



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA
APLICADA

CAMPOS VECTORIALES EN ESFERAS

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
ISAAC HASSE ARMENGOL

DR. JOSÉ LUIS CISNEROS MOLINA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS UNIDAD CUERNAVACA

MÉXICO, D.F. 23 DE MAYO DEL 2014.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Campos Vectoriales en Esferas.

Isaac Hasse Armengol.

Maestría en Ciencias Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México.

Título: Campos vectoriales en esferas.

Autor: Isaac Hasse Armengol.

Figuras: Isaac Hasse Armengol.

Compilador: \LaTeX (Editor adecuado para textos científicos.).

Edición en \LaTeX Isaac Hasse Armengol.

última compilación: 23 de Mayo del 2014.

Número de páginas: 124.

Lugar: México, D.F.

Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN106614 “Singularidades y Teoría K”.

Agradecimientos

*Daría todo lo que sé,
por la mitad de lo que ignoro
René Descartes.*

Quiero agradecer primeramente a Dios por darme vida, salud, sabiduría y fortaleza para salir adelante. A mi amada esposa por su incondicional apoyo, y el gran amor que me demostró en cada difícil situación. Y a mi familia por ser la base de mi educación personal y profesional.

Agradezco a José Luis por su paciencia y su gran apoyo en la elaboración de este trabajo, y durante el transcurso de mis estudios. Gracias José Luis por contagiarme de tu amor por las matemáticas, y compartirme un poco de tus conocimientos. Y a Ángel Cano por todos los sabios consejos que me ayudaron a salir adelante, además de todo el apoyo que me brindó.

Agradezco a todos los maestros que ayudaron en mi formación académica y personal: Max Neumann, Carlos Cabrera, Timothy Gendron, Gregor Weingart, José Luis Cisneros, Adolfo Guillot, Gilberto Calvillo, David Romero. A mis compañeros Agustín, Gonzalo, Alma, Haremi, Cristy, Caro, Vanesa, Marina, Toño y Marisol. por su valiosa amistad. Al personal administrativo del Instituto de Matemáticas de la UNAM, el cual siempre me brindó de su valiosa ayuda cuando la necesité.

Finalmente, agradezco en gran manera al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por su gran apoyo económico. Investigación realizada gracias al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) de la UNAM IN106614 “Singularidades y Teoría K”. Agradezco a la DGAPA-UNAM la beca recibida.

Índice general

Agradecimientos	3
Índice general	5
Introducción	7
1. Categorías de espacios topológicos	11
1.1. Espacios topológicos	11
1.1.1. Operaciones en espacios topológicos	11
1.1.2. Homotopía de aplicaciones	14
1.1.3. Conexidad por trayectorias	15
1.1.4. Espacio de funciones	17
1.1.5. Clases de homotopía	19
1.2. Parejas de espacios topológicos	20
1.2.1. Clases de homotopía de parejas	20
1.2.2. Operaciones de espacios topológicos punteados	22
1.2.3. Clases de homotopía punteadas	25
1.3. H-espacios y H-coespacios	27
1.3.1. H-espacios	27
1.3.2. Espacio de lazos	29
1.3.3. H-coespacios	30
1.3.4. Suspensiones	32
1.4. Grupos de homotopía	34
2. Haces vectoriales	37
2.1. Haces vectoriales	37
2.1.1. Sistema de cociclos	40
2.2. Secciones	41
2.3. Operaciones con haces vectoriales	42
2.3.1. Restricción y haz vectorial dual	43
2.3.2. Haz vectorial inducido y suma de Whitney	43
2.3.3. Producto tensorial y potencia exterior	45
2.4. Proyecciones y haces vectoriales	46
2.5. Haces vectoriales sobre espacios paracompactos	48
2.6. Variedades de Grassmann y haces universales	52
2.7. Haces principales	54
3. Teoría K	57

3.1. Construcción de Grothendieck	57
3.2. Teoría K	60
3.3. Teoría K reducida	62
3.4. Representaciones homotopicas de $K(B)$ y $\tilde{K}(B)$	64
3.5. Aplicaciones del teorema de periodicidad de Bott	68
3.6. Operaciones de Adams	70
3.7. Principio de descomposición	73
4. Campos vectoriales en esferas	79
4.1. Campos vectoriales unitarios	80
4.2. Multiplicaciones ortogonales	81
4.3. Formas cuadráticas	85
4.4. Álgebras de Clifford de formas cuadráticas	87
4.5. El teorema de Hurwitz-Radon	92
5. Número máximo de campos vectoriales linealmente independientes en esferas	97
5.1. Espacios de Thom de haces vectoriales	98
5.2. S-categoría	100
5.3. Tipo de homotopía fibrada	102
5.4. Espacios de Thom y tipo de homotopía fibrada	104
5.5. Campos vectoriales y correducibilidad	107
5.6. Campos vectoriales linealmente independientes en esferas	109
5.6.1. Formas cuadráticas y el grupo Spin	109
5.6.2. Relación entre $KO(\mathbb{R}P^n)$ y $J(\mathbb{R}P^n)$	110
A. Operaciones de espacios vectoriales	115
A.1. Suma directa	115
A.2. Espacio dual	116
A.3. Producto tensorial	116
A.4. Potencia exterior	119
Índice alfabético	121
Bibliografía	123

Introducción.

Para cada n , denotamos por S^n a la esfera de dimensión n . Definimos un *campo vectorial* en S^n , como una aplicación continua $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que a cada $x \in S^n$ le asocia un vector $v(x)$ tangente a S^n . Por otro lado, decimos que dos campos vectoriales v_1 y v_2 en S^n son *linealmente independientes*, si $v_1(x)$ y $v_2(x)$ son linealmente independientes para cada $x \in S^n$. En este trabajo daremos respuesta principalmente a dos problemas:

1. Encontrar campos vectoriales linealmente independientes en S^n .
2. Encontrar el número máximo de campos vectoriales linealmente independientes en S^n .

La primera pregunta fue respondida por Johann Karl August Radon (16 Diciembre 1887 - 25 Mayo 1956) en el año de 1922, y Adolf Hurwitz (26 Marzo 1859 - 18 Noviembre 1919), en el año de 1923. Ellos mostraron lo siguiente: Para $n = (2k - 1)2^c 16^d$ con $0 \leq c \leq 3$, sea $\rho(n) = 2^c + 8d$ entonces existen $\rho(n) - 1$ campos vectoriales linealmente independientes en S^{n-1} .

La segunda pregunta fue respondida en el año de 1961 por John Frank Adams (Noviembre 5, 1930 - Enero 7, 1989), él demostró en el artículo [1], que no existen $\rho(n)$ campos vectoriales linealmente independientes en S^{n-1} .

En el Capítulo 1, daremos las herramientas necesarias para poder definir el n -ésimo grupo de homotopía de un espacio topológico punteado (X, x_0) , de dos distintas maneras:

1. Como el conjunto de componentes por caminos del n -ésimo espacio de lazos de X basados en x_0 .
2. Como el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones punteadas de (S^n, s_0) a (X, x_0) .

Luego, calcularemos los grupos de homotopía de algunos espacios topológicos, usando teoría de espacios cubrientes.

En el Capítulo 2, definiremos los haces vectoriales, los cuales son estructuras que en cada fibra definen un espacio vectorial. Usando operaciones en espacios vectoriales, los cuales podemos encontrar en el Apéndice A, podremos operar estos haces vectoriales para formar nuevos. Luego, veremos cuándo podemos definir un producto interno en los haces vectoriales, y así poder dar algunos resultados importantes que nos permitirán definir la Teoría K en el Capítulo 3. Finalmente, daremos el concepto de haz principal, el cual es un haz que en cada fibra definen un grupo topológico, y veremos que a un haz vectorial se le puede asociar un haz principal y viceversa.

En el Capítulo 3 veremos la construcción de Grothendieck, la cual nos permitirá definir la Teoría K (compleja) de un espacio topológico, el cual es un funtor de la categoría de espacios topológicos a la categoría de anillos. Definiremos la Teoría K reducida, y daremos algunos resultados importantes que nos permitirán dar representaciones homotópicas de la

Teoría K y la Teoría K reducida. Enunciaremos el teorema de periodicidad de Bott el cual nos permitirá definir la Teoría K relativa superior. Finalmente, definiremos las operaciones de Adams en Teoría K, demostraremos el principio de descomposición de un haz vectorial y usando este resultado daremos algunas propiedades interesantes de las operaciones de Adams.

En el Capítulo 4 definiremos aplicaciones $\mu: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ llamadas multiplicaciones ortogonales que cumplen con cierta condición de ortogonalidad, y mostraremos que si existe una multiplicación ortogonal, entonces existen $k - 1$ campos vectoriales linealmente independientes en S^{n-1} . Por otro lado, definiremos las formas cuadráticas en espacios vectoriales reales, y veremos que una forma cuadrática tiene asociada un álgebra llamada álgebra de Clifford. Entonces asociaremos módulos sobre álgebras de Clifford con multiplicaciones ortogonales, para así demostrar el teorema de Hurwitz y Radon.

