



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Gravedad Análoga a Fluidos y Condensados de Bose-Einstein

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:

DOCTORA EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

Belinka González Fernández

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Abel Camacho Quintana (PCF)

MIEMBRO DE COMITÉ TUTORAL:

Dr. Darío Núñez Zúñiga (ICN)

Dr. Hernando Quevedo Cubillos (ICN)



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.

OCTUBRE 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

1. Resumen	1
2. Introducción	3
3. Antecedentes	6
3.1. Gravedad Cuántica (GC)	7
3.2. Intentos para encontrar la Gravedad Cuántica	8
3.3. Modelos de Gravedad Emergente	9
3.4. Modelos de Gravedad Análoga	11
4. Gravedad Análoga a Fluidos	13
4.1. Antecedentes	14
4.1.1. Acústica geométrica	15
4.2. Analogía desde la acústica física: caso no viscoso	16
4.2.1. Ecuaciones de la dinámica de fluidos	17
4.2.2. Teorema de Barceló, Liberati y Visser	23
4.2.3. Características generales de la métrica acústica	29
4.3. Analogía desde la acústica física: caso viscoso	30
4.3.1. Dinámica del fluido viscoso: Las ecuaciones de Navier-Stokes	30
4.3.2. Teorema de González-Fernández y Camacho	35

4.3.3. Tensor de energía-momento	42
5. Velocidad del sonido en un condensado de Bose-Einstein	49
5.1. Revisión de la Teoría de Estados Condensados	51
5.1.1. La ecuación de Gross-Pitaevskii	51
5.1.2. El estado base para bosones en una trampa	54
5.1.3. La aproximación de Thomas-Fermi	56
5.1.4. Estructura superficial de la nube	59
5.1.5. Restitución de la función de onda del condensado	64
5.1.6. Condensados con interacciones dipolares	66
5.2. Condensados de Bose-Einstein con Interacciones Dipolares	70
5.2.1. Energía de la Nube bajo una Interacción Dipolo–Dipolo	70
5.2.2. Potencial Químico y Geometría del Condensado	72
5.2.3. Velocidad del sonido, Número de partículas y Energía	75
6. Conclusiones y Perspectivas	78
6.1. Conclusiones	78
6.2. Perspectivas	80

Capítulo 1

Resumen

Actualmente existen distintos enfoques que intentan resolver el problema de la gravedad cuántica. Uno de ellos es de la gravedad análoga, que toma en cuenta las similitudes entre la física en un espacio-tiempo curvo y la dinámica de fluidos (particularmente, los condensados de Bose-Einstein), basándose en el hecho de que estos últimos presentan los mismos aspectos cinemáticos que la relatividad general. Investigar dichas analogías es interesante porque podría arrojar luz sobre algunos de los grandes problemas gravitacionales que aún permanecen sin resolver, aprovechando que los fluidos son sistemas conceptualmente claros y experimentalmente bien controlados, ofreciendo así la posibilidad de simular algunos fenómenos predichos en física de altas energías y la gravitación.

La presente tesis se enmarca en este contexto y se inspira por estas analogías. En la primera mitad nos avocamos a desarrollar un caso puramente teórico: estudiamos un fluido barotrópico e irrotacional, incluyendo viscosidad en el sistema. Demostramos que la ecuación de movimiento para el potencial de velocidad correspondiente puede ser interpretado como el de un campo no masivo, mínimamente acoplado, que se propaga en una geometría lorentziana (3+1). Como resultado de este estudio, encontramos que en nuestras ecuaciones aparece un término fuente inducido por la presencia de la viscosidad, que puede ser interpretado físicamente como transferencia de energía del campo a la curvatura de la variedad. Para revisarla más a fondo, calculamos el tensor de energía momento y concluimos que no es constante.

En la segunda mitad, nos concentramos en un caso concreto de laboratorio: un CBE en un potencial armónico, sujeto no sólo a la presencia de la interacción de contacto, sino también a una interacción dipolo-dipolo, anisotrópica, de largo al-

cance. Dedujimos y analizamos algunas propiedades termodinámicas del sistema como el tamaño del condensado, el potencial químico, la velocidad del sonido y la energía por partícula. Encontramos que al introducir la interacción dipolar surge cierta anisotropía en varios aspectos del sistema (por ejemplo, en la velocidad del sonido).

Capítulo 2

Introducción

Las analogías siempre han jugado un papel fundamental en la física y las matemáticas. Más allá de la belleza inherente a ellas, su importancia radica en que representan una herramienta poderosa que podría arrojar luz sobre lo que pasa en un sistema basándose en los fenómenos que suceden en su análogo correspondiente definiendo, así, un puente entre dos diferentes ramas de la ciencia.

El movimiento de las ondas de luz en un espacio-tiempo curvo encuentra una hermosa analogía en la descripción de ondas de sonido en un fluido en movimiento [1]. En este caso se ha demostrado la existencia de un agujero sordo (región de la cual el sonido no puede escapar), que se asemeja a un agujero negro en relatividad general [2]. Además, hace tiempo que se notó que las ecuaciones de movimiento de una perturbación en un fluido se pueden expresar de la misma forma matemática que las de un campo no masivo inmerso en un espacio-tiempo curvo [3]. Estas observaciones sugieren que es posible estudiar ciertos aspectos de la relatividad general y la teoría cuántica de campos por analogía con sistemas tales como los condensados de Bose-Einstein (CBE), dado que los fluidos perfectos presentan los mismos aspectos cinemáticos de la relatividad general. Ésta es la idea que subyace detrás de la llamada Gravedad Análoga¹.

Existe una gran cantidad de sistemas físicos, tanto en materia condensada como en otras áreas, en los que espacios-tiempos curvos relativistas emergen. Los CBE son de particular interés por ser fuentes de analogías gravitacionales conceptualmente claras, además de permitir sistemas experimentales bien controlados, ofreciendo

¹ Sin embargo, es importante resaltar que hasta ahora no se sabe de ningún sistema análogo que reproduzca las ecuaciones de Einstein, por lo que la analogía no se extiende directamente al nivel dinámico.

la posibilidad de simular los análogos a algunos fenómenos predichos en física de altas energías (por ejemplo, se considera que los CBE son buenos candidatos para la posible futura detección experimental de radiación de Hawking fonónica, o de creación de partículas en espacios-tiempos en expansión).

Ahora bien, la geometría o el régimen relativista descrito anteriormente no es universalmente válido en un CBE más allá de cierta aproximación, sino que esencialmente, sólo es correcto para los modos o fonones de bajas energías, es decir, en la aproximación hidrodinámica. Para energías mayores, así como en la presencia de horizontes, el límite hidrodinámico o relativista se viola dando paso a la descripción microscópica subyacente. Este comportamiento es similar a lo que esperaríamos que pasara en gravedad cuántica, con la diferencia crucial de que la descripción microscópica en el caso de los BEC es bien conocida, por lo que cálculos completos basados en física firmemente verificada y controlada serían posibles aún más allá del régimen relativista.

En vista de lo anterior, las desviaciones del límite hidrodinámico o relativista que aparezcan en los CBE se presentan como posibles ventanas a correcciones cinemáticas que una hipotética teoría cuántica de la gravedad impondría sobre la relatividad general. Las extrapolaciones que se pueda hacer a partir de analogías con la materia condensada serán particularmente relevantes si las desviaciones de la relatividad general clásica, originadas por tal teoría, resultan ser similares a las que ocurren en los BEC con respecto al régimen relativista.

Inspirada por estas ideas, y enmarcada en este contexto, la presente tesis se divide en dos partes. En la primera mitad desarrollaremos la generalización del caso estudiado por Barceló, Liberati y Visser en [3], considerando un fluido barotrópico e irrotacional, pero incluyendo viscosidad en el sistema. Demostraremos que la ecuación de movimiento para el potencial generado por la velocidad de una perturbación en el fluido puede ser interpretado como el de un campo no masivo, mínimamente acoplado, que se propaga en una geometría lorentziana (3+1). En contraste con lo que ocurre en [3], en nuestras ecuaciones aparece un término fuente inducido por la presencia de la viscosidad, que puede ser interpretado físicamente como cierta transferencia de energía del campo a la curvatura de la variedad. Para revisar qué ocurre con la energía del sistema calculamos el tensor de energía momento, que resulta no ser constante.

En la segunda mitad, nos concentraremos en un caso concreto de laboratorio: un CBE en un potencial armónico, sujeto no sólo a la presencia de la interacción de contacto, sino también a una interacción dipolo-dipolo, anisotrópica, de largo al-

cance. Deducimos y analizamos algunas propiedades termodinámicas del sistema como el tamaño del condensado, el potencial químico, la velocidad del sonido y la energía por partícula. Encontramos que al introducir la interacción dipolar surge cierta anisotropía en varios aspectos del sistema (como en la velocidad del sonido), que ofrece la posibilidad de analizar mecanismos disipativos en el sistema.

Capítulo 3

Antecedentes

La Gravitación es un área de la física que todavía representa un enigma para la ciencia. A pesar de los grandes esfuerzos que se ha hecho por encontrar una teoría que unifique todos los fenómenos físicos, hasta ahora ha sido imposible lograr una descripción cuántica completa de la gravedad, ya que existe una profunda incompatibilidad entre la incertidumbre inherente a la mecánica cuántica (MC) y la rigidez de la formulación geométrica sobre la que se basa la relatividad general (RG).

Se ha aplicado diversos enfoques para encontrar la solución a este problema, entre los cuales los más populares son la Teoría de Cuerdas y la Gravedad Cuántica de Lazos. Sin embargo, hay otra línea de investigación que sugiere que la gravedad podría no ser una interacción fundamental, sino un fenómeno emergente (algo así como el límite hidrodinámico de una teoría más fundamental). Dentro de ella hay distintos planteamientos, pero nos referiremos a todos como Modelos de Gravedad Emergente.

Entre éstos se encuentran los Modelos de Gravedad Análoga (MGA), que son, generalmente, sistemas de materia condensada que funcionan como modelos de juguete, en los que se ha podido recuperar conceptos de la gravitación como la invariancia de Lorentz de las ecuaciones de movimiento y una métrica pseudoriemanniana. Si bien es cierto que dichos esquemas tienen sus limitaciones, han aportado interesantes ideas relacionadas con otros problemas presentes en la teoría de la gravitación (por ejemplo, el problema de la constante cosmológica) y son extremadamente útiles para acceder experimentalmente a algunas características de la teoría de campos en espacios-tiempos curvos que hasta ahora no se ha podido medir mediante la detección directa, es decir, permiten reproducir en el laboratorio varios fenómenos gravitacionales cuya existencia real en la naturaleza no ha podido aún ser verificada (como la radiación de Hawking).

3.1. Gravedad Cuántica (GC)

A pesar de que la gravedad fue la primera fuerza de la naturaleza en ser comprendida en términos físicos, ésta se distingue de las demás interacciones fundamentales porque aún no ha sido posible encontrar su descripción cuántica y unificarla con el resto de ellas [4].

Hasta ahora, nuestras observaciones físicas han podido ser descritas exitosamente por la teoría general de la relatividad de Einstein y el modelo estándar de las partículas elementales, pero, a pesar del notable progreso que se ha alcanzado al unificar tres de las cuatro fuerzas de la naturaleza, la fuerza gravitacional se ha resistido a ser cuantizada y aún es una teoría completamente clásica. Esto se debe a que los métodos de cuantización que sirvieron para el resto de las interacciones en el modelo estándar no han funcionado como se esperaba. No es que la gravedad no pueda ser cuantizada mediante ellos, sino que el resultado no es renormalizable y por tanto no puede ser interpretado como una teoría fundamental, sino más bien como una efectiva, en el mejor de los casos. Este conflicto indica que aún hay cosas por comprender que, por un lado, nos llevan a un territorio desconocido y, por otro, representan una oportunidad para profundizar nuestro entendimiento sobre el funcionamiento de la naturaleza.

Existen diversas razones por las cuales quisiéramos unificar la relatividad general (RG) y la mecánica cuántica (MC). Desde el principio, la historia de la física ha estado ligada a la unificación de fenómenos aparentemente desconexos: primero, en la segunda mitad del s. XIX, Maxwell estableció la interrelación entre los campos eléctricos y magnéticos, conformándolos en la *teoría electromagnética* [5]. Luego, en la segunda mitad del siglo pasado, Glashow, Salam, y Weinberg propusieron una teoría que unificaba estas interacciones, a su vez, con la interacción débil en lo que conocemos como la *teoría electrodébil*. A partir de entonces, se ha intentado fusionar la interacción electrodébil con la llamada fuerza fuerte, en las llamadas *teorías de gran unificación*, aunque no hay ninguna propuesta hasta ahora que se acepte universalmente. El último paso en este sentido sería, naturalmente, crear un marco teórico que conjunte todas las interacciones que conocemos, es decir, construir la teoría que unifique a estas tres interacciones que hemos mencionado con la de la gravedad. A ésta se le ha bautizado como la "*teoría del todo*".

Además de los motivos históricos, existen ciertos enigmas de la física que siguen sin ser resueltos. Por ejemplo, en MC las partículas existen como una superposición de estados, mientras que desde la perspectiva de la RG, dado que todas las partículas llevan energía, gravitan. Un fotón, entonces estaría *mecánico-cuánticamente* en un estado superpuesto, por lo cual no podríamos determinar su campo gravitacional, puesto que un campo clásico no existe en superposiciones, lo cual refuerza la incompatibilidad de las teorías.

También tenemos el problema de pérdida de información en los agujeros negros. Usando la teoría cuántica de campos (TCC) en una geometría clásica de agujero negro, Hawking demostró que los agujeros negros emiten radiación térmica, de modo que pierden masa. Si esta radiación siguiera siendo térmica hasta que el agujero negro se evaporara completamente, cualquier distribución con la misma masa inicial que colapsara en un hoyo negro alcanzaría finalmente el mismo estado térmico final. Entonces perderíamos irreversiblemente parte de la información contenida en la configuración inicial, lo cual sería incompatible con la MC. Esperamos, entonces, que una cuantización correcta de la gravedad resuelva esta contradicción [6].

Finalmente, la RG predice que existen objetos con una densidad de energía y una fuerza gravitacional infinitas, llamados singularidades. Estas singularidades no son físicas e indican un colapso en la teoría. Por ello, cabe pensar que tendríamos que reemplazar a la RG por una teoría más fundamental en estos límites extremos del espacio-tiempo.

Si bien es cierto que una teoría cuántica de la gravedad tal vez no alcance a resolver por completo estos enigmas (en particular los dos últimos), esperamos que al menos arroje alguna luz sobre cómo proceder para hacerlo.

Cabe puntualizar que, a lo largo de esta búsqueda, hay que tener en cuenta que uno de los requisitos básicos para cuantizar la gravitación será que la teoría resultante tenga un límite clásico que sea, al menos aproximadamente (y correspondiendo con la fenomenología conocida), idéntico a la relatividad general.

3.2. Intentos para encontrar la Gravedad Cuántica

Para resolver el problema de cuantizar la gravedad se han planteado distintas propuestas. Algunas de las teorías más populares son las siguientes [7].

Comencemos por mencionar la *teoría de cuerdas*, que es uno de los candidatos más famosos para encontrar una formulación unificada de la naturaleza [8], [9]. Ésta es una de las teorías que usan un enfoque parecido a la TCC y, además, comparte con otras el planteamiento de un fondo separado de la materia [10]. Desafortunadamente, aún no ha conseguido hacer predicciones que se hayan comprobado experimentalmente. Además, el hecho de que haya un gran número de soluciones, debido a que los procesos de compactificación en esta teoría no son únicos, no permite encontrar predicciones únicas, por lo que al final se encuentran teorías físicas en cuatro dimensiones totalmente distintas entre sí.

La siguiente propuesta que mencionaremos es *gravedad cuántica de lazos*, que consiste en un enfoque canónico para la cuantización del espacio-tiempo indepen-

diente del fondo. En sus etapas tempranas dio origen a la geometrodinámica [11] y la súpergravedad [12]. Sin embargo, hasta ahora no se ha podido demostrar que en realidad contenga a la RG en algún límite clásico [13], además de que el concepto del tiempo se pierde, debido a que no podemos definir un producto interno en el espacio de Hilbert de esta teoría.

También están los *modelos anisotrópicos*, que postulan un comportamiento de escala diferente del espacio y el tiempo en el régimen ultra violeta (UV), lo que permite construir una teoría renormalizable a órdenes bajos en dicho régimen [14], [15], [16]. Sin embargo, trabajos recientes afirman que, en el límite infrarrojo, la teoría no reproduce la gravedad sin masa [17], [18].

Por último nos referiremos a las *teorías de gravedad emergente*, que plantean que el espacio-tiempo curvo surge de una estructura subyacente. Existen diferentes vertientes de esta rama; nosotros nos concentraremos en las basadas en sistemas de materia condensada, que van desde plantear una simple analogía entre la termodinámica del espacio-tiempo y sistemas de materia condensada hasta ideas radicales que involucran un sistema de materia condensada preespacial [10]. En la siguiente sección, las revisaremos con más detalle.

Se ha desarrollado otras líneas de investigación en áreas tales como la *cuantización asintótica* [19], el *grupo de renormalización* [20], [21], [22], *Twistores* [23] y *geometría discretizada* [24] y *no conmutativa* [25], [26], entre otras, pero no abundaremos en ellas.

Cabe hacer notar que los enfoques construidos independientemente del fondo (como la gravedad cuántica de lazos) suponen que la gravedad es algo fundamental, mientras que los que se basan explícitamente en que existe un espacio-tiempo subyacente (como la teoría de cuerdas o las teorías de gravedad emergente), consideran a la gravedad como una teoría efectiva nada más, asumiendo que la MC es la formulación verdaderamente fundamental. En consecuencia, la mayoría de los planteamientos del segundo tipo intentan aplicar alguno de los procedimientos de cuantización ya bien definidos a los grados de libertad físicos del espacio-tiempo o a alguna teoría subyacente que lo origina.

3.3. Modelos de Gravedad Emergente

Una de las teorías recientes que ha ido ganando más adeptos propone que la gravedad (y tal vez inclusive el electromagnetismo y los demás campos de norma [27]) podría ser un fenómeno emergente, en el sentido de ser el resultado de un comportamiento efectivo de cierta física microscópica muy distinta (refiriéndose esta

última a la dinámica de ciertos objetos cuánticos elementales). Esto es, la gravedad sería algo así como un fenómeno emergente, a gran escala, similar a un estado de materia condensada hecha de muchos átomos [28].

Estos modelos consideran una teoría fundamental, que no es la RG, y exploran cómo es posible que el espacio, el tiempo y su dinámica emerjan en cierto régimen usando distintas técnicas, a menudo adoptadas de la física de materia condensada.

Si la gravedad no fuera fundamental, sino una interacción residual emergente, podría ser un fenómeno intrínsecamente clásico. Considerando que es la MC lo universalmente válido, tendríamos que asumir un sustrato cuántico a partir del cual la gravedad resultaría como un fenómeno clásico emergente. En este caso, no habría conflicto con los argumentos contra las teorías semiclásicas, porque no habría gravedad en absoluto al nivel del sustrato. El campo gravitacional no tendría propiedades cuánticas que establecer en una teoría de gravedad cuántica, y la cuantización de la RG no llevaría a ninguna teoría fundamental. El objetivo de una teoría de gravedad cuántica sería, más bien, identificar el sustrato cuántico que da origen a la gravedad, aunque dicha teoría debería tener la RG como límite clásico (que, al menos, reprodujera la fenomenología conocida) [29].

Por esa razón, hay quienes plantean que los modelos de gravedad emergente no deben considerarse como alternativas para encontrar la gravedad cuántica, tales como la teoría de cuerdas o la cuántica de lazos, sino que deben ser vistos como manifestaciones de un paradigma más general sobre cómo se podría recuperar la dinámica y geometría clásicas del espacio-tiempo a partir de ciertos escenarios gravitoc cuánticos ([30]).

Dentro de este espectro de teorías podemos mencionar muchos ejemplos, tales como la *group field theory* [31], [32], la propuesta del conjunto causal [33], los *quantum gravity models* [34], [35], entre otros [36], [37]. Sin embargo, los que nos interesan, dado que son la base teórica para este trabajo, son los modelos de gravedad análoga (MGA). La principal motivación para estudiar estos modelos es averiguar si es posible (ya sea teórica o experimentalmente) reproducir en el laboratorio diversos fenómenos gravitacionales, cuya existencia real en la naturaleza no puede ser verificada directamente en la actualidad. Estos fenómenos superan nuestras capacidades observacionales actuales (y previsibles en un futuro inmediato), pero creemos que existen por ser consecuencia de argumentos teóricos aparentemente sólidos dentro de los marcos de la relatividad general y la teoría de campos en espacios curvos.

3.4. Modelos de Gravedad Análoga

En los últimos tiempos se ha avanzado mucho en cuanto a los alcances obtenidos en observaciones experimentales relacionadas con la RG. Sin embargo, debido a lo débil que es, el campo gravitacional sigue siendo muy difícil de medir en regímenes de gran curvatura, donde el comportamiento gravitacional se desvía significativamente de la descripción newtoniana y requiere una descripción completamente relativista, y bajo condiciones controlables experimentalmente, donde la diferencia entre el efecto físico y los efectos de la contaminación sea clara.

