 1: T_{min} en el caso del círculo límite en a y b

Veamos que existen $u_1, u_2 \in D(T_{max})$ con valores en los reales, tales que

$$[u_1, u_2]_a = [u_1, u_2]_b = 1 \tag{5.3.1}$$

Sea $c \in (a,b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, por el Teorema 5.2, existen u_1, u_2 soluciones únicas de $-u'' + qu = \lambda u$ en (a,b) tales que $u_1(c) = u_2'(c) = 1$ y $u_1'(c) = u_2(c) = 0$. Dado que $\overline{u_1}$ $(\overline{u_2})$ es también una solución de la ecuación que cumple las mismas condiciones que u_1 (u_2) en c, entonces u_1 (u_2) es real en todo (a,b), lo que implica $W(u_1,u_2)_x = [u_1,u_2]_x$ para todo $x \in (a,b)$. Como T_{min} está en el caso del círculo límite en a y en b, u_i está en L^2 cerca de a y cerca de b, $i \in \{1,2\}$, es decir, $u_i \in L^2(a,b)$, y por lo tanto $u_i \in D(T_{max})$. Como $W(u_1,u_2)_x$ es constante para todo $x \in (a,b)$ (ver el párrafo siguiente a la Definición 5.3), tenemos que $W(u_1,u_2)_x = W(u_1,u_2)_c = [u_1,u_2]_c = 1$ para todo $x \in (a,b)$, y como $u_1, u_2 \in D(T_{max})$, existen $[u_1,u_2]_a$ y $[u_1,u_2]_b$ (ver el párrafo que precede a (5.1.3)), y por su definición como límites, tenemos que (5.3.1) se cumple.

Ahora, para cualesquiera f_1, f_2, f_3, f_4 funciones derivables en (a,b), $x \in (a,b)$, se tiene que

$$W(f_1,f_2)_x W(f_3,f_4)_x - W(f_1,f_3)_x W(f_2,f_4)_x + W(f_1,f_4)_x W(f_2,f_3)_x = 0$$

igualdad que se prueba directamente de la definición del Wronskiano. Dados $f, g \in D(T_{max})$, aplicando la fórmula anterior a $f_1 = f, f_2 = \overline{g}, f_3 = u_1, f_4 = u_2$, puesto que para toda $u, v \in D(T_{max})$, $W(u,\overline{v})_x = [u,v]_x$, tenemos que

$$[f,g]_x[u_1,u_2]_x - [f,u_1]_x[\overline{g},u_2]_x + [f,u_2]_x[\overline{g},u_1]_x = 0$$

y como $[u_1,u_2]_d = 1$, $d \in \{a,b\}$ y $[\overline{g},u_i]_x = \overline{[g,u_i]_x}$ para todo $x \in [a,b]$, tomando límites $x \to a$ ó $x \to b$ tenemos que

$$[f,g]_d = [f,u_1]_d\overline{[g,u_2]_d} - [f,u_2]_d\overline{[g,u_1]_d} \quad \text{con } d \in \{a,b\}. \tag{5.3.2}$$

Entonces, revisando la Definición 3.6 y (5.1.3), junto con (5.3.2), tenemos que

$$\begin{aligned} [f,g]_{T_{max}} &= [f,g]_b - [f,g]_a \\ &= [f,u_1]_b\overline{[g,u_2]_b} - [f,u_2]_b\overline{[g,u_1]_b} - [f,u_1]_a\overline{[g,u_2]_a} + [f,u_2]_a\overline{[g,u_1]_a}. \end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Proponemos al triplete de frontera $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ de T_{max} como

$$\mathcal{K} = \mathbb{C}^2, \ \Gamma_0(f) = ([f,u_1]_a, [f,u_1]_b), \ \Gamma_1(f) = ([f,u_2]_a, -[f,u_2]_b)$$

con el producto usual en $\mathbb{C}^2$: $\langle (a,b),(c,d) \rangle = a\overline{c} + b\overline{d}$. Veamos que en efecto es un triplete de frontera. La condición 1 de la Definición 3.6 se cumple directo por

(5.3.3). Para probar la condición 2, construimos a funciones $u_{1a}, u_{1b}, u_{2a}, u_{2b} \in D(T_{max})$ que cumplen: $u_{id} = u_i$ cerca de d y $u_{id} = 0$ cerca de $x \in \{a, b\} \setminus d$. Dado que u_i es una función con valores en los reales, de la definición tenemos que $[u_i, u_i]_d = 0$ con $i \in \{1, 2\}$, $d \in \{a, b\}$ Usando este hecho, la igualdad (5.3.1), y la característica de que el bracket $[*, *]_d$ es lineal en la primera entrada, para todo $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4$, $f = x_3u_{1a} - x_4u_{1b} + x_1u_{2a} + x_2u_{2b} \in D(T_{max})$ es tal que $x = (\Gamma_0 f, \Gamma_1 f)$, por lo tanto, $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ es un triplete de frontera.

Ahora, para encontrar a las extensiones autoadjuntas de T, fijémonos en los operadores $B \in S(\mathbb{C}^2)$ (Ver (3.2.8)), y demos explícitamente al conjunto $D(T_B)$, es decir, descifremos el significado de $\Gamma_0 x \in D(B)$ y $B\Gamma_0 x = P_B\Gamma_1 x$. B actúa en $\mathcal{K}_B$, que puede ser $\mathbb{C}^2$, $\{\lambda c \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, $c \in \mathbb{C}$ fijo, ó $\{0\}$. Sea d la dimensión de $\mathcal{K}_B$, $\{e_i \mid 0 < i \leq d \leq 2\}$ una base ortonormal para $\mathcal{K}_B$, y $\{e'_j \mid d < j \leq 2\}$ una base ortonormal para $(\mathcal{K}_B)^\perp$. Recordemos que una matriz de $n \times n$ es Hermitiana si y sólo si $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ para toda a_{ij} entrada de la matriz, y que un operador (transformación lineal) en un espacio de dimensión n es autoadjunto si y sólo si la matriz que le corresponde (respecto a cualquier base ortonormal) es Hermitiana. Como B es autoadjunta en un espacio de dimensión finita, existe una matriz hermitiana $B = (B_{kl})$ de $d \times d$ tal que $Be_l = \sum_{k=1}^{d} B_{kl}e_k$. Dado que en un espacio de Hilbert H con base ortonormal $\{e_i\}_{i \in I}$, $x = \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i$ para todo $x \in H$ (Ver sección 9.8 de [BN00]), entonces dado $x \in D(T_{max})$, tenemos que

$$P_B\Gamma_1 x = \sum_{k=1}^{d} \langle \Gamma_1 x, e_k \rangle e_k$$

Si $\Gamma_0 x \in \mathcal{K}_B$ (lo cual equivale a $\Gamma_0 x \in D(B)$ por estar en caso de dimensión finita), entonces tenemos

$$B\Gamma_0 x = \sum_{0<l\leq d} \langle \Gamma_0 x, e_l \rangle Be_l = \sum_{0<l\leq d, 1\leq k\leq d} \langle \Gamma_0 x, e_l \rangle B_{kl} e_k$$

De las dos igualdades anteriores, tenemos que $x \in D(T_{max})$ está en $D(T_B)$ si y sólo si

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_0 x, e'_j \rangle &= 0 \\ \langle \Gamma_1 x, e_k \rangle &= \sum_{0<l\leq d} \langle \Gamma_0 x, e_l \rangle B_{kl} \quad \text{con } 0 < k \leq d \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Donde la primera condición corresponde a $\Gamma_0 x \in D(B)$ y la segunda es $B\Gamma_0 x = P_B\Gamma_1 x$, pues es la igualdad de los coeficientes de su combinación lineal respecto a la base.

