



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**La Signatura de un Grupo Fuchsiano del Primer o
del Segundo Tipo**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

HECTOR AXEL SAAVEDRA LUIS



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE**

CIUDAD UNIVERSITARIA., D.F. 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

1.Datos del alumno

Saavedra

Luis

Hector Axel

53841477

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Matemáticas

307314772

2.Datos del tutor

Dr.

Antonio

Lascurain

Orive

3.Datos del sinodal 1

Dra.

Adriana

Ortiz

Rodríguez

4.Datos del sinodal 2

Dr.

Rodolfo

San Agustín

Chi

5.Datos del sinodal 3

Dr.

Ernesto

Rosales

González

6.Datos del sinodal 4

M. en C.

Raybel Andrés

García

Ancona

7.Datos del trabajo escrito

La signatura de un grupo fuchsiano del primer o del segundo tipo

65 p.

2014

Agradecimientos

Gracias a todos y cada una de las personas que han hecho posible el desarrollo de este trabajo. Al Doctor Antonio Lascurain Orive por todo el tiempo invertido y el gusto de asesorarme en esta tesis, a mis sinodales, a Raybel por ayudarme además con metagraf, a Héctor Cejudo por enseñarme Latex y apoyarme también en las figuras.

Agradezco a Dios y a mi familia, es difícil escribir nombres, agradezco a todas las personas que han tenido el tiempo de hablar aunque sea un momento conmigo, porque de todas ellas he aprendido algo, en poca o gran parte, a cada una le debo lo que soy.

A mi hermana Claudia por demostrarme que a pesar de todo, puedo contar con ella en cualquier momento, a mi cuñado Luis por cuidarla bastante bien, a mi sobrinos Fernando, Ian y Yoselín, por recordarme que lo más importante en la vida es divertirse, también a mi cuñada Gema por hacerle a mi hermano el Bullying que yo nunca le pude hacer, a mis padrinos y su familia, en particular a Luisito por enseñarme la entrega que uno debe tener para cuidar de lo que más quiere, a María Esther por todas las consideraciones, a Cynthia por sus locuras, a Jesúsín por el respeto que me ha tenido.

A mi tía Petra y mi tío Antonio por verme como un nieto más y quererme consentir como tal, a Chuy por creer en mí, a mi tía Luisa y mi tío Santos, por compartirme siempre con mucho gusto su casa, a mi prima Lucy, por hacerme sentir la visita más importante del mundo, por el cariño y los momentos, a Brenda, a Luisito, a Pancho y a Panchita por tratarme como un hermano más.

A Alán, a mi abuelita, a Rubén, ellos ya saben porque.

II

A mi prima Rebe, a mis tíos y abuelita por todas las veces que me consintieron.

A Jesús, David y César, por enseñarme a disfrutar la vida, a Jose y a Irma, por aguantarme tanto tiempo, a Bladimir sobre todo por aquella ocasión de mí brazo.

A mis queridos colegas del CCH, al Wicho, a Iván, a Ricardo, a Cristian, a Jorge, al laboratorista, también a Paulina, a Karla, a mi compañera Karen y por supuesto a Fany.

A todos mis compañeros en la facultad, al club de ajedrez Z a mis compañeros de álgebra moderna, también a Louis, Angela, Diana, a Nadxieli, a mi profesora Carmen, a Luis Manuel, a Pavel, a todos mis demás profesores, pues gracias a ellos he aprendido esto que se ha vuelto mi pasión.

A mis alumnos, a mis vecinos, doña Lupe, doña Lupita, don Higinio por todo el apoyo, pero en especial a doña Ernestina y don Enrique, por tratarme como su familia, a Irais, a Belem, a Luis y a Brandon.

Quiero agradecer especialmente a Juan Antonio Ramírez Bravo, mi más grande amigo y mi mejor compañero, por todas las risas, aventuras, vivencias que hemos tenido en esta facultad, muchas gracias Juan.

Quiero agradecer a Jareth Zuleyca Torres Reyes, por alegrar mis días, por acompañarme, por mostrarme que las personas pueden ser increíblemente bondadosas, por todo, gracias amor de mi vida.

Agradezco a la persona que más admiro, debido a su determinación, a esa persona que ha tenido la mayor parte de la influencia sobre mí, quien abrió el camino para que yo pudiera soñar con este momento, a quien le debo gran parte de mi educación, el que me enseñó el valor del estudio y que inconscientemente me inculco el amor por esta institución, te agradezco todo José de Jesús.

Finalmente, quiero agradecer a las personas que desde mi nacimiento, día con día han entregado todo de sí para que yo esté bien, quienes me han enseñado lo que es el amor incondicional y lo que es el esfuerzo, el dar el todo, el seguir siempre adelante, esas dos personas que me han dado todo lo que tienen en sus manos, esta tesis es por ellos, para ellos y de ellos, esta tesis es de mis padres.

Introducción

La geometría hiperbólica ha cobrado mucha importancia en la matemática en las últimas décadas. Es una de las ramas más vinculantes de las matemáticas, ya que interactúa con muchas otras como la teoría de números, por ejemplo, a través de los grupos modulares, véase [7], o con la variable compleja en las superficies de Riemann, o bien con la topología a través de las acciones tridimensionales de $PSL(2, \mathbb{C})$ las cuales muestran que casi todas las variedades de dimensión 3 se pueden entender al estudiar la acción de un grupo kleiniano en el espacio hiperbólico de dimensión 3.

En este sentido un estudio formal detallado de los temas centrales es de gran utilidad. En particular, el estudio de la signatura de los grupos fuchsianos es un tema de gran importancia, ya que estos invariantes *proporcionan un mapa* del grupo fuchsiano, en particular, el género de la superficie de Riemann obtenida como cociente de la acción en el plano hiperbólico. Se sabe que en algunos casos, la signatura determina el grupo salvo isometría, como es el caso de los grupos triangulares, cf. [1] y [9]. El tema central de esta tesis es exhibir una condición necesaria y suficiente para la existencia de un grupo Fuchsiano no elemental dados los parámetros de su signatura.

En el segundo capítulo se demuestran teoremas acerca de las clases conjugadas de un grupo Fuchsiano, estos serán de utilidad en la parte central de la tesis. Se demuestra, entre otras cosas, que cada elemento parabólico o elíptico de un grupo fuchsiano, es conjugado a un elemento en el subgrupo estabilizador de un punto fijo parabólico o elíptico en una región fundamental dada (Teorema 2.0.2). Se da una cota del número de clases parabólicas (o elípticas) maximales en un subgrupo de G en términos del número de clases parabólicas (o elípticas) de G y el índice del subgrupo (Teorema 2.0.4). También se estudian elementos hiperbólicos *de frontera*, los cuales se caracterizan por preservar intervalos de discontinuidad en la frontera de Δ , y se relacionan directamente con la región de Nielsen, que es de vital importancia en esta tesis. Se enuncian también resultados acerca de las

IV

clases conjugadas hiperbólicas de frontera, hiperbólicas simples, e hiperbólicas en general (Teorema 2.0.5 y Teorema 2.0.8).

En el tercer capítulo se define con detalle cada uno de los parámetros de la signatura de un grupo fuchsiano, y a continuación se enuncia el teorema central, el cual nos dice que dados $g, m_1, m_2, \dots, m_r, s, t$, donde g es el género de la superficie de Riemann asociada, m_j el orden de las clases elípticas, s el número de clases parabólicas y t el número de clases hiperbólicas de frontera, si se cumple

$$2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) > 0,$$

entonces existe un grupo con dicha signatura, más aún, los parámetros de la signatura de cualquier grupo cumplen la desigualdad (Teorema 3.0.11). Otro resultado central de esta tesis exhibe que si G es un grupo fuchsiano no elemental, entonces

$$h - \text{área}(N/G) = 2\pi \left\{ 2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \right\},$$

donde N es la región de Nielsen (Teorema 3.0.12). Cabe señalar que en la prueba que se presenta de este teorema, se completa la prueba que aparece en el libro de Alan Beardon [1] p. 269. Ya que esta prueba no es completa, al no considerar la posibilidad de vértices accidentales en la frontera de la región de Nielsen. Este resultado se usa para demostrar la primera parte del teorema central. La segunda parte del Teorema 3.0.11 se demuestra usando una construcción ingeniosa y elegante, la fórmula de Euler, el teorema de Poincaré, y un argumento de continuidad. Finalmente se concluye con algunos ejemplos y con un resultado que establece cotas superiores e inferiores para el número de lados de un polígono fundamental convexo de un grupo fuchsiano del primer tipo (Teorema 3.0.16).

Índice general

1. Preliminares	1
2. Clases conjugadas	9
3. La signatura de un grupo fuchsiano	25

Capítulo 1

Preliminares

Denotaremos por $\widehat{\mathbb{C}}$ el plano extendido formado por los puntos del plano complejo junto con infinito, los puntos de $\widehat{\mathbb{C}}$ pueden ser identificados biunívocamente con los puntos en $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ llamada la esfera de Riemann, a través de la función $\varphi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} & \text{si } \bar{x} \neq \mathbf{e}_3 \\ \infty & \text{si } \bar{x} = \mathbf{e}_3 \end{cases}$$

La función inversa esta dada por $\Pi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$

$$\Pi(z) = \begin{cases} \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ \mathbf{e}_3 & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

A la biyección de $\widehat{\mathbb{C}}$ en \mathbb{S}^2 se le llama proyección estereográfica. La idea geométrica de la asociación es tomar $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$, el plano $x_3 = 0$ como el plano complejo, y al punto $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ asociarle el punto en \mathbb{C} que resulta de intersectar el plano con la recta que pasa por \mathbf{e}_3 y (x_1, x_2, x_3) cf. [3] pp. 1-6.

Se define la métrica cordal en el plano extendido como

$$d_c(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} & \text{si } z_1, z_2 \neq \infty \\ \frac{2}{\sqrt{1 + |z_1|^2}} & \text{si } z_2 = \infty \end{cases}$$

Esta métrica induce la misma topología que la métrica euclidiana cf. [3] p.7.

Las transformaciones de variable compleja de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0$$

se les llama de Möbius, éstas están también definidas en los puntos del plano complejo extendido donde el álgebra no se aplica:

- i) Si $c = 0$, se define $T(\infty) = \infty$.
- ii) Si $c \neq 0$, se define $T(\infty) = \frac{a}{c}$ y $T(-\frac{d}{c}) = \infty$.

Estas transformaciones resultan ser continuas con la métrica cordal cf. [3] p. 9.

Si $ad - bc = 0$ la función es una constante. Por otra parte la transformación

$$z \longrightarrow \frac{\frac{a}{\sqrt{k}}z + \frac{b}{\sqrt{k}}}{\frac{c}{\sqrt{k}}z + \frac{d}{\sqrt{k}}},$$

tiene la misma regla de correspondencia que la transformación

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde $ad - bc = k$, sin embargo cumple

$$\frac{a}{\sqrt{k}} \frac{d}{\sqrt{k}} - \frac{b}{\sqrt{k}} \frac{c}{\sqrt{k}} = 1.$$

Por lo que podemos definir todas las transformaciones de Möbius por matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d; \in \mathbb{C} \quad ad - bc = 1.$$

Al grupo de matrices de esta forma se le denota por $SL(2, \mathbb{C})$, el centro de este grupo resulta ser $\{\pm Id\}$. Hay exactamente dos matrices en este grupo que determinan una transformación de Möbius dada. Al cociente de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre su centro se le llama proyectivización, y se le denota por $PSL(2, \mathbb{C})$, este grupo es isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius complejas.

Una clasificación de las transformaciones de Möbius se puede hacer tomando en cuenta los puntos fijos de estas. Dada $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, $T \neq Id$, fija exactamente uno o dos puntos. Si T fija un punto, T es conjugada a una translación y se llama parabólica. Si T fija dos puntos, T es conjugada a una transformación de la

forma $z \rightarrow \alpha z$, si $|\alpha| = 1$ a T se le llama elíptica, si $\alpha \in \mathbb{R}^+$ a T se le llama hiperbólica, en otro caso a T se le llama loxodrómica cf. [3] p. 21. Se denotará “discos” a discos o semiplanos de \mathbb{C} . Se denota por \mathbb{H}^2 el semiplano superior, i.e.

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0 \}.$$

El subgrupo de $SL(2, \mathbb{C})$, que consiste en matrices con entradas reales se le denota por $SL(2, \mathbb{R})$. De igual manera podemos tomar el grupo proyectivizado

$$PSL(2, \mathbb{R}) \cong \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{\pm Id\}},$$

que se identifica con las transformaciones de Möbius determinadas por estas matrices que son precisamente las que preservan \mathbb{H}^2 cf. [3] p. 32.

Denotaremos por Δ el disco unitario

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \},$$

llamado disco de Poincaré.

La transformación de Möbius con regla de correspondencia

$$T(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

conocida como la transformación de Cayley transforma conformemente \mathbb{H}^2 en Δ . Las transformaciones de Möbius en $SL(2, \mathbb{C})$ que preservan el disco unitario Δ son de la forma

$$S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1,$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ cf. [3] p. 35 denotamos por $M(\Delta)$ a este subgrupo de transformaciones de $SL(2, \mathbb{C})$.

Una fórmula útil para los puntos fijos de una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$ que tiene dos puntos fijos es la siguiente: si

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad c \neq 0, \quad ad - bc = 1$$

los puntos fijos son

$$\frac{a - d \pm \sqrt{\chi(T)^2 - 4}}{2c}$$

donde $\chi(T) = \pm(a + d)$ la traza de T .

Se puede clasificar las transformaciones en $PSL(2, \mathbb{C})$ mediante su traza como sigue:

- i) T es parabólica si y solo si $\chi = \pm 2$
- ii) T es elíptica si y solo si $\chi \in (-2, 2)$
- iii) T es hiperbólica si y solo si $\chi \in (2, \infty) \cup (-\infty, -2)$
- iv) T es loxodrómica si y solo si χ no es un número real. cf. [3] p.46.

Sea A una región en \mathbb{R}^n , decimos que λ es una densidad en A si λ es una función continua tal que $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}^+$. Dada una densidad λ en una región A y γ una curva de clase C^1 en A , se define la λ -longitud de γ como

$$\int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

donde $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ (la definición se extiende naturalmente a curvas C^1 por tramos) esta longitud se denota por $\iota_\lambda(\gamma)$ y permite también medir distancias entre puntos. Si λ es una densidad en una región A y $z_1, z_2 \in A$, se define la λ -distancia de z_1 a z_2 como $\inf \iota_\lambda(\gamma)$ tomando el ínfimo sobre todas las curvas C^1 por tramos que unen z_1 con z_2 , a esta distancia se le denota como $\rho_\lambda(z_1, z_2)$ y define una métrica en A . Cf. [3] p. 44.