El régimen de grandes curvaturas es importante, no sólo para la dinámica del campo gravitacional, sino por los efectos cinemáticos relacionados con la dinámica de los campos de materia que viven en la variedad espacio-temporal, puesto que quisiéramos entender cómo "sienten" los campos de materia la geometría subyacente. Además de entender la validez del principio de equivalencia en ese dominio, existen otros fenómenos cuya comprensión es fundamental para que podamos descifrar el origen de las estructuras en escenarios inflacionarios y para comprender qué ocurre con la evolución unitaria cuando se llegan a formar agujeros negros (por ejemplo, la radiación de Hawking y la creación cosmológica de partículas) [38].

A pesar de que hasta ahora han surgido diferentes maneras de abordar estos fenómenos teóricamente, el estatus de esas teorías aún no está claro. Para confirmar los cálculos teóricos necesitamos hacer detecciones directas, pero aún no podemos manipular o generar experimentalmente campos gravitacionales que sean suficientemente fuertes para producir fenómenos de creación de partículas. Por eso, parece que la exploración del régimen de grandes curvaturas con campos gravitacionales reales está restringida sólo a la observación de fenómenos astrofísicos o cosmológicos, con todas las limitaciones e incertidumbre que esto implica.

Sin embargo, podemos librar estos obstáculos, al menos en cierta medida, trabajando con métricas espacio-temporales curvas artificiales en laboratorios relativamente sencillos, gracias a que, aún en sistemas de materia condensada simples (tales como los condensados de Bose-Einstein en gases atómicos) la cinemática de las perturbaciones a bajas energías (los fonones) pueden describirse mediante una teoría de campo relativista. El espacio-tiempo curvo de fondo se origina por el comportamiento colectivo de la parte condensada de los átomos. En sistemas fermiónicos más complicados (en particular en $^3\text{He-A}$ [39]), emergen campos de norma y gravitacionales junto con una cuasimateria fermiónica. Todos estos campos emergentes tienen mucho en común con los de la física de altas energías, o sea, la gravedad einsteiniana y el modelo estándar de partículas. Esto puede dar indicios de que estos últimos podrían ser únicamente teorías efectivas que emergen en el límite de bajas energías de una teoría fundamental de gravedad cuántica que describiría los "átomos" que componen el vacío cuántico.

Sin embargo, vale la pena mencionar que el interés en este enfoque no sólo radica en reproducir fenómenos gravitacionales en algún modelo análogo, sino también en encontrar desviaciones del caso ideal en modelos análogos reales, y analizar si es probable que desviaciones similares aparezcan en sistemas gravitacionales reales. Y, aunque los MGA no han sido capaces de ofrecer algún tipo de ecuaciones dinámicas gravitacionales emergentes hasta ahora, sí han aportado una nueva corriente de ideas sobre muchos problemas apremiantes en la teoría gravitacional, tales como la constante cosmológica [40] o la materia oscura.

Capítulo 4

Gravedad Análoga a Fluidos

Las analogías, como hemos visto, han jugado un papel muy importante en la física y las matemáticas, dándonos nuevas formas de ver los problemas y permitiendo la proliferación de ideas entre diferentes ramas de la ciencia; una analogía elegida cuidadosamente puede ser extremadamente útil para fijar la atención en un problema específico, así como para sugerir rutas inesperadas para encontrar posibles soluciones. También establecimos que nosotros nos centraremos en las teorías análogas a la gravedad, que son algunas analogías basadas típicamente en la física de materia condensada, que permiten probar algunos aspectos de espacios-tiempos curvos.

La más conocida es aquella de las ondas de sonido en un fluido en movimiento como análogas a las ondas de luz en un espacio-tiempo curvo. Un fluido que se mueve a una velocidad supersónica puede generar un “agujero sordo”, el análogo acústico de un “agujero negro”, y la analogía se puede extender hasta el punto de demostrar matemáticamente la presencia de radiación fonónica de Hawking a partir de el horizonte acústico. Este detalle proporcionaría, en principio, un modelo de laboratorio concreto para la teoría cuántica de campos en espacios curvos en un territorio que es tecnológicamente accesible al experimento.

Hay muchos otros modelos análogos que pueden ser útiles por distintos motivos: algunos son interesantes por razones experimentales y otros son útiles por arrojar nueva luz sobre preguntas teóricas desconcertantes.

Desde luego hay que puntualizar que analogía no significa identidad y no se pretende alegar, de ninguna manera, que los modelos que consideremos sean completamente equivalentes a la relatividad general (de hecho, no se ha logrado reproducir las Ecuaciones de Einstein en ellos, por ejemplo). Simplemente diremos que los modelos análogos son interesantes cuando capturan y reflejan adecuadamente un número suficiente de características importantes de relatividad general (o, a veces, especial) y, por ello, nos interesa estudiarlos.

4.1. Antecedentes

La acústica en un fluido en movimiento es un ejemplo simple y claro de un modelo análogo. Su física es sencilla, al igual que el marco conceptual y los cálculos que involucra (siempre y cuando no sean casi imposibles de realizar).

La idea física detrás de este problema es la siguiente: un fluido en movimiento arrastrará ondas de sonido con él y, si la velocidad del sonido llegara a ser supersónica, las ondas de sonido nunca serían capaces de remontar en la dirección opuesta a la del fluido. Esto implicaría la existencia de un “hoyo sordo”: una región de la cual el sonido no puede escapar. Esto suena muy parecido a la noción de “hoyo negro” en relatividad general, al menos a nivel verbal.

Nos interesa ver si es posible convertir esta analogía verbal en un enunciado físico y matemático ya que sólo cuando tenemos una conexión física y matemática precisa entre, en este caso, la física de la acústica en un sonido en movimiento y algunas características significativas de relatividad general podremos decir que tenemos un “modelo análogo de (algunos aspectos) de la gravedad”. En general la comunidad se refiere a tales modelos como “gravedad análoga” para abreviar y nosotros lo haremos también.

Ahora bien, las características de relatividad general que se recuperan típicamente en un “modelo análogo” son las cinemáticas relacionadas con la forma en que se definen los campos (clásicos o cuánticos) en el espacio-tiempo curvo, y la condición imprescindible de cualquier modelo análogo a la gravedad es la existencia de una “métrica efectiva” que capture la noción de espacios-tiempos curvos que surgen en relatividad general. (Al menos sería deseable reproducir la noción de la geometría de Minkowski de relatividad especial.)

Puesto que lo que acabamos de describir verbalmente (y su generalización en otros marcos físicos) puede ser convertido en un enunciado físico y matemático preciso, este modelo análogo es de interés físico, y dicha analogía funciona a dos niveles: en el de la acústica geométrica y en el de la acústica física.

La ventaja del uso de la acústica geométrica es que la derivación de la forma matemática precisa de la analogía es tan simple que es casi trivial y que la derivación es extremadamente general. Su desventaja es que en ese límite uno sólo puede deducir la estructura causal del espacio-tiempo, y no obtiene una métrica efectiva única. En ese sentido, la acústica física resulta mejor, ya que, aunque la derivación de la analogía es válida en un régimen más restringido, ésta puede ser más útil ya que se puede especificar una métrica efectiva precisa, lo cual da cabida a una ecuación de onda para las ondas de sonido (válgame la redundancia).

A continuación hablaremos brevemente del primer enfoque, por completitud, para

después desarrollar de manera más extensa, en la siguiente sección, el caso de la acústica física a modo de introducción para el tema central de este capítulo.

4.1.1. Acústica geométrica

Al nivel de la acústica geométrica sólo necesitamos asumir que la velocidad del sonido c , con respecto al fluido, y que la velocidad del fluido \mathbf{v} , con respecto al laboratorio, están bien definidas.

Entonces, con respecto al laboratorio, la velocidad de una onda de sonido que se propaga en el fluido en la dirección dada por el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ es:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = c\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{v}. \quad (4.1)$$

o bien,

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{c} \left[\frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{v} \right]. \quad (4.2)$$

Demandando que $\hat{\mathbf{n}}$ sea unitario encontramos que

$$1 = \frac{1}{c^2} \left[\frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{v} \right] \cdot \left[\frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{v} \right] = \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 - 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{v}^2 \right] \quad (4.3)$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} c^2 dt^2 &= d\mathbf{x}^2 - 2(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}) dt + \mathbf{v}^2 dt^2 \quad \Leftrightarrow \\ - (c^2 - \mathbf{v}^2) dt^2 - 2(\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}) dt + d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Resolver esta ecuación cuadrática para $d\mathbf{x}$ en función de dt nos da un cono asociado con cada punto en el espacio y el tiempo, que definirá una “causalidad” entre las señales que viajan en el fluido.

Recordemos de relatividad general, que podemos expresar el elemento de línea como [41], [42]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.5)$$

Nos interesa encontrar una métrica que nos permita hacer una analogía entre (4.4) y (4.5) asumiendo, por supuesto, que el elemento de línea es luxoide¹. Para ello expresemos (4.4) como un producto de matrices, definiendo

$$\mathbf{u}^T \equiv (dx^\mu)^T = (dt, d\mathbf{x}) \quad (4.6)$$

y factorizándolo por la izquierda, de modo que entonces (4.4) será

$$(dt, d\mathbf{x}) \begin{pmatrix} -(c^2 - \mathbf{v}^2)dt - (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}) \\ -\mathbf{v}dt + d\mathbf{x} \end{pmatrix} = 0.$$

Haciendo lo propio por la derecha, obtenemos

$$(dt, d\mathbf{x}) \begin{pmatrix} -(c^2 - \mathbf{v}^2) & -\mathbf{v}^T \\ -\mathbf{v} & \mathbb{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ d\mathbf{x} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.7)$$

A partir de (4.7) podemos identificar una matriz que podemos asociar a una métrica lorentziana de clase conforme² [1]:

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \begin{pmatrix} -(c^2 - \mathbf{v}^2) & -\mathbf{v}^T \\ -\mathbf{v} & \mathbb{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

donde Ω es una función sin especificar, pero no nula.

El enfoque geométrico tiene las ventajas de ser extremadamente simple y que su estructura básica es independiente de la dimensión, además de que se puede generalizar este razonamiento lógico rápida y fácilmente a situaciones físicas más complicadas. Sin embargo, en él la métrica no queda totalmente definida.

A continuación, revisaremos con más profundidad esta analogía desde la perspectiva de la acústica física. Para ello, en la siguiente sección haremos una revisión de algunos conceptos básicos de la dinámica de fluidos, para después demostrar el teorema propuesto por Barceló, Liberatti y Visser [43].

4.2. Analogía desde la acústica física: caso no viscoso

En este tratamiento partimos del hecho de que, para un fluido estático, homogéneo y no viscoso, la propagación de ondas de sonido está gobernada por la ecuación

¹Después de todo, el cono de sonido quedará definido por un cuadrivector luxoide.

²Una métrica conforme puede verse como una métrica que está definida sólo hasta cierta escala.

de onda [44]

$$\partial_t^2 \phi = c^2 \nabla^2 \phi. \quad (4.9)$$

Generalizar este resultado para un fluido que no es homogéneo o que está en movimiento (incluso posiblemente en movimiento inestable) es más complicado de lo que podría parecer. Para derivar una ecuación de onda en una situación más general, comenzaremos por adoptar algunas simplificaciones que nos permitan derivar el teorema que más adelante enunciaremos, pero antes de comenzar, es necesario establecer algunas ecuaciones y conceptos de utilidad.

4.2.1. Ecuaciones de la dinámica de fluidos

Ecuación de continuidad

Para deducir las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos, comencemos por la ecuación de la conservación de la materia [45], [44]. Consideremos cierto volumen del espacio, V_0 , cuya superficie llamaremos S_0 , y supongamos que tenemos un fluido con densidad de masa local bien definida para cada punto e instante de tiempo, $\rho(t, \mathbf{x})^3$, y una velocidad local $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$. La masa de fluido en ese volumen será

$$M = \int_{V_0} \rho dV. \quad (4.10)$$

Por un lado, cuando el fluido salga de V_0 , el decremento de la masa estará dado por

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = -\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (4.11)$$

Por otro lado, la única manera en que la masa puede cambiar dentro del volumen V_0 es fluyendo a través de la superficie S_0 . Matemáticamente, podemos expresar el elemento dV en (4.10) como la distancia que alcanza a moverse el fluido en un tiempo dt , en la dirección perpendicular a la superficie, por el diferencial de superficie dS ⁴:

$$dV = \mathbf{v} dt \cdot d\mathbf{S} \Rightarrow \rho dV = (\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}) dt.$$

³La suposición de que ρ existe es una suposición del continuo, que no se mantiene si tomamos en cuenta la estructura molecular de la materia. La hacemos porque estamos considerando fenómenos macroscópicos.

⁴La magnitud del vector $d\mathbf{S}$ es igual al área del elemento de superficie, y su dirección está a lo largo de la normal, en el sentido de la normal saliente, por convención.

Así, el diferencial de masa que sale del volumen, por unidad de tiempo, es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho dV) = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.12)$$

y la masa total del fluido que sale del volumen V_0 por unidad de tiempo será la suma del flujo que atraviesa la superficie que lo rodea, S_0 ,

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \oint_{S_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.13)$$

Usando el Teorema de Gauss-Ostrogradsky y convirtiendo nuestra integral de superficie en una de volumen llegamos a

$$\oint_{S_0} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V_0} (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) dV. \quad (4.14)$$

Por último, como (4.11) y (4.14) tienen que ser iguales,

$$\begin{aligned} \int_{V_0} (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) dV &= - \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad \Leftrightarrow \\ \int_{V_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \right] dV &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dado que esta ecuación debe satisfacerse para cualquier elemento de volumen, el integrando debe ser nulo, i.e.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (4.16)$$

que es la *ecuación de continuidad*.

Ecuación de Euler

Antes de continuar, necesitamos definir lo que queremos decir por *fluido ideal*. Nos referiremos a éste como aquél que cumple con la siguiente propiedad: para cualquier movimiento del fluido existe una función $p(t, \mathbf{x})$, llamada presión, tal que si S es cierta superficie en el fluido, cuyo vector unitario normal es $\hat{\mathbf{n}}$, la fuerza de tensión que se ejerce sobre las superficie S , por unidad de área, al tiempo t y en la posición \mathbf{x} es

$$\text{fuerza sobre } S \text{ por unidad de area} = -p(t, \mathbf{x})\hat{\mathbf{n}}.$$

Note que la fuerza está en la dirección de $\hat{\mathbf{n}}$ y que actúa ortogonalmente a la superficie S , o sea, no hay fuerzas tangenciales. Esto último implica que el fluido es irrotacional.

Ahora consideremos cierto volumen en el fluido, V_0 , rodeado por una superficie cerrada S_0 . La fuerza total que actúa sobre este volumen es igual a

$$\mathbf{F} = - \oint_{S_0} p d\mathbf{S}. \quad (4.17)$$

Podemos transformar la última integral en una de volumen, auxiliándonos de un vector cualquiera, digamos \mathbf{e} , fijo en el espacio y tomando su producto punto por (4.17)

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{F} = - \oint_{S_0} p \mathbf{e} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{V_0} \nabla \cdot (p\mathbf{e}) dV = - \int_{V_0} \nabla p \cdot \mathbf{e} dV.$$

Sacando el producto punto por \mathbf{e} y restando la segunda y la última integral, vemos que

$$- \oint_{S_0} p d\mathbf{S} = - \int_{V_0} \nabla p dV, \quad (4.18)$$

con lo que concluimos que el fluido que rodea cualquier elemento de volumen dV , ejerce sobre él una fuerza igual a $-\nabla p dV$ o, equivalentemente, que una fuerza igual a $-\nabla p$ actúa por unidad de volumen en el fluido.

Ahora podemos escribir la ecuación de movimiento de un elemento de volumen en el fluido usando la Segunda Ley de Newton:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p. \quad (4.19)$$

La derivada $d\mathbf{v}/dt$ que aparece aquí no denota la razón de cambio de la velocidad del fluido en un punto fijo en el espacio, sino la razón de cambio de la velocidad de un pequeñísimo elemento de volumen⁵ del fluido mientras éste se mueve en el espacio. Esta derivada tiene que expresarse en términos de cantidades que sí estén fijas en

⁵Como estamos considerando al fluido como un medio continuo, cualquier pequeño elemento de volumen en él se supone que es tan grande que aún contiene un gran número de moléculas; por ello, cuando hablemos de elementos de volumen "infinitamente pequeños" nos referiremos a aquellos que son "físicamente" infinitamente pequeños, i.e., muy pequeños comparados con el volumen del cuerpo que estamos considerando, pero grandes comparados con la distancia entre las moléculas.

el espacio. Para ello, notemos que el cambio $d\mathbf{v}$ en la velocidad del elemento de volumen dado, durante un tiempo dt , se compone de dos partes: el cambio durante dt de la velocidad en un punto fijo del espacio, y la diferencia entre velocidades, al mismo tiempo, en dos puntos que están separados por una distancia $d\mathbf{r}$. Estas dos contribuciones se pueden expresar como

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\right)\mathbf{v} \Leftrightarrow \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \quad ,\end{aligned}\tag{4.20}$$

(usando la notación de Einstein).

En la primera parte de la contribución a $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$, la derivada temporal se toma para x_i constantes, o sea, en un punto fijo en el espacio; la segunda, por su parte, se toma a un tiempo fijo.

La expresión para la derivada dada por (4.20) se conoce como la *derivada material* de \mathbf{v} , y en general se define, para una función arbitraria $f(t, \mathbf{x})$ en el fluido, de la siguiente manera:

$$\frac{Df(t, \mathbf{x})}{Dt} = \partial_t f + (\mathbf{v} \cdot \nabla)f.\tag{4.21}$$

Finalmente, sustituyendo (4.20) en (4.19), y dividiendo entre ρ encontramos que

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p,\tag{4.22}$$

que es la *ecuación de Euler*. En general, el lado derecho puede generalizarse para incluir otras fuerzas, además de la debida a la presión. En particular, si el fluido está en un campo gravitacional sería necesario agregar la fuerza $\rho\mathbf{g}$, que es la fuerza de la gravedad por unidad de volumen (donde \mathbf{g} es la aceleración gravitacional). En este caso, la ecuación (4.22) toma la forma

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g}.\tag{4.23}$$

En general, podremos expresar la ecuación de Euler como

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{a},\tag{4.24}$$

siendo \mathbf{a} la aceleración (o bien, la fuerza por unidad de masa) producida por cualquier fuerza externa, agregada a la debida a la presión, que actúa sobre el fluido. La \mathbf{a} puede tener componentes tangenciales, en el caso de fluidos no ideales.

Hasta este punto no hemos tomado en cuenta procesos de disipación de la energía que podrían ocurrir si el sistema estuviera en movimiento como consecuencia de la fricción interna (viscosidad) del fluido y el intercambio de calor entre diferentes partes de él. Estas condiciones, en las que la conductividad térmica y la viscosidad no son importantes, son equivalentes a las enunciadas anteriormente para definir un fluido ideal.

La ausencia de intercambio de calor entre diferentes partes del fluido (y con el exterior) implica que el movimiento es adiabático a través de él. En este caso, la entropía de cualquier pequeño elemento de volumen permanece constante mientras éste se mueve en el espacio. Si la entropía es constante en todo el volumen en algún momento inicial, mantendrá el mismo valor constante en todo momento. Esto puede expresarse como

$$S = \text{constante} \Leftrightarrow dS = 0. \quad (4.25)$$

Un movimiento con tal característica se conoce como *isentrópico* y para ellos también se satisface que la densidad sólo depende de la presión, i.e. $\rho = \rho(p)$.

Aprovechando que el movimiento es isentrópico, podemos expresar (4.22) (al igual que (4.23) y (4.24)) de una manera diferente. Para ello, partimos de la relación que conocemos para la entalpía

$$H = U + pV$$

y la derivamos

$$dH = dU + pdV + Vdp.$$

De la segunda ley de la termodinámica sabemos que

$$dU = TdS - pdV,$$

expresión que podemos sustituir en la derivada de la entalpía para encontrar que

$$dH = TdS + Vdp.$$

Ahora podemos reescribir el volumen como $V = M/\rho$, donde M es la masa del fluido, y considerando que para el caso que nos ocupa $dS = 0$, la entalpía se reduce a

$$dH = \frac{M}{\rho} dp \Leftrightarrow dh \equiv \frac{dH}{M} = \frac{dp}{\rho},$$

donde hemos definido $h = h(p)$ como la entalpía específica (la entalpía por unidad de masa) del sistema. Vemos pues que

$$h = \int_0^P \frac{dp'}{\rho(p)} = \int_0^P \frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dx_i} dx_i, \quad (4.26)$$

de tal suerte que

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial h}{\partial x_i} \left[\int_0^P \frac{1}{\rho} \frac{dp'}{dx_j} dx_j \right] = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx_i}. \quad (4.27)$$

o, escrito vectorialmente,

$$\nabla h = \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (4.28)$$

Sustituyendo (4.28) en (4.22) nos queda

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla h. \quad (4.29)$$

Aún podemos simplificar esta expresión recordando que

$$\frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

y entonces podemos reescribir (4.29) como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla h. \quad (4.30)$$

Dado que nuestro flujo es irrotacional, podemos escribir la velocidad en términos de un potencial escalar como

$$\mathbf{v} = -\nabla \phi, \quad (4.31)$$

de modo que el último sumando del lado izquierdo de (4.30) se anula, y nos queda

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) = -\nabla h$$

que podemos reescribir, en términos del potencial, de la siguiente forma

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(\nabla \phi)}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla [(\nabla \phi)^2] &= -\nabla h \quad \Leftrightarrow \\ \nabla \left\{ -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + h \right\} &= 0 \end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + h = a, \quad (4.32)$$

que es una versión de la ecuación de Bernoulli, donde $a = cte.$ que, por conveniencia, fijaremos igual a cero.

