Universidad Nacional
Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Espacios de Banach con predual

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

Alumno: Omar Recillas Ayala

Tutor: M. en C. Angel Manuel Carrillo Hoyo

México, D. F. 2014

Hoja de datos del jurado

1. Datos del alumno: Recillas Ayala Omar. 56161213. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias. Matemáticas. 303303172.
2. Datos del tutor: M. en C. Angel Manuel Carrillo Hoyo.
3. Datos de sinodal 1: Dr. Carlos Hernández Garciadiego.
4. Datos de sinodal 2: Sra. Carmen Marínez Adame Isais
5. Datos de sinodal 3: Dr. Hugo Arizmendi Peimbert.
6. Datos del sinodal 4: Dra. Alejandra García García.
7. Datos del trabajo escrito: Espacios de Banach con predual.

Índice general

Introducción

Este trabajo está estrechamente relacionado con la noción de espacio dual de un espacio de Banach X; es decir, el espacio de todas las funcionales lineales continuas definidas en X y que es denotado como X^*. Si X es no nulo, entonces tiene un dual topológico no trivial; más aún, este espacio es abundante en el sentido de que separa los puntos de X.

Para algunos espacios de Banach X existe un isomorfismo isométrico, es decir una isometría lineal y biyectiva, entre él y el dual Y^* de otro espacio de Banach Y. En tal caso decimos indistintamente que: X es isomorfo a un dual, X es un espacio dual, X tiene predual y éste es Y o bien que Y es un predual de X. Para denotar lo anterior escribimos $X \approx Y^*$ y en ocasiones, por abuso, $X = Y^*$.

Por ejemplo, sabemos que el espacio ℓ^1 de las sucesiones escalares absolutamente sumables es isomorfo tanto al dual c^* del espacio c de las sucesiones escalares convergentes, con la norma uniforme, como al dual c_0^* del subespacio c_0 de c formado por las sucesiones que convergen a cero. Así, ℓ^1 tiene predual. Entre c_0 y c no existe un isomorfismo isométrico.

Una clase de espacios de Banach con predual es la constituida por aquellos que son reflexivos, pues estos tienen la propiedad de ser isomorfos a su doble dual, es decir al dual de su dual. O sea, si X es reflexivo, entonces $X \approx (X^*)^*$. Sin embargo, hay espacios no reflexivos con predual, como ℓ^1, que es no reflexivo y tiene como predual a c_0. Así, vemos que hay más espacios con predual que espacios reflexivos.

No todo espacio de Banach tiene predual. Por ejemplo, c_0 no tiene predual. Más aún no existe un espacio de Banach Y tal que c_0 sea topológicamente isomorfo a Y^*, esto es, para ningún espacio de Banach Y existe un operador lineal $T : c_0 \to X^*$ biyectivo y bicontinuo.

Encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un espacio de Banach tenga predual es un viejo problema. Fue Jacques Dixmier en su clásico artículo *Sur un théorème de Banach* quien dio las primeras caracterizaciones de los espacios de Banach con predual. En ese artículo, se introducen los conceptos de la característica de un subespacio del dual de un espacio de Banach y de subespacios minimales. Ambos son básicos para el desarrollo del artículo. Y éste a su vez lo es para este trabajo.

Otras condiciones necesarias y suficientes han aparecido desde entonces. Por ejemplo, está la encontrada por Kung-Fu Ng en [**9**], que es una variante de aquella dada por Dixmier en términos de la compacidad de la bola unitaria cerrada del espacio de Banach X, en una cierta topología débil.

Dixmier deja planteada en su artículo la siguiente pregunta: ¿Si X es topológicamente isomorfo a un dual, entonces tiene predual? Ésta fue respondida negativamente, mediante un contraejemplo, ocho años después, por Victor L. Klee, Jr en [**8**]. Mucho más recientemente, Libor Veselý da en [**10**] una manera de construir, a partir de cualquier espacio de Banach no reflexivo, por ejemplo ℓ^1, un espacio de Banach X que sea topológicamente isomorfo a un dual, pero que no tenga predual.

En esta tesis se presentan y desarrollan los temas que acabamos de mencionar. Son temas que surgen de manera natural al estudiar la dualidad en espacios de Banach y resulta curioso que no haya sido recogido en los libros de texto de Análisis Funcional.

Actualmente, el tema se estudia en dos vías el "caso isométrico" y el "caso isomorfo", que corresponden, en el lenguaje de Dixmier que hemos adoptado y usado líneas arriba, a que X sea isomorfo a un dual o bien que X sea topológicamente isomorfo a un dual. Como ya señalamos, puede darse lo segundo sin que ocurra lo primero.

Un problema sobre el que se trabaja actualmente es, por ejemplo, determinar cuáles espacios de Banach X tienen predual único, en alguno de los siguientes dos sentidos: cualesquiera dos preduales de X son isomorfos o bien cualesquiera dos preduales de X son topológicamente isomorfos. Por lo antes dicho, ℓ^1 no tiene predual único en el "caso isométrico".

La presentación del material en esta tesis se hace de manera que sea lo más autocontenida posible y se divide en cuatro capítulos.

En el primero se recuerdan conceptos y resultados básicos sobre espacios vectoriales topológicos sobre un campo $\mathbb{F}$ que puede ser el campo de los números reales o el de los números complejos. Se tratan las funcionales, es decir funciones con valores en $\mathbb{F}$, que pueden ser lineales, sublineales o seminormas, y se estudian los operadores lineales entre espacios vectoriales. Como nos interesará la continuidad de seminormas y operadores lineales en espacios localmente convexos, se agrega una sección para tratar el tema. Al final se ve el caso particular de los espacios normados y por supuesto se introducen los espacios de Banach.

En el segundo se definen los espacios duales: algebraico y topológico. Se caracterizan a los espacios duales de algunos de los espacios de sucesiones, lo que nos da ejemplos de espacios X con predual, donde la isometría entre X y el dual Y^* surge de manera natural aprovechando que Y tiene base de Schauder. Como tema auxiliar para determinar en el tercer capítulo el conjunto de los límites de sucesiones w^*-convergentes de un conjunto de un espacio dual, se agrega la caracterización, dada por Banach en [**2**], de los elementos de los duales de subespacios separables de ℓ^∞. También se presentan los llamados teoremas de separación para espacios vectoriales topológicos, en particular el de Tukey-Klee que tiene como consecuencia que en un espacio localmente convexo la cerraduras, en la topología original y en la débil, de cualquier subconjunto convexo coincidan. Las topologías débiles son introducidas después de que se definen el segundo y tercer duales de un espacio vectorial topológico y, en el caso de espacios normados, también se trabaja con los conceptos de anulador y preanulador de subconjuntos y la inmersión canónica de un espacio en su segundo dual.

Por su uso frecuente, se recuerda el Teorema de Alaoglu y su demostración. Junto a él está el Teorema de Goldstine que nos permite obtener resultados sobre espacios reflexivos que nos serán útiles.

Para el dual de cualquier espacio normado tenemos la topología de la norma y la débil estrella w^*. Entre estas dos se encuentra otra llamada la topología acotada-w^*, denotada como bw^*, y con respecto a la cual se puede resaltar el Teorema de Krein-Šmulian que caracteriza a los conjuntos convexos en X^* que son w^*-cerrados en términos de sus intersecciones con las bolas cerradas centradas en 0.

El capítulo dos se cierra con el Teorema de Krein-Milman. Todos los resultados mencionados jugarán un papel importante en los dos capítulos finales.

En el tercer capítulo se introducen las nociones de característica y subespacio minimal para subespacios del dual X^* de un espacio de Banach X. La característica de un subespacio$V$ es el "máximo" real r para el cual la bola unitaria de V es w^*-densa en la r-bola cerrada de X^*. En tanto que un espacio es minimal si lo es en la colección de subespacios cerrados en la norma y w^*-densos en X^*, ordenados por la inclusión. La característica es siempre un valor entre 0 y 1 y se hacer ver mediante una familia de subespacios dependientes de un parámetro que cualquiera de esos valores puede ser alcanzado, incluidos los extremos.

Incluimos algunos resultados técnicos que conducen al resultado principal del capítulo: Un subespacio V tiene característica 1 y es minimal si y sólo si la bola unitaria cerrada de X es compacta para la topología débil de X determinada por V.

En el último capítulo se ve que cualquier de estas condiciones es equivalente a que X tenga predual y se dan otras dos más. Se exhibe el ejemplo ya mencionado en esta introducción de un espacio X sin predual, pero que es topológicamente isomorfo a un dual; de hecho a $\ell^\infty \approx (\ell^1)^*$. Y se da el procedimiento, también ya comentado, para construir espacios de Banach con la misma propiedad a partir de cualquiera que no sea reflexivo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios vectoriales y vectoriales topológicos

En este trabajo todos los espacios vectoriales serán sobre el campo $\mathbb{F}$ de los reales ($\mathbb{R}$) o de los complejos ($\mathbb{C}$). Las definiciones y resultados que se presentan a continuación son fundamentales para lo que sigue.

DEFINICIÓN 1.1.1. Un espacio vectorial (e.v.) o lineal sobre $\mathbb{F}$ es un conjunto no vacío X con dos funciones: $+ : X \times X \to X$, llamada suma vectorial y $\cdot : \mathbb{F} \times X \to X$ llamada producto por un escalar con las siguientes propiedades:

(1) La suma vectorial es asociativa y conmutativa; es decir:

$$(x+y)+z = x+(y+z) \text{ y } x+y = y+x$$

si $x, y, z \in X$, respectivamente.

(2) Existe un único vector $0 \in X$ tal que para todo $x \in X$ se cumple que $0 + x = x$.

(3) Para cada $x \in X$ existe un único vector $-x \in X$ tal que $x + (-x) = 0$.

(4) Para cualesquiera escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y vectores $x, y \in X$ se cumple que

$$(\alpha+\beta)\cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x; \;\; \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta)\cdot x \text{ y } \alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$$

(5) Para todo $x \in X$ se satisface que $1 \cdot x = x$.

Por comodidad, de aquí en adelante se escribirá αx en lugar de $\alpha \cdot x$.

Un subconjunto Y de un espacio vectorial X que es espacio vectorial con las mismas operaciones definidas en X es llamado un subespacio vectorial de X. El mínimo subespacio que contiene a un subconjunto A de un espacio vectorial es llamado el subespacio vectorial generado por A y se denota por $< A >$. Si $A = \{x_1, .., x_n\}$, entonces escribimos $< x_1, .., x_n >$.

Tenemos que $< A >= \{\sum_{i=1}^{n} s_i x_i : n \geq 1, s_i \in \mathbb{F}, x_i \in A\}$ si $A \neq \emptyset$ y $< \emptyset >= 0$. Cada $\sum_{i=1}^{n} s_i x_i$ es llamada una combinación lineal.

Nos interesará trabajar con espacios vectoriales que además tengan una topología "bien relacionada" con la estructura algebraica. De manera precisa tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.1.2. Un espacio vectorial (lineal) topológico (e.v.t.) (X, τ) es un espacio vectorial X con una topología τ tal que las funciones suma vectorial y producto por un escalar son continuas cuando en $X \times X$ y $\mathbb{F} \times X$ se dan las topologías producto inducidas por τ y la topología usual de $\mathbb{F}$. En este caso se dice que τ es una topología vectorial (lineal) o bien que es una topología compatible con la estructura vectorial (lineal).

Al trabajar con espacios vectoriales topológicos, será útil la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.1.3. *Sean (X, τ) un e.v.t., $\alpha \in \mathbb{F}$ y $z \in X$. Entonces las funciones*

$$t_z : X \to X \text{ definida como } x \to z + x$$
$$h_{\alpha}\cdot : X \to X, \text{ con } \alpha \neq 0, \text{definida como } x \to \alpha x$$

son homeomorfismos. La primera es llamada la traslación por z y la segunda la homotecia con razón α.

La función

$$\begin{matrix} \mathbb{F} \to X \\ \lambda \to \lambda x \end{matrix}$$

es continua para cada $x \in X$

DEMOSTRACIÓN. Considérese la función $f : X \to X \times X$ definida por la asociación $x \mapsto (z, x)$. Sean π_1 y π_2 las proyecciones sobre la primera y segunda coordenadas, respectivamente. Entonces $\pi_1 \circ f$ es la función constante z y $\pi_2 \circ f$ es la función identidad de X, ambas continuas. Así, la función f es continua. Como (X, τ) es espacio vectorial topológico, entonces la función suma vectorial s es continua. Por tanto, $s \circ f = t_z$ es continua.

De manera análoga, pero ahora considerando la función producto por un escalar p y la función $g : X \to \mathbb{F} \times X$ definida por la asociación $x \to (\alpha, x)$, tenemos que $p \circ g = h_{\alpha}$. es continua.

Como las funciones $t_{-z} : X \to X$ y $h_{\frac{1}{\alpha}}\cdot : X \to X$, son inversas de t_z y h_{α} respectivamente, y son continuas por la primer parte de la demostración, entonces, t_z y h_{α} son homeomorfismos.

La función $\lambda \to \lambda x$ es continua por ser la composición de $\lambda \to (\lambda, x)$ seguida de la multiplicación por un escalar. $\square$

1.1.1. Conjuntos balanceados, convexos y absorbentes. En esta subsección X es un e.v.

DEFINICIÓN 1.1.4. Sea A un subconjunto de X.

- A es *convexo* si $x, y \in A$, $s \geq 0$, $t \geq 0$ y $s + t = 1$ implica que $sx + ty \in A$.
- A es *simétrico* si $x \in A$ implica $-x \in A$.
- A es *balanceado* si $x \in A$ y $|\lambda| \leq 1$ implican que $\lambda x \in A$.
- A es *absorbente* si para cada $x \in X$ existe $r_x > 0$ tal que $x \in \lambda A$ para todo $|\lambda| \geq r_x$. Lo anterior equivale a que para cada $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que $\lambda x \in A$ para todo $|\lambda| \leq \delta_x$.
- Un conjunto V absorbe a un conjunto A si existe $r > 0$ tal que $A \subset \lambda V$ para todo $|\lambda| \geq r$. Esto equivale a que existe $\delta > 0$ tal que $\lambda A \in V$ para todo $|\lambda| \leq \delta$.

Nótese que la definición de conjunto convexo es equivalente a: $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in A$ siempre que $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son reales no negativos que suman 1. A la última suma se le conoce como una combinación convexa de elementos de A.

Supongamos que A es balanceado. Entonces

- A es absorbente si y sólo si para cada $x \in X$ existe $r_x > 0$ tal que $x \in r_x A$.
- Un conjunto V absorbe a A si y sólo si existe $r > 0$ tal que $A \subset rV$.

DEFINICIÓN 1.1.5. La envolvente convexa de $A \subset X$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de A y la denotaremos por $\operatorname{conv}(A)$. Es decir,

$$\operatorname{conv}(A) = \{\sum_{i=1}^{n} s_i x_i : s_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} s_i = 1,\ x_i \in A \,\text{y}\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Es claro que $\operatorname{conv}(A)$ es un conjunto convexo, $A \subset \operatorname{conv}(A)$, y $A \subset B$ implica que $\operatorname{conv}(A) \subset \operatorname{conv}(B)$.

Es fácil demostrar que si C es un conjunto convexo tal que $A \subset C$, entonces $\operatorname{conv}(A) \subset C$, es decir, $\operatorname{conv}(A)$ es el mínimo conjunto convexo que contiene a A.

Veremos algunas propiedades de la envolvente convexa.

PROPOSICIÓN 1.1.6. *Sean C_1, C_2 conjuntos convexos no vacíos de un espacio vectorial. Entonces $\operatorname{conv}(C_1 \bigcup C_2)$ consiste en todas las sumas*

$$t_1 c_1 + t_2 c_2 \tag{1.1.1}$$

donde t_1, t_2 son reales no negativos que suman 1 y $c_i \in C_i$ para $i = 1, 2$.

Demostración. De la definición para $\operatorname{conv}(C_1 \bigcup C_2)$ se sigue que las sumas que tienen la forma de 1.1.1 pertenecen a este conjunto.

Sea $x \in \operatorname{conv}(C_1 \bigcup C_2)$. Entonces, existen $s_1, s_2, \ldots s_n \in \mathbb{R}$ no negativos que suman 1 y $x_1, x_2 \ldots, x_n \in C_1 \bigcup C_2$ tales que $x = \sum_{i=1}^n s_i x_i$. El caso en el que todos los elementos $x_1, \ldots, x_n$ pertenezcan a C_1 o bien a C_2 es inmediato, ya que estos dos conjuntos son convexos. Supongamos entonces lo contrario y reetiquetamos los elementos x_i de tal forma que $x_1, x_2, \ldots, x_m$ pertenecen a C_1 y $x_{m+1}, x, \ldots, x_n$ están en C_2, pero no en C_1; lo correspondiente se hace con los escalares s_i. Entonces

$$x = \sum_{i=1}^{m} s_i x_i + \sum_{i=m+1}^{n} s_i x_i.$$

Hacemos:

$$t_1 = \sum_{i=1}^{m} s_i, t_2 = \sum_{i=m+1}^{n} s_i, c_1 = \frac{1}{t_1} \sum_{i=1}^{m} s_i x_i \text{ y } c_2 = \frac{1}{t_2} \sum_{i=m+1}^{n} s_i x_i.$$

Es claro que t_1, t_2 son reales no negativos que suman 1 y $x = t_1 c_1 + t_2 c_2$. Por ser C_1 y C_2 conjuntos convexos $c_1 \in C_1$ y $c_2 \in C_2$. $\square$

Proposición 1.1.7. *Sean K_1, K_2 dos conjuntos compactos y convexos de un espacio vectorial topológico X. Entonces $\operatorname{conv}(K_1 \bigcup K_2)$ es compacto en X.*

Demostración. La función $S : (\mathbb{F} \times X)^2 \to X$ dada como: $S((t_1, x_1), (t_2, x_2)) = t_1 x_1 + t_2 x_2$ es continua.

Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red en $\operatorname{conv}(K_1 \bigcup K_2)$, por la Proposición anterior $x_\alpha = t_1^{(\alpha)} x_1^{(\alpha)} + t_2^{(\alpha)} x_2^{(\alpha)}$ para cada $\alpha \in I$ donde $t_1^{(\alpha)}, t_2^{(\alpha)} \geq 0$, $t_1^{(\alpha)} + t_2^{(\alpha)} = 1$ y $x_i^{(\alpha)} \in K_i$ para $i = 1, 2$.

De la compacidad de $[0, 1]$ y K se sigue que existe una subred $(x_\beta)_{\beta \in B}$ de $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ tal que $t_1^{(\beta)} \to t_1$, $t_2^{(\beta)} \to t_2$, $x_1^{(\beta)} \to x_1$ y $x_2^{(\beta)} \to x_2$, con $t_1, t_2 \in [0, 1]$ y $x_i \in K_i$ para $i = 1, 2$. De donde, $t_1 + t_2 = 1$ y $x_\beta \to t_1 x_1 + t_2 x_2 = x$ por lo que $x \in \operatorname{conv}(K_1 \bigcup K_2)$. Esto prueba que este conjunto es compacto $\square$

Los dos resultados anteriores se pueden generalizar para un número finito de conjuntos, las demostraciones de estos son esencialmente las mismas.

Definición 1.1.8. Un subconjunto A de un e.v.t. X es acotado si toda vecindad V de 0 absorbe a A; es decir si existe $\lambda > 0$ tal que $A \subset \lambda V$.

Es fácil ver que si $X = \mathbb{F}$, entonces A es acotado según esta definición si y sólo si lo es en el sentido usual.

PROPOSICIÓN 1.1.9. *Sea $A \subset X$. Algunas propiedades de los conjuntos absorbentes, balanceados y convexos son:*

(a) A balanceado y distinto del vacío implica que $0 \in A$.

(b) A absorbente implica que $0 \in A$.

(c) A balanceado y $|\lambda| = 1$ implica que $\lambda A = A$.

(d) A es convexo si y sólo si $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ siempre que $\alpha, \beta \geq 0$.

(e) La intersección de los conjuntos de cualquier familia de subconjuntos convexos (balanceados) de X es un conjunto convexo (balanceado).

(f) La intersección de los conjuntos de una familia finita de subconjuntos absorbentes de X es un conjunto absorbente.

DEMOSTRACIÓN. Las demostraciones de *(a)*,*(b)* y *(c)* son inmediatas a partir de las definiciones.

(d) Supongamos que A es convexo. Cuando $\alpha = \beta = 0$ la afirmación es obvia. Supongamos que alguno de los dos escalares es positivo. Si $z \in \alpha A + \beta A$, entonces $z = \alpha x + \beta y$ con $x, y \in A$. Como $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \geq 0$, $\frac{\beta}{\alpha+\beta} \geq 0$, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1$ y A es convexo tenemos que

$$\frac{1}{\alpha + \beta}(\alpha x + \beta y) \in A;$$

es decir, $(\alpha x + \beta y) \in (\alpha + \beta)A$. Por tanto, $\alpha A + \beta A \subset (\alpha + \beta)A$. La otra contención siempre se da, inclusive cuando A no es convexo.

Recíprocamente, supongamos que $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$ siempre que $\alpha, \beta \geq 0$ y sean $x, y \in A$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ con $\alpha + \beta = 1$. Entonces $\alpha x + \beta y \in \alpha A + \beta A$ y por hipótesis, $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A = A$. Por tanto, A es convexo.

(e) Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$ familias de conjuntos convexos y balanceados, respectivamente. Tomemos $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$ y $x, y \in \bigcap\limits_{C \in \mathcal{C}} C$, como cada $C \in \mathcal{C}$ es convexo se sigue que $\alpha x + \beta y \in C$ para todo $C \in \mathcal{C}$; así, $\alpha x + \beta y \in \bigcap\limits_{C \in \mathcal{C}} C$. Por tanto, $\bigcap\limits_{C \in \mathcal{C}} C$ es convexo.

Si $|\lambda| \leq 1$ y $x \in \bigcap\limits_{B \in \mathcal{B}} B$ entonces, dado que cada $B \in \mathcal{B}$ es balanceado $\lambda x \in B$ para todo $B \in \mathcal{B}$ de lo cual se sigue que $\lambda x \in \bigcap\limits_{B \in \mathcal{B}} B$. Por tanto, $\bigcap\limits_{B \in \mathcal{B}} B$ es balanceado.

(f) El caso en que la familia es vacía es inmediato. Supóngase que $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ es una familia finita de subconjuntos absorbentes de X, con $n \geq 1$. Sea $x \in X$ como cada A_i es absorbente, entonces existe $r_{i,x} > 0$ tal que $\lambda x \in A_i$ si $|\lambda| \geq r_{i,x}$. Tomemos

$r_x = \max\{r_{1,x}, \ldots, r_{n,x}\}$, entonces $|\lambda| \geq r_x$, implica $|\lambda| \geq r_{i,x}$ para todo $1 \leq i \leq n$ y por consiguiente, $|\lambda|x \in A_i$ para todo $1 \leq i \leq n$; o sea, $|\lambda|x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Por tanto, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es absorbente. □

PROPOSICIÓN 1.1.10. *Sea X es un e.v.t.,entonces*

(a) Toda vecindad de 0 es absorbente.

(b) Toda vecindad de 0 contiene una vecindad balanceada de 0. Es decir, la colección de vecindades balanceadas de 0 es una base local del 0.

DEMOSTRACIÓN. *(a)* Sean V una vecindad de cero y $x \in X$. Como el producto por un escalar es continua en $(0, x)$, se sigue que existen $0 < \delta_x < 1$ y U abierto de X que contiene a x tal que para toda pareja $(\alpha, y) \in B_\delta(0) \times U$ ocurre que $\alpha y \in V$); en particular $\alpha x \in V$ para todo $|\alpha| < \delta_x$. Por tanto, V es absorbente.

(b) Como el producto por un escalar es continuo dada una vecindad V de 0 existe una vecindad U de 0 y $\delta > 0$ tales que $\lambda U \subset V$ si $|\lambda| < \delta$. Entonces $\bigcup_{|\lambda|<\delta} \lambda U$ es una vecindad balanceada de 0 contenida en V. □

Por (b) siempre podemos suponer que al seleccionar una vecindad de 0, ésta es balanceada.

1.1.2. Operadores lineales. Funcionales sublineales y lineales. Seminormas. Normas.

DEFINICIÓN 1.1.11. Una transformación $T : X \to Y$ entre dos espacios vectoriales X y Y es llamada lineal o bien, operador lineal si es

(a) aditiva: $T(x + y) = T(x) + T(y)$ si $x, y \in X$ y

(b) homogénea: $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ siempre que $\lambda \in \mathbb{F}$ y $x \in X$.

A la colección de todos los operadores lineales entre dos espacios vectoriales X y Y se le denotará por $L(X, Y)$.

El siguiente resultado es inmediato a partir de las definiciones

PROPOSICIÓN 1.1.12. *Sean X y Y dos espacios vectoriales, $A \subset X$ y $T : X \to Y$ una transformación lineal. Entonces $T(conv(A)) = conv(T(A))$. En particular, con $T(x) = -x$ obtenemos $conv(-A) = -(conv(A))$.*

Un caso que nos interesará es cuando $Y = \mathbb{F}$ en este caso, hacemos $X^{\#} = L(X, \mathbb{F})$ y lo llamamos el dual algebraico de X. Los elementos de $X^{\#}$ son llamados funcionales lineales y se acostumbra denotarlas por f, g, etc. aunque más adelante usaremos otra notación que también es ampliamente empleada.

En general, a las funciones definidas de un espacio vectorial al campo de escalares se les llama *funcionales*.

Dos proposiciones útiles sobre funcionales lineales son las siguientes:

PROPOSICIÓN 1.1.13. *Sean $f, f_1, \ldots, f_n$ funcionales lineales en el e.v. X. Entonces $f \in < f_1, \ldots, f_n >$ si y sólo si $\cap_{i=1}^{n} \ker(f_i) \subset \ker(f)$.*

DEMOSTRACIÓN. La parte "si" se probará por inducción sobre n. Sea $n = 1$. El caso en que $f_1 \equiv 0$ es trivial. Supongamos que $f_1 \neq 0$, en este caso, existe $x_1 \in X$ tal que $f_1(x_1) = 1$. Sea $x \in X$, hagamos $x_1' = x - f_1(x)x_1$. Entonces $x_1' \in \ker(f_1)$ y se cumple que

$$x = f_1(x)x_1 + x_1'.$$

De donde, $f(x) = f_1(x)f(x_1)$, lo cual demuestra la base para nuestra inducción.

Ahora supongamos cierto el resultado para todo $m < n$. Si existe $1 \leq j \leq n$ tal que $\bigcap\limits_{i \neq j} \ker f_i = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i$, entonces, por hipótesis de inducción, $f(x) = \sum\limits_{i \neq j} \alpha_i f_i(x)$ para ciertos escalares α_i y todo x. Así $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$, con $\alpha_j = 0$.

En otro caso, $\bigcap\limits_{i \neq j} \ker f_i \neq \bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker f_i$ para todo $1 \leq j \leq n$, y entonces para cada j existe $x_j \in X$ tal que $f_j(x_j) \neq 0$ y $f_i(x_j) = 0$ para todo $i \neq j$.

Para $y_j = \frac{1}{f_j(x_j)} x_j$, tenemos que $f_j(y_j) = 1$ y $f_i(y_j) = 0$ para todo $i \neq j$ y $1 \leq j \leq n$.

Definimos $\alpha_j = f(y_j)$ para cada $1 \leq j \leq n$. Sea $y \in X$ y hagamos $w = y - \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(y) y_j$, entonces $f_i(w) = f_i(y) - \sum\limits_{j=1}^{n} f_j(y) f_i(y_j) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ y así, por hipótesis, $f(w) = 0$; de lo que se sigue que $f(y) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(y)$.

La parte "sólo si" es obvia. $\square$

PROPOSICIÓN 1.1.14. *Toda funcional lineal no nula f en un e.v.t. X es una función abierta.*

Demostración. Tenemos que $f(x_0) = 1$ para algún $x_0 \in X$. Sea V una vecindad balanceada de 0. Existe $t > 0$ tal que $x_0 \in tV$. Afirmamos que la bola abierta $B_{\frac{1}{t}}(0)$ de $\mathbb{F}$ está contenida en $f(V)$. Supongamos que $|r| < \frac{1}{t}$. Entonces $|rt| < 1$, $rx_0 \in rtV \subset V$ y $f(rx_0) = r$, lo que prueba nuestra afirmación.

Si U es un abierto de X y $r \in f(U)$, entonces existen $x \in U$ y una vecindad balanceada de 0, V tales que $r = f(x)$ y $x + V \subset U$. Por lo anterior, existe $t > 0$ tal que $B_{\frac{1}{t}}(0) \subset f(V)$; de donde $B_{\frac{1}{t}}(r) = r + B_{\frac{1}{t}}(0) \subset f(x) + f(V)$. Por tanto, $B_{\frac{1}{t}}(r) \subset f(U)$. $\square$

Algunos casos particulares de funcionales se definen continuación.

Definición 1.1.15. Una funcional $f : X \to \mathbb{R}$ es sublineal si es

(a) subaditiva, es decir; $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ si $x, y \in X$ y

(b) positivamente homogénea: o sea, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ si $\lambda \geq 0$ y $x \in X$.

Casos particulares de funcionales sublineales son las seminormas.

Definición 1.1.16. Una seminorma en X es una funcional $p : X \to [0, \infty)$ con las siguientes propiedades:

(a) subaditiva: $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ si $x, y \in X$.

(b) homogeneidad absoluta: $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ si $\lambda \in \mathbb{F}$ y $x \in X$.

Si además se cumple:

(c) $p(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$,

entonces p es llamada norma y usualmente se denota como $\|\cdot\|$.

De las propiedades que satisface la seminorma, es fácil ver que si p es una seminorma en X, entonces satisface la siguiente desigualdad

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x-y) \tag{1.1.2}$$

para $x, y \in X$.

Una manera de obtener nuevas seminormas a partir de otras se presenta en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.1.17. *Sean X y Y dos espacios vectoriales y q una seminorma en Y.*

(a) Si $T : X \to Y$ es un operador lineal, entonces $q \circ T$ es una seminorma en X.

(b) Si $p_1, \cdots, p_n$ son seminormas en X entonces $p(x) = \max\limits_{1 \le i \le n} \{p_i(x)\}$ es una seminorma en X.

DEMOSTRACIÓN. Sólo probaremos *(b)*. Es claro que p es real y no negativa. Sean $x, y \in X$, como cada p_i es una seminorma tenemos

$$p_i(x + y) \le p_i(x) + p_i(y) \le p(x) + p(y)$$

para cada $1 \le i \le n$; de donde, $p(x + y) \le p(x) + p(y)$; es decir, p es subaditiva.

Si $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces $p_i(\lambda x) = |\lambda| p_i(x)$ para cada $1 \le i \le n$, en consecuencia

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \max_{1 \le i \le n} \{|\lambda| p_i(x)\} \\ &= |\lambda| p(x) \end{aligned}$$

por tanto, p es absolutamente homogénea. $\square$

DEFINICIÓN 1.1.18. Sea $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ una familia de seminormas en X. Para cada $F \subset \Gamma$ finito y no vacío definimos la seminorma q_F en X como

$$q_F(x) = \max_{\alpha \in F} \{p_\alpha(x)\}.$$

Entonces la familia

$$\mathcal{P}' = \{q_F : F \neq \emptyset, F \subset \Gamma \text{ finito}\}$$

es llamada la saturación de $\mathcal{P}$. Si $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$, entonces se dice que $\mathcal{P}$ está saturada.

Para resultados posteriores, relacionados con la continuidad de operadores lineales entre espacios localmente convexos, es útil demostrar la siguiente proposición que permite comparar dos seminormas definidas en un e.v.

PROPOSICIÓN 1.1.19. *Sean p y q dos seminormas en X. Si $p(x) \le 1$ implica $q(x) \le 1$, entonces $q(x) \le p(x)$ para todo $x \in X$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\epsilon > 0$, $x \in X$ y $z = \frac{1}{p(x)+\epsilon} x$. Como $p(z) \le 1$ entonces $q(z) \le 1$. Usando las homogeneidad absoluta de la seminorma, tenemos que $q(x) \le p(x) + \epsilon$. Por tanto, $q(x) \le p(x)$. $\square$

1.1.3. Funcionales de Minkowski. Otra manera de obtener funcionales sublineales y seminormas es mediante las funcionales que a continuación definimos.

DEFINICIÓN 1.1.20. Sea A un conjunto absorbente de X. Definimos la funcional de Minkowski como

$$p_A(x) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha A\}$$

para cada $x \in X$

PROPOSICIÓN 1.1.21. *Algunas de las propiedades de la funcional de Minkowski p_A son las siguientes:*

(a) p_A es no negativa, $A \subset \{x \in X : p_A(x) \leq 1\}$, $p_A(0) = 0$ y p_A es positivamente homogénea.

(b) Si A es convexo, entonces p_A es sublineal y $\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subset A$.

(c) Si A es balanceado y convexo, entonces p_A es una seminorma.

(d) Si X es un e.v.t., A es abierto y además balanceado o convexo, entonces $\{x \in X : p_A(x) < 1\} = A$.

(e) Si X es un e.v.t., A es cerrado y además balanceado o convexo, entonces $\{x \in X : p_A(x) \leq 1\} = A$.

DEMOSTRACIÓN. *(a)* Las tres primeras afirmaciones se siguen inmediatamente de la definición de la funcional de Minkowski y de que $0 \in A$. Para probar la cuarta, tomemos $x \in X$, $\lambda > 0$ y supongamos que $\alpha > 0$ es tal que $\lambda x \in \alpha A$. Entonces, $x \in \frac{\alpha}{\lambda}A$; o sea, $p_A(x) \leq \frac{\alpha}{\lambda}$; o lo que es lo mismo $\lambda p_A(x) \leq \alpha$. Así, $\lambda p_A(x) \leq p_A(\lambda x)$. Al aplicar esto al vector λx y al escalar $\frac{1}{\lambda} > 0$ tenemos: que $\frac{1}{\lambda}p_A(\lambda x) \leq p_A(\frac{1}{\lambda}\lambda x) = p_A(x)$; por lo que $p_A(\lambda x) \leq \lambda p_A(x)$. Entonces, $p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$. Como esta igualdad también se cumple cuando $\lambda = 0$, tenemos que p_A es positivamente homogénea.

(b) Para ver que p_A es sublineal sólo falta ver que es subaditiva. Sean $x, y \in X$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que $x \in \alpha A$ y $y \in \beta A$. Entonces $x + y \in \alpha A + \beta A$ y por (d) de la Proposición 1.1.9 se tiene que $\alpha A + \beta A = (\alpha + \beta)A$. Así, $x + y \in (\alpha + \beta)A$ y entonces $p_A(x+y) \leq \alpha+\beta$. Por las propiedades del ínfimo de la suma de dos conjuntos de reales obtenemos que $p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y)$. O sea, p_A es subaditiva.

Sea $x \in X$ tal que $p_A(x) < 1$. Existe $0 < \alpha < 1$ tal que $\frac{1}{\alpha}x \in A$. Por *(b)* de la Proposición 1.1.9, $0 \in A$. Como A es convexo se sigue que $\alpha\frac{1}{\alpha}x + (1 - \alpha)0 \in A$. Por tanto, $x \in A$; de donde

$$\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subset A.$$

(c) Por el inciso *(b)* tenemos que p_A es subaditiva y positivamente homogénea. Sean $\lambda < 0$ y $x \in X$. Por *(b)*

$$p_A(-\lambda x) = -\lambda p_A(x) = |\lambda| p_A(x).$$

Veamos que los conjuntos $A_1 = \{\alpha > 0 : -\lambda x \in \alpha A\}$ y $A_2 = \{\alpha' > 0 : \lambda x \in \alpha' A\}$ son iguales. Sea $\alpha \in A_1$, entonces $\frac{-\lambda}{\alpha} x \in A$. Como A es balanceado tenemos que $\frac{\lambda}{\alpha} x \in A$, lo que implica que $\lambda x \in \alpha A$, es decir $\alpha \in A_2$, así $A_1 \subset A_2$. Siguiendo el mismo procedimiento se puede ver que $A_2 \subset A_1$. De lo anterior se tiene que $p_A(\lambda x) = p_A(-\lambda x) = |\lambda| p_A(x)$. Queda probado que p_A es absolutamente homogénea si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Veremos que también es absolutamente homogénea cuando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Para $\lambda \in \mathbb{F}$, definimos el signo $\sigma(\lambda)$ de λ como

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 1 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Es claro que $|\lambda| = \sigma(\lambda)\lambda$ y $|\sigma(\lambda)| = 1$. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in X$, entonces $p_A(\lambda x) = p_A(|\lambda| \sigma(\lambda)^{-1} x)$. Como p_A es positivamente homogénea se tiene que

$$p_A(\lambda x) = |\lambda| p_A(\sigma(\lambda)^{-1} x).$$

Entonces, bastará probar que $p_A(\sigma(\lambda)^{-1} x) = p_A(x)$. Sea $\alpha > 0$ tal que $\frac{1}{\alpha} x \in A$. Como A es balanceado y $|\sigma(\lambda)^{-1}| = 1$ se cumple que $\frac{1}{\alpha}\sigma(\lambda)^{-1} x \in A$. Si $\alpha' > 0$ es tal que $\frac{1}{\alpha'}\sigma(\lambda)^{-1} x \in A$, entonces $\frac{1}{\alpha'} x \in A$. Lo anterior muestra que $\{\alpha > 0 : x \in \alpha A\} = \{\alpha' > 0 : \sigma(\lambda) x \in \alpha' A\}$; así, $p_A(\sigma(\lambda)^{-1} x) = p_A(x)$.

(d) Tomemos $x \in A$. Por la continuidad de la función $\lambda \mapsto \lambda x$ y dado que A es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $\lambda x \in A$ si $|\lambda - 1| < \delta$. Si $0 < \epsilon < \delta$, entonces $(1 + \epsilon) x \in A$; así, $p_A(x) \leq \frac{1}{1+\epsilon}$ por la definición de p_A y entonces $p_A(x) < 1$ por tanto $A \subset \{x \in X : p_A(x) < 1\}$.

Inversamente, si $p_A(x) < 1$, entonces existe $0 < \alpha < 1$ tal que $x \in \alpha A$. Si A es balanceado, se sigue que $x \in A$. Por otra parte, como $x = \alpha a + (1 - \alpha)\, 0$ para algún $a \in A$, entonces $x \in A$ si A es convexo. Es decir, en cualquiera de los dos casos se cumple que $\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subset A$.

(e) Por el inciso *(a)* solo falta ver que $\{x \in X : p_A(x) \leq 1\} \subset A$. Para cuando $p_A(x) < 1$, la prueba es idéntica a la que está en el párrafo anterior.

Afirmamos que $p_A(x) = 1$ implica que $x \in A$. De lo contrario, x está en el abierto $X \setminus A$. Por la continuidad de la función $\lambda \to \lambda x$, existe $0 < \delta < 1$ tal que $\lambda y \in X \setminus A$ si $|\lambda - 1| < \delta$.

Sea $0 < \epsilon < \delta$, por la definición de la funcional de Minkowski, existe $1 \leq \alpha < \frac{1}{1-\epsilon}$ tal que $x \in \alpha A$. Entonces $\left|\frac{1}{\alpha} - 1\right| < \delta$ y $\frac{1}{\alpha}x \in A$, lo cual contradice la elección de δ. $\square$

Un teorema muy importante es el Teorema de Hahn-Banach que a continuación enunciamos. Omitimos su demostración; ésta se puede consultar en [**11**]

TEOREMA DE HAHN-BANACH. *Sean p una funcional sublineal en un e.v. real X y $f : V \to \mathbb{R}$ una funcional lineal en un subespacio vectorial V de X tal que $f(y) \leq p(y)$ para todo $y \in V$. Entonces existe una funcional lineal F en X tal que $F|_V = f$ y $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$.*

1.1.4. Operadores lineales y seminormas continuos en espacios vectoriales topológicos. Un concepto fundamental es la continuidad de operadores lineales y seminormas. Al respecto tenemos los siguientes resultados.

TEOREMA 1.1.22. *Sean X y Y dos espacios e.v.t. y $T : X \to Y$ un operador lineal. Consideremos las siguientes propiedades:*

(a) T es continuo.

(b) T es continuo en 0.

