



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estructuras geométricas en superficies

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:  
Ernesto Alejandro Vázquez Navarro

DIRECTOR DE TESIS:  
Dr. Max Neumann Coto



2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno  
Vázquez  
Navarro  
Ernesto Alejandro  
55 5702 3632  
Universidad Nacional Autónoma de México  
Facultad de Ciencias  
Matemáticas  
300060959
2. Datos del tutor  
Dr  
Max  
Neumann  
Coto
3. Datos del sinodal 1  
Dr  
Mario  
Eudave  
Muñoz
4. Datos del sinodal 2  
Dra  
Isabel Alicia  
Hubard  
Escalera
5. Datos del sinodal 3  
Dra  
Adriana  
Ortiz  
Rodríguez
6. Datos del sinodal 4  
Dr  
Oscar Alfredo  
Palmas  
Velasco
7. Datos del trabajo escrito  
Estructuras geométricas en superficies  
127 p  
2014

# ÍNDICE GENERAL

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
<b>2. Plano euclidiano</b>	<b>5</b>
2.1. Geodésicas en $\mathbb{E}^2$ . . . . .	6
2.2. Isometrías euclidianas . . . . .	8
2.3. Semejanzas euclidianas . . . . .	27
2.4. Transformaciones de $\mathbb{E}^2$ que preservan rectas . . . . .	35
<b>3. Esfera</b>	<b>41</b>
3.1. Geodésicas en $\mathbb{S}^2$ . . . . .	41
3.2. Isometrías esféricas . . . . .	45
3.3. Semejanzas esféricas . . . . .	50
3.4. Transformaciones de $\mathbb{S}^2$ que preservan circunferencias de radio máximo . . . . .	52
<b>4. Plano proyectivo y esfera de Riemann</b>	<b>57</b>
4.1. Plano proyectivo . . . . .	57
4.2. Esfera de Riemann . . . . .	61
4.2.1. Inversión . . . . .	66
4.2.2. Transformaciones de Möbius . . . . .	71
4.2.3. Razón cruzada . . . . .	77

<b>5. Plano hiperbólico</b>	<b>83</b>
5.1. Transformaciones de Möbius que preservan $\mathbb{B}^2$ . . . . .	84
5.2. Métrica hiperbólica . . . . .	90
5.3. Geodésicas en $\mathbb{H}^2$ . . . . .	92
5.4. Isometrías hiperbólicas . . . . .	100
5.5. Transformaciones de $\mathbb{H}^2$ que preservan líneas hiperbólicas . . . . .	105
5.6. Semejanzas hiperbólicas . . . . .	118
<b>6. G-estructuras</b>	<b>119</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>120</b>

## INTRODUCCIÓN

En este trabajo analizaremos grupos de transformaciones de algunas superficies (el plano euclidiano, la esfera y el interior del disco unitario en el plano) para conocer distintas estructuras geométricas en cada una.

Para el caso del plano euclidiano, la manera de medir la distancia entre puntos nos permite medir la longitud de los vectores y de esta manera es posible medir la longitud de cualquier curva diferenciable. Mostraremos que con la métrica euclidiana, las rectas son las geodésicas.

Estudiaremos las transformaciones del plano euclidiano que preservan la métrica y daremos una clasificación de éstas. También, estudiaremos las transformaciones que preservan las proporciones y las transformaciones del plano que preservan rectas.

De manera análoga, estudiaremos las transformaciones de la esfera: analizaremos la métrica de la esfera para encontrar las geodésicas de la esfera. Analizaremos los grupos de transformaciones de la esfera que preservan dicha métrica, veremos que no hay transformaciones en la esfera que preserven las proporciones y estudiaremos las transformaciones de la esfera que preservan las geodésicas.

En el Capítulo 4 estudiaremos dos compactificaciones del plano euclidiano, veremos que tienen estructuras geométricas que provienen de la esfera y analizaremos sus respectivos grupos de transformaciones.

Primero analizaremos el plano proyectivo y estudiaremos algunos de sus grupos de transformaciones. Después estudiaremos la esfera de Riemann (el conjunto de los números complejos unido a un punto al infinito) y estudiaremos algunas transformaciones

que nos permitirán encontrar las transformaciones del plano hiperbólico.

A diferencia de los casos del plano euclidiano y de la esfera en los que teníamos una forma de medir la longitud de curvas diferenciables y con esto encontrar a sus respectivas geodésicas; en el plano hiperbólico propondremos a las geodésicas y encontraremos una manera de medir la longitud de las trayectorias para las que los elementos de nuestra propuesta sean las geodésicas.

Con esto, podremos estudiar al grupo de transformaciones del plano hiperbólico que preserve la métrica hiperbólica y mostraremos que este grupo es el grupo de las transformaciones del plano hiperbólico que preservan las geodésicas.

# CAPÍTULO 1

## PRELIMINARES

**Definición 1.1.** Sea  $X$  un espacio topológico. Una función  $f : X \rightarrow X$  es una **transformación** de  $X$  si y sólo si  $f$  es una función continua, biyectiva y  $f^{-1}$  también es continua; es decir,  $f$  es un homeomorfismo de  $X$  en si mismo.

**Proposición 1.2.** Si  $X$  es un espacio topológico, el conjunto de todas las transformaciones de  $X$  tiene estructura de grupo bajo la composición. A dicho grupo se le llama **grupo de transformaciones de  $X$** .

**Prueba:** La composición de transformaciones es asociativa (por ser composición de funciones); la función  $Id_X(x) = x$  para cualquier  $x \in X$  es una transformación de  $X$  que funciona como elemento identidad y cada transformación de  $X$  tiene elemento inverso (pues es homeomorfismo).

□

Sean  $X$  un espacio topológico,  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una familia de subconjuntos de  $X$  con un conjunto de índices  $I$  y una función  $f : X \rightarrow X$ . Decimos que  $f$  **preserva** a los elementos de la familia  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  si y sólo si para toda  $\alpha \in I$  se tiene que  $f[A_\alpha] = A_\beta$  para alguna  $\beta \in I$ .

Si  $X$  es un espacio topológico y  $H(X)$  su grupo de transformaciones; al restringir, con algunas propiedades, a los elementos del grupo se obtienen subgrupos de  $H(X)$ .



**Ejemplo 1.3.** Consideremos un espacio topológico  $X$ , con algunas otras estructuras adicionales:

- Si  $X$  es un espacio métrico, con métrica  $d$ , una función  $f : X \rightarrow X$  es una **isometría** si y sólo si  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$  para cualquier  $\{x, y\} \subset X$ . Entonces, el conjunto de isometrías de  $X$  es un grupo de transformaciones.

Una función  $f : X \rightarrow X$  es una **semejanza** si y sólo si existe  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $d(f(x), f(y)) = |k| \cdot d(x, y)$  para cualquier  $\{x, y\} \subset X$ . Por lo tanto, el conjunto de semejanzas de  $X$  es un grupo de transformaciones.

- Si en  $X$  existe una forma de medir áreas, el conjunto de transformaciones que preserven áreas es un grupo de transformaciones de  $X$ .
- Si en  $X$  existe una manera de medir ángulos entre las curvas, el conjunto de transformaciones que preservan ángulos en  $X$  es un grupo de transformaciones.
- Si en  $X$  existe una manera de medir la longitud de cada trayectoria entre dos puntos del espacio topológico, el conjunto de transformaciones que preserven la longitud de las trayectorias es un grupo de transformaciones de  $X$ .

El conjunto de transformaciones que preserven las trayectorias de longitud mínima (**geodésicas**), es un grupo de transformaciones de  $X$ , que contiene propiamente al grupo anterior.

- Si  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  una familia de subconjuntos de  $X$  con un conjunto de índices  $I$ , el conjunto de transformaciones que preservan a los elementos de la familia  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  forma un grupo de transformaciones de  $X$ .

**Definición 1.4.** Un espacio topológico  $X$ , de Hausdorff y 2-numerable es una **variedad de dimensión  $n$**  si y sólo si para cada  $x \in X$  existe  $U$  abierto en  $X$  tal que  $x \in U$  y  $U$  es homeomorfo a un abierto en  $\mathbb{R}^n$ .

En este trabajo, los objetos de estudio son las **2-variedades** o **superficies**: espacios topológicos en el que cada punto pertenece a una vecindad homeomorfa a un abierto de  $\mathbb{R}^2$ .

## CAPÍTULO 2

## PLANO EUCLIDIANO

Consideremos el modelo del plano euclidiano  $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{R}^2, d)$  donde  $d$  es la **métrica euclidiana** en el plano: para cualquier  $\{\bar{x} = (x_1, x_2), \bar{y} = (y_1, y_2)\} \subset \mathbb{R}^2$ ,

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

Dicha métrica no sólo permite determinar la distancia entre dos puntos, también induce una manera de medir la longitud de vectores y por lo tanto la longitud de cualquier trayectoria diferenciable:

Si  $\{\bar{x}, \bar{y}\} \subset \mathbb{R}^2$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una trayectoria  $C^1$  en  $[a, b]$ , tal que  $\gamma(a) = \bar{x}$  y  $\gamma(b) = \bar{y}$ , la longitud de la trayectoria parametrizada por  $\gamma$  es:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

**Proposición 2.1.** La longitud de una trayectoria diferenciable no depende de su parametrización.

**Prueba:** Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una parametrización de la curva, cualquier reparametrización  $\alpha$ , es la composición de  $\gamma$  con una función diferenciable y no decreciente  $\delta : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ,

$$l(\alpha) = \int_c^d \|\alpha'(x)\| dx = \int_c^d \|\gamma'(\delta(x))\| \cdot |\delta'(x)| dx = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = l(\gamma)$$

□

Ahora es posible determinar las geodésicas del plano al considerar el ínfimo de las longitudes de todas las trayectorias entre dos puntos.

## 2.1. Geodésicas en $\mathbb{E}^2$

En este modelo del plano, las **rectas** corresponden a las soluciones de ecuaciones lineales  $ax + by = c$  donde  $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ , que pueden parametrizarse como

$$(x(t), y(t)) = t(b, -a) + c \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La parametrización anterior permite calcular la longitud del segmento de recta comprendido entre cualesquiera dos puntos del plano:

Si  $\{\bar{x}, \bar{y}\} \subset \mathbb{R}^2$ , sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\gamma(t) = (1 - t)\bar{x} + t\bar{y}$ . La longitud del segmento de recta comprendido entre  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  es

$$l(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \|\bar{y} - \bar{x}\| dt = \|\bar{y} - \bar{x}\|$$

Ahora, probaremos que la curva de longitud mínima entre cualesquiera dos puntos es el segmento de recta determinado por ellos.

**Proposición 2.2.** Las geodésicas en  $\mathbb{E}^2$  son las rectas.

**Prueba:** Si  $\{\bar{x}, \bar{y}\} \subset \mathbb{R}^2$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una parametrización de una curva  $C^1$  en  $[a, b]$ , tal que  $\gamma(a) = \bar{x}$  y  $\gamma(b) = \bar{y}$ . La longitud de  $\gamma$  es:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Por Teorema de Pitágoras (Figura 2.1), si consideramos la proyección escalar de  $\gamma'(t)$  sobre  $(\bar{y} - \bar{x})$ ,  $(\text{Proy}_{\bar{a}}(\bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\|})$ , para cada  $t \in [a, b]$ :

$$\|\gamma'(t)\|^2 = |\text{Proy}_{(\bar{y}-\bar{x})}(\gamma'(t))|^2 + |\text{Proy}_{(\bar{y}-\bar{x})^\perp}(\gamma'(t))|^2$$

$$\Rightarrow |\text{Proy}_{(\bar{y}-\bar{x})}(\gamma'(t))| \leq \|\gamma'(t)\|$$

Si  $\bar{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\bar{y} = (y_1, y_2)$  y  $\gamma(t) = (f(t), g(t))$  entonces para cada  $t \in [a, b]$

$$\text{Proy}_{(\bar{y}-\bar{x})}(\gamma'(t)) = \frac{\gamma'(t) \cdot (\bar{y} - \bar{x})}{\|\bar{y} - \bar{x}\|} = \frac{f'(t)(y_1 - x_1) + g'(t)(y_2 - x_2)}{\|\bar{y} - \bar{x}\|}$$

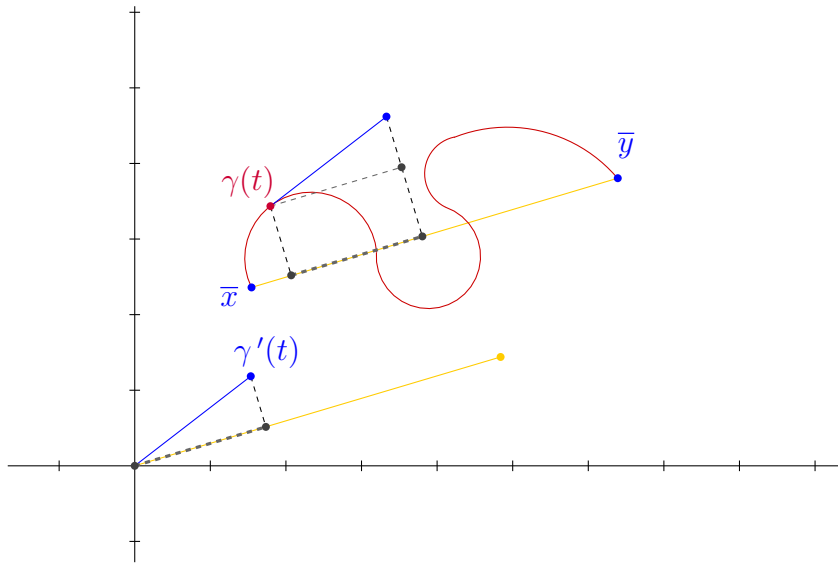


Figura 2.1: Proyección ortogonal.

Ahora

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \text{Proy}_{(\bar{y}-\bar{x})}(\gamma'(t)) dt &= \int_a^b \frac{(y_1 - x_1)f'(t) + (y_2 - x_2)g'(t)}{\|\bar{y} - \bar{x}\|} dt \\
 &= \frac{(y_1 - x_1)}{\|\bar{y} - \bar{x}\|} \int_a^b f'(t) dt + \frac{(y_2 - x_2)}{\|\bar{y} - \bar{x}\|} \int_a^b g'(t) dt \\
 &= \frac{(y_1 - x_1)}{\|\bar{y} - \bar{x}\|} [f(b) - f(a)] + \frac{(y_2 - x_2)}{\|\bar{y} - \bar{x}\|} [g(b) - g(a)] \\
 &= \frac{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}{\|\bar{y} - \bar{x}\|} = \|\bar{y} - \bar{x}\|
 \end{aligned}$$

Además

$$\left| \int_a^b \text{Proy}_{(\bar{y}-\bar{x})}(\gamma'(t)) dt \right| \leq \int_a^b |\text{Proy}_{(\bar{y}-\bar{x})}(\gamma'(t))| dt \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Por lo tanto,  $\|\bar{y} - \bar{x}\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ .

También, si  $\gamma$  es la parametrización de la curva de longitud mínima entre  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\bar{y} - \bar{x}\| &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \\ \Rightarrow |Proy_{(\bar{y}-\bar{x})}(\gamma'(t))| &= \|\gamma'(t)\| \end{aligned}$$

Lo que demuestra que las rectas son las líneas que minimizan distancia en  $\mathbb{E}^2$ .

□

## 2.2. Isometrías euclidianas

Las isometrías euclidianas son las transformaciones del plano que preservan la métrica euclidiana. Como primer ejemplo, tenemos la siguiente transformación:

**Ejemplo 2.3.** Una **traslación**,  $t_{\bar{u}_0}(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{u}_0$ , es una isometría euclidiana.

**Prueba:**

$$d(t_{\bar{u}_0}(\bar{x}), t_{\bar{u}_0}(\bar{y})) = \|\bar{x} + \bar{u}_0 - (\bar{y} + \bar{u}_0)\| = \|\bar{x} - \bar{y}\| = d(\bar{x}, \bar{y})$$

□

Las **reflexiones euclidianas** corresponden a transformaciones que están determinadas por un vector distinto de cero en el plano:

Si  $L$  es una recta por el origen con vector director  $\bar{u}_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ :

$$L = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0, \alpha \in \mathbb{R} \}$$

cualquier  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$  puede expresarse como  $\bar{x} = \beta \bar{u}_0 + \gamma \bar{u}_0^\perp$ , donde  $\bar{u}_0^\perp = (-b, a)$  y  $\{\beta, \gamma\} \subset \mathbb{R}$ .

Por lo que  $\bar{r}_L$ , la **reflexión con eje  $L$**  (Figura 2.2), corresponde a la transformación:

$$\bar{r}_L(\bar{x}) = \bar{r}_L(\beta \bar{u}_0 + \gamma \bar{u}_0^\perp) = \beta \bar{u}_0 - \gamma \bar{u}_0^\perp$$

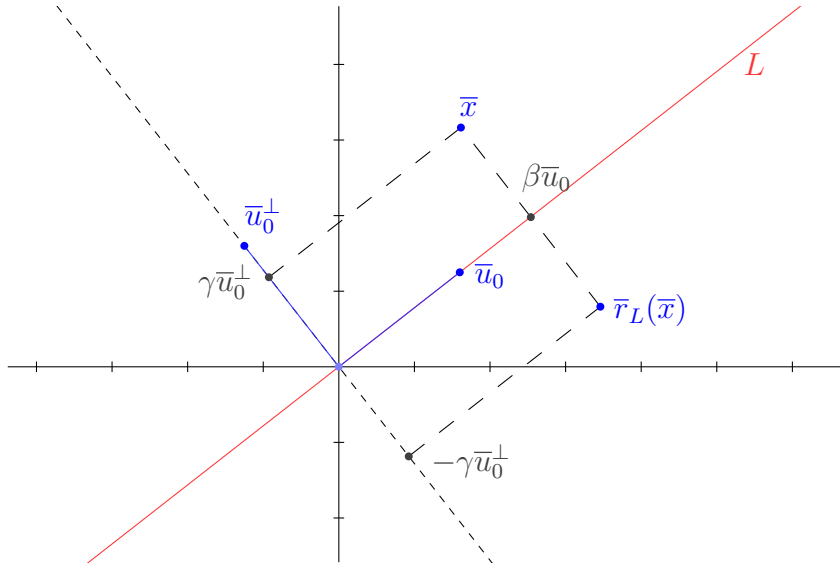


Figura 2.2: La reflexión con eje una recta por el origen.

**Ejemplo 2.4.**  $\bar{r}_L$  es una isometría euclidiana.

**Prueba:** Si  $\bar{x} = \beta_1 \bar{u}_0 + \gamma_1 \bar{u}_0^\perp$  y  $\bar{y} = \beta_2 \bar{u}_0 + \gamma_2 \bar{u}_0^\perp$

$$\begin{aligned} d(\bar{r}_L(\bar{x}), \bar{r}_L(\bar{y})) &= \|(\beta_1 - \beta_2)\bar{u}_0 - (\gamma_1 - \gamma_2)\bar{u}_0^\perp\| \\ &= \|(\beta_1 - \beta_2)\bar{u}_0 + (\gamma_1 - \gamma_2)\bar{u}_0^\perp\| \\ &= d(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

Puesto que  $\bar{u}_0$  y  $\bar{u}_0^\perp$  son ortogonales, la suma de estos vectores tiene la misma magnitud que su diferencia. □

**Proposición 2.5.** Cualquier recta es el conjunto de puntos en el plano que equidistan de dos puntos fijos.

**Prueba:** Sean  $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ ,  $\bar{v}_0 \in \mathbb{R}^2$  y

$$L = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0 + \bar{v}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Dado cualquier punto  $\bar{x}_0 \notin L$ ,  $\bar{x}_0 = \alpha_0 \bar{u}_0 + \beta \bar{u}_0^\perp$ . Entonces, todo  $\bar{x} \in L$  cumple que

$$d(\bar{x}, \alpha_0 \bar{u}_0 + \beta \bar{u}_0^\perp + \bar{v}_0) = d(\bar{x}, \alpha_0 \bar{u}_0 - \beta \bar{u}_0^\perp + \bar{v}_0)$$

□

**Proposición 2.6.** La imagen de una recta bajo una isometría euclidiana es una recta.

**Prueba:** Sea  $f$  una isometría euclidiana y  $L$  una recta en el plano. Por la Proposición 2.5,  $L$  es el conjunto de puntos que equidistan de los puntos  $\bar{x}_0$  y  $\bar{y}_0$ . La imagen de  $L$  bajo  $f$  es el conjunto de puntos que equidistan de  $f(\bar{x}_0)$  y  $f(\bar{y}_0)$ .

□

Las isometrías euclidianas forman un grupo que actúa transitivamente en  $\mathbb{R}^2$ : para cualquier  $\{\bar{u}, \bar{v}\} \subset \mathbb{R}^2$  existe una isometría euclidiana  $f$  tal que  $f(\bar{v}) = \bar{u}$ . Si  $f = t_{\bar{u}-\bar{v}}$  entonces  $t_{\bar{u}-\bar{v}}(\bar{v}) = \bar{u}$ . Por lo que  $\mathbb{E}^2$  es un espacio **homogéneo**.

Cualquier reflexión que tenga como eje una recta que no contenga al origen puede expresarse como la reflexión con eje una recta por el origen conjugada con una traslación. Es decir, si  $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$  y  $\bar{v}_0 \in \mathbb{R}^2$ :

$$L = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0 + \bar{v}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$L' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

entonces  $\bar{r}_L = t_{\bar{v}_0} \circ \bar{r}_{L'} \circ t_{\bar{v}_0}^{-1} = t_{\bar{v}_0} \circ \bar{r}_{L'} \circ t_{-\bar{v}_0}$ .

Si consideramos una reflexión con eje una recta  $L$  por el origen,  $\bar{r}_L$  es una transformación lineal del plano. Sea  $\bar{u}_0 = (a, b)$  un vector director de  $L$  de norma uno. La matriz asociada a la transformación es:

$$[\bar{r}_L] = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & -(a^2 - b^2) \end{pmatrix}; \text{ donde } a^2 + b^2 = 1.$$

Veamos que  $[\bar{r}_L][\bar{x}] = \bar{r}_L(\bar{x})$ :

Si  $\bar{x} = \beta(a, b) + \gamma(-b, a) = (\beta a - \gamma b, \beta b + \gamma a)$

$$[\bar{r}_L][\bar{x}] = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & -(a^2 - b^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta a - \gamma b \\ \beta b + \gamma a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta a + \gamma b \\ \beta b - \gamma a \end{pmatrix}$$

pues  $a^2 + b^2 = 1$ . Por otro lado:

$$\bar{r}_L(\bar{x}) = \beta(a, b) - \gamma(-b, a) = (\beta a + \gamma b, \beta b - \gamma a).$$

Además,  $[\bar{r}_L][\bar{u}_0] = [\bar{u}_0]$ ;  $[\bar{r}_L][\bar{u}_0^\perp] = [-\bar{u}_0^\perp]$ .

Puesto que  $\bar{u}_0$  es un vector director unitario de la recta  $L$ , si  $\theta$  es el ángulo que forma  $\bar{u}_0$  con la parte positiva del eje  $X$ , entonces  $\cos \theta = a$  y  $\text{sen } \theta = b$  (Figura 2.3). Por lo que:

$$[\bar{r}_L] = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ 2ab & -(a^2 - b^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \text{sen } 2\theta \\ \text{sen } 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

La reflexión es una transformación que invierte orientación, pues

$$\det([\bar{r}_L]) = -(\cos^2 2\theta + \text{sen}^2 2\theta) = -1 < 0$$

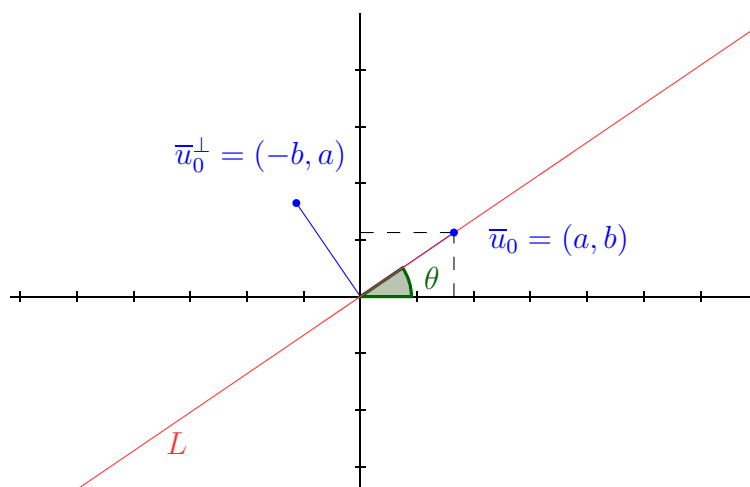


Figura 2.3: Reflexión con eje una recta por el origen vista como una transformación lineal de  $\mathbb{R}^2$ .

Recordemos que una **rotación euclidiana**  $r_\theta$ , con centro el origen por un ángulo  $\theta$ , es una transformación lineal dada por la matriz:

$$[r_\theta] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Análogamente al caso de las reflexiones, una rotación con centro  $\bar{x}_0$  por un ángulo  $\theta$ ,  $r_{\bar{x}_0, \theta}$ , se puede expresar como una rotación por el origen, conjugada con una traslación:

$$r_{\bar{x}_0, \theta} = t_{\bar{x}_0} \circ r_\theta \circ t_{-\bar{x}_0}$$



**Teorema 2.7.** La composición de dos reflexiones es una traslación o una rotación. También, cualquier traslación o rotación es la composición de dos reflexiones.

**Demostración:** Supongamos que tenemos dos rectas en el plano:

Sean  $\{\bar{u}_0, \bar{u}_1\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$ ,  $\{\bar{v}_0, \bar{v}_1\} \subset \mathbb{R}^2$

$$L = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0 + \bar{v}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$M = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \beta \bar{u}_1 + \bar{v}_1, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Tenemos dos casos:

- i)  $L$  y  $M$  son rectas que tienen un punto en común  $\bar{x}_0$ .
- ii)  $L$  y  $M$  son la misma recta o son rectas paralelas.

- i) Tenemos que para cualquier  $\bar{y}_0 \in L$  se tiene que

$$L = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0 + \bar{y}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

pues  $\bar{y}_0 = \alpha_0 \bar{u}_0 + \bar{v}_0$  implica que

$$\alpha \bar{u}_0 + \bar{y}_0 = \alpha \bar{u}_0 + (\alpha_0 \bar{u}_0 + \bar{v}_0) = (\alpha + \alpha_0) \bar{u}_0 + \bar{v}_0$$

Por lo tanto, tenemos que

$$L = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0 + \bar{x}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$M = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \beta \bar{u}_1 + \bar{x}_0, \beta \in \mathbb{R}\}$$

entonces

$$\bar{r}_M \circ \bar{r}_L = (t_{\bar{x}_0} \circ \bar{r}_{M'} \circ t_{-\bar{x}_0}) \circ (t_{\bar{x}_0} \circ \bar{r}_{L'} \circ t_{-\bar{x}_0}) = t_{\bar{x}_0} \circ (\bar{r}_{M'} \circ \bar{r}_{L'}) \circ t_{-\bar{x}_0}$$

donde  $L'$  y  $M'$  son rectas por el origen:

$$L' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$M' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \beta \bar{u}_1, \beta \in \mathbb{R}\}$$

La composición  $\bar{r}_{M'} \circ \bar{r}_{L'}$  puede asociarse al producto de  $[\bar{r}_{M'}][\bar{r}_{L'}]$ , si consideramos a (Figura 2.4):

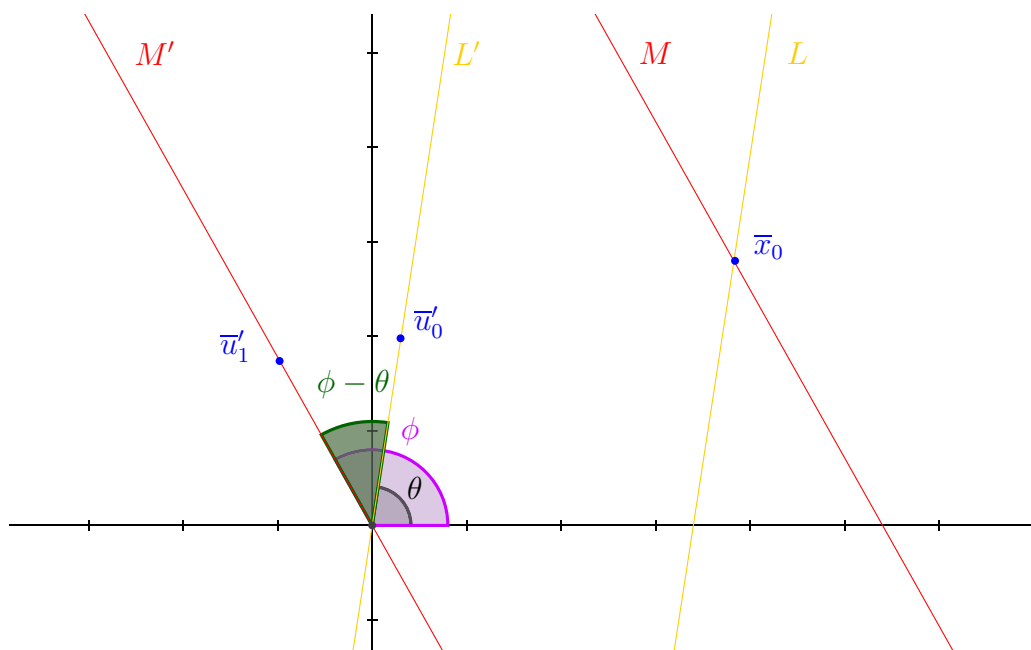


Figura 2.4: Composición de dos reflexiones por rectas que concurren en el origen.

- $\bar{u}'_0 = \frac{\bar{u}_0}{\|\bar{u}_0\|} = (a, b)$  y denotamos a  $\theta$  como el ángulo que forma con la parte positiva del eje  $X$ .
- $\bar{u}'_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|} = (c, d)$  y denotamos a  $\phi$  como el ángulo que forma con la parte positiva del eje  $X$ .

Así,

$$\begin{aligned} [\bar{r}_{M'}][\bar{r}_{L'}] &= \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \text{sen } 2\phi \\ \text{sen } 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \text{sen } 2\theta \\ \text{sen } 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2(\phi - \theta) & -\text{sen } 2(\phi - \theta) \\ \text{sen } 2(\phi - \theta) & \cos 2(\phi - \theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Además,  $[\bar{r}_{M'}][\bar{r}_{L'}]$  es una transformación que preserva orientación, pues

$$\det([\bar{r}_{M'}][\bar{r}_{L'}]) = \det([\bar{r}_{M'}])\det([\bar{r}_{L'}]) = (-1)^2 = 1 > 0$$

Por lo tanto, la composición de dos reflexiones por rectas que se intersecan en un punto es una rotación con centro el punto de intersección y un ángulo  $2(\phi - \theta)$ , dos veces el ángulo formado por las rectas.

ii) Para el segundo caso, si  $L$  y  $M$  son la misma recta:

$$\bar{r}_M \circ \bar{r}_L = \bar{r}_L \circ \bar{r}_L = Id_{\mathbb{E}^2}$$

Si  $L$  y  $M$  son paralelas entonces:

$$L = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0 + \bar{v}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$M = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \beta \bar{u}_0 + \bar{v}_1, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$M' = L' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Si  $\bar{x} = \alpha \bar{u}_0 + \beta \bar{u}_0^\perp$ ;  $\bar{v}_0 = \alpha_0 \bar{u}_0 + \beta_0 \bar{u}_0^\perp$  y  $\bar{v}_1 = \alpha_1 \bar{u}_0 + \beta_1 \bar{u}_0^\perp$ :

$$\begin{aligned} \bar{r}_M \circ \bar{r}_L(\bar{x}) &= (t_{\bar{v}_1} \circ \bar{r}_{M'} \circ t_{-\bar{v}_1}) \circ (t_{\bar{v}_0} \circ \bar{r}_{L'} \circ t_{-\bar{v}_0})(\alpha \bar{u}_0 + \beta \bar{u}_0^\perp) \\ &= t_{\bar{v}_1} \circ \bar{r}_{M'} \circ t_{-\bar{v}_1} \circ t_{\bar{v}_0} \circ \bar{r}_{L'}((\alpha - \alpha_0) \bar{u}_0 + (\beta - \beta_0) \bar{u}_0^\perp) \\ &= t_{\bar{v}_1} \circ \bar{r}_{M'} \circ t_{-\bar{v}_1} \circ t_{\bar{v}_0}((\alpha - \alpha_0) \bar{u}_0 - (\beta - \beta_0) \bar{u}_0^\perp) \\ &= t_{\bar{v}_1} \circ \bar{r}_{M'} \circ t_{-\bar{v}_1}(\alpha \bar{u}_0 - (\beta - 2\beta_0) \bar{u}_0^\perp) \\ &= t_{\bar{v}_1} \circ \bar{r}_{M'}((\alpha - \alpha_1) \bar{u}_0 - (\beta - 2\beta_0 + \beta_1) \bar{u}_0^\perp) \\ &= t_{\bar{v}_1}((\alpha - \alpha_1) \bar{u}_0 + (\beta - 2\beta_0 + \beta_1) \bar{u}_0^\perp) \\ &= (\alpha \bar{u}_0 + (\beta - 2\beta_0 + 2\beta_1) \bar{u}_0^\perp) \\ &= (\alpha \bar{u}_0 + \beta \bar{u}_0^\perp) + (2(\beta_1 - \beta_0) \bar{u}_0^\perp) \\ &= t_{(2(\beta_1 - \beta_0) \bar{u}_0^\perp)}(\bar{x}) \end{aligned}$$

Por lo que la composición de dos reflexiones con ejes paralelos, es una traslación por un vector cuya magnitud es dos veces la distancia entre las rectas (para notarlo, basta con hacer  $\bar{u}_0$  de norma uno, Figura 2.5).

Por otro lado, dado que una rotación con centro  $\bar{x}_0$  por un ángulo  $\theta$  se puede expresar como una rotación por el origen conjugada con una traslación, es suficiente demostrar que una rotación por el origen es la composición de dos reflexiones.

$$\begin{aligned} [r_\theta] &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2(\frac{\theta}{2} - 0) & -\operatorname{sen} 2(\frac{\theta}{2} - 0) \\ \operatorname{sen} 2(\frac{\theta}{2} - 0) & \cos 2(\frac{\theta}{2} - 0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = [\bar{r}_{M'}][\bar{r}_{L'}] \end{aligned}$$

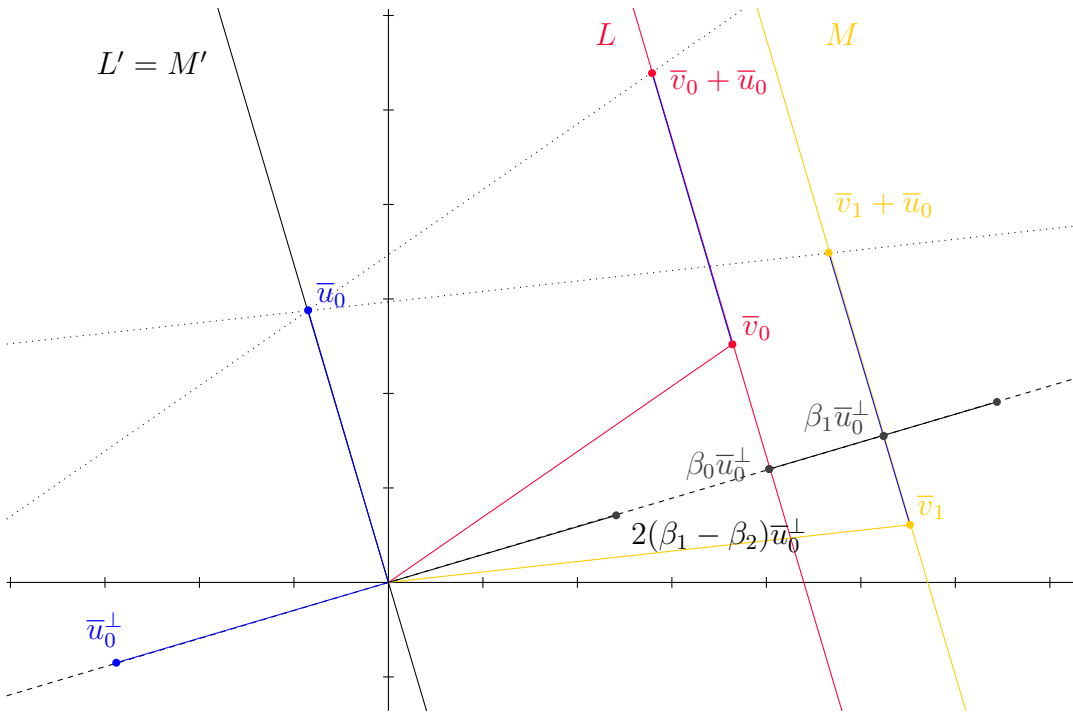


Figura 2.5: Composición de dos reflexiones por rectas que son paralelas.

donde si  $\bar{u}_0 = (1, 0)$ ,  $\bar{u}_1 = (a, b)$  es tal que  $a^2 + b^2 = 1$  y  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{b}{a}$  entonces

$$L' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$M' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \beta \bar{u}_1, \beta \in \mathbb{R}\}$$

es decir, la reflexión con eje  $L'$  es la reflexión en el eje  $X$  y la reflexión con eje  $M'$  es la reflexión por la recta que forma un ángulo de  $\theta/2$  con respecto a la parte positiva del eje  $X$ .