Ahora sí estamos en condiciones de enunciar el teorema.

4.2.2. Teorema de Barceló, Liberati y Visser

Si un fluido es barotrópico y sin viscosidad, y el flujo es irrotacional (aunque posiblemente dependiente del tiempo), la ecuación de movimiento para el potencial de la velocidad que describe una perturbación acústica es idéntica a la ecuación de movimiento d'alembertiana para un campo escalar, no masivo, mínimamente acoplado, que se propaga en una geometría lorentziana (3+1) dimensional

$$\Delta\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0. \quad (4.33)$$

Bajo tales condiciones, la propagación del sonido está gobernada por una *métrica acústica*, $g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$. Esta métrica acústica describe una geometría (3+1) dimensional lorentziana (pseudo-riemanniana) y depende algebraicamente de la densidad, la velocidad del fluido y la velocidad local del sonido en el fluido. Específicamente

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\rho}{c} \begin{pmatrix} -(c^2 - \mathbf{v}^2) & -\mathbf{v}^T \\ -\mathbf{v} & \mathbb{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

En general, cuando el fluido no sea homogéneo y esté en movimiento, el *tensor de Riemann acústico* asociado a esta métrica lorentziana será no nulo.

Antes de hacer la demostración cabe resaltar que, aunque la dinámica de fluidos subyacente sea newtoniana, no relativista, y tenga lugar en el espacio plano más el tiempo, las fluctuaciones (ondas de sonido) serán gobernadas por una geometría espacio-temporal lorentziana (pseudo riemanniana), (3+1) dimensional, curva. Para aquellos que se dedican a la relatividad general, esta observación describe un modelo físico simple y concreto para ciertas clases de espacios-tiempos lorentzianos, incluidos los agujeros negros. Por otro lado, esta discusión es potencialmente interesante para aquellos que se dedican a la mecánica de continuos y fluidos, en tanto que proporciona una introducción simple y concreta a las técnicas de geometría diferencial lorentziana.

Demostración. Partamos de las ecuaciones fundamentales de la dinámica de fluidos: la de continuidad, (4.16)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0$$

y la forma reducida de la ecuación de Euler

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + h = 0. \quad (4.35)$$

Ahora pasemos a linearizar estas ecuaciones de movimiento en torno a cierto fondo no perturbado (ρ_0, p_0, ϕ_0) , para lo cual fijamos

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.36)$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.37)$$

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon \phi_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (4.38)$$

El sonido será justamente las fluctuaciones linearizadas en las cantidades dinámicas. Ésta es la definición estándar del sonido (lineal) y, más generalmente, de perturbaciones acústicas [44]. Aunque lo deseable sería resolver las ecuaciones de movimiento completas para las variables del fluido (ρ, p, ϕ) , en la práctica es muy difícil; sin embargo, resulta útil separar el movimiento exacto, descrito por las variables exactas (ρ, p, ϕ) , en un movimiento colectivo, dado por (ρ_0, p_0, ϕ_0) más perturbaciones acústicas de baja amplitud, $(\varepsilon \rho_1, \varepsilon p_1, \varepsilon \phi_1)$ ⁶.

Para linearizar las ecuaciones de nuestro interés, partimos de (4.31), en la que sustituimos (4.38), y nos quedamos con los términos lineales:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\nabla \phi = -\nabla(\phi_0 + \varepsilon \phi_1) \quad \Rightarrow \\ \mathbf{v} &= -\nabla \phi_0 - \varepsilon \nabla \phi_1 \equiv \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 \quad , \end{aligned} \quad (4.39)$$

donde se han definido

$$\mathbf{v}_0 \equiv -\nabla \phi_0 \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_1 \equiv -\nabla \phi_1. \quad (4.40)$$

A continuación, sustituimos las ecuaciones (4.36) y (4.39) en (4.16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \varepsilon \rho_1) + \nabla \cdot (\rho_0 + \varepsilon \rho_1)(\mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1) = \\ &= \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho_0 \mathbf{v}_0 + \varepsilon(\rho_0 \mathbf{v}_1 + \rho_1 \mathbf{v}_0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] = \\ &= \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) + \varepsilon \left[\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1 + \rho_1 \mathbf{v}_0) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0 \quad . \end{aligned}$$

⁶En esta aproximación se debe puntualizar lo siguiente: las perturbaciones que tienen bajas frecuencias (o largas longitudes de onda) se agrupan con el movimiento colectivo. Las perturbaciones que tienen longitudes de onda más cortas suelen describirse como perturbaciones acústicas. Cabe hacer notar que estamos haciendo una suposición física específica, que restringe la validez de nuestro análisis, en la medida en que estamos pidiendo que las amplitudes de las perturbaciones de altas frecuencias (o cortas longitudes de onda) sean pequeñas; esta suposición subyace tras la linearización que hemos hecho y, por esta razón, las ondas de sonido que tengan amplitudes suficientemente altas deben ser tratadas solucionando directamente las ecuaciones completas de la dinámica de fluidos.

Por independencia lineal, obtenemos

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0 \quad (4.41)$$

y

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1 + \rho_1 \mathbf{v}_0) = 0. \quad (4.42)$$

Por otro lado, sustituyendo (4.37) en la condición barotrópica $h = h(p)$ nos queda

$$h(p) = h(p_0 + \varepsilon p_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)).$$

Haciendo una expansión en serie de Taylor vemos que

$$h(p) = h(p_0) + \left. \frac{dh}{dp} \right|_{p_0} \varepsilon p_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = h(p_0) + \frac{1}{\rho(p_0)} \varepsilon p_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

o bien

$$h(p) \equiv h_0 + \varepsilon \frac{p_1}{\rho_0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.43)$$

donde hemos definido $h_0 = h(p_0)$ y $\rho_0 = \rho(p_0)$.

Sustituyendo (4.38) y (4.43) en (4.35) obtenemos

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + h = \\ & = -\frac{\partial}{\partial t}(\phi_0 + \varepsilon \phi_1) + h_0 + \varepsilon \frac{p_1}{\rho_0} + \frac{1}{2}[\nabla(\phi_0 + \varepsilon \phi_1)]^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\ & = -\frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + h_0 + \varepsilon \frac{p_1}{\rho_0} + \frac{1}{2}[(\nabla \phi_0)^2 + 2\varepsilon \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_0] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\ & = \left(-\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + h_0 + \frac{1}{2}(\nabla \phi_0)^2\right) + \varepsilon \left[-\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_0} + \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_0\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0 \quad . \quad (4.44) \end{aligned}$$

Por independencia lineal, de nuevo, obtenemos dos ecuaciones que, recordando (4.39), podemos escribir como

$$-\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + h_0 + \frac{1}{2}(\nabla \phi_0)^2 = 0, \quad (4.45)$$

y

$$-\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_0} - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 = 0; \quad (4.46)$$

de aquí podemos despejar p_1 y encontrar

$$p_1 = \rho_0 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right]. \quad (4.47)$$

A continuación nos interesa linearizar la densidad; para ello, hacemos una expansión de Taylor en torno a p_0 usando (4.37):

$$\rho(p) = \rho(p_0) + \varepsilon p_1 \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{p_0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \equiv \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

de donde podemos identificar

$$\rho_1 = p_1 \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{p_0}$$

y, sustituyendo (4.47), obtener que

$$\rho_1 = \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{p_0} \rho_0 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right]. \quad (4.48)$$

Finalmente, podemos sustituir (4.48) y (4.47) (que son consecuencias de la ecuación de Euler linearizada) en la ecuación de continuidad linearizada, (4.42), y encontrar que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1 + \rho_1 \mathbf{v}_0) = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{p_0} \rho_0 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right] \right\} + \nabla \cdot \left\{ -\rho_0 \nabla \phi_1 + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{p_0} \rho_0 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right] \mathbf{v}_0 \right\} = 0 \Leftrightarrow \\ & - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{p_0} \rho_0 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right] \right\} + \nabla \cdot \left\{ \rho_0 \nabla \phi_1 - \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{p_0} \rho_0 \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right] \mathbf{v}_0 \right\} = 0 \quad . \quad (4.49) \end{aligned}$$

Esta ecuación de onda describe la propagación del potencial escalar linearizado ϕ_1 . Una vez que se ha determinado ϕ_1 , la ecuación (4.47) determina p_1 y (4.48) hace lo propio con ρ_1 . De este modo, (4.49) determina completamente la propagación de perturbaciones acústicas. Los campos de fondo p_0, ρ_0 y $\mathbf{v}_0 = -\nabla \phi_0$, que aparecen en esta ecuación de onda como coeficientes que dependen tanto de la posición como del tiempo, están constreñidos a resolver las ecuaciones de movimiento del fluido para un flujo barotrópico, sin viscosidad e irrotacional. Fuera de esas constricciones, tienen permitido tener dependencias temporales y espaciales arbitrarias.

Escrita de esta forma, el significado físico de la ecuación de onda no es precisamente diáfano. Para simplificarla algebraicamente, partimos del hecho de que la velocidad local del sonido ([46], [44]) se define como

$$\frac{1}{c^2} \equiv \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{p_0}, \quad (4.50)$$

de modo que podemos factorizar $\frac{\rho_0}{c^2}$ de (4.49) y obtener

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho_0}{c^2} \left[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right] \right\} + \nabla \cdot \left\{ \frac{\rho_0}{c^2} \left[c^2 \nabla \phi_1 - \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right) \mathbf{v}_0 \right] \right\} = 0. \quad (4.51)$$

Quisiéramos expresar (4.51) como un producto de matrices de la forma

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_1) = 0, \quad (4.52)$$

(donde se utilizan las coordenadas (3+1) espacio-temporales, que escribimos como $x^\mu \equiv (t; x^i)$) ya que queremos recuperar una ecuación que se pueda leer como el d'alembertiano del campo ϕ (en una variedad lorentziana) igual a cero. Dicho d'alembertiano se define en términos de una métrica $g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$ como [2]

$$\Delta \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi), \quad (4.53)$$

siendo $g^{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$ la matriz inversa de $g_{\mu\nu}$ en el punto (t, \mathbf{x}) , mientras que $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$.

En principio vamos a encontrar la función $f^{\mu\nu}$ y, a partir de ella, esperamos poder identificar la métrica acústica efectiva $g_{\mu\nu}$.

Para tal fin, partamos de expresar (4.51) como un producto de vectores tipo

$$(\vec{\partial})^T \left[\frac{\rho_0}{c^2} \mathbf{u} \right] = 0,$$

donde $(\vec{\partial})^T = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$ y \mathbf{u} será un vector columna. Vemos que dicho producto será

$$(\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z) \left(\frac{\rho_0}{c^2} \right) \begin{pmatrix} -[\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1] \\ c^2 \partial_x \phi_1 - [\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1] v_{0x} \\ c^2 \partial_y \phi_1 - [\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1] v_{0y} \\ c^2 \partial_z \phi_1 - [\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1] v_{0z} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.54)$$

donde se entiende que la derivada actúa sobre el producto $\frac{\rho_0}{c^2} \mathbf{u}$, aunque $\frac{\rho_0}{c^2} = cte$.

Una vez hecho esto, aún nos falta escribir el vector columna en (4.54) como $f^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_1$; procedamos a hacerlo factorizando por la derecha el vector columna

$$\partial_\nu \phi_1 = \begin{pmatrix} \partial_t \phi_1 \\ \partial_x \phi_1 \\ \partial_y \phi_1 \\ \partial_z \phi_1 \end{pmatrix};$$

a partir de esto podemos identificar que

$$f^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_1 = \frac{\rho_0}{c^2} \begin{pmatrix} -1 & -v_{0x} & -v_{0y} & -v_{0z} \\ -v_{0x} & c^2 - v_{0x}^2 & -v_{0x}v_{0y} & -v_{0x}v_{0z} \\ -v_{0y} & -v_{0y}v_{0x} & c^2 - v_{0y}^2 & -v_{0y}v_{0z} \\ -v_{0z} & -v_{0z}v_{0x} & -v_{0z}v_{0y} & c^2 - v_{0z}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \phi_1 \\ \partial_x \phi_1 \\ \partial_y \phi_1 \\ \partial_z \phi_1 \end{pmatrix}$$

o sea⁷

$$f^{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{c^2} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots & & \dots \\ -v_0^i & \vdots & c^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

Ahora sólo nos falta encontrar $g_{\mu\nu}$. Para hacerlo es necesario que comparemos (4.53) con (4.52) para notar que

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}. \quad (4.56)$$

Por un lado, esto implica

$$\det(f^{\mu\nu}) = \det[\sqrt{-g} g^{\mu\nu}] = (-g)^2 \det(g^{\mu\nu})$$

y, recordando que

$$\det(g^{\mu\nu}) = [\det(g_{\mu\nu})]^{-1} = \frac{1}{g},$$

vemos

$$\det(f^{\mu\nu}) = g. \quad (4.57)$$

Por otro lado, si calculamos directamente de (4.55),

$$\det(f^{\mu\nu}) = \left(\frac{\rho_0}{c^2}\right)^4 (-c^6) = -\frac{\rho_0^4}{c^2}, \quad (4.58)$$

⁷Estamos usando la notación en la que los índices griegos van de 0 a 3 y los romanos de 1 a 3.

de modo que,

$$g = -\frac{\rho_0^4}{c^2} \quad ; \quad \sqrt{-g} = \frac{\rho_0^2}{c}. \quad (4.59)$$

Usando (4.56) y (4.59) podemos ver que la inversa de la métrica acústica es

$$g^{\mu\nu} = \frac{f^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{c\rho_0} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots & & \dots \\ -v_0^i & \vdots & c^2\delta^{ij} - v_0^i v_0^j \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

Entonces podemos ya determinar la métrica acústica en sí, invirtiendo esta matriz de 4×4 , la cual resulta ser

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{c} \begin{pmatrix} -(c^2 - v_0^2) & \vdots & -v_0^j \\ \dots & & \dots \\ -v_0^i & \vdots & \delta^{ij} \end{pmatrix}. \quad (4.61)$$

Teniéndola podemos también escribir el intervalo acústico como

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{\rho_0}{c} [-c^2 dt^2 + (d\mathbf{x} - dt\mathbf{v})^2], \quad (4.62)$$

lo cual completa la prueba del teorema.

4.2.3. Características generales de la métrica acústica

Cabe hacer, en este punto, algunos comentarios:

- Notemos que la signatura de esta métrica efectiva es $(-, +, +, +)$, como debería ser para ser lorentziana.
- Observemos que en la acústica física es la inversa de la densidad de la métrica,

$$f^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$$

que tiene un significado más fundamental a la hora de derivar las ecuaciones de movimiento que la misma $g_{\mu\nu}$. (Esta observación se mantiene en situaciones más generales donde es, a menudo, mucho más sencillo calcular la densidad tensorial $f^{\mu\nu}$ que calcular la métrica efectiva $g_{\mu\nu}$.)

- Hay que hacer hincapié en que hay dos métricas distintas relacionadas con esta discusión:
 - La *métrica física espacio-temporal* que es, en este caso, la métrica habitual plana del espacio-tiempo de Minkowski:
 $\eta_{\mu\nu} \equiv (\text{diag}[-c_{luz}^2, 1, 1, 1])_{\mu\nu}$. (Aquí c_{luz} es la velocidad de la luz en el vacío)
 Las partículas del fluido se acoplan solamente a la métrica física $\eta_{\mu\nu}$. De hecho, el movimiento del fluido es completamente no relativista, de modo que $\|v_0\| \ll c_{luz}$, y es suficiente considerar la relatividad galileana para la dinámica del fluido subyacente.
 - Las ondas de sonido, por otro lado, no “ven” la métrica física para nada. Las perturbaciones acústicas se acoplan sólo a la *métrica acústica efectiva* $g_{\mu\nu}$.

4.3. Analogía desde la acústica física: caso viscoso

A continuación estudiaremos la situación en que la analogía a la gravedad surge a partir de un fluido con las mismas características que el anterior, salvo por el hecho de presentar viscosidad, trabajo del cual surgió el artículo [47].

Al igual que en la sección anterior, partiremos primero de una revisión de la dinámica correspondiente a los fluidos con esta característica, para pasar después a enunciar nuestro teorema y, finalmente, estudiaremos cómo se comporta la energía del sistema a través del cálculo del tensor de energía-momento.

4.3.1. Dinámica del fluido viscoso: Las ecuaciones de Navier-Stokes

En este apartado estudiaremos el efecto de la disipación de la energía que ocurre durante el movimiento de un fluido, en el fluido mismo. Este proceso es resultado de la irreversibilidad termodinámica del movimiento; esta irreversibilidad siempre ocurre en cierta medida y se debe a la fricción interna (viscosidad) y conducción térmica.

Para entender esto mejor, consideremos la situación que aparece en la siguiente figura.

En ella se muestra un fluido ideal para el cual la velocidad, \mathbf{v} , es paralela a cierta superficie S pero cambia de magnitud rápidamente cuando la cruzamos. En el

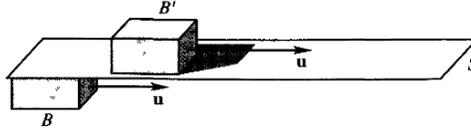


Figura 4.1: Transferencia de energía entre las capas del fluido

fluido ideal, todas las fuerzas que actúan sobre una superficie son normales a ella; si todas las fuerzas son normales a S no habrá transferencia de momentum entre los volúmenes del fluido denotados por B y B' en la figura. Sin embargo, en la realidad eso no ocurre; pensando en términos de la teoría cinética de la materia, las moléculas más rápidas que están sobre S se difundirán a través de esta superficie e impartirán momentum al fluido de abajo y, de manera semejante, las moléculas más lentas que están debajo de S se difundirán a través de ella, alentando el fluido de arriba. Si el cambio en la velocidad del fluido es significativo en distancias cortas, el efecto puede ser importante.

Por esta razón tenemos que cambiar lo que anteriormente habíamos considerado como la fuerza por unidad de área. En vez de pensar que

$$\text{fuerza sobre } S \text{ por unidad de area} = -p(t, \mathbf{x})\hat{\mathbf{n}}, \quad (4.63)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal a S , ahora tenemos que considerar que

$$\text{fuerza por unidad de area} = -p(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}; \quad (4.64)$$

aquí $\boldsymbol{\sigma}$ es una matriz llamada el *tensor de estrés*, sobre el cual tendremos que hacer algunas suposiciones. La novedad es que $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ es un producto matricial y no necesariamente será paralelo a $\hat{\mathbf{n}}$. La separación de las fuerzas entre la presión y el resto de ellas en (4.64) es un poco ambigua, porque $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ puede tener una componente paralela a $\hat{\mathbf{n}}$, pero esto se resolverá cuando demos una forma funcional específica para $\boldsymbol{\sigma}$.

La segunda ley de Newton establece que la razón de cambio del moméntum de cualquier porción del fluido en movimiento V es igual a la fuerza que actúa sobre ella, o sea que ⁸

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = - \oint_{\partial V} (p \hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS. \quad (4.65)$$

Vemos que $\boldsymbol{\sigma}$ modifica el transporte de moméntum a través de la frontera de V . Elegiremos $\boldsymbol{\sigma}$ de modo que se aproxime en una medida razonable al transporte de moméntum debido al movimiento molecular.

La forma general del tensor $\boldsymbol{\sigma}$ puede establecerse de la siguiente manera. Como ya dijimos, los procesos de fricción interna ocurren en un fluido sólo cuando diferentes partículas en él se mueven con distintas velocidades, v_i , de modo que hay un movimiento relativo entre varias partes del fluido. Por ello, $\boldsymbol{\sigma}$ debe depender de las derivadas espaciales de la velocidad. Si los gradientes de la velocidad son pequeños, debemos suponer que la transferencia de moméntum debida a la viscosidad depende sólo de las primeras derivadas de la velocidad. En esta misma aproximación, debemos suponer que σ_{ij} es una función lineal de las derivadas $\partial v_i / \partial x_j$. No puede haber términos en σ_{ij} que sean independientes de $\partial v_i / \partial x_j$, puesto que σ_{ij} debe anularse para $\mathbf{v} = cte$. Además, notemos que σ_{ij} debe anularse cuando todo el fluido está rotando uniformemente, dado que en tal movimiento no hay fricción interna en el fluido [44]. En rotación uniforme con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, la velocidad $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$. Las sumas

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

son combinaciones lineales de las derivadas $\partial v_i / \partial x_j$ y se cancelan cuando $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$. Entonces la matriz σ_{ij} debe contener sólo estas combinaciones simétricas de las derivadas $\partial v_i / \partial x_j$. En general, σ_{ij} debe ser simétrica, como consecuencia de la conservación del momento angular [48].

