UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

LA CATEGORÍA DE MOTIVOS PUROS

T E S I S
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
DIOSEL LÓPEZ CRUZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. FELIPE DE JESÚS ZALDIVAR CRUZ
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MÉXICO, D. F. AGOSTO, 2013

La categoría de motivos puros

Diosel López Cruz

La matemática-verdad lo trae cada matemático dentro de si mismo. El sufrimiento, el gozo, el triunfo, el fracaso, los elogios y la pasión; todo eso que hay en este arte de contrastes, de luz y sombra, de exhaltación y amargura, de héroes y truhanes, lo vamos viviendo los matemáticos. Algunos caminarán todo el tiempo sin llegar jamás a ningún lado en ese laberinto mil veces peor que el del minotauro porque éste es un camino que se recorre voluntariamente. Para el que llega encontrar la verdad en las matemáticas, el camino es aun más duro porque debe defenderlo con la vida hasta la muerte. Aquel que descubrió la verdad en las matemáticas y lo traiciona, preferirá no haberlo descubierto nunca...

Jorge de Jesús "El Glison"

Agradecimientos

Es muy egoista de mi parte decir que este trabajo es sólo mio, cuando en él han intervenido muchas personas. Entre ellas, mis padres, mis hermanos, mis amigos, mis sinodales y esas personas que me inspiraron durante dicho trabajo, en especial esa inspiración celestial recibida de parte del ser supremo. Gracias Dios mio, porque nunca me abandonaste.

Finalmente, quiero dedicar este trabajo a todos los maletillas del mundo. A todos esos chavales (algunos no tanto) que han recorrido la legua, siempre cuesta arriba. A todos esos que han pasado por hambre, humillaciones, algunos un poco peor, malheridos en esos pueblos de Dios. Todos ellos en busca de gloria, en busca del triunfo, soñando con la Maestranza de Sevilla. Y para aquellos que se quedaron en el camino, muertos en las dehesas bañados por la luz de la luna. Pues, va por ustedes maletillas y que Dios reparta suerte...

Índice general

Agradecimientos **V**

Introducción **IX**

1. Eqivalencias adecuadas y cohomologías de Weil **1**
- 1.1. Ciclos algebraicos 1
- 1.2. Relaciones de equivalencias adecuadas 2
- 1.3. Cohomologías de Weil 5
- 1.4. Resultados y conjeturas en ciclos algebraicos 10
- 1.5. Correspondencias cohomológicas y fórmula de traza 12

2. La construcción de los motivos puros **15**
- 2.1. Categoría de correspondencias 15
- 2.2. Motivos puros efectivos 22
- 2.3. Motivos puros 25

3. Motivos puros de Chow **31**
- 3.1. Propiedades básicas de motivos de Chow 31
- 3.2. Principio de identidad de Manin 39
- 3.3. El motivo de una curva 42
- 3.4. Descomposición de Chow-Künneth 43

4. El teorema de Jannsen **47**
- 4.1. Motivos numéricos 47
- 4.2. Teorema de Jannsen 48

A. Categorías rígidas y categorías Tannakianas **55**
- A.1. $\otimes$-Categorías rígidas 55
- A.2. Categorías Tannakianas 60

Bibliografía **63**

Introducción

En palabras de A. Grothendieck ([15], pag. 198):

> *... la teoría de motivos es una teoría sistemática de "propiedades aritméticas"de variedades algebraicas junto con su grupo de clase de ciclos algebraicos módulo equivalencia numérica...*

Varias teorías de cohomología juegan un papel importante en la geometría algebraica, estas teorías tienen propiedades comunes y pueden en algunos casos relacionarse por medio de morfismos específicos. Una **teoría de cohomología** con coeficientes en un anillo F está dada por un funtor contravariante H^* de la categoría de variedades algebraicas sobre un campo k a la categoría de F-álgebras graduadas (o más general, a una categoría tensor F-lineal). El funtor H^* debe satisfacer ciertas propiedades, en particular, ciclos algebraicos en una variedad X deben de dar lugar a elementos en $H^*(X)$ y la estructura de ciclos algebraicos en X junto con el producto de intersección deben reflejarse en la estructura de $H^*(X)$. La cohomología étale, cohomología de De Rham, cohomología de Betti y la cohomología cristalina son ejemplos de teorías de cohomología. Abstrayendo las propiedades formales comunes de estas teorías de cohomología se obtiene la noción de **teoría de cohomología de Weil**, para la cual las teorías anteriores son ejemplos. Sin embargo, entre todas carecen de falta de cohesión.

La idea de una **teoría de cohomología universal** para variedades algebraicas, lleva a Grothendieck a la formulación de la **teoría de motivos** a mediados de los años 60's. Estrictamente hablando, dada una variedad algebraica X sobre un campo k, el motivo de X es un objeto esencial en la estructura de $H^*(X)$ para cualquier teoría de cohomología, y por tanto adquiere la información aritmética (geométrica) contenida en los ciclos algebraicos en X. Para desarrollar una teoría de motivos puros, Grothendieck tenía en mente que para todo campo k y toda relación de equivalencia adecuada[1] $\sim$ en ciclos algebraicos, debería de existir una $\otimes$-categoría $\mathcal{M}_{\sim}(k)_F$

[1] La relación que Grothendieck tenía en mente era la numérica.

abeliana y semi-simple junto con un funtor contravariante:

$$\mathfrak{h}_{\sim} : \{k - \text{variedades proyectivas y lisas}\} \longrightarrow \mathcal{M}_{\sim}(k)_F$$

que cumpliera en parte con los axiomas de una teoría de cohomología de Weil, en el siguiente sentido:

– **Fórmula de Künneth**. Para todo $X, Y \in \mathcal{P}(k)$, existe un isomorfismo:

$$\mathfrak{h}_{\sim}(X \times Y) \cong \mathfrak{h}_{\sim}(X) \otimes \mathfrak{h}_{\sim}(Y).$$

– **Dualidad de Poincaré.** Existe un funtor de dualidad $(-)^{\vee}$ en $\mathcal{M}_{\sim}(k)_F$, de tal manera que para todo $X \in \mathcal{P}(k)$ se tiene una descomposición:

$$\mathfrak{h}_{\sim}(X) = \bigoplus_{i=0}^{2d} \mathfrak{h}^i_{\sim}(X) \quad \text{donde} \quad \big(\mathfrak{h}^i_{\sim}(X)\big)^{\vee} = \mathfrak{h}^{2d-i}_{\sim}(X).$$

– **Propiedad universal.** Dada cualquier teoría de cohomología de Weil $H^* : \mathcal{P}(k)^{\text{op}} \longrightarrow \mathbf{GrVec}_K$, existe un único funtor ω_H que hace conmutar al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(k)^{\text{op}} \arrow[r, "H^*"] \arrow[d, "\mathfrak{h}_{\sim}"'] & \mathbf{GrVec}_K \\ \mathcal{M}_{\sim}(k)_F \arrow[ur, dotted, "\omega_H"'] & \end{tikzcd}$$

al funtor ω_H se le llama **funtor realización**. En particular, $\mathfrak{h}_{\sim}$ debe resumir las propiedades que cumple una teoría de cohomología de Weil. Si tal funtor ω_H existe, entonces todas las propiedades categóricas escritas en términos de cohomologías de Weil serían válidas si y sólo si son válidas en $\mathcal{M}_{\sim}(k)_F$. Por ejemplo, los **i-ésimos números de Betti** b_i serían independientes de la elección de la cohomología. Inspirado en un término musical, A. Grothendieck nombró a la categoría $\mathcal{M}_{\sim}(k)_F$ **categoría de motivos**. En la música, un motivo es una línea melódica que a lo largo de la composición puede ser interpretado por varios instrumentos. En este sentido, el motivo $\mathfrak{h}_{\sim}(X)$ es un objeto interpretado por distintas teorías de cohomología.

En este trabajo, nos concentraremos en los motivos asociados a las variedades proyectivas y lisas sobre un campo arbitrario k. La construcción de la categoría de motivos puros depende exclusivamente de la elección de una relación de equivalencia adecuada en ciclos algebraicos de variedades sobre k.

Es decir, dada una relación de equivalencia adecuada $\sim$ que satisface ciertas propiedades, es posible construir una categoría F-lineal y pseudo-abeliana $\mathcal{M}_\sim(k)_F$. Contrario a lo que historicamente se esperaba, la construcción de los motivos puros es totalmente incondicional. Sin embargo, muchas de las buenas propiedades de la que goza dependen de conjeturas en ciclos algebraicos, las llamadas **conjeturas estándar** de Grothendieck, formuladas en [15]. La estructura de este trabajo es la siguiente.

En el capítulo 1, hacemos un repaso sobre ciclos algebraicos y el producto de intersección. Se define también el concepto de relación de equivalencia adecuada sobre tales ciclos. En este capítulo introducimos la noción de teoría de cohomología de Weil y algunos ejemplos particulares de relaciones de equivalencias adecuadas. Finalmente presentamos la definición de correspondencia cohomológica y se prueba la fórmula de traza de Lefschetz.

En el segundo capítulo, se construyen los motivos puros a partir de una equivalencia adecuada $\sim$. El primer paso es considerar la linealización de la categoría de variedades proyectivas y lisas sobre un campo k, obteniendo así la categoría de correspondencias. La envoltura pseudo-abeliana de $\mathbf{Corr}_\sim(k)_F$ nos permite obtener a la categoría $\mathcal{M}_\sim^{\text{eff}}(k)_F$ de motivos puros efectivos. Finalmente, mediante un proceso de inversión obtenemos a la categoría de motivos puros $\mathcal{M}_\sim(k)_F$. Esta categoría viene junto con un $\otimes$-funtor $\mathfrak{h}_\sim : \mathcal{P}(k)^{\text{op}} \to \mathcal{M}_\sim(k)_F$, llamado **funtor de cohomología motívica**.

En el capítulo 3, consideramos principalmente a la categoría de motivos puros de Chow $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$. Se prueba en ella propiedades muy importantes, las cuales pueden ser transportadas sin ninguna dificultad a una categoría de motivos puros en general $\mathcal{M}_\sim(k)_F$. El producto $\times_k$ en la categoría de variedades proyectivas y lisas sobre k induce una estructura tensorial en $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ con identidad $\mathbf{1}$ correspondiente a $\mathrm{Spec}(k)$. La recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ se descompone en la categoría como $\mathbf{1} \oplus \mathbb{L}$ donde $\mathbb{L}$ es el **motivo de Lefschetz**. Se prueba que $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ es una categoría pseudo-abeliana (en general no-abeliana) y que cuenta con un funtor de involución. Finalmente se presenta una herramienta muy poderosa en el cálculo de motivos, a saber, el principio de identidad de Manin y también el motivo asociado a una curva.

En el último capítulo se prueba un resultado crucial en la teoría de motivos puros. El **teorema de Jannsen**: el cual prueba que la categoría $\mathcal{M}_\sim(k)_F$ es abeliana y semi-simple si y sólo si $\sim = \sim_{\text{num}}$.

A manera de apéndice, revisamos las definiciones de $\otimes$-categorías y categorías rígidas, así como la noción de categoría Tannakiana.

Capítulo 1

Eqivalencias adecuadas y cohomologías de Weil

Sean k un campo y denotemos por $\mathcal{P}(k)$ la **categoría de variedades proyectivas y lisas** sobre k. Una variedad X se asume como un esquema reducido, no necesariamente irreducible; de hecho es crucial permitir uniones disjuntas finitas de irreducibles. La categoría $\mathcal{P}(k)$ es una $\otimes$-categoría (no aditiva), con producto $\times_k$ el producto fibrado sobre k, donde la conmutatividad restringida está dada por $c_{XY} \colon X \times Y \to Y \times X$, y con unidad $\mathbf{p} := \operatorname{Spec}(k)$. En este primer capítulo damos los ingredientes principales de la teoría de motivos puros: equivalencias adecuadas y cohomologías de Weil.

1.1. Ciclos algebraicos

Un **ciclo algebraico** en una variedad $X \in \mathcal{P}(k)$ es una suma formal finita $Z = \sum_\alpha n_\alpha Z_\alpha$ de subvariedades irreducibles Z_α en X, tales que $n_\alpha \in \mathbb{Z}$. Si toda Z_α tiene la misma codimensión q, decimos que Z es un **ciclo de codimensión** q en X. Denotamos al grupo abeliano libre generado por las subvariedades irreducibles de codimensión q en X como:

$$\boxed{\mathcal{Z}^q(X) := \{\text{ciclos algebraicos de codimensión } q \text{ en } X\}.}$$

En términos de dimensión tenemos a $\mathcal{Z}_q(X)$, el grupo abeliano libre generado por las subvariedades irreducibles de dimensión q en X. A los elementos de $\mathcal{Z}_q(X)$ se les conoce como **ciclos de dimensión** q ó q-ciclos. Si X es pura de dimensión d, entonces $\mathcal{Z}^q(X) = \mathcal{Z}_{d-q}(X)$ para $0 \leq q \leq d$.

1.1.1. Teoría de intersección (R. Hartshorne [16], Apéndice A). Existe un producto bilineal parcialmente definido en ciclos algebraicos, a saber el **producto de intersección**:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{Z}^p(X) \times \mathcal{Z}^q(X) & \xrightarrow{\cdot_X} & \mathcal{Z}^{p+q}(X) \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha \cdot_X \beta \end{array}$$

donde $[X] \in \mathcal{Z}^0(X)$ (el ciclo asociado a X, W. Fulton [14] 1.5) es el elemento unidad. La intersección de dos subvariedades irreducibles V y W es definido si V y W **intersectan propiamente**, es decir, que cada componente T de $V \cap W$ tiene codimensión $\mathrm{codim}_X(V) + \mathrm{codim}_X(W)$. En este caso, las multiplicidades son dadas por la **fórmula de intersección de Serre** (J. P. Serre, [34]). Si $f : X \to Y$ es un morfismo en $\mathcal{P}(k)$, dado que f es propio entonces por (W. Fulton [14], 1.4) tenemos un **push-forward** $f_* : \mathcal{Z}_q(X) \to \mathcal{Z}_q(Y)$, (respetando la graduación por dimensión) esta construcción es funtorial (covariante). En el sentido contravariente tenemos el **pull-back** de un morfismo plano f (W. Fulton [14], 1.7), el cual respeta la graduación por codimensión $f^* : \mathcal{Z}^q(Y) \to \mathcal{Z}^q(X)$. De manera más general, cualquier **correspondencia** $\alpha \in \mathcal{Z}^*(X \times Y)$ nos da dos homomorfismos "aditivos" parcialmente definidos:

$$\begin{aligned} \alpha_* : \mathcal{Z}^*(X) &\to \mathcal{Z}^*(Y); \quad \gamma \mapsto \mathrm{pr}_{Y*}\big(\alpha \cdot \mathrm{pr}_X^*(\gamma)\big) \in \mathcal{Z}^*(Y), \\ \alpha^* : \mathcal{Z}^*(Y) &\to \mathcal{Z}^*(X); \quad \gamma \mapsto \mathrm{pr}_{X*}\big(\alpha \cdot \mathrm{pr}_Y^*(\gamma)\big) \in \mathcal{Z}^*(X), \end{aligned}$$

donde $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ y $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ son las proyecciones.

Nota. El producto de intersección y la acción de correspondecias en ciclos no siempre están definidos. Para ello necesitamos encontrar un "buena relación" en ciclos algebraicos, la cual garantice que estas operaciones estén definidas en clases de ciclos. Una forma de extender estas operaciones de manera global, es introduciendo la noción de *equivalencia adecuada* sobre tales ciclos (P. Samuel, [31]). Esto permitirá tener un control del producto de intersección sobre clases de ciclos. Este es el tema de la sección siguiente.

1.2. Relaciones de equivalencias adecuadas

Sea F un anillo conmutativo, para una variedad X sobre k y $q \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\mathcal{Z}^q(X)_F := \Big\{ \sum r_\alpha Z_\alpha \mid r_\alpha \in F \text{ y } Z_\alpha \subset X \text{ de codim. } q \Big\} = \mathcal{Z}^q(X) \otimes_{\mathbb{Z}} F}$$

es el F-módulo libre generado por las subvariedades irreducibles de X de codimensión q. A los elementos de $\mathcal{Z}^q(X)_F$ se les conoce como **ciclos algebraicos de codimensión q con coeficientes en F**. En este caso, consideremos $\mathcal{Z}^*(X)_F := \bigoplus_{q \geq 0} \mathcal{Z}^q(X)_F$ (generalmente usaremos $F = \mathbb{Q}$).

Definición 1.2.1 Una relación de equivalencia $\sim$ en ciclos algebraicos (no trivial) es **adecuada** (U. Jannsen, [17]), si para cada $X, Y \in \mathcal{P}(k)$ se tiene:

i) $\sim$ es compatible con la estructura F-lineal y la graduación de $\mathcal{Z}^*(X)_F$.

ii) Dados α y β en $\mathcal{Z}^*(X)_F$ existe un ciclo $\alpha' \in \mathcal{Z}^*(X)_F$ de tal manera que $\alpha \sim \alpha'$ y α' intersecta propiamente con β en X.

iii) Para $\gamma \in \mathcal{Z}^*(X)_F$ y todo $\alpha \in \mathcal{Z}^*(X \times Y)_F$ que intersecta propiamente con $\mathrm{pr}_X^*(\gamma)$, tenemos que $\alpha_*(\gamma) := (\mathrm{pr}_Y)_*(\mathrm{pr}_X^*(\gamma) \cdot \alpha) \sim 0$ si $\gamma \sim 0$.

Las condiciones (i) y (ii) implican que el producto de intersección parcialmente definido en $\mathcal{Z}^*(X)_F$, está completamente definido en el cociente:

$$\mathcal{Z}^*_\sim(X)_F := \mathcal{Z}^*(X)_F \ / \ \mathcal{Z}^*(X)_{\sim,F}$$

donde $\mathcal{Z}^*(X)_{\sim,F} := \{Z \in \mathcal{Z}^*(X)_F \mid Z \sim 0\}$. De la misma forma, la condición (iii) implica que la formación de pull-back ($\gamma = \Gamma_f^{\mathbf{t}}$) es contravariante con valores en F-álgebras $\mathcal{Z}^*_\sim(X)_F$, y covariante en la formación de push-forward ($\gamma = \Gamma_f$), pero esta última con valores en F-módulos $\mathcal{Z}_{\sim *}(X)_F$. Estas dos estructuras se relacionan mediante la **fórmula de proyección**:

$$\boxed{f_*(\alpha \cdot_X f^*(\beta)) = \beta \cdot_Y f_*(\alpha)}$$

donde $\alpha \in \mathcal{Z}_{*\sim}(X)_F$ y $\beta \in \mathcal{Z}^*_\sim(Y)_F$. Por otro lado, dado un cuadrado cartesiano en $\mathcal{P}(k)$:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y' \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

se cumple la fórmula $f^* \circ p_* = p'_* \circ f'^*$.

Entre las equivalencias adecuadas existe un orden parcial: decimos que $\sim_1$ es **más fina** que $\sim_2$, y escribimos $\sim_1 \succ \sim_2$, si $\alpha \sim_1 0$ implica que $\alpha \sim_2 0$. Ejemplos de equivalencias adecuadas son las siguientes.

Ejemplo 1.2.2 Un ciclo $\alpha \in \mathcal{Z}^q(X)_F$ es **racionalmente equivalente a cero** ($\alpha \sim_{\mathrm{rac}} 0$) si existe un ciclo $\beta = \sum n_i \beta_i \in \mathcal{Z}^q(X \times \mathbb{P}^1)_F$, tales que las proyecciones $\pi_i : \beta_i \to \mathbb{P}^1$ sean dominantes y se cumpla que:

$$\alpha = \sum [\beta_i(0)] - [\beta_i(\infty)],$$

donde $[\beta_i(t)] := \mathrm{pr}_{X*}[\pi_i^{-1}(t)]$ para $t \in \mathbb{P}^1$. El hecho de que equivalencia racional sea un equivalencia adecuada se sigue de la teoría de intersección, el punto crucial es el (ii) de la definición 1.2.1:

Lema 1.2.3 (Lema del movimiento de Chow) *Sean $\alpha \in CH^q(X)_F$ y $\beta \in CH^p(X)_F$. Entonces existen representantes en $\mathcal{Z}^q(X)_F$ y $\mathcal{Z}^p(X)_F$ respectivamente, que intersectan propiamente. El producto de intersección $\alpha \cdot_X \beta \in CH^*(X)_F$ es independiente de la elección de los representantes.*

El conjunto de ciclos racionalmente triviales forma un subgrupo, escribimos:

$$CH^q(X) := \mathcal{Z}^q(X) \ / \ \{\text{ciclos racionalmente equivalentes a cero}\},$$

para el q-ésimo **grupo de Chow** de X. En $CH^*(X) = \bigoplus_{q=0}^d CH^q(X)$ tenemos definido un buen producto, el cual en los componentes es dado por:

$$\begin{array}{rcl} CH^p(X) \times CH^q(X) & \xrightarrow{\cdot_X} & CH^{p+q}(X) \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \alpha \cdot_X \beta \end{array}$$

Es claro que este producto es conmutativo. Con respecto a la suma y producto de intersección de clases de ciclos $CH^*(X)$ es un anillo graduado y $CH^*(X)_F$ un F-álgebra graduada, donde la unidad es $1 = [X]$. Este anillo es conocido como el **anillo de Chow**[1] de X. Observemos también que el producto de intersección es asociativo, puesto que resulta ser igual a la siguiente composición (W. Fulton [14], 8.1):

$$CH^p(X) \times CH^q(X) \xrightarrow{\times} CH^{p+q}(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} CH^{p+q}(X)$$

donde $\Delta \colon X \to X \times X$ es el morfismo diagonal. Se prueba además que, $\sim_{\text{rac}}$ es la más fina entre todas las equivalencias adecuadas (U. Jannsen, [17]).

Ejemplo 1.2.4 La descripción anterior de equivalencia racional, nos permite definir también a la **equivalencia algebraica** $\sim_{\text{alg}}$, pero esta parametrizada por una curva proyectiva y lisa arbitraria. Es claro que si $\alpha \sim_{\text{rac}} 0$ entonces $\alpha \sim_{\text{alg}} 0$, pero en general no son iguales. Por ejemplo, si C es una curva elíptica y a, b son dos puntos distintos. Entonces $Z = a - b$ no es el divisor de una función, sin embargo Z es algebraicamente equivalente a cero.

Ejemplo 1.2.5 La equivalencia **nilpotente-smash** ($\otimes$-nil) es otra relación de equivalencia adecuada importante, introducida por V. Voevodsky en [35]. Un ciclo $\alpha \in \mathcal{Z}^*(X)_F$ es $\otimes$-nilpotente a cero, $\alpha \sim_{\otimes\text{nil}} 0$, si existe $n > 0$ tal que: $\underbrace{\alpha \times \alpha \times \cdots \times \alpha}_{n-\text{veces}}$ es racionalmente equivalente a cero en X^n.

[1] El anillo de Chow $CH^*(X) = \bigoplus_{q=0}^d CH^q(X)$ es un análogo algebraico para el anillo de cohomología $\bigoplus_{i=0}^d H^{2i}(X, \mathbb{Z})$, en topología algebraica.

Ejemplo 1.2.6 Sea $X \in \mathcal{P}(k)$, en particular X es completa. Luego el morfismo estructural $\mathbf{p} : X \to \operatorname{Spec}(k)$ induce el siguiente **morfismo de grado**[2] en clases de 0-ciclos, definido para $\alpha = \sum n_i.p_i \in CH_0(X)$ como:

$$\operatorname{gr}(\alpha) := \int_X \alpha = \sum n_i[k(p_i) : k].$$

Un ciclo $\alpha \in CH^q(X)_F$ es **numericamente equivalente a** 0 ($\alpha \sim_{\text{num}} 0$) si para todo ciclo $\beta \in CH^{d-q}(X)_F$, se tiene que $\operatorname{gr}(\alpha \cdot \beta) = 0$. La relación $\sim_{\text{num}}$ es adecuada en ciclos algebraicos (P. Samuel [31], pag. 474), y es la menos fina entre todas las equivalencias adecuadas. Definimos:

$$N^q(X) := \mathcal{Z}^q_{\text{num}}(X) = \mathcal{Z}^q(X)/\{\text{equivalencia numérica}\}.$$

1.3. Cohomologías de Weil

Sea K un campo de característica cero. Denotemos por $\mathbf{GrVec}_K$ a la $\otimes$-categoría rígida de K-espacios vectoriales $\mathbb{Z}$-graduados de dimensión finita, donde la conmutatividad está dada por la regla de signos de Koszul. En esta sección recolectamos algunos resultados importantes, sin demostración, que se usarán en las secciones siguientes (S. Kleiman, [21]) y (A. De Jong, [9]).

Definición 1.3.1 Una **teoría de cohomología de Weil** consiste de:

D1) Un funtor contravariante:

$$H^* : \mathcal{P}(k) \longrightarrow \mathbf{GrVec}_K$$

dado por $X \mapsto \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n(X)$. El producto de $\alpha, \beta \in H^*(X)$ se denota como $\alpha \cup \beta$ y se le llama **producto copa**[3].

D2) Existe un K-espacio vectorial 1-dimensional $K(-1) := H^2(\mathbb{P}^1)$, el cual nos define a la **torcedura de Tate**:

$$(-r) := - \otimes H^2(\mathbb{P}^1)^{\otimes r} : \mathbf{GrVec}_K \longrightarrow \mathbf{GrVec}_K$$

dada de la siguiente forma. Para un K-espacio vectorial $V \in \mathbf{GrVec}_K$ y $r \in \mathbb{Z}$, definimos $V(-r) := V \otimes_K H^2(\mathbb{P}^1)^{\otimes r}$.

[2]Esto se cumple dado que push-forward de morfismos propios factorizan a través de grupos de Chow (W. Fulton [14], Teorema 1.4).