Veamos los tres casos:

- Caso 1: $\mathcal{K}_B = \mathbb{C}^2$

Entonces $\{(1, 0), (0, 1)\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{C}^2$, y $(\mathcal{K}_B)^\perp = \{0\}$, por lo que sólo tenemos que revisar cuándo $x \in D(T_{max})$ cumple la segunda condición de (5.3.4), es decir, el dominio de una extensión autoadjunta de T_{min} (ver Proposición 3.17 y el párrafo subsecuente) es el conjunto de todos los $x \in D(T_{max})$ tales que cumplen las condiciones

$$\begin{aligned} [x, u_2]_a &= b_1[x, u_1]_a + c[x, u_1]_b \\ -[x, u_2]_b &= \overline{c}[x, u_1]_a + b_2[x, u_1]_b \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

donde $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ son escalares fijos y arbitrarios que corresponden a las entradas de la matriz Hermitiana (las condiciones de los escalares son consecuencia de ser entradas de una matriz Hermitiana, pues $\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & c \\ \overline{c} & b_2 \end{pmatrix}$)

- Caso 2: $\mathcal{K}_B = \mathbb{C} * e$

Sea $e = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ un vector unitario tal que $D(B) = \mathbb{C} * e$. Entonces $\Gamma_0 x \in D(B)$ equivale a $\Gamma_0 x \perp (\overline{\beta}, -\overline{\alpha})$, es decir,

$$[x, u_1]_a \beta = [x, u_1]_b \alpha \tag{5.3.6}$$

Además, la segunda condición de (5.3.4) significa

$$\begin{aligned} &\langle \Gamma_1 x, e \rangle = \langle \Gamma_0 x, e \rangle B \\ &\qquad \Longrightarrow \langle ([x, u_2]_a, -[x, u_2]_b), (\alpha, \beta) \rangle = \langle ([x, u_1]_a, [x, u_1]_b), (\alpha, \beta) \rangle B \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow \overline{\alpha}[x, u_2]_a - \overline{\beta}[x, u_2]_b = B(\overline{\alpha}[x, u_1]_a + \overline{\beta}[x, u_1]_b) \end{aligned}$$

(donde B es la única entrada de la matriz Hermitiana) y sustituyendo por (5.3.6) obtenemos

$$\begin{aligned} &\overline{\alpha}[x, u_2]_a - \overline{\beta}[x, u_2]_b = B(\overline{\alpha}(\frac{\alpha}{\beta}[x, u_1]_b) + \overline{\beta}[x, u_1]_b) \implies B[x, u_1]_b \\ &\qquad = \frac{\overline{\alpha}}{(\frac{|\alpha|^2}{\beta} + \overline{\beta})}[x, u_2]_a - \frac{\overline{\beta}}{(\frac{|\alpha|^2}{\beta} + \overline{\beta})}[x, u_2]_b = \overline{\alpha}\beta[x, u_2]_a - \overline{\beta}\beta[x, u_2]_b \end{aligned}$$

y de forma similar se obtiene una expresión para $B[x, u_1]_a$, por lo que tenemos

$$B[x, u_1]_b = \overline{\alpha}\beta[x, u_2]_a - \overline{\beta}\beta[x, u_2]_b \quad B[x, u_1]_a = \overline{\alpha}\alpha[x, u_2]_a - \overline{\beta}\alpha[x, u_2]_b \tag{5.3.7}$$

Si $\alpha \neq 0$, definimos a los escalares $c := \beta\alpha^{-1}$ y $b_1 := B|\alpha|^{-2}$, tenemos que las condiciones (5.3.6) y la (5.3.7) equivalen a

$$[x, u_2]_a = b_1[x, u_1]_a + \overline{c}[x, u_2]_b \quad [x, u_1]_b = c[x, u_1]_a \tag{5.3.8}$$

Si $\alpha = 0$, definimos al escalar $b_1 := B$ y las condiciones (5.3.6) y (5.3.7) equivalen a

$$[x, u_2]_b = -b_1[x, u_1]_b \quad [x, u_1]_a = 0 \tag{5.3.9}$$

- Caso 3: $\mathcal{K}_B = \{0\}$

Entonces la primera condición de (5.3.4) se cumple si y sólo si

$$[x, u_1]_a = [x, u_1]_b = 0 \tag{5.3.10}$$

Mientras que la segunda condición trivialmente siempre se cumple para todo $x \in D(T_{max})$

Con esto, hemos expuesto a todos los operadores T_B con $B \in S(\mathcal{K})$, es decir, en virtud de lo estudiado en la sección sobre tripletes de frontera, todas las extensiones autoadjuntas de T_{min}:

El conjunto A de todos los $x \in D(T_{max})$ que cumplen alguna de las condiciones (5.3.5), (5.3.8), (5.3.9) ó (5.3.10), con $b_1, b_2 \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$ fijos y arbitrarios, es un dominio tal que $T_{max}|_A$ es autoadjunto, toda extensión autoadjunta de T_{min} es de esta forma, y a cada elección de escalares le corresponde una extensión diferente.

5.3.2. Caso 2: T_{min} en el caso del círculo límite en d y en caso del punto límite en $x \in \{a, b\} \setminus d$

Supongamos sin pérdida de generalidad que T_{min} está en el caso del círculo límite en a y en el caso del punto límite en b (para el otro caso se debe sustituir a por b en los resultados). De forma similar al caso anterior, veamos que existen funciones con valores en los reales $u_1, u_2 \in D(T_{max})$ tales que $[u_1, u_2]_a = 1$. Sean $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ las funciones u_1, u_2 construidas en el caso anterior respectivamente. Puesto que T_{min} está en el caso del punto límite en b, no podemos asegurar que $\hat{u}_1, \hat{u}_2 \in L^2(a, b)$, pero podemos construir a $u_i \in D(T_{max})$ función con valores en los reales tal que $u_i = \hat{u}_i$ para alguna vecindad de a y $u_i = 0$ para alguna vecindad de b, $i \in \{1, 2\}$, entonces tenemos que $[u_1, u_2]_a = [\hat{u}_1, \hat{u}_2]_a = 1$. Notemos que en este caso la igualdad (5.3.2) sigue siendo válida para $d = a$, es decir, tenemos que

$$[f, g]_a = [f, u_1]_a \overline{[g, u_2]_a} - [f, u_2]_a \overline{[g, u_1]_a}.$$