Si A es un abierto en \mathbb{R}^n y f es una función diferenciable de A en \mathbb{R}^n , se dice que f es conforme en $x_0 \in A$, si $Df(x_0)$ es el producto de una matriz ortogonal por la matriz kI , $k \in \mathbb{R}^+$. Al número k se le llama factor de conformalidad.

Sean A y B dos regiones en \mathbb{R}^n y $f : A \rightarrow B$, una biyección conforme, supóngase que A está provista de una métrica definida por una densidad λ . Bajo estas hipótesis, si definimos

$$\sigma(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$$

donde $\mu(x)$ es el factor de conformalidad de f en x , se sigue que σ es una densidad para la región B que hace que f sea una isometría cf. [3] p. 45. En particular, si se tiene una región A en \mathbb{R}^n provista con una métrica definida por una densidad λ y una biyección conforme $f : A \rightarrow A$ que satisface

$$\lambda(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$$

entonces f es una isometría.

El plano superior \mathbb{H}^2 provisto con la métrica definida a partir de la densidad $\lambda(z) = \frac{1}{\text{Im } z}$ es un primer modelo del plano hiperbólico y a esta métrica se le llama métrica hiperbólica.

Se puede demostrar que el grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa como grupo de isometrías en \mathbb{H}^2 con la métrica hiperbólica cf [3] p. 47. Más aún, cualquier isometría del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 es un elemento de $PSL(2, \mathbb{R})$ o es de la forma

$$z \longrightarrow \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$.

Un segundo modelo del plano hiperbólico es Δ provisto con la métrica definida por la densidad

$$\sigma(w) = \frac{2}{1 - |w|^2},$$

se le llama el disco de Poincaré, la función de Cayley, resulta ser una isometría hiperbólica entre estos dos discos.

Resulta también que cualquier isometría hiperbólica del disco de Poincaré es un elemento de $M(\Delta)$, o es de la forma

$$z \longrightarrow \frac{a\bar{z} + c}{c\bar{z} + \bar{a}}$$

donde $|a|^2 - |c|^2 = 1$ cf. [3] p. 63.

Decimos que α es un punto límite con respecto a un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{C})$ si existe $z \in \hat{\mathbb{C}}$ y transformaciones distintas $T_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T_n(z) \longrightarrow \alpha, \text{ si } n \longrightarrow \infty$$

El conjunto de puntos límite de Γ se denota por $\mathbb{L}(\Gamma)$, o simplemente por \mathbb{L} obsérvese que se debe usar la métrica cordal para incluir a todos los puntos de la esfera de Riemann. Dado $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, al complemento del conjunto límite en la esfera de Riemann se le llama conjunto ordinario y se denota $\mathbb{O}(\Gamma)$ o simplemente \mathbb{O} . Si dicho conjunto es distinto del vacío diremos que el grupo Γ es discontinuo. Un subgrupo Fuchsiano de $PSL(2, \mathbb{C})$ es un grupo discontinuo que preserva algún “disco”, es decir, es conjugado a un subgrupo discontinuo de $PSL(2, \mathbb{R})$.

Sea $\Gamma < SL(2, \mathbb{C})$ diremos que este subgrupo es discreto si no existe una sucesión de matrices distintas $T_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$T_n \longrightarrow T, \text{ si } n \longrightarrow \infty,$$

donde $T \in SL(2, \mathbb{C})$. Un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ es discreto si es representado por un grupo discreto de $SL(2, \mathbb{C})$.

Se puede probar que un grupo discontinuo de $PSL(2, \mathbb{C})$ es también discreto, véase [3] p. 102. Además si $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ es discreto, entonces Γ es discontinuo (cf. [3] p. 102).

Se define el círculo isométrico de T una transformación de $PSL(2, \mathbb{C})$

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

$ad - bc = 1$ como

$$I(T) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |T'(z)| = 1 \}.$$

Se puede demostrar que este conjunto es un círculo de radio $1/|c|$ con centro en $-d/c$. También se puede demostrar que T actúa euclidianamente en este círculo y sólo en este.

Se dice que R es una región fundamental para Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ si se cumple que; para cualesquiera dos puntos $z_1, z_2 \in R$, no existe $T \in \Gamma$ tal que

$$T(z_1) = z_2,$$

y dado $w \in \mathbb{H}^2$ existe $z \in \tilde{R}$ y $T \in \Gamma$ tal que

$$T(z) = w,$$

donde \tilde{R} representa la cerradura de R en \mathbb{H}^2 , y finalmente, ∂R tiene medida bidimensional de Lebesgue cero.

Se dice que un dominio fundamental D para G es localmente finito, si cualquier conjunto compacto de Δ interseca solo una cantidad finita de imágenes de \tilde{D} .

Una superficie de Riemann es un espacio que localmente es como un disco del un plano, daremos una definición formal.

Definición 1 *Un espacio topológico X Hausdorff conexo es una superficie de Riemann si existe una familia*

$$\{(\phi_j, U_j) : j \in J\},$$

nombrado atlas (cada pareja es nombrada carta) tal que:

- i) $\{U_j : j \in J\}$ es un abierto de X ,
- ii) cada ϕ_j es un homeomorfismo de U_j en un subconjunto abierto del plano;
y
- iii) si $U = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces

$$\phi_i(\phi_j)^{-1} : \phi_j(U) \longrightarrow \phi_i(U)$$

es una función analítica entre los subconjuntos del plano $\phi_j(U)$ y $\phi_i(U)$.

El teorema de Poincaré para grupos fuchsianos será utilizado en la tesis, a grandes rasgos este teorema establece que dado un polígono y apareamientos de los lados de este polígono, si alrededor de los vértices la teselación local es correcta, G , el grupo generado por los apareamientos, es un grupo discreto y el polígono resulta ser una región fundamental para G . El enunciado preciso y una demostración detallada de este teorema se puede consultar en [1] capítulo 9.

Se define un polígono fundamental convexo para G un grupo fuchsiano como un dominio localmente finito para G , que además es convexo.

Capítulo 2

Clases conjugadas

Teorema 2.0.1 *En el grupo de todas las isometrías del plano hiperbólico, 2 isometrías conformes no triviales son conjugadas si y sólo si estas tienen el mismo valor de la traza al cuadrado. En el grupo de las isometrías conformes el valor de la traza al cuadrado determina 2 clases conjugadas parabólicas o elípticas, o una clase conjugada hiperbólica.*

DEMOSTRACIÓN. Sean T, R isometrías conformes no triviales, como la traza es invariante bajo la conjugación, si éstas son conjugadas tienen la misma traza al cuadrado. Por otro lado, usando $\chi(T)$ para denotar la traza de T si

$$\chi^2(T) = \chi^2(R)$$

y $1/t, t, 1/r, r$ son los multiplicadores de T y R respectivamente se tiene que

$$\frac{1}{t} + t + 2 = \chi(T)^2,$$

cf. [3]. Por lo cual

$$\frac{1}{t} + t = \frac{1}{r} + r$$

multiplicando por rt , se tiene

$$r + rt^2 = t + r^2t$$

lo cual sucede si y sólo si

$$r - t = r^2t - rt^2 \iff r - t = (r - t)(rt) \iff 1 = rt \iff \frac{1}{r} = t.$$

Por lo que T y R tienen los mismo multiplicadores y por lo tanto son conjugadas en $PSL(2, \mathbb{C})$.

Ahora veamos que al conjugar en el grupo de isometrías conformes el valor de la traza al cuadrado determina o dos clases conjugadas parabólicas, o 2 clases conjugadas elípticas, o bien, una sola clase hiperbólica.

Primero analizemos el caso parabólico. Usamos el modelo \mathbb{H}^2 . Sean f y g transformaciones parabólicas con puntos fijos α y β respectivamente. Las transformaciones

$$\varphi_1(z) = \frac{-1}{z - \alpha} \quad \varphi_2(z) = \frac{-1}{z - \beta}$$

en $PSL(2, \mathbb{R})$ conjugan a f y g a dos translaciones

$$t_1(z) = z + q, \quad t_2(z) = z + p \quad .$$

Tomemos T_1, T_2 dos matrices que determinan estas translaciones

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Supongamos que T_1 y T_2 son conjugadas en $SL(2, \mathbb{R})$, luego existe

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} a & aq + b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + pc & b + pd \\ c & d \end{pmatrix}$$

por lo cual $pc = 0$ y como $p \neq 0$ necesariamente $c = 0$. De la igualdad de matrices se sigue también que $aq = pd$, y multiplicando por a obtenemos $a^2q = p$, (ya que $ad = 1$) así que p y q deben tener el mismo signo.

Hemos encontrado una condición necesaria para que dos transformaciones parabólicas sean conjugadas en $PSL(2, \mathbb{R})$.

Falta ver es que si

$$T_1(z) = z + q \quad T_2(z) = z + p$$

Traslaciones donde p y q tienen el mismo signo, éstas son conjugadas en $PSL(2, \mathbb{R})$.

Basta mostrar que una transformación de la forma $T_1(z) = z + q$, $q > 0$ es conjugada a $z \rightarrow z + 1$; y una de la forma $T_2(z) = z + p$, $p < 0$ es conjugada a $z \rightarrow z - 1$, para esto (abusando de la notación) si

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, q > 0$$

tomando la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{q}} & 1 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

se tiene

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{q}} & 1 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{q}} & 1 \\ 0 & \sqrt{q} \end{pmatrix}$$

y se sigue que $T_1(z) = z + q$ es conjugada a $z \rightarrow z + 1$.

Para el caso $z \rightarrow z + p$, $p < 0$, un cálculo análogo prueba que la transformación definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{-p}} & 1 \\ 0 & \sqrt{-p} \end{pmatrix}$$

conjugua $z \rightarrow z + p$ con $z \rightarrow z - 1$.

Ahora analicemos el caso elíptico, consideremos esta vez Δ como el modelo del plano hiperbólico. Sean f y g dos transformaciones elípticas en $M(\Delta)$ que tienen el mismo valor de la traza al cuadrado, notemos que si f tiene punto fijo z_0 la transformación

$$\varphi(z) = \frac{z - z_0}{-\bar{z}_0 z + 1} \in M(\Delta)$$

conjugua a f a una rotación de la forma

$$r_1(z) = e^{i\theta}(z)$$

análogamente existe una transformación en $M(\Delta)$ que conjugua a g a una rotación, pero por la primera parte g es conjugada a

$$r_2(z) = e^{-i\theta}(z).$$

Sin embargo r_1 y r_2 no pueden ser conjugadas en el grupo de isometrías conformes, de ser así existiría una matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

con entradas complejas, que cumple $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, tal que

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Esto es

$$\begin{pmatrix} \alpha e^{i\frac{\theta}{2}} & \beta e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ \bar{\beta} e^{i\frac{\theta}{2}} & \bar{\alpha} e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha e^{-i\frac{\theta}{2}} & \beta e^{-i\frac{\theta}{2}} \\ \bar{\beta} e^{i\frac{\theta}{2}} & \bar{\alpha} e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix},$$

en particular $\alpha e^{i\frac{\theta}{2}} = \alpha e^{-i\frac{\theta}{2}}$.

Como $e^{i\frac{\theta}{2}} \neq e^{-i\frac{\theta}{2}}$, se sigue que $\alpha = 0$ y $-|\beta|^2 = 1$, lo cual es una contradicción, por lo tanto r_1 y r_2 no son conjugadas en $M(\Delta)$, y hay dos clases conjugadas en $M(\Delta)$ que representan una sola en $PSL(2, \mathbb{C})$.

Para el caso hiperbólico usamos el modelo \mathbb{H}^2 . Si f tiene puntos fijos α y β supongamos $\alpha < \beta$

$$\varphi(z) = \frac{z - \alpha}{z - \beta} \in PSL(2, \mathbb{R})$$

conjugamos a f a una homotecia de la forma

$$h(z) = kz$$

de igual manera podemos conjugar a g en $PSL(2, \mathbb{R})$, más aún, por la primera parte g es conjugada a

$$h^{-1}(z) = \frac{1}{k}z,$$

así, $z \mapsto \frac{-1}{z}$ conjuga a estas transformaciones y además esta en $PSL(2, \mathbb{R})$ pues la matriz unimodular que representa la transformación es

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

así que el resultado se cumple también en este caso.

□

Teorema 2.0.2 Sea G un grupo Fuchsiano y sean v_1, v_2, v_3, \dots los puntos fijos parabólicos y elípticos en la frontera de algún polígono fundamental convexo P para G , supóngase también que g_j genera al estabilizador de v_j . Entonces cualquier elemento elíptico o parabólico de G es conjugado a alguna potencia de g_j para alguna j .

DEMOSTRACIÓN. Si g es elíptica o parabólica con punto fijo v , existe $h \in G$ tal que manda a v a algún punto en ∂P cf. [1] p. 216. Entonces para alguna j , tenemos que $h(v) = v_j$ así que $hgh^{-1}(v_j) = hg(v) = h(v) = v_j$ por lo que hgh^{-1} está en el estabilizador de v_j lo cual implica que g es conjugada a alguna potencia de g_j .

□

Corolario 2.0.3 *Si G es finitamente generado, entonces G tiene un número finito de subgrupos cíclicos maximales $\langle g_1 \rangle, \langle g_2 \rangle, \dots, \langle g_n \rangle$ tal que cualquier elemento elíptico o parabólico en G es conjugado a exactamente uno de estos subgrupos.*

DEMOSTRACIÓN. Como G es finitamente generado, G tiene un polígono fundamental convexo con un número finito de lados cf. [1] p. 254 Se sigue del teorema que cualquier clase de equivalencia de vértices parabólicos o elípticos es conjugada a un subgrupo estabilizador de un vértice elíptico o parabólico de un polígono fundamental convexo.

Basta observar que si g es elíptica o parabólica y 2 potencias de g son conjugadas, digamos

$$hg^n h^{-1} = g^m$$

entonces h fija los mismo puntos que g , ya que si

$$g(v) = v,$$

entonces

$$hg^n h^{-1}(h(v)) = h(v).$$

Por lo que si g es parabólica

$$v = h(v)$$

y si es elíptica, como $g \in PSL(2, \mathbb{R})$ no hay intercambio de puntos fijos.

