UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA DIVISIÓN DE POSGRADO

FUNDAMENTOS TEORÍA MODERNA DE PORTAFOLIO Y SU APLICACIÓN EN EL MERCADO DE CAPITALES DE MÉXICO
"Utilizando factores microeconómicos (CAPM) y macroeconómicos (APT), periodo 2008 - 2012"

E N S A Y O

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
ESPECIALISTA EN ECONOMÍA MONETARIA Y FINANCIERA

P R E S E N T A

ERNESTO GUERRERO CASTANEDO

Asesor: Mtro. David Avilés Eusebio

México D.F. Ciudad Universitaria, Septiembre 2014

AGRADECIMIENTOS

A mi esposa e hijos.

Por ser mi principal motivación para alcanzar metas y objetivos compartidos en nuestras vidas, con actitud positiva, valores, tolerancia, constancia y disciplina.

“La actitud es una pequeña cosa que hace una gran diferencia, Winston Churchill”.

A mis profesores de posgrado de la honorable Facultad de Economía, en especial al Dr. Javier Galán Figueroa y M. David Avilés Eusebio.

Gracias por compartir su experiencia, conocimientos y pasión sobre el saber.

“La planificación a largo plazo no es pensar en decisiones futuras, sino en el futuro de las decisiones presentes, Peter Ferdinand Drucker”.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I **Páginas**

RESUMEN

Este documento pretende mostrar y aplicar cronológicamente la teoría moderna de portafolio de Harry Markowitz (Modern Portfolio Theory – MPT) y las principales aportaciones que hicieron algunos autores a su importante trabajo, tal es el caso del modelo de fijación de precios de activos de capital de William Sharpe (Capital Asset Pricing Model, CAPM), la teoría de precios de arbitraje de Stephen Ross (Arbitrage Pricing Theory, APT) y el valor en riesgo o pérdida esperada de J.P. Morgan (Value at Risk, VaR). Durante el desarrollo se ejemplificará el proceso de toma de decisiones con el que teóricamente un inversionista racional se basaría para la construcción de sus portafolios con activos debidamente diversificados buscando maximizar su rentabilidad y minimización de riesgos ante un mercado de competencia perfecta, donde la sensibilidad a cambios entendido como sorpresas dependerá del comportamiento de factores microeconómicos (CAPM) y macroeconómicos (APT). Para lograr este objetivo fue necesario utilizar 12,520 datos históricos diarios de la variación de precios de cinco series accionarias entre el periodo enero del 2008 a octubre del 2012 que actualmente cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores, un activo libre de riesgo (certificado de la tesorería - CETE), un índice referencia sobre la variación de rentabilidades en el mercado de capitales (índice de precios y cotizaciones - IPC) y tres variables macroeconómicas para conocer el impacto del riesgo sistemático no eliminable en el proceso de diversificación de las acciones del portafolios: tipo de cambio (peso/dólar), índice general de actividad económica – IGAE (referencia de la variación del crecimiento del producto interno bruto - PIB) y el índice nacional de precios al consumidor - INPC (referencia de la variación inflacionaria).

Palabras clave: activo, cartera, inversionista, modelo, mercado.

ABSTRACT.

This paper aims to show chronologically and apply modern portfolio theory of Harry Markowitz (Modern Portfolio Theory - MPT) and major contributions made by some authors to their important work, as in the case of model pricing of capital assets William Sharpe (Capital Asset Pricing Model, CAPM), the arbitrage pricing theory of Ross Stephen (arbitrage pricing Theory, APT) and the value at risk or expected loss of JP Morgan Value at Risk (VaR). During the development process of decision making which theoretically rational investor would rely to build their portfolios adequately diversified assets seeking to maximize returns and minimize risks to a perfectly competitive market will be exemplified, where sensitivity to changes treated as surprises depend on the behavior of microeconomic factors (CAPM) and macroeconomic (APT). To achieve this goal it was necessary to use 12,520 historical diaries data from to changes in prices of five stock series between the period January 2008 to October 2012 currently listed on the Mexican Stock Exchange a risk-free asset (cash certificate - CETE) a benchmark index on the variation of returns in the capital market (price index and prices - IPC) and three for the macroeconomic impact of systematic risk not eliminable variables in the process of diversification of portfolios actions: type rate (peso / dollar), general economic activity index - IGAE (reference of the variation in growth of gross domestic product - GDP) and the National consumer Price index - CPI (inflation reference variation).

Keywords: active, portfolio, investor, model, market.

INTRODUCCIÓN

Un inversionista regularmente tratará de buscar respuestas a las preguntas sobre el "¿cómo?, ¿cuándo?, ¿cuánto?, ¿dónde? y ¿para qué?" invertir su presupuesto que le permita generar riqueza con la máxima rentabilidad posible, mínimo riesgo y una adecuada liquidez, lo que seguramente le obligará a recurrir a diferentes tipos y fuentes de consulta de información para tomar la mejor decisión posible en un determinado momento y entorno definido.

En 1952, Harry Markowitz desarrolló la Teoría Moderna de selección de cartera o Portafolio (Modern Portfolio Theory - MPT), donde analiza y considera que el inversionista tiene una conducta racional a la hora de elegir sus instrumentos o portafolios buscando la máxima rentabilidad posible sin tener que asumir un nivel de riesgo más que lo necesario, es decir, se encontrará dispuesto a reducir sus ganancias y exposición al riesgo (actitud pasiva), o bien aumentarlas a cambio de una mayor tolerancia o aversión (actitud activa). Asimismo a través de una selección de cartera(s) óptima(s) y eficiente(s) se puede administrar las probabilidades del rendimiento esperado (corto o largo plazo) con dos componentes: riesgo específico o diversificable referido a factores intrínsecos de cada instrumento financiero y riesgo sistemático (no diversificable) referido a factores principalmente macroeconómicos como la inflación, tipo de cambio, producto interno, empleo, entre otros.

Markowitz propone la creación de una "Frontera Eficiente de Inversión", entendida como aquella línea necesariamente cóncava que contendrá las posibles combinaciones de instrumentos o carteras con un punto intermedio que brindarán la mejor rentabilidad esperada con el menor riesgo posible (relación media - varianza).

En 1958 Tobin plantea una hipótesis al modelo de Markowitz, que consiste en adicionar una tasa libre de riesgo a la que podemos prestar o pedir prestado cualquier cantidad de dinero y que ante el supuesto de un mercado perfecto tenemos las siguientes alternativas de inversión:

a) Colocar todo en el instrumento libre de riesgo.
b) Colocar todo en instrumento(s) arriesgado(s).
c) Destinar una parte en el instrumento libre de riesgo (lo que significa cederlo en préstamo al tipo de interés sin riesgo) y otra en instrumento(s) arriesgado(s).
d) Invertir una cantidad superior a nuestro presupuesto en los instrumentos arriesgados endeudándonos al tipo de interés sin riesgo para financiar la diferencia, y otra parte al activo libre de riesgo donde su rentabilidad (media) será constante y su riesgo (desviación típica y varianza global más pequeña) nulo respecto a los demás activos.

En resumen, Tobin plantea una nueva frontera eficiente representada por una línea recta tangente a la curva cóncava de Markowitz, donde el inversor podrá situarse en cualquier punto de dicha recta con sus carteras mixtas. En este sentido, propone el "Teorema de la separación", mencionando que cualquier inversor podrá maximizar su utilidad esperada con independencia de su grado de aversión al riesgo, repartiendo su presupuesto únicamente en el activo libre de riesgo y su cartera arriesgada "T", donde la combinación óptima de los activos arriesgados puede ser determinada sin conocimiento alguno de las preferencias de rentabilidad y riesgo, es decir sin necesidad de conocer la forma de sus curvas de indiferencia, lo que simplifica el proceso de selección de la cartera óptima.

En 1964 William Sharpe, aprovechando las aportaciones de James Tobin sobre a la teoría moderna de selección de cartera o portafolio de Harry Markowitz, propone el Modelo de Fijación de Precios de Activos de Capital (Capital Asset Pricing Model – CAPM), conocido también como teoría de mercado de capitales. En este, plantea la existencia de un mercado de bienes de consumo, mercado de trabajo (factores productivos) y mercado monetario (activos financieros con vencimiento a corto plazo de bajo o nulo riesgo) donde es posible calcular los precios de equilibrio de los activos financieros arriesgados de cualquier cartera bajo el supuesto que todos los inversores son diversificadores eficientes y donde el mercado cumple determinadas hipótesis fundamentadas en dos supuestos:

a) Los inversores tienen expectativas homogéneas, todos pueden llegar a las mismas estimaciones (media, varianza, covarianza) y al ser coincidente sus puntos de vista sobre el curso de la evolución futura de los precios de los títulos (activos), parten de las mismas funciones de distribución de rendimientos.

b) Los mercados de capitales están en equilibrio al principio del período único de planificación, es decir, la oferta de los títulos (activos) iguala a la demanda de los mismos.

Aunque estos supuestos son excesivamente simplificadores de la realidad, Sharpe (1976) considera que si las conclusiones son razonablemente consistentes con los fenómenos observados, la teoría puede ser explicada: *"el realismo de los activos importa poco y más aún si estas son útiles"*. CAPM supone que si los inversores son diversificadores eficientes y tienen a su disposición un activo libre de riesgo, la frontera eficiente se volverá lineal lo que permitirá al inversor seleccionar únicamente dos activos (como lo plantea Tobin en el teorema de la separación):

a) Si los inversores tuvieran expectativas diferentes sobre el futuro (partiesen de previsiones distintas de los parámetros media, varianza y covarianza), cada inversor tendría una cartera tangente distinta pero con una tasa única e igual correspondiente al activo libre de riesgo (interés que iguala la oferta con la demanda).

b) Si las expectativas son homogéneas, como supone el CAPM, la frontera eficiente y la cartera tangente serían iguales para todos los inversores, de modo que todos ellos formarían carteras compuestas con solo dos activos: la cartera tangente (con un peso positivo o nulo) y el activo libre de riesgo (con un peso positivo, negativo o nulo), según el grado de aversión reflejado en la forma que adopten sus curvas de indiferencia más o menos convexas y verticales.

Para el CAPM el mercado de capitales se encuentra en equilibrio, es decir, la única forma de que todos los inversores puedan ver satisfecha la demanda de títulos arriesgados es que ésta coincida con la oferta global, lo cual es posible si la cartera tangente es la "cartera de mercado". Esta cartera (recta) tangente que representa la frontera eficiente de todos los inversores y que es consecuencia de la introducción de los dos supuestos de las expectativas homogéneas y de equilibrio de mercado, Sharpe (1964) la denominó línea de mercado de capitales (Capital Market Line – CML), donde su ordenada al origen y pendiente dependen únicamente de dos activos financieros, uno sin riesgo y otro con riesgo. Sin embargo, dado que esta CML sólo proporciona la relación de equilibrio entre rentabilidad y riesgo únicamente de carteras eficientes, Sharpe propone la línea del mercado de títulos SML (Security Market Line, siendo la ecuación fundamental de su modelo), que indica la rentabilidad que por término medio el mercado va a ofrecer a cualquier inversión financiera, tanto si el inversor ha diversificado bien el riesgo, como si ha renunciado por completo a cualquier tipo de diversificación y colocado todo su dinero en un solo título. Para construir la pendiente SML será necesario calcular un coeficiente de correlación entre la rentabilidad de cualquier cartera eficiente y la rentabilidad de la cartera de mercado, a través de una regresión lineal, arrojando un riesgo sistemático o no diversificable llamado Beta.

En su momento, los resultados derivados del CAPM constituyeron una auténtica revolución en la dirección financiera de empresas, quedando consolidados los principios básicos de la teoría moderna de portafolios de Harry Markowitz. Sin embargo a través del tiempo se llevaron a cabo múltiples aplicaciones y contrastes empíricos para determinar el grado de validez de su resultados, en particular sobre la relación rentabilidad esperada y riesgo sistemático de los títulos o carteras, pero lamentablemente no fueron del todo satisfactorios debido a que sus hipótesis de origen eran altamente restrictivas de la realidad, lo que bajo ciertas condiciones o factores el modelo podía ser rechazado o aceptado, por ejemplo: la rentabilidad de los últimos cinco años podía ser buen estimador durante los próximos cinco pero no para la rentabilidad del mercado sobre el año inmediato siguiente, pues las Betas podían ser diferentes (lo que sugería que ésta fuese calculada durante varios períodos y validar si se mantenía estable); otras eran la liquidez, el tamaño de la empresa, el indicador de mercado contra su valor contable, el precio contra beneficio, nivel de endeudamiento, el efecto fecha apertura y cierre, enero o fin de semana, entre otros factores (variables) de tipo macroeconómico, el cual estaban posiblemente condicionados o relacionados al dinamismo de toma de decisiones local o global y que desafortunadamente limitaban la capacidad de previsión o estimación de rentabilidades futuras. Como consecuencia de lo anterior comenzaron a surgir nuevos planteamientos, como el modelo de mercado del mismo Sharpe (matizado por Traynor) y el modelo multifactorial de Stephen Ross.

Sharpe plantea la posibilidad de simplificar la resolución del modelo de Markowitz al precisar un menor número de estimaciones, afirma que la rentabilidad de cualquier título con riesgo existente en una determinada economía a lo largo de un período de tiempo es una variable aleatoria que depende linealmente de tres componentes alfa, beta y épsilon:

a) Alfa. Refleja la parte de la variable aleatoria debida aquellas causas que afectan a la rentabilidad del título y que no pueden ser explicadas por la evolución general de la economía a lo largo del periodo analizado, pero quizás sí por ciertas características intrínsecas no fortuitas y por tanto predecibles de la empresa emisora, a este componente (cuyo valor mayor o menor a cero) se supone constante a lo largo del tiempo.

b) Beta. Refleja la parte de la variable aleatoria debida a aquellas causas que afectan la rentabilidad del título y que pueden ser explicadas por la evolución general de la economía a lo largo del período analizado. Considera que dicha evolución viene perfectamente plasmada en el comportamiento de un índice concreto de rentabilidad de cartera de mercado y donde su influencia se designa mediante el producto de la "beta" del título por la variable aleatoria. Cuanto mayor es su valor, mayor será su influencia y viceversa.

c) Épsilon (variable de perturbación aleatoria del título). El tercer componente recoge una serie indeterminada de efectos particulares sobre la variable aleatoria provocados por causas intrínsecas impredecibles favorables y desfavorables que en su caso afectan a la empresa emisora del título en algún momento a lo largo del periodo considerado, independientemente de la marcha general de la economía, esta es una variable aleatoria cuyo valor esperado global a efectos de estimación del modelo se supone nulo por compensación de efectos de sorpresas aleatorias positivas o negativas.

Aunque "Beta" fue considerado en su momento como el único componente que explicaba la influencia del riesgo sistemático hacia una "rentabilidad de cartera de mercado" a modo de índice único sobre la evolución general de la economía y que a priori era perfectamente admisible, para efectos prácticos o empíricos esto podía conllevar a cierto tipo de pérdida de información, lo que originó que posteriormente se desarrollaran otros modelos de tipo multifactorial que redujeran pérdidas de información, es decir, modelos que utilizaran varios índices representativos de los posibles factores causantes del riesgo sistemático.

En 1976 Stephen Ross desarrolló el modelo multifactorial llamado "Teoría de Valoración por Arbitraje" (Arbitrage Pricing Theory - APT), supone que la rentabilidad de una acción dependerá de varios factores macroeconómicos y otros específicamente internos de la empresa, lógica similar al modelo CAPM con la diferencia de que este permitirá conocer la medida del riesgo sistemático (no diversificable) proveniente de múltiples factores a partir de la premisa que los inversionistas toman ventaja de las oportunidades de arbitraje. Establece que el rendimiento esperado de un activo financiero se puede modelar como una función lineal de varios factores macroeconómicos, donde la sensibilidad a cambios en cada factor es representada por un coeficiente beta. Es decir, la expresión "sorpresas" radicará en que permitirá relacionar la rentabilidad de un activo con las sorpresas ocasionadas por varios factores de riesgo sistemático no enumerados o concretados por teoría alguna y que hacen referencia a variables generalmente macro magnitudes influyentes en la evolución de la economía. Por tanto, la rentabilidad de un título estará más correlacionada con cambios en los valores esperados de las variables económicas, que con los cambios actuales de las mismas, pues la cotización de un título refleja principalmente la previsión del valor actual de los proyectos de inversión del emisor que depende de las estimaciones futuras sobre la evolución de las macro magnitudes fundamentales y no de los valores históricos.

CAPÍTULO I

TEORÍA MODERNA DE PORTAFOLIO (MPT), HARRY MARKOWITZ

1.1 Marco de referencia objeto de estudio.

El marco de referencia de nuestro objeto de estudio consistió en analizar un total de 12,520 datos históricos distribuidos en la siguiente forma: 6,260 sobre la variación de precios diarios de cinco series accionarias que cotizan actualmente en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y que en los últimos cinco años (enero 2008 a octubre 2012) han permanecido en el mercado de capitales por su importante volumen operacional; 1252 sobre la variación de rendimientos del instrumento CETE o Certificados de la Tesorería (variable libre de riesgo); 1252 correspondientes al Índice de Precios y Cotizaciones como variable de la variación de mercado (IPC); 1252 de la variación tipo de cambio Peso/Dólar; 1252 de la variación del índice global de actividad económica como referencia del crecimiento del Producto Interno Bruto (IGAE) y 1252 del Índice Nacional de Precios al Consumidor como referencia de la variación de la inflación (INPC). Cabe mencionar, que con esta selección de datos en ningún momento se pretende generar algún tipo de tendencia o afinidad específica de inversión, pues la responsabilidad y decisión final dependerá absolutamente del lector, quien determinará o valorará la calidad de ellos y de su correspondiente fuente de información, así como de su interpretación y cálculos correspondientes mencionados en el presente trabajo.

Tabla 1. Tamaño de muestra objeto de estudio.

<table>
<tr><th>Emisora</th><th>Acción ó Factor</th><th>Sector</th><th>Tipo de riesgo</th><th>Datos históricos diarios</th><th colspan="3">Periodo analizado</th></tr>
<tr><td>axtel Comunícate mejor.</td><td>AXTELCPO.MX</td><td>Telecomunicaciones</td><td>Diversificable</td><td>1252</td><td rowspan="7">CAPM</td><td rowspan="10">APT</td><td rowspan="10">ene-08
a
oct-12</td></tr>
<tr><td>CEMEX</td><td>CEMEXCPO.MX</td><td>Construcción</td><td>Diversificable</td><td>1252</td></tr>
<tr><td>citi</td><td>C.MX</td><td>Servicios Financieros</td><td>Diversificable</td><td>1252</td></tr>
<tr><td>FEMSA</td><td>FEMSAUBD.MX</td><td>Alimentos y Bebidas</td><td>Diversificable</td><td>1252</td></tr>
<tr><td>GRUPO FINANCIERO BANORTE</td><td>GFNORTEO.MX</td><td>Servicios Financieros</td><td>Diversificable</td><td>1252</td></tr>
<tr><td>Certificados de la Tesorería</td><td>TASA CETE A 28 DÍAS</td><td>Gobierno</td><td>Libre de riesgo</td><td>1252</td></tr>
<tr><td>Índice de Precios y Cotizaciones</td><td>IPC</td><td>Índice bursátil Bolsa Mexicana de Valores</td><td>Sistemático de mercado (microeconómico)</td><td>1252</td></tr>
<tr><td>Tipo de cambio</td><td>TC</td><td>Peso/Dólar</td><td>Sistemático (macroeconómico)</td><td>1252</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>Indicador Global de Actividad Económica</td><td>IGAE</td><td>Como referencia del Producto Interno Bruto (PIB)</td><td>Sistemático (macroeconómico)</td><td>1252</td></tr>
<tr><td>Índice Nacional de Precios al Consumidor</td><td>INPC</td><td>Como referencia de la Inflación</td><td>Sistemático (macroeconómico)</td><td>1252</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>Total:</td><td>12520</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/) y Banco de México

1.2 Rentabilidad y riesgo específico: media y varianza, principios de Markowitz.

La "Teoría Moderna de Selección de Cartera o Portafolio" (Modern Portfolio Theory - MPT), inicia con Harry Markowitz en 1952 con la publicación de su obra "*Portfolio Selection*". Sin embargo, es hasta 1959 con cuando realmente se populariza con una segunda publicación denominada "*Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*". En ésta plantea cuáles son las mejores combinaciones posibles dado un conjunto de activos financieros a la hora de invertir, proponiendo un modelo matemático que maximiza la utilidad esperada de un inversor racional averso al riesgo, facilitando el problema sobre el cómo repartir su presupuesto entre los diferentes activos financieros que se negocian en el mercado e identificando la mejor opción de cartera a través de un comportamiento racional basado en dos momentos estadísticos para el rendimiento y riesgo (media y varianza). Es decir, a través de una selección de cartera(s) óptima(s) y eficiente(s) se puede administrar las probabilidades del rendimiento esperado (corto o largo plazo) con dos componentes: riesgo específico o diversificable referido a factores intrínsecos de cada instrumento financiero como la naturaleza del negocio del emisor, nivel de endeudamiento, su liquidez en el mercado, entre otros; y el riesgo sistemático (no diversificable) referido a factores principalmente macroeconómicos como la inflación, tipo de cambio, producto interno, empleo, entre otros y que regularmente sus consecuencias son negativas y de alto impacto tipo cascada en varios sectores o cadenas productivas a nivel local o global. El inversor tiene la posibilidad de controlar y disminuir el riesgo específico mediante una combinación adecuada de su cartera en diferente(s) plazo(s) y mercado(s) contribuyendo a disminuir fluctuaciones, pero nunca eliminar el riesgo sistemático que en grado y forma diferente afecta a cada instrumento.

Para determinar la composición de la "cartera óptima de inversión", que maximiza la utilidad esperada en cada inversor dependiendo de sus expectativas personales y su nivel de riesgo asumido, Markowitz parte de las siguientes hipótesis:

1) Comportamiento racional y horizonte.

- El inversor tiene un comportamiento racional debido a que preferirá obtener riqueza de mayor a menor, su función de utilidad se basará en la variación de la rentabilidad en dos parámetros o modelo de dos dimensiones, esperanza matemática (media o promedio) y varianza (desviación típica estándar al cuadrado entre la media), con lo podrá recoger la preferencia de sus carteras de mayor rentabilidad y menor riesgo interpretado en la siguiente ecuación:

$$E[U(R_p)] = f[E(R_p); \sigma^2 p]$$

Donde,

- $E[U(R_p)]$: es una función de utilidad con base a la media de la rentabilidad "R" y varianza "σ^2" de la cartera "p".

- El inversor es averso al riesgo, por lo que sus funciones o curvas de indiferencia han de ser crecientes y convexas.

- El horizonte temporal de todos los inversores incluye un único período.

La desviación típica estándar y varianza son medidas estadísticas que permiten identificar que tan cercano o disperso se encuentran los precios o rendimientos de cada serie accionaria respecto a su media en un período determinado, dicho de otra forma el rango de probabilidades de la variación de sus precios o rendimientos interpretados como el riesgo o volatilidad. Para obtenerla es necesario calcular lo siguiente:

a) Rentabilidad:

$$r_i = \left(\frac{P_{t+1}}{P_{t-1}} \right) - 1$$

Donde,

r_i : Rendimiento de la acción del dato "i", tiempo (día) "$t + 1$".

P_{t+1}: Precio de la acción del dato "i", tiempo (día) "t+1".

P_{t-1}: Precio de la acción del dato "i", tiempo (día) "t-1".

b) Esperanza matemática (media o promedio):

$$\overline{r_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n_i}$$

Donde,

$\overline{r_i}$: Media o promedio de las rentabilidades de cada serie accionaria.

r_i : Rentabilidad de la acción en el dato "i" (en nuestro caso es diario).

n_i : Tamaño de muestra (en nuestro caso 1251 datos por cada serie).

c) Desviación típica estándar:

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (r_i - \overline{r_i})^2}{n_i}}$$

Donde,

σ_r : Desviación típica estándar de la serie accionaria.

r_i : Rentabilidad de la acción en el dato "i" (en nuestro caso es diario).

$\overline{r_i}$: Promedio de la serie accionaria.

n_i : Tamaño de la muestra (en nuestro caso1251 datos por cada serie).

d) Varianza:

$$\sigma_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (r_i - \overline{r_i})^2}{n_i}$$

σ_r^2: Varianza (su valor mínimo es cero).
r_i: Rentabilidad de la acción en el dato "i" (en nuestro caso es diario).
$\overline{r}_i$: Promedio de la serie accionaria.
n_i : Tamaño de la muestra (en nuestro caso 1251 datos por cada serie).

2) Características de los activos y mercados financieros.

- En el mercado existen "N" activos financieros arriesgados.

- Las características relevantes de los activos financieros individuales y de sus combinaciones son su rentabilidad esperada (media) y su riesgo (varianza o desviación típica estándar del rendimiento).

- El rendimiento de los activos o carteras para un período establecido, es una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad para el período de referencia, es conocida por el inversor. Por tanto se pueden estimar los rendimientos esperados y la matriz de varianzas-covarianzas de todos los títulos (acciones) candidatos a formar parte de una cartera de valores, por lo que consecuentemente se puede conocer el rendimiento esperado, desviación típica y varianza de las posibles combinaciones de dichos títulos (acciones).

- Los mercados de capitales son perfectos, por lo que supone que toda la información es igualmente conseguible o alcanzable por todos los agentes participantes en el mercado careciendo de coste alguno (ningún inversor puede influir en la formación de los precios).

3) Cumplimiento de cartera eficiente.

- Para su nivel de rendimiento esperado, no existe otra cartera con riesgo inferior.

- Para el riesgo que soporta, no existe otra cartera que ofrezca rendimiento esperado mayor. Se exige que la cartera sea legítima para calificarla como eficiente, es decir, que las proporciones del presupuesto invertido en los distintos títulos que la poseen sean positivas (que no se produzcan ventas en descubierto en los títulos).

A continuación se describe el procedimiento y resultados obtenidos en la herramienta office de Microsoft Excel:

Rentabilidad.

J4 f_x =(B4/B3)-1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2	Fecha	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX	IPC	CETES28		AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX
3	01/01/2008	27.21	28.29	3222.70	41.70	45.08	29,536.83	0.0002067			
4	02/01/2008	27.10	28.18	3164.70	39.97	44.50	28,699.12	0.0002073		-0.004042631	-0.0038883
5	03/01/2008	27.32	28.31	3150.00	40.89	43.40	28,860.78	0.0002065		0.008118081	0.004613201
6	04/01/2008	27.02	27.42	3089.80	39.10	42.35	28,317.92	0.0002064		-0.010980966	-0.031437655
7	07/01/2008	26.87	27.07	3090.00	40.49	42.64	28,152.56	0.0002063		-0.005551443	-0.012764406
8	08/01/2008	26.63	27.22	2970.00	41.25	43.05	28,267.78	0.0002065		-0.008931894	0.00554119
9	09/01/2008	27.00	27.11	3013.00	40.65	42.18	28,401.61	0.0002062		0.013894104	-0.004041146
10	10/01/2008	27.43	27.76	3060.00	41.80	44.16	29,069.56	0.0002062		0.015925926	0.023976392

Media, desviación típica estándar y varianza.

C1263 f_x =C1260*252^0.5

C1262 f_x =+C1259*252

C1264 f_x =C1261*252

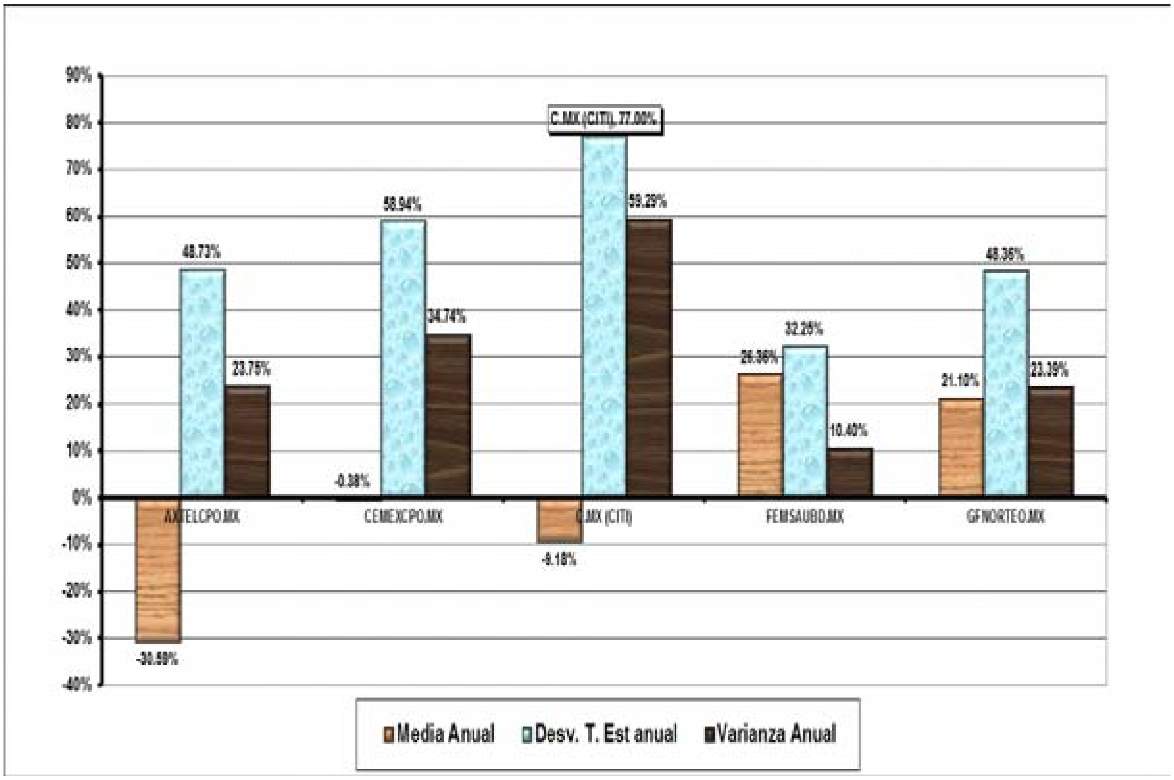
	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX
Media diaria	-0.1213969%	-0.0015209%
Desv. T. Est diaria	3.0698206%	3.7127584%
Varianza diaria	0.0942380%	0.1378457%
Media Anual	-30.5920295%	-0.3832549%
Desv. T. Est anual	48.7318915%	58.9382122%
Varianza Anual	23.7479725%	34.7371285%

Tabla 2. Resultados rentabilidad y riesgo (relación media – varianza). Enero 2008 a Octubre 2012.

	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
Media diaria	-0.1213969%	-0.0015209%	-0.0364166%	0.1046165%	0.0837242%
Desv. T. Est diaria	3.0698206%	3.7127584%	4.8506700%	2.0315543%	3.0463445%
Varianza diaria	0.0942380%	0.1378457%	0.2352900%	0.0412721%	0.0928021%
Media Anual	-30.5920295%	-0.3832549%	-9.1769815%	26.3633594%	21.0985064%
Desv. T. Est anual	48.7318915%	58.9382122%	77.0019986%	32.2499250%	48.3592194%
Varianza Anual	23.7479725%	34.7371285%	59.2930778%	10.4005766%	23.3861410%

Para el cálculo anual se multiplicó la media diaria por 252 días, la desviación típica estándar por $\sqrt{252}$ y la varianza por 252.

Gráfica 1. Porcentaje de rentabilidad y riesgo anual, Enero 2008 – Octubre 2012.



Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Las acciones "C.MX" (CITI), AXTELCPO.MX presentan mayor variación de rentabilidad o riesgo (volatilidad) con ganancias altas pero con posibles pérdidas, caso contrario de lo que sucede con la acción FEMSAUBD.MX o GFNORTE.MX quienes demuestran un comportamiento de variación de rentabilidad más estable con probabilidad de ganancias.

1.3 Relación o dependencia entre las acciones (activos).

El coeficiente de correlación es una medida estadística que permite identificar el nivel de relación o dependencia entre dos o más acciones, es decir, el grado de variación de rentabilidad del instrumento "j" en relación a la rentabilidad del instrumento "i". El riesgo de un portafolio se determina principalmente por el coeficiente de correlación entre sus instrumentos de inversión (activos), así como de la variedad y cantidad que la componen. Cuanto mayor es su diversificación se logrará disminuir el riesgo, sin embargo siempre existirá un punto de saturación a partir del cual la adición de más instrumentos de inversión (acciones) difícilmente podrá reducirlo de manera significativa o sustancial.

El coeficiente de correlación se denota por: ρ_{ij}, con $-1 < \rho_{ij} < 1$.

a) Cuando $\rho_{ij} = 1$ quiere decir que los precios o rendimientos de dichos instrumentos varían en forma directamente proporcional a través del tiempo, es decir, si uno aumenta el otro también lo hará y viceversa.

b) Cuando ρ_{ij} = -1 quiere decir que los rendimientos varían en forma inversamente proporcional, si uno aumenta, el otro disminuye o viceversa.

c) Cuando ρ_{ij} = 0, indica una ausencia de correlación, no importa como varía el rendimiento del instrumento "i", esto no afectará el rendimiento del instrumento "j", pues varían en forma independiente.

La teoría indica que lo deseable es elegir instrumentos de inversión cuyo coeficiente de correlación sea $\rho_{ij} < 0$, pues de esta forma se estarían compensando las disminuciones en los rendimientos del instrumento "i" con los aumentos en el rendimiento del instrumento "j".

Si elegimos instrumentos financieros con $\rho_{ij} > 0$, correríamos el riesgo de adquirir pérdidas grandes y más aún si varían en la misma proporción, es decir, si disminuye el rendimiento del instrumento "i" también disminuirá el rendimiento de "j". Si sucediera lo contrario obtendríamos ganancias importantes, aunque debemos tener en cuenta el riesgo al que podemos incurrir al seleccionar instrumentos con este tipo de correlaciones. La fórmula para calcular el coeficiente de correlación es:

$$\rho_{JI} = \frac{COV_{JI}}{\sigma_J \sigma_I}$$

Donde,

ρ_{JI}: Coeficiente de correlación de la serie del activo "J" y la serie del activo "I".

σ_J: Desviación típica estándar de la serie del activo "J".

σ_I: Desviación típica estándar de la serie del activo "I".

COV_{JI}: Covarianza de la serie del activo "J" y la serie del activo "I". Indicará el grado y tipo de relación existente de dos instrumentos de inversión, es decir, la dispersión conjunta del valor esperado del producto de las desviaciones típicas estándar respecto a su media, siendo IJ = JI:

$$COV_{JI} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(J_i - \overline{J})(I_i - \overline{I}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} J_i I_i - \overline{J}\,\overline{I}$$

Donde,

COV_{JI}: Covariancia de la relación de la serie del activo "J" y la serie del activo "I".

J_i: Rentabilidad del activo "J" en el dato "i".

I_i: Rentabilidad del activo "I" en el dato "i".

$\overline{J}$: Promedio de la serie del activo "J".

$\overline{I}$: Promedio de la serie del activo "I".

n : Tamaño de la muestra (en nuestro caso 1251 datos por cada serie accionaria).

Cuando la covarianza tiende a cero, quiere decir que los rendimientos no guardan relación alguna. Los instrumentos deseables de nuestra cartera, serán aquellos que varíen en forma inversa (covarianza negativa), pues de esta manera se podrán compensar las pérdidas y ganancias.

A continuación se muestra el procedimiento de cálculo y resultados obtenidos:

Coeficiente de correlación.

A5 fx 1

	Fecha	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
1	02/01/2008	-0.0040426	-0.0038883	-0.0179973	-0.0414868	-0.0128660
2	03/01/2008	0.0081181	0.0046132	-0.0046450	0.0230173	-0.0247191
3	04/01/2008	-0.0109810	-0.0314377	-0.0191111	-0.0437760	-0.0241935
4	07/01/2008	-0.0055514	-0.0127644	0.0000647	0.0355499	0.0068477
5	08/01/2008	-0.0089319	0.0055412	-0.0388350	0.0187701	0.0096154

U5 fx =COEF.DE.CORREL($C$5:$C$1255,C$5:C$1255)

Cuadro de nombres

	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	1	0.3811541	0.2810915	0.3303972	0.3965834
CEMEXCPO.MX	0.3811541	1	0.4516984	0.4017131	0.4975124
C.MX (CITI)	0.2810915	0.4516984	1	0.2732707	0.3584214
FEMSAUBD.MX	0.3303972	0.4017131	0.2732707	1	0.4327779
GFNORTEO.MX	0.3965834	0.4975124	0.3584214	0.4327779	1

V5 fx =COEF.DE.CORREL($C$5:$C$1255,D$5:D$1255)

	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	1	0.3811541	0.2810915	0.3303972	0.3965834
CEMEXCPO.MX	0.3811541	1	0.4516984	0.4017131	0.4975124
C.MX (CITI)	0.2810915	0.4516984	1	0.2732707	0.3584214
FEMSAUBD.MX	0.3303972	0.4017131	0.2732707	1	0.4327779
GFNORTEO.MX	0.3965834	0.4975124	0.3584214	0.4327779	1

W5 fx =COEF.DE.CORREL($C$5:$C$1255,E$5:E$1255)

	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	1	0.3811541	0.2810915	0.3303972	0.3965834
CEMEXCPO.MX	0.3811541	1	0.4516984	0.4017131	0.4975124
C.MX (CITI)	0.2810915	0.4516984	1	0.2732707	0.3584214
FEMSAUBD.MX	0.3303972	0.4017131	0.2732707	1	0.4327779
GFNORTEO.MX	0.3965834	0.4975124	0.3584214	0.4327779	1

Covarianza.

C19 fx =$C3*C$3*C11

Deviación T. Est.	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	48.73%	58.94%	77.00%	32.25%	48.36%
CEMEXCPO.MX	58.94%				
C.MX (CITI)	77.00%				
FEMSAUBD.MX	32.25%				
GFNORTEO.MX	48.36%				

Correlación					
	AXTELCPO.MX	*CEMEXCPO.MX*	*C.MX (CITI)*	*FEMSAUBD.MX*	*GFNORTEO.MX*
AXTELCPO.MX	100.00%	38.12%	28.11%	33.04%	39.66%
CEMEXCPO.MX	38.12%	100.00%	45.17%	40.17%	49.75%
C.MX (CITI)	28.11%	45.17%	100.00%	27.33%	35.84%
FEMSAUBD.MX	33.04%	40.17%	27.33%	100.00%	43.28%
GFNORTEO.MX	39.66%	49.75%	35.84%	43.28%	100.00%

Covarianzas	Matriz covarianza = (Matriz Deviación T. Est.) * (Matriz de Correlación)				
	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	23.75%	10.95%	10.55%	5.19%	9.35%
CEMEXCPO.MX	10.95%	34.74%	20.50%	7.64%	14.18%
C.MX (CITI)	10.55%	20.50%	59.29%	6.79%	13.35%
FEMSAUBD.MX	5.19%	7.64%	6.79%	10.40%	6.75%
GFNORTEO.MX	9.35%	14.18%	13.35%	6.75%	23.39%

C19 fx =$C3*C$3*C11

Deviación T. Est.	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)
AXTELCPO.MX	48.73%	58.94%	77.00%
CEMEXCPO.MX	58.94%		
C.MX (CITI)	77.00%		
FEMSAUBD.MX	32.25%		
GFNORTEO.MX	48.36%		

Correlación			
	AXTELCPO.MX	*CEMEXCPO.MX*	*C.MX (CITI)*
AXTELCPO.MX	100.00%	38.12%	28.11%
CEMEXCPO.MX	38.12%	100.00%	45.17%
C.MX (CITI)	28.11%	45.17%	100.00%
FEMSAUBD.MX	33.04%	40.17%	27.33%
GFNORTEO.MX	39.66%	49.75%	35.84%

Covarianzas	Matriz covarianza = (Matriz Deviación T. E		
	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)
AXTELCPO.MX	23.75%	10.95%	10.55%
CEMEXCPO.MX	10.95%	34.74%	20.50%
C.MX (CITI)	10.55%	20.50%	59.29%
FEMSAUBD.MX	5.19%	7.64%	6.79%
GFNORTEO.MX	9.35%	14.18%	13.35%

C20 fx =$C4*C$3*C12

Deviación T. Est.	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	48.73%	58.94%	77.00%	32.25%	48.36%
CEMEXCPO.MX	58.94%				
C.MX (CITI)	77.00%				
FEMSAUBD.MX	32.25%				
GFNORTEO.MX	48.36%				

Correlación					
	AXTELCPO.MX	*CEMEXCPO.MX*	*C.MX (CITI)*	*FEMSAUBD.MX*	*GFNORTEO.MX*
AXTELCPO.MX	100.00%	38.12%	28.11%	33.04%	39.66%
CEMEXCPO.MX	38.12%	100.00%	45.17%	40.17%	49.75%
C.MX (CITI)	28.11%	45.17%	100.00%	27.33%	35.84%
FEMSAUBD.MX	33.04%	40.17%	27.33%	100.00%	43.28%
GFNORTEO.MX	39.66%	49.75%	35.84%	43.28%	100.00%

Covarianzas	Matriz covarianza = (Matriz Deviación T. Est.) * (Matriz de Correlación)				
	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	23.75%	10.95%	10.55%	5.19%	9.35%
CEMEXCPO.MX	10.95%	34.74%	20.50%	7.64%	14.18%
C.MX (CITI)	10.55%	20.50%	59.29%	6.79%	13.35%
FEMSAUBD.MX	5.19%	7.64%	6.79%	10.40%	6.75%
GFNORTEO.MX	9.35%	14.18%	13.35%	6.75%	23.39%

D20 fx =$C4*D$3*D12

Deviación T. Est.	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)
AXTELCPO.MX	48.73%	58.94%	77.00%
CEMEXCPO.MX	58.94%		
C.MX (CITI)	77.00%		
FEMSAUBD.MX	32.25%		
GFNORTEO.MX	48.36%		

Correlación			
	AXTELCPO.MX	*CEMEXCPO.MX*	*C.MX (CITI)*
AXTELCPO.MX	100.00%	38.12%	28.11%
CEMEXCPO.MX	38.12%	100.00%	45.17%
C.MX (CITI)	28.11%	45.17%	100.00%
FEMSAUBD.MX	33.04%	40.17%	27.33%
GFNORTEO.MX	39.66%	49.75%	35.84%

Covarianzas	Matriz covarianza = (Matriz Deviación T. E		
	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)
AXTELCPO.MX	23.75%	10.95%	10.55%
CEMEXCPO.MX	10.95%	34.74%	20.50%
C.MX (CITI)	10.55%	20.50%	59.29%
FEMSAUBD.MX	5.19%	7.64%	6.79%
GFNORTEO.MX	9.35%	14.18%	13.35%

Tabla 3. Resultado correlación y covarianza, Enero 2008 a Octubre 2012.

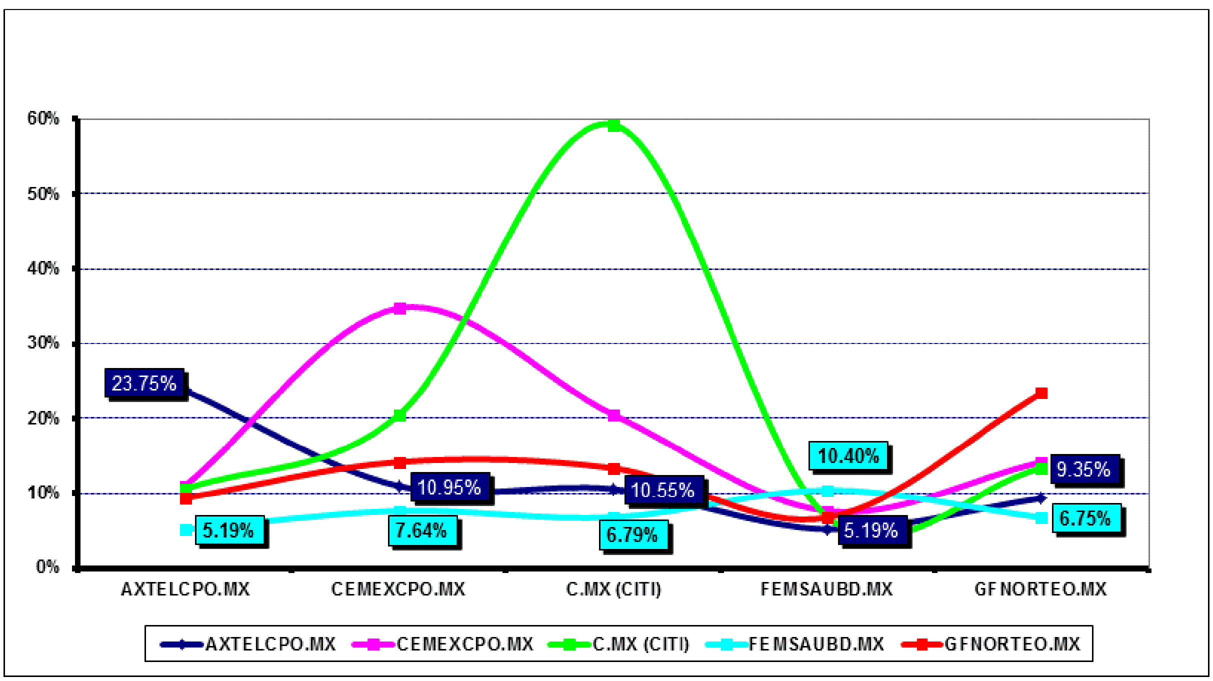
Deviación T. Est.	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	48.7318915%	58.9382122%	77.0019986%	32.2499250%	48.3592194%
CEMEXCPO.MX	58.9382122%				
C.MX (CITI)	77.0019986%				
FEMSAUBD.MX	32.2499250%				
GFNORTEO.MX	48.3592194%				

Correlación					
	AXTELCPO.MX	*CEMEXCPO.MX*	*C.MX (CITI)*	*FEMSAUBD.MX*	*GFNORTEO.MX*
AXTELCPO.MX	100.00%	38.12%	28.11%	**33.04%**	39.66%
CEMEXCPO.MX	38.12%	100.00%	45.17%	40.17%	49.75%
C.MX (CITI)	28.11%	45.17%	100.00%	27.33%	35.84%
FEMSAUBD.MX	**33.04%**	40.17%	27.33%	100.00%	43.28%
GFNORTEO.MX	39.66%	49.75%	35.84%	43.28%	100.00%

Covarianzas	Matriz covarianza = (Matriz Deviación T. Est.) * (Matriz de Correlación)				
	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	23.75%	10.95%	10.55%	**5.19%**	9.35%
CEMEXCPO.MX	10.95%	34.74%	20.50%	7.64%	14.18%
C.MX (CITI)	10.55%	20.50%	59.29%	6.79%	13.35%
FEMSAUBD.MX	**5.19%**	7.64%	6.79%	10.40%	6.75%
GFNORTEO.MX	9.35%	14.18%	13.35%	6.75%	23.39%

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Gráfica 2. Comportamiento correlación y covarianza, Enero 2008 a Octubre 2014.



Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

La acción AXTELCPO.MX tiene una correlación inversa respecto a FEMSAUBD.MX, cuando uno aumenta el otro disminuye y viceversa, lo que se infiere que el coeficiente de correlación es negativo (-1). La selección de estos dos activos puede ser favorable en el portafolio, pues su selección permitiría compensar posibles pérdidas o disminuciones de rentabilidad. Caso contrario de lo que sucede con CEMEXCPO.MX Y GFNORTEO.MX, donde ambos suben o bajan al mismo tiempo y dirección, representando una correlación positiva (+1) y en el que probablemente conllevarían ganancias importantes pero también pérdidas considerables.

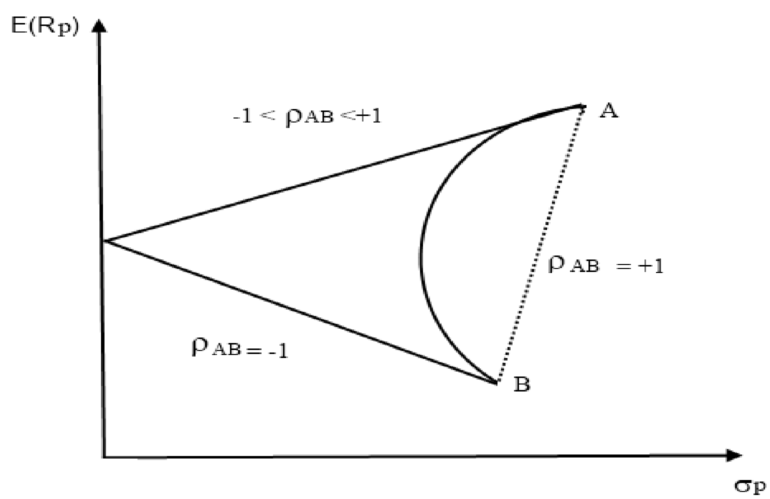
1.4 Pasos para la construcción de carteras eficientes.

La teoría moderna de portafolio o selección de carteras, plantea los siguientes pasos que permiten conocer el conjunto de oportunidades de diversificación así como de una cartera óptima de inversión:

1.- Delimitación del conjunto de posibilidades de inversión.

Debido a que Markowitz supone que los individuos racionales escogen sus carteras exclusivamente por la relación de la rentabilidad esperada (media) y riesgo (desviación típica estándar o varianza) de sus inversiones para obtener el conjunto de oportunidades de inversión, será necesario que conozcan y caractericen todas las combinaciones posibles dado un número "N" de instrumentos (activos). Por lo que deberán estimar la rentabilidad esperada, riesgo (desviación típica o varianza) y tipo de relación o dependencia (correlación y covarianza) de cada instrumento con el resto de los demás, con el objetivo de representar gráficamente las posibles combinaciones de carteras que cubrirán por completo alguna región del espacio "media-desviación típica" en forma cóncava en tres situaciones diferentes y en función del valor que puede tomar el coeficiente de correlación "ρ_{AB}" de los rendimientos de ambos activos, como se aprecia en la siguiente gráfica.

Gráfica 3. Conjunto de oportunidades de inversión según coeficiente de correlación.

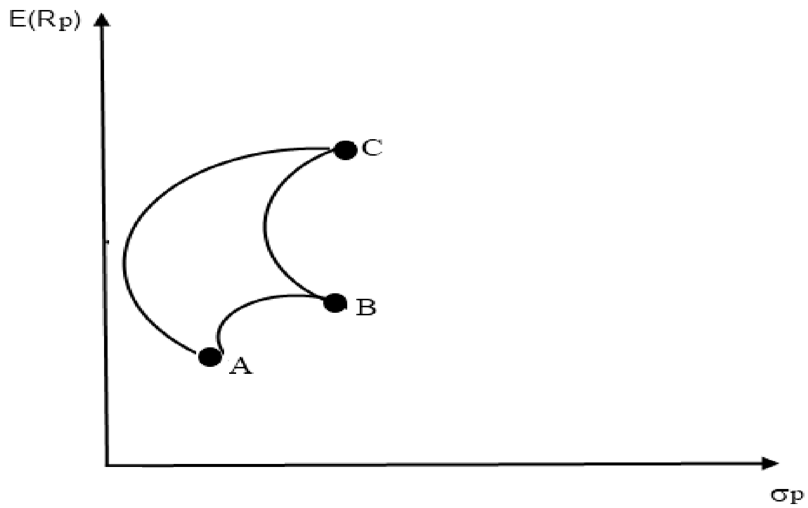


Fuente. Elaboración propia basada en Teoría de la Financiación.

Observamos que la correlación es perfecta y positiva entre los rendimientos de ambos activos, $\rho_{AB} = +1$, las posibilidades de inversión están situadas a lo largo de la recta punteada que pasa por los dos activos disponibles. Si la correlación es perfecta y negativa entre los rendimientos de ambos activos, $\rho_{AB} = -1$, el conjunto de oportunidades de inversión está representado por una línea recta que tiene dos tramos perfectamente diferenciados, uno con pendiente positiva y otro con pendiente negativa. Finalmente, cuando el coeficiente de correlación entre los rendimientos de ambos activos está situado estrictamente en el intervalo $-1 < \rho_{AB} < +1$, todas las combinaciones posibles están situadas a lo largo de una hipérbola cuyo grado de curvatura será mayor cuanto menor sea el coeficiente de correlación de los rendimientos de los dos activos.

Ahora bien, si tuviéramos tres posibilidades de inversión, las combinaciones factibles las tendríamos representadas como se muestra en la siguiente gráfica.

Gráfica 4. Conjunto de oportunidades de inversión con tres acciones.

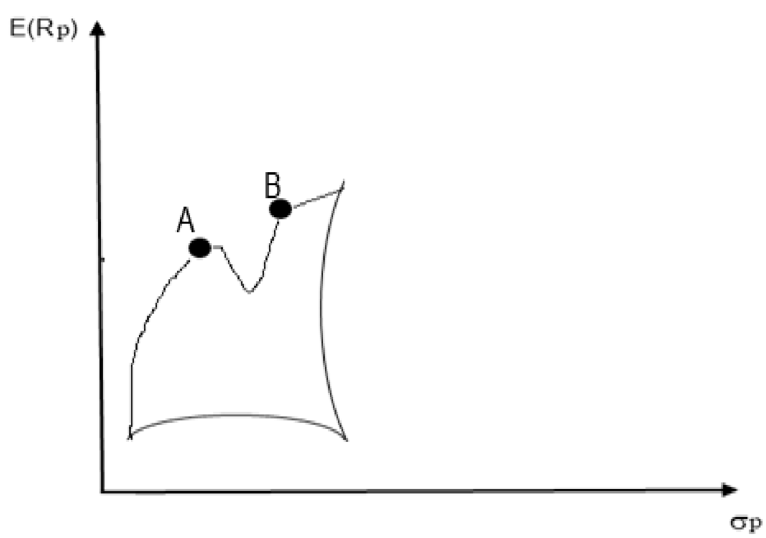


Fuente. Elaboración propia basada en Teoría de la Financiación.

Los puntos situados en las fronteras entre A, B y C recogen las posibles carteras formadas por la combinación de A-B, A-C, B-C, demostrando que las formas del conjunto posible pueden ser variadas, aunque siempre cóncavas.

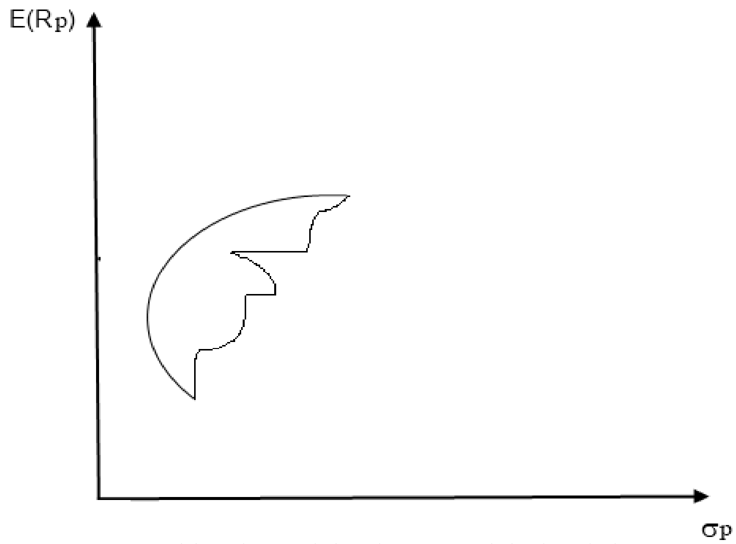
En las siguientes dos gráficas se muestran dos conjuntos de oportunidades de inversión, donde un caso es posible y otro no. Las combinaciones entre A y B se situarán siempre por encima o en la línea que los une pero nunca por debajo. Recordemos que las combinaciones de dos activos nunca tendrán más riesgo que cuando están situadas en una línea recta, en cuyo caso sabremos que el coeficiente de correlación de ambos activos toma valor de +1.

Gráfica 5. Conjunto no posible de inversión.



Fuente. Elaboración propia basada en Teoría de la Financiación.

Gráfica 6. Conjunto posible de inversión.

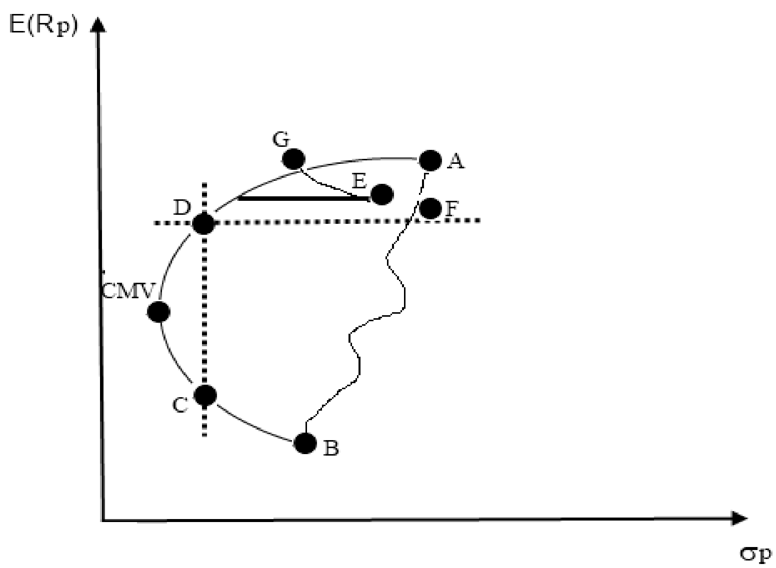


Fuente. Elaboración propia basada en Teoría de la Financiación.

2.- Determinación de la frontera eficiente.

Una vez delimitado el conjunto de posibles combinaciones de carteras, el inversor deberá elegir cuál de ellas será la que mejor se adapte a sus expectativas de rendimiento, riesgo y maximización de utilidad esperada. En la siguiente gráfica observamos una serie de carteras (situadas sobre la frontera izquierda o curva que limita el conjunto de oportunidades de inversión) dado un nivel de rendimiento esperado con el mínimo riesgo del conjunto posible.

Gráfica 7. Frontera eficiente.



Fuente. Elaboración propia basada en Teoría de la Financiación.

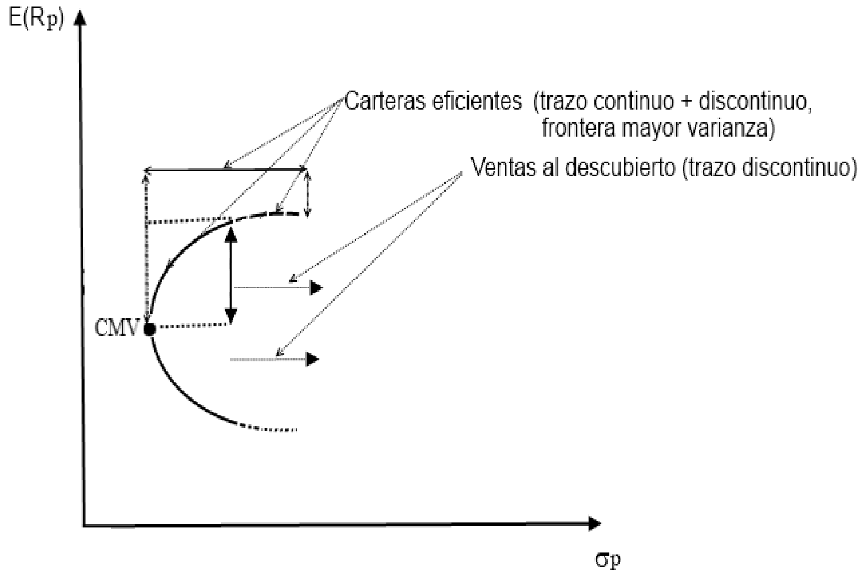
El conjunto de mínima varianza representado por la curva "A-CMV-B", comprobamos que existen combinaciones, como la cartera "C", que para su nivel de rendimiento esperado no existe otra que tenga menor riesgo que ella, sin embargo, sí hay otra que supone el mismo riesgo y ofrece un rendimiento mayor esperado como es la cartera “D”. Esto quiere decir que la cartera “C” es ineficiente, pues cumple sólo una de las dos condiciones como sucede con las combinaciones dibujadas en la curva CMV-B. El tramo CMV-A (dentro de la curva A-CMV-B) forma el conjunto de carteras eficientes en el sentido de media varianza, pues son las que generan el mayor rendimiento esperado con una menor desviación típica, a este conjunto de carteras eficientes se les llama *“frontera eficiente”.* La cartera donde empieza la frontera eficiente (dentro del conjunto de mínima varianza representada por el punto CMV) se le denomina *“cartera de mínima varianza global”*, por lo que el conjunto de carteras eficientes comienza con la cartera de mínima varianza global y finaliza con el activo “A”.

El punto CMV representa la cartera con la menor desviación típica entre todas las posibles. Las carteras eficientes no son dominadas en el espacio media-varianza por ninguna otra. La cartera “D” es una cartera eficiente que domina en media-varianza a la cartera “C”, y aunque ambas tienen la misma desviación típica, la cartera “D” tiene un rendimiento esperado más elevado. La cartera “F”, también es dominada por la cartera “D”, pues ofrece el mismo rendimiento esperado aunque con mayor riesgo. Cualquier cartera interior tampoco será cartera eficiente. La cartera “E” es dominada por cualquier cartera encontrada en la frontera eficiente con idéntico rendimiento esperado.

Recordemos que el tramo de la frontera que comprenda las carteras eficientes debe ser necesariamente cóncavas, por lo que no puede representarse por la curva CMV- D-E-G-A. Sin embargo es posible formar carteras con D y G, en donde las posibles combinaciones entre ellas deberán situarse a la izquierda o en la línea recta que las une dependiendo si el coeficiente de correlación es igual o menor que +1. El tramo con pendiente negativa de la frontera de carteras de menor varianza es necesariamente convexo y no eficiente. En nuestro ejemplo gráfico, no existen carteras que tengan una desviación típica igual a cero, lo que implica que en el conjunto de oportunidades de inversión, no hay activos o carteras cuyo coeficiente de correlación tome valor de -1, además de que tampoco no existen activos o carteras en la frontera de menor varianza cuya correlación sea +1 (no hay segmentos rectos).

Por último al estar limitado el conjunto de oportunidades de inversión a la derecha, sabemos que en la gráfica no se admiten ventas en corto o al descubierto (operaciones que implican vender a plazo valores que no se poseen con la finalidad de poder comprarlos después a una tarifa menor, es decir, vender acciones a plazo anticipando la baja de sus precios y que regularmente las realizan los especuladores que no cuentan con títulos para entregarlos, en algunos países se prohíbe este tipo de ventas como el caso de la eurozona). Si hiciéramos ventas en corto o al descubierto, el conjunto de oportunidades se extendería ilimitadamente hacia la derecha en forma de hipérbola, siendo factible conseguir valores extremadamente elevados sobre el rendimiento esperado y la desviación típica. Los trazos discontinuos representan ventas en descubierto, el tramo grueso continuo y discontinuo representa al conjunto de carteras eficientes de la frontera de menor varianza.

Gráfica 8. Frontera eficiente y ventas al descubierto.



Fuente. Elaboración propia basada en Teoría de la Financiación.

3.- Determinación analítica de la frontera eficiente.

Analizado gráficamente el concepto de frontera eficiente, se puede comprender con mayor facilidad la formulación analítica de las carteras que la componen, pues Markowitz propone el problema como un programa de optimización de la rentabilidad esperada de la cartera para cada uno de los posibles valores de riesgo, el cual permitirá determinar en qué activos y proporciones (Wi) invertir para que la rentabilidad esperada sea máxima dado un nivel de riesgo (V*), y que como consecuencia del repetido proceso en cada uno de los distintos niveles de riesgo se construya automáticamente la frontera eficiente representada con la siguiente ecuación:

$$máx\ E(Rp) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} = V^*$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0$$

Donde,

w_i: Proporción de inversión del activo "i".

w_j: Proporción de inversión del activo "j".

σ_{ij}: Desviación estándar o riesgo del activo "i" y "j".

V^*: Valor fijado para la varianza del rendimiento de la cartera.

O bien, fijando un nivel de rentabilidad esperado minimizando su riesgo, convirtiéndose en un problema cuadrático y paramétrico como a continuación se muestra:

$$mín\ \sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i\ w_j\ \sigma_{ij}$$

Sujeto a:

$$E(Rp) = \sum_{i=1}^{n} w_i E(R_i) = E^*$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0$$

La anterior ecuación es cuadrática porque en la función objetivo aparecen términos cuadráticos y es paramétrica porque la primera restricción se sustenta en poder variar el valor del parámetro E* que representa la rentabilidad esperada de la cartera. En la primera restricción se fija el nivel de rentabilidad que el inversor espera obtener, mientras que en la segunda es una restricción presupuestaria que impone u obliga que el presupuesto de inversión se agote por completo. La última restricción, corresponde a las condiciones de no negatividad de las variables de decisión " $w_i \geq 0$".

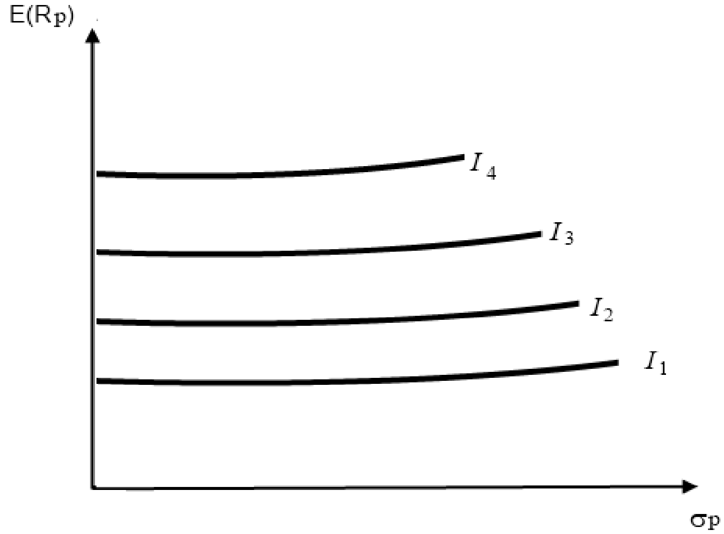
4.- Especificación de las preferencias del inversor determinando el mapa de las curvas de indiferencia en los ejes media-varianza.

Hasta el momento se ha mencionado que la utilidad esperada de la riqueza se puede expresar en función de dos parámetros: la media y la varianza de los rendimientos de los títulos o carteras cuando la función de utilidad es una función cuadrática, o bien cuando la función de distribución de dichos rendimientos es una normal. Sin embargo, esta relación de media y varianza lamentablemente no permite establecer comparaciones entre dos carteras eficientes, debido a que la cartera más arriesgada puede ofrecer más rendimiento que la otra. Por tanto, para conocer la cartera óptima de inversión entre todo el conjunto de carteras eficientes, será necesario determinar el grado de aversión al riesgo. Lo que conlleva que la función de utilidad se traduzca en una determinada relación marginal de sustitución o de intercambio entre la rentabilidad esperada y su riesgo conformado en curvas de indiferencia. Una curva de indiferencia está representada por el conjunto de combinaciones rendimiento y riesgo que proporciona al inversor la misma utilidad esperada, el cual a través de una recta indicará el aumento del rendimiento esperado que el individuo exige a la inversión por unidad de riesgo, o bien, el incremento de riesgo que está dispuesto a asumir ante el aumento unitario de rentabilidad de modo que la utilidad esperada se mantenga constante. En las curvas de indiferencia se hacen las siguientes consideraciones:

a) Deben ser crecientes en el espacio media-varianza, es decir, para que la utilidad asociada a una curva de indiferencia se mantenga constante ante un aumento de riesgo, deberá aumentar la rentabilidad esperada, por lo que consecuentemente esa curva de indiferencia será creciente.

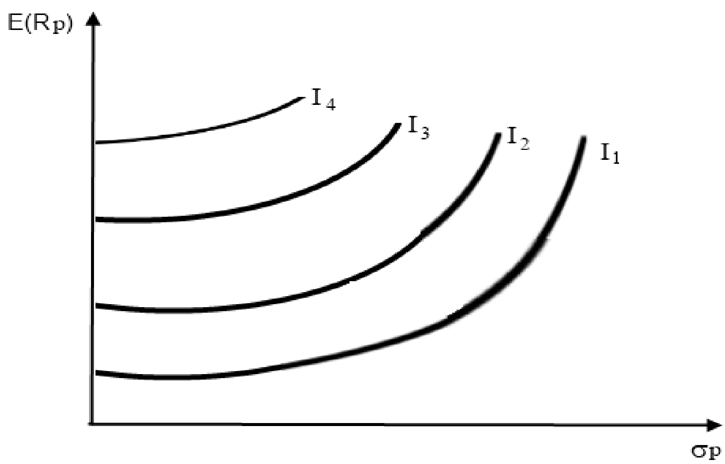
b) A medida que el riesgo de una inversión crece, será necesario un crecimiento mayor en el rendimiento esperado para que su utilidad esperada se mantenga constante, es decir, conlleva a que sus curvas de indiferencia sean convexas.

Gráfica 9. Curvas de indiferencia de un inversor poco averso al riesgo.



Fuente. Elaboración propia basada en Teoría de la Financiación.

Gráfica 10. Curvas de indiferencia de un inversor muy averso al riesgo.



Fuente. Elaboración propia basada en Teoría de la Financiación.

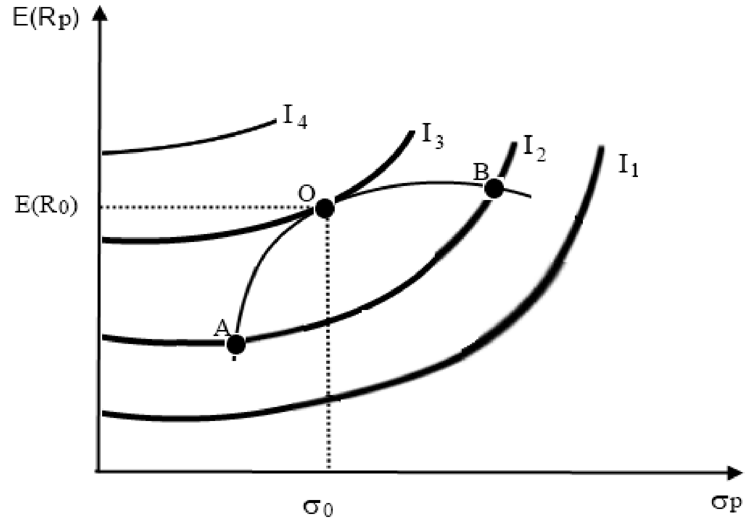
c) No pueden cortarse entre ellas y no se prolongan por debajo del eje de las abscisas (σp), pues representarían inversiones con rendimientos esperados negativos y varianzas positivas que un inversor racional no contempla.

d) Las curvas de indiferencia situadas más arriba y hacia la izquierda representan niveles de utilidad superior, pues el rendimiento esperado para un mismo riesgo o varianza es mayor.

5.- Determinación de la cartera óptima a partir del conjunto eficiente y las preferencias particulares del inversor.

Una vez determinada la frontera eficiente y el mapa de curvas de indiferencia estamos en condiciones de obtener una cartera óptima, definida como aquella que maximiza su utilidad esperada, el cual se encuentra situada lo más arriba y hacia la izquierda posible. En el siguiente gráfico podemos apreciar que las carteras “A” y “B” son indiferentes, pues se encuentran situadas sobre la misma curva de indiferencia proporcionando la misma utilidad esperada. Caso contrario de lo que sucede con la cartera "O", que reporta mayor utilidad esperada por situarse en una curva de indiferencia I3 más elevada, siendo consecuentemente preferida en comparación de las carteras "A" y "B". Por otra parte, ninguna cartera de la frontera eficiente es capaz de proporcionarle al inversor la utilidad esperada representada por la curva "I4".

Gráfica 11. Determinación de la cartera óptima de un inversor averso al riesgo.



Fuente. Elaboración propia basada en Teoría de la Financiación.

La cartera óptima del inversor es la representada por el punto de tangencia entre la frontera eficiente y la curva de indiferencia con mayor nivel de utilidad esperada. Sin embargo, no debe olvidarse que cada inversor tendrá una cartera óptima distinta respecto al binomio rentabilidad-riesgo, tratándose por consiguiente de un problema individual específico.

1.5 Incorporación activo libre de riesgo (Tobin) y la cartera óptima (índice de Sharpe).

Aportación de James Tobin al modelo de Markowitz (activo libre de riesgo y teorema de la separación).

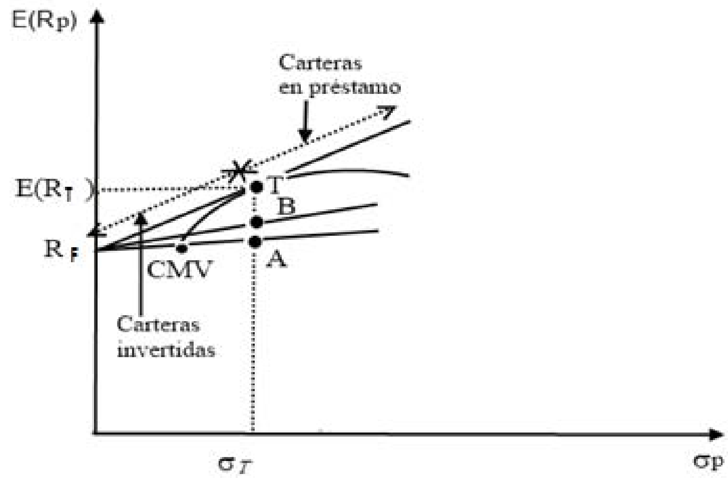
James Tobin en 1958 hizo algunas aportaciones fundamentales a la teoría moderna de selección de cartera de Harry Markowitz, que posteriormente fueron reconocidas y utilizadas por otros autores contemporáneos como el caso de William Sharpe (1964) en su modelo denominado CAPM y el cual analizaremos con detalle más adelante. Tobin propuso la existencia de una "*tasa libre de riesgo*" a la que se puede prestar o pedir prestada cualquier cantidad de dinero, y que ante la existencia de un mercado perfecto el inversor dispone de varias alternativas:

a) Invertir todo su presupuesto en el activo libre de riesgo.
b) Invertir todo su presupuesto en los activos arriesgados.
c) Destinar parte del presupuesto en activos arriesgados y otra en el activo libre de riesgo.
d) Colocar en los activos arriesgados una cantidad superior a su presupuesto de inversión, endeudándose al tipo de interés sin riesgo para financiar la diferencia.

Llamaremos "R*F*" a la rentabilidad del activo libre de riesgo en el que hipotéticamente su esperanza matemática (media) es constante y nula tanto su desviación típica estándar como su covarianza respecto a los demás activos o carteras que se negocian en el mercado. Este activo es la cartera de varianza global más pequeña posible dentro de una nueva frontera eficiente.

En la siguiente gráfica se ejemplifica que cualquier inversor puede combinar el activo libre de riesgo con la cartera de mínima varianza global situada en la línea recta “R_F-CMV”. El inversor no podría situarse en una línea recta con mayor pendiente que la recta “R_F – T”, pues no sería viable la obtención de una cartera de activos arriesgados con rentabilidad esperada mayor que $E(R_T)$ y riesgo igual a “σ_T”. Así pues, cuando consideramos la existencia de “N” activos arriesgados y un activo libre de riesgo con rendimiento igual a R_F, la recta R_F -T se convierte en la nueva frontera eficiente y la “T” como la cartera eficiente de activos arriesgados.

Gráfica 12. Frontera eficiente con activo libre de riesgo.



Fuente. Elaboración propia basada en Teoría de la Financiación.

Considerando que la desviación típica estándar del activo libre de riesgo y su correlación con la cartera “T” son nulas, $R_F = 0$ y $\rho = 0$, se obtiene la expresión:

$$\sigma_P = [(1-w)^2\ \sigma_T^{\ 2}]^{1/2} \quad = (1\text{-}w)\ \sigma_T$$

Donde,

w: Fracción del presupuesto que el inversor destinará al activo libre de riesgo

1-w: Fracción del presupuesto que el inversor destinará a la cartera “T”.

σ_T : Desviación típica estándar (riesgo) de la cartera “T”.

Despejando (1 - w) de la anterior ecuación y sustituyéndola en la siguiente:

$$E(\overline{R}p) = wR_F + (1 - \overline{R}_T)$$

Se obtiene la función de la línea recta que relaciona el rendimiento esperado y el riesgo de todas las carteras que se pueden formar con el activo libre de riesgo y la cartera eficiente de activos arriesgados “T”.

$$E(Rp) = R_F + \left(\frac{E(R_T) - R_F}{\sigma_T} \right) \sigma_P$$

La forma de interpretar esta ecuación conforme a la variación del presupuesto “w” es la siguiente:

a) Si w = 1, suponemos que el inversor se ubicará en el punto “R_F”, invirtiendo todo su presupuesto en el activo libre de riesgo.

b) Si w = 0, el inversor colocará todo su presupuesto en la cartera eficiente de activos arriesgados, situándose en el punto "T".

c) Si 0 < w < 1, el inversor distribuirá su presupuesto colocando una parte en el activo libre de riesgo y otra en la cartera eficiente. En este caso, se ubicará en algún punto intermedio del segmento R_F – T, por lo que a este tipo de carteras eficientes se le denominará "carteras invertidas", debido a que invierte una proporción positiva menor a "1".

d) Si w < 0, el individuo se endeudará a la tasa libre de riesgo "R_F" invirtiendo la totalidad de su presupuesto más los fondos obtenidos con el préstamo en la cartera, de modo que se encontrará en algún punto de la recta a la derecha de "T". A este tipo de carteras eficientes se conocerá como "carteras en préstamo o ventas en corto", pues endeudándose al tipo de interés libre de riesgo, será posible destinar dichos recursos a la adquisición de una proporción mayor que el 100% en la cartera tangente. El inversor tendrá en este caso una posición apalancada con una expectativa de obtener un alto rendimiento, pero con una desviación típica muchas más elevada. Por lo que las carteras eficientes se diferenciarán en la forma en que los recursos se dividan entre el activo sin riesgo y la cartera arriesgada. Naturalmente la cartera tangente "T" es la única cartera eficiente formada exclusivamente con activos arriesgados. Por consiguiente podemos observar que al introducir un activo libre de riesgo, la línea recta que pasa por los puntos "R_F" y "T" es la nueva frontera eficiente en donde todas las carteras situadas en dicha recta proporcionarán la máxima rentabilidad esperada, lo que para un inversor racional y averso al riesgo preferirá elegirlas que cualquiera otra cartera.

Dentro de las aportaciones relevantes que Tobin hizo como parte de su propuesta del activo libre de riesgo al modelo de Markowitz, fue el "Teorema de la Separación". Tobin considera que si todos los inversores tuvieran acceso a la misma información tendrían las mismas oportunidades, pues el mercado es el que definirá la frontera eficiente, por lo que independientemente de las curvas de indiferencia rentabilidad y riesgo, cualquier inversor podría obtener la misma cartera óptima "T" combinada con el activo libre de riesgo. Dicho de otra forma, un inversor racional regularmente siempre intentará maximizar su utilidad esperada con independencia de su grado de aversión al riesgo, repartiendo su presupuesto únicamente entre el activo libre de riesgo y su cartera arriesgada, pues la combinación óptima de sus activos podrá ser determinada sin conocimiento necesario de sus preferencias de rentabilidad - riesgo o curvas de indiferencia, lo que le permite simplificar su proceso de selección únicamente en dos decisiones de manera independiente:

a) Identificar la única cartera tangente "T" para combinarla con el activo libre de riesgo, determinar qué activos y proporciones la componen teniendo en cuenta las oportunidades de inversión del mercado, sin identificar las características personales como el grado de aversión al riesgo.

b) Decidir la manera en que decidirá combinar su cartera, es decir, qué cantidad de su presupuesto (1-w) invertirá en la cartera tangente "T" y en qué cantidad "w" prestará o pedirá prestado al tipo de interés del activo libre de riesgo para maximizar su utilidad esperada dependiendo de su grado de aversión.

Para construir los portafolios de inversión y su frontera eficiente con sus respectivas ponderaciones de inversión “w” (distribución del presupuesto) es necesario seguir los siguientes pasos:

1) Identificar las rentabilidades, promedios y desviaciones típicas calculadas de las acciones.
2) Identificar el valor mínimo del conjunto de promedios.
3) Identificar el valor máximo del conjunto de promedios.
4) Construir la siguiente tabla que nos permitirá conocer las ponderaciones de distribución del presupuesto de inversión “w”, mediante la minimización de la desviación típica estándar (riesgo) de cada activo y del portafolio que deseamos obtener:

Tabla 4. Determinación de la distribución del presupuesto “w” en portafolios eficientes.

Portafolio	*Rentabilidad esperada para cada portafolio*	*Minimización varianza (σ^2) con función "Solver" excel para obtener desviación típica minimizada excepto primer valor*	*Ponderaciones sugeridas de inversión (wi) para cada activo como resultado de aplicar "Solver"*
1	$R_{j\ min}$ = *Mínima rentabilidad entre todos los activos*	$\sigma_{j\ min}$ = *Desvest correspondiente a* $R1_{min}$	$w_{min\,1} + w_{min,2} + w_{min\,3}$ ....$+ w_{min\,,\,j}$
2	$R2 = R1_{min} + (R_{K\ máx} - R1_{min}) / (K-1)$	σ_2 = *Desvest calculada con solver*	$w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3}$..............$+ w_{2,}$
3	$R3 = R2 + (R_{K\ máx} - R1_{min}) / (K-1)$	σ_3 = *Desvest calculada con solver*	$w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,3}$..............$+ w_{3,j}$
4	$R4 = R3 + (R_{K\ máx} - R1_{min}) / (K-1)$	σ_4 = *Desvest calculada con solver*	$w_{4,1} + w_{4,2} + w_{4,3}$..............$+ w_{4,j}$
.	. . .	.	. . . .
.	. . .	.	. . . .
.	. . .	.	. . . .
.	$R_K = R_{K-1} + (R_{K\ máx} - R1_{min}) / (K-1)$	σ_K = *Desvest calculada con solver*	$w_{k,1} + w_{k,2} + w_{k,3}$..............$+ w_{k,j}$
K	$R_{j\ máx}$ = *Máxima rentabilidad entre todos los activos*	$\sigma_{K\ máx}$ = *Desvest calculada con solver*	$w_{k\,;\,1\ máx} + w_{k\,;\,2\ máx} + w_{k\,;\,3\ máx}$...........$+ w_{k\,;\,j\ máx}$

Matriz de rentabilidades de las acciones calculada en capítulo I — *Matriz de ponderaciones distribución presupuesto "wi" para cada portafolio*

$$\begin{bmatrix} R1_{min} \\ R2 \\ R3 \\ \cdot \\ \cdot \\ R_K \\ R_{K\ máx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{i1} + r_{i2} + r_{i3} + r_{i4} + \cdots + r_{ij} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_{n1} + r_{n2} + r_{n3} + r_{n4} + \cdots + r_{nj} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} w_{min\,1} + w_{min,2} + w_{min\,3} \cdots + w_{min\,,\,j} \\ w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3} \cdots + w_{2,j} \\ w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,3} \cdots + w_{3,j} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ w_{k,1} + w_{k,2} + w_{k,3} \cdots + w_{k,j} \\ w_{k\,;\,1\ máx} + w_{k\,;\,2\ máx} + w_{k\,;\,3\ máx} \cdots + w_{k\,;\,j\ máx} \end{bmatrix}$$

Fuente. Elaboración propia. Para efectos prácticos de cálculo se sugiere utilizar la función “Solver” de Excel estableciendo como celda objetivo la desviación típica estándar (operación matricial covarianza), sujeto a las siguientes restricciones: suma de todas las “w” debe ser igual a “1 o 100%”, el valor de las “w” debe ser mayor a “1”, y el valor de la rentabilidad esperada “*Rk*” en cada portafolio debe ser igual a la suma producto de las matriz “w” por la matriz de rentabilidades de cada serie accionaria.

Donde,

$R_{j\ min}$: Promedio mínimo encontrado de las acciones "j".

$R_{j\ máx}$: Promedio máximo encontrado de las acciones "j".

R_K: Promedio de la rentabilidad esperada del portafolio "k".

$\sigma_{j\ mín}$: Desviación típica estándar mínima encontrada de las acciones "j".

$\sigma_{K\ máx}$: Desviación típica estándar correspondiente al portafolio "k" de rentabilidad máxima.

σ_K: Desviación típica estándar del portafolio "k".

$w_{mín\ ,\ j}$: Ponderación del presupuesto "w" correspondiente a la rentabilidad mínima encontrada de las acciones "j".

$w_{k,j}$: Ponderación del presupuesto "w" en las "j" acciones correspondiente a la rentabilidad del portafolio "k".

$w_{k\ máx\ ,\ j}$: Ponderación del presupuesto "w" en las "j" acciones correspondiente al portafolio "k" de rentabilidad máxima.

$r_{i,j}$: Rentabilidad del dato o momento "i" del activo "j".

r_{nj}: Rentabilidad del dato o momento "i" hasta "n" del activo "j".

n: Tamaño de muestra (en nuestro caso 1251 para cada serie).

Índice de Sharpe (portafolio óptimo de inversión).

En 1964, el economista estadounidense William Forsyth Sharpe propuso al planteamiento de Tobin una medida para conocer hasta qué punto el rendimiento de un portafolio recompensa al inversor por asumir un determinado riesgo, es decir, cuál es la prima de la rentabilidad por unidad de riesgo asumida. A esta medida, la denominó "índice de recompensa a la variabilidad de relación" (reward to variability ratio), que posteriormente se popularizaría entre los expertos y académicos en finanzas llamándose "índice de Sharpe".

Este índice permite conocer el performance o eficacia del comportamiento de los activos que componen el portafolio, indicando qué tan bueno es su desempeño respecto alguna otra cartera o índice de referencia benchmark (por ejemplo el activo libre de riesgo). Los inversores racionales regularmente seleccionarán aquellas carteras que presenten un índice de Sharpe alto.

Para determinar su valor se utiliza la siguiente ecuación:

$$S = \frac{\overline{r_p} - \overline{r_f}}{\sigma_p}$$

Donde,

S : Índice de Sharpe.

$\overline{r}_p$: Promedio de las rentabilidades del portafolio.

$\overline{r}_f$: Promedio de las rentabilidades del activo libre de riesgo (CETE).

$\overline{r}_p - \overline{r}_f$: Prima del promedio de rentabilidades del portafolio y el activo libre de riesgo.

σ_p : Desviación típica estándar (riesgo específico) del portafolio.

Es importante mencionar que la propuesta del índice de Sharpe en el modelo de Markowitz, no sólo nos ayuda a comprender hasta qué punto el rendimiento de un portafolio recompensa al inversor por asumir un determinado riesgo, sino también ayuda a identificar aquel portafolio óptimo de inversión cuya ponderación de distribución del presupuesto "w" obtiene la máxima rentabilidad esperada con el máximo riesgo posible dentro de un conjunto determinado de carteras ubicadas en la frontera eficiente de Markowitz y tangente a la recta de Tobin.

Para obtener el portafolio óptimo de Sharpe es necesario seguir los siguientes pasos:

1) Identificar las rentabilidades, promedios y desviaciones típicas calculadas de las acciones.

$$\begin{bmatrix} r_{i1} + & r_{i2} + & r_{i3} + & r_{i4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + & r_{ij} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} + & r_{n2} + & r_{n3} + & r_{n4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + & r_{nj} \end{bmatrix}$$

2) Determinar las ponderaciones de distribución del presupuesto de inversión "w" en portafolio óptimo, mediante la maximización de la ecuación del índice de Sharpe, interpretándose como la matriz de porcentajes que nos permitirá obtener la máxima rentabilidad con el menor riesgo posible:

$$w_{opt} = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \ldots\ldots\ldots\ldots w_j$$

Donde,

w_{opt} : Ponderación total del portafolio óptimo de Sharpe.

w_j : Ponderación del presupuesto sugerido de inversión en el activo "j" del portafolio óptimo de Sharpe.

3) Multiplicar y sumar la matriz de ponderaciones del portafolio óptimo con la matriz de las rentabilidades de las series accionarias:

Tabla 5. Determinación de la distribución del presupuesto “w” en portafolio óptimo Sharpe.

Matriz de la distribución del presupuesto "w" de las acciones en el portafolio óptimo Sharpe

Matriz de las rentabilidades de cada acción

$$r_{opt} = [w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \ldots\ldots\ldots w_j] * \begin{bmatrix} r_{i1} + & r_{i2} + & r_{i3} + & r_{i4} + \ldots\ldots\ldots\ldots & + r_{ij} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ r_{n1} + & r_{n2} + & r_{n3} + & r_{n4} + \ldots\ldots\ldots\ldots & + r_{nj} \end{bmatrix}$$

Fuente. Elaboración propia. Para efectos prácticos de cálculo se sugiere utilizar la función “Solver” de Excel maximizando como celda objetivo la fórmula del índice de Sharpe , sujeto a las siguientes restricciones: suma de todas las “w” debe ser igual a “1 o 100%”, el valor de las “w” debe ser mayor a “1” .

4) Calcular el promedio de las rentabilidades del portafolio óptimo de Sharpe *“rp”:*

$$\overline{r}_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_{pi}}{n_i}$$

Donde,

$\overline{r}_p$: Promedio de las rentabilidades del portafolio óptimo de Sharpe

r_{pi}: Rentabilidad del portafolio óptimo de Sharpe en el dato “i” (en nuestro caso diario).

n_i : Tamaño de muestra (en nuestro caso 1251 datos del portafolio).

5) Calcular la desviación típica estándar de las rentabilidades del portafolio:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (r_{pi} - \overline{r}_p)^2}{n_i}}$$

Donde,

σ_p: Desviación típica estándar del portafolio óptimo de Sharpe.

