



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS
INSTITUTO DE FÍSICA

TRANSFORMACIÓN DE MOMENTO ANGULAR DE POLARIZACIÓN DE HACES
BESSEL A MOMENTO ANGULAR ORBITAL EN EL PROCESO DE
CONVERSIÓN PARAMÉTRICA DESCENDENTE

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
DOCTOR EN CIENCIAS
(FÍSICA)

PRESENTA:
CARLOS LUIS HERNÁNDEZ CEDILLO

TUTOR PRINCIPAL
DRA. ROCÍO JÁUREGUI RENAUD
INSTITUTO DE FÍSICA

MIEMBROS DEL COMITÉ TUTOR
DRA. KAREN PATRICIA VOLKE SEPÚLVEDA
INSTITUTO DE FÍSICA
DR. ALFRED BARRY U'REN CORTÉS
INSTITUTO DE CIENCIAS NUCLEARES

MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres:

J. Carlos Hernández R.

M. Luísa Cedillo L.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi asesora, Dra. Rocío Jáuregui, por haberme guiado a lo largo de mi estancia en el posgrado. A los miembros de mi comité tutorial, Dra. Karen Volke y Dr. Alfred U'Ren de quienes también recibí apoyo.

Agradezco a los miembros del jurado que evaluaron este trabajo, los doctores Pedro Quinto Su, Yasser Jéronimo Moreno, Karina Garay Palmet, Víctor Manuel Velázquez Aguilar, Mayo Villagran Muniz, Alfred B. U'Ren Córtes y Rocío Jáuregui Renaud.

Al CONACyT por la beca otorgado para mis estudios de posgrado. A la UNAM y al Instituto de Física que fue prácticamente mi hogar.

A mis padres, J. Carlos Hernández R. y M. Luisa Cedillo L., a mis hermanos Juan, Tere, Magda y Luisa por su apoyo incondicional. A mis amigos Aldo Dector, Yanet Romero, Mayte Cervantes, a los demás. Y a mis primos.

A Dios.

Resumen

El objetivo central de esta tesis es hacer una descripción de la estructura de los fotones resultantes del proceso de conversión paramétrica descendente (CPD) cuando se utiliza como fuente un haz con estructura Bessel vectorial más allá del régimen paraxial. Hay que enfatizar que este tratamiento incluye un análisis vectorial completo y sin hacer aproximaciones geométricas. Los resultados se darán en una configuración que no hemos encontrado en la literatura, el ángulo de corte del cristal es perpendicular a su superficie y esta predice conversión de momento angular íntinseco en momento angular orbital. En el capítulo 5 hablaremos de esto. En este caso particular la estructura del haz es la que sirve para propiciar la CPD y no el ángulo de corte del cristal.

En el capítulo 1 se da una introducción general al tema y se hace una revisión bibliográfica.

Como primer paso tenemos que tener un conocimiento sólido de los haces estructurados y en especial los haces Bessel que veremos en el capítulo 2. Estos haces pueden tener momento angular orbital (MAO) bien definido. Además son invariantes ante propagación. Han sido utilizados en la manipulación de materia y también en CPD como se mencionó antes.

Los procesos de CPD necesitan que el material usado tenga una respuesta no lineal al haz de bombeo. Por eso hay que tomar en cuenta la respuesta no lineal primero en el contexto clásico (capítulo 3) y posteriormente en el cuántico. El proceso de CPD se suele llevar a cabo en materiales birrefringentes¹. Cuando el cristal es uniaxial tiene dos índices de refracción diferentes y en general divide a un haz de luz incidente en una parte conocida como ordinaria y otra extraordinaria, pudiendo así modificar la estructura del haz que incide. En los procesos de CPD es muy importante tener en cuenta esto ya que es lo que permite el empatamiento de fase y esto a su vez es lo que permite ver el fenómeno.

La CPD es un proceso cuántico, así que además de birrefringencia y no linealidad

¹También se puede generarse en meta-materiales, en es trabajo sólo se hará para materiales birrefringentes.

tenemos que ver, en el capítulo 4, la cuantización del campo electromagnético tomando en cuenta efectos birrefringentes.

Con el conocimiento de los capítulos anteriores estamos listos para definir lo que es CPD en el capítulo 5. También en éste se trata el tema central de la tesis. Se hará un estudio y predicción de los estados cuánticos del campo electromagnético resultante del proceso de CPD con bombeo de un haz Bessel vectorial completo tomando en cuenta la birrefringencia y la no linealidad del material. Aquí veremos que los fotones resultantes tienen, además de las correlaciones ya conocidas, correlaciones en MAO y momento angular de espín (MAS), acoplamiento espín-orbita.

Las conclusiones y expectativas se pueden encontrar en el capítulo 6. Por último tenemos los apéndices que complementan a algunos capítulos y la bibliografía.

Abstract

The main objective of this thesis is to make a description of the down-converted photons in parametric down conversion (PDC) when a vectorial Bessel beam beyond the paraxial regime is used. Must be emphasized that this treatment includes a full vector analysis and without geometrical approximations. The results will be given in a configuration that we have not found in the literature, the cutting angle of the crystal is normal to its surface and this predicts the transformation of intrinsic angular momentum to orbital angular momentum. In chapter 5 we will talk about this. In this particular case the beam structure is that which encourage the PDC and not the cutting angle.

In chapter 1 a general introduction to the topic is given as well as the review of the literature.

First of all we need to have a solid knowledge of structured beams, specially on Bessel beams that we will see in chapter 2. These beams have well defined orbital angular momentum (OAM). Besides they are propagation invariant. They have been used in matter micro manipulation and also in PDC, as mentioned before.

PDC processes require media with a non-linear response to the pump beam. We will see this response, first in the classical frame (chapter 3) and then in the quantum one. PDC process can take place in birefringent media². When the crystal is uniaxial it has two different refractive indices and in general splits an incident light beam in a part known as ordinary and other extraordinary, being able to modify the structure of the incident beam. In PDC process is very important to consider this since it is allowing phase matching and this in turn is allowing to see the phenomenon.

The PDC is a quantum process, so in addition to birefringence and nonlinearity we have to see, in chapter 4, the quantization of the field considering birefringent effects.

With the knowledge of the previous chapters we are ready to define what is PDC, in chapter ???. Also in this the central theme of the thesis is treated. It will be made

²It can also be generated in meta-materials, in this work it will be made only for birefringent media.

a study and prediction of the quantum states of the electromagnetic field out-coming from the PDC with a full vectorial-Bessel beam, taking into account the birefringence and nonlinearity of the medium. Here we will see that the down-converted photons have correlations in OAM with the spin angular momentum (SAM), spin-orbit coupling beside the usual correlations.

Finally we have the appendices complementing chapters and th bibliography.

Índice general

Resumen	I
Abstract	III
Índice general	v
1. Introducción	1
2. Haces estructurados	3
2.1. Ecuación de Helmholtz	3
2.2. Soluciones aproximadas	4
2.2.1. Haces gaussianos	5
2.3. Soluciones exactas	7
2.3.1. Soluciones escalares	8
2.3.1.1. Haces Bessel escalares	8
2.3.1.1.1. Haces Bessel en el laboratorio	10
2.3.2. Soluciones vectoriales	11
2.3.3. Polarización de la luz	12
2.3.3.1. Haces Bessel vectoriales en el vacío	13
2.4. Propiedades mecánicas de los campos EM	16
2.4.1. Otras soluciones	18
3. Algunos fenómenos de óptica clásica	29
3.1. Fenómenos lineales	30
3.1.1. Medios isotrópicos	30
3.1.2. Medios anisotrópicos	31
3.1.2.1. Birrefringencia	32
3.2. Fenómenos no lineales	34

3.2.1.	Generación de segundo armónico	38
3.2.2.	Amplificación paramétrica	38
3.2.3.	Empatamiento de fase	39
3.3.	Propiedades mecánicas de la luz en medios materiales.	42
4.	Cuantización en medios no disipativos	45
4.1.	Cuantización en el vacío	46
4.2.	Cuantización en medios no disipativos	47
4.3.	Haces estructurados como una base de cuantización	48
4.3.1.	Campo electromagnético bajo condiciones de contorno con simetría circular cilíndrica.	50
4.3.2.	Campo electromagnético en un medio birrefringente.	52
4.3.3.	Relación de dispersión de medios birrefringentes más allá de la aproximación paraxial.	53
4.3.4.	Propagación de un haz Bessel en un medio birrefringente con fronteras y eje óptico perpendicular a su superficie.	55
4.3.5.	Cristal birrefringente con 2 fronteras (slab semi-infinito)	57
4.3.5.1.	Elección óptima del sistema de referencia.	60
4.3.5.2.	Caso particular, eje óptico perpendicular a la superficie.	62
4.3.6.	Ortonormalidad para los modos electromagnéticos en un medio birrefringente uniaxial no disipativo.	65
4.4.	Consideraciones generales.	68
5.	Conversión paramétrica descendente	71
5.1.	Antecedentes	72
5.1.1.	CPD para ondas planas	72
5.1.2.	CPD para haces con MAO	76
5.1.2.1.	Antecedentes	76
5.1.3.	CPD de haces Laguerre-Gaussianos	77
5.1.4.	Conversión paramétrica descendente para un haz Bessel vectorial, más allá del régimen no paraxial	79
5.1.4.1.	Geometría	79
5.1.4.2.	Campo Electromagnético fuera y dentro del material.	79
5.2.	Hamiltoniano de interacción	80
5.3.	Análisis del empatamiento de fase radial transversal	85
5.4.	Empatamiento de fase longitudinal	89
5.5.	Distribución del momento angular orbital del estado de dos-fotones	92
5.6.	Dependencia de la distribución del MAO con R	93

6. Conclusiones y perspectivas	95
A. Potenciales de Hertz	99
Bibliografía	103

Capítulo 1

Introducción

Antes de la invención del láser se estudiaba en general a la ideal onda plana, cuya estructura transversal en intensidad es plana, así como el frente de onda. Existían estudios más bien aislados de ondas electromagnéticas esféricas y se mencionaban en la literatura otros haces de luz como curiosidades matemáticas [1].

Con la creación del láser se le pudo dar una estructura bien definida al patrón de intensidad transversal de un haz de luz, la primera estructura que se obtuvo fue la estructura gaussiana ó TEM₀₀¹; el nombre de haces estructurados empieza después, con los haces Hermite-Gauss ó TEM_{nm}, $(n, m) \neq 00$, con una estructura compleja tanto en fase como en amplitud transversal [2, 3]. Después con el uso de hologramas [4, 5] se pudieron crear los haces Laguerre-Gauss, que además de tener estructura compleja en fase e intensidad, tienen momento angular orbital bien definido [6]. Más tarde se demostró que estos haces son casos especiales de los haces Ince-Gauss [7]. Todos estos haces se obtienen de soluciones a la ecuación de Helmholtz, en diferentes geometrías, en la aproximación paraxial; y poseen las propiedades de difracción semejantes a las del haz gaussiano. Si se resuelve la ecuación de Helmholtz en forma exacta, se encuentran diferentes haces dependiendo de las coordenadas usadas. Por ejemplo, en cartesianas tenemos las ondas planas, en cilíndricas los haces Bessel, en elípticas los Mathieu y en parabólicas los Weber [8]. En resumen los haces estructurados poseen una estructura compleja en fase e intensidad transversal, así como en polarización.

El proceso de conversión paramétrica descendente (CPD) era conocido ya desde la década de los 60 del siglo pasado [9, 10], y consiste en enviar un haz suficientemente intenso², a un cristal, para excitar su respuesta no lineal; de esta forma se crean dos fotones (señal y acompañante) a partir de la aniquilación de uno (bombeo). En [9, 10],

¹TEM_{m,n} denota los modos transversales electromagnéticos, de orden n, m de una cavidad

²A este haz lo llamaremos incidente, y al resultante al entrar al cristal lo llamaremos haz de bombeo

Zel'dovich y Klyshko propusieron un experimento que fue llevado a cabo en 1970 por Burnham y Weinberg [11], en el que encontraron que la emisión del fotón señal y acompañante era simultánea dentro de los márgenes de la resolución de sus detectores, 4 ns. Más tarde Friberg y Mandel [12] encontraron coincidencia con precisión de 100 ps y después en el 87 Hong y Mandel lograron una detección más precisa, de sólo 100 fs. [13].

Los estudios teóricos en todos estos trabajos, no habían considerado la posibilidad de que el haz tuviera estructura [14, 15]. Estudios más recientes proponen los haces de bombeo con estructura gaussiana, por ejemplo en [16, 17, 18]. También se han realizado trabajos usando haces estructurados Laguerre-Gauss [19, 20, 21, 22, 23] y usando haces Bessel [24, 25, 26]. En ellos se hace una descripción semiclásica en el proceso de amplificación paramétrica y se inicia un tratamiento fenomenológico de la conservación del momento angular orbital en el proceso de CPD. El hecho de que el cristal sea birrefringente es considerado sólo a través del vector de propagación principal \mathbf{k} . No se discuten en detalle las consecuencias de las fronteras, y de la birrefringencia en la cuantización del campo, como consecuencia no se toma en cuenta la posibilidad del cambio de la estructura del haz incidente cuando éste entra al cristal y se convierte en el haz de bombeo; estos temas son de gran interés en este trabajo.

En muchos artículos y libros se pueden encontrar referencias al uso del proceso de CPD, como fuente de estados comprimidos, enredados y su uso en información cuántica [27], criptografía cuántica, imageneología cuántica [28], fuente de estados de un sólo fotón [18], teleportación [29], etc. Estas aplicaciones hacen especialmente relevante un entendimiento profundo y detallado del fenómeno.

Capítulo 2

Haces estructurados

Los haces estructurados han sido estudiados y usados principalmente para la manipulación de la materia a escalas microscópicas usando pinzas ópticas [30, 31, 32] y recientemente en conversión paramétrica descendente y todo lo que de ahí se deriva (ver capítulo 1).

Para entender mejor a los haces estructurados, se hará un recorrido cronológico de la historia de los haces a partir de la aproximación paraxial en el que se verán los haces gaussianos de orden cero y gaussianos de orden superior HG y LG. Después continuaremos con soluciones a la ecuación de Helmholtz de forma exacta, en donde encontraremos las ondas planas, haces Bessel, Mathieu y Weber; el estudio se centrará en los haces Bessel y se verán las propiedades mecánicas convencionales de estos haces y las propiedades no triviales.

2.1. Ecuación de Helmholtz

Las ondas electromagnéticas resultan de campos eléctricos y magnéticos que satisfacen la ecuación de onda:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = 0, \quad (2.1)$$

además de las ecuaciones de Maxwell en el vacío:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (2.2d)$$

Si proponemos una solución de la forma:

$$U(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (2.3)$$

para representar a una de las componentes de un campo eléctrico monocromático, encontramos que $u(\mathbf{r})$ debe satisfacer la ecuación de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2) u(r) = 0, \quad k = \omega/c. \quad (2.4)$$

2.2. Soluciones aproximadas; aproximación paraxial

Una onda paraxial $u(\mathbf{r})$, propagándose en la dirección z , se define básicamente como una onda plana modulada por una envolvente compleja $A(\mathbf{r})$,

$$u(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{-ikz}. \quad (2.5)$$

que varía lentamente con la posición, es decir, que en una distancia del tamaño de la longitud de onda λ (ver por ejemplo [3]) A no cambie mucho. Esto implica que en una distancia $\Delta z = \lambda$ el cambio $\Delta A \ll A$; usando que $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ tenemos que:

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA. \quad (2.6)$$

y tenemos también:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k^2 A. \quad (2.7)$$

Como u debe satisfacer la ecuación de Helmholtz; entonces, sustituyendo (2.5) en (2.4), usando las ecuaciones (2.6) y (2.7) y despreciando los términos $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$ (que son ,uy pequeños en comparación con $k\frac{\partial A}{\partial z}$ o $k^2 A$), tenemos:

$$\nabla_{\perp}^2 A - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (2.8)$$

donde ∇_{\perp}^2 es la parte transversal del operador de Laplace. Y esta última es la **ecuación paraxial de Helmholtz**.

2.2.1. Haces gaussianos

La solución más simple a la ecuación paraxial de Helmholtz (2.8) es la onda paraboloidal:

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{z} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2z}\right), \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad (2.9)$$

esta se obtiene de una aproximación en serie de Taylor para la onda esférica y es “una forma intermedia entre la onda esférica y la onda plana”; se puede obtener otra solución simplemente haciendo el cambio $z \rightarrow z - \xi$, donde ξ es una constante, si es real representará una onda paraboloidal centrada en $z = \xi$, pero podemos optar por definirla imaginaria, digamos $\xi = -iz_0$, con z_0 real, que da lugar a la envolvente compleja del haz gaussiano:

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left(-ik \frac{\rho^2}{2q(z)}\right), \quad q(z) = z + iz_0. \quad (2.10)$$

Descomponiendo el término $1/q(z)$ en sus partes real e imaginaria:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi W^2(z)} \quad (2.11)$$

y sustituyendo (2.10) en (2.5), tenemos el haz gaussiano:

$$A(\mathbf{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right) \exp\left(-ikz - ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)\right), \quad (2.12)$$

donde:

$$W(z) = W_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right) \right]^{1/2}, \quad \text{ancho del haz} \quad (2.13)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right], \quad \text{radio de curvatura} \quad (2.14)$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1} \frac{z}{z_0}, \quad \text{fase de Guoy} \quad (2.15)$$

$$W_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{cintura del haz} \quad (2.16)$$

$$A_0 = \frac{A_1}{iz}. \quad (2.17)$$

El parámetro z_0 se conoce como distancia de Rayleigh, que es la distancia a la cual el ancho del haz es $\sqrt{2}$ veces la cintura del haz, es decir:

$$W(z_0) = \sqrt{2}W_0 \quad (2.18)$$

Haces Hermite-Gauss

Otra solución a la ecuación (2.8) son los haces Hermite-gaussianos, que se obtienen usando coordenadas rectangulares:

$$U_{l,m}(x, y, z) = A_{l,m} \left[\frac{W_0}{W(z)} \right] G_l \left[\frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right] G_m \left[\frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right] \times \quad (2.19)$$

$$\exp \left[-ikz - ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + i(l + m + 1) \zeta(z) \right] \quad (2.20)$$

donde las funciones G_i están dadas en términos de los polinomios de Hermite H_l como:

$$G_l(u) = H_l(u) e^{-\frac{u^2}{2}}. \quad (2.21)$$

Ya que $H_0(u) = 1$ se puede ver que el modo $U_{0,0}$ coincide con el haz gaussiano. La deducción de esta ecuación se puede ver por ejemplo en [3].

Haces Laguerre-Gauss

En coordenadas cilíndricas encontramos que la solución a(2.8) son los haces Laguerre-gaussianos:

$$\begin{aligned}
U_{p,l}(\mathbf{r}) = & \sqrt{\frac{2p!}{\pi(l+p)!}} \left(\frac{1}{W(z)}\right) \left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right)^{\frac{l}{2}} L_p^l\left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right) \\
& \times \exp\left(-\frac{\rho^2}{W^2(z)}\right) \\
& \times \exp\left(\frac{ik\rho^2}{2R(z)}\right) \exp[i(2p+l+1)\zeta(z)] \exp[i(l\phi+kz)]
\end{aligned} \tag{2.22}$$

donde L_p^l son los polinomios asociados de Laguerre. La deducción de la ecuación que aquí se presenta se puede ver en [33], una deducción alternativa se puede encontrar en [34] y expresiones alternativas pero equivalentes se pueden encontrar en la literatura, por ejemplo en la Ref. [35].

Ya que $L_0^0 = 1$, vemos que el orden más bajo $U_{0,0}$ coincide con el haz gaussiano, igual que los HG. Es por esto que a estos haces se les llama haces gaussianos de orden superior.

Además también podemos ver que al calcular la intensidad $I = |u(\mathbf{r})|^2$ queda:

$$I_{l,p} = F_{l,p}G(r) \tag{2.23}$$

donde $F_{l,p}$ son los polinomios $|L_p^l|^2$ para los LG y un producto de los polinomios H_i para los HG, y G es una función gaussiana. Es de aquí de donde reciben su nombre HG o LG, ya que su intensidad o su perfil transversal está dado por el producto de una función especial por una gaussiana; y también el nombre de haces *estructurados* pues su perfil transversal tiene la estructura dada por esas funciones.

Como ya se vio los haces gaussianos no son más que los ordenes más bajos de los HG y LG, cada uno de éstos forma una base completa de modos ortogonales en los cuales puede ser expandido cualquier otro haz en el régimen paraxial.

Si ahora usamos coordenadas elípticas obtenemos los haces Ince-Gauss (IG) que forman una tercera base y se puede ver que los HG y LG son casos límite de los IG [7].

2.3. Soluciones exactas; campos ópticos invariantes ante propagación

En la sección anterior se recurrió a la aproximación paraxial para resolver la ecuación de Helmholtz. Para resolverla de forma exacta sabemos que ésta es separable en sólo 11 sistemas de coordenadas [8, 36]. De estos 11 solo 4 tienen simetría a lo largo de un eje,

estos sistemas corresponden a las coordenadas cartesianas, circular cilíndricas, elípticas cilíndricas y parabólicas cilíndricas.

Debido a esta simetría es que el perfil de intensidad transversal de estos modos es conservado a lo largo del eje de propagación, recibiendo así el nombre de campos ópticos invariantes ante propagación (COIP).

2.3.1. Soluciones escalares

La forma más sencilla de resolver sistemas, es empezar por las soluciones escalares, es decir, las soluciones de la ecuación de onda sin ocuparnos por el momento en la dirección que tomarán los campos eléctrico y magnético.

Consideremos una onda con amplitud compleja dada por:

$$u(\mathbf{r}) = A(x, y)e^{-ik_z z} \quad (2.24)$$

Al pedir que u satisfaga la ecuación de Helmholtz, se encuentra que A debe satisfacer la siguiente ecuación.

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2) u(r) = 0, \quad k_{\perp} = \sqrt{\omega^2/c^2 - k_z^2} \quad (2.25)$$

donde el subíndice \perp denota las partes transversales.

2.3.1.1. Haces Bessel escalares

Resolviendo la ecuación (2.25) en coordenadas circulares cilíndricas, obtenemos:

$$A(\rho, \phi) = A_m J_m(k_{\perp} \rho) e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (2.26)$$

que sustituyendo en (2.24) y considerando la parte temporal, tenemos un haz Bessel escalar:

$$u(\mathbf{r}) = A_m J_m(k_{\perp} \rho) e^{i(m\phi - k_z z + \omega t)} \quad (2.27)$$

donde las J_m son las funciones de Bessel. Cualquier superposición de estas funciones es también una solución, por lo que tenemos una familia de distintos haces Bessel que se mencionarán más adelante.

De (2.27) podemos ver que su distribución de intensidad es proporcional al cuadrado de funciones Bessel:

$$I_m = |A_m|^2 J_m^2(k_{\perp} \rho) \quad (2.28)$$

y es de aquí que reciben su nombre.

El término de fase

$$m\phi - k_z z + \omega t = cte \quad (2.29)$$

que define el frente de onda, da lugar a hélices; por lo que a los haces con términos de fase como éste, se les conoce como haces con frentes de onda helicoidales.



Figura 2.1: Frente de onda helicoidal con $m = 3$, se pueden apreciar 3 hélices

Propiedades no triviales El término (2.29) también es el que da origen al momento angular orbital (MAO) que es una de las propiedades consideradas como no-triviales y en esta sección hablaremos de él. Antes de finales del siglo pasado, las propiedades estudiadas de los haces de luz en **el laboratorio**, se limitaban a la energía (intensidad), el momento lineal (vector de propagación) y el momento angular de espín (polarización). Con el surgimiento de los haces Bessel [37] y los LG, se añadió el **momento angular orbital** [6] (variación azimutal de la fase).

Como vimos ya se vio, los frentes de onda, $i(m\phi + kz - \omega t) = cte = 0^1$, son helicoidales. La carga topológica m da el número de hélices, en la dirección z y éstas rotan en el tiempo con velocidad angular constante:

$$\frac{\phi}{t} = \frac{\omega}{m} \quad (2.30)$$

El término (2.29) también aparece en los haces LG por lo que en 1992 Allen *et al.* [6] predijeron una cantidad $m\hbar$ de momento angular orbital (MAO) por fotón que podía ser

¹Sin pérdida de generalidad se puede escoger la constante igual a cero

transferido a la materia.

Este término define también los llamados vórtices ópticos. Un vórtice es una singularidad topológica en el que la variable de interés se caracteriza con un comportamiento de la forma $\rho^m e^{im\phi}$ donde ρ es la distancia al centro del vórtice. El valor nulo de la variable en el origen es debido a la indeterminación de la fase en ese punto. A la variable m se le conoce como carga topológica y nos dice el número de veces que la fase recorre de 0 a 2π al efectuar una rotación al rededor del centro del vórtice, en nuestro caso la propiedad de interés es la intensidad del campo electromagnético. En la figuras 2.2 se puede ver que el orden, $m = 0$ de un haz Bessel escalar, no presenta esta propiedad, hay luz en el centro y la fase no cambia. Para los haces con $m \neq 0$ la intensidad en el centro es nula.

La distribución de fase transversal, para un haz Bessel monocromático a un tiempo t_0 y en una posición z_0 es:

$$\phi = \frac{kz_0 - \omega t_0}{m} \text{Signo}(J_m(k_\perp \rho)), \quad \phi \in [0, 2\pi), m \neq 0 \quad (2.31)$$

$$\phi = (kz_0 - \omega t_0) \text{Signo}(J_m(k_\perp \rho)), \quad \phi \in [0, 2\pi), m = 0 \quad (2.32)$$

En la figura 2.2 se ilustran ejemplos para $m = 0, 1, 2$

Evidentemente estos haces presentan invariancia en su intensidad a lo largo del eje z , propiedad que fue resaltada por Durnin [38, 39] en 1987 usando el calificativo de haces adifraccionales; aunque esto es un concepto ideal, igual que la onda plana. Sin embargo, en el laboratorio se puede encontrar un intervalo finito en el que se puede tener cuasi-no-difracción.

Además estos haces representan una ventaja en la adifraccionalidad con respecto a los haces gaussianos ya que con el mismo tamaño de cintura del spot central del Bessel que la de un gaussiano, el Bessel mantiene su perfil transversal invariante en una longitud mucho mayor que el gaussiano[40].

2.3.1.1.1. Haces Bessel en el laboratorio Hay diversas formas de generar los haces Bessel. La primera, propuesta por Durnin en 1987 [39, 40], usa la transformada de Fourier de una apertura circular. Otras opciones, son usar una lente cónica -axición- [41, 42], hologramas [4, 43, 44], espejos cónicos[45] y la más común actualmente, usar moduladores espaciales de luz [46, 47, 48]. Las realizaciones de haces Bessel tienen usualmente una modulación tipo Gauss, esto es debido a que estos haces se crean a partir de láseres que generan haces gaussianos. Sin embargo es posible obtener una aproximación mejor a un haz Bessel ideal expandiendo al haz gaussiano original, es decir, hacer la cintura del haz más grande, a costa de perder intensidad, como se ve en el las figuras 2.3 y 2.4

En el laboratorio de pinzas ópticas del Instituto de Física, UNAM, generamos haces Bessel con un modulador espacial de luz (SLM) Holoeye. El SLM es una pantalla de cristal líquido en la cual se aplican voltajes predeterminados a cada pixel (cada nivel de gris corresponde a cierto voltaje) cambiándole el índice de refracción, esto provoca un retraso de camino óptico y así se modula la fase en la luz reflejada o transmitida por el SLM. La fase tiene una codificación lineal de 0 a 2π en 256 niveles de gris. El láser es expandido para tener una iluminación uniforme sobre el SLM. La imagen que codifica la fase es desplegada en el SLM cambiando bajo reflexión la fase del haz incidente. El haz resultante se filtró en el plano de Fourier y se registró en una cámara ccd.

Dentro la familia de los haces Bessel también podemos encontrar a haces Bessel de orden fraccional, es decir en donde m no está restringido a los enteros [49], que conservan la propiedad de adifracionalidad.

Para el caso de los haces Bessel fraccionales, el MAO ya no está restringido a tomar valores enteros de \hbar sino más bien del orden m del haz, que puede ser fraccional. Aquí también se puede ver que $L_z \neq 0$ y puede tomar valores continuos, pero eso es macroscópicamente hablando, al cuantizar los campos esto podría verse como una superposición de muchos campos con diferentes valores de MAO que en conjunto dan una variable macroscópica continua.

Además existen otros, por ejemplo los Bessel-seno y los Bessel-coseno, que se verán en la siguiente sección como casos especiales de los haces Bessel vectoriales.

2.3.2. Soluciones vectoriales

En la sección 2.3.1 vimos las soluciones escalares a la ecuación de Helmholtz. Pero los campos electromagnéticos son campos vectoriales y en esta tesis se dará énfasis a las consecuencias del carácter vectorial en todo el desarrollo de la CPD.

Sabemos que los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} quedan determinados por dos potenciales, el potencia escalar ϕ y el vectorial \mathbf{A} :

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\end{aligned}\tag{2.33}$$

A través de estas ecuaciones podemos reducir el número de variables con las que hay que trabajar, en lugar de seis (tres de \mathbf{E} y tres de \mathbf{B}), podemos trabajar con cuatro una de ϕ y tres de \mathbf{A} , pero además sabemos que los campos electromagnéticos tienen solo dos grados de libertad [50]. Así que en lugar de los potenciales \mathbf{A} y ϕ , uno puede optar por utilizar

otros potenciales, por ejemplo los potenciales de polarización (2 potenciales escalares) o también llamados *potenciales de escalares de Hertz* [51, 52, 53] dados en el apéndice A

2.3.3. Polarización de la luz

A la dirección del campo eléctrico \mathbf{E} de una onda electromagnética se le llama polarización. Para una onda plana ésta se clasifica en polarización:

- Lineal: cuando el vector \mathbf{E} apunta en una dirección constante.
- Elíptica: si el vector \mathbf{E} rota mientras se propaga la onda, se puede considerar como una superposición de dos ondas ortogonales linealmente polarizadas, la amplitud de las dos oscila con una diferencia de fase diferente a 0 o π , describiendo una elipse en el plano transversal a la propagación.
- Circular: es un caso especial de la elíptica, en la cual las amplitudes de las ondas ortogonales oscilan con diferencia de fase de $\pi/2$.

Para hace Hay que recalcar que esta clasificación es sólo para la ondas planas. Para haces estructurados la polarización localmente puede tener orientaciones diversas, por ejemplo apuntar en la dirección radial o azimutal, se puede tener polarización radial, azimutal y otras más complejas en las que hay vórtices ópticos vectoriales como veremos más tarde.

El campo eléctrico para una onda plana linealmente polarizada se puede expresar como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 E_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 E_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.34)$$

que dependiendo de las amplitudes E_1 y E_2 será la dirección de polarización de \mathbf{E} ; $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ son los llamados vectores de polarización ($s = 1, 2$) y junto con el vector de onda unitario $\boldsymbol{\kappa} = \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|}$ forman una base ortonormal para \mathbb{R}^3 :

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{s'} &= \delta_{s,s'} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}_2 &= \boldsymbol{\kappa} \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Si se le permite a cada amplitud E_i tener su propia fase entonces podemos tener polarización elíptica o circular para el caso en que la diferencia de fase es de $\pi/2$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \pm \boldsymbol{\varepsilon}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (2.36)$$

que dependiendo del signo se le llama polarización circular derecha (+) o izquierda (-). Pero de forma más general podemos escribir:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (E_+\boldsymbol{\varepsilon}_+ + E_-\boldsymbol{\varepsilon}_-)e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (2.37)$$

que dependiendo de las amplitudes complejas E_+ y E_- puede representar polarización elíptica, circular o lineal.

Los vectores $\boldsymbol{\varepsilon}_\pm$ están definidos a través de $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\pm = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 \pm i\boldsymbol{\varepsilon}_2) \quad (2.38)$$

y satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\pm &= 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{s'} &= \delta_{s,s'}, \quad (s, s' = +, -) \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

2.3.3.1. Haces Bessel vectoriales en el vacío

El primer paso en el proceso de CPD es tener un haz incidente, en este trabajo el haz incidente será un haz Bessel-vectorial que se propaga inicialmente en el vacío. En el apéndice A se ve que los potenciales de Hertz $\Psi_{(1)}^{(2)}$ deben satisfacer la ecuación de onda en el vacío (A.14)

$$\mu\epsilon\ddot{\Psi}_{(1)}^{(2)} - \nabla^2\Psi_{(1)}^{(2)} = 0, \quad (2.40)$$

resolviéndola en coordenadas cilíndricas, encontramos que las soluciones son de la forma

$$\Psi_{(1)}^{(2)} = (C_{(1)}^{(2)}J_m(k_\perp\rho) + B_{(1)}^{(2)}Y_m(k_\perp\rho))e^{i(m\phi+k_z z-\omega t)} \quad (2.41)$$

donde J_m son las funciones Bessel de 1er tipo y Y_m las de 2do tipo, estas últimas tienen una singularidad en el origen por lo que no son soluciones físicas; pero podemos escoger la constante $B_{(1)}^{(2)} = 0$ y las soluciones que nos interesan son:

$$\Psi_{(1)}^{(2)} = C_{(1)}^{(2)}J_m(k_\perp\rho)e^{i(m\phi+k_z z-\omega t)} \quad (2.42)$$

y cualquier superposición de estas. Los números m, k_\perp, k_z y ω son las constantes de separación y son también la carga topológica, la parte transversal del vector de onda, \mathbf{k} , la parte longitudinal de \mathbf{k} y la frecuencia del haz, respectivamente. Las últimas tres satisfacen la relación de dispersión:

$$k_\perp^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.43)$$

Con las ecuaciones (A.15) del apéndice A, se encuentra que los potenciales vectoriales $\mathbf{A}^{(TM)}$ y $\mathbf{A}^{(TE)}$ para los modos transversal eléctrico (TE) y transversal magnético (TM) están dados por:

$$\mathbf{A}^{(TE)}(\mathbf{r}, t; K) = -\frac{c}{i\omega} \mathcal{E}_m^{(TE)}(k_\perp, k_z) \mathbf{M}(\mathbf{r}, t; K) \quad (2.44)$$

y

$$\mathbf{A}^{(TM)}(\mathbf{r}, t; K) = \frac{c}{i\omega} \mathcal{E}_m^{(TM)}(k_\perp, k_z) \mathbf{N}(\mathbf{r}, t; K) \quad (2.45)$$

Con \mathbf{M} y \mathbf{N} dadas por:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t; K) = \frac{\omega}{ck_z} \left(\frac{m}{k_\perp} J_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_\rho + i J'_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi \right) e^{-i\omega t + im\phi + ik_z z} \quad (2.46)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}, t; K) = \left(i J'_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_\rho - \frac{m}{k_\perp \rho} J_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{k_\perp}{k_z} i J'_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_z \right) e^{-i\omega t + im\phi + ik_z z} \quad (2.47)$$

$$(2.48)$$

Los campos eléctricos y magnéticos:

$$\mathbf{E}^{TE} = \omega k_\perp \mathcal{E} e^{-i(\omega t - m\phi - k_z z)} \left(\frac{m}{k_\perp \rho} J_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_\rho + i J'_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi \right) \quad (2.49)$$

$$\mathbf{E}^{TM} = \frac{k_z}{\omega} \mathcal{B} e^{-i(\omega t - m\phi - k_z z)} \left(i J'_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_\rho - \frac{m}{k_\perp \rho} J_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{k_\perp}{k_z} J_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_z \right) \quad (2.50)$$

$$\mathbf{B}^{TE} = \frac{k_z}{\omega} \mathcal{B} e^{-i(\omega t - m\phi - k_z z)} \left(i J'_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_\rho - \frac{m}{k_\perp \rho} J_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{k_\perp}{k_z} J_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_z \right) \quad (2.51)$$

$$\mathbf{B}^{TM} = -\omega k_\perp \mathcal{E} e^{-i(\omega t - m\phi - k_z z)} \left(\frac{m}{k_\perp \rho} J_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_\rho + i J'_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi \right) \quad (2.52)$$

De esta forma quedan definidos los haces Bessel-vectoriales.

En la figura 2.9, se muestran casos para $m=1,2$. Podemos ver, por ejemplo, que para $m=1$ a diferencia del haz escalar, el haz vectorial no es de intensidad nula en el centro. Esta propiedad, es requisito de la presencia de vórtices escalares y es además indicativo de la existencia de momento angular orbital no nulo para esos haces. Esta discrepancia se debe a que el haz vectorial se construye como la superposición de dos haces escalares con $m=0$ y $m=1$ con polarizaciones circulares. Sin embargo, en las figuras 2.7 podemos ver

que en el centro de haz vectorial el campo eléctrico rota de acuerdo a lo esperado para un vórtice **vectorial**.

Por otra parte, siempre es posible realizar superposición de haces Bessel vectoriales que en el plano transversal mantengan una dirección constante del campo eléctrico. A estos haces se les identifica con los haces Bessel escalares que ya mencionamos en la sección anterior.

Además podemos realizar superposiciones de haces Bessel con diferentes cargas topológicas. En la figura 2.10 se ilustran casos especiales de esta superposición en la que se obtienen haces que son estacionarios en la dirección angular.

2.4. Propiedades mecánicas de los campos electromagnéticos

El campo electromagnético es portador de energía U , momento lineal \mathbf{P} y momento angular \mathbf{J} .

Clásicamente para una onda electromagnética propagándose en el vacío estas cantidades están dadas por:

$$U = \frac{1}{2} \int_V d^3r (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu} \mathbf{B}^2) \quad (2.53)$$

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \int_V d^3r \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (2.54)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \epsilon_0 \int_V d^3r \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (2.55)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{B} son los campos eléctrico y magnético respectivamente. Desde el punto de vista cuántico cada fotón posee energía y momento lineal dado por:

$$E = \hbar\omega, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (2.57)$$

que son los eigenvalores de los operadores que provienen de cuantizar las ecuaciones (2.53) y (2.54).

El momento angular \mathbf{J} se puede separar en momento angular orbital (MAO) \mathbf{L} y momento angular de espín² (MAS) \mathbf{S} .

