UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

RELACIONES ENTRE ALGUNAS RETÍCULAS DE CLASES DE MÓDULOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A :

RODRIGO DOMÍNGUEZ LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ALEJANDRO ALVARADO GARCÍA
2014

1. Datos del alumno
   Domínguez
   López
   Rodrigo
   25964431
   Universidad Nacional Autónoma de México
   Facultad de Ciencias
   Matemáticas
   307074944
2. Datos del tutor
   Dr.
   Alejandro
   Alvarado
   García
3. Datos del sinodal 1
   Dr.
   José
   Ríos
   Montes
4. Datos del sinodal 2
   Dr.
   Hugo Alberto
   Rincón
   Mejía
5. Datos del sinodal 3
   Dra.
   Bertha María
   Tomé
   Arreola
6. Datos del sinodal 4
   Dr.
   Iván Fernando
   Vilchis
   Montalvo
7. Datos del trabajo escrito.
   Relaciones entre algunas retículas de clases de módulos
   90 p
   2014

Relaciones entre algunas retículas de clases de módulos

Rodrigo Domínguez López

A mis padres María y Bladimir por todo el amor que me dan.
A mi hermanita Jimena.
A mi abuela Victoria.
A María Fernanda.

Índice general

Introducción

El trabajo se lleva a cabo en la categoría de los módulos izquierdos (R-Mod), donde R es un anillo asociativo con unidad.

Las retículas de clases de módulos son una útil herramienta para obtener información acerca de la estructura interna del anillo y la categoría de módulos asociada a él. Una de las retículas más estudiadas es la retícula de teorías de torsión hereditarias, ya que de ella se obtienen importantes relaciones con la retícula de topologías lineales en R, la retícula de radicales exactos izquierdos, la retícula de clases de torsión hereditarias y la retícula de clases libres de torsión hereditarias. Veremos que estas retículas surgen de un concepto más general que es el de clase de pretorsión hereditaria.

En el capítulo 1, se introduce la subcategoría plena de R-Mod ($\sigma[M]$), debida a Robert Wisbauer, y se estudian algunas de sus propiedades, entre las cuales destaca el ser una clase de pretorsión hereditaria.

En el capítulo 2, se trabaja con las retículas mencionadas previamente y las relaciones que existen entre ellas.

Las clases naturales- también conocidas como clases saturadas o clases de tipo- fueron introducidas por John Dauns en la década de los 90s. En el capítulo 3, se introduce ésta importante retícula, se muestra la relación que mantiene con las retículas de los capítulos anteriores y se obtienen resultados del anillo.

Históricamente, se obtuvieron primero resultados para la retícula de clases naturales y después se generalizaron para la retícula de clases pre-naturales. Dicha retícula (que denotaremos por R-prenat) fue introducida por Yiqiang Zhou y Stanley Page a finales de los 90s. Ésta retícula se estudia en el último capítulo.

Capítulo 1

$\sigma[M]$ y Clases de Pretorsión Hereditarias

1.1. Propiedades de $\sigma[M]$

Se dice que un R-módulo N es M-generado si existe un conjunto A tal que $N \cong M^{(A)}/V$ con $V \leq M^{(A)}$. Un módulo N isomorfo a un submódulo de un módulo M-generado se le conoce como un módulo M-subgenerado.

Definición 1.1.1. *Si M es un R-módulo, la clase de todos los módulos M-subgenerados se denotará por $\sigma[M]$. Por lo tanto se tiene que $\sigma[M] = \{N \in R\text{-Mod} : \exists I$ conjunto y $\exists V \leq M^{(I)}$ tal que $N \hookrightarrow M^{(I)}/V\}$.*

De la definición y del hecho de que todo R-módulo es cociente de un libre se tiene que $\sigma[{}_RR] = R$-Mod.

También es claro que $\sigma[M]$ es cerrada bajo tomar copias isomorfas. Demostremos que es cerrada bajo submódulos, sumas directas arbitrarias y cocientes.

Proposición 1.1.2. *Si M es un R-módulo, entonces se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si $N \in \sigma[M]$ y $L \leq N$, entonces $L \in \sigma[M]$ y $N/L \in \sigma[M]$;*

2. *Si $\{N_i\}_{i \in I} \subseteq \sigma[M]$, entonces $\bigoplus_{i \in I} N_i \in \sigma[M]$.*

Demostración. (1) Si $L \leq N \in \sigma[M]$ entonces existe un conjunto I tal que $L \hookrightarrow N \hookrightarrow M^{(I)}/V$ con $V \leq M^{(I)}$. Así $L \hookrightarrow M^{(I)}/V$ entonces $L \in \sigma[M]$. Si $N \hookrightarrow M^{(I)}/V$ entonces $N \cong W/V$ donde $V \leq W \leq M^{(I)}$. Así $L \cong X/V$ con $V \leq X \leq W$, entonces $N/L \cong (W/V)\,/\,(X/V) \cong W/X \leq M^{(I)}/X$. Por lo tanto $N/L \in \sigma[M]$.

(2) Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ la familia de módulos M-generados tales que para toda $i \in I$, $N_i \leq M_i$. Así $M_i \cong M^{(A_i)}/V_i$, donde A_i es un conjunto y $V_i \leq M^{(A_i)}$, entonces por la propiedad universal de la suma directa $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \cong \bigoplus\limits_{i\in I} (M^{(A_i)}/V_i) \cong (\bigoplus\limits_{i\in I} M^{(A_i)})/(\bigoplus\limits_{i\in I} V_i)$.

Pero $\bigoplus\limits_{i\in I} M^{(A_i)} = M^{(A)}$ para algún conjunto A. Con ello $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \sigma[M]$ y por el inciso (1), $\bigoplus\limits_{i\in I} N_i \in \sigma[M]$. □

Corolario 1.1.3. *Si $N \in R$-Mod y $\{N_i\}_{i\in I}$ es una familia de submódulos de N tales que $\{N_i\}_{i\in I} \subseteq \sigma[M]$ entonces $\sum\limits_{i\in I} N_i \in \sigma[M]$.*

Demostración. Si $j_i : N_i \longrightarrow N$ denotan las inclusiones, entonces por la propiedad universal de la suma directa existe $j = \oplus j_i : \bigoplus\limits_{i\in I} N_i \longrightarrow N$, la función suma, que cumple $Im(j) = \sum\limits_{i\in I} Im(j_i) = \sum\limits_{i\in I} N_i$. Como $\bigoplus\limits_{i\in I} N_i \in \sigma[M]$, por la Proposición 1.1.2 $\sum\limits_{i\in I} N_i = Im(j) \in \sigma[M]$. □

Definición 1.1.4. *Una subclase $\mathscr{C}$ de R-Mod es subgenerada por N o N es un subgenerador para $\mathscr{C}$, si todo elemento en $\mathscr{C}$ es N-subgenerado.*

Proposición 1.1.5. *Para $N, M \in R$-Mod las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) N es un subgenerador para $\sigma[M]$;

(b) $\sigma[M] = \sigma[N]$;

(c) $N \in \sigma[M]$ y $M \in \sigma[N]$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Como $N \in \sigma[M]$ entonces, por el primer inciso de la Proposición 1.1.2 y el hecho de que $\sigma[N]$ es cerrada bajo tomar copias isomorfas implica que $\sigma[N] \subseteq \sigma[M]$. Para la otra contención, $M \in \sigma[M]$ entonces, por hipótesis, es subgenerado por N y por lo tanto $M \in \sigma[N]$. Por la Proposición 1.1.2 cualquier módulo isomorfo a un submódulo de un módulo M-generado también pertenece a $\sigma[M]$. Así $\sigma[M] \subseteq \sigma[N]$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Es claro.

$(c) \Rightarrow (a)$ Como $M \in \sigma[N]$, entonces M es subgenerado por N por lo que cualquier módulo subgenerado por M es subgenerado por N. Entonces N es subgenerador de $\sigma[M]$. □

De lo anterior podemos concluir que si $N \leq M$, entonces $\sigma[N] \subseteq \sigma[M]$ y si $N \in \sigma[M]$ entonces $\sigma[N] \subseteq \sigma[M]$.

Corolario 1.1.6. *Para un R-módulo M las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) R es subgenerado por M;

(b) $\sigma[M]$=R-Mod.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Si R es subgenerado por M entonces $R \in \sigma[M]$. Por lo tanto R-Mod=$\sigma[R] \subseteq \sigma[M] \subseteq R$-Mod.

$(b) \Rightarrow (a)$ Claramente $R \in \sigma[M]$, por lo tanto R es subgenerado por M. □

1.2. Módulos M-inyectivos

Definición 1.2.1. *Se dice que un módulo N es M-inyectivo si para cada submódulo X de M, cualquier homomorfismo $f : X \longrightarrow N$ se puede extender a un homomorfismo $\bar{f} : M \longrightarrow N$ tal que $\bar{f}i = f$ donde i denota la inclusión de X en M.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Corolario 1.2.2. *Si N es un módulo M-inyectivo, entonces cualquier monomorfismo $f : N \longrightarrow M$ se escinde, mas aún si M es inescindible, f es un isomorfismo.*

Proposición 1.2.3. *Sea N un módulo M-inyectivo. Si $X \leq M$ entonces N es X-inyectivo y M/X-inyectivo.*

Demostración. Sea $Y \leq X$ y $f : Y \longrightarrow N$. Como $Y \leq M$ y N es M-inyectivo, entonces f se extiende a $\bar{f} : M \longrightarrow N$. Por lo tanto $\bar{f}|_X : X \longrightarrow N$ es una extensión de f, así N es X-inyectivo. Ver la figura donde i_1, i_2 son inclusiones.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r, "i_2"] \arrow[dl, dashed, "\bar{f}|_X"'] & M \arrow[dll, dashed, "\bar{f}"] \\
N & &
\end{tikzcd}$$

Sea $Y/X \leq M/X$ y $\varphi : Y/X \longrightarrow N$ un homomorfismo. Sea π el epimorfismo canónico de M en M/X y $\pi' = \pi|_Y$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i_Y"] \arrow[d, "\pi'"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\
Y/X \arrow[r, "i_{Y/X}"] & M/X
\end{tikzcd}$$

Como N es M-inyectivo, entonces existe $\theta : M \longrightarrow N$ que extiende a $\varphi\pi'$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i_Y"] \arrow[d, "\pi'"'] & M \arrow[ddl, dashed, "\theta"] \\
Y/X \arrow[d, "\psi"'] & \\
N &
\end{tikzcd}$$

Así, tenemos que $\theta(X) = \varphi(\pi'(X)) = \varphi(0) = 0$ y como $Nuc(\pi) \leq Nuc(\theta)$, entonces existe $\psi : M/X \longrightarrow N$ tal que $\psi\pi = \theta$. Así, para todo $y \in Y$, $\psi(y + X) = \psi\pi(y) = \theta(y) = \varphi\pi'(y) = \varphi(y + X)$. Por lo que ψ extiende a φ y por lo tanto N es M/X-inyectivo.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "i_Y"] \arrow[d, "\pi'"'] & M \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddl, dashed, "\theta"'] \\
Y/X \arrow[r, "i_{Y/X}"] \arrow[d, "\varphi"'] & M/X \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\
N &
\end{tikzcd}$$

□

La siguiente proposición se puede pensar como una generalizazión del Criterio de Baer.

Proposición 1.2.4. *Un módulo N es M-inyectivo si y sólo si N es Rm-inyectivo para todo $m \in M$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Se sigue de la Proposición 1.2.3.

($\Leftarrow$) Supongamos que N es Rm-inyectivo para todo $m \in M$. Sea $X \leq M$ y $\varphi : X \longrightarrow N$ un homomorfismo. Sea $\mathscr{A} = \{(Y, \psi) : X \leq Y \leq M$ y $\psi : Y \longrightarrow N$ tal que $\psi|_X = \varphi\}$. Definimos la siguiente relación en $\mathscr{A}$: $(Y, \psi) \preccurlyeq (Z, \upsilon)$ si $Y \leq Z$ y $\upsilon|_Y = \psi$. Entonces $(\mathscr{A}, \preccurlyeq)$ es un conjunto parcialmente ordenado; con ayuda del Lema de Zorn demostraremos que $\mathscr{A}$ tiene elementos máximos. En efecto, si $\mathscr{C} = \{(Y_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ es una cadena de elementos de $\mathscr{A}$, consideremos la pareja $(Y = \sum\limits_{i \in I} Y_i = \bigcup\limits_{i \in I} Y_i, \psi)$ donde $\psi : Y \longrightarrow N$ definida como sigue: para todo $y \in Y$, existe $i \in I$ tal que $y \in Y_i$ con ello $\psi(y) := \psi_i(y)$. Afirmamos que (Y, ψ) es una cota superior de $\mathscr{C}$. En efecto, para toda i $Y_i \leq Y$ y por como se definió ψ, $\psi|_{Y_i} = \psi_i$. Por el Lema de Zorn $\mathscr{A}$ tiene elementos máximos. Sea (Y, ψ) un máximo, entonces se tiene que $Y \leq_e M$, pues en caso contrario existiría $Y' \leq M$ seudocomplemento de Y en M tal que $Y \oplus Y' \leq_e M$. Así $Y \leq Y \oplus Y'$ y podemos extender ψ lo que es una contradicción pues (Y, ψ) es máximo. Así $Y \leq_e M$.

Supongamos que Y es propio en M y consideremos $m \in M - Y$.

Sea $K = \{r \in R : rm \in Y\}$, entonces, como $Y \leq_e M$ se tiene que $Km \neq 0$. Definimos $\mu : Km \longrightarrow N$ como $\mu(km) = \psi(km)$. Por hipótesis μ se extiende a $\upsilon : Rm \longrightarrow N$. Si definimos $\chi : Y + Rm \longrightarrow N$ como

$\chi(y+rm) = \psi(y) + \upsilon(rm)$, entonces χ está bien definida pues si $y+rm = 0$ entonces $r \in K$ y por tanto $\psi(y)+\upsilon(rm) = \psi(y)+\mu(rm) = \psi(y)+\psi(rm) = \psi(y+rm) = 0$. Entonces $(Y + Rm, \chi) \in \mathscr{A}$, lo que contradice la maximidad de (Y, ψ). Así $Y = M$ y $\psi : M \longrightarrow N$ extiende a φ. □

Proposición 1.2.5. *Un módulo N es $\bigoplus_{i \in I} M_i$-inyectivo si y sólo si N es M_i-inyectivo para toda $i \in I$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Se sigue de la Proposición 1.2.3.

$\Leftarrow$) Supongamos que N es M_i-inyectivo para todo $i \in I$, sea $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $X \leq M$ y consideremos un homomorfismo $\varphi : X \longrightarrow N$. Análogamente a la demostración de la Proposición 1.2.4 por el Lema de Zorn podemos tomar una pareja (Y, ψ) máxima con la propiedad de que $X \leq Y \leq M$ y $\psi|_X = \varphi$.Por lo tanto $Y \leq_e M$ pues en caso contrario ψ se extiende mediante un pseudocomplemento de Y. Afirmamos que $Y = M$. Supongamos que no, entonces existe $j \in I$ y $m \in M_j$ tal que $m \notin Y$, como N es M_j-inyectivo, por la Proposición 1.2.4, N es Rm-inyectivo. Los mismos argumentos usados en la demostración de la Proposición 1.2.4 nos dicen que ψ se puede extender a un homomorfismo $\chi : X + Rm \longrightarrow N$, contradiciendo la maximidad de ψ, así N es M-inyectivo. □

Si $\mathcal{K}$ es una clase de módulos y $N \in R$-Mod, decimos que N es inyectivo en $\mathcal{K}$ si N es M-inyectivo para todo $M \in \mathcal{K}$.

1.3. La Cápsula M-inyectiva de un módulo.

Al principio del capítulo se definieron los módulos M-generados, donde $M \in R$-Mod. Vamos a generalizar este concepto y para ello consideramos $\mathscr{U}$ una clase de módulos, entonces un módulo N es generado por $\mathscr{U}$ si existe una familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathscr{U}$ y un epimorfismo $\varphi : \bigoplus_{\alpha \in A} U_\alpha \longrightarrow N$.

Cuando $\mathscr{U} = \{M\}$, tenemos nuestra definición de que M genera a N o que N es M-generado pues existe un epimorfismo $\varphi : M^{(A)} \longrightarrow N$ y esto es justamente que $N \cong M^{(A)}/Nuc(\varphi)$.

Dada una clase de módulos $\mathscr{U}$, la clase de todos los módulos generados por $\mathscr{U}$ se denotará como $Gen(\mathscr{U})$, cuando $\mathscr{U} = \{M\}$ se denotará $Gen(M)$.

Lema 1.3.1. *Si $\mathscr{U}$ es una clase de módulos, entonces $Gen(\mathscr{U})$ es cerrada bajo tomar tomar copias isomorfas, cocientes y sumas directas arbitarias.*

Demostración. Para demostrar que es cerrada bajo cocientes y bajo tomar copias isomorfas observamos que si $M \in Gen(\mathscr{U})$ y $f : M \longrightarrow M'$ es un epimorfismo, entonces existe una familia $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{U}$ y un epimorfismo $F : \bigoplus_{i\in I} U_i \longrightarrow M$. Así $fF : \bigoplus_{i\in I} U_i \longrightarrow M'$ es un epimorfismo y por lo tanto $M' \in Gen(\mathscr{U})$.

Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq Gen(\mathscr{U})$, entonces existe una familia $\{U_i\}_{i\in I_\alpha} \subseteq \mathscr{U}$ y existe un epimorfismo $f_\alpha : \bigoplus_{i\in I_\alpha} U_i \longrightarrow M_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Por lo tanto, si $U_\alpha = \bigoplus_{i\in I_\alpha} U_i$ entonces $M_\alpha \cong U_\alpha/Nuc(f_\alpha)$. Así, por la propiedad universal de la suma directa $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \cong \bigoplus_{\alpha\in\Lambda}(U_\alpha/Nuc(f_\alpha)) \cong (\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha)/(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} Nuc(f_\alpha))$, como $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda}(\bigoplus_{i\in I_\alpha} U_i) = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$, entonces por ser cociente consideramos el epimorfismo canónico $\pi : \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$.

Por lo tanto $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \in Gen(\mathscr{U})$. □

Es claro que $\mathscr{U} \subseteq Gen(\mathscr{U})$, además tenemos que si $\mathscr{V}$, $\mathscr{U}$ son clases de módulos tales que $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$ entonces $Gen(\mathscr{V}) \subseteq Gen(\mathscr{U})$ y también ocurre que si $\mathscr{V} \subseteq Gen(\mathscr{U})$, entonces $Gen(\mathscr{V}) \subseteq Gen(\mathscr{U})$.

Definición 1.3.2. *Si $\mathscr{U}$ es una clase de módulos, un módulo G es un generador para $Gen(\mathscr{U})$, si $Gen(\mathscr{U}) = Gen(G)$.*

Lema 1.3.3. *Sea $\mathscr{U}$ una clase de módulos y G un R-módulo, entonces G es un generador para $Gen(\mathscr{U})$ si y sólo si $G \in Gen(\mathscr{U})$ y G genera cada $U \in \mathscr{U}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Es claro pues $G \in Gen(G) = Gen(\mathscr{U})$ y cada $U \in \mathscr{U}$ pertenece a $Gen(\mathscr{U})$.

($\Leftarrow$) Si $G \in Gen(\mathscr{U})$ entonces $Gen(G) \subseteq Gen(\mathscr{U})$. Por otro lado, como G genera a cada elemento de la clase $\mathscr{U}$, entonces $\mathscr{U} \subseteq Gen(G)$ y así $Gen(\mathscr{U}) \subseteq Gen(G)$. $\square$

Dada una clase de módulos $\mathscr{U}$ y cualquier R-módulo M, siempre existe un submódulo mayor de M que es generado por $\mathscr{U}$ como lo veremos a continuación pero antes tenemos la siguiente definición.

Definición 1.3.4. *La traza de $\mathscr{U}$ en M se define como $tr_M(\mathscr{U}) = \sum\{f(U) : f \in Hom_R(U, M) \text{ y } U \in \mathscr{U}\}$. Cuando $\mathscr{U} = \{U\}$ entonces se denota $tr_M(U) = \sum\{f(U) : f \in Hom_R(U, M)\}$.*

De lo anterior concluimos que $tr_M(\mathscr{U}) = \sum\{tr_M(U) : U \in \mathscr{U}\}$.

Proposición 1.3.5. *$tr_M(\mathscr{U}) \leq M$ es el mayor submódulo de M generado por $\mathscr{U}$.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathscr{U}$ y $h : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \longrightarrow M$. Entonces $Im(h) = \sum_{\alpha\in\Lambda} Im(hi_\alpha) \leq tr_M(\mathscr{U})$ donde i_α denota la α-ésima inclusión por cada $\alpha \in \Lambda$, por lo tanto todo submódulo de M generado por $\mathscr{U}$ está contenido en $tr_M(\mathscr{U})$.

Por otro lado existen $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y homomorfismos $h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow M$ con $tr_M(\mathscr{U}) = \sum_{\alpha\in\Lambda} Im(h_\alpha)$. Consideremos entonces el homomorfismo suma $h : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \longrightarrow M$, el cual tiene como imagen $tr_M(\mathscr{U})$. $\square$

Dado lo anterior el siguiente corolario es claro.

Corolario 1.3.6. *$\mathscr{U}$ genera a M si y sólo si $tr_M(\mathscr{U}) = M$.*

La siguiente proposición muestra el comportamiento que tiene la traza sobre los homomorfismos de módulos.

Proposición 1.3.7. *Sea $\mathscr{U}$ una clase de módulos, $M, N \in R$-Mod y $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo, entonces $f(tr_M(\mathscr{U})) \leq tr_N(\mathscr{U})$.*

Demostración. Anteriormente se demostró que $Gen(\mathscr{U})$ es cerrada bajo imágenes epimórficas. Como $tr_M(\mathscr{U}) \in Gen(U)$ entonces $f(tr_M(\mathscr{U}))$ es un submódulo de N generado por $\mathscr{U}$. Por la Proposición 1.3.5, $f(tr_M(U)) \leq tr_N(\mathscr{U}))$. $\square$

Lema 1.3.8. *Sean $\mathscr{U}, \mathscr{V}$ clases de módulos. Si $\mathscr{V} \subseteq Gen(\mathscr{U})$ entonces $tr_M(\mathscr{V}) \leq tr_M(\mathscr{U})$.*

Demostración. Como $\mathscr{V} \subseteq Gen(\mathscr{U})$ entonces $Gen(\mathscr{V}) \subseteq Gen(\mathscr{U})$ por lo que $tr_M(\mathscr{V})$ es un submódulo de M generado por $\mathscr{U}$. Por la Proposición 1.3.5, $tr_M(\mathscr{V}) \leq tr_M(\mathscr{U})$. □

Teorema 1.3.9. *Sea G un generador para $Gen(\mathscr{U})$. Entonces para todo módulo N se tiene que*

$$tr_N(\mathscr{U}) = tr_N(G)$$

Demostración. Es claro por el Lema 1.3.8. ya que $Gen(G) = Gen(\mathscr{U})$ □

Corolario 1.3.10. *Sean $N, M \in R$-Mod e I un conjunto. Entonces $tr_N(M) = tr_N(M^{(I)})$.*

Demostración. Tenemos que $M^{(I)} \in Gen(M)$ por lo que $Gen(M^{(I)}) \subseteq Gen(M)$. Para la otra contención, consideramos $\pi : M^I \longrightarrow M$ el epimorfismo natural del producto directo del cardinal de $|I|$ copias de M en M. Como $M^{(I)} \leq M^I$ y $\pi|_{M^{(I)}} : M^{(I)} \longrightarrow M$ sigue siendo un epimorfismo entonces $M \in Gen(M^{(I)})$. Entonces tenemos que $Gen(M) \subseteq Gen(M^{(I)})$. Así, por el Lema 1.3.8 $tr_N(M) = tr_N(M^{(I)})$. □

Para todo R-módulo N, $tr_N(M) \in \sigma[M]$ la demostración se sigue de la Proposición 1.1.2 y del Corolario 1.1.3.

Proposición 1.3.11. *Para N, M R-módulos se tiene que $tr_{E(N)}(M)$ es M-inyectivo.*

Demostración. Sean $H = tr_{E(N)}(M)$, $X \leq M$ y $f : X \longrightarrow H$, como $H \leq E(N)$ y $E(N)$ es inyectivo entonces existe $\bar{f} : M \longrightarrow E(N)$ que extiende a $i_1 f$, donde i_1 es la inclusión de H en $E(N)$, y cumple que $\bar{f}i = i_1 f$ con i la inclusión de X en M.

Pero por definición de traza, tenemos $Im(\bar{f}) \leq H$ pues $\bar{f} \in Hom_R(M, E(N))$. Por lo tanto H es M-inyectivo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed] \arrow[ddl, dashed, "\bar{f}"] \\
H \arrow[d, "i_1"'] & \\
E(N) &
\end{tikzcd}$$

□

Definición 1.3.12. *$tr_{E(N)}(M)$ se llama la cápsula M-inyectiva de N y se denota como $E_M(N) = tr_{E(N)}(M) \leq E(N)$.*

De la Proposición 1.3.11 tenemos que $E_M(N) \in \sigma[M]$.

Lema 1.3.13. *Sean $N, M \in R$-Mod, entonces $tr_{E(N)}(M) = tr_{E(N)}(\sigma[M])$.*

Demostración. Como $M \in \sigma[M]$ se tiene que $tr_{E(N)}(M) \leq tr_{E(N)}(\sigma[M])$.

Sea $L \in \sigma[M]$ y $f : L \longrightarrow E(N)$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $L \leq M^{(I)}/V$ con I un conjunto y $V \leq M^{(I)}$. Entonces f se puede extender a $\bar{f} : M^{(I)}/V \longrightarrow E(N)$ pues $E(N)$ es inyectivo.