El tensor más general que satisface las condiciones requeridas es

$$\sigma_{ij} = \alpha \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \beta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij},$$

que podemos reorganizar como

$$\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ij}, \quad (4.66)$$

⁸Uno se puede preguntar por qué la fuerza en (4.64) que actúa sobre S debe ser una función lineal de $\hat{\mathbf{n}}$. De hecho, si uno asume que la fuerza es una función continua de $\hat{\mathbf{n}}$, entonces, usando el balance del moméntum, se puede demostrar que tal función es lineal en $\hat{\mathbf{n}}$. Este resultado es el *Teorema de Cauchy*[48].

de modo que el término entre paréntesis se anule al contraer los índices i y j , y donde $\alpha = \eta$ y $\beta = \zeta - \frac{2}{3}\eta$. Los coeficientes η y ζ son independientes de la velocidad y hemos usado el hecho de que el fluido es isotrópico, por lo cual sus propiedades deben ser descritas únicamente por cantidades escalares (en este caso η y ζ). A las constantes η y ζ se les llama *primer* y *segundo coeficientes de viscosidad* respectivamente.

Antes de sustituir (4.66), reexpresemos (4.65) usando el teorema de Gauss-Ostrogradsky, para la cual la componente i -ésima será

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = - \oint_{\partial V} (p \hat{n}_i - \sigma_{ij} \hat{n}_j) dS = - \int_V (\partial_i p - \partial_j \sigma_{ij}) dV. \quad (4.67)$$

Como vemos, hay dos contribuciones al cambio del momento en (4.67): la primera se debe a la transferencia debida a la presión en el fluido y la segunda es la transferencia irreversible debida a la viscosidad.

Como la integral se realizará sobre un volumen arbitrario, (4.67) se reduce a

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right\} + \zeta \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right). \quad (4.68)$$

Ésta es la forma más general de las ecuaciones de movimiento de un fluido viscoso. Las cantidades η y ζ son funciones de la presión y la temperatura. En general, p y T , y por tanto η y ζ , no son constantes en todo el fluido, de tal suerte que no podemos sacar a η y ζ fuera del operador gradiente [44]. Sin embargo, en la mayoría de los casos los coeficientes de viscosidad no cambian notablemente en el fluido y pueden considerarse constantes. En tal situación, podemos escribir (4.68) vectorialmente como

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (4.69)$$

Ésta se llama la *ecuación de Navier-Stokes*. Al coeficiente η se le conoce como coeficiente de viscosidad dinámica y a $\frac{\eta}{\rho}$ se le llama coeficiente de viscosidad cinemática.

En general, podemos reescribir (4.69) como

$$-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (4.70)$$

Al igual que en el caso anterior, supondremos que el fluido es barotrópico, de modo que p es función de ρ , y entonces podemos definir la entalpía como

$$h(p) \equiv \int_0^P \frac{dp'}{\rho(p)}, \quad (4.71)$$

y, por ende,

$$\nabla h = \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (4.72)$$

así que al sustituir (4.72) en (4.70) obtenemos

$$-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla h + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0. \quad (4.73)$$

Ahora bien, de las fórmulas del análisis vectorial tenemos, primero,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v},$$

y entonces

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (4.74)$$

Por otro lado, tenemos la relación

$$(\mathbf{v} \times \nabla) \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v}^2) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}; \quad (4.75)$$

en general, el producto cruz no es asociativo, sin embargo, como

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

vemos que si $\mathbf{a} = \mathbf{c}$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}), \quad (4.76)$$

de modo que (4.75) es equivalente a

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v}^2) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

o bien

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v}^2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}). \quad (4.77)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.74) y (4.77) en (4.73) obtenemos

$$-\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v}^2) - \nabla h + \frac{\eta}{\rho} [\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})] + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (4.78)$$

Para un fluido irrotacional $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ y esta ecuación se reduce a

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) - \nabla h + \frac{\eta}{\rho} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) - \nabla h + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.79)$$

Es importante resaltar que si elegimos un fluido incompresible, para el cual $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, la parte correspondiente a la viscosidad desaparece de la ecuación (4.79) y nuestro sistema se reduciría al caso que investigamos anteriormente.

Finalmente, para un fluido irrotacional podemos expresar $\mathbf{v} = -\nabla\phi$, de modo que (4.79) se vuelve

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} - \frac{1}{2} [\nabla(\nabla\phi)^2] - \nabla h - \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \nabla(\nabla^2\phi) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \nabla \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - h - \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \nabla^2\phi \right\} &= 0 \quad , \end{aligned}$$

o bien,

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + h + \frac{1}{\rho} \left(\zeta + \frac{4}{3} \eta \right) \nabla^2\phi = 0. \quad (4.80)$$

Comparando (4.80) con (4.35) vemos que si hacemos

$$\frac{4}{3} \eta + \zeta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \zeta = -\frac{4}{3} \eta$$

nuestra ecuación también se reduce trivialmente al caso estudiado anteriormente.

4.3.2. Teorema de González-Fernández y Camacho

En nuestra contribución, publicada en el Modern Physics Letters A, [49], lo que hicimos fue la generalización del teorema demostrado en la sección anterior para el caso de un fluido viscoso irrotacional, que enunciamos como sigue.

Si un fluido es viscoso, barotrópico e incompresible, y el flujo es irrotacional (aunque posiblemente dependiente del tiempo), la ecuación de movimiento para el potencial

de la velocidad que describe una perturbación acústica estará dada por

$$\Delta\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta\phi\right) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha\left(\frac{\mu}{c^2}\sqrt{-g}g^{0\alpha}\nabla^2\phi_1\right). \quad (4.81)$$

Bajo tales condiciones, la propagación del sonido será gobernada por una métrica acústica, $g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$. Esta métrica acústica describe una geometría (3+1) dimensional lorentziana (pseudoriemanniana). La métrica depende algebraicamente de la densidad, la velocidad del fluido y la velocidad local del sonido en el fluido. Específicamente,

$$g_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{\rho}{c} \begin{pmatrix} -(c^2 - \mathbf{v}^2) & -\mathbf{v}^T \\ -\mathbf{v} & \mathbb{I}_{3\times 3} \end{pmatrix}.$$

Demostración. Las ecuaciones para el fluido viscoso irrotacional serán, nuevamente, la ecuación de continuidad, (4.16)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0.$$

y la ecuación (4.80) que, definiendo

$$\mu \equiv \zeta + \frac{4}{3}\eta,$$

se reescribe como

$$-\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + h + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\phi = 0. \quad (4.82)$$

Procedemos a linearizar estas ecuaciones usando, nuevamente (4.36), (4.37) y (4.38)

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \varepsilon\rho_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \phi &= \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

y

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi_0 - \varepsilon\nabla\phi_1 \equiv \mathbf{v}_0 + \varepsilon\mathbf{v}_1, \quad (4.83)$$

y al expandir $h(p)$ en torno a p_0 obtenemos

$$h(p) = h(p_0) + \varepsilon\frac{p_1}{\rho_0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \equiv h_0 + \varepsilon h_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (4.84)$$

Como vimos antes, sustituyendo (4.36) y (4.83) en (4.16) encontramos dos ecuaciones linealmente independientes, (4.41) y (4.42),

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0$$

y

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1 + \rho_1 \mathbf{v}_0) = 0$$

que se siguen satisfaciendo para este sistema.

Por su parte, reemplazando (4.36), (4.38) y (4.84) en (4.82) llegaremos a

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\phi_0 + \varepsilon \phi_1) + \frac{1}{2} (\nabla \phi_0 + \varepsilon \nabla \phi_1)^2 + h_0 + \varepsilon \frac{p_1}{\rho_0} + \mu (\rho_0 + \varepsilon \rho_1)^{-1} [\nabla^2 \phi_0 + \varepsilon \nabla^2 \phi_1] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0$$

de modo que,

$$-\frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + h_0 + \varepsilon \frac{p_1}{\rho_0} + \frac{1}{2} (\nabla \phi_0)^2 + \varepsilon \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_1 + \frac{\mu}{\rho_0} \left(1 - \varepsilon \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) [\nabla^2 \phi_0 + \varepsilon \nabla^2 \phi_1] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0,$$

que resultará en

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + h_0 + \frac{1}{2} (\nabla \phi_0)^2 + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \phi_0 \right] + \\ & \varepsilon \left[-\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_0} + \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_1 + \frac{\mu}{\rho_0} \left(\nabla^2 \phi_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \nabla^2 \phi_0 \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Por independencia lineal, podemos separar esta última en dos ecuaciones:

$$-\frac{\partial \phi_0}{\partial t} + h_0 + \frac{1}{2} (\nabla \phi_0)^2 + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \phi_0 = 0 \quad (4.86)$$

y

$$-\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{p_1}{\rho_0} + \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_1 + \frac{\mu}{\rho_0} \left(\nabla^2 \phi_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \nabla^2 \phi_0 \right) = 0. \quad (4.87)$$

De (4.87), podemos despejar p_1 , para obtener

$$p_1 = \rho_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_1 \right) - \mu \left(\nabla^2 \phi_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \nabla^2 \phi_0 \right). \quad (4.88)$$

En este punto vale la pena hacer notar que si comparamos la ecuación (4.88) con (4.47), el término que depende del coeficiente de viscosidad es negativo, de modo que la presión disminuye como consecuencia de la viscosidad, lo cual es congruente con lo que esperamos que pase físicamente.

Para encontrar el valor de p_1 necesitamos el valor de ρ_1 ; para encontrarlo, expandimos ρ nuevamente en una serie de Taylor:

$$\rho = \rho(p_0) + \varepsilon p_1 \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{p_0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \equiv \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2);$$

de aquí podemos identificar fácilmente

$$\rho_1 = p_1 \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{p_0}$$

y, si recordamos que la velocidad local del sonido se define como

$$\frac{1}{c^2} \equiv \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_{p_0},$$

llegamos a

$$\rho_1 = \frac{p_1}{c^2}. \quad (4.89)$$

Sustituyendo (4.89) en (4.88) encontramos

$$\begin{aligned} p_1 &= \rho_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_1 \right) - \mu \nabla^2 \phi_1 + \frac{p_1 \mu}{c^2} \frac{\nabla^2 \phi_0}{\rho_0} \quad \Leftrightarrow \\ p_1 \left(1 - \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\nabla^2 \phi_0}{c^2} \right) &= \rho_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_1 \right) - \mu \nabla^2 \phi_1, \end{aligned}$$

de tal suerte que

$$p_1 = \left(1 - \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\nabla^2 \phi_0}{c^2} \right)^{-1} \left\{ \rho_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_1 \right) - \mu \nabla^2 \phi_1 \right\} \quad (4.90)$$

y entonces

$$\rho_1 = \left(c^2 - \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \phi_0 \right)^{-1} \left\{ \rho_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_1 \right) - \mu \nabla^2 \phi_1 \right\}. \quad (4.91)$$

Podemos ver que si hacemos $\mu \rightarrow 0$ recuperamos la expresión que debemos para el caso sin viscosidad.

Por comodidad, definamos

$$u^2 \equiv \left(c^2 - \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 \phi_0 \right) = \left(c^2 + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \right), \quad (4.92)$$

de modo que podamos expresar

$$\rho_1 = \frac{1}{u^2} \left\{ \rho_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_1 \right) - \mu \nabla^2 \phi_1 \right\}. \quad (4.93)$$

Sustituyendo (4.93) en (4.42) y usando (4.39) encontramos que

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \rho_1}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1 + \rho_1 \mathbf{v}_0) = \\ & = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{u^2} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right) - \mu \nabla^2 \phi_1 \right] \right\} \\ & - \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{u^2} \left[\rho_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right) - \mu \nabla^2 \phi_1 \right] \mathbf{v}_0 - \frac{\rho_0}{u^2} \left[\left(c^2 + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \right) \nabla \phi_1 \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.94)$$

Podemos reagrupar los términos de (4.94) de modo que la expresemos como

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho_0}{u^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \frac{\rho_0}{u^2} \left[c^2 \nabla \phi_1 - \mathbf{v}_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right) \right] \right\} = \\ & = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{u^2} \nabla^2 \phi_1 \right) - \nabla \cdot \left\{ \frac{\mu}{u^2} \left[\mathbf{v}_0 \nabla^2 \phi_1 + (\nabla \cdot \mathbf{v}_0) \nabla \phi_1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Ahora bien, queremos que el lado izquierdo de (4.95) se vea como en el caso sin viscosidad, i.e. igual a la ecuación (4.51). Con tal fin pedimos que

$$u^{-2} = \left(c^2 + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \right)^{-1} \equiv c^{-2}. \quad (4.96)$$

Esta condición se puede pidiendo que $\mu = 0$, con lo cual recuperamos trivialmente las ecuaciones para el caso no viscoso, pero nos interesa estudiar los efectos de la

viscosidad en el sistema, así que no nos conviene hacer esta elección. La opción que nos queda es demandar que

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \quad (4.97)$$

lo cual implica que el fluido sea incompresible cuando no hay perturbaciones en él. Bajo esta condición, (4.95) se transforma en

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho_0}{c^2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \frac{\rho_0}{c^2} \left[c^2 \nabla \phi_1 - \mathbf{v}_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \right) \right] \right\} = \\ = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu}{c^2} \nabla^2 \phi_1 \right) - \nabla \cdot \left\{ \frac{\mu}{c^2} \mathbf{v}_0 \nabla^2 \phi_1 \right\}. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Por conveniencia, dejaremos (4.98) expresada tal cual para encontrar su forma matricial. Por supuesto, habrá algunos términos que al aplicar (4.97) se desvanecerán, por lo que hay que considerar ambas ecuaciones juntas siempre.

Matricialmente, podemos escribir (4.98) como

$$(\partial_t, \partial_i) \left\{ \frac{\rho_0}{c^2} \begin{pmatrix} -\partial_t \phi_1 - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1 \\ c^2 \partial_i \phi_1 - v_0^i (\partial_t \phi_1 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi_1) \end{pmatrix} \right\} = (\partial_t, \partial_i) \left\{ -\frac{\mu}{c^2} \begin{pmatrix} \nabla^2 \phi_1 \\ v_0^j \nabla^2 \phi_1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.99)$$

que a su vez puede descomponerse en

$$\begin{aligned} (\partial_t, \partial_i) \left\{ \frac{\rho_0}{c^2} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots & & \dots \\ -v_0^i & \vdots & c^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \phi_1 \\ \partial_j \phi_1 \end{pmatrix} \right\} = \\ = (\partial_t, \partial_i) \left\{ \frac{\mu}{\rho_0} \cdot \frac{\rho_0}{c^2} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots & & \dots \\ -v_0^i & \vdots & c^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla^2 \phi_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Tensorialmente, podemos expresar (4.100) como

$$\partial_\alpha \left(f^{\alpha\beta} \partial_\beta \phi_1 \right) = \partial_\alpha \left(\frac{\mu}{\rho_0} f^{0\alpha} \nabla^2 \phi_1 \right). \quad (4.101)$$

Ahora, recordemos que el d'alembertiano definido en términos de una métrica $g_{\mu\nu}$ está dado por (4.53)

$$\Delta \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi),$$

o, haciendo las identificaciones pertinentes,

$$\Delta \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (f^{\alpha\beta} \partial_\beta \phi_1). \quad (4.102)$$

En este caso, $f^{\mu\nu}$ tiene el mismo valor que en el caso no viscoso, por lo que, mediante un procedimiento análogo al realizado anteriormente, es fácil recuperar (4.56):

$$f^{\alpha\beta} \equiv \sqrt{-g} g^{\alpha\beta},$$

siendo aún válida (4.59)

$$\sqrt{-g} = \frac{\rho_0^2}{c}$$

y la matriz inversa de la métrica, igualmente (4.60)

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{c\rho_0} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_0^j \\ \dots & & \dots \\ -v_0^i & \vdots & c^2 \delta^{ij} - v_0^i v_0^j \end{pmatrix},$$

por lo que la métrica acústica resulta ser, de nuevo (4.61)

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{c} \begin{pmatrix} -(c^2 - v_0^2) & \vdots & -v_0^j \\ \dots & & \dots \\ -v_0^i & \vdots & \delta^{ij} \end{pmatrix}.$$

Así, pues, podemos expresar (4.101) en términos de estos parámetros multiplicándola a ambos lados por $\frac{1}{\sqrt{-g}}$ y usando (4.102) y (4.56):

$$\Delta \phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (f^{\alpha\beta} \partial_\beta \phi_1) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \left(\frac{\mu}{c^2} f^{0\alpha} \nabla^2 \phi_1 \right) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \left(\frac{\mu}{c^2} \sqrt{-g} g^{0\alpha} \nabla^2 \phi_1 \right), \quad (4.103)$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

En el caso que nos ocupa, tanto c como ρ_0 son constantes, así que $\sqrt{-g} = cte.$ también y entonces (4.103) se reduce a

$$\Delta \phi = \partial_\alpha \left(\frac{\mu}{\rho_0} g^{0\alpha} \nabla^2 \phi_1 \right). \quad (4.104)$$

El hecho de que esta ecuación sea inhomogénea implica que hay cierto intercambio de energía entre el campo que representa al potencial de la velocidad y el espacio tiempo. Por esta razón, queremos entender el estado energético del sistema, para lo cual procederemos a calcular el tensor de energía-momento.

4.3.3. Tensor de energía-momento

Para ver qué pasa con la energía del sistema, necesitamos calcular el tensor de energía-momento que, como sabemos, es el operador que contiene la información sobre la densidad de energía y de momento del sistema, además del intercambio de ellos entre distintas partes del mismo [2].

Comencemos por escribir la componente T^{00} , que representa la densidad de energía del elemento de fluido, y estará dada por la densidad de energía interna más la densidad de energía cinética:

$$T^{00} = \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2, \quad (4.105)$$

siendo ρ la densidad de masa y ε , la energía interna por unidad de masa para cada elemento de fluido.

Por su parte, las componentes T^{i0} ($= T^{0i}$) expresan la densidad de la componente i -ésima de momento y serán, simplemente,

$$T^{i0} = T^{0i} = \rho v_i, \quad (4.106)$$

donde v_i es la componente i -ésima de la velocidad del elemento de fluido.

Ya sólo nos queda por encontrar las componentes T^{ij} del tensor que, como sabemos, es el flujo de la componente i -ésima de momento a través de una superficie con $x^j = ct$. Para calcularlas, determinemos la razón de cambio del momento i -ésimo en el tiempo [44], que será

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) v_i. \quad (4.107)$$

Ahora bien, recordando la ecuación de continuidad, (4.16), vemos que podemos expresar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k), \quad (4.108)$$

mientras que, de la ecuación de Navier-Stokes,

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) &= -\rho \left(v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) v_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \\ &\eta \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2 v_i + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (4.109)$$

que, como vimos, en el caso de un fluido irrotacional se reduce a

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = -\rho \left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \quad (4.110)$$

o, en nuestra notación,

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = -\rho \left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right). \quad (4.111)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.108) y (4.111) en (4.107), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) &= -v_i \frac{\partial \rho v_k}{\partial x_k} - \rho \left(v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(p - \mu \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho v_i v_k + \left(p - \mu \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} \right] \equiv -\frac{\partial}{\partial x_k} (\Pi_{ik}), \end{aligned} \quad (4.112)$$

donde hemos definido, por comodidad, el tensor

$$\Pi_{ik} \equiv \rho v_i v_k + \left(p - \mu \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij}. \quad (4.113)$$

Para entender el significado de (4.112), integrémosla sobre cierto volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = \int -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = \oint \Pi_{ik} \hat{n}_k dS. \quad (4.114)$$

El lado izquierdo de (4.114) es la razón de cambio de la i -ésima componente del momento, de modo que la integral de superficie de la derecha es la razón de cambio de la i -ésima componente del momento por unidad de tiempo; entonces Π_{ik} es el flujo de la i -ésima componente del momento a través de una superficie con $x^k = cte.$, por lo tanto

$$T^{ik} = \Pi^{ik} = \rho v^i v^k + [p - \mu (\nabla \cdot \mathbf{v})] \delta^{ij}. \quad (4.115)$$

Matricialmente, podemos juntar (4.105), (4.106) y (4.115) para obtener

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 & \rho v_1 & \rho v_2 & \rho v_3 \\ \rho v_1 & \rho v_1^2 + [p - \mu(\nabla \cdot \mathbf{v})] & \rho v_1 v_2 & \rho v_1 v_3 \\ \rho v_2 & \rho v_2 v_3 & \rho v_2^2 + [p - \mu(\nabla \cdot \mathbf{v})] & \rho v_2 v_3 \\ \rho v_3 & \rho v_3 v_1 & \rho v_2 v_3 & \rho v_3^2 + [p - \mu(\nabla \cdot \mathbf{v})] \end{pmatrix}. \quad (4.116)$$

Por último, procedamos a linealizar las componentes de $T_{\mu\nu}$. Para hacerlo, necesitamos recordar que estamos trabajando con un fluido isentrópico, de modo que

$$h = \int_0^p \frac{dp'}{\rho}, \quad (4.117)$$

y retomar las ecuaciones (4.36), (4.37), (4.38) y (4.39), que recordamos son

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon\rho_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

$$\mathbf{v} = -\nabla\phi_0 - \varepsilon\nabla\phi_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \equiv \mathbf{v}_0 + \varepsilon\mathbf{v}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

para sustituirlas en (4.105), (4.106) y (4.115).