□

Se puede establecer una cota para el número de clases conjugadas de subgrupos cíclicos maximales en un subgrupo de G un grupo fuchsiano en términos del índice de las clases de G .

Teorema 2.0.4 *Sea G un grupo fuchsiano y G_1 un subgrupo de índice k en G . Supóngase que G y G_1 tienen t y t_1 , respectivamente, clases conjugadas de subgrupos cíclicos parabólicos maximales. Entonces $t_1 \leq kt$. El mismo resultado es válido para elementos elípticos.*

DEMOSTRACIÓN. Se puede tomar un polígono de Dirichlet para G para el cual los puntos fijos elípticos o parabólicos en ∂D pertenezcan a ciclos de longitud uno, cf.[1] p.232 .

Bajo estas hipótesis exactamente t puntos fijos elípticos están en la frontera euclidiana de D , ahora G se puede descomponer en clases laterales

$$g_1 G_1 \cup g_2 G_1 \cup \dots \cup g_k G_1.$$

El siguiente paso es definir

$$D^* = g_1^{-1}(\tilde{D}) \cup g_2^{-1}(\tilde{D}) \cup \dots \cup g_k^{-1}(\tilde{D}).$$

Nótese que D^* contiene al menos un punto de cada G_1 -órbita, sea $u \in \mathbb{H}^2$, como D es región fundamental $\exists z \in \tilde{D}$ tal que $z = g(u)$, $g \in G$. Como $g = g_i h$, donde $h \in G_1$ para alguna i , se sigue que $z = g_i h(u)$ y $g_i^{-1}(z) = h(u)$ que está en la órbita de u .

Como D^* tiene a lo más kt puntos fijos elípticos, se tiene $t_1 \leq kt$. El caso parabólico es similar. Se escribe

$$D^* = g_1^{-1}(\bar{D}) \cup g_2^{-1}(\bar{D}) \dots \cup g_k^{-1}(\bar{D}).$$

Ahora si u es un punto fijo parabólico de G_1 , existe $g \in G$ tal que $g(u)$ es un vértice del polígono \bar{D} cf. [1] p. 216, hay exactamente t vértices parabólicos, el resto de la prueba es análogo.

□

Ilustraremos el Teorema 2.0.4 con un ejemplo. Es muy conocido que un polígono fundamental convexo para el grupo clásico modular $SL(2, \mathbb{Z})$ es el siguiente

$$P = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{-1}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}, |z| > 1 \right\},$$

cf. [3] p.163.

Nótese que P tiene una sola clase parabólica. Para cada N natural se define el subgrupo de congruencias de Hecke de nivel N como

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

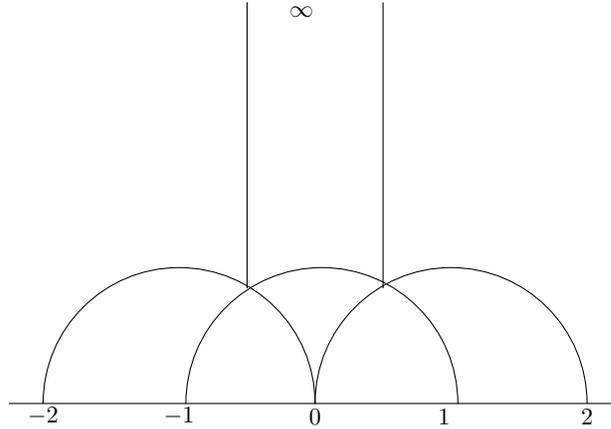


Figura 2.1: Polígono fundamental convexo para el grupo clásico modular $SL(2, \mathbb{Z})$.

Consideremos $\Gamma_0(4)$, la matriz $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ pertenece a este subgrupo y el círculo isométrico correspondiente a la transformación definida por esta matriz tiene centro en $1/4$ y radio $1/4$, de igual manera su inversa tiene círculo isométrico con centro en $3/4$ y radio $1/4$.

Debido a la acción de las transformaciones en los círculos isométricos puede demostrarse que un polígono fundamental para $\Gamma_0(4)$ es el que aparece en la Figura 2.2.

De donde podemos observar que hay 3 clases parabólicas, a saber, las definidas por los vértices $1/2$, ∞ y la clase determinada por $\{0, 1\}$. Además el índice de $\Gamma_0(4)$ en $SL(2, \mathbb{Z})$ es 6 lo que ilustra el Teorema 2.0.4. La prueba de esta afirmación se puede consultar en [6].

Ahora nos enfocaremos en clases conjugadas de elementos hiperbólicos en un grupo Fuchsiano. Si $f(z) = kz$, se define la longitud de translación de f como $\log k$. Lo que se está midiendo es cuanto se mueven los puntos hiperbólicamente en el eje. Es decir, si $z = i$ y $f(z) = ki$, $\rho(z, f(z)) = \log k$ también si $z = mi$, $f(z) = mki$ y $\rho(z, f(z)) = \log k$. La invariabilidad de la métrica bajo $PSL(2, \mathbb{R})$ permite definir la longitud de translación de una transformación hiperbólica g como $\log k$ si g es conjugada a $z \rightarrow kz$.

Teorema 2.0.5 *Cualquier grupo Fuchsiano no elemental G contiene una infinidad de clases conjugadas de subgrupos cíclicos maximales hiperbólicos.*

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que el teorema no se cumple, entonces existen elementos hiperbólicos h_1, h_2, \dots, h_t en G tal que cada transformación hiperbólica de G es conjugado a alguna potencia de algún h_j .

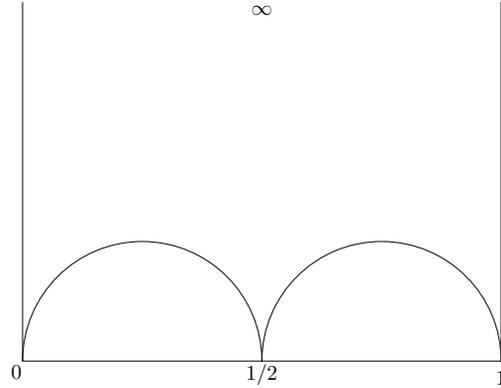


Figura 2.2: Polígono fundamental convexo para $\Gamma_0(4)$

Tomemos u, v puntos límites de G . Sean

$$U_n = D(u, 1/n), \quad V_n = D(v, 1/n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como U_n y V_n son abiertos que intersecan a Λ , para cada pareja U_n, V_n existe f_n elemento hiperbólico de G tal que f_n tiene un punto fijo en U_n y otro en V_n , cf. [1] p. 97. Podría pasar que $f_n = f \forall n \geq N$ con puntos fijos u y v , esto se puede evitar tomando otro punto límite en la vecindad de V_n (Λ es perfecto) trabajando con una subvecindad.

De esta manera existen elementos hiperbólicos $f_1, f_2, f_3 \dots$ con ejes distintos $A_1, A_2, A_3 \dots$ tal que A_n tiene puntos finales u_n y v_n donde $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$. Como cada f_n es conjugada a alguna potencia de alguna h_j , podemos suponer, renombrando si es necesario, que $h_j = h_1 \forall n$. Por lo cual $f_n = g_n(h_1)^{k_n}(g_n)^{-1}$.

Denotamos

$$q_n = g_n h_1 g_n^{-1}.$$

Nótese que cada q_n tiene un eje A_n distinto y la misma longitud de translación T que h_1 y que $q_n^{k_n} = f_n$. Más aún, la geodésica A_n converge a la geodésica $[u, v]$.

Ahora si $z \in [u, v]$ se puede probar que

$$\sinh \frac{1}{2} \rho(z, q_n z) = \sinh \left(\frac{1}{2} T \right) \cosh \rho(z, A_n), \quad (2.1)$$

(véase [1] p. 174). Obsérvese que el segundo miembro converge a $\sinh(\frac{1}{2}T)$ si n tiende a infinito. Esto contradice que G es discreto ya que los q_n son distintos y el conjunto de estas imágenes está acotado, por lo cual existiría un punto límite en el plano hiperbólico.

□

Definición 2 Sea G un grupo fuchsiano actuando en Δ decimos que un punto α es un punto de aproximación de G si existen $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en G transformaciones distintas y un conjunto compacto K de Δ tal que para todo rayo geodésico L que termina en α se tiene que

$$g_n^{-1}(L) \cap K \neq \emptyset.$$

Esta definición es equivalente a la que aparece en [1], p. 261 véase [1] Teorema 10.2.1 p. 259. Usaremos el siguiente resultado que se puede deducir del Teorema 10.2.5 y su prueba en [1].

Lema 2.0.6 Sea G finitamente generado, entonces todo punto fijo hiperbólico de G es un punto de aproximación, además, existe un subconjunto compacto K de Δ tal que todo eje hiperbólico tiene una imagen que interseca a K .

BOSQUEJO DE LA DEMOSTRACIÓN. Se toma el polígono de Dirichlet P con centro en 0 para G y se toman horociclos Q para cada punto parabólico en P , que corten P en exactamente dos lados. Algo similar con los lados libres, se generan geodésicas L que determinan los extremos de los lados libres. Cada horociclo contiene un conjunto q que es la intersección con P y cada geodésica contiene un segmento l tal que si h la transformación hiperbólica que fija L entonces $h^n(l) = L$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Las geodésicas L y los horociclos Q son finitos y separan los puntos frontera de P de un conjunto $P_0 \subset \tilde{P}$ se toma K el conjunto formado por P_0 y los ejes q y l .

Ahora si $w \in \partial\Delta$ es un punto hiperbólico y A es el eje con punto final w , tomamos un rayo $L_0 \subset A$ tal que $w \in \partial L_0$.

Sea z el otro extremo de L_0 , existe $g \in G$ tal que $g(z) \in \tilde{P}$, $g(L_0)$ no puede estar contenido totalmente en las regiones horocíclicas ni tampoco puede terminar

en un lado libre, ya que si esto ocurriera w sería o bien parabólico, o bien un punto ordinario. Ajustando con alguna de las transformaciones parabólicas o hiperbólicas que defina los hipercírculos L o los horocírculos Q se tiene que $g(L_0) \cap K \neq \emptyset$. El final de la prueba es idéntico al que aparece en [1] p. 261. Una prueba mas detallada se puede consultar en [4]

□

Para el siguiente resultado, usaremos la identidad

$$\|g_n\|^2 = 2 \cosh \rho(0, g_n(0)), \quad (2.2)$$

cuya prueba se puede consultar en [1] p.138.

Teorema 2.0.7 *Si G es finitamente generado entonces $T_n \rightarrow +\infty$ si $n \rightarrow +\infty$, donde T_n es la longitud de translación de cada clase conjugada en G .*

DEMOSTRACIÓN. Usando el Lema 2.0.6 existe un compacto K tal que cada clase hiperbólica C_n contiene un elemento g_n con eje A_n que interseca a K , ya que si $f \in C_n$ y A es el eje de f , suponiendo que $h(A)$ interseca a K donde $h \in G$, $h(A)$ es el eje de $h \circ f \circ h^{-1}$ que está en C_n . Además, para algún $d \in \mathbb{R}^+$, $K \subseteq \{z \in \Delta \mid \rho(0, z) \leq d\}$ por ser compacto. Usando 2.1 y 2.2 Como

$$\cosh u = 1 + 2\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(0, g_n(0)),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \|g_n\|^2 &= 2 + 4\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(0, g_n(0)) \\ &= 2 + 4\sinh^2(T_n/2) \cosh^2 \rho(0, A_n) \end{aligned}$$

donde T_n es la longitud de translación de g_n . Nótese que como $\rho(0, A_n)$ está acotada por d , se sigue que $\|g_n\|^2 \leq 2 + 4 \sinh^2(\frac{1}{2}T_n) \cosh^2(d)$. Finalmente, si T_n no converge a infinito a medida que $n \rightarrow +\infty$, las normas de las transformaciones estarían acotadas, lo que contradice que el grupo es discreto.

□

Hay dos tipos de transformaciones hiperbólicas en grupos Fuchsianos que requieren especial atención.

Definición 3 Sea $h \in G$, G fuchsiano, h hiperbólica, se dice que G es simple si $g(A) = A$ o $g(A) \cap A = \emptyset, \forall g \in G$, donde A es el eje de h .

Existen también los *elementos hiperbólicos de frontera*, caracterizados por el hecho de preservar un intervalo de discontinuidad en el círculo al infinito invariante, por supuesto, estos existen solo en grupos fuchsianos de la segunda clase (donde existen intervalos de discontinuidad).

Teorema 2.0.8 *Un grupo fuchsiano finitamente generado tiene solo un número finito de clases conjugadas de subgrupos cíclicos hiperbólicos de frontera maximales. Un grupo fuchsiano finitamente generado puede tener una infinidad de clases conjugadas de elementos hiperbólicos simples.*

DEMOSTRACIÓN. Un grupo G finitamente generado tiene un polígono fundamental convexo P con un número finito de lados libres s_1, s_2, \dots, s_n cf. [1] p. 254. Cada lado libre s_j se encuentra en un intervalo de discontinuidad γ_j cuyo estabilizador es generado por un elemento hiperbólico de frontera h_j .

Ahora, si h es un elemento hiperbólico de frontera, h preserva un intervalo de discontinuidad γ , se afirma que se puede construir un semirayo L que termina en algún punto interior de γ y que está completamente contenido en alguna imagen $f(P)$. Suponiendo cierta la afirmación, como $f^{-1}(L)$ está en P y termina en algún punto ordinario de G , esta imagen termina en algún s_j . Por lo que $f(\gamma) = \gamma_j$, es decir fhf^{-1} preserva a γ_j y h es conjugada a un elemento en el estabilizador de γ_j . Ahora para probar la afirmación sea z un punto en el interior de γ , z es ordinario, tomamos una vecindad alrededor de z que consista solamente de puntos ordinarios, como el diámetro euclidiano de las imágenes del polígono bajo g_n , elemento de G , tiende a cero si n tiende a infinito cf [1] p. 219 hay un número finito de imágenes de P en esa vecindad, de otro modo existiría una órbita de algún punto en P que se acumula en un punto interior de γ .

Exhibimos ahora un ejemplo de un grupo fuchsiano finitamente generado, el cual contiene una infinidad de elementos hiperbólicos simples primitivos. Construimos un cuadrilátero P en Δ con vértices v_1, v_2, v_3, v_4 en el círculo infinito. Sean f y g elementos hiperbólicos que aparean los lados de P como ilustra la Figura 2.3.