(c) T es acotado en una vecindad de 0. *Es decir existe una vecindad V de* 0 *en X tal que $T(V)$ es un conjunto acotado en Y.*

Entonces (a)⇔(b) y (c)⇒(b). Si T es una funcional lineal, entonces los tres incisos son equivalentes

DEMOSTRACIÓN. *(b)⇒(a)* Sea $x_0 \in X$ y V una vecindad en Y de $T(x_0)$. Por la Proposición 1.1.3 $-T(x_0)+V$ es una vecindad en Y de cero. Por ser T continua en cero, existe U vecindad en X de cero, tal que para todo $x \in U$ sucede que $T(x) \in -T(x_0)+V$. Como x_0+U es una vecindad en X de x_0 y se cumple que $T(x_0)+T(x) \in V$ para todo $x \in U$ se sigue que T es continua en x_0.

(c)⇒(b) Supongamos que $T(U)$ es acotado en Y para alguna vecindad U de 0 en X. Sea V una vecindad de 0 en Y. Existe un escalar λ no nulo tal que $T(U) \subset \lambda V$. Así, $T\left(\frac{1}{\lambda}U\right) \subset V$ y como $\frac{1}{\lambda}U$ es una vecindad de 0 se sigue (b).

Supongamos que T es una funcional lineal continua en 0 que satisface *(b)*. Existe una vecindad U de 0 en X tal que $|T(x)| < 1$ si $x \in U$. O sea, T está acotada en U. $\square$

El siguiente es el resultado análogo al anterior para seminormas

TEOREMA 1.1.23. *Sea p una seminorma en el e.v.t. X. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.*

(a) p es continua.

(b) p es continua en 0.

(c) p es acotada en una vecindad de 0. Es decir existe una vecindad V de 0 en X y $M > 0$ tales que

$$p(x) \leq M$$

para todo $x \in V$.

DEMOSTRACIÓN. Sólo probaremos *(b)⇒(a)*. Sea $x_0 \in X$ y $\epsilon > 0$. Existe una vecindad U en X de 0 tal que $p(x) < \epsilon$ si $x \in U$. Entonces,

$$|p(x) - p(x_0)| \leq p(x - x_0) < \epsilon$$

si $x \in x_0 + U$. O sea, p es continua en x_0. □

1.2. Espacios localmente convexos

Entre las topologías vectoriales que puede tener un e.v. es importante mencionar las topologías inducidas por una familia arbitraria de seminormas.

DEFINICIÓN 1.2.1. Sea $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ una familia de seminormas en X. Definimos la topología $\tau(\mathcal{P})$ en X de la siguiente manera:

$U \in \tau(\mathcal{P})$, si dado $x \in U$ existen $\epsilon > 0$, $n \geq 1$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Lambda$ tales que

$$x \in V_{\alpha_1, \cdots \alpha_n, \epsilon}(x) = \{y \in X : p_{\alpha_i}(y - x) < \epsilon \text{ para } 1 \leq i \leq n\} \subset U.$$

Aunque no es usual, a los conjuntos $V_{\alpha_1, \cdots \alpha_n, \epsilon}(x)$ los llamaremos *semibolas* con centro en x y radio ϵ.

Veamos que $\tau(\mathcal{P})$ efectivamente es una topología en X.

(i) Es claro que $\emptyset, X \in \tau(\mathcal{P})$.

(ii) Si $\mathcal{U}$ es una subfamilia de $\tau(\mathcal{P})$ y $x \in \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U$, entonces $x \in U$ para algún $U \in \mathcal{U}$.

Como $U \in \tau(\mathcal{P})$ existen $\epsilon > 0$, $n \geq 1$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Lambda$ tales que $x \in V_{\alpha_1, \cdots \alpha_n, \epsilon}(x) \subset U$; de donde , $x \in V_{\alpha_1, \cdots \alpha_n, \epsilon}(x) \subset \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U$. Por tanto,

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \tau(\mathcal{P}).$$

(iii) Dados $U_1, U_2 \in \tau(\mathcal{P})$ y $x \in U_1 \cap U_2$, existen $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$,$n, m \geq 1$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$,$\alpha'_1, \cdots, \alpha'_m \in \Lambda$ tales que $x \in V_{\alpha_1,\cdots\alpha_n,\epsilon_1}(x) \cap V_{\alpha'_1,\cdots\alpha'_m,\epsilon_2}(x)$. Si $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ entonces $x \in V_{\alpha_1,\alpha_n,\alpha'_1,\cdots\alpha'_m,\epsilon}(x) \subset U_1 \cap U_2$. Así,

$$U_1 \cap U_2 \in \tau(\mathcal{P}).$$

Entonces, como afirmamos $\tau(\mathcal{P})$ es una topología en X.

PROPOSICIÓN 1.2.2. *La topología $\tau(\mathcal{P})$ definida en X por la familia $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de seminormas, y los conjuntos $V_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\epsilon}(x)$ tienen las siguientes propiedades.*

(a) $V_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\epsilon}(x)$ es convexo y vecindad abierta de x en $(X, \tau(\mathcal{P}))$.

(b) $V_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\epsilon}(0)$ es balanceado y absorbente.

(c) $(X, \tau(\mathcal{P}))$ es un espacio vectorial topológico.

(d) Cada seminorma p_α es continua para la topología $\tau(\mathcal{P})$.

DEMOSTRACIÓN. *(a)* Observamos que $x \in V_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\epsilon}(x) = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\alpha_i,\epsilon}(x)$ y en vista de la Proposición 1.1.9 basta probar que $V_{\alpha,\epsilon}(x)$ es abierto y convexo para todo $x \in X$, $\alpha \in \Lambda$ y $\epsilon > 0$.

Sean $y \in V_{\alpha,\epsilon}(x)$ y $\delta = \epsilon - p_\alpha(y - x)$. Tomemos $z \in V_{\alpha,\delta}(y)$, así

$$p_\alpha(z - x) \leq p_\alpha(z - y) + p_\alpha(y - x) < \delta + p_\alpha(y - x) = \epsilon;$$

por tanto, $z \in V_{\alpha,\epsilon}(x)$. O sea, $V_{\alpha,\delta}(y) \subset V_{\alpha,\epsilon}(x)$; lo que demuestra que $V_{\alpha,\epsilon}(x)$ es abierto.

Por otra parte, si $y, z \epsilon V_{\alpha,\epsilon}(x)$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, entonces

$$p_\alpha((\lambda_1 y + \lambda_2 z) - x) \leq \lambda_1 p_\alpha(y - x) + \lambda_2 p_\alpha(z - x) < (\lambda_1 + \lambda_2)\epsilon = \epsilon;$$

es decir, $\lambda_1 y + \lambda_2 z \in V_{\alpha,\epsilon}(x)$ y por tanto, $V_{\alpha,\epsilon}(x)$ es convexo.

(b) Debido a que $V_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\epsilon}(0) = \bigcap_{i=1}^{n} V_{\alpha_i,\epsilon}(0)$ y a la Proposición 1.1.9 basta probar que $V_{\alpha,\epsilon}(0)$ es balanceado y absorbente para todo $x \in X$, $\alpha \in \Lambda$ y $\epsilon > 0$.

Sean $y \in V_{\alpha,\epsilon}(0)$ y $|\lambda| \leq 1$. Como p_α es absolutamente homogénea, se cumple que

$$p_\alpha(\lambda y) = |\lambda| p_\alpha(y) \leq p_\alpha(y) < \epsilon,$$

que es lo mismo que $\lambda y \in V_{\alpha,\epsilon}(0)$. O sea, $V_{\alpha,\epsilon}(0)$ es balanceado.

Tomemos $x \in X$. Si $p_\alpha(x) = 0$, entonces para cualquier $\lambda > 0$ se cumple que $x \in \lambda V_{\alpha,\epsilon}(0)$. Supongamos que $p_\alpha(x) \neq 0$ y hagamos $\frac{1}{\epsilon} p_\alpha(x) < r_x$. Entonces

$$p_\alpha(\frac{x}{r_x}) = \frac{1}{r_x} p_\alpha(x) = \epsilon;$$

De donde, el conjunto balanceado $V_{\alpha,\epsilon}(0)$ es también absorbente.

(c) Sean $x_0, y_0 \in X$ y U un abierto de X que contiene a $x_0 + y_0$. Existen, $\epsilon > 0$, $n \geq 1$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Lambda$ y $x_0, y_0 \in X$ tales que $V_{\alpha_1,\cdots\alpha_n,\epsilon}(x_0 + y_0) \subset U$.

Para $(x, y) \in V_{\alpha_1,\cdots\alpha_n,\frac{\epsilon}{2}}(x_0) \times V_{\alpha_1,\cdots\alpha_n,\frac{\epsilon}{2}}(y_0)$ tenemos que

$$p_{\alpha_i}(x + y - (x_0 + y_0)) \leq p_{\alpha_i}(x - x_0) + p_{\alpha_i}(y - y_0) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

para todo $1 \leq i \leq n$; que equivale a decir que $x + y \in V_{\alpha_1,\cdots\alpha_n,\epsilon}(x_0 + y_0)$. Por tanto, la suma vectorial es continua.

Sean $x_0 \in X$, $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ y V un abierto de X que contiene a $\lambda_0 x_0$. Existen $\epsilon > 0$, $n \geq 1$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \Lambda$ tales que $V_{\alpha_1,\cdots\alpha_n,\epsilon}(\lambda_0 x_0) \subset U$. Consideramos las igualdades

$$\begin{aligned}
\lambda x - \lambda_0 x_o &= \lambda x - \lambda_0 x + \lambda_0 x - \lambda_0 x_0 \\
&= (\lambda - \lambda_0)x + \lambda_0(x - x_0) - (\lambda - \lambda_0)x_0 + (\lambda - \lambda_0)x_0 \\
&= (\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0
\end{aligned}$$

-entonces,

$$p_{\alpha_i}(\lambda x - \lambda_0 x_o) \leq |\lambda - \lambda_0| p_{\alpha_i}(x - x_0) + |\lambda_0| p_{\alpha_i}(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0| p_{\alpha_i}(x_0).$$

Si $(\lambda, x) \in B_\delta(\lambda_0) \times V_{\alpha_1,\cdots\alpha_n,\delta}(x_0)$, con $\delta > 0$, entonces de la desigualdad anterior se obtiene

$$p_{\alpha_i}(\lambda x - \lambda_0 x_o) < \delta^2 + |\lambda_0|\delta + \delta p_{\alpha_i}(x_0).$$

Al tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeño tenemos

$$p_{\alpha_i}(\beta x - \beta_0 x_o) < \epsilon.$$

Así, el producto por un escalar es continuo.

(d) Basta probar que p_α es continua en 0 y esto se tiene porque $\{x \in X : p_\alpha(x) < \epsilon\}$ es una $\tau(\mathcal{P})$ vecindad de 0 para cada $\epsilon > 0$. □

COROLARIO 1.2.3. *Sea $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de seminormas en X. Para cada $x \in X$ se cumple que*

$$V_{\alpha_1,\cdots\alpha_n,\epsilon}(x) = x + \epsilon V_{\alpha_1,\cdots\alpha_n,1}(0).$$

Los conjuntos $V_{\alpha_1,\cdots\alpha_n,\epsilon}(x)$ al variar n, ϵ y los indices α constituyen una base local en x para la topología $\tau(\mathcal{P})$, formada por abiertos convexos. En particular, los conjuntos $V_{\alpha_1,\cdots\alpha_n,\epsilon}(0)$ constituyen una base local de 0 formada por abiertos, balanceados y convexos.

PROPOSICIÓN 1.2.4. *Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son dos familias de seminormas en X, con $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$, entonces $\tau(\mathcal{P}) \subset \tau(\mathcal{Q})$. Si $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$* y $\mathcal{P}'$ es su saturación, entonces $\tau(\mathcal{P}) = \tau(\mathcal{P}')$.

Demostración. Es claro que cada semibola $V_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\epsilon}(x)$ en τ es una semibola en $\tau(\mathcal{Q})$ pues $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$. Esto implica que $\tau(\mathcal{P}) \subset \tau(\mathcal{Q})$.

Por lo antes visto, $\tau(\mathcal{P}) \subset \tau(\mathcal{P}')$. Recíprocamente, sean $U \in \tau(\mathcal{P}')$ y $x \in U$, por ser U abierto en la topología $\tau(\mathcal{P}')$, existen $F_1, \cdots, F_n \subset \mathcal{P}$ finitos no vacíos y $\epsilon > 0$ tales que $V_{q_{F_1},,q_{F_n},\epsilon}(x) \subset U$ donde q_{F_i} es como en la Definición 1.1.18. Sea $F = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} F_i$. Por ser F unión finita de conjuntos finitos, éste también es finito; digamos que $F = \{p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_m}\}$. Ahora probaremos que $V_{\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\epsilon}(x) \subset U$, así resultará que $U \in \tau(\mathcal{P})$. Tomemos $y \in V_{\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\epsilon}(x)$, entonces $p_{\alpha_j}(y-x) < \epsilon$ para toda $1 \leq j \leq m$, en particular $\max\limits_{1\leq j\leq m} p_{\alpha_j}(y-x) < \epsilon$, como $F_i \subset F$, se sigue que $q_{F_i}(y-x) \leq \max\limits_{1\leq j\leq m} p_{\alpha_j}(y-x)$ para cada $1 \leq i \leq n$, por tanto $y \in V_{q_{F_1},,q_{F_n},\epsilon}(x) \subset U$. De donde, $\tau(\mathcal{P}') \subset \tau(\mathcal{P})$. □

Definición 1.2.5. Un espacio vectorial topológico (X, τ) es llamado localmente convexo (e.l.c.) si $\tau = \tau(\mathcal{P})$ para alguna familia de seminormas $\mathcal{P}$. Por la Proposición 1.2.4 esto equivale a que su topología esté dada por una familia saturada de seminormas.

A un espacio localmente convexo se les denotará por $(X, \mathcal{P})$, donde $\mathcal{P}$ es una familia de seminormas que induce la topología de X.

Cuando la familia $\mathcal{P}$ tiene un sólo elemento p, entonces escribimos $(X, \tau) = (X, p)$ y decimos que es un espacio seminormado.

Si (X, p) es seminormado, entonces $V_{p,\epsilon}(x) = \{y \in X : p\,(y-x) < \epsilon\}$, con $\epsilon > 0$, será llamada la bola abierta con centro en x y radio ϵ, definida por la semidistancia $d\,(x, y) = p\,(y-x)$. Por tanto, en este caso una base de vecindades de 0 está dada por la familia de bolas abiertas con centro en 0. La bola cerrada con centro en x y radio ϵ se denotará por $B_\epsilon\,[x]$ y la abierta por $B_\epsilon\,(x)$, como ya lo hemos hecho en el campo. La familia de bolas cerradas con centro en 0 es también una base local del 0. Cuando p es una norma, entonces d es una distancia.

Proposición 1.2.6. *Un espacio localmente convexo $(X, \mathcal{P})$ es un espacio de Hausdorff si y sólo si para todo $x \neq 0$ existe $p \in \mathcal{P}$ tal que $p(x) \neq 0$.*

Demostración. Si $x \neq 0$ y $(X, \mathcal{P})$ es un espacio Hausdorff, entonces existen $p_1, \cdots p_n \in \mathcal{P}$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$x \notin V_{p_1,\cdots p_n,\epsilon}(0)$$

así, $p_i(x) \neq 0$ para algún $1 \leq i \leq n$.

Para probar el recíproco, supongamos que $x_1 \neq x_2$. Por hipótesis existe $p \in \mathcal{P}$ que cumple $p(x_1 - x_2) \neq 0$. Para $\epsilon = p(x_1 - x_2)$ tenemos que

$$V_{p,\frac{\epsilon}{2}}(x_1) \cap V_{p,\frac{\epsilon}{2}}(x_2) = \emptyset.$$

□

PROPOSICIÓN 1.2.7. *Una red* $(x_i)_{i\in I}$ *converge a* 0 *en un espacio* X *con la topología* $\tau(\mathcal{P})$ *si y sólo si la red* $(p\,(x_i))_{i\in I}$ *converge a* 0 *en* $\mathbb{F}$ *para cada* $p \in \mathcal{P}$.

DEMOSTRACIÓN. Cada $p \in \mathcal{P}$ es continua en cero para la topología $\tau(\mathcal{P})$, por lo que si $(x_i)_{i\in I}$ converge a cero con ésta topología, entonces $(p\,(x_i))_{i\in I}$ converge a $p(0) = 0$ en $\mathbb{F}$ para cada $p \in \mathcal{P}$.

Recíprocamente, supongamos que $(p\,(x_i))_{i\in I}$ converge a cero en $\mathbb{F}$ para cada $p \in \mathcal{P}$. Sean $\epsilon > 0$ y $p_{\alpha_n}, \cdots, p_{\alpha_n} \in \mathcal{P}$. Por hipótesis, para $p_{\alpha_k} \in \mathcal{P}$, existe $j_k \in I$ tal que $|p_{p_{\alpha_k}}(x_i)| < \epsilon$ si $j_k \leq i$. Por ser I un conjunto dirigido, existe $j \in I$ tal que $j_k \leq j$ para toda $1 \leq k \leq n$, así, $j \leq i$ implica $|p_{\alpha_k}(x_i)| < \epsilon$ para cada $1 \leq k \leq n$, lo que equivale a decir que $x_i \in V_{\alpha_1,\cdots\alpha_n,\epsilon}(0)$ si $j \leq i$. De donde, $(x_i)_{i\in I}$ converge a cero en $(X, \tau(\mathcal{P}))$. $\square$

COROLARIO 1.2.8. *Una red* $(x_i)_{i\in I}$ *converge a* x *en un espacio* X *con la topología* $\tau(\mathcal{P})$ *si y sólo si la red* $(p\,(x_i - x))_{i\in I}$ *converge a* 0 *en* $\mathbb{F}$ *para cada* $p \in \mathcal{P}$.

1.3. Operadores lineales y seminormas continuos en espacios localmente convexos

PROPOSICIÓN 1.3.1. *Una seminorma* q *en un e.l.c.* $(X, \mathcal{P})$, *con* $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, *es continua si y sólo si existen* $n \geq 1$ $p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n} \in \mathcal{P}$ *y* $M > 0$ *tales que*

$$q(x) \leq M \, \max\{p_{\alpha_1}(x), \cdots, p_{\alpha_n}(x)\} \tag{1.3.1}$$

para todo $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN. Para la parte "si" basta probar, por el Teorema 1.1.23, que q es continua en 0. Sean $\epsilon > 0$ y $V = \{x \in X : p_{\alpha_i}(x) < \epsilon;\ 1 \leq i \leq n\}$. Entonces

$$q(x) < \epsilon$$

para todo $x \in V$. Por lo que q es continua en 0.

Recíprocamente, si q es continua en 0, entonces existen $\delta > 0$, $n \geq 1$ y $p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n} \in \mathcal{P}$ tales que si $p_{\alpha_i}(x) < \delta$ para todo $1 \leq i \leq n$, entonces $q(x) < 1$; o lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{\delta}\max_{1\leq i\leq n}\{p_{\alpha_i}(x)\} < 1 \text{ implica } q(x) < 1.$$

Como $\frac{1}{\delta}\max\limits_{1\leq i\leq n}\{p_{\alpha_i}(x)\}$ y q son seminormas en X se sigue de la Proposición 1.1.19 que

$$q(x) \leq \frac{1}{\delta}\max_{1\leq i\leq n}\{p_{\alpha_i}(x)\}$$

para todo $x \in X$, por lo cual se cumple (1.3.1) . $\square$

COROLARIO 1.3.2. *Sean* $(X, \mathcal{P})$ *un e.l.c. A la colección de todas las seminormas continuas en* $(X, \mathcal{P})$ *la denotaremos por* $\mathcal{P}_c$. *Entonces la familia* $\mathcal{P}_c$ *está saturada y* $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_c$.

Demostración. Por las Proposiciones anterior y 1.2.2, la familia $\mathcal{P}_c$ está saturada y $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_c$. $\square$

Corolario 1.3.3. *Sean $(X, \mathcal{P})$ un espacio localmente convexo. Entonces $\tau(\mathcal{P}) = \tau(\mathcal{P}_c)$.*

Demostración. Como $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_c$, entonces por la Proposición 1.2.4 $\tau(\mathcal{P}) \subset \tau(\mathcal{P}_c)$. Para la otra contención, dado que la familia de conjuntos $V_{q,\epsilon}(x)$ es una base local en x para $\tau(\mathcal{P}_c)$, al variar $\epsilon > 0$ y $q \in \mathcal{P}_c$, bastará probar que cualquier conjunto $V_{q,\epsilon}(x)$ es una vecindad de x en la topología $\tau(\mathcal{P})$.

Sean $\epsilon > 0$ y $q \in \mathcal{P}_c$. Por ser q una seminorma continua en $(X, \mathcal{P})$. Por la Proposición anterior existen $M > 0$ y $p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n} \in \mathcal{P}$ tales que satisface (1.3.1) para todo $x \in X$. Así, $p_{\alpha_i}(y-x) < \frac{\epsilon}{M}$ para todo $1 \leq i \leq n$, implica $q(y-x) < \epsilon$. Es decir, $V_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\frac{\epsilon}{M}}(x) \subset V_{q,\epsilon}(x)$. Así, $\tau(\mathcal{P}_c) \subset \tau(\mathcal{P})$. $\square$

Proposición 1.3.4. *Sean $(X, \mathcal{P})$ un e.l.c. y $T : Z \to X$ un operador lineal, donde Z es un e.v.t. El operador es continuo si y sólo si $p \circ T$ es una seminorma continua en Z para cada $p \in \mathcal{P}$.*

Demostración. Sabemos que $T : Z \to X$ es un operador lineal, entonces $p \circ T$ es una seminorma. Si T es continuo entonces $p \circ T$ es continua para cada $p \in \mathcal{P}$.

Para probar el recíproco, sea $(z_i)_{i \in I}$ una red convergente a cero en Z. Entonces la red $(p \circ T(z_i))_{i \in I}$ converge a cero para cada $p \in \mathcal{P}$ lo cual implica, por la Proposición 1.2.7, que $(T(z_i))_{i \in I}$ convergen a cero en $(X, \mathcal{P})$, o sea, T es continuo en cero y por el Teorema 1.1.22 esto es lo mismo que decir que T es continuo en Z. $\square$

Corolario 1.3.5. *Sean $(X, \mathcal{P})$ un e.l.c. y $T : Z \to X$ un operador lineal, donde Z es un e.v.t. El operador es continuo si y sólo si $p \circ T$ es una seminorma continua en Z para cada $p \in \mathcal{P}_c$.*

Demostración. Basta observar que $(X, \mathcal{P}) = (X, \mathcal{P}_c)$, y luego aplicar el resultado anterior a la familia de seminormas $\mathcal{P}_c$. $\square$

A continuación presentamos un resultado que es consecuencia de lo anterior y que nos facilitará comprobar la continuidad de operadores lineales entre espacios localmente convexos.

Teorema 1.3.6. *Sean $(X, \mathcal{P})$ y $(Y, \mathcal{Q})$ dos espacios localmente convexos, con $\mathcal{P} = \{p_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$.*

(a) Un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si y sólo si se cumple la siguiente propiedad:

(P) Para cada $q \in \mathcal{Q}$ *existen* $p_{\alpha_1}, \cdots, p_{\alpha_n} \in \mathcal{P}$ *y* $M > 0$ *tales que*

$$q(T(x)) \leq M \max\{p_{\alpha_1}(x), \cdots, p_{\alpha_n}(x)\} \tag{1.3.2}$$

para todo $x \in X$.

(b) Si $\mathcal{P}$ *está saturada, entonces la condición (P) se convierte en: para cada* $q \in \mathcal{Q}$ *existe* $p \in \mathcal{P}$ *y* $M > 0$ *tales que*

$$q(T(x)) \leq M\ p(x). \tag{1.3.3}$$

para todo $x \in X$.

(c) T *es continuo si y sólo si para cada* $q \in \mathcal{Q}$ *existen* $p \in \mathcal{P}_c$ *tal que*

$$q(T(x)) \leq\ p(x). \tag{1.3.4}$$

para todo $x \in X$.

Demostración. (a) Por la Proposición 1.3.4, T es continua si y sólo si $q \circ T$ es una seminorma continua en X y por la Proposición 1.3.1 esto equivale a la propiedad (P).

Las afirmaciones (b) y (c) se siguen inmediatamente. Para la parte (c) hay que observar que un múltiplo positivo de una seminorma continua también lo es. □

Corolario 1.3.7. *Sean* (X, p) *y* (Y, q) *dos espacios seminormados. Un operador lineal* $T : X \to Y$ *es continuo si y sólo si existe* $M > 0$ *tal que*

$$q(T(x)) \leq M\, p(x) \tag{1.3.5}$$

para todo $x \in X$.

1.4. Espacios normados

Entre los espacios seminormados están los normados, que serán parte primordial de este trabajo.

Definición 1.4.1. Sea $\|\cdot\|$ una norma en X, entonces $(X, \|\cdot\|)$ es un e.l.c y será llamado espacio normado. Una base local de vecindades del 0 está dada por las bolas abiertas con centro en 0 definidas por la distancia inducida por la norma: $d(x, y) = \|y - x\|$.

Recordamos que en los espacios seminormados y en particular en los normados denotaremos a la bola abierta con centro en x y radio r como $B_r(x)$ y a la bola cerrada correspondiente como $B_r[x]$. Cuando $x = 0$ y $r = 1$ escribiremos B_X en lugar de $B_1[0]$ si estamos trabajando en el espacio normado X.

- Una sucesión (x_n) en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es de Cauchy si para cada $\epsilon > 0$ existe un natural N tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ si $n, m > N$.
- Un conjunto A de un espacio normado es acotado si existe $K > 0$ tal que $\|x\| \leq K$ para todo $x \in A$. Esto es equivalente a la condición establecida en la Definición 1.1.8.

DEFINICIÓN 1.4.2. Diremos que la norma $\|\cdot\|$ es completa en X o que $(X, \|\cdot\|)$ es completo si cada sucesión de Cauchy en X converge en X. A un espacio normado X cuya norma es completa se le conoce como espacio de Banach.

TEOREMA 1.4.3. *Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente es convergente en X.*

DEMOSTRACIÓN. La parte "si" la haremos por contrapositiva. Supongamos que X no es un espacio de Banach. Sea (x_n) una sucesión de Cauchy que diverge en X. Para cada natural j existe $N_j \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{2^j}$ si $n, m \geq N_j$ y $N_j < N_{j+1}$. Dado que la sucesión (x_n) diverge y $\sum_{j=1}^{k} (x_{N_{j+1}} - x_{N_j}) = x_{N_k} - x_{N_1}$ para cada natural k, la serie $\sum_j (x_{N_{j+1}} - x_{N_j})$ diverge. Por otro lado, $\sum_j \|x_{N_{j+1}} - x_{N_j}\| \leq \sum_j \frac{1}{2^j} = 1$; es decir, es absolutamente convergente.

Recíprocamente, supongamos que $(X, \|\cdot\|)$ es de Banach y sea $\sum_n x_n$ una serie absolutamente convergente, entonces la sucesión de sumas parciales $(\sum_{n=1}^{k} \|x_n\|)$ es de Cauchy. Para $m_1 < m_2$, se cumple que

$$\| \sum_{n=1}^{m_2} x_n - \sum_{n=1}^{m_1} x_n \| \leq \sum_{n=m_1+1}^{m_2} \|x_n\|.$$

De donde la sucesión de sumas parciales $(\sum_{n=1}^{k} x_n)$ es de Cauchy en X, y por tanto, la serie $\sum_n x_n$ es convergente. $\square$

Entre espacios normados, la continuidad de transformaciones lineales será más fácil de comprobar usando el siguiente teorema.

TEOREMA 1.4.4. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ y $(Y, \|\cdot\|)$ dos espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes.*

(a) T es continuo.

(b) T es continuo en 0.

(c) T es uniformemente continuo en X.

(d) T es acotado; es decir, $T(B)$ es acotado en Y si B es acotado en X.

(e) Existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$.

(f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in B\} < \infty$ *para cualquier* $B \subset X$ *acotado.*

Si además $Y = \mathbb{F}$ *se puede agregar*

(g) $\ker(T)$ *es cerrado.*

Al conjunto de todos los operadores lineales continuos de X *en* Y *se le denota como* $B\,(X, Y)$.

Demostración. Sabemos que $(a) \Leftrightarrow (b)$ en cualquier e.v.t. y es inmediato que $(c) \Rightarrow (a)$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Si suponemos que T es continuo en 0 y tomamos $\epsilon > 0$ y $x, y \in X$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\|T(x-y)\| < \epsilon$ si $\|x-y\| < \delta$. Como T es un operador lineal $T(x-y) = T(x) - T(y)$; de lo cual se sigue que T es uniformemente continuo.

$(a) \Leftrightarrow (e)$ Esta equivalencia está probada en el Corolario 1.3.7, ya que en particular X y Y son espacios seminormados.

$(d) \Rightarrow (e)$ Si T es acotado, entonces existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M$ si $\|x\| = 1$. Así, $x \neq 0$ implica $\|T(\frac{1}{\|x\|}x)\| \leq M$ y como T es lineal entonces $\|T(x)\| \leq M\|x\|$. Cuando $x = 0$, también se cumple esta desigualdad.

$(e) \Rightarrow (d)$ Supongamos que existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$, y sea $B \subset X$ un conjunto acotado. Existe $K > 0$ tal que $\|x\| \leq K$ para todo $x \in B$. Entonces $\|T(x)\| \leq MK$ si $x \in B$, es decir, $T\,(B)$ es acotado.

Es claro que $(e) \Leftrightarrow (f)$, como (a) es continuidad en todo el espacio, en particular $(a) \Rightarrow (b)$, además, continuidad uniforme siempre implica continuidad, por tanto $(c) \Rightarrow (a)$.

Con lo anterior queda probado la equivalencia de la afirmaciones $(a) - (f)$.

Supongamos que $Y = \mathbb{F}$.

$(a) \Rightarrow (g)$ Si T es continua, entonces $\mathrm{T}^{-1}\,(0) = \ker(T)$ es cerrado.

$(g) \Rightarrow (e)$ Recíprocamente, supongamos que $\ker(T)$ es cerrado. Si $T \equiv 0$ entonces es inmediato que T es continua. Supongamos que existe $x_1 \in X$ tal que $T(x_1) \neq 0$ y sea $y = \frac{x_1}{T(x_1)}$. Entonces $y \in X \backslash \ker(T)$ y este conjunto es abierto en X. En consecuencia, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta\,[y] \subset X \backslash \ker(T)$. Afirmamos que

$$B_\delta\,[0] \subset \{x \in X : |T(x)| < 1\}. \tag{1.4.1}$$

Supongamos lo contrario, entonces existe $x_0 \in B_\delta\,[0]$ tal que $|T(x_0)| \geq 1$. Tenemos que $z \in B_\delta\,[0]$, donde $z = \frac{-x_0}{T(x_0)}$. Así, $y + z \in B_\delta\,[y]$ y como $1 = T\,(y) = -T\,(z)$, entonces

$T(y+z)=0$. De donde, $y+z \in \ker(T) \bigcap B_\delta[y]$. Lo que contradice la elección de $B_\delta[y]$ y está probada la afirmación.

Si $x \neq 0$, entonces $\|\frac{\delta}{\|x\|}x\| \leq \delta$. De (1.4.1) se concluye que $|T(\frac{\delta}{\|x\|}x)| < 1$; o equivalentemente $|T(x)| < \frac{1}{\delta}\|x\|$. Cuando $x = 0$ también se cumple la desigualdad. Por tanto, T satisface *(e)*. □

Las isometrías juegan un papel importante en análisis funcional, además formarán parte de algunos de los resultados que estudiaremos. Es por eso que introducimos su definición.

Definición 1.4.5. Sean X, Y espacios normados. Decimos que el operador lineal $T : X \to Y$ es una isometría si $\|T(x)\| = \|x\|$ para cada x en X.

Diremos que dos espacios de Banach X y Y, son isométricamente isomorfos si existe un operador $T : X \to Y$ lineal, biyectivo e isométrico, que es llamado isomorfismo isométrico. En tal caso escribiremos $X \approx Y$, o bien $X \overset{T}{\approx} Y$ si queremos hacer explícito al isomorfismo isométrico T .

El espacio $B(X,Y)$ con las operaciones usuales para funciones valuadas en un espacio vectorial es un espacio vectorial. Definiremos en $B(X,Y)$ una norma que lo hace completo cuando Y es completo.

Teorema 1.4.6. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ y $(Y, \|\cdot\|)$ dos espacios normados. La función $\|\cdot\|$ definida en $B(X,Y)$ como*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_1[0]\} \tag{1.4.2}$$

es una norma, llamada la norma uniforme. Además,

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in B_1(0)\}. \tag{1.4.3}$$

Entonces,

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$$

para todo $x \in X$ y

$$\|\mathrm{T}\| = \min\{M \geq 0 : \|T(x)\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in X\}. \tag{1.4.4}$$

Y si X no es el espacio nulo, entonces también se tiene que

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} = \sup\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\}. \tag{1.4.5}$$

Si $(Y, \|\cdot\|)$ es de Banach, entonces $B(X,Y)$ es de Banach con la norma uniforme.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 1.4.4 el lado derecho de (1.4.2) es un real, mayor o igual a cero. Es inmediato comprobar que $\|\cdot\|$ es una norma en $B(X,Y)$.

Dado que se tiene la siguiente contención

$$\{x \in X : x \in B_1(0)\} \subset \{x \in X : x \in B_1[0]\}$$

se cumple que

$$\sup\{\|T(x)\| : x \in B_1(0)\} \leq \|T\|.$$

Ahora, supongamos que $\|x\| \leq 1$ entonces $\|\frac{x}{\|x\|+\epsilon}\| < 1$ para todo $\epsilon > 0$; de lo cual se sigue que

$$\left\| \frac{1}{\|x\|+\epsilon} T(x) \right\| \leq \sup\{\|T(x)\| : x \in B_1(0)\}$$

o lo que es lo mismo,

$$\|T(x)\| \leq (1+\epsilon) \sup\{\|T(x)\| : \|x\| < 1\}\}$$

para todo $\epsilon > 0$. De donde,

$$\|T\| \leq \sup\{\|T(x)\| : \|x\| < 1\}.$$

Se obtiene entonces la igualdad de (1.4.3).

Es claro que $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ si $x = 0$. Cuando $x \neq 0$ se cumple que $\left\|\frac{T(x)}{\|x\|}\right\| \leq \|T\|$, y por consiguiente,

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|.$$

De esto y la definición de $\|T\|$ se sigue (1.4.4).

De modo similar a la primera parte, se prueban las igualdades en (1.4.5).

Para probar que $B(X,Y)$ es de Banach con la norma uniforme, supongamos que $\sum_n T_n$ es una serie absolutamente convergente en $B(X,Y)$. Por el Teorema 1.4.3 bastará probar que la serie es convergente en $B(X,Y)$. Tomemos $x \in X$, entonces

$$\sum_n \|T_n(x)\| \leq \|x\| \sum_n \|T_n\|, \tag{1.4.6}$$

lo cual implica que la serie $\sum_n \|T_n(x)\|$ es absolutamente convergente en Y para cada x. Por ser Y un espacio de Banach, entonces la serie $\sum_n T_n(x)$ es convergente . Definimos $T : X \to Y$ de la siguiente manera

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x).$$

Por las propiedades lineales de las series y la ecuación 1.4.6 es fácil mostrar que $T \in B(X,Y)$.

Supongamos que $m_2 \geq m_1$, entonces $\| \sum_{n=1}^{m_2} T_n - \sum_{n=1}^{m_1} T_n \| \leq \sum_{n=m_1}^{m_2} \|T_n\|$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m_1 \geq m_2 \geq N$ entonces

$$\|(\sum_{n=1}^{m_2} T_n - \sum_{n=1}^{m_1} T_n)(x)\| \leq \sum_{n=m_1}^{m_2} \|T_n\| < \epsilon$$

para todo $x \in X$, con $\|x\| = 1$. Manteniendo fijos a m_2 y $x \in X$, con $\|x\| = 1$, y haciendo tender m_1 a ∞, obtenemos que $\| \sum_{n=1}^{m_2} T_n(x) - T(x)\| < \epsilon$ si $m_2 \geq N$. Así, $\| \sum_{n=1}^{m_2} T_n - T\| < \epsilon$ si $m_2 \geq N$, por tanto $\sum_n T_n \to T$ con la norma uniforme, lo cual completa la demostración. □

1.4.1. El teorema de Hahn-Banach. El teorema de Hahn-Banach es importante por sus consecuencias. Las siguientes son algunas de ellas.

TEOREMA 1.4.7 (Versión para espacios normados del teorema de Hahn-Banach.). *Sea f una funcional lineal continua en un subespacio V de un espacio normado X. Entonces existe una funcional lineal continua F definida en X tal que $\|F\| = \|f\|$ y $F|_V = f$.*

La demostración se puede consultar en **[11]**.

COROLARIO 1.4.8 (Primer corolario del teorema de Hahn-Banach). *Sea V un subespacio cerrado de un espacio normado X. Supongamos que $x \in X \setminus V$. Entonces existe una funcional lineal continua f en X tal que $\|f\| = 1$, $d(x, V) = f(x)$ y $V \subset \ker(f)$, donde $d(x, V)$ es la distancia de x a V; o sea, $d(x, V) = \inf\{\|x - y\| : y \in V\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $y \in V$ y cada escalar α definimos $f_0(y + \alpha x) = \alpha d(x, V)$. Es claro que f_0 es una funcional lineal en $V + < x >$ tal que $f_0(x) = d(x, V)$ y $f_0(y) = 0$ para todo $y \in V$. Para $y \in V$ y $\alpha \neq 0$, tenemos:

$$|f_0(y + \alpha x)| = |\alpha|\, d(x, V) \leq |\alpha| \|x - (-\alpha^{-1})y\| = \|y + \alpha x\|$$

Así, $\|f_0\| \leq 1$. También tenemos que

$$\|f_0\|\|x - y\| \geq |f_0(x - y)| = d(x, V)$$

cuando $y \in V$, por lo que

$$\|f_0\| d(x, V) \geq d(x, V)$$

esto demuestra que $\|f_0\| \geq 1$. Así, $\|f_0\| = 1$. Por el Teorema 1.4.7 podemos extender f_0 a todo X y la extensión es la funcional con las propiedades establecidas. □

COROLARIO 1.4.9 (Segundo corolario del teorema de Hahn-Banach). *Sea $x \neq 0$ un elemento de un espacio normado X, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ y $x^*(x) = \|x\|$.*

TEOREMA 1.4.10. *Sean X un espacio normado, $M > 0$ y f una funcional definida en un conjunto no vacío $G \subset X$. Existe una funcional lineal continua F definida en X que satisface las siguientes dos condiciones*

$$f(x) = F(x) \text{ para todo } x \in G$$

$$\|F\| \leq M$$

si y sólo si se cumple la desigualdad

$$|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)| \leq M \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \| \tag{1.4.7}$$

para cualesquiera natural n, elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in G$ y escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

DEMOSTRACIÓN. Si $f(x) = F(x)$ para todo x en G, y F es una funcional lineal continua tal que $\|F\| \leq M$ entonces

$$|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)| = |\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(x_i)| = |F(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)| \leq \|F\| \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \|$$

de donde se sigue inmediatamente (1.4.7).

Para el recíproco, tomemos $z \in < G >$, es decir, $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ con $n \in \mathbb{N}$,$x_i \in G$, y $\lambda_i \in \mathbb{F}$. Definimos $\phi(z) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$. Si $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda'_i x'_i$, se puede suponer que $n = m$ y se sigue de (1.4.7) que

$$|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i f(x'_i)| \leq M \| \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda'_i) \, x_i \| = 0$$

por lo que la funcional ϕ esta bien definida en $< G >$, claramente es lineal, y por la desigualdad 1.4.7, $\|\phi\| \leq M$ es continua. Aplicando el Teorema de Hahn-Banach para espacios normados obtenemos una funcional lineal continua F con las propiedades buscadas. $\square$

En particular, si G es una sucesión (x_n) de elementos de X y se define la sucesión $c_n = f(x_n)$ para una funcional f, se tiene el siguiente resultado.

COROLARIO 1.4.11. *Sean X un espacio normado $M > 0$, (x_n) una sucesión en X y (c_n) una sucesión escalar. Para que exista una funcional lineal continua F que cumpla las siguientes dos condiciones*

$$F(x_n) = c_n$$

$$\|F\| \leq M$$

es necesario y suficiente que se cumpla la desigualdad

$$|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i| \leq M \parallel \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \parallel$$

para cualesquiera escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$.