Sea $\pi : M^{(I)} \longrightarrow M^{(I)}/V$ el epimorfismo canónico. Entonces $f(L) = \bar{f}(i(L)) \leq \bar{f}(M^{(I)}/V) = \bar{f}(\pi(M^{(I)})) = (\bar{f}\pi)(M^{(I)})$. Ver el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & M^{(I)} \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddl, dashed, "\bar{f}\pi"'] \\
L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M^{(I)}/V \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\
E(N) &
\end{tikzcd}$$

Como $\bar{f}\pi \in Hom_R(M^{(I)}, E(N))$, entonces $f(L) \leq tr_{E(N}(M^{(I)}) =$

$tr_{E(N)}(M)$. Por el Corolario 1.3.10, $tr_{E(N)}(M^{(I)}) = tr_{E(N)}(M)$, así $f(L) \leq tr_{E(N)}(M)$.

Lo anterior ocurre para cualquier $L \in \sigma[M]$ y $f \in Hom_R(L, E(N))$, por lo tanto $tr_{E(N)}(\sigma[M]) \leq tr_{E(N)}(M)$.

□

Lema 1.3.14. *Sean $N, M \in R$-Mod. Si N es M-inyectivo, entonces es inyectivo en $\sigma[M]$.*

Demostración. Sea $L \in \sigma[M]$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $L \leq M^{(I)}/V$. Como N es M-inyectivo entonces, por la Proposición 1.2.5, N es $M^{(I)}$-inyectivo. Ahora, por la Proposición 1.2.3, N es $M^{(I)}/V$-inyectivo y de nuevo por la Proposición 1.2.3 N es L-inyectivo. Por lo tanto N es inyectivo en $\sigma[M]$. $\square$

Lema 1.3.15. *Para cualquier módulo $N \in \sigma[M]$, $N \leq_e E_M(N)$.*

Demostración. Sea $N \leq M^{(I)}/V$. Entonces $N = L/V$ para algún $L \leq M^{(I)}$. Sea $\pi : L \longrightarrow L/V$ el epimorfismo canónico y $\bar{\pi} : M^{(I)} \longrightarrow E(N)$, la extensión de $i_1\pi$ a $M^{(I)}$, donde i_1 es la inclusión de N en $E(N)$. En la figura i denota la inclusión de L en $M^{(I)}$.

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & M^{(I)} \arrow[ddl, dashed, "\bar{\pi}"] \\
N = L/V \arrow[d, "i_1"'] & \\
E(N) &
\end{tikzcd}$$

Entonces, $N = i_1(N) = i_1(\pi(L)) = \bar{\pi}(L) \leq \bar{\pi}(M^{(I)}) \leq tr_{E(N)}(\sigma[M]) = E_M(N)$ por el Lema 1.3.13.

Tenemos que $N \leq_e E(N)$, por lo anterior $N \leq E_M(N)$, entonces $N \leq_e E_M(N)$.

$\square$

Definición 1.3.16. *Decimos que un módulo N es casi-inyectivo si es N-inyectivo.*

Proposición 1.3.17. *Para cualquier módulo M, sean $Y \leq X \in \sigma[M]$ y $N \in \sigma[M]$. Lo siguiente se cumple:*

1) Si Y es M-inyectivo, entonces Y es sumando directo de X;

2) $E_M(X) = E_M(Y) \oplus E_M(Z)$ para algún $Z \leq X$;

3) N es M-inyectivo si y sólo si $N = E_M(N)$*;*

4) Si N es M-inyectivo entonces N es casi-inyectivo.

Demostración. (1) Si Y es M-inyectivo, entonces por el Lema 1.3.14, es $\sigma[M]$-inyectivo. Por lo tanto es X-inyectivo y por el Lema 1.2.2 es un sumando directo de X.

(2) Del hecho de que $Y \leq X \in \sigma[M]$ se tiene $E_M(Y) \leq E_M(X) \in \sigma[M]$. Por la Proposición 1.3.11, $E_M(Y)$ es M-inyectivo. Entonces por (1), $E_M(X) = E_M(Y) \oplus V$ para algún V. Tenemos $X \leq E_M(X) \leq E(X)$ por el Lema 1.3.15. Sea $Z = X \cap V$, entonces $Z \leq_e V$ pues $X \leq_e E_M(X) = E_M(Y) \oplus V$. Así $E(Z) = E(V)$ lo cual implica que $E_M(Z) = E_M(V)$. Lo que queremos se sigue de que

$$E_M(X) = E_M(Y) \oplus V \leq E_M(Y) \oplus E_M(V) = E_M(Y) \oplus E_M(Z) \leq E_M(X).$$

(3)($\Rightarrow$) N es M-inyectivo, así por el Lema 1.3.14 N es inyectivo en $\sigma[M]$. Por lo tanto N es $E_M(N)$-inyectivo, entonces es un sumando directo de $E_M(N)$ por (1). Como se tiene que $N \leq_e E_M(N)$, entonces $N = E_M(N)$.

($\Leftarrow$) Es claro pues $E_M(N)$ es M-inyectivo.

(4) Como N es M-inyectivo, por el Lema 1.3.14 es inyectivo en $\sigma[M]$. Entonces es N-inyectivo, así N es casi-inyectivo. $\square$

Todo lo anterior se puede resumir en términos mas generales:

$\sigma[M]$ es una subcategoría plena de R-Mod la cual tiene núcleos y conúcleos, Proposición 1.1.2. Dada una familia de módulos $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \sigma[M]$ existe el coproducto el cual viene dado por la suma directa de módulos, Proposición 1.1.2. Cualquier módulo $N \in \sigma[M]$ tiene cápsula inyectiva $E_M(N) \in \sigma[M]$, Lema 1.3.15 y Proposición 1.4.1.

Para ver la existencia del producto, generadores y más propiedades sobre $\sigma[M]$ ver Wisbauer [12, pp. 118–141].

1.4. Clases de Pretorsión Hereditarias.

Para nuestros fines, necesitaremos algunas clases de módulos que por ser cerradas bajo ciertas propiedades reciben nombres específicos como lo muestra la siguiente tabla:

Clase	Cerrada bajo
Pretorsión	$\cong$, /, $\bigoplus$
de Pretorsión Hereditaria	$\cong$, /, $\bigoplus$, $\leq$
Torsion	$\cong$, /, $\bigoplus$, $Ext.$
de Torsion Hereditaria	$\cong$, /, $\bigoplus$, $\leq$, $Ext.$
Libre de Pretorsión	$\cong$, $\leq$, $\prod$
Libre de Torsión	$\cong$, $\leq$, $\prod$, $Ext.$
Libre de Torsión Hereditaria	$\cong$, $\leq$, $\prod$, $Ext.$, $E(.)$

Ya demostramos que dada una clase de módulos $\mathscr{U}$, $Gen(\mathscr{U})$ es una clase de pretorsión. El siguiente Lema demuestra como son las clases de pretorsión hereditarias y en el capítulo 2 se discutirá sobre las clases de torsión hereditarias y las clases libres de torsión hereditarias.

Definición 1.4.1. *Para cualquier clase de módulos $\mathcal{F}$, consideramos el conjunto $\{X_i\}_{i\in I}$ de representantes de clases de isomorfismo de submódulos cíclicos de módulos en $\mathcal{F}$, es decir, si $A \in \mathcal{F}$ y $a \in A$, no se puede asegurar que $Ra \in \mathcal{F}$, pero existe $i \in I$ tal que $Ra \cong X_i$. Construimos $M_{\mathcal{F}} = \bigoplus_{i\in I} X_i$.*

Posteriormente se probará que la colección de clases de pretorsión hereditarias está en correspondencia biyectiva con un conjunto por lo que se puede intersecar una familia de clases de pretorsión hereditarias la cual vuelve a ser una clase de pretorsión hereditaria.

Lema 1.4.2. *Lo siguiente se cumple para una clase de módulos $\mathcal{F}$:*

1. *$\sigma[M_{\mathcal{F}}]$ es la menor clase de pretorsión hereditaria que contiene a $\mathcal{F}$;*
2. *$\mathcal{F}$ es una clase de pretorsión hereditaria si y sólo si $\mathcal{F} = \sigma[M_{\mathcal{F}}]$.*

Demostración. (1) En la Proposición 1.1.2 se demostró que para todo módulo M, $\sigma[M]$ es cerrrada bajo tomar copias isomorfas, cocientes, submódulos y sumas directas arbitrarias, por lo tanto, $\sigma[M]$ es una clase de pretorsión hereditaria.

Si $\mathcal{K}$ es una clase de pretorsión hereditaria tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$ entonces $M_{\mathcal{F}} \in \mathcal{K}$. Por lo tanto, $\sigma[M_{\mathcal{F}}] \subseteq \mathcal{K}$. Entonces $\sigma[M_{\mathcal{F}}]$ está contenida en la intersección de todas las clases de pretorsión hereditarias que contienen a $\mathcal{F}$.

Sólo falta probar que $\mathcal{F} \subseteq \sigma[M_{\mathcal{F}}]$, para ello si $N \in \mathcal{F}$ y $x \in N$ entonces $Rx \hookrightarrow M_{\mathcal{F}}$. Así $Rx \in \sigma[M_{\mathcal{F}}]$, por el Corolario 1.1.3 $N = \sum_{x \in N} Rx \in \sigma[M_{\mathcal{F}}]$.

(2) Se sigue directamente de (1). □

Corolario 1.4.3. *Una clase de módulos $\mathcal{F}$ es una clase de pretorsión hereditaria si y sólo si $\mathcal{F} = \sigma[M]$ para algún módulo M.*

La colección formada por las clases de pretorsión hereditarias la denotaremos como $\mathcal{T}^p(R)$.

Capítulo 2

Topologías Lineales

2.1. Propiedades y definiciones.

Definición 2.1.1. *Un grupo abeliano G es un grupo topológico si existe una topología en G tal que las funciones $f : G \times G \longrightarrow G$, $(a, b) \longmapsto a + b$ y $g : G \longrightarrow G$, $a \longmapsto -a$ son continuas. La topología que se considera en $G \times G$ es la topología producto.*

Para cualesquiera $U, V \subseteq G$ definimos $U + V = \{u + v : u \in U \text{ y } v \in V\}$ y $-U = \{u : -u \in U\}$.

La función g es biyectiva y su inversa es ella misma por lo que es un homeomorfismo. Así, $U \subseteq G$ es abierto si y sólo si $g^{-1}(U) = -U$ es abierto.

Lema 2.1.2. *Sea G un grupo topológico. Para un elemento fijo $a \in G$ la función $f_a : G \longrightarrow G$, $x \longmapsto x + a$ es un homeomorfismo.*

Demostración. El subespacio $\{a\} \times G$ de $G \times G$ es homeomorfo a G mediante la aplicación $(a, b) \longmapsto b$. Por otro lado $f|_{\{a\}\times G}$ es una función continua y claramente es biyectiva. Así, hay una biyección continua $f_a : G \longrightarrow G$. La función $f_{-a} : G \longrightarrow G$ es continua, biyectiva y es la inversa de f_a por lo que f_a es un homeomorfismo.

□

Si $U \subseteq G$ es un conjunto abierto y $a \in G$ entonces el conjunto $U + a = \{u + a : u \in U\}$ es abierto. Así, al tomar uniones tenemos que $U + V$ es abierto cuando U y V lo son. Si $a \in G$ entonces U es un vecindad abierta de a si y sólo si $U - a$ es una vecindad abierta del 0.

Definición 2.1.3. *Una base de vecindades de x en un espacio topológico X es una subcolección $\mathcal{B}_x$ de un sistema de vecindades $\mathcal{N}_x$ que tiene la propiedad de que para todo $U \in \mathcal{N}_x$, existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subseteq U$.*

La familia de vecindades abiertas del cero es una base de vecindades del cero y determinan de manera única una topología en G (ver Prieto [10, pp. 56–60]) que lo convierte en un grupo topológico como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.1.4. *Sea G un grupo topológico y $\mathcal{N}$ el conjunto de vecindades abiertas del 0 entonces las siguientes condiciones se satisfacen:*

N1) Si $U \in \mathcal{N}$ y $a \in U$ entonces existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $a + V \subseteq U$;

N2) Para cada $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $V + V \subseteq U$;

N3) Si $U \in \mathcal{N}$ entonces $-U \in \mathcal{N}$.

Recíprocamente, si G es un grupo abeliano y $\mathcal{N}$ es un conjunto no vacío de subconjuntos de G que satisface $N1) - N3)$, además de que todo elemento de $\mathcal{N}$ tiene al cero y si $U, V \in \mathcal{N}$ entonces existe $W \in \mathcal{N}$ con $W \subseteq U \cap V$ entonces existe una única topología en G tal que G es un grupo topológico y $\mathcal{N}$ es precisamente la base de vecindades del cero.

Demostración. La propiedad $N1)$ se sigue del Lema 2.1.2 pues $f_{-a} : G \longrightarrow G$, $x \longmapsto x - a$ es un homeomorfismo.

Para $N2)$, sea $U \in \mathcal{N}$. Tenemos que f es una función continua y $(0,0) \in f^{-1}(U)$, por lo que existen $V_1, V_2 \subseteq G$ abiertos tales que $(0,0) \in V_1 \times V_2 \subseteq f^{-1}(U)$. Consideramos $V = V_1 \cap V_2$ entonces $V \times V \subseteq V_1 \times V_2 \subseteq f^{-1}(U)$ por lo que $f(V \times V) = V + V \subseteq U$.

$N3)$ se sigue del hecho de ser g continua.

Para el recíproco, sea $\tau = \{U \subseteq G : \forall x \in U, \exists W \in \mathcal{N} \text{ con } x + W \subseteq U\}$. Afirmamos que τ es una topología para G.

Claramente $\emptyset, G \in \tau$.

Sea $x \in U_1 \cap U_2$ con $U_1, U_2 \in \tau$. Como $x \in U_1 \in \tau$ entonces existe $W_1 \in \mathcal{N}$ tal que $x + W_1 \subseteq U_1$, de forma análoga existe $W_2 \in \mathcal{N}$ tal que $x + W_2 \subseteq U_2$. Por hipótesis, tenemos que existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $W \subseteq W_1 \cap W_2$ por lo que $x + W \subseteq x + W_1 \subseteq U_1$ y $x + W \subseteq x + W_2 \subseteq U_2$. Así, $x + W \subseteq U_1 \cap U_2$ implicando que $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

Consideramos una familia $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ y $x \in \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ entonces existe $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. Así, existe $W_0 \in \mathcal{N}$ tal que $x + W_0 \subseteq U_{i_0}$ entonces $x + W_0 \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$. Por lo tanto, $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \tau$ y demostramos que τ es una topología para G.

La condición $N1)$ dice que los elementos de $\mathcal{N}$ son abiertos.

Tenemos que si U es abierto entonces $a + U$ es abierto para todo $a \in G$. Para demostrar esto consideramos $b \in a + U$ entonces $b - a \in U$ como $U \in \tau$, existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $b - a + V \subseteq U$. Así, $b + V \subseteq a + U$ y $a + U$ es abierto.

Para demostrar que G es un grupo topológico necesitamos demostrar que las funciones f y g son continuas. Primero veamos que f es continua. Sea $U \subseteq G$ abierto y $(c, d) \in f^{-1}(U)$ entonces $c + d \in U$, con lo cual existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $c + d + W \subseteq U$. Por otro lado por $N2)$ existe $Q \in \mathcal{N}$ con $Q + Q \subseteq W$ entonces $(c, d) \in (c + Q) \times (d + Q) \subseteq f^{-1}(U)$. Como $(c + Q)$ y $(d + Q)$ son abiertos entonces f es continua.

La continuidad de g se sigue del hecho de que si U es abierto entonces $-U$ es abierto. Para esto, sea $a \in -U$ entonces $-a \in U$ por lo tanto existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $-a + W \subseteq U$. Por $N3)$ $-W \in \mathcal{N}$, así $a + (-W) \subseteq -U$ por lo tanto $-U$ es abierto y por lo tanto g es continua.

Así, G es un grupo topológico y directamente se sigue que la base de vecindades del cero es $\mathcal{N}$. $\square$

Definición 2.1.5. *Un anillo topológico es un anillo R con una topología tal que como grupo abeliano es un grupo topológico y la función $h : R \times R \longrightarrow R$ con $(a, b) \longmapsto ab$ es continua.*

Para cualesquiera $U, V \subseteq R$, se define $UV = \{uv : u \in U \text{ y } v \in V\}$.

Lema 2.1.6. *Sea R un anillo topológico. Si $a \in R$ entonces las funciones $h_a, h^a : R \longrightarrow R$ con $x \longmapsto ax$ y $x \longmapsto xa$ respectivamente son continuas.*

Demostración. El subespacio $\{a\} \times G$ de $G \times G$ es homeomorfo a G mediante la aplicación $(a, b) \longmapsto b$. Por otro lado $h|_{\{a\}\times G}$ es una función continua. Así,

$h_a : G \longrightarrow G$ es una aplicación continua. De forma análgoa h^a es continua. $\square$

Proposición 2.1.7. *Sea R un anillo topológico. Entonces el conjunto de vecindades abiertas del cero $\mathcal{N}$ satisface $N1) - N3)$ de la Proposición 2.1.4 y también satisface:*

N4) Para $a \in R$ y $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $aV \subseteq U$ y $Va \subseteq U$;

N5) Para cada $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $VV \subseteq U$.

Recíprocamente, si R es un anillo y $\mathcal{N}$ es un conjunto de subconjuntos de R que satisface $N1) - N4)$ además de que todo elemento de $\mathcal{N}$ tiene al cero y si $U, V \in \mathcal{N}$ entonces existe $W \in \mathcal{N}$ con $W \subseteq U \cap V$ entonces existe una única topología en R tal que R es un anillo topológico y $\mathcal{N}$ es precisamente la base de vecindades del cero.

Demostración. Por la Proposición 2.1.4 el conjunto $\mathcal{N}$ satisface $N1) - N3)$. La condición $N4)$ se sigue directamente del Lema 2.1.6. Para demostrar $N5)$, sea $U \in \mathcal{N}$ como h es continua entonces existen $V_1, V_2 \in \mathcal{N}$ tales que $(0,0) \in V_1 \times V_2 \subseteq h^{-1}(U)$. Así, considerando $V = V_1 \cap V_2$ tenemos que $VV \subseteq U$.

Recíprocamente, definimos $\tau = \{U \subseteq R : \forall x \in U, \exists W \in \mathcal{N} \text{ con } x + W \subseteq U\}$ entonces τ es una topología, la demostración se sigue de la Proposición 2.1.4. Vamos a demostrar que con esta topología R es un anillo topológico.

Primero veamos que $h_a : R \longrightarrow R$ definida como $x \longmapsto ax$ es una función continus. Sea $U \subseteq R$ abierto y $x \in h_a^{-1}(U)$, esto es $ax \in U$. Por definición de τ, existe $W \in \mathcal{N}$ con $ax + W \subseteq U$. Con $W \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $aV \subseteq W$. Así, $x + V \subseteq h_a^{-1}(U)$, por lo que $h_a^{-1}(U)$ es abierto por lo tanto h_a es continua. De forma análoga tenemos que h^a es continua.

Estamos listos para demostrar que h es continua. Sea $U \subseteq R$ abierto y $(c,d) \in h^{-1}(U)$ entonces $cd \in U$ por lo que existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $cd + W \subseteq U$. Usando $N2)$ existe $Q \in \mathcal{N}$ tal que $Q + Q \subseteq W$ y ahora usando $N5)$ para $Q \in \mathcal{N}$ tenemos que existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $VV \subseteq Q$. Sea $P \in \mathcal{N}$ con la propiedad de que $P + P \subseteq Q$, por $N2)$. Por otro lado, como las funciones h_c y h^d son continuas, los siguientes conjuntos son abiertos, $P_d = (h^d)^{-1}(P) \cap Q \cap V$ y $P_c = h_c^{-1}(P) \cap Q \cap V$. Entonces $(c,d) \in (c + P_c) \times (d + P_d) \subseteq h^{-1}(U)$ ya que para $v \in P_d$, $v' \in P_c$, $(c+d)(d+v') = cd + cv' + vd + vv' \in cd + W \subseteq U$. Así, h es una función continua. Por la Proposción 2.1.4 esta topología es la única topología tal que R es un grupo topológico y tiene como base de vecindades abiertas del 0 a $\mathcal{N}$. $\square$

Definición 2.1.8. *Sea R un anillo. Un conjunto no vacío $\mathcal{N}$ de subconjuntos de R decimos que es fundamental si satisface las siguientes condiciones:*

(a) Todo elemento de $\mathcal{N}$ tiene a 0;

(b) Si $U, V \in \mathcal{N}$ entonces existe $W \in \mathcal{N}$ tal que $W \subseteq U \cap V$;

N1) Para cada $U \in \mathcal{N}$ y $a \in U$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $a + V \subseteq U$;

N2) Para cada $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $V + V \subseteq U$;

N3) Si $U \in \mathcal{N}$ entonces $-U \in \mathcal{N}$;

N4) Para $a \in R$ y $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $aV, Va \subseteq U$;

N5) Para cada $U \in \mathcal{N}$ existe $V \in \mathcal{N}$ tal que $VV \subseteq U$.

Por la Proposición 2.1.7 si R es un anillo topológico entonces $\mathcal{N}$ el conjunto de vecidades abiertas del 0 es fundamental. Recíprocamente, si R es un anillo y $\mathcal{N}$ es un conjunto fundamental de subconjuntos de R entonces existe una única topología que convierte a R en un anillo topológico de manera que $\mathcal{N}$ es la base de vecindades de 0.

Proposición 2.1.9. *Sea R un anillo y κ una familia de ideales izquierdos del anillo. Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:*

(L1) Si $I \in \kappa$ y $I \leq J$ entonces $J \in \kappa$;

(L2) Si $I, J \in \kappa$ entonces $I \cap J \in \kappa$;

(L3) Si $I \in \kappa$ y $r \in R$ entonces $(I : r) \in \kappa$.

Entonces κ es un conjunto fundamental.

Demostración. Las condiciones $(a), N1), N2), N3), N5)$ son obvias y (b) se sigue de $(L2)$. Para demostrar $N4)$, sea $a \in R$ e $I \in \kappa$ entonces $(I : a) \in \kappa$ por $(L3)$ y por $(L2)$ tenemos que $J = I \cap (I : a) \in \kappa$. Claramente $aJ, Ja \subseteq I$ por lo que se cumple $N4)$ y por lo tanto κ es fundamental. □

Por la Proposición 2.1.4, κ es un conjunto fundamental entonces existe una única topología que convierte a R en un anillo topológico cuya base de vecindades consiste de puros ideales izquierdos.

Definición 2.1.10. *Un anillo topológico lineal R es un anillo topológico cuya base de vecindades de 0 consiste de ideales izquierdos del anillo. Llamamos a dicha base un filtro de ideales izquierdos.*

Así tenemos que una familia de ideales izquierdos de R que satisface $(L1) - (L3)$ se llama $filtro$ de ideales izquierdos de R. Si no se presta a confusión lo llamaremos simplemente filtro.

Si κ es un filtro de R, entonces todo elemento de κ es cerrado y abierto en la topología lineal definida en R, pues si $I \in \kappa$ entonces $R \backslash I = \cup\{a + I : a \notin I\}$ que es unión de conjuntos abiertos de R, por lo tanto es abierto, así I es cerrado.

La colección de todos los filtros de R es un conjunto que vamos a denotar como R-fil. Como se observó, este conjunto está en correspondencia biyectiva con el conjunto de topologías lineales en R.

Si I es un ideal de R, entonces el conjunto de ideales izquierdos de R que contienen a I es un filtro, lo vamos a denotar como $\eta[I]$. Notemos que los filtros de esta forma son cerrados bajo intersecciones arbitrarias.

Hay un filtro de esta forma muy especial $\eta[0]$, el filtro de todos los ideales izquierdos de R, el cual contiene a cualquier otro filtro de R y $\eta[R] = \{R\}$ que está contenido en cualquier filtro de R.

Definición 2.1.11. *Sea $\kappa \in R$-fil, decimos que un módulo izquierdo M es de κ-torsión si para todo $m \in M$, $(0 : m) \in \kappa$. Denotaremos a la clase de todos los módulos de κ-torsion por $\mathscr{T}_\kappa$.*

Teorema 2.1.12. *Si $\kappa \in R$-fil entonces $\mathscr{T}_\kappa$ es una clase de pretorsión hereditaria. Recíprocamente, si $\mathcal{A}$ es una clase de pretorsión hereditaria, entonces existe un único filtro $\kappa \in R$-fil tal que $\mathcal{A} = \mathscr{T}_\kappa$.*

Demostración. Sean $\kappa \in R$-fil y $M \in \mathscr{T}_\kappa$. Si $f : M \longrightarrow M'$ es un isomorfismo de R-módulos y $m' \in M'$ entonces existe un único $m \in M$ tal que $f(m) = m'$. Así $(0 : f(m) = m') = (0 : m)$, como $M \in \mathscr{T}_\kappa$ entonces $(0 : m') \in \kappa$, para todo $m' \in M'$ lo cual indica que $M' \in \mathscr{T}_\kappa$. Así la clase $\mathscr{T}_\kappa$ es cerrada bajo tomar copias isomorfas.

Es inmediato de la definición que cualquier submódulo de M pertenece a $\mathscr{T}_\kappa$.

Si $N \leq M$ y $m + N \in M/N$, entonces $(0 : m) \subseteq (N : m) = (\bar{0}, m + N)$ como κ es un filtro se tiene $(\bar{0} : m + N) \in \kappa$ por lo tanto M/N es de κ-torsión i.e. $M/N \in \mathscr{T}_\kappa$.

Sean $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \mathscr{T}_\kappa$ y $m = (m_i) \in \bigoplus M_i$. Entonces $m_i = 0$ salvo un número finito de índices, digamos $m_1, m_2, ..., m_n$ donde $m_k \in M_{i_k}$ con $k = 1, 2, ..., n$ y $i_k \in I$. Entonces para todo k, $(0 : m_k) \in \kappa$ y tenemos $(0 : m) = \bigcap_{k=1}^{n} (0 : m_k)$. Como κ es cerrado bajo intersecciones finitas entonces $(0 : m) \in \kappa$ es decir $\bigoplus M_i \in \mathscr{T}_\kappa$, así $\mathscr{T}_\kappa$ es una clase de pretorsión hereditaria.