Finalmente, en el Capítulo 5, demostraremos que el número máximo de campos vectoriales linealmente independientes que encontraron Hurwitz y Radon es máximo. Definiremos los espacios de Thom, así como las clases de homotopía fibrada estable, y veremos que existe una relación entre estos dos conceptos. Luego veremos que existe un isomorfismo entre la Teoría K de un complejo CW X y el conjunto de clases de equivalencia homotópica fibrada estable de haces vectoriales sobre X .

A mi esposa.

1

Categorías de espacios topológicos

En este capítulo trabajaremos principalmente en tres categorías:

- La categoría de espacios topológicos
- La categoría de parejas de espacios topológicos.
- La categoría de espacios topológicos punteados.

En cada categoría definiremos algunos invariantes topológicos, que finalmente nos servirán para definir invariantes algebraicos, llamados grupos de homotopía. Para más detalles consultar los textos [2], [13], [9], [11], [18] y [25].

1.1. Espacios topológicos

En la categoría de espacios topológicos, los objetos son los espacios topológicos y los morfismos son las funciones continuas.

1.1.1. Operaciones en espacios topológicos

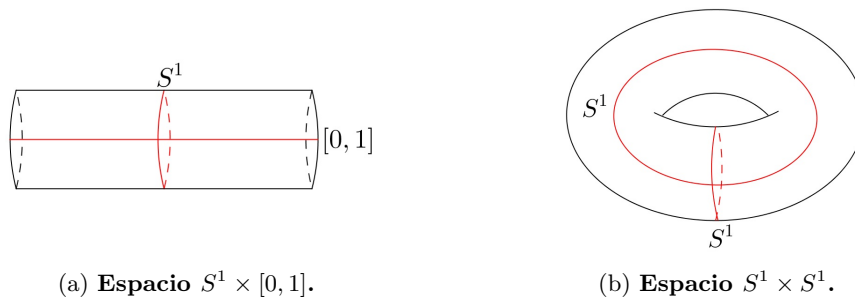
Dados dos espacios topológicos X y Y , podemos formar nuevos espacios que surgen operando éstos espacios entre ellos. En esta sección, definiremos algunas operaciones entre espacios topológicos, los cuales vamos a usar a lo largo de este trabajo.

Definición 1.1. Sean X y Y dos espacios topológicos, definimos el *producto* $X \times Y$ de X y Y , como el espacio

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Los abiertos en $X \times Y$ son el producto de abiertos de X con abiertos de Y .

Ejemplo 1.2. El producto de S^1 con el intervalo $[0, 1]$, nos da como resultado el cilindro $S^1 \times [0, 1]$, como se muestra en la Figura 1.1a. El producto de S^1 con S^1 , nos da como resultado el toro $T^2 = S^1 \times S^1$, como se muestra en la Figura 1.1b.

(a) **Espacio** $S^1 \times [0, 1]$.(b) **Espacio** $S^1 \times S^1$.Figura 1.1: **Productos de espacios topológicos.**

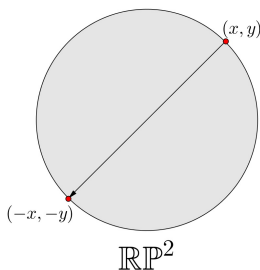
Definición 1.3. Sean X y Y dos espacios topológicos. El *coproducto en la categoría de espacios topológicos*, está dado por la *unión disjunta* $X \sqcup Y$, la cual está definida como el espacio topológico

$$X \sqcup Y = X \times \{t_1\} \cup Y \times \{t_2\}$$

donde $t_1, t_2 \in [0, 1]$, con $t_1 \neq t_2$.

Definición 1.4. Sea X un espacios topológico, y sea \sim una relación de equivalencia, entonces las clases de equivalencia forman una partición del espacio X . El conjunto de clases de equivalencia con la topología cociente, forman un nuevo espacio topológico denominado *espacio cociente*.

Ejemplo 1.5. Sea \mathbb{RP}^n el espacio de todas la líneas en \mathbb{R}^{n+1} que pasan por el origen. Como cada una de las líneas, intersecta la esfera unitaria S^n en dos puntos antípodas, podemos ver a \mathbb{RP}^n como el espacio cociente de S^n en el cual los puntos antípodas están identificados, a este espacio se le conoce como el *n-espacio proyectivo real*. En particular, *el plano proyectivo real* \mathbb{RP}^2 , surge de tomar el disco $D^2 \subset \mathbb{R}^2$, e identificar los puntos antípodas como se muestra en la Figura 1.2.

Figura 1.2: **Plano proyectivo real.**

Definición 1.6. Sea X un espacio topológico, definimos el *cono de X* como el espacio $CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\}$. Definimos la *suspensión* SX de X , como el espacio obtenido de $X \times [0, 1]$, identificando $X \times \{0\}$ a un punto, y $X \times \{1\}$ a un punto. De manera recursiva, definimos la *n-ésima suspensión* $S^n X$ de X , como el espacio $S(S^{n-1} X)$.

En los siguientes ejemplos, podemos notar que la suspensión SX de un espacio topológico X es la unión de dos conos CX a lo largo de su base.

Ejemplo 1.7. La suspensión de un conjunto $\{x, y, z\}$ conformado por tres puntos, está dado por la Figura 1.3a. La suspensión de un círculo está dado por la Figura 1.3b, la cual es homeomorfa a la esfera S^2 .

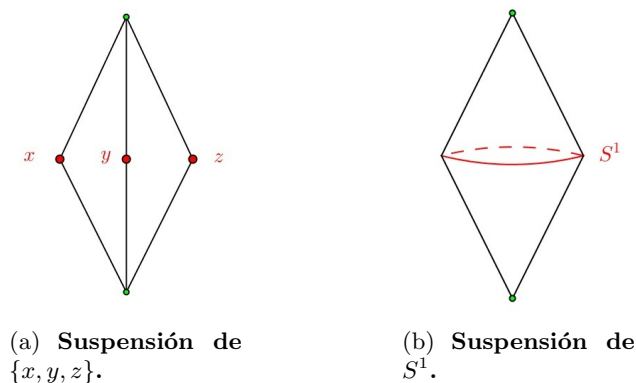


Figura 1.3: Suspensiones de espacios topológicos.

Nota 1.8. En general, se puede mostrar que la suspensión $S S^n$ de una esfera de dimensión n es una esfera S^{n+1} de dimensión $n + 1$ (ver [23, Capítulo 1, Lema 6]).

Definición 1.9. Sean X y Y espacios topológicos, definimos el *join* $X \star Y$, como el espacio obtenido de $X \times Y \times [0, 1]$ identificando $(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0)$ y $(x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1)$. En otras palabras, identificamos el subespacio $X \times Y \times \{0\}$ a X y el subespacio $X \times Y \times \{1\}$ a Y .

Ejemplo 1.10. En la Figura 1.4 se muestra el join de dos intervalos cerrados $X = [0, 1]$ y $Y = [0, 1]$, éste es un cubo donde dos de sus caras opuestas se identifican en dos segmentos de líneas, por lo cual podemos notar que $X \star Y$ es un tetraedro.

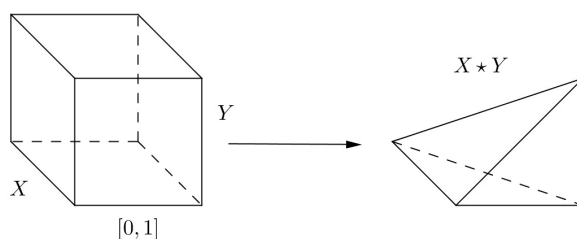
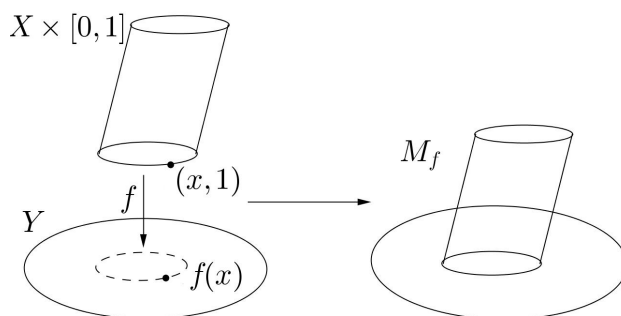
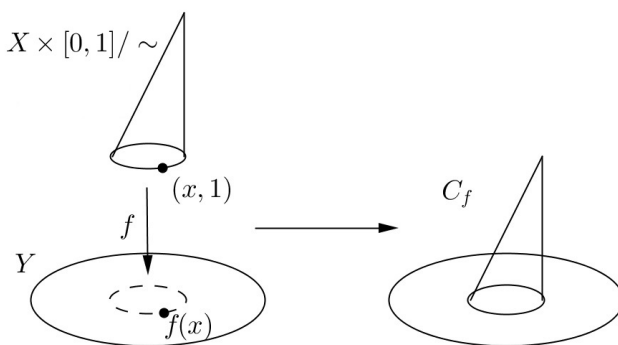


Figura 1.4: Join de dos intervalos cerrados

Definición 1.11. Sean X, Y espacios topológicos y sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua, definimos el *cilindro* M_f de f como el espacio cociente de la unión disjunta $(X \times [0, 1]) \sqcup Y$ identificando $(x, 1) \in X \times [0, 1]$ con $f(x) \in Y$.

