



# Universidad Nacional Autónoma de México

---

Facultad de Ingeniería

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN  
EN MATERIALES

Estudio teórico de la transferencia de calor  
y corriente eléctrica en un medio poroso.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERO GEOFÍSICO

P R E S E N T A:

MIGUEL ENRÍQUEZ VARGAS



**DIRECTOR DE TESIS:**  
**DR. ROBERTO ZENIT CAMACHO**

CIUDAD UNIVERSITARIA,  
MÉXICO, D.F.

2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

---

*A mis padres Miguel Enríquez e Isabel Vargas, que siempre han estado conmigo con su amor incondicional en las buenas y en las malas sabiendo que en cualquier momento podré contar con ellos. Definitivamente no sería la persona que soy ahora sin ellos. Por haberme dado sus consejos y experiencias de vida que me han servido mucho y que me seguirán sirviendo. Han sido mi modelo a seguir. Por todo esto y más, se los agradezco de corazón.*

*A mi abuelita Isabel Flores, que desde que soy pequeño y hasta el día de hoy, ha estado al cuidado de mí. Apoyándome para no salirme del camino con sus consejos, sus dichos y sus pláticas que sin darme cuenta me han ayudado mucho. Sin duda alguna también ha sido una base importante para ir cumpliendo mis metas.*

*A mis hermanas Carolina y Diana, con quien siempre tendré un vínculo irrompible. Son y serán las personas en las que siempre confiaré y sé que siempre estarán conmigo a pesar de cualquier eventualidad. Personas muy importantes en mi vida más que por el hecho de ser mis hermanas son excelentísimas personas.*

*A mi tío Mario Vargas, que siempre me ha apoyado y aconsejado para tomar las mejores decisiones y que hasta la fecha sigue siendo un punto de partida importante para ver las cosas con más claridad. A sido una persona que siempre he admirado y por ello sus pláticas y comentarios las tomo siempre en cuenta, sé que tienen una sabiduría que no se debe desaprovechar.*

*Al Dr. Armando García Jaramillo por permitirme participar en el proyecto OrionEarth correspondiente al módulo de Modelo termoeléctrico para medios porosos bifásicos. Su tiempo y comentarios fueron de suma importancia para la adecuada redacción de esta tesis.*

*Al Dr. Roberto Zenit por haber sido mi director de tesis, por su orientación y la oportunidad de participar en las actividades que se realizan en el IIM. Su experiencia y los comentarios fueron un punto clave para que la tesis quedara de una excelente manera.*

*A Óscar Chávez, Jorge Zaldivar y Alberto Beltrán que estuvieron siempre al pendiente del avance de mi tesis dando sus consejos y dándome de su tiempo y paciencia para enseñarme de la mejor manera. Sin olvidar las pláticas amenas que se tuvieron.*

*A TEMPLE y el proyecto OrionEarth por darme el apoyo económico y la oportunidad de trabajar en este importante proyecto que me ha permitido aprender muchas cosas que sé me van a ayudar no solamente ahorita sino también más adelante en mi vida profesional.*

---

# Índice

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Modelo Físico</b>	<b>7</b>
2.1. Fenómeno físico . . . . .	14
2.2. Modelo matemático . . . . .	17
2.2.1. Modelo eléctrico . . . . .	17
2.2.2. Modelo térmico . . . . .	21
2.2.3. Análisis dimensional y variables adimensionales . . . . .	22
<b>3. Discretización y método de solución</b>	<b>27</b>
3.1. Discretización en diferencias finitas . . . . .	27
3.2. Discretización del modelo térmico adimensional . . . . .	28
3.3. Discretización del modelo eléctrico adimensional . . . . .	31
<b>4. Variación de parámetros</b>	<b>35</b>
4.1. Variación de penetración de la onda electromagnética $\varepsilon$ . . . . .	35
4.2. Variación del cociente de resistividades $\lambda_r/\lambda_l$ . . . . .	41
4.3. Variación del coeficiente de permeabilidad magnética $\mu_l/\mu_r$ . . . . .	46
4.4. Variación de la tortuosidad $\beta$ . . . . .	51

---

4.5. Variación de coeficiente de conductividades térmicas $k_r/k_l$ . . . . .	56
<b>5. Validación del modelo termoeléctrico</b>	<b>61</b>
5.1. Areniscas . . . . .	65
5.2. Arenas . . . . .	72
5.3. Carbonatos . . . . .	73
<b>6. Conclusiones</b>	<b>75</b>

# Resumen

---

Se analiza el comportamiento eléctrico y térmico a través de un medio poroso saturado con líquido conductor, del cual se puede obtener un cociente de resistividad también llamado factor de resistividad de formación. La tortuosidad, la resistividad eléctrica y la porosidad de la roca son propiedades importantes que determinan el factor de formación.

Se describe el fenómeno físico a través de ecuaciones de transferencia de calor por difusión, eléctricas y electromagnéticas para realizar el acoplamiento de los modelos y tener la descripción lo más aproximada posible. Después se hizo la adimensionalización del modelo. Posteriormente se realizó la discretización del modelo con el método de diferencias finitas de Cranck-Nicholson. Se realizaron pruebas al programa previamente realizado en el Instituto de Investigación de Materiales y en se compararon tanto con datos experimentales obtenidos de núcleos analizados por CoreLab como con datos experimentales de núcleos que se encuentran registrados en diversos artículos publicados.

Las comparaciones entre las predicciones y los datos experimentales validan ampliamente el modelo.



# Abstract

---

The behavior of electric and thermic properties through porous medium saturated with conductive liquid have been analyzed, from which we can obtain the ratio of the resistivity what it is called formation resistivity factor. The tortuosity, the electrical resistivity and the porosity of a rock are important properties that determinate the formation factor.

It started with an explanation of the physical phenomena based on thermodynamic and electrical equations to make the attachment of the models and have a description the most approximated as possible. Then it was made the dimensionless model. After it was made the discretization of the model with the finite difference method, Crank-Nicholson. Were performed some tests to the program previously conducted by IIM and the results were compared with the experimental data obtained from cores analyzed by CoreLab, also with experimental data of analyzed cores which results are registred and published in several articles.

The comparisons between predictions and experimental data validate the model widely.



---

## Nomenclatura

### Griegas

$\alpha$ : coeficiente de temperatura

$\delta$ : espesor pelicular

$\epsilon$ : profundidad de penetración de la onda electromagnética

$\lambda$ : resistividad

$\lambda_{\infty}$ : resistividad a temperatura ambiente

$\Lambda$ : cociente de resistividades

$\mu$ : permeabilidad magnética

$\rho$ : densidad

$\phi$ : porosidad

$\phi_e$ : porosidad efectiva

$\phi_f$ : porosidad de flujo

$\phi_r$ : porosidad absoluta

$\phi_s$ : porosidad de estancamiento

$\Phi$ : coeficiente de temperatura

$\Phi_l$ : coeficiente de temperatura del líquido

$\Phi_r$ : coeficiente de temperatura de la roca

$\omega$ : frecuencia angular

### Latinas

$b$ : radio total

$B$ : parámetro del obstáculo

$Bi$ : número de Biot

$c$ : calor específico

$C$ : factor de corrección

$C_1$ : factor de corrección

$C_2$ : factor de corrección

$e$ : constante de Napier = 2.7182

$F$ : factor de formación

$G$ : tortuosidad

$h$ : coeficiente convectivo

$i$ : número imaginario  
 $J_s$ : densidad de corriente  
 $J_{s,l}$ : densidad de corriente del líquido  
 $J_{s,r}$ : densidad de corriente de la roca  
 $k$ : conductividad térmica  
 $L$ : longitud total  
 $Lm$ : longitud media  
 $m$ : exponente de cementación  
 $n$ : exponente de saturación  
 $p$ : parámetro de ajuste dependiente de la tortuosidad  
 $\dot{q}_{gen}$ : calor generado  
 $r$ : coordenada radial  
 $R$ : resistividad  
 $R_o$ : resistividad de la roca saturada  
 $R_w$ : resistividad del fluido  
 $t$ : tiempo  
 $t_c$ : tiempo convectivo  
 $T$ : temperatura  
 $T_l$ : temperatura del líquido  
 $T_r$ : temperatura de la roca

---

# Capítulo 1

## Introducción

---

Desde que se comenzó con la extracción de hidrocarburos, se han buscado alternativas para economizar costos en los estudios necesarios para la localización de zonas más factibles para la búsqueda de energéticos. Se han ido mejorando los métodos geofísicos en la adquisición de datos con el diseño de nuevas herramientas y procesamiento de los mismos; de esta manera, se obtiene la información necesaria para tomar las decisiones más convenientes en la perforación de un pozo.

A partir de datos obtenidos, ya sea de muestras de laboratorio o registros geofísicos de pozo, es posible obtener diversos parámetros para determinar las propiedades de la zona de interés, por lo que una parte importante del proceso de estudio es la correcta obtención de estos parámetros. Entre los más importantes se encuentran: el factor de formación, la porosidad, la resistividad y el nivel de saturación de fluidos.

El factor de formación es parámetro que permite determinar la saturación de fluidos. El primero en calcularlo con fines petrofísicos fue Gustav Archie en 1942 [1], quien encontró de manera empírica la relación que existe entre la resistividad de la formación con la resistividad del fluido.

El trabajo de Archie fue punto clave para empezar una serie de estudios para tener más precisa dicha ecuación, variando ciertos parámetros, realizando cada vez modificaciones más complicadas pero que determinan de mejor manera los parámetros importantes.

De las primeras modificaciones de la ecuación de Archie fue la de Humble Oil Company, que realizaron variaciones en el factor de tortuosidad para obtener valores más cercanos a los reales. Como primera aproximación es muy buena; sin embargo, un factor importante de la ecuación de Humble a considerar es el factor de tortuosidad; este parámetro en la ecuación de Archie es de 1 y es en lo que radica la diferencia. También se determinaron de manera experimental los valores de la tortuosidad, sin embargo en la actualidad se han realizado varias investigaciones al respecto, y se han desarrollado tanto modelos matemáticos como modelos experimentales para estimar el factor de tortuosidad. Este parámetro no es fácil de determinar, ya que es un valor estadístico que depende mucho de las condiciones del medio porque dependiendo la petrogénesis es la complejidad de los caminos de los poros, por lo tanto se asigna un rango de valores a determinado tipo de roca.

El factor de tortuosidad no sólo ayuda a determinar valores como el factor de formación, también es usado para discriminar electrofacies para la interpretación de parámetros eléctricos [2].

Attia [3] explica cómo es que la porosidad afecta en primera instancia a la tortuosidad, ya que dependiendo de factores como el tamaño de los granos, se generan tortuosidades más complejas conforme los granos son más finos. También explica que la presión influye en el factor de formación. A partir de esto, Attia generó una serie de aproximaciones para determinar el parámetro de tortuosidad de manera rápida y precisa.

En 1968 Waxman Smith [4] propuso una manera diferente para determinar el factor de formación con un modelo matemático más complejo que los iniciales, y considera factores de intercambio de cationes. Esto para realizar una corrección por la cantidad de arcillas, ya que las rocas con altos contenidos de este material, poseen un intercambio de cationes por unidad de volumen mucho más altas que los que no, debido a que el agua asociada a las arcillas es dado a un nivel molecular [5]. Sin embargo, este tipo de métodos suele ser poco práctico para la industria ya que requiere más experimentos de laboratorio que las fórmu-

las convencionales, aunque son más exactas ya que toman a consideración más parámetros que ciertamente influyen en los valores.

De las últimas investigaciones que se han hecho al respecto, se encuentra un modelado en 3D de imágenes de poros para geomateriales para determinar factores de formación de manera precisa [6], sin embargo como se mencionó anteriormente, es poco práctico este tipo de métodos.

En el Instituto de Investigación en Materiales (IIM) de la UNAM se desarrolló un modelo matemático de la transmisión de una señal eléctrica a través de una matriz rocosa saturada de líquido conductor a partir un modelo acoplado para conductores eléctricos de alta tensión. El análisis de la onda electromagnética generada dará información de los perfiles de temperatura y densidad de corriente en régimen transitorio en cada una de las fases [7]. El objetivo de este modelo es poder obtener el factor de resistividad de formación, considerando aspectos electromagnéticos, petrofísicos y térmicos de las rocas pudiendo obtener un dato similar al proceso experimental.



---

# Capítulo 2

## Modelo Físico

---

Existen propiedades petrofísicas de suma importancia que ayudan a tener una descripción más clara de la zona de estudio, como por ejemplo lo sería al porosidad y la tortuosidad; estos parámetros dan un panorama general de las características de los poros, y cómo es la complejidad del camino para que se mueva el fluido.

La porosidad se define como el porcentaje del espacio no rocoso que se encuentra entre los granos y matriz en una roca, teniendo en cuenta los espacios separados y los espacios interconectados. Es también una medida de la capacidad de una roca para almacenar algún fluido. Este valor se puede obtener a partir de pruebas de laboratorio o con registros geofísicos. Esta propiedad resulta ser una de las más importantes en la petrofísica ya que se puede estimar el posible almacenamiento de distintos tipos de fluidos. En hidrología nos indica qué porcentaje de agua se puede tener de un volumen determinado de roca. En la industria petrolera se utiliza para determinar el volumen de hidrocarburos que se encuentran en la formación.

La porosidad puede clasificarse de la siguiente manera [8] :

$$(\phi_e) = \frac{\text{Volumen de poros comunicados}}{\text{Volumen de la roca}} \times 100 , \quad (2.1)$$

$$(\phi_r) = \frac{\text{Volumen total de poros}}{\text{Volumen de la roca}} \times 100 , \quad (2.2)$$

donde  $\phi_e$  es la porosidad efectiva y  $\phi_r$  es la porosidad absoluta o total.

La tortuosidad  $G$  se define como el cociente de la longitud media de líneas de flujo  $Lm$  y la longitud de una muestra porosa  $L$ :

$$G = \frac{Lm}{L} . \quad (2.3)$$

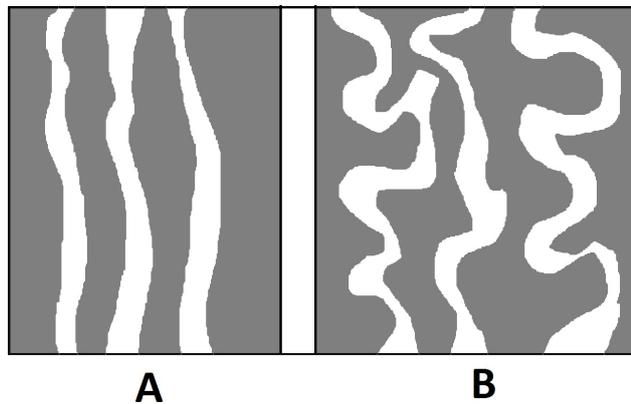


Figura 2.1: Representación esquemática de conductos donde A tiene un coeficiente de tortuosidad menor que B

Este parámetro nos ayuda a determinar qué tanto el fluido podrá salir con mayor o menor esfuerzo del inicio del conducto propuesto al final de este. En la figura 2.1 se muestra cómo A tiene menor oposición al flujo que B, ya que al ser

un camino menos complejo, la resistencia será menor.

Para una expresión donde se vea la influencia de la porosidad de flujo  $\phi_f$  (porosidad interconectada) y la porosidad de estancamiento  $\phi_s$  (porosidad aislada o no conectada) en rocas naturales con la tortuosidad se tiene:

$$G = 1 + \frac{\phi_s}{\phi_f} . \quad (2.4)$$

Se deduce que la porosidad total  $\phi$  es la suma de la porosidad de flujo a través de los canales  $\phi_f$  y la porosidad de estancamiento  $\phi_s$ , por lo que se tiene la siguiente expresión matemática:

$$\phi = \phi_f + \phi_s . \quad (2.5)$$

Maciej Matyka y Zbigniew Koza en 2012 [9], proponen un sistema 2D en el cual la matriz porosa fue modelada por círculos que están libres para superponerse, generaron una malla y en ella depositaron de manera aleatoria los círculos de radio 10 l.u. (length units) en el centro de la malla, condicionando los contornos del círculo para tener la propiedad de ser antideslizantes; el flujo fue impulsado por un campo de fuerza externa cuya magnitud fue elegida de manera que el número de Reynolds,  $Re < 1$ .

Encontraron que en este modelo la relación entre la porosidad y tortuosidad podría ser aproximada por la fórmula logarítmica de Comiti y Renaud [9]:

$$G = 1 - p \ln \phi , \quad (2.6)$$

la dependencia de la tortuosidad con la porosidad en su modelo de círculos que se superponen se encontró un buen ajuste de  $p \approx 0.67$ .

Existe otra relación entre la tortuosidad y la porosidad descrita, pero para un sistema 3D usando esferas; esta relación es de suma importancia para el modelo tridimensional, ya que la porosidad es un parámetro que se puede obtener de una manera más fácil al momento del analizar núcleos de roca. La ecuación que

relaciona la tortuosidad y la porosidad queda de la siguiente manera [9]:

$$G = \sqrt{\frac{2\phi}{3[1 - B(1 - \phi)^{2/3}]}} + \frac{1}{3}, \quad (2.7)$$

donde  $B$  es una constante que depende de la forma de los obstáculos. Como primera aproximación se establece que el valor queda  $B = 1.09$ , que es ligeramente menor a  $B = 1.209$  que corresponde a obstáculos con forma cúbica.

El factor de resistividad de formación es la relación de la resistividad de una roca completamente saturada  $\lambda_r$  con un determinado fluido dividida entre la resistividad del fluido que la satura  $\lambda_l$ .

$$F = \frac{\lambda_r}{\lambda_l}. \quad (2.8)$$

La ecuación de Archie es:

$$F = \phi^{-m}, \quad (2.9)$$

donde  $\phi$  es la porosidad total de la roca y  $m$  el exponente de cementación que varía entre 1.2 y 3.0, está determinado por la forma y distribución de los granos.

En 1942 Gustav Archie [1] realizó análisis petrofísicos de rocas para determinar propiedades importantes, como el factor de resistividad de formación que normalmente se denominó como factor de formación. Se han hecho modificaciones de esta fórmula para ir aproximando más a situaciones reales, ya que la fórmula de Archie, en principio sólo considera rocas completamente limpias de arcillas. La zona estudiada por Archie fue el Golfo Este de Estados Unidos; utilizando areniscas, y con un método empírico determinó la relación entre la porosidad y el factor de formación. Esta ecuación ha sido de las más relevantes en la petrofísica, ya que describe de manera muy acertada con parámetros fáciles de determinar a partir de registros geofísicos, el factor de formación. A través de un estudio de arenas, pudo obtener los parámetros de permeabilidad, saturación de agua y porosidad para realizar la figura 2.2.