$\overline{r}_p$: Promedio de las rentabilidades del portafolio óptimo de Sharpe.

r_{pi}: Rentabilidad de la cartera en el dato “i” (en nuestro caso diario).

n_i: Tamaño de muestra (en nuestro caso 1251 datos correspondientes al portafolio óptimo de Sharpe).

A continuación se muestra el procedimiento de cálculo y resultados obtenidos:

Valor mínimo y máximo rentabilidades.

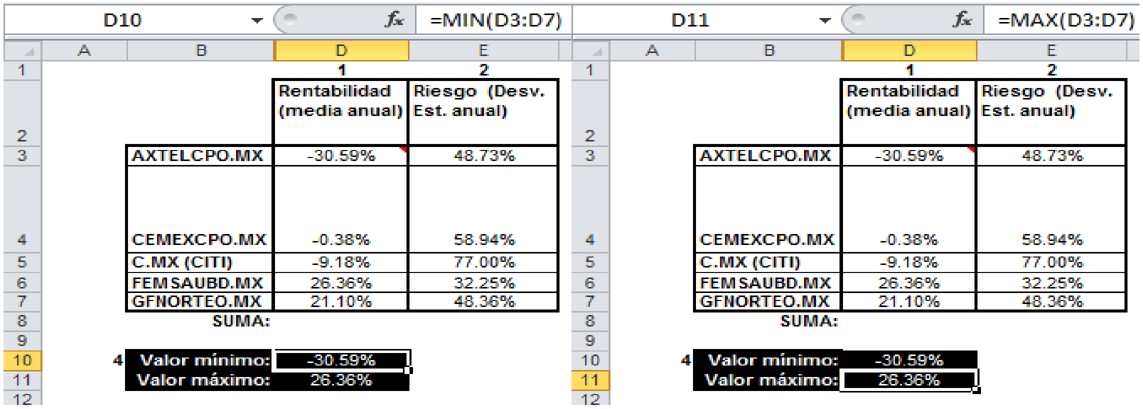
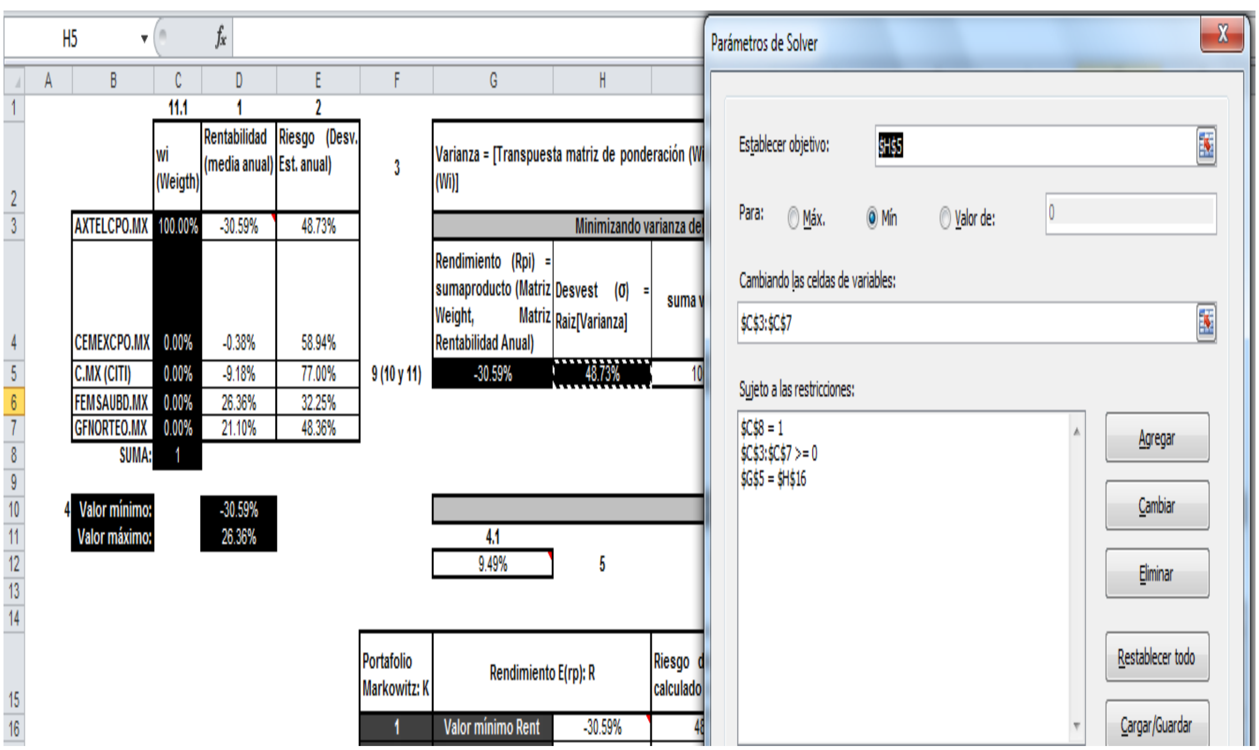


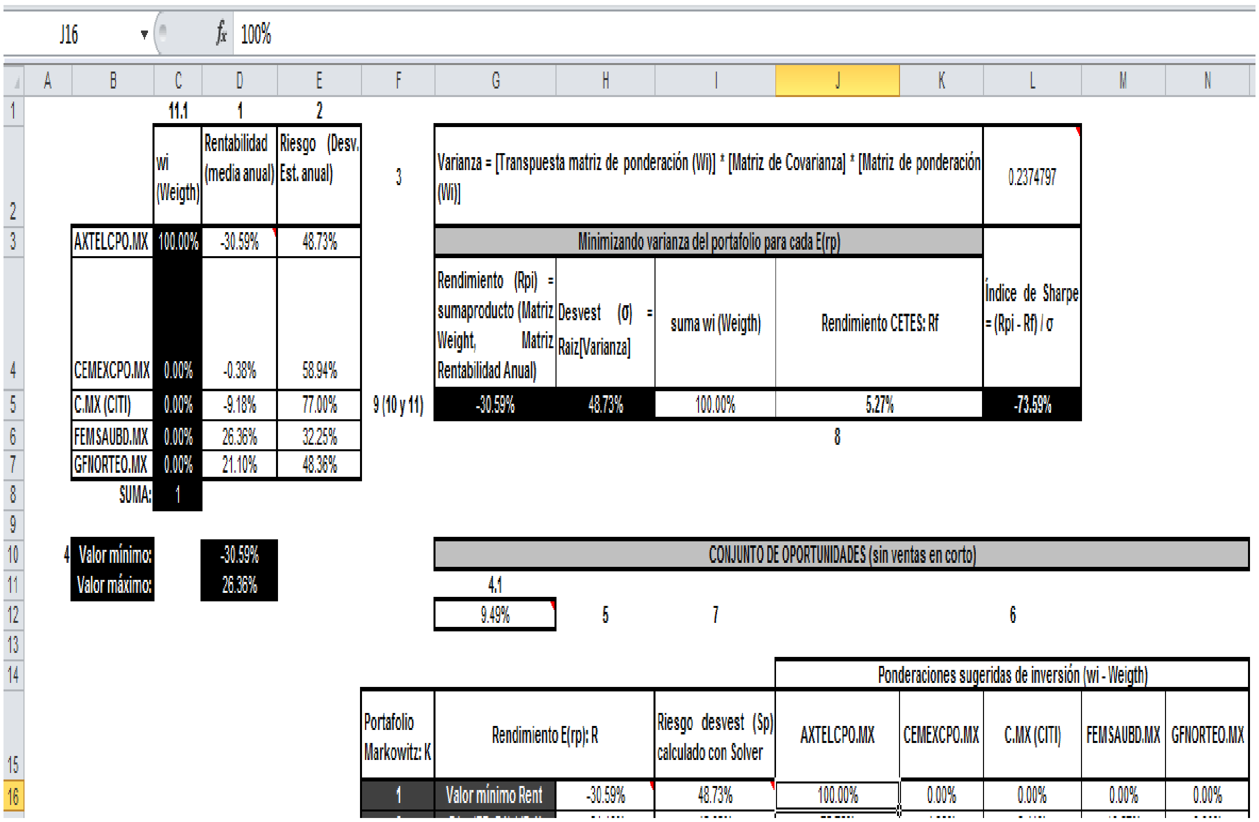
Tabla 6. Valor máximo y mínimo de rentabilidades (media anual).

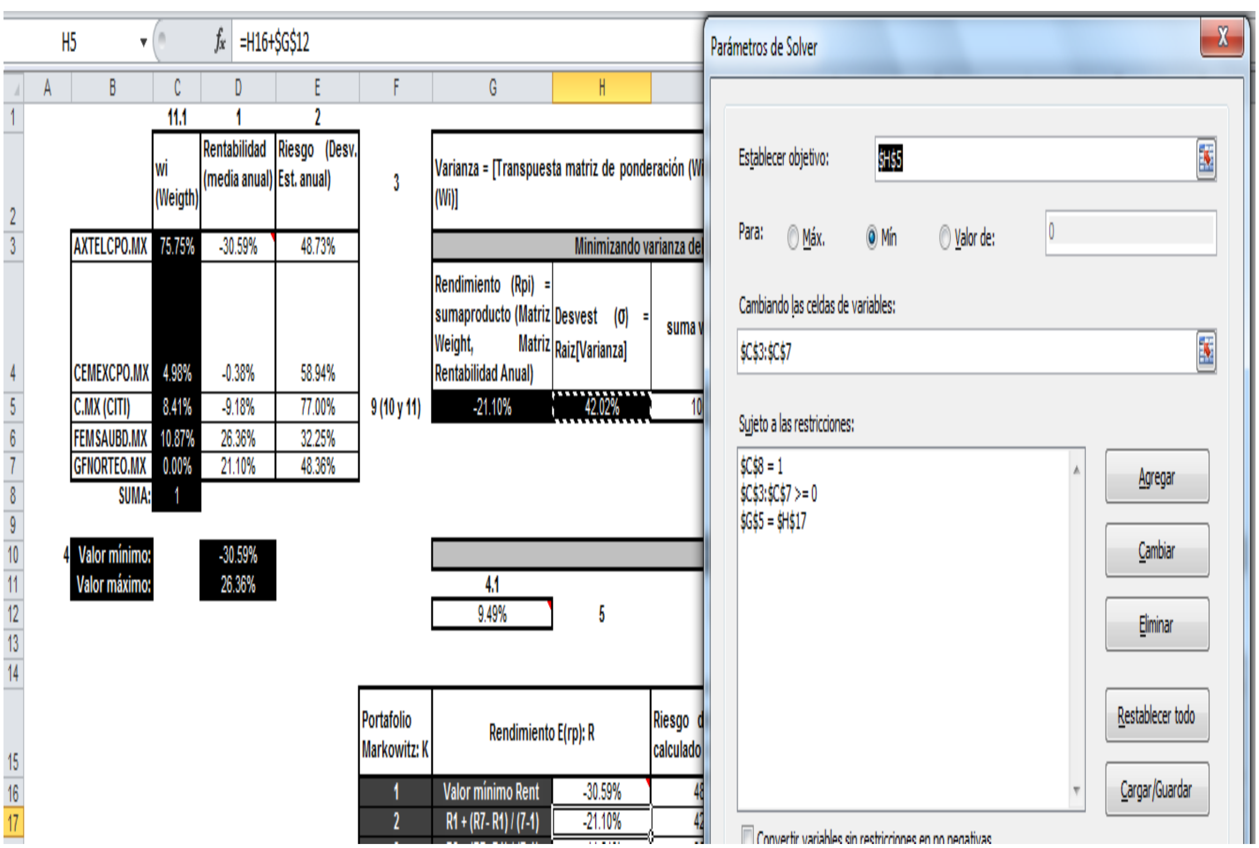
	Rentabilidad (media anual)	Riesgo (Desv. Est. anual)
AXTELCPO.MX	-30.59%	48.73%
CEMEXCPO.MX	-0.38%	58.94%
C.MX (CITI)	-9.18%	77.00%
FEMSAUBD.MX	26.36%	32.25%
GFNORTEO.MX	21.10%	48.36%
Valor mínimo:	-30.59%	
Valor máximo:	26.36%	

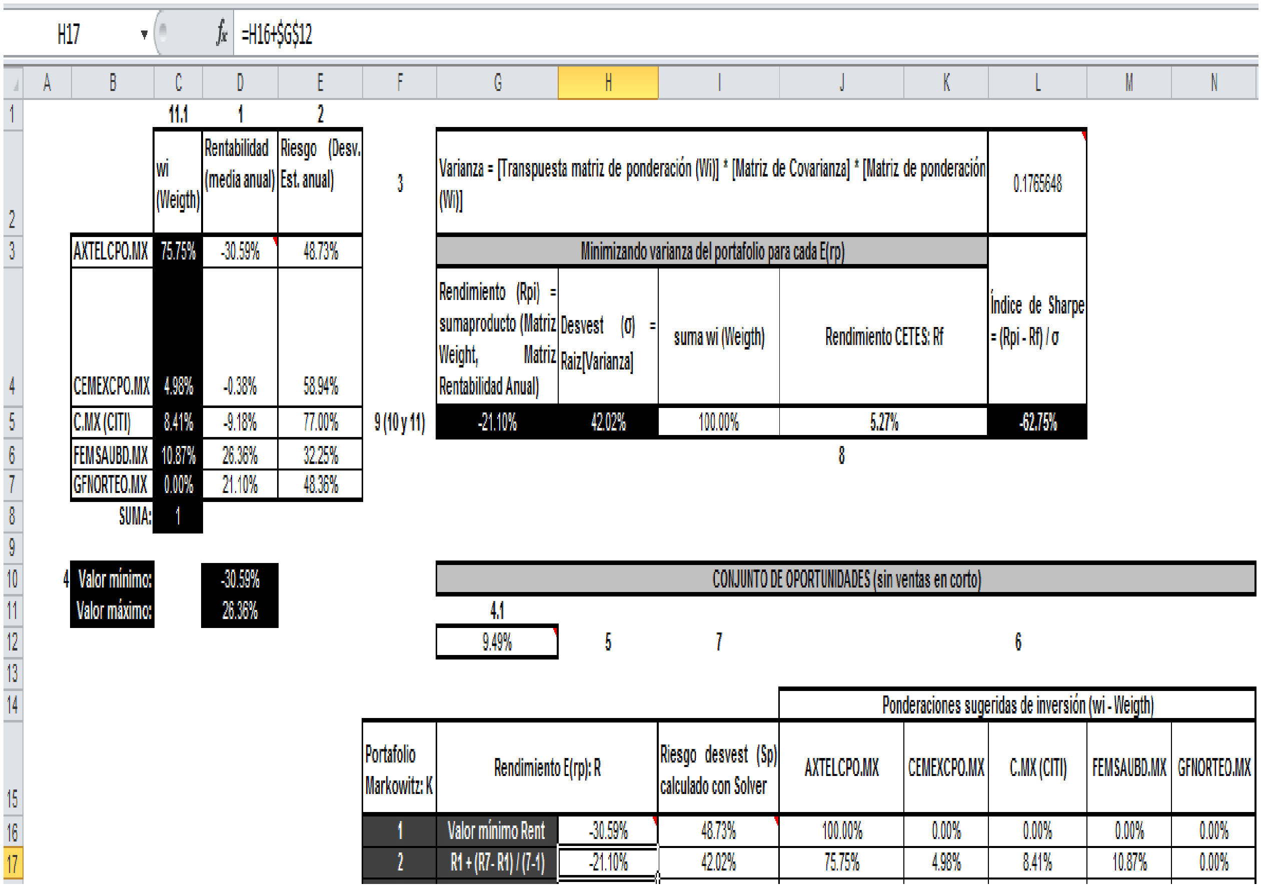
Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/)

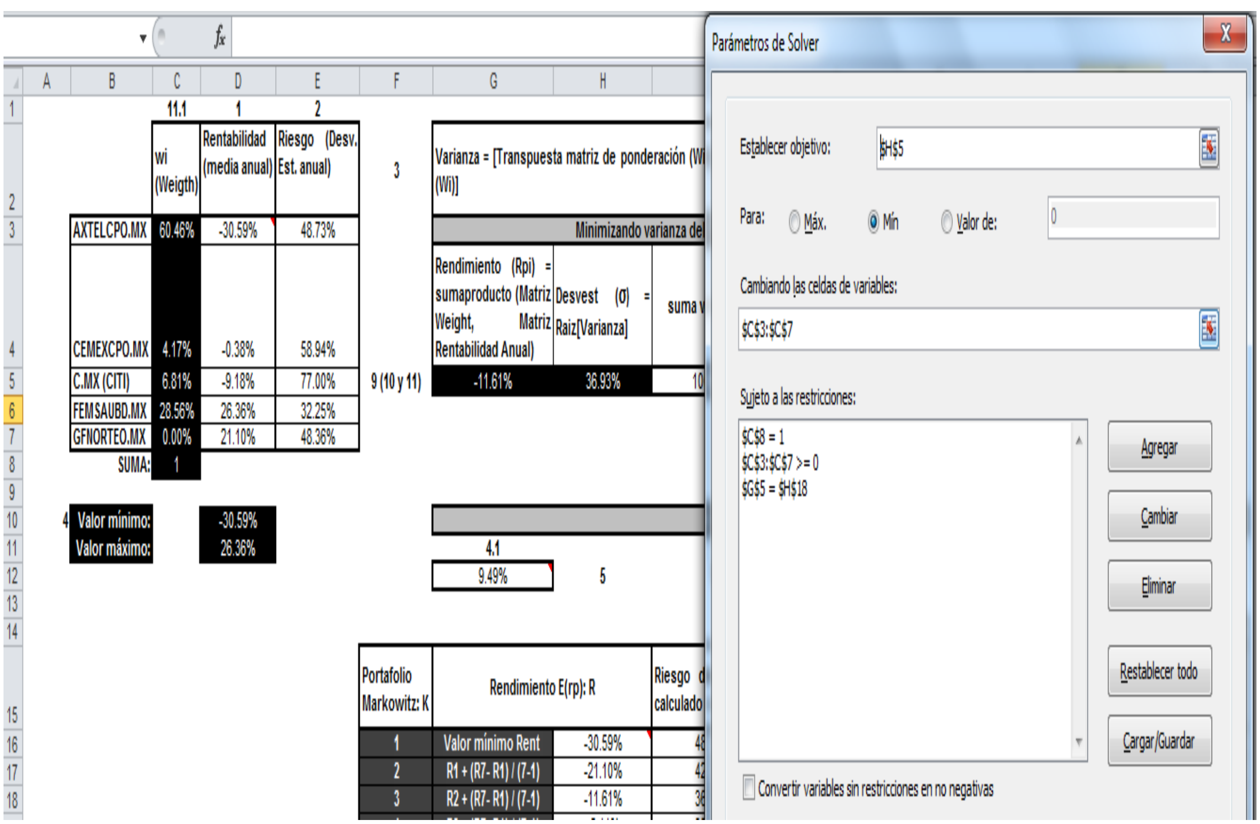
Rentabilidad esperada para 7 portafolios minimizando desviación típica estándar (riesgo) con función Solver.

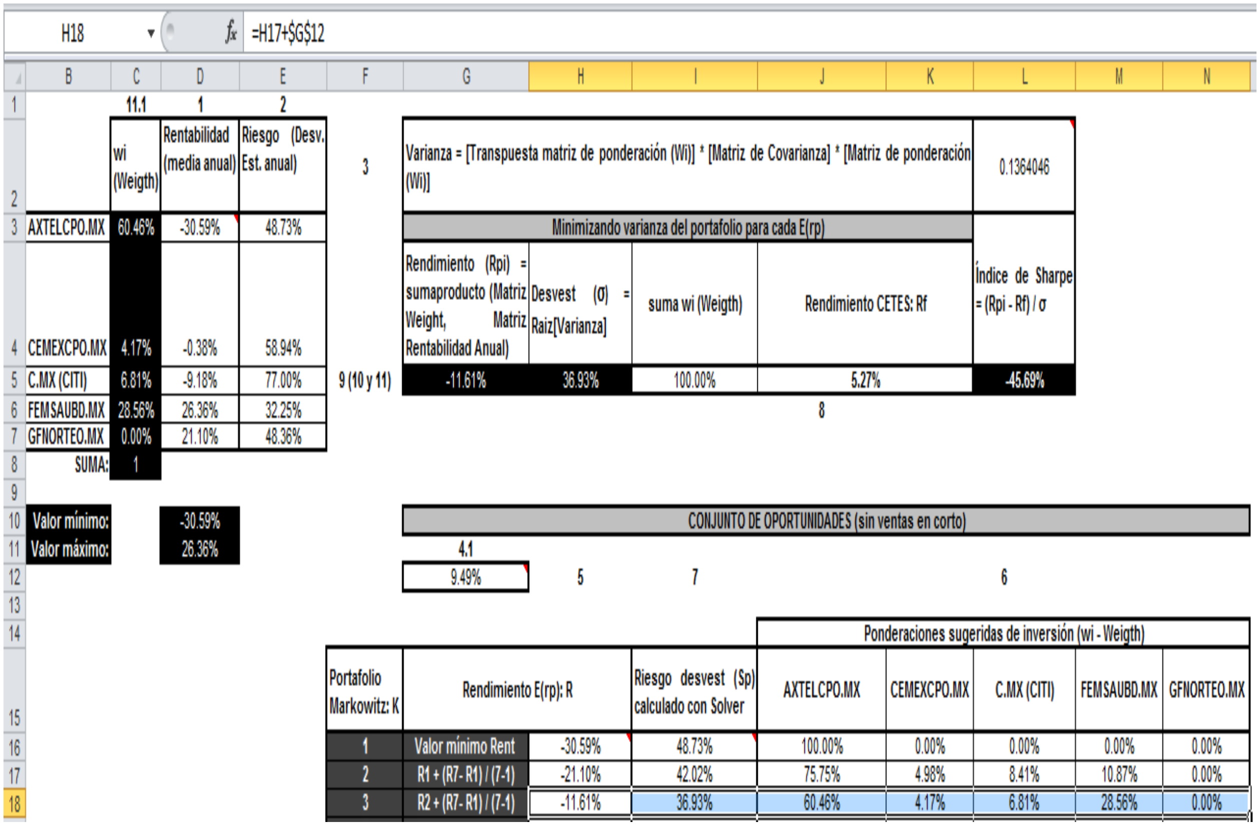


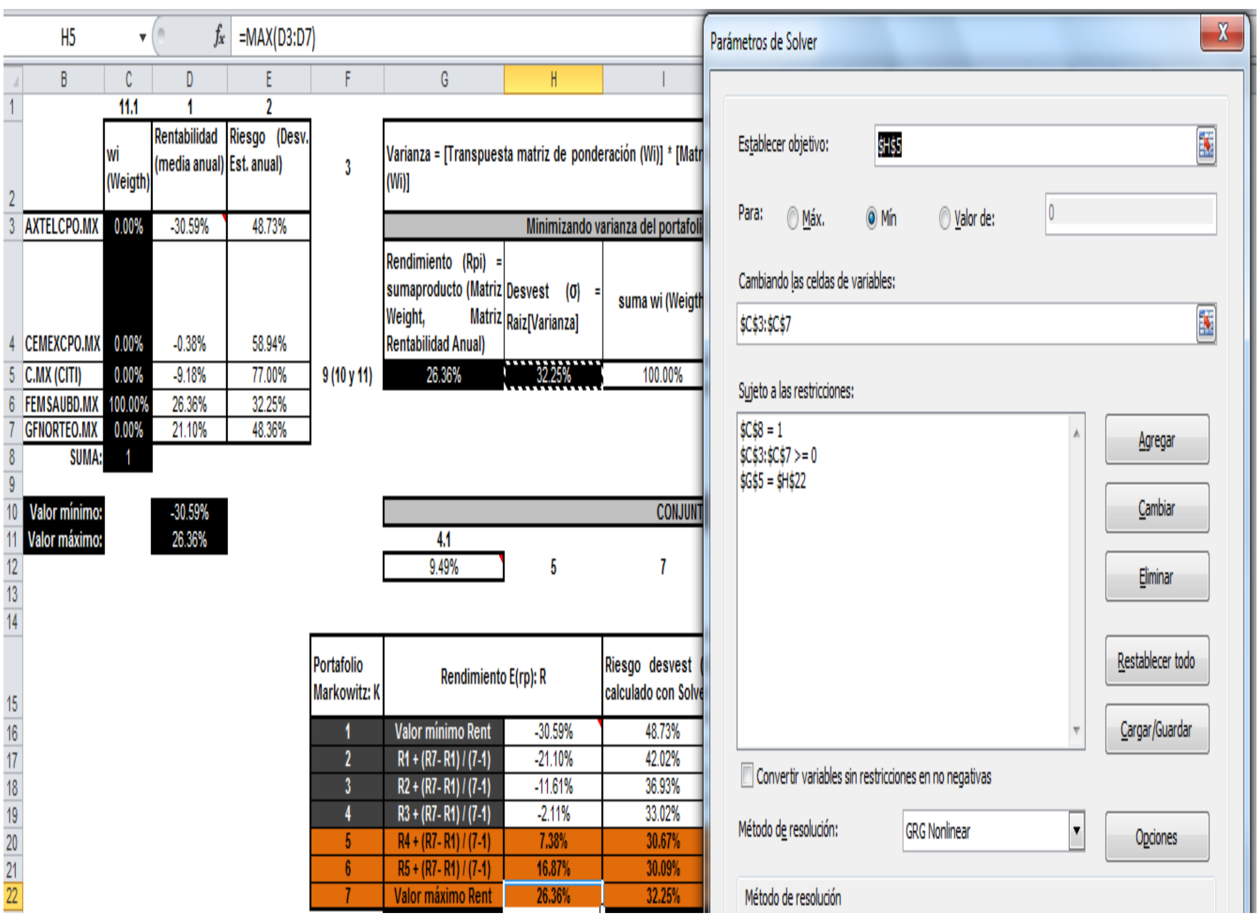

J16
100%
11.1
1
2
wi (Weigth)
Rentabilidad (media anual)
Riesgo (Desv. Est. anual)
3
Varianza = [Transpuesta matriz de ponderación (Wi)] * [Matriz de Covarianza] * [Matriz de ponderación (Wi)]
0.2374797
AXTELCPO.MX 100.00% -30.59% 48.73%
Minimizando varianza del portafolio para cada E(rp)
Rendimiento (Rpi) = sumaproducto (Matriz Weight, Matriz Rentabilidad Anual)
Desvest (σ) = Raiz[Varianza]
suma wi (Weigth)
Rendimiento CETES: Rf
Índice de Sharpe = (Rpi - Rf) / σ
CEMEXCPO.MX 0.00% -0.38% 58.94%
C.MX (CITI) 0.00% -9.18% 77.00%
9 (10 y 11)
-30.59% 48.73% 100.00% 5.27% -73.59%
FEMSAUBD.MX 0.00% 26.36% 32.25%
8
GFNORTEO.MX 0.00% 21.10% 48.36%
SUMA: 1
4 Valor mínimo: -30.59%
Valor máximo: 26.36%
CONJUNTO DE OPORTUNIDADES (sin ventas en corto)
4.1
9.49%
5
7
6
Ponderaciones sugeridas de inversión (wi - Weigth)
Portafolio Markowitz: K
Rendimiento E(rp): R
Riesgo desvest (Sp) calculado con Solver
AXTELCPO.MX
CEMEXCPO.MX
C.MX (CITI)
FEMSAUBD.MX
GFNORTEO.MX
1 Valor mínimo Rent -30.59% 48.73% 100.00% 0.00% 0.00% 0.00% 0.00%

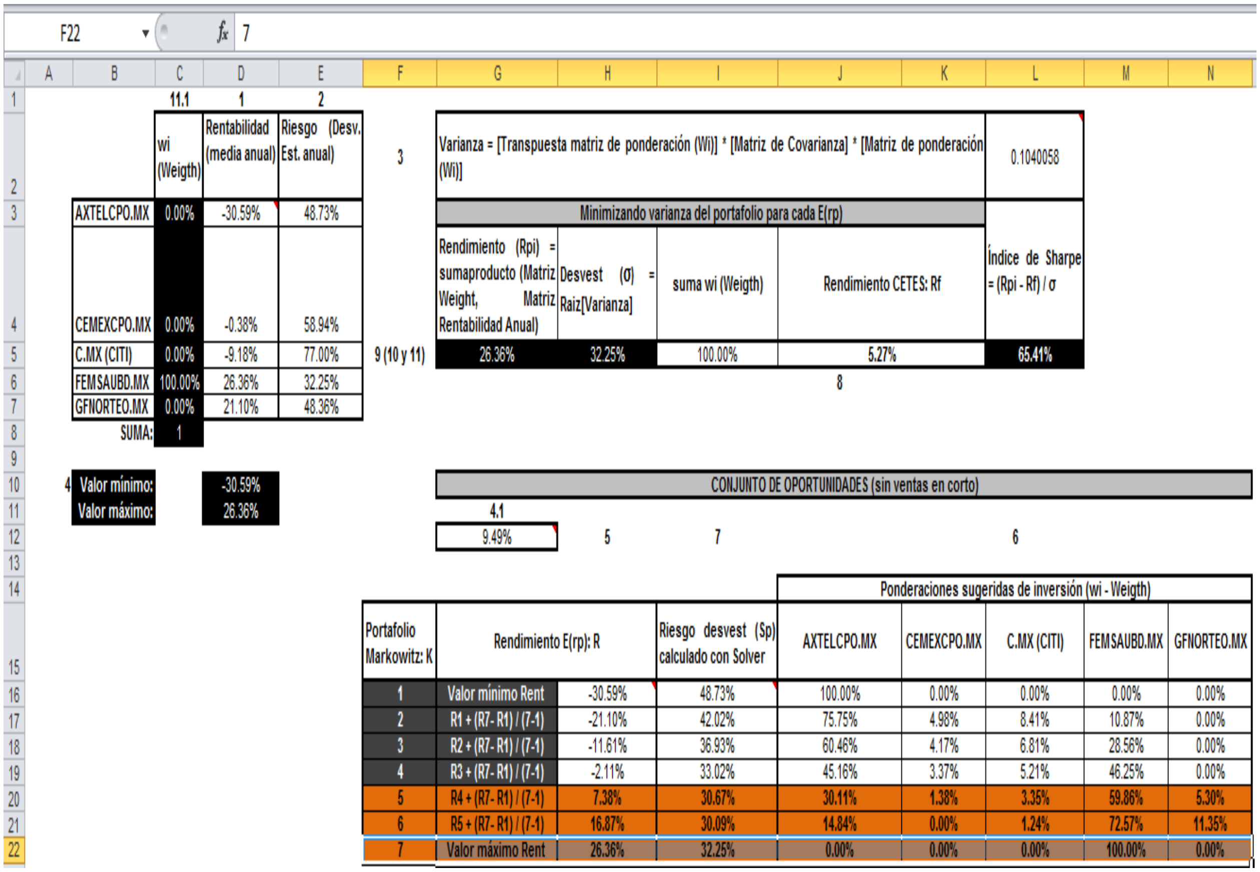

H5
=H16+$G$12
11.1
1
2
wi (Weigth)
Rentabilidad (media anual)
Riesgo (Desv. Est. anual)
3
Varianza = [Transpuesta matriz de ponderación (Wi)]
AXTELCPO.MX 75.75% -30.59% 48.73%
Minimizando varianza del
Rendimiento (Rpi) = sumaproducto (Matriz Weight, Matriz Rentabilidad Anual)
Desvest (σ) = Raiz[Varianza]
CEMEXCPO.MX 4.98% -0.38% 58.94%
C.MX (CITI) 8.41% -9.18% 77.00%
9 (10 y 11)
-21.10% 42.02%
FEMSAUBD.MX 10.87% 26.36% 32.25%
GFNORTEO.MX 0.00% 21.10% 48.36%
SUMA: 1
4 Valor mínimo: -30.59%
Valor máximo: 26.36%
4.1
9.49%
5
Portafolio Markowitz: K
Rendimiento E(rp): R
1 Valor mínimo Rent -30.59%
2 R1 + (R7 - R1) / (7-1) -21.10%
Parámetros de Solver
Establecer objetivo: $H$5
Para: Máx. Mín Valor de: 0
Cambiando las celdas de variables:
$C$3:$C$7
Sujeto a las restricciones:
$C$8 = 1
$C$3:$C$7 >= 0
$G$5 = $H$17
Agregar
Cambiar
Eliminar
Restablecer todo
Cargar/Guardar
Convertir variables sin restricciones en no negativas


H17
=H16+$G$12
11.1
1
2
wi (Weigth)
Rentabilidad (media anual)
Riesgo (Desv. Est. anual)
3
Varianza = [Transpuesta matriz de ponderación (Wi)] * [Matriz de Covarianza] * [Matriz de ponderación (Wi)]
0.1765648
AXTELCPO.MX 75.75% -30.59% 48.73%
Minimizando varianza del portafolio para cada E(rp)
Rendimiento (Rpi) = sumaproducto (Matriz Weight, Matriz Rentabilidad Anual)
Desvest (σ) = Raiz[Varianza]
suma wi (Weigth)
Rendimiento CETES: Rf
Índice de Sharpe = (Rpi - Rf) / σ
CEMEXCPO.MX 4.98% -0.38% 58.94%
C.MX (CITI) 8.41% -9.18% 77.00%
9 (10 y 11)
-21.10% 42.02% 100.00% 5.27% -62.75%
FEMSAUBD.MX 10.87% 26.36% 32.25%
8
GFNORTEO.MX 0.00% 21.10% 48.36%
SUMA: 1
4
Valor mínimo: -30.59%
Valor máximo: 26.36%
CONJUNTO DE OPORTUNIDADES (sin ventas en corto)
4.1
9.49%
5
7
6
Ponderaciones sugeridas de inversión (wi - Weigth)
Portafolio Markowitz: K
Rendimiento E(rp): R
Riesgo desvest (Sp) calculado con Solver
AXTELCPO.MX CEMEXCPO.MX C.MX (CITI) FEMSAUBD.MX GFNORTEO.MX
1 Valor mínimo Rent -30.59% 48.73% 100.00% 0.00% 0.00% 0.00% 0.00%
2 R1 + (R7 - R1) / (7-1) -21.10% 42.02% 75.75% 4.98% 8.41% 10.87% 0.00%


11.1
1
2
wi (Weigth)
Rentabilidad (media anual)
Riesgo (Desv. Est. anual)
3
Varianza = [Transpuesta matriz de ponderación (Wi)]
Minimizando varianza del
AXTELCPO.MX 60.46% -30.59% 48.73%
Rendimiento (Rpi) = sumaproducto (Matriz Weight, Matriz Rentabilidad Anual)
Desvest (σ) = Raiz[Varianza]
CEMEXCPO.MX 4.17% -0.38% 58.94%
C.MX (CITI) 6.81% -9.18% 77.00%
9 (10 y 11)
-11.61% 36.93%
FEMSAUBD.MX 28.56% 26.36% 32.25%
GFNORTEO.MX 0.00% 21.10% 48.36%
SUMA: 1
4
Valor mínimo: -30.59%
Valor máximo: 26.36%
4.1
9.49%
5
Portafolio Markowitz: K
Rendimiento E(rp): R
1 Valor mínimo Rent -30.59%
2 R1 + (R7 - R1) / (7-1) -21.10%
3 R2 + (R7 - R1) / (7-1) -11.61%
Parámetros de Solver
Establecer objetivo: $H$5
Para: Máx. Mín Valor de: 0
Cambiando las celdas de variables:
$C$3:$C$7
Sujeto a las restricciones:
$C$8 = 1
$C$3:$C$7 >= 0
$G$5 = $H$18
Agregar
Cambiar
Eliminar
Restablecer todo
Cargar/Guardar
Convertir variables sin restricciones en no negativas


H18
=H17+$G$12
11.1 1 2
wi (Weigth)
Rentabilidad (media anual)
Riesgo (Desv. Est. anual)
3
Varianza = [Transpuesta matriz de ponderación (Wi)] * [Matriz de Covarianza] * [Matriz de ponderación (Wi)]
0.1364046
AXTELCPO.MX 60.46% -30.59% 48.73%
Minimizando varianza del portafolio para cada E(rp)
Rendimiento (Rpi) = sumaproducto (Matriz Weight, Matriz Rentabilidad Anual)
Desvest (σ) = Raiz[Varianza]
suma wi (Weigth)
Rendimiento CETES: Rf
Índice de Sharpe = (Rpi - Rf) / σ
CEMEXCPO.MX 4.17% -0.38% 58.94%
C.MX (CITI) 6.81% -9.18% 77.00%
9 (10 y 11)
-11.61% 36.93% 100.00% 5.27% -45.69%
FEMSAUBD.MX 28.56% 26.36% 32.25%
8
GFNORTEO.MX 0.00% 21.10% 48.36%
SUMA: 1
Valor mínimo: -30.59%
Valor máximo: 26.36%
CONJUNTO DE OPORTUNIDADES (sin ventas en corto)
4.1
9.49%
5
7
6
Ponderaciones sugeridas de inversión (wi - Weigth)
Portafolio Markowitz: K
Rendimiento E(rp): R
Riesgo desvest (Sp) calculado con Solver
AXTELCPO.MX CEMEXCPO.MX C.MX (CITI) FEMSAUBD.MX GFNORTEO.MX
1 Valor mínimo Rent -30.59% 48.73% 100.00% 0.00% 0.00% 0.00% 0.00%
2 R1 + (R7- R1) / (7-1) -21.10% 42.02% 75.75% 4.98% 8.41% 10.87% 0.00%
3 R2 + (R7- R1) / (7-1) -11.61% 36.93% 60.46% 4.17% 6.81% 28.56% 0.00%


H5
=MAX(D3:D7)
11.1 1 2
wi (Weigth)
Rentabilidad (media anual)
Riesgo (Desv. Est. anual)
3
AXTELCPO.MX 0.00% -30.59% 48.73%
CEMEXCPO.MX 0.00% -0.38% 58.94%
C.MX (CITI) 0.00% -9.18% 77.00%
9 (10 y 11)
26.36% 32.25% 100.00%
FEMSAUBD.MX 100.00% 26.36% 32.25%
GFNORTEO.MX 0.00% 21.10% 48.36%
SUMA: 1
Valor mínimo: -30.59%
Valor máximo: 26.36%
4.1
9.49%
5
7
Portafolio Markowitz: K
Rendimiento E(rp): R
1 Valor mínimo Rent -30.59% 48.73%
2 R1 + (R7- R1) / (7-1) -21.10% 42.02%
3 R2 + (R7- R1) / (7-1) -11.61% 36.93%
4 R3 + (R7- R1) / (7-1) -2.11% 33.02%
5 R4 + (R7- R1) / (7-1) 7.38% 30.67%
6 R5 + (R7- R1) / (7-1) 16.87% 30.09%
7 Valor máximo Rent 26.36% 32.25%
Parámetros de Solver
Establecer objetivo: $H$5
Para: Máx. Mín Valor de: 0
Cambiando las celdas de variables:
$C$3:$C$7
Sujeto a las restricciones:
$C$8 = 1
$C$3:$C$7 >= 0
$G$5 = $H$22
Agregar
Cambiar
Eliminar
Restablecer todo
Cargar/Guardar
Convertir variables sin restricciones en no negativas
Método de resolución:
GRG Nonlinear
Opciones
Método de resolución



F22 | fx 7

	wi (Weigth)	Rentabilidad (media anual)	Riesgo (Desv. Est. anual)
	11.1	1	2
AXTELCPO.MX	0.00%	-30.59%	48.73%
CEMEXCPO.MX	0.00%	-0.38%	58.94%
C.MX (CITI)	0.00%	-9.18%	77.00%
FEMSAUBD.MX	100.00%	26.36%	32.25%
GFNORTEO.MX	0.00%	21.10%	48.36%
SUMA:	1		

4 Valor mínimo: -30.59%
Valor máximo: 26.36%

3 Varianza = [Transpuesta matriz de ponderación (Wi)] * [Matriz de Covarianza] * [Matriz de ponderación (Wi)] 0.1040058

Minimizando varianza del portafolio para cada E(rp)

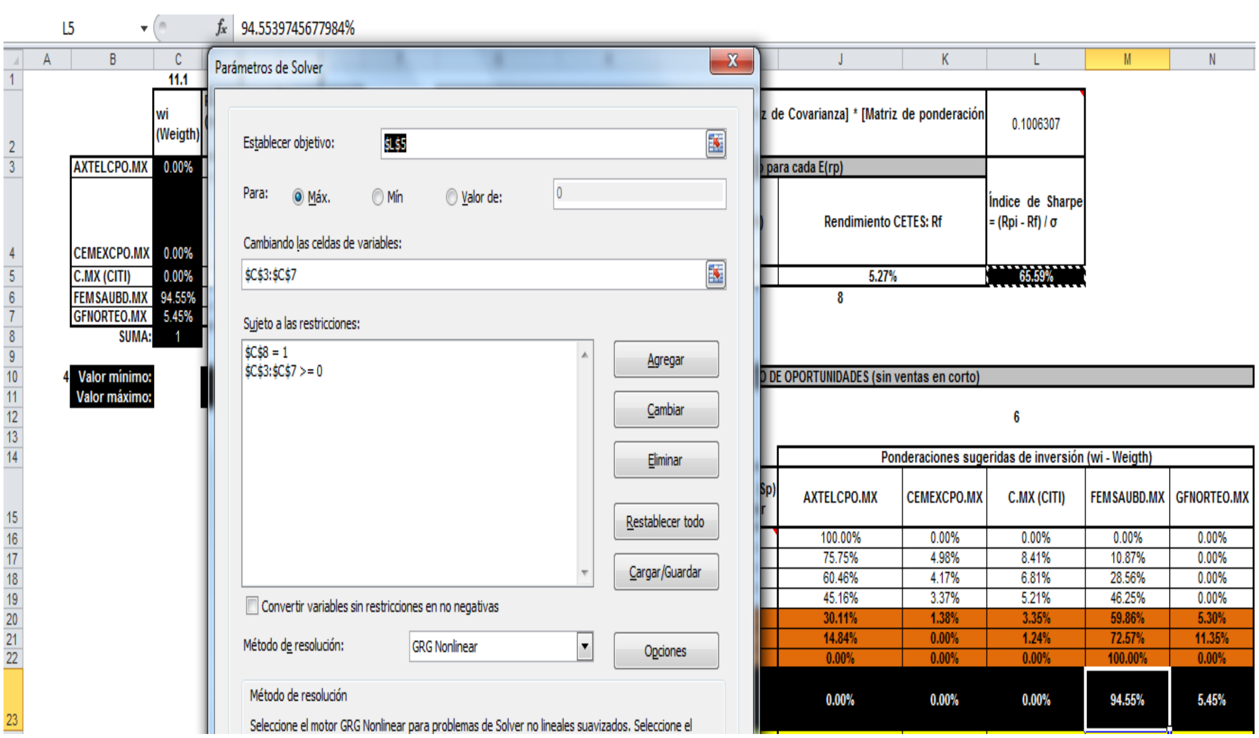
	Rendimiento (Rpi) = sumaproducto (Matriz Weight, Matriz Rentabilidad Anual)	Desvest (σ) = Raiz[Varianza]	suma wi (Weigth)	Rendimiento CETES: Rf	Índice de Sharpe = (Rpi - Rf) / σ
9 (10 y 11)	26.36%	32.25%	100.00%	5.27%	65.41%
				8	