Para separarlo desarrollamos la componente i del integrando en la ecuación (2.55)³:

$$\begin{aligned} [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})]_i &= [\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{A}))]_i \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \epsilon_{mnp} r_j E_l \frac{\partial A_p}{\partial r_n} \\ &= \epsilon_{ijk} r_j E_l \frac{\partial A_l}{\partial r_k} - \epsilon_{ijk} r_j E_l \frac{\partial A_k}{\partial r_l} \end{aligned} \quad (2.58)$$

El primer término se puede escribir directamente como $E_l [\mathbf{r} \times \nabla]_i A_l$. Para ver el segundo es conveniente expandir primero la expresión $\epsilon_{ijk} \partial_l (E_l r_j A_k)$, entonces encontramos que:

²En realidad es la helicidad y no el espín, pero en la literatura se suele referir al espín.

³Aquí se usa la suma sobre índices repetidos

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}(r_j E_l) \frac{\partial A_k}{\partial r_l} &= -\varepsilon_{ijk}(E_j A_k + r_j A_k \frac{\partial E_l}{\partial r_l}) + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial r_l} (E_l r_j A_k) \\ &= -[\mathbf{E} \times \mathbf{A}]_i - [\mathbf{r} \times \mathbf{A}]_i \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{r} \times \mathbf{A})]_i\end{aligned}\quad (2.59)$$

sustituyendo en (2.58):

$$[\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})]_i = [\mathbf{E} \times \mathbf{A} + (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) \nabla \cdot \mathbf{E} + E_l (\mathbf{r} \times \nabla) A_l]_i - \nabla \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{r} \times \mathbf{A})]_i \quad (2.60)$$

sustituyendo en (2.55)

$$\mathbf{J} = \epsilon_0 \int_V d^3r \left\{ \mathbf{E} \times \mathbf{A} + E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j + (\mathbf{r} \times \mathbf{A}) \nabla \cdot \mathbf{E} - \hat{\mathbf{e}}_i \nabla \cdot [\mathbf{E}(\mathbf{r} \times \mathbf{A})]_i \right\} \quad (2.61)$$

El tercer término es proporcional a $\nabla \cdot \mathbf{E}$ y al estar en el vacío este es idénticamente cero. El último término del integrando al poderse escribir como la divergencia de un vector, utilizando el teorema de Gauss, puede reescribirse en términos de una integral de superficie. El resultado de esta integral corresponde al flujo del momento angular. Si los campos eléctrico y magnético tienden a cero más rápido que $1/r^2$, al integrar sobre todo el espacio la contribución de este término será nula.

El término, $\mathbf{E} \times \mathbf{A}$, no depende explícitamente de las coordenadas y por tanto se puede considerar como una propiedad intrínseca del campo. A $\mathbf{E} \times \mathbf{A}$ se le llama densidad de espín⁴ \mathbf{s}

El segundo término contiene al operador $\mathbf{r} \times \nabla$ que en mecánica cuántica corresponde al operador de MAO. Ese término sí depende explícitamente de las coordenadas y a $\sum_{j=1}^3 E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j$ se le conoce como densidad de MAO. Así podemos separar \mathbf{J} en una parte de momento angular orbital y otra de espín: Con las siguientes definiciones para el MAO \mathbf{L} y el MAS \mathbf{S} :

$$\mathbf{L} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \int_V d^3r \left(\sum_{j=1}^3 E_j (\mathbf{r} \times \nabla) A_j \right) \quad (2.62)$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c^2} \int_V d^3r (\mathbf{E} \times \mathbf{A}) \quad (2.63)$$

⁴Aunque realmente es la helicidad, en la mayor parte de la literatura se hace referencia al espín y aquí se conservará esta “convención”

Clásicamente, la parte de espín corresponde a la polarización de la onda electromagnética. La transferencia de MAS a la materia era conocida desde 1936 con el experimento de Beth [37] en el cual se demostró que la luz polarizada circularmente, hace rotar objetos sobre su propio eje. Esta transferencia fue cuantificada cuántica y clásicamente, suponiendo que la transferencia se daba en unidades de \hbar . A este experimento se le reconoce como el primero con el que se midió explícitamente el MAS del fotón. esta transferencia fue cuantificada en unidades de \hbar , por lo que este experimento se conoce también como el que midió el MAS del fotón.

El MAO de la luz era bien conocido de forma teórica [2, 50, 51, 54], pero fue hasta finales del siglo pasado que se empezó a explotar este fenómeno. En 1987 Durnin [39, 38] propuso la creación de haces Bessel en el laboratorio, en 1992 Allen [6] propuso como medir el MAO en haces Laguerre-Gauss; y con esto se dio el empuje de los estudios de la luz con MAO⁵

L. Allen predijo que los haces LG podrían transferir una cantidad $l\hbar$ de MAO a la materia, donde l es la carga topológica y en [35] se comprobó experimentalmente mediante el uso de estos haces en pinzas ópticas, con $l = 1$. Con lo que se garantiza que se puede tener $L_z \neq 0$.

En [58] se calculó la densidad de MAO de haces Bessel y mediante un experimento con pinzas ópticas demostraron la transferencia de MAO a las partículas atrapadas; en éste las partículas rotaban alrededor de un eje colineal al centro de haz.

A pesar de la evidencia experimental del momento angular en la luz, teóricamente la cuantización de estas cantidades no es trivial, uno de los problemas que se encuentra es que estos operadores, así definidos, no satisfacen las reglas de conmutación estándar para dichos operadores [53].

2.4.1. Otras soluciones

En la sección anterior se vio la solución escalar exacta en coordenadas circular cilíndricas, correspondiente a los haces Bessel escalares. Los otros tres campos invariantes ante propagación son las ondas planas, haces Mathieu y haces Weber que se resumen en la siguiente tabla.

⁵por ejemplo en [58] se demostró que la luz puede transferir MAO bien definido a la materia, haciendo circular micropartículas alrededor de un eje privilegiado.

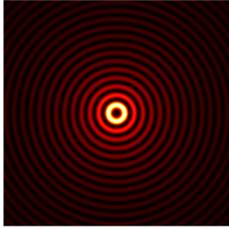
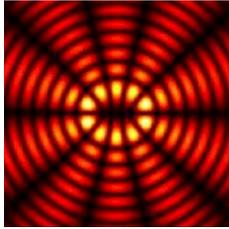
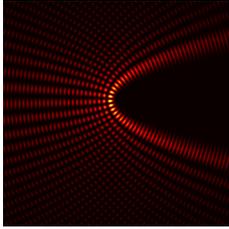
Nombre	solución escalar	Perfil de intensidad transversal	Coordenadas
Ondas planas	Ae^{ikz}		Cartesianas
Haces Bessel	$AJ_m(k_{\perp}\rho)e^{im\theta}$		Circular cilíndricas
Haces Mathieu	$[Ce_0(\xi, q) + Fey_0(\xi, q)] \times ce_0(\eta, q)e^{ik_z z}$, [55]		Elípticas cilíndricas
Haces Weber	$s_p \zeta_u^{\eta_p - \frac{1}{4}} e^{-i\frac{\zeta}{2}} {}_1F_1\left(\frac{n_p}{4} - i\frac{a}{2}, \frac{n_p}{2}; i\zeta_u\right)$, [56, 57]		Parabólicas cilíndricas

Tabla 2.1: Perfiles transversales haces escalares invariantes ante propagación (soluciones exactas de la ecuación de Helmholtz escalar)

Información detallada se puede encontrar en las referencias colocadas en la tabla.

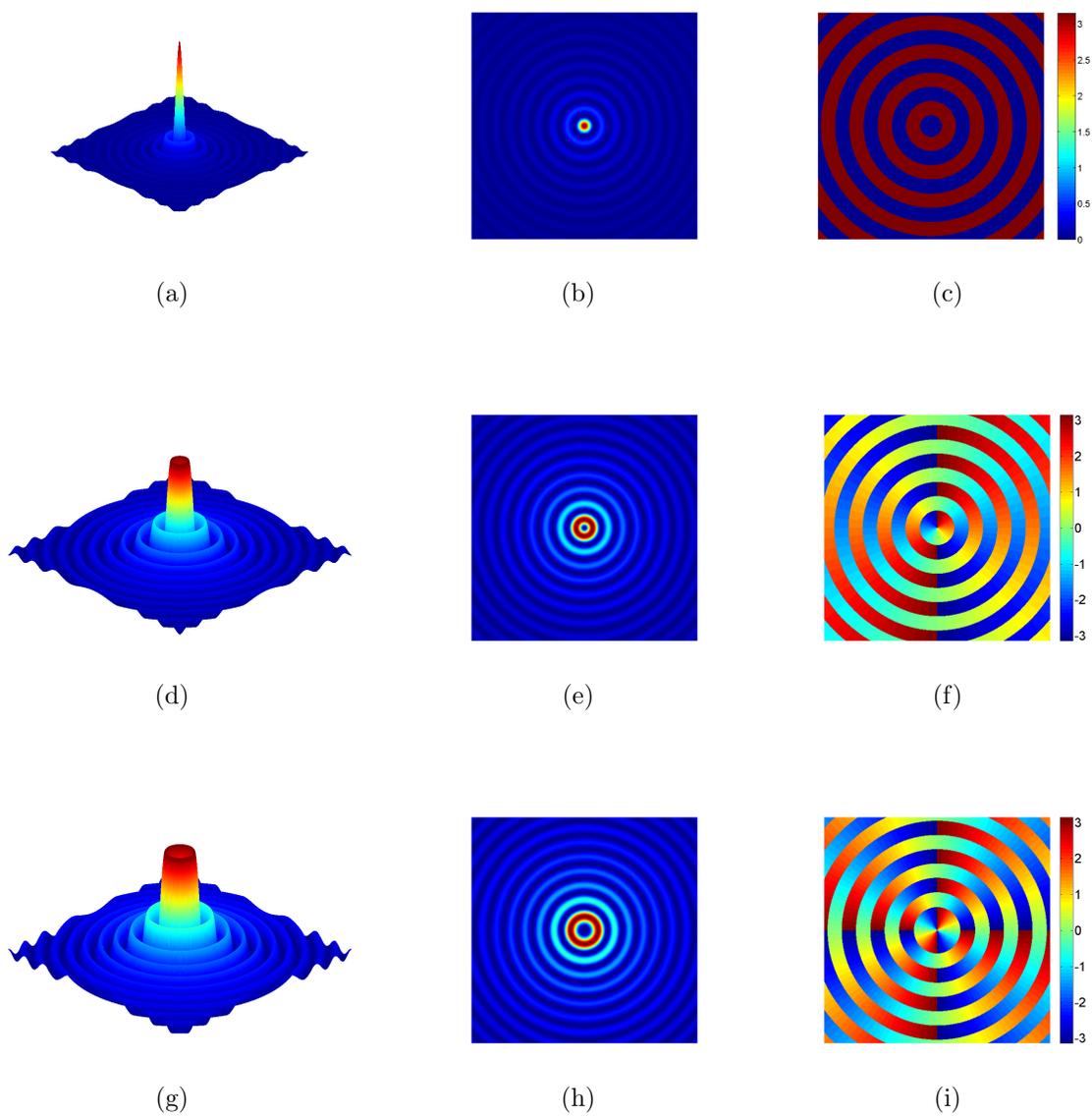


Figura 2.2: Primer columna funciones Bessel de orden 0, 1 y 2.

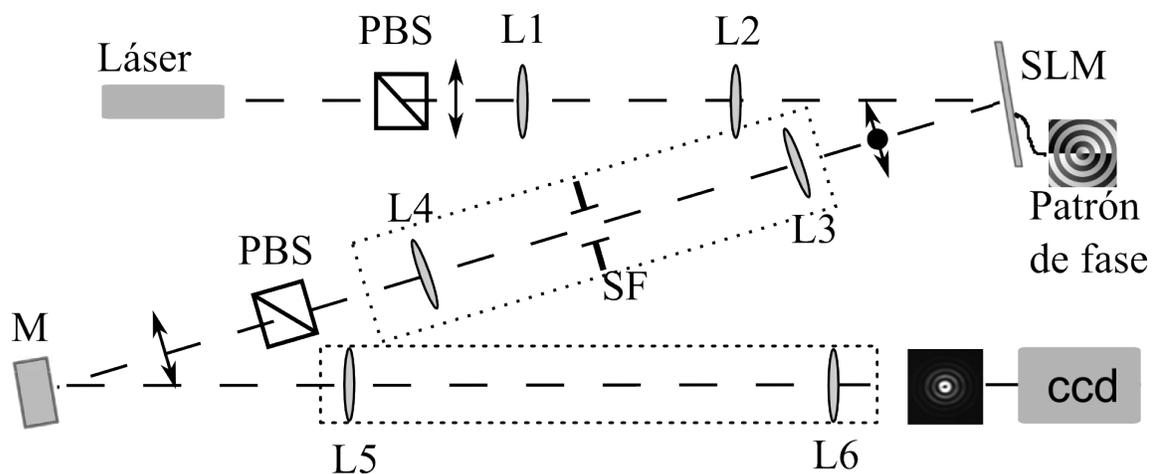


Figura 2.3: Esquema

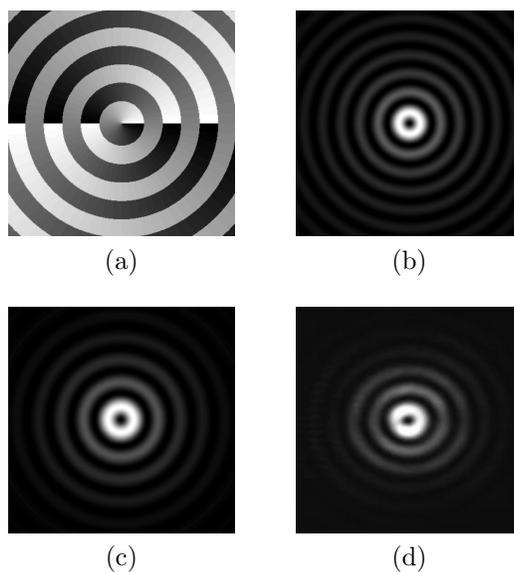


Figura 2.4: (a) Imagen desplegada SLM, el cambio en el nivel de gris genera un cambio de fase en el haz reflejado dándole así una estructura en fase. (b) Perfil de intensidad ideal del haz Bessel de orden 1. (c) Perfil de intensidad ideal un haz Bessel-Gauss de orden 1. (d) Haz Bessel-Gauss de orden 1, generado en el laboratorio de pinzas ópticas del Instituto de Física, UNAM, mediante un SLM.

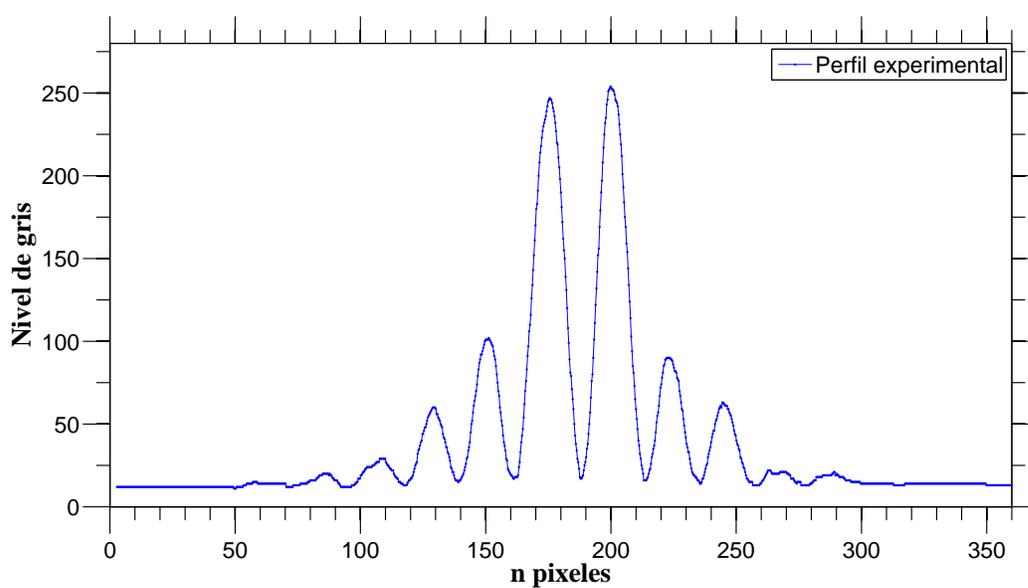
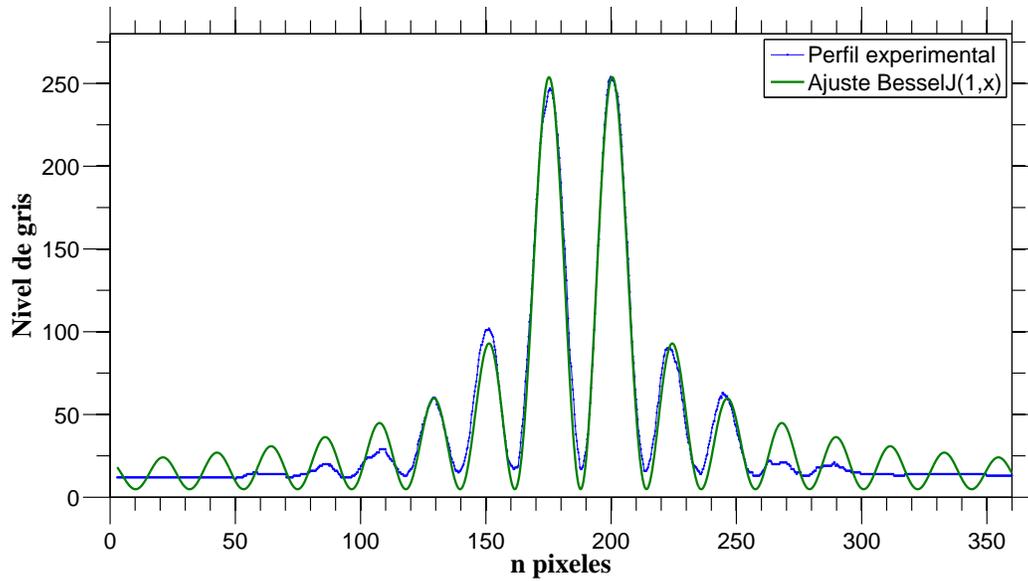
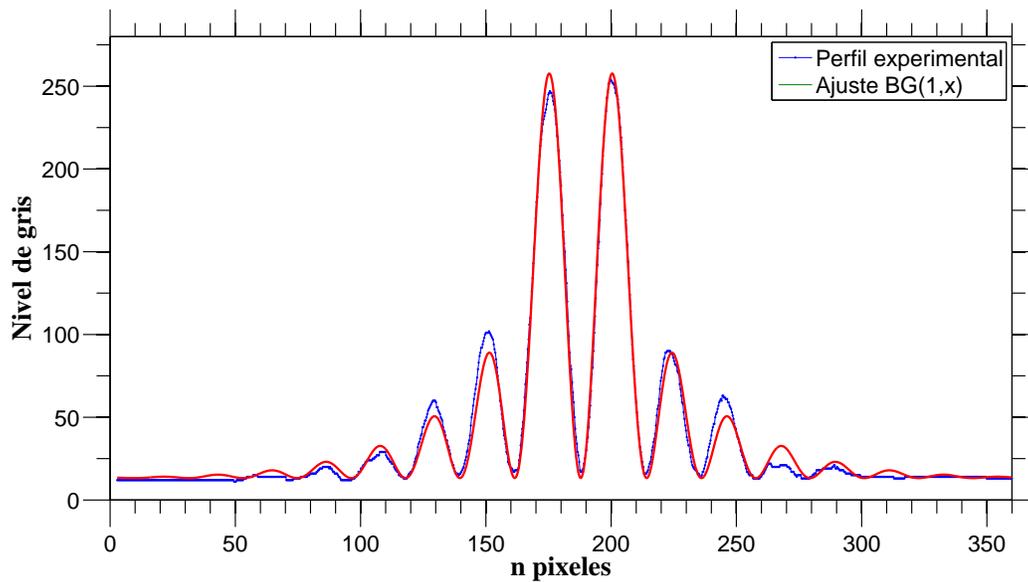


Figura 2.5: Gráfica del perfil de intensidad transversal del haz Bessel de orden 1 mostrado en la figura 2.4. El eje vertical representa la intensidad en niveles de gris y el horizontal distancia radial medida en número de píxeles.



(a)



(b)

Figura 2.6: (a) Ajuste de curva con una función Bessel $J_1(k_{\perp}\rho)$. (b) Ajuste de curva con una función Bessel-Gauss $\exp^{-\frac{\rho^2}{w^2}} J_1(k_{\perp}\rho)$.

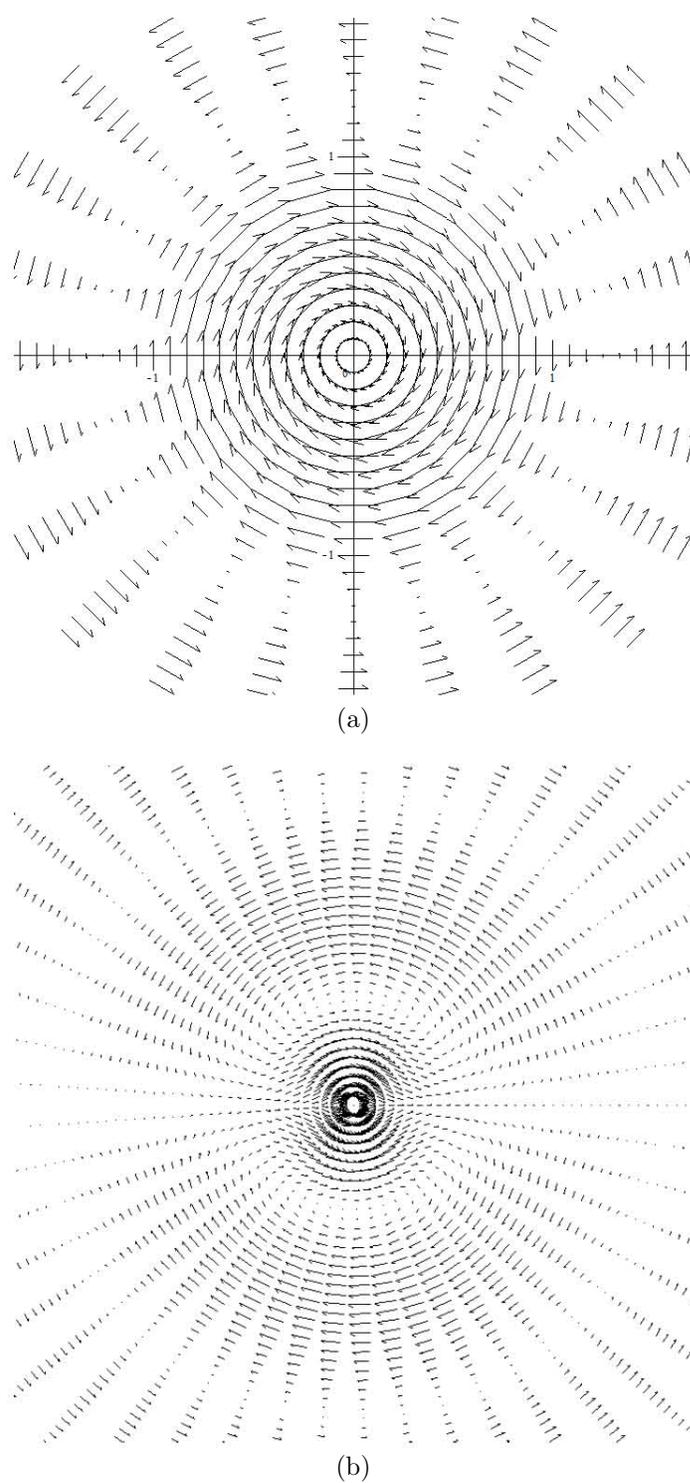


Figura 2.7: Campo vectorial eléctrico, correspondiente a haces Bessel, con polarización azimutal, (a) $m = 0$, (b) $m = 1$

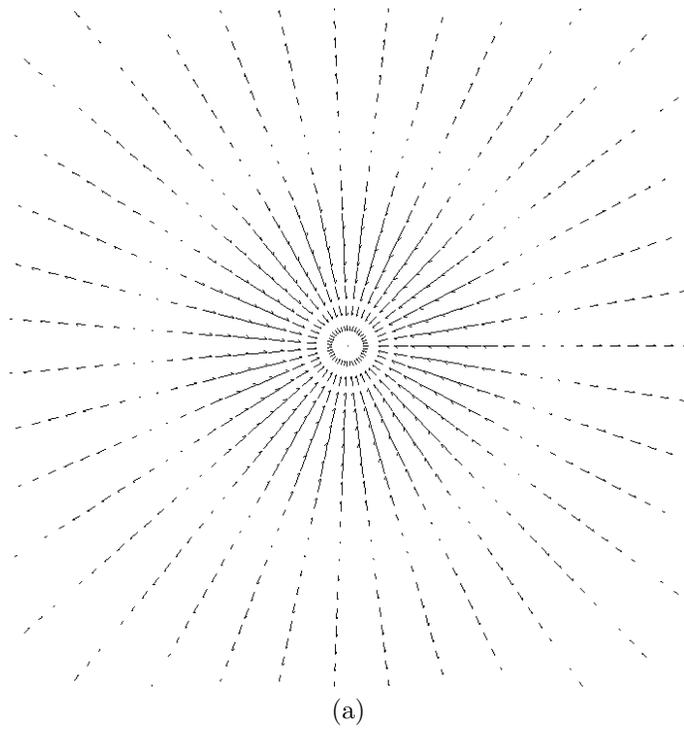


Figura 2.8: Campo vectorial eléctrico, correspondiente a un haz Bessel, con polarización radial $m = 0$

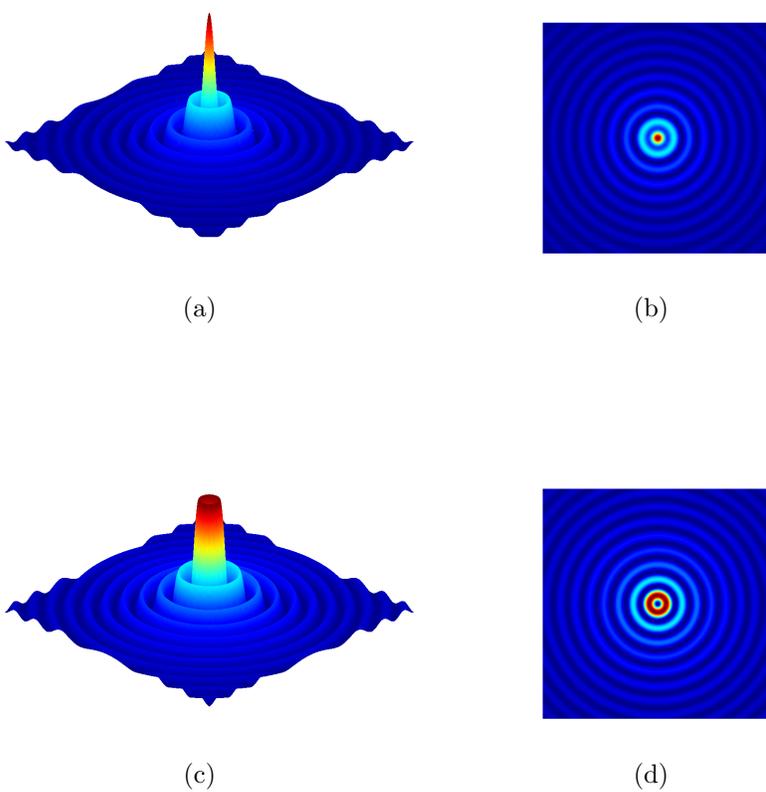


Figura 2.9: Perfil de intensidad de haces Bessel vectoriales

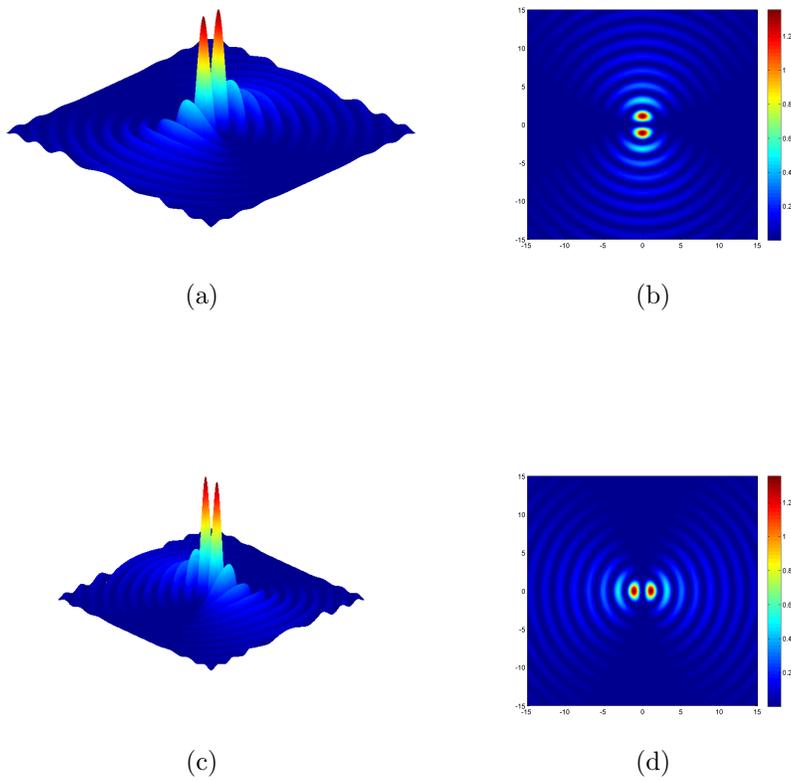


Figura 2.10: Perfil de intensidad de haces Bessel. Primer renglón: Bessel-seno, polarización vertical. Segundo renglón: Bessel-coseno.

Capítulo 3

Algunos fenómenos de óptica clásica

Cuando estudiamos la teoría electromagnética en materiales en ausencia de cargas y corrientes libres, hay que usar las ecuaciones de Maxwell dadas por:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \quad , & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \quad , \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \quad , & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

y también las ecuaciones constitutivas:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad ; \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}\tag{3.2}$$

que son las que caracterizan los materiales, es decir nos dan información acerca de la respuesta del medio ante un campo electromagnético; \mathbf{P} y \mathbf{M} son la polarización y magnetización del medio respectivamente, ϵ_0 y μ_0 son las llamadas permitividad eléctrica y permeabilidad magnética del vacío.

En óptica usualmente se trabaja con materiales no magnéticos, en los que la respuesta de los dipolos magnéticos al campo electromagnético es muy pequeña, de tal forma que se puede hacer la aproximación que $\mu \approx \mu_0$, así la relación entre \mathbf{B} y \mathbf{H} se puede considerar como:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}\tag{3.3}$$

En este trabajo se tratará con materiales que obedecen la ecuación anterior por lo que se considerará siempre válida en los cálculos que se realicen.

3.1. Fenómenos lineales

3.1.1. Medios isotrópicos

En un medio isotrópico y lineal, el momento dipolar por unidad de volumen \mathbf{P} o polarización del medio¹, se puede escribir como:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (3.4)$$

donde χ es la susceptibilidad eléctrica del medio.

Entonces la ecuación (3.2) queda:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (3.5)$$

donde ϵ es la permitividad dieléctrica y está relacionado con la susceptibilidad eléctrica de la siguiente forma:

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi) \quad (3.6)$$

a la cantidad $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi$ se le llama permitividad relativa del medio o constante dieléctrica. Tomando el $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E})$ con las ecuaciones (3.1) llegamos a que \mathbf{E} debe satisfacer la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.7)$$

donde $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$ es la velocidad de la luz en el medio. Y análogamente \mathbf{B} debe satisfacer la misma ecuación.

Pasando al espacio de Fourier se ve fácilmente la relación de dispersion que tiene que cumplir:

$$k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} = 0 \quad \text{o} \quad k = \frac{\omega}{v} \quad (3.8)$$

La solución más sencilla a esta ecuación es la onda plana monocromática:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.9)$$

Más adelante se verán otras soluciones.

¹A pesar de que nos referimos a la polarización del medio simplemente como polarización, debido al contexto en que se utiliza esta palabra quedará claro cuando se habla de polarización de la luz y cuando de la polarización del medio.

3.1.2. Medios anisotrópicos

Muchas substancias cristalinas son ópticamente anisotrópicas, es decir, sus propiedades ópticas no son las mismas en todas las direcciones, la birrefringencia, la trirefringencia (también llamados birrefringencia uniaxial y biaxial) y el dicroísmo son ejemplos de fenómenos que ocurren en estos materiales, a éstos se les llama birrefringentes y dicroicos respectivamente. Esta información de la respuesta del medio anisotrópico y lineal queda especificada a través de un tensor en las ecuaciones constitutivas, así que la ecuación (3.5) se escribe como:

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \quad (3.10)$$

donde $\hat{\epsilon}$ es el tensor dieléctrico y está relacionado con la susceptibilidad dieléctrica igual que (3.6) pero ahora en forma tensorial:

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0(\mathbf{1} + \hat{\chi}) \quad (3.11)$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor identidad.

Entonces el desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y el campo eléctrico \mathbf{E} ya no son necesariamente vectores colineales.

Modelo de resortes

Un modelo sencillo para tratar la interacción de la radiación electromagnética con la materia es suponer que la estructura de los átomos que la componen se forma de una nube de electrones sujetos por 3 pares de resortes, en las tres direcciones ortogonales ($\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$), al núcleo que está en el centro, Fig. 3.1, cuando el material es isotrópico se suponen las constantes de los resortes todas iguales, mientras que para los anisotrópicos al menos una se supone distinta.

Los átomos en estos materiales se acomodan de tal forma que se pueden identificar tres ejes principales, así que si se escoge el sistema de coordenadas coincidiendo con estos ejes el tensor dieléctrico toma una forma un tanto simple con sólo 3 valores independientes. En este sistema la relación entre \mathbf{D} y \mathbf{E} se ve en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

donde se definieron $\epsilon_x \equiv \epsilon_{11}$, $\epsilon_y \equiv \epsilon_{22}$ y $\epsilon_z \equiv \epsilon_{33}$.

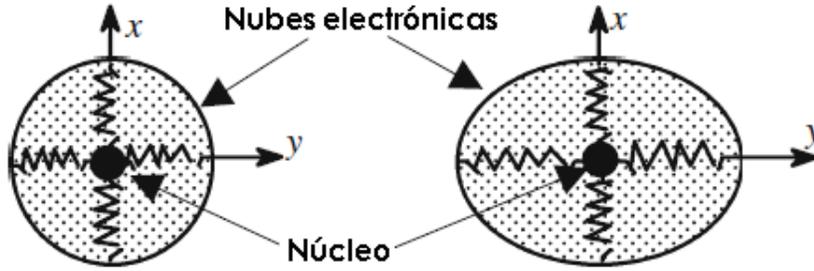


Figura 3.1: modelo de los resortes para átomos en materiales isotrópicos y anisotrópicos .

3.1.2.1. Birrefringencia

La birrefringencia, o doble refracción, es un fenómeno en el cual un haz de luz que pasa a través de un cristal que presenta esta propiedad se separa en 2 haces, llamados ordinario y extraordinario, con polarización ortogonal entre ellos, que se propagan en diferente dirección y con diferente velocidad. Se le llama ordinario al que se lleva polarización ortogonal al eje del cristal porque éste “ve” al material como si fuera isotrópico y extraordinario al otro.

Entonces con el haz ordinario se puede tratar todo como si se estuviera en un material isotrópico, es decir, éste obedece la ley de Snell y los campo \mathbf{E} y \mathbf{D} son paralelos, así que el vector de onda \mathbf{k} es paralelo al vector de Poynting \mathcal{S} . El extraordinario extraordinario no cumple estas condiciones y tiene que ser tratado con más cuidado.

Un medio birrefringente está descrito por un tensor dieléctrico $\hat{\epsilon}$ en el cual dos de sus componentes son iguales y una diferente, digamos $\epsilon_x = \epsilon_y$, que es lo mismo que decir que tiene un eje de simetría que en este caso se escogió en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, la dirección del eje de simetría usualmente se denota con el vector unitario $\hat{\mathbf{a}}$ así que en este caso tenemos $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{z}}$.

En general el tensor para un material birrefringente se puede escribir como:

$$\hat{\epsilon} = \epsilon \mathbf{1} + \Delta\epsilon \hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}}, \quad (3.13)$$

donde \mathbf{a} es el eje de simetría del medio $\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon$, ϵ y ϵ_{\parallel} son las permeabilidades perpendicular y paralela respectivamente.

Regresando a la condición $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{z}}$ y usando la ecuaciones de Maxwell encontramos que la ecuación constitutiva que satisface el rayo ordinario es:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (3.14)$$

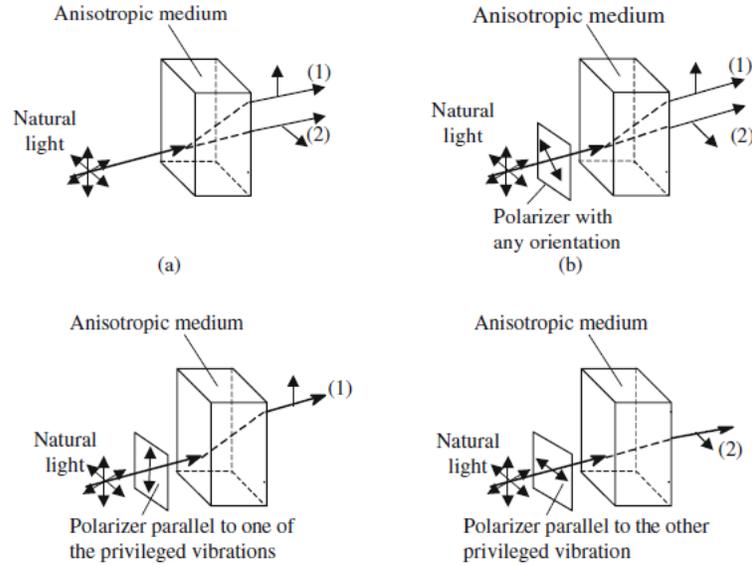


Figura 3.2: Birrefringencia, a) luz no polarizada incide en el cristal y es dividida en dos haces, el ordinario y el extraordinario, con polarización ortogonal entre ellos, b) se ha polarizado la luz en una dirección arbitraria y este haz se divide en sus componentes proyectadas en la dirección del ordinario y extraordinario, c) y d) el haz incidente se ha polarizado paralelo en dirección del extraordinario u ordinario y no hay división del haz

propagándose con una rapidez:

$$v \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon/\epsilon_0}} \quad (3.15)$$

entonces el rayo ordinario ve un índice de refracción $n_o = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$ que es independiente de la dirección de su vector de onda \mathbf{k}^o .