Recíprocamente, sea $\mathcal{A}$ una clase de pretorsión hereditaria, definimos $\kappa = \{I \leq R : R/I \in \mathcal{A}\}$. Afirmamos que κ satisface (L1)-(L3) de la Proposición 2.1.9 .

Veamos $(L1)$. Si $I \leq J$ e $I \in \kappa$ entonces $(R/J) \cong (R/I)\big/(J/I)$ lo cual implica que $R/J \in \mathcal{A}$ pues es cerrada bajo cocientes y copias isomorfas. Por lo tanto $J \in \kappa$.

Ahora veamos $(L2)$. Sean $I, J \in \kappa$. Entonces $R/[I \cap J] \hookrightarrow R/I \oplus R/J$, como $\mathcal{A}$ es cerrada bajo sumas directas y submódulos, entonces $I \cap J \in \kappa$.

Por último veamos $(L3)$. Sean $I \in \kappa$ y $r \in R$. Como $(I : r) = (\bar{0} : r + I)$, entonces $R/(I : r) = R/(\bar{0} : r + I) \cong R(r + I) \leq R/I \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es cerrada bajo submódulos, entonces $(I : r) \in \kappa$. Con lo anterior demostramos que κ es un filtro.

Con este filtro construimos $\mathscr{T}_\kappa = \{M \in R\text{-Mod} : \forall m \in M, (0 : m) \in \kappa\}$. Por como se definió κ tenemos que si $M \in \mathscr{T}_\kappa$ y $m \in M$ entonces $(0 : m) \in \kappa$ lo que implica que $R/(0 : m) \in \mathcal{A}$, ésta al ser una clase de pretorsión hereditaria es cerrada bajo tomar copias isomorfas por lo tanto $Rm \in \mathcal{A}$. Así $\mathscr{T}_\kappa = \{M \in R\text{-Mod} : \forall m \in M, Rm \in \mathcal{A}\}$. Sea $M \in \mathscr{T}_\kappa$, como $M = \sum_{m\in M} Rm$ y para cada $m \in M$ se tiene que $Rm \in \mathcal{A}$ entonces $M = \sum_{m\in M} Rm \in \mathcal{A}$ pues $\mathcal{A}$ es una clase cerrada bajo tomar cocientes y sumas directas arbitrarias. Así $\mathscr{T}_\kappa \subseteq \mathcal{A}$.

Para la otra contención, si $M \in \mathcal{A}$ entonces para toda $m \in M$, $Rm \in \mathcal{A}$. Por lo tanto para toda $m \in M$, $(0 : m) \in \kappa$, lo que implica que $M \in \mathscr{T}_\kappa$. □

Hemos demostrado que R-fil está en correspondencia biyectiva con la colección de clases de pretorsión hereditarias que a su vez está en correspondencia biyectiva con el conjunto de topologias lineales asociadas al anillo.

Proposición 2.1.13. *Sea $M \in R$-Mod y $\kappa \in R$-fil. Definimos $T_\kappa(M) = \{m \in M : (0 : m) \in \kappa\}$. Entonces $T_\kappa(M) \leq M$ y es el mayor submódulo de κ-torsión de M.*

Demostración. Sean $m, m' \in T_\kappa(M)$ entonces $(0 : m), (0 : m') \in \kappa$. Como $(0 : m) \cap (0 : m') \in \kappa$ y $(0 : m) \cap (0 : m') \subseteq (0 : m + m')$ entonces $(0 : m + m') \in \kappa$ por ser un filtro. As'i $m + m' \in T_\kappa(M)$.

Si $r \in R$ y $m \in T_\kappa(M)$ entonces $(0 : m) \in \kappa$ por lo tanto $(0 : rm) = ((0 : m) : r) \in \kappa$. Así $rm \in T_\kappa(M)$ con lo que $T_\kappa(M) \leq M$.

Claramente $T_\kappa(M)$ es un módulo de κ-torsión y por como se construyó es el mayor submódulo de κ-torsión contenido en M. □

Cuando $T_\kappa(M) = 0$ decimos que M es libre de κ-torsión.

Lema 2.1.14. *Si N, M son R-módulos y $\kappa \in R$-fil, entonces las siguientes condiciones se cumplen:*

(a) Si $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo, entonces $f(T_\kappa(M)) \leq T_\kappa(N)$;

(b) Si $N \leq M$ entonces $T_\kappa(N) = T_\kappa(M) \cap N$;

(c) M es de κ-torsion si y sólo si $T_\kappa(M) = M$.

Demostración. (a) Sea $n \in f(T_k(M))$, entonces existe $m \in T_k(M)$ tal que $f(m) = n$. Así, $(0 : n) = (0 : f(m)) = \{r \in R : rf(m) = 0\} = \{r \in R : f(rm) = 0\} \supseteq \{r \in R : rm = 0\} = (0 : m)$. Como κ es filtro se tiene que $(0 : n) \in \kappa$, por lo tanto $n \in T_k(N)$ con lo que $f(T_k(M)) \leq T_k(N)$.

(b) Usando el morfismo inclusión en el inciso anterior tenemos que $T_k(N) \leq T_k(M)$. Por otra parte, siempre tenemos $T_k(N) \leq N$. Entonces $T_k(N) \leq T_k(M) \cap N$. La otra desigualdad es clara a partir de la definición.

(c)($\Rightarrow$) Como M es de κ-torsión, entonces para toda $m \in M, (0 : m) \in \kappa$, y por lo tanto $M \leq T_k(M)$. La otra contención es clara, por lo tanto $T_k(M) = M$.

($\Leftarrow$) Para toda $m \in M$, $(0 : m) \in \kappa$. Por lo tanto M es de κ-torsión. $\square$

Corolario 2.1.15. *Si $\kappa, \kappa' \in R$-fil y $\kappa \subseteq \kappa'$, entonces $T_\kappa(M) \leq T_{\kappa'}(M)$ para todo módulo M.*

Así, todo módulo de κ-torsion es un módulo de κ'-torsión, i.e. $\mathscr{T}_\kappa \subseteq \mathscr{T}_{\kappa'}$ y este hecho será clave a la hora de demostrar el isomorfismo entre las retículas R-fil y $\mathcal{T}^p(R)$.

Proposición 2.1.16. *Sea $\kappa \in R$-fil, entonces la clase de los módulos libres de κ-torsión es una clase libre de torsión hereditaria.*

Demostración. Llamemos $\mathscr{F}_\kappa$ a la clase de los módulos libres de κ-torsión. Demostremos que $\mathscr{F}_\kappa$ es cerrada bajo:

(i) isomorfismos;

(ii) submódulos;

(iii) productos arbitrarios;

(iv) extensiones;

(v) cápsulas inyectivas.

(i) Claramente es cerrada bajo isomorfismos.

(ii) Sea $N \leq M \in \mathscr{F}_\kappa$, por el inciso ($a$) del Lema 2.1.14 tenemos que $0 = T_k(N) \leq T_k(M) = 0$. Por lo tanto $N \in \mathscr{F}_\kappa$.

(iii) Sean $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{F}_\kappa$ y $M = \prod\limits_{i\in I} M_i$. Tomamos $m \in M$, entonces $m = (m_i)_{i\in I}$ y se tiene que $(0 : m) = \bigcap\limits_{i\in I}(0 : m_i)$. Si $(0 : m) \in \kappa$ entonces, como es filtro, se tiene que para toda $i \in I, (0 : m_i) \in \kappa$, pero para toda

$i \in I$, $T_k(M_i) = \{0\}$. Por lo tanto $m_i = 0$ para toda $i \in I$. Así $m = 0$. Por lo tanto $T_k(M) = \{0\}$.

(iv) Consideremos la siguiente sucesión exacta $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$ con $N, N/M \in \mathscr{F}_\kappa$. Para demostrar que $T_k(M) = \{0\}$, veremos que $T_k(M) \leq N$ y por los incisos $(b), (c)$ del Lema 2.1.14 $T_k(M) \leq T_k(N) = \{0\}$.

Para ello, sea $(0 : m) \in \kappa$ con $m \in M$. Como $(0 : m) \leq (N : m) = (\bar{0} : m + N)$ por ser κ filtro, $(\bar{0} : m + N) \in \kappa$. Pero $M/N \in \mathscr{F}_\kappa$, por lo tanto $m + N = \bar{0}$. Entonces $m \in N$ con lo que tenemos $T_k(M) \leq N$.

(v) Sea $M \in \mathscr{F}_\kappa$ y $E(M)$ su cápsula inyectiva. Del inciso (b) del Lema 2.1.14, tenemos $0 = T_k(M) = T_k(E(M)) \cap M$. Por lo tanto $T_k(E(M)) = 0$, pues $M \subseteq_e E(M)$.

Así $\mathscr{F}_\kappa$ es cerrada bajo tomar copias isomorfas, submódulos, productos, extensiones y cápsulas inyectivas por lo que es una clase libre de torsión hereditaria. □

2.2. La estructura reticular de R-fil.

El conjunto R-fil junto con la inclusión es un conjunto parcialmente ordenado. Para analizar la estructura retícular de R-fil es necesaria la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. *Si $\{\kappa_i\}_{i\in I} \subseteq R$-fil, entonces $\bigcap_{i\in I} \kappa_i \in R$-fil.*

Demostración. Sean $K \leq J$ y $K \in \bigcap_{i\in I} \kappa_i$. Entonces para todo $i \in I$, $K \in \kappa_i$. Como cada κ_i es un filtro, $J \in \kappa_i$ para todo $i \in I$. Entonces $J \in \bigcap_{i\in I} \kappa_i$.

Si $K, L \in \bigcap_{i\in I} \kappa_i$ entonces, para todo $i \in I$, se tiene que $K, L \in \kappa_i$. Por lo tanto $K \cap L \in \kappa_i$ y entonces $K \cap L \in \bigcap_{i\in I} \kappa_i$.

Por último, si $r \in R$ y $K \in \bigcap_{i\in I} \kappa_i$ entonces $(K : r) \in \bigcap_{i\in I} \kappa_i$, por lo que $\bigcap_{i\in I} \kappa_i \in R$-fil. □

Por la Proposición 2.2.1 el ínfimo de un subconjunto Y de R-fil está dado por $\bigwedge^{fil} Y = \cap Y$ y el supremo está dado por $\bigvee^{fil} Y = \cap\{\kappa \in R\text{-fil} : \kappa' \subseteq \kappa$ para todo $\kappa' \in Y\}$.

Así $(R\text{-fil}, \subseteq, \wedge^{fil}, \vee^{fil}, \eta[0], \eta[R])$ es una retícula completa.

El elemento menor de R-fil es $\eta[R] = \{R\}$ y el elemento mayor es $\eta[0]$. Un elemento de R-fil$\setminus\{\eta[0]\}$ se llama propio y un elemento de R-fil$\setminus\{\eta[R]\}$ se llama no trivial, notemos que un filtro es propio si y sólo si (0) no pertenece a él.

Definición 2.2.2. *1) Un átomo de R-fil es un filtro no trivial que no contiene filtros no triviales.*

2) Un coátomo en R-fil es un filtro propio que no está contenido en algún filtro propio.

Proposición 2.2.3. *Si κ es un filtro propio de R-fil y $\{I_j : j \in \Omega\}$ es un conjunto de ideales izquierdos de R que no están en κ, entonces el conjunto de todos los filtros que contienen a κ pero que no tienen a las I_j, tiene un elemento máximo.*

Demostración. Sea $\mathscr{B} = \{\kappa' \in R\text{-fil} : \kappa \subseteq \kappa'$ y para todo $j \in \Omega, I_j \notin \kappa'\}$ entonces $(\mathscr{B}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Para demostrar que $\mathscr{B}$ tiene elementos máximos haremos uso del Lema de Zorn.

Sea $Y \subseteq \mathscr{B}$ una cadena,veamos que $\cup Y \in \mathscr{B}$. Si en caso contrario, existe $j \in \Omega$ tal que $I_j \in \cup Y$ entonces existe $\kappa' \in Y$ tal que $I_j \in \kappa'$ pero eso es una contradicción.

Por lo tanto $\cup Y$ no tiene I_j para toda $j \in \Omega$, así se cumplen las hipótesis del Lema de Zorn y por ende $\mathscr{B}$ tiene elementos máximos. □

Corolario 2.2.4. *Todo elemento propio de R-fil está contenido en un coátomo.*

Demostración. Los coátomos de R-fil son precisamente aquellos filtros κ' máximos con respecto a la condición $(0) \notin \kappa'$ □

El corolario anterior demuestra que R-fil tiene coátomos pero para nuestros fines necesitamos saber ¿Qué ocurre cuando hay un único coátomo? Por lo anterior, todo elemento propio estaría contenido en él y así sería el mayor filtro propio.

Definición 2.2.5. *Sea α un cardinal infinito, un ideal izquierdo I de R se llama esencialmente α-débil si dado cualquier subconjunto X de R tal que $\mid X \mid < \alpha$ se tiene $\bigcap\limits_{x\in X}(I : x) \neq 0$. Si α es numerable entonces se dice que I es esencialmente débil si para cualquier subconjunto finito X de R se tiene que $\bigcap\limits_{x\in X}(I : x) \neq 0$.*

Proposición 2.2.6. *Si $\mathscr{K}$ denota el conjunto de todos los ideales izquierdos esencialmente débiles y el conjunto es un filtro entonces es el mayor filtro propio de R-fil.*

Demostración. Sea $\kappa \in R$-fil un filtro propio, si $J \in \kappa$ y $S \subseteq R$ finito, entonces $I = \bigcap\limits_{s\in S}(J : s) \in \kappa$ por lo tanto $I \neq 0$ pues κ es propio, así J es esencialmente débil con lo que se tiene que $\kappa \subseteq \mathscr{K}$. □

Lema 2.2.7. *Si $J \leq R$ es esencialmente débil y $X \subseteq R$ es finito, entonces $L = \bigcap\limits_{x\in X}(J : x)$ es esencialmente débil.*

Demostración. Sea $Y \subseteq R$ finito, consideremos el conjunto $YX = \{yx : y \in Y, x \in X\}$. Claramente YX es finito, entonces $\bigcap\limits_{y\in Y}(L : y) = \bigcap\limits_{yx\in YX}(J : yx) \neq 0$ pues J es esencialmente débil. Por lo tanto L es esencialmente débil, pues Y fue un subconjunto arbitrario finito. □

Teorema 2.2.8. *Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(a) R-fil tiene un único coátomo;

(b) El conjunto de ideales izquierdos esencialmente débiles es un filtro;

(c) La intersección de cualesquiera dos ideales esencialmente débiles es no cero.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $\mathcal{K}$ el único coátomo de R-fil. Entonces todo elemento es esencialmente débil pues $\mathcal{K}$ es propio.

$(b) \Rightarrow (c)$ Como es filtro, automáticamente se cumple la condición $(L2)$ de la Proposición 2.1.9 y como es propio no tiene al cero, así la intersección de cualesquiera dos ideales es distinto del cero.

$(c) \Rightarrow (b)$ Sea $\mathcal{K}$ el conjunto formado por ideales izquierdos esencialmente débiles, demostraremos que es un filtro y para ello usaremos la Proposición 2.1.9.

Sean $J \in \mathcal{K}$, $J \leq I$ y $X \subseteq R$ finito. Entonces para todo $x \in X$, $(J : x) \leq (I : x)$, por lo tanto $0 \neq \bigcap_{x \in X} (J : x) \leq \bigcap_{x \in X} (I : x)$. Así tenemos $I \in \mathcal{K}$.

Consideremos $I, J \in \mathcal{K}$ y $X \subseteq R$ finito, entonces $\bigcap_{x \in X} (I \cap J : x) = \{\bigcap_{x \in X} (I : x)\} \cap \{\bigcap_{x \in X} (J : x)\}$. Por el Lema 2.2.7 $\bigcap_{x \in X} (I : x)$ y $\bigcap_{x \in X} (J : x)$ son esencialmente débiles y por (c), $\bigcap_{x \in X} (I \cap J : x) \neq 0$, por lo tanto $I \cap J \in K$.

Sean $I \leq R$, $X \subseteq R$ y $r \in R$. Considerando $L = (I : r)$ y $Xr = \{xr : x \in X\}$, tenemos que $\bigcap_{x \in X} (L : x) = \bigcap_{xr \in Xr} (I : xr) \neq 0$, pues rX es finito e I es esencialmente débil. Entonces $L \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{K}$ es un filtro.

$(b) \Rightarrow (a)$ Es la Proposición 2.2.6. $\square$

2.3. Las retículas R-fil, $\mathcal{T}^p(R)$, R-tors, $\mathcal{T}(R)$ y $\mathcal{F}(R)$.

$\mathcal{T}^p(R)$ con la inclusión es un conjunto parcialmente ordenado, claramente la intersección de una familia de clases de pretorsión hereditarias es una clase de pretorsión hereditaria, por lo que tenemos que si $Y \subseteq \mathcal{T}^p(R)$, entonces $\bigwedge^{pretor} Y = \bigcap_{X \in Y} X$ y $\bigvee^{pretor} Y = \bigcap \{\mathcal{K} \in \mathcal{T}^p(R) : \mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K} \text{ para todo } K' \in Y\}$.

Por lo anterior, tenemos que $(\mathcal{T}^p(R), \subseteq, \wedge^{pretor}, \vee^{pretor}, R\text{-Mod}, \{0\})$ es una retícula completa.

Proposición 2.3.1. *Como retículas R-fil y $\mathcal{T}^p(R)$ son isomorfas.*

Demostración. La Proposición 2.1.12 demuestra la biyección entre R-fil y $\mathcal{T}^p(R)$, mediante $\kappa \longmapsto \mathscr{T}_\kappa$. Ahora veamos que si, $\{\kappa_i\}_{i\in I} \subseteq R$-fil, entonces $\mathscr{T}_{\vee^{fil}\kappa_i} = \overset{pretor}{\bigvee} \mathscr{T}_{\kappa_i}$ y $\mathscr{T}_{\wedge^{fil}\kappa_i} = \overset{pretor}{\bigwedge} \mathscr{T}_{\kappa_i}$.

En efecto, $M \in \mathscr{T}_{\wedge^{fil}\kappa_i}$ si y sólo si para todo $m \in M$ y para todo $i \in I$, $(0 : m) \in \kappa_i$ si y sólo si para todo $i \in I$, $M \in \mathscr{T}_{\kappa_i}$, es decir $M \in \overset{pretor}{\bigwedge} \mathscr{T}_{\kappa_i}$.

Para la otra igualdad, $M \in \mathscr{T}_{\vee^{fil}\kappa_i}$ si y sólo si para todo $m \in M$, $(0 : m) \in \overset{fil}{\bigvee} \kappa_i$ si y sólo si para todo $m \in M$, para todo $i \in I$ y para toda $\kappa \in R$-fil tal que $\kappa_i \subseteq \kappa$, $(0 : m) \in \kappa$. Entonces, $M \in \mathscr{T}_\kappa$ con lo que tenemos $\mathscr{T}_{\kappa_i} \subseteq \mathscr{T}_\kappa$. Por otro lado, si $\mathcal{A} \in \mathcal{T}^p(R)$ cumple que para toda $i \in I$, $\mathscr{T}_{\kappa_i} \subseteq \mathcal{A}$, por la Proposición 2.1.12 existe $\kappa \in R$-fil tal que $\mathscr{T}_\kappa = \mathcal{A}$. Entonces para toda $i \in I, \kappa_i \subseteq \kappa$ con lo que tenemos que $M \in \mathcal{A}$ y con ello $M \in \overset{pretor}{\bigvee} \mathscr{T}_{\kappa_i}$. $\square$

Definición 2.3.2. *Dada una clase de módulos $\mathcal{K}$, la menor clase de pretorsión hereditaria que lo contiene se denotará por $\xi_{pretor}(\mathcal{K})$.*

Así $\xi_{pretor}(\cup Y) = \vee^{pretor} Y$ y recordando el Lema 1.4.2 $\sigma[M_\mathcal{F}] = \xi_{pretor}(\mathcal{F})$ para una clase de módulos $\mathcal{F}$.

Lema 2.3.3. *Si $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}^p(R)$, entonces* $\overset{pretor}{\bigvee_{i\in I}} \mathcal{F}_i = \sigma[\bigoplus_{i\in I} M_{\mathcal{F}_i}]$.

Demostración. Por el Lema 1.4.2 para toda $i \in I, \mathcal{K}_i = \sigma[M_{\mathcal{K}_i}]$.

Como $M_{\mathcal{F}_i} \leq \bigoplus_{i\in I} M_{\mathcal{F}_i}$ entonces $\sigma[M_{\mathcal{F}_i}] \subseteq \sigma[\bigoplus_{i\in I} M_{\mathcal{F}_i}]$, para toda $i \in I$ lo que implica $\overset{pretor}{\bigvee_{i\in I}} \mathcal{F}_i = \overset{pretor}{\bigvee_{i\in I}} \sigma[M_{\mathcal{F}_i}] \subseteq \sigma[\bigoplus_{i\in I} M_{\mathcal{F}_i}]$.

Para la otra contención, consideramos $\mathcal{F} \in \mathcal{T}^p(R)$ tal que $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}$, para toda $i \in I$. Entonces $M_{\mathcal{F}_i} \in \mathcal{F}$, para toda $i \in I$, como $\mathcal{F}$ es cerrada bajo sumas directas arbitrarias, se tiene que $\bigoplus_{i\in I} M_{\mathcal{F}_i} \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\sigma[\bigoplus_{i\in I} M_{\mathcal{F}_i}] \subseteq \mathcal{F}$ y esto ocurre para cualquier $\mathcal{F} \in \mathcal{T}^p(R)$, por lo tanto $\sigma[\overset{pretor}{\bigoplus_{i\in I}} M_{\mathcal{F}_i}] \subseteq \overset{pretor}{\bigvee_{i\in I}} \mathcal{F}_i$ y se tiene demostrado el lema. $\square$

Dado un filtro κ, la clase $\mathscr{F}_\kappa$ es una clase libre de torsión hereditaria y cumple, junto con $\mathscr{T}_\kappa$, una propiedad interesante:

Dado $M \in \mathscr{T}_\kappa$ y $N \in \mathscr{F}_\kappa$ entonces $Hom_R(M, N) = \{0\}$ pues $f(M) = f(T_k(M) \leq T_k(N)) = \{0\}$, este hecho se puede generalizar de la siguiente manera.

Definición 2.3.4. *Una teoría de torsión en R-Mod consiste en un pareja $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ de clases de módulos que satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) $Hom_R(T, F) = \{0\}$ *para todo* $T \in \mathscr{T}, F \in \mathscr{F}$*;*

(b) $T \in \mathscr{T} \Leftrightarrow$ *para todo* $F \in \mathscr{F}, Hom_R(T, F) = \{0\}$*;*

(c) $F \in \mathscr{F} \Leftrightarrow$ *para todo* $T \in \mathscr{T}, Hom_R(T, F) = \{0\}$*.*

Cualquier clase de módulos $\mathscr{C}$, genera una teoría de torsión de la siguiente forma:

$$\mathscr{F} = \{F : Hom_R(C, F) = \{0\}, \forall C \in \mathscr{C}\}$$

$$\mathscr{T} = \{T : Hom_R(T, F) = \{0\}, \forall F \in \mathscr{F}\}$$

y dualmente tenemos la teoría de torsión cogenerada por la clase $\mathscr{C}$ dada por

$$\mathscr{T}' = \{T : Hom_R(T, C) = \{0\}, \forall C \in \mathscr{C}\}$$

$$\mathscr{F}' = \{F : Hom_R(T, F) = \{0\}, \forall T \in \mathscr{T}\}$$

Directamente, la pareja $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ es una teoría de torsión y dualmente la pareja $(\mathscr{T}', \mathscr{F}')$ es una teoría de torsión.

La siguiente proposición muestra bajo que propiedades son cerradas las clases que forman una teoría de torsión.

Proposición 2.3.5. *Las siguientes propiedades, acerca de una clase de módulos $\mathscr{T}$, son equivalentes:*

1. *Existe $\mathscr{F}$ tal que $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ es una teoría de torsión.*

2. *$\mathscr{T}$ es una clase de torsión.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Para probar que $\mathscr{T}$ es cerrada bajo cocientes, sumas directas arbitrarias y extensiones usaremos el inciso (b) de la Definición 2.3.4.

Sea $M \in \mathscr{T}$ y $N \leq M$, consideramos $F \in \mathscr{F}$ y $f \in Hom_R(M/N, F)$. Usando el epimorfismo natural $\pi : M \longrightarrow M/N$ se tiene $f\pi : M \longrightarrow F$ pero, por hipótesis, $f\pi = 0$, entonces $(f\pi)(M) = f(M/N) = \{0\}$. Por lo tanto $f = 0$ con lo que tenemos $M/N \in \mathscr{T}$.

Sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{T}$ y $F \in \mathscr{F}$ el hecho de que la clase sea cerrada bajo sumas directas arbitrarias se sigue del isomorfismo como grupos, $Hom_R(\bigoplus M_i, F) \cong \prod Hom_R(M_i, F) = \{0\}$.

Si tenemos una sucesión exacta que, sin pérdida de generalidad, es de la forma $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$ con $N, M/N \in \mathscr{T}$, tomamos $F \in \mathscr{F}$ y $f : M \longrightarrow F$. Entonces la función $fi : N \longrightarrow F$, donde i denota la inclusión de N en M, es la función cero por hipótesis. Así $N \leq Nuc(f)$ y usando la propiedad universal del conúcleo f se factoriza por medio de $\pi : M \longrightarrow M/N$, es decir existe $h : M/N \longrightarrow F$ tal que $h\pi = f$. Como $h \in Hom_R(M/N, F) = \{0\}$, entonces $f = 0$ y por lo tanto $Hom_R(M, F) = \{0\}$, es decir $M \in \mathscr{T}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $\mathscr{T}$ una clase de torsión y $(\mathscr{T}', \mathscr{F})$ la teoría de torsión generada por $\mathscr{T}$, debemos demostrar que $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$. Una contención es clara, $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$, por ser la teoría de torsión generada por $\mathscr{T}$. Para la otra contención, tomamos $M \in \mathscr{T}'$ y sea $L = \sum\{X \leq M : X \in \mathscr{T}\}$. Como $\mathscr{T}$ es cerrada bajo cocientes y sumas directas arbitrarias, entonces es cerrada bajo sumas, por lo tanto $L \in \mathscr{T}$. Además éste submódulo de M es el mayor con la propiedad de pertenecer a $\mathscr{T}$. Si demostramos que $M/L = 0$, terminamos. Para ello probaremos $M/L \in \mathscr{F}$, pues $\mathscr{T}' \cap \mathscr{T} = \{0\}$.