Capítulo 2

Los espacios duales

En este capítulo se presentan los resultados necesarios para desarrollar los dos capítulos finales. Resulta un poco extenso porque se busca que el trabajo sea lo más autocontenido posible.

2.1. Los duales: algebraico y topológico

Si X es un e.v.t, entonces el *dual topológico de* X o simplemente *el dual de* X cuando no haya lugar a confusión, es el subespacio X^* de $X^\#$ formado por las funcionales lineales continuas.

Por definición, $X^* \subset X^\#$. Señalamos que el dual algebraico $X^\#$ no siempre coincide con el topológico X^*. De hecho, coinciden si y sólo si X tiene dimensión finita.

Como anunciamos en la subsección 1.1.4, introducimos una nueva notación para las funcionales lineales continuas en X. Las denotaremos por x^*, x_i^*, y^*,etc. en vez de usar letras tales como f, g, h,etc.....

De esta manera podemos reenunciar el Teorema 1.4.4 :

PROPOSICIÓN 2.1.1. *Sea* X *un e.v.t. y* $x^* \in X^\#$. *Las siguientes son afirmaciones equivalentes*

(a) $x^* \in X^*$.

(b) x^* *es continua en* 0.

(c) x^* *es acotada en una vecindad de* 0.

Cuando X *es un espacio normado, las anteriores propiedades equivalen a*

(d) $\|x^*\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} |x^*(x)| < \infty$. *A* $\|x^*\|$ *se llama la norma uniforme de* x^*.

Observamos que si X es un espacio normado, entonces su dual topológico es $X^* = B(X, \mathbb{F})$ y como $\mathbb{F}$ es un espacio de Banach se sigue del Teorema 1.4.6 que X^* es un espacio de Banach con la norma uniforme.

El siguiente resultado, cuya demostración puede consultarse en **[11]**, nos da una condición necesaria y suficiente para que una familia no vacía $\mathcal{F}$ de funcionales lineales continuas en un espacio de Banach $(X, \|\|)$ sea acotada en X^*.

Teorema de Banach-Steinhaus. *Sean X un espacio de Banach y $\mathcal{F} \subset X^*$ una familia no vacía de funcionales. Si* $\sup\{|x^*(x)| : x^* \in \mathcal{F}\}$ *es finito para cada cada x en X, entonces* $\sup\{\|x^*\| : x^* \in \mathcal{F}\}$ *es finito.*

2.1.1. Relación de una funcional compleja con su parte real.

Proposición 2.1.2. *Sea X un espacio vectorial complejo y $X_{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial real correspondiente.*

(a) Si x^* es una funcional lineal compleja en X y r^* es la parte real de x^*, entonces r^* es una funcional lineal real en X y además $x^*(x) = r^*(x) - ir^*(ix)$ para cada $x \in X$.

(b) Si r^* es una funcional lineal real en X, entonces existe una única funcional lineal compleja x^* que tiene a r^* como su parte real .

(c) Si X es un espacio normado, x^* una funcional lineal compleja en X y r^*su parte real, entonces $x^* \in X^*$ si y sólo si $r^* \in X^*_{\mathbb{R}}$. Más aún, $\| x^* \| = \| r^* \|$

Demostración. *(a)* Sea x^* una funcional lineal compleja, r^* su parte real y s^* su parte imaginaria; es decir:

$$x^*(x) = r^*(x) + is^*(x)$$

para todo $x \in X$. Como $x^*(ix) = ix^*(x)$ obtenemos

$$r^*(ix) + is^*(ix) = ir^*(x) - s^*(x)$$

de donde, $s^*(x) = -r^*(ix)$ para todo $x \in X$ y entonces

$$x^*(x) = r^*(x) - ir^*(ix).$$

Para ver que r^* es una funcional lineal real tomemos $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces de las igualdades

$$x^*(x+y) = x^*(x) + x^*(y),$$
$$x^*(\alpha x) = \alpha x^*(x)$$

se siguen

$$r^*(x+y) = r^*(x) + r^*(y),$$
$$r^*(\alpha x) = \alpha r^*(x).$$

(b) Sea r^* una funcional lineal real en X. Definimos $x^*(x) = r^*(x) - ir^*(ix)$. Para ver que x^* es lineal, sean $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned} x^*(\lambda x) &= r^*(\lambda x) - ir^*(i\lambda x) \\ &= r^*(\mathrm{Re}(\lambda)x) + r^*(iIm(\lambda)x) \\ &\quad -ir^*(i\mathrm{Re}(\lambda)x) - ir^*(-\mathrm{Im}(\lambda)x) \\ &= \mathrm{Re}(\lambda)r^*(x) + Im(\lambda)r^*(ix) \\ &\quad -i\mathrm{Re}(\lambda)r^*(ix) + i\mathrm{Im}(\lambda)r^*(x) \\ &= \lambda r^*(x) - i\lambda r^*(ix) \\ &= \lambda x^*(x) \end{aligned}$$

Por otra parte, x^* es aditiva porque r^* lo es.

(c) Como $|r^*(x)| \leq |x^*(x)|$ para todo $x \in X$. Si $x^* \in X^*$, entonces $\|r^*\| \leq \|x^*\|$. En sentido contrario tenemos que $|x^*(x)| = \sigma(x^*(x))x^*(x) = x^*(\sigma(x^*(x)x)$, donde σ es la función signo definida en $\mathbb{F}$, por lo que $r^*(\sigma(x^*(x)x) = |x^*(x)|$. Así, $|x^*(x)| = r^*(\sigma(x^*(x)x) \leq |r^*(x)|$, obteniéndose $\|x^*\| \leq \|r^*\|$. $\square$

2.2. Los espacios c_0, ℓ^p y ℓ^∞

En esta sección consideramos algunos espacios vectoriales particulares que nos ayudarán a ejemplificar algunos de los conceptos introducidos.

Si $\alpha = (\alpha_n)$, es una sucesión escalar acotada, definimos

$$\|(\alpha_n)\|_\infty = \sup\{|\alpha_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Al espacio vectorial de todas las sucesiones acotadas en $\mathbb{F}$ con las operaciones lineales usuales y esta norma, lo denotamos como ℓ^∞; a veces también se le denota como m.

Subespacios vectoriales particulares de ℓ^∞son los siguientes:

- El espacio c de las sucesiones escalares que son convergentes.
- El espacio c_0 de las sucesiones escalares que convergen a cero.
- El espacio c_{00} de las sucesiones escalares que tienen un número finito de términos distintos de cero.
- Para $1 \leq p < \infty$, el espacio ℓ^p de las sucesiones escalares (α_n) tales que $\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^p < \infty$.

Verificar las contenciones $c_{00} \subset \ell^p \subset c_0 \subset c \subset \ell^\infty$, es inmediato.

En c_{00}, c_0 y c se considera la norma $\|\cdot\|_\infty$ a menos que se diga lo contrario. A ℓ^p se le da la norma

$$\|(\alpha_n)\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Todos estos espacios, con excepción de c_{00}, son de Banach.

2.2.1. Bases de Schauder. Una sucesión (x_n) en un espacio de Banach X es llamada una base de Schauder de X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares (α_n) tales que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

Los espacios c_0 y ℓ^p, tienen por base de Schauder a la sucesión $(e_i)_{i=1}^{\infty}$, donde e_i es la sucesión cuyo término i es 1 y el resto de sus términos son 0. A esta base se le conoce con el nombre de base estándar de cualquiera de estos espacios. En los tres se tiene que

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n.$$

Una base de Schauder del espacio c es $(e_n)_{n=0}^{\infty}$, donde $e_0 = (1, 1, 1, ...)$. En este caso

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = \alpha e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha)\, e_i$$

para cada $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in c$, donde $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$.

2.2.2. Duales topológicos de c_0 y ℓ^p.

TEOREMA 2.2.1. *Los espacios duales de c_0 y c son isométricamente isomorfos a ℓ^1.*

DEMOSTRACIÓN. Si $(\beta_n) \in \ell^1$ y $(\alpha_n) \in c_0$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \beta_n| \leq \|(\alpha_n)\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| = \|(\alpha_n)\|_\infty \|(\beta_n)\|_1. \tag{2.2.1}$$

Para cada elemento $\beta = (\beta_n)$ perteneciente a ℓ^1 definimos en c_0 la funcional

$$x^*_\beta(\alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$$

que claramente es lineal, y por la desigualdad anterior, $\|x^*_\beta\| \leq \|(\beta_n)\|_1$, es decir, $x^* \in c_0^*$.

Definimos $T : \ell^1 \to c_0^*$ como $T((\beta_n)) = x_\beta^*$. Si $\beta^1 = (\beta_n^1)$ y $\beta^2 = (\beta_n^2)$ están en ℓ^1 y $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces

$$\begin{aligned} T(\lambda\beta^1 + \beta^2)(\alpha_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\lambda\beta_n^1 + \beta_n^2) \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n^2 \\ &= \left(\lambda x_{\beta^1}^* + x_{\beta^2}^*\right)(\alpha_n) \\ &= \left(\lambda T\left(\beta^1\right) + T\left(\beta^2\right)\right)(\alpha_n). \end{aligned}$$

y además $\|T(\beta_n)\| \leq \|(\beta_n)\|_1$. De donde, el operador T es lineal y continuo. Tomando $(\beta_n) \neq (0)$ es fácil ver que $T((\beta_n)) \neq 0$, por lo que T resulta inyectivo.

Ahora supongamos que x^* es un elemento arbitrario de c_0^*. Definimos la sucesión (β_n)=$(x^*(e_n))$, donde (e_n) es la base estándar de Schauder de c_0 y sea σ la función signo definida en $\mathbb{F}$. Para $m \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} |\beta_n| &= \sum_{n=1}^{m} \sigma(\beta_n)\beta_n = \sum_{n=1}^{m} \sigma(\beta_n)x^*(e_n) \\ = x^*\left(\sum_{n=1}^{m} \sigma(\beta_n)e_n\right) &\leq \|x^*\| \left\|\sum_{n=1}^{m} \sigma(\beta_n)e_n\right\|_\infty = \|x^*\|. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Así, $(\beta_n) \in \ell^1$ y para cada elemento $(\alpha_n) \in c_0$ se cumple

$$x^*((\alpha_n)) = x^*(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^*(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n = x_\beta^*((\alpha_n)),$$

donde $\beta = (\beta_n)$. Esto demuestra que T es suprayectivo.

Si $x^* \in c_0$, por lo anterior, existe $(\beta_n) \in \ell^1$ tal que $T((\beta_n)) = x^*$, y por la desigualdad 2.2.2 tenemos que $\|(\beta_n)\|_1 \leq \|T(\beta_n)\|$. Con esta desigualdad y la (2.2.1) queda probado que T es una isometría.

De manera similar se puede probar que el dual de c es es isométricamente isomorfo a ℓ^1, bajo la transformación $T : \ell^1 \to c$ definida como $T(\beta) = x_\beta^*$, donde $\beta = (\beta_n)_{n=0}^{\infty}$; $x_\beta^*((\alpha_n)) = \alpha\beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ y $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ □

Si $1 < p < \infty$ y q es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces decimos que q es exponente conjugado de p o que p y q son exponentes conjugados. A ∞ y 1 se les considera exponentes conjugados.

Teorema 2.2.2. *Sean $1 < p < \infty$ y q el exponente conjugado de p, entonces el dual de ℓ^p es isométricamente isomorfo a ℓ^q.*

Demostración. Para cada $(\beta_n) \in \ell^q$ y cualquier $(\alpha_n) \in \ell^p$ definimos

$$x_\beta^*((\alpha_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n \tag{2.2.3}$$

entonces, por la desigualdad de Hölder (**[11]** p. 536)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \beta_n| \leq \|(\alpha_n)\|_p \|(\beta_n)\|_q < \infty.$$

Para cada $(\beta_n) \in \ell^q$, la funcional x^*_β es lineal y, por la desigualdad anterior, continua en ℓ^p . Más aún.

$$\|x^*_\beta\| \leq \|(\beta_n)\|_q. \tag{2.2.4}$$

Ahora supongamos que x^* es un elemento arbitrario de $(\ell^p)^*$. Definimos la sucesión (β_n)=$(x^*(e_n))$, donde (e_n) es la base estándar de Schauder de ℓ^p y sea σ es la función signo definida en $\mathbb{F}$. Para $m \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} |\beta_n|^q &= \sum_{n=1}^{m} \sigma(\beta_n)\beta_n|\beta_n|^{1-q} \\
&= x^*(\sum_{n=1}^{m} \sigma(\beta_n)|\beta_n|^{1-q} e_n) \\
&\leq \|x^*\| \left\| \sum_{n=1}^{m} \sigma(\beta_n)|\beta_n|^{1-q} e_n \right\|_p \\
&= \|x^*\| (\sum_{n=1}^{m} |\beta_n|^{(1-q)p})^{\frac{1}{p}} \\
&= \|x^*\| (\sum_{n=1}^{m} |\beta_n|^q)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Dividiendo lo anterior entre $(\sum_{n=1}^{m} |\beta_n|^q)^{\frac{1}{p}}$, si esta suma no es 0, obtenemos

$$(\sum_{n=1}^{m} |\beta_n|^q)^{\frac{1}{q}} = (\sum_{n=1}^{m} |\beta_n|^q)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|x^*\|,$$

lo cual también es cierto si $\sum_{n=1}^{k} |\beta_n|^q = 0$. Haciendo tender m a infinito, tenemos que $(\beta_n) \in \ell^q$ y

$$(\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^q)^{\frac{1}{q}} \leq \|x^*\|. \tag{2.2.5}$$

Para cada elemento $(\alpha_n) \in \ell^p$ se cumple

$$\begin{array}{rcl} x^*((\alpha_n)) & = & x^*(\sum_{n=1}^\infty \alpha_n e_n) \\ & = & \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \beta_n \\ & = & x^*_\beta((\alpha_n)) \end{array}$$

donde $\beta = (\beta_n)$.

Si definimos $T : \ell^q \to (\ell^p)^*$ como $T(\beta_n) = x^*_\beta$, entonces T es claramente lineal y lo anterior prueba la suprayectividad de T. Por las desigualdades (2.2.4) y (2.2.5) , T resulta ser una isometría. □

TEOREMA 2.2.3. *El dual de ℓ^1 es isométricamente isomorfo a ℓ^∞.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos x^*_β como en 2.2.3 pero tomando $p = 1$ y $q = \infty$, consecuentemente la desigualdad (2.2.4) se sigue cumpliendo y x^*_β resultará ser lineal y continuo en ℓ^1, con $\|x^*_\beta\| \leq \|\beta\|_\infty$

Si $x^* \in (\ell^1)^*$ y definimos $(\beta_n) = (x^*(e_n))$, donde (e_n) es la base estándar para ℓ^1, entonces $|\beta_n| = |x^*(e_n)| \leq \|x^*\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que $(\beta_n) \in \ell^\infty$ y

$$\|(\beta_n)\|_\infty \leq \|x^*\|.$$

Para cada $(\alpha_n) \in \ell^1$ tenemos

$$x^*((\alpha_n)) = x^*(\sum_{n=1}^\infty e_n \alpha_n) = \sum_{n=1}^\infty x^*(e_n)\alpha_n = \sum_{n=1}^\infty \beta_n \alpha_n = x^*_\beta((\alpha_n)),$$

donde $\beta = (\beta_n)$. Por lo que el operador $T : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$, definido como $T(\beta_n) = x^*_\beta$, resulta ser un isomorfismo isométrico. □

2.2.3. Los duales de subespacios separables de ℓ^∞. Una diferencia topológica entre ℓ^1 y ℓ^∞ es que el primero es separable y el segundo no lo es. Por este motivo, se tiene que $(\ell^\infty)^*$no es isométricamente isomorfo a ℓ^1, pues en caso contrario $(\ell^\infty)^*$sería separable y según la Proposición 2.5.5, que veremos más adelante, ℓ^∞ sería entonces separable. Sin embargo, aquí caracterizaremos al dual de cualquier subespacio separable de ℓ^∞.

LEMA 2.2.4. *Sean $n \geq 1$, $\epsilon > 0$ y $x_1, ..., x_n$, elementos, no necesariamente distintos, de ℓ^∞, donde $x_n = (\eta^n_r)^\infty_{r=1}$. Existe un natural k tal que*

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| \leq (\max_{1\leq r\leq k} |\lambda_1 \eta^1_r + \cdots + \lambda_n \eta^n_r|)(1+\epsilon) \tag{2.2.6}$$

para cualesquiera escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

Demostración. Supongamos que la afirmación es falsa. Es decir, existen $n \geq 1$, $\epsilon > 0$ y $x_1, ..., x_n$, elementos con $x_n = (\eta_r^n)_{r=1}^{\infty}$ tales que para cada $k \geq 1$ pueden encontrarse $\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k \in \mathbb{F}$, necesariamente no todos 0, tales que

$$\max_{1 \leq r \leq k} |\lambda_1^k \eta_r^1 + ... + \lambda_n^k \eta_r^n|(1+\epsilon) < \|\lambda_1^k x_1 + ... + \lambda_n^k x_n\|.$$

Hagamos $m_k = \max\{|\lambda_1^k|, ..., |\lambda_n^k|\}$, $l_i^k = \frac{\lambda_i^k}{m_k}$ para $1 \leq i \leq n$ y dividamos ambos lados de esta desigualdad entre m_k:

$$(1+\epsilon) \max_{1 \leq i \leq k} |l_1^k \eta_i^1 + ... + l_n^k \eta_i^n| < \|l_1^k x_1 + ... + l_n^k x_n\| \tag{2.2.7}$$

Claramente $\left\|\left(l_1^k, ..., l_n^k\right)\right\|_2 \leq n$ para todo natural k, donde $\|\cdot\|_2$ es la norma usual en $\mathbb{F}^n$. Entonces existe una subsucesión $\left(l_1^{k_j}, ..., l_n^{k_j}\right)$ de $\left(l_1^k, ..., l_n^k\right)$ que converge. Supongamos que $l_i^{k_j} \to l_i$, cuando $j \to \infty$, para cada $1 \leq i \leq n$.

Por otro lado, por la definición de $\|\cdot\|$ existen $r_0 \in \mathbb{N}$ y $m > 0$ tales que

$$\frac{1}{1+\epsilon}\|l_1 x_1 + ... + l_n x_n\| < m < |l_1 \eta_{r_0}^1 + ... + l_n \eta_{r_0}^n|. \tag{2.2.8}$$

Como $\lim\limits_{j \to \infty} |l_1^{k_j} \eta_{ri_0}^1 + ... + l_n^{k_j} \eta_{r_0}^n| = |l_1 \eta_{r_0}^1 + ... + l_n \eta_{r_0}^n|$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m < |l_1^{k_j} \eta_{r_0}^1 + ... + l_n^{k_j} \eta_{r_0}^n|$ si $k_j \geq N$.

Para $k_j \geq \max\{r_0, N\}$ tenemos, por la desigualdad anterior y las (2.2.8) y (2.2.7), que

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{1+\epsilon}\|l_1 x_1 + ... + l_n x_n\| \;<\; m \;&<\; |l_1^{k_j} \eta_{r_0}^1 + ... + l_n^{k_j} \eta_{r_0}^n| \\
&\leq\; (\max_{1 \leq r \leq k_j} |l_1^{k_j} \eta_r^1 + ... + l_n^{k_j} \eta_r^n|) \\
&<\; \tfrac{1}{1+\epsilon}\|l_1^{k_j} x_1 + ... + l_n^{k_j} x_n\|_\infty;
\end{aligned}$$

es decir,

$$\|l_1 x_1 + ... + l_n x_n\|_\infty < (1+\epsilon_2)m < \|l_1^{k_j} x_1 + ... + l_n^{k_j} x_n\|_\infty.$$

Al tomar el límite cuando $j \to \infty$ llegamos a una contradicción. □

Observación. Si k es un natural para el que se satisface la desigualdad (2.2.7), entonces ésta se satisface para cualquier $k' > k$.

Teorema 2.2.5. *Sea $E \subset \ell^\infty$ un subespacio vectorial separable. Entonces, para cada $x^* \in E^*$ existe una matriz escalar infinita $\left[\alpha_j^n\right]_{n,j \geq 1}$ y una sucesión de naturales (k_n) estrictamente creciente tales que*

$$x^*(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^n \eta_j$$

para todo $x = (\eta_j)_{j=1}^\infty$ en E y las sucesiones $\alpha_n = (\alpha_j^n)_{j=1}^\infty$ satisfacen las siguientes condiciones:

$$(a)\ \alpha_j^n = 0 \text{ para } j > k_n \tag{2.2.9}$$

$$(b)\ \|\alpha_n\|_1 \leq \|x^*\| \text{ para } n = 1, 2 \dots. \tag{2.2.10}$$

2.9.1

$$(c)\ \lim_{n\to\infty} \|\alpha_n\|_1 = \|x^*\| \tag{2.2.11}$$

donde $\|\cdot\|_1$ es la norma en ℓ^1.

Demostración. Sea $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ un subconjunto numerable y denso en E, donde $x_n = (\eta_r^n)_{r=1}^\infty$. Sean $(\epsilon_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión de números positivos que converge a 0.

A partir del lema anterior y la observación que le sigue, podemos construir inductivamente una sucesión estrictamente creciente $(k_n)_{n=1}^\infty$ de números naturales tales que

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| \leq (\max_{1\leq i\leq k_n} |\lambda_1 \eta_i^1 + \cdots + \lambda_n \eta_i^n|)(1+\epsilon_n) \tag{2.2.12}$$

2.9.1para cada $n \geq 1$ y escalares $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ arbitrarios.

Para cada natural n sea $P_n : \ell^\infty \to c_0$ el operador lineal

$$P_n(x) = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{k_n}, 0, 0, 0, \dots) \tag{2.2.13}$$

donde $x = (\eta_r)_{r=1}^\infty$.

Dados $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$\|\lambda_1 P_n(x_1) + \cdots + \lambda_n P_n(x_n)\|_\infty = \max_{1\leq i\leq k_n} |\lambda_1 \eta_i^1 + \cdots + \lambda_n \eta_i^n|$$

y podemos reescribir la desigualdad (2.2.12) como

$$\|\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\| \leq \|\lambda_1 P_n(x_1) + \cdots + \lambda_n P_n(x_n)\|(1+\epsilon_n) \tag{2.2.14}$$

De esta desigualdad se sigue que si x^* es una funcional en el dual de E, entonces

$$|\lambda_1 x^*(x_1) + \cdots + \lambda_n x^*(x_n)| \leq \| x^* \| \, \|\lambda_1 P_n(x_1) + \cdots + \lambda_n P_n(x_n)\|(1+\epsilon_n).$$

Para cada $n \geq 1$ aplicamos el Corolario 1.4.11 con $X = c_0$, la sucesión $(P_n(x_1), ..., P_n(x_n), (0), (0), ...)$ en X, la sucesión escalar $(x^*(x_1), ..., x^*(x_n), 0, 0, ...)$ y el real $M = \| x^* \| (1+\epsilon_n)$. Tenemos entonces que para cada $n \geq 1$ existe una funcional lineal continua x_n^* definida en c_0 que satisface las condiciones

$$x_n^*(P_n(x_i)) = x^*(x_i) \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \text{ y } \|x_n^*\| \leq \|x^*\|(1+\epsilon_n).$$

Por el Teorema 2.2.1, existen escalares $\beta_1^n, \beta_2^n, \dots, \beta_{k_n}^n$ tales que

$$\sum_{j=1}^{k_n} \beta_j^n \eta_j^i = x_n^*(P_n(x_i)) = x^*(x_i) \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

y además

$$\sum_{j=1}^{k_n} |\beta_j^n| \leq \|x_n^*\| \leq \|x^*\|(1+\epsilon_n).$$

Definimos

$$\alpha_j^n = \begin{cases} \frac{\beta_j^n}{(1+\epsilon_n)} & \text{si } j \leq k_n \\ 0 & \text{si } j > k_n \end{cases}$$

y obtenemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^n \eta_j^i = \frac{1}{(1+\epsilon_n)} x^*(x_i) \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \tag{2.2.15}$$

y

$$\|\alpha_n\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j^n| \leq \|x^*\|, \tag{2.2.16}$$

donde $\alpha_n = \left(\alpha_j^n\right)_{j=1}^{\infty}$.

Sea $i \geq 1$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ obtenemos de (2.2.15)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^n \eta_j^i = x^*(x_i). \tag{2.2.17}$$

En seguida se demostrará que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^n \eta_j = x^*(x)$ para todo $x = (\eta_j)$ en E.

Sean $\epsilon > 0$ y $x = (\eta_j) \in E$. Existe i_0 tal que $\|x - x_{i_0}\| < \frac{\epsilon}{3(\|x^*\|+1)}$. Consideremos la siguiente desigualdad:

$$|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^n \eta_j - x^*(x)| \leq |\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^n (\eta_j - \eta_j^{i_0})| + |\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^n \eta_j^{i_0} - x^*(x_{i_0})| + |x^*(x_{i_0}) - x^*(x)|. \tag{2.2.18}$$

Observemos que
$$|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^n(\eta_j-\eta_j^{i_0})|\le \|x-x_{i_0}\|_\infty\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j^n|\le \|x-x_{i_0}\|_\infty\|x^*\|.$$

Por tanto el primer y tercer término de (2.2.18) son menores que $\frac{\epsilon}{3}$; el segundo término de (2.2.18) se puede acotar por $\frac{\epsilon}{3}$ para todo n suficientemente grande, gracias a (2.2.17). Por tanto, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^n\eta_j=x^*(x) \tag{2.2.19}$$

para todo $x\in E$.

Para concluir la demostración bastará probar que

$$\lim_{n\to\infty}\|\alpha_n\|_1\left(=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j^n|\right)=\|x^*\|. \tag{2.2.20}$$

Sean $\overline{\lambda}=\overline{\lim_n}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j^n|$ y $\underline{\lambda}=\underline{\lim_n}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j^n|$, entonces $\overline{\lambda}\le\|x^*\|$, por (2.2.16). Y por la ecuación (2.2.19) tenemos que $|x^*(x)|=|\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j^n\eta_j|\le\underline{\lambda}\|x\|_\infty$ para cada $x\in E$; de donde $\|x^*\|\le\underline{\lambda}$. □

TEOREMA 2.2.6. *Para cualesquiera espacios de Banach X y Y se cumple que la transformación $T: X^*\times Y^*\to (X\times Y)^*$ dada como*
$$T(x^*,y^*)(x,y)=x^*(x)+y^*(y)$$

es una isometría suprayectiva, donde en los espacios producto se consideran las normas usuales.

DEMOSTRACIÓN. Claramente la transformación $T(x^*,y^*)$ es lineal. Sea $(x,y)\in X\times\mathbb{R}$, entonces
$$\begin{array}{rcl}|T(x^*,y^*)(x,y)| &=& |x^*(x)+y^*(y)|\\ &\le& \|x^*\|\|x\|+\|y^*\|\|y\|| \\ &\le& \|(x^*,y^*)\|\|(x,y)\|.\end{array}$$

Entonces, $T(x^*,y^*)\in(X\times Y)^*$ y además
$$\|T(x^*,y^*)\|\le\|(x^*,y^*)\|$$
para todo $(x^*,y^*)\in X^*\times Y^*$.

También es claro que T es lineal y es suprayectiva, ya que dado $z^* \in (X \times y^*)^*$ se tiene que $T(x^*, y^*) = z^*$donde $x^* = z^*|X \times \{0\}$ y $y^* = z^*|\{0\} \times Y$. Es inmediato ver que $x^* \in X^*$ y $y^* \in Y^*$.

Tomemos $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$ con norma igual a uno. Sean (x_n) y (y_n) sucesiones en B_X y B_Y, respectivamente, tales que $x^*(x_n) \to \|x^*\|$ y $y^*(y_n) \to \|y^*\|$. Definamos las sucesiones (x'_n) y (y'_n) como: $x'_n = \|x^*\|x_n$ y $y'_n = \|y^*\|y_n$. Entonces, $\|(x'_n, y'_n)\| \leq \|(x^*, y^*)\| = 1$ para cada n. Por tanto,

$$\begin{aligned} 1 &= \|x^*\|^2 + \|y^*\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty}[x^*(x'_n) + y^*(y'_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty} T(x^*, y^*)(x'_n, y'_n) \\ &\leq \|T(x^*, y^*)\|. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$\|(x^*, y^*)\| \leq \|T(x^*, y^*)\|,$$

si $(x^*, y^*) \in X^* \times Y^*$. Por tanto, T es una isometría suprayectiva. □

2.3. Teoremas de separación

Los siguientes teoremas dan condiciones bajo las cuales dos conjuntos convexos pueden ser "separados" mediante una funcional lineal.

LEMA 2.3.1. *Sean V una vecindad abierta y convexa de 0 en un e.v.t. real X y $x_0 \notin V$. Entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x_0) = 1$ y $x^*(x) < 1$ para todo $x \in V$.*

DEMOSTRACIÓN. Considérese la funcional de Minkowski p_V del conjunto V. Por los incisos *(b)* y *(d)* de la Proposición 1.1.21 p_V es una funcional sublineal y se cumplen las siguientes dos desigualdades

$$p_V(x_0) \geq 1$$

y

$$p_V(V) < 1.$$

Definamos la funcional lineal $x^* :< x_0 > \to \mathbb{R}$ como $x^*(\lambda x_0) = \lambda$. Las hipótesis del Teorema de Hahn-Banach se satisfacen para el subespacio $< x_0 >$, la funcional sublineal p_V y la funcional x^*, pues si $\lambda \geq 0$, entonces

$$x^*(\lambda x_0) = \lambda \leq \lambda p_V(x_0) = p_V(\lambda x_0)$$

y si $\lambda < 0$, entonces

$$x^*(\lambda x_0) = \lambda < 0 \leq p_V(\lambda x_0).$$

Así, existe una extensión a X de esta funcional, que también la denotamos por x^*, que satisface

$$x^*(x) \leq p_V(x)$$

para todo $x \in X$.

Solo falta probar que $x^* \in X^*$. Para esto observemos que

$$-x^*(x) = x^*(-x) \leq p_V(-x) < 1$$

si $x \in -V$. De lo que se sigue que $|x^*(x)| < 1$ para toda x en la vecindad de cero $V \cap -V$. Por la Proposición (2.1.1) x^* es continua. $\square$

TEOREMA 2.3.2. *Sean A y B dos subconjuntos no vacíos, convexos y ajenos entre sí de un e.v.t. real X.*

(a) Si A es abierto entonces existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x^* \in X^*$ tales que

$$x^*(a) < \alpha \leq x^*(b)$$

para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$.

(b) Si X es localmente convexo, A es compacto y B es cerrado, entonces existen $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ y $x^* \in X^*$ tales que

$$x^*(a) < \alpha_1 < \inf_{b \in B} x^*(b)$$

para todo $a \in A$.

La desigualdad anterior equivale a decir que existen dos reales α_1, α_2 tales que

$$x^*(a) < \alpha_1 < \alpha_2 < x^*(b)$$

si $a \in A$ y $b \in B$.

DEMOSTRACIÓN. *(a)* Sean $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$. Definimos

$$V = A - B + (b_0 - a_0).$$

Entonces $0 \in V$ y V es un abierto ya que

$$V = (\bigcup_{b \in B} A - b) + (b_0 - a_0)$$

y las traslaciones son homeomorfismos. Además, $b_0 - a_0 \notin V$, pues en caso contrario $A \cap B \neq \varnothing$, lo cual contradice una de las hipótesis.

Por el lema anterior, existe $x^* \in X^*$ tal que:

$$x^*(V) < x^*(x_0)$$

donde $x_0 = b_0 - a_0$; o sea, si $a \in A$ y $b \in B$, entonces

$$x^*(a - b + x_0) \;=\; x^*(a) - x^*(b) + x^*(x_0) < x^*(x_0);$$

es decir,

$$x^*(a) < x^*(b)$$

y así,

$$\alpha = \sup_A x^*(a) \leq \inf_B x^*(b)$$

Por ser A abierto y convexo y x^* una función real abierta (Proposición 1.1.14), tenemos que $x^*(A)$ es un intervalo abierto y acotado por arriba, entonces $x^*(a) < \alpha$ para todo $a \in A$ y por tanto,

$$x^*(a) < \alpha \leq x^*(b)$$

para todo $a \in A$ y $b \in B$.

(b) Afirmamos que existe una vecindad convexa V de 0 tal que $A+V$ no interseca a B. Por ser B cerrado y ajeno a A, para cada $a \in A$ existe una vecindad V_a del 0, abierta y convexa, tal que

$$(a + V_a) \cap B = \varnothing.$$

Para cada $a \in A$ existe una vecindad de 0, W_a, abierta y convexa, tal que $W_a + W_a \subset V_a$.

Es claro que $\{a + W_a\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta de A. Por ser A compacto, existe una subcubierta finita $\{a_i + W_{a_i}\}_{i=1}^n$. Hagamos $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} W_{a_i}$.

Entonces por la Proposición 1.1.9, la vecindad abierta V de 0 es convexa, además

$$(A + V) \cap B = \varnothing,$$

ya que si $a \in A$ y $v \in V$ entonces existe $1 \leq i \leq n$ tal que $a \in (a_i + W_{a_i})$ y por tanto

$$(a + v) \in (a_i + W_{a_i} + W_{a_i}) \subset a_i + V_{a_i};$$

de donde, $a + v \notin B$.

El conjunto $A + V$ es convexo por ser suma de convexos y es abierto por ser abierto uno de los sumandos.

Aplicando la parte *(a)* a los conjuntos $A + V$ y B. Existen $x^* \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$x^*(x) < \alpha \leq x^*(b)$$

para todo $x \in (A + V)$ y $b \in B$. Como el compacto $x^*(A)$ esta contenido en $x^*(A + V)$, entonces

$$\underset{a \in A}{max}\,(x^*(a)) < \alpha \leq \inf_{b \in B} x^*(b).$$

Sea $\underset{a \in A}{max}\,(x^*(a)) < \alpha_1 < \alpha$, entonces

$$x^*(a) < \alpha_1 < \inf_{b \in B} x^*(b)$$

para todo $a \in A$. $\square$

De la Proposición 2.1.2 y el teorema anterior, se sigue inmediatamente el siguiente resultado.

COROLARIO 2.3.3. *Sean A y B dos subconjuntos no vacíos, convexos y ajenos entre sí de un e.v.t. X.*

(a) Si A es abierto entonces existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x^* \in X^*$ tales que

$$\mathrm{Re} x^*(a) < \alpha \leq \mathrm{Re} x^*(b)$$

si $a \in A$ y $b \in B$.

(b) (Teorema de Tukey-Klee) Si X es localmente convexo, A es compacto y B es cerrado, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ y $x^* \in X^*$ tales que

$$\mathrm{Re} x^*(a) < \alpha_1 < \alpha_2 < \mathrm{Re} x^*(b)$$

si $a \in A$ y $b \in B$.

Al tomar $-x^*, -\alpha_1$ y $-\alpha_2$ obtenemos un elemento en X^* y reales para los cuales se dan las desigualdades en el otro sentido.

Una generalización a espacios localmente convexos del Corolario 1.4.8 (de Hahn-Banach) es la siguiente

PROPOSICIÓN 2.3.4. *Sea V un subespacio cerrado de un espacio localmente convexo X. Supongamos que $x \in X \setminus V$. Entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x) = 1$ y $x^*(y) = 0$ para todo $y \in V$.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicando el inciso *(b)* del Corolario 2.3.3 al conjunto cerrado V y el compacto $\{x\}$, existen $x_0^* \in X^*$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathrm{Re}(x_0^*(y)) < \alpha_1 < \mathrm{Re}(x_0^*(x))$$

para todo $y \in V$.

Como $0 \in V$, entonces $\mathrm{Re}(x_0^*(x)) > \alpha_1 > 0$. Y $\mathrm{Re}(x_0^*(y)) = 0$ para todo $y \in V$, pues en caso contrario $\mathrm{Re}(x_0^*(\lambda y)) > \alpha_1$ para algún $y \in V$ y un real λ de módulo suficientemente grande, lo que es una contradicción ya que $\lambda y \in V$. Así, $\mathrm{Re}(x_0^*(iy)) = 0$ para todo $y \in V$ en caso en que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Por tanto, $x_0^*(y)) = 0$ para todo $y \in V$. Entonces la funcional $x^* = \frac{1}{\mathrm{x}_0^*(\mathrm{x})} x_0^*$ tiene las propiedades requeridas.

$\square$

TEOREMA 2.3.5. *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías localmente convexas definidas en un e.v. X para las cuales el dual topológico es el mismo. Si $C \subset X$ es convexo, entonces $\mathrm{Cl}_{\tau_1}(C) = \mathrm{Cl}_{\tau_2}(C)$. En particular, C es τ_1-cerrado si y sólo si es τ_2-cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Sea C un subconjunto no vacío y convexo de X y supongamos que $\mathrm{Cl}_{\tau_1}(C) \neq X$ y tomemos $x \in X \backslash \mathrm{Cl}_{\tau_1}(C)$. Por *(b)* del Corolario 2.3.3 existe $x_x^* \in (X, \tau_1)^*$ tal que

$$\mathrm{Re}x_x^*(x) < \inf_{y \in \mathrm{Cl}_{\tau_1}(C)} \mathrm{Re}x^*(y) = \alpha_x.$$

Definimos $A_x = \{y \in X : \mathrm{Re}x_x^*(y) \geq \alpha_x\}$. Entonces A_x es τ_i-cerrado por ser x_x^* una funcional τ_i-continua para $i = 1, 2$. Además es claro que $\mathrm{Cl}_{\tau_1}(C) \subset A_x$ y $x \notin A_x$. Entonces

$$\mathrm{Cl}_{\tau_1}(C) = \bigcap_{x \in X \backslash \mathrm{Cl}_{\tau_1}(C)} A_x$$

y el conjunto de la derecha es τ_2-cerrado. Por consiguiente, $\mathrm{Cl}_{\tau_2}(C) \subset \mathrm{Cl}_{\tau_1}(C)$. De modo similar se sigue la contención contraria. $\square$

2.4. El segundo y tercer duales.

Como el dual $X^{\#}$ de un espacio vectorial es también un espacio vectorial podemos considerar su dual, al cual llamaremos el segundo dual algebraico de X y lo denotaremos por $X^{\#\#}$; asimismo el dual algebraico de éste será el tercer dual algebraico de X y se denotará por $X^{\#\#\#}$, etc.

Cuando X es un espacio normado, entonces en X^* tenemos una topología natural, la dada por la norma y por tanto, podemos considerar el dual topológico X^{**} de X^* que estará formado por todas las funcionales lineales definidas en X^* que son continuas respecto a la norma. A X^{**} lo llamaremos el segundo dual (topológico) de X y el dual (topológico) del segundo dual (topológico) de X será el tercer dual (topológico) de X y se denotará por X^{***}, etc. Observamos que X^*,X^{**},X^{***},... son espacios de Banach.

El dual topológico X^* de un e.v.t. X no siempre tiene una topología natural. Cuando en X^* se define una topología vectorial σ, entonces al dual topológico de (X^*, σ); es decir al espacio de las funcionales lineales definidas en X^* que son continuas respecto a σ, se denota por $(X^*, \sigma)^*$, éste es un subespacio vectorial de $X^{\#\#}$.

Dado una operador lineal $T : Y \to X$ entre dos espacios normados hay una manera natural de definir un operador lineal $T^* : X^* \to Y^*$ entre los duales de X y Y que es la siguiente:

$$T^*(x^*) = x^* \circ T.$$

A este operador se le conoce como el *adjunto* de T del cual podemos demostrar el siguiente resultado.

TEOREMA 2.4.1. *Sea $T : Y \to X$ un isomorfismo isométrico entre dos espacios normados. Entonces, el operador adjunto $T^* : X^* \to Y^*$ es un isomorfismo isométrico.*

Demostración. Dado que T es una isometría suprayectiva tenemos que $T[B_Y] = B_X$; por tanto, a partir de la definición de norma de un operador lineal vemos que se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \|x^*\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} |x^*(x)| = \sup_{\|y\|\leq 1} |x^*(T(y))| = \sup_{\|y\|\leq 1} |(x^* \circ T)(y)| \\ &= \|x^* \circ T\| = \|T^*(x^*)\|. \end{aligned}$$

O sea T^*es una isometría y es sobre, ya que si $y^* \in Y^*$, entonces $T^*(x^*) = y^*$ donde $x^* = y^* \circ T^{-1}$. □

2.5. Anulador y preanulador.

Hemos introducido el concepto de dual topológico de un e.v.t. X. Algunos subconjuntos importantes de X^* y X, son el anulador y preanulador de un conjunto dado. Damos su definición en el caso en que X es normado.