Notemos que el conmutador de f y g es parabólico por lo cual se puede aplicar el teorema de Poincaré y en consecuencia el grupo G generado por f y g es discreto y P es un polígono fundamental para G cf. [1] pp. 242-251. Como f y g aparean los lados de un polígono fundamental convexo, necesariamente son elementos hiperbólicos simples de G cf [1] p. 240.

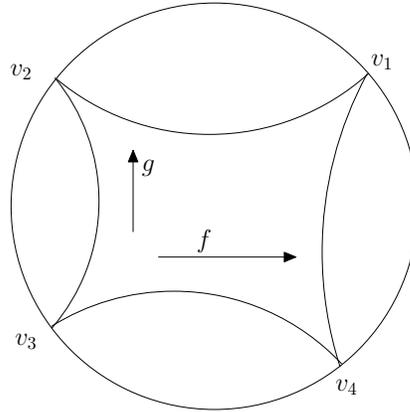


Figura 2.3: Ejemplo de un grupo fuchsiano finitamente generado con una infinidad de elementos simples primitivos no conjugados

Los ejes de f y g cruzan P , así que estas transformaciones son primitivas, ya que si por ejemplo $f = h^n$ con h hiperbólico primitivo, entonces $T_f = nT_h$, donde T_f y T_h son las longitudes de translación de f y h respectivamente, lo cual no puede suceder ya que P es región fundamental.

Nótese que el eje de f interseca los segmentos de las geodésicas $[v_2, v_3]$ y $[v_1, v_4]$, el segmento de intersección con P mide exactamente T_f . Ahora, definimos $v_5 = f(v_1)$, tomemos el cuadrilátero con vértices v_1, v_3, v_4, v_5 que es otro polígono fundamental convexo para G .

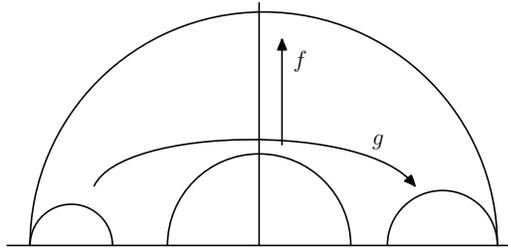


Figura 2.4: Los ejes de f y g cruzan al polígono.

En esta ocasión f apareja el lado $[v_1, v_3]$ con $[v_4, v_5]$ y fg apareja $[v_3, v_4]$ con $[v_1, v_5]$. Por el mismo argumento f y fg son elementos hiperbólicos primitivos simples.

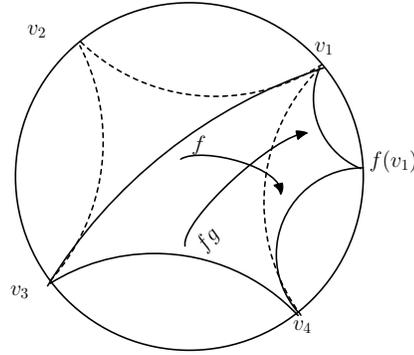


Figura 2.5: Ejemplo de un grupo fuchsiano finitamente generado con una infinidad de elementos simples primitivos no conjugados

Podemos repetir el proceso y obtener una sucesión g, fg, f^2g, \dots de elementos hiperbólicos primitivos simples de G . Por conjugación podemos asumir que G actúa en \mathbb{H}^2 y que

$$f = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1/u \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $ad - bc = 1$ y $u > 1$.

Por lo tanto

$$f^n g = \begin{pmatrix} au^n & bu^n \\ c/u^n & d/u^n \end{pmatrix}$$

cuya traza al cuadrado es $au^n + d/u^n$ la cual tiende a infinito si $n \rightarrow \infty$, así la sucesión $\{f^n g\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una infinidad de elementos con diferente traza los cuales no son conjugados entre sí.

Nótese que a no puede ser cero, ya que en este caso los puntos fijos de g tendrían el mismo signo, esto se sigue de la fórmula de los puntos fijos, se tendría que sus coordenadas son

$$-d \pm \frac{\sqrt{d^2 - 4}}{2c}.$$

Ahora, como

$$|d| > \sqrt{d^2 - 4}$$

si los puntos fijos de g tienen el mismo signo no se genera el cuadrilátero que

describimos, *i. e.* los ejes no se cruzan. Finalmente usando la identidad

$$|\text{traza } g| = 2 \cosh \frac{1}{2} T_g, \quad (2.3)$$

donde T_g es la longitud de translación de g hiperbólica, se sigue el resultado. Una prueba de 2.3 se puede consultar en [1] p.179-180.

□

A manera de ejemplo construimos un grupo fuchsiano G infinitamente generado que contiene un número infinito de clases conjugadas de elementos simples hiperbólicos con la misma longitud de translación.

Utilizando el modelo \mathbb{H}^2 tomamos geodésicas que unan los puntos de la forma 2^n y $2^{n-1}(3)$ $n \in \mathbb{N}$, y las geodésicas que se obtienen al reflejar estas líneas con respecto al eje imaginario. Sean $g_1, g_2, g_3 \dots$ elementos hiperbólicos que aparean las geodésicas como muestra la Figura 2.6.

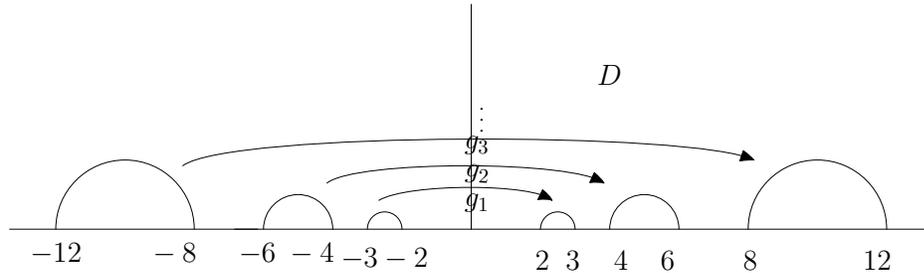


Figura 2.6: Ejemplo de un grupo fuchsiano infinitamente generado con una infinidad de clases conjugadas de elementos simples hiperbólicos con la misma longitud de translación

Siempre es posible encontrar una transformación hiperbólica que mande una geodésica en otra, para probar esto se puede mandar la ortogonal común a L_1 y L_2 al eje imaginario y aplicar una homotecia (nótese que la ortogonal común siempre existe, esto se prueba finalmente si L_1 es el eje imaginario, el caso general se sigue por conjugación).

Se puede probar, usando el teorema de Poincaré que esta región D es un polígono fundamental para el grupo $G = \langle g_1, g_2 \dots \rangle$ véase [1] p. 251. Además G es puramente hiperbólico. Se puede probar también que si $G_i = \langle g_i \rangle$ se tiene que $G = \ast_{i=0}^{\infty} G_i$, es decir G es el producto libre de los g_i cf [1] teo 5.3.15 p. 103.

Por lo cual $\forall n \neq 1 \forall i \neq j g_j^n \neq h g_i^m h^{-1}$ (las palabras son distintas). Sin embargo, todos los elementos g_i tienen la misma longitud de translación, ya que todos los ejes se obtienen a partir del eje de g_1 y las homotecias $z \rightarrow 2z^n$.

Concluimos el capítulo mostrando una prueba alternativa a las segunda parte del Teorema 2.0.8. Tomemos $v_1, v_2, v_3, \dots, v_8$ puntos en $\partial\Delta$, y las geodésicas $[v_1, v_8], [v_2, v_3], [v_4, v_5], [v_6, v_7]$ y transformaciones f y g hiperbólicas que aparean $[v_2, v_3]$ con $[v_7, v_6]$ y $[v_4, v_5]$ con $[v_1, v_8]$, respectivamente. Si P es el polígono con vértices $v_1, v_2, v_3, \dots, v_8$, se puede probar usando el Teorema de Poncaré que el grupo G generado por f y g es discreto y P es un polígono fundamental convexo para éste cf. [1] pp. 242-251.

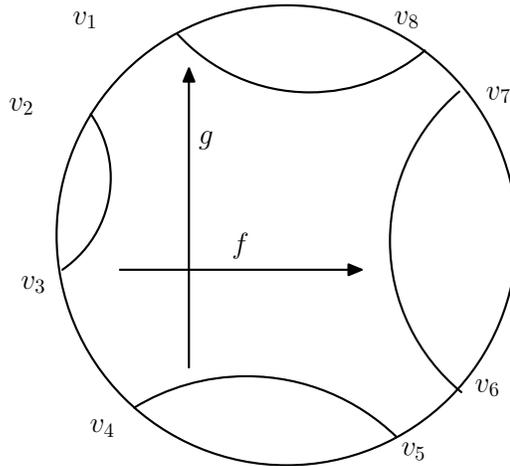


Figura 2.7: Polígono fundamental convexo con lados libres

Como en el Teorema 2.0.8, los ejes de f y g cruzan P , así que son primitivos, y f y g son simples ya que aparean lado de un polígono fundamental convexo. Tomemos una línea diagonal que una un punto interior w_1 de el lado libre determinado por v_3, v_4 con w_2 otro punto interior del lado libre determinado por v_7, v_8 véase la Figura 2.8.

Consideramos ahora P' el polígono con vértices $w_1, w_2, fg(v_4), fg(v_5), f(w_1), f(w_2), v_4$ y v_5 y lados $[w_1, w_2], [fg(v_4), fg(v_5)], [f(w_1), f(w_2)], [v_4, v_5]$, nótese que f y fg aparean los lados del polígono, véase la Figura 2.8. De nuevo usando el Teorema de Poincaré, el grupo generado por f y fg , que también es G , tiene polígono fundamental convexo P' , y fg resulta ser simple primitivo.

Iterando el proceso obtenemos una sucesión f, fg, f^2g, f^3g, \dots de elementos

hiperbólicos simples primitivos. Argumentando de manera análoga al Teorema 2.0.8 hay una infinidad de elementos en la sucesión no conjugados véase la Figura 2.4.

□

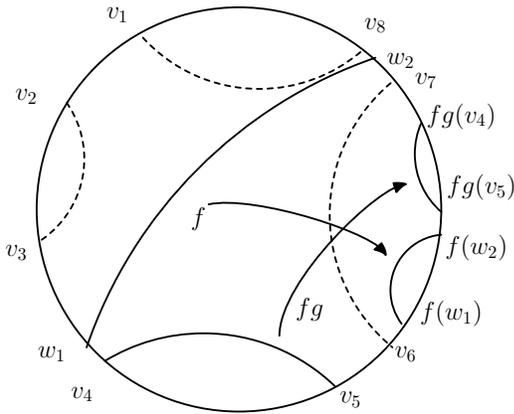


Figura 2.8: Prueba alternativa de la segunda parte del Teorema 2.0.8

Capítulo 3

La signatura de un grupo fuchsiano

Como ya se mencionó, dado G un grupo fuchsiano finitamente generado no elemental, se puede construir un polígono de Dirichlet D para G con un número finito de lados cf. [1] p. 254. Este polígono al tener un número finito de lados tiene una cantidad finita de vértices parabólicos y de lados libres. Se puede probar que al identificar los lados de \tilde{D} se obtiene una superficie de Riemann. Véase [1] cap. 6. Más aún, si se considera

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H}^2 \cup \{\text{puntos fijos parabólicos}\},$$

se puede dar una topología en \mathbb{H}^* tomando los abiertos usuales en \mathbb{H}^2 y considerando los horodiscos basados en los puntos fijos parabólicos como sus vecindades. De esta manera, si G es un grupo fuchsiano finitamente generado del primer tipo \mathbb{H}^*/G resulta ser una superficie de Riemann compacta, véase [5] y [7]. Intuitivamente lo que se está haciendo es compactificando la superficie al pegarle un punto por cada clase parabólica, es decir, cerrando las cúspides o puntos que estos representan. Por ejemplo, el grupo modular tiene una cúspide en ∞ con esta topología el cociente es compacto.

Por otra parte, en el caso general (primer o segundo tipo), al identificar los lados libres se forma en el cociente un número finito de círculos al infinito que se pueden “tapar” con discos y obtener una superficie compacta. Para entender esto con más claridad mostramos un ejemplo. Sean $f(z) = z + 6$ y $g(z) = \frac{z}{z+1}$.

Se puede probar que la región R descrita en la figura 3.2 es fundamental para el grupo $\langle g, f \rangle$ (cf. [1] p. 103), resulta que al aparear s_1 con s'_1 y luego g'_2 con g_2 bajo g^{-1} se forma un círculo al infinito representado por los segmentos en la recta real que unen -3 y -2 y el que une 2 y 3 que son lados libres. En este ejemplo hay una sola componente compacta en la superficie de Riemann al infinito formada por

lados libres, sin embargo pueden existir varias, aunque solo un número finito de ellas cf. [1] Teorema 10.1.2. A partir de ahora trabajaremos principalmente en el modelo del disco de Poincaré Δ , G un grupo fuchsiano finitamente generado y D un polígono fundamental localmente finito para la acción de G , esto es, una región fundamental convexa con la propiedad de que cualquier compacto en Δ , interseca un número finito de imágenes de \tilde{D} . Usaremos el siguiente resultado importante.

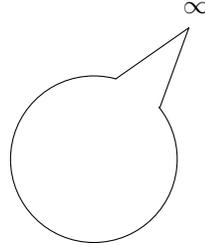


Figura 3.1: Cociente del grupo modular.

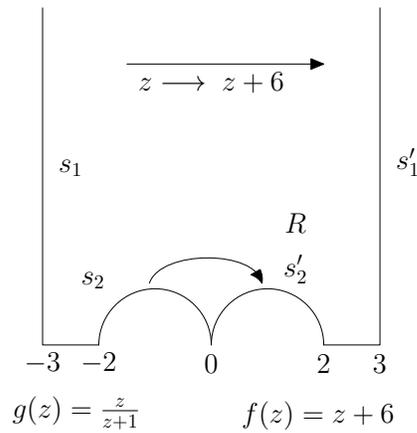


Figura 3.2: Región fundamental para el grupo generado por f y g .