Así,

$$\begin{aligned} r_{\bar{x}_0, \theta} &= t_{\bar{x}_0} \circ r_\theta \circ t_{-\bar{x}_0} \\ &= t_{\bar{x}_0} \circ (\bar{r}_{M'} \circ \bar{r}_{L'}) \circ t_{-\bar{x}_0} \\ &= (t_{\bar{x}_0} \circ \bar{r}_{M'} \circ t_{-\bar{x}_0}) \circ (t_{\bar{x}_0} \circ \bar{r}_{L'} \circ t_{-\bar{x}_0}) \\ &= \bar{r}_M \circ \bar{r}_L \end{aligned}$$

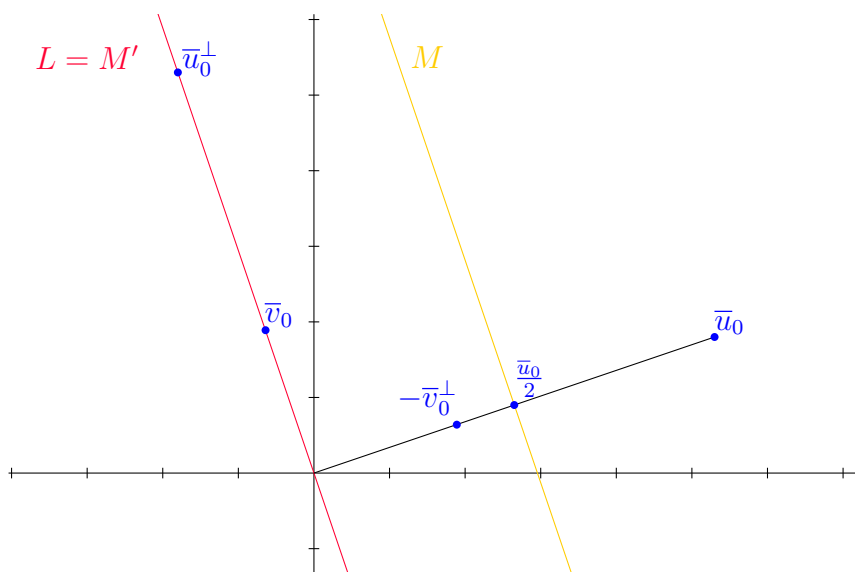


Figura 2.6: Una traslación como composición de dos reflexiones.

También, para una traslación  $t_{\bar{u}_0}$  con  $\bar{u}_0 = (a, b) \neq \bar{0}$  (Figura 2.6), sea  $\bar{v}_0 = \frac{\bar{u}_0^\perp}{\|\bar{u}_0^\perp\|}$

$$L = M' = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{v}_0, \alpha \in \mathbb{R} \}$$

$$M = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \beta \bar{v}_0 + \frac{\bar{u}_0}{2}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Notemos que  $\bar{v}_0 = \frac{\bar{u}_0^\perp}{\|\bar{u}_0^\perp\|}$  implica que  $\bar{u}_0 = -\|\bar{u}_0\| \bar{v}_0^\perp$ .

Si  $\bar{x} = \alpha\bar{v}_0 + \beta\bar{v}_0^\perp$

$$\begin{aligned}
\bar{r}_M \circ \bar{r}_L(\bar{x}) &= \left( t_{-\frac{\bar{u}_0}{2}} \circ \bar{r}_{M'} \circ t_{-\frac{\bar{u}_0}{2}} \right) \circ \bar{r}_L(\alpha\bar{v}_0 + \beta\bar{v}_0^\perp) \\
&= \left( t_{-\frac{\|\bar{u}_0\|}{2}\bar{v}_0^\perp} \circ \bar{r}_{M'} \circ t_{\frac{\|\bar{u}_0\|}{2}\bar{v}_0^\perp} \right) \circ \bar{r}_L(\alpha\bar{v}_0 + \beta\bar{v}_0^\perp) \\
&= t_{-\frac{\|\bar{u}_0\|}{2}\bar{v}_0^\perp} \circ \bar{r}_{M'} \circ t_{\frac{\|\bar{u}_0\|}{2}\bar{v}_0^\perp}(\alpha\bar{v}_0 - \beta\bar{v}_0^\perp) \\
&= t_{-\frac{\|\bar{u}_0\|}{2}\bar{v}_0^\perp} \circ \bar{r}_{M'} \left( \alpha\bar{v}_0 - \left( \beta - \frac{\|\bar{u}_0\|}{2} \right) \bar{v}_0^\perp \right) \\
&= t_{-\frac{\|\bar{u}_0\|}{2}\bar{v}_0^\perp} \left( \alpha\bar{v}_0 + \left( \beta - \frac{\|\bar{u}_0\|}{2} \right) \bar{v}_0^\perp \right) \\
&= \alpha\bar{v}_0 + (\beta - \|\bar{u}_0\|)\bar{v}_0^\perp \\
&= \alpha\bar{v}_0 + \beta\bar{v}_0^\perp + \bar{u}_0 \\
&= t_{\bar{u}_0}(\bar{x})
\end{aligned}$$

■

### Corolario 2.8.

- a) Si  $\bar{r}_M \circ \bar{r}_L$  es una rotación, entonces  $\bar{r}_Q \circ \bar{r}_P = \bar{r}_M \circ \bar{r}_L$  para cualesquiera rectas  $P$  y  $Q$  con la misma intersección de las rectas  $L$  y  $M$  y el mismo ángulo (en el mismo sentido) entre  $L$  y  $M$ .
- b) Si  $\bar{r}_M \circ \bar{r}_L$  es una traslación, entonces  $\bar{r}_Q \circ \bar{r}_P = \bar{r}_M \circ \bar{r}_L$  para cualesquiera rectas  $P$  y  $Q$  paralelas a las rectas  $L$  y  $M$  con la misma distancia (en el mismo sentido) entre  $L$  y  $M$ .

### Prueba:

- a) Supongamos que tenemos las rectas

$$L = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha\bar{u}_0 + \bar{x}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$M = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \beta\bar{u}_1 + \bar{x}_0, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$L' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha\bar{u}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$M' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \beta\bar{u}_1, \beta \in \mathbb{R}\}$$

donde  $\|\bar{u}_0\| = 1 = \|\bar{u}_1\|$  y  $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ .

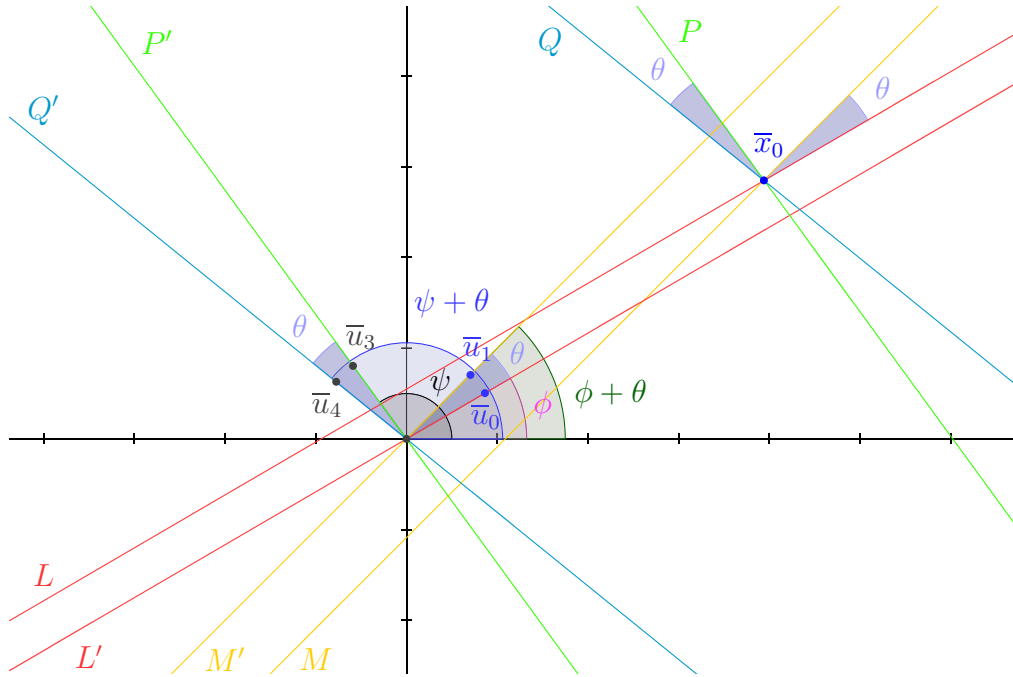


Figura 2.7: Composición de dos reflexiones con el mismo ángulo entre los ejes.

Si con respecto a la parte positiva del eje  $X$ , el ángulo de  $\bar{u}_0$  es  $\phi$  y el ángulo de  $\bar{u}_1$  es  $\phi + \theta$  (Figura 2.7), entonces:

$$\bar{r}_M \circ \bar{r}_L = t_{\bar{x}_0} \circ (\bar{r}_{M'} \circ \bar{r}_{L'}) \circ t_{-\bar{x}_0}$$

$$\begin{aligned} [\bar{r}_{M'}][\bar{r}_{L'}] &= \begin{pmatrix} \cos 2(\phi + \theta) & \text{sen } 2(\phi + \theta) \\ \text{sen } 2(\phi + \theta) & -\cos 2(\phi + \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \text{sen } 2\phi \\ \text{sen } 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\text{sen } 2\theta \\ \text{sen } 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} = [r_{2\theta}] \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que

$$P = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_3 + \bar{x}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$Q = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \beta \bar{u}_4 + \bar{x}_0, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$P' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_3, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$Q' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \beta \bar{u}_4, \beta \in \mathbb{R}\}$$

donde  $\|\bar{u}_3\| = 1 = \|\bar{u}_4\|$  y  $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  y que con respecto a la parte positiva del eje  $X$ , el ángulo de  $\bar{u}_3$  es  $\psi$  y el ángulo de  $\bar{u}_4$  es  $\psi + \theta$ . Entonces:

$$\bar{r}_Q \circ \bar{r}_P = t_{\bar{x}_0} \circ (\bar{r}_{Q'} \circ \bar{r}_{P'}) \circ t_{-\bar{x}_0}$$

$$\begin{aligned} [\bar{r}_{Q'}][\bar{r}_{P'}] &= \begin{pmatrix} \cos 2(\psi + \theta) & \operatorname{sen} 2(\psi + \theta) \\ \operatorname{sen} 2(\psi + \theta) & -\cos 2(\psi + \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \operatorname{sen} 2\psi \\ \operatorname{sen} 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} = [r_{2\theta}] \end{aligned}$$

$$\bar{r}_{Q'} \circ \bar{r}_{P'} = \bar{r}_{M'} \circ \bar{r}_{L'} = r_{2\theta}$$

pues sólo depende del ángulo entre las rectas. Por lo tanto:

$$\bar{r}_M \circ \bar{r}_L = \bar{r}_Q \circ \bar{r}_P$$

b) Supongamos que tenemos las rectas

$$L = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0 + \bar{v}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$M = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \beta \bar{u}_0 + \bar{v}_1, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$M' = L' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

donde  $\|\bar{u}_0\| = 1$  y  $\{\bar{v}_0, \bar{v}_1\} \subset \mathbb{R}^2$ .

Si  $\bar{v}_0 = \alpha_0 \bar{u}_0 + \beta_0 \bar{u}_0^\perp$  y  $\bar{v}_1 = \alpha_1 \bar{u}_0 + \beta_1 \bar{u}_0^\perp$ :

$$\bar{r}_M \circ \bar{r}_L = t_{(2(\beta_1 - \beta_0)\bar{u}_0^\perp)}$$

También, supongamos que

$$P = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0 + \bar{v}_3, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$Q = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \beta \bar{u}_0 + \bar{v}_4, \beta \in \mathbb{R}\}$$

donde  $\|\bar{u}_0\| = 1$  y  $\{\bar{v}_3, \bar{v}_4\} \subset \mathbb{R}^2$ . Si  $P' = Q' = M' = L'$  y tenemos que  $\bar{v}_3 = \alpha_3 \bar{u}_0 + \beta_3 \bar{u}_0^\perp$  y  $\bar{v}_4 = \alpha_4 \bar{u}_0 + \beta_4 \bar{u}_0^\perp$  entonces

$$\bar{r}_Q \circ \bar{r}_P = t_{(2(\beta_4 - \beta_3)\bar{u}_0^\perp)}$$



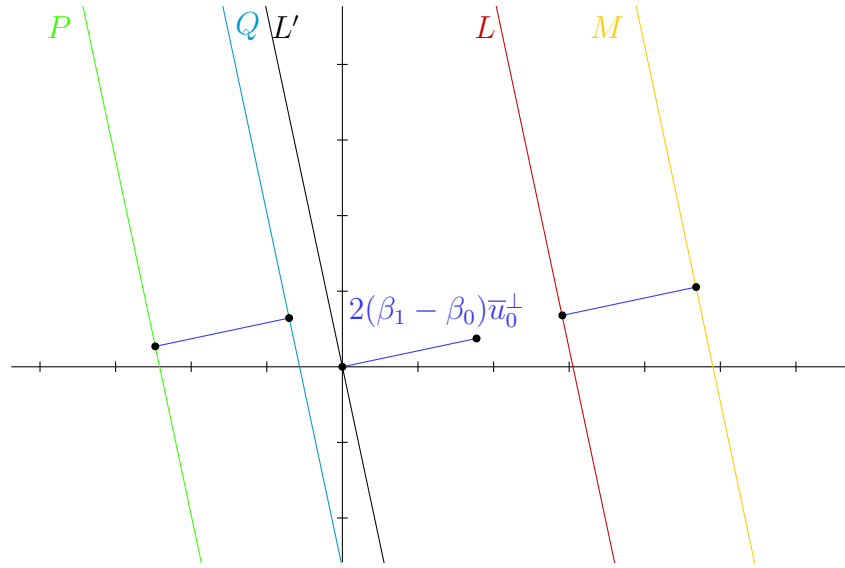


Figura 2.8: Composición de dos reflexiones con ejes a la misma distancia.

La distancia entre  $L$  y  $M$  es  $\|(2(\beta_1 - \beta_0)\bar{u}_0^\perp)\| = 2|\beta_1 - \beta_0|$  que, por hipótesis, es la misma distancia entre  $P$  y  $Q$ , que es

$$\|(2(\beta_4 - \beta_3)\bar{u}_0^\perp)\| = 2|\beta_4 - \beta_3|$$

Es decir,  $|\beta_1 - \beta_0| = |\beta_4 - \beta_3| = k$  (Figura 2.8). Así:

$$\bar{r}_M \circ \bar{r}_L = t_{(2k\bar{u}_0^\perp)} = \bar{r}_Q \circ \bar{r}_P$$

□

**Corolario 2.9.** El conjunto de traslaciones y rotaciones forma un subgrupo del grupo de isometrías euclidianas.

**Prueba:** La composición de dos traslaciones es una traslación:

$$t_{\bar{u}_1} \circ t_{\bar{u}_0}(\bar{x}) = \bar{x} + (\bar{u}_0 + \bar{u}_1) = t_{(\bar{u}_0 + \bar{u}_1)}(\bar{x})$$

Si  $r_{\bar{u}_0, \theta}$  y  $r_{\bar{u}_1, \phi}$  son rotaciones, por el Teorema 2.7:

$$r_{\bar{u}_0, \theta} = \bar{r}_M \circ \bar{r}_L \quad ; \quad r_{\bar{u}_1, \phi} = \bar{r}_Q \circ \bar{r}_P$$

para determinadas rectas  $L, M, P$  y  $Q$ . Consideremos a la recta  $N$  que contiene a  $\bar{u}_0$  y  $\bar{u}_1$ . Por el Corolario 2.8

$$r_{\bar{u}_0, \theta} = \bar{r}_M \circ \bar{r}_L = \bar{r}_N \circ \bar{r}_R$$

$$r_{\bar{u}_1, \phi} = \bar{r}_Q \circ \bar{r}_P = \bar{r}_S \circ \bar{r}_N$$

para una recta  $R$  que contenga a  $\bar{u}_0$  y forme con la recta  $N$  el mismo ángulo que las rectas  $L$  y  $M$ , así como para una recta  $S$  que contenga a  $\bar{u}_1$  y forme con la recta  $N$  el mismo ángulo que las rectas  $P$  y  $Q$ .

$$\begin{aligned} r_{\bar{u}_1, \phi} \circ r_{\bar{u}_0, \theta} &= (\bar{r}_Q \circ \bar{r}_P) \circ (\bar{r}_M \circ \bar{r}_L) \\ &= (\bar{r}_S \circ \bar{r}_N) \circ (\bar{r}_N \circ \bar{r}_R) = \bar{r}_S \circ \bar{r}_R \end{aligned}$$

que es una rotación o una traslación.

Consideremos la composición de una rotación con una traslación: si  $t_{\bar{u}_1} = \bar{r}_M \circ \bar{r}_L$  y  $r_{\bar{u}_0, \theta} = \bar{r}_Q \circ \bar{r}_P$

$$\begin{aligned} t_{\bar{u}_1} \circ r_{\bar{u}_0, \theta} &= (\bar{r}_M \circ \bar{r}_L) \circ (\bar{r}_Q \circ \bar{r}_P) \\ &= (\bar{r}_M \circ \bar{r}_L) \circ (\bar{r}_T \circ \bar{r}_R) \end{aligned}$$

donde  $T$  es paralela tanto a  $L$  como a  $M$  y las rectas  $R$  y  $T$  que forman el mismo ángulo que el formado por  $P$  y  $Q$ .

$$(\bar{r}_M \circ \bar{r}_L) \circ (\bar{r}_T \circ \bar{r}_R) = (\bar{r}_S \circ \bar{r}_T) \circ (\bar{r}_T \circ \bar{r}_R)$$

donde  $S$  es paralela a  $T$  y la distancia de  $S$  a  $T$  es la misma distancia entre las rectas  $L$  y  $M$ . Así,

$$t_{\bar{u}_1} \circ r_{\bar{u}_0, \theta} = \bar{r}_S \circ \bar{r}_R$$

Análogamente  $r_{\bar{u}_0, \theta} \circ t_{\bar{u}_1}$ , la composición de una traslación con una rotación, es la composición de dos reflexiones, que por el Teorema 2.7, es una traslación o una rotación.

□

**Lema 2.10.** Cualquier isometría de euclidiana está determinada por las imágenes de tres puntos no colineales.

**Demostración:** Cualquier punto en el plano está determinado por su distancia a tres puntos no colineales:

Sean  $A, B, C$  puntos no colineales en el plano. Supongamos que  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  son dos puntos en el plano tales que:

$$d(\bar{x}, A) = d(\bar{y}, A) ; d(\bar{x}, B) = d(\bar{y}, B) ; d(\bar{x}, C) = d(\bar{y}, C)$$

entonces  $A, B, C$  están en el lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $\bar{x}$  y  $\bar{y}$  que por la Proposición 2.5 es una recta, contrario a la suposición. Si  $f$  es una isometría del plano,  $f$  está determinada por:  $f(A), f(B), f(C)$ , pues cualquier punto en la imagen está determinado por las distancias a estos tres puntos.

■

**Corolario 2.11.** Si  $L$  es la línea de los puntos que equidistan de  $\bar{x}_0$  y  $\bar{y}_0$  entonces  $\bar{r}_L(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$  y  $\bar{r}_L(\bar{y}_0) = \bar{x}_0$ .

**Prueba:** Si  $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$  y  $\bar{v}_0 \in \mathbb{R}^2$  sea

$$L = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha\bar{u}_0 + \bar{v}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

por la Proposición 2.5,  $L$  es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $\bar{x}_0 = \alpha\bar{u}_0 + \beta\bar{u}_0^\perp + \bar{v}_0$  y  $\bar{y}_0 = \alpha\bar{u}_0 - \beta\bar{u}_0^\perp + \bar{v}_0$ .

$$L' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha\bar{u}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_L(\bar{x}_0) &= t_{\bar{v}_0} \circ \bar{r}_{L'} \circ t_{-\bar{v}_0}(\bar{x}_0) \\ &= t_{\bar{v}_0} \circ \bar{r}_{L'} \circ t_{-\bar{v}_0}(\alpha\bar{u}_0 + \beta\bar{u}_0^\perp + \bar{v}_0) \\ &= t_{\bar{v}_0} \circ \bar{r}_{L'}(\alpha\bar{u}_0 + \beta\bar{u}_0^\perp) \\ &= t_{\bar{v}_0}(\alpha\bar{u}_0 - \beta\bar{u}_0^\perp) \\ &= \alpha\bar{u}_0 - \beta\bar{u}_0^\perp + \bar{v}_0 \\ &= \bar{y}_0 \end{aligned}$$

Análogamente,  $\bar{r}_L(\bar{y}_0) = \bar{x}_0$ .

□

**Teorema 2.12.** Cualquier isometría del plano euclidiano es la composición de a lo más tres reflexiones.

**Demostración:** Sean  $f$  una isometría euclidiana y  $A, B, C$  cualesquiera tres puntos distintos no colineales en el plano. Consideremos  $f(A), f(B), f(C)$ :

- Si los tres puntos coinciden con sus imágenes, entonces  $f = Id_{\mathbb{R}^2}$ .
- Si sólo dos de ellos coinciden con sus imágenes,  $A = f(A)$  y  $B = f(B)$ .

Sea  $L$  la recta que contiene a  $A$  y  $B$ . Por el Corolario 2.11

$$\bar{r}_L(C) = f(C) \text{ pues } d(A, C) = d(A, f(C)), d(B, C) = d(B, f(C)).$$

Entonces  $\bar{r}_L$  es una isometría que a  $C$  lo envía a  $f(C)$  y fija tanto a  $A$  como a  $B$ . Por el Lema 2.10, la reflexión coincide con  $f$ .

- Si sólo uno de los puntos coincide con su imagen,  $A = f(A)$ . Sea  $M$  la recta que contiene a los puntos que equidistan de  $B$  y  $f(B)$ .

Dado que  $d(A, B) = d(A, f(B))$ , implica que  $A \in M$ , por lo que

$$\bar{r}_M(A) = A; \bar{r}_M(B) = f(B).$$

Si  $\bar{r}_M(C) = f(C)$  hemos terminado, pues  $f$  vuelve a coincidir con una reflexión. De no ser así,  $\bar{r}_L \circ \bar{r}_M$ , donde  $L$  es como en el inciso anterior, es la composición de dos reflexiones que cumplen que  $A, B, C$  tienen como imágenes a  $f(A), f(B), f(C)$  respectivamente. Por el Lema 2.10,  $f$  coincide con la composición de las dos reflexiones.

- Ningún punto coincide con su imagen. Sea  $N$  el lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $A$  y  $f(A)$ , entonces  $\bar{r}_N(A) = f(A)$ .

Si  $\bar{r}_N(B) = f(B), \bar{r}_N(C) = f(C)$ ,  $f$  coincide con una reflexión.

Si  $\bar{r}_N(B) = f(B), \bar{r}_N(C) \neq f(C)$  o  $\bar{r}_N(B) \neq f(B), \bar{r}_N(C) = f(C)$ ,  $f$  coincide con la composición de dos reflexiones.

Si  $\bar{r}_N(B) \neq f(B), \bar{r}_N(C) \neq f(C)$ , sea  $M$  la recta de los puntos que equidistan de  $B$  y  $f(B)$ ,  $\bar{r}_M \circ \bar{r}_N$  es la composición de dos reflexiones que cumple con enviar a  $A$  a  $f(A)$  y  $B$  a  $f(B)$ . Si  $\bar{r}_M \circ \bar{r}_N(C) = f(C)$ ,  $f$  coincide con la composición de dos reflexiones. De no ser así, consideramos  $L$  la recta de los puntos que equidistan de  $C$  y  $f(C)$ , entonces  $\bar{r}_L \circ \bar{r}_M \circ \bar{r}_N$  es la composición de tres reflexiones que a los puntos  $A, B, C$  los envía a  $f(A), f(B), f(C)$  respectivamente y por el Lema 2.10 la composición coincide con  $f$ .

■

**Definición 2.13.** Una isometría euclidiana es una **reflexión con deslizamiento** si y sólo si es la composición de una reflexión  $\bar{r}_L$  con una traslación por un vector distinto de cero que tiene la misma dirección que la línea  $L$ . El **eje de la reflexión con deslizamiento** es la recta  $L$ .

**Lema 2.14.** La composición de cualesquiera tres reflexiones es una reflexión o una reflexión con deslizamiento.

**Demostración:** Si  $L, M$  y  $N$  son los ejes de las reflexiones, tenemos que:

- Si  $L, M, N$  concurren o son paralelas.

1.  $L, M$  y  $N$  concurren.

Si  $M$  y  $N$  forman un ángulo de  $\theta$  entonces, por el Corolario 2.8

$$\bar{r}_N \circ \bar{r}_M = \bar{r}_P \circ \bar{r}_L$$

donde el ángulo formado por  $L$  y  $P$  es  $\theta$ .

$$\bar{r}_N \circ \bar{r}_M \circ \bar{r}_L = \bar{r}_P \circ \bar{r}_L \circ \bar{r}_L = \bar{r}_P$$

2.  $L, M$  y  $N$  son paralelas.

Si la distancia entre  $M$  y  $N$  es  $\alpha$  entonces, por el Corolario 2.8

$$\bar{r}_N \circ \bar{r}_M = \bar{r}_P \circ \bar{r}_L$$

donde la distancia entre  $L$  y  $P$  es  $\alpha$ .

$$\bar{r}_N \circ \bar{r}_M \circ \bar{r}_L = \bar{r}_P \circ \bar{r}_L \circ \bar{r}_L = \bar{r}_P$$

En ambos casos,  $\bar{r}_N \circ \bar{r}_M \circ \bar{r}_L = \bar{r}_P$ .

- $L, M, N$  no concurren ni son paralelas.

Puesto que la terna de rectas no son paralelas, dos de ellas concurren. Supongamos  $\bar{u}_0$  es el punto común de  $M$  y  $N$ . Entonces:

$$\bar{r}_N \circ \bar{r}_M = r_{\bar{u}_0, \theta} = \bar{r}_S \circ \bar{r}_P$$

para cualesquiera dos rectas  $P$  y  $S$  que pasen por  $\bar{u}_0$  y que formen el mismo ángulo que el formado por  $M$  y  $N$ .

$$\bar{r}_N \circ \bar{r}_M \circ \bar{r}_L = \bar{r}_S \circ \bar{r}_P \circ \bar{r}_L$$

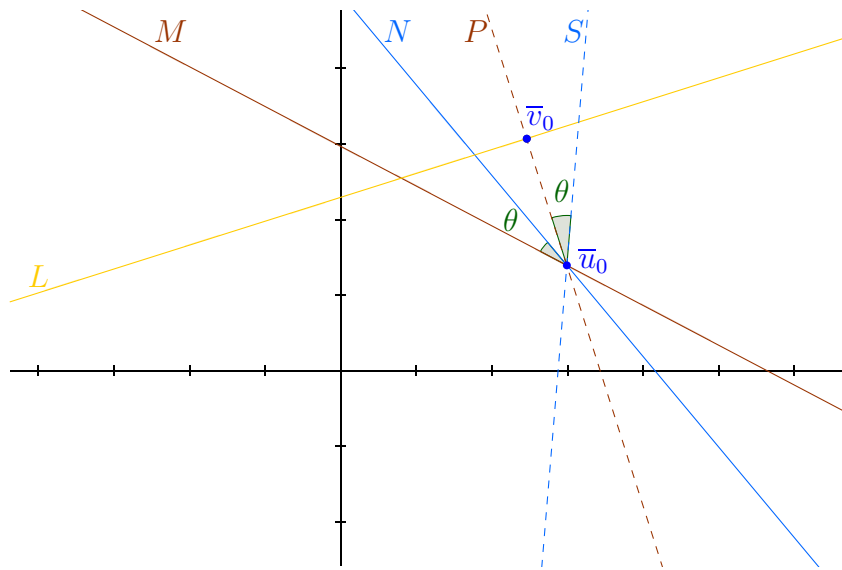


Figura 2.9: a) Composición de tres reflexiones con ejes no concurrentes.

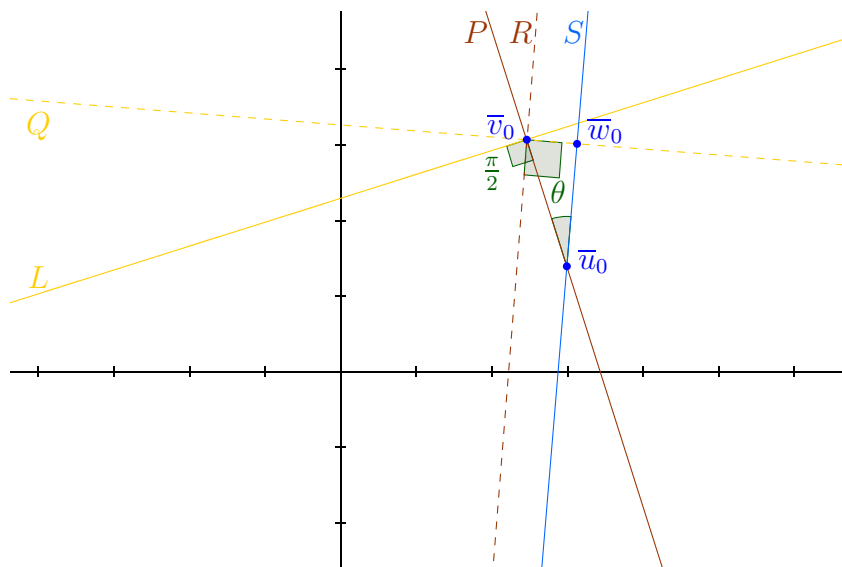


Figura 2.10: b) Composición de tres reflexiones con ejes no concurrentes.

Si elegimos a  $P$  como la recta perpendicular a  $L$  en  $\bar{v}_0$  (Figura 2.9),  $\bar{r}_P \circ \bar{r}_L$  es una rotación con centro  $\bar{v}_0$  y

$$\bar{r}_P \circ \bar{r}_L = \bar{r}_R \circ \bar{r}_Q$$

para cualesquiera rectas  $Q$  y  $R$  que contengan a  $\bar{v}_0$  y formen el mismo ángulo que el formado por  $L$  y  $P$ , que es un ángulo recto. Si  $Q$  es perpendicular a  $S$  en  $\bar{w}_0$  (Figura 2.10), tenemos que

$$\bar{r}_N \circ \bar{r}_M \circ \bar{r}_L = \bar{r}_S \circ \bar{r}_P \circ \bar{r}_L = \bar{r}_S \circ \bar{r}_R \circ \bar{r}_Q$$

donde  $Q$  es perpendicular común a  $R$  y  $S$ . Por el Teorema 2.7:

$$\bar{r}_N \circ \bar{r}_M \circ \bar{r}_L = \bar{r}_S \circ \bar{r}_R \circ \bar{r}_Q = t_{\bar{x}_0} \circ \bar{r}_Q$$

De manera análoga se muestra para cuando  $M$  y  $N$  son paralelas y  $L$  interseca a ambas. ■

### Teorema 2.15. (Clasificación de las Isometrías Euclidianas)

Cualquier isometría de  $\mathbb{E}^2$  es una traslación, una rotación, una reflexión o una reflexión con deslizamiento.

**Demostración:** Esto es una consecuencia directa de los resultados anteriores, pues toda isometría es la composición de a lo más tres reflexiones. Si es composición de una reflexión o tres reflexiones, la isometría es una reflexión o una reflexión con deslizamiento; si es composición de dos reflexiones es una traslación o una rotación.

Además, las isometrías del plano pueden ser clasificadas por la cantidad de puntos que dejan fijos: las rotaciones dejan un punto fijo, las reflexiones dejan una recta fija, las traslaciones y las reflexiones con deslizamiento no dejan puntos fijos, pero podemos diferenciarlas dado que una preserva y la otra invierte la orientación. ■

**Corolario 2.16.** El grupo de las isometrías de  $\mathbb{E}^2$ , denotado como  $Iso(\mathbb{E}^2)$ , tiene como subgrupo de índice 2 al conjunto de las isometrías que son composición de un número par de reflexiones. Dicho subgrupo es denotado por  $Iso^+(\mathbb{E}^2)$ .

**Prueba:** Por el Corolario 2.9, tenemos que  $Iso^+(\mathbb{E}^2)$  es un subgrupo de  $Iso(\mathbb{E}^2)$  y que si consideramos al conjunto  $Iso^+(\mathbb{E}^2)$  y una reflexión euclidiana  $\bar{r}$  fija, tenemos que  $\bar{r} \notin Iso^+(\mathbb{E}^2)$ , pues el  $Iso^+(\mathbb{E}^2)$  consta de traslaciones y rotaciones; además

$$[\bar{r} \cdot Iso^+(\mathbb{E}^2)] \cap [Iso^+(\mathbb{E}^2)] = \emptyset$$

Pues, por el Teorema 2.15, las isometrías se pueden clasificar por el número de puntos que dejan fijos y su orientación, por lo que no hay una isometría que esté en ambos conjuntos.

$$Iso(\mathbb{E}^2) = [\bar{r} \cdot Iso^+(\mathbb{E}^2)] \cup [Iso^+(\mathbb{E}^2)]$$

y dicha unión es ajena.

Para la reflexión  $\bar{r}$  podemos definir  $\psi_{\bar{r}} : Iso(\mathbb{E}^2) \rightarrow Iso(\mathbb{E}^2)$  como  $\psi_{\bar{r}}(f) = \bar{r} \circ f$ .  $\psi_{\bar{r}}$  es una biyección ( $\psi_{\bar{r}}^{-1} = \psi_{\bar{r}}$ ). Además

$$\psi_{\bar{r}}[Iso^+(\mathbb{E}^2)] = \bar{r} \cdot Iso^+(\mathbb{E}^2)$$

Por lo tanto,  $Iso(\mathbb{E}^2) = [\bar{r} \cdot Iso^+(\mathbb{E}^2)] \cup [Iso^+(\mathbb{E}^2)]$  donde la unión es ajena y ambos conjuntos tienen el mismo cardinal. Por lo que  $Iso^+(\mathbb{E}^2)$  es de índice 2.

□

## 2.3. Semejanzas euclidianas

Consideraremos las **semejanzas euclidianas**, es decir las transformaciones de  $\mathbb{E}^2$  para las que existe  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que:

$$d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = |k| \cdot d(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{para cualquier } \{\bar{x}, \bar{y}\} \subset \mathbb{E}^2$$

Como primer ejemplo, tenemos a las **homotecias euclidianas** con **centro**  $\bar{0}$  por un **factor**  $k$ , que es la transformación  $h_k$  del plano tal que, para cualquier  $\bar{x} \in \mathbb{E}^2$

$$h_k(\bar{x}) = k\bar{x} \quad \text{para } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Podemos hablar de homotecias que no tengan centro en el origen, es decir, una homotecia  $h_{\bar{u}_0, k}$  con centro el punto  $\bar{u}_0$  por un factor  $k$ , simplemente conjugando por traslaciones:

$$h_{\bar{u}_0, k} = t_{\bar{u}_0} \circ h_k \circ t_{-\bar{u}_0}$$



**Ejemplo 2.17.** La homotecia  $h_k$  es una semejanza euclidiana.

**Prueba:**

$$d(h_k(\bar{x}), h_k(\bar{y})) = \|k\bar{x} - k\bar{y}\| = |k| \cdot \|\bar{x} - \bar{y}\| = |k| \cdot d(\bar{x}, \bar{y})$$

□

Si consideramos al conjunto de transformaciones del plano euclidiano con la propiedad de que la imagen de cada recta  $L$  sea una recta paralela a  $L$ , las homotecias cumplen esta propiedad, puesto que sólo es suficiente observar cuál es la imagen del vector director de la recta  $L$ .

Dada una recta  $L$  y  $\{\bar{u}_0, \bar{v}_0\} \subset L$ , bajo una transformación  $f$  que a cada recta la envíe a una recta paralela, tendríamos que  $\{f(\bar{u}_0), f(\bar{v}_0)\} \subset f[L]$ , donde  $f[L]$  es paralela a  $L$ . Así

$$f(\bar{u}_0) - f(\bar{v}_0) = \lambda_{\bar{u}_0, \bar{v}_0} (\bar{u}_0 - \bar{v}_0), \quad \lambda_{\bar{u}_0, \bar{v}_0} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Mostraremos que el factor  $\lambda_{\bar{u}_0, \bar{v}_0}$  no depende de los puntos  $\bar{u}_0$  y  $\bar{v}_0$ .

**Lema 2.18.** Si  $f$  es una transformación del plano que envía a cada recta  $L$  en una recta paralela a  $L$ , existe  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que para cualquier  $\{\bar{x}, \bar{y}\} \subset \mathbb{E}^2$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{y}) = \lambda(\bar{x} - \bar{y})$$

**Demostración:** Sea  $f$  una transformación del plano con la propiedad de que la imagen de una recta  $L$  es una recta paralela a  $L$ . En particular, los ejes coordenados tienen como imagen a rectas paralelas a ellos, por lo que es posible elegir cuatro puntos distintos en el plano: el origen, uno en cada eje coordenado y un cuarto que forme un paralelogramo con los tres anteriores. Es decir  $\{\bar{0}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\} \subset \mathbb{R}^2$  (Figura 2.11) tales que:

$$\bar{a}_1 - \bar{0} = \bar{a}_1 = \bar{a}_3 - \bar{a}_2 \tag{2.1}$$

$$\bar{a}_2 - \bar{0} = \bar{a}_2 = \bar{a}_3 - \bar{a}_1 \tag{2.2}$$

Por la propiedad de  $f$  tenemos lo siguiente:

$$f(\bar{a}_1) - f(\bar{0}) = f(\bar{a}_3) - f(\bar{a}_2) \quad (2.3)$$

$$f(\bar{a}_2) - f(\bar{0}) = f(\bar{a}_3) - f(\bar{a}_1) \quad (2.4)$$

puesto que los puntos del segmento de recta entre los vértices del paralelogramo tienen como imagen a los puntos del segmento de recta entre los vértices de la imagen (dado que cualquier transformación de  $\mathbb{R}$  es creciente o decreciente), la imagen del paralelogramo es un paralelogramo, además:

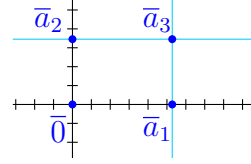


Figura 2.11: Paralelogramo en el plano.

$$f(\bar{a}_1) - f(\bar{0}) = \lambda_{\bar{a}_1, \bar{0}}(\bar{a}_1 - \bar{0}) \quad (2.5)$$

$$f(\bar{a}_2) - f(\bar{0}) = \lambda_{\bar{a}_2, \bar{0}}(\bar{a}_2 - \bar{0}) \quad (2.6)$$

$$f(\bar{a}_3) - f(\bar{a}_2) = \lambda_{\bar{a}_3, \bar{a}_2}(\bar{a}_3 - \bar{a}_2) \quad (2.7)$$

$$f(\bar{a}_3) - f(\bar{a}_1) = \lambda_{\bar{a}_3, \bar{a}_1}(\bar{a}_3 - \bar{a}_1) \quad (2.8)$$

Las igualdades (2.1), (2.3), (2.5) y (2.7) implican que  $\lambda_{\bar{a}_1, \bar{0}} = \lambda_{\bar{a}_3, \bar{a}_2} = \lambda_1$ .