Definición 2.5.1. Sean X un espacio normado y A y B subconjuntos de X *y* X^*, respectivamente. El anulador de A y preanulador de B, denotados como $A^\perp$ y ${}^\perp B$ respectivamente, se definen como

- $A^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \text{ para todo } x \in A\}$
- ${}^\perp B = \{x \in X : x^*(x) = 0 \text{ para todo } x^* \in B\}$.

Una caracterización del conjunto ${}^\perp(A^\perp)$ nos la da el apartado (b) de la siguiente proposición.

Proposición 2.5.2. *Sean X un espacio normado, A y B subconjuntos de X y X^* respectivamente.*

(a) Los conjuntos $A^\perp$ y ${}^\perp B$ son subespacios cerrados de X^* y X, respectivamente.

(b) ${}^\perp(A^\perp) = \mathrm{Cl}(< A >)$.

(c) Si A es un subespacio de X, entonces ${}^\perp(A^\perp) = \mathrm{Cl}(A)$.

Demostración. (a) Obsérvese que${}^\perp B = \cap\{\ker(x^*) : x^* \in B\}$, de aquí se sigue que ${}^\perp B$ es un subespacio vectorial cerrado de X. Es claro que $0 \in A^\perp$ y que para cualesquiera escalar λ y elementos $x^*, y^* \in A^\perp$ se cumple que $(\lambda x^* + y^*)(x) = 0$ para toda $x \in A$, por lo que $A^\perp$ es un subespacio de X^*. Sean (z_n^*) una sucesión en $A^\perp$ que converja a algún $z^* \in X^*$ y $x \in A$. Como $z_n^*(x) = 0$ para todo n, tenemos que $z^*(x) = 0$, es decir $z^* \in A^\perp$. Por tanto, $A^\perp$ es un cerrado.

Para demostrar (b) nótese que por el inciso anterior ${}^{\perp}(A^{\perp})$ es un subespacio cerrado de X y por la definición de anulador y preanulador, A está incluido en ese subespacio. Entonces, $\mathrm{Cl}(< A >) \subset^{\perp} (A^{\perp})$.

Inversamente, sea $x_0 \in X \setminus \mathrm{Cl}(< A >)$, por el primer corolario del Teorema de Hahn-Banach 1.4.8 existe $x_0^* \in X^*$ tal que $x_0^*(x_0) \neq 0$ y $\mathrm{Cl}(< A >) \subset \ker(x_0^*)$. O sea, $x_0^* \in A^{\perp}$ y $x_0 \notin^{\perp} (A^{\perp})$; hemos probado así que ${}^{\perp}(A^{\perp}) \subset \mathrm{Cl}(<$ A $>)$. El apartado (c) es consecuencia inmediata del (b). □

Una caracterización análoga para el conjunto $({}^{\perp}B)^{\perp}$ se pospone para más adelante (Teorema 2.7.11) ya que antes debemos introducir los conceptos de topologías débiles.

Los conceptos anteriores nos permiten determinar, vía isometrías, los espacios duales de subespacios de un espacio normado así como de los cocientes y probar que la separabilidad del dual implica la del espacio original.

Teorema 2.5.3. *Sea V un subespacio de un espacio normado X. Entonces existe un isomorfismo isométrico $T : X^*/V^{\perp} \to V^*$ dado por $T(x^* + V^{\perp})(v) = x^*(v)$ para cada $v \in V$. La isometría inversa $S : V^* \to X^*/V^{\perp}$ está dada como $S\,(y^*) = x^* + V^{\perp}$ donde x^*es cualquier extensión continua de y^* a X^*.*

Demostración. La transformación $T : X^*/V^{\perp} \to V^*$ envía a cada clase $x^* + V^{\perp}$ en la restricción de x^* a V. Dado que dos elementos $x_1^* + V^{\perp}$ y $x_2^* + V^{\perp}$ son iguales si y sólo si $x_1^* = x_2^*$ en V, se sigue que T está bien definida. Es fácil ver que T es lineal.

Si $v^* \in V^*$ y $x_{v^*}^*$ es una extensión continua de v^* a X, por ejemplo tomemos una extensión de Hahn-Banach, entonces $T(x_{v^*}^* + V^{\perp}) = x_{v^*}^*$ lo que comprueba la suprayectividad de T.

Probaremos la inyectividad de T. Sea $(x^* + V^{\perp}) \in X/V^{\perp}$ tal que $T(x^* + V^{\perp}) = 0$, esto implica que $x^*(v) = 0$ para todo $v \in V$; es decir $x^* \in V^{\perp}$ y así $x^* + V^{\perp} = 0 + V^{\perp}$.

Si $v^* = T\left(x^* + V^{\perp}\right)$, entonces $x^* + V^{\perp} = x_{v^*}^* + V^{\perp}$; de donde,

$$\|x^* + V^{\perp}\| \leq \|x_{v^*}^*\| = \|T\left(x^* + V^{\perp}\right)\|.$$

Para cualquier $y^* \in V^{\perp}$ se cumple:

$$\begin{aligned} \|v^*\| &= \sup\{|(v^* + y^*)(v)| : v \in B_V\} \\ &\leq \sup\{|(x^* + y^*)(x)| : x \in B_X\} \\ &= \|x^* + y^*\|. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\|v^*\| \leq \inf\{\|x^* + y^*\| : y^* \in V^{\perp}\} = \|x^* + V^{\perp}\| \leq \|v^*\|$$

con lo que tenemos $\|T(x^*+V^\perp)\| = \|v^*\| = \|x^*+V^\perp\|$. Es decir, T es una isometría. $\square$

Teorema 2.5.4. *Sea V un subespacio cerrado de un espacio normado X. Entonces existe una isometría suprayectiva $S : (X/V)^* \to V^\perp$ dada como $S(y^*) = y^* \circ \pi$, donde $\pi : X \to X/V$ es el operador canónico.*

Demostración. La afirmación es obvia si $V = 0$. Supongamos que V no es el subespacio nulo. Sea $\pi : X \to X/V$ la proyección canónica. Definimos $S(y^*) = y^* \circ \pi$ para cada $y^* \in (X/V)^*$. Es claro que S es lineal y que $S(y^*)$ es lineal, continuo y se anula en V.

Sean U_X y $U_{X/V}$ las bolas unitarias abiertas de X y X/V respectivamente. Entonces $U_{X/V} = \pi(U_X)$, por lo que

$$\begin{aligned}\sup\{|S(y^*)(x)| : x \in U_X\} &= \sup\{|y^*(\pi(x))| : x \in U_X\}\\ &= \sup\left\{y^*(x+V) : x+V \in U_{X/V}\right\}.\end{aligned}$$

Lo anterior equivale a $\|S(y^*)\| = \|y^*\|$, así, queda demostrado que S es una isometría.

Finalmente, si $x^* \in V^\perp$, entonces $V \subset \ker(x^*)$. Definimos $y^* : X/V \to \mathbb{F}$ como $y^*(x+V) = x^*(x)$. Si $x+V = x'+V$, entonces $(x-x') \in V \subset \ker(x^*)$, así, $x^*(x) = x^*(x')$, por lo que y^* está bien definida. Además, y^* es lineal, ya que x^* lo es, y es continua porque $\|y^*(x+V)\| \leq \|x^*\|\|x'\|$ para cualquier x' en la misma clase que x; de donde, $\|y^*\| \leq \|x^*\|$. Como $S(y^*) = y^* \circ \pi = x^*$, concluimos que S es sobre.

El siguiente resultado es al que nos referimos para justificar la afirmación que hicimos de que ℓ^1 no es el dual de ℓ^∞. $\square$

Proposición 2.5.5. *Si X es un espacio normado y X^*es separable, entonces X es separable.*

Demostración. Sea $D = \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso y numerable de X^*. Por la definición de la norma en X^*, existe $x_n \in B_X$ tal que $\frac{1}{2}\|x_n^*\| \leq |x_n^*(x_n)|$. Si $x^* \in X^*$ y $x^* \neq 0$, entonces, por la densidad del conjunto D, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^* - x_n^*\| < \frac{1}{4}\|x^*\|$. Como $\|x^*\| \leq \|x^* - x_n^*\| + \|x_n^*\|$, tenemos que $\frac{3}{4}\|x^*\| \leq \|x_n^*\|$, o lo que es lo mismo $\frac{1}{4}\|x^*\| \leq \frac{1}{3}\|x_n^*\|$. En particular, $\|x_n^*\| > 0$. Se sigue de lo anterior que

$$\begin{aligned}0 &< \frac{1}{2}\|x_n^*\| - \frac{1}{3}\|x_n^*\| \leq \frac{1}{2}\|x_n^*\| - \frac{1}{4}\|x^*\|\\ &\leq |x_n^*(x_n)| - \|x_n^* - x^*\| \leq |x_n^*(x_n)| - |(x_n^* - x^*)(x_n)|\\ &\leq |x^*(x_n)|.\end{aligned}$$

Así, queda demostrado que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ y sabemos que $X =^\perp \{0\} =^\perp (\{x_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp) = \mathrm{Cl}(< \{x_n : n \in \mathbb{N}\} >)$. Por lo que X es separable. $\square$

2.6. Inmersión canónica de X en X^{**}

Sea X un espacio normado. Definimos para cada x en X la siguiente funcional lineal

$$\widehat{x} : X^* \to \mathbb{F} \text{ donde } \widehat{x}(x^*) = x^*(x).$$

PROPOSICIÓN 2.6.1. *La funcional* $\widehat{x} : X^* \to \mathbb{F}$ *es continua, es decir,* $\widehat{x} \in X^{**}$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición, para cada que $x^* \in X^*$ se tiene que

$$|\widehat{x}(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x\|\|x^*\| \tag{2.6.1}$$

y por el Teorema 1.4.4 $\widehat{x}$ es continua. □

De la funcional anteriormente definida y como consecuencia de la Proposición anterior surge naturalmente el operador

$$\widehat{\cdot} : X \to X^{**} \text{ donde } \widehat{\cdot}(x) = \widehat{x}$$

llamado la inmersión canónica de X en X^{**}.

El siguiente resultado acerca de este operador es muy sencillo, pero a su vez es muy útil para obtener algunas propiedades de la topología débil*, definida más adelante.

PROPOSICIÓN 2.6.2. *El operador* $\widehat{\cdot} : X \to X^{**}$ *es una isometría lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que $\widehat{\cdot}$ es lineal. Sean $x, y \in X$,$\lambda \in \mathbb{F}$ y $x^* \in X^*$.

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda x + y}(x^*) &= x^*(\lambda x + y) \\ &= \lambda x^*(x) + x^*(y) \\ &= (\lambda \widehat{x} + \widehat{y})(x^*) \end{aligned}$$

de lo que se sigue $\widehat{\lambda x + y} = \lambda \widehat{x} + \widehat{y}$.

Por la desigualdad (2.6.1) se tiene que

$$\|\widehat{x}\| \leq \|x\|.$$

La desigualdad contraria la obtenemos de la siguiente manera. Sea $x \neq 0$, por el Segundo Corolario del Teorema de Hahn-Banach existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x) = \|x\|$ y $\|x^*\| = 1$. Así

$$\|x\| = |x^*(x)| \leq \|\widehat{x}\|.$$

Hemos probado que $\|\widehat{x}\| = \|x\|$. □

DEFINICIÓN 2.6.3. Cuando el operador $\widehat{\cdot} : X \to X^{**}$ es suprayectivo, o sea $\widehat{X} = X^{**}$, entonces se dice que X es reflexivo.

2.7. Topologías débiles

Ahora introduciremos topologías que pueden definirse en cualquier espacio vectorial, en particular en los espacios duales. En esta sección X es un e.v.t. a menos que otra cosa se diga. Sea $M \subset X^{\#}$ un subconjunto no vacío.

Definición 2.7.1. La topología débil, $\sigma(X, M)$, en X es la topología localmente convexa determinada por la familia de seminormas

$$\{p_{x^*} : x^* \in M\}$$

definidas como $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$.

Que las funcionales p_{x^*} son efectivamente seminormas en X se sigue inmediatamente de (a) de la Proposición1.1.17.

Es claro que $\sigma(X, N) \subset \sigma(X, M)$ si $N \subset M$.

El siguiente resultado es corolario de la Proposición 1.2.6.

Proposición 2.7.2. *Sea $M \subset X^*$. Entonces $(X, \sigma(X, M))$ es un espacio de Hausdorff si y sólo si para todo $x \neq 0$ existe $x^* \in M$ tal que $x^*(x) \neq 0$.*

De aquí en adelante al referirnos a alguna propiedad topológica en un espacio normado, sobreentenderemos que es respecto a la topología dada por la norma. Con cualquier otra topología lo haremos notar. Por ejemplo, cuando digamos que un conjunto es abierto, entonces esto significa que el conjunto es abierto respecto a la topología inducida por la norma y si decimos que es $\sigma(X, M)$-abierto, nos referimos a que es abierto respecto a la topología débil $\sigma(X, M)$.

Proposición 2.7.3. *La topología $\sigma(X, M)$ es la mínima topología vectorial que hace continuas a todas las funcionales lineales que pertenecen a M y coincide con $\sigma(X, < M >)$.*

Demostración. Sea $x^* \in M$ entonces $V = \{x \in X : p_{x^*}(x) < 1\}$ es una vecindad de 0 en la topología débil $\sigma(X, M)$. Como es obvio que x^* está acotada en V, x^* es $\sigma(X, M)$-continua por el Teorema 1.1.23. Ahora supongamos que τ es una topología vectorial que hace continuas a todas las funcionales que pertenecen a M. Sea V una vecindad de 0 en la topología $\sigma(x, M)$. Entonces, existen $n \geq 1$, $x_1^*, ..., x_n^*$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$\left\{x \in X : p_{x_i^*}(x) < \epsilon, 1 \leq i \leq n\right\} \subset V.$$

O sea, $0 \in \bigcap_{i=1}^{n} |x_i^*|^{-1}(-\epsilon, \epsilon) \subset V$ y por tanto, V es una vecindad de 0 en la topología τ; de donde τ es más fina que $\sigma(x, M)$. O sea, hemos probado que $\sigma(x, M)$ es la mínima topología que hace continuas a las funcionales que pertenecen a M.

Si $x^* \in< M >$, entonces $x^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^*$ para algún $n \geq 1$, ciertos escalares α_i y funcionales $x_i^* \in M$. Cada x_i^* es $\sigma(X, M)$-continua, por lo que x^* también es continua respecto a esta topología. Por ser $\sigma(X, < M >)$ la mínima topología que hace continuas a los funcionales de $< M >$ entonces $\sigma(X, < M >) \subset \sigma(X, M)$. La contención contraria es obvia. Así, hemos demostrado que $\sigma(X, < M >) = \sigma(X, M)$. □

COROLARIO 2.7.4. *Si M es subespacio vectorial de X^*, entonces*

$$(X, \sigma(X, M))^* = M.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición anterior $M \subset (X, \sigma(X, M))^*$. Para ver que se tiene la otra contención, tomemos $x^* \in (X, \sigma(X, M))^*$. Existen $\epsilon > 0$,$n \geq 1$ y $x_1^*, \ldots, x_n^* \in M$ tales que: $|x_i^*(x)| < \epsilon$, para todo $1 \leq i \leq n$, implica $|x^*(x)| < 1$. Por la Proposición 1.1.19 tenemos que $\epsilon |x^*(x)| \leq \underset{1 \leq i \leq n}{max} |x_i^*(x)|$. Entonces,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker(x_i^*) \subset \ker(\mathrm{x}^*).$$

Por la Proposición 1.1.13, $x^* \in< x_1^*, \ldots, x_n^* >$. Al ser M un espacio vectorial tenemos $x^* \in M$. □

2.7.1. Las topologías *débil (w)* y *débil* (w*)*.

Supongamos ahora que (X, τ) es un espacio vectorial topológico.

DEFINICIÓN 2.7.5. La topología débil (w) en (X, τ) es la topología $\sigma(X, X^*)$ y será denotada por w. Es una topología localmente convexa determinada por las seminormas $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$ definidas para $x^* \in X^*$ y $x \in X$.

Por la Proposición 2.7.3, la topología w es la mínima topología en X que hace continuo a cada elemento de X^*. Como cada elemento de X^* es τ-continuo se sigue que τ es más fuerte que w. En particular, si X es normado, entonces la topología de la norma en X es más fuerte que w.

COROLARIO 2.7.6. *Una funcional definida en (X, τ) es w-continua si y sólo si es τ-continua. O sea,*

$$(X, w)^* = X^*.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Corolario 2.7.4 tenemos la igualdad

$$(X, w)^* = (X, \sigma(X, X^*))^* = X^*.$$

□

Sea X un espacio normado, entonces: $(X,w)^* = X^*$; $\sigma(X^*,X^{**})$ es la topología débil w en X^*y por tanto, se cumple que $(X^*,\sigma(X^*,X^{**}))^* = X^{**}$.

A los símbolos que estamos acostumbrados a usar para indicar operaciones topológicas, como límites de redes, cerraduras, interiores, etc., se les colocará una etiqueta que indique respecto a qué topología se está trabajando. Por ejemplo; $x_\alpha \overset{w}{\to} x$ significa que la red (x_α) converge a x en la topología w y $\mathrm{Cl}_w(A)$ denota la w-cerradura del conjunto A. Cuando se refieran a una norma, no se agregará ninguna etiqueta, si no hay lugar a confusión.

Como consecuencia del corolario anterior y el Teorema 2.3.5 obtenemos:

COROLARIO 2.7.7. *(Teorema de Mazur) Sea (X,τ) un espacio localmente convexo. Si $C \subset X$ es convexo, entonces $\mathrm{Cl}_\tau(C) = \mathrm{Cl}_w(C)$. En particular, C es τ-cerrado si y sólo si es w-cerrado. Lo anterior vale entonces cuando τ está definida por una na norma.*

Otra topología de nuestro interés es la *topología débil**.

DEFINICIÓN 2.7.8. Sean X un espacio normado y $\widehat{\cdot} : X \to X^*$ la inmersión canónica. La topología débil* en X^* es la topología $\sigma(X^*,\widehat{X})$ denotada por w^*. Es una topología localmente convexa determinada por las seminormas $p_x(x^*) = |\widehat{x}(x^*)| = |x^*(x)|$ definidas para $x^* \in X^*$ y $x \in X$.

La topología w^* es la mínima topología en X^* tal que la funcional $\widehat{x}$ resulta ser continua para cada $x \in X$.

Del Corolario 1.2.8 se sigue que para un e.v.t. X se cumple que:

(a) Una red (x_α) converge débilmente a x si y sólo si $x^*(x_\alpha) \to x^*(x)$ para todo $x^* \in X$.

(b) Una red (x^*_α) converge w^*-débilmente a x^* si y sólo si $x^*_\alpha(x) \to x^*(x)$ para todo $x \in X$.

COROLARIO 2.7.9. *Se tiene la siguiente igualdad*

$$(X^*,w^*)^* = \widehat{X}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como w^* es la topología $\sigma\left(X^*,\widehat{X}\right)$, el resultado se sigue del Corolario 2.7.4 . $\square$

COROLARIO 2.7.10. *Sea C un convexo de X^* y $x^* \notin C$. Existen $x \in X$ y $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\mathrm{Re}\widehat{x}(x^*) > \alpha_1 > \alpha_2 > \mathrm{Re}\widehat{x}(y^*)$$

para todo $y^* \in \mathrm{Cl}_{w^*}(C)$.

DEMOSTRACIÓN. Al aplicar la parte *(b)* del Corolario 2.3.3 al compacto $\{x^*\}$ y al cerrado $\mathrm{Cl}_{w^*}(C)$ obtenemos una funcional $\hat{x} \in (X, w^*)^*$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathrm{Re}\widehat{x}(x^*) > \alpha_1 > \alpha_2 > \mathrm{Re}\widehat{x}(y^*)$$

para todo $y^* \in \mathrm{Cl}_{w^*}(C)$. □

Ahora daremos la caracterización de $({}^{\perp}B)^{\perp}$ anunciada en la Subsección 2.5 .

TEOREMA 2.7.11. *Sean X un espacio normado, A y B subconjuntos de X y X^* respectivamente.*

(a) El conjunto $A^{\perp}$ es un subespacio w^*-cerrado de X^*.

(b) $({}^{\perp}B)^{\perp} = \mathrm{Cl}_{w^*}(< B >)$

(c) Si B es subespacio de X^*, entonces $({}^{\perp}B)^{\perp} = \mathrm{Cl}_{w^*}(B)$

DEMOSTRACIÓN. *(a)* Es claro que

$$A^{\perp} = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \text{ para todo } x \in A\} = \cap\{\ker(\widehat{x}) : x \in A\}.$$

Para cada $x \in A$, $\widehat{x}$ es w^*-continua en X^* por lo que $\cap\{\ker(\widehat{x}) : x \in A\}$ es un subespacio w^*-cerrado.

Para *(b)*, obsérvese que por el inciso anterior $({}^{\perp}B)^{\perp}$ es un subespacio w^*-cerrado y contiene a B; así, $\mathrm{Cl}_{w^*}(< B >) \subset ({}^{\perp}B)^{\perp}$. Ahora supongamos que $x^* \in X \backslash \mathrm{Cl}_{w^*}(< B >)$. Por la Proposición 2.3.4 existe $x_0 \in X$ tal que $\widehat{x_0}(x^*) = x^*(x_0) = 1$ y $\mathrm{Cl}_{w^*}(< B >) \subset \ker\widehat{x_0}$. De lo anterior se sigue que $x_0 \in {}^{\perp}B$ y $x^* \notin ({}^{\perp}B)^{\perp}$, por tanto $({}^{\perp}B)^{\perp} \subset \mathrm{Cl}_{w^*}(< B >)$. El apartado *(c)* se sigue de inmediato del *(b)*. □

Los espacios w^*-separables jugarán un papel importante en los capítulos finales. A continuación demostramos algunos resultados que se refieren a este tipo de espacios.

TEOREMA 2.7.12. *Sea X un espacio normado. Un subespacio vectorial $V \subset X^*$ es w^*-denso en X^* si y sólo si la condición $v(x) = 0$ para todo $v \in V$ implica $x = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.7.11, $\mathrm{Cl}_{w^*}(V) = ({}^{\perp}V)^{\perp}$. Entonces, $X^* = \mathrm{Cl}_{w^*}(V)$ si y sólo si ${}^{\perp}V = \{0\}$ □

COROLARIO 2.7.13. *Sean X un espacio normado y $V \subset X^*$ un subespacio vectorial . Entonces V es w^*-denso si y sólo si $\sigma(X, V)$ es Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.7.2 $\sigma(X, V)$ es Hausdorff si y sólo si $v(x) = 0$ para todo $v \in V$ implica $x = 0$. Del teorema anterior se sigue el resultado. □

TEOREMA 2.7.14. *Si X es un espacio normado separable y $\Gamma \subset X^*$ un conjunto no vacío, entonces existe $D \subset \Gamma$ numerable y w^*-denso en Γ. En particular, (X^*, w^*) es separable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n : n \geq 1\}$ un conjunto numerable y denso en X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto $Z_n \subset \mathbb{F}^n$ de la siguiente manera,

$$Z_n = \{(x^*(x_1), x^*(x_2), \ldots, x^*(x_n)) : x^* \in \Gamma\}.$$

Como $\mathbb{F}^n$ es separable, entonces Z_n también lo es. Entonces existe un subconjunto $D_n \subset \Gamma$ numerable tal que el subconjunto de puntos en Z_n definido por las funcionales en D_n es denso en Z_n. Claramente, el subconjunto $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ de Γ es numerable. Dados $n \geq 1$, $x^* \in \Gamma$,$y_1, ..., y_n \in X$ y $\varepsilon > 0$ existen $x_1, \ldots, x_n$ y $y^* \in D_n$ tales que

$$\|y_i - x_i\| < \frac{\varepsilon}{2\left(\|x^*\| + 1\right)}$$

para todo $1 \leq i \leq n$ y

$$\|(x^*(x_1), \ldots, x^*(x_n)) - (y^*(x_1), \ldots, y^*(x_n))\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De donde,

$$\|x^*(y_i) - y^*(y_i)\| < \|x^*(y_i) - x^*(x_i)\| + \|x^*(x_i) - y^*(x_i)\| < \varepsilon$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Así, D es w^*-denso en Γ. □

2.7.1.1. Acotados y w-acotados. Relaciones entre Continuidad, w-continuidad y w^*-continuidad. Veremos que para cualquier subconjunto de un espacio normado es lo mismo que sea acotado en la norma a que lo sea en la topología débil. Y que la continuidad para cualquier operador lineal entre dos espacios normados es equivalente a su $w - w$ continuidad, es decir a que sea continuo cuando en ambos espacios se considera la topología débil.

PROPOSICIÓN 2.7.15. *Sea X un espacio normado. Un subconjunto A de X es w-acotado si y sólo si $x^*(A)$ es acotado para todo $x^* \in X^*$.*

DEMOSTRACIÓN. Si A es w-acotado, entonces dado $x^* \in X^*$ existe $\lambda > 0$ tal que $A \subset \lambda \{x \in X : |x^*(x)| < 1\}$; de donde $|x^*(a)| < \lambda$ para todo $a \in A$.

Recíprocamente, sean $x_1^*, ..., x_n^* \in X^*$ y $\epsilon > 0$. Existe $M > 0$ tal que $|x_i^*(a)| < M$ si $a \in A$ y $1 \leq i \leqq n$. De donde,

$$A \subset \frac{M}{\epsilon} \{x \in X : |x_i^*(x)| < \epsilon \ 1 \leq i \leq n\};$$

o sea A es w-acotado. □

PROPOSICIÓN 2.7.16. *Sea X un espacio normado. Un subconjunto A de X es w-acotado si y sólo si A es acotado .*

DEMOSTRACIÓN. Si A es acotado, es claro que $x^*(A)$ es acotado para todo $x^* \in X^*$ y por la proposición anterior A es w-acotado. Recíprocamente, por la misma proposición se tiene que

$$\sup_{a\in A} \{|\hat{a}(x^*)| = |x^*(a)|\} < \infty$$

para cada $x^* \in X^*$. Del Teorema de Banach-Steinhaus se sigue que $\sup_{a\in A} \{\|a\|\} = \sup_{a\in A} \{\|\hat{a}\|\} < \infty$.

De manera muy similar a las dos proposiciones anteriores se prueban las dos siguientes. □

PROPOSICIÓN 2.7.17. *Sea X un espacio normado Un subconjunto B de X^* es w^*-acotado si y sólo si $\hat{x}(B)$ es acotado para todo $x \in X$.*

PROPOSICIÓN 2.7.18. *Sea X un espacio de Banach. Un subconjunto B de X^* es w^*-acotado si y sólo si B es acotado.*

Hacemos notar que la completez de X sólo es necesaria en esta proposición para la parte "sólo si".

COROLARIO 2.7.19. *Sea X un espacio de Banach. Si $B \subset X^*$ es acotado entonces la w^*-cerradura de B es acotada.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $\hat{x}(cl_{w^*}(B)) \subset cl_{\mathbb{F}}(\hat{x}(B))$ para todo $x \in X$. Entonces el resultado se sigue de las dos proposiciones anteriores. □

En vista de que las topologías débiles están dadas por seminormas tenemos como consecuencia de la Proposición 1.3.4 el siguiente resultado

LEMA 2.7.20. *Sean (W, τ) un e.v.t., $(Z, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $H \subset Z^*$. Un operador lineal $T : W \to Z$ es $\tau - \sigma(Z, H)$ continuo si y sólo si $h \circ T$ es $\tau-$ continuo para todo $h \in H$.*

COROLARIO 2.7.21. *Sean $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ dos espacios normados y $T : X \to Y$ y $S : X \to Y^*$ dos operadores lineales. Entonces*

(a) T es $\|\cdot\| - w$ continuo si y sólo si $y^* \circ T$ es $\|\cdot\|$ continua para toda $y^* \in Y^*$.

(b) T es $w - w$ continuo si y sólo si $y^* \circ T$ es $w-$continua para toda $y^* \in Y^*$.

(b) S es $w - w^*$ continuo si y sólo si $\hat{x} \circ S$ es $w-$continua para toda $x \in X$.

TEOREMA 2.7.22. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *y* $(Y, \|\cdot\|)$ *dos espacios normados y* $T : X \to Y$ *y* $S : X \to Y^*$ *dos operadores lineales. Entonces:*

(a) T *es* $\|\cdot\| - \|\cdot\|$ *continuo si y sólo si es* $w - w$ *continuo.*

(b) Si S *es* $\|\cdot\| - \|\cdot\|$ *continuo entonces es* $w - w^*$ *continuo.*

DEMOSTRACIÓN. *(a)* De la relación entre la continuidad y el acotamiento de los operadores lineales entre espacios normados, la igualdad $(Y, w)^* = Y^*$ y el apartado (b) del corolario anterior se obtiene la equivalencia de las siguientes afirmaciones: T es $\|\cdot\| - \|\cdot\|$ continuo. $T\,(B_X)$ es acotado. $y^* \circ T\,(B_X)$ es acotado para todo $y^* \in Y^*$. $y^* \circ T$ es $\|\cdot\|$ $-$continua para todo $y^* \in Y^*$. $y^* \circ T$ es $w-$continua para todo $y^* \in Y^*$. T es $w - w$ continuo.

(b) Si S es $\|\cdot\| - \|\cdot\|$ continuo, entonces se sigue de (a) que S es $w - w$ continuo y como la topología w^*es más débil que w, se tiene el resultado. □

2.8. Teoremas de Alaoglu y Goldstine

Recordamos que a la bola unitaria cerrada de un espacio normado X la denotaremos B_X.

Un resultado de mucha importancia en la Teoría de espacios de normados y en este trabajo en particular es que B_{X^*} es w^*-compacto. Este resultado apareció por primera vez en trabajos de Leonidas Alaoglu y por esta razón lleva su nombre.

TEOREMA DE ALAOGLU. *Sea* X *un espacio normado, entonces* B_{X^*} *es* w^**-compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Consideraremos a B_{X^*} con la topología de subespacio heredada de (X^*, w^*). Sean $I_x = \{\alpha \in \mathbb{F} : |\alpha| \leq \|x\|\}$ para cada $x \in X$. En el producto $\prod\limits_{x \in B_X} I_x$ consideramos la topología producto. Por el Teorema de Tychonoff , $\prod\limits_{x \in B_X} I_x$ es compacto. Afirmamos que la función

$$F : (B_{X^*}, w^*|_{B_{X^*}}) \to \prod_{x \in B_X} I_x \text{ definida como } F(x^*) = (x^*(x))_{x \in B_X}.$$

es un homeomorfismo sobre su imagen.

Para mostrar la inyectividad, tomemos $x^* \neq y^*$, ambas en B_{X^*}, así, existe $x_0 \in X$ tal que $x^*(x_0) \neq y^*(x_0)$, por lo que $(x^*(x))_{x \in B_X} \neq (y^*(x))_{x \in B_X}$.

Si $\pi_x : \prod\limits_{x\in B_X} I_x \to I_x$ es la $x-$proyección y $x^* \in X^*$, entonces $\pi_x \circ F(x^*) = x^*(x) = \widehat{x}(x^*)$, por tanto $\pi_x \circ F = \widehat{x}$, que por la Proposición 2.6.1 es continua; esto implica que F es continua.

Consideremos la función inversa de F definida en la imagen de ésta,

$$F^{-1} : F(B_{X^*}) \to (B_{X^*}, w^*|_{B_{X^*}}) \text{ donde } F^{-1}((x^*(x))_{x\in B_x}) = x^*.$$

Para demostrar su continuidad sean $x^* \in X^*$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\epsilon > 0$ y observemos que si

$$(y^*(x))_{x\in B_x} \in \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{x_i}^{-1}(B_\epsilon(x^*(x_i))$$

entonces

$$|y^*(x_i) - x^*(x_i)| < \epsilon \text{ para todo } 1 \le i \le n$$

o lo que es lo mismo $y^* \in V_{x_1,\ldots,x_n,\epsilon}(x^*)$, lo cual concluye la prueba de nuestra afirmación.

Para terminar la demostración del teorema basta probar que $F(B_{X^*})$ es cerrado en $\prod\limits_{x\in B_X} I_x$, ya que entonces es un compacto, y por ser $F : B_{X^*} \to F(B_{X^*})$ un homeomorfismo obtenemos que B_{X^*} es w^*-compacto.

Sean $(x_\beta)_{\beta\in\Delta}$ una red en $F(B_{X^*})$ que converge a $(\alpha_x)_{x\in B_x}$. Digamos que $x_\beta = (x^*_\beta(x))_{x\in B_x}$ con $x^*_\beta \in B_{X^*}$. Por ser las $x-$proyecciones continuas para cada $x \in B_X$, entonces $\lim x^*_\beta(x) = \alpha_x$. Definimos $y^* : X \to \mathbb{F}$ como

$$y^*(x) \quad = \quad \alpha_x;$$

o sea, $y^*(x) = \lim x^*_\beta(x)$. Es fácil comprobar, por las propiedades lineales del límite de las redes escalares, que y^* es lineal.

Sea $\|x\| = 1$, entonces

$$|y^*(x)| = \lim|x^*_\beta(x)| \le \overline{\lim}\|x^*_\beta\|\|x\| \le 1$$

por tanto $y^* \in B_{X^*}$, es decir $F(B_{X^*})$ es cerrado en $\prod\limits_{x\in B_X} I_x$. □

Corolario 2.8.1. *Sea X un espacio normado, entonces todo subconjunto acotado y w^*-cerrado de X^* es w^*-compacto.*

Demostración. Se sigue del teorema anterior y de que las homotecias son continuas en cualquier e.v.t. □

Corolario 2.8.2. *Sea X un espacio normado, entonces todo subconjunto w^*-compacto de X^* es acotado y w^*-cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de las Proposiciones 2.7.17 y 2.7.18 y de que la topología w^* es de Hausdorff. $\square$

TEOREMA 2.8.3. *Si X es un espacio normado separable y $A \subset X^*$ es un subconjunto acotado de X^*. Entonces el espacio topológico $(A, w^*|_A)$ es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que A es w^* -cerrado, pues en otro caso consideramos su w^* -cerradura. Entonces A es w^*-compacto. Sea $\{x_i : i \geq 1\}$ un conjunto numerable y denso en X. Definimos $d(x^*, y^*) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \text{mín}\,(1, |x^*(x_i) - y^*(x_i)|)$, para $x^*, y^* \in X^*$. Esta función d es una distancia: la condición $d(x^*, y^*) = 0$ implica $x^* = y^*$ se cumple gracias a la densidad de $\{x_i : i \geq 1\}$ en X.

Afirmamos que $I : (A, w^*) \to (A, d)$ es un homeomorfismo. Como A es w^* -compacto basta probar que es una función continua. Sea $(x^*_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red en (A, w^*)tal que $x^*_\alpha \xrightarrow{w^*} x^*$, entonces $x^*_\alpha(x_i) \to x^*(x_i)$ para cada $i \geq 1$. Dado $\epsilon > 0$ existen $N > 0$ y $\alpha_0 \in \Lambda$ tales que: $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \text{mín}\,(1, |x^*_\alpha(x_i) - x^*(x_i)|) < \frac{\epsilon}{2}$ para todo α y $\sum\limits_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} \text{mín}\,(1, |x^*_\alpha(x_i) - x^*(x_i)|)$ $< \frac{\epsilon}{2}$ si $\alpha \succeq \alpha_0$; es decir $x^*_\alpha \xrightarrow{d} x^*$. O sea, I es continua. $\square$

COROLARIO 2.8.4. *Si X es un espacio normado y X^* es separable, entonces w^* restringido a cualquier subconjunto acotado A de X^* es metrizable.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado se sigue del teorema anterior y la Proposición 2.5.5 $\square$

TEOREMA DE GOLDSTINE. *En cualquier espacio normado X se cumple que*

$$B_{X^{**}} = \text{Cl}_{\sigma(X^{**}, X^*)}(\widehat{B_X}).$$

DEMOSTRACIÓN. Primero se probará que si $x^{**} \in X^{**}$ no pertenece a la $\sigma(X^{**}, X^*)$-cerradura de $\widehat{B_X}$, entonces $\|x^{**}\| > 1$ o sea, que se tiene la contención

$$B_{X^{**}} \subset \text{Cl}_{\sigma(X^{**}, X^*)}(\widehat{B_X}).$$

Por la Proposición 2.7.4, $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)^* = \widehat{X^*}$. Al aplicar el Corolario 2.7.10 al punto $\{x^{**}\}$ y al conjunto$\sigma(X^{**}, X^*)-$cerrado y convexo $\widehat{B_X}$ de X^{**} obtenemos una funcional $x^* \in X^*$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\text{Re}\widehat{x^*}(x^{**}) > \alpha_1 > \alpha_2 > \text{Re}\widehat{x^*}(\widehat{x})$$

para todo $x \in B_X$; o sea,

$$|x^{**}(x^*)| > \alpha_1 > \alpha_2 \geq \underset{x \in B_X}{\text{Re}} |x^*(x)| = \|x^*\|.$$

Por lo que $\|x^{**}\| > 1$.

Por otra parte, por ser $\widehat{\cdot}$ una isometría, es claro que

$$\widehat{B_X} \subset B_{X^{**}}.$$

Por el Teorema de Alaoglu y por ser $(X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ un espacio de Hausdorff, el conjunto $B_{X^{**}}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-cerrado y por tanto,

$$\mathrm{Cl}_{\sigma(X^{**},X^*)}(\widehat{B_X}) \subset B_{X^{**}}.$$

$\square$

COROLARIO 2.8.5. *El espacio $\widehat{X}$ es w^*- denso en X^{**}.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema anterior basta probar que si $\|x^{**}\| > 1$, entonces $x^{**} \in \mathrm{Cl}_{w^*}(\widehat{X})$. Dados $x_1^*, ..., x_n^* \in X^*$ y $\epsilon > 0$ existe, por el teorema anterior, $x \in B_X$ tal que $\left| x_i^*\left(x\right) - \frac{x^{**}}{\|x^{**}\|}\left(x_i^*\right) \right| < \frac{\epsilon}{\|x^{**}\|}$para $1 \leq i \leq n$, de donde $\left| \widehat{\|x^{**}\| \, x}(x_i^*) - x^{**}\left(x_i^*\right) \right| < \epsilon$ y se sigue el resultado deseado. $\square$

2.9. Espacios reflexivos

La siguiente caracterización de los espacios reflexivos es consecuencia del Teorema de Goldstine. Recordamos que un espacio normado X es reflexivo si la inmersión $\widehat{\cdot}$ canónica de X en X^{**} es suprayectiva.

TEOREMA 2.9.1. *X es reflexivo si y sólo si la bola unitaria cerrada B_X de X es w-compacta.*

DEMOSTRACIÓN. El operador lineal $\widehat{\cdot} : (X, w) \to (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)$ es un isomorfismo sobre su imagen, ya que es inyectivo y $|\widehat{x}\left(x^*\right)| = |x^*\left(x\right)|$ para cualesquiera $x \in X$ y $x^* \in X^*$.

Si X es reflexivo, entonces el operador $\widehat{\cdot}$ es sobre y entonces $\widehat{B_X} = B_{X^{**}}$. Por el Teorema de Alaoglu $B_{X^{**}}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacto. Por tanto, $\widehat{\cdot}^{-1}\left(B_{X^{**}}\right) = B_X$ es w-compacto

Para la otra implicación, si B_X es $w-$compacto, entonces, $\widehat{B_X}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacto, y por ser este último un espacio Hausdorff, $\widehat{B_X}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)-$cerrado en X^{**}. Por el Teorema de Goldstine $\widehat{B_X} = B_{X^{**}}$ y esto nos lleva a que $\widehat{X} = X^{**}$, es decir X es reflexivo. $\square$

TEOREMA 2.9.2. *Un espacio de Banach es reflexivo si y sólo si su dual es reflexivo.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach reflexivo, demostraremos que su dual es reflexivo. Por ser X espacio reflexivo, entonces la topología w^* coincide con la topología débil $\sigma(X^*, X^{**})$ en X^*. Por el Teorema de Alaoglu, B_{X^*} es w^*-compacto, por tanto $\sigma(X^*, X^{**})-$compacto. Del Teorema 2.9.1 se sigue que X^* es reflexivo.