Como $\mathscr{T}$ genera la teoría de torsión. Para demostrar que $M/L \in \mathscr{F}$, debemos considerar $T \in \mathscr{T}$ y $f : T \longrightarrow M/L$. Por ser $\mathscr{T}$ cerrada bajo cocientes $f(T) \leq M/L$ y $f(T) \in \mathscr{T}$. Si $f \neq 0$ entonces existe $L < N \leq M$ tal que $f(T) = N/L$ y como $\mathscr{T}$ es cerrada bajo extensiones, $N \in \mathscr{T}$. Esto contradice la maximalidad de L, por lo tanto $f = 0$ lo cual implica $M/L \in \mathscr{F}$. $\square$

También hay una proposición dual a la anterior para clases libres de torsión.

Proposición 2.3.6. *Las siguientes propiedades acerca de una clase de módulos $\mathscr{F}$ son equivalentes:*

1. *Existe $\mathscr{T}$ tal que $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ es una teoría de torsión.*

2. *$\mathscr{F}$ es una clase libre de torsión.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Para verificar que $\mathscr{F}$ es cerrada bajo submódulos, productos y extensiones, usaremos el inciso (c) de la Definición 2.3.4

Sea $M \in \mathscr{F}$ y $N \leq M$, consideramos $T \in \mathscr{T}$ y $f \in Hom_R(T, N)$. Usando la inclusión $i : N \longrightarrow M$ tenemos por hipótesis $if = 0$, entonces $if(T) = i(f(T)) = f(T) = \{0\}$. Por lo tanto $f = 0$ lo cual implica que $N \in \mathscr{F}$.

Sea $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \mathscr{F}$ y $T \in \mathscr{F}$, el hecho de que la clase sea cerrada bajo producto se sigue de que $Hom_R(T, \prod M_i) \cong \prod Hom_R(T, M_i) = \{0\}$.

Tomemos una sucesión exacta que, sin pérdida de generalidad, es de la forma $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$ con $N, M/N \in \mathscr{F}$. Sean $T \in \mathscr{T}$ y $f : T \longrightarrow M$, entonces la función $\pi f : T \longrightarrow M/N$, donde $\pi : M \longrightarrow M/N$ es el epimorfismo canónico, es la función cero por hipótesis. Por la propiedad universal del núcleo, existe $h : T \longrightarrow N$ tal que $ih = f$. Como $h \in Hom_R(T, N) = \{0\}$, entonces $f = 0$ y por lo tanto $Hom_R(T, M) = \{0\}$, así $M \in \mathscr{F}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sea $\mathscr{F}$ una clase libre de torsión y $(\mathscr{T}, \mathscr{F}')$ la teoría de torsión cogenerada por $\mathscr{F}$. Debemos demostrar que $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$. Es claro que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$ por ser $\mathscr{F}'$ la teoría de torsión cogenerada por $\mathscr{F}$. Para la otra contención, sea $M \in \mathscr{F}'$ y consideramos $\bigcap\{M/X : X \leq M, M/X \in \mathscr{F}\}$. Entonces tenemos $M/(\cap X) \hookrightarrow \prod M/X$. Como $\mathscr{F}$ es cerrada bajo productos y submódulos entonces $M/(\cap X) \in \mathscr{F}$, así $\cap X$ es el menor submódulo de M tal que $M/(\cap X) \in \mathscr{F}$. Si demostramos que $\cap X = \{0\}$ entonces $M \in \mathscr{F}$. Como $\cap X \leq M \in \mathscr{F}'$ entonces $\cap X \in \mathscr{F}'$. Basta demostrar $\cap X \in \mathscr{T}$.

En efecto, sea $F \in \mathscr{F}$ y $f : \cap X \longrightarrow F$. Afirmamos que $Nuc(f) = \cap X$ con lo que tendríamos $f = 0$. Supongamos lo contrario, entonces $\cap X/Nuc(f) \cong f(\cap X) \leq F$ con lo que tenemos $\cap X/Nuc(f) \in \mathscr{F}$. Considerando la sucesión exacta $0 \longrightarrow \cap X/Nuc(f) \longrightarrow M/Nuc(f) \longrightarrow M/(\cap X) \cong$

$(M/Nuc(f))/(\cap X/Nuc(f)) \longrightarrow 0$, tenemos $M/Nuc(f) \in \mathscr{F}$ pues es cerrada bajo extensiones. Esto contradice el hecho de que $\cap X$ es el menor submódulo de M con la propiedad de que $M/(\cap X) \in \mathscr{F}$, así $f = 0$ y queda demostrada la proposición. $\square$

Así, dada una clase $\mathscr{C}$, ésta genera o cogenera una teoría de torsión y en el caso generado $\mathscr{T}$ es la menor clase de torsión que contiene a $\mathscr{C}$ y dualmente en el caso cogenerado $\mathscr{F}'$ es la menor clase libre de torsión que contiene a $\mathscr{C}$.

La clase cuyos elementos son teorías de torsión se va a denotar R-Tors.

Una teoría de torsión $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ se llama hereditaria si $\mathscr{T}$ es hereditaria es decir, cerrada bajo submódulos.

Proposición 2.3.7. *Una teoría de torsión $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ es hereditaria si y sólo si $\mathscr{F}$ es una clase libre de torsión hereditaria.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sólo falta probar la cerradura bajo cápsulas inyectivas. Para ello, sea $M \in \mathscr{F}$ y $f \in Hom_R(T, E(M))$. Si $f \neq 0$ entonces $0 \neq f(T) \leq E(M)$ como $M \subseteq_e E(M)$ entonces $f(T) \cap M \neq 0$. Considerando $0 \neq L = f^{-1}(f(T) \cap M) \leq T$ que por hipótesis tenemos que $L \in \mathscr{T}$. Del hecho de que $f(L) = f(T) \cap M$, se tiene $f|_L : L \longrightarrow M$. Por lo tanto $f|_L \in Hom_R(L, M)$ pero, por hipótesis, $f|_L = 0$. Por lo tanto $f|_L(L) = f(L) = f(T) \cap M = 0$ lo que es una contradicción.

Por lo tanto $f = 0$ entonces $E(M) \in \mathscr{F}$.

($\Leftarrow$) Sea $N \leq M \in \mathscr{T}$, $F \in \mathscr{F}$ y $f : N \longrightarrow F$, consideramos i_1 la inclusión de N en M e i_2 la inclusión de F en su cápsula inyectiva $E(F)$. Considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[ddl, dashed, "\bar{f}"] \\ F \arrow[d, "i_2"'] & \\ E(F) & \end{tikzcd}$$

Por hiṕotesis $E(F) \in \mathscr{F}$, entonces $i_2 f : N \longrightarrow E(F)$ se extiende a $\bar{f} : M \longrightarrow E(F)$ tal que $\bar{f} i_1 = i_2 f$. Como $\bar{f} \in Hom_R(M, E(F))$ entonces $\bar{f} = 0$ por hiṕotesis, lo que implica $f = 0$. Por lo tanto $N \in \mathscr{T}$ y $\mathscr{T}$ es hereditaria.

$\square$

A la colección cuyos elementos son teorías de torsión hereditarias la vamos a denotar R-tors. Por las proposiciones 2.3.5, 2.3.6 y 2.3.7, dada una clase de torsión hereditaria $\mathscr{T}$, existe una única clase libre de torsión hereditaria $\mathscr{F}$ tal que $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ es una teoría de torsión hereditaria por lo que si tenemos dos teorias de torsión $(\mathscr{T},\mathscr{F})$ y $(\mathscr{T}',\mathscr{F}')$ entonces definimos $(\mathscr{T},\mathscr{F}) \leq (\mathscr{T}',\mathscr{F}')$ si y sólo si $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$.

Observamos que este orden en R-tors implica también $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$ pues si $F \in \mathscr{F}'$ entonces para todo $T \in \mathscr{T}', Hom_R(T,F) = \{0\}$ en particular para todo $T \in \mathscr{T}$, por lo tanto $F \in \mathscr{F}$. Así, tenemos que $(\mathscr{T},\mathscr{F}) \leq (\mathscr{T}',\mathscr{F}')$ si y sólo si $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$ si y sólo si $\mathscr{F}' \subseteq \mathscr{F}$.

Denotaremos $\mathcal{T}(R)$ a la colección cuyos elementos son clases de torsión hereditarias, claramente $\mathcal{T}(R) \subseteq \mathcal{T}^p(R)$. Por otra parte, $\mathcal{F}(R)$ denota la colección de clases libres de torsión hereditarias, con esto la estructura reticular de R-tors queda completamente determinada por la estructura reticular de $\mathcal{T}(R)$.

Posteriormente demostraremos que R-tors está en correspondencia biyectiva con un conjunto por lo tanto, para darle estructura retícular a R-tors basta observar que dada una familia de clases de torsión hereditarias $\{\mathscr{T}_i\}_{i\in I}$ entonces $\bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$ es una clase de torsión hereditaria. Análogamente si $\{\mathscr{F}_i\}_{i\in I}$ es una familia de clases libres de torsión hereditarias entonces $\bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{F}_i$ es una clase libre de torsión hereditaria.

Dada una familia de clases de torsión hereditarias (respectivamente libres de torsión hereditarias) la menor clase de torsión hereditaria que las contiene se denotará $\xi_{tor}(\bigcup\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i)$ (respectivamente $\xi_{ltor}(\bigcup\limits_{i\in I} \mathscr{F}_i)$ donde $\xi_{tor}(\bigcup\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i) = \bigcap\{\mathscr{T} \in \mathcal{T}(R) : \forall i \in I, \mathscr{T}_i \subseteq \mathscr{T}\}$ (respectivamente para las clases libres de torsión hereditarias).

Definición 2.3.8. *La estructura de retícula completa de $\mathcal{T}(R)$ esta dada por $\bigwedge\limits_{i\in I}^{tor} \mathscr{T}_i = \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$ y $\bigvee\limits_{i\in I}^{tor} \mathscr{T}_i = \xi_{tor}(\bigcup\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i)$, análogamente la estructura de retícula completa de $\mathcal{F}(R)$ está dada por $\bigwedge\limits_{i\in I}^{ltor} \mathscr{F}_i = \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{F}_i$ y $\bigvee\limits_{i\in I}^{ltor} \mathscr{F}_i = \xi_{ltor}(\bigcup\limits_{i\in I} \mathscr{F}_i)$.*

Entonces la estructura de retícula para R-tors está dada por $\bigwedge\limits_{i\in I}^{tors}(\mathscr{T}_i,\mathscr{F}_i) = (\bigwedge\limits_{i\in I}^{tor}\mathscr{T}_i, \bigvee\limits_{i\in I}^{ltor}\mathscr{F}_i)$ *y* $\bigvee\limits_{i\in I}^{tors}(\mathscr{T}_i,\mathscr{F}_i) = (\bigvee\limits_{i\in I}^{tor}\mathscr{T}_i, \bigwedge\limits_{i\in I}^{ltor}\mathscr{F}_i)$.

Con lo anterior $\mathcal{T}(R)$ es una retícula isomorfa a R-tors y $\mathcal{F}(R)$ es una retícula anti-isomorfa a R-tors.

Definición 2.3.9. *Un filtro κ se llama filtro de Gabriel, si dado $I \leq R$ ideal izquierdo de R para el cual existe $H \in \kappa$ tal que $(I : a) \in \kappa$ para todo $a \in H$, entonces $I \in \kappa$.*

A la colección de filtros de Gabriel se le denota R-gab, con esto tenemos una proposición análoga al Teorema 2.1.12.

Proposición 2.3.10. *Si $\kappa \in R$-gab entonces $\mathscr{T}_\kappa$ es un clase de torsión hereditaria. Recíprocamente, si $\mathcal{A}$ es una clase de torsión hereditaria, entonces existe un único $\kappa \in R$-gab tal que $\mathscr{T}_\kappa = \mathcal{A}$.*

Demostración. Para demostrar que $\mathscr{T}_\kappa$ es una clase de torsión hereditaria, sólo falta probar la cerradura bajo extensiones. Consideramos la sucesión extacta $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$ con $N, M/N \in \mathscr{T}_\kappa$. Para demostrar $M \in \mathscr{T}_\kappa$ tomamos $m \in M$ y probamos $(0 : m) \in \kappa$.

Para ello usaremos la condición de Gabriel. Como $(N, m) = (\bar{0} : m+N) \in \kappa$ entonces para todo $r \in (N : m)$ se tiene $rm \in N$ como $N \in \mathscr{T}_\kappa$ entonces $((0 : m) : r) = (0 : rm) \in \kappa$ así $(0 : m) \in \kappa$ por lo tanto $M \in \mathscr{T}_\kappa$.

Para probar el recíproco, si $\mathcal{A}$ es una clase de torsión hereditaria en particular es una clase de pretorsión hereditaria, así por el Teorema 2.1.12 existe $\kappa \in R$-fil tal que $\mathscr{T}_\kappa = \mathcal{A}$, recordemos $\kappa = \{I \leq R : R/I \in \mathcal{A}\}$. Sólo falta demostrar que κ es un filtro de Gabriel; para ello, sea $I \leq R$ y $J \in \kappa$ tal que para toda $a \in J, (I : a) \in \kappa$. Consideremos la siguiente sucesión exacta $0 \longrightarrow (I + J)/I \longrightarrow R/I \longrightarrow R/(I + J) \longrightarrow 0$. Como $J \in \kappa$ y este es filtro entonces $I + J \in \kappa$ por lo tanto $R/(I + J) \in \mathcal{A}$. Para cualquier $a \in J, (I : a) = (I \cap J : a) \in \kappa$ y $[Ra + (I \cap J)]/(I \cap J) \cong R/(I \cap J : a) \in \mathcal{A}$, para toda $a \in J$ entonces $(I + J)/I \cong J/(I \cap J) \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ es cerrada bajo extensiones, esto implica que $R/I \in \mathcal{A}$, es decir $I \in \kappa$. Por lo tanto κ es un filtro de Gabriel. $\square$

La biyección entre $\mathcal{F}(R)$ y un conjunto se dará en el próximo capítulo.

Capítulo 3

Clases Naturales

3.1. Definiciones y propiedades

Definición 3.1.1. *Una clase natural es una clase de módulos cerrada bajo tomar copias isomorfas, submódulos, sumas directas arbitrarias y cápsulas inyectivas. La colección de clases naturales se denotará por R-Nat.*

Las clases libres de torsión hereditarias claramente son clases naturales.

Posteriormente se demostrará que R-Nat está en correspondencia biyectiva con un conjunto con lo que se tiene que la intersección de una familia de clases naturales es una clase natural.

Dada una clase de módulos $\mathcal{F}$, notemos que existe la menor clase natural que lo contiene, la cual viene dada por $\cap\{\mathcal{K} : \mathcal{K} \in R\text{-Nat y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}\}$, y se denotará por $\xi_{nat}(\mathcal{F})$. Con ello, la estructura reticular a R-Nat es clara. Para dar una descripción de $\xi_{nat}(\mathcal{F})$ es necesario el siguiente lema.

Lema 3.1.2 (Argumento de la proyección). *Sea $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de módulos y $0 \neq W \leq \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} W_\alpha$ entonces existen $w \in W$ y $0 \neq w_\alpha \in W_\alpha$, para algún $\alpha \in \Lambda$, tales que $Rw \cong Rw_\alpha$.*

Demostración. Sea $x \in W$ distinto de cero entonces $x = w_{\alpha_1} + \ldots + w_{\alpha_n}$ con $w_{\alpha_i} \in W_{\alpha_i}$ distintos de cero para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, podemos llamar a n la longitud de x y escoger $s_0 \in \mathscr{S} = \{r \in R : 0 \neq rx \in W\}$ tal que la longitud de s_0x sea mínima es decir $0 \neq s_0x = w'_{\alpha_1} + \ldots + w'_{\alpha_m}$ y si $r' \in R$

es tal que $r'w'_{\alpha_i} = 0$ para algún $i = 1, \ldots, m$ entonces se anula para todos pues en caso contrario estamos negando la minimidad de n que es la longitud de s_0x, por lo tanto si $w = s_0x$ entonces $(0 : w) = (0 : w'_{\alpha_i})$, para toda i. Así $Rw \cong R/(0 : w) \cong R/(0 : w'_{\alpha_i}) \cong Rw'_{\alpha_i} \leq W_{\alpha_i}$ $\square$

En pocas palabras, el argumento de la proyección dice que todo submódulo no cero de una suma directa contiene un submódulo no cero isomorfo a un submódulo de algún sumando.

Teorema 3.1.3. *Si $\mathcal{F}$ es una clase de módulos entonces $\xi_{nat}(\mathcal{F})$ se puede representar de las siguientes maneras:*

I) $\xi_{nat}(\mathcal{F}) = \{M \in R\text{-}Mod : \exists J$ *conjunto y* $\exists N_j \in \mathcal{F}$ *con* $j \in J$ *tales que* $M \hookrightarrow E(\bigoplus_{j \in J} N_j)\}$.

II) $\xi_{nat}(\mathcal{F}) = \{M \in R\text{-}Mod : \forall 0 \neq W \leq M, \exists 0 \neq V \leq W$ *tal que* $V \hookrightarrow A$ *para algún* $A \in \mathcal{F}\}$.

III) $\xi_{nat}(\mathcal{F}) = \{M \in R\text{-}Mod : \exists J$ *conjunto y* $\exists M_j \hookrightarrow N_j \in \mathcal{F}$ *con* $j \in J$ *tal que* $\bigoplus_{j \in J} M_j \subseteq_e M\}$.

Demostración. I) Llamemos $\mathcal{C} = \{M \in R\text{-}Mod : \exists J$ conjunto y $\exists N_j \in \mathcal{F}$ con $j \in J$ tal que $M \hookrightarrow E(\bigoplus_{j \in J} N_j)\}$. Para demostrar que C es una clase natural demostraremos que es cerrada bajo tomar copias isomorfas, submódulos, sumas directas arbitrarias y cápsulas inyectivas.

Claramente $\mathcal{C}$ es cerrada bajo tomar copias isomorfas.

Tomemos $N \leq M \in \mathcal{C}$. Entonces $N \hookrightarrow M \hookrightarrow E(\bigoplus_{j \in J} N_j)$ para algún J conjunto y $\{N_j\} \subseteq \mathcal{C}$ por lo tanto $N \in \mathcal{C}$ lo cual indica que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos.

Sea $M \in \mathcal{C}$ entonces existe una familia de módulos $\{N_j\}_{j \in J} \subseteq \mathcal{F}$ tal que $f : M \longrightarrow E(\bigoplus_{j \in J} N_j)$ es un monomorfismo. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & E(M) \arrow[dl, dashed, "\bar{f}"] \\ E(\bigoplus\limits_{j\in J} N_j) & \end{tikzcd}$$

Como i es la inclusión de M en su cápsula inyectiva entonces podemos extender a f puesto que $E(\bigoplus\limits_{j\in J} N_j)$ es un módulo inyectivo entonces $\bar{f}$ es un monomorfismo. Así $E(M) \in \mathcal{C}$ con lo que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas.

Para demostrar que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo sumas directas arbitrarias consideramos una famila $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{C}$, entonces para cada $i \in I$ existe una familia $\{N_j\}_{j\in J_i} \subseteq \mathcal{F}$ tal que $M_i \hookrightarrow E(\bigoplus\limits_{j\in J_i} N_j)$. Entonces por la propiedad universal de la suma directa tenemos que $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \hookrightarrow \bigoplus\limits_{i\in I}(E(\bigoplus\limits_{j\in J_i} N_j)) = N$, pero $N \hookrightarrow E(\bigoplus\limits_{i\in I}(\bigoplus\limits_{j\in J_i} N_j))$. Como $\bigoplus\limits_{i\in I}(\bigoplus\limits_{j\in J_i} N_j) \cong \bigoplus\limits_{k\in K} N_k$ con $\{N_k\}_{k\in K} \subseteq \mathcal{C}$, entonces $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \hookrightarrow E(\bigoplus\limits_{k\in K} N_k)$. Por lo tanto $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i \in \mathcal{C}$.

Por las propiedades demostradas tenemos que $\mathcal{C}$ es una clase natural.

Es claro que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$. Entonces $\xi_{nat}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{C}$. La otra contención es inmediata. Por lo tanto $\xi_{nat}(\mathcal{F}) = \mathcal{C}$.

$II)$ Volvemos a llamar $\mathcal{C} = \{M \in R\text{-}Mod : \forall 0 \neq W \leq M, \exists 0 \neq V \leq W$ tal que $V \hookrightarrow A$ para algún $A \in \mathcal{F}\}$ y vamos a demostrar que $\mathcal{C}$ es una clase natural.

Claramente es cerrada bajo tomar copias isomorfas.

Para demostrar que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos, tomamos $N' \leq N$ con $N \in \mathcal{C}$ y $0 \neq W \leq N'$. Como $W \leq N$, entonces existe $0 \neq V \leq W$ tal que $V \hookrightarrow A$ para algún $A \in \mathcal{F}$, por lo tanto $N' \in \mathcal{C}$.

Ahora veremos que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo sumas directas arbitrarias. Sean $\{N_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{C}$ y $0 \neq N \leq \bigoplus\limits_{i\in I} N_i$. Por el argumento de la proyección, existen $0 \neq n \in N$ y $n_i \in N_i$ para alguna $i \in I$ tal que $Rn_i \cong Rn$. Por hipótesis $N_i \in \mathcal{C}$ y $0 \neq Rn_i \leq N_i$, entonces existe $0 \neq V \leq Rn_i$ tal que $V \hookrightarrow A \in \mathcal{F}$.

Consideramos $V' \leq Rn \leq N$ con $V \cong V'$, por lo tanto $V' \hookrightarrow A$ con lo que tenemos $\bigoplus_{i\in I} N_i \in \mathcal{C}$.

Falta demostrar que $\mathcal{C}$ sea cerrada bajo tomar cápsulas inyectivas. Para ello, si $0 \neq W \leq E(N)$ con $N \in \mathcal{C}$, como $N \subseteq_e E(N)$, entonces $0 \neq W \cap N \leq N$. Por lo tanto existe $0 \neq V \leq W \cap N$ tal que $V \hookrightarrow A$ para alguna $A \in \mathcal{F}$. Pero $V \leq W \cap N \leq W \leq E(N)$, por lo tanto $E(N) \in \mathcal{C}$. Así $\mathcal{C}$ es clase natural.

De la definición se tiene que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ por lo tanto $\xi_{nat}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{C}$.

Consideramos $\overline{\mathcal{F}} = \{M \in R\text{-}Mod : \exists N \in \mathcal{F} \text{ con } M \hookrightarrow N\}$. Así $\overline{\mathcal{F}}$ es una clase cerrada bajo copias isomorfas y submódulos, claramente $\xi_{nat}(\mathcal{F}) = \xi_{nat}(\overline{\mathcal{F}})$, por lo que usaremos $\overline{\mathcal{F}}$ para la otra contención.

Sea $N \in \mathcal{C}$ y consideramos $\mathscr{A} = \{\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} : N_\alpha \leq N$ tal que $\forall \alpha \in \Lambda, N_\alpha \in \overline{\mathcal{F}}$ y $\{N_\alpha\}$ es una familia independiente$\}$. Como $N \in \mathcal{C}$ entonces $\mathscr{A} \neq \emptyset$. Así $\mathscr{A}$ tiene familias independientes máximas por el Lema de Zorn.

Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia independiente máxima en $\mathscr{A}$, entonces la suma de los elementos de la familia es directa, vamos a demostrar que $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha \subseteq_e N$, para ello supongamos lo contrario. Entonces si V es un seudocomplemento de $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha$, se tiene que $(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \oplus V \subseteq_e N$ como $V \leq N \in \mathcal{C}$ entonces existe $0 \neq V' \leq V$ con $V' \in \overline{\mathcal{F}}$ por lo tanto $(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \oplus V' \leq N$, así $\{N_\alpha\} \cup \{V'\} \in \mathscr{A}$ pero eso contradice la maximidad de $\{N_\alpha\}$. Por lo tanto $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha \subseteq_e N$. Se sigue que $E(N)$=E$(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha) \in \xi_{nat}(\mathcal{F}) = \xi_{nat}(\overline{\mathcal{F}})$, entonces $N \in \xi_{nat}(\mathcal{F})$. Así $\mathcal{C} \subseteq \xi_{nat}(\mathcal{F})$.

III) Si llamamos $\mathcal{D} = \{M \in R\text{-}Mod : \exists J$ conjunto y $\exists M_j \hookrightarrow N_j \in \mathcal{F}$ con $j \in J$ tal que $\bigoplus_{j\in J} M_j \subseteq_e M\}$ entonces demostraremos que $\mathcal{D} = \mathcal{C} = \{M \in R\text{-}Mod : \forall 0 \neq W \leq M, \exists 0 \neq V \leq W$ tal que $V \hookrightarrow A$ para algún $A \in \mathcal{F}\}$ por doble contención.

($\subseteq$) Sea $M \in \mathcal{C}$ distinto de cero entonces existe $N \leq M$ distinto de cero tal que $L \hookrightarrow C$ para algún $C \in \mathcal{F}$. Construimos $\mathscr{B} = \{H \leq M : H \neq 0$ y $H \hookrightarrow C$ para algún C$\in \mathcal{F}\}$ entonces $\mathscr{B} \neq \emptyset$ y por el Lema de Zorn podemos considerar una familia independiente máxima $\{M_i\}_{i\in I}$ de submódulos distintos de cero de M tales que $M_i \hookrightarrow C_i$ con $C_i \in \mathcal{F}$ para toda $i \in I$. Tenemos que $\bigoplus_{i\in I} M_i \subseteq_e M$ pues en caso contrario consideramos $K \leq M$ un seudocomplemento de $\bigoplus_{i\in I} M_i$ en M, como $K \neq 0$ entonces existe $K' \leq K$ tal que $K' \hookrightarrow A$ para algún $A \in \mathcal{F}$ puesto que $M \in \mathcal{C}$. Así $K' \in \mathscr{B}$ entonces $\{M_i\}_{i\in I} \cup \{K'\}$ es una familia independiente pero eso contradice la maximidad de $\{M_i\}_{i\in I}$. Por lo que tenemos $\bigoplus_{i\in I} M_i \subseteq_e M$ lo cual implica que $M \in \mathcal{D}$.