Las igualdades (2.2), (2.4), (2.6) y (2.8) implican que  $\lambda_{\bar{a}_2, \bar{0}} = \lambda_{\bar{a}_3, \bar{a}_1} = \lambda_2$ .

Ahora, para una diagonal del paralelogramo tenemos que:

$$f(\bar{a}_3) - f(\bar{0}) = \lambda_{\bar{a}_3, \bar{0}}(\bar{a}_3 - \bar{0}) = \lambda_{\bar{a}_3, \bar{0}} \bar{a}_3 \quad (2.9)$$

por Teorema de Pitágoras,

$$||\bar{a}_3||^2 = ||\bar{a}_1||^2 + ||\bar{a}_2||^2$$

Puesto que  $f$  preserva ángulos entre rectas (por preservar las direcciones de las rectas):

$$\begin{aligned} ||f(\bar{a}_3) - f(\bar{0})||^2 &= ||f(\bar{a}_1) - f(\bar{0})||^2 + ||f(\bar{a}_2) - f(\bar{0})||^2 \\ &= |\lambda_1|^2 ||\bar{a}_1||^2 + |\lambda_2|^2 ||\bar{a}_2||^2 && \text{por (2.5) y (2.6)} \\ &= |\lambda_{\bar{a}_3, \bar{0}}|^2 ||\bar{a}_3||^2 = |\lambda_{\bar{a}_3, \bar{0}}|^2 (||\bar{a}_1||^2 + ||\bar{a}_2||^2) && \text{por (2.9)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\lambda_1|^2 ||\bar{a}_1||^2 + |\lambda_2|^2 ||\bar{a}_2||^2 - |\lambda_{\bar{a}_3, \bar{0}}|^2 (||\bar{a}_1||^2 + ||\bar{a}_2||^2) = 0$$

$$\Rightarrow (|\lambda_1|^2 - |\lambda_{\bar{a}_3, \bar{0}}|^2) ||\bar{a}_1||^2 + (|\lambda_2|^2 - |\lambda_{\bar{a}_3, \bar{0}}|^2) ||\bar{a}_2||^2 = 0$$

Puesto que  $\bar{0} \notin \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ , se tiene que  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_{\bar{a}_3, \bar{0}}|$ .

Notemos que  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_{\bar{a}_3, \bar{0}}$  tienen el mismo signo.

Si  $\lambda_{\bar{a}_3, \bar{0}} = \lambda_1 = -\lambda_2$

$$\begin{aligned} f(\bar{a}_3) - f(\bar{0}) &= \lambda_1(\bar{a}_3) = \lambda_1(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) \\ &= \lambda_1\bar{a}_1 - \lambda_2\bar{a}_2 \\ &= f(\bar{a}_1) - f(\bar{a}_2) \end{aligned}$$

Así,  $f(\bar{a}_3) - f(\bar{a}_1) = f(\bar{0}) - f(\bar{a}_2)$  y por (2.4),  $f(\bar{a}_2) - f(\bar{0}) = f(\bar{a}_3) - f(\bar{a}_1)$ . Lo que implicaría que  $f(\bar{a}_2) = f(\bar{0})$ , lo cual no puede ser. Por lo tanto  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

De esta manera mostramos que el factor no depende de la elección de los puntos, en otras palabras, si consideramos una transformación del plano euclidiano  $f$  con la propiedad que a cada recta la envía a una recta paralela, la transformación cumple que existe  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que:

$$f(\bar{x}) - f(\bar{y}) = \lambda(\bar{x} - \bar{y}) \quad \text{para cualquier } \{\bar{x}, \bar{y}\} \subset \mathbb{E}^2.$$

■

**Proposición 2.19.** Una transformación del plano que envía a cada recta  $L$  en una recta paralela a  $L$  es una traslación o una homotecia.

**Prueba:** Una función con las propiedades requeridas cumple que

$$f(\bar{x}) - f(\bar{y}) = \lambda(\bar{x} - \bar{y}), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \{\bar{x}, \bar{y}\} \subset \mathbb{R}^2$$

Fijemos a un punto  $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^2$

$$f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) = \lambda(\bar{x} - \bar{x}_0), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2$$

- Si  $\lambda = 1$  y  $\bar{u}_0 = f(\bar{x}_0) - \bar{x}_0$

$$f(\bar{x}) = \bar{x} - \bar{x}_0 + f(\bar{x}_0) = t_{\bar{u}_0}(\bar{x})$$

- Si  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \lambda(\bar{x} - \bar{x}_0) + f(\bar{x}_0) - \frac{f(\bar{x}_0) - \lambda\bar{x}_0}{1 - \lambda} + \frac{f(\bar{x}_0) - \lambda\bar{x}_0}{1 - \lambda} \\ &= \lambda \left( \bar{x} - \frac{f(\bar{x}_0) - \lambda\bar{x}_0}{1 - \lambda} \right) + \frac{f(\bar{x}_0) - \lambda\bar{x}_0}{1 - \lambda} \end{aligned}$$

$$\text{Si } \bar{u}_0 = \frac{f(\bar{x}_0) - \lambda \bar{x}_0}{1 - \lambda}$$

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= \lambda(\bar{x} - \bar{u}_0) + \bar{u}_0 \\ &= t_{\bar{u}_0} \circ h_\lambda \circ t_{-\bar{u}_0}(\bar{x}) \\ &= h_{\bar{u}_0, \lambda}(\bar{x}) \end{aligned}$$

□

La Proposición 2.19 muestra que el conjunto de homotecias y traslaciones forman un grupo, en particular, que la composición de una homotecia con una traslación es una homotecia y la composición de dos homotecias es una homotecia o una traslación. Estos pueden calcularse explícitamente:

**Proposición 2.20.** La composición de homotecias es una homotecia o una traslación. Además, la composición de homotecias es:

- Una traslación si el producto de los factores de dilatación es uno.
- Una homotecia si el producto de los factores de dilatación es distinto de uno.

**Prueba:**

$$h_{\bar{u}_0, k}(\bar{x}) = t_{\bar{u}_0} \circ h_k \circ t_{\bar{u}_0}^{-1}(\bar{x}) \quad ; \quad h_{\bar{u}_1, l}(\bar{x}) = t_{\bar{u}_1} \circ h_l \circ t_{\bar{u}_1}^{-1}(\bar{x})$$

$$\begin{aligned} h_{\bar{u}_1, l} \circ h_{\bar{u}_0, k}(\bar{x}) &= (t_{\bar{u}_1} \circ h_l \circ t_{\bar{u}_1}^{-1}) \circ (t_{\bar{u}_0} \circ h_k \circ t_{\bar{u}_0}^{-1})(\bar{x}) \\ &= t_{\bar{u}_1} \circ h_l \circ t_{\bar{u}_1}^{-1}(k(\bar{x} - \bar{u}_0) + \bar{u}_0) \\ &= (l(k(\bar{x} - \bar{u}_0) + \bar{u}_0 - \bar{u}_1) + \bar{u}_1) \\ &= lk\bar{x} + \bar{u}_0(l - lk) + \bar{u}_1(1 - l) \end{aligned}$$

Sea  $\bar{v}_0 = \bar{u}_0(l - lk) + \bar{u}_1(1 - l)$

- Si  $lk = 1$  entonces

$$h_{\bar{u}_1, l} \circ h_{\bar{u}_0, k}(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{v}_0 = t_{\bar{v}_0}(\bar{x})$$

- Si  $lk \neq 1$

$$\begin{aligned} h_{\bar{u}_1, l} \circ h_{\bar{u}_0, k}(\bar{x}) &= lk\bar{x} + \bar{v}_0 \\ &= lk\bar{x} + \frac{(1-lk)}{(1-lk)}(\bar{v}_0) \\ &= lk\left(\bar{x} - \frac{\bar{v}_0}{(1-lk)}\right) + \frac{\bar{v}_0}{(1-lk)} \end{aligned}$$

Si  $\bar{v}_1 = \frac{\bar{v}_0}{(1-lk)}$  entonces

$$h_{\bar{u}_1, l} \circ h_{\bar{u}_0, k}(\bar{x}) = t_{\bar{v}_1} \circ h_{lk} \circ t_{\bar{v}_1}^{-1}(\bar{x}) = h_{\bar{v}_1, lk}(\bar{x})$$

□

**Teorema 2.21.** Toda semejanza es la composición de una isometría con una homotecia.

**Demostración:**

Sea  $f$  una semejanza, entonces existe un  $k_0 \neq 0$  para el cual se cumple

$$d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) = |k_0| \cdot d(\bar{x}, \bar{y})$$

Consideremos la homotecia  $h_{\frac{1}{k_0}}$  y la composición  $g(\bar{x}) = h_{\frac{1}{k_0}} \circ f(\bar{x})$ .

$$\begin{aligned} d(g(\bar{x}), g(\bar{y})) &= \left\| \frac{1}{k_0} \cdot f(\bar{x}) - \frac{1}{k_0} \cdot f(\bar{y}) \right\| \\ &= \left| \frac{1}{k_0} \right| \cdot d(f(\bar{x}), f(\bar{y})) \\ &= d(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

Lo que demuestra que  $g$  es una isometría. Por lo que  $h_{k_0} \circ g = f$ .

■

**Proposición 2.22.** Las semejanzas preservan ángulos entre curvas.

**Prueba:** Cualquier semejanza es composición de dos funciones que preservan ángulos entre curvas.

□

**Proposición 2.23.** El grupo de las semejanzas actúa en el plano euclidiano de manera **doblemente transitiva**, es decir, dados dos pares de puntos distintos en el plano, existe una semejanza que envía el primer par de puntos en el segundo par de puntos.

**Prueba:** Sean  $A, B$  y  $A', B'$  pares de puntos distintos en el plano euclidiano. Si  $\theta$  es el ángulo formado por  $B - A$  y  $B' - A'$  (Figura 2.12) entonces la isometría:

$$f = r_\theta \circ t_{-A}$$

cumple que  $f(A) = \bar{0}$  y  $f(B) = r_\theta(B - A) = k_0(B' - A')$  para algún  $k_0 \in \mathbb{R}/\{0\}$ . Si consideremos la homotecia  $h_{\frac{1}{k_0}}$ , la composición  $h_{\frac{1}{k_0}} \circ f$  cumple

$$\begin{aligned} h_{\frac{1}{k_0}} \circ f(A) &= \bar{0} \\ h_{\frac{1}{k_0}} \circ f(B) &= B' - A' \end{aligned}$$

Así, la semejanza que buscamos es  $(t_{A'} \circ h_{\frac{1}{k_0}}) \circ (r_\theta \circ t_{-A})$ .

**Observación 2.24.** La semejanza no es única, pues podemos considerar también para  $f$  una reflexión, que mande a la recta generada por  $B - A$  a la recta generada por  $B' - A'$  y obtener una semejanza que invierta la orientación.

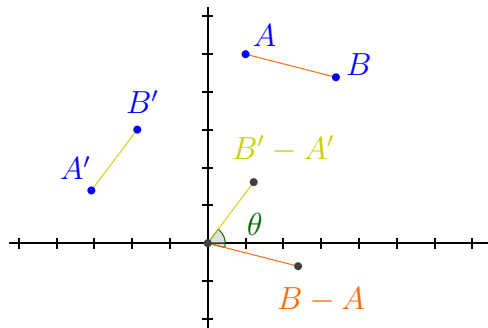


Figura 2.12: Las semejanzas actúan de manera doblemente transitiva.

□

Podemos asociar a puntos del plano con los números complejos. La manera natural de hacerlo es:

$$\begin{aligned}\psi &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (\alpha_1, \alpha_2) &\mapsto \alpha_1 + i\alpha_2 = \alpha\end{aligned}$$

De esta manera, la transformación  $\mathbb{R}$ -lineal dada por la matriz

$$[T_\alpha] = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

corresponde a la transformación  $T_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $T_\alpha(z) = \alpha z$  que es una transformación  $\mathbb{C}$ -lineal. Lo que permite dar una clasificación de las semejanzas euclidianas que preservan orientación.

**Teorema 2.25.** Las semejanzas que preservan orientación son las funciones complejas de la forma  $f(z) = \alpha z + \beta$  con  $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{C}$ .

**Demostración:**

Por el Teorema 2.21, las semejanzas que preservan orientación son las transformaciones que son composición de una isometría que preserva orientación con una homotecia.

Así, las semejanzas que preservan orientación son las transformaciones del plano que son composición de una traslación o una rotación con una homotecia.

Si  $\bar{x} = (x_1, x_2)$ ,  $A = (a_1, a_2)$ ,  $t_A$  es una traslación,  $r_{A,\theta}$  una rotación y  $h_k$  es una homotecia, entonces:

- Si  $f$  es la composición de una traslación con una homotecia

$$f(\bar{x}) = h_k \circ t_A(\bar{x}) = k\bar{x} + kA$$

Es suficiente notar que si  $B = kA$ , entonces  $t_{-B} \circ f(\bar{x}) = k\bar{x}$  es una transformación  $\mathbb{C}$ -lineal.

- Si  $f$  es la composición de una rotación con una homotecia

$$f = h_k \circ r_{A,\theta} = h_k \circ t_A \circ r_\theta \circ t_{-A}$$

Puesto que

$$[r_\theta] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Si  $\beta_1 = \cos \theta$  y  $\beta_2 = \sin \theta$  y  $\beta = \beta_1 + i\beta_2$  entonces  $[r_\theta] = [T_\beta]$ .

Así,

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= h_k \circ t_A \circ T_\beta \circ t_{-A}(\bar{x}) \\ &= k\beta\bar{x} - k\beta A + kA \end{aligned}$$

Dado que  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0_{\mathbb{R}}\}$ ,  $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$  entonces  $k\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$ . Por lo que, si  $B = kA - k\beta A$  entonces  $t_{-B} \circ f(\bar{x}) = (k\beta)\bar{x}$  es una transformación  $\mathbb{C}$ -lineal.

■

## 2.4. Transformaciones de $\mathbb{E}^2$ que preservan rectas

Ahora consideremos el conjunto de transformaciones del plano con la propiedad de preservar rectas.

**Definición 2.26.** Una transformación  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  es una **transformación afín** si y sólo si la imagen de cada recta en  $\mathbb{R}^n$  bajo  $f$  es una recta en  $\mathbb{R}^n$ .

Así, una transformación  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  es una **transformación afín del plano** si y sólo si la imagen de cada recta en el plano bajo  $f$  es una recta en el plano.

**Proposición 2.27.** Si  $f$  es una transformación afín entonces la imagen bajo  $f$  de rectas paralelas son rectas paralelas.

**Prueba:** Supongamos  $l$  es paralela a  $m$  y que  $f[l]$  no es paralela a  $f[m]$ . Entonces  $f[l]$  y  $f[m]$  tienen un punto en común  $P$ . Por lo tanto  $f^{-1}(P) \in l$ ,  $f^{-1}(P) \in m$  que no puede ser, pues  $l$  y  $m$  no tienen puntos en común.

□

**Lema 2.28.** Si  $f$  es una transformación afín del plano y  $C$  es punto medio de  $A$  y  $B$  entonces el punto medio de  $f(A)$  y  $f(B)$  es  $f(C)$ .

**Demostración:** Sea  $l$  la recta que contiene a los puntos  $A$  y  $B$ . Consideremos una recta  $m$  paralela a  $l$  y un punto  $P$  que no pertenezca a  $l$  ni a  $m$ .



Sea  $n$  la recta que contiene a  $P$  y  $A$ ;  $o$  la recta que contiene a  $P$  y  $B$ . Sea  $\{D\} = m \cap n$  y  $\{E\} = m \cap o$ . Ahora, sea  $r$  la recta que contiene a  $A$  y  $E$ ;  $s$  la recta que contiene a  $B$  y  $D$ ;  $\{F\} = r \cap s$ ;  $t$  la recta que contiene a  $P$  y  $F$  (Figura 2.13).

Por Teorema de Thales y Teorema de Ceva, tenemos que  $\{C\} = t \cap l$ .

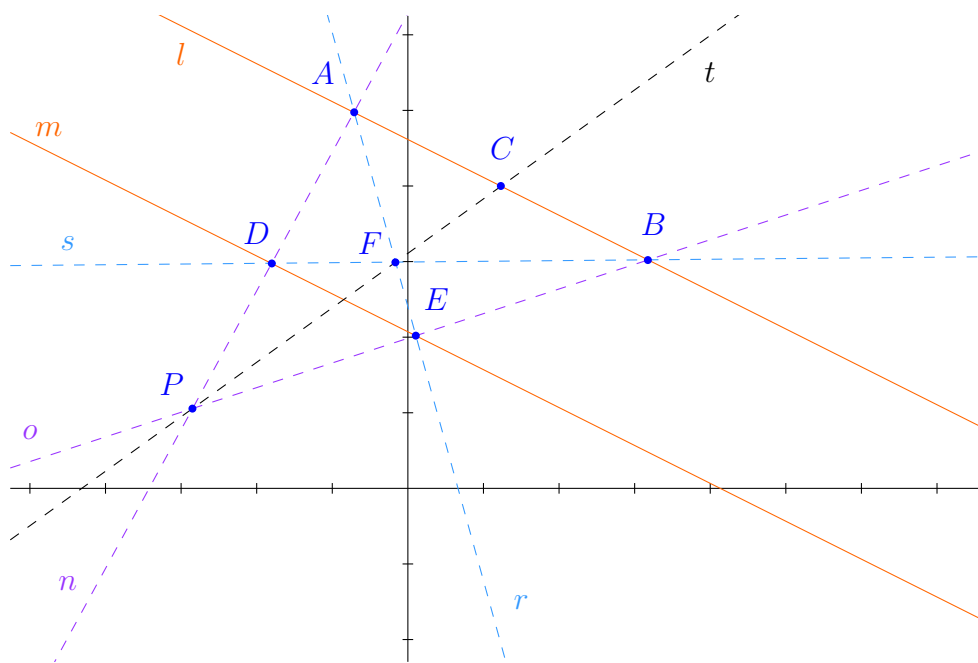


Figura 2.13:  $C$  es punto medio de  $A$  y  $B$ .

Ahora, consideremos las imágenes de los elementos bajo  $f$

$$\begin{array}{llll}
 l' = f[l] & o' = f[o] & A' = f(A) & D' = f(D) \\
 m' = f[m] & r' = f[r] & B' = f(B) & E' = f(E) \\
 n' = f[n] & s' = f[s] & P' = f(P) & F' = f(F)
 \end{array}$$

$\{f(C)\} = t' \cap l'$ . Por la Proposición 2.27,  $l'$  y  $m'$  son paralelas. Lo que implica que  $f(C)$  es punto medio de  $f(A)$  y  $f(B)$  (Figura 2.14).

■

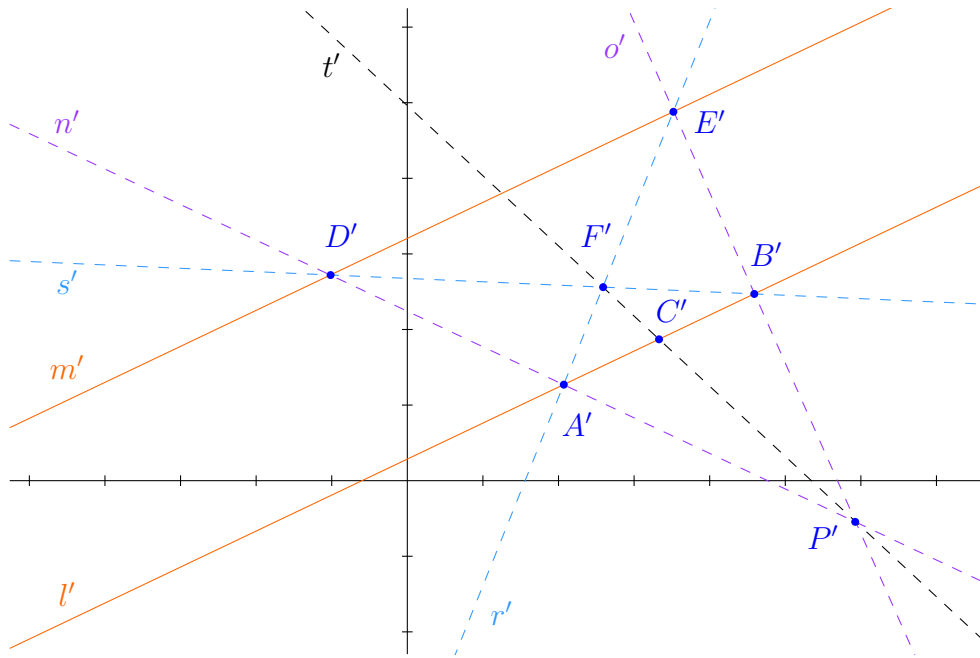


Figura 2.14: Las transformaciones afines mandan puntos medios en puntos medios.

**Teorema 2.29.** Una transformación es afín si y sólo si es la composición de una transformación lineal de  $\mathbb{R}^2$  con una traslación.

**Demostración:**

$\Rightarrow$  ] Sea  $f$  una transformación afín, definimos a  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como

$$g(P) = t_{f(0)}^{-1} \circ f(P) = t_{-f(0)} \circ f(P)$$

Notemos que  $g(\bar{0}) = \bar{0}$ . Si  $P \in \mathbb{R}^2$ ,  $P = \gamma_0(1, 0) + \delta_0(0, 1)$  con  $\{\gamma_0, \delta_0\} \subset \mathbb{R}$ . Consideremos a las rectas

$$\bar{X}' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha(1, 0) + \delta_0(0, 1), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\bar{Y}' = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \beta(0, 1) + \gamma_0(1, 0), \beta \in \mathbb{R}\}$$

Así,  $\bar{X}'$  y  $\bar{Y}'$  son paralelos a los ejes coordenados. Además  $\{P\} = \bar{X}' \cap \bar{Y}'$ .

Como  $f$  es transformación afín, las traslaciones preservan direcciones de rectas y  $g$  fija al cero (Figura 2.15), tenemos que las imágenes bajo  $g$  de:

- los ejes coordenados concurren en el origen.
- las rectas  $\bar{X}'$  y  $\bar{Y}'$  concurren en la imagen de  $P$ .

Para cualquier  $\{P, Q\} \subset \mathbb{R}^2$  se tiene que  $g(P + Q) = g(P) + g(Q)$ , puesto que  $g$  envía rectas paralelas en rectas paralelas (Ley del paralelogramo).

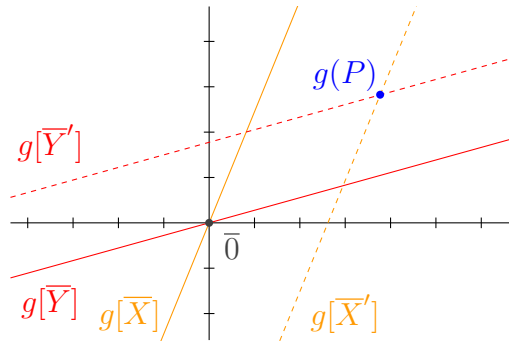


Figura 2.15: Imágenes de los ejes coordenados y las rectas por  $P$  bajo  $g$ .

Por el Lema 2.28:

$$g\left(\frac{1}{2} \cdot P\right) = \frac{1}{2} \cdot g(P) \Rightarrow g(P) = \frac{1}{2} \cdot g(2 \cdot P) \Rightarrow 2 \cdot g(P) = g(2 \cdot P)$$

Entonces,

$$g(3 \cdot P) = 2 \cdot g\left(\frac{3}{2} \cdot P\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (g(P) + g(2 \cdot P))\right) = g(P) + 2 \cdot g(P)$$

Así,  $g(3 \cdot P) = 3 \cdot g(P)$ . Por lo tanto, para cualesquiera  $n \in \mathbb{N}$  y  $P \in \mathbb{R}^2$  se tiene que  $g(n \cdot P) = n \cdot g(P)$ . Como consecuencia inmediata tenemos que si  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  entonces

$$g(P) = g\left(\frac{n \cdot P}{n}\right) = n \cdot g\left(\frac{P}{n}\right) \Rightarrow \frac{1}{n} \cdot g(P) = g\left(\frac{P}{n}\right)$$

Por lo que para cualesquiera  $P \in \mathbb{R}^2$  y  $q \in \mathbb{Q}$  tenemos  $g(q \cdot P) = q \cdot g(P)$ .

Puesto que  $\mathbb{Q}$  es un subconjunto denso en  $\mathbb{R}$  y  $g$  es una función continua (por ser composición de funciones continuas), tenemos que:

- $g(\alpha \cdot P) = \alpha \cdot g(P)$  para cualquier  $P \in \mathbb{R}^2$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- $g(P + Q) = g(P) + g(Q)$  para cualquier  $\{P, Q\} \subset \mathbb{R}^2$ .

Lo que demuestra que  $g$  es una transformación lineal de  $\mathbb{R}^2$ . Por lo tanto,  $f = t_{f(0)} \circ g$ .

$\Leftarrow$  ] Si  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es lineal y  $L$  es la recta determinada por  $\bar{u}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$  y  $\bar{v}_0 \in \mathbb{R}^2$ :

$$L = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha \bar{u}_0 + \bar{v}_0, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Si  $\bar{x} \in L$  entonces  $\bar{x} = \alpha \bar{u}_0 + \bar{v}_0$ . Además  $T(\bar{x}) = \alpha T(\bar{u}_0) + T(\bar{v}_0)$ , así:

$$T[L] = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \bar{x} = \alpha T(\bar{u}_0) + T(\bar{v}_0), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

por lo tanto la imagen de una recta bajo una transformación lineal es una recta. Por la Proposición 2.6 (página 10) la imagen de  $L$  bajo  $t_{\bar{w}} \circ T[L]$  es una recta. ■

**Proposición 2.30.** El grupo de las transformaciones afines actúa de manera **triplemente transitiva** en el plano euclidiano; es decir, en el plano euclidiano cualesquiera tres puntos no colineales pueden enviarse de manera única a cualesquiera tres puntos no colineales por medio de una transformación afín.

**Prueba:** Sean  $A, B, C$  puntos en el plano no colineales y  $A', B', C'$  otra terna no alineada con las siguientes coordenadas:

$$\begin{array}{lll} A = (a_1, a_2) & B = (b_1, b_2) & C = (c_1, c_2) \\ A' = (a_3, a_4) & B' = (b_3, b_4) & C' = (c_3, c_4) \end{array}$$

Consideremos la traslación  $t_{-A}$  y las imágenes bajo la traslación de  $A, B$  y  $C$ .

$$t_{-A}(A) = \bar{0} \quad t_{-A}(B) = B - A \quad t_{-A}(C) = C - A$$

Sea  $T$  la transformación lineal de  $\mathbb{R}^2$  asociada a la matriz

$$[T] = \begin{pmatrix} \frac{(b_3 - a_3)(c_2 - a_2) + (c_3 - a_3)(a_2 - b_2)}{(b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1)} & \frac{(b_3 - a_3)(a_1 - c_1) + (c_3 - a_3)(b_1 - a_1)}{(b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1)} \\ \frac{(b_4 - a_4)(c_2 - a_2) + (c_4 - a_4)(a_2 - b_2)}{(b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1)} & \frac{(b_4 - a_4)(a_1 - c_1) + (c_4 - a_4)(b_1 - a_1)}{(b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1)} \end{pmatrix}$$

Puesto que los puntos no son colineales,  $(b_1 - a_1)(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)(c_1 - a_1) \neq 0$ . Además  $[T][B - A] = [B' - A']$  y  $[T][C - A] = [C' - A']$ .

Ahora, consideremos la traslación  $t_{A'}$  y la transformación

$$\begin{aligned} f(P) &= t_{A'} \circ T \circ t_{-A}(P) \\ &= T(P) - T(A) + A' \end{aligned}$$

Si  $Q = A' - T(A)$  entonces  $f = t_Q \circ T$ , por lo que es una transformación afín que cumple  $f(A) = A'$ ,  $f(B) = B'$  y  $f(C) = C'$ .

Supongamos que existe una transformación afín  $f$  tal que para  $A, B, C$  puntos en el plano no colineales:

$$f(A) = A \quad , \quad f(B) = B \quad , \quad f(C) = C$$

Por ser no colineales, es posible escribir a uno de ellos como combinación lineal de los dos restantes. Supongamos que  $C = \alpha A + \beta B$  con  $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$ . Puesto que  $f$  es una transformación afín,  $f = t_P \circ T$  donde  $T$  es una transformación lineal.

$$\begin{aligned} A = f(A) &= t_P \circ T(A) = T(A) + P \\ B = f(B) &= t_P \circ T(B) = T(B) + P \\ C = f(C) &= t_P \circ T(C) = t_P(T(\alpha A + \beta B)) \\ &= C + P(1 - \alpha - \beta) \end{aligned}$$

Por lo que  $P(1 - \alpha - \beta) = \bar{0}$ , lo que implica que  $P = \bar{0}$ , dado que  $\alpha$  y  $\beta$  son fijos. Así  $f = T$  y la única transformación lineal de  $\mathbb{R}^2$  que fija tres puntos no colineales en el plano es la identidad.

□

## CAPÍTULO 3

### ESFERA

Consideremos el modelo del espacio euclidiano  $\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, d)$ , donde  $d$  es **métrica euclidiana** en el espacio: para cualquier  $\{\bar{x} = (x_1, x_2, x_3), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3)\} \subset \mathbb{R}^3$ ,

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} = \|\bar{x} - \bar{y}\|$$

La **esfera**, es el conjunto  $\mathbb{S}^2 = \{\bar{x} \in \mathbb{E}^3 \mid \|\bar{x}\| = 1\}$ .

Análogamente al caso del plano euclidiano, es posible determinar las curvas de longitud mínima en el espacio dada una forma de medir vectores. De igual manera, las geodésicas en el espacio son las rectas. Nuestro objetivo es encontrar las curvas que minimicen la distancia en  $\mathbb{S}^2$ .

### 3.1. Geodésicas en $\mathbb{S}^2$

Las **circunferencias de radio máximo** en la esfera son la intersección de planos por el origen con  $\mathbb{S}^2$ ; es decir, soluciones a la ecuación  $ax + by + cz = 0$  donde  $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$  (no todos cero), con la restricción  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Éstas pueden parametrizarse de la siguiente manera:

Sea  $\Pi = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{x} = (x, y, z), ax + by + cz = 0\}$ , cuyo vector normal es  $\bar{n} = (a, b, c) \neq \bar{0}$  y cualquier punto  $(p_1, p_2, p_3) = P \in \mathbb{S}^2 \cap \Pi$ .

Consideremos  $\|\bar{n}\| = 1$ , entonces los puntos de la circunferencia de radio máximo determinada por  $\Pi$ , que denotaremos como  $\zeta_{\Pi}$ , están parametrizados por:

$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^2$ , como  $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta), z(\theta))$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x(\theta) &= p_1 \cos(\theta) + (bp_3 - cp_2) \operatorname{sen}(\theta) \\ y(\theta) &= p_2 \cos(\theta) + (cp_1 - ap_3) \operatorname{sen}(\theta) \\ z(\theta) &= p_3 \cos(\theta) + (ap_2 - bp_1) \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned}$$

Así, la curva parametrizada por  $\gamma$  tiene longitud

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(\theta)\| d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 + (z'(\theta))^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

Para cualquier  $\{P, Q\} \subset \mathbb{S}^2$  tales que  $P = (p_1, p_2, p_3)$  y  $Q = (q_1, q_2, q_3)$ , el plano que contiene a los puntos  $\{\bar{0}, P, Q\}$  tiene como vector normal a

$$P \times Q = (p_2q_3 - p_3q_2, p_3q_1 - p_1q_3, p_1q_2 - p_2q_1)$$

Consideremos a  $\bar{n} = \frac{P \times Q}{\|P \times Q\|} = (n_1, n_2, n_3)$ .

Sabemos que  $\cos(\phi) = \frac{P \cdot Q}{\|P\| \|Q\|}$ , donde  $\phi$  es el ángulo determinado por los vectores  $P$  y  $Q$ . Puesto que ambos pertenecen a  $\mathbb{S}^2$ ,  $\cos(\phi) = P \cdot Q$ . Así,  $\phi = \cos^{-1}(P \cdot Q)$  cuando  $\phi \in [0, \pi]$ .

Podemos calcular la longitud del segmento de circunferencia de radio máximo comprendido entre  $P$  y  $Q$  si restringimos la parametrización de la siguiente manera:

$\gamma_1 : [0, \phi] \rightarrow \mathbb{S}^2$ , como  $\gamma_1(\theta) = (x(\theta), y(\theta), z(\theta))$

$\gamma_2 : [\phi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}^2$ , como  $\gamma_2(\theta) = (x(\theta), y(\theta), z(\theta))$

$$\begin{aligned} x(\theta) &= p_1 \cos(\theta) + (n_2p_3 - n_3p_2) \operatorname{sen}(\theta) \\ y(\theta) &= p_2 \cos(\theta) + (n_3p_3 - n_1p_3) \operatorname{sen}(\theta) \\ z(\theta) &= p_3 \cos(\theta) + (n_1p_2 - n_2p_1) \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned}$$

$$l(\gamma_1) = \int_0^\phi \|\gamma'(\theta)\| d\theta = \int_0^\phi 1 d\theta = \phi$$

$$l(\gamma_2) = \int_\phi^{2\pi} \|\gamma'(\theta)\| d\theta = \int_\phi^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi - \phi$$

Dado que buscamos las curvas que minimicen la distancia para cualquier par de puntos en  $\mathbb{S}^2$ , definimos la distancia entre puntos en la esfera de la siguiente manera:

$$d_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$(P, Q) \mapsto \min\{l(\gamma_1), l(\gamma_2)\}$$

donde  $\{l(\gamma_1), l(\gamma_2)\}$  son como la definición anterior.

También podemos calcular la distancia entre cualquier par de puntos en la esfera, conociendo la distancia entre ellos en el espacio, de la siguiente manera:

Sea  $\{P, Q\} \subset \mathbb{S}^2$ , consideremos el plano por el origen que los contiene y  $d_{\mathbb{E}^3}(P, Q) = \|P - Q\|$ .

En la circunferencia determinada por la intersección de dicho plano con la esfera (Figura 3.1), consideremos el arco de longitud mínima determinado por  $P$  y  $Q$ . Puesto que  $\triangle P\bar{O}Q$  es isósceles, la bisectriz del ángulo  $\angle P\bar{O}Q$  es mediatriz del segmento de recta  $PQ$ , por lo que:

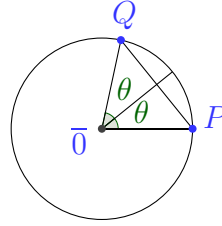


Figura 3.1: Métrica esférica

$$\begin{aligned} \text{sen} \left( \frac{\angle P\bar{O}Q}{2} \right) &= \frac{\|P-Q\|}{2} \\ \Rightarrow \frac{\angle P\bar{O}Q}{2} &= \text{sen}^{-1} \left( \frac{\|P-Q\|}{2} \right) \\ \Rightarrow \angle P\bar{O}Q &= 2 \text{sen}^{-1} \left( \frac{\|P-Q\|}{2} \right) \end{aligned}$$

Por lo que la **métrica esférica**,  $d_{\mathbb{S}^2} : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  está determinada por la métrica en  $\mathbb{E}^3$ :

$$d_{\mathbb{S}^2}(A, B) = 2 \text{sen}^{-1} \left( \frac{1}{2} d_{\mathbb{E}^3}(A, B) \right)$$



**Proposición 3.1.** Las geodésicas en  $\mathbb{S}^2$  son las circunferencias de radio máximo.

**Prueba:** Sean  $\{A, B\} \subset \mathbb{S}^2$  tales que  $A = (a_1, a_2, 0)$  y  $B = (b_1, b_2, 0)$  y sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^2$  una parametrización de una curva  $C^1$  en  $[a, b]$ , tal que  $\gamma(a) = A$  y  $\gamma(b) = B$ . La longitud de  $\gamma$  es:

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Consideremos a  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida como  $\pi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, \sqrt{x_2^2 + x_3^2}, 0)$ . Por lo que:

$$D\pi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{\partial x_1} & \frac{\partial \sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{\partial x_2} & \frac{\partial \sqrt{x_2^2 + x_3^2}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial 0}{\partial x_1} & \frac{\partial 0}{\partial x_2} & \frac{\partial 0}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} & \frac{x_3}{\sqrt{x_2^2 + x_3^2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si  $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))$ , entonces

$$D(\pi \circ \gamma)(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ \frac{g(t)g'(t) + h(t)h'(t)}{\sqrt{g(t)^2 + h(t)^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|D(\pi \circ \gamma)(t)\|^2 &= \left\| \left( f'(t), \frac{g(t)g'(t) + h(t)h'(t)}{\sqrt{g(t)^2 + h(t)^2}}, 0 \right) \right\|^2 \\ &= f'(t)^2 + \frac{((g(t), h(t)) \cdot (g'(t), h'(t)))^2}{g(t)^2 + h(t)^2} \\ &\leq f'(t)^2 + \frac{\|(g(t), h(t))\|^2 \|(g'(t), h'(t))\|^2}{g(t)^2 + h(t)^2} \\ &= f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2 = \|\gamma'(t)\|^2 \end{aligned}$$

Lo que implica que  $\|D(\pi \circ \gamma)(t)\| \leq \|\gamma'(t)\|$ .

Por otro lado, tenemos que la trayectoria  $\pi \circ \gamma$  es una trayectoria que está sobre una circunferencia de radio máximo, por lo que la longitud del arco comprendido entre  $A$  y  $B$  es menor o igual a  $l(\pi \circ \gamma)$ .

□

## 3.2. Isometrías esféricas

Las **reflexiones en la esfera** corresponden a las restricciones de reflexiones por planos que contienen al origen en  $\mathbb{R}^3$ : si  $\Pi$  es un plano por el origen en  $\mathbb{R}^3$  y  $\bar{r}_\Pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la reflexión por el plano  $\Pi$ , la **reflexión en  $\zeta_\Pi$**  (donde  $\zeta_\Pi = \Pi \cap \mathbb{S}^2$ ) es la transformación  $\bar{r}_{\zeta_\Pi} : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  definida por  $\bar{r}_{\zeta_\Pi} = \bar{r}_\Pi|_{\mathbb{S}^2}$ .