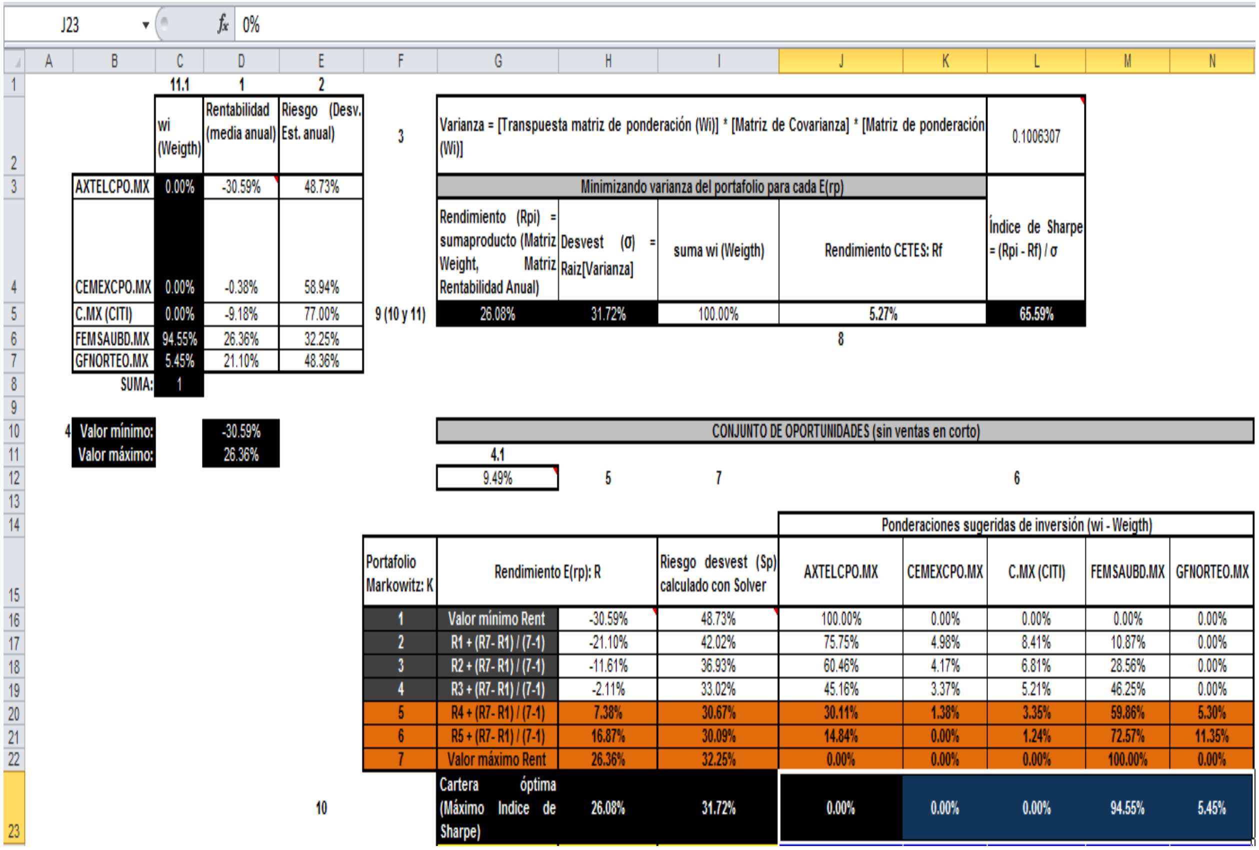
CONJUNTO DE OPORTUNIDADES (sin ventas en corto)

4.1
9.49% 5 7 6

Portafolio Markowitz: K	Rendimiento E(rp): R		Riesgo desvest (Sp) calculado con Solver	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
				Ponderaciones sugeridas de inversión (wi - Weigth)				
1	Valor mínimo Rent	-30.59%	48.73%	100.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
2	R1 + (R7- R1) / (7-1)	-21.10%	42.02%	75.75%	4.98%	8.41%	10.87%	0.00%
3	R2 + (R7- R1) / (7-1)	-11.61%	36.93%	60.46%	4.17%	6.81%	28.56%	0.00%
4	R3 + (R7- R1) / (7-1)	-2.11%	33.02%	45.16%	3.37%	5.21%	46.25%	0.00%
5	R4 + (R7- R1) / (7-1)	7.38%	30.67%	30.11%	1.38%	3.35%	59.86%	5.30%
6	R5 + (R7- R1) / (7-1)	16.87%	30.09%	14.84%	0.00%	1.24%	72.57%	11.35%
7	Valor máximo Rent	26.36%	32.25%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%	0.00%

Rentabilidad esperada del portafolio óptimo de Sharpe maximizando índice de Sharpe (riesgo) con función Solver.





	wi (Weigth)	Rentabilidad (media anual)	Riesgo (Desv. Est. anual)
AXTELCPO.MX	0.00%	-30.59%	48.73%
CEMEXCPO.MX	0.00%	-0.38%	58.94%
C.MX (CITI)	0.00%	-9.18%	77.00%
FEMSAUBD.MX	94.55%	26.36%	32.25%
GFNORTEO.MX	5.45%	21.10%	48.36%
SUMA:	1		

Valor mínimo:	-30.59%
Valor máximo:	26.36%

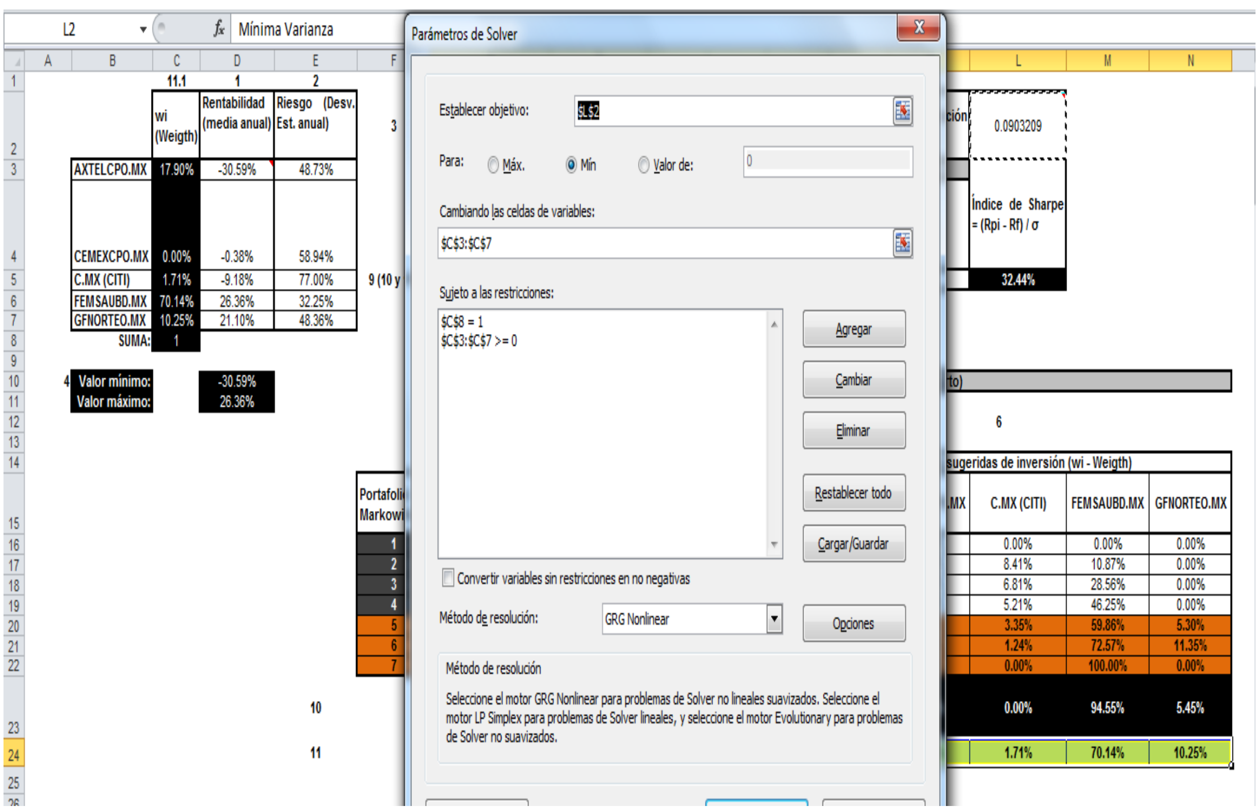
Varianza = [Transpuesta matriz de ponderación (Wi)] * [Matriz de Covarianza] * [Matriz de ponderación (Wi)]				0.1006307
Minimizando varianza del portafolio para cada E(rp)				
Rendimiento (Rpi) = sumaproducto (Matriz Weight, Matriz Rentabilidad Anual)	Desvest (σ) = Raiz[Varianza]	suma wi (Weigth)	Rendimiento CETES: Rf	Índice de Sharpe = (Rpi - Rf) / σ
26.08%	31.72%	100.00%	5.27%	65.59%

CONJUNTO DE OPORTUNIDADES (sin ventas en corto)

9.49%

Portafolio Markowitz: K	Rendimiento E(rp): R		Riesgo desvest (Sp) calculado con Solver	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
				Ponderaciones sugeridas de inversión (wi - Weigth)				
1	Valor mínimo Rent	-30.59%	48.73%	100.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
2	R1 + (R7- R1) / (7-1)	-21.10%	42.02%	75.75%	4.98%	8.41%	10.87%	0.00%
3	R2 + (R7- R1) / (7-1)	-11.61%	36.93%	60.46%	4.17%	6.81%	28.56%	0.00%
4	R3 + (R7- R1) / (7-1)	-2.11%	33.02%	45.16%	3.37%	5.21%	46.25%	0.00%
5	R4 + (R7- R1) / (7-1)	7.38%	30.67%	30.11%	1.38%	3.35%	59.86%	5.30%
6	R5 + (R7- R1) / (7-1)	16.87%	30.09%	14.84%	0.00%	1.24%	72.57%	11.35%
7	Valor máximo Rent	26.36%	32.25%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%	0.00%
	Cartera óptima (Máximo Indice de Sharpe)	26.08%	31.72%	0.00%	0.00%	0.00%	94.55%	5.45%

Rentabilidad esperada del portafolio minimizando varianza con función Solver.



G24 | f_x Mínima Varianza

	11.1	1	2
	wi (Weigth)	Rentabilidad (media anual)	Riesgo (Desv. Est. anual)
AXTELCPO.MX	17.90%	-30.59%	48.73%
CEMEXCPO.MX	0.00%	-0.38%	58.94%
C.MX (CITI)	1.71%	-9.18%	77.00%
FEMSAUBD.MX	70.14%	26.36%	32.25%
GFNORTEO.MX	10.25%	21.10%	48.36%
SUMA:	1		

3

Varianza = [Transpuesta matriz de ponderación (Wi)] * [Matriz de Covarianza] * [Matriz de ponderación (Wi)]				0.0903209
Minimizando varianza del portafolio para cada E(rp)				
Rendimiento (Rpi) = sumaproducto (Matriz Weight, Matriz Rentabilidad Anual)	Desvest (σ) = Raiz[Varianza]	suma wi (Weigth)	Rendimiento CETES: Rf	Índice de Sharpe = (Rpi - Rf) / σ
15.02%	30.05%	100.00%	5.27%	32.44%

9 (10 y 11)

8

4	
Valor mínimo:	-30.59%
Valor máximo:	26.36%

CONJUNTO DE OPORTUNIDADES (sin ventas en corto)

4.1

9.49%

5 7 6

Portafolio Markowitz: K	Rendimiento E(rp): R		Riesgo desvest (Sp) calculado con Solver	Ponderaciones sugeridas de inversión (wi - Weigth): AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
1	Valor mínimo Rent	-30.59%	48.73%	100.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
2	R1 + (R7- R1) / (7-1)	-21.10%	42.02%	75.75%	4.98%	8.41%	10.87%	0.00%
3	R2 + (R7- R1) / (7-1)	-11.61%	36.93%	60.46%	4.17%	6.81%	28.56%	0.00%
4	R3 + (R7- R1) / (7-1)	-2.11%	33.02%	45.16%	3.37%	5.21%	46.25%	0.00%
5	R4 + (R7- R1) / (7-1)	7.38%	30.67%	30.11%	1.38%	3.35%	59.86%	5.30%
6	R5 + (R7- R1) / (7-1)	16.87%	30.09%	14.84%	0.00%	1.24%	72.57%	11.35%
7	Valor máximo Rent	26.36%	32.25%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%	0.00%
10	Cartera óptima (Máximo Indice de Sharpe)	26.08%	31.72%	0.00%	0.00%	0.00%	94.55%	5.45%
11	Mínima Varianza	15.02%	30.05%	17.90%	0.00%	1.71%	70.14%	10.25%

Resumen índice de Sharpe para calcular pendiente o frontera eficiente de James Tobin.

H31 | f_x =(G5-G31)/H5

12	13	14	15
RESUMEN ÍNDICE DE SHARPE			
Rf (Rendimiento CETES)	Indice de Sharpe (Slope)	Optimo Rendimiento E(Rop)	Optimo Riesgo desvest (Sop)
5.27%	32.44%	26.08%	31.72%

16	17	18	19
PENDIENTE O FRONTERA EFICIENTE DE JAMES TOBIN			
y (Portafolio)	1-y (Risk Free)	Rendimiento esperado E(rp) = y * E(rop) + (1-y) * Rf	SD(P1) = y * Sop
0.00%	100.00%	5.27%	0.00%
50.00%	50.00%	15.67%	15.86%
70.00%	30.00%	19.83%	22.21%
100.00%	0.00%	26.08%	31.72%
120.00%	-20.00%	30.24%	38.07%
140.00%	-40.00%	34.40%	44.41%

I31 f_x =H23

12	13	14	15
RESUMEN ÍNDICE DE SHARPE			
Rf (Rendimiento CETES)	Indice de Sharpe (Slope)	Optimo Rendimiento E(Rop)	Optimo Riesgo desvest (Sop)
5.27%	32.44%	26.08%	31.72%

16	17	18	19
PENDIENTE O FRONTERA EFICIENTE DE JAMES TOBIN			
y (Portafolio)	1-y (Risk Free)	Rendimiento esperado E(rp) = y * E(rop) + (1-y) * Rf	SD(P1) = y * Sop
0.00%	100.00%	5.27%	0.00%
50.00%	50.00%	15.67%	15.86%
70.00%	30.00%	19.83%	22.21%
100.00%	0.00%	26.08%	31.72%
120.00%	-20.00%	30.24%	38.07%
140.00%	-40.00%	34.40%	44.41%

J31 f_x =I23

12	13	14	15
RESUMEN ÍNDICE DE SHARPE			
Rf (Rendimiento CETES)	Indice de Sharpe (Slope)	Optimo Rendimiento E(Rop)	Optimo Riesgo desvest (Sop)
5.27%	32.44%	26.08%	31.72%

16	17	18	19
PENDIENTE O FRONTERA EFICIENTE DE JAMES TOBIN			
y (Portafolio)	1-y (Risk Free)	Rendimiento esperado E(rp) = y * E(rop) + (1-y) * Rf	SD(P1) = y * Sop
0.00%	100.00%	5.27%	0.00%
50.00%	50.00%	15.67%	15.86%
70.00%	30.00%	19.83%	22.21%
100.00%	0.00%	26.08%	31.72%
120.00%	-20.00%	30.24%	38.07%
140.00%	-40.00%	34.40%	44.41%

G36 f_x 0%

12	13	14	15
RESUMEN ÍNDICE DE SHARPE			
Rf (Rendimiento CETES)	Indice de Sharpe (Slope)	Optimo Rendimiento E(Rop)	Optimo Riesgo desvest (Sop)
5.27%	32.44%	26.08%	31.72%

16	17	18	19
PENDIENTE O FRONTERA EFICIENTE DE JAMES TOBIN			
y (Portafolio)	1-y (Risk Free)	Rendimiento esperado E(rp) = y * E(rop) + (1-y) * Rf	SD(P1) = y * Sop
0.00%	100.00%	5.27%	0.00%
50.00%	50.00%	15.67%	15.86%
70.00%	30.00%	19.83%	22.21%
100.00%	0.00%	26.08%	31.72%
120.00%	-20.00%	30.24%	38.07%
140.00%	-40.00%	34.40%	44.41%

H36 fx =1-G36

12	13	14	15
RESUMEN ÍNDICE DE SHARPE			
Rf (Rendimiento CETES)	Indice de Sharpe (Slope)	Optimo Rendimiento E(Rop)	Optimo Riesgo desvest (Sop)
5.27%	32.44%	26.08%	31.72%

16	17	18	19
PENDIENTE O FRONTERA EFICIENTE DE JAMES TOBIN			
y (Portafolio)	1-y (Risk Free)	Rendimiento esperado E(rp) = y * E(rop) + (1-y) * Rf	SD(P1) = y * Sop
0.00%	100.00%	5.27%	0.00%
50.00%	50.00%	15.67%	15.86%
70.00%	30.00%	19.83%	22.21%
100.00%	0.00%	26.08%	31.72%
120.00%	-20.00%	30.24%	38.07%
140.00%	-40.00%	34.40%	44.41%

I36 fx =G36*$I$31+H36*$G$31

12	13	14	15
RESUMEN ÍNDICE DE SHARPE			
Rf (Rendimiento CETES)	Indice de Sharpe (Slope)	Optimo Rendimiento E(Rop)	Optimo Riesgo desvest (Sop)
5.27%	32.44%	26.08%	31.72%

16	17	18	19
PENDIENTE O FRONTERA EFICIENTE DE JAMES TOBIN			
y (Portafolio)	1-y (Risk Free)	Rendimiento esperado E(rp) = y * E(rop) + (1-y) * Rf	SD(P1) = y * Sop
0.00%	100.00%	5.27%	0.00%
50.00%	50.00%	15.67%	15.86%
70.00%	30.00%	19.83%	22.21%
100.00%	0.00%	26.08%	31.72%
120.00%	-20.00%	30.24%	38.07%
140.00%	-40.00%	34.40%	44.41%

J36 fx =+G36*$J$31

12	13	14	15
RESUMEN ÍNDICE DE SHARPE			
Rf (Rendimiento CETES)	Indice de Sharpe (Slope)	Optimo Rendimiento E(Rop)	Optimo Riesgo desvest (Sop)
5.27%	32.44%	26.08%	31.72%

16	17	18	19
PENDIENTE O FRONTERA EFICIENTE DE JAMES TOBIN			
y (Portafolio)	1-y (Risk Free)	Rendimiento esperado E(rp) = y * E(rop) + (1-y) * Rf	SD(P1) = y * Sop
0.00%	100.00%	5.27%	0.00%
50.00%	50.00%	15.67%	15.86%
70.00%	30.00%	19.83%	22.21%
100.00%	0.00%	26.08%	31.72%
120.00%	-20.00%	30.24%	38.07%
140.00%	-40.00%	34.40%	44.41%

Tabla 7. Determinación de varianza (riesgo) para cada portafolio

Varianza = [Transpuesta matriz de ponderación (Wi)] * [Matriz de Covarianza] * [Matriz de ponderación]			
Minimizando varianza del portafolio para cada E(rp)			
Rendimiento (Rpi) = sumaproducto (Matriz Weight, Matriz Rentabilidad Anual)	Desvest (σ) = Raiz[Varianza]	suma wi (Weigth)	Rendimiento CETES: Rf
26.08%	31.72%	100.00%	**5.27%**

Tabla 8. Determinación de las ponderaciones sugeridas de inversión "wi" para cada portafolio.

				Ponderaciones sugeridas de inversión (wi - Weigth)				
Portafolio Markowitz: K	Rendimiento E(rp): R		Riesgo desvest (Sp) calculado con Solver	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
1	Valor mínimo Rent	-30.59%	48.73%	100.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
2	R1 + (R7- R1) / (7-1)	-21.10%	42.02%	75.75%	4.98%	8.41%	10.87%	0.00%
3	R2 + (R7- R1) / (7-1)	-11.61%	36.93%	60.46%	4.17%	6.81%	28.56%	0.00%
4	R3 + (R7- R1) / (7-1)	-2.11%	33.02%	45.16%	3.37%	5.21%	46.25%	0.00%
5	R4 + (R7- R1) / (7-1)	7.38%	30.67%	30.11%	1.38%	3.35%	59.86%	5.30%
6	R5 + (R7- R1) / (7-1)	16.87%	30.09%	14.84%	0.00%	1.24%	72.57%	11.35%
7	Valor máximo Rent	26.36%	32.25%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%	0.00%

Fuente. Elaboración propia con datos históricos YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/). Se utilizó la función "Solver" en Excel, minimizando celda objetivo "desvest (Sp)" condicionada a cada "E (rp)".

Tabla 9. Integración del índice de Sharpe para determinar la cartera óptima de inversión con la máxima rentabilidad esperada y mínimo riesgo.

Varianza = [Transpuesta matriz de ponderación (Wi)] * [Matriz de Covarianza] * [Matriz de ponderación]				0.1006307
Minimizando varianza del portafolio para cada E(rp)				Índice de Sharpe = (Rpi - Rf) / σ
Rendimiento (Rpi) = sumaproducto (Matriz Weight, Matriz Rentabilidad Anual)	Desvest (σ) = Raiz[Varianza]	suma wi (Weigth)	Rendimiento CETES: Rf	
26.08%	31.72%	100.00%	**5.27%**	**65.59%**

Fuente. Elaboración propia con datos históricos YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Tabla 10. Ponderaciones sugeridas de inversión "wi", para el portafolio óptimo de inversión (Máximo índice de Sharpe).

	wi (Weigth)	Rentabilidad (media anual)	Riesgo (Desv. Est. anual)
AXTELCPO.MX	0.00%	-30.59%	48.73%
CEMEXCPO.MX	0.00%	-0.38%	58.94%
C.MX (CITI)	0.00%	-9.18%	77.00%
FEMSAUBD.MX	94.55%	26.36%	32.25%
GFNORTEO.MX	5.45%	21.10%	48.36%
SUMA:	1		

			Ponderaciones sugeridos de inversión (wi - Weigth)				
Rendimiento E(rp): E		Riesgo desvest (Sp) calculado con Solver	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
Cartera óptima (Máximo Indice de Sharpe)	26.08%	31.72%	0.00%	0.00%	0.00%	94.55%	5.45%

Fuente. Elaboración propia con datos históricos YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).
Se utilizó función "Solver" de Excel maximizando celda objetivo "Índice de Sharpe".

Tabla 11. Determinación de las ponderaciones sugeridas de inversión "wi" para el portafolio de inversión con mínima varianza.

Varianza = [Transpuesta matriz de ponderación (Wi)] * [Matriz de Covarianza] * [Matriz de ponderación]				0.0903207
Minimizando varianza del portafolio para cada E(rp)				
Rendimiento (Rpi) = sumaproducto (Matriz Weight, Matriz Rentabilidad Anual)	Desvest (σ) = Raiz[Varianza]	suma wi (Weigth)	Rendimiento CETES: Rf	Índice de Sharpe = (Rpi - Rf) / σ
15.02%	30.05%	100.00%	5.27%	32.44%

	wi (Weigth)	Rentabilidad (media anual)	Riesgo (Desv. Est. anual)
AXTELCPO.MX	17.90%	-30.59%	48.73%
CEMEXCPO.MX	0.00%	-0.38%	58.94%
C.MX (CITI)	1.71%	-9.18%	77.00%
FEMSAUBD.MX	70.14%	26.36%	32.25%
GFNORTEO.MX	10.25%	21.10%	48.36%
SUMA:	1		

			Ponderaciones sugeridos de inversión (wi - Weigth)				
Rendimiento E(rp): E		Riesgo desvest (Sp) calculado con Solver	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
Mínima Varianza	15.02%	30.05%	17.90%	0.00%	1.71%	70.14%	10.25%

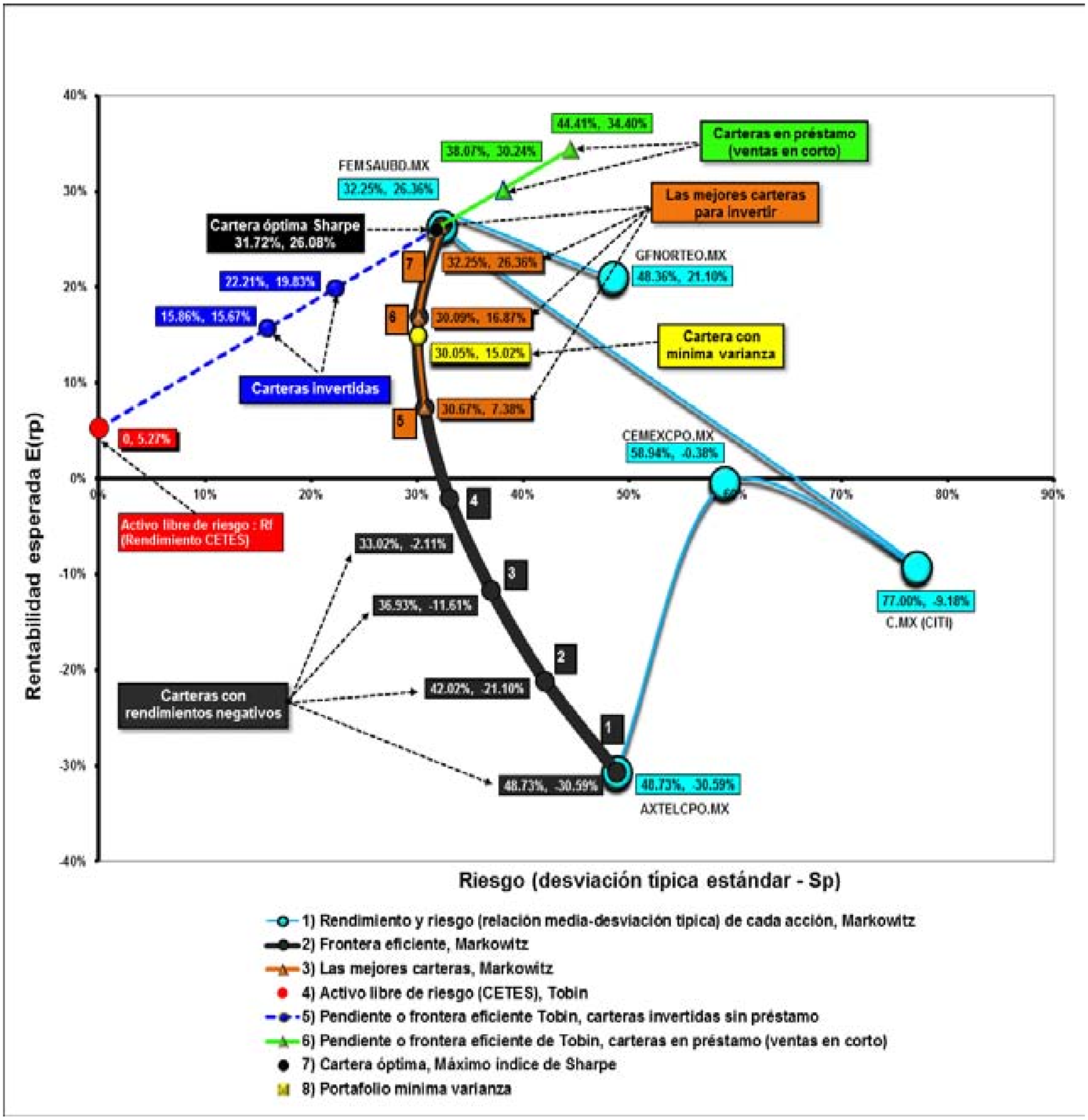
Fuente. Elaboración propia con datos históricos YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).
Se utilizó función "Solver" de Excel minimizando celda objetivo "Varianza".

Tabla 12. Frontera eficiente de James Tobin, presupuesto invertido y en préstamo-ventas en corto.

PENDIENTE O FRONTERA EFICIENTE DE JAMES TOBIN			
y (Portafolio)	1-y (Risk Free)	Rendimiento esperado E(rp) = y * E(rop) + (1-y) * Rf	SD(P1) = y * Sop
0.00%	100.00%	5.27%	0.00%
50.00%	50.00%	15.67%	15.86%
70.00%	30.00%	19.83%	22.21%
100.00%	0.00%	26.08%	31.72%
120.00%	-20.00%	30.24%	38.07%
140.00%	-40.00%	34.40%	44.41%

Fuente. Elaboración propia con datos históricos YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Gráfica 13. Teoría moderna de portafolio de Markowitz con aportación básica de Tobin y William Sharpe. Enero 2008 – Octubre 2012.



Fuente. Elaboración propia con datos históricos YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Se observa que el portafolio óptimo Sharpe presenta una rentabilidad máxima del 26% con un riesgo específico del 31.72% y una ponderación de distribución del presupuesto "w" del 94.55% en FEMSAUBD.MX y 5.45% en GFNORTEO.MX, y aunque esta cartera muestra la combinación óptima posible de la relación rendimiento-riesgo, no significa que el inversor necesariamente tenga que invertir en estas acciones o proporciones, pues todo dependerá de su grado de aversión al riesgo teniendo como alternativas todas aquellas carteras ubicadas sobre la frontera eficiente que le generen rendimientos positivos, por ejemplo las carteras 5, 6 o 7 o la combinación entre ellas. Sin embargo, es importante mencionar que estos resultados también debemos analizarlos de la siguiente forma:

Si el presupuesto de un inversor fuera de $5,000,000 y deseara obtener una rentabilidad del 25%, ¿cómo lo distribuiría en el portafolio óptimo de Sharpe y el activo libre de riesgo?, ¿cuál sería el nivel de riesgo adquirido?. Para contestar estas preguntas se construyó la siguiente tabla:

Tabla13. Distribución del presupuesto en el portafolio óptimo de Sharpe y activo libre de riesgo para obtener una rentabilidad esperada del 26.08% al 25% para un monto de $5, 000, 000.

Monto a Invertir: Mi	$ 5,000,000.00			
% Rentabilidad esperada: E(Rc)	y = (E(Rc) - Rf) / (E(Rop) / Sop)	1-y	Riesgo adquirido Desvest Sp = SDc = y * E(sop)	
26.08%	100.00%	0.00%	31.72%	
Activos	Portafolio óptimo Sharpe: wi	InvS = wi * Mi	Cartera = InvS * y	
AXTEL CPO	0.00%	$0.00	$0.00	
CEMEX CPO	0.00%	$0.00	$0.00	
C* (CITI)	0.00%	$0.00	$0.00	% Inversión en portafolio óptimo = SDc / Mi
FEMSA UBD	94.55%	$4,727,698.73	$4,727,698.73	94.55%
GFNORTE	5.45%	$272,301.27	$272,301.27	5.45%
	Suma:	$5,000,000.00	$5,000,000.00	
	CETES:	Mi * (1-y) =	$0.00	0.00%
	TOTAL CARTERA:	Suma Cartera + CETE =	$5,000,000.00	100.00%
	RENTABILIDAD ESPERADA:	Mi * E(Rc) =	$1,303,831.71	
	RIESGO ADQUIRIDO:	Suma Cartera * Sdc =	$1,586,117.40	
	UTILIDAD ESPERADA:	Rentabilidad - Riesgo =	-$282,285.70 -5.65%	

Monto a Invertir: Mi	$ 5,000,000.00			
% Rentabilidad esperada: E(Rc)	y = (E(Rc) - Rf) / (E(Rop) / Sop)	1-y	Riesgo adquirido Desvest Sp = SDc = y * E(sop)	
25.00%	94.83%	5.17%	30.08%	
Activos	Portafolio óptimo Sharpe: wi	InvS = wi * Mi	Cartera = InvS * y	
AXTEL CPO	0.00%	$0.00	$0.00	
CEMEX CPO	0.00%	$0.00	$0.00	
C* (CITI)	0.00%	$0.00	$0.00	% Inversión en portafolio óptimo = SDc / Mi
FEMSA UBD	94.55%	$4,727,698.73	$4,483,079.68	89.66%
GFNORTE	5.45%	$272,301.27	$258,211.95	5.16%
	Suma:	$5,000,000.00	$4,741,291.63	
	CETES:	Mi * (1-y) =	$258,708.37	5.17%
	TOTAL CARTERA:	Suma Cartera + CETE =	$5,000,000.00	100.00%
	RENTABILIDAD ESPERADA:	Mi * E(Rc) =	$1,250,000.00	
	RIESGO ADQUIRIDO:	Suma Cartera * Sdc =	$1,426,227.02	
	UTILIDAD ESPERADA:	Rentabilidad - Riesgo =	-$176,227.02 -3.52%	

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Se observa que para obtener una rentabilidad del 25% ($1,250,000.00) el inversor adquiere un riesgo del 30.08% ($1,504,049.03) indicando una exposición a posible pérdida de utilidad del 3.82% ($176,227.02). Lo que sugiere designar un mayor peso de inversión para el activo libre de riesgo en lugar del portafolio óptimo de Sharpe tratando de encontrar la mejor rentabilidad esperada, o bien encontrar otro portafolio óptimo de Sharpe con activos diferentes que no fueron analizados en el presente trabajo que alcancen el 25% de rentabilidad esperada con un menor riesgo. Sin embargo, para efectos prácticos en este trabajo se identificó únicamente la rentabilidad esperada (12%) que brinda la mayor utilidad posible (8.68%), como se muestra a continuación:

Tabla13. Rentabilidad esperada que brinda la mayor utilidad posible de cartera por la combinación del portafolio óptimo de Sharpe y el activo libre de riesgo para cualquier cantidad de inversión.

Monto a Invertir: Mi	$ 5,000,000.00			
% Rentabilidad esperada: E(Rc)	y = (E(Rc) - Rf) / (E(Rop) / Sop)	1-y	Riesgo adquirido Desvest Sp = SDc = y * E(sop)	
12.00%	32.35%	67.65%	10.26%	
Activos	Portafolio óptimo Sharpe: wi	InvS = wi * Mi	Cartera = InvS * y	
AXTEL CPO	0.00%	$0.00	$0.00	
CEMEX CPO	0.00%	$0.00	$0.00	
C* (CITI)	0.00%	$0.00	$0.00	% Inversión en portafolio óptimo = SDc / Mi
FEMSA UBD	94.55%	$4,727,698.73	$1,529,385.79	30.59%
GFNORTE	5.45%	$272,301.27	$88,088.04	1.76%
	Suma:	$5,000,000.00	$1,617,473.83	
	CETES:	Mi * (1-y) =	$3,382,526.17	67.65%
	TOTAL CARTERA:	Suma Cartera + CETE =	$5,000,000.00	100.00%
	RENTABILIDAD ESPERADA:	Mi * E(Rc) =	$600,000.00	
	RIESGO ADQUIRIDO:	Suma Cartera * Sdc =	$165,985.38	
	UTILIDAD ESPERADA:	Rentabilidad - Riesgo =	$434,014.62 8.68%	

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

CAPÍTULO II

MODELO FIJACIÓN DE PRECIOS DE ACTIVOS DE CAPITAL (CAPM), WILLIAM SHARPE

2.1 Fundamentos CAPM.

El trabajo de Markowitz, que comenzó siendo en 1952 como un sencillo modelo de selección de cartera, posteriormente en la década de los sesentas se convirtió en un modelo de general de equilibrio del mercado de capitales denominado "Modelo de Fijación de Precios de Activos de Capital" (Capital Asset Pricing Model o CAPM), desarrollado por William Sharpe en 1964, John Litner (1965) y Jan Mossin (1966). Este nuevo modelo parte del supuesto que todos los inversores son diversificadores eficientes y donde el mercado cumple determinadas hipótesis, cuestiona qué precios de equilibrio de los activos financieros se presentarán cuando todos los inversores toman sus decisiones de inversión acorde a un modelo basado en dos parámetros de selección de cartera donde el equilibrio del mercado de bienes de consumo, el de factores productivos (incluido el mercado de trabajo) y el de mercado monetario (donde se negocian activos financieros con vencimiento a corto plazo de nulo a bajo riesgo) se deducen precios de equilibrio de activos financieros arriesgados. Estos dos parámetros son:

a) Los inversores tienen expectativas homogéneas, pues todos llegan a las mismas estimaciones de los títulos (rendimiento esperado, desviación típica, covarianza). Al ser coincidente el punto de vista sobre el curso de la evolución futura de los precios, parten de las mismas funciones de distribución de los rendimientos de los títulos.

b) Los mercados de capitales están en equilibrio al principio del período (único de planificación), donde la oferta de los títulos iguala a la demanda de los mismos. Cualquier cantidad de suma en préstamo por la totalidad de los inversores deberá coincidir con la cantidad total prestada a una tasa de interés libre de riesgo exógena al modelo CAPM, pero donde los precios de equilibrio de los activos financieros son determinados por el modelo.

Aunque estos supuestos son excesivamente simplificadores de la realidad, Sharpe en 1976 los considero fundamentales dentro de su modelo, pues opinaba que si las conclusiones eran razonablemente consistentes con los fenómenos observados la teoría podía ser explicada. CAPM plantea que si los inversores son diversificadores eficientes y tienen a su disposición un activo libre de riesgo, la frontera eficiente se volverá lineal permitiendo al inversor seleccionar únicamente dos activos como lo planteó Tobin originalmente en el teorema de la separación:

a) Si los inversores tuvieran expectativas diferentes sobre el futuro (partiesen de previsiones distintas de los parámetros media, varianza y covarianza), cada inversor tendría una cartera tangente distinta pero con una tasa única e igual correspondiente al activo libre de riesgo (interés que iguala la oferta con la demanda).

b) Si las expectativas son homogéneas, como supone el CAPM, la frontera eficiente y la cartera tangente serían iguales para todos los inversores, de modo que todos ellos formarían carteras compuestas con solo dos activos: la cartera tangente (con un peso positivo o nulo) y el activo libre de riesgo (con un peso positivo, negativo o nulo), según el grado de aversión reflejado en la forma que adopten sus curvas de indiferencia más o menos convexas y verticales.

William Sharpe considera que la diversificación puede reducir el riesgo específico, pero no el riesgo sistemático determinado por el propio mercado en un entorno eficiente, pues a pesar de que cada inversor tendrá la misma información y oportunidades de rendimiento sobre cualquier activo(s) o cartera(s), no podrá evitar el riesgo a posibles pérdidas por la sensibilidad a cambios del conjunto de rendimientos en el mercado, existiendo una relación lineal entre la rentabilidad esperada de cada acción y su contribución marginal a dicho riesgo. El riesgo sistemático o no diversificable es un riesgo común, interpretándose como la posible inestabilidad del sistema financiero potencialmente catastrófico o de gran impacto, causado por eventos o condiciones en los intermediarios financieros e interdependencia de un sistema o mercado. En este tipo de riesgo la existencia de un fallo puede causar crisis económicas tipo cascada, generando recesión y pérdidas financieras grandes y difíciles de evaluar, donde el intento de la diversificación de portafolios puede resultar de poca relevancia. Considera que el riesgo no sistemático, específico, propio o diversificable es el particular de cada emisora como resultado a factores principalmente internos o de su propio mercado, como el lanzamiento de un nuevo producto o una fusión estratégica empresarial, el cual generalmente impacta de manera particular y no al resto del mercado, excepto que genere una alteración importante en otros mercados por su alta incidencia, concentración o preponderancia. Otro ejemplo sobre este tipo de riesgo, puede ser el incremento o degradación de la calificación relativa a la capacidad de pago de la empresa que emite el instrumento de inversión.

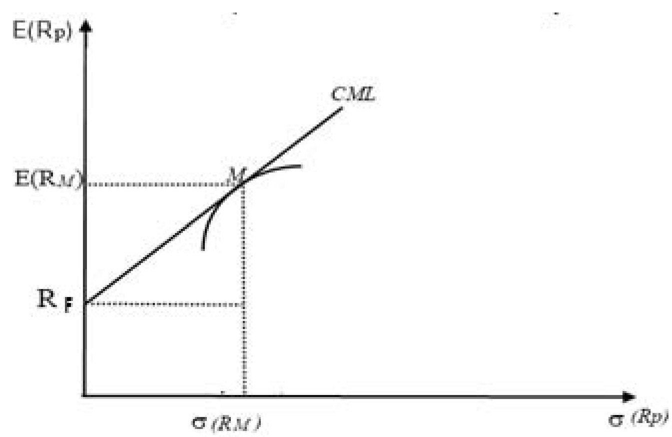
Premisas CAPM:

- Los inversores buscan formar carteras eficientes dado que son aversos al riesgo, por lo que se comportan de acuerdo al modelo media-varianza propuesto por Markowitz.
- Todas las inversiones tienen para su planificación el mismo período u horizonte de operación, al igual que la teoría moderna de portafolios.
- Existe competencia perfecta, por lo que no se puede influir sobre el precio del activo.
- Existe información simétrica, por lo que asume eficiencia de mercado y que los inversores tengan expectativas homogéneas visualizando idénticas funciones de probabilidad para los rendimientos futuros.
- Todos los activos son perfectamente divisibles y comercializables.
- No existen impuestos, comisiones, costos de transacción ni de información.
- Cada comprador o vendedor tiene efectos prácticamente insignificantes sobre el mercado.
- Existe cualquier cantidad de dinero para prestar o pedir prestada a una misma tasa de interés para los inversores, es decir, no existen restricciones que imposibiliten vender a corto o endeudamiento a la tasa libre de riesgo.
- Existe una tasa libre de riesgo e ilimitadas probabilidades de prestar y pedir prestado a cierta tasa.
- No existe inflación.

Línea del mercado de capitales (Capital Market Line - CML), rentabilidad y riesgo de carteras eficientes.

Si suponemos que el mercado de capitales está en equilibrio, la única forma de que todos los inversores puedan ver satisfecha la demanda de títulos arriesgados, es que esta coincida con la oferta global de dichos títulos existentes en el mercado. Lo que será posible si la cartera tangente llamada "T" es la cartera de mercado "M" compuesta por todos los títulos arriesgados existentes como lo muestra la siguiente gráfica:

Gráfica 14. Línea mercado de capitales CML, rentabilidad y riesgo de carteras eficientes (CML).



Fuente. Elaboración propia basada en Teoría de la Financiación.

La cartera de mercado "M" que desearán mantener con mayor o menor presupuesto todos los inversores, será independiente de la actitud que cada inversor tenga frente al riesgo siendo su composición la misma del mercado.

Si denominamos "Pi" y "Qi" al precio y al número de cada título o acción arriesgado y negociado, la proporción con que invierte cada valor dentro de la cartera será el porcentaje que representa la capitalización total del mercado, interpretado como:

$$w_i^M = \frac{P_i\, Q_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i\, Q_i}$$

Donde,

$$\sum_{i=1}^{n} w_i^M = 1$$

La recta que representa la frontera eficiente de todos los inversores y que surge como consecuencia de la introducción de los dos supuestos de las expectativas homogéneas y de equilibrio de mercado, Sharpe en 1964 la denominó línea del mercado de capitales CML (Capital Market Line), el cual dependerá únicamente de dos activos financieros:

a) Uno sin riesgo, ordenada en el origen R_F y
b) Otro con riesgo, pendiente $\overline{R}_M$;

$$E(\overline{R}_M) = w\, R_F \;\; + \; (1 - \overline{R}_T)$$

Analíticamente, su expresión es la misma que la siguiente ecuación indicativa de la frontera eficiente lineal sólo que sustituye la cartera “T”, propia de cada inversor, por la cartera de mercado “M” que es única e igual para todos los inversores:

$$E(\overline{R}_p) = R_F + \left(\frac{E(\overline{R}_M) - R_F}{\sigma_M} \right) \sigma_p$$

Si llamamos λ a la constante siguiente:

$$\lambda = \left(\frac{E(\overline{R}_M) - R_F}{\sigma_M} \right)$$

Por lo que la ecuación CML finalmente se define como:

$$E(\overline{R}_p) = R_F + \lambda\, \sigma_p$$

Recordemos que $E(\overline{R}_p)$ y σ_P son las medidas adecuadas para medir la rentabilidad y el riesgo de una cartera de valores en los ejes (E,σ) por lo que la CML nos indica la relación entre la rentabilidad y el riesgo de las carteras eficientes. Las carteras ineficientes se situarán por debajo de la CML, donde para una misma desviación típica tendrán un rendimiento esperado menor.

Únicamente las carteras eficientes se sitúan sobre la CML, descomponiéndose su rentabilidad en dos partes:

R_F: La ordenada en el origen de la CML representando la tasa de interés que representa el premio por esperar y consumir en tiempo futuro, en el lugar de hacerlo en el momento presente.

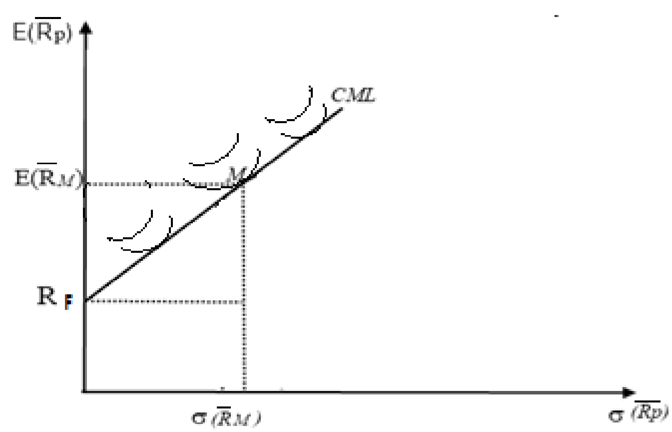
λ: Pendiente de la CML siendo una constante que multiplica el riesgo de la cartera. Recibe el nombre de precio de mercado, o bien: premio por asumir el riesgo si se pasa de una cartera eficiente a otra con mayor eficiencia; precio por reducir el riesgo cuando la pérdida de rentabilidad que se va a sufrir se pasa de una cartera eficiente a otra menos arriesgada.

Línea del mercado de los títulos o valores (Security Market Line - SML), rentabilidad y riesgo de carteras eficientes y no eficientes.

Debido a que CML indica exclusivamente la relación de equilibrio entre rentabilidad y riesgo de carteras eficientes (descartando a las no eficientes), Sharpe en su modelo CAPM propone una recta denominada "Línea de Mercado de Títulos" (Security Market Line – SML), que mostrará la relación de equilibrio entre rentabilidad y riesgo de cualquier tipo de cartera. A esta nueva recta se le conoce como la ecuación fundamental del CAPM y que por término medio el mercado va a ofrecer a cualquier inversor independientemente si éste ha diversificado o no su presupuesto, pues quizás decide colocarlo todo en un solo título.

