



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

Flujos oscilatorios con fluidos de Cattaneo-Vernotte

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

PRESENTA:

Eder Salvador Castillo Romero

TUTOR PRINCIPAL

Dr. Jesús Antonio del Río Portilla
Instituto de Energías Renovables

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR

Dr. Mariano López de Haro
Instituto de Energías Renovables
Dr. Rosalío Fernando Rodríguez Zepeda
Instituto de Física

MÉXICO, D.F. OCTUBRE DE 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Índice general

Índice general	II
Índice de figuras	IV
Dedicatoria	VI
Agradecimientos	VII
Lista de símbolos	VIII
Resumen	X
Abstract	XI
1. Introducción	1
2. Flujo de calor en un fluido bajo régimen oscilatorio	4
2.1. Introducción	4
2.2. Campo de velocidad	4
2.3. Campo de temperatura	11
2.3.1. Cálculo de $g(r)$	15
2.4. Difusividad térmica efectiva	18
2.5. Desplazamiento de marea	21
2.6. Normalización de α_e y análisis de resultados	22
3. Flujo de calor en un fluido de Cattaneo-Vernotte	28
3.1. Introducción	28
3.2. Campo de temperatura	29
3.2.1. Cálculo de $g(r)$	31

3.3. Difusividad térmica efectiva	33
3.4. Comparación cuantitativa entre el flujo de calor oscilatorio y el flujo de calor molecular	49
4. Flujo de calor en un fluido ideal	51
4.1. Introducción	51
4.2. Campo de velocidad	52
4.3. Campo de temperatura	54
4.4. Difusividad térmica efectiva	56
4.5. Modelo de Cattaneo-Vernotte	57
5. Conclusiones	59
A. Integrales de Bessel	61
B. Números complejos	63
C. Análisis de las singularidades	65
C.1. Introducción	65
C.2. Aproximación a primer orden en ω_0	66
C.2.1. Fluido Newtoniano	66
C.2.2. Fluido viscoelástico	70
C.3. Modelo de Cattaneo-Vernotte	71
C.4. Fluido Ideal	73
D. Programa computacional en Mathematica	75
Bibliografía	79

Índice de figuras

2.1.	Algunas etapas del movimiento oscilatorio de un fluido Newtoniano. Se observa que durante la mayor parte del ciclo el fluido cercano a la región de las paredes del tubo tendrá una temperatura diferente de aquella en el centro del flujo dando como resultado que grandes cantidades de calor se transfieran radialmente y sean transportadas axialmente de manera periódica [2].	12
2.2.	$\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ como función del número de Womersley W_o , para distintos números P_r : $P_r=2$ (línea sólida), $P_r=10$ (línea punteada) y $P_r=100$ (línea rayada).	25
2.3.	$\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ como función del número de Womersley W_o con $P_r=10$, para distintos números D_e : $D_e=0$ (línea rayada), $D_e=0.5$ (línea punteada) y $D_e=1$ (línea sólida).	26
2.4.	$\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ como función del número de Womersley W_o y del número de Deborah D_e con $P_r=10$	27
3.1.	$\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ como función del número de Womersley W_o con $P_r=10$, para distintos números E_d : $E_d=0$ (línea punteada), $E_d=0.5$ (línea rayada) y $E_d=10$ (línea sólida).	36
3.2.	$\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ como función del número de Womersley W_o con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, para distintos números E_d : $E_d=0$ (línea punteada), $E_d=0.5$ (línea sólida) y $E_d=1$ (línea rayada).	37
3.3.	$\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ como función del número de Womersley W_o con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, para distintos números E_d : $E_d=0$ (línea punteada), $E_d=0.01$ (línea sólida) y $E_d=25$ (línea rayada).	38
3.4.	$\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ como función del número de Womersley W_o y del número E_d con $P_r=10$ y $D_e=0.5$	39

3.5.	χ como función del número de Womersley W_o con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, para distintos números E_d : $E_d=0.16$ (línea punteada), $E_d=0.5$ (línea sólida) y $E_d=0.7$ (línea rayada).	42
3.6.	χ como función del número de Womersley W_o con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, para distintos números E_d : $E_d=0.12$ (línea punteada), $E_d=0.06$ (línea sólida) y $E_d=0.01$ (línea rayada).	43
3.7.	χ como función del número de Womersley W_o y del número E_d con $P_r=10$ y $D_e=0.5$	44
3.8.	χ_{max} como función del número E_d con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, valores obtenidos mediante la ecuación (3.3.3) (línea sólida) y ajuste de curva (línea punteada).	45
3.9.	W_{max} como función del número E_d con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, valores obtenidos mediante la ecuación (3.3.3) (línea sólida) y ajuste de curva (línea punteada).	46
3.10.	W_c como función del número E_d con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, valores obtenidos mediante la ecuación (3.3.3) (línea sólida) y ajuste de curva (línea punteada).	47

Dedicatoria

A mis padres, Salvador y Graciela, por su gran apoyo y presencia en todo momento, por estar siempre cerca de mí, me dan fuerzas y entusiasmo para alcanzar cualquier meta en mi vida.

A mis hermanos, Graciela y Erick, por su compañía, alegría y afecto que fueron necesarios para complementar este trabajo.

A mi familia, tíos y primos, por brindarme sus consejos y apoyo en todo este tiempo.

A mi nana Carmen Romero García (q.e.p.d) y a mi tío Darío Romero Romero (q.e.p.d), por haberme criado y enseñado muchos de los valores que hoy poseo, siempre los tendré en mi corazón, muchas gracias por todo.

Agradecimientos

Al Dr. Rosalío Fernando Rodríguez Zepeda, por haber contribuido a mi formación profesional mediante su asesoría y consejo en todo momento, sin duda, un tutor excelente.

A mi tutor principal, Dr. Jesús Antonio del Río Portilla y al Dr. Mariano López de Haro, quienes en este tiempo me han orientado y enseñado a realizar investigación, a ser mejor profesionista cada día y mediante ello contribuir al desarrollo de nuestro país, les agradezco profundamente.

A los revisores, Dr. Sergio Cuevas García, Dr. Federico Vázquez Hurtado y Dr. Héctor Domínguez Castro, que mediante sus conocimientos y profesionalismo contribuyeron a realizar este trabajo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto de Energías Renovables, por permitirme ingresar en sus aulas para estudiar y crecer como profesional, asimismo al CONACYT por otorgarme la beca que me ha permitido seguir estudiando.

Lista de símbolos

Símbolos Latinos

a	radio del tubo (m)
A	área de la sección transversal (m^2)
c	calor específico a volumen constante ($\text{J Kg}^{-1}\text{K}^{-1}$)
J_0	función cilíndrica de Bessel de orden cero
J_1	función cilíndrica de Bessel de primer orden
k	conductividad térmica del fluido ($\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$)
p	presión (N m^{-2})
r	coordenada radial (m)
t	tiempo (s)
t_m	tiempo de relajación del fluido Maxwelliano (s)
t_q	tiempo de relajación del fluido de Cattaneo-Vernotte (s)
T	temperatura del fluido (K)
\mathbf{v}	vector de velocidad del fluido (m s^{-1})
v	componente axial de la velocidad del fluido (m s^{-1})
x	coordenada axial (m)
Δx	desplazamiento de marea (m)
P_r	número de Prandtl ($\eta/\rho\alpha$)
W_o	número de Womersley ($a\sqrt{\rho\omega/\eta}$)
D_e	número de Deborah ($t_m\eta/a^2\rho$)
E_d	número adimensional ($t_q\eta/a^2\rho$)

Símbolos Griegos

α	difusividad térmica molecular ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
α_e	difusividad térmica efectiva ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
$\hat{\alpha}_e$	difusividad térmica efectiva adimensional (α_e/α)
χ	razón de la difusividad térmica efectiva del modelo de Cattaneo-Vernotte y la de Fourier
β_v	parámetro de frecuencia de la ecuación de Bessel para la velocidad (m^{-1})
β_T	parámetro de frecuencia de la ecuación de Bessel para la temperatura empleado en el modelo de Fourier (m^{-1})
β_c	parámetro de frecuencia de la ecuación de Bessel para la temperatura empleado en el modelo de Cattaneo-Vernotte (m^{-1})
γ	gradiente axial de temperatura promedio en el tiempo (K m^{-1})
η	viscosidad dinámica ($\text{Kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$)
ρ	densidad de masa (kg m^{-3})
τ	tensor de esfuerzos viscosos ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$)
ω_0	frecuencia de oscilación (radianes s^{-1})

Resumen

Con la intención de mejorar el proceso de transferencia de calor en fluidos Newtonianos como viscoelásticos se estudia un flujo laminar oscilatorio de media cero, pues se ha encontrado la ventaja de que la difusividad térmica efectiva de un fluido sujeto a un movimiento oscilatorio puede ser varios órdenes de magnitud mayor que la difusividad molecular del fluido. Trabajos previos [1, 6] han empleado la ecuación de energía que considera como válida la ley de Fourier, que implica una velocidad de propagación infinita del flujo de calor, lo cual desde el punto de vista físico no es posible [5]. Para corregir esta inconsistencia se estudia con detalle el modelo de Cattaneo-Vernotte, en donde se introduce un tiempo de relajación que limita la velocidad de propagación del flujo de calor a un valor finito, lo que físicamente es más aceptable.

En este trabajo se predice una mejora en la transferencia de calor al emplear el modelo de Cattaneo-Vernotte con respecto al de Fourier, pues la difusividad térmica efectiva se incrementa en varios órdenes de magnitud para un fluido Newtoniano así como para viscoelásticos. Con base en esto, podemos decir que el flujo oscilatorio es una alternativa para mejorar el proceso de transferencia de calor pues la difusividad se incrementa en varios órdenes de magnitud al emplear una determinada frecuencia de oscilación en un fluido Newtoniano o viscoelástico.

Abstract

With the intention of improving the heat transfer process in Newtonian and viscoelastic fluids a zero mean oscillatory laminar flow is studied, an advantage that effective thermal diffusivity of a fluid subject to oscillatory motion can be several orders of magnitude higher than molecular diffusivity of the fluid has been found. Previous works [1, 6] have employed the energy equation that considers as valid the Fourier law, that implies an infinite propagation velocity of the heat flow, which from the physical point of view it's not possible [5]. To correct this inconsistency, the Cattaneo-Vernotte model is studied in detail, where it's introduced a relaxation time that limits the velocity of the heat flow to a finite value, which physically is more acceptable.

In this work an improve in the heat transfer employing the Cattaneo-Vernotte model with respect to Fourier model is predicted, because effective thermal diffusivity is increased in various orders of magnitude for a Newtonian fluid as well as for viscoelastics. Based on this, we can say that oscillatory flow is an alternative to improve the heat transfer process because diffusivity is increased in various orders of magnitude by employing a given oscillation frequency in a Newtonian or viscoelastic fluid.

Capítulo 1

Introducción

Las fuentes de energía renovable o no renovable cuando se utilizan en aplicaciones térmicas, requieren de la optimización de los procesos de transferencia de calor. Una mejora en estos procesos implica un mejor aprovechamiento de los recursos y por ende un paso hacia el desarrollo sustentable.

Entre las diversas estrategias que mejoran la transferencia de calor, hay una que está basada en la utilización de un flujo oscilatorio que mejora el proceso de transporte. Kurzweg [1] encontró que para una frecuencia de oscilación ω_0 , dada en el flujo oscilatorio de un fluido Newtoniano en un ducto, la difusividad térmica efectiva α_e , alcanza un máximo. Esto conduce a una transferencia longitudinal de calor mejorada sin que se involucre una transferencia neta convectiva de masa. En relación a esto, se ha investigado la transferencia de calor mejorada utilizando fluidos con propiedades distintas a las de los Newtonianos. A.A. Lambert *et al.* [6] encontraron que al emplear un fluido viscoelástico, la difusividad térmica efectiva puede mejorarse sustancialmente, pues alcanza múltiples valores máximos al oscilar en frecuencias resonantes específicas, lo que hace que estos fluidos sean excelentes candidatos para optimizar el transporte de calor.

Por otro lado, aunque estos trabajos [1, 6] consideraron la inercia en la ecuación del tensor de esfuerzos viscosos, no se hizo así en el transporte de calor, donde se empleó en la ecuación de balance de energía, el flujo de calor de Fourier. Desde un punto de vista físico esto representa una velocidad de propagación infinita, lo cual es imposible. Para eliminar esta inconsistencia, se utiliza el modelo de Cattaneo-Vernotte [5], en el cual se introduce un tiem-

po de relajación que limita la velocidad del flujo de calor a un valor finito, lo que físicamente es más razonable.

S. Celis [7] había introducido el modelo de Cattaneo-Vernotte. No obstante, su expresión de la difusividad térmica efectiva, que emplea solo fluidos Newtonianos, presenta inconsistencias, además de múltiples singularidades cuando se lleva a cabo la normalización de la difusividad para determinadas frecuencias de oscilación.

Los principales objetivos de esta tesis son precisamente analizar un formalismo que contemple el transporte de calor usando el modelo de Cattaneo-Vernotte en fluidos Newtonianos, así como viscoelásticos, y analizar el origen de las singularidades que S. Celis obtiene para ciertos valores de la frecuencia de oscilación.

Iniciamos nuestro estudio en el segundo capítulo, donde se reproduce el desarrollo matemático que nos permite comprender el proceso de transferencia de calor de un fluido que fluye bajo la acción de un gradiente de presión oscilatorio. El fluido se encuentra contenido en un tubo de sección transversal constante en donde en los extremos se encuentra a distintas temperaturas además de que la pared del tubo es aislante. Encontramos que en un fluido Newtoniano aparece un solo valor máximo de α_e , para una determinada frecuencia de oscilación, mientras que para un fluido viscoelástico aparecen múltiples valores máximos de α_e , para distintas frecuencias de oscilación, los cuales son superiores al del fluido Newtoniano.

En el tercer capítulo se examina el proceso de transferencia de calor usando el modelo de Cattaneo-Vernotte y se descubre que en un fluido Newtoniano aparecen múltiples valores máximos de α_e , para distintas frecuencias de oscilación siendo el primer máximo el de mayor intensidad. Para un fluido viscoelástico, la difusividad se incrementa en varios órdenes de magnitud más que en el modelo de Fourier pero bajo algunas restricciones, en las que los tiempos de relajación juegan un papel importante. También se encontró que en el trabajo de S. Celis hubo errores en la manipulación del álgebra compleja en la ecuación de α_e , y con un álgebra correcta se eliminaron las singularidades en las frecuencias de oscilación diferentes de cero.

En el cuarto capítulo se analiza un fluido ideal, para comprobar si la dependencia radial de los campos de velocidad y temperatura influye en el proceso de transferencia de calor. Se encuentra que no existe un mejoramiento en la transferencia de calor al emplear un fluido ideal, pues $\alpha_e=0$ independientemente de si se emplea el modelo de Fourier o el de Cattaneo-Vernotte.

Por último, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones más relevantes de este trabajo de investigación.

Capítulo 2

Flujo de calor en un fluido bajo régimen oscilatorio

2.1. Introducción

En este capítulo presentamos el desarrollo matemático de la transferencia de calor en un fluido que presenta movimiento oscilatorio dentro de un tubo de sección transversal constante. Basándonos en los trabajos de Kurzweg [1] que expresan una difusividad mejorada en un fluido Newtoniano bajo régimen oscilatorio, y en el análisis de A.A. Lambert *et al.* [6], en el que se comprueba un incremento en la difusividad para un fluido viscoelástico que depende de la frecuencia de oscilación, se reproduce el desarrollo matemático de dichos trabajos con el fin de explicar cómo es que se lleva a cabo el proceso de transferencia de calor para fluidos Newtonianos y viscoelásticos mediante un movimiento oscilatorio.

2.2. Campo de velocidad

En esta sección se presenta la deducción de las ecuaciones básicas que gobiernan el movimiento de los fluidos para obtener los campos de velocidad y temperatura que se desarrollan mediante el movimiento oscilatorio al que está sujeto el fluido dentro del tubo de sección transversal constante.

Las ecuaciones que gobiernan este proceso físico son [3]: la ecuación de conservación de masa para un fluido incompresible

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

la ecuación de conservación de cantidad de movimiento

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p - \nabla \cdot \tau, \quad (2.2.1)$$

y la ecuación de balance de energía

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \kappa \nabla^2 T + \eta \Phi, \quad (2.2.2)$$

donde \mathbf{v} , p , τ y T son el vector de la velocidad, la presión, el tensor de esfuerzos viscosos y la temperatura, respectivamente, mientras que ρ , η , c y k son la densidad de masa, la viscosidad dinámica, el calor específico a volumen constante y la conductividad térmica del fluido, respectivamente, que consideramos constantes.

En la ecuación de balance de energía, Φ , es la función de disipación y el producto $\eta \Phi$, representa la disipación viscosa o la razón de conversión irreversible de energía mecánica a energía térmica vía efectos viscosos. En nuestro análisis este término será considerado despreciable debido a que solo es importante cuando se trabaja con fluidos con viscosidad alta, como es el caso de los aceites, por lo que la ecuación (2.2.2) se reduce a

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T,$$

siendo $\alpha = \frac{\kappa}{\rho c}$, la difusividad térmica molecular del fluido.

La ecuación del tensor de esfuerzos viscosos depende de la naturaleza del fluido. Para un fluido Newtoniano se tiene

$$\tau = -\eta \nabla \mathbf{v}, \quad (2.2.3)$$

mientras que para el caso de un fluido viscoelástico existen varios modelos, nosotros consideraremos el modelo lineal de Maxwell, el cual es

$$t_m \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\eta \nabla \mathbf{v} - \tau, \quad (2.2.4)$$

donde t_m , es el tiempo de relajación de Maxwell, que se considera constante y se define como $t_m = \eta/G$, en donde G es el módulo de elasticidad de la ley de Hooke [8]. El término del lado izquierdo de la ecuación introduce el comportamiento elástico del fluido. Se observa que si $t_m=0$ se recupera el modelo para el fluido Newtoniano. En esta tesis, los fluidos viscoelásticos que emplearemos son los que siguen el modelo lineal de Maxwell y en las ecuaciones (2.2.3) y (2.2.4) solo se considera la parte simétrica del gradiente de velocidades.

Suponemos que el fluido dentro del tubo tiene las siguientes características:

- Tiene lugar en la dirección axial
- La velocidad no depende de la coordenada axial
- Se encuentra lejos de los bordes
- No existe desprendimiento de la capa límite
- Presenta simetría cilíndrica

Con estas consideraciones, el vector de la velocidad en coordenadas cilíndricas puede ser descrito por $\mathbf{v} = [0, 0, v(r, t)]$, con lo cual se satisface la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles. A su vez, el término no lineal de la ecuación (2.2.1) es cero, $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}=0$, por lo que la ecuación de cantidad de movimiento se transforma en

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p - \nabla \cdot \tau. \quad (2.2.5)$$

Para obtener una ecuación para el campo de velocidades podemos derivar parcialmente con respecto al tiempo en (2.2.5) y usando el teorema de Clairaut para intercambiar las derivadas parciales, tenemos

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla p) - \nabla \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t}.$$

Si se aplica la divergencia a la ecuación (2.2.4)

$$t_m \nabla \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\eta \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla \cdot \tau,$$

y, combinando estas dos últimas ecuaciones, se obtiene

$$\rho t_m \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = -t_m \frac{\partial}{\partial t} (\nabla p) + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \cdot \tau.$$

Sustituyendo $\nabla \cdot \tau$ de la ecuación de cantidad de movimiento (2.2.5), se llega a

$$\rho t_m \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \eta \nabla^2 \mathbf{v} = -t_m \frac{\partial}{\partial t} (\nabla p) - \nabla p.$$

El laplaciano en coordenadas cilíndricas es $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, ya que las derivadas en x son cero debido que $v = v(r, t)$. Como suponemos que el flujo tiene lugar en la dirección axial, la ecuación a resolver es

$$\rho t_m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \eta \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] = -t_m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.2.6)$$

con condiciones de frontera

$$v(0, t) = \text{finita},$$

$$v(a, t) = 0.$$

La primera condición de frontera establece que la velocidad del fluido en el centro del tubo tiene que ser un valor finito, y la segunda establece la condición de no deslizamiento en la pared del tubo.