Ejemplo 1.12. Si $\text{id}_{S^1}: S^1 \rightarrow S^1$ es la identidad en S^1 entonces $M_{\text{id}_{S^1}}$ es el cilindro $S^1 \times [0, 1]$

Definición 1.13. Sean X, Y espacios topológicos y sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua, definimos el *cono* C_f de f como el espacio cociente de la unión disjunta $(X \times [0, 1]) \sqcup Y$ identificando $(x, 0)$ con $(x', 0)$ y $(x, 1) \in X \times [0, 1]$ con $f(x) \in Y$.

Figura 1.5: Cilindro M_f de una aplicación $f: X \rightarrow Y$ Figura 1.6: Cono C_f de una aplicación $f: X \rightarrow Y$

1.1.2. Homotopía de aplicaciones

Dadas dos aplicaciones $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos, queremos deformar una aplicación en otra mediante aplicaciones continuas. La idea es definir una familia de aplicaciones continuas que comiencen en f_0 y terminen en f_1 .

Definición 1.14. Sean X y Y espacios topológicos, y sean $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas, decimos que f_0 y f_1 son *homotópicas* si existe una aplicación continua $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f_0(x)$ y $F(x, 1) = f_1(x)$. A la aplicación F se le llama *homotopía entre f_0 y f_1* y lo denotamos $f_0 \simeq f_1$.

Ejemplo 1.15 (Homotopías Lineales). Cualquiera dos aplicaciones f_0, f_1 en \mathbb{R}^n son homotópicas, en efecto, la aplicación $F(s, t): X \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $F(s, t) = (1 - t)f_0(s) + tf_1(s)$ es una homotopía en \mathbb{R}^n .

Si una aplicación $f: X \rightarrow Y$ es homotópica a una aplicación constante se dice que es *nulhomotópica*. Si X es un espacio tal que la aplicación $\text{id}_X: X \rightarrow X$ es nulhomotópica entonces decimos que X es *contraíble*, entonces el Ejemplo 1.15 nos dice que \mathbb{R}^n es contraíble.

En general, dadas dos aplicaciones $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos y dado un subconjunto $A \subset X$, decimos que f_0, f_1 son *homotópicas relativas a A* si existe una homotopía $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ entre f_0 y f_1 tal que $F(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$ para toda $a \in A$ y para toda $t \in [0, 1]$, en este caso se denota por $f_0 \simeq f_1(\text{rel} A)$.

Nota 1.16. Podemos notar que una homotopía entre dos aplicaciones, relativa al subconjunto vacío es una homotopía.

Definición 1.17. Un aplicación continua $f: X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos X y Y , es una *equivalencia homotópica* si existe una aplicación continua $g: Y \rightarrow X$ tal que

$$g \circ f \simeq \text{id}_X: X \rightarrow X$$

$$f \circ g \simeq \text{id}_Y: Y \rightarrow Y$$

En éste caso se dice que X y Y son *homotópicamente equivalentes*, ó que tienen *el mismo tipo de homotopía*.

Ejemplo 1.18. La esfera S^{n-1} y el espacio $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ son homotópicamente equivalentes, si tomamos $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ como la inclusión y $g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ definida como $g(x) = \frac{x}{\|x\|}$, cumplen que $g \circ f = \text{id}_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ y la aplicación $F: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definida como $F(x, t) = \frac{x}{t(\|x\|-1)+1}$ es una homotopía entre $\text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ y $f \circ g$.

Nota 1.19. Un espacio topológico X es contraíble si y sólo si X es homotópicamente equivalente a un punto.

Un subconjunto A de un espacio X se llama *retracto* de X si existe una aplicación continua $r: X \rightarrow A$ tal que $r|_A = \text{id}_A$, es decir, si $i: A \rightarrow X$ es la inclusión de A en X , entonces $r \circ i = \text{id}_A$. En éste caso r se llama *retracción*.

Un subconjunto A de X es un *retracto por deformación* de X si existe una retracción $r: X \rightarrow A$ tal que $i \circ r \simeq \text{id}_X$. Decimos que A es un *retracto fuerte por deformación* de X si existe una retracción $r: X \rightarrow A$ tal que $i \circ r \simeq \text{id}_X(\text{rel}A)$.

Nota 1.20. Un retracto por deformación es una equivalencia homotópica.

Ejemplo 1.21. Veamos que el círculo S^1 es un retracto por deformación del cilindro C . En efecto, si definimos

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

$$S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

entonces tenemos que la aplicación

$$\begin{aligned} r: C &\longrightarrow S^1 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, 0) \end{aligned}$$

es una retracción. Si $i: S^1 \rightarrow C$ es la inclusión del círculo en el cilindro entonces tenemos que $r \circ i = \text{id}_{S^1}$, por otro lado la aplicación $F: C \times [0, 1] \rightarrow C$ definida por $F((x, y, z), t) = (x, y, tz)$ es una homotopía entre $i \circ r$ y id_C .

1.1.3. Conexidad por trayectorias

Definición 1.22. Una *trayectoria* en X , es una aplicación continua $f: [0, 1] \rightarrow X$, a los puntos $f(0) = x_0$ y $f(1) = x_1$ se le llaman puntos extremos.

Ejemplo 1.23. Sea $c_{x_0}: [0, 1] \rightarrow X$ una aplicación continua, tal que $c_{x_0}(t) = x_0$ para toda $t \in [0, 1]$ y donde $x_0 \in X$, entonces c_{x_0} es una trayectoria llamada *trayectoria constante*.

Un primer invariante topológico nos lo da la noción de conexidad por trayectorias, el cual responde a la siguiente pregunta: Dado un espacio topológico X y dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in X$, ¿existe una trayectoria que úne a x_1 con x_2 ?

Para dar respuesta a esta pregunta, definamos una relación en X de la siguiente manera, decimos que $x_1 \sim x_2$ en X si existe una trayectoria $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\sigma(0) = x_1$ y $\sigma(1) = x_2$. Veamos que esta relación es una relación de equivalencia:

1. Reflexiva: Para $x \in X$ tenemos que $x \sim x$ por la trayectoria constante c_x .
2. Simétrica: Si $x_1 \sim x_2$ entonces existe una trayectoria $\sigma: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\sigma(0) = x_1$ y $\sigma(1) = x_2$, entonces la trayectoria $\sigma^{-1}: [0, 1] \rightarrow X$ definido como $\sigma^{-1}(s) = \sigma(1 - s)$ cumple que $\sigma^{-1}(0) = x_2$ y $\sigma^{-1}(1) = x_1$, por lo tanto $x_2 \sim x_1$.
3. Transitiva: Si $x_1 \sim x_2$ existe $\sigma_1: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\sigma_1(0) = x_1$ y $\sigma_1(1) = x_2$, y si $x_2 \sim x_3$ existe $\sigma_2: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\sigma_2(0) = x_2$ y $\sigma_2(1) = x_3$, entonces la trayectoria $\sigma_1\sigma_2: [0, 1] \rightarrow X$ definido por

$$\sigma_1\sigma_2(s) = \begin{cases} \sigma_1(2s), & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \sigma_2(2s - 1), & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

cumple que $\sigma_1\sigma_2(0) = x_1$ y $\sigma_1\sigma_2(1) = x_3$, por lo cual $x_1 \sim x_3$.

Entonces esta relación particiona el espacio en clases de equivalencia llamadas *componentes por trayectorias* de X las cuales denotaremos por $[x]$. Denotamos por $\pi_0(X)$ al conjunto de clases de equivalencia de X , y notemos que $|\pi_0(X)|$ es el número de componentes por trayectorias de X . Decimos que un espacio topológico X es *conexo por trayectorias* si $|\pi_0(X)| = 1$.

Si $f: X \rightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos, entonces f induce una aplicación $f_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ definida por $f_*([x]) = [f(x)]$. Veamos que la aplicación f_* está bien definida, en efecto, si $[x] = [y]$ entonces existe una trayectoria $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ en X tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$, entonces la aplicación $f \circ \alpha: [0, 1] \rightarrow Y$ es una trayectoria en Y que cumple que $f \circ \alpha(0) = f(x)$ y $f \circ \alpha(1) = f(y)$.

Proposición 1.24. π_0 *satisface las siguientes propiedades funtoriales:*

1. Si $f: X \rightarrow X$ es la identidad en X , entonces $f_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(X)$ es también la identidad
2. Si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son aplicaciones continuas, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*: \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Z)$.
3. Si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces f_* es una biyección de conjuntos. Por lo tanto $|\pi_0(X)| = |\pi_0(Y)|$.

Demostración. Sea X, Y y Z espacios topológicos cualesquiera.

1. Si $f: X \rightarrow X$ es la identidad, entonces por definición tenemos que $f_*([x]) = [f(x)] = [x]$, lo cual implica que f_* es la identidad en $\pi_0(X)$.
2. Si $[x] \in \pi_0(X)$ entonces

$$(g \circ f)_*[x] = [g \circ f(x)] = g_*[f(x)] = g_* \circ f_*[x]$$

3. Si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, existe una aplicación continua $g: Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = \text{id}_X$ y $f \circ g = \text{id}_Y$, por la propiedad 1 tenemos que $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_0(X)}$ y que $(\text{id}_Y)_* = \text{id}_{\pi_0(Y)}$, ahora por la propiedad 2 tenemos que $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = \text{id}_{\pi_0(X)}$ y $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = \text{id}_{\pi_0(Y)}$, por lo tanto f_* es una biyección de conjuntos.

