**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

MAESTRÍA EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR


# SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN EL BACHILLERATO. DISEÑO DE UN AMBIENTE DE APRENDIZAJE CON COMPRENSIÓN

**TESIS**

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE: MAESTRO EN DOCENCIA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR (MATEMÁTICAS)

PRESENTA


JORGE PABLO ABREGO

TUTORA: DRA. ASELA CARLÓN MONROY

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN


NAUCALPAN DE JUÁREZ EDO. DE MÉXICO, OCTUBRE 2014

Mi más sincero agradecimiento a la Dra. Asela Carlón Monroy, por su admirable trabajo en la formación de profesionales en Educación Matemática y, por el valioso tiempo que dedicó en la dirección de este estudio.

***A: Carmen, Jorge Luis y Abraham***

## Resumen

El presente trabajo trata del diseño e implementación de un ambiente de aprendizaje con comprensión para tema de sistemas de ecuaciones lineales en el nivel medio superior. Se trabajan desde una ecuación lineal con dos incógnitas, hasta sistemas de cuatro ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se ha tomado en cuenta la posición de Hiebert y Carpenter (1992) quienes señalan que la comprensión es el resultado de numerosas y fuertes relaciones entre ideas matemáticas; esas relaciones se establecen por medio de similitudes y diferencias. También se considera lo señalado por Bransford, Brown y Cocking (1999) quienes proponen que para que los alumnos aprendan con comprensión, es necesario crear un ambiente de aprendizaje que lo favorezca, en dicho ambiente de aprendizaje se toman en consideración las perspectivas del estudiante, del conocimiento, de la evaluación y de la comunidad.

Para dichas perspectivas se considera, entre otros aspectos, los siguientes: los conocimientos con los que el estudiante llegó al salón de clase, algunos resultados de estudios de educación matemática, los conocimientos por adquirir, las normas de la comunidad del salón de clase, la evaluación diagnóstica, formativa y sumativa.

## Abstract

This paper discusses the design and implementation of a learning environment with understanding for the topic of systems of linear equations in the high school level. They work from a linear equation with two unknowns, to systems of four linear equations with two unknowns. It has taken into account the position of Hiebert and Carpenter (1992) who point out that understanding is the result of numerous and strong relationships between mathematical ideas; these relationships are established through similarities and differences. It is also considered the statement by Bransford, Brown and Cocking (1999) who propose that for students to learn with understanding, it is necessary to create an environment that fosters learning, in that learning environment are taken into account the perspectives of the student, knowledge, assessment and community.

For those perspectives are considered, among others, the following: the knowledge with which students came to class, some results of studies of mathematics education, to acquire knowledge, standards of classroom community, the diagnostic, formative and summative evaluation.

## Índice

# Introducción

El propósito de este trabajo es diseñar e implementar un escenario de instrucción para promover el aprendizaje con comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, de acuerdo a los lineamientos teóricos para el diseño de ambientes de aprendizaje de Bransford, Brown y Cocking (1999), y los de Hiebert y Carpenter (1992) para la comprensión matemática.

De acuerdo a Hiebert y Carpenter (1992) la comprensión es el resultado de numerosas y fuertes conexiones entre ideas matemáticas. Según Bransford, Brown y Cocking (1999) para potencializar un aprendizaje con comprensión se deben considerar las perspectivas del estudiante, del conocimiento, de la evaluación y de la comunidad, al momento de diseñar la instrucción.

El enfoque que se pretende dar al presente trabajo es de una escuela de matemáticas con grandes expectativas, como lo señala el NCTM (2000) donde los alumnos deben: abordar un mismo problema desde distintos puntos de vista o representar las matemáticas de diferentes formas; solos o en grupos deben trabajar productiva y reflexivamente; deben comunicar sus ideas y resultados oralmente y por escrito con eficacia. Por su parte el profesor procura: crear un ambiente de confianza para el trabajo del grupo; tener expectativas ambiciosas para todos; ayudar a sus alumnos a formular, perfeccionar y confirmar o refutar conjeturas partiendo de evidencias; elegir cuidadosamente las tareas con las cuales trabajen sus alumnos, entre otras características.

Sin embargo, como se indica en el capítulo 1, por lo general, los alumnos presentan grandes dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, y en particular, en el tema de ecuaciones lineales, esto ha sido expuesto en muchos estudios de educación matemática, algunos de los cuales son: Arellano (2006); Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski (2000); Duval (1988); Graham, Cuocu y Zymmermann (2011); Kieran (1992); Segura (2004); Yakes y Star (2009).

Por otro lado, como se señala en el Capítulo 2, en la comunidad de educación matemática (Hiebert y Carpenter, 1992; NCTM, 2000) es aceptado que los alumnos deben aprender matemáticas comprendiéndolas, es decir: i) construir enlaces entre los conocimientos nuevos y los ya existentes, ii) estar capacitados para los problemas que tendrán que afrontar en el futuro y, iii) considerar a la matemática como un cuerpo adherido de conocimientos que está conectada entre sí misma y con otras disciplinas. Además, los autores Bransford, Brown y Cocking (1999) señalan que para un aprendizaje sea con comprensión, es necesario crear entornos de aprendizaje que lo favorezcan. Dichos entornos deben estar centrados en el estudiante, el conocimiento, la evaluación y la comunidad. En este trabajo se ha decidido seguir lo señalamientos de los autores antes mencionados.

En el Capítulo 3, se expone la metodología para el diseño del referido ambiente de aprendizaje, el cual se llevó a cabo en quince horas presenciales que corresponden a nueve sesiones. Se diseñaron 51 tareas, algunas se trabajan en forma individual, otras en equipo y otras grupalmente. También se diseñó un instrumento de evaluación, el cual se aplica dos veces, como prueba diagnóstica y como prueba sumativa, las cuales corresponden a la primera y a la última tarea.

Las tareas mediante las cuales se pretende lograr el aprendizaje con comprensión y automatización (49) están organizadas en cuatro bloques. El primero está dedicado a establecer los sistemas de ecuaciones lineales en los que se trabaja. El segundo está dedicado a establecer las características generales de los sistemas de ecuaciones lineales. En el tercero se trabajan las características de la solución. En el cuarto se trabajan los métodos de solución: igualación, sustitución y gráfico.

En el diseño de las tareas, se decidió trabajar con la intensión de que el alumno relacione ideas matemáticas, con base a identificar similitudes y diferencias de dichas ideas. Ya que, según Hiebert y Carpenter (1992), la comprensión es el resultado de numerosas y fuertes conexiones entre ideas matemáticas.

Por otra parte, en el diseño del ambiente de aprendizaje con comprensión destacan los siguientes apartados: los conocimientos previos que requieren los alumnos para acceder al tema, los conocimientos por adquirir, las tareas programadas de forma individual, en equipo y grupal, la evaluación diagnóstica, formativa y sumativa, además de las normas de trabajo en la comunidad del salón de clase.

En el Capítulo 4, se hace un análisis detallado del diseño de las tareas y, de algunas observaciones de la puesta en práctica. Se mencionan las dificultades de los estudiantes al abordar las tareas y la forma en que son asistidos por el profesor o por sus compañeros. Además, se señala el desempeño de los estudiantes al abordar las tareas (evaluación formativa).

En el Capítulo 5, se hace el análisis de algunos resultados de los alumnos en las pruebas pre-test y post-test, y se comparan dichos resultados. Según Hiebert y Carpenter (1992) la comprensión promueve la transferencia. En el instrumento de evaluación se explora qué tanto, los estudiantes pueden transferir lo aprendido en sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a, sistemas con ecuaciones cuadráticas y a un problema de aplicación. Además, se reportan las dificultades de los alumnos al inicio y al final de la instrucción. El rendimiento de los estudiantes fue notablemente superior al final de la instrucción.

También se mencionan y se analizan algunos comentarios de los alumnos después de haber sido participantes de esta experiencia, en los cuales manifiestan sus impresiones al respecto de las tareas, de la forma de trabajo, de los conocimientos adquiridos y de la "confianza" con la que enfrentaron las tareas y las pruebas.

En las consideraciones finales, se concluye acerca de los resultados de las pruebas, y de las formas de trabajo (individual, en equipo y grupal). Se presentan conclusiones de las dificultades de los alumnos desde el inicio de la instrucción hasta el final de la misma. Cabe señalar que el ambiente de aprendizaje diseñado logra promover en la mayoría de los estudiantes un aprendizaje con comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

# Capítulo 1. El trabajo

Para el desarrollo de este trabajo se ha considerado lo siguiente: la importancia de los sistemas de ecuaciones lineales en el currículo matemático; las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, en particular en el tema sistemas de ecuaciones lineales y, el diseño de un ambiente de instrucción que promueva un aprendizaje con comprensión, como alternativa para superar dichas dificultades.

## Importancia de los sistemas de ecuaciones lineales

Existen razones por las cuales el tema de ecuaciones lineales son importantes y necesarias dentro del currículo matemático, se pueden mencionar tres: primera, son necesarias en temas matemáticos del bachillerato y posteriores, lo cual se ve reflejado en su incidencia en los diferentes niveles de estudio; segunda, sus aplicaciones en la matemática y en otros ámbitos son muy extensos; tercera, para el manejo de ecuaciones lineales se necesitan un buen número de conceptos y habilidades matemáticas, los cuales se ponen en práctica al trabajar este tema.

En los distintos niveles de estudios, se considera importante que los alumnos aprendan el tema de sistemas de ecuaciones lineales desde la secundaria, pasando por el bachillerato hasta el nivel superior. En el Anexo 3 se muestran citas de los programas de estudio para la educación secundaria de la SEP (2011), para el nivel medio superior del CCH-UNAM

(2012) y, para la carrera de Ingeniería Civil de la facultad de Ingeniería de la UNAM (2008), en dichos programas está contemplado el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales.

A pesar de que la presente tesis se ha trabajado básicamente en el ámbito matemático, es conveniente señalar que las ecuaciones lineales se usan en aplicaciones diversas. Por ejemplo, en el libro *Algebra* de los autores Larson y Hostetler (2009) proponen algunos problemas de aplicación en: carteras de inversión con interés simple; planes de pago por comisión; problemas de movimiento con velocidad constante; problemas de oferta y demanda; problemas de mezclas de compuestos químicos, entre otros. Dichos problemas, se resuelven a través de plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Por otro lado, en algunos libros de texto se menciona la importancia de las ecuaciones lineales, así: *"[e]n las aplicaciones modernas de las matemáticas, quizá los sistemas de ecuaciones más útiles son aquellos en los cuales todas las ecuaciones son lineales"* (Swokowski, 1971, p. 205).

En el libro *Álgebra lineal y sus aplicaciones,* del autor Lay (2007) se señala que:

> [e]n la actualidad muchas decisiones administrativas importantes se toman con base en modelos de programación lineal que utilizan cientos de variables, (…) Estos programas utilizan técnicas de algebra lineal y sistemas de ecuaciones lineales (p. 2).

Sin embargo, Duval (1992) señala que se requieren los conceptos matemáticos teóricos antes de hacer las aplicaciones. En el presente estudio se ha decidido trabajar en el aspecto puramente matemático.

Segura (2004) menciona que para el trabajo con ecuaciones lineales se requiere que el estudiante maneje eficientemente operaciones y conceptos de Aritmética, de Álgebra y de Geometría. Así, mientras se desarrolla el concepto de ecuaciones lineales, se ponen en práctica temas vistos con anterioridad. De manera especial, se requieren conocimientos de ecuaciones lineales de una incógnita, del plano cartesiano, de graficas lineales, de pendiente, de ordenada al origen, de ecuación de la recta e interpretación de gráficas.

Con referencia a las ecuaciones lineales, el NCTM (2000) señala que en la enseñanza media: "*los alumnos deberían desarrollar una comprensión general de los conceptos de pendiente y ordenada en el origen, adquirir destreza con ellos y con sus manifestaciones en tablas, gráficas y ecuaciones, (…) identificar la potencia y las limitaciones de las distintas formas de representación" (pp. 228-229).*

## Dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales

En la literatura de educación matemática se reportan numerosos estudios acerca de las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los sistemas de ecuaciones lineales y de la matemática en general, en este apartado se presentan algunos que se consideran importantes para este trabajo. En el orden en que se mencionan renglones adelante, los autores de dichos estudios son: Kieran (1992); Graham, Cuocu y Zymmermann (2011); Segura (2004); Alcocer (2007); Duval (1992); Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski (2000); Yakes y Star (2009).

Kieran (1992) en su trabajo *The Learning and Teaching of School Algebra,* analiza un conjunto de investigaciones acerca de cómo contribuyen los aspectos del currículo, del aprendizaje y de la enseñanza, en las dificultades para aprender Álgebra, donde señala que la mayoría de los estudiantes de primero de preparatoria no realizan la misma operación en ambos lados de una ecuación, sólo memorizan las reglas y procedimientos y, que muchos maestros únicamente se dedican a seguir el libro de texto con explicaciones y ejercicios sin considerar la construcción del conocimiento, la comunicación y la reflexión. La autora también señala que los alumnos consideran a la matemática como un conjunto de temas por separado, sin conexiones. Otra dificultad es que muchos estudiantes no son capaces de identificar errores en sus procedimientos, prefieren volverlos a hacer.

Los autores Graham, Cuocu y Zymmermann (2011) en el libro *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making Algebra,* señalan que los alumnos de bachillerato presentan dificultades en el manejo de expresiones con símbolos algebraicos, en el razonamiento acerca de la pendiente, en encontrar la ecuación a partir de gráficas lineales, en escribir apropiadamente ecuaciones para resolver problemas, entre otros.

Segura (2004), en su artículo *Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una Secuencia Didáctica,* menciona que los alumnos presentan dificultades en realizar operaciones aritméticas elementales en problemas que involucran ecuaciones o sistemas de ecuaciones, aun cuando, los alumnos sepan aplicar los algoritmos de solución. Por otro lado, resuelven un sistema de ecuaciones y no lo comprueban, además indica que:

> [l]as dificultades en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones tienen orígenes diversos. Unos están ligados a la complejidad matemática de los elementos básicos que se utilizan en la adquisición del objeto sistemas de ecuaciones lineales (números reales y función afín, ambos en vías de construcción); otros al concepto de sistemas de ecuaciones lineales y su solución, y otros más a la ruptura entre el pensamiento aritmético y el algebraico (p. 52).

La investigadora añade que algunos profesores sólo trabajan el desarrollo algorítmico. No trabajan las conversiones del registro algebraico al grafico ni al verbal.

Alcocer (2007) en su tesis *Dificultades en la Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales en Contextos Algebraico y Geométrico*, indica que algunas dificultades son: los significados de los términos de la ecuación $y = mx + b$, la definición de la ecuación lineal y su graficación, imposibilidad de escribir la ecuación en su representación algebraica a partir de su representación geométrica, errores algebraicos al sumar dos ecuaciones lineales, entre otros.

Duval (1992) en su artículo *Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros*, menciona que la mayoría de los estudiantes de preparatoria no sabe interpretar correctamente las representaciones graficas de ecuaciones lineales, por lo que, no saben escribir la ecuación algebraica partiendo de un análisis visual de la gráfica. La forma en que generalmente se enseña a graficar: punto por punto; no es adecuada, ya que constituye un obstáculo para la observación de las características de la representación gráfica.

Este mismo autor señala que los alumnos tienen dificultades en relacionar las representaciones algebraicas con sus respectivas gráficas. Por ejemplo las de: $y = x$, $y = x + 2$ e, $y = -x$, entre otras.

Duval (1992) reporta que en una prueba efectuada a 165 alumnos de primero de preparatoria; únicamente el 25% distingue la diferencia entre las ecuaciones $y = x + 2$ e $y = 2x$ en su representación gráfica. Y solamente el 60% ve la diferencia del sentido de inclinación en la representación gráfica de las ecuaciones $y = x$ e $y = -x$.

Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000), en el trabajo titulado *The Obstacle of Formalism in Linear Algebra* presentan resultados de estudios realizados a través de varios años, acerca de las dificultades de los estudiantes de los primeros cursos de licenciatura en Algebra Lineal. Después de exponer algunos resultados expresan:

> [p]ara la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal no es más que un catálogo de nociones muy abstractas y representan gran dificultad. Además se encuentran sumergidas en una

> avalancha de nuevas palabras, nuevos símbolos, nuevas definiciones y nuevos teoremas (p. 85).

Yakes y Star (2009) en su estudio *Using Comparison to Develop Flexibility for Teaching,* señalan que, en los libros de texto para el tema de sistemas de ecuaciones lineales, se desarrollan los métodos de resolución totalmente separados, raramente indican las conexiones entre un método y otro. Estos autores, señalan que muchos maestros, que participaron en el estudio, indican que no realizan comparaciones entre los métodos y no dejan que los estudiantes escojan uno para resolver algún problema determinado.

Por lo anterior, es factible reconocer la necesidad de diseñar escenarios de aprendizaje donde se considere las observaciones anteriores, de tal forma que el alumno: aprenda relacionando los conocimientos nuevos a los ya existentes, que pueda "deshacerse" de los conceptos erróneos y, que sea capaz de enfrentarse con éxito a los temas que correspondan a su nivel de estudios y posteriores.

## Propósito de este trabajo

Como ya se mencionó anteriormente, el propósito de este trabajo es diseñar e implementar un ambiente para las clases de matemáticas a fin de promover, en estudiantes de bachillerato, un aprendizaje con comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, de acuerdo a los lineamientos teóricos de Bransford, Brown y Cocking (1999), y los de Hiebert y Carpenter (1992).

El NCTM (2000) menciona que los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, y construir activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y de los conocimientos previos. El aprendizaje con comprensión capacita a los alumnos en el uso de lo aprendido para la resolución de nuevos tipos de problemas que, inevitablemente, tendrán que abordar en el futuro. Para Hiebert y Carpenter (1992),

> [u]na de las ideas más aceptadas en la comunidad de educación en matemáticas es que los estudiantes deben comprender matemáticas. El objetivo de muchas investigaciones ha sido promover el aprendizaje con comprensión, pero diseñar un ambiente de aprendizaje escolar que tenga éxito en la comprensión ha sido difícil (p. 65).

Para poder explorar en qué medida se logra el propósito mencionado, es menester realizar un estudio. En otras palabras, para valorar en qué medida estudiantes de bachillerato logran un aprendizaje con comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales es necesario llevar a cabo un estudio. La metodología de este estudio, en lo fundamental, consiste en: i) determinar la población bajo estudio; ii) diseñar un ambiente de aprendizaje, para el tema en cuestión, de acuerdo a los lineamientos teóricos arriba señalados; iii) implementar, el referido ambiente de aprendizaje; iv) finalizado el proceso enseñanza aprendizaje, enfrentar a los estudiantes a una prueba de rendimiento, con la intención de explorar lo manifestado renglones arriba; v) analizar, a la luz de los referentes teóricos citados, los datos recabados en los momentos iii) y iv). Estos cinco aspectos, se desarrollan en los Capítulos 3, 4 y 5.

Por todo lo anterior, parece ser que la falta de comprensión es una característica del aprendizaje matemático de los estudiantes. Aunado a esto, Kieran (1992) y Yakes y Star (2009), señalan que por lo general los maestros no generan ambientes de aprendizaje donde se promueva la construcción del conocimiento, la comparación, la reflexión, el análisis y, en consecuencia, la comprensión. Por su parte, Bransford, Brown y Cocking (1999), sostienen que para promover aprendizajes con comprensión es necesario diseñar entornos de aprendizaje centrándose en cuatro perspectivas: el estudiante, el conocimiento, la evaluación y la comunidad.

Con base en lo anterior, se considera que el estudio que aquí se presenta, es pertinente por la importancia que tienen las tareas que se llevan a cabo en el salón de clases con miras a propiciar aprendizajes de calidad.

Por otra parte, la utilidad del estudio es posible valorarla a la luz de los resultados que logran los estudiantes en las pruebas de rendimiento que se les aplican para valorar la comprensión del tema objeto de aprendizaje.

Por último, se considera que los elementos teóricos y prácticos que la MADEMS ofrece para la profesionalización de un docente de matemáticas, hace viable el diseño y la implementación de un ambiente de aprendizaje que promueva la comprensión matemática en estudiantes de cualquier sistema de bachillerato en nuestro país.

# Capítulo 2. Consideraciones Teóricas

A lo largo de este capítulo se expone lo siguiente: desarrollo del tema sistemas de ecuaciones lineales desde el punto de vista matemático, estudios de enseñanza-aprendizaje de ecuaciones lineales realizados desde el enfoque de educación matemática, consideraciones teóricas del aprendizaje con comprensión de Hiebert y Carpenter (1992) y, el diseño de ambientes de aprendizaje de Bransford, Brown y Cocking (1999).

## Sistemas Ecuaciones Lineales en Matemáticas

Existen muchos libros de texto los cuales exponen el desarrollo del tema sistemas de ecuaciones lineales para el nivel medio superior, tales como: Anfossi (2000), Angel (2011), Baldor (2003), Barnett (1987), Larson (2009), Lehmann (2012), Moreno (2004), De Oteyza (2003), Smith y colaboradores (1992), Swokowski (1971), Uspensky (2000), Yákovliev (1981).

### Ecuación Lineal con dos incógnitas

Según Lehmann (2009) la ecuación,

$$Ax + By + C = 0, \quad AB \neq 0.$$

Es una ecuación lineal con dos incógnitas, donde $A, B,$ y $C$ son números Reales y la restricción $AB \neq 0$ significa que ni $A$ ni $B$ son iguales a 0.; “$x$” e “$y$” son las incógnitas buscadas. Los números $A$ y $B$ se llaman coeficientes de las incógnitas y el número $C$, término independiente.

Según Swokowski (1971) pueden definirse ecuaciones lineales con cualquier número de variables (incógnitas). Aunque en el plano cartesiano sólo se pueden representar dos incógnitas.

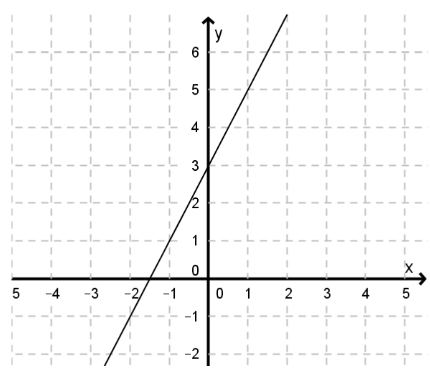
Según Lehmann (2009) una ecuación lineal con dos incógnitas tiene un número infinito de soluciones, por lo que se dice que está indeterminada.

Por ejemplo, en la ecuación $-2x + y = 3$ algunas soluciones son:

| $x$ | $y$ | Sustitución y comprobación |
|---|---|---|
| -2 | -1 | $-2(-2) + (-1) = 3$ |
| 0 | 3 | $-2(0) + 3 = 3$ |
| 4 | 11 | $-2(4) + 11 = 3$ |

Según Angel (2011) la representación gráfica de una ecuación lineal es el conjunto de parejas ordenadas representadas en el Plano Cartesiano que satisfacen la ecuación. Así, para la ecuación que se está ejemplificando, su gráfica es:

Figura 2.1. Representación Geométrica de la ecuación $-2x + y = 3$



*Representación algebraica. Ecuación pendiente-ordenada*

Según Duval (1992) la ecuación $y = mx + b$ (ecuación "pendiente-ordenada") contiene las unidades significativas algebraicas que corresponden a las características globales de su representación geométrica. Esta forma de expresión algebraica de la ecuación lineal con dos incógnitas, es la que mayormente se utiliza en este trabajo.

| | |
|---|---|
| Si se parte de la ecuación: | $Ax + By + C = 0$ |
| Con "$y$" despejada se tiene: | $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ |
| Dado que "$m$" es la pendiente y "$b$" la ordenada al origen. | $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$ |
| Se tiene la ecuación. | $y = mx + b$ |

La pendiente "$m$" indica la inclinación de la recta con respecto al lado positivo del eje de las abscisas, así mismo, la ordenada al origen "$b$", representa el cruce de la recta con el eje de las ordenadas.

**Sistema de ecuaciones lineales**

Según Lehmann (2009) cuando dos o más ecuaciones lineales son consideradas al mismo tiempo, a las ecuaciones en su conjunto, se les llama un sistema de ecuaciones lineales. De forma general un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se puede representar de la siguiente manera:

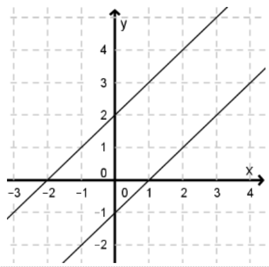
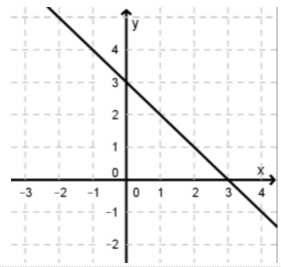
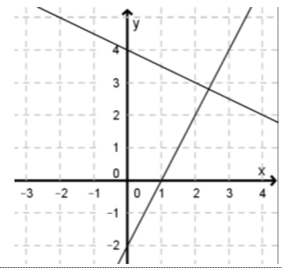
$$a_1x + b_1y = c_1 \ldots \mathrm{L}_1, \quad a_1b_1 \neq 0,$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \ldots \mathrm{L}_2, \quad a_2b_2 \neq 0,$$

Este autor señala que la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es una pareja ordenada $(x, y)$ que satisface ambas ecuaciones, cuando sucede lo anteriormente señalado, se nombran además "simultaneas".

Según Angel (2011) un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se puede representar con la gráfica de cada una de las ecuaciones, en cuyo caso, se pueden presentar las siguientes situaciones:

Figura 2.2. Situaciones generales que se pueden presentar en un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

|  |  |  |
|---|---|---|
| Que sean paralelas. | Que sean la misma recta. | Que se crucen en un punto. |
| No hay solución. | Número infinito de soluciones. | Una solución, que es el punto de intersección. |
| Sistema inconsistente. | Sistema consistente indeterminado. | Sistema consistente determinado. |
| Las rectas tienen iguales pendientes y diferentes ordenadas al origen. | Ambas rectas tienen la misma pendiente y la misma ordenada al origen. | Las rectas tienen distintas pendientes. |

Angel (2011) señala las siguientes afirmaciones:

- En un sistema consistente determinado, una pareja ordenada satisface ambas ecuaciones.
- En un sistema consistente indeterminado, una infinidad de parejas ordenadas satisface ambas ecuaciones.
- En un sistema inconsistente, no existe una pareja ordenada que satisfaga ambas ecuaciones simultáneamente.

De manera que se puede presentar la siguiente clasificación.

Figura 2.3. Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales.

$$\text{Sistema} \begin{cases} \text{Consistente} \begin{cases} \text{Determinado} \\ \text{Indeterminado} \end{cases} \\ \text{Inconsistente} \end{cases}$$

*Características algebraicas de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas*

A continuación se analizan las características de los sistemas de ecuaciones lineales desde el punto de vista algebraico: teorema de sistemas equivalentes, condiciones de intersección y paralelismo, solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, método de sustitución y, método de igualación.

### Teorema de los sistemas equivalentes

Para el análisis algebraico de los sistemas de ecuaciones lineales, es fundamental tener presente el teorema de los sistemas equivalentes que se expone a continuación.

> **Definición**. Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.
>
> **Teorema de los sistemas equivalentes.**
>
> Dado un sistema de ecuaciones, podemos generar un sistema equivalente si:
>
> 1. Dos ecuaciones se intercambian.
> 2. Una ecuación es multiplicada o dividida por una constante diferente de cero.
> 3. Un múltiplo constante de una ecuación se suma a otra de las ecuaciones.
>
> *Un múltiplo constante de una ecuación se obtiene multiplicando cada término de la ecuación por una constante diferente de cero*
>
> (Moreno, 2004, p. 694).

### Condiciones de solución única, sin solución e infinidad de soluciones

El siguiente desarrollo lo muestra el libro de Uspensky (2000). Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$a_1x + b_1y = c_1 \ldots (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \ldots (2)$$

Donde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ son números reales y, "$x$" e "$y$" son incógnitas.

Algebraicamente se resuelve haciendo operaciones de manera que se eliminen "$x$" o "$y$".

Para eliminar "$y$" se multiplica la ecuación (1) por $-b_2$ y la ecuación (2) por $b_1$, posteriormente se suman las ecuaciones equivalentes resultantes y, se despeja la incógnita que queda, en este caso es "$x$".

$$-b_2(a_1x + b_1y) = -b_2c_1$$

$$b_1(a_2x + b_2y) = b_1c_2$$

Sumando $$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \ldots (3)$$

Ahora bien, para eliminar "$x$" se multiplica la ecuación (1) por $-a_2$ y la ecuación (2) por $a_1$, posteriormente, se suman ambas ecuaciones equivalentes resultantes y, se despeja la incógnita que queda, en este caso es "$y$".

$$-a_2(a_1x + b_1y) = c_1a_2$$

$$a_1(a_2x + b_2y) = c_2a_1$$

Sumando $$(a_1b_2 - a_2b_1)y = c_2a_1 - c_1a_2$$

$$y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \ldots (4)$$

Se observa que las ecuaciones (3) y (4) tienen el mismo denominador

$$a_1b_2 - a_2b_1$$

Si este denominador no es cero los únicos valores de "$x$" e "$y$" que satisfacen las ecuaciones (1) y (2) son las obtenidas por las expresiones (3) y (4), el sistema tiene solución única. Estas ecuaciones se llaman fórmulas de Cramer.

Por otro lado según Yákovliev (1981), si el denominador es igual a cero:

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

El sistema no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

Yákovliev (1981) examina detalladamente dichos casos. Para fines del desarrollo, se supone que $b_2 \neq 0$ y se puede dividir la expresión anterior entre $b_2$:

$$a_1 - \frac{a_2}{b_2}b_1 = 0$$

Si se define la relación $k = \frac{b_1}{b_2}$, entonces $b_1 = kb_2$; y si se sustituye en la expresión anterior se tiene que:

$$a_1 = ka_2$$

Ahora bien, sustituyendo en el sistema original, ecuaciones (1) y (2):

$$ka_2x + kb_2y = c_1 \dots (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \dots (2)$$

Se puede observar que el sistema no tiene solución si $c_1 \neq kc_2$.

El sistema tiene una infinidad de soluciones si y sólo si la primera ecuación del sistema se obtiene de la segunda, multiplicando término a término por $k = \frac{b_1}{b_2}$.

En el razonamiento anterior se supuso que $b_2 \neq 0$, pero también se puede hacer con cualquier otro coeficiente de las incógnitas y se llega a los mismos resultados.

Por otro lado, según Anfossi (2000) los métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales son llamados métodos de eliminación, ya que consisten en eliminar una incógnita, es decir, reducir el sistema propuesto a otro que tenga una ecuación con una incógnita. La eliminación de la incógnita se puede llevar a cabo de tres formas distintas: por suma o resta, por igualación, o por sustitución. A continuación se exponen los procedimientos de sustitución y de igualación.

*Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales*

**Método de sustitución**

Tomando en consideración el libro de Angel (2011), los pasos para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de sustitución son los siguientes:

Sea el sistema, que hemos trabajado con anterioridad en esta sección:

$$a_1x + b_1y = c_1 \dots (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \dots (2)$$

1. Se despeja una incógnita de alguna de las ecuaciones. Para este desarrollo seleccionamos "$x$" de la ecuación (1).

$$x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$$

2. Se sustituye el despeje anterior en la ecuación (2).

$$a_2\left(\frac{c_1 - b_1 y}{a_1}\right) + b_2 y = c_2$$

3. Se resuelve la ecuación anterior para conocer el valor de "$y$". Donde se obtiene la misma ecuación (4), señalada anteriormente.

$$y = \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \ldots (4)$$

4. Para obtener el valor de "$x$", se sustituye el valor de "$y$" encontrado en la ecuación anterior, en cualquiera de las ecuaciones (1) o (2).
5. Se comprueba, sustituyendo los valores encontrados en las ecuaciones originales.

**Método de igualación**

Según Angel (2011) el método de igualación consiste en los pasos que se muestran a continuación, sea nuevamente el sistema original:

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \ldots (1)$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2 \ldots (2)$$

1. Se despeja una incógnita en ambas ecuaciones (la misma), en este caso se despeja la "$y$".

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}$$

$$y = \frac{c_2 - a_2 x}{b_2}$$

2. Se igualan las ecuaciones anteriores:

$$\frac{c_1 - a_1 x}{b_1} = \frac{c_2 - a_2 x}{b_2}$$

3. Se resuelve la ecuación anterior para encontrar el valor de "$x$". Resulta la misma ecuación (3), señalada anteriormente.

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \ldots (3)$$

4. Para obtener el valor de "$y$", se sustituye el valor encontrado para "$x$" de la ecuación anterior, en cualquiera de las ecuaciones (1) o (2).
5. Se comprueba sustituyendo los valores encontrados en las ecuaciones originales.

### Método gráfico

Según Angel (2011), para obtener la solución grafica de un sistema de ecuaciones lineales, simplemente se grafica cada una de las ecuaciones y se identifica su punto de intersección.

En este apartado se han expuesto las consideraciones teóricas de las ecuaciones lineales desde el punto de vista matemático, a continuación, se mencionarán algunos estudios desde el punto de vista de la Educación Matemática.

## Sistemas de ecuaciones lineales en Educación Matemática

En la literatura de educación matemática, se encuentran diversos estudios acerca de ecuaciones lineales, entre otros, se pueden mencionar (en orden en que se presentan renglones adelante): Segura (2004); Duval (1992); NCTM (2000); Yakes y Star (2009), los cuales, se exponen a continuación. Así mismo se menciona la influencia de dichos estudios para este trabajo

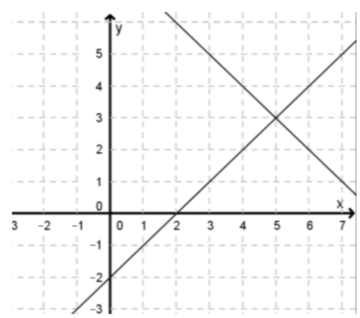
En el artículo de Segura (2004) el objetivo es diseñar y probar una secuencia de enseñanza, para promover el aprendizaje de la solución de los objetos sistemas de ecuaciones lineales, de forma que el tratamiento y pasaje de registros de representación es el eje de la construcción de actividades.

### Registros de representaciones

Duval (1999, en Segura 2004) señala: *"La coordinación de varios registros de representación es fundamental para una asimilación conceptual de un objeto; además, es necesario que el objeto no se confunda con sus representaciones, pero debe ser* *reconocido en cada una de ellas"* (p. 53). También añade que para comprender un objeto matemático es necesario coordinar al menos dos registros de representación.

Duval (1999, en Segura 2004) menciona algunos ejemplos de registros de representación para el objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, a continuación se muestra uno de dichos ejemplos.

Figura 2.4. Ejemplos de representaciones de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

| | |
|---|---|
| Registro verbal: | Si los lados de un rectángulo se alargan 2 centímetros cada uno, el perímetro es de 24 centímetros. Si se sabe, además, que la diferencia entre la medida de los lados es de 2 centímetros, ¿cuánto miden los lados del rectángulo? |
| Registro algebraico: | $2(x+2)+2(y+2)=24$<br>$x-y=2$ |
| Registro Gráfico: |  |



En su artículo de 2004, Segura, propone las siguientes actividades: formular ecuaciones de dos rectas que se corten en punto determinado y posteriormente graficarlas; verificar soluciones algebraica y gráficamente; realizar tratamientos en los registros verbal, algebraico y gráfico; dado un sistema de ecuaciones, hallar la solución gráfica y algebraica y, que los alumnos se acerquen a la noción de sistemas inconsistentes y equivalentes.

Algunas características de la secuencia de Segura (2004) son: trabajo en el campo de los números reales, sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas y conjuntos de solución unitario, vacío e infinito; las ecuaciones de las rectas contemplaron ordenadas al origen enteras y pendientes racionales. La forma de trabajo es en equipo y, los alumnos reportan las actividades individualmente. Se procuró que las fases de acción fueran formulación y validación.

La autora menciona que el trabajo con tres registros de representación (verbal, gráfico y algebraico) facilita que el alumno identifique el objeto en todos los registros, la secuencia no asocia el objeto sistemas de ecuaciones lineales con los métodos de resolución, por lo cual evita que se confunda el objeto con los algoritmos.

En el presente estudio, con relación al tema matemático, se trabaja con: a) tres registros de representación: verbal, algebraico y gráfico; b) algunas de sus conversiones, por ejemplo: del registro geométrico al algebraico y viceversa, del registro verbal al gráfico y al algebraico; c) con sistemas de solución única, sin solución y con infinidad de soluciones; d) con sistemas de dos y más de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Con relación a la forma de trabajo, las tareas se llevan a cabo de forma: a) individual; b) en equipo y, c) grupalmente.

**Articulación de dos registros de representación**

Duval (1992) en su artículo *Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros*, considera tres vías que dan lugar a las representaciones gráficas de ecuaciones lineales: la primera es la de punto por punto; la segunda es la de extensión de trazo, que consiste en actividades de interpolación y extrapolación; y la tercera, es una interpretación global de las propiedades de las gráficas.

Duval (1992) menciona que con un análisis global de las propiedades de la gráfica, ya no estamos en presencia de la asociación de un punto con una pareja de números, sino de la asociación variable visual de la representación gráfica con la unidad significativa de la escritura algebraica. Cuando se parte de la representación gráfica a la algebraica, para encontrar la pendiente, por ejemplo, la vía de la interpretación global se hace necesaria.

Según Duval (1992) en la representación gráfica se tienen variables visuales y, en la representación algebraica unidades simbólicas significativas. El autor afirma que la interpretación de las representaciones gráficas depende de una identificación de todas las variables visuales y de su correspondencia con los símbolos algebraicos. Cada una de las características visuales de la representación gráfica de una ecuación lineal corresponde a una unidad significativa de la ecuación algebraica $y = mx + b$.

El autor señala que, al analizar los valores para la pendiente en su representación gráfica, ésta se hace significativamente diferente, cuando sus valores son: $\pm 2$; $\pm 1$ y $\pm \frac{1}{2}$.

Según el autor, la vía de interpretación global para las representaciones graficas es mejor; que la graficación punto por punto. Entre estas vías existe un:

> abismo que separa la vía del punteo y la vía de la interpretación global. Esta última exige una discriminación de todas las variables visuales pertinentes, lo que no se requiere ni se induce mediante la construcción de las rectas a partir de su ecuación. Y, sin esta vía de interpretación global, no hay utilización posible de las gráficas para dar un valor intuitivo a la escritura algebraica, para expresar analíticamente las propiedades geométricas (Duval, 1992, p.134).

El autor señala que, para el aprendizaje se deben de considerar dos situaciones: aquellas en que el tratamiento es puramente matemático, relaciones entre números; y aquellas otras en que las relaciones son entre magnitudes de naturaleza diferente (tiempo, distancia, velocidad). El autor indica que la presentación de un fenómeno físico, económico o biológico puede dar un mayor interés a las gráficas; pero no facilita el aprendizaje de las mismas, sino al contrario, lo dificulta. Por lo anterior, el autor señala que es importante trabajar en el aspecto puramente matemático antes que en otros ámbitos.

En el presente estudio, se decide trabajar con la representación algebraica de la forma $y = mx + b$, su representación gráfica, la conversión entre dichas representaciones por la vía de la interpretación global y, con un tratamiento puramente matemático.

**La comparación para desarrollar la flexibilidad**

Yakes y Star (2009) en su estudio *Usando la comparación para desarrollar la flexibilidad en la enseñanza del álgebra,* consideran que la flexibilidad es tener conocimiento de múltiples procedimientos para resolver problemas matemáticos y la habilidad para seleccionar el mejor de ellos para cada problema.

Los autores afirman que la comparación entre procedimientos ayuda a la adquisición de flexibilidad. Una efectiva comparación incluye los siguientes dos pasos: comparar distintos métodos de solución, uno al lado del otro, en la misma página; seguida de una discusión para encontrar similitudes y diferencias entre los métodos.

Según los autores, la flexibilidad requiere del conocimiento de procedimientos y de saber cuándo y cómo usarlos apropiadamente. Por otro lado, la discusión de la comparación ayuda a los estudiantes a justificar porqué preferir una estrategia de otra.

Los autores señalan un ejemplo para sistema de ecuaciones lineales, en el cual los estudiantes resuelven dos sistemas con dos métodos distintos, Ejemplo:

> Resuelve los siguientes sistemas por los métodos sustitución y por suma y resta.
>
> 1. $4x - 3y = 2$
>    $2x + 5y = 8$
>
> 2. $y = 3x - 2$
>    $5x + 2y = 8$
>
> (Yakes y Star, 2009, p.180)

En este ejemplo particular, los autores mencionan que para los estudiantes es más fácil usar el método de sustitución para el sistema 2, debido a que la incógnita "$y$" ya está despejada en una de las ecuaciones. Por otro lado, en el método de suma y resta, los alumnos son más eficientes cuando el mínimo común múltiplo de los coeficientes de la incógnita "$x$" o "y", es fácil de encontrar.

Los autores afirman que la comparación: puede incrementar ampliamente la flexibilidad de los estudiantes, facilita la discusión dentro del salón de clases y, permite a los estudiantes elegir el método con el que puedan trabajar mejor.

En este estudio se decide trabajar con la comparación entre los métodos de sustitución y de igualación, también se promueve la libre elección de algún método de solución.

**Principios y Estándares para ecuaciones lineales**

El NCTM (2000) en los *Principios y Estándares para la Educación Matemática*, señala que "*[l]os alumnos deberían aprender una cantidad considerable de Álgebra y Geometría, y verlas interconectadas"* (p. 216). Por lo que, es importante trabajar los registros algebraico y geométrico de ecuaciones lineales.

Para el tema de ecuaciones lineales el NCTM (2000) hace recomendaciones precisas:

- explorar relaciones entre expresiones simbólicas y gráficas de líneas, poniendo especial atención en el significado de la ordenada al origen y de la pendiente, (…)
- reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas sencillas y resolver ecuaciones lineales (p. 226).

Por otro lado, en los estándares de procesos, el NCTM (2000) señala que, si los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas su comprensión es más profunda y duradera, "*reconocer y usar las conexiones entre ideas matemáticas"* (p. 68).

Tomando en consideración las referencias anteriores, en el diseño del ambiente de aprendizaje que nos ocupa, se promueve: a) trabajar con al menos dos registros de representación y su conversión, b) la interpretación global de la representación gráfica de la ecuación lineal en su forma $y = mx + b$, c) la comparación de varios procedimientos de solución y su discusión y, d) que los estudiantes realicen conexiones entre las distintas ideas matemáticas.

## Consideraciones complementarias para este trabajo

Tomando en cuenta los fundamentos de la matemática y los estudios de educación matemática, expuestos anteriormente, es conveniente enfatizar las siguientes observaciones para sentar las bases del diseño del ambiente de aprendizaje con comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales en este trabajo.

Algunas características de los sistemas de ecuaciones lineales son las siguientes:

- son un conjunto de ecuaciones lineales;
- en la representación algebraica, las incógnitas deberán de estar a la primera potencia y no estar multiplicadas entre sí;
- dado que una ecuación puede tener una o más incógnitas, los sistemas de ecuaciones lineales también pueden tener una o más incógnitas;
- dado que la representación geométrica de una ecuación lineal con dos incógnitas es una recta en el plano cartesiano, la representación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es un conjunto de rectas en el plano cartesiano.

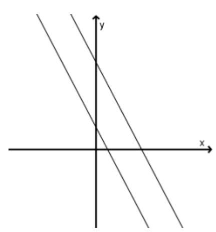
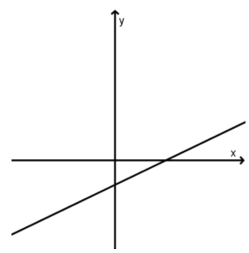
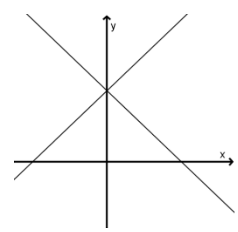
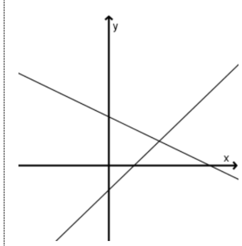
Para el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, expresadas de la siguiente forma:

$$y = m_1x + b_1 \ldots L_1$$
$$y = m_2x + b_2 \ldots L_2$$

Donde $m_1, m_2, b_1, b_2$ son números reales y, "$x$" e "$y$" son incógnitas.

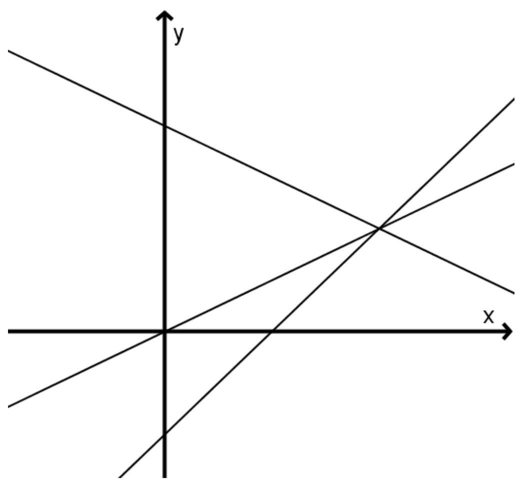
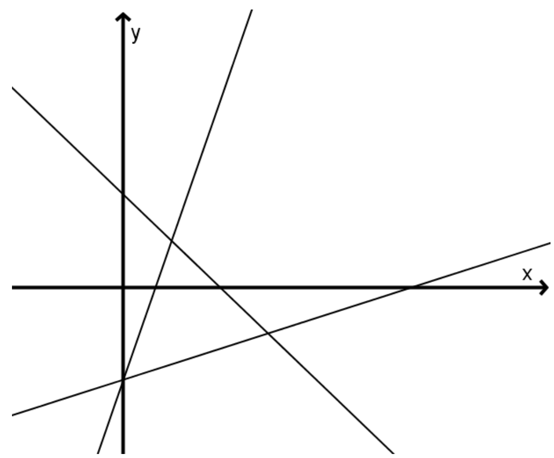
Las situaciones que se pueden presentar en su representación geométrica, se muestran en la siguiente figura.

Figura 2.5. Situaciones que se presentan en la representación geométrica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

| Situaciones / características | A) Dos rectas paralelas, diferentes una de la otra | B) Dos ecuaciones cuya representación gráfica es la misma recta | C) Dos rectas que se intersectan con el eje de las ordenadas en el mismo punto | D) Dos rectas que se intersectan entre ellas fuera del eje de las ordenadas |
|---|---|---|---|---|
| Representación geométrica |  |  |  |  |
| Características en la representación algebraica | $m_1 = m_2$ <br> $b_1 \neq b_2$ | $m_1 = m_2$ <br> $b_1 = b_2$ | $m_1 \neq m_2$ <br> $b_1 = b_2$ | $m_1 \neq m_2$ <br> $b_1 \neq b_2$ |
| Representación verbal con respecto a la representación geométrica | Dos rectas con inclinaciones iguales e intersecciones con el eje de las ordenadas diferentes. | Dos rectas con inclinaciones iguales e interseciones con el eje de las ordenadas iguales. | Dos rectas con inclinaciones diferentes e intersecciones con el eje de las ordenadas iguales. | Dos rectas con inclinaciones diferentes e intersecciones con el eje de las ordenadas diferentes. |
| Representación verbal con respecto a la representación algebraica | Dos ecuaciones con coeficientes iguales y términos independientes diferentes. | Dos ecuaciones con coeficientes iguales y términos independientes iguales. | Dos ecuaciones con coeficentes diferentes y términos independientes iguales. | Dos ecuaciones con coeficientes diferentes y términos independientes diferentes. |
| Tipo de solución | Sistema sin solución | Sistema con infinidad de soluciones. | Sistema con solución única. | Sistema con solución única. |

En el presente trabajo, también se resuelven sistemas de más de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, a continuación se mencionan dos casos: uno con solución única y otro donde se producen puntos de intersección entre sus rectas.

Figura 2.6. Ejemplos de sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas que se trabajaran en este estudio.

| | |
|---|---|
|   |   |
| Sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas con solución única. En su representación geométrica las tres rectas se intersectan en un mismo punto. | Sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas sin solución única. En su representación geométrica las rectas se intersectan por pares. |

Como se anticipó páginas atrás, en el desarrollo didáctico, se contempla para la solución de sistemas de ecuaciones lineales los métodos: de igualación, de sustitución y gráfico.

A partir de la tarea 18 (Ver Anexo 1), el alumno puede determinar si un sistema tiene infinidad de soluciones o, no tiene solución, analizando únicamente la representación geométrica del sistema en cuestión. Sin embargo, no se puede decir lo mismo cuando se trabaja en la representación algebraica. Por tal razón se considera conveniente trabajar con la representación algebraica de dichos sistemas a fin de que el alumno "visualice" las expresiones que se obtienen para cada caso. Las características algebraicas para dichos sistemas, se pueden señalar a partir del siguiente sistema:

$$y = m_1x + b_1 \ldots \mathrm{L}_1$$

$$y = m_2x + b_2 \ldots \mathrm{L}_2$$

Donde $m_1, m_2, b_1, b_2$ son números reales y, "$x$" e "$y$" son incógnitas.

Aplicando el método de igualación en el sistema, resulta:

$$m_1x + b_1 = m_2x + b_2 \ldots (\mathrm{E})$$

| Para un sistema sin solución se tiene que: | Para un sistema con infinidad de soluciones se tiene que: |
|---|---|
| $m_1 = m_2$ | $m_1 = m_2$ |
| $b_1 \neq b_2$ | $b_1 = b_2$ |
| Sustituyendo $m_1$ en la ecuación (E), ésta se reduce a: | Sustituyendo $m_1$ y $b_1$ en la ecuación (E), ésta se reduce a: |
| $b_1 = b_2$ | $0 = 0$ |
| Que es una contradicción matemática, ya que se parte de que: | Que es una identidad matemática. |
| $b_1 \neq b_2$ | |

*Bosquejos de representación geométrica de ecuaciones lineales*

Según Leinhardt y colaboradores (1990), el uso de los bosquejos de representación geométrica parece una opción muy buena, que no ha sido explorada sistemáticamente. La autora señala que con el uso de los bosquejo se puede dar forma a la intuición sin las restricciones del formalismo.

Por otro lado, según Duval (1992), la ecuación lineal en su forma algebraica $y = mx + b$, donde "$m$" es el coeficiente y "$b$" es la constante, tiene una correspondencia directa a las características globales de su representación gráfica. A continuación se muestra una tabla de características según este autor.

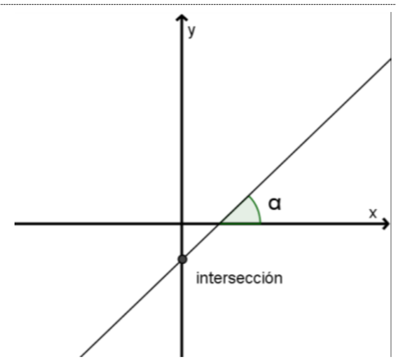
| valores visuales | valores | unidades simbólicas correspondientes |
|---|---|---|
| -sentido de inclinación: | trazo ascendente | coeficiente >0 +ausencia de símbolo + |
| | trazo descendente | coeficiente <0 presencia del símbolo - |
| -ángulos con los ejes: | partición simétrica | coeficiente =1 paso del coeficiente escrito |
| | *ángulo menor* | coeficiente <1 |
| | *ángulo mayor* | coeficiente >1 |
| posición sobre el eje $y$: | corta arriba | se añade una constante signo + |
| | corta abajo | se sustrae una constante signo - |
| | corta en el origen | paso de corrección aditiva |

(p. 129)

Tomando como base la ecuación pendiente-ordenada se puede bosquejar la representación gráfica de una ecuación lineal, identificando los valores de la ordenada al origen, de la pendiente y "traduciéndolos" sobre un bosquejo de plano cartesiano. De tal forma que se tenga una representación cualitativa del comportamiento geométrico de la ecuación.

Para hacer el bosquejo de una gráfica, en el plano cartesiano los ejes no llevan unidades, sin embargo se consideran las mismas para ambos. Las características entre la representación algebraica y el bosquejo de representación geométrica de una ecuación lineal, se muestran en la siguiente figura 2.7.

Figura 2.7. Características entre la representación algebraica y geométrica de la ecuación lineal.

| Representación Algebraica | Bosquejo de representación Geométrica |
|---|---|
| $y = mx + b$ |  |
| Ecuación con dos incógnitas representadas, estas últimas por "$x$" e "$y$". | Gráfica representada en el plano cartesiano. |
| El exponente de la "$x$" es uno, cuando la "$y$" está despejada. | La gráfica es una línea recta. |
| Término independiente "$b$". | Punto de intersección con el eje de las ordenadas $(0, b)$. |
| Coeficiente de "$x$", pendiente "$m$". | Inclinación. "$\alpha$" es el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de las abscisas. |

A continuación se indica un ejemplo para determinar el ángulo de inclinación “$\alpha$” de una ecuación lineal con respecto al lado positivo del eje de las abscisas.

Para la ecuación $y = x$.

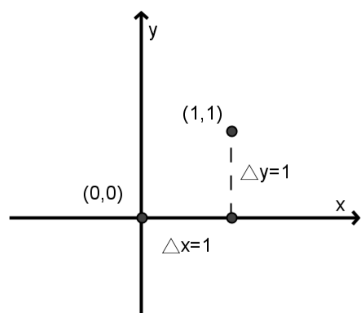
El término independiente es igual a cero ($b = 0$); por lo que la recta se intersecta con los ejes en el origen. Un punto del bosquejo es (0,0). La pendiente es igual a uno ($m = 1$). Al expresar “$m$” como un número racional su expresión es:

$$m = \frac{1}{1}$$

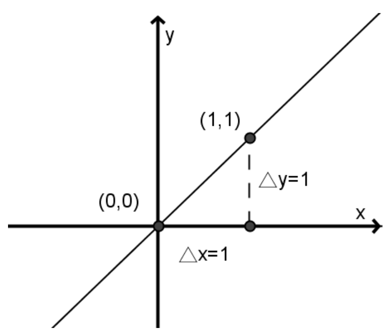
Dado que la definición de la pendiente es:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

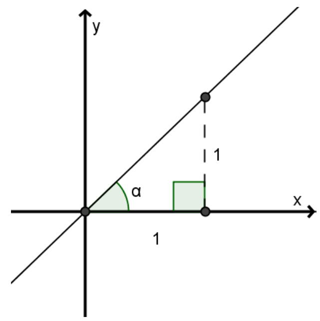
Otro punto se obtiene aumentado un $\Delta x = 1$ y un $\Delta y = 1$, a partir de la ordenada al origen, como se muestra a continuación.




Ahora bien, se traza una recta que pase por los puntos (0,0) y (1,1), y se obtiene la representación gráfica de la ecuación, como se muestra a continuación.




Se observa que se forma un triángulo rectángulo, en el cual los dos catetos tienen el valor de uno, además uno de sus ángulos ($\alpha$) esta formado entre el lado positivo del eje de las “$x$” y la recta.




Para calcular el valor del ángulo $\alpha$, se usa la función Arco-tangente:

$$tan\alpha = \frac{1}{1}$$

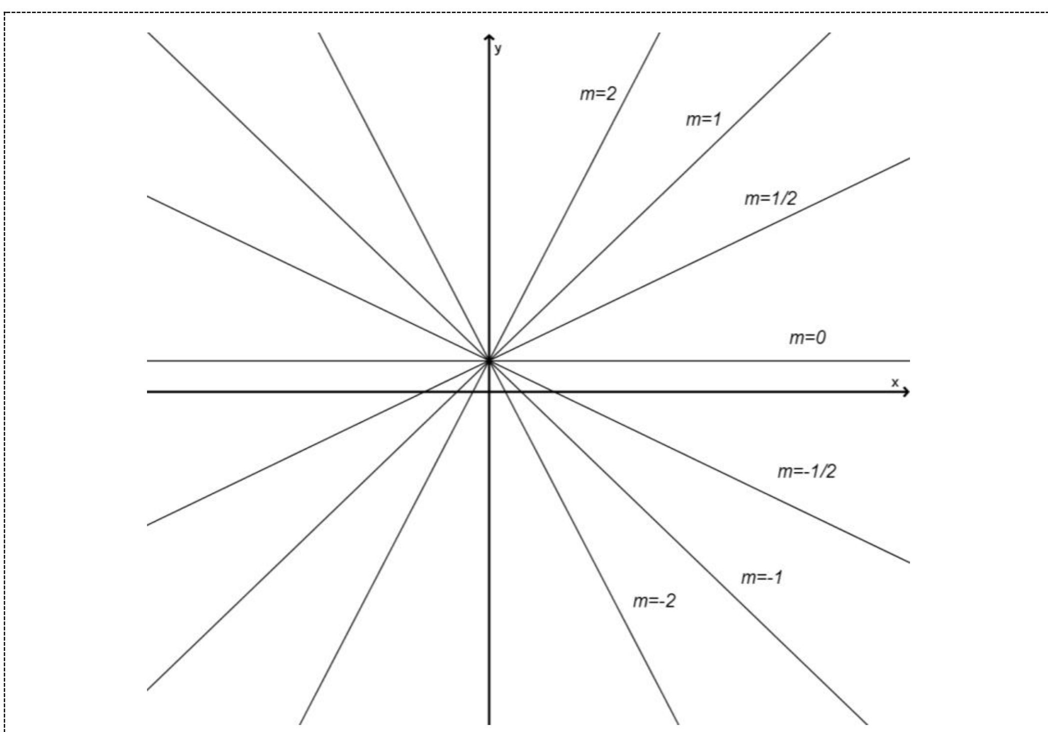
$$\alpha = \arctan(1)$$

$$\alpha = 45°$$

De manera similar, podemos calcular el ángulo que forma la recta con respecto al lado positivo del eje de las abscisas cuando la pendiente tenga cualquier otro valor.

A continuación se muestran bosquejos donde se señalan algunos valores de la pendiente y la correspondiente inclinación de la recta, para la ecuación $y = mx + 1$.

Figura 2.8. Ejemplos de la inclinación de la recta, la cual depende del valor del coeficiente "$m$" (pendiente) para la ecuación algebraica $y = mx + 1$.



Una tabla de valores de la pendiente y los ángulos “$\alpha$” que forma la recta con respecto al lado positivo del eje “$x$”, se muestra a continuación en la tabla 2.1.

Tabla 2.1. Valores de la pendiente “$m$” y el ángulo “$\alpha$” que forma con el lado positivo del eje “$x$”. El símbolo ↔ significa “se correlaciona con”.

| Valor de la pendiente | ↔ | Ángulo formado |
|---|---|---|
| $m > 1$ | ↔ | $45^0 < \alpha < 90^0$ |
| $m = 1$ | ↔ | $\alpha = 45^0$ |
| $0 < m < 1$ | ↔ | $0^0 < \alpha < 45^0$ |
| $m = 0$ | ↔ | $\alpha = 0$ |
| $-1 < m < 0$ | ↔ | $135^0 < \alpha < 180^0$ |
| $m = -1$ | ↔ | $\alpha = 135^0$ |
| $m < -1$ | ↔ | $90^0 < \alpha < 135^0$ |

Para que un bosquejo de representación gráfica de una ecuación lineal, sea factible de asociarse a la representación algebraica de dicha ecuación, deberá tener las siguientes características:

- que sea una recta,
- la intersección con el eje de las ordenadas debe estar en relación directa (cualitativamente) con el término independiente,
- la inclinación de la recta, ángulo “$\alpha$”, deberá estar acorde con el valor de la pendiente “$m$” (coeficiente de la incógnita “$x$”) y en consecuencia, con los ángulos mostrados en la tabla 2.1.

A continuación se muestra una tabla de correspondencia.

Tabla 2.2. Correspondencia de características

| Representación algebraica | Representación geométrica | Correspondencia<br>El símbolo ↔ significa “se correlaciona con”.<br>El símbolo → significa “se relaciona con” |
|---|---|---|
| $y = m_1x + b_1$ …L1 | Ángulo $\alpha_1$. Ordenada al origen $b_1$. | $m_1 \leftrightarrow \alpha_1$<br>$b_1 \leftrightarrow$ $intersección\ con\ eje$ "$y$" $(0, b_1)$ |
| $y = m_2x + b_2$ …L2 | Ángulo $\alpha_2$. Ordenada al origen $b_2$. | $m_2 \leftrightarrow \alpha_2$<br>$b_2 \leftrightarrow$ $intersección\ con\ eje$ "$y$" $(0, b_2)$ |
| $y = m_3x + b_3$ …L3 | Ángulo $\alpha_3$. Ordenada al origen $b_3$. | $m_3 \leftrightarrow \alpha_3$<br>$b_3 \leftrightarrow$ $intersección\ con\ eje$ "$y$" $(0, b_3)$ |
| … | … | … |
| $y = m_nx + b_n$ …Ln | Ángulo $\alpha_n$. Ordenada al origen $b_n$. | $m_n \leftrightarrow \alpha_n$<br>$b_n \leftrightarrow$ $intersección\ con\ eje$ "$y$" $(0, b_n)$ |

En este apartado se han presentado las consideraciones matemáticas para el diseño del ambiente de aprendizaje de las ecuaciones lineales, a continuación se presentan las consideraciones teóricas del aprendizaje con comprensión y del diseño del ambiente de aprendizaje.

## Aprendizaje con comprensión según Hiebert y Carpenter (1992)

Hiebert y Carpenter (1992) señalan que una de las ideas más aceptadas en la comunidad de educación matemática, es que los estudiantes deben aprender matemáticas con comprensión.

Los autores proponen un modelo para el aprendizaje con comprensión, en el cual consideran, entre otros conceptos, los de: representaciones externas, representaciones internas y conexiones. También definen lo que para ellos es la comprensión, la forma en que se puede desarrollar y las consecuencias que provoca.

### Representaciones Internas y Externas

Los autores afirman que para pensar y comunicar ideas matemáticas se requiere representarlas de alguna forma. Para pensar en dichas ideas matemáticas, necesitamos representarlas internamente, de manera que la mente pueda operar sobre ellas. La comunicación requiere de representaciones externas, tales como: leguaje hablado, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos.

Según los autores, existe relación entre las representaciones externas e internas. La forma en que un estudiante interactúa con las representaciones externas, revela de algún modo la forma en que las tiene representadas internamente.

### Conexión de representaciones

Hiebert y Carpenter (1992) asumen que las representaciones internas pueden ser conectadas entre ellas de forma útil y que, dichas conexiones pueden ser estimuladas al construir conexiones entre sus correspondientes representaciones externas.

Los autores afirman que las conexiones externas pueden ser construidas por los aprendices, entre diferentes formas de representación de una misma idea matemática o, de distintas maneras en la misma forma de representación. Las conexiones se pueden hacer con base en relaciones de similitudes (esto se parece a) o, de diferencias (esto es distinto a).

**Redes estructuradas**

Los autores señalan que cuando las representaciones internas son conectadas producen redes de conocimiento. No es factible conocer la naturaleza exacta de las redes pero es útil pensar que se estructuran de dos maneras: verticalmente en forma de pirámide y, horizontalmente en forma de telaraña.

**Definición de Comprensión**

Con las consideraciones anteriores: representaciones internas, conexiones y redes estructuradas, los autores establecen la siguiente definición:

> [u]na idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido si es parte de una red interna. Más específicamente, las matemáticas son comprendidas si éstas son parte de una red de representaciones. El grado de comprensión está determinado por el número y fuerza de las conexiones (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 67).

Según los autores, las redes de representaciones mentales se construyen gradualmente, cuando nueva información es conectada a redes existentes o, nuevas relaciones son construidas entre información previamente desconectada.

Los autores afirman que la comprensión está limitada cuando las conexiones son muy débiles y que, la comprensión crece cuando crecen las redes y/o las relaciones se van fortaleciendo.

Hiebert y Carpenter (1992) señalan que el crecimiento de las redes se puede caracterizar como cambios en las mismas. La mejor forma de describir los cambios en las redes es como reorganizaciones, nuevas conexiones son formadas, y viejas conexiones pueden modificarse o abandonarse. Es de especial interés que las conexiones erróneas se “destruyan”, a fin de que sean “sustituidas por las adecuadas”.

**Consecuencias de la comprensión**

Hiebert y Carpenter (1992) afirman que la comprensión tiene sus consecuencias: es generativa, promueve el recuerdo, reduce el monto de lo que se debe recordar, mejora la transferencia e influye en las creencias de los estudiantes.

*La generatividad de la comprensión*. Consiste en que los estudiantes puedan construir conexiones productivas. Según los autores, primeramente la comprensión es desarrollada con base a numerosas y fuertes conexiones entre representaciones internas y, posteriormente se pone en marcha el proceso inventivo.

Los autores afirman que cuando las invenciones son soportadas por redes enriquecidas son más propensas a conectar nuevas representaciones, porque simplemente hay más lugares donde se pueden relacionar.

*La comprensión promueve el recuerdo*. Hiebert y Carpenter (1992) indican que una ventaja para crear conexiones, es que en una buena conexión del conocimiento, éste es recordado mejor. Lo anterior se explica porque, una red estructurada de representaciones internas contiene más rutas de conexiones de información o vías de acceso. Además, dicha red estructurada es menos probable que se deteriore que representaciones internas "aisladas".

*La comprensión reduce el monto de lo que se debe recordar*. Los autores indican que si algo se comprende es conectado a una red, y recordar una parte de ella es como recordar la red entera, reduciendo el número de ítems que tenga que ser recordado. Por otro lado, cuando no existen conexiones, las "piezas sueltas de información" necesitan ser recuperadas una por una.

*La comprensión mejora la transferencia*. Los autores señalan que la transferencia es esencial y ocurre frecuentemente en matemáticas: nuevos problemas necesitan ser resueltos, usando lo aprendido y las estrategias previas. La comprensión requiere numerosas y fuertes conexiones dentro y entre las redes, si esto ocurre, se puede tener mejor capacidad para la búsqueda de similitudes y diferencias con tareas de mayores requerimientos de conocimiento. Reconociendo similitudes y diferencias entre tareas, incrementa la posibilidad de transferir una estrategia usada en una tarea a otra similar.

*La comprensión influye en las creencias de los estudiantes*. Hiebert y Carpenter (1992) señalan que la comprensión influye en las creencias de los estudiantes con respecto a las matemáticas. En un aprendizaje memorístico, los alumnos pueden creer que las matemáticas: i) sólo son una materia con reglas que seguir, ii) sólo son símbolos en el papel, iii) están desconectadas de otras materias, iv) la misma matemática esta desconectada entre un tema y otro. Por otro lado, en un aprendizaje con comprensión podemos esperar que los alumnos, consideren a la matemática como un cuerpo adherido de conocimientos, y que la información adquirida en un tema será conectada con otro tema dentro y/o fuera de las matemáticas.

En el presente trabajo se decide hacer tareas que promuevan la comprensión. El establecimiento de relaciones entre representaciones matemáticas, de tal forma que el alumno encuentre similitudes y diferencias entre ideas matemáticas.

## Diseños de Ambientes de Aprendizaje según Bransford, Brown y Cocking (1999)

Bransford, Brown y Cocking (1999) manifiestan que cuando el propósito de la enseñanza es que los alumnos aprendan con comprensión, se tienen que diseñar entornos de aprendizaje que la favorezcan. Para el diseño de estos entornos, los autores señalan que se deben considerar cuatro perspectivas: centrada en el estudiante, en el conocimiento, en la evaluación y en la comunidad. Aunque estas cuatro perspectivas se pueden analizar por separado, se requiere que sean conceptualizadas como un todo. A continuación se mencionan algunas consideraciones principales de cada una de ellas.

### Centrados en el estudiante

Para los entornos centrados en el estudiante, Bransford, Brown y Cocking (1999) consideran que estos entornos son los que ponen atención en los conocimientos, habilidades, actitudes y creencias que los estudiantes traen al escenario educativo. En dichos escenarios se considera que los aprendices construyen su propio significado, conocimiento y comprensión sobre los conocimientos y creencias con las que llegan al salón de clase. Algunas veces, dicho conocimiento apoya al nuevo aprendizaje y en otras, lo obstaculiza. Una instrucción efectiva comienza con lo que los estudiantes traen consigo e intenta ayudarlos a hacer las conexiones sobre sus conocimientos previos y su trabajo académico actual.

**Centrados en el conocimiento**

Bransford, Brown y Cocking (1999) señalan que la definición de qué conocimientos necesitan adquirir los estudiantes es fundamental en esta perspectiva y que los estándares en áreas como ciencia y matemáticas ayudan en dicha definición.

Los autores afirman que se debe enfocar la atención en la información y las actividades que ayuden a los estudiantes a desarrollar comprensión y que, una aproximación interesante para desarrollar el currículo es la "formalización progresiva". En ella se empieza con las ideas informales que los estudiantes traen y se les ayuda para que estas ideas sean transformadas y formalizadas.

Según los autores, los estudiantes no sólo deben aprender a calcular y computar sino también deben darle sentido a estas actividades y, pensar matemáticamente. Los mencionados autores sostienen que la importancia del automatismo ha sido demostrada en distintas áreas por lo que, es un reto dar un balance apropiado entre las actividades destinadas para promover la automatización y las actividades para promover la comprensión.

**Centrados en la evaluación**

Bransford, Brown y Cocking (1999) señalan que la evaluación debe proporcionar oportunidades de revisión y retroalimentación. Debe ser congruente con los objetivos del aprendizaje. Los dos mayores usos de la evaluación son: la sumativa y la formativa.

La evaluación sumativa se toma al final de algún conjunto de actividades de aprendizaje, incluye los exámenes hechos al final de una unidad de estudio o de un curso. Esta forma de evaluación nos permite decidir la promoción o no promoción del estudiante.

Los autores afirman que la evaluación formativa comprende las evaluaciones usadas en el contexto del salón de clase como recurso de retroalimentación para mejorar el proceso de enseñanza–aprendizaje y, proporciona a los estudiantes la oportunidad de revisar y mejorar.

Según los autores, si el objetivo es el aprendizaje con comprensión, la evaluación debe centrase precisamente en la comprensión y no únicamente en la memorización. Oportunidades de retroalimentación deben de ocurrir cotidianamente, como parte de la instrucción y, no esporádicamente. La retroalimentación es más valiosa cuando los estudiantes tienen que usarla para revisar sus pensamientos y su forma trabajo.

**Centrados en la comunidad**

Bransford, Brown y Cocking (1999) indican que, se puede afirmar que con el trabajo colectivo y la disposición de aprender de los otros, se promueve el aumento de la comprensión de los alumnos. Por otro lado, estos autores consideran que muchos estudiantes deben ser ayudados a aprender a trabajar colaborativamente y afirman que, las normas para el trabajo individual, en equipo y grupal son importantes para una mejora continua.

Los autores señalan que es importante tener presente que los alumnos pueden cometer errores. Los estudiantes deben considerar que dichos errores son oportunidades de mejora tanto para el alumno que los comete, como para los demás. Por otro lado, los autores señalan que la competencia puede afectar positiva o negativamente el trabajo de los miembros de la comunidad.

En este trabajo se ha decidido diseñar un ambiente de aprendizaje con comprensión tomando en consideración los entornos centrados en: el estudiante, el conocimiento, la evaluación y la comunidad.

En este capítulo se han expuesto los fundamentos teóricos sobre los cuales se basa el presente trabajo, en el siguiente capítulo se exponen a detalle los lineamientos del diseño del ambiente de aprendizaje con comprensión.

# Capítulo 3. Metodología

Como se indicó en el capítulo anterior, Bransford, Brown y Cocking (1999) manifiestan que cuando el propósito de la enseñanza es que los alumnos aprendan con comprensión, se tienen que diseñar entornos de aprendizaje que la favorezcan. Para el diseño de estos entornos, los autores señalan que se deben considerar cuatro perspectivas: centrada en el estudiante, en el conocimiento, en la evaluación y en la comunidad. Aunque estas cuatro perspectivas se pueden analizar por separado, se requiere que sean conceptualizadas como un todo. En este capítulo se diseña el ambiente de aprendizaje siguiendo dichas perspectivas.

## Determinación de la población bajo estudio

El estudio se realiza con un grupo, como cualquier otro, de veintiséis alumnos de primer semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM, plantel Naucalpan, cuyas edades oscilan entre 15 y 17 años, son alumnos de recién ingreso al bachillerato. Esta es una población disponible para el estudio, no se seleccionó. Semanalmente se trabaja con dos sesiones de dos horas y con una, de una hora. La materia es Matemáticas I. El autor de este escrito es el profesor del grupo e imparte el curso todo el semestre.

En el programa de estudios del segundo año de la educación secundaria (ver Anexo 3) se contempla que el alumno:

- Resuelva problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones de 2X2 con coeficientes enteros, utilizando el método más pertinente (suma y resta, igualación o sustitución).
- Represente gráficamente un sistema de ecuaciones de 2X2 con coeficientes enteros.
- Reconozca que el punto de intersección de sus gráficas es el punto de solución del sistema.

Por lo anterior, se espera que en este primer semestre de bachillerato sea la segunda ocasión en que los alumnos trabajen con el tema de Sistemas de ecuaciones lineales.

## Diseño del ambiente de aprendizaje

### Centrado en el estudiante

Según los autores Bransford, Brown y Cocking (1999) se deben de tomar en cuenta los conocimientos, actitudes y creencias de los estudiantes al presentarse al salón de clase.

Los conocimientos previos se pueden clasificar en dos grandes grupos:

- en el primero podemos establecer los conocimientos necesarios para abordar el tema de interés, conocimientos previos para abordar el tema;
- en el segundo, los conocimientos que los alumnos han aprendido del tema de ecuaciones lineales en otros cursos, conocimientos previos del tema.

En este punto, se pone de manifiesto el traslape de dos perspectivas, la del estudiante y la del conocimiento.

*Conocimientos previos para abordar el tema*

De los conocimientos previos que son necesarios para acceder al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, sobresalen los que tienen relaciones directas entre la representación algebraica y la geométrica. Y los que son “considerados” sólo en al ámbito algebraico o sólo en el ámbito geométrico.

Los conocimientos previos que tienen conexión entre la representación algebraica y la geométrica se muestran en la siguiente tabla. El símbolo → significa “se relaciona con”.

Tabla 3.1. Algunos conocimientos previos. Conexiones entre las representaciones.

| No. | Representación algebraica | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Una pareja ordenada $(x, y)$. | → | Un punto en el plano cartesiano. |
| 2 | Reconocimiento que en la ecuación: $$y = mx + b$$ El exponente de “$x$” es uno cuando “$y$” esta despejada. Es una ecuación lineal con dos incógnitas, la cual tiene una infinidad de soluciones. | → | La gráfica asociada es una línea recta. |
| 3 | A partir de la representación algebraica de una ecuación lineal, se puede pasar a un registro tabular. El cual, represente algunas parejas ordenadas que sean solución de la ecuación. | → | Dichas parejas ordenadas se pueden representar en el plano cartesiano. Para el trazo de una recta, sólo se necesita la localización de dos puntos. |
| 4 | Si una pareja ordenada $(x, y)$, satisface a una ecuación lineal, es solución de dicha ecuación. | → | El punto asociado pertenece a la recta. |
| 5 | Si una pareja ordenada $(x, y)$, no satisface a una ecuación lineal, no es solución de dicha ecuación. | → | El punto asociado no pertenece a la recta. |
| 6 | Para la ecuación: $$y = mx + b$$ $m$ es el coeficiente de “$x$”,<br>$b$ es el término independiente. | → | El coeficiente $m$ se relaciona con la inclinación de la recta.<br>El término independiente $b$ se relaciona con la intersección de la recta con el eje de las ordenadas |
| 7 | Observando la representación algebraica: $$y = mx + b$$ | → | Al considerar los valores de $m$ y $b$, graficar, o bien, hacer el bosquejo de la gráfica. |
| 8 | La ecuación: $$y = ax^2 + b$$ Es una ecuación cuadrática. La cual tiene una infinidad de soluciones. | → | La representación geométrica de dicha ecuación es una parábola. |

Cabe mencionar que el autor de este escrito fue el profesor del grupo durante todo el semestre, por lo que se ha asegurado que los conocimientos previos para abordar el tema fueron cubiertos en su totalidad.

En el ámbito que se considera solamente algebraico, es importante que el alumno, pueda resolver ecuaciones lineales con una incógnita de la forma $Ax + B = Cx + D$. Además debe saber que dos ecuaciones equivalentes tienen la misma solución, este conocimiento está considerado en la unidad de Ecuaciones lineales, anterior a la que nos ocupa.

En el ámbito que se considera solamente geométrico, el alumno debe conocer el concepto de rectas paralelas y que una recta es paralela a sí misma.

Los conocimientos previos al tema de sistemas de ecuaciones lineales se trabajan durante el curso, a continuación se indican algunos puntos del programa de estudios (UNAM-CCH, 2012) para Matemáticas I.