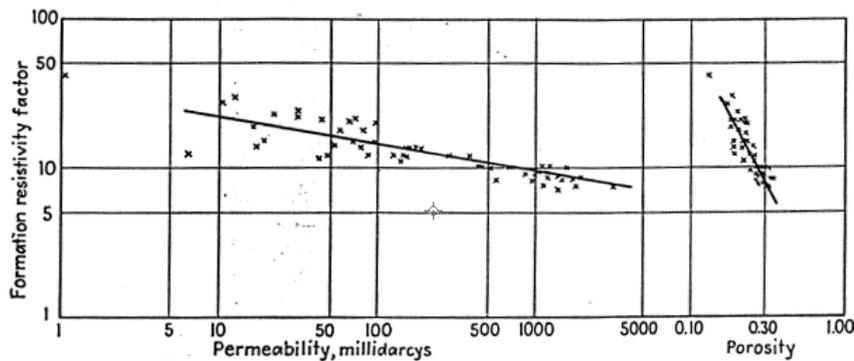


Figura 2.2: Aproximación de Archie para arenas [1].

En 1979 Barker R. D. y Duba A. establecen un modelo que usa la fórmula de Archie con una modificación para aplicarla en un medio más conductor de lo que sería una roca simple saturada:

$$\frac{1}{\lambda_r} = \frac{1}{F} \cdot \frac{1}{\lambda_l} + C, \quad (2.10)$$

donde  $F$  es el factor de formación obtenido de la ecuación de Archie sin la corrección propuesta,  $\lambda_r$  la resistividad de la roca saturada,  $\lambda_l$  la resistividad del agua que lo satura y  $C$  un parámetro de corrección para el caso de rocas con fluidos altamente conductores a comparación de rocas simples.

La relación el factor de formación y la porosidad [10] ha sido realizada por ecuaciones empíricas de las cuales se calculan buenos resultados, siendo obtenidos de pruebas de laboratorio, como es el caso de la fórmula de Archie y Humble. Pérez Rosales [11] explicó teóricamente que el flujo de corriente a través de los espacios porosos no se transfiere en su totalidad debido a que el poro se divide en trampas y canales indicando que la geometría interna de la roca es compleja. Los canales constituyen las principales vías de flujo de corriente mientras que las trampas se consideran como zonas de estancamiento.

Pérez Rosales [12] postuló una relación entre el factor de formación y porosidad de flujo, aunque falla para porosidades muy bajas.

$$F = 1 + \frac{P(1 - \phi_f)}{\phi_f}, \quad (2.11)$$

donde  $P$  es un parámetro cuyo valor depende de la geometría interna del medio poroso a partir de una tabla de valores calculada previamente de manera empírica.

$$\phi_f = C_1\phi + C_2, \quad (2.12)$$

si se tiene la condición de  $\phi_f = 1$  cuando  $\phi = 1$ , se propone la siguiente expresión, la cual cumple con la definición de conectividad entre las dos porosidades.

$$\phi^m = \phi_f, \quad (2.13)$$

siendo,  $m \geq 1$  obteniendo una nueva expresión para el factor de formación:

$$F = 1 + P(\phi^{-m} - 1). \quad (2.14)$$

Si consideramos que  $P = 1$ , que sería el caso de una esfera, en la ecuación anterior, obtenemos la ecuación de Archie, y si del mismo modo le asignamos al exponente de cementación el valor de uno, se tiene una ecuación aplicada a sistemas de tubos paralelos expresada como:

$$F = P\phi^{-m} + (1 - P). \quad (2.15)$$

La cual nos lleva a determinar la formula generalizada de Archie:

$$F = P\phi^{-m}. \quad (2.16)$$

Si se tiene en cuenta un sistema poroso con una tortuosidad  $G$  y una resistividad  $R$  determinada, entonces se puede determinar el factor de formación de la siguiente forma:

$$F - R = \frac{G}{\phi} . \quad (2.17)$$

El incremento del factor de resistividad de formación se interpreta usualmente como la resistencia debida a un plegamiento en la trayectoria de las líneas de flujo, por lo que la anterior ecuación puede tomarse como una definición práctica de tortuosidad.

La expresión general de tortuosidad esta expresada de la siguiente forma:

$$G = \phi(P\phi^{-m} + 1 - P) . \quad (2.18)$$

Si el valor de  $P$  es aproximadamente la unidad para el caso de rocas porosas se tiene la siguiente ecuación:

$$G = \frac{\phi}{\phi^m} . \quad (2.19)$$

Otro parámetro de interés es la permeabilidad de Klinkenber [13]. La cual corrige el valor de permeabilidad del gas para un fluido para cuando el ancho del conducto es pequeño.

$$k_g = k_l \left( 1 + \frac{4c\lambda}{r} \right) \quad (2.20)$$

donde:

$k_g$  = permeabilidad del gas

$k_l$  = permeabilidad al líquido

$\lambda$  = medio libre de las moléculas del gas bajo presión media con la cual se mide

$k_g$

$c$  = factor de proporcionalidad, usualmente se toma como uno

$r$  = radio capilar

## 2.1. Fenómeno físico

Para que ocurra la conducción eléctrica, es necesario un medio conductor que puede ser algún líquido o sólido. El factor de tortuosidad también es un parámetro que se debe tomar en cuenta para la conducción de la corriente eléctrica. La tortuosidad puede ser afectada por muchos factores de la roca, como lo son el grosor, la redondez del grano y la conexión entre los poros. Entre más complejo sea el camino que debe recorrer la corriente, la resistividad registrada será más alta [3].

El modelo físico que se utilizará en el presente trabajo, será un sistema bifásico en forma cilíndrica donde la parte del interior se supone que estará compuesto de un fluido conductor, en este caso salmuera, y la parte exterior será la roca en cuestión como se muestra en la Figura 2.3.

Para el caso de los núcleos, se supone que la porosidad se encuentra en un solo conducto, donde  $\phi_A$  es la porosidad del elemento A y  $\phi_B$  la porosidad del elemento B como se muestra en la Figura 2.4.

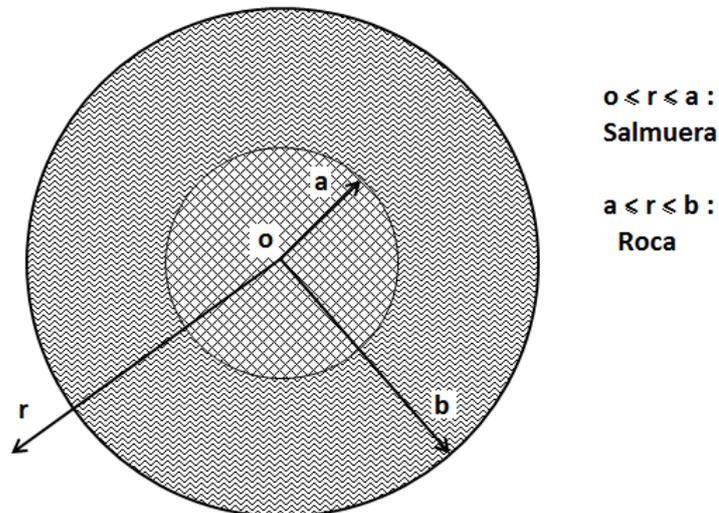


Figura 2.3: Representación esquemática de un sistema bifásico.

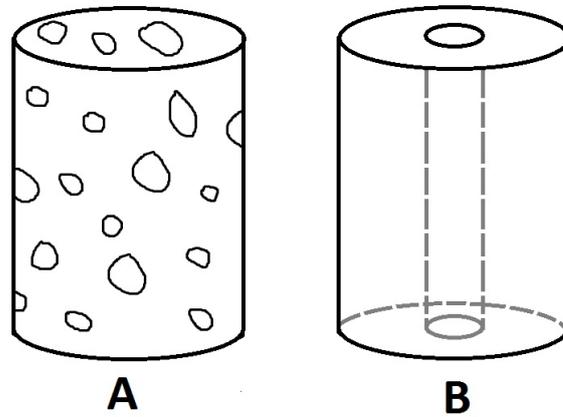


Figura 2.4: A Representación de una roca real y B Idealización de la roca.

Un efecto importante a considerar que ocurre en el paso de la corriente, es el efecto Joule, que consiste en la generación de calor debido a la resistencia del material al paso de corriente, provocando una oposición del material a la corriente eléctrica produciendo que parte de la energía de la corriente sea convertida en calor [14].

$$\phi_A = \phi_B$$

Otro efecto a considerar es el efecto pelicular. Para valores altos de la frecuencia en la corriente alterna, la densidad de corriente dentro de un conductor no será uniforme, existirá más densidad de corriente en las partes más alejadas del centro. Eso se debe a la variación del campo magnético resulta ser mayor en el centro, lo que da lugar a una reactancia inductiva mayor.

En la figura 2.5 se muestra la esquematización de la sección transversal del gradiente de la densidad de la corriente eléctrica donde se aprecia que se centra en las paredes interiores de la zona conductora del cilindro. Parte de la corriente eléctrica viaja en las paredes exteriores de la zona conductora, pero esta cantidad es mínima a comparación de la zona interior del cilindro conductor como se muestra en al distribución de puntos.

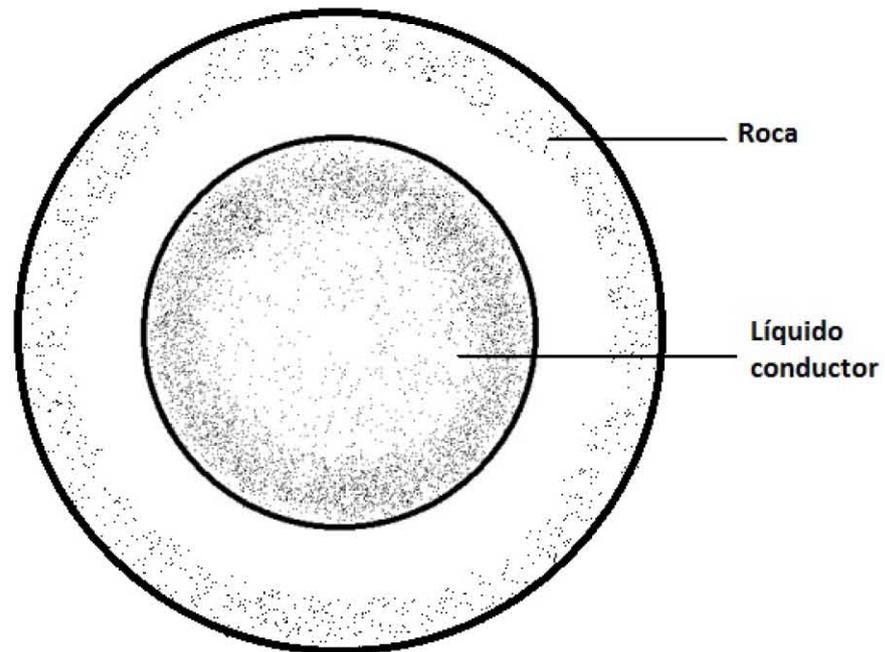


Figura 2.5: Representación esquemática de la distribución de corriente del sistema bifásico.

## 2.2. Modelo matemático

El modelo matemático consta de un acoplamiento entre un modelo eléctrico y un modelo térmico. Este acoplamiento se debe a que existe una relación entre las propiedades térmicas y eléctricas.

### 2.2.1. Modelo eléctrico

Los Doctores Óscar Chávez y Francisco Godínez [7], describen la transmisión de la corriente eléctrica a través de un medio poroso y la propagación de las ondas electromagnéticas que lo atraviesan.

Se parte de la ecuación de onda electromagnética para obtener una expresión que describa la propagación de dichas ondas en el medio, en función de la densidad de corriente

$$\nabla^2 \lambda \vec{J} = \mu \left( \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \lambda \vec{J}}{\partial t^2} \right) . \quad (2.21)$$

Se tomarán las siguientes consideraciones:

La densidad de corriente sólo varía en la dirección radial y el tipo de corriente que se usa por lo tanto tiene un comportamiento sinusoidal (corriente alterna):

$$\vec{J} = J_s(r) e^{i\omega t} .$$

La resistividad tiene una variación lineal, la cual dependerá de la diferencia de temperaturas:

$$\lambda = \lambda_\infty [1 + \alpha(T - T_\infty)] .$$

Por lo que la ecuación 2.20 queda:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 J_s}{dr^2} + \left( \frac{2\alpha}{1 + \alpha(T - T_\infty)} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{dJ_s}{dr} \\
& + \frac{\alpha}{1 + \alpha(T - T_\infty)} \left[ \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] J_s \\
& = \left\{ \frac{\mu\omega}{\lambda} \left[ i + \gamma\omega\lambda_\infty \left( \frac{\alpha}{\omega^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{2i\alpha}{\omega} \frac{\partial T}{\partial t} - (1 + \alpha(T - T_\infty)) \right) \right] \right\} ,
\end{aligned}$$

donde los parámetros de la ecuación son los siguientes:

$\omega$  = frecuencia de la señal eléctrica

$r$  = coordenada radial

$T$  = temperatura

$T_\infty$  = temperatura en el extremo, en este caso será la temperatura del ambiente

$J_s$  = función de la densidad de corriente que depende de la coordenada  $r$

$\alpha$  = coeficiente de temperatura de la resistividad

$i$  = denota un número imaginario:  $\sqrt{-1}$

La primera simplificación que se puede realizar, es tomar en cuenta que:

$$\gamma\omega^2\mu \ll \frac{i\omega\mu}{\lambda} .$$

Por lo que el primer término puede ser despreciado debido a que es mucho menor que el segundo término de la anterior expresión. También se tiene el espesor pelicular definido como:

$$\delta = \left( \frac{2\lambda}{\omega\mu} \right)^{1/2} .$$

Tomando en cuenta estas consideraciones, se obtienen las ecuaciones que describen el comportamiento de la onda electromagnética para la parte líquida y la parte sólida "rocosa".

Para la parte líquida:

$$\frac{d^2 J_{s,l}}{dr^2} + \left( \frac{2\alpha_l}{1 + \alpha_l(T_l - T_\infty)} \frac{\partial T_l}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{dJ_{s,l}}{dr} + \frac{\alpha_l}{1 + \alpha_l(T_l - T_\infty)} \cdot \left[ \frac{d^2 T_l}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_l}{\partial r} \right] J_{s,l} = \frac{2i}{\delta^2(1 + \alpha_l(T_l - T_\infty))}. \quad (2.22)$$

Y para la parte sólida:

$$\frac{d^2 J_{s,r}}{dr^2} + \left( \frac{2\alpha_r}{1 + \alpha_r(T_r - T_\infty)} \frac{\partial T_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \frac{dJ_{s,r}}{dr} + \frac{\alpha_r}{1 + \alpha_r(T_r - T_\infty)} \cdot \left[ \frac{d^2 T_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_r}{\partial r} \right] J_{s,r} = \frac{2i}{\delta^2(1 + \alpha_r(T_r - T_\infty))}. \quad (2.23)$$

Las condiciones de frontera correspondientes a las fases líquida y sólida son:

$$\text{en } r = 0 : \quad \frac{\partial J_{s,l}}{\partial r} = 0 \quad , \quad (2.24)$$

que corresponde a la condición de simetría.

$$\text{en } r = a : \quad \lambda_{\infty,l}[1 + \alpha_l(T_l - T_\infty)]J_{s,l} = \lambda_{\infty,r}[1 + \alpha_r(T_l - T_\infty)]J_{s,r} \quad , \quad (2.25)$$

donde  $a$  representa el radio del poro. Se muestra la ecuación que se refiere a la continuidad del campo eléctrico:

$$\frac{\lambda_{\infty,l}}{\mu_l} \left( (1 + \alpha_l(T_l - T_\infty)) \frac{dJ_{s,l}}{dr} + \alpha_l J_{s,l} \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) = \frac{\lambda_{\infty,r}}{\mu_r} \left( (1 + \alpha_r(T_r - T_\infty)) \frac{dJ_{s,r}}{dr} + \alpha_r J_{s,r} \frac{\partial T_r}{\partial r} \right) \quad , \quad (2.26)$$

en la superficie  $r = b$  :  $J_{s,r} = J_b$   $b$  representa el radio total del cuerpo

rocoso y  $J_b$  la densidad de la corriente de la roca y se debe considerar la siguiente restricción para la corriente eléctrica  $I$

$$I = 2\pi \left( \int_0^a J_{s,l} r \, dr + \int_a^b J_{s,r} r \, dr \right) . \quad (2.27)$$

### 2.2.2. Modelo térmico

Se parte de la ecuación de difusión para determinar el gradiente de temperatura de las fases que intervienen en el modelo:

$$\nabla \cdot [k\nabla T] + \dot{q}_{gen} = (\rho c) \frac{\partial T}{\partial t} . \quad (2.28)$$

Se consideran solo las variaciones en la dirección radial y sólo se tomará en cuenta el calor generado por el efecto Joule:

Para la fase líquida:

$$\frac{k_l}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) + \lambda_{\infty,l} [1 + \alpha_l (T_l - T_\infty)] |J_{s,l}|^2 = (\rho c)_l \frac{\partial T_l}{\partial t} . \quad (2.29)$$

Para la fase sólida:

$$\frac{k_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_r}{\partial r} \right) + \lambda_{\infty,r} [1 + \alpha_r (T_r - T_\infty)] |J_{s,r}|^2 = (\rho c)_r \frac{\partial T_r}{\partial t} . \quad (2.30)$$

Se deben considerar las siguiente condiciones de frontera en el modelo térmico:

$$\text{en } r = 0 : \quad \frac{\partial T_l}{\partial r} = 0 , \quad (2.31)$$

$$\text{en } r = a : \quad T_l = T_r , \quad (2.32)$$

$$-k_l \frac{\partial T_l}{\partial r} = -k_r \frac{\partial T_r}{\partial r} . \quad (2.33)$$

En la superficie exterior de la roca:

$$r = b : \quad -k_r \frac{\partial T_r}{\partial r} = h(T_r - T_\infty) . \quad (2.34)$$

Donde  $k$  es la conductividad térmica,  $\rho$  la densidad,  $c$  el calor específico y  $h$  es el coeficiente convectivo de transferencia de calor.

Como condición necesaria se toma la siguiente consideración:

$$t = 0 : \quad T_l = T_r = T_\infty . \quad (2.35)$$

Donde se considera que el medio saturado se encuentra inicialmente a temperatura ambiente.

### 2.2.3. Análisis dimensional y variables adimensionales

Este análisis se realiza para reducir el número de variables según su orden de magnitud.

La escala de tiempo convectivo queda de la siguiente manera:

$$t_c = (\rho c)_l \frac{b}{h} . \quad (2.36)$$

Tomando en cuenta que la escala espacial de la roca corresponde directamente al radio del medio poroso  $r = b$ .

El incremento en la temperatura característico se obtiene mediante el siguiente balance de energía.

$$\Delta T_c = \frac{\lambda_{\infty,j} J_a^2 a^2}{k_r Bi} , \quad (2.37)$$

donde el número de Biot es definido como:

$$Bi = \frac{h b}{k_r} . \quad (2.38)$$

Introduciendo las siguientes variables, los modelos electromagnéticos y térmicos pueden ser simplificados.

$$\tau = \frac{th}{(\rho c)_l b}, \quad \theta_{l,r} = \frac{T_{l,r} - T_\infty}{\Delta T_c}, \quad \xi = \frac{r^2}{b^2}$$

$$\varphi_{l,r} = \frac{J_{s,(l,r)}}{J_a}, \quad \kappa = \alpha_{l,r} \Delta T_c \quad \Phi = \left(\frac{a}{b}\right)^2 G,$$

$$\varepsilon_r = \frac{\delta_r}{b-a}, \quad \varepsilon_l = \frac{\delta_l}{a} \quad \text{donde} \quad \delta_{r,l} = \sqrt{\frac{2\lambda_{\infty,(l,r)}}{\mu_{l,r} \omega}} .$$

Que corresponden al conjunto de escalas geométricas características y físicas.