Por el Lema 5.12 tenemos que $[f, g]_b = 0$ para todo $f, g \in D(T_{max})$. Entonces, por (5.1.3) tenemos que

$$[f, g]_{T_{max}} = -[f, g]_a = [f, u_2]_a \overline{[g, u_1]_a} - [f, u_1]_a \overline{[g, u_2]_a}$$

por lo que definiendo

$$\mathcal{K} = \mathbb{C}, \quad \Gamma_0 f = [f, u_1]_a, \quad \Gamma_1 f = [f, u_2]_a$$

tenemos que $(\mathcal{K}, \Gamma_0, \Gamma_1)$ es un triplete de frontera de T_{max}. En efecto, la condición 1 de la Definición 3.6 se cumple por la expresión mostrada que define a $[f, g]_{T_{max}}$, y la condición 2 es trivial dado que $[,]_a$ es lineal en la primera entrada, y $[u_1, u_2]_a = 1$. Sea $B \in S(\mathbb{C})$

- Caso 1: $\mathcal{K}_B = \mathbb{C}$

Entonces $B\Gamma_0 x = \Gamma_1 x$ si y sólo si

$$b[x, u_1]_a = [x, u_2]_a \tag{5.3.11}$$

donde $b \in \mathbb{R}$ (real puesto que B es Hermitiana, por lo que su matriz es una sola entrada real)

- Caso 2: $\mathcal{K}_B = \{0\}$

Entonces $\Gamma_0 x \in D(B)$ si y sólo si

$$[x, u_1]_a = 0. \tag{5.3.12}$$

Entonces, todas las extensiones autoadjuntas de T_{min} son los operadores cuyos dominios cumplen alguna de las ecuaciones (5,3,11) **y** (5,3,12) **para algún $b \in \mathbb{R}$.**

Cuando ambos puntos extremos están en el caso del punto límite, por el Teorema 5.13 y el Corolario 2.16 tenemos que T_{min} es autoadjunto (lo cual implica que es la única extensión autoadjunta de sí misma) Con esto, hemos obtenido las extensiones autoadjuntas de T_{min} para todos los casos. Sin embargo, es interesante revisarlas para el caso particular en el que los puntos extremos son regulares, ya que las expresiones que determinan a los dominios son mucho más sencillas que las mostradas en los casos anteriores, lo cual es consecuencia de tener un triplete de frontera más simple.

5.3.3. Casos especiales: puntos extremos regulares

a y b puntos regulares. Si $f, g \in D(T_{max})$, entonces por el Corolario 5.6 tenemos que f, f', g y g' se pueden extender a $[a, b]$, por lo que se tiene que $[f, g]_d \equiv \lim_{x \to d}[f, g]_d = \lim_{x \to d} f(x)\overline{g'(x)} - f'(x)\overline{g(x)} = f(d)\overline{g'(d)} - f'(d)\overline{g(d)}$, $d \in \{a, b\}$, de donde obtenemos de (5.1.3) que

$$[f, g]_{T_{max}} = [f, g]_b - [f, g]_a = f(b)\overline{g'(b)} - f'(b)\overline{g(b)} - f(a)\overline{g'(a)} + f'(a)\overline{g(a)}$$

por lo tanto, proponemos a

$$\mathcal{K} = \mathbb{C}^2, \quad \Gamma_0 f = (f(a), f(b)), \quad \Gamma_1 f = (f'(a), -f'(b))$$

como triplete de frontera. En efecto, se cumple la condición 1 de la Definición 3.6:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_1 f, \Gamma_0 g\rangle - \langle \Gamma_0 f.\Gamma_1 g\rangle &= \langle (f'(a), -f'(b)), (g(a), g(b))\rangle \\ &\quad - \langle (f(a), f(b)), (g'(a), -g'(b))\rangle = [f, g]_b - [f, g]_a \end{aligned}$$

Veamos que la condición 2 (suprayectividad de $x \to (\Gamma_0 x, \Gamma_1 x)$ de $D(T_{max})$ a $\mathbb{C}^4$) también se cumple. Sea $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{C}^4$, entonces por el Teorema 5.2, existen g, h soluciones de $\mathcal{L}f = 0$ tales que $g(a) = \alpha_1,$ $g'(a) = \alpha_3$ $h(b) =$

α_2 $h'(b) = -\alpha_4$. Como T_{min} es regular en a y b, ambas soluciones están en $L^2(a,b)$, es decir, en $D(T_{max})$. Considera a $g_0, h_0 \in D(T_{max})$ tal que $g_0 = g$ y $h_0 = 0$ en alguna vecindad de a, $g_0 = 0$ y $h_0 = h$ en alguna vecindad de b. Entonces $f = g_0 + h_0 \in D(T_{max})$ es tal que $(\Gamma_0 f, \Gamma_1 f) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.

En la misma forma como se hizo en la sección 5.3.1 después de que se determinó el triplete de frontera, sustituyendo a $[f,u_1]_a, [f,u_1]_b, [f,u_2]_a, -[f,u_2]_b$ por $f(a), f(b), f'(a), -f'(b)$, respectivamente, de forma completamente análoga se obtiene que **las extensiones autoadjuntas de T_{min} son los operadores cuyos dominios están definidos como el conjunto de las $f \in D(T_{max})$ que cumplen alguna de las 4 condiciones siguientes:**

$$f'(a) = b_1 f(a) + cf(b), \quad f'(b) = -\bar{c}f(a) - b_2 f(b)$$

$$f'(a) = b_1 f(a) + \bar{c}f'(b), \quad f(b) = cf(a)$$

$$f'(b) = b_1 f(b), \quad f(a) = 0$$

$$f(a) = f(b) = 0$$

con $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ arbitrarios. (Comparar con las expresiones (5.3.5), (5.3.8), (5.3.9) y (5.3.10))

d **punto regular y** $x \in \{a,b\} \backslash d$ **caso del punto límite** Supongamos que a es punto regular, y b está en el caso del punto límite (para el otro caso simplemente invierta a y b). Entonces para toda $f, g \in D(T_{max})$, f y f' se pueden extender a funciones en $[a,b)$ (Corolario 5.6), y $[f,g]_b = 0$ (Lema 5.12). Entonces de (5.1.3) tenemos que $[f,g]_{T_{max}} = -[f,g]_a = f'(a)\overline{g(a)} - f(a)\overline{g'(a)}$. Por lo tanto, proponemos al triplete de frontera como

$$\mathcal{K} = \mathbb{C} \quad \Gamma_0 f = f(a) \quad \Gamma_1 f = f'(a)$$

En efecto, la condición 1 de la Definición 3.6 se cumple por construcción, para verificar la condición 2, dado $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$, usamos el Teorema 5.2 y obtenemos una función f_0 solución de $\mathcal{L}f_0 = 0$ tal que $f_0(a) = \alpha_1$ y $f_1(a) = \alpha_2$, y construimos a $f \in D(T_{max})$ tal que $f = f_0$ cerca de a y $f = 0$ cerca de b. De la misma forma como se hizo en la sección (5.3.2), sustituyendo a $[f,u_1]_a, [f,u_2]_a$ por $f(a), f'(a)$, respectivamente, obtenemos que las extensiones autoadjuntas de T_{min} son los operadores cuyos dominios están definidos como el conjunto de las $f \in D(T_{max})$ tales que cumplen alguna de las siguientes dos condiciones

$$bf(a) = f'(a)$$

$$f(a) = 0$$

con $b \in \mathbb{R}$.