Se define la transformada de Fourier como [4]

$$\hat{F}(r, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(r, t) e^{+i\omega t} dt,$$

aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación (2.2.6) y usamos la propiedad $\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t} f(r, t)\right] = -i\omega \hat{F}(r, \omega)$, obtenemos

$$\rho t_m(-\omega^2)\hat{V} + \rho(-i\omega)\hat{V} - \eta \left[\frac{d^2\hat{V}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{V}}{dr} \right] = -t_m(-i\omega) \frac{d\hat{p}}{dx} - \frac{d\hat{p}}{dx}.$$

En donde \hat{V} y \hat{p} son las transformadas de Fourier de la velocidad y la presión, respectivamente, y reagrupando términos se tiene

$$\frac{d^2\hat{V}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{V}}{dr} + \frac{\rho\omega(i + \omega t_m)}{\eta} \hat{V} = \frac{(1 - i\omega t_m)}{\eta} \frac{d\hat{p}}{dx}.$$

Ahora se define

$$\beta_v^2 = \frac{\rho\omega(i + \omega t_m)}{\eta},$$

donde β_v , es un parámetro que depende fundamentalmente de las propiedades viscoelásticas del fluido y que, como se verá, está relacionado con la raíz de la función de Bessel, con lo que se llega a

$$\frac{d^2\hat{V}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{V}}{dr} + \beta_v^2 \hat{V} = \frac{(1 - i\omega t_m)}{\eta} \frac{d\hat{p}}{dx}. \quad (2.2.7)$$

Aplicando la transformada de Fourier a las condiciones de frontera obtenemos

$$\hat{V}(0, \omega) = \text{finita},$$

$$\hat{V}(a, \omega) = 0.$$

La ecuación (2.2.7) es una ecuación diferencial ordinaria (EDO), no homogénea, de segundo orden cuya solución es de la forma

$$\hat{V}(r, \omega) = \hat{V}_h(r, \omega) + \hat{V}_p(r, \omega),$$

siendo \hat{V}_h la solución de la ecuación homogénea y \hat{V}_p una solución particular.

La ecuación homogénea correspondiente (2.2.7) es una ecuación de Bessel de orden cero, por lo que su solución está dada por

$$\hat{V}_h(r, \omega) = C_1 J_0(\beta_v r) + C_2 Y_0(\beta_v r),$$

donde J_0 y Y_0 son las funciones de Bessel de primer y segundo tipo, respectivamente. Puesto que la parte no homogénea de la ecuación (2.2.7) no depende de r , proponemos una solución particular $\hat{V}_p(r, \omega) = G$, donde G es una constante. Si se sustituye $\hat{V}_p(r, \omega)$ en la ecuación (2.2.7) obtenemos

$$G = \frac{(1 - i\omega t_m)}{\eta\beta_v^2} \frac{d\hat{p}}{dx}.$$

Así pues, la solución general es

$$\hat{V}(r, \omega) = C_1 J_0(\beta_v r) + C_2 Y_0(\beta_v r) + \frac{(1 - i\omega t_m)}{\eta\beta_v^2} \frac{d\hat{p}}{dx}, \quad (2.2.8)$$

y, si se aplica la primera condición de frontera, $\hat{V}(0, \omega) = \text{finita}$, entonces $C_2 = 0$, ya que $Y_0(\beta_v r)$ diverge en $r=0$. Al usar la condición de no deslizamiento, $\hat{V}(a, \omega) = 0$, se obtiene que la constante C_1 es

$$C_1 = -\frac{(1 - i\omega t_m)}{\eta\beta_v^2 J_0(\beta_v a)} \frac{d\hat{p}}{dx}.$$

Finalmente, la solución completa es

$$\hat{V}(r, \omega) = \left[1 - \frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)} \right] \frac{(1 - i\omega t_m)}{\eta\beta_v^2} \frac{d\hat{p}}{dx}. \quad (2.2.9)$$

Hemos obtenido una ecuación para el campo de velocidades en el dominio de la frecuencia; ahora, para obtener una expresión de este, consideraremos el caso particular en que el gradiente de presiones sea la parte real de la expresión

$$\frac{\partial p}{\partial x} = P_x e^{-i\omega_0 t},$$

el cual tiene la forma de un oscilador armónico simple, en donde P_x , es la magnitud del gradiente de presiones y ω_0 , es la frecuencia angular constante del oscilador.

La transformada de Fourier del gradiente de presiones que escogimos es

$$\frac{d\hat{p}}{dx} = \sqrt{2\pi}P_x\delta(\omega - \omega_0),$$

donde $\delta(\omega - \omega_0)$ es la función delta de Dirac. Ahora sustituimos el gradiente de presiones en la ecuación (2.2.9) y se obtiene

$$\hat{V}(r, \omega) = \left[1 - \frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)}\right] \frac{(1 - i\omega t_m)}{\eta\beta_v^2} \sqrt{2\pi}P_x\delta(\omega - \omega_0). \quad (2.2.10)$$

Para regresar al campo de velocidades en el dominio del tiempo, hacemos uso de la transformada inversa de Fourier, la cual se define como

$$f(r, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \hat{F}(r, \omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

así

$$v(r, t) = \int_0^\infty \left[1 - \frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)}\right] \frac{(1 - i\omega t_m)}{\eta\beta_v^2} P_x e^{-i\omega t} \delta(\omega - \omega_0) d\omega,$$

y por las propiedades de la función delta de Dirac, se obtiene

$$v(r, t) = \left[1 - \frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)}\right] \frac{(1 - i\omega_0 t_m)}{\eta\beta_v^2} P_x e^{-i\omega_0 t},$$

con

$$\beta_v^2 = \frac{\rho\omega_0(\omega_0 t_m + i)}{\eta}.$$

Si sustituimos la expresión de β_v^2 en la ecuación de la velocidad, obtenemos

$$v(r, t) = \left[1 - \frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)}\right] \frac{(1 - i\omega_0 t_m)}{\rho\omega_0(i + \omega_0 t_m)} P_x e^{-i\omega_0 t},$$

factorizando i en el denominador del segundo término, tenemos que la expresión final para la velocidad es

$$v(r, t) = - \left[1 - \frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)} \right] \frac{i}{\rho \omega_0} P_x e^{-i\omega_0 t}.$$

Con esta ecuación queda determinado el campo de velocidades para el fluido dentro de un tubo de sección transversal constante que se encuentra bajo régimen oscilatorio. Esta expresión fue obtenida del trabajo de A.A. Lambert *et al.* [6].

En las secciones posteriores la ecuación de la velocidad $v(r, t)$, será expresada de la forma

$$v(r, t) = V(r) e^{-i\omega_0 t},$$

en donde

$$V(r) = \left[1 - \frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)} \right] \Phi P_x, \quad (2.2.11)$$

con

$$\Phi = -\frac{i}{\rho \omega_0},$$

pues esta manera nos permite simplificar muchas operaciones.

2.3. Campo de temperatura

Una vez obtenido el campo de velocidad, procedemos a resolver la ecuación de balance de energía para encontrar el campo de temperatura, con el objetivo de determinar el transporte axial de energía térmica a través del tubo.

Con la finalidad de comprender mejor el proceso de transferencia de calor en un fluido bajo régimen oscilatorio reproducimos textualmente la explicación de A.A. Lambert [2], a saber

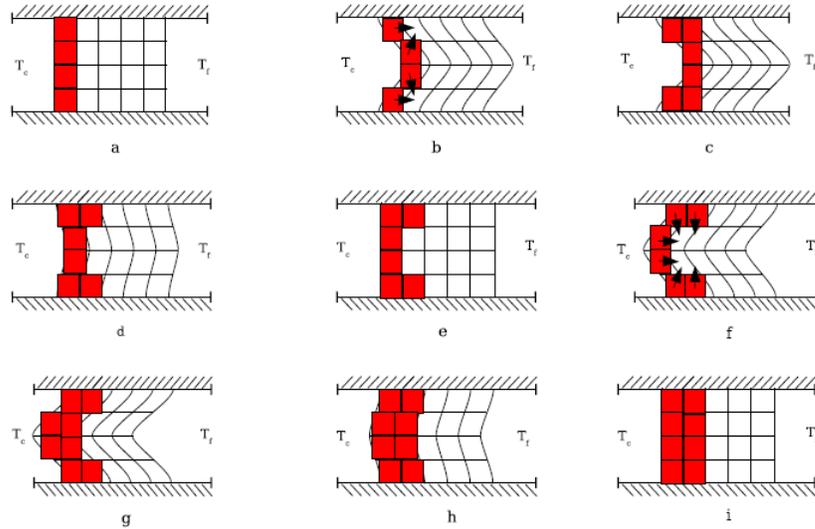


Figura 2.1: Algunas etapas del movimiento oscilatorio de un fluido Newtoniano. Se observa que durante la mayor parte del ciclo el fluido cercano a la región de las paredes del tubo tendrá una temperatura diferente de aquella en el centro del flujo dando como resultado que grandes cantidades de calor se transfieran radialmente y sean transportadas axialmente de manera periódica [2].

“En la figura 2.1 se presenta un esquema con 9 etapas de un ciclo completo de oscilación del fluido, en las que se observa el desarrollo del perfil de velocidades de un fluido Newtoniano así como del movimiento de los elementos de volumen con sus respectivas temperaturas.

En el primer cuarto del ciclo (etapas 2.1 a - 2.1 c) se puede ver que conforme el fluido avanza hacia adelante y llega al desplazamiento máximo (etapa 2.1 c), los elementos de volumen en la región central del flujo avanzan más rápido que los elementos adyacentes a la pared del tubo debido al perfil parabólico de velocidades. Así, el fluido en la región central del flujo tendrá una mayor temperatura que el fluido en la zona cercana a las paredes del tubo transfiriéndose calor del centro hacia la pared del tubo (etapas 2.1 b y 2.1 c).

En el retroceso del fluido, del máximo al mínimo desplazamiento (etapas 2.1 c - 2.1 g), nuevamente retrocede más rápido el fluido en la región del centro, y debido a la mayor temperatura del fluido cercano a la pared del tubo con respecto al de la región central, se transfiere calor de la región de la pared hacia la región del centro (etapas 2.1 f y 2.1 g). Al terminar el ciclo (etapa 2.1 i) una gran cantidad de calor ha sido transportada axialmente.

De esta forma, un gradiente grande de temperatura en la dirección radial y dependiente del tiempo, producido por las oscilaciones del fluido, es el motor de este mecanismo físico de mejoramiento.

Así, las oscilaciones del fluido generan un gradiente grande de temperatura en la dirección radial lo que provoca que el fluido cercano a la región de las paredes del tubo tenga una temperatura diferente de aquella en el centro del flujo dando como resultado que grandes cantidades de calor se transfieran radialmente en cada ciclo y, por lo tanto, sean transportadas axialmente. Debido a lo anterior, el gradiente transversal de temperatura es mucho mayor que el gradiente axial, de tal forma que la difusión de calor axial es mucho menor que la radial. Esto significa que el término $\partial^2 T / \partial r^2$ es mucho mayor que $\partial^2 T / \partial x^2$, de hecho, si $\partial^2 T / \partial x^2 = 0$ entonces podemos suponer que $\partial T / \partial x$ es constante. Esta aproximación no está muy alejada de la realidad si consideramos que en el fenómeno de la difusión molecular pura en ausencia de flujo, el gradiente de temperatura también es constante. Con estas consideraciones, se puede proponer una solución a la ecuación de la energía de la forma

$$T(r, x, t) = \gamma[x + f(r, t)],$$

donde γ es una constante. De hecho, Kurzweg propuso una solución a la ecuación de la energía que supone un gradiente constante de temperatura axial promedio en el tiempo $\gamma = \partial T / \partial x$, por lo que T toma la forma

$$T(r, x, t) = \gamma[x + ag(r)e^{-i\omega_0 t}], \quad (2.3.1)$$

siendo $g(r)$ una función que describe la dependencia radial que tiene la temperatura [1]. Esta expresión exhibe un comportamiento lineal en T en la dirección axial así como una variación transversal dependiente del tiempo.

Con este campo de temperaturas se puede calcular el flujo de energía a lo largo del tubo. La ecuación (2.3.1) representa una solución aproximada del campo de temperatura, pero permite un tratamiento analítico del problema [2].”

Esta explicación nos lleva a preguntarnos ¿ Qué sucedería con el proceso de transferencia de calor en fluidos ideales en donde su velocidad no posea una dependencia radial ? ¿ Cómo es el campo de temperaturas ? ¿ Existe una difusividad térmica efectiva mejorada para este caso ? A.A. Lambert *et al.* [2, 6] hace mención a este caso sin profundizar mucho, por lo que en el capítulo 4 se analizará el proceso de transporte de calor para este tipo de fluidos.

Con el perfil de temperaturas propuesto por Kurzweg [1], se debe encontrar una expresión para $g(r)$, para lo cual es necesario resolver la ecuación de balance de energía, la cual, expresada en coordenadas cilíndricas es

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v(r, t) \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right). \quad (2.3.2)$$

En donde las condiciones de frontera son

$$T(0, x, t) = \text{finita},$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(a, x, t) = 0.$$

La primera condición de frontera establece que la temperatura del fluido no diverge en el origen y la segunda que la pared del tubo está térmicamente aislada.

Nótese que en la ecuación de la energía aparece el campo de velocidad, el cual tiene un comportamiento armónico en t , por lo que tiene sentido suponer que la temperatura también lo tendrá.

2.3.1. Cálculo de $g(r)$

A.A. Lambert [2] deduce la expresión analítica de $g(r)$, sustituyendo el campo de temperatura (2.3.1) en la ecuación de la energía.

Se comienza calculando

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\gamma a i \omega_0 g(r) e^{-i\omega_0 t}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \gamma, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \gamma a g''(r) e^{-i\omega_0 t}.$$

Sustituyendo estas derivadas parciales y la forma de la velocidad (2.2.11) en la ecuación de la energía (2.3.2), nos queda

$$-\gamma a i \omega_0 g(r) e^{-i\omega_0 t} + V(r) e^{-i\omega_0 t} \gamma = \alpha [\gamma a g''(r) e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{r} \gamma a g'(r) e^{-i\omega_0 t}],$$

o equivalentemente

$$g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) + \frac{i\omega_0}{\alpha} g(r) = \frac{V(r)}{\alpha a}. \quad (2.3.3)$$

Ahora se define

$$\beta_T^2 = \frac{i\omega_0}{\alpha},$$

donde β_T , es un parámetro que depende fundamentalmente de las propiedades térmicas del fluido y que está relacionado con la raíz de la función de Bessel, con lo que la ecuación (2.3.3) se puede escribir como

$$g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) + \beta_T^2 g(r) = \frac{V(r)}{\alpha a}. \quad (2.3.4)$$

Esta es una EDO no homogénea de segundo orden cuya solución es de la forma

$$g(r) = g_h(r) + g_p(r),$$

siendo $g_h(r)$ la solución de la ecuación homogénea y $g_p(r)$ una solución particular.

Se observa nuevamente que la ecuación homogénea asociada a la ecuación (2.3.4) es una ecuación de Bessel de orden cero, la cual ya había sido resuelta para el campo de velocidad. La solución es

$$g_h(r) = C_1 J_0(\beta_T r) + C_2 Y_0(\beta_T r).$$

Para encontrar $g_p(r)$ se utiliza el método de coeficientes indeterminados. En este método se propone una solución que sea una combinación lineal de los conjuntos fundamentales que componen el término no homogéneo. En nuestra ecuación, el término no homogéneo es $\frac{1}{\alpha a} \left[1 - \frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)} \right] \Phi P_x$, en donde solo $J_0(\beta_v r)$ depende de r , por lo que se propone una solución de la forma $g_p(r) = \delta_1 J_0(\beta_v r) + \delta_2$, donde δ_1 y δ_2 son los coeficientes por determinar.

Se calculan a continuación las derivadas

$$g_p'(r) = \delta_1 \beta_v J_0'(\beta_v r), \quad g_p''(r) = \delta_1 \beta_v^2 J_0''(\beta_v r),$$

y, sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2.3.4) se llega a

$$\delta_1 \beta_v^2 J_0''(\beta_v r) + \frac{1}{r} \delta_1 \beta_v J_0'(\beta_v r) + \beta_T^2 [\delta_1 J_0(\beta_v r) + \delta_2] = \frac{1}{\alpha a} \left[1 - \frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)} \right] \Phi P_x. \quad (2.3.5)$$

Puesto que la solución $J_0(\beta_v r)$ satisface la ecuación de Bessel, se tiene que $\beta_v^2 J_0''(\beta_v r) + \frac{1}{r} \beta_v J_0'(\beta_v r) + \beta_v^2 J_0(\beta_v r) = 0$, por lo que

$$\beta_v^2 J_0''(\beta_v r) + \frac{1}{r} \beta_v J_0'(\beta_v r) = -\beta_v^2 J_0(\beta_v r),$$

sustituyendo esta equivalencia en la ecuación (2.3.5)

$$\delta_1 [-\beta_v^2 J_0(\beta_v r) + \beta_T^2 J_0(\beta_v r)] + \delta_2 \beta_T^2 = \frac{1}{\alpha a} \left[1 - \frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)} \right] \Phi P_x,$$

$$\delta_1 (\beta_T^2 - \beta_v^2) J_0(\beta_v r) + \delta_2 \beta_T^2 = \frac{\Phi P_x}{\alpha a} - \frac{\Phi P_x}{\alpha a J_0(\beta_v a)} J_0(\beta_v r),$$

igualamos los términos, despejamos δ_1 y δ_2 y se obtiene

$$\delta_1 = \frac{\Phi P_x}{\alpha a J_0(\beta_v a)} \frac{1}{(\beta_v^2 - \beta_T^2)}, \quad \delta_2 = \frac{\Phi P_x}{\alpha a \beta_T^2},$$

así

$$g_p(r) = \frac{\Phi P_x}{\alpha a (\beta_v^2 - \beta_T^2)} \left[\frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)} + \frac{\beta_v^2 - \beta_T^2}{\beta_T^2} \right].$$

La solución general de $g(r)$ es entonces

$$g(r) = C_1 J_0(\beta_T r) + C_2 Y_0(\beta_T r) + \frac{\Phi P_x}{\alpha a (\beta_v^2 - \beta_T^2)} \left[\frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)} + \frac{\beta_v^2 - \beta_T^2}{\beta_T^2} \right],$$

en donde las condiciones de frontera son

$$T(0, x, t) = \text{finita} \Rightarrow g(0) = \text{finita},$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(a, x, t) = 0 \quad \Rightarrow g'(a) = 0.$$

La primera condición de frontera, $g(0)=\text{finita}$, significa que $C_2=0$, ya que $Y_0(\beta_T r)$ diverge en $r=0$, por lo que

$$g(r) = C_1 J_0(\beta_T r) + \frac{\Phi P_x}{\alpha a (\beta_v^2 - \beta_T^2)} \left[\frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)} + \frac{\beta_v^2 - \beta_T^2}{\beta_T^2} \right],$$

la segunda condición de frontera, $g'(a)=0$

$$g'(r) = C_1 \beta_T J_0'(\beta_T r) + \frac{\Phi P_x \beta_v}{\alpha a (\beta_v^2 - \beta_T^2)} \frac{J_0'(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)},$$

$$g'(a) = C_1 \beta_T J_0'(\beta_T a) + \frac{\Phi P_x \beta_v}{\alpha a (\beta_v^2 - \beta_T^2)} \frac{J_0'(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)},$$

usando las identidades

$$J_0'(\beta_T a) = -J_1(\beta_T a),$$

$$J_0'(\beta_v a) = -J_1(\beta_v a),$$

entonces

$$0 = C_1 \beta_T [-J_1(\beta_T a)] + \frac{\Phi P_x \beta_v}{\alpha a (\beta_v^2 - \beta_T^2)} \frac{[-J_1(\beta_v a)]}{J_0(\beta_v a)},$$

$$C_1 = -\frac{\Phi P_x}{\alpha a (\beta_v^2 - \beta_T^2)} \frac{\beta_v}{\beta_T} \frac{1}{J_1(\beta_T a)} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)},$$

sustituyendo la constante en la ecuación de $g(r)$ se obtiene

$$g(r) = \frac{\Phi P_x}{\alpha a (\beta_v^2 - \beta_T^2)} \left[-\frac{\beta_v}{\beta_T} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \frac{J_0(\beta_T r)}{J_1(\beta_T a)} + \frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)} + \frac{\beta_v^2 - \beta_T^2}{\beta_T^2} \right]. \quad (2.3.6)$$

Si la expresión (2.3.6) se sustituye en (2.3.1), el campo de temperatura del fluido está completamente determinado. Cabe enfatizar que esta solución es válida tanto para fluidos Newtonianos como Maxwellianos dependiendo de la forma del parámetro β_v [2].

2.4. Difusividad térmica efectiva

Ya que se obtuvieron los campos de velocidad y de temperatura para el fluido bajo régimen oscilatorio, podemos obtener la difusividad térmica efectiva α_e , y con ello calcular la transferencia de calor que ocurre del extremo del tubo con temperatura alta al extremo con temperatura baja.