## Modelo electromagnético adimensional

Realizando el cambio de las variables adimensionales, el modelo para cada una de las fases queda de la siguiente manera:

Fase líquida:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_l}{d\xi^2} + \left(2\frac{\kappa_l}{(1+\kappa_l\theta_l)}\frac{\partial\theta_l}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi}\right)\frac{d\varphi_l}{d\xi} + \frac{\kappa_l}{1+\kappa_l\theta_l}\left(\frac{\partial^2\theta_l}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial\theta_l}{\partial\xi}\right)\varphi_l \\ = \frac{2i}{(1+\kappa_l\theta_l)\varepsilon_l^2\phi/G}\varphi_l. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Fase rocosa:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi_r}{d\xi^2} + \left(2\frac{\kappa_r}{(1+\kappa_r\theta_r)}\frac{\partial\theta_r}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi}\right)\frac{d\varphi_r}{d\xi} + \frac{\kappa_r}{1+\kappa_r\theta_r}\left(\frac{\partial^2\theta_r}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial\theta_r}{\partial\xi}\right)\varphi_r \\ = \frac{2i}{(1+\kappa_r\theta_r)\varepsilon_r^2(1-\sqrt{\phi/G})^2}\varphi_r. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Con las siguientes condiciones de frontera:

$$\xi = 0 : \quad \frac{d\varphi_l}{d\xi} = 0, \quad (2.41)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\phi}{G}} : \quad \varphi_l = \frac{\lambda_r[1-\kappa_r\theta_r]}{\lambda_l[1-\kappa_l\theta_l]}, \quad (2.42)$$

$$\frac{\mu_r\lambda_l(1+\kappa_l\theta_l)}{\mu_l\lambda_r(1+\kappa_r\theta_r)}\left(\frac{d\varphi_l}{d\xi} + \frac{\kappa_l}{1+\kappa_l\theta_l}\frac{\partial\theta_l}{\partial\xi}\varphi_l\right) = \left(\frac{d\varphi_r}{d\xi} + \frac{\kappa_r}{1+\kappa_r\theta_r}\frac{\partial\theta_r}{\partial\xi}\varphi_r\right), \quad (2.43)$$

$$\xi = 1 : \quad \varphi_r = \frac{\lambda_l}{\lambda_r}G. \quad (2.44)$$

### Modelo térmico adimensional

Utilizando las variables propuestas para realizar el proceso de adimensionalizar, el modelo térmico queda de la siguiente manera:

Fase líquida:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \theta_l}{\partial \xi} \right) + \frac{k_r (1 + \kappa_l \theta_l)}{k_l \frac{\Phi}{G}} Bi | \varphi_l |^2 = \frac{k_r}{k_l} Bi \frac{\partial \theta_l}{\partial \tau} . \quad (2.45)$$

Fase rocosa:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \theta_r}{\partial \xi} \right) + \frac{\lambda_r (1 + \kappa_r \theta_r)}{\lambda_l \frac{\Phi}{G}} Bi | \varphi_r |^2 = \frac{(\rho c)_r}{(\rho c)_l} Bi \frac{\partial \theta_l}{\partial \tau} . \quad (2.46)$$

A partir de las Ecs. (2.39) - (2.44) se puede obtener el factor de formación, que queda de la siguiente forma:

$$F = \frac{\frac{G}{\Phi} \int_0^{\sqrt{\frac{G}{\Phi}}} \varphi_l \xi d\xi + \frac{G}{G-\Phi} \frac{\lambda_r}{\lambda_l} + \int_{\sqrt{\frac{G}{\Phi}}}^1 \varphi \xi d\xi}{\int_0^{\sqrt{\frac{G}{\Phi}}} \varphi_l \xi d\xi + \int_{\sqrt{\frac{G}{\Phi}}}^1 \varphi \xi d\xi} \quad (2.47)$$



---

## Capítulo 3

# Discretización y método de solución

---

### 3.1. Discretización en diferencias finitas

Para realizar la discretización y solución del modelo es de suma importancia tener la representación en diferencias finitas.

La representación de la primera derivada hacia delante es:

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta \xi} + O(\Delta \xi) \quad , \quad (3.1)$$

donde  $f$  es considerada como la función de la cual se desea obtener la representación en diferencias finitas y un error de orden  $\Delta \xi$

Para la representación de la primera derivada hacia atrás se tiene que;

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta \xi} + O(\Delta \xi) \quad . \quad (3.2)$$

Para la representación central se utiliza un error de orden  $\Delta \xi^2$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \cdot \Delta \xi} + O(\Delta \xi^2) \quad . \quad (3.3)$$

Para la representación de las segundas derivadas parciales espaciales en diferencias finitas, se realiza de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 f}{\Delta \xi^2} = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{(\Delta \xi)^2} + O(\Delta \xi^2) . \quad (3.4)$$

Debido a que tiene mayor exactitud la discretización central a comparación de las laterales, es la que se utilizará para la solución de ambos modelos, tanto el término como el eléctrico.

Para la representación de la derivada temporal:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta \tau} , \quad (3.5)$$

el dominio de la variable  $\xi$  es de cero a uno, mientras que  $\tau$  va de cero a infinito, y su definición es la siguiente:

$$\xi = i \cdot \Delta \xi , \quad (3.6)$$

$$\tau = n \cdot \Delta \tau . \quad (3.7)$$

### 3.2. Discretización del modelo térmico adimensional

Se utilizará el esquema de discretización Cranck-Nicholson debido a que no tiene restricción en el tamaño del paso temporal. Este método propuesto por Cranck y Nicolson, mantiene la discretización del transitorio, mientras que hace un promedio aritmético temporal del término difusivo y el término de generación de calor del tiempo actual  $n$  y del tiempo siguiente  $n + 1$  [15].

La discretización queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{1}{2i}\right) \theta_{i-1}^{n+1} + \left(-2 - 2Bi \frac{(\rho c)_r \Delta \xi^2}{(\rho c)_l \Delta \tau} + \Delta \xi^2 \cdot Bi \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_l \Gamma} \kappa |\varphi_i^{n+1}|^2\right) \theta_i^{n+1} + \\
& + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) \theta_{i+1}^{n+1} = - \left(1 - \frac{1}{2i}\right) \theta_{i-1}^n + \left(2 - 2Bi \frac{(\rho c)_r \Delta \xi^2}{(\rho c)_l \Delta \tau} - \right. \\
& \left. - \Delta \xi^2 \cdot Bi \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_l \Gamma} \kappa |\varphi_i^{n+1}|^2 \theta_i^n + \left(1 + \frac{1}{2i}\right) \theta_i^{n+1} - \Delta \xi^2 Bi \frac{\lambda_r}{\lambda_l \Gamma} (|\varphi_i^n|^2 + |\varphi_i^{n+1}|^2)\right).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

La discretización de las condiciones de frontera en el centro para el tiempo  $n$ , así como para el tiempo  $n + 1$ , quedan de la siguiente manera:

$$i = 0 : \quad \theta_1^n - \theta_0^n = 0 \quad , \tag{3.9a}$$

$$\theta_1^{n+1} - \theta_0^{n+1} = 0 . \tag{3.9b}$$

De la misma forma se hace para la condición de frontera en la superficie del conductor

$$i = M : \quad (1 + Bi \cdot \Delta \xi) \theta_M^n - \theta_{M-1}^n = 0 \quad , \tag{3.10a}$$

$$(1 + Bi \cdot \Delta \xi) \theta_M^{n+1} - \theta_{M-1}^{n+1} = 0 . \tag{3.10b}$$

donde  $M$  representa el número total de segmento en que fue dividido en el

dominio espacial, mientras que  $\Delta\tau$  no tiene restricción alguna en cuanto a su magnitud. Para el paso temporal se decidió dar un paso temporal  $\Delta\tau = 0.01$  Entre menos sea la magnitud de los segmentos  $\Delta\xi$  se generará un menor error. Se puede acomodar el sistema en una matriz de tipo  $[A][\theta] = [B]$  para resolverla por el método de eliminación de Gauss

La matriz queda determinada de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix}
 a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-3M-2} & a_{M-2M-2} & a_{M-2M-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-1M-2} & a_{M-1M-1} & a_{M-1M} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{MM}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \theta_0^{n+1} \\
 \theta_1^{n+1} \\
 \theta_2^{n+1} \\
 \vdots \\
 \theta_i^{n+1} \\
 \theta_{i+1}^{n+1} \\
 \vdots \\
 \theta_{M-2}^{n+1} \\
 \theta_{M-1}^{n+1} \\
 \theta_M^{n+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b_0 \\
 b_1 \\
 b_2 \\
 \vdots \\
 b_i \\
 b_{i+1} \\
 \vdots \\
 b_{M-2} \\
 b_{M-1} \\
 b_M
 \end{bmatrix}$$

Donde se observa que se tiene un sistema algebraico que fue resuelto por el algoritmo de Thomas

### 3.3. Discretización del modelo eléctrico adimensional

La ecuación que describe el comportamiento eléctrico es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + \left(2\frac{\kappa}{(1+\kappa\theta)}\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi}\right)\frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{\kappa}{1+\kappa\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right) \\ = \frac{2i}{(1+\kappa\theta)\varepsilon^2\Phi/G}\varphi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La ecuación 3.12 se encuentra en un plano complejo por lo que la ecuación diferencial es una función compleja como se muestra a continuación:

$$\varphi = \varphi^R + i^I. \quad (3.12)$$

Los superíndices  $R$  e  $I$  se refieren a la función real e imaginaria respectivamente; se obtiene un sistema de 2 ecuaciones diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi^R}{d\xi^2} + \left(2\frac{\kappa}{(1+\kappa\theta)}\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi}\right)\frac{d\varphi^R}{d\xi} + \frac{\kappa}{1+\kappa\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)\varphi^R \\ = \frac{2i}{(1+\kappa\theta)\varepsilon^2\Phi/G}\varphi^I. \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi^I}{d\xi^2} + \left(2\frac{\kappa}{(1+\kappa\theta)}\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi}\right)\frac{d\varphi^I}{d\xi} + \frac{\kappa}{1+\kappa\theta}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)\varphi^I \\ = \frac{2i}{(1+\kappa\theta)\varepsilon^2\Phi/G}\varphi^R. \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\xi = 0 : \quad \frac{d\varphi^I}{d\xi} = 0, \quad (3.15)$$

$$\xi = 1 : \quad \varphi^I = 0. \quad (3.16)$$

La discretización para las ecuaciones de densidad de corriente quedan de la siguiente manera;

$$\left(1 - \frac{1}{2i} - D\right)\varphi_{i-1}\hat{I} + (-2 + B)\varphi_i^I + \left(1 + \frac{1}{2i} + D\right)\varphi_{i+1}^I = C\varphi_i^R; \quad (3.17)$$

donde

$$B = \frac{\kappa}{1 + \kappa\theta_i^n} \left( \left(1 - \frac{1}{2i}\right)\theta_{i-1}^n - 2\theta_i^n + \left(1 + \frac{1}{2i}\right)\theta_{i+1}^n \right), \quad (3.18)$$

$$C = \frac{2\Delta\xi^2}{\varepsilon^2(1 - \Gamma^{1/2})^2(1 + \kappa\theta_i^n)}, \quad (3.19)$$

$$D = \frac{\kappa}{1 + \kappa\theta_i^n} \left( \frac{\theta_{1+i}^n - \theta_{1-i}^n}{2} \right). \quad (3.20)$$

En su manera matricial:

$$\begin{bmatrix}
 a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-3M-2} & a_{M-2M-2} & a_{M-2M-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-1M-2} & a_{M-1M-1} & a_{M-1M} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{MM}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \varphi_0^R \\
 \varphi_1^R \\
 \varphi_2^R \\
 \varphi_3^R \\
 \vdots \\
 \varphi_i^R \\
 \vdots \\
 \varphi_{M-2}^R \\
 \varphi_{M-1}^R \\
 \varphi_M^R
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 -c_1 \varphi_1^I \\
 -c_2 \varphi_2^I \\
 -c_3 \varphi_3^I \\
 \vdots \\
 -c_i \varphi_i^I \\
 \vdots \\
 -c_{M-2} \varphi_{M-2}^I \\
 -c_{M-1} \varphi_{M-1}^I \\
 1
 \end{bmatrix}$$
  

$$\begin{bmatrix}
 a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{i+1} & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-3M-2} & a_{M-2M-2} & a_{M-2M-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-1M-2} & a_{M-1M-1} & a_{M-1M} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{MM}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \varphi_0^I \\
 \varphi_1^I \\
 \varphi_2^I \\
 \varphi_3^I \\
 \vdots \\
 \varphi_i^I \\
 \vdots \\
 \varphi_{M-2}^I \\
 \varphi_{M-1}^I \\
 \varphi_M^I
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 c_1 \varphi_1^R \\
 c_2 \varphi_2^R \\
 c_3 \varphi_3^R \\
 \vdots \\
 c_i \varphi_i^R \\
 \vdots \\
 c_{M-2} \varphi_{M-2}^R \\
 c_{M-1} \varphi_{M-1}^R \\
 0
 \end{bmatrix}$$

La expresión anterior puede reducirse para su resolución a la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix}
 a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{1M+2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{i,M+i+1} \\
 0 & 0 & a_{ii-1} & a_{ii} & a_{ii+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & a_{M-1M-2} & a_{M-1M-1} & a_{M-1M} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -b_{M-1,2M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10} & a_{11} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{10} & a_{11} & a_{12} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & b_{M+2,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \\
 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \\
 \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \\
 0 & 0 & 0 & b_{M+i+1,i} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{ii-1} & a_{ii} \\
 a_{ii+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\
 \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{2M,M-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 a_{M-1M-2} & a_{M-1M-1} & a_{M-1M} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_0^I \\ \varphi_1^I \\ \vdots \\ \varphi_i^I \\ \vdots \\ \varphi_{M-1}^I \\ \varphi_M^R \\ \varphi_0^R \\ \varphi_1^R \\ \vdots \\ \varphi_i^R \\ \vdots \\ \varphi_{M-1}^R \\ \varphi_M^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_l G / \lambda_r \end{bmatrix}$$

Una vez que se tiene una sola matriz es posible utilizar el método de eliminación de Gauss para obtener la solución al sistema.

---

# Capítulo 4

## Variación de parámetros

---

Se realizaron pruebas del modelo numérico para observar el comportamiento de las principales variables que intervienen en el modelo, esto es de suma importancia, ya que el modelo al no ser lineal, ciertos parámetros tienen más relevancia que otros. Se determinaron 3 valores diferentes para cada variable y se procedió a compararlas para analizar su comportamiento y observar cómo cada una de las variables aumenta de valor ya sea de manera lineal o no lineal ya que al tratarse de un modelo no trivial, el comportamiento entre las variables no es el mismo para cada caso.

### 4.1. Variación de penetración de la onda electromagnética $\varepsilon$

Este valor de determinará de qué tanto se espera que el la onda electromagnética penetre en el material tanto líquido como sólido. En los resultados de validación se le asignará el valor de 10000, ya que se considera que la onda penetra completamente en el cilindro.

Para las pruebas que se realizaron al modelo, se tomaron como parámetros fijos los siguientes valores:

$$\lambda_r/\lambda_l = 1000$$

$$\mu_l/\mu_r = 1.0$$

$$\beta = 1.0$$

$$k_r = 1.7$$

$$k_l = 0.603$$

$$\rho_r = 2250$$

$$\rho_l = 1025$$

Se realizaron gráficas el régimen transitorio para la distribución de corriente, la distribución de temperatura y el factor de resistividad de formación, usando valores de  $\varepsilon$  de 0.1, 1.0 y 1000.0.

En la figura 4.1 se muestra la variación de la temperatura con el tiempo. Se observa que para los casos de  $\varepsilon = 1.0$   $\varepsilon = 1000$  el estado permanente (ya no hay un cambio sustancial en la variación de la temperatura con el tiempo) se alcanza en  $\tau = 5$ . Para valores de  $\varepsilon < 1.0$  el estado permanente se alcanza antes de  $\tau = 1$  aunque con un valor de la temperatura muy bajo. Conforme se incrementa el valor de  $\varepsilon$  el estado permanente se va alcanzando para un valor de  $\tau$  mayor con un valor de temperatura también mayor. Esto es debido a que para un valor muy bajo de  $\varepsilon$  la onda electromagnética tiene poca penetración provocando que sea menos área la que cubrirá y por lo tanto el estado permanente se alcanzará más rápido que cuando se debe abarcar más área.

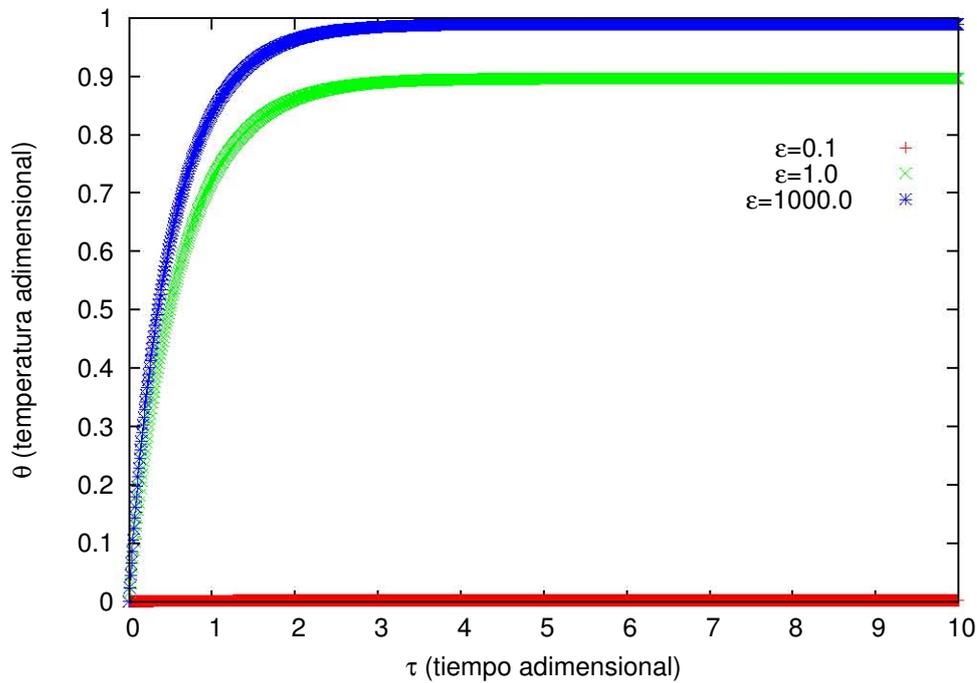


Figura 4.1: Variación de la temperatura para distintos valores de  $\varepsilon$

En la figura 4.2 se muestra la distribución de la corriente para distintos valores de  $\varepsilon$  y para un valor de  $\tau = 7$ . El valor de  $\xi = 0.63$  en corresponde al valor de  $r$  para un valor de porosidad de 0.4. Los valores antes de 0.63 con los que corresponden para la fase líquida y después de 0.63 para la fase sólida.

$$\xi = \frac{r^2}{b^2}, \quad (4.1)$$

donde  $b$  tiene un valor de 1 puesto que se considera un camino no tortuoso, y  $\xi$  el valor de 0.4. Por lo que la ecuación 4.1 queda de la siguiente manera:

$$\xi = \sqrt{0.4} = 0.63 \quad (4.2)$$

Se observa que la mayor parte de la corriente fluye en la fase líquida. Para valores mayores de  $\varepsilon$  el valor de la corriente es mayor, mientras que para valores pequeños de  $\varepsilon$  la cantidad de corriente será pequeña. Esto debido a que al haber menos penetración de la onda electromagnética se genera menos corriente, ya

que la corriente eléctrica está directamente relacionada con la penetración de la onda electromagnética. Los máximos valores de la corriente se van a encontrar cerca de la interfase como era de esperarse debido a que ahí es donde pasa la mayor cantidad de corriente provocando un aumento de la temperatura.