Para la otra implicación, supongamos que X^* es reflexivo. Primero veremos que $\widehat{B_X}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)-$compacto.

Por la parte "sólo si", X^{**} es reflexivo, y por el Teorema 2.9.1, $B_{X^{**}}$ es $\sigma(X^{**}, X^{***})$-compacto. Por otro lado, como los duales topológicos de X^{**} con las topologías uniforme y $\sigma(X^{**}, X^{***})$ coinciden, y el conjunto $\widehat{B_X}$ es cerrado en la norma en X^{**}, entonces, por el Teorema de Mazur (Corolario 2.7.7), $\widehat{B_X}$ es $\sigma(X^{**}, X***)$-cerrado. Por estar éste contenido en el conjunto $\sigma(X^{**}, X***)$-compacto $B_{X^{**}}$, resulta que $\widehat{B_X}$ es también compacto en esta topología.

Dado que X^* es reflexivo, $\sigma(X^{**}, X^*) = \sigma(X^{**}, X^{***})$, entonces $\widehat{B_X}$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-compacto.

Al inicio de la prueba del Teorema 2.9.1 vimos que el operador lineal $\widehat{\cdot} : (X, w) \to (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*)$ es un isomorfismo sobre su imagen. Por tanto, B_X es $w-$compacto y por ese mismo teorema concluimos que X es reflexivo. $\square$

Teorema 2.9.3. *Si Y es un espacio de Banach topológicamente isomorfo a un espacio reflexivo X, entonces Y es reflexivo.*

Demostración. Sea $T : X \to Y$ un isomorfismo topológico. Por el Teorema 2.7.22, $T : (X, w) \to (Y, w)$ es un homeomorfismo. Tenemos que B_Y es w-cerrado por el Teorema de Mazur y está contenido en $\|T^{-1}\| \, T(B_X)$ que es w-compacto en Y, puesto que por el Teorema 2.9.1 B_X es w-compacto en X. Entonces, B_Y es w-compacto y así, Y es reflexivo. $\square$

2.10. La topología acotada-w^* (bw^*). El Teorema de Krein-Šmulian

En esta subsección suponemos que X es un espacio de Banach.

Proposición 2.10.1. *Sea $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en X que converge a cero. El conjunto*

$$V_{(x_i)} = \{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < 1, \ si \ i \geq 1\}$$

es absorbente, balanceado y convexo.

Demostración. Para ver que $V_{(x_i)}$ es absorbente, tomemos $x^* \in X^*$ no nula, como la sucesión (x_i) converge, existe $M > 0$ tal que $\|x_i\| < M$ para todo $i \geq 1$ y por ser x^* una funcional lineal continua, tenemos $|x^*(x_i)| \leq \|x^*\|\|x_i\| \leq \|x^*\|M$. Tomemos $0 < \delta_{x^*} < \frac{1}{\|x^*\|M}$ y $|\lambda| \leq \delta_{x^*}$; como consecuencia de lo anterior, para todo i sucede que $|\lambda x^*(x_i)| \leq \delta_{x^*}|x^*(x_i)| < 1$; así, $\lambda x^* \in V_{(x_i)}$.

Si $x^* \in V_{(x_i)}$ y $|\lambda| \leq 1$, entonces es inmediato que $|\lambda x^*(x_i)| = |\lambda||x^*(x_i)| < 1$ para todo $i \geq 1$, es decir, $\lambda x^* \in V_{(x_i)}$ por lo que este conjunto es balanceado.

Sean $\alpha, \beta \geq 0$ tales que $\alpha + \beta = 1$ y $x^*, y^* \in V_{(x_i)}$. Vemos que $|\alpha x^*(x_i) + \beta y^*(x_i)| \leq \alpha|x^*(x_i)|+\beta|y^*(x_i)|$. Por estar x^*, y^* en $V_{(x_i)}$ tenemos que $|\alpha x^*(x_i)+\beta y^*(x_i)| < \alpha+\beta = 1$ para todo $i \geq 1$. Por tanto, el conjunto $V_{(x_i)}$ es convexo. □

Al conjunto de sucesiones en X que converge a 0 lo denotamos como $c_0(X)$.

Definición 2.10.2. La topología acotada-w^*, denotada por bw^* y definida en X^*, es aquella topología localmente convexa que está determinada por la familia de seminormas

$$p_{(x_i)}(x^*) = \sup_{i\geq 1} |x^*(x_i)|$$

donde $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0(X)$. Para cada $x \in X$ se tiene que

$$|x^*(x)| = p_{(x_i)}(x^*)$$

con $(x_i)_{i=1}^{\infty} = (x, 0, 0, ...)$.

Así la topología bw^* es más fuerte que la w^*.

Lema 2.10.3. *La familia de seminormas*

$$\left\{p_{(x_i)} : (x_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0(X)\right\}$$

está saturada y los conjuntos

$$V_{(x_i)} = \left\{x^* \in X^* : p_{(x_i)}(x^*) < 1\right\}$$

con $(x_i) \in c_0(X)$ forman una base local del 0 de vecindades abiertas para la topología bw^*.

Demostración. Sean $F = \{(x_i^1), (x_i^2), \ldots, (x_i^n)\}$ un conjunto finito de sucesiones convergentes a cero en X, $x^* \in X^*$ y

$$q_F(x^*) = \max_{1\leq j\leq n}\{p_{(x_i^j)}(x^*)\},$$

definimos la sucesión $(x_i) = (x_1^1, x_1^2, \ldots x_1^n, \ldots, x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n, \ldots)$, la cual, como es fácil comprobar, converge a 0. Además, $p_{(x_i)}(x^*) = q_F(x^*)$. Con lo anterior demostramos que la familia de seminormas $p_{(x_i)}$ está saturada y entonces, las vecindades del cero de la forma

$$V_{(x_i),\epsilon}(0) = \left\{x^* \in X^* : p_{(x_i)}(x^*) < \epsilon\right\}$$

con $(x_i) \in c_0(X)$ y $\epsilon > 0$ forman una base de vecindades abiertas de 0.

Como $V_{(\frac{x_i}{\epsilon}),1}(0) = V_{(x_i),\epsilon}(0)$ se sigue los conjuntos $V_{(x_i)}$ constituyen una base de vecindades abiertas de 0. $\square$

LEMA 2.10.4. *Sea $B \subset X^*$ un conjunto acotado, entonces las topologías inducidas por w^* y bw^*en B son iguales.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0(X)$ y $y_0^* \in B$. Existe $I > 0$ tal que $\|(y^* - y_0^*)(x_i)\| < 1$ si $i > I$ para todo $y^* \in B$. Así, una vecindad básica de y_0^* en la topología inducida por bw^* en B está dada como

$$V_{(x_i)}(y_0^*) \bigcap B = \{y^* \in B : \|(y^* - y_0^*)(x_i)\| < 1 \text{ si } 1 \leq i \leq I\}.$$

El lado derecho es una vecindad básica de y_0^* en la topología inducida por w^* en B, correspondiente a los puntos $x_1, ..., x_I$ y al real 1. Por tanto, la topología en B inducida por bw^* es más débil que la que induce w^*. La afirmación recíproca se sigue de que w^* es más débil que bw^* en X^*. $\square$

LEMA 2.10.5. *Supongamos que $C \subset X^*$ es tal que $C \cap rB_{X^*}$ es w^*-cerrado para todo $r > 0$. Si $x_0^* \in X^* \setminus C$, entonces, existe una sucesión $(x_n) \in c_0(X)$ tal que $x^* \in X^*$ y $p_{(x_i)}(x^* - x_0^*)\} < 1$ implican que $x^* \in X^* \setminus C$. O sea, $X^* \setminus C$ es bw^*-abierto.*

DEMOSTRACIÓN. La afirmación es obvia si $C = \emptyset$. Supongamos que C es no vacío. Se sigue de la hipótesis que $C \cap rB_{X^*}$ es cerrado en X^* para todo $r > 0$. Si (y_n) es una sucesión en C que converge en la norma a y , entonces $\|y_n\| \leq r$ para algún $r > 0$ y todo $n \geq 1$. De donde, (y_n) es una sucesión en $C \cap rB_{X^*}$ y como éste es cerrado, $y \in C$. Así, C es cerrado en X^*. Sea $r_0 = d(x_0^*, C)$, por tanto $r_0 > 0$.

Considérese la familia $\Im = \{G \subset B_X : G \text{ es finito y no vacío}\}$. Construiremos inductivamente una sucesión (F_n) en $\Im$ tal que

(a) Si $x^* \in X^*$ y

$$\|x^* - x_0^*\| \leq r_0 + 1 \text{ y } |(x^* - x_0^*)(x)| \leq \frac{r_0}{2} \tag{2.10.1}$$

para todo $x \in F_1$, entonces $x^* \in X^* \setminus C$, y

(b) Para $x^* \in X^*$y $n \geq 2$, las condiciones

$$b_1)\ |(x^* - x_0^*)(x)| \leq \frac{r_0}{2}$$

para todo $x \in F_1$ y

$$b_n)\ \|x^* - x_0^*\| \ \leq \ r_0 + n \text{ y } |(x^* - x_0^*)(x)| \leq (r_0 + k);$$

para todo $x \in F_{k+1}$ y $1 \leq k \leq n-1$, implican $x^* \in X^* \setminus C$.

Primero probaremos que existe un conjunto finito F_1 con las propiedades arriba establecidas. Supongamos lo contrario, es decir, que para todo $G \subset B_X$ finito y no vacío se tiene que el conjunto

$$H_1(G) = \{x^* \in C : x^* \text{ satisface 2.10.1 para todo } x \in G\} \neq \emptyset.$$

Obsérvese que $H_1(G) \subset C \bigcap B_{r_0+1}[x_0^*]$ y que el conjunto de la derecha es un conjunto w^*-cerrado, por lo que

$$\mathrm{Cl}_{w^*}(H_1(G)) \subset C \bigcap B_{r_0+1}[x_0^*].$$

Inductivamente se puede mostrar que si $G_i \in \Im$ para $1 \leq i \leq m$, entonces

$$H_1(\bigcup_{i=1}^{m} G_i) = \bigcap_{i=1}^{n} H_1(G_i). \tag{2.10.2}$$

De esta igualdad se sigue de inmediato que$\Im' = \{\mathrm{Cl}_{w^*}(H_1(G)) : G \in \Im\}$ es una familia de subconjuntos w^*-cerrados con la propiedad de la intersección finita. Como todos ellos son subconjuntos de $B_{r+1}[x_0]$ y éste es un conjunto w^*-compacto, tenemos que

$$\bigcap\{\mathrm{Cl}_{w^*}(H_1(G)) : G \in \Im\} \neq \emptyset.$$

Tomemos $x_1^* \in \bigcap\{\mathrm{Cl}_{w^*}(H_1(G)) : G \in \Im\}$, $x \in B_X$ y $\epsilon > 0$. Entonces $x_1^* \in C \bigcap B_{r_0+1}[x_0^*]$ y existe $y^* \in H_1(\{x\})$ tal que $|(x_1^* - y^*)(x)| < \epsilon$, por lo que

$$|(x_1^* - x_0^*)(x)| \leq |(x_1^* - y^*)(x)| + |(y^* - x_0^*)(x)| < \frac{r_0}{2} + \epsilon.$$

Lo anterior muestra que $\|x_1^* - x_0^*\| \leq \frac{r_0}{2}$, lo cual contradice que $r_0 = d(x_0^*, C)$. Así $H_1(G) = \emptyset$ para algún $G \in \Im$. Tomamos como F_1 a cualquier conjunto G que tenga esta propiedad.

Sea $n \geq 2$ y supongamos definidos $F_1, \ldots, F_{n-1}$ con las propiedades requeridas. Para todo $G \subset B_X$ finito no vacío hacemos

$$H_n(G) = \{x^* \in C : x^* \text{ satisfacen } b_1)\text{y } b_n), \text{ con } F_n = G\}.$$

De manera semejante a como se hizo arriba se puede probar que este conjunto es vacío para un conjunto G. Para esto, en el último paso de la prueba anterior hay que tomar el conjunto $\{\frac{r_0}{2(r_0+n)}x\}$ en lugar de $\{x\}$. Definimos $F_n = G$.

Hagamos $P_1 = \{\frac{2}{r_0}x : x \in F_1\}$ y $P_{n+1} = \{\frac{x}{r_0+n} : x \in F_{n+1}\}$ para cada $n \geq 1$. El conjunto $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ es infinito numerable. Sea (x_n) una numeración de P. Tenemos que $(x_n) \in c_0(X)$ (recuérdese que $F_n \subset B_X$ para todo $n \geq 1$). Si $x^* \in X^*$ satisface que $\sup\{|(x^* - x_0^*)(x_n)| : n \in \mathbb{N}\} < 1$, entonces x^* satisface $\mathrm{b}_1)$ y $\mathrm{b}_n)$ para algún $n \geq 2$ entonces $x^* \in X^* \setminus C$. $\square$

PROPOSICIÓN 2.10.6. *Sea $C \subset X^*$. Entonces $C \cap rB_{X^*}$ es w^*-cerrado para todo $r > 0$ si y sólo si C es bw^*-cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Si C es bw^*-cerrado y $r > 0$, entonces $C \cap rB_{X^*}$ es bw^*-cerrado en rB_{X^*}. Por el Lema 2.10.4 $C \cap rB_{X^*}$ es w^*-cerrado en rB_{X^*} y se sigue del Teorema de Alaoglu que es w^*-cerrado. Inversamente, supongamos que $C \cap rB_{X^*}$ es w^*-cerrado para todo $r > 0$. Por el lema anterior, $X^* \setminus C$ es bw^*-abierto. $\square$

COROLARIO 2.10.7. *La bw^*topología es la máxima topología que induce la misma topología que w^*en cada rB_{X^*}, con $r > 0$. Así, es la máxima topología que induce la misma topología en cada conjunto acotado de X^*.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 2.10.4 sólo falta probar la maximalidad de bw^*. Supongamos que C es un cerrado en una topología τ de X^* que induce la misma topología que w^* en cada rB_{X^*}, con $r > 0$, entonces $C \cap rB_{X^*}$ es w^*-cerrado para todo $r > 0$ y por la proposición anterior, C es bw^*-cerrado; o sea $\tau \subset bw^*$. $\square$

OBSERVACIÓN. La propiedad señalada en el corolario anterior es la más usada para definir la topología bw^*.

TEOREMA 2.10.8. *Una funcional x^{**} definida en X^* es w^*-continua si, y sólo si, es bw^*-continua. O sea, $(X^*, w^*)^* = (X^*, bw^*)^*$*

DEMOSTRACIÓN. Toda funcional continua en la topología w^* es bw^*-continua, ya que la topología bw^* es más fuerte que la topología w^*.

Inversamente, sea $x^{**} : X^* \to \mathbb{F}$ una funcional continua en la topología bw^*. Como $(X^*, w^*)^* = \hat{X}$, debemos probar que $x^{**} = \widehat{x}$ para algún $x \in X$.

Existen $M > 0$ y una sucesión $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0(X)$ tales que

$$|x^{**}(x^*)| \leq Mp_{(x_i)}(x^*)$$

para todo $x^* \in X^*$.

De donde,

$$x^{**}(x^*) = 0 \text{ si } p_{(x_i)}(x^*) = 0. \tag{2.10.3}$$

Sean $T : X^* \to c_0$ el operador lineal definido como $T(x^*) = (x^*(x_i))$ y $f : T(X^*) \to \mathbb{F}$ la funcional lineal definida como $f(T(x^*)) = x^{**}(x^*)$. La funcional f está bien definida en el subespacio $T(X^*)$ de c_0, debido a (2.10.3), y es continua, ya que

$$|f(T(x^*))| = |x^{**}(x^*)| \leq Mp_{(x_i)}(x^*) = M \|T(x^*)\|_\infty$$

para todo $x^* \in X^*$.

Por tanto, existe $F : c_0 \to \mathbb{F}$ extensión lineal continua de f. Tenemos

$$F(y) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$$

para alguna sucesión $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^1$ y todo $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0$.

En particular, $x^{**}(x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^*(x_i)$. La serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge en X por ser absolutamente convergente en un espacio de Banach. Sea $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$, entonces

$$x^{**}(x^*) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^*(x_i) = x^*(x) = \widehat{x}(x^*)$$

para todo $x^* \in X^*$, es decir, $x^{**} = \widehat{x}$. □

Teorema de Krein-Šmulian. *Un conjunto convexo $C \subset X^*$ es w^*-cerrado si y sólo si $C \cap rB_{X^*}$ es w^*-cerrado para todo $r > 0$.*

Demostración. Sea $C \subset X^*$ un conjunto convexo. Si C es w^*-cerrado y $r > 0$, entonces $C \cap rB_{X^*}$ es w^*-cerrado porque rB_{X^*} es w^*-cerrado

Inversamente, si $C \cap rB_{X^*}$ es w^*-cerrado para todo $r > 0$, entonces, por la Proposición 2.10.6 C es bw^*-cerrado. Por los teoremas 2.10.8 y 2.3.5 C es w^*-cerrado. □

Corolario 2.10.9. *Un subespacio $Y \subset X^*$ es w^*-cerrado si y sólo si $Y \cap B_{X^*}$ es w^*-cerrado.*

Demostración. Nótese que $Y \bigcap rB_{X^*} = Y \bigcap B_{X^*}$ por ser Y subespacio vectorial. □

2.11. Puntos extremos y conjuntos extremales. Teorema de Krein-Milman.

El Teorema de Krein-Milman, apareció por primera vez en un artículo titulado “On extreme points of regular convex sets”, en el volumen 9 de la revista *Studia Mathematica,* en Varsovia-Breslavia, en el año de 1940. Su nombre se debe a Mark Grigorievich Krein (Kiev 1907-Odessa 1989), prolífico matemático soviético; y su alumno de doctorado David P. Milman (1912-1982), soviético nacionalizado israelí. En esta parte del trabajo se exponen los elementos necesarios para poder demostrar este teorema con las herramientas que hasta ahora tenemos.

DEFINICIÓN 2.11.1. Sea K un subconjunto de un subespacio vectorial X. Un subconjunto no vacío $S \subset K$ es llamado conjunto extremal de K, si para $x, y \in K$ y $0 < t < 1$ la condición $tx + (1-t)y \in S$ implica $x, y \in S$.

Los puntos extremos de K son los conjuntos extremales de K con sólo un elemento.

Es obvio que para poder afirmar que $x \in K$ no es un punto extremo de K, basta ver que $x = ty + (1-t)z$ con $t \in (0,1)$, $y \neq z$ y $y, z \in K$ y que K es un conjunto extremal de sí mismo.

Es inmediato notar que los puntos extremos se conservan bajo transformaciones lineales biyectivas.

LEMA 2.11.2. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico w-Hausdorff. Supongamos que K es un subconjunto no vacío, compacto y convexo en X, entonces todo conjunto extremal compacto de K contiene un punto extremo de K.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{H}$ la familia de todos los conjuntos extremales y compactos de K. Dado que K es un conjunto compacto $K \in \mathcal{H}$.

Probaremos las siguientes dos propiedades de la familia $\mathcal{H}$.

(a) Si $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$, $C \neq \emptyset$ y $\bigcap\limits_{H \in \mathcal{C}} H \neq \emptyset$, entonces $\bigcap\limits_{H \in \mathcal{C}} H \in \mathcal{H}$.

(b) Sean $H \in \mathcal{H}$, $x^* \in X^*$ y $\mu = \max\{\mathrm{Re}(x^*(x)) : x \in H\}$. Definimos el conjunto

$$H_{x^*} = \{x \in H : \mathrm{Re}(x^*(x)) = \mu\}$$

entonces $H_{x^*} \in \mathcal{H}$.

Nótese que podemos hablar de μ y del conjunto H_{x^*}, ya que toda funcional real y continua en un compacto alcanza su valor máximo.

(a) Como $H \in \mathcal{C}$ es compacto en (X, τ), entonces también es compacto en (X, w) y por ser éste de Hausdorff, se sigue que H es $w-$cerrado y por tanto, $\tau-$cerrado. Así, $\bigcap\limits_{H \in \mathcal{C}} H$ es un cerrado contenido en un compacto, por lo que también es compacto en (X, τ) y es inmediato ver que es un conjunto extremal de K.

(b) Supongamos que $z = tx + (1-t)y \in H_{x^*}$con $x, y \in K$ y $t \in (0,1)$. Mostraremos que $x, y \in H_{x^*}$. Dado que $z \in H$, $H \in \mathcal{H}$ y este último es un conjunto extremal de K, tenemos que $x, y \in H$. Por otra parte, $\mathrm{Re}(x^*(x)) \leq \mu$, $\mathrm{Re}(x^*(y)) \leq \mu$ y por hipótesis $\mathrm{Re}(x^*(z)) = \mu$; supongamos sin perdida de generalidad que $\mathrm{Re}(x^*(x)) \leq \mathrm{Re}(x^*(y))$. Entonces

$$\begin{aligned} \mu &= \mathrm{Re}(x^*(z)) = t\mathrm{Re}(x^*(x)) + (1-t)\mathrm{Re}(x^*(y)) \\ &\leq t\mathrm{Re}(x^*(y)) + (1-t)\mathrm{Re}(x^*(y)) = \mathrm{Re}(x^*(y)). \end{aligned}$$

De donde, $\mathrm{Re}(x^*(y)) = \mu$ y despejando $\mathrm{Re}(x^*(x))$ del primer renglón, obtenemos que $\mathrm{Re}(x^*(x)) = \mu$, i.e., $x, y \in H_{x^*}$. Queda probado que H_{x^*} es un conjunto extremal de K y es claro que es compacto por ser un subconjunto cerrado de un compacto. Entonces, $H_{x^*} \in \mathcal{H}$. y queda probado *(b)*

Fijemos ahora $H \in \mathcal{H}$ y sea $\mathcal{H}'$ la subfamilia de $\mathcal{H}$ formada por los subconjuntos de H pertenecientes a $\mathcal{H}$. Dado que $H \in \mathcal{H}'$, $\mathcal{H}' \neq \emptyset$. Por el Lema de Zorn existe una subcolección maximal entre las subcolecciones totalmente ordenadas de $\mathcal{H}'$. Denotemos a dicha subcolección como Ω. Por lo visto en la prueba de *(a)* sus elementos son cerrados de X y por tanto del compacto H y Ω tiene la propiedad de intersección finita por ser Ω totalmente ordenada. Entonces, la intersección M de todos los elementos de Ω es no vacía.

Por *(a)* , $M \in \mathcal{H}'$. La maximalidad de Ω implica que ningún subconjunto propio de M pertenece a $\mathcal{H}$. Del inciso *(b)* se sigue que si $x^* \in X^*$, entonces $H_{x^*} = H$; o sea, x^*es constante en M y como X^* separa puntos en X, por hipótesis, entonces M debe tener un solo punto. Por tanto, M es un punto extremo de K y como $M \subset H$, queda entonces probado el lema. $\square$

Teorema de Krein-Milman. *Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico w-Hausdorff (por ejemplo, localmente convexo). Si K es un conjunto compacto y convexo en X, entonces K es la cerradura de la envolvente convexa del conjunto de sus puntos extremos.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ la familia de todos los conjuntos extremales y compactos de K. Por el lema anterior todo conjunto en $\mathcal{H}$ contiene un punto extremo de K.

Por ser K un conjunto compacto y convexo, $\mathrm{Cl}(C) \subset K$ y $\mathrm{Cl}(C)$ es compacto. Si $K = \emptyset$, el teorema está probado. Supongamos $K \neq \emptyset$.

Si C es la envolvente convexa del conjunto de puntos extremos de K, se sigue del lema anterior que

$$C \bigcap H \neq \emptyset \tag{2.11.1}$$

para cada $H \in \mathcal{H}$.

Supongamos que existe $x_0 \in K$ tal que $x_0 \notin \mathrm{Cl}(C)$. Por el Corolario 2.3.3 de los Teoremas de separación, existe $x^* \in X^*$ tal que $\mathrm{Re}(x^*(x)) < \mathrm{Re}(x^*(x_0))$ para todo $x \in \mathrm{Cl}(C)$. Sea $\mu = \max\{\mathrm{Re}(x^*(x)) : x \in K\}$. Como vimos en el lema anterior $K_{x^*} = \{x \in K : \mathrm{Re}(x^*(x)) = \mu\}$ pertenece a $\mathcal{H}$ y tenemos que

$$\mathrm{Re}(x^*(x)) < \mathrm{Re}(x^*(x_0)) \leq \mu$$

o lo que es lo mismo $\mathrm{Cl}(C) \bigcap K_{x^*} = \emptyset$, lo cual contradice 2.11.1. $\square$

Capítulo 3

La característica. Subespacios minimales

En todo el capítulo X denota un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$, a menos que otra cosa se diga, y en X^* se considera la norma asociada, a menos que se especifique algo distinto.

Algunos resultados que aquí se ven son válidos inclusive cuando X es un espacio normado no completo.

3.1. Comparación de topologías débiles restringidas a B_X

LEMA 3.1.1. *Sean* $V_1 \subset X^*$ *un subconjunto no vacío y* $\mathrm{V} = \mathrm{Cl}(V_1)$. *Entonces* $\sigma(X, V_1)|_{B_X} = \sigma(X, V)|_{B_X}$.

DEMOSTRACIÓN. Como $V_1 \subset V$ entonces es inmediato que $\sigma(X, V_1)|_{B_X} \subset \sigma(X, V)|_{B_X}$.

Por otra parte, dada $y^* \in V$ existe una sucesión $(x_n^*) \subset V_1$ que converge a y^*. Sea $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$|(x_n^* - y^*)(x)| \leq \|x_n^* - y^*\| < \frac{\epsilon}{4}$$

si $n \geq N$ y para todo $x \in B_X$.

Sea $x_0 \in B_X$, por ser este conjunto convexo y simétrico, para todo $x \in B_X$ se cumple que $\frac{1}{2}(x - x_0) \in B_X$ y por la desigualdad anterior, tenemos que $|(x_N^* - y^*)(x - x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Por otro lado, para todo $x \in X$ se cumple

$$|y^*(x - x_0)| \leq |(y^* - x_N^*)(x - x_0)| + |x_N^*(x - x_0)|. \tag{3.1.1}$$

Por ser x_N^* una funcional $\sigma(X, V_1)$-continua, existen $x_1^*, \cdots, x_m^* \in V_1$ y $\delta > 0$ tales que si $x \in V_{x_1^*, \cdots, x_m^*, \delta}(x_0)$ entonces $|x_N^*(x - x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. De la desigualdad (3.1.1) y la anterior, se sigue que $|y^*(x - x_0)| < \epsilon$ para todo $x \in B_X \bigcap V_{x_{i_1}^*, \cdots, x_{i_m}^*, \delta}(x_0)$. Así, y^* es $\sigma(X, V_1)$-continuo en B_X .

Sea $x_0 \in U$, con $U \subset B_X$ un conjunto $\sigma(X, V)$-abierto. Entonces existen $y_1^*, \ldots, y_n^* \in V$ y $\epsilon > 0$ tales que $V_{y_1^*, \ldots, y_n^*, \epsilon}(x_0) \bigcap B_X \subset U$. Como vimos anteriormente cada y_k^* es

$\sigma(X,V_1)$-continuo en B_X; por tanto, $V_{y_1^*,\ldots,y_n^*,\epsilon}(x_0)$ es una $\sigma(X,V_1)$-vecindad abierta de x_0 por lo que U es $\sigma(X,V_1)$-abierto en B_X. O sea, $\sigma(X,V)|_{B_X} \subset \sigma(X,V_1)|_{B_X}$. $\square$

COROLARIO 3.1.2. *Sean $V_1, V_2 \subset X^*$ subconjunto no vacíos. Entonces $\sigma(X,V_1)|_{B_X} = \sigma(X,V_2)|_{B_X}$ si y sólo* $\mathrm{Cl}(V_1) = \mathrm{Cl}(V_2)$.

DEMOSTRACIÓN. La parte "si" se sigue del lema anterior. Para la otra parte, supongamos que $\sigma(X,V_1)|_{B_X} = \sigma(X,V_2)|_{B_X}$ y tomemos $x^* \in \mathrm{Cl}(V_1) = V$. Sabemos que x^* es $\sigma(X,V)$-continua. Por el lema anterior y nuestra suposición resulta que x^* es $\sigma(X,V_2)$-continua en B_X. Para $\epsilon > 0$, existen $y_1^*, \cdots, y_n^* \in V_2$ y $\delta > 0$ para los que se cumple que

$$|x^*(x)| < \epsilon \text{ para todo } x \in V_{y_1^*,\cdots,y_n^*,\delta}(0) \cap B_X.$$

Entonces

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker(y_i^*) \text{ implica } |x^*(x)| \leq \epsilon \|x\|.$$

Por el Teorema de Hahn-Banach, existe $y_0^* \in X^*$ tal que con $y_0^*|\bigcap_{i=1}^{n}\ker(y_i^*) = x^*$ y $\|y_0^*\| \leq \epsilon$. Definamos $x_0^* = (x^* - y_0^*)$.

Como

$$\bigcap_{i=1}^{n} \ker(y_i^*) \subset \ker(x_0^*)$$

resulta de la Proposición 1.1.13 que $x_0^* \in < y_1^*, \cdots, y_n^* >$ por lo que $x_0^* \in V_2$y además

$$\|x^* - x_0^*\| = \|y_0^*\| \leq \epsilon$$

con lo cual queda demostrado que $x^* \in \mathrm{Cl}(V_2)$. O sea, $\mathrm{Cl}(V_1) \subset \mathrm{Cl}(V_2)$. Como V_1 y V_2 tiene papeles simétricos, se da la otra contención. $\square$

3.2. Los conjuntos A^1 y $A^{(1)}$

DEFINICIÓN 3.2.1. Sea $A \subset X^*$. El conjunto A^1 es el conjunto que está formado por todos los w^*-límites de sucesiones en A. Es claro que $A \subset A^1$.

Llamaremos $A^{(1)}$ a la unión de las w^*-cerraduras de $A \cap rB_{X^*}$ al variar r en los reales positivos. En símbolos,

$$A^{(1)} = \bigcup_{r>0} \mathrm{Cl}_{w^*}(A \cap rB_{X^*}).$$

Hacemos notar que $A \cap 0B_{X^*} \subset A^{(1)}$. Además,

$$\mathrm{Cl}_{w^*}(A \cap rB_{X^*}) \subset rB_{X^*}$$

para cada $r > 0$ y por tanto,

$$\mathrm{Cl}_{w^*}(A \cap rB_{X^*}) = \mathrm{Cl}_{(rB_{X^*},w^*)}\left(A \cap rB_{X^*}\right). \tag{3.2.1}$$

Será útil tener en cuenta que para cualquier subespacio vectorial V de a X^* se cumple que,

$$r\mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*}) = \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap rB_{X^*}) \tag{3.2.2}$$

si $r > 0$, lo que es consecuencia inmediata de que las homotecias no nulas son homeomorfismos.

Para cada conjunto acotado $F \subset X^*$ existe $r \geq 0$ tal que $F \subset rB_{X^*}$y cada rB_{X^*} es acotado. Por consiguiente:

$$A^{(1)} = \bigcup_{F \subset X^* \text{ acotado}} \mathrm{Cl}_{w^*}(A \cap F).$$

Lema 3.2.2. *Si X es separable, entonces B_{X^*} con la topología débil* es 1°- numerable.*

Demostración. Sea $D = \{x_1, x_2 \cdots\}$ un subconjunto numerable y denso en X. Por la Proposición 2.7.3, $\sigma(X^*, < D >) = \sigma(X^*, D)$. De la densidad de D y por ser $\widehat{\cdot} : X \to X^{**}$ una isometría se sigue que

$$\widehat{X} = \overline{\widehat{< D >}} \subset \overline{\widehat{< D >}} = \widehat{X}-$$

Por el Corolario 3.1.2, $\sigma(X^*, < D >)|_{B_{X^*}} = \sigma(X^*, X)|_{B_{X^*}}$. Entonces, bastará ver $\sigma(X^*, D)|_{B_{X^*}}$ es una topología 1° numerable, y esto es inmediato pues para cada $x^* \in B_{X^*}$, la familia

$$\beta = \{V_{x_1, \cdots, x_m, \frac{1}{n}}(x^*) \bigcap B_{X^*} : m, n \in \mathbb{N}\ \}$$

es una base local numerable en x^* para la topología $\sigma(X^*, D)|_{B_{X^*}}$. □

Como las homotecias con constantes positivas son homeomorfismos y estos conservan la propiedad de ser 1°- numerable, se sigue que rB_{X^*}, con $r > 0$, es 1°- numerable con la topología w^*.

De este lema y la igualdad (3.2.1) se sigue que

Corolario 3.2.3. *Si X es separable, entonces* $\mathrm{Cl}_{w^*}(A \cap rB_{X^*}) = (A \cap rB_{X^*})^1 \subset A^1$.

Teorema 3.2.4. *Sea A un subconjunto de X^*. Entonces*

(a) $A^1 \subset A^{(1)}$.

(b) Si X es separable, entonces $A^1 = A^{(1)}$.

Demostración. Si $x^* \in A^1$, entonces existe una sucesión (x_n^*) en A que w^*-converge a x^*, que es lo mismo a decir que $x_n^*(x) \to x^*(x)$ para todo $x \in X$. Por tanto, $\sup\{|x_n^*(x)| : n \in \mathbb{N}\}$ es finito para cada $x \in X$. Al aplicar el teorema de Banach-Steinhaus obtenemos, $\sup\{\|x_n^*\| : n \in \mathbb{N}\} = r$ con $0 \leq r < \infty$. Se sigue que $x^* \in \mathrm{Cl}_{w^*}(rB_{X^*} \cap A)$ y así $x^* \in A^{(1)}$.

Para probar *(b),* sea x^* en $A^{(1)}$. Por definición existe $r > 0$ tal que $x^* \in \mathrm{Cl}_{w^*}(rB_{X^*} \cap A)$. Por el corolario anterior, existe una sucesión en A que w^*-converge a x^*. Así $x^* \in A^1$. □

Teorema 3.2.5. *Sea $V \subset X^*$ un subespacio vectorial. Entonces*

$$V^{(1)} = \{\lambda y^* : y^* \in \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*}) \text{ y } \lambda \in \mathbb{F}\}.$$

Observamos que $V \cap B_{X^*} = B_V$.

Demostración. Si $x^* \in V^{(1)}$, existe $r > 0$ tal que $x^* \in \mathrm{Cl}_{w^*}(V \bigcap rB_{X^*})$. Por la igualdad (3.2.2) tenemos que $\frac{1}{r}x^* \in \mathrm{Cl}_{w^*}(V \bigcap B_{X^*})$ y como $x^* = r\frac{1}{r}x^*$, entonces $x^* \in \{\lambda y^* : y^* \in \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*}) \text{ y } \lambda \in \mathbb{F}\}$.

Por otra parte, $\lambda \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*}) = \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap \lambda B_{X^*}) \subset V^1 \subset V^{(1)}$. □

Teorema 3.2.6. *Sea $V \subset X^*$ un subespacio vectorial. V es w^*-cerrado si y sólo si $V = V^{(1)}$.*

Demostración. Supongamos que V es w^*-cerrado. Por el Teorema de Alaoglu B_{X^*} es w^*-cerrado por lo que

$$V \bigcap rB_{X^*} = \mathrm{Cl}_{w^*}(V \bigcap rB_{X^*})$$

para todo $r \geq 0$. Así, $V^{(1)} = \bigcup_{r \geq 0}(V \bigcap rB_{X^*}) = \bigcup_{r \geq 0} rB_V = V$.

Para la implicación contraria, supongamos que $V = V^{(1)}$ y que $r \geq 0$. Se cumple que

$$\mathrm{Cl}_{w^*}(V \bigcap rB_{X^*}) \subset V^{(1)} = V. \tag{3.2.3}$$

Como $\mathrm{Cl}_{w^*}(V \bigcap rB_{X^*}) \subset rB_{X^*}$, al intersecar ambos lados de (3.2.3) con rB_{X^*} obtenemos

$$\mathrm{Cl}_{w^*}(V \bigcap rB_{X^*}) \subset V \bigcap rB_{X^*}$$

lo que equivale a decir que $V \bigcap rB_{X^*}$ es w^*-cerrado. Por el Teorema de Krein-Šmulian, V es w^*-cerrado. □

Obtendremos condiciones necesarias y suficientes para que un subespacio vectorial $V \subset X^*$ cumpla que $V^1 = X^*$. Lo haremos a través de los siguientes dos resultados, que se demostrarán siguiendo lo hecho en [**2**].

Lema 3.2.7. *Sean X un espacio separable y $V \subset X^*$ un subespacio vectorial. El conjunto V^1 es la unión de una familia numerable de conjuntos cerrados.*

Demostración. Para cada natural n, sea Δ_n el conjunto de todas las funcionales $x^* \in X^*$ que son w^*-límites de sucesiones (x_k^*) en V que satisfacen que $\|x_k^*\| \leq n$ para todo $k \geq 1$.

Si $x^* \in V^1$, entonces existe una sucesión $(x_k^*) \subset V$ que w^*-converge a x^*, o lo que es lo mismo, $x_k^*(x) \to x^*(x)$ para todo $x \in X$. Así, el conjunto $\{|x_k^*(x)| : k = 1, 2, \ldots\}$ es acotado para cada x, aplicando el Teorema de Banach-Steinhaus obtenemos que $\sup\{\|x_k^*\| : k = 1, 2 \ldots\}$ es finito, por tanto, $x^* \in \Delta_n$ para algún n. Por otra parte, es inmediato de la definición de V^1 que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n \subset V^1$. Así, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n = V^1$.

Veamos que para cada n, el conjunto Δ_n es cerrado. Tomemos una sucesión $(x_j^*) \subset \Delta_n$ convergente a x^*. Por la definición de Δ_n, $\|x^*\| \leq n$ y para cada j, existe una sucesión $(x_k^{(j)*})_{k=1}^{\infty}$ en V que w^*-converge a x_j^*, con $\|x_k^{(j)*}\| \leq n$ para todo $k \geq 1$.

Sea $D = \{x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots\}$ un conjunto denso y numerable de X. A partir de la matriz

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1^{(1)*} & x_2^{(1)*} & \cdots & x_k^{(1)*} & \cdots & \overset{w^*}{\to} & x_1^* \\
x_1^{(1)*} & x_2^{(1)*} & \cdots & x_k^{(2)*} & \cdots & \overset{w^*}{\to} & x_2^* \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
x_1^{(j)*} & x_2^{(j)*} & \cdots & x_k^{(j)*} & \cdots & \overset{w^*}{\to} & x_j^* \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & x^*
\end{array}$$

construiremos inductivamente una sucesión $(x_{k_j}^{(j)*})$ tal que $x_{k_j}^{(j)*} \overset{w^*}{\to} x^*$; o sea,

$$x_{k_j}^{(j)*}(x_i) \to x^*(x_i) \text{ cuando j} \to \infty, \text{ para todo } x_i \in D. \tag{3.2.4}$$

Sabemos que

$$x_k^{(j)*}(x_i) \to x_j^*(x_i) \text{ cuando k} \to \infty \tag{3.2.5}$$

para cada elemento x_i.

Por (3.2.5), existe $k_1 \geq 1$ tal que $|x_{k_1}^{(1)*}(x_1) - x_1^*(x_1)| \leq \frac{1}{2}$. Elegido k_{j-1} podemos encontrar $k_j > k_{j-1}$ tal que

$$|x_{k_j}^{(j)*}(x_i) - x_j^*(x_i)| \leq \frac{1}{2^j} \text{ para } 1 \leq i \leq j.$$

Veamos que la sucesión $(x_{k_j}^{(j)*})$ así construida satisface (3.2.4). Sean $\epsilon > 0$ y $x_i \in D$. Existe $N > 0$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{\epsilon}{2}$ y $\|x_j^* - x^*\| < \frac{\epsilon}{2(\|x_i\|+1)}$ si $j > N$.

Entonces,

$$|x_{k_j}^{(j)*}(x_i) - x^*(x_i)| \leq |x_{k_j}^{(j)*}(x_i) - x_j^*(x_i)| + |x_j^*(x_i) - x^*(x_i)| < \epsilon$$

si $j \geq \max\{N, i\}$.