El flujo axial de calor en la sección transversal del tubo está dado por la difusividad térmica efectiva α_e , multiplicada por el gradiente de temperatura axial γ , y es igual al promedio temporal del flujo de calor por convección en la dirección axial producido por la interacción de los campos de velocidad y temperatura variando en la dirección radial en un período de tiempo [1], esto es

$$-\alpha_e \gamma = \frac{\omega_0}{2\pi^2 a^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \int_0^{2\pi} \int_0^a [v(r, t)]_R [T(r, x, t)]_R r dr d\theta dt, \quad (2.4.1)$$

donde $[]_R$ denota la parte real.

De acuerdo con el desarrollo de Kurzweg [1], despreciamos las pequeñas contribuciones debidas a la conducción térmica axial. Para encontrar la expresión de α_e , tenemos que resolver la integral (2.4.1), en donde el integrando consta de la parte real de la velocidad y la temperatura, las cuales son:

$$[v(r, t)]_R = \frac{1}{2} [v(r, t) + \bar{v}(r, t)],$$

$$[T(r, x, t)]_R = \frac{1}{2} [T(r, x, t) + \bar{T}(r, x, t)],$$

donde ($\bar{}$) denota el complejo conjugado.

Entonces, si sustituimos la parte real de $v(r, t)$ y $T(r, x, t)$ en la ecuación (2.4.1) resulta

$$\begin{aligned} -\alpha_e \gamma &= \frac{\omega_0}{2\pi^2 a^2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{2} [V(r)e^{-i\omega_0 t} + \bar{V}(r)e^{i\omega_0 t}] \\ &\times \frac{1}{2} [\gamma[x + ag(r)e^{-i\omega_0 t}] + \gamma[x + a\bar{g}(r)e^{i\omega_0 t}]] r dr d\theta dt, \end{aligned}$$

al realizar la integral temporal se eliminan todos los términos con $e^{\pm ni\omega_0 t}$, ya que estamos integrando sobre el período y puesto que el integrando es solo función de r , se pueden llevar a cabo las integrales en la coordenada angular y el tiempo, obteniéndose

$$\alpha_e = -\frac{1}{2a} \int_0^a [V(r)\bar{g}(r) + \bar{V}(r)g(r)] r dr. \quad (2.4.2)$$

Si se sustituyen las expresiones de $V(r)$ y $g(r)$ de las ecuaciones (2.2.11) y (2.3.6), respectivamente, en la ecuación (2.4.2), se tienen que resolver integrales que contienen productos de funciones de Bessel, ver apéndice A.

Llevando a cabo la integral se obtiene [6]

$$\begin{aligned}
\alpha_e = -\frac{\Phi\bar{\Phi}P_x^2}{2\alpha a^2} & \left\{ \right. \\
& \frac{a}{\bar{\beta}_v^2 - \bar{\beta}_T^2} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \left[\frac{a}{2} \frac{\bar{\beta}_v^2 - \bar{\beta}_T^2}{\bar{\beta}_T^2} \frac{J_0(\bar{\beta}_v a)}{J_1(\bar{\beta}_v a)} + \frac{\bar{\beta}_T^2 - \bar{\beta}_v^2}{\bar{\beta}_v \bar{\beta}_T^2} \right. \\
& + \frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_T^2 - \beta_v^2} + \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_v^2 - \bar{\beta}_v^2} + \frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_T} \frac{\beta_v}{\beta_v^2 - \bar{\beta}_T^2} \frac{J_0(\bar{\beta}_T a)}{J_1(\bar{\beta}_T a)} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \\
& \left. + \left\{ \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_v^2 - \beta_v^2} - \frac{\bar{\beta}_v^2 - \bar{\beta}_T^2}{\bar{\beta}_T^2} \frac{1}{\beta_v} \right\} \frac{J_0(\bar{\beta}_v a)}{J_1(\bar{\beta}_v a)} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right] + \\
& \left. \frac{a}{\beta_v^2 - \beta_T^2} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \left[\frac{a}{2} \frac{\beta_v^2 - \beta_T^2}{\beta_T^2} \frac{J_0(\beta_v a)}{J_1(\beta_v a)} + \frac{\beta_T^2 - \beta_v^2}{\beta_v \beta_T^2} \right. \right. \\
& + \frac{\beta_v}{\beta_T^2 - \bar{\beta}_v^2} + \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_v^2 - \beta_v^2} + \frac{\beta_v}{\beta_T} \frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_v^2 - \beta_T^2} \frac{J_0(\beta_T a)}{J_1(\beta_T a)} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \\
& \left. + \left\{ \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_v^2 - \bar{\beta}_v^2} - \frac{\beta_v^2 - \beta_T^2}{\beta_T^2} \frac{1}{\bar{\beta}_v} \right\} \frac{J_0(\beta_v a)}{J_1(\beta_v a)} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \right] \left. \right\}. \tag{2.4.3}
\end{aligned}$$

Esta ecuación se puede simplificar para obtener

$$\alpha_e = \frac{\Phi \bar{\Phi} P_x^2}{2\alpha a^2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\bar{\beta}_T^2 - \beta_v^2} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \left[\frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_T^2 - \beta_v^2} + \frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_T^2 - \beta_v^2} \frac{\bar{\beta}_v^2 + \beta_v^2}{\bar{\beta}_v^2 - \beta_v^2} \right. \\ & \left. - \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_T} \frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_T^2 - \beta_v^2} \frac{J_0(\bar{\beta}_T a)}{J_1(\bar{\beta}_T a)} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right] + \\ & \frac{1}{\beta_T^2 - \beta_v^2} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \left[\frac{\beta_v}{\beta_T^2 - \bar{\beta}_v^2} + \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_T^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{\beta_v^2 + \bar{\beta}_v^2}{\beta_v^2 - \bar{\beta}_v^2} \right. \\ & \left. - \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_T} \frac{\beta_v}{\beta_T^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{J_0(\beta_T a)}{J_1(\beta_T a)} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (2.4.4)$$

Con la expresión (2.4.4) está totalmente determinada la difusividad térmica efectiva. Esta forma es más útil que (2.4.3) puesto que no emplea tantos términos, y hace posible visualizar de qué valores realmente depende α_e . Esta expresión fue obtenida por A.A. Lambert *et al.* [6].

2.5. Desplazamiento de marea

Para una comparación apropiada con los resultados de Kurzweg es conveniente introducir el desplazamiento de marea Δx , que representa el desplazamiento axial máximo promedio que los elementos del fluido viajan durante medio período de la oscilación [1]. Está definido por

$$\Delta x = \left| \frac{1}{A} \int_{\frac{-\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}} \int_0^{2\pi} \int_0^a v(r, t) r dr d\theta dt \right|. \quad (2.5.1)$$

Si se introduce el campo de velocidades en (2.5.1) con $A = \pi a^2$, y se lleva a cabo la integración, se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta x &= \left| \frac{2\Phi P_x}{\omega_0} \left[1 - \frac{2}{\beta_v a} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right] \right|, \\ &= \frac{2P_x}{\rho\omega_0^2} \left| 1 - \frac{2}{\beta_v a} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right|,\end{aligned}$$

Kurzweg menciona que para evitar la transferencia convectiva directa de masa, el valor de Δx , debe ser menor que la distancia entre los dos reservorios.

Es conveniente que la difusividad sea expresada en términos de números adimensionales, pues así podemos visualizar cuándo los efectos viscosos, térmicos o de relajación son dominantes, en la siguiente sección se abordará esto.

2.6. Normalización de α_e y análisis de resultados

Ahora, la difusividad térmica efectiva puede ser normalizada por la cantidad $\omega_0(\Delta x)^2$, la cual es

$$\omega_0(\Delta x)^2 = \frac{4P_x^2}{\rho^2\omega_0^3} \left| 1 - \frac{2}{\beta_v a} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right|^2.$$

Dado que las expresiones de α_e y $\omega_0(\Delta x)^2$, están en términos del radio del tubo a , la frecuencia de oscilación ω_0 y una serie de parámetros característicos del fluido, es conveniente expresarlas en función de números adimensionales para reducir la cantidad de éstos sin realmente perder información. Se definen los siguientes números adimensionales

Número de Prandtl, se define como el cociente entre la difusividad viscosa y la difusividad térmica, $P_r = \frac{\eta}{\rho\alpha}$.

Número de Womersley, se define como el cociente entre la frecuencia de oscilación y los efectos viscosos, $W_o = a\sqrt{\frac{\rho\omega_0}{\eta}}$.

Número de Deborah, se define como el cociente entre el tiempo de relajación y el tiempo característico de los esfuerzos viscosos, $D_e = \frac{t_m \eta}{\rho a^2}$.

Ahora se puede realizar la normalización de la difusividad térmica efectiva en función de los números adimensionales P_r , W_o y D_e , así

$$\frac{\alpha_e}{\omega_0(\Delta x)^2} = \frac{P_r W_o^2}{8a^3} \frac{1}{\left| 1 - \frac{2}{\beta_v a} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right|^2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\bar{\beta}_T^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \left[\frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_T^2 - \beta_v^2} + \frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_T^2 - \beta_v^2} \frac{\bar{\beta}_v^2 + \beta_v^2}{\bar{\beta}_v^2 - \beta_v^2} \right. \\ & \left. - \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_T} \frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_T^2 - \beta_v^2} \frac{J_0(\bar{\beta}_T a)}{J_1(\bar{\beta}_T a)} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right] + \\ & \frac{1}{\beta_T^2 - \beta_v^2} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \left[\frac{\beta_v}{\beta_T^2 - \bar{\beta}_v^2} + \frac{\beta_v}{\beta_T^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{\beta_v^2 + \bar{\beta}_v^2}{\beta_v^2 - \bar{\beta}_v^2} \right. \\ & \left. - \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_T} \frac{\beta_v}{\beta_T^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{J_0(\beta_T a)}{J_1(\beta_T a)} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \right] \end{aligned} \right\},$$

junto con los parámetros que aparecen en las funciones de Bessel, los cuales son

$$\beta_v^2 = \frac{W_o^2}{a^2} [D_e W_o^2 + i] \quad \text{y} \quad \beta_T^2 = i P_r \frac{W_o^2}{a^2}.$$

Al considerar la expresión para la difusividad térmica efectiva normalizada en términos de los números adimensionales P_r , D_e y W_o , podemos graficar la difusividad en función de W_o para determinados valores de P_r y D_e . En esta tesis, tanto el valor del radio del tubo ($a=0.04$ m) así como el valor de los números adimensionales que empleamos son los mismos que los usados en los trabajos de Kurzweg [1, 6] y S. Celis [7] para propósitos de comparación.

En la figura 2.2 se grafica la difusividad normalizada de un fluido Newtoniano ($D_e=0$), con $P_r=2$ y $P_r=10$, pertenecientes al agua para una temperatura de $T=85^\circ\text{C}$ y $T=10^\circ\text{C}$, respectivamente y $P_r=100$ correspondiente al aceite de oliva. Se observa que las tres curvas presentan la misma forma y tienen un solo valor máximo. Con $P_r=10$ (línea punteada) y $P_r=100$ (línea rayada) el valor máximo es igual mientras que con $P_r=2$ (línea sólida) el valor máximo es mas pequeño. Además, conforme se incrementa este número se hace más angosta la curva, esto hace que los valores más altos de la difusividad permanezcan en un rango muy reducido del número de Womersley.

En la figura 2.3 se muestra la difusividad normalizada de un fluido con $P_r=10$ y variamos $D_e=0, 0.5$ y 1 . Vemos que la curva para el fluido Newtoniano (línea rayada) tiene un solo pico mientras que para los fluidos viscoelásticos (línea sólida y línea punteada) existen varios. Dado que el número de Prandtl es el mismo para los tres fluidos, lo único que cambia es el tiempo de relajación de Maxwell. El valor de la difusividad en los fluidos viscoelásticos es de un orden de magnitud mucho mayor que el del fluido Newtoniano, lo que hace que sean candidatos mucho mejores para la transferencia de calor; entre más grande sea el tiempo de relajación (D_e) más grandes son los valores máximos que se obtienen y más estrecho se vuelve el rango de las frecuencias en el que operan además de que la distancia entre picos se hace más corta.

Para apreciar mejor como cambia $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ en función de los números W_o y D_e , en la figura 2.4 se muestra una gráfica tridimensional con $P_r=10$, donde se puede ver que a medida que aumenta D_e aparecen más valores máximos y de mayor magnitud de la difusividad.

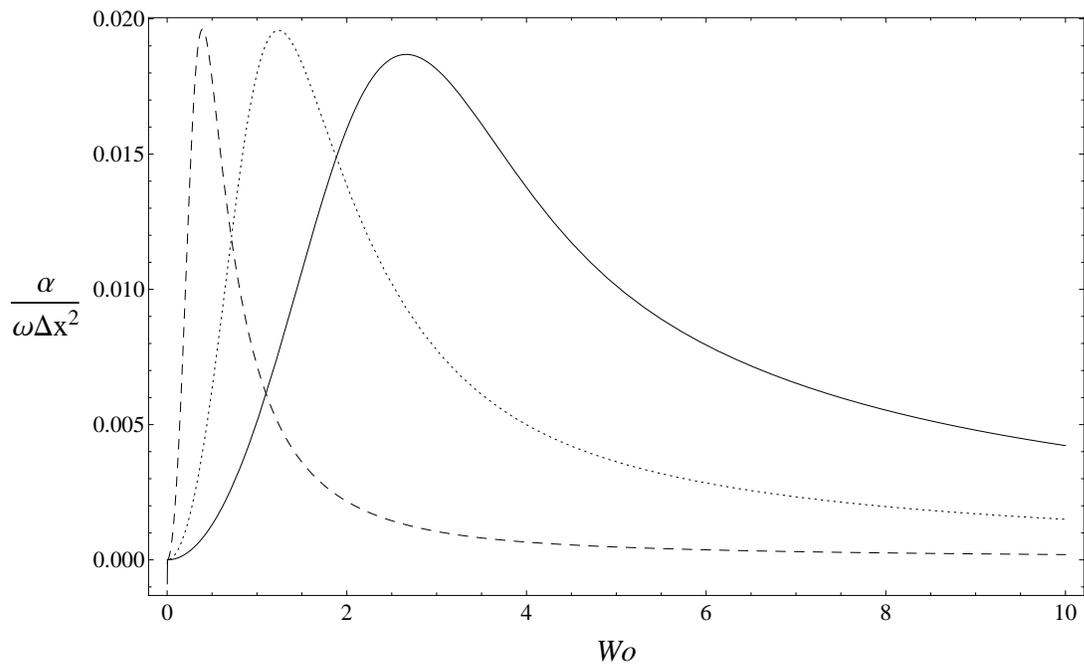


Figura 2.2: $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ como función del número de Womersley W_o , para distintos números P_r : $P_r=2$ (línea sólida), $P_r=10$ (línea punteada) y $P_r=100$ (línea rayada).

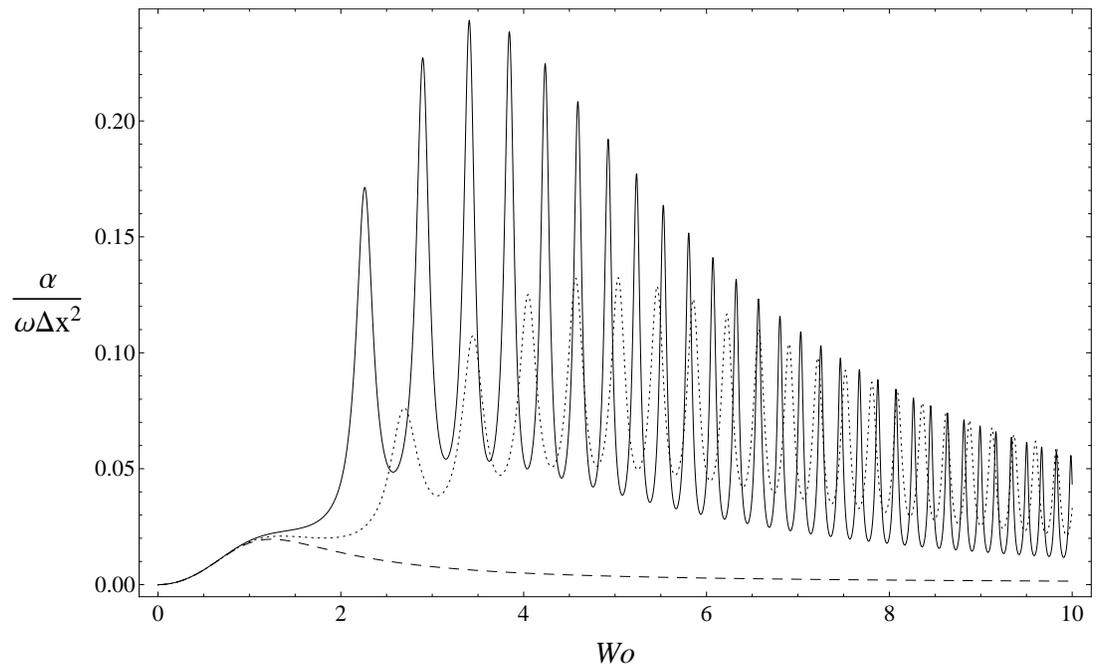


Figura 2.3: $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ como función del número de Womersley W_o con $P_r=10$, para distintos números D_e : $D_e=0$ (línea rayada), $D_e=0.5$ (línea punteada) y $D_e=1$ (línea sólida).

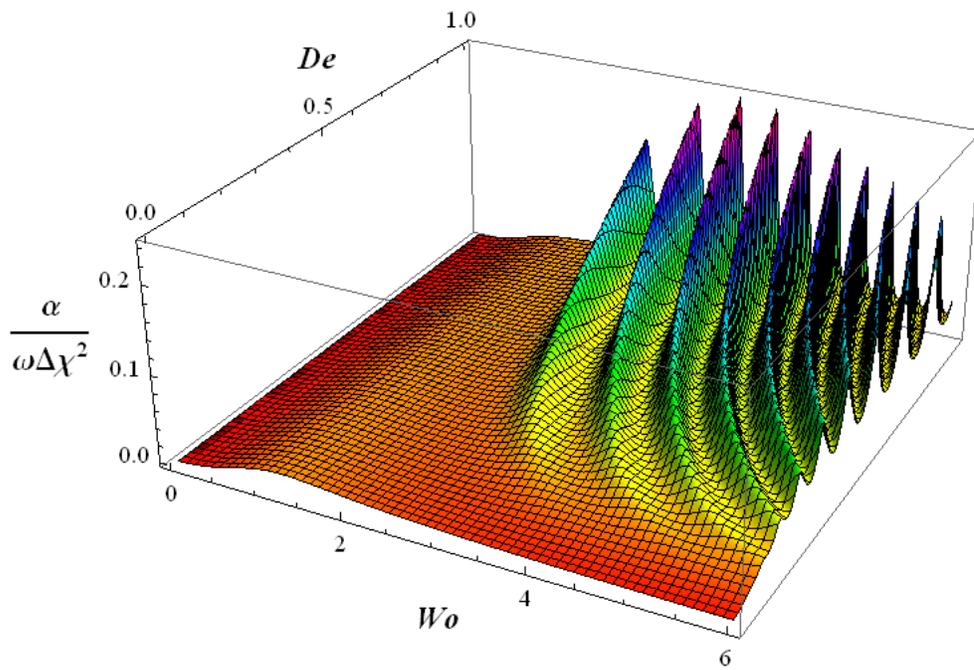


Figura 2.4: $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ como función del número de Womersley W_o y del número de Deborah D_e con $P_r=10$.

Capítulo 3

Flujo de calor en un fluido de Cattaneo-Vernotte

3.1. Introducción

Hasta ahora se ha obtenido la ecuación de la difusividad térmica efectiva usando la expresión (2.4.4), en la que se utilizan los campos de velocidad y temperatura, los cuales son deducidos a partir de las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía. La ecuación de energía que hasta este momento se ha utilizado es

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \kappa \nabla^2 T, \quad (3.1.1)$$

que considera como válida la ley de Fourier.

Sin embargo, esta expresión es un caso particular de la forma general de la ecuación de conservación de la energía, la cual es

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (3.1.2)$$

donde \mathbf{q} es el flujo de calor.

Se tiene que si $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ se obtiene la ecuación (3.1.1).