Para llegar a la SML se parte de la ecuación CML y del "*teorema de la separación*" de Tobin, con el que recordemos, considera que todas las carteras eficientes situadas sobre CML serán una combinación lineal de un activo sin riesgo "F" y otro con riesgo denominado de mercado "M" en el supuesto de expectativas homogéneas y un mercado en equilibrio, donde los inversores pueden elegir la misma cartera y los diferentes grados de aversión al riesgo (representado por sus curvas de indiferencia) que se situarán en cualquier punto de la recta CML, interpretándose como el lugar que los inversores estarán dispuestos a colocar sus ahorros únicamente en el activo libre de riesgo o cartera de mercado, o bien, parte en el título sin riesgo y lo demás en la cartera de mercado o activos arriesgados solicitando un préstamo a una tasa "R*F*". Para interpretar esto de mejor forma se muestra la siguiente gráfica:

Gráfica 15. Diferentes carteras óptimas de los inversores



Fuente. Elaboración propia basada en Teoría de la Financiación.

El rendimiento de una cartera eficiente se expresa como la media ponderada de los rendimientos de los dos únicos activos en los que invierten los individuos diversificadores eficientes:

$$\overline{Rp} = w\,R_F + \left(1 - w\right)\,\overline{R_M}$$

Esta ecuación es la causa de que el coeficiente de correlación entre el rendimiento de mercado de cualquier cartera eficiente "P" y la cartera de mercado "M" sea la unidad como a continuación se muestra:

$$\rho_{PM} = \frac{cov\,(\overline{R}_p, \overline{R}_M)}{[illegible]} = \frac{\sigma_{pM}}{[illegible]} = 1$$

Es decir, para la relación de equilibrio SML se parte de la línea del mercado de capitales CML, considerando que el coeficiente de correlación entre el rendimiento de cualquier cartera eficiente y el rendimiento de la cartera de mercado es la unidad.

Si despejamos σ_p de la fórmula del coeficiente de correlación:

$$\sigma_p = \frac{\sigma_{pM}}{\sigma_M}$$

Y la sustituimos en la ecuación CML:

$$E(\overline{R}_p) = R_F + \left(\frac{E(\overline{R}_M) - R_F}{\sigma_M} \right) \sigma_p = R_F + \left(\frac{E(\overline{R}_M) - R_F}{\sigma_M} \right) \frac{\sigma_{pM}}{\sigma_M}$$

Obtenemos la siguiente ecuación de regresión lineal entre la rentabilidad de un título y la rentabilidad de la cartera de mercado:

$$E(\overline{R}_p) = R_F + \left(E(\overline{R}_M) - R_F \right) \frac{\sigma_{pM}}{\sigma^2_M}$$

Con pendiente:

$$\beta_p = \frac{\sigma_{pM}}{\sigma^2_M}$$

Expresándose entonces:

$$E(\overline{R}_p) = R_F + \left(E(\overline{R}_M) - R_F \right) \beta_p$$

Llegando finalmente a la ecuación de la línea del mercado de títulos SML (relación fundamental del CAPM):

$$E(\overline{R}_i) = R_F + \left(E(\overline{R}_M) - R_F \right) \beta_i$$

El subíndice "i" indica que las carteras eficientes se sitúan tanto sobre la CML como en la SML. La línea SML permitirá calcular la proporción de recompensa al riesgo para cualquier activo en relación con el mercado general, sin embargo, restaría comprobar que esta relación también se cumple en las carteras ineficientes y títulos individuales. Para ello, ahora nos apoyaremos en la relación lineal que mantienen las betas de los títulos dentro de una cartera.

La prueba consiste en que un título en particular con determinado coeficiente beta (βi) se puede replicar mediante una cartera eficiente de dos instrumentos (el activo libre de riesgo y la cartera de mercado) obteniéndose la misma beta. Esa cartera eficiente que replica al título "i" se consigue invirtiendo un porcentaje igual a (1- βi) en el activo libre de riesgo, y el resto en un porcentaje igual a βi en la cartera de mercado:

$$\overline{Rp} = w\,R_F + (1-w)\,\overline{R_M} = (1-\beta_i)\,R_F + \beta_i\,\overline{R_M}$$

Por lo que la ecuación de la línea del mercado de títulos SML podemos expresarla como:

$$E(r_i) = \overline{r_f} + \beta_{im} * E(\overline{r_m} - \overline{r_f})$$

$$\beta_{im} = \frac{Cov(r_i, r_m)}{Var(r_m)}$$

Donde,

$E(r_i)$: Tasa de rendimiento esperada de capital del activo "*i*".

β_{im}: Riesgo sistemático del portafolio asumido en el mercado

$E(r_m) - r_f$: Prima o exceso de rentabilidad del portafolio de mercado.

$\overline{r_m}$: Promedio de la rentabilidad del mercado.

$\overline{r_f}$: Promedio de la rentabilidad del activo de referencia o libre de riesgo.

r_i: Rentabilidad del activo en el dato "i" (matriz).

r_m: Rentabilidad del mercado (IPC) en el dato "i" (matriz).

Si despejamos al activo libre de riesgo "*rf*", se crea la prima del riesgo del activo que dependerá directamente de la prima de riesgo del mercado, expresándose a través de la siguiente ecuación:

$$(\overline{r_i} - \overline{r_f}) = \beta_{im} * E(\overline{r_m} - \overline{r_f}) + \varepsilon$$

$$\beta_{im} = \frac{Cov(r_i, r_m)}{Var(r_m)}$$

Donde,

$(\overline{r_i} - \overline{r_f})$: Prima de riesgo de la acción en el pasado.

$(\overline{r_m} - \overline{r_f})$: Prima de riesgo del mercado en el pasado.

ε: Errores o residuos.

β_{im}: Coeficiente beta representado del portafolio.

r_i : Rentabilidad del activo en el dato “i” (matriz).
r_m: Rentabilidad del mercado (IPC) en el dato “i” (matriz).

El coeficiente beta es un índice que permitirá medir la sensibilidad de variación de la rentabilidad de una acción respecto al riesgo sistemático, es decir, debido a fluctuaciones del mercado. Dicho de otra forma, evalúa el riesgo de la acción no solo en función de su desviación típica estándar y varianza, sino también en forma conjunta respecto a la variación del mercado a través de un análisis de varianzas y covarianzas matriciales aplicando de un modelo estadístico de regresión lineal, facilitando la identificación del grado de asociación o dependencia entre las acciones, su sensibilidad a la variación del mercado, la estimación de la rentabilidad esperada futura y su prima de riesgo.

La ecuación de la línea del mercado de títulos SML, se resume como:

$$E(r_i - r_f) = \alpha + \beta_{im} * E(r_m - r_f) + \varepsilon$$

O bien:

$$E(r_i) = r_f + \beta_{im} * E(r_m - r_f)$$

Donde,

$(r_i - r_f)$: Prima de riesgo de la acción en el pasado o rentabilidad de la cartera. Variable dependiente a explicar.

$(r_m - r_f)$: Prima de riesgo del mercado en el pasado o rentabilidad del mercado. Variable independiente o explicativa.

ε: Errores o residuos.

α: Es una constante que define el punto de intersección de la recta de regresión con el eje de ordenadas.

β_{im}: Coeficiente beta. Pendiente de la recta de regresión o elasticidad de los movimientos de la rentabilidad del activo o cartera, ante los movimientos de la rentabilidad del mercado (riesgo sistemático). Donde su valor se interpreta de la siguiente forma:

a) Si beta > 1, las acciones subirán y bajarán más que el mercado. Por ejemplo, si su valor es 1.3, quiere decir que por cada unidad que aumente el mercado: el activo o cartera lo hará en 1.3 unidades; los rendimientos de la empresa cambiarán en 1.3 veces; el activo o cartera tiene un 30% mayor de riesgo que el promedio de todo el mercado. Betas altas denotan más volatilidad (un beta de 1.65 quiere decir que es 65% más volátil que el mercado). Lo anterior se basa en el principio de que los inversionistas entre más riesgosa sea su inversión es probable que recurran a mayores retornos o rendimientos, y en bonanza económica es normal que operen con un beta elevado. En una empresa minera de oro probablemente tendrá un beta positivo, porque ante un incremento no anticipado de inflación generalmente está asociado con el aumento del precio del oro. Cuando un activo tiene un beta mayor que “1” se llama agresivo.

b) Si beta = 1, las acciones subirán y bajarán igual que el mercado. Esto quiere decir que por cada unidad que aumente el mercado, el activo o portafolio lo hará en la misma proporción.

c) Si beta < 1, las acciones subirán y bajarán menos que el mercado. Si beta es 0.4, por cada unidad que aumente el mercado: el activo o portafolio lo hará en 0.4 unidades; el activo o cartera tiene un 60% menor de riesgo que el promedio de todo el mercado; es 60 % menos volátil que el mercado. En épocas o periodos de turbulencia, el inversionista racional regularmente buscará betas pequeñas. Cuando un activo tiene beta menor que "1" se llama defensivo.

d) Si beta = 0, el retorno esperado será el valor del activo libre de riesgo "Rf" (risk free), que para nuestro objeto de estudio es el CETE.

2.2 Regresión lineal simple recta CML y SML (sensibilidad variación de mercado).

Recordando que la línea de mercado de títulos o valores (Security Market Line - SML), se puede determinar a través de un modelo de regresión lineal simple que analice la relación entre la variable respuesta (Y: rentabilidad del activo o portafolio óptimo) y la variable regresora (X: sensibilidad a la variación de mercado, en nuestro caso representado por el índice de precios y cotizaciones - IPC) a partir de una muestra $\{(Xi, Yi)\}_{i=1}^{n}$.

La representación matemática de esta regresión lineal, queda representada como:

$$Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \varepsilon_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Cuando en este tipo de modelos se estudia la relación estocástica cuantitativa entre una variable de interés (variable respuesta o dependiente "Y") y un conjunto de variables regresoras (variable explicativa o independientes "$X_1, X_2, \ldots, X_k$"), pueden darse las siguientes situaciones:

- Existe una relación funcional entre ellas: el conocimiento de las variables regresoras determina completamente el valor que toma la variable respuesta, es decir: $Y = m(X_1, X_2, \ldots, X_k)$.

- No existe relación entre la variable respuesta y las variables regresoras: el conocimiento de estas variables no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la otra.

- El caso intermedio, existe una relación estocástica entre la variable respuesta y las variables regresoras: el conocimiento de éstas permiten predecir con mayor o menor exactitud el valor de la variable respuesta siguiendo un modelo de la forma, $Y = m(X_1, X_2, \ldots, X_k) + \varepsilon$, siendo "m" la función de regresión desconocida y "ε" una variable aleatoria de media cero (error de observación). Este tipo de relaciones son las que ocurren en la mayoría de las situaciones.

El objetivo de un modelo de regresión es estimar la función de regresión "m" y un modelo probabilístico que siga el error aleatorio "ε", es decir que estime la función de distribución $f(\varepsilon)$ de la variable de error.
Se verifican las siguientes hipótesis:

a) La función de regresión es lineal:

$$m(x_i) = E\ (Y/x_i) = \alpha_0 + \alpha_1\, x_i$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

o equivalentemente, $E(\varepsilon i) = 0$, $i = 1,\ldots,n$.

b) La varianza es constante (homocedasticidad):

$$Var\,(Y/x_i) = \sigma^2$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

o equivalentemente, $Var\ E(\varepsilon i) = \sigma^2$, $i = 1,\ldots,n$.

c) La distribución es normal:

$$Y/x_i \sim N\,(\alpha_0 + \alpha_1\, x_{i,}\ \sigma^2)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$

o equivalentemente, $\varepsilon i \sim N\,(0, \sigma^2)$, $i = 1,\ldots,n$.

d) Las observaciones Y_i son independientes. Bajo las hipótesis de normalidad, esto equivale a que la $Cov\ (Y_i,\ Y_j) = 0$, si $i \neq j$. Esta hipótesis en función de los errores sería "los ε_i son independientes", que bajo normalidad equivale a que $Cov = 0$, si $i \neq j$.

En el modelo de regresión lineal simple es necesario estimar los siguientes dos parámetros, el cual pueden calcularse a través del método de máxima verosimilitud o método de mínimos cuadrados:

- Los coeficientes de la recta de regresión α_0 y α_1
- La varianza de la distribución normal, σ^2

En nuestro caso aplicaremos el método de "Mínimos Cuadrados" (MCO), atribuido al matemático alemán Carl Friedrich Gauss. Sin embargo, es importante mencionar que no profundizaremos con mucho detalle su definición teórica conceptual, pues mi intención es resaltar únicamente que existen técnicas estadísticas que nos permiten determinar la pendiente relación rentabilidad – sensibilidad variación de mercado o línea de mercado de títulos de cualquier cartera no necesariamente eficiente (SML) a través de una regresión lineal simple.

El método de mínimos cuadrados consiste en un análisis numérico y de optimización matemática, donde el conjunto de pares ordenados variable independiente "X" y variable dependiente "Y", intentan encontrar la función que mejor se aproxime (ajuste) a los datos de acuerdo con el criterio denominado "mínimo error cuadrático", intentando minimizar la suma de cuadrados de las diferencias en las ordenadas (llamadas residuos) entre los puntos generados por la función elegida y los correspondientes valores de los datos.
Dada la variable independiente "X" y la variable dependiente "Y", minimizaremos la suma de los cuadrados de los residuos través de una recta de mínimos cuadrados, donde el error de estimación (definido como la distancia entre el valor observado y el valor estimado de la variable endógena)

sea la mínima para cada una de las observaciones. La recta de mínimos cuadrados estimará los valores de "Y" para los distintos valores de "X". Es importante mencionar que varios puntos probablemente se encuentren fuera de la línea de regresión, pues en caso contrario no habría ninguna diferencia o error de estimación entre el valor observado y el valor de esperado o de predicción. Aquellos casos donde el coeficiente de regresión lineal sea cercano a +1 o –1, tendrá sentido considerar la ecuación de la recta como la que mejor se ajusta a la nube de puntos.

La obtención de la recta de mínimos cuadrados se obtiene con las siguientes fórmulas:

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{n\,\Sigma(x_i y_i) - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n\,(\Sigma x_i^2) - (\Sigma x_i)^2}$$

$$b = \frac{(\Sigma y_i) - a(\Sigma x_i)}{n}$$

Donde,

n: Número de medidas o pares observados para cada "x" y "y".
Σ: Suma de todos los datos que se indican
y: Valor observado variable dependiente
x: Valor observado variable independiente

El método de mínimos cuadrados asume que al fijar las condiciones experimentales, los valores "Yi" se conocen con precisión (aunque esto generalmente no es así, lo aceptamos como esencial en el método). Las mediciones de la variable "X" irán afectadas de sus errores correspondientes, si "ε" es el valor máximo de todos estos errores, entonces se tiene:

$$\Delta a = \frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sqrt{n \sum_{1}^{n} x_i^2 - \left[\sum_{1}^{n} x_i\right]^2}}$$

$$\Delta b = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

La pendiente de la recta se escribirá como $a \pm \Delta a$, y la ordenada en el origen $b \pm \Delta b$.

O bien, representado en forma punto pendiente:

$$Y - \overline{Y} = \frac{Cov(X,Y)}{S_x^2}(X - \overline{X}) = \frac{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})^2}(X - \overline{X})$$

2.3 Relación o dependencia entre las acciones y el mercado.

Coeficiente de correlación.

Recordemos que el coeficiente de correlación es un parámetro que nos indicaba el tipo de dependencia existente entre dos variables o acciones "X" y "Y", al que denominamos en su momento con el símbolo "ρ". Ahora en el modelo CAPM nos indicará el grado de dependencia de cada acción o portafolio (variable "Y", en nuestro caso cada serie accionaria o el óptimo Sharpe) respecto a la sensibilidad o variación de su mercado (variable "X", índice de precios y cotizaciones - IPC), denominándolo como "r", para fines prácticos y que no se confunda con el "ρ" calculado en el Capítulo I.

Lo calculamos de la siguiente forma, como parte de nuestro cálculo de nuestra regresión lineal por el método de mínimos cuadrados:

$$r = \frac{n(\Sigma x_i y_i) - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{\sqrt{[n(\Sigma x_i^2) - (\Sigma x_i)^2]\,[n(\Sigma y_i^2) - (\Sigma y_i)^2]}}$$

Donde,

r = Coeficiente de correlación.
n: Número de medidas o pares observados de "*x*" y "*y*".
Σ: Suma de todos los datos que se indican.
y: Valor observado variable dependiente.
x: Valor observado variable independiente.

El valor de "r" puede variar entre 1 y -1.

Si r = -1, todos los puntos se encuentran sobre la recta existiendo una correlación que es perfecta e inversa.

Si r = 0, no existe ninguna relación entre las variables.

Si r = 1, todos los puntos se encuentran sobre la recta existiendo una correlación que es perfecta y directa.

Coeficiente de determinación.

Este coeficiente, también conocido como el cuadrado del coeficiente de correlación (r^2) de Pearson, nos permite identificar la proporción de varianza común existente de nuestra variable dependiente "Y" (acciones o carteras) contra la variable independiente "X" (IPC). Cuando hacemos regresión lineal por el método de mínimos cuadrados para ajustar una función simple y encontrar la recta de entre todas la posibles que consigue minimizar las distancias verticales entre cada punto (elevado al cuadrado), estamos calculando el coeficiente de determinación interpretándose como la fidelidad, certeza o grado con la que dicha recta describe el ajuste a la nube de puntos y por ende la relación entre los datos. La forma de representarse es la siguiente:

$$R^2 = r^2$$

Donde,

R^2 : Coeficiente de determinación
r: Coeficiente de correlación

Sus valores oscilan en el intervalo (0,1). Si $R^2 = 1$ indicará que el modelo explicará toda la variabilidad en "Y". Si $R^2 = 0$ indicará que el modelo de relación lineal entre "X" y "Y" no es apropiado. Si por ejemplo, $R^2 = 0.70$ (como valor intermedio) se interpretaría que el modelo de las variable independiente "X" explica un 70 % la variación en la variable dependiente "Y", y el 30 % restante se explicaría por otras variables.

Cabe mencionar que en estadística también existe un coeficiente llamado "Coeficiente de alineación R'^2 o de Indeterminación" atribuido a Fred Kerlinger. Este es un complemento del coeficiente de determinación, que indica la proporción de varianza no compartida entre dos variables, y se define como:

$$R'^2 = 1 - R^2 = 1 - r^2$$

Donde,

R'^2 : Coeficiente de alineación o indeterminación.
R^2 : Coeficiente de determinación
r: Coeficiente de correlación

Coeficiente de determinación ajustado.

La modificación del coeficiente de determinación llamado "Coeficiente de Determinación Ajustado", considera el número de variables explicativas (caso contrario de lo que sucede con R^2), donde su valor aumenta si el modelo mejora sobre lo esperado, como consecuencia de una nueva variable o posibles causas aleatorias. Puede adoptar valores negativos y por tanto menores que R^2.

El coeficiente de determinación ajustado se define como:

$$R_a^2 = 1 - \left(1 - R^2\right) \frac{n-1}{n-p-1}$$

Donde,

R_a^2 : Coeficiente de determinación ajustado.
p: Es el número de variables explicativas (independientes) en el modelo lineal.
n: Tamaño de la muestra.
R^2 : Coeficiente de determinación.

Es importante mencionar que no debemos confundir el coeficiente de determinación con el coeficiente de determinación ajustado, pues aunque el segundo proviene el primero, el ajustado es útil en la etapa de selección de las variables cuando se construye un modelo.

Error estándar de estimación.

Debido que no existen predicciones perfectas se necesita conocer una medida que describa el grado de estimación o inexactitud de "Y" en función de "X". A esta medida se le conoce como "error estándar de estimación (Se)", siendo el mismo concepto que la desviación típica estándar, con la diferencia que esta mide la dispersión alrededor de *la línea de regresión* y la desviación típica la dispersión alrededor de la media. Para su cálculo se utiliza la siguiente fórmula:

$$Se = \sqrt{\frac{\Sigma y_i^2 - b\Sigma y_i - a\Sigma x_i y_i}{n-2}}$$

$$a = \frac{S_{xy}}{S_x^2}, \quad b = \overline{y} - \frac{S_{xy}}{S_x^2}\overline{x}$$

Donde,

- y_i: Valores de la variable dependiente.
- x_i : Valores de la variable independiente.
- a : Coeficiente de regresión.
- b: Intersección a la recta.
- n : Número de puntos

Precios de equilibrio de los activos financieros.

Una vez determinado el rendimiento esperado del CAPM para cada acción, por medio de la recta de regresión lineal simple y el método de mínimos cuadrados, se puede determinar el precio de equilibrio para una rentabilidad adecuada respecto al riesgo sistemático beta. Para ello es necesario realizar lo siguiente:

a) Determinar la rentabilidad en cada acción:

$$r_i = \frac{P_{t+1} - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

b) Aplicar el operador de la media (promedio):

$$E(r_i) = E\left[\frac{P_{t+1} - P_{t-1}}{P_{t-1}}\right] = \left(\frac{E(P_{t+1})}{P_{t-1}}\right) - 1 = \left(\frac{E(P_{i1})}{P_{i0}}\right) - 1$$

c) Igualamos el anterior resultado con la ecuación SML, debido a que la rentabilidad esperada de un título o acción "i" en el modelo CAPM es igual a la rentabilidad SML en un mercado de capitales en equilibrio:

Ecuación SML:

$$E(r_i) = \overline{r_f} + \beta_{im} * E(\overline{r_m} - \overline{r_f})$$

Igualando se obtiene:

$$\left(\frac{E(P_{i1})}{P_{i0}} \right) - 1 = \overline{r_f} + \beta_{im} * E(\overline{r_m} - \overline{r_f})$$

d) Despejando $E(P_{t+1})$, se obtiene finalmente la ecuación que nos dará el precio de equilibrio del activo financiero:

$$P_{i0} = \frac{E(P_{i1})}{\overline{r_f} + \beta_{im} * E(\overline{r_m} - \overline{r_f}) + 1} = \frac{E(P_{i1})}{E(r_i) + 1}$$

Donde,

$E(P_{i1})$: Precio último

$E(r_i)$: Rendimiento esperado CAPM

2.4 Prima de riesgo de mercado (índice de mercado e índice de Traynor).

Jack L. Traynor en 1965 propone una medida para evaluar el performance o eficacia de la gestión de carteras, partiendo de la línea de mercado de títulos o valores (SML). Ésta medida relaciona la rentabilidad de una cartera (rp) respecto a la rentabilidad del activo libre de riesgo (rf) entre su riesgo sistemático (coeficiente beta: β), permitiendo comparar acciones o carteras en función de sus comportamientos históricos aun cuando tengan volatilidades diferentes. Es una medida de rentabilidad y riesgo similar al índice de Sharpe, pero con la diferencia de que Traynor utiliza el factor beta (β) de la acción como medida del riesgo sistemático que asume por la variación de rentabilidades en el mercado (IPC), mientras que el índice de Sharpe la desviación típica estándar únicamente de las rentabilidades de la propia acción o cartera.

Al índice de Traynor se le conoce también como la prima o ganancia que por término medio ha pagado la cartera por cada unidad de volatilidad del mercado (coeficiente beta o riesgo sistemático), bajo el supuesto que la cartera se encuentra debidamente diversificada eliminando el riesgo específico o diversificable.

Para calcular este índice se utiliza la siguiente ecuación:

$$It = \frac{\overline{r_p} - \overline{r_f}}{\beta_p}$$

$$\beta_p = \frac{Cov(r_i, r_m)}{Var(r_m)}$$

Donde,

It: Índice de Traynor.

$\overline{r_p} - \overline{r_f}$: Prima de las rentabilidades cartera.

$\overline{r_p}$: Media de las rentabilidades de cartera.

$\overline{r_f}$: Media de las rentabilidades de la cartera de referencia o activo libre de riesgo (CETE).

β_p : Beta (riesgo sistemático de cartera).

$Cov(r_i, r_m)$: Covarianza de la rentabilidad de la cartera "i" y la rentabilidad de mercado IPC (índice de precios y cotizaciones).

$Var(r_m)$: Varianza de la rentabilidad de mercado (IPC).

r_i : Rentabilidad del activo en el dato "i".

r_m: Rentabilidad del mercado (IPC) en el dato "i".

Cuanto mayor sea la prima de la rentabilidad del activo o cartera *"($r_p - r_f$)"* asumida por la unidad del riesgo sistemático de mercado (β_p), mayor será el valor que tome el índice de Traynor "*It*", interpretándose que la cartera o activo obtiene un performance o eficacia mayor.

Índice de mercado.

De manera similar que el índice de Sharpe y el de Traynor, podemos determinar un índice de mercado, que nos indique el performance o eficacia de un conjunto de activos o carteras respecto a la prima de riesgo del mercado *"(rm- rf)"*. Para lograrlo se utiliza la siguiente fórmula:

$$Im = \frac{\overline{r_m} - \overline{r_f}}{\beta_p}$$

$$\beta_p = \frac{Cov(r_i, r_m)}{Var(r_m)}$$

Donde,

Im: Índice de Mercado.

$\overline{r_m} - \overline{r_f}$: Prima de las rentabilidades del mercado (IPC).

$\overline{r_m}$: Promedio de las rentabilidades del mercado (IPC).

$\overline{r_f}$: Promedio de las rentabilidades de la cartera de referencia (activo libre de riesgo-CETE).

β_p : Beta riesgo sistemático.

$Cov(r_i, r_m)$: Covarianza de la rentabilidad de la cartera "i" y la rentabilidad de mercado (IPC).

$Var(r_m)$ $Var(r_m)$: Varianza de la rentabilidad de mercado (IPC).

r_i : Rentabilidad del activo en el dato "i" (matriz).

r_m: Rentabilidad del mercado (IPC) en el dato "i" (matriz).

Determinado este índice podemos compararlo contra el índice de Mercado, concluyendo lo siguiente:

- Si el portafolio ofrece un índice de Traynor mayor que el índice de Mercado se dice que abate el mercado.

- Si el portafolio ofrece un índice de Traynor menor que el índice de Mercado, se dice que ha sido abatida por el mercado, por lo que el inversor no seleccionó activos con una prima media por unidad de riesgo superior al mercado.

Índice acumulado del portafolio y el índice acumulado de mercado.

Antes de calcular el Índice de Traynor y el Índice de Mercado se sugiere determinar el índice acumulado de la rentabilidad de la(s) cartera(s) y el índice acumulado de mercado (o cartera de referencia benchmark, IPC), pues estos dos últimos nos permiten conocer sus rentabilidades esperadas. Para ello es necesario realizar los siguientes pasos:

1) Calcular la distribución del presupuesto "w" del(los) portafolio(s) que vamos comparar, por ejemplo el óptimo de Sharpe, calculado anteriormente en el "capítulo I" representado por la matriz:

$$w_{opt} = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \ldots\ldots\ldots\ldots w_j$$

Donde,

w_{opt}: Cartera gestionada (ejemplo el portafolio óptimo Sharpe).

w_j : Porcentaje del presupuesto de inversión en el activo "j".

2) Determinar la matriz de rentabilidades de todas las series accionarias que componen la cartera:

$$\begin{bmatrix} r_{i1} + & r_{i2} + & r_{i3} + & r_{i4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + & r_{ij} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} + & r_{n2} + & r_{n3} + & r_{n4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + & r_{nj} \end{bmatrix}$$

Donde,

r_{ij} : Rentabilidad del dato o momento "i" de la cartera "j".

r_{nj}: Rentabilidad del dato o momento "i" hasta "n" de la cartera "j".

n: Tamaño de muestra (en nuestro caso 1251 para cada serie)

3) Multiplicar y sumar la matriz de ponderaciones del portafolio óptimo con la matriz de las rentabilidades de las series accionarias:

Matriz de la distribución del presupuesto "w" de las acciones en el portafolio óptimo Sharpe

Matriz de las rentabilidades de cada acción

$$r_{opt} = \left[w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \;\ldots\ldots\ldots\; w_j\right] * \begin{bmatrix} r_{i1} + & r_{i2} + & r_{i3} + & r_{i4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + & r_{ij} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} + & r_{n2} + & r_{n3} + & r_{n4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + & r_{nj} \end{bmatrix}$$

4) Calcular el índice acumulado del portafolio "*Ipn*" (en nuestro caso el óptimo de Sharpe):

$$\begin{aligned} Ip_i &= 100 &&* (1 + r\ opt_i) \\ Ip_{i+1} &= Ip_i &&* (1 + r\ opt_{i+1}) \\ Ip_{i+2} &= Ip_{i+1} &&* (1 + r\ opt_{i+2}) \\ &\vdots && \vdots \\ &\boxed{Ip_n = Ip_{n-1} * (1 + r\ opt_n)} \end{aligned}$$

Donde,

Ip_i: Índice acumulado del portafolio óptimo Sharpe en el dato o momento "i".

Ip_n: Índice acumulado del portafolio óptimo Sharpe en el último dato o momento "n" (en nuestro caso en el dato 1251 o el correspondiente al 26 de octubre del 2012, índice que estamos interesados por encontrar).

$r\ opt_i$: Rentabilidad del portafolio óptimo Sharpe en el dato o momento "i".

$r\ opt_n$: Rentabilidad del portafolio óptimo Sharpe en el último dato o momento "n" (en nuestro caso en el dato 1251 correspondiente al 26 de octubre del 2012).

n: Tamaño dela muestra, en nuestro caso 1251 datos del portafolio óptimo de Sharpe.

5) Calcular el índice acumulado del mercado IPC:

$$I_{m\,i} = 100 \quad * (1 + r_{m\,i} \quad)$$
$$I_{m\,i+1} = I_{m\,i} \quad * (1 + r_{m_{i+1}})$$
$$I_{m\,i+2} = I_{m\,i+1} * (1 + r_{m_{i+2}})$$
$$\begin{matrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{matrix}$$
$$\boxed{I_{m\,n} = I_{m_{\,n-1}} * (1 + r_{m\,n})}$$

Donde,

$I_{m\,i}$: Índice acumulado del mercado en el dato o momento "i", en nuestro caso diario.

$I_{m\,n}$: Índice acumulado del mercado en el último dato o momento "n" (en nuestro caso en el dato 1251 correspondiente al 26 de octubre del 2012, índice que estamos interesados por encontrar).

$r_{m\,i}$: Rentabilidad del mercado en el dato o momento "i".

$r_{m\,n}$: Rentabilidad del mercado en el último dato o momento "n" (en nuestro caso en el dato 1251 correspondiente al 26 de octubre del 2012).

n: Tamaño dela muestra, en nuestro caso 1251 datos del IPC.

Si el índice acumulado del portafolio (*Ipn)* es mayor que el índice acumulado del mercado IPC (*Imn)*, se dice que la rentabilidad de la cartera (en nuestro ejemplo el portafolio óptimo de Sharpe) abate la rentabilidad del mercado en "x" número de veces, siendo su selección adecuada para invertir.

6) Determinar el promedio de las rentabilidades del portafolio y del mercado IPC (necesarios para determinar el índice de Traynor e índice de Mercado):

$$\overline{r_{opt}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_{opt\,i}}{n_i}$$

Donde,

$\overline{r_{opt}}$: Promedio de rentabilidades del portafolio óptimo de Sharpe.

$r_{opt\,i}$: Rentabilidad del portafolio en el dato o momento "i".

n_i: Tamaño de muestra de rentabilidades del portafolio (en nuestro caso 1251 datos).

$$\overline{r_{m\,i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_{m\,i}}{n_i}$$

Donde,

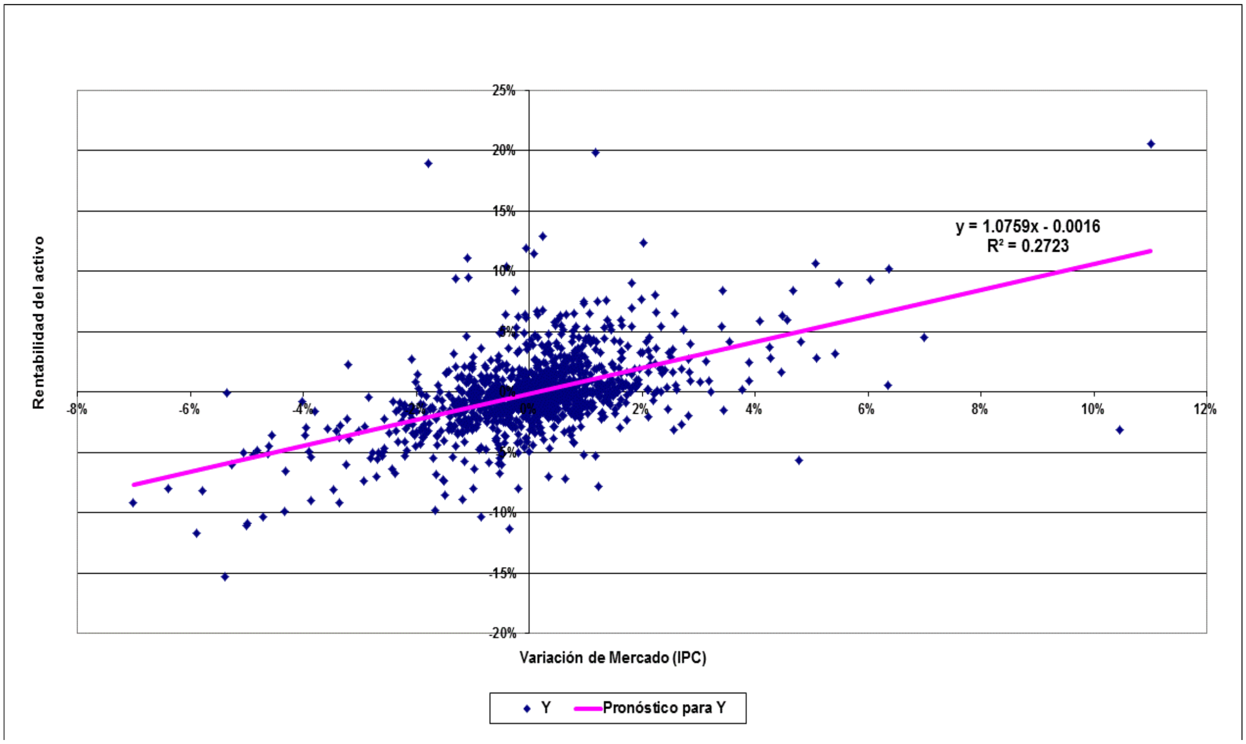
$\overline{r_{m\,i}}$: Promedio de rentabilidades de la variable de referencia del mercado (IPC).

$r_{m\,i}$: Rentabilidad del mercado (IPC) en el dato o momento "i".

n_i: Tamaño de muestra (en nuestro caso 1251 datos por cada serie).

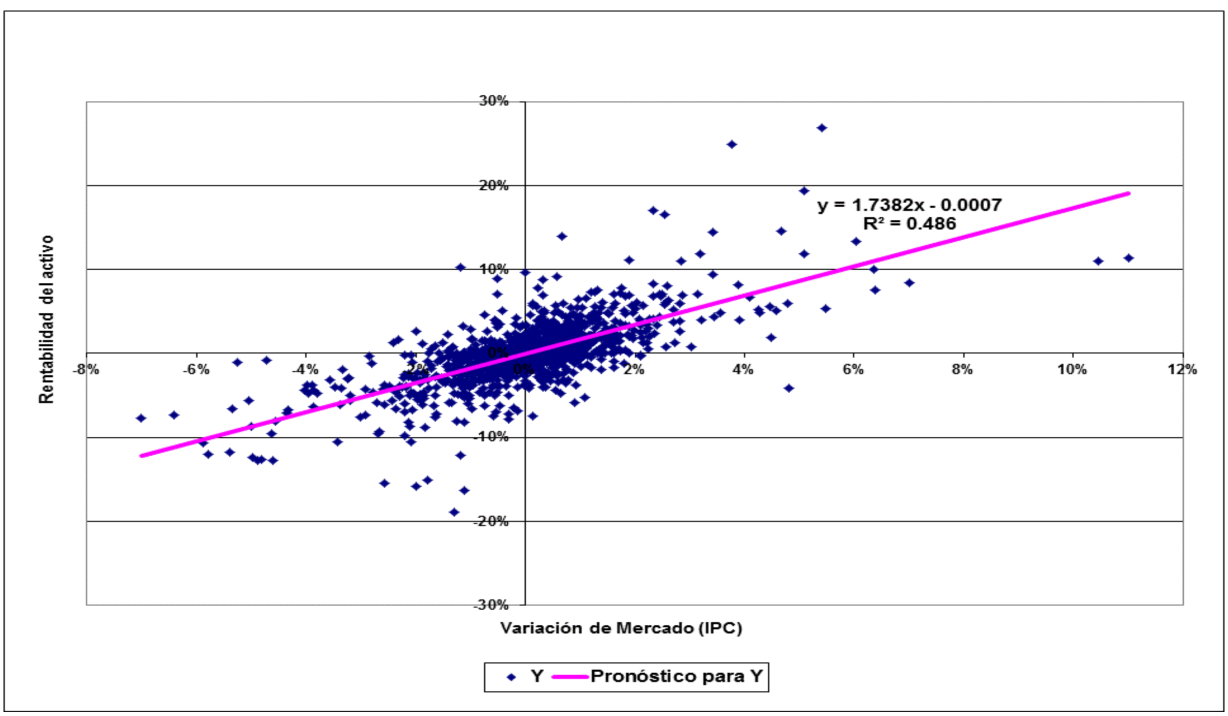
A continuación se describe el procedimiento de cálculo y resultados obtenidos por CAPM:

Gráfica 16. Regresión lineal AXTELCPO.MX: rentabilidad esperada y su sensibilidad a la variación de mercado (IPC). Enero 2008 a Octubre 2012



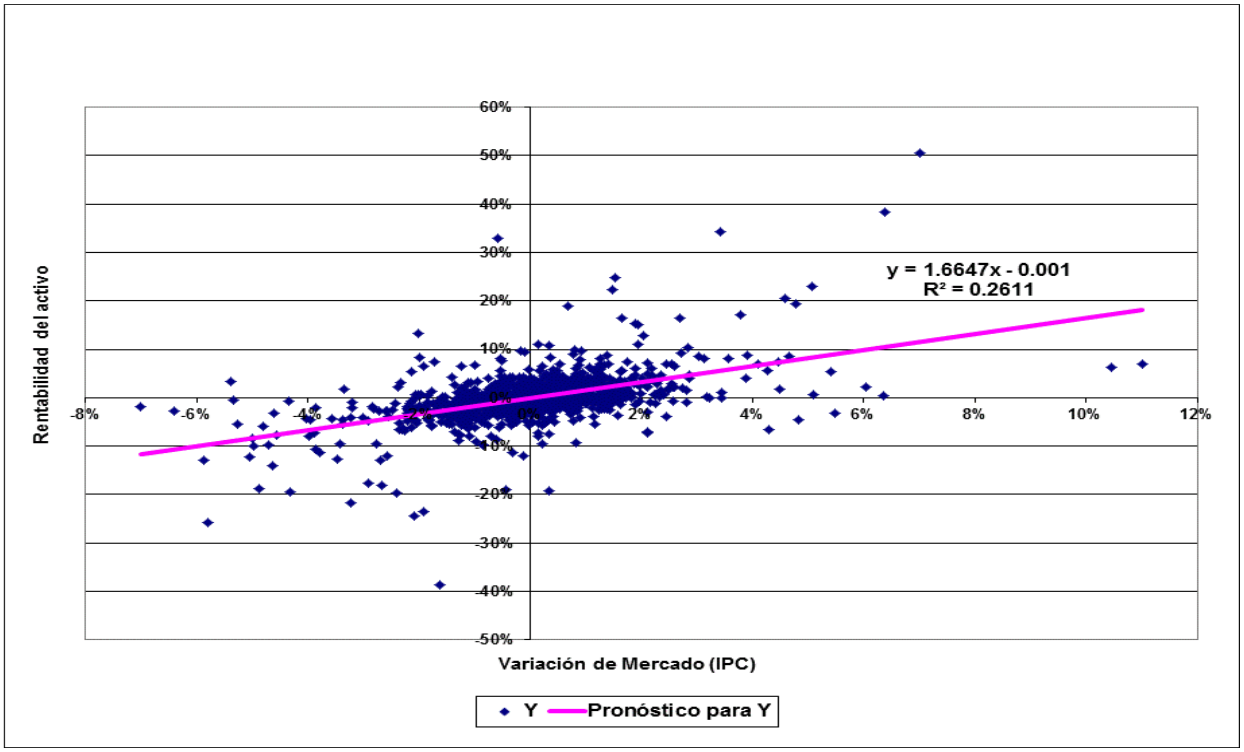
Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Gráfica 17. Regresión lineal CEMEXCPO.MX: rentabilidad esperada y su sensibilidad a la variación de mercado (IPC). Enero 2008 a Octubre 2012



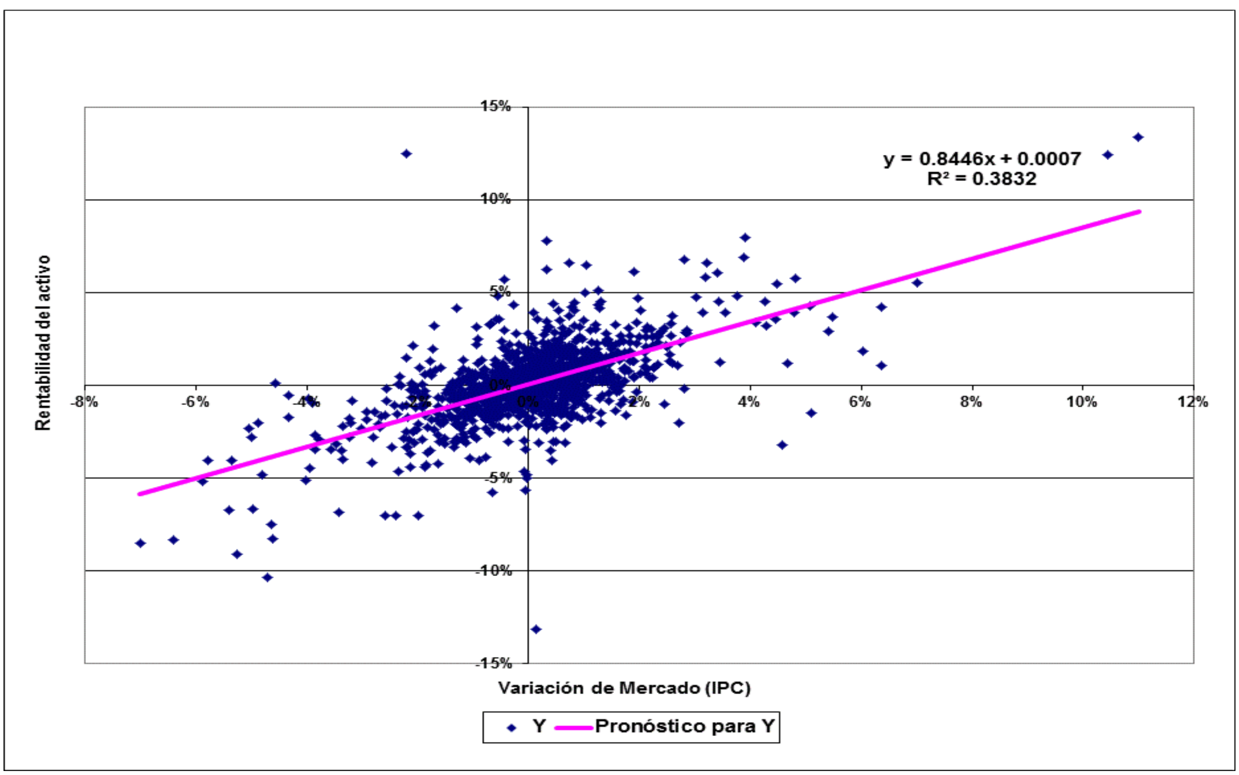
Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Gráfica 18. Regresión lineal C.MX (CITI): rentabilidad esperada y su sensibilidad a la variación de mercado (IPC). Enero 2008 a Octubre 2012



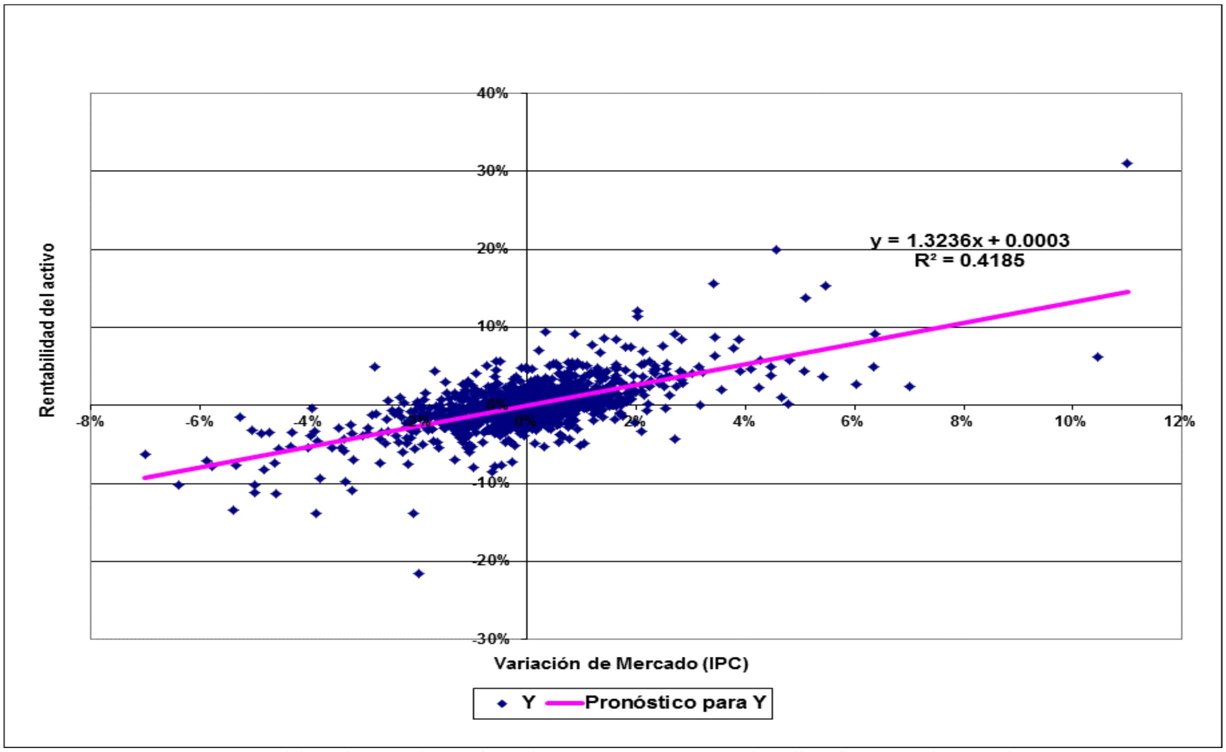
Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Gráfica 19. Regresión lineal FEMSA.UBD: rentabilidad esperada y su sensibilidad a la variación de mercado (IPC). Enero 2008 a Octubre 2012



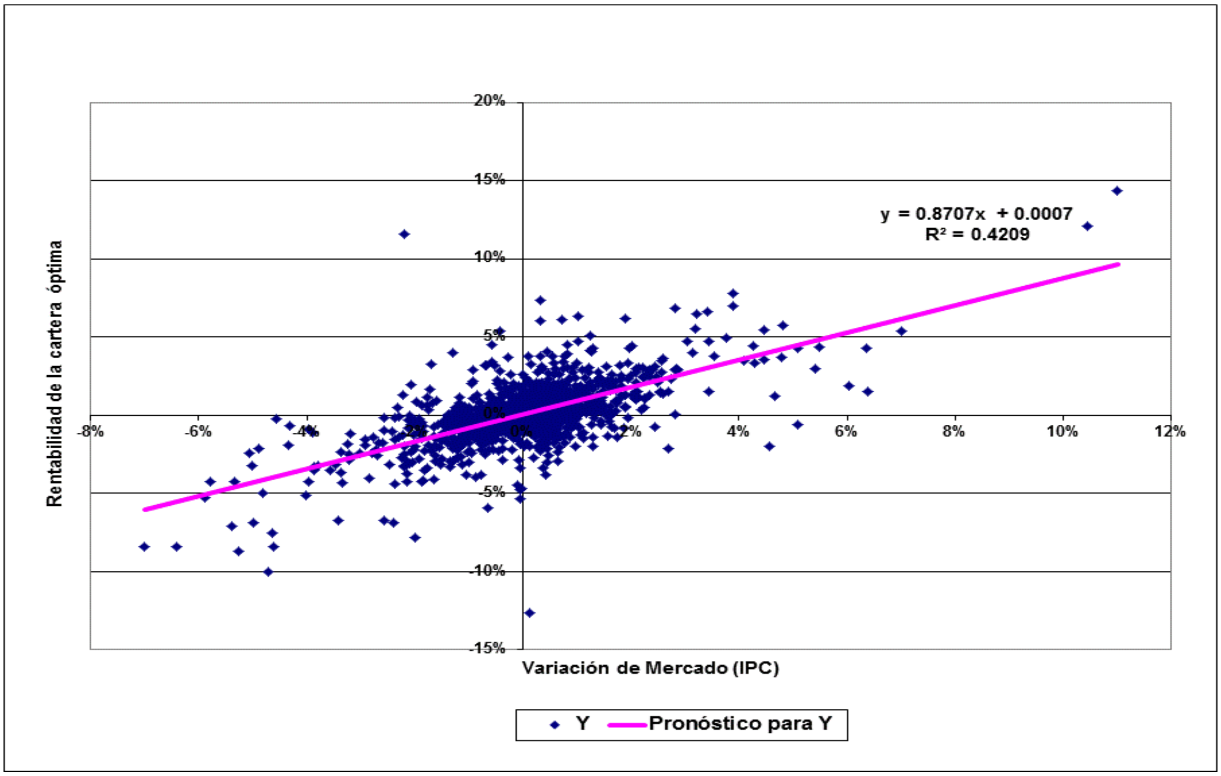
Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Gráfica 20. Regresión lineal GFNORTEO.MX: rentabilidad esperada y su sensibilidad a la variación de mercado (IPC). Enero 2008 a Octubre 2012



Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Gráfica 21. Regresión lineal cartera óptima Sharpe: rentabilidad esperada y su sensibilidad a la variación de mercado (IPC). Enero 2008 a Octubre 2012



Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Se observa que C.MX (CITI) y CEMEXCPO.MX presentan mayor sensibilidad a la variación de mercado (IPC), existiendo mayor dispersión y distancia de los puntos de la nube respecto a la recta de regresión lineal. Caso contrario de lo que sucede con la acción FEMSAUBD.MX, donde se visualiza mayor concentración de los puntos y cercanía a dicha recta.