($\supseteq$) Sea $M \in \mathcal{D}$ y $0 \neq N \leq M$ como existe $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos de M donde $M_i \hookrightarrow N_j$ con $N_j \in \mathcal{F}$ tales que $\bigoplus_{i\in I} M_i \subseteq_e M$. Entonces $(\bigoplus_{i\in I} M_i) \cap N \neq 0$. Así, por le argumento de la proyección existe $0 \neq Rx \leq N$ y $j \in J$ tales que $Rx \hookrightarrow P_j \hookrightarrow N_j$ entonces $N \in \mathcal{C}$. Por lo anterior $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \xi_{nat}(\mathcal{F})$. □

Si $\mathcal{F} = \{N\}$ entonces $\xi_{nat}(\mathcal{F})$ se denotará como $\xi_{nat}(N)$ y por el inciso (I), $\xi_{nat}(N) = \{M \in R\text{-Mod}: \exists J, M \hookrightarrow E(N^{(J)})\}$.

Corolario 3.1.4. *Si $\mathcal{F}$ es una clase de módulos entonces $\xi_{nat}(\mathcal{F}) = \xi_{nat}(M_{\mathcal{F}})$.*

Demostración. Por el inciso (I) del Teorema 3.1.3, como $\{M_{\mathcal{F}}\} \subseteq \xi_{nat}(\mathcal{F})$, entonces al ser esta última clase natural, se tiene que $\xi_{nat}(M_{\mathcal{F}}) \subseteq \xi_{nat}(\mathcal{F})$. Para la otra contención vamos a usar el inciso (II) del Teorema 3.1.3. Tomamos $N \in \xi_{nat}(\mathcal{F})$ y $0 \neq W \leq N$, entonces existe $0 \neq V \leq W$ tal que $V \hookrightarrow A$ para algún $A \in \mathcal{F}$. Sea $V' \leq A$ tal que $V \cong V'$ y $0 \neq v \in V'$. Entonces $Rv \leq V' \leq A \in \mathcal{F}$ pero $Rv \hookrightarrow M_{\mathcal{F}}$. Por lo tanto $N \in \xi_{nat}(M_{\mathcal{F}})$. □

Proposición 3.1.5. *Si $\mathcal{F}$ es una clase de módulos entonces $\mathcal{D} = \{N \in R\text{-}Mod : \forall 0 \neq W \leq N, W \not\hookrightarrow A, \forall A \in \mathcal{F}\}$ es una clase natural.*

Demostración. Sea $N' \leq N \in \mathcal{D}$ y $0 \neq V'$ como $0 \neq V \leq N' \leq N$ entonces $V \not\hookrightarrow A$, para toda $A \in \mathcal{F}$ por lo tanto $N' \in \mathcal{D}$.

Sea $\{N_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{D}$, supongamos $\bigoplus_{i\in I} N_i \notin \mathcal{D}$ entonces existe $0 \neq V \leq \bigoplus_{i\in I} N_i$ tal que $V \hookrightarrow A$ para algún $A \in \mathcal{F}$, por el argumento de la proyección existe $v \in V$ tal que $Rv \cong Rn_i \leq N_i$ para alguna $i \in I$ con lo que tenemos

$Rv \hookrightarrow A$ pero $N_i \in D$ y $Rn_i \leq N_i$ por lo tanto $Rn_i \not\hookrightarrow A$ lo cual es una contradicción. Así $\bigoplus_{i \in I} N_i \in \mathcal{D}$

Si $N \in \mathcal{D}$ es un módulo tal que $E(N) \notin \mathcal{D}$ entonces existe $0 \neq V \leq E(N)$ con $V \hookrightarrow A$ para algún $A \in \mathcal{F}$ como $N \subseteq_e E(N)$ entonces $V \cap N \neq 0$ y $V \cap N \hookrightarrow A$ pero eso contradice $N \in \mathcal{D}$. Por lo tanto $E(N) \in \mathcal{D}$ con lo que $\mathcal{D}$ es una clase natural. □

Definición 3.1.6. *Dada una clase de módulos $\mathcal{F}$, la clase natural construida en la Proposición 3.1.5 se va a denotar por $\xi^c_{nat}(\mathcal{F})$.*

Corolario 3.1.7. *Las siguientes condiciones se cumplen para cualesquiera clases de módulos $\mathcal{F}, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$:*

1. $\xi_{nat}(\mathcal{F}) \cap \xi^c_{nat}(\mathcal{F}) = \{0\}$;
2. $\xi^c_{nat}(\xi^c_{nat}(\mathcal{F})) = \xi_{nat}(\mathcal{F})$;
3. *Para todo $\mathcal{F} \in R$-Nat, $\mathcal{F} = \xi_{nat}(\mathcal{F})$;*
4. $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$ *implica* $\xi^c_{nat}(\mathcal{K}_2) \subseteq \xi^c_{nat}(\mathcal{K}_1)$.

Demostración. (1) Es claro apartir de la definición de cada una de las clases naturales involucradas.

(2) $\xi^c_{nat}(\xi^c_{nat}(\mathcal{F})) = \{N \in R\text{-}Mod : \forall 0 \neq W \leq N, W \not\hookrightarrow A, \forall A \in \xi^c_{nat}(\mathcal{F})\}$, tomamos $0 \neq V \leq M \in \xi^c_{nat}(\xi^c_{nat}(\mathcal{F}))$, se tiene $V \notin \xi^c_{nat}(\mathcal{F})$ entonces existe $0 \neq V' \leq V$ tal que $V' \hookrightarrow B$ para algún $B \in \mathcal{F}$ por lo tanto $\xi^c_{nat}(\xi^c_{nat}(\mathcal{F})) = \{N \in R\text{-Mod} : \forall 0 \neq W \leq N, \exists 0 \neq V \leq W$ tal que $V \hookrightarrow A$ para algún $A \in \mathcal{F}\} = \xi_{nat}(\mathcal{F})$.

(3) Es claro pues $\mathcal{F}$ es clase natural y $\xi_{nat}(\mathcal{F})$ es la menor clase natural que contiene a $\mathcal{F}$.

(4) Si $N \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K}_2)$ entonces para todo $0 \neq W \leq N, W \not\hookrightarrow A$ para todo $A \in \mathcal{K}_2$ en particular para todo $A \in \mathcal{K}_1$ por lo tanto $N \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K}_1)$. □

Corolario 3.1.8. *Toda clase natural $\mathcal{F}$ es cerrada bajo extensiones.*

Demostración. Supongamos que $0 \to A \to B \to C \to 0$ es exacta con $A, C \in \mathcal{F}$ pero $B \notin \mathcal{F}$ entonces por los incisos 2) y 3) del Corolario 3.1.7, $B \notin \xi^c_{nat}(\xi^c_{nat}(\mathcal{F}))$ por lo tanto existe $0 \neq D \leq B$ con $D \in \xi^c_{nat}(\mathcal{F})$ entonces $A \cap D = 0$ pero $0 \neq D \cong (D + A)/A \hookrightarrow C$, contradiciendo que $C \in \mathcal{F}$.

3.2. Conjuntos naturales.

Dada una clase natural $\mathcal{K}$, sea $H_R(\mathcal{K}) = \{I \leq R : R/I \in \mathcal{K}\}$. Estos conjuntos de ideales caracterizarán a las clases naturales. Denotemos por $L(R)$ a la retícula de ideales izquierdos de R.

Proposición 3.2.1. *La correspondencia $\mathcal{K} \longmapsto H_R(\mathcal{K})$ de R-Nat en $\mathcal{P}(L(R))$, el conjunto potencia de $L(R)$, es inyectiva.*

Demostración. Supongamos $H_R(\mathcal{K}) = H_R(\mathcal{L})$ para las clases naturales $\mathcal{K}, \mathcal{L}$. Sea $M \in \mathcal{K}$ tal que $M \notin \mathcal{L}$, por el inciso (2) y (3) del Corolario 3.1.7 existe $0 \neq N \in \xi^c_{nat}(\mathcal{L})$ para algún submódulo no cero de M, así tomando $0 \neq x \in N$,$Rx \cong R/(0:x) \in \xi^c_{nat}(\mathcal{L})$. Por lo tanto $(0:x) \notin H_R(\mathcal{L})$, pero $M \in \mathcal{K}, Rx \in K$, entonces $(0:x) \in H_R(\mathcal{K})$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $M \in \mathcal{L}$, así $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$. De manera análoga $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$. $\square$

La proposición anterior indica que una clase natural $\mathcal{K}$ está determinada de manera única por el conjunto $H_R(\mathcal{K})$. Así R-Nat está en correspondencia biyectiva con un subconjunto de $\mathcal{P}(L(R))$ por lo que se puede pensar que R-Nat es un conjunto.

Daremos una condición necesaria y suficiente para que un conjunto de ideales izquierdos de R sea de la forma $H_R(\mathcal{K})$ para algún $\mathcal{K} \in R$-Nat.

Definición 3.2.2. *Un conjunto no vacío $\mathscr{A}$ de ideales izquierdos de R se llama conjunto natural si las siguientes condiciones se satisfacen:*

1) Si $I, J \in \mathscr{A}$ entonces $I \cap J \in \mathscr{A}$;

2) Si $I \in \mathscr{A}$ entonces $(I : a) \in \mathscr{A}$, para toda $a \in R$;

3) Si $I \notin \mathscr{A}$ entonces existe un ideal izquierdo J tal que $I \leq J$ y $(I : a) \notin \mathscr{A}$, para toda $a \in J \backslash I$.

Proposición 3.2.3. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un conjunto $\mathscr{A}$ de ideales izquierdos de R:*

(a) $\mathscr{A} = H_R(\mathcal{K})$ para algún $\mathcal{K} \in R$-Nat;

(b) $\mathscr{A}$ es un conjunto natural.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Primero veamos que se satisface 1) de la Definición 3.2.2. Supongamos que existe $\mathcal{K} \in R$-Nat tal que $\mathscr{A} = H_R(\mathcal{K})$. Sean $I, J \in \mathscr{A} = H_R(\mathcal{K})$ entonces $R/I, R/J \in \mathcal{K}$. Además tenemos un monomorfismo $R/(I \cap J) \hookrightarrow R/I \oplus R/J$ con regla de correspondencia $r + (I \cap J) \longmapsto (r+I, r+J)$. Así que $R/I \cap J \in \mathcal{K}$ ya que $\mathcal{K}$ es una clase cerrada bajo sumas directas arbitrarias, submódulos y copias isomorfas entonces $I \cap J \in \mathscr{A}$.

Ahora supongamos que $I \in \mathscr{A}$ y sea $a \in R$, como $(I : a) = (\bar{0} : a + I)$, tenemos que $R/(I : a) = R/(\bar{0} : a + I) \cong R(a + I) = (Ra + I)/I \leq R/I$ por lo tanto $R/(I : a) \in \mathcal{K}$ lo que indica que $(I : a) \in \mathscr{A}$. Así, se cumple 2) de la Definición 3.2.2.

Por último, para demostrar que $\mathscr{A}$ es un conjunto natural. Si $I \notin H_R(\mathcal{K}) = \mathscr{A}$ entonces $R/I \notin \mathcal{K}$. Por el inciso (2) y (3) del Corolario 3.1.7, existe $0 \neq J/I \leq R/I$ con $J/I \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$. Como esta clase es también natural, entonces para toda $a \in J \backslash I, (Ra + I)/I \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$. El hecho de que $(I : a) \notin H_R(\mathcal{K})$ se sigue de $R/(I : a) \cong (Ra + I)/I$. Por lo tanto, $H_R(\mathcal{K})$ es un conjunto natural.

$(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos que $\mathscr{A}$ es un conjunto natural. Sea $\mathcal{K} = \{M \in R\text{-}Mod : (0 : x) \in \mathscr{A}$ para cualquier $x \in M\}$, afirmamos que $\mathcal{K}$ es clase natural.

Claramente $\mathcal{K}$ es cerrada bajo tomar copias isomorfas y submódulos. Sea $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{K}$ y $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Si $x \in M$, $x = x_1 + \ldots + x_n$ con $x_i \in M_i$ entonces $(0 : x) = \bigcap_{i=1}^{n} (0 : x_i)$, como $(0 : x_i) \in \mathscr{A}$ y es cerrada bajo intersecciones finitas entonces $(0 : x) \in \mathscr{A}$ por lo tanto $M \in \mathcal{K}$. Así $\mathcal{K}$ es cerrada bajo sumas directas arbitrarias.

Supongamos que $M \in \mathcal{K}$ es tal que $E(M) \notin \mathcal{K}$. Entonces existe $x \in E(M)$ con $(0 : x) \notin \mathscr{A}$. Por la Definición 3.2.2 existe $J \leq R$ tal que $(0 : x) \leq J$ y $((0 : x) : a) \notin \mathscr{A}$, para toda $a \in J/(0 : x)$. Sea $Y \leq Rx$ tal que $J/(0 : x) \cong Y$. $Y \neq 0$ y como $M \subseteq_e E(M)$, $0 \neq Y \cap M$. Tomamos $0 \neq y \in Y \cap M$, entonces $R/(0 : y) \cong Ry \cong (Ra + (0 : x))/(0 : x) \cong R/(0 : a + (0 : x)) = R/((0 : x) : a)$ para algún $a \in J/(0 : x)$. Así $(0 : y) \notin \mathscr{A}$, pues $((0 : x) : a) \notin \mathscr{A}$. Esto implica que $Y \cap M \notin \mathcal{K}$ y por lo tanto $M \notin \mathcal{K}$, lo cual es una contradicción. Así $\mathcal{K}$ es cerrada bajo cápsulas inyectivas y por lo tanto es una clase natural.

Ahora, $H_R(\mathcal{K}) = \{I \leq R : R/I \in \mathcal{K}\} = \{I \leq R : (0 : x) \in \mathscr{A}, \forall x \in$

$R/I\} = \{I \leq R : \forall a \in R, (I : a) \in \mathscr{A}\}$, si $a = 1$ y $I \in H_R(\mathcal{K})$ entonces $I = (I : 1) \in \mathscr{A}$ por lo tanto $H_R(\mathcal{K}) \subseteq \mathscr{A}$. La otra contención se sigue de la condición (2) de la Definición 3.2.2. Por lo tanto $H_R(\mathcal{K}) = \mathscr{A}$. □

Corolario 3.2.4. *Para una clase natural $\mathcal{K}$ y cualquier módulo M tenemos que $M \in \mathcal{K}$ si y sólo si $(0 : x) \in H_R(\mathcal{K})$, para todo $x \in M$.*

Con lo anterior R-Nat está en correspondencia biyectiva con el subconjunto de $\mathcal{P}(L(R))$ cuyos elementos son conjuntos naturales, así $|R\text{-Nat}| \leq |\mathcal{P}(L(R))| \leq 2^{|\mathcal{P}(R)|}$.

Es importante notar que los conjuntos naturales se comportan de forma parecida a los filtros y ambas colecciones nos sirvieron para probar que $\mathcal{T}^p(R)$ y R-Nat se pueden biyectar con un conjunto.

El siguiente lema es interesante pues relaciona a las clases de pretorsión hereditarias con las clases naturales vía los conjuntos naturales.

Lema 3.2.5. *Sea $\mathcal{K}$ clase natural. Entonces:*

(a) $\mathcal{K}$ es una clase de torsión hereditaria si y sólo si para cualesquiera $I, J \leq R$, si $I \leq J$ e $I \in H_R(\mathcal{K})$ entonces $J \in H_R(\mathcal{K})$.

(b) $\mathcal{K}$ es una clase libre de torsión hereditaria si y sólo si $H_R(\mathcal{K})$ es cerrada bajo intersecciones arbitrarias.

Demostración. $(a)(\Rightarrow)$ Es inmediato si recordamos que una clase de torsión hereditaria es una clase de pretorsión hereditaria, con lo cual $H_R(\mathcal{K})$ es un filtro.

$(a)(\Leftarrow)$ Como $I \in H_R(\mathcal{K})$ implica que $(I : a) \in H_R(\mathcal{K})$, para toda $a \in R$ sólo necesitamos demostrar que si $(I : a) \in H_R(\mathcal{K})$ para cualquier $a \in J \in H_R(\mathcal{K})$ entonces $I \in H_R(\mathcal{K})$. Vamos a demostrar que $H_R(\mathcal{K})$ es un filtro de Gabriel. Consideremos la siguiente sucesión exacta $0 \longrightarrow (I + J)/I \longrightarrow R/I \longrightarrow R/(I + J) \longrightarrow 0$. Como $J \in H_R(\mathcal{K})$ y $J \leq J + I$ entonces por hipótesis $I + J \in H_R(\mathcal{K})$. Por lo tanto $R/(I + J) \in \mathcal{K}$.

Para cualquier $a \in J$, $(I : a) = (I \cap J : a) \in H_R(\mathcal{K})$ y $[Ra + (I \cap J)]/(I \cap J) \cong R/(I \cap J : a) \in \mathcal{K}$, para toda $a \in J$, entonces (I+J)/I $\cong J/(I \cap J) \in \mathcal{K}$. Por el Corolario 3.1.8, $\mathcal{K}$ es cerrada bajo extensiones. Así $R/I \in \mathcal{K}$ con lo cual $I \in H_R(\mathcal{K})$.

$(b)(\Rightarrow)$ Si $\mathcal{K}$ es una clase libre de torsión hereditaria entonces es cerrada bajo productos. Sea $\{I_t\}_{t\in T} \subseteq H_R(\mathcal{K})$, del hecho $R/(\bigcap I_t) \hookrightarrow \prod_{t\in T} R/I_t \in H_R(\mathcal{K})$, se tiene que $\bigcap_{t\in T} I_t \in H_R(\mathcal{K})$, con lo que tenemos la cerradura bajo intersecciones arbitrarias.

$(b)(\Leftarrow)$ Supongamos que $H_R(\mathcal{K})$ es cerrada bajo intersecciones arbitrarias y sea $M = \prod_{t\in T} M_t$ con $\{M_t\}_{t\in T} \subseteq \mathcal{K}$. Para cualquier $x \in M$ tenemos $x = (x_t)$ con $x_t \in M_t$, para todo $t \in T$. Entonces $(0 : x_t) \in H_R(\mathcal{K})$, por lo que $(0 : x) = \bigcap_{t\in T}(0 : x_t) \in H_R(\mathcal{K})$ y entonces $M \in \mathcal{K}$. Lo anterior demuestra la cerradura bajo tomar poducto. $\square$

Como existe una biyección entre las teorías de torsión hereditarias y las clases libres de torsión hereditarias, el inciso (b) del Lema 3.2.5 da otra biyección de R-tors a un conjunto distinta a la que se dió en la Proposición 2.3.10 con R-gab.

La siguiente proposición clasifica al anillo vía clases naturales, pero antes una definición.

Definición 3.2.6. *Un anillo R se llama semiartiniano izquierdo si para todo $M \in R$-Mod distinto de cero, $Zoc(M) \subseteq_e M$.*

Proposición 3.2.7. *Las siguientes propiedades son equivalentes para un anillo R:*

(a) R es semiartiniano izquierdo;

(b) Toda clase natural es una clase libre de torsión hereditaria;

(c) $\mathcal{K} = \{M \in R\text{-Mod} : Zoc(M) \subseteq_e M\}$ es una clase libre de torsión hereditaria.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que R es semiartiniano izquierdo y sea $\mathcal{K}$ una clase natural. Consideramos $\mathcal{F} = \{Zoc(M) : M \in \mathcal{K}\}$. Por el inciso (III) del Teorema 3.1.3 $\mathcal{K} = \xi_{nat}(\mathcal{F})$. Consideremos $M = \prod_{i\in I} M_i$ con $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{K}$. Si $M \notin \mathcal{K}$ entonces existe un submódulo distinto de cero N de M tal que ningún submódulo distinto de cero de N está en $\mathcal{F}$. Como R

es semiartiniano izquierdo, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $N = Rx$ es simple, $x = (x_i)$ con $x_i \in M_i$. Así para alguna $i \in I$, $x_i \neq 0$, consideramos el morfismo $N = Rx \longrightarrow Rx_i$ tal que $rx \longmapsto rx_i$ el cual es un isomorfismo pues N es simple.

Por lo que tenemos $N \cong Rx_i \leq M_i \in \mathcal{K}$. Entonces $N \in \mathcal{F}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $M \in \mathcal{K}$ y es cerrada bajo tomar producto.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sólo hay que verificar que $\mathcal{K}$ es una clase natural, pero eso se sigue del inciso (III) del Teorema 3.1.3 y del hecho de que $\mathcal{K} = \xi_{nat}(\mathcal{S})$, donde $\mathcal{S} = \{N \in R\text{-}Mod : N \text{ es simple}\}$.

$(c) \Rightarrow (a)$ Sea $\mathcal{K}$ tal clase natural que por hipótesis es una clase libre de torsión hereditaria. Notemos que la cápsula inyectiva de cualquier simple está en $\mathcal{K}$, por lo tanto la suma directa de cápsulas inyectivas de simples no isomorfos vuelve a estar en $\mathcal{K}$. Pero éste módulo cogenera a todos los módulos en R-Mod, como $\mathcal{K}$ es una clase libre de torsión hereditaria entonces $\mathcal{K} = R$-Mod y por lo tanto R es semiartiniano izquierdo. □

3.3. La retícula R-Nat.

Proposición 3.3.1. *Si $\mathcal{K}$ es una clase natural entonces las siguientes condiciones se verifican:*

(a) Si N es un submódulo de M, máximo con la propiedad de que $N \in \mathcal{K}$, entonces para todo $D \leq M$ con $N \cap D = 0$ implica $D \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$;

(b) Para todo módulo M, existen $C, N \leq M$ tales que $C \oplus N \subseteq_e M$, $N \in \mathcal{K}$ y $C \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$.

Demostración. (a) Sea $D \leq M$ y $0 \neq V \leq D$, para probar que $D \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$, demostrar que $V \notin \mathcal{K}$ por la descripción de $\xi^c_{nat}(\mathcal{K})$ en la Proposición 3.1.5. Supongamos lo contrario, como $N \cap D = 0$ entonces $N \oplus V \in \mathcal{K}$ y $N \leq N \oplus V \leq M$ pero eso contradice la maximidad de N, por lo tanto $V \notin \mathcal{K}$.

(b) Sea $M \in R$-Mod, por el Lema de Zorn la familia $\mathscr{A} = \{\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subseteq \mathcal{K} : M_\alpha \leq M \text{ y es una familia independiente}\}$ tiene elementos máximos. Consideramos un elemento máximo $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \in \mathscr{A}$ entonces $N = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \subseteq M$ y $N \in \mathcal{K}$. Si $N \subseteq_e M$ no hay nada que demostrar. En caso contrario, sea $C \leq M$ un seudocomplemento de N el cual es máximo con la propiedad $C \cap N = 0$. Por el inciso (a), $C \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$ y además $N \oplus C \subseteq_e M$ $\square$

Empecemos por darle a R-Nat estructura reticular. La inclusión es un orden parcial en R-Nat y con base en la menor clase natural generada por una clase cualquiera, se pueden dar las relaciones de supremo e ínfimo de una familia de clases naturales.

Observación 3.3.2. *Si $\{\mathcal{K}_i\}_{i\in I} \subseteq R$-Nat entonces $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{K}_i = \bigcap_{i\in I} K_i$ y $\bigvee_{i\in I} \mathcal{K}_i = \xi_{nat}(\bigcup_{i\in I} \mathcal{K}_i)$ son el supremo y el ínfimo de una familia de clases naturales.*

Si denotamos R-Mod $= \mathbf{1}$ y $\{0\} = \mathbf{0}$ entonces (R-Nat,$\subseteq, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}$) es una retícula completa.

Teorema 3.3.3. *Para cualquier clase natural $\mathcal{K}$, la clase natural $\xi^c_{nat}(\mathcal{K})$ es el único complemento de $\mathcal{K}$ en R-Nat, esto es que $\mathcal{K} \vee \xi^c_{nat}(\mathcal{K}) = R$-Mod y $\xi^c_{nat}(\mathcal{K}) \wedge \mathcal{K} = \{0\}$.*

Demostración. Por el inciso (III) del Teorema 3.1.3 tenemos que $\xi_{nat}(\bigcup_{i\in I} \mathcal{K}_i) = \{M \in R\text{-Mod} : \exists M_i \leq M \text{ con } M_i \in \mathcal{K}_i \text{ e } i \in I \text{ tal que } \bigoplus_{i\in I} M_i \subseteq_e M\}$ para una familia de clases naturales $\{\mathcal{K}_i\}_{i\in I}$. Por lo que se cumple que $\mathcal{K} \vee \xi^c_{nat}(\mathcal{K}) = \xi_{nat}(\mathcal{K} \cup \xi^c_{nat}(\mathcal{K})) = \{M \in R\text{-Mod} : \exists A, B \leq M \text{ con } A \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$ y $B \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$ tal que $A \oplus B \subseteq_e M\}$. Así, por el inciso (b) de la Proposición 3.3.1, para todo $M \in R$-Mod, $M \in \mathcal{K} \vee \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$. Entonces R-Mod$= \mathcal{K} \vee \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$.

Para cualquier clase natural $\mathcal{K}$, $\xi^c_{nat}(\mathcal{K}) \wedge \mathcal{K} = \{0\}$ la demostración se sigue de los incisos (1) y (2) del Corolario 3.1.7.