[3]Recordemos que **conmutatividad graduada** quiere decir: $\alpha \cup \beta = (-1)^{\delta\alpha\cdot\delta\beta}\beta \cup \alpha$, donde $\delta\alpha$ (resp. $\delta\beta$) es el grado del elemento homogéneo α (resp. β).

D3) Para toda variedad proyectiva y lisa X pura de dimensión d_X, existe un **morfismo de traza** $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_X : H^{2d_X}(X)(d_X) \to K$.

D4) Para cada $X \in \mathcal{P}(k)$ y toda subvariedad irreducible Z de codimensión q, existe una **clase fundamental** $\mathrm{cl}_X(Z) \in H^{2q}(X)(q)$.

Estos datos satisfacen las siguientes propiedades:

W1) Cada $H^i(X)$ es un K-espacio vectorial de dimensión finita. En el caso que $i \notin \{0, \ldots, 2d_X\}$, se tiene que $H^i(X) = 0$.

W2) **(Fórmula de Künneth)** Dadas dos variedades $X, Y \in \mathcal{P}(k)$. Las proyecciones $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ y $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ inducen un homomorfismo de K-álgebras:

$$H^*(X) \otimes_K H^*(Y) \;\to\; H^*(X \times Y); \quad \alpha \otimes \beta \;\mapsto\; \mathrm{pr}_X^*(\alpha) \cup \mathrm{pr}_Y^*(\beta)$$

el cual es un isomorfismo.

W3) **(Dualidad de Poincaré)** Para toda variedad proyectiva, lisa y conexa X, el morfismo de traza $\mathrm{Tr} : H^{2d_X}(X)(d_X) \to K$ es un isomorfismo. Para toda $0 \le i \le 2d_X$, el producto copa induce un apareamiento:

$$\langle\ ,\ \rangle : H^i(X) \times H^{2d_X - i}(X)(d_X) \;\to\; K; \quad (\alpha, \beta) \mapsto \mathrm{Tr}_X(\alpha \cup \beta)$$

el cual es un apareamiento perfecto.

W4) Para X, Y dos variedades proyectivas y lisas, el morfismo de traza $\mathrm{Tr}_{X \times Y} : H^{2d_X + 2d_Y}(X \times Y)(d_X + d_Y) \to K$ satisface que:

$$\mathrm{Tr}_{X \times Y}(\mathrm{pr}_X^*(\alpha) \cup \mathrm{pr}_Y^*(\beta)) = \mathrm{Tr}_X(\alpha)\ \mathrm{Tr}_Y(\beta),$$

donde $\alpha \in H^{2d_X}(X)(d_X)$ y $\beta \in H^{2d_Y}(Y)(d_Y)$. Esta propiedad se puede escribir como $\mathrm{Tr}_{X \times Y} = \mathrm{Tr}_X \otimes \mathrm{Tr}_Y$, dado que $\alpha \otimes \beta = \mathrm{pr}_X^*(\alpha) \cup \mathrm{pr}_Y^*(\beta)$.

Observaciones 1.3.2 a) La traza $\mathrm{Tr}_{\mathrm{Spec}(k)}$ establece el siguiente isomorfismo: $H^*(\mathrm{Spec}\ k) = H^0(\mathrm{Spec}\ k) \cong K$.

b) **Push-forward en cohomología.** Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{P}(k)$. Entonces tenemos $f^* := H^*(f) : H^*(Y) \to H^*(X)$, dualidad de Poincaré asocia a f^* un morfismo:

$$f_* : H^*(X)(d_X) \;\to\; H^{*+2r}(Y)(r), \qquad (r = d_Y - d_X)$$

caracterizado por la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
H^{2d_X-i}(X)(d_X) \times H^i(X) \arrow[r] \arrow[d, phantom] & H^{2d_X}(X)(d_X) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_X"] \arrow[d, "f_*"] & K \arrow[d, equal] \\
H^{2d_X-i}(Y)(d_Y) \times H^{2r+i}(Y) \arrow[r] \arrow[u, "f^*"] & H^{2d_Y}(Y)(d_Y) \arrow[r, "\mathrm{Tr}_Y"] & K
\end{tikzcd}$$

es decir, dada $\alpha \in H^i(X)$, el **push-forward** de α se define como el único elemento $f_*(\alpha) \in H^{2r+i}(Y)(d_Y - d_X)$ tal que:

$$\mathrm{Tr}_X\big(\alpha \cup f^*(\beta)\big) = \mathrm{Tr}_Y\big(f_*(\alpha) \cup \beta\big)$$

para toda $\beta \in H^{2d_X-i}(Y)(d_X)$. En el mismo diagrama, estos dos morfismos se relacionan mediante la **fórmula de proyección**:

$$\boxed{f_*(f^*(\beta) \cup \alpha) = \beta \cup f_*(\alpha).}$$

c) Si $X \in \mathcal{P}(k)$ y $\mathbf{p} : X \to \mathrm{Spec}(k)$ el morfismo estructural, entonces el morfismo de traza coincide con el siguiente push-forward:

$$\mathrm{Tr}_X : H^{2d}(X)(d_X) \ \xrightarrow{\mathbf{p}_*}\ H^0(\mathrm{Spec}\ k) \ \xrightarrow{\cong}\ K.$$

De manera más general, para todo morfismo $f : X \to Y$ se tiene que:

$$\mathrm{Tr}_X : H^{2d_X}(X)(d_X) \ \xrightarrow{f_*}\ H^{2d_Y}(Y)(d_Y) \ \xrightarrow{\mathrm{Tr}_Y}\ K.$$

1.3.3. Dada una teoría de cohomología de Weil H. La propiedad (D4) de 1.3.1 se extiende por linealidad a un **mapeo de ciclos**:

$$\mathrm{cl}_X^q : \mathcal{Z}^q(X) \ \to\ H^{2q}(X)(q).$$

Este mapeo refleja la estructura de uno de los grupos en el otro, relacionando producto de intersección con producto copa. El mapeo de ciclos cl_X^q factoriza a través de $CH^q(X)$, y así tenemos la definición siguiente.

Definición 1.3.3 Dada una teoría de cohomología de Weil H^*, definimos el **mapeo de clases de ciclos**:

$$\mathrm{cl}_X^q = \mathrm{cl}_{X,H}^q : CH^q(X) \ \to\ H^{2q}(X)(q)$$

asociado a H de la siguiente manera. Para un ciclo $\alpha = \sum n_i Z_i$ de codimensión q en una variedad proyectiva y lisa X, sea:

$$\mathrm{cl}_X^q(\alpha) := \sum n_i \mathrm{cl}(Z_i) \in H^{2q}(X)(q).$$

Propiedades. La unidad del álgebra $H^*(X)$ es $\mathrm{cl}_X^0([X])$.

– $\mathrm{cl}_{X\times Y}$ es compatible con "productos externos":

$$\mathrm{cl}_{X\times Y}^{p+q}(\alpha\times\beta)=\mathrm{cl}_X^p(\alpha)\otimes\mathrm{cl}_Y^q(\beta).$$

– La composición de cl_X^d con el morfismo de traza Tr_X coincide con el morfismo de grado en 0-ciclos.

– Si $f: X\to Y$ es un morfismo en $\mathcal{P}(k)$, el morfismo de clases ciclos conmuta con el pull-back inducido en cohomología y en anillos de Chow:

$$\begin{array}{ccc} CH^q(Y)_F & \xrightarrow{\mathrm{cl}_Y^q} & H^{2q}(Y)(q) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ CH^q(X)_F & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^q} & H^{2q}(X)(q) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} CH^q(X)_F & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X^q} & H^{2q}(X)(q) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ CH^r(Y)_F & \xrightarrow{\mathrm{cl}_Y^r} & H^{2r}(Y)(r) \end{array}$$

es decir, $f^*\circ\mathrm{cl}_Y=\mathrm{cl}_X\circ f^*$ y $f_*\circ\mathrm{cl}_X=\mathrm{cl}_Y\circ f_*$, donde $r=q+d_Y-d_X$.

– Usando la propiedad anterior, se prueba que el mapeo de clases de ciclos es compatible con productos (producto de intersección en $CH^*(X)$ y producto copa en $H^*(X)$). En efecto, dado que $\alpha\cdot\beta=\Delta^*(\alpha\times\beta)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}_X^{p+q}(\alpha\cdot\beta) &= \mathrm{cl}_X^{p+q}\big(\Delta^*(\alpha\times\beta)\big)=\Delta^*\big(\mathrm{cl}_X^{p+q}(\alpha\times\beta)\big)\\ &= \Delta^*\big(\mathrm{cl}_X^p(\alpha)\otimes\mathrm{cl}_X^q(\beta)\big)=\mathrm{cl}_X^p(\alpha)\cup\mathrm{cl}_X^q(\beta).\end{aligned}$$

En particular, $\mathrm{cl}_X: CH^*(X)\to H^{2*}(X)(*)$ es un homomorfismo de anillos.

Definición 1.3.4 Sea H^* una teoría de cohomología de Weil. Un ciclo $\alpha\in\mathcal{Z}^q(X)_F$ es **homologicamente trivial** ($\alpha\sim_{\mathrm{hom}}0$), si $\mathrm{cl}_X^q(\alpha)=0$.

La definición de equivalencia homológica depende (a priori) de la elección de una teoría de cohomología de Weil, $\sim_{\mathrm{hom}}$ define una relación de equivalencia adecuada en ciclos algebraicos. Denotemos por:

$$EH^*(X):=\mathcal{Z}^*(X)/\{\text{equivalencia homológica}\}$$

al anillo graduado de ciclos algebraicos módulo $\sim_{\mathrm{hom}}$.

1.3.5. Cohomologías de Weil clásicas. A principios de los años 60's Grothendiek, junto con Artin y Verdier dessarrollaron la cohomología ℓ-ádica. Desde ese momento ya existía una teoría de cohomología para cada número primo ℓ distinto de la característica p del campo base k. Por otro lado, en característica cero existian también las cohomologías clásicas de Betti y De Rham. En el caso $\mathrm{car}(k) \neq 0$, Grothendieck introdujo la cohomología cristalina como un sustituto de la cohomología ℓ-ádica en el caso $\ell = p$.

Ejemplos 1.3.5 Aquí, k es el campo base y K el campo de coeficientes:

– Sea X una variedad sobre un campo k de característica $p \geq 0$, con cerradura separable $\overline{k}$. Si $\ell \neq p$ es un primo, la **cohomología ℓ-ádica** de la variedad $X \in \mathcal{P}(k)$ es definida como la cohomología étale de $X \times_k \overline{k}$:

$$H^q_\ell(X) := H^q_{\text{ét}}(X \times_k \overline{k}, \mathbb{Q}_\ell) = \varprojlim H^q_{\text{ét}}(X \times_k \overline{k}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell.$$

La cohomología ℓ-ádica es una cohomología de Weil con coeficientes en $\mathbb{Q}_\ell$.

– Sea k un campo de característica cero junto con un encaje $k \hookrightarrow \mathbb{C}$. La **cohomología de Betti** de una variedad $X \in \mathcal{P}(k)$ es la cohomología singular de $X(\mathbb{C})$ con coeficientes en $\mathbb{Q}$:

$$H^q_B(X) := H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}).$$

Cohomología de Betti es una cohomología de Weil con coeficientes en $K = \mathbb{Q}$.

– Sea k un campo de característica cero. La **cohomología de De Rham algebraica** de una variedad X sobre k se define en términos de de la hipercohomología de Zariski del complejo de formas diferenciales de Kähler:

$$H^q_{DR}(X) := \mathbf{H}_{\text{Zar}}(X, \Omega^*_{X/k}).$$

Esta es una teoría de cohomología de Weil con coeficientes en $K = k$.

– Si k es un campo de característica $p > 0$, sea $W(k)$ el anillo de vectores de Witt y $K_{\text{Witt}} = W(k)[1/p]$ su campo de fracciones. La **cohomología cristalina** $H^*_{\text{cris}}(X) = H^*_{\text{cris}}(X/W(k)) \otimes_{W(k)} K_{\text{Witt}}$ es una teoría de cohomología de Weil con coeficientes en K_{Witt}.

De esta manera, existe una buena cantidad de teorías de cohomología, las cuales son ejemplos de lo que llamamos teoría de cohomología de Weil:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{P}(k) \arrow[dll, "H_\ell"'] \arrow[dl, "H_{DR}"] \arrow[dr, "H_B"'] \arrow[drr, "H_{\text{cris}}"] & & \\
\mathbf{GrVec}_{\mathbb{Q}_\ell} & \mathbf{GrVec}_k & & \mathbf{GrVec}_{\mathbb{Q}} & \mathbf{GrVec}_{W(k)[1/p]}.
\end{tikzcd}$$

Las cuales tienen propiedades similares, incluso en característica cero existen teoremas de comparación entre ellos:

$$\textbf{Teorema de Artin}: \quad H^q_\ell(X) \cong H^q_B(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \quad \text{si } k = \mathbb{C}.$$

$$\textbf{Teorema de De Rham}: \quad H^q_{DR}(X) \otimes_k \mathbb{C} \cong H^q_B(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \quad \text{si } k \subset \mathbb{C}.$$

1.3.6. Esta relación entre las distintas teorías de cohomología no es una casualidad, y con el fin de comprender esto, Grothendieck esperaba que existiera una *teoría de cohomología universal* para variedades algebraicas: *la teoría de motivos.* Grothendieck pensaba que de existir, esta fuera una $\otimes$-categoría $\mathbb{Q}$-lineal, abeliana y semisimple con *funtores realización* a las distintas teorías de cohomologías de Weil.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{GrVec}_{\mathbb{Q}_\ell} \\
 & & \mathbf{GrVec}_k \\
\mathcal{P}(k) \arrow[rruu, bend left, "H_\ell"] \arrow[rru, bend left, "H_{DR}"] \arrow[r] \arrow[rrd, bend right, "H_B"'] \arrow[rrdd, bend right, "H_{\mathrm{cris}}"'] & \{\text{Motivos}\} \arrow[ruu, dotted] \arrow[ru, dotted] \arrow[rd, dotted] \arrow[rdd, dotted] & \vdots \\
 & & \mathbf{GrVec}_{\mathbb{Q}} \\
 & & \mathbf{GrVec}_{W(k)[1/p]}.
\end{tikzcd}$$

1.4. Resultados y conjeturas en ciclos algebraicos

Algunos resultados sobre ciclos algebraicos y relaciones de equivalencias adecuadas definidas sobre ellos, son los siguientes:

Observaciones 1.4.1 i) Equivalencia algebraica es más fina que la equivalencia nilpotente-smash ([1], prop. 3.2.4.1 y [28], apéndice B).

ii) La equivalencia algebraica es más fina que la equivalencia homológica ([28], Lema 1.2.18).

iii) Si $\alpha \sim_{\otimes \mathrm{nil}} 0$, entonces se tiene que $\alpha \times \cdots \times \alpha \sim_{\mathrm{rac}} 0$. Luego:

$$0 = \mathrm{cl}_{X^n}(\alpha \times \cdots \times \alpha) = \underbrace{\mathrm{cl}_X(\alpha) \otimes \cdots \otimes \mathrm{cl}_X(\alpha)}_{n-\text{veces}}.$$

Por lo tanto, $\mathrm{cl}_X(\alpha) = 0$ y así se tiene que $\alpha \sim_{\mathrm{hom}} 0$.

iv) Si $\alpha \sim_{\mathrm{hom}} 0$ entonces para una cohomología de Weil H^*, se tiene que $\mathrm{cl}_X^q(\alpha) = 0$. Si $\beta \in CH^{d-q}(X)$, puesto que:

$$\mathrm{cl}_X^d(\alpha \cdot \beta) = \mathrm{cl}_X^q(\alpha) \cup \mathrm{cl}_X^{d-q}(\beta)$$

y dado que el siguiente diagrama conmuta (propiedades 1.3.3):

$$\begin{tikzcd} CH^d(X) \arrow[r, "\mathrm{cl}_X^d"] \arrow[d, "\mathrm{gr}"'] & H^{2d}(X)(d_X) \arrow[d, "\mathrm{Tr}_X"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, hook] & K \end{tikzcd}$$

se tiene que: $\mathrm{gr}(\alpha \cdot \beta) = \mathrm{Tr}_X\big(\mathrm{cl}_X^q(\alpha) \cup \mathrm{cl}_X^{d-q}(\beta)\big) = \mathrm{Tr}_X(0) = 0$. De esta manera obtenemos que $\alpha \sim_{\mathrm{num}} 0$.

En el sentido de establecer una comparación entre las distintas relaciones de equivalencias adecuadas, se tiene la siguiente relación:

$$\sim_{\mathrm{rac}} \succ \sim_{\mathrm{alg}} \succ \sim_{\otimes\mathrm{nil}} \succ \sim_{\mathrm{hom}} \succ \sim_{\mathrm{num}} \qquad \text{si } F \supset \mathbb{Q}.$$

Una importante conjetura es la siguiente, la cual forma parte del ambicioso proyecto diseñado por A. Grothendieck en los años 60's. A este programa lo bautizó con el nombre de **conjeturas estándar** (A. Grothendieck [15]).

Conjetura 1.4.2 **($D(X)$-Grothendieck)** $\mathcal{Z}^*_{\mathrm{hom}}(X)_{\mathbb{Q}} \overset{?}{=} \mathcal{Z}^*_{\mathrm{num}}(X)_{\mathbb{Q}}$: *equivalencia homológica coincide con equivalencia numérica.*

Si la conjetura estándar de tipo D se satisface, entonces equivalencia homológica es independiente de la elección de la cohomología de Weil H^*. En [35], Voevodsky conjetura lo siguiente:

Conjetura 1.4.3 **(Voevodsky)** $\sim_{\otimes\mathrm{nil}} \overset{?}{=} \sim_{\mathrm{num}}$.

Observación 1.4.4 Puesto que $\sim_{\otimes\mathrm{nil}} \succ \sim_{\mathrm{hom}}$, luego la conjetura de Voevodsky, implica la conjetura estándar (D) de Grothendieck. Recientemente en [19], B. Kahn y R. Sebastian prueban que en variedades abelianas A de dimensión menor e igual a 3, se tiene que $\mathcal{Z}^2_{\otimes\mathrm{nil}}(A)_F = \mathcal{Z}^2_{\mathrm{hom}}(A)_F$, es decir, ciclos algebraicos homologicamente triviales son nilpotentes-smash.

1.4.5. Si k es un campo algebraicamente cerrado, se cumple:

- **Teorema de Matsusaka**: $\mathrm{Div}_{\mathrm{alg}}(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{Div}_{\mathrm{num}}(X) \otimes \mathbb{Q}$.
- El **grupo de Néron-Severi**:

  $$NS(X) := \mathcal{Z}^1(X) \;/\; \{\text{equivalencia algebraica}\} = \mathrm{Div}_{\mathrm{alg}}(X)$$

  es un grupo abeliano finitamente generado.
- (**Clemens-Griffiths**) Existe una variedad proyectiva, lisa e irreducible X de dimensión 3, de tal manera que el **grupo de Griffiths**:

  $$\mathrm{Griff}^2(X) := \mathcal{Z}^2(X)_{\mathrm{hom}} \;/\; \mathcal{Z}^2(X)_{\mathrm{alg}}$$

  satisface que $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Griff}^2(X) \otimes \mathbb{Q}) = \infty$.
- Si $\mathrm{Pic}(X)$ denota el grupo de clases de isomorfismos de haces invertibles en X, entonces tenemos que:

  $$CH^1(X) \;\cong\; \mathrm{Pic}(X) \;\cong\; H^1(X, \mathcal{O}_X^*).$$

1.5. Correspondencias cohomológicas y fórmula de traza

En esta sección, fijemos una teoría de cohomología de Weil H^*.

Proposición 1.5.1 *Sean $X, Y \in \mathcal{P}(k)$ de dimensiones d_X y d_Y respectivamente, y $r \in \mathbb{Z}$. Entonces existe un isomorfismo canónico:*

$$H^{2d_X+r}(X \times Y)(d_X) \;\cong\; \bigoplus_{j \geq 0} \mathrm{Hom}_K\big(H^j(X), H^{j+r}(Y)\big).$$

Demostración. Este resultado se obtiene aplicando fórmula de Künneth y dualidad de Poincaré. De manera más explícita tenemos que:

$$\begin{aligned} H^{2d_X+r}(X \times Y)(d_X) &\cong \bigoplus H^{2d_X-j}(X)(d_X) \otimes H^{j+r}(Y) \\ &\cong \bigoplus H^j(X)^\vee \otimes H^{j+r}(Y) \\ &\cong \bigoplus \mathrm{Hom}_K\big(H^j(X), H^{j+r}(Y)\big), \end{aligned}$$

donde $(-)^\vee$ representa el dual como espacio vectorial, y todas las sumas van desde 0 hasta $2d_X$. □

Entonces, por la fórmula de Künneth y dualidad de Poincaré nos queda:

$$H^*(X \times Y)(d_X) \cong H^*(X)(d_X) \otimes H^*(Y) \cong \mathrm{Hom}_K(H^*(X), H^*(Y)),$$

donde a un elemento $\alpha = x \otimes y \in H^*(X \times Y)(d_X)$ con $x \in H^*(X)$ y $y \in H^*(Y)$, se le hace corresponder una transformación lineal α_* dada por:

$$\alpha_*(z) := \mathrm{Tr}_X(z \cup x)\ y.$$

Definición 1.5.2 Una **correspondencia cohomológica** de grado r de X a Y, es un elemento de $H^{2d_X+r}(X \times Y)(d_X)$. Si X es pura de dimensión d_X, denotamos a las correspondencias de grado r de X a Y como $\mathrm{HCorr}^r(X, Y)$.

Las correspondencias cohomológicas operan en cohomología, es decir, si $\alpha \in \mathrm{HCorr}^r(X, Y)(d_X)$ es una correspondencia, entonces se tiene:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_* : H^i(X) & \longrightarrow & H^{i+r}(Y) \\ x & \mapsto & \mathrm{pr}_{Y*}\big(\mathrm{pr}_X^*(x) \cup \alpha\big) \end{array}$$

donde pr_X y pr_Y son las proyecciones obvias. Por otra parte, si consideramos una correspondencia $\beta \in \mathrm{HCorr}^s(Y, W)(d_Y)$, entonces la fórmula:

$$\gamma := (\mathrm{pr}_{XW})_*\big((\mathrm{pr}_{XY})^*(\alpha) \cup (\mathrm{pr}_{YW})^*(\beta)\big) \in \mathrm{HCorr}^{r+s}(X, W)(d_X)$$

cumple con la propiedad $\gamma_* = \beta_* \circ \alpha_* \in \bigoplus_{j \geq 0} \mathrm{Hom}_K\big(H^j(X), H^{j+r+s}(W)\big)$.

Transposición de correspondencias. Sea $c_{XY} : X \times Y \to Y \times X$ el isomorfismo de simetría. Dualidad de Poincaré nos da el siguiente isomorfismo:

$$\begin{tikzcd} H^{2d_X+r}(X \times Y)(d_X) \arrow[r, "c_{XY*}"] \arrow[d, equal] & H^{2d_X+r}(Y \times X)(d_X) \arrow[d, equal] \\ \mathrm{HCorr}^r(X, Y) \arrow[r, "(-)^{\mathbf{t}}"] & \mathrm{HCorr}^{2d_X-2d_Y+r}(Y, X)(d_X - d_Y) \end{tikzcd}$$

el cual asigna a una correspondencia cohomológica α de X a Y de grado r, su correspondencia transpuesta $c_{XY*}(\alpha) = \alpha^{\mathbf{t}}$, la cual es una correspondencia de Y a X de grado $2d_X - 2d_Y + r$. Para α de la forma $u \otimes w \in H^{2d_X-i}(X)(d_X) \otimes H^{i+r}(Y)$ usamos la regla de signos de Koszul:

$$(u \otimes w)^{\mathbf{t}} = (-1)^{(2d_X-i)(i+r)} w \otimes u = (-1)^{i(i+r)} w \otimes u.$$

Estas descripciones nos servirán para dar la *fórmula de traza de Lefschetz*, ya que nos permiten calcular el grado de intersección entre morfismos en general, independientemente de que provengan de funciones de X a Y.

Teorema 1.5.3 (Fórmula de traza de Lefschetz) *Sean* $\alpha \in \mathrm{HCorr}^r(X,Y)$ *y* $\beta \in \mathrm{HCorr}^{-r}(Y,X)$*. Entonces se cumple que:*

$$\mathrm{Tr}_{X\times Y}(\alpha \cup \beta^{\mathbf{t}}) = \langle \alpha, \beta^{\mathbf{t}} \rangle_{X\times Y} = \sum_{j=0}^{2d_X} (-1)^j \mathrm{Tr}_j(\beta_* \circ \alpha_*|_{H^j(X)})$$

donde $\mathrm{Tr}_j(\beta_* \circ \alpha_*)$ *denota la traza del operador* $\beta_* \circ \alpha_*$ *en el espacio* $H^j(X)$*.*

Demostración. Por la fórmula de Künneth y por bilinealidad, uno puede suponer que $\alpha = u \otimes v$ y $\beta = v' \otimes u'$ con $u \in H^{2d_X - i}(X)(d_X)$, $v \in H^{i+r}(Y)$, $v' \in H^{2d_Y - i - r}(Y)(d_Y)$ y $u' \in H^i(X)$. Entonces α (resp. β) se anula fuera de $H^i(X)$ (resp. $H^{i+r}(Y)$) y para $x \in H^i(X)$, $y \in H^{i+r}(Y)$ se tiene que:

$$\alpha_*(x) = \langle x, u \rangle \; w \qquad \text{y} \qquad \beta_*(y) = \langle y, w' \rangle \; u'.$$

De esta manera $\beta_* \circ \alpha_* = \langle x, u \rangle \langle w, w' \rangle u'$, luego $\mathrm{Tr}(\beta_* \circ \alpha_*) = \langle u', u \rangle \langle w, w' \rangle$. Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \beta^{\mathbf{t}} \rangle_{X\times Y} &= (-1)^{i(i+r)} \langle u \otimes v, u' \otimes v' \rangle_{X\times Y} \\
&= (-1)^{i(i+r)} \mathrm{Tr}_{X\times Y}(u \otimes v \cup u' \otimes v') \\
&= \mathrm{Tr}_{X\times Y}(u \cup u' \otimes v \cup v') \\
&= \langle u, u' \rangle \langle v, v' \rangle = (-1)^{i(2d_X - i)} \langle u', u \rangle \langle v, v' \rangle \\
&= (-1)\mathrm{Tr}(\beta_* \circ \alpha_*).
\end{aligned}$$

De esta manera queda probada la fórmula de traza de Lefschetz. □

Capítulo 2

La construcción de los motivos puros

Partiendo de la categoría $\mathcal{P}(k)$, tres pasos son necesarios para llegar a la definición de motivos puros. A saber, los procesos de "linealización", "pseudo-abelianización" e "inversión". Considerar a los motivos puros como triples se debe principalmente a U. Jannsen en [17]. Esta definición es equivalente a las consideradas por M. Demazure [11], S. Kleiman [20] y Yu I. Manin [24].