> *Comentario. En los renglones siguientes se muestran algunos puntos del programa de estudios, los cuales tienen relación directa con los sistemas de ecuaciones lineales. Así mismo, se presentan algunos ejemplos de cómo se trabajaron algunos conceptos.*

En la "Unidad I. Números y operaciones básicas" algunos puntos sobresalientes para ésta instrucción son:

- Números Enteros...
- Números Racionales
  - …
  - orden, representación en la recta numérica.
  - Fracciones equivalentes…
  - Operaciones básicas.
  - Prioridad de las operaciones. Uso de signos de agrupación…

(UNAM, 2012, pp. 16-18)

A continuación se indican algunos ejemplos de los conceptos anteriores.

Ejemplo1. Realizar las siguientes operaciones:

a) Uso de paréntesis.$121 - (33) - 2(65 + 45) =$

b) Leyes de los signos. $2(-11)(-10)(-2)=$

c) Prioridad de operaciones. $3 + 4 * 5 - 8 \div 2 =$

d) Operaciones con fracciones. $2 + \frac{3}{5}=$

Ejemplo 2. Encuentra el número que hace falta.

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{[\quad]}$$

Ejemplo 3. Localiza el número $-\frac{9}{2}$ en la recta numérica.

Ejemplo 4. Completa la siguiente oración: "Entre dos números racionales existe una __________________ de números racionales."

En la “Unidad II. Variación directamente proporcional y funciones lineales”, algunos puntos importantes para la instrucción que aquí se trabaja son:

- Variación proporcional directa.
    - …
    - …uso de tablas y gráficas.
    - Análisis del cociente $\frac{y}{x}$ para varias parejas de valores.
    - Constante de proporcionalidad.
    - Formas de representación de una función lineal: tablas gráficas y modelo algebraico.
    - Análisis de parámetros “$m$” y “$b$” en el comportamiento de la gráfica de $y = mx + b$.
    - …

(UNAM, 2012, pp. 19-22)

A continuación se indican algunos ejemplos de los conceptos anteriores.

Ejemplo 5. Escribe en el paréntesis una “S” si la pareja ordenada es solución de la ecuación $-14x + 7y - 21 = 0$, en caso contrario, escribe “NS”.

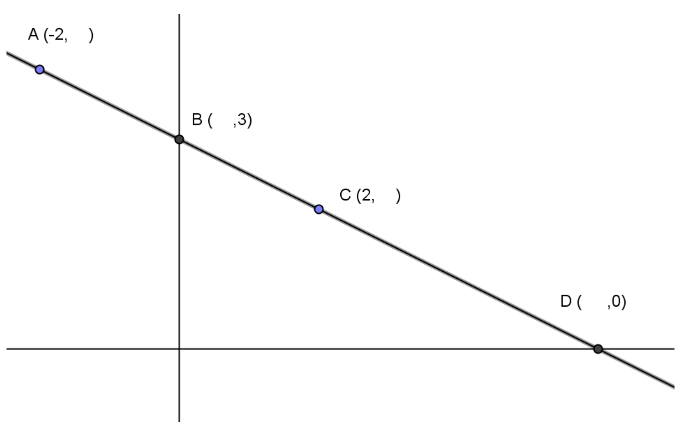
| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(-2,-1)$ | (   ) |
| 2. | $(-1,0)$ | (   ) |
| 3. | $(0,3)$ | (   ) |
| 4. | $(2,8)$ | (   ) |
| 5. | $(5,13)$ | (   ) |

Ejemplo 6. A continuación se muestra una ecuación en sus representaciones algebraica y gráfica. Calcula los valores de las parejas ordenadas que hacen falta y completa la tabla.

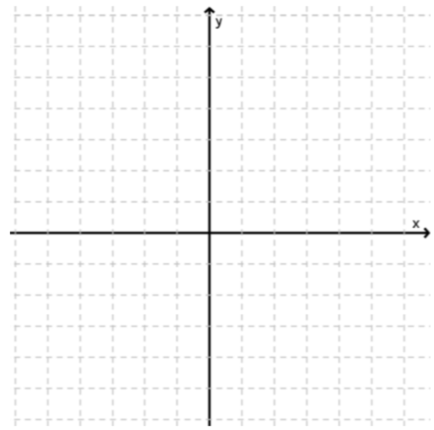
Ecuación

$x + 2y = 6$

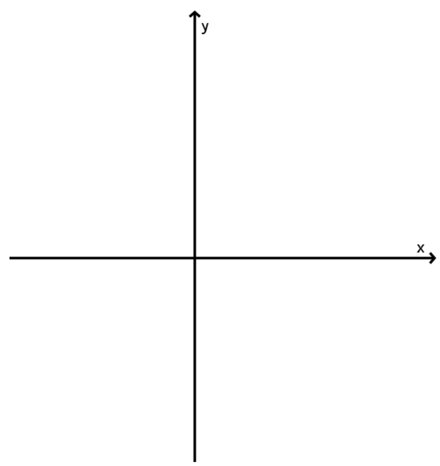
| punto | Coordenadas |
|---|---|
| A | |
| B | |
| C | |
| D | |



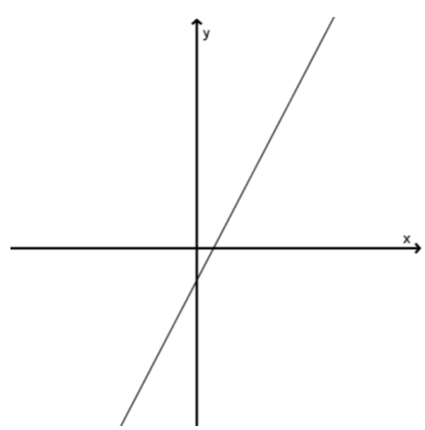
Ejemplo 7. En el plano que se encuentra a continuación, traza la gráfica de la ecuación $y = x - 2$, solamente interpretando los valores de "$m$" y "$b$".




Ejemplo 8. En el plano que se encuentra a continuación, bosqueja la ecuación $y = -2x + 3$




Ejemplo 9. Escribe una ecuación algebraica que sea factible de asociarse al bosquejo que se muestra a continuación.



En la “Unidad III. Ecuaciones lineales”, algunos puntos directamente relacionados con esta instrucción son:

- Ecuaciones lineales de una incógnita como:
    - …un caso particular de una función lineal.
- Resolución de ecuaciones lineales en una incógnita por métodos algebraicos.
    - Operar ambos miembros de la igualdad:
    - Transponer términos.
- Resolución de ecuaciones de los siguientes tipos:
    - $\dots a(x+b)=c(x+d)\dots$

(UNAM, 2012, pp. 23-25)

A continuación se muestra un ejemplo directamente relacionado para el trabajo que nos ocupa.

Ejemplo 10. Resuelve la siguiente ecuación.

$$5(x-2)=-3(2x-5)$$

Es conveniente trabajar con lo siguiente: el concepto de ecuaciones equivalentes y la notación de las ecuaciones con subíndices. Para los cuales, se presentan a continuación los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo 11. (Ecuaciones equivalentes).

En la siguiente lista de ecuaciones se encuentran algunas que son equivalentes a $2x-3y=9$. Escribe en el paréntesis una “E” cuando la ecuación sea equivalente; en caso contrario escribe “NE”. En un mismo plano dibuja el bosquejo de estas ecuaciones equivalentes.

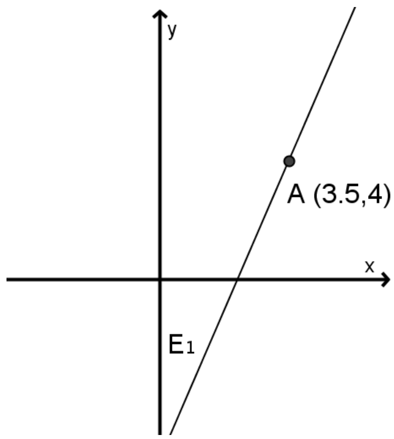
| | | |
|---|---|---|
| 1. | $6x-9y=27$ | ( ) |
| 2. | $-2x+3y=-9$ | ( ) |
| 3. | $4x-6y=18$ | ( ) |
| 4. | $3x-2y=-9$ | ( ) |
| 5. | $y=\dfrac{9x+3}{2}$ | ( ) |
| 6. | $4x^2-12xy+9y^2=81$ | ( ) |
| 7. | $-2x-3y=9-3x$ | ( ) |
| 8. | $2x-y=9+2y$ | ( ) |
| 9. | $-0.3y+0.2x=0.9$ | ( ) |

Ejemplo 12. (Notación con subíndices).

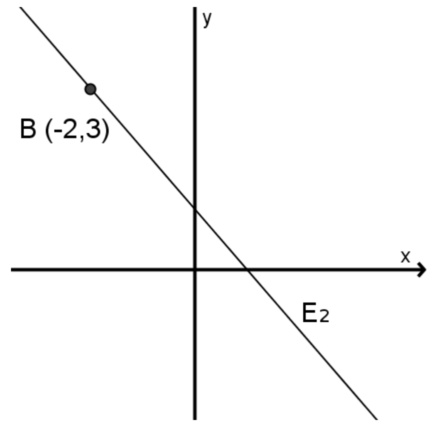
Es importante reconocer qué incógnitas corresponden a cada ecuación. En general, para dos ecuaciones lineales con dos incógnitas tenemos:

$$y_1 = m_1x_1 + b_1 \ldots \mathrm{L}_1$$
$$y_2 = m_2x_2 + b_2 \ldots \mathrm{L}_2$$

Observa las ecuaciones en sus representaciones algebraica, gráfica y los puntos que se localizan en cada una de las representaciones geométricas, contesta lo que se pide.




$y_1 = 2x_1 - 3 \ldots \mathrm{L}_1$




$y_2 = -x_2 + 1 \ldots \mathrm{L}_2$

Relaciona las siguientes columnas. Coloca en el paréntesis la letra que corresponda.

| Columna 1 | Columna 2 |
|---|---|
| 1. $m_1 =$ ( ) | $C = -3$ |
| 2. $m_2 =$ ( ) | $D = 3$ |
| 3. $b_1 =$ ( ) | $F = 0.5$ |
| 4. $b_2 =$ ( ) | $G = -2$ |
| 5. En el punto A $x_1 =$ ( ) | $H = 2$ |
| 6. En el punto A $y_1 =$ ( ) | $I = -1$ |
| 7. En el punto B $x_2 =$ ( ) | $J = 1$ |
| 8. En el punto B $y_2 =$ ( ) | $K = 4$ |
| | $M = 3.5$ |

Si bien, al iniciar con el tema de sistemas de ecuaciones lineales los conocimientos previos fueron trabajados por los estudiantes, no todos mostraron un rendimiento óptimo, lo cual, se ve reflejado en algunas dificultades que presentan los estudiantes en el momento de trabajar con las tareas que se proponen en este estudio. En los conocimientos previos, algunos estudiantes mostraron dificultades en:

- Operaciones con números enteros y racionales;
- Operaciones algebraicas;
    - Despeje de ecuaciones lineales (con una incógnita).

A pesar de lo anteriormente señalado, en el momento de iniciar la presente instrucción se ha considerado que, con el desempeño mostrado por los estudiantes, éstos pueden acceder a la presente instrucción.

*Conocimientos previos del tema*

Considerando el programa de educación secundaria, SEP (2011) y el libro *Fractal 2. Matemáticas,* para segundo grado de García y Block (2008), el cual es distribuido por la SEP, es factible que los estudiantes tengan algunos de los conocimientos siguientes:

- algoritmos de resolución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por los métodos: suma y resta, igualación, sustitución y por determinantes;
- gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y, reconocimiento de que el punto de intersección de las rectas es la solución del sistema;
- reconocimiento de sistemas incompatibles y compatibles;
- planteamiento y resolución de problemas de aplicación.

Es de interés conocer si el alumno ya sabe los conocimientos señalados previamente, para fortalecerlos con el diseño del ambiente de aprendizaje aquí expuesto o bien, para que el alumno los aprenda con comprensión.

> *Comentario. Al revisar los libros de texto de la secundaria y el bachillerato; además de las guías didácticas para el profesor del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Naucalpan; se observa que se trabaja en la algoritmia de los métodos de resolución y, en la resolución de problemas que involucran sistemas de ecuaciones lineales. Al observar la mencionada literatura, nos damos cuenta que la temática es la misma entre un nivel y otro, sólo cambia la cantidad de ejemplos, de ejercicios y el mayor grado de*

*“destreza” algebraica que se demanda a los alumnos en el bachillerato. En dicha literatura, no se trabaja a profundidad con: la automatización de la conversión entre los registros algebraico y gráfico, análisis profundo de las características de los sistemas consistentes e inconsistentes, la comparación entre los métodos de resolución, sistemas con más de dos ecuaciones con dos incógnitas, entre otros.*

En este estudio, se ha decidido aplicar el mismo instrumento de evaluación (ver Anexo 2), al inicio del proceso de enseñanza-aprendizaje (pre-test) y, posterior a dicho proceso (post-test). Esto nos permite comparar el cambio en el nivel de desempeño de los estudiantes. Los resultados son expuestos en el Capítulo 5.

*Actitudes y creencias de los estudiantes al presentarse al salón de clase*

Para indagar acerca de las creencias de los estudiantes al inicio del estudio, se aplicó un “Cuestionario complementario” (ver Anexo 2), en el que se les pregunta entre otras cosas, “cómo se sintieron en la prueba diagnóstica”. Las respuestas de los alumnos se presentan en el Capítulo 5. Adelantando un poco los resultados podemos mencionar que al inicio, en su mayoría tuvieron una actitud “temerosa”. Sin embargo, la confianza en ellos mismos, aumenta notoriamente en el momento de realizar la prueba sumativa.

**Centrado en el conocimiento**

El propósito de este trabajo es diseñar e implementar un escenario para el aprendizaje con comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, en el bachillerato, de acuerdo a las recomendaciones de Bransford, Brown y Cocking (1999) y bajo la concepción de la comprensión en matemáticas de Hiebert y Carpenter (1992).

Como se indicó en el capítulo anterior, Bransford, Brown y Cocking (1999) señalan que para definir qué conocimientos deben aprender los estudiantes en matemáticas, los estándares ayudan en dicha definición. Por otro lado, estos autores mencionan que una manera para diseñar tareas que promuevan la comprensión es la “formalización progresiva”. La cual empieza con las ideas informales que los estudiantes llevan al salón de clase y se les ayuda a que estas ideas sean trasformadas y formalizadas. Los autores también indican que se debe tener un balance apropiado entre las tareas que promuevan la comprensión, y las que promuevan la automatización.

De acuerdo a las observaciones anteriores, a continuación se indican los conocimientos por adquirir, considerando los estándares del NCTM (2000) y, el programa de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, (2012).

*Conocimientos por adquirir*

Según los estándares NCTM (2000) algunos de los conocimientos que deberían de tener los estudiantes, en el bachillerato son: relación entre expresiones simbólicas y gráficas de líneas con especial atención en la pendiente y ordenada al origen, reconocimiento y generación de formas equivalentes de expresiones algebraicas para resolver ecuaciones lineales.

Dichos estándares contienen lineamientos para la comprensión como son, reconocimiento y uso apropiado de las conexiones entre ideas matemáticas, la comprensión de cómo las ideas matemáticas se interconectan y se construyen unas sobre otras para producir un todo coherente.

Por otro lado, el programa de estudios de Matemáticas I del Colegio de Ciencias y Humanidades (ver Anexo 3) señala en la parte de aprendizajes, que el alumno:

- Recuerda que una ecuación lineal de dos variables tiene por gráfica una línea recta y viceversa.
- Verifica que una pareja ordenada de números es solución de una ecuación lineal de dos variables.
- Identifica el punto de intersección de dos líneas rectas como la solución del sistema de ecuaciones lineales asociado a dichas rectas.
- Obtiene de manera gráfica la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.
- Identifica a partir de los parámetros de una expresión lineal dada, la ordenada y la abscisa al origen.
- Identifica a partir de la gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 si es compatible o incompatible.
- Infiere la compatibilidad (con solución) e incompatibilidad (sin solución) de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 a partir de los parámetros de las ecuaciones.
- Identifica Sistemas Equivalentes.
- Resuelve sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 por el método que considere conveniente:
    - a) suma y resta
    - b) sustitución
    - c) igualación

- plantea problemas en diferentes contextos que lleven a sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 y los resolverá por cualquier método algebraico.

(UNAM, 2012, pp. 23-25).

En este estudio se ha procurado trabajar en su totalidad con los requerimientos del programa de estudios, sin embargo, sólo se ha trabajado con los métodos de sustitución, igualación y gráfico.

Como se indicó en el capítulo anterior, en el presente estudio, se decide trabajar por lo general con la representación algebraica de la forma $y = mx + b$, su representación gráfica, la conversión entre dichas representaciones por la vía de la interpretación global y, con un tratamiento puramente matemático (Duval, 1992).

En el presente diseño de ambiente de aprendizaje, se trabaja con tareas para promover la comprensión, donde el alumno tiene la oportunidad de generar sus representaciones internas y las conexiones entre estas; en algunos casos se le pide explícitamente que encuentre similitudes y diferencias entre ideas matemáticas. También se trabaja con una gran cantidad de ejercicios de conversión de representaciones algebraica y gráfica, ejercicios para el cálculo de puntos de solución de sistemas y, ejercicios para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por los métodos de sustitución, igualación y gráfico, con el propósito de promover la comprensión y automatización, según lo señalan Hiebert y Carpenter (1992).

Las tareas para el aprendizaje con comprensión se han dividido en cuatro bloques, cuyas características generales, se indican a continuación.

### Bloques de tareas

*Bloque I.* Retomar las características de un bosquejo como representación geométrica de la ecuación algebraica lineal $y = mx + b$. Establecer los sistemas de ecuaciones en los que se trabaja.

$$y_1 = m_1x_1 + b_1 \ldots L_1$$

$$y_2 = m_2x_2 + b_2 \ldots L_2$$

Donde $m_1, m_2, b_1, b_2$, son números reales, $x_1, x_2, y_1, y_2$, son incógnitas.

*Bloque II.* Identificar las situaciones que se pueden presentar en un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica y geométrica.

Dichas situaciones, basadas en la representación geométrica, son: dos rectas paralelas, dos rectas que se intersectan entre ellas sobre el eje de las ordenadas o, que se intersecten fuera del eje de las ordenadas. En la figura 3.1., se muestra un diagrama de lo anteriormente descrito.

Figura 3.1. Diagrama de las diferentes situaciones entre pendientes y ordenadas al origen.

| | | |
|---|---|---|
| Si $m_1 = m_2$ | $b_1 \neq b_2$ | Las rectas son paralelas, diferentes una de la otra. |
| | $b_1 = b_2$ | Se trata de la misma recta. Se puede considerar una recta encima de la otra y se intersectan en todos sus puntos. |
| Si $m_1 \neq m_2$ | $b_1 = b_2$ | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en el mismo punto. |
| | $b_1 \neq b_2$ | Las rectas se intersectan entre ellas en algún punto fuera del eje de las ordenadas. |

*Bloque III.* Establecimiento de las relaciones pertinentes, para la comprensión de las condiciones de la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en las representaciones algebraica y gráfica. Para lo anterior se muestra la tabla 3.1.

Tabla 3.1. Condiciones de un punto que es solución de una ecuación y de un punto que es solución de un sistema de ecuaciones lineales.

| | Características geométricas | → | Características algebraicas |
|---|---|---|---|
| 1 | Un punto en el plano cartesiano. | → | Pareja ordenada $(x, y)$. |
| 2 | Un punto pertenece a una recta. | → | La pareja ordenada de dicho punto satisface la ecuación algebraica de dicha recta. |
| 3 | Un punto no pertenece a una recta. | → | La pareja ordenada de dicho punto no satisface la ecuación algebraica de dicha recta. |
| 4 | Si un punto pertenece a todas las rectas del sistema. | → | La pareja ordenada de dicho punto satisface a todas las ecuaciones algebraicas del sistema. |

*Bloque IV.* Establecimiento de las relaciones matemáticas pertinentes para la comprensión de los métodos de solución: igualación, sustitución.

Tabla 3.2. Similitudes y diferencias entre los métodos de igualación y sustitución.

| Etapa del procedimiento | | Igualación | Sustitución | Similitudes o diferencias |
|---|---|---|---|---|
| 1 | El inicio depende de cómo estén escritas las ecuaciones. | En las dos ecuaciones debe estar despejada la misma incógnita. En caso de que no sea así, se realizan los despejes necesarios. | En al menos una de las ecuaciones debe de estar despejada una incógnita. En caso de que no sea así, se realiza el despeje necesario. | Diferencia. |
| 2 | Reducción a una ecuación con una incógnita. | Igualación de las ecuaciones. | Sustitución de una ecuación en la otra. | Similitud. |
| 3 | Despeje de la primera incógnita y obtención de su valor. | Operación algebraica. | Operación algebraica. | Similitud. |
| 4 | Sustitución del valor encontrado, en alguna de las ecuaciones "iniciales". | Sustitución. | Sustitución. | Similitud. |
| 5 | Operación algebraica y cálculo de la segunda incógnita. | Operación algebraica. | Operación algebraica. | Similitud. |

Establecimiento de las relaciones matemáticas pertinentes para la comprensión de que en método gráfico consiste en: graficar cada una de las ecuaciones, localizar el punto en el cual se intersectan las rectas y determinar sus coordenadas.

### *Tabla de distribución de tareas*

En el presente estudio, las tareas para el aprendizaje con comprensión y automatización de los sistemas de ecuaciones lineales son 51, incluidas la prueba diagnóstica y la prueba sumativa.

Dichas tareas se trabajan de las formas: individual, en equipo y grupal. La temática de una tarea "individual" se trabaja adicionalmente de las siguientes formas: i) tarea en equipo, seguida de tarea grupal; ii) solamente en tarea grupal.

En la tabla 3.3., que se muestra renglones adelante, se señala lo siguiente. En la primera columna, el número y propósito del bloque. En la segunda columna (#), el número de tarea. En la tercera columna (F.T.), forma de trabajo; individual “I”, en equipo “E”, grupal “G”, individual extraclase “Ex”. En la cuarta columna (Min), el tiempo estimado para la realización de la tarea en minutos. Así mismo se presenta el título y los propósitos, es decir lo que se espera que el estudiante realice.

A partir de la Tarea 5 individual, y para la mayoría de las tareas que se trabajan de esta forma, se ha diseñado un formato con los cuestionamientos, las consignas y los ejercicios para cada una. En la práctica, dicho formato impreso, se reparte a los alumnos. Lo mismo sucede para las tareas que se trabajan en equipo. Dichos formatos se encuentran en el Anexo1.

Tabla 3.3. Bloques, Número de tarea, forma de trabajo, tiempo estimado, título y propósito.

| Número de bloque | # | F.T. | Min | Título | Propósito(s) |
|---|---|---|---|---|---|
| - | 1 | I | 105 | Prueba diagnóstica. | Verificar los conocimientos de los alumnos acerca de ecuaciones lineales con dos incógnitas, al inicio de esta serie de tareas. |
| I Retomar las características del bosquejo de la ecuación lineal y establecer los sistemas de ecuaciones en los que se trabaja. | 2 | I-G | 15 | Características de un bosquejo de representación gráfica. | Retomar las características del bosquejo de la ecuación lineal, aprendidas anteriormente, y consensar sus características. |
| | 3 | I-G | 15 | Conversión de la representación algebraica al bosquejo de la representación geométrica. | |
| | 4 | I-G | 15 | Sistemas de ecuaciones lineales. Presentación. | Identificar a un sistema de ecuaciones lineales como un conjunto de dos o más ecuaciones lineales. |
| | 5 | I | 10 | Identificación del número de ecuaciones y de incógnitas en las representaciones algebraica y geométrica. | Identificar el número de ecuaciones y de incógnitas que contienen algunos sistemas, en las representaciones algebraica y geométrica. |
| | 6 | G | 10 | | |
| | 7 | I | 15 | Casos concretos de sistemas de ecuaciones lineales. | Proponer ejemplos de sistemas de ecuaciones con distinto número de ecuaciones y de incógnitas. |
| | 8 | G | 15 | | |

Tabla 3.3. Bloques, Número de tarea, forma de trabajo, tiempo estimado, título y propósito. (continuación).

| Número de bloque | # | F.T. | Min | Título | Propósito(s) |
|---|---|---|---|---|---|
| II Identificación cualitativa de las situaciones que se presentan en los sistemas de ecuaciones lineales. | 9 | I | Ex. | Sistemas de ecuaciones lineales, situación de paralelismo. | Convertir del registro algebraico al gráfico y viceversa. Identificar las condiciones de paralelismo. |
| | 10 | G | 10 | | |
| | 11 | I | 15 | Sistemas de ecuaciones lineales, situación de intersección en el eje de las ordenadas. | Convertir del registro algebraico al gráfico y viceversa. Identificar las condiciones de la intersección en el eje de las ordenadas. |
| | 12 | E | 10 | | |
| | 13 | G | 10 | | |
| | 14 | I | 15 | Sistemas de ecuaciones lineales, situación de intersección fuera del eje de las ordenadas. | Convertir del registro algebraico al gráfico y viceversa. Identificar de condiciones de intersección fuera del eje de las ordenadas. |
| | 15 | E | 10 | | |
| | 16 | G | 10 | | |
| | 17 | I | 10 | Relación de representaciones | Relacionar sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas entre sus representaciones algebraica y gráfica. |
| | 18 | G | 10 | | |
| | 19 | I | Ex. | Resumen de situaciones de paralelismo e intersección. | Generalizar las condiciones que se presentan en la representación gráfica y algebraica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. |
| | 20 | E | 10 | | |
| | 21 | G | 10 | | |
| | 22 | I | 10 | Proposición de sistemas de ecuaciones lineales. Diferentes situaciones. | Proponer ejemplos de sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica y gráfica, con distintas condiciones. |
| | 23 | E | 10 | | |
| | 24 | G | 10 | | |
| III Condiciones de la solución en las representacio-nes gráfica y algebraica. | 25 | I | Ex. | Identificación de solución 1. | Identificar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en la representación gráfica. |
| | 26 | E | 10 | | |
| | 27 | G | 10 | | |
| | 28 | I | 15 | Identificación de solución 2. | Identificar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en la representación algebraica, como la pareja ordenada que satisface todas las ecuaciones del sistema. |
| | 29 | E | 10 | | |
| | 30 | G | 10 | | |

Tabla 3.3. Bloques, Número de tarea, forma de trabajo, tiempo estimado, título y propósito. (continuación).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 31 | I | 10 | Completar coordenadas de solución. | Calcular algebraicamente una coordenada, del punto de solución, dada la otra; en sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y de solución única. |
| | 32 | G | 10 | | |
| | 33 | I | 15 | Proposición de sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo a su solución. | Proponer ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales sin solución y con infinidad de soluciones. Así mismo proponer sistemas con solución única sobre el eje de las ordenadas y fuera del eje de las ordenadas. |
| | 34 | G | 10 | | |
| | 35 | I | Ex. | Completar coordenadas de intersección. | Calcular algebraicamente una coordenada de los puntos en los que se intersectan las ecuaciones contempladas en sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica, gráfica, dada la otra coordenada. |
| | 36 | G | 15 | | |
| | 37 | I | 15 | Cálculo de solución en alguno de los ejes. | Calcular la solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en la representación algebraica, cuando ésta se produce en alguno de los ejes. |
| | 38 | E | 10 | | |
| | 39 | G | 10 | | |
| | 40 | I | 15 | Condiciones del punto de intersección. | Identificar que en el punto de intersección de las gráficas de un sistema, la pareja ordenada del mismo, satisface a todas las ecuaciones. |
| | 41 | E | 10 | | |
| | 42 | G | 10 | | |
| IV Métodos de solución: igualación, sustitución y, gráfico. | 43 | G | 60 | Métodos de solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: igualación y sustitución. | Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por los métodos de igualación y sustitución, al tiempo que se analiza cómo se resuelven, a fin de establecer cuál es el procedimiento. |
| | 44 | I | Ex. | Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. | Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por los métodos de igualación y sustitución. Describir dichos métodos por escrito y, verificar ventajas y desventajas en el uso de cada uno de ellos. |
| | 45 | G | 15 | | |

Tabla 3.3. Bloques, Número de tarea, forma de trabajo, tiempo estimado, título y propósito. (continuación).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 46 | I | 15 | Resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas. | Resolver sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas. |
| | 47 | G | 10 | | |
| | 48 | G | 15 | Expresiones algebraicas que se obtienen cuando los sistemas no tienen solución o, tienen infinidad de soluciones. | Identificar las expresiones algebraicas que se obtienen cuando los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, no tienen solución o tienen infinidad de soluciones. |
| | 49 | I | 10 | Método gráfico. | Resolver sistemas de ecuaciones lineales gráficamente. |
| | 50 | G | 10 | | |
| - | 51 | I | 120 | Prueba sumativa. | Verificar los conocimientos de los alumnos acerca de ecuaciones lineales con dos incógnitas, después de haber participado en esta serie de tareas. |

En las tareas se trabaja para desarrollar la comprensión y/o la automatización. Así mismo algún tipo de evaluación está presente en cada una de ellas. A continuación se muestra la Tabla 3.4., donde se indica, para cuál de estos rubros están orientadas, cada una de las mencionadas tareas.

Tabla 3.4. Orientación de Tareas.

| Propósito | Número de las tareas |
|---|---|
| Comprensión | 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28,29,30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50. |
| Automatización | 3, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 28,29,30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50. |
| Evaluación diagnóstica | 1, 3. |
| Evaluación formativa | En todas las tareas, excepto en la 1 y 51. |
| Evaluación sumativa | 51. |

En este apartado se han mencionado, las generalidades de las tareas y propósitos de las mismas, las cuales forman parte de la perspectiva del conocimiento. En el Capítulo 4 se presentan, se analizan y, se indican las relaciones entre ideas matemáticas que los estudiantes deben “construir”.

**Centrado en la evaluación**

Según Bransford, Brown y Cocking (1999) los dos mayores usos de la evaluación son la formativa y la sumativa. La formativa se va aplicando cotidianamente en el transcurso de las clases. La sumativa es al final de un conjunto de tareas y sirve para valorar el aprendizaje de los alumnos y, la eficacia del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Hiebert y Carpenter (1992) señalan que la forma en que un estudiante manipula las representaciones externas, indica de algún modo la forma en que las tiene representadas internamente. Los autores señalan que la comprensión depende del número y fuerza de las conexiones entre representaciones internas.

El manejo de representaciones gráfica, algebraica y su conversión, las interpretaciones de paralelismo e intersección y el uso de métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, implican un buen número de conexiones entre distintas ideas matemáticas. La evaluación se centra en estos conocimientos.

*Evaluación diagnóstica*

Como se indicó en la perspectiva del estudiante, se deben considerar los conocimientos con los que llega al salón de clase. Cabe recordar que las perspectivas se deben considerar como un todo y se intersecan unas con otras, este es un ejemplo del traslape, entre la perspectiva del estudiante, del conocimiento y de la evaluación.

El profesor debe asegurarse que el alumno haya aprendido los conocimientos previos para abordar el tema, durante el curso. Así mismo, se aplica la prueba diagnóstica (pre-test) para conocer qué tanto saben los estudiantes del tema de ecuaciones lineales.

La prueba diagnóstica consiste en los mismos cuestionamientos que la prueba sumativa (post-test), por lo que sirve para hacer un análisis comparativo. El instrumento de evaluación se encuentra en el Anexo 2.

*Evaluación formativa*

Según Bransford Brown y Cocking (1999) la evaluación formativa comprende las evaluaciones usadas en el contexto del salón de clase, como recurso de retroalimentación para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje y proporciona a los estudiantes la oportunidad de revisar y mejorar. Además la evaluación debe ser congruente con los objetivos del aprendizaje. Siguiendo estas directrices, en el presente trabajo se efectúa la evaluación formativa en cada una de las sesiones, independientemente que los alumnos trabajen en forma individual, por equipo y grupal.

En el trabajo de equipo, una de las actividades importantes es compartir y comparar los resultados y procedimientos del trabajo individual de los alumnos, de manera que existe una evaluación y retroalimentación con sus pares.

En el trabajo grupal, los procedimientos y resultados de los equipos son presentados y evaluados por el resto del grupo y por el profesor.

*Evaluación sumativa*

La evaluación sumativa se lleva a cabo mediante una prueba de rendimiento (Anexo 2), es la última tarea (51) del diseño del ambiente de aprendizaje que se reproduce en este escrito. Dicha evaluación, constituye un elemento que nos permite considerar, en qué medida los estudiantes logran un aprendizaje con comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Según Scott (1988) un instrumento de evaluación es válido si realmente mide lo que pretende medir; cuando existe una relación directa entre una característica y su medición. En la evaluación sumativa, se pone atención en la interpretación y conversión de los registros gráfico y algebraico, en el análisis de paralelismo o de intersección y, en la habilidad para determinar los puntos de solución. Así, los aspectos a evaluar son:

- En qué medida los estudiantes realizan la conversión de representaciones algebraica y gráfica de las ecuaciones de los sistemas de dos ecuaciones lineales de dos incógnitas.

*Comentario. Según Duval (1992) se puede considerar que un estudiante comprende un objeto matemático, cuando lo reconoce en al menos dos formas de representación y puede hacer la conversión entre dichas formas.*

- En qué medida, los estudiantes interpretan correctamente las características de un sistema de ecuaciones lineales dadas su representación verbal, algebraica y el bosquejo de representación geométrica.

*Comentario. Según Hiebert y Carpenter (1992) las relaciones entre ideas matemáticas se pueden construir entre distintas formas de representación.*

- En qué medida los estudiantes, resuelven sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas algebraica y gráficamente.

*Comentario. La evaluación de este aspecto, responde a lo señalado por Bransford, Brown y Cocking (1992) quienes indican que se debe tener un balance apropiado entre las tareas que promuevan la comprensión y las que promuevan la automatización. Por lo que se considera importante que el alumno aprenda con comprensión los métodos de resolución y los realice con eficacia.*

- En qué medida los estudiantes pueden aplicar lo aprendido en sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a: sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, sistemas no lineales y a un problema de aplicación.

*Comentario. La evaluación de este aspecto, responde a lo señalado por Hiebert y Carpenter (1992) los cuales indican que una de las consecuencias de la comprensión es que mejora la transferencia.*

**Prueba de rendimiento**

El análisis detallado de los cuestionamientos, las conexiones necesarias entre las ideas matemáticas para que el alumno resuelva correctamente dichos cuestionamientos, y un análisis de los resultados obtenidos, se puede ver en el Capítulo 5 de este trabajo, a continuación se describen brevemente los apartados del instrumento de evaluación.

| **En el apartado:** | **Se pide al alumno que:** |
|---|---|
| I | Realice la conversión de la representación gráfica a la algebraica de tres sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, |
| II | Realice la conversión de la representación algebraica a la gráfica de tres sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, |
| III | Relacione dos columnas, identificando las características de seis sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en su representación algebraica, con la descripción de cuatro bosquejos de representación geométrica. |
| IV | Escriba ejemplos de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas dependiendo de las situaciones: con solución única, sin solución y, con infinidad de soluciones. |
| V.1. | Indique, si cinco puntos propuestos son solución o no, de algunas de las ecuaciones de un sistema de cinco ecuaciones lineales con dos incógnitas y solución única, presentada en la representación geométrica. |
| V.2. | Señale, qué condiciones debe cumplir un punto en la representación geométrica, para que sea solución de un sistema. |
| VI.1. | Indique, si una pareja ordenada propuesta, es solución de un sistema de tres ecuaciones lineales y una cuadrática mostrada en su representación algebraica. |
| VI.2. | Señale, qué condiciones debe cumplir una pareja ordenada para que sea solución de un sistema de ecuaciones lineales en su representación algebraica. |
| VII.1. | Calcule las ordenadas de algunos puntos que se encuentran sobre las rectas de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (se proporcionan las abscisas). |
| VII.2. | Señale, cuántas formas hay para completar las coordenadas de los puntos del apartado anterior. |
| VIII.1. | Calcule las coordenadas faltantes de puntos de intersección de un sistema de cuatro ecuaciones lineales con dos incógnitas, para cada punto se proporciona una coordenada. |
| VIII.2. | Indique, cuántas formas hay de calcular las coordenadas de los puntos del apartado anterior. |

| **En el apartado:** | **Se pide al alumno que:** |
|---|---|
| IX.1. | Calcule las ordenadas de los puntos de solución de un sistema de dos ecuaciones cuadráticas (se proporcionan las abscisas). |
| IX.2. | Señale, cuántas formas hay de calcular las ordenadas de los puntos del apartado anterior. |
| X | Identifique que la pareja ordenada del punto de solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, satisface a las tres ecuaciones del sistema. |
| XI | Dada la representación algebraica de tres sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; determine, sin resolver algebraicamente, si cada uno de los sistemas, tiene solución única, no tiene solución o, tiene infinidad de soluciones. |
| XII.1. | Resuelva un sistema de dos ecuaciones lineales por el método de sustitución. |
| XII.2. | Describa detalladamente en qué consiste el método de sustitución. |
| XIII.1. | Resuelva un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de igualación. Bosqueje el sistema. |
| XIII.2. | Describa detalladamente en qué consiste el método de igualación. |
| XIV | Determine las coordenadas de los puntos de intersección de las ecuaciones, de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas. |
| XV | Resuelva por el método gráfico un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. |
| XVI | Resuelva por el método gráfico un sistema de una ecuación lineal y una cuadrática. |
| XVII | Resuelva un problema de aplicación. |

*Cuestionario complementario*

Al finalizar la serie de tareas, se les cuestiona a los alumnos acerca de la forma en que se trabajó. Los referidos cuestionamientos son:

1. Indica algunas diferencias de cómo te sentiste en la prueba diagnóstica y en el instrumento de evaluación sumativa.
2. ¿Qué piensas acerca de la forma de abordar el conocimiento, en trabajo individual, en equipo y grupal?
3. ¿Qué piensas acerca de trabajar las ecuaciones lineales entre sus representaciones algebraica y gráfica?
4. ¿Aproximadamente, qué porcentaje de tus respuestas en trabajo individual, comprobaste que estuvieron correctas en trabajo de equipo y grupal?

**Centrado en la comunidad**

Según Bransford, Brown y Cocking (1999) las normas son importantes para el trabajo dentro de la comunidad del salón de clases. A continuación se detalla las formas y normas de trabajo.

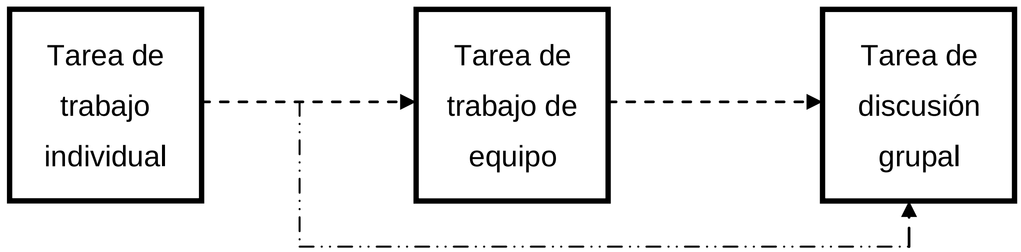
*Formas de trabajo*

Como se mencionó anteriormente, en este diseño, las tareas se trabajan en forma individual, por equipo y grupal. Los cuestionamientos y propósitos de una tarea individual se trabajan enseguida en otra tarea que puede ser en equipo y/o grupal.

Algunas veces, después de una tarea individual le siguen otras dos tareas: una en equipo y otra de trabajo grupal. En otras ocasiones, después de una tarea individual le sigue otra que se trabaja grupalmente.

La tarea individual antecede a la tarea en equipo y/o a la tarea grupal, a fin de que el estudiante se prepare para su participación, en el equipo o en el grupo, con argumentos, procedimientos, resultados o, inclusive con dudas. En el siguiente diagrama se muestran las dos secuencias que se pueden tener en las tareas.

Figura 3.2. Representación esquemática de las secuencias de las tareas.




*Estructura de las sesiones*. En general la estructura de las sesiones es: a) entrada y saludo, b) introducción al tema del día, c) asignación de tarea individual o en equipo en clase, d) tarea de discusión grupal, e) asignación de tarea extraclase.

*Entrada y saludo*. El saludo es importante para empezar con un buen ambiente de trabajo, al mismo tiempo, se aprovecha para que los alumnos y el profesor dispongan de los materiales y se preparen para iniciar la sesión.

*Introducción al tema del día*. El profesor hace una serie de comentarios de introducción referentes a las tareas que se realizarán en dicha sesión.

*Asignación de tarea individual o en equipo en clase.* La asignación de la tarea puede ser de dos formas, verbal o escrita. En ambas formas se indica, el título de la tarea, la forma de trabajo, el tiempo estimado para llevarla a cabo y, las consignas de la misma.

Cuando la tarea se asigna en forma verbal, el profesor, explica las actividades que se requiere que hagan los alumnos y, se asegura de que hayan entendido las indicaciones preguntando, “¿existe alguna duda?”. Por lo general se espera, que los alumnos no tengan dudas de las indicaciones. Sin embargo, si hay alumnos con alguna duda, la externan y, algún miembro de la comunidad lo asiste.

Cuando la tarea se reparte por escrito, se realizan las siguientes actividades:

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *Entrega los formatos de la tarea.* | Reciben el formato de la tarea y no lo pueden leer hasta que lo indique el profesor |
| *Cuando todos tienen el formato de la tarea:* | |
| *Lee en voz alta, las consignas de la tarea junto con los alumnos.* | Leen en voz baja las consignas, al mismo tiempo que el profesor. |
| *Al finalizar de leer, pregunta a los alumnos, "¿hay alguna duda?".* | Si tiene dudas; pregunta. |
| *Contesta las preguntas o sede la palabra a algún o algunos miembros del grupo para que conteste.* | Indica si ha comprendido las consignas. |
| *Cuando todos hayan entendido las consignas, los alumnos empiezan a trabajar.* | |

*Tarea individual*. En el trabajo individual, el alumno tiene un momento de reflexión y va contestando los cuestionamientos. Como su nombre lo indica, este trabajo es estrictamente individual y no puede comunicarse con sus compañeros. La siguiente tabla muestra las actividades que realizan el profesor y los alumnos en las tareas individuales.

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *Observa el trabajo de los alumnos.*<br>*Evalúa los resultados que van obteniendo.*<br>*Esta actividad es en forma particular.* | Reflexiona y contesta.<br>Elabora sus procedimientos, conclusiones y resultados.<br>En caso necesario, muestra su tarea al profesor.<br>Cuando es necesario, pregunta al profesor. |
| *Apoya al alumno formulando sub-preguntas o dándole contra-ejemplos. El profesor no debe dar la respuesta, sino debe generar la discusión para que los alumnos la "descubran".* | Atiende las directrices del profesor. |
| *Cuando haya transcurrido el tiempo y que la mayoría de los alumnos hayan terminado, se da por concluida la tarea. Sin embargo, se pueden añadir algunos minutos más, para dar oportunidad a que terminen algunos alumnos que no lo hayan hecho.* | Es importante que los alumnos que terminan la tarea antes que otros, guarden silencio. |

*Tarea en equipo*. El profesor indica la forma para reunir a los alumnos en equipos de cuatro o cinco integrantes, donde se fomenta el trabajo colaborativo para que unos aprendan de otros (Johnson y Johnson, 1999; Reyes, 1995). En este tipo de trabajo los alumnos tienen la oportunidad de comparar los procedimientos y resultados con sus pares; expresar sus comentarios, argumentar sus respuestas, descubrir los errores de los demás y los suyos propios. Además tienen oportunidad de discutir sus ideas.

El profesor observa el trabajo de los equipos y estimula la participación de todos los integrantes. Para un buen desempeño del equipo, es importante que los alumnos comuniquen sus conocimientos, esto es para beneficio de ellos mismos y de los demás, independientemente que sean correctos, imprecisos e inclusive equívocos.

Según Reyes (1995) el trabajo se debe organizar en equipos para que los alumnos se apoyen entre ellos, verbalicen sus dudas inmediatamente y las resuelvan. Al explicar un alumno a otro la solución de un problema o ejercicio, se beneficiará el que explica, al mismo tiempo que ayuda al segundo.

La forma de conformar los equipos es diversa. En este estudio se ha decidido trabajar con las tres siguientes.

Forma 1. Con sus compañeros más cercanos (Sesión 3),

Forma 2. Al azar (Sesiones 4 y 6).

Forma 3. De acuerdo a como se encuentren sentados los alumnos (Sesión 5).

Se pretende que al término del trabajo en equipo, todos los integrantes hayan logrado un consenso de los procedimientos, resultados y conclusiones. Además, deben registrar por escrito las conclusiones obtenidas en el formato de la tarea correspondiente. Cada integrante en su formato individual, anota las conclusiones a las que hayan llegado. El equipo nombra un representante para comunicar las conclusiones ante el grupo.

Considerando lo señalado por los autores Bransford, Brown y Cocking (1999); Hiebert y Carpenter (1992), se puede decir que en el trabajo de equipo (perspectiva de comunidad), el alumno: expresa sus ideas matemáticas en forma verbal o con símbolos escritos, compara sus relaciones con las de otros y, tiene la oportunidad de reafirmar las relaciones correctas y corregir las relaciones incorrectas

Las tareas de trabajo en equipo se desarrollan de la siguiente manera:

| *Profesor* | Alumnos |
| --- | --- |
| *Indica la manera de formar los equipos de cuatro o cinco estudiantes y, que nombren a su representante.*<br>*Observa que los equipos hayan sido formados conforme lo señalado.* | Se reúnen en equipos y nombran al representante. Si es necesario, acomodan el mobiliario. |

| | |
|---|---|
| *Supervisa y evalúa, a fin de orientar el trabajo de equipo, si es necesario, proporciona contraejemplos y formula algunas preguntas para que el equipo "descubra" las respuestas.* | Discuten ideas, se ayudan mutuamente. Si el profesor interactúa directamente con el equipo, sus integrantes, atienden a las observaciones y preguntas, con la intención de llegar a consensos. |
| *Cuando haya transcurrido el tiempo programado para la tarea, el profesor se asegura que la mayoría haya terminado. En caso contrario, concede algunos minutos más para dar oportunidad a que terminen la mayoría de equipos.* | Cuando un equipo haya terminado la tarea antes que otros, es importante que guarden silencio. |

*Tarea de discusión grupal.* Por lo general, en discusión grupal se analizan los resultados de la tarea que realizaron los estudiantes inmediatamente antes de ésta discusión grupal, la cual, pudo haber sido individual o en equipo.

En esta actividad, el profesor dirige la discusión, la comparación de procedimientos y resultados, para fomentar el análisis y reflexión (perspectiva de comunidad). En un momento determinado puede suceder que algunas ideas, expresadas por distintos alumnos, entren en conflicto. En tal caso, el profesor promoverá la discusión, haciendo participar a los alumnos a favor o en contra de dichas ideas hasta llegar a un consenso.

Se pretende que todos los alumnos participen, sin embargo, cuando la discusión grupal es para analizar el trabajo en equipo, en un primer momento sólo participan los representantes de equipo y en un segundo momento la participación es abierta.

El inicio de la discusión grupal es con una pregunta dirigida al grupo. Si la tarea anterior fue en equipo, el profesor elige a un representante para contestar. Si la tarea anterior se llevó a acabo de manera individual, el profesor elige a un estudiante para que responda. Dicha pregunta puede ser contestada de dos formas: verbal o escrita en el pizarrón.

Cuando el profesor hace la primera pregunta, los alumnos no piden la palabra, el profesor le indica a uno, dos y/o tres alumnos que respondan. Para esta elección, el profesor toma en cuenta las características de la discusión que requiera llevar a cabo, de tal manera que se tienen tres formas de elección, las cuales se mencionan a continuación.

- Forma 1. Elige a un estudiante al azar.
- Forma 2. Elige a un estudiante que probablemente responda incorrectamente. Con lo cual, se puede hacer la discusión más rica. Esto puede realizarse cuando algunos estudiantes hayan cometido errores.

- Forma 3. Elige a un estudiante que probablemente responda correctamente. Con lo cual, se puede hacer la discusión más ágil. Esto puede realizarse cuando la mayoría de los estudiantes hayan hecho su tarea individual correctamente.

Posteriormente la participación es abierta.

Las actividades que se realizan se muestran en el siguiente cuadro:

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *Hace la primera pregunta. La puede dictar o, sólo la puede verbalizar; en cualquiera de los dos casos debe dar unos momentos de reflexión.* | Escuchan y/o escriben la pregunta.<br>Reflexionan antes de contestar. |
| *Elige a uno, dos y/ o tres alumnos para que contesten, uno por uno.* | Responden con argumentos. |
| *Si las respuestas (todas) son las esperadas, y el grupo está de acuerdo, se continúa con la siguiente pregunta o actividad.*<br>*Si las respuestas no son las esperadas, se continúa con la discusión hasta llegar a consensos que sean satisfactorios. El profesor participa con sub-preguntas o contra-ejemplos para dirigir la discusión y el grupo pueda "construir" la respuesta esperada.* | Procuran llegar a consensos. |

*Asignación de tarea extra-clase*. Las tareas extraclase se reparten en formatos, donde se indica las consignas que deben seguir los alumnos. Estas tareas son para trabajo de forma individual. Para las tareas de este estudio, se recomienda que el alumno no sea auxiliado por compañeros o por maestros, ni que realice consultas en libros o por internet.

Para asignar las tareas extra clase, las actividades que realizan el profesor y los alumnos son las mismas que en la asignación de cualquier otra tarea por escrito, con especial interés que los estudiantes comprendan las consignas.

*Normas de la comunidad*

Según Bransford, Brown y Cocking (1999) las normas para el trabajo individual, en equipo y grupal son importantes para una mejora continua. En consecuencia se trabaja, fundamentalmente con las normas que a continuación se describen.

*Normas para los alumnos.* El comportamiento de los estudiantes debe ajustarse a las siguientes normas.

- Realizar las tareas que les sean encomendadas.
- Asistir al menos el 80% de las sesiones, para tener derecho a presentar la prueba sumativa.
- Presentarse puntualmente al salón de clase. Se tiene una tolerancia de diez minutos.
- No se permite la violencia física ni verbal.
- No interrumpir, el alumno debe solicitar la palabra cuando quiera participar.
- Expresarse oralmente y por escrito correctamente, desde el punto de vista matemático.

*Normas para el profesor*. El comportamiento del profesor debe ajustarse a las siguientes normas.

- Diseñar, implementar y dirigir las tareas para promover en sus alumnos el aprendizaje con comprensión.
- Asistir al 100% de las sesiones.
- Presentarse puntualmente al salón de clase.
- No incurrir en violencia física o verbal.
- Expresarse correctamente, oralmente y por escrito, desde el punto de vista matemático.

## Validez del estudio

En virtud de que el presente estudio es de utilidad práctica, nos servimos del concepto de validez propuesto por Scott (1988) de acuerdo a quien, un estudio con aplicación práctica es válido internamente si los resultados obtenidos se deben únicamente a la variable independiente (ambiente de aprendizaje). Es decir, para este estudio, en la medida en que los estudiantes aprendan con comprensión el objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales, y este hecho se deba sólo al ambiente de aprendizaje diseñado, es su grado de validez.

Debido a que el diseño del ambiente de aprendizaje, las tareas, el Instrumento de evaluación, y las formas de trabajo, son para promover el aprendizaje con comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales, y con los resultados expuestos en el Capítulo 5, se puede señalar que el presente trabajo tiene validez interna.

En la medida de lo posible se ha procurado evitar efectos de sesgos como son: el Hawthorne y el Pigmaleón (Scott, 1988).

Scott (1988) señala que si los resultados de una aplicación práctica se pueden generalizar entonces se dice que tiene validez “externa”.

Como se expone renglones atrás, la puesta en práctica se realiza con un grupo de primer semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM. Es un grupo disponible para el estudio. Debido a las características de asignación del grupo, se puede considerar que se “elije al azar”. El estudio se realiza con las mismas condiciones de cualquier otro grupo de dicho Colegio. Es decir, el ambiente de aprendizaje que en este estudio se promueve se puede reproducir en cualquier otro grupo. Por tal motivo es factible de afirmar que este estudio tiene validez “externa”.

# Capítulo 4. Implementación del ambiente de aprendizaje con comprensión

Nuevamente es oportuno señalar que el enfoque que se pretende dar al presente trabajo es de una escuela de matemáticas con grandes expectativas, como lo señala el NCTM (2000), donde los alumnos deben: abordar un mismo problema desde distintos puntos de vista o representar las matemáticas de diferentes formas; solos o en grupos deben trabajar productiva y reflexivamente; oralmente y por escrito, deben comunicar sus ideas y resultados con eficacia. Por su parte el profesor procura: crear un ambiente de confianza para el trabajo del grupo; tener expectativas ambiciosas para todos; ayudar a sus alumnos a formular, perfeccionar y confirmar o refutar conjeturas partiendo de evidencias; elegir cuidadosamente las tareas con las cuales trabajen sus alumnos, entre otras características.

La puesta en práctica de este estudio se lleva a cabo en nueve sesiones, una para la prueba diagnóstica, siete corresponden a las tareas para el aprendizaje con comprensión y automatización de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y, una sesión más para la prueba sumativa.

Cabe recordar, como se señaló en el capítulo anterior, que la estructura de las sesiones contempla las siguientes actividades: a) entrada y saludo, b) introducción al tema del día, c) asignación de tarea individual o en equipo en clase, d) tarea de discusión grupal, e) asignación de tarea extraclase.

Las sesiones comienzan con “entrada y saludo” e “introducción al tema del día”. En algunas sesiones la primera tarea es grupal, para otras es en equipo. En la descripción de cada una de las sesiones se muestra una tabla con las tareas que se efectúan en cada una de estas.

En la descripción de las sesiones, también se hacen los siguientes señalamientos: (i) observaciones del profesor que son interés para el estudio, (ii) comentarios acerca de la metodología, (iii) respuestas esperadas y el desempeño de los estudiantes, (iv) formas de trabajo y, (v) algunas discusiones que se llevaron a cabo.

## Sesión 1

En esta sesión se realiza la Tarea 1 que consiste en la prueba diagnóstica (ver Anexo 2). El profesor reparte el instrumento de evaluación, le indica a los alumnos que deben contestar en forma individual y que tienen toda la sesión para resolverlo (una hora cuarenta y cinco minutos). Como se señala en el análisis de resultados (Capítulo 5), en esta ocasión, los alumnos tienen una gran cantidad de dificultades para contestarlo.

## Sesión 2

En la siguiente tabla se muestran las tareas que se trabajan en esta ocasión. Al mismo tiempo se especifican: la forma de trabajo, el título y el propósito de las mismas, es decir, lo que se espera que el estudiante logre en las tareas.

Tabla 4.1. Tareas para la sesión 2.

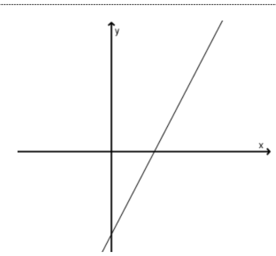
<table>
<tr><th>Núm. Tarea</th><th>Forma de trabajo</th><th>Título</th><th>Propósito</th></tr>
<tr><td>2</td><td>I-G</td><td>Características de un bosquejo de representación gráfica.</td><td rowspan="2">Retomar las características del bosquejo de la ecuación lineal, aprendidas anteriormente, y consensar sus características.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>I-G</td><td>Conversión de la representación algebraica al bosquejo de la representación geométrica.</td></tr>
</table>

Tabla 4.1. Tareas para la sesión 2. (continuación).

| Núm. Tarea | Forma de trabajo | Título | Propósito |
|---|---|---|---|
| 4 | I-G | Sistemas de ecuaciones lineales. Presentación. | Identificar a un sistema de ecuaciones lineales como un conjunto de dos o más ecuaciones lineales. |
| 5 | I | Identificación del número de ecuaciones y de incógnitas en las representaciones algebraica y geométrica. | Identificar el número de ecuaciones y de incógnitas que contienen algunos sistemas, en las representaciones algebraica y geométrica. |
| 6 | G | | |
| 7 | I | Casos concretos de sistemas de ecuaciones lineales. | Proponer ejemplos de sistemas de ecuaciones con distinto número de ecuaciones y de incógnitas. |
| 8 | G | | |
| 9 | I<br>Extraclase | Sistemas de ecuaciones lineales, situación de paralelismo. | Convertir del registro algebraico al gráfico y viceversa. Identificar las condiciones de paralelismo. |

*Inicio de la Sesión.* Entrada y saludo. El profesor y los alumnos llegan al salón de clase, se saludan sólo verbalmente y preparan sus útiles para empezar a trabajar.

*Introducción al tema del día*. El profesor indica que en este tema se retomarán conceptos que se han aprendido en unidades anteriores como son: resolución de ecuación lineal con una incógnita; ecuación lineal con dos incógnitas en sus representaciones algebraica y gráfica. El profesor señala algunos ejemplos de dichos conceptos en el pizarrón, los cuales se muestran a continuación.

| Ecuación lineal con una incógnita | Ecuación lineal con dos incógnitas | Representación gráfica de la ecuación lineal con dos incógnitas |
|---|---|---|
| $3x + 4 = 2x + 2$ | $y = 3x - 4$ |  |

El profesor indica que en este tema, se trabajaran dos o más ecuaciones con dos incógnitas simultáneamente.

*Asignación de la tarea en clase*. El profesor indica que se empieza a trabajar con la "Tarea 2. Características de un bosquejo de representación gráfica", cuya temática se trabaja de forma individual y grupal simultáneamente.

*Descripción de la Tarea 2.* A continuación se presentan las actividades del profesor y de los alumnos, de acuerdo a la forma expuesta en el Capítulo 3 de este trabajo.

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *El profesor dicta la siguiente pregunta y les indica a los alumnos que la contesten en forma individual en su cuaderno.*<br>*1. ¿Es lo mismo la gráfica de una ecuación lineal, que su bosquejo? Argumenta tu respuesta.* | Escriben la pregunta.<br>Empiezan a trabajar de forma individual. |
| *Observa y asiste a los alumnos.* | Tienen un momento de reflexión y análisis.<br>Escriben sus respuestas.<br>Si es necesario, preguntan al profesor. |
| *Asiste a los alumnos haciéndoles sub-preguntas. El profesor no da la respuesta, sino genera la discusión para que los alumnos la "descubran".* | Responden a las sub-preguntas e intentan responder la pregunta original. |

Algunas sub-preguntas son: ¿Cómo haces una gráfica?, ¿cómo haces un bosquejo?, ¿qué representan cada una?, ¿cuáles son las diferencias?

Considerando los señalamientos de Duval (1992) en el sentido de que las unidades significativas de la expresión algebraica de la forma $y = mx + b$ tienen correspondencia directa con las características globales de la representación geométrica, en este estudio se trabaja generalmente con dicha correspondencia, entre representaciones algebraicas y bosquejos de representación geométrica.

Cuando los alumnos terminan de contestar en forma individual, se continúa con lo siguiente:

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *Indica que, a continuación se trabajará en discusión grupal.*<br>*Elige a un alumno (forma 1, azar) para que responda la pregunta.* | El alumno seleccionado, contesta de forma verbal. |
| *El profesor, pregunta a dos alumnos más (forma 1), y promueve los comentarios de los demás miembros del grupo.* | Los alumnos van contestando hasta que entre todos van formando la respuesta esperada y se llegue a una conclusión. |

*Algunos resultados y observaciones.* A continuación se muestran las respuestas esperadas y el desempeño del grupo en la puesta en práctica.

> *Comentario. Los porcentajes mostrados en este capítulo son aproximados. En discusión grupal el profesor indica que levanten la mano los que están de acuerdo o los que contestaron correctamente; el profesor, cuenta y calcula el porcentaje aproximado.*

| *Respuestas esperadas* | Desempeño del grupo |
|---|---|
| *No es lo mismo una gráfica que un bosquejo.* | • Algunos alumnos dicen que no (50% ), porque un bosquejo es cualitativo y la gráfica es cuantitativa;<br>• otros alumnos dicen que sí (50%), debido a que tienen las mismas características y ambas son líneas rectas. |
| *Argumentos:*<br>*a) Para hacer la gráfica se requieren una serie de pasos: sustitución, tabulación, localización de puntos y trazo.* | Un alumno menciona que para hacer una gráfica se requiera hacer una tabla de datos y, posteriormente graficar punto por punto. La mayoría del grupo estuvo de acuerdo con él. |
| *b) Para hacer el bosquejo de una ecuación lineal, se identifica la ordenada, la pendiente y se convierten a su forma geométrica.* | Un alumno menciona que para hacer un bosquejo se localiza la ordenada al origen y considerando la pendiente se traza la recta. La mayoría del grupo estuvo de acuerdo con él. |
| *c) El bosquejo tiene la ventaja de que brinda una visión "rápida" del comportamiento de la ecuación.* | Un alumno menciona que un bosquejo se hace rápidamente y tiene las mismas características que la gráfica. La mayoría estuvo de acuerdo con él. |

Las respuestas que expresan los alumnos son complementarias, es decir, sin que alguien haya expresado la respuesta esperada completamente, entre toda la comunidad si logran acercarse a dichas respuestas, finalmente se consensan las características mencionadas anteriormente. La discusión grupal termina cuando la mayoría del grupo está de acuerdo con la respuesta esperada.

De la misma forma en que se ha trabajado la pregunta anterior, de forma individual y grupal, se trabaja la siguiente pregunta.

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *El profesor dicta la siguiente pregunta y les indica a los alumnos que la contesten en forma individual en su cuaderno.*<br>*2. ¿Cuáles son las características mínimas que debe tener el bosquejo de una ecuación lineal?* | Escriben la pregunta.<br>Empiezan a trabajar de forma individual. |
| *Observa y asiste a los alumnos.* | Tienen un momento de reflexión y análisis.<br>Escriben sus respuestas.<br>Preguntan al profesor. |
| *Asiste a los alumnos haciéndoles sub-preguntas. El profesor no da la respuesta, sino genera la discusión para que los alumnos la "descubran".* | Responden a las sub-preguntas e intentan responder la pregunta original. |

Las respuestas esperadas y el desempeño del grupo en la puesta en práctica se muestran a continuación

.

| *Respuestas esperadas* | Desempeño del grupo |
|---|---|
| *a) Que es una recta.* | Un alumno menciona que es una recta. La mayoría está de acuerdo con él. |
| *b) La inclinación con respecto a la parte positiva con el eje "x".* | Un alumno menciona la inclinación. La mayoría está de acuerdo con él. |
| ***c)** La intersección con el eje "y".* | Un alumno menciona la intersección con el eje de las ordenadas. La mayoría estuvo de acuerdo con él. |

Como se puede observar, las tres respuestas esperadas son mencionadas por algún estudiante y respaldadas por la mayoría del grupo.

Para analizar la pendiente de la recta se lleva a cabo la siguiente discusión.

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *"En el bosquejo, ¿qué es la pendiente?"* | Alumno A. "Lo que sube entre lo que avanza" |
| *"Con una palabra, ¿qué significa pendiente?"* | Alumno B. "sub-ordenada"<br>Alumno C. "sube-avanza"<br>Alumno D. "elevada"<br>… |
| *"Si pensamos en una escalera…"* | Alumno D. "Inclinación". El resto del grupo está de acuerdo con esta palabra. |

Según el modelo de Hiebert y Carpenter (1992), cuando las representaciones internas de las ideas matemáticas y sus relaciones están en vías de construcción, se puede presentar un periodo de confusión. Esto puede explicar por qué algunas respuestas están evidentemente "fuera de lugar". Sin embargo, se debe ayudar al estudiante a producir relaciones correctas.

La anterior discusión es un ejemplo de cómo se puede trabajar con la asistencia del profesor, a través de sub-preguntas y de cómo se trabaja en comunidad para el aprendizaje con comprensión.

La discusión grupal termina cuando la mayoría del grupo está de acuerdo con las respuestas esperadas.

Cuando se ha terminado la tarea anterior, el profesor indica que se continúe trabajando con la siguiente: "Tarea 3. Conversión de la representación algebraica al bosquejo de la representación geométrica". Ésta se trabaja en forma individual y grupal.

*Descripción de la Tarea 3.* El profesor escribe en el pizarrón, las diez ecuaciones que se muestran a continuación en su representación algebraica.

1. $y = x + 3$
2. $y = -x + 5$
3. $y = 3x$
4. $y = \frac{1}{2}x - 2$
5. $y = -\frac{1}{4}x + 2$
6. $y = \frac{1}{5}x$
7. $y = 2x - 5$
8. $y = -4x - 7$
9. $y = -6x$
10. $y = -\frac{2}{5}x$

El profesor les indica a los alumnos que hagan el bosquejo de la representación geométrica en su cuaderno de forma individual, lo más rápido posible.

En general se espera que los alumnos sepan reconocer la inclinación, y el cruce con el eje "$y$", ya que es un tema que se ha retomado (Variación directamente proporcional y funciones lineales).

*Relaciones para "construir".* A continuación se presentan las relaciones, que el alumno debe realizar para hacer los bosquejos, tomando como referencia lo señalado por Duval (1992), dichas relaciones son entre las unidades significativas algebraicas de la ecuación $y = mx + b$ y sus correspondientes características geométricas. También corresponden a lo señalado en las tablas 2.1 y 2.2, de este trabajo (ver capítulo 2). En la siguiente tabla el símbolo → significa "se relaciona con".

Tabla 4.2. Conexiones de la tarea 3.

| Ecuación | Características algebraicas<br>Visualizar unidades significativas | → | Características geométricas<br>Inferir características globales |
|---|---|---|---|
| En todas | Son ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por "$x$" e "$y$". | → | Son gráficas representadas en el plano cartesiano. |
| En todas | En las ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno cuando la "$y$" esta despejada. | → | Son líneas rectas. |
| 1 | $m = 1$<br>$b > 0$ | →<br>→ | $\alpha = 45^0$<br>La recta se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. |
| 2 | $m = -1$<br>$b > 0$ | →<br>→ | $\alpha = 135^0$<br>La recta se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. |

Tabla 4.2. Conexiones de la tarea 3. (continuación).

| Ecuación | Características algebraicas<br>Visualizar unidades significativas | → | Características geométricas<br>Inferir características globales |
|---|---|---|---|
| 3 | $m > 1$<br>$b = 0$ | →<br>→ | $45^0 < \alpha < 90^0$<br>La recta se intersecta con los ejes en el origen. |
| 4 | $0 < m < 1$<br>$b < 0$ | →<br>→ | $0^0 < \alpha < 45^0$<br>La recta se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. |
| 5 | $-1 < m < 0$<br>$b > 0$ | →<br>→ | $135^0 < \alpha < 180^0$<br>La recta se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. |
| 6 | $0 < m < 1$<br>$b = 0$ | →<br>→ | $0^0 < \alpha < 45^0$<br>La recta se intersecta con los ejes en el origen. |
| 7 | $m > 1$<br>$b < 0$ | →<br>→ | $45^0 < \alpha < 90^0$<br>La recta se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. |
| 8 | $m < -1$<br>$b < 0$ | →<br>→ | $90^0 < \alpha < 135^0$<br>La recta se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. |
| 9 | $m < -1$<br>$b = 0$ | →<br>→ | $90^0 < \alpha < 135^0$<br>La recta se intersecta con los ejes en el origen. |
| 10 | $-1 < m < 0$<br>$b = 0$ | →<br>→ | $135^0 < \alpha < 180^0$<br>La recta se intersecta con los ejes en el origen. |

*Discusión grupal*. El profesor elige (forma 1, al azar) a cinco alumnos para que cada uno, bosqueje una ecuación en el pizarrón. Posteriormente, otros cinco alumnos hacen lo mismo. El grupo analiza los bosquejos visualmente. El profesor elige (forma 3, probablemente responda correctamente) a un onceavo alumno para que evalúe los bosquejos que se encuentran en el pizarrón. Finalmente el grupo participa para llegar a un consenso.

*Algunos resultados y observaciones.* Aproximadamente 21 alumnos (81%) hacen los bosquejos en forma correcta en su trabajo individual, el resto de los estudiantes hace anotaciones para que posteriormente, como tarea extraclase, realice los bosquejos en forma correcta.

> *Observaciones. De los bosquejos hechos en el pizarrón, se corrigen dos:*
>
> > *Primero, el bosquejo de la ecuación algebraica 3, no pasa por el origen, en seguida, pasa un alumno a corregirlo.*
> >
> > *Segundo, en el bosquejo de la ecuación algebraica 8, el ángulo es trazado a:* $\alpha = 135^0$*. Un alumno, pasa a "corregirlo", pero, se equivoca nuevamente, ya que traza una recta con un ángulo* $45^0 < \alpha < 90^0$*. Posteriormente pasa otro alumno y lo bosqueja correctamente, es decir traza una recta con una inclinación*
> >
> > $90^0 < \alpha < 135^0$*. En cada uno de estos cambios los estudiantes estuvieron atentos para participar en la discusión.*
>
> *En discusión grupal se enfatiza la conversión, con ejemplos de ecuaciones cuyas pendientes tienen valores de 1 y -1, así mismo se hacen ejemplos con pendientes mayores y menores a estos números.*
>
> *Se puede observar que los alumnos en su mayoría bosquejan de forma aceptable una sola ecuación, sin embargo, de acuerdo a los resultados de las tareas que se indican más adelante, muestran dificultades al momento de bosquejar dos o más ecuaciones en un mismo plano.*

La sesión prosigue con la "Tarea 4. Sistemas de ecuaciones lineales. Presentación". Cuya temática se trabaja de forma individual y grupal.

*Descripción de la tarea 4.* El profesor dicta la siguiente pregunta. Los alumnos, en trabajo individual, la contestan en su cuaderno.

1. ¿Qué es un sistema de ecuaciones?

*Discusión grupal*. Cuando los alumnos terminan de contestar individualmente la pregunta anterior, el profesor, indica que a continuación se discutirá grupalmente. Elige (forma 1, al azar) a un alumno para que responda en voz alta. Los demás miembros del grupo participan hasta llegar a una conclusión. Se produce la siguiente discusión.

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *"¿Qué es un sistema de ecuaciones?"* | Un alumno. "La representación algebraica de una gráfica" (lo cual es incorrecto).<br>Algunos alumnos levantan la mano para participar. |
| *Le indica a otro alumno para que conteste.* | Otro alumno. "Dos o más pendientes en un mismo plano" (lo cual es incorrecto). |
| *Le indica a otros alumnos que participen.* | Un tercer alumno. "Un conjunto de ecuaciones equivalentes que forman un bosquejo" (lo cual es incorrecto).<br>Un cuarto alumno. "Gráficas y Bosquejos" (lo cual es incorrecto). |
| *Nuevamente hace la pregunta, "¿qué es un sistema de ecuaciones?"* | Un quinto alumno. Contesta que un sistema de ecuaciones, es un conjunto de dos o más ecuaciones. La mayoría del grupo estuvo de acuerdo. |
| *"Alcen la mano quienes estén de acuerdo con la respuesta de su compañero"* | El grupo responde, en consenso, que está de acuerdo. |

*Observación. Algunos alumnos tienen problemas con las ideas y el vocabulario, es probable que estemos trabajando muchos términos "nuevos" al mismo tiempo (representaciones algebraica y geométrica, pendiente, ecuaciones equivalentes, bosquejos, etc.).*

*Según el modelo de Hiebert y Carpenter (1992), las representaciones internas de las ideas matemáticas y sus relaciones están en vías de construcción, lo cual se puede presentar con un periodo de confusión. Esto puede explicar, por qué algunas respuestas están "evidentemente fuera de lugar". Sin embargo, se debe ayudar al estudiante a producir relaciones correctas.*

*La anterior discusión es un ejemplo de cómo se puede trabajar con la asistencia del profesor, a través de subpreguntas y, de cómo se trabaja en comunidad para el aprendizaje con comprensión.*

El profesor pregunta a los alumnos ejemplos de sistema de ecuaciones; les solicita que dichos ejemplos sean variados (sistemas con distinto número de ecuaciones, incógnitas y grado). Los alumnos responden. El profesor, escribe algunos ejemplos en el pizarrón, clasificándolos por el grado de las ecuaciones.

*Observaciones. Un alumno pregunta "¿de dónde saco los ejemplos?" el profesor responde "invéntalos".*

*Para motivar que los alumnos propongan un ejemplo de sistema de ecuaciones no lineal, el profesor menciona lo siguiente, "ya hemos visto otro tipo de ecuaciones", e inmediatamente un alumno propuso un sistema no lineal.*

*Los alumnos propusieron tres sistemas. Dos sistemas lineales con dos incógnitas y un sistema de tres ecuaciones, una cúbica, una cuadrática y una lineal con dos incógnitas, los cuales se reproducen a continuación.*

| *Sistema 1* | *Sistema 2* | *Sistema 3* |
|---|---|---|
| $y = 5x + 3$ | $y = 11x + 29$ | $y = 5x^3 + 3$ |
| $y = -4x + 2$ | $y = 10x + 77$ | $y = 3x^2 + 1$ |
| | | $y = 8x + 9$ |

*Comentario. Estos ejemplos sientan las bases para la siguiente pregunta y para otras tareas, donde el alumno tiene que proponer sistemas de ecuaciones con distintas características.*

El profesor dicta la siguiente pregunta. Los alumnos, en trabajo individual, la contestan en su cuaderno.

2. ¿Qué condiciones debe tener un conjunto de ecuaciones para que se denomine "sistema de ecuaciones lineales"?

*Discusión grupal*. Cuando los alumnos terminan de contestar en forma individual, la pregunta anterior, el profesor indica que, a continuación se discutirá. Elige a un alumno (forma 1, al azar) para que responda en voz alta, posteriormente se discute grupalmente.

*Observaciones. Parece ser, que debido a los ejemplos de la pregunta anterior, esta pregunta se responde rápidamente.*

*Comentarios. En trabajo individual y grupal, la "asistencia" del profesor es sin decir la respuesta esperada. El profesor dirige al estudiante con otras preguntas, para provocar que el alumno "descubra" la respuesta esperada. Algunas subpreguntas son: ¿qué correspondencia hay entre el grado de una ecuación y el exponente de la incógnita? ¿Cuál es la característica principal para que se tenga un sistema de ecuaciones?*

*Algunos resultados.* A continuación se presentan las respuestas esperadas y el desempeño del grupo en la puesta en práctica.

| *Preguntas y respuestas esperadas* | Desempeño del grupo |
|---|---|
| *Pregunta 1. ¿Qué es un sistema de ecuaciones?* *Respuesta. Un conjunto de dos o más ecuaciones.* | Un alumno menciona que es un conjunto de ecuaciones y el resto del grupo está de acuerdo. |
| *Pregunta 2. ¿Qué condiciones debe tener un conjunto de ecuaciones para que se denomine "sistema de ecuaciones lineales"?* *Respuesta. Que sea un conjunto de ecuaciones donde todas las incógnitas estén a la primera potencia.* | Un alumno menciona que es un conjunto de ecuaciones donde las incógnitas tienen exponente uno y el resto del grupo está de acuerdo. |

No en todos los casos, cuando el exponente de las incógnitas es uno, la ecuación es lineal, por ejemplo, cuando dos incógnitas se multipliquen entre sí. Como se puede observar en la discusión que se muestra renglones adelante.

Así también, una ecuación lineal se puede representar de muchas maneras o, formas equivalentes: de forma general, con una incógnita despejada, con sus dos miembros elevados a la misma potencia, entre muchas otras.

Por lo anterior, es necesario referirse a una forma de uso frecuente ($y = mx + b$). Así, para que sea ecuación lineal, la "$x$" debe estar a la primera potencia, cuando la "$y$" está despejada.

A continuación se lleva a cabo la siguiente discusión grupal. En dicha discusión el profesor elije a los alumnos al azar, para que estos respondan.

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *Escribe la ecuación $xy = 20$ en el pizarrón y pregunta a los alumnos "¿es una ecuación lineal?". Elige a un alumno que para responda.* | El alumno contesta que sí. El resto del grupo está de acuerdo. |
| *Con la participación de los alumnos el profesor despeja "$y$".* $y = \frac{20}{x}$ *Y pregunta: "¿es una ecuación lineal?". Elige a un alumno para que responda.* | El alumno contesta que sí. El resto del grupo está de acuerdo. |

| | |
|---|---|
| *Con la participación de los alumnos, el profesor reescribe la ecuación:* $y = 20x^{-1}$ *Y pregunta: "¿es una ecuación lineal?". Elige a un alumno para que responda.* | El alumno contesta que no. El resto del grupo está de acuerdo. |
| *"¿En qué casos, aunque el exponente de la incógnita, sea uno, la ecuación no es lineal?" Elige a un alumno para que responda.* | El alumno responde que es cuando se multiplican entre sí dos incógnitas. El resto del grupo está de acuerdo. |

La sesión prosigue con la "Tarea 5. Identificación de número de ecuaciones y de incógnitas". La temática de esta tarea se trabaja en forma individual y grupal (Tarea 6). El profesor reparte los formatos de la Tarea 5 y se asegura que hayan sido comprendidas las consignas.