El rayo extraordinario se propaga con un índice de refracción que depende de la dirección de su vector de onda \mathbf{k}^e :

$$n(\theta) = \frac{k^e c}{\omega} \quad (3.16)$$

donde θ es el ángulo que hace \mathbf{k}_e con el eje óptico del cristal $\hat{\mathbf{s}}$ y $n(\theta)$ satisface la ecuación:

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2} \quad (3.17)$$

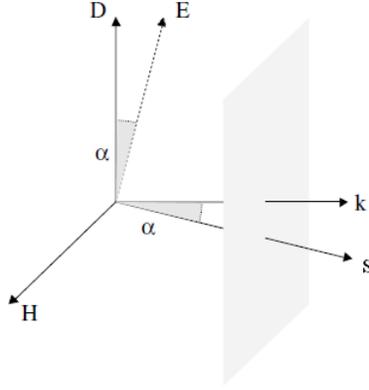


Figura 3.3: Para la onda extraordinaria los vectores \mathbf{D} y \mathbf{E} no son paralelos, igual que \mathbf{k} y \mathbf{s} .

$$\text{con } n_e = \sqrt{\frac{\epsilon_{\parallel}}{\epsilon_0}}$$

3.2. Fenómenos no lineales

Como se menciona en la introducción, la conversión paramétrica descendente es un proceso cuántico no lineal; para entender mejor estos fenómenos en este capítulo se hará una revisión de los procesos clásicos no lineales.

Regresando al modelo de resortes; para una masa que está sujeta a un resorte de constante k , sabemos que si le aplicamos una fuerza F en la dirección \mathbf{x} , éste reaccionará con una fuerza $F = -kx$ siempre y cuando la fuerza no sea demasiado grande, en este límite, decimos que el resorte es lineal, ya que la fuerza con la que reacciona es lineal en el desplazamiento x . Si la fuerza aplicada excede cierto límite el resorte dejará de comportarse linealmente y tendremos que agregar términos de corrección proporcionales a x^2 , $x^3 \dots$

De igual forma cuando aplicamos un campo eléctrico muy intenso, la respuesta del material dejará de ser lineal.

En este caso el vector de polarización se puede escribir como una serie de potencias del campo eléctrico \mathbf{E} :

$$P_i(t) = \epsilon_0 \chi_{ij} E_j(t) + \epsilon_0 \chi_{ijk}^{(2)} E_j(t) E_k(t) + \epsilon_0 \chi_{ijkl}^{(3)} E_j(t) E_k(t) E_l(t) + \dots \quad (3.18)$$

Al término $E_i E_j$ se le llama la respuesta no lineal de segundo orden, el término $\chi^{(2)}$ es

llamado la susceptibilidad no lineal de segundo orden, $\chi^{(3)}$ de tercer orden y así sucesivamente. Si el campo \mathbf{E} es intenso pero no es demasiado, podemos despreciar los términos más altos que el segundo orden. Y si el material además es birrefringente entonces χ y $\chi^{(2)}$ son tensores de segundo y tercer rango respectivamente.

Entonces el vector de polarización de segundo orden queda como:

$$\mathbf{P}^{(2)}(t) = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}^2(\mathbf{t}). \quad (3.19)$$

Ahora supongamos que el medio es excitado por un campo \mathbf{E} caracterizado por dos frecuencias distintas ω_1 y ω_2 , $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t} + c.c.$, entonces la polarización no lineal de segundo orden será:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(2)}(t) = \epsilon_0 [\chi^{(2)} (\mathbf{E}_1^2 e^{-2i\omega_1 t} + \mathbf{E}_2^2 e^{-2i\omega_2 t} + 2\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \\ + 2\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + c.c.) + 2\chi^{(2)} (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2^* + \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_1^*)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Podemos escribir:

$$\mathbf{P}^{(2)}(t) = \sum_n \tilde{\mathbf{P}}(\omega_n) e^{-i\omega_n t} \quad (3.21)$$

y con estos coeficientes se pueden ver los procesos no lineales que ocurren, por ejemplo con $\tilde{\mathbf{P}}(2\omega_i)$, $i = 1, 2$, tenemos la generación de segundo armónico y con $\tilde{\mathbf{P}}(\omega_1 \pm \omega_2)$ tenemos los procesos conocidos como suma y diferencia de frecuencias. El fenómeno que será apreciable depende de la condición de empatamiento de fase que se verá más adelante.

En materiales no *lineales* pero *isotrópicos* la propagación de las ondas obedece la siguiente ecuación de onda:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{(2)}}{\partial t^2} \quad (3.22)$$

Esta es la ecuación que se usará en las siguientes secciones, pero hay que tener presente que en los materiales con los que se trabajará en este proyecto además de ser no lineales también son anisotrópicos, por lo que ms adelante se de usar la ecuación correspondiente.

Una simplificación de χ para los cálculos siguientes

El tensor χ puede hacer que se tenga un sistema de demasiadas ecuaciones, por lo que es mejor buscar primero simetrías que puedan simplificar los cálculos.

Para simplificar conviene pasar al espacio de Fourier y escribir la polarización en términos de ω en lugar de t , $P(t) \rightarrow \tilde{P}(\omega)$, entonces podemos escribir la polarización no lineal de segundo orden como:

$$P_i^{(2)}(\omega_m + \omega_n) = \epsilon_0 \sum_{j,k} \sum_{(m,n)} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_m + \omega_n, \omega_m, \omega_n) E_j(\omega_m) E_k(\omega_n) \quad (3.23)$$

Un tensor de rango 3 tiene 27 términos, además en la sumatoria anterior hay 12 (6 de las permutaciones de m y n , y 6 más cuando hacemos el cambio $\omega \rightarrow -\omega$), por lo que aparentemente se incrementa mucho el número de ecuaciones que con las que se tiene que trabajar, por eso es mejor hacer una buena elección del sistema de coordenadas y ver las simetrías que pueda haber.

Una simetría proviene del hecho de que tanto la polarización como el campo eléctrico deben ser reales, esto implica que:

$$P_i(\omega) = P_i^*(-\omega) \quad (3.24)$$

y

$$E_i(\omega) = E_i^*(-\omega) \quad (3.25)$$

entonces también tiene que ser valido que:

$$\chi_{ijk}(\omega) = \chi_{ijk}^*(-\omega) \quad (3.26)$$

Otra proviene de intercambiar los subíndices i y m por j y n , esto lleva a que:

$$\chi_{ijk}(\omega_m + \omega_n, \omega_m, \omega_n) = \chi_{ikj}(\omega_m + \omega_n, \omega_n, \omega_m) \quad (3.27)$$

En un material sin pérdidas el tensor χ_{ijk} debe ser real; y la simetría de permutación total implica que:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1 = \omega_2 - \omega_3) \quad (3.28)$$

por lo que:

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jki}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2\omega_3) \quad (3.29)$$

y

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1) \quad (3.30)$$

Ya que las frecuencias de los haces que se usan en estos procesos son más chicas que las frecuencias de resonancia de los materiales, se puede tomar $\chi_{ijk}^{(2)}$ como independiente de la frecuencia [59]. Entonces con las simetrías anteriores se llega a las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{kij}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jki}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \\ &= \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jik}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \\ &= \chi_{kji}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2)\end{aligned}\quad (3.31)$$

Y estas últimas son conocidas como las simetrías de Kleinman

Una notación más compacta se puede hacer introduciendo el tensor $d_{ijk} = \frac{1}{2}\chi_{ijk}$, al usar las simetrías de Kleinman se puede ver que d_{ijk} es simétrico en sus 2 últimos índices, entonces podemos introducir la matriz reducida d_{il} de acuerdo a lo siguiente:

$$\begin{array}{l}jk : \quad 11 \quad 22 \quad 33 \quad 23, 32 \quad 31, 13 \quad 12, 21 \\ l : \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6\end{array}\quad (3.32)$$

Y usando en esta matriz las simetrías de Kleinman vemos que de sus 18 elementos sólo 10 son independientes. Por ejemplo:

$$d_{12} \equiv d_{122} = d_{212} \equiv d_{26}\quad (3.33)$$

Por lo que d_{il} queda así:

$$d_{il} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{16} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{14} & d_{12} \\ d_{15} & d_{24} & d_{33} & d_{23} & d_{13} & d_{14} \end{pmatrix}\quad (3.34)$$

Así se han simplificado los números necesarios provenientes de los tensores a sólo 10. Y las componentes de esta matriz se pueden encontrar en tablas para diferentes materiales.

Además de estas simetrías también están las simetrías espaciales que caracterizan a cada material, éstas simplifican un poco más los cálculos ya que para algunos materiales varias componentes de d_{il} son 0 o algunas son iguales a otras. Por ejemplo para un cristal BBO (β -BaB₂O₄), $d_{22} = -d_{21} = -d_{16}$, $d_{31} = d_{32}$, $d_{24} = d_{15} = d_{33}$ y todos los demás son cero, entonces d_{il} se ve como:

$$d_{il} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} & d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{33} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (3.35)$$

En donde ya sólo hay 8 elementos diferentes de cero y sólo son 3 independientes.

3.2.1. Generación de segundo armónico

En este proceso se envía un haz con frecuencia ω cuyo campo eléctrico está dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}(\mathbf{t})e^{i\omega t} + c.c. \quad (3.36)$$

Entonces la polarización inducida en el cristal está dada por:

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = 2\chi^{(2)}\mathbf{E}\mathbf{E}^* + (\chi^{(2)}\mathbf{E}^2e^{2i\omega t} + c.c.) \quad (3.37)$$

podemos ver que esta polarización contiene un término con una frecuencia 2ω que de acuerdo a la ecuación de onda (3.22) dará lugar a la generación de una onda de frecuencia $\omega' = 2\omega$ o segundo armónico. Y usando el ejemplo específico de la sección anterior, con las simetrías de Kleinman y el cristal BBO, la polarización se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} P_x^{(2)}(2\omega) \\ P_y^{(2)}(2\omega) \\ P_z^{(2)}(2\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} & d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{33} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x^2(\omega) \\ E_y^2(\omega) \\ E_z^2(\omega) \\ 2E_y(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_z(\omega)E_x(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_y(\omega) \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

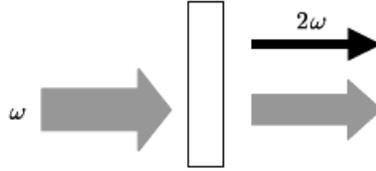


Figura 3.4: Se muestra esquemáticamente la generación de segundo armónico, parte de la energía del haz de bombeo se usa para generar el haz con el doble de frecuencia.

3.2.2. Amplificación paramétrica

También conocido como generación de diferencia de frecuencias. Este proceso es usado para generar un haz ajustable con frecuencia ω_s , al que se le llama seal, a partir de otro con ω_p , llamado haz de bombeo, adicionalmente se obtiene otro haz con frecuencia ω_i , que se le llama acompañante y éste usualmente no es de interés².

²De aquí es que surge el subíndice i , ya que este haz no es de interés se le llama, en inglés, *idler*, por lo que en español se le podría llamar el haz ocioso, pero en español es más conocido como haz acompañante.

En la ecuación (3.20), con las condiciones adecuadas de empatamiento de fase, podemos tomar el termino de polarización:

$$\mathbf{P}^2(\omega_p - \omega_s) = 2\mathbf{E}_p\mathbf{E}_s^*e^{-i(\omega_p-\omega_s)t} + \text{c.c.} \quad (3.39)$$

que de acuerdo con (3.22) se generará una onda con frecuencia $\omega_i = \omega_p - \omega_s$

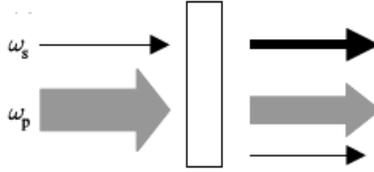


Figura 3.5: Amplificación paramétrica $\omega_s + \omega_i = \omega_p$.

Otra vez usando las simetrías de Kleinman y un cristal BBO la polarización de segundo orden se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} P_x^{(2)}(\omega_i) \\ P_y^{(2)}(\omega) \\ P_z^{(2)}(\omega_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} & d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{33} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x(\omega_p)E_x(\omega_s) \\ E_y(\omega_p)E_x(\omega_s) \\ E_z(\omega_p)E_x(\omega_s) \\ E_y(\omega_p)E_z(\omega_s) + E_y^*(\omega_s)E_z(\omega_p) \\ E_z(\omega_p)E_x(\omega_s) + E_z^*(\omega_s)E_x(\omega_p) \\ E_x(\omega_p)E_y(\omega_s) + E_x^*(\omega_s)E_y(\omega_p) \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

3.2.3. Empatamiento de fase

Como ya se vio antes, cuando un campo electromagnético (EM) incide en un cristal éste induce una polarización, ésta a su vez genera nuevos campos, la polarización inducida indica que se han generado dipolos en los átomos que componen el cristal; debido a que el campo EM está oscilando también los dipolos lo harán de tal forma que habrá una radiación dipolar por cada átomo. Si cada dipolo emite con una fase arbitraria esto generará una interferencia destructiva y el efecto no lineal no se percibirá. Por otro lado si todos emiten en fase habrá interferencia constructiva y la suma de los campos radiados será máxima dando lugar a un máximo de intensidad en los campos emitidos por los dipolos, es decir los campos generados por $\mathbf{P}^{(2)}$, y cuando esto se logra se dice que se está en el régimen de *empatamiento de fase*.

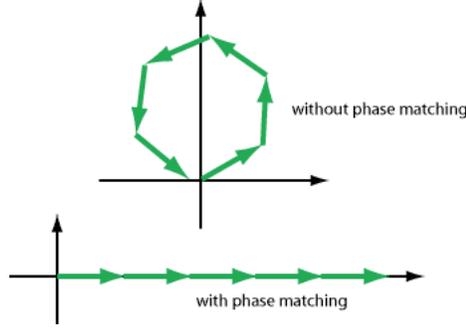


Figura 3.6: Diagrama de fasores, (a) *desempatamiento* de fase, (b) *empatamiento* de fase.

La figura 3.6 muestra como un desempatamiento de fase mantiene la eficiencia baja. Aquí, las flechas ilustran fasores correspondientes a las contribuciones de la amplitud compleja de las diferentes partes del cristal a la onda armónica. Sólo cuando el phase matching es alcanzado esas construcciones se suman constitutivamente y una alta tasa de conversión es alcanzada. De otra forma la dirección de la energía transmitida cambia periódicamente de acuerdo con el cambio en la relación de la fase de las ondas interactuantes. La energía entonces oscila entre las ondas en lugar de ser transmitida en una sola dirección.

En las secciones anteriores se puso más atención a la parte temporal de los campos, $e^{-i\omega t}$, lo cual llevo a la regla de conservación de energía $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$. El empatamiento de fase implica que en cada todas partes del material se cumpla que:

$$e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)} e^{i(\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} - \omega_3 t)} = e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)} \quad (3.41)$$

y usando aquí la regla para las ω 's tenemos que:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \quad (3.42)$$

Esta condición no se satisface completamente y por eso se habla de un cuasi-empatamiento de fase cuando se logra la condición

$$\mathbf{k}_1 \approx \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 \quad (3.43)$$

A la cantidad $\Delta k = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ se le denomina el desempatamiento de fase, en varios procesos no lineales se encuentra que la energía transportada por los campos es proporcional a alguna función de Δk siendo la función $\text{sinc}(\Delta k)$ una de las que más aparece.

El empatamiento de fase se logra para diferentes frecuencias gracias a que los cristales que se usan son birrefringentes, ya que hay dos índices de refracción en el cristal y el índice de refracción depende de la frecuencia, por lo que las ondas generadas viajan a diferentes velocidades que el haz de bombeo.

Se pueden tener varios tipos de empatamiento de fase, que son llamados tipo I - tipo VIII pero los mas usados son los tipo I y II. Para el tipo I, el haz de bombeo tiene polarización ortogonal a los otros dos, el señal y el acompañante, y estos últimos tienen la misma polarización. El de bombeo se propaga como ordinario (extraordinario) y los otros dos como ordinario (extraordinario). En el tipo II los haces señal y acompañante tienen polarización ortogonal, uno se propaga como ordinario y el otro como extraordinario.

Para el tipo I podemos ver un ejemplo sencillo para el caso de generación de segundo armónico. Supongamos que este proceso se da en propagación colineal, es decir, los tres haces se propagan en la misma dirección; entonces la ecuación (3.42) se puede escribir en forma escalar:

$$2k_f(\omega_0) = k_a(2\omega_0) \quad (3.44)$$

el subíndice f hace referencia las ondas fundamentales y a a la del segundo armónico. Esto implica que:

$$v_f(\omega_0) = v_a(2\omega_0) \quad \text{ó} \quad n_f(\omega_0) = n_a(2\omega_0) \quad (3.45)$$

donde v_f es la velocidad de a onda fundamental, v_f la velocidad de la armónica y (ω) es el índice de refracción. La velocidad de una onda en un medio depende de su frecuencia y vemos en la ecuación anterior que tenemos que igualar una velocidad a otra con el doble de frecuencia esto se puede hacer gracias a la birrefringencia ya que podemos propagar a la onda fundamental como ordinaria y la otra como extraordinaria, que como ya vimos las ondas ordinaria y extraordinaria se propagan con diferentes velocidades. Así (3.44) se puede escribir como:

$$2k_o(\omega_0) = k_e(2\omega_0, \theta) \quad (3.46)$$

ó

$$(3.47)$$

$$n_o(\omega_0) = n_e(2\omega_0) \quad (3.48)$$

así que el problema se reduce a resolver la ecuación

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2} \quad (3.49)$$

Se puede propagar el armónico como ordinario, se puede hacer el caso no colineal y también se pueden tratar los casos para el tipo II, todo ésto ya se ha realizado [60, 61]; pero este sencillo ejemplo ilustra la importancia de la birrefringencia en los procesos no lineales.



Figura 3.7: Diagramas del empatamiento de fase colineal (izquierda) y no colineal (derecha).

3.3. Propiedades mecánicas de la luz en medios materiales.

Como ya mencionamos antes, los campos electromagnéticos en interacción con materiales satisfacen las ecuaciones de Maxwell (3.1) y las ecuaciones constitutivas:

$$\mathbf{D} = \hat{\chi}\mathbf{E} ; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} \quad (3.50)$$

donde $\hat{\chi}$ es el tensor de susceptibilidad dieléctrica. Si el medio es lineal, isotrópico y no magnético, \mathbf{D} es proporcional a \mathbf{E} y \mathbf{H} a \mathbf{B} , entonces se puede calcular la energía haciendo el cambio $\mathbf{E}^2 \rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}$ y $\mathbf{B}^2 \rightarrow \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$ en la ec. 2.53, con sus respectivas constantes; pero el cálculo del momento lineal es algo no bien definido ya la definición del momento no está clara, teniendo 2 opciones [51]:

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{p}_s = \frac{1}{c^2}\mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2}\mathcal{S} ; \quad (3.52)$$

donde \mathbf{p} es la densidad de momento correspondiente a \mathbf{P} y \mathbf{S} es el vector de Poynting; \mathbf{p}_k (definición de Minkowsky) y \mathbf{p}_s (definición de Abraham) están en la dirección del vector de onda \mathbf{k} y del vector de Poynting \mathbf{S} respectivamente. Entonces de (3.50) vemos que \mathbf{p}_k y \mathbf{p}_s están en la misma dirección (o \mathbf{k} y \mathbf{S}), que salvo constantes, coincide con el tratamiento en el vacío.

Si ahora consideramos un material anisotrópico y no lineal, que es lo que se usa en este trabajo; la no linealidad hace que el cambio mencionado arriba, para el cálculo de la energía, ya no se pueda hacer directamente, ya que hay que considerar términos de orden más alto en la susceptibilidad dieléctrica $\hat{\chi}$, aunque para esto ya existen aproximaciones [62] no es un tema concluido La anisotropía del material, en este caso birrefringencia, causa que el vector de onda \mathbf{k} no coincida con la dirección de propagación de la energía del haz, es decir, con la dirección del vector de Poynting \mathbf{S} y por lo que hay una definición ambigua para el momento lineal \mathbf{p}_k y \mathbf{p}_s .

Con el momento angular \mathbf{J} se hereda el problema, ya que $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$. La separación en MAO \mathbf{L} y MAS \mathbf{S} para la definición de Abraham no es clara [63], ya que en medios la $\nabla \cdot \mathbf{E}$ puede ser diferente de 0 y la ecuación (2.61) no puede ser reducida a la suma de las ecuaciones (2.62) y (2.63).

Sin embargo, cuando usamos la definición de Minkowski, el término que aparece en la ecuación (2.61) es $\nabla \cdot \mathbf{D}$ y este sí es cero idénticamente; entonces podemos hacer otra vez la separación. Por lo que en adelante será todo referido a la definición de Minkowski.

Capítulo 4

Cuantización del campo electromagnético en medios no disipativos

La cuantización del campo electromagnético en el vacío es algo que se hace sin mayor problema. Una forma es suponer una cavidad con paredes totalmente reflejantes y expandir el potencial vectorial \mathbf{A} en ondas planas:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} [A_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} + \text{c.c.}], \quad (4.1)$$

donde las componentes del vector de onda \mathbf{k} están dadas por:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 2\pi n_1/L, & n_1 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ k_2 &= 2\pi n_2/L, & n_2 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ k_3 &= 2\pi n_3/L, & n_3 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

y L es el volumen de la cavidad de cuantización que después se deja que tienda a infinito.

Esto permite escribir los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} como operadores:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}, s} \omega_k \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} [\hat{a}_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} + \text{h.c.}] \quad (4.3a)$$

y

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \omega_k \mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} [\hat{a}_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega_k t)} + \text{h.c.}] \quad (4.3b)$$

4.1. Cuantización en el vacío

En el vacío la energía está dada por:

$$H = \frac{1}{2} \int_V d^3r \left(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) \quad (4.4)$$

Entonces sustituyendo las ec. (4.3) en (4.4) y evaluando la integral tenemos:

$$H = 2\epsilon_0 V \sum \omega_k^2 A_{\mathbf{k},s} A_{\mathbf{k},s}^* \quad (4.5)$$

Si expresamos A y A^* en términos de las variables canónicas q y p tenemos que escribir:

$$A_{\mathbf{k},s} = \frac{1}{2\omega_k(\epsilon_0 V)^{(1/2)}} [\omega_k q_{\mathbf{k},s} + i p_{\mathbf{k},s}] \quad (4.6)$$

$$A_{\mathbf{k},s}^* = \frac{1}{2\omega_k(\epsilon_0 V)^{(1/2)}} [\omega_k q_{\mathbf{k},s} - i p_{\mathbf{k},s}] \quad (4.7)$$

H queda:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},s} (p_{\mathbf{k},s}^2 + \omega^2 q_{\mathbf{k},s}^2) \quad (4.8)$$

en donde podemos identificar a cada término con la energía de un oscilador armónico de masa unitaria. Ahora podemos seguir con la cuantización canónica y promover las variables q y p a operadores, que satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[\hat{q}_{\mathbf{k},s}, \hat{p}_{\mathbf{k}',s'}] = i\hbar \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'} \quad (4.9)$$

$$[\hat{q}_{\mathbf{k},s}, \hat{q}_{\mathbf{k}',s'}] = 0 = [\hat{p}_{\mathbf{k},s}, \hat{p}_{\mathbf{k}',s'}] \quad (4.10)$$

Definimos los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger como:

$$\hat{a}_{\mathbf{k},s} = \frac{1}{2\hbar\omega_k} [\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k},s} + i\hat{p}_{\mathbf{k},s}] \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger = \frac{1}{2\hbar\omega_k} [\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k},s} - i\hat{p}_{\mathbf{k},s}] \quad (4.11)$$

que satisfacen las relaciones:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},s}, \hat{a}_{\mathbf{k}',s'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'} \quad (4.12)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},s}, \hat{a}_{\mathbf{k}',s'}] = 0 = [\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}',s'}^\dagger] \quad (4.13)$$

y finalmente obtenemos el operador de energía de forma análoga al oscilador cuántico:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.14)$$

o definiendo el operador de número:

$$\hat{n}_{\mathbf{k},s} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} \quad (4.15)$$

podemos reescribir H como:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega_k \left(\hat{n}_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.16)$$

Así podemos ver que se impuso que la energía para cada fotón sea $\hbar\omega$. Concluimos entonces que una forma general de hacer la cuantización es escribiendo de forma clásica la energía H y utilizar la cuantización canónica y hacer que:

$$E = \hbar\omega \quad (4.17)$$

para cada fotón, donde E es el eigenvalor de \hat{H} . Podríamos haber introducido operadores ya sea en el potencial vectorial \mathbf{A} o directamente en los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} y, al final, hacer la integral en (4.4) y normalizar para hacer que se cumpla (4.17).

4.2. Cuantización en medios no disipativos

El problema al tratar con medios es que las variables dinámicas son compartidas tanto por el material como por el campo electromagnético. Las ecuaciones del campo electromagnético representan promedios espaciales y las fluctuaciones clásicas y cuánticas no son trivialmente identificables. La polarización define en forma efectiva parte de los efectos promediados espacialmente del material en presencia del campo electromagnético. Todo ello resulta en que las variables dinámicas del campo electromagnético como la energía, no están plenamente identificadas y por ende no son forzosamente las adecuadas para cuantizar el campo.

Para un medio material la relación clásica entre el campo eléctrico y el vector de polarización es

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (4.18)$$

Para campos dependientes del tiempo, la transformada de Fourier de la polarización en series de potencias de la transformada de Fourier del campo es tal que

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i(\omega) = & \chi_{ij}^{(1)}(\omega)\tilde{E}_j(\omega) + \chi_{ijk}^{(2)}(\omega - \omega', \omega')\tilde{E}_j(\omega - \omega')\tilde{E}_k(\omega') \\ & + \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega - \omega' - \omega'', \omega', \omega'')\tilde{E}_j(\omega - \omega' - \omega'')\tilde{E}_k(\omega')\tilde{E}_l(\omega''), \end{aligned} \quad (4.19)$$

La densidad de energía proveniente de los campos eléctricos sería entonces

$$\mathcal{H}_{elec} = \frac{1}{2}\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (4.20)$$

aquí ya se ha incluido la posibilidad de birrefringencia y la no linealidad del medio a través de los tensores χ_{ij} y $\chi_{ijk}^{(2)}$. La cuantización canónica no se puede plantear de manera sencilla como podemos observar de la dependencia no local en el tiempo de la energía debida a la respuesta no instantánea de la polarización a cambios temporales en el campo eléctrico.

Ya se han realizado trabajos tratando la cuantización en medios (con diferentes aproximaciones), que van desde un medio isótropo y lineal [64] hasta los no lineales [65], sin embargo éste todavía no es un problema resuelto; además en la mayoría de éstos trabajos no se ha tomado en cuenta la posibilidad de que el medio sea birrefringente [66], es decir, usualmente se toma χ_{ij} como escalar.

4.3. Haces estructurados como una base de cuantización en medios materiales no disipativos.

El operador de campo eléctrico vectorial siempre se puede escribir como:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{s, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \omega} \mathfrak{E}(s, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y; \omega) e^{i(\mathbf{k}_x x + \mathbf{k}_y y + \mathbf{k}_z(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \omega)z - \omega t)} \hat{a}(s, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \omega) + h.c. \quad (4.21)$$

donde $\mathfrak{E}(s, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y; \omega)$ es una amplitud vectorial dependiente de la polarización s , la frecuencia ω y el vector de onda \mathbf{k} ; $\hat{a}(s, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \omega)$ es el operador de aniquilación asociado. Tomando en cuenta que para una frecuencia fija, \mathbf{k}_x y \mathbf{k}_y determinará \mathbf{k}_z a través de la relación de dispersión dependiente medio. Las condiciones de contorno y la simetría de los medios materiales definen un conjunto natural de los modos en los que el operador de campo eléctrico se puede desarrollar.

En este capítulo se aborda el caso en que los efectos disipativos de la luz debidos a su propagación son insignificantes, la estructura del medio y las condiciones de contorno

son independientes del tiempo [67]. Entonces, la frecuencia puede ser tomada como una característica de los modos naturales del campo electromagnético. Para simplificar la notación, denotaremos por κ al conjunto de parámetros que definen un modo. En este trabajo, la frecuencia ω está contenida en este conjunto. La cuantización estándar impone la condición de ortonormalidad

$$\frac{1}{8\pi} \int d^3r (\mathbf{D}_\kappa^* \cdot \mathbf{E}_{\kappa'} + \mathbf{H}_\kappa^* \cdot \mathbf{B}_{\kappa'}) = \hbar\omega\delta_{\kappa,\kappa'}. \quad (4.22)$$

para los modos.

Para cavidades rectangulares delimitadas por conductores perfectos ideales de volumen \mathcal{V} , los modos naturales son ondas planas con vectores de propagación $\mathbf{k}_{n_x n_y n_z}$, y por lo tanto las frecuencias restringidas. Si los vectores de onda $\mathbf{k}_{n_x n_y n_z}$ y la polarización definen la etiqueta cuántica κ , esta condición de normalización requiere entonces que \mathfrak{E}_κ sea proporcional a $\mathcal{V}^{-1/2}$.

El formalismo de los potenciales de Hertz [52], proporciona un método general para cumplir con las condiciones de contorno adecuadas y, al mismo tiempo, incorporar un carácter transversal a los campos \mathbf{D}_κ y \mathbf{B}_κ . En este método, primero se busca la solución general de la ecuación de onda escalar en un sistema de coordenadas que toma en cuenta las simetrías geométricas del problema. Los campos eléctricos y magnéticos que reúnen las condiciones adecuadas de límites electromagnéticos son escritos en términos de operadores diferenciales vectoriales aplicados a las soluciones de la ecuación de onda escalar. Aquí, nosotros usamos la base del modo electromagnético resultante, una vez ortonormalizada por el requisito especificado por la ecuación (4.22), para realizar la cuantización a través de la ecuación (4.21). Es decir, para cada modo clásico $\mathbf{E}_\kappa(x, y, z, t)$ el operador

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_\kappa(x, y, z, t) &= \mathbf{E}_\kappa(x, y, z, t) \hat{a}_\kappa \\ &= \sum_{s, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y} \mathfrak{E}_\kappa(s, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y; \omega) e^{i[\mathbf{k}_x x + \mathbf{k}_y y + \mathbf{k}_z(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \omega)z - i\omega t]} \hat{a}(s, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \omega) \end{aligned} \quad (4.23)$$

y se define

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\kappa} (\hat{\mathbf{E}}_\kappa + \hat{\mathbf{E}}_\kappa^\dagger) \quad (4.24)$$

Dado que las frecuencias ω se toman como positivas, el operador $\hat{\mathbf{E}}_\kappa^\dagger$ involucra el tiempo de evolución de $e^{+i|\omega|t}$.

La eq. (4.23) tiene muchas propiedades interesantes. En primer lugar, se trata de una ecuación implícita para \hat{a}_κ en términos de los operadores $\hat{a}(s, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \omega)$, y que involucra a una sola frecuencia. Si hubiéramos abierto la posibilidad de que hubiera disipación o

condiciones de frontera dependientes del tiempo, la expresión de \hat{a}_κ podría implicar no sólo más frecuencias, sino también de operadores de creación $\hat{a}^\dagger(s, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \omega)$. Este es un punto clave para fenómenos como el efecto Casimir dinámico [68]. Nótese también que, en el caso en el que el análisis se realiza en todo el espacio o la luz puede ser tomada como periódica en un paralelepípedo rectangular, esta expresión puede ser invertida para escribir los operadores de aniquilación $\hat{a}(s, \mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y, \omega)$ en términos de operadores \hat{a}_κ . Por último, la aplicación de $\hat{\mathbf{E}}_\kappa^\dagger(x, y, z, t)$ sobre el estado de vacío hace evidente que un estado de un fotón definido por κ es una superposición de estados de un solo fotón con número de onda k bien definido. Ahora, se ilustra este procedimiento con dos ejemplos concretos.

4.3.1. Campo electromagnético bajo condiciones de contorno con simetría circular cilíndrica.

Las soluciones a la ecuación de onda escalar están dadas por las superposiciones de funciones Bessel J_m y K_m ,

$$\begin{aligned} \psi_\kappa(\mathbf{r}, t)y &= [C_J \mathcal{J}_m(k_\perp^0 r_\perp, \phi) + C_K \mathcal{K}_m(k_\perp^0 r_\perp, \phi)] e^{i(\mathbf{k}_z z - \omega t)} \\ \mathcal{J}_m(k_\perp^0 r_\perp, \phi) &= e^{im\phi} J_M(k_\perp^0 r) \\ \mathcal{K}_m(k_\perp^0 r_\perp, \phi) &= e^{im\phi} k_m(k_\perp^0 r) \end{aligned} \quad (4.25)$$

con $k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$, $r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\phi = \arctan y/x$. En el espacio libre, el coeficiente C_K por lo general se toma como cero con el fin de evitar un comportamiento singular en el eje z .

De la definición de la función Bessel

$$J_m(\zeta) = \frac{1}{2\pi i^m} \int_0^{2\pi} d\phi' e^{i\zeta \cos \phi' + im\phi'} \quad , \quad (4.26)$$

se deduce que la transformada de Fourier \mathcal{J}_m es

$$\tilde{\mathcal{J}}_m(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y) = i^m e^{im\theta_{\mathbf{k}_\perp}} \delta(k_\perp - k_\perp^0) / k_\perp^0, \quad (4.27)$$

con $\theta_{\mathbf{k}_\perp} = \arctan k_y/k_x$. Los modos transversal eléctrico TE y transversal magnético TM , en el espacio de las \mathbf{k} se escriben

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_\kappa^{(TE)} &= \mathcal{E}_\kappa^{(TE)} e^{i(\mathbf{k}_z z - \omega t)} \mathbf{N}(k_\perp, m, \omega) \\ \mathfrak{E}_\kappa^{(TM)} &= \mathcal{E}_\kappa^{(TM)} e^{i(\mathbf{k}_z z - \omega t)} \mathbf{H}(k_\perp, m, \omega) \end{aligned} \quad (4.28)$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(k_{\perp}, m, \omega) &= \tilde{\mathcal{J}}_{m+1}\mathbf{e}_{-} - \tilde{\mathcal{J}}_{m-1}\mathbf{e}_{+} + \frac{k_{\perp}}{k_z}\tilde{\mathcal{J}}_m\mathbf{e}_z \\ ck_z\mathbf{H}(k_{\perp}, m, \omega) &= \omega\mathbf{N}(k_{\perp}, \theta_k, \omega) \times \mathbf{e}_z.\end{aligned}\quad (4.29)$$

En el espacio libre, la exigencia de cuantización produce la normalización [53] $\mathcal{E}_{\kappa}^{(TE)} = \mathcal{E}_{\kappa}^{(TM)} = \sqrt{\omega^2 - k_{\perp}^2}c^2 / \sqrt{\hbar k_{\perp}/2\pi\omega}$.

Los modos de $\mathfrak{E}_{k_{\perp}, m, \omega}^{(TE, TM)}$ son estados propios del operador $\hat{\mathfrak{J}}_z$, que genera rotaciones alrededor del eje z , con valor propio m . Esto significa que un fotón que se describe por cualquiera de estos modos lleva un momento angular total $m\hbar$. Para mostrar el estado de vector propio de los estados 4.28, hay que tener en cuenta que una rotación alrededor del eje z por un ángulo φ_o cambia a los vectores $\mathbf{e}_{\pm} \rightarrow e^{i\mp\varphi_o}\mathbf{e}_{\pm}$, \mathbf{e}_z no se modifica, mientras que el espacio de coordenadas de ϕ cambia a $\varphi + \varphi_o$:

$$e^{i\varphi_o\hat{\mathfrak{J}}_z}\mathfrak{E}_{k_{\perp}, m, \omega}^{(TE, TM)} = e^{im\varphi_o}\mathfrak{E}_{k_{\perp}, m, \omega}^{(TE, TM)}.\quad (4.30)$$

Al hacer superposiciones lineales de los modos $\mathfrak{E}_{K_{\perp}, m, \omega}^{(TE, TM)}$ es posible realizar generalizaciones de haces estructurados polarizados lineal y circularmente [53]. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{k_{\perp}, m, \omega}^{\pm} &= \frac{1}{2}\left[\mathfrak{E}_{k_{\perp}, m, \omega}^{(TE)} \pm i\frac{c}{k_z}\omega\mathfrak{E}_{k_{\perp}, m, \omega}^{(TM)}\right] \\ &= \mathcal{E}^{\pm}e^{i(k_z z - \omega t)}\left[\tilde{\mathcal{J}}_{m\pm 1}\mathbf{e}_{\mp} + \frac{k_{\perp}c}{\omega}\tilde{\mathcal{J}}_m\mathbf{e}_z\right]\end{aligned}\quad (4.31)$$

puede considerarse como una generalización de haces circularmente polarizados con momento angular bien definido. La expresión de haces de Bessel escalares corresponde a la superposición

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{k_{\perp}, m, \omega}^{sc} &= \frac{1}{2}\left[\mathfrak{E}_{k_{\perp}, m+1, \omega}^{(-)} \pm \mathfrak{E}_{k_{\perp}, m-1, \omega}^{(+)}\right] \\ &= \mathcal{E}_b^{sc}e^{i(k_z z - \omega t)}\left[\tilde{\mathcal{J}}_m\mathbf{e}_b + \frac{k_{\perp}c}{2\omega}(\tilde{\mathcal{J}}_{m+1} \pm \tilde{\mathcal{J}}_{m-1})\mathbf{e}_z\right],\end{aligned}\quad (4.32)$$

con $b = x$ (y) para el signo más (menos), usualmente en el límite paraxial $k_{\perp} \ll k_z$. Estos modos no son vectores propios del operador de momento angular $\hat{\mathfrak{J}}_z$.