2.1. Categoría de correspondencias

El primer paso en la definición de los motivos puros, es la construcción de la categoría aditiva $\mathbf{Corr}_{\sim}(k)_F$. Esta construcción consiste en enriquecer el conjunto de morfismos entre dos variedades X, Y; considerando para ello clases de ciclos algebraicos en $X \times Y$.

Definición 2.1.1 Sean $X, Y \in \mathcal{P}(k)$ y $\sim$ una equivalencia adecuada. El F-módulo de **correspondencias algebraicas** entre X y Y se define como:

$$\mathrm{Corr}^*_{\sim}(X,Y)_F := \mathcal{Z}^*_{\sim}(X \times Y)_F.$$

Para $\alpha \in \mathrm{Corr}^*_{\sim}(X,Y)_F$, escribimos $\alpha : X \vdash Y$. Una correspondencia algebraica de X a Y se dice que tiene **grado** r si está en $\mathcal{Z}^{d+r}(X \times Y)_F$, con X pura de dimensión d. En el caso general, al grupo de correspondencias de grado r lo denotamos como:

$$\mathrm{Corr}^r_{\sim}(X,Y)_F = \bigoplus \mathrm{Corr}^r_{\sim}(X_i,Y)_F = \bigoplus \mathcal{Z}^{d_i+r}_{\sim}(X_i \times Y)_F,$$

donde $X = \amalg X_i$ es la descomposición de X en componentes irreducibles X_i, tales que $d_i = \dim\, X_i$. El isomorfismo de simetría $c_{X,Y} : X \times Y \to Y \times X$ induce un isomorfismo de transposición:

$$\mathrm{Corr}^r_{\sim}(X,Y)_F \;\to\; \mathrm{Corr}^{r+\dim(X)-\dim(Y)}_{\sim}(Y,X)_F; \quad \alpha \;\mapsto\; \alpha^{\mathbf{t}} := c_{X,Y*}(\alpha),$$

donde a cada correspondencia α de grado r de X a Y, le asocia su **transpuesta** $\alpha^{\mathbf{t}}$ como correspondencia de Y a X de grado $r + \dim(X) - \dim(Y)$.

Ejemplo 2.1.2 Si $f : X_d \to Y_e$ es un morfismo entre variedades proyectivas y lisas sobre k, donde X y Y son puras de dimensión d y e respectivamente. Entonces el ciclo asociado a la gráfica Γ_f resulta ser una correspondencia de X a Y de grado $e-d$, luego $\Gamma_f^{\mathbf{t}}$ es una correspondencia de Y a X de grado 0. En particular, si $X = Y$ y $f = 1_X$, entonces $\Gamma_f = \Gamma_f^{\mathbf{t}} = \Delta_X \in \mathrm{Corr}^0_\sim(X,X)_F$ es el ciclo definido por la diagonal de $X \times X$.

2.1.3. El álgebra de correspondencias. Dadas tres variedades X, Y y W en $\mathcal{P}(k)$, consideremos el diagrama de proyecciones siguiente:

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \times W \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{XY}"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{XW}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{YW}"] & \\ X \times Y & X \times W & Y \times W. \end{tikzcd}$$

Para dos correspondencias $\alpha \in \mathrm{Corr}^r_\sim(X,Y)_F$ y $\beta \in \mathrm{Corr}^s_\sim(Y,W)_F$ definimos la composición $\beta \bullet \alpha$, como la correspondencia:

$$\boxed{\beta \bullet \alpha := \mathrm{pr}_{XW*}\big(\mathrm{pr}^*_{XY}(\alpha) \cdot \mathrm{pr}^*_{YW}(\beta)\big) \in \mathrm{Corr}^{r+s}_\sim(X,W)_F.}$$

Proposición 2.1.3 *La composición $\bullet$ de correspondencias es asociativa.*

Demostración. Sean $\alpha : X \vdash Y$, $\beta : Y \vdash W$ y $\gamma : W \vdash Z$ correspondencias. En la prueba detallaremos en las proyecciones, sólo omitiremos el superíndice $XYWZ$. Notemos que tenemos el siguiente cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd} X \times Y \times W \times Z \arrow[r, "\mathrm{pr}_{XYW}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{XWZ}"'] & X \times Y \times W \arrow[d, "\mathrm{pr}^{XYW}_{XW}"] \\ X \times W \times Z \arrow[r, "\mathrm{pr}^{XWZ}_{XW}"] & X \times W. \end{tikzcd}$$

Por lo que tenemos que $(\mathrm{pr}^{XWZ}_{XW})^* \circ (\mathrm{pr}^{XYW}_{XW})_* = (\mathrm{pr}_{XWZ})_* \circ (\mathrm{pr}_{XYW})^*$. Ahora, por definición de composición tenemos que $\gamma \bullet (\beta \bullet \alpha)$ es igual a:

$$\mathrm{pr}^{XWZ}_{XZ*}\big(\mathrm{pr}^{XWZ*}_{XW}\big(\mathrm{pr}^{XYW}_{XW*}(\mathrm{pr}^{XYW*}_{XY}(\alpha) \cdot \mathrm{pr}^{XYW*}_{YW}(\beta))\big) \cdot \mathrm{pr}^{XWZ*}_{WZ}(\gamma)\big)$$

$$= \mathrm{pr}^{XWZ}_{XZ*}\big(\mathrm{pr}_{XWZ*}(\mathrm{pr}^*_{XYW}(\mathrm{pr}^{XYW*}_{XY}(\alpha) \cdot \mathrm{pr}^{XYW*}_{YW}(\beta))) \cdot \mathrm{pr}^{XWZ*}_{WZ}(\gamma)\big).$$

Puesto que pr^*_{XYW} es compatible con el producto de intersección, nos queda:

$$\mathrm{pr}^*_{XYW}(\mathrm{pr}^{XYW*}_{XY}(\alpha) \cdot \mathrm{pr}^{XYW*}_{YW}(\beta)) = \mathrm{pr}^*_{XYW}(\mathrm{pr}^{XYW*}_{XY}(\alpha)) \cdot \mathrm{pr}^*_{XYW}(\mathrm{pr}^{XYW*}_{YW}(\beta)),$$

y dada la funtorialidad del pull-back, entonces:

$$\gamma \bullet (\beta \bullet \alpha) = \mathrm{pr}^{XWZ}_{XZ*}(\mathrm{pr}_{XWZ*}(\mathrm{pr}^*_{XY}(\alpha) \cdot \mathrm{pr}^*_{YW}(\beta)) \cdot \mathrm{pr}^{XWZ*}_{WZ}(\gamma)).$$

Usando ahora la fórmula de proyección nos queda que:

$$\begin{aligned} &\mathrm{pr}_{XWZ*}(\mathrm{pr}^*_{XY}(\alpha) \cdot \mathrm{pr}^*_{YW}(\beta)) \cdot \mathrm{pr}^{XWZ*}_{WZ}(\gamma) \\ &= \mathrm{pr}_{XWZ*}\big((\mathrm{pr}^*_{XY}(\alpha) \cdot \mathrm{pr}^*_{YW}(\beta)) \cdot \mathrm{pr}^*_{XWZ}(\mathrm{pr}^{XWZ*}_{WZ}(\gamma))\big). \end{aligned}$$

Finalmente, usando la funtorialidad del push-forward y del pull-back:

$$\begin{aligned} \gamma \bullet (\beta \bullet \alpha) &= \mathrm{pr}^{XWZ}_{XZ*}(\mathrm{pr}_{XWZ*}((\mathrm{pr}^*_{XY}(\alpha) \cdot \mathrm{pr}^*_{YW}(\beta)) \cdot \mathrm{pr}^*_{XWZ}(\mathrm{pr}^{XWZ*}_{WZ}(\gamma))) \\ &= \mathrm{pr}_{XZ*}((\mathrm{pr}^*_{XY}(\alpha) \cdot \mathrm{pr}^*_{YW}(\beta)) \cdot \mathrm{pr}^*_{WZ}(\gamma)) \\ &= \mathrm{pr}_{XZ*}(\mathrm{pr}^*_{XY}(\alpha) \cdot (\mathrm{pr}^*_{YW}(\beta) \cdot \mathrm{pr}^*_{WZ}(\gamma))). \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene usando la asociatividad del producto de intersección. Un razonamiento similar para $(\gamma \bullet \beta) \bullet \alpha$ nos lleva a la misma fórmula. Con lo cual, la proposición queda probada. $\square$

Se tiene claramente que si $\alpha : X \vdash Y$, entonces $\alpha \bullet \Delta_X = \alpha = \Delta_Y \bullet \alpha$. Esta composición de correspondencias induce un homomorfismo F-bilineal:

$$\mathrm{Corr}^*_\sim(X,Y)_F \;\times\; \mathrm{Corr}^*_\sim(Y,W)_F \;\xrightarrow{\bullet}\; \mathrm{Corr}^*_\sim(X,W)_F,$$

la cual entre otras cosas también cumple con (W. Fulton [14], Prop. 16.1.1.), para $f : X \to Y$ y $g : Y \to W$, y correspondencias $\alpha : X \vdash Y$ y $\beta : Y \vdash W$:

i) $\Gamma_g \bullet \alpha = (1_X \times g)_*(\alpha)$ y $\beta \bullet \Gamma_f = (f \times 1_W)^*(\beta)$.

ii) $\Gamma_g \bullet \Gamma_f = \Gamma_{g \,\circ\, f}$.

iii) $(\beta \bullet \alpha)^{\mathbf{t}} = \alpha^{\mathbf{t}} \bullet \beta^{\mathbf{t}}$ y $(\alpha^{\mathbf{t}})^{\mathbf{t}} = \alpha$.

Observación 2.1.4 En $\mathrm{Corr}^0_\sim(X,X)_F$ la composición $\bullet$ induce una estructura de F-álgebra asociativa (en general no conmutativa), con unidad Δ_X. Este álgebra viene junto con una involución dada por la transposición $(-)^{\mathbf{t}}$.

Definición 2.1.5 Un **proyector** para X es un elemento $p \in \mathrm{Corr}^0_\sim(X,X)_F$ idempotente, es decir, $p \bullet p = p$. Dos proyectores $p, q \in \mathrm{Corr}^0_\sim(X,X)_F$ se dice que son **ortogonales** si $p \bullet q = q \bullet p = 0$.

Definición 2.1.6 Sea $\sim$ una relación de equivalencia adecuada. Definimos la **categoría de correspondencias** $\mathbf{Corr}_\sim(k)_F$, como la categoría que tiene como objetos variedades proyectivas y lisas sobre k y morfismos:

$$\mathbf{Corr}_\sim(k)_F(X,Y) := \mathrm{Corr}^0_\sim(X,Y)_F = \bigoplus \mathcal{Z}^{\dim(X_i)}_\sim(X_i \times Y)_F$$

donde la composición es la composición de correspondencias (2.1.3).

2.1.6. La clase de la diagonal Δ_X es la identidad de $X \in \mathbf{Corr}_\sim(k)_F$. Para "distinguirlos" de los objetos de $\mathcal{P}(k)$, a los objetos de la categoría de correspondencias los denotaremos como $\overline{X}$. Esta categoría es F-lineal, donde las sumas finitas están dadas por las sumas disjuntas entre variedades:

$$\overline{X} \oplus \overline{Y} := \overline{X \amalg Y},$$

si $\alpha\colon \overline{X} \to \overline{Y}$ $(\alpha\colon X \vdash Y)$ y $\beta\colon \overline{X'} \to \overline{Y'}$, definimos $\alpha \oplus \beta := (\alpha, \beta)$ como:

$$(\alpha,\beta) \in \mathrm{Corr}^*_\sim(X,X') \oplus \mathrm{Corr}^*_\sim(Y,Y') \hookrightarrow \mathrm{Corr}^*_\sim(X \amalg Y, X' \amalg Y').$$

El objeto cero (es decir, inicial y terminal a la vez) de $\mathbf{Corr}_\sim(k)_F$ es la variedad vacia. El producto $\times_k$ en $\mathcal{P}(k)$ induce una estructura tensor (monoidal simétrica) en $\mathbf{Corr}_\sim(k)_F$, de la siguiente manera:

$$\overline{X} \otimes \overline{Y} := \overline{X \times_k Y},$$

y para morfismos (correspondencias) $\alpha : \overline{X} \to \overline{Y}$ y $\beta : \overline{X'} \to \overline{Y'}$ definimos:

$$\boxed{\alpha \otimes \beta := \mathrm{pr}^*_{XY}(\alpha) \cdot \mathrm{pr}^*_{X'Y'}(\beta)}$$

para las siguientes proyecciones:

$$\mathrm{pr}_{XY}\colon (X \times Y) \times (X' \times Y') \to X \times Y$$

$$\mathrm{pr}_{X'Y'}\colon (X \times Y) \times (X' \times Y') \to X' \times Y'.$$

La $\otimes$-unidad en la categoría $\mathbf{Corr}_\sim(k)_F$ es $\mathbf{1} = \overline{\mathrm{Spec}(k)}$. La categoría $\mathcal{P}(k)$ se encaja de manera fiel en la categoría de correspondencias vía el funtor contravariante, el cual es la identidad en objetos:

$$\mathfrak{h}_\sim\colon \mathcal{P}(k) \longrightarrow \mathbf{Corr}_\sim(k)_F$$

y a $f\colon X \to Y$ en $\mathcal{P}(k)$, le asocia $\Gamma^{\mathbf{t}}_f\colon Y \vdash X$. La cual es una correspondencia de grado cero, y es claro que $\Gamma_{g\circ f} = \Gamma_g \bullet \Gamma_f$. Este es un $\otimes$-funtor, y se sigue del hecho de que $(\alpha \otimes \beta)^{\mathbf{t}} = \alpha^{\mathbf{t}} \otimes \beta^{\mathbf{t}}$ y además que $\Gamma_{f\times g} = \Gamma_f \otimes \Gamma_g$.

Observación 2.1.7 Existen objetos no-isomorfos en $\mathcal{P}(k)$ los cuales son isomorfos en $\mathbf{Corr}_{\sim}(k)_F$ bajo el funtor $\mathfrak{h}_{\sim}$. A saber, sobre $k = \mathbb{C}$, una superficie de Enriques S no es biracional a su fibración Jacobiana J, ya que este último es racional, sin embargo si $\sim=\sim_{\mathrm{rac}}$, $\mathfrak{h}_{\mathrm{rac}}(S) \cong \mathfrak{h}_{\mathrm{rac}}(J)$ en $\mathbf{Corr}_{\mathrm{rac}}(\mathbb{C})_{\mathbb{Z}[1/2]}$ como se puede ver en (K. Coombes, [5]).

El siguiente resultado se sigue de manera similar a la proposición 2.1.3, siempre usando la fórmula de proyección.

Proposición 2.1.8 (Manin, [24]) *Dadas correspondencias* $\alpha_1 : X_1 \vdash Y_1$, $\alpha_2 : X_2 \vdash Y_2$, $\beta_1 : Y_1 \vdash W_1$ *y* $\beta_1 : Y_2 \vdash W_2$. *Entonces:*

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2) \bullet (\beta_1 \otimes \beta_2) = (\alpha_1 \bullet \beta_1) \otimes (\alpha_2 \bullet \beta_2).$$

2.1.9. La acción de correspondencias en ciclos. Sea $\alpha \in \mathrm{Corr}^*_{\sim}(X,Y)_F$. Para $\gamma \in \mathcal{Z}^*_{\sim}(X)_F$ y $\xi \in \mathcal{Z}^*_{\sim}(Y)_F$, definimos:

$$\alpha_*\colon \mathcal{Z}^*_{\sim}(X)_F \to \mathcal{Z}^*_{\sim}(Y)_F; \quad \alpha_*(\gamma) := \mathrm{pr}_{Y*}\big(\alpha \cdot \mathrm{pr}^*_X(\gamma)\big) \in \mathcal{Z}^*_{\sim}(Y)_F.$$

$$\alpha^*\colon \mathcal{Z}^*_{\sim}(Y)_F \to \mathcal{Z}^*_{\sim}(X)_F; \quad \alpha^*(\xi) := \mathrm{pr}_{X*}\big(\alpha \cdot \mathrm{pr}^*_Y(\xi)\big) \in \mathcal{Z}^*_{\sim}(X)_F.$$

Como casos especiales de esta construcción, tenemos que si $f\colon X \to Y$ es un morfismo entre variedades proyectivas y lisas, entonces se tiene que $f_* = (\Gamma_f)_*$ y también $f^* = (\Gamma_f)^* = (\Gamma^{\mathbf{t}}_f)_*$.

Lema 2.1.9 *Si* $\alpha\colon X \vdash Y$ *y* $\beta\colon Y \vdash Z$. *Entonces se tienen las siguientes compatibilidades:*

$$(\beta \bullet \alpha)_* = \beta_* \circ \alpha_*, \quad (\beta \bullet \alpha)^* = \alpha^* \circ \beta^*, \quad (\alpha^{\mathbf{t}})_* = \alpha^*.$$

Demostración. Sea $\gamma \in \mathcal{Z}^*_{\sim}(X)_F = \mathcal{Z}^*_{\sim}(\mathrm{Spec}(k) \times X)_F$, entonces en la acción que induce α en las clases de ciclos, podemos identificar a $\alpha_*(\gamma)$ con $\alpha \bullet \gamma \in \mathcal{Z}^*_{\sim}(Y)_F = \mathcal{Z}^*_{\sim}(\mathrm{Spec}(k) \times Y)_F$. Luego tenemos que:

$$(\beta \bullet \alpha)_*(\gamma) = \beta \bullet \alpha \bullet \gamma = \beta \bullet (\alpha \bullet \gamma) = \beta_*(\alpha_*(\gamma)).$$

De manera similar a lo anterior, podemos identificar a $\alpha^*(\xi)$ con $\xi \bullet \alpha$, para $\xi \in \mathcal{Z}^*_{\sim}(Y)_F = \mathcal{Z}^*_{\sim}(Y \times \mathrm{Spec}\ k)_F$. Por lo tanto se obtienen las primeras dos propiedades. Para la tercera, observemos que si $\gamma \in \mathcal{Z}^q_{\sim}(X)_F = \mathcal{Z}^q_{\sim}(\mathrm{Spec}(k) \times X)_F = \mathrm{Corr}^q_{\sim}(\mathrm{Spec}(k), X)_F$, luego la transpuesta de γ resulta ser una correspondencia de X a $\mathrm{Spec}(k)$ de grado $q - d$. Por lo tanto, $\gamma^{\mathbf{t}} \in \mathcal{Z}^q_{\sim}(X \times \mathrm{Spec}\ k)_F$ y no es mas que γ. Luego tenemos que:

$$\alpha^*(\gamma) = (\alpha^*(\gamma))^{\mathbf{t}} = (\gamma \bullet \alpha)^{\mathbf{t}} = \alpha^{\mathbf{t}} \bullet \gamma = (\alpha^{\mathbf{t}})_*(\gamma).$$

En particular $\mathrm{Corr}_\sim(X,X)_F \to \mathrm{End}(\mathcal{Z}^*_\sim(X)_F)\colon \alpha \ \mapsto \ \alpha_*$ es un homomorfismo de anillos. □

Un resultado muy útil en correspondencias es (W. Fulton, [14] p. 306):

Lema 2.1.10 (Lieberman) *Sean* $\gamma \in \mathrm{Corr}^*_\sim(X,Y)_F$, $\alpha \in \mathrm{Corr}^*_\sim(X,X')_F$ *y* $\beta \in \mathrm{Corr}^*_\sim(Y,Y')_F$. *Entonces, en el diagrama:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto, "\gamma"] \arrow[d, mapsto, "\alpha"] \arrow[d, bend right=60, "\alpha^{\mathbf{t}}"'] & Y \arrow[d, mapsto, "\beta"] \\ X' \arrow[r, mapsto, dashed] & Y' \end{tikzcd}$$

se tiene que $(\alpha\times\beta)_*(\gamma) = \beta \bullet \gamma \bullet \alpha^{\mathbf{t}} \in \mathrm{Corr}^*_\sim(X',Y')_F$.

Demostración. Consideremos las siguientes proyecciones:

$$X\times Y \xleftarrow{\mathrm{pr}^{XX'YY'}_{XY}} X\times X'\times Y\times Y' \xrightarrow{\mathrm{pr}^{XX'YY'}_{X'Y'}} X'\times Y' .$$

Dado que $\alpha\times\beta \in \mathrm{Corr}^*_\sim(X\times Y, X'\times Y')_F$, entonces por definición:

$$(\alpha\times\beta)_*(\gamma) = (\mathrm{pr}^{XX'YY'}_{X'Y'})_*\big((\alpha\times\beta)\cdot(\mathrm{pr}^{XX'YY'}_{XY})^*(\gamma)\big).$$

El isomorfismo de simetría: $X\times X'\times Y\times Y' \xrightarrow{\cong} X'\times X\times Y\times Y'$, nos permite considerar a $\alpha^{\mathbf{t}}$ en vez de α y nos da la siguiente expresión:

$$(\alpha\times\beta)_*(\gamma) = (\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{X'Y'})_*\big((\alpha^{\mathbf{t}}\times\beta)\cdot(\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{XY})^*(\gamma)\big),$$

puesto que $\alpha^{\mathbf{t}}\times\beta = (\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{X'X})^*(\alpha^{\mathbf{t}})\cdot(\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{YY'})^*(\beta)$. Entonces nos queda:

$$(\alpha\times\beta)_*(\gamma) = (\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{X'Y'})_*\big((\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{X'X})^*(\alpha^{\mathbf{t}})\cdot(\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{YY'})^*(\beta)\cdot(\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{XY})^*(\gamma)\big).$$

Consideremos ahora el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X'\times X\times Y\times Y' \arrow[r, "\mathrm{pr}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{X'Y'}"'] & X'\times Y\times Y' \arrow[dl, "\mathrm{pr}^{X'YY'}_{X'Y'}"] \\ X'\times Y' & \end{tikzcd}$$

donde $\mathrm{pr} = \mathrm{pr}^{X'XYY'}_{X'YY'} = \mathrm{p}^{X'XY}_{X'Y}\times 1_{Y'}$. De la última igualdad obtenemos una nueva expresión para $(\alpha\times\beta)_*(\gamma)$, de la siguiente forma:

$$(\mathrm{pr}^{X'YY'}_{X'Y'})_*\big(\mathrm{pr}_*[(\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{X'X})^*(\alpha^{\mathbf{t}})\cdot(\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{XY})^*(\gamma)\cdot\mathrm{pr}^*(\mathrm{pr}^{X'YY'*}_{YY'}(\beta))]\big).$$

Aplicando la fórmula de proyección, nos queda entonces que la expresión $\mathrm{pr}_*[(\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{X'X})^*(\alpha^{\mathbf{t}}) \cdot (\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{XY})^*(\gamma) \cdot \mathrm{pr}^*(\mathrm{pr}^{X'YY'*}_{YY'}(\beta))]$ es igual a:

$$\mathrm{pr}_*[(\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{X'X})^*(\alpha^{\mathbf{t}}) \cdot (\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{XY})^*(\gamma)] \cdot \mathrm{pr}^{X'YY'*}_{YY'}(\beta),$$

y como $\mathrm{pr} = \mathrm{pr}^{X'XY}_{X'Y} \times 1_{Y'}$, luego:

$$\mathrm{pr}_*[(\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{X'X})^*(\alpha^{\mathbf{t}}) \cdot (\mathrm{pr}^{X'XYY'}_{XY})^*(\gamma)] = \mathrm{pr}^{X'YY'*}_{X'Y}(\gamma \bullet \alpha^{\mathbf{t}}).$$

De esta manera resulta que:

$$(\mathrm{pr}^{X'YY'}_{X'Y'})_*\Big(\mathrm{pr}^{X'YY'*}_{X'Y}(\gamma \bullet \alpha^{\mathbf{t}}) \cdot \mathrm{pr}^{X'YY'*}_{YY'}(\beta)\Big) = \beta \bullet \gamma \bullet \alpha^{\mathbf{t}}.$$

Por lo tanto $(\alpha \times \beta)_*(\gamma) = \beta \bullet \gamma \bullet \alpha^{\mathbf{t}}$, y la fórmula queda probada. □

2.1.11. La acción de correspondencias en cohomología. Dada una correspondencia $\alpha \in \mathrm{Corr}^r_\sim(X,Y)_F$ con $\sim$ más fina o igual a la equivalencia homológica. Entonces α opera en cohomologías de Weil como:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_*\colon H^*(X) & \to & H^{*+2r}(Y)(r) \\ x & \mapsto & \mathrm{pr}_{Y*}\big(\mathrm{pr}_X^*(x) \cup \mathrm{cl}_{X\times Y}(\alpha)\big) \end{array}$$

donde pr_X y pr_Y son las proyecciones de $X \times Y$ sobre X y Y respectivamente.