La interpretación física del modelo de Fourier es que la transmisión del flujo de calor ocurre a velocidad infinita, lo cual físicamente es imposible. Pese a esta aproximación, la ecuación de Fourier es ampliamente utilizada, pues concuerda muy bien con los experimentos y aplicaciones de la ingeniería, pero dado que nuestro análisis se realiza de manera teórica se debe perfeccionar este modelo [5].

Para poder corregir esta falla en el caso de Fourier, se emplea el modelo de Cattaneo-Vernotte [5], en la cual el flujo de calor tiene la forma

$$t_q \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\kappa \nabla T - \mathbf{q}, \quad (3.1.3)$$

donde el parámetro t_q es el tiempo de relajación, que se considera constante. El término del lado izquierdo de la ecuación está asociado con la inercia térmica e introduce el comportamiento elástico del fluido. Es evidente que si $t_q=0$ se recupera la ley de Fourier. Se observa que esta ecuación lineal tiene una forma similar a la ecuación de relajación del tensor de esfuerzos viscosos para fluidos viscoelásticos, ecuación (2.2.4).

Por lo tanto, se obtendrá la ecuación de la difusividad térmica efectiva utilizando el campo de temperatura con la ecuación de la energía usando el modelo de Cattaneo-Vernotte. Se presentará especial atención a las singularidades [7] que se presenten cuando la frecuencia de oscilación adquiera determinado valor y se localizarán sus orígenes.

3.2. Campo de temperatura

En esta sección se obtendrá el campo de temperatura con la ecuación de la energía usando el modelo de Cattaneo-Vernotte.

Si se aplica la divergencia a la ecuación (3.1.3)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(t_q \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right) &= -\nabla(\kappa \nabla T) - \nabla \cdot \mathbf{q}, \\ t_q \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} &= -\kappa \nabla^2 T - \nabla \cdot \mathbf{q}, \end{aligned}$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (3.1.2) y como suponemos que el flujo tiene lugar en la dirección axial, se tiene

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) = t_q \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \kappa \nabla^2 T. \quad (3.2.1)$$

Si se deriva parcialmente con respecto al tiempo la ecuación (3.1.2) y se usa el teorema de Clairaut para intercambiar las derivadas parciales, tenemos

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{q}), \\ \rho c \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x} \right) &= -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}, \end{aligned}$$

sustituyendo este resultado en la ecuación (3.2.1)

$$\begin{aligned} \rho c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) &= -t_q \rho c \left(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x} \right) + \kappa \nabla^2 T, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} + t_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + t_q \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial x} + t_q v \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x} &= \alpha \nabla^2 T. \end{aligned}$$

Se factorizan algunos términos de esta última ecuación y expresándola en coordenadas cilíndricas se tiene

$$\frac{\partial T}{\partial t} + t_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \left(t_q \frac{\partial v}{\partial t} + v \right) \frac{\partial T}{\partial x} + t_q v \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right), \quad (3.2.2)$$

esta es la ecuación de la energía usando el modelo de Cattaneo-Vernotte. Se puede observar que incluye varios términos ausentes en la ecuación (2.3.2) en los cuales aparece el tiempo de relajación t_q .

Se propone nuevamente una solución de la forma

$$T(r, x, t) = \gamma [x + ag(r)e^{-i\omega_0 t}], \quad (3.2.3)$$

con las condiciones de frontera

$$T(0, x, t) = \text{finita},$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(a, x, t) = 0.$$

Entonces, para obtener el campo de temperatura, debemos encontrar primero la expresión para $g(r)$.

3.2.1. Cálculo de $g(r)$

Para obtener la expresión de $g(r)$, sustituimos el campo de temperatura (3.2.3) en la ecuación de la energía (3.2.2). Puesto que solo se cambió la forma de la ecuación de la energía, el campo de velocidades así como el desplazamiento de marea permanecen iguales.

Comenzamos calculando las derivadas de T y v

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \gamma[(-i\omega_0)ag(r)e^{-i\omega_0 t}],$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (-i\omega_0)V(r)e^{-i\omega_0 t},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t}(\gamma) = 0,$$

sustituyéndolas en la ecuación de la energía (3.2.2)

$$\begin{aligned} & \gamma[(-i\omega_0)ag(r)e^{-i\omega_0 t}] + t_q \gamma[(-i\omega_0)(-i\omega_0)ag(r)e^{-i\omega_0 t}] \\ & + \gamma[t_q(-i\omega_0)V(r)e^{-i\omega_0 t} + v(r)e^{-i\omega_0 t}] = \alpha \left[\gamma ag''(r)e^{-i\omega_0 t} + \frac{1}{r} \gamma ag'(r)e^{-i\omega_0 t} \right]. \end{aligned}$$

Reagrupando términos se llega a la expresión

$$\begin{aligned} -i\omega_0 a g(r) - t_q \omega_0^2 a g(r) - t_q i \omega_0 V(r) + V(r) &= \alpha a g''(r) + \frac{1}{r} \alpha a g'(r), \\ \alpha a g''(r) + \frac{1}{r} \alpha a g'(r) + (i + \omega_0 t_q) \omega_0 a g(r) &= V(r)(1 - i\omega_0 t_q). \end{aligned}$$

Si se factoriza i en el tercer término del lado izquierdo de la ecuación y se divide entre αa , se tiene

$$g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) + \frac{i\omega_0(1 - i\omega_0 t_q)}{\alpha} g(r) = \frac{V(r)(1 - i\omega_0 t_q)}{\alpha a}. \quad (3.2.4)$$

Se define

$$\Lambda = \frac{\alpha}{1 - i\omega_0 t_q},$$

con lo que la ecuación (3.2.4) se simplifica a

$$g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) + \frac{i\omega_0}{\Lambda} g(r) = \frac{V(r)}{\Lambda a}.$$

Definiendo el parámetro β_c como

$$\beta_c^2 = \frac{i\omega_0}{\Lambda},$$

en donde β_c , depende fundamentalmente de la inercia térmica del fluido y que, como se verá, está relacionado con la raíz de la función de Bessel, con lo que se llega a

$$g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) + \beta_c^2 g(r) = \frac{V(r)}{\Lambda a}.$$

Esta ecuación tiene una forma idéntica a la del modelo de Fourier con $\alpha = \Lambda$ y $\beta_T = \beta_c$ y dado que las condiciones de frontera son las mismas, se puede escribir inmediatamente la solución, a saber

$$g(r) = \frac{\Phi P_x}{\Lambda a(\beta_v^2 - \beta_c^2)} \left[-\frac{\beta_v J_1(\beta_v a)}{\beta_c J_0(\beta_v a)} \frac{J_0(\beta_c r)}{J_1(\beta_c a)} + \frac{J_0(\beta_v r)}{J_0(\beta_v a)} + \frac{\beta_v^2 - \beta_c^2}{\beta_c^2} \right]. \quad (3.2.5)$$

Si se sustituye la expresión (3.2.5) en la ecuación (3.2.3), el campo de temperatura del fluido está completamente determinado. Cabe enfatizar que nuestra solución es válida tanto para fluidos Newtonianos como Maxwellianos dependiendo de la forma del parámetro β_v , así como para el modelo de Fourier si $t_q=0$.

3.3. Difusividad térmica efectiva

Ya que se obtuvieron los campos de velocidad y temperatura, procedemos a calcular la difusividad térmica efectiva usando el modelo de Cattaneo-Vernotte.

Utilizando el mismo procedimiento que en el modelo de Fourier, se sustituyen las expresiones de $V(r)$ y $g(r)$ de las ecuaciones (2.2.11) y (3.2.5), respectivamente, en la ecuación (2.4.2), y llevando a cabo la integral se obtiene

$$\alpha_e = -\frac{\Phi\bar{\Phi}P_x^2}{2a^2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{a}{\bar{\Lambda}(\bar{\beta}_v^2 - \bar{\beta}_c^2)} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \left[\frac{a}{2} \frac{\bar{\beta}_v^2 - \bar{\beta}_c^2}{\bar{\beta}_c^2} \frac{J_0(\bar{\beta}_v a)}{J_1(\bar{\beta}_v a)} + \frac{\bar{\beta}_c^2 - \bar{\beta}_v^2}{\bar{\beta}_v \bar{\beta}_c^2} \right. \\ & + \frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_c^2 - \bar{\beta}_v^2} + \frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_v^2 - \bar{\beta}_c^2} + \frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_c} \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_v^2 - \bar{\beta}_c^2} \frac{J_0(\bar{\beta}_c a)}{J_1(\bar{\beta}_c a)} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \\ & \left. + \left\{ \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_v^2 - \bar{\beta}_c^2} - \frac{\bar{\beta}_v^2 - \bar{\beta}_c^2}{\bar{\beta}_c^2} \frac{1}{\beta_v} \right\} \frac{J_0(\bar{\beta}_v a)}{J_1(\bar{\beta}_v a)} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right] + \\ & \frac{a}{\Lambda(\beta_v^2 - \beta_c^2)} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \left[\frac{a}{2} \frac{\beta_v^2 - \beta_c^2}{\beta_c^2} \frac{J_0(\beta_v a)}{J_1(\beta_v a)} + \frac{\beta_c^2 - \beta_v^2}{\beta_v \beta_c^2} \right. \\ & + \frac{\beta_v}{\beta_c^2 - \beta_v^2} + \frac{\beta_v}{\beta_v^2 - \beta_c^2} + \frac{\beta_v}{\beta_c} \frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_v^2 - \bar{\beta}_c^2} \frac{J_0(\beta_c a)}{J_1(\beta_c a)} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \\ & \left. + \left\{ \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_v^2 - \bar{\beta}_c^2} - \frac{\beta_v^2 - \beta_c^2}{\beta_c^2} \frac{1}{\bar{\beta}_v} \right\} \frac{J_0(\beta_v a)}{J_1(\beta_v a)} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \right.$$

Esta ecuación se puede simplificar para obtener

$$\alpha_e = \frac{\Phi \bar{\Phi} P_x^2}{2\alpha a} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1 + i\omega_0 t_q}{\bar{\beta}_c^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \left[\frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_c^2 - \beta_v^2} + \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_c^2 - \beta_v^2} \frac{(1 - i\omega_0 t_q)\bar{\beta}_v^2 + (1 + i\omega_0 t_q)\beta_v^2}{(1 + i\omega_0 t_q)(\bar{\beta}_v^2 - \beta_v^2)} \right. \\ & \left. - \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_c} \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_c^2 - \beta_v^2} \frac{J_0(\bar{\beta}_c a)}{J_1(\bar{\beta}_c a)} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right] + \\ & \frac{1 - i\omega_0 t_q}{\beta_c^2 - \beta_v^2} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \left[\frac{\beta_v}{\beta_c^2 - \bar{\beta}_v^2} + \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_c^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{(1 + i\omega_0 t_q)\beta_v^2 + (1 - i\omega_0 t_q)\bar{\beta}_v^2}{(1 - i\omega_0 t_q)(\beta_v^2 - \bar{\beta}_v^2)} \right. \\ & \left. - \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_c} \frac{\beta_v}{\beta_c^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{J_0(\beta_c a)}{J_1(\beta_c a)} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (3.3.1)$$

Con la expresión (3.3.1) está totalmente determinada la difusividad térmica efectiva usando el modelo de Cattaneo-Vernotte (CV). Hay que enfatizar, que con este resultado, se pueden reproducir todos los casos anteriores dependiendo de la magnitud de los tiempos de relajación t_m y t_q . Se puede obtener la difusividad para un fluido Newtoniano ($t_m=0$) o Maxwelliano ($t_m >0$) usando el modelo de Fourier ($t_q=0$) o el de CV ($t_q >0$). Esta ecuación, a su vez, es distinta a la encontrada por S. Celis [7]. Uno de los errores de S. Celis fue considerar iguales β_T y β_c , los que claramente son diferentes en la mayoría de los casos con $t_q \neq 0$, así como en el segundo término que se encuentra dentro de los corchetes. Se observa que si $t_q=0$ esto implica que $\beta_c = \beta_T$ y se recupera el modelo de Fourier.

Para poder evaluar las diferencias con respecto al modelo de Fourier es necesario normalizar α_e con la cantidad $\omega_0(\Delta x)^2$, pero antes de esto, es conveniente definir un número adimensional que surge al utilizar el modelo de CV.

Para adimensionalizar el parámetro β_c , el número E_d , se define como el cociente del tiempo de relajación t_q y el tiempo característico de los esfuerzos viscosos, $E_d = \frac{t_q \eta}{\rho a^2}$, que indica la relevancia del tiempo de Cattaneo con respecto al tiempo difusivo. Es decir representa la competencia entre las propiedades inerciales térmicas con respecto al proceso difusivo de transferencia de cantidad de movimiento.

Ahora se puede realizar la normalización de la difusividad térmica efectiva en función de los números adimensionales P_r, W_o, D_e y E_d , así

$$\frac{\alpha_e}{\omega_0(\Delta x)^2} = \frac{P_r W_o^2}{8a^3} \frac{1}{\left| 1 - \frac{2}{\beta_v a} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right|^2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1 + iE_d W_o^2}{\beta_c^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \left[\frac{\bar{\beta}_v}{\beta_c^2 - \beta_v^2} + \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_c^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{(1 - iE_d W_o^2)\bar{\beta}_v^2 + (1 + iE_d W_o^2)\beta_v^2}{(1 + iE_d W_o^2)(\beta_v^2 - \bar{\beta}_v^2)} \right. \\ & \left. - \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_c} \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_c^2 - \beta_v^2} \frac{J_0(\bar{\beta}_c a)}{J_1(\bar{\beta}_c a)} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right] + \\ & \frac{1 - iE_d W_o^2}{\beta_c^2 - \beta_v^2} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \left[\frac{\beta_v}{\beta_c^2 - \bar{\beta}_v^2} + \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_c^2 - \beta_v^2} \frac{(1 + iE_d W_o^2)\beta_v^2 + (1 - iE_d W_o^2)\bar{\beta}_v^2}{(1 - iE_d W_o^2)(\beta_v^2 - \bar{\beta}_v^2)} \right. \\ & \left. - \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_c} \frac{\beta_v}{\beta_c^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{J_0(\beta_c a)}{J_1(\beta_c a)} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \right] \end{aligned} \right\}. \quad (3.3.2)$$

Con los parámetros que aparecen en las funciones de Bessel, los cuales son

$$\beta_v^2 = \frac{W_o^2}{a^2} [D_e W_o^2 + i] \quad \text{y} \quad \beta_c^2 = P_r \frac{W_o^2}{a^2} [E_d W_o^2 + i].$$

Al considerar la expresión para la difusividad térmica efectiva normalizada en términos de los números adimensionales P_r, W_o, D_e y E_d , podemos graficar la difusividad en función de W_o para determinados valores de P_r, D_e y E_d .

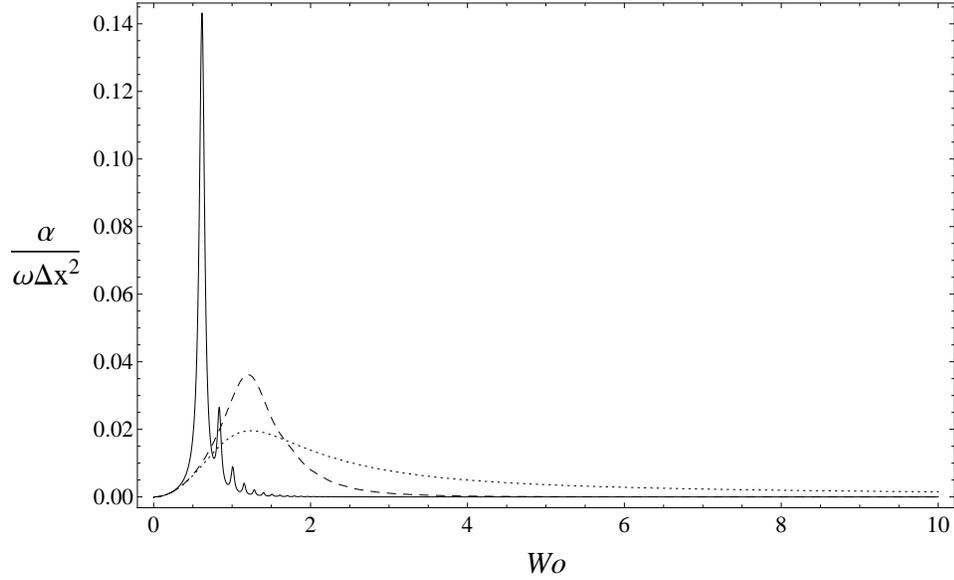


Figura 3.1: $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ como función del número de Womersley W_o con $P_r=10$, para distintos números E_d : $E_d=0$ (línea punteada), $E_d=0.5$ (línea rayada) y $E_d=10$ (línea sólida).

En la figura 3.1 se grafica la difusividad normalizada para un fluido Newtoniano ($D_e=0$), con un número de Prandtl $P_r=10$ para números $E_d=0, 0.5$ y 10. Sin embargo, una de las curvas presenta un comportamiento diferente que nunca antes habíamos observado. Con $E_d=10$, empiezan a aparecer una serie de valores máximos más pequeños que el principal a medida que la frecuencia de oscilación se va incrementando. Este resultado es una de las diferencias que encontramos al usar el modelo de CV, este comportamiento no se presenta en el caso de Fourier ($E_d=0$). Hemos encontrado que cuando se emplea un fluido viscoelástico usando el modelo de Fourier, aparece el mismo comportamiento, surgen múltiples valores máximos de la difusividad y una similitud que encontramos entre el fluido con $D_e=1$ (figura 2.3) y el fluido con $E_d=10$ (figura 3.1) es que la difusividad presenta un carácter ondulatorio cuando se utiliza al menos un tiempo de relajación, ya sea t_m o t_q .

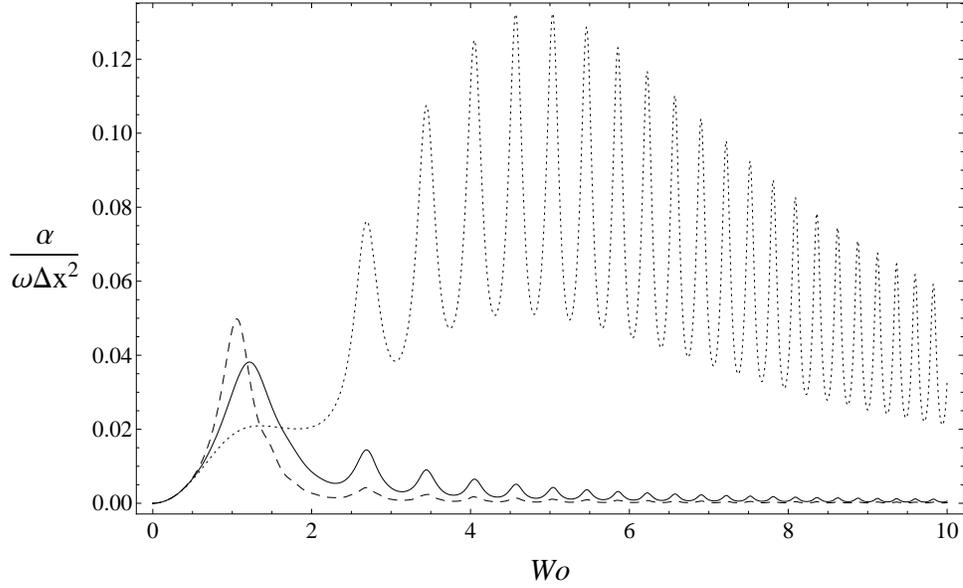


Figura 3.2: $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ como función del número de Womersley W_o con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, para distintos números E_d : $E_d=0$ (línea punteada), $E_d=0.5$ (línea sólida) y $E_d=1$ (línea rayada).

En la figura 3.2 se muestra la difusividad normalizada para un fluido viscoelástico con $P_r=10$ y $D_e=0.5$ con $E_d=0, 0.5$ y 1 . Se observa que cuando $W_o < 1.6$, el valor de la difusividad es mayor en fluidos con $E_d=1$ (línea rayada) y $E_d=0.5$ (línea sólida) que con $E_d=0$ (línea punteada), pero cuando $W_o > 1.6$, el valor de la difusividad disminuye para estos fluidos. El comportamiento también es algo diferente al caso de Fourier, en este aparecen una serie de máximos relativos que se incrementan hasta un máximo principal, no obstante, en algunos casos cuando $E_d > 0$, aparece primero el máximo principal y después varios máximos relativos; a primera vista uno podría pensar que el modelo de CV no presenta mejoría en la transferencia de calor si se emplean fluidos viscoelásticos, pero no hay que inferir conclusiones con tan solo un ejemplo. Para tener una idea más general hay que obtener ciertos casos límites para conocer el verdadero comportamiento del modelo de CV, en la siguiente figura se presentan estos límites.