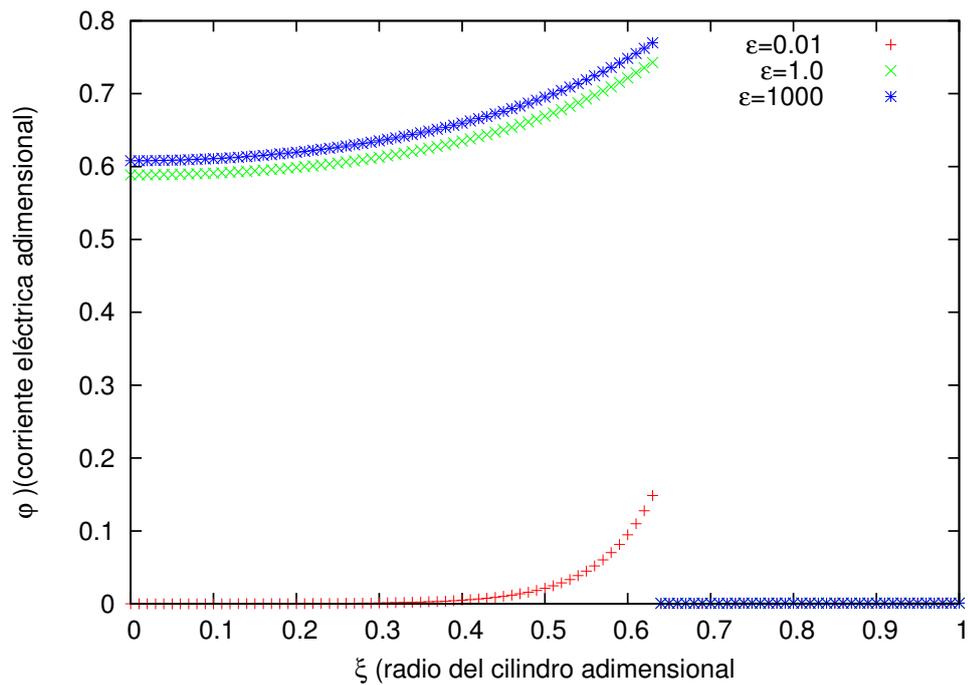


Figura 4.2: Distribución de corriente eléctrica en  $\tau = 7$  para distintos valores de  $\epsilon$ .

En la figura 4.3 se muestra la distribución de temperatura para  $\tau = 7$ . De manera similar, para valores menores de  $\epsilon < 1$  el efecto que se tiene es mínimo a comparación de valores mayores a 1. Para valores altos de  $\epsilon$  se tiene un mayor valor de temperatura debido a que al haber más corriente, se generará más calor. La diferencia de la caída de temperatura entre las 2 fases se debe a las diferentes propiedades entre cada una.

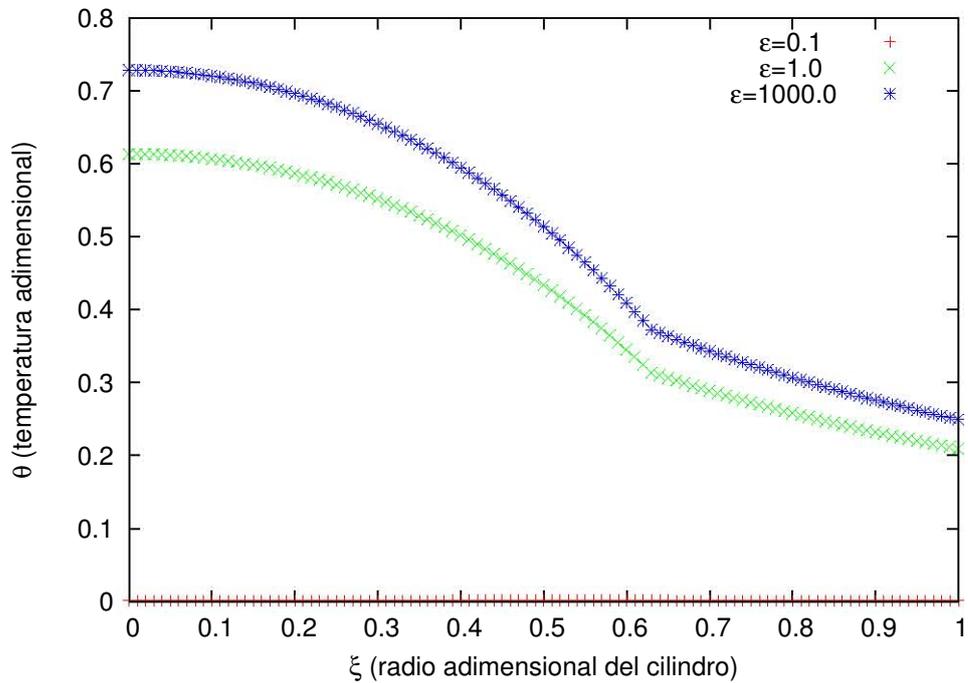


Figura 4.3: Distribución de temperatura en  $\tau = 7$  para distintos valores de  $\varepsilon$ .

En la figura 4.4 se muestra cómo varía el parámetro de factor de resistividad de formación con respecto a la porosidad. Se puede observar que para valores menores a 1 es de suma importancia este valor ya que genera una zona de concavidad desde porosidades altas, y para valores menores a 1 la disminución en la pendiente empieza a porosidades más bajas. La concavidad que resulta es debido a que conforme la porosidad aumenta, el factor de formación irá teniendo un decrecimiento más rápido ya que al tener poca penetración la onda, conforme aumente la porosidad no habrá algún cambio sustancial al principio en el valor del factor de formación pero deberá converger en 1, 1, entonces su decrecimiento al final será más pronunciado que al principio.

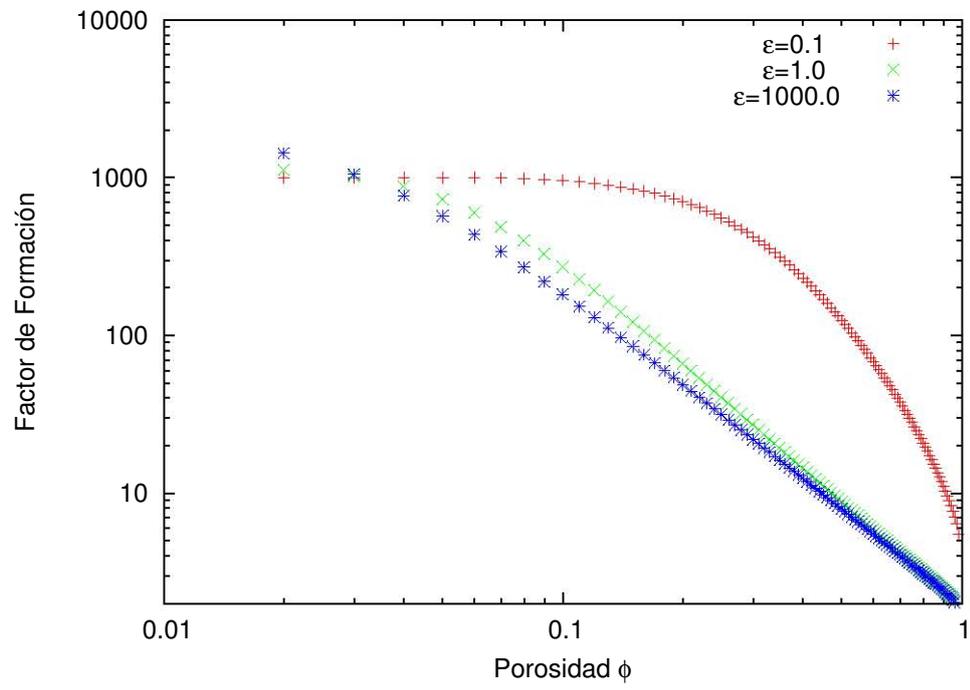


Figura 4.4: Variación del factor de formación con la porosidad para distintos valores de  $\varepsilon$ .

## 4.2. Variación del cociente de resistividades $\lambda_r/\lambda_l$

El coeficiente de resistividades representa la proporción que existe entre el valor de la resistividad de la roca y del líquido. Si se tiene para una misma roca un líquido conductor en lugar de uno más resistivo, el valor del cociente será mayor. Por lo que si se tiene para una misma roca agua salada y algún tipo de aceite, el valor del cociente para el que tiene agua salada será mayor.

Se realizaron pruebas al modelo para valores del cociente de , 1, 100 y 10000 y se realizaron gráficas en régimen transitorio, la distribución de corriente, la distribución de temperatura y el factor de resistividad de formación.

Las otras variables se establecieron de la siguiente manera:

$$\varepsilon = 1.0$$

$$\mu_l/\mu_r = 1.0$$

$$\beta = 1.0$$

$$k_r = 1.7$$

$$k_l = 0.603$$

$$\rho_r = 2250$$

$$\rho_l = 1025$$

En la figura 4.5 se muestra la variación de la temperatura con el tiempo. Se observa que para los casos de  $\lambda_r/\lambda_l = 100$  y  $\lambda_r/\lambda_l = 10000$  el estado permanente se alcanza en  $\tau = 3$  y para  $\lambda_r/\lambda_l = 1.0$  el estado permanente se alcanza en  $\tau = 10$ . Conforme se incrementa el valor de  $\lambda_r/\lambda_l$  el estado permanente se va alcanzando para un valor de  $\tau$  menor con un valor de temperatura también menor debido a que al haber un mayor coeficiente de resistividades no permitirá que toda la corriente fluya y así la temperatura generada será menor y el estado permanente se alcanzará más rápido.

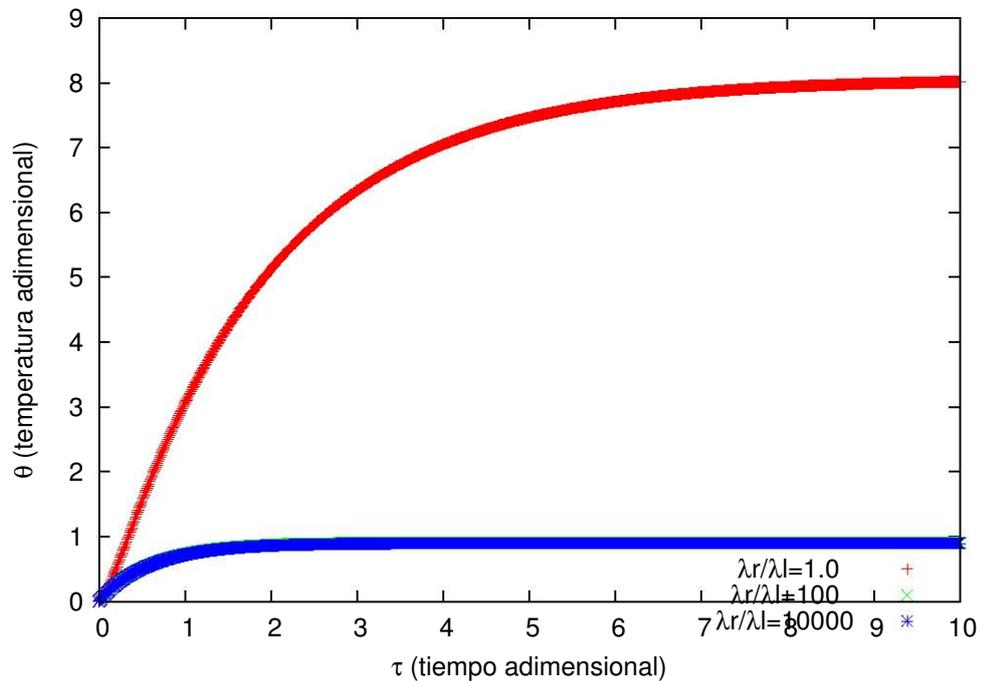


Figura 4.5: Variación temporal de la temperatura para distintos valores de  $\lambda_r/\lambda_l$

En la figura 4.6 se muestra la distribución de la corriente eléctrica para distintos valores de  $\lambda_r/\lambda_l$  y  $\tau = 7$ ; se observa que la mayor parte de la corriente fluye en la fase líquida. Para el caso de  $\lambda_r/\lambda_l = 1.0$  no se observa que no hay un cambio de fase de líquido a sólido, esto debido a que simularía que sólo hay un material por lo que la curva no presenta una discontinuidad como el caso de las otras. Para valores mayores de  $\lambda_r/\lambda_l$  el valor de la corriente eléctrica es menor ya que al presentar más resistencia a la corriente el flujo es ligeramente menor como se observa en la figura 4.6; que para valores pequeños de  $\lambda_r/\lambda_l$  la cantidad de corriente será mayor, esto debido a que al haber menos oposición al paso de corriente entre ambos materiales la corriente que fluirá será mayor. Los máximos valores de la corriente nuevamente se van a encontrar cerca de la interfase como era de esperarse debido a que ahí es donde pasa la mayor cantidad de corriente. Los valores antes de  $\xi = 0.63$  corresponden a la fase líquida y después de 0.63 para la fase sólida.

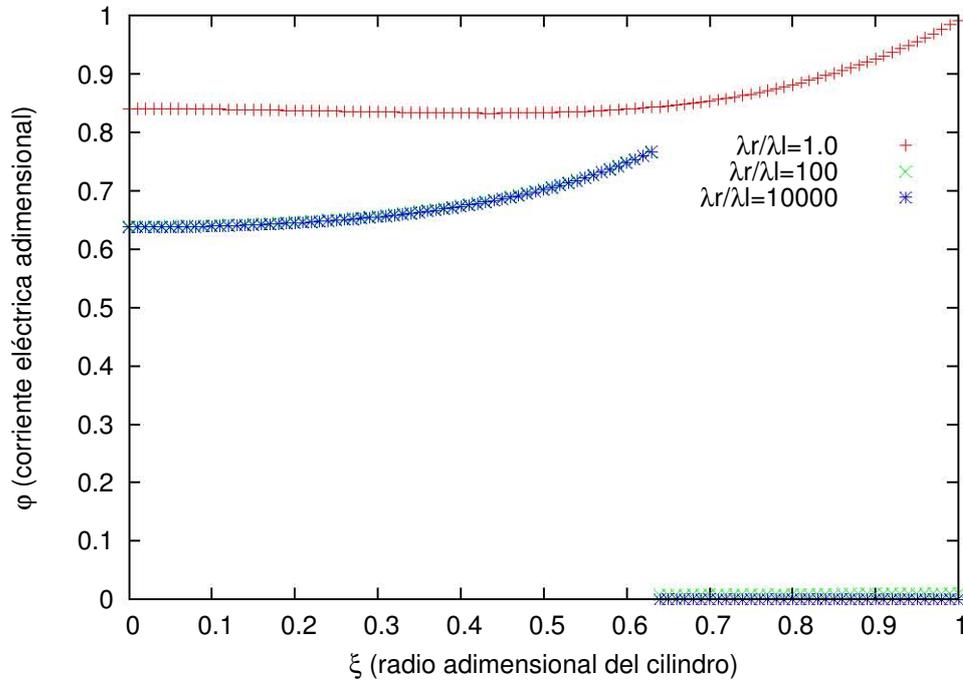


Figura 4.6: Variación de la corriente eléctrica en  $\tau = 7$  para distintos valores de  $\lambda_r/\lambda_l$

En la figura 4.7 se muestra la distribución de temperatura para  $\tau = 7$ . En este caso los valores entre  $\lambda_r/\lambda_l = 100$  y  $\lambda_r/\lambda_l = 10000$  no mostraron una variación significativa en comparación de cuando se simula una sola fase que tiende a presentar una línea continua ya que el cambio de fase no es especificado por lo que su tendencia es la misma antes y después del cambio de fase. Se observa que el comportamiento entre las fases es distinta para cuando el cociente de resistividades es diferente a 1, para la fase sólida el decrecimiento es más rápido que para la parte líquida. Conforme es menor el coeficiente de resistividades implica que pasa más corriente generando mayor temperatura, es por eso que para valores bajos el valor de temperatura será mayor.

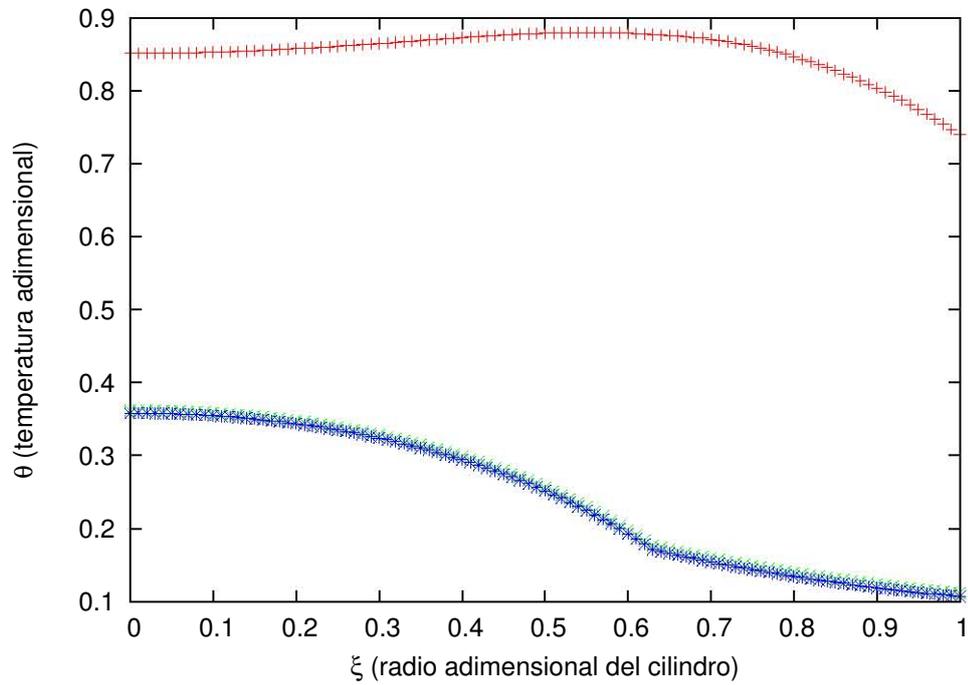


Figura 4.7: Distribución de temperatura en  $\tau = 7$  para distintos valores de  $\lambda_r/\lambda_l$ .