Ejemplo 2.1.11 Si $f\colon X \to Y$ es un morfismo en $\mathcal{P}(k)$ con X pura de dimensión d_X, para $\Gamma^{\mathbf{t}}_f \in \mathrm{Corr}^0_\sim(Y,X)_F$ se tiene que:

$$f^* := (\Gamma^{\mathbf{t}}_f)_*\colon H^*(Y) \ \to \ H^*(X).$$

Si Y es pura de dimensión d_Y, para $\Gamma_f \in \mathrm{Corr}^{d_Y - d_X}_\sim(X,Y)_F$ nos queda:

$$f_* := (\Gamma_f)_*\colon H^*(X) \ \to \ H^{*+2(d_Y-d_X)}(X)(d_Y - d_X).$$

Para dos correspondencias $\alpha \in \mathrm{Corr}^r_\sim(X,Y)_F$ y $\beta \in \mathrm{Corr}^s_\sim(Y,W)_F$, se cumple que $(\beta \bullet \alpha)_* = \beta_* \circ \alpha_*$. Equivalencia numérica opera en cohomología siempre y cuando se cumpla la conjetura estándar de tipo D (1.4.2).

2.1.12. Correspondencias algebraicas y cohomológicas. Correspondencias algebraicas módulo equivalencia racional se relacionan con correspondencias cohomológicas vía el mapeo de clases de ciclos:

$$\begin{array}{ccc}
CH^{d_X+r}(X\times Y)_F & \xrightarrow{\mathrm{cl}} & H^{2d_X+2r}(X\times Y)(r) \\
\Vert & & \Vert \\
\mathrm{Corr}^r_{\mathrm{rac}}(X,Y)_F & \xrightarrow{\mathrm{cl}} & \mathrm{HCorr}^{2r}(X,Y)(r) \\
{\scriptstyle (-)^{\mathbf{t}}}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle (-)^{\mathbf{t}}} \\
\mathrm{Corr}^{r+d_X-d_Y}_{\mathrm{rac}}(Y,X) & \xrightarrow{\mathrm{cl}} & \mathrm{HCorr}^r(Y,X)
\end{array}$$

el cual es estable bajo la composición de correspondecias.

Lema 2.1.12 *Si α es una correspondencia algebraica:* $\mathrm{cl}(\alpha^{\mathbf{t}}) = (\mathrm{cl}(\alpha))^{\mathbf{t}}$.

2.1.12. La conjetura de Künneth. Sea H^* una teoría de cohomología de Weil, con mapeo de ciclos cl_H. Para $X \in \mathcal{P}(k)$ irreducible de dimensión d, por la fórmula de Künneth tenemos que:

$$H^{2d}(X\times X) \cong \bigoplus_{i=0}^{2d} H^{2d-i}(X)\otimes H^i(X),$$

por dualidad de Poincaré y álgebra lineal tenemos $2d+1$ clases de cohomología $\pi^i_H \in H^{2d}(X\times X) \cong \bigoplus_{j\geq 0}\mathrm{Hom}_K(H^j(X), H^j(X))$ con $i = 0,\ldots,2d$; llamados **componentes de Künneth** de la diagonal. De esta forma, π^i_H induce una i-ésima proyección $H^* \twoheadrightarrow H^i(X) \hookrightarrow H^*(X)$ y además:

$$\mathrm{cl}_{X\times X}(\Delta_X) = \pi^0_H + \pi^1_H + \cdots + \pi^{2d-1}_H + \pi^{2d}_H.$$

La **conjetura estándar de tipo** $C(X)$ establece que “las clases de cohomología π^i_H son algebraicas”, es decir, existen ciclos algebraicos $\pi_i \in CH^d(X\times X)$ (los cuales dependen de la elección de la cohomología de Weil H^*) tales que $\mathrm{cl}(\pi_i) = \pi^i_H$ para $i = 0,\ldots,2d$. La conjetura de Künneth es estable bajo productos, es decir, $C(X)$ y $C(Y)$ implican $C(X\times Y)$.

2.2. Motivos puros efectivos

Recordemos que una categoría aditiva $\mathcal{A}$ es **abeliana** si todo morfismo $f\colon A\to B$ en $\mathcal{A}$ tiene núcleo y conúcleo y además el morfismo canónico $\mathrm{coker}(f)\to\ker(f)$ es un isomorfismo. Sea $\mathcal{A}$ una categoría F-lineal y $A\in\mathcal{A}$. Un endomorfismo $p\in\mathrm{End}(A)$ es llamado **proyector** si es idempotente, es decir, $p \circ p = p$. Si $p \in \mathrm{End}(A)$ es un proyector, entonces $1_A - p \in \mathrm{End}(A)$ es también un proyector. En efecto, puesto que $\mathcal{A}$ es F-lineal se tiene que:

$$\begin{aligned}(1_A - p) \circ (1_A - p) &= (1_A \circ 1_A) - (1_A \circ p) - (p \circ 1_A) + (p \circ p)\\ &= 1_A - p - p + p^2\\ &= (1_A - p).\end{aligned}$$

Una categoría F-lineal $\mathcal{A}$ es **pseudo-abeliana** si para cualquier objeto $A \in \mathcal{A}$, todos los proyectores en $\mathrm{End}(A)$ tienen núcleo y el morfismo canónico:

$$\ker p \oplus \ker\,(1_A - p) \xrightarrow{\cong} A$$

es un isomorfismo[1]. Es claro que toda categoría abeliana es pseudo-abeliana. Dada una categoría F-lineal $\mathcal{A}$, es posible construir una categoría F-lineal pseudo-abeliana $\mathcal{A}^\natural$, en el cual se encaja de manera fiel y pleno vía el funtor:

$$\natural\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^\natural$$

el cual es universal en el sentido que dado cualquier funtor $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría pseudo-abeliana, existe un funtor F-lineal $\mathcal{G}\colon \mathcal{A}^\natural \to \mathcal{C}$ de tal manera que el funtor $\mathcal{F}$ y el funtor composición $\mathcal{G} \circ \natural$ son equivalentes. La categoría $\mathcal{A}^\natural$ se obtiene añadiendo formalmente núcleos de endomorfismos idempotentes en $\mathcal{A}$. Los objetos de $\mathcal{A}^\natural$ son entonces parejas de la forma (A, p) con $A \in \mathcal{A}$ y $p \in \mathcal{A}(A, A)$ un endomorfismo idempotente. El F-módulo de morfismos de (A, p) a (A', p') se define como:

$$\mathcal{A}^\natural\big((A,p),(A',p')\big) := p' \circ \mathcal{A}(A, A') \circ p.$$

La composición de morfismos es inducida por la composición de morfismos en $\mathcal{A}$. La categoría que se obtiene es pseudo-abeliana y el funtor dado por:

$$\natural\colon A \mapsto (A, 1_A)$$

es un encaje fiel y pleno, y satisface la propiedad universal anterior. A la categoría $\mathcal{A}^\natural$ se le conoce comunmente como la **envoltura pseudo-abeliana**[2] de $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ tiene una estructura tensor, también lo hereda $\mathcal{A}^\natural$.

2.2.1. La categoría $\mathbf{Corr}_\sim(k)_F$ aunque es F-lineal, dista mucho de ser una categoría abeliana. En particular, no todos los morfismos idempotentes en

[1] Si $\mathcal{A}$ es una categoría F-lineal, pseudo-abeliana y A un objeto de $\mathcal{A}$, entonces todo proyector p de A tienen imagen, de hecho $\mathrm{Im}(p) \cong \ker(1_A - p)$ ([4], Cor. A.1.).

[2] También se le llama **completación idempotente** o **envoltura de Karoubi** de $\mathcal{A}$.

$\mathbf{Corr}_\sim(k)_F$ corresponden a una descomposición en suma directa del objeto subyacente. La siguiente construcción se obtiene a partir de la categoría $\mathbf{Corr}_\sim(k)_F$ añadiendo formalmente núcleos de idempotentes.

Definición 2.2.1 La categoría de **motivos efectivos** $\mathcal{M}^{\text{eff}}_\sim(k)_F$ se obtiene de la categoría $\mathbf{Corr}_\sim(k)_F$, considerando su envoltura pseudo-abeliana:

$$\boxed{\big(\mathbf{Corr}_\sim(k)_F\big)^\natural := \mathcal{M}^{\text{eff}}_\sim(k)_F.}$$

En este sentido, la categoría $\mathcal{M}^{\text{eff}}_\sim(k)_F$ consiste de parejas (X,p) con $X \in \mathcal{P}(k)$ y $p \in \text{Corr}^0_\sim(X,X)_F$ un proyector. Los morfismos (X,p) a (Y,q) son de la forma $f = q \bullet f' \bullet p$ con $f' \in \text{Corr}^0_\sim(X,Y)_F$. La composición está dada por la composición de correspondencias. Los morfismos de $\mathcal{M}^{\text{eff}}_\sim(k)_F$ tienen una descripción alternativa, dada de la siguiente manera para $f \in \text{Corr}^0_\sim(X,Y)_F$:

$$\mathcal{M}^{\text{eff}}_\sim(k)_F\big((X,p),(Y,q)\big) := \{f \mid f \bullet p = q \bullet f\} \ / \ \{f \mid f \bullet p = q \bullet f = 0\}.$$

La categoría $\mathcal{M}^{\text{eff}}_\sim(k)_F$ tiene también una estructura F-lineal, donde la suma directa está dada como en la definición (2.1.6). De la misma manera tiene una estructura tensor dada también como en (2.1.6). En resumen:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}(k)^{\text{op}} & \longrightarrow & \mathbf{Corr}_\sim(k)_F & \xrightarrow{\natural} & \mathcal{M}^{\text{eff}}_\sim(k)_F \\ X & \mapsto & \overline{X} & \mapsto & (X,\Delta_X) \\ f\colon X \to Y & \mapsto & \Gamma^{\mathbf{t}}_f\colon Y \vdash X & & \end{array}$$

son $\otimes$-funtores, donde $\natural$ es fiel y pleno. Sin embargo, el funtor composición $\mathfrak{h}_{\text{rac}}\colon \mathcal{P}(k) \to \mathcal{M}^{\text{eff}}_{\text{rac}}(k)_F$ no es conservativo (inyectivo en objetos).

2.2.2. Motivo de Lefschetz efectivo. Sea $X \in \mathcal{P}(k)$ con un punto racional $e : \text{Spec}(k) \to X$, y con morfismo estructural $\mathbf{p} : X \to \text{Spec}(k)$. Entonces $c := \mathbf{p} \circ e$ es un endomorfismo idempotente en X, luego c^* tiene núcleo en $\mathcal{M}^{\text{eff}}_\sim(k)_F$, el cual se descompone como sumando directo. Este es el llamado **motivo reducido** $\widehat{\mathfrak{h}}_\sim(X)$ (Y. André [1], 4.1.2.1.), y no depende de la elección de e (salvo isomorfismos). Entonces se tiene la siguiente descomposición $\mathfrak{h}_\sim(X) \cong \mathfrak{h}_\sim(\text{Spec } k) \oplus \widehat{\mathfrak{h}}_\sim(X)$. En el caso de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$, nos queda una descomposición de la forma $\mathfrak{h}_\sim(\mathbb{P}^1) \cong \mathfrak{h}_\sim(\text{Spec } k) \oplus \widehat{\mathfrak{h}}_\sim(\mathbb{P}^1)$. Al motivo $\widehat{\mathfrak{h}}_\sim(\mathbb{P}^1) := \mathbb{L}$ se le llama **motivo de Lefschetz** ([1], 4.1.5).

Para todo motivo $M \in \mathcal{M}_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k)_F$ y todo entero $r \geq 0$, escribimos:

$$M(-r) := M \otimes \mathbb{L}^{\otimes r}.$$

Proposición 2.2.2 *El funtor* $-\otimes \mathbb{L} : \mathcal{M}_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k)_F \to \mathcal{M}_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k)_F$ *es un funtor fiel y pleno, es decir, para cualesquiera* $M, N \in \mathcal{M}_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k)_F$*, el mapeo* $\mathcal{M}_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k)_F(M,N) \to \mathcal{M}_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k)_F(M \otimes \mathbb{L}, N \otimes \mathbb{L})$ *es una biyección.*

En otras palabras, lo que la proposición anterior quiere decir es que $\mathbb{L}$ es un objeto **quasi-invertible**. Dada una $\otimes$-categoría $\mathcal{A}$ y objeto pseudo-invertible $\mathbb{L}$ en $\mathcal{A}$ tal que la permutación $(1,2,3)$ actúa como la identidad en $\mathbb{L}^{\otimes 3}$, entonces existe una $\otimes$-categoría $\mathcal{A}[\mathbb{L}^{-1}]$ y un $\otimes$-funtor entre categorías:

$$\iota : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[\mathbb{L}^{-1}]$$

el cual es universal para funtores de $\otimes$-categorías de $\mathcal{A}$ que envien a $\mathbb{L}$ a un objeto invertible. De nuevo, $\iota : \mathcal{A} \to \mathcal{A}[\mathbb{L}^{-1}]$ puede ser descrito facilmente como sigue. Objetos de $\mathcal{A}[\mathbb{L}^{-1}]$ son parejas de la forma (A, m), donde $A \in \mathcal{A}$ y $m \in \mathbb{Z}$. El conjunto de morfismos entre (A, m) y (A', m') es descrito como:

$$\varinjlim_{k > -m, -m'} \mathcal{A}(A \otimes \mathbb{L}^{k+m}, A' \otimes \mathbb{L}^{k+m'}),$$

la composición es inducida por la composición en $\mathcal{A}$. Finalmente, el funtor $\iota\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}[\mathbb{L}^{-1}]$ que envía A a $(A, 0)$ y $\phi\colon A \to A'$ a $\phi\colon (A,0) \to (A',0)$; es en particular un funtor fiel y pleno.

2.3. Motivos puros

Finalmente tenemos la definición central de este trabajo. La categoría de motivos puros $\mathcal{M}_{\sim}(k)_F := \mathcal{M}_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k)_F[\mathbb{L}^{-1}]$ se obtiene añadiendo formalmente $\otimes$-inversos de $\mathbb{L}$ a $\mathcal{M}_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k)_F$. Esta definición es equivalente a la siguiente:

Definición 2.3.1 La categoría $\mathcal{M}_{\sim}(k)_F$ de **motivos puros**, consta de:

Objetos: $M = (X, p, m)$, donde:

- ◇ X es una variedad proyectiva y lisa sobre k ($\dim X = d$);
- ◇ $p \in \mathrm{Corr}_{\sim}^{0}(X, X)_F$ es un proyector;
- ◇ m un entero.

Morfismos: Dados dos motivos $M = (X, p, m)$ y $N = (Y, q, n)$ en $\mathcal{M}_{\sim}(k)_F$. El conjunto de morfismos de M a N se define como:

$$\mathcal{M}_{\sim}(k)_F(M, N) := q \bullet \mathrm{Corr}_{\sim}^{n-m}(X, Y)_F \bullet p.$$

Luego $f\colon M \to N$ es de la forma $f = q \bullet f' \bullet p$ con $f' \in \mathrm{Corr}_{\sim}^{n-m}(X, Y)_F$.

Composición: La composición de morfismos está dada por la composición de correspondencias, es decir, si $f : X \vdash Y$ y $g : Y \vdash W$, entonces:

$$g \bullet f = \mathrm{pr}_{XW*}\big(\mathrm{pr}_{XY}^*(f) \cdot \mathrm{pr}_{YW}^*(g)\big) : X \vdash W.$$

La identidad de un motivo puro $M = (X, p, m)$ es entonces:

$$\boxed{1_M = p = p \bullet \Delta_X \bullet p \in p \bullet \mathrm{Corr}_{\sim}^0(X, X)_F \bullet p.}$$

Con esto resulta que dos motivos $M = (X, p, m)$ y $N = (Y, q, n)$ son isomorfos si existen correspondencias $f : X \vdash Y$ y $g : Y \vdash X$ de grado $n - m$ y $m - n$ respectivamente. De tal manera que si:

$$f = q \bullet f' \bullet p \qquad \text{y} \qquad g = p \bullet g' \bullet q,$$

entonces:

$$g \bullet f = p \bullet g' \bullet q \bullet f' \bullet p = p \qquad \text{y} \qquad f \bullet g = q \bullet f' \bullet p \bullet g' \bullet q = q.$$

Observación 2.3.2 Del hecho de que $f = q \bullet f' \bullet p$ se tiene que:

$$q \bullet f = q^2 \bullet f' \bullet p = f = q \bullet f' \bullet p^2 = f \bullet p.$$

Es decir, los triángulos del siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f", "|"{anchor=center, pos=0}] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & Y \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

conmutan. Como en el caso de $\mathcal{M}_{\sim}^{\mathrm{eff}}(k)_F$, el conjunto de morfismos de M a N tiene una manera alternativa[3] de verse, para $f \in \mathrm{Corr}_{\sim}^{n-m}(X, Y)_F$:

$$\mathcal{M}_{\sim}(k)_F(M, N) := \{f \mid f \bullet p = q \bullet f\} \;/\; \{f \mid f \bullet p = q \bullet f = 0\}.$$

[3]Esta es la formulación original de A. Grothendieck para morfismos (Y. Manin, [24]).

En efecto, la asignación para $f \in \mathrm{Corr}^{n-m}_{\sim}(X,Y)_F$:

$$\{f \mid f \bullet p = q \bullet f\} \ \ni \ f \ \mapsto \ q \bullet f \bullet p \ \in \ q \bullet \mathrm{Corr}^{n-m}_{\sim}(X,Y)_F \bullet p$$

define un isomorfismo. Para esto, si $f \in \mathrm{Corr}^{n-m}_{\sim}(X,Y)_F$ se tiene que:

$$\begin{aligned} f \bullet p = q \bullet f \quad &\Longrightarrow \quad q \bullet f \bullet p = q \bullet q \bullet f = q \bullet f \\ q \bullet f = f \bullet p \quad &\Longrightarrow \quad q \bullet f \bullet p = f \bullet p \bullet p = f \bullet p, \end{aligned}$$

y así está bien definido. También esto prueba que las $f \in \mathrm{Corr}^{n-m}_{\sim}(X,Y)_F$ tales que $f \bullet p = q \bullet f = 0$ conforman el núcleo, puesto que $q \bullet f \bullet p = 0$. Finalmente, el mapeo es suprayectivo, puesto que $q \bullet f \bullet p$ mapea en $q^2 \bullet f \bullet p^2 = q \bullet f \bullet p$ y además:

$$\begin{aligned} q \bullet (q \bullet f \bullet p) &= q^2 \bullet f \bullet p \\ &= q \bullet f \bullet p \\ &= q \bullet f \bullet p^2 = (q \bullet f \bullet p) \bullet p. \end{aligned}$$

Nota. La construcción de los motivos puros que damos en esta sección, es la construcción clásica de A. Grothendieck. En [17], U. Jannsen introduce una construcción directa de la categoría $\mathcal{M}_{\sim}(k)_F$ como tripletas (X,p,m). La importancia de la primera construcción, es que sirve de modelo en la construcción de la *categoría triangulada de los motivos de Voevodsky* [25].

2.3.3. Para cada $X \in \mathcal{P}(k)$, tenemos un motivo puro $(X,\Delta_X,0)$. De esta manera, la asignación $X \rightsquigarrow (X,\Delta_X,0)$ define un funtor:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{\sim}\colon \qquad \mathcal{P}(k)^{\mathrm{op}} \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{M}_{\sim}(k)_F \\ f\colon X \to Y \quad &\mapsto \quad \Gamma^{\mathbf{t}}_f\colon \mathfrak{h}_{\sim}(Y) \to \mathfrak{h}_{\sim}(X) \end{aligned}$$

al cual se le conoce como **funtor de cohomología motívica**.

Para una correspondencia $\alpha \in \mathrm{Corr}^0_{\sim}(X,Y)_F$ se tiene un morfismo:

$$\alpha_* : \mathfrak{h}_{\sim}(X) \ \to \ \mathfrak{h}_{\sim}(Y),$$

dado que $\Delta_Y \bullet \alpha \bullet \Delta_X = \alpha$ y $\mathfrak{h}_{\sim}(X) = (X,\Delta_X,0)$, para toda $X \in \mathcal{P}(k)$. En particular, un ciclo $\alpha \in \mathcal{Z}^q_{\sim}(X)_F$ induce un morfismo:

$$\alpha\colon (\mathrm{Spec}\ k, \Delta_{\mathbf{p}}, 0) \ \to \ (X, \Delta_X, q)$$

ya que α se puede ver como correspondencia de $\mathrm{Spec}(k)$ a X de grado q. La construcción de los motivos puros se resume en el siguiente diagrama:

$$\mathcal{P}(k)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Corr}_{\sim}(k)_F \xrightarrow{\natural} \mathcal{M}^{\mathrm{eff}}_{\sim}(k)_F \xrightarrow{\mathbb{L}^{-1}} \mathcal{M}_{\sim}(k)_F$$

donde los últimos dos funtores son fieles y plenos, pero no esencialmente suprayectivos. En $\mathcal{M}_{\sim}(k)_F$ el conjunto de morfismos es un F-módulo y la composición es F-bilineal, de hecho $\mathcal{M}_{\sim}(k)_F$ es una categoría F-lineal; la descripción del coproducto la daremos después de introducir la estructura tensorial. Naturalmente, el objeto cero de la categoría de motivos puros $\mathcal{M}_{\sim}(k)_F$, es el motivo asociado a la variedad vacia $\mathfrak{h}_{\sim}(\emptyset)$.

Ejemplo 2.3.3 Sea X una variedad proyectiva y lisa sobre k, irreducible de dimensión d. Para cada punto k-racional[4] $e : \mathrm{Spec}(k) \to X$, los elementos $\pi_0 := e \times X$ y $\pi_{2d} := X \times e$ definen dos proyectores en $\mathrm{Corr}^0_{\sim}(X, X)_F$. Con esto tenemos definido dos motivos (A. J. Scholl, [32] 1.13), a los cuales denotaremos de la siguiente forma:

$$\mathfrak{h}^0_{\sim}(X) := (X, \pi_0, 0) \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{h}^{2d}_{\sim}(X) := (X, \pi_{2d}, 0).$$

Es importante notar, que aunque los proyectores π_0 y π_{2d} dependen de la elección de $e \in X(k)$, los motivos son únicos salvo isomorfismos.

2.3.4. Cohomología y motivos. Ahora veremos como podemos construir **funtores realización** dada una teoría de cohomología de Weil H^*. Si $\sim$ equivalencia adecuada más fina o igual a equivalencia homológica, para una cohomología de Weil H^* construimos el funtor:

$$\omega_H \colon \mathcal{M}_{\sim}(k)_F \longrightarrow \mathbf{GrVec}_K.$$

Si $M = (X, p, m) \in \mathcal{M}_{\sim}(k)_F$ es un motivo, entonces $p \in \mathrm{Corr}^0_{\sim}(X, X)_F$. Otra forma de pasar a cohomología es mediante la siguiente identificación:

$$\mathrm{Corr}^0_{\sim}(X, X)_F = CH^d_{\sim}(X \times X)_F \xrightarrow{\mathrm{cl}^d_{X\times X}} H^{2d}(X \times X).$$

Por dualidad de Poincaré y fórmula de Künneth, obtenemos que:

$$H^{2d}(X \times X) \cong \bigoplus_{i=0}^{2d} \mathrm{Hom}\big(H^i(X), H^i(X)\big)$$

Entonces el morfismo inducido en cohomología es:

$$p_* : H^i(X) \;\to\; H^i(X).$$

[4] Si X no admite k-puntos racionales, podemos considerar un 0-ciclo positivo k-racional $\mathfrak{p}$ de grado n, y luego hacemos $\pi_0 := \frac{1}{n}(\mathfrak{p} \times X)$ y $\pi_{2d} := \frac{1}{n}(X \times \mathfrak{p})$.

Definición 2.3.4 Sea H^* una cohomología de Weil y $M = (X, p, m)$ un motivo. Definimos a los grupos de cohomología de M como:

$$H^i(M) := \mathrm{Im}(p_*) \subset H^i(X),$$

y sea $H^*(M) := \bigoplus_i H^i(M)$.

Como casos especiales tenemos los ejemplos $H(X, \pi_0, 0) = H^0(X)$ y $H(X, \pi_{2d}, 0) = H^{2d}(X)$. Salvo la conjetura estándar tipo D, equivalencia numérica no admite grupos de cohomología.

2.3.5. Cambio de equivalencia adecuada. Si $\sim$ es una relación de equivalencia adecuada más fina que $\approx$, los homomorfismos suprayectivos canónicos $\mathcal{Z}^*(X)_F \twoheadrightarrow \mathcal{Z}^*_{\approx}(X)_F$ inducen un funtor pleno canónico:

$$\mathcal{M}_{\sim}(k)_F \longrightarrow \mathcal{M}_{\approx}(k)_F.$$

Conjeturalmente estos funtores son esencialmente suprayectivos (Y. André [1], 4.2.1), el problema radica justamente en levantar correspondencias idempotentes módulo $\approx$ en correspondencias idempotentes módulo $\sim$. En resumen, tenemos los siguiente funtores:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(k)^{\mathrm{op}} \arrow[d, "\mathfrak{h}_{\mathrm{rac}}"'] & & & \mathcal{M}_{\mathrm{num}}(k)_F \arrow[dd, bend left, "D(X)?"] \\
\mathcal{M}_{\mathrm{rac}}(k)_F \arrow[r] \arrow[d, "CH_F"'] & \mathcal{M}_{\mathrm{alg}}(k)_F \arrow[r] & \mathcal{M}_{\otimes\mathrm{nil}}(k)_F \arrow[r] & \mathcal{M}_{\mathrm{hom}}(k)_F \arrow[u, "\cong?"] \arrow[d, "\omega_H"'] \\
\text{Grupos de Chow} \arrow[rrr, "\mathrm{cl}"] & & & \mathbf{GrVec}_K.
\end{tikzcd}$$

2.3.6. Motivos de Chow. Para equivalencia racional, importante por ser la más fina entre todas las adecuadas, usaremos una notación especial:

$$\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F := \mathcal{M}_{\mathrm{rac}}(k)_F \quad \textbf{motivos puros de Chow}.$$

Si $\sim$ es otra equivalencia adecuada, tenemos siempre un funtor pleno:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\sim}(k)_F \\
(X, p_{\mathrm{rac}}, m) & \mapsto & (X, p_{\sim}, m).
\end{array}$$

En general estos funtores no son fieles, por ejemplo se tiene lo siguiente:

Ejemplo 2.3.5 El funtor $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F \ \to\ \mathcal{M}_{\mathrm{hom}}(k)_F$ dado por:

$$(X, p, m) \ \mapsto\ (X, p_{\mathrm{hom}}, m)$$

no es fiel. Un ciclo $\alpha \in \mathcal{Z}^q_{\mathrm{rac}}(X)_F$ es una correspondencia en $\mathrm{Corr}^q_{\mathrm{rac}}(\mathrm{Spec}\, k, X)$ y luego un morfismo $\mathbf{1} = (\mathrm{Spec}\ k, \Delta_{\mathbf{p}}, 0) \to \mathfrak{h}_{\mathrm{rac}}(X)(q) = (X, \Delta_X, q)$ en $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ y un morfismo $f\colon \mathbb{L}^{\otimes q} \to \mathfrak{h}_{\mathrm{rac}}(X)$. Si α es homologicamente trivial pero no racionalmente equivalente a cero, entonces $f \neq 0$ pero $f_{\mathrm{hom}} = 0$.

