



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PERFILES VISCOSOS DE ONDAS DE CHOQUE
PARA LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES DE
UN FLUIDO COMPRESIBLE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

FELIPE ANGELES GARCÍA



DIRECTOR DE TESIS:
DR. RAMÓN GABRIEL PLAZA VILLEGAS

CD. UNIVERSITARIA MÉXICO D.F.
(2014)



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**Perfiles viscosos de ondas de choque para las
ecuaciones de Navier-Stokes de un fluido
compresible**

Felipe Angeles García

Contenido

Introducción	1
Capítulo 1. Ecuaciones de Navier-Stokes	5
1.1. Cuerpos continuos	5
1.2. Teorema del transporte de Reynolds	6
1.3. Conservación de masa	10
1.4. Fuerza y balance de momento	11
1.5. Balance de energía	21
1.6. Ecuaciones constitutivas	29
Capítulo 2. Leyes de conservación y sistemas hiperbólico-parabólicos	43
2.1. Leyes de conservación	43
2.2. Ley de conservación escalar	50
2.3. Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación	62
2.4. Ondas de choque admisibles	70
Capítulo 3. Existencia y unicidad de un perfil viscoso	79
3.1. Las hipótesis de Weyl	83
3.2. Propiedades geométricas del plano \mathcal{Z}	91
3.3. Existencia	97
3.4. Unicidad	100
3.5. Comportamiento límite cuando $\mu \rightarrow 0$ y $\kappa \rightarrow 0$	101
Conclusiones	105
Bibliografía	107

Introducción

En este trabajo consideramos un fluido compresible en una dimensión espacial $x \in \mathbb{R}$, viscoso y conductor de calor, que toma estados fijos de densidad (ρ), velocidad (u), y temperatura (θ) cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Si una *onda viajera* que satisface las ecuaciones de movimiento de tal fluido toma estos valores de densidad, velocidad y temperatura en $\pm\infty$, se conoce como un *perfil viscoso*¹.

La noción de perfil viscoso fue introducida por Rankine ([27]) en 1870, sin embargo, no fue hasta 1944 en el trabajo de Weyl ([34]), *Ondas de choque en fluidos arbitrarios*, que el problema sobre la existencia y la unicidad del perfil viscoso quedó bien establecido. Después, en 1950, Gilbarg demostró, bajo las condiciones de Weyl, la existencia y la unicidad del perfil viscoso; además probó, que para valores arbitrariamente pequeños de viscosidad (λ) y conductividad térmica (κ), este fluido se comporta como una *onda de choque* ([15]).

El objetivo principal de esta tesis es desarrollar la prueba de existencia y unicidad de Gilbarg. Para lograr esto, es fundamental estudiar los resultados de Weyl ([34]), pues la prueba en cuestión basa sus principales argumentos en lo que ahora se conocen como las *hipótesis de Weyl*. Tales hipótesis son un conjunto de suposiciones termodinámicas, físicamente plausibles, descritas en términos de la presión p , el volumen específico τ y la entropía S , que proveen (como demostró Gilbarg), una serie de propiedades geométricas en el plano definido por los puntos de la forma (τ, p) , de donde se deducen la existencia y la unicidad del perfil viscoso.

Llevaremos a cabo este objetivo desde el punto de vista de la teoría de los *sistemas hiperbólicos de leyes de conservación* (véase [9],[30] y [32]), pues como veremos, las hipótesis de Weyl aseguran que las ecuaciones de movimiento poseen la estructura matemática de un sistema de leyes de conservación no-lineal. Hay que destacar que la forma básica y actual de estudiar un perfil viscoso de una ley de conservación genérica, se debe a Weyl (como puede verse en [9] y en [31]).

Con el fin de exponer estos resultados, esta tesis se divide en tres capítulos. En el primero de éstos, se establecen los postulados básicos de la dinámica de medios continuos y de éstos se deduce la forma local de las ecuaciones de movimiento, es decir, las *ecuaciones de Navier-Stokes* en tres dimensiones espaciales.

En el segundo capítulo hacemos una breve introducción a las propiedades matemáticas básicas de los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación; establecemos la noción de tiempo de rompimiento para este tipo de ecuaciones diferenciales parciales y en consecuencia nos encontramos con la necesidad de introducir el concepto de *solución débil* y el de solución físicamente admisible. Finalmente hacemos una breve discusión sobre los *criterios de entropía* e introducimos el concepto de perfil

¹Éste, es un nombre usado en literatura moderna como puede verse en [9], [30], [32]; sin embargo, en los primeros trabajos [34], [27], [28] se conocía como el problema de la *capa de choque* (*shock layer*).

viscoso para un sistema hiperbólico-parabólico, es decir un sistema con un término de difusión. Así pues, dentro de este contexto, la existencia, unicidad y el comportamiento límite de un perfil viscoso se entiende como un criterio de entropía y por lo tanto obtenemos un entendimiento más profundo de los resultado de Gilbarg, a saber: *Para cada onda de choque admisible de las ecuaciones de Euler en una dimensión espacial, existe un único perfil viscoso de las ecuaciones de Navier-Stokes (solución diferenciable) cuyos estados límite coinciden con los estados alrededor de la discontinuidad de choque.*

De esta manera, en el tercer capítulo, sólo nos dedicamos al estudio de los resultados de Weyl y Gilbarg. En particular, estudiamos resultados fundamentales sobre la *curva de Hugoniot*, para después entender sus implicaciones geométricas en el plano con los puntos de la forma (τ, θ) . Se demuestra que, si buscamos soluciones de tipo onda viajera para las ecuaciones de Navier-Stokes, podemos integrar éstas una vez para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo cuyo plano fase coincide con el plano (τ, θ) . Así pues, las propiedades geométricas del plano (τ, θ) nos permiten hacer un análisis alrededor de los puntos de equilibrio en el plano fase y de ahí deducir las propiedades deseadas para un perfil viscoso.

Es importante señalar que la demostración de Gilbarg de existencia del perfil viscoso es independiente de la amplitud de la onda de choque, es decir, de $|Z_0 - Z_1|$. Existe una teoría de existencia de perfiles viscosos de amplitud suficientemente pequeña basada en el teorema de variedad central [3, 26]. Básicamente, la estructura y existencia de perfiles de ondas de choque se puede estudiar mediante una proyección no lineal sobre una variedad central para el sistema aumentado, con una ecuación trivial para la velocidad. Si los estados finales Z_0 y Z_1 están en una vecindad, toda órbita heteroclínica (el perfil viscoso) está contenido en la variedad central. La primera construcción de un perfil viscoso con amplitud pequeña mediante la aplicación de esta técnica apareció en el trabajo de Kopell y Howard [20], para el caso de viscosidad *idéntica*, es decir, para $B = I$ en la ecuación

$$u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x. \quad (0.1)$$

Posteriormente, Majda y Pego [22] ampliaron el método al caso de viscosidad parabólica, es decir, cuando $B(u) > 0$, bajo una hipótesis adicional que implica la estabilidad del sistema linealizado alrededor de Z_0 y Z_1 . Para el caso que nos ocupa, es decir, cuando el tensor de viscosidad tiene un núcleo (como es el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes), Pego [25] extendió la demostración de existencia del perfil viscoso con amplitud suficientemente pequeña al caso con viscosidad *real*, es decir, con tensor de viscosidad no estrictamente parabólico. Aunque los sistemas bajo consideración son muy generales, esta construcción requiere que la amplitud de la onda de choque sea suficientemente pequeña.

En contraste, la existencia de perfiles viscosos con amplitud arbitraria es conocida sólo en casos muy particulares. Mock [24] estableció la existencia del perfil con amplitud arbitraria para sistemas generales bajo una condición de no linealidad genuina más fuerte que la usual, la cual, prácticamente, no es satisfecha por ningún sistema de interés. Conley y Smoller [6], usando el índice de Morse y técnicas topológicas, establecieron la existencia de perfiles de amplitud arbitraria para las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (véase también [5, 7]). No se conocen otros resultados de esta naturaleza. Por lo tanto, la demostración de Gilbarg-Weyl merece un lugar muy destacado en la teoría de ondas de choque, ya que utiliza técnicas básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias y por que hace uso de propiedades estructurales

importantes del sistema de Navier-Stokes compresible (como la existencia de una función de entropía y las hipótesis de Weyl, entre otras). La demostración de Gilbarg-Weyl se aplica a ondas de choque asociadas a campos característicos genuinamente no lineales. El caso general fue estudiado (y la demostración, extendida a campos característicos más generales) en el apéndice C del artículo de Menikoff y Plohr [23].

CAPÍTULO 1

Ecuaciones de Navier-Stokes

En este capítulo se deducen las ecuaciones básicas de la dinámica de fluidos. Estas ecuaciones son consecuencia de una serie de postulados que proveen un conjunto de leyes de conservación que describen como la masa, momento y energía de un cuerpo cambian con el tiempo bajo influencias externas. Primero se formulan estas leyes en forma integral para después reducirlas a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que se estudiarán con más detalle en los siguientes capítulos.

1.1. Cuerpos continuos

Para estudiar un cuerpo material podemos tomar dos caminos. El primero de éstos considera el cuerpo como un conjunto de elementos discretos, es decir, un ensamble de moléculas o partículas cuyo comportamiento macroscópico está gobernado por las leyes de la probabilidad, la estadística y la dinámica.

Por otro lado, el segundo método parte de la suposición más básica que podemos hacer sobre un cuerpo material, ya sea sólido o fluido, que es, el cuerpo lo podemos modelar como un continuo. Es decir, ignoramos la naturaleza atómica del material y lo suponemos infinitamente divisible.

En este trabajo se adopta éste último camino como un primer postulado, conocido como hipótesis del continuo. Ésta sección tratará de enunciar este postulado de forma útil.

La hipótesis del continuo, nos permite, para cualquier instante $t \geq 0$, identificar un fluido como un conjunto en el espacio euclidiano. Supongamos entonces que un fluido pasa por una región Ω del espacio euclidiano, y sea x un punto en Ω tal que una partícula del fluido cruza por x al tiempo t . Es decir, el fluido ocupa la región Ω del espacio en un instante t .

Entonces, para un intervalo de tiempo determinado, la partícula traza una trayectoria bien definida. La velocidad que la partícula toma al atravesar x para algún tiempo fijo t se denotará $u = u(x, t)$. Notemos que para cada t , $u(x, t)$ será un campo vectorial espacial definido sobre Ω , es decir

$$u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Sin embargo en esta sección nos concierne algo más fundamental que la definición de campo de velocidades, pues la hipótesis del continuo también nos permite definir la masa de Ω y de cualquier subconjunto de él.

Primero hay que aclarar que se entenderá masa como una propiedad física que cuantifica la resistencia de un cuerpo a la aceleración, es decir, cuantifica la respuesta de un cuerpo ante el cambio de velocidades. De acuerdo al primer postulado, la masa de Ω está distribuida continuamente a través de su volumen.

Para comprender el concepto de masa de un cuerpo continuo consideremos una función $\rho(x)$ continua sobre un conjunto compacto $\Omega^0 \subseteq \mathbb{R}^3$ que contiene a un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ fijo. Si tomamos la integral de ρ sobre Ω^0 y la dividimos por el volumen de Ω^0 denotado por $V(\Omega^0)$, entonces, por el teorema del valor medio, sabemos que este cociente es un valor intermedio del integrando, es decir, es un valor entre el supremo y el ínfimo de la función sobre Ω^0 .

Si ahora se hace que el diámetro de Ω^0 alrededor del punto P_0 tienda a cero, el valor intermedio de la función $\rho(x)$ debe tender a su valor en el punto P_0 , es decir,

$$\lim_{V(\Omega^0) \rightarrow 0} \frac{1}{V(\Omega^0)} \int_{\Omega^0} \rho(x) dV_x = \rho(x_0, y_0, z_0), \quad (1.1)$$

Si pensamos que Ω^0 es un cuerpo continuo, en particular un fluido al tiempo $t > 0$, podemos dividir Ω^0 en pequeños elementos diferenciales de volumen dV_x , así que la función $\rho(x)$ tomará valores muy parecidos sobre dV_x . Luego, si consideramos a $\rho(x)$ como la densidad uniforme del elemento dV_x , podemos concluir que la masa contenida en dV_x es $\rho(x)dV_x$. Así que la masa total de Ω^0 será aquella que tome en cuenta la contribución de cada elemento diferencial de Ω^0 . Por lo tanto

$$\text{masa}(\Omega^0) = \int_{\Omega^0} \rho(x) dV_x,$$

y notemos que (1.1) se reescribe como

$$\lim_{V(\Omega^0) \rightarrow 0} \frac{m(\Omega^0)}{V(\Omega^0)} = \rho(x_0, y_0, z_0). \quad (1.2)$$

De acuerdo con este razonamiento hacemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.1.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ y Ω^t un subconjunto fijo de Ω al tiempo $t \geq 0$. Supóngase la existencia de un campo escalar $\rho(x) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$, para cada $t \geq 0$, entonces, la masa de Ω^t se denota como $m(\Omega^t)$ y*

$$m(\Omega^t) = \int_{\Omega^t} \rho(x) dV_x,$$

para cada $t \geq 0$, donde la función $\rho(x)$ es conocida como densidad de masa.

Cabe destacar que la hipótesis del continuo radica en la existencia de la función $\rho(x)$, pues si tomáramos en cuenta la naturaleza molecular del cuerpo, el concepto de la densidad descrito por (1.1) y (1.2) sería inválido. Así pues, la existencia de la densidad como una función que cumple la definición de masa es equivalente a la hipótesis del continuo.

1.2. Teorema del transporte de Reynolds

Para estudiar la evolución de la masa o cualquier otra cantidad definida de forma similar, tendremos que tomar en cuenta la evolución de la región inicial Ω^0 . Por esta razón durante nuestro desarrollo se necesitará transformar integrales sobre Ω^0 a integrales sobre conjuntos que evolucionan en el tiempo. Más aún, para aplicar los teoremas básicos del cálculo de varias variables a estas integrales, tendremos que hacer ciertas suposiciones sobre el conjunto Ω y su evolución en el tiempo.

Para los propósitos de este capítulo será suficiente considerar Ω como una región *regular* en el siguiente sentido:

- i) Ω consiste de un número finito de conjuntos abiertos, disjuntos y acotados.
- ii) La frontera de Ω es suave por trozos y consiste de un número finito de componentes.
- iii) Cada componente de $\partial\Omega$ es orientable.

Supongamos entonces que Ω es un conjunto regular, y además es una región en \mathbb{R}^3 por la que el fluido está pasando. Entonces el movimiento de un fluido con configuración inicial Ω , está descrito por una función continua

$$\vec{\varphi} : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que, para cada $t \geq 0$ la función

$$\vec{\varphi}(x, t) = \vec{\varphi}^t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

es una deformación de Ω , es decir, para cada $t \geq 0$ la función $\vec{\varphi}^t$ mapea la configuración inicial Ω en $\Omega^t := \vec{\varphi}^t(\Omega)$.

Podemos entender mejor esta función si pensamos en $x \in \Omega$, entonces $\vec{\varphi}(x, t)$ es la trayectoria seguida por una partícula que al tiempo $t = 0$ se encuentra en x . Por esta razón asumimos que $\vec{\varphi}^0$ es la función identidad, es decir $\vec{\varphi}^0(x) = x \forall x \in \Omega$ y por lo tanto $\Omega^0 := \Omega$.

También vamos a suponer que el mapeo $\vec{\varphi}^t : \Omega \rightarrow \Omega$ es invertible y suficientemente suave, en particular $\vec{\varphi}^t$ se considera un difeomorfismo, así que podemos definir el mapeo inverso $(\vec{\varphi}^t)^{-1} : \Omega^t \rightarrow \Omega$ tal que $\forall x \in \Omega$

$$x = (\vec{\varphi}^t)^{-1}(\hat{x}) = (\vec{\varphi}^t)^{-1}(\vec{\varphi}^t(x, t), t)$$

y análogamente

$$\hat{x} = (\vec{\varphi}^t)(x) = (\vec{\varphi}^t)((\vec{\varphi}^t)^{-1}(\hat{x}, t), t)$$

$\forall \hat{x} \in \Omega^t$. La función φ se conoce como *mapeo de flujo de fluido*.

Debido a lo anterior, en el estudio de un fluido podemos encontrarnos con campos (escalares o vectoriales) que dependen de las coordenadas $x \in \Omega$ o $\hat{x} \in \Omega^t$. Cuando un campo se expresa en términos de $x \in \Omega$ nos referimos a él como campo material, por ejemplo $F = F(x, t)$. Mientras que si el campo se expresa en términos de $\hat{x} \in \Omega^t$ lo llamamos campo espacial, por ejemplo $G = G(\hat{x}, t)$.

Ya que el mapeo de flujo es invertible, para cualquier campo material $F(x, t)$ podemos asociar un campo espacial $F^s(\hat{x}, t)$ definido por la relación

$$F^s(\hat{x}, t) := F(\vec{\varphi}^{-1}(\hat{x}, t), t) \quad (1.3)$$

De forma similar, a cualquier campo espacial $G(\hat{x}, t)$ podemos asociar un campo material $G^m(x, t)$ definido por la relación

$$G^m(x, t) := G(\vec{\varphi}(x, t), t) \quad (1.4)$$

Frecuentemente tendremos que calcular la derivada temporal de algún campo dado para entender su evolución.

Si el campo F es material entonces la derivada total de $F(x, t)$ coincide con la derivada parcial de éste ya que las coordenadas x están fijas (pues pertenecen a Ω), esto es

$$\frac{dF(x, t)}{dt} = \frac{\partial F(x, t)}{\partial t}$$

Por otro lado si el campo en cuestión tiene representación espacial, es decir, $G = G(\hat{x}, t)$, entonces la derivada temporal de G se calculará usando la regla de la cadena, pues en este caso $\hat{x} \in \Omega^t$ y por lo tanto \hat{x} evoluciona en el tiempo, así que

$$\frac{dG(\hat{x}, t)}{dt} = \frac{dG(\vec{\varphi}(x, t))}{dt} = \nabla G \cdot \left(\frac{d\vec{\varphi}^t}{dt}, 1 \right),$$

si $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$, por lo tanto $\frac{d\vec{\varphi}^t}{dt} = \left(\frac{d\hat{x}_1}{dt}, \frac{d\hat{x}_2}{dt}, \frac{d\hat{x}_3}{dt} \right)$ y

$$\frac{dG(\hat{x}, t)}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \nabla_{\hat{x}} G \cdot (\dot{\hat{x}}_1, \dot{\hat{x}}_2, \dot{\hat{x}}_3).$$

Notemos que $(\dot{\hat{x}}_1, \dot{\hat{x}}_2, \dot{\hat{x}}_3) = \vec{u}$ por definición de función de flujo. Así que, si conocemos el campo de velocidades \vec{u} concluimos que

$$\frac{dG(\hat{x}, t)}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \nabla_{\hat{x}} G \cdot \vec{u}$$

En la literatura de dinámica de medios continuos se refieren al operador $\frac{\partial \cdot}{\partial t} + (\nabla_{\hat{x}} \cdot) \cdot \vec{u}$ como *derivada material* o *derivada convectiva*, y la denotan por

$$\frac{D \cdot}{Dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + (\nabla_{\hat{x}} \cdot) \cdot \vec{u}$$

Hay que destacar que $\frac{dG(\hat{x}, t)}{dt} \neq \frac{\partial G(\hat{x}, t)}{\partial t}$ pues la derivada parcial no toma en cuenta que las coordenadas espaciales de G cambian con el tiempo ya que $\hat{x} = \vec{\varphi}(x, t)$.

Consideremos ahora un campo espacial $G(\hat{x}, t)$ definido sobre el conjunto $\Gamma^t = \vec{\varphi}^t(\Gamma)$ y $\Omega^t = \vec{\varphi}^t(\Omega)$ un subconjunto arbitrario de Γ^t , donde Ω y Γ son las configuraciones iniciales respectivas, tales que $\Omega \subseteq \Gamma$. Entonces se cumple

$$\int_{\Omega^t} G(\hat{x}, t) dV_x = \int_{\Omega} G(\vec{\varphi}(x, t), t) J(\vec{\varphi}(x, t), t) dV_x,$$

y por (1.4)

$$\int_{\Omega^t} G(\hat{x}, t) dV_x = \int_{\Omega} G^m(x, t) J(x, t) dV_x, \quad (1.5)$$

donde $J(x, t)$ es el Jacobiano del mapeo $\vec{\varphi}^t$.

Este último resultado no es mas que el teorema del cambio de variables para integrales de volumen, con la ventaja de que relaciona la descripción espacial con la material.

Finalmente nos encontramos en la posición adecuada para demostrar el primer teorema que nos ayudará a deducir las ecuaciones de movimiento.

TEOREMA 1.2.1 (Transporte de Reynolds). *Sea $\vec{\varphi} : \Gamma \times [0, \infty) \rightarrow \Gamma^t$ un flujo de fluido y $\vec{u}(x, t)$ el campo de velocidades espacial asociado. Sea Ω^t un subconjunto de Γ^t con frontera $\partial\Omega^t$ y \hat{n} el vector normal externo sobre $\partial\Omega^t$. Entonces para cualquier campo escalar espacial $f(\hat{x}, t)$ suave, se cumple*

$$\text{a) } \frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \frac{Df}{Dt} + f(\nabla_{\hat{x}} \cdot \vec{u}) dV_{\hat{x}},$$

$$\text{b) } \frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \frac{\partial f}{\partial t} dV_{\hat{x}} + \int_{\partial\Omega^t} f(\vec{u} \cdot \hat{n}) dS_{\hat{x}}.$$

PRUEBA. Apliquemos la fórmula (1.5) a la integral de f sobre Ω^t

$$\int_{\Omega^t} f dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega} f^m J(x, t) dV_x$$

con $\varphi^t(\Omega) = \Omega^t$. Calculamos la derivada de ésta última expresión

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f dV_{\hat{x}} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} f^m J(x, t) dV_x$$

como Ω es la configuración inicial, es decir $\Omega = \varphi^0(\Omega)$ se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (f^m J(x, t)) dV_x = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial f^m}{\partial t} \right) J(x, t) + \left(\frac{\partial J(x, t)}{\partial t} \right) f^m \right] dV_x,$$

donde

$$\frac{\partial J(x, t)}{\partial t} = J(x, t) (\nabla^x \cdot \vec{u}(\varphi(x, t), t)) = J(x, t) (\nabla^x \cdot \vec{u})^m,$$

es la relación de Euler, que resulta en

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial f^m}{\partial t} \right) J(x, t) + (\nabla^x \cdot \vec{u})^m f^m J(x, t) \right] dV_x = \int_{\Omega^t} \left(\frac{Df(\hat{x}, t)}{Dt} + \nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u} \right) dV_{\hat{x}}$$

en este último renglón se aplicó una vez más el teorema de cambio de variables. Esto concluye a). Para demostrar b) notemos que

$$\frac{Df}{Dt} + f(\nabla^x \cdot \vec{u}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot (\nabla^x f) + f(\nabla^x \cdot \vec{u}) = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla^x \cdot (f\vec{u}),$$

sustituimos esta expresión en a) para obtener

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f dV_{\hat{x}} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla^{\hat{x}} \cdot (f\vec{u}) \right) dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \frac{\partial f}{\partial t} dV_{\hat{x}} + \int_{\Omega^t} \nabla^{\hat{x}} \cdot (f\vec{u}) dV_{\hat{x}}.$$

Finalmente aplicamos el teorema de la divergencia de Gauss a la última integral y obtenemos b)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} f dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \frac{\partial f}{\partial t} dV_{\hat{x}} + \int_{\partial\Omega^t} f(\vec{u} \cdot \hat{n}) dS_{\hat{x}}.$$

□

Cabe mencionar que estas fórmulas también son conocidas como la regla de Leibniz para integrales multidimensionales, y son una generalización de la regla para derivar una integral dependiente de un parámetro:

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi_1(t)}^{\psi_2(t)} f(t, y) dy = \int_{\psi_1}^{\psi_2} f_t(t, y) dy - \psi_1' f(t, \psi_1) + \psi_2' f(t, \psi_2)$$

1.3. Conservación de masa

Para derivar las ecuaciones de movimiento es necesario postular una serie de principios que acompañen a la hipótesis del continuo. En esta sección se tratará el primero de estos postulados, conocido como conservación de masa. Gracias a los resultados de la sección anterior se deducirá la ecuación de movimiento para este caso.

Consideremos un fluido en \mathbb{R}^3 con volumen y masa conocidos. Si observamos la evolución temporal de este fluido notaremos deformaciones en cada instante, pues su tamaño y forma cambiarán, aunque su masa se mantendrá constante. Así que una forma de enunciar la conservación de masa sería:

“La masa de cualquier subconjunto Ω^t de un fluido Γ^t , no cambia en el tiempo aún cuando éste cambie de lugar y forma. Esto es $\frac{dm(\Omega^t)}{dt} = 0 \forall \Omega^t \subseteq \Gamma^t$ ”.

Este enunciado es realmente útil, pues de la definición de masa, obtenemos que

$$\frac{dm(\Omega^t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}) dV_{\hat{x}} = 0$$

y aplicando el teorema del transporte de Reynolds la conservación de masa dice que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}) dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \frac{\partial \rho(\hat{x})}{\partial t} dV_{\hat{x}} + \int_{\partial \Omega^t} \rho(\hat{x}) \vec{u} \cdot \hat{n} dS_{\hat{x}} = 0 \quad (1.6)$$

y también

$$\int_{\Omega^t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^{\hat{x}} \cdot (\rho \vec{u}) \right) dV_{\hat{x}} = 0. \quad (1.7)$$

Como esto es válido para cualquier Ω^t contenido en Γ^t , (1.7) es equivalente a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^{\hat{x}} \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (1.8)$$

Esta ecuación es la forma diferencial de la conservación de masa y es conocida como ecuación de continuidad.

En el caso en que ρ y \vec{u} no son suficientemente suaves, la forma integral (1.6) es la ecuación a usar, es decir

$$\int_{\Omega^t} \frac{\partial \rho(\hat{x})}{\partial t} dV_{\hat{x}} = - \int_{\partial \Omega^t} \rho(\hat{x}) \vec{u} \cdot \hat{n} dS_{\hat{x}}.$$

Es usual encontrar esta última relación como el postulado de conservación masa pues tiene un significado físico más profundo. Para entenderlo supongamos que Ω es un conjunto fijo en \mathbb{R}^3 . La razón de cambio instantánea de la masa de Ω es

$$\frac{dm(\Omega)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dV_x = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_x,$$

siendo esto es el incremento de la masa por unidad de tiempo.

La conservación de masa implica que sólo puede perderse masa a través de la frontera de Ω . El flujo de volumen que atraviesa $\partial \Omega$ por unidad de tiempo y unidad de área es $\vec{u} \cdot \hat{n}$ y la masa de este flujo es $\rho \vec{u} \cdot \hat{n}$. Así que la razón de cambio del flujo de masa por unidad de tiempo es $\rho \vec{u} \cdot \hat{n} dS_x$. Para tener conservación de

masa debe ocurrir que el flujo de masa que se pierde a través de $\partial\Omega$ sea igual a la razón de cambio instantánea de la masa, es decir

$$\int_{\Omega} \frac{\partial\rho(x)}{\partial t} dV_x = - \int_{\partial\Omega} \rho(x)\vec{u} \cdot \hat{n} dS_x,$$

como Ω es arbitrario recuperamos la ecuación de continuidad.

De esta manera obtenemos un nuevo enunciado de conservación de masa:

“El incremento de la masa en Ω es igual a la razón de flujo de masa que atraviesa $\partial\Omega$ en la dirección interna”.

Esta afirmación es equivalente al enunciado que dice que la masa permanece constante. Así, podemos postular cualquiera de éstos y obtener la ecuación de continuidad.

Por último vamos a obtener un resultado más acerca de la conservación de masa. Consideremos un conjunto Ω^t arbitrario, contenido en Γ^t y sea $\Omega \subseteq \Gamma$ tal que $\Omega^t = \vec{\varphi}^t(\Omega)$. Entonces el axioma de conservación de masa implica que

$$m(\Omega^t) = m(\Omega^0)$$

De acuerdo al teorema de cambio de variables se obtiene

$$m(\Omega^t) = \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega} \rho^m(x, t) J(x, t) dV_x,$$

donde $\rho^m(x, t) = \rho(\vec{\varphi}^t(x, t), t)$. Además, como $\vec{\varphi}(x, 0) = x$ tenemos que

$$m(\Omega^0) = \int_{\Omega} \rho(x, 0) dV_x = \int_{\Omega} \rho_0(x) dV_x$$

con $\rho_0(x) = \rho(x, 0)$. Entonces la conservación de masa implica que

$$\int_{\Omega} (\rho^m(x, t) J(x, t) - \rho_0(x)) dV_x = 0,$$

$\forall t \geq 0$ y $\Omega \subseteq \Gamma$. Por lo tanto

$$\rho^m(x, t) J(x, t) = \rho_0(x) \quad \forall x \in \Gamma \quad t \geq 0. \quad (1.9)$$

Si derivamos respecto del tiempo de ambos lados y tomamos en cuenta que cualquier movimiento admisible debe tener $J \neq 0$ (de hecho $J > 0$) obtenemos una vez más la ecuación de continuidad. La fórmula (1.9) nos será de utilidad más adelante.

1.4. Fuerza y balance de momento

El propósito de esta sección es derivar la ecuación de balance de momento. La idea es la misma que en la sección anterior; enunciaremos un postulado y a partir de él plantearemos las ecuaciones de movimiento. Como veremos hay un largo camino que nos llevará a explorar el concepto de fuerza para un fluido.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, “*La razón de cambio instantánea de la cantidad de movimiento de un cuerpo es igual a la fuerza aplicada en él*”. Ésta es una ley de balance de momento que podemos escribir como

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

en el caso de puntos materiales. Así que éste es un buen candidato para ser el postulado de conservación, pues si tomamos en cuenta la contribución de cada elemento diferencial del fluido, podemos definir el momento lineal del fluido Ω^t . Sin embargo para definir la contribución a la fuerza total de cada elemento, tenemos que entender que significa aplicar una fuerza a un medio continuo, pues además de acelerarlo, lo deforman.

Pensemos primero en una barra de plastilina que sostenemos con un par de dedos a cierta altura del suelo. Si observamos la barra después de cierto tiempo, notaremos que sus extremos se arquearon hacia abajo, además, el pedazo que se encontraba en contacto con nuestros dedos aparecerá aplastado. Entonces nos encontramos con dos interacciones distintas que deformaron al cuerpo.

En general existen dos tipos de fuerzas que pueden ser resultado del contacto de un cuerpo con otro o por interacción con el ambiente. Las primeras se conocen como fuerzas de superficie, ya que son ejercidas en superficies internas entre partes separadas del cuerpo, o en superficies externas entre el cuerpo y el ambiente. El segundo tipo es conocido como fuerzas de cuerpo y son ejercidas en puntos interiores de éste.

1.4.1. Fuerzas de Cuerpo. Usamos el término fuerza de cuerpo para referirnos a cualquier fuerza que no es producto del contacto físico entre cuerpos. Tal fuerza es el resultado de la “acción a distancia”; el ejemplo más usual es la gravedad. La fuerza por unidad de volumen ejercida por una fuerza externa sobre un cuerpo Γ se supone dada por una función $\tilde{b} : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ que llamamos campo de fuerzas de cuerpo.

Sea $\Omega \subseteq \Gamma$ abierto. La fuerza sobre Ω debida al campo \tilde{b} se define como

$$F_b(\Omega) := \int_{\Omega} \tilde{b}(x) dV_x.$$

Más adelante veremos que es útil definir un campo de fuerza por unidad de masa $\bar{b}(x) = \frac{\tilde{b}(x)}{\rho(x)}$, que tiene por fuerza resultante

$$F_b(\Omega) := \int_{\Omega} \rho(x) \bar{b}(x) dV_x.$$

1.4.2. Fuerzas de superficie. Llamamos fuerza de superficie a cualquier fuerza que resulta del contacto físico entre cuerpos. Cuando nos referimos a una fuerza de superficie a lo largo de una superficie imaginaria, decimos que la fuerza es *interna*. En contraste, cuando nos referimos a una fuerza de superficie a lo largo de la frontera de un cuerpo, decimos que la fuerza es *externa*.

Sea \mathcal{S} una superficie en Γ con un campo de vectores normales en cada punto $\hat{n} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$. La fuerza por unidad de área, ejercida sobre la superficie, se asume dada por la función $\hat{t}(\hat{n}) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y lleva el nombre de tracción o campo de fuerzas de superficie.

La fuerza resultante debida al campo de tracción sobre una superficie orientada \mathcal{S} se define como

$$F_s(\mathcal{S}) := \int_{\mathcal{S}} \bar{t}(\hat{n}(x)) dS_x,$$

donde dS_x representa el elemento diferencial de área en $x \in \mathcal{S}$, y el vector \bar{t} depende de los valores de x y \hat{n} .

Hay que destacar que la existencia de \bar{b} y \bar{t} es axiomática.

Debido a lo anterior la fuerza total aplicada en Ω^t será la suma de las fuerzas de cuerpo más las fuerzas de superficie. Entonces, si definimos el momento lineal de Ω^t como

$$p(\Omega^t) := \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) \bar{u}(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}},$$

la segunda Ley de Newton aplicada a Ω^t nos da la siguiente ecuación

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) \bar{u}(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}} = \int_{\partial\Omega^t} \bar{t}(\hat{n}(\hat{x}), t) dS_{\hat{x}} + \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) \bar{b}(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}}, \quad (1.10)$$

que es precisamente el balance de momento.

Observemos que a diferencia de la ecuación de conservación de masa, (1.10) es un conjunto de tres ecuaciones pues \bar{u} , \bar{t} y \bar{b} son campos vectoriales con imagen en \mathbb{R}^3 .

Aún en este caso los resultados de la sección 1.2 son útiles.

Si \bar{w} es un campo vectorial espacial con una velocidad asociada \bar{u} , la derivada material de \bar{w} es la derivada de cada componente, es decir, si $\bar{w} = w_i \hat{e}_i$ entonces

$$\frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} u_j = \frac{Dw_i}{Dt}$$

lo que implica que

$$\frac{D\bar{w}}{Dt} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \cdot (\nabla^x \bar{w})$$

en donde $\nabla_x \bar{w}$ es la matriz Jacobiana de \bar{w} .

Para poder derivar la forma diferencial del balance de momento tenemos que manipular la derivada temporal de (1.10) y afortunadamente existe un resultado que nos permitirá calcular integrales que dependen de campos vectoriales y de la densidad de masa.

TEOREMA 1.4.1. (*Transporte de Reynolds II*). Sea $\vec{\varphi} : \Gamma \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ un mapeo de flujo con un campo de velocidades espacial asociado \vec{u} y densidad de masa espacial $\rho(\hat{x}, t)$. Sea \vec{F} un campo espacial vectorial y Ω^t un conjunto arbitrario de Γ^t . Entonces

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \vec{F}(\hat{x}, t) \rho(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) \frac{D\vec{F}}{Dt}(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}}.$$

PRUEBA. Una pequeña generalización del teorema de cambio de variables es

$$\int_{\Omega^t} \vec{F}(\hat{x}, t) \rho(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega} \vec{F}(\vec{\varphi}(x, t), t) \rho(\vec{\varphi}(x, t), t) J(x, t) dV_x,$$

donde Ω es subconjunto de Γ tal que $\Omega^t = \varphi^t(\Omega)$. Usando la conservación de masa en la forma (1.9), obtenemos

$$\int_{\Omega^t} \vec{F}(\hat{x}, t) \rho(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega} \vec{F}(\varphi(x, t), t) \rho_0(x) dV_x.$$

Debido a que Ω no depende del tiempo tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \vec{F}(\hat{x}, t) \rho(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}} &= \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{F}(\varphi(x, t), t)}{\partial t} \rho_0(x) dV_x \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{F}(\varphi(x, t), t)}{\partial t} \rho(\varphi(x, t), t) J(x, t) dV_x \\ &= \int_{\Omega} \frac{D\vec{F}}{Dt} \rho(\varphi(x, t), t) J(x, t) dV_x \end{aligned}$$

en donde se usó que $\frac{\partial \vec{F}(\varphi(x, t), t)}{\partial t} = \frac{D\vec{F}}{Dt}$. Aplicando una vez más el teorema de cambio de variables llegamos al resultado deseado

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \vec{F}(\hat{x}, t) \rho(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) \frac{D\vec{F}}{Dt}(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}}.$$

□

De acuerdo a este resultado (1.10) se reescribe como

$$\int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) \frac{D\vec{u}}{Dt}(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}} = \int_{\partial\Omega^t} \bar{t}(\hat{n}(\hat{x}), t) dS_{\hat{x}} + \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) \bar{b}(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}}. \quad (1.11)$$

Para obtener la forma diferencial del balance de momento podemos aplicar a (1.11) un argumento similar al que nos permitió obtener la ecuación de continuidad. Para lograr esto, todas las integrales en (1.11) deben ser del mismo tipo, es decir debemos buscar la forma de cambiar la integral sobre $\partial\Omega^t$ a una integral sobre Ω^t .

Existe una gran clase de fluidos para los que podemos resolver este problema relativamente fácil. Para éstos existe una función $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\hat{x}, t)$ tal que

$$\bar{t}(\hat{n}(\hat{x}), t) = \mathbb{T}(\hat{x}, t) \hat{n}(\hat{x}),$$

y que es lineal para cada $\hat{x} \in \Omega^t$ y cada $t \geq 0$. Esta función es conocida como *tensor de estrés*. El estrés es un ejemplo de una cantidad en física que ya no podemos representar como un vector y de hecho está bien definida como una transformación lineal entre vectores, llevándonos a la noción de tensor de segundo orden que se define a continuación.

DEFINICIÓN 1.4.1. *Un tensor de segundo orden \mathbb{T} sobre un espacio vectorial V es un mapeo $\mathbb{T} : V \rightarrow V$ lineal en el sentido de*

- i) $\mathbb{T}(u + v) = \mathbb{T}u + \mathbb{T}v$ para toda $u, v \in V$
- ii) $\mathbb{T}(\alpha u) = \alpha \mathbb{T}u$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u \in V$.