Bibliografía escencial del capítulo 5

[SK12] Capítulo 15.
[Wei05].

Capítulo 6

Apéndice. Espacios de Hilbert

La noción de espacio vectorial es una de las más populares en matemáticas, tanto puras como aplicadas, por lo cual asumimos que el lector está familiarizado con ésta.

Definición A.1 Sea X un espacio vectorial con campo K. Decimos que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to K$ es un producto interno de X si cumple lo siguiente:

- $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ para todo $x, y \in X$
- para todo $\alpha, \beta \in K$, $x, y, z \in X$, se tiene que $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$
- $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in X$ y $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

Se dice que la pareja $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio vectorial de producto interno, aunque usualmente se omite escribir la función, y escribimos simplemente que X es un espacio de producto interno.

El teorema de Pitágoras se extiende trivialmente a espacios de producto interno: Si $\langle x, y\rangle = 0$, entonces

$$\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

Si $x, y \in H$ son tales que $\langle x, y\rangle = 0$, decimos que x y y son ortogonales entre sí, y lo escribimos como $x \perp y$

La siguiente desigualdad es una de las más útiles y conocidas en todo el mundo matemático.

Teorema A.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sea X un espacio vectorial de producto interno, $x, y \in X$, entonces

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \ \langle y, y\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Demostración.

Si $y = 0$ entonces la igualdad se cumple trivialmente. Supongamos que $y \neq 0$. Consideremos al vector $z = x - \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} y$, entonces usando la definición de producto interno tenemos que $\langle z, y \rangle = \langle x - \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} y, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} y, y \rangle = 0$, entonces $\langle z, \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} y \rangle = \overline{\frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle}} \langle z, y \rangle = 0$, por lo que usando el teorema de Pitágoras tenemos que

$$\begin{aligned}\langle x, x \rangle = \langle z + \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y, z + \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y \rangle = \langle z, z \rangle + |\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}|^2 \langle y, y \rangle \\ = \langle z, z \rangle + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \geq \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}\end{aligned}$$

De donde $|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \ \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}$ ■

Recordemos que una función $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ es una norma de X si cumple:

- $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$, y $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $x \in X, \lambda \in K$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dado un espacio de producto interno X, uno puede definir una norma en X como $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Es trivial ver que esta definición cumple con los requisitos de una norma. Para probar la desigualdad del triángulo (el tercer requisito para la norma) se usa la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2Re\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2(\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \ \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}) + \langle y, y \rangle = (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

También, con esta definición de norma, el teorema de Pitágoras mostrado arriba se puede reescribir como $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ para $x \perp y$

Definición A.2 Decimos que un espacio de producto interno X es un espacio de Hilbert si X es completo con la norma asociada al producto interno (i.e., toda sucesión de Cauchy en X es una sucesión convergente en X). A los espacios de Hilbert se les suele denotar como H

Entonces cada vez que se hable de aspectos analíticos del espacio de Hilbert que involucren a alguna norma, por ejemplo, que una sucesión converge en H, o la cerradura de un subconjunto de H, se asume que se está utilizando la norma inducida por el producto interno. Vale la pena mencionar que no todas las normas de un espacio vectorial vienen de un producto interno, una forma usual para probar que una norma no viene de un producto interno es encontrar $x, y \in H$ que no cumplen la ley del paralelogramo:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Esta igualdad es trivialmente cierta para todo par de elementos en un espacio de producto interno. Es posible probar que la norma de H proviene de un espacio de producto interno si y sólo si se cumple la ley del paralelogramo para todo $x, y \in H$, ver [Wei80] Teorema 1.6. A un espacio vectorial normado completo (cuya norma no viene necesariamente de un producto interior) se le llama un espacio de Banach.

Proposición A.2 Sea H un espacio de Hilbert. Entonces el producto interno es continuo en las dos entradas, es decir, dada $y \in H$ fija, $x_n \to x$ sucesión convergente en H, se tiene que $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ y $\langle y, x_n\rangle \to \langle y, x\rangle$

Demostración.

$|\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y\rangle| \leq \|x_n - x\|\|y\|$ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, pero $\|x_n - x\| \to 0$, entonces $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. $\langle y, x_n\rangle \to \langle y, x\rangle$ se obtiene análogamente ■

Corolario A.3 Sea H un espacio de Hilbert, D un conjunto denso en H (i.e. $\overline{D} = H$) entonces si $\langle x, d\rangle = 0$ para todo $d \in D$ entonces $x = 0$

Demostración.

Sea d_n sucesión en D tal que $d_n \to x$, entonces $0 = \langle x, d_n\rangle \to \langle x, x\rangle$, por lo que $\|x\| = 0$ ■

Definición A.3 Para un espacio de Hilbert H, el conjunto ortogonal de un subconjunto (no necesariamente subespacio) S de H se define como $S^\perp = \{x \in H \mid \langle x, s\rangle = 0 \ \forall s \in S\}$. También decimos que dos subconjuntos M, N de H son ortogonales entre sí si $\forall m \in M, n \in N,\ \langle m, n\rangle = 0$, lo cual escribimos como $M \perp N$

Claramente para todo $S \subseteq H$, $S \perp S^\perp$. Veamos algunas propiedades básicas de los conjuntos ortogonales que utilizamos en el texto

Proposición A.4 Sean H un espacio de Hilbert, S un subconjunto de H, entonces:

1. $S^\perp$ es un subespacio cerrado
2. $H^\perp = \{0\}$
3. Si $R \subseteq S$ entonces $S^\perp \subseteq R^\perp$
4. $S^\perp = \overline{S}^\perp$

Demostración.

1.

Usando las propiedades de la definición del producto interno se ve que para todo $x, y \in S^\perp, \lambda \in K$, $\langle x + \lambda y, s\rangle = 0$ para todo $s \in S$, es decir, $S^\perp$ es un subespacio de H, y por la proposición A.2 tenemos que $S^\perp$ es cerrado: si $x \in H$

tal que $x_n \to x$ donde $x_n \in S^\perp$, entonces para todo $s \in S$, $0 = \langle x_n, s\rangle \to \langle x, s\rangle$, por lo que $x \in S^\perp$.

2.

Si $h \in H^\perp$ entonces $\langle h, h\rangle = 0$ por lo que $h = 0$.

3.

Sean $s \in S^\perp$, $r \in R$. Entonces $r \in S$, y $\langle s, r\rangle = 0$, por lo que $s \in R^\perp$

4.

Por el inciso anterior basta probar que $S^\perp \subseteq \overline{S}^\perp$. Sea $s \in S^\perp$, $s^* \in \overline{S}$, entonces existe x_n sucesión en S tal que $x_n \to s^*$. entonces por la proposición A.2, $0 = \langle s, x_n\rangle \to \langle s, s^*\rangle$, por lo que $s \in \overline{S}^\perp$. ■

El siguiente lema lo utilizamos para probar características estructurales de los espacios de Hilbert que usamos frecuentemente en este texto y, en general, en toda teoría involucrada con espacios de Hilbert. También tiene fuerza por sí sólo, recalcando una particularidad de los conjuntos cerrados que comparten los espacios de Hilbert y los espacios euclidianos $\mathbb{R}^n$ que es bastante útil

Lema A.5 Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, y sea $x \in H$. Definimos a $d = d(x, M) \equiv \text{ínf}\{\|x - y\| \mid y \in M\}$. Entonces existe $y \in M$ tal que $d = \|x - y\|$

Demostración.