Al funtor de cohomología motívica asociado a $\sim_{\mathrm{rac}}$, $\mathfrak{h}_{\mathrm{rac}}$ lo denotamos como $\mathfrak{ch}(-)$. En el siguiente capítulo, trabajaremos sólo sobre esta categoría. Varios de los resultados que veremos pueden ser transportados sin ninguna dificultad a cualquier categoría de motivos puros $\mathcal{M}_\sim(k)_F$ en general.

Capítulo 3

Motivos puros de Chow

Este capítulo está basado principalmente en el artículo de A. J. Scholl sobre motivos de Chow (*Classical motives*, [32]). También consideramos algunas referencias de los dos textos que marcan tendencia actualmente en la teoría de motivos puros, en un aspecto aritmético el libro de Y. André [1] y en un aire más geométrico el texto de Murre-Nagel-Peters [28].

3.1. Propiedades básicas de motivos de Chow

3.1.1. La $\otimes$-estructura. El producto fibrado $\times_k$ en la categoría $\mathcal{P}(k)$ junto con las restricciones a, c, u; inducen una $\otimes$-estructura en $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$.

Definición 3.1.1 Para dos motivos puros de Chow $M = (X, p, m)$ y $N = (Y, q, n)$, definimos un producto de la siguiente manera:

$$\boxed{M \otimes N := (X \times Y, p \otimes q, m + n)}$$

donde $p \otimes q := \mathrm{pr}^*_{XX}(p) \cdot \mathrm{pr}^*_{YY}(q) \in CH^{\dim(X \times Y)}(X \times Y \times X \times Y)_F$ está dado por la definición 2.1.6. El hecho de que $p \otimes q$ es una correspondencia idempotente, se sigue de la proposición 2.1.8, puesto que:

$$(p \otimes q) \bullet (p \otimes q) = (p \bullet p) \otimes (q \bullet q) = p \otimes q.$$

Este producto también induce un bifuntor F-bilineal:

$$\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F \;\times\; \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F \xrightarrow{\otimes} \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F,$$

que en morfismos de motivos $f_i : M_i = (X_i, p_i, m_i) \to N_i = (Y_i, q_i, n_i)$ $(i = 1, 2)$ representados por los ciclos $\psi_i \in CH^*(X_i \times Y_i)_F$, está dado por:

$$f_1 \otimes f_2 := \mathrm{pr}^*_{X_1 Y_1}(\psi_1) \cdot \mathrm{pr}^*_{X_2 Y_2}(\psi_2) \in CH^*(X_1 \times X_2 \times Y_1 \times Y_2)_F$$

donde $\mathrm{pr}_{X_iY_i}$ es la proyección de $X_1 \times X_2 \times Y_1 \times Y_2$ sobre $X_i \times Y_i$ ($i = 1, 2$). De manera que $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ es una $\otimes$-categoría, la asociatividad y conmutatividad (restringidas) son heredadas de $\mathcal{P}(k)$. La $\otimes$-unidad de $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ es el motivo asociado a $\mathbf{p} = \mathrm{Spec}(k)$, conocido como el **motivo trivial**:

$$\boxed{\mathbf{1} = \mathfrak{ch}(\mathrm{Spec}\ k) := (\mathrm{Spec}\ k, \Delta_{\mathbf{p}}, 0).}$$

En el sentido de que $\mathfrak{ch}$ es en si una teoría de cohomología, existe una versión de **fórmula de Künneth** para el funtor de cohomología motívica.

Lema 3.1.2 *El funtor* $\mathfrak{ch} : \mathcal{P}(k)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ *es un* $\otimes$*-funtor.*

Demostración. La fórmula es clara, para dos variedades $X, Y \in \mathcal{P}(k)$ se cumple que:

$$\mathfrak{ch}(X \times Y) = \mathfrak{ch}(X) \otimes \mathfrak{ch}(Y),$$

en efecto, ya que $\Delta_{X \times Y} = \Delta_X \otimes \Delta_Y$. Se tiene además que el funtor $\mathfrak{ch}$ factoriza a través de la categoría $\mathbf{Corr}_{\mathrm{rac}}(k)_F$. $\square$

En términos de morfismos, tenemos lo siguiente.

Definición 3.1.3 Un morfismo de motivos $f : M \to N$ es llamado **nilpotente-smash** (1.2.5) si para algún entero $n > 0$, se tiene que:

$$f^{\otimes n} := \underbrace{f \otimes \cdots \otimes f}_{n-\text{veces}} = 0.$$

Proposición 3.1.4 *Sea* $f : M \to N$ *en* $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ *tal que* f *es nilpotente-smash de orden* n*, entonces* f *es nilpotente, es decir,* $f^n := \underbrace{f \bullet \cdots \bullet f}_{n-\text{veces}} = 0$.

Demostración. Sean $M = (X, p, m)$ y $N = (Y, q, n)$ dos motivos. Puesto que f es un morfismo de M a N, entonces está representado por un ciclo algebraico $\alpha_f \in CH^*(X \times Y)_F$. Ahora, consideremos a los siguientes morfismos $g_1, \ldots g_{n-1} : N \to M$ representados por los ciclos $\beta_i \in CH^*(Y \times X)_F$ para toda $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Consideremos las proyecciones:

$$\mathrm{pr}_i : X \times Y \times X \times Y \times \cdots \times X \times Y \ \to \ X \times Y$$

dadas por $\mathrm{pr}_i(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = (x_i, y_i)$,

$$p_i : X \times Y \times X \times Y \times \cdots \times X \times Y \ \to \ X \times Y$$

definido por $p_i(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (y_i, x_{i+1})$. También definamos:

$$P : X \times Y \times X \times Y \times \cdots \times X \times Y \;\to\; X \times Y$$

dada por $P(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (x_1, y_n)$. Puesto que:

$$f^{\otimes n} = f \otimes \cdots \otimes f = \mathrm{pr}_1^*(\alpha_f) \cdot \ldots \cdot \mathrm{pr}_n^*(\alpha_f)$$

el cual por hipótesis es cero y por definición, la composición:

$$f \;\bullet\; g_{n-1} \;\bullet\; \cdots \;\bullet\; g_1 \;\bullet\; f$$

es representado por:

$$P_*\big(\mathrm{pr}_1^*(\alpha_f) \cdot p_1^*(\beta_1) \cdot \mathrm{pr}_2^*(\alpha_f) \cdot p_2^*(\beta_2) \cdots p_{n-1}^*(\beta_{n-1}) \cdot \mathrm{pr}_n^*(\alpha_f)\big),$$

puesto que $0 = f^{\otimes n} = \mathrm{pr}_1^*(\alpha_f) \cdot \ldots \cdot \mathrm{pr}_n^*(\alpha_f)$, luego $f \bullet g_{n-1} \bullet \cdots \bullet g_1 \bullet f = 0$. La nilpotencia de f se sigue de aplicar la misma receta a $g_i = 1_M$. $\square$

3.1.5. Motivos de Tate. Otro objeto importante en la categoría de motivos de Chow es: $\mathbf{1}(-1) := (\mathrm{Spec}\ k, \Delta_{\mathbf{p}}, -1)$. A su $\otimes$-inverso lo denotamos como:

$$\boxed{\mathbb{T} := \mathbf{1}(1) = (\mathrm{Spec}\ k, \Delta_{\mathbf{p}}, 1)}$$

llamado **motivo de Tate**. Podemos también definir a los siguientes objetos:

$$\mathbf{1}(r) := \mathfrak{ch}(\mathbf{p})(r) = (\mathrm{Spec}\ k, \Delta_{\mathbf{p}}, r) = \mathbf{1}(1)^{\otimes r}$$

con $r \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{1}(1)^{\otimes r} := \underbrace{\mathbf{1}(1) \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}(1)}_{r-\text{veces}}$. Estos objetos satisfacen que:

$$\mathbf{1}(r) \otimes \mathbf{1}(s) = \mathbf{1}(r+s) = \mathbf{1}(s) \otimes \mathbf{1}(r),$$

luego son todos $\otimes$-invertibles. El motivo de Lefschetz efectivo $\mathbb{L} = (\mathbb{P}^1, [\mathbb{P}^1 \times e], 0)$ es isomorfo al motivo $\mathbf{1}(-1)$ en $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$, el isomorfismo no depende realmente del punto e, podemos entonces escribir $\mathbb{L} = \mathbf{1}(-1)$ el **motivo de Lefschetz puro**. Puesto que $\mathbb{L} = \mathbf{1}(-1) = \mathbb{T}^{\otimes(-1)}$, entonces escribimos:

$$\mathbf{1}(-1)^{\otimes r} = \mathbb{L}^{\otimes r} = \mathbf{1}(-r) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{1}(1)^{\otimes r} = \mathbb{T}^{\otimes r} := \mathbf{1}(r)$$

para cada $r \in \mathbb{Z}$. Notemos que $\mathbb{L}^{\otimes 0} = \mathbf{1} = \mathbb{T}^{\otimes 0}$. Con esta notación, tenemos que $(X, p, r) = (X, p, 0) \otimes \mathbf{1}(r)$. De manera más general, obtenemos un funtor:

$$\begin{array}{rcl} (r)\colon \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F & \longrightarrow & \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F \\ M & \mapsto & M \otimes \mathbf{1}(r) = (X, p, m+r) \end{array}$$

conocido como la **torcedura de Tate**[1]. Explicitamente, para un motivo $M \in \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ y $r \in \mathbb{Z}$ tenemos que:

$$M(r) := \begin{cases} M \otimes \mathbb{L}^{\otimes -r} & \text{si } r \leq 0 \\ M \otimes \mathbb{T}^{\otimes r} & \text{si } r \geq 0 \end{cases}$$

Generalmente escribiremos $\mathbb{L}^r$ en vez de $\mathbb{L}^{\otimes r}$, de la misma forma para $\mathbb{T}$.

Proposición 3.1.5 *Un motivo puro de Chow (X, p, m) es isomorfo a $\mathbb{L}^r$ si y sólo si $p \in CH^{\dim\,(X)}(X \times X)_F$ puede escribirse de la forma $p = \mathrm{pr}_1^*(u) \cdot \mathrm{pr}_2^*(v)$ donde $\mathrm{pr}_i : X \times X \to X$ es la i-ésima proyección; $u \in CH^{\dim\,(X)-r-m}(X)_F$ y $v \in CH^{r+m}(X)_F$, en tal caso,* $\mathrm{gr}(u \cdot v) = 1$.

Demostración. Si $f : (X, p, m) \to \mathbb{L}^r = (\mathrm{Spec}\ k, \Delta_{\mathbf{p}}, -r)$ es un isomorfismo con inverso $g : \mathbb{L}^r \to (X, p, m)$, entonces $f \in \mathrm{Corr}_{\mathrm{rac}}^{-r-m}(X, \mathrm{Spec}\ k)_F$ y $g \in \mathrm{Corr}_{\mathrm{rac}}^{m+r}(\mathrm{Spec}\ k, X)_F$. Luego en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & X \times \mathrm{Spec}\ k \times X \arrow[dl, "\mathrm{pr}_{12}"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{13}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{23}"] & \\ X \times \mathrm{Spec}\ k & X \times X & \mathrm{Spec}\ k \times X. \end{tikzcd}$$

Puesto que $p = 1_{(X,p,m)} = g \bullet f = \mathrm{pr}_{13*}\big(\mathrm{pr}_{23}^*(g) \cdot \mathrm{pr}_{12}^*(f)\big) = \mathrm{pr}_2^*(g) \cdot \mathrm{pr}_1^*(f)$, entonces haciendo $v = f$ y $u = g$ se tiene la primera parte de la prueba. Inversamente, supongamos que tenemos un motivo de Chow (X, p, m) con $p = \mathrm{pr}_1^*(u) \cdot \mathrm{pr}_2^*(v) = u \times v$, el isomorfismo $(X, p, m) \to \mathbb{L}^r$ está dado por:

$$u \in CH^{d-r-m}(X)_F \bullet p = \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F\big((X, p, m), \mathbb{L}^r\big),$$

con inverso:

$$v \in p \bullet CH^{r+m}(X)_F = \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F\big(\mathbb{L}^r, (X, p, m)\big).$$

En efecto, puesto que $\mathrm{gr}(u \cdot v) = 1$. Considerando a u como un elemento de $\mathrm{Corr}_{\mathrm{rac}}^{-r-m}(X, \mathrm{Spec}\ k)_F$ y a $v \in \mathrm{Corr}_{\mathrm{rac}}^{m+r}(\mathrm{Spec}\ k, X)_F$, se tiene que:

$$u \bullet p = \mathrm{gr}(u \cdot v) \cdot u = u \qquad \text{y} \qquad p \bullet v = \mathrm{gr}(u \cdot v) \cdot v = v.$$

Entonces para los dos morfismos $u : (X, p, m) \to \mathbb{L}^r$ y $v : \mathbb{L}^r \to (X, p, m)$, tenemos que $u \bullet v = 1_{\mathbb{L}^r}$ y $v \bullet u = 1_{(X,p,m)}$. Esto determina un isomorfismo entre (X, p, m) y el motivo $\mathbb{L}^r$. $\square$

[1] En estructuras de Hodge $\mathbb{Q}(-1) := H^2(\mathbb{P}^1) = \mathbb{L}$ denota la estructura de Hodge $\mathbb{Q}$ de tipo $(-1, -1)$. Las estructuras de Hodge de tipo Tate están dadas por: $\mathbb{Q}(r) := [\frac{1}{2\pi i}]^{-r}\mathbb{Q}$.

Corolario 3.1.6 *Sea F un campo. Un motivo puro (X,p,m) es isomorfo a* $\mathbf{1}$ *si y solamente si* $p=\mathrm{pr}_1^*(\alpha)\cdot\mathrm{pr}_2^*(\beta)$ *donde* $\mathrm{pr}_1,\mathrm{pr}_2 : X\times X\to X$ *son las proyecciones;* $\alpha\in CH^{\dim(X)-m}(X)_F$ *y* $\beta\in CH^m(X)_F$.

3.1.7. La estructura pseudo-abeliana. La noción de suma directa de motivos es ligeramente más complicada que la del producto. Una primera definición de coproducto en $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ es la siguiente.

Definición 3.1.7 Si $M=(X,p,m)$ y $N=(Y,q,n)$ son dos motivos puros de Chow con $m=n$, la suma directa se define como:

$$\boxed{M\oplus N := (X\amalg Y, p\oplus q, m)}$$

$p\oplus q$ es un idempotente, ya que está dado por el producto $(p,q)\binom{p}{q}=(p,q)$.

La construcción general del coproducto la daremos un poco más adelante.

Ejemplo 3.1.8 Si $X_d\in\mathcal{P}(k)$, la correspondencia $\pi^+ := \Delta_X-\pi_0-\pi_{2d}$ es un proyector, ya que π_0 y π_{2d} son ortogonales. Entonces existe una descomposición de la forma (A. J. Scholl [32], 1.11-1.13):

$$\mathfrak{ch}(X)=\mathfrak{ch}^0(X)\oplus\mathfrak{ch}^+(X)\oplus\mathfrak{ch}^{2d}(X),$$

donde $\mathfrak{ch}^+(X):=(X,\pi^+,0)$. Los motivos $\mathfrak{ch}^0(X)$ y $\mathfrak{ch}^{2d}(X)$ forman siempre la **parte trivial** en la descomposición (Chow-Künneth, 3.4.1) del motivo $\mathfrak{ch}(X)$. Se prueba que $\mathfrak{ch}^0(X)$ es isomorfo siempre al motivo trivial $\mathbf{1}$, y que para todas las variedades X de dimensión d los motivos $\mathfrak{ch}^{2d}(X)$ son mutuamente isomorfos. De hecho, $\mathfrak{ch}^{2d}(X)\cong\mathbb{L}^d$. Esto establece una nueva descomposición del motivo asociado a X de la forma:

$$\mathfrak{ch}(X)=\mathbf{1}\oplus\mathfrak{ch}^+(X)\oplus\mathbb{L}^d.$$

Para la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ tenemos que la diagonal de $\mathbb{P}^1$ se descompone en $CH^1(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)_F=\mathrm{Corr}^0_{\mathrm{rac}}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^1)_F=F\oplus F$ como:

$$\Delta_{\mathbb{P}^1}\sim_{\mathrm{rac}}[e\times\mathbb{P}^1]-[\mathbb{P}^1\times e],$$

independientemente del punto $e\in\mathbb{P}^1(k)$. Luego $\mathfrak{ch}^1(\mathbb{P}^1)=0$ y esto nos da una descomposición del motivo $\mathfrak{ch}(\mathbb{P}^1):=(\mathbb{P}^1,\Delta_{\mathbb{P}^1},0)$ asociado a la recta proyectiva, de la siguiente forma:

$$\boxed{\mathfrak{ch}(\mathbb{P}^1)=\mathfrak{ch}^0(\mathbb{P}^1)\oplus\mathfrak{ch}^2(\mathbb{P}^1)}$$

dado que $\mathfrak{ch}^0(\mathbb{P}^1) := (\mathbb{P}^1, [e \times \mathbb{P}^1], 0) = \mathbf{1}$ y que el motivo de Lefschetz $\mathfrak{ch}^2(\mathbb{P}^1) := (\mathbb{P}^1, [\mathbb{P}^1 \times e], 0) = \mathbb{L}$ es isomorfo al motivo $\mathbf{1}(-1) = (\operatorname{Spec} k, \Delta_{\mathbf{p}}, -1)$. Por lo tanto, nos queda la siguiente descomposición: $\mathfrak{ch}(\mathbb{P}^1) = \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}(-1)$. En general, la descomposición de una curva está totalmente descrita.

Ejemplo 3.1.9 Si $M = (X, p, m)$ es un motivo, un proyector f en M es de la forma:

$$(X, p, m) \xrightarrow{f} (X, p, m); \qquad f = p \bullet f' \bullet p$$

con $f' \in \operatorname{Corr}^0_{\mathrm{rac}}(X, X)_F$ tal que $f \bullet f = f$. Puesto que la identidad en el motivo M es $1_M = p$, entonces $p - f$ es también un proyector, con lo cual se pueden considerar dos motivos más:

$$M' = (X, f, m) \qquad \text{y} \qquad M'' = (X, p - f, m).$$

En particular, si $M = (X, p, 0)$, entonces $\Delta_X - p$ es también un proyector en X (en M) y tenemos definido un motivo $N := (X, \Delta_X - p, 0)$ y luego una descomposición de la forma $\mathfrak{ch}(X) = (X, p, 0) \oplus (X, \Delta_X - p, 0)$.

Probaremos ahora que la categoría de motivos de Chow $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$, es efectivamente una categoría F-lineal pseudo-abeliana.

Proposición 3.1.10 *La categoría F-lineal $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ es pseudo-abeliana.*

Demostración. Consideremos un motivo puro de Chow $M = (X, p, m)$ y un proyector f en M, es decir, f es la siguiente composición:

$$f = \left(X \xmapsto{\ p\ } X \xmapsto{\ f'\ } X \xmapsto{\ p\ } X \right)$$

donde $f' \in \operatorname{Corr}^0_{\mathrm{rac}}(X, X)_F = CH^d(X \times X)_F$ y además $f \bullet f = f$. Probaremos que existe $\ker(f)$ y un morfismo $l : \ker(f) \to (X, p, m)$ tal que para cualquier morfismo $g : (Z, q, n) \to (X, p, m)$ con $f \bullet g = 0$, existe un morfismo $h : (Z, q, n) \to \ker(f)$ de tal manera que g factoriza a través del núcleo. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
(X, p - f, m) \arrow[r, "\Delta_X"] & (X, p, m) \arrow[r, "f'"] & (X, p, m) \\
& (Z, q, n) \arrow[ul, "g'"] \arrow[u, "g'"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $l = p \bullet \Delta_X \bullet (p - f)$, $g = p \bullet g' \bullet q$ y $h = (p - f) \bullet g' \bullet q$. La afirmación es que $(X, p - f, m)$ es el núcleo de (X, p, m). En efecto, se cumple que:

$$pf'p \bullet p\Delta_X(p - pf'p) = f \bullet (p - f) = (f \bullet p) - (f \bullet f) = f - f = 0$$

puesto que $1_M = p$. Como $f \bullet g = pf'p \bullet pg'q = pf'pg'q = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} p\Delta_X(p - pf'p) \bullet (p - pf'p)gq &= p(p - pf'p) \bullet (pg'q - pf'pg'q) \\ &= p(p - pf'p) \bullet pg'q \\ &= p(pg'q - pf'pg'q) = pg'q \end{aligned}$$

así el diagrama conmuta y es universal. Entonces tenemos que:

$$\ker(f) = (M, p - f, m) \qquad \text{y} \qquad \ker(p - f) = \mathrm{Im}(f) = (X, f, m).$$

Para describir el isomorfismo:

$$(X, p, m) \cong (X, f, m) \oplus (X, p - f, m) = (X \amalg X, f \oplus (p - f), m),$$

consideremos los morfismos $(f, p - f) : (X, p, m) \to (X \amalg X, f \oplus (p - f), m)$ y $\binom{f}{p-f} : (X \amalg X, f \oplus (p - f), m) \to (X, p, m)$. En las composiciones nos queda entonces que:

$$(f, p - f)\begin{pmatrix} f \\ p - f \end{pmatrix} = f^2 + (p - f)^2 = f + p - f = p$$

$$\begin{pmatrix} f \\ p - f \end{pmatrix}(f, p - f) = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & p - f \end{pmatrix}$$

Los cuales son las respectivas identidades en los motivos puros. □

Esta prueba es la misma que se utiliza para la categoría $\mathrm{CH}\mathcal{M}^{\mathrm{eff}}(k)_F$.

Observación 3.1.11 La categoría $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ aunque es pseudo-abeliana, no es general una categoría abeliana. A saber, A. J. Scholl ([32], Corolario 3.5) prueba que $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ no es un categoría abeliana cuando k no está contenido en la cerradura algebraica de un campo finito.

3.1.12. El Coproducto en $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$. Por la torcedura de Tate, se tiene que cualquier motivo $M = (X, p, m)$, se puede escribir de la forma:

$$M = (X, p, m) = (X, p, 0)(m) := (X, p, 0) \otimes \mathbb{L}^{-m}.$$

Si $m \leq 0$, podemos hacer la siguiente identificación:

$$M = \big(X \times (\mathbb{P}^1)^{-m}, p \otimes [(\mathbb{P}^1)^{-m} \times e], m\big).$$

Esto nos permite definir el coproducto de dos motivos arbitarios $M = (X, p, m)$ y $N = (Y, q, n)$ de la siguiente forma. Si $m > n$, entonces:

$$M = (X, p, n) \otimes \mathbb{L}^{m-n} = (X \times (\mathbb{P}^1)^{m-n}, p \otimes [(\mathbb{P}^1)^{m-n} \times e], n).$$

Gracias a estas observaciones tenemos la siguiente definición.

Definición 3.1.12 Para $M = (X, p, m)$ y $N = (Y, q, n)$ definimos:

$$\boxed{M \oplus N := \Big(\big(X \times (\mathbb{P}^1)^{m-n}\big) \coprod Y, \big(p \otimes [(\mathbb{P}^1)^{m-n} \times e]\big) + q, n \Big)}$$

esto nos da el coproducto de los motivos M y N en la categoría $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$. La estructura tensor es compatible con coproductos.

3.1.13. La $\otimes$-estructura rígida. En el sentido de dualidad de Poincaré, en motivos existen duales. La torcedura de Tate y la transposición de correspondencias inducen una estructura rígida (Apéndice, A.1.2) en $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$.