El conjunto de todos los vectores de segundo orden sobre V se denota por V^2 . Análogamente al vector nulo $\bar{0}$, se define el tensor nulo \mathbb{O} con la propiedad $\mathbb{O}v = \bar{0}$ para toda $v \in V$ y el tensor identidad \mathbb{I} con la propiedad $\mathbb{I}v = v$ para toda $v \in V$. Dos tensores de segundo orden \mathbb{P} y \mathbb{T} son iguales si y solo si $\mathbb{P}v = \mathbb{T}v$ para cualquier $v \in V$.

Dados dos vectores a y b en V podemos construir un tensor de segundo orden $a \otimes b$ definido por

$$(a \otimes b)v := (b \cdot v)a \quad \forall v \in V$$

En términos de componentes, ésta definición es equivalente a

$$(a \otimes b)_{ij}v_j = (b_j v_j)a_i \quad \forall v \in V$$

que implica

$$(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$$

Notemos que la representación matricial de $a \otimes b$ es

$$[a \otimes b] = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = [a][b]^T$$

este tensor es conocido como *producto diádico de a y b* . Dada una base coordenada \hat{e}_i los nueve productos diádicos $\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j$ forman una base de V^2 . En particular cada $\mathbb{T} \in V^2$ puede representarse únicamente como la combinación lineal

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}_{ij} \hat{e}_i \otimes \hat{e}_j$$

donde $\mathbb{T}_{ij} = \hat{e}_i \cdot \mathbb{T} \hat{e}_j$.

Ahora supongamos que b es un vector constante en \mathbb{R}^3 y $a \in \mathbb{R}^3$ es un vector arbitrario. Entonces el producto diádico de a y b lo podemos entender como una función que manda a en $a \otimes b$, es decir

$$a \otimes b : \mathbb{R}^3 \rightarrow V^2$$

en general, cualquier función $\mathbb{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow V^2$ se conoce como campo tensorial de segundo orden.

Para tratar la ecuación (1.11) nos será útil extender la definición de divergencia para campos tensoriales.

DEFINICIÓN 1.4.2. Sea $\mathbb{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow V^2$, un campo tensorial de segundo orden. La divergencia de \mathbb{T} es el campo vectorial definido por la relación

$$(\nabla \cdot \mathbb{T}) \cdot a = \nabla \cdot (\mathbb{T}^T a)$$

para cualquier vector $a \in \mathbb{R}^3$.

Notemos que la divergencia de un tensor se define usando la noción correspondiente de campos vectoriales. De hecho podemos expresarla en términos de componentes como $\nabla^{\hat{x}} \cdot \mathbb{T} = \partial_j \mathbb{T}_{ij} e_i$

El siguiente resultado provee una generalización del teorema de la divergencia de Gauss para campos tensoriales de segundo orden (véase [16, p. 56]).

TEOREMA 1.4.2 (Divergencia de Gauss Tensorial). *Sea Γ una región regular en \mathbb{R}^3 con frontera $\partial\Gamma$ suave por trozos y considérese un campo tensorial de segundo orden $\mathbb{T} : \Gamma \rightarrow V^2$. Entonces*

$$\int_{\partial\Gamma} \mathbb{T}\hat{n}dS_x = \int_{\Gamma} \nabla \cdot \mathbb{T}dV_x$$

donde \hat{n} es el campo de vectores normales unitarios sobre $\partial\Gamma$.

Finalmente podemos regresar a la ecuación de balance de momento. Supongamos que existe un campo tensorial de segundo orden tal que

$$\bar{t}(\hat{n}(\hat{x}), t) = \mathbb{T}(\hat{x}, t)\hat{n}(\hat{x})$$

entonces (1.11) toma la forma

$$\int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) \frac{D\vec{u}}{Dt}(\hat{x}, t)dV_{\hat{x}} = \int_{\partial\Omega^t} \mathbb{T}(\hat{x}, t)\hat{n}(\hat{x})dS_{\hat{x}} + \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t)\bar{b}(\hat{x}, t)dV_{\hat{x}}$$

por el teorema de la divergencia tensorial obtenemos

$$\int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) \frac{D\vec{u}}{Dt}(\hat{x}, t)dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \nabla^{\hat{x}} \cdot \mathbb{T}(\hat{x}, t)dV_{\hat{x}} + \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t)\bar{b}(\hat{x}, t)dV_{\hat{x}}$$

para cualquier $\Omega^t \subseteq \Gamma^t$. Por lo tanto

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \nabla^{\hat{x}} \cdot \mathbb{T} + \rho\bar{b} \quad (1.12)$$

es la forma diferencial del balance de momento.

La existencia del campo de tracción es un postulado conocido como hipótesis de Cauchy, sin embargo la existencia del tensor de estrés no lo es.

Uno de los resultados centrales de la dinámica de fluidos nos dice que $\bar{t}(\hat{n}(\hat{x}), t)$ es lineal en $\hat{n}(\hat{x})$ y asegura que existe un campo tensorial de segundo orden tal que

$$\bar{t}(\hat{n}(\hat{x}), t) = \mathbb{T}(\hat{x}, t)\hat{n}(\hat{x})$$

en el caso en que \bar{t} y \bar{b} forman un sistema de fuerzas para Γ durante el movimiento, esto es

- i) $\bar{t}(\hat{n}(\hat{x}), t)$ es una función suave de x sobre Γ^t
- ii) $\bar{b}(\hat{x}, t)$ para cada t es una función continua de x sobre Γ^t .

Esta afirmación se debe a Cauchy y se enuncia a continuación (véase [17, p. 101]):

TEOREMA 1.4.3 (Teorema de Cauchy). *Sea (\bar{t}, \bar{b}) un sistema de fuerzas para Γ durante el movimiento. Entonces una condición necesaria y suficiente para satisfacer la ecuación de balance de momento es que exista un campo tensorial espacial \mathbb{T} tal que*

- a) para cada vector unitario \hat{n} , $\bar{t}(\hat{n}(\hat{x}, t)) = \mathbb{T}(\hat{x}, t)\hat{n}(\hat{x})$;
- b) \mathbb{T} es simétrico;
- c) \mathbb{T} satisface la ecuación $\nabla \cdot \mathbb{T} + \rho\bar{b} = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}$.

El teorema de Cauchy afirma que para cada sistema de fuerzas consistente con la ecuación de balance de momento corresponde exactamente un campo tensorial simétrico consistente con i),ii). De forma inversa, un sistema de fuerzas (\bar{t}, \bar{b}) está

completamente determinado por el estrés \mathbb{T} y el mapeo $\vec{\varphi}(x, t)$.
Para probar el inciso a) del teorema usaremos el siguiente lema.

LEMA 1.4.1. *Dado $\hat{x} \in \Omega^t$, una base ortonormal $\{e_i\}$ y cualquier vector unitario \hat{n} tal que*

$$\hat{n} \cdot e_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

se sigue que

$$\bar{t}(\hat{n}, \hat{x}) = - \sum_{i=1}^n (\hat{n} \cdot e_i) \bar{t}(-e_i, \hat{x})$$

PRUEBA. Supongamos que \hat{x} pertenece al interior de Ω^t . Sea $\delta > 0$, consideremos un tetraedro τ_δ con las siguientes propiedades: los vectores n y $-e_i$ son normales a las caras $\tau_{n\delta}$ y $\tau_{i\delta}$ respectivamente; el vértice opuesto a la cara $\tau_{n\delta}$ es \hat{x} ; la distancia de \hat{x} a $\tau_{n\delta}$ es δ .

Para δ suficientemente pequeña (digamos $\delta \leq \delta_0$) podemos asegurar que τ_δ está contenido en el interior de Ω^t . Debido a la continuidad de ρ, \bar{b} y $\frac{D\bar{u}}{Dt}$ sobre Ω^t , el vector $\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} - \rho \bar{b}$ es acotado en τ_δ para cada t fija, y se cumple que

$$\left| \int_{\partial\tau_\delta} \bar{t}(n) dS_{\hat{x}} \right| = \left| \int_{\tau_\delta} \left(\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} - \rho \bar{b} \right) dV_{\hat{x}} \right| \leq M Vol(\tau_\delta)$$

para toda $\delta \leq \delta_0$, donde M es independiente de δ .

Denotemos $A(\partial\tau_\delta)$ el área de $\partial\tau_\delta$; ya que ésta es proporcional a δ^2 y $Vol(\tau_\delta)$ proporcional a δ^3 , se infiere que

$$\frac{1}{A(\partial\tau_\delta)} \int_{\partial\tau_\delta} \bar{t}(n) dS_{\hat{x}} \rightarrow 0$$

si $\delta \rightarrow 0$. Pero $\partial\tau_\delta = \tau_{n\delta} \cup \tau_{1\delta} \cup \tau_{2\delta} \cup \tau_{3\delta}$, así que

$$\int_{\partial\tau_\delta} \bar{t}(n, \hat{x}) dS_{\hat{x}} = \int_{\tau_{n\delta}} \bar{t}(\hat{n}, \hat{x}) dS_{n\hat{x}} + \sum_{i=1}^3 \int_{\tau_{i\delta}} \bar{t}(-e_i, \hat{x}) dS_{i\hat{x}}. \quad (1.13)$$

Por otro lado, si los lados del tetraedro paralelos a e_i los denotamos por l_i entonces, por ser \hat{n} unitario

$$\hat{n}_i = \frac{\delta}{l_i}$$

Además, el volumen del tetraedro se puede expresar de cuatro maneras distintas

$$Vol(\tau_\delta) = \frac{A(\tau_{n\delta})\delta}{3} = \frac{A(\tau_{i\delta})l_i}{3}$$

Considerando que $\{e_i\}$ es ortonormal obtenemos la fórmula

$$A(\tau_{n\delta})(\hat{n} \cdot e_i) = A(\tau_{i\delta})$$

Esto significa que cada cara $\tau_{i\delta}$ puede mapearse linealmente a $\tau_{n\delta}$ con Jacobiano constante $J = \hat{n} \cdot e_i$ y por lo tanto

$$\int_{\tau_{i\delta}} \bar{t}(-e_i, \hat{x}) dS_{i\hat{x}} = \int_{\tau_{n\delta}} \bar{t}(-e_i, \hat{x}) \hat{n} \cdot e_i dS_{n\hat{x}}.$$

Por último notemos que

$$\begin{aligned} A(\partial\tau_{n\delta}) &= A(\tau_{n\delta}) + \sum_{i=1}^3 A(\tau_{i\delta}) \\ &= \left(1 + \sum_{i=1}^3 \hat{n} \cdot e_i\right) A(\tau_{n\delta}). \end{aligned}$$

Utilizando estos resultados en (1.13) obtenemos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{A(\tau_{n\delta})} \int_{\tau_{n\delta}} \left[\bar{t}(\hat{n}, \hat{x}) + \sum_{i=1}^3 \bar{t}(-e_i, \hat{x})(\hat{n} \cdot e_i) \right] dS_{n\hat{x}} = 0,$$

debido a la continuidad del integrando concluimos que

$$\bar{t}(\hat{n}, \hat{x}) = - \sum_{i=1}^3 \bar{t}(-e_i, \hat{x})(\hat{n} \cdot e_i). \quad (1.14)$$

□

Es importante notar que podemos extender el argumento anterior para vectores unitarios que cumplen $\hat{n} \cdot e_i < 0$, pues para este caso definimos una nueva base \bar{e}_i como

$$\bar{e}_i = [\text{sgn}(\hat{n} \cdot e_i)] e_i$$

de esta manera aseguramos que $\hat{n} \cdot \bar{e}_i > 0$ y así (1.14) es válida para cualquier vector unitario.

Observemos también que el campo $\bar{t}(\hat{n}, \hat{x})$ es una función continua de \hat{n} . Por lo tanto, si $\hat{n} \rightarrow e_j$ entonces

$$\bar{t}(e_j, \hat{x}) = -\bar{t}(-e_j, \hat{x})$$

debido a que la elección de la base $\{e_i\}$ es arbitraria, se debe cumplir que

$$\bar{t}(\hat{n}, \hat{x}) = -\bar{t}(-\hat{n}, \hat{x})$$

para todo vector unitario \hat{n} en la superficie de un cuerpo.¹

En vista de este resultado el campo de tracción toma la forma

$$\bar{t}(\hat{n}, \hat{x}) = \sum_{i=1}^3 \bar{t}(e_i, \hat{x})(\hat{n} \cdot e_i), \quad (1.15)$$

y aplicando la definición de producto diádico de dos vectores, se sigue que

$$\bar{t}(\hat{n}, \hat{x}) = \sum_{i=1}^3 [\bar{t}(e_i, \hat{x}) \otimes e_i] \hat{n}. \quad (1.16)$$

Por lo tanto para cualquier punto $\hat{x} \in \Omega^t$ y $t \geq 0$, el tensor de estrés queda definido como

$$\mathbb{T}(\hat{x}, t) = \sum_{i=1}^3 \bar{t}(e_i, \hat{x}) \otimes e_i. \quad (1.17)$$

Esto concluye a).

Para la simetría del tensor de estrés primero plantearemos el balance de momento angular en forma integral y probaremos que, bajo las premisas del teorema de

¹Este resultado es equivalente a la tercera ley de Newton en mecánica clásica.

Cauchy, la conservación de momento angular es suficiente para nuestra proposición. Recordemos que para un punto material \vec{x} , el momento angular (respecto al origen de coordenadas) es $\vec{l} \in \mathbb{R}^3$ definido como

$$\vec{l} = \vec{x} \times \vec{p},$$

donde la i -ésima componente de \vec{l} se puede escribir con la notación de índices repetidos como

$$l_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k.$$

En este caso el balance de momento angular es

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{x} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{x} \times \vec{F}$$

donde $\tau = \vec{x} \times \vec{F}$ es la torca debida a la fuerza \vec{F} .

Por lo tanto, no es de extrañarse que para un cuerpo continuo Ω^t el momento angular y la torca queden definidos respectivamente como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega^t) &= \int_{\Omega^t} \hat{x} \times \rho \bar{u} dV_{\hat{x}}, \\ \tau(\Omega^t) &= \int_{\Omega^t} \hat{x} \times \rho \bar{b} dV_{\hat{x}} + \int_{\partial\Omega^t} \hat{x} \times \bar{t} dS_{\hat{x}}. \end{aligned}$$

Entonces el balance de momento angular en forma integral es

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \hat{x} \times \rho \bar{u} dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \hat{x} \times \rho \bar{b} dV_{\hat{x}} + \int_{\partial\Omega^t} \hat{x} \times \bar{t} dS_{\hat{x}}. \quad (1.18)$$

Por el teorema 1.4.1 el lado izquierdo de esta ecuación es

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \hat{x} \times \rho \bar{u} dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \rho \frac{D}{Dt} (\hat{x} \times \bar{u}) dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \rho \left(\hat{x} \times \frac{D\bar{u}}{Dt} \right) dV_{\hat{x}}.$$

Sustituyendo esta expresión en (1.18) y aplicando la parte a) del teorema de Cauchy queda

$$\int_{\Omega^t} \hat{x} \times \rho \frac{D\bar{u}}{Dt} dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \hat{x} \times \rho \bar{b} dV_{\hat{x}} + \int_{\partial\Omega^t} \hat{x} \times \mathbb{T}\hat{n} dS_{\hat{x}}$$

y por la ecuación (1.12) esto se reduce a

$$\int_{\Omega^t} \hat{x} \times \nabla \cdot \mathbb{T} dV_{\hat{x}} = \int_{\partial\Omega^t} \hat{x} \times \mathbb{T}\hat{n} dS_{\hat{x}}. \quad (1.19)$$

Para manipular fácilmente esta ecuación haremos uso de la notación de índices repetidos. En términos de componentes el producto vectorial entre \hat{x} y $\mathbb{T}\hat{n}$ se puede escribir como

$$(\hat{x} \times \mathbb{T}\hat{n})_i = \epsilon_{ijk} \hat{x}_j (\mathbb{T}\hat{n})_k,$$

donde $(\mathbb{T}\hat{n})_k = \mathbb{T}_{km}\hat{n}_m$ y por lo tanto

$$(\hat{x} \times \mathbb{T}\hat{n})_i = \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\mathbb{T}_{km}\hat{n}_m.$$

De esta manera podemos definir el tensor de segundo orden \mathbb{S} como

$$\mathbb{S}_{im} := \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\mathbb{T}_{km}$$

o explícitamente

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} \hat{x}_2\mathbb{T}_{31} - \hat{x}_3\mathbb{T}_{21} & \hat{x}_2\mathbb{T}_{32} - \hat{x}_3\mathbb{T}_{22} & \hat{x}_2\mathbb{T}_{33} - \hat{x}_3\mathbb{T}_{23} \\ \hat{x}_3\mathbb{T}_{11} - \hat{x}_1\mathbb{T}_{31} & \hat{x}_3\mathbb{T}_{12} - \hat{x}_1\mathbb{T}_{32} & \hat{x}_3\mathbb{T}_{13} - \hat{x}_1\mathbb{T}_{33} \\ \hat{x}_1\mathbb{T}_{21} - \hat{x}_2\mathbb{T}_{11} & \hat{x}_1\mathbb{T}_{22} - \hat{x}_2\mathbb{T}_{12} & \hat{x}_1\mathbb{T}_{23} - \hat{x}_2\mathbb{T}_{13} \end{pmatrix}$$

con la propiedad $\mathbb{S}\hat{n} = \hat{x} \times \mathbb{T}\hat{n}$.

El tensor \mathbb{S} y el teorema de la divergencia nos permiten escribir (1.19) como

$$\int_{\Omega^t} \hat{x} \times \nabla \cdot \mathbb{T} dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \nabla \cdot \mathbb{S} dV_{\hat{x}}$$

Dado que esta ecuación debe ser válida para todo $\Omega^t \subseteq \mathbb{R}^3$, obtenemos

$$(\hat{x} \times \nabla \cdot \mathbb{T}) - \nabla \cdot \mathbb{S} = 0 \quad \forall \hat{x} \in \Omega^t$$

Podemos escribir esta identidad en términos de componentes

$$\epsilon_{ijk}\hat{x}_j\partial_m\mathbb{T}_{km} - \partial_m(\epsilon_{ijk}\hat{x}_j\mathbb{T}_{km}) = 0 \quad \forall \hat{x} \in \Omega^t \quad (1.20)$$

donde ∂_m denota la derivada parcial respecto la m -ésima variable. Luego, si expandemos la derivada del segundo término podemos reducir este resultado como sigue

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\partial_m\mathbb{T}_{km} - \epsilon_{ijk}\hat{x}_j\partial_m\mathbb{T}_{km} - \epsilon_{ijk}(\partial_m\hat{x}_j)\mathbb{T}_{km} &= \epsilon_{ijk}(\partial_m\hat{x})\mathbb{T}_{km} \\ &= \epsilon_{ijk}\delta_{mj}\mathbb{T}_{km} \\ &= \epsilon_{ijk}\mathbb{T}_{kj} \end{aligned}$$

Por lo tanto (1.20) es equivalente a $\epsilon_{ijk}\mathbb{T}_{kj} = 0$. Dado que hay sumas implícitas sobre j y k , éstos son índices mudos² y por lo tanto es seguro escribir

$$\epsilon_{ijk}\mathbb{T}_{kj} + \epsilon_{ikj}\mathbb{T}_{jk} = 0$$

pero $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$, por lo que

$$\epsilon_{ijk}(\mathbb{T}_{kj} - \mathbb{T}_{jk}) = 0$$

como esto es válido para todo i, j, k distintos, concluimos que

$$\mathbb{T}_{kj} = \mathbb{T}_{jk}$$

²Esto significa que el valor de la suma es independiente de la elección del índice

para todo $1 \leq j \leq 3$, $1 \leq k \leq 3$ y $\hat{x} \in \Omega^t$. Así queda demostrado b), es decir, el tensor de estrés es *simétrico*.

Para finalizar esta sección utilizaremos la ecuación de continuidad para modificar la ecuación (1.12) de la siguiente manera: observemos que

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} = \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t},$$

por la ecuación de continuidad se convierte en

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} = -\vec{u} \nabla^x \cdot (\rho \vec{u}) + \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}.$$

Luego, tomamos el lado izquierdo de (1.12) y aplicamos esta última identidad como sigue

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} &= \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\nabla^x \vec{u}) \vec{u} \\ &= \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \nabla^x \cdot (\rho \vec{u}) + \rho (\nabla^x \vec{u}) \vec{u} \end{aligned}$$

por la identidad $\nabla^x \cdot (\vec{u} \otimes \rho \vec{u}) = \vec{u} \nabla^x \cdot (\rho \vec{u}) + (\nabla^x \vec{u}) \rho \vec{u}$ queda

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla^x \cdot (\vec{u} \otimes \rho \vec{u})$$

Finalmente sustituimos este resultado en (1.12) y obtenemos

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla^x \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \nabla^x \cdot \mathbb{T} + \rho \bar{b} \quad (1.21)$$

Esta ecuación está suplementada con $\mathbb{T}_{ij} = \mathbb{T}_{ji}$ y es conocida como la forma conservativa del balance de momento.

1.5. Balance de energía

Hasta este punto tenemos tres postulados que nos permiten obtener las ecuaciones de continuidad y balance de momento, esto significa que sólo nos hemos enfocado en aspectos mecánicos del movimiento. Sin embargo, sabemos que el movimiento no necesariamente es consecuencia de acción mecánica. Por esta razón dedicaremos esta sección a la deducción de la ecuación de la energía interna, que nos permitirá tomar en cuenta efectos termodinámicos en los fluidos.

Primero vamos a derivar una ecuación para la energía mecánica de un fluido; veremos que esta ecuación no es suficiente para describir el movimiento de un fluido, y esto nos conducirá al campo de la termodinámica.

DEFINICIÓN 1.5.1. *Considérese un conjunto arbitrario $\Omega^t \subseteq \Gamma^t$, definimos la energía cinética de un fluido contenido en Ω^t como*

$$\mathcal{K}(\Omega^t) := \int_{\Omega^t} \frac{1}{2} \rho(\hat{x}, t) \|\vec{u}(\hat{x}, t)\|^2 dV_{\hat{x}}$$

en donde, $\|\vec{u}(\hat{x}, t)\|$ denota la norma euclidiana del campo de velocidades.

Notemos que $\mathcal{K}(\Omega^t)$ toma en cuenta la contribución de energía cinética de cada elemento diferencial en Ω^t .

Podemos obtener fácilmente una ecuación diferencial que involucra la definición de energía cinética si tomamos el producto escalar de la ecuación (1.12) con el campo de velocidades $\vec{u}(\hat{x}, t)$, esto es

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot \vec{u} = (\nabla^x \cdot \mathbb{T}) \cdot \vec{u} + \rho \bar{b} \cdot \vec{u} \quad (1.22)$$

Si u_i es la i -ésima componente de \vec{u} entonces el producto escalar de \vec{u} con la derivada convectiva es

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^3 \frac{Du_i}{Dt} u_i = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} u_i + (\nabla^x u_i \cdot \vec{u}) u_i \right].$$

Notemos que

$$\sum_{i=1}^3 (\nabla^x u_i \cdot \vec{u}) u_i = \sum_{i=1}^3 (\nabla^x u_i) u_i \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^3 \frac{\nabla^x (u_i^2)}{2} \cdot \vec{u}$$

y

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} u_i = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i^2}{\partial t}$$

esto implica que

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} \cdot \vec{u} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right).$$

Por lo tanto

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) = (\nabla^x \cdot \mathbb{T}) \cdot \vec{u} + \rho \bar{b} \cdot \vec{u} \quad (1.23)$$

Podemos transformar (1.23) si utilizamos la ecuación de continuidad como hicimos en la sección anterior

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \|\vec{u}\|^2}{2} \right) &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\|\vec{u}\|^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\|\vec{u}\|^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \nabla^x \cdot (\rho \vec{u}) \end{aligned}$$

Sustituimos esta identidad en (1.23) para obtener

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \|\vec{u}\|^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \nabla^x \cdot (\rho \vec{u}) + \rho \nabla^x \left(\frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) \cdot \vec{u} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \|\vec{u}\|^2}{2} \right) + \nabla^x \cdot \left[\frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 (\rho \vec{u}) \right] \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \|\vec{u}\|^2}{2} \right) + \nabla^x \cdot \left[\frac{1}{2} \rho \|\vec{u}\|^2 \vec{u} \right] = (\nabla^x \cdot \mathbb{T}) \cdot \vec{u} + \rho \bar{b} \cdot \vec{u} \quad (1.24)$$

Esta relación es conocida como la ecuación de la energía mecánica.

Para entender completamente (1.24) se define el producto escalar de dos tensores ³ $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in V^2$ como

$$\mathbb{A} : \mathbb{B} := \sum_{i,j=1}^n A_{ij} B_{ij}$$

Con esta definición es fácil probar que

$$\nabla^x \cdot (\mathbb{T}\vec{u}) = (\nabla^x \cdot \mathbb{T}) \cdot \vec{u} + \mathbb{T} : \nabla^x \vec{u}$$

así que la ecuación (1.24) se reescribe como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \|\vec{u}\|^2}{2} \right) + \nabla^x \cdot \left[\frac{1}{2} \rho \|\vec{u}\|^2 \vec{u} \right] - \nabla^x \cdot (\mathbb{T}\vec{u}) = -\mathbb{T} : \nabla^x \vec{u} + \rho \bar{b} \cdot \vec{u} \quad (1.25)$$

Esta ecuación tiene dos particularidades; primero, falla en adquirir una forma similar a las ecuaciones (1.8) y (1.21) pues el término $\mathbb{T} : \vec{u}$ no aparece en éstas. Hasta este punto las ecuaciones de movimiento sólo involucran una derivada temporal y la divergencia de un campo; aunque esto no implica que (1.25) esté equivocada nos hace cuestionar la naturaleza de la contracción del tensor de estrés con el campo de velocidades.

Por otro lado (1.25) es una consecuencia del balance de momento, pues no está basada en alguna hipótesis nueva, sólo en el producto escalar de (1.12) con el campo de velocidades. Esto significa que la ecuación de la energía mecánica no es un principio excluido del balance de momento y por lo tanto resolver estas ecuaciones simultáneamente con la ecuación de continuidad nos impediría determinar el movimiento del fluido completamente.

En fluidos con variaciones en la temperatura (o mejor conocidos como fluidos conductores de calor) necesitamos una ecuación que nos diga como cambia la energía almacenada en el fluido cuando hay un incremento en el flujo de calor.

Con esto dicho, hay que decir que la ecuación de la energía mecánica es incompleta (un caso particular), por eso es que sobra un término aditivo $\mathbb{T} : \vec{u}$; éste se debe al cambio en la energía interna del cuerpo continuo, y es una consecuencia de la primera ley de la termodinámica, pues, de acuerdo con ésta, la energía total de un cuerpo tiene que ser equilibrada por cambios en la energía interna y el calor producido por disipación de energía. Por esta razón nos enfocaremos en establecer la primera ley de la termodinámica para un cuerpo continuo y se demostrará que (1.25) es sólo una parte de ésta.

La primera ley de la termodinámica es esencialmente el principio de conservación de la energía para sistemas termodinámicos y como tal, establece que la variación de la energía de un sistema durante cualquier transformación es igual a la cantidad de energía que el sistema recibe del ambiente. Para un sistema que no está térmicamente aislado ésta ley se puede escribir como

$$\Delta e = Q - W \quad (1.26)$$

donde Δe es la variación de la energía del sistema, W es la energía recibida en forma de trabajo y Q es la cantidad de energía recibida por el sistema en formas distintas a trabajo, es decir, Q es la cantidad de calor recibida por el sistema.

³Esta operación también es conocida como contracción de índices de \mathbb{A} y \mathbb{B} .

Si consideramos que la transformación es infinitesimal y reversible⁴, la ecuación de la primera ley es

$$de = dQ - dW$$

Hay que destacar que este enunciado no sólo establece el balance de energía, pues al mismo tiempo postula la existencia de la función de estado e . Así pues, la formulación de la primera ley de la termodinámica para un cuerpo continuo no es una elección arbitraria; es el siguiente paso lógico. Para establecer el enunciado correctamente necesitamos precisar los conceptos de estos últimos párrafos para cuerpos continuos.

1.5.1. Primera ley de la termodinámica. Para construir el balance de energía podemos comenzar aplicando el principio de conservación expresado en (1.26) y así encaminarnos hacia un primer postulado:

La velocidad de variación de la energía E contenida en un cuerpo es igual a la suma de la producción de trabajo \mathcal{W} de las fuerzas externas más las distintas energías restantes que fluyen en el cuerpo por unidad de tiempo

$$\frac{dE}{dt} = \mathcal{W} + \sum_{i=1}^n \mathcal{U}_i,$$

donde \mathcal{W} es el trabajo de las fuerzas externas por unidad de tiempo, y \mathcal{U}_i es la i -ésima energía de cualquier otra clase por unidad de tiempo, por ejemplo, energía calorífica, energía eléctrica y energía química.

Para nuestros fines consideraremos sistemas termo-mecánicos que sólo presentan energía calorífica (calor) \mathcal{Q} . Así

$$\frac{dE}{dt} = \mathcal{W} + \mathcal{Q} \tag{1.27}$$

Para completar esta ecuación pensemos en un elemento diferencial δV de Ω^t con $t \geq 0$ fijo. Si δV se encuentra bajo la acción de un sistema de fuerzas entonces se está haciendo trabajo sobre la masa de éste por las fuerzas de cuerpo y las fuerzas de superficie, también puede estar ganando (o perdiendo) calor por la superficie, y por lo tanto obtenemos una ganancia neta a la energía total de δV ; esta contribución se encuentra representada por el lado derecho de (1.27). Una parte de esta energía neta se manifiesta como un incremento en la energía cinética de δV , y según la primera ley de la termodinámica el resto se convierte en un incremento en la energía interna de éste. Así el lado izquierdo de (1.27) debe representar el incremento total en la energía de cada δV , es decir, la suma del incremento en la energía cinética más el incremento en la energía interna del elemento diferencial, y por lo tanto para Ω^t se debe cumplir que

$$E(\Omega^t) = \mathcal{K}(\Omega^t) + e(\Omega^t) \tag{1.28}$$

Hay que destacar que la energía interna de un cuerpo continuo tiene dos tipos de contribuciones la mecánica y la térmica. En efecto, con (1.27) y (1.28) podemos

⁴Esto significa que la sucesión de estados entre el estado inicial y el final de la transformación difieren por infinitesimales de estados de equilibrio, es decir, se puede considerar como una sucesión de estados de equilibrio que ocurre de forma infinitamente lenta.

escribir

$$\frac{de(\Omega^t)}{dt} = \mathcal{W}(\Omega^t) - \frac{d\mathcal{K}(\Omega^t)}{dt} + \mathcal{Q}(\Omega^t).$$

por lo que definimos el trabajo neto \mathfrak{W} del sistema de fuerzas (\bar{t}, \bar{b}) como

$$\mathfrak{W}(\Omega^t) := \mathcal{W}(\Omega^t) - \frac{d\mathcal{K}(\Omega^t)}{dt}.$$

Obsérvese que si $\mathfrak{W}(\Omega^t) \equiv 0$ entonces la única contribución a la energía interna es entregada por la energía calorífica. Esto significa que toda la energía mecánica liberada por las fuerzas externas es usada por Ω^t para producir movimiento, es decir, se convierte en energía cinética. Si $\mathfrak{W}(\Omega^t) > 0$ entonces una porción de la energía mecánica es convertida en energía interna. Por otro lado si $\mathfrak{W}(\Omega^t) < 0$ entonces la energía interna almacenada en Ω^t es liberada como trabajo en contra de las fuerzas externas.

Así pues, nuestro primer axioma no sólo plantea el balance de energía, también postula la existencia de un campo de energía interna por unidad de masa e y establece que las energías son aditivas.

Para obtener una ecuación diferencial a partir de (1.27) y (1.28) primero necesitamos definir ciertas cantidades termodinámicas para cuerpos continuos. Comenzaremos con la definición de calor.

Cuando hablamos de calor contenido en un cuerpo nos referimos al valor promedio de la energía asociada con la velocidad de las fluctuaciones de las moléculas o átomos en el cuerpo. En particular, el calor es una energía que usualmente asociamos a la temperatura.

Al deformar un cuerpo podemos afectar su temperatura y por lo tanto su calor contenido. El proceso inverso también es válido, es decir, podemos deformar un cuerpo aumentando su temperatura (por ejemplo, podría dilatarse).

En un cuerpo continuo se puede transferir calor a través de la superficie o por alguna fuente de calor distribuida en toda la masa del cuerpo. Cuando el calor se produce o consume internamente, decimos que existe una fuente volumétrica de calor. Mientras que si el calor se transmite por la superficie ya sea por contacto físico o por radiación decimos que existe una fuente superficial de calor. Esto implica que la razón a la que el calor es agregado a un conjunto Ω^t por unidad de tiempo se puede descomponer en la contribución volumétrica más la contribución superficial.

Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.5.2. *Dado un conjunto arbitrario $\Omega^t \subseteq \Gamma^t$ suponemos la existencia de dos campos escalares espaciales $f : \Omega^t \rightarrow \mathbb{R}$ y $h : \partial\Omega^t \rightarrow \mathbb{R}$ tales que para cada $t \geq 0$ la cantidad de calor transmitida a Ω^t es*

$$\mathcal{Q}(\Omega^t) := \mathcal{Q}_b(\Omega^t) + \mathcal{Q}_s(\Omega^t)$$

donde

$$\mathcal{Q}_b(\Omega^t) := \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) f(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}}$$

es la contribución volumétrica y

$$\mathcal{Q}_s(\Omega^t) := \int_{\partial\Omega^t} h(\hat{x}, t) dS_{\hat{x}}$$

la contribución superficial.

En esta definición la función f representa la fuente de suministro de calor por unidad de volumen y unidad de masa, mientras que h es la fuente de transferencia de calor por unidad de área.

Con un argumento similar al que nos llevó a (1.17) podemos demostrar que

$$h(\hat{x}, t) = -\vec{q}(\hat{x}, t) \cdot \hat{n}(\hat{x})$$

donde \vec{q} es el campo vectorial de flujo de calor por unidad de área sobre un punto $\hat{x} \in \partial\Omega^t$. También conocido como flujo de Fourier-Stokes, especifica la dirección del flujo de calor y la magnitud de la razón de flujo a través de una unidad de área; con él podemos escribir

$$\mathcal{Q}(\Omega^t) = \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) f(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}} - \int_{\partial\Omega^t} \vec{q}(\hat{x}, t) \cdot \hat{n}(\hat{x}, t) dS_{\hat{x}} \quad (1.29)$$

Obsérvese que el signo negativo en esta ecuación indica que, si el vector de flujo \vec{q} apunta hacia el interior de Ω^t entonces hay una contribución positiva a la cantidad de calor en la superficie.

En el caso de conservación de la energía, los conceptos de calor y trabajo se colocan en pie de igualdad pues

$$\mathcal{W}(\Omega^t) = -\mathcal{Q}(\Omega^t)$$

esto significa que el trabajo aplicado por las fuerzas externas es convertido en calor y por lo tanto el trabajo es una forma de energía que definimos como sigue:

DEFINICIÓN 1.5.3. *Consideremos un conjunto arbitrario $\Omega^t \subseteq \Gamma^t$ y un sistema de fuerzas externas (\bar{t}, \bar{b}) donde \bar{t} es el campo de tracción y \bar{b} el campo de fuerzas de cuerpo por unidad de masa. Definimos el trabajo o la energía mecánica del sistema (\bar{t}, \bar{b}) sobre Ω^t como*

$$\mathcal{W}(\Omega^t) := \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) \bar{b}(\hat{x}, t) \cdot \bar{u}(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}} + \int_{\partial\Omega^t} \bar{t}(\hat{x}, t) \cdot \bar{u}(\hat{x}, t) dS_{\hat{x}}$$

Como se mencionó antes la energía que contiene un cuerpo continuo que no está asociada con la energía cinética se llama energía interna y representa la energía que puede incrementarse por calor o por trabajo y que es capaz de liberarse en forma de calor, trabajo o movimiento. A continuación escribimos la definición de la energía interna de un cuerpo continuo, sin embargo hay que señalar que la existencia de un campo de energía interna es axiomático y por lo tanto esta definición es parte de la primera ley de la termodinámica.

DEFINICIÓN 1.5.4. *Dado un conjunto arbitrario $\Omega^t \subseteq \Gamma^t$ denotamos su energía interna por $\mathcal{E}(\Omega^t)$ y suponemos la existencia de un campo de densidad de energía interna por unidad de masa y unidad de volumen $e(\hat{x}, t) \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\mathcal{E}(\Omega^t) = \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) e(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}}$$

En vista de estas definiciones enunciamos la primera ley de la termodinámica para un cuerpo continuo que nos proporcionará la ecuación de balance de energía.