Por definición de d, existe una sucesión $\{y_n\}$ de elementos de M tal que $\|x - y_n\| \to d$. Para $n, m \in \mathbb{N}$, considera a los vectores $x - y_n$ y $x - y_m$. Usando la ley del paralelogramo (mostrada después de la definición A.2) tenemos que

$$\|2x - y_n - y_m\|^2 + \|y_m - y_n\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2$$

Es decir

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\|x - \frac{y_n - y_m}{2}\|^2$$

Pero como $\frac{y_n - y_m}{2} \in M$, entonces $\|x - \frac{y_n - y_m}{2}\| \geq d$, de donde obtenemos que

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4d^2$$

Así que tomando el $\text{lím}_{m,n\to\infty}$ en la ecuación anterior, dado que $\|x - y_n\|$ y $\|x - y_m\|$ tienden a d, se tiene que $\|y_m - y_n\| \to 0$. Entonces la sucesión $\{y_n\}$ es de Cauchy, y como X es completo, entonces $y_n \to y \in X$. Pero también tenemos que M es un conjunto cerrado, por lo que $y \in M$. Ahora, por la proposición A.2, tenemos que la función norma es continua[1], así que $\|x - y\| = \|\text{lím}_{n\to\infty} x - y_n\| = \text{lím}_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d$ ■

Teorema A.6 Para todo $M \leq H$ con H espacio de Hilbert, se tiene que $\overline{M} = M^{\perp\perp}$, donde $M^{\perp\perp} = (M^\perp)^\perp$

Demostración.

[1] Si $x_n \to x$, entonces $\|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\| \to 0$

Claramente se tiene que $\overline{M} \subseteq M^{\perp\perp}$, pues si $x \in \overline{M}$, $y \in M^{\perp}$, dada $\{x_n\}$ sucesión en M tal que $x_n \to x$ por A.2 tenemos que $0 = \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$, por lo que $x \in M^{\perp\perp}$.

Ahora sea $x \in M^{\perp\perp}$, Supongamos que $x \notin \overline{M}$, entonces por el lema anterior existe $y \in \overline{M}$ tal que $\|x-y\| = d > 0$. Como $x, y \in M^{\perp\perp}$ entonces $x-y \in M^{\perp\perp}$. Veamos que $x-y \in M^{\perp}$ para tener entonces la contradicción $0 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x-y\|^2$

Sea $z \in \overline{M}$, $\alpha \in K$, entonces como $y + \alpha z \in \overline{M}$, $\|x - y + \alpha z\| \geq d = \|x-y\|$, por lo que

$$
\begin{aligned}
0 \leq \|x-y+\alpha z\|^2 - \|x-y\|^2 &= \langle x-y+\alpha z, x-y+\alpha z\rangle - \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \overline{\alpha}\langle x-y, z\rangle + \alpha\langle z, x-y\rangle + |\alpha|^2\|z\|^2
\end{aligned}
$$

para todo $\alpha \in K$. Entonces si sustituimos a α por $\beta\langle x-y, z\rangle$ con $\beta \in \mathbb{R}$ en la última expresión, obtenemos

$$2\beta|\langle x-y,z\rangle|^2 + \beta^2|\langle x-y,z\rangle|^2\|z\|^2 = \beta|\langle x-y,z\rangle|^2(2+\beta\|z\|^2)$$

Es decir, $0 \leq \beta|\langle x-y,z\rangle|^2(2+\beta\|z\|^2)$, por lo que debe ser que $\langle x-y, z\rangle = 0$ (si no, eligiendo $\beta = \frac{-1}{\|z\|^2}$ para el caso $z \neq 0$ y $\beta = -1$ para $z = 0$ tenemos una contradicción), i.e. $x - y \in M^{\perp}$ ■

La demostración anterior es en esencia probar que dado un subespacio cerrado M de un espacio de Hilbert, y un subespacio N de H que contiene propiamente a M, entonces existe un vector $x \in N$ tal que $x \in M^{\perp}$. También en la prueba se obtiene que para todo S subconjunto de H, $S^{\perp} \cap S^{\perp\perp} = \{0\}$. Usando la Proposición A.4 inciso 4, junto con el teorema anterior, tenemos que $S^{\perp} = S^{\perp\perp\perp}$, también nos dan una analogía entre operadores adjuntos y complementos ortogonales que puede ser útil para recordar, específicamente $\overline{T}^* = T^*$ como $\overline{S}^{\perp} = S^{\perp}$ y $\overline{T} = T^{**}$ como $\overline{S} = S^{\perp\perp}$

Lema A.7 Sean M, N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert H tales que $M \perp N$, entonces $M + N = \{m + n \mid m \in M, n \in N\}$ es un subespacio cerrado de H.

Demostración.

Claramente $M + N$ es un subespacio de H, solo basta probar que $\overline{M+N} \subseteq M + N$. Sea $w \in \overline{M+N}$. Entonces existe $\{w_n\}$ sucesión de $M + N$ tal que $w_n \to w$. Viendo a cada w_n como $w_n = x_n + y_n$ con $x_n \in M, y_n \in N$, notemos que $w_n - w_m = (x_n - x_m) + (y_n - y_m)$. Como $(x_n - x_m) \perp (y_n - y_m)$, aplicando el teorema de Pitágoras (mostrado al inicio de este apéndice) obtenemos que $\|w_n - w_m\|^2 = \|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2$. Como $\{w_n\}$ es una sucesión de Cauchy, la ecuación anterior implica que $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ también lo son. Puesto que tanto M como N son subespacios cerrados de un espacio de Hilbert, entonces existen $x \in M, y \in N$ tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$, por lo que $w_n = x_n + y_n \to x + y$, entonces $w = x + y \in M + N$ ■

Teorema A.8 (Teorema de la proyección) Para todo M subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, tenemos la suma ortogonal $H = M \oplus M^{\perp}$. (Recordemos que la suma ortogonal $M \oplus M^{\perp}$ es el mismo espacio que $M + M^{\perp}$, sólo que el signo $\oplus$ hace notar que $M \perp M^{\perp}$)

Demostración.

Basta probar que $H = M + M^{\perp}$, pues el hecho de que los espacios sean ortogonales entre sí es por definición. Como $M \subseteq M \oplus M^{\perp}$ y $M^{\perp} \subseteq M \oplus M^{\perp}$, usando A.4 inciso 3, tenemos que $(M \oplus M^{\perp})^{\perp} \subseteq M^{\perp}$ y $(M \oplus M^{\perp})^{\perp} \subseteq M^{\perp\perp}$, i.e. $(M \oplus M^{\perp})^{\perp} \subseteq M^{\perp} \cap M^{\perp\perp} = \{0\}$. Entonces, usando el Lema A.7 y el Teorema A.6, tenemos que $M \oplus M^{\perp} = \overline{M \oplus M^{\perp}} = (M \oplus M^{\perp})^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = H$ ■

Para entender más sobre la estructura de los espacios de Hilbert, en específico, de los conjuntos ortonormales que hay dentro de ellos, que sirven para descomponer al espacio de Hilbert, en los capítulos 9.7 y 9.8 de [BN00] esto se explica muy clara y concisamente. Aunque no hagamos uso explícito de esto en el presente trabajo, vale la pena revisarlo para tener una comprensión más a fondo de los espacios de Hilbert.