La generación de haces de Bessel con polarizaciones radial y azimutal se reportó por primera vez en la referencia [39]. Los haces Bessel vectoriales se pueden generar mediante superposiciones de haces Bessel escalares [69].

4.3.2. Campo electromagnético en un medio birrefringente.

Este ejemplo es especialmente importante, ya que estamos interesados en la descripción de la conversión paramétrica descendente espontánea y ese proceso en muchos casos implica medios birrefringentes. Consideremos la posibilidad de un cristal uniaxial con respuesta magnética despreciable y eje de simetría $\hat{\mathbf{a}}$ (tomado como un vector unitario). Éste está caracterizado por un tensor dieléctrico $\overleftarrow{\epsilon}$ que puede ser expresado por una díada

$$\overleftarrow{\epsilon} = \epsilon \overleftarrow{\mathbf{1}} + \Delta\epsilon \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}},$$

donde $\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon$, ϵ y ϵ_{\parallel} son la permeabilidad perpendicular y paralela al eje de simetría, respectivamente; el desplazamiento eléctrico es $\mathbf{D} = \overleftarrow{\epsilon} \cdot \mathbf{E}$ y el campo magnético $\mathbf{H} = \mathbf{B}$.

Dentro de los medios materiales, los campos eléctricos y magnéticos asociados a las ondas ordinarias y extraordinarias se pueden escribir como [70]

$$\mathbf{E}^o = \mathbf{a} \times \nabla \psi^o, \quad \mathbf{E}^e = -\frac{1}{\epsilon} \nabla(\mathbf{a} \cdot \nabla) \psi^e + \ddot{\psi}^e \mathbf{a}, \quad (4.33)$$

y

$$\mathbf{H}^o = \nabla(\mathbf{a} \cdot \nabla) \psi^o - \epsilon \ddot{\psi}^o \mathbf{a}, \quad \mathbf{H}^e = \mathbf{a} \times \nabla \dot{\psi}^e, \quad (4.34)$$

donde $\psi^o(\mathbf{x}, t)$ y $\psi^e(\mathbf{x}, t)$ son los potenciales de Hertz [71, 52, 70]. El símbolo $\dot{\psi}$ denota la derivada temporal $\partial_{ct} = \partial/\partial(ct)$, y c la velocidad de la luz en el vacío. En el caso de luz monocromática de frecuencia ω , las relaciones de dispersión resultan ser:

$$\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^o \cdot \mathbf{k}^o = 0, \quad \epsilon \epsilon_{\parallel} \frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^e \cdot \overleftarrow{\epsilon} \cdot \mathbf{k}^e = 0. \quad (4.35)$$

En la siguiente subsección, se presenta un análisis de la relación de dispersión para los modos extraordinarios más allá de la aproximación paraxial.

De las ecuaciones (4.33) y (4.34) se puede ver que cada modo ordinario localizado es ortogonal a cualquier modo extraordinario localizado, de acuerdo con el producto escalar, Ec. (4.22). La condición de ortonormalidad entre los modos ordinarios y extraordinarios se estudia con más detalle la sección 4.3.6. Allí se discute el caso particular de modos Bessel en detalle. En particular, se muestra que a menos que el eje principal de propagación de los modos Bessel sea paralelo al eje de birrefringencia, no es posible construir una base ortonormal formada por modos ordinarios y extraordinarios que son funciones propias del operador de momento angular orbital a lo largo del eje principal de propagación. Este hecho es una consecuencia de la ruptura de simetría circular cilíndrica de un cristal birrefringente. Esta ruptura de la simetría también implica que un haz que sería invariante ante propagación en el espacio libre, experimentaría efectos de la dispersión

a menos que el eje principal propagación coincidiera con el eje de cristal [70]. Hay que recordar que la condición de orthonormalidad de los modos es un requisito para la cuantización estándar.

Dado un haz con dirección principal de propagación a lo largo del eje z , siempre podemos escribir

$$\begin{aligned} \psi_{\omega, \kappa}^{(o,e)}(x, y, z, t) \\ = \frac{1}{2\pi} \int dk_x dk_y e^{ik_x x + ik_y y + ik_z^{(o,e)} z i\omega t} \tilde{\psi}_{\kappa}^{(o,e)}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y). \end{aligned} \quad (4.36)$$

La transformada de Fourier bidimensional $\tilde{\psi}_{\kappa}^{(o,e)}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y)$ se puede evaluar como

$$\tilde{\psi}_{\kappa}^{(o,e)}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y) = \frac{1}{2\pi} \int dx' dy' e^{-ik_x x' - ik_y y'} \psi_{\kappa}^{(o,e)}(x', y', z=0, t=0), \quad (4.37)$$

para una onda que se propaga en el eje z con dirección positiva, debemos establecer la transformada de Fourier de las derivadas parciales en la variable z como

$$\widetilde{\partial_z \psi_{\kappa}^{(o,e)}}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y) = ik_z^{(o,e)} \tilde{\psi}_{\kappa}^{(o,e)}(\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y). \quad (4.38)$$

El vector de campo eléctrico \mathfrak{E} en la ecuación (4.24). Para cada una de las dos polarizaciones independientes es entonces:

$$\mathfrak{E}_{\kappa}^o = \frac{\omega}{c} \mathbf{a} \times \mathbf{k}^o \tilde{\psi}_{\kappa}^o(\mathbf{k}^o) \quad (4.39)$$

$$\mathfrak{E}_{\kappa}^e = \left[\frac{1}{\epsilon} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}^e) \mathbf{k}^e - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{a} \right] \tilde{\psi}_{\kappa}^e(\mathbf{k}^e). \quad (4.40)$$

4.3.3. Relación de dispersión de medios birrefringentes más allá de la aproximación paraxial.

Para una onda ordinaria, la relación de dispersión da

$$k_z^o = \sqrt{\frac{\epsilon\omega^2}{c^2} - k_{\perp}^2} \quad (4.41)$$

independiente de la orientación del vector transversal \mathbf{k}_{\perp} . Para una onda extraordinaria:

$$k_z^e(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) = -\beta \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_{\perp} + \frac{\omega}{c} n_{eff} \sqrt{1 - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} \eta} \quad (4.42)$$

donde:

$$\mathbf{n}_{eff} = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_{\parallel}}{\epsilon + \Delta\epsilon a_z^2}}; \quad (4.43)$$

$$\beta = \frac{\Delta\epsilon a_z}{\epsilon + \Delta\epsilon a_z^2}, \quad (4.44)$$

$$\eta = \frac{1}{\epsilon_{\parallel}} + \Gamma(\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{\perp})^2, \quad \Gamma = \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon\epsilon_{\parallel}}(1 - a_z\beta). \quad (4.45)$$

En el límite de incidencia normal $k_{\perp} = 0$, esta ecuación se reduce a la expresión habitual del índice de refracción efectivo experimentado por una onda extraordinaria de bombeo:

$$\mathbf{k}_z^e(\mathbf{k}_{\perp} = \mathbf{0}) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon_{\parallel}}{\epsilon + \Delta\epsilon a_z^2}} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}_{eff} \quad (4.46)$$

Para cuasi incidencia normal de un haz paralelo al eje de un cristal birrefringente, i.e., \mathbf{k}_z coincide con la dirección principal de propagación de un rayo y $k_{\perp} \ll k_z$, resulta útil hacer una expansión de energía en el parámetro $k_{\perp}c/\omega$:

$$\mathbf{k}_z^e(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}_{eff} - \alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_{\perp} - \eta k_{\perp} \frac{k_{\perp}c}{\omega} \frac{\mathbf{n}_{eff}}{2} - \frac{\omega}{c} \mathbf{n}_{eff} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(2s-1)!}{2^{1s}(1s)} \left(\frac{k_{\perp}c}{\omega}\right)^{2(s+1)} \eta^{s1} \quad (4.47)$$

El término de corrección de primer orden, proporcional al parámetro α , se puede utilizar para estimar la distribución de la intensidad observada que se desvía de la dirección definida por \mathbf{k}_z . Las consecuencias a primer orden de este llamado *walk-off* para la conversión paramétrica descendente se estudian en las referencias [72, 73, 74].

Ya que

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{\perp})^2 &= \frac{a_x^2 + a_y^2}{2} + \left(\frac{a_x^2 - a_y^2}{2}\right) \cos^2 \varphi + a_x a_y \sin^2 \varphi \\ &= \frac{a_x^2 + a_y^2}{2} + \left(\frac{a_x - ia_y}{2}\right)^2 e^{2i\varphi} + \left(\frac{a_x + ia_y}{2}\right)^2 e^{-2i\varphi}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

el término proporcional a γ induce efectos de astigmatismo en la propagación de la luz en medios birrefringente; además, haciendo uso de esta ecuación, $\mathbf{k}_z^e(\mathbf{k}_{\perp}, \omega)$ se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_z^e(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) &= \frac{\omega}{c} \mathbf{n}_{iso} - \frac{\alpha k_{\perp}}{2} (a_x - ia_y) e^{i\varphi} - \frac{\alpha k_{\perp}}{2} (a_x + ia_y) e^{-i\varphi} \\ &+ \sum_{s=1}^{\infty} c_s \left(\frac{k_{\perp}c}{\omega}\right)^{2s} \left(\frac{a_x - ia_y}{2}\right)^{2s} e^{2es\varphi} + \sum_{s=1}^{\infty} c_s \left(\frac{k_{\perp}c}{\omega}\right)^{2s} \left(\frac{a_x + ia_y}{2}\right)^{2s} e^{-2es\varphi} \end{aligned} \quad (4.49)$$

n_{iso} , así como los coeficientes c_s pueden determinarse directamente de la ecuación (4.47).

4.3.4. Propagación de un haz Bessel en un medio birrefringente con fronteras y eje óptico perpendicular a su superficie.

Al escribir una onda Bessel como una superposición de ondas planas

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\omega} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} & \left[\frac{1}{2}(\mathcal{E}\operatorname{cosec}\zeta + i\mathcal{B}\cot\zeta) \left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_p}{i|\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_p|} \right)^{m-1} \mathbf{e}_p \right. \\ & + \frac{1}{2}(\mathcal{E}\operatorname{cosec}\zeta - i\mathcal{B}\cot\zeta) \left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_p}{i|\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_p|} \right)^{m+1} \mathbf{e}_p^* \\ & \left. + \mathcal{B} \left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_p}{i|\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_p|} \right)^m \mathbf{e}_q \right] \delta(\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}_q - \omega \cos\zeta) \delta(|\mathbf{k}| - \omega) \end{aligned} \quad (4.50)$$

donde \mathbf{e}_q es la dirección de propagación del haz, \mathbf{e}_p es el vector de polarización (no unitario) perpendicular a \mathbf{e}_q y ζ es el ángulo del axicón. El campo magnético \mathbf{B} se obtiene de la expresión anterior mediante la transformación $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ and $\mathcal{E} \rightarrow -\mathcal{B}$. Y usar las ecuaciones (4.36)-(4.40), se llega a las siguientes expresiones para los campos refractados de un haz incidiendo con un ángulo α en un cristal birrefringente de extensión semi infinita [70]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^o(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi} i^{-m} \int_0^{2\pi} dV e^{i[\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}^o(V)+mV]} & \frac{\mu\omega k_z(V)}{k_{\perp}^2(V)[\mu k_z(V) + k_z^o(V)]} \\ & \times \left[\frac{\sin\alpha}{\sin\zeta} (-\mathcal{B} \cos V + \mathcal{E} \cos\zeta \sin V) + \mathcal{E} \cos\alpha \right] (\mathbf{e}_z \times \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^e(\mathbf{r}) = \frac{1}{\pi} i^{-m} \int_0^{2\pi} dV e^{i[\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}^e(V)+mV]} & \frac{k_z(V)}{k_{\perp}^2(V)[\epsilon k_z(V) + k_z^e(V)]} \\ & \times \left[\frac{\sin\alpha}{\sin\zeta} (\mathcal{E} \cos V + \mathcal{B} \cos\zeta \sin V) + \mathcal{B} \cos\alpha \right] [k_z^e(V)\mathbf{k}^e(V) - \epsilon\mu\omega^2\mathbf{e}_z]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Como consecuencia de estos resultados se puede ver que un haz Bessel que incide en un cristal birrefringente no conserva su estructura al propagarse dentro del cristal, ni en intensidad ni en fase. Excepto para un ángulo de incidencia $\alpha = 0$ los campos refractados se pueden escribir en términos de las funciones Bessel:

$$\mathbf{E}^o = \mathcal{E} \frac{\mu\omega \cos \zeta}{(\mu k_z + k_z^o) \sin \zeta} e^{-i\omega t + ik_z^o z} \left[J_{m-1}(k_{\perp}\rho) e^{i(m-1)\phi} (\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y) + J_{m+1}(k_{\perp}\rho) e^{i(m+1)\phi} (\hat{\mathbf{e}}_x - i\hat{\mathbf{e}}_y) \right] \quad (4.53)$$

$$\mathbf{E}^e = \mathcal{B} \frac{k_z^e \cos \zeta}{(\epsilon k_z + k_z^e) \sin \zeta} e^{-i\omega t + ik_z^e z} \left[J_{m-1}(k_{\perp}\rho) e^{i(m-1)\phi} (\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y) + J_{m+1}(k_{\perp}\rho) e^{i(m+1)\phi} (\hat{\mathbf{e}}_x - i\hat{\mathbf{e}}_y) \right] - \frac{2\omega\epsilon \sin \zeta}{\epsilon_{\parallel}} e^{-i\omega t + ik_z^e z} J_m(k_{\perp}\rho) e^{im\phi} \hat{\mathbf{e}}_z \quad (4.54)$$

con $k_z^e = \omega \sqrt{\epsilon - (\epsilon/\epsilon_{\parallel}) \sin^2 \zeta}$. Estos resultados serán de suma importancia en el capítulo 5.

En la siguiente figura se muestran los patrones de intensidad de la onda Bessel en un plano perpendicular a su dirección de propagación y en un ángulo oblicuo .

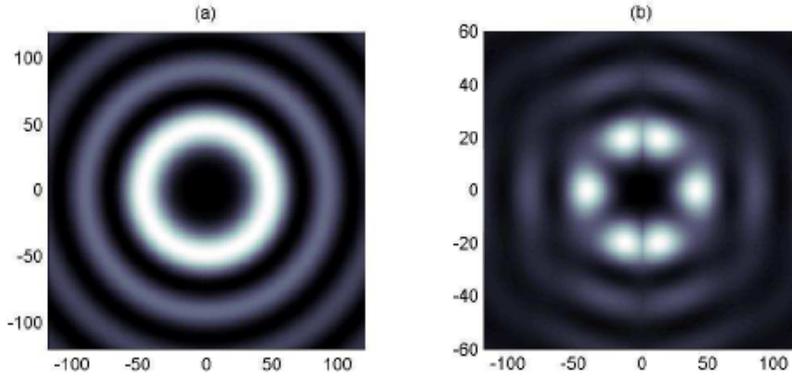


Figura 4.1: Haz Bessel de orden 2, el plano de observación es perpendicular al eje de propagación (izquierda), el plano de observación es paralelo a la superficie

En las siguientes figuras se muestra la propagación de los haces ordinario y extraordinario dentro del cristal birrefringente (calcita) provenientes del haz incidente de la figura 4.1.

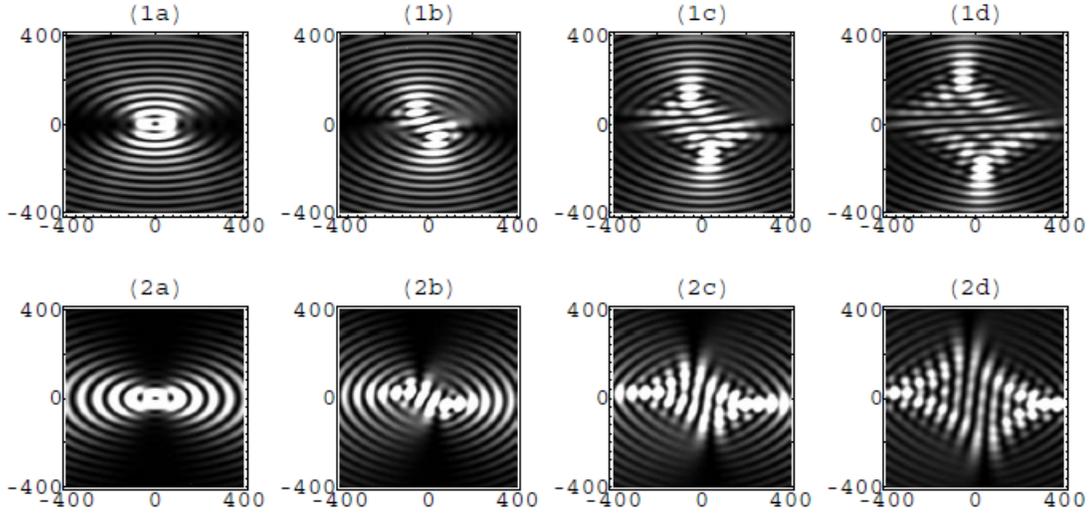


Figura 4.2: En el primer renglón se muestra el perfil de intensidad del haz ordinario y en el segundo del extraordinario. El haz es un Bessel de orden 2. En las figuras (a) el plano de observación es el plano de la interface, en las demás figuras el plano está perpendicular al eje de propagación la distancia del plano aumenta de izquierda a derecha.

4.3.5. Cristal birrefringente con 2 fronteras (slab semi-infinito)

Consideremos un bloque de un medio birrefringente con superficies paralelas, ancho L en la dirección \hat{z} y extensión infinita en las otras 2 direcciones espaciales. Denotaremos con \hat{n} a la normal a las superficies y escogeremos la dirección \hat{z} del sistema de coordenadas de tal forma que coincida con la normal, $\hat{n} = \hat{z}$, el eje óptico \hat{a} podrá estar orientado en cualquier dirección.

Estudiaremos ahora los campos electromagnéticos que resultan de hacer incidir un haz en el medio.

Sea \mathbf{E}^I el campo eléctrico perteneciente al haz incidente, \mathbf{E}^R el campo eléctrico reflejado y \mathbf{E}^T el campo transmitido (en la segunda superficie); la misma notación se usará con los campos magnéticos \mathbf{B}^I , \mathbf{B}^R y \mathbf{B}^T .

Dentro del material existirá una superposición de campos que se propagan hacia adelante con otros que se propagan hacia atrás y (ya que es un medio birrefringente) podrán estar en los modos ordinario o extraordinario que denotaremos con los superíndices o y e . Escribamos al campo eléctrico dentro del material de la siguiente forma:

$$\mathbf{E}_{dentro} = \mathbf{E}_f^o + \mathbf{E}_b^o + \mathbf{E}_f^e + \mathbf{E}_b^e, \quad (4.55)$$

los subíndices f y b indican que el campo se propaga hacia adelante (dirección positiva en $\hat{\mathbf{z}}$) y hacia atrás (dirección negativa en $\hat{\mathbf{z}}$) respectivamente.

Usando los potenciales de Hertz [71] con el procedimiento desarrollado en [70] y con notación de suma sobre índices repetidos, las condiciones de frontera se pueden escribir como:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^I + \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^R = \mathbf{P}_D^{\nu} \tilde{\psi}_D^{\nu} \quad (4.56)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^I - \tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^R = \mathbf{R}_D^{\nu} \tilde{\psi}_D^{\nu} \quad (4.57)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^T = e^{ik_{z,D}^{\nu}} \mathbf{P}_D^{\nu} \tilde{\psi}_D^{\nu} \quad (4.58)$$

$$= e^{ik_{z,D}^{\nu}} \mathbf{R}_D^{\nu} \tilde{\psi}_D^{\nu} \quad (4.59)$$

el subíndice \perp se usa para denotar la componente perpendicular de un vector, $\nu = o, e$, $D = F, B$; y

$$\mathbf{P}_D^o = \frac{\omega}{c} (\hat{\mathbf{a}} \times \mathbf{k}_D^o)_{\perp}, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{P}_D^e = \epsilon^{-1} (\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{k}_D^e) \mathbf{k}_{\perp} - \mu \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\mathbf{a}}_{\perp} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{R}_D^o = \frac{\omega}{ck_z} \left[\mu^{-1} (\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{k}_D^o) \mathbf{k}_{\perp} - \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\mathbf{a}}_{\perp} + \epsilon \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{k}_{\perp}) \mathbf{k}_{\perp} \right], \quad (4.62)$$

$$\mathbf{R}_D^e = \frac{\omega^2}{c^2 k_z} (a_z \mathbf{k}_{\perp} - k_{z,D}^e \hat{\mathbf{a}}_{\perp}) + \frac{1}{k_z} [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_{\perp}) k_{z,D}^e - a_z k_{\perp}^2] \mathbf{k}_{\perp} \quad (4.63)$$

$k_{z,F}^{\nu} = k_z^{\nu}$ y $k_{z,B}^{\nu} = -k_z^{\nu}$. Aquí se ha definido¹ $\mathbf{r}_{\perp} \equiv \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}_{\perp} = \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r}$, para cualquier vector \mathbf{r} (\mathbf{r}_{\perp} es la rotación de \mathbf{r}_{\perp} en $\pi/4$ al rededor del eje z , $\mathbf{r}_{\perp} = -r_y \hat{\mathbf{e}}_x + r_x \hat{\mathbf{e}}_y$). \mathbf{r}_{\perp} cumple con las siguientes igualdades.

$$\mathbf{r}_{\perp} \cdot \mathbf{r}_{\perp} = 0 \quad (4.64)$$

$$\mathbf{r}_{\perp} \times \mathbf{r}_{\perp} = r^2 \hat{\mathbf{e}}_z \quad (4.65)$$

De (4.56) y (4.57):

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^I = \frac{1}{2} (\mathbf{P}_D^{\nu} + \mathbf{R}_D^{\nu}) \tilde{\psi}_D^{\nu} \quad (4.66)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^R = \frac{1}{2} (\mathbf{P}_D^{\nu} - \mathbf{R}_D^{\nu}) \tilde{\psi}_D^{\nu} \quad (4.67)$$

¹Esta definición, junto con sus propiedades, será muy útil a la hora de simplificar cuando se fije el sistema de coordenadas. Se hará referencia a esta definición como la componente “contra-perpendicular” de un vector.

De (4.58) y (4.59):

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\perp}^T = \frac{1}{2} e^{Dik_z^{\nu}} (\mathbf{P}_D^{\nu} + \mathbf{R}_D^{\nu}) \tilde{\psi}_D^{\nu} \quad (4.68)$$

$$0 = e^{Dik_z^{\nu}} (\mathbf{P}_D^{\nu} - \mathbf{R}_D^{\nu}) \tilde{\psi}_D^{\nu} \quad (4.69)$$

Una vez conocidos los 4 potenciales $\tilde{\psi}_D^{\nu}$, los campos \mathbf{E}^R y \mathbf{E}^T se pueden calcular directamente de las ecuaciones (4.67) y (4.68).

Para encontrar los $\tilde{\psi}_D^{\nu}$ usamos las otras dos ecuaciones (4.66) y (4.69). Se puede resolver directamente de aquí, pero conviene hacer antes una simplificación.

ya que los vectores \mathbf{P}_D^{ν} y \mathbf{R}_D^{ν} contienen las componentes perpendicular y contraperependicular del vector \mathbf{k} , conviene hacer los productos escalar y vectorial con el vector \mathbf{k}_{\perp} , que además permitirán una simplificación usando las ecuaciones de Maxwell² $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}^I = 0$ y $\mathbf{k} \times \mathbf{E}^I = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}$.

Tomando el producto escalar de \mathbf{k}_{\perp} con la Ecs. (4.66) y (4.69)

$$-2k_z \tilde{E}_z^I = \mathbf{k}_{\perp} \cdot (\mathbf{P}_D^{\nu} + \mathbf{R}_D^{\nu}) \tilde{\psi}_D^{\nu} \quad (4.70)$$

$$0 = e^{Dik_z^{\nu}} \mathbf{k}_{\perp} \cdot (\mathbf{P}_D^{\nu} - \mathbf{R}_D^{\nu}) \tilde{\psi}_D^{\nu} \quad (4.71)$$

Y ahora el producto vectorial de \mathbf{k}_{\perp} con la Ecs. (4.66) y (4.69)

$$2 \frac{\omega}{c} \tilde{B}_z^I = [\mathbf{k}_{\perp} \times (\mathbf{P}_D^{\nu} + \mathbf{R}_D^{\nu})]_z \tilde{\psi}_D^{\nu} \quad (4.72)$$

$$0 = e^{Dik_z^{\nu}} [\mathbf{k}_{\perp} \times (\mathbf{P}_D^{\nu} - \mathbf{R}_D^{\nu})]_z \tilde{\psi}_D^{\nu} \quad (4.73)$$

Escribamos ahora el sistema de ecuaciones anterior en forma matricial.

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbb{M} \tilde{\Psi} \quad (4.74)$$

con:

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_f^o \\ \tilde{\psi}_b^o \\ \tilde{\psi}_f^e \\ \tilde{\psi}_b^e \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} -2k_z \tilde{E}_z^I \\ 0 \\ \frac{2\omega}{c} \tilde{B}_z^I \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

y \mathbb{M} la matriz de coeficientes.

²Notese que tambien se podria hacer la simplificación usando \mathbf{k}_{\perp} o combinar las dos opciones, pero el uso posterior de las Ecs. de Maxwell hace más atractiva la opción escogida.

Entonces la solución se puede escribir como:

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{|\mathbb{M}|} \mathbb{M}^\dagger \tilde{\mathbf{C}} \quad (4.76)$$

\mathbb{M}^\dagger denota la matriz adjunta y $|\mathbb{M}|$ el determinante de la matriz \mathbb{M} . Antes de escribir \mathbb{M} es conveniente simplificar un poco más las cosas.

4.3.5.1. Elección óptima del sistema de referencia.

Sin pérdida de generalidad, siempre se puede escoger el sistema de tal forma que una de las componentes de $\hat{\mathbf{a}}$ sea igual a cero.

Escogeremos el sistema de coordenadas tal que $\hat{\mathbf{a}} = a_x \hat{\mathbf{x}} + a_z \hat{\mathbf{z}}$. (En términos del ángulo α de $\hat{\mathbf{n}}$ con el eje de la dirección de propagación principal del haz en el vacío, $a_x = \cos(\alpha)$ y $a_z = \sin(\alpha)$). De esta forma $\hat{\mathbf{a}}_\perp = a_x \hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\mathbf{a}}_\parallel = -a_x \hat{\mathbf{y}}$.

Sustituyendo esto en las ecuaciones (4.60) a (4.63)

$$\mathbf{P}_D^o = -\frac{\omega}{c} (a_z \mathbf{k}_\perp - k_{z,D}^o a_x \hat{\mathbf{y}}), \quad (4.77)$$

$$\mathbf{P}_D^e = \epsilon^{-1} (a_x k_x + a_z k_{z,D}^e) \mathbf{k}_\perp - \mu \frac{\omega^2}{c^2} a_x \hat{\mathbf{x}} \quad (4.78)$$

$$\mathbf{R}_D^o = \frac{\omega}{ck_z} \left[\mu^{-1} (a_x k_x + a_z k_{z,D}^o) \mathbf{k}_\perp - \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} a_x \hat{\mathbf{y}} + \epsilon a_x k_y \mathbf{k}_\perp \right], \quad (4.79)$$

$$\mathbf{R}_D^e = \frac{\omega^2}{c^2 k_z} (a_z \mathbf{k}_\perp - a_x k_{z,D}^e \hat{\mathbf{x}}) + \frac{1}{k_z} [a_x k_x k_{z,D}^e - a_z k_\perp^2] \mathbf{k}_\perp \quad (4.80)$$

haciendo las sumas y productos en las ecuaciones (4.70) a (4.73)

$$q_{D\pm}^o \equiv \mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{P}_D^o \pm \mathbf{R}_D^o) = -a_x \frac{\omega}{c} k_y \epsilon k_z \left(\frac{k_{z,D}^o}{\epsilon k_z} \pm 1 \right) \quad (4.81)$$

$$q_{D\pm}^e \equiv \mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{P}_D^e \pm \mathbf{R}_D^e) = k_z \left[a_z k_\perp^2 \left(\frac{k_{z,D}^e}{\epsilon k_z} \pm 1 \right) - a_x k_x \left(\frac{(k_z^o)^2}{\epsilon k_z} \pm k_{z,D}^e \right) \right] \quad (4.82)$$

$$s_{D\pm}^o \equiv \mathbf{k}_\perp \times (\mathbf{P}_D^o \pm \mathbf{R}_D^o) = \frac{\omega}{c} \left[a_z k_\perp^2 \left(1 \pm \frac{k_{z,D}^o}{\mu k_z} \right) - a_x k_x k_{z,D}^o \left(1 \pm \frac{k_{z,D}^o}{\mu k_z} \right) \right] \quad (4.83)$$

$$s_{D\pm}^e \equiv \mathbf{k}_\perp \times (\mathbf{P}_D^e \mp \mathbf{R}_D^e) = a_x k_y \frac{\omega^2}{c^2} \mu \left(1 \pm \frac{k_{z,D}^e}{\mu k_z} \right) \quad (4.84)$$

Regresando a la ecuación (4.76), podemos ahora escribir la matriz \mathbb{M} como:

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_\epsilon^o & \mathbb{M}_\epsilon^e \\ \mathbb{M}_\mu^o & \mathbb{M}_\mu^e \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

con

$$\mathbb{M}_\epsilon^o \equiv \begin{pmatrix} q_{f+}^o & q_{b+}^o \\ -q_{b+}^o \eta_f^o & -q_{f+}^o \eta_b^o \end{pmatrix} \quad \mathbb{M}_\epsilon^e \equiv \begin{pmatrix} q_{f+}^e & q_{b+}^e \\ q_{f-}^e \eta_f^e & q_{b-}^e \eta_b^e \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

$$\mathbb{M}_\mu^o \equiv \begin{pmatrix} s_{f+}^o & s_{b+}^o \\ s_{f-}^o \eta_f^o & s_{b-}^o \eta_b^o \end{pmatrix} \quad \mathbb{M}_\mu^e \equiv \begin{pmatrix} s_{f+}^e & s_{b+}^e \\ s_{b+}^e \eta_f^e & s_{f+}^e \eta_b^e \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

$$\eta_D^\nu \equiv e^{ik_{z,D}^\nu} \quad (4.88)$$

Con \mathbb{M} escrita de esta forma (por bloques), siempre que \mathbb{M}_ϵ^o y \mathbb{M}_μ^e sean no singulares³, podemos escribir las soluciones como:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_f^o \\ \tilde{\psi}_b^o \end{pmatrix} = \frac{-1}{|\mathbb{M}|} \left[2k_z |\mathbb{M}_\mu^e| \tilde{E}_z \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{S2}^\dagger \\ \mathbb{M}_{S2}^\dagger \end{pmatrix}_{11}^{12} + 2 \frac{\omega}{c} \tilde{B}_z \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{S2}^\dagger \mathbb{M}_\epsilon^e (\mathbb{M}_\mu^e)^\dagger \\ \mathbb{M}_{S2}^\dagger \mathbb{M}_\epsilon^e (\mathbb{M}_\mu^e)^\dagger \end{pmatrix}_{11}^{12} \right] \quad (4.89)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_f^e \\ \tilde{\psi}_b^e \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbb{M}|} \left[2 \frac{\omega}{c} |\mathbb{M}_\epsilon^o| \tilde{B}_z \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{S1}^\dagger \\ \mathbb{M}_{S1}^\dagger \end{pmatrix}_{11}^{12} + 2k_z \tilde{E}_z \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{S1}^\dagger \mathbb{M}_\epsilon^o (\mathbb{M}_\mu^o)^\dagger \\ \mathbb{M}_{S1}^\dagger \mathbb{M}_\mu^o (\mathbb{M}_\epsilon^o)^\dagger \end{pmatrix}_{11}^{12} \right] \quad (4.90)$$

\mathbb{M}_{S1} y \mathbb{M}_{S2} están dados por:

$$\mathbb{M}_{S1} \equiv \mathbb{M}_\mu^e - \mathbb{M}_\mu^o (\mathbb{M}_\epsilon^o)^{-1} \mathbb{M}_\epsilon^e \quad (4.91)$$

$$\mathbb{M}_{S2} \equiv \mathbb{M}_\epsilon^o - \mathbb{M}_\epsilon^e (\mathbb{M}_\mu^e)^{-1} \mathbb{M}_\mu^o, \quad (4.92)$$

estos términos son conocidos como los complementos de Schur; y el determinante de \mathbb{M} se puede calcular en términos de alguno de ellos⁴ [75].

³El caso donde \mathbb{M}_ϵ^o y \mathbb{M}_μ^e son singulares es un caso particular que se resolverá en la siguiente subsección.