POSTULADO (Primera ley de la termodinámica). *La razón de cambio de la energía cinética más la energía interna es igual a la suma del trabajo aplicado y a la cantidad de calor transferido al cuerpo (por unidad de tiempo), es decir*

$$\frac{d\mathcal{E}(\Omega^t)}{dt} + \frac{\mathcal{K}(\Omega^t)}{dt} = \mathcal{Q}(\Omega^t) + \mathcal{W}(\Omega^t)$$

y en forma integral

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \rho \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \rho f dV_{\hat{x}} - \int_{\partial\Omega^t} \vec{q} \cdot \hat{n} dS_{\hat{x}} + \int_{\Omega^t} \rho \bar{b} \cdot \vec{u} dV_{\hat{x}} + \int_{\partial\Omega^t} \bar{t} \cdot \vec{u} dS_{\hat{x}} \quad (1.30)$$

Ahora procedemos a encontrar la forma diferencial del balance de energía. Si agrupamos las integrales semejantes de (1.30) obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \rho \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) dV_{\hat{x}} = \int_{\partial\Omega^t} (\bar{t} \cdot \vec{u} - \vec{q} \cdot \hat{n}) dS_{\hat{x}} + \int_{\Omega^t} \rho (\bar{b} \cdot \vec{u} + f) dV_{\hat{x}}, \quad (1.31)$$

por los incisos a) y b) del teorema de Cauchy la integral de superficie es

$$\int_{\partial\Omega^t} (\bar{t} \cdot \vec{u} - \vec{q} \cdot \hat{n}) dS_{\hat{x}} = \int_{\partial\Omega^t} (\mathbb{T}\vec{u} - \vec{q}) \cdot \hat{n} dS_{\hat{x}}$$

y por el teorema de la divergencia de Gauss obtenemos

$$\int_{\partial\Omega^t} (\mathbb{T}\vec{u} - \vec{q}) \cdot \hat{n} dS_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \left[\nabla^{\hat{x}} \cdot (\mathbb{T}\vec{u}) - \nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{q} \right] dV_{\hat{x}},$$

sustituimos esta última integral en (1.31)

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \rho \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \left[\nabla^{\hat{x}} \cdot (\mathbb{T}\vec{u}) - \nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{q} + \rho (\bar{b} \cdot \vec{u} + f) \right] dV_{\hat{x}}. \quad (1.32)$$

Luego, a la integral del lado izquierdo podemos aplicarle el teorema del transporte de Reynolds, obteniendo

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \rho \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) dV_{\hat{x}} = \int_{\Omega^t} \left\{ \frac{D}{Dt} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) \right] + \rho \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) \nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u} \right\} dV_{\hat{x}}$$

Si sustituimos esta última relación en (1.32) y tomamos en cuenta que es válida

para cualquier conjunto Ω^t llegamos a la forma diferencial del balance de energía:

$$\frac{D}{Dt} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) \right] + \rho \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) \nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u} = \nabla^{\hat{x}} \cdot (\mathbb{T}\vec{u}) - \nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{q} + \rho \bar{b} \cdot \vec{u} + \rho f \quad (1.33)$$

Podemos trabajar esta ecuación un poco más si usamos la definición del operador $\frac{D}{Dt}$ y que para cualquier campo espacial escalar $\mathcal{F}(\hat{x}, t)$ se cumple que

$$\frac{D\mathcal{F}}{Dt} + \mathcal{F}(\nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u}) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \nabla^{\hat{x}} \cdot (\mathcal{F}\vec{u})$$

obteniendo así el balance de energía

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) \right] + \nabla^{\hat{x}} \cdot \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) \vec{u} \right] = \nabla^{\hat{x}} \cdot [(\mathbb{T}\vec{u}) - \vec{q}] + \rho \bar{b} \cdot \vec{u} + \rho f \quad (1.34)$$

Esta ecuación, al igual que (1.8) y (1.21) se escribe con una derivada temporal más una divergencia y por lo tanto también es conocida como la forma conservativa del balance de energía.

Observemos que (1.34) se puede expresar como la suma de dos ecuaciones; la primera es la ecuación de la energía mecánica (1.25) y la segunda es una ecuación sólo para la energía interna con la siguiente forma

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla^{\hat{x}} \cdot (\rho e \vec{u}) + \nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{q} = \mathbb{T} : \nabla^{\hat{x}} \vec{u} + \rho f. \quad (1.35)$$

También aparece una vez más el término $\mathbb{T} : \nabla^{\hat{x}} \vec{u}$, pero ahora es seguro afirmar que corresponde a un incremento en la energía interna, pues podemos entender correctamente la relación

$$\nabla^{\hat{x}} \cdot (\mathbb{T}\vec{u}) = (\nabla^{\hat{x}} \cdot \mathbb{T}) \cdot \vec{u} + \mathbb{T} : \nabla^{\hat{x}} \vec{u} \quad (1.36)$$

con la primera ley de la termodinámica. Sin pérdida de generalidad consideremos un fluido con campo de fuerzas de cuerpo $\bar{b} \equiv 0$, es decir sólo hay contribución a la fuerza y al trabajo total por la superficie. De acuerdo con la definición de trabajo y a (1.32), el término del lado izquierdo de (1.36) corresponde a la razón de trabajo total por unidad de volumen del campo de tracción sobre un elemento de fluido. Así que (1.36) afirma que el trabajo total se puede escribir como la suma de dos términos; de acuerdo con la ecuación (1.23) el primero de éstos $(\nabla^{\hat{x}} \cdot \mathbb{T}) \cdot \vec{u}$ corresponde al incremento en la energía cinética del fluido. Por lo tanto la primera ley de la termodinámica asegura que el resto de la razón del trabajo por unidad de volumen $\mathbb{T} : \nabla^{\hat{x}} \vec{u}$ corresponde a un incremento en la energía interna. Debido a este incremento el fluido se deforma y por lo tanto la contracción $\mathbb{T} : \nabla^{\hat{x}} \vec{u}$ es la razón del trabajo de deformación.

Por último hay que destacar que (1.34) y (1.35) son ecuaciones completamente distintas debido a $\mathbb{T} : \nabla^{\hat{x}} \vec{u}$.

1.6. Ecuaciones constitutivas

La ecuación de continuidad (1.8), la ecuación de momento (1.21) y la ecuación de energía (1.34) forman el sistema de ecuaciones más general que determina la evolución temporal de un medio continuo. Sin embargo dos cuerpos continuos con la misma masa y geometría sujetos a un sistema de fuerzas idéntico responden distinto. Por ejemplo, bajo presión externa un sólido se deforma, mientras que un fluido fluye además de tomar la forma del contenedor.

La estructura interna de la materia es responsable de este tipo de comportamiento, pero como se discutió al principio sólo nos importa el comportamiento global. Por esta razón necesitamos un conjunto de ecuaciones que reflejen a través de variables macroscópicas este comportamiento microscópico.

Por otro lado notemos que tenemos un sistema de cinco ecuaciones diferenciales; tres ecuaciones de momento, una de masa y una de energía. El número de variables independientes ρ , u_i , q_i , e y \mathbb{T}_{ij} es catorce (contando sólo las componentes independientes de \mathbb{T}). Claramente el sistema no es el adecuado para determinar el movimiento de un fluido. Así que existe la necesidad de definir un conjunto de ecuaciones que nos relacione las variables macroscópicas : densidad ρ , velocidad \vec{u} y temperatura θ con otras cantidades que aparecen en las ecuaciones de movimiento: el tensor de estrés \mathbb{T} , la distribución de energía interna e y el flujo \vec{q} .

De la teoría termodinámica sabemos que dada una cantidad de sustancia contenida en un sistema, la temperatura θ , la densidad ρ y la presión p no son cantidades independientes; están conectadas por una relación en forma general

$$f(p, \rho, \theta) = 0$$

llamada *ecuación de estado*. Su forma depende de las propiedades especiales de la sustancia. Cualquier variable de esta relación se puede expresar como función de las otras dos resolviendo la ecuación. Por ejemplo para un gas perfecto, la presión es de origen puramente térmico; está relacionada con la transferencia de momento por las partículas involucradas en el movimiento térmico, y siempre debe ser proporcional a la temperatura. Para un gas perfecto una buena aproximación está dada por la *ley de Boyle* (véase [13, p. 8])

$$p = p(\rho, \theta) = R\rho\theta,$$

donde R es una constante inversamente proporcional a la masa molar del gas.

En general el estado de una masa de fluido en equilibrio (mecánico y térmico) queda determinado por dos variables únicamente, la presión y el volumen específico ($\tau = \frac{1}{\rho}$). Todas las demás posibles cantidades que describen el estado de un fluido son funciones de estos dos *parámetros de estado*.

Se puede considerar una ecuación de estado con una forma más general (véase [4], [35])

$$p = p(\rho, \theta) = p_{el}(\rho) + p_{th}(\rho, \theta),$$

donde la *presión térmica* p_{th} es una función lineal de la temperatura, esto es

$$p_{th}(\rho, \theta) = \theta \frac{\partial p(\rho)}{\partial \theta}$$

más aún se asume que p_{θ} es una función no decreciente de la densidad tal que $p(0) = 0$. En esta ecuación la *presión elástica* p_{el} es la misma para una densidad

constante para cualquier valor de la temperatura, y se debe a fuerzas intermoleculares de atracción y repulsión. La *presión térmica* p_{th} se atribuye a la transferencia de momento por el movimiento de traslación aleatorio de las moléculas.

Estas relaciones son ejemplos de ecuaciones constitutivas. Como podemos ver estas ecuaciones toman en cuenta parámetros microscópicos que describen el movimiento de partículas individuales pues, como uno espera existe una diferencia sustancial entre gases y líquidos debida a la distancia relativa de las moléculas (o átomos) en ambos medios.

Debido a que nos conciernen los fluidos en movimiento, vamos a suponer la existencia de un campo de temperatura absoluto $\theta(\hat{x}, t) > 0$ para cada $\hat{x} \in \Omega^t$ y $t \geq 0$. La temperatura de un cuerpo continuo se entiende como una medida de la variación de las velocidades atómicas alrededor de un punto.

De esta misma forma para cada $(\hat{x}, t) \in \Omega^t \times [0, \infty)$ vamos a suponer que existe un estado (de equilibrio termodinámico) definido por las variables : presión ⁵ p , volumen específico τ , entropía específica S , además de las ya discutidas; energía interna específica e , densidad ρ , y temperatura θ .

Cada una de estas variables define un campo escalar sobre $\Omega^t \times [0, \infty)$. Además por la teoría termodinámica sabemos que para un medio dado sólo dos de estas variables son independientes.

Por ejemplo, si para un medio sabemos que p es función de $\tau = \frac{1}{\rho}$ y S , entonces

$$p = f(\tau(\hat{x}, t), S(\hat{x}, t)) \quad y \quad p = g(\rho(\hat{x}, t), S(\hat{x}, t))$$

Hay que mencionar que una propiedad fundamental para cualquier medio es que, para entropía constante la presión es una función creciente de ρ ($f_\rho > 0$), o equivalentemente una función decreciente de τ ($g_\tau < 0$). Generalmente para cualquier valor de S la función g es convexa respecto de τ , es decir, suponemos que $g_{\tau\tau}(\tau, S) > 0$.

De estos parámetros de estado la entropía requiere especial atención, pues está relacionada con la dirección de los procesos termodinámicos. Mostraremos que ésta cumple un principio extremo simple que expresa el hecho de que un cuerpo tiene un límite sobre la razón a la que el calor puede ser absorbido; esto es, la segunda ley de la termodinámica.

La relación entre la entropía y la formulación de la segunda ley de la termodinámica siempre llevan a una discusión larga (y francamente tediosa) que culmina con relaciones matemáticas simples, por esta razón omitiremos esta discusión y pasaremos directamente a la formulación matemática. Para un estudio detallado de la segunda ley de la termodinámica se recomiendan [13] y [35].

Podemos introducir la entropía de un sistema durante un proceso reversible con la primera ley de la termodinámica si buscamos un factor integrante tal que dQ sea una diferencial total. Este factor es θ^{-1} , así que

$$\frac{dQ}{\theta} := dS$$

⁵Aunque en un fluido podemos diferenciar la clase de presión que actúa en él, aquí nos referimos a la presión termodinámica. Más adelante precisaremos este punto.

y la primera ley se reescribe como

$$de = \theta dS - dW$$

Entonces, si consideramos dos estados A y B de un sistema, se infiere que

$$S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{dQ}{\theta}$$

siempre que la integral se tome sobre un proceso reversible de A hacia B. Sin embargo si la integral se toma de A hacia B sobre un proceso irreversible ⁶, se cumple la desigualdad

$$S(B) - S(A) \geq \int_A^B \frac{dQ}{\theta} \quad (1.37)$$

Para un sistema completamente aislado $dQ = 0$, entonces $S(B) \geq S(A)$, es decir: *para cualquier transformación en un sistema aislado la entropía del estado final nunca puede ser menor que la del estado inicial.*

La ecuación (1.37) es un enunciado equivalente a la segunda ley de la termodinámica llamado *desigualdad de Clausius-Planck*.

En forma diferencial podemos expresar la desigualdad de Clausius-Planck como

$$\theta dS \geq dQ \quad (1.38)$$

esto significa que la segunda ley asegura la existencia de una cota superior para la cantidad de calor transferido. Así que para un cuerpo continuo debemos postular la existencia de una cota $\mathcal{L}(\Omega^t)$ tal que

$$Q(\Omega^t) \leq \mathcal{L}(\Omega^t)$$

donde \mathcal{L} depende de las propiedades del cuerpo y es consistente con (1.37).

DEFINICIÓN 1.6.1. *Supongamos la existencia de un campo escalar de densidad de entropía por unidad de masa y unidad de volumen*

$$S : \Omega^t \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

Denotamos la entropía de un conjunto Ω^t por $\mathcal{S}(\Omega^t)$ y la definimos como

$$\mathcal{S}(\Omega^t) := \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) S(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}} \quad (1.39)$$

Esta definición integral de entropía (al igual que la definición de energía interna) es posible debido a que es una cantidad extensiva, es decir, la entropía de una colección de sistemas es igual a la suma de las entropías.

Finalmente usamos la ecuación (1.38) para establecer la segunda ley de la termodinámica para un continuo.

POSTULADO. *La razón de producción de entropía para cualquier conjunto $\Omega^t \subseteq \Omega^t$ está acotada inferiormente por el calor transferido por unidad de temperatura. Esto es*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \rho(\hat{x}, t) S(\hat{x}, t) dV_{\hat{x}} \geq \int_{\Omega^t} \frac{\rho(\hat{x}, t) f(\hat{x}, t)}{\theta(\hat{x}, t)} dV_{\hat{x}} - \int_{\partial\Omega^t} \frac{\vec{q}(\hat{x}, t) \cdot \hat{n}(\hat{x}, t)}{\theta(\hat{x}, t)} dS_{\hat{x}} \quad (1.40)$$

⁶Estos procesos son sucesión de estados que no están en equilibrio.

Esta formulación de la segunda ley se conoce como *desigualdad de Clausius-Dunheim*. Si aplicamos el teorema del transporte de Reynolds al lado izquierdo de la desigualdad y el teorema de la divergencia al segundo término del lado derecho obtenemos

$$\int_{\Omega^t} \rho \frac{DS}{Dt} dV_{\hat{x}} \geq \int_{\Omega^t} \left[\frac{\rho f}{\theta} - \nabla^{\hat{x}} \cdot \left(\frac{\vec{q}}{\theta} \right) \right] dV_{\hat{x}}$$

concluimos que la forma diferencial de la desigualdad de Clausius-Dunheim es

$$\rho \frac{DS}{Dt} \geq \frac{\rho f}{\theta} - \nabla^{\hat{x}} \cdot \left(\frac{\vec{q}}{\theta} \right) \quad (1.41)$$

para toda $\hat{x} \in \Omega^t$ y $t \geq 0$.

Por (1.41) concluimos lo siguiente: si ρ , S , e , θ y \vec{q} son un conjunto de funciones dadas, estas representarán un proceso físico admisible si y solo si cumplen la desigualdad de Clausius-Dunheim.

Esto significa que (1.41) restringe la forma de las ecuaciones constitutivas, es decir, no podemos escogerlas arbitrariamente si queremos describir un proceso físicamente aceptable.

En particular, uno de los casos más simples para satisfacer la desigualdad de Clausius-Dunheim y la ecuación de la energía interna es la *ley de Fourier* para el flujo de calor

$$\vec{q} = -\kappa \nabla^{\hat{x}} \theta$$

Notemos también que esta desigualdad introduce nuevas variables, la entropía y la temperatura, sin embargo el punto de las ecuaciones constitutivas es que no todas las variables de estado son independientes entre sí. Por ejemplo si ρ y θ son independientes, caracterizamos el fluido con $e(\rho, \theta)$, $p(\rho, \theta)$ y la entropía satisface la relación⁷

$$dS = \frac{1}{\theta} \left(de + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \right)$$

Cabe destacar que para un proceso reversible en ausencia de calor, (1.41) afirma que se satisface la ecuación diferencial

$$\rho \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla^{\hat{x}} S \cdot \vec{u} \right) = 0. \quad (1.42)$$

DEFINICIÓN 1.6.2. *Un proceso termodinámico es admisible si y solo si obedece la desigualdad de Clausius-Dunheim localmente, además de tener un campo espacial de temperatura finito, no negativo y tal que $\inf \theta(\hat{x}, t) = 0$.*

⁷Ésta es la primera ley de la termodinámica, simplemente se ha usado que $W = -pdV$.

1.6.1. Principio de material marco-invariante. Como se mencionó al principio de la sección, la derivación de las ecuaciones de movimiento no diferencia entre los distintos tipos de sustancia, mientras que la desigualdad de Clausius-Dunheim dice que una vez escogida una sustancia las ecuaciones constitutivas deben ser consistentes entre sí. Es decir (1.41) impone una restricción sobre las ecuaciones constitutivas como un conjunto, pero no nos dice nada sobre la forma de cada ecuación. Claramente el problema no está resuelto pues necesitamos asegurar que las ecuaciones que escogemos reflejen las propiedades materiales de una sustancia.

Es evidente, por consideraciones físicas, que las propiedades materiales no pueden depender del movimiento de un observador y por lo tanto éstas deben ser invariantes ante cambios de sistemas de referencia. Por ejemplo la distancia relativa entre dos puntos de un material debe ser la misma para todos los observadores, es decir, es una cantidad *objetiva*, mientras que la velocidad es una cantidad que depende del sistema de referencia.

La formalización de esta idea es conocida como el *principio de objetividad o de material marco-invariante*, y postula que las cantidades requeridas en las ecuaciones constitutivas deben ser las mismas en todos los marcos de referencia.

Este principio restringe la forma funcional de las ecuaciones constitutivas, como se mostrará a continuación.

Podemos escribir un cambio del sistema de referencia para un vector $\vec{w}(x, t)$ como

$$\vec{w}'(x, t) = \mathbb{A}(t)\vec{w}(x, t) + \vec{c}(t) \quad \forall x \in \Gamma, t \geq 0$$

para alguna matriz $\mathbb{A}(t)$ ortogonal. Esta transformación define una rotación más una traslación de sistema de coordenadas, por lo que es conocido como movimiento rígido. Nótese que el tiempo es inalterado, es decir suponemos que la medición del instante en que ocurre un evento físico es la misma en ambos sistemas.

Bajo este contexto un punto material $\hat{x}' \in \Omega^{t'}$ durante un movimiento $\varphi'(\hat{x}', t)$ resulta en $\hat{x} = \varphi'(\hat{x}', t)$. Sea $m^t(\hat{x}) : \Omega^t \rightarrow \Omega^{t'}$ el movimiento rígido

$$m^t(\hat{x}) := \hat{x}' = \mathbb{A}(t)\hat{x} + \vec{c}(t)$$

Sean $g(\hat{x}, t)$ un campo escalar y $\vec{w}(\hat{x}, t)$ un campo vectorial asociados con el movimiento de un cuerpo continuo en su configuración Ω^t . Más aún, consideremos $g'(\hat{x}', t)$ y $\vec{w}'(\hat{x}', t)$ los campos correspondientes bajo la transformación de cuerpo rígido sobre la configuración $\Omega^{t'}$.

DEFINICIÓN 1.6.3. *Los campos $g(\hat{x}, t)$ y $\vec{w}(\hat{x}, t)$ se dicen objetivos o marco-invariantes, si para cualquier $m^t(\hat{x}) : \Omega^t \rightarrow \Omega^{t'}$ se cumple que*

$$\begin{aligned} g'(\hat{x}', t) &= g(\hat{x}, t) \\ \vec{w}'(\hat{x}', t) &= \mathbb{A}(t)\vec{w}(\hat{x}, t) \end{aligned}$$

para toda $\hat{x} \in \Omega^t$ y $t \geq 0$.

Para que un tensor de segundo orden $\mathbb{P}(\hat{x}, t)$ sea objetivo debe ocurrir que para cualquier vector objetivo \vec{a} , el vector $\vec{b} := \mathbb{P}\vec{a}$ también es objetivo. La expresión correspondiente en la configuración $\Omega^{t'}$ es

$$\vec{b}' = \mathbb{P}'\vec{a}' \tag{1.43}$$

Como a y b son objetivos, cumplen que $\vec{a}' = \mathbb{A}\vec{a}$ y $\vec{b}' = \mathbb{A}\vec{b}$, sustituyendo en (1.43) queda

$$\mathbb{A}\vec{b}' = \mathbb{P}'\mathbb{A}\vec{a}$$

por la definición de \vec{b}' aseguramos que

$$(\mathbb{A}\mathbb{P} - \mathbb{P}'\mathbb{A})\vec{a} = 0$$

esto debe cumplirse para cualquier vector objetivo \vec{a} , por lo tanto un tensor de segundo orden $\mathbb{P}(\hat{x}, t)$ es objetivo si y solo si

$$\mathbb{P}'(\hat{x}', t) = \mathbb{A}(t)\mathbb{P}(\hat{x}, t)\mathbb{A}^T \quad (1.44)$$

POSTULADO (Principio de objetividad o material marco-invariante). *El campo de densidad de masa $\rho(\hat{x}, t)$, la temperatura $\theta(\hat{x}, t)$, la densidad de energía interna $e(\hat{x}, t)$, la entropía $S(\hat{x}, t)$, el flujo de Fourier-Stokes $\vec{q}(\hat{x}, t)$ y el tensor de estrés $\mathbb{T}(\hat{x}, t)$ son campos objetivos.*

Como $\bar{t} = \mathbb{T}\hat{n}$, donde \hat{n} es la normal al cuerpo, ésta puede definirse en términos de posiciones relativas a puntos del cuerpo. Entonces para que el tensor de estrés sea objetivo la tracción debe ser un campo objetivo. La tracción es definida como fuerza entre área y esta última también es objetiva. Por lo tanto la objetividad del tensor de estrés es consecuencia de la objetividad de la fuerza. Debido a que nuestra teoría es clásica esta última línea parece incorrecta pues por la segunda ley de Newton, $\vec{F} = ma$, y aunque la masa es objetiva la aceleración no lo es, pues depende del sistema de referencia en que es medida.

Si hacemos un cambio de coordenadas $\hat{x}' = \mathbb{A}(t)\hat{x} + \vec{c}(t)$ podemos calcular la regla de transformación para el campo de velocidades usando la definición $\vec{u}' = \frac{d\hat{x}'}{dt}$

$$\vec{u}' = \frac{d\hat{x}'}{dt} = \mathbb{A}\vec{u} + \mathbb{A}_t\hat{x} + \dot{\vec{c}} \quad (1.45)$$

donde $\mathbb{A}_t = \frac{d\mathbb{A}}{dt} = \frac{d\mathbb{A}_{ij}}{dt}\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j$. Y entonces la regla de transformación para la aceleración es

$$\vec{a}' = \mathbb{A}_{tt}\hat{x} + 2\mathbb{A}_t\vec{u} + \mathbb{A}\vec{a} + \ddot{\vec{c}}$$

Luego, para que el campo vectorial \vec{a} sea objetivo se debe cumplir que $\vec{a}' = \mathbb{A}\vec{a}$, esto ocurre si $\mathbb{A}_t = \mathbb{A}_{tt} = \mathbb{O}$ y $\ddot{\vec{c}} = 0$. Entonces asegurar que la fuerza es objetiva es equivalente al hecho de que la segunda ley de Newton es válida para todos los sistemas de referencia inerciales.

La objetividad posee otro significado importante. Consideremos un sistema de coordenadas ortogonal $\{e_i\}$ y un vector objetivo \vec{w} con representación en esta base, por lo que $w_i = \vec{w} \cdot e_i$. Entonces, de acuerdo con la definición de objetividad

$$\vec{w}' = \mathbb{A}\vec{w} = \mathbb{A}(w_i e_i) = w_i \mathbb{A}e_i = w_i e_i'$$

Observemos que la objetividad implica que el vector \vec{w} tiene las mismas componentes sobre ambas bases $\{e_i\}$ y $\{e_i'\}$. Así aunque un vector objetivo se presente diferente en diferentes sistemas de referencia, tiene la misma orientación relativa en el espacio físico. De manera análoga un tensor objetivo preserva componentes relativas a una base durante una transformación entre sistemas de referencia.

Por último, si suponemos que $e(\rho(\hat{x}, t), \theta(\hat{x}, t))$, $\bar{q}(\rho(\hat{x}, t), \theta(\hat{x}, t))$ y $\mathbb{T}(\rho(\hat{x}, t), \theta(\hat{x}, t))$ son funciones dadas entonces de acuerdo con el principio de objetividad se debe cumplir que

$$\begin{aligned} e(\rho'(\hat{x}t, t), \theta'(\hat{x}t, t)) &= e(\rho(\hat{x}, t), \theta(\hat{x}, t)), \\ \bar{q}(\rho'(\hat{x}t, t), \theta'(\hat{x}t, t)) &= \mathbb{A}\bar{q}(\rho(\hat{x}, t), \theta(\hat{x}, t)), \\ \mathbb{T}(\rho'(\hat{x}t, t), \theta'(\hat{x}t, t)) &= \mathbb{A}\mathbb{T}(\rho(\hat{x}, t), \theta(\hat{x}, t))\mathbb{A}^T. \end{aligned}$$

Esto significa que el principio de objetividad restringe la forma funcional de las ecuaciones constitutivas.

Es importante destacar que la noción de variables objetivas abstrae la idea que ciertas cantidades son intrínsecas del material e independientes del observador. De hecho, por el postulado de objetividad aseguramos que $\rho' = \rho$ y $\theta' = \theta$, que concuerda con la observación.

1.6.2. Estrés en un fluido. Las relaciones constitutivas no sólo conciernen a las variables termodinámicas; también a las componentes del estrés, pues como se mencionó anteriormente tenemos seis componentes de estrés que nos impiden cerrar el sistema de ecuaciones de movimiento, entonces para obtener un sistema adecuado discutiremos brevemente las componentes del tensor de estrés.

Podemos decir que las relaciones constitutivas especifican la particular física del problema, entonces, si determinamos la forma funcional de las componentes del estrés, determinamos la física del problema.

Las relaciones entre el tensor de estrés y otras variables como la velocidad y sus derivadas se conocen como *ecuaciones reológicas del fluido*. La más simple de éstas supone que el campo escalar espacial de presión $p(\theta(\hat{x}, t), \rho(\hat{x}, t))$ es tal que

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I}, \quad (1.46)$$

los fluidos con esta descripción tienen una propiedad importante, el campo de tracción siempre es paralelo a la normal en la superficie pues

$$\bar{t} = \mathbb{T}\hat{n} = -p\mathbb{I}\hat{n} = -p\hat{n},$$

por lo tanto no hay fuerzas tangenciales. Esto implica que no hay ninguna clase de rotación en el fluido y tampoco efectos *cortantes*, por esto, son conocidos como fluidos no viscosos.

Esta forma del tensor de estrés se conoce como hidrostática pues, en un fluido en reposo sólo existen componentes de estrés normales a la superficie y el estrés no depende de la orientación de la superficie. En otras palabras, el estrés en un fluido no tiene dirección preferencial. Un tensor con esta propiedad se conoce como isotrópico.

DEFINICIÓN 1.6.4. *Un tensor de segundo orden \mathbb{T} se llama isotrópico si el conjunto de sus componentes es el mismo en todos los sistemas de coordenadas.*

Es decir, las componentes de un tensor isotrópico no cambian ante la rotación del sistema de referencia y los únicos tensores de segundo orden que cumplen esta propiedad tienen una forma muy particular.

TEOREMA 1.6.1. *Si \mathbb{T} es un tensor de segundo orden isotrópico, entonces $\mathbb{T} = \lambda\mathbb{I}$. Donde \mathbb{I} es la identidad en V^2 .*

PRUEBA. Supongamos que \mathbb{T} es un tensor isotrópico con componentes \mathbb{T}_{ij} sobre una base $\{e_i\}$. Definimos una nueva base $\{e_i'\}$ tal que las nuevas componentes son \mathbb{T}'_{ij} y cumplen

$$\mathbb{T}'_{11} = \mathbb{T}_{22}, \mathbb{T}'_{22} = \mathbb{T}_{33}, \mathbb{T}'_{33} = \mathbb{T}_{11} \quad (1.47)$$

$$\mathbb{T}'_{12} = \mathbb{T}_{23}, \mathbb{T}'_{23} = \mathbb{T}_{31}, \mathbb{T}'_{31} = \mathbb{T}_{12} \quad (1.48)$$

$$\mathbb{T}'_{21} = \mathbb{T}_{32}, \mathbb{T}'_{32} = \mathbb{T}_{13}, \mathbb{T}'_{13} = \mathbb{T}_{21} \quad (1.49)$$

La isotropía de \mathbb{T} implica

$$\mathbb{T}'_{11} = \mathbb{T}_{11}, \mathbb{T}'_{22} = \mathbb{T}_{22}, \mathbb{T}'_{33} = \mathbb{T}_{33}$$

Así por (1.47) concluimos que

$$\mathbb{T}_{11} = \mathbb{T}_{22} = \mathbb{T}_{33} = \lambda$$

para algún escalar λ . Por un argumento similar obtenemos que

$$\mathbb{T}_{12} = \mathbb{T}_{23} = \mathbb{T}_{31}, \mathbb{T}_{21} = \mathbb{T}_{32} = \mathbb{T}_{13} \quad (1.50)$$

Consideremos una tercera base que cumpla $e_1^* = e_2$, $e_2^* = -e_1$, $e_3^* = e_3$, aplicando la regla de transformación, encontramos que

$$\mathbb{T}_{12}^* = -\mathbb{T}_{21}, \mathbb{T}_{31}^* = -\mathbb{T}_{32}$$

y por isotropía

$$\mathbb{T}_{12}^* = \mathbb{T}_{12}, \mathbb{T}_{31}^* = \mathbb{T}_{31}$$

por lo tanto

$$\mathbb{T}_{12} = -\mathbb{T}_{21}, \mathbb{T}_{31} = -\mathbb{T}_{32} \quad (1.51)$$

para satisfacer (1.50) y (1.51) simultáneamente concluimos que

$$\mathbb{T}_{12} = \mathbb{T}_{23} = \mathbb{T}_{31} = \mathbb{T}_{21} = \mathbb{T}_{32} = \mathbb{T}_{13} = 0$$

por lo tanto $\mathbb{T} = \lambda\mathbb{I}$ □

Así pues, si un fluido se encuentra en reposo, su tensor de estrés asociado debe ser $\mathbb{T} = -p\mathbb{I}$. Nótese que este tensor es objetivo.

Un modelo de un fluido con tal tensor de estrés aunque es importante en las aplicaciones, es muy restrictivo pues carece de efectos producidos por la viscosidad. Podemos corregir esta descripción si además de las fuerzas normales tomamos en cuenta fuerzas de fricción tangenciales o *cortantes*. Tales fluidos se llaman viscosos. Para estos fluidos agregamos la contribución viscosa \mathbb{S} que caracteriza el esfuerzo cortante y corresponde a la parte no isotrópica del estrés. En este caso decimos que el tensor de estrés obedece la *ley de Stokes*

$$\mathbb{T} = \mathbb{S} - p\mathbb{I}, \quad (1.52)$$

notemos que en general la tracción no es paralela a la normal de la superficie.

Para obtener la forma del tensor \mathbb{S} debemos identificar las fuentes de viscosidad en un fluido. Con el fin de lograr esto utilizaremos los postulados de Stokes:

- i) El tensor de viscosidad \mathbb{S} depende linealmente del gradiente de velocidades y
- ii) El tensor de viscosidad \mathbb{S} debe satisfacer el principio del material marco-invariante.

De acuerdo con el primer postulado, el tensor \mathbb{S} es una función lineal del gradiente de velocidades $\nabla^{\hat{x}}\vec{u}$, sin embargo, este gradiente puede expresarse como la suma de una parte simétrica más una antisimétrica

$$\nabla^{\hat{x}}\vec{u} = \frac{1}{2} \left[\nabla^{\hat{x}}\vec{u} + \nabla^{\hat{x}}\vec{u}^T \right] + \frac{1}{2} \left[\nabla^{\hat{x}}\vec{u} - \nabla^{\hat{x}}\vec{u}^T \right].$$

La parte simétrica representa la deformación del fluido (denotada por $\mathbb{D}(\vec{u})$), mientras que la parte antisimétrica (denotada por $\mathbb{W}(\vec{u})$), está relacionada con la rotación del fluido sin deformación. Por lo tanto $\mathbb{W}(\vec{u})$ no puede generar estrés y en conclusión el estrés debe ser generado por

$$\mathbb{D}(\vec{u}) = \frac{1}{2} \left[\nabla^{\hat{x}}\vec{u} + \nabla^{\hat{x}}\vec{u}^T \right].$$

Entonces el primer postulado de Stokes, afirma que existe una función lineal \mathcal{F} tal que

$$\mathbb{S} = \mathcal{F}(\mathbb{D}(\vec{u})). \quad (1.53)$$

Notemos que \mathcal{F} toma un elemento $\mathbb{D}(\vec{u}) \in V^2$ y lo transforma en otro elemento $\mathbb{S} \in V^2$.

En general las funciones lineales $\mathcal{F} : V^2 \rightarrow V^2$ se llaman tensores de cuarto orden. A diferencia de los tensores de segundo orden, para determinar unívocamente la componente de un tensor de cuarto orden se necesitan especificar cuatro índices. Esto implica que el primer postulado de Stokes se puede escribir como

$$\mathbb{S}_{ij} = \mathcal{F}_{ijkl}\mathbb{D}(\vec{u})_{kl} \quad (1.54)$$

En algunos textos como [1, p. 107], [21, p. 95] o [29, p. 81] sustituyen el segundo postulado por dos hipótesis fundamentales: 1) el fluido es homogéneo, es decir el tensor de estrés no depende explícitamente de \hat{x} , y 2) el medio es isotrópico.

Esta segunda hipótesis sostiene que el medio carece de dirección preferencial, esto significa que la relación entre el tensor de viscosidad y su argumento (el gradiente de velocidades) debe ser invariante ante rotaciones, esto ocurre solo si el tensor de cuarto orden \mathcal{F} es isotrópico. Sin embargo, es posible demostrar que estas dos hipótesis son equivalentes al principio del material marco-invariante, como puede verse en [33, p. 209]. Es decir el segundo postulado asegura que la función \mathcal{F} es isotrópica y el tensor de estrés no depende de la posición.

Por lo tanto queda definir adecuadamente la isotropía para tensores de cuarto orden.

DEFINICIÓN 1.6.5. Una función $\mathcal{F} : V^2 \rightarrow V^2$ se dice isotrópica si satisface

$$\mathbb{A}\mathcal{F}(\mathbb{P})\mathbb{A}^T = \mathcal{F}(\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}^T),$$

para todo $\mathbb{P} \in V^2$ y toda matriz ortogonal \mathbb{A} .

Es posible demostrar (véase [29, p. 82]) que los tensores de cuarto orden isotrópicos deben tener la forma

$$\mathcal{F}_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \gamma\delta_{il}\delta_{jk}, \quad (1.55)$$

donde λ , μ y γ son funciones escalares de las variables termodinámicas como θ y ρ . La simetría del tensor de estrés implica que \mathbb{S} también debe ser simétrico y por lo

tanto \mathcal{F}_{ijkl} debe ser simétrico en ij . De (1.55) vemos que esto ocurre si $\mu = \gamma$. Combinando (1.54) y (1.55), obtenemos las componentes del tensor de viscosidad

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{ij} &= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\mathbb{D}_{kl} + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}\mathbb{D}_{kl} \\ &= \lambda\mathbb{D}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\mathbb{D}_{ij}\end{aligned}$$

donde $\mathbb{D}_{kk} = \text{tr} [\mathbb{D}(\vec{u})] = \nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u}$. Entonces el tensor de estrés toma la forma

$$\mathbb{T}_{ij} = \lambda(\nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u})\delta_{ij} + 2\mu\mathbb{D}_{ij} - p\delta_{ij} \quad (1.56)$$

Los escalares λ y μ conocidos como coeficientes de viscosidad del fluido pueden entenderse con sigue; tomemos la traza de (1.56)

$$\mathbb{T}_{ii} = 3\lambda(\nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u}) + 2\mu(\nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u}) - 3p$$

entonces la presión hidrostática es

$$p = -\frac{1}{3}(\mathbb{T}_{11} + \mathbb{T}_{22} + \mathbb{T}_{33}) + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u}, \quad (1.57)$$

de acuerdo con esta ecuación podemos definir una presión promedio como

$$\hat{p} = -\frac{1}{3}(\mathbb{T}_{11} + \mathbb{T}_{22} + \mathbb{T}_{33}), \quad (1.58)$$

y por lo tanto escribimos

$$p - \hat{p} = \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u}. \quad (1.59)$$

Recordemos que que $\nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u}$ esta relacionada con la razón de cambio de volumen y por lo tanto la constante $\xi = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ relaciona el promedio de las componentes normales del estrés con la razón de expansión del fluido por lo que se conoce como coeficiente de viscosidad expansiva.

Por definición un fluido Γ^t es incompresible si el volumen de cualquier subconjunto Ω^t es constante en el tiempo,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} dV_{\hat{x}} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} J dV_x = \int_{\Omega} J \nabla^x \cdot \vec{u} dV_x = 0$$

por lo tanto la incompresibilidad es equivalente a $\nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u} = 0$. Entonces, en este caso (1.59) implica $p = \hat{p}$, y por lo tanto para un fluido incompresible sólo podemos definir una presión promedio o mecánica.

Esta presión mecánica se puede definir formalmente y demostrar que es el promedio aritmético de las componentes normales del estrés.

Cada componente del tensor de estrés se puede escribir como $\mathbb{T}_{ij} = t_i \cdot \hat{e}_j$, así, un pequeño elemento diferencial con forma de cubo con componente normal $\mathbb{T}_{ii} > 0$ experimenta una expansión en la superficie con normal \hat{e}_i mientras que si $\mathbb{T}_{ii} < 0$ experimenta una compresión sobre la superficie con la misma normal.

Para caracterizar la presión mecánica podemos pensar en una esfera de radio r con centro en \hat{x} que está sometida a un campo de presión y por lo tanto experimenta una compresión (o expansión). El promedio de la función $\vec{t} \cdot \hat{n}$ sobre la esfera, proporciona una forma de cuantificar la compresión promedio sobre ésta. Con el fin de obtener la presión en cada punto \hat{x} tomamos el límite de este promedio cuando el radio de la esfera tiende a cero. Esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.6.6. *La presión mecánica ejercida sobre un fluido Ω^t en el punto \hat{x} al tiempo $t \geq 0$ se define como*

$$p_m := - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(\hat{x})} \bar{t} \cdot \hat{n} dS_y$$

donde $S_r(\hat{x})$ es la esfera de radio r con centro en \hat{x} contenida en Ω^t . Ya que esta definición es válida para cualquier instante, también es conocida como presión hidrodinámica.