**Ejemplo 3.2.** La reflexión por una circunferencia de radio máximo en la esfera es una isometría esférica.

**Prueba:** Sean  $\Pi$  un plano por el origen en  $\mathbb{R}^3$ ,  $\bar{r}_\Pi$  la reflexión en  $\mathbb{R}^3$  por dicho plano y  $\{A, B\} \subset \mathbb{S}^2$ .

Puesto que  $\bar{r}_\Pi$  es una isometría de  $\mathbb{R}^3$ , tenemos que

$$d_{\mathbb{E}^3}(\bar{x}, \bar{y}) = d_{\mathbb{E}^3}(\bar{r}_\Pi(\bar{x}), \bar{r}_\Pi(\bar{y})) \text{ para cualquier } \{\bar{x}, \bar{y}\} \subset \mathbb{R}^3$$

Como  $\{A, B\} \subset \mathbb{S}^2$ , tenemos que  $\{\bar{r}_{\zeta_\Pi}(A), \bar{r}_{\zeta_\Pi}(B)\} \subset \mathbb{S}^2$  y :

$$d_{\mathbb{E}^3}(A, B) = d_{\mathbb{E}^3}(\bar{r}_\Pi(A), \bar{r}_\Pi(B)) = d_{\mathbb{E}^3}(\bar{r}_{\zeta_\Pi}(A), \bar{r}_{\zeta_\Pi}(B))$$

Por lo que

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{S}^2}(\bar{r}_{\zeta_\Pi}(A), \bar{r}_{\zeta_\Pi}(B)) &= 2 \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{1}{2} d_{\mathbb{E}^3}(\bar{r}_{\zeta_\Pi}(A), \bar{r}_{\zeta_\Pi}(B)) \right) \\ &= 2 \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{1}{2} d_{\mathbb{E}^3}(A, B) \right) \\ &= d_{\mathbb{S}^2}(A, B) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\bar{r}_{\zeta_\Pi}$  es una isometría en la esfera.

□

**Proposición 3.3.** El lugar geométrico de los puntos en  $\mathbb{S}^2$  que equidistan de dos puntos distintos en la esfera es una circunferencia de radio máximo.

**Prueba:** Esto es consecuencia directa del hecho que el lugar geométrico de los puntos en  $\mathbb{E}^3$  que equidistan de dos puntos distintos en el espacio es el plano ortogonal a la recta determinada por dichos puntos y el cual pasa por el punto medio de los mismos:

Sean  $\{A, B\} \subset \mathbb{S}^2$ , el lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $A$  y  $B$  es el plano ortogonal a la recta determinada por ellos que contiene al punto medio de  $A$  y  $B$ . Puesto que  $d_{\mathbb{E}^3}(\bar{0}, A) = 1 = d_{\mathbb{E}^3}(\bar{0}, B)$ , se tiene que el plano también contiene al origen, por lo que el lugar geométrico de los puntos en  $\mathbb{S}^2$  que equidistan de  $A$  y  $B$  es una circunferencia de radio máximo.

□

**Proposición 3.4.** La imagen de una circunferencia de radio máximo bajo una isometría de la esfera es una circunferencia de radio máximo.

**Prueba:** Como en el caso del plano, si  $f$  es una isometría de la esfera y  $\zeta_{\Pi}$  es el conjunto de puntos que equidistan de  $Q$  y  $R$ , la imagen de  $\zeta_{\Pi}$  bajo  $f$  es el conjunto de puntos que equidistan de  $f(Q)$  y  $f(R)$ .

□

**Lema 3.5.** Cualquier isometría en la esfera está determinada por las imágenes de tres puntos que no están en la misma circunferencia de radio máximo.

**Demostración:** Cualquier punto en la esfera está determinado por su distancia a tres puntos en la esfera no en la misma circunferencia de radio máximo:

Sean  $\{A, B, C\} \subset \mathbb{S}^2$  no en la misma circunferencia de radio máximo. Supongamos que  $\{P, Q\} \subset \mathbb{S}^2$ ,  $P \neq Q$  tales que:

$$d_{\mathbb{S}^2}(P, A) = d_{\mathbb{S}^2}(Q, A)$$

$$d_{\mathbb{S}^2}(P, B) = d_{\mathbb{S}^2}(Q, B)$$

$$d_{\mathbb{S}^2}(P, C) = d_{\mathbb{S}^2}(Q, C)$$

Entonces  $A, B$  y  $C$  están en el lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $P$  y  $Q$  que, por la Proposición 3.3, es una circunferencia de radio máximo en la esfera, contrario a la suposición. Por lo tanto, si  $f$  es una isometría de la esfera,  $f$  está determinada por  $f(A), f(B), f(C)$ , dado que cualquier punto en la imagen está determinado por las distancias a estos tres puntos.

■

**Corolario 3.6.** Si  $\zeta_{\Pi}$  es la circunferencia de radio máximo determinada por los puntos que equidistan de  $A$  y  $B$  en la esfera, entonces  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi}}(A) = B$  y  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi}}(B) = A$ .

**Prueba:** Si  $\{\bar{u}_0, \bar{v}_0\}$  es el conjunto linealmente independiente que genera a  $\Pi$

$$\Pi = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{x} = \alpha\bar{u}_0 + \beta\bar{v}_0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\zeta_{\Pi} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{x} \in \Pi \cap \mathbb{S}^2\}$$

$\zeta_{\Pi}$  es el lugar geométrico de los puntos en la esfera que equidistan de:

$$A = \frac{\gamma\bar{u}_0 + \delta\bar{v}_0 + \epsilon(\bar{u}_0 \times \bar{v}_0)}{\|\gamma\bar{u}_0 + \delta\bar{v}_0 + \epsilon(\bar{u}_0 \times \bar{v}_0)\|} \quad ; \quad B = \frac{\gamma\bar{u}_0 + \delta\bar{v}_0 - \epsilon(\bar{u}_0 \times \bar{v}_0)}{\|\gamma\bar{u}_0 + \delta\bar{v}_0 - \epsilon(\bar{u}_0 \times \bar{v}_0)\|}$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_{\zeta_{\Pi}}(A) &= \frac{\gamma\bar{u}_0 + \delta\bar{v}_0 - \epsilon(\bar{u}_0 \times \bar{v}_0)}{\|\gamma\bar{u}_0 + \delta\bar{v}_0 + \epsilon(\bar{u}_0 \times \bar{v}_0)\|} \\ &= \frac{\gamma\bar{u}_0 + \delta\bar{v}_0 - \epsilon(\bar{u}_0 \times \bar{v}_0)}{\|\gamma\bar{u}_0 + \delta\bar{v}_0 - \epsilon(\bar{u}_0 \times \bar{v}_0)\|} \\ &= B \end{aligned}$$

Análogamente,  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi}}(B) = A$ .

□

El grupo de las isometrías esféricas actúa transitivamente en la esfera, como lo muestra el siguiente corolario.

**Corolario 3.7.**  $\mathbb{S}^2$  es un espacio homogéneo, es decir para cualquier  $\{A, B\} \in \mathbb{S}^2$  existe una isometría esférica  $f$  tal que  $f(A) = B$ .

**Prueba:** Para cualquier  $\{A, B\} \subset \mathbb{S}^2$ , es suficiente considerar a la circunferencia de radio máximo determinada por los puntos que equidistan de  $A$  y  $B$  junto con el resultado anterior.

□

**Teorema 3.8.** Toda isometría de la esfera es composición de a lo más tres reflexiones esféricas.

**Demostración:** De manera similar al caso del plano (Teorema 2.12), con uso del Lema 3.5, si  $f$  es una isometría esférica y  $A, B, C$  son tres puntos cualquiera no en la misma circunferencia de radio máximo. Consideremos  $f(A), f(B), f(C)$ :

- Si los tres puntos coinciden con sus imágenes, entonces  $f = Id_{\mathbb{S}^2}$ .
- Si sólo dos de ellos coinciden con sus imágenes,  $A = f(A)$  y  $B = f(B)$ . Sea  $\zeta_{\Pi_1}$  la circunferencia de radio máximo que contiene a  $A$  y  $B$ . Por el Corolario 3.6,  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi_1}}$  es una isometría esférica tal que  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi_1}}(C) = f(C)$  y fija tanto a  $A$  como a  $B$ . Por el Lema 3.5, la reflexión esférica coincide con  $f$ .
- Si sólo uno de los puntos coincide con su imagen,  $A = f(A)$ . Sea  $\zeta_{\Pi_2}$  la circunferencia de radio máximo determinada por los puntos que equidistan de  $B$  y  $f(B)$ . Si  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi_2}}(C) = f(C)$  hemos terminado, pues  $f$  coincide con una reflexión en la esfera. De no ser así,  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi_1}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_2}}$ , donde  $\zeta_{\Pi_1}$  es como en el inciso anterior, es la composición de dos reflexiones esféricas con la propiedad requerida. Por el Lema 3.5,  $f$  coincide con la composición de las dos reflexiones esféricas.

- Ningún punto coincide con su imagen. Sea  $\zeta_{\Pi_3}$  el lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $A$  y  $f(A)$ , entonces  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}}(A) = f(A)$ .

Si  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}}(B) = f(B), \bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}}(C) = f(C)$ ,  $f$  coincide con una reflexión esférica.

Si  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}}(B) = f(B), \bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}}(C) \neq f(C)$  o  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}}(B) \neq f(B), \bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}}(C) = f(C)$ ,  $f$  coincide con la composición de dos reflexiones esféricas.

Si  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}}(B) \neq f(B), \bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}}(C) \neq f(C)$ , consideramos  $\zeta_{\Pi_2}$  la circunferencia de radio máximo determinada por los puntos que equidistan de  $B$  y  $f(B)$ ,  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi_2}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}}$  es la composición de dos reflexiones esféricas con las siguientes propiedades:

$$\bar{r}_{\zeta_{\Pi_2}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}}(A) = f(A) \quad , \quad \bar{r}_{\zeta_{\Pi_2}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}}(B) = f(B)$$

Si  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi_2}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}}(C) = f(C)$ ,  $f$  coincide con la composición de dos reflexiones en la esfera. De no ser así, consideramos  $\zeta_{\Pi_1}$  la circunferencia de radio máximo determinada por los puntos que equidistan de  $C$  y  $f(C)$ , entonces

$\bar{r}_{\zeta_{\Pi_1}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_2}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}}$  es la composición de tres reflexiones en la esfera con las propiedades requeridas que, por el Lema 3.5, coincide con  $f$ .

■

En la esfera, cualesquiera dos circunferencias de radio máximo distintas se intersecan en un par de puntos diametralmente opuestos (pues la intersección de cualesquiera dos planos distintos por el origen es una recta por el origen). Al par de puntos se les llaman **puntos antípodas**.

Puesto que las reflexiones esféricas son la restricción de reflexiones por planos por el origen y hemos visto que siempre se intersecan, no consideraremos a las reflexiones por planos paralelos en el espacio. De manera similar al caso del plano, cualquier rotación esférica es la composición de dos reflexiones esféricas y viceversa. También una composición de dos reflexiones esféricas coincide con otra composición de dos reflexiones esféricas si y sólo si las circunferencias de radio máximo en las que se refleja se intersecan en el mismo par de puntos antípodas y el ángulo entre cada par de circunferencias es el mismo (en el mismo sentido).

**Definición 3.9.** Una isometría esférica es una **reflexión con giro** si y sólo si es la composición de una reflexión esférica en  $\zeta$  con una rotación esférica por un ángulo no nulo cuyo eje es ortogonal al plano que determina a  $\zeta$ .

**Lema 3.10.** La composición de cualesquiera tres reflexiones esféricas es una reflexión o una reflexión con giro.

**Demostración:** Sean  $\zeta_{\Pi_1}$ ,  $\zeta_{\Pi_2}$  y  $\zeta_{\Pi_3}$  tres circunferencias de radio máximo. Tenemos que:

- $\zeta_{\Pi_1}$ ,  $\zeta_{\Pi_2}$  y  $\zeta_{\Pi_3}$  concurren en el mismo par de puntos antípodas.

Si  $\zeta_{\Pi_2}$  y  $\zeta_{\Pi_3}$  forman un ángulo de  $\theta$  entonces:

$$\bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_2}} = \bar{r}_{\zeta_{\Pi_4}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_1}}$$

donde el ángulo formado por  $\zeta_{\Pi_1}$  y  $\zeta_{\Pi_4}$  es  $\theta$ . Lo que implica

$$\bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_2}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_1}} = \bar{r}_{\zeta_{\Pi_4}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_1}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_1}} = \bar{r}_{\zeta_{\Pi_4}}$$

que es una reflexión esférica.

- $\zeta_{\Pi_1}$ ,  $\zeta_{\Pi_2}$  y  $\zeta_{\Pi_3}$  no concurren en el mismo par de puntos antípodas.

Si  $\zeta_{\Pi_2}$  y  $\zeta_{\Pi_3}$  forman un ángulo de  $\theta$  en  $\{P, -P\}$  entonces:

$$\bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_2}} = r_{(\theta, P)} = \bar{r}_{\zeta_{\Pi_5}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_4}}$$

Para cualesquiera  $\zeta_{\Pi_4}$  y  $\zeta_{\Pi_5}$  que formen un ángulo  $\theta$  y  $\zeta_{\Pi_4} \cap \zeta_{\Pi_5} = \{P, -P\}$ .  
Lo que implica

$$\bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_2}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_1}} = \bar{r}_{\zeta_{\Pi_5}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_4}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_1}}$$

Si elegimos a  $\zeta_{\Pi_4}$  como la circunferencia de radio máximo que es ortogonal a  $\zeta_{\Pi_1}$  y  $\zeta_{\Pi_1} \cap \zeta_{\Pi_4} = \{Q, -Q\}$ :

$$\bar{r}_{\zeta_{\Pi_4}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_1}} = \bar{r}_{\zeta_{\Pi_7}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_6}}$$

Para cualesquiera  $\zeta_{\Pi_6}$  y  $\zeta_{\Pi_7}$  ortogonales entre si y  $\zeta_{\Pi_6} \cap \zeta_{\Pi_7} = \{Q, -Q\}$ . Si  $\zeta_{\Pi_6}$  es ortogonal a  $\zeta_{\Pi_5}$  en  $\{R, -R\}$  se tiene que

$$\bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_2}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_1}} = \bar{r}_{\zeta_{\Pi_5}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_4}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_1}} = \bar{r}_{\zeta_{\Pi_5}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_7}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_6}}$$

donde  $\zeta_{\Pi_6}$  es ortogonal a  $\zeta_{\Pi_7}$  y  $\zeta_{\Pi_5}$ .

Entonces  $\bar{r}_{\zeta_{\Pi_3}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_2}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_1}} = \bar{r}_{\zeta_{\Pi_5}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_7}} \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_6}} = r_\phi \circ \bar{r}_{\zeta_{\Pi_6}}$  es una reflexión con giro.

■

### Teorema 3.11. (Clasificación de las Isometrías Esféricas)

Cualquier isometría esférica es una rotación, una reflexión o una reflexión con giro.

**Demostración:** Puesto que toda isometría en la esfera es producto de a lo más tres reflexiones esféricas, si es composición de dos reflexiones es una rotación y si es composición de una o tres reflexiones es una reflexión o una reflexión con giro.

Las isometrías esféricas pueden ser clasificadas por la cantidad de puntos que dejan fijos: Las rotaciones dejan un par de puntos antípodas fijos, las reflexiones dejan una circunferencia de radio máximo fija y las reflexiones con giro no dejan puntos fijos.

■

## 3.3. Semejanzas esféricas

Consideremos las transformaciones  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  para las que existe  $k \in \mathbb{R}$  tales que para cualquier  $\{X, Y\} \subset \mathbb{S}^2$  se cumple que

$$d_{\mathbb{S}^2}(f(X), f(Y)) = |k| \cdot d_{\mathbb{S}^2}(X, Y)$$

**Lema 3.12.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto y  $f : X \rightarrow X$  una función suprayectiva tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \quad \text{para cualquier } \{x, y\} \subset X$$

Entonces, para cada  $x \in X$ , la sucesión  $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$  contiene una sucesión convergente a  $x$ .

**Demostración:** Supongamos que existe  $0 < \epsilon$  y  $x \in X$  tal que

$$\epsilon < d(x, f^n(x)), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Puesto que  $f$  es suprayectiva, sea  $Y_i = \{z \in X \mid f^i(z) = x\}$  y consideremos una sucesión  $F = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  tal que  $f^i(x_i) = x$ . Por lo tanto, si  $l < m$

$$\epsilon < d(x, f^n(x)) = d(x, f^{m-l}(x)) = d(f^m(x_m), f^m(x_l)) \leq d(x_m, x_l)$$

Lo que implica que  $F$  es un subespacio numerable, cerrado y discreto en  $X$ , que no es posible puesto que  $X$  es compacto. ■

**Teorema 3.13.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto,  $f : X \rightarrow X$  una función suprayectiva tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \quad \text{para cualquier } \{x, y\} \subset X$$

Entonces,  $f$  es una isometría de  $X$ .

**Demostración:** Sea  $(M, \psi)$ , donde  $M = X \times X$  y  $\psi$  definida como

$$\psi((x, y), (u, v)) = d(x, u) + d(y, v)$$

$\psi$  induce la topología producto en  $M$ , por lo que  $M$  es compacto. Además, la función  $g = f \times f : M \rightarrow M$  es continua, suprayectiva y cumple que

$$\begin{aligned} \psi(g((x, y)), g((u, v))) &= \psi((f(x), f(y)), (f(u), f(v))) \\ &= d(f(x), f(u)) + d(f(y), f(v)) \\ &\leq d(x, u) + d(y, v) \\ &= \psi((x, y), (u, v)) \end{aligned}$$

Ahora, para cualquier  $\{x, y\} \subset X$  por el lema anterior, la sucesión

$$\{g^i((x, y))\}_{i \in \mathbb{N}} = \{(f^i(x), f^i(y))\}_{i \in \mathbb{N}}$$

contiene una subsucesión convergente a  $(x, y)$ , si  $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$  esto es imposible. Por lo tanto  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$  para cualquier  $\{x, y\} \subset X$ . ■



**Corolario 3.14.** Toda transformación  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  que no aumente (o no disminuya) distancias es una isometría esférica.

**Prueba:** Por el resultado anterior, puesto que  $(\mathbb{S}^2, d_{\mathbb{S}^2})$  es un espacio métrico y compacto, toda transformación  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  tal que  $d_{\mathbb{S}^2}(f(A), f(B)) = |k| d_{\mathbb{S}^2}(A, B)$  con  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  debe cumplir con ser biyectiva e invertible. Por lo que la única posibilidad es cuando  $|k| = 1$ .

□

### 3.4. Transformaciones de $\mathbb{S}^2$ que preservan circunferencias de radio máximo

Comenzaremos por definir a las transformaciones afines de  $\mathbb{R}^3$  como una generalización de las transformaciones afines en el plano.

Una transformación  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  es una **transformación afín del espacio** si y sólo si la imagen de cada recta en el espacio bajo  $f$  es una recta en el espacio. Una consecuencia de esto es que las transformaciones afines de  $\mathbb{R}^3$  preservan planos.

Las isometrías esféricas son un ejemplo de transformaciones en la esfera que preservan circunferencias de radio máximo, pero no son todas.

**Proposición 3.15.** Toda transformación esférica que preserve circunferencias de radio máximo preserva puntos antípoda.

**Prueba:** Las transformaciones que preservan circunferencias de radio máximo preservan la intersección de ellas.

□

**Lema 3.16.** Cualquier transformación esférica que preserve circunferencias de radio máximo está determinada por la imagen de cuatro puntos que por tercias no estén en la misma circunferencia de radio máximo.

**Demostración:** Sean  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  una transformación esférica que preserve circunferencias de radio máximo y  $\{A, B, C, D\} \subset \mathbb{S}^2$  tal que no estén por tercias en la

misma circunferencia de radio máximo.

Consideremos una circunferencia orientada de radio máximo  $\zeta$  que contenga a  $A$  y no contenga a los puntos  $B, C$  y  $D$ .  $\mathbb{S}^2 \setminus \{\zeta\}$  determina dos hemisferios, elijamos alguno y llamémoslo  $\mathbb{S}^+$ . La imagen bajo  $f$  de  $\zeta$  es una circunferencia orientada de radio máximo.

Existe una única isometría de la esfera  $i$  con las siguientes propiedades:

- a)  $i(A) = f(A)$
- b)  $i[\zeta] = f[\zeta]$  con la misma orientación.
- c)  $i[\mathbb{S}^+] = f[\mathbb{S}^+]$

Además,  $i^{-1} \circ f$  es una transformación esférica que preserva circunferencias de radio máximo (pues es composición de transformaciones que preservan circunferencias de radio máximo) que deja invariantes a  $A, \zeta$  y  $\mathbb{S}^+$ . Sea  $\Pi_A$  el plano tangente a  $\mathbb{S}^+$  que es paralelo al plano que determina a  $\zeta$  y  $\alpha : \mathbb{S}^+ \rightarrow \Pi_A$  la proyección del hemisferio de la esfera al plano  $\Pi_A$  desde el origen. Notemos que  $\alpha$  es un homeomorfismo.

Puesto que las transformaciones esféricas que preservan circunferencias de radio máximo también preservan puntos antípodas y la transformación  $i^{-1} \circ f$  deja invariante a  $\zeta$ , tenemos que  $i^{-1} \circ f$  está determinada por la acción de la restricción  $(i^{-1} \circ f)|_{\mathbb{S}^+}$ .

La imagen de cada circunferencia de radio máximo intersección con  $\mathbb{S}^+$  bajo  $\alpha$  es una recta en  $\Pi_A$  (pues la intersección de un plano por el origen con  $\Pi_A$  es una recta); análogamente, la imagen de toda recta en  $\Pi_A$  bajo  $\alpha^{-1}$  es una circunferencia de radio máximo intersecada con  $\mathbb{S}^+$ .

Entonces, la transformación  $\widehat{i^{-1} \circ f} : \Pi_A \rightarrow \Pi_A$  definida como

$$\widehat{i^{-1} \circ f} = \alpha \circ ((i^{-1} \circ f)|_{\mathbb{S}^+}) \circ \alpha^{-1}$$

es una transformación que preserva rectas en  $\Pi_A$ , por lo que es una transformación afín en  $\Pi_A$  y toda transformación afín del plano está determinada por la imagen de tres puntos no colineales.

Si  $f'$  es una transformación esférica que preserva circunferencias de radio máximo tal que

$$\begin{aligned} f'(A) &= f(A) & f'(B) &= f(B) \\ f'(C) &= f(C) & f'(D) &= f(D) \end{aligned}$$

entonces  $f'$  induce una transformación afín en  $\Pi_A$  que actúa de igual manera que la inducida por  $f$ . Lo que implica que  $\widehat{i^{-1} \circ f'} = \widehat{i^{-1} \circ f}$ .

Puesto que  $\alpha^{-1} \circ (\widehat{i^{-1} \circ f}) \circ \alpha = (i^{-1} \circ f)|_{\mathbb{S}^+}$ , entonces

$$(i^{-1} \circ f')|_{\mathbb{S}^+} = (i^{-1} \circ f)|_{\mathbb{S}^+}$$

Como las transformaciones están determinadas por su acción en  $\mathbb{S}^+$  tenemos que

$$i^{-1} \circ f' = i^{-1} \circ f$$

Al componer con la isometría esférica  $i$  por la izquierda tenemos que  $f' = f$ .

Así, las transformaciones esféricas que preservan circunferencias de radio máximo están determinadas por cuatro puntos no en la misma circunferencia de radio máximo tomados de 3 en 3. ■

**Teorema 3.17.** Una transformación de  $\mathbb{S}^2$  es que preserve circunferencias de radio máximo si y sólo si es la composición de una transformación lineal de  $\mathbb{R}^3$  (restringida a  $\mathbb{S}^2$ ) con la proyección radial  $\rho : \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\} \rightarrow \mathbb{S}^2$ , dada por  $\rho(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$ . Dicha transformación lineal es única salvo por múltiplos escalares positivos.

**Demostración:**

- ⇐) Cualquier transformación lineal del espacio preserva planos, en particular a los planos por el origen, por lo que la composición de las transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^3$  con la proyección radial preservan circunferencias de radio máximo.
- ⇒) Sea  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  una transformación que preserve circunferencias de radio máximo. Como dicha transformación está determinada por la imagen bajo  $f$  de cuatro puntos no en la misma circunferencia de radio máximo tomados de tres en tres, buscaremos una transformación lineal del espacio que, seguida de la proyección radial, envíe a cuatro puntos en cuatro puntos (ambas cuartetos con las condiciones indicadas).

Sean  $\{A, B, C, D\} \subset \mathbb{S}^2$  y  $\{W, X, Y, Z\} \subset \mathbb{S}^2$  dos conjuntos de cuatro puntos que por tercias no están en la misma circunferencia de radio máximo.

Cada  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$  determina una única transformación lineal  $L$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que:

$$L(A) = \lambda_1 W \quad L(B) = \lambda_2 X \quad L(C) = \lambda_3 Y$$

Puesto que buscamos que  $\rho \circ L(D) = Z$ , necesitamos que para alguna elección de  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  se cumpla que  $L(D) = \lambda Z$ .

Como  $\{A, B, C\}$  es un conjunto linealmente independiente de  $\mathbb{R}^3$  existen escalares  $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\} \subset \mathbb{R}$  tales que

$$D = \kappa_1 A + \kappa_2 B + \kappa_3 C$$

Dado que  $L$  es lineal,

$$L(D) = (\kappa_1 \lambda_1)W + (\kappa_2 \lambda_2)X + (\kappa_3 \lambda_3)Y$$

Por otro lado, sabemos que  $\{W, X, Y\}$  es linealmente independiente en  $\mathbb{R}^3$ , por lo que existen escalares  $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subset \mathbb{R}$  tales que

$$Z = \delta_1 W + \delta_2 X + \delta_3 Y$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & (\kappa_1 \lambda_1)W + (\kappa_2 \lambda_2)X + (\kappa_3 \lambda_3)Y = \lambda(\delta_1 W + \delta_2 X + \delta_3 Y) \\ \Rightarrow \quad & \bar{0} = (\kappa_1 \lambda_1 - \lambda \delta_1)W + (\kappa_2 \lambda_2 - \lambda \delta_2)X + (\kappa_3 \lambda_3 - \lambda \delta_3)Y \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \kappa_1 \lambda_1 &= \lambda \delta_1 \\ \kappa_2 \lambda_2 &= \lambda \delta_2 \\ \kappa_3 \lambda_3 &= \lambda \delta_3 \end{aligned}$$

Observemos que  $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , pues de lo contrario, una de las tercias de puntos serían coplanares, lo que implica que están en la misma circunferencia de radio máximo, contrario a la hipótesis.

Por lo que:

$$\lambda_i = \lambda \frac{\delta_i}{\kappa_i} \quad , \quad \text{para } i \in \{1, 2, 3\}$$

Entonces para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\lambda_i$  está determinada por  $\delta_i, \kappa_i$ , y  $\lambda$ .

Así,  $\rho \circ L$  es la transformación esférica que buscamos, única salvo por múltiplos escalares positivos de la transformación lineal:  $T$  y  $-T$  no determinan la misma transformación esférica, por lo que no podemos asociarlas como múltiplos escalares.

■

En el resultado anterior, podemos elegir una forma de normalizar la elección de la transformación lineal si consideremos al siguiente grupo de las matrices:

$$\mathbb{G} = \{A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid |\det(A)| = 1\}$$

**Teorema 3.18.** El grupo de transformaciones esféricas que preserva circunferencias de radio máximo es isomorfo a  $\mathbb{G}$ .

**Demostración:** Sea  $\rho : \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\} \rightarrow \mathbb{S}^2$ , dada por  $\rho(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$  y consideremos al conjunto de transformaciones esféricas que preservan circunferencias de radio máximo, que denotaremos como  $R(\mathbb{S}^2)$ .

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{G} &\rightarrow R(\mathbb{S}^2) \\ T &\rightarrow \rho \circ T \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.17, tenemos que  $\alpha$  es una biyección.

Es suficiente mostrar que  $\alpha$  es homomorfismo; es decir, si  $\{S, T\} \subset SL(3, \mathbb{R})$  entonces  $(\rho \circ T) \circ (\rho \circ S) = \rho \circ (S \circ T)$ : Sea  $X \in \mathbb{S}^2$

$$\begin{aligned} (\rho \circ T) \circ (\rho \circ S)(X) &= (\rho \circ T) \circ \left( \frac{S(X)}{\|S(X)\|} \right) = \rho \left( \frac{T \circ S(X)}{\|S(X)\|} \right) \\ &= \frac{\frac{T \circ S(X)}{\|S(X)\|}}{\left\| \frac{T \circ S(X)}{\|S(X)\|} \right\|} = \frac{T \circ S(X)}{\|T \circ S(X)\|} = \rho \circ (S \circ T)(X) \end{aligned}$$

■

**Teorema 3.19.** Toda transformación esférica que preserve circunferencias de radio máximo y que también preserve ángulos es una isometría esférica.

**Demostración:** Una transformación esférica que preserve circunferencias de radio máximo y ángulos en la esfera está determinada por una transformación lineal  $L$  de  $\mathbb{R}^3$  que preserve los ángulos entre los planos por el origen, ya que los ángulos entre las circunferencias de radio máximo son los ángulos entre los planos que las determinan.

Las transformaciones lineales de  $\mathbb{R}^3$  que preservan ángulos entre los planos son las transformaciones que preservan los ángulos entre los vectores, ya que los ángulos entre los planos son los ángulos entre los vectores normales. Las transformaciones lineales del espacio que preservan ángulos entre vectores son las semejanzas del espacio que fijan el origen, que son múltiplos escalares de las isometrías que fijan el origen.

Entonces,  $L$  es un múltiplo de una isometría de  $\mathbb{R}^3$  que fija el origen y por lo tanto  $\rho \circ L$  es una isometría de la esfera.

■

## CAPÍTULO 4

# PLANO PROYECTIVO Y ESFERA DE RIEMANN

Existen dos formas naturales de completar el plano euclidiano a una superficie compacta: añadirle una infinidad de puntos de manera que cada familia de rectas paralelas converjan en uno de esos puntos; o añadir solamente un punto en el que todas las rectas converjan.

En esta sección veremos que ambas extensiones pueden obtenerse a partir de la esfera y analizaremos las relaciones geométricas que hay entre ellas.

### 4.1. Plano proyectivo

Definimos como **plano proyectivo** o **plano euclidiano extendido** a la unión del plano euclidiano con un conjunto de puntos "al infinito" (uno por cada familia de rectas paralelas) en donde se intersecarán las rectas paralelas.

Llamaremos línea proyectiva o recta extendida a una recta euclidiana unión el punto al infinito que le corresponde, también diremos que el conjunto de puntos al infinito forman una recta extendida.

De esta manera, cualesquiera dos puntos en el plano proyectivo están en una recta extendida y cualesquiera dos rectas extendidas se intersecan en un punto.

Veamos que los puntos del plano proyectivo se pueden asociar naturalmente con pares de puntos de la esfera y que con esto el plano proyectivo adquiere una geometría que proviene de la esfera.

Consideremos al plano  $\mathbb{E}_{-1}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid z = -1\}$ .

Para cada punto  $P \in \mathbb{E}_{-1}^2$ , la recta en el espacio que contiene al origen y a  $P$  interseca a  $\mathbb{S}^2$  en dos puntos antípodos. Asociaremos a cada  $P \in \mathbb{E}_{-1}^2$  con ese par de puntos en la esfera.

Con esta asociación, todos los puntos de  $\mathbb{S}^2$  con tercer coordenada no cero están asociados con puntos de  $\mathbb{E}_{-1}^2$ .

Los puntos en una recta de  $\mathbb{E}_{-1}^2$  se asocian a pares de puntos en una circunferencia de radio máximo en  $\mathbb{S}^2$ , pues la recta determina un plano por el origen de  $\mathbb{R}^3$ .

Las rectas paralelas en  $\mathbb{E}_{-1}^2$  se asocian a circunferencias que se intersecan en puntos de  $\mathbb{S}^2$  con tercer coordenada igual a cero, pues los planos por el origen que las contienen se intersecan en una recta horizontal en el espacio. Así que al punto al infinito correspondiente a una familia de rectas paralelas le podemos asociar un par de puntos antípodos en la esfera con tercer coordenada cero.

Por lo tanto, esta asociación determina una biyección entre los puntos del plano proyectivo y los pares de puntos antípodos en la esfera.

A este modelo del plano proyectivo, lo denotaremos como  $\mathbb{RP}^2$ ; es decir,

$$\mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2 / \sim_a$$

Llamaremos al mapeo cociente entre la esfera y el plano proyectivo  $\rho$ :

$$\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$$

En base a este cociente, podemos dotar de una topología a  $\mathbb{RP}^2$  (la topología cociente en  $\mathbb{S}^2$ ). Además, es posible dotar de una métrica a  $\mathbb{RP}^2$ :

Si tenemos un par de puntos  $X, Y$  en el plano proyectivo, tenemos que bajo la relación antípoda

$$[X] = \{X, -X\} \quad [Y] = \{Y, -Y\}$$

Por lo que podemos definir la distancia entre  $X$  y  $Y$  en  $\mathbb{RP}^2$  como:

$$d_{\mathbb{RP}^2}([X], [Y]) = \min\{d_{\mathbb{S}^2}(X, Y), d_{\mathbb{S}^2}(X, -Y)\}$$

Sea  $A$  la transformación antípoda dada por  $A(X) = -X$  para cualquier  $X \in \mathbb{S}^2$ . Notemos que  $A \in Iso(\mathbb{S}^2)$ , pues  $A$  es una reflexión con giro de  $\pi$ .

Por lo tanto, podemos medir la longitud de un vector  $[\bar{v}]$  basado en  $[X] \in \mathbb{RP}^2$  pues es suficiente medir la longitud del vector  $\bar{v}$  en la esfera basado en  $X \in \mathbb{S}^2$  o el vector  $-\bar{v}$  basado en  $-X \in \mathbb{S}^2$ , ambas longitudes coinciden pues  $A$  es una isometría.

Notemos que cada trayectoria en la esfera se proyecta bajo  $\rho$  en una trayectoria en el plano proyectivo; también, cada trayectoria en el plano proyectivo se levanta a dos trayectorias en la esfera. Además, podemos medir la longitud de cualquier trayectoria en  $\mathbb{RP}^2$  dado que proviene de dos trayectorias en la esfera que tienen la misma longitud.

Entonces, buscar a las geodésicas del plano proyectivo se traduce en buscar las geodésicas en la esfera; es decir, las geodésicas del plano proyectivo son geodésicas en la esfera identificadas bajo la función antípoda.

También, toda transformación de la esfera que preserve puntos antípoda se proyecta a una transformación de  $\mathbb{RP}^2$ , pues bajo la identificación por la relación antípoda es una transformación de  $\mathbb{RP}^2$ . Es posible demostrar que toda transformación  $f$  de  $\mathbb{RP}^2$  se levanta a dos transformaciones de la esfera  $\hat{f}_1$  y  $\hat{f}_2$  que preservan puntos antípodas y que cumplen que  $\hat{f}_2 = A \circ \hat{f}_1$ , donde  $A$  es la transformación antípoda. Es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{S}^2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\hat{f}_1} \\ \xrightarrow{\hat{f}_2} \end{array} & \mathbb{S}^2 \\
 \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\
 \mathbb{RP}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{RP}^2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 f \circ \rho = \rho \circ \hat{f}_1 \\
 f \circ \rho = \rho \circ \hat{f}_2
 \end{array}$$

**Teorema 4.1.** El grupo de isometrías del plano proyectivo es isomorfo al grupo de isometrías de la esfera que preservan orientación.

**Demostración:** Para cualquier  $f \in Iso(\mathbb{RP}^2)$  sabemos que  $f$  se puede levantar a dos isometrías esféricas  $\hat{f}_1$  y  $\hat{f}_2$  tal que  $\hat{f}_2 = A \circ \hat{f}_1$ . Notemos que solamente una de ellas pertenece a  $Iso^+(\mathbb{S}^2)$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\hat{f}_1 \in Iso^+(\mathbb{S}^2)$ .

Definimos  $\psi : Iso(\mathbb{RP}^2) \rightarrow Iso^+(\mathbb{S}^2)$  como  $\psi(f) = \hat{f}_1 \in Iso^+(\mathbb{S}^2)$ .

Si  $\{\hat{f}_1, \hat{g}_1\} \subset Iso^+(\mathbb{S}^2)$  tales que  $\hat{f}_1 = \hat{g}_1$  entonces ambas funciones se proyectan a dos transformaciones que son iguales; es decir,  $\psi$  es inyectiva.



Cada isometría esférica se proyecta a una isometría de  $\mathbb{RP}^2$ . Dicha isometría se levanta a dos isometrías esféricas de las cuales solo una es orientable, por lo que  $\psi$  es suprayectiva.

Sea  $\{f, g\} \subset Iso(\mathbb{RP}^2)$ , si  $\psi(f) = \widehat{f}_1$ ,  $\psi(g) = \widehat{g}_1$ ,  $\psi(g \circ f) = \widehat{(g \circ f)}_1$  entonces,

$$\begin{aligned} \rho \circ \widehat{(g \circ f)}_1 &= g \circ f \circ \rho = g \circ \rho \circ \widehat{f}_1 \\ &= \rho \circ \widehat{g}_1 \circ \widehat{f}_1 \end{aligned}$$

Es decir,  $\widehat{(g \circ f)}_1 = \widehat{g}_1 \circ \widehat{f}_1$ .

Por lo tanto  $\psi$  es un isomorfismo. ■

**Teorema 4.2.** El grupo de transformaciones de  $\mathbb{RP}^2$  que preservan rectas extendidas es isomorfo a  $PGL(3, \mathbb{R})$ .

**Demostración:** El isomorfismo de grupos  $\alpha$  del Teorema 3.18 de la página 56 determinado por  $\rho : \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\} \rightarrow \mathbb{S}^2$  (dada por  $\rho(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$ ) y el conjunto de transformaciones esféricas que preservan circunferencias de radio máximo, que denotaremos como  $R(\mathbb{S}^2)$

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{G} &\rightarrow R(\mathbb{S}^2) \\ T &\rightarrow \rho \circ T \end{aligned}$$

Tenemos que  $Id_{\mathbb{RP}^2}$  proviene de dos transformaciones esféricas que preservan circunferencias de radio máximo:  $Id_{\mathbb{S}^2}$  y  $A \circ Id_{\mathbb{S}^2} = -Id_{\mathbb{S}^2}$ .