Finalmente, sea $x \in X$. De la siguiente desigualdad

$$\left|x_{k_j}^{(j)*}(x) - x^*(x)\right| \leq n\,\|x_i - x\| + |x_{k_j}^{(j)*}(x_i) - x^*(x_i)| + |x^*(x_i) - x^*(x)|$$

se sigue que $x_{k_j}^{(j)*}(x) \to x^*(x)$ y por tanto, $x_{k_j}^{(j)*} \xrightarrow{w^*} x^*$ y entonces $x^* \in \Delta_n$. □

Teorema 3.2.8. *Sean X un espacio separable y $V \subset X^*$ un subespacio vectorial. $V^1 = X^*$ si y sólo si existe $M > 0$ tal que para cada $x \in X$, existe $v \in V$ que satisface las condiciones*

$$\|v\| \leq M \text{ y } |v(x)| = \|x\|. \tag{3.2.6}$$

Demostración. Supongamos que $V^1 = X^*$. Por el Lema 3.2.7

$$X^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \tag{3.2.7}$$

donde Δ_n es el conjunto de todas las funcionales $x^* \in X^*$ que son w^*-límites de sucesiones (x_k^*) en V que satisfacen que $\|x_k^*\| \leq n$ para todo $k \geq 1$. Cada Δ_n es cerrado.

Por el teorema de Baire X^* es de la segunda categoría (ver p. 36, 37 de [**11**]), lo cual implica que existe un n_0 tal que Δ_{n_0} tiene interior no vacío. Existen $x^* \in \Delta_{n_0}$ y $0 < r < 1$ tales que $B_r[x^*] \subset \Delta_{n_0}$. Hagamos $M = \frac{2n_0(2-\lambda)}{\lambda}$, donde $\lambda = \frac{r}{1+\|x^*\|}$

Sea $x \neq 0$, por el primer corolario del Teorema de Hahn-Banach, existe $x_0^* \in X^*$ tal que

$$x_0^*(x) = \|x\| \text{ y } \|x_0^*\| = 1. \tag{3.2.8}$$

Definimos

$$y^* = \lambda x_0^* + (1-\lambda)x^*. \tag{3.2.9}$$

Estimemos que tan cercanos están y^* y x^*:

$$\begin{aligned} \|y^* - x^*\| &= \|\lambda x_0^* + (1-\lambda)x^* - x^*\| = \lambda\|x_0^* - x^*\| \\ &\leq \lambda(\|x_0^*\| + \|x^*\|) = \frac{r}{1+\|x^*\|}(1+\|x^*\|) = r. \end{aligned}$$

Así, $y^* \in B_r[x^*] \subset \Delta_{n_0}$. Entonces, por la definición de Δ_{n_0}, existen dos sucesiones (x_k^*) , (y_k^*) en V que w^*-convergen a x^* y y^*, respectivamente, y que cumplen

$$\|x_k^*\| \leq n_0 \text{ y } \|y_k^*\| \leq n_0 \text{ para } k \geq 1. \tag{3.2.10}$$

Como V es un subespacio vectorial, la sucesión $(z_k^*) = (\frac{1}{\lambda}y_k^* - \frac{1-\lambda}{\lambda}x_k^*)$ está contenida en V y w^*-converge a $\frac{1}{\lambda}y^* - \frac{1-\lambda}{\lambda}x^*$, que de acuerdo a la igualdad (3.2.9), es igual a x_0^*. Por la convergencia de $(z_k^*(x))$ a $x_0^*(x) = \|x\|$, existe k_0 tal que $\left|z_{k_0}^*(x) - \|x\|\right| < \frac{1}{2}\|x\|$; de donde

$$\frac{1}{\lambda}y_{k_0}^*(x) - \frac{1-\lambda}{\lambda}x_{k_0}^*(x) = \alpha\|x\|$$

para algún $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$.

Veremos que la funcional $v = \frac{1}{\alpha}(\frac{1}{\lambda}y_{k_0}^* - \frac{1-\lambda}{\lambda}x_{k_0}^*)$ satisface (3.2.6).

Es inmediato que $v \in V$ y $v(x) = \|x\|$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \|v\| &= \tfrac{1}{\alpha}\|\tfrac{1}{\lambda}y_{k_0}^* - \tfrac{1-\lambda}{\lambda}x_{k_0}^*\| \\ &\leq \tfrac{1}{\alpha\lambda}(n_0\,(2-\lambda)) \\ &\leq \tfrac{2n_0(2-\lambda)}{\lambda} = M. \end{aligned}$$

Para probar la parte "si" empecemos por observar que por el Teorema 2.7.14 existe un subconjunto numerable de B_V que es w^*-denso en B_V; lo denotaremos como $D = \{v_1, v_2 \ldots, v_r, \ldots\}$. Para $x \in X$, definimos la sucesión escalar

$$\lambda\,(x) = (v_r(x)). \tag{3.2.11}$$

Entonces $|v_r(x)| \leq \|v_r\|\|x\| \leq \|x\|$ y así, $\lambda\,(x) \in \ell^\infty$ y se cumple la desigualdad

$$\|\lambda\,(x)\,\|_\infty \leq \|x\|, \tag{3.2.12}$$

donde $\|\cdot\|_\infty$ es la norma usual en ℓ^∞.

Sea $v \in V$ que satisface la condición (3.2.6) para $x \in X$. Si hacemos $v' = \frac{1}{M}v$, entonces $\|v'\| \leq 1$. O sea, $v' \in B_V$. y por tanto, existe una sucesión $(v_{r_j}) \in D$ que w^*-converge a v'; en particular, $\lim\limits_{j\to\infty}|v_{r_j}(x)| = |v'(x)|$. De (3.2.6) y (3.2.12) ocurre que $\frac{1}{M}\|x\| = |v'(x)| = \lim\limits_{j\to\infty}|v_{r_j}(x)| \leq \|\lambda\,(x)\,\|_\infty$. En resumen,

$$\frac{1}{M}\|x\| \leq \|\lambda\,(x)\,\|_\infty. \tag{3.2.13}$$

Definimos el operador $U : X \to \ell^\infty$ como $U(x) = \lambda\,(x)$. De (3.2.11) y (3.2.12) es fácil ver que U es un operador lineal y continuo. Como el espacio X es separable y el operador U es lineal y continuo, entonces $U\,(X)$ es un subespacio separable de ℓ^∞. Además, de (3.2.13) resulta que U es inyectivo.

Consideremos el inverso $U^{-1} : U(X) \to X$ del operador U, que también es lineal. De la desigualdad (3.2.13) se sigue de inmediato que U^{-1} es continuo.

Con base en lo anterior, procedemos a probar que $X^* \subset V^1$. Sea $x^* \in X^*$, definimos la funcional lineal $f : U(X) \to \mathbb{F}$ como

$$f(\lambda(x)) = x^*(U^{-1}(\lambda(x))) = x^*(x) \tag{3.2.14}$$

para cada $x \in X$, la que por ser una composición de operadores continuos es también continuo.

Aplicando el Teorema 2.2.5 a la funcional lineal f se sigue la existencia de una matriz escalar $[\alpha_r^n]$ y una sucesión estrictamente creciente (k_n) de naturales tales que

$$f(\lambda(x)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^n v_r(x) \text{ para todo } x \in X \tag{3.2.15}$$

y $\alpha_r^n = 0$ si $r > k_n$. Definimos, para cada $n \geq 1$ *y* $x \in X$,

$$z_n^*(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \alpha_r^n v_r = \sum_{r=1}^{k_n} \alpha_r^n v_r. \tag{3.2.16}$$

Tenemos que $z_n^* \in V$, ya que cada $v_r \in V$. Más aun, por (3.2.15) y (3.2.16), $f(\lambda(x)) = \lim_{n\to\infty} z_n^*(x)$, y por (3.2.14), $x^*(x) = f(\lambda(x)) = \lim_{n\to\infty} z_n^*(x)$ para cada x. Así, $x^* \in V^1$. □

3.3. La característica de un subespacio vectorial de un espacio dual

Una parte importante de este trabajo se apoya en resultados que se ven en esta sección. Antes de introducir la noción de la característica de un subespacio vectorial del dual de X, veremos algunos resultados que darán pauta a su definición.

En esta sección V denota a un subespacio vectorial de X^*

LEMA 3.3.1. *Si $K \subset X^*$ es un conjunto absorbente, convexo, cerrado y simétrico, entonces existe $r > 0$ tal que $rB_{X^*} \subset K$.*

DEMOSTRACIÓN. Como K es un conjunto absorbente, entonces $X^* = K \cup 2K \cup 3K \cup \cdots$ Como las homotecias distintas de cero son homeomorfismos y K es un conjunto cerrado, X^* es la unión de una colección numerable de conjuntos cerrados. Por el Teorema de Baire, X^* es de la segunda categoría, por tanto existe $n \in \mathbb{N}$ tal que nK tiene interior no vacío. Lo anterior implica la existencia de $n \geq 1$, $x_0^* \in nK$ y $r' > 0$ tales que

$$x_0^* + r'B_{X^*} \subset nK.$$

Sabemos que la simetría es una propiedad que se conserva bajo homotecias y que las bolas centradas en cero son simétricas, es decir, $r'B_{X^*} = -r'B_{X^*}$. Con esta observación obtenemos la contención

$$-x_0^* + r'B_{X^*} \subset nK.$$

Sea $x^* \in r'B_{X^*}$. De las dos contenciones anteriores, obtenemos que $x_0^*+x^*$ y $-x_0^*+x^*$ son elementos de nK. Como la convexidad también se conserva bajo homotecias tenemos que nK es convexo y se sigue que la funcional lineal $x^* = (\frac{1}{2}(x_0^*+x^*)+\frac{1}{2}(-x_0^*+x^*))$ está en nK, con lo cual queda demostrado que $r'B_{X^*} \subset nK$. Concluimos la demostración al tomar $r = \frac{r'}{n}$. $\square$

Teorema 3.3.2. *$V^{(1)} = X^*$ si y sólo si existe $r > 0$ tal que*

$$rB_{X^*} \subset \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*}).$$

Demostración. Si existe $r > 0$ tal que $rB_{X^*} \subset \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*})$, entonces dada $x^* \in X^*$ se tiene que $y^* = \frac{r}{\|x^*\|+1}x^* \in rB_{X^*} \subset \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*})$ y $x^* = \frac{\|x^*\|+1}{r}y^*$. Por el Teorema 3.2.5 $x^* \in V^{(1)}$. Por tanto, $X^* = V^{(1)}$.

Para la otra parte, basta con tomar al conjunto K del Lema 3.3.1 como $\mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*})$, el que cumple con ser absorbente, ya que $V^{(1)} = X^*$ (Teorema 3.2.5), y además es cerrado, convexo y simétrico. $\square$

Definición 3.3.3. Llamamos característica de V al número

$$\mathrm{car}V = \sup\{r \geq 0 : V \cap B_{X^*} = B_V \text{ es un subconjunto } w^* - \text{denso en } rB_{X^*}\}.$$

Del Teorema 3.3.2 se sigue $V^{(1)} = X^*$ si y sólo si $\mathrm{car}V \neq 0$.

En el siguiente resultado se dan algunas propiedades de la característica que son muy sencillas de comprobar, pero que no dejan de ser relevantes.

Proposición 3.3.4. *La característica tiene las siguientes propiedades:*

(a) $0 \leq \mathrm{car}V \leq 1$.

(b) $\mathrm{car}V = \max\{r \geq 0 : V \cap B_{X^*}$ *es un subconjunto* $w^* -$ *denso en* $rB_{X^*}\}$.

(c) Si $\mathrm{car}V \neq 0$, *entonces* V *es* w^**-denso en* X^*.

Demostración. Hagamos $r_0 = \mathrm{car}V$. El apartado *(a)* es inmediato ya que $\mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*}) \subset B_{X^*}$ (Teorema de Alaoglu).

(b) Supongamos que $r_0 > 0$. Se sigue directamente de la definición de la característica que existe una sucesión creciente (r_n) de números positivos que tiende a r_0 y cumplen que $r_nB_{X^*} \subset \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*})$. Como $r_nx^* \xrightarrow{w^*} r_0x^*$ para cualquier $x^* \in X^*$, se tiene, al

tomar límite sobre n en la contención anterior, que $r_0 B_{X^*} \subset \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*})$, y queda demostrado *(b).*

(c) Si $r_0 \neq 0$, entonces podemos aplicar el Teorema 3.3.2 y obtener que $X^* = V^{(1)}$; de donde, por el Teorema (3.2.5), V es w^*-denso en X^*. □

3.3.1. Otras maneras de determinar la característica. En esta sección se verán algunas otras formas de determinar la característica de un subespacio de un dual, mismas que serán utilizadas más adelante.

En lo que sigue supondremos que $V \subset X^*$ es subespacio vectorial de característica r.

Teorema 3.3.5. *Si X no es el espacio nulo y*

$$s = \inf_{x \neq 0} \left\{ \sup \left\{ \frac{|v(x)|}{\|x\|} : \ v \in V \cap B_{X^*} \right\} \right\},$$

entonces

$$s = r = \inf_{x \neq 0} \frac{\|\hat{x}|_V\|}{\|x\|}.$$

Demostración. La segunda igualdad de arriba, se debe a que $V \cap B_{X^*} = B_V$. Probaremos que $r \leq s$. Sea $x \neq 0$, aplicando el Segundo Corolario del Teorema de Hahn-Banach podemos encontrar $x^* \in X^*$ tal que $x^*(x) = r\|x\|$ y $\|x^*\| = r$. Sea $\epsilon > 0$ y consideremos la w^*-vecindad abierta $V_{x,\epsilon\|x\|}(x^*)$ de x^*. Como car$V = r$, entonces $B_{X^*} \cap V$ es w^*-denso en rB_{X^*}, por tanto, existe $v \in B_{X^*} \cap V$ tal que $|v(x) - x^*(x)| < \epsilon\|x\|$, o lo que es lo mismo, $|v(x) - r\|x\|| < \epsilon\|x\|$. De la desigualdad anterior se sigue que $r < \epsilon + \frac{|v(x)|}{\|x\|} \leq \epsilon + S_x$, donde $S_x = \sup\{\frac{|v(x)|}{\|x\|} : \ v \in (V \cap B_{X^*})$. Haciendo tender ϵ a cero, obtenemos que $r \leq S_x$, y finalmente como x es arbitrario, observamos que r es cota inferior del conjunto formado por los números S_x. Así, $r \leq s$.

Supongamos que $s > 0$. Para obtener la desigualdad $s \leq r$ veremos que $sB_{X^*} \subset \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*})$. Tomemos $x^* \in sU_{X^*}$, donde U_{X^*} es la bola abierta unitaria en X^*. Para $x \neq 0$ tenemos que $\frac{|x^*(x)|}{\|x\|} < s$. Por la definición de s, existe $v_x \in V \cap B_{X^*}$ tal que $\frac{|x^*(x)|}{\|x\|} < \frac{|v_x(x)|}{\|x\|}$; o sea,

$$|x^*(x)| \leq |v_x(x)|. \tag{3.3.1}$$

Supongamos que $x^* \notin \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*})$. En este caso, podemos aplicar la parte *(b)* del Corolario 2.3.3(Teorema de Tukey-Klee) a los subconjuntos no vacíos, convexos y ajenos entre sí, $\{x^*\}$ y $\mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*})$ de (X^*, w^*), por lo que existen $x_0 \in X$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathrm{Re}v(x_0) < \alpha_1 < \alpha_2 < \mathrm{Re}x^*(x_0) \tag{3.3.2}$$

para toda $v \in \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*})$. Debido a que V es un espacio vectorial se tiene que $x_0 \neq 0$.

Tomamos para x_0 la funcional $v_{x_0} \in V$ que satisface la desigualdad (3.3.1) y el signo $\sigma(v_{x_0}(x_0))$ de $v_{x_0}(x_0)$. La funcional $\sigma(v_{x_0}(x_0))v_{x_0}$ pertenece a $V \cap B_{X^*}$, por lo que la desigualdad (3.3.2) es válida para ésta y obtenemos

$$|v_{x_0}(x_0)| < \alpha_1 < \alpha_2 < \mathrm{Re}x^*(x_0) \leq |x^*(x_0)|,$$

lo cual contradice la desigualdad (3.3.1); por tanto, $x^* \in \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*})$.

Lo anterior, demuestra que $sU_{X^*} \subset \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*})$ y por tanto, $sB_{X^*} \subset \mathrm{Cl}_{w^*}(V \cap B_{X^*})$. Por ser r el número más grande con esta propiedad, se sigue que $s \leq r$. □

Una expresión más para la característica es la siguiente:

TEOREMA 3.3.6. *Si denotamos al conjunto* $\mathrm{Cl}_{\sigma(X,V)}(B_X)$ *por* Σ, *y* $R = \sup\limits_{x \in \Sigma} \|x\|$. *Entonces* $r = R^{-1}$, *donde* $R^{-1} = 0$ *si* $R = \infty$. *La bola* B_X *es* $\sigma(X,V)$*-cerrada si y sólo si la característica de* V *es* 1.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $R \geq 1$. Sea $0 < p < R$. Existe $x_0 \in \Sigma$ tal que $\|x_0\| > p$. Sean $v \in V \cap B_{X^*}$ y $\delta > 0$. Tomemos la $\sigma(X,V)-$vecindad de x_0, $V_{v,\delta}(x_0)$. Por ser Σ la $\sigma(X,V)$-cerradura de B_X, existe $x \in B_X$ tal que $x \in V_{v,\delta}(x_0)$. Entonces, $|v(x_0)| \leq |v(x)| + |v(x_0 - x)| \leq 1 + \delta$ y podemos concluir que $|v(x_0)| \leq 1$. Como v fue tomada arbitrariamente, entonces $\sup\{\frac{|v(x_0)|}{\|x_0\|} : v \in V \cap B_{X^*}\} \leq \frac{1}{\|x_0\|} < \frac{1}{p}$. Al hacer tender p a R, obtenemos $r \leq R^{-1}$.

Para probar que $R^{-1} \leq r$ cuando $R < \infty$, tomemos $x_0 \neq 0$, $\epsilon > 0$ y definamos $y_0 = \frac{1}{\|x_0\|}(R + \epsilon)x_0$. Este elemento no pertenece a Σ por tener norma mayor que R.

El espacio localmente convexo $(X, \sigma(X,V))$ tiene como dual topológico al espacio vectorial V. Al aplicar el Teorema de Tukey-Klee (Corolario 2.3.3) al conjunto convexo y $\sigma(X,V)$-cerrado Σ y al compacto convexo $\{y_0\}$ obtenemos $v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathrm{Re}v(x) < \alpha < \mathrm{Re}v(y_0)$$

si $x \in \Sigma$. De donde $0 < \|v\| < |v(y_0)|$. Entonces

$$\sup\{|v(y_0)| : \ v \in V \cap B_{X^*}\} \geq 1$$

o sea,

$$\sup\left\{\frac{|v(x_0)|}{\|x_0\|} : \ v \in V \cap B_{X^*}\right\} \geq (R + \epsilon)^{-1}.$$

Finalmente, al hacer tender ϵ a cero y aplicar el teorema (3.3.5) obtenemos $r \geq R^{-1}$.

La afirmación final del teorema es consecuencia inmediata de lo anterior. □

COROLARIO 3.3.7. *Si* $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|$ *son dos normas equivalentes en* X*, entonces* V *tiene característica no nula respecto a* $(X,\|\cdot\|)$ *si y sólo si tiene característica no nula respecto a* $(X,\|\cdot\|_1)$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\|\cdot\|_1$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$ y B_1 y B son las bolas unitarias cerradas correspondientes, entonces existen $m, M > 0$ tales que $mB \subset B_1 \subset MB$ y por tanto, si $\Sigma = \mathrm{Cl}_{\sigma(X,V)}(B)$ y $\Sigma_1 = \mathrm{Cl}_{\sigma(X,V)}(B_1)$, entonces $m\Sigma \subset \Sigma_1 \subset M\Sigma$. Así, $R = \sup\limits_{x\in\Sigma}\|x\| < \infty$ si y sólo si $R_1 = \sup\limits_{x\in\Sigma}\|x\|_1 < \infty$. $\square$

TEOREMA 3.3.8. *Si* V *tiene característica* $r \neq 0$*, entonces existe en* $(X,\|\cdot\|)$ *una norma equivalente* $\|\cdot\|_1$ *a la norma original, tal que* V *es de característica* 1 *con esta nueva norma.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Sigma = \mathrm{Cl}_{\sigma(X,V)}(B_X)$. Entonces Σ es un conjunto absorbente, balanceado y convexo por serlo B_X; además, es $\sigma(X,V)$-cerrado. Consideramos la funcional de Minkowski $\|\cdot\|_1$ de Σ, es decir

$$\|x\|_1 = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha\Sigma\}$$

para cada $x \in X$. Por la Proposición 1.1.21 $\|\cdot\|_1$ es una seminorma que además cumple que $\{x : \|x\|_1 \leq 1\} = \Sigma$.

Afirmamos que $\|\cdot\|_1$ es una norma con las propiedades buscadas. Observemos que como $B_X \subset \Sigma$, $\|x\| \leq 1$ implica que $\|x\|_1 \leq 1$. Por la Proposición 1.1.19, $\|x\|_1 \leq \|x\|$ para todo $x \in X$. Por otro lado, como la característica de V es r, aplicando el Teorema 3.3.6, tenemos que si $x \in \Sigma$, entonces $\|x\| \leq \frac{1}{r}$, o equivalentemente, si $\|x\|_1 \leq 1$, entonces $r\|x\| \leq 1$; así, aplicando de nuevo la Proposición 1.1.19, resulta que $r\|x\| \leq \|x\|_1$. En resumen

$$r\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \|x\|$$

para todo $x \in X$. O sea, $\|\cdot\|_1$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$. Además, Σ es la bola unitaria cerrada respecto a la norma $\|\cdot\|_1$. Entonces la característica de V respecto al espacio $(X,\|\cdot\|_1)$ es 1, ya que $\sup\limits_{x\in \mathrm{Cl}_{\sigma(X,V)}(\Sigma)}\|x\|_1 = \sup\limits_{x\in\Sigma}\|x\|_1 = 1$. $\square$

Obsérvese que $\|\cdot\|_1$ está fuertemente ligada al subespacio vectorial $V \subset X^*$.

Como mencionamos inmediatamente después de definir la característica de un subespacio, tenemos que $V^{(1)} = X^*$ si y sólo si la característica de V no es cero. De esto y el Teorema 3.3.6 se obtiene el siguiente resultado.

COROLARIO 3.3.9. $V^{(1)} = X^*$ *si y sólo si* Σ *es acotado.*

A continuación veremos expresiones para la característica que involucran al doble dual.

TEOREMA 3.3.10. *Sea X no nulo y*

$$t = \inf\{\frac{\|\hat{x} + v^{\perp}\|}{\|x\|} : x \neq 0 \text{ y } v^{\perp} \in V^{\perp}\}.$$

Entonces $r = t$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \neq 0$ y $v^{\perp} \in V^{\perp}$, entonces, como $(V \cap B_{X^*}) \subset B_{X^*}$ y $(\hat{x} + v^{\perp})(v) = \hat{x}(v)$ para todo $v \in V$, obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} \|\hat{x} + v^{\perp}\| & = & \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x) + v^{\perp}(x^*)| \geq \\ \sup_{v \in (V \cap B_{X^*})} |v(x) + v^{\perp}(v)| & = & \sup_{v \in (V \cap B_{X^*})} |v(x)|. \end{array}$$

Al dividir entre $\|x\|$ la desigualdad anterior obtenemos

$$\frac{\|\hat{x} + v^{\perp}\|}{\|x\|} \geq \inf_{y \neq 0}(\sup_{v \in (V \cap B_{X^*})} \frac{|v(y)|}{\|y\|}).$$

Y del Teorema 3.3.5 obtenemos que $\frac{\|\hat{x}+v^{\perp}\|}{\|x\|} \geq r$. Como $\hat{x}$ y $v^{\perp}$ fueron tomadas arbitrariamente, entonces $t \geq r$.

Para probar la desigualdad contraria tomemos $\epsilon > 0$. Usando de nuevo el Teorema 3.3.5, sabemos que existe $x \neq 0$ en X tal que

$$\sup_{v \in (V \cap B_{X^*})} \frac{|v(x)|}{\|x\|} < r + \epsilon,$$

que equivale a decir que $\|\hat{x}|_V\| < \|x\|(r + \epsilon)$. Por el Teorema de Hahn-Banach existe $x^{**} \in X^{**}$ tal que x^{**} y $\hat{x}$ coinciden en V y $\|x^{**}\| = \|\hat{x}|_V\|$; de donde:

$$\|x^{**}\| \leq \|x\|(r + \epsilon).$$

Por ser x^{**} y $\hat{x}$ coincidentes en V, entonces, $v^{\perp} = (x^{**} - \hat{x})$ pertenece a $V^{\perp}$. De la desigualdad anterior obtenemos que $\frac{\|\hat{x}+v^{\perp}\|}{\|x\|} \leq (r + \epsilon)$. Por consiguiente, $t \leq r$. $\square$

3.4. Subespacios vectoriales minimales

En la sección se sigue suponiendo que $V \subset X^*$es un subespacio vectorial.

En la sección anterior hablamos de la característica de un subespacio vectorial, vimos algunas de sus propiedades y distintos modos de calcularla; uno de ellos nos permitirá probar el Teorema 3.4.2.

LEMA 3.4.1. *Sea X un espacio de Banach, V_1 y V_2 subespacios cerrados de X tales que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Entonces, el espacio vectorial $S = V_1 \oplus V_2$ es cerrado si y sólo si existe $M > 0$ tal que para cualesquiera $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ se cumple que*

$$\|v_1\| \leq M\|v_1 + v_2\|. \tag{3.4.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Para probar la parte "si" tomemos una sucesión (x_n) en S convergente a $x \in X$. Entonces, para cada $n \geq 1$ se tiene que $v_n = v_n^{(1)} + v_n^{(2)}$, con $v_n^{(1)} \in V_1$ y $v_n^{(2)} \in V_2$. Probaremos que $x \in S$. Por la desigualdad (3.4.1) y dado que V_1 y V_2 son espacios vectoriales, tenemos:

$$\|v_n^{(1)} - v_m^{(1)}\| \leq M\|(v_n^{(1)} - v_m^{(1)}) + (v_n^{(2)} - v_m^{(2)})\| = M\|v_n - v_m\|.$$

Por ser (v_n) una sucesión convergente, entonces es de Cauchy, y por la desigualdad anterior, $(v_n^{(1)})$ también lo es. Como V_1 es un subespacio cerrado de un espacio de Banach, entonces $v_n^{(1)} \to v_1$ para algún $v_1 \in V_1$.

Además, como

$$\|v_n^{(2)} - v_m^{(2)}\| = \|(v_n - v_m) - (v_n^{(1)} - v_m^{(1)})\| \leq \|v_n - v_m\| + \|v_n^{(1)} - v_m^{(1)}\|,$$

y los dos miembros de la derecha de esta desigualdad tienden a cero cuando $n, m \to \infty$, existe $v_2 \in V_2$ tal que $v_n^{(2)} \to v_2$. De donde, $x = v_1 + v_2$ y así $x \in S$.

Ahora veremos que la condición (3.4.1) es necesaria para que S sea cerrado. Consideremos la proyección $\pi_{V_1} : S \to V_1$del subespacio cerrado S sobre el V_1 a lo largo de V_2. Tomemos una sucesión $(v_n) = (v_n^{(1)} + v_n^{(2)})$ convergente a v y supongamos que $\pi_{V_1}(v_n) = v_n^{(1)}$ converge a un elemento $v_1 \in V_1$. Demostraremos que $\pi_{V_1}(v) = v_1$.

Debido a la convergencia de (v_n) y $(v_n^{(1)})$, tenemos

$$\|v_n^{(2)} - v_m^{(2)}\| \leq \|v_n - v_m\| + \|v_n^{(1)} - v_m^{(1)}\| \to 0,$$

cuando $n, m \to \infty$. Entonces $v_n^{(2)} \to v_2$ para algún $v_2 \in V_2$ y $v = v_1 + v_2$, por lo que $\pi_{V_1}(v) = v_1$. Del Teorema de la Gráfica cerrada se sigue que π_{V_1} es continua. Entonces, existe $M > 0$ tal que

$$\|v_1\| = \|\pi_{V_1}(v_1 + v_2)\| \leq M\|v_1 + v_2\|$$

siempre que $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$. □

Como podemos observar, el resultado anterior no es más que una caracterización de la continuidad de una proyección en una suma directa de subespacios cerrados.

TEOREMA 3.4.2. *Si V es w^*-denso en X^*. Entonces $V^{(1)} = X^*$ si y sólo si $V^\perp \oplus \widehat{X}$ es cerrado en X^{**}.*

Demostración. Sabemos que $\widehat{X}$ es un subespacio cerrado de X^{**} y por la Proposición 2.5.2 $V^{\perp}$ también lo es. Si $\hat{x} \in V^{\perp} \bigcap \widehat{X}$, entonces $v(x) = \hat{x}(v) = 0$ para todo $v \in V$. Tenemos, aplicando el Teorema 2.7.12, que $x = 0$. Entonces, la suma de los conjuntos $V^{\perp}$ y $\widehat{X}$ es una suma directa.

Por el Teorema 3.3.10 tenemos:

$$\text{car}V = \inf\{\frac{\|\hat{x} + v^{\perp}\|}{\|x\|} : x \neq 0 \text{ y } v^{\perp} \in V^{\perp}\}. \tag{3.4.2}$$

Vimos en la sección anterior, $V^{(1)} = X^*$ si y sólo si $\text{car}V > 0$.

Por otra parte, de (3.4.2) se sigue que $\text{car}V > 0$ si y sólo si existe $m > 0$ tal que $\|x\| \leq \frac{1}{m}\|\hat{x} + v^{\perp}\|$ para todo x.

Combinando lo anterior con el Lema 3.4.1 se sigue que $V^{\perp} \oplus \widehat{X}$ es cerrado en X^{**} si y sólo si $V^{(1)} = X^*$. $\square$

Definimos ahora un concepto fundamental para el resto del trabajo.

Definición 3.4.3. Un subespacio vectorial $V \subset X^*$ es minimal si cumple las siguientes tres propiedades:

(1) V es cerrado.

(2) V es w^*-denso en X^*.

(3) Todo subespacio cerrado $W \subset V$, con $W \neq V$, no es w^*-denso.

Es decir V es minimal dentro de los subespacios cerrados y w^*-denso de X^*.

Daremos algunas caracterizaciones de subespacios minimales.

Teorema 3.4.4. *Sea $V \subset X^*$ cerrado y w^*-denso en X^*. Entonces V es minimal si y sólo si $X^{**} = \widehat{X} \oplus V^{\perp}$.*

Demostración. Supongamos que $X^{**} = \widehat{X} \oplus V^{\perp}$. Sea $W \subset V$, con $W \neq V$, un subespacio vectorial cerrado, entonces, $V^{\perp} \subset W^{\perp}$. Veamos que $V^{\perp} \neq W^{\perp}$. En caso contrario, tendríamos por el apartado (c) de la Proposición 2.5.2 que $V =^{\perp} (V^{\perp}) =^{\perp} (W^{\perp}) = W$, lo cual es una contradicción. Entonces, existe $w^{\perp} \in W^{\perp}$ tal que $w^{\perp} \notin V^{\perp}$ y por hipótesis, $w^{\perp} = \hat{x} + v^{\perp}$ para algún $x \in X$ y $v^{\perp} \in V^{\perp}$. Si $x = 0$, entonces $w^{\perp}$ es elemento de $V^{\perp}$, lo cual es una contradicción, por tanto, $x \neq 0$ y se tiene que $\hat{x}\,(w) = w(x) = 0$ para todo $w \in W$. Por el Teorema 2.7.12 W no es w^*-denso en X^*, de lo que se sigue que V es minimal.

Para probar la parte "sólo si" supongamos que V es un subespacio minimal y sea $x^{**} \in X^{**}$ tal que $x^{**} \notin V^{\perp}$. Consideremos el subespacio cerrado de V, ${}^{\perp}\{x^{**}|V\}$. Por lo supuesto, ${}^{\perp}\{x^{**}|V\} \neq V$. Por ser V minimal, podemos afirmar que ${}^{\perp}\{x^{**}|V\}$ no es w^*-denso en X^*. El Teorema 2.7.12 implica que existe $x \neq 0$ tal que $w(x) = 0$ para toda $w \in^{\perp} \{x^{**}|V\}$, o lo que es lo mismo, por el Teorema 2.7.11,

$$\hat{x}|V \in \left({}^{\perp}\{x^{**}|V\}\right)^{\perp} = \mathrm{Cl}_{\sigma(V^*,V)}(< x^{**}|V >). \tag{3.4.3}$$

Como $< x^{**}|V >$ es de dimensión finita y $\sigma(V^*, V)$ es una topología vectorial de Hausdorff en V^*, entonces $< x^{**}|V >$ es $\sigma(V^*, V)$-cerrado. De esto y la igualdad 3.4.3 se sigue que existe un escalar $\lambda \in \mathbb{F} \neq 0$ tal que $\lambda x^{**}|V = \hat{x}|V$. Así, $\lambda x^{**} - \hat{x} = v^{\perp} \in V^{\perp}$ y $\lambda x^{**} = v^{\perp} + \hat{x}$ está en $V^{\perp} + \widehat{X}$. Esta suma es directa ya que V es w^*-denso en X^*. Por tanto, $\lambda \neq 0$ y $x^{**} \in V^{\perp} \oplus \widehat{X}$ $\square$

Consecuencia de los Teoremas 3.4.2 y 3.4.4 es el siguiente.

Teorema 3.4.5. *Si $V \subset X^*$ es minimal, entonces $V^{(1)} = X^*$.*

Veremos una caracterización más de los subespacios minimales. Para esto será necesario el siguiente resultado.

Lema 3.4.6. *Sea $V \subset X^*$ cerrado. Existe una topología localmente convexa τ en $X^{**}/V^{\perp}$ tal que $\left(X^{**}/V^{\perp}, \tau\right)$ es homeomorfo a $(V^*, \sigma(V^*, V))$ mediante el operador lineal $S : V^* \to X^{**}/V^{\perp}$ que determina la isometría canónica entre estos dos espacios de Banach.*

Demostración. Sea τ la topología definida en el espacio $X^{**}/V^{\perp}$ mediante la familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_v : v \in V\}$, donde $p_v(\overline{x^{**}}) = |x^{**}(v)|$ y $\overline{x^{**}}$ representa la clase de x^{**} en $X^{**}/V^{\perp}$.

Veamos que p_v está bien definida, para esto, tomemos $x_1^{**}, x_2^{**} \in X^{**}$ tales que $\overline{x_1^{**}} = \overline{x_2^{**}}$; es decir, $(x_1^{**} - x_2^{**}) \in V^{\perp}$, lo cual implica que $x_1^{**}(v) = x_2^{**}(v)$; así, $p_v(\overline{x_1^{**}}) = p_v(\overline{x_2^{**}})$.

Consideremos la isometría

$$S : V^* \longrightarrow X^{**}/V^{\perp}$$

definida en el Teorema 2.5.3 y demostremos que

$$S : (V^*, \sigma(V^*, V)) \longrightarrow (X^{**}/V^{\perp}, \mathcal{P})$$

es un homeomorfismo. Sabemos que S es un operador lineal biyectivo definido como $S(v^*) = \overline{x_{v^*}^{**}}$ si $v^* \in V^*$ y $x_{v^*}^{**} \in X^{**}$ es cualquier extensión continua de v^* a X^*. Entonces, $p_v(S(v^*)) = p_v(\overline{x_{v^*}^{**}}) = |x_{v^*}^{**}(v)|$ y como $x_{v^*}^{**}|_V = v^*$ podemos afirmar que $p_v(S(v^*)) = |v^*(v)|$. Por el Teorema 1.3.6, S es continua. Dado que $S^{-1}(\overline{x^{**}}) = x^{**}|_V$, para $x^{**} \in X^{**}$, si tomamos $v \in V$, entonces $|x^{**}|_V(v)| = |x^{**}(v)| = p_v(\overline{x^{**}})$ con lo cual concluimos que S^{-1} es continua y por tanto, S es un homeomorfismo. $\square$

TEOREMA 3.4.7. *Sea $V \subset X^*$ cerrado. Entonces V es minimal si y sólo si B_X es relativamente compacto para $\sigma(X,V)$ y ésta es una topología Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\Sigma = \mathrm{Cl}_{\sigma(X,V)}(B_X)$ es $\sigma(X,V)$-compacto. Como $\sigma(X,V)$ es una topología Hausdorff, por el Teorema 2.7.13 esto equivale a decir que V es w^*-denso en X^*. Tomemos un subespacio vectorial $W \subset V$, con $W \neq V$, w^*-denso en X^*. Entonces, $\sigma(X,W) \subset \sigma(X,V)$ y podemos afirmar que Σ es un conjunto $\sigma(X,W)$-compacto. Además, $\sigma(X,W)$ y $\sigma(X,V)$ son topologías Hausdorff; por tanto,

$$Id : (\Sigma, \sigma(X,W)|_\Sigma) \to (\Sigma, \sigma(X,V)|_\Sigma)$$

es un homeomorfismo. En particular,

$$\sigma(X,W)|_{B_X} = \sigma(X,V)|_{B_X}$$

y por el Corolario 3.1.2, $\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}(W)$; pero V es cerrado, así, $V = \mathrm{Cl}(W)$ y como $W \subsetneqq V$ se tiene que W no es cerrado. Entonces, V es minimal.

Recíprocamente, supongamos que V es minimal. En particular V es w^*-denso en X^* y por el Teorema 2.7.13, $\sigma(X,V)$ es una topología Hausdorff.

Por otra parte, por el Teorema 3.4.4 tenemos que $X^{**} = \widehat{X} \oplus V^\perp$. Esta igualdad nos permite afirmar que existe una isomorfismo lineal $T : X^{**}/V^\perp \to \widehat{X}$ y podemos suponer que el codominio es X, ya que éste es isométrico a $\widehat{X}$. Por otro lado, sabemos que existe una isometría lineal $S : V^* \to X^{**}/V^\perp$(Teorema 2.5.3).

Probaremos que la imagen de B_{V^*} bajo $T \circ S$ contiene a B_X. Sea $v^* \in V^*$entonces $T\left(S\left(v^*\right)\right) = T\left(\overline{x^{**}_{v^*}}\right) = x_{_{v^*}}$, donde $x^{**}_{v^*}$ es cualquier extensión continua de v^* a X^* y $x_{_{v^*}} \in X$ es tal que $\widehat{x_{_{v^*}}}$ es la proyección de $x^{**}_{v^*}$ en $\widehat{X}$ a lo largo de $V^\perp$. Así, $\widehat{x_{v^*}}$ un representante de la clase $\overline{x^{**}_{v^*}}$, de hecho el único que pertenece a $\widehat{X}$. Por esto y dado que S es una isometría tenemos:

$$\|v^*\| = \left\|\overline{x^{**}_{v^*}}\right\| \leq \|\widehat{x_{v^*}}\| = \|x_{v^*}\|\,.$$

Por ser $T \circ S$ suprayectiva, dado $x \in B_X$ existe $v^* \in V^*$ tal que $T\left(S\left(v^*\right)\right) = x_{v^*} = x$ y por tanto, $\|v^*\| \leq 1$. Es decir, $B_X \subset T \circ S\left(B_{V^*}\right)$.

Afirmamos que

$$T \circ S : (V^*, \sigma(V^*,V)) \to (X, \sigma(X,V)) \tag{3.4.4}$$

es un homeomorfismo. Al probarlo habremos terminado. En efecto supongamos que tal es el caso, entonces por el Teorema de Alaoglu B_{V^*} es $\sigma(V^*,V)$-compacto y por consiguiente $T \circ S\left(B_{V^*}\right)$ es $\sigma(X,V)$-compacto y como $B_X \subset T \circ S\left(B_{V^*}\right)$ resulta que B_X es $\sigma(V^*,V)-$relativamente compacto.

Probemos nuestra afirmación. De acuerdo al lema anterior la familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_v : v \in V\}$, donde $p_v(\overline{x^{**}}) = |x^{**}(v)|$ y $\overline{x^{**}}$ representa la clase de x^{**} en $X^{**}/V^{\perp}$ define una topología localmente convexa τ en $X^{**}/V^{\perp}$ tal que $S : (V^*, \sigma(V^*, V)) \longrightarrow \left(X^{**}/V^{\perp}, \tau\right)$ es un homeomorfismo.

Para terminar con la demostración bastará ver que el operador lineal biyectivo

$$T : (X^{**}/V^{\perp}, \tau) \longrightarrow (X, \sigma(X, V))$$

es también un homeomorfismo.