Teorema 3.1.13 *La $\otimes$-categoría de motivos puros $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ es rígida.*

Demostración. Es suficiente probar que cada objeto de la forma $\mathfrak{ch}(X)$, con X irreducible, tiene dual. Sea $M = \mathfrak{ch}(X) = (X, \Delta_X, 0)$ y $M^\vee$ que sea $M \otimes \mathbb{T}^{\otimes d}$. Por definición de la categoría $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$, existen isomorfismos:

$$\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F(\mathbf{1}, M \otimes M^\vee) \xrightarrow{\cong} CH^d(X \times X)_F \xrightarrow{\cong} \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F(M^\vee \otimes M, \mathbf{1}).$$

Definamos entonces a ε y η como los morfismos correspondientes al ciclo asociado a la diagonal Δ_X en $X \times X$. Entonces en la composición de los morfismos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta\otimes 1_M"] \arrow[dr, equal] & M \otimes M^\vee \otimes M \arrow[d, "1_M\otimes\varepsilon"] \\ & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M^\vee \arrow[r, "1_{M^\vee}\otimes\eta"] \arrow[dr, equal] & M^\vee \otimes M \otimes M^\vee \arrow[d, "\varepsilon\otimes 1_{M^\vee}"] \\ & M^\vee \end{tikzcd}$$

tenemos que los diagramas nos dan la identidad en M y $M^\vee$ respectivamente. De esta manera, $(M^\vee, \eta, \varepsilon)$ es un dual para M. En particular, $\mathfrak{ch}(X)^\vee = \mathfrak{ch}(X)(\dim X) = \mathfrak{ch}(X) \otimes \mathbb{L}^{-d_X}$. $\square$

Este resultado nos dice que existe un **funtor de dualidad**:

$$\begin{array}{rcl} (-)^\vee : \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F \\ (X, p, m) & \mapsto & (X, p^{\mathbf{t}}, d - m) \end{array}$$

si X es pura de dimensión d y definida en morfismos como:

$$(X, p, m) \xrightarrow{f} (Y, q, n) \qquad \mapsto \qquad (Y, q, n)^\vee \xrightarrow{f^{\mathbf{t}}} (X, p, m)^\vee.$$

Es claro que $(M^\vee)^\vee = M$ y por transposición el funtor $-\otimes M^\vee$ es adjunto derecho del funtor $-\otimes M$, es decir:

$$\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F(N\otimes M, P) = \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F(N, P\otimes M^\vee)$$

con lo cual, la categoría $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ es cerrada. Esto nos permite definir un **Hom** (interno), entre dos motivos M y N en $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ por la fórmula:

$$\boxed{\mathbf{Hom}(M,N) := M^\vee \otimes N = (X\times Y, p^{\mathbf{t}}\otimes q, d_X - m + n).}$$

En particular $M^\vee = \mathbf{Hom}(M, \mathbf{1})$, y entonces por dualidad:

$$\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F(M,N) = \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F(\mathbf{1}, M^\vee\otimes N).$$

Luego, por definición:

$$CH^r(X)_F := \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F\big(\mathbf{1}, \mathfrak{ch}(X)(r)\big) = \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F\big(\mathbf{1}(-r), \mathfrak{ch}(X)\big).$$

Por lo tanto $CH^r(M)_F = \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F(\mathbf{1}(-r), M) = \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F(\mathbb{L}^r, M)$, esto nos da un funtor aditivo $\mathbb{Z}$-graduado en $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ con valores en $\mathbf{Mod}_F$.

Ejemplos 3.1.14 i) $\mathbf{1}^\vee = (\mathrm{Spec}\ k, \Delta_{\mathbf{p}}, 0) = \mathbf{1}$.

ii) $\mathbb{L}^\vee = (\mathrm{Spec}\ k, \Delta_{\mathbf{p}}, -1)^\vee = (\mathrm{Spec}\ k, \Delta_{\mathbf{p}}, 1) = \mathbb{T}$.

iii) $\big(\mathfrak{ch}^0(X)\big)^\vee = \mathfrak{ch}^{2d}(X)(-d)$.

3.2. Principio de identidad de Manin

La idea es la siguiente: si $f, g \in CH^*(X\times Y)_F$, no podemos afirmar en primera instancia si f y g son iguales (ó desiguales). El principio de identidad de Manin, nos da un método para decidir la igualdad de f y g en términos de la acción que inducen en los grupos de Chow. Este hecho se basa en una observación sencilla y está sustentado por el lema de Yoneda.

3.2.1. Sean X, Y y $T \in \mathcal{P}(k)$. Sea $X_T := \mathrm{Corr}^*_{\mathrm{rac}}(T, X)_F = CH^*(T\times X)_F$ y para $f\in \mathrm{Corr}^*_{\mathrm{rac}}(X,Y)_F$, definimos el homomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} f_T\colon X_T & \longrightarrow & Y_T \\ \alpha & \mapsto & f_T(\alpha) := f\bullet\alpha. \end{array}$$

Lema 3.2.1 (**Principio de identidad de Manin**) *Sean $X, Y \in \mathcal{P}(k)$ y $f, g\in \mathrm{Corr}^*_{\mathrm{rac}}(X,Y)_F$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) $f = g$,

ii) $f_T = g_T$ *para toda* $T \in \mathcal{P}(k)$,

iii) $f_X = g_X$.

En particular, f es un isomorfismo si y sólo si f_T es un isomorfismo si y sólo si f_X es un isomorfismo.

Demostración. Para i) $\Rightarrow$ ii). Sean $f, g \in \mathrm{Corr}^*_{\mathrm{rac}}(X,Y)_F$ de tal manera que $f = g$. Entonces para toda $T \in \mathcal{P}(k)$ y para toda $\alpha \in CH^*(T \times X)_F$, tenemos que $f \bullet \alpha = g \bullet \alpha$. Por lo tanto: $f_T = g_T$.

Si en particular $X = T$, obtenemos ii) $\Rightarrow$ iii). Ahora, puesto que $f \bullet \alpha = g \bullet \alpha$ para toda $\alpha \in CH^*(X \times X)_F$, si $\alpha = \Delta_X$ nos queda que:

$$f = f \bullet \Delta_X = g \bullet \Delta_X = g,$$

y asi obtenemos iii) $\Rightarrow$ i). □

No obstante que la demostración es fácil, el principio de identidad de Manin representa una herramienta sumamente poderosa en el cálculo de motivos. Por ejemplo, puede ser utilizado para calcular el motivo de un haz proyectivo y el motivo de un blow-up (A. J. Scholl, [32] 2.4 y 2.7). Por el resultado de Lieberman (lema 2.1.10), para $\alpha \in CH^*(T \times X)_F$ tenemos que:

$$f_T(\alpha) = f \bullet \alpha = (\Delta_T \times f)_*(\alpha),$$

el cual implica el siguiente resultado.

Corolario 3.2.2 *Sean $f, g \in \mathrm{Corr}^*_{\mathrm{rac}}(X,Y)_F$, entonces:*

$$\mathfrak{ch}(X) \xrightarrow{\mathfrak{ch}(f)=\mathfrak{ch}(g)} \mathfrak{ch}(Y) \Longleftrightarrow CH^*(T \times X) \xrightarrow{(\Delta_T \times f)_* = (\Delta_T \times g)_*} CH^*(T \times Y)$$

para toda $T \in \mathcal{P}(k)$.

De manera que $f = g$ como correspondencias si y sólo si f y g actuán de la misma forma en grupos de Chow. Los siguientes ejemplos ilustran la utilidad del principio de identidad de Manin.

3.2.3. Cálculo de motivos. – De la teoría de intersección tenemos que:

$$CH^*(Y \times \mathbb{P}^n)_F \cong CH^*(Y)_F[H]/(H^{n+1}) = \bigoplus_{r=0}^{n} CH^*(Y)_F \cdot H^r,$$

donde H es la clase de un hiperplano de $\mathbb{P}^n$. Entonces tenemos que:

$$\mathfrak{ch}(\mathbb{P}^n) \overset{\cong}{\longleftrightarrow} \bigoplus_{r=0}^{n} \mathbf{1}(-r) = \mathbf{1} \oplus \mathbb{L} \oplus \cdots \oplus \mathbb{L}^n,$$

dado para $X \in \mathcal{P}(k)$, como:

$$\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F\big(\mathfrak{ch}(X), \mathfrak{ch}(\mathbb{P}^n)(s)\big) = CH^{d_X+s}(X \times \mathbb{P}^n) \cong \bigoplus_{r=0}^{n} CH^{d_X+s-r}(X), \qquad \text{y}$$

$$\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F\Big(\mathfrak{ch}(X), (\bigoplus_{r=0}^{n} \mathbf{1}(-r))(s)\Big) = \bigoplus_{r=0}^{n} CH^{d_X+s-r}(X).$$

Si hacemos $X = \mathbb{P}^n$ y $s = 0$, entonces considerando a la identidad de $\mathbb{P}^n$ tenemos un morfismo canónico $\mathfrak{ch}(\mathbb{P}^n) \to \bigoplus_{r=0}^{n} \mathbf{1}(-r)$, el cual es un isomorfismo, puesto que induce un isomorfismo de los funtores correspondientes.

– Una **variedad celular** es una variedad proyectiva y lisa X que admite un morfismo plano $\pi\colon X \to B$ (de dimensión relativa pura n) junto con una filtración en X por subesquemas cerrados:

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_q \supset X_{q+1} = \emptyset$$

de tal manera que $X_i \setminus X_{i+1}$ es isomorfo sobre B al espacio afín $\mathbb{A}_B^{n-d_i}$ (para algún $d_i \in \mathbb{Z}$). Un ejemplo simple es $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^n \cup \mathbb{A}^{n-1} \cup \cdots \cup \mathbb{A}^0$ sobre $B = \mathrm{Spec}(k)$, y entonces también variedades Grasmanianas y haces proyectivos. Para tales variedades se cumple que:

$$\mathfrak{ch}(X) \cong \bigoplus_{i} \mathfrak{ch}(B) \otimes \mathbb{L}^{d_i} = \bigoplus_{i} \mathfrak{ch}(B)(-d_i).$$

Ejemplo 3.2.3 **(Manin** [24], pag. 461**)** Sean $Z \subset X$ variedades proyectivas y lisas, donde Z es pura de codimensión $n+1$. Si $E \subset \mathrm{Bl}_Z X$ es el divisor excepcional, entonces se tienen isomorfismos canónicos:

$$\mathfrak{ch}(X) \oplus \mathfrak{ch}(E) \cong \mathfrak{ch}(\mathrm{Bl}_Z X) \oplus \mathfrak{ch}(Z)$$

$$\mathfrak{ch}(\mathrm{Bl}_Z X) = \mathfrak{ch}(X) \oplus \bigoplus_{r=1}^{n} \mathfrak{ch}(Z)(-r).$$

3.3. El motivo de una curva

Otro ejemplo interesante de un motivo no-trivial, quizás sea el motivo asociado a una curva (variedad de dimensión 1) proyectiva y lisa sobre un campo k.

3.3.1. Sea C una curva proyectiva y lisa sobre k. Si F es un $\mathbb{Q}$-álgebra y C tiene un punto racional $e \in C(k)$, entonces tenemos dos proyectores $\pi_0 = e \times C$ y $\pi_2 = C \times e$ ortogonales en $\mathrm{Corr}^0_{\mathrm{rac}}(C, C)_F$. Definimos a $\pi_1 := \Delta_C - \pi_0 - \pi_2$, de la ortogonalidad de π_0 y π_2 se tiene que π_1 es también un proyector. Esto establece una descomposición del motivo asociado a C:

$$\mathfrak{ch}(C) = \mathfrak{ch}^0(C) \oplus \mathfrak{ch}^1(C) \oplus \mathfrak{ch}^2(C)$$

donde $\mathfrak{ch}^i(X) := (C, \pi_i, 0)$ y donde $\mathfrak{ch}^0(C) \cong \mathbf{1}$ y $\mathfrak{ch}^2(C) \cong \mathbf{1}(-1) = \mathbb{L}$ son esencialemnte las partes triviales de la descomposición (Chow-Künneth).

3.3.2. Sea H^* una teoría de cohomología de Weil. La descomposición del motivo asociado a C nos da que:

$$H^*(C) = H^0(C) \oplus H^1(C) \oplus H^2(C) = K \oplus H^1(C) \oplus K(-1),$$

dado que para la cohomología de motivos racionales se tiene que:

$$H(\mathfrak{ch}^0(C)) = H^0(C) \text{ y } H(\mathfrak{ch}^2(C)) = H^2(C) \implies H(\mathfrak{ch}^1(C)) = H^1(C).$$

Sin embargo $\mathfrak{ch}^1(C)$ contiene la información más fina. De hecho, este motivo está intimamente relacionado a la variedad Jacobiana, $\mathrm{Jac}_k(C)$ de la curva C. Esto se hace evidente en los siguientes resultados. La construcción de la Jacobiana es funtorial, y es un objeto algebro-geométrico:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Jac}_k\colon \{\text{curvas}\} & \longrightarrow & \{\text{variedades abelianas}\} \\ C & \mapsto & \mathrm{Jac}_k(C). \end{array}$$

Una **variedad abeliana** A es una variedad completa con estructura de grupo, donde las operaciones $A \times A \to A\colon (a_1, a_2) \mapsto a_1 a_2^{-1}$ están dadas por morfismos de variedades. La categoría $\mathcal{VA}(k)$ de variedades abelianas sobre k es una categoría aditiva. Más aún, la siguiente identidad:

$$H^1(C) \cong H^1(\mathrm{Jac}_k(C))$$

demuestra que la variedad Jacobiana captura la información cohomológica de la curva C. Las relaciones más precisas son las siguientes:

i) Los grupos de Chow del motivo $\mathfrak{ch}^1(C)$ son:

$$CH^i\big(\mathfrak{ch}^1(C)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 1 \\ \mathrm{Jac}_k(C) & \text{si } i = 1. \end{cases}$$

ii) Si C y C' son dos curvas, proyectivas y lisas, entonces:

$$\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F\big(\mathfrak{ch}^1(C), \mathfrak{ch}^1(C')\big) = \mathcal{VA}(k)(\mathrm{Jac}_k(C), \mathrm{Jac}_k(C'))_F.$$

3.5.3. En la categoría de motivos de Chow $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_{\mathbb{Q}}$, sea $\mathcal{M}$ la subcategoría plena que consta de los siguiente objetos:

$$\mathcal{M} := \{\ M \mid \text{existe una curva proyectiva y lisa } C \text{ de tal manera que } \mathfrak{ch}^1(C) = M \oplus M' \text{ para algún } M'\ \}.$$

Entonces $\mathcal{M}$ es equivalente a la categoría de k-variedades abelianas $\mathcal{AV}(k)_{\mathbb{Q}}$ salvo isogenías[2] (André [1], prop. 4.3.4.1) y ([28], teorema 2.7.2 (c)). De esta manera, la categoría de motivos de Chow $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ contiene como subcategoría plena a la categoría de variedades abelianas (salvo isogenías).

3.4. Descomposición de Chow-Künneth

Sea X es una variedad proyectiva, lisa e irreducible de dimensión d.

Definición 3.4.1 Decimos que X admite una **descomposición de Chow-Künneth** (C-K) en $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$, si existen idempotentes ortogonales $\pi_i \in CH^d(X \times X)_F = \mathrm{Corr}^0(X,X)_F$ donde $0 \leq i \leq 2d$, de tal manera que:

C) $\Delta_X = \sum_{i=0}^{2d} \pi_i$.

K) Si H es una teoría de cohomología de Weil, entonces $\mathrm{cl}_{X\times X}(\pi_i) = \pi_H^i \in H^{2d-i}(X) \otimes H^i(X)$ (el i-ésimo componente de Künneth, 2.1.10).

Si tales proyectores existen, haciendo $\mathfrak{ch}^i(X) = (X, \pi_i, 0)$, tenemos para el motivo $\mathfrak{ch}(X)$ una descomposición de la siguiente forma:

$$\mathfrak{ch}(X) = \bigoplus_{i=0}^{2d} \mathfrak{ch}^i(X)$$

donde $\mathfrak{ch}^i(X)$ es el i**-ésimo motivo de Chow-Künneth** de X. En cohomología $\omega_H(\mathfrak{ch}(X)) = H^*(X) = \bigoplus_{i=0}^{2d} H^i(X)$ para $\omega_H(\mathfrak{ch}^i(X)) = H^i(X)$.

[2] Una **isogenía** entre variedades abelianas es un morfismo suprayectivo con núcleo finito. Hagamos $\mathrm{Isog}(A,B) = \mathcal{AV}(k)(A,B) \otimes F$.

Conjetura 3.4.2 ($CK(X)$-Chow-Künneth) *Toda variedad proyectiva y lisa X admite una descomposición de Chow-Künneth (C-K).*

Observación 3.4.3 i) Es claro que la conjetura $CK(X)$ de Chow-Künneth implica[3] a la conjetura $C(X)$ de Künneth (2.1.12).

ii) Se espera que los proyectores puedan elegirse de manera: $\pi_i^{\mathbf{t}} = \pi_{2d-i}$. En este caso, se dice que la descomposición C-K es **auto-dual**.

iii) Si X y Y admiten una descomposición C-K, entonces es válido también para $X \times Y$. En efecto, si π_i^X y π_j^Y son las componentes de Chow-Künneth de X y Y respectivamente, entonces:

$$\pi_i^{X \times Y} = \sum_{p+q=i} \pi_p^X \times \pi_q^Y \in CH^*(X \times Y \times X \times Y)_F,$$

son las componentes de Chow-Künneth para $X \times Y$.

iv) Si X admite un punto k-racional $e \in X(k)$, podemos considerar a los proyectores $\pi_0 = e \times X$ y $\pi_{2d} = X \times e$. Estos son ortogonales cada uno del otro y corresponden naturalmente a las componentes de Künneth π_H^0 y π_H^{2d} respectivamente. Los proyectores π_0 y π_{2d} son los candidatos naturales para formar la parte trivial de la descomposición.

3.4.4. Algunos resultados parciales están dados por la construcción de los motivos $\mathfrak{ch}^0, \mathfrak{ch}^1, \mathfrak{ch}^{2d-1}, \mathfrak{ch}^{2d}$. En el artículo [27], J. Murre construye un conjunto de idempotentes ortogonales $\pi_0, \pi_1, \pi_{2d-1}, \pi_{2d} \in \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F(\mathfrak{ch}(X)) = CH^d(X \times X)_F$ caracterizados de la siguiente manera:

- Para un punto cerrado $\mathfrak{p}$ de X de grado n con campo residual separable, definimos $\pi_0 = \frac{1}{n}[\mathfrak{p} \times X]$ y $\pi_{2d} = \frac{1}{n}[X \times \mathfrak{p}] = \pi_0^{\mathbf{t}}$.

- π_1 y π_{2d-1} son proyectores, ortogonales cada uno del otro y ortogonales a los proyectores π_0 y π_{2d}. Los proyectores π_1 y π_{2d-1} se levantan a las componentes de Künneth π_H^1 y π_H^{2d-1} de la diagonal y satisfacen la condición $\pi_{2d-1} = \pi_1^{\mathbf{t}}$. A π_1 se le conoce como el **proyector de Picard** y a π_{2d-1} como el **proyector Albanese** (J. Murre, [27]).

- Si $\mathfrak{ch}^1(X) = (X, \pi_1, 0)$ y $\mathfrak{ch}^{2d-1}(X) = (X, \pi_{2d-1}, 0)$ en $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$. Entonces ([28], Teo. 6.2.1):

$$H^i\big(\mathfrak{ch}^1(X)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 1 \\ H^1(X) & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

[3] Si X tiene motivo de Chow de dimensión finita en el sentido de Kimura-O'Sullivan (J. Murre [27], 4.4.1), entonces la conjetura $C(X)$ implica la conjetura $CK(X)$.

$$CH^i\big(\mathfrak{ch}^1(X)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 1 \\ \mathrm{Pic}^0_X & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

donde Pic^0_X es la **variedad de Picard** de X. Se tiene también:

$$H^i\big(\mathfrak{ch}^{2d-1}(X)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 2d-1 \\ H^{2d-1}(X) & \text{si } i = 2d-1 \end{cases}$$

$$CH^i\big(\mathfrak{ch}^{2d-1}(X)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq d \\ \mathrm{Alb}_X & \text{si } i = d \end{cases}$$

aquí Alb_X es la **variedad Albanese** de X. Ambos, la variedad de Picard y la Albanese son variedades abelianas.

- Por (A. J. Scholl, [32], 4.5), se tienen los siguientes isomorfismos:

$$\begin{aligned} \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F(\mathfrak{ch}^1(X), \mathfrak{ch}^1(Y)) &\cong \mathcal{AV}(k)(\mathrm{Pic}^0_Y, \mathrm{Pic}^0_X)_F \\ \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F(\mathfrak{ch}^{2d-1}(X), \mathfrak{ch}^{2d-1}(Y)) &\cong \mathcal{AV}(k)(\mathrm{Alb}_Y, \mathrm{Alb}_X)_F. \end{aligned}$$

  En particular, el lado izquierdo de las igualdades no depende realmente de la equivalencia adecuada $\sim$ (Y. André [1], 4.3.4).

Luego para cualquier variedad proyectiva y lisa X de dimensión (pura) d tenemos una descomposición (parcial) de Chow-Künneth:

$$\mathfrak{ch}(X) = \mathfrak{ch}^0(X) \oplus \mathfrak{ch}^1(X) \oplus \mathfrak{ch}^+(X) \oplus \mathfrak{ch}^{2d-1}(X) \oplus \mathfrak{ch}^{2d}(X)$$

donde $\mathfrak{ch}^+(X) = (X, \Delta_X - \pi_0 - \pi_1 - \pi_{2d-1} - \pi_{2d}, 0)$. Los motivos $\mathfrak{ch}^1(X) = \mathfrak{ch}^1(\mathrm{Pic}^0_X)$ y $\mathfrak{ch}^{2d-1}(X) = \mathfrak{ch}^{2d-1}(\mathrm{Alb}_X)$ están dentro de la subcategoría gruesa de $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ generado por motivos de variedades abelianas, y son conocidos como el **motivo de Picard** y **motivo Albanese** respectivamente.

Ejemplos 3.4.4 Los ejemplos más conocidos de variedades que admiten una descomposición de Chow-Künneth son los siguientes:

1).- Es claro que toda curva admite una descomposición C-K (3.3).

2).- Si S es una superficie lisa, proyectiva e irreducible sobre k, J. Murre prueba que $\mathfrak{ch}(S)$ admite una descomposición de Chow-Künneth (auto-dual):

$$\mathfrak{ch}(S) = \mathfrak{ch}^0(S) \oplus \mathfrak{ch}^1(S) \oplus \mathfrak{ch}^2(S) \oplus \mathfrak{ch}^3(S) \oplus \mathfrak{ch}^4(S)$$

donde $\mathfrak{ch}^2(S) = (S, \Delta_S - \pi_0 - \pi_1 - \pi_3 - \pi_4, 0)$. Explicitamente, se tiene que:

$$\mathfrak{ch}^0(S) \cong \mathfrak{ch}^4(S)(2) \cong \mathbf{1} \qquad \text{y}$$

$$\mathfrak{ch}^1(S) \cong \mathfrak{ch}^3(S)(1) \cong \mathfrak{ch}^1(\mathrm{Pic}^0_S) \cong \mathfrak{ch}^1(\mathrm{Alb}_S) \cong (\mathfrak{ch}^1(S))^\vee(-1).$$

Por lo tanto, la descomposición de $\mathfrak{ch}(S)$ se escribe como:

$$\mathfrak{ch}(S) = \mathbf{1} \oplus \mathfrak{ch}^1(\mathrm{Alb}_S) \oplus \mathfrak{ch}^2(S) \oplus \mathfrak{ch}^1(\mathrm{Pic}^0_S)(-1) \oplus \mathbf{1}(-2).$$

La distribución en cohomología de $\mathfrak{ch}(S)$ está dada por:

$$H^i\big(\mathfrak{ch}^j(S)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ H^i(S) & \text{si } j = i. \end{cases}$$

3).- Luego $CK(X)$ se cumple para productos de curvas y superficies.

4).- Un resultado de Shermenev (A. Šermenev, [?]) establece que el motivo de una variedad abeliana admite una descomposición compatible con cohomología. Trabajos más recientes de (C. Deninger-J. Murre, [12]) y K. Künneman en [22], muestran que existe una descomposición de Chow-Künnet de una variedad abeliana A de dimensión d sobre k:

$$\mathfrak{ch}(A) \cong \bigoplus_{i=0}^{2d} \mathfrak{ch}^i(A),$$

tal que para todo $i \in \mathbb{N}$, la diagonal $\mathfrak{ch}(A^{\otimes i}) \to \mathfrak{ch}(A)$ induce un ismorfismo:

$$\mathrm{Sym}^i\big(\mathfrak{ch}^1(A)\big) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{ch}^i(A) = (A, \pi_i, 0),$$

donde Sym^i denota el i-ésimo producto simétrico. De hecho, los proyectores π_i son determinados de manera única por la propiedad $n^* \bullet \pi_i = \pi_i \bullet n^* = n^i \pi_i$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, donde n^* es el endomorfismo de $\mathfrak{ch}(A)$ inducido por la multiplicación por n en A (A. Scholl [32], Sec. 5). Si H^* es una teoría de cohomología de Weil, se tiene que $H^i(A)$ es la realización del motivo $\mathfrak{ch}^i(A)$ y se obtiene una fórmula análoga $\mathrm{Sym}^i H^1(A) = H^i(A)$ en la categoría $\mathbf{GrVec}_K$.

Existe un isomorfismo canónico:

$$\mathfrak{ch}^i(A)^\vee \cong \mathfrak{ch}^{2d-i}(A)(d).$$

Finalmente, si A' es otra variedad abeliana, existe un isomorfismo canónico:

$$\mathrm{CH}\mathcal{M}_F\big(\mathfrak{ch}(A), \mathfrak{ch}(A')\big) = \mathcal{AV}(A, A')_F,$$

la igualdad de la izquierda no depende realmente de la equivalencia $\sim$.

Capítulo 4

El teorema de Jannsen

En el sentido de conjeturas estándar, uno de los resultados probados en motivos, es el teorema de Jannsen (1991). Este teorema prueba que la categoría de motivos módulo equivalencia numérica es abeliana y semi-simple. El principal ingrediente en la demostración de Jannsen es la fórmula de traza de Lefschetz, una fórmula probada por Grothendieck en los años 60's.