Ahora supongamos que $\mathcal{L} \in R$-Nat cumple que $\mathcal{L} \wedge \mathcal{K} = \{0\}$ y $\mathcal{L} \vee \mathcal{K} = R$-Mod. Para cualquier $0 \neq N \in \mathcal{L}$ y cualquier $0 \neq V \leq N$, $V \notin \mathcal{K}$ pues $V \in \mathcal{L}$, entonces $\mathcal{L} \subseteq \{M \in R\text{-Mod}: \forall 0 \neq V \leq N, V \notin \mathcal{K}\} = \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$.

Para cualquier $M \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$, $M \in \mathcal{L} \vee \mathcal{K}$, entonces existen $M_1, M_2 \leq M$, $M_1 \in \mathcal{L}$ y $M_2 \in \mathcal{K}$ tales que $M_1 \oplus M_2 \subseteq_e M$. El hecho de que $M \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$ implica $M_2 \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$, pero $M_2 \in \mathcal{K}$ por lo tanto $M_2 = 0$. Así $M_1 \subseteq_e M$ y entonces $M \in \mathcal{L}$ con lo que tenemos $\xi^c_{nat}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{L}$. Por lo tanto $\xi^c_{nat}(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$. $\square$

Proposición 3.3.4. *Sean $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{D} \in$ R-Nat entonces $\mathcal{K} \wedge (\mathcal{L} \vee \mathcal{D}) = (\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}) \vee (\mathcal{K} \wedge \mathcal{D})$.*

Demostración. Una desigualdad es completamente reticular. Tenemos que $\mathcal{K} \wedge \mathcal{L} \leq \mathcal{K}$ y $\mathcal{K} \wedge \mathcal{D} \leq \mathcal{K}$ entonces $(\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}) \vee (\mathcal{K} \wedge \mathcal{D}) \leq \mathcal{K}$. Por otro lado $\mathcal{K}\wedge\mathcal{L} \leq \mathcal{L} \leq \mathcal{L}\vee\mathcal{D}$ y $\mathcal{K}\wedge\mathcal{D} \leq \mathcal{D} \leq \mathcal{L}\vee\mathcal{D}$ entonces $(\mathcal{K}\wedge\mathcal{L})\vee(\mathcal{K}\wedge\mathcal{D}) \leq \mathcal{L}\wedge\mathcal{D}$. Así, tenemos que $(\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}) \vee (\mathcal{K} \wedge \mathcal{D}) \leq \mathcal{K} \wedge (\mathcal{L} \vee \mathcal{D})$.

Para la otra desigualdad, sea $M \in \mathcal{K} \wedge (\mathcal{L} \vee \mathcal{D})$ entonces $M \in \mathcal{K}$ y $M \in \mathcal{L} \vee \mathcal{D}$. Por el inciso (III) del Teorema 3.1.3, existen $M_1, M_2 \leq M$ con $M_1 \in \mathcal{L}$ y $M_2 \leq \mathcal{D}$ tales que $M_1 \oplus M_2 \subseteq_e M$. Por lo tanto, $M_1, M_2 \in \mathcal{K}$ pues es una clase cerrrada bajo submódulos. Así $M_1 \in \mathcal{K} \wedge \mathcal{L}$ y $M_2 \in \mathcal{K} \wedge \mathcal{D}$, por lo tanto $M \in (\mathcal{K} \wedge \mathcal{L}) \vee (\mathcal{K} \wedge \mathcal{D})$ de nuevo por el inciso (III) del Teorema 3.1.3. □

Teorema 3.3.5. *(R-Nat,$\subseteq, \wedge, \vee, \mathbf{1}, \mathbf{0}$) es una retícula de Boole, completa, con elemento mayor R-Mod $= \mathbf{1}$, elemento menor $\{0\} = \mathbf{0}$ y para todo $\mathcal{K} \in$ R-Nat el único complemento es $\xi^c_{nat}(\mathcal{K})$.*

Las siguientes proposiciones son resultados importantes referentes a clases naturales y sirven para simplificar resultados cuando consideremos la teoría de clases pre-naturales.

Proposición 3.3.6. *Si $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in$ R-Nat, entonces $\mathcal{K} \vee \mathcal{L} = \{M \in R\text{-}Mod : X \in \mathcal{K}$ y $M/X \in \mathcal{L}$ para algún $X \leq M\}$.*

Demostración. La clase natural $\mathcal{K} \vee \mathcal{L}$ es cerrada bajo extensiones por el Corolario 3.1.8. Por lo tanto una contención es inmediata.

Para la otra contención, sea $M \in \mathcal{K}\vee\mathcal{L}$. Con ayuda del Lema de Zorn encontramos una familia independiente máxima, que llamaremos $\mathscr{F}$, contenida en $\mathcal{L}$ y que consta de submódulos de M. Sea $N = E(\bigoplus_{y\in\mathscr{F}} Y) \cap M$, entonces $N \in \mathcal{L}$.

Tomamos un seudocomplemento de N en M al que llamaremos P. Entonces $N \cap P = 0$ y $N \oplus P \subseteq_e M$ lo que implica que $N \subseteq_e M/P$ y entonces $M/P \in \mathcal{L}$. Por el inciso (a) de la Proposición 3.3.1 $P \in \xi^c_{nat}(\mathcal{L})$. Como $P \leq M \in \mathcal{K}\vee\mathcal{L}$ usando la Proposición 3.3.4 tenemos $P \in \xi^c_{nat}(\mathcal{L}) \wedge (\mathcal{K}\vee\mathcal{L}) = (\xi^c_{nat}(\mathcal{L}) \wedge \mathcal{K}) \vee (\xi^c_{nat}(\mathcal{L}) \wedge \mathcal{L}) = (\xi^c_{nat}(\mathcal{L}) \wedge \mathcal{K}) \vee 0 = \xi^c_{nat}(\mathcal{L}) \wedge \mathcal{K} \leq \mathcal{K}$. □

Proposición 3.3.7. *Si* $\{\mathcal{K}_i\}_{i\in I} \subseteq R$*-Nat entonces* $\bigvee_{i\in I} \mathcal{K}_i = \xi_{nat}(\bigoplus_{i\in I} M_{\mathcal{K}_i})$.

Demostración. Para toda $i \in I$ se tiene $M_{\mathcal{K}_i} \leq \bigoplus_{i\in I} M_{\mathcal{K}_i}$. Entonces $\xi_{nat}(M_{\mathcal{K}_i}) \subseteq \xi_{nat}(\bigoplus_{i\in I} M_{\mathcal{K}_i})$. Como R-Nat es una retícula completa,

$\bigvee_{i\in I} \xi_{nat}(M_{\mathcal{K}_i}) \subseteq \xi_{nat}(\bigoplus_{i\in I} M_{\mathcal{K}_i})$.

Para la otra contención, claramente se tiene $\bigoplus_{i\in I} M_{\mathcal{K}_i} \in \xi_{nat}(\bigcup_{i\in I} \mathcal{K}_i) = \bigvee_{i\in I} M_{\mathcal{K}_i}$, entonces $\xi_{nat}(\bigoplus_{i\in I} M_{\mathcal{K}_i}) \subseteq \bigvee_{i\in I} M_{\mathcal{K}_i}$. □

Definición 3.3.8. *Decimos que* $\mathcal{K} \in R$*-Nat es un átomo si* $\mathcal{K} \neq \mathbf{0}$ *y siempre que* $\mathbf{0} \neq \mathcal{L} \leq \mathcal{K}$ *con* $\mathcal{L} \in R$*-Nat entonces* $\mathcal{L} = \mathcal{K}$.

Definición 3.3.9. *Un módulo* W *es atómico si* $0 \neq W$ *y para cualquier* $0 \neq V \leq W$, $\xi_{nat}(V) = \xi_{nat}(W)$. *Es decir si y sólo si* $\xi_{nat}(W)$ *es un átomo en R-Nat.*

Ejemplo 3.3.10. *1) Los módulos simples son atómicos. Para demostrar esto, sea* N *un módulo simple y supongamos que* $\mathbf{0} \neq \mathcal{K} \leq \xi_{nat}(N)$, *como* $\mathcal{K} = \xi_{nat}(M_{\mathcal{K}})$ *por el Corolario 3.1.4. Así,* $M_{\mathcal{K}} \in \xi_{nat}(N)$ *y por el inciso* (II) *del Teorema 3.1.3 existe* $0 \neq V \leq M_{\mathcal{K}}$ *tal que* $V \hookrightarrow N$, *como* N *es simple si sigue que* $V \cong N$. *Así,* $N \in \mathcal{K}$ *por lo que* $\xi_{nat}(N) \leq \mathcal{K}$ *entonces* $\xi_{nat}(N) = \mathcal{K}$ *y* N *es un módulo atómico.*

2) Los módulos uniformes son atómicos. Para demostrar esto, sea N *un módulo uniforme y supongamos que* $\mathbf{0} \neq \xi_{nat}(M_{\mathcal{K}}) \leq \xi_{nat}(N)$. *Así,* $M_{\mathcal{K}} \in \xi_{nat}(N)$ *y por el inciso* (II) *del Teorema 3.1.3 existe* $0 \neq V \leq M_{\mathcal{K}}$ *tal que* $V \hookrightarrow N$, *sea* $V \cong V' \subseteq_e N$, *por ser* N *uniforme, entonces* $E(V') = E(N)$. *Como* $\mathcal{K}$ *es una clase natural tenemos que* $E(N) \in \mathcal{K}$ *por lo tanto* $N \in \mathcal{K}$ *implicando que* $\xi_{nat}(N) = \mathcal{K}$.

Proposición 3.3.11. *Un módulo* M *es atómico si y sólo si para cualesquiera submódulos distintos de cero* N_1, N_2 *existen* $0 \neq P_1 \leq N_1$ *y* $0 \neq P_2 \leq N_2$ *tales que* $P_1 \cong P_2$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean $0 \neq N_1, N_2 \leq M$, como M es atómico entonces $\xi_{nat}(N_1) = \xi_{nat}(M)$. Se sigue que $N_2 \in \xi_{nat}(N_1)$, por lo tanto existe $0 \neq P_2 \leq N_2$ tal que $P_2 \hookrightarrow N_1$ es decir, existe $P_1 \leq N_1$ tal que $P_1 \cong P_2$.

($\Leftarrow$) Sea $0 \neq N \leq M$ entonces $\xi_{nat}(N) \subseteq \xi_{nat}(M)$. Para probar la otra contención, basta ver que $M \in \xi_{nat}(N)$ y para ello usaremos la condición (II) del Teorema 3.1.3. Sea $0 \neq P \leq M$, por hipótesis existen $0 \neq N_1 \leq N$ y $0 \neq P_1 \leq P$ tales que $P_1 \cong N_1$, así $P_1 \hookrightarrow N$ y entonces $M \in \xi_{nat}(N)$. Por lo tanto $\xi_{nat}(M) \subseteq \xi_{nat}(N)$. □

Definición 3.3.12. *Una retícula se llama atómica si cada elemento no cero contiene un átomo.*

Lema 3.3.13. *L es una retícula Booleana, completa y atómica si y sólo si $L \cong 2^X = \mathcal{P}(X)$, donde $X \subseteq L$ es el conjunto de átomos.*

La demostración se puede consultar en Birkhoff [2, pp. 120].

Corolario 3.3.14. *Supongamos que R-Nat es una retícula atómica entonces la cardinalidad de R-Nat es igual a 2^c donde c es el cardinal del conjunto de átomos en R-Nat. En particular, si la cardinalidad de R-Nat es un número finito entonces $|R\text{-Nat}| = 2^n$, donde n es el número de átomos en R-Nat.*

Concluimos el capítulo con dos caracterizaciones del anillo vía la cardinalidad de R-Nat.

Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un conjunto de representantes de clases de isomorfismo de módulos cíclicos que no contienen submódulos simples y consideramos $E_0 = E(\bigoplus_{t\in T} X_t)$.

Proposición 3.3.15. *La cardinalidad de R-Nat es 2^n para algún $n \in \mathbb{N}$ si y sólo si alguna de las condiciones se cumple:*

(1) R es un anillo semiartiniano izquierdo con n módulos simples salvo isomorfismo

(2) Existe algún entero $(0 \leq i < n)$ tal que R tiene i módulos simples salvo isomorfismo y $E_0 = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_{n-i}$, donde cada E_j es atómico y cada par $E_k, E_j (k \neq j)$ no tienen submódulos isomorfos.

Demostración. ($\Rightarrow$) El inciso (1) se sigue de que si un anillo R es semiartiniano izquierdo, entonces todo módulo distinto de cero contiene al menos un simple y como los simples son atómicos, el hecho de que la cardinalidad sea 2^n implica que R-Nat es atómica por lo tanto hay n simples salvo isomorfismo y estos son los átomos de R-Nat.

Si el inciso (1) no se cumple, sea s el número de clases de isomorfismo de módulos simples. Notemos que al no ser R semiartiniano izquierdo entonces la clase natural $\mathcal{K} = \{M \in R\text{-Mod}: Zoc(M) \subseteq_e M\} \neq R\text{-Mod}$, por lo que su complemento $\xi^c_{nat}(\mathcal{K}) = \{M \in R\text{-Mod} : Zoc(M) = 0\} \neq 0$.

En efecto, $E_0 \neq 0$ y por hipótesis E_0 contiene un módulo atómico M_1. Con ayuda del Lema de Zorn, la siguiente familia: $\mathscr{A} = \{\mathcal{N} : \forall N \in \mathcal{N}, N \leq M_1, N \in \xi_{nat}(M_1),\ M_1 \in \mathcal{N}$ y es una familia independiente$\}$, ordenada parcialmente por la inclusión, tiene elementos máximos.

Sea $\mathcal{N}_1$ un elemento máximo de $\mathscr{A}$. Con él construimos $E_1 = E(\bigoplus_{N\in\mathcal{N}_1} N)$, así $E_1 \in \xi_{nat}(M_1)$ y por lo tanto $\xi_{nat}(E_1) = \xi_{nat}(M_1)$ pues este último es atómico, lo que implica que E_1 también es atómico. Como E_0 es inyectivo entonces $E_0 = E_1 \oplus F_1$. Sí $F_1 \neq 0$ entonces contiene un submódulo atómico M_2. Por la maximalidad de $\mathcal{N}_1$, $\xi_{nat}(M_1) \neq \xi_{nat}(M_2)$, Entonces, análogo al caso anterior, existe una familia independiente máxima $\mathcal{N}_2$ de submódulos de F_1 tal que $M_2 \in \mathcal{N}_2$ y $N \in \xi_{nat}(M_2)$, para todo $N \in \mathcal{N}_2$. Sea $E_2 = E(\bigoplus_{N\in\mathcal{N}_2} N)$, entonces $E_2 \in \xi_{nat}(M_2)$ y es un módulo atómico con $\xi_{nat}(E_2) = \xi_{nat}(M_2)$. Como F_1 es inyectivo escribimos $F_1 = E_2 \oplus F_2$. Si $F_2 \neq 0$ podemos encontrar E_3 con las caracteristicas anteriores y así sucesivamente.

Como R-Nat sólo contiene n átomos ya que tiene un nmero finito de elementos, entonces existe un número t tal que $F_t = 0$ por lo que $E_0 = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_t$.

Cada E_i es atómico y $\xi_{nat}(E_i) \neq \xi_{nat}(E_j)$ si $i \neq j$, por lo que se tendrá E_i y E_j no tienen submódulos isomorfos.

Para completar la prueba, mostraremos que $n = s + t$. Sea $\xi_{nat}(M)$ un átomo de R-Nat, si $Zoc(M) \neq 0$ entonces $\xi_{nat}(M) = \xi_{nat}(N)$ para algún submódulo simple N de M. Si $Zoc(M) = 0$ entonces M tiene un submódulo no cero V que se sumerge en E_0 y por el argumento de la proyección V tiene un submódulo no cero que se sumerge en algún $E_i, (1 \leq i \leq t)$ lo que implica $\xi_{nat}(M) = \xi_{nat}(E_i)$. Por lo tanto se acaba de demostrar que $\xi_{nat}(E_1), \ldots, \xi_{nat}(E_t)$, mas los s átomos generados por los módulos simples constituyen todos los átomos de R-Nat entonces $s + t = n$ por el Corolario 3.3.14

($\Leftarrow$) Notemos que la condición (1) automáticamente implica que |R-Nat| $= 2^n$.

Supongamos que se cumple (2). Entonces R-Nat tiene n átomos. Sea $M \in R$-Mod, si $Zoc(M) \neq 0$ entonces M contiene algún simple, si ocurre que $Zoc(M) = 0$ entonces M contiene un submódulo no cero que se sumerge en algún $E_i, (1 \leq i \leq n)$. En cualquier caso M contiene un módulo atómico, por el Corolario 3.3.14 |R-Nat| $= 2^n$. $\square$

Capítulo 4

Clases Pre-naturales

4.1. Clases M-naturales

Definición 4.1.1. *Dado un módulo M, a una clase $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M]$ cerrada bajo tomar copias isomorfas, submódulos, sumas directas arbitrarias y cápsulas M-inyectivas se le llama clase M-natural. La colección de clases M-naturales se va a denotar como R-$M nat$.*

De la definición, las clases R-naturales son las clases naturales dadas en el capítulo anterior.

Después se demostrará que R-Mnat está en correspondencia biyectiva con un conjunto. Además es claro que la intersección de una familia de clases M-naturales vuelve a ser M-natural, por lo que la estructura reticular de R-Mnat se presenta de forma análoga a la estructura reticular de R-Nat.

Lema 4.1.2. *Sea $\mathcal{K}$ una clase M-natural y $X \subseteq_e N \in \sigma[M]$. Si $X \in \mathcal{K}$ entonces $N \in \mathcal{K}$.*

Demostración. Como $X \subseteq_e N$ entonces $E(X) = E(N)$ y por lo tanto $E_M(X) = E_M(N)$. Por el Lema 1.3.14 $N \leq E_M(N) \in \mathcal{K}$ lo que implica que $N \in \mathcal{K}$. $\square$

Lema 4.1.3. *Sea $\mathcal{F} \subseteq \sigma[M]$ entonces se tiene lo siguiente:*

1. *$\xi_{nat}(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$ es la clase M-natural mas pequeña que contiene a $\mathcal{F}$;*

2. *$\mathcal{F}$ es una clase M-natural si y sólo si $\mathcal{F} = \xi_{nat}(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$.*

Demostración. (1) Inmediatamente se tiene que $\xi_{nat}(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$ es cerrada bajo tomar copias isomorfas, submódulos y sumas directas arbitrarias. Sea $N \in \xi_{nat}(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$ entonces $N \in \xi_{nat}(\mathcal{F})$ y $N \in \sigma[M]$. Por la Proposición 1.3.14, $N \leq E_M(N) \in \sigma[M]$ y $N \leq E_M(N) \leq E(N) \in \xi_{nat}(\mathcal{F})$ por lo que $E_M(N) \in \xi_{nat}(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$. Claramente $\mathcal{F} \subseteq \xi_{nat}(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$.

Ahora supongamos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ con $\mathcal{L}$ una clase M-natural. Para $N \in \xi_{nat}(\mathcal{F}) \cap \sigma[M]$ tenemos por el inciso (III) del Teorema 3.1.3, que existe una familia de submódulos de $N, \{N_i\}_{i\in I}$ tal que $\bigoplus_{i\in I} N_i \subseteq_e N$. Como $\mathcal{L}$ es cerrada bajo sumas directas arbitrarias, entonces $\bigoplus_{i\in I} N_i \in \mathcal{L}$ y por el Lema 4.1.2 $N \in \mathcal{L}$. Así $\xi_{nat}(\mathcal{F}) \cap \sigma[M] \subseteq \mathcal{L}$.

(2) Se sigue claramente de (1). □

Corolario 4.1.4. *Una clase de módulos $\mathcal{F}$ es una clase M-natural si y sólo si $\mathcal{F} = \mathcal{K} \cap \sigma[M]$ para alguna clase natural $\mathcal{K}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Es el Lema 4.1.3.

($\Leftarrow$) Sólo basta con observar que $\mathcal{K}$ es cerrada bajo tomar cápsulas M-inyectivas pero esto se sigue de que para todo $N \in \mathcal{K}$, $E_M(N) \leq E(N) \in \mathcal{K}$. □

Corolario 4.1.5. *Sea $\mathcal{K}$ una clase M-natural y $X \leq N \in \sigma[M]$.*

1. *Si $N \notin \mathcal{K}$ entonces existe $0 \neq Y \leq N$ con $Y \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$;*

2. *Si $X, N/X \in \mathcal{K}$, entonces $N \in \mathcal{K}$.*

Demostración. (1) Como $N \in \sigma[M]$ pero $N \notin \xi_{nat}(\mathcal{K}) \cap \sigma[M]$, entonces $N \notin \xi_{nat}(\mathcal{K})$. Por lo tanto existe $0 \neq Y \leq N$ tal que $Y \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$.

(2) Supongamos $N \notin \mathcal{K}$, por el inciso anterior existe $Y \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$ tal que $0 \neq Y \leq N$. Como $X \in \mathcal{K}$ entonces $X \cap Y = 0$, por lo tanto $Y \hookrightarrow N/X \in \mathcal{K}$, así que $Y \in \mathcal{K}$, pero eso es una contradicción. □

4.2. Clases Pre-naturales

Definición 4.2.1. *Una clase de módulos $\mathcal{K}$ se llama clase pre-natural si es cerrada bajo tomar copias isomorfas, submódulos, sumas directas arbitrarias* *y para todo* $N \in \mathcal{K}$, $tr_{E(N)}(\mathcal{K}) \in \mathcal{K}$. *La colección de todas las clases pre-naturales se denotará por* R*-prenat.*

Lema 4.2.2. *Una clase de módulos* $\mathcal{K}$ *es una clase pre-natural si y sólo si* $\mathcal{K}$ *es una clase* $M_{\mathcal{K}}$*-natural.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por el Lema 1.4.2 $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M_{\mathcal{K}}]$, con lo que sólo falta probar la cerradura bajo cápsulas $M_{\mathcal{K}}$-inyectivas. En efecto, como se tiene la cerradura bajo $tr_{E(N)}(\mathcal{K})$, si $N \in \mathcal{K}$ entonces $E_{M_{\mathcal{K}}}(N) = tr_{E(N)}(M_{\mathcal{K}}) \leq tr_{E(N)}(\mathcal{K}) \in \mathcal{K}$.

($\Leftarrow$) Como $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M_{\mathcal{K}}]$ entonces, usando el Lema 1.3.13, $tr_{E(N)}(\mathcal{K}) \leq$

$tr_{E(N)}(\sigma[M_{\mathcal{K}}]) = E_{M_{\mathcal{K}}}(N) \in \mathcal{K}$ para todo $N \in \mathcal{K}$, con lo que $\mathcal{K}$ es una clase pre-natural. □

Recordando el Lema 4.1.3 tenemos algo análogo en clases prenaturales.

Proposición 4.2.3. *Sea* $\mathcal{F}$ *una clase de módulos, entonces las siguientes condiciones se cumplen:*

1. $\xi_{nat}(M_{\mathcal{F}}) \cap \sigma[M_{\mathcal{F}}]$ *es la menor clase pre-natural que contiene a* $\mathcal{F}$*;*

2. $\mathcal{F}$ *es una clase pre-natural si y sólo si* $\mathcal{F} = \xi_{nat}(M_{\mathcal{F}}) \cap \sigma[M_{\mathcal{F}}]$.

Demostración. Por el Corolario 3.1.4, $\xi_{nat}(\mathcal{F}) = \xi_{nat}(M_{\mathcal{F}})$. Entonces $\xi_{nat}(\mathcal{F}) \cap \sigma[M_{\mathcal{F}}]$ es una clase $M_{\mathcal{F}}$-natural por el Lema 4.1.3 y por lo tanto es una clase pre-natural.

Por el Lema 4.2.2, es claro que $\mathcal{F} \subseteq \xi_{nat}(\mathcal{F}) \cap \sigma[M_{\mathcal{F}}]$. Ahora supongamos que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}$ con $\mathcal{L} \in R$-prenat. Por el Lema 4.2.2, $\mathcal{L}$ es una clase $M_{\mathcal{L}}$-natural y por el Corolario 4.1.4 existe $\mathcal{K}$ clase natural tal que $\mathcal{L} = \mathcal{K} \cap \sigma[M_{\mathcal{L}}]$. Entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K} \cap \sigma[M_{\mathcal{L}}]$, lo que implica que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$ y como esta última es una clase natural, entonces $\xi_{nat}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{K}$. Por otra parte, $\mathcal{F} \subseteq \sigma[M_{\mathcal{L}}]$ entonces $M_{\mathcal{F}} \in \sigma[M_{\mathcal{L}}]$ lo que implica que $\sigma[M_{\mathcal{F}}] \subseteq \sigma[M_{\mathcal{L}}]$. Combinando ambos resultados tenemos que $\xi_{nat}(M_{\mathcal{F}}) \cap \sigma[M_{\mathcal{F}}] \subseteq \mathcal{K} \cap \sigma[M_{\mathcal{L}}] = \mathcal{L}$.

El inciso (2) se sigue de (1). □

Con lo anterior, dada una clase de módulos $\mathcal{K}$, la menor clase pre-natural que la contiene se denotará como $\xi_{prenat}(\mathcal{K}) = \xi_{nat}(M_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M_{\mathcal{K}}]$.

La siguiente proposición demuestra que existen muchas clases pre-naturales.

Proposición 4.2.4. *Una clase de módulos $\mathcal{K}$ es una clase pre-natural si y sólo si $\mathcal{K}$ es la intersección de una clase natural y una clase de pretorsión hereditaria.*

Demostración. La ida es inmediata gracias a la Proposición 4.2.3.

Para el regreso, consideramos una clase de pretorsión hereditaria $\mathcal{F}$. Entonces, por el Corolario 1.4.3, existe $M \in R$-Mod tal que $\mathcal{F} = \sigma[M]$, así $\mathcal{K} = \mathcal{F} \cap \sigma[M]$. Por el Corolario 4.1.4, $\mathcal{K}$ es una clase M-natural y por lo tanto es una clase pre-natural. $\square$

Cuando demostramos que R-Nat es un conjunto construimos los conjuntos naturales, tenemos un análogo para R-prenat por lo que volvemos a utilizar $H_R(\mathcal{K}) = \{I \leq R : R/I \in \mathcal{K}\}$ con $\mathcal{K} \in R$-prenat.