Si hacemos el cambio de variables $y = x + r\eta$, $dS_y = r^2 dS_\eta$ donde $\|\eta\| = 1$ es la normal a la esfera unitaria podemos escribir

$$p_m := - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{\|\eta\|=1} \eta \cdot \mathbb{T}(x + r\eta) \eta dS_\eta$$

podemos intercambiar límite con integral debido a que el dominio de integración es independiente de r y a la continuidad de \mathbb{T} , concluimos que

$$p_m := - \frac{1}{4\pi} \int_{\|\eta\|=1} \eta \cdot \mathbb{T}(x) \eta dS_\eta \quad (1.60)$$

TEOREMA 1.6.2. *La presión mecánica coincide con la presión promedio.*

PRUEBA. En la fórmula (1.60) η es la normal a la esfera unitaria y por lo tanto

$$\eta = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, \sin \phi)^T,$$

$$\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [-\pi, \pi].$$

En términos de componentes podemos escribir

$$\int_{\|\eta\|=1} \eta \cdot \mathbb{T}(x) \eta dS_\eta = \int_{\|\eta\|=1} \eta_i \mathbb{T}_{ij}(x) \eta_j dS_\eta$$

integramos cada término

$$\int_{\|\eta\|=1} \eta_1 \mathbb{T}_{11}(x) \eta_1 dS_\eta = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathbb{T}_{11}(\cos \phi \cos \theta)^2 \cos \phi d\phi d\theta = \frac{4\pi \mathbb{T}_{11}}{3}$$

de forma similar

$$\begin{aligned} \int_{\|\eta\|=1} \eta_2 \mathbb{T}_{22}(x) \eta_2 dS_\eta &= \frac{4\pi \mathbb{T}_{22}}{3}, \\ \int_{\|\eta\|=1} \eta_3 \mathbb{T}_{33}(x) \eta_3 dS_\eta &= \frac{4\pi \mathbb{T}_{33}}{3} \end{aligned}$$

Las integrales con términos cruzados se anulan y no contribuyen a la suma, por lo tanto

$$p_m = -\frac{1}{3}(\mathbb{T}_{11} + \mathbb{T}_{22} + \mathbb{T}_{33})$$

□

Este resultado implica que el coeficiente de viscosidad expansiva esta relacionado con un mecanismo de disipación de energía mecánica y entonces lo podemos interpretar como un coeficiente de amortiguamiento.

En particular, para un fluido *Newtoniano* los coeficientes μ y ξ deben satisfacer

$$\mu \geq 0, \xi = \lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0 \quad (1.61)$$

como consecuencia de la desigualdad de Clausius-Dunheim y la ecuación de la energía interna (véase [16, p. 343]).

Con estas consideraciones nuestro tensor de estrés es

$$\mathbb{T} = 2\mu \left(\mathbb{D}(\vec{u}) - \frac{1}{3}(\nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u})\mathbb{I} \right) + \xi(\nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u})\mathbb{I} - p\mathbb{I} \quad (1.62)$$

Hay que mencionar que la teoría de ecuaciones constitutivas es extensa; en este trabajo sólo se han presentado los resultados suficientes para convencer al lector de que las ecuaciones (1.8), (1.21) y (1.34) suplementadas con ecuaciones constitutivas apropiadas, forman un sistema cerrado de ecuaciones diferenciales.

Para un estudio más profundo que revele la verdadera importancia de la teoría de ecuaciones constitutivas se recomiendan los textos [11], [33] y [10].

Por último mostramos explícitamente el sistema de ecuaciones de movimiento, conocido como ecuaciones de Navier-Stokes.

Para escribir completamente el balance de momento necesitamos usar el resultado (1.62) en (1.21), y por lo tanto calcular la divergencia del tensor de estrés. La divergencia es un operador lineal así que

$$\nabla^{\hat{x}} \cdot \mathbb{T} = \mu \nabla^{\hat{x}} \cdot (\nabla^{\hat{x}} \vec{u}) + \mu \nabla^{\hat{x}} \cdot (\nabla^{\hat{x}} \vec{u})^T + \lambda \nabla^{\hat{x}} (\nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u}) - \nabla^{\hat{x}} p,$$

donde se ha usado que \mathbb{D} es la parte simétrica del gradiente de velocidades. Por la definición de divergencia de un campo tensorial

$$\nabla^{\hat{x}} \cdot (\nabla^{\hat{x}} \vec{u}) = \partial_j (\partial_j u_i) e_i = (\partial_j \partial_j u_i) e_i = (\Delta u_i) e_i = \Delta \vec{u},$$

de igual forma $\nabla^{\hat{x}} \cdot (\nabla^{\hat{x}} \vec{u})^T = \nabla^{\hat{x}} (\nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u})$. Esto implica que

$$\nabla^{\hat{x}} \cdot \mathbb{T} = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla^{\hat{x}} (\nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u}) - \nabla^{\hat{x}} p. \quad (1.63)$$

Finalmente, la ecuación de continuidad

$$\rho_t + \nabla^{\hat{x}} \cdot (\rho \vec{u}) = 0,$$

el balance de momento

$$(\rho \vec{u})_t + \nabla^{\hat{x}} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla^{\hat{x}} (\nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{u}) - \nabla^{\hat{x}} p + \rho \bar{\mathbf{b}},$$

el balance de energía

$$(\rho E)_t + \nabla^{\hat{x}} \cdot (\rho E \vec{u}) = \nabla^{\hat{x}} \cdot (\mathbb{T} \vec{u}) - \nabla^{\hat{x}} \cdot \vec{q} + \rho \bar{\mathbf{b}} \cdot \vec{u} + \rho f,$$

suplementado con (1.61), (1.62), la ley de Fourier $\vec{q} = -\kappa \nabla^{\hat{x}} \theta$, y una ecuación de estado $p = (\rho(\hat{x}, t), \theta(\hat{x}, t))$, forman el *sistema de Navier-Stokes*.

Para determinar la respuesta dinámica de un fluido, este sistema debe estar suplementado con un conjunto de condiciones iniciales y de frontera. En general primero necesitamos una configuración inicial del fluido para un tiempo fijo t_0 , sea tal $\Gamma^{t_0} = \Gamma$. En este conjunto se prescriben los valores iniciales de la densidad, el campo de velocidades y el campo de temperatura:

- i) $\rho(x, t_0) = \rho_0(x)$,
- ii) $\vec{u}(x, t_0) = \vec{u}_0(x)$,
- iii) $\theta(x, t_0) = \theta_0(x) \quad \forall x \in \Gamma$.

En un fluido, el conjunto $\partial\Gamma^t$ se considera una frontera cinemática, es decir una superficie que separa permanentemente el fluido del resto del espacio físico. Los fluidos viscosos tienen la propiedad de adherirse a la frontera cinemática. De acuerdo con esto

- iv) $\vec{u}(\hat{x}, t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \hat{x} \in \partial\Gamma^t$,
- v) $\vec{q} \cdot \hat{n} = 0 \quad \forall t \geq 0, \hat{x} \in \partial\Gamma^t$.

Las condiciones iniciales deben ser compatibles con las condiciones de frontera cuando $t = t_0$.

Es importante destacar que cada problema requiere de un conjunto específico de condiciones iniciales y de frontera, por ejemplo en el caso en que el conjunto Γ se extiende al infinito usualmente se necesitan imponer condiciones de convergencia sobre los campos en cuestión, por ejemplo sobre el campo de velocidades cuando $\|x\| \rightarrow \infty$.

Los problemas de valores iniciales se estudiarán en la siguiente sección.

CAPÍTULO 2

Leyes de conservación y sistemas hiperbólico-parabólicos

Como vimos en el capítulo anterior, una característica especial de la física del continuo es que, una típica *ley de balance* (en forma integral), puede reducirse a ecuaciones de campo, es decir, ecuaciones diferenciales parciales en forma de divergencia. En dinámica de medios continuos éstas leyes de balance tienen distinta estructura matemática, usualmente asociada al tipo de fenómeno que describen. En este capítulo nos centraremos en el estudio básico de leyes de tipo *hiperbólico*, y comenzaremos a estudiar las ecuaciones que describen fenómenos en presencia de viscosidad y conductividad térmica, es decir, mecanismos de difusión. Éstas las podemos clasificar como sistemas de ecuaciones *hiperbólico-parabólicos*.

2.1. Leyes de conservación

Del capítulo anterior recordemos que el tensor de estrés en el caso hidrostático, es

$$\mathbb{T} = -p\mathbb{I},$$

donde $p = p(\hat{x}, t)$ es el campo escalar de presión termodinámica. Si además suponemos que las fuentes de calor volumétrica y superficial son nulas, así como el campo de fuerzas de cuerpo, las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a

$$\begin{aligned}\rho_t + \nabla^x \cdot (\rho \vec{u}) &= 0, \\ (\rho \vec{u})_t + \nabla^x \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) &= -\nabla^x p, \\ (\rho E)_t + \nabla^x \cdot (\rho E \vec{u} + p \vec{u}) &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

donde $E = \frac{1}{2} \|u\|^2 + e$. Este es el sistema de ecuaciones de Euler. Cabe destacar que está complementado por una ecuación constitutiva, $p = p(\rho, e)$, que es consistente con la desigualdad de Clausius-Dunheim.

Debido a las suposiciones anteriores las ecuaciones de Euler modelan fluidos compresibles no viscosos y que no conducen el calor.

Hasta este punto, ya es obvio que las ecuaciones de movimiento que hemos estado tratando, comparten ciertas similitudes entre sí. Podemos evidenciar estas similitudes para el sistema (2.1) con sigue:

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ y $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ la ecuación de continuidad es

$$\rho_t + (\rho u_1)_{x_1} + (\rho u_2)_{x_2} + (\rho u_3)_{x_3} = 0,\tag{2.2}$$

donde el subíndice x_i denota la derivada parcial respecto a la i -ésima variable espacial, para $i = 1, 2, 3$.

De la misma manera, la ecuación de conservación de la energía es

$$(\rho E)_t + (u_1(\rho E + p))_{x_1} + (u_2(\rho E + p))_{x_2} + (u_3(\rho E + p))_{x_3} = 0. \quad (2.3)$$

Para la ecuación de conservación de momento en (2.1), es necesario identificar la divergencia del tensor $\rho \vec{u} \otimes \vec{u}$. Entonces,

$$[\rho \vec{u} \otimes \vec{u}] = \begin{pmatrix} \rho u_1^2 & \rho u_1 u_2 & \rho u_1 u_3 \\ \rho u_2 u_1 & \rho u_2^2 & \rho u_2 u_3 \\ \rho u_3 u_1 & \rho u_3 u_2 & \rho u_3^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, aplicando la definición de divergencia tensorial, el campo vectorial buscado es

$$\nabla^x \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = \begin{pmatrix} (\rho u_1^2)_{x_1} + (\rho u_1 u_2)_{x_2} + (\rho u_1 u_3)_{x_3} \\ (\rho u_2 u_1)_{x_1} + (\rho u_2^2)_{x_2} + (\rho u_2 u_3)_{x_3} \\ (\rho u_3 u_1)_{x_1} + (\rho u_3 u_2)_{x_2} + (\rho u_3^2)_{x_3} \end{pmatrix}$$

Así, la conservación de momento en las ecuaciones de Euler queda

$$\begin{aligned} (\rho u_1)_t + (\rho u_1^2 + p)_{x_1} + (\rho u_1 u_2)_{x_2} + (\rho u_1 u_3)_{x_3} &= 0 \\ (\rho u_2)_t + (\rho u_2 u_1)_{x_1} + (\rho u_2^2 + p)_{x_2} + (\rho u_2 u_3)_{x_3} &= 0 \\ (\rho u_3)_t + (\rho u_3 u_1)_{x_1} + (\rho u_3 u_2)_{x_2} + (\rho u_3^2 + p)_{x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ahora es evidente que cada componente de las ecuaciones de Euler tiene la forma

$$w_t + \nabla^x \cdot \vec{F}(w) = 0, \quad (2.5)$$

donde w es un campo escalar y \vec{F} un campo vectorial definido como

$$\vec{F} : w \rightarrow (F_1(w), F_2(w), F_3(w))$$

suficientemente diferenciable. La ecuación diferencial parcial (2.5) es conocida como *ley de conservación*.

En general, supongamos que el estado de un sistema físico queda determinado por un campo vectorial u , esto es, si $x \in \mathbb{R}^d$ denota un punto en el espacio físico y $t \in [0, \infty)$ denota la variable temporal, entonces

$$(x, t) \mapsto u(x, t),$$

donde $u = u(x, t)$ es conocido como el vector de densidades de variables de estado y queda determinado por n componentes,

$$u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \\ \vdots \\ u_n(x, t) \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, si Ω es una región regular y arbitraria de \mathbb{R}^d tenemos que

$$u(x, t) : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Vamos a suponer que la imagen de $u(x, t)$ es un abierto de \mathbb{R}^n y la denotaremos como U , es decir, $u \in U \subseteq \mathbb{R}^n$. La imagen de $u(x, t)$ es conocida como el conjunto de variables de estado del sistema.

Si cada componente u_k ($k = 0, 1, \dots, n$) representa la densidad de alguna cantidad física conservada, entonces

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx$$

es la cantidad total de variables de estado dentro de Ω al tiempo $t > 0$.

Típicamente un principio de balance afirma que la producción (o pérdida) de las cantidades u_k en Ω está balanceada por el flujo de éstas a través de $\partial\Omega$. Este flujo estará determinado por una función

$$\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d),$$

es decir, $\vec{F} := (f^1(u), \dots, f^d(u))$, donde $f^j(u) := (f_1^j(u), \dots, f_n^j(u))^T \in \mathbb{R}^n$ y además $f^j(u) \in \mathcal{C}^2(U)$ para cada $1 \leq j \leq d$.

Físicamente esto significa que, si $\hat{n} \in \mathbb{R}^d$ denota el vector normal exterior de $\partial\Omega$, entonces, la cantidad total de u que fluye a través de un elemento diferencial de superficie, está dada por $-\vec{F}(u)\hat{n}dS$. Donde el signo negativo indica que si se da la producción de u en Ω , es porque el flujo está dirigido hacia dentro de Ω .

Como en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, podemos suponer que además del flujo, la interacción con algún campo externo $\mathcal{G}(x, t)$ es la causa del incremento de u en Ω . De esta manera escribimos el principio de balance genérico en forma integral

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx = - \int_{\partial\Omega} \vec{F}(u)\hat{n}dS_x + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, t) dx. \quad (2.6)$$

Hay que destacar que el campo \mathcal{G} representa las fuerzas de cuerpo (como la gravedad) y las fuentes de calor en las ecuaciones de Navier-Stokes. Por esta razón es importante tomar en cuenta que la función \mathcal{G} puede depender de $u(x, t)$, es decir

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(x, t, u(x, t))$$

En ausencia de campos externos que interactúan con el sistema, $\mathcal{G} \equiv 0$, por lo que obtenemos la forma integral de la ley de conservación

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx = - \int_{\partial\Omega} \vec{F}(u)\hat{n}dS_x. \quad (2.7)$$

Con el fin de obtener ecuaciones de campo locales a partir de la formulación global del principio de balance, dada en las ecuaciones (2.6) y (2.7), demostraremos el siguiente teorema:

TEOREMA 2.1.1 (Teorema de Localización). *Sea Φ un campo escalar o vectorial continuo sobre un conjunto abierto $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Entonces dado $x_0 \in \Omega$,*

$$\Phi(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{Vol(\mathcal{B}_\delta)} \int_{\mathcal{B}_\delta} \Phi dV,$$

donde \mathcal{B}_δ es la bola cerrada de radio $\delta > 0$ centrada en x_0 . Por lo tanto, si

$$\int_{\mathcal{B}} \Phi dV_x = 0$$

para cualquier bola cerrada $\mathcal{B} \subset \Omega$, entonces $\Phi \equiv 0$.

PRUEBA. Si definimos

$$I_\delta = \left| \Phi(x_0) - \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{B}_\delta)} \int_{\mathcal{B}_\delta} \Phi dV_x \right|,$$

entonces

$$I_\delta \leq \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{B}_\delta)} \int_{\mathcal{B}_\delta} |\Phi(x_0) - \Phi(x)| dV_x \leq \sup_{x \in \mathbb{B}_\delta} |\Phi(x_0) - \Phi(x)|$$

por lo tanto, la continuidad de Φ asegura que si $\delta \rightarrow 0$ entonces $I_\delta \rightarrow 0$. \square

Así pues, si aplicamos el teorema de la divergencia tensorial a la integral de superficie en la ecuación (2.6), y suponemos continuo el integrando, obtenemos la forma diferencial (o de divergencia) de ésta ecuación

$$u_t + \nabla^x \cdot \vec{F}(u) = \mathcal{G}, \quad (2.8)$$

y en el caso $\mathcal{G} = 0$, obtenemos una ley de conservación

$$u_t + \nabla^x \cdot \vec{F}(u) = 0, \quad (2.9)$$

o equivalentemente

$$u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} = 0$$

Nótese que el teorema de localización no es más que un resultado elemental sobre funciones continuas que proporciona un procedimiento simple para obtener las ecuaciones de campo locales. De hecho, en el capítulo anterior, la continuidad del integrando (y por lo tanto, el teorema de localización) en cada principio de balance fue esencial para obtener las ecuaciones de Navier-Stokes. Sin embargo, en este capítulo es importante hacer explícito este resultado pues, como hemos visto, un principio de balance es una relación integral, y por lo tanto puede satisfacerse por funciones que no son diferenciables, ni siquiera continuas. Así pues, en este caso, el teorema de localización no es aplicable y la forma local del principio de balance no tiene sentido.

Como primer ejemplo de una ley de conservación podemos escribir las ecuaciones de Euler (2.1) dentro de este panorama. Las variables de estado del sistema de Euler forman el vector

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{pmatrix};$$

de las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) vemos que la función de flujo es

$$\vec{F}(\rho, \rho \vec{u}, \rho E) = \begin{pmatrix} \rho u_1 & \rho u_2 & \rho u_3 \\ \rho u_1^2 + p & \rho u_1 u_2 & \rho u_1 u_3 \\ \rho u_1 u_2 & \rho u_2^2 + p & \rho u_2 u_3 \\ \rho u_1 u_3 & \rho u_2 u_3 & \rho u_3^2 + p \\ (\rho E + p) u_1 & (\rho E + p) u_2 & (\rho E + p) u_3 \end{pmatrix}$$

y el conjunto de variables de estado es

$$U = \{(\rho, \rho \vec{u}, \rho E) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : \rho > 0, E - \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 > 0\}$$

Si hacemos un pequeño ajuste de notación

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho E \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix},$$

la función de flujo se reescribe como

$$\vec{F}(u) = \begin{pmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + p & \frac{u_2 u_3}{u_1} & \frac{u_2 u_4}{u_1} \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} & \frac{u_3^2}{u_1} + p & \frac{u_3 u_4}{u_1} \\ \frac{u_2 u_4}{u_1} & \frac{u_3 u_4}{u_1} & \frac{u_4^2}{u_1} + p \\ (u_5 + p) \frac{u_2}{u_1} & (u_5 + p) \frac{u_3}{u_1} & (u_5 + p) \frac{u_4}{u_1} \end{pmatrix}$$

mientras que el conjunto de variables de estado ahora es

$$U = \left\{ u \in \mathbb{R}^5 : u_1 > 0, \frac{u_5}{u_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}{u_1^2} \right) > 0 \right\}$$

y en este caso $\vec{F}(u) \in \mathcal{C}^2(U, \mathcal{M}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^3))$.

Nótese que la ecuación constitutiva $p = p(\rho, e)$ también se debe modificar, quedando

$$p = p \left(u_1, \frac{u_5}{u_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}{u_1^2} \right) \right).$$

Un caso particular de las ecuaciones de Euler ocurre cuando el movimiento se da en una dimensión espacial x (por ejemplo en el estudio de flujo de gas en ductos). En este caso las ecuaciones de Euler se reducen al sistema

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \quad (2.10)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0 \quad (2.11)$$

$$(\rho E)_t + (u(\rho E + p))_x = 0 \quad (2.12)$$

Las variables de estado para este sistema son

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}; \quad (2.13)$$

como $x \in \mathbb{R}$ y $u \in \mathbb{R}^3$ la función de flujo esta dada por

$$\vec{F}(u) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + p \\ (u_3 + p) \frac{u_2}{u_1} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

y el conjunto de variables de estado es

$$U = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 : u_1 > 0, \frac{u_3}{u_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2 > 0 \right\}$$

Obsérvese que, si en la ecuación (2.10) hacemos $N_t = \rho_t$, y $M_x = -(\rho u)_x$, entonces $N_t = M_x$. Esto nos asegura la existencia de una nueva variable y (módulo una constante), definida como

$$y := \int^x \rho(\xi, t) d\xi,$$

es decir, la ecuación de conservación de masa en una dimensión espacial expresa que, la forma diferencial $dy = \rho dx - \rho u dt$ es exacta. Entonces tenemos que $dx = \tau dy + u dt$, donde τ es el volumen específico. Tras aplicar este cambio de variables, la conservación de masa se escribe como

$$u_y = \tau_t.$$

Ahora bien, dada otra ley de conservación $\partial_t u_i + \partial_x f_i = 0$, la forma diferencial

$$u_i dx - f_i dt = 0$$

puede reescribirse como

$$u_i(udt + \tau dy) - f_i dt = 0,$$

y así la nueva forma de la ley de conservación es

$$\partial_t(\tau u_i) + \partial_y(f_i - u u_i) = 0.$$

Usando los resultados (2.13) y (2.14) tenemos que

$$\begin{aligned} f_2 - u u_2 &= p, \\ f_3 - u u_3 &= p u, \end{aligned}$$

entonces, las ecuaciones de Euler toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tau_t - u_y &= 0, \\ u_t + p_y &= 0, \\ E_t + (p u)_y &= 0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde $p = \widehat{p}(\tau, e) = \widehat{p}(\tau^{-1}, e)$.

Inmediatamente observamos que el sistema (2.15) está escrito en forma de ley de conservación, con

$$u = \begin{pmatrix} \tau \\ u \\ E \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{F}(u) = \begin{pmatrix} -u \\ p u \\ p E \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}^3),$$

las variables de estado y la función de flujo respectivamente.

Con el fin de entender el cambio de variable $(x, t) \rightarrow (y, t)$, pensemos que el flujo en cuestión ocurre en un tubo a lo largo del eje x con sección transversal unitaria. Vamos a asignar el valor $y = 0$ a una sección transversal en $x_0 = x(0, t)$, y luego el valor de y en cualquier otra sección lo tomaremos igual en magnitud a la masa del medio entre esta sección transversal y la sección en x_0 . El signo de y será positivo o negativo, dependiendo de si la sección de referencia está a la izquierda o a la derecha, respectivamente, de la sección en cuestión. Así pues, la variable y cumple

$$y = \int_{x(0,t)}^{x(y,t)} \rho(\xi, t) d\xi.$$

Aquí ρ es la densidad en el punto x al tiempo t , en otras palabras, la densidad está considerada como un campo escalar con descripción espacial, también llamada descripción *Euleriana*, mientras que y por depender de la sección de referencia y el tiempo, es una variable material, y es mejor conocida como variable *Lagrangiana*. Nótese que el Jacobiano del mapeo $(x, t) \rightarrow (y, t)$, $J = \rho$, se anula en presencia de vacío, pues si éste se encuentra contenido en alguna región del espacio, entonces para esta región $\rho = 0$, y entonces el mapeo ya no es un cambio de variable válido. En este caso el volumen específico se reduce a una masa de Dirac, con norma igual a la longitud del intervalo donde está contenido el vacío. Las ecuaciones con descripción Euleriana también están mal planteadas en este caso, pues no puede definirse la velocidad y los flujos f_2 y f_3 se vuelven singulares.

Las ecuaciones de movimiento en variable Lagrangiana para dimensiones $d \geq 2$ son muy complicadas (especialmente la ecuación de conservación de momento lineal pues involucra segundas derivadas temporales), por esto no lidiaremos con ellas en este trabajo, sin embargo el lector puede referirse a [16, p. 190] para una deducción completa de éstas ecuaciones. Hay que destacar, sin embargo, que las ecuaciones en variable Lagrangiana para una dimensión espacial son fundamentales para la teoría de gases unidimensionales como veremos más adelante.

Ahora vamos a suponer que la energía interna es una función de la entropía y el volumen específico, es decir, $e = e(S, \tau)$, entonces

$$e_t = e_S S_t + e_\tau \tau_t,$$

la primera ley de la termodinámica asegura que $de = \theta dS - pd\tau$. Esto implica que $e_S = \theta$ y $e_\tau = -p$, por lo tanto

$$e_\tau = \theta S_t - p\tau_t,$$

que, por la primera ecuación del sistema (2.15) resulta en

$$e_t = \theta S_t - pu_y.$$

Así, podemos reescribir la derivada temporal de la energía total como sigue

$$\begin{aligned} E_t &= e_t + uu_t \\ &= \theta S_t - pu_y - up_y \\ &= \theta S_t - (pu)_y. \end{aligned}$$

Con este resultado, la ecuación de conservación de energía en el sistema (2.15) se puede reemplazar con $\theta S_t = 0$, y como $\theta > 0$, las ecuaciones de Euler en forma Lagrangiana se pueden escribir como

$$\tau_t - u_y = 0, \quad (2.16)$$

$$u_t + p_y = 0, \quad (2.17)$$

$$S_t = 0. \quad (2.18)$$

Se sigue de la ecuación (2.18) que, en ausencia de discontinuidades, si inicialmente el campo de entropía específico es constante, entonces éste permanece constante en el medio para todo tiempo. Por lo tanto, si S la consideramos como una constante dada, podemos omitir la ecuación (2.18) y en este caso la ecuación de estado, $p = g(\tau, S)$, depende únicamente del volumen específico, es decir $p = g(\tau)$.

Un gas que satisface este modelo se conoce como *isentrópico*¹. Bajo éstas hipótesis, el sistema (2.16) – (2.18) se reduce a

$$\tau_t - u_y = 0, \quad (2.19)$$

$$u_t + p(\tau)_y = 0. \quad (2.20)$$

Este sistema de ecuaciones es conocido como *sistema p, y*, como podemos ver es un sistema de leyes de conservación. En efecto, las variables de estado y la función de flujo son

$$u = \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad \vec{F}(u) = \begin{pmatrix} -u \\ p(\tau) \end{pmatrix},$$

respectivamente. En este caso $\vec{F}(u) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ y $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no-lineal dada con segunda derivada continua, tal que $p' < 0$ y $p'' > 0$.

Asimismo, el sistema p puede entenderse como las ecuaciones que gobiernan las oscilaciones longitudinales de una barra elástica, pero en este caso p se escribe como $p = -\sigma$, donde σ denota el estrés en la barra.

Por otro lado, en regiones simplemente conexas, la ecuación (2.19), implica la existencia de una función ϕ tal que $\phi_y = \tau$ y $\phi_t = u$. Con la introducción de esta función, la ecuación (2.20) se convierte en

$$\phi_{tt} + p(\phi_y)_y = \phi_{tt} + p'(\phi_y)\phi_{yy} = 0,$$

debido a que $p' < 0$, esta ecuación es una ecuación de onda no lineal, donde la velocidad de propagación, $\sqrt{-p'}$, depende de ϕ_y .

Aunque las ecuaciones de la dinámica de fluidos se convertirán en nuestro paradigma de estudio, el lector puede referirse a [30], como una fuente de modelos que resultan en leyes de conservación.

2.2. Ley de conservación escalar

La ecuación diferencial parcial más simple (y no trivial) que representa una ley de conservación corresponde al caso en que $d = n = 1$, esto es

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (2.21)$$

donde $f(u)$ es una función escalar de una variable, esta ecuación representa una *ley de conservación escalar*. Como $f(u)_x = f'(u)u_x$, podemos escribir (2.21) como

$$u_t + a(u)u_x = 0, \quad (2.22)$$

donde $a(u) := f'(u)$. Esta ecuación afirma que, la solución u es constante a lo largo de las trayectorias tangentes al campo vectorial $\vec{v} = (1, a(u))$ pues, la derivada de u en dirección de \vec{v} es

$$D_{\vec{v}}u = \nabla u \cdot \vec{v} = u_t + a(u)u_x = 0$$

y por lo tanto, si $x = x(t)$, define tales trayectorias, entonces se cumple que

$$\frac{dx}{dt} = a(u).$$

¹Para un gas perfecto, la hipótesis $S = \text{const.}$ yace en una ecuación de estado de la forma $p(\tau) = \kappa\tau^{-\gamma}$ donde $\gamma \geq 1$ y $\kappa > 0$ son constantes.

Supongamos que $a(u) = c$, con $c \in \mathbb{R}$ una constante. En este caso la ecuación (2.22) queda

$$u_t + cu_x = \nabla u \cdot (1, c) = 0, \quad (2.23)$$

donde se observa que el campo vectorial $\vec{v} = (1, c)$ es ortogonal al gradiente de u . Debido a que el gradiente de una función es ortogonal a las curvas de nivel de ésta, se infiere que las curvas de nivel de la función $u = u(x, t)$, son las rectas

$$x = ct + x_0, \quad (2.24)$$

sobre las cuales la función u es constante. Éstas líneas rectas son conocidas como *características*. La derivada de la función u a lo largo de las características es

$$\frac{d}{dt}u(ct + x_0, t) = u_t(ct + x_0, t) + cu_x(ct + x_0, t),$$

y por (2.23) concluimos que $\frac{d}{dt}u(ct + x_0, t) = 0$, es decir, obtenemos una ecuación diferencial ordinaria que implica que u es constante a lo largo de las características. Si queremos determinar la evolución de la variable de estado u es natural considerar el problema de Cauchy,

$$\begin{aligned} u_t + cu_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned}$$

donde $u \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ es una constante distinta de cero, $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$, y el estado inicial u_0 es una función dada de x . Gracias a las observaciones geométricas hechas en los párrafos anteriores, podemos resolver este problema como sigue:

Supongamos que queremos determinar el valor de u en el punto (x, t) ; tracemos la recta con pendiente c , que pasa por este punto y que intersecta el eje X en el punto $(x_0, 0)$. Obsérvese que existe una única recta para cada punto (x, t) que seleccionemos.

Esta recta es una característica, pues satisface el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= c, \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Como la solución es constante a lo largo de ésta familia de rectas, el valor de la solución en el punto (x, t) debe ser el mismo que en el punto $(x_0, 0)$, esto es

$$u(x, t) = u(x_0, 0) = u_0(x_0),$$

debido a que $x_0 = x - ct$, concluimos que la solución al problema de Cauchy es

$$u(x, t) = u_0(x - ct), \quad (2.25)$$

si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$.

La solución (2.25) representa una *onda viajera* que se mueve con velocidad c . En este caso, esto significa que los datos iniciales se propagan (sin cambiar su forma en el espacio), a la derecha si $c > 0$, y la izquierda si $c < 0$.

Si consideramos que la velocidad es una función de x , es decir $c = c(x)$, entonces la función de flujo es $f(u) = c(x)u$, y en este caso

$$u_t + (c(x)u)_x = 0,$$

esta ecuación se puede escribir como

$$u_t + c(x)u_x = -c'(x)u.$$

De forma similar, si diferenciamos $u = u(x(t), t)$ respecto del tiempo, obtenemos la ecuación diferencial ordinaria

$$\dot{u}(x(t), t) = -a'(x(t))u, \quad (2.26)$$

para resolver esta ecuación necesitamos primero conocer la ecuación para las características; ésta puede obtenerse si notamos que la ecuación diferencial parcial en cuestión se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a(x) \\ -a'(x)u \end{pmatrix} \cdot \vec{N} = 0$$

donde \vec{N} es el vector normal a la superficie $z = u(x, t)$, así, definimos las características como aquellas curvas que satisfacen el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a(x), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Con esta información procedemos a resolver la ecuación (2.26) con la condición inicial $u(x(0), 0) = u_0(x)$. En ambos casos ($c = \text{const.}$ y $c = c(x)$), bajo hipótesis razonables de regularidad sobre la condición inicial, se puede demostrar que el problema de Cauchy tiene una solución igualmente suave en el espacio $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ (véase [12], [18]).

En general, para resolver el problema de Cauchy para la ecuación (2.22) con una función de flujo no lineal, podemos usar la misma idea que en el caso lineal, es decir, para calcular la solución $u(x, t)$ en algún punto (x, t) dado, buscaremos una curva que conecte este punto con otro $(x_0, 0)$ en el eje X . Más aún, si podemos repetir este proceso para cualquier punto (x, t) , $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, entonces podemos calcular $u(x, t)$ en cualquier punto usando la condición inicial $u(x_0, 0) = u_0(x)$. Este es el conocido *método de características*.

Supongamos que $x = x(t)$ es la ecuación de la curva característica que pasa por el punto $(x_0, 0)$; esto significa que, a lo largo de la curva $x = x(t)$ se observa siempre el mismo valor inicial $u_0(x_0)$. En otras palabras

$$u(x(t), t) = u_0(x_0)$$

para cada $t > 0$. Si derivamos esta relación respecto del tiempo obtenemos

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + \dot{x}(t)u_x(x(t), t). \quad (2.27)$$

Por otro lado, la ecuación (2.22) queda

$$u_t(x(t), t) + a(u_0(x_0))u_x(x(t), t) = 0$$

de esta forma, si restamos esta última relación de la ecuación (2.27) queda

$$[\dot{x}(t) - a(u_0(x_0))]u_x(x(t), t) = 0.$$

Suponiendo que $u_x(x(t), t) \neq 0$, concluimos que

$$\dot{x}(t) = a(u_0(x_0)). \quad (2.28)$$

Como $x(0) = x_0$, encontramos que

$$x(t) = a(u_0(x_0))t + x_0. \quad (2.29)$$

Obsérvese que, las características son rectas con pendiente $a(u_0(x_0)) = f'(u_0(x_0))$, y por lo tanto, distintos valores de x_0 dan, en general, distintas pendientes.

Para finalizar, usamos (2.29) en $u(x(t), t) = u_0(x_0)$ con el fin de derivar una fórmula para la solución u , obteniendo

$$u(x, t) = u_0(x - f'(u_0(x_0))t). \quad (2.30)$$

Aunque ésta fórmula parece bastante satisfactoria podemos revelar su patología con un análisis un poco más preciso; primero notemos que (2.30) es en realidad una forma implícita de la solución, pues

$$u(x, t) = u_0(x - a(u)t),$$

por lo tanto, si suponemos que u_0 es continuamente diferenciable podemos derivar implícitamente respecto de x

$$\begin{aligned} u_x &= u'_0(x - a(u)t)(1 - a_u u_x t), \\ &= u'_0(x_0)(1 - a_u u_x t), \end{aligned}$$

y siempre que $1 + a_u u'_0 t \neq 0$, se satisface que

$$u_x = \frac{u'_0}{1 + a_u u'_0 t}, \quad (2.31)$$

un cálculo similar nos lleva a

$$u_t = \frac{u'_0 a}{1 + a_u u'_0 t}. \quad (2.32)$$

Ahora es evidente que la solución (2.30) no es válida para todo tiempo $t > 0$, pues si $1 + a_u u'_0 t \rightarrow 0$, las derivadas se vuelven infinitas.

Para establecer un teorema de existencia y unicidad de una solución continuamente diferenciable para todo tiempo $t > 0$, se deben imponer condiciones sobre la función de flujo y la condición inicial. Como un ejemplo vamos a demostrar la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN. Supongamos que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $u'_0 f'' \geq 0$. Entonces, la fórmula

$$u(x, t) = u_0(x - a(u)t)$$

define una única solución $u(x, t)$ del problema de valores iniciales en el semiplano $t \geq 0$. Más aún $u(x, t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

PRUEBA. Por el análisis anterior sabemos que u está definida implícitamente por la ecuación

$$\Phi(x, t, u) = u - u_0(x - f'(u)t) = 0.$$

Como u_0 y f' son suaves, el teorema de la función implícita asegura que esta última ecuación define u como una función de (x, t) simple y cuando se cumpla la condición

$$\Phi_u(x, t, u) = 1 + t f'' u'_0 \neq 0.$$

En consecuencia, si $f'' u'_0 \geq 0$, se sigue que $\Phi_u \neq 0$. Por lo tanto la solución dada por el método de características es suave y definida para todo tiempo $t \geq 0$. \square

Cuando los signos de u'_0 y f'' son distintos la conclusión de esta proposición sigue siendo válida para tiempos pequeños pero, si dejamos que el tiempo transcurra esperamos el *rompimiento de la solución diferenciable*, de acuerdo con las fórmulas (2.31) y (2.32).

Con el fin de comprender mejor este punto vamos a analizar las rectas características. Según la fórmula (2.29), la pendiente de cada característica depende de la condición inicial y de la derivada de la función de flujo, por lo tanto, en el caso no lineal, las características pueden intersectarse entre sí. Por ejemplo, si suponemos que $a'(u) = f''(u) > 0$ y $u'_0(x) > 0$, las características se intersectarán en el semieje $t < 0$, pues si $x_1 < x_2$, entonces $u_1 = u_0(x_1) < u_0(x_2) = u_2$ y en consecuencia $a(u_1) < a(u_2)$, es decir, la característica que pasa por x_1 tiene menor pendiente que la que pasa por x_2 , por lo que las características divergen en el primer cuadrante cartesiano y por lo tanto no hay intersección en $t > 0$. Por otro lado, si $u'_0(x) < 0$, para $x_1 < x_2$ se cumple $u_1 > u_2$, lo que implica $a(u_1) > a(u_2)$, esto significa que la característica que pasa por x_2 tiene menor pendiente que la que pasa por x_1 , y por lo tanto la intersección de las características ocurre al tiempo $t = (x_2 - x_1)/(a_1 - a_2) > 0$. Esto implica que en el punto de intersección la solución u debe tomar ambos valores u_1 y u_2 , algo imposible para una función.

Este argumento geométrico coincide con la proposición demostrada pues afirma que si $a(u_0(x))$ no es una función creciente de x , entonces no existe función diferenciable que resuelva el problema de Cauchy para todo tiempo $t > 0$.