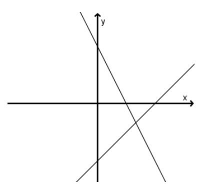
*Descripción de la Tarea 5.* En esta tarea, se muestran nueve sistemas de ecuaciones, unas en representación algebraica y otras en bosquejo de representación geométrica (ver Anexo 1 Tarea 5).

A continuación se reproducen los nueve sistemas de ecuaciones de la Tarea 5.

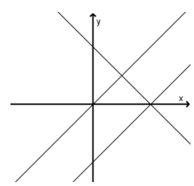
Representación 1

$$5x - 9y + 14 = 0$$
$$3x + 2y - 1 = 0$$

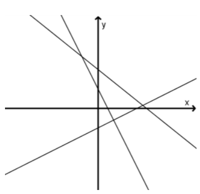
Representación 2



Representación 3



Representación 4



Representación 5

$$y = -\frac{5}{8}x + 4$$
$$x = \frac{-2y + 3}{5}$$

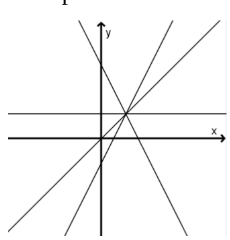
Representación 6

$$2x + 3y - 5 = 0$$
$$-2x - 5y = -8$$
$$y = \frac{-5x + 1}{7}$$

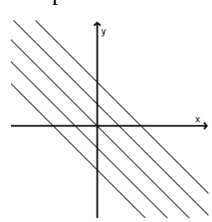
Representación 7

$$y = -x - z + 5$$
$$y = -2x + 3z - 8$$
$$y = 3x - 12$$
$$y = \frac{2}{3}x + 8$$

Representación 8



Representación 9



El alumno tiene que identificar el número de ecuaciones y de incógnitas para cada representación. En la representación algebraica debe contar el número de ecuaciones y de incógnitas. En la representación geométrica deberá contar el número de rectas representadas, y reconocer, que en el plano cartesiano, sólo se pueden representar dos incógnitas.

*Algunos resultados y observaciones.* Cuando los alumnos terminan la tarea individual, el profesor indica que se procede a la discusión grupal (Tarea 6).

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *Elige a un alumno (forma 1, al azar) para responder.*<br>*"Menciona los números de ecuaciones y de incógnitas para cada una de las representaciones".* | El alumno responde correctamente. El resto del grupo está de acuerdo. |

No fue necesaria mayor discusión, ya que se llegó a consenso. A continuación se muestra las respuestas esperadas y el desempeño del grupo en la puesta en práctica.

| *Respuestas esperadas.* | Desempeño del grupo |
|---|---|
| *La primera columna corresponde al número de representación, la segunda al número de ecuaciones y, la tercera al de incógnitas.* | La totalidad del grupo responde correctamente. |
| *1. 2, 2.* | |
| *2. 2, 2.* | |
| *3. 3, 2.* | |
| *4. 3, 2.* | |
| *5. 2, 2.* | |
| *6. 3, 2.* | |
| *7. 4, 3.* | |
| *8. 4, 2.* | |
| *9. 5, 2.* | |

Al final de la tarea, el profesor menciona que en este curso se trabajan sistemas de dos a cuatro ecuaciones lineales con dos incógnitas.

El profesor, hace énfasis de que en el plano cartesiano, sólo se tienen representaciones geométricas asociadas a ecuaciones algebraicas con dos incógnitas. Sin embargo, las representaciones algebraicas pueden contener una, dos, tres o más incógnitas.

A continuación se muestra lo acontecido en discusión grupal.

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *Atiende la pregunta del alumno.* | Un alumno hace la siguiente pregunta: "¿solamente se pueden representar dos incógnitas en el plano cartesiano?" |
| *"En el plano cartesiano, solamente se tienen los ejes para 'x' e 'y'". En este momento traza un plano cartesiano en el pizarrón.* | Atienden. |
| *"Existen gráficas de tres dimensiones, donde se pueden representar tres incógnitas". Al mismo tiempo traza, sobre el plano anterior, un tercer eje y menciona: "para ello se traza un tercer eje que se le puede denominar el 'eje z'".* | Otro alumno menciona: "ese tipo de gráficas, ¿las vamos a trabajar?" |
| *Responde: "No, en este curso solamente se trabaja en el plano cartesiano".* | Atienden. |

La sesión prosigue con la "Tarea 7. Casos concretos de sistemas de ecuaciones lineales" (ver Anexo 1 Tarea 7). Cuya temática se trabaja en forma individual y grupal (Tarea 8).

*Descripción de la tarea 7.* Se pretende que el alumno, proponga sistemas de ecuaciones en su representación algebraica, de dos y tres ecuaciones con dos y tres incógnitas. A continuación se reproduce esta tarea.

I. En matemáticas puede ocurrir que se trabaje con una ecuación con una incógnita, una ecuación con dos incógnitas, dos ecuaciones con dos incógnitas,.., hasta $m$ ecuaciones con $n$ incógnitas. En la tabla siguiente escribe en los espacios correspondientes (etiquetados con números 1, 2, 3…), una ecuación o un sistema de ecuaciones en su representación algebraica, que cumpla con las condiciones que se establecen en su respectiva columna y renglón.

| Número de Ecuaciones / Número de Incógnitas | Dos incógnitas | Tres incógnitas |
|---|---|---|
| Una ecuación lineal | 1 | 2 |
| Sistema de dos ecuaciones lineales | 3 | 4 |
| Sistema de tres ecuaciones lineales | 5 | 6 |
| Sistema de una ecuación cuadrática y una lineal | 7 | |

Para esta tarea, fue muy importante el trabajo realizado en la tarea tres, ya que se solicitaron ejemplos de sistemas de ecuaciones.

*Algunos resultados y observaciones.* Al término de la tarea individual se prosigue con la discusión grupal de la misma temática (Tarea 8). El profesor elige (forma 1, al azar) a siete alumnos para que pasen al pizarrón a escribir cada uno de los sistemas solicitados, un sistema por alumno. Posteriormente elije a un octavo alumno (forma 3, probablemente responda correctamente) para que evalúe cada uno de los sistemas. Mientras tanto, el grupo enfoca su atención en las respuestas escritas en el pizarrón y la evaluación que hace su compañero. Veintidós alumnos (85%) responden correctamente, el resto del grupo hace anotaciones para que corrija como tarea extraclase.

La sesión finaliza con la asignación de la “Tarea 9. Sistemas de ecuaciones lineales, situación de paralelismo” (ver Anexo1 Tarea 9). La temática de esta tarea se trabaja de forma individual extraclase y grupalmente (Tarea 10). El profesor se asegura que se hayan comprendido las consignas.

## Sesión 3

En la siguiente tabla se muestran las tareas que se trabajan en esta ocasión. Al mismo tiempo se especifican: la forma de trabajo, el título y el propósito de las mismas, es decir, lo que se espera que el estudiante logre en las tareas.

Tabla 4.3. Tareas que se trabajan en la sesión 3.

| Núm. Tarea | Forma de trabajo | Título | Propósito |
|---|---|---|---|
| 10 | G | Sistemas de ecuaciones lineales, situación de paralelismo. | Convertir del registro algebraico al gráfico y viceversa. Identificar las condiciones de paralelismo. |
| 11 | I | Sistemas de ecuaciones lineales, situación de intersección en el eje de las ordenadas. | Convertir del registro algebraico al gráfico y viceversa. Identificar las condiciones de la intersección en el eje de las ordenadas. |
| 12 | E | | |
| 13 | G | | |
| 14 | I | Sistemas de ecuaciones lineales, situación de intersección fuera del eje de las ordenadas. | Convertir del registro algebraico al gráfico y viceversa. Identificar de condiciones de intersección fuera del eje de las ordenadas. |
| 15 | E | | |
| 16 | G | | |
| 17 | I | Relación de representaciones. | Relacionar sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas entre sus representaciones algebraica y gráfica. |
| 18 | G | | |
| 19 | I<br>Extraclase | Resumen de situaciones de paralelismo e intersección. | Generalizar las condiciones que se presentan en la representación gráfica y algebraica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. |

*Inicio de la sesión.* Las sesiones empiezan con las actividades: entrada-saludo y con la introducción al tema del día. Estas dos actividades, aunque se realicen en la práctica, no se mencionarán en lo sucesivo de este escrito.

El profesor indica que los alumnos acomoden el mobiliario para que en su momento, se trabaje en equipo. En esta sesión los equipos se forman con los compañeros más cercanos (forma 1). Cabe recordar que cada una de las actividades sigue los lineamientos de las formas de trabajo señalados en el Capítulo 3 de este escrito.

Se empieza a trabajar con la Tarea 10 que es la discusión grupal de la tarea anterior: "Tarea 9. Sistema de ecuaciones lineales, situación de paralelismo"; la cual fue individual y extraclase.

Según Duval (1992) para que el alumno aprenda con comprensión un objeto matemático debe reconocerlo en al menos dos formas de representación y, debe ser capaz de realizar la conversión entre estas formas. El autor señala que se deben establecer las conexiones entre las unidades significativas de la expresión algebraica $y = mx + b$ y, las características globales correspondientes al registro geométrico.

Según Hiebert y Carpenter (1992) una idea matemática es comprendida cuando tiene numerosas y fuertes conexiones entre representaciones internas, dichas conexiones se hacen estableciendo similitudes y diferencias y, pueden construirse en la misma forma de representación o entre distintas formas de representación.

Los sistemas de ecuaciones trabajados en esta tarea son de rectas paralelas. Se pretende que en trabajo individual o grupal, el alumno encuentre similitudes y diferencias en las dos formas de representación:

- en la representación algebraica, coeficientes de la incógnita "$x$" iguales y, términos independientes diferentes;
- con su respectiva conversión en la representación geométrica, inclinaciones iguales, intersecciones con el eje "$y$" diferentes.

*Descripción de la Tarea 9.* En la primera parte, el alumno debe realizar las conversiones de la representación algebraica a la geométrica de los siguientes sistemas.

1.

$y_1 = x_1 + 2$…$L_1$

$y_2 = x_2 - 3$…$L_2$

2.

$y_1 = 4x_1 + 3$… $L_1$

$y_2 = 4x_2 + 2$… $L_2$

$y_3 = 4x_3 + 1$… $L_3$

3.

$y_1 = -\frac{1}{5}x_1 + 1$… $L_1$

$y_2 = -\frac{1}{5}x_2$… $L_2$

$y_3 = -\frac{1}{5}x_3 - 1$… $L_3$

*Comentario. A partir de este momento y hasta la Tarea 43 se usan los subíndices para las incógnitas en las ecuaciones. Esto es con el fin de* *enfatizar la pertenencia de dichas incógnitas a sus ecuaciones. El uso de subíndices es un conocimiento previo, el cual, el profesor se debe asegurar de que los alumnos lo tienen.*

*Relaciones para "construir".* En las tablas 2.1 y 2.2, del capítulo dos de este escrito, las cuales se reproducen a continuación, se muestra de forma general las conexiones entre las representaciones algebraica y geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Se debe considerar que dichas características son con base a la expresión $y = mx + b$.

Tabla 2.1. Valores de la pendiente "$m$" y el ángulo "$\alpha$" que se forma con el lado positivo del eje "$x$". El símbolo ↔ significa "se correlaciona con".

| Valor de la pendiente | ↔ | Ángulo formado |
|---|---|---|
| $m > 1$ | ↔ | $45^0 < \alpha < 90^0$ |
| $m = 1$ | ↔ | $\alpha = 45^0$ |
| $0 < m < 1$ | ↔ | $0^0 < \alpha < 45^0$ |
| $m = 0$ | ↔ | $\alpha = 0$ |
| $-1 < m < 0$ | ↔ | $135^0 < \alpha < 180^0$ |
| $m = -1$ | ↔ | $\alpha = 135^0$ |
| $m < -1$ | ↔ | $90^0 < \alpha < 135^0$ |

Tabla 2.2. Correspondencia de características.

| Representación algebraica | Representación geométrica | Correspondencia<br>El símbolo ↔ significa "se correlaciona con". |
|---|---|---|
| $y = m_1x + b_1$ …L1 | Ángulo $\alpha_1$. Ordenada al origen $b_1$. | $m_1 \leftrightarrow \alpha_1$<br>$b_1 \leftrightarrow$ *intersección con eje "y"* |
| $y = m_2x + b_2$ …L2 | Ángulo $\alpha_2$. Ordenada al origen $b_2$. | $m_2 \leftrightarrow \alpha_2$<br>$b_2 \leftrightarrow$ *intersección con eje "y"* |
| $y = m_3x + b_3$ …L3 | Ángulo $\alpha_3$. Ordenada al origen $b_3$. | $m_3 \leftrightarrow \alpha_3$<br>$b_3 \leftrightarrow$ *intersección con eje "y"* |
| … | … | … |
| $y = m_nx + b_n$ …Ln | Ángulo $\alpha_n$. Ordenada al origen $b_n$. | $m_n \leftrightarrow \alpha_n$<br>$b_n \leftrightarrow$ *intersección con eje "y"* |

A continuación se muestran las conexiones que deben de realizar los alumnos para relacionar las representaciones algebraica y geométrica de la primera parte de esta tarea. En la siguiente tabla el símbolo → significa "se relaciona con".

Tabla 4.4. Relaciones entre las representaciones algebraica y geométrica para la primera parte de la Tarea 9.

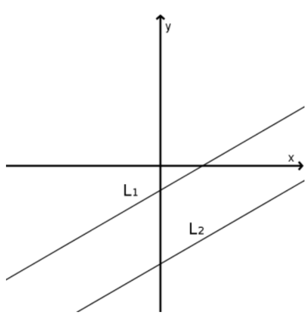
| Características algebraicas<br>Visualizar unidades significativas | | → | Características geométricas<br>Inferir características globales |
|---|---|---|---|
| Sistema 1. | | | |
| 1 | Son dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por “$x$” e “$y$”. | → | Dos gráficas representadas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las dos ecuaciones el exponente de “$x$” es uno cuando “$y$” esta despejada. | → | Son dos líneas rectas. |
| 3 | $m_1 > 0$ | → | $0^0 < \alpha_1 < 90^0$ |
| 4 | $m_2 > 0$ | → | $0^0 < \alpha_2 < 90^0$ |
| 5 | Los coeficientes de “$x$” son iguales. | → | Los ángulos son iguales. $\alpha_1 = \alpha_2$<br>Las rectas son paralelas. |
| 6 | $m_1 = 1$ | → | $\alpha_1 = 45^0$ |
| 7 | $m_2 = 1$ | → | $\alpha_2 = 45^0$ |
| 8 | $b_1 \neq b_2$ | → | La intersección de las rectas con el eje de las ordenadas es en distintos puntos |
| 9 | $b_1 > 0$ | → | $L_1$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. |
| 10 | $b_2 < 0$ | → | $L_2$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. |
| Sistema 2. | | | |
| 1 | Son tres ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por “$x$” e “$y$”. | → | Tres gráficas representadas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las tres ecuaciones el exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada. | → | Son tres líneas rectas. |
| 3 | $m_1 > 0$ | → | $0^0 < \alpha_1 < 90^0$ |
| 4 | $m_2 > 0$ | → | $0^0 < \alpha_2 < 90^0$ |
| 5 | $m_3 > 0$ | → | $0^0 < \alpha_3 < 90^0$ |
| 6 | Los coeficientes de la “$x$” son iguales. | → | Los ángulos son iguales $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.<br>Las rectas son paralelas. |
| 7 | $m_1 > 1$ | → | $45^0 < \alpha_1 < 90^0$ |
| 8 | $m_2 > 1$ | → | $45^0 < \alpha_1 < 90^0$ |
| 9 | $m_3 > 1$ | → | $45^0 < \alpha_1 < 90^0$ |
| 10 | Los términos independientes son diferentes.<br>$b_1 \neq b_2 \neq b_3$<br>$b_1 \neq b_3$ | → | Las rectas se intersectan en el eje de las ordenadas en puntos distintos. |
| 11 | $b_1 > 0$<br>$b_2 > 0$<br>$b_3 > 0$ | → | Las tres rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. |
| 12 | $b_1 > b_2 > b_3$ | → | La recta $L_1$ está arriba de $L_2$ y $L_3$.<br>La recta $L_2$ en medio de las otras dos.<br>La recta $L_3$ debajo de $L_1$ y $L_2$. |
| Sistema 3. | | | |
| 1 | Son tres ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por “$x$” e “$y$”. | → | Tres gráficas representadas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las tres ecuaciones el exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada. | → | Son tres líneas rectas. |
| 3 | $m_1 < 0$ | → | $90^0 < \alpha_1 < 180^0$ |

Tabla 4.4. Relaciones entre las representaciones algebraica y geométrica para la primera parte de la Tarea 9. (continuación).

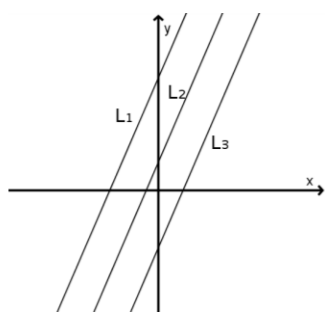
| Características algebraicas<br>Visualizar unidades significativas | | → | Características geométricas<br>Inferir características globales |
|---|---|---|---|
| 4 | $m_2 < 0$ | → | $90^0 < \alpha_2 < 180^0$ |
| 5 | $m_3 < 0$ | → | $90^0 < \alpha_3 < 180^0$ |
| 6 | Los coeficientes de la "$x$" son iguales.<br>$m_1 = m_2 = m_3$ | → | Los ángulos son iguales $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.<br>Las rectas son paralelas. |
| 7 | $-1 < m_1 < 0$ | → | $135^0 < \alpha_1 < 180^0$ |
| 8 | $-1 < m_2 < 0$ | → | $135^0 < \alpha_2 < 180^0$ |
| 9 | $-1 < m_3 < 0$ | → | $135^0 < \alpha_3 < 180^0$ |
| 10 | Los términos independientes son diferentes.<br>$b_1 \neq b_2 \neq b_3$<br>$b_1 \neq b_3$ | → | Las rectas se intersectan en el eje de las ordenadas en puntos distintos de este. |
| 11 | $b_1 > 0$ | → | La recta $L_1$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. |
| 12 | $b_2 = 0$ | → | La recta $L_2$ se intersecta con los ejes en el origen. |
| 13 | $b_3 < 0$ | → | La recta $L_3$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. |

En la segunda parte, se tiene que realizar la conversión de la representación geométrica a la algebraica de los siguientes sistemas.

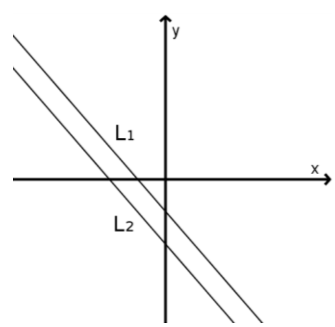
1.




2.




3.




A continuación se muestran las conexiones que debe realizar el estudiante para contestar la segunda parte de esta tarea.

Tabla 4.5. Relaciones entre representaciones para la segunda parte de la Tarea 9.

| | Características geométricas. Visualizar características globales | → | Expresión algebraica Inferir las unidades significativas |
|---|---|---|---|
| Sistema 1. | | | |
| 1 | Son dos gráficas que están representadas en el plano cartesiano. | → | Es factible escribir dos ecuaciones con dos incógnitas, que pueden estar representadas por "$x$" e "$y$". |
| 2 | Son dos rectas. | → | Es factible escribir dos ecuaciones donde exponente de "$x$" es uno, cuando "$y$" está despejada. |
| 3 | Las dos rectas tienen la misma inclinación, son paralelas. | → | Los coeficientes de "$x$" son iguales, $m_1 = m_2$ |
| 4 | $0^0 < \alpha_1 < 45^0$<br>$0^0 < \alpha_2 < 45^0$ | → | $0 < m_1 < 1$<br>$0 < m_2 < 1$ |
| 5 | Cada una de las rectas se intersecta con el eje de las ordenadas en su parte negativa. | → | Los términos independientes son negativos. $b_1 < 0$<br>$b_2 < 0$ |
| 6 | La intersección con el eje de las ordenadas de $L_1$ está arriba que la de $L_2$. | → | El término independiente de $L_1$ es mayor que el de $L_2$. $b_1 > b_2$ |
| Sistema 2. | | | |
| 1 | Son tres gráficas que están representadas en el plano cartesiano. | → | Es factible escribir tres ecuaciones con dos incógnitas, que pueden estar representadas por "$x$" e "$y$". |
| 2 | Son tres rectas. | → | Es factible escribir tres ecuaciones donde el exponente de "$x$" es uno, cuando "$y$" está despejada. |
| 3 | Las tres rectas tienen la misma inclinación, son paralelas. | → | Los coeficientes de la "$x$" son iguales. $m_1 = m_2 = m_3$ |
| 4 | $45^0 < \alpha_1 < 90^0$<br>$45^0 < \alpha_2 < 90^0$<br>$45^0 < \alpha_3 < 90^0$ | → | $m_1 > 1$<br>$m_2 > 1$<br>$m_3 > 1$ |
| 5 | Cada una de las rectas se intersecta con el eje de las ordenadas en puntos distintos. | → | $b_1 \neq b_2 \neq b_3$<br>$b_1 \neq b_3$ |
| 6 | $L_1$ y $L_2$ se intersectan con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este y, $L_3$ en la parte negativa. | → | $b_1 > 0$<br>$b_2 > 0$<br>$b_3 < 0$ |
| 7 | La intersección con el eje de las ordenadas de $L_1$ está arriba de las de $L_2$ y $L_3$. La intersección de $L_2$ con el eje de las ordenadas está en medio de las otras dos. Y la intersección de $L_3$ con el eje de las ordenadas está por debajo de $L_2$ y $L_3$. | → | $b_1 > b_2 > b_3$ |
| Sistema 3. | | | |
| 1 | Son dos gráficas están representadas en el plano cartesiano. | → | Es factible escribir dos ecuaciones con dos incógnitas que pueden estar representadas por "$x$" e "$y$". |
| 2 | Son dos rectas. | → | Es factible escribir dos ecuaciones donde el exponente de "$x$" es uno, cuando "$y$" está despejada. |

Tabla 4.5. Relaciones entre representaciones para la segunda parte de la Tarea 9. (continuación).

| | Características geométricas.<br>Visualizar características globales | → | Expresión algebraica<br>Inferir las unidades significativas |
|---|---|---|---|
| 3 | Las dos rectas tienen la misma inclinación. | → | Los coeficientes de la "$x$" son iguales.<br>$m_1 = m_2$ |
| 4 | $\alpha_1 = 135^0$<br>$\alpha_2 = 135^0$ | → | $m_1 = -1$<br>$m_2 = -1$ |
| 5 | $L_1$ y $L_2$ se intersectan con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. | → | $b_1 < 0$<br>$b_2 < 0$ |
| 6 | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en lugares distintos de este. | → | $b_1 \neq b_2$ |
| 7 | La intersección con el eje de las ordenadas de $L_1$ está por arriba de la de $L_2$. | → | El término independiente de $L_1$ es mayor que el de $L_2$.<br>$b_1 > b_2$ |

Las preguntas de la tercera parte de la tarea son las siguientes:

1. ¿Cómo son las rectas que se encuentran en cada bosquejo de representación geométrica?
2. Analiza las ecuaciones en cada uno de los sistemas trabajados en esta tarea y, completa la siguiente tabla.

| Similitudes y diferencias / Representaciones | Representación algebraica | Representación geométrica |
|---|---|---|
| Similitudes | | |
| Diferencias | | |

3. ¿Cuáles son las condiciones en la representación algebraica para que las gráficas de dos rectas sean paralelas?
4. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en su representación algebraica cuyas ecuaciones sean equivalentes. Así mismo, haz el bosquejo de las ecuaciones.

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 9 individual. En la primera parte, dieciocho estudiantes (69% aprox.) realizan los bosquejos de los sistemas de ecuaciones de forma correcta.

*Comentario. El porcentaje de aciertos mostrados en esta sección, nos indican de algún modo la evaluación formativa y, consisten en el porcentaje de estudiantes que resolvieron correctamente el ejercicio. En la discusión grupal, una vez que se discutieron cada una de las partes de la tarea, el profesor indica que: "alcen las mano quienes hicieron bien los ejercicios", en ese momento el profesor cuenta y calcula el porcentaje aproximado.*

*Comentario. Según la observación del profesor y la grabación de las sesiones, en este punto sucede lo siguiente: los alumnos que cometieron errores en su tarea individual, en discusión grupal se dan cuenta de dichos errores y los tratan de corregir inmediatamente, sin embargo, el profesor les indica que los corrijan como tarea extraclase.*

La segunda parte de la tarea, que es la conversión de la representación geométrica a la algebraica de tres sistemas, resulta de mayor dificultad, ya que sólo diez estudiantes (38%) la realiza correctamente.

*Comentario. Como se puede apreciar la conversión que ofrece mayor dificultad a los estudiantes, de acuerdo a los resultados (69% y 38%), es la que va de la representación geométrica a la algebraica, estos resultados están acordes a lo señalado por* Leinhardt, Stein y Zaslavsky *(1990).*

La tercera parte, que consiste en identificar las condiciones de paralelismo en la representación algebraica, también resultó difícil para los estudiantes, sólo diez estudiantes (38%) lo contesta correctamente.

*Tarea 10 grupal.* Para la primera parte, tres alumnos (forma 1, elegidos al azar) pasan al pizarrón a hacer un bosquejo cada uno. Una vez que se trazan los bosquejos en el pizarrón, el grupo los observa y evalúa mentalmente. El profesor le indica a un estudiante (forma 3, posiblemente responda correctamente) que exprese su evaluación en voz alta. En esta ocasión los bosquejos estuvieron trazados correctamente.

Para la segunda parte, tres alumnos (forma 1, elegidos al azar) pasan al pizarrón a escribir un sistema cada uno en la representación algebraica. Una vez que los sistemas están escritos en el pizarrón, los estudiantes los observan y evalúan mentalmente. El profesor le indica a un alumno (forma 3, posiblemente responda correctamente) que exprese su evaluación en voz alta. En esta ocasión los sistemas de ecuaciones están escritos correctamente.

Atención especial merecen las preguntas del tercer apartado, se trabaja en discusión grupal, hasta que la mayoría esté de acuerdo con las respuestas esperadas. Se presentan las preguntas, respuestas esperadas y el desempeño de los estudiantes.

> *Comentario. Los porcentajes mostrados en las siguientes líneas se obtienen de la siguiente manera: una vez discutido cada uno de los apartados, el profesor indica que: "quienes estén de acuerdo levanten la mano", el profesor cuenta y calcula el porcentaje aproximado.*

<table>
<tr><th colspan="2">Preguntas y respuestas esperadas.</th><th>Desempeño de los estudiantes</th></tr>
<tr><td>1</td><td>¿Cómo son las rectas que se encuentran en cada bosquejo de representación geométrica?<br><br>Respuesta: paralelas.</td><td>Un alumno menciona que son paralelas y la mayoría del grupo lo apoya.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td>Llenado de tabla.<br><br>Similitudes:<br><br>Algebraica. a) que tienen dos incógnitas, b) que el exponente de"x" es uno cuando "y" está despejada, c) los coeficientes de la incógnita "x" son iguales.</td><td>Un alumno menciona que los coeficientes de "$x$" son iguales. Diez alumnos (38%) apoyan esta idea. El resto del grupo se da cuenta de la similitud y toma nota.</td></tr>
<tr><td>Similitudes:<br><br>Geométrica. a) Son rectas en el plano cartesiano, b) inclinaciones iguales.</td><td>Un alumno menciona que las inclinaciones de las rectas son iguales. Diez alumnos (38%) apoyan esta idea. El resto del grupo se da cuenta de la similitud y toma nota.</td></tr>
<tr><td>Diferencias:<br><br>Algebraica. Términos independientes diferentes.</td><td>Un alumno menciona que los términos independientes son diferentes. Diez alumnos (38%) apoyan esta idea. El resto del grupo se da cuenta de esta diferencia y toma nota.</td></tr>
<tr><td>Diferencias:<br><br>Geométrica: Las intersecciones con el eje "y" son diferentes.</td><td>Un alumno menciona que las intersecciones con el eje de las ordenadas son diferentes. Diez alumnos (38%) apoyan esta idea. El resto del grupo se da cuenta de esta respuesta.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>¿Cuáles son las condiciones en la representación algebraica para que las gráficas de dos rectas sean paralelas?<br><br>Respuesta. Que los coeficientes de la "x" sean iguales.</td><td>Un alumno menciona que los coeficientes de la "$x$" deben de ser iguales. Diez alumnos (38%) apoyan esta idea. El resto del grupo se da cuenta de la respuesta y toma nota.</td></tr>
</table>

| Preguntas y respuestas esperadas. | | Desempeño de los estudiantes |
|---|---|---|
| 4 | *Proposición de sistema con dos ecuaciones equivalentes.*<br>*Respuesta. Se espera que los alumnos propongan un ejemplo correctamente.* | Sólo dos alumnos (8%) responden correctamente esta pregunta, proponiendo un sistema con dos ecuaciones equivalentes y, con la misma representación geométrica. El resto del grupo toma nota. |

*Comentarios. En las similitudes de las ecuaciones de los sistemas, es conveniente enfatizar lo siguiente: a) que las ecuaciones tienen dos incógnitas, por lo que se pueden representar en el plano cartesiano; b) que el exponente de la "$x$" es uno cuando la "$y$" está despejada, esto es, que la representación gráfica es una recta, c) que el coeficiente de las "$x$" es el mismo, para las ecuaciones del sistema, por lo tanto, son paralelas.*

*Se observa una gran diferencia entre las respuestas esperadas y lo que responden los alumnos, por ejemplo, en las similitudes en la representación algebraica, lo que responden los alumnos es:*

"los coeficientes de la "$x$" son iguales o, pendientes iguales".

*En el trabajo individual, los alumnos presentan dificultades en las conversiones y en la identificación de las condiciones, por lo tanto, en la discusión grupal se enfatizaron cada una de las respuestas correctas, para que posteriormente los alumnos hagan las correcciones pertinentes como tarea extraclase. Es importante señalar que en las tareas que se realizarán posteriormente, se seguirán haciendo conversiones de representación, por lo tanto, se espera que exista una mejora notable en las conversiones.*

*En la propuesta de ecuaciones equivalentes, sólo dos estudiantes propusieron bien el sistema, uno de ellos, expuso su propuesta frente al grupo y, se enfatizó que dos ecuaciones equivalentes tienen la misma representación geométrica y que una recta es paralela a sí misma.*

Al término de la tarea anterior el profesor reparte los formatos de la tarea siguiente: "Tarea 11. Sistemas de ecuaciones lineales, situación de intersección en el eje de las ordenadas" (ver Anexo 1 Tarea 11). Sus cuestionamientos se trabajan de tres formas: individual, en equipo (Tarea 12) y finalmente en discusión grupal (Tarea 13).

Según Duval (1992) se considera que un estudiante comprende un objeto matemático cuando puede reconocerlo en al menos dos registros y puede hacer la conversión entre estos. En esta tarea se trabajan las representaciones algebraica, geométrica y su conversión.

Según Hiebert y Carpenter (1992) las representaciones internas pueden ser estimuladas por sus correspondientes representaciones externas. Las conexiones externas se pueden establecer entre distintas formas de representación o, de distintas maneras en la misma forma de representación. Además, las conexiones entre representaciones internas se establecen por medio de similitudes y diferencias. En el presente estudio, se trabaja con las representaciones algebraica, geométrica y su conversión. En ocasiones se pide a los alumnos encontrar similitudes y diferencias de una idea matemática en las representaciones mencionadas anteriormente.

Los sistemas de ecuaciones trabajados en estas tareas son de rectas que se intersectan en algún punto del eje de las ordenadas. Se pretende que los alumnos encuentren:

- en la representación algebraica, las diferencias entre los coeficientes de las "$x$" y, las similitudes entre los términos independientes de las ecuaciones en cada uno de los sistemas;
- en la representación geométrica, las diferencias de las inclinaciones de las rectas y la similitud del punto de intersección de las rectas con el eje de las ordenadas.

*Descripción de la tarea 11.* En la primera parte se deben hacer las conversiones de la representación algebraica a la geométrica, de los siguientes sistemas.

1.

$y_1 = -3x_1 - 1$…L1

$y_2 = -\frac{1}{2}x_2 - 1$…L2

2.

$y_1 = 4x_1 + 3$… L1

$y_2 = -4x_2 + 3$… L2

3.

$y_1 = x_1 + 1$…L1

$y_2 = 2x_2 + 1$…L2

$y_3 = -2x_3 + 1$…L3

*Relaciones para “construir”.* De acuerdo a las tablas 2.1 y 2.2 del capítulo dos de este escrito, a continuación se muestran las conexiones que deben de realizar los alumnos para convertir de la representación algebraica a la geométrica. En la siguiente tabla en símbolo → significa “se relaciona con”.

Tabla. 4.6. Relaciones entre las representaciones algebraica y geométrica para la primera parte de la Tarea 11.

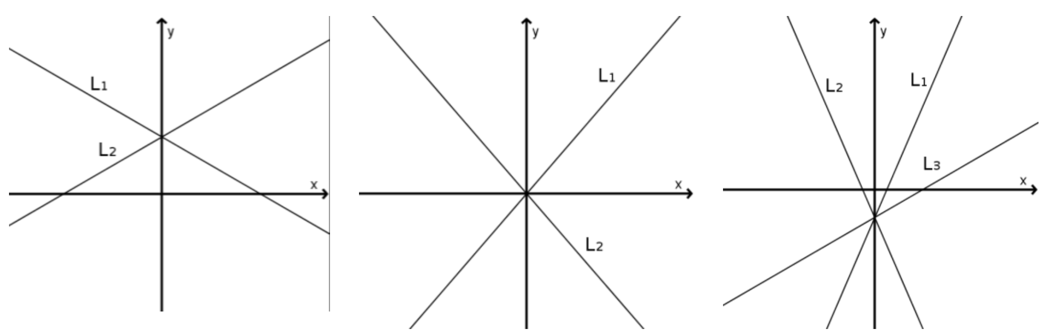
| | Características algebraicas<br>Visualizar unidades significativas | → | Características geométricas<br>Inferir características globales |
|---|---|---|---|
| Sistema 1 | | | |
| 1. | Son dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por “$x$” e “$y$”. | → | Dos gráficas representadas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las dos ecuaciones el exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada. | → | Son dos líneas rectas. |
| 3 | $m_1 < 0$<br>$m_2 < 0$ | → | $90^0 < \alpha_1 < 180^0$<br>$90^0 < \alpha_2 < 180^0$ |
| 4 | Los coeficientes de la “$x$” son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2$ | → | Los ángulos son diferentes<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2$ |
| 5 | $m_1 = -3$<br>$m_2 = -\frac{1}{2}$ | → | $90^0 < \alpha_1 < 135^0$<br>$135^0 < \alpha_2 < 180^0$ |
| 6 | Los términos independientes son iguales.<br>$b_1 = b_2 = -1$ | → | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en el mismo punto y, en la parte negativa de este $(0, -1)$. |
| Sistema 2. | | | |
| 1 | Son dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por “$x$” e “$y$”. | → | Dos gráficas representadas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las dos ecuaciones el exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada. | → | Son dos líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la “$x$” son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2$ | → | Los ángulos de las rectas son diferentes.<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2$ |
| 4 | $m_1 > 0$<br>$m_2 < 0$ | → | $0^0 < \alpha_1 < 90^0$<br>$90^0 < \alpha_2 < 180^0$ |
| 5 | $m_1 = 4$<br>$m_2 = -4$ | → | $45^0 < \alpha_1 < 90^0$<br>$90^0 < \alpha_2 < 135^0$ |
| 6 | Los términos independientes son iguales.<br>$b_1 = b_2 = 3$ | → | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en el mismo punto, en la parte positiva de este (0,3). |
| Sistema 3. | | | |
| 1 | Son tres ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por “$x$” e “$y$”. | → | Tres gráficas representadas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las tres ecuaciones el exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada. | → | Son tres líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la “$x$” son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2 \neq m_3$<br>$m_1 \neq m_3$ | → | Los ángulos son diferentes<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$<br>$\alpha_1 \neq \alpha_3$ |
| 4 | $m_1 > 0$<br>$m_2 > 0$<br>$m_3 < 0$ | → | $0^0 < \alpha_1 < 90^0$<br>$0^0 < \alpha_2 < 90^0$<br>$90^0 < \alpha_3 < 180^0$ |

Tabla. 4.6. Relaciones entre las representaciones algebraica y geométrica para la primera parte de la Tarea 11. (continuación).

| | Características algebraicas<br>Visualizar unidades significativas | → | Características geométricas<br>Inferir características globales |
|---|---|---|---|
| 5 | $m_1 = 1$<br>$m_2 = 2$<br>$m_3 = -2$ | → | $\alpha_1 = 45^0$<br>$45^0 < \alpha_2 < 90^0$<br>$90^0 < \alpha_3 < 135^0$ |
| 6 | Los términos independientes son iguales.<br>$b_1 = b_2 = b_3 = 1$ | → | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en el mismo punto, en la parte positiva de este $(0,1)$. |

En la segunda parte se deben hacer las conversiones de la representación geométrica a la algebraica de los sistemas que se muestran a continuación.

1. 2. 3.




En la siguiente tabla se muestran las conexiones que debe realizar el estudiante para resolver la segunda parte de esta tarea. En la siguiente tabla el símbolo → significa "se relaciona con".

Tabla 4.7. Relaciones entre representaciones para la segunda parte dela Tarea 11.

| | Características geométricas<br>Visualización de características globales | → | Expresión algebraica<br>Inferencia de unidades significativas |
|---|---|---|---|
| Sistema 1. | | | |
| 1 | Son dos gráficas que están representadas en el plano cartesiano. | → | Dos ecuaciones con dos incógnitas que en este caso están representadas por "$x$" e "$y$". |
| 2 | Son dos rectas. | → | Las dos representaciones se pueden expresar con exponente de la "$x$" igual uno, cuando la "$y$" está despejada. |
| 3 | Las dos rectas tienen distinta inclinación.<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2$ | → | Los coeficientes de la "$x$" son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2$ |

Tabla 4.7. Relaciones entre representaciones para la segunda parte dela Tarea 11. (continuación).

| Características geométricas<br>Visualización de características globales | | → | Expresión algebraica<br>Inferencia de unidades significativas |
|---|---|---|---|
| 4 | $90^0 < \alpha_1 < 180^0$<br>$0^0 < \alpha_2 < 90^0$ | → | $m_1 < 0$<br>$m_2 > 0$ |
| 5 | $135^0 < \alpha_1 < 180^0$<br>$0^0 < \alpha_2 < 45^0$ | → | $-1 < m_1 < 0$<br>$0 < m_2 < 1$ |
| 6 | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. | → | Los términos independientes son positivos.<br>$b_1 > 0$<br>$b_2 > 0$ |
| 7 | Las rectas se intersectan en el eje de las ordenadas en el mismo punto. | → | $b_1 = b_2$ |
| Sistema 2. | | | |
| 1 | Son dos gráficas que están representadas en el plano cartesiano. | → | Dos ecuaciones con dos incógnitas que en este caso están representadas por "$x$" e "$y$". |
| 2 | Son dos rectas. | → | Las dos representaciones se pueden expresar con exponente de la "$x$" igual uno, cuando la "$y$" está despejada. |
| 3 | Las dos rectas tienen distinta inclinación.<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2$ | → | Los coeficientes de la "$x$" son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2$ |
| 4 | $0 < \alpha_1 < 90^0$<br>$90^0 < \alpha_2 < 180^0$ | → | $m_1 > 0$<br>$m_2 < 0$ |
| 5 | $\alpha_1 = 45^0$<br>$\alpha_2 = 135^0$ | → | $m_1 = 1$<br>$m_2 = -1$ |
| 6 | $L_1$ y $L_2$ se intersectan con los ejes en el origen. | → | $b_1 = b_2 = 0$ |
| Sistema 3. | | | |
| 1 | Son tres gráficas que están representadas en el plano cartesiano. | → | Tres ecuaciones con dos incógnitas que en este caso están representadas por "$x$" e "$y$". |
| 2 | Son tres rectas. | → | Las tres representaciones se pueden expresar con exponente de la "$x$" igual uno, cuando la "$y$" está despejada. |
| 3 | Las tres rectas tienen distinta inclinación.<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$<br>$\alpha_1 \neq \alpha_3$ | → | Los coeficientes de la "$x$" son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2 \neq m_3$<br>$m_1 \neq m_3$ |
| 4 | $0^0 < \alpha_1 < 90^0$<br>$90^0 < \alpha_2 < 180^0$<br>$0^0 < \alpha_3 < 90^0$ | → | $m_1 > 0$<br>$m_2 < 0$<br>$m_3 > 0$ |
| 5 | $45^0 < \alpha_1 < 90^0$<br>$90^0 < \alpha_2 < 135^0$<br>$0^0 < \alpha_3 < 45^0$ | → | $m_1 > 1$<br>$m_2 < -1$<br>$0 < m_3 < 1$ |
| 6 | Las tres rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. | → | $b_1 < 0$<br>$b_2 < 0$<br>$b_3 < 0$ |
| 7 | Las tres rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en el mismo punto. | → | $b_1 = b_2 = b_3$ |

En la tercera parte se deben contestar los siguientes cuestionamientos.

1. Completa la siguiente tabla.

| Similitudes y diferencias / Representaciones | Representación algebraica | Representación geométrica |
| --- | --- | --- |
| Similitudes | | |
| Diferencias | | |

2. ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir las ecuaciones en su representación algebraica, de un sistema de ecuaciones, para que sus gráficas asociadas, sean rectas en el plano cartesiano y, que el punto de intersección entre ellas se encuentre en el eje de las ordenadas?

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 11 individual. Para la primera parte, que consiste en realizar las conversiones de la representación algebraica a la geométrica, se observa que los alumnos la realizan en forma lenta, veintitrés estudiantes (88%) realizan los bosquejos satisfactoriamente. En esta parte se observa una mejora con respecto a la Tarea 9, en la cual se obtuvo el 69% de resultados satisfactorios.

En la segunda parte, que consiste en las conversiones de la representación geométrica a la algebraica, dieciocho estudiantes (69%) realizan las conversiones correctamente, que es muy superior al resultado obtenido en la Tarea 9 (38%), en la conversión similar.

Para la tercera parte, que consiste en la identificación de las condiciones para que las rectas se intersecten con el eje de las ordenadas en el mismo punto, veintitrés estudiantes (88%) identifica las condiciones correctamente, igualmente muy superior a la pregunta similar planteada en la Tarea 9 (38%).

> *Observaciones. Se observa una mejora significativa en esta tarea con respecto a la tarea nueve, en todas sus actividades: conversión de la representación algebraica a la geométrica y viceversa e identificación de similitudes y diferencias.*
>
> *Al parecer, los alumnos ponen más cuidado en esta tarea once que en la nueve, en virtud de que los resultados de la tarea nueve no fueron satisfactorios y, por esta razón se pudo haber observado un trabajo un poco más lento, pero de mejor calidad.*

*Tarea 12 en equipo*. Según Hiebert y Carpenter (1992) la forma en que un estudiante manipula las representaciones externas, refleja de algún modo la manera en que las tiene representadas internamente. Además, es interés primordial que el alumno “construya” conexiones correctas y abandone las incorrectas. En el trabajo de equipo y grupal (comunidad), los alumnos tienen la oportunidad de comparar y discutir sus conexiones. Luego de una discusión, pueden: reafirmar las conexiones correctas, “abandonar” las conexiones incorrectas y, construir nuevas conexiones.

Según Bransford, Brown y Cocking, para el trabajo de comunidad, las normas son importantes, es por esto que en el trabajo en equipo y grupal nos ajustamos a las normas mencionadas en el Capítulo 3 de este escrito, donde el alumno debe respetar a sus compañeros. Y debe tener la disposición de compartir sus conocimientos y aprender de los demás como se mencionó en el Capítulo 2 de este escrito.

Se observa una buena disposición para realizar un trabajo colaborativo, algunos alumnos son auxiliados por sus compañeros para hacer las conversiones de la representación algebraica a la geométrica y viceversa. Los equipos también trabajan con buena disposición para llegar a acuerdos entre ellos. Los resultados de los equipos son arriba del 90% satisfactorios. Al parecer la forma en que mejor trabajan los equipos es con sus compañeros más cercanos (forma 1).

*Tarea 13 grupal (Revisión de la Tarea 12 grupalmente)*. Para la primera parte, tres representantes de equipo pasan al pizarrón (forma 1, elegidos al azar) a trazar un bosquejo cada uno. Una vez que los bosquejos están trazados en el pizarrón, los equipos los observan y los evalúan. El profesor señala a un representante de equipo (forma 3, elección que probablemente responda correctamente) que exprese la evaluación en voz alta, sin mayor dificultad se llega a concluir que los bosquejos están trazados correctamente.

Para la segunda parte, tres representantes de equipo pasan al pizarrón (forma 1, elegidos al azar) a escribir un sistema cada uno. Una vez que los sistemas están escritos en el pizarrón, los equipos los observan y los evalúan. El profesor señala a un representante de equipo (forma 3, probablemente responda correctamente) que exprese la evaluación en voz alta, sin mayor dificultad se llega a concluir que los sistemas están escritos correctamente.

Para la tercera parte, el profesor le indica a un represente de equipo (forma 1, elegido al azar) que exprese las respuestas en voz alta. El resto del grupo atiende y participa para llegar a acuerdos. Nuevamente, para el tercer apartado se muestran las respuestas esperadas y el desempeño de los estudiantes en la puesta en práctica.

| *Preguntas y respuestas esperadas.* | | Desempeño de los estudiantes |
|---|---|---|
| 1 | *Llenado de tabla.*<br>*Similitudes:*<br>*Algebraica. a) que tienen dos incógnitas, b) que el exponente de "x" es uno cuando "y" está despejada, c) los términos independientes son iguales* | El representante menciona que los términos independientes son iguales. El resto de los equipos apoyan esta idea. |
| | *Similitudes:*<br>*Geométrica. a) Son dos rectas en el plano cartesiano, b) el punto de intersección con el eje de las ordenadas es el mismo.* | El representante menciona que las rectas se intersectan en el mismo punto del eje de las ordenadas. El resto de los equipos apoyan esta idea. |
| | *Diferencias:*<br>*Algebraica. Coeficientes de "x" diferentes o bien, pendientes diferentes.* | El representante menciona que los coeficientes de "$x$" son diferentes. El resto de los equipos apoyan esta idea. |
| | *Diferencias:*<br>*Geométrica. Las inclinaciones son diferentes.* | El representante menciona que las inclinaciones de las rectas son diferentes. El resto de los equipos apoyan esta idea. |
| 2 | *¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir las ecuaciones en su representación algebraica, de un sistema de ecuaciones, para que sus gráficas asociadas, sean rectas en el plano cartesiano y, que el punto de intersección entre ellas se encuentre en el eje de las ordenadas?*<br>*Respuesta. Que sean ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por "x" e "y", que el exponente de "x" sea uno, cuando la "y" está despejada, que los coeficientes de las "x" sean diferentes y que los términos independientes sean iguales.* | El representante menciona que los coeficientes de la "$x$" deben ser diferentes y los términos independientes iguales. El resto de los equipos apoyan esta idea. |

En este punto, todavía hay alumnos (entre el 20% y 28%) a los que se les dificultan las conversiones y la identificación de características. En trabajo grupal se enfatizan dichas actividades con la intensión de que los alumnos con dificultades, las superen.

La sesión prosigue con la "Tarea 14. Sistema de ecuaciones lineales, situación de intersección fuera del eje de las ordenadas" (ver Anexo 1 Tarea 14 individual). La temática de esta tarea se trabaja de tres formas, individual, por equipo (Tarea 15) y grupal (Tarea 16).

Según Duval (1992) se puede considerar que un alumno alcanza la comprensión de un objeto matemático cuando lo identifica en al menos dos representaciones y es capaz de hacer la conversión entre estas.

Según Hiebert y Carpenter (1992) la comprensión es el resultado de numerosas y fuertes conexiones entre ideas matemáticas, dichas conexiones se construyen por medio de similitudes y diferencias en una misma representación o en distintas formas de representación.

Por otro lado, según Bransford, Brown y Cocking (1999) se debe tener un equilibrio entre las actividades dedicadas a la comprensión y las dedicadas a la automatización.

Los sistemas de ecuaciones trabajados en esta tarea son de rectas que se intersectan fuera del eje de las ordenadas. Se pretende que los alumnos encuentren las diferencias entre los coeficientes de las "$x$" y de los términos independientes de las ecuaciones en cada uno de los sistemas, al mismo tiempo que se siguen trabajando las conversiones de los registros algebraico y gráfico.

*Descripción de la tarea 14.* En la primera parte se deben realizar las conversiones de la representación algebraica a la geométrica de los siguientes sistemas de ecuaciones.

| 1. | 2. | 3. |
|---|---|---|
| $y_1 = -3x_1 - 2$…L1 | $y_1 = 2x_1 - 1$…L1 | $y_1 = -3x_1 + 4$…L1 |
| $y_2 = -\frac{1}{2}x_2 + 1$…L2 | $y_2 = -x_2 + 3$…L2 | $y_2 = 2x_2 + 1$…L2 |
| | | $y_3 = x_3 - 2$…L3 |

*Relaciones para "construir".* A continuación se muestran las conexiones que deben de realizar los alumnos para hacer las conversiones entre las representaciones algebraica y geométrica, de acuerdo a las tablas 2.1 y 2.2, del Capítulo 2 de este escrito. En la siguiente tabla el símbolo → significa "se relaciona con".

Tabla 4.8. Relaciones entre las representaciones algebraica y geométrica para la primera parte de la tarea 14.

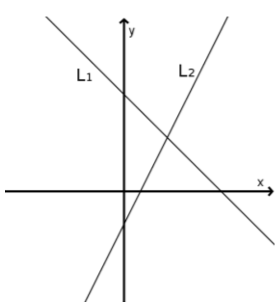
| Características algebraicas<br>Visualizar unidades significativas | | → | Características geométricas<br>Inferir características globales |
|---|---|---|---|
| Sistema 1. | | | |
| 1 | Son dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por “$x$” e “$y$”. | → | Dos gráficas representadas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las dos ecuaciones el exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada. | → | Son dos líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la “$x$” son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2$ | → | Los ángulos son diferentes<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2$ |
| 4 | $m_1 < 0$<br>$m_2 < 0$ | → | $90^0 < \alpha_1 < 180^0$<br>$90^0 < \alpha_2 < 180^0$ |
| 5 | $m_1 = -3$<br>$m_2 = -\frac{1}{2}$ | → | $90^0 < \alpha_1 < 135^0$<br>$135^0 < \alpha_2 < 180^0$ |
| 6 | Los términos independientes son diferentes.<br>$b_1 \neq b_2$ | → | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en puntos diferentes de este. |
| 7 | $b_1 = -2$ | → | La recta $L_1$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. |
| 8 | $b_2 = 1$ | → | La recta $L_2$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. |
| Sistema 2. | | | |
| 1 | Son dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por “$x$” e “$y$”. | → | Dos gráficas representadas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las dos ecuaciones el exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada. | → | Son dos líneas rectas. |
| 4 | Los coeficientes de la “$x$” son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2$ | → | Los ángulos son diferentes.<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2$ |
| 3 | $m_1 > 0$<br>$m_2 < 0$ | → | $0^0 < \alpha_1 < 90^0$<br>$90^0 < \alpha_2 < 180^0$ |
| 5 | $m_1 = 2$<br>$m_2 = -1$ | → | $45^0 < \alpha_1 < 90^0$<br>$\alpha_2 = 135^0$ |
| 6 | Los términos independientes son diferentes.<br>$b_1 \neq b_2$ | → | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en lugares distintos. |
| 7 | $b_1 = -1$ | → | Las recta $L_1$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. |
| 8 | $b_2 = 3$ | → | La recta $L_2$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. |

Tabla 4.8. Relaciones entre las representaciones algebraica y geométrica para la primera parte de la tarea 14. (continuación).

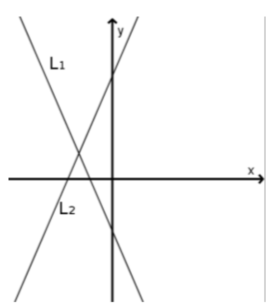
| Características algebraicas<br>Visualizar unidades significativas | | → | Características geométricas<br>Inferir características globales |
|---|---|---|---|
| Sistema 3. | | | |
| 1 | Son tres ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por “$x$” e “$y$”. | → | Tres gráficas representadas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las tres ecuaciones el exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada. | → | Son tres líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la “$x$” son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2 \neq m_3$<br>$m_1 \neq m_3$ | → | Los ángulos son diferentes<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2$ |
| 4 | $m_1 < 0$<br>$m_2 > 0$<br>$m_3 > 0$ | → | $90^0 < \alpha_1 < 180^0$<br>$0^0 < \alpha_2 < 90^0$<br>$0^0 < \alpha_3 < 90^0$ |
| 5 | $m_1 = -3$<br>$m_2 = 2$<br>$m_3 = 1$ | → | $90^0 < \alpha_1 < 135^0$<br>$45^0 < \alpha_2 < 90^0$<br>$\alpha_3 = 45^0$ |
| 6 | Los términos independientes son diferentes.<br>$b_1 \neq b_2 \neq b_3$<br>$b_1 \neq b_3$ | → | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en puntos distintos. |
| 7 | $b_1 > 0$ | → | La recta $L_1$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. |
| 8 | $b_2 > 0$ | → | La recta $L_2$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. |
| 9 | $b_3 < 0$ | → | La recta $L_3$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. |
| 10 | $b_1 > b_2$ | → | La recta $L_1$ se intersecta con el eje de las ordenadas más arriba que la recta $L_2$. |

En la segunda parte se debe realizar la conversión de la representación geométrica a la algebraica de los siguientes sistemas de ecuaciones.

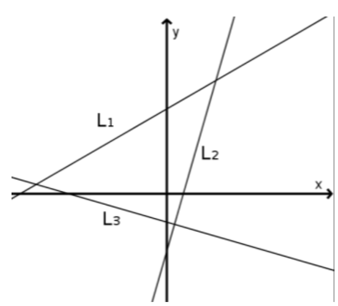
1.




2.




3.



A continuación se muestran las conexiones que debe realizar el estudiante para resolver la segunda parte de esta tarea.

Tabla 4.9. Relaciones entre representaciones para la segunda parte dela Tarea 14.

| | Características geométricas<br>Visualizar características globales | → | Características algebraicas<br>Inferir unidades significativas |
|---|---|---|---|
| Sistema 1. | | | |
| 1 | Son dos gráficas que están representadas en el plano cartesiano. | → | Dos ecuaciones con dos incógnitas que en este caso van a estar representadas por “$x$” e “$y$”. |
| 2 | Son dos rectas. | → | Las dos representaciones se pueden escribir con el exponente de la “$x$” igual a uno, cuando la “$y$” está despejada. |
| 3 | Las dos rectas tienen distinta inclinación.<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2$ | → | Los coeficientes de la “$x$” son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2$ |
| 4 | $90^0 < \alpha_1 < 180^0$<br>$0^0 < \alpha_2 < 90^0$ | → | $m_1 < 0$<br>$m_2 > 0$ |
| 5 | $\alpha_1 = 135^0$<br>$45^0 < \alpha_2 < 90^0$ | → | $m_1 = -1$<br>$m_2 > 1$ |
| 6 | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en puntos distintos. | → | Los términos independientes son diferentes.<br>$b_1 \neq b_2$ |
| 7 | La recta $L_1$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. | → | $b_1 > 0$ |
| 8 | $L_2$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este | → | $b_2 < 0$ |
| Sistema 2. | | | |
| 1 | Son dos gráficas que están representadas en el plano cartesiano. | → | Dos ecuaciones con dos incógnitas que en este caso van a estar representadas por “$x$” e “$y$”. |
| 2 | Son dos rectas. | → | Las dos representaciones se pueden escribir con el exponente de la “$x$” igual a uno, cuando la “$y$” está despejada. |
| 3 | Las dos rectas tienen distinta inclinación.<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2$ | → | Los coeficientes de la “$x$” son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2$ |
| 4 | $90^0 < \alpha_1 < 180^0$<br>$0^0 < \alpha_2 < 90^0$ | → | $m_1 < 0$<br>$m_2 > 0$ |
| 5 | $90^0 < \alpha_1 < 135^0$<br>$45^0 < \alpha_2 < 90^0$ | → | $m_1 < -1$<br>$m_2 > 1$ |
| 6 | Las rectas se intersectan con el eje delas ordenadas en puntos diferentes. | → | $b_1 \neq b_2$ |
| 7 | $L_1$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. | → | $b_1 < 0$ |
| 8 | $L_2$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. | → | $b_2 > 0$ |

Tabla 4.9. Relaciones entre representaciones para la segunda parte dela Tarea 14. (continuación).

| Características geométricas<br>Visualizar características globales | | → | Características algebraicas<br>Inferir unidades significativas |
|---|---|---|---|
| Sistema 3. | | | |
| 1 | Son tres gráficas están representadas en el plano cartesiano. | → | Tres ecuaciones con dos incógnitas que en este caso van a estar representadas por “$x$” e “$y$”. |
| 2 | Son tres rectas. | → | Las tres representaciones se pueden escribir con el exponente de la “$x$” igual a uno, cuando la “$y$” está despejada. |
| 3 | Las tres rectas tienen distinta inclinación.<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$<br>$\alpha_1 \neq \alpha_3$ | → | Los coeficientes de la “$x$” son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2 \neq m_3$<br>$m_1 \neq m_3$ |
| 4 | $0^0 < \alpha_1 < 90^0$<br>$0^0 < \alpha_2 < 90^0$<br>$90^0 < \alpha_3 < 180^0$ | → | $m_1 > 0$<br>$m_2 > 0$<br>$m_3 < 0$ |
| 5 | $0^0 < \alpha_1 < 45^0$<br>$45^0 < \alpha_2 < 90^0$<br>$135^0 < \alpha_3 < 180^0$ | → | $0 < m_1 < 1$<br>$m_2 > 1$<br>$-1 < m_3 < 0$ |
| 6 | Las tres rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en puntos distintos. | → | $b_1 \neq b_2 \neq b_3$<br>$b_1 \neq b_3$ |
| 7 | La recta $L_1$se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. | → | $b_1 > 0$ |
| 8 | La recta $L_2$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. | → | $b_2 < 0$ |
| 9 | La recta $L_3$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. | → | $b_3 < 0$ |
| 10 | La recta $L_2$ se intersecta con el eje de las ordenadas más abajo que la recta $L_3$. | → | $b_3 > b_2$ |

En la tercera parte se deben de contestar los siguientes cuestionamientos.

1. Completa la siguiente tabla.

| Similitudes y diferencias / Representaciones | Representación algebraica | Representación geométrica |
|---|---|---|
| Similitudes | | |
| Diferencias | | |

2. ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir las ecuaciones en su representación algebraica, de un sistema de ecuaciones, para que sus gráficas asociadas, sean rectas en el plano cartesiano y, que el punto de intersección entre ellas se encuentre fuera del eje de las ordenadas?

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 14 individual. Para la primera parte, que consiste en realizar las conversiones de la representación algebraica a la geométrica, el rendimiento del grupo es del 88%. Para comparar dicho rendimiento con respecto a otras tareas en este tipo de conversión, se muestra el siguiente cuadro.

| Tarea 9 | Tarea 11 | Tarea 14 |
|---|---|---|
| 69% | 88% | 88% |

Donde se nota una mejora significativa entre las tareas nueve y once y, se conserva un alto rendimiento entre las tareas 11 y 14.

En la segunda parte, que consiste en las conversiones de la representación geométrica a la algebraica, también se observa un buen rendimiento 88%. Para comparar con respecto a otras tareas en este tipo de conversión, se muestra el siguiente cuadro.

| Tarea 9 | Tarea 11 | Tarea 14 |
|---|---|---|
| 38% | 69% | 88% |

Como se puede apreciar existe una mejora significativa de rendimiento entre tarea y tarea.

Para la tercera parte, que consiste en la identificación de las condiciones para que las rectas se intersecten fuera del eje de las ordenadas, se obtiene un rendimiento del 88%. Se muestra a continuación un cuadro comparativo de rendimiento.

| Tarea 9 | Tarea 11 | Tarea 14 |
|---|---|---|
| 38% | 88% | 88% |

Se aprecia una mejora entre las tareas nueve y once, y se mantienen un alto rendimiento entre las tareas 11 y 14.

*Tarea 15 en equipo.* Los alumnos muestran buena disposición para realizar un trabajo colaborativo, algunos alumnos son auxiliados por sus compañeros para hacer las conversiones de la representación algebraica a la geométrica y viceversa. Los equipos también trabajan con buena disposición para llegar a acuerdos entre ellos. El rendimiento de los equipos es del 100%.

*Tarea 16 grupal.* Para la primera parte, tres representantes de equipo pasan al pizarrón (forma 1, elegidos al azar) a trazar un bosquejo cada uno. Una vez que los bosquejos están trazados en el pizarrón, los equipos los observan y los evalúan. El profesor señala a otro representante de equipo (forma 3, probablemente este correcto) que exprese la evaluación en voz alta, sin mayor dificultad se llega a concluir que los bosquejos están trazados correctamente.

Para la segunda parte, tres representantes de equipo pasan al pizarrón (forma 1, elegidos al azar) a escribir un sistema cada uno. Una vez que los sistemas están escritos en el pizarrón, los equipos los observan y los evalúan. El profesor señala a otro representante de equipo (forma 3, probablemente este correcto) que exprese la evaluación en voz alta, sin mayor dificultad se llega a concluir que los sistemas están escritos correctamente.

Para la tercera parte, el profesor le indica a un represente de equipo (forma 2, se espera que enriquezca la discusión) que exprese las respuestas en voz alta, el resto del grupo atiende y participa para llegar a acuerdos.

La similitud en la representación algebraica es que son ecuaciones lineales con dos incógnitas. Las diferencias en la representación algebraica es que los coeficientes de “$x$” y los términos independientes son diferentes para cada ecuación.

La similitud en la representación geométrica es que son dos rectas en el plano. Las diferencias en la representación geométrica es que tienen distinta inclinación y el cruce con el eje de las ordenadas es diferente para cada recta.

Posteriormente, la sesión prosigue con la “Tarea 17 individual. Relación de representaciones” (ver Anexo 1 Tarea 17). La temática se trabaja en forma individual y grupal (Tarea 18).

*Descripción de la tarea 17.* El alumno debe relacionar una lista de siete sistemas de ecuaciones lineales mostrados en su representación algebraica, con nueve sistemas mostrados en su representación geométrica. Se reproducen a continuación dichos sistemas.

**1.** ( )
$y_1 = \frac{1}{4}x_1 + 1$…$L_1$
$y_1 = \frac{1}{4}x_2$…$L_2$

**2.** ( )
$y_1 = -3x_1 + 3$…$L_1$
$y_2 = 3x_2 + 1$…$L_2$

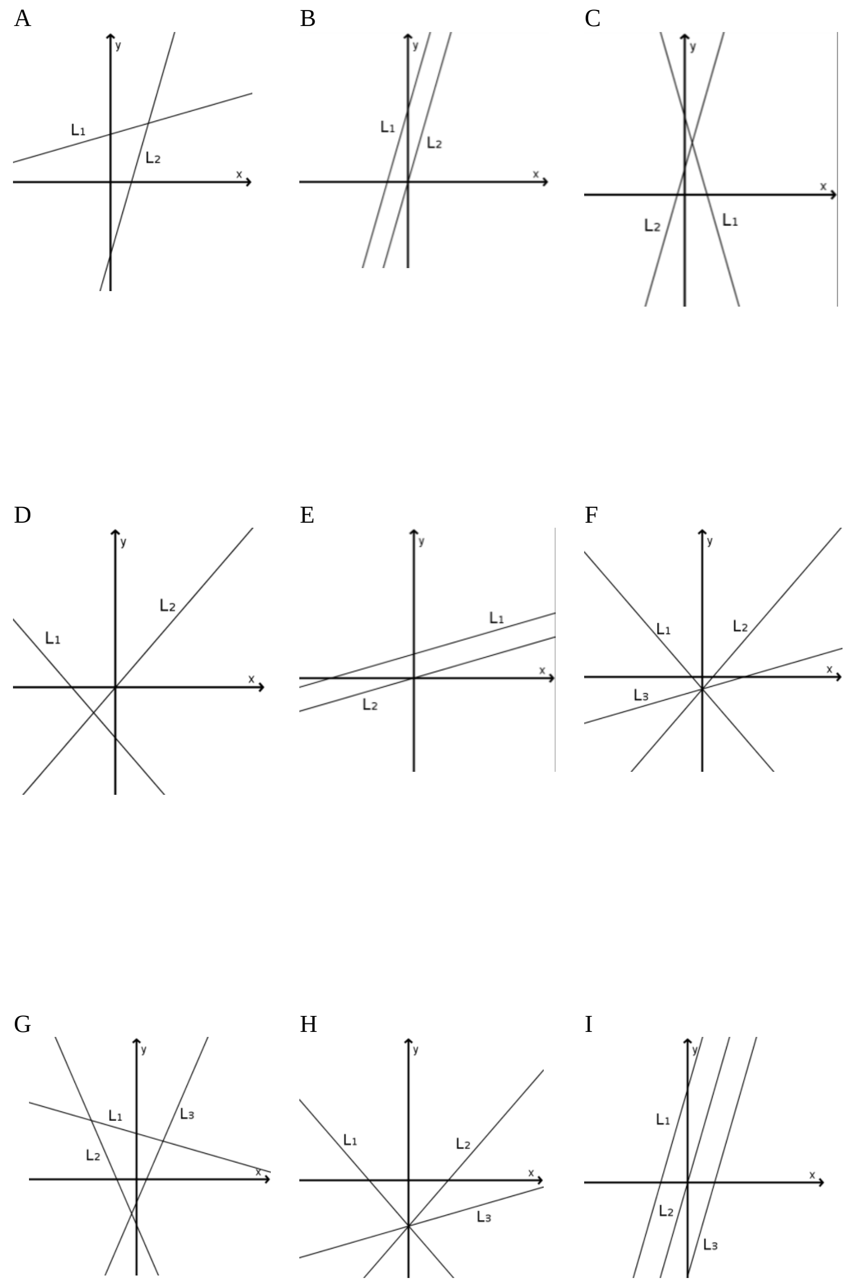
**3.** ( )
$y_1 = \frac{1}{4}x_1 + 2$ …$L_1$
$y_2 = 3x_2 - 3$…$L_2$

**4.** ( )
$y_1 = -x_1 - 2$…$L_1$
$y_2 = x_2$…$L_2$

**5.** ( )
$y_1 = -\frac{1}{4}x_1 + 2$…$L_1$
$y_2 = -2x_2 - 2$…$L_2$
$y_3 = 2x_3 - 1$…$L_3$

**6.** ( )
$y_1 = 3x_1 + 4$ …$L_1$
$y_2 = 3x_2$…$L_2$
$y_3 = 3x_3 - 4$…$L_3$

**7.** ( )
$y_1 = -x_1 - 2$…$L_1$
$y_2 = x_2 - 2$…$L_2$
$y_3 = \frac{1}{4}x_3 - 2$…$L_3$




*Relaciones para "construir".* En la siguiente tabla se muestran las relaciones entre las representaciones algebraica y geométrica, que el alumno debe considerar para resolver la tarea. En la última columna de la tabla, se muestran las ecuaciones factibles de asociarse una vez que se han analizado las relaciones.

Tabla 4.10. Conexiones para resolver la Tarea 17.

| | Representación algebraica | → | Representación geométrica | Correspondencia. Sistemas posibles de acuerdo a cada punto de análisis (y los anteriores) |
|---|---|---|---|---|
| En los siete sistemas se presentan dos o tres ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas, con “$x$” e “$y$”. | | → | Son nueve sistemas de dos o tres ecuaciones representados en el plano cartesiano. | A, B, C, D, E, F, G, H, I. |
| En los siete sistemas el exponente de la “$x$” es uno, cuando la “$y$” está despejada. | | → | En las nueve representaciones se muestran sistemas de dos o tres ecuaciones cuya representación es de líneas rectas. | A, B, C, D, E, F, G, H, I. |
| Sistema 1. | | | | |
| 1 | Son dos ecuaciones. | → | Dos rectas. | A, B, C, D, E. |
| 2 | En las dos ecuaciones los coeficientes de la “$x$” son iguales. | → | Dos rectas paralelas. | B o E. |
| 3 | Los coeficientes tienen un valor de: $m = \frac{1}{4}$ | → | La inclinación de las rectas es: $0^0 < \alpha < 45^0$ | E. |
| Sistema 2. | | | | |
| 1 | Son dos ecuaciones | → | Son dos rectas | A, B, C, D. |
| 2 | Los coeficientes de la “$x$” son diferentes. | → | Son dos rectas que se cruzan en algún punto. | A, C, D. |
| 3 | Los términos independientes son diferentes. | → | Son dos rectas que se cruzan entre sí, en cualquier punto fuera del eje de las ordenadas. | A, C,D. |
| 4 | Los valores de los coeficientes son: $m_1 = -3$ $m_2 = 3$ | → | Las inclinaciones de las rectas son: $90^0 < \alpha_1 < 135^0$ $45^0 < \alpha_2 < 90^0$ | C. |
| 5 | Los términos independientes son positivos. | → | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. | C. |
| Sistema 3. | | | | |
| 1 | Son dos ecuaciones. | → | Son dos rectas. | A, B, D. |
| 2 | Los coeficientes de la “$x$” son diferentes. | → | Son dos rectas que se cruzan en algún punto. | A, D. |
| 3 | Los términos independientes son diferentes. | → | Son dos rectas que se cruzan entre sí, en cualquier punto fuera del eje de las ordenadas. | A, D. |

Tabla 4.10. Conexiones para resolver la Tarea 17. (continuación).

| Representación algebraica | | → | Representación geométrica | Correspondencia. Sistemas posibles de acuerdo a cada punto de análisis (y los anteriores) |
|---|---|---|---|---|
| 4 | Los valores de los coeficientes son: $m_1 = \frac{1}{4}$ $m_2 = 3$ | → | Las inclinaciones de las rectas son: $0^0 < \alpha_1 < 45^0$ $45^0 < \alpha_2 < 90^0$ | A. |
| Sistema 4. | | | | |
| 1 | Son dos ecuaciones. | → | Son dos líneas rectas. | B, D. |
| 2 | Los coeficientes de las "$x$" son diferentes. | → | Las rectas se intersectan entre ellas en un punto. | D. |
| 3 | Los valores de los coeficientes son: $m_1 = -1$ $m_2 = 1$ | → | Las inclinaciones de las rectas son: $\alpha_1 = 135^0$ $\alpha_2 = 45^0$ | D. |
| Sistema 5. | | | | |
| 1 | Son tres ecuaciones. | → | Son tres rectas. | F, G, H, I. |
| 2 | Los coeficientes de las "$x$" son diferentes. | → | Tres rectas con distinta inclinación. | F, G, H. |
| 3 | Los términos independientes de las ecuaciones son diferentes. | → | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en puntos distintos. | G. |
| 4 | Los valores de los coeficientes son: $m_1 = -\frac{1}{4}$ $m_2 = -2$ $m_3 = 2$ | → | Las inclinaciones de las rectas son: $135^0 < \alpha_1 < 180^0$ $90^0 < \alpha_2 < 135^0$ $45^0 < \alpha_3 < 90^0$ | G. |
| Sistema 6. | | | | |
| 1 | Son tres ecuaciones. | → | Son tres rectas. | F, H, I. |
| 2 | Los coeficientes de las "$x$" son iguales. | → | Las tres rectas tienen la misma inclinación. | I. |
| 3 | El valor de los coeficientes es de: $m = 3$ | → | El ángulo de inclinación de las rectas es: $45^0 < \alpha < 90^0$ | I. |
| Sistema 7. | | | | |
| 1 | Son tres ecuaciones. | → | Son tres rectas. | F, H. |
| 2 | Los coeficientes delas "$x$" son distintos. | → | Las rectas tienen distinta inclinación. | F, H. |
| 3 | Los valores de los coeficientes son: $m_1 = -1$ $m_2 = 1$ $m_3 = \frac{1}{4}$ | → | Las inclinaciones de las rectas son: $\alpha_1 = 135^0$ $\alpha_2 = 45^0$ $0^0 < \alpha_3 < 45^0$ | F, H. |

Tabla 4.10. Conexiones para resolver la Tarea 17. (continuación).

| | Representación algebraica | → | Representación geométrica | Correspondencia. Sistemas posibles de acuerdo a cada punto de análisis (y los anteriores) |
|---|---|---|---|---|
| 4 | Los términos independientes son iguales. | → | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en el mismo punto. | F, H. |
| 5 | El valor de los términos independientes es de: $b = -2$ | → | Las rectas se cruzan en el punto (0,-2) | H. |

*Comentario. Según Lafourcade (1969) en los cuestionamientos de relación, uno de los requerimientos, entre otros, es que una "lista" contenga más elementos que la otra. Lo anterior es para que el estudiante tenga que discriminar en todos los incisos.*

*Por otro lado, se siguen trabajando los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica y gráfica, además de su conversión, para hacer relaciones de una idea matemática en distintas formas de representación, lo anterior, es para seguir los señalamientos Duval (1992) y Hiebert y Carpenter (1992).*

*También, como se ha podido observar, se ha trabajado en la automatización de las conversiones y en la identificación de las características de los sistemas, para seguir los señalamientos Bransford, Brown y Cocking (1999).*

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 17 individual. El rendimiento del grupo es arriba del 92%.

*Tarea 18 grupal.* El profesor le indica a un alumno (forma 1, elegido al azar) para que exprese sus resultados en voz alta. Los estudiantes escuchan y comparan con sus respuestas. No es necesaria mayor discusión grupal, ya que las respuestas son contestadas correctamente.

Al término de la discusión grupal, el profesor reparte la "Tarea 19. Resumen de situaciones de paralelismo e intersección" (ver Anexo 1 Tarea 18), que es para realizarse de forma individual y extraclase. El profesor se asegura que los alumnos hayan comprendido las consignas e indica que la sesión terminó.

*Comentario. En trabajo de equipo y en discusión grupal, el alumno tiene oportunidad de evaluar el trabajo que realizó de forma individual, como se indicó anteriormente, estas son las evaluaciones aproximadas que se presentan en este apartado. Queda como tarea extraclase y permanente, que el alumno realice las correcciones en dichas tareas, con tinta azul y sin borrar los errores que haya cometido inicialmente.*

## Sesión 4

En la siguiente tabla se muestran las tareas que se trabajan en esta ocasión. Al mismo tiempo se especifican: la forma de trabajo, el título y el propósito de las mismas, es decir, lo que se espera que el estudiante logre en las tareas.

Tabla 4.11. Tareas para la sesión 4.

| Núm. | Forma de trabajo | Título | Propósito |
|---|---|---|---|
| 20 | E | Resumen de situaciones de paralelismo e intersección. | Generalizar las condiciones que se presentan en la representación gráfica y algebraica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. |
| 21 | G | | |
| 22 | I | Proposición de sistemas de ecuaciones lineales. Diferentes situaciones. | Proponer ejemplos de sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica y gráfica, con distintas condiciones. |
| 23 | E | | |
| 24 | G | | |
| 25 | I<br>Extraclase | Identificación de solución 1. | Identificar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en la representación gráfica. |

*Inicio de la sesión.* El profesor indica que se acomode el mobiliario para trabajo en equipo, que en su momento se realizará, en esta ocasión, se forman los equipos eligiendo a los integrantes al azar (forma 2). Posteriormente se empieza a trabajar con la Tarea 20, que corresponde al trabajo de equipo de la “Tarea 19. Resumen de situaciones de paralelismo e intersección”.

*Descripción de la tarea 19.* Por medio de un cuestionamiento de relación de columnas, se pretende que los alumnos relacionen correctamente la representación algebraica de generalización, con la descripción de la representación geométrica de cuatro sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas con diferentes condiciones. A continuación se reproduce dicha tarea.

I. Relación de columnas. En la columna 1 se muestran tres condiciones de las pendientes ($m_1$ y $m_2$) y de las ordenadas al origen ($b_1$ y $b_2$) de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En la columna 2 se mencionan las características de la representación gráfica de cuatro sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Escribe en el paréntesis la letra de la característica que corresponda a cada condición de sistema.