En la figura 4.8 se muestra cómo varía el coeficiente de resistividades entre la roca sin saturar y el líquido. Conforme sea más pequeño el valor del cociente de resistividades su decrecimiento al principio será más pequeño que cuando se acerca a altos valores de porosidad, esto debido a que la porosidad tiene un efecto mayor en el valor del factor de formación conforme aumenta. El valor al que tenderá para porosidades muy pequeñas será el mismo que el valor del coeficiente de resistividades.

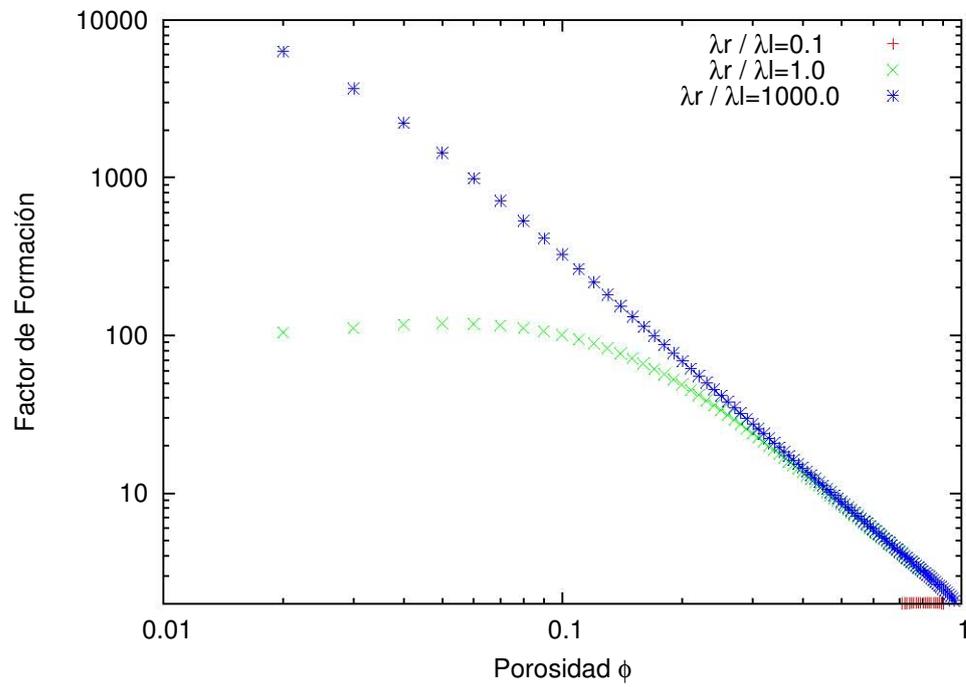


Figura 4.8: Variación del factor de formación

### 4.3. Variación del coeficiente de permeabilidad magnética $\mu_l/\mu_r$

Se realizaron pruebas al modelo para valores de  $\mu_l/\mu_r$  de 0.1, 1 y 100.

Las otras variables se establecieron de la siguiente manera:

$$\lambda_r/\lambda_l = 1000$$

$$\varepsilon = 1.0$$

$$\beta = 1.0$$

$$k_r = 1.7$$

$$k_l = 0.603$$

$$\rho_r = 2250$$

$$\rho_l = 1025$$

En la figura 4.9 se muestra la variación de la temperatura con el tiempo. Se observa que para  $\mu_l/\mu_r = 0.1$  el estado permanente se alcanza en  $\tau = 6$ , para  $\mu_l/\mu_r = 1$  el estado permanente se alcanza en  $\tau = 4$  y para valores mayores a 1 el estado permanente se alcanza muy rápido pero con valores pequeños de temperatura. El estado permanente se va a alcanzar más rápido entre mayor sea el valor de  $\mu_l/\mu_r$ , debido a que aumenta la oposición a un campo magnético y el tiempo para no presentar cambios sustanciales es menor ya que este parámetro está también relacionado con la corriente eléctrica.

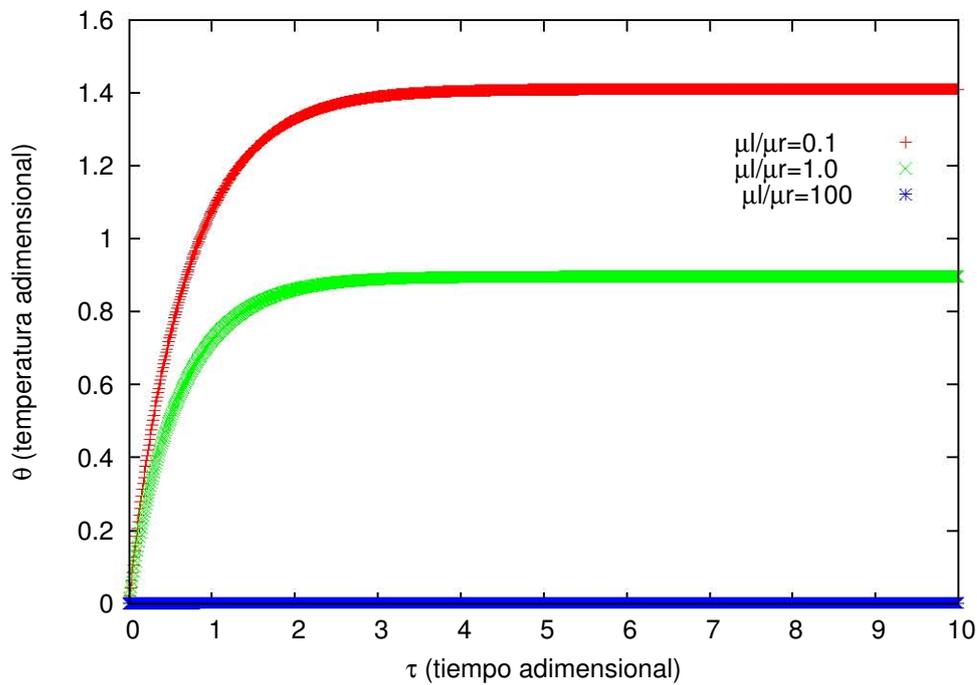


Figura 4.9: Variación de la temperatura con el tiempo para distintos valores de  $\mu_l/\mu_r < 1$ .

En la figura 4.10 se muestra la distribución de la corriente eléctrica para distintos valores de  $\mu_l/\mu_r$  y  $\tau = 7$  donde se observa que la mayor parte de la corriente fluye en la fase líquida. Los valores antes de 0.63 corresponden para la fase líquida y después de 0.63 para la fase sólida. Para valores mayores de  $\mu_l/\mu_r$  el valor de la corriente es menor, mientras que para valores pequeños de  $\varepsilon$  la cantidad de corriente será mayor. Los máximos valores de la corriente se van a encontrar cerca de la interfase nuevamente debido a que ahí es donde pasa la mayor cantidad de corriente provocando un aumento de la temperatura. Para valores altos del cociente de permeabilidades magnéticas el valor de la distribución de corriente será bajo debido a que indica que para la parte del líquido existe un bajo valor de la intensidad del campo magnético a comparación del que existe en la roca.

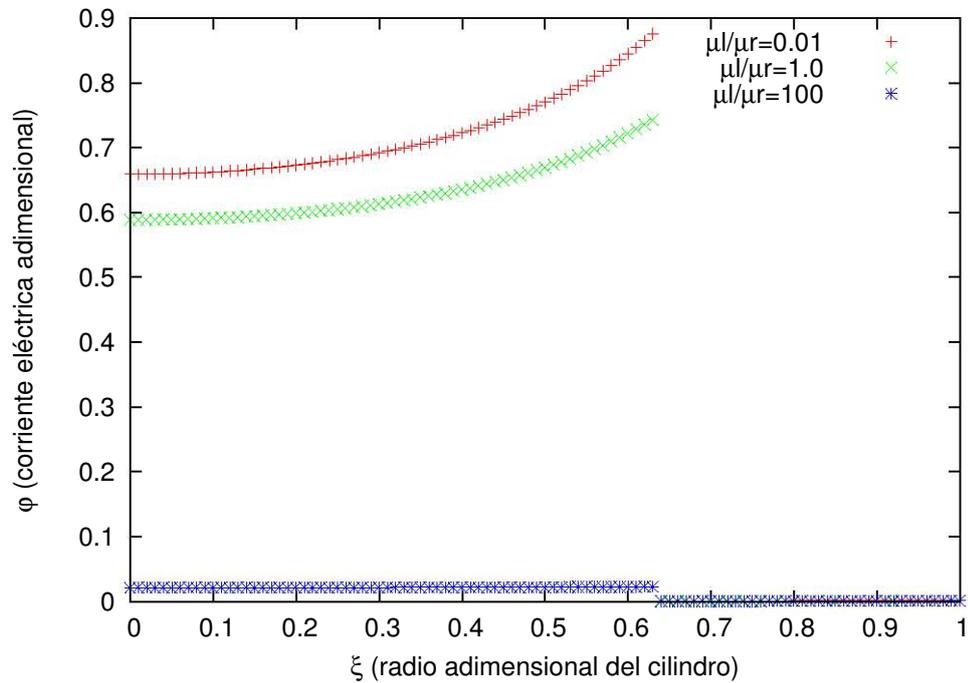


Figura 4.10: Distribución de corriente eléctrica en  $\tau = 7$  para distintos valores de  $\mu_l/\mu_r < 1$ .

En la figura 4.11 se muestra la distribución de temperatura para  $\tau = 7$ . Para valores menores de  $\mu_l/\mu_r > 1$  el efecto que se tiene es mínimo a comparación de valores menores a 1. Se observa que el comportamiento entre las fases es distintas, para la fase sólida el decrecimiento es más rápido que para la parte líquida. Se tienen valores muy bajos para cuando  $\mu_l/\mu_r$  es alto ya que como existe un bajo valor en la distribución de corriente, el calor generado será poco a comparación de cuando se tienen altos valores de  $\mu_l/\mu_r$ .

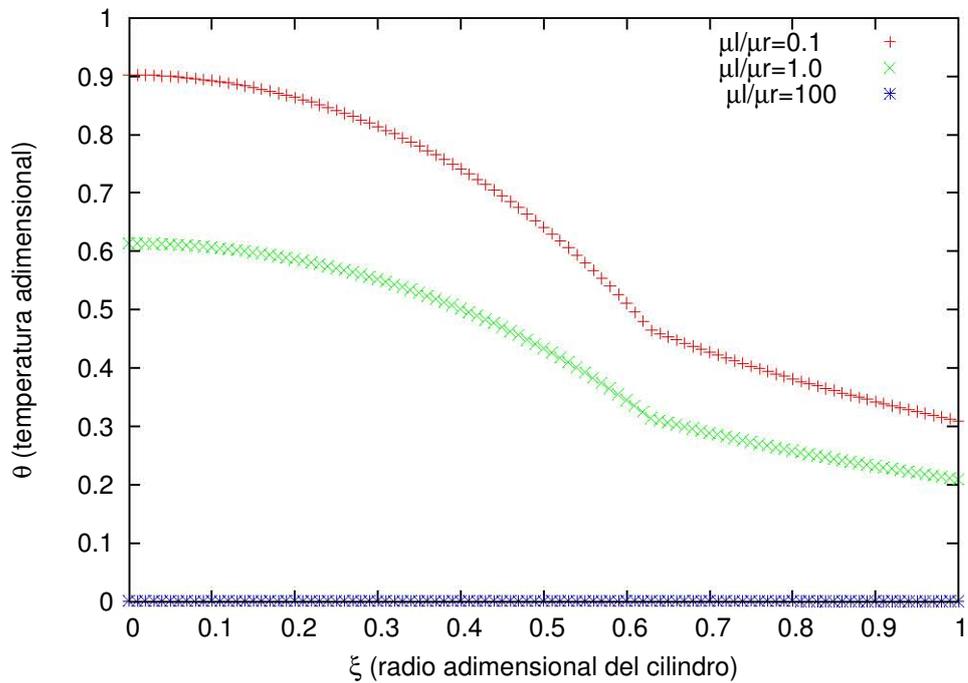


Figura 4.11: Distribución de temperatura en  $\tau = 7$  para distintos valores de  $\mu_l/\mu_r < 1$ .

En la figura 4.12 se muestra el factor de formación con respecto a la porosidad realizando variaciones en el valor  $\mu_l/\mu_r$ . Para valores mayores de  $\mu_l/\mu_r < 1$  se observa una disminución en el gradiente de la curva para altas porosidades y un cambio de pendiente brusco tendiendo a cero para bajas porosidades en valores de  $\mu_l/\mu_r > 1$  ya que la oposición al campo será mayor y cuando se vaya acercando al valor al que debe converger que es 1,1 lo hará de una manera más rápida conforme se acerca a dicho valor.

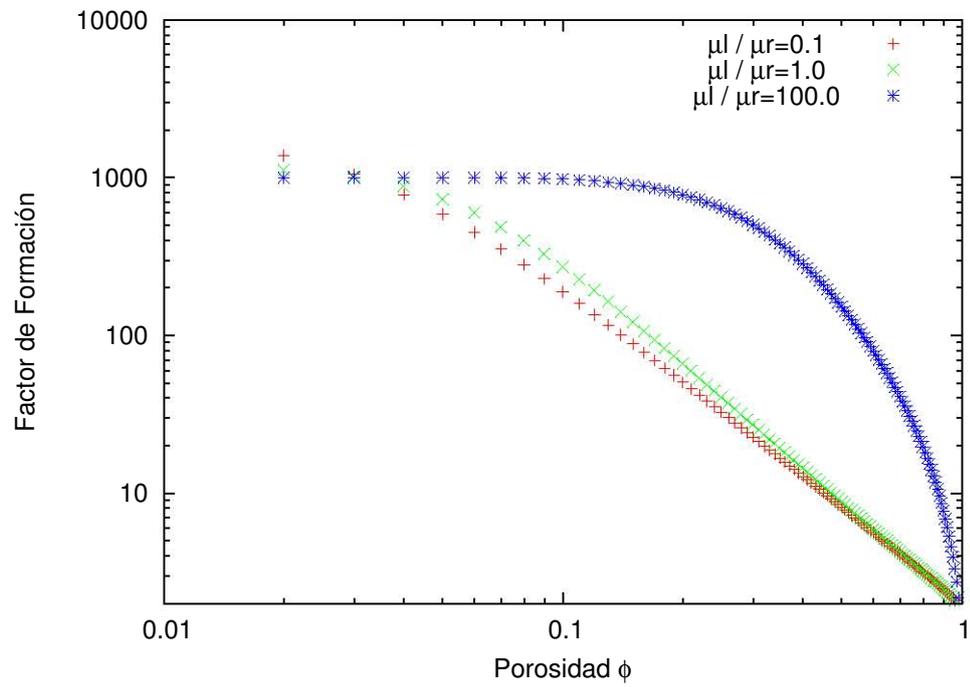


Figura 4.12: Variación del factor de formación para porosidad a distintos valores de  $\mu_l / \mu_r < 1$

## 4.4. Variación de la tortuosidad $\beta$

Este parámetro nos ayuda a determinar la dificultad de un líquido a fluir debido a la complejidad del trayecto, entre mayor sea el valor de  $\beta$ , representa que el fluido tiene una mayor dificultad para atravesar el trayecto.

Se realizaron pruebas al modelo para valores de  $\beta$  de 0.25, 0.75 y 1.0.

Las otras variables se establecieron de la siguiente manera:

$$\lambda_r/\lambda_l = 1000$$

$$\mu_l/\mu_r = 1.0$$

$$\varepsilon = 1.0$$

$$k_r = 1.7$$

$$k_l = 0.603$$

$$\rho_r = 2250$$

$$\rho_l = 1025$$

En la figura 4.13 se muestra la variación de la temperatura con el tiempo. Se observa que para los casos de  $\beta = 1.0$   $\beta = 0.75$  el estado permanente se alcanza en  $\tau = 4$ . Para valores de  $\beta < 1.0$  el estado permanente se alcanza antes de  $\tau = 2$  aunque con un valor de la temperatura muy bajo. Conforme se incrementa el valor de  $\beta$  el estado permanente se va alcanzando para un valor de  $\tau$  mayor con un valor de temperatura también mayor. Se tendrá el estado permanente más rápido para valores bajos, ya que al presentar un camino menos tortuoso se estabilizará el valor más rápido.

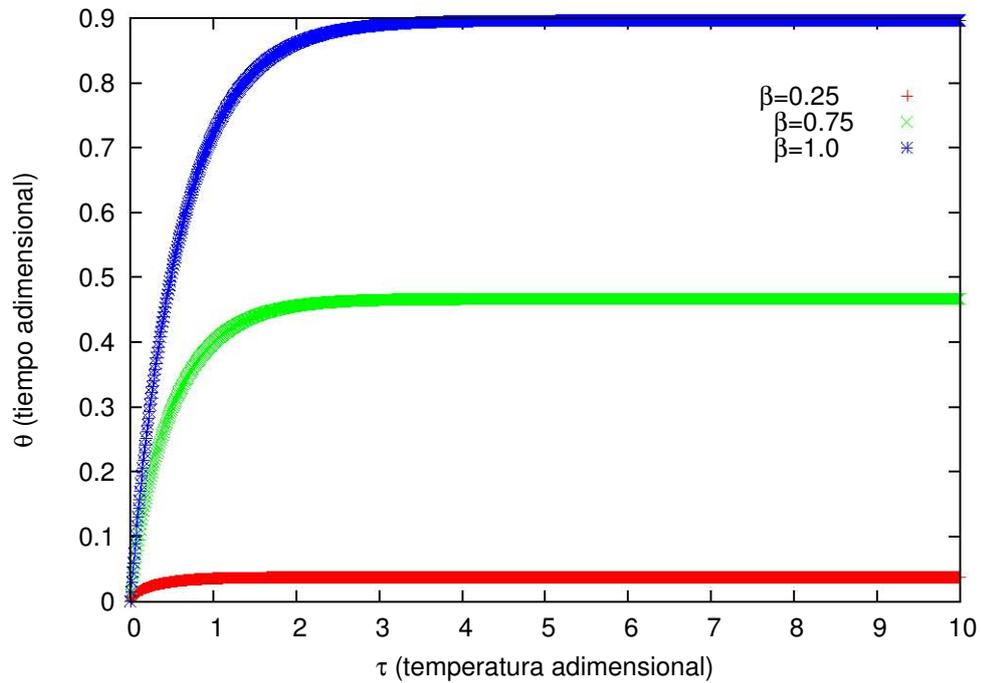


Figura 4.13: Variación temporal de la temperatura para distintos valores de  $\beta$ .