4.1. Motivos numéricos

4.1.1. Motivos de Grothendieck. Sean k un campo y $\mathcal{P}(k)$ la categoría de variedades proyectivas y lisas sobre k. Sea F un campo de característica cero, denotemos por $N^q(X \times X)_F$ a $\mathcal{Z}^q(X \times X)_F$ módulo equivalencia numérica. Dado que $\sim_{\mathrm{num}}$ es adecuada en ciclos algebraicos con coeficientes en F, luego producto de intersección, pull-back y push-forward están bien definidos. De esta manera, tenemos una composición bilineal:

$$\begin{array}{rcl} N^{d_X+r}(X \times Y) \ \times \ N^{d_Y+s}(Y \times W) & \xrightarrow{\bullet} & N^{d_X+r+s}(X \times W) \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \mathrm{pr}_{XW*}\big(\mathrm{pr}_{XY}^*(\alpha) \cdot \mathrm{pr}_{YW}^*(\beta)\big). \end{array}$$

En particular, esta composición hace de $N^{d_X}(X \times X)$ un anillo asociativo (en general no-conmutativo).

Definición 4.1.1 La categoría $\mathrm{N}\mathcal{M}(k)_F = \mathcal{M}_{\mathrm{num}}(k)_F$ de **motivos puros numéricos**[1], consiste de triples de la forma (X, p, m) donde $X \in \mathcal{P}(k)$, $p \in N^{d_X}(X \times X)_F$ es un proyector y $m \in \mathbb{Z}$. Para dos motivos $M = (X, p, m)$ y $N = (Y, q, n)$, el conjunto de morfismos se define como:

$$\mathrm{N}\mathcal{M}(k)_F(M, N) := q \bullet N^{d_X+n-m}(X \times Y)_F \bullet p.$$

La categoría de motivos numéricos tiene asociada un funtor:

[1] También llamados **motivos de Grothendieck**, debido a que es la categoría sobre la cual A. Grothendieck puso mayor interés.

$$\boxed{\mathfrak{nh} := \mathfrak{h}_{\text{num}} : \mathcal{P}(k)^{\text{op}} \longrightarrow \text{N}\mathcal{M}(k)_F}$$

Dado en objetos como $X \rightsquigarrow (X, \Delta_X, 0)$ y a un morfismo $f : X \to Y$ lo aplica en $\Gamma_f^{\mathbf{t}} : Y \vdash X$. La $\otimes$-categoría $\text{N}\mathcal{M}(k)_F$ es F-lineal, pseudo-abeliana y rígida. El propósito de la siguiente sección, es probar que la categoría de motivos numéricos $\text{N}\mathcal{M}(k)_F$ es abeliana y semi-simple. Para llegar al lema principal (4.2.14), probaremos algunos resultados previos.

4.2. Teorema de Jannsen

La naturaleza de la prueba del teorema de Jannsen es puramente categórica, la parte geométrica consiste unicamente en la existencia de una teoría de cohomología de Weil. De manera paralela a la demostración geométrica del teorema de Jannsen ([28], Sección 3.2), daremos también un bosquejo de la prueba categórica del teorema ([2], II. Sección 8).

4.2.1. Categorías semi-simples. Las definiciones siguientes están tomadas en su mayoría de (André-Kahn, [2]) y (Street, [**?**]).

Definición 4.2.1 Sea $\mathcal{A}$ una categoría F-lineal y $A \in \mathcal{A}$ un objeto:

i) A es **simple** si $\text{End}(A)$ es un anillo de división.

ii) A es **semi-simple** si $\text{End}(A)$ es un anillo semi-simple.

La categoría $\mathcal{A}$ es *semi-simple* si todos sus objetos son semi-simples.

4.2.2. Sea $\mathcal{A}$ una categoría F-lineal. Recordemos que un **ideal bilateral** $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ es un sub-funtor F-bilineal del funtor Hom; $\mathcal{A}(-,-) : \mathcal{A}^{\text{op}} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Mod}_F$. Es decir, una colección de submódulos $\mathcal{I}(A, B) \subset \mathcal{A}(A, B)$, los cuales son estables bajo composición:

$$\mathcal{A}(C, D) \circ \mathcal{I}(B, C) \circ \mathcal{A}(A, B) \subseteq \mathcal{I}(A, D) \quad \text{para todo } A, B, C, D \in \mathcal{A}.$$

De esta manera, podemos formar la **categoría cociente** $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ que está compuesta por los mismos objetos de $\mathcal{A}$ y para $A, B \in \mathcal{A}$, se tiene que el conjunto de morfismos en $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es $(\mathcal{A}/\mathcal{I})(A, B) = \mathcal{A}(A, B)/\mathcal{I}(A, B)$. Existe además un funtor canónico $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ el cual es la identidad en objetos y a cada morfismo lo manda a su clase bajo $\mathcal{I}$. Si $\mathcal{A}$ es una $\otimes$-categoría F-lineal, existe también la noción de **ideal tensor** ($\otimes$-ideal), el cual es un ideal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ cerrado bajo el producto tensor $1_A \otimes -$ y $- \otimes 1_A$ para todo objeto $A \in \mathcal{A}$.

Si $\mathcal{I}$ es un ideal tensor, la categoría cociente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ hereda la estructura tensorial de $\mathcal{A}$. Además, se tiene que el núcleo de cualquier $\otimes$-funtor F-lineal es un ideal tensor. Más aún, el funtor $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I}$ es un funtor tensor si y solamente si $\mathcal{I}$ es un ideal tensor. Si $\mathcal{J}$ es un ideal tensor, entonces es estable bajo el producto de morfismos arbitrarios en $\mathcal{A}$. En efecto, si $f \in \mathcal{I}(A, B)$ y $h \in \mathcal{A}(C, D)$, entonces se tiene que:

$$h \otimes f = (h \otimes 1_B) \circ (1_C \otimes f) \ \in \ \mathcal{I}(C \otimes A, D \otimes B).$$

De la misma forma se puede probar a la derecha. Como ejemplos de $\otimes$-ideales tenemos los siguientes:

Ejemplo 4.2.2 Si $\mathcal{A}$ es una $\otimes$-categoría F-lineal, pseudo-abeliana y rígida. El morfismo traza $\mathrm{tr} : \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(A) \to \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathbf{1})$ define un conjunto de morfismos $\mathcal{N}$ de la siguiente manera ([2], 7.1.1):

$$\mathcal{N}(A, B) := \{f \in \mathcal{A}(A, B) \mid \mathrm{tr}(g \circ f) = 0 \ ; \ \text{para todo } g \in \mathcal{A}(B, A)\}$$

llamados morfismos **numericamente triviales**. Se prueba que $\mathcal{N}$ define un $\otimes$-ideal y si F es un campo, entonces $\mathcal{N}$ es el ideal tensor más grande de $\mathcal{A}$.

Ejemplo 4.2.3 El **$\otimes$-nilradical** $\sqrt[\otimes]{0}_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ es el conjunto:

$$\sqrt[\otimes]{0}(A, B) := \{f \in \mathcal{A}(A, B) \mid \exists \ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^{\otimes n} = 0\}.$$

A los morfismos de $\sqrt[\otimes]{0}(A, B)$ se les llama **nilpotentes-smash** ([2], 7.4.1). El $\otimes$-ideal $\sqrt[\otimes]{0}(A, A)$ es un nil-ideal para todo $A \in \mathcal{A}$. Entonces, el $\otimes$-funtor $\mathcal{A} \ \to \ \mathcal{A}/\sqrt[\otimes]{0}$ es conservativo, es decir, refleja isomorfismos.

Si $\mathcal{A}$ es una categoría pseudo-abeliana, la categoría cociente $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ no necesariamente es una categoría pseudo-abeliana, para ello necesitamos que:

Lema 4.2.4 *Sea $\mathcal{A}$ una F-categoría tensor y pseudo-abeliana. Si F es un anillo artiniano y $\mathcal{A}(A, B)$ es un F-módulo finitamente generado para cualesquiera $A, B \in \mathcal{A}$; entonces $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es pseudo-abeliana.*

Demostración. Este lema es más un resultado de la teoría de anillos, y es justamente el problema de levantar idempotentes. De esta forma, el lema se sigue del hecho de que si $A \twoheadrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos Artinianos. Entonces todo idempotente de B se levanta a un idempotente de A. De manera más general, para cualquier nil-ideal N de un anillo A, los idempotentes de A/N pueden ser levantados a A. $\square$

Recordemos que $\sim_{\text{rac}}$ es la equivalencia adecuada más fina, y para toda equivalencia adecuada $\sim$ existe un $\otimes$-funtor pleno $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F \to \mathcal{M}_\sim(k)_F$. El núcleo de este funtor es un $\otimes$-ideal $\mathcal{I}_\sim$ de $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ ([18], 1.7).

Lema 4.2.5 ([1], Lema 4.4.1.1; [18], 1.7) *Todo $\otimes$-ideal $\mathcal{I}$ de $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ es de la forma $\mathcal{I}_\sim$ para una equivalencia adecuada $\sim$ conveniente. Se tiene además que: $\mathcal{M}_\sim(k)_F = (\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F/\mathcal{I}_\sim)^\natural$.*

Ejemplo 4.2.6 En la categoría de motivos de Chow, el ideal $\mathbf{0}$ corresponde naturalmente a la equivalencia racional $\sim_{\text{rac}}$. Para $X \in \mathcal{P}(k)$, consideremos el motivo de Chow asociado $\mathfrak{ch}(X)(q) = (X, \Delta_X, q)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \sqrt[\otimes]{0} &:= \{\alpha \in \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F(\mathbf{1}, \mathfrak{ch}(X)(q)) \mid \alpha^{\otimes n} \in \mathbf{0}(\mathbf{1}^{\otimes n}, \mathfrak{ch}(X)^{\otimes n})\} \\ &= \{\alpha \in CH^q(X)_F \mid \alpha^{\otimes n} \sim_{\text{rac}} 0\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ la equivalencia adecuada asociada al $\otimes$-nilradical $\sqrt[\otimes]{0}$, es la equivalencia nilpotente-smash $\sim_{\otimes\text{nil}}$. Puesto que $\sqrt[\otimes]{0}(M, M)$ es un nil-ideal ([28], 5.2.4), los idempotentes se levantan y se tiene entonces que $\mathcal{M}_{\otimes\text{nil}}(k)_F = \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F/\sqrt[\otimes]{0}$.

Ejemplo 4.2.7 En $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$, puesto que $\mathcal{N}(M, N) = \mathcal{N}(\mathbf{1}, M^\vee \otimes N)$:

$$\mathcal{N}\big(\mathbf{1}, \mathfrak{ch}(X)(q)\big) \subset \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F\big(\mathbf{1}, \mathfrak{ch}(X)(q)\big) = CH^q(X)_F,$$

luego $\mathcal{N}$ está compuesto por todos los ciclos f tales que para todo $g \in \mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F(\mathfrak{ch}(X)(q), \mathbf{1}) = CH^{\dim(X)-q}(X)_F$ se tiene $\mathrm{tr}(g \bullet f) = 0$. Pero que la traza de la composición en $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = F$ sea cero, no es mas que $\mathrm{gr}(f \cdot g)$ sea cero. Por lo tanto, $\mathcal{N}$ en $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$ corresponde a la equivalencia numérica, el cual por ser la más gruesa entre todas las equivalencias adecuadas, nos dice que $\mathcal{N}$ es el ideal tensor propio más grande en $\mathrm{CH}\mathcal{M}(k)_F$.

Una versión categórica de un resultado central en la teoría de módulos, es la siguiente:

Lema 4.2.8 (**Schur**) *Sea $\mathcal{A}$ una F-categoría tensor, pseudo-abeliana y rígida, de tal manera que $\mathcal{N}(A, B) = 0$ para objetos simples $A, B \in \mathcal{A}$. Entonces todo morfismo $f : A \to B$ es cero ó es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ un morfismo no-cero. Puesto que $f \notin \mathcal{N}(A, B) = 0$, existe un morfismo $g : B \to A$ tal que $\mathrm{tr}(g \circ f) \neq 0$. De esta manera $g \circ f$ es no-cero, y como A es simple, luego $g \circ f$ es un endomorfismo invertible de A. Entonces $\widetilde{g} = (g \circ f)^{-1} \circ g$ es una retracción de f. Por lo tanto $\widetilde{g} \circ f = 1_A$, de la misma forma se tiene que $f \circ \widetilde{g} = 1_B$, ya que B es también simple. □

Como una consecuencia del *lema de Schur*, se tiene que un objeto es simple si no contiene sub-objetos no-triviales. Se cumple también lo siguiente.

Proposición 4.2.9 *Sea $\mathcal{A}$ una $\otimes$-categoría pseudo-abeliana y rígida con $\mathcal{N} = 0$. Para $A \in \mathcal{A}$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *A es semi-simple.*

ii) *A es suma directa de objetos simples.*

De manera equivalente, una categoría abeliana es semi-simple si todo objeto es suma directa finita de objetos simples.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{A}$ semi-simple, entonces por el teorema de estructura de Artin-Wedderburn tenemos que:

$$\mathrm{End}(A) = \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \ \oplus \ \cdots \ \oplus \ \mathrm{Mat}_{n_k}(D_k) \qquad (*)$$

donde cada D_i es un anillo de división. El conjunto de idempotentes ortogonales mínimos de $\mathrm{End}(A)$ descompone a A como:

$$A \ \cong \ A_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus A_k^{n_k}$$

donde

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A_i, A_j) = \begin{cases} D_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

luego, los $A_i's$ son en particular simples. Inversamente, supongamos que $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$ donde cada A_i es un objeto simple y tal que $A_i \ncong A_j$ si $i \neq j$. El lema de Schur (4.2.8) implica que $\mathcal{A}(A_i, A_j) = 0$ para $i \neq j$. Lo cual nos da una descomposición de $\mathrm{End}(A)$ como en $(*)$. □

Lema 4.2.10 **(Jannsen** [17], Lema 2) *Si $\mathcal{A}$ es una categoría F-lineal pseudo-abeliana tal que $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(A)$ es un F-álgebra semi-simple dimensionalmente finito para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana y semi-simple.*

Demostración. Este resultado se sigue del hecho de que $\mathcal{A}$ es equivalente a una suma, indexada por clases de isomorfismos de objetos simples, de categorías equivalentes a categorías de módulos sobre anillos de división. $\square$

En la categoría de motivos numéricos $\mathcal{NM}(k)_F$ se cumplen las condiciones anteriores, para ello veremos unos lemas que serán de gran utilidad.

Teorema 4.2.11 *Para toda $X_d \in \mathcal{P}(k)$, el F-álgebra:*

$$N^{d_X}(X \times X)_F = \mathrm{Corr}^0_{\mathrm{num}}(X, X) \otimes F$$

es un F-álgebra semi-simple de dimensión finita.

El teorema se puede dividir en dos partes, probaremos primero que es de dimensión finita y luego que es semi-simple.

Lema 4.2.12 *Si H^* es una cohomología de Weil con coeficientes en un campo K. Entonces $\mathcal{Z}^q_{\mathrm{num}}(X)_F = \mathcal{Z}^q_{\mathrm{num}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} F$ es un F-espacio vectorial de dimensión finita.*

Demostración. Sea H^* una cohomología de Weil con coeficientes en F. Para cualquier q, existe un morfismo suprayectivo de F-espacios vectoriales:

$$\mathcal{Z}^q_{\mathrm{hom}}(X)_F \twoheadrightarrow \mathcal{Z}^q_{\mathrm{num}}(X)_F.$$

Vía el mapeo de ciclos cl^q_X, $\mathcal{Z}^q_{\mathrm{hom}}(X)_F$ se identica con un sub-espacio vectorial de $H^{2q}(X)(q)$, necesariamente de dimensión finita. Luego $\mathcal{Z}^q_{\mathrm{num}}(X)_F$ es un F-espacio vectorial finitamente dimensional. $\square$

La versión abstracta de este resultado afirma que que $\mathcal{A}/\mathcal{N}(A, B)$ es de dimensión finita (André-Kahn [2], 8.1.1).

4.2.12. Semi-simplicidad. Para el siguiente lema, usaremos algunos resultados básicos del álgebra no-conmutativa (S. Pierce, [29]). Si $F \supset \mathbb{Q}$ y A es un F-álgebra de dimensión finita, entonces A es Artiniano y el radical (Jacobson) $J(A)$ es el ideal nilpotente más grande de A. De esta manera, A es semi-simple si y sólo si $J(A) = 0$. Además si $F_1 \supset F$ es una extensión de campos, entonces $J(A \otimes_F F_1) = J(A) \otimes_F F_1$. Ahora, si $\pi : A \to B$ es un homomorfismo suprayectivo de F-álgebras finitamente dimensionales, entonces $\pi(J(A)) = J(B)$. En efecto, puesto que π es suprayectivo $\pi(J(A))$

es un ideal nilpotente en B, luego $\pi(J(A)) \subseteq J(B)$. Por otro lado, tenemos que:

$$A/J(A) \longrightarrow B/\pi(J(A)) \longrightarrow B/J(B).$$

Como $A/J(A)$ es semi-simple, entonces $B/\pi(J(A))$ es semi-simple (Pierce, [29] pag. 42), pero $J(B)$ es el ideal más pequeño que hace al cociente semi-simple, por lo tanto $\pi(J(A)) = J(B)$.

Lema 4.2.13 *El F-álgebra $N^{d_X}(X \times X)_F$ es semi-simple para $X \in \mathcal{P}(k)$.*

Demostración. Consideremos de nueva cuenta una teoría de cohomología de Weil $X \rightsquigarrow H^*(X)$ con coeficientes en un campo K. Puesto que $\mathcal{Z}^*_{\text{num}}(X)$ conmuta con el cambio de coeficientes, luego podemos asumir que $F = K$. Consideremos ahora el homomorfismo suprayectivo:

$$\pi : EH^{d_X}(X \times X)_F \twoheadrightarrow N^{d_X}(X \times X)_F.$$

Puesto que $EH^{d_X}(X \times X)_F$ es de dimensión finita, luego su radical $J = J(EH^{d_X}(X \times X)_F)$ es un ideal nilpotente. Entonces el teorema se reduce a probar que $\pi(J) = 0$.

Para esto, sean $\alpha, \beta \in EH^{d_X}(X \times X)_F$. Si $\alpha \in J$, entonces $\alpha \bullet \beta^{\mathbf{t}}$ es nilpotente. Haciendo uso de la **fórmula de traza de Lefschetz**:

$$\text{gr}(\alpha \cdot \beta^{\mathbf{t}}) = \sum_{i=0}^{2d_X} (-1)^i \text{tr}_i(\alpha_* \circ \beta_*)|_{H^i(X)} = 0.$$

Pero $\beta \in EH^{d_X}(X \times X)_F$ es arbitrario, luego $\alpha \sim_{\text{num}} 0$, y de esta manera $\pi(J) = 0$. Por lo tanto $N^{d_X}(X \times X)_F$ es semi-simple. $\square$

Los dos lemas anteriores constituyen la parte medular del siguiente teorema, y prueban que $\text{Corr}^0_{\text{num}}(X, X)_F$ es un F-álgebra semi-simple de dimensión finita. Ahora, aplicando el lema 4.2.10 obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2.14 (Jannsen) *Si F es un campo, la categoría de motivos numéricos $\mathrm{N}\mathcal{M}(k)_F = \mathcal{M}_{\text{num}}(k)_F$ es abeliana y semi-simple.*

El teorema anterior tiene un recíproco, probado por U. Jannsen en [17].

Teorema 4.2.15 *Si la categoría $\mathcal{M}_\sim(k)_F$ es una categoría abeliana y semi-simple, entonces $\sim\, = \,\sim_{\text{num}}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{M}_\sim(k)_F$ es una categoría abeliana y semi-simple, pero que $\sim\neq\sim_{\text{num}}$. La demostración la haremos por contradicción, recordemos que para cualquier relación de equivalencia adecuada $\sim$, se tiene que $\sim\succ\sim_{\text{num}}$. Sea $\alpha\in\mathcal{Z}^q(X)_F$ de tal manera que $\alpha\sim_{\text{num}}0$, pero que $\alpha\nsim 0$ para una variedad irreducible X. Para $\mathbf{p}=\text{Spec}(k)$, sea $\mathbf{1}=(\text{Spec }k,\Delta_{\mathbf{p}},0)$ el objeto identidad, entonces en $\mathcal{M}_\sim(k)_F$ tenemos un morfismo:

$$f:\mathbf{1}=(\text{Spec }k,\Delta_{\mathbf{p}},0)\ \to\ \mathfrak{h}_\sim(X)(q)=(X,\Delta_X,q)$$

dado por $f=\alpha\in\text{Corr}^q_\sim(\text{Spec }k,X)=\mathcal{Z}^q_\sim(X)_F$ y como $\alpha\nsim 0$, luego $f\neq 0$. Ahora, puesto que $\mathcal{M}_\sim(k)_F$ es abeliana y semi-simple, entonces existe $g:(X,\Delta_X,q)\to(\text{Spec }k,\Delta_{\mathbf{p}},0)$ de tal manera que $g\bullet f=1_{\mathbf{p}}$. Entonces g está dado por un ciclo $\beta\in\mathcal{Z}^{d-q}_\sim(X)_F$. De esta manera:

$$g\bullet f=\text{pr}_{13*}\big(\text{pr}_{12}^*(\mathbf{p}\times\alpha)\cdot\text{pr}_{23}^*(\beta\times\mathbf{p})\big)=\text{gr}(\alpha\cdot\beta)\cdot\mathbf{p}$$

en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Spec }k\times X\times\text{Spec }k \arrow[dl, "\text{pr}_{12}"'] \arrow[d, "\text{pr}_{13}"] \arrow[dr, "\text{pr}_{23}"] & \\
\text{Spec }k\times X & \text{Spec }k\times\text{Spec }k & X\times\text{Spec }k.
\end{tikzcd}$$

Puesto que $g\bullet f=1_{\mathbf{p}}$, luego tenemos que $\text{gr}(\alpha\cdot\beta)=1$. Lo que quiere decir que α no es numericamente equivalente a cero, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\alpha\sim 0$, es decir, $\sim\,=\,\sim_{\text{num}}$. $\square$

Una versión categórica del teorema de Jannsen, es el siguiente resultado:

Teorema 4.2.16 ([1], Teo. 4.5.1.2; [2], Teo. 8.2.2 a)) *Sea $H:\mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ un $\otimes$-funtor entre $\otimes$-categorías rígidas F-lineales, tal que $\text{End}_{\mathcal{A}}(\mathbf{1})=F$ y en $\mathcal{A}'$ los Hom's son dimensionalmente finitos y los endomorfismos nilpotentes son de traza nula. Sea $\mathcal{N}$ el $\otimes$-ideal mas grande de $\mathcal{A}$. Entonces:*

i) *La categoría $(\mathcal{A}/\mathcal{N})^\natural$ es abeliana y semi-simple.*

ii) *El único ideal tensor $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ es semi-simple es $\mathcal{I}=\mathcal{N}$.*

El teorema de Jannsen se sigue de aplicar el resultado anterior a $\mathcal{A}=\text{CH}\mathcal{M}(k)_F$, y de la existencia de un $\otimes$-funtor $H\colon\text{CH}\mathcal{M}(k)_F\to\mathbf{GrVec}_K$, dado por la universalidad de los motivos de Chow.

Apéndice A

Categorías rígidas y categorías Tannakianas

El propósito de este pequeño apéndice es recalcar en los hechos básicos sobre categorías rígidas y Tannakianas, los cuales serán de mucha utilidad en el presente trabajo. Daremos lo esencial, sin dar demostración alguna, para esto referimos a los textos de Deligne-Milne [8] y N. Saavedra-Rivano [31].

A.1. $\otimes$-Categorías rígidas

Sea F un anillo conmutativo. Una **categoría F-lineal** (F-categoría) es una categoría aditiva $\mathcal{A}$ tal que para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{A}$, el conjunto de morfismos $\mathcal{A}(A, B)$ es un F-módulo y la composición es F-bilineal.

Definición A.1.1 Una **categoría tensor**[1] ($\otimes$-categoría) sobre F, es una categoría F-lineal junto con un bifuntor bilineal:

$$- \otimes - : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

llamado **producto tensor**, y un objeto identidad $\mathbf{1}_{\mathcal{A}}$, donde el producto satisface, para los objetos A, B, C, los siguientes isomorfismos funtoriales:

$$\begin{aligned} a_{ABC} &: A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C \\ c_{AB} &: A \otimes B \cong B \otimes A \quad \text{tal que } c_{BA} = c_{AB}^{-1} \\ u_A &: A \otimes \mathbf{1} \cong A, \qquad u'_A : \mathbf{1} \otimes A \cong A \end{aligned}$$

los cuales son llamados asociatividad y conmutatividad restringida[2] (constraint, ver [8] pag. 4) y unidad[3], respectivamente.

A.1.1. En una categoría tensor F-lineal $\mathcal{A}$, un objeto $L \in \mathcal{A}$ es **invertible** si el endofuntor $- \otimes L$ define una equivalencia de categorías, equivalentemente

[1] También llamada $\otimes$-categoría ACU (Saavedra-Rivano) o categoría monoidal simétrica.
[2] Satisfacen el axioma del pentágono y hexágono, respectivamente.
[3] El funtor $A \mapsto \mathbf{1} \otimes A$ define una equivalencia de categorías.

a que exista un objeto $M \in \mathcal{A}$, tal que $L \otimes M = \mathbf{1}$. Un funtor $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ es **fiel** (resp. **pleno**) si, para cualesquiera objetos $A, B \in \mathcal{A}$, el morfismo:

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{A}(A,B) \longrightarrow \mathcal{A}'(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$$

es inyectivo (resp. suprayectivo). Se dice que $\mathcal{F}$ es **esencialmente suprayectivo** si para cada objeto $A' \in \mathcal{A}'$, existe $A \in \mathcal{A}$ de tal manera $\mathcal{F}(A) \cong A'$. Toda equivalencia de categorías es esencialmente suprayectivo. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son categorías F-lineales, el funtor $\mathcal{F}$ es un **funtor F-lineal** (F-funtor) si el morfismo de Hom's es F-lineal. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son categorías tensores. Un **funtor tensor** (⊗-funtor) consiste de un funtor F-lineal:

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$$

y una colección de isomorfismos naturales:

$$\begin{aligned} \vartheta_{AB}\colon \mathcal{F}(A \otimes_{\mathcal{A}} B) &\cong \mathcal{F}(A) \otimes_{\mathcal{A}'} \mathcal{F}(B) \\ \vartheta_{\mathbf{1}}\colon \mathcal{F}(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) &\cong \mathbf{1}_{\mathcal{A}'}, \end{aligned}$$

compatibles con las "restricciones" a, c, u, u'.