Para el sistema:

$$y_1 = m_1x_1 + b_1 \ldots \mathrm{L}_1$$

$$y_2 = m_2x_2 + b_2 \ldots \mathrm{L}_2$$

| Columna 1 | | Columna 2 |
|---|---|---|
| 1. ( ) Cuando $m_1 \neq m_2$ y $b_1 \neq b_2$, | | |
| 2. ( ) Cuando $m_1 \neq m_2$ y $b_1 = b_2$, | A | Las dos rectas son la misma. |
| 3. ( ) Cuando $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$, | B | Las dos rectas se intersectan entre ellas sobre el eje de las ordenadas. |
| | C | Las dos rectas intersectan entre ellas fuera del eje de las ordenadas. |
| | D | Las dos rectas son paralelas diferentes una de la otra. |

*Relaciones para “construir”.* Se pretende que el alumno siga fortaleciendo las relaciones entre diferentes representaciones de una misma idea matemática (Duval, 1992 y Hiebert y Carpenter, 1992).

Las conexiones que el estudiante debe realizar para resolver esta tarea se muestran a continuación.

Tabla. 4.12. Conexiones para resolver la Tarea 19.

| Representación algebraica | → | Representación en lenguaje natural de la representación geométrica | Respuesta |
|---|---|---|---|
| Condición 1. | | | |
| $m_1 \neq m_2$ y $b_1 \neq b_2$, coeficientes diferentes y términos independientes diferentes. | → | Dos rectas con inclinaciones diferentes y ordenadas al origen diferentes. | C. Las dos rectas se intersectan entre ellas fuera del eje de las ordenadas. |
| Condición 2. | | | |
| $m_1 \neq m_2$ y $b_1 = b_2$, coeficientes diferentes y términos independientes iguales. | → | Dos rectas con inclinaciones diferentes que se intersectan con el eje de las ordenadas en el mismo punto. | B. Las dos rectas se intersectan entre ellas sobre el eje de las ordenadas. |
| Condición 3. | | | |
| $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$, coeficientes iguales y términos independientes diferentes. | → | Dos rectas con la misma inclinación y cada una se intersecta con el eje de las ordenadas en puntos diferentes. | D. Las dos rectas son paralelas diferentes una de la otra. |

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 19 individual. El rendimiento del grupo es arriba del 96%. Algunos alumnos mencionan que resuelven esta tarea de forma rápida, entre un minuto y, un minuto y medio.

*Tarea 20 de equipo.* Con los equipos reunidos de esta forma (al azar), se observa que trabajan en forma colaborativa, sin embargo, un equipo trabaja de forma cooperativa. A continuación se muestra la discusión que sucede.

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *Observa que en un equipo sólo un alumno trabaja, los otros están platicando.* | Equipo donde sólo trabaja un alumno. |
| *"Uds. ¿Ya terminaron?, ¿por qué está trabajando sólo el compañero?"* | Un alumno responde: "A él le tocó contestar". |
| *"En este curso no se ha recomendado la división del trabajo en el equipo, sino, que entre todos se ayuden a adquirir el conocimiento. Así entre todos deben de discutir y llegar a acuerdos en cada ejercicio."* | Atienden al profesor. |
| *Observa el trabajo de los alumnos.* | Empiezan a discutir los cuestionamientos. |

En este estudio, se ha observado que en el trabajo de equipo existe más interacción productiva cuando trabajan con sus compañeros más cercanos.

*Tarea 21 grupal.* El profesor le indica a un representante de equipo (forma 1, elección al azar) que exprese sus respuestas en voz alta, dichas respuestas son correctas. Los estudiantes atienden y participan, se obtiene el consenso rápidamente.

> *Comentarios. La expresión de generalización con subíndices es un conocimiento previo, sin embargo, el profesor deberá de estar seguro que en el momento de proporcionar esta tarea, los alumnos sepan que: $m_1, m_2, b_1, b_2$, representan números reales con, $m_1, m_2$ diferentes de cero.*

Al término de la discusión grupal, el profesor reparte las hojas de la siguiente: “Tarea 22. Proposición de sistemas de ecuaciones lineales. Diferentes situaciones” (ver Anexo 1 Tarea 22). La temática de esta tarea se trabaja de tres formas, individual, en equipo (Tarea 23) y en discusión grupal (Tarea 24).

*Descripción de la tarea 22.* El alumno tiene que proponer sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo a las siguientes situaciones.

1. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica consiste en dos rectas paralelas en el plano cartesiano.
2. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica son dos rectas que se intersectan en un punto fuera del eje de las ordenadas.
3. Sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica es de tres rectas que se intersectan en un mismo punto del eje de las ordenadas.
4. Sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica es de tres rectas cuyas intersecciones son los vértices de un triángulo.
5. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica es de dos rectas que se intersectan en una infinidad de puntos.

*Relaciones para “construir”.* En esta tarea, el alumno propone sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas con diferentes condiciones, a fin fortalecer las relaciones de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica, geométrica y la conversión entre ellas.

Tabla. 4.13. Conexiones para responder la tarea 22.

1. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica consiste en dos rectas paralelas en el plano cartesiano.

| Representación algebraica | | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Dos ecuaciones con dos incógnitas representadas con "$x$" e "$y$". | → | Dos graficas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las dos ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno cuando la "$y$" esta despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la "$x$" deben ser iguales. $m_1 = m_2$ | → | Ángulos de inclinación iguales. $\alpha_1 = \alpha_2$ |
| 4 | Sin condiciones en los términos independientes. | → | La intersección de cada una de las rectas con el eje de las ordenadas puede ser en cualquier punto. |

2. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica son dos rectas que se intersectan en un punto fuera del eje de las ordenadas.

| Representación algebraica | | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Dos graficas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las dos ecuaciones exponente de la "$x$" es uno cuando la "$y$" esta despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la "$x$" son diferentes. $m_1 \neq m_2$ | → | Las inclinaciones de las rectas son diferentes. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ |
| 4 | Los términos independientes son diferentes. $b_1 \neq b_2$ | → | La intersección de cada una de las rectas con el eje de las ordenadas es en puntos diferentes. |

3. Sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica es de tres rectas que se intersectan en un mismo punto del eje de las ordenadas.

| Representación algebraica | | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Tres ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Tres graficas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las tres ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno cuando la "$y$" esta despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la "$x$" son diferentes. $m_1 \neq m_2 \neq m_3$ $m_1 \neq m_3$ | → | Las inclinaciones de las rectas son diferentes. $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$ $\alpha_1 \neq \alpha_3$ |
| 4 | Los términos independientes son iguales. $b_1 = b_2 = b_3$ | → | La intersección de cada una de las rectas con el eje de las ordenadas es en el mismo punto. |

Tabla. 4.13. Conexiones para responder la tarea 22. (continuación).

4. Sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica es de tres rectas cuyas intersecciones son los vértices de un triángulo.

| Representación algebraica | | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Tres ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con “$x$” e “$y$”. | → | Tres graficas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las tres ecuaciones el exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la “$x$” son diferentes. $m_1 \neq m_2 \neq m_3$ $m_1 \neq m_3$ | → | Las inclinaciones de las rectas son diferentes. $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$ $\alpha_1 \neq \alpha_3$ |
| 4 | Los términos independientes son diferentes. $b_1 \neq b_2 \neq b_3$ $b_1 \neq b_3$ | → | La intersección de cada una de las rectas con el eje de las ordenadas es en puntos distintos. |

5. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica es de dos rectas que se intersectan en una infinidad de puntos.

| Representación algebraica | | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con “$x$” e “$y$”. | → | Dos graficas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las dos ecuaciones el exponen de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la “$x$” son iguales. $m_1 = m_2$ | → | Las rectas tienen la misma inclinación. $\alpha_1 = \alpha_2$ |
| 4 | Los términos independientes son iguales. $b_1 = b_2$ | → | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en el mismo punto de este. |
| 5 | Las ecuaciones son equivalentes. | → | La representación gráfica de las rectas es la misma. |

*Comentario. Como se ha visto, en algunas ocasiones se trabaja con más de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Esto es con la finalidad de observar en qué medida los alumnos pueden transferir lo aprendido en sistemas de dos ecuaciones a, sistemas con tres o más ecuaciones. “La comprensión mejora la transferencia”, Hiebert y Carpenter (1992). Naturalmente dichos sistemas exigen al alumno un mayor trabajo de análisis en las representaciones algebraica y geométrica.*

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 22 individual. Se observa que a la mayoría de los alumnos no se les dificulta la proposición de sistemas de ecuaciones. Veintidós estudiantes (85%) responden correctamente, excepto el sistema cinco, donde sólo trece (50%) lo responden correctamente.

*Tarea 23 de equipo*. En la tarea de equipo los alumnos llegan a acuerdos rápidamente, trabajando en forma colaborativa.

*Tarea 24 grupal*. Cada representante de equipo pasa al pizarrón (forma 1, elección al azar) a escribir un sistema cada uno. Una vez que los sistemas están escritos en el pizarrón, los equipos los observan y evalúan. El profesor le indica a un representante de equipo (forma 3, probablemente este correcto) que exprese la evaluación, hecha por su equipo. No es necesario hacer correcciones de los sistemas, se llegan a acuerdos rápidamente.

> *Comentario. Para el número 5. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica es de dos rectas que se intersectan en una infinidad de puntos, se obtuvo un rendimiento grupal del 50%, todavía es baja, sin embargo es muy superior a la pregunta similar de la tarea nueve, tercera parte, en la cual sólo dos alumnos (8%) la respondieron correctamente. En este momento se hace una recapitulación de las características cualitativas de los sistemas de ecuaciones lineales, en esta misma discusión grupal.*

Para finalizar la sesión, el profesor reparte la "Tarea 25. Identificación de solución 1", individual extraclase, se asegura que se hayan entendido las consignas.

## Sesión 5

En la siguiente tabla se muestran las tareas que se trabajan en esta ocasión. Al mismo tiempo se especifican: la forma de trabajo, el título y el propósito de las mismas, es decir, lo que se espera que el estudiante logre en las tareas.

Tabla 4.14. Tareas para la sesión 5.

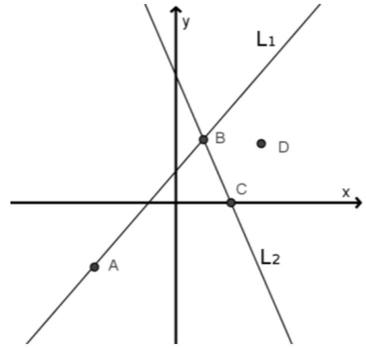
| Núm. | Forma de trabajo | Título | Propósito |
|---|---|---|---|
| 26 | E | Identificación de solución 1. | Identificar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en la representación gráfica. |
| 27 | G | | |
| 28 | I | Identificación de solución 2. | Identificar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas en la representación algebraica, como la pareja ordenada que satisface todas las ecuaciones del sistema. |
| 29 | E | | |
| 30 | G | | |
| 31 | I | Completar coordenadas de solución. | Calcular algebraicamente una coordenada, del punto de solución, dada la otra coordenada; en sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y de solución única. |
| 32 | G | | |
| 33 | I | Proposición de sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo a su solución. | Proponer ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales sin solución y con infinidad de soluciones. Así mismo proponer sistemas con solución única sobre el eje de las ordenadas y fuera del eje de las ordenadas. |
| 34 | G | | |
| 35 | I<br>Extraclase | Completar coordenadas de intersección. | Calcular algebraicamente una coordenada de los puntos en los que se intersectan las ecuaciones contempladas en sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica, gráfica, dada la otra coordenada. |

*Inicio de la sesión.* El profesor señala que se acomode el mobiliario para trabajar en equipo, actividad que se llevará a cabo en dos ocasiones en esta sesión. Los equipos se forman conforme se encuentren sentados los alumnos (forma 3). Posteriormente se empieza a trabajar con la tarea 26 que corresponde precisamente al trabajo de equipo de la “Tarea 25. Identificación de solución 1” (ver Anexo 1 Tarea 25 extraclase).

*Descripción de la tarea 25.* En la primera parte de esta tarea el alumno tiene que identificar el punto de solución de dos sistemas de ecuaciones lineales mostrados en su representación geométrica y algebraica, dichos sistemas se reproducen a continuación.

1. $y_1 = x_1 + 1$ …$L_1$

$y_2 = -2x_2 + 4$ …$L_2$

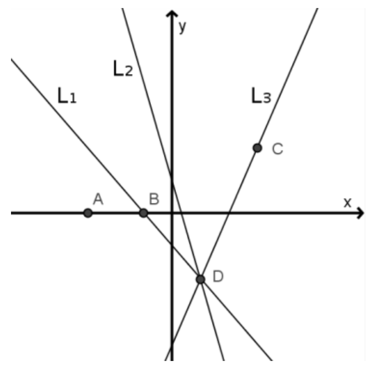



Punto de solución. __________

2. $y_1 = -x_1 - 1$ …$L_1$

$y_2 = -3x_2 + 1$ …$L_2$

$y_3 = 2x_3 - 4$ … $L_3$




Punto de solución. _________

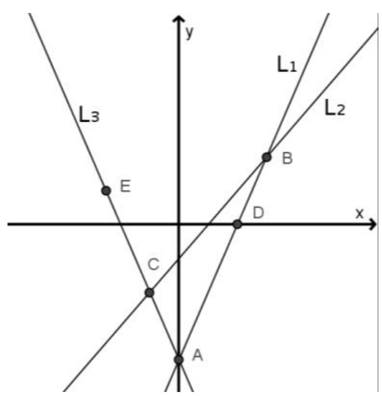
En la segunda parte, el alumno debe identificar las ecuaciones donde se localizan algunos puntos señalados en la representación gráfica, de dos sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Sistema II.1.

$y_1 = 2x_1 - 4$ …$L_1$

$y_2 = x_2 - 1$ …$L_2$

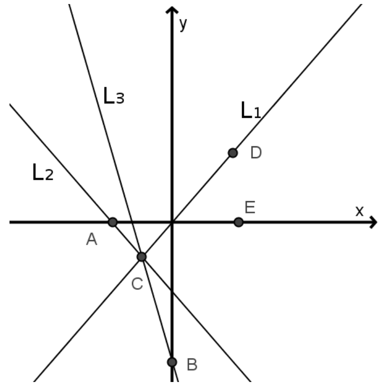
$y_3 = -2x_3 - 4$ …$L_3$




| Puntos | Ecuaciones |
|---|---|
| A | ____________ |
| B | ____________ |
| C | ____________ |
| D | ____________ |
| E | ____________ |

Sistema II.2.

$y_1 = x_1$ …L₁
$y_2 = -x_2 - 2$ …L₂
$y_3 = -3x_3 - 4$ …L₃




| Puntos | Ecuaciones |
|---|---|
| A | ___________ |
| B | ___________ |
| C | ___________ |
| D | ___________ |
| E | ___________ |

En la tercera parte, los alumnos deben contestar las siguientes preguntas.

1. ¿El sistema II.1, tiene solución única? Justifica tu respuesta.
2. ¿El sistema II.2, tiene solución única? Justifica tu respuesta.
3. ¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir un sistema de ecuaciones lineales en su representación geométrica, para que tenga solución única? Justifica tu respuesta.

*Relaciones para "construir".* Según Duval (1992) para considerar que un estudiante alcanza la comprensión, debe reconocer el objeto matemático en al menos dos representaciones y debe poder realizar la conversión entre estas. Según Hiebert y Carpenter (1992), la comprensión es el resultado de numerosas y fuertes relaciones entre ideas matemáticas, estas se pueden "construir" en la misma (o en distintas) formas de representación. Para resolver esta tarea, los alumnos deben de considerar las siguientes conexiones.

Tabla 4.15. Conexiones para resolver los cuestionamientos de la Tarea 25 (y Tarea 28).

| | Características geométricas | → | Características algebraicas |
|---|---|---|---|
| 1 | Un punto en el plano cartesiano. | → | Pareja ordenada $(x, y)$. |
| 2 | El punto pertenece a una recta. | → | La pareja ordenada del punto satisface la ecuación. |
| 3 | El punto no pertenece a la recta. | → | La pareja ordenada del punto no satisface la ecuación. |
| 4 | El punto pertenece a todas las rectas del sistema. | → | La pareja ordenada del punto satisface a todas las ecuaciones del sistema. |

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 25 individual. Veintidós alumnos (88%) responden correctamente. Sin embargo, un alumno reporta que no entendió y no hizo la tarea.

*Tarea 26 en equipo.* El alumno que no hizo la tarea en trabajo individual, es asistido por sus compañeros. Se observa buena disposición para analizar y discutir, algunos alumnos son asistidos por sus compañeros de equipo.

A continuación se muestra un diálogo que se produjo en el momento de contestar la tarea en equipo.

> Alumno (A): *"¿Qué condiciones debe tener un sistema para que tenga solución única*?"
>
> Alumno (B): "*Observa el sistema II.1, y compara con el sistema II.2, en el primero no hay solución única y en el segundo sí*".
>
> Alumno (B): "*Para que tenga solución única, todas las rectas deben pasar por un sólo punto, que es el de la solución*".

Bransford, Brown y Cocking (1999) indican que con el trabajo colectivo y la disposición de aprender de los otros se promueve el aumento de la comprensión de los alumnos. Lo expuesto en los párrafos anteriores, pueden ser ejemplos de lo señalado por los autores.

*Tarea 27 grupal.* Tres representantes de equipo expresan sus resultados (forma 1, elegidos al azar). El resto del grupo atiende y evalúa. Sin mayor discusión se llegan a acuerdos. A continuación se muestran las respuestas esperadas y el desempeño de los estudiantes.

| *Preguntas y respuestas esperadas.* | Desempeño de los estudiantes |
|---|---|
| *En la parte I, los alumnos deben señalar los puntos de intersección, que son solución de los sistemas.*<br>*1. Punto de solución B.*<br>*2. Punto de solución D.* | Todos los equipos reportan que respondieron correctamente. |

| *Preguntas y respuestas esperadas.* | Desempeño de los estudiantes |
|---|---|
| *En la parte II. Deben señalar los puntos que son solución para las ecuaciones donde se encuentran ubicados, así:*<br>*Sistema II.1.*<br>*Puntos Ecuaciones*<br>*A* $L_1$ *y* $L_3$<br>*B* $L_1$ *y* $L_2$<br>*C* $L_2$ *y* $L_3$<br>*D* $L_1$<br>*E* $L_3$<br>*Sistema II.2.*<br>*Puntos Ecuaciones*<br>*A* $L_2$<br>*B* $L_3$<br>*C* $L_1$, $L_2$ *y* $L_3$<br>*D* $L_1$<br>*E* *Ninguna* | Todos los equipos respondieron correctamente. |
| *En la parte III. Para las preguntas:* | |
| *1. ¿El sistema II.1, tiene solución única?*<br>*Respuesta. No. Porque no hay un sólo punto donde se intersecten todas las rectas.* | Todos los equipos respondieron correctamente. |
| *2. El sistema II.2, ¿tiene solución única?*<br>*Respuesta. Sí. Porque existe un sólo punto donde se intersectan todas las rectas.* | Todos los equipos respondieron correctamente. |
| *3. ¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir un sistema de ecuaciones lineales en su representación geométrica, para que tenga solución única?*<br>*Respuesta. Que todas y cada una de las rectas pasen por un mismo punto.* | Todos los equipos respondieron correctamente. |

El profesor reparte los formatos de la “Tarea 28. Identificación de solución 2” (ver Anexo 1 Tarea 28). La temática de esta tarea se trabaja de forma individual, en equipo (Tarea 29) y grupalmente (Tarea 30). El profesor se asegura que los alumnos hayan entendido la consigna, posteriormente los alumnos empiezan a trabajar.

*Descripción de la tarea 28.* Se presentan cinco sistemas de ecuaciones lineales en su representación algebraica. Para cada uno se propone una pareja ordenada, a fin de determinar si es solución de alguna o de algunas de las ecuaciones. El alumno tiene que sustituir los valores de la pareja ordenada en cada una de las ecuaciones de los sistemas y comprobar si satisface a cada una de ellas. A continuación se reproducen los sistemas y las parejas ordenadas.

| | Sistema de ecuaciones | Pareja ordenada |
|---|---|---|
| 1. | $y_1 = x_1 + 1 \ldots L_1$<br>$y_2 = -2x_2 + 4 \ldots L_2$ | (1,2) |
| 2. | $y_1 = -x_1 - 1 \ldots L_1$<br>$y_2 = -3x_2 + 1 \ldots L_2$ | (-3,2) |
| 3. | $y_1 = \frac{1}{2}x_1 - 4 \ldots L_1$<br>$y_2 = -2x_2 + 1 \ldots L_2$ | (2,-3) |
| 4. | $y_1 = -x_1 + 3 \ldots L_1$<br>$y_2 = x_2 - 4 \ldots L_2$ | (4,1) |
| 5. | $y_1 = -\frac{2}{3}x_1 + 4 \ldots L_1$<br>$y_2 = 2x_2 - 4 \ldots L_2$<br>$y_3 = x_2 - 1 \ldots L_3$ | (3,2) |

En esta tarea, se trabaja especialmente la representación algebraica, según Hiebert y Carpenter (1992) las relaciones se establecen también en una misma forma de representación. Las conexiones son las mismas que para la Tarea 25.

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 28 individual. Veintitrés alumnos (88%) responden correctamente. A continuación se señalan algunas observaciones.

> *Observaciones. En trabajo individual un alumno, empieza a resolver el ejercicio de forma gráfica correctamente, sin embargo, el profesor se extralimita en el apoyo y le indica que lo haga sustituyendo la pareja ordenada en las ecuaciones.*
>
> *Por ejemplo, en la ecuación $L_2$ del sistema 2 la operación es:*

$$2 = -3(-3) + 1$$

$$2 = 9 + 1$$

$$2 \neq 10$$

*Por lo que la pareja ordenada no es solución de la ecuación.*

*Otro alumno hace las operaciones mentales. Sin embargo, el profesor le indica que lo haga escribiendo, o que escriba como hace las operaciones mentales. El alumno responde "las operaciones son muy sencillas".*

*Tarea 29 de equipo.* Los alumnos comparan resultados y procedimientos. En algunos casos, unos alumnos explican a otros y estos otros atienden la explicación. Esto es un ejemplo de la disposición que tienen los estudiantes de aprender o compartir sus conocimientos con los compañeros. En este aspecto se coincide con lo señalado por Bransford, Brown y Cocking (1999).

En la tarea que ahora nos ocupa los equipos se formaron "de acuerdo a como están sentados" los alumnos. Se observa que de esta forma trabajan eficientemente. Puede ser porque normalmente se sientan con sus "amigos", lo cual puede favorecer la disposición de aprender de los otros y, de compartir sus conocimientos.

*Tarea 30 grupal.* El profesor le indica a un representante de equipo (forma 1, elección al azar) que exprese sus resultados en voz alta. El resto del grupo atiende. Se llegan a acuerdos rápidamente.

A continuación se indican las respuestas esperadas para esta tarea y el desempeño de los estudiantes.

Preguntas, respuestas esperadas y desempeño de los estudiantes.

| Sistemas de ecuaciones | Pareja ordenada | Respuestas esperadas Si/no | Desempeño de los estudiantes |
|---|---|---|---|
| 1. $y_1 = x_1 + 1$…$L_1$<br>$y_2 = -2x_2 + 4$…$L_2$ | (1,2) | $L_1$. Si<br>$L_2$. Si | En estas preguntas se obtuvo un 100% de respuestas correctas después del trabajo en equipo. |
| 2. $y_1 = -x_1 - 1$…$L_1$<br>$y_2 = -3x_2 + 1$…$L_2$ | (-3,2) | $L_1$. Si<br>$L_2$. No | |

Preguntas, respuestas esperadas y desempeño de los estudiantes.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3. $y_1 = \frac{1}{2}x_1 - 4$…L1<br>$y_2 = -2x_2 + 1$…L | (2,-3) | $L_1$. Si<br>$L_2$. Si | |
| 4. $y_1 = -x_1 + 3$…L1<br>$y_2 = x_2 - 4$…L2 | (4,1) | $L_1$. No<br>$L_2$. No | En estas preguntas se obtuvo un 100% de respuestas correctas después del trabajo en equipo. |
| 5. $y_1 = -\frac{2}{3}x_1 + 4$…L1<br>$y_2 = 2x_2 - 4$…L2<br>$y_3 = x_2 - 1$…L3 | (3,2) | $L_1$. Si<br>$L_2$. Si<br>$L_3$. Si | |

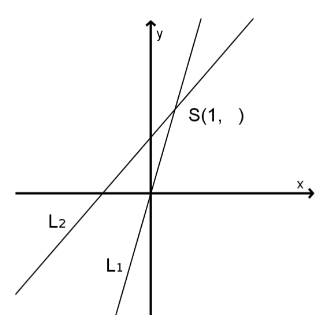
Al término de la tarea anterior, el profesor reparte la "Tarea 31. Completar coordenadas de solución" (ver Anexo 1 Tarea 31). Cuya temática se trabaja de forma individual y grupal (Tarea 32).

*Descripción de la tarea 31.* En esta tarea se muestran al alumno cuatro sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica y geométrica. Además se muestran en el bosquejo, de los dos primeros sistemas, las abscisas de los puntos de solución para que el alumno calcule las ordenadas. En los otros dos sistemas se muestran las ordenadas de los puntos de solución para que el alumno calcule las abscisas. Posteriormente se le cuestiona al alumno sobre la forma en que calcula las ordenadas o las abscisas. A continuación se reproducen los sistemas de la primera parte y, las preguntas correspondientes a la segunda parte de la tarea.

1.

$y_1 = 3x_1$ …L1

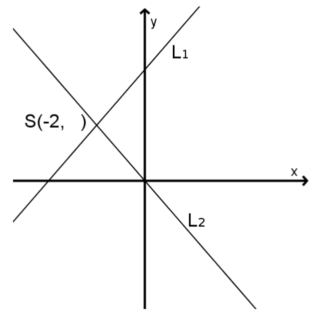
$y_2 = x_2 + 2$…L2



2.

$y_1 = x_1 + 4 \ldots L_1$

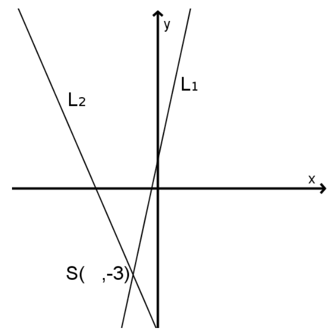
$y_2 = -x_2 \ldots L_2$




3.

$y_1 = 4x_1 + 1 \ldots L_1$

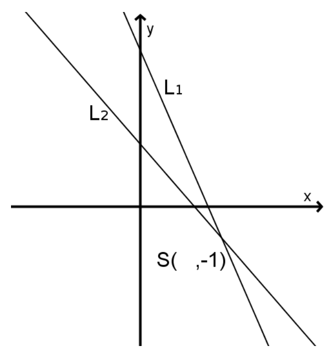
$y_2 = -2x_2 - 5 \ldots L_2$




4.

$y_1 = -2x_1 + 5 \ldots L_1$

$y_2 = -x_2 + 2 \ldots L_2$




En la segunda parte se hacen las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo calculaste la ordenada del punto de solución de los dos primeros ejercicios?
2. ¿Cómo calculaste la abscisa del punto solución en los dos últimos ejercicios?

*Relaciones para "construir".* Nuevamente se promueve la comprensión de un objeto matemático identificándolo en al menos dos formas de representación y realizando su conversión (Duval, 1992; Hiebert y Carpenter, 1992).

Las relaciones que debe construir un alumno para resolver los cuestionamientos se muestran a continuación.

Tabla 4.16. Conexiones para la Tarea 31.

| Representación geométrica | | → | Representación algebraica |
|---|---|---|---|
| 1 | En cada uno de los cuatro sistemas se presentan dos gráficas. | → | En cada uno de los cuatro sistemas se presentan dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por “$x$” e “$y$”. |
| 2 | Las dos gráficas asociadas a cada una de las ecuaciones de los cuatro sistemas son rectas. | → | En las dos ecuaciones de cada uno de los cuatro sistemas el exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” está despejada. |
| 3 | En los cuatro sistemas las dos rectas mostradas en cada uno, se intersectan en un punto fuera del eje de las ordenadas. | → | En las dos ecuaciones algebraicas de cada uno de los cuatro sistemas se cumple que, los coeficientes de la “$x$” son distintos y los términos independientes también. |
| Sistema 1 | | | |
| 4 | Se proporciona la abscisa del punto de solución $x = 1$. | → | Se sustituye la abscisa en cualquiera de las dos ecuaciones para calcular la ordenada del punto de solución. |
| Sistema 2 | | | |
| 5 | Se proporciona la abscisa del punto de solución $x = -2$. | → | Se sustituye la abscisa en cualquiera de las dos ecuaciones para calcular la ordenada del punto de solución. |
| Sistema 3 | | | |
| 6 | Se proporciona la ordenada del punto de solución $y = -3$. | → | Se sustituye la ordenada en cualquiera de las ecuaciones para calcular la abscisa del punto de solución. |
| Sistema 4 | | | |
| 7 | Se proporciona la ordenada del punto de solución $y = -1$. | → | Se sustituye la ordenada en cualquiera de las ecuaciones para calcular la abscisa del punto de solución. |

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 31 individual. Nuevamente el rendimiento de los estudiantes es superior al 92% de conexiones correctas. La afirmación anterior es válida tanto para la algoritmia, como para la comunicación por escrito para explicar dicha algoritmia.

> *Observaciones. En el trabajo individual, a un estudiante se le hace la aclaración de que, en los dos primeros ejercicios se proporciona la abscisa del punto de solución, en los otros dos se muestra la ordenada.*
>
> *Otro estudiante preguntó, “¿dónde se tiene que sustituir en la primera o en la segunda ecuación?” el profesor responde, que los datos proporcionados*

*están en el punto de solución. El estudiante menciona que: "es cierto, entonces se sustituye en las dos ecuaciones". Cuando el alumno termina de trabajar el profesor le pregunta "¿cómo son tus resultados?", el alumno responde que: "da lo mismo en las dos ecuaciones". Al final de la discusión grupal, el profesor menciona que se pudo haber calculado con cualquiera de las ecuaciones.*

*Nuevamente hay un estudiante que hace las operaciones mentales, el profesor le indica, que estos ejercicios se programaron sencillos para que no tuvieran dificultad para calcular, pero que al menos indique, como los calculó mentalmente.*

*Para los ejercicios tres y cuatro, donde se tiene que sustituir la ordenada y despejar la abscisa, un alumno pregunta al profesor cómo se hace ese procedimiento. Esto sucede en el sistema 3, ecuación* $L_2$*. Donde se proporciona el valor de la ordenada de -3. El profesor le indica al alumno que sustituya el -3 en lugar de* $y_2$*, para que posteriormente realice el despeje.*

$$-3 = -2x_2 - 5 \ldots \mathrm{L}_2$$

$$-3 + 5 = -2x_2$$

$$2 = -2x_2$$

$$-\frac{2}{2} = x_2$$

$$x_2 = -1$$

*Se observa que los estudiantes calcularon la coordenada faltante de tres formas diferentes: algunos con las dos ecuaciones, otros con sólo una ecuación y otros más lo hicieron mentalmente.*

*Algunos alumnos que lo hicieron con las dos ecuaciones responden que fue para comprobar el resultado. Los que usaron sólo una ecuación expresan "porque da el mismo resultado, ya que en el punto de intersección las abscisas tienen el mismo valor y las ordenadas también". Los alumnos que calcularon mentalmente expresan que "las ecuaciones están muy fáciles y así se equivocan menos".*

*Tarea 32 grupal.* El profesor pregunta a un estudiante el resultado de la pregunta uno, a otro el de la pregunta dos, y así sucesivamente (forma 1, elección al azar). El resto del grupo atiende.

Las respuestas esperadas y el desempeño de los estudiantes en la práctica se muestran a continuación.

| *Respuestas esperadas.* | Desempeño de los estudiantes |
|---|---|
| *Parte I.* | |
| *Sistema 1. Pareja ordenada (1,3)*<br>*Sistema 2. Pareja ordenada (-2,2)*<br>*Sistema 3. Pareja ordenada (-1,-3)*<br>*Sistema 4. Pareja ordenada (3,-1)* | Veinticuatro alumnos (92%), responden correctamente. El resto del grupo toma nota. |
| *Parte II.* | |
| *1. ¿Cómo calculaste la ordenada del punto de solución en los dos primeros ejercicios?*<br>*Respuesta: sustituyendo la abscisa y calculando la ordenada.* | Un alumno responde que: "sustituyendo los valores de "$x$" y calculando el valor de $y$". La mayoría de los estudiantes (92%) lo apoya y el resto toma nota. |
| *2. ¿Cómo calculaste la abscisa del punto de solución en los dos últimos ejercicios?*<br>*Respuesta: sustituyendo la ordenada, despejando la abscisa y calculando.* | Un alumno responde que: "sustituyendo "$y$", y calculando el valor de $x$". La mayoría de los estudiantes (92%) lo apoya y el resto toma nota. |

La sesión prosigue con la "Tarea 33. Proposición de sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo a su solución" (ver Anexo 1 Tarea 33). Los cuestionamientos de esta tarea se trabajan de forma individual y grupal (Tarea 34). El profesor reparte la tarea y se asegura que se hayan entendido las consignas.

*Descripción de la tarea 33.* El alumno tiene que proponer sistemas en sus representaciones algebraica y gráfica de acuerdo a las siguientes condiciones.

1. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene una solución en cualquier punto que no se encuentre en el eje de las ordenadas.
2. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene una solución en cualquier punto del eje de las ordenadas (eje "y").
3. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que no tiene solución.
4. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene una infinidad de soluciones.

5. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene una solución en el eje "$x$".

*Relaciones para "construir".* Nuevamente se promueve la comprensión de un objeto matemático identificándolo en al menos dos formas de representación y realizando su conversión (Duval, 1992; Hiebert y Carpenter, 1992). En la siguiente tabla el símbolo → significa "se relaciona con".

Tabla 4.17. Conexiones para responder la tarea 33.

1. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene una solución en cualquier punto que no se encuentre en el eje de las ordenadas.

| | Representación algebraica | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Dos graficas en el plano cartesiano. |
| 2 | El exponente de la "$x$" es uno cuando la "$y$" esta despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la "$x$" son diferentes. $m_1 \neq m_2$ | → | Las inclinaciones de las rectas son diferentes. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ |
| 4 | Los términos independientes son diferentes. $b_1 \neq b_2$ | → | La intersección de cada una de las rectas con el eje de las ordenadas es en puntos diferentes. |

2. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene una solución en cualquier punto del eje de las ordenadas (eje "y").

| | Representación algebraica | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Dos graficas en el plano cartesiano. |
| 2 | El exponente de la "$x$" es uno cuando la "$y$" esta despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la "$x$" son diferentes. $m_1 \neq m_2$ | → | Las inclinaciones de las rectas son diferentes. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ |
| 4 | Los términos independientes son iguales. $b_1 = b_2$ | → | La intersección de cada una de las rectas con el eje de las ordenadas es en el mismo punto. |

3. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que no tiene solución.

| | Representación algebraica | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Dos graficas en el plano cartesiano. |
| 2 | El exponente de la "$x$" es uno cuando la "$y$" esta despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la "$x$" son iguales. $m_1 = m_2$ | → | Las inclinaciones de las rectas son iguales. $\alpha_1 = \alpha_2$ |
| 4 | Los términos independientes son diferentes. $b_1 \neq b_2$ | → | La intersección de cada una de las rectas con el eje de las ordenadas es en puntos distintos. |
| 5 | $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$ | | Se trata de rectas paralelas diferentes una de la otra. |

Tabla 4.17. Conexiones para responder la tarea 33. (continuación).

4. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene una infinidad de soluciones.

| | Representación algebraica | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con “$x$” e “$y$”. | → | Dos graficas en el mismo plano cartesiano. |
| 2 | El exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la “$x$” son iguales. $m_1 = m_2$ | → | Las inclinaciones de las rectas son iguales. $\alpha_1 = \alpha_2$ |
| 4 | Los términos independientes son iguales $b_1 = b_2$ | → | La intersección de cada una de las rectas con el eje de las ordenadas es en el mismo punto. Se trata de la misma recta. |
| 5 | $m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$ | | Se trata de la misma recta, o una recta encima de la otra que se intersectan en todos sus puntos |

5. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene una solución en el eje “$x$”.

| | Representación algebraica | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con “$x$” e “$y$”. | → | Dos graficas en el mismo plano cartesiano. |
| 2 | El exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la “$x$” son diferentes. $m_1 \neq m_2$ | → | Dos rectas con inclinaciones diferentes. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ |
| 4 | Los términos independientes son diferentes. $b_1 \neq b_2$ | → | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en puntos distintos. |
| 5 | Los coeficientes y los términos independientes de las ecuaciones cumplen con: $\frac{b_1}{m_1} = \frac{b_2}{m_2}$ Con $m_1$ y $m_2$ diferentes de cero. | → | Las rectas se intersectan entre ellas sobre un punto del eje de las abscisas. |

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 33 individual. Los alumnos muestran mayor habilidad para proponer los sistemas que en otras tareas similares. Veintiún alumnos (81%) responden correctamente, excepto el sistema 5 donde sólo diez (38%), responden correctamente.

> *Observaciones. Un estudiante le pregunta al profesor “¿dónde está el punto de solución?”, la respuesta del profesor es: “acabamos de ver dos tareas donde trabajamos el punto de solución, entonces dime tú donde está el*

*mencionado punto", el estudiante piensa un poco y señala "donde se cruzan las ecuaciones", acto seguido empieza a trabajar.*

*Todavía hay alumnos (pocos) que tienen dificultades con las condiciones que deben tener las ecuaciones, el profesor les señala que pueden revisar las tareas 9, 11, 14 y 22 para guiarse, sin que las copien.*

*Para el sistema cuatro, $L_1$ es igual a $L_2$, cabe recordar que para estas condiciones de pendientes y ordenadas iguales, sólo dos alumnos (8% del grupo) respondieron correctamente en la tarea 9; en la Tarea 22, trece alumnos (50%) y; en esta Tarea 33 veintiún alumnos (81%) responden correctamente. Como se observa, en la tarea que nos ocupa el desempeño de los estudiantes mejora significativamente.*

*Tarea 34 grupal.* El profesor indica a cinco alumnos que pasen al pizarrón (forma 1, elección al azar) a escribir un sistema cada uno. Cuando los sistemas se encuentran escritos en el pizarrón, todos los estudiantes los observan y evalúan, el profesor le indica a un alumno que exprese su evaluación en voz alta (forma 3, con probabilidad de que conteste correctamente).

*Observaciones. El estudiante que escribe en el pizarrón el sistema 1, lo escribe de forma incorrecta, ya que propone un sistema de dos ecuaciones paralelas, inmediatamente varios estudiantes detectan el error. Acto seguido, pasa otro estudiante a proponer un sistema correcto. Los sistemas 2, 3, 4 y 5 se escriben correctamente en el pizarrón.*

*De las cinco situaciones, la que ofrece mayor dificultad es cuando las rectas se intersectan en el eje "$x$", aparte de identificar pendientes diferentes y ordenadas al origen diferentes, el alumno tiene que proponer las condiciones para que la intersección sea precisamente en el eje mencionado. Para este mismo sistema hay aproximadamente diez estudiantes que lo proponen correctamente desde el trabajo individual.*

*Llama la atención que un estudiante propone la ecuación $y_1 = 0$, que junto con cualquier otra, con pendiente diferente de cero, produce un sistema que aparentemente corresponde a lo solicitado. Sin embargo, se están solicitando dos rectas que se intersecten en el eje de las abscisas y, no la* *intersección de una recta con el mencionado eje, que es lo que el alumno propone.*

La sesión prosigue con la entrega de los formatos de la "Tarea 35. Completar coordenadas de intersección", extraclase. Como es costumbre, el profesor se asegura que los alumnos hayan entendido las consignas y la sesión termina.

## Sesión 6

En la siguiente tabla se muestran las tareas que se trabajan en esta ocasión. Al mismo tiempo se especifican: la forma de trabajo, el título y el propósito de las mismas, es decir, lo que se espera que el estudiante logre en las tareas.

Tabla 4.18. Tareas para la sesión 6.

| Núm. | Forma de trabajo | Título | Propósito |
|---|---|---|---|
| 36 | G | Completar coordenadas de intersección. | Calcular algebraicamente una coordenada de los puntos en los que se intersectan las ecuaciones contempladas en sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica, gráfica, dada la otra coordenada. |
| 37 | I | Cálculo de solución en alguno de los ejes. | Calcular la solución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en la representación algebraica, cuando ésta se produce en alguno de los ejes. |
| 38 | E | | |
| 39 | G | | |
| 40 | I | Condiciones del punto de intersección. | Identificar que en el punto de intersección de las gráficas de un sistema, la pareja ordenada del mismo, satisface a todas las ecuaciones. |
| 41 | E | | |
| 42 | G | | |

*Inicio de la sesión.* El profesor indica que se acomode el mobiliario y que se formen los equipos. En esta ocasión, los equipos se forman con los integrantes seleccionados al azar (forma 2). La sesión comienza con la Tarea 36 que es la discusión grupal de la "Tarea 35. Completar coordenadas de intersección", extraclase (ver Anexo 1 Tarea 35).

*Descripción de la tarea 35.* En sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, puede suceder que tengan solución única, que no tengan solución o que existan subsistemas (con soluciones para cada uno de estos). El alumno debe reconocer el tipo de solución y completar las coordenadas de los puntos de intersección.

En este trabajo se decide promover y evaluar el aprendizaje con comprensión. Según Hiebert y Carpenter (1992) la comprensión favorece la transferencia. Ésta es considerable cuando el alumno puede "transferir" lo que ha aprendido en sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, a sistemas con tres ecuaciones lineales.

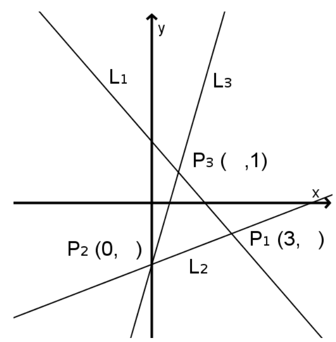
A continuación se reproduce sólo el primer sistema de la Tarea 35. Este constituye un ejemplo. El alumno debe completar la tabla correspondiente.

1.

$y_1 = -x_1 + 2 \ldots L_1$

$y_2 = \frac{1}{3}x_2 - 2 \ldots L_2$

$y_3 = 3x_3 - 2 \ldots L_3$




| Puntos de intersección | Rectas que se intersectan: subsistema | Abscisa del punto | Ordenada del punto | Ecuación usada para cálculos |
|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | | 3 | | |
| $P_2$ | | 0 | | |
| $P_3$ | | | 1 | |

Nuevamente se presentan los sistemas en sus representaciones algebraica y geométrica para que el alumno establezca relaciones. Para completar correctamente la tabla anterior, el estudiante debe realizar las siguientes acciones:

i) Reconocer que cada uno de los puntos de intersección, son solución de cada una de las ecuaciones que se intersectan en dicho punto; por lo que, cada uno de los puntos, es solución de un subsistema.

ii) Identificar qué ecuaciones se intersectan en cada uno de los puntos para establecer cuáles son los subsistemas algebraicos.

iii) Identificar el dato del punto de intersección, abscisa u ordenada, que se muestra en el bosquejo.

iv) Considerar que la coordenada faltante se puede calcular con cualquiera de las ecuaciones del subsistema.

v) Sustituir en alguna de las ecuaciones, la abscisa o la ordenada (según sea el caso), para calcular la coordenada faltante.

A continuación se muestra la referida tabla con las respuestas esperadas.

Respuestas para el primer sistema de la tarea 35.

| Puntos de intersección | Rectas que se intersectan subsistema | Abscisa del punto | Ordenada del punto | Ecuación usada para cálculos |
|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | $L_1$ y $L_2$ | 3 | -1 | $L_1$ o $L_2$ |
| $P_2$ | $L_2$ y $L_3$ | 0 | -2 | $L_2$ o $L_3$ |
| $P_3$ | $L_1$ y $L_3$ | 1 | 1 | $L_1$ o $L_3$ |

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 35 individual. Se observa una buena disposición de los alumnos para resolver los cuestionamientos. Veinte alumnos (77%) responden correctamente.

*Tarea 36 grupal.* El profesor elige a un alumno (forma 2, probablemente enriquezca la discusión) para que lea sus respuestas. El alumno lee sus respuestas las cuales son correctas. Sin embargo, cuando menciona las ecuaciones que usa para el cálculo de la coordenada faltante, manifiesta que lo hace a través del bosquejo. Lo que este alumno hace, a decir de él, por ejemplo: para el punto $P_1$, es observar la longitud que hay del origen a la abscisa, que tiene un valor de 3 y estima que la distancia que hay del origen a la ordenada es aproximadamente un tercio de la distancia anterior, por lo que la ordenada de dicho punto es -1. Es decir, el alumno estima su respuesta con el bosquejo de la representación geométrica, pero naturalmente, en este tipo de casos se pueden producir equívocos.

Posteriormente, el profesor elige a otro estudiante (forma 3, probablemente conteste correctamente) para contestar, el cual realiza los cálculos algebraicamente, este segundo alumno tiene las respuestas correctas.

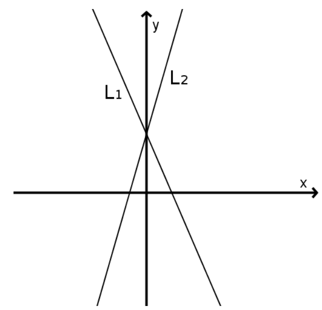
En trabajo grupal, se discute que no se puede calcular de manera exacta la abscisa o la ordenada de un punto utilizando el bosquejo, estas sólo se pueden obtener cuando se trabaja algebraicamente o con una “gráfica precisa” de las ecuaciones.

La sesión prosigue con la “Tarea 37. Cálculo de solución en alguno de los ejes” (ver Anexo1, Tarea 37). Después del trabajo individual, los cuestionamientos se abordan en equipo (Tarea 38) y grupalmente (Tarea 39).

*Descripción de la tarea 37.* En la primera parte, se presentan sistemas de dos y tres ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica y geométrica para que el alumno los resuelva. La solución de los sistemas se encuentra en alguno de los ejes. A continuación se reproducen los ejercicios de la primera parte y las preguntas relacionadas a estos, que corresponden a la segunda parte de la tarea.

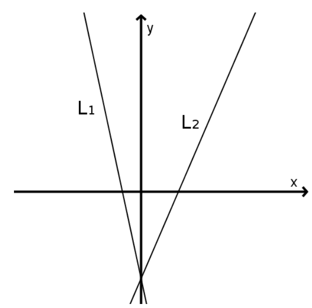
1. $y_1 = -2x_1 + 2$ …L1

   $y_2 = 3x_2 + 2$ …L2




2. $y_1 = -4x_1 - 3$ …L1

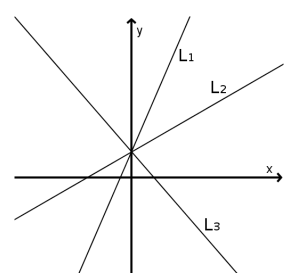
   $y_2 = 2x_2 - 3$ …L2



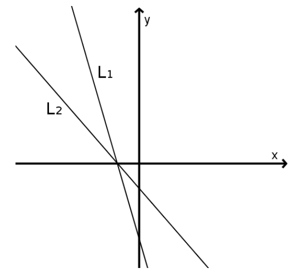

3. $y_1 = 2x_1 + 1$ …L1

   $y_2 = \frac{1}{2}x_2 + 1$ …L2

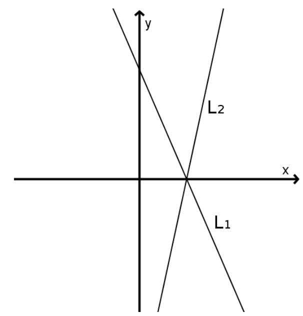
   $y_3 = -x_3 + 1$ …L3



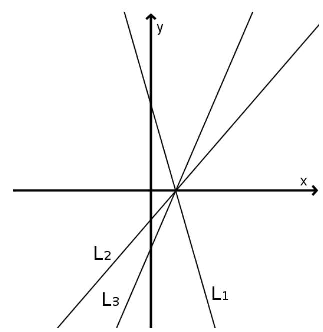
4. $y_1 = -3x_1 - 3$ …L1
$y_2 = -x_2 - 1$ …L2




5. $y_1 = -2x_1 + 4$ …L1
$y_2 = 4x_2 - 8$ …L2




6. $y_1 = -3x_1 + 3$ …L1
$y_2 = x_2 - 1$ …L2
$y_3 = 2x_3 - 2$ …L3




De acuerdo a los ejercicios anteriores, contesta los siguientes cuestionamientos.

1. ¿Cómo encontraste la solución en los primeros tres ejercicios?
2. ¿Cómo encontraste la solución en los últimos tres ejercicios?

*Relaciones para "construir".* Nuevamente se presenta el trabajo entre dos formas de representación para que el estudiante establezca relaciones, de acuerdo a los señalamientos de Duval (1992) y Hiebert y Carpenter (1992).

Tabla 4.19. Conexiones para la Tarea 37.

| | Representación algebraica | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | En todos los sistemas se presentan ecuaciones con dos incógnitas. | → | En todos los sistemas se presentan gráficas en el plano cartesiano. |
| 2 | En todas las ecuaciones de los sistemas, el exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” está despejada. | → | En todos los sistemas las gráficas son líneas rectas. |
| Sistema 1 | | | |
| 3 | Las dos ecuaciones tienen los coeficientes de la “$x$” diferentes y términos independientes iguales. | → | Las dos rectas se intersectan entre ellas en un punto en el eje de las ordenadas. |
| Sistema 2 | | | |
| 4 | Las dos ecuaciones tienen los coeficientes de la “$x$” diferentes y términos independientes iguales. | → | Las dos rectas se intersectan entre ellas en un punto en el eje de las ordenadas. |
| Sistema 3 | | | |
| 5 | Las tres ecuaciones tienen los coeficientes de la “$x$” diferentes y los términos independientes iguales. | → | Las tres rectas se intersectan entre ellas en un punto sobre el eje de las ordenadas. |
| Sistema 4 | | | |
| 6 | Las dos ecuaciones tienen los coeficientes de la “$x$” diferentes, los términos independientes diferentes y: $\frac{b_1}{m_1}=\frac{b_2}{m_2}$ | → | Las dos rectas se intersectan entre ellas en un punto sobre el eje de las abscisas. |
| Sistema 5 | | | |
| 7 | Las dos ecuaciones tienen los coeficientes de la “$x$” diferentes, los términos independientes diferentes y: $\frac{b_1}{m_1}=\frac{b_2}{m_2}$ | → | Las dos rectas se intersectan entre ellas en un punto sobre el eje de las abscisas. |
| Sistema 6 | | | |
| 8 | Las tres ecuaciones tienen los coeficientes de la “$x$” diferentes, los términos independientes diferentes y: $\frac{b_1}{m_1}=\frac{b_2}{m_2}=\frac{b_3}{b_3}$ | → | Las tres rectas se intersectan entre ellas en un punto sobre el eje de las abscisas. |

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 37 individual. En virtud de la dificultad que tuvieron algunos alumnos para empezar a trabajar, hubo necesidad de establecer un “pequeño” trabajo grupal.

> *Observaciones. Algunos alumnos, tiene dificultad para empezar a trabajar, ya que en esta ocasión “no se proporciona (explícitamente) uno de los valores de la pareja ordenada que es solución del sistema”, sin embargo, la*

*solución se produce en alguno de los ejes, por lo que al analizar el bosquejo se puede "observar" el valor de una coordenada. Si la solución es en el eje "x" la ordenada de la solución tiene un valor de cero; si es en el eje "y" la abscisa de la solución tiene un valor de cero. Lo anteriormente señalado se manifestó en la siguiente discusión.*

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *Escucha.* | Alumno (A): "Ahora no proporcionó ninguna coordenada, por lo que no puede ser exacto" |
| *"En esta tarea no se les proporcionó numéricamente una de las dos coordenadas, pero, analicen bien la gráfica y seguramente descubrirán un dato".* | Alumno (B): "Una coordenada la podemos observar en el punto de intersección que se ve en el bosquejo". |

En el trabajo individual, veinte alumnos (77%) responden correctamente, el resto tiene la oportunidad de ser asistido por sus compañeros en trabajo de equipo.

*Tarea 38 de equipo.* En algunos equipos, se ayudan mutuamente, en otros hay discusión. Se observa que cuando los equipos se forman con integrantes seleccionados al azar, el trabajo no es tan colaborativo como se espera, en comparación que cuando trabajan con sus compañeros más cercanos. Sin embargo, trabajan eficientemente.

*Tarea 39 grupal.* El profesor indica que cada representante de equipo (forma 1, al azar) mencione el resultado de un sistema. El grupo atiende. Las respuestas son correctas.

*Observación. Tres alumnos están de acuerdo que en los primeros tres ejercicios no es necesario hacer ningún cálculo, ya que la abscisa es cero y la ordenada se "lee" del término independiente de cualquier ecuación del sistema.*

*Nuevamente hay varios (tres) alumnos que sustituyen y hacen los cálculos mentalmente.*

La sesión prosigue con la "Tarea 40. Condiciones del punto de intersección" (ver Anexo1 Tarea 40). Después del trabajo individual, los cuestionamientos se abordan en equipo

(Tarea 41) y grupalmente (Tarea 42). El profesor reparte el formato de la tarea y se asegura que se hayan entendido las consignas.

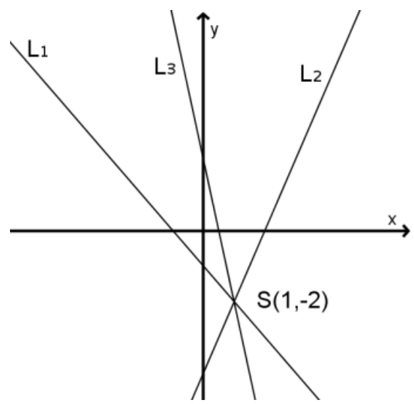
*Descripción de la tarea 40.* En esta tarea se pretende que el alumno haga explícito que la abscisa y la ordenada del punto de solución de un sistema, tienen el mismo valor en cada una de las ecuaciones involucradas en un sistema.

A continuación se reproduce como ejemplo el sistema número 2. Después de observar el sistema en sus representaciones algebraica y geométrica, el alumno tiene que contestar un cuestionamiento del tipo "verdadero-falso".

$y_1 = -x_1 - 1$ …L1

$y_2 = 2x_2 - 4$ …L2

$y_3 = -4x_3 + 2$ …L3




Recuerda que:

$(x_1, y_1)$ Representa cada punto de la recta L1.

$(x_2, y_2)$ Representa cada punto de la recta L2.

$(x_3, y_3)$ Representa cada punto de la recta L3.

Algunas condiciones en el punto de solución S son:

| | |
|---|---|
| a. $x_1 < x_2 < x_3$ … (V) o (F).<br>b. $x_1 = x_2 \neq x_3$ … (V) o (F).<br>c. $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ … (V) o (F).<br>d. La pareja ordenada se puede representar por $(x_1, y_3)$ … (V) o (F). Porque ______________________ | e. $y_1 > y_2 > y_3$ … (V) o (F).<br>f. $y_1 \neq y_2 = y_3$ … (V) o (F).<br>g. $y_1 = y_2 = y_3 = -2$ … (V) o (F).<br>h. La pareja ordenada se puede representar por $(x_2, y_1)$ … (V) o (F). Porque ____________________ |

*Relaciones para "construir".* En las representaciones algebraica y geométrica, se promueve que el alumno identifique la característica del punto de intersección: la abscisa y la ordenada del punto de intersección satisfacen a todas las ecuaciones del sistema.

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 40 individual. Los alumnos trabajan con entusiasmo. Veintiuno estudiantes (81%) responden correctamente. Los alumnos que no respondieron correctamente en trabajo individual, tienen la oportunidad de ser asistidos en trabajo de equipo.

*Tarea 41 de equipo.* Se observa un trabajo colaborativo eficiente.

> *Observación. Un estudiante, en su trabajo individual, sustituyó los valores de las parejas ordenadas en las ecuaciones, a decir de él, "para comprobar". Luego en trabajo de equipo, otro estudiante le indica que no tienen que sustituir sino sólo indicar las igualdades entre las abscisas y, entre las ordenadas. Éste hecho puede ser un ejemplo del trabajo colaborativo según lo mencionan Bransford, Brown y Cocking (1999).*

*Tarea 42 grupal.* El profesor indica a tres representantes de equipo (forma1, elección al azar) que mencionen las repuestas para un sistema, cada uno. El resto del grupo atiende y verifica que los resultados sean correctos. La totalidad de los equipos responden correctamente.

Al término de la discusión grupal, el profesor señala que la sesión ha concluido. En esta ocasión no se deja tarea extraclase.

## Sesión 7

En la siguiente tabla se muestran las tareas que se trabajan en esta ocasión. Al mismo tiempo se especifican: la forma de trabajo, el título y el propósito de las mismas, es decir, lo que se espera que el estudiante logre en las tareas.

Tabla 4.20. Tareas para la sesión 7.

| Núm. | Forma de trabajo | Título | Propósito |
|---|---|---|---|
| 43 | G | Métodos de solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: igualación y sustitución. | Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por los métodos de igualación y sustitución, al tiempo que se analiza cómo se resuelven, a fin de establecer cuál es el procedimiento. |
| 44 | I<br>Extraclase | Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. | Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por los métodos de igualación y sustitución. Describir dichos métodos por escrito y, verificar ventajas y desventajas en el uso de cada uno de ellos. |

*Inicio de la sesión.* El profesor indica que en esta sesión se trabaja con la “Tarea 43. Métodos de solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: igualación y sustitución”, cuya temática se trabaja sólo en forma grupal.

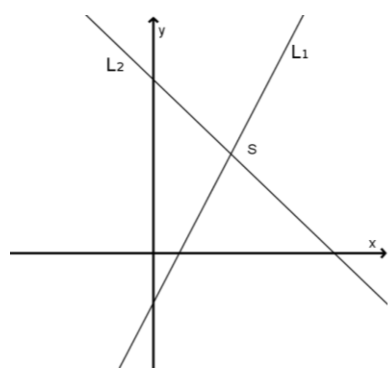
*Descripción de la tarea 43.*

I. Discusión para los métodos de reducción.

En discusión grupal, el profesor escribe el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y, guiado por los alumnos bosqueja cada una de las ecuaciones.

$y_1 = 2x_1 - 2$ …$L_1$

$y_2 = -x_2 + 7$ …$L_2$




El profesor hace las indicaciones o preguntas y los alumnos van respondiendo de forma verbal, los alumnos responden pidiendo la palabra.

<table>
<tr><th>Profesor</th><th colspan="2">Alumnos</th></tr>
<tr><td>En el punto de solución S,<br>“¿Cómo son $x_1$ y $x_2$?”</td><td colspan="2">Un alumno responde que $x_1 = x_2$, el resto del grupo lo apoya.</td></tr>
<tr><td>“¿Cómo son $y_1$ e $y_2$?”</td><td colspan="2">Un alumno menciona que $y_1 = y_2$, el resto del grupo lo apoya</td></tr>
<tr><td>“¿La incógnita $x_1$ puede ser sustituida por la incógnita $x_2$ o, viceversa?”</td><td colspan="2">La mayoría responde sí, al unísono.</td></tr>
<tr><td>“¿La incógnita $y_1$ puede ser sustituida por la incógnita $y_2$ o, viceversa?”</td><td colspan="2">La mayoría responde sí, al unísono.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">“Con base en las preguntas anteriores, escriban en su cuaderno, tres formas diferentes de escribir el sistema de ecuaciones que nos ocupa”.</td><td colspan="2">Los alumnos pueden escribir alguna(s) de las siguientes.</td></tr>
<tr><td>$y_1 = 2x_2 - 2$ …L1<br>$y_2 = -x_1 + 7$ …L2</td><td>$y_2 = 2x_1 - 2$ …L1<br>$y_1 = -x_2 + 7$ …L2</td></tr>
<tr><td>$y_1 = 2x_1 - 2$ …L1<br>$y_1 = -x_2 + 7$ …L2</td><td>$y_2 = 2x_1 - 2$ …L1<br>$y_2 = -x_2 + 7$ …L2</td></tr>
<tr><td>$y_1 = 2x_1 - 2$ …L1<br>$y_2 = -x_1 + 7$ …L2</td><td>$y_1 = 2x_2 - 2$ …L1<br>$y_2 = -x_2 + 7$ …L2</td></tr>
<tr><td>$y_1 = 2x_1 - 2$ …L1<br>$y_1 = -x_1 + 7$ …L2</td><td>$y_2 = 2x_2 - 2$ …L1<br>$y_2 = -x_2 + 7$ …L2</td></tr>
</table>

Antes de que los alumnos empiecen a escribir las diferentes combinaciones de los sistemas en su cuaderno, el profesor escribe un ejemplo de estos en el pizarrón.

El profesor indica a varios alumnos que mencionen algunas formas del sistema, los escribe en el pizarrón y los numera. Los alumnos mencionan cinco formas diferentes de las mostradas anteriormente.

<table>
<tr><th>Profesor</th><th>Alumnos</th></tr>
<tr><td>“Es posible decir que el sistema original es<br>$y_1 = 2x_1 - 2$ …L1<br>$y_2 = -x_2 + 7$ …L2<br>¿Cuantas incógnitas están escritas en este sistema?”</td><td>Un alumno responde que cuatro, los demás lo respaldan.</td></tr>
</table>

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *Indica a los alumnos: "de las formas mostradas en el pizarrón, señala una expresión en la cual sólo hay tres incógnitas". Espera las respuestas, hasta que se elige la mostrada a la derecha.* | Un alumno señala la siguiente. $y_1 = 2x_1 - 2$ …$L_1$ $y_1 = -x_2 + 7$ …$L_2$ El resto del grupo lo respalda. |
| *Indica a los alumnos: "de las formas mostradas en el pizarrón, señala alguna expresión en la cual sólo haya dos incógnitas". Nuevamente elige la forma mostrada a la derecha.* | Un alumno señala la siguiente. $y_1 = 2x_1 - 2$ …$L_1$ $y_1 = -x_1 + 7$ …$L_2$ El resto del grupo lo respalda. |
| *"De esta manera, se ha reducido el sistema de dos ecuaciones lineales con cuatro incógnitas a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. ¿Es posible reducir aún más el sistema? Argumenta tu respuesta".* | Un alumno señala que si, por el método de sustitución. Otro alumno menciona que existen varios métodos, pero no se acuerda de cuales son. Otros alumnos mencionan que no recuerdan los métodos. |

En este punto, el profesor deja que los alumnos trabajen por sí solos; les da unos minutos de trabajo individual, y otros de trabajo en parejas, con sus compañeros de banca.

> *Comentario. Se espera que los alumnos mencionen y desarrollen alguno de los siguientes métodos: igualación, sustitución o gráfico. El método gráfico se trabaja en la Tarea 50, en este momento se desarrollan los métodos de igualación y de sustitución.*

Algunos alumnos proponen "igualar las ecuaciones". El profesor le indica a un alumno que mencione la expresión que resulta de igualar las ecuaciones y, la escribe en el pizarrón. El profesor señala a los alumnos que la resuelvan.

*Por igualación.*

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *Observa el trabajo de los alumnos.* | Trabajan de forma individual. Trece alumnos (50%) lo resuelven satisfactoriamente |
| *Observa que los alumnos empiezan a trabajar a partir de la expresión mostrada a la derecha.* | $2x_1 - 2 = -x_1 + 7$ |

| | | |
|---|---|---|
| *Observa que algunos alumnos hacen adecuadamente los pasos algebraicos para obtener el valor de "$x_1$".* | $2x_1 + x_1 = 7 + 2$<br>$3x_1 = 9$<br>$x_1 = 3$ | |
| *Señala: "algunos de ustedes ya obtuvieron el valor de "$x_1$", ¿cómo se puede obtener el valor de "$y_1$"?* | Un alumno responde que sustituyendo el valor que se acaba de obtener de "$x_1$" en cualquiera de las ecuaciones. Algunos alumnos lo apoyan. | |
| *Observa que algunos alumnos sustituyen correctamente en ecuación $L_1$ y otros en $L_2$.* | En $L_1$.<br>$y_1 = 2(3) - 2$<br>$y_1 = 4$ | En $L_2$.<br>$y_1 = -(3) + 7$<br>$y_1 = 4$ |
| *Observa que algunos alumnos escriben en su cuaderno la pareja ordenada que es solución al sistema.* | (3,4) | |

*Observación. Trece alumnos (50%) resuelven el sistema correctamente. El resto del grupo toma nota para realizar el ejercicio, como tarea extraclase.*

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *Le indica a un alumno (forma 1, al azar) que mencione cómo es el procedimiento.* | • "Se igualan las ecuaciones".<br>• "se despeja $x$".<br>• "el valor obtenido se sustituye en alguna de las ecuaciones".<br>• "se calcula el valor de $y$". |
| *"Alcen la mano, los que están de acuerdo con el procedimiento que mencionó su compañero"* | La totalidad del grupo está de acuerdo. |

El profesor menciona que precisamente por igualar las ecuaciones, este método se llama "Igualación". En seguida pone dos ejemplos en el pizarrón para que sean resueltos por los alumnos en trabajo individual.

Ejemplo 1.

$y = 2x - 4$ …$L_1$

$y = -x + 5$ …$L_2$

Ejemplo 2.

$y = -3x - 3$ …$L_1$

$y = x + 5$ …$L_2$

Luego de que la mayoría del grupo termina. El profesor elije a dos alumnos (forma 3 con probabilidad de que contesten correctamente) para que pasen al pizarrón a escribir el procedimiento de un ejemplo cada uno, estos alumnos resuelven los ejemplos correctamente.

> *Observaciones. Veintidós alumnos (85%) realizan los ejemplos correctamente. Algunos alumnos que por sí solos, no pudieron resolver el primer sistema, en este momento indican que ya entienden el procedimiento.*

El profesor menciona lo siguiente: "*por razones didácticas en la mayoría de las tareas se usaron subíndices, pero, una vez que se ha comprendido que en el punto de intersección del sistema $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, dichos subíndices, se pueden omitir. En la mayoría de los libros de matemáticas no se usan subíndices"*.

*Por sustitución*. Se espera, por la forma en que hemos trabajado los sistemas, que los alumnos difícilmente puedan proponer el método de sustitución, por lo que se hacen las siguientes actividades.

El profesor Indica a los alumnos que: *"Partiendo nuevamente del sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:*

$$y_1 = 2x_1 - 2 \ldots \mathrm{L}_1$$
$$y_1 = -x_1 + 7 \ldots \mathrm{L}_2$$

*Y usando las propiedades de la igualdad, pueden cambiar de posición los elementos de la misma, escriban en su cuaderno tres sistemas de ecuaciones equivalentes al mostrado".*

Los alumnos pueden proponer algunos de los siguientes sistemas.

| Sistemas que pueden proponer los alumnos | |
|---|---|
| $-2x_1 = -y_1 - 2 \ldots \mathrm{L}_1$<br>$y_1 = -x_1 + 7 \ldots \mathrm{L}_2$ | $y_1 = 2x_1 - 2 \ldots \mathrm{L}_1$<br>$y_1 + x_1 = 7 \ldots \mathrm{L}_2$ |

| Sistemas que pueden proponer los alumnos | |
|---|---|
| $y_1 = 2x_1 - 2$ …L1<br>$x_1 = -y_1 + 7$ …L2 | $y_1 - 2x_1 + 2 = 0$ …L1<br>$y_1 = -x_1 + 7$ …L2 |
| $y_1 - 2x_1 = -2$ …L1<br>$y_1 = -x_1 + 7$ …L2 | $y_1 - 2x_1 = -2$ …L1<br>$x_1 = -y_1 + 7$ …L2 |
| $y_1 = 2x_1 - 2$ …L1<br>$x_1 = -y_1 + 7$ …L2 | $y_1 - 2x_1 = -2$ …L1<br>$y_1 + x_1 = 7$ …L2 |

Nuevamente, el profesor escribe el primer ejemplo de sistemas equivalentes en el pizarrón, para motivar la escritura de dichos sistemas por parte de los alumnos.

El profesor menciona que: *"muchas veces en matemáticas, como en otras áreas, es conveniente usar los 'caminos' más inmediatos, tratar de hacer los procedimientos con menos pasos posibles".*

El profesor indica a varios alumnos (forma 1, al azar) que mencionen algunas formas del sistema, las escribe en el pizarrón y las numera. Elige una forma de éstas y continúa trabajando.

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *"Empezando de la siguiente forma de escritura del sistema".*<br>$y_1 = 2x_1 - 2$ …L1<br>$y_1 + x_1 = 7$ …L2<br>*"¿Es posible reducir aún más el sistema? Argumenta tu respuesta".* | Un alumno menciona que sí, sustituyendo la ecuación $L_1$ en la $L_2$. Trece alumnos (50%) lo apoyan y el resto del grupo guarda silencio. |

En este punto, el profesor deja que los alumnos trabajen por sí solos; les da unos minutos de trabajo individual, y otros de trabajo en pareja. La mitad del grupo logra hacer la sustitución que a continuación se muestra.

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *Observa el trabajo de los alumnos.* | Trabajan de forma individual. Trece alumnos (50%) lo resuelven satisfactoriamente. |
| *Observa que los alumnos hacen la sustitución de $L_1$ en $L_2$.* | $2x_1 - 2 + x_1 = 7$ |
| *Observa que algunos alumnos hacen adecuadamente los pasos algebraicos para obtener el valor de "$x_1$".* | $2x_1 + x_1 = 7 + 2$<br>$3x_1 = 9$<br>$x_1 = 3$ |
| *Señala: "algunos de ustedes ya obtuvieron el valor de $x_1$, ¿cómo se puede obtener el valor de $y_1$?"* | Un alumno responde que sustituyendo el valor que se acaba de obtener de "$x_1$" en cualquiera de las ecuaciones. Algunos alumnos lo apoyan. |
| *Observa que algunos alumnos sustituyen correctamente en ecuación $L_1$ y otros en $L_2$.* | En $L_1$.<br>$y_1 = 2(3) - 2$<br>$y_1 = 4$<br><br>En $L_2$.<br>$y_1 + (3) = 7$<br>$y_1 = 4$ |
| *Observa que algunos alumnos escriben en su cuaderno la pareja ordenada que es solución al sistema.* | (3,4) |

*Observación. Los alumnos que no pudieron resolver el sistema, toman nota, y se les queda de tarea extraclase que lo resuelvan por si solos*

*.*

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *Le indica a un alumno (forma 1, al azar) que mencione cómo es el procedimiento.* | • "Se sustituye el 'valor' $y_1$ de $L_1$ en $L_2$".<br>• "Se despeja $x$".<br>• "El valor obtenido se sustituye en alguna de las ecuaciones".<br>• "Se calcula el valor de $y$". |
| *"Alcen la mano, los que están de acuerdo con el procedimiento que mencionó su compañero"* | La totalidad del grupo está de acuerdo. |

El profesor indica que precisamente por sustituir una ecuación en otra, el método anterior se llama por "Sustitución". En seguida pone dos ejemplos en el pizarrón para que los alumnos los resuelvan en forma individual.

Ejemplo 1.

$y = 2x - 4$ …$L_1$

$y + x = 5$ …$L_2$

Ejemplo 2.

$y + 3x = -3$ …$L_1$

$-x = -y + 5$ …$L_2$

Cuando los alumnos terminan de resolverlos en forma individual. El profesor elije a dos alumnos (forma 3 con probabilidad de que contesten correctamente) para que pasen al pizarrón a escribir el procedimiento de un ejemplo cada uno, estos alumnos resuelven los ejemplos correctamente. Veintidós alumnos (85%) reportan que hacen los ejemplos en forma correcta.

La sesión finaliza con el reparto de la “Tarea 44. Resolución de sistema de ecuaciones lineales” extraclase. Como es costumbre, el profesor se asegura que se hayan entendido las consignas.

## Sesión 8

En la siguiente tabla se muestran las tareas que se trabajan en esta ocasión. Al mismo tiempo se especifican: la forma de trabajo, el título y el propósito de las mismas, es decir, lo que se espera que el estudiante logre en las tareas.

Tabla 4.21. Tareas para la sesión 8.

| Núm. | Forma de trabajo | Título | Propósito |
|---|---|---|---|
| 45 | G | Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. | Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por los métodos de igualación y sustitución, describirlos por escrito y, verificar ventajas y desventajas en el uso de cada uno de ellos. |
| 46 | I | Resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas. | Resolver sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas. |
| 47 | G | | |
| 48 | G | Expresiones algebraicas que se obtienen cuando los sistemas no tienen solución o tienen infinidad de soluciones. | Identificar qué características tienen las expresiones algebraicas de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que no tienen solución o que tienen una infinidad de soluciones. |
| 49 | I | Método gráfico. | Resolver sistemas de ecuaciones lineales gráficamente. |
| 50 | G | | |

*Inicio de la sesión.* La sesión comienza con la tarea 45, que es la discusión grupal de la "Tarea 44. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales" (ver Anexo 1 Tarea 44). La temática de ésta se trabaja de dos formas individual extraclase y grupal (Tarea 45).

*Descripción de la tarea 44.* En la primera parte, se pide a los alumnos que resuelvan cinco sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por los métodos de sustitución y de igualación, además se les pide que realicen el bosquejo de las ecuaciones. Se reproduce el Sistema 1, renglones adelante, como ejemplo.

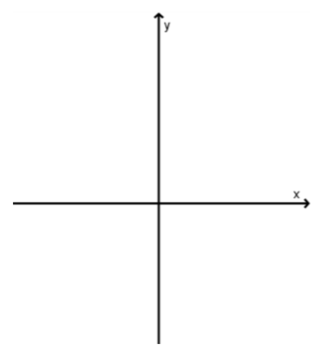
En la segunda parte se pide a los alumnos que contesten las preguntas que se muestran a continuación.

1. Describe detalladamente como se resuelve un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de sustitución.

2. Describe detalladamente como se resuelve un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de igualación.
3. Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, por algún método algebraico, ¿favorece de alguna forma dibujar el bosquejo? Explica tu respuesta.
4. Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales por algún método algebraico, ¿favorece la manera en que están escritas las ecuaciones algebraicas a algún método? Explica tu respuesta.
5. Entre los métodos algebraicos (igualación y sustitución), para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿qué método prefieres utilizar? Explica tu respuesta.

Sistema 1. $y = x + 1$ …$L_1$

$-2x + y + 1 = 0$ …$L_2$

| Sustitución | Igualación | Bosquejo |
|---|---|---|
| | |  |

*Relaciones para "construir".* Se trabaja con la representación geométrica y con dos métodos en la representación algebraica. En ésta, el alumno tiene la oportunidad de trabajar con las siguientes relaciones.

- Analizar los métodos (igualación y sustitución) y, establecer las similitudes y diferencias entre ambos, como se muestra a continuación.

| Etapa del procedimiento | | Igualación | Sustitución | Similitudes o diferencias |
|---|---|---|---|---|
| 1 | El inicio depende de cómo estén escritas las ecuaciones. | En las dos ecuaciones debe estar despejada la misma incógnita. En caso de que no sea así, se realizan los despejes necesarios. | En al menos una de las ecuaciones debe de estar despejada una incógnita. En caso de que no sea así, se realiza el despeje necesario. | Diferencia. |
| 2 | Reducción a una ecuación con una incógnita. | Igualación de las ecuaciones. | Sustitución de una ecuación en la otra. | Similitud. |
| 3 | Despeje de la primera incógnita y obtención de su valor. | Operación algebraica. | Operación algebraica. | Similitud. |
| 4 | Sustitución del valor encontrado, en alguna de las ecuaciones "iniciales". | Sustitución. | Sustitución. | Similitud. |
| 5 | Operación algebraica y cálculo de la segunda incógnita. | Operación algebraica. | Operación algebraica. | Similitud. |

- Observar la forma en que se presentan los sistemas y elegir el método "más apropiado" para resolverlos.
- Determinar si el bosquejo tiene alguna utilidad en la resolución de los sistemas.