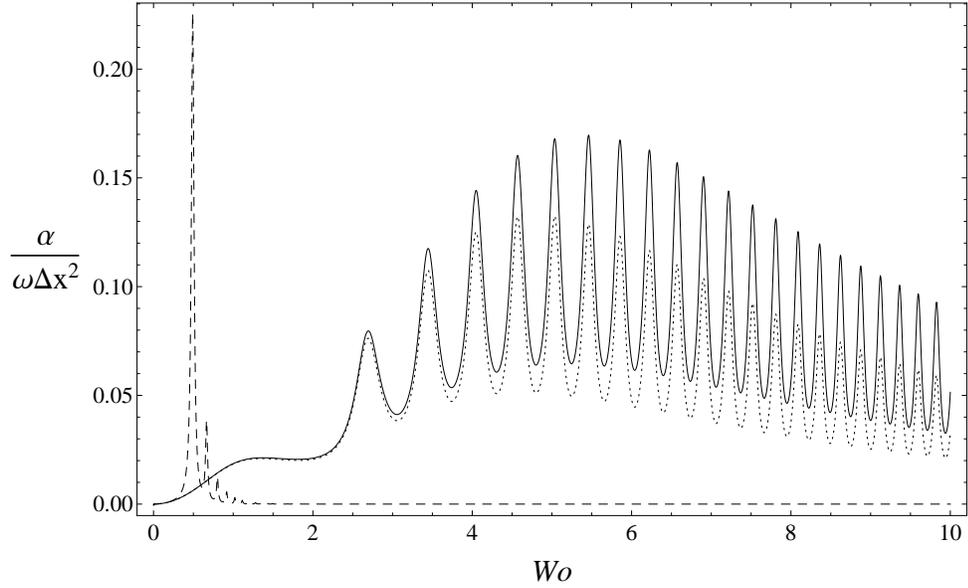


Figura 3.3: $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ como función del número de Womersley W_o con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, para distintos números E_d : $E_d=0$ (línea punteada), $E_d=0.01$ (línea sólida) y $E_d=25$ (línea rayada).

En la figura 3.3 se grafica la difusividad normalizada para un fluido viscoelástico con $P_r=10$ y $D_e=0.5$ con $E_d=0, 0.01$ y 25 . Se observa que con $E_d=0.01$ (línea sólida) se tiene un incremento gradual en la difusividad que va desde 0 hasta un 45% con respecto al caso de Fourier $D_e=0.5$ y $E_d=0$ (línea punteada) a medida que la frecuencia de oscilación se va incrementando, estas dos curvas tienen la misma forma. Con $E_d=25$ (línea rayada) se tiene un valor más elevado que las otras dos curvas, se puede observar que en ciertas condiciones sí existe un incremento en la difusividad y por lo tanto en la transferencia de calor.

Para apreciar mejor cómo cambia $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ en función de los números W_o y E_d , en la figura 3.4 se muestra una gráfica tridimensional con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, donde se observa que a medida que E_d se incrementa, el valor de la difusividad se incrementa y la frecuencia de oscilación a la cual ocurre esto se presenta a un valor más pequeño.

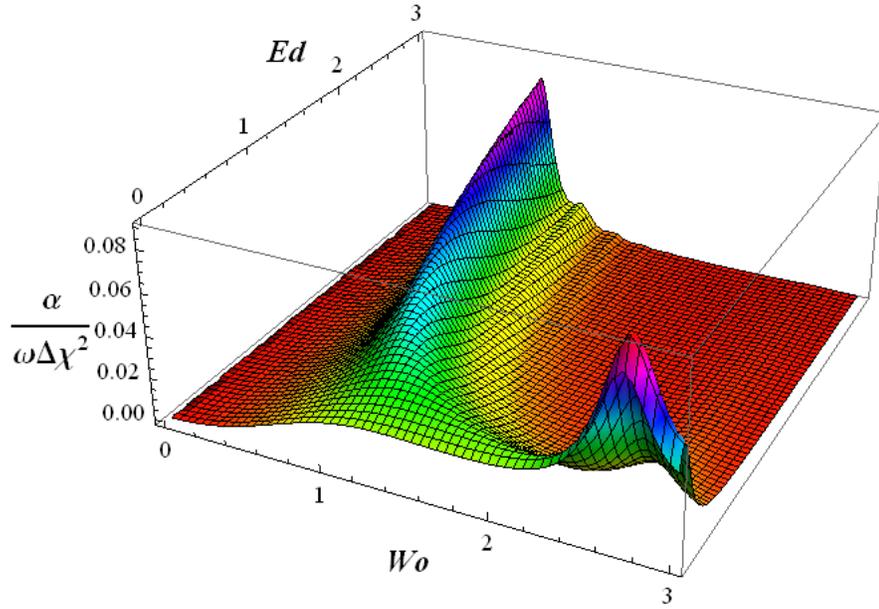


Figura 3.4: $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ como función del número de Womersley W_o y del número E_d con $P_r=10$ y $D_e=0.5$.

Para analizar por qué se presenta en algunos casos un mejoramiento en la difusividad de CV con respecto a la de Fourier y en algunos casos no hay mejoramiento, se comparan los valores de D_e y E_d que se presentan en las figuras 3.2 y 3.3.

En la figura 3.2, $E_d=0$ (línea punteada), $E_d=0.5$ (línea sólida) y $E_d=1$ (línea rayada), podemos ver que cuando E_d tiene el mismo orden de magnitud que D_e no se presenta un mejoramiento, tampoco si E_d es un poco mayor; en la figura 3.3 con $E_d=0$ (línea punteada), $E_d=0.01$ (línea sólida) y $E_d=25$ (línea rayada), se observa un mejoramiento en las 2 curvas (línea sólida y rayada), se observa que en este caso la magnitud de D_e y E_d juega un papel importante pues cuando $D_e \gg E_d$ o $E_d \gg D_e$ se presenta un incremento en la difusividad por encima del caso de Fourier para un P_r y D_e iguales.

Podemos definir un número adimensional que exprese este comportamiento como la relación de t_q y t_m .

Si se define

$$\Gamma = \frac{t_q}{t_m},$$

se presentan 2 casos en los que $\alpha_{CV} > \alpha_F$

- $\Gamma \ll 1$, en donde la forma de la curva es parecida al modelo viscoelástico para el mismo D_e usando el modelo de Fourier; los valores máximos, de mayor magnitud, aparecen en las mismas frecuencias de oscilación.
- $\Gamma \gg 1$, en donde el tipo de curva es similar al del fluido Newtoniano usando E_d altos, entre más alto sea E_d , mayor será la difusividad. Presenta varios máximos siendo el primero el que tiene mayor magnitud.

Sin embargo, el número Γ nos proporciona poca información acerca de si existe un mejoramiento en la difusividad de CV con respecto al modelo de Fourier, pues solo considera casos límite.

Para aclarar si $\alpha_{CV} > \alpha_F$, podemos definir un número adimensional que consiste en la relación de α_{CV} y α_F . Así, se define

$$\chi = \frac{\alpha_{CV}}{\alpha_F}.$$

Puesto que la difusividad está en función de los números adimensionales P_r , D_e , E_d y W_o , χ también lo estará; así, para determinados valores de estos números, χ tendrá un cierto valor que nos especificará si la difusividad de CV es de mayor magnitud que la de Fourier o viceversa.

Existen 3 casos que se presentan

- $\chi > 1 \Rightarrow \alpha_{CV} > \alpha_F$. La difusividad de CV es mayor que la de Fourier
- $\chi = 1 \Rightarrow \alpha_{CV} = \alpha_F$. La difusividad es la misma para ambos modelos
- $\chi < 1 \Rightarrow \alpha_{CV} < \alpha_F$. La difusividad de Fourier es mayor que la de CV

χ en forma matemática se expresa como

$$\begin{aligned}
\chi = & \left\{ \right. \\
& \frac{1 + iE_d W_o^2}{\beta_c^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \left[\frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_c^2 - \beta_v^2} + \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_c^2 - \beta_v^2} \frac{(1 - iE_d W_o^2)\bar{\beta}_v^2 + (1 + iE_d W_o^2)\beta_v^2}{(1 + iE_d W_o^2)(\bar{\beta}_v^2 - \beta_v^2)} \right. \\
& \left. - \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_c} \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_c^2 - \beta_v^2} \frac{J_0(\bar{\beta}_c a)}{J_1(\bar{\beta}_c a)} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right] + \\
& \frac{1 - iE_d W_o^2}{\beta_c^2 - \beta_v^2} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \left[\frac{\beta_v}{\beta_c^2 - \bar{\beta}_v^2} + \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_c^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{(1 + iE_d W_o^2)\beta_v^2 + (1 - iE_d W_o^2)\bar{\beta}_v^2}{(1 - iE_d W_o^2)(\beta_v^2 - \bar{\beta}_v^2)} \right. \\
& \left. - \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_c} \frac{\beta_v}{\beta_c^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{J_0(\beta_c a)}{J_1(\beta_c a)} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \right] \left. \right\} / \left\{ \right. \\
& \frac{1}{\bar{\beta}_T^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \left[\frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_T^2 - \beta_v^2} + \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_T^2 - \beta_v^2} \frac{\bar{\beta}_v^2 + \beta_v^2}{\bar{\beta}_v^2 - \beta_v^2} - \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_T} \frac{\bar{\beta}_v}{\bar{\beta}_T^2 - \beta_v^2} \frac{J_0(\bar{\beta}_T a)}{J_1(\bar{\beta}_T a)} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right] \\
& + \\
& \frac{1}{\beta_T^2 - \beta_v^2} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \left[\frac{\beta_v}{\beta_T^2 - \bar{\beta}_v^2} + \frac{\beta_v}{\bar{\beta}_T^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{\beta_v^2 + \bar{\beta}_v^2}{\beta_v^2 - \bar{\beta}_v^2} - \frac{\bar{\beta}_v}{\beta_T} \frac{\beta_v}{\beta_T^2 - \bar{\beta}_v^2} \frac{J_0(\beta_T a)}{J_1(\beta_T a)} \frac{J_1(\bar{\beta}_v a)}{J_0(\bar{\beta}_v a)} \right] \\
& \left. \right\}.
\end{aligned}
\tag{3.3.3}$$

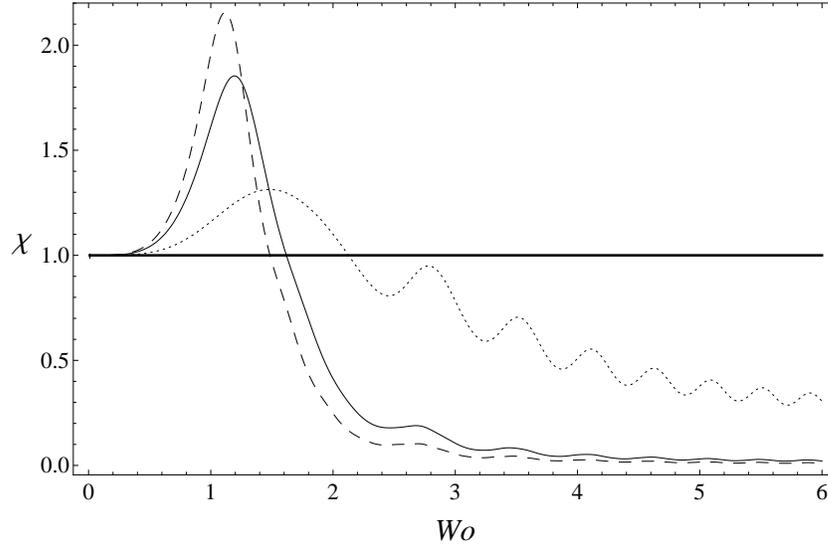


Figura 3.5: χ como función del número de Womersley W_o con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, para distintos números E_d : $E_d=0.16$ (línea punteada), $E_d=0.5$ (línea sólida) y $E_d=0.7$ (línea rayada).

En la figura 3.5 se grafica χ para un fluido de CV en función del número de W_o , con $E_d=0.16$, 0.5 y 0.7 usando un $P_r=10$ y $D_e=0.5$. Se observa que cuando $W_o \ll 1$, $\chi \approx 1 \Rightarrow \alpha_{CV} \approx \alpha_F$, siendo ligeramente superior α_{CV} , esto quiere decir que a muy bajas frecuencias no es posible apreciar los efectos de la inercia térmica del modelo de CV por lo que este es muy similar al modelo de Fourier. Conforme W_o se incrementa, χ también se incrementa hasta un cierto valor máximo, después empieza a decaer hasta que $\chi = 1$, en todo este rango de valores la difusividad de CV es superior a la del fluido de Fourier. El valor de $W_o > 0$ para el cual $\chi = 1$, lo denominamos W_c , e implica que para esta frecuencia el valor de la difusividad es el mismo para ambos fluidos. Después de W_c , a medida que W_o se incrementa, el valor de χ se hace más pequeño, lo cual implica que la difusividad del fluido de Fourier es superior a la del fluido de CV.

Para observar mejor el comportamiento de χ examinemos ahora valores más pequeños de E_d .

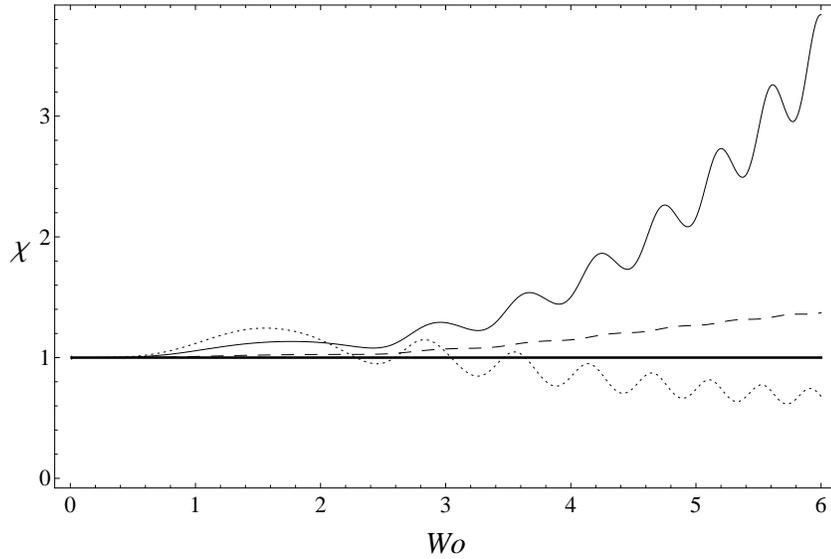


Figura 3.6: χ como función del número de Womersley W_o con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, para distintos números E_d : $E_d=0.12$ (línea punteada), $E_d=0.06$ (línea sólida) y $E_d=0.01$ (línea rayada).

En la figura 3.6 se grafica χ para un fluido de CV en función del número de W_o , con $E_d=0.12$, 0.06 y 0.01 usando un $P_r=10$ y $D_e=0.5$. Con $E_d=0.12$ (línea punteada) aparecen distintas W_c a medida que W_o se incrementa, aunque llega a un W_c final donde a partir de ahí se encuentra siempre en la zona de $\chi < 1$. Para $E_d=0.06$ y 0.01 (línea sólida y rayada) el valor de $\chi > 1$ para cualquier número de W_o , esto implica que la difusividad de CV es siempre superior a la difusividad de Fourier. De aquí parece ser que valores de $E_d \ll 1$ producen un efecto muy fuerte en la difusividad, a medida que E_d se incrementa empiezan a aparecer regiones en donde $\alpha_{CV} > \alpha_F$ y viceversa.

Para apreciar mejor como cambia χ en función de los números W_o y E_d , en la figura 3.7 se muestra una gráfica tridimensional para un $P_r=10$ y $D_e=0.5$ en donde se grafica también el valor de $\chi=1$. A medida que E_d aumenta, el valor de χ también se incrementa pero se reduce el rango de la frecuencia de oscilación en donde $\chi > 1$.

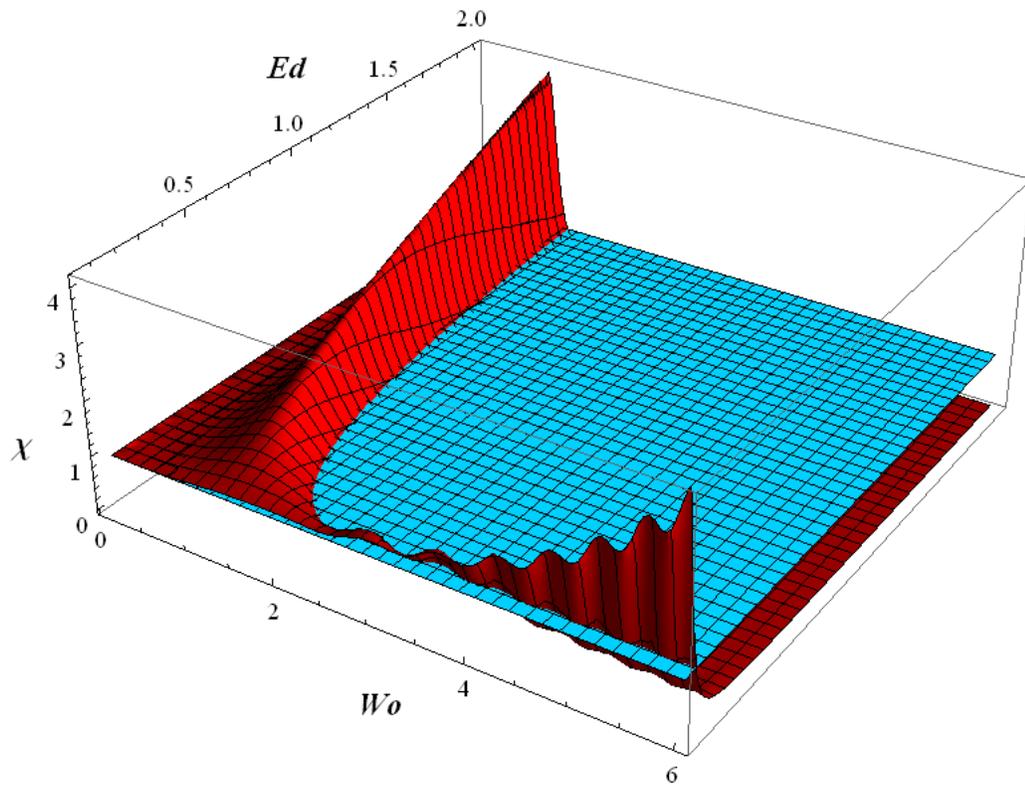


Figura 3.7: χ como función del número de Womersley W_o y del número E_d con $P_r=10$ y $D_e=0.5$.

Como se puede observar en la figura 3.5, el valor de χ se va incrementando a medida que E_d se incrementa, entonces podemos graficar su valor máximo χ_{max} para múltiples valores de E_d (figura 3.8), la frecuencia a la cual se presenta W_{max} (figura 3.9) y W_c que es el valor para el cual $\chi=1$ (figura 3.10). De cada una de estas figuras podemos hacer un ajuste de curvas para obtener una función que nos permita conocer el valor de χ_{max} , W_{max} o W_c que se desea para un número determinado de E_d con $P_r=10$ y $D_e=0.5$.

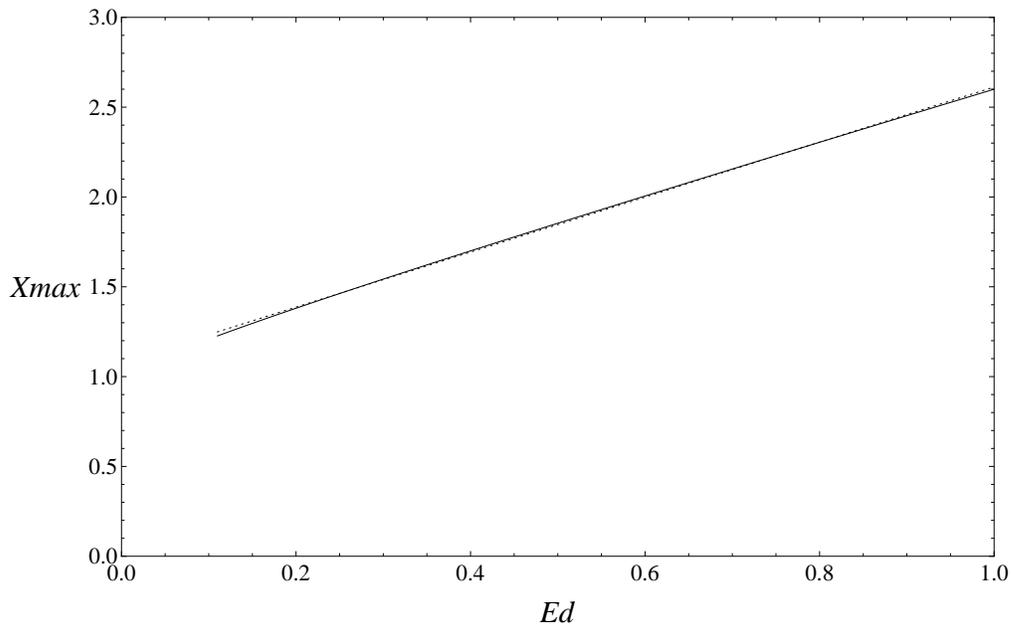


Figura 3.8: χ_{max} como función del número E_d con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, valores obtenidos mediante la ecuación (3.3.3) (línea sólida) y ajuste de curva (línea punteada).