⁴Excepto para el caso particular $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{z}}$ para el cual las matrices de la diagonal son singulares.

$$\begin{aligned}
|\mathbb{M}| &= |\mathbb{M}_{S1}| |\mathbb{M}_\epsilon^o| = |\mathbb{M}_{S2}| |\mathbb{M}_\mu^e| = \\
&(-q_{b-}^e q_{f+}^o s_{b-}^o s_{f+}^e + q_{f+}^e q_{f+}^o s_{f+}^e s_{f+}^o) \eta_b^e \eta_b^o + \\
&(-q_{b-}^e q_{b+}^o s_{b+}^e s_{f+}^o + q_{b-}^e q_{f+}^o s_{b+}^e s_{b+}^o + q_{b+}^o q_{f-}^e s_{f+}^e s_{f+}^o - q_{f-}^e q_{f+}^o s_{b+}^e s_{f+}^o) \eta_b^e \eta_f^e + \\
&(q_{b-}^e q_{b+}^o s_{f-}^o s_{f+}^e - q_{b+}^o q_{f+}^e s_{b+}^o s_{f+}^e) \eta_b^e \eta_f^o + \\
&(-q_{b+}^e q_{f+}^o s_{b+}^e s_{f+}^o + q_{f-}^e q_{f+}^o s_{b-}^o s_{b+}^e) \eta_b^o \eta_f^e + \\
&(-q_{b+}^e q_{b+}^o s_{b-}^o s_{f+}^e + q_{b+}^e q_{f+}^o s_{f-}^o s_{f+}^e + q_{b+}^o q_{f+}^e s_{b-}^o s_{b+}^e - q_{f+}^e q_{f+}^o s_{b+}^e s_{f-}^o) \eta_b^o \eta_f^o + \\
&(q_{b+}^e q_{b+}^o s_{b+}^e s_{b+}^o - q_{b+}^o q_{f-}^e s_{b+}^e s_{f-}^o) \eta_f^e \eta_f^o + |\mathbb{M}_\epsilon^o| |\mathbb{M}_\mu^e| + |\mathbb{M}_\epsilon^e| |\mathbb{M}_\mu^o|
\end{aligned} \tag{4.93}$$

4.3.5.2. Caso particular, eje óptico perpendicular a la superficie.

En este caso $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{z}}$, entonces hay que sustituir $a_x = 0$ y $a_z = 1$ en las ecuaciones (4.81).

$$\begin{aligned}
q_{D\pm}^o &= 0 \\
q_{D\pm}^e &= k_\perp^2 k_z \left(\frac{k_{z,D}^e}{\epsilon k_z} \pm 1 \right) \\
s_{D\pm}^o &= -\frac{\omega}{c} k_\perp^2 \left(1 \pm \frac{k_{z,D}^o}{\mu k_z} \right) \\
s_{D\pm}^e &= 0.
\end{aligned} \tag{4.94}$$

Rápidamente encontramos que las matrices \mathbb{M}_ϵ^o y \mathbb{M}_μ^e son cero. Y por lo tanto se pueden resolver directamente de las ecuaciones (4.70) a (4.73), en dos subsistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Así podemos escribir la solución como:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_f^o \\ \tilde{\psi}_b^o \end{pmatrix} = \frac{(\mathbb{M}_\mu^o)^\dagger}{|\mathbb{M}_\mu^o|} \begin{pmatrix} 2\frac{\omega}{c} \tilde{B}_z^I \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.95}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_f^e \\ \tilde{\psi}_b^e \end{pmatrix} = \frac{(\mathbb{M}_\epsilon^e)^\dagger}{|\mathbb{M}_\epsilon^e|} \begin{pmatrix} -2k_z \tilde{E}_z^I \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.96}$$

Los determinantes y las adjuntas son fáciles de calcular ya que son matrices de 2x2.

$$|\mathbb{M}_\mu^o| = k_\perp^4 \frac{\omega^2}{c^2} \left[\left(1 + \frac{k_z^o}{\mu k_z} \right)^2 e^{-ik_z^o L} - \left(1 - \frac{k_z^o}{\mu k_z} \right)^2 e^{ik_z^o L} \right] \tag{4.97}$$

$$|\mathbb{M}_\epsilon^e| = -k_\perp^4 k_z^2 \left[\left(1 + \frac{k_z^e}{\epsilon k_z}\right)^2 e^{-ik_z^e L} - \left(1 - \frac{k_z^e}{\epsilon k_z}\right)^2 e^{ik_z^e L} \right] \quad (4.98)$$

Simplificando:

$$\tilde{\psi}_D^o = \frac{2S_D \tilde{B}_z^I \left(1 + \frac{k_{z,D}^o}{\mu k_z}\right) e^{-ik_{z,D}^o L}}{k_\perp^2 \Delta_\mu^o} \quad (4.99)$$

$$\tilde{\psi}_D^e = -\frac{2S_D \tilde{E}_z^I \left(1 + \frac{k_{z,D}^e}{\epsilon k_z}\right) e^{-ik_{z,D}^e L}}{k_\perp^2 \Delta_\epsilon^e} \quad (4.100)$$

con $S_f = 1$, $S_b = -1$ y Δ_κ^ν dados por:

$$\Delta_\mu^o = \frac{|\mathbb{M}_\mu^o|}{k_\perp^4 \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad \Delta_\epsilon^e = \frac{|\mathbb{M}_\epsilon^e|}{-k_\perp^4 k_z^2} \quad (4.101)$$

En este caso particular las relaciones de dispersión (4.35) son:

$$\epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} - k_\perp^2 - (k_z^o)^2 = 0 \quad (4.102)$$

$$\epsilon \epsilon_\parallel \mu \frac{\omega^2}{c^2} - \epsilon k_\perp^2 - \epsilon_\parallel (k_z^e)^2 = 0 \quad (4.103)$$

Calculamos las anti-transformadas de Fourier:

$$\psi_D^\nu = \frac{1}{2\pi} \int dk_x dk_y e^{ik_x x + ik_y y + k_{z,D}^\nu z} \tilde{\psi}_D^\nu(k_x, k_y) \quad (4.104)$$

Usando las ecuaciones anteriores en :

$$\mathbf{E}_D^o = \mathbf{s} \times \nabla \psi_D^o \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_D^e = -\frac{1}{\epsilon} \nabla (\mathbf{s} \cdot \nabla \psi_D^e) + \mu \ddot{\psi}_D^e \mathbf{s} \quad (4.105)$$

(y las correspondientes para los campos magnéticos) encontramos que los haces ordinario y extraordinario se propagan también como haces Bessel, de acuerdo a las siguientes ecuaciones (en coordenadas cilíndricas):

$$\mathbf{E}_D^o = \frac{2S_D \left(1 + \frac{k_{z,D}^o}{\mu k_z}\right) \omega}{\Delta_\mu^o} k_\perp \mathcal{E} e^{-i\left(\frac{\omega}{c}t - m\theta - k_z^o(z-L)\right)} \left(\frac{m}{k_\perp \rho} J_m(k_\perp \rho) \hat{\rho} + i J'_m(k_\perp \rho) \hat{\theta} \right) \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_D^e = & - \frac{2S_D \left(1 + \frac{k_{z,D}^e}{\epsilon k_z}\right) ck_{z,D}^e}{\Delta_\epsilon^e} \mathcal{B} e^{-i(\omega t - m\theta - k_{z,D}^e(z-L))} \times \\ & \times \left(iJ'_m(k_\perp \rho) \hat{\rho} - \frac{m}{k_\perp \rho} J_m(k_\perp \rho) \hat{\theta} + \frac{\epsilon}{\epsilon_\parallel} \frac{k_\perp}{k_z} J_m(k_\perp \rho) \hat{\mathbf{z}} \right) \end{aligned} \quad (4.107)$$

y para los campos magnéticos \mathbf{H} hay que hacer los cambios $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$, $\mathcal{E} \rightarrow -\mathcal{B}$, $\mu \rightarrow \epsilon$, $\epsilon, \epsilon_\parallel \rightarrow \mu$, $e \rightarrow o$ y $o \rightarrow e$

Usando la base de los vectores de polarización circular ($\hat{\mathbf{e}}_+$, $\hat{\mathbf{e}}_-$, $\hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{z}}$), reescribimos las ecuaciones (4.106) y (4.107) en la forma

$$\mathbf{E}_D^o = C_D^o e^{-i(\omega t - k_z^o(z-L))} \left(J_{m-1}(k_\perp \rho) e^{i(m-1)\theta} \hat{\mathbf{e}}_+ + J_{m+1}(k_\perp \rho) e^{i(m+1)\theta} \hat{\mathbf{e}}_- \right) \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_D^e = & C_D^e e^{-i(\omega t - k_z^e(z-L))} \times \\ & \times \left(J_{m-1}(k_\perp \rho) e^{i(m-1)\theta} \hat{\mathbf{e}}_+ - J_{m+1}(k_\perp \rho) e^{i(m+1)\theta} \hat{\mathbf{e}}_- + \frac{\epsilon}{\epsilon_\parallel} \frac{k_\perp}{k_z} J_m(k_\perp \rho) e^{im\theta} \hat{\mathbf{e}}_3 \right), \end{aligned} \quad (4.109)$$

con

$$C_D^o \equiv \frac{2iS_D \mathcal{E}}{\Delta_\mu^o \sqrt{2}} \left(1 + \frac{k_{z,D}^o}{\mu k_z} \right), \quad C_D^e \equiv \frac{2iS_D \mathcal{B}}{\Delta_\epsilon^e \sqrt{2}} \left(1 + \frac{k_{z,D}^e}{\epsilon k_z} \right) \frac{ck_{z,D}^e}{\omega}. \quad (4.110)$$

El campo eléctrico dentro del material esta dado por la superposición de los 4 campos anteriores. Y se puede escribir como:

$$\mathbf{E}_{dentro} = e^{-i\omega t} \sum C_D^\nu \gamma_\sigma^\nu \mathcal{J}_{\sigma,m}(k_\perp \rho) \Theta_{\sigma,m}(\theta) Z_D^\nu(z) \hat{\mathbf{e}}_\sigma \quad (4.111)$$

con $\nu = o, e$; $\sigma = +, -, 3$; $D = F, B$;

$$\gamma_+^o = \gamma_-^o = \gamma_+^e = -\gamma_-^e = 1, \quad \gamma_3^o = 0, \quad \gamma_3^e = \frac{\epsilon k_\perp}{\epsilon_\parallel k_z};$$

$$\mathcal{J}_{+,m} = \frac{i}{2} J_{m-1}(k_\perp \rho), \quad \mathcal{J}_{-,m} = -\frac{i}{2} J_{m+1}(k_\perp \rho), \quad \mathcal{J}_{3,m} = J_{m-1}(k_\perp \rho); \quad (4.112)$$

$$\Theta_+ = e^{i(m-1)\theta}, \quad \Theta_- = e^{i(m+1)\theta}, \quad \Theta_3 = e^{im\theta} \quad (4.113)$$

$$Z_D^\nu(z) = e^{ik_{z,D}^\nu z}. \quad (4.114)$$

Ahora, de la ecuación (4.58), (4.59) o (4.68) podemos calcular el campo transmitido,

$$\tilde{\mathbf{E}}_\perp^T = \frac{4}{k_\perp^2} \left(\frac{\omega k_z^o \tilde{B}_z^I}{\mu k_z \Delta_\mu^o} \mathbf{k}_\perp - \frac{k_z^e \tilde{E}_z^I}{\epsilon \Delta_\epsilon^e} \mathbf{k}_\perp \right) \quad (4.115)$$

haciendo el producto escalar de \mathbf{k}_\perp con la Ec. anterior y usando la Ec. de Maxwell⁵ $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}^T = 0$, obtenemos la componente z ,

$$\tilde{E}_z = \frac{4k_z^e \tilde{E}_z^I}{\epsilon k_z \Delta_\epsilon^e} \quad (4.116)$$

Estos resultados⁶ serán de suma importancia en la sección 5, ya que usaremos el haz de bombeo exactamente como el haz que está dentro del material y no simplemente haciendo el cambio $k_z \rightarrow \begin{pmatrix} k_z^e \\ k_z^o \end{pmatrix}$ en los campos en que se propagan en el vacío.

4.3.6. Ortonormalidad para los modos electromagnéticos en un medio birrefringente uniaxial no disipativo.

Los campos eléctricos y magnéticos asociados a los modos ordinarios y extraordinarios vienen dados por las ecuaciones (4.33)- (4.34) en el espacio de configuración. La condición ortonormalidad, la ecuación (4.22), en términos de los dos campos de Fourier se convierte en

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\kappa, \kappa'} &= \\ \pi^2 \int d^2 \mathbf{k}_\perp \delta(k_z(\mathbf{k}_\perp, \omega) - k_z(\mathbf{k}_\perp, \omega')) &\left[\tilde{\mathbf{D}}_\kappa^*(\mathbf{k}_\perp, \omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\kappa'}(\mathbf{k}_\perp, \omega') + \tilde{\mathbf{H}}_\kappa^*(\mathbf{k}_\perp, \omega) \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{\kappa'}(\mathbf{k}_\perp, \omega') \right] \\ &= \hbar \omega \delta_{\kappa, \kappa'} \end{aligned} \quad (4.117)$$

Las relaciones de dispersión están dadas por la ecuación (4.41) para los modos ordinarios y la eq (4.42) para los modos extraordinarios. Como consecuencia de ello, para los modos ordinarios

$$\begin{aligned} \delta(k_z^o(\mathbf{k}_\perp, \omega) - k_z^o(\mathbf{k}_\perp, \omega')) &= \delta(\omega/c - \omega'/c) \frac{c|k_z^o|}{\epsilon \omega} \\ &= \frac{\delta(\omega/c - \omega'/c) \sqrt{\epsilon - k_\perp^2 c^2 / \omega^2}}{\epsilon}, \end{aligned} \quad (4.118)$$

⁵Esta ecuación es valida otra vez porque \mathbf{E}^T está en el vacío.

⁶Estos resultados forman parte del trabajo publicado en [76]

mientras que para los modos extraordinarios

$$\begin{aligned} \delta(k_z^e(\mathbf{k}_\perp, \omega) - k_z^e(\mathbf{k}_\perp, \omega')) &= \delta(\omega/c - \omega'/c) \frac{c|k_z^e + \alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_\perp|}{n_{eff}^2 \omega} \\ &= \frac{\delta(\omega/c - \omega'/c) \sqrt{1 - \eta k_\perp^2 c^2 / \omega^2}}{n_{eff}^2}. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Para los modos ordinarios

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}_\kappa^*(\mathbf{k}_\perp, \omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\kappa'}(\mathbf{k}_\perp, \omega) + \tilde{\mathbf{H}}_\kappa^*(\mathbf{k}_\perp, \omega) \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{\kappa'}(\mathbf{k}_\perp, \omega) &= \left[2 \frac{\omega^4 \epsilon^2}{c^4} (1 - (\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{k}}^o)^2) \right] (\tilde{\psi}_\kappa^o)^* \tilde{\psi}_{\kappa'}^o = \\ \left[2 \frac{\omega^4 \epsilon^2}{c^4} (1 - a_z^2) 2 \frac{\omega^2 \epsilon}{c^2} \left(a_z^2 k_\perp^2 - 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_\perp) a_z \sqrt{\frac{\epsilon \omega^2}{c^2} - k_\perp^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_\perp)^2} \right) \right] &\tilde{\psi}_\kappa^{o*} \tilde{\psi}_{\kappa'}^o, \end{aligned} \quad (4.120)$$

mientras que para los modos extraordinarios

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}_\kappa^*(k_\perp, \omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\kappa'}(k_\perp, \omega) + \tilde{\mathbf{H}}_\kappa^*(k_\perp, \omega) \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{\kappa'}(k_\perp, \omega) &= \\ \left[2 \frac{\epsilon_\parallel}{\epsilon} \frac{\omega^2}{c^2} \left(\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}^e)^2 \right) \right] &\tilde{\psi}_\kappa^{e*} \tilde{\psi}_{\kappa'}^e. \end{aligned} \quad (4.121)$$

Hay que notar que debido a la existencia de un vector privilegiado \mathbf{a} para el medio birrefringente, la isotropía en el plano perpendicular al eje z se rompe a menos que $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{e}}_z$ entonces,

$$k_z^e(\mathbf{k}_\perp, \omega) = \sqrt{\epsilon \omega^2 / c^2 - \epsilon k_\perp^2 / \epsilon_\parallel}. \quad (4.122)$$

En este marco privilegiado la cuantización del campo electromagnético se puede realizar, la evaluación del factor de normalización se da través de la ecuación

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}_\kappa^{(o,e)*}(k_\perp, \omega) \cdot \tilde{\mathbf{E}}_{\kappa'}^{(o,e)}(k_\perp, \omega) + \tilde{\mathbf{H}}_\kappa^{(O,E)*}(k_\perp, \omega) \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{\kappa'}^{(o,e)}(k_\perp, \omega) \\ = 2 \frac{\omega^2 k_\perp^2 \epsilon}{c^2} \tilde{\psi}_\kappa^{(o,e)*} \tilde{\psi}_{\kappa'}^{(o,e)}. \end{aligned} \quad (4.123)$$

válido tanto para los modos ordinarios y extraordinarios . Si la cuantización se realiza en un marco con una orientación arbitraria de \mathbf{a} , por ondas planas :

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y}^o = \mathcal{N}_{\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y}^o \delta(k_x - k_x^o) \delta(k_y - k_y^o) \quad (4.124)$$

$$\tilde{\psi}_{\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y}^e = \mathcal{N}_{\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y}^e \delta(k_x - k_x^o) \delta(k_y - k_y^o) \quad (4.125)$$

y los factores de normalización son

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y}^o &= \sqrt{\frac{\hbar c}{2\pi^2 |k_z^o| (\epsilon\omega^2/c^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}^o)^2)}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{k}_x, \mathbf{k}_y}^e &= \sqrt{\frac{\hbar c n_{eff}^2 \epsilon / \epsilon_{||}}{2\pi^2 |k_z^e + \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_{\perp})| (\epsilon\omega^2/c^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}^e)^2)}}\end{aligned}\quad (4.126)$$

Para los modos de Bessel, en general, podemos escribir

$$\tilde{\psi}_{\kappa}^o = \frac{\delta(k_{\perp} - k_{\perp\kappa})}{k_{\perp\kappa}} \sum_m d_{\kappa m}^o e^{im\varphi_{\mathbf{k}_{\perp}}} \quad (4.127)$$

$$\tilde{\psi}_{\kappa}^e = \frac{\delta(k_{\perp} - k_{\perp\kappa})}{k_{\perp\kappa}} \sum_m d_{\kappa m}^e e^{im\varphi_{\mathbf{k}_{\perp}}} \quad (4.128)$$

Los coeficientes $d_{\kappa m}^{(O,E)}$ se deben seleccionar para garantizar las relaciones de ortogonalidad. Explícitamente, para los modos ordinarios tenemos que la matriz de traslape tiene la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\kappa, \kappa'}^o &= \delta\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega'}{c}\right) \frac{\delta(k_{\perp} - k_{\perp\kappa})}{k_{\perp\kappa}} \times \\ &\left[\sum_m \mathfrak{s}_{m,m}^o |d_{\kappa,m}^o|^2 + \sum_m \mathfrak{s}_{m,m\pm 1}^o d_{\kappa,m}^{o*} d_{\kappa,m\pm 1}^o + \sum_m \mathfrak{s}_{m,m\pm 2}^o d_{\kappa,m}^{o*} d_{\kappa,m\pm 2}^o \right]\end{aligned}\quad (4.129)$$

con

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_{m,m}^o &= 4\pi^3 \sqrt{\epsilon\omega^2/c^2 - k_{\perp}^2} \left[\frac{\omega^3 \epsilon}{c^3} (1 - a_z^2) + \frac{\omega}{c} k_{\perp}^2 \left[a_z^2 - \frac{a_x^2 + a_y^2}{2} \right] \right] \\ \mathfrak{s}_{m,m\pm 1}^o &= -4\pi^3 \frac{\omega}{c} (\epsilon\omega^2/c^2 - k_{\perp}^2) (a_x \mp ia_y) a_z k_{\perp} \\ \mathfrak{s}_{m,m\pm 2}^o &= -2\pi^3 \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\omega^2/c^2 - k_{\perp}^2} \left[\frac{a_x^2 - a_y^2}{2} \mp ia_x a_y \right] k_{\perp}^2,\end{aligned}\quad (4.130)$$

mientras que para los modos extraordinarios

$$\mathcal{S}_{\kappa, \kappa'}^e = \delta\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega'}{c}\right) \frac{\delta(k_{\perp} - K_{\perp\kappa})}{k_{\perp\kappa}} \sum_{m,m'} \mathfrak{s}_{m,m'}^e d_{\kappa,m}^{e*} d_{\kappa,m'}^e \quad (4.131)$$

donde las expresiones explícitas para los coeficientes de traslape $\mathfrak{s}_{m,m'}^e$ se pueden calcular directamente de la última ecuación de la sección 4.3.3. $\mathfrak{s}_{m,m'}^e$ es diferente de cero sólo para m con la misma paridad de m' y su valor disminuye a medida que $m - m'$ aumenta y

necesariamente $k_{\perp} < \omega/c$. De hecho, en el límite paraxial $\mathfrak{s}_{m,m\pm 1,2}^o \ll \mathfrak{s}_{m,m}^o$. Este cálculo muestra que cada vez que $\mathbf{a} \neq \hat{\mathbf{e}}_z$, no es posible disponer de los modos ordinarios y extraordinarios ortonormales con expansiones de un único término $c_{\kappa} m^{(o,e)} = d_{m^{\kappa}}^{(o,e)} \delta_{m,m^{\kappa}}$. En términos de fotones con momento angular orbital, esto significa que, en general, la función de onda no será un estado propio del momento angular orbital a lo largo del eje z .

Dada la matriz de traslape $\mathcal{S}_{mm'}$, existen varios procedimientos para la construcción de una base ortonormal. Para un experimento en el que el haz de bombeo incidente tiene un momento angular m_0 bien definido, la ortogonalización podría ser realizada en un esquema de Graham-Schmidt con un modo de referencia tanto para el conjunto de los modos ordinarios y extraordinarios asociados al mismo valor m_0 . Es decir, salvo factores de normalización los coeficientes de la ecuación (4.128) podrían ser elegidos como se muestra aquí:

$$\begin{aligned} d_{\omega,k_{\perp},m_0,m} &= \delta_{m,m_0} \\ d_{\omega,k_{\perp},m_0+1,m} &= \delta_{m,m_0+1} - s_{m_0,m_0+1} \delta_{m_0,m_0+1} \\ d_{\omega,k_{\perp},m_0-1,m} &= \delta_{m,m_0-1} - s_{m_0+1,m_0-1} \delta_{m_0,m_0+1} + s_{m_0,m_0+1} s_{m,m_0-1} \delta_{m,m_0} \end{aligned} \quad (4.132)$$

En las aplicaciones prácticas se podría restringir la discusión a un número finito de índices m , teniendo en cuenta que para un haz de bombeo en el que la aproximación paraxial es válida, y la incidencia sobre el cristal es cuasi normal, los fotones señal y acompañante pueden ser descritos de una manera sencilla, debido al hecho de que los términos de traslape se vuelven insignificantes. Estos argumentos que incluyen una descripción vectorial del campo cuantizado dentro del cristal, complementan los dados en la Ref. [23].

Sólo para el caso particular $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{e}}_z$ la condición ortonormalidad para los modos de Bessel tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathbf{k}_{\perp}}^o &= \sqrt{\frac{\hbar c}{4\pi^3 |k_z^o| (\epsilon\omega^2/c^2 - |k_z^o|^2)}} \\ \mathcal{N}_{\mathbf{k}_{\perp}}^e &= \sqrt{\frac{\hbar c n_{eff}^2 \epsilon / \epsilon_{||}}{4\pi^3 |k_z^e| (\epsilon\omega^2/c^2 - |k_z^e|^2)}} \end{aligned} \quad (4.133)$$

4.4. Consideraciones generales.

En resumen, la cuantización del campo electromagnético para luz estructurada en un medio anisotrópico no disipativo no es trivial puesto que la construcción de modos or-

tonormales puede complicarse tal y como se mostró en última subsección. El motivo es que la presencia de un eje óptico, además de las fronteras, rompen la isotropía espacial y esto es el elemento clave en la elección de modos estables. Sin embargo, según nuestros resultados, existen al menos dos casos donde este rompimiento de simetría no es determinante en la posibilidad de elegir fácilmente los modos para realizar la cuantización. Uno de estos casos corresponde a haces en el límite paraxial ya que entonces los términos de traslape pueden ser despreciables. El otro caso corresponde a aquél en que la normal a las superficies que limitan al cristal y al eje de simetría de los modos de interés coinciden con el eje óptico. Este último caso será tratado en detalle en el capítulo 5.

Capítulo 5

Conversión paramétrica descendente

En la sección 3.2.2 se analizó el proceso de amplificación paramétrica dentro del campo de la óptica clásica. La contraparte cuántica de este fenómeno se puede entender a partir de un diagrama de niveles de energía para un átomo, en el que se absorbe un fotón del haz de bombeo y posteriormente se emiten dos nuevos fotones estimulados por el haz señal. Uno de ellos posee frecuencia ω_i mientras que el otro que amplifica al haz señal tiene frecuencia ω_s .

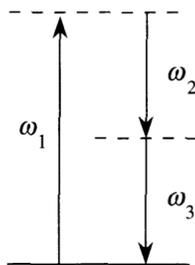


Figura 5.1: Diagrama de niveles de energía para el proceso de amplificación paramétrica, $\omega_s + \omega_i = \omega_p$.

Ahora si no está presente el haz señal en la entrada del cristal no habrá emisión estimulada, pero puede haber emisión espontánea y es entonces que se le llama proceso de conversión paramétrica descendente espontánea o simplemente conversión paramétrica descendente (CPD).

5.1. Antecedentes

La CPD es un proceso en el cual se hace incidir un láser (denominado “haz de bombeo”)¹, suficientemente intenso, en un cristal no lineal $\chi^{(2)}$, unos cuantos fotones del haz se dividen en dos fotones de frecuencia más baja denominados “señal” y “acompañante”² constituyendo así un par de fotones altamente correlacionados. Por conservación de la energía se tiene que cumplir que:

$$\omega_p = \omega_s + \omega_i \quad (5.1)$$

donde los subíndices p , s y i se refieren a “bombeo”, “señal” y “acompañante” respectivamente.

También se deben cumplir las leyes de conservación de momento:

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i. \quad (5.2)$$

En el caso de haces con momento angular orbital, el fotón está descrito por una superposición continua de modos con diversos valores de \mathbf{k} , en principio los fotones de bombeo, señal y acompañante podrían mantener esta estructura. Las condiciones bajo las cuales hay conservación de momento angular orbital es todavía un problema abierto; hay artículos [77, 78, 79] que afirman que:

$$m_p = m_s + m_i \quad (5.3)$$

donde las m 's son los eigenvalores del operador de momento angular orbital \hat{L}_z .

Mientras que otros [19, 80, 22] afirman que:

$$m_p \neq m_s + m_i. \quad (5.4)$$

5.1.1. CPD para ondas planas

Debido al empatamiento de fase ec. (5.2) los haces convertidos son generados en conos, para el tipo I los conos son concéntricos (y coincidentes si se trata del caso degenerado) y para el tipo II los conos se traslapan.

¹En este trabajo vemos que el haz incidente y el haz de bombeo son diferentes.

²Al igual que en el proceso de amplificación paramétrica en inglés se le llama *idler* a este fotón, pero ya no tiene el mismo significado, porque en este proceso ambos fotones son igualmente importantes.

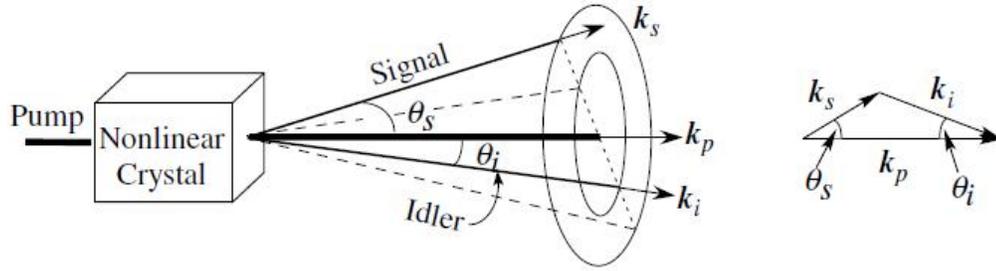


Figura 5.2: CPD tipo I y diagrama de conservación de momento.

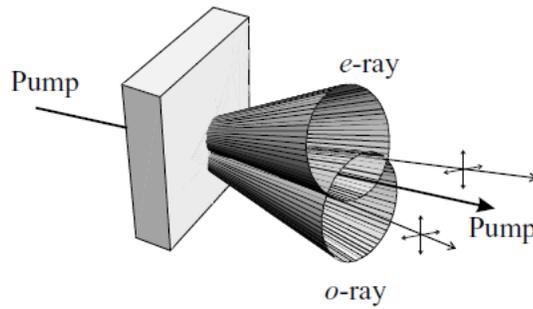


Figura 5.3: PDC tipo II

El cumplimiento de las ecuaciones (5.1) y (5.2) sólo es ideal, más adelante se verá que solo se satisfacen aproximadamente.

Como ya vimos en la sección 3.2 la polarización de un medio no lineal de segundo orden está dada por:

$$P_i = \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k. \quad (5.5)$$

De esta forma al cuantizar los campos \mathbf{E} el hamiltoniano de interacción queda dado por:

$$\hat{H}_I = \int d^3x \chi_{ijl} \hat{\mathbf{E}}_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}_j^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}_l^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \text{H.c.} \quad (5.6)$$

donde $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$ y $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$ son las partes de frecuencia positiva y negativa del operador de campo eléctrico.

La alta intensidad del haz de bombeo y la coherencia esperada de su fuente (un láser) permite utilizar una aproximación semiclásica para el haz incidente. Entonces la ecuación anterior queda:

$$\hat{H}_I = \int d^3x \chi_{ijl} \mathbf{E}_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}_j^{(-)}(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}_l^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \text{H.c.} \quad (5.7)$$

A partir de aquí diversos autores tratan diferente a los campos \mathbf{E} .

Por ejemplo Hong y Mandel [14] hacen el tratamiento suponiendo que el haz de bombeo son ondas planas y la cuantización de los campos convertidos³ queda dada a través de una expansión multimodal en ondas planas para cada vector de campo eléctrico de los haces convertidos:

$$\hat{\mathbf{E}}^+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}, s} i \left(\frac{\hbar\omega(\mathbf{k})}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (5.8)$$

donde los $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}s}$ denotan los vectores de polarización de los fotones ($s = 1, 2$) para cada modo \mathbf{k} y $a_{k,s}$ el operador de aniquilación para el modo k, s de frecuencia $\omega(k)$. Sin embargo, estos operadores utilizan una cuantización donde la ecuación para la energía corresponde a propagación se da en el vacío, es decir, no se ha tomado en cuenta las propiedades del medio. Al hacer la integral de volumen en (5.6) se llega a:

$$H_I \propto \sum_{\mathbf{k}', s'} \sum_{\mathbf{k}'', s''} \chi_{ijl} (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}' s'}^*)_i (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}'' s''}^*)_j E_l \hat{a}_{\mathbf{k}' s'}^\dagger(t) \hat{a}_{\mathbf{k}'' s''}^\dagger(t) e^{i[\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t]} \prod_{n=1}^3 \text{sinc} \left[(\mathbf{k}_b - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'')_n \frac{l_n}{2} \right]. \quad (5.9)$$

Los superíndices ' y '' corresponden a los subíndices s o i y E_l es la componente l del vector de campo eléctrico de bombeo dado por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} e^{i[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t]}. \quad (5.10)$$

Para ver la evolución temporal hay que hacer la integral del hamiltoniano sobre el tiempo de interacción, entonces:

$$\int_0^T dt H_I(t) \propto \sum_{\mathbf{k}', s'} \sum_{\mathbf{k}'', s''} \chi_{ijl} (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}' s'}^*)_i (\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}'' s''}^*)_j E_l \hat{a}_{\mathbf{k}' s'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'' s''}^\dagger e^{i\Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}/2} \prod_{n=1}^3 \text{sinc} \left[(\mathbf{k}_b - \mathbf{k}' - \mathbf{k}'')_n \frac{l_n}{2} \right] \text{sinc} \Delta\omega T e^{i\Delta\omega T/2} \quad (5.11)$$

³En las secciones 4 se habla con más detalle de la cuantización.

aquí se supuso que $\hat{a}^\dagger(t)_{\mathbf{k},s} \propto e^{-i\omega(\mathbf{k})t}$ Entonces podemos ver a través de (5.11) que la conservación de la energía y momento está dada a través de las funciones $\text{sinc}(\Delta\omega)T$ y $\text{sinc}(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{l})$ respectivamente con

$$\Delta\omega = \omega(\mathbf{k}_b) - \omega(\mathbf{k}_s) - \omega(\mathbf{k}_i) \quad (5.12)$$

y

$$\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_b - \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i. \quad (5.13)$$

La función $\text{sinc}(\Delta\mathbf{k} \cdot \mathbf{l})$ es la que define el empatamiento de fase, para $\Delta\mathbf{k} = 0$, del cual ya se habló 3.2 y debido al comportamiento de la función $\text{sinc}(x)$ vemos que no están muy lejos de cumplirse las ecs. (5.1) y (5.2), ya que la mayor contribución se encuentra en las región en que $x \approx 0$.

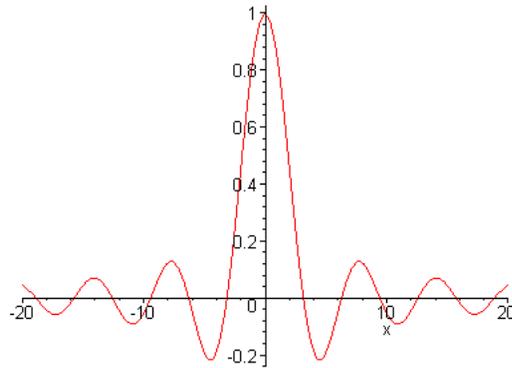


Figura 5.4: Función sinc, la mayor parte del área bajo la curva está en la región donde $x \approx 0$

En los trabajos de [81] y [61] se considera el efecto de la birrefringencia a través de los vectores de onda de cada campo, en donde se deja que cada vector satisfaga la relación de dispersión que le corresponda (ordinaria o extraordinaria), por ejemplo, si se propagan el haz de bombeo y señal como ordinarios⁴ y el acompañante como extraordinario, se promueven los vectores de onda de la siguiente forma $\mathbf{k}_p \rightarrow \mathbf{k}_p^O$, $\mathbf{k}_s \rightarrow \mathbf{k}_s^O$ y $\mathbf{k}_i \rightarrow \mathbf{k}_i^E$.

⁴El haz de bombeo se puede mandar polarizado de tal forma que se propague solo como ordinario o sólo como extraordinario, si no se dividirá en dos por efectos de birrefringencia, pero debido a las condiciones de empatamiento de fase sólo se escoge uno.

Además en los primeros dos artículos se le permite tener estructura escalar al haz, en este caso gaussiana. Con respecto a las reglas de conservación, en estos trabajos se hace la integral sobre el tiempo suponiendo que se puede extender desde $-\infty$ hasta ∞ por lo que en lugar de la función sinc se obtiene una δ de Dirac, recuperandose así la ecuación (5.1).

Ejemplifiquemos el caso de CPD tipo II; haciendo una aproximación de propagación colineal de los haces convertidos la ecuación (5.11) queda como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt H_I(t) \propto \int d\mathbf{k}_P d\mathbf{k}_O d\mathbf{k}_E \hat{a}_O^\dagger(\omega_O) \hat{a}_E^\dagger(\omega_e) \alpha(\omega_O + \omega_E) \Phi(\mathbf{k}_P, \mathbf{k}_O, \mathbf{k}_E) + \text{H.c.} \quad (5.14)$$

donde las funciones Φ y α están dadas por:

$$\Phi(\mathbf{k}_P, \mathbf{k}_O, \mathbf{k}_E) = \prod_{n=1}^3 \text{sinc} \left[(\mathbf{k}_P - \mathbf{k}_O - \mathbf{k}_E) \frac{l_n}{2} \right] \cdot \exp - [w^2 |\mathbf{e}_z \times (\mathbf{k}_P)|^2] \quad (5.15)$$

$$\alpha(\omega_O + \omega_E) = \exp \left[- \left(\frac{\omega_O + \omega_E - \omega_{central}}{\sigma} \right)^2 \right]. \quad (5.16)$$

Aquí w es la cintura del haz de bombeo (cuya dirección principal de propagación es paralela a la superficie del cristal) y σ es el ancho de banda del pulso de bombeo. En este trabajo reportaremos resultados cuando el haz de bombeo es cuasi-monocromático ($\sigma \ll \omega_{central}$).

5.1.2. CPD para haces con MAO

5.1.2.1. Antecedentes

Algunos años después de la generación de vórtices ópticos con momento angular orbital (MAO) [6] el estudio de los efectos cuánticos no lineales en esos haces fue reconocido como un tema interesante [82, 83, 84]. Una cuestión importante se refiere a las condiciones para las cuales el MAO de los fotones es conservado. Por un lado, estudios pioneros en la generación de segundo armónico [82, 85] revelaron que, con el arreglo experimental implementado, el MAO se conservó; similarmente hubo una clara evidencia de conservación del MAO en conversión paramétrica descendente (CPD) obtenida en [20], donde el enredamiento del MAO de cada uno de los dos fotones fue analizado. Los resultados abrieron la posibilidad de usar el MAO para la implementación de protocolos de información cuántica. Las consecuencias de la conservación del MAO fueron también estudiadas en amplificación paramétrica [77]. Por otro lado, estudios de transferencia de MAO a los haces

de fotones convertidos en un oscilador paramétrico óptico de tipo II [86, 22] mostraron que la cavidad y efectos de anisotropía juegan un papel importante en la dinámica de los modos transversales, de tal forma que el MAO podría simplemente perderse. También se predijo y se comprobó experimentalmente que la geometría donde los haces de bombeo, señal y acompañante se propagan aproximadamente en la misma dirección es una condición importante para la conservación del MAO en CPD. En el vacío, es bien sabido que las rotaciones con simetría azimutal inducen la conservación del momento angular total (MAT). Para los fotones que se propagan en un medio, la conservación del momento angular de espín (MAS), relacionada con la polarización, más el MAO, relacionado con un frente de fase helicoidal dando una componente azimutal al vector de Poynting dependen de la posibilidad de que haya o no intercambio de momento angular con el medio. Las susceptibilidades dieléctricas lineal y no lineal de segundo orden $\chi_{ij}^{(1)}$ y $\chi_{ijk}^{(2)}$ de un cristal suelen reflejar la simetría de este y romper de la simetría ante rotaciones respecto a un eje azimutal. Esto afectaría al campo electromagnético; de hecho, las transformaciones de MAS a OAM y viceversa de la luz debidas a la anisotropía e inhomogeneidad de la susceptibilidad lineal han sido observadas [87]. Consecuencias generales de la relevancia de la geometría en procesos cuánticos no lineales, particularmente en CPD, han sido llevadas a cabo [83, 88, 89] para entender las observaciones experimentales aparentemente contradictorias. La mayor parte del análisis teórico y experimental del MAO en CPD ha sido dedicado a haces Laguerre-Gauss en el régimen paraxial y no incluyen un carácter vectorial del campo electromagnético. En este capítulo se estudian las correlaciones entre el MAS y el OAM óptico mediado por un cristal en un proceso específico de CPD. En un esfuerzo por hacer una interpretación del análisis teórico lo más concluyente posible, consideramos un haz invariante ante propagación y con MAO incidiendo en un cristal no lineal. Escogemos la configuración geométrica más simple en la cual el haz en el medio preserve su invariancia ante propagación a pesar de la presencia de birrefringencia [70]. La configuración geométrica garantiza simetría azimutal para los fotones a lo largo de su dirección principal de propagación. El campo eléctrico cuantizado se describirá en la base de los modos Bessel vectoriales correspondientes por lo que las propiedades de momento angular de los fotones convertidos se podrá leer directamente.

5.1.3. CPD de haces Laguerre-Gaussianos

En [19, 20, 21, 22] se ha tratado la CPD con haces LG, en estos trabajos se habla de estados resultantes de 2 fotones que conservan MAO, es decir que se satisface la ec. (5.3). Por ejemplo que un haz de bombeo con $m = 0$ dará lugar un estado representado por:

$$|\psi\rangle = C_{0,0}|0\rangle|0\rangle + C_{1,-1}|1\rangle|-1\rangle + C_{-1,1}|-1\rangle|1\rangle + \dots \quad (5.17)$$

donde las $C_{i,j}$ son las amplitudes de probabilidad de medir un estado $|i = \pm m_1\rangle|j = \mp m_2\rangle$, es decir, $m_1 + m_2 = m = 0$.

El estado de dos fotones está dado ([16, 90, 61]) por:

$$|\psi\rangle_2 = \int \int d\mathbf{k}_p d\mathbf{k}_s d\mathbf{k}_i \Phi(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \hat{a}_{w;n_s,m_s,S_s}^\dagger \hat{a}_{w;n_i,m_i,S_i}^\dagger |0,0\rangle \quad (5.18)$$

En particular, para el caso de propagación colineal, la función Φ es:

$$\Phi(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \propto g_{eff} \text{sinc} \left[\frac{|\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i|^2 L}{4k_p} \right] F_{w;n_p,m_p,S_p}(\mathbf{k}_p) F_{w;n_s,m_s,S_s}(\mathbf{k}_s) F_{w;n_i,m_i,S_i}(\mathbf{k}_i) \quad (5.19)$$

donde las \mathbf{q}_j son las partes transversales de los vectores de onda \mathbf{k}_j con $j = s, i, p$ y $F_{w;n,m,S}(\mathbf{k})$ es el espectro angular de los fotones. Aquí se ha usado la aproximación paraxial y se ha encontrado un empatamiento de fase para las partes transversales del vector de onda.

En el caso de fotones con momento angular a lo largo de la dirección de la normal al cristal, los factores de estructura contienen una exponencial de la forma

$$e^{im\varphi_{\mathbf{k}}},$$

donde $\varphi_{\mathbf{k}}$ será el ángulo azimutal en el plano transversal del vector \mathbf{k} . Aún si el factor de acoplamiento efectivo g_{eff} es independiente de los vectores \mathbf{k} , el argumento de la función sinc, involucra al producto punto $\mathbf{q}_s \cdot \mathbf{q}_i \sim \cos(\varphi_{\mathbf{k}_s} - \varphi_{\mathbf{k}_i})$. Esto lleva a que al integrar sobre los ángulos $\varphi_{\mathbf{k}}$ en la Ec.5.18 no necesariamente se obtenga una función delta que con lleve la conservación del momento angular orbital.

Hay que mencionar que en [19] se toma en cuenta la posibilidad de que no se cumpla (5.3), en [82] se encuentra no conservación del MAO y en [23] se hace la observación de que no necesariamente se tiene que cumplir, quedando entonces:

$$m_p \neq m_s + m_i \quad (5.20)$$

En [25] se usaron haces Bessel en proceso de amplificación paramétrica y concluyen que el MAO puede ser conservado, aunque en estos trabajos tampoco se ha tomado en cuenta el fenómeno de la birrefringencia.