A continuación se muestra el procedimiento para resolver el Sistema 1.

| *Método de sustitución* | *Método de igualación* |
|---|---|
| Una forma de resolver el sistema es la siguiente:<br><br>1. El alumno debe identificar que en la ecuación $L_1$, "$y$" está despejada. Por lo que puede utilizar este despeje.<br>2. Sustituir del "valor" de la incógnita "$y$" de la ecuación $L_1$ en la $L_2$. Se obtiene una ecuación con una incógnita "$x$".<br>3. Operar algebraicamente la ecuación resultante del punto anterior y obtener el valor de la incógnita "$x$".<br>4. Sustituir en cualquiera de las ecuaciones iniciales, el valor obtenido en el punto anterior.<br>5. Operar algebraicamente la ecuación resultante del punto anterior y obtener el valor de "$y$". | Una forma de resolver el sistema es la siguiente:<br>*1.* Despejar "$y$" de la ecuación $L_2$. El sistema queda de la siguiente forma:<br>$y = x + 1 \ldots L_1$<br>$y = 2x - 1 \ldots L_2$<br>Con esta forma de escritura ($y = mx + b$) de las ecuaciones, el sistema se puede bosquejar, lo cual se puede hacer en este momento o, más adelante.<br>2. Se igualan las ecuaciones. Resulta una ecuación con una incógnita "$x$".<br>3. Se obtiene el valor de la "$x$", despejando la ecuación anterior.<br>4. El valor obtenido en el punto anterior, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales.<br>5. Se resuelve la ecuación anterior para obtener el valor de "$y$". |

Para realizar el bosquejo del sistema, el alumno debe de establecer las conexiones que se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 4.22. Relaciones para responder el sistema 1 de las tareas 44.

| Sistema 1. | | | |
|---|---|---|---|
| Representación algebraica<br>Se tiene la representación algebraica de la forma:<br>$y = x + 1$…$L_1$<br>$y = 2x - 1$…$L_2$ | | → | Representación geométrica |
| 1 | Son dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por "$x$" e "$y$". | → | Son dos gráficas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las ecuaciones, el exponente de la "$x$" es uno cuando la "$y$" está despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de las "$x$" son positivos.<br>$m_1 > 0$<br>$m_2 > 0$ | → | Los ángulos de inclinación de las rectas están entre cero y noventa grados.<br>$0^0 < \alpha_1 < 90^0$<br>$0^0 < \alpha_2 < 90^0$ |
| 4 | El valor de los coeficientes son:<br>$m_1 = 1$<br>$m_2 = 2$ | → | Los ángulos de inclinación de las rectas están:<br>$\alpha_1 = 45^0$<br>$45^0 < \alpha_2 < 90^0$ |
| 5 | Los términos independientes son:<br>$b_1 = 1$<br>$b_2 = -1$ | → | La recta $L_1$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. La recta $L_2$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. |
| 6 | Dado que el resultado obtenido en los métodos de sustitución e igualación es: (2,3) | → | El punto de solución está en el primer cuadrante. |

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 44 individual. Se observa que la mayoría de los alumnos tiene poca habilidad para resolver algebraicamente los sistemas. Trece alumnos (50%) responden correctamente.

> *Observación. La mayoría de los alumnos no tiene problema para empezar a resolver un sistema por el método de igualación, al cuestionar, acerca de este caso un alumno responde: "al estar la misma incógnita despejada en ambas ecuaciones, las expresiones se igualan y se resuelve la ecuación que resulta". Para enfatizar este hecho, y con la participación de los alumnos, el profesor escribe los siguientes pasos en el pizarrón, los cuales corresponden al sistema 1.*

$$y = x + 1 \ldots \mathrm{L}_1$$

$$-2x + y + 1 = 0 \ldots \mathrm{L}_2$$

*Se despeja "$y$" de la ecuación $L_2$, $y = 2x - 1$, el sistema queda de la siguiente manera.*

$$y = x + 1 \ldots L_1$$

$$y = 2x - 1 \ldots L_2$$

*Se igualan las expresiones.*

$$\mathrm{L}_1 \ldots \quad x + 1 \ \boxed{= y =} \ 2x - 1 \quad \ldots \mathrm{L}_2$$

$$\downarrow$$

$$x + 1 \ \boxed{=} \ 2x - 1$$

*Por otro lado, aproximadamente diez alumnos mencionan que se explique el primer paso del método de sustitución, para el sistema 1, el profesor escribe el sistema en el pizarrón y con la participación del grupo se expone lo siguiente.*

1. $$y = x + 1 \ldots \mathrm{L}_1$$

$$-2x + y + 1 = 0 \ldots \mathrm{L}_2$$

*Se sustituye la ecuación $L_1$ en la ecuación $L_2$.*

$$y \quad = \quad \boxed{x + 1} \ \ldots \mathrm{L}_1$$

$$-2x + \boxed{x + 1} + 1 = 0 \qquad \ldots \mathrm{L}_2$$

*A continuación se muestran algunos errores algebraicos cometidos por los alumnos.*

*Para el sistema 1 por el método de sustitución al despejar y calcular "$x$", queda la expresión que se muestra a continuación, seguida del error cometido.*

$$-x = -2$$

$$x = -2$$

*Se cambia el signo en un miembro y en el otro no.*

*En el sistema 2 el cual se reproduce a continuación,*

$$x = -y - 2 \ \ldots L_1$$

$$x - 2y = -8 \ \ldots L_2$$

*por el método de igualación se observa lo siguiente.*

$$-x - 2 = \frac{-x - 8}{-2}$$

$$-x - 2 = -x + 4$$

*Error, el menos dos divide al ocho, pero a la "$x$" no.*

*Nuevamente, en el sistema 2 (mostrado anteriormente) por el método de sustitución queda la siguiente expresión,*

$$-3y = -6$$

$$y = \frac{3}{6}$$

$$y = 2$$

*El alumno hace dos veces la operación contraria, pero, el resultado está correcto.*

*En el sistema 3 que se reproduce a continuación,*

$$-x + y = -2 \ \ldots L_1$$

$$4x + y = -4 \ \ldots L_2$$

*por el método de igualación queda una expresión como la siguiente.*

$$y = -\frac{2}{5} - 2$$

*Un alumno expresa "¿cómo se calcula eso?"*

*El profesor llamo la atención del grupo para observar los errores, y corregirlos en discusión grupal.*

*Luego de estas observaciones se decide hacer otros tres ejemplos más, para enfatizar los procedimientos y tratar de disminuir los errores algebraicos.*

*Comentario. De acuerdo a Segura (2004) los estudiantes tienen dificultades en realizar las operaciones algebraicas elementales, aunque, sepan los algoritmos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales. El desempeño de los estudiantes con los que se trabajó apoya lo reportado por Segura (2004).*

*Tarea 45 grupal.* Para la primera parte, que consta de cinco sistemas, cinco alumnos (forma 3, probablemente conteste correctamente) pasan al pizarrón a escribir la resolución de un sistema cada uno. Una vez que la resolución de los sistemas está escrita en el pizarrón, todo el grupo en su conjunto los observan, analizan y evalúan. Un alumno expresa su evaluación a los procedimientos y resultados escritos en el pizarrón. La mitad del grupo está de acuerdo; el resto del grupo observa los procedimientos y resultados y toma sus notas, para resolver los sistemas como tarea extraclase.

Para la segunda parte, que consta de cinco preguntas las cuales se reproducen en la siguiente tabla, otros cinco alumnos (forma 3, probablemente conteste correctamente) expresan verbalmente la respuesta a cada una de ellas. El resto del grupo escucha al compañero en turno y participa si es necesario.

<table>
<tr><th colspan="2">Preguntas y respuestas esperadas</th><th>Desempeño de los estudiantes</th></tr>
<tr><td colspan="3">Primera parte</td></tr>
<tr><td>Sistema</td><td>Solución</td><td rowspan="6">Aproximadamente el 50% de los estudiantes responde correctamente los cinco sistemas. El resto del grupo toma nota para resolver los sistemas como tarea extraclase.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$(2,3)$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$(-4,2)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$(-\frac{2}{5},-\frac{12}{5})$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$(2,-4)$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$(2,0)$</td></tr>
</table>

| | *Preguntas y respuestas esperadas* | Desempeño de los estudiantes |
|---|---|---|
| *Segunda parte* | | |
| *1* | *Describe detalladamente como se resuelve un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de sustitución.* | |
| | *Respuesta:*<br>• *Se requiere una incógnita despejada de alguna de las ecuaciones, en caso de que ninguna de las incógnitas esté despejada, se procede a realizar el despeje.*<br>• *Se sustituye "el valor" de la incógnita despejada, en la otra ecuación. Con esto se obtiene una ecuación con una incógnita.*<br>• *Se realizan las operaciones algebraicas para resolver la ecuación resultante del punto anterior, se calcula el valor de una de las incógnitas.*<br>• *El valor obtenido en el punto anterior se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales, se opera algebraicamente y se calcula el valor de la otra incógnita.* | Un alumno señala lo siguiente:<br>• estando una incógnita despejada en alguna de las ecuaciones,<br>• se sustituye en la otra ecuación,<br>• se resuelve la ecuación resultante, para una incógnita<br>• el valor obtenido se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales. Y se calcula la otra incógnita.<br>La mayoría del grupo apoya lo mencionado por su compañero. |
| *2* | *Describe detalladamente como se resuelve un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de igualación.*<br>*Respuesta.*<br>• *En el caso de que no esté despejada la misma incógnita en ambas ecuaciones; se realiza dicho despeje.*<br>• *Se igualan las ecuaciones, con lo que se obtiene una ecuación con una incógnita.*<br>• *Se opera algebraicamente la ecuación obtenida en el punto anterior, se determina el valor de una de las incógnitas.*<br>• *El valor obtenido en el punto anterior se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales.*<br>• *La ecuación obtenida en el punto anterior, se opera algebraicamente para determinar el valor de la otra incógnita.* | Un alumno menciona lo siguiente:<br>• estando alguna incógnita despejada (la misma) en ambas ecuaciones,<br>• se igualan las ecuaciones,<br>• se resuelve la ecuación resultante, para una incógnita,<br>• el valor obtenido se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales,<br>• se calcula el valor de la otra incógnita.<br>La mayoría del grupo apoya lo mencionado por su compañero. |

| Preguntas y respuestas esperadas | | Desempeño de los estudiantes |
|---|---|---|
| *3* | *Para resolver un sistema de ecuaciones por algún método algebraico, ¿favorece de alguna forma dibujar el bosquejo? Explica tu respuesta.*<br>*Respuesta. Si, para observar si el sistema tiene solución única, no tiene solución o, si tiene infinidad de soluciones. Además puede servir para comprobar el resultado algebraico.* | Un alumno menciona:<br>Si ayuda, para ver el comportamiento de las ecuaciones, si tiene solución o no.<br>La mayoría del grupo está de acuerdo con lo mencionado por su compañero. |
| *4* | *Para resolver un sistema de ecuaciones por algún método algebraico, ¿favorece la manera en que están escritas las ecuaciones a algún método? Explica tu respuesta.*<br>*Respuesta. Sí, es recomendable seguir un procedimiento de tal forma que se hagan los menos pasos algebraicos y/o los más sencillos, como en los siguientes casos, entre otros:*<br>• *Si se presenta la misma incógnita despejada en ambas ecuaciones, se puede utilizar el método de igualación.*<br>• *Si en alguna de las ecuaciones se presenta una incógnita despejada se puede utilizar el método de sustitución.* | Un alumno señala lo siguiente:<br>Si en las dos ecuaciones, ya está despejada la misma incógnita, se puede hacer el método de igualación.<br>Si en alguna de las ecuaciones está despejada una incógnita, se puede hacer el método de sustitución.<br>La mayoría del grupo apoya lo mencionado por su compañero. |
| *5* | *Entre los métodos algebraicos de igualación y sustitución, para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿qué método prefieres utilizar? Explica tu respuesta.*<br>*Respuesta. Sustitución o Igualación* | El 90% dice que el de igualación y el 10% el de sustitución.<br>Por la "facilidad" que les representa. |

Para terminar la discusión grupal el profesor, escribe tres sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en su representación algebraica, les indica a los estudiantes que los resuelvan en forma individual. Cuando los estudiantes terminan, tres alumnos pasan al pizarrón a resolver un sistema cada uno, los tres sistemas los resuelven correctamente. Se observa que veintiún estudiantes (81%) los resuelve correctamente.

La sesión prosigue con la: "Tarea 46. Resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas" (ver Anexo 1 Tarea 46). La temática de esta tarea se trabaja de dos formas, individual y grupal (Tarea 47).

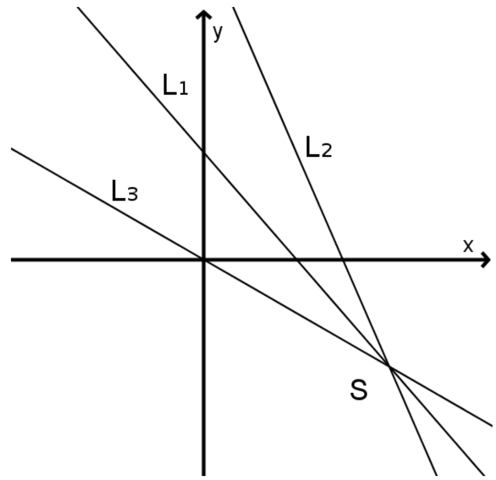
*Descripción de la tarea 46.* El alumno tiene que resolver dos sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas. Como se mencionó anteriormente, en este trabajo se decide promover y evaluar el aprendizaje con comprensión. Según Hiebert y Carpenter (1992) la comprensión favorece la transferencia. Se considera que trabajar con más de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es un aspecto de dicha transferencia. A continuación se reproducen los sistemas (en su representación algebraica y geométrica) que se trabajan en esta tarea.

Parte I

$y = -x + 2$ …$L_1$

$y = -2x + 6$ …$L_2$

$y = -\frac{1}{2}x$ …$L_3$

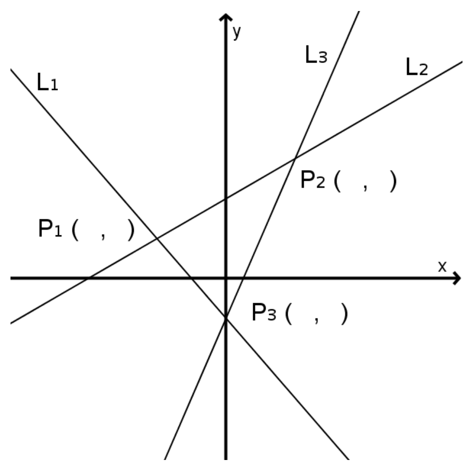



Parte II

$y = -x - 1$ …$L_1$

$2y - x = 4$ …$L_2$

$y - 2x = -1$ …$L_3$




*Relaciones para “construir”.* En esta tarea se sigue promoviendo la comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, trabajando con las representaciones algebraica y geométrica. Se espera que en representación geométrica les permita observar a los estudiantes las características de los sistemas, solución única o solución de subsistemas, para establecer las acciones a seguir para determinar dicha solución.

Tabla 4.23. Conexiones para la tarea 46.

| Representación algebraica | | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| Parte I | | | |
| 1 | Son tres ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Son tres gráficas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las tres ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno, cuando la "$y$" está despejada. | → | Son tres líneas rectas. |
| 3 | La pareja ordenada del punto de intersección satisface las tres ecuaciones, es decir, $x_1 = x_2 = x_3$ $y_1 = y_2 = y_3$ | → | Las tres rectas se intersectan entre sí en un punto. Por lo que el sistema tiene solución única. |
| 4 | Se puede utilizar cualquier par de ecuaciones para resolver el sistema. Si se utilizan las ecuaciones $L_1$ y $L_2$, se procede a lo siguiente:<br>Igualar las ecuaciones.<br>Operar algebraicamente la ecuación obtenida en el punto anterior.<br>Obtener el valor de la primera incógnita: $x = 4$.<br>El valor obtenido en el punto anterior, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales.<br>Operar algebraicamente la ecuación obtenida en el punto anterior.<br>Obtener el valor de la segunda incógnita: $y = -2$.<br>Determinar que la solución del sistema es (4,-2). | La solución del sistema es en el cuarto cuadrante. | |
| Parte II. | | | |
| 1 | Son tres ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Son tres gráficas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las tres ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno, cuando la "$y$" está despejada. | → | Son tres líneas rectas. |
| 3 | Se tienen tres subsistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, donde las parejas ordenadas de los puntos, son solución de dichos subsistemas. Por lo tanto el alumno puede proceder a lo siguiente:<br>Para $P_1$, resolver el sistema $L_1$ -$L_2$, por cualquier método.<br>Para $P_2$, resolver el sistema $L_2$ -$L_3$, por cualquier método.<br>Para $P_3$, resolver el sistema $L_1$ -$L_3$, por cualquier método. | → | Se observan tres puntos de intersección:<br>$P_1$, entre las rectas $L_1$ y $L_2$.<br>$P_2$, entre las rectas $L_2$ y $L_3$.<br>$P_3$, entre las rectas $L_1$ y $L_3$. |

*Algunos resultados y observaciones.* Tarea 46 individual. Se observa una buena respuesta hacia el trabajo. Los alumnos, en su mayoría (90%) prefieren trabajar con el método de igualación, el desempeño del grupo es del 62%.

*Tarea 47 grupal.* El profesor le indica a dos alumnos (forma 1, al azar) que escriban en el pizarrón la resolución de un sistema cada uno. Una vez que se encuentran las resoluciones de los sistemas escritos en el pizarrón, el resto de los estudiantes, las observan, analizan y evalúan. El profesor le indica a un tercer alumno (forma 3, probablemente responda correctamente) que exprese sus "comentarios" para cada sistema resuelto; este alumno, evalúa cada sistema y, manifiesta que se resolvieron correctamente, el grupo coincide con él.

A continuación se muestran las respuestas esperadas y el desempeño del grupo en la puesta en práctica.

| *Respuestas esperadas.* | Desempeño de los estudiantes |
|---|---|
| *Sistema I.*<br>$S\ (4, -2)$ | Dieciséis estudiantes (62%) lo resuelven satisfactoriamente. |
| *Sistema II.*<br>$P_1.\ (-2{,}1)$<br>$P_2.\ (2{,}3)$<br>$P_3.\ (0{,}-1)$ | Dieciséis estudiantes (62%) lo resuelven satisfactoriamente. |

Para aquellos alumnos que no obtuvieron buenos resultados en esta tarea, el profesor les indica que se corrija la tarea en forma individual y extraclase.

La sesión prosigue con la: "Tarea 48. Expresiones algebraicas que se obtienen cuando los sistemas no tienen solución o, tienen una infinidad de soluciones"; la cual se trabaja solamente de forma grupal.

*Relaciones para "construir".* En esta tarea se trabajan nuevamente las representaciones algebraica y gráfica, en la "verificación" algebraica de los sistemas sin solución o con infinidad de soluciones.

Tabla 4.24. Conexiones para la Tarea 48.

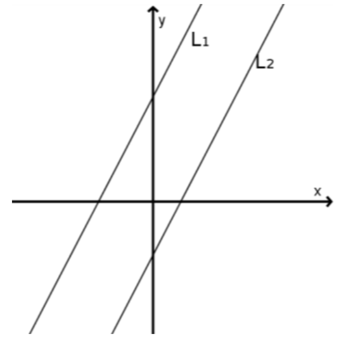
| | Representación algebraica | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas representadas, estas últimas con “$x$” e “$y$”.<br>$y = m_1x + b_1$…L1<br>$y = m_2x + b_2$…L2 | → | Dos gráficas en el plano cartesiano. |
| 2 | El exponente de la “$x$” es uno, cuando la “$y$” está despejada. | → | Las dos gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de las “$x$” son iguales.<br>$m_1 = m_2$ | → | Las inclinaciones de las rectas son iguales. En consecuencia, las rectas son paralelas. |
| Para un sistema sin solución, además de las tres primeras condiciones se tiene la siguiente. | | | |
| 4 | Los términos independientes son diferentes.<br>$b_1 \neq b_2$<br>Al aplicar un método algebraico de solución, en un momento determinado se llega a una contradicción.<br>$b_1 = b_2$ | → | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en puntos distintos. Las rectas son paralelas distintas una de la otra. |
| Para un sistema con infinidad de soluciones, además de las tres primeras condiciones se tiene la siguiente. | | | |
| 5 | Los términos independientes son iguales.<br>$b_1 = b_2$<br>Al aplicar un método algebraico de solución, se tiene una identidad matemática.<br>$0 = 0$ | → | Es la misma recta. Se puede pensar que se tiene una recta sobre otra, lo cual implica que se intersectan en todos sus puntos (una infinidad de puntos). |

*Descripción de la tarea 48.*

I. En discusión grupal, se pretende que el alumno haga explícitas las conexiones vistas con anterioridad. El profesor escribe el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y, guiado por los alumnos bosqueja cada una de las ecuaciones.

1. $y = 2x + 4$ …$L_1$

$y = 2x - 2$ …$L_2$




Se continúa con lo siguiente. En la descripción de actividades correspondiente a los alumnos, se debe considerar que un alumno hace el comentario y el resto del grupo lo apoya.

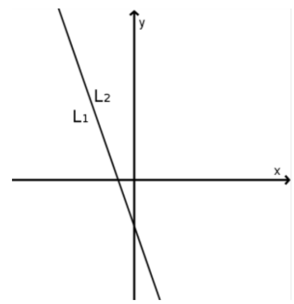
| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *"El sistema anterior, ¿tiene solución?"* | "No". |
| *"Si geométricamente ya sabemos que no tiene solución, ¿qué nos indica algebraicamente que el sistema no tiene solución?"* | ---- |
| *"Resolvamos el sistema por algún método algebraico".* <br> *Guiado por las indicaciones de los alumnos el profesor "resuelve" el sistema, por igualación.* | Le indican al profesor los pasos algebraicos. |
| *Escucha.* | "Se igualan las ecuaciones". |
| *Escribe en el pizarrón.* <br> $2x + 4 = 2x - 2$ | Observan. |
| *Escucha.* | "Se suma algebraicamente $-2x$ en ambos lados de la ecuación". |
| *Escribe en el pizarrón.* <br> $4 \neq -2$ (contradicción) | Observan. |
| *"Cuando se tiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas sin solución, ¿qué me indica algebraicamente que no tiene solución?"* | Alumno (A): "Desaparecen las incógnitas". <br> Alumno (B): "No tiene solución". <br> Alumno (C): "Es una contradicción". <br> La mayoría de los estudiantes está de acuerdo con estos señalamientos. |

El profesor indica a los alumnos que escriban las conclusiones a las que se han llegado grupalmente.

II. En discusión grupal, el profesor escribe el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y, guiado por los alumnos bosqueja cada una de las ecuaciones.

2. $y = -3x - 2$ …$L_1$

$y = -\frac{6}{2}x - \frac{4}{2}$ …$L_2$




Se continúa con lo siguiente. En la descripción de actividades correspondiente a los alumnos, se debe considerar que un alumno hace el comentario y el resto del grupo lo apoya.

| *Profesor* | Alumnos |
|---|---|
| *"La representación geométrica, nos muestra que el sistema, ¿tiene solución?"* | "Sí, tiene infinidad de soluciones." |
| *"Geométricamente, ¿qué nos indica, que el sistema tiene una infinidad de soluciones?"* | "Que una recta está sobre de otra y que se intersectan en todos sus puntos." |
| *"Si ya sabemos geométricamente que tiene una infinidad de soluciones, ¿qué es lo que nos indica algebraicamente que el sistema tiene infinidad de soluciones?"* | ---- |
| *"Resolvamos el sistema por algún método algebraico."* <br> *Guiado por las indicaciones de los alumnos el profesor "resuelve" el sistema por igualación.* | Le indican al profesor los pasos algebraicos que se muestran a continuación. |
| *Escucha.* | "Se igualan las ecuaciones". |
| *Escribe en el pizarrón.* <br> $-3x - 2 = -\frac{6}{2}x - \frac{4}{2}$ | Observan. |
| *Escucha.* | "Se multiplican ambos miembros por 2." |
| *Escribe en el pizarrón.* <br> $-6x - 2 = -6x - 2$ | Observan. |

| | |
|---|---|
| *Escucha.* | "Se suma algebraicamente $-6x-2$ en ambos lados de la ecuación." |
| *Escribe en el pizarrón.* $0=0$ | Observan. |
| *Cuando se tiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas con infinidad de soluciones, ¿qué me indica algebraicamente que tiene infinidad de soluciones?* | Alumno (A): "No se llega a nada".<br>Alumno (B): "Se eliminan las incógnitas".<br>Alumno (C): "Es una identidad".<br>La mayoría de los estudiantes está de acuerdo con lo mencionado por sus compañeros. |

Finalmente el profesor indica que escriban las conclusiones a las que se han llegado.

La sesión prosigue con la "Tarea 49. Método gráfico" (ver Anexo 1 Tarea 49); cuya temática se trabaja de forma individual y grupal (Tarea 50).

*Descripción de la tarea 49.* El alumno tiene que responder en forma individual, como se resuelve un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método gráfico. Posteriormente debe participar en la discusión grupal y finalmente debe, individualmente, resolver dos sistemas por dicho método. A continuación se reproduce la tarea que nos ocupa.

I. ¿Cómo resolverías geométricamente el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas? Explica el procedimiento.

$y=-2x-6$ …$L_1$

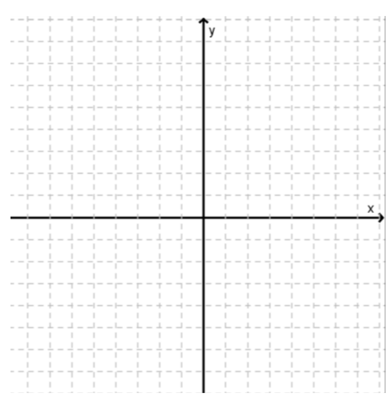
$y=-x+1$ …$L_2$

II. Discusión grupal de la pregunta anterior.

III. Resolución de los siguientes sistemas.

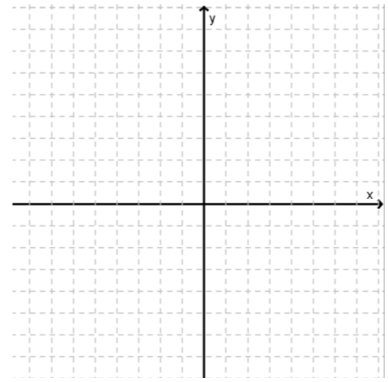
1. $y=-2x-6$ …$L_1$

   $y=-x+1$ …$L_2$



2. $-x + y = 3 \ldots L_1$

$2x + y = 6 \ldots L_2$




Se debe observar que para la tercera parte de la tarea, es necesario trabajar con gráficas y no con bosquejos; por lo que se proporciona el plano cartesiano con particiones en ambos ejes (cuadrícula), para cada sistema, a fin de que, los alumnos grafiquen.

*Relaciones para "construir".* Las relaciones que debe considerar el alumno para el sistema de la parte I, son las siguientes.

- El sistema puede tener algún tipo de solución.
    - Solución única, las rectas se intersectan en un punto.
    - Sin solución, las rectas son paralelas.
    - Infinidad de soluciones, se trata de la misma recta.
- Para determinar qué tipo de solución tiene el sistema, se deben graficar las ecuaciones.
- Observar qué tipo de solución tiene el sistema.
- En el caso de que el sistema tenga solución única se deben de determinar las coordenadas del punto de intersección.

Las conexiones anteriores se exponen en la discusión grupal correspondiente a la segunda parte de esta tarea. La cual concluye cuando los integrantes del grupo explicitan el procedimiento que se debe llevar a cabo, cuando se desea resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método gráfico.

Para la tercera parte el alumno debe poner en práctica el acuerdo grupal de la parte anterior. A continuación se señala dicho procedimiento para el sistema III.1.

- Para graficar la ecuación $L_1$, se puede proceder considerando la ordenada al origen y la pendiente, de la siguiente manera.
    1. Determinar y localizar que la intersección con el eje de las ordenadas es en $(0, -6)$.

2. Para trazar la recta es necesario localizar otro punto, para determinarlo, el alumno debe interpretar el coeficiente de "$x$" (pendiente $m = -2$), como un punto que se localiza dos unidades abajo y una unidad a la derecha de la ordenada al origen. Las coordenadas de dicho punto son (1,-8).
3. Localizar el punto anterior.
4. Como los puntos localizados anteriormente pertenecen a $L_1$, el alumno traza la recta correspondiente a esta ecuación.

- Para graficar la ecuación $L_2$ se procede de la misma forma. En este caso, los puntos que se pueden localizar son (0,1) y (1,0).
- Localizar y determinar las coordenadas del punto de intersección (-7,8).

*Algunas observaciones y resultados.* Tarea 49 individual. En el apartado I, trece alumnos (50%) están de acuerdo que se resuelve haciendo la gráfica "lo más exacta posible", y que un bosquejo nos es factible para determinar exactamente el punto de intersección, el resto de los alumnos toman nota. En el apartado III, veintidós estudiantes (85%) responden correctamente.

*Tarea 50 grupal.* En el apartado II, el profesor le indica a un alumno (forma 1, al azar) que mencione el procedimiento que escribió. El estudiante menciona que se grafican las rectas y que se localiza el punto de intersección, la mayoría del grupo lo apoya.

Para el apartado III, el profesor le indica a tres alumnos (forma 1, al azar) que mencionen sus resultados, uno por uno. El resto del grupo escucha y compara sus resultados, se lleva a cabo la discusión y se llegan a acuerdos.

Al mencionar los resultados por el método gráfico, los alumnos reportaron resultados diferentes, por ejemplo para la ordenada de solución del sistema 1, reportaron valores de 7, 8 y 9. Se resuelve el sistema por igualación y se observa que es $y = 8$. La situación anterior fue un ejemplo para observar que el método gráfico depende mucho de la "exactitud" con la que se trace la gráfica. Los dos sistemas propuestos en la tarea se comprobaron por el método de igualación.

Para finalizar la sesión, el profesor indica que la prueba sumativa de esta serie de tareas se verificará la próxima sesión.

## Sesión 9

En esta sesión se realiza la prueba sumativa y el cuestionario complementario (ver Anexo 2). Primeramente, el profesor reparte la prueba e indica a los alumnos que tienen una hora con cuarenta y cinco minutos para resolverla en forma individual. Los alumnos se muestran animados y seguros. Los resultados se detallan en el siguiente capítulo. Posteriormente, el profesor dicta el cuestionario complementario, para que los alumnos lo respondan, igualmente, en forma individual.

# Capítulo 5. Prueba de rendimiento, resultados y su análisis

Para hacer el análisis de los resultados del instrumento de evaluación se debe recordar que, según los autores Hiebert y Carpenter (1992) existe correspondencia entre las representaciones externas e internas: la manera en que un estudiante interactúa con las representaciones externas, revela de algún modo la forma en que las tiene representadas internamente.

Cabe recordar que para la prueba diagnóstica (pre-test) y la evaluación sumativa (post-test) se utiliza el mismo instrumento de evaluación (ver Anexo 2).

La evaluación sumativa que se efectúa al final de la presente instrucción, nos permiten valorar en qué medida los estudiantes logran el propósito: que el alumno adquiera un aprendizaje con comprensión en sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

El instrumento centra su atención en la interpretación y conversión de los registros gráfico y algebraico, en el análisis de paralelismo y de intersección, en la localización de puntos de intersección y en la habilidad para determinarlos. Así, lo que se pretende evaluar es en qué medida los estudiantes:

- interpretan las características de un sistema de ecuaciones lineales dadas su representación verbal, algebraica y/o el bosquejo de la representación geométrica;
- realizan la conversión de representaciones algebraica y gráfica de los sistemas de dos ecuaciones lineales de dos incógnitas;

- resuelven sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas algebraica y gráficamente;
- pueden aplicar lo aprendido en sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en problemas de aplicación, en sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas y en sistemas de ecuaciones no lineales.

Las respuestas a estas interrogantes se pueden observar en cada uno de los apartados que se mencionan más adelante.

## Resultados generales de pruebas diagnóstica y sumativa

En el Anexo 2 de este escrito, se muestra el instrumento de evaluación, el cual consta de 17 apartados. En esta sección se describe cada uno de los cuestionamientos, se muestran las conexiones que los estudiantes deben establecer para responder, las tablas de resultados y un análisis de los mismos.

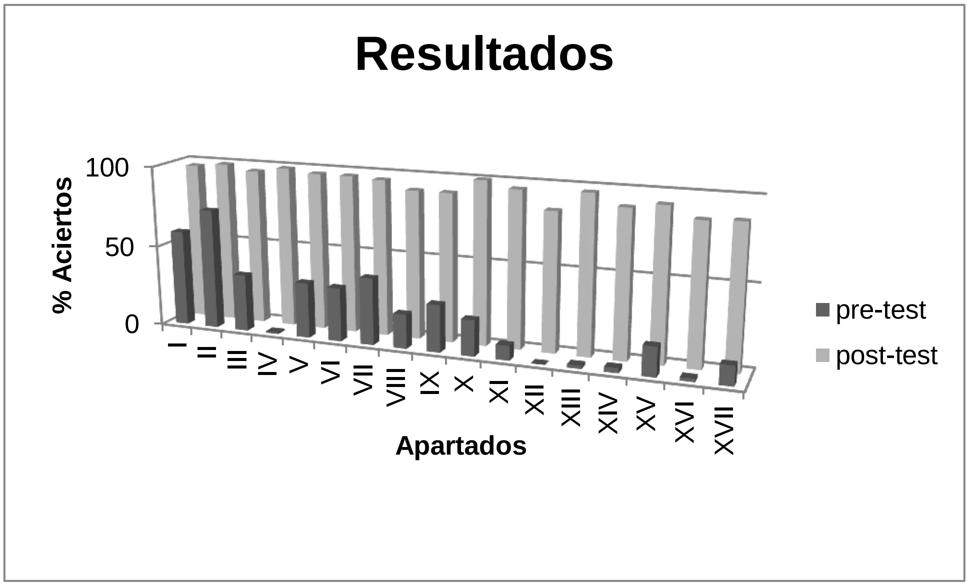
Cabe recordar que todo este trabajo se realizó con un grupo de 26 estudiantes.

Aunque, páginas adelante se presentan los resultados, punto por punto. A continuación se muestran una tabla y una gráfica con los resultados globales de los estudiantes en porcentaje de aciertos para las dos pruebas. De esta forma podemos observar desde el principio de este análisis, qué tanto los estudiantes mejoran entre una prueba y otra.

Tabla 5.1. Comparación de resultados globales en porcentaje de rendimiento.

| Apartado | Pre-test | Post-test | Apartado | Pre-test | Post-test |
|---|---|---|---|---|---|
| I | 59 | 97 | X | 22 | 100 |
| II | 74 | 99 | XI | 9 | 96 |
| III | 35 | 96 | XII | 0 | 85 |
| IV | 1 | 99 | XIII | 2 | 97 |
| V | 34 | 97 | XIV | 3 | 90 |
| VI | 33 | 97 | XV | 18 | 93 |
| VII | 41 | 96 | XVI | 2 | 86 |
| VIII | 21 | 91 | XVII | 12 | 87 |
| IX | 29 | 91 | Porcentaje promedio | **23.2** | **93.9** |

Figura 5.1. Gráfica comparativa de resultados globales.



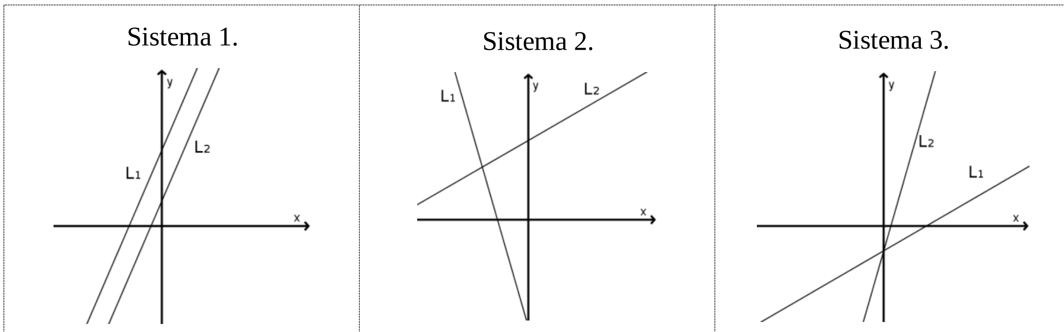

Adelantando el contenido de las tablas de resultados de cada apartado, que se muestran y analizan páginas adelante, en el pre-test se manifestaron múltiples equívocos y preguntas que no fueron contestadas. Al iniciar con la instrucción, los alumnos presentaron dificultades. Algunas de ellas se manifiestan en: i) conversión entre las representaciones gráfica y algebraica de ecuaciones lineales con dos incógnitas, ii) reconocimiento algebraico y gráfico de las condiciones de la solución de un sistema de ecuaciones lineales, iii) conocimiento de las propiedades del punto de intersección, iv) conocimiento y uso de los métodos de sustitución, igualación y gráfico en sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, v) reconocimiento de la solución y cálculo de la misma en sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, vi) planteamiento y resolución de problemas de aplicación. Sin embargo, de acuerdo al contenido de las tablas de resultados que se mostrarán en cada apartado, en el post-test, es posible afirmar que los estudiantes mejoraron su rendimiento significativamente.

A continuación se describen los resultados globales obtenidos en el pre-test y en el post-test, al mismo tiempo se comentan algunos, que se considera conveniente resaltar.

*Apartado I*

En este apartado se pide al alumno que realice la conversión de la representación geométrica a la algebraica de tres sistemas de ecuaciones lineales que se reproducen a continuación.

Apartado I. Conversión de la representación geométrica a la algebraica.




Para la resolución de este apartado, el alumno debe realizar las conexiones de la Tabla 5.2., la cual, se muestra a continuación. Se debe recordar que en la siguiente tabla el símbolo → significa "se relaciona con".

Tabla 5.2. Conexiones de características geométricas y su conversión a representación algebraica para el apartado I.

| Características geométricas<br>Visualización de características globales | | → | Expresión algebraica<br>Inferir unidades significativas |
|---|---|---|---|
| Sistema 1. | | | |
| 1 | Son dos gráficas que están representadas en el plano cartesiano. | → | Dos ecuaciones con dos incógnitas que pueden estar representadas por "$x$" e "$y$". |
| 2 | Son dos rectas. | → | En las dos ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno, cuando la "$y$" está despejada. |
| 3 | Los ángulos de inclinación son:<br>$0^0 < \alpha_1 < 90^0$<br>$0^0 < \alpha_2 < 90^0$ | → | Los coeficientes de las "$x$" deben ser positivos.<br>$m_1 > 0$<br>$m_2 > 0$ |
| 4 | Las dos rectas tienen la misma inclinación.<br>$\alpha_1 = \alpha_2$ | → | Los coeficientes de la "$x$" son iguales,<br>$m_1 = m_2$ |
| 5 | Los ángulos de inclinación son:<br>$45^0 < \alpha_1 < 90^0$<br>$45^0 < \alpha_2 < 90^0$ | → | Los coeficientes son:<br>$m_1 > 1$<br>$m_2 > 1$ |
| 6 | Cada una de las rectas se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. | → | Los términos independientes son positivos.<br>$b_1 > 0$<br>$b_2 > 0$ |
| 7 | La intersección con el eje de las ordenadas de $L_1$ está más arriba que la de $L_2$. | → | El término independiente de $L_1$ es mayor que el de $L_2$.<br>$b_1 > b_2$ |

Tabla 5.2. Conexiones de características geométricas y su conversión a representación algebraica para el apartado I. (continuación).

| Características geométricas<br>Visualización de características globales | | → | Expresión algebraica<br>Inferir unidades significativas |
|---|---|---|---|
| Sistema 2. | | | |
| 1 | Son dos gráficas están representadas en el plano cartesiano. | → | Dos ecuaciones con dos incógnitas que pueden estar representadas por “$x$” e “$y$”. |
| 2 | Son dos rectas. | → | En las dos ecuaciones el exponente de la “$x$” es uno, cuando la “$y$” está despejada. |
| 3 | Las dos rectas tienen distinta inclinación.<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2$ | → | Los coeficientes de la “$x$” son distintos.<br>$m_1 \neq m_2$ |
| 4 | $90^0 < \alpha_1 < 180^0$ | → | $m_1 < 0$ |
| 5 | $0^0 < \alpha_2 < 90^0$ | → | $m_2 > 0$ |
| 6 | $90^0 < \alpha_1 < 135^0$ | → | $m_1 < -1$ |
| 7 | $0^0 < \alpha_2 < 45^0$ | → | $0 < m_2 < 1$ |
| 8 | La recta $L_1$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. | → | $b_1 < 0$ |
| 9 | La recta $L_2$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. | → | $b_2 > 0$ |
| Sistema 3. | | | |
| 1 | Son dos gráficas están representadas en el plano cartesiano. | → | Dos ecuaciones con dos incógnitas que pueden estar representadas por “$x$” e “$y$”. |
| 2 | Son dos rectas. | → | En las dos ecuaciones el exponente de la “$x$” es uno, cuando la “$y$” está despejada. |
| 3 | Las dos rectas tienen distinta inclinación.<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2$ | → | Los coeficientes de la “$x$” son distintos.<br>$m_1 \neq m_2$ |
| 4 | $0^0 < \alpha_1 < 90^0$ | → | $m_1 > 0$ |
| 5 | $0^0 < \alpha_2 < 90^0$ | → | $m_2 > 0$ |
| 6 | $0^0 < \alpha_1 < 45^0$ | → | $0 < m_1 < 1$ |
| 7 | $45^0 < \alpha_2 < 90^0$ | → | $m_2 > 1$ |
| 8 | Las dos rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. | → | $b_1 < 0$<br>$b_2 < 0$ |
| 9 | Las dos rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en el mismo punto. | → | $b_1 = b_2$ |

A continuación se muestran las tablas de resultados para el pre-test y el post-test correspondientes a este apartado.

*Comentario. La forma de señalar la evaluación en cada una de las tablas es: “N” no contestó; “0” (cero) equívoco; “1” (uno) contestó bien.*

*Cada una de las tablas tiene dos entradas, la primera es de filas para los alumnos (numerados), la segunda es de columnas para las subdivisiones (conexiones o respuestas) de los apartados. En cada una de las tablas se* *presentan el número de aciertos por alumno y por subdivisión, así mismo, se presenta el porcentaje obtenido para cada alumno, por cada subdivisión y el global.*

*Entre otras utilidades, los datos de la tabla sirven para:*

- *ver los resultados de cada alumno,*
- *ver los resultados del grupo para cada apartado y subdivisión,*
- *localizar los aciertos y los errores,*
- *comparar los resultados Pre-test y Post-test.*

*Las subdivisiones de las tablas corresponden directamente a las conexiones o respuestas que el estudiante debe de establecer o contestar en el apartado correspondiente.*

Tabla 5.3.1. Resultados Pre-test del apartado I.

| Apartado | I PRE-TEST | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sistema 1 (conexiones) | | | | | | | Sistema 2 (conexiones) | | | | | | | | | Sistema 3 (conexiones) | | | | | | | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 13 | 52 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | N | 1 | N | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 21 | 84 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 16 | 64 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 20 | 80 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 24 | 96 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 19 | 76 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 21 | 84 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 21 | 84 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | N | 0 | N | N | N | 13 | 52 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 13 | 52 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 7 | 28 |
| 17 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 24 | 96 |
| 19 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 20 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 23 | 92 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |

Tabla 5.3.1. Resultados Pre-test del apartado I.

| Apartado | I PRE-TEST | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sistema 1 (conexiones) | | | | | | | Sistema 2 (conexiones) | | | | | | | | | Sistema 3 (conexiones) | | | | | | | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | |
| 23 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 19 | 76 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 17 | 68 |
| 25 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 19 | 76 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 19 | 76 |
| Total | 20 | 20 | 15 | 11 | 13 | 19 | 17 | 19 | 19 | 13 | 11 | 18 | 11 | 12 | 16 | 19 | 17 | 17 | 15 | 18 | 17 | 13 | 12 | 12 | 10 | 384 | |
| **% Grupal** | **77** | **77** | **58** | **42** | **50** | **73** | **65** | **73** | **73** | **50** | **42** | **69** | **42** | **46** | **62** | **73** | **65** | **65** | **58** | **69** | **65** | **50** | **46** | **46** | **38** | | **59** |

A continuación se muestra la tabla de resultados correspondiente al pos-test para el apartado I que es el que nos ocupa en este momento.

Tabla 5.3.2. Resultados del post-test para el apartado I.

| Apartado | I POST-TEST | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sistema 1 (conexiones) | | | | | | | Sistema 2 (conexiones) | | | | | | | | | Sistema 3 (conexiones) | | | | | | | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 23 | 92 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 22 | 88 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 21 | 84 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 21 | 84 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 20 | 80 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |

Tabla 5.3.2. Resultados del post-test para el apartado I.

| Apartado | I POST-TEST | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sistema 1 (conexiones) | | | | | | | Sistema 2 (conexiones) | | | | | | | | | Sistema 3 (conexiones) | | | | | | | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 100 |
| Total | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 22 | 25 | 22 | 24 | 25 | 26 | 26 | 26 | 26 | 25 | 25 | 25 | 24 | 25 | 26 | 632 | |
| **% Grupal** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **85** | **96** | **85** | **92** | **96** | **100** | **100** | **100** | **100** | **96** | **96** | **96** | **92** | **96** | **100** | | **97** |

Globalmente se avanzó del 59% de respuestas correctas en el pre-test, al 97% en el post-test. Es decir, en dos momentos distintos, para iniciar la instrucción y al final de la misma, los alumnos pasaron de tener una gran cantidad de dificultades en la conversión de sistemas de ecuaciones lineales de la representación geométrica a la algebraica, a realizar un trabajo muy aceptable.

*En el pre-test.* Al parecer, el hecho de que la conversión de la representación geométrica a la algebraica de ecuaciones lineales es uno de los conocimientos previos, ayuda a que algunos estudiantes tengan un "buen" rendimiento en este apartado. Sin embargo, cinco alumnos no contestan ningún sistema; diecinueve estudiantes tienen algunas dificultades y, sólo dos alumnos responden correctamente a todas las conexiones. En particular en el Sistema 2, Ecuación $L_1$, los alumnos (6 y 8) responden incorrectamente; el alumno (19) no responde y el alumno (21) responde correctamente.

*En el pos-test.* Se presentaron cuatro errores, en el Sistema 2, con la identificación de la pendiente de la ecuación $L_1$.

| Sistema 2, $L_1$ | | |
|---|---|---|
| 4. | $90° < \alpha_1 < 180°$ | $m_1 < 0$ |

En los cuatro casos, los alumnos (6, 8, 19 y 21) la convierten con el coeficiente de "$x$" positivo, siendo que es negativo. Esto, pudo haber ocurrido debido a que, por un lado, los alumnos no hicieron la correlación correspondiente para deducir que la pendiente en cuestión es negativa. Esta situación no se manifestó en el segundo apartado, en el cual se tienen que convertir de la representación algebraica a la gráfica, ecuaciones con pendientes positivas y negativas. Por otro lado, los estudiantes pudieron “ignorar” el signo, ya que todas las demás pendientes de este apartado son positivas. Finalmente, puede haberse debido a que en el bosquejo presentado la recta no alcanza a cruzar con el eje “$y$” y no pudieron hacer la relación a partir de la ordenada al origen. Sin embargo, dichos estudiantes trabajaron bien con pendientes negativas en otros apartados.

> *Observación. Para la conexión antes mencionada, el alumno (21) muestra un retroceso; en el pre-test contesta bien y, en el post-test no.*
>
> *Hay que recordar que según Hiebert y Carpenter (1992), la comprensión no crece linealmente, algunas veces, se manifiesta como periodos de confusión. Es necesario que el profesor ayude a los alumnos a construir relaciones productivas.*

*Apartado II*

En este apartado se pide a los alumnos que conviertan tres sistemas de ecuaciones lineales de la representación algebraica a la geométrica, los cuales se reproducen a continuación.

Apartado II. Conversión de la representación algebraica a la geométrica.

| Sistema 1. | Sistema 2. | Sistema 3. |
|---|---|---|
| $y=-2x+1$…L1<br>$y=\frac{1}{2}x-2$ …L2<br>$y=x$ …L3 | $y=4x+2$ …L1<br>$y=\frac{3}{2}x+2$ …L2<br>$y=-x+2$ …L3<br>$y=-2x+2$ …L4 | $y=x+1$ …L1<br>$y=x+2$ …L2<br>$y=x+3$ …L3 |

A continuación se muestra la tabla 5.4., donde se analizan las conexiones que el alumno debe trabajar para la solución de este apartado.

Tabla 5.4. Reconocimiento de características algebraicas y su conversión a representación geométrica para el apartado II.

| Características algebraicas<br>Visualizar unidades significativas | | → | Características geométricas<br>Inferir características globales |
|---|---|---|---|
| Sistema 1. | | | |
| 1 | Son tres ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por “$x$” e “$y$”. | → | Tres gráficas representadas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las tres ecuaciones el exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada. | → | Son tres líneas rectas. |
| 3 | $m_1 < 0$ | → | $90^0 < \alpha_1 < 180^0$ |
| 4 | $m_2 > 0$ | → | $0^0 < \alpha_2 < 90^0$ |
| 5 | $m_3 > 0$ | → | $0^0 < \alpha_3 < 90^0$ |
| 6 | Los coeficientes de la “$x$” son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2 \neq m_3$<br>$m_1 \neq m_3$ | → | Los ángulos son diferentes<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$<br>$\alpha_1 \neq \alpha_3$ |
| 7 | $m_1 < -1$ | → | $90^0 < \alpha_1 < 135^0$ |
| 8 | $0 < m_2 < 1$ | → | $0^0 < \alpha_2 < 45^0$ |
| 9 | $m_3 = 1$ | → | $\alpha_3 = 45^0$ |
| 10 | $b_1 \neq b_2 \neq b_3$<br>$b_1 \neq b_3$ | → | Cada una de las rectas se intersecta con el eje de las ordenadas en un punto distinto de las otras. |
| 11 | $b_1 > 0$ | → | $L_1$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. |
| 12 | $b_2 < 0$ | → | $L_2$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. |
| 13 | $b_3 = 0$ | → | $L_3$ se intersecta con los ejes en el origen. |
| Sistema 2. | | | |
| 1 | Son cuatro ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por “$x$” e “$y$”. | → | Cuatro gráficas representadas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las cuatro ecuaciones el exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada. | → | Son cuatro líneas rectas. |
| 3 | $m_1 > 0$ | → | $0^0 < \alpha_1 < 90^0$ |
| 4 | $m_2 > 0$ | → | $0^0 < \alpha_2 < 90^0$ |
| 5 | $m_3 < 0$ | → | $90^0 < \alpha_3 < 180^0$ |

Tabla 5.4. Reconocimiento de características algebraicas y su conversión a representación geométrica para el apartado II. (continuación).

| Características algebraicas<br>Visualizar unidades significativas | | → | Características geométricas<br>Inferir características globales |
|---|---|---|---|
| 6 | $m_4 < 0$ | → | $90^0 < \alpha_4 < 180^0$ |
| 7 | Los coeficientes de la "$x$" son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_4$<br>$m_1 \neq m_3$<br>$m_1 \neq m_4$<br>$m_2 \neq m_4$ | → | Los ángulos son diferentes<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_4$<br>$\alpha_1 \neq \alpha_3$<br>$\alpha_1 \neq \alpha_4$<br>$\alpha_2 \neq \alpha_4$ |
| 8 | $m_1 = 4$ | → | $45^0 < \alpha_1 < 90^0$<br>(cerca de $90^0$) |
| 9 | $m_2 = \frac{3}{2}$ | → | $45^0 < \alpha_1 < 90^0$<br>(cerca de $45^0$) |
| 10 | $m_3 = -1$ | → | $\alpha_3 = 135^0$ |
| 11 | $m_4 < -2$ | → | $90^0 < \alpha_4 < 135^0$ |
| 12 | Los términos independientes de las cuatro ecuaciones son iguales entre sí.<br>$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 2$ | → | Las rectas se intersectan con el eje de las ordenadas en el mismo punto, en la parte positiva de este (0,2). |
| Sistema 3. | | | |
| 1 | Son tres ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por "$x$" e "$y$". | → | Tres gráficas representadas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las tres ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno cuando la "$y$" esta despejada. | → | Son tres líneas rectas. |
| 3 | $m_1 > 0$ | → | $0^0 < \alpha_1 < 90^0$ |
| 4 | $m_2 > 0$ | → | $0^0 < \alpha_2 < 90^0$ |
| 5 | $m_3 > 0$ | → | $0^0 < \alpha_3 < 90^0$ |
| 6 | Los coeficientes de la "$x$" son iguales.<br>$m_1 = m_2 = m_3$ | → | Los ángulos son iguales, y las rectas son paralelas<br>$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ |
| 7 | $m_1 = 1$ | → | $\alpha_1 = 45^0$ |
| 8 | $m_2 = 1$ | → | $\alpha_2 = 45^0$ |

Tabla 5.4. Reconocimiento de características algebraicas y su conversión a representación geométrica para el apartado II. (continuación).

| Características algebraicas<br>Visualizar unidades significativas | | → | Características geométricas<br>Inferir características globales |
|---|---|---|---|
| 9 | $m_3 = 1$ | → | $\alpha_3 = 45^0$ |
| 10 | Términos independientes son positivos.<br>$b_1 > 0$<br>$b_2 > 0$<br>$b_3 > 0$ | → | Los puntos de intersección de las rectas con el eje de las ordenadas son en la parte positiva de este. |
| 11 | $b_3 > b_2 > b_1$ | → | La recta $L_3$ debe estar por arriba de las otras dos.<br>La recta $L_2$ debe estar en medio de las otras dos.<br>La recta $L_1$ debe estar por debajo de las otras dos rectas. |

Las tablas de resultados, para este apartado, se muestran a continuación.

Tabla 5.5.1. Resultados del pre-test para el apartado II.

| Apartado | II PRE-TEST | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sistema 1 (conexiones) | | | | | | | | | | | | | Sistema 2 (conexiones) | | | | | | | | | | | | Sistema 3 (conexiones) | | | | | | | | | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 31 | 86 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 30 | 83 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 31 | 86 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 23 | 64 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 8 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 33 | 92 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 28 | 78 |
| 12 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 26 | 72 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | N | 0 | 1 | 1 | N | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | N | 1 | 0 | 1 | 1 | N | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 27 | 75 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 0 | 0 | N | 0 | 0 | 0 | N | 0 | 0 | 0 | N | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | 69 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 19 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |

Tabla 5.5.1. Resultados del pre-test para el apartado II.

| Apartado | II PRE-TEST | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sistema 1 (conexiones) | | | | | | | | | | | | | Sistema 2 (conexiones) | | | | | | | | | | | | Sistema 3 (conexiones) | | | | | | | | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | | |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 34 | 94 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | N | 0 | 1 | 1 | N | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 31 | 86 |
| 23 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 13 | 36 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| Total | 22 | 22 | 17 | 21 | 17 | 16 | 17 | 19 | 17 | 19 | 20 | 20 | 18 | 22 | 22 | 21 | 21 | 18 | 19 | 19 | 20 | 19 | 18 | 18 | 20 | 21 | 21 | 19 | 18 | 18 | 18 | 19 | 17 | 18 | 21 | 20 | 692 | |
| **% Grupal** | **85** | **85** | **65** | **81** | **65** | **62** | **65** | **73** | **65** | **73** | **77** | **77** | **69** | **85** | **85** | **81** | **81** | **69** | **73** | **73** | **77** | **73** | **69** | **69** | **77** | **81** | **81** | **73** | **69** | **69** | **69** | **73** | **65** | **69** | **81** | **77** | | **74** |

Tabla 5.5.2. Resultados del post-test para el apartado II.

| Apartado | II POST-TEST | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sistema 1 (conexiones) | | | | | | | | | | | | | Sistema 2 (conexiones) | | | | | | | | | | | | Sistema 3 (conexiones) | | | | | | | | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 33 | 92 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 34 | 94 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | N | 1 | 1 | 1 | N | 1 | 1 | 1 | N | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 33 | 92 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 33 | 92 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |

Tabla 5.5.2. Resultados del post-test para el apartado II.

| Apartado | II POST-TEST | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Sistema 1 (conexiones) | | | | | | | | | | | | | Sistema 2 (conexiones) | | | | | | | | | | | | Sistema 3 (conexiones) | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | | |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 36 | 100 |
| Total | 26 | 26 | 26 | 26 | 23 | 26 | 26 | 26 | 23 | 26 | 26 | 26 | 23 | 26 | 26 | 26 | 26 | 25 | 26 | 26 | 26 | 26 | 25 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 925 | |
| % Grupal | 100 | 100 | 100 | 100 | 88 | 100 | 100 | 100 | 88 | 100 | 100 | 100 | 88 | 100 | 100 | 100 | 100 | 96 | 100 | 100 | 100 | 100 | 96 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | | **99** |

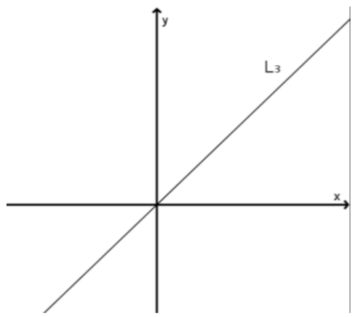
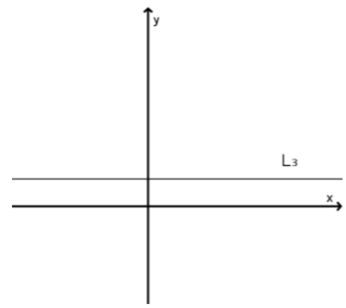
Los resultados globales muestran, que el rendimiento de los estudiantes en este segundo apartado, pasa del 74% en el pre-test, al 99% en el post-test. Nuevamente, al parecer, los alumnos superan algunas dificultades que se presentan en el pre-test y realizan un trabajo aceptable en el post-test.

*En el pre-test.* Se obtiene un rendimiento alto (74%). Parece ser, que debido a que uno de los conocimientos previos que se trabajaron es precisamente la conversión de la representación algebraica a la geométrica de ecuaciones lineales, la mayoría de los alumnos pueden hacer la conversión en los sistemas de ecuaciones lineales de este apartado. Sin embargo, dos alumnos no responden a ninguna conexión y, un alumno tiene todas las conexiones incorrectas.

*En el post-test*. Para el sistema 1, en el bosquejo de la ecuación $L_3$ ($y = x$), el estudiante (15) no realiza el bosquejo solicitado. Dos alumnos (4 y 23) no lo realizan de manera correcta. Los puntos en los que hubo dificultad son en las conexiones etiquetadas con los números 5, 9 y 13 de la Tabla 5.4.

| Sistema 1, $y = x \ldots$ $L_3$ | | |
|---|---|---|
| 5 | $m_3 > 0$ | $0^0 < \alpha_3 < 90^0$ |
| 9 | $m_3 = 1$ | $\alpha_3 = 45^0$ |
| 13 | $b_3 = 0$ | $L_3$ se intersecta con los ejes en el origen. |

El alumno (4) bosqueja una recta con pendiente negativa, lo cual es incorrecto. El alumno (23) bosqueja una recta horizontal, paralela al eje de las abscisas y con una intersección con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. Se muestra la respuesta esperada y la que el alumno bosquejo.

| Sistema 1, ecuación algebraica $y = x$ … $L_3$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Respuesta esperada. | | | Respuesta del alumno (23) | | |
|  | | |  | | |
| $m_3 = 1$ | → | $\alpha_3 = 45^0$ | $m_3 = 0$ | → | $\alpha_3 = 0^0$ |
| $b_3 = 0$ | → | La recta se intersecta con los ejes en el origen. | $b_3 = 1$ | → | La recta se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. |

Al parecer, el alumno intercambia los valores del coeficiente y del término independiente.

*Observación. Para este apartado, sistema 1, ecuación $L_3$. El alumno (4) presenta un retroceso. El alumno (15) no contesta en ninguna de las dos pruebas. El alumno (23) presenta equívocos en ambas pruebas.*

*Nuevamente se hace mención a que la comprensión no crece linealmente. Según Hiebert y Carpenter (1992) el crecimiento de las redes de conocimiento algunas veces se manifiesta con periodos de confusión. Es necesario que el profesor asista a los estudiantes en la construcción de conexiones productivas.*

*Apartado III*

En este apartado se pide al alumno que relacione seis sistemas de ecuaciones lineales en su representación algebraica con la descripción de su bosquejo, a continuación se reproducen los sistemas y las descripciones.

Sistema 1.

$y = 5x - 4$ …$L_1$

$y = 5x + 4$ …$L_2$

Sistema 2.

$y = -3x + 7$ …$L_1$

$y = -2x + 7$ …$L_2$

Sistema 3

$y = \frac{1}{2}x - 2$ …$L_1$

$y = \frac{2}{4}x - \frac{8}{4}$ …$L_2$

Sistema 4.

$y = \frac{4}{3}x - 2$ …$L_1$

$y = -2x + \frac{1}{2}$ …$L_2$

Sistema 5.

$y = -x + 1$…$L_1$

$y = -x$…$L_2$

Sistema 6.

$y = -3x + 4$…$L_1$

$y = 2x - 2$…$L_2$

Las descripciones de los bosquejos son:

A) Dos rectas que se cruzan entre ellas en cualquier punto del eje de las ordenadas.
B) Dos rectas que se cruzan entre ellas en cualquier punto fuera del eje de las ordenadas.
C) Dos rectas paralelas, diferentes una de la otra.
D) La gráfica del sistema es la misma recta para las dos ecuaciones.

Para llevar a cabo las relaciones, el alumno tiene que traducir de la representación algebraica a la geométrica realizando las conexiones que se muestran en la siguiente tabla. Posteriormente tiene que elegir qué tipo de representación geométrica tiene cada sistema (A, B, C o D).

Tabla 5.6. Reconocimiento de las características en la representación algebraica y su conversión a la representación geométrica para el apartado III.

Para el sistema 1 la respuesta es el inciso "C) Dos rectas paralelas, diferentes una de la otra". Para dar esta respuesta, el alumno debe establecer las siguientes conexiones.

| Características algebraicas | | → | Características geométricas |
|---|---|---|---|
| Sistema 1 | 1. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Dos gráficas en el plano cartesiano. |
| | 2. En las dos ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno cuando "$y$" está despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| | 3. $m_1 = m_2$ | → | Las rectas tienen la misma inclinación. $\alpha_1 = \alpha_2$ |
| | 4. $b_1 \neq b_2$ | → | La intersección de las rectas con el eje de las ordenadas es en puntos diferentes. |
| | 5. $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$ | → | Dos rectas paralelas, diferentes una de la otra. |

Tabla 5.6. Reconocimiento de las características en la representación algebraica y su conversión a la representación geométrica para el apartado III. (continuación).

Para el sistema 2 la respuesta es el inciso "A) Dos rectas que se cruzan entre ellas en cualquier punto del eje de las ordenadas". Para dar ésta respuesta, el alumno debe establecer las siguientes conexiones.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sistema 2 | 1. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Dos gráficas en el plano cartesiano. |
| | 2. En las dos ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno cuando "$y$" está despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| | 3. $m_1 \neq m_2$ | → | Las rectas tienen distinta inclinación. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ |
| | 4. $b_1 = b_2$ | → | Las rectas se cruzan con el eje de las ordenadas en el mismo punto. |
| | 5. $m_1 \neq m_2$ y $b_1 = b_2$ | → | Las rectas se intersectan entre ellas en un punto del eje de las ordenadas. |

Para el sistema 3 la respuesta es el inciso "D) La gráfica del sistema es la misma recta para las dos ecuaciones", o bien, las rectas se intersectan en todos sus puntos. Para dar esta respuesta, el alumno debe establecer las siguientes conexiones.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sistema 3 | 1. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Dos gráficas en el plano cartesiano. |
| | 2. En las dos ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno cuando "$y$" está despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| | 3. $m_1 = m_2$ | → | Las rectas tienen la misma inclinación. $\alpha_1 = \alpha_2$ |
| | 4. $b_1 = b_2$ | → | Las rectas se cruzan en con el eje de las ordenadas en el mismo punto. |
| | 5. $m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$ | → | Se trata de la misma recta, o bien, son dos rectas paralelas que se cruzan en todos sus puntos. |

Para el sistema 4 la respuesta es el inciso "B) Dos rectas que se cruzan entre ellas en cualquier punto fuera del eje de las ordenadas". Para dar esta respuesta, el alumno debe establecer las siguientes conexiones.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sistema 4 | 1. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Dos gráficas en el plano cartesiano. |
| | 2. En las dos ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno cuando "$y$" está despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| | 3. $m_1 \neq m_2$ | → | Las rectas tienen distinta inclinación. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ |

Tabla 5.6. Reconocimiento de las características en la representación algebraica y su conversión a la representación geométrica para el apartado III. (continuación).

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4. $b_1 \neq b_2$ | → | La intersección de las rectas con el eje de las ordenadas es en distintos puntos. |
| | 5. $m_1 \neq m_2$ y $b_1 \neq b_2$ | → | Las rectas se intersectan en cualquier punto fuera del eje de las ordenadas. |

Para el sistema 5 la respuesta es el inciso "C) Dos rectas paralelas, diferentes una de la otra", o bien, las rectas no se intersectan en ningún punto. Para dar esta respuesta, el alumno debe establecer las siguientes conexiones.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sistema 5 | 1. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Dos gráficas en el plano cartesiano. |
| | 2. En las dos ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno cuando "$y$" está despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| | 3. $m_1 = m_2$ | → | Las rectas tiene la misma inclinación. $\alpha_1 = \alpha_2$ |
| | 4. $b_1 \neq b_2$ | → | La intersección de las rectas con el eje de las ordenadas es en distintos puntos. |
| | 5. $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$ | → | Las rectas son paralelas, diferentes una de la otra. |

Para el sistema 6 la respuesta es el inciso "B) Dos rectas que se cruzan entre ellas en cualquier punto fuera del eje de las ordenadas". Para dar esta respuesta, el alumno debe establecer las siguientes conexiones.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sistema 6 | 1. Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Dos gráficas en el plano cartesiano. |
| | 2. En las dos ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno cuando "$y$" está despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| | 3. $m_1 \neq m_2$ | → | Las rectas tienen distinta inclinación. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ |
| | 4. $b_1 \neq b_2$ | → | La intersección de las rectas con el eje de las ordenadas es en distintos puntos. |
| | 5. $m_1 \neq m_2$ y $b_1 \neq b_2$ | → | Dos rectas que se cruzan entre ellas en cualquier punto fuera del eje de las ordenadas. |

A continuación se muestran las tablas de resultados. En esta ocasión dichas tablas muestran la evaluación de la relación escrita por los alumnos.

Tabla 5.7.1. Resultados del pre-test para el apartado III.

| Apartado | III PRE-TEST | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | | C | | D | | |
| Alumnos | 2 | 4 | 6 | 1 | 5 | 3 | | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 50 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 4 | 67 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 17 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 17 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 6 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 | 67 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 17 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 33 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 17 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 4 | 67 |
| 12 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 17 |
| 13 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 83 |
| 14 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 15 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 3 | 50 |
| 16 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 50 |
| 17 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 50 |
| 18 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 | 67 |
| 19 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 33 |
| 20 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 2 | 33 |
| 21 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 23 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 17 |
| 24 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 3 | 50 |
| Total | 11 | 5 | 11 | 12 | 7 | 8 | 54 | |
| **% Grupal** | **42** | **19** | **42** | **46** | **27** | **31** | | **35** |

Tabla 5.7.2. Resultados de post-test para el apartado III.

| Apartado / Alumnos | III POST-TEST | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A | B | | C | | D | | |
| | 2 | 4 | 6 | 1 | 5 | 3 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 3 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 83 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 19 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 5 | 83 |
| 20 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 50 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 | 67 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| Total | 25 | 25 | 25 | 26 | 24 | 24 | 149 | |
| **% Grupal** | **96** | **96** | **96** | **100** | **92** | **92** | | **96** |

Las tablas muestran que el rendimiento de los estudiantes va del 35% en el pre-test al 96% en el post-test. Al parecer, nuevamente, las dificultades que muestran los estudiantes en el pre-test son superadas en un porcentaje significativo en el post-test.

*En el pre-test*. Un alumno contesta correctamente en todas las relaciones. Veintidós alumnos contestan con equívocos. Tres alumnos no responden.

*En el post-test*. Tenemos a dos alumnos (20) y (23), que no logran identificar que la representación geométrica del sistema 5, son dos rectas paralelas. Una posible interpretación a este hecho es que los alumnos no identifican claramente que en las ecuaciones algebraicas $y = -x + 1$ e $y = -x$, el coeficiente de ambas es igual a menos uno.

Los alumnos referidos, tampoco logran identificar que la representación geométrica del sistema 3 se trata de la misma recta. Nuevamente, al parecer no logran identificar que en las ecuaciones algebraicas $y = \frac{1}{2}x - 2$ e $y = \frac{2}{4}x - \frac{8}{4}$, los coeficientes son iguales a un medio y los términos independientes son iguales a dos.

> *Observación. Para los sistemas 3 y 5, los alumnos (20) y (23) no responden correctamente en el pre-test ni en el post-test.*
>
> *Nuevamente se hace mención a que la comprensión no crece linealmente. Según Hiebert y Carpenter (1992) el crecimiento de las redes de conocimiento algunas veces se manifiesta con periodos de confusión. Es necesario que el profesor asista a los estudiantes en la construcción de conexiones verdaderas.*

El sistema 3 se puede considerar como un sistema que hace válidos los cuatro incisos, es decir, por un lado es posible interpretarlo como dos rectas que se intersectan en cualquier punto del eje "y", también como dos rectas que se cruzan en cualquier punto; por otro lado, son dos rectas paralelas y finalmente como la misma recta para las dos ecuaciones. Este hecho fue percibido por dos alumnos (13 y 25), quienes reportaron al sistema 3 en los cuatro incisos.

*Apartado IV*

En este apartado, el alumno tiene que proponer sistemas de ecuaciones de acuerdo a las situaciones que se reproducen a continuación.

Situación 1. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene solución única.

Situación 2. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas sin solución.

Situación 3. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene infinidad de soluciones.

Para cada situación, el alumno tiene que plantear los sistemas de acuerdo a las conexiones que se muestran en la tabla 5.8., que a continuación se presenta.

Tabla 5.8. Conexiones de las situaciones en su representación algebraica y gráfica para el apartado IV.

Situación 1. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene solución única.

| Representación algebraica | | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Dos graficas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las dos ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno cuando la "$y$" esta despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la "$x$" son diferentes. $m_1 \neq m_2$ | → | Las rectas tienen inclinaciones diferentes. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ |
| 4 | Sin condiciones en los términos independientes. | → | La intersección de cada una de las rectas con el eje de las ordenadas puede ser en cualquier punto. |

Situación 2. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas sin solución.

| Representación algebraica | | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Dos graficas en el plano cartesiano. |
| 2 | En las dos ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno cuando la "$y$" esta despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la "$x$" son iguales. $m_1 = m_2$ | → | Las rectas tienen la misma inclinación. Las rectas son paralelas. $\alpha_1 = \alpha_2$ |
| 4 | Los términos independientes son diferentes. $b_1 \neq b_2$ | → | La intersección de cada una de las rectas con el eje de las ordenadas es en puntos diferentes. |

Situación 3. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene infinidad de soluciones.

| Representación algebraica | | → | Representación geométrica |
|---|---|---|---|
| 1 | Dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas con "$x$" e "$y$". | → | Dos graficas en el mismo plano cartesiano. |
| 2 | El exponente de la "$x$" es uno cuando la "$y$" esta despejada. | → | Las gráficas son líneas rectas. |
| 3 | Los coeficientes de la "$x$" son iguales. $m_1 = m_2$ | → | Las rectas tienen la misma inclinación. $\alpha_1 = \alpha_2$ |
| 4 | Los términos independientes son iguales. $b_1 = b_2$ | → | La intersección de cada una de las rectas con el eje de las ordenadas es en el mismo punto. |
| 5 | $m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$ | → | Se trata de la misma recta, o bien, dos rectas que se intersectan en todos sus puntos. |

Los resultados se muestran en las tablas 5.9., que se encuentran a continuación.

Tabla 5.9.1. Resultados del pre-test para el apartado IV.

| Apartado | IV PRE-TEST | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Situación 1 | | | | Situación 2 | | | | Situación 3 | | | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | |
| 1 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 2 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 5 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 6 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 7 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 31 |
| 12 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 13 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 14 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 15 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 16 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 17 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 18 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 19 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 20 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 21 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 22 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 23 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 24 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 26 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| Total | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | |
| **% Grupal** | **4** | **4** | **4** | **4** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | | **1** |

Tabla 5.9.2. Resultados del post-test para el apartado IV.

| Apartado | IV POST-TEST | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Situación 1 | | | | Situación 2 | | | | Situación 3 | | | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 11 | 85 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 100 |
| Total | 26 | 26 | 25 | 26 | 26 | 26 | 25 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 336 | |
| **% Grupal** | **100** | **100** | **96** | **100** | **100** | **100** | **96** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | | **99** |

Las tablas de resultados muestran que el rendimiento de los estudiantes va de 1% de respuestas correctas en el Pre-test, al 99% en el post-test. Al parecer, nuevamente los alumnos logran superar las dificultades que tienen en el pre-test y obtienen un alto rendimiento en el post-test.

En el pre-test. Sólo el alumno (11) propone correctamente la situación 1, cinco alumnos proponen sistemas de forma errónea y veinte alumnos no proponen ninguna situación.

*En el post-test*. El alumno (6), que no respondió en el pre-test, en esta ocasión propone para la situación 1, precisamente un sistema que no tiene solución, ya que escribe un sistema cuya representación gráfica es de dos rectas paralelas y, para la situación 2, escribe un sistema con solución única; es decir, los escribió justo al revés. Sobre la misma temática, el alumno a veces contesta bien y a veces mal; en la sección de Casos Especiales de este capítulo, se le da seguimiento a todo su desempeño en la prueba post-test.

> *Observación. A pesar del equívoco comentado anteriormente, el alumno (6) muestra una "mejora": de no contestar para ninguna situación en el pre-test, a contestar correctamente la situación 3.*

*Apartado V*

En el apartado V.1., se pide a los alumnos que identifiquen geométricamente si los puntos (A, B, C, D y E) son solución de algunas de las ecuaciones (y cuál es) de un sistema de cinco ecuaciones lineales con dos incógnitas, no son solución de alguna de ellas o bien, son solución del sistema de ecuaciones lineales. A continuación se muestra dicho sistema.

Representación algebraica del sistema de ecuaciones

$y = 2x - 4$ …$L_1$

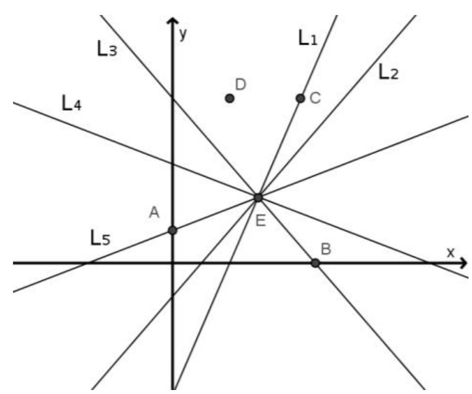
$y = x - 1$ …$L_2$

$y = -x + 5$…$L_3$

$y = -\frac{1}{3}x + 3$ …$L_4$

$y = \frac{1}{3}x + 1$ …$L_5$

Representación geométrica del sistema de ecuaciones.




Posteriormente, en el apartado V.2., el alumno debe contestar la siguiente pregunta.

> En la representación geométrica de un sistema de ecuaciones, ¿qué condiciones debe cumplir un punto, para que sea solución del sistema?

Las conexiones que el alumno debe establecer para contestar correctamente los distintos cuestionamientos de este apartado, se muestran en la tabla 5.10.

Tabla 5.10. Características de la solución algebraica y geométrica para un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

| Características geométricas | | → | Características algebraicas |
|---|---|---|---|
| 1 | El punto pertenece a una recta. | → | La pareja ordenada del punto satisface la ecuación. |
| 2 | El punto no pertenece a la recta. | → | La pareja ordenada del punto no satisface la ecuación. |
| 3 | El punto pertenece a todas las rectas del sistema. | → | La pareja ordenada del punto satisface a todas las ecuaciones del sistema. |

Las respuestas esperadas se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 5.11. Respuestas a los cuestionamientos V.1.

| Puntos | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Ecuaciones | $L_5$ | $L_3$ | $L_1$ | Ninguna | $L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$ y $L_5$. |

La respuesta a la pregunta V.2., es: la condición de un punto en la representación geométrica para que sea solución del sistema, es que éste debe pertenecer a todas las rectas; es el punto de intersección.

Los resultados de este apartado se muestran en las tablas 5.12., localizadas renglones adelante.

Las tablas de resultados muestran que el rendimiento de los estudiantes va de 34% de respuestas correctas en el Pre-test, al 97% en el post-test. Al parecer las dificultades mostradas en el pre-test son superadas en el post-test.

*En el pre-test*. Diez alumnos no contestan ningún cuestionamiento. Dos alumnos los contestan correctamente. Catorce alumnos responden con equívocos. En particular, diecisiete alumnos no responden la pregunta V.2., entre ellos el (6), (9) y (24).