□

De la propiedad 3 tenemos que el número de componentes por trayectorias es un *invariante topológico*, es decir, es una propiedad que se preserva bajo homeomorfismo, por lo cual el número de componentes por trayectorias es una propiedad que nos sirve para determinar cuando dos espacios topológicos no son homeomorfos.

Ejemplo 1.25. La recta real \mathbb{R} no es homeomorfo a \mathbb{R}^n para $n \geq 2$. En efecto, si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo, entonces $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ es un homeomorfismo, por lo tanto la aplicación inducida $f^*: \pi_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \pi_0(\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\})$ es una biyección, pero $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es conexo por trayectorias mientras que $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ si es conexo por trayectorias para $n \geq 2$.

1.1.4. Espacio de funciones

Sea Y^X el conjunto de todas las aplicaciones de X a Y , y sea $M(X, Y)$ el conjunto de todas las aplicaciones continuas de X a Y , claramente $M(X, Y)$ es un subconjunto de Y^X .

Tomemos una homotopía $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ entre dos aplicaciones $f_0, f_1: X \rightarrow Y$, y definamos una familia de aplicaciones continuas f_t para $t \in [0, 1]$, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f_t: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto F(x, t) \end{aligned}$$

Entonces podemos definir una aplicación

$$\begin{aligned} \sigma: [0, 1] &\longrightarrow M(X, Y) \\ t &\longmapsto f_t \end{aligned} \tag{1.1}$$

tal que $\sigma(0) = f_0$ y $\sigma(1) = f_1$. Esto casi define una trayectoria en el espacio de funciones continuas $M(X, Y)$, para esto es necesario darle una topología al espacio de funciones $M(X, Y)$ con la que σ sea continua.

Definición 1.26 (Topología Compacto-Abierta). Sean X y Y espacios topológicos con Y no vacío. Definimos la *topología compacto-abierta* en $M(X, Y)$ como la topología generada por los subbásicos

$$U^K = \{f \in M(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$$

donde $K \subset X$ es compacto en X y $U \subset Y$ es un abierto de Y .

Decimos que una topología en $M(X, Y)$ es *admisibles*, si la aplicación evaluación

$$\begin{aligned} e: M(X, Y) \times X &\longrightarrow Y \\ (f, x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

es continua respecto a ésta topología.

Proposición 1.27. Sean X y Y espacios topológicos con Y no vacío. Si X es localmente compacto y Hausdorff, entonces la topología compacto-abierta es admisible en $M(X, Y)$.

Demostración. Mostremos que $e: M(X, Y) \times X \rightarrow Y$ es continua. Sea $U \subset Y$ un abierto en Y , veamos que su preimagen $e^{-1}(U)$ es un abierto en X , tomemos $(f, x) \in e^{-1}(U)$, puesto que $e(f, x) = f(x) \in U$ y como f es continua, entonces existe una vecindad W de x en X tal que $f(W) \subset U$.

Como X es localmente compacto y Hausdorff, existe un abierto $V \subset W$ con cerradura compacta \bar{V} tal que $x \in V \subset \bar{V} \subset W$. Entonces $(f, x) \in U^{\bar{V}} \times V$ es un abierto en $M(X, Y) \times X$ tal que $U^{\bar{V}} \times V \subset e^{-1}(U)$, por lo tanto $e^{-1}(U)$ es un abierto, lo cual implica que e es continua. \square

De ahora en adelante al espacio $M(X, Y)$ lo consideraremos con la topología compacto abierta.

Proposición 1.28. *Sean X y Y espacios topológicos con Y no vacío. Si τ es una topología admisible en $M(X, Y)$, entonces la topología compacto-abierta esta contenida en τ*

Demostración. Sea τ una topología admisible en $M(X, Y)$, denotemos por $M_\tau(X, Y)$ al espacio topológico conformado por el espacio $M(X, Y)$ y la topología τ , y denotemos por $M_{ca}(X, Y)$ al espacio topológico conformado por el espacio $M(X, Y)$ y la topología compacto-abierta. Mostremos que cada abierto en $M_{ca}(X, Y)$ es un abierto en $M_\tau(X, Y)$, como U^K es una subbase de la topología compacto-abierta, entonces es suficiente probar que U^K esta en τ .

Sea $e: M_\tau(X, Y) \times X \rightarrow Y$ la aplicación evaluación en $M_\tau(X, Y)$, como τ es admisible tenemos que e es continua. Tomemos $k \in K$ y $f \in U^K$, es decir $f(K) \subset U$, como e es continua y $e(f, k) = f(k) \in U$, existe un abierto V_k en $M_\tau(X, Y)$ que contiene a f , y un abierto W_k en X que contiene a k , tal que $e(V_k, W_k) \subset U$.

Consideremos la familia $\{W_k\}_{k \in K}$, esta familia forma una cubierta abierta de K , y como K es compacto existe una subcubierta finita $\{W_1, \dots, W_n\}$ que cubre a K . Sean $\{V_1, \dots, V_n\}$ los correspondientes abiertos V_i tal que $e(V_i, W_i) \subset U$ para $i = 1, \dots, n$.

Definamos el abierto $V = V_1 \cap \dots \cap V_n$, y notemos que $f \in V$ y $V \subset U^K$, en efecto, si $g \in V$ y $k \in K$ entonces $k \in W_i$ para alguna i , y entonces $g(k) = e(g, k) \in e(V \times W_i) \subset e(V_i \times W_i) \subset U$, lo cual implica que $g(K) \subset U$. Por lo tanto U^K es un abierto en $M_\tau(X, Y)$. \square

Este último resultado nos dice que la topología compacto abierta, es la topología mas pequeña admisible en $M(X, Y)$.

Nota 1.29. La aplicación $\sigma: I \rightarrow M(X, Y)$ definida en la ecuación (1.1), es una trayectoria en el espacio de funciones, ésto nos dice que una homotopía entre dos aplicaciones $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ es equivalente a una trayectoria en el espacio de funciones de f_0 a f_1 .

El siguiente teorema se encuentra en [23, Introduccion, Teorema 2.8].

Teorema 1.30 (Teorema de correspondencia exponencial). *Si X , Y y Z son espacios topológicos con Z localmente compacto y de Hausdorff, entonces una aplicación $g: X \rightarrow M(Y, Z)$ es continua si y sólo si $e \circ (g \times \text{id}_Y): X \times Y \rightarrow Z$ es continua, donde $e: M(Y, Z) \times Y \rightarrow Z$ es la aplicación evaluación.*

Teorema 1.31 (Ley exponencial). *Si X , Y y Z son espacios topológicos con X y Y de Hausdorff y Z localmente compacto, entonces la aplicación*

$$\phi: M(X \times Y, Z) \longrightarrow M(X, M(Y, Z))$$

definida como $\phi(f)(x)(y) = f(x, y)$, es un homeomorfismo de espacios topológicos.

La demostración de este teorema la podemos encontrar en [2, Teorema 1.3.2].

Corolario 1.32. *Si X y Y son espacios topológicos con X de Hausdorff y localmente compacto, entonces el espacio $M(I \times X, Y)$ es homeomorfo al espacio $M(I, M(X, Y))$.*

Demostración. Notemos que el intervalo $I = [0, 1]$ es localmente compacto y Hausdorff, entonces aplicando el Teorema 1.31 tenemos el resultado deseado. \square

Nota 1.33. Del Corolario 1.32, podemos notar que una homotopía $h: I \times X \rightarrow Y$ es enviada a la trayectoria $\phi(h): I \rightarrow M(Y, Z)$ en el espacio de funciones $M(Y, Z)$ mediante ϕ .

1.1.5. Clases de homotopía

Notemos que la relación de homotopía entre aplicaciones continuas de X a Y , es una relación de equivalencia en el espacio de funciones $M(X, Y)$, esto nos parte el espacio en clases de equivalencia las cuales llamamos *clases de homotopía*. Denotemos por $[X, Y]$ al conjunto de clases de homotopía de aplicaciones de X a Y .

Por el Corolario 1.32 tenemos que si X es localmente compacto y Hausdorff, entonces una homotopía entre dos aplicaciones $f_1, f_2: X \rightarrow Y$ es equivalente a una trayectoria en el espacio de funciones de f_1 a f_2 . Entonces las componentes por trayectorias de $M(X, Y)$ son equivalentes a las clases de homotopía de aplicaciones de X a Y , esto es

$$\pi_0(M(X, Y)) = [X, Y]$$

Nota 1.34. Podemos ver al conjunto de componentes por trayectorias $\pi_0(X)$ de un espacio topológico X , como un conjunto de clases de homotopía. En efecto, una trayectoria $\sigma: I \rightarrow X$ de $\sigma(0) = x_0$ a $\sigma(1) = x_1$, lo podemos ver como una homotopía $F_\sigma: \{*\} \times I \rightarrow X$ entre dos aplicaciones continuas

$$\begin{array}{ccc} x_i: \{*\} & \longrightarrow & X \\ * & \longmapsto & x_i \end{array}$$

para $i = 0, 1$, del espacio $\{*\}$ conformado por un punto al espacio X , entonces $\pi_0(X) = [\{*\}, X]$.