En la figura 4.14 se muestra la distribución de corriente eléctrica para distintos valores de  $\beta$  y  $\tau = 7$ . Los valores antes de  $\xi = 0.63$  corresponden a la fase líquida y después de  $\xi = 0.63$  para la fase sólida; se observa que la mayor parte de la corriente fluye en la fase líquida. Para valores mayores de  $\beta$  el valor de la corriente es mayor, mientras que para valores pequeños de  $\beta$  la cantidad de corriente será pequeña. A diferencia de las otras gráficas de la distribución de la corriente eléctrica se muestra que en cambio de fase termina antes pero esto es debido al efecto de la tortuosidad del modelo ya que la porosidad es la misma pero el trayecto es distinto que en otros casos. Por lo que para bajos valores de  $\beta$  el trayecto será más complejo y se presentará antes el cambio de fase.

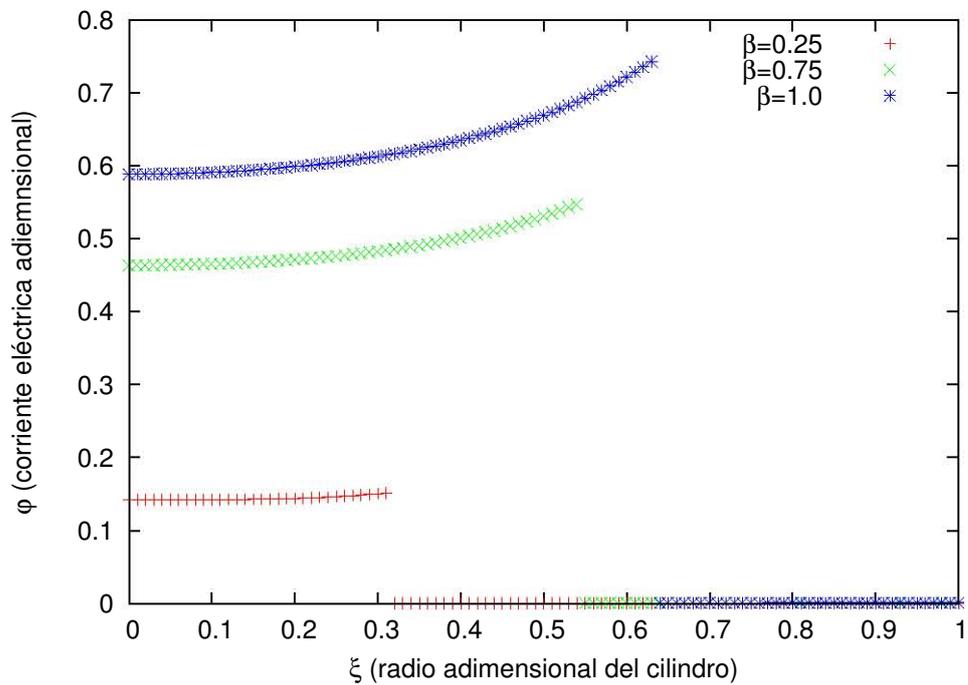


Figura 4.14: Distribución de la corriente eléctrica en  $\tau = 7$  para distintos valores de  $\beta$ .

En la figura 4.15 se muestra la distribución de temperatura para  $\tau = 7$ . Se observa que el comportamiento entre las fases es distinto, para la fase sólida el decrecimiento de la temperatura es más rápido que para la parte líquida. El valor del cambio de fase al igual que en la figura 4.14 ocurre antes debido al efecto de  $\beta$ .

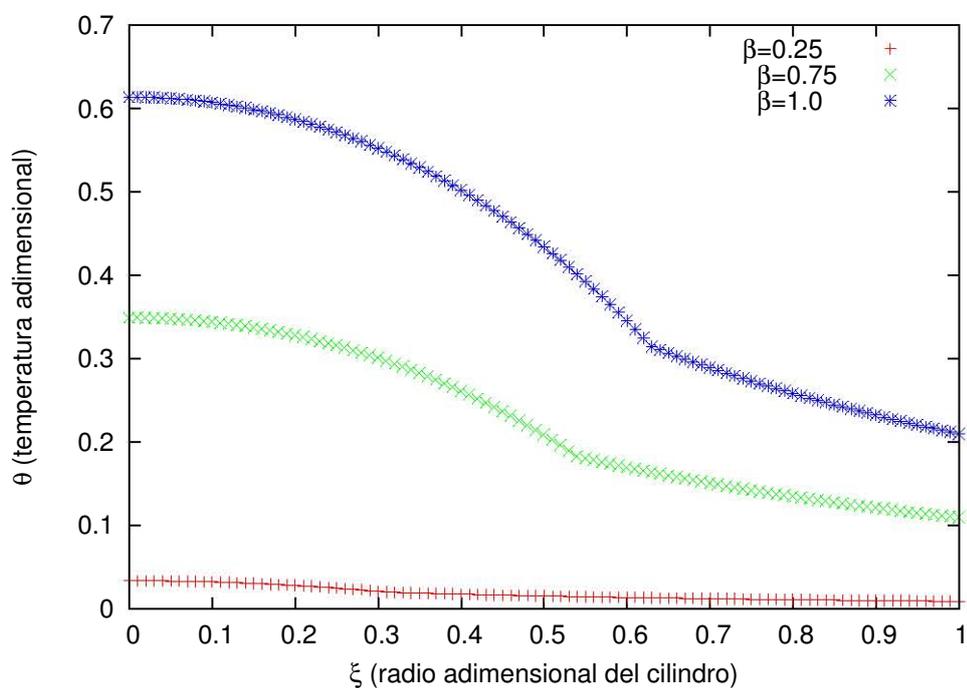
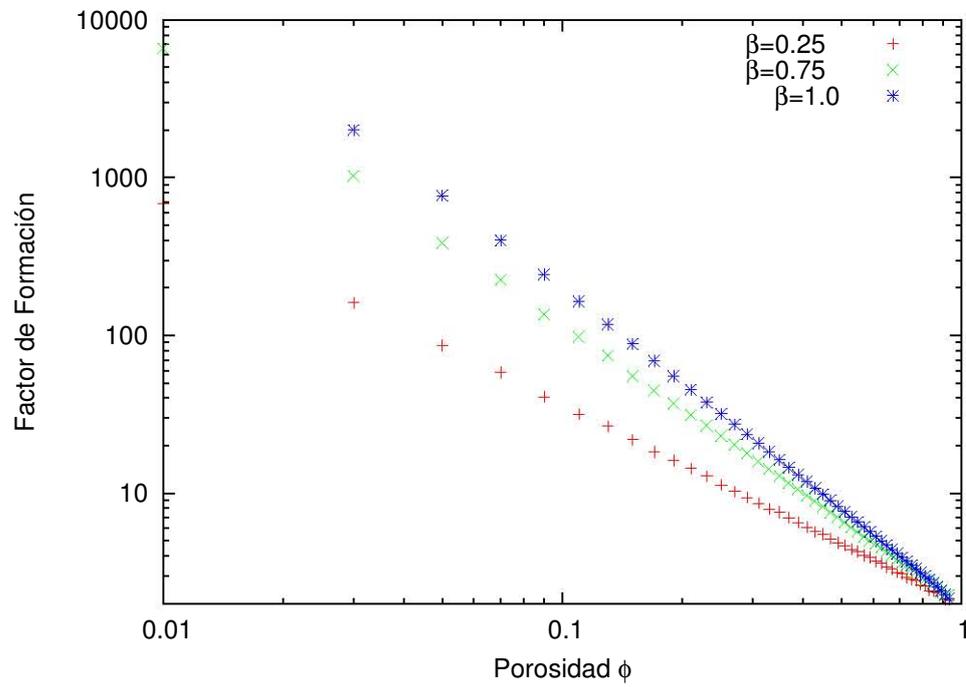


Figura 4.15: Distribución de temperatura en  $\tau = 7$  para distintos valores de  $\beta$ .

En la figura 4.16 se presenta las curvas de factor de formación con respecto a la porosidad para distintos valores de  $\beta$ . Este parámetro sólo influye en la pendiente de la curva pero no realiza un cambio en la concavidad de la curva ni para bajas ni altas porosidades esto ya no tiene implicaciones directas para el comportamiento de la resistividad de la corriente eléctrica pero sí en el valor que converge para bajas porosidades, es por eso que no se marcan tanto las concavidades como en otras gráficas del mismo tipo.

Figura 4.16: Variación del factor de formación para distintos valores de  $\beta$

## 4.5. Variación de coeficiente de conductividades térmicas $k_r/k_l$

Este cociente determina la relación que existe entre la conductividad térmica de la roca con respecto a la del líquido.

Para las pruebas que se realizaron al modelo, se tomaron como parámetros fijos los siguientes valores:

$$\lambda_r/\lambda_l = 1000$$

$$\mu_l/\mu_r = 1.0$$

$$\beta = 1.0$$

$$\varepsilon = 1.0$$

$$\rho_r = 2250$$

$$\rho_l = 1025$$

En la figura 4.17 se muestra la variación temporal de la temperatura. Se observa que entre mayor sea el valor de  $k_r/k_l$ , el estado permanente se alcanzará en un tiempo mayor. Esto debido a que entre más grande sea la relación entre las conductividades térmicas, más tardará en no presentar cambios sustanciales ya que esto implica que  $k_r$  conducirá menos la temperatura.

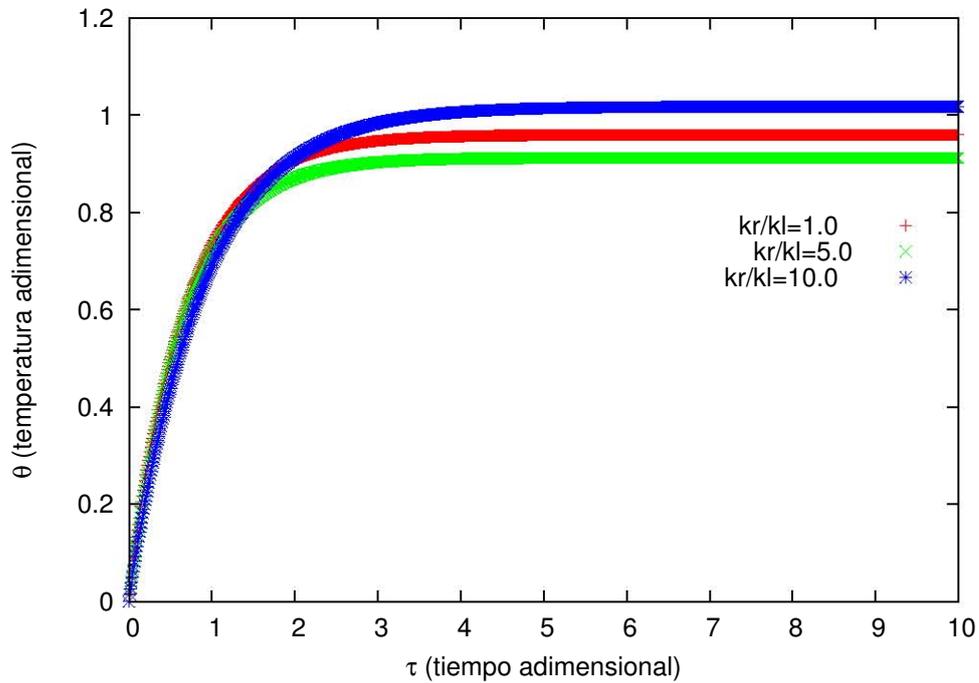


Figura 4.17: variación temporal de la temperatura para distintos valores de  $k_r/k_l$ .

En la figura 4.18 se muestra la distribución de corriente eléctrica para distintos valores de  $k_r/k_l$  y  $\tau = 7$ ; se observa que la mayor parte de la corriente fluye en la fase líquida. Para una relación de 1 se observa que será una curva suave debido a que no se concentrará toda la corriente cerca del final de la fase líquida ya que sus conductividades térmicas son similares permitiendo una conducción más uniforme y no sólo cerca del cambio de fase.

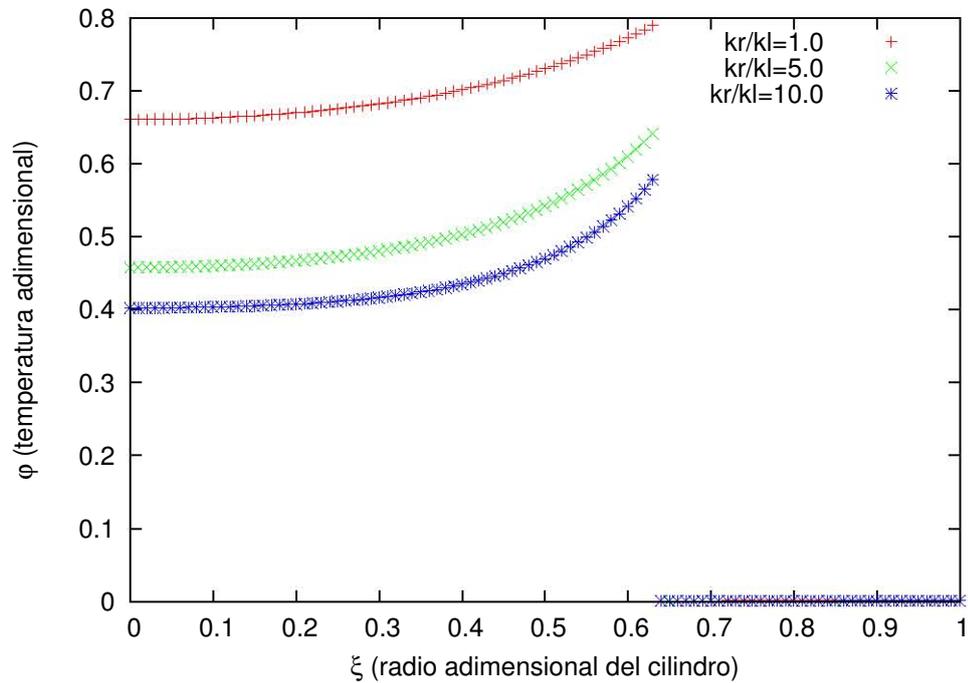


Figura 4.18: Distribución de la corriente eléctrica en  $\tau = 7$  para distintos valores de  $k_r/k_l$ .

En la figura 4.19 se muestra la distribución de la temperatura para distintos valores de  $k_r/k_l$  y  $\tau = 7$ ; se observa que para  $k_r/k_l = 1$  mostrará una curva más suavizada, debido a que la manera de conducir la temperatura entre las fases no será tan pronunciada que cuando se tiene un coeficiente más grande.

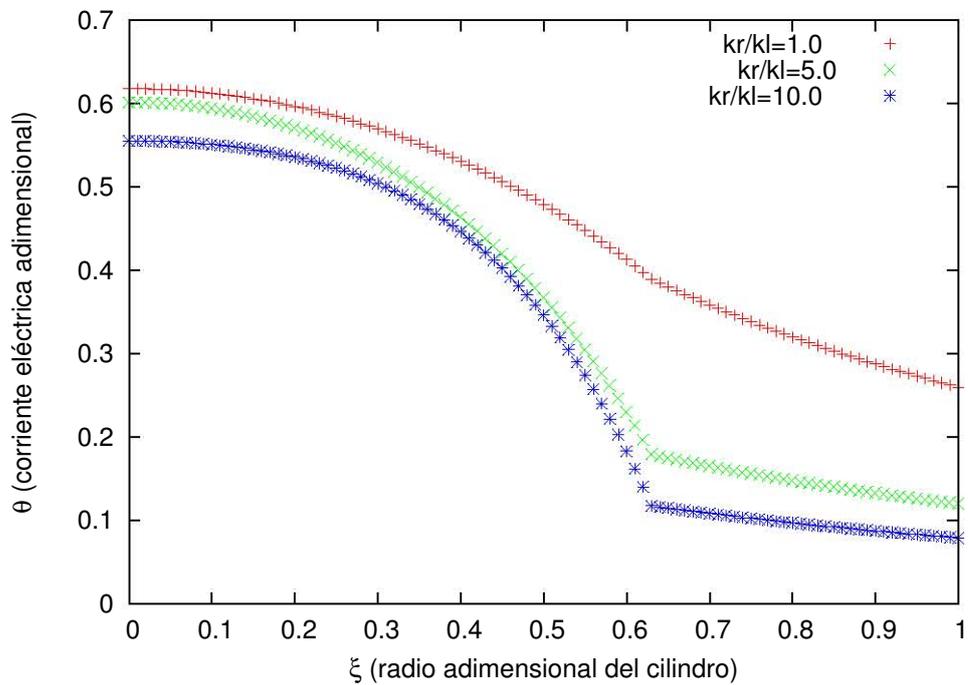


Figura 4.19: Distribución de la temperatura en  $\tau = 7$  para distintos valores de  $k_r/k_l$ .

En la figura 4.20 se muestra la variación del factor de formación con respecto a la porosidad para distintos valores de  $k_r/k_l$ . Se observa que este parámetro resulta ser no tan relevante para el factor de formación. Lo que implica que se puede usar el modelo desacoplado entre la parte eléctrica y térmica para aumentar tiempo de cómputo para obtener dichos valores.

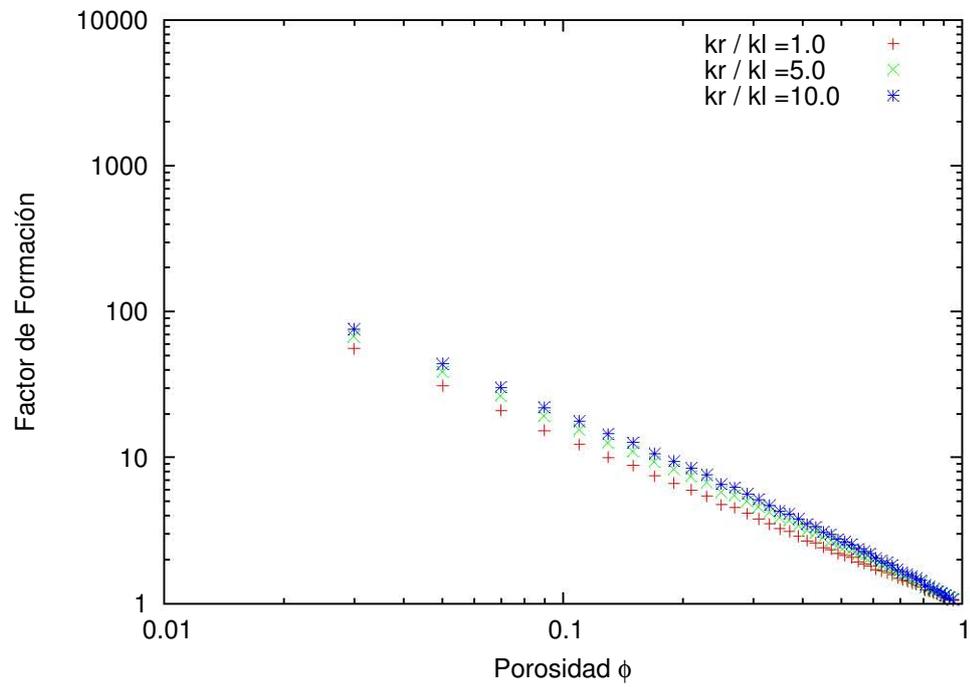


Figura 4.20: Variación del factor de formación para distintos valores de  $k_r/k_l$

---

## Capítulo 5

# Validación del modelo termoeléctrico

---

Una vez que se observó el comportamiento de las variables involucradas en el modelo, se procedió a realizar una comparación entre valores reales de datos obtenidos con los valores que se obtienen con el modelo.