Proposición 4.2.5. *La correspondencia $\mathcal{K} \longmapsto H_R(\mathcal{K})$ de R-prenat en $\mathcal{P}(L(R))$, el conjunto potencia de $L(R)$, es inyectiva.*

Demostración. Sean $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in R$-prenat. Supongamos que $H_R(\mathcal{K}) = H_R(\mathcal{L})$, pero existe $N \in \mathcal{K}$ tal que $N \notin \mathcal{L}$.

Como $N \in \mathcal{K}$ y esta es cerrada bajo submódulos, entonces para todo $x \in N$, $Rx \in \mathcal{K}$. Así $(0 : x) \in H_R(\mathcal{K})$, pues $Rx \cong R/(0 : x)$. Por hipótesis tenemos que $(0 : x) \in H_R(\mathcal{L})$, entonces $Rx \in \mathcal{L}$ para todo $x \in N$. Supongamos que $\mathcal{L} \subseteq \sigma[M]$ para algún módulo M. Entonces, por el Corolario 1.1.3, $N = \sum_{x \in N} Rx \in \sigma[M]$. Como $N \notin \mathcal{L}$, por el Corolario 4.1.5, existe $0 \neq Y \leq N$ con $Y \in \xi^c_{nat}(\mathcal{L})$. Por lo tanto ningún submódulo cíclico de Y está en $\xi_{nat}(\mathcal{L})$, en particular, no están en $\mathcal{L}$. Esto contradice el hecho de que $H_R(\mathcal{K}) = H_R(\mathcal{L})$. Así, tenemos que $\mathcal{L} = \mathcal{K}$. $\square$

Las clases pre-naturales quedan completamente determinadas por los conjuntos $H_R(\mathcal{K})$.

Definición 4.2.6. *Un conjunto no vacío $\mathscr{A}$ de ideales izquierdos de R se llama conjunto pre-natural si satisface las siguientes condiciones:*

1) Si $I, J \in \mathscr{A}$ entonces $I \cap J \in \mathscr{A}$;

2) Si $I \in \mathscr{A}$ entonces $(I : a) \in \mathscr{A}$ para todo $a \in R$;

3) Si $I \notin \mathscr{A}$ entonces $R/I \notin \sigma[G_{\mathscr{A}}]$ donde $G_{\mathscr{A}} = \bigoplus\{R/K : K \in \mathscr{A}\}$ ó existe $J \leq R$ tal que $I \subsetneq J$ y $(I : a) \notin \mathscr{A}$ para todo $a \in J \backslash I$.

La definición anterior también describe a los conjuntos naturales.

Cuando nos tomamos $\mathcal{K} \in R$-prenat y construimos $\mathscr{U} = H_R(\mathcal{K})$ entonces $M_{\mathcal{K}} \hookrightarrow G_{\mathscr{U}}$ por lo que $\sigma[M_{\mathcal{K}}] \subseteq \sigma[G_{\mathscr{U}}]$, la otra contención es clara por lo que se tiene $\sigma[M_{\mathcal{K}}] = \sigma[G_{\mathscr{U}}]$.

Supongamos que existe $I \leq R$ tal que $R/I \notin \mathcal{K}$ entonces $R/I \notin \xi_{nat}(M_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M_{\mathcal{K}}]$ con lo que tenemos $R/I \notin \sigma[M_{\mathcal{K}}] = \sigma[G_{\mathscr{U}}]$ ó $R/I \notin \xi_{nat}(M_{\mathcal{K}})$ lo que implica que existe $0 \neq J/I \leq R/I$ tal que $J/I \in \xi^c_{nat}(M_{\mathcal{K}})$, pero esto es lo que indica la condición (3) de la definición anterior.

Proposición 4.2.7. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un conjunto $\mathscr{A}$ de ideales izquierdos de R:*

(a) $\mathscr{A} = H_R(\mathcal{K})$ para algún $\mathcal{K} \in R$-prenat;

(b) $\mathscr{A}$ es un conjunto pre-natural.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Primero veamos que se satisface 1) de la Definición 4.2.6. Supongamos que existe $\mathcal{K} \in R$-prenat tal que $\mathscr{A} = \mathcal{K}$. Sean $I, J \in \mathscr{A}$ entonces $R/I, R/J \in \mathcal{K}$. Además tenemos un monomorfismo $R/(I \cap J) \hookrightarrow R/I \oplus R/J$ con regla de correspondecia $r + (I \cap J) \longmapsto (r + I, r + J)$. Así que $R/(I \cap J) \in \mathcal{K}$ ya que $\mathcal{K}$ es una clase cerrada bajo tomar copias isomorfas, submódulos y sumas directas arbitrarias entonces $I \cap J \in \mathscr{A}$.

Ahora supongamos que $I \in \mathscr{A}$ y sea $a \in R$, como $(I : a) = (\bar{0} : a + I)$, tenemos que $R/(I : a) = R/(\bar{0} : a + I) \cong R(a + I) = (Ra + I)/I \leq R/I$ por lo tanto $R/(I : a) \in \mathcal{K}$ lo que indica que $(I : a) \in \mathscr{A}$. Así, se cumple 2) de la Definición 4.2.6.

Por último, para demostrar que $\mathscr{A}$ es un conjunto pre-natural observamos lo siguiente: tenemos que $\mathcal{K} \subseteq \sigma[G_A]$ es una clase $G_{\mathscr{A}}$-natural, por lo que $\mathcal{K} = \xi_{nat}(\mathcal{K}) \cap \sigma[G_{\mathscr{A}}]$ entonces, si $I \notin \mathscr{A}$ (eso quiere decir que $R/I \notin \mathcal{K}$) tenemos dos opciones, si $R/I \notin \sigma[G_{\mathscr{A}}]$ ya terminamos. En caso contrario, supongamos que $R/I \in \sigma[G_{\mathscr{A}}]$ pero $R/I \notin \xi_{nat}(\mathcal{K})$. Entonces existe $0 \neq J/I \leq R/I$ tal que $J/I \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$. Por lo tanto para todo $a \in J \backslash I$ como se tiene que $R/(I : a) \cong (Ra + I)/I \leq J/I \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$. Entonces $R/(I : a) \notin \mathcal{K}$, es decir, $(I : a) \notin H_R(\mathcal{K})$. Así $H_R(\mathcal{K})$ es un conjunto pre-natural.

$(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos que $\mathscr{A}$ es un conjunto pre-natural. Sea $\mathcal{K} = \{M \in R\text{-}Mod : (0 : x) \in \mathscr{A}$, para cualquier $x \in M\}$, afirmamos que $\mathcal{K}$ es una clase $G_{\mathscr{A}}$-natural.

Es inmediato que $\mathcal{K} \subseteq \sigma[G_{\mathscr{A}}]$ y claramente $\mathcal{K}$ es cerrada bajo tomar copias isomorfas y submódulos.

Sea $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{K}$ y $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, si $x \in M$, $x = x_1 + \ldots + x_n$ con $x_i \in M_i$ entonces $(0 : x) = \bigcap_{i=1}^{n} (0 : x_i)$. Como $(0 : x_i) \in \mathscr{A}$ y es cerrada bajo intersecciones finitas, entonces $(0 : x) \in \mathscr{A}$ y por lo tanto $M \in \mathcal{K}$. Así $\mathcal{K}$ es cerrada bajo sumas directas arbitrarias.

Para probar que $\mathcal{K}$ es cerrada bajo cápsulas $G_{\mathscr{A}}$-inyectivas, supongamos que existe $M \in \mathcal{K}$ tal que $E_{G_{\mathscr{A}}}(M) \notin \mathcal{K}$. Entonces existe $x \in E_{G_{\mathscr{A}}}(M)$ tal que $(0 : x) \notin \mathscr{A}$. Como $R/(0 : x) \cong Rx \in \sigma[G_{\mathscr{A}}]$ entonces, por la condición (3) de la Definición 4.2.6, existe $J \leq R$ tal que $(0 : x) \lneqq J$ y para todo $a \in J \backslash (0 : x)$, $((0 : x) : a) \notin \mathscr{A}$. Sea $Y \leq Rx$ tal que $Y \cong J/(0 : x)$, entonces $0 \neq Y$ y del hecho de que $M \subseteq_e E_{G_{\mathscr{A}}}(M)$, se sigue $0 \neq Y \cap M$. Consideramos $0 \neq y \in Y \cap M$, entonces $R/(0 : y) \cong Ry \cong (Ra + (0 : x))/(0 : x) \cong R/((0 : x) : a)$ para algún $a \in J \backslash (0 : x)$. Entonces, $(0 : y) \notin \mathscr{A}$, pues $((0 : x) : a) \notin \mathscr{A}$ lo que implica $Y \cap M \notin \mathcal{K}$. Por lo tanto $M \notin \mathcal{K}$, pero eso es una contradicción. Por lo tanto $E_{G_{\mathscr{A}}}(M) \in \mathcal{K}$ y $\mathcal{K}$ es cerrada bajo cápsulas $G_{\mathscr{A}}$-inyectivas. Concluimos que $\mathcal{K}$ es una clase pre-natural.

Ahora, $H_R(\mathcal{K}) = \{I \leq R : R/I \in \mathcal{K}\} = \{I \leq R : (0 : x) \in \mathscr{A}, \forall x \in R/I\} = \{I \leq R : \forall a \in R, (I : a) \in \mathscr{A}\}$. Si $a = 1$ e $I \in H_R(\mathcal{K})$, entonces $I = (I : 1) \in \mathscr{A}$. Por lo tanto $H_R(\mathcal{K}) \subseteq \mathscr{A}$. La otra contención se sigue de la condición (2) de la definicón de conjunto pre-natural, por lo tanto $H_R(\mathcal{K}) = \mathscr{A}$. □

Corolario 4.2.8. *$\mathcal{K} \longmapsto H_R(\mathcal{K})$ es una biyección entre R-prenat y los conjuntos pre-naturales de $L(R)$:*

Demostración. Se sigue de la proposición anterior. □

De todo lo que hemos visto, tenemos que: las clases naturales y las clases libres de torsión hereditarias son clases prenaturales así como también las clases de pretorsión hereditarias (por ser de la forma $\sigma[M]$). Además, las clases de torsión hereditarias son clases pre-naturales.

Lema 4.2.9. *Sea* $\{\mathcal{K}_i\}_{i\in I}$ *una familia de clases pre-naturales, entonces* $\bigcap_{i\in I}\mathcal{K}_i$ *es una clase pre-natural.*

Demostración. Para todo $i \in I$ existe M_i tal que $\mathcal{K}_i = \xi_{nat}(\mathcal{K}_i) \cap \sigma[M_i]$. Por lo tanto $\bigcap_{i\in I}\mathcal{K}_i = \bigcap_{i\in I}(\xi_{nat}(\mathcal{K}_i) \cap \sigma[M_i]) = (\bigcap_{i\in I}\xi_{nat}(\mathcal{K}_i)) \cap (\bigcap_{i\in I}\sigma[M_i])$. Como la intersección de clases naturales es una clase natural, así como también la intersección de clases de pretorsión hereditarias es una clase de pretorsión hereditarias. Por lo tanto $\bigcap_{i\in I}\mathcal{K}_i$ es la intersección de una clase natural con una clase de pretorsión hereditaria, por la Proposición 4.2.4 es una clase pre-natural. $\square$

Dada una clase de módulos $\mathcal{F}$, consideramos $\mathscr{B} = \{\mathcal{K} \in R\text{-prenat} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}\}$. Entonces $\mathcal{F} \subseteq \bigcap_{\mathcal{K}\in\mathscr{B}}\mathcal{K}$ y ésta última es clase pre-natural por el Lema 4.2.9. Pero también, por la Proposición 4.2.8, tenemos que $\mathcal{F} \subseteq \bigcap_{\mathcal{K}\in\mathscr{B}}\mathcal{K} = \xi_{nat}(M_{\mathcal{F}}) \cap \sigma[M_{\mathcal{F}}]$ es la clase pre-natural mas pequeña que contiene a $\mathcal{F}$. Por lo tanto, la clase pre-natural que genera una clase de módulos cualquiera $\mathcal{F}$ está dada de las siguientes formas: $\xi_{prenat}(\mathcal{F}) = \bigcap_{\mathcal{K}\in\mathscr{B}}\mathcal{K} = \xi_{nat}(M_{\mathcal{F}}) \cap \sigma[M_{\mathcal{F}}]$. Cuando tenemos una clase de la forma $\{N\}$ entonces a la menor clase pre-natural que genera N se le denotará $\xi_{prenat}(N)$.

Terminamos la sección con un teorema clave sobre R-prenat.

Observación 4.2.10. *R-prenat es una retícula completa con elemento menor* $\mathbf{0} = \{0\}$ *y elemento mayor* $\mathbf{1} = R$*-mod bajo el siguiente orden parcial y las operaciones reticulares:*

1) Para $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in R$*-prenat,* $\mathcal{K}_1 \leq \mathcal{K}_2$ *si y sólo si* $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$*;*

2) Si $\{\mathcal{K}_i\}_{i\in I} \subseteq R$*-prenat entonces* $\bigwedge_{i\in I}^{prenat}\mathcal{K}_i = \bigcap_{i\in I}\mathcal{K}_i$ *y* $\bigvee_{i\in I}^{prenat}\mathcal{K}_i = \xi_{prenat}(\bigcup_{i\in I}\mathcal{K}_i)$*, son el supremo y el ínfimo respectivamente.*

4.3. Propiedades reticulares de R-prenat.

Los siguientes teoremas muestran algunas subretículas de R-prenat estudiadas previamente.

Teorema 4.3.1. *Para cualquier módulo M, R-Mnat es una subretícula de R-prenat.*

Demostración. Sea $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in R$-Mnat. Claramente $\mathcal{K}_1 \overset{prenat}{\bigwedge} \mathcal{K}_2 \in R$-Mnat. Tenemos que $\mathcal{K}_1 \overset{prenat}{\bigvee} \mathcal{K}_2$ es una clase pre-natural, sólo falta demostrar que es cerrada bajo cápsulas M-inyectivas para que $\mathcal{K}_1 \overset{prenat}{\bigvee} \mathcal{K}_2 \in R$-Mnat. Sea $N \in \mathcal{K}_1 \overset{prenat}{\bigvee} \mathcal{K}_2$, con ayuda del Lema de Zorn encontramos una familia $\{X_t\}_{t\in T}$ independiente máxima de submódulos de N que están en $\mathcal{K}_1$, entonces $X = \bigoplus_{t\in T} X_t \in \mathcal{K}_1$ y consideramos un seudocomplemento de X en N al que llamaremos P. Entonces $X \cap P = 0$ y $X \oplus P \subseteq_e N$. Usando nuevamente el Lema de Zorn encontramos una familia $\{Y_s\}_{s\in S}$ independiente máxima de submódulos de P que están en $\mathcal{K}_2$, entonces $Y = \bigoplus_{s\in S} Y_s \in \mathcal{K}_2$. Afirmamos que $Y \subseteq_e P$. En caso contrario, existe $0 \neq Q \leq P$ tal que $Q \cap Y = 0$. Como $Q \leq N \in \mathcal{K}_1 \overset{prenat}{\bigvee} \mathcal{K}_2 \subseteq \xi_{nat}(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2)$ entonces, por el inciso (II) del Teorema 3.1.3, existe $0 \neq V \leq Q$ tal que $V \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$. Si $V \in \mathcal{K}_1$, el hecho de que $X \cap P = 0$ implica $X \cap V = 0$. Entonces la siguiente familia $\{X_t\}_{t\in T} \cup \{V\}$ sería independiente y estaría contenida en $\mathcal{K}_1$ pero contradice la maximidad de $\{X_t\}_{t\in T}$. Por lo tanto $V \in \mathcal{K}_2$. Por otra parte, el hecho de que $Y \cap Q = 0$ implica $Y \cap V = 0$. Entonces la familia $\{Y_s\}_{s\in S} \cup \{V\}$ sería independiente y estaría contenida en $\mathcal{K}_2$ contradiciendo la maximidad de $\{Y_s\}_{s\in S}$. En ambos casos se obtiene una contradicción por lo que se concluye que $Y \subseteq_e P$ y entonces $X \oplus Y \subseteq_e N$. Por lo tanto $E(N) = E(X \oplus Y) = E(X) \oplus E(Y)$. Como grupos

$$Hom_R(M, E(X) \oplus E(Y)) \cong Hom_R(M, E(X)) \oplus Hom_R(M, E(Y))$$

Por lo tanto, se tiene que

$$E_M(N) = \sum\{f(M) : f \in Hom_R(M, E(X) \oplus E(Y))\} \subseteq$$

$$\sum\{f_1(M) : f_1 \in Hom_R(M, E(X))\} + \sum\{f_2(M) : f_2 \in Hom_R(M, E(Y))\} = E_M(X) \oplus E_M(Y)$$

Como $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ son cerradas bajo cápsulas M-inyetivas se sigue $E_M(X) \in \mathcal{K}_1 \leq \mathcal{K}_1 \overset{prenat}{\bigvee} \mathcal{K}_2$ y $E_M(Y) \in \mathcal{K}_2 \leq \mathcal{K}_1 \overset{prenat}{\bigvee} \mathcal{K}_2$ entonces $E_M(X) \oplus E_M(Y) \in \mathcal{K}_1 \overset{prenat}{\bigvee} \mathcal{K}_2$ por lo que $E_M(N) \in \mathcal{K}_1 \overset{prenat}{\bigvee} \mathcal{K}_2$. $\square$

Corolario 4.3.2. *R-Nat es una subretícula de R-prenat.*

Teorema 4.3.3. *$\mathcal{F}(R)$ es una subretícula de R-prenat.*

Demostración. Sean $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in \mathcal{F}(R)$, claramente $\mathcal{K}_1 \overset{prenat}{\bigwedge} \mathcal{K}_2 \in \mathcal{F}(R)$. Sea $\mathcal{L} = \mathcal{K}_1 \overset{prenat}{\bigvee} \mathcal{K}_2$ por el Corolario 4.3.2 $\mathcal{L} = \xi_{nat}(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2)$ y con ayuda de la Proposición 3.3.6, $\mathcal{L} = \{M \in R\text{-Mod} : X \in \mathcal{K}_1$ y $M/X \in \mathcal{K}_2$, para algún $X \leq M\}$. Sólo basta demostrar que $\mathcal{L}$ es cerrada bajo productos arbitrarios. Para ello, sea $\{M_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{L}$. Entonces para cada $i \in I$ existe $X_i \leq M_i$ tal que $X_i \in \mathcal{K}_1$ y $M_i/X_i \in \mathcal{K}_2$. Entonces $\prod_{i\in I} X_i \in \mathcal{K}_1$ y $(\prod_{i\in I} M_i)/(\prod_{i\in I} X_i) \cong \prod_{i\in I}(M_i/X_i) \in \mathcal{K}_2$. Con lo anterior concluimos que $\prod_{i\in I} M_i \in \mathcal{L}$. $\square$

Teorema 4.3.4. *$\mathcal{T}^p(R)$ es una subretícula completa de R-prenat.*

Demostración. Sea $\{\mathcal{K}_j\}_{j\in J} \subseteq \mathcal{T}^p(R)$. Claramente $\overset{prenat}{\bigwedge_{j\in J}} \mathcal{K}_j \in \mathcal{T}^p(R)$. Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un conjunto de representantes de clases de isomorfismo de módulos cíclicos en $\bigcup_{j\in J} \mathcal{K}_j$ y $M = \bigoplus_{t\in T} X_t$. Por el Teorema 4.2.10, $\overset{prenat}{\bigvee_{j\in J}} \mathcal{K}_j = \xi_{nat}(\bigcup_{j\in J} \mathcal{K}_j) \cap \sigma[M]$. Recordando que para cada $N \in R$-Mod, $\sigma[N] \in \mathcal{T}^p(R)$, basta demostrar que $\overset{prenat}{\bigvee_{j\in J}} \mathcal{K}_j = \sigma[M]$. Si no es el caso, entonces existe $Y \in \sigma[M]$ tal que $Y \notin \xi_{nat}(\bigcup_{j\in J} \mathcal{K}_j)$ pero por el inciso (II) del Teorema 3.1.3 existe $W \leq Y$ distinto de cero tal que para todo $V \leq W$ distinto de cero y para todo $A \in \bigcup_{j\in J} \mathcal{K}_j$ se tiene que $V \not\hookrightarrow A$. Por lo tanto ningún submódulo de W distinto de cero está en $\xi_{nat}(\bigcup_{j\in J} \mathcal{K}_j)$. Por lo anterior podemos suponer que Y es cíclico. Como M es una suma directa de cíclicos entonces, para todo conjunto I, $M^{(I)}$ es una suma directa de cíclicos, es decir $M^{(I)} = \bigoplus_{k\in K} Rx_k$, donde $Rx_k = X_t$ para alguna t. Como $Y \in \sigma[M]$ entonces, sin pérdida de generalidad, $Y \leq (\bigoplus_{k\in K} Rx_k)/V$, para algún $Y \leq \bigoplus_{k\in K} Rx_k$.

Considerando $Y = Ry$ con $y \in (\bigoplus_{k\in K} Rx_k)/V$ y el epimorfismo natural $\pi : \bigoplus_{k\in K} Rx_k \longrightarrow (\bigoplus_{k\in K} Rx_k)/V$, tenemos que $(\bigoplus_{k\in K} Rx_k)/V = \sum_{k\in K} R\pi(x_k)$. Como $y \in (\bigoplus_{k\in K} Rx_k)/V$, por lo anterior, $y = r_1\pi(x_{k_1}) + \ldots r_n\pi(x_{k_n})$, con $n \in \mathbb{N}$.

Sea $r_0 \in \{r \in R : 0 \neq ry\}$ tal que la longitud de r_0y sea mínima, entonces $\mathrm{r}_0y = r_0r_1\pi(x_{k_1}) + \ldots + r_0r_s\pi(x_{k_s})$ con $s \leq n$. Afirmamos que para todo $i = 1, \ldots, s, (0 : r_0r_i\pi(x_{k_i})) \leq (0 : r_0y)$ pues, en caso contrario, si $b \in (0 : r_0r_i\pi(x_{k_i}))$ y $0 \neq br_0y$ entonces la longitud de br_0y es menor que la longitud de r_0y. Esto es una contradicción pues ya era mínima. Por otro lado $(0 : r_0r_ix_{k_i}) \leq (0 : r_0r_i\pi(x_{k_i}))$, entonces $(0 : r_0r_ix_{k_i}) \leq (0 : r_0y)$, para todo $i = 1, \ldots, s$. Consideramos el epimorfismo inducido $\varphi : R/(0 : r_0r_ix_{k_i}) \longrightarrow R/(0 : r_0y)$ con lo que tenemos $R/(0 : r_0y) \cong (R/(0 : r_0r_ix_{k_i}))/(Nuc(\varphi))$. Entonces, $Rr_0y \cong R/(0 : r_0y) \cong (R/(0 : r_0r_ix_{k_i}))/(Nuc(\varphi)) \cong (Rr_0r_ix_{k_i})/L$ con $L \leq Rr_0r_ix_{k_i}$. Como $Rr_0y \leq Ry = Y$ y $L \leq Rr_0r_ix_{k_i} \leq Rx_i = X_t$ para alguna $t \in T$, entonces Y tiene un submódulo no cero que es isomorfo a un submódulo de un factor de alguna X_t. Pero $X_t \in \mathcal{K}_j$ para algún $j \in J$, entonces Y tiene un submódulo que está en $\mathcal{K}_j$. Esto contradice el hecho de que $Y \notin \xi_{nat}(\bigcup_{j\in J} \mathcal{K}_j)$. Así, $\bigvee_{j\in J}^{prenat} \mathcal{K}_j = \sigma[M]$ con lo cual $\mathcal{T}^p(R)$ es una subretícula completa de R-prenat. $\square$

En la Definición 3.3.9 se habló de los átomos de R-Nat y los módulos atómicos. El siguiente teorema relaciona los átomos de R-Nat con los átomos de R-prenat.

Definición 4.3.5. *Se dice que M es fuertemente atómico si $\xi_{prenat}(M)$ es un átomo de R-prenat.*

Teorema 4.3.6. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un módulo M:*

1. *M es fuertemente atómico;*

2. *M es atómico y $M \in \sigma[N]$ para cualquier $0 \neq N \subseteq M$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que M no es atómico, entonces por la Proposición 3.3.11, existen X, Y submódulos no cero de M tales que no tienen submódulos isomorfos. Entonces $X \notin \xi_{prenat}(Y)$, pues $X \notin \xi_{nat}(Y)$. Como $Y \subseteq M$ se sigue que $\xi_{prenat}(Y) \subseteq \xi_{prenat}(M)$. Esto implica que $\xi_{prenat}(Y) = \xi_{prenat}(M)$ pues M es fuertemente atómico. Lo anterior contradice lo que habíamos supuesto. Así, M es atómico.

Sea $0 \neq N \subseteq M$ entonces $\xi_{prenat}(N) = \xi_{prenat}(M)$. Por lo tanto $M \in \xi_{prenat}(N) = \xi_{nat}(N) \cap \sigma[N]$ y en consecuencia $M \in \sigma[N]$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Basta con demostrar que $M \in \xi_{prenat}(X)$ para todo $0 \neq X \in \xi_{prenat}(M)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \neq X \leq M$. Por (2) tenemos que $M \in \sigma[X]$. Como M es atómico, todo submódulo no cero de M tiene un submódulo isomorfo a un submódulo de X. Por lo tanto $M \in \xi_{nat}(X)$ lo cual implica que $M \in \xi_{nat}(X) \cap \sigma[X] = \xi_{prenat}(X)$. $\square$

Resulta importante que la existencia de coátomos en $\mathcal{T}^p(R)$ y el hecho de que sea subretícula completa de R-prenat influya en los coátomos de R-prenat.

Las siguientes proposiciones tratan acerca de los coátomos de R-prenat.