5.1.4. Conversión paramétrica descendente para un haz Bessel vectorial, más allá del régimen no paraxial

5.1.4.1. Geometría

En la sección 4.3.4 se vio la propagación de un haz Bessel en un medio birrefringente y como este se puede deformar de acuerdo a la geometría. En lo que sigue usaremos la geometría para la cual el haz Bessel al entrar al cristal birrefringente, no se deforma, es decir, conserva su estructura Bessel.

Consideremos un cristal BBO de radio R y longitud L , con un corte tal que su eje óptico $\hat{\mathbf{a}}$ es normal a su superficie. Escogemos el sistema de referencia de tal manera que $\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{z}}$.

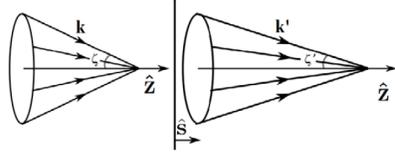


Figura 5.5: Geometría del sistema en consideración. El haz Bessel incidente es una superposición de ondas planas con vectores de onda que se propagan sobre la superficie de un cono con ángulo de axición ζ . Dentro del cristal también será una superposición de ondas planas propagándose sobre la superficie de un cono pero con un ángulo ζ' que es diferente para los modos transversales eléctricos (con amplitud $\mathcal{B} = 0$) y transversales magnéticos ($\mathcal{N} = 0$) y depende de las funciones dieléctricas birrefringentes ϵ_{\parallel} y ϵ [70]. El vector de propagación principal $\hat{\mathbf{e}}_q = \hat{\mathbf{z}}$ se ha colocado paralelo al eje óptico del cristal $\hat{\mathbf{s}}$. Las líneas verticales representan las fronteras del cristal. La escala dependerá de los parámetros específicos del sistema.

5.1.4.2. Campo Electromagnético fuera y dentro del material.

En este trabajo se hará una diferencia entre el haz incidente, que es el que esta afuera del material y el haz de bombeo que es el que ha atravesado la superficie y esta dentro del material, y que como vimos en el capítulo anterior no necesariamente conservan la misma estructura. Con la geometría descrita y utilizando los resultados del capítulo 4, un haz Bessel que incide sobre el cristal, se transmite en el material con una estructura Bessel, dada por las ecuaciones (4.108) y (4.109) que se puede escribir como:

$$\mathbf{E}_m^p = e^{-i\omega^p t} \sum_{\kappa} \gamma_{\sigma^p, D^p, m^p}^{\nu^p}(k_z, k_z^{\nu^p}, k_{\perp}) \mathfrak{J}_{\sigma^p, m^p}(k_{\perp} \rho) \Theta_{\sigma^p, m^p}(\theta) Z_D^{\nu^p}(z) \hat{\mathbf{e}}_{\sigma^p} \quad (5.21)$$

Le hemos puesto el superíndice p para denotar que este será el haz de bombeo, este será el haz que dará lugar a la creación de los fotones señal y acompañante, que como es común, denotaremos con los superíndices s e i respectivamente. Por estar dentro del medio birrefringente estos campos pueden estar en el modo ordinario o o extraordinario e . Ya que el haz de bombeo es un haz Bessel, usaremos una base de funciones Bessel para la cuantización de los campos señal y acompañante, es decir usaremos los resultados del capítulo 4.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_m^{\nu(s)} = & e^{-i\omega t} \sum_{\sigma,\nu,D} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dk_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \mathcal{N}^{\nu}(\omega, k_z^{\nu}, k_{\perp}) \mathfrak{J}_{\sigma,m}(k_{\perp}\rho) \Theta_{\sigma,m}(\theta) \times \\ & \times Z_D^{\nu}(z) \hat{\mathbf{e}}_{\sigma} \hat{a}_m(k_z^{\nu}, k_{\perp}) + H.c. \end{aligned} \quad (5.22)$$

con $\nu = o, e$; $\sigma = +, -, 3$; $Z_D^{\nu}(z) = e^{ik_{z,D}^{\nu}z}$;

$$\mathfrak{J}_+ = \frac{i}{2} J_{m-1}(k_{\perp}\rho), \quad \mathfrak{J}_- = -\frac{i}{2} J_{m+1}(k_{\perp}\rho), \quad \mathfrak{J}_3 = J_{m-1}(k_{\perp}\rho); \quad (5.23)$$

$$\Theta_+ = e^{i(m-1)\theta}, \quad \Theta_- = e^{i(m+1)\theta}, \quad \Theta_3 = e^{im\theta} \quad (5.24)$$

Y los factores de normalización dadas por las Ecs. (4.133)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^o &= \sqrt{\frac{\hbar c}{4\pi^3 |k_z^o| (\epsilon\omega^2/c^2 - |k_z^o|^2)}} \\ \mathcal{N}^e &= \sqrt{\frac{\hbar c n_{eff}^2 \epsilon / \epsilon_{||}}{4\pi^3 |k_z^e| (\epsilon\omega^2/c^2 - |k_z^e|^2)}} \end{aligned}$$

5.2. Hamiltoniano de interacción para CPD de fotones estructurados

Habiendo escrito los campos con esta notación podemos ponerlos en el hamiltoniano de interacción:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I &= \sum_{h,j,l} \int_V d^3r \chi_{hjl} \hat{E}_h^{s*} \hat{E}_j^{i*} E_l^p \\ &= \sum \int d^4k \chi_{hjl} \int_V d^3r (\mathcal{N}^{\nu^s})^* (\mathcal{N}^{\nu^i})^* \gamma_{\sigma^p, D^p}^{\nu^p} \mathfrak{J}_{\sigma^s, m^s}^* \mathfrak{J}_{\sigma^i, m^i}^* \mathfrak{J}_{\sigma^p, m^p} \times \\ &\quad \Theta_{\sigma^s, m^s}^* \Theta_{\sigma^i, m^i}^* \Theta_{\sigma^p, m^p} Z_{D^s}^* Z_{D^i}^* Z_{D^p} (\hat{\mathbf{e}}_{\sigma^s})_i^* (\hat{\mathbf{e}}_{\sigma^i})_j^* (\hat{\mathbf{e}}_{\sigma^p})_l e^{-i(\omega^p - \omega^s - \omega^i)t} \times \\ &\quad \hat{a}_{m^s}^{\dagger}(k_z^{\nu^s}, k_{\perp}) \hat{a}_{m^i}^{\dagger}(k_z^{\nu^i}, k_{\perp}). \end{aligned} \quad (5.25)$$

la suma se hace sobre todos los índices $h, j, l, \sigma^s, \sigma^i, \sigma^p, \nu^s, \nu^i, \nu^p, q^s, q^i, q^p, m^s, m^i$. Y $d^4k = dk_{\perp}^s dk_{\perp}^i dk_z^s dk_z^i$. Aquí se ha supuesto que el material es homogéneo, es decir, χ_{hjl} no depende de las coordenadas espaciales.

Antes de seguir hacemos las siguientes definiciones:

$$m_+ \equiv m - 1, \quad m_- \equiv m + 1, \quad m_3 \equiv m \quad (5.26)$$

así cualquiera de estas 3 definiciones pueden ser representadas por m_{σ} (recordemos que $\sigma = +, -, 3$). Evaluando la integral de volumen en coordenadas cilíndricas se puede separar fácilmente en 3 partes.

La parte angular:

$$\int_0^{2\pi} d\theta (\Theta_{m_{\sigma^s}})^* (\Theta_{m_{\sigma^i}})^* (\Theta_{m_{\sigma^p}}) = \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(m_{\sigma^p} - m_{\sigma^s} - m_{\sigma^i})\theta} = 2\pi \delta_{m_{\sigma^i}, m_{\sigma^p} - m_{\sigma^s}}, \quad (5.27)$$

la longitudinal:

$$\begin{aligned} \int_0^L (Z_{D^s})^* (Z_{D^i})^* Z_{D^p} dz &= \int_0^L e^{-ik_{z,D^i}^{\nu^s}} e^{-ik_{z,D^i}^{\nu^i}} e^{ik_{z,D^p}^{\nu^p}} dz \\ &= -L e^{-i\frac{L}{2}\Delta k_{z\{D\}}^{\{\nu\}}} \operatorname{sinc}\left(\frac{L}{2}\Delta k_{z\{D\}}^{\{\nu\}}\right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

con $\Delta k_{z\{D\}}^{\{\nu\}} \equiv k_{z,D^p}^{\nu^p} - k_{z,D^s}^{\nu^s} - k_{z,D^i}^{\nu^i}$.

Y por último la parte radial:

$$\int_0^R (\mathfrak{J}_{m_{\sigma^s}})^* (\mathfrak{J}_{m_{\sigma^i}})^* (\mathfrak{J}_{m_{\sigma^p}}) \rho d\rho = c_{\sigma^s}^* c_{\sigma^i}^* c_{\sigma^p} \int_0^R J_{m_{\sigma^s}}(k_{\perp}^s \rho) J_{m_{\sigma^i}}(k_{\perp}^i \rho) J_{m_{\sigma^p}}(k_{\perp}^p \rho) \rho d\rho \quad (5.29)$$

con $c_+ = \frac{i}{2} = -c_-$ y $c_3 = 1$. La solución analítica de esta ecuación sólo es conocida para ciertos casos en los que $R \rightarrow \infty$, así que haré la siguiente definición:

$$I_{m_{\sigma^s}, m_{\sigma^i}, m_{\sigma^p}}(k_{\perp}^s, k_{\perp}^i, k_{\perp}^p, R) \equiv \sqrt{\frac{k_{\perp}^s k_{\perp}^i}{k_{\perp}^p k_{\perp}^p}} \int_0^{k_{\perp}^p R} J_{m_{\sigma^s}}\left(\frac{k_{\perp}^s}{k_{\perp}^p} \zeta\right) J_{m_{\sigma^i}}\left(\frac{k_{\perp}^i}{k_{\perp}^p} \zeta\right) J_{m_{\sigma^p}}(\zeta) \zeta d\zeta \quad (5.30)$$

Así el hamiltoniano de interacción (5.25) queda:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & 2\pi L \sum c_{\sigma^s}^* c_{\sigma^i}^* c_{\sigma^p} \mathfrak{X}_{\sigma^s, \sigma^i, \sigma^p} e^{-i(\omega^p - \omega^s - \omega^i)t} \times \\ & \int dk^4 (\mathcal{N}^{\nu^s})^* (\mathcal{N}^{\nu^i})^* \gamma_{\sigma^p, D^p} (k_{\perp}^s k_{\perp}^i k_{\perp}^p)^{-\frac{1}{2}} \text{sinc} \left(\frac{L}{2} \Delta k_z^{\{\nu\}} \right) \times \\ & \delta_{m_{\sigma^i, m_{\sigma^p}} - m_{\sigma^s}} I_{m_{\sigma^s}, m_{\sigma^i}, m_{\sigma^p}} (k_{\perp}^s, k_{\perp}^i, k_{\perp}^p, R) \hat{a}_{m^s}^{\dagger} (k_z^{\nu^s}, k_{\perp}) \hat{a}_{m^i}^{\dagger} (k_z^{\nu^i}, k_{\perp}), \end{aligned} \quad (5.31)$$

$\mathfrak{X}_{\sigma^s, \sigma^i, \sigma^p} \equiv \sum_{hjl} \chi_{hjl} (\mathbf{e}_{\sigma^s}^*)_h (\mathbf{e}_{\sigma^i}^*)_j (\mathbf{e}_{\sigma^p})_l$ La función sinc expresa la conservación de momento lineal, mientras que la delta de Kronecker $\delta_{m_{\sigma^i, m_{\sigma^p}} - m_{\sigma^s}}$ expresa la conservación del momento angular total permitiendo el intercambio entre MAO y MAS, ya que mezcla los índices m relacionados con la carga topológica del haz y los subíndices σ que denotan la polarización del campo.

Al expandir la sumas sobre m^i y σ^i y hacer el producto con la δ de Kronecker, la suma sobre m^i se puede hacer directamente.

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & 2\pi L \sum c_{\sigma^s}^* c_{\sigma^i}^* c_{\sigma^p} \mathfrak{X}_{\sigma^s, \sigma^i, \sigma^p} e^{-i(\omega^p - \omega^s - \omega^i)t} \times \\ & \int dk^4 (\mathcal{N}^{\nu^s})^* (\mathcal{N}^{\nu^i})^* \gamma_{\sigma^p, D^p} (k_{\perp}^{\nu^s} k_{\perp}^{\nu^i} k_{\perp}^{\nu^p})^{-\frac{1}{2}} \text{sinc} \left(\frac{L}{2} \Delta k_z^{\{q\}} \right) \times \\ & I_{m_{\sigma^s}, m_{\sigma^p} - m_{\sigma^s}, m_{\sigma^p}} (k_{\perp}^{\nu^s}, k_{\perp}^{\nu^i}, k_{\perp}^{\nu^p}, R) a_{m_{\sigma^s} + \mu_{\sigma^s}}^{\dagger} (k_z^{\nu^s}, k_{\perp}^{\nu^p}) a_{m_{\sigma^p} - m_{\sigma^s} + \mu_{\sigma^i}}^{\dagger} (k_z^{\nu^i}, k_{\perp}) \end{aligned} \quad (5.32)$$

con $\mu_+ = 1$, $\mu_- = -1$, $\mu_3 = 0$. Aquí podemos identificar diferentes procesos, la suma sobre ν^i, ν^s, ν^p nos da 8:

$$e \rightarrow oo \quad (5.33a)$$

$$e \rightarrow eo \quad (5.33b)$$

$$e \rightarrow oe \quad (5.33c)$$

$$e \rightarrow ee \quad (5.33d)$$

$$o \rightarrow oo \quad (5.33e)$$

$$o \rightarrow eo \quad (5.33f)$$

$$o \rightarrow oe \quad (5.33g)$$

$$o \rightarrow ee \quad (5.33h)$$

$$(5.33i)$$

(5.33a) es clasificado en la literatura como tipo I, mientras que (5.33b) y (5.33c) son llamados tipo II. Y cada uno de esos podemos separarlo en otros mas debido a las sumas

sobre D^i, D^s, D^p ,

$$\text{sinc} \left(\frac{L}{2} (k_z^{\nu^p} - k_z^{\nu^s} - k_z^{\nu^i}) \right) \quad (5.34)$$

$$\text{sinc} \left(\frac{L}{2} (k_z^{\nu^p} - k_z^{\nu^s} + k_z^{\nu^i}) \right) \quad (5.35)$$

⋮

Buscando aplicaciones concretas y factibles supondremos que el medio es un cristal BBO (β -barium Borate). Este es un cristal uniaxial negativo (birrefringente con $n_o > n_e$) y es comúnmente usado en proceso de óptica no lineal.

Ahora haremos uso de la matriz reducida d_{il} (sección 3.2) correspondiente al tensor dieléctrico χ_{hjl} para el BBO. Usando las simetrías de Kleinman en este caso:

$$d_{il} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} & -d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{31} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Ya que $d_{22} \gg d_{31}, d_{33}$ podemos despreciarlos⁵ y sólo quedarnos con los términos que contienen a d_{31} , lo cual nos simplifica muchas cosas. De esta forma sólo sobreviven 4 términos del tensor $\chi_{hjl} = 2d_{hjl}$ y podemos fácilmente realizar la suma sobre h, j, l en el hamiltoniano de interacción.

$$\begin{aligned} & \sum_{ijl} \chi_{hjl} (\mathbf{e}_{\sigma^s})_i^* (\mathbf{e}_{\sigma^i})_j^* (\mathbf{e}_s)_l = \\ & -2d_{22} \left[[(\mathbf{e}_{\sigma^s})_x^* (\mathbf{e}_{\sigma^i})_y^* + (\mathbf{e}_{\sigma^s})_y^* (\mathbf{e}_{\sigma^i})_x^*] (\mathbf{e}_{\sigma^p})_x + [(\mathbf{e}_{\sigma^s})_x^* (\mathbf{e}_{\sigma^i})_x^* - (\mathbf{e}_{\sigma^s})_y^* (\mathbf{e}_{\sigma^i})_y^*] (\mathbf{e}_{\sigma^p})_y \right] \quad (5.37) \end{aligned}$$

Caso particular, tipo I y sin tomar en cuenta los haces contrapropagantes. Como caso particular analizaremos la CPD tipo I y sólo con los fotones que se propagan hacia adelante. En este caso $\nu^p = e^p$, $\nu^s = o^s$ y $\nu^i = o^i$; $\sigma^i = +, -$, $\sigma^s = +, -$ y $\sigma^p = +, -, 3$; $D^s = D^i = D^p = f$.

⁵Además al hacer la expansión vemos que las constantes d_{31} y d_{33} multiplican a las componentes z de los campos, así en casos donde se use aproximación paraxial estos términos se hacen todavía más pequeños.

Al usar (5.37), expandir las sumas sobre $\sigma^s, \sigma^i, \sigma^p$ y simplificar en (5.32), se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I^{eoo} = & -\frac{4d_{22}}{\sqrt{2}} 2\pi L e^{-i\Delta\omega^p t} \int dk^4 \text{sinc} \left(\frac{L}{2} \Delta k_z^{\{e^p, o^s, o^i\}} \right) (\mathcal{N}^{o^s})^* (\mathcal{N}^{o^i})^* (k_\perp^{o^s} k_\perp^{o^i} k_\perp^{e^p})^{-\frac{1}{2}} \times \\ & [\gamma_{+,F}^e I_{m_{\sigma^s}, m_+ - m_{\sigma^s}, m_+} c_-^* c_-^* c_+ \hat{a}_{m_{\sigma^s} + \mu_-}^\dagger(k_z^{o^s}, k_\perp^{o^s}) \hat{a}_{m_+ - m_{\sigma^s} + \mu_-}^\dagger(k_z^{o^i}, k_\perp^{o^i}) + \\ & \gamma_{-,F}^e I_{m_{\sigma^s}, m_- - m_{\sigma^s}, m_-} c_+^* c_+^* c_- \hat{a}_{m_{\sigma^s} + \mu_+}^\dagger(k_z^{o^s}, k_\perp^{o^s}) \hat{a}_{m_- - m_{\sigma^s} + \mu_+}^\dagger(k_z^{o^i}, k_\perp^{o^i})] \end{aligned} \quad (5.38)$$

Podemos escribir:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I^{eoo} = & \int dk^4 \mathfrak{F} \text{sinc} \left(\frac{L}{2} \Delta k_z^{\{e, o, o\}} \right) \times \\ & \sum_{m^s} [I_{m_-^s, m_+ - m_-^s, m_+} \hat{a}_{m^s}^\dagger(k_z^{s^o}, k_\perp^{s^o}) \hat{a}_{m - m^s - 3}^\dagger(k_z^{i^o}, k_\perp^{i^o}) + \\ & I_{m_+^s, m_- - m_+^s, m_-} \hat{a}_{m^s}^\dagger(k_z^{s^o}, k_\perp^{s^o}) \hat{a}_{m - m^s + 3}^\dagger(k_z^{i^o}, k_\perp^{i^o})] \end{aligned} \quad (5.39)$$

con

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\omega^p, \omega^s, \omega^i, k_\perp, \epsilon_o^s, \epsilon_o^i, \epsilon_e, L, t) \equiv & \\ & -8id_{22} 2\pi L (\eta_F^{s^o})^* (\eta_F^{i^o})^* \eta_F^e \gamma_F^e (\mathcal{E}^{v^s})^* (\mathcal{E}^{v^i})^* (k_\perp^s k_\perp^i)^{-\frac{1}{2}} e^{-i(\omega^p - \omega^s - \omega^i)t} e^{-i\frac{L}{2} \Delta k_z^{\{e, o, o\}}} \\ & = \frac{16d_{22} \pi \hbar \mathcal{B}}{\Delta_\epsilon^e} \left(\frac{k_z^e}{\epsilon^e k_\perp} + 1 \right) \frac{k_z^e}{\epsilon^e k_\perp^2} \sqrt{\frac{\omega^{s^o} \omega^{i^o}}{\epsilon^{s^o} \epsilon^{i^o}}} e^{-i(\omega^p - \omega^s - \omega^i)t} e^{-i\frac{L}{2} \Delta k_z^{\{e, o, o\}}}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Las amplitudes de probabilidad de los sucesos están dadas por los coeficientes de los operadores de creación, en este caso los operadores de creación pueden producir los estados:

$$|m^s, m^p - m^s - 3\rangle_1, \quad |m^s, m^p - m^s + 3\rangle_2, \quad (5.41)$$

con probabilidades proporcionales a $I_{m_-^s, m_+^p - m_-^s, m_+^p}$ e $I_{m_+^s, m_-^p - m_+^s, m_-^p}$ respectivamente. Además vemos que no hay conservación del MAO en cada pareja de fotones creados ya que:

$$(m^s) + (m^p - m^s - 3) = m^p - 3, \quad \text{y} \quad (m^s) + (m^p - m^s + 3) = m^p + 3 \quad (5.42)$$

es decir:

$$m^s + m^i = m^p \pm 3 \quad (5.43)$$

Sin embargo, el MAO total si se conserva ya que por cada pareja de fotones con $m^p - 3$ habrá una pareja con $m^p + 3$, además de que por la geometría no puede haber transferencia de MAO al cristal. Entonces lo que se ve aquí es un acoplamiento espín-órbita que da lugar al intercambio entre MAS y MAO.

5.3. Análisis del empataamiento de fase radial transversal

Cuando $R \rightarrow \infty$ y $m_{\sigma^p} = 0$ se tiene una expresión analítica [91] para las funciones I :

$$I_{m_{\sigma^s}, m_{\sigma^s}, 0} = \begin{cases} \frac{k_{\perp}^p \sqrt{k_{\perp}^s k_{\perp}^i} \cos(m_{\sigma^s} \arccos(r_+))}{\pi k_{\perp}^s k_{\perp}^i \sqrt{1-r_+^2}} & \text{si } -1 < r_+ < 1 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases} \quad (5.44)$$

con $r_+ = \frac{k_{\perp}^{s^2} + k_{\perp}^{i^2} - k_{\perp}^{p^2}}{2k_{\perp}^s k_{\perp}^i}$. De esta ecuación podemos ver que cuando $k_{\perp}^s + k_{\perp}^i \rightarrow k_{\perp}^p$ o cuando $|k_{\perp}^p - k_{\perp}^i| \rightarrow k_{\perp}^p \Rightarrow I \rightarrow \infty$ independientemente del valor de m_{σ^s} . En la figura 5.6 se muestra la gráfica para $m_{\sigma^s} = 0$ y un valor específico de k_{\perp} , un cambio en esta variable sólo produce un reescalamiento de los ejes.

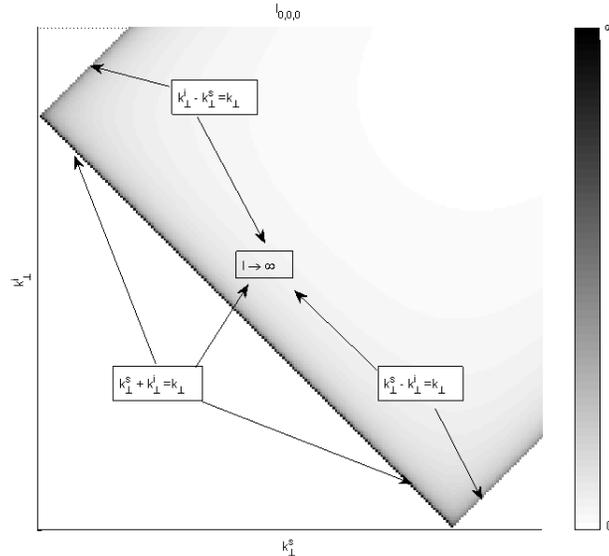


Figura 5.6: Gráfica de $I(k_{\perp}^s, k_{\perp}^i)$ $m_{\sigma^s}=0$.

Pero R es finita y además nos interesa también ver la variación de las amplitudes de probabilidad como función de las m 's, sin embargo, esta figura nos da una idea de donde buscar los máximos de I . Se hicieron simulaciones numéricas en regiones que incluyen las opciones dadas por la regla del triángulo $k_{\perp}^s + k_{\perp}^i \approx k_{\perp}^p$ o $|k_{\perp}^s - k_{\perp}^i| \approx k_{\perp}^p$. Los resultados se muestran en la figura 5.8. Podemos ver que tenemos el máximo bien definido en la región mencionada además de pequeñas oscilaciones alrededor. También vemos que I ya

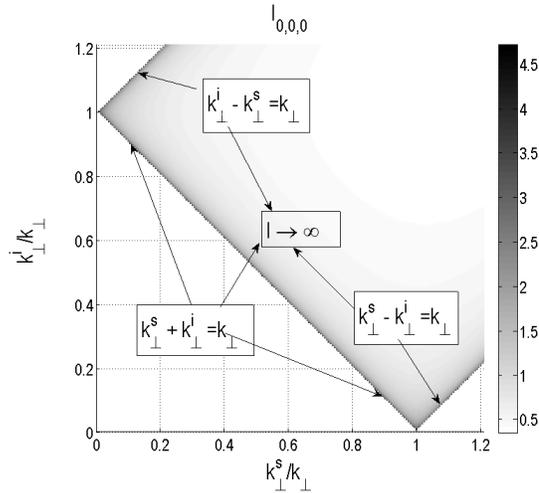


Figura 5.7: Gráfica de $I(k_{\perp}^s, k_{\perp}^i, k_{\perp}, R \rightarrow \infty)$, $m_{\sigma^s}=0$, escalada

no diverge y podemos comparar su dependencia en variables como momento angular y radio del cristal.

En la figura 5.9 se estudia la región central de la figura 5.8a como función de $\frac{k_{\perp}^i}{k_{\perp}^p}$ y de $k_{\perp}^p R$. Con estas figuras podemos ver que conforme aumenta $k_{\perp}^p R$ aumenta I_{000} y que los máximos tienden a estar en $k_{\perp}^s + k_{\perp}^i = k_{\perp}^p$ cuando $R \rightarrow \infty$ como era de esperarse de acuerdo con la figura 5.6 y la ecuación (5.44), la relación entre el máximo de I_{000} con k_{\perp}^p se muestra en la figura 5.10a.

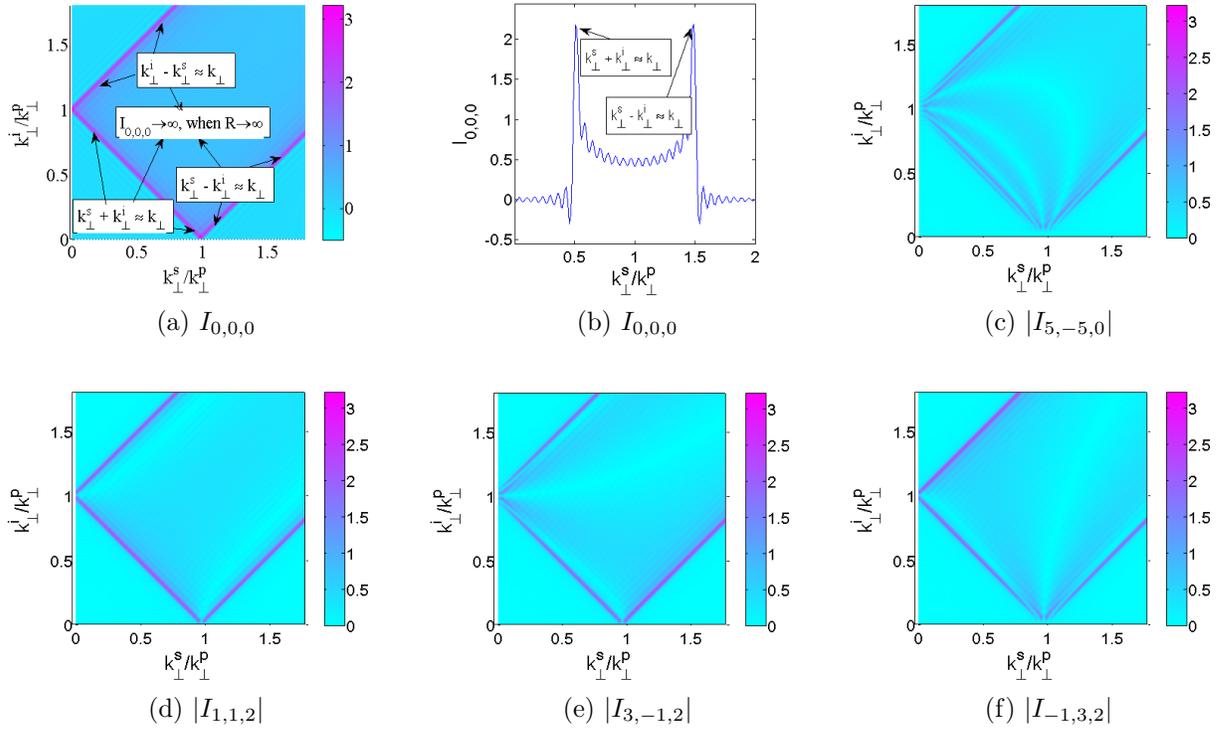


Figura 5.8: (a) Función $I_{m_{\sigma^s}, m_{\sigma^p} - m_{\sigma^s}, m_{\sigma^p}}$ para $m_{\sigma^p} = m_{\sigma^s} = 0$, (b) $I_{m_{\sigma^s}, m_{\sigma^p} - m_{\sigma^s}, m_{\sigma^p}}$ para $m_{\sigma^p} = m_{\sigma^s} = 0$ y $k_{\perp}^i/k_{\perp}^p = 0.5$. Valor absoluto de $I_{m_{\sigma^s}, m_{\sigma^p} - m_{\sigma^s}, m_{\sigma^p}}$ para: (c) $m_{\sigma^p} = 0$ y $m_{\sigma^s} = 5$, (d) $m_{\sigma^p} = 2$ y $m_{\sigma^s} = 1$, (e) $m_{\sigma^p} = 2$ y $m_{\sigma^s} = 3$, y (f) $m_{\sigma^p} = 2$ y $m_{\sigma^s} = -1$. En todos los casos ilustrados $k_{\perp} R = 100$.

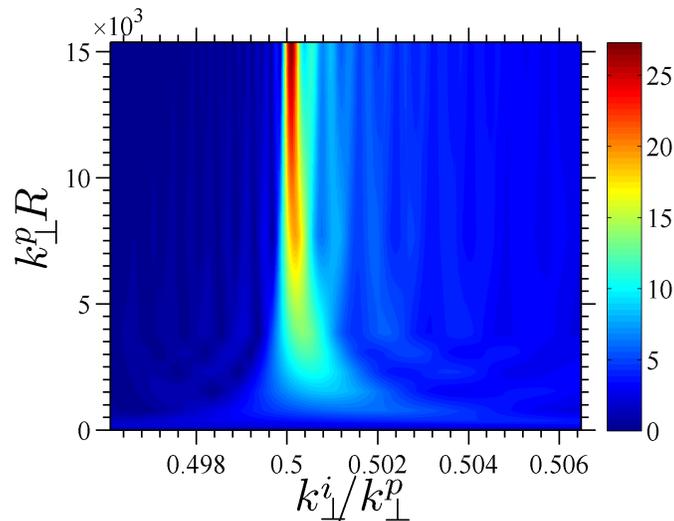


Figura 5.9: $I_{0,0,0} \left(\frac{k_{\perp}^s}{k_{\perp}^p} = \frac{1}{2}, k_{\perp}^p, k_{\perp}^i, k_{\perp}^p R \right)$

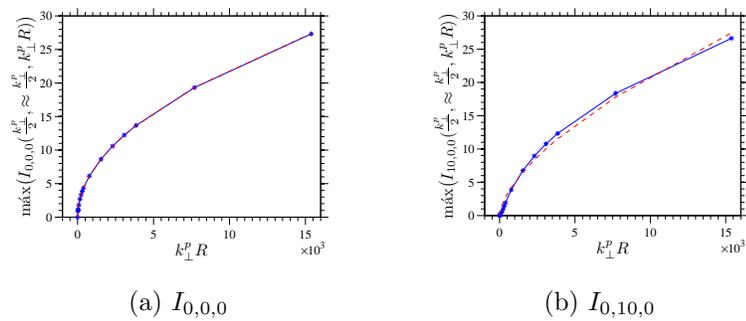


Figura 5.10: (a)

5.4. Empatamiento de fase longitudinal

Hasta aquí ya sabemos donde están los máximos de I como función de $(k_{\perp}^s, k_{\perp}^i)$. Observamos que las funciones $I_{m_{\sigma^s}, m_{\sigma^i}, m_{\sigma^p}}(k_{\perp}^s, k_{\perp}^i, k_{\perp}^p R)$, reflejan la ley de conservación del momento lineal en la dirección perpendicular $|k_{\perp}^s \pm k_{\perp}^i| \approx k_{\perp}^p$. Sabemos además que se tienen que cumplir las relaciones de dispersión:

$$k_{\perp}^2 + k_z^2 = \left(n_o \frac{w}{c}\right)^2 \quad (5.45a)$$

$$k_{\perp}^2 + \left(\frac{n_e(\theta)}{n_o} k_z\right)^2 = \left(\frac{n_e(\theta) w}{n_o c}\right)^2; \quad (5.45b)$$

para garantizar la conservación de momento lineal en z . $n(\theta)$ esta dada por:

$$\frac{1}{n_e(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta)}{n_o^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{n_e^2}. \quad (5.46)$$

Otra ley de conservación se refiere al momento angular:

$$m^s + m^i = m^p - (\mu_{\sigma^p} - \mu_{\sigma^s} - \mu_{\sigma^i}). \quad (5.47)$$

Si además suponemos el uso de un haz bombeo monocromático y tomamos en cuenta que por lo general la transferencia de energía al cristal es despreciable, la conservación de energía implica que:

$$\omega^i = \omega^p - \omega^s. \quad (5.48)$$

Si se cumple con estas ecuaciones de conservación, el sistema se encuentra en la región de empatamiento de fase.

Por lo general los índices de refracción dependen de la longitud de onda λ . En el caso de un cristal BBO resulta que (utilizando las ecuaciones de Sellmeier [92, 93] válidas en el rango $\lambda = 0.2050\text{a}1.064\mu\text{m}$):

$$n_o = \sqrt{2.7359 + \frac{0.01878}{\lambda^2 - 0.01822} - 0.0354\lambda^2} \quad (5.49a)$$

$$n_e = \sqrt{2.3753 + \frac{0.01224}{\lambda^2 - 0.01667} - 0.01516\lambda^2} \quad (5.49b)$$

Es bien sabido, en el tratamiento con ondas planas, que el ángulo θ entre el eje óptico y el vector de onda \mathbf{k} es muy importante, ya que este permite el empatamiento de fase, y es por eso que los cristales se caracterizan según su ángulo de corte. En este caso el ángulo

de corte corresponde a cero grados, es decir, el eje óptico es normal a la superficie del cristal. Esta configuración es poco convencional y en ella, el parámetro a ser optimizado para buscar el empatamiento de fase es el ángulo de axición dado por la relación entre k_z y k_\perp del haz Bessel incidente. Recordemos que el ángulo de axición del haz incidente no coincide con el ángulo de axición del haz de bombeo (Figura 5.5 y ecuación (4.109))

Al multiplicar la función sinc por la función I (Fig. 5.11), vemos que en la región donde $k_\perp^p R$ es pequeña hay una región en la que la amplitud de probabilidad tiene un máximo. Entonces podemos ver que es mejor trabajar con radios pequeños. Además podemos ver también que cuando $m_{\sigma^s} \neq m_{\sigma^p}$ la anchura también se reduce; lo cual implicará que la suma \sum_{m^s} pueda ser cortada.

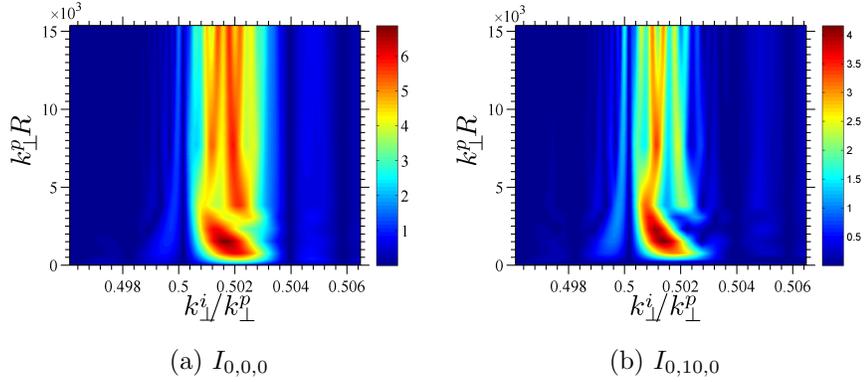


Figura 5.11: Gráficas de (a) $I_{0,0,0}$ sinc y (b) $I_{0,10,0}$ sinc

Nos enfocaremos en el proceso de CPD tipo I y degenerado ($\omega_s = \omega_i$). Si los fotones señal-acompañante son tales que $m_1^{s,i} = -1$ (ver ecuación (5.41)). El término dominante de este proceso es proporcional a $I_{0,0,0}$. El ángulo de axición del haz incidente se escogió de tal forma que su mínimo fuera compatible con un máximo absoluto de la amplitud de probabilidad para el proceso. Por ejemplo $\zeta = 40.5^\circ$ para $\lambda = 531\text{nm}$. El empatamiento de fase se puede entonces reportar en términos de los ángulos de axición de los fotones señal-acompañante. En este ejemplo, ilustrado en la figura 5.12, se puede observar que los valores esperados para estos ángulos están en un intervalo de $(35^\circ, 45^\circ)$.