Se realizó la validación con una serie de núcleos analizados por CoreLab que pertenecen a las zonas de Chiapas y Chicontepec; se realizaron mediciones de las propiedades eléctricas y de la capacidad de intercambio de cationes por Resonancia Magnética Nuclear. Se seleccionaron veintisiete muestras de los núcleos de Chiapas, de los pozos: 3K, 2D, 3MB, TEO, 3M, JOT, 6A, 7B, 5C, 1A, 4E, 5A y NAV. Para los pozos de Chicontepec se obtuvieron 13 muestras de los siguientes pozos: IX, CUAN, AC, PPTT, TEHUA, COL2 y COL1.

En la figura 5.1 y en la tabla 5.1 se muestran los valores de resistividad y permeabilidad de las rocas más abundantes; a partir de las cuales se tomaron los valores para ingresar el modelo.

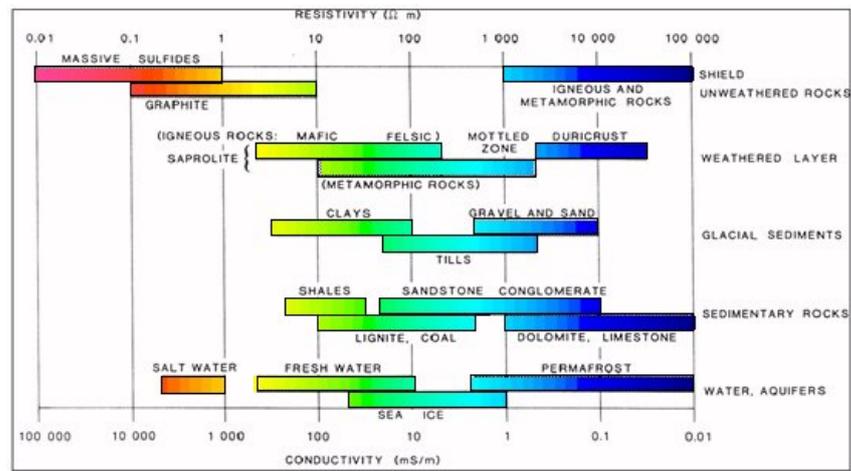


Figura 5.1: Resistividades de las rocas[16].

Tabla 5.1: Tabla de permeabilidad magnética [17] .

Tipo de roca	Permeabilidad magnética [ $H/m$ ]
Magnetita	0.7-0.2
Pirotina	0.875
Dolomita	0.999986
Arenisca	0.999982
Arena	0.999986
Granito	0.999972-0.97999
Diorita	0.999953
Gabro	0.999931-0.99763
Pórfido	0.999953
Diabasa	0.999922-0.9985
Pórfido de cuarzo (con un promedio de 0.82 % de magnetita)	0.9975
Riolita (con un promedio de 1.0 % de magenetita)	0.997
Basalto (con un promedio de 4.76 % de magnetita)	0.9852
Diabasa (con un promedio de 4.35 % de magnetita)	0.9869

Como se observa en la tabla 5.1, las rocas sin o con poco contenido de magnetita suelen tener valores de permeabilidad magnética muy cercanos a 1; por lo tanto, se considera en el modelo un valor de permeabilidad magnética de 1 para las rocas que se van a analizar. También se usarán las propiedades petrofísicas indicadas en la tabla 5.2.

Tabla 5.2: Tabla de densidad y porosidad [18] [19]

	Arenisca	Arenas	Carbonatos (caliza)
Resistividad [ $\Omega - m$ ]	90 - 5000	500-10000	1000-100000
Densidad global [ $Kg/m^3$ ]	200-2600	2000-2400	2200-2800
Permeabilidad magnética [ $H/m$ ]	1	1	1
Calor específico [ $J/Kg/K$ ]	775	775	803

## 5.1. Areniscas

Es una de las rocas más abundantes entre las rocas sedimentarias (aprox. 20%), las areniscas contienen gran información acerca de su origen, como lo sería que tan angulosos son los granos. Entre más angulosos sean determinan un transporte menor a los granos que tienden a la redondez. En su mayoría las areniscas están formadas por clastos de cuarzo debido a la durabilidad [20].

Se realizaron gráficas de los valores factor de formación contra porosidad obtenidos experimentalmente por CoreLab para distintos pozos de la zona de Chicontepec, constituidos por arenisca. Dichos resultados presentan como porosidad mínima 0.01 en el pozo TEHUA y la máxima porosidad es de 0.109 presente en el pozo AC como se muestra en la tabla 5.3.

Tabla 5.3: Factor de formación, permeabilidad, densidad de grano y exponente de cementación, y porosidad determinados experimentalmente para areniscas de Chicontepec [21].

Pozo	Densidad de gran [g/cc]	Permeabilidad Klinkenberg [md]	Porosidad	Factor de Formación	m	n
IX	2.70	0.00001	0.022	837.08	1.76	1.73
CUAN	2.62	0.00008	0.054	241.00	1.88	1.73
CUAN	2.66	0.00003	0.045	321.11	1.86	1.74
AC	2.71	0.279	0.071	225.67	2.05	1.86
AC	2.70	0.028	0.109	115.94	2.14	1.1.82
AC	2.68	0.0002	0.028	998.48	1.93	1.75
PPTT	2.70	0.00018	0.040	977.84	2.14	2.11
PPTT	2.67	0.000009	0.031	1424.52	2.09	2.00
TEHUA	2.70	0.054	0.020	3300.02	2.07	2.08
TEHUA	2.70	0.028	0.010	5010.50	1.85	1.74
COL2	2.68	0.001	0.039	808.67	2.06	1.92
COL1	2.71	4.65	0.038	292.58	1.74	1.67
COL1	2.72	0.0004	0.048	601.51	2.11	1.92

Al ejecutar el código con las propiedades correspondientes de arenisca se obtuvo una curva que muestra el factor de formación contra la porosidad, la cual es comparada con los datos experimentales de laboratorio (figura 5.2):

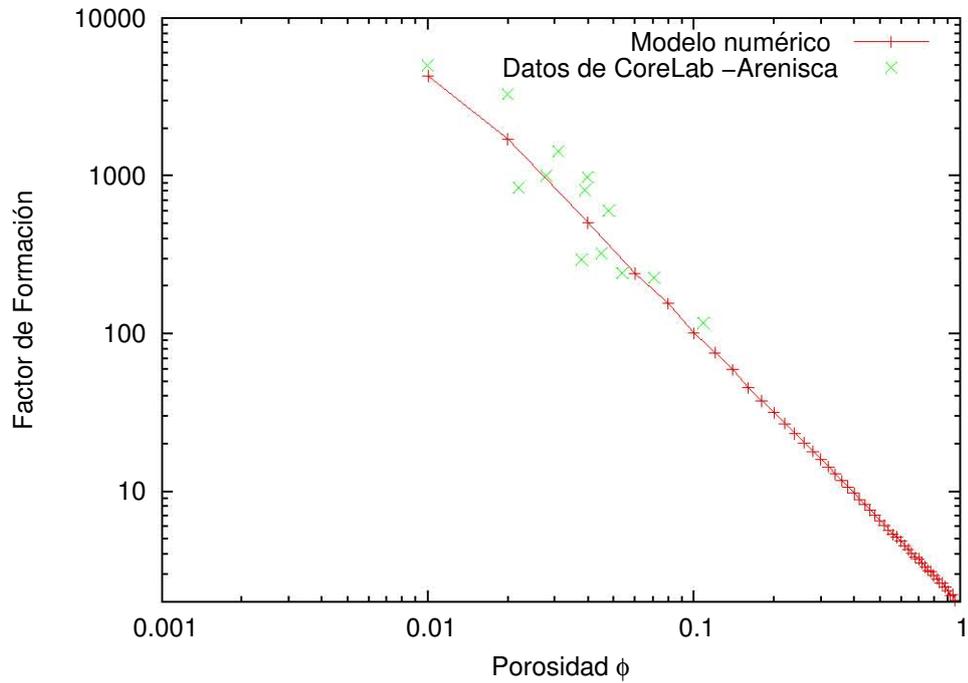


Figura 5.2: Comparación de datos de areniscas a partir de los datos de núcleos y el modelo numérico

El factor de cementación obtenido con el modelo con una regresión potencial, es  $m = 1.703$  y el de los núcleos de pozo es de 1.649 lo cual muestra que se obtuvo una buena aproximación a los datos de laboratorio.

Se realizó la digitalización del artículo de Archie (1942) y se ejecutó el programa con las propiedades petrofísicas de areniscas y se realizó la comparación entre ambos conjuntos de datos.

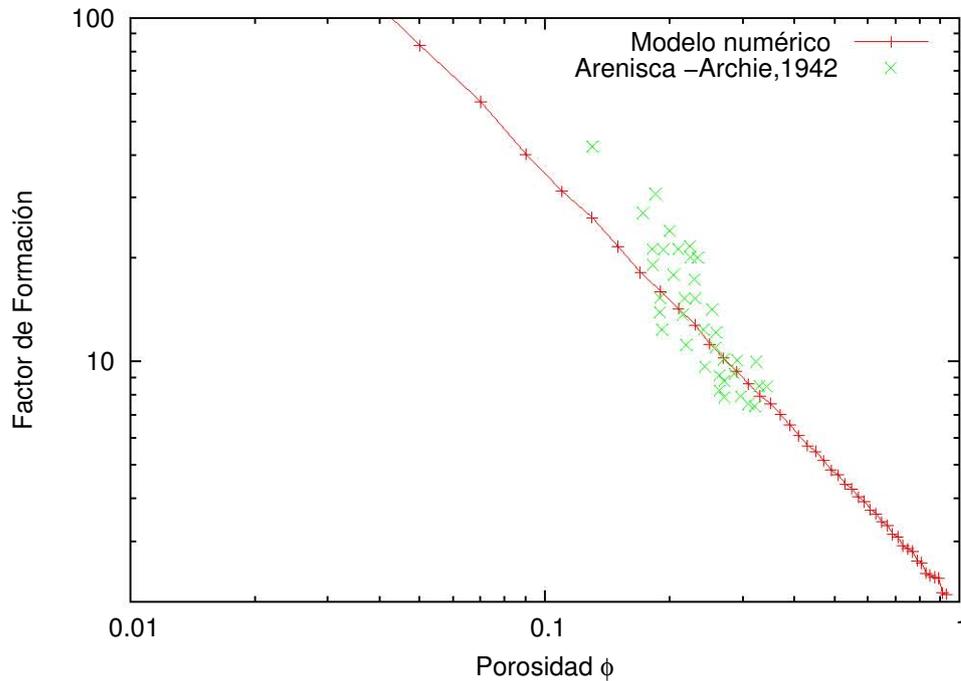


Figura 5.3: Comparación de datos de areniscas a partir del modelo propuesto por Archie y el modelo numérico [1]

En el artículo de Xiao Liang y Zou Chang-chun [22], se propone estimar la saturación de agua a partir de resonancia magnética nuclear (NMR) y con registros geofísicos de resistividad en yacimientos de arenisca de baja permeabilidad. Para comprobar sus resultados realizaron pruebas en núcleos de las formaciones Xujiahe de la cuenca Sichuan en el suroeste de China, en Chang 8 en la cuenca de Ordos al noroeste de China y en una tercera cuenca; con los cuales obtienen gráficas de factor de formación contra porosidad.

Se obtuvo un exponente de formación en la muestra de Xujiahe de  $m = 1.25$ , el obtenido por el modelo numérico es de  $m = 1.18$  (figura 5.4). Se ilustran los resultados experimentales provenientes de laboratorio contra los generados por el modelo, con un error absoluto de 0.07. Dicha muestra de núcleo presenta una porosidad del 8.4% y una permeabilidad de  $0.5[mD]$ , se sabe que la proporción de componentes macroporosos es dominante por los resultados de NMR y las pruebas de inyección de mercurio (MICP) en esta muestra presentan presiones

bajas.

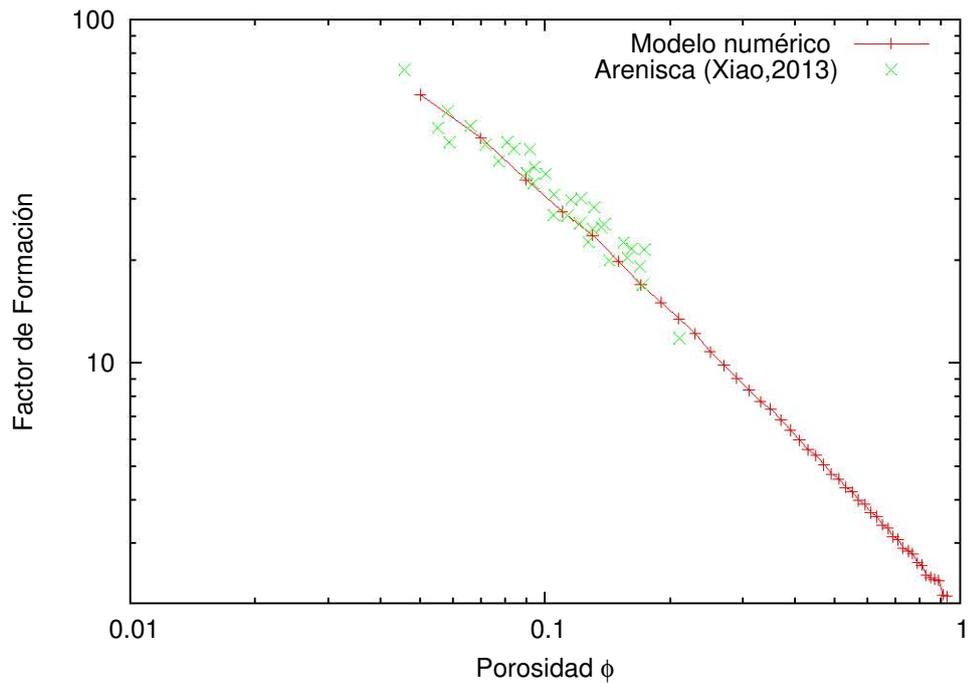


Figura 5.4: Comparación de datos de areniscas a partir de un modelo previo con los datos generados por el modelo numérico [22]

Para la figura 5.5 se tienen las curvas de factor de formación contra porosidad de areniscas de baja permeabilidad provenientes de la formación Chang 8 en la Cuenca del Ordos al noroeste de China, la cual presenta una  $m = 1.60$  obtenido mediante pruebas de laboratorio; el exponente de cementación generado por el modelo numérico es de  $m = 1.47$

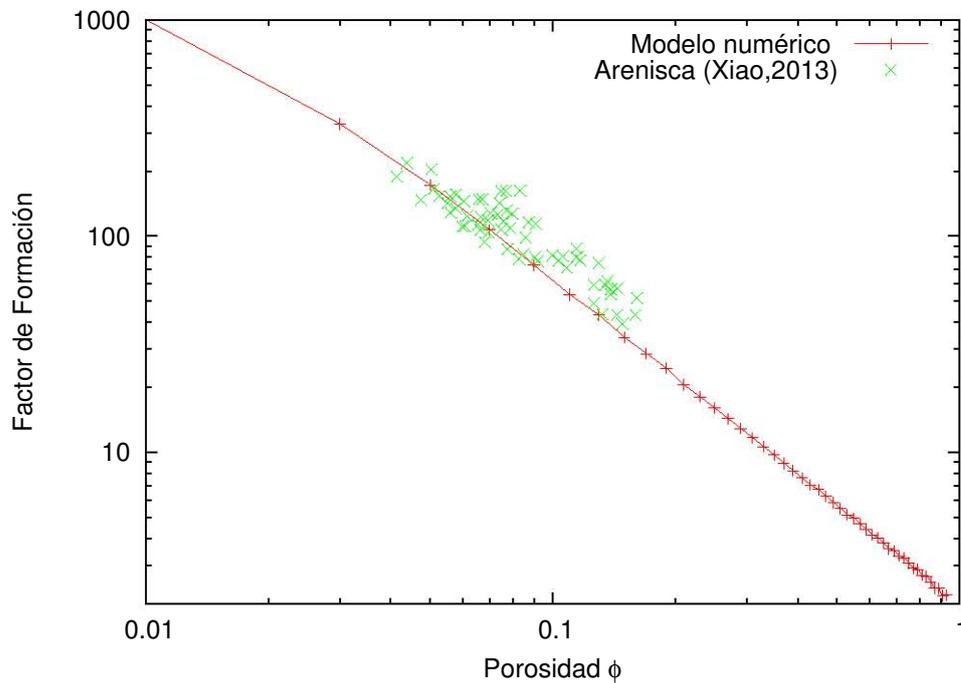


Figura 5.5: Comparación de datos de areniscas a partir de un modelo previo con los datos generados por el modelo numérico[22]

En la figura 5.6 Xiang Liang y Zou Chang-chun obtuvieron de los estudios hechos a núcleos de la tercera cuenca un  $m = 1.16$ , mientras que por el método del modelo termoeléctrico se obtiene un  $m = 1.17$ , el error absoluto es de 0.01%. En la presente muestra se tiene una porosidad de 16.17% mientras que su permeabilidad es de  $1.08[mD]$ , el valor obtenido en la prueba de inyección de mercurio (MICP) es mayor que  $1.5[MPa]$ , el contenido relativos de los poros intergranulares primarios es además reducido y el contenido integranular restantes es mayor.

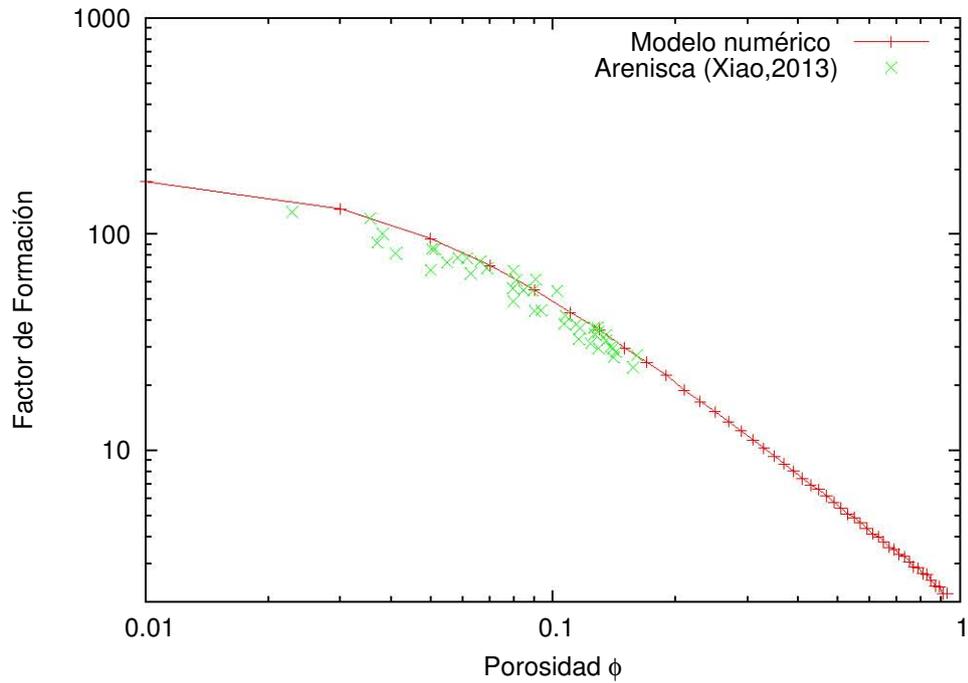


Figura 5.6: Comparación de datos de areniscas a partir de un modelo previo con los datos generados por el modelo numérico [22]

Se observa que el modelo numérico responde de manera similar con los datos ingresados de las propiedades de las rocas mencionadas. Resulta ser una buena aproximación ya que se observa que para bajas porosidades el modelo numérico comienza a mostrar la misma concavidad que comienzan a mostrar los datos experimentales. Conforme la porosidad va siendo menor, el gradiente de factor de formación comienza a ser menor tanto para el modelo numérico como para los datos experimentales.