Teorema 4.3.7. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

1. *Todo elemento propio de R-prenat está contenido en un coátomo de R-prenat.*

2. *No existen R-módulos X, Y distintos de cero tales que :*

   (a) $R \in \sigma[X]$;

(b) X, Y no tienen submódulos no cero isomorfos;

(c) Y no contiene submódulos atómicos.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que existen X, Y módulos no cero que satisfacen (a)-(c). Construimos $\mathcal{K} = \xi^c_{nat}(Y)$. Por (b) $X \in \mathcal{K}$ y como $\mathcal{K} \in R$-prenat afirmamos que $\mathcal{K}$ no está contenido en un coátomo de R-prenat. En efecto, sea $\mathcal{L} \in R$-prenat tal que $\mathcal{K} \leq \mathcal{L} < R$-mod, por la Proposición 4.2.4, existe un R-módulo M tal que $\mathcal{L} = \xi_{nat}(\mathcal{L}) \cap \sigma[M]$. Como $X \in \mathcal{K}$, entonces $X \in \sigma[M]$ con lo que $\sigma[M] = R$-mod. Por el inciso (a) se tiene que $\mathcal{L} = \xi_{nat}(\mathcal{L})$, es decir, $\mathcal{L}$ es una clase natural. Tenemos que $\mathcal{L} \neq R$-mod, entonces existe $A \in R$-mod tal que $A \notin \mathcal{L} = \xi_{nat}(\mathcal{L})$. Por lo tanto existe $0 \neq B \leq A$ tal que $B \in \xi^c_{nat}(\mathcal{L})$ y entonces $B \notin \mathcal{K} = \xi^c_{nat}(Y)$. Así que existe $0 \neq C \leq B$ tal que $C \in \xi_{nat}(Y)$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $C \hookrightarrow Y$. Por (c), C no es atómico, entonces existen C_1, C_2 submódulos de C distintos de cero tales que no tienen submódulos isomorfos. Consideramos $\mathcal{F} = \mathcal{L} \cup \{C_1\}$ y construimos $\mathcal{H} = \xi_{nat}(\mathcal{F})$, entonces $\mathcal{L} < \mathcal{H}$ pues $C_1 \in \mathcal{H}, C_1 \notin \mathcal{L}$ y $C_2 \notin \mathcal{H}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que (1) no se cumple. Entonces existe $\mathcal{K} \in R$-prenat con R-mod$\neq \mathcal{K}$ tal que $\mathcal{K}$ no está contenido en algún coátomo de R-prenat.

Por la Proposición 4.2.3, $\mathcal{K} = \xi_{nat}(M_{\mathcal{K}}) \cap \sigma[M_{\mathcal{K}}]$. Sí $\sigma[M_{\mathcal{K}}] \neq R$-mod, por el Corolario 2.2.4 y la Proposición 2.3.1, existe un elemento máximo $\mathcal{L}$ en $\mathcal{T}^p(R)$ tal que $\sigma[M_{\mathcal{K}}] \leq \mathcal{L} \neq R$-mod. Como $\mathcal{L}$ no es un coátomo de R-prenat, entonces $\mathcal{L} < \mathcal{H} \neq R$-mod para algún $\mathcal{H} \in R$-prenat. Notemos que $\mathcal{H} \subseteq \sigma[M_{\mathcal{H}}]$ y entonces, por la maximalidad de $\mathcal{L}$ en $\mathcal{T}^p(R)$, tenemos que $\sigma[M_{\mathcal{H}}] = R$-mod. Entonces, desde un principio podemos suponer que $\sigma[M_{\mathcal{K}}] = R$-mod, con lo que $\mathcal{K} = \xi_{nat}(M_{\mathcal{K}})$; es decir $\mathcal{K}$ es una clase natural. Como $\mathcal{K} \neq R$-mod, entonces existe un R-módulo N tal que $N \notin \mathcal{K} = \xi_{nat}(\mathcal{K})$, lo cual implica que existe $0 \neq Y \leq N$ tal que $Y \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$. Sea $X = M_{\mathcal{K}}$. Demostraremos que Y no tiene submódulos atómicos y por lo tanto, la pareja X, Y contradice (2).

En efecto, si Y tiene un submódulo atómico P, entonces $P \in \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$, lo cual implica que $\xi_{nat}(P) \subseteq \xi^c_{nat}(\mathcal{K})$. Así, por el Corolario 3.1.7, tenemos que $\mathcal{K} = \xi_{nat}(\mathcal{K}) \subseteq \xi^c_{nat}(P)$.

Como $\sigma[M_{\mathcal{K}}] = R$-mod entonces cualquier clase pre-natural que contenga a $\xi^c_{nat}(P)$ es una clase natural. Por el Corolario 3.1.7 y el hecho de que P es atómico, se tiene que $\xi^c_{nat}(P)$ es un coátomo de R-prenat, pero esto contradice lo que habíamos supuesto. $\square$

Corolario 4.3.8. *Si todo R-módulo distinto de cero contiene un módulo atómico, entonces todo elemento de R-prenat está contenido en un coátomo de R-prenat.*

Proposición 4.3.9. *Existe al menos un coátomo en R-prenat*

Demostración. Sean X un módulo simple y $\mathcal{K} = \xi^c_{nat}(X)$. Si $\mathcal{K}$ es un coátomo no hay nada que demostrar. Supongamos que no lo es, entonces $\mathcal{K} < \mathcal{L} \neq R$-mod para algún $\mathcal{L} \in R$-prenat. Por la Proposición 4.2.3 $\mathcal{L}$ es $M_{\mathcal{L}}$-natural, así $\mathcal{L} \subseteq \sigma[M_{\mathcal{L}}]$.

Tenemos entonces que $\sigma[M_{\mathcal{L}}] \neq R$-mod pues, en caso contrario, $\mathcal{L}$ es una clase natural que contiene a $\mathcal{K}$, pero $\mathcal{K}$ es un coátomo en R-Nat , por lo que $\mathcal{L} = R$-mod. Esto contradice lo que habíamos supuesto.

Por la Proposición 2.3.1, existe $\mathcal{H} \in \mathcal{T}^p(R)$ máximo tal que $\sigma[M_{\mathcal{L}}] \subseteq \mathcal{H} \neq R$-mod. Si $\mathcal{H} < \mathcal{G}$ con $\mathcal{G} \in R$-prenat, entonces $\sigma[M_{\mathcal{G}}] = R$-mod por lo que $\mathcal{G}$ es una clase natural y, por lo anterior, $\mathcal{G} = R$-mod.

Así, $\mathcal{H}$ es un coátomo de R-prenat. $\square$

Terminamos este capítulo obteniendo resultados de la estructura del anillo.

Proposición 4.3.10. *Son equivalentes para un anillo R:*

1) $\bigvee^{prenat} \{\mathcal{K} : R\text{-}mod \neq \mathcal{K} \in R\text{-}prenat\} \neq R\text{-}mod.$

2) (a) R es un anillo perfecto derecho con un único simple salvo isomorfismo;

(b) Para cualesquiera dos ideales izquierdos I, J, si $I \cap J = 0$ entonces existe un subconjunto finito $X \subseteq R$ tal que $\bigcap_{x\in X}(I : x) = 0$ o $\bigcap_{x\in X}(J : x) = 0$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Si $\mathcal{K} \in R$-Nat con $\{0\} \neq \mathcal{K} \neq R$-mod entonces R-mod $\neq \xi^c_{nat}(\mathcal{K}) \in R$-Nat. Como $\mathcal{K} \vee \xi^c_{nat}(\mathcal{K}) = R$-mod eso contradice (1). Por lo tanto R-Nat=$\{(0),R\text{-mod}\}$, es decir, $|R\text{-Nat}| = 2$. Por la Proposición 3.3.15 R es semiartiniano izquierdo con un único simple salvo isomorfismo. Afirmamos que R es perfecto derecho. Para ello, demostraremos que $\bar{R} = R/J(R)$ es semisimple y $J(R)$ es t-nilpotente izquierdo.

El hecho de que R sea semiartiniano izquierdo implica que $J(R)$ es t-nilpotente izquierdo (Stenstrom [11, pp. 183–184]). Para demostrar que $\bar{R}$ es semisimple basta ver que $Zoc(\bar{R}) = \bar{R}$. Supongamos lo contrario, como R es semiartiniano izquierdo entonces $Zoc(\bar{R}) \subseteq_e \bar{R}$. Al ser finitamente generado, existe un submódulo máximo I_0 tal que $Zoc(\bar{R}) \leq I_0 \leq \bar{R}$. Entonces $I_0 \subseteq_e \bar{R}$. Como $Rad(\bar{R}) = 0$, entonces existe $K \leq \bar{R}$ simple y $J_0 \leq \bar{R}$ submódulo máximo tal que $K \cap J_0 = 0$ con lo que $K \oplus J_0 = \bar{R}$.

Como R tiene un único simple salvo isomorfismo se sigue que $\bar{R}/I_0 \cong \bar{R}/J_0$ pues ambos son máximos de $\bar{R}$. Como $K \oplus J_0 = \bar{R}$, entonces $\bar{R}/J_0 \cong K$ el cual es un sumando directo de $\bar{R}$, así $\bar{R}/J_0$ y por lo tanto $\bar{R}/I_0$ son $\bar{R}$-módulos proyectivos. Por lo tanto $Nuc(\pi)$ es un sumando directo de $\bar{R}$ con $\pi : \bar{R} \longrightarrow \bar{R}/I_0$, lo cual es una contradicción pues $Nuc(\pi) = I_0 \subseteq_e \bar{R}$.

Entonces, $\bar{R}$ es semisimple y con ello R es perfecto derecho.

Claramente $\bigvee^{prenat} \{\mathcal{K} : R\text{-mod} \neq \mathcal{K} \in R\text{-prenat}\} = \bigvee^{prenat} \{\mathcal{K} : R\text{-mod} \neq \mathcal{K} \in \mathcal{T}^p(R)\}$ y es el único coátomo de $\mathcal{T}^p(R)$. Por el inciso (c) del Teorema 2.2.8 se tiene (b).

(2) $\Rightarrow$ (1) Por el inciso (a) y la Proposición 3.3.15, R-Nat=$\{(0),R\text{-mod}\}$. Por el inciso (b) y el Teorema 2.2.8, $\mathcal{T}^p(R)$ tiene un único coátomo. Entonces $\bigvee^{prenat} \{\mathcal{K} : R\text{-mod} \neq \mathcal{K} \in R\text{-prenat}\} = \bigvee^{prenat} \{\mathcal{K} : R\text{-mod} \neq \mathcal{K} \in \mathcal{T}^p(R)\} \neq R$-mod. $\square$

Definición 4.3.11. *Un anillo R se llama QI-izquierdo si todo R-módulo casi inyectivo es inyectivo.*

Teorema 4.3.12. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

1. *R-prenat = R-Nat;*

2. *$\mathcal{T}^p(R) \subseteq R$-Nat;*

3. *R es un anillo QI-izquierdo;*

4. *R-prenat es una retícula con complemento único.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Es claro.

(2) $\Rightarrow$ (3) Sea M un módulo casi-inyectivo. Consideramos $\sigma[M]$ que es una clase de pretorsión hereditaria. Por (2), es una clase natural y entonces $E(M) \in \sigma[M]$. Como M es M-inyectivo, por el Lema 1.3.14 se tiene que es N-inyectivo para todo $N \in \sigma[M]$. En particular es $E(M)$-inyectivo y, por la Proposición 1.3.17, M es sumando directo de $E(M)$, con lo que concluimos que $M = E(M)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Dada una clase pre-natural $\mathcal{K}$, sólo falta demostrar que es cerrada bajo cápsulas inyectivas para que sea clase natural.

Supongamos que $\mathcal{K} \subseteq \sigma[M]$ es una clase M-natural para algún módulo M. Sea $N \in \mathcal{K}$. Para demostrar que $E(N) \in \mathcal{K}$ por el Lema 4.1.2 basta ver que $E(N) \in \sigma[M]$. Como $N \in \sigma[M]$ por el Lema 1.3.15, $N \leq E_M(N) \leq E(N)$. El hecho de que $E_M(N)$ sea M-inyectivo por la Proposición 1.3.11, implica que $E_M(N)$ es $E_M(N)$-inyectivo por lo tanto es casi-inyectivo y por hipótesis es inyectivo. Así $E(N) = E_M(N) \in \sigma[M]$.

(1) $\Rightarrow$ (4) Se sigue del Corolario 3.3.5 pues R-Nat es una retícula de Boole completa.

(4) $\Rightarrow$ (2) Sea $\mathcal{K} \in \mathcal{T}^p(R)$. Por (4), existe $\mathcal{L} \in R$-prenat tal que $\mathcal{K} \wedge^{prenat} \mathcal{L} = \{0\}$ y $\mathcal{K} \vee^{prenat} \mathcal{L} = R$-mod. Como $\mathcal{L} \wedge^{prenat} \xi^c_{nat}(\mathcal{L}) = \{0\}$ y $\mathcal{K} \subseteq \xi^c_{nat}(\mathcal{L})$ entonces $\mathcal{L} \vee^{prenat} \xi^c_{nat}(\mathcal{L}) = R$-mod, por (4) $\mathcal{K} = \xi^c_{nat}(\mathcal{L})$ lo que implica $\mathcal{K}$ es clase natural. $\square$

Lema 4.3.13. *Si R es un anillo semiartiniano izquierdo y QI-izquierdo entonces es semisimple.*

Demostración. Un módulo semisimple es casi-inyectivo por lo tanto $Zoc(R)$ es casi-inyectivo y entonces es inyectivo. Como R es semiartiniano izquierdo se sigue que $Zoc(R) = R$. Por lo tanto el anillo es semisimple. $\square$

Teorema 4.3.14. *Un anillo R es semisimple si y sólo si R-prenat $= \mathcal{F}(R)$*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si R es semisimple entonces es artiniano izquierdo por lo tanto semiartiniano izquierdo con lo que R-Nat $= \mathcal{F}(R)$ por la Proposición 3.2.7. Como R es QI-izquierdo se sigue del Teorema 4.3.12 que R-Nat $= R$-prenat. Por lo tanto R-prenat $= \mathcal{F}(R)$.

($\Leftarrow$) Por la Proposición 3.2.7 y el Teorema 4.3.12 R es semiartiniano izquierdo y QI- izquierdo, entonces por el Lema 4.3.13 R es semisimple. $\square$

Apéndice A

Teoría de módulos.

A.1. Propiedad universal del núcleo y conúcleo.

Teorema A.1.1 (Teorema de factorización). *Todo homomorfismo* $f : M \longrightarrow N$ *se puede factorizar como* $f = f'\pi$ *donde* $\pi : M \longrightarrow M/Nuc(f)$ *es el epimorfismo canónico y* $f' : M/Nuc(f) \longrightarrow N$ *es un homomorfismo con regla de correspondencia,* $a + Nuc(f) \longmapsto f(a)$*. También se cumple que* f' *es un isomorfismo si y sólo si* f *es un epimorfismo. Ver el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & N \\ & M/Nuc(f) \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Como consecuencia del Teorema de Factorización tenemos los teoremas de isomorfismo.

Teorema A.1.2 (Primer Teorema de Isomorfismo). *Sea* $N, L \leq M$ *entonces tenemos*

$$(N + L)/L \cong N/(N \cap L)$$

.

Teorema A.1.3 (Segundo Teorema de Isomorfismo). *Sea* $L \leq N \leq M$ *entonces*

$$M/N \cong (M/L)/(N/L)$$

.

Una generalización del Teorema de Factorización es el siguiente resultado.

Teorema A.1.4. *Sea $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo y $\varphi : M \longrightarrow L$ un epimorfismo tales que $Nuc(\varphi) \leq Nuc(f)$. Entonces existe un homomorfismo $\lambda : L \longrightarrow N$ que satisface:*

1) $f = \lambda\varphi$;

2) $Im(\lambda) = Im(f)$;

3) λ *es un monomorfismo si y sólo si* $Nuc(\varphi) = Nuc(f)$.

Checar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \\ L \arrow[ur, dashed, "\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema A.1.5 (Propiedad universal del núcleo). *Si tenemos una sucesión exacta en la cual i representa la inclusión y π el epimorfismo canónico entonces para cualquier homomorfismo $f : L \longrightarrow M$ con $\pi f = 0$ existe $h : L \longrightarrow N$ tal que $ih = f$.*

$$\begin{tikzcd} & & L \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "\pi"] & M/N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Demostración. Por hipótesis $\pi f = 0$ entonces $Im(f) \leq Nuc(\pi) = N$ por lo que $h = f|^N$ es la función buscada. $\square$

Teorema A.1.6 (Propiedad universal del conúcleo). *Si tenemos una sucesión exacta en la cual i representa la inclusión y π el epimorfismo canónico entonces para cualquier homomorfismo $f : M \longrightarrow L$ con $fi = 0$ existe $h : M/N \longrightarrow L$ tal que $h\pi = f$.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & M/N \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "h"] & 0 \\ & & L & & \end{tikzcd}$$

Demostración. Del hecho de que $fi = 0$ tenemos que $Im(i) \leq Nuc(f)$. Como la sucesión es exacta tenemos que $Im(i) = Nuc(\pi)$, así $Nuc(\pi) \leq Nuc(f)$ y se cumplen las hipótesis del Teorema A.1.4, por lo tanto existe $h : M/N \longrightarrow L$ tal que $h\pi = f$. $\square$

A.2. Sumas Directas y Productos.

Teorema A.2.1 (Propiedad universal del producto). *Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de módulos. Sea N un módulo y $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ homomorfismos tales que $f_\alpha : N \longrightarrow M_\alpha$. Entonces existe un único homomorfismo $f : N \longrightarrow \prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ tal que para cada $\alpha \in \Lambda$ el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \arrow[rr, "\pi_\alpha"] & & M_\alpha \\
& N \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

A la pareja $(\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha, (\pi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$ se le llama producto directo de la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Teorema A.2.2 (Propiedad universal de la suma directa). *Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de módulos. Sea N un módulo y $(f_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ homomorfismos tales que $f_\alpha : M_\alpha \longrightarrow N$. Entonces existe un único homomorfismo $f : \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \longrightarrow N$ tal que para cada $\alpha \in \Lambda$ el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
M_\alpha \arrow[rr, "i_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & & \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha \arrow[dl, "f"] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

A la pareja $(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha, (i_\alpha)_{\alpha\in\Lambda})$ se le llama suma directa de la familia $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

Proposición A.2.3. *Si $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\{N_\beta\}_{\beta\in\Omega}$ son dos familias de módulos entonces $F : Hom_R(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha, \prod_{\beta\in\Omega} N_\beta) \longrightarrow \prod_{(\alpha,\beta)\in\Lambda\times\Omega} Hom_R(M_\alpha, N_\beta)$ dada por*

$F(\varphi) = (\pi_\beta \varphi i_\alpha)$, para toda $\varphi \in Hom_R(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha, \prod_{\beta\in\Omega} N_\beta)$ es un isomorfismo de grupos.

Como consecuencia de la proposición, tenemos dos casos especiales $Hom_R(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha, N) \cong \prod_{\alpha\in\Lambda} Hom_R(M_\alpha, N)$ y $Hom_R(M, \prod_{\beta\in\Omega} N_\beta) \cong \prod_{\beta\in\Omega} Hom_R(M, N_\beta)$.

A.3. Familias independientes y Anillos Perfectos.

Lo siguiente explica la existencia de familias independientes máximas de submódulos de un módulo.

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad referente a los submódulos de un módulo M dado y supondremos que existen submódulos de M que cumplen $\mathcal{P}$. Construimos $\mathscr{A} = \{\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} : N_\alpha \leq M$ para toda $\alpha \in \Lambda$ y $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia independiente de módulos que cumplen $\mathcal{P}\}$.

Si $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$,$\{N_\beta\}_{\beta\in\Lambda'}$ son dos familias en $\mathscr{A}$ decimos que $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \preceq \{N_\beta\}_{\beta\in\Lambda'}$ si existe una función inyectiva de $\Lambda \hookrightarrow \Lambda'$ y para toda $\alpha \in \Lambda$, existe $\beta \in \Lambda$ tal que $N_\alpha \cong N_\beta$. Así, $(\mathscr{A}, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Vamos a demostrar que $\mathscr{A}$ tiene elementos máximos, para ello nos tomamos una cadena $\mathscr{C} = \{\{N_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_i}\}_{i\in I}$.

Afirmamos $\{N_\alpha\}_{\alpha\in\bigcup\Lambda_i} = \bigcup\mathscr{C} \in \mathscr{A}$. Sea $\alpha \in \bigcup_{i\in I}\Lambda_i$ entonces para alguna $i \in I, \alpha \in \Lambda_i$ por lo tanto $N_\alpha \leq N$.

Si $\bigcup\mathscr{C}$ no fuese indepediente entonces existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $N_\alpha \cap (\sum_{\alpha\neq\beta} N_\beta) \neq 0$. Así, sea $n \in N_\alpha \cap (\sum_{\alpha\neq\beta} N_\beta)$ distinto de cero, él tendrá dos representaciones $n = n_\alpha$ y $n = n_{\beta_1} + \ldots + n_{\beta_k}$, sea s un índice para el cual $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \alpha \in \Lambda_s$ por lo tanto $N_{\beta_1}, \ldots, N_{\beta_k}, N_\alpha \in \{N_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda_s}$ el cual es independiente y eso es una contradicción, por lo tanto $\bigcup\mathscr{C}$ es independiente y $\mathscr{A}$ cumple las hipótesis del Lema de Zorn entonces $\mathscr{A}$ tiene elementos máximos.

Definición A.3.1. *Un anillo se llama perfecto derecho si todo módulo derecho tiene cubierta proyectiva.*

Teorema A.3.2. *Las siguientes condiciones son equivalentes para un anillo R:*

(a) R es perfecto derecho;

(b) Todo módulo derecho tiene cubierta proyectiva;

(c) R satisface la condición de cadena descendente para ideales izquierdos cíclicos;

(d) Todo módulo izquierdo distinto de cero tiene zoclo distinto de cero y R no contiene un conjunto infinito de idempotentes ortogonales;

(e) $R/J(R)$ es semisimple y $J(R)$ es t-nilpotente izquierdo.

Apéndice B

Retículas.

B.1. Definiciones

Sea L un conjunto parcialmente ordenado con el orden parcial denotado como $\leq$ y $S \subseteq L$. Una cota superior para S en L es un elemento $x \in L$ tal que para cualquier $s \in S$, $s \leq x$. Un elemento $s_0 \in S$ se dice que es el elemento mayor en S si para todo $s \in S$, $s \leq s_0$. De forma análoga se define una cota inferior para S y el elemento menor de S. La mínima cota superior para S es el menor elemento en el conjunto de las cotas superiores, similarmente se define la máxima cota inferior.

Definición B.1.1. *Una retícula es un conjunto parcialmente ordenado tal que cualesquiera dos elementos x, y tienen mínima cota superior que se denota por $x \vee y$ y máxima cota inferior que se denota por $x \wedge y$.*

Definición B.1.2. *Sea L una retícula. Una subretícula de L es un subconjunto L' de L tal que para cualesquiera $x, y \in L'$ entonces $x \vee y \in L'$ y $x \wedge y \in L'$.*

Así, L' es una retícula.

Definición B.1.3. *Una retícula L se llama completa, si todo subconjunto S de L tiene mínima cota superior denotada como $sup(S)$ o $\bigvee_{s \in S} s$ y máxima cota inferior denotada como $inf(S)$ o $\bigwedge_{s \in S} s$.*

En una retícula completa L existe el elemento mayor al que comunmente se le denota por $\mathbf{1}$ y el elemento menor denotado por $\mathbf{0}$. Por conveniencia $\mathbf{1} = inf(\emptyset)$ y $\mathbf{0} = sup(\emptyset)$.

Definición B.1.4. *Si L' es una subretícula de L, decimos que L' es una subretícula completa de L si L es una retícula completa y para para todo $S \subseteq L'$ se tiene que $inf(S)$ y $sup(S)$ tomados en L viven en L'.*

Definición B.1.5. *Sea L una retícula con $\mathbf{0}, \mathbf{1}$. Si $a \in L$, entonces un complemento de $a \in L$ es un elemento $c \in L$ tal que $a \vee c = \mathbf{1}$, $a \wedge c = \mathbf{0}$. La retícula es complementada si todo elemento tiene complemento.*

Definición B.1.6. *Una retícula es distributiva si cumple que para cualesquiera $x, y, z \in L$:*

$$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$$

Una retícula distributiva complementada se llama un álgebra de Boole.

Definición B.1.7. *Un elemento $a \in L$ con $a \neq \mathbf{0}$ es un átomo si para cualquier $b \in L$ con $b < a$ se tiene que $b = \mathbf{0}$. De forma dual, un elemento $c \in L$, con $c \neq \mathbf{1}$, es un coátomo si para cualquier $d \in L$ con $c < d$ se tiene que $d = \mathbf{1}$.*

Bibliografía

[1] F. W. Anderson y K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, 1992.

[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, A. M. S. Colloquium publications Vol. XXV, Rhode Island 1967.

[3] J. Dauns y Y. Zhou, *Classes of Modules*, Pure and Applied Mathematics, London 2006.

[4] J. Dauns, *Module Types*, Rocky Mountain J. Math 27 (2)(1997) 503-557.

[5] J. Golan, *Linear topologies on a ring: an overview*, Longman Scientific & Technical, New York, 1987.

[6] J. Golan, *Torsion Theories*, Longman Scientific & Technical, New York 1986.

[7] F. Kash, *Modules and Rings*, Academic Press, 1982.

[8] S. H. Mohamed y B. J. Muller, *Continuous and Discrete Modules*, Cambridge University Press, 1990.

[9] W. K. Nicholson y B. Sarath, *Rings with a largest linear topology*, Comm. Algebra 13 (1985) 769-780.

[10] C. Prieto, *Topología Básica I*, Fondo de Cultura Económica, México, 2003.

[11] B. Stenstrom, *Rings of quotients: an introduction to methods of ring theory*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[12] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science Publishers, London, 1991.

[13] Y. Zhou, *The lattice of natural classes of modules*, Comm. Algebra 24 (5) (1996) 1637-1648.

[14] Y. Zhou, *The lattice of pre-natural classes of modules*, J. Pure Appl. Algebra 140 (1999) 191-207.