La minimalidad de V implica que $X^{**} = \widehat{X} \oplus V^{\perp}$, por lo que cada x^{**} se puede escribir de manera única como $x^{**} = \widehat{x} + v^{\perp}$. Además, $T(\overline{x^{**}}) = T(\overline{\widehat{x} + v^{\perp}}) = x$ y $T^{-1}(x) = \overline{\widehat{x}} = \overline{x^{**}}$; así, $|v(T(\overline{x^{**}}))| = |v(x)| = |\widehat{x}(v) + v^{\perp}(v)| = |x^{**}(v)| = p_v(\overline{x^{**}})$ y $p_v(T^{-1}(x)) = |\widehat{x}(v)| = |v(x)|$. Por consiguiente, queda probada nuestra afirmación de que T es un homeomorfismo. □

Teorema 3.4.8. *Si $T : Y \to X$ es una isomorfismo isométríco y $V \subset X^*$ un subespacio minimal o con característica r, entonces $T^*(V)$ es minimal o de característica r, respectivamente, donde T^* es el operador adjunto de T.*

Demostración. Supongamos que V es minimal. Para probar la minimalidad de $T^*(V)$ hay que ver, según el Teorema 3.4.7, que $B_Y = T^{-1}(B_X)$. es $\sigma(Y, T^*(V))$-compacto y que $\sigma(Y, T^*(V))$ es de Hausdorff. Bastará entonces con probar que el operador lineal $T : (Y, \sigma(Y, T^*(V))) \to (X, \sigma(X, V))$ es un homeomorfismo.

Sean p_v y $p_{T^*(v)}$ las seminormas determinadas por los elementos de $v \in V$ y $T(v) \in T^*(V)$, entonces $p_v(T(y)) = |v(T(y)| = p_{T^*(v)}(y)$ para cada $y \in Y$ y $p_{T^*(v)}(T^{-1}(x)) = |T^*(v)(T^{-1}(x))| = |v(T(T^{-1}(x))| = |v(x)| = p_v(x)$ para cada $x \in X$. Del Teorema 1.3.6 se sigue que $T : (Y, \sigma(Y, T^*(V))) \to (X, \sigma(X, V))$ es un homeomorfismo.

Ahora supongamos que $carV = r$. Por el Teorema 2.4.1 T^* es una isometría. Entonces,

$$\left\{ \frac{|v(x)|}{\|x\|} : \ v \in V \cap B_{X^*} \text{ y } x \neq 0 \right\} = \left\{ \frac{|\ T^*(v)(y)|}{\|y\|} : \ T^*(v) \in T^*(V) \bigcap B_{Y^*} \text{ y } y \neq 0 \right\}$$

y $carT^*(V) = r$, por el Teorema 3.3.5. □

Corolario 3.4.9. *Si $T : Y \to X$ es una isomorfismo isométríco y $V \subset X^*$ un subespacio minimal y de característica 1, entonces $T^*(V)$ es minimal y de característica 1 en X^*.*

Como consecuencia de los teoremas 3.4.7 y 3.3.6, podemos enunciar el siguiente

Teorema 3.4.10. *Sea V cerrado. V es minimal y de característica 1 si y sólo si B_X es $\sigma(X, V)$-compacto y $\sigma(X, V)$ es Hausdorff.*

TEOREMA 3.4.11. *$\widehat{X}$ es minimal y de característica 1 en X^{**} , $X^{***} = \widehat{X^*} \oplus \widehat{X}^{\perp}$ y $\|y\| \leq \|y+z\|$ para cualesquiera $y \in \widehat{X^*}$ y $z \in \widehat{X}^{\perp}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema de Alaoglu B_{X^*} es w^*-compacto y como la topología $w^* = \sigma(X^*, \widehat{X})$ es Hausdorff, se sigue del Teorema 3.4.10 que $\widehat{X}$ es minimal y de característica 1 en X^{**}. En tanto que por el Corolario 2.8.5 y los teoremas 3.4.4 y 3.3.10 se tiene que $X^{***} = \widehat{X^*} \oplus \widehat{X}^{\perp}$ y

$$1 = \inf\{\frac{\|y+z\|}{\|y\|} : y \in \widehat{X^*}, y \neq 0 \text{ y } z \in \widehat{X}^{\perp}\}$$

de donde se sigue inmediatamente la desigualdad del enunciado. □

El siguiente resultado se prueba fácilmente utilizando la equivalencia 3.3.10 para la característica.

TEOREMA 3.4.12. *Si existe $V \subset X^*$ minimal y de característica $r > 0$, entonces existe un isomorfismo lineal $U : V^* \to X$ tal que $\|U\| = r^{-1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Del Teorema 3.4.4 se sigue, por ser V minimal, que $X^{**} = \widehat{X} \oplus V^{\perp}$ lo cual implica que X es isomorfo a $X^{**}/V^{\perp}$. Por otro lado, en el Teorema 2.5.3 se vio que este último es isométricamente isomorfo a V^*. Al componer estos dos isomorfismos obtenemos el isomorfismo

$$U : V^* \to X$$

definido como $U(v^*) = x$ donde $x \in X$ satisface que $x^{**} = \widehat{x} + v^{\perp}$ con $v^{\perp} \in V^{\perp}$ y x^{**} es cualquier extensión continua de v^* a X^*.

Si $1 < \lambda$, entonces existen $x \neq 0$ y $v^{\perp} \in V^{\perp}$tales $r < \frac{\|\hat{x}+v^{\perp}\|}{\|x\|} < \lambda r$. Sea v^* la restricción a V del operador $\hat{x} + v^{\perp}$.Entonces, $\|\hat{x} + v^{\perp}\| = \|v^*\|$ y

$$\frac{1}{\lambda r} < \frac{\|x\|}{\|\hat{x} + v^{\perp}\|} \leq \|U\| \frac{\|v^*\|}{\|\hat{x} + v^{\perp}\|} \leq \|U\| .$$

Al hacer tender λ a 1 obtenemos $\frac{1}{r} \leq \|U\|$.

Por otra parte si $0 < \mu < 1$, entonces existen $v^* \in V^*$, $x \in X$ y $v^{\perp} \in V^{\perp}$ tales que $\|v^*\| \leq 1$, $\widehat{x}+v^{\perp}$ es una extensión de Banach de v^* y $\mu \|U\| < \|U(v^*)\| = \|x\|$. Entonces, $\left\|\widehat{x} + v^{\perp}\right\| \leq 1$ y

$$r \leq \frac{\left\|\widehat{x} + v^{\perp}\right\|}{\|x\| .} \leq \frac{1}{\mu \|U\|}.$$

Al hacer tender μa 1 obtenemos $\|U\| \leq \frac{1}{r}$. De donde, $\|U\| = \frac{1}{r}$. □

3.5. Una condición para la reflexividad de un espacio de Banach

En los que sigue $X^{(4)}$ denota al cuarto dual del espacio de Banach X, o sea $X^{iv} = X^{****}$, y sus elementos son llamados x^{iv}, y^{iv}, etc.

Notamos que $\widehat{\widehat{X}}$, $\left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp}$, $\widehat{X^{**}}$ y $\bigcap \widehat{X^{*}}^{\perp}$ son subespacios de X^{iv}.

TEOREMA 3.5.1. *Se cumplen las siguientes tres igualdades.*

(a) $(\widehat{X}^{\perp})^{\perp} \bigcap \widehat{X^{*}}^{\perp} = \{0\}$.

(b) $\widehat{\widehat{X}} = \left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp} \bigcap \widehat{X^{**}}$.

(c) $\left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp} \oplus \widehat{X^{*}}^{\perp} = X^{iv}$.

Además,

(d) $\|x^{iv}\| \geq \left\|\hat{x}^{\perp\perp}\right\|$ *si* $\hat{x}^{\perp\perp} + \widehat{x^{*}}^{\perp}$ *es la descomposición de* x^{iv} *en la suma* $\left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp} \oplus \widehat{X^{*}}^{\perp} = X^{iv}$.

(e) Existe una isometría lineal $I : \widehat{X^{**}} \to \left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp}$ *que coincide con la identidad en* $\widehat{\widehat{X}}$, *y si* $I(\widehat{x^{**}}) = \widehat{x}^{\perp\perp}$, *entonces* el valor de $\|\lambda\widehat{x^{**}} + (1-\lambda)\widehat{x}^{\perp\perp}\|$ *es independiente de* λ *para* todo $0 \leq \lambda \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN. *(a)* Por el Teorema 3.4.11,

$$X^{***} = \widehat{X^{*}} \oplus \widehat{X}^{\perp}$$

y

$$\|y\| \leq \|y + z\| \text{ para cualesquiera } y \in \widehat{X^{*}} \text{ y } z \in \widehat{X}^{\perp}. \tag{3.5.1}$$

Supongamos que $x^{iv} \in (\widehat{X}^{\perp})^{\perp} \bigcap \widehat{X^{*}}^{\perp}$, entonces por la descomposición anterior de X^{***}, $x^{iv}\left(x^{***}\right) = 0$ para todo $x^{***} \in X^{***}$ o sea, $x^{iv} = 0$. Entonces,

$$(\widehat{X}^{\perp})^{\perp} \bigcap \widehat{X^{*}}^{\perp} = \{0\}. \tag{3.5.2}$$

(b) Sea $x \in X$; es claro que $\widehat{\widehat{x}} \in \widehat{X^{**}}$ y se cumple que $\widehat{\widehat{x}}(\widehat{x'}^{\perp}) = \widehat{x'}^{\perp}(\widehat{x}) = 0$ para toda $\widehat{x'}^{\perp} \in \widehat{X}^{\perp}$; es decir, $\widehat{\widehat{X}} \subset \left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp} \bigcap \widehat{X^{**}}$. Dada $\widehat{x^{**}} \in \left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp} \bigcap \widehat{X^{**}}$, se satisface que $\widehat{x^{**}}(\widehat{x}^{\perp}) = \widehat{x}^{\perp}(x^{**}) = 0$ para toda $\widehat{x}^{\perp} \in \widehat{X}^{\perp}$, o lo que es lo mismo, $x^{**} \in^{\perp} (\widehat{X}^{\perp})$. Por

la Proposición 2.5.2, ${}^{\perp}(\widehat{X}^{\perp}) = \mathrm{Cl}(\widehat{X}) = \widehat{X}$, por tanto $\widehat{x^{**}} \in \widehat{\widehat{X}}$. Con lo anterior queda demostrado (b).

(c) y *(d)* Recordemos que $X^{***} = \widehat{X^*} \oplus \widehat{X}^{\perp}$. Sean P_1 y P_2 las proyecciones de X^{***} en $\widehat{X^*}$ y $\widehat{X}^{\perp}$, respectivamente. Por la desigualdad (3.5.1) tenemos que $\|P_1\| = 1$

Sea $x^4 \in X^{(4)}$ y definamos $x_1^4 = x^4 \circ P_1$ y $x_2^4 = x^4 \circ P_2$. Estas son funcionales lineales continuas que actúan en X^{***}, como sigue.

$$\begin{aligned} x_1^4(\widehat{x^*} + \widehat{x}^{\perp}) &= x^4(\widehat{x^*}) \\ x_2^4(\widehat{x^*} + \widehat{x}^{\perp}) &= x^4(\widehat{x}^{\perp}) \end{aligned}$$

con $\widehat{x^*} \in \widehat{X^*}$ y $\widehat{x}^{\perp} \in \widehat{X}^{\perp}$. Se sigue que $x^4 = x_1^4 + x_2^4$ y $x_1^4 \in (\widehat{X}^{\perp})^{\perp}$, $x_2^4 \in \widehat{X^*}^{\perp}$ y

$$\left\|x_1^4\right\| \leq \left\|x^4\right\| \|P_1\| = \left\|x^4\right\|.$$

Consecuentemente, y en conjunto con el apartado *(a)*, llegamos a que

$$X^{(4)} = \left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp} \oplus \widehat{X^*}^{\perp}.$$

y

$$\left\|\hat{x}^{\perp\perp}\right\| \leq \left\|x^4\right\| \text{ si } x^4 = \hat{x}^{\perp\perp} + \widehat{x^*}^{\perp}. \tag{3.5.3}$$

Entonces la proyección Q_1 de $X^{(4)}$ sobre $\left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp}$asociada a esta suma es continua.

(e) Aplicando el Teorema 3.4.11 al espacio de Banach X^* obtenemos la igualdad

$$X^{(4)} = \widehat{X^{**}} \oplus \widehat{X^*}^{\perp}$$

y la desigualdad

$$\|\widehat{x^{**}}\| \leq \|\widehat{x^{**}} + \widehat{x^*}^{\perp}\| \tag{3.5.4}$$

para toda $x^{**} \in X^{**}$ y $\widehat{x^*}^{\perp} \in \widehat{X^*}^{\perp}$.

Entonces la proyección Q_1' de $X^{(4)}$ sobre $\left(\widehat{X^{**}}\right)^{\perp}$asociada a esta suma es continua.

Definimos los operadores lineales $I : \widehat{X^{**}} \to \left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp}$ y $J : \left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp} \to \widehat{X^{**}}$ como:

$$I\left(\widehat{x^{**}}\right) = \widehat{x}^{\perp\perp}$$

si $\widehat{x^{**}} = \widehat{x}^{\perp\perp} + \widehat{x^*}^{\perp}$ es la descomposición de $\widehat{x^{**}}$ en la suma directa $X^{(4)} = \left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp} \oplus \widehat{X^*}^{\perp}$.

$$J\left(\widehat{x}^{\perp\perp}\right) = \widehat{y^{**}}$$

si $\widehat{x}^{\perp\perp} = \widehat{y^{**}} + \widehat{y^{*}}^{\perp}$ es la descomposición $\widehat{x}^{\perp\perp}$ en la suma directa $X^{(4)} = \widehat{X^{**}} \oplus \widehat{X^{*}}^{\perp}$.

Con la notación antes introducida tenemos que $I = Q_1|\widehat{X^{**}}$ y $J = Q_1'|\widehat{X}^{\perp\perp}$por tanto, I y J son continuos. Además, debido a que

$$\widehat{x^{**}} = \widehat{x}^{\perp\perp} + \widehat{x^{*}}^{\perp} = \widehat{y^{**}} + \widehat{y^{*}}^{\perp} + \widehat{x^{*}}^{\perp}$$
$$\widehat{x}^{\perp\perp} = \widehat{y^{**}} + \widehat{y^{*}}^{\perp} = \widehat{z}^{\perp\perp} + \widehat{z^{*}}^{\perp} + \widehat{y^{*}}^{\perp}$$

donde: $\widehat{y^{**}} + \widehat{y^{*}}^{\perp}$ es la descomposición de $\widehat{x}^{\perp\perp}$ en la suma $X^{(4)} = \widehat{X^{**}} \oplus \widehat{X^{*}}^{\perp}$ y $\widehat{z}^{\perp\perp} + \widehat{z^{*}}^{\perp}$es la descomposición de $\widehat{y^{**}}$ en la suma directa $X^{(4)} = \left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp} \oplus \widehat{X^{*}}^{\perp}$. Por la unicidad de estas descomposiciones se sigue que $\widehat{x^{**}} = \widehat{y^{**}}$ y $\widehat{x}^{\perp\perp} = \widehat{z}^{\perp\perp}$; o sea, $\widehat{x^{**}} = \widehat{y^{**}} = J\left(I\left(\widehat{x^{**}}\right)\right)$ y $\widehat{x}^{\perp\perp} = \widehat{z}^{\perp\perp} = I\left(J\left(\widehat{x}^{\perp\perp}\right)\right)$. De donde, I es biyectiva y por las desigualdades (3.5.3) y (3.5.4) tenemos $\|I\left(\widehat{x^{**}}\right)\| \leq \|\widehat{x^{**}}\|$y $\|J\left(\widehat{x}^{\perp\perp}\right)\| \leq \|\widehat{x}^{\perp\perp}\|$, por lo que I es una isometría.

Sean $\widehat{\widehat{x}} \in \widehat{\widehat{X}}$ y $\widehat{x}^{\perp} \in \widehat{X}^{\perp}$. Tenemos que $\widehat{\widehat{x}}\left(\widehat{x}^{\perp}\right) = \widehat{x}^{\perp}\left(\widehat{x}\right) = 0$. Por consiguiente, $\widehat{\widehat{x}} \in \left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp}$y entonces, la componente en $\widehat{X^{*}}^{\perp}$, en la descomposición de $\widehat{\widehat{x}}$ en la suma directa $X^{(4)} = \left(\widehat{X}^{\perp}\right)^{\perp} \oplus \widehat{X^{*}}^{\perp}$ es 0 y así, $I\left(\widehat{\widehat{x}}\right) = \widehat{\widehat{x}}$. O sea, $I|\widehat{\widehat{X}}$ es la identidad.

Finalmente, sean $\widehat{x^{**}} \in \widehat{X^{**}}$ y $\widehat{x}^{\perp\perp} \in (\widehat{X}^{\perp})^{\perp}$ tales que $I(\widehat{x^{**}}) = \widehat{x}^{\perp\perp}$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Entonces,

$$\widehat{x^{**}} = \widehat{x}^{\perp\perp} + \widehat{x^{*}}^{\perp}$$

para algún $\widehat{x^{*}}^{\perp} \in \widehat{X^{*}}^{\perp}$ y ,

$$\|\widehat{x^{**}}\| = \|\widehat{x}^{\perp\perp}\|.$$

De donde

$$\lambda\widehat{x^{**}} + (1-\lambda)\widehat{x}^{\perp\perp} = \widehat{x}^{\perp\perp} + \lambda\widehat{x^{*}}^{\perp}$$

y por la desigualdad (3.5.3)

$$\|\widehat{x}^{\perp\perp}\| \leq \|\lambda\widehat{x^{**}} + (1-\lambda)\widehat{x}^{\perp\perp}\|.$$

Por otra parte,

$$\|\lambda\widehat{x^{**}} + (1-\lambda)\widehat{x}^{\perp\perp}\| \leq \|\widehat{x}^{\perp\perp}\|,$$

Por tanto, $\|\lambda\widehat{x^{**}} + (1-\lambda)\widehat{x}^{\perp\perp}\| = \|\widehat{x}^{\perp\perp}\|$. □

COROLARIO 3.5.2. *Si $B_{X^{(4)}}$ no contiene segmentos de recta no degenerados, entonces X es reflexivo.*

Demostración. Supongamos que X es no reflexivo y tomemos $x^{**} \in X^{**} \setminus \widehat{X}$ unitario. Afirmamos que $\widehat{x^{**}} \neq \widehat{x}^{\perp\perp}$ si $I(\widehat{x^{**}}) = \widehat{x}^{\perp\perp}$, donde I es la isometría del apartado *(e)* de teorema anterior. En efecto, en caso contrario $\widehat{x^{**}} \in \widehat{X}^{\perp\perp}$ y entonces $0 = \widehat{x^{**}}\left(\widehat{X}^{\perp}\right)$ y así $0 = \widehat{X}^{\perp}(x^{**})$. O sea, $x^{**} \in^{\perp} \widehat{X}^{\perp} = \widehat{X}$, lo que contradice la elección de x^{**}.

Entonces, el segmento de recta determinado por $\widehat{x^{**}}$ y $\widehat{x}^{\perp\perp}$ es no degenerado. Por *(e)* de teorema anterior, el valor de $\|\lambda\widehat{x^{**}} + (1-\lambda)\widehat{x}^{\perp\perp}\|$ es independiente de λ para todo $0 \leq \lambda \leq 1$ y como $\|\lambda\widehat{x^{**}} + (1-\lambda)\widehat{x}^{\perp\perp}\| \leq 1$ se contradice la hipótesis. $\square$

3.6. Subespacios con características que recorren todo $[0,1]$.

Construiremos una familia de subespacios dependientes de un parámetro λ. Se verá que la características de los subespacios de esta familia recorren todos los valores entre 0 y 1.

Hemos visto que el dual de c_0 es isométricamente isomorfo a ℓ^1 y a su vez, el dual de ℓ^1 es isométricamente isomorfo a ℓ^∞. En la Sección 2.2 se dieron explícitamente las siguientes isometrías entre dichos espacios:

$$T_0 : c_0^* \to \ell^1 \text{ y } T_1 : \ell^\infty \to \ell^{1*}$$

con $T_0(x^*) = (x^*(e_i))_{i=1}^\infty$, donde $(e_i)_{i=1}^\infty$ es la base canónica de c_0, y $T_1(b)((\alpha_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^\infty b_i\alpha_i$ para todo $(\alpha_i)_{i=1}^\infty \in \ell^1$ y $b = (b_i)_{i=1}^\infty \in \ell^\infty$.

Observemos que si $a = (a_1, a_2, \cdots) \in c_0$, entonces

$$(T_1(a) \circ T_0)(x^*) = \sum_{i=1}^\infty x^*(e_i)\, a_i = x^*\left(\sum_{i=1}^\infty a_i e_i\right) = \widehat{a}(x^*).$$

Tomamos

$$T = T_1^* \circ T_0^{**} : c_0^{***} \to \ell^{\infty*},$$

si $w \in T\left(\widehat{c_o}^{\perp}\right)$, entonces existe $x_w^{***} \in \widehat{c_o}^{\perp}$ tal que $T(x_w^{***}) = w$. Por lo anterior para cada $a = (a_1, a_2, \cdots) \in c_0$ se tiene

$$\begin{aligned} w(a) &= T(x_w^{***})(a) = T_1^* \circ T_0^{**}(x_w^{***})(a) \\ &= T_1^* \circ (x_w^{***} \circ T_0^*)(a) = x_w^{***}(T_0^*(T_1(a))) \\ &= x_w^{***}(T_1(a) \circ T_0) \\ &= x_w^{***}(\widehat{a}). \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

Por otra parte, sea $y \in T\left(\widehat{c_0^*}\right)$, existe $x_y^* \in c_0^*$tal que $y = T\left(\widehat{x_y^*}\right)$. Para cada $b = (b_1, b_2, \cdots) \in \ell^\infty$ tenemos que

$$\begin{aligned} y(b) &= T\left(\widehat{x_y^*}\right)(b) = T_1^* \circ T_0^{**}(\widehat{x_y^*})(b) \\ &= T_1^* \circ (\widehat{x_y^*} \circ T_0^*)(b) = \widehat{x_y^*} \circ T_0^* \circ T_1(b) \\ &= \widehat{x_y^*}(T_1(b) \circ T_0) = T_1(b)(T_0(x_y^*)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_y^*(e_i). \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

En el caso particular que $b \in c_0$, se cumple que $y(b) = x_y^*(b)$, pues (e_i) es una base de Schauder de c_0.

El Teorema 3.4.11 nos asegura que

$$c_0^{***} = \widehat{c_0^*} \oplus \widehat{c_0}^\perp.$$

A partir de esta igualdad podemos considerar isométricamente inmersos en $\ell^{\infty *}$ a c_0^* y $c_0^\perp$; de hecho, bajo la isometría

$$T = T_1^* \circ T_0^{**} : c_0^{***} \to \ell^{\infty *},$$

ya que

$$\ell^{\infty *} = T\left(c_0^{***}\right) = T\left(\widehat{c_0^*}\right) \oplus T\left(\widehat{c_o}^\perp\right).$$

Afirmación 3.6.1. $\|y + w\| = \|y\| + \|w\|$ si $y \in T\left(\widehat{c_0^*}\right)$ y $w \in T\left(\widehat{c_o}^\perp\right)$.

Si $y = 0$ o $w = 0$ la afirmación es obvia. Supongamos que y y w no son nulos. Sólo es necesario probar que $\|y + w\| \geq \|y\| + \|w\|$.

Sean $\epsilon > 0$, $y \in T\left(\widehat{c_0^*}\right)$ y $w \in T\left(\widehat{c_o}^\perp\right)$. Entonces, existen $x_y^* \in c_0^*$, $a = (a_1, a_2, \cdots) \in c_0$ y $b = (b_1, b_2, \cdots) \in \ell^\infty$, estos dos últimos unitarios, tales que

$$\begin{gathered} T\left(\widehat{x_y^*}\right) = y, \\ x_y^*(a) > \|x_y^*\| - \tfrac{\epsilon}{3} = \|y\| - \tfrac{\epsilon}{3}, \\ w(b) > \|w\| - \tfrac{\epsilon}{3}. \end{gathered}$$

Tenemos que $x_y^*(a) = \sum_{i=1}^{\infty} x_y^*(e_i) a_i$ y por (3.6.2), $y(b) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_y^*(e_i)$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=1}^{N} x_y^*(e_i) a_i > \|y\| - \frac{\epsilon}{3}$ y $|\sum_{i=N}^{\infty} b_i x_y^*(e_i)| < \frac{\epsilon}{3}$. Definimos $a^N = (a_1, \cdots, a_N, 0, \cdots) \in c_0$ y $b^N = (a_1, \cdots, a_N, b_{N+1}, \cdots)$. En vista de lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} y(a^N) &> \|y\| - \frac{\epsilon}{3}, \\ |y(b^N - a^N)| &\leq \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Existe $x_w^{***} \in \widehat{c_o}^{\perp}$ tal que $T(x_w^{***}) = w$. Por (3.6.1), $w(a) = x_w^{***}(\widehat{a})$; de donde $w(a) = 0$. Por consiguiente, $w(b^N) = w(b)$, ya que $b^N - b \in c_0$.

Finalmente, es claro que $\|b^N\| \leq 1$ y así,

$$\begin{aligned}
\|y+w\| &\geq |y(b^N) + w(b^N)| \\
&= |w(b^N) + y(a^N) + y(b^N - a^N)| \\
&\geq w(b^N) + y(a^N) - |y\left(b^N - a^N\right)| \geq \|w\| - \frac{\epsilon}{3}\| + \|y\| - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3} \\
&= \|y\| + \|w\| - \epsilon.
\end{aligned}$$

Se sigue que$\|y+w\| \geq \|y\| + \|w\|$, por ser ϵ arbitraria.

Construcción de la familia de subespacios

Sean $\lambda \geq 0$, $w_0 \in T\left(\widehat{c_o}^{\perp}\right)$ y $y_0 \in T\left(\widehat{c_0^*}\right)$, ambos unitarios. Consideremos el subespacio

$$V_\lambda =^{\perp} \{T_1^{*-1}(y_0) + \lambda T_1^{*-1}(w_0)\} \subset \ell^{1*}.$$

Entonces

$$V_\lambda^{\perp} =< T_1^{*-1}(y_0) + \lambda T_1^{*-1}(w_0)\} >\subset \ell^{1**}.$$

Según el Teorema 3.3.10 la característica de V_λ se puede calcular como

$$t_\lambda = \inf\left\{\frac{\|\hat{x_1} + v^{\perp}\|}{\|x_1\|} : x_1 \in \ell^1,\, x_1 \neq 0 \text{ y } v^{\perp} \in V_\lambda^{\perp}\right\}.$$

Tenemos que$T_1^*\left(\widehat{\ell^1}\right) = T_1^*\left(\widehat{T_0\left(c_0^*\right)}\right)$. Así, para $x^* \in c_0^*$ y $\lambda \in \ell^\infty$, tenemos

$$T_1^*(\widehat{T_0(x^*)})(\lambda) = T_1(\lambda)((x^*(e_i))_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x^*(e_i) = T\left(\widehat{x^*}\right)(\lambda)$$

(recuérdese 3.6.2), por lo que

$$T_1^*\left(\widehat{\ell^1}\right) = T\left(\widehat{c_0^*}\right),$$

y es inmediato que

$$T_1^*\left(V_\lambda^{\perp}\right) =< y_0 + \lambda w_0 > .$$

Por ser $T_1^* : \ell^{1**} \to \ell^{\infty*}$un isomorfismo lineal isométrico se tiene que

$$t_\lambda = \inf\left\{\frac{\|y + \alpha(y_0 + \lambda w_0)\|}{\|y\|} : y \in T\left(\widehat{c_0^*}\right),\, y \neq 0 \text{ y } \alpha \in \mathbb{F}\right\}.$$

Al tomar $y = y_0$ y $\alpha = -1$, tenemos que $t_\lambda \leq \lambda$.

Sean $y \in T\left(\widehat{c_0^*}\right)$, $y \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{F}$. Por la Afirmación 3.6.1 tenemos

$$\|y + \alpha(y_0 + \lambda w_0)\| = \|y + \alpha y_0\| + |\alpha|\lambda, \tag{3.6.3}$$

además,

$$\|y\| - |\alpha| = \|y\| - \|\alpha y_0\| \leq \|y + \alpha y_0\|.$$

Si $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces

$$\lambda\|y\| \leq \|y + \alpha y_0\| + |\alpha|\lambda.$$

A partir de esto y la igualdad (3.6.3), tenemos que $\lambda \leq t_\lambda$. Y por tanto, $t_\lambda = \lambda$.

Supongamos que $\lambda > 1$. Se sigue de la desigualdad $\|y\| - \lambda|\alpha| = \|y\| - \|\alpha\lambda y_0\| \leq \|y + \alpha\lambda y_0\|$ que $\|y\| \leq \|y + \alpha\lambda y_0\| + |\alpha|\lambda$. Tomemos $\alpha' = \lambda\alpha$, entonces

$$\|y\| \leq \|y + \alpha' y_0\| + |\alpha'| < \|y + \alpha' y_0\| + |\alpha'|\lambda.$$

por ser $\lambda > 1$.

Por esta desigualdad, la igualdad (3.6.3) y el hecho de que la característica siempre es menor o igual a 1, se sigue que $\lambda > 1$ implica $t_\lambda = 1$.

Teorema. *Si*

$$s' = \inf_{x \notin {}^\perp \mathrm{Cl}_{w^*}(V)} \left\{ \left(\sup_{x^* \in (V \cap B_{X^*})} |x^*(x)| \right) \cdot \left(\sup_{y^* \in (\mathrm{Cl}_{w^*}(V) \cap B_{X^*})} |y^*(x)| \right)^{-1} \right\},$$

entonces $s' = r'$, donde r' es la característica de V respecto al espacio de Banach $(\mathrm{Cl}_{w^*}(V), \|\cdot\|)$

Demostración. Sabemos que $\mathrm{Cl}_{w^*}(V) = ({}^\perp V)^\perp$ y que $(X \diagup {}^\perp V)^*$ es isométrico a $({}^\perp V)^\perp$. Se sigue que el operador lineal $T : \mathrm{Cl}_{w^*}(V) \to (X \diagup {}^\perp V)^*$, dado como $T(y^*)(x + {}^\perp V) = y^*(x)$ para cada $y^* \in \mathrm{Cl}_{w^*}(V)$ y $x \in X$, es un isomorfismo isométrico. Por el Teorema 3.3.5 tenemos

$$\begin{aligned} r' &= \inf_{(x + {}^\perp V) \neq 0} \left\{ \sup \left\{ \frac{|T(x^*)(x + {}^\perp V)|}{\|x + {}^\perp V\|} : \ x^* \in V \cap B_{\mathrm{Cl}_{w^*}(V)} \right\} \right\} \\ &= \inf_{(x + {}^\perp V) \neq 0} \left\{ \sup \left\{ \frac{|x^*(x)|}{\|x + {}^\perp V\|} : \ x^* \in V \cap B_{\mathrm{Cl}_{w^*}(V)} \right\} \right\} \end{aligned}$$

Como $V \cap B_{\mathrm{Cl}_{w^*}(V)} = V \cap B_{X^*} \cap \mathrm{Cl}_{w^*}(V) = V \cap B_{X^*}$ y debido que la condición $(x + {}^\perp V) \neq 0$ equivale a que $x \notin {}^\perp \mathrm{Cl}_{w^*}(V)$, tenemos que

$$r' = \inf_{x \notin {}^\perp \mathrm{Cl}_{w^*}(V)} \left\{ \sup \left\{ \frac{|x^*(x)|}{\|x + {}^\perp V\|} : \ x^* \in V \cap B_{X^*} \right\} \right\}$$

Además, $\|x +^{\perp} V\| = \|\widehat{x +^{\perp} V}\|$, es decir,

$$\|\widehat{x +^{\perp} V}\| = \sup_{u^* \in B_{(X/^{\perp}V)^*}} |u^*(x +^{\perp} V)|$$

y por ser T una isometría tenemos que

$$\|x +^{\perp} V\| = \sup_{y^* \in (\mathrm{Cl}_{w^*}(V) \cap B_{X^*})} |y^*(x)|$$

Entonces,

$$r' = \inf_{x \notin {}^{\perp}\mathrm{Cl}_{w^*}(V)} \left\{ \left(\sup_{x^* \in (V \cap B_{X^*})} |x^*(x)| \right) \cdot \left(\sup_{y^* \in (\mathrm{Cl}_{w^*}(V) \cap B_{X^*})} |y^*(x)| \right)^{-1} \right\}$$

$\square$

Capítulo 4

Caracterización de los espacios de Banach con predual

A partir de este punto diremos que dos espacios de Banach X y Y, son *equivalentes* si son isométricamente isomorfos; es decir, si existe un operador $T : X \to Y$ lineal, biyectivo e isométrico. Recordamos que en tal caso escribimos $X \approx Y$, o bien $X \overset{T}{\approx} Y$ si queremos hacer explícito que el isomorfismo isométrico es$T$. En caso de que exista una correspondencia lineal, biyectiva y bicontinua entre X y Y, diremos que esos espacios son *topológicamente isomorfos*, o solamente nos referimos a ellos como *isomorfos.*

DEFINICIÓN 4.0.2. Sea X un espacio de Banach. Un espacio de Banach Y es llamado un predual de X si X es equivalente a Y^*. En tal caso se dice que X tiene predual.

Si Y es un predual de X, entonces escribimos $X = Y^*$ en lugar de $X \approx Y^*$.

En este capítulo se darán condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un predual de un espacio de Banach.

4.1. Ejemplos de espacios con y sin predual

4.1.1. Espacios con predual. Para cualquier espacio de Banach X es obvio que él es un predual del espacio de Banach X^*. Así por lo visto en el Capítulo 2 tenemos que c y c_0 son preduales de ℓ^1.

Otros ejemplos inmediatos de espacios de Banach con predual son los espacios reflexivos, ya que si X es reflexivo, entonces $\widehat{X} = X^{**}$ y esto implica que X^* es un predual de X, pues $X \approx \widehat{X}$. De acuerdo a lo visto en el Capítulo 2 cada espacio ℓ^p, con $1 < p < \infty$ es reflexivo y tiene como predual a ℓ^q, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

DEFINICIÓN 4.1.1. Cuando cualesquiera dos preduales de un espacio de Banach X son isométricamente isomorfos, entonces se dice que X tiene predual único.

Esto sucede para cualquier espacio reflexivo, pero hay espacios de Banach que no tienen predual único. Por ejemplo, ℓ^1 no tiene predual único ya que c y c_0 no son isométricamente isomorfos. A continuación comprobamos estas afirmaciones.

Supongamos que X es un espacio de Banach reflexivo y Y es un predual de X. Entonces $X \approx (X^*)^*$ y $X \approx Y^*$. Por los Teoremas 2.9.3 y 2.9.2 se tiene que Y es reflexivo y por el 2.4.1, $Y^{**} \approx X^*$. Entonces $Y \approx X^*$.Es decir, X tiene predual único.

El espacio c_0 tiene la propiedad (D): dado $x \in c_0$ con $\|x\| = 1$, existen $x_1, x_2 \in c_0$ tales que $x_1 \neq x_2$, $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ y

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = x.$$

O sea, B_{c_0} no tiene puntos extremos.

En efecto, como $x = (x_n)$ es una sucesión que converge a 0, entonces $|x_N| = 1$ para algún N. Por otra parte, existe $N_1 > N$ tal que $|x_{N_1}| < 1$. Escojamos $k > 0$ tal que

$$-1 < x_{N_1} - \frac{1}{k} < x_{N_1} + \frac{1}{k} < 1$$

y definamos: $x_1 = \left(x_n^{(1)}\right)$ y $x_2 = \left(x_n^{(2)}\right)$ donde $x_{N_1}^{(1)} = x_{N_1} - \frac{1}{k}, x_{N_1}^{(2)} = x_{N_1} + \frac{1}{k}$, y $x_n^{(1)} = x_n = x_n^{(2)}$ para $n \neq N_1$. Es claro que x_1 y x_2 satisfacen (D).

Afirmamos que el espacio c no tiene la propiedad (D). Sea $x = (1, 1, 1, ..)$ y supongamos que existen $x_1 = \left(x_n^{(1)}\right)$ y $x_2 = \left(x_n^{(2)}\right)$ en c tales que $x_1 \neq x_2$, $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ y

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = x. \tag{4.1.1}$$

Así, $x_n^{(1)} + x_n^{(2)} = 2$ para todo n y entonces $2 \leq \left|x_n^{(1)}\right| + \left|x_n^{(2)}\right|$ para todo n. Si $\left|x_n^{(1)}\right|$ o $\left|x_n^{(2)}\right|$ es menor que 1, entonces el otro es mayor que 1, lo que contradice una de la hipótesis por tanto, $\left|x_n^{(1)}\right| = \left|x_n^{(2)}\right| = 1$ y así, $\left|x_n^{(1)}\right| + \left|x_n^{(2)}\right| = \left|x_n^{(1)} + x_n^{(2)}\right|$ y por tanto, $x_n^{(1)}$ es un múltiplo no negativo de $x_n^{(2)}$ y como esos dos escalares son de módulo 1, obtenemos $x_n^{(1)} = x_n^{(2)} = 1$ para todo n, con lo que contradice que $x_1 \neq x_2$.

Como la propiedad (D) se conserva bajo isomorfismos isométricos, se sigue que c y c_0 no son isométricamente isomorfos.

4.1.2. El espacio c_0 no tiene predual. Mostraremos algo más fuerte que el título de la subsección. Veremos que c_0 no es topológicamente isomorfo al dual de ningún espacio de Banach X. Lo haremos para el espacio real, pero con pequeñas modificaciones la prueba funciona para el caso complejo. Antes necesitamos ver algunos resultados auxiliares.

LEMA 4.1.2. *Sea Z un espacio topológico no vacío. Si Z es de Baire y (F_n) es una sucesión de subconjuntos cerrados de Z tales que $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, entonces:*

(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} Int(F_n) \neq \emptyset$.

(b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} Int(F_n)$ *es denso en* Z.

DEMOSTRACIÓN. (a) Supongamos lo contrario. Entonces $Int(F_n) = \emptyset$ para todo $n \geq 1$. Tenemos que $Z \setminus F_n$ es un abierto y denso en Z. Así, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (Z \setminus F_n) = \emptyset$ es denso en Z, lo que es absurdo.

(b) Sea U un abierto no vacío de Z. Entonces U es un espacio de Baire. El conjunto $U \bigcap F_n$ es un cerrado de U para cada $n \geq 1$ y $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U \bigcap F_n$. Por (a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} Int_U (U \bigcap F_n) \neq \emptyset$. Como $Int_U (U \bigcap F_n) \subset U \bigcap Int(F_n)$ para cada $n \geq 1$, entonces $U \bigcap \bigcup_{n=1}^{\infty} Int(F_n) \neq \emptyset$ y se sigue (b). $\square$

LEMA 4.1.3. *Sean X un espacio de Banach tal que X^*es separable y $K \subset X^*$ un conjunto w^* - compacto. Existe $x^* \in K$ tal que si una sucesión en K es w^*-convergente a $x^* \in K$, entonces lo mismo sucede respecto a la norma en X^*, es decir la función identidad $I : (K, w^*) \to (K, \|\cdot\|)$ es continua en x^*. Por esto se dice que x^* es un punto de w^*-norma continuidad en K.*

DEMOSTRACIÓN. Como todo subespacio de un espacio métrico separable es separable, existe en K una sucesión (x_n^*) densa en K. Sea (ϵ_n)una sucesión de reales positivos que converge 0. Entonces $K = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_{\epsilon_n}[x_m] \bigcap K$ para cada $n \geq 1$ y $B_{\epsilon_n}[x_m] \bigcap K$ es w^* - cerrado para cualesquiera $n, m \geq 1$.

La topología w^* restringida a K es metrizable por ser K acotado en la norma (Corolario 2.8.4). Sea d la métrica que define la topología w^* en K. Entonces, (K, d) es compacto y por tanto, completo. Entonces $(K, d) = (K, w^*)$ es un espacio de Baire.

Sea $V_{m,n}$ el w^*-interior de $B_{\epsilon_n}[x_m] \bigcap K$, para $m, n \geq 1$. Por el lema anterior el w^* - abierto $V_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_{m,n}$ es denso en X . Cada $V_{m,n}$ es una w^*-vecindad abierta, en K, de cualquiera de sus puntos y $\|x^* - y^*\| < 2\epsilon_n$ siempre que $x^*, y^* \in V_{m,n}$. De donde, cada $x^* \in V_n$ tiene una w^*-vecindad abierta en K con diámetro, respecto a la norma, menor que $2\epsilon_n$.