Entonces,  $Núcleo(\alpha) = \{Id_{\mathbb{S}^2}, -Id_{\mathbb{S}^2}\}$ .

Por lo tanto, por el primer teorema de isomorfismos de grupos, tenemos que si  $H$  es el grupo de transformaciones de  $\mathbb{RP}^2$  que preserva rectas extendidas

$$H \cong \mathbb{G} / \{Id_{\mathbb{S}^2}, -Id_{\mathbb{S}^2}\} = PGL(3, \mathbb{R})$$

Al grupo  $PGL(3, \mathbb{R})$  se le conoce como **grupo general lineal proyectivo de orden 3 con coeficientes en  $\mathbb{R}$** . ■

## 4.2. Esfera de Riemann

En esta sección, buscaremos una manera de extender el plano euclidiano con un solo punto.

Recordemos que una función diferenciable es **conforme** si y sólo si la función preserva la magnitud y el sentido de los ángulos entre las curvas y es **anticonforme** si y sólo si la función preserva la magnitud pero invierte el sentido de los ángulos entre las curvas.

Veamos que existe un homeomorfismo conforme entre el plano euclidiano y la esfera menos un punto:

Puesto que  $\mathbb{E}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ . Consideremos a la **proyección estereográfica**  $\pi$  desde el punto  $N = (0, 0, 1)$ , que está definida como:

$$\pi : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$$

$$(x, y, 0) \mapsto \left( \frac{2x}{\|(x, y)\|^2 + 1}, \frac{2y}{\|(x, y)\|^2 + 1}, \frac{\|(x, y)\|^2 - 1}{\|(x, y)\|^2 + 1} \right)$$

$\pi$  tiene como inversa a:

$$\pi^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{E}^2$$

$$(x, y, z) \mapsto \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right)$$

**Teorema 4.3.**  $\pi$  es un homeomorfismo conforme.

**Demostración:**

Las funciones  $\pi$  y  $\pi^{-1}$  son continuas, dado que son la restricción de funciones continuas del espacio euclidiano menos el plano  $z = 1$  en el plano  $\mathbb{E}^2$ . Por lo tanto  $\pi$  es un homeomorfismo.

Sean  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  y  $\gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  dos curvas de clase  $C^1$  en  $[a, b]$  tal que  $\gamma_1(s) = \gamma_2(t) = P$  para algún  $\{s, t\} \subset [a, b]$ .

El ángulo en  $P$  entre las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  es el ángulo que forman las circunferencias de radio máximo tangentes a las curvas en  $P$ . Si  $\zeta_1$  es la circunferencia de radio máximo tangente a  $\gamma_1$  en  $P$  y  $\zeta_2$  es la circunferencia de radio máximo tangente a  $\gamma_2$  en  $P$ , el ángulo entre  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  es el ángulo entre las rectas tangentes a  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  en  $P$  (que también son tangentes a  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ ).

Para cada  $i \in \{1, 2\}$ , sea  $l_i$  la recta tangente a  $\zeta_i$  y  $\mathbb{S}^2$  en  $P$ . Así, el ángulo formado entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  en  $P$  es el ángulo formado por  $l_1$  y  $l_2$  en  $P$ .

El ángulo en  $\pi^{-1}(P)$  entre las curvas  $\pi^{-1}[\gamma_1]$  y  $\pi^{-1}[\gamma_2]$  es el ángulo en  $\pi^{-1}(P)$  formado por  $\pi^{-1}[\zeta_1]$  y  $\pi^{-1}[\zeta_2]$ , que son dos rectas en  $\mathbb{E}^2$  (como veremos en el Teorema 4.4, página 64).

Puesto que  $l_1$  y  $l_2$  son rectas tangentes a  $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$  en  $P$ , el plano que contiene a las rectas es tangente a la esfera en  $P$ . Sea  $\Pi$  el plano generado por  $l_1$  y  $l_2$ . Por lo tanto,  $\Pi \cap \mathbb{E}^2 \neq \emptyset$ , pues  $\Pi$  no es paralelo a  $\mathbb{E}^2$  (dado que  $P \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ ).

Si  $\Pi \cap \mathbb{E}^2 = n$ , sean  $n \cap l_1 = \{M_1\}$  y  $n \cap l_2 = \{M_2\}$ . Consideremos a las siguientes rectas en  $\mathbb{E}^2$ :  $m_1$  la recta determinada por  $M_1$  y  $\pi^{-1}(P)$ ;  $m_2$  la recta determinada por  $M_2$  y  $\pi^{-1}(P)$ .

Puesto que el plano que contiene a  $0$ ,  $N$ ,  $P$  y  $\pi^{-1}(P)$  es ortogonal a  $\mathbb{E}^2$ , tenemos que las proyecciones ortogonales de  $P$  a  $n$  y de  $\pi^{-1}(P)$  a  $n$  coinciden. Sea  $T$  la proyección de estos puntos en  $n$ .

Dado que  $0$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $\pi^{-1}(P)$  y  $T$  son coplanares, tenemos que el segmento determinado por  $P$  y  $T$  es congruente con el segmento determinado por  $\pi^{-1}(P)$  y  $T$ , pues en dicho plano tenemos que (Figura 4.1):

- Del  $\triangle 0 \pi^{-1}(P) N$ , tenemos que

$$\angle 0 N \pi^{-1}(P) + \angle N \pi^{-1}(P) 0 = \frac{\pi}{2}$$

pues el ángulo en el origen es recto.

- Del  $\triangle N 0 P$ , tenemos que

$$\angle 0 N P = \angle N P 0$$

pues el triángulo es isósceles.

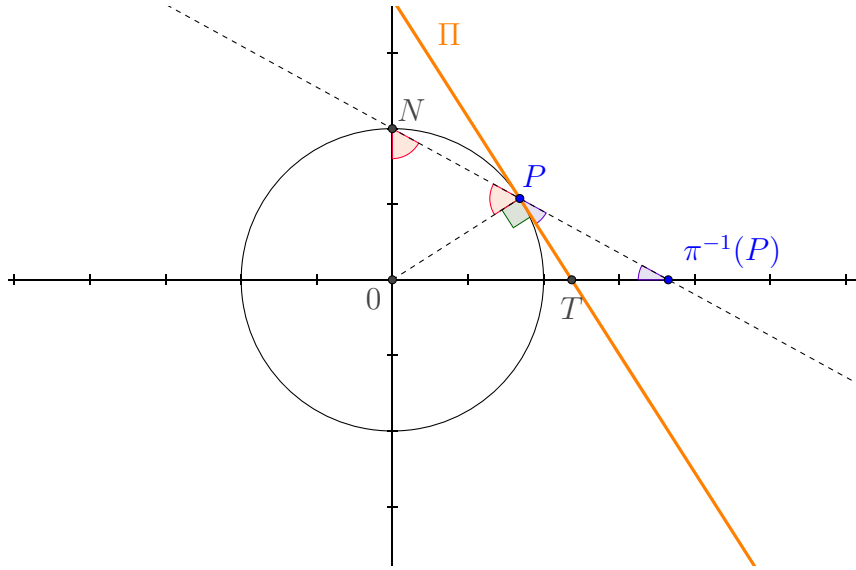


Figura 4.1: Plano que contiene al origen,  $N$ ,  $P$ ,  $\pi^{-1}(P)$  y  $T$ .

Dado que  $\angle N P 0 + \angle 0 P T + \angle T P \pi^{-1}(P) = \pi$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
 \angle T P \pi^{-1}(P) &= \pi - \angle N P 0 - \angle 0 P T \\
 &= \pi - \angle 0 N P - \angle 0 P T \\
 &= \pi - \angle 0 N \pi^{-1}(P) - \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{\pi}{2} - \angle 0 N \pi^{-1}(P) \\
 &= \angle N \pi^{-1}(P) 0
 \end{aligned}$$

Por lo que el  $\triangle P T \pi^{-1}(P)$  es isósceles y por lo tanto

$$d_{\mathbb{E}^3}(P, T) = d_{\mathbb{E}^3}(\pi^{-1}(P), T)$$

Entonces el  $\triangle P M_1 T$  (en  $\Pi$ ) es congruente al  $\triangle \pi^{-1}(P) M_1 T$  (en  $\mathbb{E}^2$ ) por criterio lado-ángulo-lado:

- $d_{\mathbb{E}^3}(P, T) = d_{\mathbb{E}^3}(\pi^{-1}(P), T)$
- $\angle P T M_1 = \angle \pi^{-1}(P) T M_1 = \frac{\pi}{2}$
- Comparten el lado determinado por  $T$  y  $M_1$ .

De igual forma, el  $\triangle P M_2 T$  (en  $\Pi$ ) es congruente al  $\triangle \pi^{-1}(P) M_2 T$  (en  $\mathbb{E}^2$ ).

Puesto que  $\angle M_1 P T = \angle M_1 \pi^{-1}(P) T$  y  $\angle T P M_2 = \angle T \pi^{-1}(P) M_2$ , tenemos que

$$\angle M_1 P T + \angle T P M_2 = \angle M_1 \pi^{-1}(P) T + \angle T \pi^{-1}(P) M_2$$

$$\angle M_1 P M_2 = \angle M_1 \pi^{-1}(P) M_2$$

Así, el ángulo en  $\pi^{-1}(P)$  entre  $\pi^{-1}[\zeta_1]$  y  $\pi^{-1}[\zeta_2]$  es

$$\angle M_1 \pi^{-1}(P) M_2$$

Por lo tanto  $\pi^{-1}$  y  $\pi$  son funciones conformes. ■

Ahora es posible extender  $\pi$  a una biyección de  $\mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{E}^2$  unión un punto (al que llamaremos punto al infinito y que denotaremos como  $\infty$ ) definiendo  $\pi(\infty) = N$ .

**Teorema 4.4.**  $\pi$  envía a las circunferencias y rectas de  $\mathbb{E}^2 \cup \{\infty\}$  en circunferencias de  $\mathbb{S}^2$ .

**Demostración:**

- Consideremos una recta en  $\mathbb{E}^2$  cuya ecuación sea  $ax + by + c = 0$ .

De acuerdo a  $\pi^{-1}$ , se debe cumplir

$$a \left( \frac{X}{1-Z} \right) + b \left( \frac{Y}{1-Z} \right) + c = 0$$

$$\Rightarrow aX + bY + c(1-Z) = 0$$

que es la ecuación de un plano que contiene a  $N \in \mathbb{S}^2$ ; por lo que interseca a  $\mathbb{S}^2$  y forma una circunferencia cuya imagen bajo  $\pi^{-1}$  es la recta  $ax + by + c = 0$ .

- Consideremos una circunferencia con centro  $(h, k) \in \mathbb{E}^2$  y radio  $r \in \mathbb{R}^+$  cuya ecuación es  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ .

$$\begin{aligned} & (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \\ \Rightarrow & x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 = r^2 \end{aligned}$$

De acuerdo a  $\pi^{-1}$ , debe cumplir:

$$\begin{aligned} & \left( \left( \frac{X}{1-Z} \right) - h \right)^2 - \left( \left( \frac{Y}{1-Z} \right) - k \right)^2 = r^2 \\ \Rightarrow & \frac{X^2 + Y^2}{(1-Z)^2} - 2h \left( \frac{X}{1-Z} \right) - 2k \left( \frac{Y}{1-Z} \right) + h^2 + k^2 = r^2 \end{aligned}$$

Dado que  $(X, Y, Z) \in \mathbb{S}^2$ , tenemos que  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ , por lo que

$$\begin{aligned} & \frac{1 - Z^2}{(1-Z)^2} - 2h \left( \frac{X}{1-Z} \right) - 2k \left( \frac{Y}{1-Z} \right) + h^2 + k^2 = r^2 \\ \Rightarrow & \frac{1+Z}{1-Z} - 2h \left( \frac{X}{1-Z} \right) - 2k \left( \frac{Y}{1-Z} \right) + h^2 + k^2 = r^2 \\ \Rightarrow & 1 + Z - 2hX - 2kY + (h^2 + k^2 - r^2)(1 - Z) = 0 \\ \Rightarrow & -2hX - 2kY - (h^2 + k^2 - r^2 - 1)Z + h^2 + k^2 - r^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

que es la ecuación de un plano  $\Pi$  en el espacio. Es claro que dicho plano interseca a  $\mathbb{S}^2$  pues para un punto en la circunferencia, su imagen bajo  $\pi$  pertenece a la esfera.

Por lo tanto, la imagen bajo  $\pi$  de circunferencias y rectas en  $\mathbb{E}^2 \cup \{\infty\}$  son circunferencias en  $\mathbb{S}^2$ .

■

Recordemos que existe una manera de asociar a los números complejos  $\mathbb{C}$  con puntos de  $\mathbb{E}^2$ ,  $(x, y) \leftrightarrow x + iy$ . También, tenemos que con esta asociación la conjugación compleja  $\overline{x + iy} = x - iy$  coincide con la reflexión euclidiana por el eje  $X$ .

Consideremos al conjunto  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Por el Teorema 4.3 y la asociación anterior, podemos identificar a los puntos de  $\hat{\mathbb{C}}$  con puntos de la esfera, por lo que llamaremos a  $\hat{\mathbb{C}}$  la **esfera de Riemann**.

Veremos que hay una relación estrecha entre algunas funciones complejas y las transformaciones geométricas de la esfera.

### 4.2.1. Inversión

Sea  $r \in \mathbb{R}^+$ . Consideremos la transformación:

$$I_{(0,r)} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \quad \text{tal que} \quad I_{(0,r)}(z) = \frac{r^2}{z} \quad (4.1)$$

Donde  $I_{(0,r)}(0) = \infty$  e  $I_{(0,r)}(\infty) = 0$ .

A dicha transformación se le conoce como **inversión compleja** en una circunferencia con centro en el origen y radio  $r$ .

Ahora, si  $\overline{(\ )}$  es la conjugación compleja, consideremos a la transformación

$$\overline{I_{(0,r)}}(z) = \overline{(\ )} \circ I_{(0,r)}(z) = \frac{r^2}{\bar{z}} \quad (4.2)$$

**Observación 4.5.** La transformación  $\overline{I_{(0,r)}}$ , llamada la **inversión** en el plano sobre una circunferencia con centro en el origen y radio  $r$ , tiene las siguientes propiedades:

- Si  $z \neq 0$  entonces  $\overline{I_{(0,r)}}(z) = \left(\frac{r}{|z|}\right)^2 z$ . Es decir,  $z$  y  $\overline{I_{(0,r)}}(z)$  están en el mismo rayo que parte del origen.
- $\overline{I_{(0,r)}}$  deja fija a la circunferencia con centro en el origen y radio  $r$ .
- La imagen bajo  $\overline{I_{(0,r)}}$  de los puntos del interior de la circunferencia son los puntos del exterior de la circunferencia y viceversa.

**Lema 4.6.** Sean  $\overline{I_{(0,r)}}$  y  $\{z_1, z_2\} \subset \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ . Si  $\overline{I_{(0,r)}}(z_1) = z_3$  y  $\overline{I_{(0,r)}}(z_2) = z_4$  entonces para los triángulos  $\triangle 0z_1z_2$  y  $\triangle 0z_4z_3$  se tiene que:

$$\angle 0z_1z_2 = \angle 0z_4z_3 \quad \text{y} \quad \angle 0z_2z_1 = \angle 0z_3z_4$$

**Demostración:**

Por la parte a) de la Observación 4.5,

$|z| \cdot |\overline{I_{(0,r)}}(z)| = r^2$ . Por lo tanto:

$$r^2 = |z_1| \cdot |z_3| = |z_2| \cdot |z_4| \quad \Rightarrow \quad \frac{|z_1|}{|z_4|} = \frac{|z_2|}{|z_3|}$$

Así  $\triangle 0z_1z_2 \sim \triangle 0z_4z_3$ , puesto que el ángulo en 0 es el mismo para ambos triángulos y tienen lados correspondientes proporcionales. Por lo tanto, los triángulos tienen ángulos correspondientes iguales (Figura 4.2).

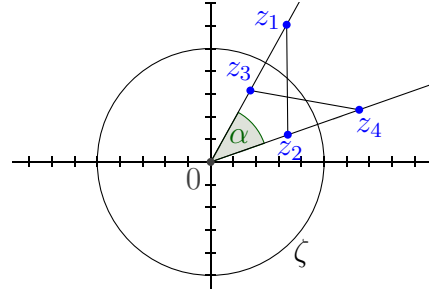


Figura 4.2:  $\triangle 0z_1z_2 \sim \triangle 0z_4z_3$

■

**Lema 4.7.** La imagen bajo  $\overline{I_{(0,r)}}$  de cualquier recta o circunferencia es una recta o una circunferencia.

**Demostración:**

■ Rectas:

- Por la Observación 4.5, cualquier punto y su imagen son colineales con el origen. Si la recta contiene al origen, la imagen de cualquier punto de la recta es un punto de la misma recta.
- Si la recta no contiene al origen, construimos la ortogonal a la recta por el origen. Sea  $a$  el pie de dicha perpendicular. Encontramos  $\overline{I_{(0,r)}}(a) = b$ . Por el Lema 4.6,  $\angle 0\overline{I_{(0,r)}}(z)b = \angle 0az = \pi/2$ , para cualquier  $z$  en la recta. Por lo tanto la imagen de una recta que no contiene al origen es el lugar geométrico de los puntos que subtienden un ángulo recto respecto a el origen y a  $b$ , que es una circunferencia con diámetro el segmento  $\overline{0b}$ , que pasa por el origen (Figura 4.3).



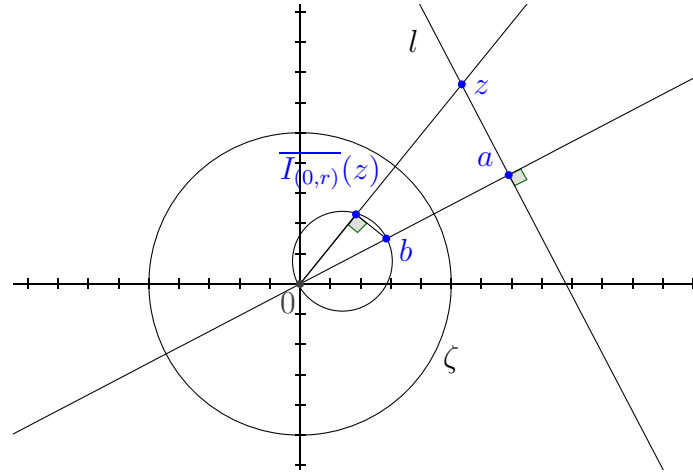


Figura 4.3: Imagen de una recta  $l$  que no contiene al origen.

■ Circunferencias:

- Si la circunferencia contiene al origen, la imagen es una recta (por la parte anterior, usando que  $\overline{I_{(0,r)}} = \overline{I_{(0,r)}^{-1}}$ ).
- Si la circunferencia no contiene al origen, construimos la recta que pase por el origen y el centro de dicha circunferencia. Puesto que dicha recta contiene un diámetro, cortará a la circunferencia en dos puntos,  $a$  y  $b$ . Sean  $\overline{I_{(0,r)}}(a) = c$  y  $\overline{I_{(0,r)}}(b) = d$ .

Cualquier punto  $z$  en la circunferencia cumple que  $\angle azb = \pi/2$ . Por el Lema 4.6,  $\angle 0za = \angle 0c\overline{I_{(0,r)}}(z)$  y  $\angle 0zb = \angle 0d\overline{I_{(0,r)}}(z)$ .

Notemos que  $\angle 0za = \angle 0zb + \angle bza = \angle 0zb + \pi/2$ .

Puesto que  $0, c$  y  $d$  son colineales, del  $\triangle cd\overline{I_{(0,r)}}(z)$ :

$$\begin{aligned} \angle 0d\overline{I_{(0,r)}}(z) + \angle d\overline{I_{(0,r)}}(z)c &= \angle 0c\overline{I_{(0,r)}}(z) \\ \Rightarrow \angle 0zb + \angle d\overline{I_{(0,r)}}(z)c &= \angle 0za \\ \Rightarrow \angle d\overline{I_{(0,r)}}(z)c &= \pi/2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la imagen de cualquier punto  $z$  en una circunferencia que no pase por el origen, es el lugar geométrico de los puntos que formen un ángulo recto con los puntos fijos  $c$  y  $d$ , es decir, una circunferencia que tiene diámetro el segmento  $\overline{cd}$  (Figura 4.4).

■

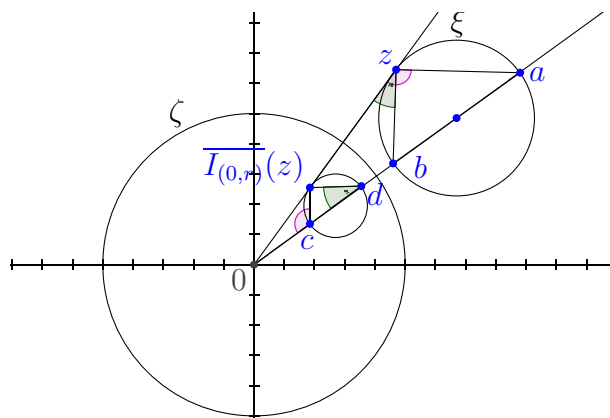


Figura 4.4: Imagen de una circunferencia que no contiene al origen.

**Observación 4.8.** Del Lema 4.7 podemos observar que la imagen bajo  $\overline{I_{(0,r)}}$  de una recta  $l$  que no contiene al origen, es una circunferencia cuya tangente por el origen es paralela a  $l$ .

**Lema 4.9.** Si dos rectas concurren en un punto distinto del origen, las imágenes de las rectas bajo  $\overline{I_{(0,r)}}$  concurren formando el mismo ángulo en magnitud pero en sentido opuesto.

**Demostración:** Por el Lema 4.7, sabemos que la imagen de las dos rectas son dos circunferencias que concurren en el origen y en la imagen del punto de concurrencia de las rectas. La Observación 4.8 nos muestra que el ángulo que forman las circunferencias en el origen, es igual al ángulo formado por las rectas.

Puesto que el ángulo formado por las circunferencias en el origen es igual en magnitud, pero de sentido contrario, al ángulo que forman en la imagen del punto de concurrencia de las rectas, la función preserva la magnitud de los ángulos e invierte el sentido de los ángulos (Figura 4.5).

■

Consideremos a los ángulos orientados, es decir, un ángulo será positivo si se ha medido en sentido levógiro y negativo si se ha medido en sentido dextrógiro. Con esto distinguiremos a las funciones diferenciables que preservan la magnitud y el sentido de los ángulos de las que preservan la magnitud pero inviertan el sentido de los ángulos:

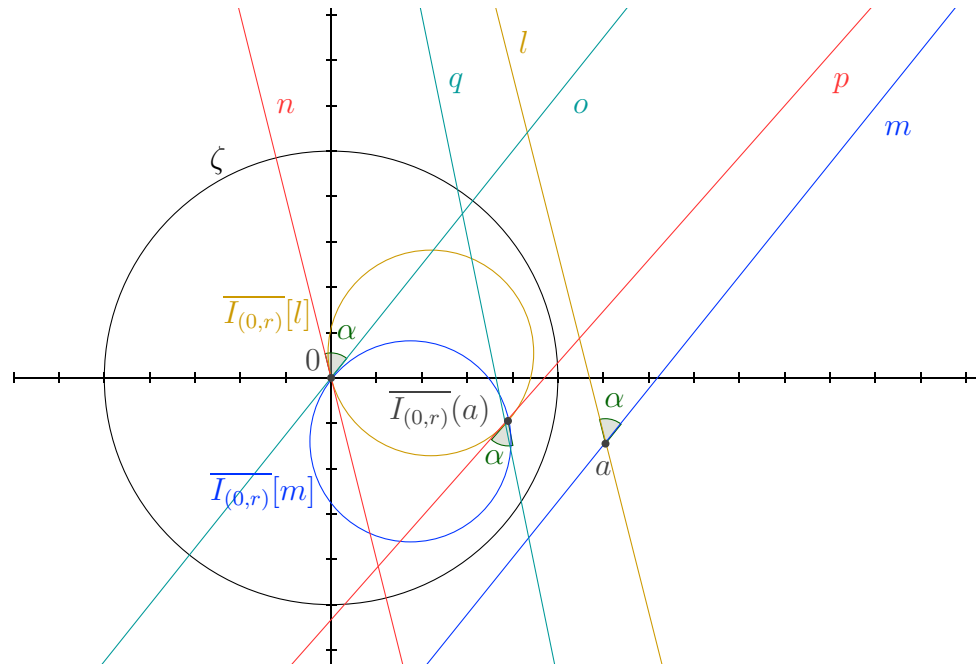


Figura 4.5: Ángulos entre las imágenes de las rectas  $l$  y  $m$ .

**Corolario 4.10.**  $\overline{I_{(0,r)}}$  es una función anticonforme.

**Prueba:** La demostración es análoga a la del Lema 4.9, pues el ángulo formado entre las curvas en el punto de intersección es el formado por las rectas tangentes a las curvas en el punto de intersección.

□

**Lema 4.11.** Si una circunferencia es ortogonal a la circunferencia de radio  $r$  con centro en el origen, entonces dicha circunferencia permanece invariante bajo  $\overline{I_{(0,r)}}$ .

**Demostración:** Sabemos que  $\overline{I_{(0,r)}}$  deja fija a la circunferencia con centro en el origen y radio  $r$ . Por el resultado anterior, la imagen bajo  $\overline{I_{(0,r)}}$  de la circunferencia ortogonal a la circunferencia de radio  $r$  centrada en el origen es una circunferencia que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias y preserva el ángulo en magnitud invirtiendo el sentido. Puesto que las circunferencias son ortogonales, la imagen de la circunferencia es la misma circunferencia.

■

También podemos considerar a la inversión en el plano sobre una circunferencia con centro en un punto  $a \in \mathbb{C}$  de radio  $r \in \mathbb{R}^+$ , sólo es necesario conjugar la función  $\overline{I_{(0,r)}}$  con la traslación  $t_a$ . En otras palabras, la función que deja fija a la circunferencia de radio  $r$  con centro en  $a$  es:

$$\overline{I_{(a,r)}}(z) = t_a \circ \overline{I_{(0,r)}} \circ t_a^{-1}(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a = \frac{a\bar{z} + (r^2 - |a|^2)}{\bar{z} - \bar{a}} \quad (4.3)$$

### 4.2.2. Transformaciones de Möbius

Consideremos las "funciones"  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{C}$$

Notemos que:

- Si  $ad - bc = 0$  entonces  $T(z)$  es una constante.
- Si  $c = 0$  entonces  $ad \neq 0$  y  $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ , que corresponde a una transformación de  $\mathbb{C}$  que se extiende naturalmente a  $\hat{\mathbb{C}}$  si definimos  $T(\infty) = \infty$ .
- Si  $c \neq 0$  entonces
  - $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = a/c$
  - $T$  no está definida en  $z = -d/c$ , pero  $\lim_{z \rightarrow -d/c} T(z) = \infty$

Por lo que podemos extender a  $T$  a una transformación de  $\hat{\mathbb{C}}$  al definir

$$T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad \text{y} \quad T(\infty) = \frac{a}{c}$$

Entonces, las funciones  $T(z) = (az + b)/(cz + d)$  con  $ad - bc \neq 0$  son funciones biyectivas de la esfera, cuya inversa es  $T^{-1}(z) = (dz - b)/(-cz + a)$ , que es de la misma forma que  $T$ .

Notemos que para cualquier  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  se tiene que

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\alpha az + \alpha b}{\alpha cz + \alpha d}$$

es decir, la forma de escribir a cada función de este tipo no es única. Elegiremos una forma de normalizar, con la elección  $ad - bc = 1$ .

**Definición 4.12.** Una **transformación de Möbius** es una función  $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{C}, \quad \text{donde } ad - bc = 1$$

Denotemos como

$$\mathbb{M} = \left\{ T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \mid T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1 \right\}$$

es decir,  $\mathbb{M}$  es el conjunto de las transformaciones de Möbius.

**Proposición 4.13.**  $\mathbb{M}$  es un grupo de transformaciones de  $\hat{\mathbb{C}}$ .

**Prueba:**

- $\mathbb{M}$  es cerrado bajo la composición: Sea  $\{S, T\} \subset \mathbb{M}$ , entonces

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1$$

$$T(z) = \frac{ez + f}{gz + h}, \quad \{e, f, g, h\} \subset \mathbb{C}, \quad eh - fg = 1$$

$$\begin{aligned} T \circ S(z) &= \frac{e\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + f}{g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + h} = \frac{eaz + eb + f(cz + d)}{gaz + gb + h(cz + d)} \\ &= \frac{(ea + fc)z + (eb + fd)}{(ga + hc)z + (gb + hd)} \end{aligned}$$

donde  $(ea + fc)(gb + hd) - (eb + fd)(ga + hc) = 1$ .

- Si  $T \in \mathbb{M}$  ( $T(z) = (az + b)/(cz + d)$  donde  $ad - bc = 1$ ), entonces  $T^{-1}(z) = (dz - b)/(-cz + a)$  donde  $da - bc = 1$ ; es decir,  $T^{-1} \in \mathbb{M}$ .
- $Id_{\hat{\mathbb{C}}}(z) = z = \frac{1z+0}{0z+1} \in \mathbb{M}$ .

□

Consideremos al **grupo especial lineal de orden 2 con coeficientes en  $\mathbb{C}$**  que denotaremos como

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$$

Sea  $\phi : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{M}$  definida como:

$$\phi \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Notemos que  $\phi$  es un homomorfismo de grupos, pues el producto de matrices corresponde a la composición de transformaciones de Möbius (como lo muestra la prueba de la Proposición 4.13).

Si elegimos un elemento en  $Núcleo(\phi)$ , tenemos que

$$\phi \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \frac{az + b}{cz + d} = Id_{\mathbb{C}}(z) = z$$

es decir, para toda  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  se tiene que

$$az + b = z(cz + d) = cz^2 + dz$$

$$\Leftrightarrow 0 = cz^2 + z(d - a) - b$$

puesto que se debe cumplir para toda  $z \in \hat{\mathbb{C}}$ , implica que

$$c = 0 \quad d - a = 0 \quad b = 0$$

Puesto que  $ad - bc = 1$ , se tiene que  $ad = 1$ . Por lo tanto,  $a^2 = 1$ , es decir  $a = 1$  o  $a = -1$ . Entonces

$$Núcleo(\phi) = \{Id_{2 \times 2}(\mathbb{C}), -Id_{2 \times 2}(\mathbb{C})\}$$

Así, por el primer teorema de isomorfismos de grupos, tenemos que

$$\mathbb{M} \cong SL(2, \mathbb{C}) / \{Id_{2 \times 2}(\mathbb{C}), -Id_{2 \times 2}(\mathbb{C})\} = PSL(2, \mathbb{C})$$

Al grupo  $PSL(2, \mathbb{C})$  se le conoce como **grupo especial lineal proyectivo de orden 2 con coeficientes en  $\mathbb{C}$** .

**Teorema 4.14.** El grupo de las transformaciones de Möbius es el grupo generado por las semejanzas del plano que preservan orientación y por la inversión compleja con centro en el origen de radio uno.

**Demostración:**

- Las semejanzas del plano que preservan orientación y la inversión compleja con centro en el origen de radio uno son transformaciones de Möbius.

- Traslaciones:  $t_a(z) = z + a = \frac{1z+a}{0z+1} \in \mathbb{M}$

- Rotaciones con centro en el origen por un ángulo  $\theta$ :

Si  $\lambda \in \mathbb{C}$  forma con respecto al eje real un ángulo de  $\theta$  y  $|\lambda| = 1$ ,

$$\rho_\theta(z) = \lambda z$$

por lo que

$$\begin{aligned} \rho_\theta(z) &= \lambda z = \left(\sqrt{\lambda}\right)^2 z \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}z}{\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1}} = \frac{\sqrt{\lambda}z + 0}{0z + \left(1/\sqrt{\lambda}\right)} \in \mathbb{M} \end{aligned}$$

- Homotecias con centro en el origen por un factor  $k \in \mathbb{R}^+$ :

$$h_k(z) = kz = \frac{\sqrt{k}z + 0}{0z + \left(1/\sqrt{k}\right)} \in \mathbb{M}$$

- Inversión compleja con centro en el origen de radio uno:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{0z + 1}{1z + 0} \in \mathbb{M}$$

Puesto que  $\mathbb{M}$  es un grupo de transformaciones de  $\hat{\mathbb{C}}$  (Proposición 4.13), la composición de las semejanzas del plano que preservan orientación y la inversión compleja con centro en el origen de radio uno es una transformación de Möbius.

- Las transformaciones de Möbius son composiciones de semejanzas del plano que preservan orientación y la inversión compleja con centro en el origen de radio uno.

Sea  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $ad - bc = 1$ .

- Si  $c = 0$  entonces  $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ .  
Como  $ad \neq 0$ , sea  $k = |\frac{a}{d}|$  y  $\lambda = (\frac{a}{d})/k$ . Puesto que  $|\lambda| = 1$ , si el argumento de  $\lambda$  es  $\theta$ ,  $\rho_\theta(z) = \lambda z$  entonces:

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = k\lambda z + \frac{b}{d} = t_{\frac{b}{d}} \circ h_k \circ \rho_\theta(z)$$

Por lo que  $T$  es composición de una rotación, una homotecia y una traslación.

- Si  $c \neq 0$ , tenemos que  $T(\infty) = \frac{a}{c}$ . Consideremos  $t_{-\frac{a}{c}}$  y a  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

$$\begin{aligned} f \circ t_{-\frac{a}{c}} \circ T(z) &= f \circ t_{-\frac{a}{c}} \left( \frac{az+b}{cz+d} \right) \\ &= f \left( \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a}{c} \right) = f \left( \frac{caz + cb - acz - ad}{c^2z + cd} \right) \\ &= \frac{c^2z + cd}{cb - ad} = \frac{(c^2)z + (cd)}{0z + (cb - ad)} = -(c^2)z - (cd) \end{aligned}$$

Por el caso anterior,  $f \circ t_{-\frac{a}{c}} \circ T = S$  es composición de una rotación, una homotecia y una traslación. Por lo tanto,

$$T = (t_{-\frac{a}{c}})^{-1} \circ f^{-1} \circ S = t_{\frac{a}{c}} \circ f \circ S$$

Así,  $T$  es la composición de una semejanza que preserva orientación, la inversión compleja con centro en el origen de radio uno y una traslación.

Por lo tanto, las transformaciones de Möbius son composición de semejanzas del plano que preservan orientación y la inversión compleja con centro en el origen de radio uno.

■



**Corolario 4.15.** Las transformaciones de Möbius preservan al conjunto de rectas y circunferencias en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

**Prueba:** Esto es consecuencia del hecho que cada transformación de Möbius es composición de transformaciones que preservan el conjunto de rectas y circunferencias en el plano.

□

**Teorema 4.16.**  $\mathbb{M}$  actúa de manera **triplemente transitiva** en  $\hat{\mathbb{C}}$ .

**Demostración:** Sea  $\{a, b, c\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ , consideremos la terna ordenada  $(a, b, c)$  y la terna ordenada  $(0, 1, \infty)$ . La transformación  $R(z) = \frac{z-a}{z-c} \cdot \frac{b-c}{b-a}$  cumple que:

$$R(a) = 0 \quad R(b) = 1 \quad R(c) = \infty$$

Si consideremos otra terna ordenada  $(d, e, f)$  y la terna ordenada  $(0, 1, \infty)$ , la transformación  $S(z) = \frac{z-d}{z-f} \cdot \frac{e-f}{e-d}$  cumple que:

$$S(d) = 0 \quad S(e) = 1 \quad S(f) = \infty$$

Para ambas transformaciones existe una manera de elegir las de tal forma que sean de Möbius, dividiendo los coeficientes por la raíz cuadrada del determinante de la transformación que determina cada una de ellas en  $PSL(2, \mathbb{C})$ . Como la inversa de  $S$  también es una transformación de Möbius, tenemos que:

$$S^{-1}(0) = d \quad S^{-1}(1) = e \quad S^{-1}(\infty) = f$$

Dado que la composición de transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius, entonces  $T = S^{-1} \circ R$  es una transformación de Möbius que envía a  $(a, b, c)$  en  $(d, e, f)$ .

■

**Teorema 4.17.** Cualquier transformación de Möbius que fije tres puntos es la identidad.

**Demostración:** Sea  $T$  una transformación de Möbius que fija a  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ .

Por el resultado anterior, existe una transformación de Möbius  $S$  tal que, a la terna  $(\alpha, \beta, \gamma)$  la envía a  $(0, 1, \infty)$ .

Por lo tanto,  $U = S \circ T \circ S^{-1}$  es una transformación de Möbius que fija a  $\{0, 1, \infty\}$ . Como  $U(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , tenemos que:

- $0 = U(0) = \frac{a0+b}{c0+d} = \frac{b}{d}$ . Lo que implica que  $b = 0$ .
  - $\infty = U(\infty) = \frac{a}{c}$ . Lo que implica que  $c = 0$ .
  - $1 = U(1) = \frac{a+b}{c+d} = \frac{a}{d}$ . Lo que implica que  $a = d$ .
- $\Rightarrow U(z) = z = Id_{\hat{\mathbb{C}}}(z) \Rightarrow Id_{\hat{\mathbb{C}}} = S \circ T \circ S^{-1} \Rightarrow T = Id_{\hat{\mathbb{C}}}$ .

■

**Corolario 4.18.** Cualquier transformación de Möbius está determinada por la imagen bajo dicha transformación de tres puntos distintos.

### 4.2.3. Razón cruzada

**Definición 4.19.** Sea  $\{z_1, z_2, z_3\} \subset \hat{\mathbb{C}}$  una tercia de puntos distintos y  $T \in \mathbb{M}$  tal que

$$T(z_1) = 0 \quad T(z_2) = 1 \quad T(z_3) = \infty$$

Para cualquier  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ ,  $\lambda \in \hat{\mathbb{C}}$  es la **razón cruzada** de  $z_0, z_1, z_2$  y  $z_3$ ; es decir:

$$RC(z_0, z_1, z_2, z_3) = \lambda$$

si y sólo si  $\lambda = T(z_0)$ .