Teorema de Representación de Riesz

Definición A.4 Sea X un espacio vectorial sobre un campo K. A toda función $f : X \to K$ se le llama funcional de X.

Recordemos que toda transformación lineal $T : X \to Y$ es continua si y sólo si es continua en un $x_0 \in D(T)$ si y sólo si es acotada (es decir, existe k tal que $\|Tx\| \leq k\|x\|\ \forall x \in D(T)$). Este resultado elemental de análisis funcional no lo probaremos aquí, porque es una prueba bastante sencilla que es análoga a la que uno ve en un curso de álgebra lineal cuando se trata con espacios de dimensión finita. También, se define a la norma del operador acotado T como $\|T\| = \text{ínf}\{k \in \mathbb{R} \mid \|Tx\| \leq k\|x\|\}$ y se ve que

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

Y que, en efecto, esta definición es una norma en el espacio de transformaciones lineales continuas de X a Y. Se denota como $\mathbb{B}(X, Y)$ al espacio normado de operadores acotados $T : X \to Y$ con $D(T) = X$.

El lector que no esté familiarizado con los hechos señalados en el párrafo anterior puede encontrarlos en cualquier libro introductorio al análisis funcional, por ejemplo, [BN00] Sección 14.2

Teorema A.9 (Riesz) Sea H un espacio de Hilbert. Entonces f es un funcional lineal acotado de H si y sólo si existe un único $h \in H$ tal que $f_h(x) = \langle x, h \rangle$ para todo $x \in H$. Además $\|h\| = \|f\|$

Demostración.

Veamos que el funcional $f_h : H \to K$ definido por $f_h(x) = \langle x, h\rangle$ es un funcional lineal acotado:

Por las propiedades del producto interior, es claro que f_h es lineal. Ahora por la desigualdad de Cauchy A.1 tenemos que para todo $x \in H$, $\|f_h(x)\| = \|\langle x, h\rangle\| \leq \|x\|\|h\|$, es decir, f_h es acotada y $\|f_h\| \leq \|h\|$. Pero también $\|f_h(h)\| = \|h\|\|h\| \implies \|f_h(\frac{h}{\|h\|})\| = \|h\| \implies \|f_h\| \geq \|h\|$ (si $h = 0$, $\|f_h\| \geq \|h\|$ se cumple trivialmente), i.e. $\|f_h\| = \|h\|$.

Sólo falta probar que dado un f un funcional lineal acotado, se puede escribir en la forma $f(x) = \langle x, y\rangle$ para algún $y \in H$.

Considera al núcleo de f, $N(f) = \{x \in H \mid f(x) = 0\}$. Si $N(f) = H$ entonces $f(x) = \langle x, 0\rangle$ y se cumple el enunciado, así que supongamos que $N(f) \subsetneq H$. Por la continuidad de f, si (x_n) es una sucesión convergente en $N(f)$ a x, pasa que $0 = f(x_n) \to f(x)$, es decir, $N(f)$ es un conjunto cerrado de H. También $\exists y \in N(f)^\perp \setminus \{0\}$, pues si $N(f)^\perp = \{0\}$, por A.8 tenemos que $N(f) = N(f)^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = H$, lo cual es una contradicción. Sea $w \in N(f)^\perp \setminus \{0\}$, probemos que $y = \frac{\overline{f(w)}}{\langle w,w\rangle}w$ satisface las condiciones del teorema, observando primero las evaluaciones de f en 2 casos especiales:

Caso 1: $x \in N(f)$

$f(x) = 0 = \frac{f(w)}{\langle w,w\rangle}\langle x, w\rangle = \langle x, \frac{\overline{f(w)}}{\langle w,w\rangle}w\rangle$

Caso 2: $x = \beta w$

$f(\beta w) = \beta f(w) = \beta\frac{f(w)}{\langle w,w\rangle}\langle w, w\rangle = \langle \beta w, \frac{\overline{f(w)}}{\langle w,w\rangle}w\rangle$

Ahora, para $x \in H$, Como $w \notin N(f)$, Considera al vector $x - \frac{f(x)}{f(w)}w$, entonces $f(x - \frac{f(x)}{f(w)}w) = f(x) - \frac{f(x)}{f(w)}f(w) = 0$, es decir, $x - \frac{f(x)}{f(w)}w \in N(f)$. Como $x = x - \frac{f(x)}{f(w)}w + \frac{f(x)}{f(w)}w$, entonces $f(x) = f(x - \frac{f(x)}{f(w)}w) + f(\frac{f(x)}{f(w)}w) = \langle x - \frac{f(x)}{f(w)}w, \frac{\overline{f(w)}}{\langle w,w\rangle}w\rangle + \langle \frac{f(x)}{f(w)}w, \frac{\overline{f(w)}}{\langle w,w\rangle}w\rangle = \langle x, \frac{\overline{f(w)}}{\langle w,w\rangle}w\rangle$, donde la segunda igualdad se da gracias a lo que demostramos para los dos casos especiales ■

El siguiente es uno de los teoremas más importantes del análisis funcional, el cual nosotros utilizamos para probar el teorema de la gráfica cerrada.

Teorema A.10 Sean X_1, X_2 espacios de Banach, y M un subconjunto de $\mathbb{B}(X_1, X_2)$. Si M es acotada puntualmente (i.e. para todo $x \in X_1$ existe un $C(x_0) \geq 0$ tal que $\|Tx\| \leq C(x_0)$ para todo $T \in M$) entonces M es acotado (i.e. existe $C \geq 0$ tal que $\|T\| \leq C$ para todo $T \in M$)

Demostración.

Basta probar que existen $x_0 \in X_1$, $\rho > 0$ y $C' \geq 0$ tales que $\|Tx\| \leq C'$ para todo $x \in B(x_0, \rho) = \{y \in X_1 \mid \|y - x_0\| < \rho\}$, $T \in M$, pues si tenemos a x_0, ρ, C' con estas propiedades, entonces para todo $x \in B(0, \rho)$, $T \in M$ tenemos que $\|Tx\| = \|T(x_0+x-x_0)\| \leq \|T(x_0+x)\|+\|T(x_0)\| \leq C'+C(x_0) = C''$ puesto que $x_0+x \in B(x_0, \rho)$ y por la hipótesis del teorema. Entonces multiplicando por ρ^{-1} tenemos que $\|Tx\| \leq \rho^{-1}C'' = C$ para todo $x \in B(0, 1)$, es decir, $\|T\| \leq C$ para todo $T \in M$.