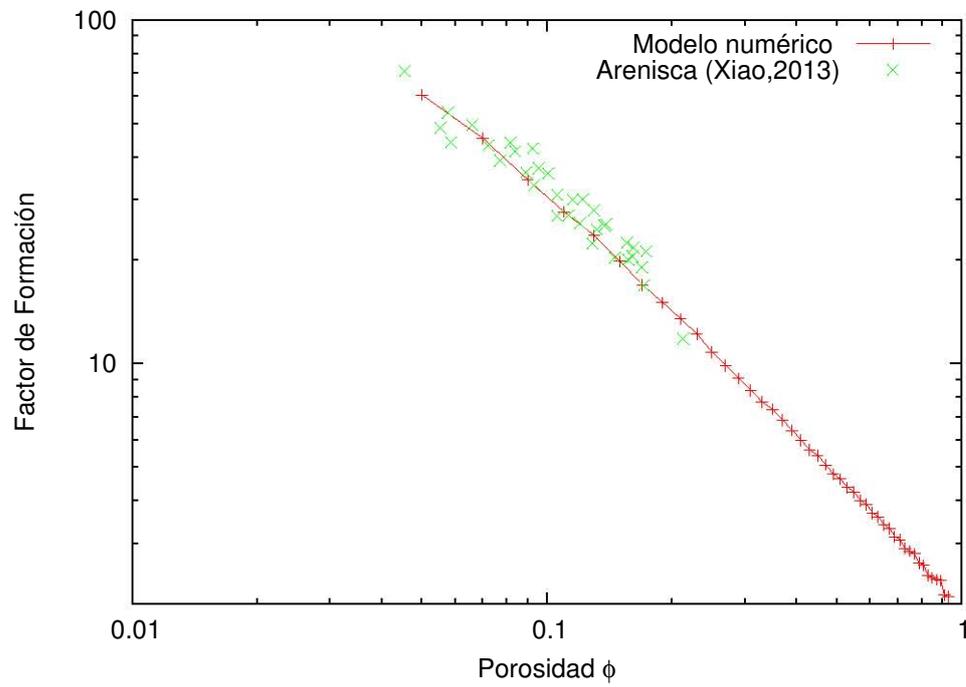


Figura 5.7: Comparación de datos de areniscas a partir de un modelo previo con los datos generados por el modelo numérico [22].

## 5.2. Arenas

Las arenas corresponden a clastos de rocas disgregadas. Si estos clastos se comienzan a consolidar se forma lo que se llama arenisca, por lo que de la misma manera en su mayoría está compuesto por cuarzo ya que el cuarzo soporta más la intemperismo que otros minerales [20].

Utilizando el modelo termoeléctrico se obtuvo un ajuste a los datos experimentales de Archie.

En la figura 5.8 se muestra la comparación de los datos teóricos y los experimentales y la aproximación resulta ser alta por lo que se puede usar el modelo numérico para cálculos de valores de factor de formación contra porosidad para arenas con características similares a las que usó Archie [1].

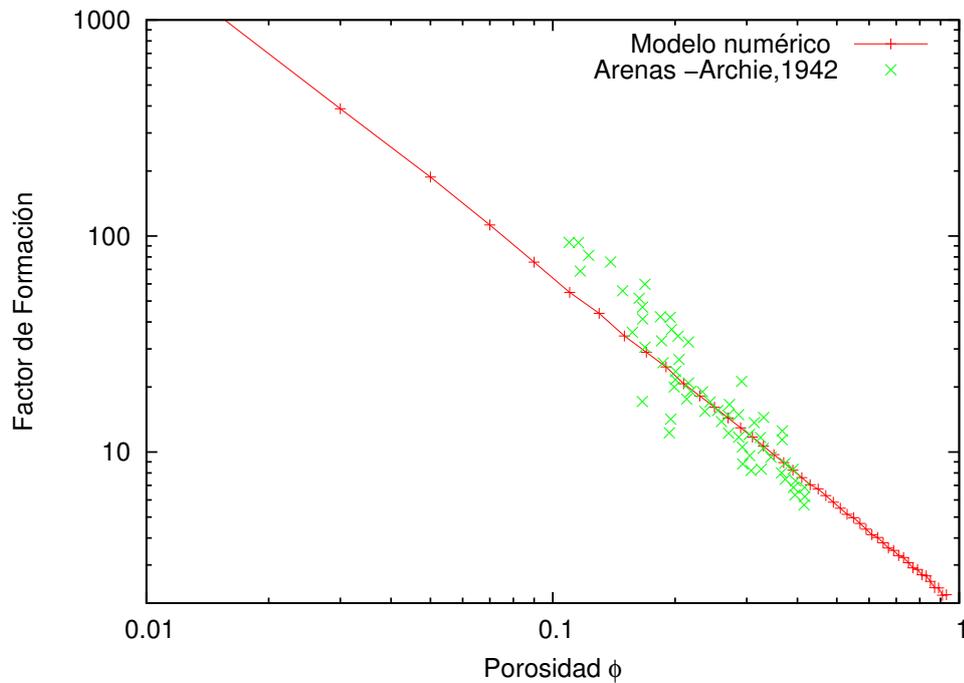


Figura 5.8: Comparación de datos de arenas a partir del modelo propuesto por Archie y el modelo numérico [1]

## 5.3. Carbonatos

Entre la caliza y la dolomía forman el mayor porcentaje de los carbonatos. Están compuestos por  $CaCO_3$  en el caso de la caliza y  $CaMg(CO_3)_2$  para la dolomía [20].

Los siguientes datos pertenecen a los resultados de pozos con carbonatos de Chiapas:

Tabla 5.4: Factor de formación, permeabilidad, densidad de grano, exponente de cementación, y porosidad para determinadas experimentalmente de pozos con rocas carbonatadas [21].

Pozo	Densidad de grano [g/cc]	Permeabilidad Klinkenberg [md]	Porosidad	Fact. Form.	m	n
3K	2.84	0.031	0.166	69.55	2.36	2.08
3K	2.84	0.218	0.105	95.95	2.02	2.04
2D	2.73	0.554	0.129	48.67	1.90	1.92
2D	2.70	0.132	0.082	316.53	2.30	2.23
3MB	2.69	0.039	0.035	618.67	1.92	1.94
3MB	2.70	0.092	0.119	139.84	2.62	1.75
TEO	2.81	0.039	0.33	199.28	1.89	1.91
TEO	2.80	0.037	0.061	199.28	1.89	1.91
3M	2.73	0.099	0.056	303.33	1.98	2.28
3M	2.69	0.073	0.133	94.81	2.26	1.91
JOT	2.82	0.015	0.074	75.38	1.66	1.48
JOT	2.82	0.003	0.070	165.67	1.92	2.04
JOT	2.83	0.056	0.088	151.05	2.06	1.99
6A	2.84	6.34	0.159	29.28	1.84	2.01
6A	2.83	3.88	0.166	27.41	1.84	2.05
7B	2.85	1.63	0.111	130.33	2.22	2.00
7B	2.85	0.001	0.050	1714.61	2.49	2.18
5C	2.70	0.0005	0.037	860.29	2.05	1.96
5C	2.69	0.018	0.128	39.20	1.78	1.78
1A	2.70	0.00004	0.007	5556.45	1.74	1.44
1A	2.71	0.127	0.031	278.98	1.62	1.68
4E	2.69	0.003	0.076	1153.71	2.74	2.39
4E	2.70	0.003	0.032	937.31	1.99	1.95
5A	2.70	0.005	0.090	1150.72	2.93	2.37
5A	2.71	0.003	0.033	460.24	1.80	1.81
NAV	2.84	0.428	0.146	64.60	2.17	1.90
NAV	2.81	0.008	0.088	112.82	1.94	1.97

Se obtuvieron los resultados de laboratorio correspondientes a carbonatos de la zona de Chiapas, se realizaron mediciones de resistividad a 27 muestras con lo

que se determinó la porosidad, el factor de formación, el índice de resistividad y otras propiedades de relevancia para el medio poroso. De los pozos muestreados, el que presenta menor porosidad es 1A con 0.007, mientras la mayor porosidad es de 0.166 para el pozo 3K.

Los estudios realizados por CoreLab determinan como resultado para el factor de cementación un valor de 2.00. Al procesar las propiedades térmicas y electromagnéticas en el código para el modelo termoeléctrico se obtuvieron los resultados la figura 5.9. Dicha curva presenta un factor de cementación de 1.72.

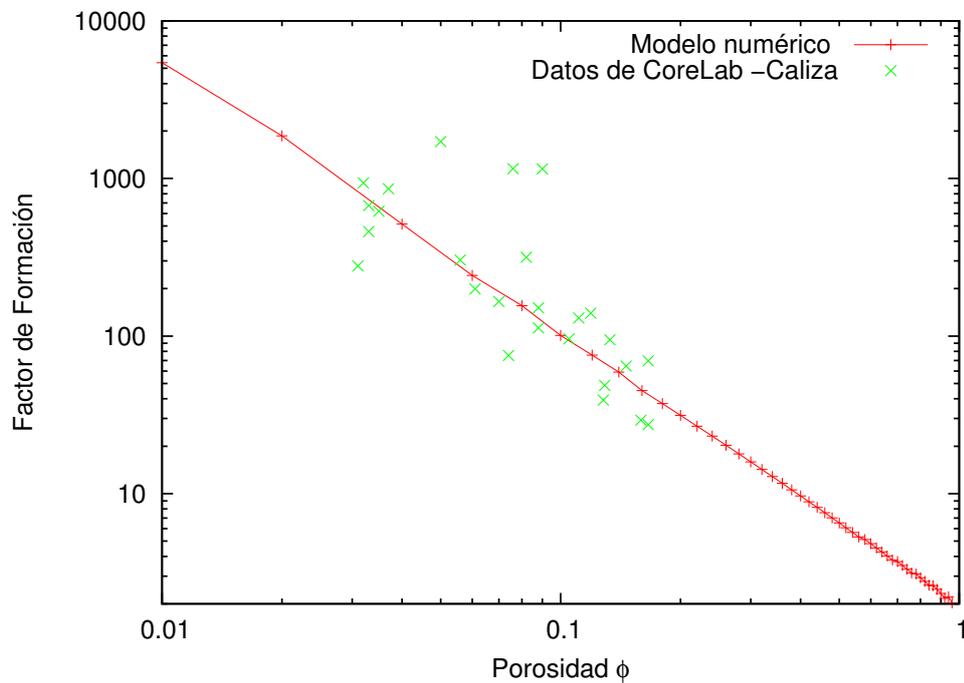


Figura 5.9: Comparación de datos de areniscas a partir de los datos de núcleos y el modelo numérico

---

# Capítulo 6

## Conclusiones

---

Se determinó una alternativa posible para la obtención de valores de factor de formación contra porosidad con un modelo que se validó con datos experimentales. En este modelo se analizaron los efectos termoeléctricos de un núcleo donde se induce una corriente eléctrica. Este modelo se discretizó y se solucionó con el método numérico de Crank-Nicholson el cual presentó ventajas debido a que no tiene restricción en el tamaño del paso temporal.

Se encontró que la variable de profundidad de penetración  $\varepsilon$  para valores a partir de 1 se comienzan a no mostrar diferencias significativas en la curva conforme aumenta  $\varepsilon$ , mientras que para valores menores a uno se comporta de manera más pronunciada. La variable de coeficientes de resistividades se encontró que tiene un cambio de comportamiento para valores cercanos a uno, mientras que para valores más altos dicho curvamiento cada vez se muestra a porosidades más bajas. La variable de permeabilidad magnética  $\mu$  tiene un comportamiento muy similar para valores mayores a 1 mientras que para valores bajos se observa un curvamiento muy pronunciado para porosidades altas. La variable de tortuosidad  $\beta$  mostró un comportamiento no tan pronunciado como las demás tanto para altas ni bajas porosidades. La concavidad que presentan algunas curvas cuando se varían determinados parámetros es debido a que en algunos casos tiene implicaciones directas en cómo se distribuye la corriente y la resistividad que se va

a presentar al flujo de corriente haciendo que no tenga un cambio sustancial al principio pero ya que debe tener un valor de convergencia determinado, el valor tendrá una caída más pronunciada conforme se acerque a dicho valor. Para el valor de tortuosidad al no tener éste un efecto directo en la distribución de corriente no presenta un cambio de concavidad cambiando el valor. En cambio para parámetros que sí tienen un gran efecto en las propiedades electromagnéticas dependiendo los valores que se tomen harán que al principio no tenga un gradiente alto pero tendrá una caída más pronunciada para llegar al valor de convergencia.

En la comparación de resultados se mostró que el modelo simula de manera satisfactoria el fenómeno físico, ya que al sobreponer las curvas calculadas con el modelo y los datos experimentales, ambas curvas empatan de manera muy similar. Se muestra que el modelo sirve tanto para altas porosidades como para bajas ya que el modelo muestra el curvamiento que se suele presentar a bajas porosidades. En la variación de parámetros se observó cómo las diferentes variables afectan de manera muy diferente, esto se debe a que se tiene un modelo no lineal. Esto se demostró para arenas, areniscas y carbonatos tanto para datos obtenidos de núcleos mexicanos como para datos obtenidos de núcleos de China lo cual muestra al versatilidad del modelo no sólo para un área en específico sino para un determinado tipo de roca. El modelo muestra una buena aproximación para los valores de factor de formación contra porosidad tanto para bajas y altas porosidades. Se observó que para obtener las gráficas de factor de formación se puede utilizar el modelo desacoplado de la parte térmica para disminuir el tiempo de cómputo ya que no resultó ser un parámetro de suma relevancia.

En estudios posteriores se puede determinar si el modelo funciona para más tipos de roca, así como zonas con una estructura más compleja como lo serían zonas fracturadas o con más de un tipo de líquido (sistema trifásico). En este caso se usó el modelo para la validación núcleos, los cuales en algunos caso se tenían fotografías de láminas delgadas, es posible que en estudios posteriores se determine cómo funciona el modelo para datos obtenidos de registros geofísicos cuyos valores presentan una diferente distribución de corriente en el caso de obtener valores de resistividad. En el modelo se determinó una distribución de corriente en forma radial mientras que las herramientas de exploración, su distribución de corriente es de forma esférica.

---

## Bibliografía

---

- [1] G. E. Archie. The electrical resistivity log as aid in determining some reservoir characteristics. *Am. Inst. Min. Metall.*, 146:54–61, 1942.
- [2] S. Saner, A. Al Harthi, and M. Than Htay. Use of tortuosity for discriminating electro-facies to interpret the electrical parameters of carbonate reservoir rocks. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 21:237–249, 1996.
- [3] A. M. Attia. Effects of petrophysical rock properties on tortuosity factor. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 48:185–198, 2005.
- [4] P. Worthington. Uses and abuses of the archie equation. the formation factor-porosity relationship. *Journal of applied geophysicists*, 30:215–228, 1993.
- [5] L. D. Baver, W. Gardner, and W. Gardner. *Física de suelos*. Union Tipográfica Editorial, first edition, 1991.
- [6] Y. Nakashima and T. Nakano. Accuracy of formation factors for three-dimensional pore-scale images of geo-materials estimated by renormalization technique. *Journal of applied geophysicists*, 75:31–41, 2011.
- [7] Ó. Chávez and F. Méndez. Conjugate heat transfer in a bimetallic conductor with variable electric resistivity. *Applied Thermal Engineering*, 31:20–27, 2011.
- [8] A. A. Alcántara Acevedo. *Determinación de valores de corte para cálculo de reservas de hidrocarburos*. Facultad de Ingeniería, UNAM, first edition, 2013.

- [9] M. Maciej and K. Zbigniew. How to calculate tortuosity easily? *Institute of Theoretical Physics, University of Wroclaw, AIP Conf. Proc.*, 1453:17–22, 2012.
- [10] A. Arroyo Carrasco. *Bases teóricas e interpretación de registros geofísicos de pozos*. Apuntes FI, first edition, 1996.
- [11] C. Perez Rosales. On the relationship between formation resistivity factor and porosity. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 22:531–536, 1986.
- [12] C. Perez Rosales. Generalization of maxwell equation for formation resistivity factors. *J. Pet. Tech.*, 28:819–824, 1976.
- [13] J. Klinkenberg, L. The permeability of porous media to liquids an gases. *API Drilling an Prod. Prac.*, pages 100 – 213, 1941.
- [14] Y. A. Cengel and M. A. Boles. *Termodinámica*. McGraw Hill, seventh edition, 2011.
- [15] S. Chapra and R. Canale. *Métodos Numéricos para Ingenieros*. McGraw Hill, fifth edition, 2006.
- [16] G. V. Palacky. Resistivity characteristics of geologic targets. *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*, 1, 1987.
- [17] M. Burnett Dobrin and C. H. Savit. *Introduction to geophysical prospecting*. McGraw Hill, first edition, 1988.
- [18] E.M. Winkler. *Stone Propierties, Durability in Man's Enviroment*. New York: Springer Verlag, first edition, 1973.
- [19] P. D. Komar. Selective grain entrainment by a current from a bed of mixed sizes: a reanalysis. *Journal of Sedimentary Petrology*, 57:203–211, 1987.
- [20] E. J. Tarbuck and F. K. Lutgens. *Ciencias de la Tierra. Una introducción a la Geología física*. Pearson Pretince Hall, eighth edition, 2005.
- [21] Core laboratories L.P. *Análisis especiales de núcleo. Muestras de superficie Chiapas y Chicontepec*. TEMPLE, S.A. DE C.V.

- [22] L. Xiao, Z. Chang-Chun, Z-Qiang Mao, Y jiang Shi, X. Peng Liu, Y. Jin, H. Peng Guo, and X. Xin Hu. Estimation of water saturation from nuclear magnetic resonance (nmr) and conventional logs in low permeability sandstone reservoirs. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 108:40–51, 2013.