**Observación 4.20.** Tenemos que

- Si  $\{z_1, z_2, z_3\} \subset \mathbb{C}$  entonces:

$$RC(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

- Si  $\infty \in \{z_1, z_2, z_3\} \subset \hat{\mathbb{C}}$  entonces:

- Si  $z_1 = \infty$  entonces  $RC(z_0, \infty, z_2, z_3) = (z_2 - z_3)/(z_0 - z_3)$ .
- Si  $z_2 = \infty$  entonces  $RC(z_0, z_1, \infty, z_3) = (z_0 - z_1)/(z_0 - z_3)$ .
- Si  $z_3 = \infty$  entonces  $RC(z_0, z_1, z_2, \infty) = (z_0 - z_1)/(z_2 - z_1)$ .

**Proposición 4.21.** La razón cruzada es un invariante bajo las transformaciones de Möbius; es decir, para cualquier  $\{z_1, z_2, z_3\} \subset \hat{\mathbb{C}}$  de puntos distintos, si  $T \in \mathbb{M}$  entonces para cualquier  $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ :

$$RC(z_0, z_1, z_2, z_3) = RC(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3))$$

**Prueba:** Consideremos a la transformación de Möbius  $R$  tal que

$$R(z_1) = 0 \quad R(z_2) = 1 \quad R(z_3) = \infty$$

Para cualquier  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  tenemos que  $R(z) = RC(z, z_1, z_2, z_3)$ .

Entonces,  $R \circ T^{-1}$  es tal que

$$R \circ T^{-1}(T(z_1)) = 0 \quad R \circ T^{-1}(T(z_2)) = 1 \quad R \circ T^{-1}(T(z_3)) = \infty$$

es decir, a la terna ordenada  $(T(z_1), T(z_2), T(z_3))$  la envía a la terna ordenada  $(0, 1, \infty)$ , por lo que  $R \circ T^{-1}(z') = RC(z', T(z_1), T(z_2), T(z_3))$ .

Si  $z' = T(z_0)$ , entonces

$$\begin{aligned} RC(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) &= R \circ T^{-1}(T(z_0)) \\ &= R(z_0) = RC(z_0, z_1, z_2, z_3) \end{aligned}$$

□

**Proposición 4.22.** Las rectas y circunferencias euclidianas corresponden a ecuaciones de la forma

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}z + c = 0$$

donde  $\{a, c\} \subset \mathbb{R}$  y  $b \in \mathbb{C}$ . Análogamente, cualquier ecuación de esta forma corresponde a una recta o una circunferencia.

**Prueba:**

■ Rectas:

Para una recta en el plano euclidiano  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  con  $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{R}$ , consideremos cualquier número complejo  $z = x + iy$  y notemos que:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

hacemos la sustitución

$$\alpha \left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right) + \beta \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + \gamma = 0$$

lo que implica

$$\left( \frac{\alpha - i\beta}{2} \right) z + \left( \frac{\alpha + i\beta}{2} \right) \bar{z} + \gamma = 0$$

si nombramos  $b = (\alpha - i\beta)/2$  y  $c = \gamma$

$$bz + \bar{b}z + c = 0$$

donde  $b \in \mathbb{C}$  y  $c \in \mathbb{R}$ .

■ Circunferencias:

Para  $\alpha \in \mathbb{C}$  y  $r \in \mathbb{R}^+$  fijos, una circunferencia euclidiana en notación compleja es el conjunto de los puntos  $z \in \mathbb{C}$  que cumplen:

$$|z - \alpha| = r$$

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = r^2$$

$$z\bar{z} - z\bar{\alpha} - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} = r^2$$

si definimos  $b = -\bar{\alpha}$  y  $c = |\alpha|^2 - r^2$

$$z\bar{z} + bz + \bar{b}z + c = 0$$

Inversamente:

■ Si  $az\bar{z} + bz + \bar{b}z + c = 0$ , donde  $\{a, c\} \subset \mathbb{R}$  y  $b \in \mathbb{C}$ :

- Si  $a = 0$  entonces  $bz + \bar{b}z + c = 0$  es una recta.
- Si  $a \neq 0$

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}z + c = 0$$

$$az\bar{z} + bz + \bar{b}z + \frac{|b|}{a} = \frac{|b|}{a} - c$$

$$z\bar{z} + \frac{b}{a}z + \frac{\bar{b}}{a}\bar{z} + \frac{b\bar{b}}{a^2} = \frac{b\bar{b} - ac}{a^2}$$

$$\left(z + \frac{\bar{b}}{a}\right) \left(\bar{z} + \frac{b}{a}\right) = \frac{b\bar{b} - ac}{a^2}$$

$$\left|z + \frac{\bar{b}}{a}\right| = \sqrt{\frac{b\bar{b} - ac}{a^2}}$$

es una circunferencia con centro en  $-\bar{b}/a$  y radio  $r = \sqrt{\frac{b\bar{b} - ac}{a^2}}$ , siempre y cuando  $b\bar{b} - ac > 0$ .

□

**Proposición 4.23.** Sea  $\zeta$  una recta o una circunferencia determinada por tres puntos distintos,  $\{z_1, z_2, z_3\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ .

$$z \in \zeta \Leftrightarrow RC(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

**Prueba:** Sea  $T \in \mathbb{M}$ , tal que

$$\frac{az + b}{cz + d} = T(z) = RC(z, z_1, z_2, z_3)$$

donde  $\{a, b, c, d\} \subset \hat{\mathbb{C}}$  y  $ad - bc = 1$ .

Si  $z = z_3$  entonces  $z \in \zeta$  y además  $T(z) = \infty$ . Supongamos  $z \neq z_3$ , entonces la condición  $T(z) \in \mathbb{R}$  significa que  $\overline{T(z)} = T(z)$ , es decir:

$$z \neq -\frac{d}{c} \quad \text{y} \quad \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}$$

Entonces, tenemos que

$$T(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \Leftrightarrow (az + b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) = (\bar{a}\bar{z} + \bar{b})(cz + d)$$

Así,

$$T(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \Leftrightarrow (a\bar{c} - \bar{a}c)z\bar{z} + (a\bar{d} - \bar{a}d)z + (b\bar{c} - \bar{b}c)\bar{z} + (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0$$

Multiplicando por  $i \in \mathbb{C}$  tenemos que

$$T(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \Leftrightarrow i(a\bar{c} - \bar{a}c)z\bar{z} + i(a\bar{d} - \bar{a}d)z + i(b\bar{c} - \bar{b}c)\bar{z} + i(b\bar{d} - \bar{b}d) = 0$$

donde  $\{i(a\bar{c} - \bar{a}c), i(b\bar{d} - \bar{b}d)\} \subset \mathbb{R}$  y  $i(a\bar{d} - \bar{a}d) = \overline{i(b\bar{c} - \bar{b}c)}$ . Es decir, es la ecuación de una recta o una circunferencia que contiene a  $\{z_1, z_2, z_3\}$ .

□

**Proposición 4.24.** Sean  $\{z_1, z_2, z_3\} \subset \mathbb{C}$  distintos y  $\zeta$  la circunferencia (o recta) determinada por ellos.  $z'$  es el inverso de  $z$  respecto a  $\zeta$  si y sólo si

$$RC(z', z_1, z_2, z_3) = \overline{RC(z, z_1, z_2, z_3)}$$

**Prueba:**

- Supongamos que  $a \in \mathbb{C}$  y  $r \in \mathbb{R}^+$ . Sea  $\zeta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ . Puesto que la razón cruzada es invariante bajo las transformaciones de Möbius (Proposición 4.21), tenemos que, bajo  $t_{-a}(z) = z - a$ :

$$\begin{aligned} \overline{RC(z, z_1, z_2, z_3)} &= \overline{RC(z - a, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a)} \\ &= RC(\bar{z} - \bar{a}, \bar{z}_1 - \bar{a}, \bar{z}_2 - \bar{a}, \bar{z}_3 - \bar{a}) \end{aligned}$$

Para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$  tenemos que respecto a la circunferencia con centro el origen y radio  $r \in \mathbb{R}^+$  su inverso es  $(z_i - a)' = \frac{r^2}{\bar{z}_i - \bar{a}}$ . Dado que cada elemento en  $\{z_1, z_2, z_3\} \subset \zeta$  es su propio inverso respecto a la inversión en  $\zeta$ , tenemos que  $\{z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a\}$  son sus propios inversos respecto a la circunferencia con centro en el origen y radio  $r \in \mathbb{R}^+$ . Así, para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$  tenemos que  $(z_i - a)' = z_i - a$ . Por lo que  $\bar{z}_i - \bar{a} = \frac{r^2}{z_i - a}$ . Entonces

$$RC(\bar{z} - \bar{a}, \bar{z}_1 - \bar{a}, \bar{z}_2 - \bar{a}, \bar{z}_3 - \bar{a}) = RC\left(\bar{z} - \bar{a}, \frac{r^2}{z_1 - a}, \frac{r^2}{z_2 - a}, \frac{r^2}{z_3 - a}\right)$$

Ahora, bajo la inversión compleja en la circunferencia de radio  $r \in \mathbb{R}^+$  con centro en el origen,  $I_{(0,r)}(z) = \frac{r^2}{z}$  se tiene que:

$$RC\left(\bar{z} - \bar{a}, \frac{r^2}{z_1 - a}, \frac{r^2}{z_2 - a}, \frac{r^2}{z_3 - a}\right) = RC\left(\frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a\right)$$

Para terminar, bajo la traslación  $t_a(z) = z + a$  tenemos que

$$RC\left(\frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a\right) = RC\left(\frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a, z_1, z_2, z_3\right)$$

Y  $z'$  es el inverso de  $z$  respecto a  $\zeta$  si y sólo si  $z' = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a$ .

- Supongamos que  $\zeta$  es una recta en el plano,  $z'$  el inverso (simétrico) de  $z$  respecto a  $\zeta$ . Si  $\{z_1, z_2, z_3\} \subset \zeta$  son tres puntos distintos, la imagen bajo la transformación  $T(z) = RC(z, z_1, z_2, z_3)$  de  $\zeta$  es  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Cualquier circunferencia  $\zeta^*$  que contenga a  $\{z, z'\}$  tiene la propiedad de ser ortogonal a  $\zeta$ , por lo que  $T[\zeta^*]$  es ortogonal al eje real. Por lo tanto, todas las circunferencias que contienen a  $\{T(z), T(z')\}$  son ortogonales a la recta real, por lo que  $T(z)$  y  $T(z')$  son simétricos respecto al eje real, es decir  $T(z') = \overline{T(z)}$ . Entonces

$$RC(z', z_1, z_2, z_3) = T(z') = \overline{T(z)} = \overline{RC(z, z_1, z_2, z_3)}$$

□

**Proposición 4.25.** Si  $z$  y  $z'$  son puntos inversos respecto a una circunferencia (o recta)  $\zeta$  y  $T$  es una transformación de Möbius entonces  $T(z)$  y  $T(z')$  son inversos respecto a  $T[\zeta]$ .

**Prueba:** Sean  $\{z_1, z_2, z_3\} \subset \zeta$  distintos.

$T[\zeta]$  está determinada por  $\{T(z_1), T(z_2), T(z_3)\}$ . Puesto que la razón cruzada es invariante bajo las transformaciones de Möbius (Proposición 4.21) y la Proposición 4.24, tenemos que

$$\begin{aligned} RC(T(z'), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) &= RC(z', z_1, z_2, z_3) \\ &= \overline{RC(z, z_1, z_2, z_3)} \\ &= \overline{RC(T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3))} \end{aligned}$$

□

## CAPÍTULO 5

## PLANO HIPERBÓLICO

Antes de dar un modelo del plano hiperbólico, revisaremos algunos resultados que nos permitirán construir dicho modelo.

Del capítulo anterior (ecuación (4.3) de la página 71) tenemos que la inversión en el plano sobre una circunferencia con centro en un punto  $a \in \mathbb{C}$  de radio  $r \in \mathbb{R}^+$  es

$$\overline{I_{(a,r)}}(z) = \frac{a\bar{z} + (r^2 - |a|^2)}{\bar{z} - \bar{a}}$$

Consideremos al conjunto  $\mathbb{B}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ , a la circunferencia unitaria  $\partial\mathbb{B}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  y a cualquier circunferencia determinada por  $a \in \mathbb{C}$  y  $r \in \mathbb{R}^+$ :

$$\zeta_{(a,r)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$$

que sea ortogonal a  $\partial\mathbb{B}^2$ .

Una condición necesaria y suficiente para la existencia de dicha circunferencia es que  $|a| > 1$ . Puesto que  $\partial\mathbb{B}^2$  y  $\zeta_{(a,r)}$  son ortogonales,  $r^2 = |a|^2 - 1$ .

Entonces, por la ecuación (4.3), para toda circunferencia con centro en  $a$  ortogonal a  $\partial\mathbb{B}^2$  se tiene:

$$\overline{I_{(a,r)}}(z) = \frac{a\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{a}}$$



**Observación 5.1.** Si  $|a| \rightarrow \infty$  en una dirección fija, entonces  $\overline{I_{(a,r)}}$  converge a la reflexión euclidiana por la recta:

$$L_a = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \alpha b, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

donde  $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  es un vector ortogonal a la dirección de  $a$ .

Cuando la inversión en una circunferencia con centro en  $a \in \mathbb{C}$  y radio  $r \in \mathbb{R}^+$ , es una inversión en una circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{B}^2$ , se tiene que  $\overline{I_{(a,r)}}$  sólo depende del centro de la circunferencia, por lo que denotaremos a  $\overline{I_{(a,r)}}$  por  $I_a$ .

Así, el conjunto de las inversiones determinadas por circunferencias ortogonales a  $\partial\mathbb{B}^2$  con centro en  $a \in \hat{\mathbb{C}}$  ( $|a| > 1$ ) es:

$$Inv_{\mathbb{B}^2} = \left\{ \overline{I_a} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \mid \overline{I_a}(z) = \frac{a\bar{z} - t}{t\bar{z} - \bar{a}}, t \in \{0, 1\} \right\} \quad (5.1)$$

En base a la caracterización de (5.1) podemos ver a las inversiones complejas sobre circunferencias ortogonales a  $\partial\mathbb{B}^2$  con centro en  $a \in \hat{\mathbb{C}}$  ( $|a| > 1$ ), como elementos del conjunto:

$$Inv_{\mathbb{C}} = \left\{ I_a : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \mid I_a(z) = \frac{\bar{a}z - t}{tz - a}, t \in \{0, 1\} \right\} \quad (5.2)$$

## 5.1. Transformaciones de Möbius que preservan $\mathbb{B}^2$

**Teorema 5.2.** Las transformaciones de Möbius que dejan invariante  $\overline{\mathbb{B}^2}$  son de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \quad \text{donde } \{a, b\} \subset \mathbb{C} \text{ y } |a|^2 - |b|^2 = 1$$

**Demostración:** Notemos que  $\overline{\mathbb{B}^2} = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid |z| \leq 1\}$ .

Para  $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{C}$ , consideremos a las transformaciones de la forma

$$T(z) = \alpha \frac{z - \beta}{\beta z - 1} \quad \text{donde } |\alpha| = 1 \text{ y } |\beta| < 1$$

y veamos que dejan invariante a  $\overline{\mathbb{B}^2}$ .

- Si  $T(z) = \alpha \frac{z-\beta}{\beta z-1}$  donde  $|\alpha| = 1$  y  $|\beta| < 1$ , sea  $z \in \partial\mathbb{B}^2$ , así:

$$|T(z)| = |\alpha| \left| \frac{z-\beta}{\beta z-1} \right| = |\alpha| \frac{|z-\beta|}{|z||\bar{\beta}-\bar{z}|} = \frac{|z-\beta|}{|\bar{z}-\bar{\beta}|} = 1$$

Por lo que  $T$  deja invariante a  $\partial\mathbb{B}^2$ . Puesto que  $T$  es una transformación, es una función continua, así que  $T[\mathbb{B}^2] = \mathbb{B}^2$  o  $T[\mathbb{B}^2] = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{B}^2}$ . Como  $|\beta| < 1$ , implica que  $\beta \in \mathbb{B}^2$ , por lo que  $T(\beta) = \alpha \frac{\beta-\beta}{\beta\beta-1} = \alpha \frac{0}{|\beta|^2-1} = 0 \in \mathbb{B}^2$ . Por lo tanto  $T[\overline{\mathbb{B}^2}] = \overline{\mathbb{B}^2}$ .

- Si  $T$  es una transformación de Möbius que deja invariante a  $\overline{\mathbb{B}^2}$ ,  $T$  es un homeomorfismo de  $\overline{\mathbb{B}^2}$  en si mismo, por lo que  $T[\partial\mathbb{B}^2] = \partial T[\mathbb{B}^2]$ ; es decir,  $|z| = 1 \Leftrightarrow |T(z)| = 1$ . Como  $T$  deja invariante a  $\mathbb{B}^2$ , tenemos que si  $T(\beta) = 0$  entonces  $|\beta| < 1$ . Sabemos que el inverso de  $\beta$  respecto a  $\partial\mathbb{B}^2$  debe ser  $\beta' = T^{-1}(\infty)$  (Proposición 4.25 de la página 82), por lo que  $\beta' = \bar{\beta}^{-1}$ . Entonces,  $T$  es de la forma

$$T(z) = \alpha \frac{z-\beta}{\beta z-1} \quad \text{con } |\beta| < 1$$

Si elegimos  $z \in \partial\mathbb{B}^2$ , puesto que  $T$  deja invariante a  $\overline{\mathbb{B}^2}$ , tenemos que

$$1 = |T(z)| = |\alpha| \frac{|z-\beta|}{|\beta z-1|} = |\alpha| \frac{|z-\beta|}{|\beta z-z\bar{z}|} = |\alpha| \frac{|z-\beta|}{|z||\bar{\beta}-\bar{z}|} = |\alpha|$$

Por lo tanto, las transformaciones de Möbius que dejan invariante a  $\overline{\mathbb{B}^2}$  son de la forma

$$T(z) = \alpha \frac{z-\beta}{\beta z-1} \quad \text{donde } \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{C}, |\alpha| = 1 \text{ y } |\beta| < 1$$

Encontraremos un  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\alpha = \lambda/\bar{\lambda}$ :

Si  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$  donde  $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{R}$ , tenemos que  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$ .

- Si  $\alpha_2 = 0$  entonces  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dado que  $|\alpha|^2 = 1$ , tenemos que  $\alpha = 1$  o  $\alpha = -1$ .
  - Si  $\alpha = 1$  entonces cualquier  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  cumple.
  - Si  $\alpha = -1$  entonces para cualquier  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\lambda = iy$  cumple.

- Si  $\alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  entonces para cualquier  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  si  $y = x(1 - \alpha_1)/\alpha_2$  y  $\lambda = x + iy$  tenemos que

$$\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} = \frac{x + i\frac{x(1-\alpha_1)}{\alpha_2}}{x - i\frac{x(1-\alpha_1)}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_2 + i(1 - \alpha_1)}{\alpha_2 - i(1 - \alpha_1)} = \alpha_1 + i\alpha_2 = \alpha$$

Así, las transformaciones de la forma

$$T(z) = \alpha \frac{z - \beta}{\beta z - 1} \quad \text{donde } \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{C}, |\alpha| = 1 \text{ y } |\beta| < 1$$

pueden verse como

$$T(z) = \frac{i\lambda}{i\bar{\lambda}} \frac{z - \beta}{\beta z - 1} = \frac{(i\lambda)z + (-i\lambda\beta)}{(i\bar{\lambda}\beta)z + (-i\bar{\lambda})} = \frac{(i\lambda)z + (-i\lambda\beta)}{(-i\lambda\beta)z + (i\lambda)}$$

Si  $a = (i\lambda)/(\sqrt{|\lambda|^2(1 - |\beta|^2)})$  y  $b = (-i\lambda\beta)/(\sqrt{|\lambda|^2(1 - |\beta|^2)})$  entonces

$$T(z) = \frac{(i\lambda)z + (-i\lambda\beta)}{(-i\lambda\beta)z + (i\lambda)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{|\lambda|^2(1 - |\beta|^2)}}}{\frac{1}{\sqrt{|\lambda|^2(1 - |\beta|^2)}}} \frac{(i\lambda)z + (-i\lambda\beta)}{(-i\lambda\beta)z + (i\lambda)} = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}$$

donde  $\{a, b\} \subset \mathbb{C}$  y  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ . ■

Denotaremos como  $\mathbb{M}^*$  al grupo de las transformaciones de Möbius que dejan invariante a  $\overline{\mathbb{B}^2}$ ; es decir:

$$\mathbb{M}^* = \left\{ T \in \mathbb{M} \mid T(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}; \{a, b\} \subset \mathbb{C} \text{ y } |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

**Teorema 5.3.** El grupo generado por  $\mathbb{M}^*$  y por la conjugación compleja es el grupo generado por las inversiones en arcos de circunferencias ortogonales a  $\partial\mathbb{B}^2$ .

**Demostración:** Es suficiente probar que cada conjunto generador está contenido en cada grupo para que el grupo generado sea el mismo, por lo que basta notar que:

- Una inversión  $\overline{T}_a(z) = \frac{a\bar{z}-t}{t\bar{z}-\bar{a}}$  donde  $a \in \hat{\mathbb{C}}$ ,  $|a| > 1$  y  $t \in \{0, 1\}$ , puede verse como un elemento en  $\mathbb{M}^*$  compuesto con la conjugación compleja:
  - Si  $t = 0$ , la transformación corresponde a una reflexión euclidiana por una recta por el origen. Si el ángulo que forma la recta con respecto al eje real es  $\theta$ , la reflexión puede verse como una rotación por un ángulo de  $-2\theta$ , seguida de la reflexión en el eje real; es decir, si  $b \in \partial\mathbb{B}^2$  donde el argumento de  $b$  es  $-2\theta$ , sea  $T(z) = bz$ . Así  $\overline{T}_a(z) = \overline{T(z)} = \overline{bz}$ , que es una transformación de Möbius seguida de la conjugación compleja.
  - Si  $t = 1$ , puesto que  $|a| > 1$  implica  $|a|^2 > 1$ , entonces  $\bar{a}a - 1^2 > 0$ . Ahora, podemos considerar a  $T(z) = \frac{\bar{a}z-1}{z-\bar{a}}$ , que es una transformación de Möbius si se divide a los coeficientes por  $\sqrt{\bar{a}a - 1}$ . Por lo que  $\overline{T}_a(z) = \overline{T(z)} = \frac{a\bar{z}-1}{\bar{z}-\bar{a}}$ .
- Si  $(\bar{\phantom{x}})$  es la conjugación compleja, consideremos a la reflexión euclidiana por el eje  $X$ ; es decir la reflexión por la recta ortogonal a  $i \in \mathbb{C}$ :

$$\overline{T}_i(z) = \frac{i\bar{z} - 0}{0\bar{z} - i} = \frac{i\bar{z}}{-i} = \frac{i\bar{z}}{i} = \bar{z}$$

- Si  $T \in \mathbb{M}^*$

$$T(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}} \quad \text{donde } \{a, b\} \subset \mathbb{C} \text{ y } |a|^2 - |b|^2 = 1$$

Puesto que  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ :

- Si  $b = 0$  entonces  $|a|^2 = 1$  y la transformación de Möbius es una rotación euclidiana por el origen que, por los resultados del capítulo primero, es la composición de dos reflexiones euclidianas por rectas por el origen; es decir, es la composición de dos inversiones por diámetros de  $\partial\mathbb{B}^2$ .
- Si  $b \neq 0$ . Consideremos a  $c = a/\bar{b}$ . Dado que  $|a| = \sqrt{1 + |b|^2}$

$$|c| = \left| \frac{a}{\bar{b}} \right| = \frac{|a|}{|b|} = \frac{\sqrt{1 + |b|^2}}{|b|} = \sqrt{\frac{1 + |b|^2}{|b|^2}} > 1$$

Así, podemos considerar la inversión por el arco de circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{B}^2$  con centro en  $c$ ; es decir:

$$\overline{T}_c(z) = \frac{c\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{c}} = \frac{\frac{a}{b}\bar{z} - 1}{\bar{z} - \frac{\bar{a}}{b}}$$

También, podemos considerar a la reflexión euclidiana en la recta por el origen ortogonal a la dirección de  $b$ ; es decir:

$$\overline{I}_b(z) = \frac{b\bar{z} - 0}{0\bar{z} - \bar{b}} = \frac{b\bar{z}}{-\bar{b}}$$

Entonces,

$$\overline{I}_c \circ \overline{I}_b(z) = \frac{\frac{a}{b} \overline{\left(\frac{b\bar{z}}{-\bar{b}}\right)} - 1}{\overline{\left(\frac{b\bar{z}}{-\bar{b}}\right)} - \frac{\bar{a}}{b}} = \frac{\frac{a}{b} \left(\frac{\bar{b}z}{-b}\right) - 1}{\left(\frac{\bar{b}z}{-b}\right) - \frac{\bar{a}}{b}} = \frac{\frac{a\bar{b}z + b\bar{b}}{-bb}}{\frac{\bar{b}z + \bar{a}}{-b}} = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}$$

Por lo tanto, si  $T \in \mathbb{M}^*$  entonces  $T$  es la composición de dos inversiones por arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{B}^2$ .

- Para la composición de una transformación de Möbius que deje invariante a  $\mathbb{B}^2$  con la conjugación compleja, es suficiente notar que es la composición de tres inversiones (por los incisos anteriores).

Puesto que los conjuntos generadores están contenidos en cada grupo, tenemos que los grupos generados son los mismos. ■

Ahora, con estos resultados buscaremos un modelo del plano hiperbólico.

Un modelo para el plano hiperbólico, que denotaremos como  $\mathbb{H}^2$ , es el espacio formado por el conjunto  $\mathbb{B}^2$  en donde las líneas hiperbólicas son los arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{B}^2$ .

**Lema 5.4.** Para cualquier  $\{A, B\} \subset \mathbb{H}^2$ , existe una única línea hiperbólica que contiene a  $\{A, B\}$ .

**Demostración:** Sean  $\{A, B\} \subset \mathbb{H}^2$ .

- Si  $\{A, B, 0\}$  es una terna de puntos colineales (en una recta euclidiana) entonces el diámetro que los contiene es ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$ .

- Si  $\{A, B, 0\}$  no son colineales (en una recta euclidiana, Figura 5.1).

Para cualquier  $a \in \mathbb{C}$  y  $r \in \mathbb{R}^+$  se tiene que  $\overline{I_{(a,r)}}$  preserva el conjunto de circunferencias y rectas en el plano. Además, si  $\zeta_{(a,r)}$  es la circunferencia con centro en  $a \in \mathbb{C}$  y radio  $r \in \mathbb{R}^+$  entonces cualquier circunferencia  $\zeta$  ortogonal a  $\zeta_{(a,r)}$  permanece invariante bajo  $\overline{I_{(a,r)}}$  (Lema 4.11).

Puesto que dados tres puntos existe una única circunferencia que los contiene, consideremos a la circunferencia  $\zeta_{A,B}$  que contiene a  $\{A, B, \overline{I_{(0,1)}}(A)\}$ . Por lo anterior tenemos que  $\zeta_{A,B}$  es ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$ .

**Observación 5.5.**  $\{A, B, \overline{I_{(0,1)}}(A), \overline{I_{(0,1)}}(B)\} \subset \zeta_{A,B}$ .

■

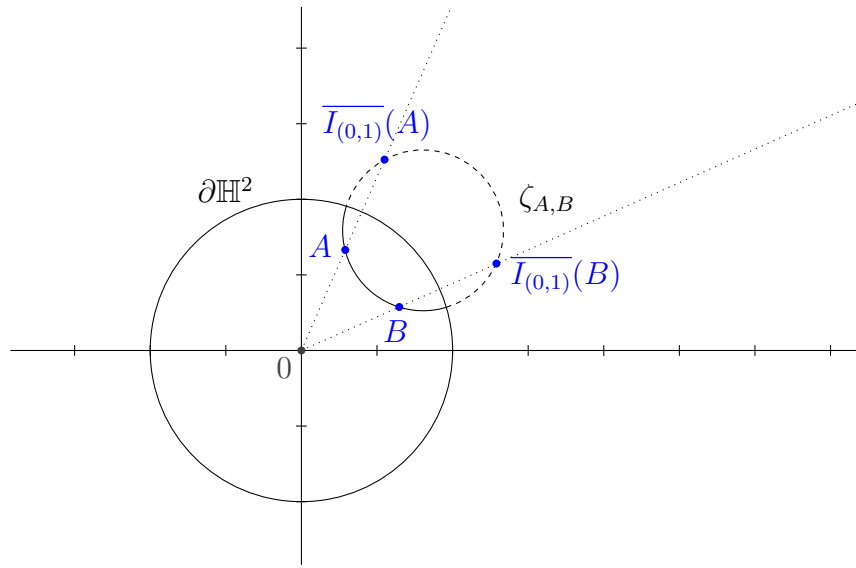


Figura 5.1: Arco de circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  por  $A$  y  $B$ .

**Observación 5.6.** Para cualquier  $\{A, B\} \subset \partial\mathbb{H}^2$  existe un único arco de circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  que contiene a  $\{A, B\}$ .

**Prueba:** Puesto que existe una única recta tangente a  $\partial\mathbb{H}^2$  por cada punto en ella, sean  $l_A$  la recta tangente a  $\partial\mathbb{H}^2$  por  $A$  y  $l_B$  la recta tangente a  $\partial\mathbb{H}^2$  por  $B$ .

- Si  $l_A \cap l_B = \emptyset$  entonces  $\{A, B, 0\}$  es un conjunto de puntos colineales. Por lo que el segmento de recta euclidiana determinado por  $A$  y  $B$  es un diámetro, que es ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$ .
- Si  $l_A \cap l_B = \{a\}$ ,  $\zeta_{(a, \|A-a\|)}$  es ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  y  $\{A, B\} \subset \zeta_{(a, \|A-a\|)}$ .

□

## 5.2. Métrica hiperbólica

Recordemos que si una función  $g$  es  $\mathbb{C}$ -diferenciable, su derivada (denotada como  $g'$ ) nos da el **factor de dilatación** infinitesimal de la función en cada punto: si  $\alpha(t)$  es una curva diferenciable en el dominio de la función, cuya velocidad en el instante  $t$  está dada por  $\alpha'(t)$ , entonces la imagen de la curva bajo  $g$  es la curva  $g(\alpha(t))$  cuya velocidad en el instante  $t$  es  $g'(\alpha(t))\alpha'(t)$ .

Así, cualquier  $I_a \in \text{Inv}_{\mathbb{C}}$  es una función compleja diferenciable, cuya derivada es:

$$I'_a(z) = \frac{t^2 - |a|^2}{(tz - a)^2}$$

Para cualquier  $z \in \mathbb{H}^2$ , se tiene que  $I'_a(z)$  no depende de la función  $I_a$  que se elija, sino solamente de la distancia de  $z$  y de  $I_a(z)$  a la frontera de  $\mathbb{H}^2$ :

$$|I'_a(z)| = \left| \frac{t^2 - |a|^2}{(tz - a)^2} \right| = \frac{|t^2 - |a|^2|}{|tz - a|^2}$$

Como  $z \in \mathbb{H}^2$  y  $|a| > 1$ , entonces:

$$\begin{aligned}
|I'_a(z)| &= \frac{(|a|^2 - t^2)(1 - |z|)}{(|tz - a|^2)(1 - |z|)} \\
&= \frac{(a\bar{a} - t^2)(1 - z\bar{z})}{(tz - a)(t\bar{z} - \bar{a})(1 - z\bar{z})} \\
&= \frac{(a\bar{a} - t^2)(1 - z\bar{z}) + tz\bar{a} - tz\bar{a} + ta\bar{z} - ta\bar{z}}{(tz - a)(t\bar{z} - \bar{a})(1 - z\bar{z})} \\
&= \frac{(tz - a)(t\bar{z} - \bar{a}) - (\bar{a}z - t)(a\bar{z} - t)}{(tz - a)(t\bar{z} - \bar{a})(1 - z\bar{z})} \\
&= \frac{1}{1 - z\bar{z}} \left( 1 - \left( \frac{\bar{a}z - t}{tz - a} \right) \left( \frac{a\bar{z} - t}{t\bar{z} - \bar{a}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{1 - z\bar{z}} (1 - I_a(z)\bar{I}_a(z)) = \frac{1 - |I_a(z)|^2}{1 - |z|^2}
\end{aligned}$$

Lo que implica que el factor de dilatación de  $I_a$  es inversamente proporcional a la distancia de un punto a  $\partial\mathbb{H}^2$  y directamente proporcional a la distancia de su imagen a  $\partial\mathbb{H}^2$ .

Lo anterior muestra que las transformaciones  $I_a$  no son isometrías con la métrica euclidiana en  $\mathbb{H}^2$ , puesto que de serlo  $|I'_a(z)| = 1$  para cualquier  $z \in \mathbb{H}^2$ . Buscaremos una manera de medir vectores basados cualquier  $z \in \mathbb{H}^2$  en la cual  $I_a$  sea una isometría en  $\mathbb{H}^2$ .

**Definición 5.7.** Para cada vector  $u$  basado en un punto  $z \in \mathbb{H}^2$ , definimos la **longitud hiperbólica** de  $u$  como:

$$|u|_H = \frac{1}{1 - |z|^2} |u|$$

donde  $|u|$  es la longitud euclidiana del vector  $u$ .

En base a esta definición, tenemos una forma de medir la longitud de los vectores (por lo tanto la longitud de cualquier curva diferenciable) y la distancia entre dos puntos si consideramos el ínfimo de las longitudes de las trayectorias entre ellos.



**Teorema 5.8.** Las transformaciones  $I_a : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  son isometrías con  $|\cdot|_H$ .

**Demostración:** Sea  $z_0 \in \mathbb{H}^2$ . Consideremos cualquier vector  $u$  basado en  $z_0$ . La imagen de  $u$  bajo la diferencial de  $I_a$ , es un vector  $v$  basado en  $I_a(z_0)$  tal que

$$|v| = |I'_a(z_0)||u|$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |v|_H &= \frac{1}{1 - |I_a(z_0)|^2} |v| \\ &= \frac{1}{1 - |I_a(z_0)|^2} |I'_a(z_0)||u| \\ &= \frac{1}{1 - |I_a(z_0)|^2} \frac{1 - |I_a(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2} |u| = |u|_H \end{aligned}$$

por lo que  $I_a$  preserva la longitud hiperbólica de cada vector en  $\mathbb{H}^2$  y con esto, la longitud de todas las curvas en  $\mathbb{H}^2$ . ■

**Corolario 5.9.** Las transformaciones  $\overline{I}_a : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  son isometrías con  $|\cdot|_H$ .

**Prueba:** Recordemos que la conjugación compleja no es una función diferenciable, pero podemos medir la longitud de los vectores si  $I_a$  es diferenciable:

Si  $z_0 \in \mathbb{H}^2$  y  $u$  es un vector basado en  $z_0$ , por el Teorema 5.8, tenemos que:

$$|v| = |I'_a(z_0)||u|$$

donde  $v$  es la imagen bajo la diferencial de  $I_a$  de  $u$  que está basada en  $I_a(z_0)$ .

Puesto que la conjugación compleja es la reflexión sobre el eje real, tenemos que es una isometría euclidiana, por lo que preserva la longitud euclidiana de los vectores.

Por lo tanto, las transformaciones  $\overline{I}_a$  también son isometrías de  $\mathbb{H}^2$ . □

### 5.3. Geodésicas en $\mathbb{H}^2$

Veamos que, con esta forma de medir la longitud de vectores, los arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  son las geodésicas en  $\mathbb{H}^2$ .

**Lema 5.10.** Si  $\zeta$  es una circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  y  $l_H = \mathbb{H}^2 \cap \zeta$  (el arco de  $\zeta$  totalmente contenido en  $\mathbb{H}^2$ ), existe una transformación  $\overline{I}_a$  tal que  $\overline{I}_a[l_H]$  es un diámetro de  $\partial\mathbb{H}^2$ .

**Demostración:** Sea  $\zeta$  una circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$ .

- Si  $\zeta$  es una recta por el origen, entonces  $l_H$  ya es un diámetro de  $\partial\mathbb{H}^2$ .
- Si  $\zeta$  no es una recta por el origen, tomemos cualquier  $a \in \zeta$  tal que  $|a| > 1$  y consideremos a la transformación

$$\overline{I}_a(z) = \frac{a\bar{z} - 1}{\bar{z} - \bar{a}}$$

Por los resultados anteriores, tenemos que la transformación que preserva ángulos entre curvas (Corolario 4.10) y manda circunferencias que contienen a  $a$  en rectas (Lema 4.7). Como  $l_H$  es un arco ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  y  $\partial\mathbb{H}^2$  es invariante bajo  $\overline{I}_a$  (Lema 4.11), entonces  $\overline{I}_a[l_H]$  es una recta ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$ , por lo que debe ser un diámetro (Figura 5.2).

■

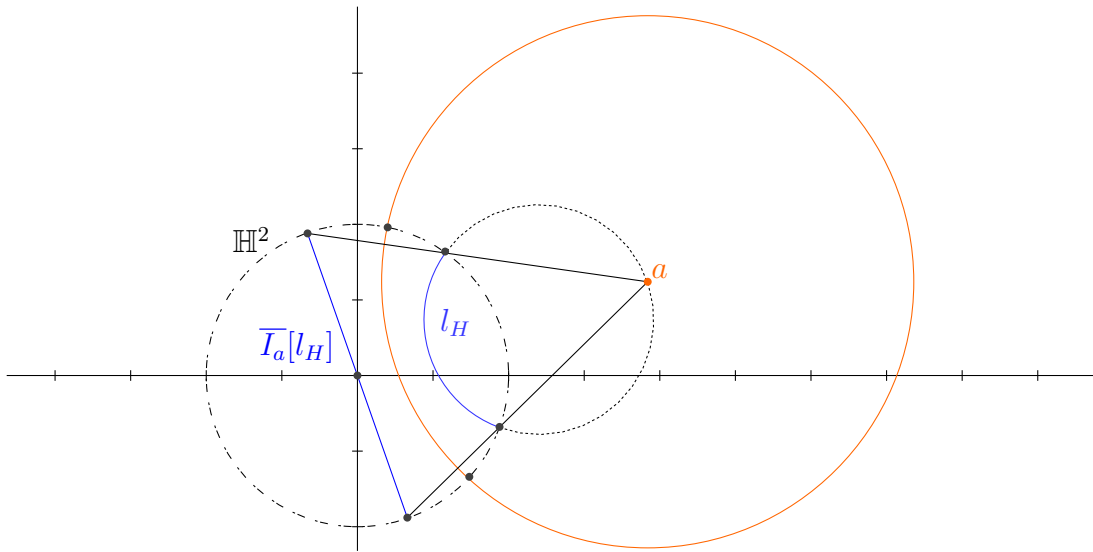


Figura 5.2:  $\overline{I}_a$  manda a  $l_H$  a un diámetro de  $\partial\mathbb{H}^2$

**Teorema 5.11.** Las geodésicas en  $\mathbb{H}^2$  con  $| \cdot |_H$  son los arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$ .