Como (K, d) es un espacio de Baire, se tiene que $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ es denso en (K, d).

La función idéntica I :$(K, w^*) \to (K, \|\cdot\|)$ es continua en cada $x^* \in V$. En efecto, si $x^* \in V$, entonces sabemos que tiene una w^*-vecindad abierta en K con diámetro, respecto a la norma, menor que $2\epsilon_n$, para cada $n \geq 1$ y como $\epsilon_n \to 0$ se sigue la afirmación. De donde, cada vez que una sucesión converge en (K, w^*) a x^*, lo mismo sucede respecto a la norma.

Como (K, w^*) es metrizable. La continuidad de $I : (K, w^*) \to (K, \|\cdot\|)$ equivale a la continuidad por sucesiones. $\square$

TEOREMA 4.1.4. *Sean X y Y dos espacios de Banach y $T : X \to Y^*$ un isomorfismo topológico sobre su imagen, donde el dual Y^* es separable. Entonces todo conjunto $F \subset X$ cerrado y acotado tiene un punto $x \in F$ tal que si una sucesión en F es $w-$convergente a x, entonces lo mismo sucede respecto a la norma en X. Por esto se dice que x es un punto de w-norma continuidad en F.*

DEMOSTRACIÓN. Existen $m, M > 0$ tales que

$$m \|x\| \leq \|T(x)\| \leq M \|x\| \tag{4.1.2}$$

para todo $x \in X$.

Llamemos K a la w^*-cerradura de $T(F)$. Entonces K es w^*-cerrado y acotado (Corolario 2.7.19), por tanto, es w^*-compacto. Por el lema anterior existe un punto $y^* \in W$ de w^*-norma continuidad en K. También existe una sucesión $(y_n^*) = (T(x_n))$ en $T(F)$ que w^*-converge a y^* y por tanto, lo mismo sucede respecto a la norma. Por (4.1.2) tenemos que (x_n) es una sucesión de Cauchy en X, y por tanto, converge, digamos a x, en X. Entonces, $T(x) = y^*$. Sea $\epsilon > 0$; como la función identidad $I : (K, w^*) \to (K, \|\cdot\|)$ es continua en x^*, existe una w^*-vecindad W de y^* tal que $z^* \in W \cap K$ implica $\|z^* - y^*\| < m\epsilon$. Entonces $u \in T^{-1}(W) \cap F$ implica $\|T(u) - T(x^*)\| < m\epsilon$. El conjunto $T^{-1}(W)$ es w-abierto en X, ya que T es $w - w^*$-continuo de acuerdo al Teorema 2.7.22. Afirmamos que x es un punto de w-norma continuidad en F, pues si (u_n) es una sucesión en F que w-converge a x, entonces existe $N > 0$ tal que para $n \geq N$ se cumple que $u_n \in T^{-1}(W) \cap F$ y por tanto, $\|T(u_n) - T(x^*)\| < m\epsilon$. De (4.1.2), concluimos que $\|u_n - x^*\| < \epsilon$ si $n \geq N$. $\square$

AFIRMACIÓN 4.1.5. El espacio real c_0 no es topológicamente isomorfo al dual de ningún espacio de Banach X.

Supongamos lo contrario y sea X un espacio de Banach tal que X^* es topológicamente isomorfo a c_0. Entonces X^* es separable ya que c_0 lo es. De acuerdo al Teorema 4.1.4 existe $x \in B_{c_0}$, con $x = (x_n)$, que es un punto de w-norma continuidad en B_{c_0}. Si (e_n) es la base de Schauder canónica de c_0, entonces cualquier sucesión de la forma $(\lambda_n e_n)$ donde $\lambda_n = \pm 1$ es w-convergente a 0, ya que $\lim\limits_{n \to 0} |x^*(\lambda_n e_n)| = 0$ para todo $x^* \in c_0^*$. Existe $N > 0$ tal que $-\frac{1}{2} < x_n < \frac{1}{2}$ si $n > N$. Definamos $y_n = (0)$ si $1 \leq n \leq N$ y para $n > N$ hagamos $y_n = e_n$ o $y_n = -e_n$ según que $x_n \leq 0$ o $x_n > 0$. Entonces, $\|y_n\| = 1$ si $n > N$ y $(x - y_n)$ es una sucesión en B_{c_0} que w-converge a x. Por tanto, también lo hace en la norma; o sea que $\|y_n\| \rightharpoonup 0$, lo que es absurdo.

4.2. Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un predual

TEOREMA 4.2.1. *Si en X^* existe un subespacio vectorial minimal V y de característica 1, entonces existe un isomorfismo isométrico $T_1 : X \to V^*$ tal que la inmersión canónica de V en V^{**}seguida de T_1^* es la identidad en V. En particular, X tiene predual.*

DEMOSTRACIÓN. Por los teoremas 3.4.4 y 3.3.10 tenemos $X^{**} = \widehat{X} \oplus V^\perp$ y $\|\widehat{x}\| \leq \|\widehat{x}+v^\perp\|$ para cualesquiera $x \in X$ y $v^\perp \in V^\perp$. En este caso el isomorfismo canónico T_0: $X^{**}/V^\perp \to \widehat{X}$ correspondiente a esa suma directa es una isometría, ya que $\overline{x^{**}} = \overline{\widehat{x}}$ si $\widehat{x}$ es la proyección de x^{**}a lo largo de $V^\perp$ y por tanto, $\|\overline{x^{**}}\| \leq \|\widehat{x}\| = \|T_0\left(\overline{x^{**}}\right)\|$. En tanto que, $\|T_0\left(\overline{x^{**}}\right)\| = \|\widehat{x}\| \leq \|\widehat{x} + v^\perp\|$ para cualesquiera $x \in X$ y $v^\perp \in V^\perp$ implica la desigualdad en sentido contrario. Por tanto, T_0 es un isometría. Tenemos que $T_0^{-1}\left(\widehat{x}\right) = \widehat{x} + V^\perp$.

Del Teorema 2.5.3 tenemos que $X^{**}/V^\perp \overset{T}{\approx} V^*$, donde $T(x^* + V^\perp)(v) = x^*(v)$ para cualesquiera $v \in V$ y $x^* \in X^*$. Así, $T_1 = T \circ T_0^{-1} \circ \widehat{\ } : X \to V^*$ es una isomorfismo isométrico. Para la última parte, tomemos $v \in V$, entonces $T_1^*(\widehat{v}) = \widehat{v} \circ T_1$. Para cada $x \in X$, se tiene que $\widehat{v}(T_1(x)) = T_1(x)(v) = \widehat{x}(v) = v(x)$, por lo que $T_1^*(\widehat{v}) = v$. O sea, $T_1^* \circ \widehat{\ } : V \to X^*$es la identidad en V. □

TEOREMA 4.2.2. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach para el que existe una topología τ que es Hausdorff, localmente convexa y B_X es τ-compacta. Entonces, X tiene predual.*

DEMOSTRACIÓN. Definamos $V = \left\{v \in X^\# : v\,|B_X \text{ es } \tau\text{-continua}\right\}$. Claramente V es un espacio vectorial y se tiene la primera de las siguientes dos contenciones.

$$(X, \tau)^* \subset V \subset (X, \|\cdot\|)^*.$$

Para ver que también es cierta la segunda, observamos que si $v \in V$, entonces $v\left(B_X\right)$ es la imagen continua de un conjunto τ-compacto, por tanto, también es compacto, lo cual implica que es acotado en $\mathbb{F}$, o lo que es lo mismo, $v \in (X, \|\cdot\|)^*$.

El subespacio V de $(X, \|\cdot\|)^*$ separa puntos de X debido a que $(X, \tau)^*$ lo hace; de donde, $\sigma(X, V)$ es de Hausdorff. Por otra parte, afirmamos que V es cerrado en $(X, \|\cdot\|)^*$. Para probarlo sean $x^* \in \overline{V}$, $x \in B_X$ y $\epsilon > 0$. Existen $v \in V$ y una τ- vecindad W de x tales que $\|v - x^*\| < \frac{\epsilon}{3}$ y $|v\left(y\right) - v\left(x\right)| < \frac{\epsilon}{3}$ si $x, y \in W \bigcap B_X$. Entonces, $x, y \in W \bigcap B_X$ implica

$$|x^*\left(y\right) - x^*\left(x\right)| \leq |x^*\left(y\right) - v\left(y\right)| + |v\left(y\right) - v\left(x\right)| + |v\left(x\right) - x^*\left(x\right)|$$

por lo que $|x^*\left(y\right) - x^*\left(x\right)| < \epsilon$. O sea, $x^*|B_X$ es τ-continua . Entonces $x^* \in V$ y se sigue nuestra afirmación.

Con lo anterior, hemos visto que se cumplen las hipótesis para aplicar el Teorema 3.4.10, por lo tanto, V es minimal y de característica 1, y entonces X tiene predual por Teorema 4.2.1. $\square$

En el siguiente teorema que caracteriza a los espacios de Banach con predual resumimos mucho de lo hecho hasta ahora.

TEOREMA 4.2.3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) X tiene predual.

(b) Existe un subespacio $V \subset X^*$minimal y de característica 1.

(c) Existe un subespacio $V \subset X^*$ cerrado, w^*-denso tal que $X^{**} = \widehat{X} \oplus V^\perp$ y $\|\widehat{x}\| \leq \|\widehat{x} + v^\perp\|$ siempre que $x \in X$ y $v^\perp \in V^\perp$.

(d) Existe un subespacio cerrado $V \subset X^*$ tal que B_X es $\sigma(X,V)$-compacto y $\sigma(X,V)$ es Hausdorff.

(e) Existe una topología τ en X localmente convexa y Hausdorff tal que B_X es τ-compacto.

DEMOSTRACIÓN. *(a)*$\Rightarrow$ (b) Supongamos que $Y^* \overset{T}{\approx} X$. Por el Teorema 3.4.11, $\widehat{Y}$ es minimal y de característica 1 en Y^*. Se sigue del Corolario 3.4.9 que $T^*(Y) \subset X^*$ es minimal y de característica 1.

Que *(b)* implica *(a)* es consecuencia inmediata del Teorema 4.2.1.

Las afirmaciones (b) y (c) son equivalentes debido a los teoremas 3.3.10 y 3.4.4.

La equivalencia entre *(b)* y *(d)* es el Teorema 3.4.10.

Es claro que *(d)* implica *(e)*. Y finalmente, que *(e)* implica *(a)* es el Teorema 4.2.2. $\square$

4.3. Espacios sin predual topológicamente isomorfos a duales

J. Dixmier se preguntó en [**4**]: ¿Un espacio de Banach X topológicamente isomorfo a un espacio dual Y^*, necesariamente tiene un predual? Esto fue respondido tiempo después de forma negativa ([**8**]). Mucho más recientemente se dio un procedimiento para construir a partir de cualquier espacio de Banach no reflexivo un espacio de Banach topológicamente isomorfo a un espacio dual, pero sin predual; es decir, no isométrico a ningún espacio dual.

En la primera sección veremos el ejemplo específico y en la segunda mostraremos el procedimiento antes mencionado.

4.3.1. Un espacio isomorfo al espacio real ℓ^∞ y sin predual. Sabemos que ℓ^∞ es isométrico a $(\ell^1)^*$. Por tanto, si X es topológicamente isomorfo a ℓ^∞ es topológicamente isomorfo a un espacio dual.

LEMA 4.3.1. *Hagamos $V = B_{\ell^\infty} + B_{c_0}$ en ℓ^∞. Entonces, $(x_n) = x \in V$ si y sólo si $\|x\| \leq 2$ y $\limsup|x_n| \leq 1$ si $x = (x_n)$.*

DEMOSTRACIÓN. Parte "sólo si". Sea $x \in V$, es decir, $x = y + z$ con $y \in B_{\ell^\infty}$ y $z \in B_{c_0}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \limsup|x_n| &= \limsup|y_n + z_n| \\ &\leq \limsup|y_n| + \limsup|z_n| \\ &= \limsup|y_n| \leq 1 \end{aligned}$$

y es claro que $\|x\| \leq 2$.

Para probar la parte "si", tomemos $x \in \ell^\infty$, con $x = (x_n)$ tal que$\|x\| \leq 2$ y $\limsup|x_n| \leq 1$. Si $x_n = 0$ excepto para un número finito de naturales n, el resultado se sigue de inmediato, ya que:

$$(x_n) = \left(\frac{x_n}{2}\right) + \left(\frac{x_n}{2}\right).$$

Supongamos ahora que $x_n \neq 0$ para una infinidad de naturales n.

Por el hecho de que $\limsup|x_n| \leq 1$, existe una sucesión $N_1, N_2, \cdots, N_m, \cdots$ estrictamente creciente de números naturales , tales que

$$\sup_{k \geq N_m} |x_k| < 1 + \frac{1}{m+1}$$

si $m \geq 1$. Hagamos $N_0 = 0$.

Definimos dos sucesiones (y_n) y (z_n) como

$$y_n = \begin{cases} x_n - \frac{1}{m+1} & \text{si} \quad N_m < n \leq N_{m+1} \text{ y } x_n \geq 0 \\ x_n + \frac{1}{m+1} & \text{si} \quad N_m < n \leq N_{m+1} \text{ y } x_n < 0 \end{cases}$$

y

$$z_n = x_n - y_n$$

para cada $n \geq 1$.

Claramente $x = (y_n) + (z_n)$. Veamos que las sucesiones (y_n) y (z_n) cumplen lo requerido

Sea $N_0 < n \leq N_1$. Si $x_n \geq 0$, entonces $y_n = x_n - 1$ y $0 \leq x_n \leq 2$. Si $x_n < 0$, entonces $y_n = x_n + 1$ y $-2 \leq x_n \leq 0$. En cualquier caso, $-1 \leq y_n \leq 1$.

Sea $N_m < n \leq N_{m+1}$, con $m \geq 1$. Si $x_n \geq 0$, entonces $y_n = x_n - \frac{1}{m+1}$ y $0 \leq x_n < 1 + \frac{1}{m+1}$. Si $x_n < 0$, entonces $y_n = x_n + \frac{1}{m+1}$ y $-1 - \frac{1}{m+1} < x_n < 0$. En el primer caso, $-1 < -\frac{1}{m+1} \leq y_n < 1$ y en el segundo, $-1 < y_n < \frac{1}{m+1} < 1$.

Por lo anterior, $|y_n| \leq 1$ para todo $n \geq 1$; o sea, $(y_n) \in B_{\ell^\infty}$, y es inmediato ver que $(z_n) \in B_{c_0}$, ya que es una sucesión de bloques con valores $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ □

Corolario 4.3.2. *El conjunto V es cerrado en ℓ^∞.*

Demostración. Tomemos una sucesión (y_k) en V, con $y_k = (y_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$, que sea convergente a $x = (x_n)$. Así, $y_n^k \to x_n$ cuando $k \to \infty$, uniformemente respecto a n . Por el Lema anterior, $|y_n^k| \leq 2$ para cada $n, k \in \mathbb{N}$ y $\limsup_{\mathrm{n}} |y_n^k| \leq 1$ para todo k. Entonces $\|x\| \leq 2$. Por otra parte, dado $\epsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que $|y_n^k - x_n| < \epsilon$ si $k \geq K$ y para todo $n \geq 1$. Se sigue que $|x_n| < \epsilon + \left|y_n^K\right|$ para todo $n \geq 1$ y entonces $\limsup|x_n| \leq \epsilon + 1$. Como ϵ es arbitraria, $\limsup|x_n| \leq 1$. Entonces $x \in V$ y V es cerrado. □

Lema 4.3.3. *El conjunto V no tiene puntos extremos.*

Demostración. Sea $x = (x_n) \in V$, entonces $(x_n) = (y_n) + (z_n)$ con $(y_n) \in B_{\ell^\infty}$ y $(z_n) \in B_{c_0}$.

Supongamos que $(z_n) = (0)$. Entonces,

$$(x_n) = \frac{1}{2}\left((y_n) + (1, 0, 0, 0..)\right) + \frac{1}{2}\left((y_n) + (-1, 0, 0, 0..)\right)$$

y las sucesiones $(y_n) + (1, 0, 0, 0..)$ y $(y_n) + (-1, 0, 0, 0..)$ son distintas y pertenecen a V. De donde, (x_n) no es punto extremo de V.

Supongamos ahora que $z = (z_n) \neq (0)$. Como $x = (z_n)$ es una sucesión que converge a 0, entonces $|z_N| = \|z\|$ para algún N. Por otra parte, existe $N_1 > N$ tal que $|z_{N_1}| < \|z\|$. Escojamos $k > 0$ tal que

$$-\|z\| < z_{N_1} - \frac{1}{k} < z_{N_1} + \frac{1}{k} < \|z\|$$

y definamos $z'_{N_1} = z_{N_1} - \frac{1}{k}, z''_{N_1} = z_{N_1} + \frac{1}{k}$, y $z'_n = z_n(n) = z''_n$ para $n \neq N_1$. Entonces

$$(x_n) = \frac{1}{2}\left((y_n) + \left(z'_n\right)\right) + \frac{1}{2}\left((y_n) + \left(z'_n\right)\right)$$

y las sucesiones $(y_n) + \left(z'_n\right)$ y $(y_n) + \left(z''_n\right)$ son distintas y pertenecen a V. Con esto queda probado el Lema. □

Teorema 4.3.4. *Existe un espacio de Banach X isomorfo a ℓ^∞ que no tiene predual.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos la bola unitaria cerrada B_{ℓ^∞} y hagamos $V = B_{\ell^\infty} + B_{c_0}$. Claramente $B_{\ell^\infty} \subset V$ y B_{ℓ^∞} es absorbente, lo cual implica que V también lo es. Sea p_V la funcional de Minkowski de V en ℓ^∞. Por ser B_{ℓ^∞}y B_{c_0} conjuntos balanceados y convexos, se sigue que V también lo es, y por el lema anterior V es cerrado. Aplicando la Proposición 1.1.21 podemos asegurar que p_V es una seminorma, que además cumple con que $\{x \in \ell^\infty : p_V(x) \leq 1\} = V$. Por otro lado, si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} V$ se obtiene por el corolario anterior que, $\|x\| \leq \frac{2}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $x = 0$; de donde: $p_V(x) = 0$ implica $x = 0$; por lo que p_V es una norma.

Hagamos $X = (\ell^\infty, p_V)$ y veamos que $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$ es isomorfo a X bajo la función identidad. Tenemos que $B_{\ell^\infty} \subset V$ y $V \subset 2B_{\ell^\infty}$, entonces $\|x\| \leq 1$ implica $p_V(x) \leq 1$ y $p_V(x) \leq 1$ implica $\frac{1}{2}\|x\| \leq 1$. Por la proposición 1.1.19, se puede asegurar que $p_V(x) \leq \|x\|$ y $\|x\| \leq 2p_V(x)$. Por tanto, $\|\cdot\|$ y p_V son normas equivalentes. Queda probado el isomorfismo.

Ya hemos visto que X es isomorfo a ℓ^∞, veremos ahora que no tiene predual. Supongamos lo contrario, entonces existe un espacio de Banach Y y un isomorfismo isométrico $T : Y^* \to X$. Sabemos que B_{Y^*} es w^*-compacto, por tanto, por el Teorema de Krein & Milman, B_{Y^*} es la w^*-cerradura de la envolvente convexa del conjunto de sus puntos extremos. Como $T(B_{Y^*}) = V$ y las transformaciones lineales inyectivas conservan los puntos extremos de conjuntos, entonces V tiene puntos extremos, lo que contradice al lema anterior. $\square$

4.3.2. Construcción de espacios de Banach sin preduales, pero topológicamente isomorfos a duales.

El procedimiento que se expone en esta sección se debe a Libor Veselý **[10]** y permite construir a partir de cualquier espacio de Banach no reflexivo un espacio de Banach sin predual, pero topológicamente isomorfo a un dual.

LEMA 4.3.5. *Sea X un espacio normado. Si $x \in X$ y $A \subset X$ entonces*

(a) $x + \operatorname{conv}(A) = \operatorname{conv}(x + A)$

(b) $x + \operatorname{Cl}(\operatorname{conv}(A)) = \operatorname{Cl}(\operatorname{conv}(x + A))$

DEMOSTRACIÓN. *(a)* $x + \operatorname{conv}(A)$ es convexo y contiene a $x + A$; de donde $\operatorname{conv}(x + A) \subset x + \operatorname{conv}(A)$. De aquí, $\operatorname{conv}(A) = \operatorname{conv}(-x + x + A) \subset -x + \operatorname{conv}(x + A)$, y obtenemos la otra contención.

(b) Como las traslaciones son homeomorfismos, bastará tomar la cerradura en *(a)* para obtener *(b)*. $\square$

Supongamos que X es un espacio de Banach real.

Sea $x_0^* \in X^*$ y hagamos
$$L = \ker(x_0^*) \bigcap B_X.$$

Este subconjunto de X es cerrado, balanceado y convexo.

Definimos el siguiente conjunto en $X \times \mathbb{R}$.
$$C_0 = \{(B_X \times \{0\}) \bigcup (L \times \{-1\}) \bigcup (L \times \{1\})\}$$
y
$$C = \mathrm{Cl}(\mathrm{conv}(C_0)).$$
Como resultado del lema anterior, obtenemos:

COROLARIO 4.3.6. *Los puntos del conjunto* $(0,-1) + \mathrm{conv}(C_0)$ *tienen segunda coordenada en* $[-2,0]$ *y los del conjunto* $(0,1) + \mathrm{conv}(C_0)$ *en* $[0,2]$. *Además*
$$\begin{aligned} &((0,1)+C) \bigcap ((0,-1)+C) \\ &= \mathrm{Cl}(\mathrm{conv}((0,1)+C_0)) \bigcap \mathrm{Cl}(\mathrm{conv}((0,-1)+C_0)). \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Por *(a)* del Lema anterior,
$$\begin{aligned} (0,-1)+\mathrm{conv}(C_0) &= \mathrm{conv}((0,-1)+C_0) \\ &= \mathrm{conv}\Big((B_X \times \{-1\}) \bigcup (L \times \{-2\}) \bigcup (L \times \{0\})\Big), \end{aligned}$$
por tanto, la segunda coordenada de todo elemento en este conjunto esta en $[-2,0]$. Con argumentos similares, se prueba que la segunda coordenada de cualquier elemento de $(0,1) + \mathrm{conv}(C_0)$ está en $[0,2]$.

La igualdad (4.3.1) es consecuencia inmediata del inciso *(b)* del lema anterior. □

Definimos el conjunto
$$L_0 = L \times \{0\}.$$

LEMA 4.3.7. *Para el conjunto* L_0 *se cumple la siguiente igualdad*
$$L_0 = ((0,1)+C) \bigcap ((0,-1)+C)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in L$, entonces $(0,1)+(x,-1) = (x,0) = (0,-1)+(x,1)$, por tanto $(x,0) \in ((0,1)+C) \bigcap ((0,-1)+C)$. Inversamente, sea $(x,t) \in ((0,1)+C) \bigcap ((0,-1)+C)$. Por la igualdad (4.3.1) tenemos
$$(x,t) \in \mathrm{Cl}(\mathrm{conv}((0,1)+C_0)) \bigcap \mathrm{Cl}(\mathrm{conv}((0,-1)+C_0)),$$

entonces existen dos sucesiones $((x_n,t_n))$ y $((x'_n,t'_n))$, en $\mathrm{conv}((0,1)+C_0)$ y $\mathrm{conv}((0,-1)+C_0)$, respectivamente, tales que

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,t_n)=(x,t)=\lim_{n\to\infty}(x'_n,t'_n) \tag{4.3.2}$$

Por el Corolario (4.3.6), $t_n\in[0,2]$ y $t'_n\in[-2,0]$. De donde, $t=0$.

Así, para ver que $(x,t)=(x,0)$ pertenece a L_0 sólo falta probar que $x\in L$. Para eso, primero notemos que $(0,1)+C_0=((B_X\times\{1\})\bigcup(L\times\{0\})\bigcup(L\times\{2\}))$. Ahora supongamos que en la ecuación 4.3.2 sucede que para una infinidad de naturales n aparecen puntos de $B_X\times\{1\}$ en la combinaciones convexas que definen a los puntos (x_n,t_n). Si para una infinidad de esos n también aparecieran puntos de $L\times\{2\}$ en las combinaciones convexas correspondientes, tendríamos que $t_n\in[1,2]$ para una infinidad de naturales, y esto contradice que $t=0$. Por tanto, para dichos naturales n, existe N tal que si $n>N$, entonces los puntos (x_n,t_n) son de la forma

$$(x_n,t_n)=\sum_{i=1}^{r_n}\alpha_i^n(a_i^n,1)+\sum_{j=1}^{s_n}\beta_j^n(b_j^n,0)$$

con $a_i^n\in B_X$ y $b_j^n\in L$. Por tanto, $\sum_{i=1}^{r_n}\alpha_i^n\to 0$, pues $t=0$ y como $\|\sum_{i=1}^{r_n}\alpha_i^n a_i^n\|\leq\sum_{i=1}^{r_n}|\alpha_i^n|\|a_i^n\|=\sum_{i=1}^{r_n}\alpha_i^n$, se sigue que

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{r_n}\alpha_i^n a_i^n+\sum_{j=1}^{s_n}\beta_j^n b_j^n\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{s_n}\beta_j^n b_j^n.$$

Así, $x\in L$, por ser este conjunto cerrado. En este caso se tiene que $(x,t)=(x,0)$ pertenece a L_0.

El caso en que sólo para un número finito de naturales n sucede que aparecen puntos de $B_X\times\{1\}$ en la combinaciones convexas que definen a los puntos (x_n,t_n), podemos afirmar que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $(x_n,t_n)\in\{(L\times\{0\})\bigcup(L\times\{2\})\}$ si $n\geq N$; de donde, es inmediato que $x\in L$. Por lo que también se cumple que $(x,t)=(x,0)$ pertenece a L_0 y está probado el lema. $\square$

LEMA 4.3.8. *Se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned}(\ker(x_0^*)\times\mathbb{R})\bigcap C &= L\times[-1,1]\\ &= \mathrm{conv}(((0,1)+L_0)\bigcup((0,-1)+L_0)).\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Como L es un conjunto convexo y $(0,1)+L_0=L\times\{1\}$ y $(0,-1)+L_0=L\times\{-1\}$, entonces

$$\mathrm{conv}(((0,1)+L_0)\bigcup((0,-1)+L_0))=L\times[-1,1].$$

De la definición del conjunto L se sigue que $L\times[-1,1]\subset(\ker(x_0^*)\times\mathbb{R})$. Por otra parte, $(L\times\{1\})\bigcup(L\times\{-1\})\subset C_0$, y al tomar la envolvente convexa en ambos miembros obtenemos la contención $L\times[-1,1]\subset C$. Por tanto,

$$L\times[-1,1]\subset((\ker(x_0^*)\times\mathbb{R})\bigcap C).$$

Inversamente, sea $(x,t)\in((\ker(x_0^*)\times\mathbb{R})\bigcap C))$. Como $C\subset B_X\times[-1,1]$ y $(\ker(x_0^*)\bigcap B_X)=L$ entonces $(x,t)\in L\times[-1,1]$ □

TEOREMA 4.3.9. *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio real de Banach no reflexivo. Entonces existe una norma $|||\cdot|||$ en $X\times\mathbb{R}$ tal que*

(a) La norma $|||\cdot|||$ es equivalente a la norma usual $\|\cdot\|_\infty$ en $X\times\mathbb{R}$.

(b) $|||(x,0)|||=\|x\|$ para todo $x\in X$.

(c) La proyección $\pi:(X\times\mathbb{R},|||\cdot|||)\to(X,\|\cdot\|)$ definida como $\pi(x,t)=x$ tiene norma uno.

(d) El espacio $(X\times\mathbb{R},|||\cdot|||)$ no tiene predual.

DEMOSTRACIÓN. Por una de las distintas caracterizaciones de los espacios de Banach no reflexivos (Teorema 1.13.14 de [**11**]) tenemos que existe una funcional $x_0^*\in X^*$ que no alcanza el valor de su norma en B_X. Tomemos

$$\begin{aligned}
L &= B_X\bigcap\ker(x_0^*),\\
L_0 &= L\times\{0\},\\
C_0 &= (B_X\times\{0\})\bigcup(L\times\{-1\})\bigcup(L\times\{1\}),\\
C &= \mathrm{Cl}_{\|\cdot\|_\infty}(\mathrm{conv}(C_0).
\end{aligned}$$

Para $(x,t)\in X\times\mathbb{R}$ consideramos las normas $\|(x,t)\|_1=\|x\|+|t|$ y $\|(x,t)\|_\infty=\max\{\|x\|,|t|\}$ y denotaremos por $B_{X\times_1\mathbb{R}}$, $B_{X\times_\infty\mathbb{R}}$ a las bolas unitarias en $X\times\mathbb{R}$ correspondientes a estas normas.

Es claro que

$$\begin{array}{lll} C_0 & \subset & B_X\times\{-1,0,1\} \\ C & \subset & B_X\times[-1,1] \quad\subset\quad B_{X\times_\infty\mathbb{R}} \end{array}\tag{4.3.3}$$

Como C_0 es simétrico entonces $\mathrm{conv}(C_0)=\mathrm{conv}(-C_0)=-\mathrm{conv}(C_0)$. Al tomar cerraduras concluimos que C es simétrico.

Sean $(x,y)\in C$ y $|t|\le 1$. Como $(0,0)\in C$ y C es convexo y simétrico, entonces $t\,(x,y)+(1-t)\,(0,0)$ si $t\ge 0$ y $-t\,(-x,-y)+(1+t)\,(0,0)\in C$ si $t<0$. Es decir, C es balanceado.

Afirmamos que

$$B_{X\times_1\mathbb{R}} \subset C. \tag{4.3.4}$$

Sea $(x,t) \in B_{X\times_1\mathbb{R}}$, i.e. $|t| \leq \|x\| + |t| \leq 1$. Suponiendo que $t \neq \pm 1$ tenemos $\frac{\|x\|}{1-|t|} \leq 1$ y entonces, $(x,t) = (1-|t|)(\frac{x}{1-|t|}, 0) + |t|\,(0,\pm 1) \in C$, donde el signo $\pm$ se toma según $t \geq 0$ o $t < 0$. Si $|t| = 1$, entonces $x = 0$ y $(0,t) \in L \times \{1\} \subset C$ o $(0,t) \in L \times \{-1\} \subset C$ según que $t = 1$ o $t = -1$. Queda probada la afirmación .

Como $B_{X\times_1\mathbb{R}}$ es absorbente tenemos que C también lo es. Tomemos la seminorma definida por la funcional de Minkowski de este conjunto en el espacio vectorial $X \times \mathbb{R}$:

$$|||(x,t)||| = \inf\{\alpha > 0 : (x,t) \in \alpha C\}.$$

De hecho, $||| \cdot |||$ es una norma en $X \times \mathbb{R}$, ya que $|||(x,t)||| = 0$, implica que $(x,t) \in \alpha C \subset \alpha B_{X\times_\infty\mathbb{R}}$ para todo $\alpha > 0$. Equivalentemente, $\|(x,t)\|_\infty \leq \alpha$ para todo $\alpha > 0$, por lo que $(x,t) = (0,0)$.

Además, como la bola unitaria $B_{X\times_{|||\cdot|||}\mathbb{R}}$ de $(X\times\mathbb{R}, |||\cdot|||)$ es $\{(x,t) : |||(x,t)||| \leq 1\} = C$, se sigue de (4.3.4) que $\|(x,t)\|_1 \leq 1$ implica que $|||(x,t)||| \leq 1$. Por la Proposición 1.1.19 se cumple que $|||(x,t)||| \leq \|(x,t)\|_1$ en $X \times \mathbb{R}$. De (4.3.3) se tiene de manera análoga que $\|(x,t)\|_\infty \leq |||(x,t)|||$. En resumen,

$$\|(x,t)\|_\infty \leq |||(x,t)||| \leq \|(x,t)\|_1$$

en $X \times \mathbb{R}$.

Como $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes entre sí, entonces $|||\cdot|||$ también lo es con cada una de estas normas. Por consiguiente, $|||\cdot|||$ satisface el inciso *(a)* del enunciado.

Para la demostración de *(b)* y *(c)*, veamos que se dan las siguientes contenciones:

$$B_X = \{x \in X : (x,0) \in C\} = \pi\,[C] = \pi\,[B_{X\times_\infty\mathbb{R}}]\,. \tag{4.3.5}$$

Por 4.3.3, $x \in B_X$ siempre que $(x,t) \in C$ y como $x \in B_X$ implica que $(x,0) \in B_X \times \{0\} \subset C_0 \subset C$, obtenemos la primera igualdad. Y de (4.3.3) se sigue que $\pi\,[C] \subset \pi\,[B_{X\times_\infty\mathbb{R}}] \subset B_X$.

Tenemos $(x,0) \in \alpha C$ si y sólo si $\frac{1}{\alpha}(x,0) \in C$, y por (4.3.5) esto equivale a decir que $\frac{1}{\alpha}x \in B_X$, o lo que es lo mismo $x \in \alpha B_X$. Como $x \in \|x\| B_X$, entonces $(x,0) \in \|x\| C$; lo cual implica que $|||(x,0)||| \leq \|x\|$. Y de modo análogo, como $(x,0) \in ||(x,0)|||C$, entonces $x \in ||(x,0)|||B_X$; de donde, $\|x\| \leq |||(x,0)|||$. Por tanto se cumple *(b)*.

Por otro lado, para ver que se cumple *(c)* supongamos que $|||(x,t)||| \leq 1$o sea, $(x,t) \in C \subset B_{X\times_\infty\mathbb{R}}$. Entonces $\|\pi(x,t)\| = \|x\| \leq 1$, de donde $|||\pi||| \leq 1$. Por b), $|||(x,0)||| = \|x\|$ para todo $x \in X$; entonces $\|\pi(x,0)\| = 1$ si $|||(x,0)||| = 1$, por lo que $1 \leq |||\pi|||$. Es decir, se cumple *(c)*.

Para probar *(d)* supongamos que existe un espacio de Banach Z y un isomorfismo isométrico
$$T : (X \times \mathbb{R}, |||\cdot|||) \to Z^*.$$
Como $C = B_{X\times_{|||\cdot|||}\mathbb{R}}$, entonces, $T\,[C] = B_{Z^*}$ es, por el Teorema de Alaoglu, w^*-compacto en Z^*.

Por el Lema 4.3.7 y el hecho de que T es lineal y continua tenemos:
$$T\,[L_0] = (T(0,1) + T\,[C])\bigcap(T(0,-1) + T\,[C])$$
y $T\,[L_0]$ es w^*-compacto en Z^*, por ser la intersección de dos conjuntos w^*-compactos.

Por el Lema 4.3.8 y la Proposición 1.1.12 se tiene que
$$T[(\ker(x_0^*) \times \mathbb{R})\bigcap C] = \operatorname{conv}((T(0,1) + T[L_0])\bigcup(T(0,-1) + T[L_0])).$$

De la Proposición 1.1.7 se sigue que este conjunto es w^*-compacto en Z^* por serlo los conjuntos convexos $T(0,1) + T[L_0]$ y $T(0,-1) + T[L_0]$.

Sea $r > 0$ arbitraria. Entonces $T[(\ker(x_0^*) \times \mathbb{R})\bigcap C] = T[\ker(x_0^*) \times \mathbb{R}]\bigcap B_{Z^*}$ y como $(\ker(x_0^*) \times \mathbb{R}) = r(\ker(x_0^*) \times \mathbb{R})$ se sigue que
$$\begin{aligned} rT[(\ker(x_0^*) \times \mathbb{R})\bigcap C] &= r(T[(\ker(x_0^*) \times \mathbb{R})]\bigcap B_{Z^*}) \\ &= T[\ker(x_0^*) \times \mathbb{R}]\bigcap rB_{Z^*}. \end{aligned}$$

De donde, $T[\ker(x_0^*)\times\mathbb{R}]\bigcap rB_{Z^*}$ es w^*- compacto y en particular, es w^*-cerrado en Z^*. Por el Teorema de Krein-Šmulian $T[\ker(x_0^*) \times \mathbb{R}]$ es w^*-cerrado.

Definimos la funcional lineal $F : (X \times \mathbb{R}, |||\cdot|||) \to \mathbb{R}$ como
$$F(x,t) = x_0^*\,(\pi\,(x,t)) = x_0^*(x).$$
Entonces, $\ker(F) = (\ker(x_0^*) \times \mathbb{R})$, lo cual implica que $\ker(F \circ T^{-1}) = T[\ker(x_0^*) \times \mathbb{R}]$ es w^*-cerrado, lo que equivale a decir que la funcional lineal $F \circ T^{-1} : (Z^*, w^*) \to \mathbb{R}$ es w^*-continua.

Debido a que toda función real continua en un compacto alcanza su valor máximo, existe $z_o^* \in B_{Z^*}$ tal que $\sup\{|F(T^{-1}(z^*))| : z^* \in B_{Z^*}\} = |F(T^{-1}(z_0^*))|$. De donde,

$$|||F||| = \sup_{c\in C}|F(c)| = \sup_{z^*\in B_{Z^*}}|F(T^{-1}(z^*))| = |F(x_0,t_0)|$$
con $(x_0,t_0) = T^{-1}(z_0^*) \in C$. En particular, $x_0 \in B_X$.

Como C es balanceado, podemos suponer, sin perder generalidad, que
$$|||F||| = F(x_0,t_0) = x_0^*\,(x_0)\,.$$

De las contenciones 4.3.5 vemos que se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} F(x_0,t_0)=|||F||| &= \sup_{(x,t)\in C}|F(x,t)| = \sup_{x\in\pi[C]}|x_0^*(x)| \\ &= \sup_{x\in B_X}|x_0^*(x)| = \|x_0^*\|. \end{aligned}$$

Así, $\|x_0^*\| = x_0^*(x_0)$. Como $x_0 \in B_X$ se contradice el hecho de que $x_0^* \in X^*$no alcanza el valor de su norma en B_X. Por tanto, $(X, |||\cdot|||)$ no es isométricamente isomorfo a ningún dual. □

Concluimos con lo anunciado al inicio de esta sección: a partir de cualquier espacio de Banach no reflexivo es posible construir un espacio de Banach sin predual y topológicamente isomorfo a un dual.

Sea X cualquier espacio de Banach no reflexivo. Por el Teorema 2.9.2 X^* no es reflexivo. Por tanto, se sigue del Teorema 4.3.9 que a $X^*\times\mathbb{R}$ se le puede dar una norma $|||\cdot|||$ equivalente a la usual y tal que $(X^*\times\mathbb{R}, |||\cdot|||)$ no tiene predual. Es decir, $(X^*\times\mathbb{R}, |||\cdot|||)$ es topológicamente isomorfo a $(X^*\times\mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$. Por el Teorema 2.2.6, $(X^*\times\mathbb{R}, |||\cdot|||)$ es topológicamente isomorfo al dual $(X\times\mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)^*$.

Bibliografía

[1] F. Albiac and N.J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics 233, Springer, 2006.

[2] S. Banach, *Theory of Linear Operations,3* North Holland, 1987.

[3] J. Dieudonné, La dualité dans les espaces vectoriels topologiques*, Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, vol.59 (1942), pp. 135-140.

[4] J. Dixmier, Sur un théorème de Banach*, Duke Mathematical Journal* 15 (1948), 4, 1507-1071.

[5] M. Fabian, et al, *Functional Analysis and Infinite Dimensional Geometry,* CMS Books in Mathematics, Canadian Mathematical Society, Springer, 2001 .

[6] J. Horvath, *Topological Vector Spaces and Distributions, Volume I*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1966.

[7] A.H. Kober*,* Theorem on Banach Spaces*, Compositio Mathematica*, tome 7 (1940), p.135-140.

[8] V.L. Klee Jr., Some characterizations of reflexivity. *Revista Ci., Lima* 52 (1950). (3-4), p. 15–23.

[9] Kung-Fu Ng, On a Theorem of Dixmier*, Math. Scand*. 29 (1971), 279-280.

[10] L.Veselý, A Geometric Proof of a Theorem About Non-Dual Renormings, *American Mathematical Society*, Volume 127 (9) (1999), 2087-2089, .

[11] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics 183, 1998.

[12] W. Rudin, *Functional Analysis. Second Edition,* McGraw-Hill Book Company, 1991.