Proposición 1.35. *Si X o Y es un espacio topológico contraíble, entonces $[X, Y]$ consta de un solo punto.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que Y es contraíble. Basta probar que todas las aplicaciones de X a Y son homotópicas a la aplicación constante. Si Y es contraíble, existe $y_0 \in Y$ tal que $\text{id}_Y \simeq y_0$, entonces existe una homotopía $H: Y \times I \rightarrow Y$ tal que

$$H(y, 0) = \text{id}_Y(y) = y \quad H(y, 1) = y_0(y) = y_0$$

Sea X un espacio topológico, y sea $f: X \rightarrow Y$. Definimos la aplicación $F: X \times I \rightarrow Y$ por $F(x, t) = H(f(x), t)$, notemos que F es continua puesto que f y H lo son, y además

$$F(x, 0) = H(f(x), 0) = f(x) \quad F(x, 1) = H(f(x), 1) = y_0$$

por lo tanto F es una homotopía de f a la aplicación constante y_0 . \square

Proposición 1.36. Sean X, Y y Z espacios topológicos, definimos una composición en las clases de homotopía, como

$$\begin{aligned} [X, Y] \times [Y, Z] &\longrightarrow [X, Z] \\ ([f], [g]) &\longmapsto [g \circ f] \end{aligned}$$

Entonces $f: X \rightarrow Y$ induce una aplicación

$$\begin{aligned} f^*: [Y, Z] &\longrightarrow [X, Z] \\ [g] &\longmapsto [g \circ f] \end{aligned}$$

y $g: Y \rightarrow Z$ induce una aplicación

$$\begin{aligned} g_*: [X, Y] &\longrightarrow [X, Z] \\ [f] &\longmapsto [g \circ f] \end{aligned}$$

El conjunto de clases de homotopía $[X, Y]$ de aplicaciones de X a Y , nos definen otro invariante topológico. En la siguiente proposición se muestra como una equivalencia homotópica, induce biyecciones entre conjuntos de clases de homotopía.

Proposición 1.37. Si $f: X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces f induce biyecciones entre conjuntos.

$$f^*: [Y, Z] \rightarrow [X, Z] \quad y \quad f_*: [Z, X] \rightarrow [Z, Y]$$

para cualquier espacio topológico Z .

Demostración. Como $f: X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces existe $g: Y \rightarrow X$ inversa homotópica de f . Entonces g^* y g_* son las inversas de f^* y f_* respectivamente. \square

En este caso, tenemos que las aplicaciones f^* y f_* son biyecciones entre conjuntos, sin embargo en la Sección 1.3 le daremos una estructura de grupo al conjunto de clases de homotopía $[X, Y]$, y entonces f^* y f_* serían isomorfismos de grupos, por lo cual tendríamos que el conjunto de clases de homotopía define un invariante algebraico.

1.2. Parejas de espacios topológicos

Una *pareja de espacios topológicos*, es una pareja (X, A) donde X es un espacio topológico y $A \subset X$ es un subespacio de X . En la categoría de parejas de espacios topológicos, tenemos que los objetos son parejas de espacios topológicos (X, A) , y los morfismos son aplicaciones continuas $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ tal que $f(A) \subset B$.

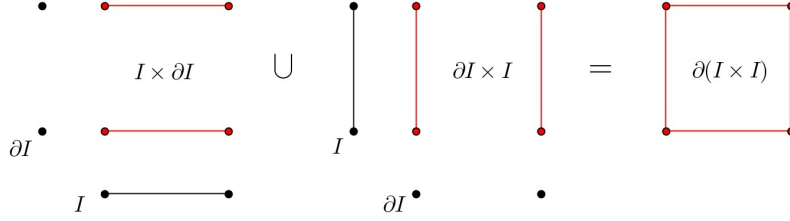
1.2.1. Clases de homotopía de parejas

Podemos definir un producto de parejas de espacios topológicos de la siguiente manera.

Definición 1.38. Definimos el producto de dos parejas de espacios (X, A) y (Y, B) , como la pareja

$$(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

Ejemplo 1.39. Denotemos por $I = [0, 1]$ al intervalo $[0, 1]$ y por $\partial I = \{0, 1\}$ su frontera. Notemos que $(I, \partial I)$ es una pareja de espacios, y entonces tenemos que $(I, \partial I) \times (I, \partial I) = (I^2, I \times \partial I \cup \partial I \times I) = (I^2, \partial I^2)$ como se muestra en la Figura 1.7.

Figura 1.7: **Figura del espacio** $I \times \partial I \cup \partial I \times I$.

Definición 1.40. Sean (X, A) y (Y, B) dos parejas de espacios topológicos. El *coproducto en la categoría de parejas de espacios topológicos* esta dado por la *union disjunta de parejas*, definida como el espacios

$$(X, A) \sqcup (Y, B) = (X \sqcup Y, A \sqcup B)$$

En general, si $\{(X_\alpha, A_\alpha)\}_\alpha$ es una familia de parejas de espacios topológicos, entonces el coproducto está dado como

$$\coprod_\alpha (X_\alpha, A_\alpha) = \left(\coprod_\alpha X_\alpha, \coprod_\alpha A_\alpha \right)$$

En la categoría de parejas de espacios topológicos, también tenemos la noción de homotopía de aplicaciones de parejas, la cual es similar a la noción de homotopía relativa.

Definición 1.41. Sean (X, A) y (Y, B) dos parejas de espacios topológicos, y consideremos dos aplicaciones continuas de parejas $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$. Definimos una *homotopía de parejas*, como una aplicación continua $F: (X, A) \times [0, 1] \rightarrow (Y, B)$, tal que $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$ y $F(A, t) \subset B$ para toda $t \in [0, 1]$. En este caso decimos que f_0 y f_1 son *homotópicas de parejas*.

Nota 1.42. Si $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ son dos aplicaciones de parejas, entonces una homotopía relativa a $A \subset X$, es una homotopía de parejas. El recíproco no es cierto.

Denotamos por $M(X, A; Y, B)$, al conjunto de las aplicaciones continuas $f: X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subset B$. A este conjunto se le llama *espacio de funciones de parejas*.

Podemos dar una version de la ley exponencial para parejas de espacios topológicos.

Teorema 1.43. Sean (X, A) , (Y, B) y (Z, C) parejas de espacios topológicos, con X y Y de Hausdorff y Y localmente compacto. Entonces tenemos que

$$M((X, A) \times (Y, B), (Z, C)) \cong M(X, A; M(Y, B; Z, C), M(Y, Y; Z, C))$$

La relación de homotopía de aplicaciones $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ de parejas de espacios topológicos, es una relación de equivalencia en el espacio de funciones de pareja $M(X, A; Y, B)$, esto parte al espacio $M(X, A; Y, B)$ en clases de equivalencia llamadas *clases de homotopía de parejas*, y denotamos por $[X, A; Y, B]$ al *conjunto de clases de homotopía de parejas*.

Como $I = [0, 1]$ es localmente compacto y Hausdorff, podemos aplicar el Teorema 1.43, lo cual nos da un homeomorfismo

$$M((I, \partial I) \times (X, A), (Y, B)) \cong M(I, \partial I; M(X, A; Y, B), M(X, X; Y, B))$$

Entonces, tenemos que si X es localmente compacto y Hausdorff, entonces una homotopía de parejas entre dos aplicaciones de parejas $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es equivalente a una trayectoria en el espacio de funciones de parejas de f_0 a f_1 . Entonces las componentes por trayectorias de $M((X, A); (Y, B))$ son equivalentes a las clases de homotopía de parejas de aplicaciones de parejas de (X, A) a (Y, B) , esto es

$$\pi_0(M(X, A; Y, B)) = [X, A; Y, B]$$

Proposición 1.44. Sea (X, A) una pareja de espacios topológicos, tal que $(X, A) = \coprod_{\alpha} (X_{\alpha}, A_{\alpha})$, entonces

$$[X, A; Y, B] \cong \prod_{\alpha} [X_{\alpha}, A_{\alpha}; Y, B]$$

Demostración. Sea $[f] \in [X, A; Y, B]$, y sea $f_{\alpha} = f \circ i_{\alpha}$, donde $i_{\alpha}: (X_{\alpha}, A_{\alpha}) \hookrightarrow (X, A)$ es la inclusión. Entonces, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} [X, A; Y, B] &\longrightarrow \prod_{\alpha} [X_{\alpha}, A_{\alpha}; Y, B] \\ [f] &\longmapsto ([f_{\alpha}]) \end{aligned}$$

Ahora definamos la inversa. Sea $([f_{\alpha}]) \in \prod_{\alpha} [X_{\alpha}, A_{\alpha}; Y, B]$, la aplicación $f_{\alpha}: (X_{\alpha}, A_{\alpha}) \rightarrow (Y, B)$ induce una aplicación $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ definida como $f \circ i_{\alpha} = f_{\alpha}$. Entonces $([f_{\alpha}]) \mapsto [f]$ es la inversa deseada. \square

1.2.2. Operaciones de espacios topológicos punteados

Un *espacio topológico punteado* es una pareja (X, x_0) donde X es un espacio topológico, y $x_0 \in X$ un punto fijo de X llamado *punto base*. La categoría de espacios topológicos punteados es una subcategoría, de la categoría de parejas de espacios topológicos.