Teorema 3.0.9 *Si D es localmente finito para un grupo fuchsiano G actuando en Δ , entonces Δ/G es homeomorfo a \tilde{D}/G .*

Una prueba se puede consultar en [1] pp. 208-209. Por lo cual el género de la superficie que obtenemos no depende de la elección de D . Sea G un grupo fuchsiano del segundo tipo, $\partial\Delta$ resulta ser la unión ajena del conjunto límite con una

unión numerable de intervalos de discontinuidad. Denotamos al punto inicial de cada uno de estos intervalos, por a_j y el punto final por b_j . También escribiremos γ_j la geodésica $[a_j, b_j]$, la cual divide a Δ en dos semiplanos, llamemos H_j al semiplano que no contiene al intervalo de discontinuidad, se define la región de Nielsen como

$$N = \bigcap_{j=0}^{\infty} H_j$$

El conjunto ordinario es invariante, cada lado libre de D yace en un intervalo de discontinuidad, como el número de lados del polígono es finito, al ir apareando los lados, se sigue que después de un número finito de pasos, la imagen de un lado libre cae en el mismo intervalo de discontinuidad, por lo que existe un elemento hiperbólico de frontera que fija dicho intervalo. En el ejemplo anterior

$$G = \left\langle z \rightarrow z + 6, z \rightarrow \frac{z}{z+1} \right\rangle$$

la transformación $g^{-1}f$ es hiperbólica de frontera y deja invariante el intervalo de discontinuidad que contiene al intervalo $[-3, -2]$. Véase la Figura 3.2.

Volviendo al caso general sea I cualquier intervalo de discontinuidad, alguna imagen de un lado libre de D está en I , tomamos un punto w en el intervalo y un punto u en Δ , existe $g \in G$ tal que $g(u) \in D$, el segmento $[g(u), g(w)]$ interseca a una cantidad finita de imágenes de \tilde{D} , ya que $g(w)$ es un punto ordinario y el diámetro euclidiano de las imágenes del polígono tiende a cero, cf. [1] p. 219. Se puede entonces encontrar una imagen de \tilde{D} digamos $h(\tilde{D})$ y un segmento de geodésica totalmente contenido en ella que termine en un punto ordinario que es $g(w)$, que en este caso es de la forma $h(w')$, donde w' está en un lado libre de la frontera euclidiana de D . Se puede repetir el proceso anterior para el polígono $h^{-1}g(\tilde{D})$ y conjugar. En consecuencia cualquier intervalo de discontinuidad es fijado por una transformación hiperbólica de frontera.

Tomando la imagen del polígono \tilde{D} repetimos el argumento anterior, de esta manera notamos que la frontera de N en Δ consiste en los ejes de todos los elementos hiperbólicos de frontera de G . Sea A_i uno de estos ejes con estabilizador generado por h_i y sea H_i , la componente cerrada de $\Delta - A_i$ que no contiene a N . Por conexidad H_i es estable bajo $\langle h_i \rangle$. Resulta que la proyección de H_i en Δ/G es homeomorfa a $H_i/\langle h_i \rangle$. Esto se sigue del siguiente resultado cuya prueba se puede consultar en [1] p. 123.

Teorema 3.0.10 *Supóngase que G actúa discontinuamente en D y que D_0 es estable con estabilizador G_0 . Si se cumple una de las siguientes condiciones*

- a) D_0 es abierto en D ,
- b) D_0/G_0 es compacto,

se concluye que D_0/G_0 (con la topología cociente) y $\pi(D_0)$ (con la topología de subespacio) son homeomorfos, donde $\pi: \Delta \rightarrow \Delta/G$ es la proyección en la superficie de Riemann.

Se afirma que $H_i / \langle h_i \rangle$ es homeomorfo a un cilindro. Para esto sea $z \in A$ el eje de h , y sin pérdida de generalidad supongamos que el eje de h es el eje imaginario positivo y que la recta real positiva sus puntos ordinarios. Se puede tomar una geodésica ℓ con centro euclidiano en el origen y que corte el eje imaginario en z . Entonces al considerar la región comprendida en el primer cuadrante entre ℓ y $h(\ell)$ es una región fundamental para la acción de h en $\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq 0 \}$. Por construcción se sigue entonces que al identificar ℓ y $h(\ell)$ se obtiene un cilindro cuya tapa es un lazo simple. Véase La Figura 3.3

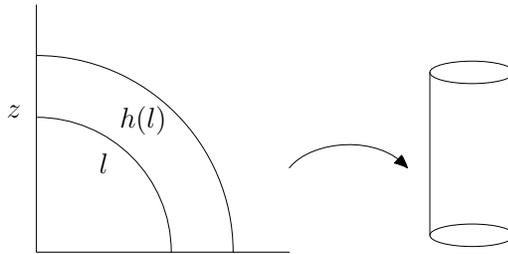


Figura 3.3: Cociente $H_i / \langle h_i \rangle$.

Además, ninguna imagen de A puede cruzar A , debido a que los puntos finales de A están en la frontera de un intervalo de discontinuidad. Más aún, no hay elementos elípticos de orden dos que estabilicen A , ya que el conjunto ordinario es invariante, esto implicaría que el conjunto límite solo tiene dos puntos, sin embargo G es no elemental.

Sea π la proyección natural de Δ en Δ/G , podemos ver que $\pi(\Delta)$ es la unión ajena de $\pi(N)$, los lazos simples $\pi(A)$, (donde A son los ejes hiperbólicos de frontera) y los cilindros de la forma $\pi(H_A)$. Nótese que los cilindros $\pi(H_A)$ se unen con $\pi(N)$ en la frontera común que son los lazos $\pi(A)$, el número de ellos es por supuesto el mismo. Más aún, hay el mismo número de cilindros $\pi(H)$ que de clases conjugadas hiperbólicas de frontera ciclicas maximales. Es también

claro que se pueden hacer retratos en cada lazo $\pi(A)$ y concluir que *los tres espacios* Δ/G , \tilde{D}/G , N/G *son homeomorfos entre si*. Además, G contiene solo un número finito, digamos s , de clases conjugadas de subgrupos cíclicos parabólicos maximales y cada uno corresponde a una cúspide en la superficie (considérese horodiscos suficientemente pequeños basados en un ciclo parabólico en \tilde{D} cf. Teorema 3.0.10 y [5]). Finalmente, G contiene un número finito, r , de clases conjugadas de subgrupos cíclicos elípticos maximales: sean m_1, m_2, \dots, m_r los órdenes de éstos respectivamente.

Definición 4 *El simbolo* $(g : m_1, m_2, \dots, m_r; s; t)$ *es llamado la signatura de* G : *cada parámetro es un entero mayor o igual a cero y* $m_j \geq 2$, *donde* g *es el género de la superficie* Δ/G , *los* m_j *son los ordenes de los subgrupos cíclicos elípticos maximales, r el número de estos subgrupos, s el número de clases conjugadas parabólicas y* t *el número de clases hiperbólicas maximales de frontera. Si no hay elementos elípticos en* G , *simplemente escribimos* $(g : 0; s; t)$

Teorema 3.0.11 *Existe un grupo fuchsiano finitamente generado no elemental con signatura* $(g : m_1, m_2, \dots, m_r; s; t)$ *y* $m_j \geq 2$ *si y sólo si*

$$2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) > 0$$

Antes de la prueba de este teorema enunciaremos algunos resultados.

Recordemos que $N/G \cong \Delta/G$ y $h - \text{área}(D) = h - \text{área}(\Delta/G)$, donde D es un polígono de Dirichlet para G cf. [1] p. 250.

Teorema 3.0.12 *Sea* G *un grupo fuchsiano finitamente generado no elemental con signatura* $(g : m_1, m_2, \dots, m_r; s; t)$ *y región de Nielsen* N . *Entonces*

$$h - \text{área}(N/G) = 2\pi \left\{ 2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \right\}.$$

Si G es además del primer tipo, entonces $N = \Delta$ y $t = 0$. Por lo cual se obtiene una fórmula para el área de cualquier polígono fundamental convexo de G .

Corolario 3.0.13 *Sea* G *un grupo fuchsiano finitamente generado del primer tipo con signatura* $(g : m_1, m_2, \dots, m_r; s; 0)$ *entonces para cualquier polígono fundamental convexo* P *de* G

$$h - \text{área}(P) = 2\pi \left[2g - 2 + s + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \right].$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.0.12

Sea D un polígono de Dirichlet para G con centro en w , se tiene

$$h - \text{área}(D \cap N) = h - \text{área}(N/G),$$

ya que $D \cap N$ es un dominio fundamental para la acción de G restringida a N .

Se puede elegir w adecuadamente y suponer que todo ciclo parabólico y elíptico en ∂D tiene longitud 1 cf. [1] Teorema 9.4.5. Los ciclos elípticos no están en los ejes hiperbólicos de frontera, esto se sigue por la invariabilidad de N , ya que G es no elemental. Se puede suponer también que los ciclos accidentales tienen longitud 3 cf. [1] Teorema 9.4.5. De esta manera la suma de los ángulos internos de estos ciclos es 2π .

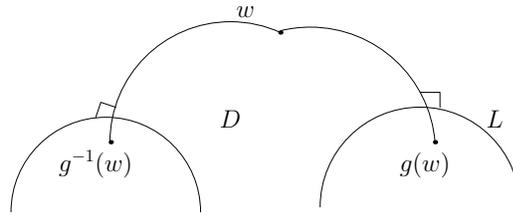


Figura 3.4: Los lados del polígono no están totalmente contenidos en los ejes.

Se puede suponer también que ningún lado de D está contenido en ∂N , basta con tomar w fuera de los bisectores determinados por las parejas de los ejes hiperbólicos de frontera, los cuales son una cantidad numerable, cf [1] p. 166.

Para probar esto supóngase que existe un lado del polígono que está contenido totalmente en un eje hiperbólico de frontera L , como el polígono es de Dirichlet, el eje resulta ser un bisector entre w y $g(w)$, para alguna $g \in G$. Sabemos también que

$$\rho(w, L) = \frac{1}{2}\rho(w, g(w)).$$

Por otro lado, la imagen inversa de L bajo g es también un eje hiperbólico de frontera, y además contiene otro lado de D . Mas aún, la imagen inversa bajo g de la geodésica ortogonal a L que une w y $g(w)$ resulta ser la geodésica que une a w y $g^{-1}(w)$ y es ortogonal a $g^{-1}(L)$. Como g es una isometría, se tiene

$$\rho(w, g(w)) = \rho(w, g^{-1}(w)),$$

y como la distancia de w a $g^{-1}(L)$ es un medio de esta distancia, dado que $g^{-1}(L)$ es el bisector entre w y $g^{-1}(w)$, esto implica que w está a la misma distancia de

L y de $g^{-1}(L)$, así que w está en uno de los biesectores definidos por ∂N , véase la Figura 3.4.

Ahora, solamente un número finito de imágenes distintas de un eje hiperbólico puede intersecar la cerradura de un dominio fundamental localmente finito.

Para probar esto, si L es un eje hiperbólico de frontera, la frontera de N consiste de la colección $g_n(L)$, $g_n \in G$. Hay que probar que

$$g_n(L) \cap \tilde{D} \neq \emptyset. \quad (3.1)$$

Solamente para un número finito de transformaciones.

En caso contrario si (3.1) no sucede, se toma un arco compacto *fundamental* K para la acción de la transformación hiperbólica de frontera primitiva que fija L , que denotamos por h .

Para cada g_n tal que

$$g_n(L) \cap \tilde{D} \neq \emptyset,$$

esto es,

$$L \cap g_n^{-1}(\tilde{D}) \neq \emptyset,$$

se puede ajustar esta intersección para que la imagen de \tilde{D} interseque a K , es decir, existe $l_n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$K \cap h^{l_n} g_n^{-1}(\tilde{D}) \neq \emptyset.$$

Como esto sucede solamente para un número finito de transformaciones de la forma $h^{l_n} g_n^{-1}$, necesariamente si $g_n(L) \cap D \neq \emptyset$, esta colección de g_n , es finita.

Esto se sigue ya que si

$$h^{l_n} g_n^{-1} = h^{l_m} g_m^{-1}$$

entonces

$$g_n(L) = g_m(L).$$

Por otra parte, posiblemente existen ciclos accidentales de D en la frontera de la región de Nielsen. Por la invariabilidad de N y el hecho de que la suma de los ángulos interiores sea 2π , necesariamente los vértices del ciclo, que denotamos por z_1, z_2, z_3 , aparecen como en la Figura 3.5.

Nombremos k_1 el número de lados de $D \cap N$ contenidos en la frontera de Nielsen que inician en algún vértice accidental (nótese que aparece un lado por cada ciclo accidental de este tipo), k_2 el número de lados de $D \cap N$ en ∂N , que o bien terminan en un vértice accidental de este tipo, o bien lados no apareados en D que no inician ni terminan en un vértice accidental de este tipo.

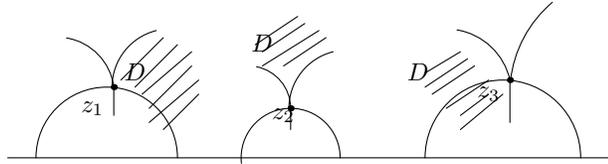


Figura 3.5: Único caso en el que puede existir un ciclo accidental en la frontera de la región de Nielsen

Como N está acotado por ejes hiperbólicos de frontera, y G es finitamente generado, solamente una cantidad finita de lados de N intersecan a D .

Por consiguiente, $D \cap N$ es un polígono con un número finito de lados. Juntando esta información y orientando positivamente a $\partial(D \cap N)$. La frontera de $D \cap N$ consiste en: $2n$ lados apareados (los cuales son arcos de lados apareados de D), $k_1 + k_2$ lados no apareados que están en $\partial N \cap \tilde{D}$, donde k_1 corresponde a lados no apareados que inician en un vértice accidental que está en ∂N y k_2 corresponde a los lados no apareados que están en D , o aquéllos que terminan en un vértice accidental en $\tilde{D} \cap \partial N$.