**Demostración:** Puesto que para cualquier arco de circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  existe una transformación  $\overline{T}_a$  tal que la imagen bajo la transformación del arco de circunferencia ortogonal es un diámetro de  $\partial\mathbb{H}^2$  (Lema 5.10), es suficiente probar que un diámetro es una geodésica de  $\mathbb{H}^2$ , pues  $\overline{T}_a$  es una isometría con  $| \cdot |_H$  (Corolario 5.9).

Dado que las reflexiones euclidianas con eje una recta por el origen y las rotaciones euclidianas con centro en el origen son transformaciones que preservan esta métrica, es suficiente probar que el diámetro contenido en el eje real es una geodésica, puesto que cualquier diámetro de  $\partial\mathbb{H}^2$  se puede enviar al diámetro de  $\partial\mathbb{H}^2$  contenido en el eje real con una isometría euclidiana.

Sea  $\{P, Q\} \subset (-1, 1)$  y  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  la parametrización de una curva en  $\mathbb{H}^2$  que sea  $C^1$  de la forma  $\gamma(t) = (g(t), h(t))$  tal que  $\gamma(0) = P$  y  $\gamma(1) = Q$ .

La longitud de la curva parametrizada por  $\gamma$  es

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^1 |\gamma'(t)|_H dt = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{|(g'(t), h'(t))|}{1 - (g(t)^2 + h(t)^2)} dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2}}{1 - (g(t)^2 + h(t)^2)} dt \end{aligned}$$

Consideremos a la proyección sobre el eje real  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como  $\pi(x_1, x_2) = (x_1, 0)$  (Figura 5.3). Tenemos que

$$D\pi(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial 0}{\partial x_1} & \frac{\partial 0}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$D(\pi \circ \gamma)(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$|D(\pi \circ \gamma)(t)|^2 = |(g'(t), 0)|^2 = g'(t)^2 \leq g'(t)^2 + h'(t)^2$$

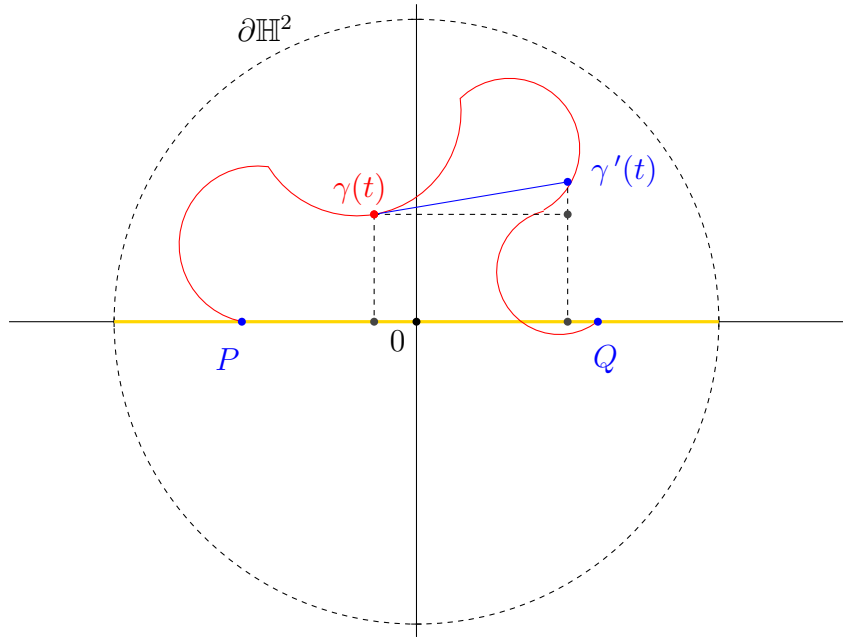


Figura 5.3: Proyección de trayectorias en  $\mathbb{H}^2$  al eje real.

Lo que implica que

$$|D(\pi \circ \gamma)(t)| \leq \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} = |(g'(t), h'(t))| = |\gamma'(t)|$$

Ahora, observemos que  $g(t)^2 \leq h(t)^2$  implica que  $1 - (g(t)^2 + h(t)^2) \leq 1 - g(t)^2$ . Dado que  $|\gamma(t)| < 1$ , se tiene que  $0 < 1 - (g(t)^2 + h(t)^2) \leq 1 - g(t)^2$  y por lo tanto

$$\frac{1}{1 - g(t)^2} \leq \frac{1}{1 - (g(t)^2 + h(t)^2)}$$

Así, podemos concluir que

$$\frac{|D(\pi \circ \gamma)(t)|}{1 - g(t)^2} \leq \frac{|\gamma'(t)|}{1 - (g(t)^2 + h(t)^2)}$$

Es decir, dado que  $\gamma'(t)$  es un vector basado en  $\gamma(t) = (g(t), h(t))$  y  $D(\pi \circ \gamma)(t)$  es un vector basado en  $(\pi \circ \gamma)(t) = (g(t), 0)$ , tenemos que

$$|D(\pi \circ \gamma)(t)|_H = \frac{|D(\pi \circ \gamma)(t)|}{1 - |\pi \circ \gamma(t)|^2} \leq \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} = |\gamma'(t)|_H$$

Por lo tanto,

$$l(\pi \circ \gamma) = \int_0^1 |D(\pi \circ \gamma)(t)|_H dt \leq \int_0^1 |\gamma'(t)|_H dt = l(\gamma)$$

Además, tenemos que la igualdad entre estas longitudes se da cuando la curva parametrizada por  $\gamma$  es de la forma  $\gamma(t) = (g(t), 0)$ ; es decir, cuando es un diámetro de  $\partial\mathbb{H}^2$ .

■

El Teorema 5.11 nos permitirá calcular la distancia entre dos puntos en  $\mathbb{H}^2$ .

**Teorema 5.12.** Sean  $\{A, B\} \subset \mathbb{H}^2$ . La distancia entre  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{H}^2$  es

$$d_{\mathbb{H}^2}(A, B) = \frac{1}{2} |\ln(RC(P, B, Q, A))|$$

donde  $\{P, Q\} \subset \partial\mathbb{H}^2$  son las intersecciones de la línea hiperbólica determinada por  $A$  y  $B$  con la frontera del disco.

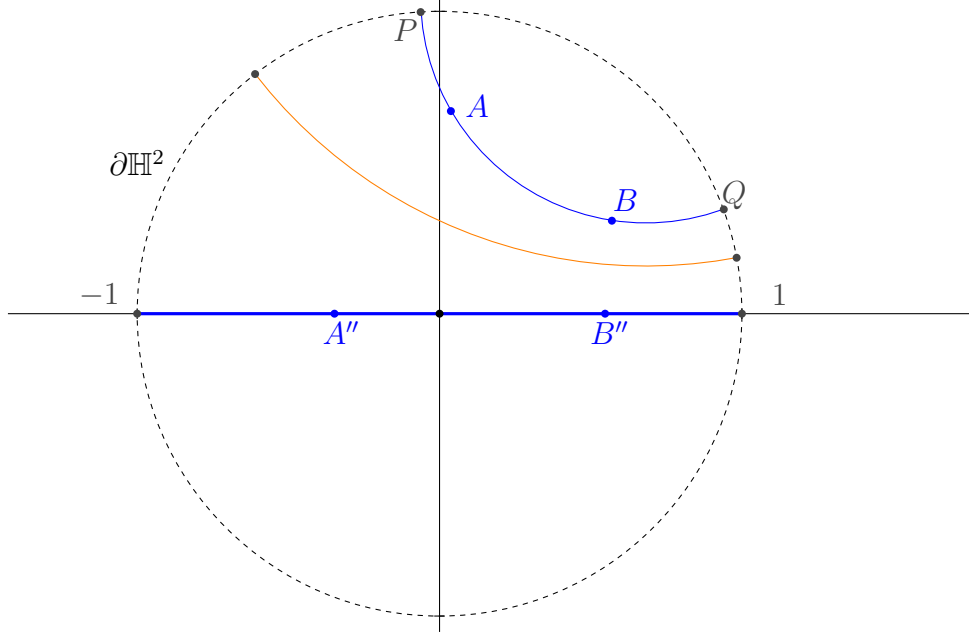
**Demostración:**

Por el Lema 5.4 (página 88), tenemos que existe una única línea hiperbólica  $l_H$  que contiene a  $\{A, B\}$ .

Si  $\{0, A, B\}$  no son colineales, se tiene que existe una transformación  $\bar{I}_a$  tal que  $\bar{I}_a[l_H]$  es un diámetro de  $\partial\mathbb{H}^2$  (Lema 5.10, página 93). Sean

$$\bar{I}_a(A) = A' \quad ; \quad \bar{I}_a(B) = B' \quad ; \quad \bar{I}_a(P) = P' \quad ; \quad \bar{I}_a(Q) = Q'$$

Observemos que la imagen bajo la transformación  $\bar{I}_a$  de  $\{P, Q\} \subset \partial\mathbb{H}^2$  son los extremos de un diámetro. Con una reflexión euclidiana  $r_L$  por una recta por el origen (que es una isometría en  $\mathbb{H}^2$  (Corolario 5.9)), es posible llevar a dicho diámetro al diámetro contenido en el eje real. Sean

Figura 5.4: Distancia entre dos puntos en  $\mathbb{H}^2$ .

$$r_L \circ \bar{I}_a(A) = A'' \quad ; \quad r_L \circ \bar{I}_a(B) = B''$$

$$r_L \circ \bar{I}_a(P) = P'' \quad ; \quad r_L \circ \bar{I}_a(Q) = Q''$$

Notemos que el diámetro determinado por  $P''$  y  $Q''$  está sobre el eje real, por lo que  $P'' \in \{-1, 1\}$  y  $Q'' \in \{-1, 1\} \setminus \{P''\}$  (Figura 5.4). Entonces  $\{0, A'', B''\}$  son colineales, por lo que podemos calcular la longitud hiperbólica del segmento de línea hiperbólica que determinan de la siguiente manera:

Dado que  $\{A'', B''\} \subset (-1, 1)$ ; es decir,  $Re(A'') = A''$  y  $Re(B'') = B''$ , sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$  dada por  $\gamma(t) = tB'' + (1-t)A''$ .

Por lo tanto, la longitud de la curva parametrizada por  $\gamma$  es:

$$\begin{aligned}
 l(\gamma) &= \int_0^1 |\gamma'(t)|_H dt = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{|B'' - A''|}{1 - (tB'' + (1-t)A'')^2} dt \\
 &= \frac{|B'' - A''|}{2(B'' - A'')} \ln \left( \frac{1 - tB'' - (1-t)A''}{1 + tB'' + (1-t)A''} \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{|B'' - A''|}{2(B'' - A'')} \left( \ln \left( \frac{1 - B''}{1 + B''} \right) - \ln \left( \frac{1 - A''}{1 + A''} \right) \right) \\
 &= \frac{|B'' - A''|}{2(B'' - A'')} \ln \left( \frac{(1 - B'')}{(1 - A'')} \cdot \frac{(1 + A'')}{(1 + B'')} \right)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

- Si  $0 < B'' - A''$  entonces

$$l(\gamma) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(1 - B'')}{(1 - A'')} \cdot \frac{(1 + A'')}{(1 + B'')} \right)$$

Consideremos a la transformación de Möbius  $R$  que envía a la terna ordenada  $(B'', -1, A'')$  a la terna ordenada  $(0, 1, \infty)$  tenemos que

$$R(z) = \frac{z - B''}{z - A''} \cdot \frac{1 + A''}{1 + B''}$$

Por lo que

$$RC(1, B'', -1, A'') = \frac{1 - B''}{1 - A''} \cdot \frac{1 + A''}{1 + B''}$$

Lo que implica que, dado que la composición de  $\overline{I}_a$  con la reflexión  $r_L$  es una transformación de Möbius (Teorema 5.3, página 86) y las transformaciones de Möbius preservan la razón cruzada (Proposición 4.21, página 78):

$$l(\gamma) = \frac{1}{2} \ln (RC(1, B'', -1, A''))$$

$$\begin{array}{l|l}
\text{Si } P'' = 1 \text{ y } Q'' = -1 & \text{Si } P'' = -1 \text{ y } Q'' = 1 \\
l(\gamma) = \frac{1}{2} \ln (RC(1, B'', -1, A'')) & l(\gamma) = \frac{1}{2} \ln (RC(1, B'', -1, A'')) \\
= \frac{1}{2} \ln (RC(P', B', Q', A')) & = \frac{1}{2} \ln (RC(Q', B', P', A')) \\
= \frac{1}{2} \ln (RC(P, B, Q, A)) & = \frac{1}{2} \ln (RC(Q, B, P, A))
\end{array}$$

Por lo tanto, dependiendo de como nombremos a las imágenes bajo las transformaciones de Möbius que hemos considerado de los puntos en la frontera, tenemos que pasa sólo una de las siguientes:

- $l(\gamma) = \frac{1}{2} \ln (RC(P, B, Q, A))$  si  $P'' = 1$  y  $Q'' = -1$
- $l(\gamma) = \frac{1}{2} \ln (RC(Q, B, P, A))$  si  $P'' = -1$  y  $Q'' = 1$

Notemos que en general se tiene que

$$\begin{aligned}
RC(W, X, Y, Z) &= \left( \frac{W - X}{W - Z} \right) \left( \frac{Y - Z}{Y - X} \right) \\
&= \left( \left( \frac{W - X}{W - Z} \right)^{-1} \left( \frac{Y - Z}{Y - X} \right)^{-1} \right)^{-1} \\
&= \left( \left( \frac{W - Z}{W - X} \right) \left( \frac{Y - X}{Y - Z} \right) \right)^{-1} \\
&= RC(Y, X, W, Z)^{-1}
\end{aligned}$$

Por lo que, si no consideramos el orden de los puntos  $P''$  y  $Q''$  tenemos que

$$l(\gamma) = \frac{1}{2} |\ln (RC(P, B, Q, A))| = \frac{1}{2} |\ln (RC(Q, B, P, A))|$$

- Si  $B'' - A'' < 0$ , de una manera análoga al inciso anterior, tenemos que sin considerar el orden de los puntos  $P''$  y  $Q''$ :

$$l(\gamma) = \frac{1}{2} |\ln (RC(P, A, Q, B))| = \frac{1}{2} |\ln (RC(Q, A, P, B))|$$



Notemos ahora que en general se tiene que

$$\begin{aligned}
 RC(W, X, Y, Z) &= \left( \frac{W - X}{W - Z} \right) \left( \frac{Y - Z}{Y - X} \right) \\
 &= \left( \left( \frac{W - X}{W - Z} \right)^{-1} \left( \frac{Y - Z}{Y - X} \right)^{-1} \right)^{-1} \\
 &= \left( \left( \frac{W - Z}{W - X} \right) \left( \frac{Y - X}{Y - Z} \right) \right)^{-1} \\
 &= RC(W, Z, Y, X)^{-1}
 \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} |\ln (RC(P, B, Q, A))| &= \frac{1}{2} |\ln (RC(Q, B, P, A))| \\
 &= \frac{1}{2} |\ln (RC(Q, A, P, B))| \\
 &= \frac{1}{2} |\ln (RC(P, A, Q, B))|
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$l(\gamma) = \frac{1}{2} |\ln (RC(P, B, Q, A))|$$

■

## 5.4. Isometrías hiperbólicas

Ya hemos probado que las inversiones sobre arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$ , así como la composición de cada una de las anteriores con la conjugación compleja son isometrías de  $\mathbb{H}^2$  (Teorema 5.8 y el Corolario 5.9, página 92).

Por lo tanto, podemos dar la siguiente definición:

**Definición 5.13.** Una transformación  $\bar{r}_{l_H}$  de  $\mathbb{H}^2$  es una **reflexión hiperbólica** si y sólo si  $\bar{r}_{l_H}$  es una inversión por una arco de circunferencia  $l_H$  ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$ .

Por lo tanto, las reflexiones hiperbólicas son isometrías hiperbólicas. Esto nos permitirá mostrar que  $\mathbb{H}^2$  es un espacio homogéneo; es decir las reflexiones hiperbólicas actúan de manera transitiva en  $\mathbb{H}^2$ .

**Lema 5.14.** Para cualquier  $\{A, B\} \subset \mathbb{H}^2$ , existe una línea hiperbólica  $m_H$  tal que  $A$  es la imagen bajo la reflexión hiperbólica en  $m_H$  de  $B$  y viceversa.

**Demostración:** Sea  $l_H$  a el único arco de circunferencia ortogonal a la frontera de  $\mathbb{H}^2$  que contiene a  $\{A, B\}$  (Lema 5.4, página 88). Si  $\{P, Q\} \subset \partial\mathbb{H}^2$  son los puntos de intersección de  $l_H$  con la frontera del disco, consideremos a  $n$  la recta euclidiana determinada por  $\{A, B\}$  y  $o$  la recta determinada por  $\{P, Q\}$ . Sea  $n \cap o = \{a\}$  (Figura 5.5).

La inversión por la circunferencia ortogonal a la frontera del disco con centro en  $a \in \mathbb{C}$  (la transformación  $\overline{I}_a$ ) tiene la propiedad de dejar invariante a la frontera del disco y enviar circunferencias ortogonales en circunferencias ortogonales.

Puesto que la línea hiperbólica  $l_H$  es un arco de circunferencia ortogonal a la frontera del disco, la imagen bajo la inversión por la circunferencia con centro en  $a$  de  $l_H$  es un arco de circunferencia ortogonal a la frontera del disco.

Dado que las inversiones dejan invariantes a los rayos de rectas por el centro de inversión, si la imagen bajo la inversión de  $A$  es  $A'$  y la imagen bajo la inversión de  $B$  es  $B'$  tendríamos que  $\{A, B, A', B'\} \subset n$  y dos arcos de circunferencia ortogonales a la frontera del disco serían la imagen bajo la inversión de  $l_H$ : los arcos determinados por  $\{A, A'\}$  y  $\{B, B'\}$ . Por lo que la única posibilidad es que  $A' = B$  y  $B' = A$ .

Denotemos por  $m_H$  al arco de circunferencia totalmente contenido en  $\mathbb{H}^2$  de la circunferencia ortogonal a la frontera del disco con centro en  $a$ .

■

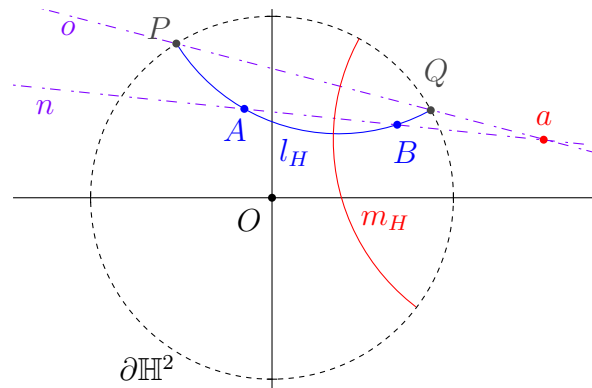


Figura 5.5: La inversión por  $m_H$  envía  $A$  en  $B$  y viceversa.

**Lema 5.15.** Cada línea hiperbólica es el lugar geométrico de puntos en  $\mathbb{H}^2$  que equidistan de dos puntos fijos.

**Demostración:** Sea  $l_H$  una línea hiperbólica,  $A \notin l_H$  y  $B$  la imagen bajo la reflexión hiperbólica por  $l_H$  de  $A$ .

Puesto que las reflexiones hiperbólicas son isometrías de  $\mathbb{H}^2$  y dejan fijo al eje de reflexión (al arco de circunferencia ortogonal a  $\mathbb{H}^2$  por el que se invierte), tenemos que para cualquier  $S \in l_H$

$$d_{\mathbb{H}^2}(A, S) = d_{\mathbb{H}^2}(B, S)$$

Los únicos puntos  $T \in \mathbb{H}^2$  que tienen esta propiedad son los puntos de  $l_H$ : Supongamos que  $T \in \mathbb{H}^2 \setminus l_H$  es un punto que equidista de  $A$  y  $B$  y consideremos el triángulo determinado por los arcos de circunferencia ortogonales a la frontera de  $\mathbb{H}^2$  con vértices en  $\{A, B, T\}$  (Figura 5.6).

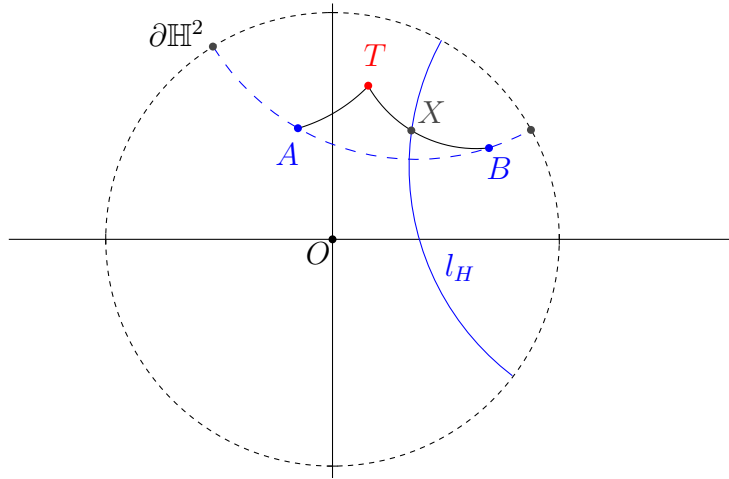


Figura 5.6: Las líneas hiperbólicas son los puntos que equidistan de dos puntos.

Puesto que  $T \notin l_H$ , tenemos que solamente uno de los segmentos de arco de circunferencia determinados por  $A$  y  $T$  ó el determinado por  $B$  y  $T$  interseca a  $l_H$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que es el segmento de arco determinado por  $B$  y  $T$ . Sea  $X$  el punto de intersección.

Por hipótesis tenemos que  $d_{\mathbb{H}^2}(A, T) = d_{\mathbb{H}^2}(B, T)$ . Los puntos en  $l_H$  tienen la misma propiedad, por lo que  $d_{\mathbb{H}^2}(A, X) = d_{\mathbb{H}^2}(B, X)$ . Dado que  $\{T, X, B\}$  es un

conjunto de puntos colineales tenemos que:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^2}(A, T) &= d_{\mathbb{H}^2}(B, T) \\ &= d_{\mathbb{H}^2}(B, X) + d_{\mathbb{H}^2}(X, T) \\ &= d_{\mathbb{H}^2}(A, X) + d_{\mathbb{H}^2}(X, T) \end{aligned}$$

Es decir; la curva determinada por los segmentos de arco de circunferencia ortogonales a la frontera del disco que contienen a  $\{A, X\}$  y  $\{X, T\}$  es una curva que tiene la misma longitud que el arco de circunferencia ortogonal a la frontera del disco que contiene a  $\{A, T\}$ . Lo cual no puede ser, dado que las geodésicas son los arcos de circunferencia ortogonales a la frontera de  $\mathbb{H}^2$ .

Por lo tanto, cualquier línea hiperbólica es el conjunto de puntos en  $\mathbb{H}^2$  que equidistan de cualquier punto no en la línea y la imagen de dicho punto bajo la inversión en dicha línea. ■

**Proposición 5.16.** La imagen de una línea hiperbólica bajo una isometría hiperbólica es una línea hiperbólica.

**Prueba:** Si  $f$  es una isometría hiperbólica y  $l_H$  una línea hiperbólica. Por el Lema 5.15, tenemos que existe  $\{A, B\} \subset \mathbb{H}^2$  tal que  $l_H$  es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $A$  y  $B$ . Por lo tanto,  $f[l_H]$  es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $f(A)$  y  $f(B)$ . □

**Lema 5.17.** Cualquier isometría hiperbólica está determinada por las imágenes de tres puntos no colineales.

**Demostración:** Cualquier punto en  $\mathbb{H}^2$  está determinado por su distancia a tres puntos no colineales: Sea  $\{A, B, C\} \subset \mathbb{H}^2$  un conjunto de puntos no colineales en  $\mathbb{H}^2$ . Supongamos que existe  $\{P, Q\} \subset \mathbb{H}^2$  tales que:

$$d_{\mathbb{H}^2}(A, P) = d_{\mathbb{H}^2}(A, Q) ; d_{\mathbb{H}^2}(B, P) = d_{\mathbb{H}^2}(B, Q) ; d_{\mathbb{H}^2}(C, P) = d_{\mathbb{H}^2}(C, Q)$$

Entonces,  $A, B$  y  $C$  están en el lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $P$  y  $Q$  que es una línea hiperbólica, contrario a la hipótesis.

Por lo tanto, cualquier punto en  $\mathbb{H}^2$  está determinado por su distancia a tres puntos no colieales. Lo que implica que la isometría está determinada por la imagen bajo dicha isometría de tres puntos no colineales. ■

**Teorema 5.18.** Cualquier isometría de  $\mathbb{H}^2$  es la composición de a lo más tres reflexiones hiperbólicas.

**Demostración:** Sean  $f$  una isometría en  $\mathbb{H}^2$  y  $A, B, C$  tres puntos no colineales cualesquiera en  $\mathbb{H}^2$ . Consideremos  $f(A), f(B), f(C)$ :

- Si los tres puntos coinciden con sus imágenes, entonces  $f = Id_{\mathbb{H}^2}$ .
- Si sólo dos de ellos coinciden con sus imágenes,  $A = f(A)$  y  $B = f(B)$ . Sea  $l_H$  la línea hiperbólica que contiene a  $A$  y  $B$ . Por el Lema 5.14  $\bar{r}_{l_H}(C) = f(C)$  pues

$$d_{\mathbb{H}^2}(A, C) = d_{\mathbb{H}^2}(A, f(C)) , d_{\mathbb{H}^2}(B, C) = d_{\mathbb{H}^2}(B, f(C))$$

Entonces  $\bar{r}_{l_H}$  es una isometría que a  $C$  lo envía a  $f(C)$  y fija tanto a  $A$  como a  $B$ . Por el Lema 5.17, la reflexión hiperbólica coincide con  $f$ .

- Si sólo uno de los puntos coincide con su imagen,  $A = f(A)$ . Sea  $m_H$  la línea que contiene a los puntos que equidistan de  $B$  y  $f(B)$ .

Dado que  $d_{\mathbb{H}^2}(A, B) = d_{\mathbb{H}^2}(A, f(B))$ , implica que  $A \in m_H$ , por lo que

$$\bar{r}_{m_H}(A) = A ; \bar{r}_{m_H}(B) = f(B).$$

Si  $\bar{r}_{m_H}(C) = f(C)$  hemos terminado, pues  $f$  vuelve a coincidir con una reflexión. De no ser así,  $\bar{r}_{l_H} \circ \bar{r}_{m_H}$ , donde  $l_H$  es como en el inciso anterior, es la composición de dos reflexiones que cumplen que  $A, B, C$  tienen como imágenes a  $f(A), f(B), f(C)$  respectivamente. Por el Lema 5.17,  $f$  coincide con la composición de las dos reflexiones.

- Ningún punto coincide con su imagen. Sea  $n_H$  el lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $A$  y  $f(A)$ , entonces  $\bar{r}_{n_H}(A) = f(A)$ .

Si  $\bar{r}_{n_H}(B) = f(B), \bar{r}_{n_H}(C) = f(C)$ ,  $f$  coincide con una reflexión.

Si  $\bar{r}_{n_H}(B) = f(B), \bar{r}_{n_H}(C) \neq f(C)$  o  $\bar{r}_{n_H}(B) \neq f(B), \bar{r}_{n_H}(C) = f(C)$ ,  $f$  coincide con la composición de dos reflexiones.

Si  $\bar{r}_{n_H}(B) \neq f(B), \bar{r}_{n_H}(C) \neq f(C)$ , consideramos  $m_H$  la línea hiperbólica de los puntos que equidistan de  $B$  y  $f(B)$ ,  $\bar{r}_{m_H} \circ \bar{r}_{n_H}$  es la composición de dos reflexiones que cumple con enviar a  $A$  a  $f(A)$  y  $B$  a  $f(B)$ .

Si  $\bar{r}_{m_H} \circ \bar{r}_{n_H}(C) = f(C)$ ,  $f$  coincide con la composición de dos reflexiones. De no ser así, consideramos  $l_H$  la línea de los puntos que equidistan de  $C$

y  $f(C)$ , entonces  $\bar{r}_{l_H} \circ \bar{r}_{m_H} \circ \bar{r}_{n_H}$  es la composición de tres reflexiones que a los puntos  $A, B, C$  los envía a  $f(A), f(B), f(C)$  respectivamente y por el Lema 5.17 la composición coincide con  $f$ .

■

**Teorema 5.19.** El grupo de isometrías de  $\mathbb{H}^2$  es el grupo generado por las transformaciones de Möbius que preservan  $\mathbb{H}^2$  y por la conjugación compleja; es decir:

$$Iso(\mathbb{H}^2) = \langle \mathbb{M}^*, \overline{(\ )} \rangle$$

**Demostración:** Esto, es una consecuencia directa del Teorema 5.3 (página 86), pues tenemos que cualquier isometría es la composición de a lo más tres reflexiones hiperbólicas; lo que implica que cualquier isometría pertenece al grupo generado por las inversiones en arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$ ; es decir, el grupo generado por las transformaciones de Möbius que preservan  $\mathbb{H}^2$  y por la conjugación compleja es el grupo de las isometrías de  $\mathbb{H}^2$ .

■

## 5.5. Transformaciones de $\mathbb{H}^2$ que preservan líneas hiperbólicas

Por el capítulo anterior, sabemos que el plano euclidiano tiene como compactificación natural al plano proyectivo.

De manera análoga, buscaremos la compactificación natural del plano hiperbólico. Una manera de hacerlo es añadirle los puntos de la frontera de  $\mathbb{H}^2$ .

Sea  $f$  una transformación de  $\mathbb{H}^2$  que preserve arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$ . Buscamos una manera de extender  $f$  (que sólo está definida en  $\mathbb{H}^2$ ) a una transformación  $\tilde{f}$  de  $\overline{\mathbb{H}^2}$ ; es decir, buscamos una manera de definir  $\tilde{f}$  en  $\partial\mathbb{H}^2$ .

**Teorema 5.20.** Cada transformación de  $\mathbb{H}^2$  que preserve arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  se extiende a una transformación de  $\overline{\mathbb{H}^2}$ .

**Demostración:** Definimos  $\tilde{f} : \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$  de la siguiente manera:

- Si  $z \in \mathbb{H}^2$  entonces  $\tilde{f}(z) = f(z)$ .
- Si  $z \in \partial\mathbb{H}^2$  y  $\zeta$  es un arco de circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  parametrizado por  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$ , tal que  $\gamma(1) = z$  entonces

$$\tilde{f}(z) = \lim_{t \rightarrow 1} (f \circ \gamma)(t)$$

**Lema 5.21.**  $\tilde{f}$  está bien definida.

**Demostración:** Si  $\zeta$  es un arco de circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$ , denotaremos como  $\zeta^*$  a la circunferencia que determina a  $\zeta$ . Sea  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$  una parametrización del arco  $\zeta^* \cap \overline{\mathbb{H}^2}$ ; es decir,  $\gamma|_{(0,1)}$  es una parametrización de  $\zeta$ .

Para  $z \in \partial\mathbb{H}^2$ , consideremos dos arcos de circunferencia  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$ , parametrizados por  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  respectivamente, tales que  $\gamma_1(1) = z = \gamma_2(1)$ . Como  $f$  preserva arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$ ,  $f[\zeta_1]$  y  $f[\zeta_2]$  son dos arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  tales que

$$\lim_{t \rightarrow 1} (f \circ \gamma_1)(t) = z' \in \partial\mathbb{H}^2 \quad \lim_{t \rightarrow 1} (f \circ \gamma_2)(t) = z'' \in \partial\mathbb{H}^2$$

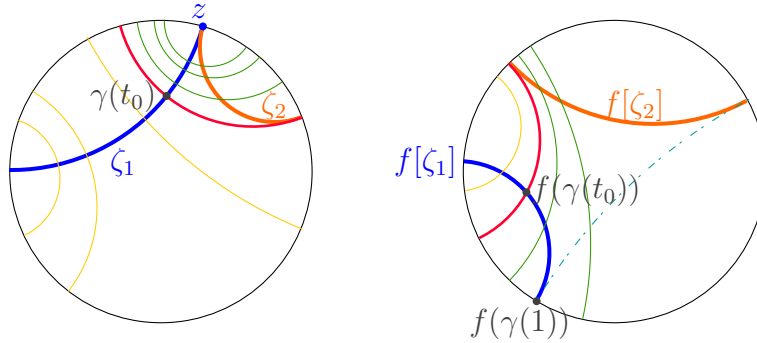
Supongamos que  $z' \neq z''$  (Figura 5.7).

Si  $\Gamma$  es la familia de arcos circunferencias ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  y  $\zeta_1$ , cada punto en  $\zeta_1$  determina un elemento en  $\Gamma$ . Para cada  $t \in (0, 1)$  sea  $\zeta_t$  el elemento en  $\Gamma$  que contiene a  $\gamma_1(t)$ . También, para cualquier punto en  $\mathbb{H}^2$  existe un arco de circunferencia por ese punto que es ortogonal a  $\zeta_1$  y  $\partial\mathbb{H}^2$ ; por lo que los elementos de  $\Gamma$  cubren a  $\mathbb{H}^2$ .

Así,  $f[\Gamma]$  es una familia de arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  (que no necesariamente son ortogonales a  $f[\zeta_1]$ , pues no suponemos que  $f$  preserve ángulos) que cubre a  $\mathbb{H}^2$ . Como todos los elementos de  $\Gamma$  intersecan a  $\zeta_1$  se tiene que todos los elementos de  $f[\Gamma]$  intersecan a  $f[\zeta_1]$ . Por lo que  $f[\Gamma]$  es una familia de arcos de circunferencias ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  que cubre a  $\mathbb{H}^2$  y todas intersecan a  $f[\zeta_1]$ .

Existe  $t_0 \in [0, 1]$  tal que: para  $t \in [0, t_0)$  se tiene que  $\zeta_t$  no interseca a  $\zeta_2$  y para  $t \in [t_0, 1]$ ,  $\zeta_t$  interseca a  $\zeta_2$ ; además  $\gamma_1 : [t_0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$  induce una parametrización de  $\zeta_2$ , pues si  $t \in [t_0, 1]$  entonces  $\zeta_t$  interseca a  $\zeta_2$  una sola vez.

Dado que  $f \circ \gamma_1$  es una parametrización de  $f[\zeta_1]$ , tenemos que para  $t \in [0, t_0)$ ,  $f[\zeta_t]$  es un arco de circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  tal que  $f[\zeta_t] \cap f[\zeta_2] = \emptyset$  y para  $t \in [t_0, 1]$  se tiene que  $f[\zeta_t] \cap f[\zeta_2] \neq \emptyset$ .

Figura 5.7:  $z' \neq z''$ 

La biyección inducida por  $\gamma_1$  entre los puntos de  $\zeta_2$  y los puntos en  $\zeta_1$  determinados por la imagen bajo  $\gamma_1$  del intervalo  $[t_0, 1]$ , determina una biyección entre los puntos de  $f[\zeta_2]$  y los puntos en  $f[\zeta_1]$  determinados por la imagen bajo  $f \circ \gamma_1$  del intervalo  $[t_0, 1]$ , esta biyección determina a los elementos  $f[\zeta_t] \in f[\Gamma]$  para  $t \in [t_0, 1]$ .

Esto no es posible, pues  $f[\Gamma]$  no cubre a  $\mathbb{H}^2$ : cualquier familia de circunferencias ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  que determinen una biyección entre los puntos de  $f[\zeta_2]$  y los puntos en  $f[\zeta_1]$  determinados por la imagen bajo  $\gamma_1$  del intervalo  $[t_0, 1]$ , dejan sin cubrir una región de  $\mathbb{H}^2$ , la delimitada por  $\partial\mathbb{H}^2$  y la circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  que contiene a los puntos  $\{f(\gamma_1(1)), f(\gamma_2(1))\}$ .

Por lo tanto, se tiene que  $z' = z''$ ; es decir, la imagen bajo  $f$  de cualquier familia de arcos de circunferencias ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  cuyos extremos tienden a un mismo punto de  $\partial\mathbb{H}^2$  es una familia de arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  cuyos extremos tienden a un mismo punto en  $\partial\mathbb{H}^2$ .

■



**Lema 5.22.**  $\tilde{f}$  es una función continua.

**Demostración:**

Sea  $x \in \partial\mathbb{H}^2$ . Consideremos a  $\tilde{f}^{-1}(x) = u$  y un punto fijo  $a \in \partial\mathbb{H}^2 \setminus \{u\}$ .

Si  $\zeta_{\tilde{f}(a)x}$  es la circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  que contiene a  $\tilde{f}(a)$  y  $x$ ; sea  $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión de puntos en  $\partial\mathbb{H}^2$  que converge a  $u$  y  $\{\zeta_{a_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  la sucesión de circunferencias ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  tal que  $\zeta_{a_i} \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{a, s_i\}$  para toda  $i \in \mathbb{N}$ .

Si  $\{\tilde{f}(s_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  no converge a  $x$ , existe una subsucesión  $\{\tilde{f}(s_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$  convergente a algún  $b \in \partial\mathbb{H}^2$ . Como  $b \neq x$ , existe una familia de circunferencias ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  y  $\zeta_{\tilde{f}(a)x}$  que no intersecan a la circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  que contiene a  $\tilde{f}(a)$  y  $b$ . Lo cual no es posible, pues la imagen inversa de dicha familia bajo  $\tilde{f}$  interseca a todas las circunferencias determinadas por la sucesión convergente a  $u$ .