*En el post-test*. La mayoría de los alumnos identificaron bien los puntos, sin embargo, se presentaron errores en la respuesta a la pregunta V.2. (En la representación geométrica de un sistema de ecuaciones, ¿qué condiciones debe cumplir un punto, para que sea solución del sistema?), algunos de los cuales se indican a continuación.

El alumno (6) contesta, "*que salga el mismo resultado cuando la sustituyen",* el alumno, responde que se tiene que "sustituir" para indicar que un punto es solución de un sistema de ecuaciones lineales, es decir, responde con conceptos algebraicos, una pregunta que se hace para la representación geométrica. Al parecer el pensamiento algebraico del alumno se impone al pensamiento geométrico.

El alumno (9) escribe: *"una línea debe intersectar ese punto"*. Esto no es válido para el sistema, en este "todas las rectas se intersectan en un mismo punto".

La respuesta del alumno (24) es, *"para que haya solución del sistema, todas las ecuaciones deben de ser diferentes tanto en pendiente como en ordenada"*. Esta respuesta es parcialmente correcta, en virtud de que el alumno no considera el caso que un sistema puede tener solución única, si los términos independientes de las ecuaciones son iguales.

Tabla 5.12.1. Resultados del pre-test del apartado V.

| Apartado | V PRE-TEST | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | V.1. | | | | | V.2. | | |
| Alumnos | A | B | C | D | E | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 83 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 33 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 3 | 50 |
| 4 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 5 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | N | 3 | 50 |
| 7 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | N | 3 | 50 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | N | 2 | 33 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | N | 4 | 67 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | N | 4 | 67 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 14 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 17 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 16 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 17 | 1 | N | N | N | N | N | 1 | 17 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 | 67 |
| 19 | N | N | N | 0 | 0 | N | 0 | 0 |
| 20 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 21 | 1 | N | N | N | N | N | 1 | 17 |
| 22 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 50 |
| 24 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | N | 2 | 33 |
| 25 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | N | 3 | 50 |
| 26 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| Total | 15 | 12 | 11 | 8 | 5 | 2 | 53 | |
| **% Grupal** | **58** | **46** | **42** | **31** | **19** | **8** | | **34** |

Tabla 5.12.2. Resultados del post-test del apartado V.

| Apartado | V POST-TEST | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | V.1. | | | | | V.2. | | |
| Alumnos | A | B | C | D | E | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 83 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 83 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 83 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 83 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 83 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| Total | 26 | 26 | 26 | 26 | 25 | 22 | 151 | |
| **% Grupal** | **100** | **100** | **100** | **100** | **96** | **85** | | **97** |

*Apartado VI*

En el apartado VI.1., el alumno tiene que indicar si la pareja ordenada propuesta, es solución del sistema mostrado en su representación algebraica, o no. A continuación se reproduce dicho sistema.

| Sistema de ecuaciones | Pareja ordenada | Respuesta (si/no) |
|---|---|---|
| $y = -x + 2 \ldots L_1$ | (4,-2) | |
| $y = \frac{1}{2}x - 4 \ldots L_2$ | | ____________ |
| $y = 2x - 10 \ldots L_3$ | | |
| $y = x^2 - 8x + 14 \ldots L_4$ | | |

Posteriormente, en el apartado VI.2., se hace la siguiente pregunta.

> En la representación algebraica de un sistema de ecuaciones, ¿qué condiciones debe cumplir una pareja ordenada para que sea solución del sistema?

Las conexiones entre las representaciones algebraicas y geométricas que el alumno debe establecer para responder estos cuestionamientos son las mismas que en el apartado anterior y están mostradas en la tabla 5.10., que se reproduce a continuación.

Tabla 5.10. Características de la solución algebraica y geométrica para un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

| | Características geométricas | → | Características algebraicas |
|---|---|---|---|
| 1 | El punto pertenece a una recta. | → | La pareja ordenada del punto satisface la ecuación. |
| 2 | El punto no pertenece a la recta. | → | La pareja ordenada del punto no satisface la ecuación. |
| 3 | El punto pertenece a todas las rectas del sistema. | → | La pareja ordenada del punto satisface a todas las ecuaciones del sistema. |

Las respuestas esperadas para este apartado se muestran a continuación.

Tabla 5.13. Respuestas esperadas para el apartado VI.1. y VI.2.

| VI.1. | VI.2. |
|---|---|
| $L_1$, si la satisface.<br>$L_2$, si la satisface.<br>$L_3$, si la satisface.<br>$L_4$, si la satisface.<br>Respuesta. El punto $(4, -2)$ si es solución del sistema. | Respuesta a la pregunta. Que al sustituirla en todas las ecuaciones, estas, conserven la igualdad. |

*Comentario. Para resolver el apartado VI.1., los alumnos deben sustituir la pareja ordenada en cada una de las ecuaciones, esto les permite decidir si esta pareja ordenada, es solución del sistema o no.*

*Comentario. La ecuación $L_4$, no es lineal. Sin embargo se pregunta porque el concepto de solución, es el mismo para sistemas lineales o no lineales. Esta pregunta se plantea sin mencionar a los alumnos lo anterior. Se considera que dicha pregunta nos permite valorar en qué medida los estudiantes transfieren lo aprendido en sistemas lineales a sistemas no lineales.*

Los resultados se muestran en las tablas 5.14., localizadas renglones adelante.

Las tablas muestran que el rendimiento de los estudiantes va del 33% en el pre-test al 97% en el post-test. Al parecer, nuevamente, las dificultades que muestran los estudiantes en el pre-test son superadas en un porcentaje significativo en el post-test.

En el pre-test. Cinco alumnos responden correctamente, catorce alumnos no responden a ningún cuestionamiento y siete alumnos contestan con algunos equívocos.

*En el post-test*. Se observa lo siguiente: los alumnos sustituyen y encuentran correctamente que la pareja ordenada es solución del sistema. Sin embargo, al responder la pregunta VI.2. (En la representación algebraica de un sistema de ecuaciones, ¿qué condiciones debe cumplir una pareja ordenada para que sea solución del sistema?), algunos no lo hacen correctamente. Al parecer, tienen limitaciones al expresar por escrito su trabajo algebraico.

Entre las respuestas incorrectas a la pregunta señalada podemos mencionar:

- *"que salga el mismo resultado que cuando la sustituyes", alumno (6);*
- *"tienen que ser equivalentes a los valores de "$x$" e "$y$", para que sean solución de dicho sistema", alumno (14);*
- *"que su ordenada y su pendiente sean diferentes", alumno (22);*
- *"que sea factible de asociarse a todas las rectas (punto de solución)", alumno (*23).

Tabla 5.14.1. Resultados del pre-test para el apartado VI.1.

| Apartado | VI PRE-TEST | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | VI.1. | | | | | VI.2. | | |
| Alumnos | L1 | L2 | L3 | L4 | P | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 83 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | N | 2 | 33 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 6 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 7 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | N | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | N | 0 | 0 |
| 11 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 12 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 17 |
| 15 | N | N | N | N | N | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | N | 0 | 0 |
| 17 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 19 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 20 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | N | 5 | 83 |
| 22 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 17 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | N | 5 | 83 |
| 25 | 1 | N | N | N | 1 | 0 | 2 | 33 |
| 26 | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| Total | 9 | 9 | 9 | 8 | 11 | 5 | 51 | |
| **% Grupal** | **35** | **35** | **35** | **31** | **42** | **19** | | **33** |

Tabla 5.14.2. Resultados del post-test para el apartado VI.2.

| Apartado | VI POST-TEST | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | VI.1. | | | | | VI.2. | | |
| Alumnos | L1 | L2 | L3 | L4 | P | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 83 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 83 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 83 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 5 | 83 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 100 |
| Total | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 22 | 152 | |
| **% Grupal** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **85** | | **97** |

Como podemos observar estos alumnos muestran una “no adecuada” comunicación “matemática escrita”, sin embargo, algebraicamente responden correctamente.

*Observación. A pesar de las dificultades expresadas anteriormente, se observa que los mencionados alumnos en el apartado VI.1., trabajaron de la siguiente manera.*

*Los alumnos (6) y (22) no responden en el pre-test, pero en el post-test responden satisfactoriamente.*

*El alumno (14), en el pre-test se ayuda del bosquejo, pero, en el post-test utiliza la representación algebraica para responder.*

*El alumno (23), en el pre-test no realiza ningún cálculo, pero, en el post-test realiza los cálculos correctamente.*

*Apartado VII*

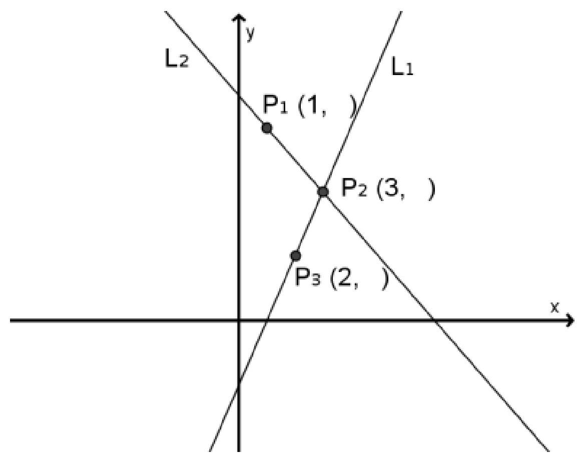
En el apartado VII.1., se presenta un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en su representación algebraica y geométrica, el alumno, tiene que calcular las ordenadas correspondientes a tres puntos marcados en las rectas. A continuación se muestra dicho sistema.

Representación Algebraica.

$y = 2x - 2\ldots$ L1

$y = -x + 7\ldots$L2

Representación geométrica.




Posteriormente, en el apartado VII.2., el alumno debe contestar las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas formas hay de calcular la ordenada del punto $P_1$?
2. ¿Cuántas formas hay de calcular la ordenada del punto $P_2$?
3. ¿Cuántas formas hay de calcular la ordenada del punto $P_3$?

Para que el alumno responda satisfactoriamente debe saber que la pareja ordenada $(x, y)$ de cada punto indicado satisface la ecuación en la que se localiza. En este sentido se tiene:

- como $P_1$ está sobre $L_2$, la pareja ordenada de $P_1$ satisface la ecuación $L_2$;

- como $P_2$ es la solución del sistema, la pareja ordenada de $P_2$ satisface a las ecuaciones $L_1$ y $L_2$;
- como $P_3$ está sobre $L_1$, la pareja ordenada de $P_3$ satisface a ecuación $L_1$.

Las respuestas esperadas se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 5.15. Respuestas para el apartado VII.

| Apartado VII.1. | | | | Apartado VII.2. |
|---|---|---|---|---|
| Puntos | 1. Elección de ecuación | 2. Sustitución y calculo | 3. Resultado (valor de la ordenada) | Número de formas de calcular la ordenada |
| $P_1$ | $L_2$ | Se espera que los alumnos sustituyan las abscisas dadas y realicen los cálculos algebraicos correctamente. | 6 | Una, con $L_2$. |
| $P_2$ | $L_1$ o $L_2$ | | 4 | Dos, con $L_1$ o $L_2$. |
| $P_3$ | $L_1$ | | 4 | Una, con $L_1$. |

Los resultados para este apartado se muestran en las tablas 5.16., localizadas renglones adelante.

Las tablas muestran que el rendimiento de los estudiantes va del 41% en el pre-test al 96% en el post-test. Al parecer, nuevamente, las dificultades que muestran los estudiantes en el pre-test son superadas en un porcentaje significativo en el post-test.

En el pre-test. Siete alumnos responden satisfactoriamente; diez alumnos no responden y doce alumnos responden con algunos equívocos. En particular el alumno (3) responde correctamente.

*En el post-test*. De los pocos errores que se observan en el post-test se comenta el siguiente. En las preguntas dos y tres (2. ¿Cuántas formas hay de calcular la ordenada del punto $P_2$? 3. ¿Cuántas formas hay de calcular la ordenada del punto $P_3$?). El alumno (3) contesta que: “una para el punto $P_2$ y dos para el punto $P_3$”. Esta respuesta es incorrecta; es justo al revés. Sin embargo, el mismo alumno en el pre-test, lo contestó en forma correcta, este hecho se puede interpretar, como una confusión entre los puntos a la hora de contestar.

Tabla 5.16.1. Resultados del pre-test para el apartado VII.

| Apartado | VII PRE-TEST | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | VII.1. P1 | | | VII.1. P2 | | | VII.1. P3 | | | VII.2. | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | P1 | P2 | P3 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 7 | 58 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 6 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | N | N | N | 9 | 75 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 9 | 75 |
| 12 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 15 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | N | N | N | 3 | 25 |
| 17 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 19 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 20 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 22 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 23 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 24 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 8 | 67 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | N | N | N | 7 | 58 |
| 26 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| Total | 12 | 12 | 11 | 13 | 11 | 11 | 11 | 12 | 10 | 8 | 8 | 8 | 127 | |
| **% Grupal** | **46** | **46** | **42** | **50** | **42** | **42** | **42** | **46** | **38** | **31** | **31** | **31** | | **41** |

Tabla 5.16.2. Resultados del post-test para el apartado VII.

| Apartado | VII POST-TEST | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | VII.1. P1 | | | VII.1. P2 | | | VII.1. P3 | | | VII.2. | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | P1 | P2 | P3 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 10 | 83 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 10 | 83 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 9 | 75 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 9 | 75 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 83 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 100 |
| Total | 25 | 25 | 25 | 26 | 25 | 25 | 25 | 25 | 25 | 26 | 24 | 24 | 300 | |
| **% Grupal** | **96** | **96** | **96** | **100** | **96** | **96** | **96** | **96** | **96** | **100** | **92** | **92** | | **96** |

*Apartado VIII*

En el apartado VIII.1., se presenta un sistema de cuatro ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica y gráfica: el alumno debe completar la tabla que se le muestra.

Sistema en su representación algebraica.

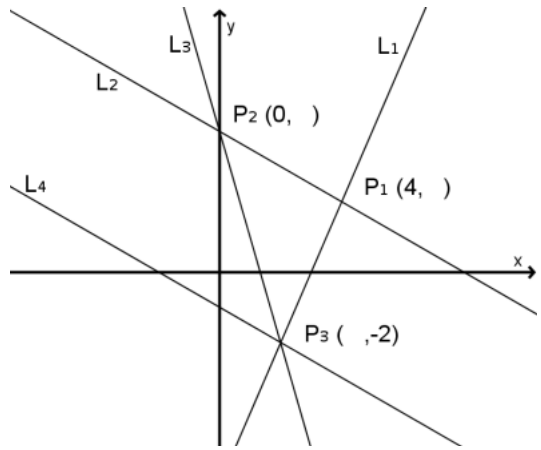
$y = 2x - 6$ … $L_1$

$y = -\frac{1}{2}x + 4$ …$L_2$

$y = -3x + 4$…$L_3$

$y = -\frac{1}{2}x - 1$ …$L_4$

Sistema en su representación geométrica.




| Punto de intersección | 1. Ecuaciones que se intersectan | 2. Abscisa del punto de intersección | 3. Ordenada del punto de intersección | 4 y 5. Explica como calculaste la abscisa u ordenada del punto de intersección |
|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | | | | |
| $P_2$ | | | | |
| $P_3$ | | | | |

Posteriormente, en el apartado VIII.2., el alumno debe contestar la siguiente pregunta.

> Para completar la pareja ordenada de cada uno de los puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$, ¿existe, otra manera de calcular la abscisa o la ordenada (según el caso) de dichos puntos?

*Consideraciones para el llenado de la tabla*. El alumno debe identificar las rectas que se intersectan en cada punto. Posteriormente, debe elegir alguna ecuación para calcular la coordenada faltante. A continuación se muestra la tabla con las respuestas.

Tabla 5.17. Respuestas para el apartado VIII.1.

| Puntos de intersección | 1. Ecuaciones que se intersectan | 2. Abscisa de punto de intersección | 3. Ordenada de punto de intersección | Explica como calculaste la abscisa u ordenada del punto de intersección | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 4. Ecuación usada (pueden ser) | 5. Sustitución y calculo |
| $P_1$ | $L_1$ y $L_2$ | 4 | 2 | $L_1$ y/o $L_2$ | Sustituir la abscisa y calcular la ordenada. |
| $P_2$ | $L_2$ y $L_3$ | 0 | 4 | $L_2$ y/o $L_3$ | Sustituir la abscisa y calcular la ordenada. |
| $P_3$ | $L_1$, $L_3$ y $L_4$ | 2 | -2 | $L_1$, $L_3$ y/o $L_4$ | Sustituir la ordenada y calcular la abscisa. |

Las respuestas para el apartado VIII.2., son las siguientes:

- para el punto $P_1$ se tienen dos formas de cálculo con $L_1$ o $L_2$,
- para el punto $P_2$ se tienen dos formas de cálculo con $L_2$ o $L_3$,
- para el punto $P_3$ se tienen tres formas de cálculo con $L_1$, $L_3$ o $L_4$.

Los resultados de este apartado se muestran en las tablas 5.18.

Tabla 5.18.1. Resultados del Pre-test para el apartado VIII.

| Apartado | VIII PRE-TEST | | | | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | VIII.1. P1 | | | | | VIII.1. P2 | | | | | VIII.1. P3 | | | | | VIII.2 | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 8 | 50 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | N | N | 1 | 1 | 0 | N | N | 1 | 0 | 1 | N | N | N | 6 | 38 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | N | 10 | 63 |
| 4 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 6 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 7 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 15 | 94 |
| 9 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | N | 0 | 0 |
| 11 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 12 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | N | 12 | 75 |
| 14 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 15 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 16 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 17 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 19 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 20 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 21 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 22 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 13 |
| 24 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | N | 3 | 19 |
| 25 | 1 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 1 | 6 |
| 26 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| Total | 9 | 6 | 4 | 5 | 4 | 9 | 6 | 5 | 5 | 5 | 9 | 4 | 7 | 4 | 4 | 3 | 89 | |
| **% Grupal** | **35** | **23** | **15** | **19** | **15** | **35** | **23** | **19** | **19** | **19** | **35** | **15** | **27** | **15** | **15** | **12** | | **21** |

Tabla 5.18.2. Tabla de resultados del post-test para el apartado VIII.

| Apartado / Alumnos | VIII POST-TEST | | | | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | VIII.1. P1 | | | | | VIII.1. P2 | | | | | VIII.1. P3 | | | | | VIII.2 | | |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 75 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 14 | 88 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 14 | 88 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 14 | 88 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 14 | 88 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 14 | 88 |
| 15 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 4 | 25 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | 75 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 10 | 63 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 15 | 94 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 15 | 94 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| Total | 26 | 25 | 23 | 24 | 24 | 25 | 24 | 22 | 23 | 23 | 26 | 18 | 25 | 25 | 20 | 25 | 378 | |
| **% Grupal** | **100** | **96** | **88** | **92** | **92** | **96** | **92** | **85** | **88** | **88** | **100** | **69** | **96** | **96** | **77** | **96** | | **91** |

Las tablas muestran que el rendimiento de los estudiantes va del 21% en el pre-test al 91% en el post-test. Al parecer, nuevamente, las dificultades que muestran los estudiantes en el pre-test son superadas en un porcentaje significativo en el post-test.

*En el pre-test.* Dos alumnos responden satisfactoriamente; diecisiete alumnos no responden; siete alumnos responden con algunos equívocos.

*En el post-test*. Una dificultad que tuvieron dos alumnos (5) y (15), es que al parecer confundieron los puntos $P_1$ y $P_2$ a la hora de registrar sus resultados en la tabla: los datos de $P_1$ los escribieron en los espacios correspondientes a $P_2$. Este error es factible de interpretar como una posible limitación de los estudiantes para operar con varias ecuaciones y distintas soluciones parciales.

> *Observación. En los cuestionamientos de los puntos $P_1$ y $P_2$, se observa lo siguiente. El alumno (5) muestra un retroceso entre el pre-test y el post-test.*
>
> *Según Hiebert y Carpenter (1992) el crecimiento de la comprensión se puede describir como cambios en las redes de conocimientos, lo cual puede ocasionar periodos de confusión, la comprensión no crece linealmente. Sin embargo, es necesario que el profesor ayude a los estudiantes a construir conexiones productivas.*

Otra dificultad que se presentó fue en el punto $P_2$. Las ecuaciones que se intersectan en dicho punto son $L_2$ y $L_3$. El alumno (20) tomó la ecuación $L_1$ para calcular la ordenada, lo cual es un error, ya que dicho punto no pertenece a $L_1$. En la columna de “ecuaciones que se intersectan” no especificó las ecuaciones, $L_2$ y $L_3$, sino, simplemente escribió dos.

> *Observación. A pesar de lo expuesto en el párrafo anterior, el alumno (20) muestra una mejora; ya que en el pre-test no contestó a ningún cuestionamiento y en el post-test únicamente muestra el equívoco comentado anteriormente.*

En el punto $P_3$ seis alumnos (6, 7, 12, 15, 23 y 24) responden que la abscisa es menos dos (-2) lo cual es un error, ya que la abscisa de dicho punto es “más dos”. El resultado de menos dos, se puede obtener al operar algebraicamente en forma equivoca utilizando la ecuación $L_1$ y la ordenada proporcionada en el bosquejo, como se muestra a continuación.

$$y = 2x - 6$$
$$-2 = 2x - 6$$
$$2x = 2 - 6$$
$$2x = -4$$
$$x = -2$$

Los alumnos (12, 15, 23 y 24) muestran errores algebraicos como el mostrado anteriormente, los otros dos alumnos (6 y 7) sólo escriben en la tabla el “-2”.

> *Observación. A pesar de lo anterior, los alumnos (23) y (24) muestran una mejora, ya que en el pre-test se equivocan en la mayoría de los cuestionamientos y en el post-test únicamente cometen el equívoco mencionado anteriormente.*
>
> *Los alumnos (6), (7) y (12) muestran una mejora, ya que en el pre-test no responden y en el post-test únicamente cometen el equívoco mencionado anteriormente.*
>
> *En este punto, los seis alumnos mencionados, demuestran su limitación algebraica en el despeje de ecuaciones lineales.*

*Apartado IX*

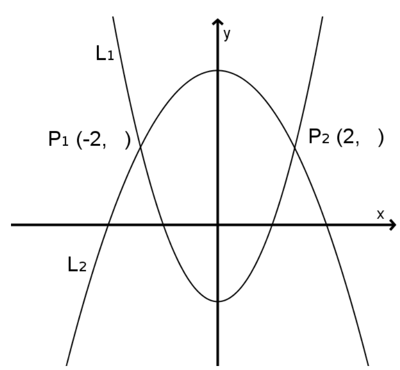
En el apartado IX.1., el alumno tiene que encontrar las ordenadas de los puntos de solución de un sistema de dos ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas. Éste se reproduce a continuación.

Sistema en su representación algebraica

$y = x^2 - 2 \ldots L_1$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4 \ldots L_2$

Sistema en su representación geométrica




Además, en el apartado IX.2., el alumno debe contestar la siguiente pregunta.

¿De cuántas formas se pueden calcular las ordenadas de los puntos de intersección, $P_1$ y $P_2$?

A pesar de que el presente estudio se centra en sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se considera pertinente preguntar por este sistema de ecuaciones cuadráticas, a fin de explorar en qué medida los estudiantes pueden llevar a cabo una “pequeña” transferencia: el punto en el que se intersectan las ecuaciones es el punto solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, independientemente que estas sean lineales o cuadráticas.

*Puntos para evaluar*. Primeramente el alumno tiene que reconocer que, el sistema es cuadrático, que en su representación geométrica tiene dos puntos de intersección y, que dichos puntos son la solución. Posteriormente debe contestar lo que se le pide. A continuación se muestra la tabla 5.19., que contiene los puntos para evaluar.

Tabla 5. 19. Puntos para evaluación del apartado IX.1 y IX.2

| IX.1. | | | | IX.2. |
|---|---|---|---|---|
| Puntos de intersección | 1. Elección de una ecuación | 2. Sustitución | 3. Cálculo | Número de formas para el cálculo |
| $P_1$ | El alumno utiliza alguna de las ecuaciones para calcular la ordenada. | El alumno realiza correctamente la sustitución. | El alumno calcula correctamente. Para $P_1$ y $P_2$ la ordenada tiene un valor de 2. | Existen dos formas para calcular la ordenada de cada uno de los puntos, con la ecuación $L_1$ y con la $L_2$. |
| $P_2$ | | | | |

Los resultados se muestran en las tablas 5.20., que se encuentran renglones adelante.

Las tablas muestran que el rendimiento de los estudiantes va del 29% en el pre-test al 91% en el post-test. Al parecer, nuevamente, las dificultades que muestran los estudiantes en el pre-test son superadas en un porcentaje significativo en el post-test.

En el pre-test. Seis alumnos contestan correctamente; quince alumnos no contestan y cinco alumnos contestan con algunos equívocos. En particular, los alumnos (2), (8) y (20) no contestan; y el alumno (23) contesta equivocadamente, utilizando la representación geométrica proporcionada.

*En el post-test*. Algunas dificultades encontradas se indican a continuación.

El alumno (2) no contestó este apartado. Tratando de interpretar este hecho, como todo el desarrollo se llevó a cabo con ecuaciones lineales, cuando el estudiante ve las ecuaciones cuadráticas, no las trabaja.

*Observación. El alumno (2) no contesta este apartado en ninguna de las dos pruebas.*

Tabla 5.20.1. Resultados Pre-test del apartado IX

| Apartado / Alumnos | IX PRE-TEST | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | IX.1. P1 | | | IX.1. P2 | | | IX.2. | | |
| | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 2 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 4 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 6 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 7 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 8 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | N | N | N | N | 3 | 43 |
| 10 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 12 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 0 | N | N | N | 1 | 3 | 43 |
| 15 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 16 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 17 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 19 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 20 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 21 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 5 | 71 |
| 25 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 26 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| Total | 9 | 9 | 8 | 7 | 7 | 6 | 7 | 53 | |
| **% Grupal** | **35** | **35** | **31** | **27** | **27** | **23** | **27** | | **29** |

Tabla 5.20.2. Resultados post-test del apartado IX.

| Apartado / Alumnos | IX POST-TEST | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | IX.1. P1 | | | IX.1. P2 | | | IX.2. | | |
| | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 2 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 | 57 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 20 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 | 29 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 23 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 86 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| Total | 25 | 23 | 22 | 24 | 24 | 23 | 25 | 166 | |
| **% Grupal** | **96** | **88** | **85** | **92** | **92** | **88** | **96** | | **91** |

En el punto $P_1$, tres estudiantes (8), (20) y (23), no sustituyen correctamente la abscisa (-2) en la ecuación $L_1$. A continuación se muestra el equívoco y la operación esperada.

| Operación de los alumnos | Operación esperada |
| --- | --- |
| $y = -2^2 - 2$ | $y = (-2)^2 - 2$ |
| $y = -4 - 2$ | $y = 4 - 2$ |
| $y = -6$ | $y = 2$ |

*Observación. Los alumnos (8) y (20) en el pre-test no responden y en el post-test tratan de responder, pero, cometen el equívoco anteriormente señalado.*

El alumno (8) comete otro error en el punto $P_2$, donde la abscisa tiene un valor de dos. Al utilizar la ecuación $L_2$, ignora el signo negativo del coeficiente un medio. A continuación se muestra el equívoco y la operación esperada.

| Operación del alumno | Operación esperada |
| --- | --- |
| $y = -\frac{1}{2}(2)^2 + 4$ | $y = -\frac{1}{2}(2)^2 + 4$ |
| $y = 2 + 4$ | $y = -2 + 4$ |
| $y = 6$ | $y = 2$ |

*Observación. El alumno (8) no responde en el pre-test, y en el post-test responde, pero, muestra las limitaciones algebraicas comentadas anteriormente.*

*Apartado X*

Se muestra a los alumnos un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica y gráfica, con solución única y las coordenadas de solución. A continuación se muestra dicho sistema.

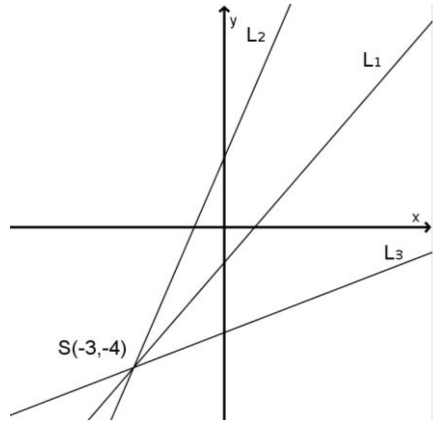
Sistema en su representación algebraica.

$y_1 = x_1 - 1$ …L1

$y_2 = 2x_2 + 2$ …L2

$y_3 = \frac{1}{3}x_3 - 3$ …L3

Sistema en su representación geométrica.




Se pide al alumno que responda a los siguientes cuestionamientos, marcando "V" si es verdadero y, "F" si es falso.

Algunas condiciones en el punto de solución "S" son:

a. $x_1 < x_2 < x_3$ … V o F.
b. $x_1 = x_2 \neq x_3$ … V o F.
c. $x_1 = x_2 = x_3 = -3$ … V o F.
d. La pareja ordenada asociada al llamado punto "S" se puede representar por $(x_3, y_2)$ … V o F.
Porque________________________
e. $y_1 > y_2 > y_3$ … V o F.
f. $y_1 \neq y_2 = y_3$ … V o F.
g. $y_1 = y_2 = y_3 = -4$ … V o F.
h. La pareja ordenada asociada al llamado punto "S" se puede representar por $(x_2, y_1)$ … V o F.
Porque ________________________________

Para el sistema mostrado, el alumno tiene que reconocer que en el punto de solución $x_1 = x_2 = x_3$ e $y_1 = y_2 = y_3$.

Por lo que las respuestas son las siguientes:

Tabla 5.21. Respuestas del apartado X.

| Preguntas | a | b | c | d | d… porque: | e | f | g | h | h… porque: |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Respuestas | F | F | V | V | $x_1 = x_2 = x_3$ e $y_1 = y_2 = y_3$ | F | F | V | V | $x_1 = x_2 = x_3$ e $y_1 = y_2 = y_3$ |

Los resultados se muestran en las tablas 5.22., que se localizan a continuación.

Tabla 5.22.1. Resultados pre-test del apartado X.

| Apartado | X PRE-TEST | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Alumnos | a | b | c | d | d… | e | f | g | h | h… | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 2 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 5 | 50 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | N | N | 1 | 0 | 1 | N | N | 3 | 30 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | N | N | 1 | N | N | N | N | 3 | 30 |
| 7 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 8 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 9 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 10 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 11 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 12 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 13 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 60 |
| 14 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | N | N | 3 | 30 |
| 15 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 20 |
| 16 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 17 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 5 | 50 |
| 19 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 20 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 21 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 22 | 1 | 1 | 0 | N | N | N | N | N | N | N | 2 | 20 |
| 23 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 20 |
| 24 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | N | N | N | N | N | 3 | 30 |
| 25 | 1 | 1 | 0 | 0 | N | 0 | 1 | 1 | N | N | 4 | 40 |
| 26 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| Total | 8 | 12 | 3 | 4 | 2 | 9 | 6 | 5 | 5 | 4 | 58 | |
| **% Grupal** | **31** | **46** | **12** | **15** | **8** | **35** | **23** | **19** | **19** | **15** | | **22** |

Tabla 5.22.2. Resultados post-test del apartado X.

| Apartado / Alumnos | X POST-TEST a | b | c | d | d… | e | f | g | h | h… | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| Total | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 260 | |
| **% Grupal** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | | **100** |

Las tablas muestran que el rendimiento de los estudiantes va del 22% en el pre-test al 100% en el post-test. Al parecer, nuevamente, las dificultades que muestran los estudiantes en el pre-test son superadas en un porcentaje significativo en el post-test.

*En el pre-test*. Dos alumnos contestan correctamente; quince alumnos no contestan; y nueve alumnos contestan con equívocos.

*En el post-test*. Todos los alumnos responden correctamente.

*Apartado XI.*

En este apartado, el alumno, sin resolver algebraicamente ni bosquejar, debe responder si cada uno de los tres sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas que se muestran en su representación algebraica: i) tiene solución única, ii) no tiene solución, iii) tiene una infinidad de soluciones. A continuación se reproducen los sistemas de ecuaciones.

| | | |
|---|---|---|
| 1. $y = \frac{2}{3}x - 1$ …$L_1$ | 2. $y = \frac{2}{5}x - 3$ …$L_1$ | 3. $y = -\frac{1}{2}x + 1$ …$L_1$ |
| $y = \frac{2}{3}x - 2$ …$L_2$ | $y = -x + 3$ …$L_2$ | $y = -\frac{4}{8}x + \frac{8}{8}$ …$L_2$ |

Para este apartado, el alumno tiene que reconocer que:

- los sistemas son de dos ecuaciones con dos incógnitas, representadas estas últimas con "$x$" e "$y$" en su representación algebraica,

$$y = m_1x + b_1 \text{ …L}_1$$
$$y = m_2x + b_2 \text{ …L}_2$$

- en todas las ecuaciones el exponente de "$x$" es uno cuando "$y$" esta despejada, por lo que sus graficas correspondientes son líneas rectas.

Además, el alumno debe hacer el análisis entre las representaciones que se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 5.23. Conexiones para el apartado XI.

| Sistemas | Representación algebraica | → | Representación geométrica | Conclusión | Respuesta |
|---|---|---|---|---|---|
| Sistema 1 | $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$ | → | Las rectas tienen la misma inclinación y se intersectan con el eje de las ordenadas en puntos distintos. | Se trata de rectas paralelas, diferentes una de la otra. | "ii) no tiene solución". |
| Sistema 2 | $m_1 \neq m_2$ y $b_1 \neq b_2$ | → | Las rectas tienen distinta inclinación y se intersectan con el eje de las ordenadas en puntos distintos. | Se trata de dos rectas que se intersectan, entre ellas, en algún punto fuera del eje de las ordenadas. | "i) tiene solución única". |
| Sistema 3 | $m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$ | → | Las rectas tienen la misma inclinación y se intersectan con el eje de las ordenadas en el mismo punto. | Se trata de la misma recta, o bien, de dos rectas que se intersectan en todos sus puntos. | "iii) tiene infinidad de soluciones". |

Los resultados se muestran en las tablas 5.24., que se encuentran renglones adelante.

Dichas tablas muestran que el rendimiento de los estudiantes va del 9% en el pre-test al 96% en el post-test. Al parecer, nuevamente, las dificultades que muestran los estudiantes en el pre-test son superadas en un porcentaje significativo en el post-test.

En el pre-test. Un alumno contesta correctamente; veinte alumnos no responden y cinco responden con equívocos. En particular, el alumno (20) no responde.

En el post-test sólo hubo un estudiante (20) que contestó en forma errónea para los tres sistemas, parece ser que el estudiante no relacionó los coeficientes de la incógnita "$x$" y los términos independientes de las ecuaciones, con su representación geométrica y no supo definir si, dichas ecuaciones, son paralelas, se intersectan o, son equivalentes.

*Observación. Hay que recordar que según Hiebert y Carpenter (1992), la comprensión no crece linealmente, algunas veces, se manifiesta como* *periodos de confusión. Es necesario que el profesor ayude a los alumnos a construir relaciones productivas.*

Tabla 5.24.1. Resultados pre-test del apartado XI.

| Apartado / Alumnos | XI PRE-TEST SISTEMAS 1 | 2 | 3 | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | N | N | N | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 33 |
| 3 | N | N | N | 0 | 0 |
| 4 | N | N | N | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 6 | N | N | N | 0 | 0 |
| 7 | N | N | N | 0 | 0 |
| 8 | N | N | N | 0 | 0 |
| 9 | N | N | N | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 1 | 33 |
| 11 | 0 | 1 | 0 | 1 | 33 |
| 12 | N | N | N | 0 | 0 |
| 13 | N | N | N | 0 | 0 |
| 14 | N | N | N | 0 | 0 |
| 15 | N | N | N | 0 | 0 |
| 16 | N | N | N | 0 | 0 |
| 17 | N | N | N | 0 | 0 |
| 18 | N | N | N | 0 | 0 |
| 19 | N | N | N | 0 | 0 |
| 20 | N | N | N | 0 | 0 |
| 21 | N | N | N | 0 | 0 |
| 22 | N | N | N | 0 | 0 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 24 | 0 | 1 | 0 | 1 | 33 |
| 25 | N | N | N | 0 | 0 |
| 26 | N | N | N | 0 | 0 |
| Total | 1 | 5 | 1 | 7 | |
| **% Grupal** | **4** | **19** | **4** | | **9** |

Tabla 5.24.2. Resultados post-test del apartado XI.

| Apartado / Alumnos | XI POST-TEST SISTEMAS 1 | 2 | 3 | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 3 | 100 |
| Total | 25 | 25 | 25 | 75 | |
| **% Grupal** | **96** | **96** | **96** | | **96** |

*Apartado XII*

En el apartado XII.1., se pide al alumno que resuelva un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de sustitución. En el apartado XII.2, se pide que describa detalladamente en qué consiste este método. El sistema es el siguiente:

$$y = 2x - 3 \ \ldots L_1$$

$$x = -y + 3 \ \ldots L_2$$

El sistema de este apartado está presentado de tal forma que se puede empezar a resolverlo de dos formas: la primera, es sustituir el "valor" de "$y$" de la ecuación $L_1$ en la ecuación $L_2$; la segunda es sustituir el "valor" de "$x$" de la ecuación $L_2$ en la ecuación $L_1$.

Los puntos a evaluar son:

| Pasos | Acción |
|---|---|
| 1 | Identificar que una incógnita esta despejada en cada una de las ecuaciones. |
| 2 | Sustituir "del valor" de la incógnita de una ecuación en la otra. |
| 3 | Operar algebraicamente la ecuación resultante del punto anterior. |
| 4 | Obtener el valor de una incógnita. |
| 5 | Sustituir en cualquiera de las ecuaciones iniciales, el valor obtenido en el punto anterior. |
| 6 | Operar algebraicamente con la ecuación resultante del punto anterior. |
| 7 | Obtener el valor de la otra incógnita. |
| 8 | Obtener la pareja ordenada (2,1). |

En la evaluación de la descripción del procedimiento del método de sustitución para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (apartado XII.2.), se consideran los siguientes pasos.

| Pasos | Acción |
|---|---|
| 1 | Se requiere una incógnita despejada de alguna de las ecuaciones, en caso de que ninguna de las incógnitas esté despejada, se procede a realizar el despeje. |
| 2 | Se sustituye "el valor" de la incógnita despejada, en la otra ecuación. Se obtiene una ecuación con una incógnita. |
| 3 | Se realizan las operaciones algebraicas para resolver la ecuación obtenida en el punto anterior. |
| 4 | Se obtiene el valor de una de las incógnitas. |
| 5 | El valor obtenido en el punto anterior se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales. |
| 6 | Se realizan las operaciones algebraicas para resolver la ecuación obtenida en el punto anterior. |

| Pasos | Acción |
|---|---|
| 7 | Se obtiene el valor de la otra incógnita. |
| 8 | Determinar la pareja ordenada de solución $(x, y)$. |

Las tablas de resultados se muestran a continuación.

Tabla 5.24.1. Resultados pre-test del apartado XII.

| Apartado | XII PRE-TEST | | | | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | XII.1. | | | | | | | | XII.2. | | | | | | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | |
| 1 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 2 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 3 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 4 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 5 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 6 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 7 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 8 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 9 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 10 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 11 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 12 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 13 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 14 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 15 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 16 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 17 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 18 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 19 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 20 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 21 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 22 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 23 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 24 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 25 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 26 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| Total | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| **% Grupal** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | | **0** |

Tabla 5.24.2. Resultados post-test del apartado XII.

| Apartado | XII POST-TEST | | | | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | XII.1. | | | | | | | | XII.2. | | | | | | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 6 | 38 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 6 | 38 |
| 15 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 63 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 17 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 8 | 50 |
| 18 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 19 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 8 | 50 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 23 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 63 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 100 |
| Total | 22 | 19 | 19 | 22 | 19 | 19 | 19 | 19 | 25 | 25 | 25 | 25 | 25 | 25 | 22 | 22 | 352 | |
| **% Grupal** | **85** | **73** | **73** | **85** | **73** | **73** | **73** | **73** | **96** | **96** | **96** | **96** | **96** | **96** | **85** | **85** | | **85** |

Las tablas muestran que el rendimiento de los estudiantes va del 0% (ninguno de los estudiantes escribe algo en el espacio correspondiente) en el pre-test, al 85% en el post-test. Al parecer, nuevamente, las dificultades que muestran los estudiantes en el pre-test son superadas en un porcentaje significativo en el post-test.

*En el pre-test*. Ningún estudiante responde a los cuestionamientos de este apartado.

> *Observación. El método de sustitución para los sistemas de ecuaciones lineales forma parte del programa de estudios de la escuela secundaria. De*

*acuerdo a los resultados del pre-test podemos suponer las siguientes dos situaciones: primera, los alumnos lo aprendieron en su momento pero al cabo de casi dos años ya no lo recuerdan; segunda, los alumnos no trabajaron este tema en la secundaria.*

*En el post-test*. El alumno (18) no responde correctamente a ninguna respuesta esperada de este apartado. El alumno no pretende realizar el método de sustitución, trata de sumar las ecuaciones y lo hace de forma incorrecta. Cuando tiene que describir detalladamente el método de sustitución, no lo describe correctamente.

El alumno (15) hace bien la sustitución $L_1$ en $L_2$, pero no realiza correctamente uno de los pasos algebraicos. Su equívoco se ubica cuando tiene que despejar “$x$”. A continuación se reproduce la respuesta del alumno.

$$x = -(2x - 3) + 3$$

$$x = -2x + 3 + 3$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Hubo otros dos casos (alumnos 14 y 19) en los cuales la sustitución de $L_1$ en $L_2$, no se considera que el coeficiente de la incógnita “$y$” de la ecuación $L_2$ es menos uno, es decir, en lugar de anotar $x = -(2x - 3) + 3$, escribe $x = 2x - 3 + 3$

Cabe aclarar, que estos errores son cometidos por dificultades algebraicas, pero no son del concepto de que en el punto de la solución el valor de las abscisas son iguales para ambas ecuaciones y el de las ordenadas también. Por otro lado, a pesar de los errores, los alumnos expresan que “*el valor de la incógnita de una ecuación, se sustituye en la otra y la ecuación resultante se resuelve*”, lo cual es correcto. Al parecer el problema que revela el trabajo de los alumnos es fundamentalmente algebraico y no conceptual.

*Apartado XIII*

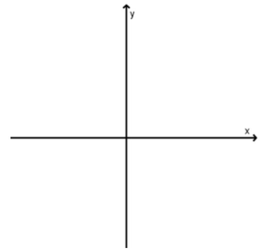
En el apartado XIII.1., se pide al alumno que resuelva un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de igualación y que trace el bosquejo de las ecuaciones. A continuación se reproduce dicho sistema.

$y = 2x - 3$ …$L_1$

$y = -x + 3$ …$L_2$

Resolución algebraica.

Bosquejo




Posteriormente, en el apartado XIII.2., se les solicita a los estudiantes que describan detalladamente el método de igualación.

En el Apartado XIII.1., para empezar a resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, se debe despejar una incógnita (la misma) en ambas ecuaciones. Los veintiséis estudiantes utilizan las ecuaciones tal y como se les presentaron, con "$y$" despejada, para igualar las expresiones correspondientes. En este punto, los alumnos muestran una forma de "economía matemática", ya que tratan de hacer un procedimiento con los menos pasos posibles.

Los puntos a evaluar son: el bosquejo de las ecuaciones, la resolución del sistema y, los pasos que se deben llevar a cabo en el método de igualación. En esta ocasión el bosquejo se evalúa en forma global, sin considerar cada una de las conexiones que hace el alumno para realizarlo. A pesar de lo anterior, se establecen las referidas conexiones.

Tabla 5.25. Procedimiento y conexiones para el apartado XIII.1.

<table>
<tr><th>Pasos</th><th colspan="4">Procedimiento</th></tr>
<tr><td rowspan="9">1</td><td colspan="4">Bosquejo de las ecuaciones.<br>Reconocimiento de características algebraicas y su conversión a representación geométrica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Características algebraicas</td><td>→</td><td>Características geométricas</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Son dos ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por "$x$" e "$y$".</td><td>→</td><td>Dos gráficas representadas en el plano cartesiano.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>En las dos ecuaciones el exponente de la "$x$" es uno cuando la "$y$" esta despejada.</td><td>→</td><td>Son dos líneas rectas.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$m_1 > 0$</td><td>→</td><td>$0^0 < \alpha_1 < 90^0$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$m_2 < 0$</td><td>→</td><td>$90^0 < \alpha_2 < 180^0$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Los coeficientes de la "$x$" son diferentes.$m_1 \neq m_2$</td><td>→</td><td>Los ángulos son diferentes $\alpha_1 \neq \alpha_2$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$m_1 > 1$</td><td>→</td><td>$45^0 < \alpha_1 < 90^0$</td></tr>
</table>

Tabla 5.25. Procedimiento y conexiones para el apartado XIII.1.

| Pasos | Procedimiento | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 7 | $m_2 = -1$ | → | $\alpha_2 = 135^0$ |
| | 8 | $b_1 \neq b_2$ | → | Cada una de las rectas se intersecta con el eje de las ordenadas en puntos distintos. |
| | 9 | $b_1 < 0$ | → | $L_1$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este. |
| | 10 | $b_2 > 0$ | → | $L_2$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte positiva de este. |
| | 11 | Como: $m_1 \neq m_2$ y $b_1 \neq b_2$ | → | Las rectas se intersectan en algún punto fuera del eje de las ordenadas. |
| 2 | Despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. En el sistema presentado, las incógnitas “$y$” están despejadas en ambas ecuaciones, por lo que los alumnos pueden aprovechar este hecho por “economía matemática”. | | | |
| 3 | Tomando las ecuaciones como se presentan. Igualar las ecuaciones en la representación algebraica. | | | |
| 4 | Operar algebraicamente la ecuación obtenida en el punto anterior. | | | |
| 5 | Obtener el valor de la primera incógnita: $x = 2$. | | | |
| 6 | El valor obtenido en el punto anterior, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales. | | | |
| 7 | Operar algebraicamente la ecuación obtenida en el punto anterior. | | | |
| 8 | Obtener el valor de la segunda incógnita: $y = 1$. | | | |
| 9 | Determinar que la solución del sistema es: (2,1). | | | |

Para el apartado XIII.2., que consiste en describir detalladamente el método de igualación, el alumno debe escribir los pasos, del dos al nueve, que se han mostrado en la tabla anterior.

Los resultados se muestran en las tablas 5.26., que se encuentran renglones adelante.

Dichas tablas, muestran que el rendimiento de los estudiantes va del 2% en el pre-test, al 97% en el post-test. Al parecer, nuevamente, las dificultades que muestran los estudiantes en el pre-test son superadas en un porcentaje significativo en el post-test.

En el pre-test. Únicamente el alumno (5) trata de resolver el sistema: iguala correctamente las ecuaciones, pero, no despeja correctamente “$x$”. En mencionado alumno describe correctamente en qué consiste el método de igualación. El resto del grupo (veinticinco alumnos) no responde ningún cuestionamiento.

*En el post-test*. Todos los alumnos describen correctamente el método de igualación.

Tabla 5.26.1. Resultados pre-test del apartado XIII.

| Apartado | XIII PRE-TEST | | | | | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | XIII.1. | | | | | | | | | XIII.2. | | | | | | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | |
| 1 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 2 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 3 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 4 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 11 | 65 |
| 6 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 7 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 8 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 9 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 10 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 11 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 12 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 13 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 14 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 15 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 16 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 17 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 18 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 19 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 20 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 21 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 22 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 23 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 24 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 25 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 26 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| Total | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 11 | |
| **% Grupal** | **0** | **4** | **0** | **0** | **4** | **4** | **0** | **0** | **0** | **4** | **4** | **4** | **4** | **4** | **4** | **4** | **4** | | **2** |

Tabla 5.26.2. Resultados post-test del apartado XIII.

| Apartado | XIII POST-TEST | | | | | | | | | | | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | XIII.1. | | | | | | | | | XIII.2. | | | | | | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 59 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 21 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | 94 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 23 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 13 | 76 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 17 | 100 |
| Total | 24 | 25 | 24 | 24 | 26 | 26 | 25 | 24 | 24 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 430 | |
| **% Grupal** | **92** | **96** | **92** | **92** | **100** | **100** | **96** | **92** | **92** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | **100** | | **97** |

Sólo dos alumnos (6) y (23) tienen dificultades para resolver el sistema planteado. El alumno (6) iguala de forma incorrecta, ya que "ignora" la "$x$" de la segunda ecuación. El alumno escribe $2x - 3 = 3$ en lugar de escribir $2x - 3 = -x + 3$. Además no realiza el bosquejo de la segunda ecuación.

El alumno (23) comete equívocos en la manipulación algebraica. A continuación se reproduce su respuesta.

$$2x - 3 = -x + 3$$

$$2x + x = 3 - 3$$

$$3x = 0$$

$$x = 3$$

De acuerdo a las observaciones de los apartados XII y XIII, los alumnos, al parecer, superaron una gran cantidad de dificultades en los métodos de sustitución e igualación, ya que, como se manifestó en la “Sesión 7” y en la “Sesión 8”, sólo el 50% los trabajó correctamente en forma individual. Cabe recordar que luego del mencionado trabajo individual, se tuvieron tareas de trabajo grupal y de trabajo individual extraclase, donde el rendimiento de los estudiantes llega a ser del 85%.

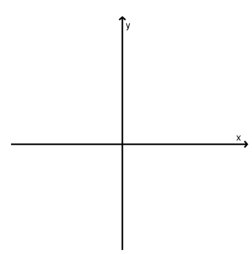
*Apartado XIV*

En este apartado se pide a los alumnos que bosquejen un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas y determinen algebraicamente los puntos en los que se intersectan estas ecuaciones. A continuación se reproduce la representación algebraica de dicho sistema.

$y = -x - 2 \ldots L_1$

$y = 2x - 8 \ldots L_2$

$y = x - 2 \ldots L_3$

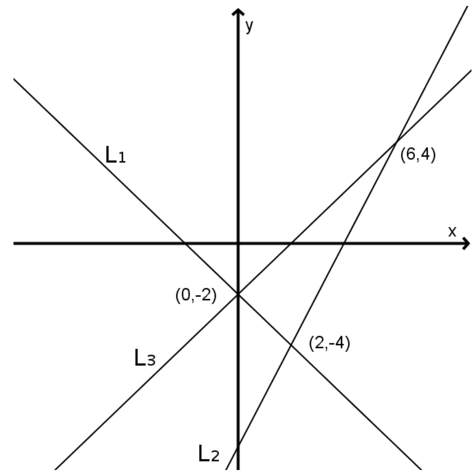



Los resultados esperados son los siguientes.

$L_1$-$L_2$. (2,-4)

$L_2$-$L_3$. (6,4)

$L_3$-$L_1$. (0,-2)




Para determinar las coordenadas de los puntos de intersección de las rectas del sistema, el alumno tiene que resolver los subsistemas de las ecuaciones que se intersectan en los referidos puntos. Para esto, el alumno se puede apoyar en el bosquejo que se le solicita. Con base a lo anterior, los puntos a evaluar son los que se muestran a continuación. En esta ocasión se muestran las conexiones para el bosquejo, pero no son sujetas a evaluación de manera particular sino, global. Los estudiantes tienen que resolverlas correctamente.

Tabla. 5.27. Conexiones y procedimiento para el apartado XIV.

<table>
<tr><td>Pasos</td><td colspan="4">Acción</td></tr>
<tr><td rowspan="10">1</td><td colspan="4">Bosquejo del sistema de ecuaciones $L_1$, $L_2$ y $L_3$.<br>Reconocimiento de características algebraicas y su conversión a representación geométrica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Características algebraicas</td><td>→</td><td>Características geométricas</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>Son tres ecuaciones con dos incógnitas representadas, estas últimas por “$x$” e “$y$”.</td><td>→</td><td>Tres gráficas representadas en el plano cartesiano.</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>En las tres ecuaciones el exponente de la “$x$” es uno cuando la “$y$” esta despejada.</td><td>→</td><td>Son tres líneas rectas.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$m_1 < 0$</td><td>→</td><td>$90^0 < \alpha_1 < 180^0$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>$m_2 > 0$</td><td>→</td><td>$0^0 < \alpha_2 < 90^0$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>$m_3 > 0$</td><td>→</td><td>$0^0 < \alpha_3 < 90^0$</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Los coeficientes de la “$x$” son diferentes.<br>$m_1 \neq m_2 \neq m_3$<br>$m_1 \neq m_3$</td><td>→</td><td>Los ángulos son diferentes<br>$\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3$<br>$\alpha_1 \neq \alpha_3$</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>$m_1 = -1$</td><td>→</td><td>$\alpha_1 = 135^0$</td></tr>
</table>

Tabla. 5.27. Conexiones y procedimiento para el apartado XIV.

<table>
<tr><td>Pasos</td><td colspan="4">Acción</td></tr>
<tr><td></td><td>8.</td><td>$m_2 > 1$</td><td>→</td><td>$45^0 < \alpha_2 < 90^0$</td></tr>
<tr><td></td><td>9</td><td>$m_3 = 1$</td><td>→</td><td>$\alpha_3 = 45^0$</td></tr>
<tr><td></td><td>10.</td><td>$b_1 = b_3 \neq b_2$</td><td>→</td><td>Las rectas $L_1$ y $L_3$ tienen el mismo término independiente, por lo que su intersección con el eje de las ordenadas es en el mismo punto. Por otra parte la intersección con el eje de las ordenadas de $L_3$ es en un punto distinto a los otros dos.</td></tr>
<tr><td></td><td>11.</td><td>$b_1 = b_3 < 0$</td><td>→</td><td>$L_1$ y $L_3$ se intersectan con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este.</td></tr>
<tr><td></td><td>12.</td><td>$b_2 < 0$</td><td>→</td><td>$L_2$ se intersecta con el eje de las ordenadas en la parte negativa de este.</td></tr>
<tr><td></td><td>13.</td><td>$b_1 = b_3 > b_2$</td><td>→</td><td>$L_2$ se intersecta con el eje de las ordenadas debajo de las otras dos rectas.</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="4">Identificar que el punto de intersección $P_1$ es entre las ecuaciones $L_1$ y $L_2$.</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="4">Identificar que el punto de intersección $P_2$ es entre las ecuaciones $L_2$ y $L_3$.</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="4">Identificar que el punto de intersección $P_3$, es entre las ecuaciones $L_1$ y $L_3$.</td></tr>
<tr><td colspan="5">En el procedimiento algebraico, el alumno puede trabajar con los métodos de igualación y sustitución. La forma en que se proporcionan las ecuaciones tienen la “$y$” despejada. Por “economía matemática” el alumno puede trabajar con el método de igualación, que es el que se desglosa a continuación.</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="4">Un procedimiento algebraico para resolver el “subsistema” $L_1$ y $L_2$ correspondiente a $P_1$.<br>o Igualar las ecuaciones en la representación algebraica.<br>o Operar algebraicamente la ecuación obtenida en el punto anterior.<br>o Obtener el valor de la primera incógnita: $x = 2$.<br>o El valor obtenido en el punto anterior, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales.<br>o Operar algebraicamente la ecuación obtenida en el punto anterior.<br>o Obtener el valor de la segunda incógnita: $y = -4$.<br>o Determinar que la solución del subsistema es: (2,-4).</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="4">Un procedimiento algebraico para resolver el “subsistema” $L_2$ y $L_3$ correspondiente a $P_2$.<br>o Igualar las ecuaciones en la representación algebraica.<br>o Operar algebraicamente la ecuación obtenida en el punto anterior.<br>o Obtener el valor de la primera incógnita: $x = 6$.<br>o El valor obtenido en el punto anterior, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales.<br>o Operar algebraicamente la ecuación obtenida en el punto anterior.<br>o Obtener el valor de la segunda incógnita: $y = 4$.<br>o Determinar que la solución del subsistema es: (6,4).</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="4">Un procedimiento algebraico para resolver el “subsistema” $L_1$ y $L_3$ correspondiente a $P_3$.<br>o Igualar las ecuaciones en la representación algebraica.</td></tr>
</table>

Tabla. 5.27. Conexiones y procedimiento para el apartado XIV.

| Pasos | Acción |
|---|---|
| | ○ Operar algebraicamente la ecuación obtenida en el punto anterior.<br>○ Obtener el valor de la primera incógnita: $x = 0$.<br>○ El valor obtenido en el punto anterior, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales.<br>○ Operar algebraicamente la ecuación obtenida en el punto anterior.<br>○ Obtener el valor de la segunda incógnita: $y = -2$.<br>○ Determinar que la solución del subsistema es: (0,-2). |
| 8 | Registrar por escrito en el bosquejo las coordenadas de $P_1$, que son: (2,-4). |
| 9 | Registrar por escrito en el bosquejo las coordenadas de $P_2$, que son: (6,4). |
| 10 | Registrar por escrito en el bosquejo las coordenadas de $P_3$, que son: (0,-2). |

Los resultados se muestran en las tablas 5.28., que se localizan renglones adelante.

Dichas tablas muestran que el rendimiento de los estudiantes va del 3% en el pre-test, al 90% en el post-test. Al parecer, nuevamente, las dificultades que muestran los estudiantes en el pre-test son superadas en un porcentaje significativo en el post-test.

En el pre-test. Únicamente dos alumnos realizan correctamente el bosquejo, pero, no determinan algebraicamente las coordenadas de los puntos de intersección. Nueve alumnos únicamente tratan de hacer el bosquejo, pero, no lo hacen correctamente. Quince alumnos no responden este apartado. En particular, el alumno (8) no responde este apartado y los alumnos (17) y (24) únicamente tratan de hacer el bosquejo, pero no lo logran hacer correctamente.

*En el post-test*. Un alumno (8) obtiene las abscisas de los puntos de intersección con base a su bosquejo, para luego sustituir en alguna de las ecuaciones que se intersectan en dichos puntos. Con esta acción, el estudiante muestra que decide resolver geométricamente el cuestionamiento.

En el mismo tenor de ideas, el alumno (17) bosqueja en forma correcta las ecuaciones, pero no determina las coordenadas de los puntos de intersección.

Finalmente, en este apartado, el alumno (24) dibuja bien el bosquejo y determina los puntos de intersección algebraicamente de manera correcta, pero, a la hora de escribirlos en el bosquejo, cambia los resultados entre dos puntos.

Tabla 5.28.1. Resultados pre-test del apartado XIV.

| Apartado / Alumnos | XIV PRE-TEST 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 2 | 0 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 3 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 4 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 5 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 6 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 7 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 8 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 9 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 10 | 0 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 11 | 0 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 12 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 13 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | N | N | N | N | N | N | 4 | 40 |
| 15 | 0 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 16 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 17 | 0 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | N | N | N | N | N | N | 4 | 40 |
| 19 | 0 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 20 | 0 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 21 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 22 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 23 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 24 | 0 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 25 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 26 | 0 | N | N | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| Total | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 8 | |
| **% Grupal** | **8** | **8** | **8** | **8** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | | **3** |

Tabla 5.28.2. Resultados post-test del apartado XIV.

| Apartado / Alumnos | XIV POST-TEST 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 6 | 60 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 7 | 70 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 | 60 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | N | N | N | N | N | N | 4 | 40 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 8 | 80 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 6 | 60 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 8 | 80 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 8 | 80 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 | 100 |
| Total | 26 | 26 | 26 | 26 | 20 | 21 | 21 | 22 | 22 | 23 | 233 | |
| **% Grupal** | **100** | **100** | **100** | **100** | **77** | **81** | **81** | **85** | **85** | **88** | | **90** |

*Observación. A pesar de las dificultades mencionadas anteriormente se observa que:*

*El alumno (8) muestra una mejora, de no responder en el pre-test a resolver geométricamente el cuestionamiento, aunque, debió de hacerlo algebraicamente.*

*El alumno (17) muestra mejora ya que en el pre-test no puede hacer el bosquejo correctamente y en el post-test sí.*

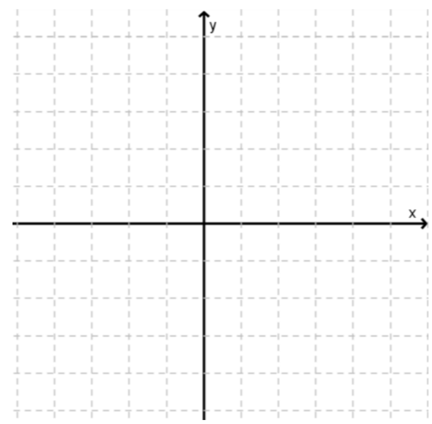
*El alumno (24) muestra una mejora ya que, en el pre-test no logra hacer correctamente el bosquejo; y en el post-test resuelve correctamente todo el apartado, pero, al final confunde dos puntos.*

*Apartado XV*

En este apartado, los alumnos tienen que resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método gráfico. A continuación, se reproduce el sistema.

$y = -2x + 1 \ldots L_1$

$y = x - 5 \ldots L_2$




El alumno tiene que saber que para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método gráfico, es necesario graficar cada una de las ecuaciones, identificar el punto de intersección y determinar las coordenadas de dicho punto. El procedimiento que debe seguir el estudiante se explicita a continuación.

Tabla 5. 29. Procedimiento gráfico para el apartado XV.

| Pasos | Acción |
|---|---|
| Para graficar $L_1$. | |
| 1 | • Determinar que el punto de intersección con el eje de las ordenadas tiene coordenadas: (0,1).<br>• Localizar dicho punto en el plano cartesiano. |
| 2 | Localización de otro punto.<br>○ A partir de la ordenada al origen, localizada en el punto anterior, el alumno "interpreta" el coeficiente de la "$x$", pendiente ($m = -2$), como un punto que se localiza dos unidades abajo y una unidad a la derecha de la ordenada al origen. Las coordenadas de dicho punto son: (1,-1). |

Tabla 5. 29. Procedimiento gráfico para el apartado XV. (continuación).

| Pasos | Acción |
|---|---|
| 3 | Trazar la recta $L_1$ sabiendo que los puntos con coordenadas $(0,1)$ y $(1,-1)$ pertenecen a dicha recta. |
| Para la gráfica $L_2$. | |
| 4 | • Determinar que el punto de intersección con el eje de las ordenadas tiene coordenadas: $(0,-5)$.<br>• Localizar dicho punto en el plano cartesiano. |
| 5 | Localización de otro punto.<br>○ A partir de la ordenada al origen, localizada en el punto anterior, el alumno "interpreta" el coeficiente de la "$x$", pendiente ($m = 1$), como un punto que se localiza una unidad arriba y una unidad a la derecha de la ordenada al origen. Las coordenadas de dicho punto son: (1,-4). |
| 6 | Trazo de la recta $L_2$ sabiendo que los puntos con coordenadas $(0,-5)$ y $(1,-4)$ pertenecen a dicha recta. |
| 7 | • Identificar el punto de intersección entre las rectas $L_1$ y $L_2$.<br>• Determinar geométricamente las coordenadas del punto de intersección, utilizando la cuadrícula del plano cartesiano, que se le proporciona en este apartado, dichas coordenadas son: $(2,-3)$. |

Los resultados se muestran en las tablas 5.30., que se encuentran renglones adelante.

Dichas tablas muestran que el rendimiento de los estudiantes va del 18% en el pre-test, al 93% en el post-test. Al parecer, nuevamente, las dificultades que muestran los estudiantes en el pre-test son superadas en un porcentaje significativo en el post-test.

*En el pre-test*. Veinte alumnos no contestan. Seis alumnos realizan todos los pasos correctamente, pero, no determinan las coordenadas del punto de intersección. En particular, los alumnos (1) y (24) no responden y el alumno (6) trata de contestar, pero, no traza correctamente las rectas ni determina las coordenadas del punto de intersección.

*En el post-test*. El alumno (1), graficó las ecuaciones considerando las pendientes con signo contrario, por lo que el resultado fue erróneo. Cabe mencionar que este alumno, en todos los demás apartados bosquejó las pendientes correctamente.

El alumno (6) descuida la localización de los puntos y el trazado de las rectas, lo que tiene como consecuencia que las rectas no se intersecten en el punto $(2,-3)$, sino que se intersecten en un punto cuyas coordenadas son $(3,-3)$.

El alumno (24) grafica bien las rectas, pero no localiza el punto de intersección, ni identifica sus coordenadas. Resuelve el sistema algebraicamente de forma errónea y reporta el resultado que obtiene $(6,1)$.

Tabla 5. 30.1. Resultados pre-test del apartado XV.

| Apartado / Alumnos | XV PRE-TEST | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | |
| 1 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 2 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 3 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 4 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 5 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 4 | 57 |
| 7 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 8 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 9 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 10 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 6 | 86 |
| 12 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 13 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 14 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 15 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 16 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 6 | 86 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 6 | 86 |
| 19 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 20 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 | 57 |
| 21 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 22 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 23 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 24 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 25 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 6 | 86 |
| Total | 6 | 5 | 4 | 6 | 6 | 5 | 0 | 32 | |
| **% Grupal** | **23** | **19** | **15** | **23** | **23** | **19** | **0** | | **18** |

Tabla 5. 30.2. Resultados post-test del apartado XV.

| Apartado / Alumnos | XV POST-TEST | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 6 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 29 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 6 | 86 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| Total | 25 | 24 | 24 | 25 | 24 | 24 | 23 | 169 | |
| **% Grupal** | **96** | **92** | **92** | **96** | **92** | **92** | **88** | | **93** |

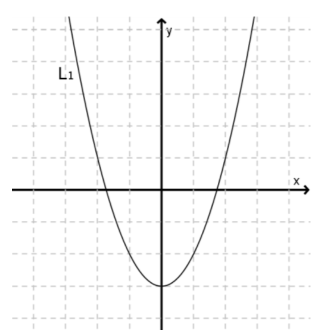
*Observación. El alumno (1) no responde en el pre-test y, en el post –test traza las rectas considerando las pendientes con signo contrario. A pesar del equívoco antes señalado, el alumno pasa de no responder; a intentar resolver el cuestionamiento, graficando e identificando el punto de intersección.*

*El alumnos (6) responde incorrectamente en las dos pruebas. En el pre-test no determina las coordenadas del punto de intersección; y en el post-test si las determina, con el error antes señalado.*

*El alumno (24) no responde en el pre-test y, en el post-test realiza la gráfica correctamente, pero no localiza el punto de intersección. A pesar del equívoco antes señalado, el alumno pasa de no responder; a trazar la gráfica correctamente.*

*Apartado XVI*

En este apartado, se pide al alumno que resuelva gráficamente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: una lineal y una cuadrática. Se proporciona la gráfica de la ecuación cuadrática. El sistema se reproduce a continuación.

| Representación algebraica | Representación geométrica |
|---|---|
| $y = x^2 - 3 \ldots L_1$<br>$y = x - 1 \ldots L_2$ |  |

Aunque el presente estudio se centra en sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se considera pertinente preguntar por este sistema de ecuaciones cuadráticas, a fin de explorar en qué medida los estudiantes pueden llevar a cabo una transferencia: el punto en el que se intersectan las ecuaciones es el punto de solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, independientemente que estas sean lineales o cuadráticas.

En principio, se puede decir que el alumno sabe que para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método gráfico, es necesario graficar las ecuaciones, localizar el punto de intersección y determinar las coordenadas de dicho punto.

Para dar respuesta a esta pregunta el alumno tiene que considerar (aceptar) que el procedimiento gráfico para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, es factible de aplicarlo para resolver un sistema como el que se le presenta. Lo cual implica que el alumno, debe graficar $L_2$, localizar los puntos de intersección entre las gráficas de las ecuaciones y determinar las coordenadas de dichos puntos de intersección, que a saber son: $(-1-2)$ y $(2{,}1)$.

El trabajo en la representación geométrica se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 5.31. Procedimiento para resolver el apartado XVI.

| Pasos | Acción |
|---|---|
| Para graficar $L_2$ | |
| 1 | Localización de un punto de $L_2$.<br>• Determinar que el punto de intersección con el eje de las ordenadas tiene coordenadas: $(0,-1)$.<br>• Localizar en el plano cartesiano dicho punto. |
| 2 | Localización de otro punto que pertenece a $L_2$.<br>○ A partir de la ordenada al origen, localizada en el punto anterior, el alumno "interpreta" el coeficiente de la "$x$", pendiente $(m = 1)$, como un punto que se localiza una unidad arriba y una unidad a la derecha de la ordenada al origen. Las coordenadas de dicho punto son: (1,0). |
| 3 | Trazar la recta $L_2$, sabiendo que los puntos (0,-1) y (1,0) pertenecen a dicha recta. |
| Para resolver el sistema | |
| 4 | Localizar y determinar gráficamente, utilizando la cuadrícula, que las coordenadas de un punto son (-1,-2). |
| 5 | Localizar y determinar gráficamente, utilizando la cuadrícula, que las coordenadas del otro punto son (2,1). |

Los resultados se muestran en las tablas 5.32., que se encuentran renglones delante.

Dichas tablas muestran que el rendimiento de los estudiantes va del 2% en el pre-test, al 86% en el post-test. Al parecer, nuevamente, las dificultades que muestran los estudiantes en el pre-test son superadas en un porcentaje significativo en el post-test.

En el pre-test. Veinticinco alumnos no responden. El alumno (18) traza bien la recta $L_2$, pero no determina las coordenadas de los puntos de intersección.

Tabla 5.32.1. Resultados pre-test del apartado XVI.

| Apartado / Alumnos | XVI PRE-TEST 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 2 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 3 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 4 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 5 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 6 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 7 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 8 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 9 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 10 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 11 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 12 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 13 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 14 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 15 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 16 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 17 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 60 |
| 19 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 20 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 21 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 22 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 23 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 24 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 25 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 26 | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| Total | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | |
| **% Grupal** | **4** | **4** | **4** | **0** | **0** | | **2** |

Tabla 5.32.2. Resultados post-test del apartado XVI.

| Apartado / Alumnos | XVI POST-TEST 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 | 80 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 40 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 60 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 17 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 | 80 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 22 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 40 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 | 80 |
| 24 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 100 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 4 | 80 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 4 | 80 |
| Total | 24 | 25 | 23 | 19 | 21 | 112 | |
| **% Grupal** | **92** | **96** | **88** | **73** | **81** | | **86** |

*En el post-test*. Algunas dificultades se muestran a continuación.

- Un alumno (7) no traza la gráfica de $L_2$, ni logra plantear las ecuaciones para resolverlo.

- El alumno (12) traza la gráfica de $L_2$, pero no resuelve el sistema geométricamente, sino, lo intenta resolver, algebraicamente aplicando el método de igualación donde comete errores algebraicos. No obstante lo anterior, es posible decir que el estudiante intenta transferir en la representación algebraica aunque con sus limitaciones.
- El alumno (15) traza correctamente la gráfica de $L_2$, pero no localiza ni determina correctamente los dos puntos de intersección, sólo reporta una coordenada de cada uno de los puntos.
- El alumno (26) traza correctamente la gráfica de $L_2$, determina correctamente las coordenadas del punto (-1,-2), sin embargo, para el otro punto determina que las coordenadas son (2,2) en lugar de (2,1).

*Apartado XVII.*

En este apartado, el alumno tiene que resolver el problema que se reproduce a continuación.

> Una empresa que vende seguros por vía telefónica, tiene dos planes de pago para sus empleados. El plan "A" paga una comisión de $10.00 pesos por cada seguro vendido, más $70.00 pesos diarios. En el plan "B" solamente paga una comisión de $20.00 pesos por cada seguro vendido.

a) Escribe una ecuación que represente al plan de pago "A" y, otra para el plan "B". Considera "$x$" como número de seguros vendidos e, "$y$" como los pesos de pago.
b) ¿Para cuántos seguros vendidos, ambos planes pagan la misma cantidad?
c) Si un empleado espera vender cinco seguros diarios, ¿qué plan le conviene para contratarse?

A pesar de que en las 49 tareas no se resuelven problemas fuera del contexto matemático, el modelo de aprendizaje con comprensión de Hiebert y Carpenter (1992), señala, que la compresión mejora la transferencia. Por esta razón, se decide explorar la forma en la cual los estudiantes enfrentan el problema arriba citado. Para resolver el problema algebraicamente, el alumno debe:

- en el inciso a), traducir del lenguaje natural al lenguaje algebraico cada uno de los planes de pago;

- en el inciso b), resolver el sistema de ecuaciones por cualquier método;
- en el inciso c), sustituir en cada una de las ecuaciones el número de seguros proporcionado y determinar en cuál de ellos se paga más.

A la luz de lo anterior, las respuestas a evaluar se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 5.33. Respuestas para el problema del apartado XVII.

| Pasos | Respuesta |
|---|---|
| Para el inciso a). | |
| 1 | Ecuación para el plan A: $y = 10x + 70$ |
| 2 | Ecuación para el plan B: $y = 20x$ |
| Para el inciso b). | |
| 3 | Resolución del sistema. |
| 4 | Determinar que el número de seguros con el cual los dos planes pagan lo mismo $x = 7$. |
| Para el inciso c). | |
| 5 | Calcular que con el plan A obtiene \$120.00 con cinco seguros vendidos. |
| 6 | Calcular que con el plan B obtiene \$100.00 con cinco seguros vendidos. |
| 7 | Determinar que le conviene el Plan A, dado que $120 > 100$. |

Los resultados se muestran en las tablas 5.34., que se localizan renglones adelante.

Las tablas muestran que el rendimiento de los estudiantes va del 12% en el pre-test, al 87% en el post-test. Al parecer, nuevamente, las dificultades que muestran los estudiantes en el pre-test son superadas en un porcentaje significativo en el post-test.

En el pre-test. Diecisiete alumnos no responden. Nueve alumnos responden con varios equívocos. En particular, los alumnos (12), (17) y (24) no responden.

*En el post-test*. Algunas dificultades que se presentaron son: i) el alumno (12) plantea bien las ecuaciones, pero no las resuelve; ii) el alumno (17) no contesta; iii) el alumno (24), plantea bien las ecuaciones, pero, no resuelve el sistema de ecuaciones, al parecer hace los cálculos mentalmente para responder el inciso c).

> *Observación. El alumno (12) pasa de no responder, a plantear bien las ecuaciones. El alumno (17) no responde en ninguna de las dos pruebas. El alumno (24) pasa de no responder, a plantear bien las ecuaciones.*

Tabla 5.34.1. Resultados pre-test del apartado XVII.

| Apartado | XVII PRE-TEST | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a) | | b) | | c) | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | |
| 1 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 5 | 71 |
| 3 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 4 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 5 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 8 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 9 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 10 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | N | N | N | N | N | 2 | 29 |
| 12 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 13 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 14 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 15 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 16 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 17 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | 86 |
| 19 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 5 | 71 |
| 20 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 21 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 22 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 14 |
| 23 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 24 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 29 |
| 25 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 26 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| Total | 5 | 5 | 0 | 1 | 3 | 3 | 4 | 21 | |
| **% Grupal** | **19** | **19** | **0** | **4** | **12** | **12** | **15** | | **12** |

Tabla 5.34.2. Resultados post-test del apartado XVII.

| Apartado | XVII POST-TEST | | | | | | | Total de aciertos | % Por alumno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | a) | | b) | | c) | | | | |
| Alumnos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 9 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 29 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 15 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 14 |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 5 | 71 |
| 17 | N | N | N | N | N | N | N | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 19 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 24 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 3 | 43 |
| 25 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 | 100 |
| Total | 25 | 24 | 22 | 22 | 21 | 21 | 23 | 158 | |
| **% Grupal** | **96** | **92** | **85** | **85** | **81** | **81** | **88** | | **87** |

Hasta este punto se han mencionado los resultados generales de las pruebas diagnóstica y sumativa. En la sección siguiente (Casos especiales), se presenta el desempeño mostrado por cinco alumnos, a lo largo de los diecisiete apartados que constituyen el post-test.

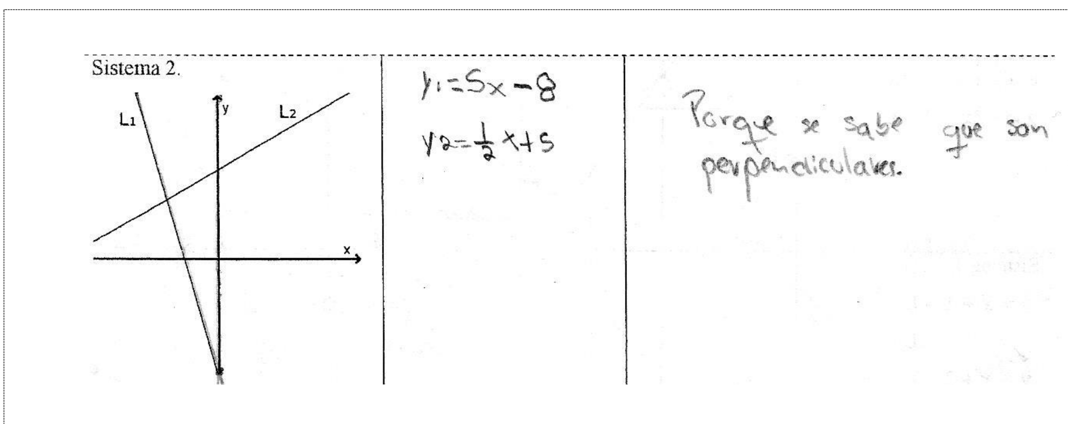
## Casos especiales

A continuación se mencionan algunos pormenores de cinco alumnos; tres de ellos presentan algunas dificultades a lo largo de los apartados en el post-test, y dos alumnos que tuvieron avances significativos entre el pre-test y el post-test.