A.1.2. (Dold-Puppe). Sea A un objeto en una categoría tensor $\mathcal{A}$. Un **dual** para A, es un triplete dado por un objeto $A^\vee$ de $\mathcal{A}$ y morfismos:

$$\varepsilon : A \otimes A^\vee \to \mathbf{1} \qquad \text{y} \qquad \eta : \mathbf{1} \to A^\vee \otimes A$$

llamados morfismos **evaluación** y **coevaluación** respectivamente, de tal manera que las composiciones:

$$A \cong A \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{1_A \otimes \eta} A \otimes A^\vee \otimes A \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1_A} \mathbf{1} \otimes A \cong A$$

$$A^\vee \cong \mathbf{1} \otimes A^\vee \xrightarrow{\eta \otimes 1_A} A^\vee \otimes A \otimes A^\vee \xrightarrow{1_A \otimes \varepsilon} A^\vee \otimes \mathbf{1} \cong A^\vee$$

son las identidades en A y $A^\vee$ respectivamente. Un objeto $A \in \mathcal{A}$ es **reflexivo** si A es isomorfo a $(A^\vee)^\vee$. Todo objeto ⊗-invertible es reflexivo.

Definición A.1.2 Una ⊗-categoría F-lineal $\mathcal{A}$ se dice que es **rígida**, si todo objeto de $\mathcal{A}$ admite un dual.

Para tales categorías, si $A, B \in \mathcal{A}$ y $f \in \mathcal{A}(A,B)$, entonces existe $f^{\mathbf{t}} := f^\vee \in \mathcal{A}(B^\vee, A^\vee)$ caracterizado por la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd} B^\vee \otimes A \arrow[r, "1_{B^\vee} \otimes f"] \arrow[d, "f^{\mathbf{t}} \otimes 1_A"'] & B^\vee \otimes B \arrow[d, "\varepsilon_{B^\vee}"] \\ A^\vee \otimes A \arrow[r, "\varepsilon_{A^\vee}"'] & \mathbf{1}. \end{tikzcd}$$

De esta manera, obtenemos un funtor contravariante $(-)^\vee : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, el cual envía a cada objeto a su dual y es una equivalencia de categorías.

A.1.3. Sea $\mathcal{A}$ una categoría F-tensor y $A, B \in \mathcal{A}$, las condiciones anteriores implican la existencia de **hom internos**, es decir, existe un funtor:

$$\begin{aligned} \mathbf{Hom}\colon \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (A,B) &\mapsto \mathbf{Hom}(A,B) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{Hom}(A,B)$ es el objeto representante del funtor:

$$T \rightsquigarrow \mathcal{A}(T \otimes A, B) : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

En otras palabras, se cumple que:

$$\mathcal{A}(T \otimes A, B) \cong \mathcal{A}(T, \mathbf{Hom}(A,B)), \qquad (*)$$

el morfismo universal correspondiente al morfismo identidad $1_{\mathbf{Hom}(A,B)}$ es llamado **morfismo evaluación**:

$$\varepsilon_{A,B} : \mathbf{Hom}(A,B) \otimes A \to B$$

y el morfismo $T \to \mathbf{Hom}(A,B)$ se corresponde por la propiedad universal al morfismo $T \otimes A \to B$, caracterizado por la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{tikzcd} T \otimes A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ \mathbf{Hom}(A,B) \otimes A. \arrow[ur, "\varepsilon_{A,B}"'] & \end{tikzcd}$$

Entonces, el dual de un objeto $A \in \mathcal{A}$ se puede ver como $A^\vee = \mathbf{Hom}(A, \mathbf{1})$. Además, se tienen los isomorfismos:

$$\mathcal{A}(A, (A^\vee)^\vee) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(A \otimes A^\vee, \mathbf{1}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(A^\vee \otimes A, \mathbf{1}),$$

con todo los objetos reflexivos, $A \xrightarrow{\cong} (A^\vee)^\vee$. Por otro lado, si A_1, A_2, B_1, B_2 son objetos de la F-categoría tensor rígida $\mathcal{A}$, por la propiedad del morfismo evaluación, se tiene el siguiente isomorfismo:

$$\mathbf{Hom}(A_1, B_1) \otimes \mathbf{Hom}(A_2, B_2) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Hom}(A_1 \otimes A_2, B_1 \otimes B_2).$$

Finalmente, de la fórmula $(*)$, nos queda que como A tiene dual, entonces existe un isomorfismo natural:

$$\mathcal{A}(T \otimes A, B) \cong \mathcal{A}(T, A^\vee \otimes B) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{Hom}(A,B) \cong A^\vee \otimes B.$$

Lo cual hace del funtor $- \otimes A^\vee$ un adjunto derecho del funtor $- \otimes A$, lo cual hace de $\mathcal{A}$ una categoría cerrada.

Proposición A.1.3 ([8], Prop. 1.9) *Sea $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ un ⊗-funtor entre ⊗-categorías rígidas. Entonces existe un isomorfismo canónico:*

$$\mathcal{F}(\mathbf{Hom}(A,B)) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Hom}(\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B))$$

para cualesquiera objetos $A, B \in \mathcal{A}$.

Esto nos da de manera automática que ⊗-funtores entre ⊗-categorías rígidas son compatibles con la formación de duales $(-)^\vee$.

Definición A.1.4 Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ dos ⊗-funtores. Un **morfismo de ⊗-funtores** de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ es una transformación natural $\omega\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(A)\otimes\mathcal{F}(B) \arrow[r, "\mathcal{F}_{AB}"] \arrow[d, "\omega_A\otimes\omega_B"'] & \mathcal{F}(A\otimes B) \arrow[d, "\omega_{A\otimes B}"] \\
\mathcal{G}(A)\otimes\mathcal{G}(B) \arrow[r, "\mathcal{G}_{AB}"'] & \mathcal{G}(A\otimes B)
\end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo.

Al conjunto de morfismos tensores de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ se le denota como $\mathrm{Hom}^{\otimes}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. De la misma manera, tenemos las siguientes notaciones $\mathrm{End}^{\otimes}(\mathcal{F})$, $\mathrm{Iso}^{\otimes}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ y $\mathrm{Aut}^{\otimes}(\mathcal{F})$. Gracias a la dualidad, se tiene el siguiente resultado:

Proposición A.1.5 *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos funtores tensores entre ⊗-categorías rígidas. Entonces todo morfismo tensor de $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ es un isomorfismo:*

$$\mathrm{Hom}^{\otimes}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = \mathrm{Iso}^{\otimes}(\mathcal{F},\mathcal{G}).$$

A.1.6. Traza y dimensión rígida. Aplicando el funtor $\mathcal{A}(-,\mathbf{1})$ al morfismo evaluación $\varepsilon\colon A^\vee \otimes A \to \mathbf{1}$, obtenemos un morfismo:

$$\mathrm{tr}_A\colon \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(A) \to \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathbf{1})$$

llamado **morfismo traza**, explicitamente, tenemos la siguiente definición.

Definición A.1.6 En una ⊗-categoría rígida $\mathcal{A}$, la **traza** de un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(A)$ es un elemento en $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\mathbf{1})$ dada por la composición:

$$\boxed{\mathrm{tr}(f) := (\mathbf{1} \xrightarrow{\eta} A\otimes A^\vee \xrightarrow{c_{AA^\vee}} A^\vee\otimes A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{1})}$$

la **característica de Euler-Poincaré** del objeto $A \in \mathcal{A}$ es $\chi(A) := \mathrm{tr}(1_A)$.

A.1.7. Propiedades. Sea $\mathcal{A}$ una categoría F-tensor rígida. Consideremos un objeto $A \in \mathcal{A}$ y $f, g \in \mathrm{End}(A)$. Sea $\lambda \in \mathrm{End}(\mathbf{1})$, entonces se tienen las siguientes propiedades:

i) $\mathrm{tr}(f+g) = \mathrm{tr}(f) + \mathrm{tr}(g)$.

ii) $\mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f)$.

iii) $\mathrm{tr}(\lambda(f)) = \lambda(\mathrm{tr}(f))$.

iv) $\mathrm{tr}(f^{\mathbf{t}}) = \mathrm{tr}(f)$.

Trazas en categorías F-tensores rígidas satisfacen un criterio de compatibilidad con respecto a funtores F-tensores:

Proposición A.1.7 (Fórmula de traza) *Sea $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor F-tensor entre categorías rígidas F-tensores. Sea $f\colon A \to A$ un endomorfismo en $\mathcal{A}$. Entonces, existe una igualdad en* $\mathrm{End}_{\mathcal{B}}(\mathbf{1})$*:*

$$\mathcal{F}\big(\mathrm{tr}_{\mathcal{A}}(f)\big) = \mathrm{tr}_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{F}(f)\big).$$

Ejemplo A.1.8 La categoría $\mathbf{Mod}_A$ es una categoría en la que todos sus objetos admiten duales (y hom's internos). Sin embargo, no todos sus objetos son reflexivos. Por ejemplo, si $A = \mathbb{Z}$ entonces $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ no es reflexivo. La subcategoría plena de $\mathbf{Mod}_A$ que consiste de todos los A-módulos proyectivos de tipo finito $\mathbf{Modprtf}_A$ es una $\otimes$-categoría rígida ([7], prop. 2.6).

Ejemplo A.1.9 La $\otimes$-categoría $\mathbf{Rep}_F(G)$, donde G es un grupo, es una $\otimes$-categoría rígida. El dual de un objeto $(V, \rho) \in \mathbf{Rep}_F(G)$ está dado por la **representación contragradiente**. En particular, la categoría Vec_E de espacios vectoriales dimensionalmente finitos sobre un campo E es una $\otimes$-categoría abeliana y rígida, donde el dual de un objeto $V \in \mathrm{Vec}_E$ es el espacio vectorial dual usual V^*, y además $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = E$. Aquí todas las definiciones anteriores coinciden con las nociones familiares de Vec_E. Por ejemplo, $\mathrm{tr} : \mathrm{End}(V) \to E$ es la traza usual y la característica de Euler-Poincaré de un espacio vectorial es su dimensión.

Ejemplo A.1.10 La categoría $\mathbf{Vec}_E^{\pm}$ de **super espacios vectoriales** (o espacios vectoriales $\mathbb{Z}_2$-graduados) de dimensión finita sobre E. Un superespacio vecorial V es un espacio vectorial con una descomposición $V = V_+ \oplus V_-$. Elementos en V_+ son llamados *pares* y elementos en V_- son llamados *impares*. Si un elemento $v \in V$ es homogéneo, es decir, si $v \in V_+$ o

$v \in V_{-}$, entonces δv denota su grado. Luego, para un elemento homogéneo uno tiene que $v \in V_{\delta v}$. Para el morfismo de simetría, introducimos el cambio de signos $(-1)^{\delta v \cdot \delta w}$ siempre que el orden de dos elementos homogéneos v y w sea cambiado. De manera más general, tenemos a la categoría $\mathbf{GrVec}_E$ de E-espacios vectoriales $\mathbb{Z}$-graduados de dimensión finita ($V = \bigoplus V^n$). El producto tensor $\otimes_E$ hace de $\mathbf{GrVec}_E$ una $\otimes$-categoría rígida, y la conmutatividad restringida c_{VW} está dada por la regla de signos de Koszul:

$$c_{VW} : V \otimes W \xrightarrow{\cong} W \otimes V,$$

con $c_{VW} = \bigoplus_{r,s}(-1)^{rs}c^{r,s}$, donde $c^{r,s} : V^r \otimes W^s \to W^s \otimes V^r$ es el morfismo usual en $\mathbf{Vec}_E$. El rango (característica de Euler-Poincaré) de un objeto $V \in \mathbf{GrVec}_E$, es la **super-dimensión**: $\dim V^+ - \dim V^-$, donde $V^+ = V^{2i}$ y $V^- = V^{2i+1}$.

A.2. Categorías Tannakianas

La idea de categoría Tannakiana es la siguiente. Sea G un grupo, entonces $\mathbf{Rep}_F(G)$ la categoría de F-representaciones finitamente dimensionales de G tiene una estructura relativamente interesante de *categoría Tannakiana*. Consideremos la siguiente asignación:

$$\begin{array}{ccc} \text{Grupos} & \longrightarrow & \text{categorias Tannakianas} \\ G & \mapsto & \mathbf{Rep}_F(G). \end{array}$$

El teorema de Tannaka-Krein establece que si G es compacto, entonces el grupo G se puede recuperar vía el funtor que olvida:

$$\mathbf{Rep}_F(G) \longrightarrow \mathbf{Vec}_F$$

sobre la categoría $\mathbf{Vec}_F$ de F-espacios vectoriales finitamente dimensionales.

A.2.1. Sea F un campo y $\mathcal{A}$ una $\otimes$-categoría rígida, abeliana sobre $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = F$. Un **funtor fibrado** sobre $\mathcal{A}$ es un $\otimes$-funtor exacto y fiel:

$$\omega \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Vec}_E$$

en la $\otimes$-categoría rígida de espacios vectoriales de dimensión finita sobre alguna extensión de campos E de F.

Definición A.2.1 Una $\otimes$-categoría abeliana y rígida $\mathcal{A}$ tal que $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = F$ es un campo, se dice que es **Tannakiana** si admite un funtor fibrado.

Si existe tal funtor fibrado ω sobre $E = F$, a la categoría Tannakiana $\mathcal{A}$ se le llama **categoría Tannakiana neutral**. A la pareja $(\mathcal{A}, \omega)$, donde $\mathcal{A}$ es una categoría Tannakiana y ω es un funtor fibrado sobre $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = F$, se le llama **categoría Tannakiana neutralizada**.

Ejemplo A.2.2 Sea G un grupo esquema afín sobre un campo F. La categoría abeliana F-lineal $\mathbf{Rep}_F(G)$ de representaciones dimensionalmente finitos de G es una $\otimes$-categoría con respecto al producto tensor sobre F de espacios vectoriales. Además, la categoría es rígida y el funtor que olvida:

$$\omega^G \colon \mathbf{Rep}_F(G) \longrightarrow \mathbf{Vec}_F; \qquad (V, \rho) \mapsto V,$$

es un funtor tensor, exacto y fiel, es decir, es un funtor fibrado. Luego, $\mathbf{Rep}_F(G)$ es una categoría Tannakiana (neutral). Puede suceder que otro funtor fibrado en $\mathbf{Rep}_F(G)$ no sea isomorfo a ω^G.

A.2.3. Dada una categoría Tannakiana neutralizada $\mathcal{A}$, con $\omega : \mathcal{A} \to \mathbf{Vec}_F$ como funtor fibrado, se puede definir un grupo-esquema afín:

$$G(\omega) = \mathrm{Aut}^{\otimes}\omega$$

el grupo de transformaciones naturales de ω en si mismo que conservan la estructura tensor, el cual puede ser visto como un esquema vía el funtor de puntos en F-álgebras. El siguiente resultado, es el ingrediente principal del **formalismo Tannakiano**:

Teorema A.2.3 (Deligne-Grothendieck-Saavedra) *Sea $(\mathcal{A}, \omega)$ una categoría Tannakiana neutralizada sobre un campo F, y sea $\mathrm{Aut}^{\otimes}\omega$ el grupo-esquema afín asociado sobre F. Entonces, el funtor:*

$$\Psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Rep}_F(\mathrm{Aut}^{\otimes}\omega)$$

es una equivalencia de categorías.

En particular, si $\mathcal{A} = \mathbf{Rep}_F(G)$ para un grupo-esquema afín sobre F. Entonces el morfismo de grupos:

$$G \longrightarrow \mathrm{Aut}^{\otimes}\omega^G$$

es un isomorfismo.

Ejemplo A.2.4 Sea $\mathbf{Hod}_{\mathbb{R}}$ la categoría de estructuras de Hodge (reales). Recordemos que un objeto $H \in \mathbf{Hod}_{\mathbb{R}}$, consiste de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial H de dimensión finita y una descomposición de la forma:

$$H_{\mathbb{C}} := H \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}, \qquad \text{tal que} \qquad H^{p,q} = \overline{H^{q,p}},$$

donde $^{-}$ denota la conjugación compleja. Entonces $\mathbf{Hod}_{\mathbb{R}}$ es una categoría Tannakiana, donde el funtor natural:

$$\begin{aligned} \omega : \mathbf{Hod}_{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}} \\ H &\mapsto H \end{aligned}$$

es el funtor fibrado. En este caso, el grupo $G(\omega) = \mathbb{S}$ el cual es un toro definido por $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})$, donde $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$ denota la restricción de Weil de escalares.

Una caracterización importante sobre categorías Tannakianas que no involucra a un funtor fibrado, fue probado por Deligne.

Teorema A.2.5 (Deligne) *Sea $\mathcal{A}$ una $\otimes$-categoría abeliana y rígida sobre un campo F de característica cero tal que* $\mathrm{End}(\mathbf{1}) = F$. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *$\mathcal{A}$ es Tannakiana,*

ii) *si $A \in \mathcal{A}$, $\Lambda^n A = 0$ para alguna $n > 0$,*

iii) *la característica de Euler-Poincaré: $\chi(A)$ es un entero natural.*

Bibliografía

[1] Y. André; *Une introduction aux motifs.* Panoramas et synthéses **17**, Société Mathématique de France. Paris (2004).

[2] Y. André, B. Kahn, P. O'Sullivan; "Nilpotence, radicaux et structures monoïdales", *Rend. Sem. Math. Univ. Padova.* **108**, p. 107-291 (2002).

[3] Y. André, B. Kahn; "Erratum: nilpotence, radicaux et structures monoïdales". *Rend. Sem. Math. Univ. Padova.* **113**, p. 125-128 (2005).

[4] L. Brunjes; *Forms of Fermat Equations and Their Zeta Functions.* World Scientific, Singapore (2004).

[5] K. Coombes; "The K-cohomology of Enriques surfaces". In *Algebraic K-theory, commutative algebra and algebraic geometry* (1989). AMS **126**, Providence RI (1992). Pag. 47-57.

[6] P. Deligne; "A quoi servent les motifs". In [36], pag. 143-161 (1994).

[7] P. Deligne, "Catégories Tannakiennes". In *Grothendieck Festschrift*, vol. II, **87**. Progr. Math. Birkhäuser-Boston, p. 111-195. Boston, MA (1990).

[8] P. Deligne, J. Milne; "Tannakian Categories", *Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties.* LNM **900**, p. 101-228. Springer (1982).

[9] A. J. De Jong; "A note on Weil cohomology"(2007). Disponible en: `http://www.math.columbia.edu/~dejong/seminar/note on weil cohomology.pdf`

[10] A. Del Padrone; *Schur functors, nilpotency and motives*, PhD thesis (2006).

[11] M. Demazure; "Motifs des Variétés Algébriques". *Séminaire N. Bourbaki* 365. Lectures Notes in Mathematics **180**, Springer (1971).

[12] C. Deninger and J. Murre; “Motivic descomposition of abelian schemes and the Fourier transform”. *J. Reine Angew. Math.* **422** (1991).

[13] D. Eisenbud, J. Harris; *The Geometry of Schemes*, Springer, GTM **197**. New York

[14] W. Fulton; *Intersection Theory*, Ergeb. der Math. **3**. Springer, (1984).

[15] A. Grothendieck; “Standard Conjectures on Algebraic Cycles”. *Alg. Geo. Bombay Colloquium 1968*, p. 193-199. Oxford Uni. Press, 1969.

[16] R. Hartshorne; *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, GTM **52** (1977).

[17] U. Jannsen; “Motives, numerical equivalence and semi-simplicity”. *Invent. Math.* **107** pag. 447-452 (1992).

[18] U. Jannsen; “Equivalence relations on algebraic cycles”. *The arithmetic and geometry of algebraic cycles.* Banff Conf. 1998, Kluwer Ac. Publ.

[19] B. Kanh, R. Sebastian; “Smash-nilpotent cycles on abelian 3-folds”. *Math. Res. Lett.* **16** pag. 10001-10004 (2009).

[20] S. L. Kleiman; Motives in Alg. Geometry. *In conf. Oslo*, 53-82 (1980).

[21] S. L. Kleiman; “The Standard Conjectures”. In [36], pag. 3-20 (1994).

[22] K. Künneman; “On the Chow motive of an abelian scheme”. In [36], pag. 189-205 (1994).

[23] M. Levine; “Six Lectures on Motives”. *Some recent developments in algebraic K-theory.* ICTP Lectures Notes **23**, p. 131-227 (2008).

[24] Y. I. Manin; “Correspondences, motives and monoidal transformations”. *U.S.S.R. Sbornik* **6**, pag. 439-470 (1968).

[25] C. Mazza, V. Voevodsky, C. Weibel; *Lectures Notes on Motivic Cohomology.* Clay Monographs in Math **2**, AMS (2006).

[26] B. Mazur; What is ... a motive? *Notices Amer. Math. Soc.* **51**, (2004).

[27] J. Murre; “On the motive of an algebraic surface”. *J. reine angew. Math.* **409** (1990), pag. 190-204.

[28] J. Murre, J. Nagel, C. Peters; *Lectures on the Theory of Pure Motives.* University Lectures Series **61**, American Mathematical Society (2013).

[29] R. S. Pierce; *Associative Algebras*, GTM **88**. Springer-Verlag, 1982.

[30] N. Saavedra-Rivano; *Catégories Tannakiennes*. Lectures Notes in Mathematics **265**. Springer-Verlag, Berlin (1972).

[31] P. Samuel; "Relations d'équivalence en géométrie algébrique". In *Proc. I.C.M. 1958, Edinburgh*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (1960).

[32] A. J. Scholl; "Classical Motives". In [36], pag. 163-187 (1994).

[33] A. M. Šermenev; "Motif of an abelian variety". *Functional An. Appl.* **8** pag. 47-53 (1974).

[34] J. P. Serre; *Local Algebra*. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag. Berlin (2000).

[35] V. Voevodsky, "A nilpotence theorem for cycles algebraically equivalent to zero". *Internat. Math. Res. Notices* **4**, p. 3-20. 1995.

[36] **Motives**; "Summer Research Conference on Motives". U. Jannsen, S. Kleiman and J-P. Serre, editores. *Proc. of Symp. in Pure Math.* **55** part I and II. Amer. Math. Soc. Providence, RI. (1994).

Índice alfabético

$\otimes$-categoría, 55
$\otimes$-funtor, 56
$\otimes$-ideal, 48

anillo de Chow, 4
anillo de división, 48
anillo semi-simple, 48

característica de Euler-Poincaré, 58
categoría F-lineal, 55
categoría abeliana, 22
categoría cociente, 48
categoría de correspondencias, 18
categoría pseudo-abeliana, 23
categoría rígida, 38, 56
categoría semi-simple, 48
categoría Tannakiana, 60
ciclo algebraico, 1
clase fundamental, 6
cohomología ℓ-ádica, 9
cohomología cristalina, 9
cohomología de Betti, 9
cohomología de De Rham, 9
cohomología de Weil, 5
componentes de Künneth, 22
conjetura $CK(X)$=Chow-Künneth, 44
conjetura de Künneth, 22
conjetura de Voevodsky, 11
conjetura estándar $C(X)$, 22
conjetura estándar $D(X)$, 11
correspondencia, 2
correspondencia algebraica, 15
correspondencia cohomológica, 13

descomposición de Chow-Künneth, 43
dimensión rígida, 58
dualidad de Poincaré, 6
dualidad para motivos, 38

equivalencia algebraica, 4
equivalencia homológica, 8
equivalencia nilpotente-smash, 4, 50
equivalencia numérica, 5, 50
equivalencia racional, 3

fórmula de intersección, 2
fórmula de Künneth, 6, 32
fórmula de proyección, 3, 7
fórmula de traza, 59
fórmula de traza de Lefschetz, 14
funtor F-lineal, 56
funtor de cohomología motívica, 27
funtor esencialmente suprayectivo, 56
funtor fibrado, 60
funtor fiel y pleno, 56
funtor realización, 28

grado de una correspondencia, 15
grupo de Chow, 4
grupo de Griffiths, 12
grupo de Néron-Severi, 12

ideal, 48
intersección propia, 2

lema de Lieberman, 20

lema de Schur, 50
lema del movimiento de Chow, 4

mapeo de ciclos, 7
morfismo coevaluación, 56
morfismo de $\otimes$-funtores, 58
morfismo de grado, 5
morfismo de traza, 6
morfismo evaluación, 56
morfismo traza, 58
morfismos nilpotentes-smash, 49
morfismos numericamente triviales, 49
motivo Albanese, 45
motivo de Chow-Künneth, 43
motivo de Lefschetz efectivo, 24
motivo de Lefschetz puro, 33
motivo de Picard, 45
motivo de Tate, 33
motivo de una curva, 42
motivos efectivos, 24
motivos puros, 25
motivos puros de Chow, 29
motivos puros numéricos, 47

objeto dual, 56
objeto invertible, 55
objeto quasi-invertible, 25
objeto reflexivo, 56

principio de identidad de Manin, 39
producto copa, 5
producto de intersección, 1
proyector, 17, 23
proyector Albanese, 44
proyector de Picard, 44
pseudo-abelianización, 23
push-forward en cohomología, 6

relación de equivalencia adecuada, 2

suma directa de motivos, 37
super dimensión, 60
super espacios vectoriales, 60

teorema de Deligne, 62
teorema de Deligne-Grothendieck-Saavedra, 61
teorema de Jannsen, 53
teorema de Matsusaka, 12
torcedura de Tate, 5, 34

variedad abeliana, 42
variedad Albanese, 45
variedad celular, 41
variedad de Picard, 45
variedad Jacobiana, 42