En la categoría de espacios topológicos punteados, los objetos son los espacios topológicos punteados, y los morfismos son *aplicaciones continuas punteadas*, es decir, aplicaciones continuas $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Definición 1.45. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios topológicos punteados. El *coproducto en la categoría de espacios topológicos punteados*, está dado por la *cuña* $X \vee Y$, el cual está definido como el espacio punteado

$$X \vee Y = X \sqcup Y / x_0 \sim y_0$$

donde el punto base es $x_0 = y_0$.

Ejemplo 1.46. Tomemos el espacio punteado (S^1, s_0) . La cuña de dos círculos $S^1 \vee S^1$ está dada por la Figura 1.8a, este espacio también es conocido como la “figura ocho”. La cuña de dos copias de \mathbb{R} está dada por la Figura 1.8b, la cual es homeomorfa a los ejes de \mathbb{R}^2 .

Definición 1.47. Sean (X, x_0) y (Y, y_0) dos espacios topológicos punteados. Definimos el *producto smash* de (X, x_0) y (Y, y_0) como el espacio cociente $X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$, donde el punto base es $X \vee Y$.

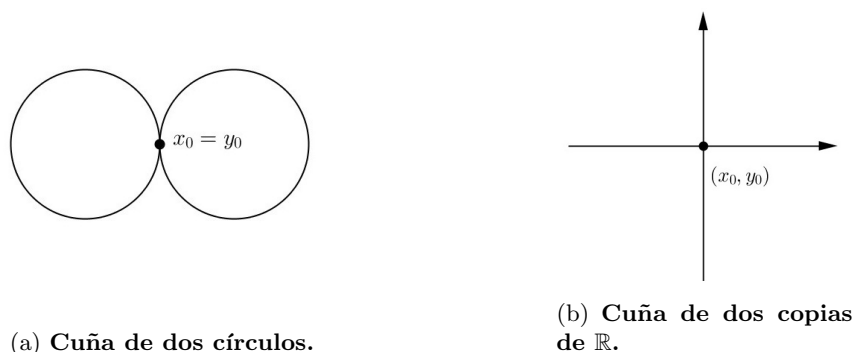


Figura 1.8: Cuña de espacios topológicos.

Ejemplo 1.48. Tomemos el espacio punteado (S^1, s_0) . El producto smash de dos círculos $S^1 \wedge S^1$, es el espacio obtenido del toro $S^1 \times S^1$ al identificar la “figura ocho” $S^1 \vee S^1 \subset S^1 \times S^1$ en un punto. Como se muestra en la Figura 1.9, identificamos en un punto los círculos meridiano y longitudinal del toro, por lo cual tenemos que $S^1 \wedge S^1$ es homeomorfo a la esfera S^2 .

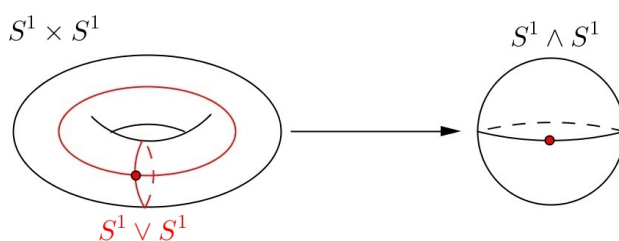


Figura 1.9: Producto smash de dos círculos.

Nota 1.49. En general, se puede probar que el producto smash de S^n y S^1 , es homeomorfo a la esfera S^{n+1} (ver [25, Lema 2.27]).

Definición 1.50. Sea (X, x_0) un espacio topológico punteado, definimos el *cono reducido* como el espacio punteado

$$C'X = \{X \times [0, 1] / X \times \{0\} \cup x_0 \times [0, 1]\}$$

donde el punto base es $X \times \{0\} \cup x_0 \times [0, 1]$. Por otro lado, definimos la *suspensión reducida* de X como el espacio punteado

$$\Sigma X = X \times [0, 1] / X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup x_0 \times [0, 1]$$

donde el punto base es $X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup x_0 \times [0, 1]$.

Ejemplo 1.51. En la Figura 1.10 se aprecia la suspensión y la suspensión reducida del espacio punteado $(S^1 \sqcup \{x_0\}, x_0)$.

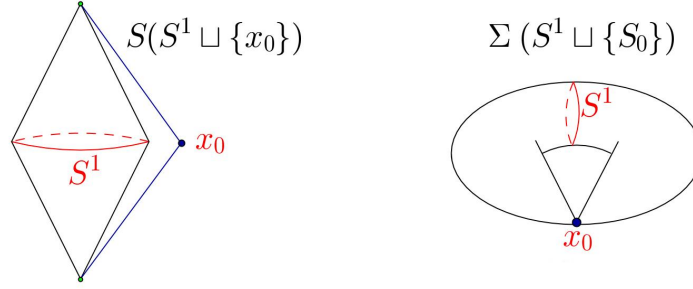


Figura 1.10: **Suspensión y Suspensión reducida de $(S^1 \sqcup \{x_0\}, x_0)$**

Proposición 1.52. Sea (X, x_0) un espacio topológico punteado. Para cada $n \geq 0$, $\Sigma^n X$ es homeomorfo a $S^n \wedge X$.

Demostración. Mostremos este resultado por inducción. Para $n = 0$, tomemos $S^0 = \{1, -1\}$ y consideremos el espacio topológico punteado $(S^0, 1)$, notemos que $\Sigma^0 X \cong X$, y entonces

$$S^0 \wedge X = \{1, -1\} \times X / \{1\} \times X \cup \{1, -1\} \times x_0 \cong \{-1\} \times X \cong X = \Sigma^0 X$$

Supongamos que $\Sigma^n X \cong S^n \wedge X$, entonces

$$\Sigma^{n+1} X = \Sigma(\Sigma^n X) \cong \Sigma(S^n \wedge X) \cong S^1 \wedge (S^n \wedge X) \cong (S^1 \wedge S^n) \wedge X \cong S^{n+1} \wedge X$$

Por lo tanto, la proposición se cumple para toda $n \geq 0$. \square

Ahora, el join $X \star Y$ de dos espacios topológicos X y Y es homeomorfo a la suspensión reducida $\Sigma(X \wedge Y)$ del smash de X y Y . Entonces el join de dos esferas S^n y S^m es homeomorfa a la esfera S^{n+m+1} , en efecto, tenemos que

$$S^n \star S^m \cong \Sigma(S^n \wedge S^m) \cong \Sigma S^{n+m} \cong S^{n+m+1}$$

Denotemos por $x \wedge t$ a la clase de $(x, t) \in X \times I$ en ΣX , y denotemos por $\tilde{x}_0 = x_0 \wedge t = x \wedge 0 = x \wedge 1$ al punto base de ΣX . Si $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es una aplicación punteada, entonces $f \times \text{id}_I$ induce una aplicación punteada

$$\begin{aligned} \Sigma f: \Sigma X &\longrightarrow \Sigma Y \\ (x \wedge t) &\longmapsto f(x) \wedge t \end{aligned}$$

Proposición 1.53. La aplicación Σf tiene las siguiente propiedades functoriales:

1. Si la aplicación punteada $f: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ es la identidad en X , entonces la aplicación inducida $\Sigma f: \Sigma X \rightarrow \Sigma X$ es también la identidad.
2. Si $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ y $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ son aplicaciones punteadas continuas, entonces $\Sigma(g \circ f) = \Sigma g \circ \Sigma f: \Sigma X \rightarrow \Sigma Z$.
3. Si $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es un homeomorfismo, entonces Σf es un homeomorfismo.

Demostración. Sean (X, x_0) , (Y, y_0) y (Z, z_0) espacios topológicos punteados.

1. Sea $f: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ la identidad en (X, x_0) , consideremos $\Sigma f: \Sigma X \rightarrow \Sigma X$ y veamos que es la identidad en ΣX . En efecto, tenemos que $\Sigma f(x \wedge t) = f(x) \wedge t = (x \wedge t)$.

2. Sean $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ y $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ dos aplicaciones continuas punteadas, y consideremos las aplicaciones inducidas $\Sigma f: \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$ y $\Sigma g: \Sigma Y \rightarrow \Sigma Z$. Entonces tenemos que

$$\Sigma(f \circ g)(x \wedge t) = (f \circ g)(x \wedge t) = f(g(x)) \wedge t = \Sigma f(g(x) \wedge t) = \Sigma f \circ \Sigma g(x \wedge t)$$

3. Si $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es un homeomorfismo, entonces existe una aplicación punteada $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$, tal que $f \circ g = \text{id}_Y$ y $g \circ f = \text{id}_X$, entonces por las Propiedades 1 y 2 tenemos que

$$\text{id}_{\Sigma Y} = \Sigma \text{id}_Y = \Sigma(f \circ g) = \Sigma f \circ \Sigma g$$

y

$$\text{id}_{\Sigma X} = \Sigma \text{id}_X = \Sigma(g \circ f) = \Sigma g \circ \Sigma f$$

Por lo tanto Σf es un homeomorfismo.