Por simplicidad, comenzamos por las componentes T^{0i} ,

$$\begin{aligned} T^{i0} = T^{0i} = \rho v_i &= [\rho_0 + \varepsilon\rho_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] [v_0^i + \varepsilon v_1^i + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] = \\ &= \rho_0 v_0^i + \varepsilon(\rho_0 v_1^i + \rho_1 v_0^i) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \equiv \\ &\equiv T_{(0)}^{0i} + \varepsilon T_{(1)}^{0i} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

En la última igualdad, hemos definido

$$T_{(0)}^{0i} \equiv \rho_0 v_0^i = -\rho_0 \partial^i \phi_0, \quad (4.118)$$

que será la densidad de la componente i -ésima de momento correspondiente a la perturbación en conjunto, mientras que

$$T_{(1)}^{0i} \equiv \rho_0 v_1^i + \rho_1 v_0^i = -\rho_0 \partial^i \phi_1 - \rho_1 \partial^i \phi_0 \quad (4.119)$$

será la correspondiente a las perturbaciones.

A continuación, linealicemos las T^{ij}

$$\begin{aligned} T^{ik} &= \Pi^{ik} = \rho v^i v^k + [p - \mu (\nabla \cdot \mathbf{v})] \delta^{ij} = \\ &= (\rho_0 + \varepsilon \rho_1) (v_0^i + \varepsilon v_1^i) (v_0^j + \varepsilon v_1^j) + \\ &+ \{ (p_0 + \varepsilon p_1) - \mu [\nabla \cdot (\mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1)] \} \delta^{ij} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\ &= \rho_0 v_0^i v_0^j + \varepsilon \left[\rho_1 v_0^i v_0^j + \rho_0 (v_1^i v_0^j + v_0^i v_1^j) \right] + \\ &+ (p_0 - \mu \nabla \cdot \mathbf{v}_0) \delta^{ij} + \varepsilon (p_1 - \mu \nabla \cdot \mathbf{v}_1) \delta^{ij} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \equiv \\ &\equiv T_{(0)}^{ij} + \varepsilon T_{(1)}^{ij} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

De nuevo, hacemos la separación entre la parte del tensor correspondiente a las perturbaciones y el resto, estableciendo

$$\begin{aligned} T_{(0)}^{ij} &\equiv \rho_0 v_0^i v_0^j + (p_0 - \mu \nabla \cdot \mathbf{v}_0) \delta^{ij} \\ T_{(1)}^{ij} &\equiv \rho_1 v_0^i v_0^j + \rho_0 (v_1^i v_0^j + v_0^i v_1^j) + (p_1 - \mu \nabla \cdot \mathbf{v}_1) \delta^{ij} \end{aligned}$$

o, en términos del potencial,

$$T_{(0)}^{ij} = \rho_0 (\partial^i \phi_0) (\partial^j \phi_0) + (p_0 + \mu \nabla^2 \phi_0) \delta^{ij} \quad (4.120)$$

$$\begin{aligned} T_{(1)}^{ij} &= \rho_1 (\partial^i \phi_0) (\partial^j \phi_0) + \rho_0 [(\partial^i \phi_1) (\partial^j \phi_0) + (\partial^i \phi_0) (\partial^j \phi_1)] + \\ &(p_1 - \mu \nabla^2 \phi_1) \delta^{ij}. \end{aligned} \quad (4.121)$$

Finalmente, obtengamos la linearización de T^{00} . Antes de hacerlo, nos conviene reexpresar la densidad de energía interna.

Si recordamos la definición de entalpía interna, vemos que podemos escribir ε en términos de ella:

$$h = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \implies \varepsilon = h - \frac{p}{\rho}. \quad (4.122)$$

Además, será útil invocar la ecuación (4.43),

$$h(p) = h(p_0) + \frac{1}{\rho(p_0)} \varepsilon p_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \equiv h_0 + \varepsilon \frac{p_1}{\rho_0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

y expresar

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= p(\rho)^{-1} = [p_0 + \varepsilon p_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] [\rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)]^{-1} = \\ &= (p_0 + \varepsilon p_1) \left(\frac{1}{\rho_0} \right) \left(1 + \varepsilon \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^{-1} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\ &= \left(\frac{p_0}{\rho_0} + \varepsilon \frac{p_1}{\rho_0} \right) \left(1 - \varepsilon \frac{\rho_1}{\rho_0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) = \\ &= \frac{p_0}{\rho_0} + \varepsilon \frac{p_1}{\rho_0} - \varepsilon \frac{p_0 \rho_1}{\rho_0^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Sustituyendo (4.43) y (4.123) en (4.122) obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon &= h_0 + \varepsilon \frac{p_1}{\rho_0} - \frac{p_0}{\rho_0} - \varepsilon \frac{p_1}{\rho_0} + \varepsilon \frac{p_0 \rho_1}{\rho_0^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\ &= h_0 - \frac{p_0}{\rho_0} + \varepsilon \frac{p_0 \rho_1}{\rho_0^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \equiv \varepsilon_0 + \varepsilon \varepsilon_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

donde

$$\varepsilon_0 \equiv h_0 - \frac{p_0}{\rho_0}, \quad \varepsilon_1 \equiv \frac{p_0 \rho_1}{\rho_0^2}. \quad (4.123)$$

Sustituyendo, ahora, (4.123) junto con (4.36) y (4.39) en (4.105), encontramos

$$\begin{aligned}
T^{00} &= \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 = \\
&= [\rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] [\varepsilon_0 + \varepsilon \varepsilon_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] + \\
&+ \frac{1}{2} [\rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] [(\mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)] = \\
&= \rho_0 \varepsilon_0 + \varepsilon (\rho_1 \varepsilon_0 + \rho_0 \varepsilon_1) + \frac{1}{2} \{ \rho_0 \mathbf{v}_0^2 + \varepsilon [\rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1) + \rho_1 \mathbf{v}_0^2] \} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\
&= (\rho_0 \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_0^2) + \varepsilon [\rho_1 \varepsilon_0 + \rho_0 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (\rho_1 \mathbf{v}_0^2 + \rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \\
&\equiv T_{(0)}^{00} + \varepsilon T_{(1)}^{00} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),
\end{aligned}$$

de donde se lee que

$$T_{(0)}^{00} \equiv \rho_0 \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_0^2 \quad (4.124)$$

$$T_{(1)}^{00} \equiv \rho_1 \varepsilon_0 + \rho_0 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (\rho_1 \mathbf{v}_0^2 + \rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1),$$

y, usando (4.123), estas ecuaciones se pueden reescribir como

$$T_{(0)}^{00} = \rho_0 h_0 - p_0 + \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}_0^2, \quad (4.123)$$

mientras que

$$\begin{aligned}
T_{(1)}^{00} &= \rho_1 \left(h_0 - \frac{p_0}{\rho_0} \right) + \rho_0 \left(\frac{\rho_0 \rho_1}{\rho_0^2} \right) + \frac{1}{2} (\rho_1 \mathbf{v}_0^2) + \frac{1}{2} (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1) = \\
&= \rho_1 h_0 + \frac{1}{2} (\rho_1 \mathbf{v}_0^2) + \frac{1}{2} (\rho_0 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_1).
\end{aligned}$$

Cabe hacer notar aquí que todas las componentes del tensor de energía-momento a primer orden tienden a cero cuando eliminamos la viscosidad, es decir, cuando hacemos $\rho_1 \rightarrow 0$, $\mathbf{v}_1 \rightarrow 0$ ó $p_1 \rightarrow 0$, como era de esperarse. Sin embargo, no son constantes, de modo que existe cierto intercambio de energía entre el campo escalar de la velocidad y el espacio-tiempo que queremos modelar: el campo le transfiere parte de su energía al espacio-tiempo, incrementando así su curvatura.

Para resumir, podemos decir que a lo largo de este capítulo, hemos discutido cómo la gravedad análoga ofrece la posibilidad de estudiar sistemas gravitacionales y

teorías de campos en un marco conocido (CBE) y manipulable experimentalmente, aunque siempre hay que mantener en mente que *analogía no es identidad*.

En este marco, pudimos relacionar la dinámica de una partícula con espín y masa nulos, que se mueve en un espacio-tiempo curvo con un acoplamiento con la curvatura del tipo aquí introducido, con una perturbación en un fluido viscoso a través de la ecuación (4.81),

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi_1) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[\sqrt{-g} g^{0\mu} \frac{\mu}{c^2} \nabla^2 \phi_1 \right],$$

y vimos que considerando el caso $\zeta = 0$ y $\eta = 0$ recuperamos el teorema usual [3].

Al incluir la viscosidad en el sistema, surgió un término fuente en la ecuación de movimiento, lo cual interpretamos como un mecanismo para la transferencia de momento en el fluido: el parámetro μ , que contiene la información de la viscosidad es responsable por el flujo de energía del campo ϕ_1 a la curvatura de la variedad, de modo que existe cierta transferencia de energía uniforme del campo a los grados geométricos de libertad del espacio-tiempo.

Cabe puntualizar, por último que, al igual que en la relatividad general las ondas gravitacionales pueden ceder energía en forma de “arrugas” en la curvatura, el flujo de energía del sistema a la curvatura de la variedad en este caso no implica el rompimiento de los postulados de la RG.

Capítulo 5

Velocidad del sonido en un condensado de Bose-Einstein con interacciones dipolo-dipolo

Como ya mencionamos anteriormente, la gravedad análoga ofrece la posibilidad de comprender mejor e, inclusive, modelar algunos fenómenos relacionados con la física de altas energías. Es decir, podemos estudiar ciertos aspectos de la relatividad general y la teoría cuántica de campos usando analogías con sistemas de fluidos, tales como los condensados de Bose-Einstein (CBE) [50], [51], ya que estos imitan algunos aspectos cinemáticos de la relatividad general, como la propagación de los campos en espacios-tiempos relativistas curvos, e inclusive es posible que nos permitan simular configuraciones cuánticas, como las de los agujeros negros.

Esto es, además de la propagación de campos relativistas en espacios-tiempos curvos, las analogías también pueden aprovecharse para investigar la fenomenología de una posible teoría de la gravitación cuántica. Si bien es cierto que el régimen geométrico o relativista que hemos descrito hasta ahora sólo es válido con CBE en el límite hidrodinámico, para energías mayores (o en la presencia de horizontes) la aproximación relativista o hidrodinámica se podría romper, dando paso a la descripción microscópica del sistema. Este comportamiento es semejante a lo que se espera que ocurra en el caso de la gravitación cuántica, con la importante ventaja de que, en los CBE, la descripción microscópica subyacente es bien conocida. Por ende, las desviaciones de los regímenes hidrodinámico o relativista en los CBE ofrecen posibles pistas sobre las correcciones cinemáticas que cierta teoría de la gravitación cuántica podría imponer sobre la relatividad general¹ (por ejemplo,

¹Puntualicemos, nuevamente, que no podemos esperar estudiar correcciones gravitacionales a la dinámica de la relatividad general más allá del régimen lineal, dado que nuestra analogía no reproduce las ecuaciones de Einstein.

sobre la invariancia local de Lorentz que caracteriza la relatividad general), permitiéndonos estudiar la fenomenología de la gravedad cuántica por analogía.

Estas extrapolaciones son particularmente relevantes si las desviaciones de la relatividad general clásica predichas por distintas teorías de gravedad cuántica, como la de cuerdas o la gravedad cuántica de lazos, resultan ser similares a las que aparezcan en los CBE con respecto al régimen relativista.

Un enfoque teórico que considera varios escenarios donde podrían surgir desviaciones a la física conocida (incluyendo los mencionados en el párrafo anterior, pero evitando elegir alguno en particular) es el de la fenomenología de la gravedad cuántica. En ella se estudian paramétricamente desviaciones y modificaciones que aparecen en múltiples teorías de la gravitación cuántica, por ejemplo, violaciones a la invarianza de Lorentz, al principio de equivalencia débil o a la universalidad del corrimiento al rojo gravitacional [52], [53], [54]. Encontrar alguno de estos efectos experimentalmente podría darnos una idea de lo que ocurre en la física a escalas de Planck [55] y poner cotas sobre dichos parámetros, lo que nos permitirían determinar la viabilidad de las teorías propuestas.

En general, suele pensarse que las propiedades *no clásicas* de la física del espacio tiempo son muy difíciles de detectar experimentalmente, ya que sus efectos se vuelven relevantes cerca de la energía de Planck, $E_P \approx 10^{28} eV$, o la longitud de Planck $l_P \approx 10^{-34} m$. Sin embargo, se espera que algunos residuos de modificaciones inducidas por la gravedad cuántica en el régimen de bajas energías puedan ser detectables con experimentos de laboratorio altamente sensibles [52], [53], [54].

A pesar de que dichos efectos están fuertemente suprimidos, se ha alcanzado un alto nivel de precisión en las técnicas experimentales que buscan hallarlos. Por ejemplo, pruebas con ondas de materia, en las que la frecuencia de Compton de partículas materiales se vería modificada por un corrimiento al rojo gravitacional, han alcanzado una precisión de 7 partes en 10^9 [56], [57], [58], mientras que experimentos que se centran en la comparación de relojes [59], [60] han alcanzado una exactitud de 7 partes en 10^5 [61]. Además de éstos, hay una serie de experimentos que pretenden probar el principio de equivalencia de Einstein, entre los cuales se encuentran algunos que exploran la invarianza local de Lorentz y la universalidad de la caída libre [62], [63].

En vista de la relevancia que la física experimental tendrá al determinar la validez de las teorías de gravedad cuántica, la segunda mitad esta tesis estará dedicada a estudiar un problema de laboratorio concreto: la velocidad del sonido en un condensado de Bose-Einstein y su modificación debido a la presencia de interacciones dipolo-dipolo anisotrópicas, además de algunos procesos disipativos, tales como el criterio de superfluidez de Landau ([64]).

Antes de entrar de lleno al estudio de el problema que nos ocupará, será útil recordar un poco el marco teórico sobre el cual se sustenta.

5.1. Revisión de la Teoría de Estados Condensados

5.1.1. La ecuación de Gross-Pitaevskii

Para investigar la energía de estados cuánticos de muchos cuerpos, adoptaremos el enfoque de campo medio (o de Hartree²), en el cual asumiremos que la función de onda es un producto simétrico de funciones de onda de partículas individuales. En el estado de condensación total, todos los bosones estarán en el mismo estado cuántico individual (i.e., de una sola partícula) y, por tanto, podemos escribir la función de onda del sistema de N partículas como

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i). \quad (5.1)$$

La función de onda individual $\phi(\mathbf{r}_i)$ está normalizada como de costumbre,

$$\int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r}_i^2)| = 1. \quad (5.2)$$

Esta función de onda no contiene las correlaciones producidas por la interacción entre dos átomos que están próximos entre sí. Para tomar en cuenta estos efectos, usamos la expresión $U_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, que incluye la influencia de los grados de libertad de longitud de onda corta. En ella, U_0 representa la interacción efectiva entre dos partículas a bajas energías que resulta ser, en la representación de momentos,

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}, \quad (5.3)$$

donde a es la longitud de dispersión y m , la masa de las partículas que conforman el gas.

En el tratamiento de campo medio no tomaremos en cuenta explícitamente las interacciones entre los grados de libertad correspondientes a escalas de longitud

²Ésta asume que la función de onda exacta de un sistema de N cuerpos puede aproximarse mediante un *permanente*, en el caso de los bosones de N orbitales de espín y, usando métodos variacionales, puede derivarse un conjunto de N ecuaciones acopladas para cada orbital.

menores que el espacio entre partículas y, por tanto, podemos establecer el corte del número de onda $k_c = 0$.

Bajo estas condiciones, podemos escribir el hamiltoniano efectivo como

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{r}_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right] + U_0 \sum_{i<j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5.4)$$

donde $V(\mathbf{r}_i)$ es el potencial externo. Así, la energía del estado (5.1) estará dada por

$$E = N \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{N-1}{2} U_0 |\phi(\mathbf{r})|^4 \right]. \quad (5.5)$$

En la aproximación de Hartree, todos los átomos están en el mismo estado, cuya función de onda denotamos por ϕ . En la función de onda de la nube, algunas partículas estarán en estados con una variación espacial más rápida, debido a las correlaciones existentes cuando la separación entre ellas es pequeña y, por ende, el número total de átomos en el estado ϕ será menor que N . Sin embargo, se puede demostrar³ que el *vaciado*, i.e. la reducción relativa del número de partículas en el condensado, debida a las interacciones es del orden del uno por ciento o menos (basándose en datos obtenidos en los experimentos existentes a la fecha), por lo que puede ser despreciada en la mayoría de las circunstancias.

Ahora bien, consideremos un gas de Bose uniforme de volumen V ; en él la función de onda de una partícula en el estado base es $1/V^{1/2}$ y, por tanto, la energía de interacción de un par de partículas es U_0/V . La energía de un estado con N bosones en el mismo estado cuántico será el producto de esta cantidad por el número de formas en que se pueden hacer pares de bosones, $N(N-1)/2$. En esta aproximación, entonces, la energía estará dada por

$$E = \frac{N(N-1)}{2V} U_0 \approx \frac{1}{2} V n^2 U_0, \quad (5.6)$$

donde $n \equiv N/V$, y hemos asumido que $N \gg 1$.

Es conveniente, ahora, introducir el concepto de función de onda del estado condensado (al que también nos referiremos como *nube*):

³Para mayor detalle, remitirse a la sección 8.1 de la referencia [Pethick]

$$\psi(\mathbf{r}) = N^{1/2} \phi(\mathbf{r}). \quad (5.7)$$

Despejando de (5.7) el número de partículas y dividiendo entre el volumen, es claro que la densidad de partículas se puede reescribir como

$$n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (5.8)$$

Despreciando los términos de orden $1/N$, podemos escribir la energía del sistema como

$$E(\psi) = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} U_0 |\psi(\mathbf{r})|^4 \right] \quad (5.9)$$

Para optimizar la forma de ψ , minimizamos la energía (5.9) con respecto a variaciones independientes de $\psi(\mathbf{r})$ y su complejo conjugado $\psi^*(\mathbf{r})$, considerando la condición de que el número total de partículas tiene que ser constante,

$$N = \int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (5.10)$$

Tomamos en cuenta la restricción (5.10) usando el método de multiplicadores de Lagrange, escribiendo la ecuación como

$$\delta E - \mu \delta N = 0, \quad (5.11)$$

donde el potencial químico, μ , es el multiplicador de Lagrange que garantiza la constancia del número de partículas y las variaciones de $\psi(\mathbf{r})$ y $\psi^*(\mathbf{r})$ podrán tomar valores arbitrarios. Igualando a cero la variación de $E - \mu N$ con respecto a $\psi^*(\mathbf{r})$, encontramos

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) + U_0 |\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}), \quad (5.12)$$

que resulta ser la ecuación de Gross-Pitaevskii independiente del tiempo. Ésta tiene la forma de una ecuación de Schrödinger en la que el potencial que actúa sobre las partículas es la suma del potencial externo V y un término no lineal $U_0|\psi(\mathbf{r})|^2$, que toma en cuenta el campo medio producido por los demás bosones. Cabe hacer notar que el eigenvalor en esta ecuación es el potencial químico, no la energía por partícula como en la ecuación usual lineal de Schrödinger. Para partículas que no interactúan entre sí, que comparten el mismo estado cuántico, el potencial químico es igual a la energía por partícula, pero para partículas interactuantes, no.

Para la región interior de la trampa, donde el potencial $V(\mathbf{r}) = 0$ y $\psi = cte.$, la ecuación de Gross-Pitaevskii (5.12) será

$$\mu = U_0|\psi(\mathbf{r})| = U_0n, \quad (5.13)$$

la cual coincide con el resultado que se obtiene usando la relación termodinámica

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N} \quad (5.14)$$

para calcular el potencial químico a partir de la energía del estado uniforme, (5.6).

5.1.2. El estado base para bosones en una trampa

Nos interesa particularmente estudiar el caso de bosones contenidos en una trampa. Por su relevancia y la relación que tiene con el problema que nos interesa, analizaremos el caso de bosones en una trampa armónica.

Comencemos por hacer un análisis cualitativo de las propiedades de la solución. Si suponemos, por sencillez, que el potencial armónico es homogéneo, i.e., de la forma $V = m\omega_0^2 r^2/2$ y consideramos que la nube tiene un radio aproximado de R , la energía potencial de una partícula dentro de la trampa será proporcional a $V = m\omega_0^2 R^2/2$. Por su parte, recordando el principio de incertidumbre sabemos que

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{R}, \quad (5.15)$$

así que la energía cinética por partícula será del orden de $\hbar^2/2mR^2$. Entonces, en ausencia de interacciones, la energía total varía como $1/R^2$ para R pequeña y como

R^2 para R grande, teniendo un mínimo en el punto en el que la energía cinética y potencial se igualan. El valor correspondiente del radio de la nube es del orden de

$$a_{osc} = \left(\frac{\hbar}{m\omega_0} \right)^{1/2} \quad (5.16)$$

que es la escala de longitud mecánica cuántica característica para el oscilador armónico. Esto es lo que esperaríamos, porque hemos hecho un cálculo variacional del estado base de una partícula en un potencial de oscilador.