De acuerdo con la discusión anterior el tiempo en el que la solución se vuelve singular debe coincidir con el valor de $t > 0$ para el que se cumple $1 + a_u u'_0 t = 0$, este es

$$t = -\frac{1}{a_u u'_0},$$

de hecho, el primer tiempo que satisface esta relación está dado por el mínimo valor de la función $(a_u u'_0)^{-1}$; puesto que, $a_u u'_0 < 0$, definimos el *tiempo de rompimiento* $t^* > 0$ como

$$t^* := -\left(\inf \frac{d}{dx} a(u_0(x))\right)^{-1} = -\frac{1}{\inf(a_u u'_0(x))}, \quad (2.33)$$

para $u_0(x) \in C^1(\mathbb{R})$ y $u'_0(x)$ funciones acotadas. En el caso en que $a(u_0(x))$ es una función creciente de x , simplemente definimos el tiempo de rompimiento como $t^* = +\infty$.

Supongamos un flujo de partículas a lo largo del eje x que se mueve con velocidad constante. Si $u(x, t)$ es el campo de velocidades y $x = x(t)$ la trayectoria de una partícula, entonces la velocidad de la partícula al tiempo t satisface la relación $\dot{x}(t) = u(x, t) = \text{const}$. Así, tenemos que

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + u_x(x(t), t) \dot{x}(t) = 0,$$

por lo que el campo de velocidades satisface la ecuación diferencial

$$u_t + uu_x = 0, \quad (2.34)$$

conocida como *ecuación de Burgers*. Ésta, es una ley de conservación cuya función de flujo es $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, y por lo tanto se puede escribir como

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0. \quad (2.35)$$

Vamos a aplicar el análisis anterior al problema Cauchy para la ecuación de Burgers, dado como

$$u_t + uu_x = 0, \quad (2.36)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2.37)$$

en donde $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ y

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

De acuerdo con el método de características, la forma implícita de la solución es $u(x, t) = u_0(x - ut)$, para $0 \leq t \leq t^*$. Debido a que la condición inicial $u_0(x)$ sólo es decreciente en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, el tiempo de rompimiento es

$$t^* = - \left(\inf_{x \in [0, 1]} u_0'(x) \right)^{-1} = 1$$

Debido a que $u_0(x) = 1 - x$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, la solución está dada por

$$u(x, t) = 1 - (x - ut),$$

que resulta en

$$u(x, t) = \frac{1 - x}{1 - t},$$

para $0 \leq t < t^* = 1$.

Si $x_0 \leq 0$ las rectas características son $x(t) = t + x_0$; por otro lado, si $x_0 \geq 1$, las características toman la forma $x(t) = x_0$. Entonces, la solución dada por el método de características es

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq t, 0 \leq t < 1 \\ \frac{1-x}{1-t}, & \text{si } t \leq x \leq 1, 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{si } x \geq 1, 0 \leq t < 1 \end{cases} \quad (2.38)$$

Físicamente, esta solución es poco satisfactoria pues no dice nada acerca del flujo de partículas después del tiempo de rompimiento, así pues, surge la pregunta crítica: ¿qué sucede después de $t^* = 1$? Como se mencionó anteriormente, una ley de conservación en forma integral puede ser satisfecha por funciones discontinuas, entonces, para intentar contestar esta pregunta estudiaremos la forma más simple de éste tipo de funciones; aquellas que son discontinuas a través de una curva suave $x = y(t)$ y que satisfacen la ecuación diferencial, en el sentido ordinario, sobre cada lado de la discontinuidad. Denotaremos por u_l y u_r los valores de u sobre los lados izquierdo y derecho de $x = y(t)$ respectivamente. Tomemos a y b en el eje x de tal manera que la curva y interseque el intervalo $a \leq x \leq b$ en algún tiempo t .

La cantidad total de u al tiempo t , $\mathcal{I}(t)$, en el intervalo $[a, b]$, es

$$\mathcal{I}(t) = \int_a^b u(x, t) dx = \int_a^y u(x, t) dx + \int_y^b u(x, t) dx,$$

entonces

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = \int_a^y u_t dx + u_l \frac{dy}{dt} + \int_y^b u_t dx - u_r \frac{dy}{dt}, \quad (2.39)$$

donde usaremos la notación $s = \frac{dy}{dt}$ para la velocidad con la que se propaga la discontinuidad. Ya que, se satisface la ecuación (2.21) para $x < y$ y $x > y$ ponemos $u_t = -f_x$ en (2.39), obteniendo

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = f(u(a)) - f(u_l) + u_l s - f(u(b)) + f(u_r) - u_r s.$$

Por otro lado, la ley de conservación escalar afirma que

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = f(u(a)) - f(u(b)).$$

Combinando estos resultados concluimos que

$$s(u_r - u_l) = f(u_r) - f(u_l),$$

esta relación se conoce como *condición de salto* y se denota como

$$s[u] = [f], \quad (2.40)$$

donde $[h]$ denota el salto de la función h a lo largo de la discontinuidad y .

Para aplicar este resultado a la ecuación de Burgers primero notemos que el choque de las características ocurre en el punto $(1, 1)$, por lo que la discontinuidad $x = y(t)$ debe partir de este punto; en vista de la solución (2.38), se propone $u_l = 1$ y $u_r = 0$. De esta manera, la condición de salto (2.40), con $f(u) = \frac{1}{2}u^2$, es

$$s = \frac{0 - 1/2}{0 - 1} = \frac{1}{2},$$

esto implica que la curva de discontinuidad debe ser

$$y(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}.$$

En consecuencia, definimos una *solución* para $t \geq 1$ como

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < \frac{t+1}{2}, \\ 0, & \text{si } x > \frac{t+1}{2}. \end{cases} \quad (2.41)$$

Este tipo de soluciones son conocidos como *ondas de choque* o simplemente *choques*. Hay que destacar que no tiene sentido sustituir esta función en (2.36) para verificar que es solución; lo mejor que podemos decir es que, tanto u_l como u_r son soluciones triviales de (2.36) sobre las respectivas regiones abiertas que no contienen a la curva $y(t)$, es decir, no está claro en que sentido (2.41) es solución del problema alrededor de una vecindad de la discontinuidad. Más aún, no sabemos si esta solución es única, y si es físicamente aceptable. Por lo tanto es necesario introducir una definición más flexible de solución.

Una vez más consideremos el problema

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (2.42)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2.43)$$

para $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$, suponiendo que $u(x, t)$ es una solución continuamente diferenciable en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Decimos que u es solución clásica.

Sea $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ el conjunto de funciones, ϕ , continuamente diferenciables en $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ que se anulan fuera de un conjunto compacto para $t \geq 0$, más precisamente

$$\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty)) = \{ \phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty)) : \text{sop}(\phi) \text{ es compacto} \},$$

Podemos pensar en estas funciones como aquellas en las que $(\text{sop}(\phi) \cap (t \geq 0)) \subseteq \mathcal{R}$, donde \mathcal{R} es el rectángulo $0 \leq t \leq T$, $a \leq x \leq b$, de esta forma, $\phi = 0$ fuera de \mathcal{R} y sobre las rectas $t = T$, $x = a$ y $x = b$. Nos referimos a ϕ como *función de prueba*. Multiplicamos la ecuación diferencial (2.42) por ϕ e integramos sobre $\mathbb{R} \times [0, \infty)$. Queda

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [u_t + f_x] \phi dx dt = \iint_{\mathcal{R}} [u_t + f_x] \phi dx dt = \int_a^b \int_0^T [u_t + f_x] \phi dt dx = 0,$$

nótese que en la última integral se intercambia el orden de integración, algo que podemos hacer ya que ϕ es de soporte compacto y u , ϕ son continuamente diferenciables.

Si integramos por partes cada término respecto de t , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_0^T u_t \phi dt dx &= \int_a^b u \phi \Big|_0^T dx - \int_a^b \int_0^T u \phi_t dt dx \\ &= - \int_a^b u_0(x) \phi(x, 0) dx - \int_a^b u \phi_t dt dx, \end{aligned}$$

y

$$\int_0^T \int_a^b f_x \phi dx dt = \int_0^T f \phi \Big|_a^b dt - \int_0^T \int_a^b f \phi_x dx dt.$$

Finalmente obtenemos

$$\iint_{t \geq 0} [u \phi_t + f(u) \phi_x] dx dt + \int_{t=0} u_0 \phi dx = 0. \quad (2.44)$$

Por otro lado, supongamos que una función suave u satisface (2.44) para cualquier función de prueba ϕ . Si integramos por partes una vez más, pero en el orden reverso llegamos a la relación

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} [u_t + f_x] \phi dx dt + \int_{\mathbb{R}} [u_0(x) - u(x, 0)] \phi(x, 0) dx = 0, \quad (2.45)$$

válida para cualquier función de prueba ϕ . Escogemos $\phi = 0$ para $t = 0$; entonces la segunda integral se anula y la arbitrariedad de ϕ implica

$$u_t + f_x = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty). \quad (2.46)$$

Si ahora escogemos $\phi \neq 0$, para $t = 0$, de (2.45) y (2.46) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} [u_0(x) - u(x, 0)] \phi(x, 0) dx = 0.$$

Una vez más, la arbitrariedad de ϕ implica

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{en } \mathbb{R}. \quad (2.47)$$

En conclusión, lo que se ha demostrado es que: $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ es una solución del problema (2.42)–(2.43) si y solo si la ecuación (2.44) se satisface para cualquier función de prueba ϕ .

Sin embargo, (2.44) es válida aún si u es simplemente una función medible y acotada, por lo tanto constituye una formulación integral o *débil* del problema (2.42) – (2.43). Esto motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.2.1. *Una función $u(x, t)$ medible y acotada se llama solución débil de la ecuación $u_t + f_x(u) = 0$, sobre un abierto Ω de $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, si para cualquier $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega)^2$ se satisface la relación*

$$\iint_{\Omega} [u\phi_t + f(u)\phi_x] dxdt = 0. \quad (2.48)$$

Diremos que u es solución débil del problema de valores iniciales (2.42) – (2.43) con condición inicial, u_0 , medible y acotada siempre que (2.44) sea válida para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

De esta definición y los cálculos anteriores podemos concluir que: *toda solución clásica del problema de valores iniciales es también una solución débil.*

Previamente, usamos la forma integral del principio de conservación para construir una onda discontinua (2.41), que permitiera resolver el problema de Cauchy más allá del tiempo de rompimiento; ahora veremos que este tipo de funciones son soluciones débiles de la ecuación (2.42).

Con este fin, consideremos una curva suave Γ , sobre la cual u posee una discontinuidad de salto, es decir, u tiene límites bien definidos sobre ambos lados de Γ , y u es suave en cualquier región abierta que no contenga a Γ . Sea P un punto en Γ , y B una bola centrada en P . Vamos a suponer que en B , Γ está dada por $x = x(t)$. Sean B_1 y B_2 los componentes de B que están determinados por Γ . Sea $\phi \in \mathcal{C}_0^1(B)$; entonces (2.48) se escribe como

$$\iint_B [u\phi_t + f\phi_x] dxdt = \iint_{B_1} [u\phi_t + f\phi_x] dxdt + \iint_{B_2} [u\phi_t + f\phi_x] dxdt = 0.$$

Ya que u es continuamente diferenciable sobre cada B_i , el teorema de la divergencia da

$$\iint_{B_i} [u\phi_t + f\phi_x] dxdt = \iint_{B_i} [(u\phi)_t + (f\phi)_x] dxdt = \int_{\partial B_i} \phi [-udx + fdt].$$

Debido a que $\phi = 0$ sobre ∂B , las integrales de línea sólo son distintas de cero sobre Γ . Por lo tanto, si $u_l = u(x(t) - 0, t)$, y $u_r = u(x(t) + 0, t)$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1} \phi [-udx + fdt] &= \int_{Q_1}^{Q_2} \phi [-u_l dx + f(u_l) dt] \\ \int_{\partial B_2} \phi [-udx + fdt] &= - \int_{Q_1}^{Q_2} \phi [-u_r dx + f(u_r) dt]. \end{aligned}$$

Esto resulta en

$$\int_{\Gamma} \phi ([u] dx - [f] dt) = 0.$$

Como ϕ es arbitraria y $s = dx/dt$, concluimos que u es una solución débil, sólo si

$$s[u] = [f(u)].$$

${}^2\mathcal{C}_0^1(\Omega) = \{\phi \in \mathcal{C}^1(\Omega) : \text{sop}(\phi) \text{ es compacto y } \text{sop}(\phi) \subset \Omega\}$

Una vez más obtuvimos la condición (2.40), sin embargo, esta deducción revela el verdadero significado de esta condición de salto, pues, asegura que la función u descrita anteriormente será solución débil del problema si y solo si la discontinuidad se propaga según la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l},$$

en otras palabras, esta condición restringe severamente el tipo de discontinuidad que puede tener una solución débil. Hay que mencionar que en dinámica de gases, (2.40) es conocida como *condición de Rankine-Hugoniot*.

Aún con la introducción de soluciones generalizadas y la condición de Rankine-Hugoniot, es imposible asegurar la unicidad de la solución al problema de valores iniciales. Como ejemplo consideremos la ecuación de Burgers y el problema de Cauchy asociado con la siguiente condición inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 0, \\ 1, & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (2.49)$$

De acuerdo con la condición de Rankine-Hugoniot, $s = 1/2$, y en consecuencia una solución discontinua de tipo onda de choque es

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > \frac{1}{2}t, \\ 1, & \text{si } x < \frac{1}{2}t. \end{cases} \quad (2.50)$$

Consideremos ahora la misma ley de conservación pero con condición inicial invertida, es decir

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (2.51)$$

Por el mismo argumento, una onda de choque que se propaga con la misma velocidad, $s = 1/2$, dada por

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{1}{2}t, \\ 1, & \text{si } x > \frac{1}{2}t. \end{cases} \quad (2.52)$$

Por otro lado, no es difícil probar que la función

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{t}, & \text{si } 0 < x < t, \\ 1, & \text{si } x \geq t, \end{cases} \quad (2.53)$$

es una solución débil al problema con condición inicial (2.51), y por lo tanto no hay unicidad para el problema de Cauchy. Una solución del tipo (2.53) se conoce como *onda de rarefacción*. Es interesante notar que u_2 es una función continua, esto corresponde al fenómeno inverso del tiempo de rompimiento, pues en este caso la condición inicial discontinua dio lugar a una solución continua. Cabe destacar que esta patología es distintiva de ecuaciones no-lineales.

Recordemos que la ecuación de Burgers modela un flujo unidimensional con velocidad constante, por lo que la pérdida de unicidad da lugar a la pregunta: ¿de entre todas las soluciones al problema en cuestión, es posible elegir alguna que sea físicamente aceptable?, y si es así, ¿la solución es única?

2.2.1. El criterio de entropía. Anteriormente se demostró que la ecuación

$$\Phi(x, t, u) = u - u_0(x - f'(u)t) = 0$$

define implícitamente una solución clásica u del problema (2.42)–(2.43) para tiempos pequeños. De acuerdo con el teorema de la función implícita

$$u_x = -\frac{\Phi_x}{\Phi_u} = \frac{u'_0}{1 + tu'_0 f''(u)},$$

si suponemos $f'' > 0$ y $u'_0 > 0$, entonces

$$u_x \leq \frac{u'_0}{u'_0 f'' t} = \frac{1}{f'' t} \leq \frac{E}{t},$$

donde $E = 1/C$ y $C = \inf f''$. De acuerdo con el teorema del valor medio, para cada $x, a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y cada $t > 0$ podemos asegurar que

$$u(x + a, t) - u(x, t) = u_x(x + \xi, t)a \leq \frac{E}{t}a,$$

para alguna ξ apropiada entre 0 y a . Así, podemos establecer la siguiente *condición de entropía*

$$\frac{u(x + a, t) - u(x, t)}{a} \leq \frac{E}{t}. \quad (2.54)$$

Geoméricamente, esta condición implica que si fijamos $t > 0$, y variamos x desde $-\infty$ a ∞ , cualquier salto de u sólo puede ser decreciente, es decir, en dirección de la discontinuidad. La condición de entropía no involucra a las derivadas de u por lo que también concuerda perfectamente con soluciones discontinuas. Si hacemos $x_2 = x + a$, $x = x_1$, entonces para $x_2 > x_1$, (2.54) es equivalente a

$$u(x_2, t) - \frac{E}{t}x_2 \leq u(x_1, t) - \frac{E}{t}x_1,$$

es decir, la función $x \mapsto u(x, t) - \frac{E}{t}x$ es decreciente.

Si ahora tomamos un punto x en la discontinuidad, tal que $x_1 < x < x_2$, y dejamos que x_1 y x_2 tiendan hacia x , obtenemos

$$u_r(x, t) < u_l(x, t), \quad (2.55)$$

donde $u_r(x, t) = \lim_{y \rightarrow x^+} u(y, t)$ y $u_l(x, t) = \lim_{y \rightarrow x^-} u(y, t)$.

Si suponemos que $f''(u) > 0$ y escribimos la condición de salto de la forma

$$s = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = f'(\xi),$$

donde $u_r < \xi < u_l$, entonces obtenemos la desigualdad

$$f'(u_l) > s > f'(u_r). \quad (2.56)$$

Esta desigualdad tiene la siguiente consecuencia: *Si nos fijamos en alguna característica que comienza en cualquier lado de la discontinuidad y la seguimos en dirección creciente de t , entonces, ésta intersectará la discontinuidad.* Esto quiere decir que si las discontinuidades satisfacen la condición (2.56), ninguna característica que tracemos en dirección decreciente de t intersectará la curva de discontinuidad. Esto puede entenderse como una condición de causalidad: el choque queda determinado por los datos iniciales y no por eventos futuros.

Cabe mencionar que nos referimos a (2.54) y (2.56) como *condiciones de entropía*, pues, así como la variable termodinámica sólo experimenta cambios con signo definidos, estas condiciones afirman que los saltos sólo pueden tener una dirección. De hecho, la generalización de (2.56) para las ecuaciones de la dinámica de fluidos compresibles requiere que cualquier material que cruce la discontinuidad sufra un incremento de entropía.

Las consideraciones anteriores nos llevan a considerar a las *soluciones entrópicas* como aquellas soluciones físicamente admisibles. Por lo tanto hacemos las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN 2.2.2 (Condición de entropía de Lax). *Una onda de choque propagándose con velocidad s que satisface la condición de Rankine-Hugoniot, se dice que satisface la condición de entropía de Lax si*

$$f'(u_r) < s < f'(u_l). \quad (2.57)$$

En particular, la onda de choque (2.50) satisface la condición de entropía de Lax, en efecto

$$0 = u_r = f'(u_r) < s = \frac{1}{2} < 1 = f'(u_l) = u_l,$$

mientras que (2.52), no lo hace

$$0 = u_l = f'(u_l) < s = \frac{1}{2} < 1 = f'(u_r) = u_r.$$

Cuando f es estrictamente convexa, $f''(u) > 0$, entonces (2.57) se reduce a pedir que $u_r < u_l$. Una segunda condición de entropía es

DEFINICIÓN 2.2.3 (Condición de entropía de Oleinik). *Si f es estrictamente convexa, $f'' > 0$, se dice que u es solución entrópica si existe una constante $E > 0$ tal que para toda $a > 0$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, se satisface*

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} \leq \frac{E}{t}. \quad (2.58)$$

Igual que antes, la solución (2.50) satisface la condición de entropía de Oleinik, para demostrarlo analizamos los siguientes casos

i) Si $x > \frac{1}{2}t$ entonces $x+a > \frac{1}{2}t$, entonces

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} = 0 < \frac{1}{t},$$

el mismo resultado ocurre si $x+a < \frac{1}{2}t$.

ii) Si $x < \frac{1}{2}t$, pero $\frac{1}{2}t < x+a$, entonces

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} = \frac{0 - 1}{a} < \frac{1}{t}.$$

Por otro lado, nótese que la función (2.52) no satisface la condición de entropía de Oleinik, algo que es de esperarse pues esta función no satisface el principio de causalidad antes mencionado.

Para concluir esta sección y contestar las preguntas hechas anteriormente, es importante mencionar que si $u_0 \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ y $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, se puede demostrar que el problema (2.42) – (2.43) *está bien planteado en el sentido de Hadamard*, esto es: la solución existe, es única y depende continuamente de las condiciones iniciales. Más aún, la solución satisface la condición de entropía de Oleinik (2.58) y ésta implica

la unicidad de la solución. La demostración se puede encontrar en [32, p. 266-281].

Nótese que se introdujo la condición $u_0 \in \mathcal{L}^\infty$, esto es, suponemos que la condición inicial u_0 es esencialmente acotada; más precisamente: Decimos que una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) está esencialmente acotada si existe M tal que

$$|f(x)| \leq M,$$

en casi todo punto de Ω ³. El infimo de todos los números M que cumplen esta propiedad se conoce como *supremo esencial de f* y se denota como

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f|.$$

Si definimos una relación de equivalencia: $f \sim g$ si $f = g$ en casi todo punto, entonces el espacio $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ se vuelve un espacio de Banach respecto de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Sin embargo, para los propósitos de este trabajo, es suficiente pensar en estas funciones como medibles y acotadas.

Como último comentario hay que mencionar que no se ha podido demostrar que el teorema de Cauchy para un sistema general de leyes de conservación, esté bien planteado en el sentido de Hadamard.

2.3. Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación

En la sección anterior vimos que la ley de conservación escalar lineal, (2.23), tiene por solución una onda viajera de la forma $u(x, t) = u_0(x - ct)$. Para un sistema de leyes de conservación no lineal podemos proceder de forma inversa y buscar soluciones en forma de onda viajera. Con este fin consideremos el sistema cuasilineal de leyes de conservación

$$u_t + \sum_{j=1}^d Df^j(u)u_{x_j} = 0, \quad (2.59)$$

donde $Df^j(u) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, denota la matriz jacobiana de f^j con respecto de u . Vamos a suponer una solución diferenciable u del sistema (2.59) en forma de onda viajera, a saber,

$$u(x, t) = \vec{u}(x \cdot \kappa - st), \quad (2.60)$$

donde $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, es una función continuamente diferenciable, $\kappa \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ es la dirección de propagación de la onda, y $s \in \mathbb{R}$ su velocidad. Sustituyendo (2.60) en (2.59) obtenemos

$$-s\vec{u}'(y) + \sum_{j=1}^d \kappa_j Df^j(\vec{u}(y))\vec{u}'(y) = 0, \quad (2.61)$$

donde $y = x \cdot \kappa - st$. Si definimos la matriz

$$A(u, \kappa) := \sum_{j=1}^d \kappa_j Df^j(u), \quad (2.62)$$

la ecuación (2.61) sugiere que \vec{u}' debe ser un vector propio de $A(u, \kappa)$ con valor propio s . Esto significa que las velocidades de propagación serán reales si las raíces

³En general decimos que una proposición es válida *en casi todo punto*, si el conjunto de puntos donde no es válida, tiene medida cero

del polinomio característico de la matriz $A(u, \kappa)$ son valores propios de ésta. Con esto en mente, hacemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.3.1. *Un sistema de leyes de conservación*

$$u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} = 0, \quad (2.63)$$

se dice hiperbólico en el estado $u \in U$, si para todo $\kappa \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, la matriz $A(u, \kappa)$ definida en (2.62) es diagonalizable sobre \mathbb{R} . En otras palabras, la matriz $A(u, \kappa)$ tiene n valores propios reales

$$\lambda_1(u, \kappa) \leq \lambda_2(u, \kappa) \leq \dots \leq \lambda_n(u, \kappa),$$

con respectivos vectores propios $\{r_k(u, \kappa)\}_{k=1}^n$ que forman una base de \mathbb{R}^n .

Si además todos los valores propios son distintos se dice que el sistema es estrictamente hiperbólico en u . Si el sistema es hiperbólico (estrictamente hiperbólico) para todo estado $u \in U$, entonces se dice que es hiperbólico (estrictamente hiperbólico) en todo U . Los valores propios $\lambda_j(u, \kappa)$ de un sistema hiperbólico también son llamados velocidades características del sistema en el estado $u \in U$ en la dirección $\kappa \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

De acuerdo con esta definición un sistema de leyes de conservación será hiperbólico si podemos encontrar n ondas (o frentes) distintas que se propagan en la dirección κ del espacio físico. Los valores propios de $A(u, \kappa)$ determinarán la velocidad de propagación de éstas ondas mientras que los vectores propios correspondientes especificarán la dirección de la amplitud.

De acuerdo con la interpretación, es razonable pensar que la noción de hiperbolicidad es invariante ante ciertos cambios de coordenadas suficientemente suaves; podemos demostrar esto como sigue:

TEOREMA 2.3.1. *Sea $u \in U$ una solución continuamente diferenciable del sistema (2.63). Supongamos también que $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo suave con inversa Φ^{-1} . Entonces el sistema (2.63) es hiperbólico si y solo si $v := \Phi(u)$ satisface el sistema hiperbólico*

$$v_t + \sum_{j=1}^d B^j(v)v_{x_j} = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^d \times [0, \infty), \quad (2.64)$$

donde

$$B^j(v) := D_u \Phi(\Phi^{-1}(v)) A^j(\Phi^{-1}(v)) D_v \Phi^{-1}(v),$$

con $A^j(u) := D_u f^j(u)$, para toda $u \in U$, $v \in \Phi(U)$.

PRUEBA. Las derivadas de u en términos de la nueva variable son

$$\begin{aligned} u_t &= D_v \Phi^{-1}(v) v_t, \\ u_{x_j} &= D_v \Phi^{-1}(v) v_{x_j}. \end{aligned}$$

Como u es una solución continuamente diferenciable del sistema (2.63) se satisface la siguiente ecuación

$$D_v \Phi^{-1}(v) v_t + \sum_{j=1}^d A^j(\Phi^{-1}(v)) D_v \Phi^{-1}(v) v_{x_j} = 0.$$

El teorema de la función inversa asegura que $[D_v\Phi^{-1}(v)]^{-1} = D_u\Phi(\Phi^{-1}(v))$, por lo que si multiplicamos por la izquierda la última ecuación por $D_u\Phi(\Phi^{-1}(v))$, obtenemos (2.64).

Obsérvese que las matrices

$$B(v, \kappa) = \sum_{j=1}^d \kappa_j B^j(v)$$

y $A(u, \kappa)$ son similares, pues

$$B(v, \kappa) = D_u\Phi(u)A(u, \kappa)[D_u\Phi(u, \kappa)]^{-1};$$

por lo tanto, si una es diagonalizable sobre \mathbb{R} , la otra también. Nótese que los valores propios de $B(v, \kappa)$ están dados por $\lambda_j(\Phi^{-1}(v), \kappa)$. En conclusión el sistema (2.63) es hiperbólico, si y solo si el sistema (2.64) también lo es. \square

Como un primer ejemplo de leyes de conservación hiperbólicas, consideremos el sistema p , (2.19) – (2.20). Recordemos que $p: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no-lineal dada tal que $p' < 0$ y $p'' > 0$. Dado que las variables de estado y la función de flujo son

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \tau \\ u \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{F}(u) = \begin{pmatrix} -u \\ p(\tau) \end{pmatrix},$$

respectivamente, la matriz Jacobiana del sistema es

$$D\vec{F}(u) = A(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(\tau) & 0 \end{pmatrix},$$

en consecuencia el polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 + p'(\tau)$, y los valores característicos son

$$\begin{aligned} \lambda_1(\tau, u) &= +\sqrt{-p'(\tau)} \\ \lambda_2(\tau, u) &= -\sqrt{-p'(\tau)}. \end{aligned}$$

La hipótesis $p' > 0$ asegura que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, esto implica que el sistema es estrictamente hiperbólico.

Por medio del teorema 2.3.1 podemos probar la hiperbolicidad de las ecuaciones de Euler en una dimensión a través de un sistema cuasilineal equivalente. Para esto, vamos a expandir las derivadas que aparecen en la ecuación (2.11) y vamos a sustituir en ella la ecuación de conservación de masa $\rho_t = -(\rho u)_x$, esto resulta en

$$u_t + uu_x + \frac{p_x}{\rho} = 0.$$

Aplicamos este mismo paso a la ecuación (2.12) tomando en cuenta que $E = \frac{1}{2}u^2 + e$ y obtenemos

$$e_t + ue_x + \frac{pu_x}{\rho} = 0.$$

De esta manera las ecuaciones de Euler se reescriben como

$$\begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{p_x}{\rho} &= 0, \\ e_t + ue_x + \frac{pu_x}{\rho} &= 0, \end{aligned} \tag{2.65}$$

donde $p_x = \widehat{p}_\rho \rho_x + \widehat{p}_e e_x = 0$. Supongamos que la función de estado es $p = \widehat{p}(\rho, e)$, y que \widehat{p} satisface las siguientes hipótesis

$$\widehat{p} > 0, \quad (2.66)$$

$$\widehat{p}_\rho > 0, \quad (2.67)$$

$$\widehat{p}_e > 0. \quad (2.68)$$

La ley de conservación cuasilineal descrita en (2.65) está dada por las variables de estado

$$v = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ e \end{pmatrix}$$

y la matriz

$$B(v) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \widehat{p}_e & u & \widehat{p}_e \\ 0 & \widehat{p}_e & u \end{pmatrix},$$

que satisfacen la ecuación $v_t + B(v)v_x = 0$. El polinomio característico de $B(v)$ es

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (u - \lambda)[(u - \lambda)^2 - \frac{\widehat{p}_e \widehat{p}}{\rho^2} - \widehat{p}_\rho] \\ &= (u - \lambda)[(u - \lambda)^2 - c^2], \end{aligned}$$

donde las hipótesis (2.66) – (2.68) justifican la notación $c^2 := \frac{\widehat{p}_e \widehat{p}}{\rho^2} + \widehat{p}_\rho > 0$. Así, los valores propios de $B(v)$ son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u + c, \\ \lambda_2 &= u, \\ \lambda_3 &= u - c, \end{aligned}$$

por lo tanto el sistema (2.65) es estrictamente hiperbólico.

Nótese que el mapeo

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ e \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho(e + \frac{1}{2}u^2) \end{pmatrix}$$

es suave y además invertible pues tiene por matriz Jacobiana

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ e + \frac{1}{2}u^2 & \rho u & \rho \end{pmatrix},$$

por lo tanto, las ecuaciones de Euler en una dimensión espacial y el sistema cuasilineal (2.65) son equivalentes en el caso de soluciones clásicas.

Podemos obtener otro sistema equivalente si suponemos que $e = e(\rho, s)$ y usamos la relación $de = \theta ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$. En este caso podemos calcular las derivadas de la energía interna y obtener

$$\begin{aligned} e_t &= \frac{p}{\rho^2} \rho_t + \theta s_t, \\ e_x &= \frac{p}{\rho^2} \rho_x + \theta s_x. \end{aligned}$$

Después de sustituir estas relaciones en (2.65) y usar la conservación de masa obtenemos

$$\begin{aligned}\rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{p_x}{\rho} &= 0, \\ s_t + us_x &= 0\end{aligned}\tag{2.69}$$

que es un sistema cuasilineal equivalente a (2.65) pues el mapeo

$$\Phi : (\rho, u, s)^T \rightarrow (\rho, \rho u, \rho E),$$

es suave con Jacobiano $|D\Phi| = \rho^2\theta$. Es decir, este sistema también es equivalente (para soluciones clásicas) al sistema de Euler (2.10)–(2.12). La diferencia radica en que el sistema (2.69) considera la entropía como variable termodinámica independiente, esto es $p = p(\rho, s)$ y por lo tanto las condiciones (2.66)–(2.68) se convierten en: $p > 0$, $p_\rho = c^2$ y $p_s = \widehat{p}_e e_s = \theta \widehat{p}_e > 0$.

Como un último ejemplo tomemos la ley de conservación cuasilineal, en variable Euleriana, que describe un flujo isentrópico en una dimensión espacial dada por

$$\begin{aligned}\rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{p\rho_x}{\rho} &= 0,\end{aligned}\tag{2.70}$$

donde se ha supuesto $p = p(\rho)$. En este caso la matriz Jacobiana

$$A(\rho, u) = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \frac{p_\rho}{\rho} & u \end{pmatrix},$$

tiene por polinomio característico $P(\lambda) = (u - \lambda)^2 - p'(\rho) = 0$, en consecuencia, el sistema (2.69) será estrictamente hiperbólico si $p'(\rho) > 0$. Para este sistema las velocidades características son

$$\lambda_1 = u - \sqrt{p'},\tag{2.71}$$

$$\lambda_2 = u + \sqrt{p'}.\tag{2.72}$$

Nótese que este sistema es un caso particular del sistema (2.65) si suponemos que la energía interna es constante durante el proceso.

Ahora, consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$u_t + Au_x = 0,\tag{2.73}$$

$x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz constante y estrictamente hiperbólica; esto implica la existencia de n vectores propios reales y distintos:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n.$$

Para esta matriz, además de los *vectores propios derechos*, $Ar_j = \lambda_j r_j$, podemos definir los *vectores propios izquierdos*: como aquellos que son vectores propios derechos de la matriz traspuesta A^T . Sabemos que una matriz y su traspuesta tienen el mismo espectro, entonces

$$A^T l_j = \lambda_j l_j,$$

que es equivalente a $l_j A = \lambda_j l_j$. Por su definición los vectores izquierdos también constituyen un base de \mathbb{R}^n . Adicionalmente, si normalizamos dichas bases se tiene que

$$l_j r_k = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

Si definimos las matrices

$$R := (r_1 \cdots r_n) \quad \text{y} \quad L := \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix},$$

tenemos que $RL = LR = \mathbb{I}$. Inmediatamente concluimos que

$$LAR = \text{Diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] := \Lambda.$$

Como es de esperarse, la introducimos de la nueva variable $Lu =: v$, nos permite reducir el sistema (2.73) a un sistema desacoplado; en efecto, si aplicamos el operador L a la ecuación (2.73) obtenemos

$$v_t + \Lambda v_x = 0,$$

es decir

$$\partial_t v_j + \lambda_j \partial_x v_j = 0, \quad \text{para } j = 1, \dots, n. \quad (2.74)$$

Por los resultados de la sección anterior, podemos resolver cada una de las ecuaciones (2.74) por el método de características, pues, v_j es constante a lo largo de las rectas de la forma

$$x_j(t) = \lambda_j t + x_{0j}, \quad (2.75)$$

para cada $j = 1, \dots, n$. Esto significa que ahora es posible resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_t + Au_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (2.76)$$

en $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$. Para esto observemos que, cada v_j está dada por

$$v_j(x, t) = v_{0j}(x - \lambda_j t) = (Lu_0)_j(x - \lambda_j t) = l_j \cdot u_0(x - \lambda_j t),$$

donde se ha puesto $v_0 := Lu_0$. Entonces la solución al problema de Cauchy (2.76) toma la forma

$$u(x, t) = Rv(x, t) = \sum_{j=1}^n v_j(x, t)r_j = \sum_{j=1}^n (l_j \cdot u_0(x - \lambda_j t))r_j.$$

Nótemos que, los valores propios λ_j representan las velocidades de propagación de las ondas v_j , así pues, el nombre de *velocidades características* queda justificado. Podemos hacer una definición similar en el caso en que la matriz A depende de la solución u , es decir, para el caso no lineal.

DEFINICIÓN 2.3.2. *Considérese el sistema de leyes de conservación*

$$u_t + F(u)_x = 0, \quad u(x, t) \in U, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (2.77)$$

donde U es un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n y $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un mapeo suave. Una j -característica, $j = 1, \dots, n$, del sistema (2.77), asociada a la solución clásica u , es una función $x = x(t)$ continuamente diferenciable, cuya gráfica está

contenida en el dominio de u , que es una curva integral de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_j(u(x, t)),$$

para λ_j un valor propio de la matriz Jacobiana $DF(u) := A(u)$.

El teorema de existencia y unicidad para ecuaciones ordinarias asegura que, por cada punto (x_0, t_0) en el dominio de una solución clásica de (2.77) pasa una única curva de cada familia característica.

De la definición se infiere que un sistema estrictamente hiperbólico de leyes de conservación posee exactamente n curvas características por cada punto (x, t) en el espacio-tiempo.

De acuerdo con lo anterior, una de las principales diferencias entre sistemas de leyes de conservación hiperbólicos lineales y no lineales es que, en los primeros, todas las ondas de una misma familia se propagan con velocidad constante; mientras que en los últimos, las velocidades características varían con la amplitud de la onda. Esto motiva las siguientes nociones sobre linealidad y no-linealidad para familias de ondas.

DEFINICIÓN 2.3.3. Sea r_j vector propio de A asociado al valor propio λ_j , nos referimos al par (λ_j, r_j) como j -campo característico.

Para cada $j = 1, \dots, n$, decimos que el j -campo característico del sistema (2.77) es genuinamente no-lineal si

$$\nabla^u \lambda_j(u) \cdot r_j(u) \neq 0, \quad \forall u \in U \quad (2.78)$$

y linealmente degenerado cuando

$$\nabla^u \lambda_j(u) \cdot r_j(u) = 0, \quad \forall u \in U. \quad (2.79)$$

Como se puede notar, (2.78) y (2.79), están relacionados con la derivada de λ_j en dirección de r_j , por esto es claro que, un j -campo característico es linealmente degenerado si y sólo si la j -velocidad característica, λ_j , es constante a lo largo de las curvas integrales del campo vectorial $r_j(u)$.

Por definición una *curva integral* del campo vectorial $r_j(u)$, es una solución $v(s)$ de la ecuación diferencial $v'(s) = r_j(v(s))$. Esto implica que el j -campo característico es genuinamente no-lineal si λ_j es monótona a lo largo de las curvas $s \mapsto v(s)$.

En vista de esta definición, cuando $n = 1$, es decir, en el caso de la ley de conservación escalar (2.21), $\lambda(u) = a(u) = f'(u)$ es la única velocidad característica, mientras que la dirección característica asociada es $r(u) = 1$, esto significa que ésta ecuación es genuinamente no-lineal si y solo si $f''(u) \neq 0$ para toda $u \in U$, es decir, f es estrictamente cóncava o estrictamente convexa. Por otra parte, es linealmente degenerada si y sólo si, $f'' = 0$ para toda $u \in U$, lo que implica que la ecuación es lineal.