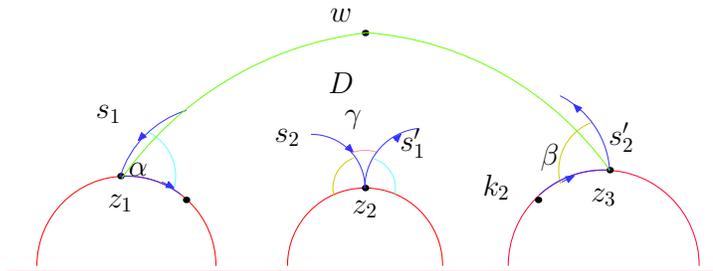


Figura 3.6: Posible ciclo accidental en la frontera de la región de Nielsen

Los vértices de $D \cap N$ son los r ciclos elípticos de longitud 1, algunos ciclos accidentales que no están en la frontera de N digamos a , los s parabólicos de longitud 1, y $k_1 + k_2$ ciclos en ∂N (ver figura 3.6). Nótese que el número k_1 corresponde al número de ciclos accidentales que aparecen en ∂N y k_2 al número de ciclos de vértices de longitud 2 que aparecen en $\partial N \cap D$, cada lado que contribuye al parámetro k_2 inicia con algún vértice en ∂N no accidental, el cual debe estar apareado con algún otro vértice donde termina un lado del tipo k_2 . Nótese que en los lados no apareados, los vértices terminales no pueden ser vértices accidentales

pues en este caso pertenecería a un ciclo como el de la Figura 3.5 y el polígono no sería convexo.

Aplicamos ahora la fórmula de Euler (veáse [8] p. 101) esto es, identificando lados y vértices, obteniendo

$$2 - 2g = (s + r + a + k_1 + k_2) - (n + k_1 + k_2) + (1 + t), \quad (3.2)$$

donde g es el género de la superficie de Riemann compactificada al “rellenar hoyos”, esto es las cúspides y los definidos pos las clases de las transformaciones hiperbólicas de frontera. Nótese que el número de lados identificados es $n + k_1 + k_2$, existe solamente una 2-celda pero al “rellenar hoyos” se tienen que sumar t una por cada clase hiperbólica de frontera, ya que los arcos de los elementos hiperbólicos de frontera encierran *discos*, es decir, las partes de la superficie donde la métrica tiende a infinito. Asimismo y el número de vértices identificados es $s + r + a$, por las clases parabólicas, elípticas y accidentales de vértices que no están en ∂N , además de k_1 por cada vértice accidental en la frontera de la región de Nielsen y el parámetro k_2 que surge al contar los vértices finales de los lados tipo k_2 . Obsérvese que en este conteo aparecen todos los ciclos.

En consecuencia, se sigue de (3.2) que

$$n - a = 2g + s + r + t - 1. \quad (3.3)$$

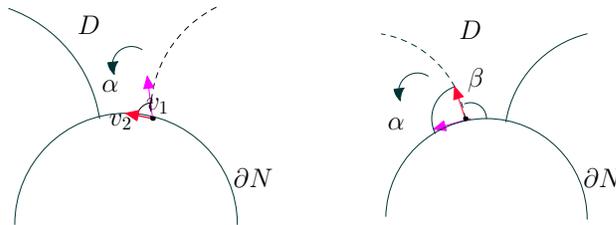


Figura 3.7: Como las transformaciones en G preservan la orientación los vértices terminales van en vértices iniciales en ∂N .

Por otro lado, si unimos w con cada vértice de $D \cap N$, se divide $D \cap N$ en

$2n+k_1+k_2$ triángulos y se obtiene sumando área de triángulos cf. [1] pp. 150-151.

$$\begin{aligned} h - \text{área}(D \cap N) &= (2n + k_1 + k_2)\pi - 2\pi - 2\pi a - \pi k_1 - \pi k_2 - \sum_{j=1}^r \frac{2\pi}{m_j} \\ &= 2\pi \left[n - a - 1 - \sum_{j=1}^r \frac{1}{m_j} \right] \end{aligned}$$

Esto se sigue ya que en los ciclos accidentales en ∂N la suma de los ángulos es π , véase la Figura 3.6 ($\alpha + \beta + \gamma = \pi$), y los otros vértices en ∂N que se aparean dos a dos, por conformalidad y la invariabilidad de N la suma también es π (véase la Figura 3.7). El término 2π consiste de la suma de los ángulos alrededor de w .

Finalmente, sustituyendo en esta ecuación (3.3) se tiene el resultado, esto es

$$h - \text{área}(D \cap N) = 2\pi \left[2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \right]$$

□

Dado que en la fórmula del Teorema 3.0.12, los términos

$$1 - \frac{1}{m_j} \geq \frac{1}{2} \quad \forall m_j.$$

Se observa que el $h - \text{área}(N/G)$ debe tener una cota inferior positiva válida para todos los grupos. Escribimos:

$$A = (1/2\pi) h - \text{área}(N/G),$$

y para encontrar esta cota inferior, asumiremos provisionalmente que

$$A < \frac{1}{6}. \quad (3.4)$$

Este es un número conveniente para el siguiente análisis y pronto veremos que efectivamente hay grupos para los cuales $A < \frac{1}{6}$.

Se tiene entonces que

$$A = 2g - 2 + s + t + \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right). \quad (3.5)$$

Si $r = 0$ o $m_j = 2 \forall j \in [1, 2, \dots, r]$, entonces $A = n/2$ para algún entero n . Como $A > 0$ se tiene que $A \geq \frac{1}{2}$.

Supóngase que $r > 0$ y que algún m_j es al menos tres, se tiene entonces que si se cumple (3.4)

$$\begin{aligned} 1 &> 6A \\ &\geq 6 \left[2g - 2 + s + t + \left(\frac{r-1}{2} + \frac{2}{3} \right) \right] \\ &= 12g - 12 + 6s + 6t + 3(r-1) + 4 \\ &= 12g - 11 + 6s + 6t + 3r. \end{aligned}$$

Esto se cumple si y sólo si

$$12 > 12g + 6s + 6t + 3r,$$

es decir

$$4 > 4g + 2s + 2t + r. \quad (3.6)$$

Por otra parte como $A > 0$, usando (3.5) y (3.6) se tiene que

$$\begin{aligned} 2 < A + 2 &= 2g + s + t + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) \\ &\leq 2g + s + t + r \\ &\leq 4g + 2s + 2t + r \\ &< 4. \end{aligned}$$

Por consiguiente, ya que $2g + s + t + r$ y $4g + 2s + 2t + r$ son enteros que están entre 2 y 4, se sigue que

$$2g + s + t + r = 4g + 2s + 2t + r.$$

De manera que si $A < \frac{1}{6}$, necesariamente $g = s = t = 0$, y $r = 3$. Se concluye entonces que

$$A = 1 - \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right).$$

Además $A > 0$. Ahora, si cada m_j es al menos 3, alguno debe ser mayor o igual a 4, sin pérdida de generalidad $m_1, m_2 \geq 3$ y $m_3 \geq 4$.

Por lo que

$$-\frac{1}{m_1} \geq -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{m_2} \geq -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{m_3} \geq -\frac{1}{4}$$

y

$$A \geq 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \geq \frac{1}{12}$$

En caso de que algún m_j , digamos m_1 sea igual a 2 se tiene que

$$A = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right) > 0.$$

En este caso, si $m_2 \geq 4$, $m_3 \geq 4$ alguno de los dos debe ser mayor o igual que 5 para que el área siga siendo mayor que cero, por lo que

$$A \geq \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{2} - \frac{9}{20} = \frac{1}{20}.$$

Finalmente si $m_1 = 2$ y $m_2 = 3$ entonces

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{m_3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{m_3},$$

y necesariamente $m_3 \geq 7$.

Obteniéndose $A \geq \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$. La igualdad se alcanza cuando G tiene signatura $(0 : 2, 3, 7; 0; 0)$, Este grupo llamado triangular, en efecto existe, cf. [1] pp 276-280, véase la Figura 3.8. Hemos probado el siguiente resultado

Teorema 3.0.14 *Sea G un grupo fuchsiano no elemental finitamente generado, con región de Nielsen N , entonces*

$$h - \text{área}(N/G) \geq \frac{\pi}{21},$$

y dicha cota se alcanza por el grupo triangular $(2,3,7)$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.0.11

El Teorema 3.0.12 muestra que si G es un grupo fuchsiano finitamente generado no elemental con signatura $(g : m_1, m_2, \dots, m_r; s; t)$ y $m_j \geq 2$ entonces

$$2g - 2 + s + t + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j} \right) > 0. \quad (3.7)$$

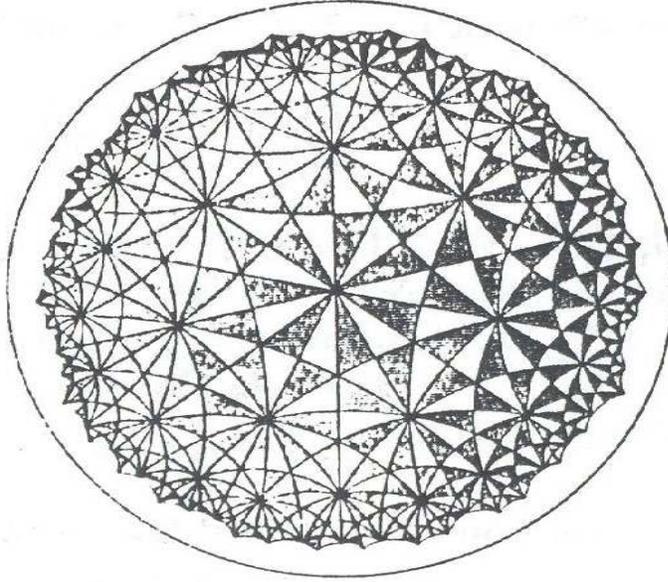


Figura 3.8: Grupo triangular (2,3,7)

Por lo que basta probar la segunda parte. $\forall d \geq 0$ se toman $4g + r + s + t$ puntos z_j igualmente espaciados en el círculo $\rho(z, 0) = d$. Los arcos $z_j z_{j+1}$ subtienen un ángulo de 2θ en el origen, por lo que

$$\theta = \frac{2\pi}{8g + 2r + 2s + 2t}. \quad (3.8)$$

Con los primeros cuatro de estos arcos se construye una configuración con las transformaciones h_j ilustradas en la Figura 3.9.

Nótese que los puntos z_1, z_2, \dots, z_5 son todos equivalentes bajo $h_1, h_2, h_1^{-1}, h_2^{-1}$. Esta construcción se repite $g - 1$ veces empezando en z_5 y continuando en este orden. Esto conlleva $4g$ arcos $z_j z_{j+1}$, un ángulo $8g\theta$ en el origen y transformaciones h_1, h_2, \dots, h_{2g} . Usando los siguientes r arcos $z_j z_{j+1}$, se construyen configuraciones con transformaciones e_j como se ilustra en la Figura 3.10 (recuérdese que los enteros m_j son mayores o iguales que 2).

Siempre se puede encontrar este ángulo, usando el producto inversivo se puede mostrar formalmente la existencia de dicho ángulo cf. [1] p. 29.

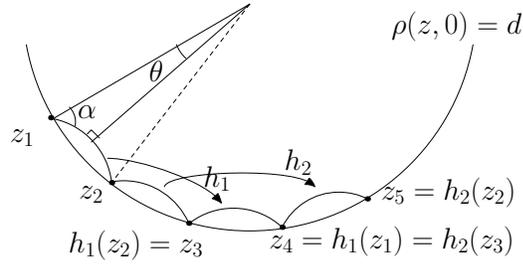


Figura 3.9: Los vértices son equivalentes.

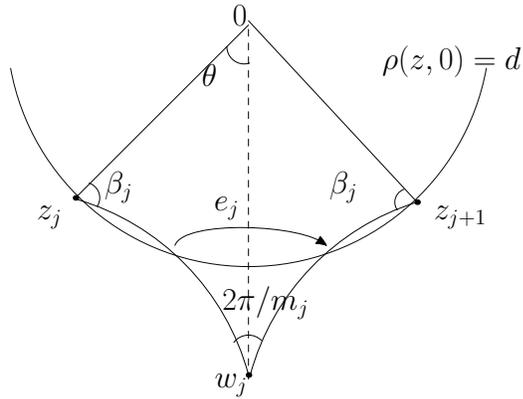


Figura 3.10: e_j es una transformación elíptica de orden m_j .

Las transformaciones e_j son elípticas de orden m_j , que fijan w_j $j = 1, 2, \dots, r$. Esta parte de la construcción conlleva otra medida angular de $2r\theta$ en el origen. Después se repite la construcción s veces ahora con las w_j en $\partial\Delta$, las transformaciones correspondientes p_j son parabólicas (véase la Figura 3.12).

Restan t arcos, cada uno subtiende un ángulo de 2θ en el origen. En cada uno de estos arcos se construyen configuraciones y transformaciones hiperbólicas b_j como en la Figura 3.13, donde

$$\theta_1 = \left(\frac{1+d}{1+2d} \right) \theta. \tag{3.9}$$

Se ha construido un polígono con vértices z_j, u_j, v_j, w_j con apareamientos dados por h_j, e_j, p_j y b_j .

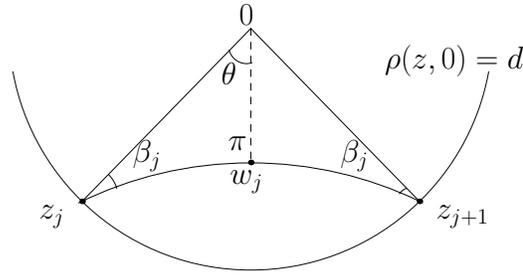


Figura 3.11: Caso elíptico si $m_j = 2$.

El grupo G generado por estos apareamientos puede ser discreto o no serlo, pero en todos los casos, los puntos z_1, z_2, \dots están en la misma órbita. Más aún, la suma de los ángulos subtendidos en estos z_j es

$$8g\alpha + 2(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{r+s+t}),$$

a este número lo denotamos por $\phi(d)$, es decir, es una función que depende de d .

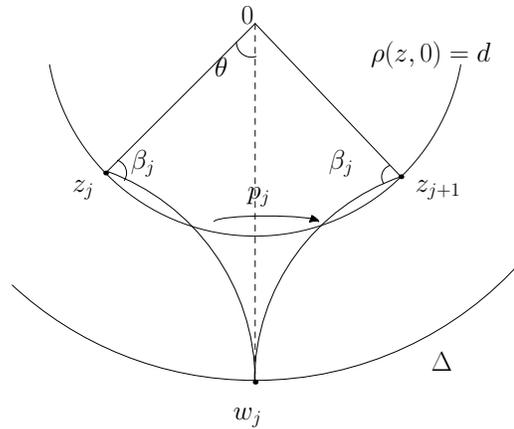


Figura 3.12: Vértices parabólicos w_j en la prueba del Teorema 3.0.11.