□

Esto hace de Σ , un funtor de la categoría de espacios topológicos punteados, en si mismo. Por otro lado, tenemos que Σ define una sucesión exacta larga, de la siguiente manera:

Definición 1.54 (Sucesión de Barratt-Puppe). Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos punteados, tomemos C_f el cono de f , y consideremos la siguiente sucesión:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha_f} C_f$$

donde $\alpha_f(y)$ es la clase de y en C_f . Consideremos las aplicaciones inducidas $\Sigma f: \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$ y $\Sigma \alpha_f: \Sigma Y \rightarrow \Sigma C_f$, entonces tenemos la siguiente sucesión:

$$\Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma \alpha_f} \Sigma C_f$$

Notemos que $C_{\Sigma f}$ es homotópicamente equivalente a ΣC_f , por lo cual obtenemos una aplicación natural $\beta_f: C_f \rightarrow \Sigma X$, definida si colapsamos $Y \subset C_f$ a un punto. Por lo tanto tenemos la siguiente sucesión:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha_f} C_f \xrightarrow{\beta_f} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma \alpha_f} \Sigma C_f$$

Iterando esta construcción, obtenemos la siguiente sucesión exacta larga, conocida como la *sucesión de Barratt-Puppe*.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha_f} C_f \xrightarrow{\beta_f} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma \alpha_f} \Sigma C_f \xrightarrow{\Sigma \beta_f} \Sigma^2 X \xrightarrow{\Sigma^2 f} \Sigma^2 Y \xrightarrow{\Sigma^2 \alpha_f} \Sigma^2 C_f \xrightarrow{\Sigma^2 \beta_f} \dots$$

1.2.3. Clases de homotopía punteadas

Sean (X, x_0) y (Y, y_0) dos espacios topológicos punteados. Denotamos por $M(X, x_0; Y, y_0)$ al conjunto de aplicaciones punteadas de (X, x_0) a (Y, y_0) , el cual es un subconjunto de $M(X, A; Y, B)$. A este espacio, se le conoce como el *espacio de funciones punteadas*.

Ejemplo 1.55. Sea $I = [0, 1]$ y sea $\partial I = \{0, 1\}$ la frontera de I , entonces para un espacio punteado (X, x_0) , al espacio $M(I, 0; X, x_0)$ se le conoce como el *espacio de trayectorias en X basados en x_0* . Al espacio $M(I, \partial I; X, x_0)$ se le conoce como *espacio de lazos en X basados en x_0* y este se denota por $\Omega(X, x_0)$. Además tenemos las siguientes contenciones.

$$M(I, Y) \supset M(I, 0; X, x_0) \supset M(I, \partial I; X, x_0)$$

Notemos que el espacio $\Omega(X, x_0)$ también es un espacio punteado $(\Omega(x, x_0), c_{x_0})$, donde el punto base c_{x_0} es el lazo constante en x_0 . Sea $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ una aplicación punteada, entonces f induce una aplicación punteada definida por

$$\begin{aligned} \Omega f: (\Omega(X, x_0), c_{x_0}) &\longrightarrow (\Omega(Y, y_0), c_{y_0}) \\ \sigma &\longmapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

Proposición 1.56. *La aplicación Ωf tiene las siguiente propiedades functoriales:*

1. Si la aplicación punteada $f: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ es la identidad en X , entonces la aplicación inducida $\Omega f: \Omega(X, x_0) \rightarrow \Omega(X, x_0)$ es también la identidad.
2. Si $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ y $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ son aplicaciones punteadas continuas, entonces $\Omega(g \circ f) = \Omega g \circ \Omega f: \Omega(X, x_0) \rightarrow \Omega(Z, z_0)$.
3. Si $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es un homeomorfismo, entonces Ωf es un homeomorfismo.

Demostración. Sean (X, x_0) , (Y, y_0) y (Z, z_0) espacios topológicos punteados.

1. Sea $f: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ la identidad en (X, x_0) , consideremos la aplicación inducida $\Omega f: (\Omega(X, x_0), c_{x_0}) \rightarrow (\Omega(X, x_0), c_{x_0})$, entonces tenemos que $\Omega f(\sigma) = f \circ \sigma = \sigma$.
2. Sean $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ y $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ dos aplicaciones continuas punteadas, entonces tenemos que

$$\Omega(f \circ g)(\sigma) = (f \circ g) \circ \sigma = f \circ (g(\sigma)) = \Omega f(g(\sigma)) = \Omega f \circ \Omega g(\sigma)$$

3. Como $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es un homeomorfismo, existe una aplicación punteada $g: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, tal que $f \circ g = \text{id}_Y$ y $g \circ f = \text{id}_X$. Entonces por la propiedad 1 y 2 tenemos que

$$\text{id}_{\Omega(Y, y_0)} = \Omega(\text{id}_Y) = \Omega(f \circ g) = \Omega f \Omega g$$

y

$$\text{id}_{\Omega(X, x_0)} = \Omega(\text{id}_X) = \Omega(g \circ f) = \Omega g \Omega f$$

Por lo tanto Ωf es un homeomorfismo. □

Por lo cual, el espacio de lazos es un funtor de la categoría de espacios topológicos punteados en sí mismo. El espacio de lazos es muy importante en el estudio de los grupos de homotopía, por lo cual nos interesa generalizar este espacio a dimensiones más altas.

Definición 1.57. Al espacio $M(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ se le llama *n-espacio de lazos en X basados en x_0* , y se le denota por $\Omega^n(X, x_0)$.

Nota 1.58. Por el Teorema 1.43 y el Ejemplo 1.39, tenemos que

$$M(I^{n+1}, \partial I^{n+1}; X, x_0) = M((I, \partial I) \times (I^n, \partial I^n); X, x_0) \cong M(I, \partial I; M(I^n, \partial I^n; X, x_0), \tilde{x}_0)$$

donde $\tilde{x}_0 \in M(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ tal que $\tilde{x}_0(I^n) = x_0$.

Proposición 1.59. *Sea (X, x_0) un espacio punteado, entonces*

$$\Omega^{n+1}(X, x_0) \cong \Omega(\Omega^n(X, x_0), \tilde{x}_0)$$

Demostración. La Nota 1.58, nos da el resultado deseado. \square

En la categoría de espacios topológicos punteados, tenemos la noción de homotopía punteada, la cual se define como una homotopía de parejas donde las parejas de espacios topológicos son espacios topológicos punteados.

La relación de homotopía punteada, es una relación de equivalencia en el espacio de funciones punteadas $M(X, x_0; Y, y_0)$, entonces parte al espacio en clases de equivalencia llamadas *clases de homotopía punteadas*. Denotamos por

$$[X, Y]_* := [X, x_0; Y, y_0]$$

al conjunto de clases de homotopía de aplicaciones punteadas de (X, x_0) a (Y, y_0) .

Sea (X, x_0) un espacio punteado, entonces la Nota 1.34, nos da el siguiente resultado.

Lema 1.60. *Si (X, x_0) es un espacio topológico punteado, entonces*

$$\pi_0(X) = [S^0, X]_*$$

donde $S^0 = \{0, 1\}$ es la esfera de dimensión cero, con punto base 0.

El siguiente corolario, es un caso particular de la Proposición 1.44.

Corolario 1.61. *Si $(X, x_0) = \coprod_{\alpha} [X_{\alpha}, x_{\alpha}]$, donde cada (X_{α}, x_{α}) es un espacio punteado, entonces*

$$\left[\bigvee_{\alpha} X_{\alpha}, Y \right]_* \cong \prod_{\alpha} [X_{\alpha}, Y]_*$$

1.3. H-espacios y H-coespacios

Consideremos $[X, Y]$ el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones entre dos espacios topológicos X y Y . En esta sección daremos condiciones necesarias en X y Y , para que al conjunto $[X, Y]$ le podamos dar una estructura de grupo. Recordemos que denotamos por $[X, Y]_*$ al conjunto de clases de homotopía de aplicaciones punteadas de X a Y y denotemos por $M_*(X, Y) = M(X, x_0; Y, y_0)$ al conjunto de aplicaciones punteadas de X a Y .

1.3.1. H-espacios

Definición 1.62. Un *H-espacio* es un espacio topológico punteado (W, w_0) , dotado de una aplicación punteada $\mu: (W \times W, (w_0, w_0)) \rightarrow (W, w_0)$ llamada *H-multiplicación*, tal que la aplicación constante $e: W \rightarrow W$ definida por $e(w) = w_0$ para toda $w \in W$ es una *H-identidad*, es decir, el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{(e, \text{id})} & W \times W & \xleftarrow{(\text{id}, e)} & W \\ & \searrow \text{id} & \downarrow \mu & \swarrow \text{id} & \\ & & W & & \end{array} \quad \text{esto es: } \mu \circ (\text{id}, e) \simeq \text{id} \simeq \mu \circ (e, \text{id})$$

Decimos que μ es *H-asociativa*, si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccc} W \times W \times W & \xrightarrow{\mu \times \text{id}} & W \times W \\ \text{id} \times \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ W \times W & \xrightarrow{\mu} & W \end{array} \quad \text{esto es: } \mu \circ (\mu \times \text{id}) \simeq \mu \circ (\text{id} \times \mu)$$

Decimos que una aplicación $j: (W, w_0) \rightarrow (W, w_0)$ es un *H-inverso* si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{(j, \text{id})} & W \times W & \xleftarrow{(\text{id}, j)} & W \\ & \searrow e & \downarrow \mu & \swarrow e & \\ & & W & & \end{array} \quad \text{esto es: } \mu \circ (j, \text{id}) \simeq e \simeq \mu \circ (\text{id}, j)$$

Decimos que W es *H-conmutativo* si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccc} W \times W & \xrightarrow{T} & W \times W \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu \\ & & W \end{array} \quad \text{esto es: } \mu \circ T \simeq \mu$$

donde $T: W \times W \rightarrow W \times W$ es la aplicación $T(w_1, w_2) = (w_2, w_1)$ para toda $(w_1, w_2) \in W \times W$.