Por lo tanto, para toda sucesión  $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de puntos en  $\partial\mathbb{H}^2$  convergente a  $u$ , se tiene que  $\{\tilde{f}(s_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge a  $x$ . ■

También, podemos observar que dado que  $f^{-1} = f$ , tenemos que  $\tilde{f}^{-1} = \tilde{f}$ . Lo que implica que  $\tilde{f}$  es una transformación de  $\overline{\mathbb{H}^2}$ . ■

**Teorema 5.23.** Existe un homeomorfismo de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  en si mismo que envía arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  en segmentos de recta con extremos en  $\partial\mathbb{H}^2$ .

**Demostración:** De la página 61, recordemos a la proyección estereográfica  $\pi$  de la esfera desde el punto  $N = (0, 0, 1)$  sobre  $\mathbb{E}^2$ , que está definida como:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{E}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \\ (x, y, 0) &\mapsto \left( \frac{2x}{\|(x, y)\|^2 + 1}, \frac{2y}{\|(x, y)\|^2 + 1}, \frac{\|(x, y)\|^2 - 1}{\|(x, y)\|^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Cuya inversa es:

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{E}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right) \end{aligned}$$

En particular,  $\pi$  tiene las siguientes propiedades:

- es una función conforme.
- envía circunferencias y rectas de  $\mathbb{E}^2$  en circunferencias de  $\mathbb{S}^2$ .
- deja fija a los puntos de  $\mathbb{S}^2 \cap \mathbb{E}^2$ , que podemos ver como  $\partial\mathbb{H}^2$ .

Por lo que, si consideramos a  $\mathbb{S}^{2-} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| = 1, z \leq 0\}$  entonces  $\pi|_{\overline{\mathbb{H}^2}}$  es un homeomorfismo entre  $\overline{\mathbb{H}^2}$  y  $\mathbb{S}^{2-}$  donde la imagen bajo  $\pi|_{\overline{\mathbb{H}^2}}$  de los arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  en  $\mathbb{E}^2$  son arcos de circunferencias ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  en  $\mathbb{S}^{2-}$ ; es decir, la imagen de arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  bajo  $\pi|_{\overline{\mathbb{H}^2}}$  son circunferencias ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  en  $\mathbb{S}^{2-}$  determinadas por planos ortogonales a  $\mathbb{E}^2$ . Consideremos la proyección ortogonal  $\Pi$  de  $\mathbb{R}^3$  al plano  $\mathbb{E}^2$ :

$$\begin{aligned}\Pi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{P} \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, 0)\end{aligned}$$

$\Pi|_{\mathbb{S}^{2-}}$  es un homeomorfismo entre  $\mathbb{S}^{2-}$  y  $\overline{\mathbb{H}^2}$ , donde el inverso es:

$$\begin{aligned}(\Pi|_{\mathbb{S}^{2-}})^{-1} : \overline{\mathbb{H}^2} &\rightarrow \mathbb{S}^{2-} \\ (x, y, 0) &\mapsto (x, y, -\sqrt{1 - (x^2 + y^2)})\end{aligned}$$

Por lo que la imagen bajo  $\Pi|_{\mathbb{S}^{2-}}$  de arcos de circunferencias ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  en  $\mathbb{S}^{2-}$  (determinados por planos ortogonales a  $\mathbb{E}^2$ ), son segmentos de recta en  $\overline{\mathbb{H}^2}$ .

Por lo tanto,  $\Pi|_{\mathbb{S}^{2-}} \circ \pi|_{\overline{\mathbb{H}^2}}$  es una transformación de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  que envía arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  en segmentos de recta con extremos en  $\partial\mathbb{H}^2$ . ■

**Corolario 5.24.** El grupo de transformaciones de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  que preserva arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  es isomorfo al grupo de transformaciones de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  que preserva segmentos de recta con extremos en  $\partial\mathbb{H}^2$ .

**Prueba:** Si  $\mathbb{O}$  es el grupo de transformaciones de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  que preserva arcos de circunferencias ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$ ,  $\mathbb{L}$  es el grupo de transformaciones de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  que preserva segmentos de recta euclidiana con extremos en  $\partial\mathbb{H}^2$  y  $\phi = \Pi|_{\mathbb{S}^{2-}} \circ \pi^{-1}|_{\overline{\mathbb{H}^2}} : \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$ , entonces:

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{O} &\rightarrow \mathbb{L} \\ f &\mapsto \phi \circ f \circ \phi^{-1}\end{aligned}$$

es un isomorfismo entre  $\mathbb{O}$  y  $\mathbb{L}$ . □

**Teorema 5.25.** Toda transformación de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  que preserve segmentos de recta euclidiana con extremos en  $\partial\mathbb{H}^2$ , se puede extender a una transformación del plano proyectivo real (plano euclidiano extendido) que preserve rectas extendidas y deja invariante a  $\partial\mathbb{H}^2$ .

**Demostración:** Sea  $f$  una transformación de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  que preserve segmentos de recta euclidiana.

Para cada  $X$  en el plano extendido, sean  $l$  y  $m$  dos rectas que concurren en  $X$  y cruzan a  $\overline{\mathbb{H}^2}$ :

$$l \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{A, B\} \quad m \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{C, D\}$$

Si en el plano extendido  $l'$  es la recta determinada por  $\{f(A), f(B)\}$  y  $m'$  es la recta determinada por  $\{f(C), f(D)\}$ , definimos  $l' \cap m' = \{\widehat{f}(X)\}$ .

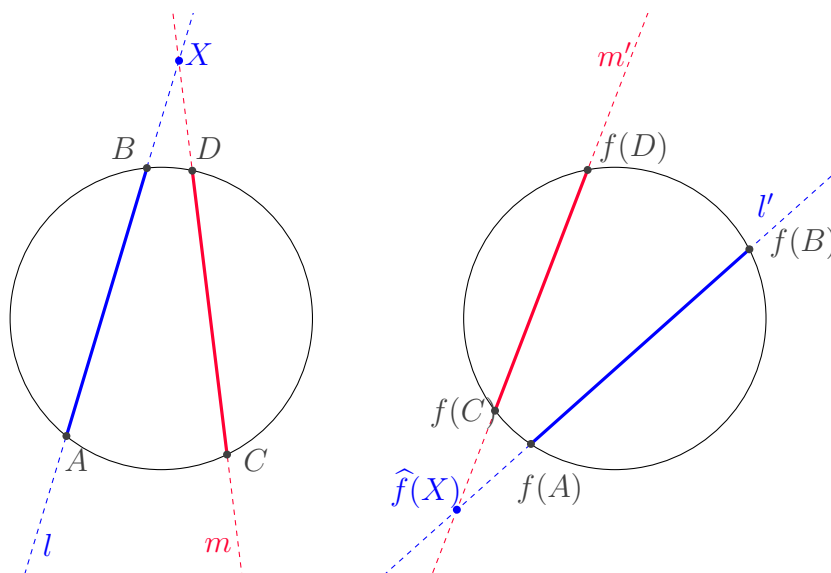


Figura 5.8: Definición de  $\widehat{f}$  para puntos en el plano proyectivo.

**Lema 5.26.**  $\widehat{f}$  está bien definida.

**Demostración:** Supongamos que  $l, m$  y  $n$  son tres rectas en el plano euclidiano extendido que concurren en  $X$  y que cruzan a  $\overline{\mathbb{H}^2}$ :

$$l \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{A, B\}, \quad m \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{C, D\}, \quad n \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{E, F\}$$

Sea  $e$  un segmento de recta en  $\overline{\mathbb{H}^2}$  distinto a los segmentos de recta determinados por  $l, m$  y  $n$ . Consideremos una configuración de tres pares de puntos tales que:

- $\{L, L'\} \subset \partial\mathbb{H}^2 \cap l$
- $\{M, M'\} \subset \partial\mathbb{H}^2 \cap m$
- $\{N, N'\} \subset \partial\mathbb{H}^2 \cap n$
- $e$  concorra con:
  - los segmentos de recta determinados por  $\{L, M\}$  y  $\{L', M'\}$ .
  - los segmentos de recta determinados por  $\{M, N\}$  y  $\{M', N'\}$ .
  - los segmentos de recta determinados por  $\{N, L\}$  y  $\{N', L'\}$ .

Esto implica que  $f[e]$  es un segmento de recta en  $\overline{\mathbb{H}^2}$  distinto a los segmentos de recta determinados por  $\{f(A), f(B)\}, \{f(C), f(D)\}$  y  $\{f(E), f(F)\}$ . En el plano extendido, denotaremos como  $l''$  a la recta determinada por  $\{f(A), f(B)\}$ ,  $m''$  a la recta determinada por  $\{f(C), f(D)\}$  y  $n''$  a la recta determinada por  $\{f(E), f(F)\}$ . Se tiene que  $l'', m''$  y  $n''$  forman una configuración de tres pares de puntos tales que:

- $\{f(L), f(L')\} \subset \partial\mathbb{H}^2 \cap l''$
- $\{f(M), f(M')\} \subset \partial\mathbb{H}^2 \cap m''$
- $\{f(N), f(N')\} \subset \partial\mathbb{H}^2 \cap n''$
- $f[e]$  concurre con:
  - los segmentos de recta determinados por  $\{f(L), f(M)\}$  y  $\{f(L'), f(M')\}$ .
  - los segmentos de recta determinados por  $\{f(M), f(N)\}$  y  $\{f(M'), f(N')\}$ .
  - los segmentos de recta determinados por  $\{f(N), f(L)\}$  y  $\{f(N'), f(L')\}$ .

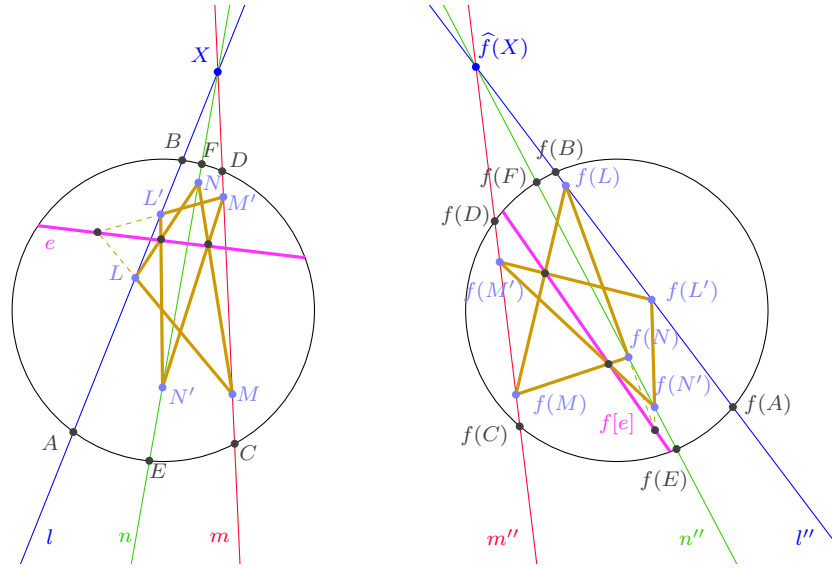


Figura 5.9:  $\widehat{f}$  está bien definida.

Por el Teorema de Desargues, los triángulos determinados por  $(f(L), f(M), f(N))$  y  $(f(L'), f(M'), f(N'))$  están en perspectiva desde  $f[e]$ . Por lo tanto  $l'', m''$  y  $n''$  concurren en un punto del plano extendido, que es  $\widehat{f}(X)$ .

■

**Lema 5.27.**  $\widehat{f}$  es continua.

**Demostración:** Sea  $X \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  y  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una sucesión de puntos del plano proyectivo que converge a  $X$ .

Consideremos dos rectas en el plano proyectivo,  $l$  y  $m$  que concurren en  $X$  y crucen a  $\partial\mathbb{H}^2$ :

$$l \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{A, L\} \qquad m \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{B, M\}$$

Si denotamos como  $l_i$  a la recta determinada por  $\{A, X_i\}$  y  $m_i$  a la recta determinada por  $\{B, X_i\}$  para cada  $i \in \mathbb{N}$  entonces, la sucesión  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  induce dos sucesiones de puntos en  $\partial\mathbb{H}^2$ , para cada  $i \in \mathbb{N}$ :

$$A_i \in (\partial\mathbb{H}^2 \cap l_i) \setminus \{A\} \qquad B_i \in (\partial\mathbb{H}^2 \cap m_i) \setminus \{B\}$$

Puesto que  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge a  $X$  entonces  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge a  $L$  y  $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge a  $M$ . Como  $f$  es una función continua en  $\mathbb{H}^2$ , tenemos que  $\{f(A_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge a  $f(L)$  y  $\{f(B_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge a  $f(M)$ .

Si  $l'_i$  es la recta determinada por  $\{f(A), f(A_i)\}$  y  $m'_i$  es la recta determinada por  $\{f(B), f(B_i)\}$  para cada  $i \in \mathbb{N}$  entonces, la sucesión de puntos en el plano proyectivo dada por  $\{l'_i \cap m'_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  converge a  $\widehat{f}(X)$ .

■

Como  $f$  preserva a  $\partial\mathbb{H}^2$ ,  $\widehat{f}$  es una transformación del plano proyectivo que deja invariante  $\partial\mathbb{H}^2$ .

**Lema 5.28.**  $\widehat{f}$  preserva las rectas extendidas.

**Demostración:** Sea  $l$  una recta extendida en el plano proyectivo y  $\{X, Y, Z\} \subset l$ .

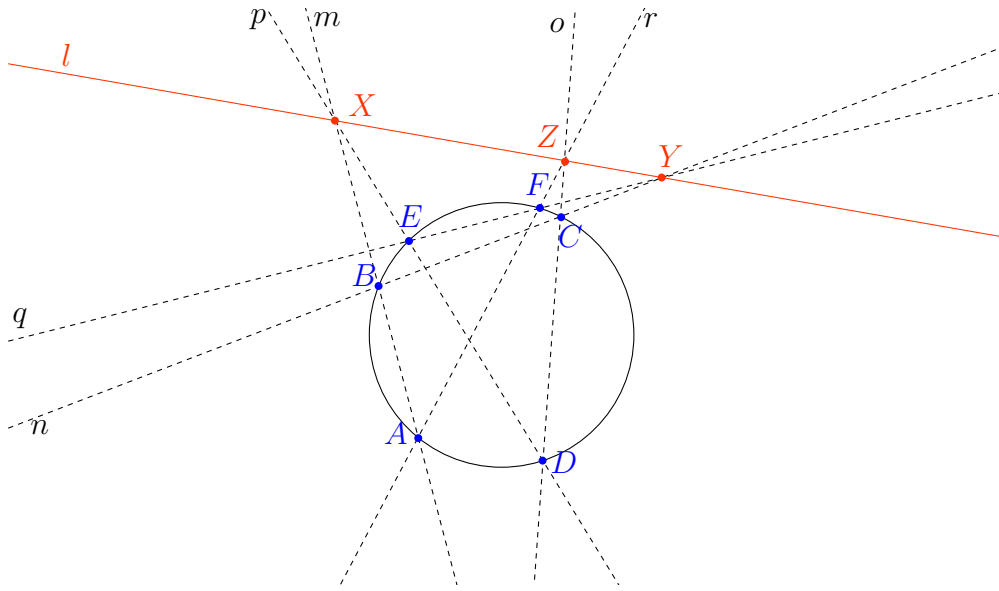


Figura 5.10:  $\widehat{f}$  preserva rectas en el plano proyectivo.

Consideremos una recta  $m$  que contenga a  $X$  y cruce a  $\overline{\mathbb{H}^2}$ ,  $m \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{A, B\}$ . Sea  $n$  la recta que contiene a  $\{B, Y\}$ , entonces  $n \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{B, C\}$  y sea  $o$  la recta que contiene a  $\{C, Z\}$ ; es decir,  $o \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{C, D\}$ .

Sea  $p$  la recta que contiene a  $\{D, X\}$ , entonces  $p \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{D, E\}$ . Denotemos como  $q$  a la recta que contiene a  $\{E, Y\}$  y  $q \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{E, F\}$ . Para terminar, sea  $r$  la recta que contiene a  $\{F, Z\}$  y  $r \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{F, G\}$ .

Puesto que  $X, Y$  y  $Z$  son colineales, por el recíproco del Teorema de Pascal, tenemos que  $A = G$  y que  $\{A, B, C, D, E, F\}$  es un conjunto de puntos que pertenecen a una cónica. Como cada cónica está determinada por cinco puntos en el plano y  $\{A, B, C, D, E\} \subset \partial\mathbb{H}^2$ , tenemos que  $ABCDEF$  es un hexágono inscrito en  $\partial\mathbb{H}^2$ .

Entonces la imagen bajo  $f$  de  $\{A, B, C, D, E, F\}$  es un hexágono inscrito en  $\partial\mathbb{H}^2$ . Por el Teorema de Pascal, la intersección de sus lados opuestos son tres puntos colineales:

- Si la recta determinada por  $\{f(A), f(B)\}$  es  $m'$  y la recta determinada por  $\{f(D), f(E)\}$  es  $p'$  entonces  $m' \cap p' = \{\widehat{f}(X)\}$ .
- Si la recta determinada por  $\{f(B), f(C)\}$  es  $n'$  y la recta determinada por  $\{f(E), f(F)\}$  es  $q'$  entonces  $n' \cap q' = \{\widehat{f}(Y)\}$ .
- Si la recta determinada por  $\{f(C), f(D)\}$  es  $o'$  y la recta determinada por  $\{f(F), f(A)\}$  es  $r'$  entonces  $o' \cap r' = \{\widehat{f}(Z)\}$ .

Por lo tanto, la imagen de cualquier recta en el plano proyectivo bajo  $\widehat{f}$  es una recta en el plano proyectivo.

■

■

**Lema 5.29.** Toda transformación del plano proyectivo que preserva rectas y deja invariante a  $\overline{\mathbb{H}^2}$ , preserva rectas tangentes a  $\partial\mathbb{H}^2$ .

**Demostración:** Sea  $f$  una transformación del plano proyectivo que preserve rectas y deje invariante a  $\overline{\mathbb{H}^2}$ .

Si  $l$  es una recta tangente a  $\partial\mathbb{H}^2$  en el punto  $L$  entonces la imagen bajo  $f$  de  $l$  es una recta en el plano. Puesto que  $f(L) \in \partial\mathbb{H}^2$  (dado que  $L \in \partial\mathbb{H}^2$ ) y  $f$  preserva a  $\overline{\mathbb{H}^2}$ , se tiene que  $f[l]$  cumple con ser tangente a  $\partial\mathbb{H}^2$  o intersectar a  $\partial\mathbb{H}^2$  en algún otro punto.

$f[l]$  es una recta tangente a  $\partial\mathbb{H}^2$ , pues si  $f[l] \cap \partial\mathbb{H}^2 = \{f(L), A\}$ , tenemos que  $f^{-1}(A) \in \partial\mathbb{H}^2 \cap l$ , que no es posible pues  $l$  es tangente a  $\partial\mathbb{H}^2$ .

Por lo tanto,  $f$  preserva rectas tangentes a  $\partial\mathbb{H}^2$ .

■

**Teorema 5.30.** Las transformaciones del plano proyectivo que preservan rectas extendidas y dejan invariante a  $\overline{\mathbb{H}^2}$  están determinadas por la imagen de tres puntos en  $\partial\mathbb{H}^2$ .

**Demostración:** Sean  $\{A, B, C\} \subset \partial\mathbb{H}^2$ ,  $f$  y  $g$  dos transformaciones de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  que preserven rectas extendidas y dejan invariante a  $\partial\mathbb{H}^2$  tales que:

$$f(A) = g(A) \quad ; \quad f(B) = g(B) \quad ; \quad f(C) = g(C)$$

Tenemos que  $g^{-1} \circ f$  es una transformación de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  que preserva rectas extendidas, deja invariante a  $\partial\mathbb{H}^2$  y fija a  $A, B$  y  $C$ .

Si  $t_A$  la recta tangente a  $\partial\mathbb{H}^2$  por  $A$  y  $t_B$  la recta tangente a  $\partial\mathbb{H}^2$  por  $B$ , sea  $t_A \cap t_B = \{X\}$ .

Por el Lema 5.29, tenemos que:

$$g^{-1} \circ f[t_A] = t_A \quad g^{-1} \circ f[t_B] = t_B$$

Por lo que  $g^{-1} \circ f(X) = X$ .

Así, tenemos que  $g^{-1} \circ f$  es una transformación del plano proyectivo que preserva rectas extendidas y fija a cuatro puntos, por el Lema ?? (página ??), tenemos que  $g^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2}$ .

Por lo que  $f = g$ .

■

**Corolario 5.31.** Las transformaciones de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  que preservan arcos de circunferencia ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  están determinadas por tres puntos en  $\partial\mathbb{H}^2$ .

**Prueba:** Esto es una consecuencia directa del Teorema 5.30, pues cada transformación de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  que preserve arcos de circunferencias ortogonales a  $\partial\mathbb{H}^2$  puede conjugarse con la función definida en el Corolario 5.24.

□

Ahora, probaremos un teorema que nos permitirá conocer como son las transformaciones de  $\mathbb{H}^2$  que preservan líneas hiperbólicas.

**Teorema 5.32.**  $\langle \mathbb{M}^*, \overline{(\ )} \rangle$  actúa de manera triplemente transitiva en  $\partial\mathbb{H}^2$ . Además, lo hace en a lo más la composición de tres reflexiones hiperbólicas.

**Demostración:** Sean  $\{A, B, C\} \subset \partial\mathbb{H}^2$  y  $\{A', B', C'\} \subset \partial\mathbb{H}^2$ .

Por la Observación 5.6 de la página 89, para dos puntos en  $\partial\mathbb{H}^2$  hay un único arco de circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  que los contiene.

Consideremos al arco de circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  que contiene a  $\{B, C\}$ , que denotaremos como  $\zeta_{B,C}$  y al arco de circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  que contiene a  $\{B', C'\}$ , que denotaremos como  $\zeta_{B',C'}$ .



Sea  $\zeta_A$  el arco de circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  y a  $\zeta_{B,C}$  por el punto  $A$  y  $\zeta_{A'}$  el arco de circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  y a  $\zeta_{B',C'}$  por el punto  $A'$ . Sean:

$$\{D\} = \zeta_{B,C} \cap \zeta_A \quad \{D'\} = \zeta_{B',C'} \cap \zeta_{A'}$$

- Si  $D \neq D'$ , por el Lema 5.14 (página 101), existe un arco de circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  tal que, si la inversión que este arco determina se denota como  $\rho_1$ ,  $\rho_1(D) = D'$ .
- Si  $D = D'$  pero  $A \neq A'$ . Consideremos a  $\zeta_{A,A'}$  como el arco de circunferencia ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  que contiene a  $A$  y  $A'$ , así como  $l$  la recta euclidiana determinada por  $\{A, A'\}$ . Para cada  $a \in l \setminus \mathbb{H}^2$  existe una circunferencia que es ortogonal a  $\partial\mathbb{H}^2$  y a  $\zeta_{A,A'}$  (Figura 5.11).

De todas estas circunferencias ortogonales, podemos elegir la que contenga a  $D$ . Entonces, si  $\rho_2$  es la inversión que determina,  $\rho_2(A) = A'$  y  $\rho_2(D) = D$ , pues  $D$  pertenece al arco de circunferencia.

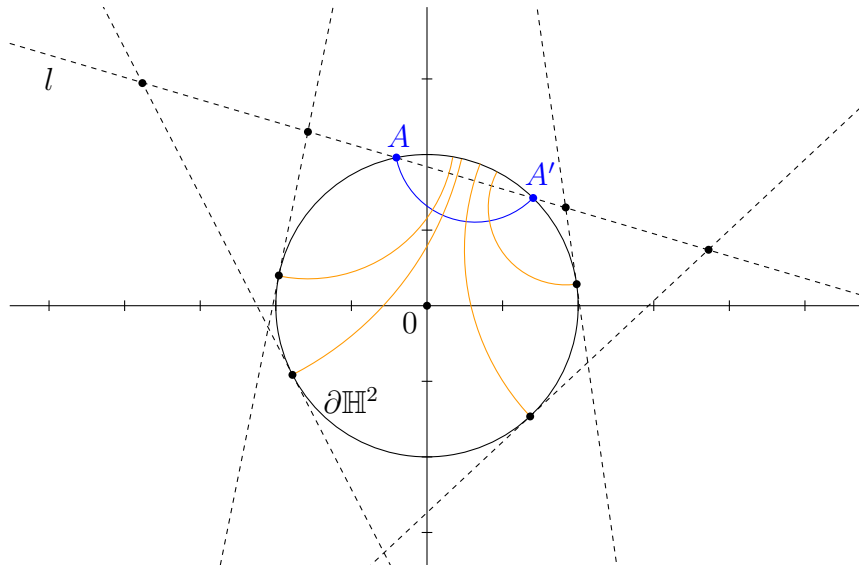


Figura 5.11: El grupo generado por las inversiones actúa de manera transitiva en  $\partial\mathbb{H}^2$ .

- Si  $D = D'$ ,  $A = A'$  pero  $B \neq B'$  y  $C \neq C'$  entonces, por la ortogonalidad de los arcos,  $B = C'$  y  $C = B'$ . Por lo tanto la inversión por el arco de circunferencia determinado por  $A$  y  $D$ , que denotaremos por  $\rho_3$ , es una transformación

de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  tal que:

$$\rho_3(A) = A', \quad \rho_3(B) = B', \quad \rho_3(C) = C', \quad \rho_3(D) = D'.$$

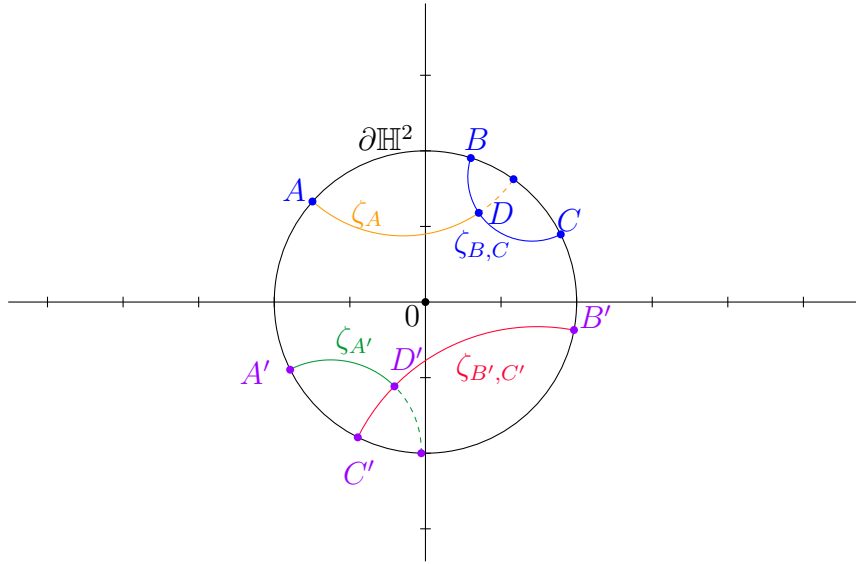


Figura 5.12:  $\langle M^*, \overline{(\cdot)} \rangle$  actúa de manera triplemente transitiva en  $\partial\mathbb{H}^2$ .

■

**Teorema 5.33.** Las transformaciones del  $\mathbb{H}^2$  que preservan líneas hiperbólicas son las isometrías de  $\mathbb{H}^2$ .

**Demostración:** Sea  $f$  una transformación de  $\mathbb{H}^2$  que preserve líneas hiperbólicas.

Por el Teorema 5.20,  $f$  se extiende a una transformación  $\hat{f}$  de  $\overline{\mathbb{H}^2}$ .

Si  $\{A, B, C\} \subset \partial\mathbb{H}^2$ , por el Corolario 5.31, tenemos que  $\hat{f}$  está determinada por la imagen de  $A, B$  y  $C$ .

También, existe una transformación de Möbius  $T$  que preserva a  $\overline{\mathbb{H}^2}$  tal que:

$$T(A) = \hat{f}(A) \quad T(B) = \hat{f}(B) \quad T(C) = \hat{f}(C)$$

Entonces,  $T^{-1} \circ \hat{f}$  es una transformación de  $\overline{\mathbb{H}^2}$  que preserva líneas hiperbólicas (por ser composición de funciones con esta propiedad) tal que

$$T^{-1} \circ \hat{f}(A) = A \quad ; \quad T^{-1} \circ \hat{f}(B) = B \quad ; \quad T^{-1} \circ \hat{f}(C) = C$$

Lo que implica, por el Corolario 5.31, que  $T^{-1} \circ \hat{f} = Id_{\mathbb{H}^2}$ ; es decir  $T = \hat{f}$ .

Por lo tanto,  $\hat{f}|_{\mathbb{H}^2} = f$  es una transformación de Möbius que preserva  $\mathbb{H}^2$ ; es decir, una isometría de  $\mathbb{H}^2$ . ■

## 5.6. Semejanzas hiperbólicas

**Teorema 5.34.** Las semejanzas hiperbólicas son las isometrías hiperbólicas.

**Demostración:** Cualquier semejanza  $f$  de  $\mathbb{H}^2$  deberá cumplir que, para algún  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  y cualquier  $\{X, Y\} \in \mathbb{H}^2$ :

$$d_{\mathbb{H}^2}(X, Y) = |k| \cdot d_{\mathbb{H}^2}(f(X), f(Y))$$

Sean  $\{A, B\} \subset \mathbb{H}^2$  y  $l_H$  la línea hiperbólica determinada por los puntos que equidistan de  $A$  y  $B$  (Lema 5.15, página 102). Para todo  $P \in l_H$  se tiene que:

$$d_{\mathbb{H}^2}(A, P) = d_{\mathbb{H}^2}(B, P)$$

Entonces,

$$d_{\mathbb{H}^2}(A, P) = |k| \cdot d_{\mathbb{H}^2}(f(A), f(P))$$

$$d_{\mathbb{H}^2}(B, P) = |k| \cdot d_{\mathbb{H}^2}(f(B), f(P))$$

Lo que implica que  $d_{\mathbb{H}^2}(f(A), f(P)) = d_{\mathbb{H}^2}(f(B), f(P))$ ; es decir, la imagen de  $l_H$  bajo la semejanza  $f$  es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de  $f(A)$  y  $f(B)$  que por la Lema 5.15 es una línea hiperbólica.

Por lo tanto, las semejanzas hiperbólicas son transformaciones que preservan líneas hiperbólicas. Por el Teorema 5.33, son isometrías hiperbólicas. ■

## CAPÍTULO 6

## G-ESTRUCTURAS

**Definición 6.1.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $G$  un grupo de transformaciones de  $X$ . Decimos que  $X$  tiene una  $G$ -estructura si y sólo si:

- $G$  actúa **transitivamente** en  $X$ . Es decir, para  $\{u, v\} \subset X$  existe una  $T \in G$  que satisface  $T(u) = v$ .
- Si  $U$  es un abierto de  $X$  y  $\{T_1, T_2\} \subset G$  tales que  $T_1|_U = T_2|_U$ , entonces  $T_1 = T_2$ .

Con esta definición, podemos encontrar las diferentes estructuras del plano euclidiano, la esfera y el plano hiperbólico.

Hemos probado que para el plano euclidiano, la esfera, el plano proyectivo y el plano hiperbólico; el conjunto de las isometrías está contenido en el conjunto de semejanzas, que a su vez está contenido en el conjunto de las transformaciones que preservan geodésicas.

Para cada grupo, tenemos que el espacio tiene dicha estructura, pues todos actúan transitivamente y cada elemento del grupo está determinado por una cantidad finita de puntos, por lo que están definidos localmente.

Más aún, hemos probado que:

$$Iso(\mathbb{E}^2) \subsetneq Sem(\mathbb{E}^2) \subsetneq \text{Transformaciones que preservan geodésicas } (\mathbb{E}^2)$$

$$Iso(\mathbb{S}^2) = Sem(\mathbb{S}^2) \subsetneq \text{Transformaciones que preservan geodésicas } (\mathbb{S}^2)$$

$$Iso(\mathbb{RP}^2) = Sem(\mathbb{RP}^2) \subsetneq \text{Transformaciones que preservan geodésicas } (\mathbb{RP}^2)$$

$$Iso(\mathbb{H}^2) = Sem(\mathbb{H}^2) = \text{Transformaciones que preservan geodésicas } (\mathbb{H}^2)$$

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ahlfors, L.V., *Complex Analysis*. 3 ed. 1979, Singapur: McGraw-Hill. 331.
- [2] Benítez, R., *Geometría Vectorial*. 1 ed. 2003, México: Trillas. 233.
- [3] Berlanga Zubiaga, R., Hernández Lamonedá, L. y Sánchez Valenzuela, A., *Introducción a la Geometría de los Grupos de Lie*. 1 ed. Aportaciones Matemáticas, ed. O. Calvo and R. Iturriaga. Vol. 21. 1998, México: Sociedad Matemática Mexicana. 1 - 93.
- [4] Dana-Picard, T., *Complex Numbers and Plane Geometry*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2003. **34**(2): p. 257 - 271.
- [5] Dana-Picard, T., *Plane Transformations in a Complex Setting I: Homotheties-Translations*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2006. **37**(6): p. 726 - 734.
- [6] Dana-Picard, T., *Plane Transformations in a Complex Setting II: Isometries*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2007. **38**(2): p. 163 - 188.
- [7] Dana-Picard, T., *Plane Transformations in a Complex Setting: Similarities*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2009. **40**(3): p. 411 - 423.
- [8] Hilbert, D. y Cohn-Vossen, S., *Geometry and the Imagination*. 1 ed. Vínculos Matemáticos. Vol. 80. 2008, México: Facultad de Ciencias. 357.

- [9] Hocking, J.G. y Young, G.S., *Topology*. 1 ed. 1988, USA: Dover. 374.
- [10] Lascurain Orive, A., *Una Introducción a la Geometría Hiperbólica Bidimensional*. 1 ed. 2005, México: Facultad de Ciencias, UNAM. 170.
- [11] Lascurain Orive, A., *Curso Básico de Variable Compleja*. 1 ed. 2007, México: Facultad de Ciencias, UNAM. 207.
- [12] Marsden, J.E. y Tromba, A.J., *Cálculo Vectorial*. 1 ed. 1981, México: Fondo Educativo Interamericano. 454.
- [13] Muciño Raymundo, J., *Geometría y Dinámica de Poliedros*. Aportaciones Matemáticas, ed. J.A. León Vázquez, et al. Vol. 16. 1995, México: Sociedad Matemática Mexicana. 403 - 435.
- [14] Needham, T., *Visual Complex Analysis*. 1 ed. 1997, USA, New York: Oxford University Press Inc. 592.
- [15] Palmas Velasco, Ó.A. y Reyes Victoria, J.G., *Curso de Geometría Diferencial*. 1 ed. 2005, México: Facultad de Ciencias, UNAM. 227.
- [16] Prieto, C., *Topología Básica*. 1 ed. 2004, México: Fondo de Cultura Económica. 519.
- [17] Ramírez-Galarza, A.I. y Seade Kuri, J., *Introducción a la Geometría Avanzada*. 1 ed. 2002, México: Facultad de Ciencias, UNAM. 249.
- [18] Rincón Mejía, H.A., *Álgebra Lineal*. 1 ed. 2001, México: Facultad de Ciencias, UNAM. 442.
- [19] Salicrup, G., *Introducción a la Topología*. 1 ed. Aportaciones Matemáticas, ed. J. Rosenblueth and C. Prieto. 1997, México: Sociedad Matemática Mexicana. 300.
- [20] Shively, L.S., *Introducción a la Geometría Moderna*. 1 ed. 1979, México: Compañía Editorial Continental, S.A. 172.
- [21] Stillwell, J., *Geometry of Surfaces*. 2 ed. 1992, USA: Springer-Verlag. 216.
- [22] Thurston, W.P., *Three-dimensional Geometry and Topology*. 1 ed. 1997, USA: Princeton University Press. 311.

- 
- [23] Wawrzynczyk, A., *Geometría de Curvas y Superficies*. 1 ed. 1996, México: Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. División de Ciencias Básicas e Ingeniería. 126.
- [24] Weeks, J.R., *La forma del espacio*. Vínculos Matemáticos. Vol. 67. 2007, México: Facultad de Ciencias. 232.



## ÍNDICE ALFABÉTICO

- $G$ -estructura, 119
- acción
  - doblemente transitiva, 33
  - transitiva, 10, 47, 100, 119
  - triplemente transitiva, 39, 76, 115
- circunferencia de radio máximo, 41
- conjugación compleja, 65
- eje
  - reflexión con deslizamiento, 24
  - reflexión esférica, 45
  - reflexión euclidiana, 8
- esfera , 41
  - de Riemann, 66
  - Riemann, 61
- espacio homogéneo, 10, 47, 100
- geodésica , 4
  - esfera, 44
  - espacio euclidiano, 41
  - hiperbólica, 92, 94
  - plano proyectivo, 59
- grupo
  - de transformaciones, 3
  - especial lineal de orden 2 con coeficientes en  $\mathbb{C}$ , 73
  - especial lineal proyectivo de orden 2 con coeficientes en  $\mathbb{C}$ , 73
  - general lineal proyectivo de orden 3 con coeficientes en  $\mathbb{R}$ , 60
- homotecia euclidiana, 27
- inversión , 66
  - compleja, 66
- isometría , 4
  - esférica, 45
  - euclidiana, 8
  - hiperbólica, 92
- línea
  - esférica, 44
  - hiperbólica, 88
  - proyectiva, 57
- longitud
  - de trayectoria, 5
  - hiperbólica, 91
- métrica
  - esférica, 43
  - euclidiana
    - en el espacio, 41
    - en el plano, 5

- plano proyectivo, 58
- plano
  - euclidiano , 5
  - extendido, 57, 58
  - hiperbólico, 88
  - real proyectivo, 57, 58
- proyección estereográfica, 61, 108
- puntos antípodas, 49
- razón cruzada, 77
- recta
  - euclidiana , 6
  - extendida, 57
- reflexión
  - con deslizamiento, 24
  - con giro, 49
  - esférica, 45
  - euclidiana, 8
  - hiperbólica, 100
- rotación
  - euclidiana, 11
- semejanza , 4
  - euclidiana, 27
- superficies, 4
- transformación
  - afín , 35
    - espacio, 52
    - plano, 35
  - anticonforme, 61
  - conforme, 61
  - Möbius, 72
  - Möbius que deja invariante a  $\mathbb{B}^2$ , 86
- traslación
  - euclidiana, 8
- variedad
- dimensión  $n$ , 4
- dimensión 2, 4