Ahora consideremos el efecto de las interacciones. Una densidad de partículas típica es $n \sim N/R^3$ y la energía de interacción de una partícula con el resto de la nube, por lo tanto, es del orden de $nU_0 \sim U_0N/R^3$. Para interacciones repulsivas, el efecto de una contribución adicional a la energía que varía como R^{-3} desplaza el mínimo de la energía total a valores mayores de R y, en consecuencia, para valores mayores de Na , el término de energía cinética se vuelve menos importante. Para el caso que desarrollaremos más adelante, es particularmente interesante investigar el límite de acoplamiento fuerte, en el cual la energía cinética se puede despreciar. El tamaño en equilibrio se encuentra minimizando la suma de las energías potencial y de interacción, lo cual ocurre cuando las dos contribuciones a la energía son del mismo orden de magnitud. Igualando ambas, se encuentra que el radio de equilibrio es

$$R \sim a_{osc} \left(\frac{Na}{a_{osc}} \right)^{1/5}, \quad (5.17)$$

y la energía por partícula es

$$\frac{E}{N} \sim \hbar\omega_0 \left(\frac{Na}{a_{osc}} \right)^{2/5}. \quad (5.18)$$

La cantidad adimensional Na/a_{osc} es un parámetro de la fuerza de interacción y, en la mayoría de los experimentos llevados a cabo hasta ahora para átomos con interacciones repulsivas, es mucho mayor que uno, de modo que el radio R es, de algún modo, mayor que a_{osc} . En un estado de equilibrio, tanto la energía de interacción como la del oscilador son proporcionales a R^2 y, por tanto, la razón entre la energía cinética, que es proporcional a R^{-2} y la energía potencial (o la de interacción) será proporcional a $(a_{osc}/Na)^{4/5}$. Esto confirma que, en efecto, la

energía cinética es despreciable para nubes con un número suficientemente grande de partículas.

Ahora centrémonos en interacciones atractivas. Para un número pequeño de partículas, la energía total como función de R es semejante a la que describe partículas no interactuantes, salvo por el hecho de que, si la nube es muy pequeña, la energía diverge a $-\infty$ como $-1/R^3$. En consecuencia, para un número suficientemente pequeño de partículas, la energía tiene un mínimo local cerca del que corresponde al caso de las partículas no interactuantes, pero se encuentra en una R menor. Este estado es metaestable, dado que para pequeñas desviaciones del mínimo la energía aumenta, pero cuando el radio es muy pequeño la energía en algún momento variará como $-1/R^3$ y será menor que la energía del mínimo local, en cuyo caso la nube colapsará. Conforme el número de partículas aumenta, el mínimo local va perdiendo profundidad y, al alcanzar cierto número crítico de partículas, N_c , éste desaparece. Para números de partículas grandes no hay estado metaestable. Como era de esperarse, el número crítico está determinado por la condición de que el parámetro adimensional de acoplamiento sea del orden -1 , o sea, $N_c \sim a_{osc}/a$.

Para analizar el problema cuantitativamente hay que determinar el estado base energético para un gas atrapado en un potencial tipo oscilador armónico, anisotrópico, tridimensional, dado por

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2), \quad (5.19)$$

donde las tres frecuencias de oscilación ω_i (donde $i = 1, 2, 3$) pueden ser distintas entre sí.

5.1.3. La aproximación de Thomas-Fermi

Cuando trabajamos con nubes bastante grandes o, en su defecto, sistemas cuya densidad tal que el cambio de la energía potencial promedio de una partícula es mucho menor que su energía total promedio, y en el caso en el que casi todo el sistema está en el estado cuántico base, podemos despreciar el término de energía cinética en la ecuación de Gross-Pitaevskii y seguir teniendo una expresión suficientemente representativa. En otras palabras, como para una trampa armónica con un número de partículas suficientemente grande e interacciones repulsivas la razón entre la energía cinética y la de interacción es muy pequeña, podemos despreciar el término cinético y trabajar con la expresión

$$[V(\mathbf{r}) + U_0|\psi(\mathbf{r})|^2] \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}), \quad (5.20)$$

donde μ es el potencial químico.

Esta ecuación tiene la solución

$$n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{[\mu - V(\mathbf{r})]}{U_0} \quad (5.21)$$

en la región donde el lado derecho es positivo, mientras que la solución será $\psi = 0$ fuera de ella. La condición de frontera será, entonces,

$$V(\mathbf{r}) = \mu. \quad (5.22)$$

El significado físico de esta aproximación es que la energía que se requiere para agregar una partícula en cualquier punto de la nube es el mismo en toda la frontera. Esta energía está dada por la suma de el potencial externo $V(\mathbf{r})$ y cierta contribución debida a la interacción, $n(\mathbf{r})U_0$, que es el potencial químico de un gas uniforme que tiene una densidad igual a la densidad local $n(\mathbf{r})$. Puesto que esta aproximación evoca a la aproximación de Thomas-Fermi en la teoría de los átomos, generalmente suele referirse a ella con el mismo nombre.

En este límite, la extensión de la nube en las 3 direcciones está dada por tres semiejes R_i , que se obtienen sustituyendo (5.19) en (5.22) para encontrar

$$R_i^2 = \frac{2\mu}{m\omega_i^2}, i = 1, 2, 3. \quad (5.23)$$

Las longitudes R_i pueden evaluarse en términos de los parámetros de la trampa una vez determinado el potencial químico. La condición de normalización sobre ψ , ecuación (5.10), establece una relación entre μ y N . Para una trampa armónica con un potencial como el dado por la ecuación (5.19) resulta que

$$N = \frac{8\pi}{15} \left[\frac{2\mu}{m\bar{\omega}^2} \right]^{3/2} \frac{\mu}{U_0}, \quad (5.24)$$

donde $\bar{\omega} = (\omega_1 \omega_2 \omega_3)^{1/3}$ es el promedio geométrico de las frecuencias del oscilador en las tres direcciones. Resolviendo (5.24) para μ obtenemos una relación entre el potencial químico y $\hbar\bar{\omega}$:

$$\mu = \frac{15^{2/5}}{2} \left(\frac{Na}{\bar{a}} \right)^{2/5} \hbar\bar{\omega}, \quad (5.25)$$

donde introducimos la longitud característica

$$\bar{a} = \left[\frac{\hbar}{m\bar{\omega}} \right]^{1/2}, \quad (5.26)$$

que representa el semieje de la región donde una partícula sin interacción con otras sujeta a un potencial armónico de frecuencia $\bar{\omega}$ tiene una probabilidad casi uno de encontrarse.

En el caso que nos interesa, la nube sí está sometida a interacciones, por lo que la extensión espacial de la nube no estará dada por \bar{a} , sino por un nuevo parámetro que definiremos como el promedio geométrico de los semiejes de la nube, $\bar{R} = (R_1 R_2 R_3)^{1/3}$, y que podemos calcular combinando (5.23) y (5.25) para obtener

$$\bar{R} = 15^{1/5} \left(\frac{Na}{\bar{a}} \right)^{1/5} \bar{a} \approx 1,719 \left(\frac{Na}{\bar{a}} \right)^{1/5} \bar{a}, \quad (5.27)$$

de modo que \bar{R} es mayor que \bar{a} bajo condiciones experimentales típicas.

Puesto que $\mu \propto N^{2/5}$ y $\mu = \partial E / \partial N$, de (5.25) encontramos que la energía por partícula, i.e. la parte de la energía que se invierte en la geometría (el reacomodo) del sistema, será

$$\frac{E}{N} = \frac{5}{7} \mu \quad (5.28)$$

Podemos calcular cómo se distribuye la energía total entre la de interacción y la potencial (sustituyendo (5.21) en (5.9) y despreciando el término cinético), para encontrar que

$$\frac{E_{int}}{E_{pot}} = \frac{\int_0^1 dr r^2 (1-r^2)^2 / 2}{\int_0^1 dr r^4 (1-r^2)} = \frac{2}{3}. \quad (5.29)$$

Entonces, la energía total en la aproximación de Thomas-Fermi se reparte así: $\frac{2}{5}$ de ella corresponderán a la energía de interacción y $\frac{3}{5}$, a la potencial. Usando (5.28), podemos concluir que la energía de interacción por partícula se relaciona con el potencial químico como

$$\frac{E_{int}}{N} = \frac{2}{7}\mu. \quad (5.30)$$

5.1.4. Estructura superficial de la nube

Por completitud, revisemos qué ocurre cerca de la frontera de la nube, donde la aproximación de Thomas-Fermi falla cerca de la frontera de la nube, ya que ahí la función de onda no varía suficientemente despacio. Para confirmarlo, estimemos las contribuciones a la funcional de energía para la función de onda de Thomas-Fermi.

Expandiendo el potencial externo en torno a un punto sobre la superficie, \mathbf{r}_0 , y tomando en cuenta la condición de frontera (5.22) que en este caso escribiremos como $V(r_0) = \mu$, podemos reescribir la densidad de partículas, $n(\mathbf{r}) = [\mu - V(\mathbf{r})]/U_0$, como

$$n(\mathbf{r}) \approx -\frac{1}{U_0} \nabla V(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (5.31)$$

Definiendo

$$\mathbf{F} \equiv -\nabla V(\mathbf{r}_0) \quad (5.32)$$

como la fuerza que el potencial externo ejerce sobre una partícula en la superficie, la densidad de partículas podrá expresarse así

$$n(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{U_0}. \quad (5.33)$$

Entonces, tomando en cuenta (5.8), podemos escribir la función de onda del sistema, en la aproximación de Thomas-Fermi, como

$$\psi(\mathbf{r}) = \left[\frac{\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{U_0} \right]^{1/2}. \quad (5.34)$$

Ahora bien, si denotamos la coordenada en la dirección de $\nabla V(\mathbf{r}_0)$ por x y, la posición de la superficie por $x = x_0$, el interior de la nube corresponde a $x \leq x_0$. La función de onda de la nube para Thomas-Fermi varía como $(x_0 - x)^{1/2}$ para $x \leq x_0$ y, por lo tanto, su derivada con respecto a x es proporcional a $(x_0 - x)^{-1/2}$. En consecuencia, el término de energía cinética en el funcional de energía irá como $1/(x_0 - x)$ y la energía cinética total por unidad de área en la superficie, que se obtendrá integrando esta expresión sobre x , divergirá como $-\ln(x_0 - x)$ cuando x tienda a x_0 por abajo.

Para estimar la distancia desde la superficie a la cual el término cinético se vuelve importante, busco la región en la que el término cinético es del orden de los otros dos en la ecuación de Schrödinger, o sea que

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \approx [V(x) - \mu] \psi = F \cdot (x - x_0) \psi. \quad (5.35)$$

Tomando una pequeña porción de la frontera de la nube, podemos modelar lo que ocurre en esta capa como si ahí las partículas estuvieran sujetas a un potencial tipo caja; en tal caso, la función de onda sería $\psi \sim e^{ikx}$ de modo que el término cinético en (5.35) irá como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \sim \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi \sim \frac{\hbar^2}{2m \delta^2} \psi, \quad (5.36)$$

donde hemos usado el principio de incertidumbre para encontrar el último término y, definido δ como el ancho de el cascarón donde la contribución cinética no es despreciable (que, en nuestro modelo, también corresponde al ancho de la caja).

Sustituyendo, pues, (5.36) en (5.35) y tomando $\delta = x_0 - x$ podremos encontrar el tamaño de tal cáscara,

$$F \delta \approx \frac{\hbar^2}{2m \delta^2} \Rightarrow \delta = \left(\frac{\hbar^2}{2mF} \right)^{1/3}, \quad (5.37)$$

y entonces la región donde el término cinético domina será aquella para la que $x_0 - x \leq \delta$.

Para un potencial armónico isotrópico,

$$V = \frac{m\omega_0^2 r^2}{2}, \quad (5.38)$$

de tal suerte que en la superficie $F(R) = m\omega_0^2 R$ y entonces, ahí,

$$\delta = \left(\frac{\hbar^2}{2m^2 \omega_0^2 R} \right)^{1/3}. \quad (5.39)$$

Recordando (5.22), podemos escribir R en términos de μ usando la relación

$$\mu = \frac{m\omega_0^2 r^2}{2} \quad (5.40)$$

y, considerando que $a_{osc} = (\hbar/m\omega_0)^{1/2}$, δ puede reescribirse como

$$\delta = \left(\frac{a_{osc}^4}{2R} \right)^{1/3} = \left(\frac{\hbar\omega_0}{\mu} \right)^{2/3} \frac{R}{2} \quad (5.41)$$

La fracción del volumen de la nube correspondiente a la cáscara donde la aproximación de Thomas-Fermi falla, que resulta ser del orden de $(a_{osc}/R)^{4/3}$, será bastante pequeña si el número de partículas es suficientemente grande, así que la aproximación no es mala.

Sin embargo, aún queremos ver qué pasa en la región donde no sirve. Para ello necesitamos recurrir nuevamente a la ecuación de Gross-Pitaevskii. Si volvemos a escribir todo en términos de la coordenada x y suponemos que el potencial externo varía suficientemente despacio a lo largo de δ , podemos expandir el potencial en torno a R , de modo que $\mu - V = F(x_0 - x)$ sea válida. Si elegimos medir nuestras coordenadas a partir de un sistema cuyo origen esté ubicado en R (i.e., la superficie según la aproximación de Thomas-Fermi), $x_0 - x \rightarrow -x$. En tal caso, de (5.12) obtenemos que

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + Fx + U_0 |\psi(\mathbf{r})|^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (5.42)$$

Esta ecuación se simplifica si renormalizamos las distancias usando δ . Además, nos conviene medir la función de onda del condensado con respecto a su valor en la cáscara, al cual llamaremos b y tendrá un valor de $b = (F\delta/U_0)^{1/2}$ a una distancia δ de la superficie de la nube. Definiendo, así,

$$y \equiv \frac{x}{\delta} \quad \text{y} \quad \Psi \equiv \frac{\psi}{b}$$

y sustituyéndolas en (5.42), obtenemos la ecuación

$$\Psi'' = y\Psi + \Psi^3, \quad (5.42)$$

donde las primas denotan diferenciación con respecto a y . En la aproximación de Thomas-Fermi el término cinético no cuenta, así que la solución en este caso será

$$\Psi = \sqrt{-y} \text{ para } y \leq 0, \quad \Psi = 0 \text{ para } y > 0, \quad (5.43)$$

considerando que fuera de la frontera la función de onda es nula.

Ahora veamos que pasa con la ecuación completa cuando $y \gg 1$, o sea, cuando $x \gg \delta$. Puesto que en esa región la función de onda de la nube es muy pequeña, podemos despreciar el término cúbico en (5.42). La ecuación resultante es la correspondiente a la función de Airy y su solución asintótica es

$$\Psi \simeq \frac{C}{y^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}y^{3/2}}. \quad (5.44)$$

Cerca del centro de la nube, donde $y \ll -1$, la solución de Thomas-Fermi $\Psi \simeq \sqrt{-y}$ es aproximadamente válida. Para determinar la corrección más significativa a la función de onda, escribimos $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$, la sustituimos en (5.42) y linealizamos, de modo que encontramos

$$-\Psi_1'' + y\Psi_1 + 3\Psi_0^2\Psi_1 = \Psi_0'' \quad (5.45)$$

Tomando $\Psi_0 = \sqrt{-y}$ y notando que podemos despreciar Ψ_1'' por contribuir a términos de orden mayor en $1/y$ en la ec. (5.45), llegamos a

$$\Psi_1 \simeq -\frac{1}{8y^2\sqrt{-y}} \quad (5.46)$$

Sumándola a Ψ_0 , encontramos la solución asintótica a primer orden:

$$\Psi = \sqrt{-y} \left(1 + \frac{1}{8y^3} \right) \quad (5.47)$$

La ecuación (5.42) se puede resolver numéricamente y encontrar el valor de C , que resulta ser aproximadamente 0.3971 [65].

Ahora evaluemos la energía cinética por unidad de área perpendicular al eje x . Para ello, primero usamos la función de onda de Thomas-Fermi (5.44), que será válida sólo en la región en la que $x \ll -\delta$. Como la integral diverge cuando $x \rightarrow 0$, evaluaremos la integral x menor que cierto valor de corte, $-l$. Entonces fijamos el valor inferior de la integral como $-L$, donde $L \gg \delta$. Esperamos que la energía cinética coincida aproximadamente con el resultado para Thomas-Fermi si elegimos que la distancia de corte sea $\sim -\delta$, que es la distancia a la cual la aproximación falla:

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-L}^{-l} dx |\nabla \psi|^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-L}^{-l} dx (\psi')^2 \simeq \frac{\hbar^2}{8m} \frac{F}{U_0} \ln \frac{L}{l} \quad (5.48)$$

Comparando este resultado con el que se obtiene haciendo el cálculo numérico, se ve que se puede obtener el mismo comportamiento asintótico para la energía cinética usando el enfoque de Thomas-Fermi y haciendo el corte de la integral en $x = -l$, donde $l = 0,240\delta$

$$l = 0,240\delta \quad (5.49)$$

Ahora retomemos el problema que nos interesa: una nube de N bosones atrapados en un potencial armónico tridimensional. Por sencillez, consideremos sólo el caso

isotrópico, donde el potencial es de la forma (5.38) y asumamos que la nube no rota. La función de onda del estado base sólo dependerá, entonces, de la coordenada radial y satisfará la ecuación de Gross-Pitaevskii, entonces,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} |\psi(r)| \right] \psi(r) = \mu \psi(r). \quad (5.50)$$

Haciendo el cambio de variable $\chi = r\psi$ y sustituyendo μ en su forma (5.40), la ecuación (5.50) se puede reescribir como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (r^2 - R^2) \chi(r) + \frac{4\pi\hbar^2 a}{mr^2} |\chi(r)|^2 \chi(r) = 0. \quad (5.51)$$

Eliminando, nuevamente, el término cinético encontramos la solución de Thomas-Fermi para esta ecuación,

$$\chi_{FT} = r \left(\frac{R^2 - r^2}{8\pi a a_{osc}^4} \right)^{1/2}. \quad (5.52)$$

Expandiendo en torno a $r = R$ en la ecuación (5.51) llegamos a una ecuación de la forma (5.42), donde la escala de longitud δ está dada por (5.41).

Para calcular la energía cinética, usamos la función de onda de Thomas-Fermi y cortamos la integral en un radio $R - l$, donde l es la misma que aparece en (5.49), y encontramos que

$$\frac{E}{N} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\int_0^{R-l} dr r^2 (d\psi/dr)^2}{\int_0^R dr r^2 \psi^2} \simeq \frac{\hbar^2}{2mR} \left(\frac{15}{4} \ln \frac{2R}{l} - \frac{5}{2} \right), \quad (5.53)$$

la cual corresponde al resultado numérico [?].

5.1.5. Restitución de la función de onda del condensado

En la sección anterior consideramos la función de onda del condensado para un potencial externo que variaba de manera relativamente suave en el espacio. Ahora

nos interesa el caso contrario: un condensado confinado por un potencial con paredes infinitamente duras. Sobre el muro la función de onda debe anularse y en el interior de la caja la densidad del condensado se aproximará a su valor medio. La distancia a lo largo de la cual la función de onda pasará de un valor al otro puede calcularse usando la ecuación de Gross-Pitaevskii, puesto que lejos del muro la función de onda está gobernada por la competencia entre la energía debida a las interacciones, $\sim U_0$, y el término de energía cinética. Si denotamos la escala espacial de las variaciones con ξ , la energía cinética por partícula es del orden de $\hbar^2/2m\xi^2$ y las dos energías se igualan cuando

$$\frac{\hbar^2}{2m\xi^2} = nU_0, \quad (5.54)$$

o

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2mnU_0} = \frac{1}{8\pi na} = \frac{r_s^3}{6a}, \quad (5.55)$$

donde r_s representa el radio de una esfera cuyo volumen es igual al volumen promedio por partícula y está relacionado con la densidad a través de

$$n = \frac{1}{(4\pi/3)r_s^3}. \quad (5.56)$$

Puesto que en los experimentos la distancia entre átomos es comunmente mucho mayor que la longitud de dispersión, la longitud de coherencia es mayor que la separación entre átomos. A la longitud ξ suele llamársele *longitud de coherencia*, donde el término “coherencia” tiene una acepción distinta a la usada en óptica. Dado que describe la distancia sobre la cual la función de onda tiene a su valor medio una vez que ha sido sujeta a una perturbación localizada, también se le llama *longitud de resitución*.