*Algunas dificultades que tuvo el alumno (6) en el post-test.*

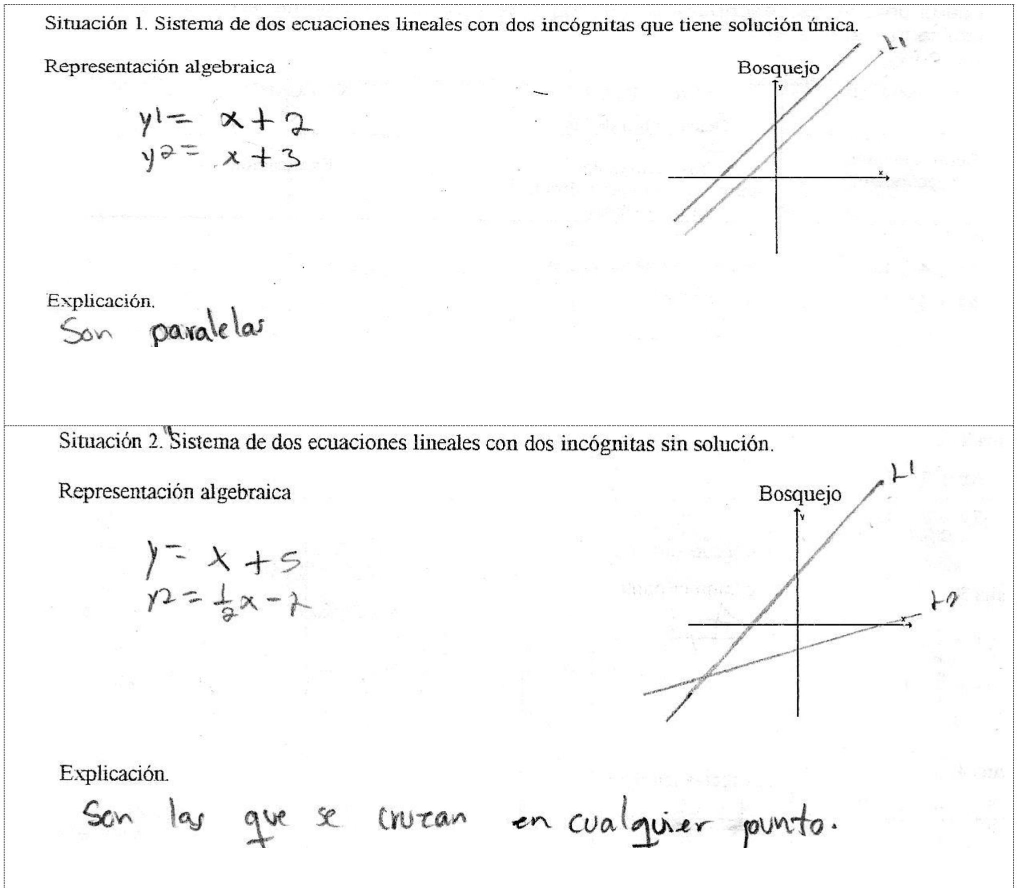
En el apartado I, que corresponde a la conversión de la representación geométrica a la algebraica de tres sistemas, no identifica correctamente la pendiente de la ecuación $L_1$ del sistema 2. Escribe un coeficiente de “$x$” positivo, siendo que es negativo, además la explicación que escribe no es correcta. Se muestra su respuesta.

Figura 5.2. Respuesta erronea del alumno (6) del apartado I.




Posteriormente responde correctamente los apartados II y III (conversión de la representación algebraica a la geométrica y relación entre la representación algebraica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas con la descripción de su bosquejo). Sin embargo, en el apartado IV, al proponer un sistema de ecuaciones con solución única, escribe un sistema con rectas paralelas; y al proponer un sistema sin solución, escribe un sistema que tiene solución única, como se muestra en la figura 5.3.

Figura 5.3. Respuesta errónea del apartado IV.




Posteriormente en el apartado V.1., donde tiene que identificar algunos puntos que son solución para algunas de las ecuaciones y señalar el punto de solución de un sistema de cinco ecuaciones lineales con dos incógnitas. El alumno identifica correctamente los puntos que son solución para las ecuaciones y señala correctamente el punto de solución del sistema. A continuación se reproduce dicho sistema.

Representación algebraica del sistema de ecuaciones

$y = 2x - 4$ …$L_1$

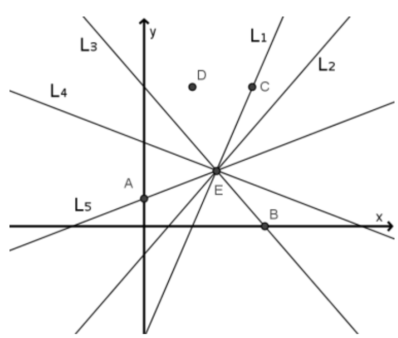
$y = x - 1$ …$L_2$

$y = -x + 5$…$L_3$

$y = -\frac{1}{3}x + 3$ …$L_4$

$y = \frac{1}{3}x + 1$ …$L_5$

Representación geométrica del sistema de ecuaciones



Sin embargo, al contestar las condiciones que debe cumplir un punto, para que sea solución de un sistema en la representación geométrica, el alumno señala *"que salga el mismo resultado cuando la sustituyes".* Parece ser que en el apartado IV y en la respuesta anterior, el alumno, no ha hecho las relaciones correspondientes para contestar que, en la representación geométrica de un sistema, el punto donde se intersectan todas las rectas, es el punto de solución.

Figura 5.4. Respuestas del alumno (6) para el apartado VIII.

Sistema en su representación algebraica.

$y = 2x - 6 \ldots L_1$

$y = -\frac{1}{2}x + 4 \ldots L_2$

$y = -3x + 4 \ldots L_3$

$y = -\frac{1}{2}x - 1 \ldots L_4$

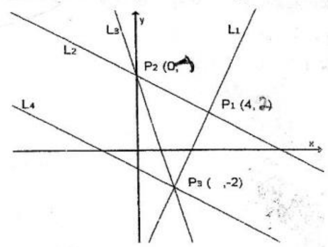
$y = 2(4) - 6$

$y = 2$

$y = -3(0) + 4$

$y = 4$

Sistema en su representación geométrica.




| Punto de intersección | Ecuaciones que se intersectan | Abscisa del punto de intersección | Ordenada del punto de intersección | Explica como calculaste la abscisa u ordenada del punto de intersección |
|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | L1, L2 | 4 | 2 | Sustituyendo los valores con las ecuaciones |
| $P_2$ | L2, L3. | 0 | 4 | Sustituyendo los valores que ya tenga con las ecuaciones |
| $P_3$ | L1, L2, L4 | -2 | -2 | Sustituyendo los valores que ya tenía con las ecuaciones |

En el apartado VIII, se puede observar que el alumno, tiene dificultades en identificar las ecuaciones que se intersectan en el punto $P_3$ y en calcular la abscisa de dicho punto. Se muestran sus respuestas en la figura 5.4.

Como se puede observar, en el punto $P_3$ no identifica que la ecuación que se cruza es $L_3$ y no $L_2$, como él lo señala. Además tampoco hace el intento de sustituir la ordenada de ese punto en cualquiera de las tres ecuaciones que se intersectan, para calcular la correspondiente abscisa, simplemente escribe -2.

Posteriormente, el alumno responde correctamente en el apartado XI, donde sin resolver los sistemas señalados debe de indicar, cuál tiene solución única, cuál no tienen solución y, cuál tiene una infinidad de soluciones.

El alumno responde correctamente los apartados IX, X, XI y XII, sin embargo vuelve a presentar una dificultad en el apartado XIII.1., donde no puede resolver correctamente un sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación y tampoco dibuja el bosquejo, sin embargo, describe de manera correcta en qué consiste el método de igualación, a continuación se reproduce el error algebraico que escribe.

| | |
|---|---|
| Para el sistema de ecuaciones: | $y = 2x - 3$ …$L_1$<br>$y = -x + 3$ …$L_2$ |
| Cuando iguala las ecuaciones, lo hace de forma incorrecta, ya que se le "olvida" escribir la "$-x$" de la segunda ecuación $L_2$. | $2x - 3 = 3$ |

Aunque posteriormente los pasos algebraicos los realizo correctamente, sus resultados son erróneos.

Para el apartado XIV, el alumno determina los puntos de intersección de las ecuaciones del sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas básicamente por medio del bosquejo, a pesar de que la indicación es que se determinen algebraicamente.

Posteriormente trabaja de forma aceptable en los apartados XV y XVI. Y finalmente, el estudiante nuevamente se recupera de sus errores y resuelve correctamente el apartado XVII, que es el problema de aplicación, donde bosqueja correctamente, resuelve el sistema y contesta los incisos.

Al revisar las tareas individuales del alumno, existen inconsistencias del mismo tipo: algunas de las conversiones no las hace correctamente, algunas de sus respuestas no corresponden a lo esperado, no corrige una buena parte de los errores que comete en trabajo individual.

De acuerdo a la forma en que opera las representaciones externas, podemos suponer que internamente no ha establecido correctamente sus representaciones ni las relaciones entre estas, en las representaciones algebraica y geométrica, así mismo no puede hacer correctamente algunas conversiones entre una representación y otra.

Sin embargo, Hiebert y Carpenter (1992) señalan que el crecimiento de las redes de conocimiento se puede caracterizar como cambios en las mismas. La mejor forma de describir los cambios en las redes es como reorganizaciones, nuevas conexiones son formadas, y viejas conexiones pueden modificarse o abandonarse. Es de interés especial que las conexiones erróneas se "abandonen", a fin de que sean "sustituidas" por otras que sean correctas. Es probable que el alumno, se encuentre en un periodo de cambios y reorganización de su red de conocimientos, ya que unas veces manipula correctamente las representaciones externas y otras no.

*Algunas dificultades que tuvo el alumno (17) en el post-test.*

Este alumno resuelve de manera correcta los ejercicios de los apartados del I al VII, los cuales consisten en: conversión entre las representaciones algebraica y geométrica, relación de sistemas entre su representación algebraica con la descripción de su bosquejo, proposición de sistemas con diferentes características, identificación de puntos de solución y, complemento de coordenadas.

Sin embargo, empieza a cometer errores a partir del apartado VIII.1., en este apartado tiene que completar la coordenada faltante de los puntos de intersección del sistema que se reproduce a continuación.

Sistema en su representación algebraica.

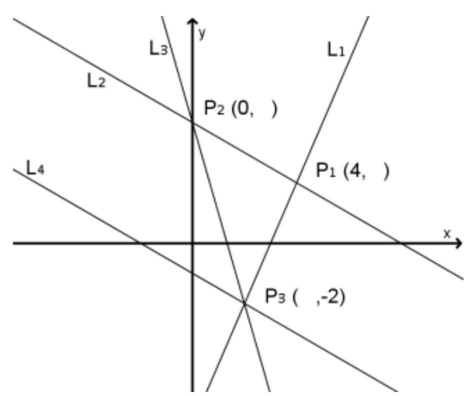
$y = 2x - 6$ … $L_1$

$y = -\frac{1}{2}x + 4$ …$L_2$

$y = -3x + 4$…$L_3$

$y = -\frac{1}{2}x - 1$ …$L_4$

Sistema en su representación geométrica.




Este alumno, escribe que la coordenada que se muestra en el bosquejo se puede sustituir en cualquiera de las ecuaciones que pase por ese punto, lo cual es correcto. Sin embargo, a la hora de trabajar con el punto $P_1$, hacer la sustitución de la abscisa ($x = 4$)

en la ecuación $L_1$ y calcular el valor de la ordenada, no lo hace correctamente. En seguida se muestra su respuesta.

$$y = 2(4) - 6 \ldots L_1$$

$$y = -2$$

Lo anterior, exhibe las dificultades que tiene este estudiante al realizar operaciones con los números enteros.

Comete un error similar para el cálculo de la ordenada del punto $P_2$, dada la abscisa ($x = 0$), al sustituir en la ecuación $L_3$, el alumno no multiplica por cero y anota:

$y = -3 + 4 = 1$, en lugar de $y = -3(0) + 4 = 4$.

Cabe aclarar, que a pesar de estos errores, el alumno contesta adecuadamente las otras preguntas que se hacen en el apartado, es decir, identifica correctamente las ecuaciones que se intersectan en cada punto.

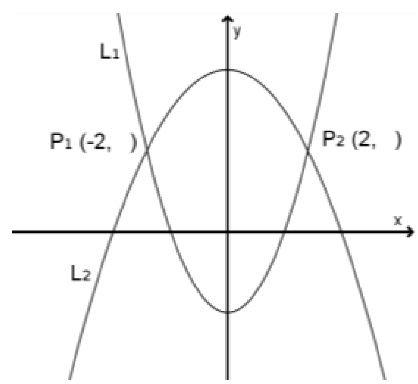
El apartado IX.1., donde se presenta un sistema de dos ecuaciones cuadráticas, y se proporcionan las abscisas de los puntos de intersección para que se calculen las ordenadas, el alumno no lo trabaja. Sin embargo, señala correctamente que existen dos maneras de calcular las ordenadas en cada punto: con $L_1$ y con $L_2$. Se muestra el sistema del que se hace referencia.

Sistema en su representación algebraica.

$y = x^2 - 2 \ldots L_1$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4 \ldots L_2$

Sistema en su representación geométrica.




En apartado XII.1., vuelve a cometer un error del tipo algebraico, el cual se mencionó en el análisis correspondiente a dicho apartado, sin embargo se vuelve a mostrar para su consideración. En este ejercicio, el alumno debe resolver el sistema siguiente por el método de sustitución.

$$y = 2x - 3 \ldots L_1$$

$$x = -y + 3 \ldots L_2$$

Respuesta del alumno

$$x = -(2x - 3) + 3$$

$$x = -2x + 3 + 3$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Como se puede ver, el alumno no suma correctamente $2x$ en ambos lados de la ecuación. Sin embargo, para el apartado XII.2., describe correctamente el método de sustitución.

El alumno resuelve sin mayor problema el apartado XIII que consiste en resolver un sistema por el método de igualación y describir en que consiste el método.

Para el apartado XIV, donde tiene que bosquejar y encontrar las coordenadas de los puntos de intersección de las ecuaciones de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, el alumno, bosqueja las ecuaciones correctamente, pero, no lo resuelve algebraicamente ni por el método gráfico.

Posteriormente, resuelve sin dificultad los apartados XV y XVI, que consisten en resolver gráficamente dos sistemas uno con dos ecuaciones lineales y el otro con una ecuación cuadrática y una lineal.

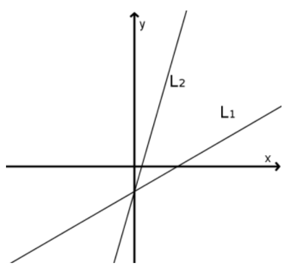
Finalmente, el alumno no responde en el apartado XVII, el cual consiste en el problema de aplicación.

Como podemos ver, el alumno tuvo problemas con las operaciones de los números enteros y con operaciones algebraicas básicas. Este alumno no completa las coordenadas en el sistema cuadrático (apartado IX), ni resuelve el problema de aplicación. Sin embargo, la mayoría de los apartados los contesta correctamente, por lo que, el alumno puede: realizar las conversiones de las representaciones algebraica y gráfica, localizar gráficamente los puntos de intersección de las ecuaciones, y determinar sin resolver algebraicamente cómo es el comportamiento de las ecuaciones en un sistema lineal. Su gran obstáculo es la poca destreza para operar algebraicamente.

*Algunas de las dificultades que tuvo en alumno (12) en post-test.*

Como se muestra a continuación, el alumno tuvo dificultades en el sistema 3 del Apartado I, donde tiene que convertir de la representación geométrica a la algebraica. A continuación se transcribe la respuesta del alumno.

Figura 5.5. Respuesta del alumno (12) correspondiente al apartado 1.

| Sistema 3 | | |
|---|---|---|
| Representación geométrica | Representación algebraica<br>Respuesta del alumno | Explicación<br>Respuesta del alumno |
|  | $y_1 = -\frac{2}{3}x_1 - 2$ …L1<br>$y_2 = -2x_2 - 2$ …L2 | *Para que se intersecten en el eje "y", su ordenada al origen es la misma.* |

Como se puede observar en la figura anterior, el alumno (12) escribe incorrectamente la representación algebraica asociada al sistema que se le muestra, el equívoco es la respuesta correspondiente a los coeficientes (pendientes). La explicación es incompleta, sólo justifica lo que corresponde a los términos independientes y nada menciona sobre las pendientes.

Posteriormente trabaja correctamente los apartados II, III, IV, V y VI, los cuales corresponden a los cuestionamientos de: conversión de la representación algebraica a la geométrica, relación entre representaciones algebraica y geométrica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, proposición de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas con diferentes situaciones, un punto en la representación geométrica como solución de un sistema, una pareja ordenada como solución de un sistema en la representación algebraica.

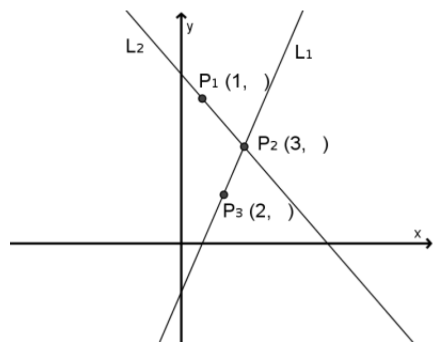
En el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que se muestra en sus representaciones algebraica y geométrica del apartado VII.2., donde el estudiante tiene que calcular las ordenadas de tres puntos que se encuentran sobre las rectas y escribir el número de formas que hay para calcular dichas ordenadas. El alumno (12) vuelve a presentar otro equívoco. A continuación se muestra el sistema en cuestión y el equívoco mencionado.

Representación Algebraica.

$y = 2x - 2\ldots$ $L_1$

$y = -x + 7\ldots L_2$

Representación geométrica.




El alumno (12) calcula correctamente las ordenadas de los puntos, $P_1$ (1,6), $P_2$ (3,4), $P_3$ (2,2). Sin embargo a la hora de contestar el número de formas que hay para calcular las ordenadas de los puntos, menciona que: "*para $P_1$ hay una forma con la ecuación $L_2$, para $P_2$, hay una forma con la ecuación $L_1$ y, para $P_3$ hay dos formas con las ecuaciones $L_1$ y $L_2$*". Al parecer este estudiante confunde los últimos dos puntos ($P_2$ y $P_3$) en virtud de que para $P_2$ hay dos formas con las ecuaciones $L_1$ y $L_2$ y, para $P_3$ hay sólo una forma con la ecuación $L_1$.

Posteriormente, en el apartado VIII.1., el cual se muestra enseguida, donde se pide completar las coordenadas faltantes de los puntos de intersección, el alumno (12) presenta un error algebraico.

Sistema en su representación algebraica.

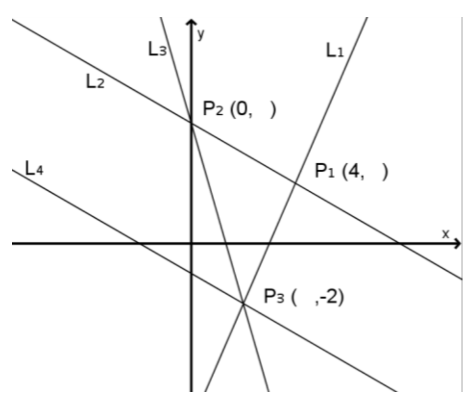
$y = 2x - 6 \ldots L_1$

$y = -\frac{1}{2}x + 4 \ldots L_2$

$y = -3x + 4 \ldots L_3$

$y = -\frac{1}{2}x - 1 \ldots L_4$

Sistema en su representación geométrica.



El equívoco algebraico que se detecta es en al momento de calcular la abscisa del punto $P_3$, con la ecuación $L_3$. A continuación se transcribe el procedimiento algebraico que escribe el mencionado alumno.

$$y = -3x + 4$$
$$x = \frac{y-4}{3}$$
$$x = \frac{-2-4}{3}$$
$$x = -2$$

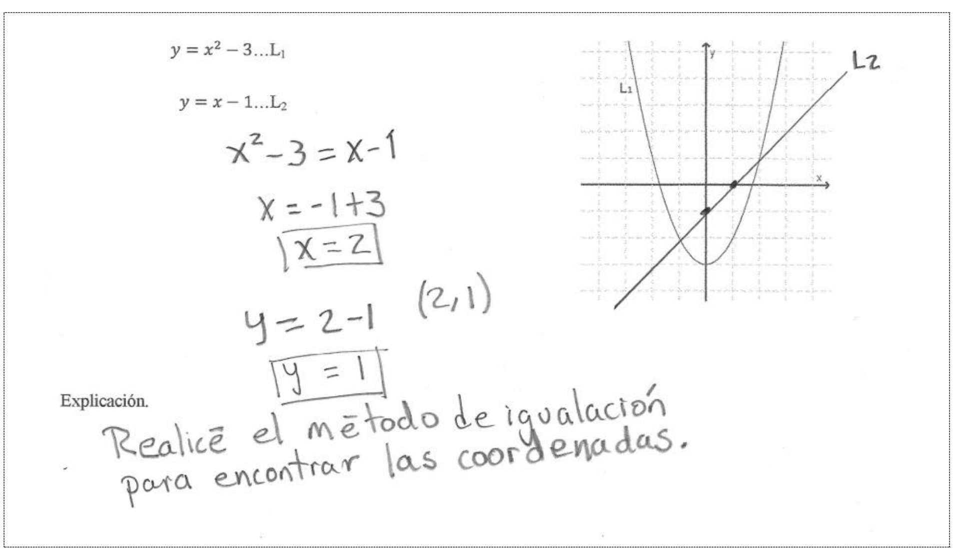
El despeje de "$x$" puede quedar de las siguientes dos formas equivalentes:

$$x = \frac{y-4}{-3} \qquad\qquad x = \frac{-y+4}{3}$$

Como se puede observar el alumno combina los dos despejes anteriores, Parece ser que el haber procedido mentalmente, lo lleva a cometer este error. El resto de las coordenadas de los puntos las determina correctamente.

El alumno que nos ocupa, responde bien de los apartados IX al XV. Pero, vuelve a equivocarse en el apartado XVI donde se pide resolver un sistema de dos ecuaciones, una lineal y una cuadrática, por el método gráfico. En el instrumento se proporciona un plano cartesiano con cuadrícula y la gráfica de la ecuación cuadrática. A continuación se muestra la respuesta del alumno.

Figura 5.5. Respuesta del alumno (12) para el apartado XVI.



El alumno, traza bien la gráfica de la ecuación $L_2$, utilizando la cuadrícula. Pero en lugar de determinar gráficamente los puntos de intersección, realiza el método algebraico de igualación de forma incorrecta. El tratamiento algebraico que lleva a cabo es que reduce términos que no son semejantes ($x^2 - x = x$).

Sin embargo, al margen del error algebraico, el alumno logra "transferir" que para encontrar las coordenadas se puede utilizar el método de igualación independientemente del grado de las ecuaciones.

En el apartado XVII, que es el problema de aplicación, el alumno plantea de manera correcta las ecuaciones, pero no resuelve el problema.

Cabe mencionar, que al margen de la problemática algebraica del alumno, contesta correctamente la mayoría de los cuestionamientos como son: conversión entre las representaciones, identificación de ecuaciones que se intersectan en un punto determinado, resolución del sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas. El desempeño que muestra el alumno (12) a lo largo de los cuestionamientos del post-test nos permite afirmar que dicho alumno "comprende satisfactoriamente" el objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales.

*Algunos avances que tuvo el alumno (5)*

El alumno (5) corresponde a los que casi no tuvieron dificultades en el post-test.

En el primer apartado que trata de la conversión de la representación geométrica a la algebraica, en el pre-test no contesta. Sin embargo, en el post-test contesta adecuadamente la conversión de los tres sistemas. Este es un caso que no apoya lo mencionado por Leinhardt, Stein y Zaslavsky (1990), quienes señalan que la conversión de la representación geométrica a la algebraica presenta mayor dificultad para los estudiantes, que la conversión inversa.

En el apartado II, realiza las conversiones de los sistemas de la representación algebraica a la geométrica correctamente en ambas pruebas.

En el apartado III, que consiste en relacionar sistemas en su representación algebraica con la descripción de bosquejos que sean factibles de asociárseles, el estudiante contesta correctamente en ambas pruebas. Sin embargo, las explicaciones que escribe en el pre-test no son precisas, pero en el post-test, las explicaciones las escribe con argumentos que se promueven en la instrucción: similitudes y diferencias entre coeficientes y términos independientes.

En el apartado IV, donde se tienen que proponer tres sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica y geométrica, en los cuales uno tenga solución única, el otro no tenga solución y, el tercero tenga infinidad de soluciones, el alumno no contesta en el pre-test y en el post-test contesta correctamente. En este punto se observa una mejora significativa en el desempeño del estudiante. En el post-test logra establecer, por ejemplo, conexiones tales como: similitudes y diferencias entre pendientes y ordenadas al origen, el punto de intersección como punto de solución y, la conversión de la representación geométrica a la algebraica, entre otros aspectos. Esto le permite contestar con éxito todas las preguntas de este apartado.

En el apartado V, donde se trata de reconocer que, i) en la representación geométrica, cuando una recta pasa por un punto, la pareja ordenada de dicho punto es solución de la ecuación algebraica asociada a dicha recta y, ii) que la solución de un sistema es el punto donde se intersectan todas la rectas, el alumno no contesta en el pre-test y el post-test contesta correctamente.

Los apartados VI, VII, VIII, IX, X, y XI, los cuales que tratan de: determinar que la pareja ordenada es solución de un sistema cuando satisface todas las ecuaciones del mismo, completar coordenadas de puntos de intersección de dos sistemas lineales y uno cuadrático, determinar las características de tres sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. El alumno los contesta correctamente en ambas pruebas.

En el apartado XII, donde se tiene que resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de sustitución y describir en que consiste dicho método. En alumno no contesta en el pre-test pero en el post-test contesta correctamente.

En el apartado XIII, donde el alumno tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación y escribir en que consiste dicho método, en el pre-test tiene un error algebraico y en el post-test lo hace correctamente. En ambos casos describe adecuadamente en que consiste el método de igualación.

En los apartados XIV, XV, XVI y XVII, que consisten en: determinar las coordenadas de los puntos de intersección de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método gráfico, resolver gráficamente un sistema de dos ecuaciones una lineal y una cuadrática con dos incógnitas y, resolver un problema de aplicación, respectivamente. El alumno no los contesta en el pre-test, pero en el post-test contesta todos correctamente.

*Algunos avances del alumno (13)*

En los apartados I y II, que consisten en: la conversión de sistemas de la representación geométrica a la algebraica y viceversa, el alumno presentó dificultades en el pre-test, pero en el post-test realiza las conversiones correctamente.

En los apartados III, V, VI, VII, VIII, IX.1 y X, que consisten en: relacionar sistemas en su representación algebraica con la descripción de su bosquejo, identificar la solución de un sistema en su representación geométrica como el punto donde se intersectan todas sus ecuaciones, determinar que una pareja ordenada es solución de un sistema cuando satisface a todas las ecuaciones, completar coordenadas de puntos de intersección en sistemas de dos y tres ecuaciones lineales, y completar las coordenadas de los puntos de solución de un sistema de dos ecuaciones cuadráticas. El estudiante no muestra equívoco alguno en ambas pruebas.

En el apartado IV, donde se pide que se escriban sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas con solución única, sin solución y con infinidad de soluciones en las representaciones algebraica y geométrica, el alumno, no contesta en el pre-test, y en el post-test no presenta error alguno, en este caso se observa que el alumno realiza las conexiones correctas para establecer las características de las ecuaciones de los sistemas en sus representaciones algebraica y gráfica.

En el apartado VIII.2. y IX.2., donde se tiene que explicar que para el cálculo de la abscisa u ordenada de algún punto de intersección se pueden utilizar cualquiera de las ecuaciones que se intersectan en dicho punto, el alumno no contesta en el pre-test, pero en el post-test sus respuestas son adecuadas.

Para el apartado XI, donde sin resolver los tres sistemas de ecuaciones lineales que se le muestran en la representación algebraica, se tiene que señalar el que no tiene solución, el que tiene infinidad de soluciones y, el que tiene solución única, el alumno no contesta en el pre-test, pero en el post-test contesta correctamente.

Los apartados XII y XIII (resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por los métodos de sustitución, de igualación y describir detalladamente en qué consisten dichos métodos), XIV (determinar las coordenadas de los puntos de intersección de un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas), XV (resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método gráfico), XVI (resolver un sistema de dos ecuaciones, una lineal y una cuadrática con dos incógnitas gráficamente) y XVII (resolver un problema de aplicación), el alumno no los contesta en el pre-test, pero en el post-test sus respuestas son satisfactorias.

## Lista de resultados por alumno

Para finalizar esta sección, se presenta una tabla que indica el rendimiento en porcentaje, de cada uno de los estudiantes en el pre-test y en el post-test; así mismo se muestra una columna que indica el incremento en porcentaje alcanzado por cada uno de ellos.

Tabla 5.35. Resultados generales en porcentaje, por alumno.

| Alumno | Pre-test | Post-test | Incremento |
|---|---|---|---|
| 1 | 49.0 | 96.5 | +47.5 |
| 2 | 41.6 | 96.5 | +54.9 |
| 3 | 45.0 | 98.5 | +53.5 |
| 4 | 16.8 | 98.0 | +81.2 |
| 5 | 50.5 | 98.0 | +47.5 |
| 6 | 26.2 | 88.1 | +61.9 |
| 7 | 36.1 | 96.5 | +60.4 |
| 8 | 10.9 | 88.6 | +77.7 |
| 9 | 13.4 | 99.5 | +86.1 |
| 10 | 28.7 | 99.5 | +70.8 |
| 11 | 44.6 | 100.0 | +55.4 |
| 12 | 12.9 | 92.1 | +79.2 |
| 13 | 46.0 | 100.0 | +54.0 |
| 14 | 42.1 | 93.6 | +51.5 |
| 15 | 25.2 | 82.2 | +57.0 |

Tabla 5.35. Resultados generales en porcentaje, por alumno. (continuación).

| Alumno | Pre-test | Post-test | Incremento |
|---|---|---|---|
| 16 | 24.3 | 99.0 | +74.4 |
| 17 | 17.3 | 87.6 | +70.3 |
| 18 | 65.8 | 90.6 | +24.8 |
| 19 | 3.5 | 93.6 | +90.1 |
| 20 | 19.8 | 91.1 | +71.3 |
| 21 | 38.1 | 95.5 | +57.4 |
| 22 | 29.2 | 96.0 | +66.8 |
| 23 | 20.3 | 89.6 | +69.3 |
| 24 | 40.6 | 94.6 | +54.0 |
| 25 | 35.6 | 99.5 | +63.9 |
| 26 | 31.7 | 99.5 | +67.8 |

De acuerdo a los resultados de la tabla anterior, podemos señalar algunas observaciones:

- el alumno (19) obtiene el menor porcentaje de rendimiento en el pre-test (3.5%) pero en el post-test alcanza el 93.6% con el cual obtiene el incremento más alto (90.1)%;
- el alumno (18) obtiene el mayor porcentaje de rendimiento en el pre-test (65.8%) pero en el post-test alcanza el 90.6% con el cual obtiene el menor incremento, de sólo el 24.8%;
- los alumnos (11) y (13) obtienen en el pre-test 44.6% y 46.0% respectivamente y alcanzan un aprovechamiento óptimo en el post-test al obtener el 100% de rendimiento, sus incrementos son 55.4% y 54.0% respectivamente;
- El alumno (6) obtiene un porcentaje en el pre-test del 26.2%, pero en el post-test alcanza el menor porcentaje del grupo (88.1%) con el cual obtiene un incremento del 61.9%.

Hasta este punto se ha hecho el análisis algunos resultados del instrumento de evaluación. Se continuará con algunas opiniones de los alumnos y posteriormente se exponen las consideraciones finales.

## Cuestionario complementario

En los siguientes párrafos se comentan algunas opiniones que los estudiantes manifiestan por escrito en el instrumento de evaluación titulado “Cuestionario complementario” que se aplica al finalizar la serie de 51 tareas. Con el propósito de recabar por escrito algunas de las opiniones de los estudiantes en esta experiencia en la que participaron durante nueve sesiones. Este cuestionario se aplica cuando los estudiantes terminan de contestar la prueba post-test.

*Cuestionamiento 1.* Indica algunas diferencias de cómo te sentiste en la prueba diagnóstica y en el instrumento de evaluación sumativa.

La siguiente respuesta, expresada por el alumno (2), resume lo que escribió la mayoría, *“en el primero no sabía cómo resolverlo todo, lo sentí muy difícil, en el segundo fue más fácil”*. Cabe recordar, que de acuerdo al programa de estudios del segundo año de secundaria (ver Anexo 3), el tema de sistemas ecuaciones lineales es objeto de estudio en dicho año escolar. Sin embargo, los resultados del pre-test y lo que comenta este alumno nos hace pensar en dos posibilidades:

- que algunos de los estudiantes no trabajaron el objeto de estudio en su momento;
- que algunos estudiantes lo estudiaron y lo aprendieron, pero al cabo de alrededor de dos años, no lo recuerdan.

*Cuestionamiento 2.* ¿Qué piensas acerca de la forma de abordar el conocimiento, en trabajo individual, en equipo y grupal? A continuación se transcriben algunas respuestas.

> …primero nos daban unas hojas para contestar en forma individual, esto hacía que pensaras más, pero después comparabas tus respuestas en equipo, para ver si estabas bien. Esto ayudo mucho (alumno 6).
>
> …fue una buena forma de aprender porque si no lo entendías individual y si no entendias cuando estavas en equipo te davas cuenta del error o de cómo se asia y cuando ya era grupal era mejor porque asi comprendias (alumno 10).
>
> Pues muy buena, porque todas las tareas el profesor nos las dio para que trabajáramos individualmente y las resolviéramos solos sin que él nos explicara y yo pude resolverlas casi todas, lo bueno de que no supiera algo era que trabajábamos en equipo y si no entendía alguno

> de mis compañeros si entonces me explicaban, y si alguien no entendía de ninguna de las dos formas el profesor nos auxiliaba (alumno 11).
>
> … y al final grupal donde pasábamos al pizarrón y el profesor explicaba los errores y hacía que los corrigiéramos fue una forma diferente de aprender y la clase no era aburrida. En fin a mí me gustaron todas las clases (alumno 12).
>
> …al debatir en equipo las respuestas nos damos cuenta de algunos detalles que los demás notaron y amplias tu conocimiento con el conocimiento de los demás (alumno 24).

Según las respuestas, los alumnos se sintieron bien con la forma en que se llevaron a cabo las tareas en este trabajo. Resalta una buena acogida al trabajo en equipo de forma colaborativa, lo cual fue tomado de los señalamientos de Johnson y Johnson (1999), Reyes (1995) y, sugerido por Bransford, Brown y Cocking (1999) en la perspectiva de la comunidad.

*Cuestionamiento 3.* ¿Qué piensas acerca de trabajar las ecuaciones lineales entre sus representaciones algebraica y gráfica?

A continuación, se transcriben algunas respuestas.

> …pienso que son complementarias, es importante saber las dos maneras para poder distinguir sus características rápida y sencillamente (alumno 13).
>
> Me parece una buena técnica porque se puede ver más fácil la ecuación de forma gráfica (alumno 15).
>
> Me parece sencillo, porque pienso que una a otra se complementan, así cuando no puedo encontrar solución a un problema, me apoyo en los dos métodos y resulta más sencillo, sin embargo, me es más fácil usar el método algebraico y lo prefiero por dar más exactitud (alumno 18).
>
> Que es una buena forma para comprender el tema porque sabes cómo emplear una con respecto a la otra. Es eficiente para el punto de solución, y el sentido de las rectas (alumno 23).

Las respuestas de los alumnos, nos indican que aceptan la bondad de trabajar con las representaciones algebraica y geométrica y que resulta adecuada para su aprendizaje.

Hay que recordar que según Duval (1992) un estudiante comprende un objeto matemático, cuando puede reconocerlo en al menos dos representaciones y puede hacer la conversión entre ellas; y según Hiebert y Carpenter (1992) las conexiones se pueden construir entre varias formas de representación. Cabe señalar que los alumnos expresan de alguna manera, lo que se promueve en este estudio. Cuando los estudiantes mencionan que “ver más fácil”, en cierta forma nos indica que comprenden el tema en cuestión.

Cuestionamiento 4. ¿Aproximadamente, qué porciento de tus respuestas en trabajo individual, comprobaste que estuvieron correctas en trabajo de equipo y grupal?

Se transcriben algunas respuestas.

> El 85% no tuve tantos errores, algo que a mí, me sorprendió (alumno 15).
>
> Como el 65% porque tenía algunas dudas y en trabajo de equipo comprobé que tenía algunos errores pero aciertos también (alumno 16).
>
> El 70% porque al principio no había entendido muy bien, pero al avanzar en el tema pude comprobar que me iba mejor en las tareas (alumno 19).

En general los alumnos reportan que en su trabajo individual sus resultados satisfactorios están del orden del 70%, aunque al revisar las tareas, se observa que este porcentaje es menor. Al parecer la “mayoría” de las dificultades que se presentan en el trabajo individual se logran superar en el trabajo en equipo en virtud de que en éste, se observa un rendimiento favorable superior al 92%.

Las respuestas, reflejan que los alumnos trabajan con “confianza” en tareas matemáticas, que es una de las recomendaciones de una escuela de matemáticas con grandes expectativas, según los señalamientos del NCTM (2000).

Después de haber trabajado todo el proceso, desde el diseño del ambiente de aprendizaje, instrumentos de evaluación, puesta en práctica y análisis de resultados, es momento de expresar algunas consideraciones finales.

# Consideraciones finales

Como se menciona en la Introducción, el presente trabajo está centrado en estudiantes de bachillerato y tiene como propósito diseñar e implementar un escenario para promover el aprendizaje con comprensión de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, de acuerdo a los lineamientos teóricos para el diseño de ambientes de aprendizaje de Bransford, Brown y Cocking (1999), y los de Hiebert y Carpenter (1992) para la comprensión matemática. A continuación se exponen algunas consideraciones finales que señalan en qué medida, el mencionado ambiente promueve el aprendizaje con comprensión en los estudiantes sujetos a estudio.

En este apartado, se indican primeramente algunas consideraciones de la puesta en práctica, y posteriormente del instrumento de evaluación.

*Puesta en práctica*

Algunas observaciones en tareas individuales. Con base en los resultados expuestos, es posible afirmar que los estudiantes logran evolucionar favorablemente en las tareas individuales, por ejemplo:

- en la conversión de la representación geométrica a la algebraica del 38% (Tarea 9), al 88% (Tarea 14);
- en la conversión de la representación algebraica a la geométrica del 69% (Tarea 9), al 88% (Tarea 14);

- en la identificación de condiciones algebraicas de acuerdo a las características geométricas, del 38% (Tarea 9), al 88% (Tarea 14);
- en el análisis, y la proposición de sistemas en especial en aquellos con infinidad de soluciones, del 8% (Tarea 9), al 50% (Tarea 22) y, al 81% (Tarea 33);
- en relacionar correctamente los sistemas dadas sus representaciones algebraica y geométrica, del 92% (Tarea 17), al 96% (Tarea 19);
- en identificar el punto de solución en la representación geométrica, determinar que una pareja ordenada es solución de un sistema cuando satisface todas sus ecuaciones, completar las coordenadas de los puntos de solución, del 88% (Tarea 25) al 92% (Tarea31);
- en resolver sistemas por los métodos: sustitución e igualación, del 50% (Tarea 43) al 81% (Tarea 45);
- en transferir a dos sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas 62% (Tarea 46).

Algunas observaciones en tareas de trabajo de equipo. Con base en los resultados expuestos, es posible afirmar que la mayoría de los estudiantes logra:

- obtener arriba del 92% de rendimiento cuando este trabajo les es requerido; en cualquiera de las tres formas empleadas: con sus compañeros más cercanos, al azar o, como están sentados.

Algunas observaciones en tareas grupales. Con base en los resultados expuestos, es posible afirmar que la mayoría de los estudiantes logra:

- participar activamente, oralmente y por escrito (en el pizarrón), donde se expresan correctamente desde el punto de vista matemático.

A pesar de lo anterior, algunos alumnos siguen mostrando dificultades en:

- expresar correctamente en leguaje natural, la descripción de procedimientos o condiciones de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas;
- equívocos en procedimientos algebraicos.

*Instrumento de evaluación (post-test).* Por otro lado, a la luz de los resultados expuestos, es posible señalar que la mayoría de los estudiantes logra:

- convertir de la representación geométrica a la algebraica (97%);
- convertir de la representación algebraica a la geométrica (99%);
- relacionar, identificar, analizar y proponer sistemas en sus representaciones algebraica, gráfica y en lenguaje natural, de acuerdo a las características de los sistemas: con solución única, sin solución o con infinidad de soluciones (≈97.5%);
- identificar el punto de solución en la representación geométrica, determinar que una pareja ordenada es solución de un sistema cuando satisface todas sus ecuaciones, completar las coordenadas de los puntos de solución (≈95.7%);
- resolver sistemas por los métodos de sustitución, igualación y gráfico (≈91.7%);
- transferir lo aprendido a sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, sistemas no lineales y a un problema de aplicación (≈90%);

A pesar de lo anterior, algunos alumnos siguen mostrando dificultades en:

- expresar correctamente en leguaje natural la descripción de procedimientos o condiciones de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas;
- equívocos al operar algebraicamente;
- equívocos en el método gráfico y problemas de aplicación.

Por lo anterior, se puede decir que al parecer, la mayoría de los estudiantes logra: i) la conversión entre las representaciones algebraica y gráfica de las ecuaciones de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, ii) interpretar correctamente las características de un sistema de ecuaciones lineales dadas su representación verbal, algebraica y el bosquejo de su representación geométrica, iii) resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas algebraica y gráficamente, iv) aplicar lo aprendido en sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, sistemas cuadráticos y a un problema de aplicación.

Finalmente, es posible afirmar que el diseño del ambiente de aprendizaje logra promover en la mayoría de los estudiantes (≈94%), un aprendizaje con comprensión de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

# Referencias


Alcocer, I. (2007). *Dificultades en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en contextos algebraico y geométrico*. Tesis de Maestría. CINVESTAV, México.

Anfossi, A. y Flores, M. (2000). *Álgebra*. México: Editorial Progreso, Vigesimosegunda Edición.

Angel, A. y Rinde, D. (2011). *Elementary and Intermediate Algebra for College Students.* USA: Ed. Prentice Hall. 4ª ed.

Baldor, A. *Álgebra.* (2003). México: Publicaciones Cultural.

Barnett, R. (1987). *Álgebra elemental estructura y aplicaciones*. México: McGraw-Hill. Traducción Rosas, M. y García, M.

Bransford, J., Brown, A. y Cocking, R. (1999). The Design of Learning Environments. En Bransford, J., Brown, A. y Cocking, R. *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School* (pp. 119-142). Washington, D.C.: National Academicy Press.

Carlón, A. (2005). *Comprensión y conversión de representaciones gráfica y algebraica en funciones polinomiales elementales por alumnos de bachillerato*. Tesis de Doctorado. Universidad Pedagógica Nacional, México.

Dorier, J., Robert, A., Robinet, J. y Rogalski, M. (2000). The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. En *On The Teaching of Linear Algebra* (pp. 85-124). Grenove: Ed. J.L. Dorier. Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones: La articulación de dos registros. En Cambray, R. Sánchez, E. y Zubieta, G. *Antología en educación matemática* (pp. 125-139). México: CINVESTAV.

Duval, R. (1999). *Sémiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Universidad del Valle y Peter Lang S. A. Trad. Myriam Vega Restrepo, 1999. Santiago de Cali, Colombia.

García, S. y Block, D. (2008). *Fractal 2. Matemáticas.* México: Producciones SM.

Graham, K., Cuoco, A. y Zimmermann, G. (2011). *Focus in High School Mathematics. Reasoning and Sense Making: Algebra.* Reston USA: NCTM.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Co, Inc.

Johnson, D. y Johnson, R. (1999). *Aprender Juntos y Solos.* Argentina: Editorial Aique.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Co, Inc.

Lafourcade, P. (1969). *Evaluación de los aprendizajes.* Buenos Aires: Kapelusz.

Larson, R. y Hostetler, R. (2009). *Álgebra*. México: Grupo Editorial Patria. Primera Edición en Español.

Lay, D. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones.* México: Pearson Educación. Traducción Murrieta, J. Tercera edición.

Leinhardt, G., Stein, M. y Zaslavsky, O. (1990). Functions, Graphs, and Graphing, Learning, and Teaching*. Review of Educational Research*, Vol. 60, No.1. pp. 1-64

Lehmann, C. (2012). *Algebra*. México: Limusa. Traducción De Hoyos, T.

Moreno, J. (2004). *Álgebra.* México: McGraw-Hill.

Oteyza, E. (2003). *Álgebra.* México: Pearson Educación. Segunda Edición.

Reyes, A. (1995). Propuesta Metodológica para Diseñar Material Didáctico para un Curso de Álgebra Lineal Aplicada. En Balderas, P., Carlón, A., Cruz, S., Estrada. J., Martínez, A., Meda, M. y Recio, J. Editores*. Memorias del V Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger* (pp. 163-169). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Scott, P. (1988). *Introducción a la investigación y evaluación educativa*. Guatemala: Universidad de San Carlos.

Segura, S. (2004). Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una Secuencia Didáctica*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* V. 7 (1), pp. 49-78

SEP. (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación básica. Secundaria*. México: SEP.

Smith, S., Charles, R., Dossey, J., Keedy, M. y Bittinger, M. (1992). *Álgebra*. Wilmington USA: Addison-Wesley Iberoamericana. Traducción Hernández, C.

Swokowski, E. (1971). *Álgebra* Universitaria. México: Editorial Continental.

The National Council of Mathematics, Inc. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Reston USA: National Council of Teachers of Mathematics. Traducción S. A. Thales.

UNAM-CCH. (2012). *Programa de Estudios de Matemáticas, Semestres I al IV.* México: UNAM.

UNAM-Facultad de Ingeniería. (2008) *Programa de Estudio de Álgebra para la carrera de Ingeniería Civil*. México: UNAM.

Uspensky, J. (2000). *Teoría de Ecuaciones.* México: Edit. Limusa.

Yakes, C. y Star, J. (2011). Using Comparison to Develop Flexibility for Teaching. *N.C. Mathematics*. Ed. Mathematics Teacher, V. 14, pp. 175-191

Yákovliev, G. (1984). *Álgebra y Principios de Análisis Parte I*. Moscú: Editorial Mir. Traducción Samojválov, A.

# Anexo 1. Formatos de las tareas individuales y de equipo

Tarea 5. Identificación de número de ecuaciones y de incógnitas en las representaciones algebraica y geométrica

Individual. En clase.

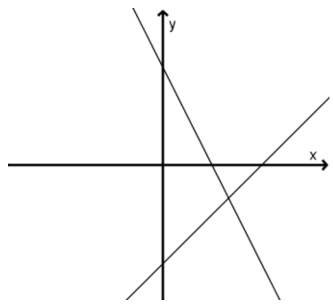
Nombre________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. A continuación se muestran nueve representaciones de sistemas de ecuaciones lineales, algunas en su representación algebraica y en otras, se presenta el bosquejo de su representación geométrica. Observa detenidamente y completa la tabla de la página siguiente.

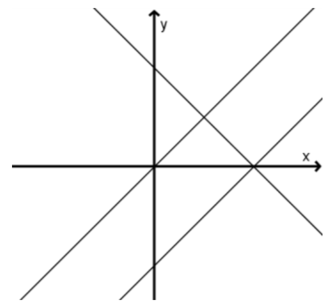
Representación 1

$$5x - 9y + 14 = 0$$
$$3x + 2y - 1 = 0$$

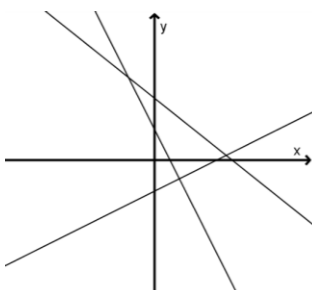
Representación 2




Representación 3




Representación 4




Representación 5

$$y = -\frac{5}{8}x + 4$$
$$x = \frac{-2y + 3}{5}$$

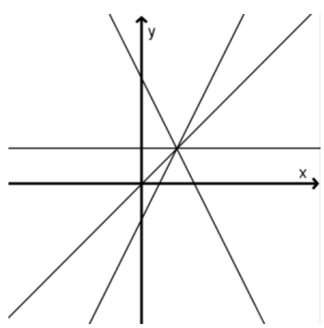
Representación 6

$$2x + 3y - 5 = 0$$
$$-2x - 5y = -8$$
$$y = \frac{-5x + 1}{7}$$

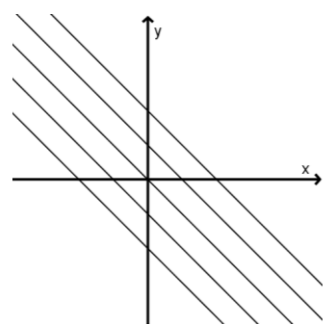
Representación 7

$$y = -x - z + 5$$
$$y = -2x + 3z - 8$$
$$y = 3x - 12$$
$$y = \frac{2}{3}x + 8$$

Representación 8




Representación 9



Completa la siguiente tabla.

| Representaciones | Número de ecuaciones | Número de incógnitas |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | | |
| 3 | 3 | 2 |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |

Tarea 7. Casos concretos de sistemas de ecuaciones lineales

Individual. En clase.

Nombre________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. En matemáticas puede ocurrir que se trabaje con una ecuación con una incógnita, una ecuación con dos incógnitas, dos ecuaciones con dos incógnitas,.., hasta $m$ ecuaciones con $n$ incógnitas. En la tabla siguiente escribe en los espacios correspondientes (etiquetados con números 1, 2, 3…), una ecuación o un sistema de ecuaciones en su representación algebraica, que cumpla con las condiciones que se establecen en su respectiva columna y renglón.

| Número de Ecuaciones / Número de Incógnitas | Dos incógnitas | Tres incógnitas |
|---|---|---|
| Una ecuación lineal | 1 | 2 |
| Sistema de dos ecuaciones lineales | 3 | 4 |
| Sistema de tres ecuaciones lineales | 5 | 6 |
| Sistema de una ecuación cuadrática y una lineal | 7 | |

Tarea 9. Sistemas de ecuaciones lineales, situación de paralelismo

Individual. Extraclase.

Nombre_________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. A continuación se muestran tres sistemas de ecuaciones lineales en su representación algebraica; bosqueja para cada uno, en el plano correspondiente, un sistema de ecuaciones lineales que sea factible de asociársele.

1.

$y_1 = x_1 + 2$…$L_1$

$y_2 = x_2 - 3$…$L_2$

2.

$y_1 = 4x_1 + 3$… $L_1$

$y_2 = 4x_2 + 2$… $L_2$

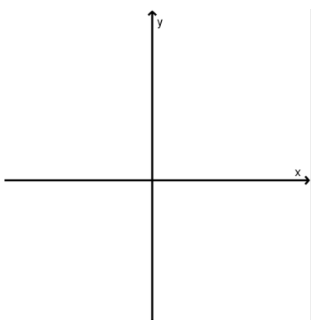
$y_3 = 4x_3 + 1$… $L_3$

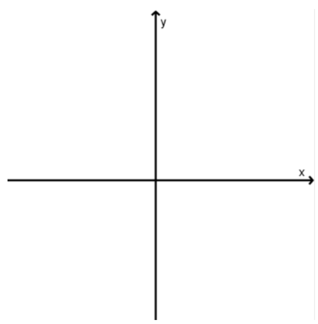
3.

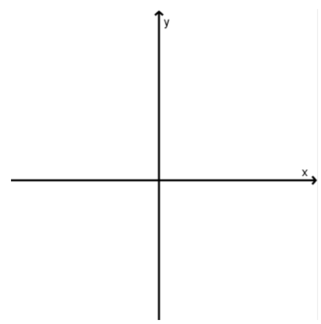
$y_1 = -\frac{1}{5}x_1 + 1$… $L_1$

$y_2 = -\frac{1}{5}x_2$… $L_2$

$y_3 = -\frac{1}{5}x_3 - 1$… $L_3$

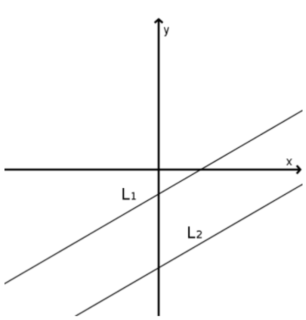


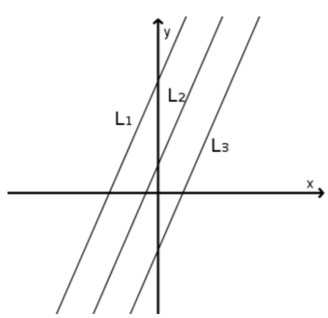




II. A continuación se muestran tres bosquejos de la representación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales, escribe para cada uno, un sistema en su representación algebraica que sea factible de asociársele.

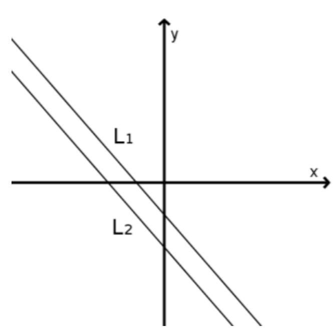
1.




2.




3.



III. De acuerdo a las conversiones hechas anteriormente y, a las características de las representaciones algebraicas y geométricas de los sistemas de ecuaciones trabajados en esta tarea, contesta los siguientes cuestionamientos.

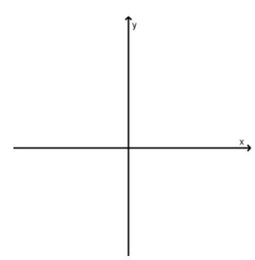
1. ¿Cómo son las rectas que se encuentran en cada bosquejo de representación geométrica?

2. Analiza las ecuaciones en cada uno de los sistemas trabajados en esta tarea y, completa la siguiente tabla.

| Similitudes y diferencias / Representaciones | Representación algebraica | Representación geométrica |
|---|---|---|
| Similitudes | | |
| Diferencias | | |

3. ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir las ecuaciones en su representación algebraica, de un sistema de ecuaciones, para que sus gráficas asociadas sean rectas paralelas en el plano cartesiano?

4. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en su representación algebraica cuyas ecuaciones sean equivalentes. Así mismo, haz el bosquejo de las ecuaciones.



Tarea 11. Sistemas de ecuaciones lineales, situación de intersección en el eje de las ordenadas

Individual. En clase.

Nombre________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. A continuación se muestran tres sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en su representación algebraica. Para cada uno, dibuja un bosquejo de su representación geométrica que sea factible de asociársele.

1.

$y_1 = -3x_1 - 1 \ldots L_1$

$y_2 = -\frac{1}{2}x_2 - 1 \ldots L_2$

2.

$y_1 = 4x_1 + 3 \ldots\ L_1$

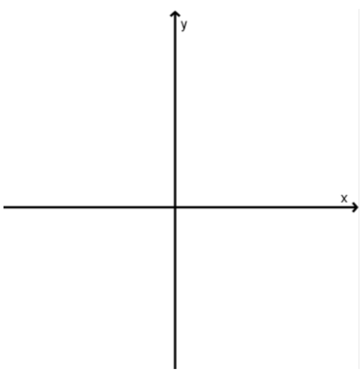
$y_2 = -4x_2 + 3 \ldots\ L_2$

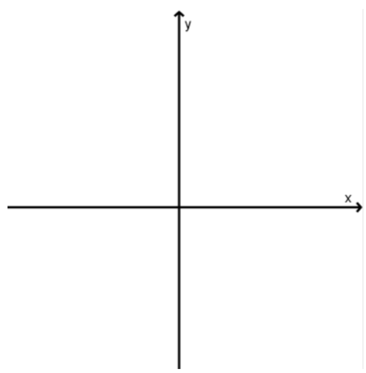
3.

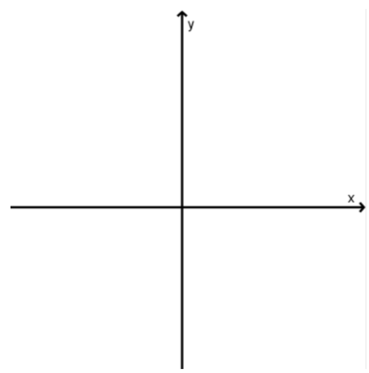
$y_1 = x_1 + 1 \ldots L_1$

$y_2 = 2x_2 + 1 \ldots L_2$

$y_3 = -2x_3 + 1 \ldots L_3$

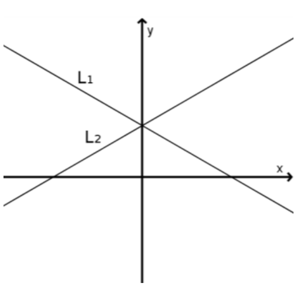


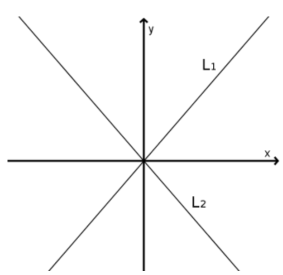




II. A continuación se muestran los bosquejos de la representación geométrica de tres sistemas de ecuaciones lineales. Escribe para cada uno, un sistema en su representación algebraica que sea factible de asociársele.

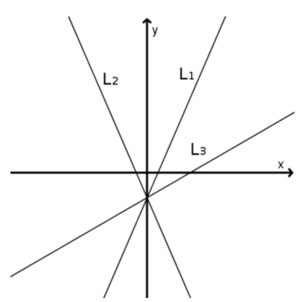
1.




2.




3.



III. De acuerdo a las conversiones hechas anteriormente y, a las características de las representaciones algebraicas y geométricas de los sistemas de ecuaciones trabajados en los dos apartados anteriores, contesta las siguientes preguntas.

1. Completa la siguiente tabla.

| Similitudes y diferencias / Representaciones | Representación algebraica | Representación geométrica |
|---|---|---|
| Similitudes | | |
| Diferencias | | |

2. ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir las ecuaciones en su representación algebraica, de un sistema de ecuaciones, para que sus gráficas asociadas, sean rectas en el plano cartesiano y, que el punto de intersección entre ellas se encuentre en el eje de las ordenadas?

Tarea 12. Sistemas de ecuaciones lineales, situación de intersección en el eje de las ordenadas.

En equipo. En clase.

Nombres_______________________________________________________________________

_____________________________________________________Grupo. _______ Fecha _________

I. A continuación se muestran tres sistemas de ecuaciones lineales en su representación algebraica, para cada uno, dibuja un bosquejo de su representación geométrica que sea factible de asociársele.

1.

$y_1 = -3x_1 - 1 \ldots L_1$

$y_2 = -\frac{1}{2}x_2 - 1 \ldots L_2$

2.

$y_1 = 4x_1 + 3 \ldots L_1$

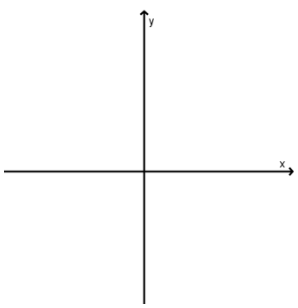
$y_2 = -4x_2 + 3 \ldots L_2$

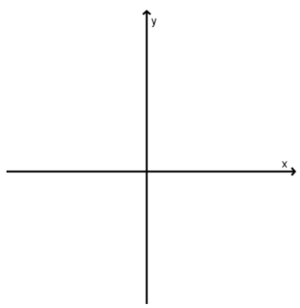
3.

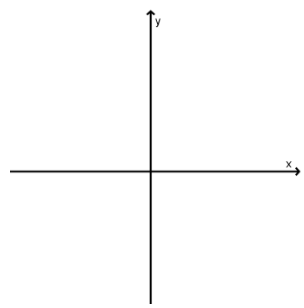
$y_1 = x_1 + 1 \ldots L_1$

$y_2 = 2x_2 + 1 \ldots L_2$

$y_3 = -2x_3 + 1 \ldots L_3$

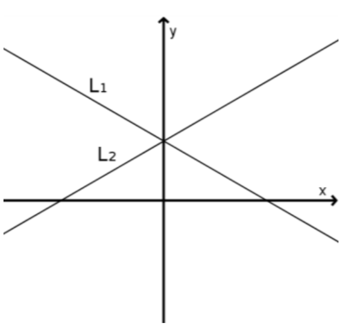


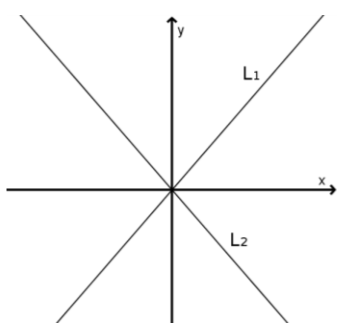




II. A continuación se muestran bosquejos de la representación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales, escribe para cada uno, un sistema en su representación algebraica que sea factible de asociarse.

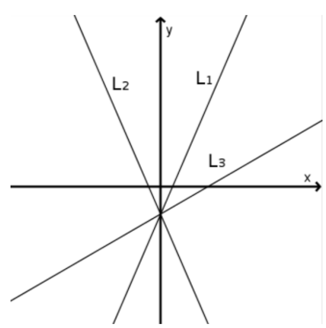
1.




2.




3.



III. De acuerdo a las conversiones hechas anteriormente y, a las características de las representaciones algebraicas y geométricas de los sistemas de ecuaciones trabajados en los dos apartados anteriores, contesta los siguientes cuestionamientos.

1. Completa la siguiente tabla.

| Similitudes y diferencias / Representaciones | Representación algebraica | Representación geométrica |
|---|---|---|
| Similitudes | | |
| Diferencias | | |

2. ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir las ecuaciones en su representación algebraica, de un sistema de ecuaciones, para que sus gráficas asociadas, sean rectas en el plano cartesiano y, que el punto de intersección entre ellas se encuentre en el eje de las ordenadas?

Tarea 14. Sistemas de ecuaciones lineales, situación de intersección fuera del eje de las ordenadas

Individual. En clase.

Nombre________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. A continuación se muestran sistemas de ecuaciones lineales en su representación algebraica, para cada uno, dibuja un bosquejo de su representación geométrica que sea factible de asociarse.

1.

$y_1 = -3x_1 - 2$…L1

$y_2 = -\frac{1}{2}x_2 + 1$…L2

2.

$y_1 = 2x_1 - 1$…L1

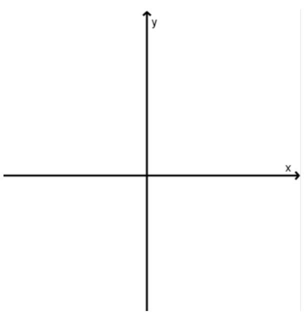
$y_2 = -x_2 + 3$…L2

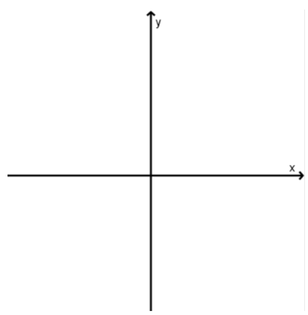
3.

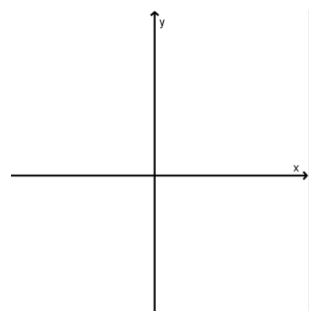
$y_1 = -3x_1 + 4$…L1

$y_2 = 2x_2 + 1$…L2

$y_3 = x_3 - 2$…L3

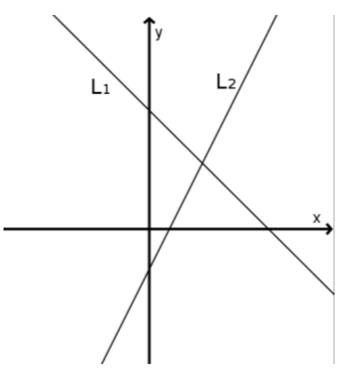


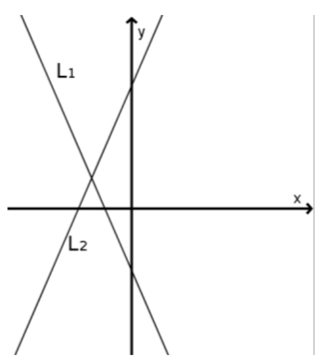




II. A continuación se muestran bosquejos de la representación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales, escribe para cada uno, un sistema en su representación algebraica que sea factible de asociarse.

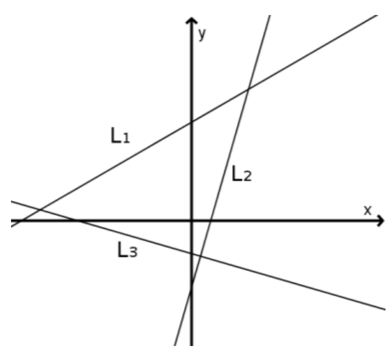
1.




2.




3.



III. De acuerdo a las conversiones hechas anteriormente y, a las características de las representaciones algebraicas y geométricas de los sistemas de ecuaciones trabajados en los dos apartados anteriores, contesta las siguientes preguntas.

1. Completa la siguiente tabla.

| Similitudes y diferencias / Representaciones | Representación algebraica | Representación geométrica |
|---|---|---|
| Similitudes | | |
| Diferencias | | |

2. ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir las ecuaciones en su representación algebraica, de un sistema de ecuaciones, para que sus gráficas asociadas, sean rectas en el plano cartesiano y, que el punto de intersección entre ellas se encuentre fuera del eje de las ordenadas?

Tarea 15. Sistemas de ecuaciones lineales, situación de intersección fuera del eje de las ordenadas.

En equipo. En clase.

Nombres______________________________________________________________________

__________________________________________Grupo ________ Fecha ____________

I. A continuación se muestran sistemas de ecuaciones lineales en su representación algebraica, para cada uno, dibuja un bosquejo de su representación geométrica que sea factible de asociarse.

1.

$y_1 = -3x_1 - 2$…$L_1$

$y_2 = -\frac{1}{2}x_2 + 1$…$L_2$

2.

$y_1 = 2x_1 - 1$…$L_1$

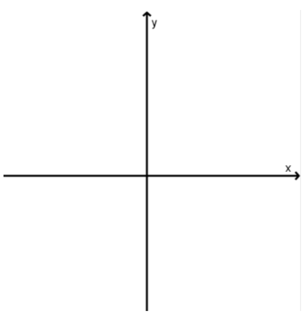
$y_2 = -x_2 + 3$…$L_2$

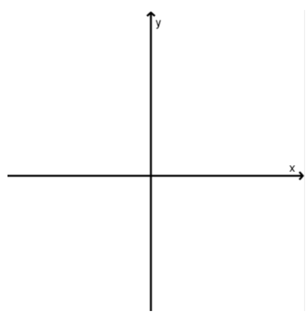
3.

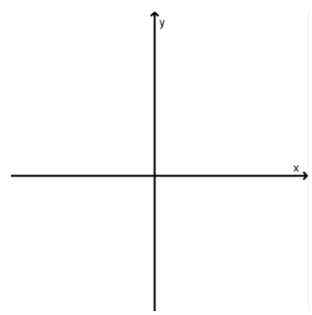
$y_1 = -3x_1 + 4$…$L_1$

$y_2 = 2x_2 + 1$…$L_2$

$y_3 = x_3 - 2$…$L_3$

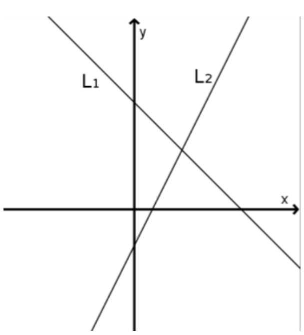


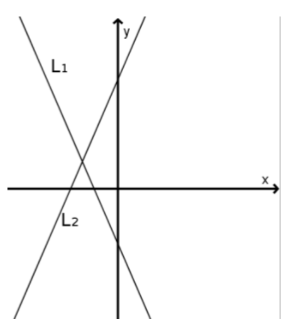




II. A continuación se muestran bosquejos de la representación geométrica de sistemas de ecuaciones lineales, escribe para cada uno, un sistema en su representación algebraica que sea factible de asociarse.

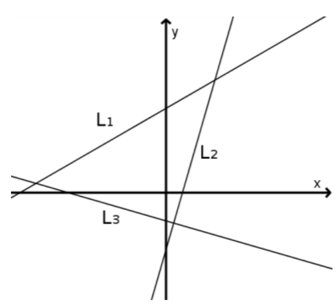
1.




2.




3.



III. De acuerdo a las conversiones hechas anteriormente y, a las características de las representaciones algebraicas y geométricas de los sistemas de ecuaciones trabajados en los dos apartados anteriores, contesta las siguientes preguntas.

1. Completa la siguiente tabla.

| Similitudes y diferencias / Representaciones | Representación algebraica | Representación geométrica |
|---|---|---|
| Similitudes | | |
| Diferencias | | |

2. ¿Cuáles son las condiciones que deben cumplir las ecuaciones en su representación algebraica, de un sistema de ecuaciones, para que sus gráficas asociadas, sean rectas en el plano cartesiano y, que el punto de intersección entre ellas se encuentre fuera del eje de las ordenadas?

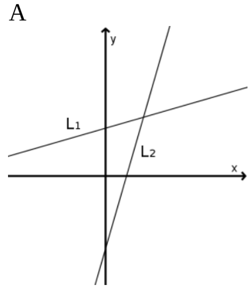
Tarea 17. Relación de representaciones.

Individual. En clase.

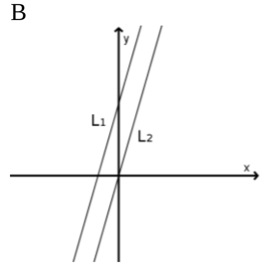
Nombre________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. A continuación se muestra, del lado izquierdo, una lista de siete sistemas de ecuaciones en su representación algebraica, y del lado derecho nueve bosquejos de sistemas de ecuaciones lineales. Escribe en el paréntesis que se encuentra en cada representación algebraica, la letra que corresponda al bosquejo factible de asociársele.

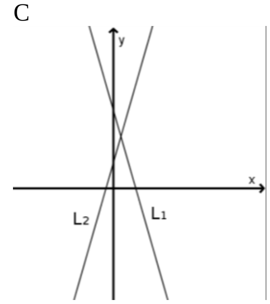
A




B



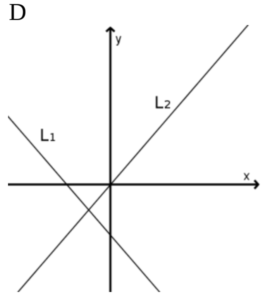

C



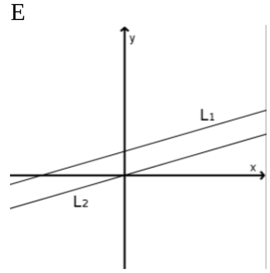

**1.** ( )
$y_1 = \frac{1}{4}x_1 + 1 \ldots L_1$
$y_1 = \frac{1}{4}x_2 \ldots L_2$

**2.** ( )
$y_1 = -3x_1 + 3 \ldots L_1$
$y_2 = 3x_2 + 1 \ldots L_2$

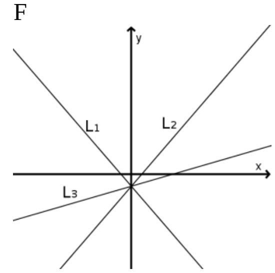
D




E




F

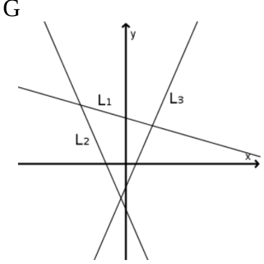



**3.** ( )
$y_1 = \frac{1}{4}x_1 + 2 \ldots L_1$
$y_2 = 3x_2 - 3 \ldots L_2$

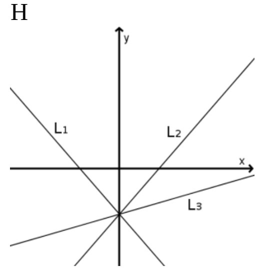
**4.** ( )
$y_1 = -x_1 - 2 \ldots L_1$
$y_2 = x_2 \ldots L_2$

**5.** ( )
$y_1 = -\frac{1}{4}x_1 + 2 \ldots L_1$
$y_2 = -2x_2 - 2 \ldots L_2$
$y_3 = 2x_3 - 1 \ldots L_3$

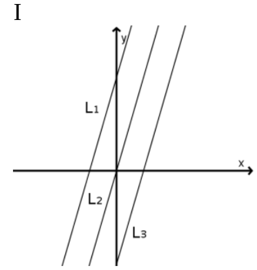
G




H




I




**6.** ( )
$y_1 = 3x_1 + 4 \ldots L_1$
$y_2 = 3x_2 \ldots L_2$
$y_3 = 3x_3 - 4 \ldots L_3$

**7.** ( )
$y_1 = -x_1 - 2 \ldots L_1$
$y_2 = x_2 - 2 \ldots L_2$
$y_3 = \frac{1}{4}x_3 - 2 \ldots L_3$

Tarea 19. Resumen de situaciones. Paralelismo e intersección

Individual. Extra clase.

Nombre________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. Relación de columnas. En la columna 1 se muestran tres condiciones de las pendientes ($m_1$ y $m_2$) y de las ordenadas al origen ($b_1$ y $b_2$) de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En la columna 2 se mencionan las características de la representación gráfica de cuatro sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Escribe en el paréntesis la letra de la característica que corresponda a cada condición de sistema.

Para el sistema:

$y_1 = m_1x_1 + b_1$…$L_1$

$y_2 = m_2x_2 + b_2$…$L_2$

Columna 1

1. (   ) Cuando $m_1 \neq m_2$ y $b_1 \neq b_2$,
2. (   ) Cuando $m_1 \neq m_2$ y $b_1 = b_2$,
3. (   ) Cuando $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$,

Columna 2

A). Las dos rectas son la misma.

B). Las dos rectas se intersectan entre ellas en un punto del eje de las ordenadas.

C). Las dos rectas intersectan en cualquier punto fuera del eje de las ordenadas.

E). Las dos rectas son paralelas, diferentes una de la otra.

Tarea 20. Resumen de situaciones. Paralelismo e intersección

En equipo. En clase.

Nombres________________________________________________________________________

______________________________________________ Grupo _______ Fecha __________

I. Relación de columnas. En la columna 1 se muestran tres condiciones de las pendientes ($m_1$ y $m_2$) y de las ordenadas al origen ($b_1$ y $b_2$) de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En la columna 2 se mencionan las características de la representación gráfica de cuatro sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Escribe en el paréntesis la letra de la característica que corresponda a cada condición de sistema.

Para el sistema:

$y_1 = m_1 x_1 + b_1$…L₁

$y_2 = m_2 x_2 + b_2$…L₂

| Columna 1 | Columna 2 |
|---|---|
| 1. (   ) Cuando $m_1 \neq m_2$ y $b_1 \neq b_2$, | |
| 2. (   ) Cuando $m_1 \neq m_2$ y $b_1 = b_2$, | A). Las dos rectas son la misma. |
| 3. (   ) Cuando $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$, | B). Las dos rectas se intersectan entre ellas en un punto del eje de las ordenadas. |
| | C). Las dos rectas intersectan en cualquier punto fuera del eje de las ordenadas. |
| | E). Las dos rectas son paralelas, diferentes una de la otra. |

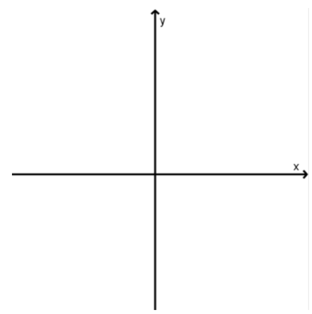
Tarea 22. Proposición de sistemas de ecuaciones lineales. Diferentes situaciones

Individual. En clase.