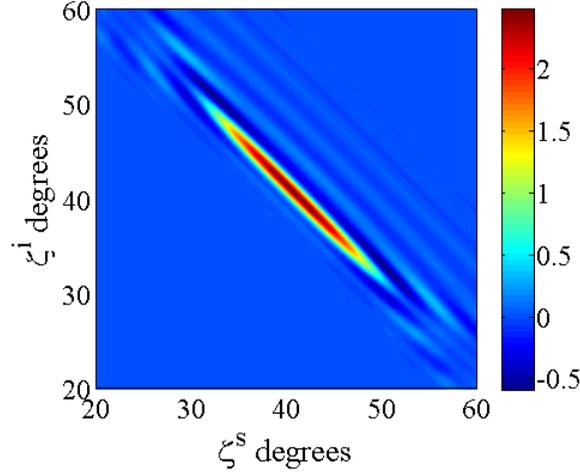


Figura 5.12: Amplitud de probabilidad para la generación de un estados de 2-fotones como función de los ángulos de axicón de los haces señal y acompaante ζ^i y ζ^s , los haces incidentes corresponden a un haz Bessel vectorial TM incidente con $m = 1$ y con un ángulo de axicón $\zeta = 40.5^\circ$ ($k_\perp R = 153$ y $k_z L = 896$) y $\lambda = 531\text{nm}$.

A partir de aquí, los siguientes análisis se basarán en esta configuración óptica y geométrica.

Nos enfocaremos en el proceso de CPD tipo I y degenerado con los fotones señal-acompañante con $m_1^{s,i} = -1$ (ver ecuación (5.41)). El término dominante de este proceso es proporcional a $I_{0,0,0}$. Los resultados se reportan en términos de los ángulos de axicón de los fotones señal-acompañante. Se puede observar que los valores esperados para estos ángulos en este caso están en un intervalo de (35,45). Hay que mencionar que el ángulo de axicón del haz incidente se escogió de tal forma que su mínimo fuera compatible con un máximo absoluto de la amplitud de probabilidad para el proceso.

En la figura 5.13 Se muestran los perfiles de intensidad transversales para las componentes \mathbf{e}_\pm del haz de bombeo, con los parámetros mencionados arriba, para $m \in [1, 2, 3]$

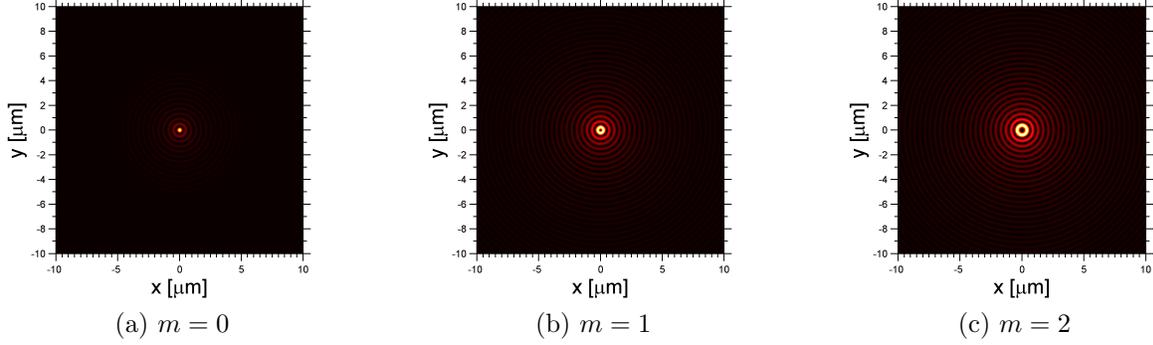


Figura 5.13: Perfiles transversales de intensidad

5.5. Distribución del momento angular orbital del estado de dos-fotones

Como se vio antes, la dependencia de las amplitudes de probabilidad en m^p y m^s esta dada a través de las funciones I . Para ver la dependencia en m_{σ^s} , supongamos que ponemos un filtro para los valores en los cuales obtuvimos un máximo para I . Y supongamos también que enviamos un haz de bombeo con momento angular orbital $m^p = 1$ (entonces $m_+^p = 0$ y $m_-^p = 2$). Así las funciones que tenemos que analizar son de la forma:

$$I_{m_-^s, -m_-^s, 0} \quad \text{e} \quad I_{m_+^s, 2-m_+^s, 2} \quad (5.50)$$

correspondientes a los estados:

$$|m^s, -m^s - 2\rangle_1 \quad \text{y} \quad |m^s, -m^s + 4\rangle_2 \quad (5.51)$$

En las siguientes figuras 5.14 se muestran los histogramas de las integrales

$$\mathbb{I}_1 = \int dk_{\perp}^s dk_{\perp}^i [I_{m^s+1, -m^s-1, 0}(k_{\perp}^s, k_{\perp}^i, k_{\perp}^p R = 153) \text{sinc}([\Delta k_z L/2])]^2, \quad (5.52)$$

e

$$\mathbb{I}_2 = \int dk_{\perp}^s dk_{\perp}^i [I_{m^s-1, 2-m^s+1, 2}(k_{\perp}^s, k_{\perp}^i, k_{\perp}^p R = 153) \text{sinc}([\Delta k_z L/2])]^2 \quad (5.53)$$

que son proporcionales a la amplitud de probabilidad para obtener los pares de fotones convertidos en los dos posibles estados $|m^s, m^p - m^s - 3\rangle_1$ y $|m^s, m^p - m^s + 3\rangle_2$ respectivamente.

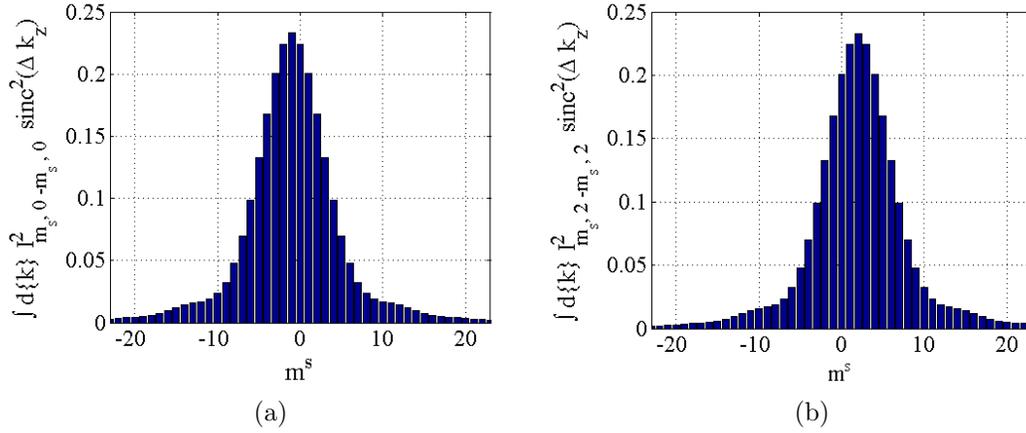


Figura 5.14: Distribución de MAO esperado de los fotones resultantes de la CPD para los estados (a) $|m^s, -m^s - 2\rangle$ y (b) $|m^s, -m^s + 4\rangle$. El haz incidente corresponde a un haz Bessel vectorial de orden $m = 1$, ángulo de axición $\zeta = 40.5^\circ$ y longitud de onda $\lambda = 531\text{nm}$.

De acuerdo con la figura 5.14a, el estado 1 tiene una distribución amplia de MAO con su máximo centrado en $m_1^s = -1$ y de la figura 5.14b el estado 2 tiene una distribución similar pero con su máximo en $m_2^s = 2$. El valor máximo de \mathbb{I} es el mismo para los 2 estados así que los procesos correspondientes son igualmente probables.

5.6. Dependencia de la distribución de MAO con el radio de integración transversal

En las secciones anteriores vimos que las funciones I tienen una dependencia en R . Al En la figura 5.15 podemos ver que conforme disminuye R la suma sobre las m^s puede ser cortada antes, por lo que también el parámetro R nos da la posibilidad de incluir más o menos términos en la \sum_{m^s} que significa tener una distribución más o menos amplia de momento angular orbital en los fotones convertidos.

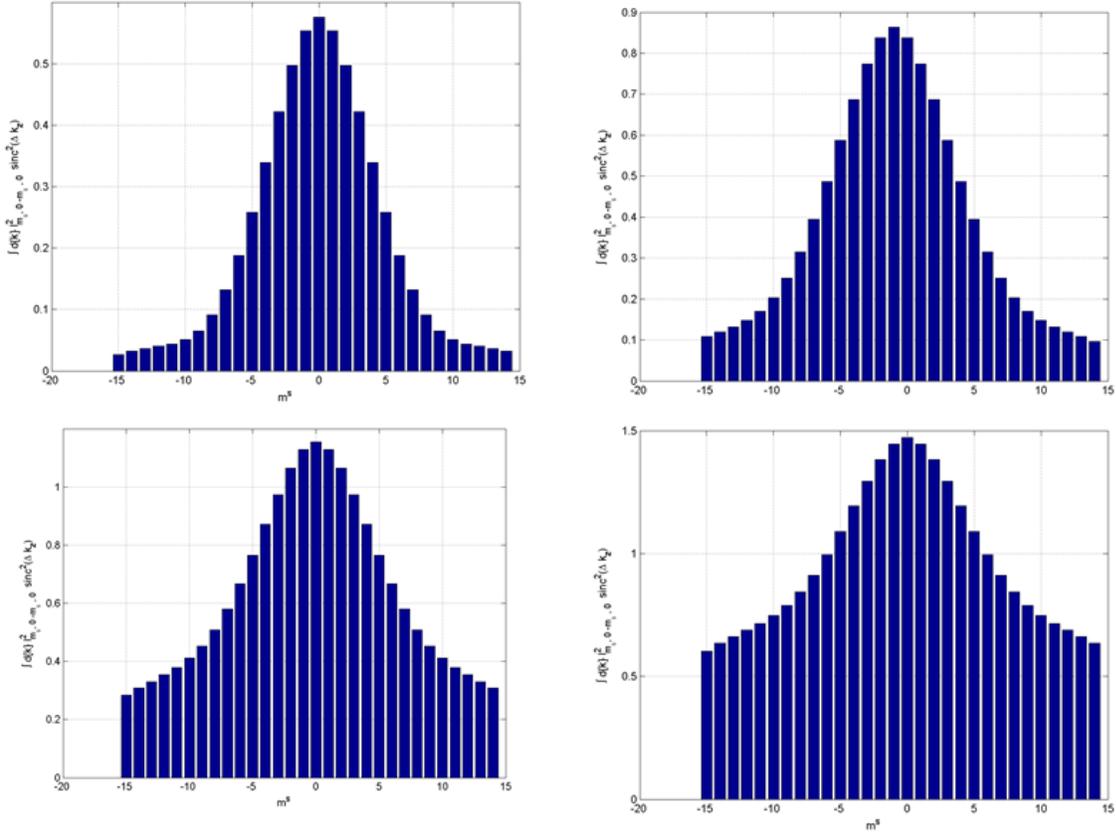


Figura 5.15: Distribución de MAO esperado de los fotones resultantes de la CPD para los estado, variación con $R = (20, 40, 80, 160)\mu\text{m}$.

Al estudiar la dependencia de las intensidades máximas con el radio del cristal encontramos que para $m_p = 0, m_s = 0$ esta es de la forma $I_{max}(R) = I_0(k_{\perp}^p R)^{0.5}$ con $I_0 = .6$.

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

Después de realizar un análisis cuántico vectorial y completo del proceso de conversión paramétrica descendente usando como bombeo un haz Bessel, llegamos a las siguientes conclusiones:

- La cuantización de haces en medios birrefringentes no disipativos no es trivial debido a la presencia de un eje privilegiado y superficies que delimitan al medio. En el caso de superficies delimitantes paralelas, una opción corresponde a que el eje del cristal sea paralelo a la normal de la superficie y sólo entonces la cuantización será directa.
- Una vez establecida esta configuración para el cristal y el haz Bessel, la condición de empatamiento de fase puede obtenerse en términos del ángulo de axición del haz Bessel, lo cual nos puede llevar a condiciones en las que el haz de bombeo este lejos del límite paraxial. Las condiciones de empatamiento de fase también nos hacen ver que puede ser muy interesante tratar con radios transversales del medio no lineal pequeños. Esta clase de radios nos da control sobre el MAO de los fotones convertidos y amplía los valores accesibles de los vectores de onda perpendiculares de los fotones señal y acompañante. Esta es quizá la diferencia más evidente respecto al caso en que el radio transversal de interacción con el medio es muy grande, $R \rightarrow \infty$. En estas circunstancias obtendríamos mayores restricciones para los vectores de onda transversales. Esto se encuentra esquematizado en las figuras 5.6 y 5.8 y en la Eq. (5.44).
- Se encontró que dependiendo de la geometría y de las propiedades del cristal no lineal, que se usa en el proceso de CPD, puede haber transformación de MAS del

haz de bombeo a MAO de los fotones convertidos. Existe más de un tipo de estado de dos fotones factible. Y estos estados pueden tener una correlación muy fuerte en su MAO. El proceso de CPD en este caso conserva el momento angular óptico,

$$m^s + m^i = m^p + \mu_{\sigma^s} + \mu_{\sigma^i} - \mu_{\sigma^p}, \quad \mu_{\sigma} = 1, 0, -1.$$

El acoplamiento de MAS y MAO se da a través del tensor dieléctrico de segundo orden χ_{ijk}^2 , por lo que diferentes cristales darían lugar a diferentes transformaciones incluyendo la nula, es decir, el caso en que no hay transformación.

- En el caso particular de un cristal BBO y CPD tipo I, es decir haz de bombeo TM y fotones convertidos TE, mostramos que:

- Se generan dos estados de dos-fotones, altamente correlacionados.

$$|m^s, m^p - m^s - 3\rangle_1, \quad |m^s, m^p - m^s + 3\rangle_2$$

- La transformación de MAO a MAS se da en $3\hbar$ para los fotones convertidos.
 - El ángulo de axicón para el cual hay empatamiento de fase, resulta ser de 40.5° y está más allá del límite paraxial.
 - La distribución del MAO de los fotones *señal* (*acompañante*) puede ser amplia y puede ser regulada con el tamaño del radio R de la región de interacción del haz de bombeo con el cristal. Ver figuras 5.14 y 5.15
- La mayor parte de estos resultados fueron publicados en [76]

Diferentes cristales poseen diferentes simetrías e índices de refracción, (χ_{ij} y χ_{ijk}), los ángulos de axicón para los cuales se podría encontrar empatamiento de fase podrían ser tales que $k_{\perp} > k_z^p$, por lo que se estaría muy lejos del límite paraxial. Un análisis numérico de los coeficientes (4.110) muestra que en esas condiciones los haces de bombeo tienen alta probabilidad de ser reflejados por la segunda superficie del cristal. En esas circunstancias

sería necesario tomar en cuenta tanto los campos propagantes como los contrapropagantes en el proceso de CPD.

El formalismo desarrollado en esta tesis puede ser la base de cálculos de CPD para haces Bessel vectoriales que puede incluir (i) CPD tipo II, (ii) estados de dos-fotones no-degenerados y (iii), tomando en cuenta efectos de campos contrapropagantes, más allá del régimen paraxial y por el tamaño de R para el cual se puede dar esta modulación, esto podría llevarse a cabo en fibras ópticas.

Cabe señalar que estas propuestas teóricas podrían llevar a la observación de efectos muy interesantes en el laboratorio.

Apéndice A

Potenciales de Hertz

Las ecuaciones de Maxwell en medios homogéneos ya ausencia de cargas y corrientes libres se escriben

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{c\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{c\partial t}\end{aligned}\tag{A.1}$$

Si consideremos un medio isotrópico con de polarización y magnetización asociadas a respuestas no lineales y fuentes externas $\mathbf{P}_{ext;nl}$ y $\mathbf{M}_{ext;nl}$ respectivamente. los campos macroscópicos quedan dados por:

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + \mathbf{P}_{ext;nl} ; \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}_{ext;nl}\tag{A.2}$$

Con estas ecuaciones al escribir

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\end{aligned}\tag{A.3}$$

obtenemos la ecuaciones de onda para los potenciales \mathbf{A} y ϕ :

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu\frac{\partial \mathbf{P}_{ext;nl}}{\partial t} + \mu_0\nabla \times \mathbf{M}_{ext;nl}\tag{A.4}$$

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = -\frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot\mathbf{P}_{\text{ext;nl}} \quad (\text{A.5})$$

Los potenciales de Hertz son introducidos en forma análoga al lado derecho de las ecuaciones anteriores [51]:

$$\mathbf{A} = \mu\frac{\partial\mathbf{\Psi}_e}{\partial t} + \mu_0\nabla\times\mathbf{\Psi}_m ; \quad \phi = -\frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot\mathbf{\Psi}_e \quad (\text{A.6})$$

Si estos potenciales de Hertz satisfacen las ecuaciones de onda:

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{\Psi}_e}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{\Psi}_e = \mathbf{P}_{\text{ext;nl}} \quad (\text{A.7})$$

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{\Psi}_m}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{\Psi}_m = \mathbf{M}_{\text{ext;nl}} \quad (\text{A.8})$$

ψ y \mathbf{A} cumplirán las ecuaciones de onda correspondientes. Estos potenciales $\mathbf{\Psi}$ se pueden escoger de tal forma que 4 de sus 6 componentes sean igual a 0 [71], entonces se puede escribir:

$$\mathbf{\Psi}_e = \mu\Psi_1\mathbf{u} ; \quad \mathbf{\Psi}_m = \epsilon\Psi_2\mathbf{u} \quad (\text{A.9})$$

donde $\Psi_{1,2}$ son los llamados *potenciales escalares de Hertz* y \mathbf{u} es un vector unitario, la dirección para la cual todas las demás componentes son cero.

Entonces si sustituimos las ecuaciones (A.9) en las ecuaciones (A.6) obtenemos:

$$\mathbf{A} = \mu\dot{\Psi}_1\mathbf{u} + \mu_0\nabla\times(\Psi_2\mathbf{u}) , \quad \phi = -\frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot(\Psi_1\mathbf{u}) = -\frac{1}{\epsilon}\mathbf{u}\cdot\nabla\Psi_1 \quad (\text{A.10})$$

Si usamos coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{A} = \mu\dot{\Psi}_1\mathbf{u} + \mu_0\left(\frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1}\mathbf{u}_2 - \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_2}\mathbf{u}_3\right) , \quad \phi = -\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1} \quad (\text{A.11})$$

donde las \mathbf{u} 's forman un sistema de coordenadas derecho en \mathbb{R}^3 y las x_i son las componentes de un vector \mathbf{r} expresado en dicha base.

Entonces para un campo electromagnético que se propaga en cualquier dirección podemos encontrar sus modos transversal eléctrico (TE) y transversal magnético (TM) con respecto a \mathbf{u} y vemos que el potencial Ψ_2 es el que da lugar al modo TE, mientras que el potencial Ψ_1 da lugar al modo TM, esto se puede ver sustituyendo las ecs. (A.11) en (2.33), es decir, si hacemos $\Psi_1 = 0$ vemos que $\phi = 0$ y \mathbf{E} no tiene componente en la

dirección de propagación \mathbf{u} y si hacemos $\Psi_2 = 0$ entonces \mathbf{A} sólo tiene componente \mathbf{u} , por lo que \mathbf{B} es transversal a la dirección de propagación \mathbf{u} .

Entonces podemos escribir:

$$\mathbf{E}^{TE} = -\mu_0 \nabla \times (\dot{\Psi}_2 \mathbf{u}) \quad \mathbf{E}^{TM} = \frac{1}{\epsilon} \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla \Psi_1) - \mu \ddot{\Psi}_1 \mathbf{u} \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{B}^{TE} = \mu_0 \nabla (\nabla \cdot \Psi_2 \mathbf{u}) - \mu_0 \nabla^2 (\Psi_2 \mathbf{u}) \quad \mathbf{B}^{TM} = -\mu \mathbf{u} \times \nabla \dot{\Psi}_1 \quad (\text{A.13})$$

Si $\mathbf{P}_{ext;nl}$ y $\mathbf{M}_{ext;nl}$ son cero, vemos de las ecuaciones (A.7) a (A.9) que las Ψ 's satisfacen las ec. de onda sin fuentes:

$$\mu \epsilon \ddot{\Psi}_{(1)} - \nabla^2 \Psi_{(1)} = 0 \quad (\text{A.14})$$

por lo que se pueden hacer los cambios $\ddot{\Psi} \leftrightarrow \nabla^2 \Psi$ y con las ecuaciones (A.2) los modos TE y TM quedan como sigue:

$$\mathbf{E}^{TE} = \mu_0 \mathbf{u} \times \nabla \dot{\Psi}_2 \quad \mathbf{E}^{TM} = \frac{1}{\epsilon} \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla \Psi_1) - \mu \ddot{\Psi}_1 \mathbf{u} \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{H}^{TE} = \frac{\mu_0}{\mu} \nabla (\mathbf{u} \cdot \nabla \Psi_2) - \mu_0 \epsilon \ddot{\Psi}_2 \mathbf{u} \quad \mathbf{H}^{TM} = -\mathbf{u} \times \nabla \dot{\Psi}_1 \quad (\text{A.16})$$

Consideremos ahora un medio uniaxial birrefringente y de escasa respuesta magnética. En este caso también podemos utilizar potenciales de Hertz y de manera natural el vector \mathbf{u} se elige en la dirección del eje del medio. Sustitución directa en las ecuaciones de Maxwell con ahora $\mathbf{D} = \hat{\epsilon} \mathbf{E}$ muestra que Ψ_1 y Ψ_2 deberán cumplir simplemente la ecuación de onda sin fuentes para que \mathbf{E}^{TE} , \mathbf{H}^{TE} y \mathbf{E}^{TM} , \mathbf{H}^{TM} satisfagan las ecuaciones de Maxwell. En este caso a los modos TE y TM se conocen como modos ordinario y extraordinario y los potenciales de Hertz satisfacen las ecuaciones

$$-\epsilon \mu \ddot{\Psi}^O + \nabla^2 \Psi^O = 0 \quad (\text{A.17})$$

y

$$-\epsilon_{\parallel} \epsilon \mu \ddot{\Psi}^E + \nabla \cdot \hat{\epsilon} \cdot \nabla \Psi^E = 0, \quad (\text{A.18})$$

respectivamente con ϵ la respuesta dieléctrica en la dirección perpendicular al eje del medio y ϵ_{\parallel} la respuesta en la dirección perpendicular. Nótese que esto requiere que la respuesta no lineal del medio sea débil además de que no haya fuentes externas de polarización y/o magnetización.

Bibliografía

- [1] E. M. Lifshitz V. B. Berestetskii and L. P. Pitaevskii. *Relativistic Quantum Theory*. Pergamon, Oxford, 1976.
- [2] A. E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, 1986.
- [3] B. E. A. Saleh and M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley, 1991.
- [4] N. R. Heckenberg, R. McDuff, C. P. Smith, and A. G. White. Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms. *Opt. Lett.*, **17**, 221, 1992.
- [5] H. He, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop. Optical particle trapping with higher-order doughnut beams produced using high efficiency computer generated holograms. *J. Mod. Opt.*, **42**, 217-223, 1995.
- [6] L. Allen, M. Beijersbergen, R. Spreeuw, and J. Woerdman. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys. Rev. A*, **45**, 8185-8189, 1992.
- [7] M. A. Bandres and J. C. Gutierrez-Vega. Ince Gaussian beams. *Opt. Lett.*, **29**, 144, 2004.
- [8] C. P. Boyer, E. G. Kalnins, and W. Miller. Symmetry and separation of variables for the Helmholtz and Laplace equations. *Nagoya Math. J.*, **60**, 35–80, 1976.
- [9] D. Magde and H. Mahr. Study in ammonium dihydrogen phosphate of spontaneous parametric interaction tunable from 4400 to 16000 Å. *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 905–907, 1967.
- [10] B. Ya. Zel'dovich and D. N. Klyshko. Field statistics in parametric luminescence. *Sov. Phys. JETP Lett.*, **9**, 40, 1969.

- [11] D. Burnham and D. Weinberg. Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, **25**, 84–87, 1970.
- [12] S. Friberg, C. Hong, and L. Mandel. Measurement of time delays in the parametric production of photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 2011–2013, 1985.
- [13] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 2044–2046, 1987.
- [14] C. Hong and L. Mandel. Theory of parametric frequency down conversion of light. Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms. *Phys. Rev. A*, 2409–2418, 1985.
- [15] Z. Ou, L. Wang, and L. Mandel. Vacuum effects on interference in two-photon down conversion. *Phys. Rev. A*, **40**, 1428–1435, 1989.
- [16] W. P. Grice and I. Walmsley. Spectral information and distinguishability in type-II down-conversion with a broadband pump. *Phys. Rev. A*, **56**, 1627–1634, 1997.
- [17] A. B. U'Ren, K. Banaszek, and I. A. Walmsley. Photon engineering for quantum information processing. *Quantum Inf. Comput.*, **3**, 480, 2003.
- [18] A. B. U'Ren, C. Silberhorn, K. Banaszek, I. A. Walmsley, R. Erdmann, W. P. Grice, and M. G. Raymer. Generation of pure-state single-photon wavepackets by conditional preparation based on spontaneous parametric downconversion. *Laser Phys.*, **15**, 146–161, 2006.
- [19] G. Molina-Terriza, J. P. Torres, and L. Torner. Twisted photons. *Nat. Phys.*, **3**, 305–310, 2007.
- [20] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, and A. Zeilinger. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature*, **412**, 313–6, 2001.
- [21] J. Torres, A. Alexandrescu, and Lluís Torner. Quantum spiral bandwidth of entangled two-photon states. *Phys. Rev. A*, **68**, 2–5, 2003.
- [22] J. A. O. Huguenin, M. Martinelli, D. P. Caetano, B. Coutinho dos Santos, M. P. Almeida, P. H. Souto Ribeiro, P. Nussenzveig, and A. Z. Khoury. Orbital angular momentum exchange in parametric down conversion. *J. Mod. Opt.*, **53**, 647–658, 2006.

- [23] C. Osorio, G. Molina-Terriza, and J. P. Torres. Correlations in orbital angular momentum of spatially entangled paired photons generated in parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, **77**, 015810, 2008.
- [24] A. Piskarskas, V. Smilgevicius, A. Stabinis, and V. Jarutis. Output patterns of optical parametric amplifiers and generators pumped by conical beams. *J. Opt. B Quantum Semiclassical Opt.*, **1**, 52–57, 1999.
- [25] V. Pyragaite, A. Piskarskas, K. Regelskis, V. Smilgevicius, A. Stabinis, and S. Mikalauskas. Parametric down-conversion of higher-order Bessel optical beams in quadratic nonlinear medium. *Opt. Commun.*, **240**, 191–200, 2004.
- [26] H. Cruz-Ramirez, R. Ramirez-Alarcon, F. J. Morelos, P. A. Quinto-Su, J. C. Gutierrez-Vega, and A. B. U'Ren. Generation of photon pairs, triplets, and non-diffracting single photons. In *2013 IEEE Photonics Soc. Summer Top. Meet. Ser.*, **3**, 145–146, 2013.
- [27] D. Heiss. *Fundamentals of Quantum Information: Quantum Computation, Communication, Decoherence and All That*. Lecture notes in Physics. Springer, 2010.
- [28] A. Altman, K. Köprülü, E. Corndorf, P. Kumar, and G. Barbosa. Quantum imaging of nonlocal spatial correlations induced by orbital angular momentum. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 123601, 2005.
- [29] H. Paul. *Introduction to Quantum Optics: From Light Quanta to Quantum Teleportation*. Cambridge University Press, 2004.
- [30] J. Arlt, V. Garces-Chavez, W. Sibbett, and K. Dholakia. Optical micromanipulation using a Bessel light beam. *Opt. Commun.*, **197**, 239–245, 2001.
- [31] V. Garcés-Chávez, K. Volke-Sepulveda, S. Chávez-Cerda, W. Sibbett, and K. Dholakia. Transfer of orbital angular momentum to an optically trapped low-index particle. *Phys. Rev. A*, **66**, 063402, 2002.
- [32] E. Martín-Badosa, M. Montes-Usategui, A. Carnicer, J. Andilla, E. Pleguezuelos, and I. Juvells. Design strategies for optimizing holographic optical tweezers set-ups. *J. Opt. A Pure Appl. Opt.*, **9**, S267–S277, 2007.
- [33] K. Volke-Sepulveda. Light beams with angular momentum and applications in optical twizers, Ph.D. Thesis, INAOE, 2003.

- [34] K. Zhang and D. Li. *Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics*. Springer, 2007.
- [35] L. Allen and M. J. Padgett. The Poynting vector in Laguerre–Gaussian beams and the interpretation of their angular momentum density. *Opt. Commun.*, **184**, 67–71, 2000.
- [36] L. P. Eisenhart. Separable Systems in Euclidean 3-Space. *Phys. Rev.*, **45**, 427–428, 1934.
- [37] R. Beth. Mechanical detection and measurement of the angular Momentum of light. *Phys. Rev.*, **50**, 115–125, 1936.
- [38] J. Durnin. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory. *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**, 651, 1987.
- [39] J. Durnin and J. J. Miceli. Diffraction-free beams. *Phys. Rev. Lett.*, **58**, 1499–1501, 1987.
- [40] C. A. McQueen, J. Arlt, and K. Dholakia. An experiment to study a “nondiffracting” light beam. *Am. J. Phys.*, **67**, 912, 1999.
- [41] G. Scott and N. Mcardle. Efficient generation of nearly diffraction-free beams using an axicon. *Opt. Eng.*, **31**, 2640, 1992.
- [42] J. H. McLeod. The axicon: A new type of optical element. *J. Opt. Soc. Am.*, **44**, 592, 1954.
- [43] J. Arlt, K. Dholakia, L. Allen, and M. J. Padgett. The production of multiringed Laguerre-Gaussian modes by computer-generated holograms. *J. Mod. Opt.*, **45**, 1231–1237, 1998.
- [44] C. Paterson and R. Smith. Higher-order Bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms. *Opt. Commun.*, **124**, 121–130, 1996.
- [45] K. Kuntz, B. Braverman, S. Youn, M. Lobino, E. Pessina, and A. Lvovsky. Spatial and temporal characterization of a Bessel beam produced using a conical mirror. *Phys. Rev. A*, **79**, 043802, 2009.
- [46] N. Chattaripiban, E. A. Rogers, D. Cofield, W. T. Hill, and R. Roy. Generation of nondiffracting Bessel beams by use of a spatial light modulator. *Opt. Lett.*, **28**, 2183, 2003.

- [47] D. McGloin and K. Dholakia. Bessel beams: Diffraction in a new light. *Contemp. Phys.*, **46**, 15–28, 2005.
- [48] V. Arrizón, D. Sánchez-de-la-Llave, U. Ruiz, and G. Méndez. Efficient generation of an arbitrary nondiffracting Bessel beam employing its phase modulation. *Opt. Lett.*, **34**, 1456, 2009.
- [49] J. C. Gutiérrez-Vega and C. López-Mariscal. Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence. *J. Opt. A Pure Appl. Opt.*, **10**, 015009, 2008.
- [50] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, 1997.
- [51] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.
- [52] A. Nisbet. Electromagnetic potentials in a heterogeneous non-conducting medium. *Proc. R. Soc. Lond. A. Math. Phys. Sci.*, 1957.
- [53] R. Jáuregui and S. Hacyan. Quantum-mechanical properties of Bessel beams. *Phys. Rev. A*, **71**, 033411, 2005.
- [54] J. W. Simmons and M. J. Guttman. *States, waves and photons: A modern introduction to light*. Addison-Wesley series in physics. Addison-Wesley Publishing Company, 1970.
- [55] J. Gutiérrez-Vega, M. Iturbe-Castillo, and S. Chávez-Cerda. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams. *J. Opt. B Quantum Semiclassical Opt.*, **4**, S82–S89, 2002.
- [56] B. M. Rodríguez-Lara and R. Jáuregui. Single structured light beam as an atomic cloud splitter. *Phys. Rev. A*, **80**, 011813, 2009.
- [57] C. L. Hernández-Cedillo, S. Bernon, H. Hattermann, J. Fortágh, and R. Jáuregui. Scattering of dilute thermal atom clouds on optical Weber beams. *Phys. Rev. A*, **87**, 023404, 2013.
- [58] K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chávez, S. Chávez-Cerda, J. Arlt, and K. Dholakia. Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam. *Opt. Lett.*, **25**, 1493–1495, 2000.
- [59] R.W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Nonlinear Optics Series. Elsevier Science, 2008.

- [60] C. Kurtsiefer. Generation of correlated photon pairs in type-II parametric down conversion-revisited. *J. Mod. Opt.*, **48**, 1997–2007, 2001.
- [61] Zhe-Yu Jeff Ou. *Multi-photon quantum interference*. Springer, 2007.
- [62] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995.
- [63] S. Hacyan and R. Jáuregui. Faraday effect and Bessel beams in a magneto-optic medium. *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.*, **41**, 015402, 2008.
- [64] R.J. Glauber and M. Lewenstein. Quantum optics of dielectric media. *Phys. Rev. A*, **43**, 467, 1991.
- [65] L.-M. Duan and G.-C. Guo. Alternative approach to electromagnetic field quantization in nonlinear and inhomogeneous media. *Phys. Rev. A*, **56**, 925–930, 1997.
- [66] V. Peřinová and A. Lukš. Quantization of the electromagnetic field in uniaxial crystalline dielectric media: long-wave limit. *J. Opt. B Quantum Semiclassical Opt.*, **7**, 201–211, 2005.
- [67] Y. Jerónimo-Moreno and R. Jáuregui. On-demand generation of propagation-invariant photons with orbital angular momentum. *Phys. Rev. A*, **90**, 013833, 2014.
- [68] V. V. Dodonov. Dynamical Casimir effect: Some theoretical aspects. *J. Phys. Conf. Ser.*, **161**, 012027, 2009.
- [69] A. Flores-Pérez, J. Hernández-Hernández, R. Jáuregui, and K. Volke-Sepúlveda. Experimental generation and analysis of first-order TE and TM Bessel modes in free space. *Opt. Lett.*, **31**, 1732, 2006.
- [70] S. Hacyan and R. Jáuregui. Evolution of optical phase and polarization vortices in birefringent media. *J. Opt. A Pure Appl. Opt.*, **11**, 085204, 2009.
- [71] A. Nisbet. Hertzian electromagnetic potentials and associated gauge transformations. *Proc. R. Soc. Lond. A. Math. Phys. Sci.*, **231**, 250–263, 1955.
- [72] J. P. Torres, G. Molina-Terriza, and L. Torner. The spatial shape of entangled photon states generated in non-collinear, walking parametric downconversion. *J. Opt. B Quantum Semiclassical Opt.*, **7**, 235–239, 2005.

- [73] S. P. Walborn, C. H. Monken, S. Pádua, and P. H. Souto Ribeiro. Spatial correlations in parametric down-conversion. *Phys. Rep.*, **495**, 87–139, 2010.
- [74] M. Fedorov, M. Efremov, P. Volkov, E. Moreva, S. Straupe, and S. Kulik. Spontaneous parametric down-conversion: Anisotropical and anomalously strong narrowing of biphoton momentum correlation distributions. *Phys. Rev. A*, **77**, 1–15, 2008.
- [75] R. W. Cottle. Manifestations of the Schur complement. *Linear Algebra Appl.*, **8**, 189–211, 1974.
- [76] C. L. Hernández-Cedillo and R. Jáuregui. Spin and orbital angular momentum correlations in parametric downconversion of Bessel beams. *J. Opt.*, **13**, 064021, 2011.
- [77] D. Caetano, M. Almeida, P. Souto Ribeiro, J. Huguenin, B. Coutinho dos Santos, and A. Khoury. Conservation of orbital angular momentum in stimulated down-conversion. *Phys. Rev. A*, **66**, 041801, 2002.
- [78] S. Walborn, A. de Oliveira, R. Thebaldi, and C. Monken. Entanglement and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, **69**, 023811, 2004.
- [79] G. Barbosa. Comment on “Spatial symmetry and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-Conversion”. *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 149303, 2009.
- [80] H. H. Arnaut and G. A. Barbosa. Orbital and intrinsic angular momentum of single photons and entangled pairs of photons generated by parametric down-conversion. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 286–289, 2000.
- [81] P. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. Sergienko, and Y. Shih. New high-intensity source of polarization-entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4337–4341, 1995.
- [82] J. Arlt, K. Dholakia, L. Allen, and M. Padgett. Parametric down-conversion for light beams possessing orbital angular momentum. *Phys. Rev. A*, **59**, 3950–3952, 1999.
- [83] S. Feng, C.-H. Chen, G. A. Barbosa, and P. Kumar. Role of pump-beam orbital angular momentum in type-II parametric down-conversion. *Quantum Electron. Laser Sci. Conf.*, page QWB3, 2006.

- [84] S. Feng and P. Kumar. Spatial symmetry and conservation of orbital angular momentum in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 163602, 2008.
- [85] J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, and M. Padgett. Second-harmonic generation and the conservation of orbital angular momentum with high-order Laguerre-Gaussian modes. *Phys. Rev. A*, **56**, 4193–4196, 1997.
- [86] M. Martinelli, J. Huguenin, P. Nussenzveig, and a. Khoury. Orbital angular momentum exchange in an optical parametric oscillator. *Phys. Rev. A*, **70**, 013812, 2004.
- [87] L. Marrucci, C. Manzo, and D. Paparo. Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media. *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 163905, 2006.
- [88] G. Molina-Terriza, J. P. Torres, and L. Torner. Orbital angular momentum of photons in noncollinear parametric downconversion. *Opt. Commun.*, **228**, 155–160, 2003.
- [89] G. Barbosa. Transverse coincidence structures in spontaneous parametric down-conversion with orbital angular momentum: Theory. *Phys. Rev. A*, **76**, 033821, 2007.
- [90] B. Saleh, A. Abouraddy, A. Sergienko, and M. Teich. Duality between partial coherence and partial entanglement. *Phys. Rev. A*, **62**, 043816, 2000.
- [91] A. P. Prudnikov, A. Brychkov Yu, and O. I. Marichev. *Integrals and Series Vol. 2 (London: Gordon and Breach)*. 1983.
- [92] K. Kato. Second-harmonic generation to 2048 Å in β -BaB₂O₄. *IEEE J. Quantum Electron.*, **22**, 1013–1014, 1986.
- [93] D. N. Nikogosyan. Beta Barium Borate (BBO). *Appl. Phys. A Solids Surfaces*, **52**, 359–368, 1991.

Spin and orbital angular momentum correlations in parametric downconversion of Bessel beams

This article has been downloaded from IOPscience. Please scroll down to see the full text article.