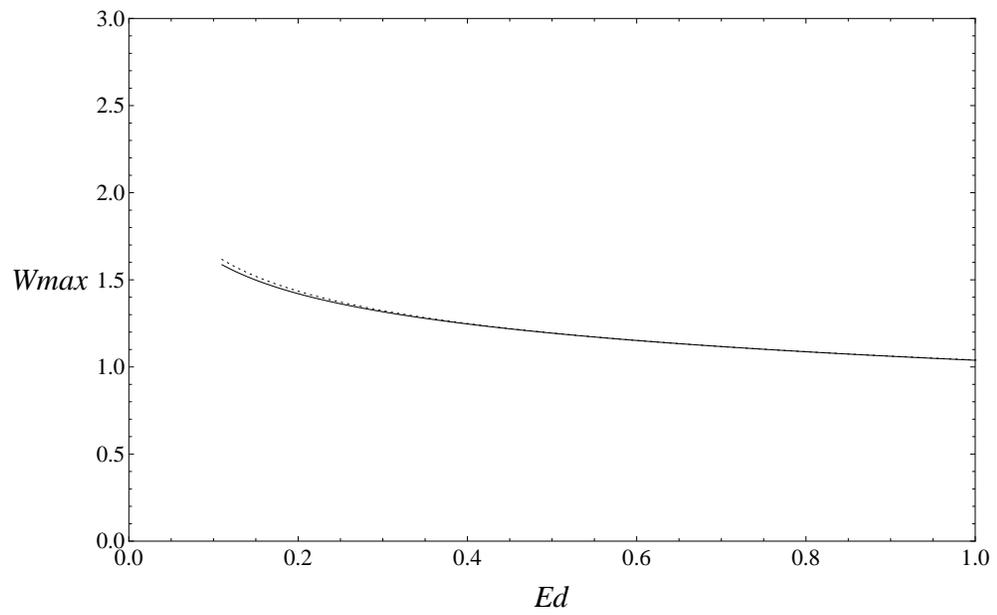


Figura 3.9: W_{max} como función del número E_d con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, valores obtenidos mediante la ecuación (3.3.3) (línea sólida) y ajuste de curva (línea punteada).

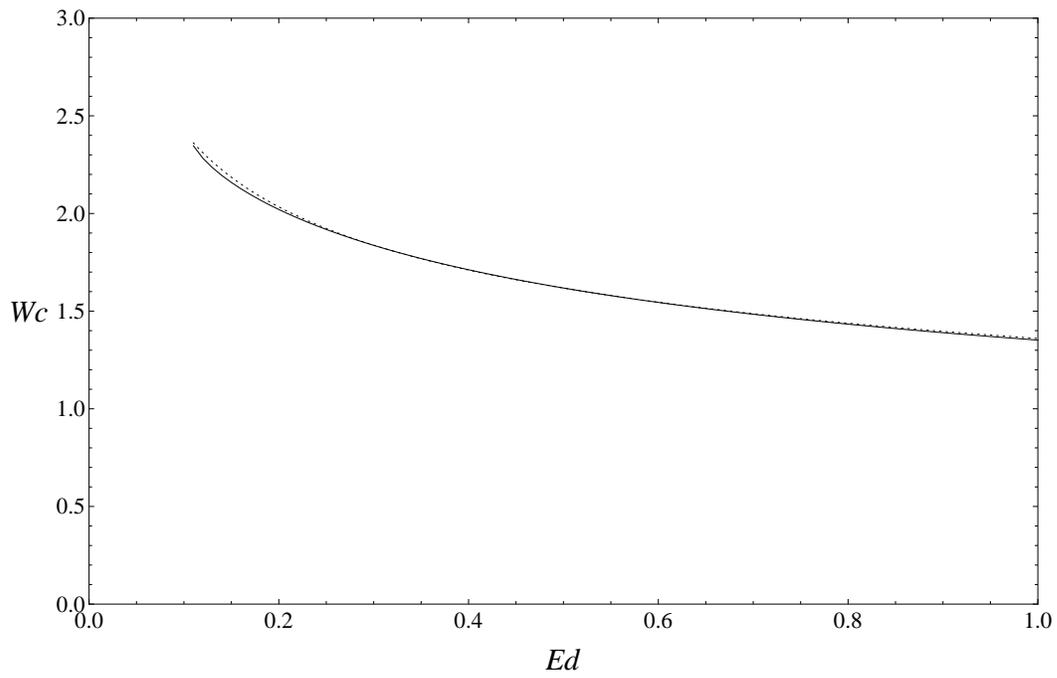


Figura 3.10: W_c como función del número Ed con $P_r=10$ y $D_e=0.5$, valores obtenidos mediante la ecuación (3.3.3) (línea sólida) y ajuste de curva (línea punteada).

Las funciones obtenidas por el ajuste de curvas son

$$\chi_{max} \cong \frac{67}{62} + \frac{49}{32}E_d \quad (3.3.4)$$

$$W_{max} \cong \frac{26}{25}E_d^{-\frac{1}{5}} \quad (3.3.5)$$

$$W_c \cong \frac{34}{25}E_d^{-\frac{1}{4}} \quad (3.3.6)$$

Las funciones (3.3.4), (3.3.5) y (3.3.6) tienen un dominio de $0.11 \leq E_d \leq 1$, ya que debajo de $E_d=0.11$, no existen valores para χ_{max} , W_{max} o W_c , pues el comportamiento debajo de este valor para estas cantidades comienza a cambiar, no podemos asegurar que se tiene la misma tendencia que para valores de $E_d \geq 0.11$.

De las gráficas que se han presentado se observa que α_e en un

- Fluido Newtoniano: se incrementa conforme E_d aumenta; cuando $E_d \ll 1$ se observa un solo valor máximo y la difusividad es mayor que cuando $E_d=0$ (caso de Fourier). Si $E_d \gg 1$ aparecen múltiples valores máximos más pequeños que el principal conforme W_o se incrementa. Este comportamiento ondulatorio se presenta usando únicamente el modelo de CV, el cual introduce el tiempo de relajación t_q ; si $t_q=0$ (ley de Fourier) no se aprecia este efecto.
- Fluido viscoelástico: La presencia de los tiempos de relajación t_m y t_q en un fluido, modifican de manera significativa el comportamiento de α_e , pues $\alpha_{CV} > \alpha_F$ en un cierto rango de frecuencias, para un P_r y D_e iguales si $\Gamma \ll 1$ o $\Gamma \gg 1$.

El número χ nos proporciona información acerca de cuándo la difusividad de CV es mayor, igual o menor a la de Fourier, dependiendo del valor de los números P_r , D_e , E_d y W_o . De la figura 3.5, sabemos sobre que rango de frecuencias, un modelo (Fourier o CV) es superior a otro y con esto podemos hacer una selección más apropiada de un fluido al querer optimizar un proceso de transferencia de calor.

3.4. Comparación cuantitativa entre el flujo de calor oscilatorio y el flujo de calor molecular

Es necesario comprobar de manera cuantitativa, si el flujo oscilatorio mejora la transferencia de calor con respecto al caso estacionario, comparando el flujo de calor bajo régimen oscilatorio con el flujo de calor molecular (difusión pura) en la misma dirección. Así, definiendo H_x como relación entre el flujo de calor bajo régimen oscilatorio q_0 y el flujo de calor molecular q_m , se tiene

$$H_x = \frac{q_0}{q_m},$$

donde $q_0 = -\rho c \alpha_e \frac{\partial T}{\partial x}$ y $q_m = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$. Si $\hat{\alpha}_e = \frac{\alpha_e}{\alpha}$ es la difusividad térmica efectiva adimensional, entonces H_x es

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{-\rho c \alpha_e \frac{\partial T}{\partial x}}{-\kappa \frac{\partial T}{\partial x}}, \\ &= \frac{\rho c \alpha_e}{\kappa}, \\ &= \frac{\alpha_e}{\alpha}, \\ &= \hat{\alpha}_e \end{aligned}$$

Este resultado muestra que el flujo de calor asociado al movimiento oscilatorio es $\hat{\alpha}_e$ veces el flujo de calor molecular. Para valores $\hat{\alpha}_e > 1$, el movimiento oscilatorio de un fluido lleva a una transferencia de calor mejorada.

Para mostrar un ejemplo de cuando existe un mejoramiento en la transferencia de calor bajo régimen oscilatorio con respecto al caso molecular, calculamos $\hat{\alpha}_e$ para un fluido con distintos números E_d , que proponemos de manera teórica. El fluido es cloruro de cetilpiridinio y solución de salicilato de sodio (CpyCl/NaSal) [6]. El número n_i es el valor del primer máximo de la difusividad normalizada.

E_d	W_o	n_i	$\frac{\omega_0}{2\pi}$ (Hz)	$P_x(\frac{Pa}{m})$	Δx (m)	$\hat{\alpha}_e$
0.1	0.815	8.379	5.052	10128	3.280×10^{-3}	9.568
1	0.815	9.271	5.053	10130	3.284×10^{-3}	10.631
59.7	0.814	2.625×10^{-2}	5.042	10085	3.238×10^{-3}	3.074×10^{-2}
174.3	0.820	4.277×10^{-3}	5.105	10341	4.916×10^{-3}	7.786×10^{-3}

Como podemos observar con $E_d=0.1$ y $E_d=1$, $\hat{\alpha}_e > 1$, por lo que se obtiene un mejoramiento en la transferencia de calor, mientras que para $E_d=59.7$ y $E_d=174.3$, $\hat{\alpha}_e < 1$, por lo que no se encuentra un mejoramiento.

Capítulo 4

Flujo de calor en un fluido ideal

4.1. Introducción

En el capítulo 2 se analizó el mecanismo de transporte de energía de un fluido bajo régimen oscilatorio. Se comprobó que la difusividad térmica efectiva, la cual es producto de la interacción de los campos de velocidad y temperatura, presentaba un incremento para una o varias frecuencias de oscilación dependiendo de si es un fluido Newtoniano o Maxwelliano, respectivamente; de estos resultados y de la interpretación física que se realizó en el campo de temperaturas podemos concluir que la dependencia radial de la velocidad y la temperatura es el motor que hace posible que un fluido presente una difusividad mejorada.

El comportamiento del campo de velocidad es transmitido al campo de temperaturas vía la ecuación de balance de energía. De presentarse una dependencia radial en la velocidad es lógico suponer que la temperatura también la tendrá.

¿Cómo un fluido presenta este comportamiento?

Los fluidos presentan una dependencia radial en su campo de velocidad debido a una propiedad que se conoce como viscosidad, que representa la resistencia interna de un fluido al movimiento. Esto se comprende mejor al mostrar la ecuación (2.2.6)

$$\rho t_m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \eta \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] = -t_m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial p}{\partial x},$$

en donde se observa que para una cierta η , existe una dependencia radial en la velocidad. La región donde los efectos viscosos son apreciables se conoce como capa límite. Muy lejos de esta región los efectos viscosos son despreciables y por ello el flujo del fluido permanece constante (flujo tapón). Un fluido que se modela de esta manera se conoce como fluido ideal.

Con base en esto nos podemos preguntar ¿ qué sucederá con el proceso de transferencia de calor en fluidos ideales ? para aclarar esta y otra serie de preguntas relacionadas con este tema, en este capítulo se realiza un desarrollo matemático para fluidos ideales que nos permita comprender cómo se lleva a cabo el proceso de transporte de calor mediante movimiento oscilatorio. Se obtendrán los campos de velocidad y temperatura para calcular la difusividad térmica efectiva así como la cantidad $\omega_0(\Delta x)^2$, esto con el fin de saber si al utilizar un fluido ideal es posible encontrar una mejora en la transferencia de calor; se analizará a su vez si existen singularidades en la normalización de $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$, y de presentarse, se localizarán las causas que las originan.

4.2. Campo de velocidad

En esta sección se presenta la formulación del problema a partir de las ecuaciones básicas que gobiernan el movimiento de un fluido ideal para obtener los campos de velocidad y temperatura que se desarrollan mediante el movimiento oscilatorio al que está sujeto el fluido dentro del tubo de sección transversal constante.

El vector velocidad \mathbf{v} , el gradiente de presión oscilatorio, las características del fluido dentro del tubo como también las ecuaciones de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía, son las mismas que se emplean en el capítulo 2 y siguiendo el mismo procedimiento, comenzamos resolviendo la ecuación (2.2.6)

$$\rho t_m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \eta \left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] = -t_m \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Puesto que se emplea un fluido ideal $\eta=0$ y de la definición de $t_m = \eta/G$ [8], esto significa que $t_m=0$. Así, la ecuación es

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

si se aplica la transformada de Fourier a cada término de la ecuación, se obtiene

$$\rho(-i\omega)\hat{V} = -\frac{d\hat{p}}{dx}.$$

Reagrupando términos se tiene

$$\hat{V} = \frac{1}{\rho\omega i} \frac{d\hat{p}}{dx},$$

si se factoriza i en el denominador, se obtiene

$$\hat{V} = -\frac{i}{\rho\omega} \frac{d\hat{p}}{dx}. \quad (4.2.1)$$

Esta es una ecuación no cerrada para el campo de velocidades en el dominio de la frecuencia. Para obtener una expresión de este, un caso particular es que el gradiente de presiones sea la parte real de la expresión

$$\frac{\partial p}{\partial x} = P_x e^{-i\omega_0 t},$$

el cual tiene la forma de un oscilador armónico simple, en donde P_x es la magnitud del gradiente de presiones y ω_0 es la frecuencia angular constante del oscilador.

La transformada de Fourier del gradiente de presiones que escogimos es

$$\frac{d\hat{p}(\omega)}{dx} = \sqrt{2\pi} P_x \delta(\omega - \omega_0),$$

donde $\delta(\omega - \omega_0)$ es la función delta de Dirac.

Ahora se sustituye el gradiente de presiones en la ecuación (4.2.1), aplicando la transformada inversa de Fourier a esta expresión, se llega a

$$v(r, t) = - \int_0^\infty \frac{i}{\rho\omega} P_x e^{-i\omega t} \delta(\omega - \omega_0) d\omega,$$

y por las propiedades de la función delta de Dirac, se obtiene

$$v(t) = -\frac{i}{\rho\omega_0} P_x e^{-i\omega_0 t}.$$

Se observa que esta ecuación no depende de r , es solo función de t , esto era de esperarse ya que al no existir η , no se genera un gradiente de velocidades en la dirección radial, y solo es una función oscilatoria en t . Este comportamiento se conoce como flujo tapón, pues el fluido no se adhiere a la pared del tubo.

En las secciones posteriores la expresión de la velocidad $v(t)$ será expresada de la forma

$$v(t) = Q e^{-i\omega_0 t}, \quad (4.2.2)$$

en donde

$$Q = -\frac{iP_x}{\rho\omega_0},$$

pues esta manera nos permite simplificar muchas operaciones.

4.3. Campo de temperatura

Una vez obtenido el campo de velocidad, procedemos a resolver la ecuación de balance de energía para encontrar el campo de temperatura, con el objetivo de determinar el transporte axial de energía térmica a través del tubo.

La ecuación de la energía, el perfil de temperaturas y las condiciones de frontera son los mismos que en el capítulo 2, resolviendo para $g(r)$ la expresión es la misma solo cambiando $V(r)$ por Q , se obtiene

$$g''(r) + \frac{1}{r} g'(r) + \beta_T^2 g(r) = \frac{Q}{\alpha a}.$$

Esta es una EDO no homogénea de segundo orden, la solución general está dada por

$$g(r) = g_h(r) + g_p(r),$$

en donde $g_h(r)$ es la solución homogénea y $g_p(r)$ una solución particular.

Se observa que la ecuación homogénea es una ecuación de Bessel de orden cero

$$g_h(r) = C_1 J_0(\beta_T r) + C_2 Y_0(\beta_T r),$$

puesto que el término no homogéneo de $g(r)$ no depende de r , entonces es una constante, así que se propone una solución $g_p(r) = G$, donde G es constante. Si se sustituye esta expresión en la EDO de $g(r)$, se obtiene

$$G = \frac{Q}{\alpha a \beta_T^2}$$

y la solución general para $g(r)$ es

$$g(r) = C_1 J_0(\beta_T r) + C_2 Y_0(\beta_T r) + \frac{Q}{\alpha a \beta_T^2},$$

en donde las condiciones de frontera son

$$T(0, x, t) = \text{finita} \Rightarrow g(0) = \text{finita},$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(a, x, t) = 0 \quad \Rightarrow g'(a) = 0.$$

La primera condición de frontera $g(0) = \text{finita}$, significa que $C_2=0$, ya que $Y_0(\beta_T r)$ diverge en $r=0$, por lo que

$$g(r) = C_1 J_0(\beta_T r) + \frac{Q}{\alpha a \beta_T^2}.$$

La segunda condición de frontera, $g'(a)=0$

$$g'(r) = C_1 \beta_T J'_0(\beta_T r),$$

$$g'(a) = C_1 \beta_T J'_0(\beta_T a),$$

y usando la identidad

$$J_0'(\beta_T a) = -J_1(\beta_T a)$$

se tiene

$$0 = -C_1 \beta_T J_1(\beta_T a) \Rightarrow C_1 = 0,$$

por lo que

$$g = \frac{Q}{\alpha a \beta_T^2}. \quad (4.3.1)$$

Si la expresión (4.3.1) se sustituye en la ecuación (2.3.1), el campo de temperatura del fluido está completamente determinado. Se puede ver de la ecuación que g es una constante, no depende de r , esto implica que el campo de temperatura no tiene una dependencia radial y por lo tanto solo es función de x y t . Entonces se encuentra que si la velocidad no es función de r , g tampoco lo es.

4.4. Difusividad térmica efectiva

Ya que se obtuvieron los campos de velocidad y de temperatura para el fluido ideal bajo régimen oscilatorio, podemos calcular la difusividad térmica efectiva de un fluido ideal.

Si se sustituyen las expresiones reales de $v(t)$ y $T(x, t)$ obtenidas en las secciones anteriores en la ecuación (2.4.2) y resolviendo la integral, se llega a la expresión

$$\alpha_e = -\frac{1}{4\alpha} Q \bar{Q} \left[\frac{\bar{\beta}_T^2 + \beta_T^2}{\beta_T^2 \bar{\beta}_T^2} \right].$$

Puesto que $\beta_T^2 = \frac{i\omega_0}{\alpha}$ y $\bar{\beta}_T^2 = \frac{i\omega_0}{\alpha}$, se obtiene

$$\alpha_e = 0.$$

Se encuentra que la difusividad térmica efectiva es cero. No existe un mejoramiento en la transferencia de calor cuando utilizamos un fluido ideal, independientemente de la frecuencia de oscilación ω_0 que sea utilizada.

4.5. Modelo de Cattaneo-Vernotte

En la sección anterior se obtuvo la difusividad térmica efectiva usando el modelo de Fourier, ahora se empleará el modelo de Cattaneo-Vernotte para saber si existe un mejoramiento en la transferencia de calor.

La ecuación de la energía, el perfil de temperaturas y las condiciones de frontera son los mismos que en el capítulo 3, resolviendo para $g(r)$ la expresión es la misma solo cambiando $V(r)$ por Q , se obtiene

$$g''(r) + \frac{1}{r}g'(r) + \beta_c^2 g(r) = \frac{Q}{\Lambda a},$$

y dado que esta ecuación es idéntica al caso de Fourier con $\alpha = \Lambda$ y $\beta_T = \beta_c$, se tiene

$$g = \frac{Q}{\alpha a \beta_c^2}. \quad (4.5.1)$$

El campo de temperatura del fluido está completamente determinado. Ahora podemos evaluar la difusividad térmica efectiva usando el modelo de CV.