Consideremos una vez más el sistema p , (2.19)–(2.20). Como vimos anteriormente, los valores propios de la matriz $A(\tau, u)$ son

$$\lambda_1(\tau, u) = +\sqrt{-p'} \quad \text{y} \quad \lambda_2(\tau, u) = -\sqrt{-p'}.$$

Los vectores propios asociados son

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-p'(\tau)} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-p'(\tau)} \end{pmatrix},$$

respectivamente. Si calculamos los gradientes respecto de las variables (τ, u) de los valores propios, obtenemos

$$\nabla\lambda_1 = \begin{pmatrix} -\frac{p''}{2\sqrt{-p'}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \nabla\lambda_2 = \begin{pmatrix} \frac{p''}{2\sqrt{-p'}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $p' < 0$ y $p'' > 0$ aseguramos que $\nabla\lambda_1 \cdot r_1 = -\frac{p''(\tau)}{2\sqrt{-p'(\tau)}} = -\nabla\lambda_2 \cdot r_2 \neq 0$ y en consecuencia, los campos característicos del sistema p son genuinamente no-lineales. Para las nociones de no-linealidad genuina y degeneración lineal tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 2.3.2. *Sea u una solución clásica del sistema (2.77) y $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo suave. La $v = \Phi(u)$ satisface el sistema cuasilineal*

$$v_t + B(v)v_x = 0, \quad (2.80)$$

donde $B(v) = D_u\Phi(\Phi^{-1}(v))A(\Phi^{-1}(v))[D_u\Phi(\Phi^{-1}(v))]^{-1}$. Entonces el j -campo característico del sistema (2.77) es genuinamente no-lineal (linealmente degenerado) si y solo si el j -campo característico del sistema (2.80) es genuinamente no-lineal (linealmente degenerado).

PRUEBA. Basándonos en los cálculos hechos durante la demostración del teorema 2.3.1 tenemos lo siguiente: Si $\lambda_j(u)$ es valor propio de $A(u)$ y $r_j(u)$ es el vector propio respectivo, entonces

$$\hat{r}_j(v) = D_u\Phi(\Phi^{-1}(v))r_j(\Phi^{-1}(v))$$

es vector propio de la matriz $B(v)$, con valor propio $\lambda_j(\Phi^{-1}(v))$. Entonces, la regla de la cadena afirma que

$$D_v\lambda(\Phi^{-1}(v)) \cdot \hat{r}_j = D_u\lambda_j(u)D_v\Phi^{-1}(v)D_u\Phi(\Phi^{-1}(v))r_j(\Phi^{-1}(v)). \quad (2.81)$$

El teorema de la función inversa asegura que $[D_v\Phi^{-1}(v)]^{-1} = D_u\Phi(\Phi^{-1}(v))$, por lo tanto

$$D_v\lambda(\Phi^{-1}(v)) \cdot \hat{r}_j = D_u\lambda_j(u) \cdot r_j(\Phi^{-1}(v)),$$

en consecuencia, si el j -campo característico del sistema (2.77) posee la propiedad de no-linealidad genuina, entonces el j -campo del sistema (2.80) también la tiene y viceversa. La degeneración lineal también es consecuencia de (2.81), se omiten los detalles. \square

Por medio de este resultado podemos estudiar los campos característicos de las ecuaciones de Euler usando el sistema equivalente (2.69), con las hipótesis usuales: $p = p(\rho, s)$, $p_\rho > 0$, $p_s > 0$. Adicionalmente añadimos la hipótesis

$$p_{\rho\rho} > 0, \quad (2.82)$$

que es equivalente a la condición de convexidad de Bethe ([2, p. 3] y a la segunda hipótesis de Weyl [34, p.105].

Tomando en cuenta que $p_x = p_\rho \rho_x + p_s s_x$, la matriz Jacobiana del sistema (2.69) es

$$A(\rho, u, s) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{p_\rho}{\rho} & u & \frac{p_s}{\rho} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

que tiene por polinomio característico $P(\lambda) = (u - \lambda)[(u - \lambda)^2 - p_\rho]$. De éste vemos que los valores propios son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u + \sqrt{p_\rho}, \\ \lambda_2 &= u, \\ \lambda_3 &= u - \sqrt{p_\rho}. \end{aligned}$$

Los vectores propios respectivos son, a su vez,

$$r_1 = \begin{pmatrix} \rho \\ \sqrt{p_\rho} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} p_s \\ 0 \\ -p_\rho \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} \rho \\ -\sqrt{p_\rho} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.84)$$

Luego, los gradientes de los valores propios son

$$\nabla \lambda_1 = \begin{pmatrix} (\sqrt{p_\rho})_\rho \\ 1 \\ (\sqrt{p_\rho})_s \end{pmatrix}, \quad \nabla \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \lambda_3 = \begin{pmatrix} -(\sqrt{p_\rho})_\rho \\ 1 \\ -(\sqrt{p_\rho})_s \end{pmatrix}. \quad (2.85)$$

Inmediatamente se observa que,

$$\nabla \lambda_2 \cdot r_2 = 0,$$

para todo (ρ, u, s) , es decir, el 2–campo característico es linealmente degenerado. Mientras que,

$$\nabla \lambda_1 \cdot r_1 = \frac{\rho p_{\rho\rho}}{2\sqrt{p_\rho}} + \sqrt{p_\rho} > 0$$

y

$$\nabla \lambda_3 \cdot r_3 = -\left(\frac{\rho p_{\rho\rho}}{2\sqrt{p_\rho}} + \sqrt{p_\rho}\right) < 0.$$

Por lo tanto, los 1 y 3–campos característicos son genuinamente no-lineales bajos las hipótesis establecidas. Por el teorema 2.3.2, las mismas conclusiones son válidas para las ecuaciones de Euler (2.10) – (2.12) y el sistema (2.65).

2.4. Ondas de choque admisibles

Como vimos en la sección 2.2, cuando la función $f'(u_0(x))$ no es una función creciente de x , el problema de Cauchy para la ley de conservación (2.21) no tiene una solución continuamente diferenciable para todo $t > 0$, de hecho, la región máxima de existencia de la solución clásica es la banda $\mathbb{R} \times [0, t^*)$, donde t^* es el tiempo de rompimiento dado por

$$t^* = -\left(\inf \frac{d}{dx} f'(u_0(x))\right)^{-1}.$$

En el caso de sistemas de leyes de conservación más complicados, también se puede demostrar el rompimiento de la solución clásica; por ejemplo, si consideramos el

problema de Cauchy de una ecuación escalar de la forma

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{k=1}^d f_k(u) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (2.86)$$

donde las funciones escalares f_k , $k = 1, \dots, d$, son suaves y son las componente de una función vectorial f con d entradas, se puede demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 2.4.1. *Supóngase que u_0 , definida sobre \mathbb{R}^d , es acotada y Lipschitz continua. Sea*

$$\mu = \operatorname{ess\,inf}_{y \in \mathbb{R}^d} \sum_{k=1}^d f_k''(u_0(y)) u_{0x_k}(y). \quad (2.87)$$

Entonces, existe una solución clásica del problema (2.86) sobre el máximo intervalo $[0, T^)$, donde $T^* = \infty$ cuando $\mu \geq 0$ y $T^* = -\mu^{-1}$ cuando $\mu < 0$. Mas aún, si u_0 es de clase C^k , también lo es u .*

La demostración de este teorema queda fuera de los propósitos de este trabajo, sin embargo el lector puede encontrarla en el capítulo VI del libro de Dafermos. En este mismo, pueden encontrarse teoremas similares para sistemas más generales, en los capítulos V y VII. Lo importante es reconocer que el tiempo de existencia de la solución clásica es generalmente finito, y por lo tanto el estudio de soluciones débiles es imperativo.

Al igual que en la sección anterior, definimos el concepto de solución débil, para un sistema de leyes de conservación general.

DEFINICIÓN 2.4.1. *Consideremos el problema de Cauchy para un sistema general de leyes de conservación*

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (2.88)$$

sobre $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$, $u \in U \subset \mathbb{R}^n$ y $f^j : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Una función $u \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, \infty); U)$ (medible y acotada) es una solución débil del problema (2.88) si se satisface

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, 0) \cdot u_0(x) dx = 0, \quad (2.89)$$

para toda función de prueba $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Al igual que en la sección (2.2) consideraremos soluciones u continuamente diferenciables por pedazos del problema (2.88) de hecho, vamos a suponer que esta función tiene una discontinuidad orientable descrita por el conjunto

$$\Sigma = \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ : \Psi(x, t) = 0\},$$

con vector normal $\hat{n} = (n_1, \dots, n_d, n_t)^T$. Suponemos que Ψ es una función suave, así, las componentes espacial, $\hat{n}_x = (n_1, \dots, n_d)^T$, y temporal, \hat{n}_t , están dadas por

$$\hat{n}_x = \frac{\nabla^x \Psi}{\sqrt{\|\nabla^x \Psi\|^2 + \Psi_t^2}}, \quad \hat{n}_t = \frac{\Psi_t}{\sqrt{\|\nabla^x \Psi\|^2 + \Psi_t^2}}.$$

En este caso, para cada $(x, t) \in \Sigma$, definimos

$$\begin{aligned} u_r &: = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u((x, t) + \epsilon \widehat{n}), \\ u_l &: = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} u((x, t) - \epsilon \widehat{n}). \end{aligned}$$

Bajo estas hipótesis, podemos obtener las condiciones de Rankine-Hugoniot para el sistema (2.88), a saber

$$\widehat{n}_t[u] + \sum_{j=1}^d \widehat{n}_j[f^j(u)] = 0, \quad (x, t) \in \Sigma \quad (2.90)$$

la única dificultad en la derivación de esta fórmula yace en el incremento de la dimensión, por esta razón omitimos los detalles, sin embargo una derivación completa, en el caso de una dimensión espacial se puede encontrar en [12, p. 571].

Para el caso $d = 1$, la discontinuidad Σ es una curva suave \mathcal{C} ; si además suponemos que ésta es la gráfica de alguna función $y(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, queda

$$\Sigma = \mathcal{C} = \{(x, t) : x = y(t)\}.$$

Así, el vector normal está dado por

$$\widehat{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}(1, -\dot{y})$$

En consecuencia (2.90) se reduce a

$$[f(u)] = s[u], \quad (2.91)$$

donde $s = \dot{y}$ es la velocidad de propagación de la discontinuidad. Aquí, se ha puesto $f^1 = f$ como la función de flujo sobre $U \subset \mathbb{R}^n$ y que toma valores en \mathbb{R}^n , esto significa que la condición (2.91) es una relación vectorial.

Debido a que la existencia de una onda de choque de la forma

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l, & x < st, \\ u_r, & x > st, \end{cases} \quad (2.92)$$

está sujeta a la identidad $f(u_l) - f(u_r) = s(u_l - u_r)$, podemos fijar un estado constante u_0 y determinar el conjunto de estados $u \in U$, que satisfacen las condiciones de Rankine-Hugoniot. Esta observación motiva la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.4.2. *Dado un estado constante $u_0 \in U$, definimos el conjunto de Hugoniot de u_0 como*

$$\mathcal{H}(u_0) := \{u \in U : f(u) - f(u_0) = s(u - u_0) \text{ para una constante } s = s(u, u_0)\}.$$

Se puede demostrar que el conjunto de Hugoniot de un estado $u_0 \in U$ consiste en la unión de n curvas suaves $\mathcal{H}_j(u_0)$ ($j = 1, \dots, n$), en alguna vecindad de u_0 (véase [12, p. 584]), en donde cada una de éstas posee un conjunto de propiedades que determinan la estructura de $\mathcal{H}(u_0)$, entre éstas encontramos:

- i) Sugóngase que para alguna $j = 1, \dots, n$ el par (λ_j, r_j) es linealmente degenerado. Entonces para cada $u_0 \in U$

$$s(u, u_0) = \lambda_j(u) = \lambda_j(u_0) \quad \forall u_0 \in \mathcal{H}_j(u_0).$$

- ii) $s(u, u_0) = \frac{\lambda_j(u) + \lambda_j(u_0)}{2} + O(|u - u_0|^2)$, cuando $u \rightarrow u_0$ con $u \in \mathcal{H}(u_0)$.

Si consideramos un choque de la forma (2.92) tal que $u_r \in \mathcal{H}_j(u_l)$ y además suponemos que el j -campo característico (λ_j, r_j) es linealmente degenerado, la propiedad $i)$ asegura que las características a la izquierda y a la derecha son paralelas a la línea de discontinuidad. Físicamente, esto significa que no hay flujo de partículas a través de la discontinuidad $x = st$. A esta línea se le conoce como j -discontinuidad de contacto. En gases, por ejemplo, una discontinuidad de contacto puede separar diferentes partes de un mismo gas o separar dos gases diferentes. Por otro lado, si el campo (λ_j, r_j) es genuinamente no lineal tenemos que

$$\lambda_j(u_r) < \lambda_j(u_l) \quad \text{ó} \quad \lambda_j(u_l) < \lambda_j(u_r).$$

En vista de la propiedad $ii)$, cuando u_r está suficientemente cerca de u_l se debe satisfacer

$$\lambda_j(u_r) < s < \lambda_j(u_l), \quad (2.93)$$

ó

$$\lambda_j(u_l) < s < \lambda_j(u_r). \quad (2.94)$$

El significado de la desigualdad (2.93) es que la j -característica proveniente del lado izquierdo alcanza a la j -característica que proviene del lado derecho y colisionan en la discontinuidad. Así, la "información" del pasado que se propaga a lo largo de la j -característica se pierde dentro del choque. En contraste, las ondas de choque que satisfacen la desigualdad (2.94) se convierten en fuentes de nueva "información" que después se propaga hacia el futuro a lo largo de las j -características.

Análogamente al caso escalar, tenemos la siguiente definición de solución admisible:

DEFINICIÓN 2.4.3. *Supongamos que el campo (λ_j, r_j) es genuinamente no-lineal. Decimos que el par (u_l, u_r) es admisible si existe una onda de choque con velocidad s que une el estado izquierdo u_l con el estado derecho u_r (o simplemente $u_r \in \mathcal{H}_j(u_l)$) y satisface la condición de entropía de Lax, que es*

$$\lambda_j(u_r) < s < \lambda_j(u_l).$$

Si (u_l, u_r) es admisible, decimos que la solución de la forma (2.92) es una j -onda de choque o simplemente un j -choque.

2.4.1. Criterio de Entropía. La condición de entropía de Lax, no es el único criterio viable para determinar la solución que es físicamente razonable de entre las posibles soluciones débiles del problema. El siguiente criterio, puede pensarse como una extensión de la segunda ley de la termodinámica que es generalizada para incluir otros sistemas que no sean mecánicos o térmicos.

La clave de este criterio de entropía es preguntarse ¿bajo que condiciones un sistema de la forma

$$u_t + f_x(u) = 0, \quad (2.95)$$

implica la existencia de una ley de conservación adicional?; esto es, una ecuación de la forma

$$U_t + F_x = 0, \quad (2.96)$$

donde $U = U(u)$ y $F = F(u)$ son funciones reales.

Si llevamos a cabo las derivadas en la ecuación (2.96) obtenemos

$$DUu_t + DFu_x = 0.$$

Esta misma relación puede obtenerse de la ley de conservación original escrita en la forma

$$u_t + Df u_x = 0,$$

si ésta la multiplicamos por DU y requerimos que

$$DUDf = DF.$$

DEFINICIÓN 2.4.4. *Un par de entropía/flujo de entropía para la ley de conservación (2.95), es un par de funciones (U, F) , con $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que satisfacen*

$$DF = DUDf. \quad (2.97)$$

La función U recibe el nombre de entropía matemática, en analogía con las ecuaciones de gases unidimensionales, donde la ecuación S_t puede derivarse formalmente. De los cálculos anteriores y esta definición, se sigue que, si u es solución clásica de (2.95), entonces

$$U_t(u) + F_x(u) = 0.$$

DEFINICIÓN 2.4.5. *Una solución débil de (2.95) satisface la condición de entropía (matemática) si existe un par de entropía/flujo de entropía donde el mapeo $u \mapsto U(u)$ es convexo y es tal que*

$$\iint_{t \geq 0} (U(u)\phi_t + F(u)\phi_x) dx dt \leq 0,$$

para toda función de prueba no-negativa ϕ .

Si u es una función de soporte compacto que satisface la desigualdad

$$U_t(u) + F_x(u) \leq 0,$$

y suponemos que $F(0) = 0$, entonces al integrar respecto de x obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} U_t dx \leq 0,$$

lo que implica que la cantidad

$$\int_{\mathbb{R}} U dx$$

es una función decreciente en el tiempo. De la misma forma que un sistema termomecánico sólo puede perder energía.

La relación (2.97) es un sistema de n ecuaciones diferenciales parciales para las cantidades U y F . Por lo que si, $n > 2$, usualmente el sistema estará sobredeterminado y no tiene soluciones. Sin embargo, hay casos importantes en los que existe una solución no trivial.

En el caso de sistemas genuinamente no lineales se puede demostrar que la condición de Lax y la condición de entropía son equivalentes para choques débiles, esto es, para choques en los que $u_l - u_r$ es suficientemente pequeño. Nos referimos a $u_l - u_r$ como la amplitud del choque.

2.4.2. Criterio del perfil viscoso. Consideremos las ecuaciones de movimiento de un fluido viscoso, conductor del calor en coordenadas Eulerianas. Éstas son

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= \mu u_{xx}, \\ \left[\rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right) \right]_t + \left[\rho u \left(\frac{u^2}{2} + i \right) \right]_x &= \mu (uu_x)_x + \kappa \theta_{xx}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

donde se introdujo la *entalpía* $i = e + \frac{p}{\rho}$. Suponemos que los coeficientes de viscosidad y conductividad térmica μ y κ respectivamente son constantes positivas. Aunque la parte izquierda de este sistema corresponde a las ecuaciones de Euler y por lo tanto, está escrita en forma de ley de conservación, el lado derecho involucra derivadas de segundo orden, en consecuencia, el sistema no se puede llamar hiperbólico. Si tomamos como variables independientes ρ , u y θ , podemos escribir (2.98) en la forma genérica

$$u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x, \quad (2.99)$$

donde

$$B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & \mu u & \kappa \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

Un sistema de la forma (2.99) se llama *parabólico* si los valores propios de la matriz $B(u)$ (sobre los complejos) tienen parte real no-negativa. De esta manera, el sistema (2.98) es parabólico pues por (2.100), los valores propios de $B(u)$ son: 0, μ y κ .

Con esta noción establecida, notamos que los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación usualmente surgen de fenómenos físicos que ignoran mecanismos disipativos (y dispersivos). En modelos que se apegan más a la realidad, estos mecanismos dejan sentir su presencia en las ecuaciones mediante derivadas de órdenes superiores que son multiplicadas por pequeños *coeficientes de viscosidad*. La consistencia del modelo demanda que ambos conjuntos de ecuaciones estén cerca en algún sentido y que las soluciones del modelo viscoso, en el límite cuando los coeficientes de viscosidad tienden a cero, converjan a las soluciones del sistema de leyes de conservación. La idea es obtener la existencia de soluciones del sistema hiperbólico como límite de soluciones de algún sistema parabólico, cuando los coeficientes de viscosidad tienden a cero. Esta técnica se conoce como *método de viscosidad*.

Así pues, consideraremos el sistema de leyes de conservación

$$u_t + f_x(u) = 0 \quad (2.101)$$

como el "límite"⁴ del sistema perturbado

$$u_t + f_x(u) = \epsilon(B(u)u_x)_x \quad (2.102)$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Vamos a buscar soluciones de la forma

$$u^\epsilon(x, t) = U\left(\frac{x - st}{\epsilon}\right). \quad (2.103)$$

Sustituyendo en (2.102) obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(B(U)U')' = f(U)' - sU', \quad (2.104)$$

donde la derivada se toma respecto de la variable $\xi := \frac{x-st}{\epsilon}$. Equivalentemente se puede escribir

$$B(U)U' = f(U) - sU + c, \quad (2.105)$$

⁴Por límite nos referimos a soluciones débiles de (2.101) que son admisibles si y solo si son límites puntuales en casi todo punto de sucesiones de soluciones u^ϵ que son localmente acotadas.

con c una constante de integración. Pero si queremos que las soluciones de esta ecuación converjan a la onda de choque dada cuando $\epsilon \rightarrow 0$, entonces debemos pedir

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = U_l, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} U(\xi) = U_r. \quad (2.106)$$

Aplicando estas condiciones de frontera obtenemos

$$B(U)U' = f(U) - f(u_l) - s(U - u_l) = f(U) - f(u_r) - s(U - u_r). \quad (2.107)$$

De este resultado se infiere que tanto u_l como u_r deben ser puntos de equilibrio del sistema (2.105). Nótese que el lado derecho de (2.107) se anula sobre el conjunto de estados U que pueden unirse con u_l mediante una onda de choque con velocidad s ; este conjunto contiene, en particular, el estado u_r . En general, decimos que el estado u_l está conectado con el estado u_r , por un *perfil de choque viscoso* (o simplemente *perfil viscoso*), si existe un arco suave que une u_l con u_r , que es un subconjunto invariante respecto del flujo de la ecuación diferencial (2.107) y adicionalmente el flujo está dirigido desde u_l hacia u_r .

DEFINICIÓN 2.4.6. *Decimos que una solución discontinua de la forma (2.92) admite un perfil viscoso U , si U es una solución de la ecuación diferencial (2.105) que satisface las condiciones de frontera (2.106).*

Nótese que, geoméricamente, el perfil U es una órbita heteroclínica que une el estado u_l con u_r .

De esta manera, la existencia del límite (en casi todo punto) de $u^\epsilon(x, t)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$, como una función localmente acotada, queda asegurada si el perfil viscoso U existe y es una función acotada con límites u_l y u_r cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$.

DEFINICIÓN 2.4.7 (Criterio de Viscosidad). *Decimos que la discontinuidad $(u_l, u_r; s)$ satisface el criterio de viscosidad, si existe un perfil viscoso U que satisface la definición 2.4.6 para los valores de u_l , u_r y s .*

Hay que destacar que el límite de u^ϵ es una función de la forma (2.92), donde los estados u_l y u_r satisfacen las condiciones de Rankine-Hugniot. Debido a que el criterio de viscosidad implica el criterio de entropía, usualmente se considera como una condición suficiente de admisibilidad de soluciones débiles ([30, p. 221]).

Esta forma de abordar los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación (es decir, buscar la órbita que une los puntos de equilibrio u_l y u_r) se debe a Weyl ([34]), sin embargo la noción de perfil viscoso fue introducida en dinámica de gases por Rankine ([27]) y por Rayleigh ([28]), mientras que la forma general de la ecuación diferencial del perfil viscoso (2.107) se debe a Gelfand ([14]).

El criterio de viscosidad da lugar a cuestiones importantes sobre la convergencia y la mera existencia del perfil viscoso, pues podríamos preguntarnos ¿cómo depende el límite u de la matriz $B(u)$?, es decir, ¿puede existir más de un perfil viscoso cuyo límite sea u ? En el caso de un choque débil⁵, se puede demostrar la existencia de un perfil viscoso que converge a una onda de choque admisible, como puede verse en [30]. En el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, Gilbarg ([15]) demostró la existencia de un único perfil viscoso para el caso unidimensional, independientemente

⁵Esto significa que los estados u_l y u_r están suficientemente cerca, esto es, la amplitud del choque satisface $|u_l - u_r| < \delta$, para $\delta > 0$, suficientemente pequeño.

de la amplitud de la onda de choque, un resultado que se discutirá con precisión en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3

Existencia y unicidad de un perfil viscoso

Consideremos un fluido unidimensional en ausencia de un campo de fuerzas de cuerpo y una fuente de calor volumétrica. Supongamos que el estado del fluido queda determinado por el campo de temperatura θ , el volumen específico $\tau = \frac{1}{\rho}$ y el campo de velocidad $u \in \mathbb{R}$. Esto significa que los campos de presión, energía interna y entropía son funciones de τ y θ y están relacionados por la primera ley de la termodinámica

$$\theta dS = de + pd\tau.$$

Para un fluido unidimensional el tensor de estrés es

$$\mathbb{T} = 2\mu u_x + \lambda u_x - pu_x$$

y por lo tanto las ecuaciones de Navier-Stokes son

$$(\rho)_t + (\rho u)_x = 0, \quad (3.1)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2)_x = (\lambda + 2\mu)u_{xx} - p_x, \quad (3.2)$$

$$(\rho E)_t + (\rho E u)_x = (\lambda + 2\mu)(u u_x)_x - (p u)_x + \kappa \theta_{xx}. \quad (3.3)$$

Como se hizo para las ecuaciones de Euler, la conservación de masa implica que la forma diferencial $dy = \rho dx - \rho u dt$ es exacta, entonces podemos introducir la variable lagrangiana $y(x, t) = \int^x \rho(\xi, t) d\xi$ y la conservación de masa se expresa como $\tau_t = u_y$. En esta representación cada ley de conservación dada se escribe como

$$(\tau u_i)_t + (f_i - u u_i)_y = 0,$$

donde u_i es la variable de estado y f_i es la componente de la función de flujo. Cada ecuación del sistema (3.1) – (3.3) se puede escribir en forma lagrangiana si tomamos como funciones de flujo

$$f_2 = \rho u^2 - (\lambda + 2\mu)u_x + p,$$

$$f_3 = \rho E u - (\lambda + 2\mu)u u_x + p u - \kappa \theta_x.$$

Así (3.1) – (3.3) es equivalente a

$$\tau_t - u_y = 0, \quad (3.4)$$

$$u_t + p_y = \left[(\lambda + 2\mu) \frac{u_y}{\tau} \right]_y, \quad (3.5)$$

$$E_t + (p u)_y = \left[(\lambda + 2\mu) \frac{u u_y}{\tau} + \kappa \frac{\theta_y}{\tau} \right]_y. \quad (3.6)$$

De aquí en adelante, por simplicidad, haremos la identificación $\lambda + 2\mu \rightarrow \mu$.

Es evidente que ambos sistemas (3.1) – (3.3) y (3.4) – (3.6) pueden escribirse como

$$u_t + f(u)_x = (B(u)u_x)_x \quad (3.7)$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $u, f \in \mathbb{R}^3$, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tienen segundas derivadas continuas.

Si buscamos una solución de (3.7) en forma de onda viajera que se mueve con velocidad s a saber, $u = U(x - st)$, con $\xi = x - st$ se debe cumplir

$$f_\xi(U) - sU_\xi = (B(U)U_\xi)_\xi \quad (3.8)$$

Si el fluido en cuestión adquiere estados constantes U_1, U_0 en $x = \infty$ y $x = -\infty$ respectivamente, debemos suplementar el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.8) con las condiciones

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = U_0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} U(\xi) = U_1. \quad (3.9)$$

Como vimos en el capítulo anterior, una solución con esta naturaleza se conoce como perfil viscoso.

En este capítulo consideraremos un fluido con la descripción anterior y demostraremos la existencia y la unicidad de un perfil viscoso para el sistema (3.1) – (3.3) con las condiciones (3.9) siguiendo la prueba de Gilbarg ([15]).

Para las ecuaciones de Euler (en ausencia de viscosidad y conducción de calor) la solución debe ser una onda discontinua con la siguiente forma

$$u(x, t) = \begin{cases} U_0, & \text{si } x < st \\ U_1, & \text{si } x > st \end{cases} \quad (3.10)$$

donde U_0 y U_1 satisfacen las condiciones de Rankine-Hugoniot

$$[f(u)] = s[u]. \quad (3.11)$$

Es de esperarse entonces que una solución viscosa converja a una solución discontinua dada por (3.10) y (3.11). Bajo un conjunto de hipótesis termodinámicas propuestas inicialmente por Weyl ([34]), Gilbarg demostró que para cada solución discontinua de esta forma, existe un único perfil viscoso.

El problema de la convergencia se atenderá en el siguiente capítulo, comenzaremos aplicando (3.8) y (3.9) a nuestro sistema en cuestión.

Una solución de tipo onda viajera para el sistema de Navier-Stokes (3.4) – (3.6) significa suponer que el volumen específico, la velocidad y la temperatura tienen la forma

$$\tau(y, t) = \hat{\tau}(y - st), \quad u(y, t) = \hat{u}(y - st), \quad \theta(y, t) = \hat{\theta}(y - st) \quad (3.12)$$

y por lo tanto la condición (3.8) es

$$-s\hat{\tau}_\xi - \hat{u}_\xi = 0, \quad (3.13)$$

$$-s\hat{u}_\xi + \hat{p}_\xi = \left[\mu \frac{\hat{u}_\xi}{\hat{\tau}} \right]_\xi, \quad (3.14)$$

$$-s\hat{E}_\xi + (\hat{p}\hat{u})_\xi = \left[\mu \frac{\hat{u}\hat{u}_\xi}{\hat{\tau}} + \kappa \frac{\hat{\theta}_\xi}{\hat{\tau}} \right]_\xi. \quad (3.15)$$

Las condiciones de Rankine-Hugoniot son

$$\begin{aligned} s(\tau_1 - \tau_0) &= -(u_1 - u_0), \\ s(u_1 - u_0) &= p_1 - p_0, \\ s(E_1 - E_0) &= p_1 u_1 - p_0 u_0. \end{aligned}$$

Físicamente una onda viajera $U(y - st)$ es una onda que al propagarse no cambia su forma, si en esta hacemos $s = 0$ obtenemos una onda estacionaria, por lo tanto si utilizamos un sistema de referencia que se mueva con la onda, cualquier onda viajera con velocidad s la podemos ver como una onda estacionaria. Por esto hacemos el cambio de variables

$$(y, t) \rightarrow (\xi := y - st, t),$$

entonces, por la regla de la cadena las derivadas de alguna función de estado v cambian por

$$\begin{aligned} v_t &\rightarrow -sv_\xi + v_t, \\ v_x &\rightarrow v_\xi. \end{aligned}$$

Por lo tanto una onda viajera es una solución estacionaria del sistema

$$\tau_t - s\tau_\xi - u_\xi = 0, \quad (3.16)$$

$$u_t - su_\xi + p_\xi = \left[\mu \frac{u_\xi}{\tau} \right]_\xi, \quad (3.17)$$

$$E_t - sE_\xi + (pu)_\xi = \left[\mu \frac{uu_\xi}{\tau} + \kappa \frac{\theta_\xi}{\tau} \right]_\xi. \quad (3.18)$$

Así pues, el sistema a tratar es (3.13) – (3.15).

De acuerdo con (3.8) podemos obtener primeras integrales del sistema en cuestión si integramos de $-\infty$ a ξ y aplicamos las condiciones de frontera (3.9)

$$B(u)u_\xi = f(u) - f(U_0) - s(u - U_0),$$

de forma similar se puede hacer para la condición U_1 . La integración en nuestro sistema da

$$-s(\tau - \tau_{01}) - (u - u_{01}) = 0, \quad (3.19)$$

$$-s(u - u_{01}) + p - p_{01} = \mu \frac{u_\xi}{\tau}, \quad (3.20)$$

$$-s(E - E_{01}) + pu - p_{01}u_{01} = \mu \frac{uu_\xi}{\tau} + \kappa \frac{\theta_\xi}{\tau}. \quad (3.21)$$

aquí el subíndice 01 indica que (3.19) – (3.21) es válido para ambos estados límite. Debido a que la variable lagrangiana está definida como $y = \int^x \rho(\phi, t) d\phi$, el flujo de masa ρu es una constante igual a $-s$, por ello el sistema (3.19) – (3.21) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \rho u &= c_1, \\ \rho u^2 + p - \mu \frac{u_\xi}{\tau} &= c_2, \\ \rho u E + pu - \mu \frac{uu_\xi}{\tau} - \kappa \frac{\theta_\xi}{\tau} &= c_3, \end{aligned}$$

para c_1 , c_2 y c_3 constantes.

La ecuación (3.16) implica que podemos definir una variable espacial Euleriana como $x = \int^\xi \tau(\omega) d\omega$, así $x_\xi = \tau$; por la regla de la cadena y el teorema de la función inversa, siempre que $\tau \neq 0$ obtenemos

$$\rho u = c_1, \quad (3.22)$$

$$\rho u^2 + p - \mu u_x = c_2, \quad (3.23)$$

$$\rho u E + pu - \mu u u_x - \kappa \theta_x = c_3. \quad (3.24)$$

Este último sistema corresponde a las primeras integrales de (3.1) – (3.3) cuando el fluido se encuentra en un estado estacionario, es decir $\rho_t = u_t = E_t = 0$.

Aunque en el siguiente análisis usaremos el sistema (3.22) – (3.24), hay que destacar que el sistema (3.19) – (3.21) tiene una ventaja importante; si sustituimos (3.19) en (3.20) queda

$$\mu \tau_x = -\frac{1}{s} [s^2(\tau - \tau_{01}) + p - p_{01}]; \quad (3.25)$$

aplicando esta última ecuación en (3.21) obtenemos

$$\kappa \theta_x = -s [E - E_{01} + (\tau - \tau_{01})(p_{01} + su)]. \quad (3.26)$$

Esto implica que las ecuaciones (3.25) y (3.26) forman un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para τ y θ , y escrito de esta forma es evidente que sus únicos puntos de equilibrio son los estados U_0 y U_1 (este hecho, será útil durante nuestro desarrollo). Más aún, esto significa que el perfil viscoso representa una órbita heteroclínica que conecta los dos puntos de equilibrio.

Ahora, nos dedicaremos a estudiar las ecuaciones (3.22) – (3.24), pues encierran las propiedades necesarias para demostrar la existencia del perfil viscoso.

De (3.22) se tiene que $u = c_1 \tau$, por lo tanto (3.23) se escribe como

$$c_1^2 \tau + p - \mu (c_1 \tau)_x = c_2,$$

ésta la manipulamos como sigue

$$\begin{aligned} \mu (c_1 \tau)_x &= c_1^2 \tau + p - c_2 \\ &= c_1^2 \left(\tau - \frac{c_2}{c_1^2} \right) + p \\ &= c_1^2 \left(\tau - \frac{c_2}{c_1^2} + \frac{p}{c_1^2} \right). \end{aligned}$$

Si renombramos las constantes $c_1 = b$, $\frac{c_2}{c_1^2} = a$ obtenemos

$$\mu \tau_x = \frac{1}{b} [b^2(\tau - a) + p]. \quad (3.27)$$

Por otro lado (3.22) en (3.24) da

$$\begin{aligned} \kappa \theta_x &= -\frac{c_1^3}{2} \tau^2 + \frac{c_1^3 c_2}{c_1^2} \tau - c_3 + c_1 e \\ &= -\frac{c_1^3}{2} \left[\tau^2 - \frac{2c_2}{c_1^2} \tau + \left(\frac{c_2}{c_1^2} \right)^2 - \left(\frac{c_2}{c_1^2} \right)^2 \right] - c_3 + c_1 e \\ &= -\frac{c_1^3}{2} \left(\tau - \frac{c_2}{c_1^2} \right)^2 + \frac{c_2^2}{2c_1} - \frac{c_3 c_1}{c_1} + c_1 e. \end{aligned}$$

Si $c = \frac{c_3}{c_1} - \frac{c_2^2}{2c_1^2}$, concluimos

$$\kappa\theta_x = b \left[e - \frac{b^2}{2}(\tau - a)^2 - c \right]. \quad (3.28)$$

Finalmente, como el problema es unidimensional es seguro escribir

$$\kappa \frac{d\theta}{dx} = b \left[e - \frac{b^2}{2}(\tau - a)^2 - c \right] := L(\tau, \theta), \quad (3.29)$$

$$\mu \frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{b} [b^2(\tau - a) + p] := M(\tau, \theta). \quad (3.30)$$

De acuerdo con estas ecuaciones, los puntos de equilibrio U_0, U_1 deben satisfacer las condiciones de choque

$$p_0 + b^2\tau_0 = p_1 + b^2\tau_1 = b^2a, \quad (3.31)$$

$$e_0 - \frac{b^2}{2}(\tau_0 - a)^2 = e_1 - \frac{b^2}{2}(\tau_1 - a)^2 = c. \quad (3.32)$$

Hay que destacar que el sistema (3.29) – (3.30) es idéntico a (3.25) – (3.26), sin embargo, el campo vectorial $V(\tau, \theta) = \left(\frac{M(\tau, \theta)}{\mu}, \frac{L(\tau, \theta)}{\kappa} \right)$ determina los puntos de equilibrio en términos de τ y θ , por esto, de aquí en adelante nos referiremos a los estados de equilibrio como los puntos $Z_0 = (\tau_0, \theta_0)$, $Z_1 = (\tau_1, \theta_1)$, por tanto el dominio de definición será el conjunto de puntos $Z = (\tau, \theta)$ y nos dirigiremos a él como el plano \mathcal{Z} .

3.1. Las hipótesis de Weyl

A continuación estudiaremos un conjunto de hipótesis termodinámicas consideradas por Weyl, con éstas, deduciremos una serie de propiedades geométricas para el plano \mathcal{Z} y las funciones $L(\tau, \theta)$, $M(\tau, \theta)$ que serán suficientes para probar la existencia, unicidad y el comportamiento límite de un perfil viscoso.

La clase general de fluidos considerados por Weyl está caracterizada por las siguientes condiciones:

- I. *En un proceso infinitesimal adiabático (i.e. con entropía $S = \text{const.}$) el incremento de presión produce compresión, es decir*

$$\left(\frac{d\tau}{dp} \right)_{S=\text{const}} < 0$$

- II. *La razón de variación de compresión $-\frac{d\tau}{dp}$ disminuye durante el proceso*

$$\left(\frac{d^2\tau}{d^2p} \right)_{S=\text{const}} > 0$$

- III. *En el proceso continuo de compresión adiabática se puede elevar la presión arbitrariamente alto.*
 IV. *El estado termodinámico Z queda especificado únicamente por la presión y el volumen específico, y los puntos (τ, p) que representan los posibles estados Z en un diagrama (τ, p) forman una región convexa.*
 V. *Usamos la relación $de = \theta dS - pd\tau$.*

Por la hipótesis IV, la entropía es una función de p y τ , $S = S(p, \tau)$. El proceso adiabático de compresión está definido por

$$S_p dp + S_\tau d\tau = 0.$$

Debido a que la diferencial en V es exacta, podemos escribir

$$\theta(S_p dp + S_\tau d\tau) - p d\tau = 0,$$

esto es equivalente a la relación

$$(\theta S_p)_\tau = (\theta S_\tau - p)_p,$$

o

$$S_\tau \theta_p - S_p \theta_\tau = 1.$$

Así, S_p y S_τ no pueden anularse simultáneamente y, para satisfacer I se requiere que

$$\frac{d\tau}{dp} = -\frac{S_p}{S_\tau} < 0,$$

es decir, S_p y S_τ deben tener el mismo signo.