Tabla 14. Resumen de resultados de las regresiones lineales: rentabilidad esperada CAPM y su sensibilidad a la variación de mercado IPC (riesgo sistémico beta βim)

Activo libre de riesgo rf: CETE		Beta: (βim)	Coeficiente de determinación ajustado Ra^2	Coeficiente de determinación R^2	Coeficiente de correlación r = Raiz[R^2]	Rentabilidad CAPM = SML = E(ri) = E(rf) + βim * (E(rm) - rf)	Prima de riesgo del activo o cartera = RCAPM - rf	Prima de riesgo del mercado = E(rm) - rf	Diferencia: Rend CAPM - E(rm) =	Precio de equilibrio del activo financiero: Pe = (Precio último) / (1 + Rend CAPM)
	AXTELCPO.MX	1.0759	27.17%	27.23%	52.13%	10.14%	4.87%	4.53%	0.34%	$1.0048
	CEMEXCPO.MX	1.7382	48.56%	48.60%	69.68%	13.14%	7.87%	4.53%	3.34%	$10.4210
	C.MX (CITI)	1.6647	26.05%	26.11%	51.04%	12.80%	7.54%	4.53%	3.01%	$423.1389
5.27%	FEMSAUBD.MX	0.8446	38.28%	38.32%	61.87%	9.09%	3.82%	4.53%	-0.70%	$109.2836
	GFNORTEO.MX	1.3236	41.81%	41.85%	64.66%	11.26%	5.99%	4.53%	1.46%	$65.0097
	Cartera óptima de Sharpe	0.8707	42.05%	42.09%	64.84%	9.21%	3.94%	4.53%	-0.59%	

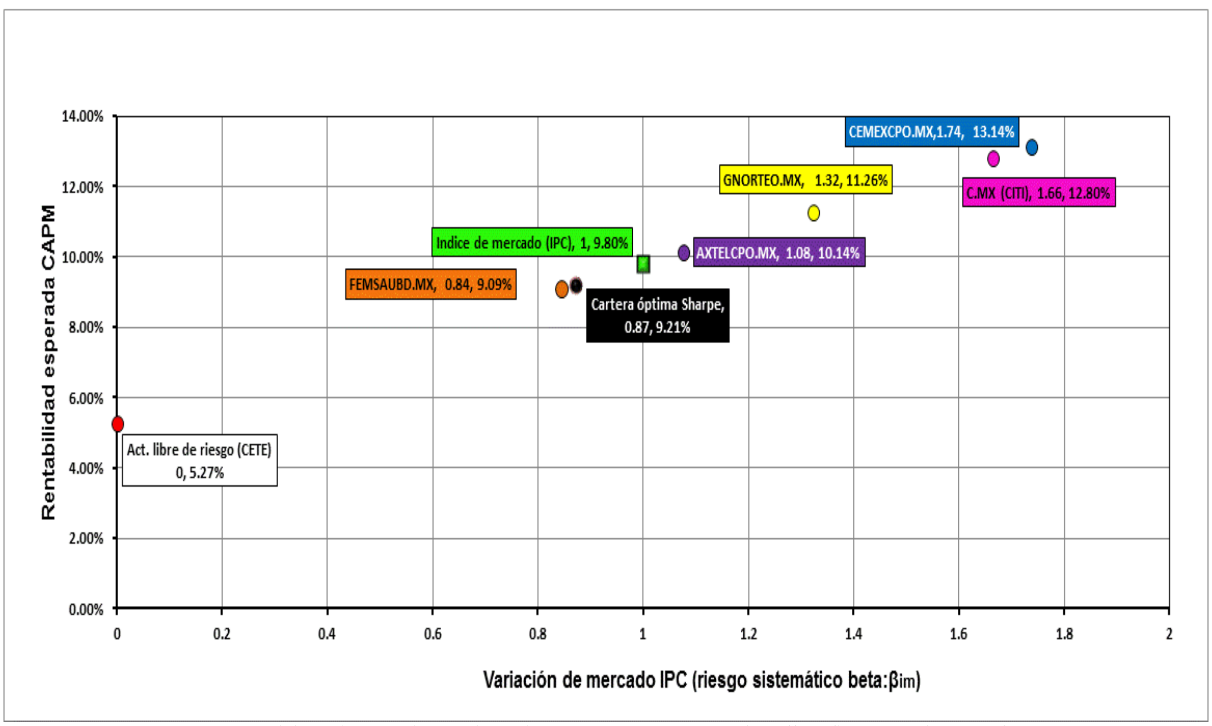
Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Tabla 15. Cálculo riesgo sistemático (beta:βim) por medio de varianza y covarianza.

	COVARIANZA (Activo, IPC)	VARIANZA IPC	BETA (βim) = COV / VAR
AXTELCPO.MX	0.000238	0.000222	1.08
CEMEXCPO.MX	0.000385	0.000222	1.74
C.MX (CITI)	0.000369	0.000222	1.66
FEMSAUBD.MX	0.000187	0.000222	0.84
GFNORTEO.MX	0.000293	0.000222	1.32
PORTAFOLIO OPTIMO	0.000193	0.000222	0.87

Fuente. Elaboración propia con datos de históricos YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Gráfica 22. Rentabilidad CAPM y sensibilidad a la variación de mercado IPC. Enero 2008 a Octubre 2012

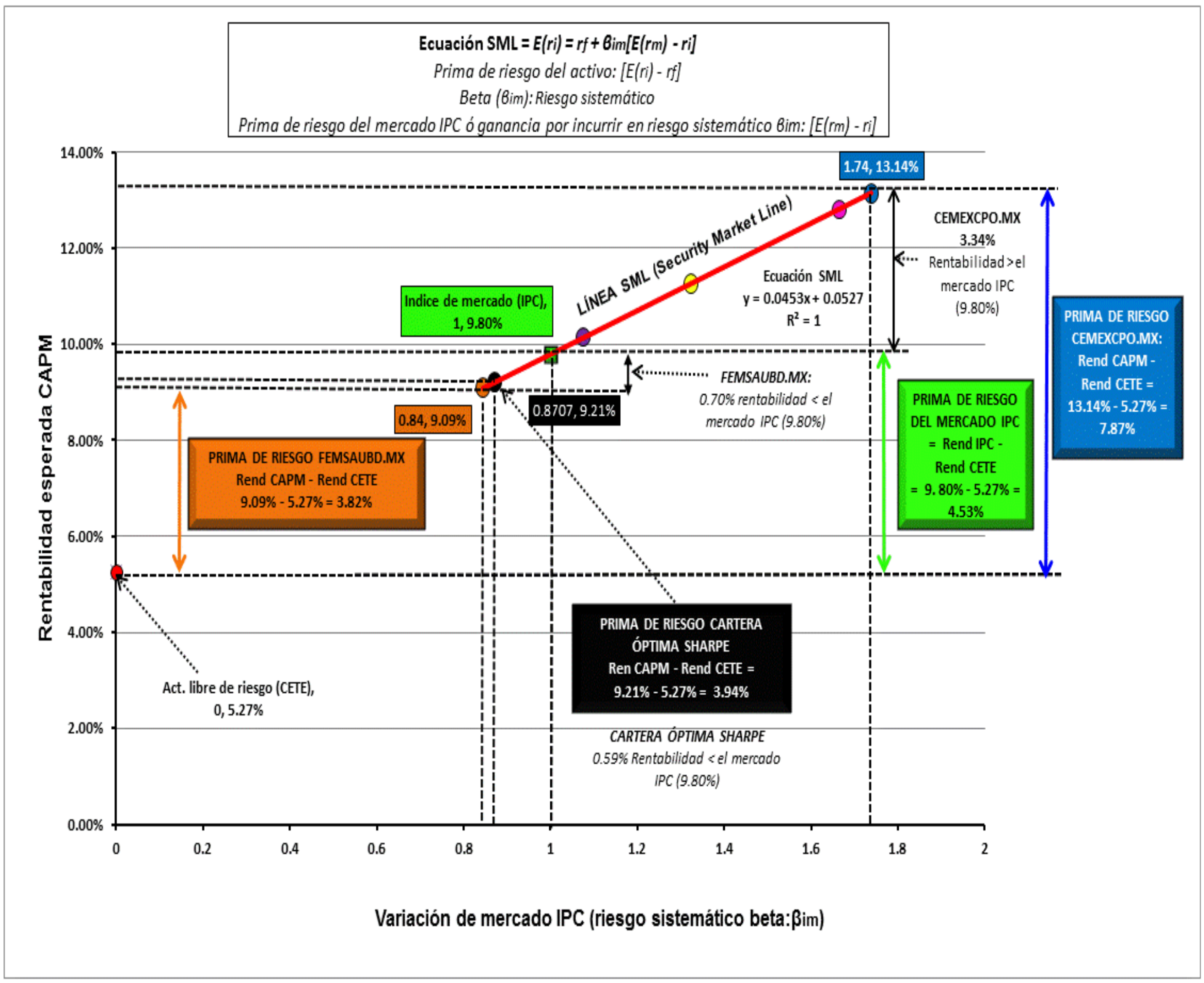


Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

En la gráfica 22, CEMEXCPO.MX y C.MX (CITI) contienen los valores de beta o riesgos sistemáticos más altos en comparación con las demás activos incluyendo el portafolio óptimo de Sharpe. Esto quiere decir que CEMEXCPO.MX representa un 73.82% de sensibilidad o volatilidad mayor que el mercado, o bien, cuando éste varía una unidad CEMEXCPO.MX lo hace en 1.7382 veces. Caso contrario de lo que sucede con FEMSAUBD.MX o el portafolio óptimo de Sharpe con 0.8446 y 0.8707 respectivamente, significando un 15.54% y 12.93% de volatilidad menor al mercado, lo que puede ser buena opción para inversores poco aversos al riesgo, o bien en momentos de inestabilidad o incertidumbre económica.

A continuación se muestra la representación gráfica de la ecuación fundamental del CAMP ó SML (Security Market Line) y las primas de riesgo:

Gráfica 23. Ejemplo prima de riesgo del activo y del mercado con su recta SML. Enero 2008 a Octubre 2012



Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Observamos que CEMEXCPO.MX espera una rentabilidad del 3.34% superior a la rentabilidad del mercado IPC (9.80%), abatiéndolo con una prima de riesgo de activo del 7.87% y riesgo sistémico beta 74% superior al mercado. Caso contrario de lo que sucede con FEMSAUBD.MX o portafolio óptimo de Sharpe, quienes esperan pérdidas del 0.70% y 0.59% respectivamente con primas de riesgo del 3.82% y 3.94 % y riesgos sistemático beta del 15.54% y 12.93%, ambos por abajo del valor del mercado. Es importante recordar que las primas de riesgo de los activos están correlacionadas directamente con la prima de riesgo del mercado, por lo que cualquier incremento o disminución de éste puede impactar significativamente de manera positiva o negativa la rentabilidad esperada de los activos.

Por ejemplo, si se presentara un incremento o disminución del 10% en la prima de riesgo del mercado, los valores de la rentabilidad esperada y la prima de riesgo del activo CEMEXCPO.MX serían los siguientes:

Tabla 16. Cálculo de la prima de riesgo del activo CEMEXCPO.MX, ante un incremento del 10% en la prima de riesgo del mercado (E(rm)- rf).

Ecuación SML = E(ri) = rf + βim[E(rm) - ri]					
Rent. CAPM	Activo Libre de riesgo	+	Beta	Rent. Mercado (IPC)	Activo libre de riesgo
SML = E(ri) =	rf		βim *	[E(rm) -	rf]
13.14%	5.27%		1.7382	9.80%	5.27%
Prima de riesgo del activo CEMEXCPO.MX		=	Riesgo sistemático	Prima de riesgo de MERCADO IPC (Ganancia por	
(E(ri) - rf)			βim *	(E(rm) - rf)	
7.87%			1.7382	4.53%	

Si se incrementa la prima de riesgo de mercado u = [E(rm) - rf] =				10.00%
Rent. CAPM	Activo Libre de riesgo	+	Beta	Prima de riesgo de mercado "u": (ganancia por incurrir en riesgo sistemático)
SML = E(ri) =	rf		βim *	(u*[E(rm) - rf])+[E(rm) - rf])
13.92%	5.27%		1.7382	4.98%
Prima de riesgo del activo CEMEXCPO.MX		=	Riesgo sistemático	Prima de riesgo de mercado "u": (ganancia por incurrir en riesgo sistemático)
(E(ri) - rf)			βim *	(E(rm) - rf)
8.66%			1.7382	4.98%

Si se incrementa la prima de riesgo de mercado u = [E(rm) - rf] =				-10.00%
Rent. CAPM	Activo Libre de riesgo	+	Beta	Prima de riesgo de mercado "u": (ganancia por incurrir en riesgo sistemático)
SML = E(ri) =	rf		βim *	(u*[E(rm) - rf])+[E(rm) - rf])
12.35%	5.27%		1.7382	4.07%
Prima de riesgo del activo CEMEXCPO.MX		=	Riesgo sistemático	Prima de riesgo de mercado "u": (ganancia por incurrir en riesgo sistemático)
(E(ri) - rf)			βim *	(E(rm) - rf)
7.08%			1.7382	4.07%

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Respecto a los coeficientes de determinación de bondad ajustada (Ra^2) se concluye que las acciones CEMEXCPO.MX, GFNORTEO.MX, FEMSA.UBD y el portafolio óptimo de Sharpe presentan los valores más altos, lo que significa que la variable de mercado IPC puede ser un buen estimador debido a que explica hasta en un 48.55% las posibles causas de la variación de precios o rendimientos de CEMEXCPO.MX, 41.80% de GFNORTEO.MX, 38.21% de FEMSA.UBD y 42.05% del portafolio óptimo de Sharpe, con una dependencia o nivel de correlación "r" del 69.68%, 64.66%, 61.87% y 64.84% respectivamente. Caso contrario de lo que sucede con la acción C.MX (CITI) o AXTEL.CPO, quienes muestran un coeficiente de determinación ajustado del 26.05% y 27.17% y nivel de correlación 51.04% y 52.13%, sugiriendo quizás encontrar otro índice o variable de referencia del mercado que permita explicar con mayor porcentaje las posibles causas de la variación de sus rentabilidades.:

Tabla 17. Coeficiente de determinación ajustada Ra^2).

	Coeficiente de determinación ajustado Ra^2
AXTELCPO.MX	27.17%
CEMEXCPO.MX	48.56%
C.MX (CITI)	26.05%
FEMSAUBD.MX	38.28%
GFNORTEO.MX	41.81%
Cartera óptima de Sharpe	42.05%

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Obtenido lo anterior realizamos la suma producto de la matriz "w" correspondiente a la distribución de inversión de la cartera óptima de Sharpe, contra la matriz "ri" correspondiente a la variación de rentabilidades diarias de los activos:

Tabla 18. Suma producto matriz "*w*" contra la matriz de rentabilidades "*ri*"

$$w_{opt} = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots w_j$$

	Porcentajes de Inversión en las Acciones				
	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
Cartera óptima Sharpe (recomendación de inversión)	0.00%	0.00%	0.00%	94.55%	5.45%

Matriz de la distribución del presupuesto "w" de las acciones en el portafolio óptimo Sharpe

Matriz de las rentabilidades de cada acción

$$\left[w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \ldots\ldots\ldots\ldots w_j \right] * \begin{bmatrix} r_{i1} + & r_{i2} + & r_{i3} + & r_{i4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + & r_{ij} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} + & r_{n2} + & r_{n3} + & r_{n4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + & r_{nj} \end{bmatrix}$$

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

J5 | f_x =SUMAPRODUCTO($C$3:$G$3,C5:G5)

	A	B	C	D	E	F	G	J
1			Porcentajes de Inversión en las Acciones					
2			AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX	
3		Cartera óptima Sharpe (recomendación de inversión)	0.00%	0.00%	0.00%	94.55%	5.45%	
4		Fecha	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX	Rp: Mi portafolio óptimo de Sharpe
5	1	02/01/2008	-0.0040426	-0.0038883	-0.0179973	-0.0414868	-0.0128660	-0.039928115
6	2	03/01/2008	0.0081181	0.0046132	-0.0046450	0.0230173	-0.0247191	0.020417528
7	3	04/01/2008	-0.0109810	-0.0314377	-0.0191111	-0.0437760	-0.0241935	-0.042709520
8	4	07/01/2008	-0.0055514	-0.0127644	0.0000647	0.0355499	0.0068477	0.033986744
9	5	08/01/2008	-0.0089319	0.0055412	-0.0388350	0.0187701	0.0096154	0.018271500

Determinamos el índice acumulado del portafolio óptimo y de mercado para conocer nuestra ganancia esperada:

$$Ip_i = 100 * (1 + r\, opt_i) \qquad I_{m\,i} = 100 * (1 + r_{m\,i})$$

$$Ip_{i+1} = Ip_i * (1 + r\, opt_{i+1}) \qquad I_{m\,i+1} = I_{m\,i} * (1 + r_{m\,i+1})$$

$$Ip_{i+2} = Ip_{i+1} * (1 + r\, opt_{i+2}) \qquad I_{m\,i+2} = I_{m\,i+1} * (1 + r_{m\,i+2})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\boxed{Ip_n = Ip_{n-1} * (1 + r\, opt_n)} \qquad \boxed{I_{m\,n} = I_{m\,n-1} * (1 + r_{m\,n})}$$

K5 | f_x =K4*(1+J5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			Porcentajes de Inversión en las Acciones								
2			AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX				
3		Cartera óptima Sharpe (recomendación de inversión)	0.00%	0.00%	0.00%	94.55%	5.45%	índice de precios y cotizaciones			Índice acumulado cartera óptima Sharpe: Icopt
4		Fecha	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX	IPC	CETE	Rp: Mi portafolio óptimo de Sharpe	100
5	1	02/01/2008	-0.0040426	-0.0038883	-0.0179973	-0.0414868	-0.0128660	-0.0283615	0.0002073	-0.039928115	96.007188520

L5 | f_x =L4*(1+H5)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1			Porcentajes de Inversión en las Acciones									
2			AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX					
3		Cartera óptima Sharpe (recomendación de inversión)	0.00%	0.00%	0.00%	94.55%	5.45%	índice de precios y cotizaciones			Índice acumulado cartera óptima Sharpe: Icopt	Índice acumulado de mercado: Icm(IPC)
4		Fecha	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX	IPC	CETE	Rp: Mi portafolio óptimo de Sharpe	100	100
5	1	02/01/2008	-0.0040426	-0.0038883	-0.0179973	-0.0414868	-0.0128660	-0.0283615	0.0002073	-0.039928115	96.007188520	97.163845951
6	2	03/01/2008	0.0081181	0.0046132	-0.0046450	0.0230173	-0.0247191	0.0056329	0.0002065	0.020417528	97.967418020	97.711162640
7	3	04/01/2008	-0.0109810	-0.0314377	-0.0191111	-0.0437760	-0.0241935	-0.0188096	0.0002064	-0.042709520	93.783276630	95.873253833
8	4	07/01/2008	-0.0055514	-0.0127644	0.0000647	0.0355499	0.0068477	-0.0058394	0.0002063	0.033986744	96.970664883	95.313410410
9	5	08/01/2008	-0.0089319	0.0055412	-0.0388350	0.0187701	0.0096154	0.0040927	0.0002065	0.018271500	98.742464422	95.703499665

L1259 =L1255

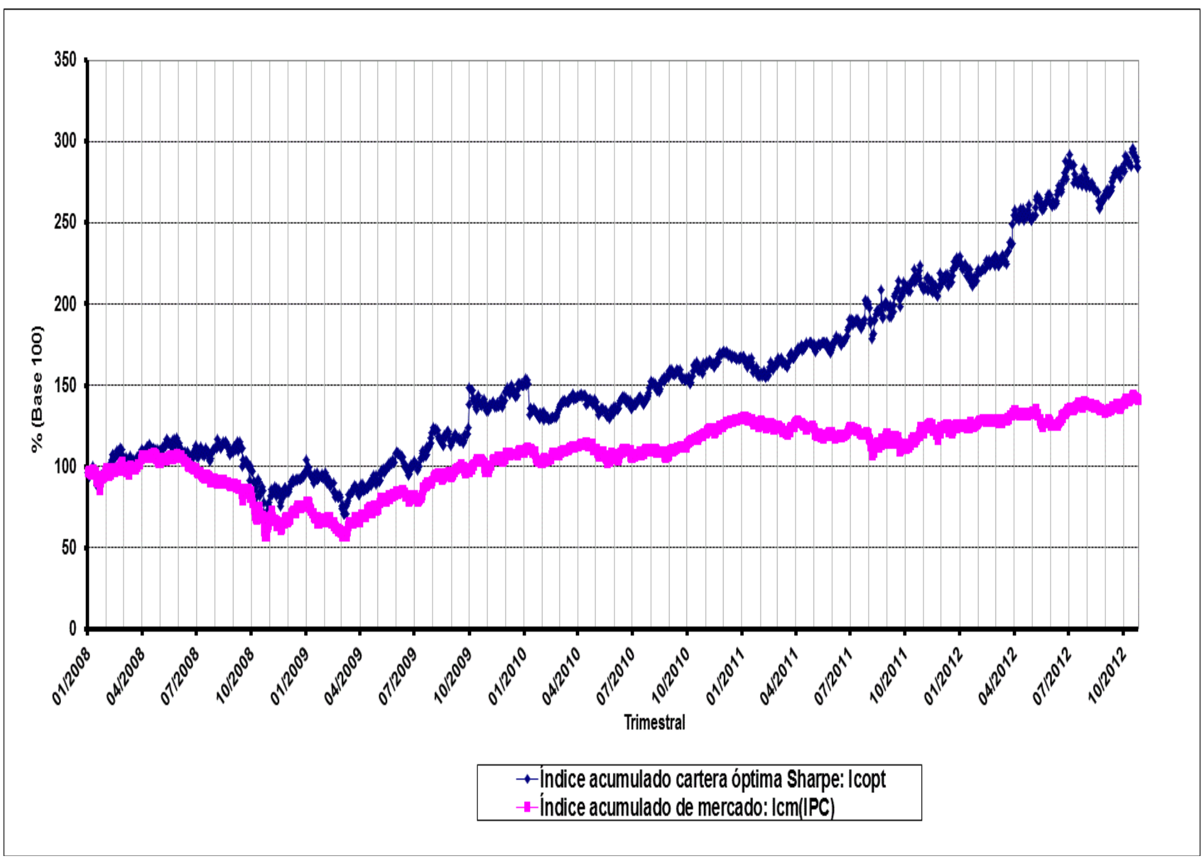
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1252	1248	23/10/2012	-0.0502646	0.0051414	-0.0110230	-0.0012297	-0.0134468	-0.0019256	0.0001173	-0.001895054	290.017446753	142.334637806	
1253	1249	24/10/2012	0.0250696	0.0196078	0.0108954	-0.0096856	0.0150209	0.0012849	0.0001175	-0.008340106	287.598670564	142.517528117	
1254	1250	25/10/2012	-0.0543478	0.0008361	0.0009498	-0.0111894	0.0028775	-0.0051761	0.0001173	-0.010423304	284.600942101	141.779838933	Ganancia = Icopt / Ícm(IPC)
1255	1251	26/10/2012	-0.0459770	-0.0150376	-0.0153884	-0.0006706	-0.0117502	-0.0009635	0.0001173	-0.001273980	284.238366331	141.643229825	2.006720453

Tabla 19. Ganancia esperada. Enero 2008 a Octubre 2012

Cartera óptima Sharpe (recomendación de inversión)	Índice acumulado cartera óptima Sharpe: Icopt	Índice acumulado de mercado: Icm(IPC)	Ganancia = Icopt / Ícm(IPC)
Fecha	100	100	
26/10/2012	284.238366331	141.643229825	**2.006720453**

Fuente. Elaboración propia con datos históricos YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Gráfica 24. Comparativo rentabilidad portafolio óptimo Sharpe contra rentabilidad de mercado IPC. Enero 2008 a Octubre 2012



Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Significa que si hubiéramos invertido desde el comienzo de nuestro periodo de análisis (enero 2008 a octubre 2012) en el portafolio óptimo de Sharpe (FEMSAUBD.MX 94.55% y

GBANORTEO.MX 5.45%), tendríamos una tendencia de ganancia esperada de 2.00672 veces mayor que el mercado IPC.

Y finalmente para determinar el índice de Traynor y el índice de Mercado, calculamos:

a) La rentabilidad del portafolio óptimo, del mercado (IPC) y del activo libre de riesgo (CETE)

I1262 f_x =+I1259*360

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1252	1248	23/10/2012	-0.0502646	0.0051414	-0.0110230	-0.0012297	-0.0134468	-0.0019256	0.0001173	-0.001895054
1253	1249	24/10/2012	0.0250696	0.0196078	0.0108954	-0.0096856	0.0150209	0.0012849	0.0001175	-0.008340106
1254	1250	25/10/2012	-0.0543478	0.0008361	0.0009498	-0.0111894	0.0028775	-0.0051761	0.0001173	-0.010423304
1255	1251	26/10/2012	-0.0459770	-0.0150376	-0.0153884	-0.0006706	-0.0117502	-0.0009635	0.0001173	-0.001273980
1256										
1257										
1258			AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX	IPC	CETE	Rp: Mi portafolio óptimo de Sharpe
1259		Media diaria	-0.1213969%	-0.0015209%	-0.0364166%	0.1046165%	0.0837242%	0.0388715%	0.0146355%	0.1034787%
1260		Desv. T. Est diaria	3.0698206%	3.7127584%	4.8506700%	2.0315543%	3.0463445%	1.4890119%	0.0040921%	1.9983201%
1261		Varianza diaria	0.0942380%	0.1378457%	0.2352900%	0.0412721%	0.0928021%	0.0221716%	0.0000002%	0.0399328%
1262		Media Anual	-30.5920295%	-0.3832549%	-9.1769815%	26.3633594%	21.0985064%	9.795613	5.2687624%	26.0766341%
1263		Desv. T. Est anual	48.7318915%	58.9382122%	77.0019986%	32.2499250%	48.3592194%	23.6373317%	0.0776420%	31.7223480%
1264		Varianza Anual	23.7479725%	34.7371285%	59.2930778%	10.4005766%	23.3861410%	5.5872345%	0.0000603%	10.0630737%

I1263 f_x =I1260*360^0.5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1252	1248	23/10/2012	-0.0502646	0.0051414	-0.0110230	-0.0012297	-0.0134468	-0.0019256	0.0001173	-0.001895054
1253	1249	24/10/2012	0.0250696	0.0196078	0.0108954	-0.0096856	0.0150209	0.0012849	0.0001175	-0.008340106
1254	1250	25/10/2012	-0.0543478	0.0008361	0.0009498	-0.0111894	0.0028775	-0.0051761	0.0001173	-0.010423304
1255	1251	26/10/2012	-0.0459770	-0.0150376	-0.0153884	-0.0006706	-0.0117502	-0.0009635	0.0001173	-0.001273980
1256										
1257										
1258			AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX	IPC	CETE	Rp: Mi portafolio óptimo de Sharpe
1259		Media diaria	-0.1213969%	-0.0015209%	-0.0364166%	0.1046165%	0.0837242%	0.0388715%	0.0146355%	0.1034787%
1260		Desv. T. Est diaria	3.0698206%	3.7127584%	4.8506700%	2.0315543%	3.0463445%	1.4890119%	0.0040921%	1.9983201%
1261		Varianza diaria	0.0942380%	0.1378457%	0.2352900%	0.0412721%	0.0928021%	0.0221716%	0.0000002%	0.0399328%
1262		Media Anual	-30.5920295%	-0.3832549%	-9.1769815%	26.3633594%	21.0985064%	9.7956139%	5.2687624%	26.0766341%
1263		Desv. T. Est anual	48.7318915%	58.9382122%	77.0019986%	32.2499250%	48.3592194%	23.637331	0.0776420%	31.7223480%
1264		Varianza Anual	23.7479725%	34.7371285%	59.2930778%	10.4005766%	23.3861410%	5.5872345%	0.0000603%	10.0630737%

I1264 f_x =I1261*360

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1252	1248	23/10/2012	-0.0502646	0.0051414	-0.0110230	-0.0012297	-0.0134468	-0.0019256	0.0001173	-0.001895054
1253	1249	24/10/2012	0.0250696	0.0196078	0.0108954	-0.0096856	0.0150209	0.0012849	0.0001175	-0.008340106
1254	1250	25/10/2012	-0.0543478	0.0008361	0.0009498	-0.0111894	0.0028775	-0.0051761	0.0001173	-0.010423304
1255	1251	26/10/2012	-0.0459770	-0.0150376	-0.0153884	-0.0006706	-0.0117502	-0.0009635	0.0001173	-0.001273980
1256										
1257										
1258			AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX	IPC	CETE	Rp: Mi portafolio óptimo de Sharpe
1259		Media diaria	-0.1213969%	-0.0015209%	-0.0364166%	0.1046165%	0.0837242%	0.0388715%	0.0146355%	0.1034787%
1260		Desv. T. Est diaria	3.0698206%	3.7127584%	4.8506700%	2.0315543%	3.0463445%	1.4890119%	0.0040921%	1.9983201%
1261		Varianza diaria	0.0942380%	0.1378457%	0.2352900%	0.0412721%	0.0928021%	0.0221716%	0.0000002%	0.0399328%
1262		Media Anual	-30.5920295%	-0.3832549%	-9.1769815%	26.3633594%	21.0985064%	9.7956139%	5.2687624%	26.0766341%
1263		Desv. T. Est anual	48.7318915%	58.9382122%	77.0019986%	32.2499250%	48.3592194%	23.6373317%	0.0776420%	31.7223480%
1264		Varianza Anual	23.7479725%	34.7371285%	59.2930778%	10.4005766%	23.3861410%	5.587234	0.0000603%	10.0630737%

Tabla 20. Media y desviación típica estándar portafolio. Enero 2008 a Octubre 2012.

IPC	CETE	Rp: Mi portafolio óptimo de Sharpe
0.0388715%	0.0146355%	0.1034787%
1.4890119%	0.0040921%	1.9983201%
0.0221716%	0.0000002%	0.0399328%
9.7956139%	5.2687624%	26.0766341%
23.6373317%	0.0776420%	31.7223480%
5.5872345%	0.0000603%	10.0630737%

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).
Para el cálculo anual se multiplicó la media diaria por 252 días, la desviación típica estándar por $\sqrt{252}$ y la varianza por 252.

b) El riesgo sistemático Beta del portafolio óptimo de Sharpe.

P5 f_x =COVAR(C$5:C$1255,$H$5:$H$1255)

	N	O	P	Q	R
1					
2					
3			Cálculo de Beta		
4			COVARIANZA (Activo, IPC)	VARIANZA IPC	BETA (βim) = COV / VAR
5		AXTELCPO.MX	0.000238	0.000222	1.0750
6		CEMEXCPO.MX	0.000385	0.000222	1.7368
7		C.MX (CITI)	0.000369	0.000222	1.6634
8		FEMSAUBD.MX	0.000187	0.000222	0.8440
9		GFNORTEO.MX	0.000293	0.000222	1.3225
10		PORTAFOLIO OPTIMO	0.000193	0.000222	0.8700

Q5 f_x =VAR($H$5:$H$1255)

	N	O	P	Q	R
1					
2					
3			Cálculo de Beta		
4			COVARIANZA (Activo, IPC)	VARIANZA IPC	BETA (βim) = COV / VAR
5		AXTELCPO.MX	0.000238	0.000222	1.0750
6		CEMEXCPO.MX	0.000385	0.000222	1.7368
7		C.MX (CITI)	0.000369	0.000222	1.6634
8		FEMSAUBD.MX	0.000187	0.000222	0.8440
9		GFNORTEO.MX	0.000293	0.000222	1.3225
10		PORTAFOLIO OPTIMO	0.000193	0.000222	0.8700

Tabla 21. Determinación del riesgo sistemático beta a través de regresión lineal simple por el método de mínimos cuadrados, o bien a través de la covarianza y varianza.

	COVARIANZA (Activo, IPC)	VARIANZA IPC	BETA = COV / VAR
PORTAFOLIO OPTIMO SHARPE	0.000192897	0.000221716	0.870021194

Fuente. Elaboración propia con datos históricos YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

c) Aplicamos fórmulas:

Índice de Traynor

$$It = \frac{\overline{r_p} - \overline{r_f}}{\beta_p} = \frac{26.07\,\% - 5.27\%}{0.87} = \frac{20.81}{0.87} = 23.90\%$$

Índice de Mercado

$$Im = \frac{\overline{r_{IPC}} - \overline{r_f}}{\beta_p} = \frac{9.79\% - 5.26\,\%}{0.87} = \frac{4.53\%}{0.87} = 5.20\%$$

Se concluye que el óptimo de Sharpe abate al mercado de forma eficiente en 18.70% (It – Im).

CAPITULO III

TEORÍA EVALUACIÓN DE PRECIOS POR ARBITRAJE, STEPHEN ROSS
(Arbitrage Pricing Theory - APT)

Para efectos de diseño de un modelo teórico de valoración de carteras, la utilización de un único índice es perfectamente admisible, sin embargo puede conllevar cierta pérdida de información causada por múltiples factores. Para ello, existen modelos multifactoriales de selección de carteras que utilizan varios índices representativos del riesgo sistemático. Estos factores no enumerados ni concretados por teoría alguna y que hacen referencia generalmente a macro magnitudes influyentes en la evolución de la economía, son identificados con técnicas econométricas racionalmente consensuadas por la comunidad financiera. La rentabilidad de un título esta correlacionada con los valores esperados de las variables económicas fundamentales que con los cambios contemporáneos o actuales de las mismas, es decir, la cotización actual de un título refleja regularmente la previsión respecto al valor actual de los proyectos de inversión de la empresa emisora el cual depende de las estimaciones relativas de la evolución de las macro magnitudes fundamentales y no exclusivamente de sus valores históricos.

Supóngase que en la economía existe un número de "N" de activos (títulos o acciones) con riesgo y un número de factores "D", cuya "sorpresa" es causa de riesgo sistemático menor a "N". La expresión "sorpresas" de la rentabilidad de cualquiera de esos títulos según el modelo multifactorial lineal general en su forma ex-ante (es decir, antes de que cualquier inversor pueda conocer los valores de las variables aleatorias vinculadas), se puede representar como:

$$\overline{R}_i = E[\overline{R}_i] + \left[\sum_{d=1}^{D} (\overline{F}_d - E[\overline{F}_d]) \cdot \beta_{id}\right] + \tilde{\varepsilon}_i$$

Donde,

$\overline{R}_i$: Variable aleatoria de la rentabilidad por período del título "i" (i = 1,..., N).

$E[\overline{R}_i]$: Rentabilidad esperada del título "i" durante el período de referencia.

$\overline{F}_d$: Variable aleatoria que expresa la variación por período del valor de un factor "d" cuya "sorpresa" es causa de riesgo sistemático (d = 1,..., D). Por ejemplo: variación anual del PIB, variación anual del índice nacional de precios al consumidor (inflación anual), entre otros. La covarianza entre cualesquiera dos factores no tiene por qué ser nula.

$\overline{F}_d - E[\overline{F}_d]$: Expresión ex-ante de la "sorpresa" causante de riesgo sistemático vinculada al factor "d" (d = 1,..., D), durante el período de referencia y que afecta a todos los títulos con un grado de intensidad diferente cuantificado por la beta de cada título respecto a dicho factor. Su valor esperado es nulo y su covarianza con otras "sorpresas sistemáticas" vinculadas a variables diferentes al factor "d" se supone nulo.

β_{id}: Valor teórico de la sensibilidad de la rentabilidad de un título "i" al riesgo sistemático causado por la "sorpresa" vinculada al factor d (d = 1,..., D). En términos estimados se define como la covarianza entre la rentabilidad de dicho título y la variable indicativa de factor respecto a la varianza:

$$\hat{\beta}_{id} = \frac{\operatorname{cov}(\overline{R}_i\ \overline{F}_d)}{\operatorname{var}(\overline{F}_d)}$$

Supondremos que la estimación es certera $(\hat{\beta}_{id} = \beta_{id})$ y que β_{id} es constante período tras período. Se identifica como "coeficiente beta" del título "i" respecto al factor "d".

$\overline{\varepsilon}_i$: Expresión ex-ante de la "sorpresa" derivada del componente aleatorio causante de riesgo no sistemático durante el período de referencia y que afecta exclusivamente al título "i". Se supone que se cumplen todas las hipótesis referidas a la perturbación aleatoria (la perturbación aleatoria no está correlacionada con ningún factor $\overline{F}_d$ cuya "sorpresa" sea causa de riesgo sistemático).

D : Número de factores cuya "sorpresa" es causa de riesgo sistemático.

Entre los modelos multifactoriales se encuentra "La teoría de valoración o valuación de precios por arbitraje (Arbitrage Pricing Theory – APT)", creado por Stephen Ross en el año de 1976. El APT considera que la rentabilidad de una acción depende de factores macroeconómicos (denominados Betas) y factores específicos de la empresa, su lógica es similar al modelo CAPM, pues los inversionistas son recompensados por tomar un riesgo sistemático con la diferencia de considerar un mayor número de factores. El APT ayuda a medir el riesgo sistemático proveniente de múltiples factores, construyéndose sobre la premisa de que los inversionistas toman ventaja de las oportunidades de arbitraje debido a que ofrece una explicación del proceso de recuperación del estado de "equilibrio" que tendría lugar en un mercado financiero en situación de desajuste y en el que los inversores intentan maximizar su riqueza y son aversos a dicho riesgo.

Al igual que el CAPM el APT considera que el único riesgo que el mercado está dispuesto e remunerar es el sistemático, pues el resto del riesgo se puede reducir o eliminar vía diversificación. Este modelo se fundamenta en tres supuestos de partida: a) las rentabilidades pueden describirse mediante un modelo factorial b) no hay oportunidades de arbitraje c) la existencia de numerosos títulos o acciones proporcionan una diversificación del riesgo. Esto quiere decir que es un modelo factorial de carteras básicas que indica la relación "justa" entre la rentabilidad esperada y el riesgo sistemático de cualquier cartera "P" formada por la combinación del título (activo) sin riesgo con las "D" carteras básicas previamente diseñadas a partir de una cesta de "H" títulos (activos) con riesgo. Asimismo "P" será una cartera diversificada al tener a su vez cada una de las "D" carteras básicas. La construcción de una cartera mixta "P" debidamente diversificada exige (a fin de que el nivel de riesgo de la misma se adecue al deseado) la distribución de la porción arriesgada del presupuesto de inversión entre las "D" carteras básicas (una por factor) en proporciones coincidentes con el valor de la beta de "P" respecto a cada uno de los "D" factores causantes de riesgo sistemático. La porción no arriesgada de dicho presupuesto será la dedicada al título sin riesgo.

El concepto "mercado financiero en equilibrio" no significa "vaciado global de mercado" (coincidencia de oferta y demanda de todos los títulos existentes: N con riesgo y 1 sin riesgo), sino como una situación en la que los "H" títulos con riesgo considerados (o cualquier cartera teórica mixta "P" que combine el título sin riesgo con las "D" carteras básicas formadas), no existen "oportunidades de arbitraje" entendiéndose que dado un presupuesto fijo no es factible obtener rentabilidad extraordinaria alguna sin asumir un riesgo proporcionalmente extraordinario.

El modelo APT no precisa el concepto "cartera de mercado", debido a que puede ser formulado sin considerar la totalidad de los títulos con riesgo existentes (sino sólo una parte de ellos, los de la cesta de H < N títulos) lo que lo convierte en un modelo de equilibrio parcial del mercado financiero y no de equilibrio general como es el CAPM.