Si se sustituyen las expresiones reales de $v(t)$ y $T(x, t)$ obtenidas en las secciones anteriores en la ecuación (2.4.2) y resolviendo la integral, se llega a la expresión

$$\alpha_e = -\frac{1}{4\alpha} Q \bar{Q} \frac{\bar{\Lambda} \bar{\beta}_c^2 + \Lambda \beta_c^2}{\Lambda \bar{\Lambda} \bar{\beta}_c^2 \beta_c^2}.$$

De las definiciones de β_c^2 y Λ , $\Lambda \beta_c^2 = i\omega_0$ y llevando a cabo la suma de este producto se obtiene

$$\alpha_e = 0.$$

Nuevamente se encuentra que la difusividad térmica efectiva es cero incluso usando el modelo de Cattaneo-Vernotte, independientemente de la frecuencia de oscilación que se utilice. En los fluidos ideales no se observa un mejoramiento en la transferencia de calor usando el modelo de Fourier o CV.

Estos resultados eran de esperarse, pues de la explicación del mecanismo de transferencia de calor bajo régimen oscilatorio se puede concluir que debe existir una dependencia radial en los campos de velocidad y temperatura para que exista un mejoramiento en el transporte de energía [2]. Como ejemplo de ello en el capítulo 2 se obtuvo una difusividad térmica efectiva mejorada debido a que los fluidos Newtonianos y Maxwellianos tienen cierta viscosidad η , que es la que hace que un fluido posea esa dependencia radial en su campo de velocidad.

Capítulo 5

Conclusiones

La necesidad de optimizar los procesos de transferencia de calor para un mejor aprovechamiento de los recursos en áreas como las fuentes de energías renovables y no renovables, nos llevan a explorar procesos físicos que mejoren el transporte de calor, uno de ellos es la utilización de un flujo oscilatorio [1, 6]. Trabajos previos encuentran inconsistencias como el usar la ecuación de energía que considera como válida la ley de Fourier así como las singularidades en la difusividad.

Para corregir los inconvenientes de emplear el modelo de Fourier, empleamos el modelo de Cattaneo-Vernotte, en donde introducimos un tiempo de relajación que limita la velocidad del flujo de calor a un valor finito.

Los resultados obtenidos nos muestran que la utilización de un flujo oscilatorio presenta en determinados casos, una mejora en la transferencia de calor, pues la difusividad térmica efectiva α_e , alcanza un solo valor máximo al emplear un fluido Newtoniano y múltiples valores máximos en el caso de un fluido viscoelástico. La introducción de un tiempo de relajación en los campos de velocidad y temperatura modifica de manera significativa el comportamiento de α_e . Entre mayor es el tiempo de relajación de mayor magnitud son los valores máximos de la difusividad.

Cuando empleamos el modelo de Cattaneo-Vernotte, se puede apreciar que en un fluido Newtoniano la difusividad térmica efectiva alcanza múltiples valores máximos a medida que el tiempo de relajación t_q se va incrementando, siendo el primero de ellos el de mayor intensidad. Esto difiere del modelo de Fourier en donde aparecía un solo valor máximo. En un fluido viscoelástico la difusividad térmica efectiva presenta varios comportamientos dependiendo de la magnitud de t_q . Es la magnitud del número χ (expresa la relación de las difusividades de CV y Fourier) ecuación (3.3.3), para una determinada frecuencia de oscilación, la que nos indica cuándo la difusividad de CV es mayor, igual o menor a la de Fourier. Las funciones χ_{max} , W_{max} y W_c , valor máximo de χ , frecuencia a la cual ocurre esto y frecuencia para cuando $\chi=1$, ecuaciones (3.3.4), (3.3.5) y (3.3.6), respectivamente, son de gran utilidad y sencillez para conocer la eficiencia y el comportamiento de un fluido y con esto hacer una apropiada selección para incrementar el proceso de transferencia de calor.

Para analizar la explicación cualitativa sobre la razón para la existencia del mejoramiento de la difusividad, se analizó el proceso de transferencia de calor en un fluido ideal. Se demostró matemáticamente que $\alpha_e=0$, por lo que no se obtuvo una mejora. Por lo tanto, para obtener una mejora en la difusividad térmica efectiva es necesario emplear fluidos Newtonianos o viscoelásticos.

Con la corrección de α_e en el modelo de Cattaneo-Vernotte, se eliminan las múltiples singularidades que aparecían de la difusividad normalizada para frecuencias mayores a cero.

Este trabajo predice comportamientos interesantes para la mejora del transporte de calor bajo régimen oscilatorio, por esta razón, se motiva el trabajo experimental para corroborar las predicciones que hemos hecho.

Apéndice A

Integrales de Bessel

Una de las integrales que aparecen en la deducción de la ecuación de la difusividad térmica efectiva es

$$\int J_0(\alpha r) J_0(\beta r) r dr,$$

con α y β constantes.

Esta integral se puede realizar por partes, $\int u dv = uv - \int v du$, de la siguiente manera. Si se escoge

$$u = J_0(\alpha r) \quad \Rightarrow \quad du = \alpha J_0'(\alpha r) dr,$$

$$dv = J_0(\beta r) r dr \quad \Rightarrow \quad v = \frac{r}{\beta} J_1(\beta r),$$

la integral es

$$\int J_0(\alpha r) J_0(\beta r) r dr = \frac{r}{\beta} J_0(\alpha r) J_1(\beta r) - \frac{\alpha}{\beta} \int J_1(\beta r) J_0'(\alpha r) r dr. \quad (\text{A.0.1})$$

Usando la identidad

$$J_0'(\alpha r) = -J_1(\alpha r)$$

y sustituyéndola en (A.0.1)

$$\int J_0(\alpha r)J_0(\beta r)rdr = \frac{r}{\beta}J_0(\alpha r)J_1(\beta r) + \frac{\alpha}{\beta} \int J_1(\alpha r)J_1(\beta r)rdr. \quad (\text{A.0.2})$$

Calculando la integral

$$\int J_1(\alpha r)J_1(\beta r)rdr,$$

con

$$u = J_1(\alpha r)r \quad \Rightarrow \quad du = \alpha r J_0(\alpha r)dr,$$

$$dv = J_1(\beta r)dr \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{\beta}J_0(\beta r),$$

la integral por partes es

$$\int J_1(\alpha r)J_1(\beta r)rdr = -\frac{r}{\beta}J_0(\beta r)J_1(\alpha r) + \frac{\alpha}{\beta} \int J_0(\alpha r)J_0(\beta r)rdr.$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (A.0.2)

$$\begin{aligned} \int J_0(\alpha r)J_0(\beta r)rdr &= \frac{r}{\beta}J_0(\alpha r)J_1(\beta r) + \frac{\alpha}{\beta} \left[-\frac{r}{\beta}J_0(\beta r)J_1(\alpha r) + \frac{\alpha}{\beta} \int J_0(\alpha r)J_0(\beta r)rdr \right], \\ &= \frac{r}{\beta}J_0(\alpha r)J_1(\beta r) - \frac{\alpha r}{\beta^2}J_0(\beta r)J_1(\alpha r) + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int J_0(\alpha r)J_0(\beta r)rdr, \end{aligned}$$

despejando la integral, se obtiene

$$\int J_0(\alpha r)J_0(\beta r)rdr = \frac{r}{\beta^2 - \alpha^2} [\beta J_0(\alpha r)J_1(\beta r) - \alpha J_0(\beta r)J_1(\alpha r)] + C,$$

donde C es la constante de integración.

Apéndice B

Números complejos

En el apéndice C, aparecen algunas operaciones que implican la multiplicación de números complejos de la forma $\sqrt{i} \cdot \sqrt{i}$, $\sqrt{i} \cdot \sqrt{-i}$, etc.

Se podría pensar que $\sqrt{-i}\sqrt{-i} = \sqrt{-i \cdot -i} = \sqrt{i^2} = \sqrt{-1} = i$, pero los programas computacionales como Mathematica, Python, etc. no realizan sus cálculos de esta manera, pues las raíces $z^{1/n}$, donde n es un entero positivo, constan de n números complejos distintos separados un cierto ángulo en el plano complejo, que se pueden expresar de la forma $a + bi$, en donde solo uno es la raíz principal.

Los cálculos realizados en este trabajo están basados de la misma manera que los programas computacionales, por lo que se calculan los valores de \sqrt{i} y $\sqrt{-i}$ escogiendo la raíz principal. Los valores de las raíces son

$$\begin{aligned}\sqrt{i} &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \\ \sqrt{-i} &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,\end{aligned}$$

así

$$\sqrt{i} \cdot \sqrt{i} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = i,$$

$$\sqrt{i} \cdot \sqrt{-i} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 1,$$

$$\sqrt{-i} \cdot \sqrt{-i} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -i,$$

Apéndice C

Análisis de las singularidades

C.1. Introducción

En el capítulo 2 y 3 se hizo presente un inconveniente con la difusividad térmica efectiva normalizada $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$, y es que esta expresión presentaba una singularidad cuando la frecuencia de oscilación ω_0 , tiene un valor de cero. La singularidad en la cantidad $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$, nos impide conocer el valor y el comportamiento de esta misma cuando $\omega_0=0$, por lo que es necesario encontrar el origen físico de la singularidad mediante un procedimiento analítico o gráfico, el cual no siempre es sencillo. Este problema ya se había hecho presente anteriormente en la tesis elaborada por S. Celis [7] y este argumentaba que el origen de la singularidad era debido a que el perfil de temperaturas parece no ser adecuado.

Existen diversas causas que pueden originar la singularidad de la difusividad normalizada. Sabemos que esta propiedad diverge cuando la frecuencia de oscilación ω_0 , es igual a cero, que corresponde al caso estacionario, por lo que se desarrolla un método analítico en el cual nos aproximamos a este valor, con esto visualizamos cómo es el comportamiento de la difusividad en torno a este valor y de igual manera para la cantidad $\omega_0(\Delta x)^2$; solo así podremos ver cuál es el origen real de la singularidad.

C.2. Aproximación a primer orden en ω_0

Se ha propuesto emplear un método analítico para encontrar el origen de la singularidad de la cantidad $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$. Se sabe que cuando $\omega_0=0$, la singularidad se presenta, así que se propone emplear un desarrollo en serie de Taylor a primer orden en la frecuencia de oscilación para observar cómo es el comportamiento de esta propiedad.

La difusividad termica efectiva, ecuación (2.4.4), está compuesta por una serie de funciones y parámetros, entre ellas están las funciones de Bessel, las cuales pueden ser expresadas en forma de una serie de potencias, en donde los primeros términos son

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}\dots,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16}\dots$$

Dado que nuestra aproximación está a primer orden en ω_0 , las funciones de Bessel se reducen a

$$J_0(x) \approx 1 - \frac{x^2}{4},$$

$$J_1(x) \approx \frac{x}{2},$$

en donde $x = \beta_v a, \bar{\beta}_v a, \beta_T a$ y $\bar{\beta}_T a$. Analizaremos primero el caso de los fluidos Newtonianos.

C.2.1. Fluido Newtoniano

La difusividad térmica efectiva puede ser empleada tanto para fluidos Newtonianos como fluidos viscoelásticos, la diferencia radica en que para un fluido Newtoniano se utiliza un $t_m=0$, por lo que el parámetro que aparece en la ecuación de Bessel para la velocidad es

$$\beta_v^2 = \frac{\rho\omega_0^i}{\eta}.$$

Así pues, sustituimos los parámetros y las funciones de Bessel a primer orden en la frecuencia de oscilación en la ecuación (2.4.4) para obtener

$$\alpha_e \approx \frac{1}{\rho^2 \omega_0^2} \frac{P_x^2}{2\alpha a} \left\{ \frac{\eta \alpha}{(\rho \alpha - \eta) \omega_0 i} \frac{2a\eta \sqrt{\rho} \sqrt{\omega_0} \sqrt{-i}}{\sqrt{\eta}(4\eta + a^2 \rho \omega_0 i)} \right. \\ \left[-\frac{\eta \alpha \sqrt{\rho} \sqrt{\omega_0} \sqrt{-i}}{\sqrt{\eta}(\eta + \rho \alpha) \omega_0 i} + \frac{\eta \sqrt{\rho} \sqrt{\omega_0} \sqrt{-i}}{2\sqrt{\eta} \rho \omega_0 i} - \frac{\eta \sqrt{\rho} \sqrt{\omega_0} \sqrt{-i}}{2\sqrt{\eta} \rho \omega_0 i} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\rho} \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\eta}} \frac{\eta \alpha \sqrt{\rho} \sqrt{\omega_0} \sqrt{i}}{\sqrt{\eta}(\eta + \rho \alpha) \omega_0 i} \frac{\sqrt{\alpha}(4\alpha + a^2 i \omega_0)}{2\alpha a \sqrt{\omega_0} \sqrt{-i}} \frac{2a\eta \sqrt{\rho} \sqrt{\omega_0} \sqrt{i}}{\sqrt{\eta}(4\eta - a^2 \rho \omega_0 i)} \right] \\ + \frac{\eta \alpha}{(\eta - \rho \alpha) \omega_0 i} \frac{2a\eta \sqrt{\rho} \sqrt{\omega_0} \sqrt{i}}{\sqrt{\eta}(4\eta - a^2 \rho \omega_0 i)} \\ \left[\frac{\eta \alpha \sqrt{\rho} \sqrt{\omega_0} \sqrt{i}}{\sqrt{\eta}(\eta + \rho \alpha) \omega_0 i} - \frac{\eta \sqrt{\rho} \sqrt{\omega_0} \sqrt{i}}{2\sqrt{\eta} \rho \omega_0 i} + \frac{\eta \sqrt{\rho} \sqrt{\omega_0} \sqrt{i}}{2\sqrt{\eta} \rho \omega_0 i} \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\rho} \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\eta}} \frac{\eta \alpha \sqrt{\rho} \sqrt{\omega_0} \sqrt{-i}}{\sqrt{\eta}(\eta + \rho \alpha) \omega_0 i} \frac{\sqrt{\alpha}(4\alpha - a^2 i \omega_0)}{2\alpha a \sqrt{\omega_0} \sqrt{i}} \frac{2a\eta \sqrt{\rho} \sqrt{\omega_0} \sqrt{-i}}{\sqrt{\eta}(4\eta + a^2 \rho \omega_0 i)} \right] \left. \right\}.$$

Es importante comentar que las raíces \sqrt{i} y $\sqrt{-i}$ son números complejos de la forma $z^{1/n}$, donde z es un número complejo y n es un entero positivo, por lo que cada raíz posee n números complejos diferentes, solo desfasados un cierto ángulo en el plano complejo. Se debe tener especial cuidado al emplearlos ya que solo debemos utilizar la raíz principal, pues los programas computacionales como Mathematica y Python lo hacen de esta forma, ver apéndice B.

Entonces, después de hacer álgebra llegamos a la expresión

$$\alpha_e \approx \frac{\eta^2 \alpha P_x^2}{\rho \omega_0^3} \frac{1}{\eta^2 - \rho^2 \alpha^2} \left\{ \frac{i}{4\eta + a^2 \rho \omega_0 i} \left[1 + \rho \frac{4\alpha + a^2 \omega_0 i}{4\eta - a^2 \rho \omega_0 i} \right] - \frac{i}{4\eta - a^2 \rho \omega_0 i} \left[1 + \rho \frac{4\alpha - a^2 \omega_0 i}{4\eta + a^2 \rho \omega_0 i} \right] \right\},$$

si desarrollamos los términos entre corchetes, tenemos

$$\alpha_e \approx \frac{4\eta^2 \alpha P_x^2}{\rho \omega_0^3} \frac{1}{16\eta^2 + a^4 \rho^2 \omega_0^2} \frac{1}{\eta - \rho \alpha} \{i - i\}, \quad (\text{C.2.1})$$

por lo que

$$\alpha_e \approx 0. \quad (\text{C.2.2})$$

Se encuentra que la difusividad térmica efectiva alcanza un valor de cero cuando la frecuencia de oscilación se encuentra a primer orden, por lo que no existe un mejoramiento en la transferencia de calor a niveles bajos de ω_0 . Esto era de esperarse puesto que si el fluido casi no se mueve, la región que se encuentra en el centro del tubo, no alcanza un desplazamiento apreciable para poder transmitir la energía a la región adyacente a la pared del tubo, actuando únicamente la difusión molecular.

Ahora analizamos cómo es el comportamiento de la cantidad $\omega_0(\Delta x)^2$ cuando la frecuencia de oscilación está a primer orden.

Puesto que

$$\omega_0(\Delta x)^2 \approx \frac{4P_x^2}{\rho^2 \omega_0^3} \left| 1 - \frac{2}{a\beta_v} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right|^2, \quad (\text{C.2.3})$$

calculando primero la parte interior del módulo y sustituyendo $J_1(\beta_v a)$ y $J_0(\beta_v a)$ a primer orden en ω_0 , obtenemos

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{a\beta_v} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} &\approx 1 - \frac{2}{a} \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{\rho}\sqrt{\omega_0}\sqrt{i}} \frac{2a\eta\sqrt{\rho}\sqrt{\omega_0}\sqrt{i}}{\sqrt{\eta}(4\eta - a^2\rho\omega_0 i)}, \\ &\approx 1 - \frac{4\eta}{4\eta - a^2\rho\omega_0 i}. \end{aligned}$$

Si este resultado lo expresamos en forma de un número complejo $a + bi$, y lo sustituimos dentro del módulo al cuadrado, obtenemos

$$\left| 1 - \frac{2}{a\beta_v} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right|^2 \approx \left| \frac{(a^2\rho\omega_0)^2}{(4\eta)^2 + (a^2\rho\omega_0)^2} + \frac{-a^2\rho\omega_0 4\eta i}{(4\eta)^2 + (a^2\rho\omega_0)^2} \right|^2.$$

Para evaluar el modulo al cuadrado, el numerador y denominador son elevados al cuadrado

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{2}{a\beta_v} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right|^2 &\approx \left[\frac{(a^2 \rho \omega_0)^2}{(4\eta)^2 + (a^2 \rho \omega_0)^2} \right]^2 + \left[\frac{-a^2 \rho \omega_0 4\eta}{(4\eta)^2 + (a^2 \rho \omega_0)^2} \right]^2, \\ &\approx \frac{(a^2 \rho \omega_0)^4}{[(4\eta)^2 + (a^2 \rho \omega_0)^2]^2} + \frac{(-a^2 \rho \omega_0 4\eta)^2}{[(4\eta)^2 + (a^2 \rho \omega_0)^2]^2}, \end{aligned}$$

y puesto que el denominador es el mismo, los numeradores se suman

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{2}{a\beta_v} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right|^2 &\approx \frac{(a^2 \rho \omega_0)^4 + a^4 \rho^2 \omega_0^2 16\eta^2}{[(4\eta)^2 + (a^2 \rho \omega_0)^2]^2}, \\ &\approx \frac{(a^2 \rho \omega_0)^4 + (a^2 \rho \omega_0)^2 (4\eta)^2}{[(4\eta)^2 + (a^2 \rho \omega_0)^2]^2}. \end{aligned}$$

Si se factoriza la cantidad $(a^2 \rho \omega_0)^2$

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{2}{a\beta_v} \frac{J_1(\beta_v a)}{J_0(\beta_v a)} \right|^2 &\approx \frac{(a^2 \rho \omega_0)^2 [(4\eta)^2 + (a^2 \rho \omega_0)^2]}{[(4\eta)^2 + (a^2 \rho \omega_0)^2]^2}, \\ &\approx \frac{(a^2 \rho \omega_0)^2}{(4\eta)^2 + (a^2 \rho \omega_0)^2}, \\ &\approx \frac{a^4 \rho^2 \omega_0^2}{a^4 \rho^2 \omega_0^2 + 16\eta^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (C.2.3), se tiene

$$\omega_0(\Delta x)^2 \approx \frac{4P_x^2}{\rho^2\omega_0^3} \frac{a^4\rho^2\omega_0^2}{a^4\rho^2\omega_0^2 + 16\eta^2},$$

o bien

$$\omega_0(\Delta x)^2 \approx \frac{4P_x^2}{\omega_0} \frac{a^4}{a^4\rho^2\omega_0^2 + 16\eta^2}. \quad (\text{C.2.4})$$

Resulta que la cantidad $\omega_0(\Delta x)^2$, es una cantidad finita a primer orden en la frecuencia de oscilación.