Con el fin de suplementar el signo de S_p y S_τ establecemos explícitamente una hipótesis complementaria para I de naturaleza altamente plausible:

Ia. *El calentamiento de una cantidad determinada de fluido a volumen constante, resulta en un aumento de su presión y temperatura.*

Analíticamente esto significa que $S_p > 0$ y $S_\theta > 0$. La primera de estas relaciones implica $S_\tau > 0$, mientras que la segunda asegura

$$S_\theta = \frac{S_p}{\theta_p} > 0,$$

es decir $\theta_p > 0$.

Nótese que la hipótesis IV establece el plano $\mathfrak{J}(\tau, p)$ como el conjunto de posibles estados termodinámicos, a diferencia del plano \mathcal{Z} , que los determina con los pares (τ, θ) . Para aplicar la condiciones de Weyl al plano \mathcal{Z} consideremos el mapeo

$$(\tau, p) \rightarrow (\tau, \theta),$$

definido por $(\tau, \theta) := (\tau, \theta(\tau, p))$. Este mapeo claramente es continuo y además es biyectivo, pues, si (τ_1, p_1) y (τ_2, p_2) tienen la misma imagen (τ, θ) , entonces $\tau_1 = \tau = \tau_2$, y como $\theta_p > 0$ en el plano convexo (τ, θ) , $\theta(\tau, p)$ es una función creciente de p , entonces $p_1 = p_2$. En consecuencia el mapeo es un homeomorfismo y por lo tanto la imagen $\mathcal{Z}(\tau, \theta)$ es simplemente conexa.

Las hipótesis I y II tienen un significado un poco más profundo. Para comprenderlo vamos a usar la ecuaciones de Euler en variable Lagrangiana, es decir, ponemos $\kappa = \lambda = \mu = 0$ en las ecuaciones (3.4) – (3.6). Como vimos en el capítulo anterior, si suponemos que $e = e(S, \tau)$, las ecuaciones de Euler toman la forma (2.16)–(2.18); en estas coordenadas la matriz Jacobiana de la función de flujo es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ p_\tau & 0 & p_S \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con polinomio característico $P(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + \lambda p_\tau) = 0$. Éste nos da como valores propios

$$\lambda_1 = \sqrt{-p_\tau}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\sqrt{-p_\tau}.$$

Entonces, para asegurar que el sistema (2.16) – (2.18) es hiperbólico debemos requerir que $p_\tau < 0$, siendo ésta la primera hipótesis de Weyl. Más aún,

$$e_{\tau\tau} = -p_\tau > 0,$$

por lo tanto ésta suposición es equivalente a la convexidad de la ecuación de estado. Por otro lado, los vectores propios asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, son

$$v_1 = (1, -\lambda_1, 0)^T, \quad v_2 = \left(0, \frac{-p_\tau}{p_S}, 1\right)^T, \quad v_3 = (1, \lambda_1, 0)^T,$$

respectivamente. Debido a que $\lambda_2 = 0$ la segunda familia característica es linealmente degenerada, mientras que para la primera familia tenemos que

$$\nabla \lambda_1(U) \cdot v_1 = \frac{\partial}{\partial \tau} \sqrt{-p_\tau} = \frac{1}{2} \frac{-p_{\tau\tau}}{(-p_\tau)^{3/2}} \neq 0,$$

de forma similar $\nabla \lambda_3(U) \cdot v_3 \neq 0$. Es decir, la segunda hipótesis de Weyl asegura que la primera y tercera familias características son genuinamente no lineales.

Como se discutió en el capítulo anterior, esto significa que todas las ondas en la primera o tercera familia tienen velocidades características que dependen de la amplitud de la onda; mientras que, para la segunda familia, las velocidades características son constantes y todas las ondas se propagan con velocidad fija.

Así pues, las hipótesis de Weyl, más allá de ser suposiciones físicamente plausibles, aseguran que las ecuaciones en cuestión, poseen la estructura matemática discutida en el capítulo anterior.

3.1.1. La relación de Hugoniot. Si permitimos discontinuidades de salto en un fluido unidimensional y especializamos las condiciones de Rankine-Hugoniot al caso de las ecuaciones de Euler (con descripción Euleriana) obtenemos las condiciones de salto:

$$\begin{aligned} -s[\rho] + [\rho u] &= 0, \\ -s[\rho u] + [\rho u^2 + p] &= 0, \\ -s\left[\frac{\rho u^2}{2} + \rho e\right] + \left[\left(\rho \frac{\rho u^2}{2} + \rho e + p\right)u\right] &= 0, \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde s es la velocidad de la discontinuidad. Por conveniencia, como se hizo al principio del capítulo, denotaremos con los subíndices (0) y (1) los estados a la izquierda y a la derecha de la discontinuidad respectivamente. Introducimos también las velocidades relativas

$$v_i = s - u_i, \quad i = 0, 1.$$

De esta manera, en el sistema de referencia donde la discontinuidad está en reposo, las condiciones (3.33) se leen:

$$\rho_0 v_0 = \rho_1 v_1 = m, \tag{3.34}$$

$$\rho_0 v_0^2 + p_0 = \rho_1 v_1^2 + p_1, \tag{3.35}$$

$$m \left(\frac{v_0^2}{2} + e_0 + p_0 \tau_0 \right) = m \left(\frac{v_1^2}{2} + e_1 + p_1 \tau_1 \right). \tag{3.36}$$

De acuerdo con la desigualdad de Clausius-Dunheim, la entropía del sistema sólo puede incrementarse, por lo tanto, las condiciones de salto para la entropía son

$$mS_0 \leq mS_1. \quad (3.37)$$

Como se mencionó en el capítulo anterior, distinguimos dos tipos de discontinuidades: las discontinuidades de contacto ($m = 0$) y las ondas de choque ($m \neq 0$). Consideremos éstas últimas.

Nótese que, si usamos la entalpía, $i = e + p\tau$, en la relación (3.36), obtenemos

$$\frac{v_0^2}{2} + i_0 = \frac{v_1^2}{2} + i_1 \quad (3.38)$$

Luego, si usamos (3.34) y (3.35), obtenemos

$$\begin{aligned} \tau_0(p_0 - p_1) &= v_0(v_1 - v_0), \\ \tau_1(p_0 - p_1) &= v_1(v_1 - v_0) \end{aligned}$$

y por lo tanto, sumando estas ecuaciones, obtenemos

$$(\tau_0 + \tau_1)(p_1 - p_0) = v_0^2 - v_1^2. \quad (3.39)$$

Aplicando esta última relación en (3.38), queda

$$(p_1 - p_0)(\tau_0 + \tau_1)/2 = i_1 - i_0,$$

o, como $i = e + p\tau$,

$$(\tau_0 - \tau_1)(p_1 + p_0)/2 = e_1 - e_0. \quad (3.40)$$

Como (3.40) sólo involucra cantidades termodinámicas, es particularmente útil. Ésta relación fue estudiada inicialmente por Hugoniot y es conocida como *relación de Hugoniot*.

Definimos la *función de Hugoniot*, con centro en (τ_0, p_0) como

$$H(\tau, p) = e(\tau, p) - e(\tau_0, p_0) + \frac{(\tau - \tau_0)(p + p_0)}{2}. \quad (3.41)$$

Si (τ_0, p_0) está fijo, la gráfica de los puntos (τ, p) que satisfacen $H(\tau, p) = 0$, es la *curva de Hugoniot*. Ésta caracteriza todos los pares de valores (τ, p) que son compatibles con (τ_0, p_0) a través de la discontinuidad de choque¹. La función de Hugoniot posee un conjunto de propiedades importantes y es muy útil para determinar transiciones de choque, como puede verse en [8].

La diferencial de H , es

$$dH = de + \frac{1}{2}(p + p_0)d\tau - \frac{1}{2}(\tau_0 - \tau)dp,$$

si usamos V, podemos escribir

$$dH = \theta dS + \frac{1}{2}(p_0 - p)d\tau + \frac{1}{2}(\tau - \tau_0)dp$$

o equivalentemente

$$dr := 2(dH - \theta dS) = (p_0 - p)d\tau + (\tau - \tau_0)dp, \quad (3.42)$$

¹Nótese que esta definición corresponde al conjunto de Hugoniot definido en 2.4.2, simplemente está especializado al caso de la dinámica de gases unidimensional.

de donde se infiere que a lo largo de cualquier rayo² que pasa por Z_0 , $dr = 0$, es decir, dr es una diferencial exacta, y se cumple que

$$dH = \theta dS. \quad (3.43)$$

Ahora, por la hipótesis III, podemos considerar la adiabática, $S = S_0$, que pasa por Z_0 y seguirla para presiones mayores que p_0 . A lo largo de la adiabática, dr es positiva si el incremento dp es positivo,

$$\frac{dr}{dp} := R = (\tau_0 - \tau) + (p - p_0) \frac{d\tau}{dp} > 0 \quad \text{para } p > p_0. \quad (3.44)$$

En efecto, por la hipótesis II

$$\frac{dR}{dp} = (p - p_0) \frac{d^2\tau}{d^2p} > 0 \quad \text{para } p > p_0,$$

y como R se anula para $p = p_0$, debe ser positiva para $p > p_0$, esto es

$$R = \int_{p_0}^p (p - p_0) \frac{d^2\tau}{d^2p} dp > 0. \quad (3.45)$$

Por otro lado, si consideramos la pendiente de la recta que une (τ_0, p_0) con el punto (τ, p) ,

$$s = \frac{p - p_0}{\tau_0 - \tau},$$

podemos escribir

$$dr = (\tau_0 - \tau)^2 ds, \quad (3.46)$$

lo que implica

$$\frac{ds}{dp} = R(\tau_0 - \tau)^2 > 0.$$

De esto concluimos que $s = s(p)$ es una función monótona creciente. Más aún, si $\tau_0 > \tau$, se tiene

$$s = \frac{p - p_0}{\tau_0 - \tau} > \frac{p - p_0}{\tau_0},$$

por lo tanto, si $p \rightarrow \infty$ (hipótesis III), $s \rightarrow \infty$.

Esto significa, que sobre la curva de Hugoniot, $H(Z_0, Z) = 0$, con $p > p_0$ y $\tau_0 > \tau$, el coeficiente direccional, $s = (p - p_0)/(\tau_0 - \tau)$, se incrementa desde un valor m_0 hasta ∞ . En donde m denota la derivada adiabática $-dp/d\tau$ y m_0 es su valor en el punto Z_0 . Con esto en mente, enunciamos el siguiente teorema:

TEOREMA 3.1.1. [34, p. 112]. *El contorno de Hugoniot, $H(Z_0, Z) = 0$ es una curva simple sobre la cual $s = (p - p_0)/(\tau_0 - \tau)$ crece monótonamente desde $m_0 = -\frac{dp}{d\tau}_{S=S_0}$ en Z_0 hacia $+\infty$ cuando Z se mueve por la rama superior, $p > p_0$, $\tau < \tau_0$.*

Nótese además, que $\tau(p)$ es una función monótona decreciente de p .

²Si consideramos la recta que pasa por el punto Z_0 , en el plano \mathfrak{Z} , entonces escribimos $p = p_0 + al$ y $\tau = \tau_0 + bl$, donde el vector $(a, b) \neq (0, 0)$ determina la dirección de la recta; si además retringimos $l \geq 0$ obtenemos una media recta o el rayo que pasa por Z_0 .

Para completar la prueba de este teorema se necesita parametrizar la curva de Hugoniot, sin embargo, este resultado se puede encontrar en [34, p. 112].

En lo que sigue, consideramos un rayo en la región $\tau > 0$, $p > 0$, a saber,

$$p = p_0 + at, \quad \tau = \tau_0 + bt.$$

A lo largo de este rayo tenemos que

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial p}a + \frac{\partial S}{\partial \tau}b = S'$$

y

$$\frac{dS'}{dt} = \frac{\partial S'}{\partial p}a + \frac{\partial S'}{\partial \tau}b = \frac{\partial^2 S}{\partial^2 p}a^2 + 2\frac{\partial^2 S}{\partial p \partial \tau}ab + \frac{\partial^2 S}{\partial^2 \tau}b^2.$$

Para continuar con nuestro estudio del contorno de Hugoniot, haremos uso de los siguientes lemas:

LEMA 3.1.1. *Si $S' = 0$ para cierto valor de t , entonces $dS'/dt < 0$ para el mismo valor.*

PRUEBA. De la hipótesis tenemos que $aS_p + bS_\tau = 0$, de donde podemos sustituir el valor de a en dS'/dt para obtener

$$\frac{dS'}{dt} = S_{pp}b^2 \left(\frac{S_\tau}{S_p} \right)^2 - 2S_{p\tau}b^2 \frac{S_\tau}{S_p} + S_{\tau\tau}b^2,$$

multiplicando esta identidad por S_p^2 y dividiendo entre b^2 obtenemos

$$\left(\frac{S_p}{b} \right)^2 \frac{dS'}{dt} = S_{pp}S_\tau^2 - 2S_{p\tau}S_\tau S_p + S_{\tau\tau}S_p^2.$$

Por otro lado, por las hipótesis I y II, además de la regla de la cadena, podemos asegurar que

$$0 < -\frac{d^2\tau}{d^2p} \frac{dp}{d\tau} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{d\tau}{dp} \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{S_p}{S_\tau} \right).$$

Si calculamos la derivada del cociente, ésta última desigualdad se puede reescribir como

$$-S_p \frac{dS_\tau}{dt} - S_\tau \frac{d(-S_p)}{dt} < 0,$$

de donde se obtiene que

$$S_{pp}S_\tau^2 - 2S_{p\tau}S_\tau S_p + S_{\tau\tau}S_p^2 < 0$$

y por la identidad anterior, se sigue que $dS'/dt < 0$. □

LEMA 3.1.2. *Si $S' \leq 0$ para $t = 0$, entonces $S' < 0$ para $t > 0$.*

PRUEBA. Primero supongamos que $S' < 0$ para $t = 0$. Por contradicción: Si S' cambia de signo para algún valor de t , entonces, debe existir $t = t_1$ tal que $S' = 0$ para este valor. Conforme $S' < 0$, se acerca a $t = t_1$, ésta función comienza a ascender, en sus valores, en una vecindad de $t = t_1$, lo que implica que, en esta vecindad, $dS'/dt \geq 0$. En consecuencia, tenemos que $S' = 0$ y $dS'/dt \geq 0$, para el valor $t = t_1$, que es una contradicción al lema 3.1.1.

Para el caso $S' = 0$ para $t = 0$, tenemos que $dS'/dt < 0$ para $t = 0$; en consecuencia los valores de S' se vuelven negativos para valores $t > 0$, y como se observa en el argumento anterior, S' sólo puede permanecer negativo. Esto prueba la afirmación. □

Ahora procedemos a probar el siguiente teorema:

TEOREMA 3.1.2. ([34, p. 110]). *Para cualesquiera dos estados Z_0, Z_1 , unidos por la relación de Hugoniot $H(Z_0, Z_1) = 0$, se satisfacen las siguientes desigualdades*

$$(p_1 - p_0)(\tau_0 - \tau_1) > 0, \quad (3.47)$$

$$(p_1 - p_0) + m_0(\tau_1 - \tau_0) > 0, \quad (p_1 - p_0) + m_1(\tau_1 - \tau_0) < 0. \quad (3.48)$$

PRUEBA. Consideremos el rayo que pasa por los puntos Z_0 y Z_1 , donde $a = p_1 - p_0$ y $b = \tau_1 - \tau_0$ y los puntos en cuestión satisfacen la relación de Hugoniot, $H(Z_1, Z_0) = 0$. Supongamos que $a \geq 0$ y $b \geq 0$; entonces, las hipótesis I y Ia aseguran que $S' > 0$ y en consecuencia S es monótona creciente sobre el segmento $Z_0 Z_1$. Por otro lado, si integramos la identidad (3.43), a lo largo de este segmento, se obtiene que

$$H(Z_1, Z_0) = \int_{Z_0}^{Z_1} \theta dS = 0,$$

lo que es imposible si $S' > 0$. De esta misma manera, descartamos la posibilidad $a \leq 0, b \leq 0$. Esto prueba la desigualdad (3.47).

Luego, supongamos que $S' \leq 0$ para $t = 0$, entonces por el lema 3.1.2, S' sería negativo para todos los valores de $t > 0$, por lo tanto, S , sería una función monótona decreciente de t , conforme Z se mueve en el segmento desde Z_0 hasta Z_1 . Esto, una vez más sería una contradicción a la identidad (3.43) integrada desde Z_0 hasta Z_1 . En consecuencia, para Z_0 se satisface que

$$a(S_p)_0 + b(S_\tau)_0 > 0,$$

que es la primera de las desigualdades en (3.48). La segunda desigualdad, es consecuencia de intercambiar los papeles de Z_0 y Z_1 y proceder análogamente. \square

Los argumentos anteriores muestran que: mientras Z se mueve a lo largo del rayo, desde Z_0 hasta Z_1 , S' comience con un valor positivo (desigualdad (3.48)); debido a la relación (3.43) y a que Z_0 y Z_1 satisfacen $H(Z_1, Z_0) = 0$, S' , debe cambiar de signo antes de que el punto Z , alcance al punto Z_1 . Luego, S' permanece negativo desde el momento en que se anula por primera vez. Por la relación (3.43), este comportamiento es el mismo para dH/dt , lo que implica que, H , inicialmente crece monótonamente hasta un máximo positivo y después decrece, pasando, durante el descenso por el valor cero en el punto Z_1 . De aquí, podemos concluir el siguiente corolario:

COROLARIO 3.1.1. *Sobre el rayo que pasa desde el punto Z_0 hasta Z_1 , el punto $Z = Z_1$, es el único además de Z_0 , para el que se satisface la relación de Hugoniot, $H(Z_1, Z_0) = 0$.*

Supongamos $\tau_0 > \tau_1$. Si combinamos las desigualdades (3.48) obtenemos

$$m_0 < b^2 = \frac{p_1 - p_0}{\tau_0 - \tau_1} < m_1 \quad (3.49)$$

que también se puede escribir como

$$\rho_0 c_0 < |b| < \rho_1 c_1, \quad (3.50)$$

donde c_i denota la *velocidad del sonido* en el estado $i = 0, 1$ y está dada como

$$\left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{S=cte} = -\tau^2 \left. \frac{d\rho}{d\tau} \right|_{S=cte} = \tau^2 m_i = c_i^2 \quad (3.51)$$

De esta manera, las relaciones (3.50) y (3.51) afirman que: *la velocidad del flujo en el estado (0), relativa al frente de choque, es supersónica, mientras que en el estado (1) es subsónica.*

De acuerdo con la desigualdad (3.47), alguna de las desigualdades $p_1 > p_0$, $\tau_0 > \tau_1$ o $p_0 > p_1$, $\tau_1 > \tau_0$, se satisface para dos estados distintos Z_0 y Z_1 , que satisfacen la relación de Hugoniot. Con el fin de determinar la desigualdad correcta, consideremos una vez más la curva adiabática $S = \text{const}$ sobre la que p se incrementa monótonamente desde p_0 hasta $+\infty$ mientras que $s = (p-p_0)/(\tau_0-\tau)$ se incrementa desde m_0 hasta $+\infty$. Por las identidades (3.42) y (3.44), sobre la curva adiabática, se cumple que

$$dH = -\frac{1}{2}dr = -\frac{1}{2}Rdp$$

y en consecuencia, la desigualdad (3.45) implica que

LEMA 3.1.3. $H(Z_1, Z_0)$ es negativo sobre la curva adiabática $S = \text{const}$.

De hecho, combinando lo anterior con la desigualdad (3.44) obtenemos la siguiente fórmula explícita para $H(Z_A, Z_0)$ sobre cualquier punto Z_A sobre la curva adiabática

$$\begin{aligned} H(Z_A, Z_0) &= -\frac{1}{2} \int_{p_0}^{p_A} Rdp = -\frac{1}{2} R(p-p_A) \Big|_{p_0}^{p_A} - \frac{1}{2} \int_{p_0}^{p_A} (p_A-p) \frac{dR}{dp} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{p_0}^{p_A} (p-p_0)(p_A-p) \frac{d^2\tau}{d^2p} dp < 0 \end{aligned}$$

donde se usó integración por partes y la integral se toma a lo largo de la curva adiabática. Con este resultado podemos demostrar el siguiente teorema

TEOREMA 3.1.3. *Para cualesquiera dos estados Z_0 y Z_1 que satisfacen la relación de Hugoniot se tiene que:*

- a) Si $p_1 > p_0$, $\tau_0 > \tau_1$, entonces $S_1 > S_0$.
- b) Si $p_1 < p_0$, $\tau_0 < \tau_1$, entonces $S_1 < S_0$.

PRUEBA. Comencemos por el inciso a). Consideremos el rayo R desde Z_0 hasta Z_1 ; éste, tiene como pendiente $s = (p_1-p_0)/(\tau_0-\tau_1)$, cuyo valor se encuentra entre m_0 y $+\infty$, y por lo tanto R se intersecta con la curva adiabática en algún punto $Z_A = (p_A, \tau_A)$, donde, de acuerdo con el lema 3.1.3,

$$H = \int_{Z_0}^{Z_A} \theta dS = -\frac{1}{2} \int_{p_0}^{p_A} Rdp < 0.$$

Luego, por el teorema 3.1.2, existe un punto Z' donde se alcanza el máximo valor de H , antes de alcanzar el punto Z_1 para el que se cumple

$$H(Z_1, Z_0) = \int_{Z_0}^{Z_1} \theta dS = 0,$$

y por lo tanto, esto ocurre antes de alcanzar el punto Z_A . En consecuencia, el valor S_1 , en el punto Z_1 de la curva de Hugoniot es más grande que su valor en S_0 en Z_0 . Esto prueba el inciso a), obviamente, el otro caso admisible resulta en la desigualdad invertida, lo que nos lleva a concluir b). \square

De esta manera, la desigualdad (3.37), sólo se satisface si $p_1 > p_0$ y $\tau_0 > \tau_1$ y por lo tanto, éste es el único arreglo posible. Por simplicidad nos referimos a esta configuración como $Z_1 > Z_0$.

Algunas de las afirmaciones anteriores son importantes para el análisis posterior, por lo que nos permitimos destacarlas en el siguiente corolario, consecuencia de los resultados anteriores:

COROLARIO 3.1.2. *Supongamos dos estados distintos Z_0 y Z_1 que satisfacen la relación de Hugoniot tales que $p_1 > p_0$ y $\tau_0 > \tau_1$.*

- i) *El rayo que pasa por Z_0 y por Z_1 con pendiente $b^2 = (p_1 - p_0)/(\tau_0 - \tau_1)$, interseca la adiabática $S = S_0$ en el punto Z_A , donde Z_1 cae entre Z_0 y Z_A .*
- ii) *La pendiente, b^2 , de este rayo, satisface la desigualdad (3.49).*

Para más detalles sobre estos resultados se altamente recomendable [34]. Mientras que, para profundizar en las propiedades de la relación de Hugoniot se recomienda [8].

Concluimos esta sección con la demostración del siguiente teorema, que es crucial para demostrar la existencia y la unicidad del perfil viscoso.

TEOREMA 3.1.4 (Weyl;1944). *Los únicos puntos de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales (3.29) – (3.30) son Z_0 y Z_1 .*

PRUEBA. Supongamos que existe otro punto de equilibrio además de Z_0 y Z_1 , sea tal Z_2 . Entonces, se deben satisfacer las condiciones de choque

$$b^2\tau_0 + p_0 = b^2\tau_1 + p_1 = b^2\tau_2 + p_2 = b^2a$$

y

$$e_0 - \frac{b^2}{2}(\tau_0 - a)^2 = e_1 - \frac{b^2}{2}(\tau_1 - a)^2 = e_2 - \frac{b^2}{2}(\tau_2 - a)^2$$

La primera de éstas condiciones asegura que Z_0 , Z_1 y Z_2 son colineales en una recta con pendiente $-b^2$, donde podemos asumir la configuración $Z_0 < Z_1 < Z_2$. Luego, la segunda condición de choque demanda que $Z = Z_1$ y $Z = Z_2$ cumplan la relación de Hugoniot, que es $H(Z, Z_0) = 0$; ésta es una contradicción al corolario 3.1.1, que asegura que no puede haber más de un punto en el rayo que pasa por Z_0 que satisface la relación de Hugoniot. Por lo tanto Z_0 y Z_1 son los únicos puntos de equilibrio de las ecuaciones del perfil viscoso. \square

3.2. Propiedades geométricas del plano \mathcal{Z}

Como se mencionó anteriormente, las hipótesis de Weyl están desarrolladas para el plano $\mathfrak{Z}(\tau, p)$, sin embargo, al principio de la sección 3.1 se demostró que el mapeo $(\tau, \theta) = (\tau, \theta(\tau, p))$, es un homeomorfismo y en consecuencia los planos $\mathfrak{Z}(\tau, p)$ y $\mathcal{Z}(\tau, \theta)$ son topológicamente equivalentes. Más aún, el cuadrante $\tau > 0$, $\theta > 0$, forma una región simplemente conexa.

De esta manera, las hipótesis de Weyl permiten deducir un conjunto de propiedades geométricas para las funciones $M(\tau, \theta)$ y $L(\tau, \theta)$ (definidas en (3.29) y (3.30)), cuyo dominio es el plano \mathcal{Z} . Éstas las enunciamos a continuación:

- (A) $L_\theta > 0$, $M_\theta > 0$.
- (B) *Existen dos curvas \mathcal{L} y \mathcal{M} , sobre las cuales se cumple $L(\tau, \theta) = 0$ y $M(\tau, \theta) = 0$, respectivamente, y que se intersecan en dos puntos, $Z_0 = (\tau_0, \theta_0)$, $Z_1 = (\tau_1, \theta_1)$, ($\tau_0 > \tau_1$); (τ_0, θ_0) y (τ_1, θ_1) son las únicas soluciones simultáneas de $L(\tau, \theta) = 0$ y $M(\tau, \theta) = 0$.*
- (C) $L_\tau > 0$ sobre \mathcal{L} para $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_0$.

(D) $\frac{L_\tau}{L_\theta} < \frac{M_\tau}{M_\theta}$ en Z_0 ; $\frac{L_\tau}{L_\theta} > \frac{M_\tau}{M_\theta}$ en Z_1 .

Procedemos a demostrar las propiedades (A)-(D):

PRUEBA. Como antes, $Z_0 = (\tau_0, p_0)$ y $Z_1 = (\tau_1, p_1)$ serán pntos que satisfacen la relación de Hugoniot, es decir, $H(Z_0, Z_1) = 0$, tales que $p_1 > p_0$ y $\tau_1 < \tau_0$. Las funciones $L(\tau, \theta)$ y $M(\tau, \theta)$ están definidas en (3.29) y (3.30) através del mapeo $(\tau, p) \rightarrow (\tau, \theta)$, es decir

$$L(\tau, \theta) = L(\tau, p(\tau, \theta)), \quad M(\tau, \theta) = M(\tau, p(\tau, \theta)).$$

De (3.30) y la hipótesis Ia se sigue que

$$M_\theta(\tau, \theta) = \frac{p_\theta(\tau, \theta)}{b} > 0,$$

y

$$L_\theta(\tau, \theta) = be_\theta(\tau, \theta) = b\theta S_\theta(\tau, \theta) > 0,$$

donde $b > 0$. Esto demuestra (A).

Para la propiedad (B), recordemos que (τ_0, p_0) y (τ_1, p_1) son los únicos puntos de equilibrio del sistema (3.29)–(3.30), por el teorema 3.1.4 y por lo tanto $Z_0 = (\tau_0, \theta_0)$ y $Z_1 = (\tau_1, \theta_1)$ son las únicas soluciones simultáneas de $L(\tau, \theta) = 0$, $M(\tau, \theta) = 0$. Luego, en el plano $\mathfrak{Z}(\tau, p)$ la relación $M(\tau, \theta) = 0$ corresponde a

$$\widehat{M}(\tau, p) = \frac{p}{b} + b(\tau - a) = 0, \quad (3.52)$$

donde a , está dada por las condiciones (3.31), esto es

$$a = \frac{p_{01} + b^2\tau_{01}}{b^2} = \frac{p_{01}}{b^2} + \tau_{01},$$

que sustituyendo en (3.52) resulta en

$$\widehat{M}(\tau, p) = b(\tau - \tau_{01}) + \frac{p - p_{01}}{b} = 0.$$

Por lo tanto, los puntos que satisfacen la relación $\widehat{M}(\tau, p) = 0$, forman la recta que pasa por (τ_0, p_0) y (τ_1, p_1) . Debido a esto, y a que el plano $\mathfrak{Z}(\tau, p)$ es convexo, concluimos que, en el plano $\mathfrak{Z}(\tau, \theta)$, el conjunto de puntos

$$M(\tau, \theta) = \widehat{M}(\tau, p(\tau, \theta)) = 0,$$

debe consistir en una sola curva.

Por otro lado, denotemos por \mathfrak{L} el conjunto de puntos (τ, p) que satisface la relación $L(\tau, p) = 0$ y \mathcal{L} el subconjunto de \mathfrak{L} que pasa por Z_1 . Observemos que

$$\frac{1}{b}L_p(\tau, p) = e_p(\tau, p) = \theta S_p(\tau, p) > 0,$$

esto implica que, $\frac{dp}{d\tau} = -\frac{L_\tau}{L_p}$, está bien definida y por lo tanto la curva \mathcal{L} se puede representar por una función $p = l(\tau)$. Entonces, para cada $(\tau, p) \in \mathcal{L}$, la pendiente de \mathcal{L} es

$$\frac{dl(\tau)}{d\tau} = -\frac{e_\tau(\tau, p) - b^2(\tau - a)}{e_p(\tau, p)} = -\frac{\theta S_\tau(\tau, p) - p - b^2(\tau - a)}{\theta S_p(\tau, p)},$$

donde se usó V. En particular, en el punto Z_1 , el corolario 3.1.2 asegura que la pendiente de \mathcal{L} es

$$\left. \frac{dl(\tau)}{d\tau} \right|_{Z_1} = -\left. \frac{dp}{d\tau} \right|_{Z_1} = -m_1 < -b^2 < 0.$$

En consecuencia, al incrementarse τ , \mathcal{L} entra en la región que se encuentra por debajo de la recta $\widehat{M}(\tau, p) = 0$ y por encima de la curva adiabática $S = S_0$ una vez que pasa por Z_1 ; llamaremos a esta región D . Como la curva $S = S_0$ es monótona decreciente, la región D es convexa. Luego, como D queda por debajo de $\widehat{M}(\tau, p) = 0$, se tiene que

$$p + b^2(\tau - a) < 0 \quad \forall (\tau, p) \in D,$$

entonces, para puntos en D se cumple que

$$\frac{dl(\tau)}{d\tau} = \frac{p + b^2(\tau - a) - \theta S_\tau}{\theta S_p} < 0.$$

Así pues, $l = l(\tau)$ es una función monótona decreciente de τ en D y por lo tanto \mathcal{L} no puede terminar en D , necesariamente tiene que intersectar a $\widehat{M}(\tau, p) = 0$ en Z_0 o intersectar la adiabática $S = S_0$. Sin embargo, sobre la curva $S = S_0$, tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{b}\right) \frac{dL}{d\tau} \Big|_{S=S_0} &= \frac{de}{d\tau} \Big|_{S=S_0} - b^2(\tau - a) \\ &= -p - b^2(\tau - a) > 0 \quad \text{para } \tau_A < \tau < \tau_0 \end{aligned}$$

y en consecuencia $L(\tau, p) \neq 0$ sobre $S = S_0$, entre Z_0 y Z_1 . Esto significa que \mathcal{L} no puede pasar por la curva adiabática, $S = S_0$, y por lo tanto debe pasar por Z_0 . De esta manera, hemos probado que \mathcal{L} es una curva que pasa por Z_0 y por Z_1 , concluyendo así, la demostración para la propiedad (B).

Seguimos con la propiedad (C). De (3.29) y la hipótesis V, se tiene que

$$L_\tau(\tau, \theta) = b [e_\tau(\tau, \theta) - b^2(\tau - a)] = b [\theta S_\tau(\tau, \theta) - p - b^2(\tau - a)].$$

Una vez más, V y Ia aseguran³ que $S_\tau(\tau, \theta) = p_\theta(\tau, \theta) > 0$. En consecuencia, tenemos que

$$L_\tau(\tau, \theta) = b [\theta p_\theta(\tau, \theta) - p - b^2(\tau - a)] > 0$$

sobre \mathcal{L} para $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_0$. Por lo tanto se satisface la propiedad (C).

Para (D), la regla de la cadena asegura que

$$\frac{M_\tau}{M_\theta}(\tau, \theta) - \frac{L_\tau}{L_\theta}(\tau, \theta) = \left[\frac{M_\tau}{M_p}(\tau, p) - \frac{L_\tau}{L_p}(\tau, p) \right] \theta_p(\tau, p)$$

y por lo tanto

$$\frac{M_\tau}{M_\theta}(\tau, \theta) - \frac{L_\tau}{L_\theta}(\tau, \theta) = (b^2 - m_i)\theta(Z_i)$$

en los puntos Z_i con $i = 0, 1$. Así pues, el corolario 3.1.2 asegura que

$$(b^2 - m_0)\theta(Z_0) > 0 \quad \text{y} \quad (b^2 - m_1)\theta(Z_1) < 0,$$

de donde se sigue (D). □

³Obsérvese que no es necesaria esta relación pues al principio de la sección 3.1 vimos que las hipótesis I y V implicaban que S_p y S_τ deberían tener el mismo signo, mientras que Ia aseguraba que $S_p > 0$. Sin embargo, el argumento es usado en [15, p. 273]

De la condición A) y el teorema de la función implícita concluimos que \mathcal{L} y \mathcal{M} se pueden representar por funciones continuamente diferenciables, $\theta = l(\tau)$, $\theta = m(\tau)$, respectivamente. Más aún, las derivadas de estas funciones cumplen las ecuaciones diferenciales

$$\theta' = l'(\tau) = -\frac{L_\tau}{L_\theta}, \quad (3.53)$$

$$\theta' = m'(\tau) = -\frac{M_\tau}{M_\theta}, \quad (3.54)$$

sobre las respectivas curvas. Así, A) y C) implican $l'(\tau) < 0$, esto significa que $l(\tau)$ es una función monótona decreciente de τ en el intervalo $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_0$ y por lo tanto $\theta_1 > \theta_0$.

Las relaciones (3.52) y (3.53) aplicadas a D) en el punto Z_0 nos dan

$$-l'(\tau_0) = \frac{L_\tau}{L_\theta} < \frac{M_\tau}{M_\theta} = -m'(\tau_0)$$

esto resulta en

$$l'(\tau_0) > m'(\tau_0) \quad (3.55)$$

Luego, la continuidad de las derivadas asegura que si tomamos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña, podemos encontrar una δ -vecindad alrededor de τ_0 tal que la desigualdad (3.55) es válida para todo $\tau \in [\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]$, es decir para tales τ se cumple la desigualdad diferencial

$$l'(\tau) > m'(\tau) \quad (3.56)$$

Por B) sabemos que $\tau_0 > \tau_1$, por esto, integramos (3.55) de τ a τ_0

$$\int_{\tau}^{\tau_0} l'(\omega) d\omega > \int_{\tau}^{\tau_0} m'(\omega) d\omega$$

entonces

$$l(\tau_0) - l(\tau) > m(\tau_0) - m(\tau)$$

aquí $l(\tau_0) = \theta_0 = m(\tau_0)$; para todo $\tau \in [\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta]$ podemos asegurar la desigualdad

$$m(\tau) > l(\tau) \quad (3.57)$$

Supongamos ahora que (3.56) no se cumple para algún τ fuera de la δ -vecindad, i.e. $m(\tau) < l(\tau)$. Para que esto suceda, debe ocurrir que las curvas \mathcal{L} , \mathcal{M} se intersecten en algún otro punto distinto de Z_0 , sin embargo, B) asegura que el único punto para el que ocurre esto es Z_1 , así pues, (3.56) es válida para todo $\tau_1 < \tau < \tau_0$.

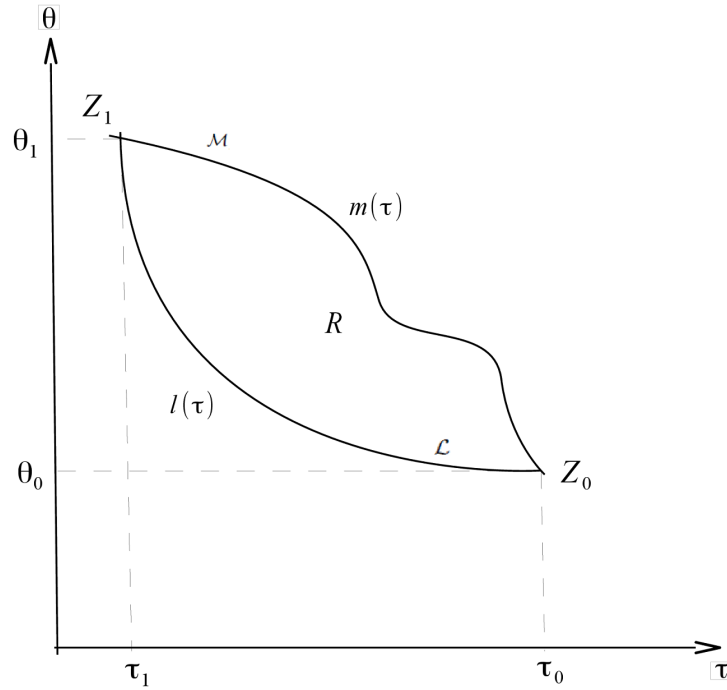
Debido a que en el plano $\mathfrak{Z}(\tau, p)$, la región D antes descrita es convexa, podemos asegurar que la región, acotada por las curvas \mathcal{L} y \mathcal{M} en el plano $\mathfrak{Z}(\tau, \theta)$, entre los puntos Z_1 y Z_0 , es simplemente conexa. Esta región contenida en $\mathfrak{Z}(\tau, \theta)$ la denotaremos R (véase figura 2).