Las principales diferencias entre el modelo CAPM y el modelo APT son:

El modelo APT es mucho más completo que el CAPM pues: no precisa supuesto sobre la distribución de probabilidad de la rentabilidad de los activos financieros (el CAPM supone distribución normal); no precisa hipótesis respecto a la función de utilidad del individuo al menos más fuerte que la de aversión al riesgo (el CAPM supone función de utilidad cuadrática); se basa en un análisis de precios relativos de un conjunto de activos financieros que no necesariamente debe incluir la totalidad de los títulos existentes, como sucede con el CAPM el cual considera el concepto "cartera de mercado" como una situación perfecta e ideal.

El APT puede ser considerado como un modelo empírico falto de un fundamento microeconómico debido que trata de buscar una relación econométrica más que formular un modelo teórico de valoración de activos financieros (en el APT los precios de los activos financieros son calculados a partir de precios observados), sin embargo si se le suman algunos supuestos básicos a su ecuación fundamental puede derivarse la del CAPM para el caso particular en que sólo exista una cartera básica (la cartera de mercado) y, por tanto, suponer que todos los precios de los activos financieros son endógenos. El CAPM predice que la rentabilidad de un título estará linealmente relacionada con un único factor "la rentabilidad de la cartera de mercado", el APT está basado en una intuición similar pero mucho más general al asumir que la rentabilidad de cualquier título es una función lineal de varios factores. El CAPM puede considerarse un caso especial del APT cuando la rentabilidad de la cartera de mercado es el único factor relevante existente. El CAPM por construcción y por ser un modelo de equilibrio es intuitivamente de más fácil comprensión que los modelos multifactoriales basados en la teoría de valoración por arbitraje, pues la línea argumental que deriva en su formulación exige la consideración de modelos previos de Markowitz y Tobin.

Para efectos prácticos, representación matemática del modelo APT puede interpretarse como:

$$E(R_i) = R_f + \beta_1 E(R_{F_1} - R_f) + \beta_2 E(R_{F_2} - R_f) + \ldots\ldots + \beta_k E(R_{F_k} - R_f)$$

Donde,

$E(R_i)$: Rentabilidad esperada del activo o cartera "i".

R_f: Rentabilidad esperada de la cartera libre de riesgo.

R_{F_1, F_2, F_k}: Rentabilidad del factor macroeconómico.

$\beta_{1,2,k}$: Sensibilidad del activo o cartera al factor "k".

Esto quiere decir que ante el supuesto de existencia de un mercado en equilibrio, la rentabilidad que un inversor esperaría obtener de un activo, sería igual a la que obtendría de una inversión libre de riesgo más una compensación por el riesgo sistemático que habría de soportar. Dicha compensación estaría determinada por las distintas primas de riesgo respecto a los “R_{Fk}” factores comunes explicativos de rentabilidad, multiplicados por los coeficientes betas respecto a uno de los “R_{Fk}” factores contemplados.

Supongamos que se han identificado tres factores macroeconómicos que posiblemente describen los riesgos sistemáticos más influyentes en la rentabilidad de las acciones o del portafolio óptimo de Sharpe: Índice Global de Actividad Económica (IGAE) como representante de la variación del Producto Interno Bruto (PIB), Índice Nacional de Precios y Cotizaciones como referencia del incremento inflacionario y el Tipo de Cambio (peso/dólar).

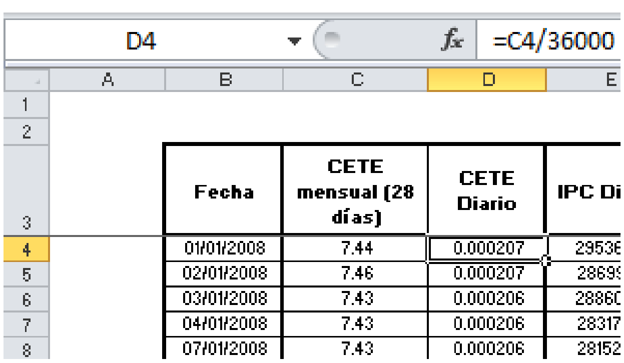
La rentabilidad de las acciones por el método APT se puede expresar como:

$$E(Ri) = R_{CETE}+\beta_{IPC}(R_{IPC}-R_{CETE})+\beta_{TC}(R_{TC}-R_{CETE})+\beta_{IGAE}(R_{IGAE}-R_{CETE})+\beta_{INPC}(R_{INPC}-R_{CETE})$$

A continuación se describe el procedimiento y resultados obtenidos:

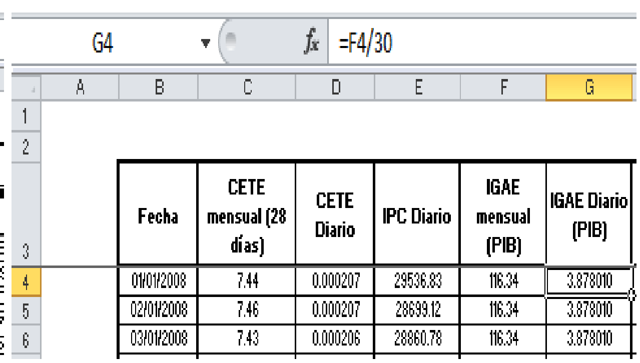
1. Cálculo de la rentabilidad por cada serie accionaria.
2. Obtención de beta o sensibilidad a la variación del riesgo sistemático de cada factor macroeconómico y serie accionaria (regresión lineal por el método de mínimos cuadrados o por covarianza)
3. Cálculo de la rentabilidad esperada para para cada serie accionaria y del portafolio óptimo de Sharpe (ecuación APT).

Estandarización de datos.



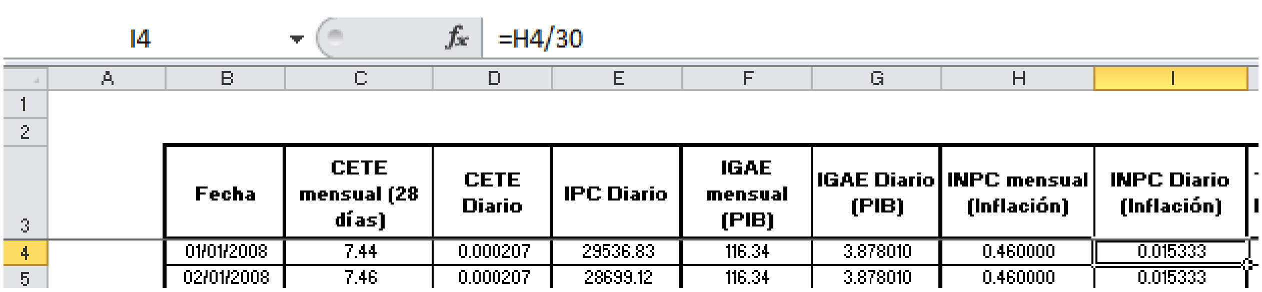
D4 =C4/36000

Fecha	CETE mensual (28 días)	CETE Diario	IPC Di
01/01/2008	7.44	0.000207	29536
02/01/2008	7.46	0.000207	28699
03/01/2008	7.43	0.000206	28860
04/01/2008	7.43	0.000206	28317
07/01/2008	7.43	0.000206	28152



G4 =F4/30

Fecha	CETE mensual (28 días)	CETE Diario	IPC Diario	IGAE mensual (PIB)	IGAE Diario (PIB)
01/01/2008	7.44	0.000207	29536.83	116.34	3.878010
02/01/2008	7.46	0.000207	28699.12	116.34	3.878010
03/01/2008	7.43	0.000206	28860.78	116.34	3.878010



I4 =H4/30

Fecha	CETE mensual (28 días)	CETE Diario	IPC Diario	IGAE mensual (PIB)	IGAE Diario (PIB)	INPC mensual (Inflación)	INPC Diario (Inflación)
01/01/2008	7.44	0.000207	29536.83	116.34	3.878010	0.460000	0.015333
02/01/2008	7.46	0.000207	28699.12	116.34	3.878010	0.460000	0.015333

K4 f_x =J4-I4

Fecha	CETE mensual (28 días)	CETE Diario	IPC Diario	IGAE mensual (PIB)	IGAE Diario (PIB)	INPC mensual (Inflación)	INPC Diario (Inflación)	TIPO DE CAMBIO NOMINAL Diario	TIPO DE CAMBIO REAL Diario = TC Nom Diario - INPC Diario
01/01/2008	7.44	0.000207	29536.83	116.34	3.878010	0.460000	0.015333	10.92	10.900

Rentabilidades.

L5 f_x =D5

TIPO DE CAMBIO REAL Diario = TC Nom Diario - INPC Diario	CETE	IPC
10.900		
10.900	0.000207	-0.028362
10.882	0.000206	0.005633

M5 f_x =E5/E4-1

TIPO DE CAMBIO REAL Diario = TC Nom Diario - INPC Diario	CETE	IPC
10.900		
10.900	0.000207	-0.028362

N5 f_x =G5/G4-1

RENTABILIDAD DIARIA			
CETE	IPC	IGAE (PIB)	INPC (INFLACIÓN)
0.000207	-0.028362	0.000000	0.015333

O5 f_x =I4

RENTABILIDAD DIARIA				
CETE	IPC	IGAE (PIB)	INPC (INFLACIÓN)	TIPO DE CAMBIO REAL
0.000207	-0.028362	0.000000	0.015333	0.000000
0.000206	0.005633	0.000000	0.015333	-0.001697

L1262 f_x =+L1259*360

	CETE	IPC	IGAE (P
Media diaria (promedio)	0.015%	0.039%	0.013
Desv. T. Est diaria	0.004%	1.489%	0.771
Varianza diaria	0.000%	0.022%	0.006
Media Anual (promedio)	5.269%	9.796%	3.212

P5 f_x =K5/K4-1

RENTABILIDAD DIARIA				
CETE	IPC	IGAE (PIB)	INPC (INFLACIÓN)	TIPO DE CAMBIO REAL
0.000207	-0.028362	0.000000	0.015333	0.000000
0.000206	0.005633	0.000000	0.015333	-0.001697

Esperanza matemática (media o promedio) anualizada.

M1262 | f_x =+M1259*252

	J	K	L	M	
1					
2			RENTABILIDA		
3	TIPO DE CAMBIO NOMINAL Diario	TIPO DE CAMBIO REAL Diario = TC Nom Diario - INPC Diario	CETE	IPC	IG
1257					
1258			CETE	IPC	P
1259		Media diaria (promedio)	0.015%	0.039%	
1260		Desv. T. Est diaria	0.004%	1.489%	
1261		Varianza diaria	0.000%	0.022%	
1262		Media Anual (promedio)	5.269%	9.796%	
1263		Desv. T. Est anual	0.078%	23.637%	
1264		Varianza Anual	0.000%	5.587%	

N1262 | f_x =+N1259*252

	J	K	L	M	N
1					
2			RENTABILIDAD DIARIA		
3	TIPO DE CAMBIO NOMINAL Diario	TIPO DE CAMBIO REAL Diario = TC Nom Diario - INPC Diario	CETE	IPC	IGAE (PIB)
1257					
1258			CETE	IPC	PIB (IGAE)
1259		Media diaria (promedio)	0.015%	0.039%	0.013%
1260		Desv. T. Est diaria	0.004%	1.489%	0.771%
1261		Varianza diaria	0.000%	0.022%	0.006%
1262		Media Anual (promedio)	5.269%	9.796%	3.212%
1263		Desv. T. Est anual	0.078%	23.637%	12.234%
1264		Varianza Anual	0.000%	5.587%	1.497%

P1262 | f_x =+P1259*252

	K	L	M	N	O	P
1						
2		RENTABILIDAD DIARIA				
3	TIPO DE CAMBIO REAL Diario = TC Nom Diario - INPC Diario	CETE	IPC	IGAE (PIB)	INPC (INFLACIÓN)	TIPO DE CAMBIO REAL
1256						
1257						
1258		CETE	IPC	IGAE (PIB)	INPC (INFLACIÓN)	TIPO DE CAMBIO REAL
1259	Media diaria (promedio)	0.015%	0.039%	0.013%	1.170%	0.017%
1260	Desv. T. Est diaria	0.004%	1.489%	0.771%	1.266%	0.846%
1261	Varianza diaria	0.000%	0.022%	0.006%	0.016%	0.007%
1262	Media Anual (promedio)	5.269%	9.796%	3.212%	294.839%	4.368%
1263	Desv. T. Est anual	0.078%	23.637%	12.234%	20.090%	13.432%
1264	Varianza Anual	0.000%	5.587%	1.497%	4.036%	1.804%

Desviación típica estándar anualizada.

L1263 | f_x =L1260*360^0.5

	J	K	L	
1				
2			REN	
3	TIPO DE CAMBIO NOMINAL Diario	TIPO DE CAMBIO REAL Diario = TC Nom Diario - INPC Diario	CETE	I
1257				
1258			CETE	I
1259		Media diaria (promedio)	0.015%	0
1260		Desv. T. Est diaria	0.004%	1.
1261		Varianza diaria	0.000%	0
1262		Media Anual (promedio)	5.269%	9
1263		Desv. T. Est anual	0.078%	2:
1264		Varianza Anual	0.000%	5

M1263 | f_x =M1260*252^0.5

	J	K	L	M	
1					
2			RENTABILIDAI		
3	TIPO DE CAMBIO NOMINAL Diario	TIPO DE CAMBIO REAL Diario = TC Nom Diario - INPC Diario	CETE	IPC	IG
1257					
1258			CETE	IPC	PI
1259		Media diaria (promedio)	0.015%	0.039%	
1260		Desv. T. Est diaria	0.004%	1.489%	
1261		Varianza diaria	0.000%	0.022%	
1262		Media Anual (promedio)	5.269%	9.796%	
1263		Desv. T. Est anual	0.078%	23.637%	
1264		Varianza Anual	0.000%	5.587%	

Varianza anualizada.

L1264 | f_x =L1261*360

	J	K	L	
1				
2				REN
3	TIPO DE CAMBIO NOMINAL Diario	TIPO DE CAMBIO REAL Diario = TC Nom Diario - INPC Diario	CETE	
1256				
1257				
1258			CETE	
1259		Media diaria (promedio)	0.015%	0
1260		Desv. T. Est diaria	0.004%	1
1261		Varianza diaria	0.000%	0
1262		Media Anual (promedio)	5.269%	9
1263		Desv. T. Est anual	0.078%	2:
1264		Varianza Anual	0.000%	5
1265				

M1264 | f_x =M1261*252

	J	K	L	M
1				
2			RENTABILID	
3	TIPO DE CAMBIO NOMINAL Diario	TIPO DE CAMBIO REAL Diario = TC Nom Diario - INPC Diario	CETE	IPC
1256				
1257				
1258			CETE	IPC
1259		Media diaria (promedio)	0.015%	0.039%
1260		Desv. T. Est diaria	0.004%	1.489%
1261		Varianza diaria	0.000%	0.022%
1262		Media Anual (promedio)	5.269%	9.796%
1263		Desv. T. Est anual	0.078%	23.637%
1264		Varianza Anual	0.000%	5.587%

N1264 | f_x =N1261*252

	K	L	M	N
1				
2		RENTABILIDAI		
3	TIPO DE CAMBIO REAL Diario = TC Nom Diario - INPC Diario	CETE	IPC	IGAE (PIB)
1256				
1257				
1258		CETE	IPC	IGAE (PIB)
1259	Media diaria (promedio)	0.015%	0.039%	0.013%
1260	Desv. T. Est diaria	0.004%	1.489%	0.771%
1261	Varianza diaria	0.000%	0.022%	0.006%
1262	Media Anual (promedio)	5.269%	9.796%	3.212%
1263	Desv. T. Est anual	0.078%	23.637%	12.234%
1264	Varianza Anual	0.000%	5.587%	1.497%

O1264 | f_x =O1261*252

	K	L	M	N	O
1					
2		RENTABILIDAD DIARIA			
3	TIPO DE CAMBIO REAL Diario = TC Nom Diario - INPC Diario	CETE	IPC	IGAE (PIB)	INPC (INFLACIÓN)
1256					
1257					
1258		CETE	IPC	IGAE (PIB)	INPC (INFLACIÓN)
1259	Media diaria (promedio)	0.015%	0.039%	0.013%	1.170%
1260	Desv. T. Est diaria	0.004%	1.489%	0.771%	1.266%
1261	Varianza diaria	0.000%	0.022%	0.006%	0.016%
1262	Media Anual (promedio)	5.269%	9.796%	3.212%	294.839%
1263	Desv. T. Est anual	0.078%	23.637%	12.234%	20.090%
1264	Varianza Anual	0.000%	5.587%	1.497%	4.036%

P1264 | f_x =P1261*252

	J	K	L	M	N	O	P
1							
2			RENTABILIDAD DIARIA				
3	TIPO DE CAMBIO NOMINAL Diario	TIPO DE CAMBIO REAL Diario = TC Nom Diario - INPC Diario	CETE	IPC	IGAE (PIB)	INPC (INFLACIÓN)	TIPO DE CAMBIO REAL
1256							
1257							
1258			CETE	IPC	IGAE (PIB)	INPC (INFLACIÓN)	TIPO DE CAMBIO REAL
1259		Media diaria (promedio)	0.015%	0.039%	0.013%	1.170%	0.017%
1260		Desv. T. Est diaria	0.004%	1.489%	0.771%	1.266%	0.846%
1261		Varianza diaria	0.000%	0.022%	0.006%	0.016%	0.007%
1262		Media Anual (promedio)	5.269%	9.796%	3.212%	294.839%	4.368%
1263		Desv. T. Est anual	0.078%	23.637%	12.234%	20.090%	13.432%
1264		Varianza Anual	0.000%	5.587%	1.497%	4.036%	1.804%

Coeficiente Beta por acción respecto a cada variable macroeconómica (método covarianza o regresión lineal por MCO).

X1268 =COVAR(rendimientos!$C$5:$C$1255,$M$5:$M$1255)

SENSIBILIDAD A LA VARIACIÓN DEL IPC	COVARIANZA (Activo, IPC)	VARIANZ A IPC	BETA = COV / VAR
AXTELCPO.MX	0.000238	0.000222	1.075015
CEMEXCPO.MX	0.000385	0.000222	1.736841
C.MX (CITI)	0.000369	0.000222	1.663357
FEMSAUBD.MX	0.000187	0.000222	0.843959
GFNORTEO.MX	0.000293	0.000222	1.322510
PORTAFOLIO OPTIMO	0.000193	0.000222	0.870021

Y1268 =VAR($M$5:$M$1255)

SENSIBILIDAD A LA VARIACIÓN DEL IPC	COVARIANZA (Activo, IPC)	VARIANZ A IPC	BETA = COV / VAR
AXTELCPO.MX	0.000238	0.000222	1.075015
CEMEXCPO.MX	0.000385	0.000222	1.736841
C.MX (CITI)	0.000369	0.000222	1.663357
FEMSAUBD.MX	0.000187	0.000222	0.843959
GFNORTEO.MX	0.000293	0.000222	1.322510
PORTAFOLIO OPTIMO	0.000193	0.000222	0.870021

Z1268 =X1268/Y1268

SENSIBILIDAD A LA VARIACIÓN DEL IPC	COVARIANZA (Activo, IPC)	VARIANZ A IPC	BETA = COV / VAR
AXTELCPO.MX	0.000238	0.000222	1.075015
CEMEXCPO.MX	0.000385	0.000222	1.736841
C.MX (CITI)	0.000369	0.000222	1.663357
FEMSAUBD.MX	0.000187	0.000222	0.843959
GFNORTEO.MX	0.000293	0.000222	1.322510
PORTAFOLIO OPTIMO	0.000193	0.000222	0.870021

AE1268 =AC1268/AD1268

SENSIBILIDAD A LA VARIACIÓN AL T.CAMBIO	COVARIANZA (Activo, TC)	VARIANZA TC	BETA = COV / VAR
AXTELCPO.MX	0.000008	0.000072	0.107747
CEMEXCPO.MX	-0.000025	0.000072	-0.344542
C.MX (CITI)	-0.000040	0.000072	-0.552654
FEMSAUBD.MX	0.000006	0.000072	0.082099
GFNORTEO.MX	-0.000001	0.000072	-0.007085
PORTAFOLIO OPTIMO	0.000006	0.000072	0.077242

AJ1268 =AH1268/AI1268

SENSIBILIDAD A LA VARIACIÓN IGAE (PIB)	COVARIANZA (Activo, PIB)	VARIANZA PIB	BETA = COV / VAR
AXTELCPO.MX	-0.000009	0.000059	-0.156493
CEMEXCPO.MX	-0.000009	0.000059	-0.143510
C.MX (CITI)	-0.000003	0.000059	-0.054205
FEMSAUBD.MX	0.000003	0.000059	0.050201
GFNORTEO.MX	0.000000	0.000059	-0.007706
PORTAFOLIO OPTIMO	0.000003	0.000059	0.047048

Rentabilidad APT.

AG1277 f_x =X1277+Y1277*(Z1277-X1277)+AA1277*(AB1277-X1277)+AC1277*(AD1277-X1277)+AE1277*(AF1277-X1277)

	E(Ri) = RCETE+βIPC(RIPC-RCETE)+βTC(RTC-RCETE)+βIGAE(RIGAE-RCETE)+βINPC(RINPC-RCETE)									
	R CETE	β IPC	R IPC	β Tcambio	R Tcambio	β IGAE(PIB)	R IGAE (PIB)	β INPC (Inflación)	R INPC (Inflación)	E(Ri) APT
AXTELCPO.MX	5.27%	1.08	9.80%	0.11	4.37%	-0.16	3.21%	-0.06	4.37%	10.41%
CEMEXCPO.MX	5.27%	1.74	9.80%	-0.34	4.37%	-0.14	3.21%	-0.05	4.37%	13.78%
C.MX (CITI)	5.27%	1.66	9.80%	-0.55	4.37%	-0.05	3.21%	-0.02	4.37%	13.43%
FEMSAUBD.MX	5.27%	0.84	9.80%	0.08	4.37%	0.05	3.21%	0.02	4.37%	8.90%
GFNORTEO.MX	5.27%	1.32	9.80%	-0.01	4.37%	-0.01	3.21%	0.00	4.37%	11.28%
PORTAFOLIO OPTIMO	5.27%	0.87	9.80%	0.08	4.37%	0.05	3.21%	0.02	4.37%	9.03%

Rentabilidad APT y CAPM.

AH1277 f_x 10.1390898355764%

	E(Ri) = RCETE+βIPC(RIPC-RCETE)+βTC(RTC-RCETE)+βIGAE(RIGAE-RCETE)+βINPC(RINPC-RCETE)										
	R CETE	β IPC	R IPC	β Tcambio	R Tcambio	β IGAE(PIB)	R IGAE (PIB)	β INPC (Inflación)	R INPC (Inflación)	E(Ri) APT	E (Ri) CAPM
AXTELCPO.MX	5.27%	1.08	9.80%	0.11	4.37%	-0.16	3.21%	-0.06	4.37%	10.41%	10.14%
CEMEXCPO.MX	5.27%	1.74	9.80%	-0.34	4.37%	-0.14	3.21%	-0.05	4.37%	13.78%	13.14%
C.MX (CITI)	5.27%	1.66	9.80%	-0.55	4.37%	-0.05	3.21%	-0.02	4.37%	13.43%	12.80%
FEMSAUBD.MX	5.27%	0.84	9.80%	0.08	4.37%	0.05	3.21%	0.02	4.37%	8.90%	9.09%
GFNORTEO.MX	5.27%	1.32	9.80%	-0.01	4.37%	-0.01	3.21%	0.00	4.37%	11.28%	11.26%
PORTAFOLIO OPTIMO	5.27%	0.87	9.80%	0.08	4.37%	0.05	3.21%	0.02	4.37%	9.03%	9.21%

Tabla 22. Resumen riesgo sistemático Beta, Enero 2008 a Octubre 2012.

	SENSIBILIDAD A LA VARIACIÓN DEL IPC		
	COVARIANZA (Activo, IPC)	VARIANZA IPC	BETA = COV / VAR
AXTELCPO.MX	0.000238	0.000222	1.075015
CEMEXCPO.MX	0.000385	0.000222	1.736841
C.MX (CITI)	0.000369	0.000222	1.663357
FEMSAUBD.MX	0.000187	0.000222	0.843959
GFNORTEO.MX	0.000293	0.000222	1.322510
PORTAFOLIO OPTIMO SHARPE	0.000193	0.000222	0.870021

	SENSIBILIDAD A LA VARIACIÓN AL T.CAMBIO		
	COVARIANZA (Activo, TC)	VARIANZA TC	BETA = COV / VAR
AXTELCPO.MX	0.000008	0.000072	0.107747
CEMEXCPO.MX	-0.000025	0.000072	-0.344542
C.MX (CITI)	-0.000040	0.000072	-0.552654
FEMSAUBD.MX	0.000006	0.000072	0.082099
GFNORTEO.MX	-0.000001	0.000072	-0.007085
PORTAFOLIO OPTIMO SHARPE	0.000006	0.000072	0.077242

	SENSIBILIDAD A LA VARIACIÓN IGAE (PIB)		
	COVARIANZA (Activo, PIB)	VARIANZA PIB	BETA = COV / VAR
AXTELCPO.MX	-0.000009	0.000059	-0.156493
CEMEXCPO.MX	-0.000009	0.000059	-0.143510
C.MX (CITI)	-0.000003	0.000059	-0.054205
FEMSAUBD.MX	0.000003	0.000059	0.050201
GFNORTEO.MX	0.000000	0.000059	-0.007706
PORTAFOLIO OPTIMO SHARPE	0.000003	0.000059	0.047048

	SENSIBILIDAD A LA VARIACIÓN INPC (INFLACIÓN)		
	COVARIANZA (Activo, PIB)	VARIANZA INPC	BETA = COV / VAR
AXTELCPO.MX	-0.000009	0.000160	-0.058027
CEMEXCPO.MX	-0.000009	0.000160	-0.053213
C.MX (CITI)	-0.000003	0.000160	-0.020099
FEMSAUBD.MX	0.000003	0.000160	0.018614
GFNORTEO.MX	0.000000	0.000160	-0.002857
PORTAFOLIO OPTIMO SHARPE	0.000003	0.000160	0.017445

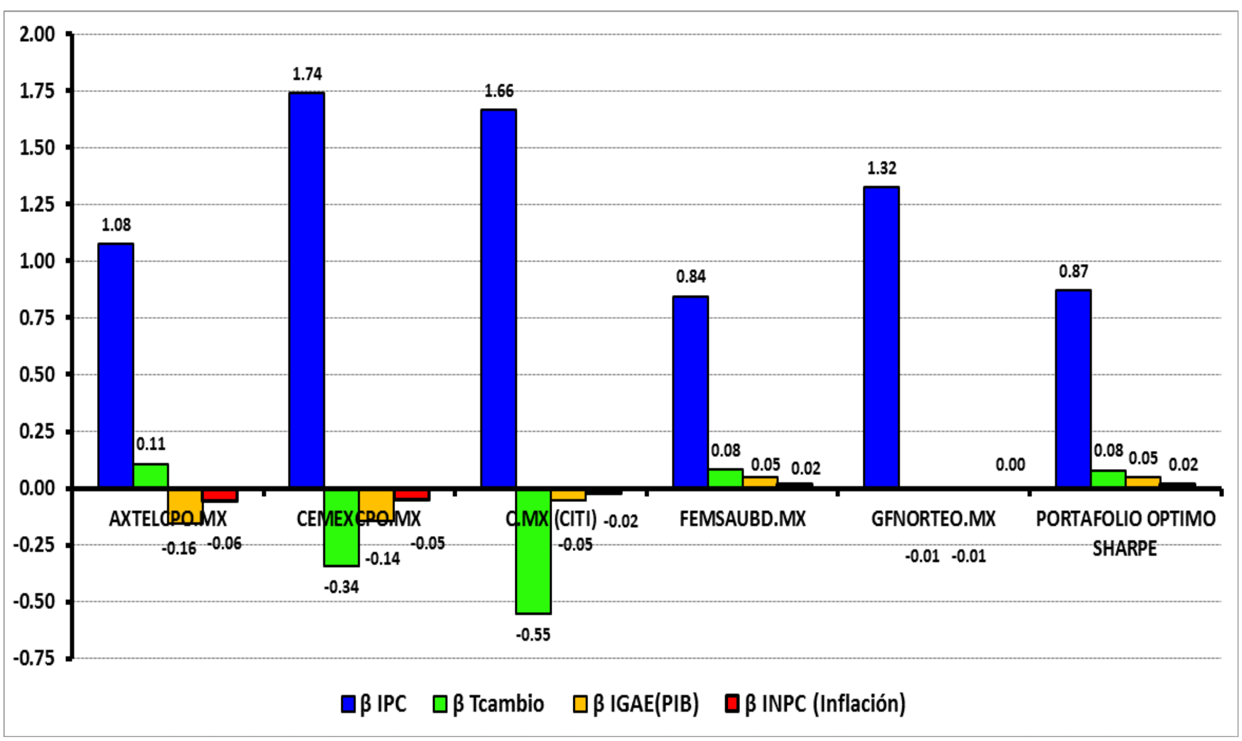
Fuente. Elaboración propia con datos históricos YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/)

Tabla 23. Resumen Modelo APT, rendimiento esperado por acción y portafolio óptimo de Sharpe, Enero 2008 a Octubre 2012.

	$E(R_i) = R_{CETE} + \beta_{IPC}(R_{IPC} - R_{CETE}) + \beta_{TC}(R_{TC} - R_{CETE}) + \beta_{IGAE}(R_{IGAE} - R_{CETE}) + \beta_{INPC}(R_{INPC} - R_{CETE})$												
	R CETE	β IPC	R IPC	β TCAMBIO	R TCAMBIO	β IGAE(PIB)	R IGAE (PIB)	β INPC (Inflación)	R INPC (Inflación)	E(Ri) APT	E (Ri) CAPM	Prima de riesgo APT = E(Ri)APT - R CETE	Prima de riesgo CAPM = E(Ri)CAPM - R CETE
AXTELCPO.MX	5.27%	1.08	9.80%	0.11	4.37%	-0.16	3.21%	-0.06	4.37%	**10.41%**	**10.14%**	**5.14%**	**4.87%**
CEMEXCPO.MX	5.27%	1.74	9.80%	-0.34	4.37%	-0.14	3.21%	-0.05	4.37%	**13.78%**	**13.14%**	**8.52%**	**7.87%**
C.MX (CITI)	5.27%	1.66	9.80%	-0.55	4.37%	-0.05	3.21%	-0.02	4.37%	**13.43%**	**12.80%**	**8.16%**	**7.54%**
FEMSAUBD.MX	5.27%	0.84	9.80%	0.08	4.37%	0.05	3.21%	0.02	4.37%	**8.90%**	**9.09%**	**3.63%**	**3.82%**
GFNORTEO.MX	5.27%	1.32	9.80%	-0.01	4.37%	-0.01	3.21%	0.00	4.37%	**11.28%**	**11.26%**	**6.01%**	**5.99%**
PORTAFOLIO OPTIMO SHARPE	5.27%	0.87	9.80%	0.08	4.37%	0.05	3.21%	0.02	4.37%	**9.03%**	**9.21%**	**3.76%**	**3.94%**

Fuente. Elaboración propia con datos históricos YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/)

Gráfica 25. Comparativo riesgo sistemático (beta), Enero 2008 a Octubre 2012.



Fuente. Elaboración propia con datos históricos YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/)

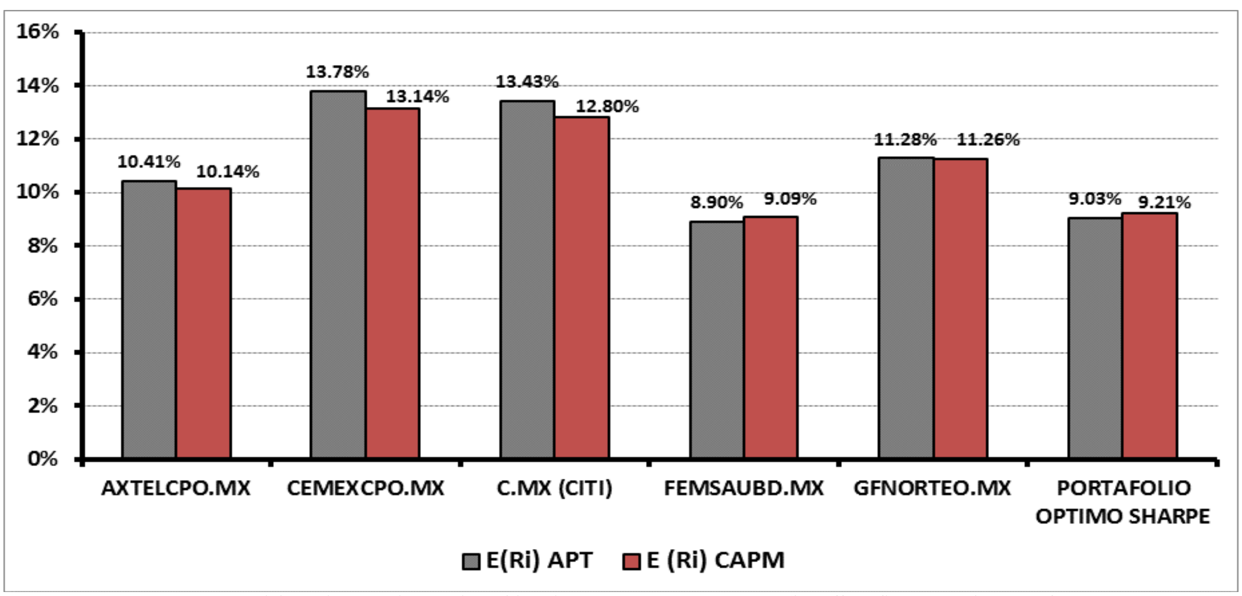
Recordando que el coeficiente beta (ß) es una medida estadística que permite a los inversores evaluar la probabilidad de volatilidad de una acción en relación con el desempeño del mercado de valores en general, o bien medir la variación de rentabilidad o correlación de cada acción respecto al riesgo sistemático de la actividad económica para encontrar ambientes rentables, se concluye que AXTELCPO.MX es la acción que presenta mayor volatilidad respecto a la variación del IGAE (Producto Interno Bruto - PIB), es decir por cada incremento del IGAE (PIB) en una unidad la rentabilidad promedio de AXTELCPO.MX tiende a bajar en -0.16 veces en comparación a la rentabilidad promedio de su mercado accionario, caso similar a GFNORTEO.MX pero con una menor proporción menor de -0.01 veces. Caso contrario de lo que sucede con FEMSAUBD.MX y el portafolio óptimo de Sharpe en el que por cada incremento del IGAE (PIB), la rentabilidad promedio de la acción y del portafolio óptimo se incrementa en +0.05 veces más que su mercado.

En la acción C.MX (CITI) se percibe una volatilidad inversa a las variables macroeconómicas tipo de cambio peso/dólar (-0.55), IGAE (-0.05) y el INPC (-0.02), lo que al incrementarse una unidad en cada una de ellas se obtiene una rentabilidad promedio a la baja de la acción. Por ejemplo en el factor tipo de cambio peso/dólar se observa un comportamiento de -0.55 veces el decremento de su rentabilidad en comparación al promedio al mercado.

De manera general se concluye que la acción FEMSAUBD.MX y el portafolio óptimo de Sharpe presentan el mejor desempeño respecto al riesgo sistemático o sorpresas (coeficiente beta) en cada uno de los factores macroeconómicos, pues son los que presentan una rentabilidad esperada positiva por cada incremento de una unidad en cada factor en comparación con los demás dentro de su mercado de valores.

Por otra parte el rendimiento esperado en cada una de las acciones y del portafolio óptimo de Sharpe por el método APT es similar al determinado por el método CAPM, lo que nos permite concluir que la integración de otras variables macroeconómicas permite precisar de mejor manera la exposición al riesgo sistemático del mercado y la rentabilidad esperada.

Gráfica 26. Comparativo de rentabilidad esperada modelo APT contra CAPM, Enero 2008 a Octubre 2012.



Fuente. Elaboración propia con datos históricos YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/)

CAPÍTULO IV

PERDIDA ESPERADA DEL PORTAFOLIO (Valor en Riesgo - VaR)

En este capítulo determinaremos cuál es la perdida esperada de un portafolio de inversión en un determinado período de tiempo y cierto nivel de confianza, mediante la aplicación de una medida estadística denominada valor en riesgo (Value at Risk - VaR) que comenzó a utilizarse a principios de los años 90´s cuando las principales firmas financieras de los países desarrollados la empleaban para identificar la exposición al riesgo. En 1993 al incrementarse el interés por parte de los agentes reguladores financieros, se oficializó su terminología en el reporte de mejores prácticas para derivados y fue hasta 1994 que tomó relevancia en el mundo de las finanzas corporativas, momento en que J.P. Morgan la hizo pública a través de su metodología de gestión de riesgo "Riskmetrics". En abril de 1995 el Comité de Basilea para la supervisión bancaria autorizó a los bancos utilizar el VaR para cubrir su riesgo de mercado y calcular sus requerimientos de capital, en diciembre la US Securities and Exchange Commission inició la discusión de una nueva propuesta para emplear medidas de riesgo corporativo entre las cuales ésta sería incluida.

El VaR se fundamenta en los siguientes parámetros:

- Horizonte de tiempo (N). El horizonte de tiempo es escogido dependiendo del uso que se le vaya a dar a esta medida. En general, el horizonte de se escoge considerando el tiempo que se tardaría en liquidar o cubrir la cartera si el mercado se comporta de forma contraria al esperado. Por ejemplo, si estamos calculando su valor para una mesa de dinero activa que opera un gran volumen de activos en cuestión de horas, entonces su horizonte puede ser de un par de horas. Si por el contrario, estamos analizando el riesgo de un fondo de inversión o pensión, el horizonte puede ser de hasta un año. La selección del tiempo puede afectar el modelo y los supuestos que se empleen al momento del cálculo.

- Nivel de confianza $(1-\alpha)$ %. La selección del nivel de confianza también depende del uso que se le vaya a dar. No existe un nivel de confianza óptimo, sin embargo cuanto mayor sea el grado de aversión, mayor deberá ser el nivel de confianza de la predicción. En la práctica, los niveles de confianza más empleados corresponden al 95% utilizado por Riskmetrics y 99% requerido por el Banco Internacional de Pagos de Basilea. Para ejemplificar la interpretación del nivel de confianza, supongamos que tenemos una cartera valorada hoy en 1,000 millones de pesos y le especificamos un horizonte temporal de un día con un nivel de confianza del 95%, un VaR de 10 millones de pesos significa que en 5 días de cada 100, la pérdida diaria concreta que se produzca puede ser inferior a 10 millones de pesos, o bien, la probabilidad de que las pérdidas sean inferiores a 10 millones de pesos es del 95%.

Los principales métodos que permiten calcular el valor en riesgo de nuestra(s) cartera(s) son los siguientes:

Método no paramétrico o de simulación histórica. Consiste en utilizar datos históricos para construir una serie simulada con tres alternativas:

a) Simulación histórica con crecimientos absolutos.

- Serie histórica de 250 – 500 datos.
- Calculo de las pérdidas o ganancias.
  $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$
- Simulación de Precios
  $P_t^* = P_0 + \Delta P_i$
- Obtener los rendimientos simulados
  $R_i^* = \dfrac{P_i^* - P_0}{P_0}$
- Calcular el VaR utilizando percentiles según el nivel de confianza.
- Multiplicar el rendimiento identificado por el valor del portafolio.

b) Simulación histórica con crecimientos logarítmicos.

- Serie histórica de 250 – 500 datos.
- Calcular los rendimientos:
  $Rend = \ln(\dfrac{P_t}{P_{t-1}})$
- Simular serie como:
  $P^* = P_0(1 + rend\ )$
- Obtener serie de tiempo perdidas/ganancias como:
  $P_0 - P^*$

c) Simulación histórica con crecimientos relativos.

- Serie histórica de 250 – 500 datos.
- Calcular los rendimientos como:
  $Rend = \dfrac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$
- Simular serie como:
  $P^* = P_0(1 + \text{rend})$
- Obtener serie de tiempo perdidas/ganancias.
  $P_0 - P^*$

Método paramétrico. A través de datos históricos se define un comportamiento con distribución normal con las siguientes modalidades:

a) VaR de un activo individual.

b) VaR de un portafolio de activos (método de varianzas y covarianzas).

c) Repaso estadístico-matemático.

A continuación se describe el procedimiento de cálculo y resultados obtenidos VaR con tres métodos diferentes:

1.- Método no paramétrico con crecimientos logarítmicos.

Tabla 24. Fase 1, logaritmo natural de cada acción (activo) del portafolio óptimo de Sharpe. (250 datos, 14/Nov/2011 - 25/Oct/2012).

		(L)	(Y)	(Z) VALOR POSICIÓN DEL ACTIVO	(J)
DATO (Día)	PRECIO ACTIVO	Logaritmo natural rentabilidad del activo	$Y = P_{250_k} * e^{(L)}$	$Z = X * Y$ "X" es la cantidad invertida en el activo k	TOTAL POSICION (suma de posiciones activos)
1	$\underset{i=1}{\overset{n}{P_{ik}}}$	—	—	—	—
2	⋮	$\underset{i=2}{\overset{n}{Ln_{ik}}}\left(\frac{P_{t+1}}{P_{t-1}}\right)$	$P_{250_k} * \underset{i=2}{\overset{n}{e_{ik}}}^{\left[\underset{i=2}{\overset{n}{Ln_{ik}}}\left(\frac{P_{t+1}}{P_{t-1}}\right)\right]}$	$X * P_{250_k} * \underset{i=2}{\overset{n}{e_{ik}}}^{\left[\underset{i=1}{\overset{n}{Ln_{ik}}}\left(\frac{P_{t+1}}{P_{t-1}}\right)\right]}$	$\underset{i=2}{\overset{n}{Z_{i1}}} + \underset{i=2}{\overset{n}{Z_{i2}}} + \ldots + \underset{i=2}{\overset{n}{Z_{ik}}}$
3	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	$Ln_{249_k}\left(\frac{P_{t+1}}{P_{t-1}}\right)$	$P_{250_k} * e_{249_k}^{\left[Ln_{250_k}\left(\frac{P_{t+1}}{P_{t-1}}\right)\right]}$	$X * P_{250_k} * e_{249_k}^{\left[Ln_{250_k}\left(\frac{P_{t+1}}{P_{t-1}}\right)\right]}$	$Z_{249_1} + Z_{249_2} + \ldots + Z_{249_k}$
250	P_{250_k}	—	—	—	—

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Tabla 25. Fase II, ordenamiento de pérdidas y ganancias de cada acción de un portafolio para identificación del VaR, en nuestro caso el óptimo Sharpe inversión inicial $5,000,000 (250 datos, 14/Nov/2011 - 25/oct/2012).

VALOR EN RIESGO (Var)

PÉRDIDA Y GANANCIA (M)					PÉRDIDA Y GANANCIA ORDENADA DE MENOR A MAYOR GANANCIA							
Diferencia Activo 1	Diferencia Activo 2	•••••	Diferencia Activo "k"	TOTAL	Diferencia Activo 1	Diferencia Activo 2	•••••	Diferencia Activo "k"	TOTAL ORDEN	DATO (DÍA): x	DATO (DÍA) DEL TOTAL ORDEN: y	NUEVO TOTAL (VaR)
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
$\sum_{i=1}^{n} Z_{i_1} - Z_{250_1}$	$\sum_{i=1}^{n} Z_{i_2} - Z_{250_2}$	•••	$\sum_{i=1}^{n} Z_{i_k} - Z_{250_k}$	$\sum_{i=1}^{n} M_T$	$M_{1\,min}$	$M_{2\,min}$	•••	$M_{k\,min}$	$M_{T_{min}}$	-	-	Act 1 + Act 2 +.... Act_k
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	2	56	($278,898.30)
.	.	.	.	.	.	.	.	1.- Se busca ($M_{T\,250}$) en	.	3	105	($242,722.83)
.	.	.	.	.	($156,600.45)	($14,938.38)	.	columna TOTAL ORDENADO		4	45	($171,538.83)
.	.	.	.	.	.	.	.	2.- Se identifica el renglón y el dato (día) "x"			.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	3.- Identificado el dato (día) "x" se le suman 2 unidades, recordemos que el inicial (1) y el final (250) no los consideramos. Ejemplo, si x = 43, "y = 43 + 2 = 45"			.	.
$Z_{249_1} - Z_{250_1}$	$Z_{249_2} - Z_{250_2}$	•••	$Z_{249_k} - Z_{250_k}$	M_{T249}	$M_{1\,máx}$	$M_{2\,máx}$	•••	$M_{k\,máx}$	$M_{T_{máx}}$	249	74	$274,712.91 $353,718.58
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Determinación de logaritmos.