Se mostrará que para alguna elección de d , $\phi(d) = 2\pi$. Aplicando un argumento de continuidad.

En consecuencia usando el Teorema de Poincaré, el grupo G es discreto y el polígono construido es un polígono fundamental para G . Por último, se verificará que G tiene signatura $(g : m_1, m_2 \dots m_r; s; t)$.

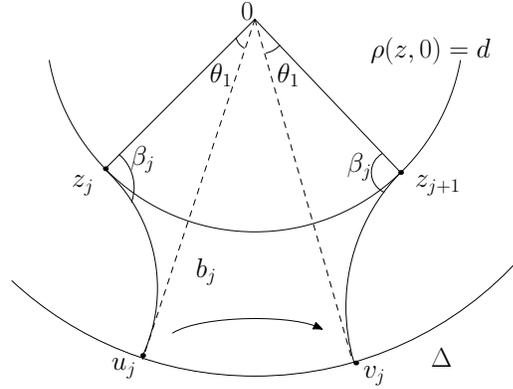


Figura 3.13: Apareamientos hiperbólicos de frontera en la prueba del Teorema 3.0.11.

Nótese que $0 < \theta \leq \pi/3$, ya que si

$$g \neq 0$$

entonces

$$8g + 2r + 2s + 2t \geq 8$$

en caso de que g sea igual a cero se sigue de (3.7) que

$$s + t + r > 2,$$

debido a que estos valores son enteros la desigualdad se convierte en

$$s + t + r \geq 3,$$

de donde se obtiene

$$2s + 2t + 2r \geq 6,$$

y por (3.8) se tiene que $\theta \leq \pi/3$.

Usando la Figura 3.9 y propiedades de la trigonometría de triángulos rectángulos se tiene la siguiente igualdad.

$$\cosh d = \cot \theta \cot \alpha. \quad (3.10)$$

Cf. [1] p. 147 Teorema 7.11.3. Despejando se tiene que

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{\cot \theta}{\cosh d} \right), \quad (3.11)$$

así que el ángulo α depende continuamente del parámetro d , ya que θ es constante, más aún $0 < \alpha < \pi/2$. Por otra parte en la Figura 3.10 usando la ley de cosenos cf. [1] p. 148, se obtiene

$$\cosh d = \frac{\cos \theta \cos \beta_j + \cos(\pi/m_j)}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta_j} \quad (3.12)$$

Nótese que si $m_j = 2$ ésta es la misma fórmula que (3.10). Para los otros vértices que se encuentran en la frontera existe una expresión similar, se puede aplicar un resultado análogo (cf. [1] p. 146 Teorema 7.10.1) y obtener

$$\cosh d = \frac{\cos \theta \cos \beta_j + 1}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta_j}, \quad (3.13)$$

véase la Figura 3.12. Este mismo resultado ([1] p. 146) implica que en la Figura 3.13 se cumple la siguiente expresión

$$\cosh d = \frac{\cos \theta_1 \cos \beta_j + 1}{\operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \beta_j}. \quad (3.14)$$

Ahora, si $d \rightarrow 0$, usando (3.10) se tiene que

$$\alpha \rightarrow \pi/2 - \theta,$$

ya que si

$$1 = \cot \theta \cot \alpha$$

y θ es fijo, entonces

$$\tan \theta = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Y esto se cumple si $\alpha = \pi/2 - \theta$, ya que

$$\cos \alpha = \cos(\pi/2 - \theta) = -\operatorname{sen}(-\theta) = \operatorname{sen} \theta$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(\pi/2 - \theta) = \cos(-\theta) = \cos \theta.$$

Nótese que $\forall d$ se tiene que $\alpha < \frac{\pi}{2} - \theta$, ya que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es menor a π . Además como cotangente es biyectiva en $(0, \pi/2)$, se sigue que $\alpha \rightarrow \pi/2 - \theta$ si $d \rightarrow 0$.

Por otro lado se sigue de (3.12) que,

$$\cosh d \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta_j - \cos(\pi/m_j) = \cos \theta \cos \beta_j = \cos(\theta + \beta_j) + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta_j.$$

Por lo cual

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \beta_j) &= \cosh d \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta_j - \cos(\pi/m_j) - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta_j \\ &= \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta_j (\cosh d - 1) - \cos(\pi/m_j) \\ &= \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta_j (\cosh d - 1) + \cos(\pi - \pi/m_j),\end{aligned}$$

de manera que si $d \rightarrow 0$ entonces $\beta_j \rightarrow \pi - \frac{\pi}{m_j} - \theta$, ya que

$$\cos(\theta + \beta_j) \rightarrow \cos(\pi - \pi/m_j), \text{ y } 0 \leq \beta_j < \pi - \frac{\pi}{m_j} - \theta,$$

debido a que coseno es una función biyectiva en $(0, \pi)$. Véase la Figura 3.10.

Para los vértices parabólicos, haciendo operaciones análogas, se deduce que

$$\cos(\theta + \beta_j) = \sin \theta \sin \beta_j (\cosh d - 1) - 1$$

por lo cual si $d \rightarrow 0$, entonces $\cos(\theta + \beta_j) \rightarrow -1 = \cos \pi$. Además

$$0 < \theta + \beta_j \leq \pi,$$

y como la función coseno es biyectiva entre 0 y π se sigue que $\beta_j \rightarrow \pi - \theta$.

De igual manera, para las transformaciones hiperbólicas de frontera, usando (3.14) si $d \rightarrow 0$, en el límite se tiene

$$\cos(\theta + \beta_j) = -1$$

ya que $\theta_1 \rightarrow \theta$ (conforme a (3.9)). Se sigue de esto que si $d \rightarrow 0$, entonces $\theta_1 + \beta_j \rightarrow \pi$ por lo que $\beta_j \rightarrow \pi - \theta$. Véase la Figura 3.13.

Ahora si $d \rightarrow 0$, usando las observaciones previas, se tiene que como

$$\phi(d) = 8g\alpha + 2(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{r+s+t}),$$

entonces

$$\phi(d) \rightarrow 8g \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + 2 \left[\sum_{j=1}^r \left(\pi - \frac{\pi}{m_j} - \theta \right) + s(\pi - \theta) + t(\pi - \theta) \right]$$

Lo cual usando (3.8) es igual a

$$\begin{aligned}
& 4g\pi + 2\pi \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) + 2\pi s + 2\pi t - (8g + 2r + 2s + 2t)\theta \\
&= 2\pi \left[2g + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) + s + t \right] - 2\pi \left(\frac{8g + 2r + 2s + 2t}{8g + 2r + 2s + 2t} \right) \\
&= 2\pi \left[2g + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) + s + t - 1 \right] \\
&= 2\pi \left[2g - 2 + \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) + s + t \right] + 2\pi > 2\pi.
\end{aligned}$$

Resulta que $\phi(d)$ es una función continua, se mostró que α depende continuamente del parámetro d (véase (3.11)). Se prueba ahora que los ángulos β_j dependen también continuamente de d . Usando (3.12) al elevar ambos términos de la ecuación al cuadrado y sustituyendo $\sen^2 \beta_j$ por $1 - \cos^2 \beta_j$ se llega a una ecuación de segundo grado en términos de $\cos \beta_j$. Específicamente

$$\cos^2 h d = \left(\frac{k_1 \cos \beta_j + k_3}{k_2 \sen \beta_j} \right)^2 \quad (3.15)$$

donde $k_1 = \cos \theta$, $k_2 = \sen \theta$, y $k_3 = \cos(\pi/m_j)$. Se sigue entonces que

$$k_2^2 \cos^2 h d \sen^2 \beta_j = k_1^2 \cos^2 \beta_j + 2k_1 k_3 \cos \beta_j + k_3^2,$$

sustituyendo $\sen^2 \beta_j$ por $1 - \cos^2 \beta_j$ se tiene que

$$k_2^2 \cos^2 h d - k_2^2 \cos^2 h d \cos^2 \beta_j = k_1^2 \cos^2 \beta_j + 2k_1 k_3 \cos \beta_j + k_3^2$$

\Leftrightarrow

$$(k_1^2 + k_2^2 \cos h d) \cos^2 \beta_j + (2k_1 k_3) \cos \beta_j + k_3^2 - k_2^2 \cos^2 h d = 0$$

por lo que

$$\cos \beta_j = \frac{-k_1 k_3 \pm \sqrt{k_1^2 k_3^2 - (k_1^2 + k_2^2 \cos h d)(k_3^2 - k_2^2 \cos^2 h d)}}{k_1^2 + k_2^2 \cos h d}. \quad (3.16)$$

Existen dos soluciones para (3.15), una de ellas es

$$\cosh d = \frac{k_1 \cos \beta_j + k_3}{k_2 \sen \beta_j}$$

y la otra

$$-\cosh d = \frac{k_1 \cos \beta_j + k_3}{k_2 \operatorname{sen} \beta_j}.$$

Notemos que en (3.12) el signo de $\cosh d$ es el signo del numerador del miembro derecho, ya que $0 \leq \theta, \beta_j < \pi$. Retomando las soluciones de la ecuación cuadrática, una de ellas es siempre negativa, mientras que la otra puede ser positiva o negativa, esta solución es la correcta. Esto se sigue ya que la solución menor, es decir, *la más negativa* corresponde a

$$-\cosh d = \frac{\cos \theta \cos \beta_j + \cos(\pi/m_j)}{\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \beta_j}.$$

Debido a que se ha expresado $\cos \beta_j$ en términos de d y θ se tiene que β_j depende continuamente del parámetro d , análogamente de las ecuaciones (3.13) y (3.14) se llega a una expresión similar, en el primer caso, se toma $k_3 = 1$ y se sigue exactamente el mismo argumento. Finalmente, para los ángulos β_j correspondientes a apareamientos hiperbólicos, se tiene que tanto k_1 como k_2 son funciones continuas que dependen del parámetro d , recuérdese que θ_1 aparece en la expresión, pero este parámetro, como se puede ver en (3.9), depende continuamente de d , por lo que en (3.16) el argumento también es válido.

Otra manera de probar la continuidad es con el producto inversivo, nótese que si se aumenta un poco d , el β_j correspondiente cambia poco. Se puede conjugar de tal manera que el ángulo θ corresponda a un ángulo entre el eje imaginario y una geodésica que lo corte, se toman todas las geodésicas que formen un ángulo π/m_j con el eje imaginario, se puede observar que todas estas rectas se obtienen a partir de homotecias, por lo que el ángulo β_j depende continuamente del parámetro d (véase [1] pp. 28, 29 y las Figuras 3.14 y 3.15).

Por otra parte si $d \rightarrow \infty$ se sigue de (3.10) que

$$\cot \theta \cot \alpha \rightarrow \infty$$

como θ es constante $\cot \alpha$ debe tender a infinito, de donde se sigue que $\alpha \rightarrow 0$.

En la ecuación (3.12), si d tiende a infinito ambos miembros de la ecuación tienden a infinito, como el numerador en el segundo miembro está acotado y θ es constante, entonces $\operatorname{sen} \beta_j$ tiende a cero por lo cual β_j tiende a cero.

De manera análoga en (3.13) y en (3.14), $\cosh d \rightarrow \infty$ si $d \rightarrow \infty$, por lo cual el segundo miembro en ambas ecuaciones tiende a infinito y como el numerador está acotado, se sigue que el denominador en ambas expresiones tiende a

infinito (recuérdese que si $d \rightarrow \infty$ entonces $\theta_1 \rightarrow \theta/2$), así que el denominador tiende a cero y entonces β_j tiende a cero.

Estas observaciones implican que si

$$d \rightarrow \infty$$

entonces

$$\phi(d) \rightarrow 0,$$

por continuidad existe d tal que $\phi(d) = 2\pi$, recuérdese que $\phi(d)$ es la suma de los ángulos interiores en el ciclo accidental, el cual es único en nuestro polígono, y dado que la suma de los ángulos interiores del vértice accidental es 2π se cumple la hipótesis del Teorema de Poincaré y el grupo G es discreto.

Ahora, G tiene r transformaciones elípticas de órdenes m_1, m_2, \dots, m_r , también s parabólicas y t hiperbólicas de frontera que representan todas las clases conjugadas distintas. Esto se sigue, esencialmente, ya que aparean lados adyacentes de un polígono fundamental cf. [1] sección 9.3 y las observaciones sobre las transformaciones hiperbólicas que se mencionan antes del Teorema 3.0.12. Finalmente, si Δ/G tiene género g^* , por la fórmula de Euler aplicada a la superficie obtenida se obtiene.

$$2 - 2g^* = (1 + r) - (2g + r + s + t) + 1 + (s + t)$$

donde $1 + r$ son las clases de los vértices, $2g + r + s + t$ son los lados apareados y $s + t$ son los hoyos que "tapamos", así que $g = g^*$ y hemos concluido la prueba.

□

A continuación se discute la geometría alrededor de los vértices parabólicos de un grupo Fuchsiano no elemental, en el mismo sentido del inicio del capítulo, en el cual se definió la signatura.

Dado G un grupo discreto no elemental con transformaciones parabólicas, se define para cada $g \in G$ la región

$$\Sigma_g = \{ x \in \mathbb{H}^2 \mid \text{sen } h(1/2 \rho(x, g(x))) < 1/2 \}.$$

Se puede probar que $\forall h \in G, h(\Sigma_g) \cap \Sigma_g = \emptyset$, a menos que $h \in \langle g \rangle$, cf. [1] p. 110 Teorema 5.4.4. Este teorema se puede adaptar al caso fuchsiano.

Proposición 3.0.15 *Sea G un grupo fuchsiano no elemental y g un elemento parabólico que genera el estabilizador de su punto fijo v , entonces existe una región horocíclica K basada en v , tal que $\pi(K)$ es conformemente equivalente a un disco perforado en Δ/G .*

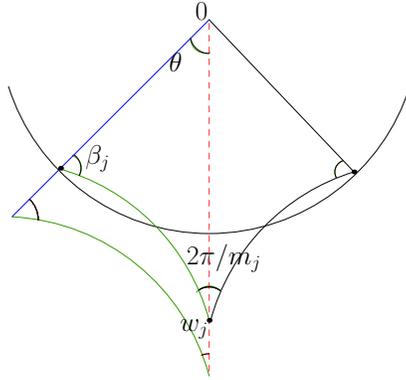


Figura 3.14: Los ángulos β_j dependen continuamente de d .