Para investigar el comportamiento de la función de onda condensada cuantitativamente, comenzamos por la ecuación de Gross-Pitaevskii, (5.12), y asumimos que el potencial es nulo para $x \geq 0$ e infinito si $x < 0$. La función de onda del estado base es uniforme en las direcciones y y z y, por ende, la ecuación de Gross-Pitaevskii se reducirá a

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U_0|\psi(x)|^2\psi(x) = \mu\psi(x). \quad (5.57)$$

En cuanto al grueso de la nube respecta, el potencial químico está dado por la ecuación (5.13) y, por tanto, podemos escribir $\mu = U_0|\psi_0|^2$, donde ψ_0 es la función de onda lejos del muro, donde el término de energía cinética se vuelve despreciable. En ese caso, la ecuación se vuelve

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -U_0 [|\psi_0|^2 - |\psi(x)|^2] \psi(x). \quad (5.58)$$

Cuando ψ es real, podemos pensar en ella como si se tratara de una coordenada espacial, cuyo parámetro x correspondería al tiempo. Entonces (5.58) tiene la misma forma que la ecuación clásica de movimiento de una partícula en un potencial $\propto \psi_0^2\psi^2 - \psi^4/2$. Considerando las condiciones de frontera $\psi(0) = 0$ y $\psi(\infty) = \psi_0$, podemos resolver esta ecuación de manera analítica, encontrando que

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh(x/\sqrt{2}\xi), \quad (5.59)$$

lo cual confirma, como esperábamos, que la función de onda tiende a su valor medio a lo largo de una distancia $\sim \xi$.

5.1.6. Condensados con interacciones dipolares

A continuación, consideraremos átomos completamente polarizados a lo largo del eje z por un campo magnético externo. Asumiremos que la magnitud de la interacción dipolar es suficientemente grande como para afectar la forma de la nube durante su expansión (como en el caso de los átomos de Cr [66]).

Estudiemos el caso de la aproximación de Thomas-Fermi. La energía de interacción dipolar entre dos átomos situados en \mathbf{r} y \mathbf{r}' es

$$U_d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\mu_0(2m_s\mu_B)^2}{4\pi} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{3(z - z')^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right), \quad (5.60)$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío, m_s , el momento dipolar, μ_B , el magnetón del Bohr y z y z' las longitudes de los dipolos.

Esta interacción es de largo alcance y la energía debida a ella puede calcularse en la aproximación de campo medio, resultando ser, para la función de onda (5.1),

$$E_d = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' U_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}'), \quad (5.61)$$

donde $n(\mathbf{r})$ está dada por la ecuación (5.8).

La ecuación para la función de onda del condensado puede determinarse repitiendo las consideraciones hechas en la primera sección de este capítulo, agregando la contribución dipolar a la energía, de modo que uno encuentra que la ecuación de Gross-Pitaevskii para este sistema será

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) + \left[U_0 |\psi(\mathbf{r})|^2 + \int d\mathbf{r}' U_d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\psi(\mathbf{r}')|^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}), \quad (5.62)$$

En la aproximación de Thomas-Fermi, la distribución de densidad $n(\mathbf{r})$ satisface la ecuación integral

$$\mu = V(\mathbf{r}) + U_0 n(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' U_d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n(\mathbf{r}'). \quad (5.63)$$

Por sencillez, consideraremos una trampa armónica isotrópica y trataremos la interacción dipolar como una perturbación. En ausencia de la interacción dipolar la ecuación (5.63) tiene la solución

$$n^{(0)}(r) = \frac{(\mu - m\omega_0^2 r^2 / 2)}{U_0}. \quad (5.64)$$

Sustituyendo (5.64) en el último término de (5.63) e integrando sobre \mathbf{r}' , obtenemos que la primera corrección a la energía proveniente del potencial dipolo-dipolo en un punto \mathbf{r} es

$$V_d^{(0)}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' U_d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n^{(0)}(r'); \quad (5.65)$$

justamente el potencial $U_d(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es el que rompe la simetría esférica del sistema, lo cual provocará que $V_d^{(0)}(\mathbf{r})$ sea anisotrópico y produzca cierta deformación en la nube.

Sustituyendo, entonces, (5.65) en (5.63) llegamos a

$$n(\mathbf{r}) = \frac{1}{U_0} [\mu - V(\mathbf{r}) - V_d^{(0)}(\mathbf{r})]. \quad (5.66)$$

Para simplificar el integrando en (5.63) podemos usar la relación

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{3(z - z')^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{4\pi}{3} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (5.67)$$

Sustituyendo esta expresión en (5.65), encontramos que, si definimos

$$\phi(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{n^{(0)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (5.68)$$

entonces

$$V_d^{(0)} = -\mu_0 (2m_s \mu_B)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial z^2} + \frac{1}{3} n^{(0)}(r) \right), \quad (5.69)$$

de modo que ϕ satisface la ecuación de Poisson, $\nabla^2 \phi = -n^{(0)}(\mathbf{r})$ y es, salvo por algunos factores, el potencial electrostático debido a una distribución de carga $n^{(0)}(\mathbf{r})$.

En nuestro caso, $n^{(0)}$ es esféricamente simétrico y tiene la forma

$$n^{(0)} = n^{(0)}(0) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (5.70)$$

para r menor o igual al radio de Thomas-Fermi, R . El potencial en R se determina partiendo la integral en dos regiones, $r' < r$ y $r' > r$. La contribución para la primera, es $1/r$ por el número total de átomos dentro de la esfera de radio r ; cuando la fuente es una cáscara esférica con radio $r' > r$ y grosor dr' , el potencial es $1/r'$ por la carga total contenida en el cascarón. Juntando ambas, encontramos la expresión para el potencial en todo el espacio de la trampa:

$$\phi(r) = \frac{1}{r} \int_0^r dr' (r')^2 n^{(0)}(r') + \int_r^R dr' (r')^2 \frac{1}{r'} n^{(0)}(r'), \quad (5.71)$$

o sea,

$$\phi(r) = n^{(0)}(0) \left(\frac{R^2}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20R^2} \right) \quad (5.72)$$

cuando $r < R$, y

$$\phi(r) = \frac{N}{4\pi r} \quad (5.73)$$

si $r > R$.

La energía $V_d^{(0)}(\mathbf{r})$ dada por el último término en (5.63) será, entonces,

$$V_d^{(0)}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' U_d(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\mu_0 (2m_s \mu_B)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r})}{\partial z^2} + \frac{1}{3} n^{(0)}(r) \right). \quad (5.74)$$

Sustituyendo (5.68) en esta expresión, y recordando que en la aproximación de Thomas-Fermi $n^{(0)}(0) = m\omega_0^2 R^2 / 2U_0$, obtenemos que

$$V_d^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{2}{15} \mu_0 (2m_s \mu_B)^2 n^{(0)}(0) \left(\frac{r^2 - 3z^2}{R^2} \right) = \frac{m\omega_0^2}{15U_0} \mu_0 (2m_s \mu_B)^2 (x^2 + y^2 - 2z^2). \quad (5.75)$$

Usando lo anterior, la expresión (5.66) se reduce a

$$n(\mathbf{r}) = n^{(0)}(0) \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2} - \frac{y^2}{R_y^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right), \quad (5.76)$$

donde

$$R_x = R_y \simeq R(1 - \varepsilon_{dd}/5) \quad \text{y} \quad R_z \simeq R(1 + 2\varepsilon_{dd}/5) \quad (5.77)$$

a primer orden en el parámetro adimensional, ε_{dd} , que definiremos como

$$\varepsilon_{dd} = \frac{\mu_0(2m_s\mu_B)^2 m}{12\pi\hbar^2 a}. \quad (5.78)$$

La interacción dipolar, entonces, elonga la nube a lo largo de la dirección sobre la cual los dipolos están alineados. La explicación física es que la interacción es atractiva cuando la separación relativa apunta en la dirección de z y, repulsiva cuando los dipolos están alineados en el plano perpendicular a z .

El tratamiento perturbativo puede extenderse en el caso anisotrópico.

5.2. Condensados de Bose-Einstein con Interacciones Dipolares

En esta sección nos avocaremos a estudiar un problema aplicable en el laboratorio: un condensado de Bose-Einstein confinado por un potencial externo armónico anisotrópico, en el cual existen interacciones dipolo-dipolo entre las partículas. En concreto, trabajaremos con un gas de átomos de cromo sometido a un campo magnético rotatorio que genera interacciones dipolares de largo alcance (produciendo una anisotropía en el sistema), restringiéndonos al régimen donde la teoría de campo medio es válida y usando la aproximación de Thomas-Fermi.

Nuestro interés en gases cuánticos degenerados dipolares radica en que se espera que en ellos surjan fenómenos nuevos. Por ejemplo, entre otras cosas, las interacciones dipolares pueden modificar la forma del condensado [67] o la velocidad del sonido dentro del sistema (lo que añadiría la anisotropía como una característica adicional a este parámetro físico).

Como producto de este trabajo, se publicó el artículo [47].

5.2.1. Energía de la Nube bajo una Interacción Dipolo–Dipolo

Como dijimos, tenemos un gas de cromo atrapado en un potencial armónico anisotrópico, sobre el cual se aplica un campo magnético adecuado para producir

interacciones dipolares entre los átomos del sistema y, desde el principio, introducimos el límite de Thomas-Fermi.

La ecuación que describe este sistema es la de Gross–Pitaevskii independiente del tiempo,

$$\mu\psi(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + V_t(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + U_0|\psi(\mathbf{r})|^2\psi(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{R}V_d(\mathbf{r}-\mathbf{R})n(\mathbf{R})\psi(\mathbf{r}), \quad (5.79)$$

donde, como sabemos, $U_0 = 4\pi a\hbar^2/m$, mientras que denotaremos como V_t al potencial de la trampa que, por las características que pedimos, tiene la forma

$$V_t(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} [\omega_0^2 x^2 + \omega_0^2 y^2 + \omega_z^2 z^2]. \quad (5.80)$$

Supongamos, pues, que tenemos dos átomos iguales, cada uno de los cuales se encuentra en las posiciones \mathbf{r} y \mathbf{R} , respectivamente. Bajo tales condiciones aparecerá cierta energía potencial asociada a la interacción dipolo-dipolo entre ellos, que estará dada por

$$V_d(\mathbf{r}-\mathbf{R}) = \frac{\mu_0\gamma^2}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{R}\|^3} \left[\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 - 3 \frac{(\mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{R}))(\mathbf{S}_1 \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{R}))}{\|\mathbf{r}-\mathbf{R}\|^2} \right], \quad (5.81)$$

donde γ denota la razón giromagnética de cada átomo y \mathbf{S}_1 y \mathbf{S}_2 sus espines [68].

Asumamos que el campo magnético polariza nuestros átomos a lo largo del eje z , de modo que

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2 = 3\hbar\mathbf{e}_z, \quad (5.82)$$

y entonces el potencial dipolar se puede escribir como

$$V_d(\mathbf{r}-\mathbf{R}) = \frac{\mu_0(6\mu_B)^2}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{r}-\mathbf{R}\|^3} \left[1 - 3 \frac{(z-Z)^2}{\|\mathbf{r}-\mathbf{R}\|^2} \right]. \quad (5.83)$$

El término de energía dipolar se encontrará sustituyendo (5.83) en el último término del lado izquierdo de (5.79), es decir, será

$$E_d = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{R} V_d(\mathbf{r} - \mathbf{R}) n(\mathbf{r}) n(\mathbf{R}). \quad (5.84)$$

5.2.2. Potencial Químico y Geometría del Condensado

En este punto, introduciremos dos simplificaciones. La primera será la aproximación de Thomas-Fermi, bajo la cual despreciaremos el término cinético en (5.79). La segunda será aproximar la densidad de partículas por una forma simplificada: la que toma para el caso en el que no hay interacciones dipolares [69], donde

$$n(\mathbf{r}) \Rightarrow n^{(0)}(\mathbf{r}) = (\mu - V_t(\mathbf{r}))/U_0. \quad (5.85)$$

Para simplificar los cálculos, nos conviene recordar la siguiente identidad:

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{R}\|^3} - 3 \frac{(z - Z)^2}{\|\mathbf{r} - \mathbf{R}\|^5} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{R}\|} \right] - \frac{4\pi}{3} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}). \quad (5.86)$$

Definiendo

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{n^{(0)}(\mathbf{R})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{R}\|} d^3 R, \quad (5.87)$$

y sustituyendo (5.86) en (5.83) y usando (5.87), encontramos que

$$\int d\mathbf{R} V_d(\mathbf{r} - \mathbf{R}) n^{(0)}(\mathbf{R}) = -\mu_0 (6\mu_B)^2 \left[\frac{1}{3} n^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\phi(\mathbf{r})) \right]. \quad (5.88)$$

Para realizar la integral, y con ello poder deducir las propiedades del condensado, necesitamos conocer el volumen de integración. Sin embargo, la presencia de la interacción dipolar a lo largo de cierta dirección cambia drásticamente la geometría del condensado, complicándola [70]. Como en el caso más simple, donde no hay interacciones dipolares, aquí debemos derivar tal geometría a partir de nuestro

modelo. Basándonos en la simetría de la trampa, esperamos tener un sistema elipsoidal, con dos ejes iguales $R_0 = R_x = R_y$ y uno distinto R_z , aunque estos parámetros no determinan completamente la configuración geométrica de la nube.

Bajo este supuesto, nos conviene hacer un cambio de coordenadas y trabajar con esféricas elongadas en la dirección z [71], de modo que

$$\begin{aligned}x &= R_z \sinh u \cos v \cos \phi, \\y &= R_z \sinh u \cos v \sin \phi, \\z &= R_z \cosh u \sin v,\end{aligned}\tag{5.87}$$

donde $0 \leq v \leq \pi$; $0 \leq \phi \leq 2\pi$; $0 \leq u \leq \tilde{u}$ y $\tanh(\tilde{u}) = R_0/R_z$.

Para realizar la integral (5.88), nos conviene separarla y dividir el volumen total en dos distintos: el primero, V_1 , denotará una esfera de radio r centrada en el origen del condensado, mientras que V_2 denotará el volumen restante de la nube.

Tomando un punto dentro de ella cuyo vector de posición sea \mathbf{r} , podemos expresar

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\mu}{\|\mathbf{r} - \mathbf{R}\|} d^3R = \frac{1}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\mu}{\|\mathbf{r} - \mathbf{R}\|} d^3R + \frac{1}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\mu}{\|\mathbf{r} - \mathbf{R}\|} d^3R.\tag{5.88}$$

Claramente, la primera integral del lado derecho será

$$\frac{1}{4\pi} \int_{V_1} \frac{\mu}{\|\mathbf{r} - \mathbf{R}\|} d^3R = \frac{\mu}{3} r^2,\tag{5.89}$$

mientras que la segunda, después de sustituir (5.87) y hacer mucha álgebra, se verá así

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi} \int_{V_2} \frac{\mu}{\|\mathbf{r} - \mathbf{R}\|} d^3R &= 2\pi\mu R_z^2 \left[\frac{2}{3} \left(1 \left(\frac{r}{R_z} \right)^2 \right) \left(\cosh^3 \tilde{u} - \cosh \tilde{u} - \right. \right. \\ &\left. \left. \left(\frac{r}{R_z} \right)^3 + \left(\frac{r}{R_z} \right) \right) - \frac{z\pi}{4R_z} \left(\cosh^4 \tilde{u} - \cosh^2 \tilde{u} - \left(\frac{r}{R_z} \right)^4 + \left(\frac{r}{R_z} \right)^2 \right) \right].\end{aligned}\tag{5.89}$$

Haciendo un procedimiento análogo para el resto de las integrales y después de muchos cálculos engorrosos, encontramos que la versión de campo medio de la interacción dipolo-dipolo está dada por

$$\int d\mathbf{R} V_d(\mathbf{r} - \mathbf{R}) n^{(0)}(\mathbf{R}) = -\frac{\mu_0(2\mu_b m_s)^2}{U_0} \left[\frac{\mu}{3} - \frac{m}{6} (\omega_0^2 x^2 + \omega_0^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + \mu \frac{R_z \cosh(\tilde{u}) - r}{3R_z} - \frac{m\omega_0^2 R_z^2}{4} \left[\frac{2R_z \cosh(\tilde{u}) - 2r}{5R_z} + \frac{zr\pi}{32R_z^2} \left(1 + \frac{z^2}{r^2} \right) \right] - \frac{4m\omega_z^2 R_z^2}{105} \left(1 + 3\frac{z^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{z^2}{2r^2} \right) \left(\frac{r}{R_z} \right)^3 \right]. \quad (5.88)$$

Teniendo esta expresión, ya podemos calcular el potencial químico, que nos permitirá determinar muchas de las cantidades que nos interesan. Para ello usamos la expresión para la densidad

$$n(\mathbf{r}) = \frac{1}{U_0} \left[\mu - V_t(\mathbf{r}) - \int V_d(\mathbf{r} - \mathbf{R}) n(\mathbf{r}) n(\mathbf{R}) d\mathbf{R} \right] \quad (5.89)$$

junto con la condición de que ésta debe anularse en cualquier punto sobre la superficie del condensado. Como tenemos un elipsoide simétrico en dos dimensiones, ésta implica dos ecuaciones distintas (una para el caso sobre el plano $x-y$ y otra para el perpendicular). Eligiendo $n(\mathbf{r} = R_0 \mathbf{e}_x) = 0$ obtenemos

$$\mu = \left(1 + \frac{\xi}{3} \left(1 + \cosh(\tilde{u}) - \frac{R_0}{R_z} \right) \right)^{-1} \left\{ \frac{m\omega_0^2 R_0^2}{2} + \xi \left[\frac{m\omega_0^2 R_0^2}{6} + \frac{m\omega_0^2 R_z^2}{2} \left(\frac{2}{5} [\cosh \tilde{u} - \frac{R_0}{R_z}] \right) + 4 \frac{m\omega_z^2 R_z^2}{105} \frac{2R_z^2 R_0^3 - R_0^5}{2R_z^5} \right] \right\} \quad (5.88)$$

donde, por conveniencia, hemos definido $\xi = \frac{\mu_0(2\mu_b m_s)^2}{U_0}$.

Por su parte, tomando $n(\vec{r} = R_z \vec{e}_z) = 0$, encontramos la segunda ecuación para el potencial químico

$$\mu = \left(1 + \frac{\xi}{3} (\cosh(\tilde{u}) - 3\pi) \right)^{-1} \left\{ \frac{m\omega_z^2 R_z^2}{2} + \xi \left[\frac{m\omega_z^2 R_z^2}{6} + \frac{m\omega_0^2 R_z^2}{2} \left(\frac{2}{3} [\cosh \tilde{u} - 1] + \frac{\pi}{16} \right) + 2 \frac{m\omega_z^2 R_z^2}{105} \right] \right\}. \quad (5.87)$$

A partir de (5.88) y (5.87), únicamente, no podemos determinar los radios de la nube, sólo es posible encontrar una ecuación que defina su razón como función de ω_0 , ω_z y ξ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_0 R_0}{\omega_z R_z}\right)^2 &= \frac{1 + \frac{\xi}{3}[1 + \cosh(R_0/R_z) - R_0/R_z]}{1 + \frac{\xi}{3}[\cosh(R_0/R_z) - 3\pi]} \times \\ &\left\{1 + \frac{\xi}{3}[1 + (\omega_0/\omega_z)^2[2 \cosh(R_0/R_z) - 2 + \pi/2]]\right\} \times \\ &\left\{1 + \frac{\xi}{3}\left[1 + \frac{3R_z^2}{5R_0^2}[2 \cosh(R_0/R_z) - 2R_0/R_z \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{8R_0\omega_z^2}{7R_z\omega_0^2}\left(1 - \frac{R_0^2}{2R_z^2}\right)\right]\right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Ésta expresión sólo será satisfecha para ciertos valores de R_0/R_z (suponiendo que ω_0 , ω_z y ξ sean conocidos), pero, como dijimos no nos dará el valor de R_0 (ni R_z). Para hallarlos, se requiere una ecuación adicional.

5.2.3. Velocidad del sonido, Número de partículas y Energía

En términos de la densidad, la masa y el potencial químico, la velocidad del sonido en el condensado está dada por $c_s^2 = \frac{n}{m} \left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)$ [72].