G6 f_x =LN(D6/D5)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3				PASO 1. Precios			PASO 2. Rentabilidad: LN variación diaria	
4		Día	Fecha	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX		FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
5		1	14/11/2011	$88.38	$46.02			
6		2	15/11/2011	$90.86	$46.01		0.027674	-0.000217
7		3	16/11/2011	$90.22	$46.34		-0.007069	0.007147
8		4	17/11/2011	$87.82	$46.16		-0.026962	-0.003892
9		5	18/11/2011	$89.66	$45.38		0.020735	-0.017042
10		6	21/11/2011	$89.66	$45.38		0.000000	0.000000
11		7	22/11/2011	$89.55	$46.10		-0.001228	0.015741
12		8	23/11/2011	$87.89	$43.95		-0.018711	-0.047760

*Precio * Rentabilidad diaria*

J6 =$D$254*EXP(G6)

Día	Fecha	PASO 1. Precios FEMSAUBD.MX	PASO 1. Precios GFNORTEO.MX	PASO 2. Rentabilidad: LN variación diaria FEMSAUBD.MX	PASO 2. Rentabilidad: LN variación diaria GFNORTEO.MX	PASO 3. Estimación: Precio último*Rentabilidad diara FEMSAUBD.MX	PASO 3. Estimación: Precio último*Rentabilidad diara GFNORTEO.MX
1	14/11/2011	$88.38	$46.02				
2	15/11/2011	$90.86	$46.01	0.027674	-0.000217	$122.57	$72.31
3	16/11/2011	$90.22	$46.34	-0.007069	0.007147	$118.38	$72.85
4	17/11/2011	$87.82	$46.16	-0.026962	-0.003892	$116.05	$72.05
5	18/11/2011	$89.66	$45.38	0.020735	-0.017042	$121.72	$71.11
6	21/11/2011	$89.66	$45.38	0.000000	0.000000	$119.22	$72.33

Posición de títulos.

M6 =J6*$M$5

Inversión Inicial = 5,000,000

PASO 3. Estimación: Precio último*Rentabilidad diara FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX	PASO 4. Posición títulos: (Inv. Inicial/Precio)*(% acción portafolio óptimo); FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX	Total (1 + 2)
		53,492.86	5,917.02	59,409.88
$122.57	$72.31	$6,556,372.94	$427,885.08	$6,984,258.01
$118.38	$72.85	$6,332,497.16	$431,047.68	$6,763,544.85
$116.05	$72.05	$6,207,768.66	$426,315.66	$6,634,084.32
$121.72	$71.11	$6,511,037.78	$420,746.21	$6,931,783.99
$119.22	$72.33	$6,377,418.45	$427,978.07	$6,805,396.52

P6 =+M6-$M$254

Inversión Inicial = 5,000,000

PASO 4. Posición títulos: (Inv. Inicial/Precio)*(% acción portafolio óptimo); FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX	Total (1 + 2)	PASO 5. Pérdida y Ganancia FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX	Total (1 + 2)
53,492.86	5,917.02	59,409.88			
$6,556,372.94	$427,885.08	$6,984,258.01	178,954.49	(93.00)	178,861.49
$6,332,497.16	$431,047.68	$6,763,544.85	(44,921.28)	3,069.61	(41,851.67)
$6,207,768.66	$426,315.66	$6,634,084.32	(169,649.79)	(1,662.41)	(171,312.20)
$6,511,037.78	$420,746.21	$6,931,783.99	133,619.33	(7,231.87)	126,387.47
$6,377,418.45	$427,978.07	$6,805,396.52	-	-	-

Pérdidas y ganancias.

S6 -258938.364458563

Día	Fecha	PASO 6. Pérdida y Ganancia Ordenadas a) FEMSAUBD.MX	b) GFNORTEO.MX	Total (1 + 2) ordenado
1	14/11/2011			
2	15/11/2011	(258,938.36)	(19,959.93)	(257,799.96)
3	16/11/2011	(223,012.41)	(19,710.42)	(225,074.50)
4	17/11/2011	(199,769.32)	(16,726.36)	(212,368.92)
5	18/11/2011	(169,649.79)	(16,428.15)	(171,312.20)
6	21/11/2011	(156,600.45)	(14,938.38)	(159,688.95)

R253 =P253+Q253

Día	Fecha	Total (1 + 2)	PASO 5. Pérdida y Ganancia FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX	Total (1 + 2)
243	17/10/2012	$6,854,923.48	50,363.07	(836.11)	49,526.96
244	18/10/2012	$6,795,845.48	(4,636.25)	(4,914.79)	(9,551.04)
245	19/10/2012	$6,772,106.21	(21,651.57)	(11,638.74)	(33,290.31)
246	22/10/2012	$6,732,929.86	(67,762.33)	(4,704.33)	(72,466.67)
247	23/10/2012	$6,791,799.23	(7,842.37)	(5,754.92)	(13,597.29)
248	24/10/2012	$6,750,055.82	(61,769.30)	6,428.60	(55,340.70)
249	25/10/2012	$6,735,268.60	(71,359.43)	1,231.51	(70,127.92)
250	26/10/2012		-	-	-

Identificación VaR.

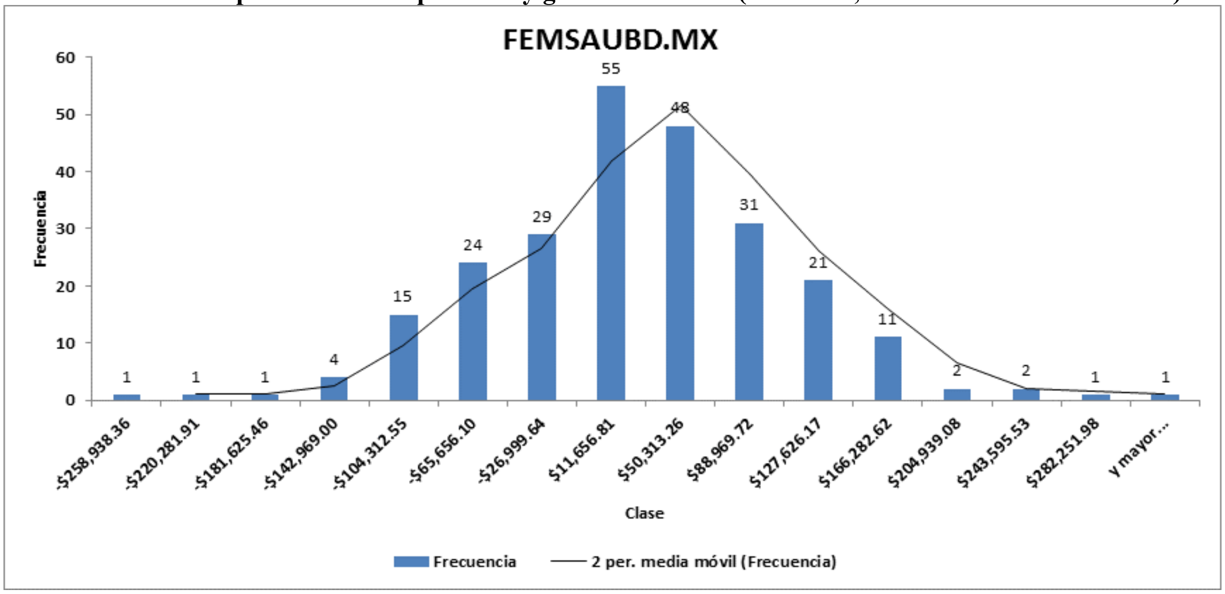
U47 -70127.920102457

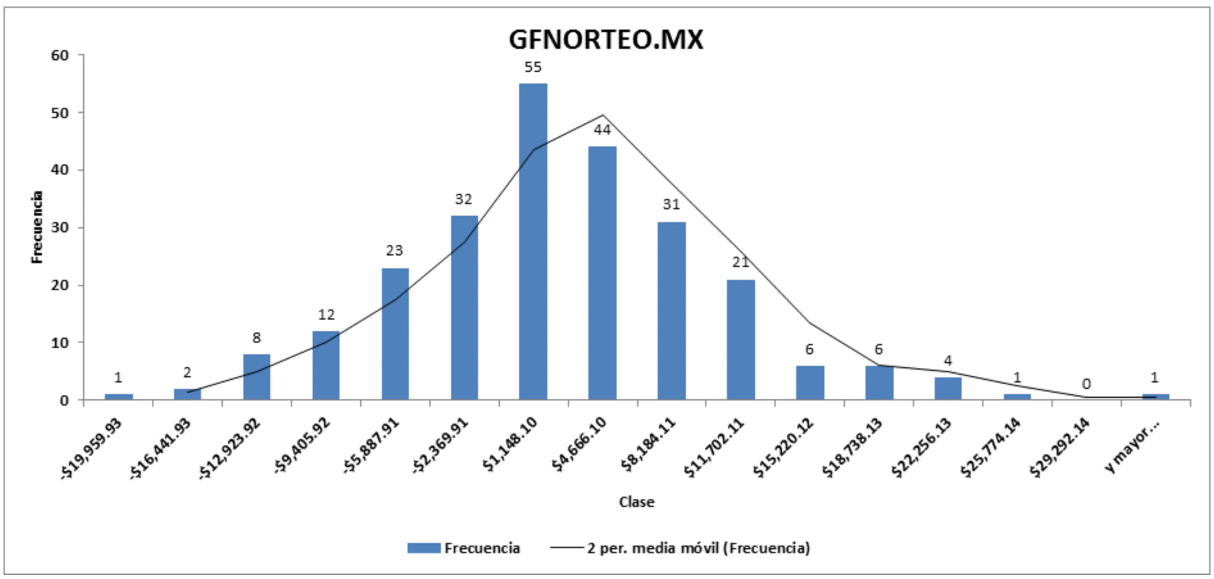
Día	Fecha	PASO 6. Pérdida y Ganancia Ordenadas a) FEMSAUBD.MX	b) GFNORTEO.MX	Total (1 + 2) ordenado
42	10/01/2012	(68,439.23)	(6,728.25)	(72,466.67)
43	11/01/2012	(67,938.13)	(6,663.71)	(70,127.92)
44	12/01/2012	(67,762.33)	(6,654.66)	(62,486.16)

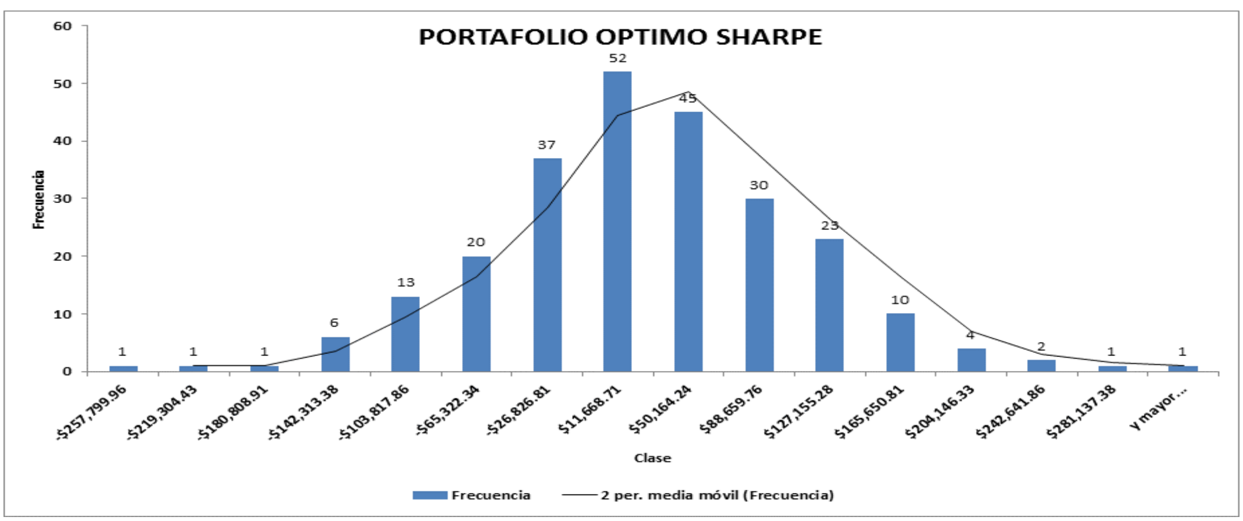
S10 -156600.452989264

Día	Fecha	PASO 6. Pérdida y Ganancia Ordenadas a) FEMSAUBD.MX	b) GFNORTEO.MX	Total (1 + 2) ordenado	Identificación del Valor en Riesgo (VaR) Dato (Día): x	Dato (día) del total ordenado: y	Nuevo Total (VaR): a + b
1	14/11/2011				1		
2	15/11/2011	(258,938.36)	(19,959.93)	(257,799.96)	2	173	(278,898.30)
3	16/11/2011	(223,012.41)	(19,710.42)	(225,074.50)	3	163	(242,722.83)
4	17/11/2011	(199,769.32)	(16,726.36)	(212,368.92)	4	187	(216,495.68)
5	18/11/2011	(169,649.79)	(16,428.15)	(171,312.20)	5	4	(186,077.95)
6	21/11/2011	(156,600.45)	(14,938.38)	(159,688.95)	6	45	(171,538.83)
7	22/11/2011	(147,346.80)	(14,144.16)	(156,457.74)	7	145	(161,490.96)
8	23/11/2011	(143,039.62)	(14,132.30)	(149,344.36)	8	50	(157,171.91)

Gráficas 27. Comportamiento de pérdidas y ganancias diaria (250 datos, 14/Nov/2011 - 25/Oct/2012).



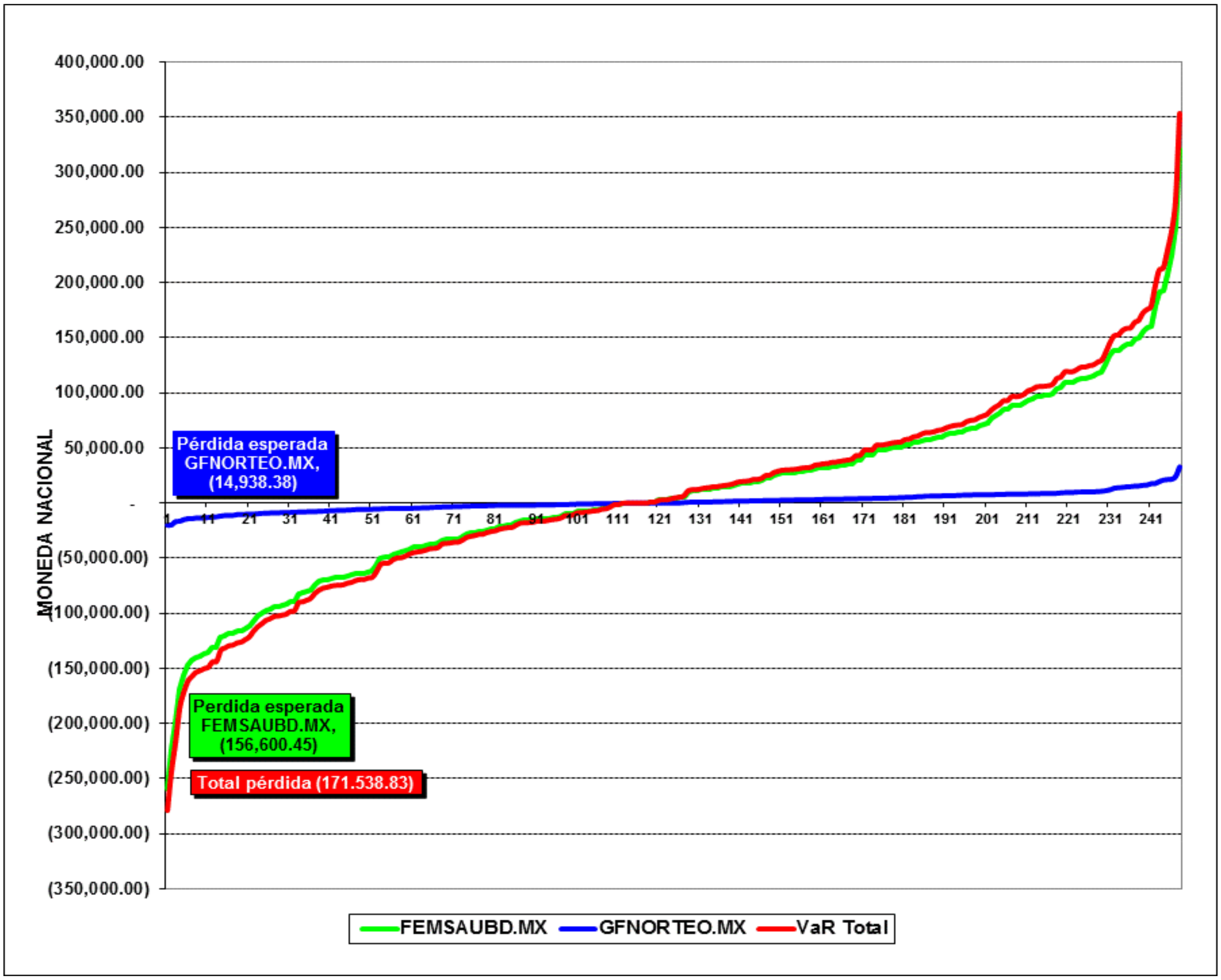




Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

En las anteriores gráficas podemos observar que ante la distribución normal del comportamiento de concentración de pérdidas y ganancias diarias, el portafolio óptimo de Sharpe tiende a presentar mayor número de veces ganancias que oscilan en $11,668.71 y mayor número de pérdidas entre los $26,826.81, con 31.48% más de posibilidad de ganancia que de pérdida.

Gráfica 28. Pérdidas y ganancias por el método no paramétrico con crecimientos logarítmicos, inversión inicial $5,000,000 un día de cobertura y 250 datos históricos diarios, (14/Nov/2011 - 25/Oct/2012).



Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

2.- Método paramétrico definiendo un comportamiento de distribución normal para cada acción (activo) de forma individual.

Tabla 24. VaR por método paramétrico de distribución normal por cada acción (activo) de un portafolio, en nuestro caso el óptimo de Sharpe (250 datos, 14/Nov/2011 - 25/oct/2012).

Cálculo VaR para un nivel de confianza del 95%			
Nivel de confianza:	$Nc = 1 - \alpha =$	95%	
Error de confianza o nivel de significación:	$\alpha =$	5.00%	
	$\alpha/2 =$	2.50%	
Probabilidad distribución normal estandarizada (área debajo de la curva):	$Z = Nc + \alpha/2 =$	97.50%	
	$A = P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = Z_{(1-\alpha/2)} =$	0.975 (1-α/2)	
Valor que determina el nivel de confianza (en tablas):	$Z_{\alpha/2} =$	1.960	
Presupuesto de inversión: INV	$5,000,000.00		
		FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
Distribución "w" del portafolio óptimo de Sharpe: W		94.554%	5.446%
Precio del título en el dato inicial de nuestra serie de 250 datos (14/nov/2011): P_0		$88.38	$46.02
		FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
Cantidad de títulos para invertir:	$Ti = (INV/P_0) * W =$	53493	5917
Precio de mercado al día 25/oct/2012 = P_{n-1} = 249	$P_{n-1} =$	$119.30	$73.19
Monto cartera a precio de mercado en el penúltimo dato (n-1, día 25/oct/2012):	$M = (P_{n-1})*Ti =$	$6,381,697.88	$433,066.71
Deviación T. Est. Diaria:	$\sigma =$	1.309290%	1.874379%
Tiempo de cobertura o pronóstico días:	$t =$	1	1
Valor en riesgo:	$VaR = (Z_{\alpha/2})*(M)*(\sigma)*(\sqrt{t})=$	$163,764.65	$15,909.63
	Total pérdidas (VaR) =	$179,674.29	

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Tabla 25. Valores de la curva de distribución normal para cada acción (250 datos, 14/Nov/2011 - 25/oct/2012).

Cálculo rentabilidad y riesgo (media - desviación típica estándar)			
		FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
Tamaño de muestra precios:	$N =$	250	
Tamaño de muestra rentabilidades:	$n = N-2 =$	248	
Media muestral diaria	$\bar{x} =$	0.120966%	0.187090%
Deviación T. Est. Diaria	$\sigma =$	1.309290%	1.874379%
Varianza	$\sigma^2 =$	0.017142%	0.035133%

Intervalo de confianza: $\bar{x} - (Z_{\alpha/2})*(\sigma/\sqrt{n}) \leq \mu \leq \bar{x} + (Z_{\alpha/2})*(\sigma/\sqrt{n})$			
Nivel de confianza:	$Nc = 1 - \alpha =$	0.950	
Error de confianza o nivel de significación:	$\alpha =$	0.050	
Intervalo error de confianza o nivel de significación:	$\alpha/2 =$	0.025	
	$Z_{\alpha/2} =$	Z 0.025	
Probabilidad distribución normal estandarizada (área debajo de la curva):	$Z = Nc + \alpha/2 =$	0.975	
	$A = P(Z \leq Z_{\alpha/2}) = Z_{(1-\alpha/2)} =$	0.975 (1-α/2)	
Valor que determina el nivel de confianza (se busca "A" en tabla de distribución normal estándar):	$Z_{\alpha/2} =$	Z 0.025 = 1.96	
		FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
Error estándar o de estimación:	$E = (Z_{\alpha/2})*(\sigma/\sqrt{n}) =$	0.079233%	0.023285%
Límite inferior intervalo de confianza:	$\bar{x} - (Z_{\alpha/2})*(\sigma / \sqrt{n}) =$	0.041733%	0.163805%
Límite superior intervalo de confianza:	$\bar{x} + (Z_{\alpha/2})*(\sigma / \sqrt{n}) =$	0.200199%	0.350894%
FEMSAUBD.MX:	0.041733%	≤ μ ≤	0.200199%
GFNORTEO.MX:	0.163805%	≤ μ ≤	0.350894%

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

3.- Método paramétrico definiendo un comportamiento con distribución normal para un portafolio de activos (método de varianzas y covarianzas).

Determinación de correlación.

V5 =COEF.DE.CORREL($C$5:$C$1255,D$5:D$1255)

		Porcentajes de Inversión en las Acciones				
		AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
	Cartera óptima Sharpe (recomendación de inversión)	0.00%	0.00%	0.00%	94.55%	5.45%
	Fecha	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
1	02/01/2008	-0.0040426	-0.0038883	-0.0179973	-0.0414868	-0.0128660
2	03/01/2008	0.0081181	0.0046132	-0.0046450	0.0230173	-0.0247191
3	04/01/2008	-0.0109810	-0.0314377	-0.0191111	-0.0437760	-0.0241935
4	07/01/2008	-0.0055514	-0.0127644	0.0000647	0.0355499	0.0068477
5	08/01/2008	-0.0089319	0.0055412	-0.0388350	0.0187701	0.0096154
6	09/01/2008	0.0138941	-0.0040411	0.0144781	-0.0145455	-0.0202091

U5 =COEF.DE.CORREL($C$5:$C$1255,C$5:C$1255)

Correlación	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	1	0.3811541	0.2810915	0.3303972	0.3965834
CEMEXCPO.MX	0.3811541	1	0.4516984	0.4017131	0.4975124
C.MX (CITI)	0.2810915	0.4516984	1	0.2732707	0.3584214
FEMSAUBD.MX	0.3303972	0.4017131	0.2732707	1	0.4327779
GFNORTEO.MX	0.3965834	0.4975124	0.3584214	0.4327779	1

Determinación de covarianza.

C18 =$C4*C$4*C11

14/Nov/2011 - 25/oct/2012 (250 datos)					
Deviación T. Est.	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	3.18%	2.82%	2.21%	1.29%	1.89%
CEMEXCPO.MX	2.82%				
C.MX (CITI)	2.21%				
FEMSAUBD.MX	1.29%				
GFNORTEO.MX	1.89%				
Correlación					
	AXTELCPO.MX	*CEMEXCPO.MX*	*C.MX (CITI)*	*FEMSAUBD.MX*	*GFNORTEO.MX*
AXTELCPO.MX	100.00%	23.19%	21.11%	14.51%	12.75%
CEMEXCPO.MX	23.19%	100.00%	50.24%	35.39%	40.19%
C.MX (CITI)	21.11%	50.24%	100.00%	27.89%	35.31%
FEMSAUBD.MX	14.51%	35.39%	27.89%	100.00%	24.00%
GFNORTEO.MX	12.75%	40.19%	35.31%	24.00%	100.00%
Covarianzas	Matriz covarianza = (Matriz Deviación T. Est.) * (Matriz de Correlación)				
	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	0.101%	0.021%	0.015%	0.006%	0.008%
CEMEXCPO.MX	0.021%	0.080%	0.031%	0.013%	0.021%
C.MX (CITI)	0.015%	0.031%	0.049%	0.008%	0.015%
FEMSAUBD.MX	0.006%	0.013%	0.008%	0.017%	0.006%
GFNORTEO.MX	0.008%	0.021%	0.015%	0.006%	0.036%

D18 =$C4*D$4*D11

	14/Nov/2011 - 25/oct/2012 (250 datos)				
Deviación T. Est.	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	3.18%	2.82%	2.21%	1.29%	1.89%
CEMEXCPO.MX	2.82%				
C.MX (CITI)	2.21%				
FEMSAUBD.MX	1.29%				
GFNORTEO.MX	1.89%				
Correlación					
	AXTELCPO.MX	*CEMEXCPO.MX*	*C.MX (CITI)*	*FEMSAUBD.MX*	*GFNORTEO.MX*
AXTELCPO.MX	100.00%	23.19%	21.11%	14.51%	12.75%
CEMEXCPO.MX	23.19%	100.00%	50.24%	35.39%	40.19%
C.MX (CITI)	21.11%	50.24%	100.00%	27.89%	35.31%
FEMSAUBD.MX	14.51%	35.39%	27.89%	100.00%	24.00%
GFNORTEO.MX	12.75%	40.19%	35.31%	24.00%	100.00%
Covarianzas	Matriz covarianza = (Matriz Deviación T. Est.) * (Matriz de Correlación)				
	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	0.101%	0.021%	0.015%	0.006%	0.008%
CEMEXCPO.MX	0.021%	0.080%	0.031%	0.013%	0.021%
C.MX (CITI)	0.015%	0.031%	0.049%	0.008%	0.015%
FEMSAUBD.MX	0.006%	0.013%	0.008%	0.017%	0.006%
GFNORTEO.MX	0.008%	0.021%	0.015%	0.006%	0.036%

C19 =$C5*C$4*C12

	14/Nov/2011 - 25/oct/2012 (250 datos)				
Deviación T. Est.	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	3.18%	2.82%	2.21%	1.29%	1.89%
CEMEXCPO.MX	2.82%				
C.MX (CITI)	2.21%				
FEMSAUBD.MX	1.29%				
GFNORTEO.MX	1.89%				
Correlación					
	AXTELCPO.MX	*CEMEXCPO.MX*	*C.MX (CITI)*	*FEMSAUBD.MX*	*GFNORTEO.MX*
AXTELCPO.MX	100.00%	23.19%	21.11%	14.51%	12.75%
CEMEXCPO.MX	23.19%	100.00%	50.24%	35.39%	40.19%
C.MX (CITI)	21.11%	50.24%	100.00%	27.89%	35.31%
FEMSAUBD.MX	14.51%	35.39%	27.89%	100.00%	24.00%
GFNORTEO.MX	12.75%	40.19%	35.31%	24.00%	100.00%
Covarianzas	Matriz covarianza = (Matriz Deviación T. Est.) * (Matriz de Correlación)				
	AXTELCPO.MX	CEMEXCPO.MX	C.MX (CITI)	FEMSAUBD.MX	GFNORTEO.MX
AXTELCPO.MX	0.101%	0.021%	0.015%	0.006%	0.008%
CEMEXCPO.MX	0.021%	0.080%	0.031%	0.013%	0.021%
C.MX (CITI)	0.015%	0.031%	0.049%	0.008%	0.015%
FEMSAUBD.MX	0.006%	0.013%	0.008%	0.017%	0.006%
GFNORTEO.MX	0.008%	0.021%	0.015%	0.006%	0.036%

Riesgo sistemático de mercado.

C31 {=RAIZ(MMULT(MMULT(TRANSPONER(C24:C28),C18:G22),(C24:C28)))}

CEMEXCPO.MX	0.021%	0.080%	0.031%	0.013%	0.021%
C.MX (CITI)	0.015%	0.031%	0.049%	0.008%	0.015%
FEMSAUBD.MX	0.006%	0.013%	0.008%	0.017%	0.006%
GFNORTEO.MX	0.008%	0.021%	0.015%	0.006%	0.036%
	wi (Weigth) Port. Óptimo Sharpe	Rentabilidad (media diaria)	Riesgo (Desv. Est. Diaria)		
AXTELCPO.MX	0.00%	-0.11%	3.18%		
CEMEXCPO.MX	0.00%	0.32%	2.82%		
C.MX (CITI)	0.00%	0.14%	2.21%		
FEMSAUBD.MX	94.55%	0.13%	1.29%		
GFNORTEO.MX	5.45%	0.18%	1.89%		
SUMA:	1				
Desv. Est. Port:	1.25%				

Tabla 26. Covarianza y desviación estándar del portafolio óptimo Sharpe para 250 datos históricos (14/Nov/2011 - 25/oct/2012).

14/Nov/2011 - 25/oct/2012 (250 datos)					
Deviación T. Est.	**AXTELCPO.MX**	**CEMEXCPO.MX**	**C.MX (CITI)**	**FEMSAUBD.MX**	**GFNORTEO.MX**
AXTELCPO.MX	3.18%	2.82%	2.21%	1.29%	1.89%
CEMEXCPO.MX	2.82%				
C.MX (CITI)	2.21%				
FEMSAUBD.MX	1.29%				
GFNORTEO.MX	1.89%				
Correlación					
	AXTELCPO.MX	***CEMEXCPO.MX***	***C.MX (CITI)***	***FEMSAUBD.MX***	***GFNORTEO.MX***
AXTELCPO.MX	100.00%	23.19%	21.11%	**14.51%**	12.75%
CEMEXCPO.MX	23.19%	100.00%	50.24%	35.39%	40.19%
C.MX (CITI)	21.11%	50.24%	100.00%	27.89%	35.31%
FEMSAUBD.MX	**14.51%**	35.39%	27.89%	100.00%	24.00%
GFNORTEO.MX	12.75%	40.19%	35.31%	24.00%	100.00%
Covarianzas	**Matriz covarianza = (Matriz Deviación T. Est.) * (Matriz de Correlación)**				
	AXTELCPO.MX	**CEMEXCPO.MX**	**C.MX (CITI)**	**FEMSAUBD.MX**	**GFNORTEO.MX**
AXTELCPO.MX	0.101%	0.021%	0.015%	**0.006%**	0.008%
CEMEXCPO.MX	0.021%	0.080%	0.031%	0.013%	0.021%
C.MX (CITI)	0.015%	0.031%	0.049%	0.008%	0.015%
FEMSAUBD.MX	**0.006%**	0.013%	0.008%	0.017%	0.006%
GFNORTEO.MX	0.008%	0.021%	0.015%	0.006%	0.036%
	wi (Weigth) Port. Óptimo Sharpe	**Rentabilidad (media diaria)**	**Riesgo (Desv. Est. Diaria)**		
AXTELCPO.MX	0.00%	-0.11%	3.18%		
CEMEXCPO.MX	0.00%	0.32%	2.82%		
C.MX (CITI)	0.00%	0.14%	2.21%		
FEMSAUBD.MX	94.55%	0.13%	1.29%		
GFNORTEO.MX	5.45%	0.18%	1.89%		
SUMA:	1				

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Tabla 27. VaR portafolio óptimo de Sharpe por método paramétrico de distribución normal, 250 datos históricos analizados y un día de cobertura (14/Nov/2011 - 25/oct/2012).

Cálculo VaR para un nivel de confianza del 95%		
Nivel de confianza:	**Nc = 1 - α =**	95%
Error de confianza o nivel de significación:	**α =**	5.00%
	α/2 =	2.50%
Probabilidad distribución normal estandarizada (área debajo de la curva):	**Z = Nc + α/2 =**	97.50%
	A = P(Z ≤ Zα/2) = Z(1-α/2) =	0.975 **(1-α/2)**
Valor que determina el nivel de confianza (en tablas):	**Zα/2 =**	1.960
Presupuesto de inversión: INV	**$5,000,000.00**	

	Monto de inversión según portafolio óptimo	% Participación = monto / INV	Precio inicial (P0)	Tiempo de cobertura o pronóstico (días):	Títulos: Ti = (INV/P0) * W	Precio penúltimo de serie (Pn-1)	M = (Pn-1)*Ti	VaR = (Zα/2)*(M)*(σ)*(√t)
AXTELCPO.MX	$0.00	0.00%	5.03	1	0	3.48	$0.00	$0.00
CEMEXCPO.MX	$0.00	0.00%	6.10		0	11.97	$0.00	$0.00
C.MX (CITI)	$0.00	0.00%	382.62		0	484.78	$0.00	$0.00
FEMSAUBD.MX	$4,727,698.73	94.55%	88.38		53,493	119.30	$6,381,697.88	$156,498.92
GFNORTEO.MX	$272,301.27	5.45%	46.02		5,917	73.19	$433,066.71	$10,620.13
Inversión (INV) =	**$5,000,000.00**	**100.00%**					$6,814,764.59	**$167,119.05**
						Desv. Est Portafolio óptimo (σ)=	**1.25%**	
						VaR=	**$167,119.05**	

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Tabla 28. VaR portafolio óptimo de Sharpe por método paramétrico de distribución normal, 250 datos históricos analizados y 30 días de cobertura (14/Nov/2011 - 25/oct/2012).

Cálculo VaR para un nivel de confianza del 95%		
Nivel de confianza:	Nc = 1 - α =	95%
Error de confianza o nivel de significación:	α =	5.00%
	α/2 =	2.50%
Probabilidad distribución normal estandarizada (área debajo de la curva):	Z = Nc + α/2 =	97.50%
	A = P(Z ≤ Zα/2) = Z(1-α/2) =	0.975 (1-α/2)
Valor que determina el nivel de confianza (en tablas):	Zα/2 =	1.960
Presupuesto de inversión: INV	$5,000,000.00	

	Monto de inversión según portafolio óptimo	% Participación = monto / INV	Precio inicial (P0)	Tiempo de cobertura o pronóstico (días):	Títulos: Ti = (INV/P0) * W	Precio penúltimo de serie (Pn-1)	M = (Pn-1)*Ti	VaR = (Zα/2)*(M)*(σ)*(√t)
AXTELCPO.MX	$0.00	0.00%	5.03	30	0	3.48	$0.00	$0.00
CEMEXCPO.MX	$0.00	0.00%	6.10		0	11.97	$0.00	$0.00
C.MX (CITI)	$0.00	0.00%	382.62		0	484.78	$0.00	$0.00
FEMSAUBD.MX	$4,727,698.73	94.55%	88.38		53,493	119.30	$6,381,697.88	$857,179.89
GFNORTEO.MX	$272,301.27	5.45%	46.02		5,917	73.19	$433,066.71	$58,168.86
Inversión (INV) =	$5,000,000.00	100.00%					$6,814,764.59	$915,348.74
						Desv. Est Portafolio óptimo (σ)=	1.25%	
						VaR=	$915,348.74	

Tabla 29. Comparativo VaR portafolio óptimo Sharpe, inversión inicial $5, 000, 000, un día de cobertura y 250 datos históricos diarios analizados (14/Nov/2011 - 25/oct/2012).

53,493 TÍTULOS DE FEMSAUBD.MX (94.55%) Y 5,917 TÍTULOS DE GFNORTEO.MX (5.45%)		
Método no paramétrico con crecimientos logarítmicos	**Método paramétrico distribución normal sumando riesgo individual por acción:** nivel de confianza del 95%; Z = 97.5%; Z α/2 = 1.96	**Método paramétrico distribución normal por covarianza considerando riesgo total del portafolio:** nivel de confianza del 95%; Z = 97.5%; Z α/2 = 1.96
$171,538.83	**$179,874.28**	**$167,119.05**

Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

Tabla 30. Comparativo VaR portafolio óptimo Sharpe, inversión inicial $5, 000, 000, 30 días de cobertura y 250 datos históricos diarios analizados (14/Nov/2011 - 25/oct/2012).

53,493 TÍTULOS DE FEMSAUBD.MX (94.55%) Y 5,917 TÍTULOS DE GFNORTEO.MX (5.45%)	
Método paramétrico distribución normal sumando riesgo individual por acción: nivel de confianza del 95%; Z = 97.5%; Z α/2 = 1.96	**Método paramétrico distribución normal por covarianza considerando el riesgo total del portafolio:** nivel de confianza del 95%; Z = 97.5%; Z α/2 = 1.96
$984,116.6	**$915, 348.74**

Fuente. Elaboración propia con datos de YAHOO FINANZAS (http://mx.finanzas.yahoo.com/).

El resultado obtenido del VaR en cada uno de los métodos anteriores es relativamente diferente, sin embargo permite al inversor establecer un parámetro que le ayude a tomar acciones y adquirir una estrategia de protección o de cobertura para asumir las pérdidas.

CONCLUSIONES.

Aunque los modelos como el CAPM, APT y VaR utilizados en el presente trabajo han evolucionado de forma importante durante los últimos 30 años para intentar comprender de mejor forma el proceso de toma de decisiones de un inversionista racional y establecer mecanismos predictivos más asertivos, es importante señalar que para obtener un análisis más completo se sugiere investigar información contable y financiera de las empresas emisoras de los activos, así como de información bursátil y económica publicada en las bolsas de valores y las bancas centrales, lo que permitirá complementar su análisis y en su caso justificar los resultados obtenidos de sus modelos aplicados.

El inversor debe recurrir a diferentes tipos de literatura que enriquezcan parte de su formación financiera y facilite la comprensión de la terminología vista en este trabajo, por ejemplo autores que narren sus experiencias propias de tipo emocional respecto a sus inversiones reales. Por ejemplo en el libro "El inversor inteligente" de Benjamin Graham (prólogo y apéndices de Warrent E. Buffett, versión comentada y actualizada por Jason Zweig) menciona: "¿Qué quiere decir inversor inteligente?, significa tener paciencia, disciplina y voluntad necesarias para aprender, donde también es necesario controlar emociones y pensar por uno mismo, es más un rasgo de carácter que de cerebro". "El inversionista serio rara vez pensará, que las fluctuaciones de un día para otro, vayan a enriquecerle o empobrecerle, sin embargo es importante que se inquiete en buscar diferentes fuentes de información que le ayuden a comparar y facilitar su toma de decisión, como puede ser el conocer las fortalezas financieras y expectativas de la empresa en el corto y largo plazo (análisis fundamental), pero sobre todo el aprender a tener paciencia, disciplina, controlar sus emociones y pensar por uno mismo".

Comprender el comportamiento de un inversor racional que desea definir un objetivo claro de inversión para crecimiento de su patrimonio, conocer su grado de aversión al riesgo, determinar sus expectativas sobre fluctuaciones del capital en un mercado determinado (por ejemplo, el mercado de valores) con apoyo y/o utilización de técnicas estadísticas, modelos y herramientas econométricas no es tarea fácil, sin embargo puede alcanzarlo si adquiere disciplina y práctica constante. Esto le permitirá fortalecer su educación económica y financiera y colaborar en la disminución de la asimetría de información (conocimiento que todo mundo puede obtener), pues se encontrará familiarizado con los conceptos y terminología que le ayudarán a identificar áreas de oportunidad para mejorar la competitividad del mercado, así como evitar acciones alarmistas que se conviertan en pánicos o crisis económicas que puedan perjudicar su patrimonio y el de los demás, y más aún si sus inversiones se encuentran integradas con economías o mercados globales.

La calidad de las fuentes informativas, tamaño de la muestra de datos y el período establecido son fundamentales en la aplicación de los modelos analizados, pues parte de esto dependerá la veracidad y tendencias de los resultados obtenidos. Recordemos que el valor de las betas (riesgo sistemático) depende en gran medida de la dinámica de las estrategias y decisiones internas tomadas de las empresas en momentos diferentes para adaptación a su entorno competitivo de su mercado y de factores macroeconómicos, lo que puede provocar aumento o disminución en el valor de sus activos conllevando probablemente a betas diferentes en ciertos periodos de tiempo. Como ejemplo de ello es cuando se determinó la rentabilidad esperada y precio de equilibrio del portafolio óptimo de Sharpe a través del modelo CAPM (FEMSAUBD.MX = $109.28 y GFNORTEO.MX = $65 por título), donde la prima de riesgo corresponde a la estimación de los próximos cincos años y no para el año siguiente, debido a que el promedio de las rentabilidades históricas se consideran regularmente para previsiones de largo plazo, situación que puede limitar nuestras estimaciones por sus fundamentos microeconómicos explicados únicamente por la variación de un mercado específico (mercado de capitales) representado por el índice de precios y cotizaciones (riesgo o varianza IPC = 5.58%) y el activo libre de riesgo (riesgo o varianza CETE = 0%), pero que por otra parte son complemento de los resultados obtenidos en el modelo APT al momento de integrar los riesgos específicos (diversificables) de los activos respecto a su mercado con los riesgos sistemáticos (no diversificables) de tipo macroeconómico, donde el portafolio óptimo de Sharpe nuevamente confirma la viabilidad de su inversión al sustentar una adecuada diversificación de las acciones FEMSAUBD.MX (94.55%) y GFNORTEO.MX (5.45%) con una estimación de rentabilidad esperada del 9.21% en modelo CAPM (factores microeconómicos o propios de las empresas emisoras) y 9.03% en modelo APT (factores macroeconómicos), prima de riesgo del 3.94% en CAPM y 3.76% en APT, con una utilidad o ganancia de 2 veces (284.24 del índice acumulado del portafolio óptimo Sharpe menos 141.64 del índice acumulado del mercado) y abatimiento del mercado de capitales en 18.70% según índice de Traynor (índice portafolio óptimo Sharpe 23.90% menos índice de mercado 5.20%) al momento de maximizar la rentabilidad esperada (26.08%) y minimización del riesgo (31.72%), además de obtener una orientación positiva de baja a moderada en la exposición a riesgos sistemáticos por el incremento o decremento en una unidad en los factores macroeconómicos: tipo de cambio peso/dólar (β = +0.08), índice global de actividad económica - IGAE (representante del PIB, β = +0.05) y el índice nacional de precios al consumidor - INPC (representante de la inflación, β = +0.02). Asimismo con una pérdida razonable estimada o valor en riesgo (VaR) de $179,674.29 para una inversión inicial de $5,000,000, un día de cobertura, nivel de confianza 95%, probabilidad de distribución normal Z = 97.5%, valor en tablas nivel de confianza 1.96. Lo que permite al inversor visualizar de mejor manera sus expectativas de inversión respecto a su portafolio óptimo de Sharpe o de algún otro acorde a su grado de aversión al riesgo.

Finalmente me parece relevante mencionar que durante el desarrollo de mi ensayo identifiqué que no existe literatura abundante de autores mexicanos y extranjeros que integren en un solo documento los conceptos básicos, teóricos y prácticos de la Teoría Moderna de Portafolio de H. Markowitz, CAPM, APT y el Valor en Riesgo (VaR), salvo información aislada de publicaciones provenientes de otros países principalmente desarrollados como Inglaterra, Estados Unidos, España, Francia, entre otros y que desafortunadamente en México no se encuentra disponible a nivel consulta en las principales bibliotecas de nuestro país.

BIBLIOGRAFÍA.

- Diana Ortiz, Miguel Chirinos, Ivonka Hurtado, "La frontera eficiente y los límites de inversión para las AFP", Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú 2010.
- Markowitz H, "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments", Jonh Willey & Sons Inc., New York, Chapman & Hall, Limited, London 1959.
- Walpole, Ronald; Myers, Raymond, Sharon, "Probabilidad y Estadística para Ingenieros", Prentice Hall, México 1999.
- Gutierrez Eduardo, "Fundamentos de Estadística Descriptiva e Inferencial para Ingeniería y Ciencias", Educación Nauta, primera edición, México 2006.
- Gutierrez Eduardo, "Fundamentos de la Teoría de las Probabilidades", Educación Nauka, primera edición, México 2007.
- Máximo Ferrando Bolado, Ana Rosa Gómez Cálvet, Carlos Lassala Navarré, José Agustín Piñol Espasa, Araceli Reig Pérez, "Teoría de la Financiación I. Modelos CAPM, APT y Aplicaciones", Pirámide, Madrid España 2005.
- Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, Stephen J. Brown y William N. Goetzmann. "Modern Portfolio Theory And Investment Analysis", Wiley, Seventh Edition, 2007.
- Gordon, J., "Fundamentos de Inversiones: teoría y práctica", Pearson Educación, México 2003.
- Beaver, W., P. Kettler y M. Scholes (1970). "The association between market determined and accounting determined risk measures. The Accounting Review. Journal of Financial and Quantitative Analysis", University of Washington, United State, June 1975.
- Benjamín Graham, "Prólogo y apéndices de Warrent E. Buffett, versión comentada actualizada por Jason Zweig", Ediciones Deusto, Grupo Planeta, Barcelona España, Octubre 2011.