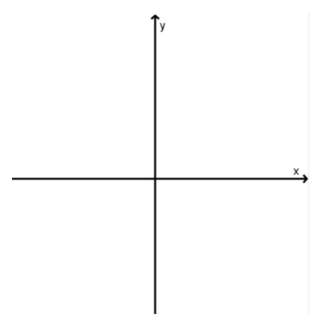
Nombre________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. A continuación se describen las condiciones de cinco sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Escribe la representación algebraica de dichos sistemas y, traza los bosquejos correspondientes.

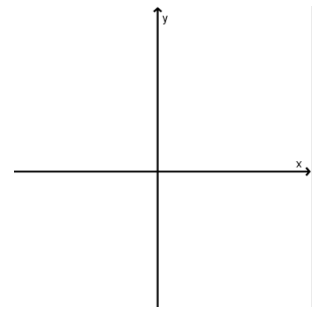
1. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica consiste en dos rectas paralelas en el plano cartesiano.



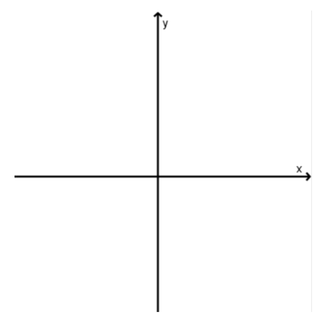

2. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica son dos rectas que se intersectan en un punto fuera del eje de las ordenadas.



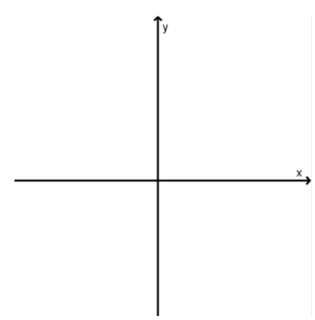
3. Sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica es de tres rectas que se intersectan en un mismo punto del eje de las ordenadas.




4. Sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica es de tres rectas cuyas intersecciones son los vértices de un triángulo.




5. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica es de dos rectas que se intersectan en una infinidad de puntos.



Tarea 23. Proposición de sistemas de ecuaciones lineales. Diferentes situaciones

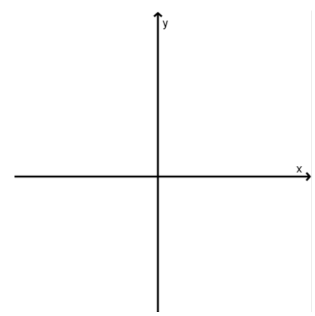
En equipo. En clase.

Nombre_________________________________________________________________________

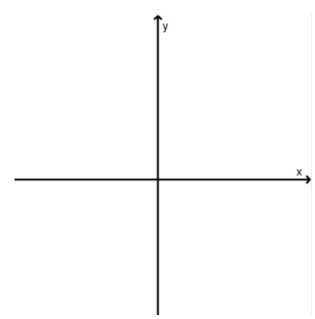
_____________________________________________ Grupo ________ Fecha______________

I. A continuación se describen las condiciones de cinco sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Escribe la representación algebraica de dichos sistemas y, traza los bosquejos correspondientes.

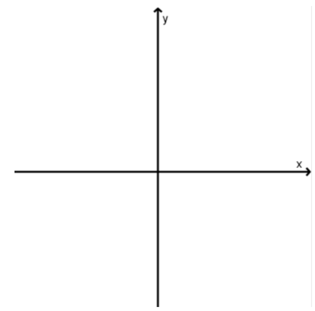
1. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica consiste en dos rectas paralelas en el plano cartesiano.



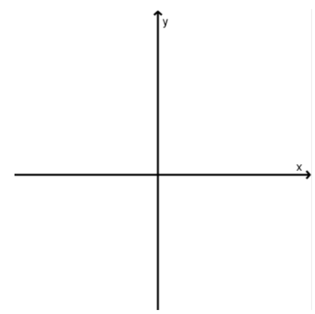

2. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica son dos rectas que se intersectan en un punto fuera del eje de las ordenadas.



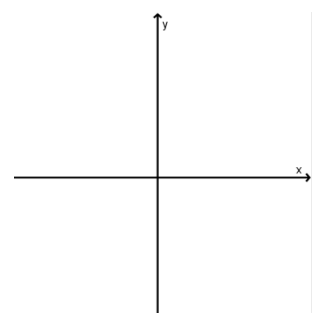
3. Sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica es de tres rectas que se intersectan en un mismo punto del eje de las ordenadas.




4. Sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica es de tres rectas cuyas intersecciones son los vértices de un triángulo.




5. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cuya representación gráfica es de dos rectas que se intersectan en una infinidad de puntos.



Tarea 25. Identificación de solución 1

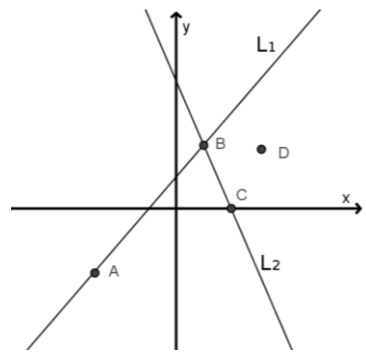
Individual. Extra clase.

Nombre_________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. A continuación se muestran dos sistemas de ecuaciones lineales en su representación algebraica y geométrica. En el bosquejo de la gráfica se muestran algunos puntos. Anota en el espacio indicado, la letra que corresponda al punto que representa la solución para cada sistema.

1. $y_1 = x_1 + 1$ …L1

$y_2 = -2x_2 + 4$ …L2

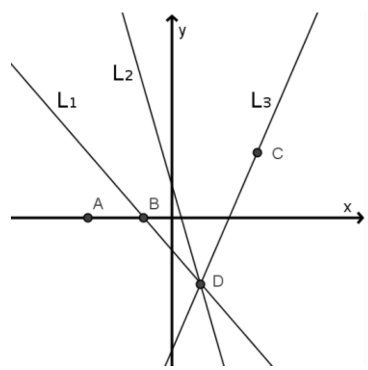



Punto de solución. _________

2. $y_1 = -x_1 - 1$ …L1

$y_2 = -3x_2 + 1$ …L2

$y_3 = 2x_3 - 4$ … L3



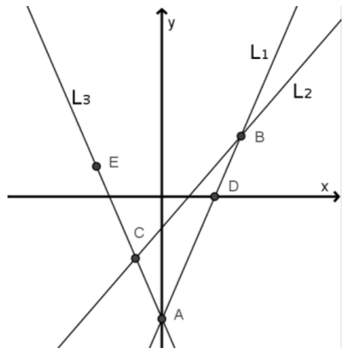

Punto de solución. ________

II. Observa detenidamente los dos sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, que se muestran en su representación algebraica y geométrica. Escribe en el espacio correspondiente, para qué ecuaciones son solución cada uno de los puntos.

1. $y_1 = 2x_1 - 4$ …L1

$y_2 = x_2 - 1$ …L2

$y_3 = -2x_3 - 4$ …L3

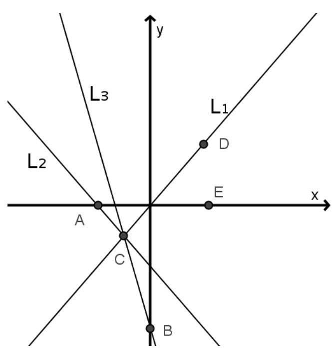



| Puntos | Ecuaciones |
| --- | --- |
| A | ____________ |
| B | ____________ |
| C | ____________ |
| D | ____________ |
| E | ____________ |

2. $y_1 = x_1$ …L1

$y_2 = -x_2 - 2$ …L2

$y_3 = -3x_3 - 4$ …L3




| Puntos | Ecuaciones |
| --- | --- |
| A | ____________ |
| B | ____________ |
| C | ____________ |
| D | ____________ |
| E | ____________ |

III. De acuerdo con los ejercicios anteriores, contesta la siguiente pregunta.

1. ¿El sistema II.1., tiene solución única? Justifica tu respuesta.

2. ¿El sistema II.2., tiene solución única? Justifica tu respuesta.

3. ¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir un sistema de ecuaciones lineales en su representación geométrica, para que tenga solución única? Justifica tu respuesta.

Tarea 26. Identificación de solución 1

En equipo. En clase.

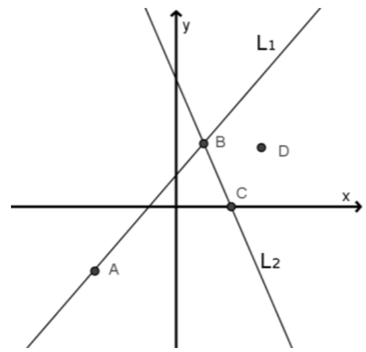
Nombres_______________________________________________________________________

_____________________________________________Grupo _________ Fecha_______________

I. A continuación se muestran dos sistemas de ecuaciones lineales en su representación algebraica y su geométrica. En el bosquejo de la gráfica se muestran algunos puntos. Anota en el espacio indicado, la letra que corresponda al punto que representa la solución para cada sistema.

1. $y_1 = x_1 + 1$ …$L_1$

$y_2 = -2x_2 + 4$ …$L_2$

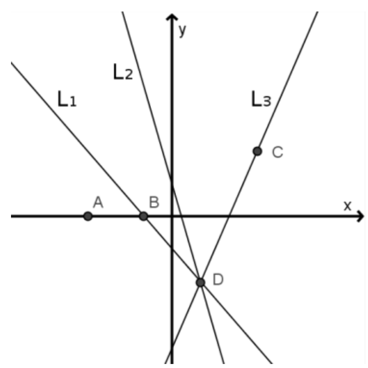



Punto de solución. _________

2. $y_1 = -x_1 - 1$ …$L_1$

$y_2 = -3x_2 + 1$ …$L_2$

$y_3 = 2x_3 - 4$ … $L_3$



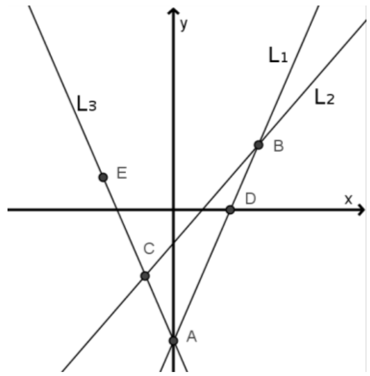

Punto de solución. ________

II. Observa detenidamente los dos sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, que se muestran en su representación algebraica y geométrica. Escribe en el espacio correspondiente, para qué ecuaciones son solución cada uno de los puntos.

1. $y_1 = 2x_1 - 4$ …L1

$y_2 = x_2 - 1$ …L2

$y_3 = -2x_3 - 4$ …L3

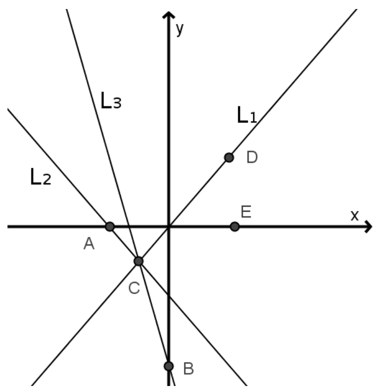



| Puntos | Ecuaciones |
|---|---|
| A | ____________ |
| B | ____________ |
| C | ____________ |
| D | ____________ |
| E | ____________ |

2. $y_1 = x_1$ …L1

$y_2 = -x_2 - 2$ …L2

$y_3 = -3x_3 - 4$ …L3




| Puntos | Ecuaciones |
|---|---|
| A | ____________ |
| B | ____________ |
| C | ____________ |
| D | ____________ |
| E | ____________ |

III. De acuerdo con los ejercicios anteriores, contesta la siguiente pregunta.

1. ¿El sistema II.1., tiene solución única? Justifica tu respuesta.

2. ¿El sistema II.2., tiene solución única? Justifica tu respuesta.

3. ¿Cuáles son las condiciones que debe cumplir un sistema de ecuaciones lineales en su representación geométrica, para que tenga solución única? Justifica tu respuesta.

Tarea 28. Identificación de solución 2

Individual. En clase.

Nombre_________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. En los cinco sistemas de ecuaciones lineales que a continuación se muestran, determina, si la pareja ordenada propuesta para cada uno de ellos, es solución de: a) una de las ecuaciones, b) del sistema de ecuaciones, c) no es solución de ninguna de las ecuaciones.

| Sistema de ecuaciones | Pareja ordenada |
|---|---|
| 1. $y_1 = x_1 + 1$…$L_1$ <br> $y_2 = -2x_2 + 4$…$L_2$ | (1,2) |

| | |
|---|---|
| 2. $y_1 = -x_1 - 1$…$L_1$ <br> $y_2 = -3x_2 + 1$…$L_2$ | (-3,2) |

3. $y_1 = \frac{1}{2}x_1 - 4$…$L_1$ (2,-3)

$y_2 = -2x_2 + 1$…$L_2$

4. $y_1 = -x_1 + 3$…$L_1$ (4,1)

$y_2 = x_2 - 4$…$L_2$

5. $y_1 = -\frac{2}{3}x_1 + 4$…$L_1$ (3,2)

$y_2 = 2x_2 - 4$…$L_2$

$y_3 = x_2 - 1$…$L_3$

Tarea 29. Identificación de solución 2

En equipo. En clase.

Nombre_______________________________________________________________________

_____________________________________________Grupo ________ Fecha _______________

I. En los cinco sistemas de ecuaciones lineales que a continuación se muestran, determina, si la pareja ordenada propuesta para cada uno de ellos, es solución de: a) una de las ecuaciones, b) del sistema de ecuaciones, c) no es solución de ninguna de las ecuaciones.

| Sistema de ecuaciones | Pareja ordenada |
|---|---|
| 1. $y_1 = x_1 + 1$…$L_1$ <br> $y_2 = -2x_2 + 4$…$L_2$ | (1,2) |
| 2. $y_1 = -x_1 - 1$…$L_1$ <br> $y_2 = -3x_2 + 1$…$L_2$ | (-3,2) |

3. $y_1 = \frac{1}{2}x_1 - 4$…$L_1$ (2,-3)

$y_2 = -2x_2 + 1$…$L_2$

4. $y_1 = -x_1 + 3$…$L_1$ (4,1)

$y_2 = x_2 - 4$…$L_2$

5. $y_1 = -\frac{2}{3}x_1 + 4$…$L_1$ (3,2)

$y_2 = 2x_2 - 4$…$L_2$

$y_3 = x_2 - 1$…$L_3$

Tarea 31. Completar coordenada de solución

Individual. En clase.

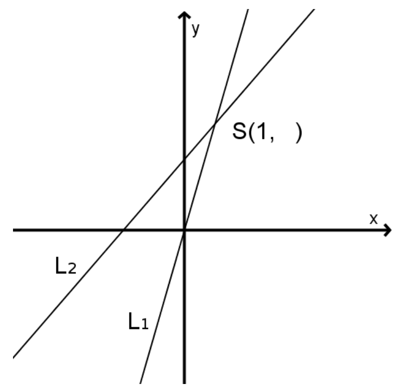
Nombre________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. A continuación se presentan cuatro sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en sus representaciones algebraica y gráfica. Completa las coordenadas del punto S, si se sabe que dicho punto es solución del sistema en cuestión.

1.

$y_1 = 3x_1$ …L1

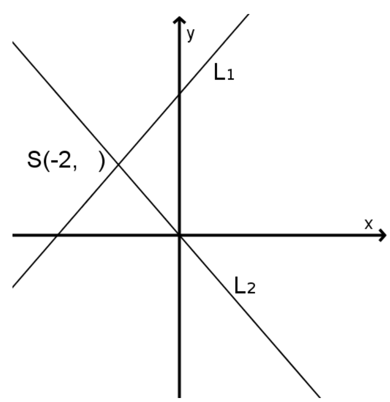
$y_2 = x_2 + 2$…L2




2.

$y_1 = x_1 + 4$ … L1

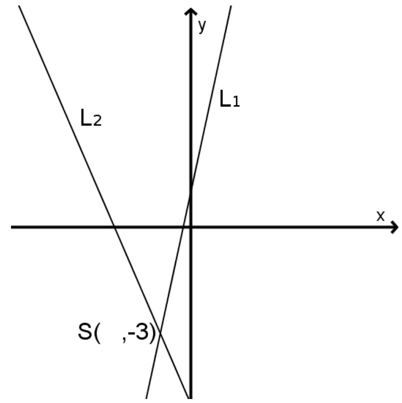
$y_2 = -x_2$ …L2



3.

$y_1 = 4x_1 + 1$…L1

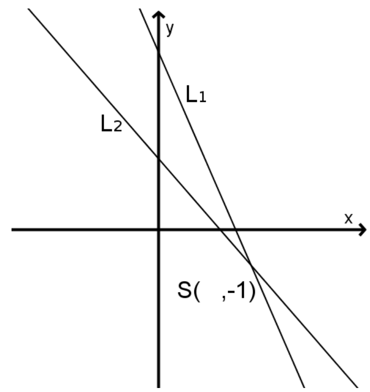
$y_2 = -2x_2 - 5$…L2




4.

$y_1 = -2x_1 + 5$…L1

$y_2 = -x_2 + 2$…L2




II. De acuerdo con los ejercicios anteriores responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo calculaste la ordenada del punto de solución de los dos primeros ejercicios?

2. ¿Cómo calculaste la abscisa del punto solución en los dos últimos ejercicios?

Tarea 33. Proposición de sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo a su solución

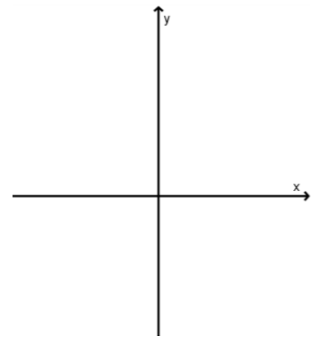
Individual. En clase.

Nombre________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. A continuación se describen las condiciones de cinco sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Escribe la representación algebraica de dichos sistemas y, traza los bosquejos correspondientes.

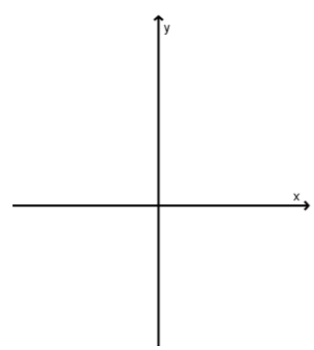
1. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene solución única en cualquier punto que no se encuentre en el eje de las ordenadas (eje $y$).

Representación algebraica. Bosquejo.



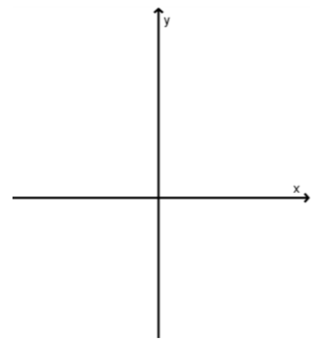

2. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene solución única en cualquier punto del eje de las ordenadas (eje $y$).

Representación algebraica. Bosquejo.



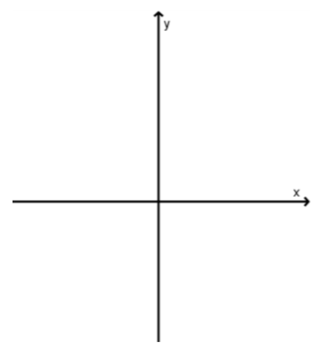
3. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que no tiene solución.

Representación algebraica. Bosquejo.



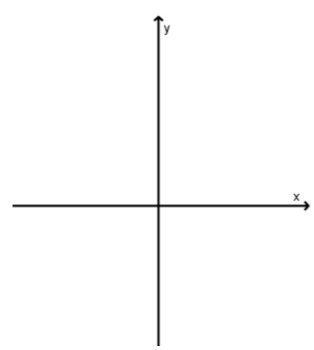

4. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene una infinidad de soluciones.

Representación algebraica. Bosquejo.




5. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene una solución en el eje “$x$”

Representación algebraica. Bosquejo.



Tarea 35. Completar coordenadas de intersección

Individual. Extraclase.

Nombre________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. Observa y analiza las representaciones algebraica y geométrica de los tres sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas y, completa la tabla para cada uno de ellos. De acuerdo a las instrucciones que se dan a continuación.

Instrucciones.

En la columna correspondiente a "Ecuaciones que se intersectan", escribe $L_1$, $L_2$ o $L_3$, según sean las ecuaciones que se intersectan en cada punto.

En las columnas "Abscisa" y "Ordenada", calcula los valores faltantes.

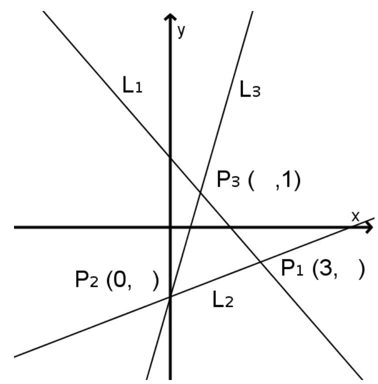
En la columna "Ecuación usada", escribe $L_1$, $L_2$, o $L_3$, según la ecuación que hayas utilizado para calcular la coordenada que no se especifica en el bosquejo.

1.

$y_1 = -x_1 + 2 \ldots L_1$

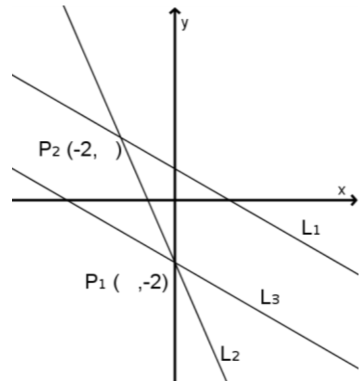
$y_2 = \frac{1}{3}x_2 - 2 \ldots L_2$

$y_3 = 3x_3 - 2 \ldots L_3$




| Punto de intersección | Rectas que se Intersectan: subsistema | Abscisa del punto | Ordenada del punto | Ecuación usada para cálculos |
|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | | 3 | | |
| $P_2$ | | 0 | | |
| $P_3$ | | | 1 | |

2.



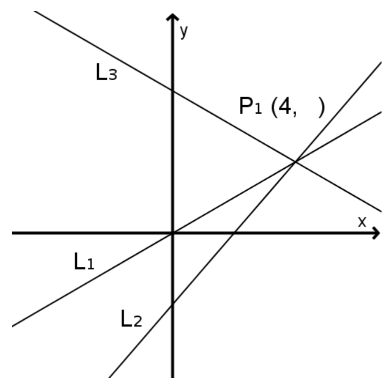

$$y_1 = -\frac{1}{2}x_1 + 1 \ldots L_1$$

$$y_2 = -2x_2 - 2 \ldots L_2$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}x_3 - 2 \ldots L_3$$

| Punto de intersección | Rectas que se intersectan | Abscisa del punto | Ordenada del punto | Ecuación usada para cálculos |
|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | | | -2 | |
| $P_2$ | | -2 | | |

3.




$$y_1 = \frac{1}{2}x_1 \ldots L_1$$

$$y_2 = x_2 - 2 \ldots L_2$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}x_3 + 4 \ldots L_3$$

| Punto de intersección | Rectas que se Intersectan: subsistema | Abscisa del punto | Ordenada del punto | Ecuación usada para cálculos |
|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | | 4 | | |

Tarea 37. Cálculo de solución en alguno de los ejes

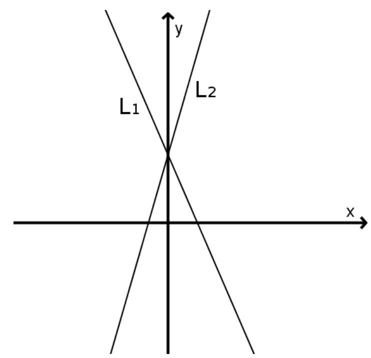
Individual. En clase.

Nombre________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. A continuación se muestran seis sistemas de ecuaciones lineales en sus representaciones algebraica y gráfica. Encuentra las coordenadas del punto de solución, para cada uno y, escríbelas en el bosquejo.

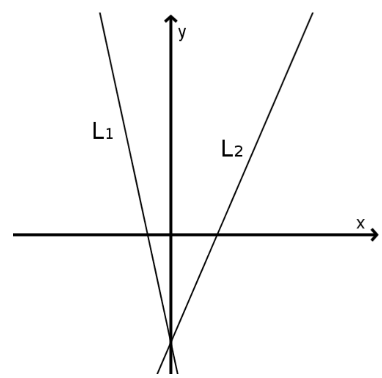
1. $y_1 = -2x_1 + 2$ …L1

$y_2 = 3x_2 + 2$ …L2




2. $y_1 = -4x_1 - 3$ …L1

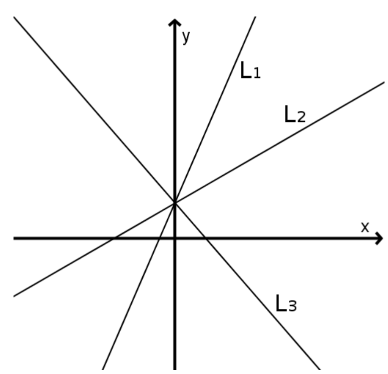
$y_2 = 2x_2 - 3$ …L2




3. $y_1 = 2x_1 + 1$ …L1

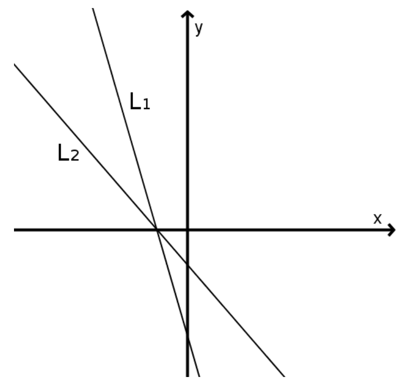
$y_2 = \frac{1}{2}x_2 + 1$ …L2

$y_3 = -x_3 + 1$ …L3



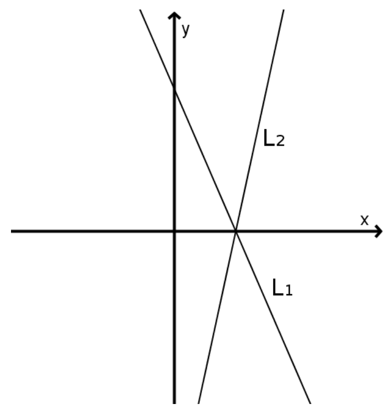
4. $y_1 = -3x_1 - 3$ ...L1

$y_2 = -x_2 - 1$ ...L2




5. $y_1 = -2x_1 + 4$ ...L1

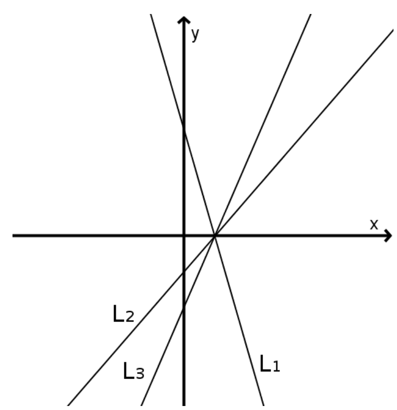
$y_2 = 4x_2 - 8$ ...L2




6. $y_1 = -3x_1 + 3$ ...L1

$y_2 = x_2 - 1$ ...L2

$y_3 = 2x_3 - 2$ ...L3




II. De acuerdo a los ejercicios anteriores, contesta los siguientes cuestionamientos.

1. ¿Cómo encontraste la solución en los primeros tres ejercicios?

2. ¿Cómo encontraste la solución en los últimos tres ejercicios?

Tarea 38. Cálculo de solución en alguno de los ejes

En equipo. En clase.

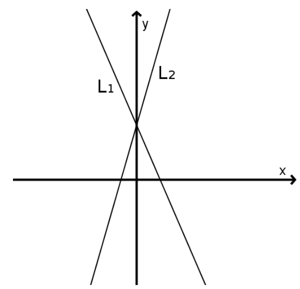
Nombre____________________________________________________________

________________________________________Grupo ________ Fecha ______________

I. A continuación se muestran seis sistemas de ecuaciones lineales en sus representaciones algebraica y gráfica. Encuentra las coordenadas del punto de solución, para cada uno y, escríbelas en el bosquejo.

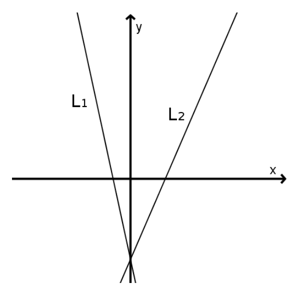
1. $y_1 = -2x_1 + 2$ …L1

   $y_2 = 3x_2 + 2$ …L2




2. $y_1 = -4x_1 - 3$ …L1

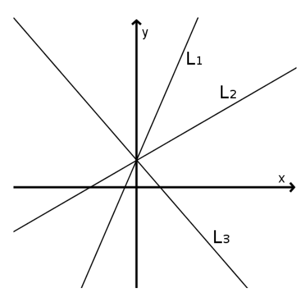
   $y_2 = 2x_2 - 3$ …L2




3. $y_1 = 2x_1 + 1$ …L1

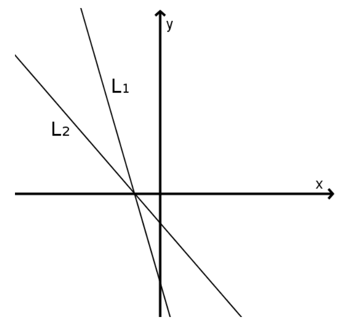
   $y_2 = \frac{1}{2}x_2 + 1$ …L2

   $y_3 = -x_3 + 1$ …L3



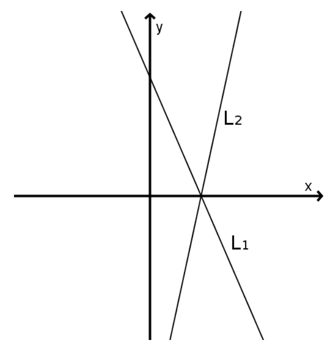
4. $y_1 = -3x_1 - 3$ …L₁

$y_2 = -x_2 - 1$ …L₂




5. $y_1 = -2x_1 + 4$ …L₁

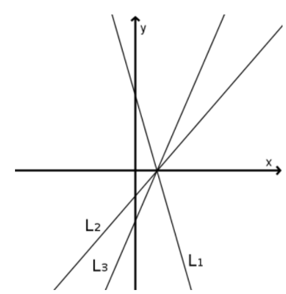
$y_2 = 4x_2 - 8$ …L₂




6. $y_1 = -3x_1 + 3$ …L₁

$y_2 = x_2 - 1$ …L₂

$y_3 = 2x_3 - 2$ …L₃




II. De acuerdo a los ejercicios anteriores, contesta los siguientes cuestionamientos.

1. ¿Cómo encontraste la solución en los primeros tres ejercicios?

2. ¿Cómo encontraste la solución en los últimos tres ejercicios?

Tarea 40. Condiciones del punto de intersección

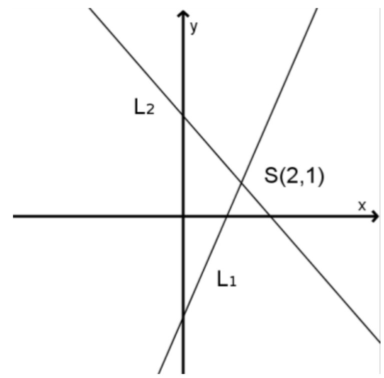
Individual. En clase.

Nombre________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. Observa las representaciones algebraica y geométrica de los dos sistemas de ecuaciones lineales y contesta las preguntas para cada uno de ellos. Tacha con una "X" según sean cada una de las afirmaciones, V si es verdadera o, F si es falsa.

1. $y_1 = 2x_1 - 3$ …$L_1$

$y_2 = -x_2 + 3$ …$L_2$




Recuerda que: $(x_1, y_1)$ representa cada punto de la recta $L_1$

$(x_2, y_2)$ representa cada punto de la recta $L_2$.

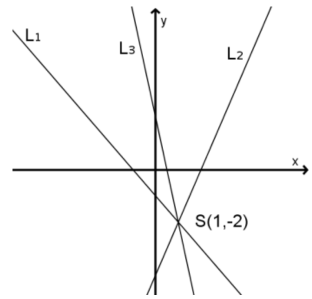
Algunas condiciones en el punto de solución S son:

| | |
|---|---|
| a. $x_1 < x_2$ … (V) o (F).<br>b. $x_1 > x_2$ … (V) o (F).<br>c. $x_1 = x_2 = 2$ … (V) o (F).<br>d. La pareja ordenada se puede representar como: $(x_1, y_2)$ … (V) o (F).<br>Porque: ______________________ | e. $y_1 < y_2$ … (V) o (F).<br>f. $y_1 > y_2$ … (V) o (F).<br>g. $y_1 = y_2 = 1$ … (V) o (F).<br>h. La pareja ordenada se puede representar como $(x_2, y_1)$ … (V) o (F).<br>Porque:_______________________ |

2. $y_1 = -x_1 - 1$ …L1

$y_2 = 2x_2 - 4$ …L2

$y_3 = -4x_3 + 2$ …L3




Algunas condiciones en el punto de solución "S" son:

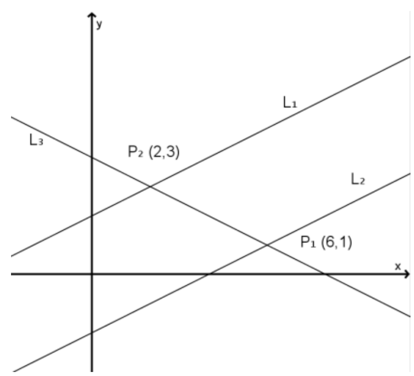
| | |
|---|---|
| a. $x_1 < x_2 < x_3$ … (V) o (F).<br>b. $x_1 = x_2 \neq x_3$ … (V) o (F).<br>c. $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ … (V) o (F).<br>d. La pareja ordenada se puede representar por $(x_1, y_3)$ … (V) o (F).<br>Porque ______________________________ | e. $y_1 > y_2 > y_3$ … (V) o (F).<br>f. $y_1 \neq y_2 = y_3$ … (V) o (F).<br>g. $y_1 = y_2 = y_3 = -2$ … (V) o (F).<br>h. La pareja ordenada se puede representar por $(x_2, y_1)$ … (V) o (F).<br>Porque ____________________________ |

II. A continuación se muestra un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas; observa detenidamente y, escribe lo que se pide.

1. $y_1 = \frac{1}{2}x_1 + 2$ …L1

$y_2 = \frac{1}{2}x_2 - 2$ …L2

$y_3 = -\frac{1}{2}x_2 + 4$ …L3




1. Anota al menos dos afirmaciones verdaderas para el punto $P_1$.
2. Anota al menos dos afirmaciones verdaderas para el punto $P_2$.

Tarea 41. Condiciones del punto de intersección

En equipo. En clase.

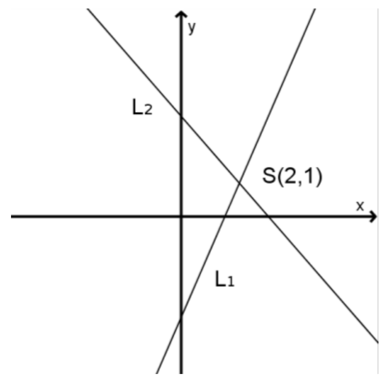
Nombre______________________________________________________________________

_____________________________________________Grupo ________ Fecha _________

I. Observa las representaciones algebraica y geométrica de los dos sistemas de ecuaciones lineales y contesta las preguntas para cada uno de ellos. Tacha con una "X" según sean cada una de las afirmaciones, V si es verdadera o, F si es falsa.

1. $y_1 = 2x_1 - 3$ …L1

$y_2 = -x_2 + 3$ …L2




Recuerda que: $(x_1, y_1)$ representa cada punto de la recta L1

$(x_2, y_2)$ representa cada punto de la recta L2.

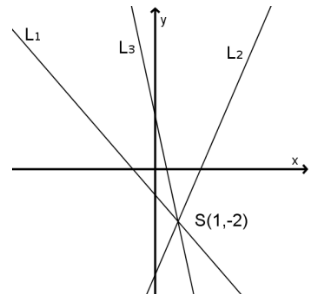
Algunas condiciones en el punto de solución S son:

| | |
|---|---|
| a. $x_1 < x_2$ … (V) o (F). | e. $y_1 < y_2$ … (V) o (F). |
| b. $x_1 > x_2$ … (V) o (F). | f. $y_1 > y_2$ … (V) o (F). |
| c. $x_1 = x_2 = 2$ … (V) o (F). | g. $y_1 = y_2 = 1$ … (V) o (F). |
| d. La pareja ordenada se puede representar como: $(x_1, y_2)$ … (V) o (F). Porque: _________________________ | h. La pareja ordenada se puede representar como $(x_2, y_1)$ … (V) o (F). Porque: _______________________ |

2. $y_1 = -x_1 - 1$ …$L_1$

$y_2 = 2x_2 - 4$ …$L_2$

$y_3 = -4x_3 + 2$ …$L_3$




Algunas condiciones en el punto de solución "S" son:

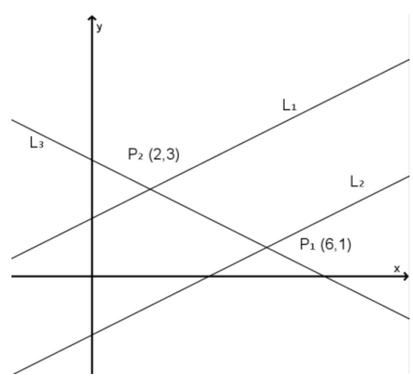
| | |
|---|---|
| a. $x_1 < x_2 < x_3$ … (V) o (F). | e. $y_1 > y_2 > y_3$ … (V) o (F). |
| b. $x_1 = x_2 \neq x_3$ … (V) o (F). | f. $y_1 \neq y_2 = y_3$ … (V) o (F). |
| c. $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ … (V) o (F). | g. $y_1 = y_2 = y_3 = -2$ … (V) o (F). |
| d La pareja ordenada se puede representar por $(x_1, y_3)$ … (V) o (F). | h. La pareja ordenada se puede representar por $(x_2, y_1)$ … (V) o (F). |
| Porque ________________________________ | Porque ______________________________ |

II. A continuación se muestra un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas; observa detenidamente y, escribe lo que se pide.

$y_1 = \frac{1}{2}x_1 + 2$ …$L_1$

$y_2 = \frac{1}{2}x_2 - 2$ …$L_2$

$y_3 = -\frac{1}{2}x_2 + 4$ …$L_3$




1. Anota al menos dos afirmaciones verdaderas para el punto $P_1$.
2. Anota al menos dos afirmaciones verdaderas para el punto $P_2$.

Tarea 44. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

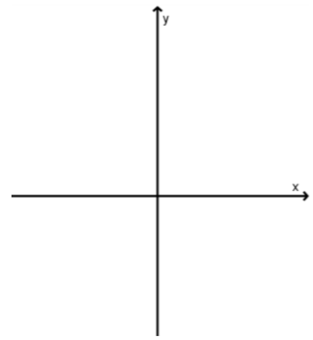
Individual. Extra clase.

Nombre________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. Resuelve los siguientes cinco sistemas de ecuaciones lineales, por el método de sustitución y de igualación. Además bosqueja las ecuaciones en cada sistema.

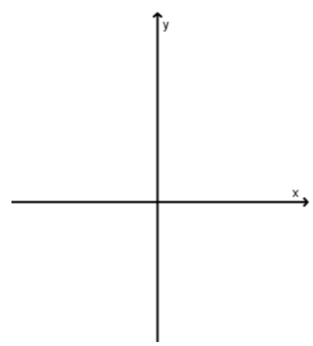
1. $y = x + 1$ …$L_1$

$-2x + y + 1 = 0$ …$L_2$

| Sustitución | Igualación | Bosquejo |
|---|---|---|
| | |   |

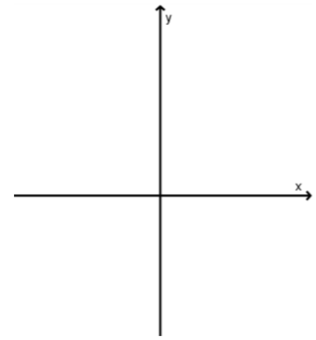
2. $x = -y - 2$ …$L_1$

$x - 2y = -8$ …$L_2$

| Sustitución | Igualación | Bosquejo |
|---|---|---|
| | |   |

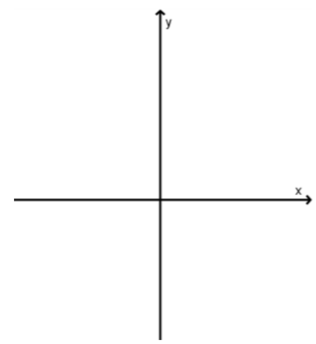
3. $-x + y = -2$ …$L_1$

$4x + y = -4$ …$L_2$

| Sustitución | Igualación | Bosquejo |
|---|---|---|
| | |  |

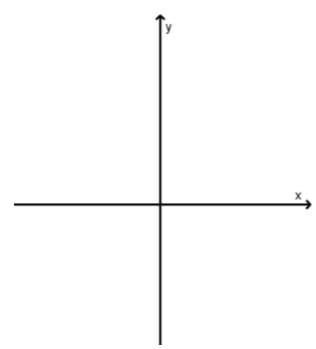
4. $-x + y = -6$ …$L_1$

$3x + y = 2$ …$L_2$

| Sustitución | Igualación | Bosquejo |
|---|---|---|
| | |  |

5. $-2x + y = -4$ …$L_1$

$x + y = 2$ …$L_2$

| Sustitución | Igualación | Bosquejo |
|---|---|---|
| | |  |

II. En el apartado anterior, se resolvieron sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, por los métodos, de sustitución y de igualación, además se hizo el bosquejo de la representación gráfica de cada sistema. Analiza el trabajo que realizaste y, contesta las siguientes preguntas.

1. Describe detalladamente como se resuelve un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de sustitución.

2. Describe detalladamente como se resuelve un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de igualación.

3. Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por algún método algebraico, ¿favorece de alguna forma dibujar el bosquejo? Explica tu respuesta.

4. Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por algún método algebraico, ¿favorece la manera en que están escritas las ecuaciones a algún método? Explica tu respuesta.

5. Entre los métodos algebraicos (igualación y sustitución), para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿Qué método prefieres utilizar? Explica tu respuesta.

Tarea 46. Resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas

Individual. En clase.

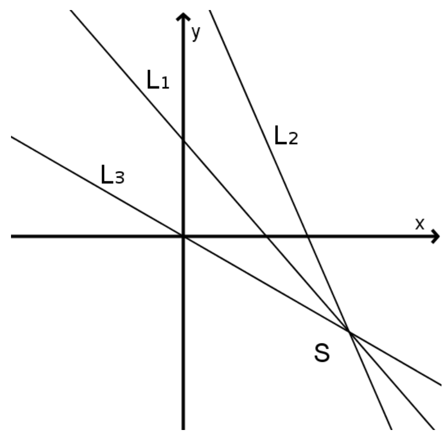
Nombre________________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. A continuación se muestra un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica y gráfica. Encuentra la solución del sistema y, determina si los bosquejos de $L_1$, $L_2$, y $L_3$ son factibles de asociárseles a las respectivas representaciones algebraicas.

$y = -x + 2 \ldots L_1$

$y = -2x + 6 \ldots L_2$

$y = -\frac{1}{2}x \ldots L_3$

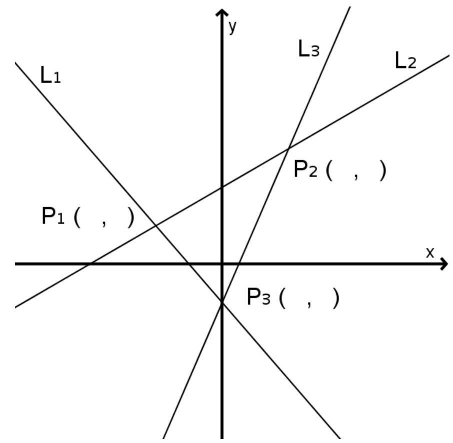


II. A continuación se muestra un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas en sus representaciones algebraica y gráfica. Observa detenidamente y contesta los cuestionamientos.

$y = -x - 1$ …$L_1$

$2y - x = 4$ …$L_2$

$y - 2x = -1$ …$L_3$




1. ¿El sistema, tiene solución única? Explica tu respuesta.

| | | |
|---|---|---|
| 2. ¿A qué rectas pertenece el punto $P_1$? | 3. ¿A qué rectas pertenece el punto $P_2$? | 4. ¿A qué rectas pertenece el punto $P_3$? |
| 5. Calcula las coordenadas del punto $P_1$. | 6. Calcula las coordenadas del punto $P_2$. | 7. Calcula las coordenadas del punto $P_3$. |

8. Escribe las coordenadas de los puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$ en el bosquejo.

Tarea 49. Método gráfico

Individual-grupal En clase.

Nombre_______________________________ Grupo_______ Fecha__________ N.L._______

I. Contesta la siguiente pregunta.

1. ¿Cómo resolverías geométricamente el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas? Explica el procedimiento.

$y = -2x - 6$ …$L_1$

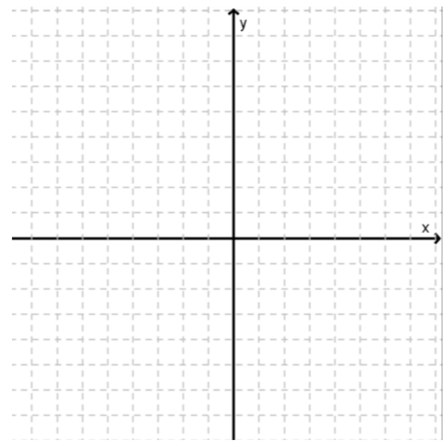
$y = -x + 1$ …$L_2$

II. Cuando el profesor lo indique, participa en la discusión grupal de la pregunta anterior. Atiende las indicaciones, las participaciones de tus compañeros y, contesta las preguntas que se te soliciten.

III. Resuelve geométricamente los siguientes dos sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

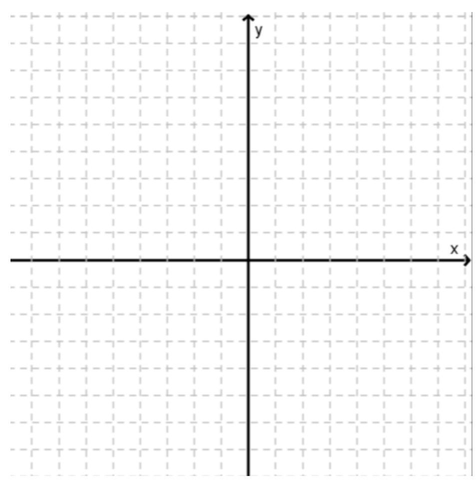
1. $y = -2x - 6$ …$L_1$

$y = -x + 1$ …$L_2$




2. $-x + y = 3$ …$L_1$

$2x + y = 6$ …$L_2$



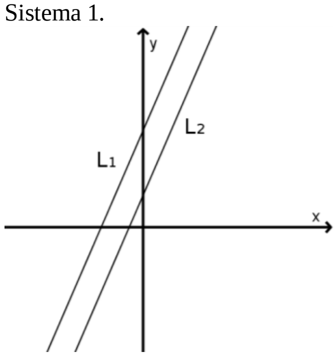
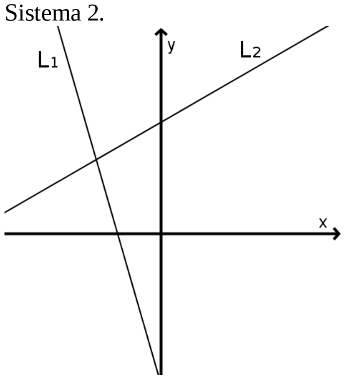
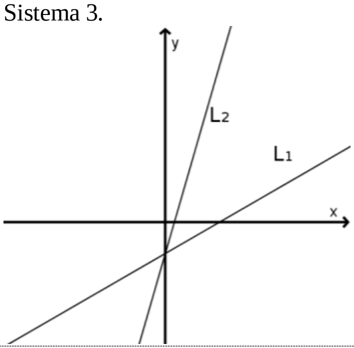
# Anexo 2. Instrumento de Evaluación y cuestionario complementario

# Instrumento de evaluación

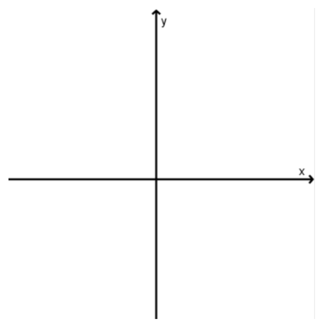
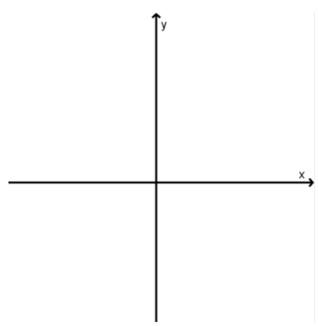
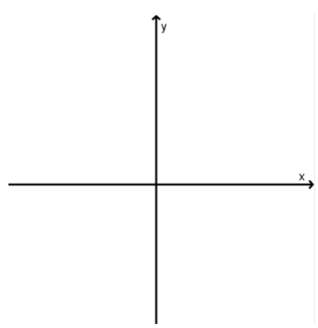
Nombre___________________________________________________ Grupo________ Fecha_________

Individual.

I. A continuación se presenta una tabla de tres columnas. En la primera, se muestran los bosquejos de la representación geométrica de tres sistemas de ecuaciones lineales; en la segunda, debes escribir un sistema en su representación algebraica que sea factible de asociársele a cada uno de los bosquejos mostrados en la primera columna y en la tercera, explica tu respuesta.

| Representación Geométrica | Representación Algebraica | Explicación |
|---|---|---|
| Sistema 1.<br> | | |
| Sistema 2.<br> | | |
| Sistema 3.<br> | | |

II. A continuación se presenta una tabla de tres columnas. En la primera, se muestran tres sistemas de ecuaciones lineales en su representación algebraica; en la segunda columna, debes dibujar un bosquejo de representación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales que sea factible de asociársele a cada uno de los sistemas mostrados en la primera columna y en la tercera, explica tu respuesta.

| Representación Algebraica | Representación Geométrica | Explicación |
|---|---|---|
| Sistema 1.<br>$y=-2x+1$…$L_1$<br>$y=\frac{1}{2}x-2$ …$L_2$<br>$y=x$ …$L_3$ |  | |
| Sistema 2.<br>$y=4x+2$ …$L_1$<br>$y=\frac{3}{2}x+2$ …$L_2$<br>$y=-x+2$ …$L_3$<br>$y=-2x+2$ …$L_4$ |  | |
| Sistema 3.<br>$y=x+1$ …$L_1$<br>$y=x+2$ …$L_2$<br>$y=x+3$ …$L_3$ |  | |

III. Relaciona las columnas uno y dos. En la columna uno, se muestran seis sistemas de ecuaciones lineales en su representación algebraica. En la columna dos, se describen las características de los bosquejos de representación geométrica de cuatro sistemas de ecuaciones lineales. Escribe en el espacio indicado de la columna dos el número del o de los sistemas de la columna uno que consideres sean factibles de asociársele a cada una de las descripciones de dichos bosquejos. Finalmente, en la columna tres explica tu respuesta.

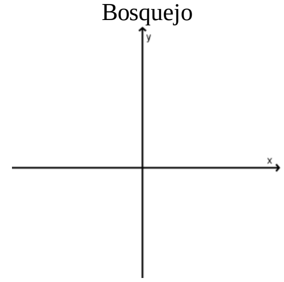
| COLUMNA 1 | COLUMNA 2 | COLUMNA 3 |
|---|---|---|
| Representación Algebraica | Descripción de las características del bosquejo de la representación geométrica de los sistemas | Explicación |
| Sistema 1.<br>$y = 5x - 4$ …$L_1$<br>$y = 5x + 4$ …$L_2$<br><br>Sistema 2.<br>$y = -3x + 7$ …$L_1$<br>$y = -2x + 7$ …$L_2$<br><br>Sistema 3<br>$y = \frac{1}{2}x - 2$ …$L_1$<br>$y = \frac{2}{4}x - \frac{8}{4}$ …$L_2$<br><br>Sistema 4.<br>$y = \frac{4}{3}x - 2$ …$L_1$<br>$y = -2x + \frac{1}{2}$ …$L_2$<br><br>Sistema 5.<br>$y = -x + 1$…$L_1$<br>$y = -x$…$L_2$<br><br>Sistema 6.<br>$y = -3x + 4$…$L_1$<br>$y = 2x - 2$…$L_2$ | Dos rectas que se cruzan entre ellas en cualquier punto del eje de las ordenadas.<br>A)____________<br><br>Dos rectas que se cruzan entre ellas en cualquier punto fuera del eje de las ordenadas.<br>B)_____________<br><br>Dos rectas paralelas, diferentes una de la otra.<br>C)_____________<br><br>La gráfica del sistema es una sola recta.<br>D)_____________ | |

IV. En un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, se pueden presentar las tres situaciones que se enuncian a continuación. Para cada situación, escribe, en el espacio indicado una representación algebraica y haz su respectivo bosquejo. Explica tu respuesta.

Situación 1. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene solución única.

Representación algebraica

Bosquejo

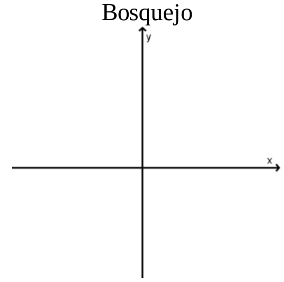



Explicación.

Situación 2. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas sin solución.

Representación algebraica

Bosquejo

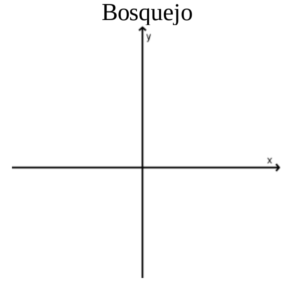



Explicación.

Situación 3. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que tiene infinidad de soluciones.

Representación algebraica

Bosquejo




Explicación.

V. A continuación se muestra un sistema de cinco ecuaciones lineales con dos incógnitas en su representación algebraica y geométrica.

1. Observa detenidamente dicho sistema y escribe en el espacio correspondiente, para qué ecuaciones ($L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$ o $L_5$) son solución los puntos llamados A, B, C, D y E. Explica tu respuesta.

Representación algebraica del sistema de ecuaciones

$y = 2x - 4$ …$L_1$

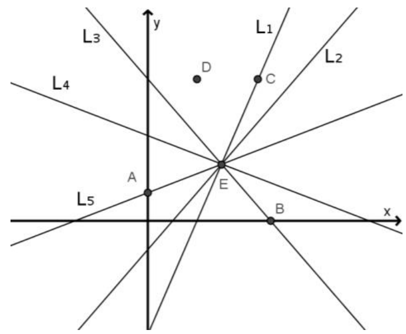
$y = x - 1$ …$L_2$

$y = -x + 5$…$L_3$

$y = -\frac{1}{3}x + 3$ …$L_4$

$y = \frac{1}{3}x + 1$ …$L_5$

Representación geométrica del sistema de ecuaciones




| Puntos | Ecuaciones | Explicación |
|---|---|---|
| A | | |
| B | | |
| C | | |
| D | | |
| E | | |

2. Contesta la pregunta y explica tu respuesta.

En la representación geométrica de un sistema de ecuaciones, ¿qué condiciones debe cumplir un punto, para que sea solución del sistema?

Explicación.

VI. A continuación se muestra un sistema de cuatro ecuaciones con dos incógnitas en su representación algebraica ($L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$).

1. Determina si la pareja ordenada propuesta es solución de dicho sistema. Explica tu respuesta.

| Sistema de ecuaciones | Pareja ordenada | Respuesta (si/no) |
|---|---|---|
| $y = -x + 2 \ldots L_1$<br>$y = \frac{1}{2}x - 4 \ldots L_2$<br>$y = 2x - 10 \ldots L_3$<br>$y = x^2 - 8x + 14 \ldots L_4$ | (4,-2) | ____________ |

Explicación.

2. Contesta la pregunta y explica tu respuesta.

En la representación algebraica de un sistema de ecuaciones, ¿qué condiciones debe cumplir una pareja ordenada para que sea solución del sistema?

VII. A continuación se presenta un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas en su representación algebraica y geométrica.

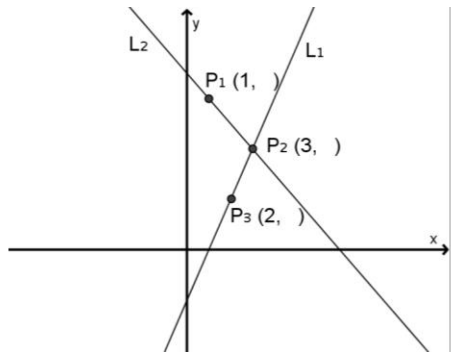
1. Calcula las ordenadas de los tres puntos que se indican en el bosquejo. Explica tu respuesta.

Representación Algebraica.

$y = 2x - 2$… $L_1$

$y = -x + 7$…$L_2$

Representación geométrica.




Explicación.

VII.2. De acuerdo al sistema anterior, contesta las tres preguntas siguientes y explica tu respuesta.

VII.2.1. ¿Cuántas formas hay de calcular la ordenada del punto $P_1$?

Explicación.

VII.2.2. ¿Cuántas formas hay de calcular la ordenada del punto $P_2$?

Explicación.

VII.2.3. ¿Cuántas formas hay de calcular la ordenada del punto $P_3$?

Explicación.

VIII.1. Observa y analiza las representaciones algebraica y geométrica de las ecuaciones del sistema de cuatro ecuaciones lineales con dos incógnitas que se muestra a continuación y, completa la tabla. En el bosquejo, para cada punto de intersección se especifica sólo una coordenada. Calcula la otra.

Sistema en su representación algebraica.

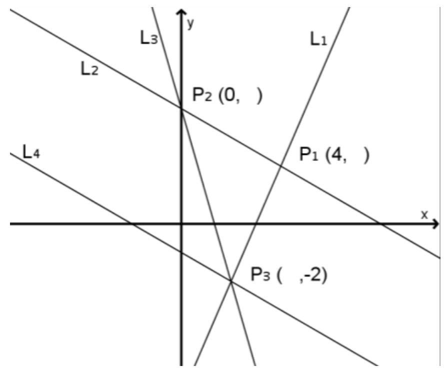
$y = 2x - 6 \ldots$ L$_1$

$y = -\frac{1}{2}x + 4 \ldots$L$_2$

$y = -3x + 4\ldots$L$_3$

$y = -\frac{1}{2}x - 1 \ldots$L$_4$

Sistema en su representación geométrica.




| Punto de intersección | Ecuaciones que se intersectan | Abscisa del punto de intersección | Ordenada del punto de intersección | Explica como calculaste la abscisa u ordenada del punto de intersección |
|---|---|---|---|---|
| $P_1$ | | | | |
| $P_2$ | | | | |
| $P_3$ | | | | |

VIII. 2. Contesta la pregunta y explica tu respuesta.

Para completar la pareja ordenada de cada uno de los puntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$, ¿existe, otra manera de calcular la abscisa o la ordenada (según el caso) de dichos puntos?

Explicación.

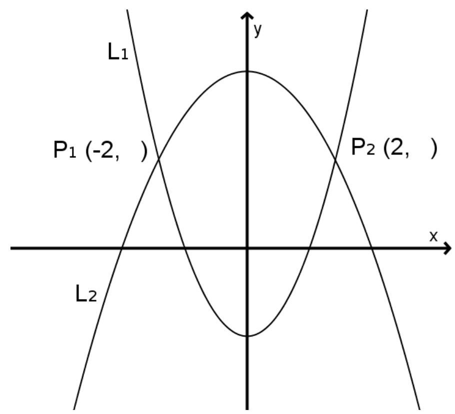
IX.1. A continuación se muestra un sistema de dos ecuaciones cuadráticas con dos incógnitas en su representación algebraica y geométrica. Determina las ordenadas de los puntos de intersección. Explica tu respuesta.

Sistema en su representación algebraica.

$y = x^2 - 2$…$L_1$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 4$…$L_2$

Sistema en su representación geométrica.




Explicación.

IX.2. Contesta la pregunta y explica tu respuesta.

¿De cuántas formas se pueden calcular las ordenadas delos puntos de intersección, $P_1$ y $P_2$?

Explicación.

X. Observa detenidamente las representaciones algebraica y gráfica del sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas que se muestra a continuación. Determina si cada una de las siguientes ocho afirmaciones son verdaderas o falsas. Tacha la letra V o F según sea el caso y, justifica tu respuesta en aquellas en que se te solicite.

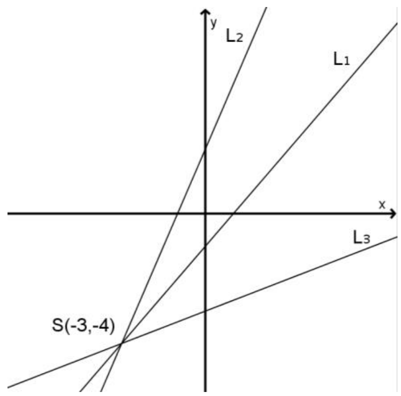
Sistema en su representación algebraica.

$y_1 = x_1 - 1$ …$L_1$

$y_2 = 2x_2 + 2$ …$L_2$

$y_3 = \frac{1}{3}x_3 - 3$ …$L_3$

Sistema en su representación geométrica.




NOTA. $(x_1, y_1)$ Representa cada punto de la recta $L_1$.

$(x_2, y_2)$ Representa cada punto de la recta $L_2$.

$(x_3, y_3)$ Representa cada punto de la recta $L_3$.

Algunas condiciones en el punto de solución "S" son:

| | |
|---|---|
| a. $x_1 < x_2 < x_3$ … V o F. | e. $y_1 > y_2 > y_3$ … V o F. |
| b. $x_1 = x_2 \neq x_3$ … V o F. | f. $y_1 \neq y_2 = y_3$ … V o F. |
| c. $x_1 = x_2 = x_3 = -3$ … V o F. | g. $y_1 = y_2 = y_3 = -4$ … V o F. |
| d. La pareja ordenada asociada al llamado punto "S" se puede representar por $(x_3, y_2)$ … V o F. Porque _____________ | h. La pareja ordenada asociada al llamado punto "S" se puede representar por $(x_2, y_1)$ … V o F. Porque ________________ |

XI. Observa detenidamente los tres sistemas de ecuaciones lineales en su representación algebraica que se muestran a continuación. **Sin resolver algebraicamente**, indica si los sistemas tienen: i) solución única, ii) no tienen solución o, iii) tienen una infinidad de soluciones. Explica tu respuesta.

Sistema 1. Respuesta Explicación

$y = \frac{2}{3}x - 1$ …$L_1$

$y = \frac{2}{3}x - 2$ …$L_2$

Sistema 2. Respuesta Explicación

$y = \frac{2}{5}x - 3$ …$L_1$

$y = -x + 3$ …$L_2$

Sistema 3. Respuesta Explicación

$y = -\frac{1}{2}x + 1$ …$L_1$

$y = -\frac{4}{8}x + \frac{8}{8}$ …$L_2$

XII.1. Resuelve algebraicamente el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de sustitución.

$y = 2x - 3$ …$L_1$

$x = -y + 3$ …$L_2$

Resolución algebraica.

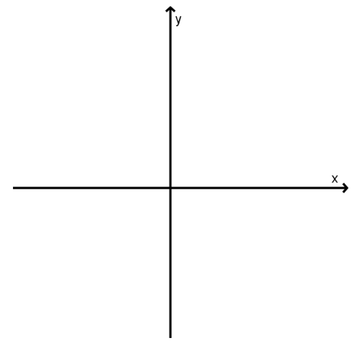
XII.2. Describe **detalladamente** en que consiste el método de sustitución.

XIII.1 Resuelve el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por el método de igualación y, bosqueja cada una de las ecuaciones.

$y = 2x - 3$ …$L_1$

$y = -x + 3$ …$L_2$

Bosquejo




Resolución algebraica.

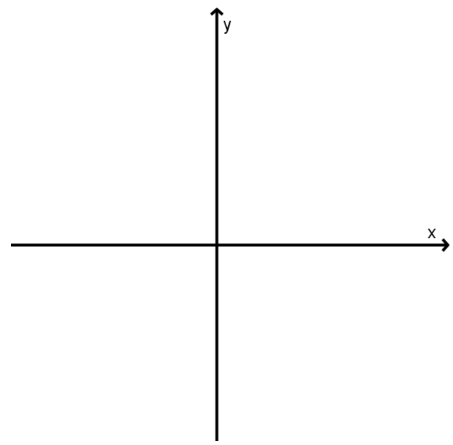
XIII.2. Describe **detalladamente** en que consiste el método de igualación.

XIV. En el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, bosqueja las ecuaciones, encuentra algebraicamente los puntos de intersección y, escríbelos en el bosquejo. Explica tus respuestas.

$y = -x - 2$…$L_1$

$y = 2x - 8$...$L_2$

$y = x - 2$…$L_3$

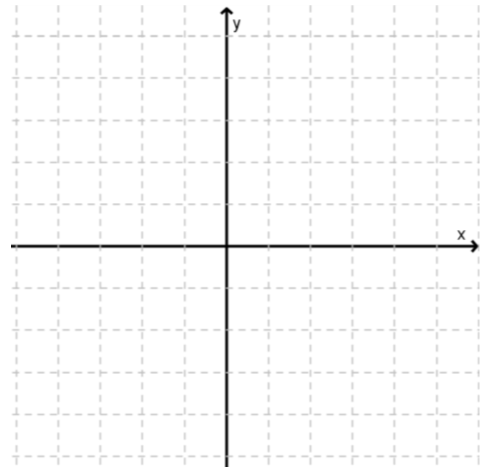



Explicación.

XV. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por método gráfico. Explica tu respuesta.

$y = -2x + 1 \ldots L_1$

$y = x - 5 \ldots L_2$

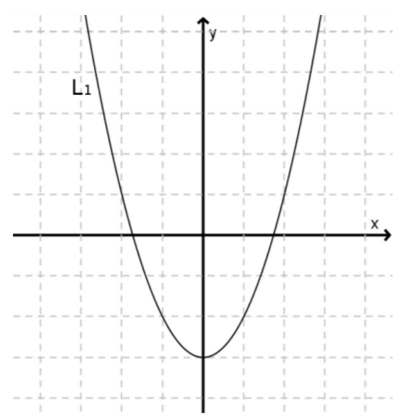



Explicación.

XVI. A continuación se muestra un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, una cuadrática y una lineal en su representación algebraica. Se proporciona la gráfica de la ecuación cuadrática. Resuelve el sistema gráficamente. Explica tu respuesta.

$y = x^2 - 3 \ldots L_1$

$y = x - 1 \ldots L_2$




Explicación.

XVII. Resuelve el siguiente problema.

Una empresa que vende seguros por vía telefónica, tiene dos planes de pago para sus empleados. El plan "A" paga una comisión de \$10.00 pesos por cada seguro vendido, más \$70.00 pesos diarios. En el plan "B" solamente paga una comisión de \$20.00 pesos por cada seguro vendido.

a) Escribe una ecuación que represente al plan de pago "A" y, otra para el plan "B". Considera "$x$" como número de seguros vendidos e, "$y$" como los pesos de pago.
b) ¿Para cuantos seguros vendidos, ambos planes pagan la misma cantidad?
c) Si un empleado espera vender cinco seguros diarios, ¿qué plan le conviene para contratarse?

## Cuestionario complementario

1. Indica algunas diferencias de cómo te sentiste en la prueba diagnóstica y en el instrumento de evaluación sumativa.
2. ¿Qué piensas acerca de la forma de abordar el conocimiento, en trabajo individual, en equipo y grupal?
3. ¿Qué piensas acerca de trabajar las ecuaciones lineales entre sus representaciones algebraica y gráfica?
4. ¿Aproximadamente, que porcentaje de tus respuestas en trabajo individual, comprobaste que estuvieron correctas en trabajo de equipo y grupal?

# Anexo 3. Citas de programas de estudio

*Secundaria.*

Se muestra la página 43 del libro:

Secretaría de Educación Pública, *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica.* Secundaria. SEP. México 2011, p. 43.

El tema de sistema de ecuaciones lineales, es considerado en el segundo año de secundaria.

## Bloque V

**Competencias que se favorecen:** Resolver problemas de manera autónoma • Comunicar información matemática • Validar procedimientos y resultados • Manejar técnicas eficientemente

| Aprendizajes esperados | Ejes | | |
|---|---|---|---|
| | Sentido numérico y pensamiento algebraico | Forma, espacio y medida | Manejo de la información |
| • Resuelve problemas que implican el uso de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.<br><br>• Construye figuras simétricas respecto de un eje e identifica las propiedades de la figura original que se conservan.<br><br>• Resuelve problemas que implican determinar la medida de diversos elementos del círculo, como: ángulos inscritos y centrales, arcos de una circunferencia, sectores y coronas circulares.<br><br>• Explica la relación que existe entre la probabilidad frecuencial y | **Patrones y ecuaciones**<br>• Resolución de problemas que impliquen el planteamiento y la resolución de un sistema de ecuaciones 2 × 2 con coeficientes enteros, utilizando el método más pertinente (suma y resta, igualación o sustitución).<br>• Representación gráfica de un sistema de ecuaciones 2 × 2 con coeficientes enteros. Reconocimiento del punto de intersección de sus gráficas como la solución del sistema. | **Figuras y cuerpos**<br>• Construcción de figuras simétricas respecto de un eje, análisis y explicitación de las propiedades que se conservan en figuras como: triángulos isósceles y equiláteros, rombos, cuadrados y rectángulos.<br><br>**Medida**<br>• Cálculo de la medida de ángulos inscritos y centrales, así como de arcos, el área de sectores circulares y de la corona. | **Proporcionalidad y funciones**<br>• Lectura y construcción de gráficas de funciones lineales asociadas a diversos fenómenos.<br>• Análisis de los efectos al cambiar los parámetros de la función $y = mx + b$, en la gráfica correspondiente.<br><br>**Nociones de probabilidad**<br>• Comparación de las gráficas de dos distribuciones (frecuencial y teórica) al realizar muchas veces un experimento aleatorio. |

*Bachillerato.*

Se muestran algunas páginas del programa de estudios del Colegio de Ciencias y Humanidades, de la Universidad Nacional Autónoma de México, 2007, pp. 23-25.

## UNIDAD IV. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

**Propósitos:**

- Profundizar en la noción de sistema de ecuaciones lineales, y al mismo tiempo en la ecuación lineal con dos incógnitas. Trabajar el método gráfico y los diferentes métodos algebraicos de solución. Analizar los diversos casos de sistemas dependiendo del número de soluciones.

**TIEMPO:** 15 horas

| APRENDIZAJES | ESTRATEGIAS | TEMÁTICA |
|---|---|---|
| A partir de una situación dada o problema que da lugar a un sistema de ecuaciones lineales, el alumno:<br><br>? Utiliza tablas de valores para explorar aquellos que satisfacen las condiciones dadas.<br><br>? Traduce las condiciones o restricciones del problema a un sistema de ecuaciones.<br>? Recuerda que una ecuación lineal en dos variables tiene por gráfica una línea recta y viceversa.<br><br>? Verifica que una pareja ordenada de números es solución de una ecuación lineal en dos variables.<br><br>? Identifica el punto de intersección de dos líneas rectas como la solución del sistema de ecuaciones lineales asociado a dichas rectas. | ? A través de los contenidos de la unidad se profundiza en los conceptos de Ecuación-incógnita y Función-variable, para comprender sus vinculaciones y diferencias.<br><br>? Esta unidad no está destinada a obtener la ecuación de la recta, ni a estudiarla desde el punto de vista de la Geometría Analítica.<br><br>? Se retoma lo que el alumno aprendió sobre la graficación de funciones lineales y se da un paso más al manejar las intersecciones con ambos ejes (abscisa y ordenada al origen).<br><br>? Se inicia el manejo del paralelismo por exploración de los parámetros, para analizar la consistencia o inconsistencia de los sistemas de ecuaciones. | Problemas que llevan a plantear sistemas de ecuaciones lineales y no lineales (casos sencillos), su solución por medio de una tabla de valores y gráficamente.<br><br>Gráfica de la ecuación lineal en dos variables. Pendiente, ordenada y abscisa al origen.<br><br>Gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2, en un mismo plano.<br>Interpretación geométrica de la solución.<br><br>Sistemas Compatibles (consistentes) e Incompatibles (inconsistentes). |

| | | |
|---|---|---|
| ? Distingue, por el contexto del problema, si se trata de una variable discreta o una continua, y lo tomará en cuenta al graficar el sistema y obtener su solución.<br><br>? Obtiene de manera gráfica la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.<br><br>? Aprecia limitaciones del método gráfico para obtener la solución de un sistema de ecuaciones.<br><br>A partir de un sistema de ecuaciones que obtenga o se le proporcione, el alumno:<br><br>? Identifica a partir de los parámetros de una expresión lineal dada, la ordenada y la abscisa al origen.<br><br>? Identifica a partir de la gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2 , si es compatible o incompatible.<br><br>? Infiere la compatibilidad (con solución) e incompatibilidad (sin solución) de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2, a partir de los parámetros de las ecuaciones.<br><br>? Identifica Sistemas Equivalentes.<br><br>? Transforma sistemas de ecuaciones en otros equivalentes más sencillos. | ? Al inicio de la unidad se propone la solución de problemas que involucren un sistema de ecuaciones lineales de manera informal (por ensayo-error, gráficamente), para introducir los conceptos de simultaneidad, sistema de ecuaciones y su solución.<br><br>? En los problemas que se utilicen para introducir el método gráfico de solución, es importante que se distinga cuándo se trata de una variable discreta y cuándo de una continua.<br>Es conveniente tratar ejemplos con variables de ambos tipos.<br><br>? Es importante hacer énfasis en la inexactitud de los métodos anteriores y la necesidad de utilizar un método que no dependa de la precisión en los trazos o de la percepción visual para obtener el resultado.<br><br>? Se debe trabajar la algoritmia, sin descuidar el significado de los métodos de solución, esto es, el alumno debe comprender qué significa la búsqueda de la solución.<br><br>? Antes de estudiar los métodos algebraicos de solución, es importante introducir el concepto de sistemas equivalentes y la forma de obtenerlos, con el fin de que el alumno, en los diversos métodos, avance en la | Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales<br>2 x 2. Condición de paralelismo.<br><br>Sistemas equivalentes.<br><br>Métodos algebraicos de solución de un sistema de ecuaciones<br>lineales 2 x 2: Suma y Resta, Sustitución e Igualación. |

| | | |
|---|---|---|
| ? Resuelve sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 por medio del método que considere conveniente:<br>a) Suma y resta<br>b) Sustitución<br>c) Igualación<br><br>Además, se espera que al término de la unidad, el alumno:<br><br>? Plantea problemas en diferentes contextos que lleven a sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 y los resolverá por cualquier método algebraico.<br><br>? Percibe que los sistemas de ecuaciones lineales, permiten repre-sentar, analizar y resolver diversos problemas de su entorno. | comprensión del "por qué se hace" y no solamente se quede con el "cómo se hace".<br><br>? El paso del enunciado de un problema en su expresión verbal a su expresión algebraica implica dificultad, por lo que el alumno debe tener una gran cantidad de oportunidades para realizarlo. Conviene que el maestro maneje un repertorio diversificado de problemas (geométricos, numéricos, velocidades, mezclas, tiempos de trabajo, econó-micos, etcétera)<br><br>? Analizar los casos de rectas coincidentes, paralelas y secantes (rectas que se cortan). Su relación con las pendientes, las características algebraicas de los sistemas de ecuaciones lineales 2 x 2 correspondientes y su número de soluciones.<br><br>? Es importante que durante toda la unidad el estudiante pueda pasar de un registro a otro (verbal, tabular, gráfico y algebraico). | |

*Licenciatura*

Se muestra una parte del Programa de estudio de Algebra para la carrera de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, 2008.

**5 Sistemas de ecuaciones lineales**

**Objetivo:** El alumno formulará, como modelo matemático de problemas, sistemas de ecuaciones lineales y los resolverá aplicando el método de Gauss.

**Contenido:**

**5.1** El sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático de problemas. Definición de ecuación lineal y de su solución. Definición de sistema de ecuaciones lineales y de su solución. Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales en cuanto a la existencia y al número de soluciones. Sistemas homogéneos, soluciones triviales y varias soluciones.

**5.2** Sistemas equivalentes y transformaciones elementales. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

(p. 3)