Probemos entonces la existencia de x_0, ρ y C' con las propiedades descritas. Supongamos que no existen, es decir, para todo $x_0 \in H, \rho > 0$, el conjunto $\{\|Tx\| \mid T \in M, x \in B(x_0, \rho)\}$ es no acotado. En particular, $\{\|Tx\| \mid T \in M, x \in B(0,1)\}$ es un conjunto no acotado, es decir, existe un $x_1 \in B(0,1), T_1 \in M$ tal que $\|T_1 x_1\| > 1$. Como T_1 es continua, existe ρ_1, $0 < \rho_1 < 2^{-1}$ tal que $\overline{B(x_1, \rho_1)} \subset B(0,1)$ y $\|T_1 x\| > 1$ para todo $x \in \overline{B(x_1, \rho_1)}$.

Como $\{\|Tx\| \mid T \in M, x \in B(x_1, \rho_1)\}$ es un conjunto no acotado, existen $x_2 \in B(x_1, \rho_1), T_2 \in M$ tales que $\|T_2 x_2\| > 2$. Como T_2 es continua, existen ρ_2, $0 < \rho_2 < 2^{-2}$ tales que $\overline{B(x_2, \rho_2)} \subset B(x_1, \rho_1)$ y $\|T_2 x\| > 2$ para todo $x \in \overline{B(x_2, \rho_2)}$.

Así, inductivamente obtenemos sucesiones (x_n) en X_1, (T_n) en M y (ρ_n) en $(0,1)$ tales que $\overline{B(x_{n+1}, \rho_{n+1})} \subset B(x_n, \rho_n)$, $\rho_n < 2^{-n}$ y $\|T_n x\| > n$ para todo $x \in \overline{B(x_n, \rho_n)}$. También tenemos que $\|x_n - x_m\| < \rho_{min\{n,m\}} < 2^{min\{n,m\}}$, por lo que (x_n) es una sucesión de Cauchy, entonces existe $x \in X_1$ tal que $x_n \to x$. Puesto que para todo $n \geq m$ tenemos que $x_n \in B(x_m, \rho_m)$, entonces $x \in \overline{B(x_m, \rho_m)}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $\|T_m x\| > m$, para toda $m \in \mathbb{N}$, lo cual contradice nuestra hipótesis de la existencia de un c_x tal que $\|T_m x\| \leq c_x$ ■

Ejemplo A.1 Para la comprensión de este ejemplo se necesita tener un conocimiento básico sobre la teoría de integración de Lebesgue. Trabajamos en el espacio $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue, entonces las nociones de medible, c.t.p. (abreviación de "casi en todas partes", que significa que una propiedad cumple en todo el conjunto a excepción posiblemente de en un subconjunto de medida cero) e integrable se consideran a partir de la medida de Lebesgue.

Sea $M \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto medible. Definimos primero al espacio auxiliar $\mathcal{L}^2(M)$ como

$$\mathcal{L}^2(M) = \{f : M \to \mathbb{C} \text{ funciones medibles} \mid \int_M |f(x)|^2 \, dx < \infty\}$$

Es directo ver que $\mathcal{L}^2(M)$ es un espacio vectorial (con campo $\mathbb{C}$), puesto que con la definición usual de suma de funciones y producto por escalar, se tiene que $f + g$ y af son funciones medibles, y dado que

$$|af(x)| = |a||f(x)| \text{ y } |f(x)+g(x)|^2 \leq (|f(x)|+|g(x)|)^2 = |f(x)|^2+2|f(x)||g(x)| + |g(x)|^2 \leq 2|f(x)|^2 + 2|g(x)|^2$$

entonces $\int_M |af(x)|^2 \, dx < \infty$ y $\int_M |f(x) + g(x)|^2 \, dx < \infty$. Sea s la función $s : \mathcal{L}^2(M) \times \mathcal{L}^2(M) \to \mathbb{C}$ definida por $s(f,g) = \int_M f(x)\overline{g(x)} \, dx$. Es sencillo verificar que $s(\cdot, \cdot)$ cumple todas las condiciones de la Definición A.1 a excepción de $s(f,f) = 0 \iff f = 0$ (dado $a \in M$ la función f definida como $f(x) = 0$ para $x \in M \setminus \{a\}$ y $f(a) = 1$ es tal que $s(f,f) = 0$). Por lo tanto, no podemos definir un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en el espacio $\mathcal{L}^2(M)$ tal que $\langle f, g \rangle = \int_M f(x)\overline{g(x)} \, dx$. Es por esta razón que se tiene una consideración extra para definir al espacio $L^2(M)$:

Sea

$$\mathcal{N}(M) = \{f : M \to \mathbb{C} \text{ funciones medibles} \mid f(x) = 0 \text{ c.t.p en } M\}$$

Entonces tenemos que $\mathcal{N}(M) \subseteq \mathcal{L}^2(M)$, y que $\mathcal{N}(M) = \{f \in \mathcal{L}^2(M) | s(f,f) = 0\}$. Definimos

$$L^2(M) = \mathcal{L}^2(M)/\mathcal{N}(M)$$

Es decir, $L^2(M)$ es el conjunto de clases de equivalencia $[f]$ de $\mathcal{L}^2(M)$ tales que dos elementos están en la misma clase si y sólo si son iguales c.t.p. La suma y la multiplicación en $L^2(M)$ se hace a partir de representantes, es decir $a[f] = [af]$ y $[f] + [g] = [f + g]$ donde $f \in [f]$ y $g \in [g]$ (se puede ver que no importa la elección del representante puesto que dados dos representantes, al hacer la operación, el resultado da dos funciones que son iguales c.t.p., y por lo tanto son el mismo elemento en $L^2(M)$). Definimos al producto escalar en $L^2(M)$ como

$$\langle [f], [g] \rangle = s(f, g) = \int_M f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

Donde $f \in [f]$, $g \in [g]$. Por como se definen las integrales de Lebesgue (en conjuntos de medida cero son cero) el producto no depende del representante que se elija. Si $[f] \in L^2(M)$ es tal que $\langle f, f \rangle = 0$ entonces tenemos que $f = 0$ c.t.p. (propiedad de la integral de una función no negativa), es decir, $[f]$ es el elemento cero en $L^2(M)$, por lo tanto tenemos que $\langle [f], [g] \rangle$ es en efecto un producto escalar. Denotamos a $[f] \in L^2(M)$ como f, y nos referiremos a estas clases de equivalencia como funciones (puesto que podemos trabajar con ellas de la misma forma a como lo hacemos con funciones). Esencialmente, por nuestra construcción la única diferencia entre el espacio de funciones $L^2(M)$ y $\mathcal{L}^2(M)$ es que funciones en $L^2(M)$ que son iguales c.t.p. son idénticas. Para probar que $L^2(M)$ es un espacio de Hilbert sólo nos falta verificar que $L^2(M)$ es completo, la prueba de este hecho no la incluimos aquí, pero se puede verificar en [Wei80] página 19.