Definiendo $\delta = R_0/R_z$ y sustituyendo (5.87) en la última expresión, encontramos que

$$\begin{aligned} c_s^2 &= \frac{\omega_z^2 R_z^2}{2} \left\{1 + \frac{\xi}{3} [\cosh(\delta) - 3\pi]\right\}^{-1} \\ &\left\{1 + \frac{\xi}{3}[1 + (\omega_0/\omega_z)^2[2 \cosh(R_0/R_z) - 2 + \pi/2]]\right\} \\ &\quad - \frac{\omega_0^2 x^2 + \omega_0^2 y^2 + \omega_z^2 z^2}{2} + \frac{\xi}{m} \left\{\frac{\mu}{3} - \right. \\ &\frac{m}{6} \left(\omega_0^2 x^2 + \omega_0^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right) + \frac{\mu}{3} \left[\cosh(\delta) - \frac{r}{R_z} - \frac{3\pi z}{R_z}\right] \\ &\quad - \frac{m\omega_0^2 R_z^2}{4} \left[\frac{2}{5} \left(\cosh(\delta) - \frac{r}{R_z}\right) + \frac{r\pi z}{32R_z^2} \left(1 + \frac{z^2}{r^2}\right)\right] \\ &\quad \left. - 2\frac{m\omega_z^2 R_z^2}{105} \left(1 + \frac{3z^2}{r^2}\right) \left(\frac{2r^3 R_z^2 - r^5}{r_z^5}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Esta expresión, finalmente, es la que nos permitirá deducir los parámetros geométricos del condensado determinando la velocidad del sonido en el centro de la nube, o sea, $c_s^2(\vec{r} = 0) = c_s^2(0)$. Haciendo las sustituciones y el álgebra necesaria, podemos por fin encontrar el valor de R_z como función de parámetros medibles:

$$R_z^{-2} = \frac{\omega_z^2 c_s^2(0)}{2} \left\{ 1 + \frac{\xi}{3} [\cosh(\delta) - 3\pi] \right\}^{-1} \\ \left\{ 1 + \frac{\xi}{3} [1 + (\omega_0/\omega_z)^2 [2 \cosh(\delta) - 2 + \pi/2]] \right\} \\ \left\{ 1 + \frac{\xi}{3} [1 + \cosh(\delta)] \right\} \frac{\omega_0^2 c_s^{-2}(0)}{2} \cosh(\delta). \quad (5.80)$$

Para encontrar el número de partículas, habrá que sustituir (5.80) en (5.88) e integrar, con lo cual obtenemos

$$N = \frac{4\pi\mu}{3U_0} \left\{ 1 + \frac{\xi}{3} \right\} R_0^2 R_z - \left\{ 1 + \frac{\xi}{3} \right\} \frac{2m\pi\omega_z^2 R_z^2}{15U_0} \left\{ \left[2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_z} \right)^2 \right] \cosh^5(\delta) \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \left[4 \left(\frac{\omega_0}{\omega_z} \right)^2 - 1 \right] \cosh^3(\delta) 3 \left(\frac{\omega_0}{\omega_z} \right)^2 \cosh(\delta) - \frac{4}{3} \left[\left(\frac{\omega_0}{\omega_z} \right)^2 + 1 \right] \right\}. \quad (5.80)$$

Por último, recordando que $E = \int \mu dN = \int \mu \frac{dN}{d\mu} d\mu$ [72], podemos encontrar la energía interna que, después de un larguísimo cálculo resulta ser

$$E = \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{a_1 + a_2 a_3}{a_2^2} \right) \left(\frac{2}{7} z^{7/2} - \frac{4}{5} b z^{5/2} + \frac{2}{3} b^2 z^{3/2} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{a_3 b z^{3/2}}{a_2} \right) \left(\frac{2}{5} z - \frac{2}{3} b \right) + \frac{a_1 + a_2 a_3}{a_2} \left(\frac{2}{7} z^{7/2} - \frac{2}{5} b z^{5/2} \right) \right\}, \quad (5.80)$$

donde los parámetros valen

$$z = a_2 \mu + b, \quad b = -m c_s^2(0), \quad a_1 = \frac{4\pi\delta^2}{3U_0} \left[1 + \frac{\xi}{3} \right] \left(\frac{10}{m\omega_0^2 \cosh(\delta)} \right)^{3/2},$$

$$a_2 = 1 + \frac{\xi}{3} [1 + \cosh(\delta)],$$

$$a_3 = \left[1 + \frac{\xi}{3}\right] \left(\frac{10}{m\omega_0^2 \cosh(\delta)}\right)^{5/2} \left\{ \left(2 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_z}\right)^2\right) \cosh^5(\delta), \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \left(4 \left(\frac{\omega_0}{\omega_z}\right)^2 - 1\right) \cosh^3(\delta) + 3 \left(\frac{\omega_0}{\omega_z}\right)^2 \cosh(\delta) - \frac{4}{3} \left(\left(\frac{\omega_0}{\omega_z}\right)^2 - 1\right) \right\}. \quad (5.78)$$

Usando el último resultado podemos calcular la energía promedio por partícula, simplemente dividiendo: $\varepsilon = E/N$.

Para concluir, podemos sintetizar lo que se hizo en esta segunda parte del trabajo, donde analizamos un sistema bosónico (Cr) con interacciones dipolares, confinado a una trampa anisotrópica.

En él, calculamos el potencial químico, que resultó ser una función no lineal de los parámetros de la trampa y la longitud de dispersión. Por la simetría elipsoidal del sistema, no es posible determinar R_0 ni R_z usando únicamente argumentos termodinámicos, sólo su razón. Para resolver este problema, recurrimos a la ec. (5.80), donde dedujimos R_z como función de la velocidad del sonido en el centro de la nube, entre otros parámetros medibles, como ω_0 , ω_z y ξ .

La velocidad del sonido resultó depender de la posición, además de ser anisotrópica, debido tanto a las diferentes frecuencias asociadas a los tres ejes como al hecho de que la interacción dipolar sólo se da a lo largo del eje z . Esperamos que dicha anisotropía nos permita investigar ciertos mecanismos disipativos en distintos sistemas físicos.

Capítulo 6

Conclusiones y Perspectivas

6.1. Conclusiones

Inspirados por la importancia que las analogías representan como herramientas para estudiar sistemas difíciles de manipular y/o calcular, utilizando otros que son conceptual o experimentalmente más amigables, nos hemos interesado en el estudio de la gravedad análoga a partir de condensados de Bose-Einstein.

En la primera mitad de esta tesis analizamos el caso de un fluido barotrópico e irrotacional, incluyendo viscosidad en el sistema, y demostramos que la ecuación de movimiento para el potencial de velocidad correspondiente puede ser asociada a la de un campo no masivo, mínimamente acoplado, que se propaga en una geometría lorentziana (3+1). La presencia de viscosidad genera un término fuente en las ecuaciones de movimiento, el cual puede ser interpretado como un mecanismo por el cual la transferencia de momentum, desde el campo hacia el espacio-tiempo, se vuelve relevante en el fluido, es decir, permite que la energía asociada al campo se vuelva energía interna. Específicamente, el flujo de energía indica que nuestro parámetro μ , que contiene la información concerniente a la viscosidad, es el responsable del flujo de energía del campo ϕ_1 a la curvatura de la variedad. Es fácil notar que si hacemos la viscosidad nula en (4.81), i.e. $\mu \rightarrow 0$, recuperamos el teorema usual [3].

Ya se ha dicho que el lado izquierdo del resultado principal de la primera parte de este trabajo, i.e. (4.81), está asociado a un campo sin masa, ni espín (un bosón, por ejemplo), de modo que nuestra ecuación proporcionaría la dinámica de una partícula con tales características moviéndose en un espacio-tiempo curvo, asumiendo

también, por supuesto, cierto acoplamiento con la curvatura del tipo aquí introducido. Es necesario resaltar que el flujo de energía de un sistema a la curvatura de la variedad no necesariamente implica el rompimiento de los postulados de la RG. Finalmente, para entender mejor qué le ocurre a la energía del sistema, calculamos el tensor de energía momento del campo, para concluir que no es constante, lo cual es congruente con el intercambio de energía discutido.

En la segunda mitad nos hemos avocado al estudio del caso concreto de laboratorio de un CBE compuesto de átomos de cromo en un potencial armónico elipsoidal, con dos frecuencias iguales en las direcciones x y y y una distinta en la dirección z . Dicho sistema, además de ser sometido a interacciones de contacto, está sujeto interacciones dipolo-dipolo, que surgen como consecuencia de aplicar un campo magnético y tienen efectos importantes en el sistema.

Calculamos el potencial químico, (5.88), que resulta ser una función no lineal en los parámetros de la trampa y la longitud de dispersión, lo cual era de esperarse, dado que hay resultados previos que muestran este tipo de dependencia [72]. Sin embargo, cabe hacer notar que en los trabajos anteriores se había asumido que la interacción de contacto era mayor que la dipolar, condición que nosotros no impusimos, por lo que nuestro trabajo es más general, y la dependencia del potencial químico sobre las frecuencias, la longitud de dispersión y la interacción dipolo-dipolo es más complicada. Obviamente, haciendo las consideraciones pertinentes, nuestro caso se reduce a los anteriores.

Encontramos que los argumentos termodinámicos no bastan para definir el valor de R_0 o R_z en este sistema, sino sólo su razón, R_0/R_z . En tales condiciones, dadas las frecuencias y ξ , (5.85) nos da un único valor posible para dicho cociente, ya que sólo existe un caso en el cual tanto R_0 como R_z son positivos simultáneamente y satisfacen la ecuación. Para poder determinar el valor de R_0 o R_z es necesario recurrir al concepto de velocidad de sonido en el condensado, dada por la ecuación (5.80), a partir de la cual dedujimos R_z como función de la velocidad del sonido en el centro de la nube, de las frecuencias y de δ , entre otros parámetros.

Al estudiar la velocidad del sonido (5.81) pudimos ver que no sólo es dependiente de la posición, sino que también es anisotrópica. Para evidenciar esta afirmación, notemos que (5.81) implica que el movimiento a lo largo del eje z ocurre a una velocidad distinta que aquél en la dirección del eje x . Este comportamiento es relevante dado que podría ofrecer una herramienta para investigar algunos mecanismos disipativos, (en particular el caso del criterio de superfluidez de Landau) [67], [73].

Nuestro cálculo confirma una conjetura mencionada en [67] sobre la pérdida de isotropía en la velocidad del sonido para un CBE de cromo y, en consecuencia, hace más asequible la posibilidad de estudiar mecanismos disipativos con sistemas en los que la interacción dipolo-dipolo juega un papel importante a la hora de determinar las propiedades físicas.

6.2. Perspectivas

Con base en lo estudiado a lo largo del trabajo aquí expuesto, surgieron las siguientes líneas de investigación a desarrollar:

- El estudio de la analogía entre la ecuación de Gross-Pitaevskii, escrita en términos de la representación de Madelung, y un campo escalar que se mueve en el espacio-tiempo, aprovechando que la forma de dicha ecuación es muy semejante a la de un fluido viscoso. Este estudio unificará, de alguna manera, los dos trabajos que conforman esta tesis.
- El cálculo numérico para encontrar la solución del caso de un CBE con interacciones dipolo-dipolo sin aproximaciones.
- El análisis de la velocidad crítica según el criterio de Landau para el surgimiento de superfluidez en un CBE anisotrópico y la comprensión de la relación entre la interacción dipolo-dipolo y la presencia o ausencia de superfluidez.
- La revisión de las excitaciones elementales en un CBE con interacciones dipolo-dipolo a través, no sólo del formalismo hidrodinámico, sino también de las ecuaciones de Bogoliubov, con el fin de comprender el papel que dichas interacciones puede jugar en el surgimiento de modos colectivos de vibración [65].
- A mediano plazo, el estudio de efectos gravito-cuánticos experimentalmente medibles, en instalaciones como la torre de caída del Centro de Tecnología Espacial Aplicada y Microgravedad, ZARM (por sus siglas en alemán).
- A largo plazo, formar parte del grupo que pretende impulsar la creación del primer laboratorio de gases condensados ultrafríos en México.

Bibliografía

- [1] Matt Visser. Sakharov's induced gravity: a modern perspective. page 17, 2002.
- [2] Misner, Thorne, and Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and company, 1973.
- [3] Carlos Barceló, S Liberati, and Matt Visser. Analogue gravity from Bose-Einstein condensates. *Classical and Quantum Gravity*, 18(6):1137–1156, 2001.
- [4] Claus Kiefer. *Quantum Gravity*. Oxford Science Publications, 3rd edition, 2012.
- [5] W. PEDDIE. The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. *Nature*, 120(3031):799–800, 2003.
- [6] Sabine Hossenfelder. *Experimental Search for Quantum Gravity*. 2010.
- [7] Benjamin Koch. Quantizing Geometry or Geometrizing the Quantum? page 5, 2010.
- [8] Elias Kiritsis. D-branes in Standard Model building, Gravity and Cosmology, 2003.
- [9] Edward Witten. String theory and black holes. *Phys. Rev. D*, 44(2):314–324, 1991.
- [10] Fotini Markopoulou. *Towards Gravity from the Quantum*. 2006.
- [11] John A Wheeler. On the nature of quantum geometrodynamics. *Annals of Physics*, 2(6):604–614, 1957.
- [12] S Deser and B Zumino. Consistent supergravity. *Physics Letters B*, 62(3):335–337, 1976.
- [13] Abhay Ashtekar. Gravity and the quantum. *New Journal of Physics*, 7:198–198, 2005.
- [14] Petr Hořava. Quantum gravity at a Lifshitz point. *Physical Review D*, 79(8):29, 2009.

- [15] Petr Hořava. Spectral Dimension of the Universe in Quantum Gravity at a Lifshitz Point. *Physical Review Letters*, 102(16):11, 2009.
- [16] Rong-Gen Cai, Li-Ming Cao, and Nobuyoshi Ohta. Topological black holes in Hořava-Lifshitz gravity. *Physical Review D*, 80(2):14, 2009.
- [17] Christos Charmousis, Gustavo Niz, Antonio Padilla, and Paul M Saffin. Strong coupling in Hořava gravity. *Journal of High Energy Physics*, (08):070–070, 2009.
- [18] Makoto Sakamoto. Strong coupling quantum Einstein gravity at a $z=2$ Lifshitz point. *Physical Review D*, 79(12):10, 2009.
- [19] Abhay Ashtekar. Asymptotic Quantization of the Gravitational Field. *Phys. Rev. Lett.*, 46(9):573–576, 1981.
- [20] M. Reuter. Nonperturbative evolution equation for quantum gravity. *Physical Review D*, 57(2):971–985, 1998.
- [21] M. Reuter and F. Saueressig. Renormalization group flow of quantum gravity in the Einstein-Hilbert truncation. *Physical Review D*, 65(6):58, 2002.
- [22] Daniel Litim. Fixed Points of Quantum Gravity. *Physical Review Letters*, 92(20), 2004.
- [23] R Penrose and W Rindler. Spinors and space-time. vol. 2: spinor and twistor methods in space-time geometry. 1986.
- [24] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin. Consistent Discretization and Loop Quantum Geometry. *Physical Review Letters*, 94(10):4, 2005.
- [25] Alain Connes. Gravity coupled with matter and the foundation of non-commutative geometry. *Communications in Mathematical Physics*, 182(1):155–176, 1996.
- [26] Piero Nicolini. Noncommutative Black Holes, The Final Appeal To Quantum Gravity: A Review. page 77, 2008.
- [27] Gil Jannes. Emergent gravity: the BEC paradigm. page 144, 2009.
- [28] B. L. Hu. Can Spacetime be a Condensate? *International Journal of Theoretical Physics*, 44(10):1785–1806, 2005.
- [29] Reiner Hedrich. Quantum Gravity: Motivations and Alternatives. page 32, 2009.
- [30] Stefano Liberati, Florian Girelli, and Lorenzo Sindoni. Analogue Models for Emergent Gravity. page 47, 2009.

- [31] Daniele Oriti. Group field theory as the microscopic description of the quantum spacetime fluid: a new perspective on the continuum in quantum gravity. page 38, 2007.
- [32] Florian Girelli, Etera R. Livine, and Daniele Oriti. Four-dimensional deformed special relativity from group field theories. *Physical Review D*, 81(2):23, 2010.
- [33] Luca Bombelli, Joochan Lee, David Meyer, and Rafael Sorkin. Space-time as a causal set. *Physical Review Letters*, 59(5):521–524, 1987.
- [34] Tomasz Konopka, Fotini Markopoulou, and Simone Severini. Quantum graphity: A model of emergent locality. *Physical Review D*, 77(10):25, 2008.
- [35] Tomasz Konopka. Statistical mechanics of graphity models. *Physical Review D*, 78(4):30, 2008.
- [36] Olaf Dreyer. Emergent General Relativity. 2006.
- [37] Olaf Dreyer. Why things fall. In *Proceedings of From Quantum to Emergent Gravity: Theory and Phenomenology*, Trieste, Italy, 2007.
- [38] Samir D Mathur. The information paradox: a pedagogical introduction. *Classical and Quantum Gravity*, 26(22):224001, 2009.
- [39] G E Volovik. *The Universe in a Helium Droplet*. International Series of Monographs on Physics. Clarendon Press, 2003.
- [40] G. E. Volovik. VACUUM ENERGY: MYTHS AND REALITY. *International Journal of Modern Physics D*, 15(12):1987, 2006.
- [41] Wolfgang Rindler. *Essential Relativity*. Springer-Verlag, 1977.
- [42] Robert M Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [43] Liberati Barcelo and Visser. Analogue Gravity. *Living Rev. Relativity*, 8:12.
- [44] L D Landau and E M Lifshitz. *Fluid mechanics*. Pergamon Press, 2nd edition, 1987.
- [45] A J Chorin and J E Marsden. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer, 3rd edition, 1997.
- [46] Leopoldo Garcia-Colin. *Introduccion a la termodinamica clasica*. Trillas, 2008.
- [47] B. González-Fernández and A. Camacho. Speed of Sound of a Bose–Einstein Condensate with Dipole–Dipole Interactions. *Journal of Low Temperature Physics*, 173(5-6):343–353, 2013.

- [48] J E Marsden and T J R Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall, Inc., 1983.
- [49] B. González-Fernández and A. Camacho. Fluid-gravity correspondence under the presence of viscosity. *Modern Physics Letters A*, 27(32):1250185, 2012.
- [50] L. Garay, J. Anglin, J. Cirac, and P. Zoller. Sonic Analog of Gravitational Black Holes in Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 85(22):4643–4647, 2000.
- [51] L. Garay, J. Anglin, J. Cirac, and P. Zoller. Sonic black holes in dilute Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 63(2):023611, 2001.
- [52] A. Macias, C. Lämmerzahl, and D. Nunez. Gravitation and Cosmology. In *AIP Conference Proceedings 758*, New York, 2005.
- [53] G. Amelino-Camelia, C. Lämmerzahl, A. Macias, and H. Müller. The search for quantum gravity signals. In *AIP Conference Proceedings 758*, New York, 2005.
- [54] C. Lammerzahl. The search for quantum gravity effects I. *Appl. Phys. B*, 634:551, 2006.
- [55] Thibault Damour, Federico Piazza, and Gabriele Veneziano. Runaway Dilaton and Equivalence Principle Violations. *Physical Review Letters*, 89(8):081601, August 2002.
- [56] Holger Müller, Achim Peters, and Steven Chu. Müller, Peters & Chu reply. *Nature*, 467(7311):E2–E2, September 2010.
- [57] N. Poli, F.-Y. Wang, M. G. Tarallo, A. Alberti, M. Prevedelli, and G. M. Tino. Precision Measurement of Gravity with Cold Atoms in an Optical Lattice and Comparison with a Classical Gravimeter. *Physical Review Letters*, 106(3):038501, January 2011.
- [58] Michael A. Hohensee, Steven Chu, Achim Peters, and Holger Müller. Equivalence Principle and Gravitational Redshift. *Physical Review Letters*, 106(15):151102, April 2011.
- [59] Hafele. J.C. and R. E. Keating. No Title. *Science*, 177:168, 1972.
- [60] C.W. Chou, D.B. Hume, T. Rosenband, and D.J. Wineland. No Title. *Science*, 329:1630–1633, 2010.
- [61] R. Vessot, M. Levine, E. Mattison, E. Blomberg, T. Hoffman, G. Nystrom, B. Farrell, R. Decher, P. Eby, C. Baugher, J. Watts, D. Teuber, and F. Wills. Test of Relativistic Gravitation with a Space-Borne Hydrogen Maser. *Physical Review Letters*, 45(26):2081–2084, December 1980.

- [62] S. Schlamminger, K.-Y. Choi, T. Wagner, J. Gundlach, and E. Adelberger. Test of the Equivalence Principle Using a Rotating Torsion Balance. *Physical Review Letters*, 100(4):041101, January 2008.
- [63] V. Alan Kostelecký and Neil Russell. Data tables for Lorentz and CPT violation. *Reviews of Modern Physics*, 83(1):11–31, March 2011.
- [64] D.R. Tilley and J Tilley. *Superfluidity and Superconductivity*. Institute of Physics Publishing, New York, 1990.
- [65] Emil Lundh, C. J. Pethick, and H. Smith. Zero-temperature properties of a trapped Bose-condensed gas: Beyond the Thomas-Fermi approximation. *Physical Review A*, 55(3):2126–2131, March 1997.
- [66] U. Khawaja, C. Pethick, and H. Smith. Surface of a Bose-Einstein condensed atomic cloud. *Physical Review A*, 60(2):1507–1512, 1999.
- [67] S. Giovanazzi, P. Pedri, L. Santos, A. Griesmaier, M. Fattori, T. Koch, J. Stuhler, and T. Pfau. Expansion dynamics of a dipolar Bose-Einstein condensate. *Physical Review A*, 74(1):013621, 2006.
- [68] C. Cohen-Tannoudji, B Diu, and F. Laloe. *Quantum Mechanics*. Wiley-VCH; 2 Volume Set edition, 1991.
- [69] C. J. Pethick, H. Smith, and Tin-Lun Ho. *Bose-Einstein Condensation in dilute gases*, volume 56. University Press, Cambridge, UK.
- [70] L. Santos, G. V. Shlyapnikov, P. Zoller, and M. Lewenstein. Bose-Einstein Condensation in Trapped Dipolar Gases. *Physical Review Letters*, 85(9):1791–1794, 2000.
- [71] George Brown Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Elsevier, 2005.
- [72] R K Pathria. *Statistical Mechanics*. Academic Press, 2011.
- [73] Philippe Nozieres and David Pines. *Theory of Quantum Liquids: Superfluid Bose Liquids*. Addison-Wesley, 1994.