DEMOSTRACIÓN. Resulta que Σ_g es un horodisco basado en v . Usando la observación previa al teorema se sigue la existencia de una región horocíclica K estable bajo la acción de $\langle g \rangle$.

En virtud del Teorema 3.0.10 como Σ_g es abierto se concluye que el cociente

$$\Sigma_g / \langle g \rangle$$

es homeomorfo a $\pi(\Sigma_g)$, el cual es un disco perforado. Esto se puede probar fácilmente tomando un polígono de Dirichlet donde los ciclos parabólicos tengan longitud uno, véase la Figura 3.16.

□

A continuación se presenta un ejemplo. Sea P el cuadrilátero hiperbólico en \mathbb{H}^2 con vértices en $-1, 0, 1, \infty$ y G el grupo generado por

$$g(z) = z + 2, \quad \text{y} \quad h(z) = \frac{z}{2z + 1}.$$

Véase la Figura 3.17.

Nótese que h y g son elementos parabólicos, el círculo isométrico de h tiene centro en $-1/2$ y radio $1/2$, de igual manera el círculo isométrico de h^{-1} tiene centro en $1/2$ y radio $1/2$. Las transformaciones h y g aparean los lados del polígono y se cumple el Teorema de Poincaré, en consecuencia P es un polígono fundamental convexo para G . Ahora, si se separa el cuadrilátero en los triángulos $(\infty, -1, 0)$ y $(\infty, 0, 1)$, se observa que el h-área del polígono es 2π .

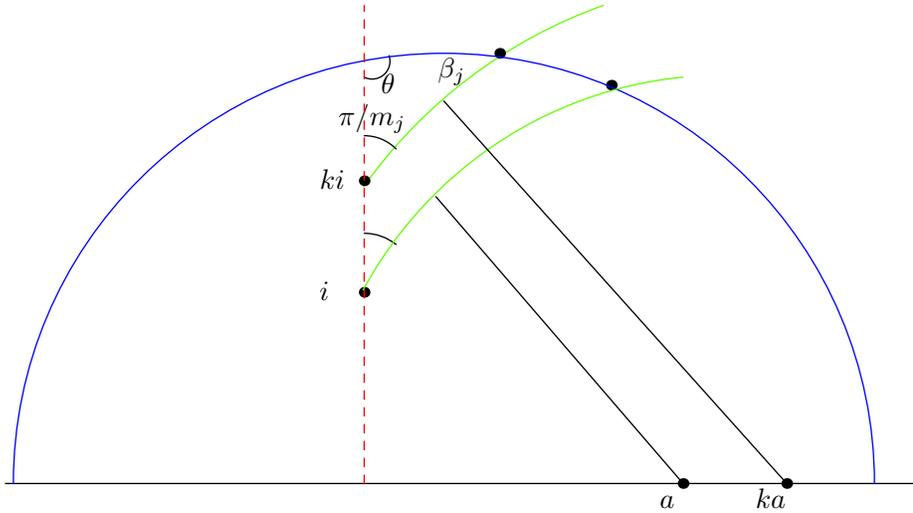


Figura 3.15: Detalle de la conjugación de los ángulos β_j .

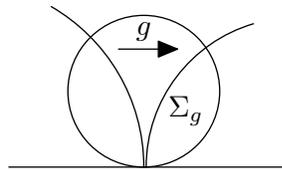


Figura 3.16: Horodisco usado en la prueba de la Proposición 3.0.15.

Por otra parte el área de la región fundamental para el grupo clásico modular $PSL(2, \mathbb{Z})$ descrita en la Figura 2.1 es $\pi - 2\pi/3 = \pi/3$, de modo que el índice de G en el grupo clásico modular es 6.

Se puede probar que este grupo G es precisamente

$$\Gamma(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\}$$

que es normal en $PSL(2, \mathbb{Z})$, en este sentido, este es un caso particular del Lema de Selberg, el cual dice que dado G un grupo finitamente generado de matrices de $n \times n$, entonces G tiene un subgrupo normal de índice finito sin torsión (véase [1] p. 10).

Concluimos esta tesis exhibiendo cotas superiores e inferiores para polígonos

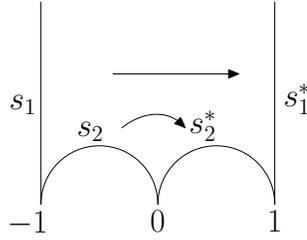


Figura 3.17: Los lados del polígono son apareados por g y h .

fundamentales convexos para grupos fuchsianos del primer tipo.

En este caso podemos omitir el parámetro t en la signatura y considerar a los elementos parabólicos como elípticos de orden infinito, se puede cambiar la notación de la signatura por

$$(g : m_1, \dots, m_n)$$

o bien, si G no tiene elementos elípticos, ni elementos parabólicos, por $(g : 0)$.

Teorema 3.0.16 *Sea G un grupo fuchsiano finitamente generado del primer tipo y P cualquier polígono fundamental convexo para G . Supóngase que P tiene N lados (los cuales no se aparean consigo mismos).*

i) *Si G tiene signatura $(g : m_1, \dots, m_n)$ donde posiblemente $n = 0$, entonces*

$$N \leq 12g + 4n + 6.$$

Esta cota superior es alcanzada por el polígono de Dirichlet con centro en w para casi toda elección de w .

ii) *Si G tiene signatura $(g : 0)$, entonces*

$$N \geq 4g$$

y esta cota es alcanzada por algún polígono P .

iii) *Si G tiene signatura $(g : m_1, \dots, m_n)$, $n > 0$, entonces*

$$N \geq 4g + 2n - 2,$$

la igualdad se tiene para algún P .

DEMOSTRACIÓN. Supóngase que P tiene C_1, C_2, \dots, C_n círculos elípticos o parabólicos y $C_{n+1}, C_{n+2}, \dots, C_{n+A}$ círculos accidentales, alguno de estos conjuntos (pero no ambos) pueden ser vacíos.

En general, se denota por $|C|$ el número de puntos en el círculo $|C|$. Se tiene que

$$|C_j| \geq 1 \quad \text{si } 1 \leq j \leq n;$$

$$|C_j| \geq 3 \quad \text{si } n \leq j \leq n + A.$$

Además el número de lados del polígono cumple

$$N = \sum_{j=1}^{n+A} |C_j|,$$

de donde se sigue que

$$0 \leq A \leq \frac{N - n}{3}. \quad (3.17)$$

Aplicando la fórmula de Euler al polígono se tiene

$$2 - 2g = 1 - N/2 + n + A, \quad (3.18)$$

multiplicando esta igualdad por 2 y despejando N , se sigue que

$$N - 2A = 4g + 2n - 2. \quad (3.19)$$

En consecuencia, se obtiene iii).

Por otro lado, de (3.17) se concluye que

$$-6A \geq 2n - 2N,$$

utilizando este hecho y multiplicando por 3 la ecuación (3.19), se obtiene

$$12g + 6n - 6 \geq 3N + 2n - 2N = N + 2n,$$

lo que implica

$$12g + 4n - 6 \geq N$$

que es la desigualdad i).

En caso de que la signatura sea $(g : 0)$ se llega a una igualdad similar a (3.19). En este caso se obtiene

$$N - 2A = 4g - 2,$$

y como deben existir ciclos accidentales $A \geq 1$, por lo cual

$$N - 2 \geq N - 2A = 4g - 2,$$

y $N \geq 4g$.

La prueba del Teorema 3.0.11 muestra que la cota inferior $4g$ que aparece en ii) es alcanzada. Si la signatura es $(g : 0)$ se construyen apareamientos como en la demostración del Teorema, véase la Figura 3.9, el polígono resultante tiene $4g$ lados.

Por último, la cota en iii) es alcanzada, en caso de que m_n sea una clase elíptica, se construye el polígono para el grupo con signatura $(g : m_1, \dots, m_{n-1})$, y como la variación de $\phi(d)$ es de 0 a algo mayor de 2π , el mismo razonamiento del Teorema 3.0.11 es aplicado, se elige d de tal manera que $\phi(d) = 2\pi/m_n$, esto implica que los vértices en el círculo de radio d representan la clase elíptica faltante, los cuales en el teorema, correspondían a un ciclo accidental. Se cumplen las hipótesis del Teorema de Poincaré, este polígono tiene $4g + 2(n - 1)$ lados, de modo que la cota se alcanza. Si el grupo solo tiene elementos parabólicos la construcción de las configuraciones para el parámetro g se realiza en $\partial\Delta$, se construyen vértices parabólicos en círculos de longitud 1 y arcos que unan consecutivamente estos vértices. Como en el caso anterior sólo se utilizan $n - 1$ clases parabólicas (con $n - 1$ vértices), el ciclo restante determina la clase parabólica que no se usó. Se cumple el Teorema de Poincaré y se concluye la prueba.

□

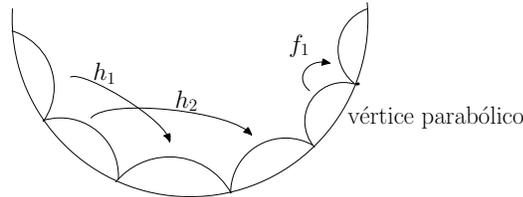


Figura 3.18: Configuración para el caso en que todos los elementos son parabólicos, en la prueba del Teorema 3.0.16

A manera de aplicación del Teorema 3.0.16 probamos ahora la existencia de una constante δ para cualquier grupo fuchsiano tal que la superficie de Riemann correspondiente tiene un disco de radio δ .

Proposición 3.0.17 *Sea G un grupo fuchsiano no elemental finitamente generado, entonces existe una constante $\delta > 0$, tal que si P es un dominio fundamental convexo para G , entonces $P \cap N$ contiene un disco de radio cuando menos δ , donde N es la región de Nielsen. De hecho se pueda dar una estimación explícita de δ .*

DEMOSTRACIÓN. Se analiza primero el caso en que G es de la primer clase. Sea P un polígono fundamental convexo arbitrario para G , el área de P es mayor o igual a $\pi/21$ (véase el Teorema 3.0.14). Ahora, se toma un punto en el interior de P y se trazan M triángulos uniendo el punto con los vértices del polígono, M es el número de lados del polígono, necesariamente uno de los triángulo tiene área mayor o igual a

$$\pi/21(M).$$

Se mostró que $M \leq 12g + 4m - 6$ (Teorema 3.0.16), donde m es el número de clases parabólicas o elípticas, así que

$$\frac{\pi}{21(M)} \geq \frac{\pi}{21(12g + 4m - 6)}.$$

Por otro lado, todo triángulo T tiene un círculo inscrito de radio R que satisfice

$$\tanh R \geq \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} h - \operatorname{área} T \right)$$

cf. [2] p. 29.

Ahora, como

$$d \frac{(\tanh t)}{dt} = \frac{1}{\cosh^2 t}$$

la derivada de \tanh es siempre positiva y por lo tanto la función \tanh es creciente (véase la Figura 3.19). De este modo se sigue la igualdad

$$R > \tanh^{-1} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{42(12g + 4m - 6)} \right) \right),$$

tomando

$$\delta = \tanh^{-1} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{42(12g + 4m - 6)} \right) \right)$$

se sigue el resultado.

El otro caso es cuando G es de la segunda clase, supóngase primero que no existen vértices accidentales en ∂N . Obsérvese que $k \leq 2n$, donde k es el número

de lados no apareados provenientes de ∂N y $2n$ el número de lados apareados, a cada lado no apareado en ∂N le podemos asociar el lado anterior recorriendo $\partial(N \cap P)$ en el sentido positivo.

Ahora, se tiene de manera análoga a (3.2) que

$$2 - 2g = 1 + t - (n + k) + m + a + k$$

donde m es el número de ciclos parabólicos o elípticos y a el número de ciclos accidentales. Se sigue entonces que

$$2 - 2g = 1 + t - n + m + a \quad (3.20)$$

como los ciclos accidentales tienen longitud mayor o igual a 3, se tiene que $2n - m$ es mayor o igual al número de vértices fuera de la frontera de Nielsen, por lo cual $2n - m \geq 3a$ y esto implica que

$$2 - 2g \leq 1 + t - n + m + \frac{2n - m}{3}.$$

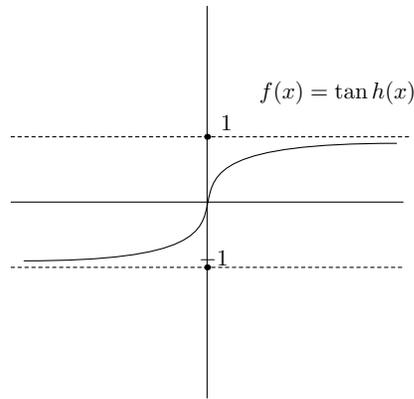


Figura 3.19: Gráfica de la función tangente hiperbólica.

Por lo tanto

$$\frac{n}{3} \leq 2g - 1 + t + \frac{2m}{3} \Leftrightarrow n \leq 6g - 3 + 3t + 2m.$$

Finalmente, si M es el número de lados del polígono se obtiene

$$M = 2n + k \leq 4n \leq 24g - 12 + 12t + 8m = 4(6g - 3 + 3t + 2m),$$

y se puede proceder como en el primer caso.

Se puede proceder de manera análoga tomando en cuenta los vértices accidentales en la frontera de la región de Nielsen.



Bibliografía

- [1] BEARDON, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, Springer-Verlag, 1995.
- [2] BEARDON, A.F., Hyperbolic Polygons and Fuchsian Groups, *J. London Math. Soc.*, 20, 1979.
- [3] LASCURAIN ORIVE, A., *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*, Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [4] GARCÍA ANCONA RAYBEL ANDRÉS *Grupos fuchsianos finitamente generados y puntos de aproximación*, Tesis de maestría, Facultad de Ciencias, UNAM, 2013.
- [5] MOLINA HERNÁNDEZ RUBÉN ANTONIO *Superficies de Riemann como cocientes de grupos fuchsianos actuando en \mathbb{H}^** , Tesina de maestría, Facultad de Ciencias, UNAM, 2011.
- [6] LASCURAIN ORIVE, A., Ford Polygons for $\Gamma_0(N)$, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* Vol. 39, 1994.
- [7] SHIMURA, G., *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton University, 1971.
- [8] GRENBERG, M.J., *Lectures on Algebraic Topology*, Northeastern University New York, Amsterdam, 1967.
- [9] VILLASEÑOR LECHUGA ANDRÉS *Una introducción a los grupos fuchsianos triangulares*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2014.