Por (A), $L(\tau, \theta)$ y $M(\tau, \theta)$ son funciones crecientes de θ ; por un lado $L(\tau, \theta)$ se anula sobre \mathcal{L} , si fijamos $\tau \in (\tau_1, \tau_0)$ e integramos $L_\theta > 0$, respecto de θ , desde un punto $\theta' \in (\theta_0, \theta_1)$, tal que $L(\theta', \tau) = 0$ hasta $\theta \in (\theta', \theta_1)$, obtenemos que

$$L(\tau, \theta) - L(\tau, \theta') > 0. \quad (3.58)$$

Por otro lado, si tomamos $\theta' \in (\theta_0, \theta_1)$ tal que $M(\tau, \theta') = 0$, e integramos desde $\theta \in (\theta_0, \theta_1)$ hasta θ' , tomando en cuenta que en este caso $\theta' > \theta$, obtenemos que

$$M(\tau, \theta') - M(\tau, \theta) > 0. \quad (3.59)$$

FIGURA 3.1. Configuración de la región R en el plano \mathcal{Z} .

En conclusión, de las desigualdades (3.58) y (3.59) se sigue que $L(\tau, \theta) > 0$ y $M(\tau, \theta) < 0$ sobre R .

Obsérvese que el argumento anterior supone que, la recta que pasa por los puntos $(\tau, l(\tau))$ y $(\tau, m(\tau))$, para $\tau \in (\tau_1, \tau_0)$, está contenida, en la región R . En principio, no podemos asegurar esto, pues de la discusión anterior, sólo sabemos que la región R es simplemente conexa, sin embargo, podemos demostrar el siguiente lema que justifica el argumento anterior:

LEMA 3.2.1. Sean $l = l(\tau)$ y $m = m(\tau)$ dos funciones reales positivas, tales que, para cada $\tau \in (\tau_1, \tau_0)$, $m(\tau) > l(\tau)$; denotemos por R la región contenida entre las gráficas de estas funciones. Entonces, para cada $\tau^* \in (\tau_1, \tau_0)$, el segmento de recta que pasa por los puntos $P = (\tau^*, l(\tau^*))$ y $Q = (\tau^*, m(\tau^*))$, está contenido en la región R .

PRUEBA. Denotemos $l(\tau^*) = \theta_p$ y $m(\tau^*) = \theta_q$. Debido a que $l(\tau)$ y $m(\tau)$ son funciones, la región R , se puede caracterizar, como el conjunto de puntos (τ, θ) tales que, para cada $\tau \in (\tau_1, \tau_0)$, $l(\tau) < \theta < m(\tau)$.

Consideremos el segmento de recta que pasa por P y Q ; cada punto de este segmento se puede escribir como

$$(\tau^*, \theta_p + t(\theta_q - \theta_p)) \quad \text{para algún } 0 < t < 1.$$

Por hipótesis, $\theta_q - \theta_p > 0$, lo que implica que $\theta_p < \theta_p + t(\theta_q - \theta_p) := z$. Por otro lado, tenemos la desigualdad

$$|z| = z \leq |(1-t)\theta_p| + t|\theta_q| < (1-t)|\theta_q| + t|\theta_q|,$$

de donde se obtiene que $z < \theta_q$, lo que nos permite concluir que, el segmento de recta entre los puntos P y Q está contenido en la región R . Este pequeño resultado justifica las desigualdades (3.58) y (3.59). \square

El teorema 3.1.4 asegura que los únicos puntos de equilibrio del sistema (3.29)–(3.30) son los puntos Z_0 y Z_1 . Se demostrará que el primero de éstos es un nodo inestable, mientras que el segundo es un punto silla del sistema (3.29)–(3.30). Debido a que el sistema

$$\begin{pmatrix} \theta'(x) \\ \tau'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L(\tau, \theta)}{\kappa} \\ \frac{M(\tau, \theta)}{\mu} \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

es no-lineal, para determinar la naturaleza de los puntos de equilibrio necesitamos calcular la matriz Jacobiana del campo vectorial $V(\tau, \theta) = \left(\frac{M(\tau, \theta)}{\mu}, \frac{L(\tau, \theta)}{\kappa} \right)$ y definir los sistemas linealizados en cada punto de equilibrio P .

Entonces, la matriz Jacobiana del campo vectorial V es

$$DV = \begin{pmatrix} \frac{L_\theta}{\mu} - \frac{L\kappa_\theta}{\kappa^2} & \frac{L_\tau}{\mu} - \frac{L\kappa_\tau}{\kappa^2} \\ \frac{M_\theta}{\mu} - \frac{M\mu_\theta}{\mu^2} & \frac{M_\tau}{\mu} - \frac{M\mu_\tau}{\mu^2} \end{pmatrix},$$

de donde se sigue que el sistema linealizado alrededor de un punto de equilibrio P asociado al sistema (3.60), es

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_\theta}{\mu} & \frac{L_\tau}{\mu} \\ \frac{M_\theta}{\mu} & \frac{M_\tau}{\mu} \end{pmatrix}_P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Para asegurar que alrededor de los puntos de equilibrio, el sistema (3.60) tiene la misma estructura cualitativa que el sistema lineal asociado, usaremos el teorema de Grobman-Hartman. Para esto, tenemos que asegurar que el espectro de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} L_\theta/\kappa & L_\tau/\kappa \\ M_\theta/\mu & M_\tau/\mu \end{pmatrix}_P \quad (3.61)$$

es hiperbólico ⁴. El polinomio característico de A está dado por la ecuación

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= |A - \lambda \mathbb{I}| = \begin{vmatrix} L_\theta/\kappa & L_\tau/\kappa \\ M_\theta/\mu & M_\tau/\mu \end{vmatrix}_P \\ &= \frac{L_\theta}{\kappa} \left(\frac{M_\tau}{\mu} - \lambda \right) - \lambda \left(\frac{M_\tau}{\mu} - \lambda \right) - \frac{M_\theta L_\tau}{\mu \kappa} \\ &= \lambda^2 - \lambda \left(\frac{L_\theta}{\kappa} + \frac{M_\tau}{\mu} \right) + \frac{L_\theta M_\tau}{\kappa \mu} - \frac{M_\theta L_\tau}{\kappa \mu} \\ &= \lambda^2 - \lambda \left(\frac{L_\theta}{\kappa} + \frac{M_\tau}{\mu} \right) + \left(\frac{M_\theta L_\theta}{\kappa \mu} \right) \left(\frac{M_\tau}{M_\theta} - \frac{L_\tau}{L_\theta} \right). \end{aligned}$$

⁴Esto significa que si λ es un valor propio de la matriz complejificada $A_{\mathbb{C}}$ entonces $Re(\lambda) \neq 0$.

Entonces, el discriminante de la ecuación $P(\lambda) = 0$ es

$$\begin{aligned}
 b^2 - 4ac &= \left(\frac{M_\tau}{\mu} + \frac{L_\theta}{\lambda} \right)^2 - 4 \frac{M_\theta L_\theta}{\lambda \mu} \left(\frac{M_\tau}{M_\theta} - \frac{L_\tau}{L_\theta} \right) \\
 &= \left(\frac{M_\tau}{\mu} \right)^2 + 2 \frac{M_\tau L_\theta}{\mu \lambda} + \left(\frac{L_\theta}{\lambda} \right)^2 - \frac{4}{\mu \lambda} (L_\theta M_\tau - M_\theta L_\tau) \\
 &= \left(\frac{M_\tau}{\mu} \right)^2 - 2 \frac{M_\tau L_\theta}{\mu \lambda} + \left(\frac{L_\theta}{\lambda} \right)^2 + \frac{4}{\mu \lambda} M_\theta L_\tau \\
 &= \left(\frac{M_\tau}{\mu} - \frac{L_\theta}{\lambda} \right)^2 + \frac{4}{\mu \lambda} M_\theta L_\tau.
 \end{aligned}$$

y como $M_\theta, L_\tau > 0$, por las condiciones (A) y (C), éste siempre es mayor que cero. Esto significa que las raíces del polinomio característico de A son reales.

Luego, tenemos los siguientes casos:

i) En Z_1 , $\frac{M_\tau}{M_\theta} - \frac{L_\tau}{L_\theta} < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac} > b$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 -b + \sqrt{b^2 - 4ac} &> 0, \\
 -b - \sqrt{b^2 - 4ac} &< 0.
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

ii) En Z_0 , $\frac{M_\tau}{M_\theta} - \frac{L_\tau}{L_\theta} > 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac} < b$ y en consecuencia

$$\begin{aligned}
 -b + \sqrt{b^2 - 4ac} &< 0, \\
 -b - \sqrt{b^2 - 4ac} &< 0.
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Las desigualdades (3.62) aseguran que el polinomio característico del sistema lineal alrededor del punto de equilibrio Z_1 tiene dos raíces reales con signos distintos. Mientras que, las desigualdades (3.63), aseguran que el polinomio característico para el sistema alrededor de Z_0 tiene dos raíces reales del mismo signo. En ambos casos, los puntos de equilibrio son hiperbólicos y por lo tanto, el teorema de Grobman-Hartman (véase [26, p. 120]) nos asegura el siguiente resultado:

TEOREMA 3.2.1. *Los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial (3.60) son el nodo inestable Z_0 y el punto silla Z_1 .*

3.3. Existencia

Para probar la existencia del perfil viscoso asociado a la ecuación (3.60), tenemos que encontrar una curva integral $\varphi(x)$ de este sistema de ecuaciones diferenciales, tal que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = Z_0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = Z_1, \tag{3.64}$$

asegurando así, que se satisfacen las condiciones de choque (3.31) y (3.32).

Sin embargo, notemos que el sistema (3.60) es un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias, y por esta razón, si $\varphi(x)$ es una solución de éste, sobre el intervalo (α, β) , entonces para cualquier constante $h \in \mathbb{R}$, la función $\phi(x) = \varphi(x + h)$, es solución en el intervalo $(\alpha - h, \beta - h)$. En efecto, si $\varphi(x)$ satisface el sistema autónomo

$$\varphi'(x) = V(\varphi(x)) \tag{3.65}$$

entonces de $\phi'(x) = \varphi'(x+h)$ y (3.65), se sigue que

$$\phi'(x) = \varphi'(x+h) = V(\varphi(x+h)) = V(\phi(x)),$$

es decir, ϕ es solución (3.65). En nuestro caso, x , toma valores en $(-\infty, \infty)$, por lo que si $\varphi(x)$ es un perfil viscoso, entonces $\varphi(x+h)$ también lo es. Por esta razón, decimos que una curva integral del sistema en cuestión se representa paraméricamente por más de una solución. Por lo tanto, $\varphi(x)$ y $\varphi(x+h)$ son distintas soluciones del sistema (3.65), pero representan la misma curva paramétrica⁵. Así pues, ambas soluciones las consideraremos equivalentes y diremos que un perfil viscoso queda *parametrizado* si se escoge una solución particular.

Como queremos demostrar la existencia de una curva $\varphi(x)$ que une ambos estados, Z_0 y Z_1 , de tal forma que, si x tiende a $+\infty$ entonces $\varphi(x)$ tiende a Z_1 , podemos aprovechar la naturaleza del punto de equilibrio Z_1 ; esto es, debido a que Z_1 es un punto silla, sabemos que existen dos curvas integrales que convergen a Z_1 cuando $x \rightarrow +\infty$ y dos curvas que convergen a Z_1 cuando $x \rightarrow -\infty$, estos pares corresponden a las raíces negativas y a las raíces positivas del polinomio característico, respectivamente. De hecho, en el caso de las curvas que convergen a Z_1 , para x creciente, sabemos que ambas tienen la misma pendiente cerca de Z_1 , pero se aproximan a éste desde distintas direcciones. Podemos calcular la pendiente de estas curvas de la siguiente manera: En una vecindad de Z_1 la dirección de las curvas está dada por los vectores propios de la matriz Jacobiana en Z_1 , esto quiere decir que si $w = (w_1, w_2)^T$, es tal vector propio, entonces, la pendiente de las curvas en cuestión será $m = w_2/w_1$. Luego, por definición de valor propio (λ), y por la relación (3.61), se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{L_\theta}{\kappa} w_1 + \frac{L_\tau}{\kappa} w_2 &= \lambda w_1, \\ \frac{M_\theta}{\mu} w_1 + \frac{M_\tau}{\mu} w_2 &= \lambda w_2, \end{aligned}$$

si dividimos la primera de estas ecuaciones por w_1 y la segunda por w_2 , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{L_\theta}{\kappa} + \frac{L_\tau}{\kappa} m &= \lambda, \\ \frac{M_\theta}{\mu} \frac{1}{m} + \frac{M_\tau}{\mu} &= \lambda, \end{aligned}$$

respectivamente. Despejando la pendiente m de ambas ecuaciones e igualando, obtenemos la identidad

$$m = \frac{-L_\tau}{L_\theta - \lambda\kappa} = \frac{-(M_\tau - \mu\lambda)}{M_\theta}, \quad (3.66)$$

y en particular, para $\lambda < 0$ en Z_1 (curvas integrales convergentes), las propiedades (A) y (C) aseguran que esta pendiente es negativa. De la ecuación diferencial (3.53) y la identidad (3.66) se infiere que la curva \mathcal{L} , con pendiente $l'(\tau)$ satisface la desigualdad

$$l'(\tau) = -\frac{L_\tau}{L_\theta} < \frac{-L_\tau}{L_\theta - \lambda\kappa} < 0, \quad (3.67)$$

⁵Como un ejemplo simple de este fenómeno, podemos considerar el sistema $\phi_1' = \phi_2, \phi_2' = -\phi_1$, que tiene como soluciones $\phi_1 = \sin(x+c), \phi_2(x) = \cos(x+c), 0 \leq c \leq 2\pi, -\infty < x < +\infty$. Sin embargo, cada solución de esta familia representa la misma curva, que es la circunferencia $\phi_1^2 + \phi_2^2 = 1$.

para todo $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_0$ y en particular en una vecindad de Z_1 . Esto significa que: *una de las curvas integrales que converge al punto Z_1 , se acerca a éste desde la región R .*

De esta manera, un buen candidato al perfil viscoso en cuestión, es la curva integral que converge a Z_1 desde la región R ; a esta solución la denotaremos por $\varphi(x)$. A continuación, se establecerá que $\varphi(x)$ es, en efecto, un perfil viscoso para las ecuaciones (3.1) – (3.3). Por lo anterior, sólo resta demostrar que $\varphi(x)$ pasa por el punto Z_0 cuando x tiende a $-\infty$.

Con este fin, notemos que cualquier curva integral del sistema (3.60) que pasa por un punto P de la curva \mathcal{M} , tiene por vector tangente a

$$v(P) = (0, L(P)/\kappa);$$

debido a que $L(\tau, \theta) > 0$ sobre R (véase desigualdad (3.58)) se infiere el siguiente resultado:

RESULTADO 1. *Cualquier curva integral del sistema (3.60) que pasa por algún punto $P \in \mathcal{M}$ tiene tangente vertical en P y está dirigida hacia afuera de la región R para valores de x crecientes.*

Por otro lado, si una integral interseca a la curva \mathcal{L} en algún punto Q , ésta tendrá como tangente al vector horizontal

$$v(Q) = (M(Q)/\mu, 0);$$

por esto y por la desigualdad (3.59) se sigue que:

RESULTADO 2. *Cualquier curva integral del sistema (3.60) que pasa por algún punto $Q \in \mathcal{L}$ tiene tangente horizontal en Q y está dirigida hacia afuera de la región R para valores de x crecientes.*

Esto significa que, para valores decrecientes de x , cualquier curva integral del sistema (3.60) que pasa por \mathcal{M} o \mathcal{L} está dirigida hacia dentro de la región R .

Por las desigualdades (3.58) y (3.59), sabemos que en la región R todas las curvas integrales tienen pendiente negativa, más aún, para valores decrecientes de x estas trayectorias se mueven hacia la dirección en que τ crece y θ decrece; esto nos lleva a concluir que:

RESULTADO 3. *En la región R , las curvas integrales del sistema (3.60) son monótonas decrecientes si los valores de x decrecen.*

Consideremos ahora, la curva integral $\varphi(x)$ para valores decrecientes de x . En vista de los Resultados 1 y 2, $\varphi(x)$ no puede intersectar las curvas \mathcal{L} y \mathcal{M} , por lo tanto no puede salir de la región R ; por el Resultado 3, $\varphi(x)$ es monótona y no puede acumularse en un ciclo límite en R o regresar a Z_1 , en consecuencia, sólo puede terminar en un punto de equilibrio cuando x tiende a $-\infty$, y como los únicos puntos de equilibrio son Z_0 y Z_1 , se infiere que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = Z_0.$$

En conclusión, la curva integral, $\varphi(x)$, que converge a Z_1 cuando $x \rightarrow +\infty$, desde la región R , es también una curva integral inestable que converge al nodo Z_0 cuando $x \rightarrow -\infty$. Así pues, $\varphi(x)$ es un perfil viscoso de las ecuaciones (3.1) – (3.3) (figura 3.2).

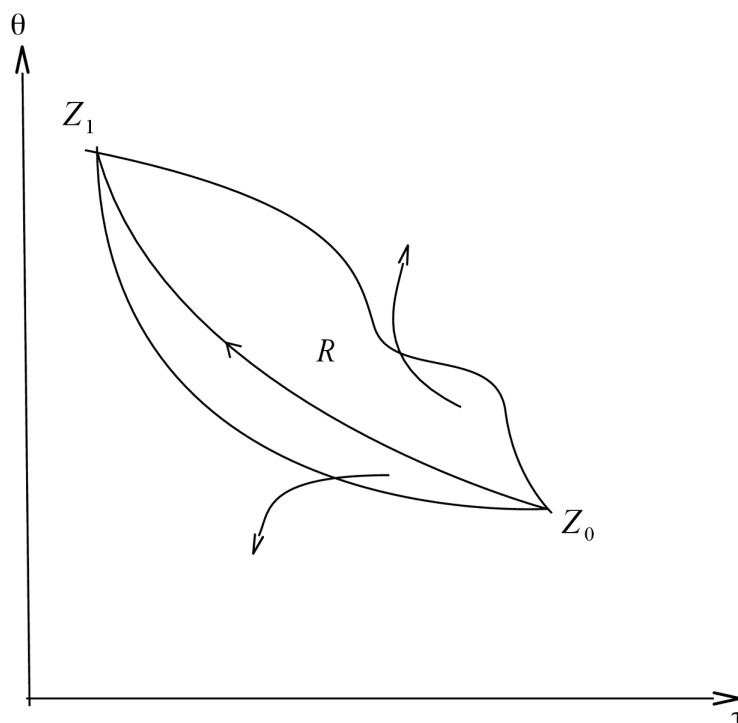


FIGURA 3.2. Esta figura representa la curva del perfil viscoso, $\varphi(x)$, para valores crecientes de x en la región R . Por los resultados 1 y 2, cualquier otra curva que no converja a ambos puntos de equilibrio, Z_0 y Z_1 , necesariamente, debe dejar la región R .

3.4. Unicidad

Para demostrar que la única curva integral del sistema (3.60), que une el punto Z_0 con el punto Z_1 es el perfil viscoso $\varphi(x)$, necesitaremos el siguiente teorema elemental de ecuaciones diferenciales ordinarias:

TEOREMA 3.4.1. *Consideremos el sistema autónomo (3.65), donde el campo vectorial $V(\varphi)$ es continuamente diferenciable sobre un dominio D . Entonces, por cada punto $(\varphi_1^0, \varphi_2^0) \in D$, pasa una y sólo una trayectoria (curva integral) del sistema (3.65).*

PRUEBA. Supongamos, por el contrario, que hay dos trayectorias distintas $(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ y $(\phi_1(x), \phi_2(x))$, que pasan por el punto $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$, esto es,

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_1^0 = \phi_1(x_1) \quad \text{y} \quad \varphi_2(x_0) = \varphi_2^0 = \phi_2(x_1),$$

donde $x_0 \neq x_1$. Entonces, como cualquier traslación en la variable galileana de una solución del sistema (3.65) también es solución de éste, se sigue que las funciones

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= \varphi_1(x - x_1 + x_0), \\ \Phi_2(x) &= \varphi_2(x - x_1 + x_0), \end{aligned}$$

también son una solución del sistema (3.65). Obsérvese que se satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned}\Phi_1(x_1) &= \varphi_1(x_0) = \varphi_1^0 = \phi_1(x_1), \\ \Phi_2(x_1) &= \varphi_2(x_0) = \varphi_2^0 = \phi_2(x_1).\end{aligned}$$

De esta manera, el teorema de existencia y unicidad para problemas con valores iniciales asegura que $\Phi_1(x) \equiv \phi_1(x)$ y $\Phi_2(x) \equiv \phi_2(x)$. En consecuencia, $(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$ y $(\phi_1(x), \phi_2(x))$ representan la misma trayectoria pero con distintas parametrizaciones. \square

Procedemos a probar la unicidad del perfil viscoso $\varphi(x)$ por medio de un argumento de contradicción. Supongamos la existencia de otro perfil viscoso, $\phi(x)$. Necesariamente, $\phi(x)$, debe ser la segunda curva integral del sistema (3.60) que converge al punto de equilibrio Z_1 cuando $x \rightarrow +\infty$, pues éste es un punto silla. Como $\phi(x)$, converge a Z_0 cuando $x \rightarrow -\infty$, ambas curvas, $\varphi(x)$ y $\phi(x)$, encierran una región simplemente conexa del plano, que llamaremos G .

Una de las curvas integrales que convergen a Z_1 cuando $x \rightarrow -\infty$, debe entrar a la región G . Esta curva, \mathcal{C} , no puede terminar en G , pues no hay más puntos de equilibrio además de Z_0 y Z_1 ; no puede acercarse asintóticamente a un ciclo límite contenido en G , pues por el *criterio del punto crítico*⁶, esto implicaría la existencia de un punto de equilibrio contenido en la región que encierra tal ciclo límite. Por lo tanto, \mathcal{C} debe intersectar a alguna de las curvas $\varphi(x)$ o $\phi(x)$, violando así, la unicidad dada por el teorema 3.4.1. Esta contradicción concluye la unicidad del perfil viscoso $\varphi(x)$.

Así pues, combinando estos resultados con los de la sección 3.3, se ha demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA 3.4.2 (Gilbarg; 1951). *Sean $Z_0 = (\tau_0, \theta_0)$ y $Z_1 = (\tau_1, \theta_1)$ estados fijos de un fluido que satisface las condiciones de choque (3.31) y (3.32); entonces para cualquier coeficiente de viscosidad $\mu = \mu(\tau, \theta)$, y de conducción térmica $\kappa = \kappa(\tau, \theta)$ existe un único perfil viscoso que une el estado Z_0 con el estado Z_1 .*

Hay que destacar que este perfil viscoso es una heteroclina del sistema (3.60), entre el punto silla Z_1 y el nodo inestable Z_0 ; ésta la podemos visualizar en la figura 3.3.

3.5. Comportamiento límite cuando $\mu \rightarrow 0$ y $\kappa \rightarrow 0$

Como se mencionó en la sección 2.4.2, el problema de la existencia de un perfil viscoso, para un sistema de ecuaciones hiperbólico-parabólico, viene motivado por la necesidad de encontrar soluciones físicamente admisibles a sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. Sin embargo, hay que destacar que este problema, para las ecuaciones de Navier-Stokes unidimensionales, no es exactamente el mismo que el de un sistema descrito por la ecuación (2.102), pues en este caso, el perfil viscoso (dado en la ecuación (2.103)), se construye usando el hecho de que el tensor de viscosidad $B(u)$ es independiente de ϵ , el parámetro que suponemos, se puede hacer arbitrariamente pequeño; claramente este no es el caso de las ecuaciones de

⁶El criterio del punto crítico afirma que: *una trayectoria cerrada de un sistema de la forma (3.65) tiene en su interior un punto de equilibrio*. La contraposición de este teorema es claramente un criterio de no-existencia de orbitas periódicas (véase [19]).

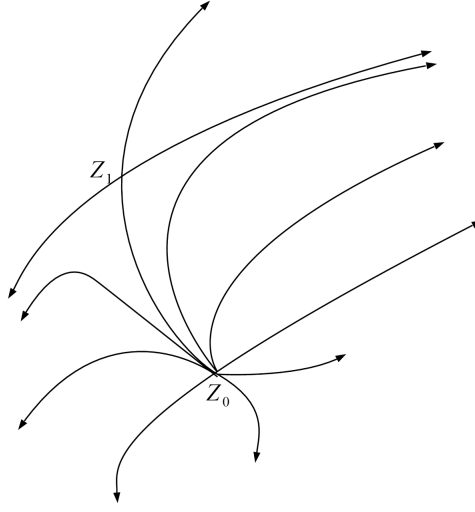


FIGURA 3.3. Debido a que los planos \mathcal{Z} y \mathfrak{Z} son topológicamente equivalentes, esta figura representa (cualitativamente) el plano fase del sistema (3.60) alrededor de los puntos de equilibrio Z_0 y Z_1 , en cualquier descripción, (τ, p) ó (τ, θ) .

Navier-Stokes (véase ecuación (2.100)). Por otro lado, si el modelo de un fluido unidimensional, viscoso y conductor del calor, planteado al principio de este capítulo, es físicamente aceptable, entonces es de esperarse que: cuando la viscosidad (μ) y el coeficiente de conducción térmica (κ) tienden a cero, el perfil viscoso converge puntualmente a una onda de choque admisible. Por lo tanto, en esta sección se demostrará que, en efecto, el perfil viscoso de las ecuaciones (3.1) – (3.3), converge a una solución discontinua y admisible de las ecuaciones de Euler.

TEOREMA 3.5.1 (Gilbarg,1951). Sean $Z_0 = (\tau_0, \theta_0)$ y $Z_1 = (\tau_1, \theta_1)$ los estados inicial y final de una onda de choque, $U, U = Z_0$, si $-\infty < x < \xi$, y $U = Z_1$, si $\xi < x < +\infty$. Entonces, la familia correspondiente de perfiles viscosos, $\varphi(x; \kappa, \mu)$, parametrizada apropiadamente, se acerca a esta onda de choque cuando $\kappa \rightarrow 0$ y $\mu \rightarrow 0$ independientemente; esto es,

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0} \varphi(x; \kappa, \mu) &= Z_0, & -\infty < x < \xi, \\ &= Z_1, & \xi < x < +\infty, \end{aligned}$$

siendo la convergencia uniforme en x , sobre cada intervalo cerrado que no contiene a la discontinuidad $x = \xi$.

PRUEBA. Sea $\epsilon > 0$, consideremos los discos de radio ϵ alrededor de los puntos de equilibrio Z_0 y Z_1 . Denotemos por $R(\epsilon)$, la subregión contenida en R que se encuentra fuera de los discos de radio ϵ . Para cualquier curva integral contenida en R , consideremos el sistema (3.60), y tomemos la diferencia

$$\frac{d(\theta - \tau)}{dx} = \frac{L(\tau, \theta)}{\kappa} + \frac{|M(\tau, \theta)|}{\mu},$$

donde se usó la desigualdad (3.59); por esta misma y por (3.58), podemos asegurar que

$$\frac{d(\theta - \tau)}{dx} > 0.$$

Más aún, podemos asegurar la existencia de una constante $C(\epsilon)$, tal que

$$\frac{L(\tau, \theta)}{\kappa} + \frac{|M(\tau, \theta)|}{\mu} > C(\epsilon), \quad \forall(\tau, \theta) \in R(\epsilon).$$

De esta manera, si definimos $\eta = \max(\kappa, \mu)$, obtenemos que

$$\frac{d(\theta - \tau)}{dx} > \frac{C(\epsilon)}{\eta} \quad (3.68)$$

Luego, consideremos el perfil viscoso $\varphi(x; \kappa, \mu)$, y designemos por (τ_M, θ_M) y (τ_m, θ_m) , los puntos de $\varphi(x; \kappa, \mu)$, que intersectan a los discos alrededor de Z_1 y Z_0 , respectivamente, con $\varphi(x_0; \kappa, \mu) = (\tau_m, \theta_m)$ y $\varphi(x_1; \kappa, \mu) = (\tau_M, \theta_M)$.

Si integramos la desigualdad (3.68) desde x_1 hasta x_0 , obtenemos

$$\theta_M - \theta_m - (\tau_M - \tau_m) \geq \frac{C(\epsilon)}{\eta}(x_1 - x_0),$$

que se puede reescribir como

$$x_1 - x_0 \leq \frac{\eta}{C(\epsilon)} \{ \theta_M - \tau_M - (\theta_m - \tau_m) \} \quad (3.69)$$

Luego, para $x_0 \leq x \leq x_1$, tenemos las siguientes desigualdades, que son consecuencia de la configuración de la región R (figura 3.1),

$$\begin{aligned} \tau_0 > \tau_m &\geq \tau(x; \kappa, \mu) \geq \tau_M > \tau_1; \\ \theta_0 < \theta_m &\leq \theta(x; \kappa, \mu) \leq \theta_M < \theta_1. \end{aligned}$$

Usando estas últimas desigualdades en (3.69), se tiene que

$$x_1 - x_0 \leq \frac{\eta}{C(\epsilon)} \{ \theta_M - \tau_M - (\theta_m - \tau_m) \} < \frac{\eta}{C(\epsilon)} \{ \theta_1 - \theta_0 + \tau_0 - \tau_1 \} \quad (3.70)$$

Así pues, dados $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ y $\varphi(x; \kappa, \lambda)$, tomando

$$\eta = \max(\kappa, \mu) \leq \frac{\delta C(\epsilon)}{\theta_1 - \theta_0 + \tau_0 - \tau_1},$$

donde $|x_1 - x_0| < \delta$, aseguramos que se satisfacen simultáneamente las desigualdades

$$|\tau(x; \kappa, \mu) - \tau_{0,1}| > \epsilon, \quad |\theta(x; \kappa, \mu) - \theta_{0,1}| > \epsilon,$$

cuando los valores de $\varphi(x; \kappa, \mu)$ caen dentro de la región $R(\epsilon)$. Podemos visualizar esta convergencia en la figura 3.4. Obsérvese que la invariancia galileana de los perfiles viscosos, permite parametrizar $\varphi(x; \kappa, \mu)$, de tal manera que los intervalos (x_0, x_1) , contengan el punto $x = \xi$. En consecuencia, la convergencia es uniforme fuera de cualquier intervalo abierto que no contenga a $x = \xi$. \square

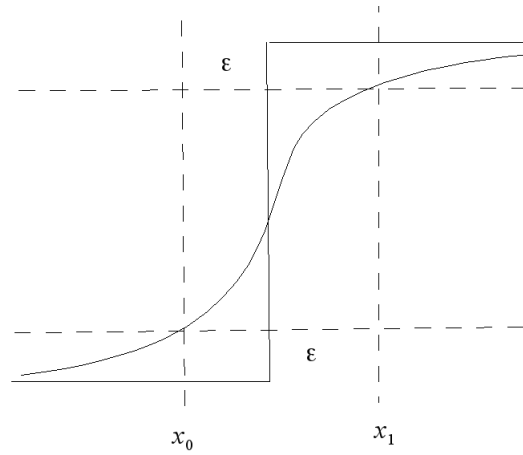


FIGURA 3.4. Cuando los valores de x , se encuentran dentro de la vecindad (x_0, x_1) , podemos asegurar que los puntos de $\varphi(x; \kappa, \mu)$ quedan dentro de la vecindad de radio $\epsilon > 0$.

Conclusiones

Como hemos visto, si fijamos dos estados de densidad, velocidad y temperatura, Z_0 y Z_1 , que satisfacen las condiciones de Rankine-hugoniot, entonces existe una y sólo una solución a las ecuaciones de Navier-Stokes unidimensionales, que toma estos valores en $\pm\infty$, es decir, existe un único perfil viscoso. Además, si los valores de la viscosidad λ y la conductividad térmica κ , son arbitrariamente pequeños, esta solución se comporta como una onda de choque admisible de las ecuaciones de Euler. Por lo tanto, los teoremas 3.4.2 y 3.5.1 nos asegura que: *Dada una onda de choque admisible de las ecuaciones de Euler, existe un único perfil viscoso para las ecuaciones de Navier-Stokes que alcanza estos estados en $\pm\infty$, de tal forma que cuando la viscosidad y la conductividad térmica tienden a cero, recuperamos la onda de choque original.* Esto no sólo significa que podemos construir una solución viscosa para las ecuaciones de Navier-Stokes unidimensionales dada una onda de choque, sino que también nos permite construir ondas de choque admisibles para las ecuaciones de Euler, pues según los teoremas 3.4.2 y 3.5.1, ésta relación entre las ondas de choque admisibles y los perfiles viscosos es biunívoca.

Hay que destacar que, aunque los trabajos de Weyl y Gilbarg son independientes, el estudio de la prueba de existencia y unicidad de éste último es incompleto sin los resultados de Weyl. De hecho podemos asegurar que Weyl en [34] ya tenía una idea del tipo de argumento que se necesitaba para la demostración de existencia y unicidad como se menciona en [34, p. 122]. Más aún la figura 3.3 de este trabajo está basada en el mismo plano fase que aparece en [34, p. 121] (y con el que Weyl predice el comportamiento del perfil viscoso), con la diferencia que Gilbarg reconoce y demuestra que el comportamiento cualitativo aquí presentado funciona para ambos planos $\mathcal{Z}(\tau, \theta)$ y $\mathcal{Z}(\tau, p)$, como puede verse en [15, p. 271]. Por esta razón, concluimos este trabajo proponiendo que el teorema 3.4.2 se reconozca como *teorema de Gilbarg-Weyl*.

Finalmente, cabe destacar también que, a pesar de que en esta tesis (así como en el artículo original de Gilbarg [15]) se construye el perfil viscoso para las ecuaciones de Navier-Stokes en *una* dimensión espacial, la demostración es válida también para el sistema en varias dimensiones espaciales: haciendo una rotación de coordenadas, por invariancia de las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía, se puede (sin pérdida de generalidad) asociar la dirección normal del frente plano (onda de choque) con la variable x_1 , siendo las variables x_2 y x_3 transversales a la dirección de propagación. De esta forma se establecen las ecuaciones del perfil como un sistema dinámico en la variable x_1 .

Bibliografía

- [1] Rutherford Aris. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Dover Publications, 1989.
- [2] H.A. Bethe. The theory of shock waves for an arbitrary equation of state. *National Defense Research Committee of the Office of Scientific Research and Development*, OSRD No. 545:1–84, 1942.
- [3] Jack Carr. *Applications of centre manifold theory*. Springer-Verlag, 1981.
- [4] Jean Yves Chemin. *Perfect Incompressible Fluids*. Clarendon Press Oxford, 1998.
- [5] Charles C. Conley and Joel A. Smoller. The m.h.d. version of a theorem of h. weyl. *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 42:248–250, 1974.
- [6] Charles C. Conley and Joel A. Smoller. On the structure of magnetohydrodynamic shock waves. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 27:367–375, 1974.
- [7] Charles C. Conley and Joel A. Smoller. On the structure of magnetohydrodynamic shock waves. ii. *J. Math. Pures Appl.*, (no. 4):429–443, 1975.
- [8] R. Courant and K. O. Friedrichs. *Supersonic Flow and Shock Waves*. Springer-Verlag, 1948.
- [9] Constantine Dafermos. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. Springer, 2010.
- [10] Ronald Miller Ellad Tadmor and Elliot Ryan. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. Cambridge University Press, 2012.
- [11] A. Cemal Eringen. *Mechanics of Continua*. Robert E. Krieger Publishing Company, 1980.
- [12] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [13] Enrico Fermi. *Thermodynamics*. Dover Publications, 1956.
- [14] I. Gelfand. Some problems in the theory of quasilinear equations. *Usp. Mat. Nauk*, vol. 14:87–158, 1959.
- [15] David Gilbarg. The existence and limit behavior of the one dimensional shock layer. *American Journal of Mathematics*, vol. 73:256–274, 1951.
- [16] O. González and A. Stuart. *A First Course in Continuum Mechanics*. Cambridge University Press, 2010.
- [17] Morton E. Gurtin. *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, 1981.
- [18] Fritz John. *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1982.
- [19] D. W. Jordan and P. Smith. *Nonlinear Ordinary differential equations*. Oxford University Press, 2007.
- [20] N. Kopell and L. N. Howard. Bifurcations and trajectories joining critical points. *Adv. in Math.*, (no. 3):306–358, 1975.
- [21] Pijush K. Kundu and Ira M. Cohen. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 2002.
- [22] A. Majda and R.L. Pego. Stable viscosity matrices for systems of conservation laws. *J. Differential Equations*, pages 229–262, 1985.
- [23] Ralph Menikoff and Bradley J. Plohr. The riemann problem for fluid flow of real materials. *Rev. Modern Phys.*, (no. 1):75–130, 1989.
- [24] M. S. Mock. A topological degree for orbits connecting critical points of autonomous systems. *J. Differential Equations*, pages 176–191, 1980.
- [25] R.L. Pego. Stable viscosities and shock profiles for systems of conservation laws. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (no. 2):749–763, 1984.
- [26] Lawrence Perko. *Differential equations and dynamical systems*. Springer, 2001.
- [27] W. J. M. Rankine. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 160:277–288, 1870.
- [28] Lord Rayleigh. Aerial plane waves of finite amplitude. *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 84A:247–284, 1950.
- [29] Lee A. Segel. *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*. Classics in applied mathematics, SIAM, 2007.

- [30] Denis Serre. *Conservation Laws 1: Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves*. Cambridge University Press, 2003.
- [31] Miroslav Silhavy. *The mechanics and thermodynamics of continuous media*. Springer, 1997.
- [32] Joe Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, 1994.
- [33] C. Truesdell. *A First Course in Rational Continuum Mechanics Volume 1*. Academic Press, 1991.
- [34] H. Weyl. Shock waves in arbitrary fluids. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 2:103–122, 1949.
- [35] Mark W. Zemansky and Richard H. Dittman. *Termodinámica*. McGraw-Hill, 1986.