Proposición A.11 Para $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo con $-\infty \leq a < b \leq \infty$, los siguientes subespacios son densos en $L^2(a, b)$

1. $L_0^2(a, b) = \{f \in L^2(a, b) \mid \exists K > 0 \text{ tal que } f(x) < K \text{ c.t.p. en } (a, b) \text{ y } f(x) = 0 \text{ c.t.p. en } \{x \in (a, b) \mid |x| > K\}\}$

2. El conjunto de las funciones escalonadas $T(a, b) = \{f \in L^2(a, b) \mid f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{J_i}\}$ donde χ_{J_i} es la función característica en un intervalo finito J_i (abierto o cerrado en cualquier extremo) de (a, b), $c_i \in \mathbb{C}$

3. El espacio de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto $C_0^\infty(a, b) = \{f \in L^2(a, b) \mid f^{(n)} \text{ existe para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ y existe } K \subset (a, b) \text{ compacto tal que } f(x) = 0\ \forall x \in (a, b) \setminus K\}$

Demostración.

Probar que cada uno de los conjuntos es un subespacio es trivial. Sea $f \in L^2(a,b)$

1.

Definimos a $f_n \in L^2_0(a,b)$ como

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leq n \text{y } f(x) \leq n \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Entonces tenemos que $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in (a,b)$, y $f_n(x) \to f(x)$ si $n \to \infty$. Entonces por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$\|f - f_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^2 \, dx \to 0$$

es decir, $f_n \to f$, por lo que $L^2_0(a,b)$ es denso en $L^2(a,b)$

2.

Como $\overline{L^2_0(a,b)} = L^2(a,b)$, basta probar que $L^2_0(a,b) \subseteq \overline{T(a,b)}$, (pues entonces $L^2(a,b) = \overline{L^2_0(a,b)} \subseteq \overline{T(a,b)}$). Sea $f \in L^2_0(a,b)$, entonces f es integrable y existe una sucesión (f_n) de $T(a,b)$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ c.t.p. y

$$\int |f_n(x) - f(x)| \, dx \to 0 \quad \text{si } n \to \infty$$

(ver [Wei80], A6). Como para $K > 0$ tenemos que $|f(x)| \leq K$ c.t.p., podemos asumir que $|f_n(x)| \leq K$ para todo $x \in (a,b)$, $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto tenemos que

$$\|f_n - f\|^2 = \int |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \leq \int |f_n(x) - f(x)|(2K) \, dx \to 0$$

3.

Basta probar que $T(a,b) \subseteq \overline{C_0^\infty(a,b)}$, para lo cual es suficiente ver que la función característica χ_J de un intervalo finito J es punto de contacto de $C_0^\infty(a,b)$. Con este propósito en mente definimos a $\delta_\epsilon \in C_0^\infty(a,b)$ como

$$\delta_\epsilon^\sim(x) = \begin{cases} \exp\{(|x|^2 - \epsilon^2)^{-1}\} & \text{si } |x| < \epsilon \\ 0 & \text{si } |x| \geq \epsilon \end{cases}$$

y

$$\delta_\epsilon = \{\int \delta_\epsilon^\sim(x) \, dx\}^{-1} \delta_\epsilon^\sim.$$

Es sencillo verificar que $\delta_\epsilon \in C_0^\infty(a,b)$, y que el soporte de δ_ϵ es $\{x \in (a,b) \mid |x| \leq \epsilon\}$. Para el intervalo J, y $n \in \mathbb{N}$ definimos a

$$f_n(x) = \int \delta_{\frac{1}{n}}(x-y)\chi_J(y) \, dy \quad \text{con } x \in (a,b)$$

entonces tenemos que $f_n \in C_0^\infty(a,b)$ y

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in (a,b) \text{ con } d(x, J^c) \geq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{para } x \in (a,b) \text{ con } d(x, J) \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

y $0 \leq f_n(x) \leq 1$ para todo $x \in (a,b)$, donde $d(x,A)$ es la distancia euclidiana del punto x al conjunto A, y A^c es el complemento de A. Tenemos que $f_n(x) \to \chi_J$ para todo $x \in (a,b)\backslash\{a,b\}$. Entonces por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$\|f_n - \chi_J\|^2 = \int |f_n(x) - \chi_J(x)|^2 \, dx \to 0$$

es decir, $f_n \to \chi_J$ ■

Bibliografía escencial del Apéndice

[BN00] Capítulo 8, 9 y 10.

Notación

$Im\lambda$ es la parte imaginaria del numero complejo λ

$S \leq H$ S subespacio de H

$T : H_1 \to H_2$ operador lineal entre espacios de Hilbert

$D(T)$ es el dominio de la función T

$R(T)$ es el rango de T

$N(T)$ es el núcleo de T

$T \subseteq G$ si G es una extensión de T, es decir, $D(T) \subseteq D(G)$ y $T(x) = G(x)$ para todo $x \in D(T)$

$\mathbb{B}(H)$ =conjunto de operadores continuos con $D(T) = H$, también $\mathbb{B}(H_1, H_2)$

Si $A \subseteq H$, $A^{\perp} = \{x \in H \mid \langle x, a \rangle = 0 \ \forall a \in A\}$

$A + B = \{a + b \mid a \in A, B \in B\}$

$A \dot{+} B$ es la suma directa, i.e. es el subespacio $A+B$, y el hecho de que la suma sea directa señala que todo elemento de $A + B$ tiene una única representación $a + b$ con $a \in A, b \in B$

$A \oplus B$ es la suma ortogonal, i.e. es el espacio $A + B$ con la característica de que $A \perp B$ (Como $A \perp B \implies A \cap B = \{0\}$ entonces si la suma es ortogonal, es también directa)

$[f, g]_c = f(c)\overline{g'(c)} - f'(c)\overline{g(c)}$ es el bracket de Lagrange de f y g en c

Bibliografía

[BN00] Bachman, George and Narici, Lawrence. *Functional Analysis*. Estados Unidos de Norteamérica. Dover. 2000

[Cod89] Coddington, Earl A. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*. Estados Unidos de Norteamérica. Dover. 1989

[Coh13] Cohn, Donald L. *Measure Theory*. Segunda edición. Estados Unidos de Norteamérica. Springer. 2013

[DS63] Dunford y Schwartz. *Linear Operators Part 2: Spectral Theory*. Estados Unidos de Norteamérica. Interscience. 1963

[Fri03] Friedberg, Insel, Spence. *Linear Algebra*. Cuarta edición. Estados Unidos de Norteamérica, Pearson Education, Inc. 2003

[Nai68] Naimark, M.A. *Linear Differential Operators*. Estados Unidos de Norteamérica. Ungar. 1968

[Oli09] Oliveira, César. *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*. Alemania. Birkhäuser, 2009

[RS80] Reed, Michael y Simon, Barry. *Methods of Modern Mathematical Physics*. Estados Unidos de Norteamérica, Academic Press. 1980

[SK12] Schmüdgen, Konrad. *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*. Alemania, Springer 2012

[Wei80] Weidmann, Joachim. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Estados Unidos de América, Springer-Verlag. 1980

[Wei05] Weidmann, Joachim. *Spectral Theory of Sturm-Liouville Operators Approximation by Regular Problems*. Suiza, Birkhäuser Verlag Basel, 2005

[Will04] Willard, Stephen. *General Topology*. Estados Unidos de América, Dover, 2004