2011 J. Opt. 13 064021

(<http://iopscience.iop.org/2040-8986/13/6/064021>)

View [the table of contents for this issue](#), or go to the [journal homepage](#) for more

Download details:

IP Address: 132.248.209.200

The article was downloaded on 11/08/2011 at 18:44

Please note that [terms and conditions apply](#).

Spin and orbital angular momentum correlations in parametric downconversion of Bessel beams

C L Hernández-Cedillo and R Jáuregui

Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 20-364, México 01000, Mexico

E-mail: carlosluis@fisica.unam.mx and rocio@fisica.unam.mx

Received 29 September 2010, accepted for publication 3 December 2010

Published 28 April 2011

Online at stacks.iop.org/JOpt/13/064021

Abstract

We present a full vectorial analysis of the parametric downconversion process using a pump Bessel beam and a photon description based on Bessel wavefunctions. We find that, under the considered geometry, optical angular momentum is conserved but the crystal induces a coupling between the optical spin angular momentum (SAM) and the optical orbital angular momentum (OAM) ruled by the nonlinear properties of the crystal via the second order susceptibility tensor $\chi_{ijk}^{(2)}$. This leads to nontrivial correlations between the expected values of the SAM and OAM of the resulting two-photon states. Distributions of orbital angular momentum of the downconverted photons are evaluated in detail for a specific set-up.

Keywords: optical angular momentum, parametric downconversion of structured beams, Bessel beams

(Some figures in this article are in colour only in the electronic version)

1. Introduction

A few years after the generation of optical beams with orbital angular momentum (OAM) [1], the study of quantum nonlinear effects on those beams was recognized as an interesting subject for which general statements cannot be easily formulated [2–11]. An important question concerns the conditions under which the OAM of the involved photons is conserved.

On the one hand, pioneer studies in second harmonic generation [2, 3] revealed that, under the implemented experimental set-up, optical orbital angular momentum (OOAM) was conserved; similarly, clear evidence of OOAM conservation in spontaneous parametric downconversion was obtained in [4], where entanglement between the OAM variables of the two-photon states was also analyzed. The results opened the possibility of using OAM for the implementation of quantum information protocols. Introducing a stimulating beam, the consequences of OOAM conservation were also studied for parametric amplification [5].

On the other hand, OAM transfer studies from pump to downconverted beams in a type II optical parametric

oscillator [7] showed that cavity and anisotropy effects play an important role in the transverse mode dynamics, so the OOAM could be simply lost. It was also predicted [8] and experimentally demonstrated [9] that collinear phase matching geometry, where the pump, signal and idler photons propagate along almost the same direction, is an important condition for OOAM conservation in PDC.

In free space, it is well known that symmetry under azimuthal rotations induces the conservation of total angular momentum. For photons that propagate in a medium, conservation of spin orbital momenta (SAM), related to light polarization, plus orbital angular momentum, related to a helical phase front giving an azimuthal component to the Poynting vector, is expected, whenever there is no exchange of angular momenta with the media. For an electromagnetic field, the linear and nonlinear dielectric susceptibilities $\chi_{ij}^{(1)}$ and $\chi_{ijk}^{(2)}$ of a given crystal could present an azimuthal dependence, reflecting the crystalline symmetry, and this could be a source of symmetry breaking. In fact, transformations between SAM to OAM and vice versa due to anisotropic and inhomogeneous linear susceptibilities have already been observed [12]. General consequences of the relevance

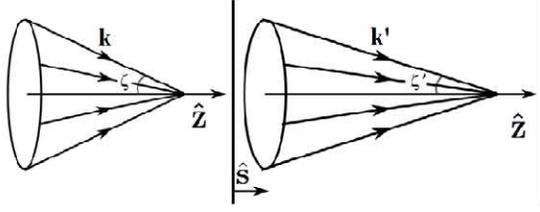


Figure 1. Geometry of the system under consideration. The incident Bessel beam is a superposition of plane waves with propagation vectors \mathbf{k} lying on the surface of a cone with axicon angle ζ . Inside the crystal the beam is also a superposition of plane waves with wavevectors lying on the surface of a cone, the corresponding angle ζ' differs for transverse electric modes (with amplitude $\mathcal{B} = 0$) and transverse magnetic modes ($\mathcal{E} = 0$) and depends on the birefringent dielectric functions ϵ_{\parallel} and ϵ [13]. We assume the beam main propagation vector $\hat{\mathbf{e}}_z$ to be parallel to the optical crystal axis $\hat{\mathbf{s}}$. The vertical lines represent the borders of the crystal. Note that this graph is not scaled since it is just for illustrative purposes.

of symmetry on quantum nonlinear processes, particularly parametric downconversion, have been recently carried out [8, 10, 11] to understand the apparently contradictory experimental observations.

Most of the theoretical and experimental analysis of OAM in PDC, have been devoted to Laguerre–Gaussian paraxial beams and do not include the vectorial character of the electromagnetic field. In this work we are interested in studying the correlations between optical spin angular momentum and optical orbital angular momentum mediated by a crystal in a specific PDC process.

In an effort to make the interpretation of the theoretical analysis as conclusive as possible, we consider a propagation invariant beam with orbital angular momentum impinging a nonlinear crystal with the simplest geometrical configuration for which the beam in the media would also be propagation invariant even in the presence of birefringence [13]. The electromagnetic field is quantized in the basis of the corresponding vectorial Bessel modes and the angular momentum properties of the idler and signal photons can be directly read out. The geometrical configuration guarantees azimuthal symmetry for the photons along their main direction of propagation.

2. Interaction Hamiltonian in the vectorial Bessel mode basis

The treatment of PDC using a Bessel–Gauss beam as pump was first reported in [14, 15], where, however, the full vectorial description was not carried out. Here, we consider a vectorial m -order Bessel beam impinging on a uniaxial birefringent nonlinear crystal of width L and radius $R \gg L$ with its optical axis orthogonal to its surface. The beam main direction of propagation is parallel to this axis. The material is assumed homogeneous and to have non-relevant magnetic effects, so that the magnetic permeability μ is close to unity and the electric permittivity perpendicular and along to the optical axis, $\epsilon(\omega)$ and $\epsilon_{\parallel}(\omega)$ respectively, determine directly the ordinary

and extraordinary refraction indices $n_o(\omega)$ and $n_e(\omega)$. The electric field of the incident beam can be written as

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{inc}} = & \frac{\omega}{2ck_{\perp}} \mathcal{E} e^{-i(\omega t - k_z z)} (\psi_{m-1}(k_{\perp} \rho, \theta) \mathbf{e}_+ \\ & + \psi_{m+1}(k_{\perp} \rho, \theta) \mathbf{e}_-) + \frac{ik_z}{2k_{\perp}} \mathcal{B} e^{-i(\omega t - k_z z)} (\psi_{m-1}(k_{\perp} \rho, \theta) \mathbf{e}_+ \\ & - \psi_{m+1}(k_{\perp} \rho, \theta) \mathbf{e}_-) - 2i \frac{k_{\perp}}{k_z} \psi_m(k_{\perp} \rho, \theta) \hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned} \quad (1)$$

where $\psi_m(k_{\perp} \rho, \theta) = J_m(k_{\perp} \rho) e^{im\theta}$, k_z and k_{\perp} refer to the wavevector components along and perpendicular to the main direction of propagation, and $\mathbf{e}_{\pm} = \hat{\mathbf{e}}_x \pm i\hat{\mathbf{e}}_y$ denote the standard right/left polarization vectors. In terms of plane waves

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{inc}} = & \frac{1}{2\pi\omega} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \delta(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z - \omega \cos \zeta) \delta(|\mathbf{k}| - \omega) \\ & \times \left[\frac{1}{2} (\mathcal{E} \text{cosec} \zeta + i\mathcal{B} \cot \zeta) \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_+}{|\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_+|} \right)^{m-1} \mathbf{e}_+ \right. \\ & + \frac{1}{2} (\mathcal{E} \text{cosec} \zeta - i\mathcal{B} \cot \zeta) \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_+}{|\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_+|} \right)^{m+1} \mathbf{e}_- \\ & \left. + \mathcal{B} \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_+}{|\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_+|} \right)^m \hat{\mathbf{e}}_z \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

The first delta factor in this expression shows that Bessel beams are a superposition of plane waves with propagation vectors \mathbf{k} necessarily lying on a surface of a cone defined by the so-called axicon angle ζ with $k_{\perp} = k_z \tan \zeta$. The axicon angle is taken as a parameter in the optimization of parametric downconversion for a given nonlinear crystal.

The electric field inside the material has the form $\mathbf{E} = \mathbf{E}_F^o + \mathbf{E}_B^o + \mathbf{E}_F^e + \mathbf{E}_B^e$ where o, e refer to the ordinary and extraordinary beams, the subscripts F, B to either the forward or backward propagation of the beams; the fields are explicitly given by

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_F^o = & \frac{\mathcal{E}}{\Delta_{\mu}^o} \left(\frac{k_z^o}{\mu k_z} + 1 \right) \frac{\omega}{ck_{\perp}} \mathbb{E}_F^o \\ \mathbb{E}_F^o = & e^{-i(\omega t - k_z^o(z-L))} (\psi_{m-1}(k_{\perp} \rho, \theta) \mathbf{e}_+ + \psi_{m+1}(k_{\perp} \rho, \theta) \mathbf{e}_-), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_F^e = & i \frac{\mathcal{B}}{\Delta_{\epsilon}^e} \left(\frac{k_z^e}{\epsilon k_z} + 1 \right) \frac{k_z^e}{\epsilon k_{\perp}} \mathbb{E}_F^e \\ \mathbb{E}_F^e = & e^{-i(\omega t - k_z^e(z-L))} \left(\psi_{m-1}(k_{\perp} \rho, \theta) \mathbf{e}_+ \right. \\ & \left. - \psi_{m-1}(k_{\perp} \rho, \theta) \mathbf{e}_- - 2i \frac{\epsilon k_{\perp}}{\epsilon_{\parallel} k_z^e} \psi_m(k_{\perp} \rho, \theta) \hat{\mathbf{e}}_z \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{E}_B^o = -\mathbf{E}_F^o(-k_z^o), \quad \mathbf{E}_B^e = \mathbf{E}_F^e(-k_z^e), \quad (5)$$

where $\Delta_{\beta}^{(v)} = (k_z^v/\beta k_z + 1)^2 \exp(-ik_z^v L) - (k_z^v/\beta k_z - 1)^2 \exp(ik_z^v L)$, $\beta = \epsilon, \mu$, and $v = o, e$ refers to the ordinary and extraordinary beams. The expressions for the corresponding magnetic fields \mathbf{H} are obtained by the exchange $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$, $\mathcal{E} \rightarrow -\mathcal{B}$, $\mu \rightarrow \epsilon$, $\epsilon_{\parallel} \rightarrow \mu$, $e \rightarrow o$ and $o \rightarrow e$ in the above expressions. The birefringent dispersion relations must be satisfied, $\epsilon \mu \omega^2/c^2 = k_x^2 + k_y^2 + (k_z^o)^2$ and $\epsilon_{\parallel} \mu \omega^2/c^2 = k_x^2 + k_y^2 + (\epsilon_{\parallel}/\epsilon)(k_z^e)^2$. Figure 1 illustrates the geometry of the system under consideration emphasizing the fact that Bessel beams are superpositions of plane electromagnetic fields lying in a cone.

Disregarding nonlinear effects, just due to birefringence, any different incidence angle would lead to electric and magnetic fields inside the crystal with a very complex structure [16].

The description of spontaneous parametric downconversion requires a quantum description of the electromagnetic field; we consider a quantization in the media analogous to that used in an infinite-extended empty space [17] but now adapted to a crystal of finite width L and infinite radius:

$$\hat{\mathbf{E}} = \sum_{\nu, \kappa, q, m} \eta_{\nu}^{\nu}(k_{\nu}^{\nu}, k_{\perp}) \mathcal{E}^{\nu}(k_{\nu}^{\nu}, k_{\perp}) \mathbb{E}_{m, q}^{\nu} \hat{a}_{\kappa \nu} + \text{H.c.}, \quad (6)$$

the Σ symbol includes integration over the continuous variable k_{\perp} and a sum over the discrete values of $k_z = 2\pi n/L$, n an integer; $\hat{a}_{\kappa \nu}$ is the annihilation operator associated with the mode with quantum numbers $\kappa^{\nu} = \{m^{\nu}, k_{\nu}^{\nu}, k_{\perp}^{\nu}\}$, $q = \text{F, B}$, $\eta_{\text{F}}^{\text{F}} = \eta_{\text{B}}^{\text{B}} = \omega(k^{\nu})/c$, $\eta_{\text{F}}^{\text{c}} = -\eta_{\text{B}}^{\text{c}} = k_z^{\text{c}}/\epsilon$ and the normalization factors are $\mathcal{E}^{\text{o}} = c\sqrt{\hbar k_{\perp}^{\text{o}}/\epsilon\omega^{\text{o}}L}$, and $\mathcal{E}^{\text{e}} = c\sqrt{\hbar k_{\perp}^{\text{e}}/\mu\omega^{\text{e}}L}$.

Nonlinear properties of the crystal are assumed to be given by the second order susceptibility tensor χ_{hjl} , so that, if the pump beam is a coherent state, the effective interaction density Hamiltonian [18] is $\hat{\mathcal{H}}_1 = \sum_{h, j, l} \chi_{hjl} \hat{E}_h^{\text{ss}} \hat{E}_j^{\text{is}} E_l^{\text{p}}$; here care must be taken of the fact that the electric field of the beam impinging the crystal, equation (1), is not identical to that used as the pump beam. Once the integration of \mathcal{H}_1 in the crystal volume is carried out, the effective interaction Hamiltonian becomes

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_1 &= \frac{2\pi L}{k_{\perp}} \sum_{\{\sigma, \nu, \kappa, q, m\}} \sum_{hjl} (\mathbf{e}_{\sigma^s})_h^* (\mathbf{e}_{\sigma^i})_j^* (\mathbf{e}_{\sigma^p})_l e^{-i(\omega^p - \omega^s - \omega^i)t} \\ &\times \chi_{hjl} (\eta_{q^s}^{\nu^s})^* (\eta_{q^i}^{\nu^i})^* \eta_{q^p}^{\nu^p} \gamma_{q^p}^{\nu^p} \underset{(-1)^{\text{F}}}{\gamma} \\ &\cdot (\alpha_{\sigma^s, q^s}^{\nu^s})^* (\alpha_{\sigma^i, q^i}^{\nu^i})^* \alpha_{\sigma^p, q^p}^{\nu^p} (\mathcal{E}^{\nu^s})^* (\mathcal{E}^{\nu^i})^* (k_{\perp}^s k_{\perp}^i)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times e^{-i\frac{L}{2} \Delta k_{z\{q\}}^{\{\nu\}}} \text{sinc}\left(\frac{L}{2} \Delta k_{z\{q\}}^{\{\nu\}}\right) \hat{a}_{\kappa^s}^{\dagger} \hat{a}_{\kappa^i}^{\dagger} \\ &\cdot \delta_{m_{\sigma^i}, m_{\sigma^p} - m_{\sigma^s}} I_{m_{\sigma^s}, m_{\sigma^i}, m_{\sigma}} (k_{\perp}^s/k_{\perp}^p, k_{\perp}^i/k_{\perp}^p, k_{\perp}^p/R). \end{aligned}$$

In this expression, $\gamma_{\pm}^{\text{c}} = \pm(\mathcal{E}/k_{\perp} \Delta \mu^{\text{o}})(\pm k_z^{\text{o}}/(\mu k_z) + 1)$, $\gamma_{\pm}^{\text{e}} = i(\mathcal{B}/k_{\perp} \Delta \epsilon^{\text{e}})(\pm k_z^{\text{e}}/\epsilon k_z + 1)$, $\sigma \equiv +, -, 3$, $m_+ \equiv m-1$, $m_- \equiv m+1$, $m_3 \equiv m$, and $\alpha_{+, q}^{\text{o}} = \alpha_{-, q}^{\text{o}} = 1$, $\alpha_{3, q}^{\text{o}} = 0$; $\alpha_{+, q}^{\text{e}} = -\alpha_{-, q}^{\text{e}} = 1$, $\alpha_{3, q}^{\text{e}} = -2i \frac{k_{\perp}}{\epsilon \eta_q^{\text{e}}}$.

The sinc function expresses the conservation of linear momenta

$$\begin{aligned} \Delta k_{z\{q\}}^{\{\nu\}} &\equiv (-1)^q k_z^{\nu^p} - (-1)^q k_z^{\nu^s} - (-1)^q k_z^{\nu^i} \simeq 0, \\ (-1)^{\text{F}} &\equiv 1, \quad (-1)^{\text{B}} \equiv -1, \end{aligned}$$

the $\delta_{m_{\sigma^i}, m_{\sigma^p} - m_{\sigma^s}}$ is related to conservation of total angular momenta, admitting the possibility of conversion from (to) spin angular momentum to (from) orbital angular momentum since subscripts σ are directly related to the polarization. Finally, the integrals

$$\begin{aligned} I_{m_1, m_2, m_3} &= \sqrt{\frac{k_{\perp}^s k_{\perp}^i}{k_{\perp}^p k_{\perp}^p}} \int_0^{k_{\perp}^p R} J_{m_1}\left(\frac{k_{\perp}^s}{k_{\perp}^p} \zeta\right) J_{m_2}\left(\frac{k_{\perp}^i}{k_{\perp}^p} \zeta\right) \\ &\times J_{m_3}(\zeta) \zeta \, d\zeta \end{aligned} \quad (7)$$

determine the probability density in the perpendicular momentum space.

The sum over m^i is easily carried out, obtaining

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_1 &= \frac{2\pi L}{k_{\perp}^p} \sum_{\{\sigma, \nu, k_{\nu}^{\nu}, k_{\perp}^{\nu}, q\}} \sum_{m^s} \sum_{hjl} (\mathbf{e}_{\sigma^s})_h^* (\mathbf{e}_{\sigma^i})_j^* (\mathbf{e}_{\sigma^p})_l e^{-i(\omega^p - \omega^s - \omega^i)t} \\ &\cdot \chi_{hjl} (\eta_{q^s}^{\nu^s})^* (\eta_{q^i}^{\nu^i})^* \eta_{q^p}^{\nu^p} \gamma_{q^p}^{\nu^p} (\alpha_{\sigma^s, q^s}^{\nu^s})^* (\alpha_{\sigma^i, q^i}^{\nu^i})^* \alpha_{\sigma^p, q^p}^{\nu^p} (\mathcal{E}^{\nu^s})^* \\ &\times (\mathcal{E}^{\nu^i})^* (k_{\perp}^s k_{\perp}^i)^{-\frac{1}{2}} \cdot I_{m_{\sigma^s}, m_{\sigma^p} - m_{\sigma^s}, m_{\sigma^p}} \\ &\times \text{sinc}\left(\frac{L}{2} \Delta k_{z\{q\}}^{\{\nu\}}\right) e^{-i\frac{L}{2} \Delta k_{z\{q\}}^{\{\nu\}}} \hat{a}_{\kappa^s}^{\dagger} \hat{a}_{\kappa^i}^{\dagger} \end{aligned} \quad (8)$$

with $m^i = m^p - m^s - \mu_{\sigma^p} + \mu_{\sigma^s} + \mu_{\sigma^i}$, $\mu_+ \equiv 1$, $\mu_- \equiv -1$, $\mu_3 \equiv 0$.

Using this equation, a variety of two-photon processes can be studied depending on the selection of the material used via the tensor χ_{hjl} and the phase matching conditions. These processes may involve different values of the sum $\mu_{\sigma^p} - \mu_{\sigma^s} - \mu_{\sigma^i}$ that appears in the second creation operator, namely $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. They are also directly identified with the terms corresponding to different combinations of incident and resultant ordinary and extraordinary photons, i.e., different sets $\{\nu^i, \nu^s, \nu^p\}$. For a negative uniaxial crystal, the most relevant spontaneous parametric downconversion (SPDC) processes are of type I (both resultant photons have the same ordinary polarization) and type II (both resultant photons have different polarizations). The subprocesses due to terms identified with $\{q^s, q^i, q^p\}$ refer to effects due to the fields propagating in forward or/and backward directions, these subprocesses lead to different signs inside the sinc functions.

Applying this to a specific crystal, that is a β -barium borate (BBO) for which the nonlinear coefficient d_{22} is dominant [19], it results

$$\begin{aligned} \sum_{hjl} \chi_{hjl} (\mathbf{e}_{\sigma^s})_i^* (\mathbf{e}_{\sigma^i})_j^* (\mathbf{e}_{\sigma^p})_l &\sim -2d_{22} [(\mathbf{e}_{\sigma^s})_x^* (\mathbf{e}_{\sigma^i})_y^* \\ &+ (\mathbf{e}_{\sigma^s})_y^* (\mathbf{e}_{\sigma^i})_x^*] (\mathbf{e}_{\sigma^p})_x + [(\mathbf{e}_{\sigma^s})_x^* (\mathbf{e}_{\sigma^i})_x^* \\ &- (\mathbf{e}_{\sigma^s})_y^* (\mathbf{e}_{\sigma^i})_y^*] (\mathbf{e}_{\sigma^p})_y. \end{aligned} \quad (9)$$

As a particular case, SPDC type I is studied and we focus on the effects due to photons propagating forward. In this case $\nu^p = (\text{p}, \text{e})$, $\nu^s = (\text{s}, \text{o})$ and $\nu^i = (\text{i}, \text{o})$; $\sigma^i = +, -$, $\sigma^s = +, -$ and $\sigma = +, -, 3$; $q^s = q^i = q^p = \text{F}$.

Using equation (9), expanding the sums over $\sigma^s, \sigma^i, \sigma^p$ and simplifying we get

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_1^{\text{eoo}} &= \sum_{k_{\nu}^{\nu}, k_{\perp}^{\nu}} f(\omega^p, \omega^s, \omega^i, k_{\perp}^p, \epsilon^s, \epsilon^i, \epsilon_{\parallel}^p, t) e^{-i\frac{L}{2} \Delta k_{z\{\text{F}\}}^{\{\text{e}, \text{o}, \text{o}\}}} \\ &\times \text{sinc}\left(\frac{L}{2} \Delta k_{z\{\text{F}\}}^{\{\text{e}, \text{o}, \text{o}\}}\right) \cdot \sum_{m^s} [I_{m_{-}, m_{+}^p - m_{-}, m_{+}^s} \hat{a}_{\kappa^s}^{\dagger} \hat{a}_{\kappa^i}^{\dagger} \\ &+ I_{m_{+}, m_{-}^p - m_{+}, m_{-}^s} \hat{a}_{\kappa^s}^{\dagger} \hat{a}_{\kappa^i}^{\dagger}] \end{aligned} \quad (10)$$

with the topological charge of the idler photons $m_{\kappa^i, \pm} = m^p - m^s \pm 3$ and

$$f = \frac{16d_{22}\pi\hbar\mathcal{B}}{\Delta_{\epsilon}^{\text{e}}} \left(\frac{k_z^{\text{p}, \text{e}}}{\epsilon_{\parallel} k_{\perp}^{\text{p}}} + 1\right) \frac{k_z^{\text{p}, \text{e}}}{\epsilon_{\parallel} (k_{\perp}^{\text{p}})^2} \sqrt{\frac{\omega^s \omega^i}{\epsilon^s \epsilon^i}} e^{-i(\omega^p - \omega^s - \omega^i)t}. \quad (11)$$

The probability amplitudes for different processes are given by the creation operators coefficients. In this case, two two-photon states can be produced with different total OAMs

$$|m^s, m^p - m^s - 3\rangle_1, \quad |m^s, m^p - m^s + 3\rangle_2, \quad (12)$$

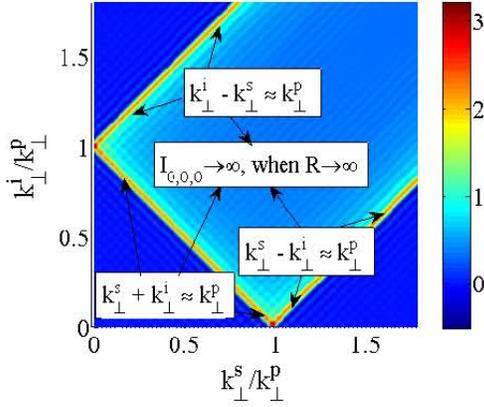


Figure 2. Level plot of the transverse momentum phase matching function $I_{0,0,0}(k_{\perp}^s/k_{\perp}^p, k_{\perp}^i/k_{\perp}^p, k_{\perp}^p R = 100)$; the maxima of this function are found for $|k_{\perp}^s \pm k_{\perp}^i| = k_{\perp}^p$.

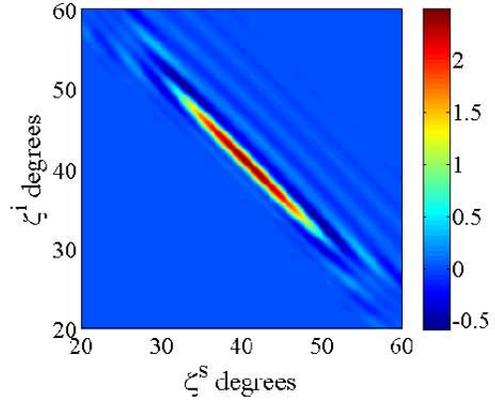


Figure 3. Probability amplitude for the generation of a two-photon state type 1 as a function of the idler and signal axicon angles ζ^i and ζ^s , the incident beam corresponds to a $m = 1$ vectorial Bessel beam with an axicon angle $\zeta = 40.5^\circ$ and a wavelength $\lambda = 531$ nm.

their probability amplitudes are proportional to $I_{m_{\sigma}^s, m_{\sigma}^p - m_{\sigma}^s, m_{\sigma}^p}$ and $I_{m_{\sigma}^s, m_{\sigma}^p - m_{\sigma}^s, m_{\sigma}^p}$ respectively and the topological charges of the signal and idler photons differ by ± 3 from the pump photon: $m_1^s + m_1^i = m^p - 3$, and $m_2^s + m_2^i = m^p + 3$. As a consequence, for the geometry under consideration and a type I PDC process with a BBO crystal, there is no OAM conservation. This effect could be regarded as a transfer between the z -component of total spin angular momentum of the involved photons to the z component of the orbital angular momentum due to spin-orbit coupling.

3. Analysis of I functions

The behavior of the $I_{m_{\sigma}^s, m_{\sigma}^p - m_{\sigma}^s, m_{\sigma}^p}$ delimits the values of the OAM of the photons created in a PDC process and the transverse momentum phase matching conditions. An analytical expression is known [20] for the I functions defined by equation (7) if $R \rightarrow \infty$ and $m_{\sigma}^p = 0$:

$$I_{m_{\sigma}^s, m_{\sigma}^s, 0} = k_{\perp}^p \sqrt{k_{\perp}^s k_{\perp}^i} (\cos(m_{\sigma}^s \arccos(r_+)))/(\pi k_{\perp}^s k_{\perp}^i \sqrt{1 - r_+^2})$$

if $-1 < r_+ = (k_{\perp}^s + k_{\perp}^i - k_{\perp}^p)/(2k_{\perp}^s k_{\perp}^i) < 1$ and zero otherwise. Under such conditions, $I_{m_{\sigma}^s, m_{\sigma}^s, 0}$ is a function of just $k_{\perp}^s/k_{\perp}^p, k_{\perp}^i/k_{\perp}^p$ and m_{σ}^s . It is observed that if $|k_{\perp}^s \pm k_{\perp}^i| \rightarrow k_{\perp}^p$ then $I \rightarrow \infty$ independently of the values of m_{σ}^s .

Effects due to finite values of R require a numerical analysis. In figure 2, $I_{0,0,0}$ is illustrated for $k_{\perp}^p R = 100$. The region for maximum values of $I_{0,0,0}$ is located at $|k_{\perp}^s \pm k_{\perp}^i| \approx k_{\perp}^p$ as expected from the $R \rightarrow \infty$ result. Now, additional oscillations are observed around the maxima that decay abruptly for $k_{\perp}^s + k_{\perp}^i \leq k_{\perp}^p$ and more softly as $k_{\perp}^s + k_{\perp}^i \geq k_{\perp}^p, |k_{\perp}^s - k_{\perp}^i| \leq k_{\perp}^p$.

For a pump beam with $m^p = 1$ the two relevant functions belong to the families $I_{m_{\sigma}^s, 0 - \sigma^s, 0}$ and $I_{m_{\sigma}^s, 2 - \sigma^s, 2}$. Numerical calculations show that the maximum absolute value of $I_{m_{\sigma}^s, -m_{\sigma}^s, 0}$ for $m_{\sigma}^s \neq 0$ is always smaller than the maximum absolute value for $m_{\sigma}^s = 0$. In that sense I_{000} determines the contribution of the $m_{\sigma}^p = 0$ family of $I_{m_{\sigma}^s, m_{\sigma}^p - m_{\sigma}^s, m_{\sigma}^p}$

functions to a PDC process. Similarly for $m_{\sigma}^p = 2$ the maximum value of $I_{m_{\sigma}^s, m_{\sigma}^p - m_{\sigma}^s, m_{\sigma}^p}$ for $m_{\sigma}^s \neq 1$ is always smaller than the maximum value for $m_{\sigma}^s = 1$. Besides, $I_{1,1,2}$ yields similar maximum heights as $I_{0,0,0}$ for $k_{\perp}^{s,i}/k_{\perp}^p < 1$.

4. Phase matching

In a PDC process using a monochromatic pump beam, the conservation of energy reads $\omega^i = \omega^p - \omega^s$ whenever any transfer of energy to the crystal is negligible. Besides, in a problem with Cartesian symmetry, if the transfer of momentum to the crystal is also negligible, the momentum $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ of the photons is restricted so that $k_j^s + k_j^i \approx k_j^p$ for $j = x, y, z$. In the present cylindrical geometry, this type of condition remains only along the main direction of propagation z . The other conservation laws refer to optical angular momenta, that reads $m^s + m^i = m^p - (\mu_{\sigma^p} - \mu_{\sigma^s} - \mu_{\sigma^i})$, and perpendicular momenta, that is reflected in the structure of the $I_{m_{\sigma}^s, m_{\sigma}^i, m_{\sigma}^p}(k_{\perp}^s, k_{\perp}^i, k_{\perp}^p, R)$ functions discussed in section 5. In an approximate way the latter reads $|k_{\perp}^s \pm k_{\perp}^i| \approx k_{\perp}^p$. If the symmetry adequate conservation equations are satisfied the system is in the phase matching regime.

The variation of the refractive indices with the wavelength must be taken into account in the analysis of the conditions that yield phase matching and accomplishment of the dispersion relations given in section 2. To that end, the Sellmeier equation for a BBO crystal valid in the interval from $\lambda = 0.2050$ to $1.064 \mu\text{m}$ [21] will be used.

Given the pump beam parameters (wavelength λ^p , axicon angle ζ^p and topological charge m^p) the properties of the downconverted photons fulfilling phase matching and dispersion relations can be studied.

In figure 3, the PDC probability amplitude for a TM Bessel beam impinging a crystal with $\lambda = 531$ nm, $\zeta = 40.5^\circ$ and $m = 1$ is shown for $k_{\perp}^p R = 153$ and $k_z L = 896$. The corresponding parameters of the pump beam are directly found from equation (4). From now on, this geometrical and optical configuration will be studied. We focus on the frequency

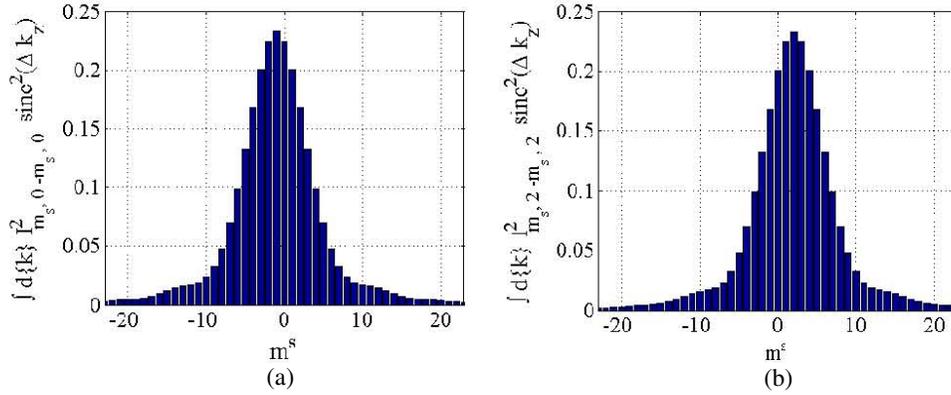


Figure 4. Expected OAM distribution of the downconverted photons for states (a) $|m^s, -m^s - 2\rangle$ and (b) $|m^s, -m^s + 4\rangle$. The incident beam corresponds to a $m^p = 1$ vectorial Bessel beam with an axicon angle $\zeta = 40.5^\circ$ and a wavelength $\lambda = 531$ nm.

degenerated type I process with the signal-idler photons in a state 1 with $m_1^{s,1} = -1$ (see equation (12)). Necessarily, the downconverted photons will be in the ordinary mode. The dominant term of this process is proportional to $I_{0,0,0}$. The results are reported in terms of the axicon angle of the signal-idler photons. We notice that the expected values for the axicon angles for the signal-idler photons in this case are within the interval $(35^\circ, 45^\circ)$. It must be mentioned that the incident beam axicon angle was chosen so as to have its minimum value compatible with a maximum absolute value of the probability amplitude for the process.

5. Two-photon states orbital angular momentum distribution

In this section, we study the dependence of the probability amplitude on the angular momenta of the signal photon m^s for the two-photon states of equation (12). For this specific example, the relevant I functions are $I_{m^s, -m^s, 0}$ and $I_{m^s, 2-m^s, 2}$ in correspondence to states: $|m^s, -m^s - 2\rangle_1$ and $|m^s, -m^s + 4\rangle_2$.

Figure 4 show the histogram of the integrals

$$\mathbb{I}_1 = \int dk_\perp^s dk_\perp^i [I_{m^s+1, -m^s-1, 0}(k_\perp^s, k_\perp^i, k_\perp^p R = 153) \times \text{sinc}([\Delta k_z L/2])]^2, \quad (13)$$

and

$$\mathbb{I}_2 = \int dk_\perp^s dk_\perp^i [I_{m^s-1, 2-m^s+1, 2}(k_\perp^s, k_\perp^i, k_\perp^p R = 153) \times \text{sinc}([\Delta k_z L/2])]^2 \quad (14)$$

that are proportional to the probability amplitudes to get the downconverted photon pairs in the two possible states $|m^s, m^p - m^s - 3\rangle_1$ and $|m^s, m^p - m^s + 3\rangle_2$ respectively.

According to figure 3(a), state 1 has a wide OAM distribution with its maximum at $m_1^s = -1$ and from figure 3(b) state 2 has a similar m^s distribution but with a maximum at $m_2^s = 2$. The maximum value of \mathbb{I} is the same for the two states so that the corresponding processes are equally probable.

6. Conclusions

We found that nonlinear crystals through PDC processes pumped by vectorial Bessel beams can enhance the correlations between SAM and OAM of downconverted photons. The geometry of the set-up was chosen so as to guarantee conservation of the total optical angular momentum. In the particular case of a BBO crystal and a type I PDC, we showed that the distribution of the orbital angular momenta of the signal photons can be wide and that more than one type of entangled two-photon states can be generated.

The general formalism developed in this paper can be the basis of calculations of PDC for Bessel beams that may include: (i) type II PDC processes, (ii) nondegenerate two-photon states; (iii) effects of backward propagating fields. The case where the incident beam impinges the crystal at a different angle requires a more complex analysis not just from the mathematical point of view but also based on the physical expectations. In this case, it is highly probable that the crystal will have a more important role since the azimuthal symmetry will be broken and optical angular momentum will not be conserved.

Acknowledgments

We acknowledge partial support by Conacyt and DGAPA IN-111109.

References

- [1] Allen L, Beijersbergen M W, Spreeuw R C and Woerdman J P 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8185
- [2] Dholakia K, Simpson N B, Padgett M J and Allen L 1996 *Phys. Rev. A* **54** R3742
- [3] Courtial J, Dholakia K, Allen L and Padgett M J 1997 *Phys. Rev. A* **56** 4193
- [4] Mair A, Vaziri A, Weihs G and Zeilinger A 2001 *Nature* **412** 313
- [5] Caetano D P, Almeida M P, Souto Ribeiro P H, Huguenin J A O, Coutinho dos Santos B and Khoury A Z 2002 *Phys. Rev. A* **66** R041801

- [6] Arlt J, Dholakia K, Allen L and Padgett M J 1999 *Phys. Rev. A* **59** 3950
- [7] Martinelli M, Huguenin J A O, Nussenzveig P and Khoury A Z 2004 *Phys. Rev. A* **70** 013812
- [8] Molina-Terriza G, Torres J P and Torner L 2003 *Opt. Commun.* **228** 155
- [9] Molina-Terriza G, Torres J P and Torner L 2007 *Nat. Phys.* **3** 305
- [10] Barbosa G A 2007 *Phys. Rev. A* **76** 033821
- [11] Feng S and Kumar P 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 163602
- [12] Marrucci L, Manzo C and Paparo D 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 163905
- [13] Hacyan S and Jáuregui R 2009 *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **11** 085204
- [14] Piskarskas A, Smilgevičius V, Stabinis A and Vaicaitis V 1999 *J. Opt. Soc. Am. B* **16** 1566
- [15] Pyragaite V, Piskarskas A, Regelskis K, Smilgevičius V, Stabinis A and Mikalauskas S 2004 *Opt. Commun.* **240** 191
- [16] Hacyan S, Méndez-Fragoso R and Jáuregui R 2009 *Internal Technical Report* Instituto de Física, UNAM
- [17] Jáuregui R and Hacyan S 2005 *Phys. Rev. A* **71** 033411
- [18] Friberg S, Hong C K and Mandel L 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 2011
- [19] Boyd R W 2008 *Nonlinear Optics* 3rd edn (New York: Academic)
- [20] Prudnikov A P, Brychkov Yu A and Marichev O I 1983 *Integrals and Series* vol II (London: Gordon and Breach) p 230
- [21] Kato K 1986 *IEEE J. Quantum Electron.* **22** 1013