Si procedemos a evaluar la cantidad $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_e}{\omega_0(\Delta x)^2} &\approx \frac{4\eta^2\alpha P_x^2}{\rho\omega_0^3} \frac{1}{16\eta^2 + a^4\rho^2\omega_0^2} \frac{1}{\eta - \rho\alpha} \{i - i\} \frac{1}{\frac{4P_x^2}{\rho^2\omega_0^3} \frac{a^4\rho^2\omega_0^2}{a^4\rho^2\omega_0^2 + 16\eta^2}}, \\ &\approx \frac{4\eta^2\alpha P_x^2}{\rho\omega_0^3} \frac{1}{16\eta^2 + a^4\rho^2\omega_0^2} \frac{1}{\eta - \rho\alpha} \{i - i\} \frac{\rho^2\omega_0^3}{4P_x^2} \frac{a^4\rho^2\omega_0^2 + 16\eta^2}{a^4\rho^2\omega_0^2}, \\ &\approx \frac{\eta^2\alpha}{\rho} \frac{1}{\eta - \rho\alpha} \frac{1}{a^4\omega_0^2} \{i - i\}, \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (\text{C.2.5})$$

la expresión de $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$, a primer orden en la frecuencia de oscilación es de la forma $0/\omega_0^2$, se observa claramente que cuando $\omega_0=0$ se presenta una singularidad, en este caso no hay forma de remover la singularidad.

C.2.2. Fluido viscoelástico

Las cantidades como la velocidad, temperatura, difusividad térmica efectiva y desplazamiento de marea se obtuvieron tanto para fluidos Newtonianos como viscoelásticos, es en estos últimos el tiempo de relajación t_m , lo que hace que su comportamiento sea distinto al de los Newtonianos, su diferencia en forma matemática radica únicamente en la forma del parámetro β_v , el cual es

$$\beta_v^2 = \frac{\rho\omega_0(i + \omega_0 t_m)}{\eta} = \frac{\rho(\omega_0 i + \omega_0^2 t_m)}{\eta}.$$

Se observa que el tiempo de relajación t_m multiplica a la frecuencia de oscilación ω_0 , la cual es un término cuadrático; de nuestro análisis, que se basa en una aproximación de la frecuencia a primer orden, la expresión $t_m\omega_0^2 = 0$, por lo que el parámetro β_v se reduce a

$$\beta_v^2 \approx \frac{\rho\omega_0 i}{\eta},$$

el cual es el mismo parámetro para fluidos Newtonianos y, por lo tanto, el comportamiento a bajas frecuencias es el mismo que el del fluido Newtoniano, por lo que $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$ es una cantidad que en $\omega_0=0$ presenta singularidad y no es posible remover por este método, el caso estacionario se debe evitar al hacer cálculos o graficar.

C.3. Modelo de Cattaneo-Vernotte

En la sección anterior se realizó una aproximación a primer orden en la frecuencia de oscilación para evaluar el comportamiento de la difusividad térmica efectiva normalizada usando el modelo de Fourier. Se observó que en $\omega_0=0$ se presenta una singularidad, la cual no es posible eliminar. Ahora se usará el mismo procedimiento para analizar esta misma cantidad usando el modelo de CV.

Puesto que lo único que cambia cuando se emplea el modelo de CV es la ecuación de la energía, el campo de velocidad y el desplazamiento de marea es el mismo. Es en el campo de temperatura y por ende en la difusividad, que se presentan diferencias y una de ellas es la forma del parámetro β_c , que incluye el tiempo de relajación t_q , que introduce una velocidad de transmisión finita en el flujo de calor, si este tiempo es cero se recupera el flujo de calor de Fourier.

Dado que $\beta_c^2 = \frac{i\omega_0}{\Lambda} = \frac{1}{\alpha}\omega_0(\omega_0 t_q + i)$ y puesto que nuestra aproximación es a primer orden en ω_0 , el parámetro resulta $\beta_c^2 \approx \frac{i\omega_0}{\alpha}$, lo mismo sucede para el caso de la velocidad, el cual a primer orden se expresa como $\beta_v^2 \approx \frac{\rho\omega_0 i}{\eta}$.

Si se introducen estos términos en la ecuación de la difusividad se tiene

$$\alpha_e \approx \frac{1}{\rho^2 \omega_0^2} \frac{P_x^2}{2\alpha a} \left\{ \begin{aligned} & \frac{(1 + i\omega_0 t_q)\eta\alpha}{(\rho\alpha - \eta)\omega_0 i} \frac{2a\eta\sqrt{\rho}\sqrt{\omega_0}\sqrt{-i}}{\sqrt{\eta}(4\eta + a^2\rho\omega_0 i)} \left[-\frac{\eta\alpha\sqrt{\rho}\sqrt{\omega_0}\sqrt{-i}}{\sqrt{\eta}(\eta + \rho\alpha)\omega_0 i} - \frac{\sqrt{\rho}\sqrt{\omega_0}\sqrt{-i}\eta\alpha}{\sqrt{\eta}(\eta - \rho\alpha)\omega_0 i} \frac{\omega_0 t_q i}{1 + i\omega_0 t_q} \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{\rho}\sqrt{i}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\eta}\sqrt{-i}} \frac{\eta\alpha\sqrt{\rho}\sqrt{\omega_0}\sqrt{-i}}{\sqrt{\eta}(\eta + \rho\alpha)\omega_0 i} \frac{\sqrt{\alpha}(4\alpha + a^2 i\omega_0)}{2\alpha a\sqrt{\omega_0}\sqrt{-i}} \frac{2a\eta\sqrt{\rho}\sqrt{\omega_0}\sqrt{i}}{\sqrt{\eta}(4\eta - a^2\rho\omega_0 i)} \right] + \\ & \frac{(1 - i\omega_0 t_q)\eta\alpha}{(\eta - \rho\alpha)\omega_0 i} \frac{2a\eta\sqrt{\rho}\sqrt{\omega_0}\sqrt{i}}{\sqrt{\eta}(4\eta - a^2\rho\omega_0 i)} \left[\frac{\eta\alpha\sqrt{\rho}\sqrt{\omega_0}\sqrt{i}}{\sqrt{\eta}(\eta + \rho\alpha)\omega_0 i} + \frac{\sqrt{\rho}\sqrt{\omega_0}\sqrt{i}\eta\alpha}{\sqrt{\eta}(-\eta + \rho\alpha)\omega_0 i} \frac{\omega_0 t_q i}{1 - i\omega_0 t_q} \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{\rho}\sqrt{-i}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\eta}\sqrt{i}} \frac{\eta\alpha\sqrt{\rho}\sqrt{\omega_0}\sqrt{i}}{\sqrt{\eta}(\eta + \rho\alpha)\omega_0 i} \frac{\sqrt{\alpha}(4\alpha - a^2 i\omega_0)}{2\alpha a\sqrt{\omega_0}\sqrt{i}} \frac{2a\eta\sqrt{\rho}\sqrt{\omega_0}\sqrt{-i}}{\sqrt{\eta}(4\eta + a^2\rho\omega_0 i)} \right] \end{aligned} \right\},$$

que puede reducirse a la expresión

$$\alpha_e \approx \frac{P_x^2}{\rho^2 \omega_0^3} \frac{\rho\alpha\eta^2}{\rho\alpha - \eta} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1 + i\omega_0 t_q}{4\eta + a^2\rho\omega_0 i} \left[-\frac{i}{\eta + \rho\alpha} \left\{ 1 + \rho \frac{4\alpha + a^2\omega_0 i}{4\eta - a^2\rho\omega_0 i} \right\} + \frac{1}{\eta - \rho\alpha} \frac{\omega_0 t_q}{1 + i\omega_0 t_q} \right] + \\ & \frac{1 - i\omega_0 t_q}{4\eta - a^2\rho\omega_0 i} \left[\frac{i}{\eta + \rho\alpha} \left\{ 1 + \rho \frac{4\alpha - a^2\omega_0 i}{4\eta + a^2\rho\omega_0 i} \right\} + \frac{1}{\eta - \rho\alpha} \frac{\omega_0 t_q}{1 - i\omega_0 t_q} \right] \end{aligned} \right\}.$$

Si desarrollamos los términos entre corchetes rectangulares, y se simplifica, se obtiene

$$\alpha_e \approx \frac{P_x^2 \rho\alpha\eta^2}{\rho^2 \omega_0^2 (\eta - \rho\alpha)^2} \frac{8t_q(\rho\alpha - 2\eta)}{16\eta^2 + a^4 \rho^2 \omega_0^2},$$

a diferencia del modelo de Fourier en donde $\alpha \approx 0$, usando el modelo de CV se obtiene un valor finito en la difusividad térmica efectiva que es proporcional a P_x^2 y t_q e inversamente proporcional a ω_0^2 . Es claro que si $t_q=0$, se recupera el obtenido que en el caso de Fourier.

Si procedemos a evaluar la cantidad $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$, tenemos

$$\frac{\alpha_e}{\omega_0(\Delta x)^2} \approx \frac{\alpha\eta^2}{a^4\rho\omega_0} \frac{2t_q(\rho\alpha - 2\eta)}{(\eta - \rho\alpha)^2},$$

se observa que esta ecuación es inversamente proporcional a la frecuencia de oscilación, por lo que en $\omega=0$ esta expresión presenta singularidad, se llega al mismo caso que en el modelo de Fourier.

C.4. Fluido Ideal

Para analizar si existen singularidades en la difusividad normalizada usando un fluido ideal, es necesario calcular $\omega_0(\Delta x)^2$, por lo que primero se obtendrá el desplazamiento de marea para un fluido ideal.

Si se introduce el campo de velocidades en (2.5.1) con $A = \pi a^2$, y se lleva a cabo la integración, se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta x &= \left| \frac{2Q}{\omega_0} \right|, \\ &= \left| \frac{2}{\omega_0} \cdot \frac{-i}{\rho\omega_0} P_x \right|, \\ &= \frac{2P_x}{\rho\omega_0^2}, \end{aligned}$$

y si se evalúa la cantidad

$$\omega_0(\Delta x)^2 = \omega_0 \left| \frac{2}{\omega_0} \cdot \frac{-i}{\rho\omega_0} P_x \right|^2,$$

se obtiene

$$\omega_0(\Delta x)^2 = \frac{4P_x^2}{\rho^2\omega_0^3},$$

y resulta que la cantidad $\omega_0(\Delta x)^2$ es una cantidad finita para la frecuencia de oscilación aún en un fluido ideal.

Si procedemos a evaluar la cantidad $\alpha_e/\omega_0(\Delta x)^2$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_e}{\omega_0(\Delta x)^2} &= -\frac{1}{4\alpha} Q \bar{Q} \frac{\bar{\Lambda} \bar{\beta}_c^2 + \Lambda \beta_c^2}{\Lambda \bar{\Lambda} \beta_c^2 \bar{\beta}_c^2} \frac{1}{\frac{4P_x^2}{\rho^2 \omega_0^3}}, \\ &= -\frac{1}{4\alpha} Q \bar{Q} \frac{\bar{\Lambda} \bar{\beta}_c^2 + \Lambda \beta_c^2}{\Lambda \bar{\Lambda} \beta_c^2 \bar{\beta}_c^2} \frac{\rho^2 \omega_0^3}{4P_x^2},\end{aligned}$$

si se sustituyen los valores de Q, \bar{Q} y de los demás parámetros y se simplifica, se obtiene

$$\frac{\alpha_e}{\omega_0(\Delta x)^2} = \frac{\{i - i\}}{16} = 0.$$

Se encuentra que la difusividad térmica efectiva normalizada tiene un valor de cero y no presenta singularidad, pues no depende de la frecuencia de oscilación.

Apéndice D

Programa computacional en Mathematica

El programa que fue utilizado para realizar las gráficas fue Mathematica, por lo que en este apéndice se muestra el código que fue utilizado.

La ecuación que se utilizó fue la del modelo de Cattaneo-Vernotte, pues con esta expresión es posible deducir todos los casos que hasta ahora se han estudiado.

Los parámetros β_v , $\bar{\beta}_v$, β_c y $\bar{\beta}_c$, se reescriben usando las letras d, e, f y g, respectivamente.

El código en Mathematica es:

$$d = (W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I]$$

$$e = (W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) - 1.0*I]$$

$$f = (W/a)*\text{Sqrt}[P*(Z*W^2 + 1.0*I)]$$

$$g = (W/a)*\text{Sqrt}[P*(Z*W^2 - 1.0*I)]$$

En donde

- W: Número de Womersley
- T: Número de Deborah
- P: Número de Prandtl
- Z: Número adimensional
- a: radio del tubo

La expresión utilizada fue la ecuación (3.3.2), que transcrita en código de Mathematica es:

```
\[Alpha] = ((P*(W^2))/(8*(a^3)))*
(1/((Abs[1 - (2/(a*(d)))*(BesselJ[1,(d)*a]/BesselJ[0,(d)*a]])^2))*
((1 + 1.0*I*Z*W^2)/((g)^2 - (e)^2))*
(BesselJ[1, (e)*a]/BesselJ[0, (e)*a])*
( (e)/((g)^2 - (d)^2) + ((e)/((f)^2 - (d)^2))*
(((1 - 1.0*I*Z*W^2)*(e)^2 + (1 + 1.0*I*Z*W^2)*(d)^2)/
((1 + 1.0*I*Z*W^2)*((e)^2 - (d)^2))) -
((d)/(g))*((e)/((g)^2 - \ (d)^2))*
(BesselJ[0, (g)*a]/BesselJ[1, (g)*a])*
(BesselJ[1, (d)*a]/BesselJ[0, (d)*a]) ) +
((1 - 1.0*I*Z*W^2)/((f)^2 - (d)^2))*
(BesselJ[1, (d)*a]/BesselJ[0, (d)*a])*
( (d)/((f)^2 - (e)^2) + ((d)/((g)^2 - (e)^2))*
(((1 + 1.0*I*Z*W^2)*(d)^2 + (1 - 1.0*I*Z*W^2)*(e)^2)/
((1 - 1.0*I*Z*W^2)*((d)^2 - (e)^2))) -
((e)/(f))*((d)/((f)^2 - \ (e)^2))*
(BesselJ[0, (f)*a]/BesselJ[1, (f)*a])*
(BesselJ[1, (e)*a]/BesselJ[0, (e)*a])) )
```

Si se sustituyen las letras d, e, f y g en la expresión de arriba, el programa en Mathematica resulta:

```
\[Alpha][P_, T_, W_, Z_, a_] := ((P*(W^2))/(8*(a^3)))*
(1/((Abs[1 - (2/(a*((W/a)*Sqrt[T*(W^2) + 1.0*I]))]))*
(BesselJ[1, ((W/a)*Sqrt[T*(W^2) + 1.0*I])*a]/
```

$$\begin{aligned}
& \text{BesselJ}[0, ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I])*a])^2) * (\\
& ((1 + 1.0*I*Z*W^2)/(((W/a)*\text{Sqrt}[P*(Z*W^2 - 1.0*I)])^2 - \\
& ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) - 1.0*I])^2)) * \\
& (\text{BesselJ}[1, ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) - 1.0*I])*a] / \\
& \text{BesselJ}[0, ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) - 1.0*I])*a]) * \\
& (((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) - 1.0*I]) / \\
& (((W/a)*\text{Sqrt}[P*(Z*W^2 - 1.0*I)])^2 - \\
& ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I])^2) + \\
& (((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) - 1.0*I]) / \\
& (((W/a)*\text{Sqrt}[P*(Z*W^2 + 1.0*I)])^2 - \\
& ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I])^2)) * (((1 - 1.0*I*Z*W^2)* \\
& ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) - 1.0*I])^2 + (1 + 1.0*I*Z*W^2)* \\
& ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I])^2) / ((1 + 1.0*I*Z*W^2)* \\
& (((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) - 1.0*I])^2 - \\
& ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I])^2))) - \\
& (((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I]) / \\
& ((W/a)*\text{Sqrt}[P*(Z*W^2 - 1.0*I)])) * \\
& (((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) - 1.0*I]) / \\
& (((W/a)*\text{Sqrt}[P*(Z*W^2 - 1.0*I)])^2 - \\
& ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I])^2)) * \\
& (\text{BesselJ}[0, ((W/a)*\text{Sqrt}[P*(Z*W^2 - 1.0*I)])*a] / \\
& \text{BesselJ}[1, ((W/a)*\text{Sqrt}[P*(Z*W^2 - 1.0*I)])*a]) * \\
& (\text{BesselJ}[1, ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I])*a] / \\
& \text{BesselJ}[0, ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I])*a])) + \\
& ((1 - 1.0*I*Z*W^2)/(((W/a)*\text{Sqrt}[P*(Z*W^2 + 1.0*I)])^2 - \\
& ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I])^2)) * \\
& (\text{BesselJ}[1, ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I])*a] / \\
& \text{BesselJ}[0, ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I])*a]) * \\
& (((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I]) / \\
& (((W/a)*\text{Sqrt}[P*(Z*W^2 + 1.0*I)])^2 - \\
& ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) - 1.0*I])^2) + \\
& (((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I]) / \\
& (((W/a)*\text{Sqrt}[P*(Z*W^2 - 1.0*I)])^2 - \\
& ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) - 1.0*I])^2)) * (((1 + 1.0*I*Z*W^2)* \\
& ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I])^2 + (1 - 1.0*I*Z*W^2)* \\
& ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) - 1.0*I])^2) / ((1 - 1.0*I*Z*W^2)* \\
& (((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) + 1.0*I])^2 - \\
& ((W/a)*\text{Sqrt}[T*(W^2) - 1.0*I])^2))) -
\end{aligned}$$

```

((W/a)*Sqrt[T*(W^2) - 1.0*I])/
((W/a)*Sqrt[P*(Z*W^2 + 1.0*I)])))*
((W/a)*Sqrt[T*(W^2) + 1.0*I])/
((W/a)*Sqrt[P*(Z*W^2 + 1.0*I)]^2 -
(W/a)*Sqrt[T*(W^2) - 1.0*I])^2))*
(BesselJ[0,((W/a)*Sqrt[P*(Z*W^2 + 1.0*I)])*a]/
BesselJ[1,((W/a)*Sqrt[P*(Z*W^2 + 1.0*I)])*a])*
(BesselJ[1,((W/a)*Sqrt[T*(W^2) - 1.0*I])*a]/
BesselJ[0,((W/a)*Sqrt[T*(W^2) - 1.0*I])*a]) ) )

```

La difusividad térmica efectiva es:

```
\[Alpha][P_, T_, W_, Z_, a_]
```

En donde para obtener:

- Caso Newtoniano $T_- = 0$ con el modelo de Fourier $Z_- = 0$
- Caso Newtoniano $T_- = 0$ con el modelo de Cattaneo-Vernotte $Z_- > 0$
- Caso viscoelástico $T_- > 0$ con el modelo de Fourier $Z_- = 0$
- Caso viscoelástico $T_- > 0$ con el modelo de Cattaneo-Vernotte $Z_- > 0$

Para graficar se usa el código:

```

Plot[\[Alpha][10, 0.5, W, 0.01, 0.04], {W, 0.01, 10},
AxesLabel -> {Wo, \[Alpha]/(\[Omega] (\[CapitalDelta]x)^2)},
PlotRange -> Full, FrameStyle -> {Directive[Black, 18],
Directive[Black, 18]}]

```

Con este comando se obtiene una gráfica de la difusividad térmica efectiva de un fluido viscoelástico con $D_e = 0.5$ usando el modelo de Cattaneo-Vernotte con $E_a = 0.01$, con un número de Prandtl $P_r = 10$ y con el radio de tubo $a = 0.04$ m, en función de un número de Womersley W_o de 0.01 a 10. Cabe señalar que la difusividad térmica efectiva está normalizada con la cantidad $\omega_0(\Delta x)^2$.

Bibliografía

- [1] U.H. Kurzweg, Enhanced heat conduction in oscillating viscous flows within parallel-plate channels, *J. Fluid Mech.*, 156 (1985) 291-300.
- [2] A.A. Lambert, Transferencia de calor en fluidos viscoelásticos oscilando dentro de un colector solar, Tesis de Doctorado, UNAM, México, 2005.
- [3] I.G. Currie, *Fundamental of Mechanics of Fluids*, Mc Graw-Hill, 2nd ed., New York, 1993.
- [4] G. Arfken, *Mathematical Methods For Physicists*, Academic Press, 3rd ed., San Diego, 1985.
- [5] D.D. Joseph, L. Preziosi, Heat waves, *Rev. Mod. Phys.*, 61 No. 1 (1989) .
- [6] A.A Lambert, S. Cuevas, J.A. del Río, M. López de Haro, Heat transfer enhancement in oscillatory flows of Newtonian and viscoelastics fluids, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 52 (2009) 5472-5478.
- [7] S. Celis, Estudio sobre la transferencia de calor en flujos oscilatorios, Tesis de Licenciatura, UNAM, México, 2011.
- [8] Faith A. Morrison, *Understanding Rheology*, Oxford University Press, New York, 2001.