Definición 1.63. Un *H-grupo* es un *H-espacio*, con una *H-multiplicación H-asociativa* μ , y un *H-inverso* j .

Sean (W, w_0) y (W', w'_0) *H-espacios* con *H-multiplicaciones* μ y μ' respectivamente. Decimos que una aplicación punteada continua $h: (W, w_0) \rightarrow (W', w'_0)$ es un *H-homomorfismo* si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccc} W \times W & \xrightarrow{\mu} & W \\ h \times h \downarrow & & \downarrow h \\ W' \times W' & \xrightarrow{\mu'} & W' \end{array} \quad \text{esto es: } h \circ \mu \simeq \mu' \circ h \times h$$

Teorema 1.64. Si (W, w_0) es un *H-grupo*, con *H-multiplicación* μ y *H-inverso* j , entonces para todo espacio punteado (X, x_0) , el conjunto $[X, W]_*$ se le puede dar una estructura de grupo, donde el producto de dos clases de homotopía $[f] \cdot [g]$ es la clase $[fg] := [\mu \circ (f \times g) \circ \Delta]$, donde $\Delta: X \rightarrow X \times X$ es la aplicación diagonal definida por $\Delta(x) = (x, x)$. La identidad en $[X, W]_*$ es la clase de homotopía de $[e]$, y el inverso de una clase $[f]$ es la clase $[f]^{-1} = [j \circ f]$.

Demostración. Notemos que el producto $[f] \cdot [g]$ respeta clases de homotopía, puesto que si $F: f \simeq f'$ y $G: g \simeq g'$ son homotopías de f a f' y de g a g' respectivamente, entonces la aplicación $F \times G$ es una homotopía de $f \times g$ a $f' \times g'$, esto implica que $[f] \cdot [g] = [f'] \cdot [g']$, y entonces el producto está bien definido. Veamos que $[X, W]_*$ cumple las propiedades de grupo.

- Asociatividad: Como W es un H -grupo tenemos que μ es H -asociativa, es decir $\mu \circ (\mu \times f) \simeq \mu \circ (1 \times \mu)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} [f] \cdot ([g] \cdot [h]) &= [f] \cdot [\mu \circ (g \times h) \circ \Delta] = [\mu \circ (f \times (\mu \circ (g \times h) \circ \Delta)) \circ \Delta] \\ &= [\mu \circ ((\mu \circ (f \times g) \circ \Delta) \times h) \circ \Delta] = [\mu \circ (f \times g) \circ \Delta] \cdot [h] \\ &= ([f] \cdot [g]) \cdot [h] \end{aligned}$$

por lo tanto $[X, W]_*$ es asociativo.

- Elemento neutro: Tomemos una clase $[f] \in [X, W]_*$ y consideremos $[f] \cdot [e] = [\mu \circ (f \times e) \circ \Delta]$ donde e es la H -identidad de (W, w_0) , entonces tenemos que $\mu \circ (f \times e) \simeq f$, por lo tanto $[f] \cdot [e] = [\mu \circ (f \times e) \circ \Delta] = [f]$, lo que implica que $[e] \in [X, W]_*$ es el elemento neutro de $[X, W]_*$.
- Inversos: Ahora, tomemos una clase $[f] \in [X, W]_*$, y consideremos $[f] \cdot [j \circ f] = [\mu \circ (f \times (j \circ f)) \circ \Delta]$ donde j es el H -inverso en (W, w_0) , entonces tenemos que $\mu \circ (f \times (j \circ f)) \simeq e$, por lo tanto $[f] \cdot [j \circ f] = [\mu \circ (f \times (j \circ f)) \circ \Delta] = [e]$, lo que implica que $[X, W]_*$ tiene inversos.

Por lo tanto $[X, W]_*$ es un grupo. \square

Si además μ es H -conmutativo, entonces $[X, W]_*$ es un grupo abeliano. Si $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es una aplicación punteada continua, entonces f induce un homomorfismo de grupos $f^*: [Y, W]_* \rightarrow [X, W]_*$. Más aún, si $h: (W, w_0) \rightarrow (W', w'_0)$ es un H -homomorfismo de H -espacios, entonces para todo espacio topológico X , tenemos que la aplicación

$$h_*: [X, W]_* \rightarrow [X, W']_*$$

es un homomorfismo de grupos.

1.3.2. Espacio de lazos

El espacio de lazos $\Omega(Y, y_0)$ de un espacio topológico punteado (Y, y_0) definido en el Ejemplo 1.55, es un importante ejemplo de un H -grupo. Notemos que el espacio de lazos $\Omega(Y, y_0)$ de un espacio punteado (Y, y_0) , es también un espacio punteado $(\Omega Y, \tilde{y}_0)$, donde el punto base en ΩY es el lazo constante $\tilde{y}_0: I \rightarrow Y$, definido por $\tilde{y}_0(t) = y_0$ para toda $t \in I$.

Veamos que el espacio de lazos $\Omega(Y, y_0)$ tiene la estructura de un H -grupo, definamos una H -multiplicación $\mu: \Omega Y \times \Omega Y \rightarrow \Omega Y$ por

$$\mu(\sigma, \gamma) = \begin{cases} \sigma(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \gamma(2t - 1), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Consideremos al espacio de lazos ΩY con la topología compacto abierta y veamos que μ es continua, tomemos U^k un elemento en la subbase de ΩY y consideremos $\mu^{-1}(U^k)$, entonces el abierto $U^k \times U^k \subset \Omega Y \times \Omega Y$ está contenido en $\mu^{-1}(U^k)$. Veamos que μ es H -asociativa, en efecto, podemos definir una homotopía $G: \Omega Y \times \Omega Y \times \Omega Y \times I \rightarrow \Omega Y$, de $\mu \circ (\mu \times \text{id})$ a $\mu \circ (\text{id} \times \mu)$ de la siguiente manera:

$$G(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, s)(t) = \begin{cases} \sigma_1\left(\frac{4t}{1+s}\right), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4}, \\ \sigma_2(4t - 1 - s), & \text{si } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4}, \\ \sigma_3\left(\frac{4t-2-s}{2-s}\right), & \text{si } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Sea $j: \Omega Y \rightarrow \Omega Y$ definido por $j(\sigma)(t) = \sigma(1-t)$, veamos que j determina un H -inverso, en efecto, tenemos que la aplicación $H: \Omega Y \times I \rightarrow \Omega Y$, definida por

$$H(\sigma, s)(t) = \begin{cases} \sigma(2(1-s)t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \sigma(2(1-s)(1-t)), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

define una homotopía de $\mu(\sigma, j(\sigma))$ a $\sigma(0)$.

Por lo tanto, para cada espacio punteado (Y, y_0) el espacio de lazos ΩY es un H -grupo, y entonces aplicando Teorema 1.64, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.65. *Para cada espacio punteado (X, x_0) , el espacio $[X, \Omega Y]_*$ es un grupo. Si $f: X \rightarrow X'$ es una aplicación continua, entonces*

$$f^*: [X', \Omega Y]_* \rightarrow [X, \Omega Y]_*$$

es un homomorfismo de grupos. Finalmente, si $g: Y \rightarrow Y'$ es una aplicación punteada, entonces $\Omega g: \Omega Y \rightarrow \Omega Y'$ definida por $\Omega g(\sigma) = g \circ \sigma$, es un H -homomorfismo. Por lo tanto, la aplicación

$$(\Omega g)_*: [X, \Omega W]_* \rightarrow [X, \Omega W']_*$$

es un homomorfismo de grupos.

1.3.3. H-coespacios

Ahora, podemos definir un espacio dual a los H -espacios llamados H -coespacios, los cuales son espacios punteados (Q, q_0) con los cuales se le pueda dar una estructura de grupo al conjunto $[Q, X]_*$, para todo espacio punteado (X, x_0) .

Entonces, es necesario definir un concepto dual al producto cartesiano, en este caso la cuña de la Definición 1.45, es una operación dual al producto cartesiano, en el sentido que: Dadas dos aplicaciones punteadas $f: X \rightarrow Z$ y $g: Y \rightarrow Z$, existe una aplicación punteada $\langle f, g \rangle: X \vee Y \rightarrow Z$ definida por

$$\langle f, g \rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & \text{si } y = y_0; \\ g(y), & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Además, si $f: X \rightarrow X'$ y $g: Y \rightarrow Y'$ son aplicaciones punteadas, podemos definir una aplicación $f \vee g$ definida por

$$\begin{aligned} f \vee g: X \vee Y &\longrightarrow X' \vee Y' \\ (x, y) &\longmapsto (f(x), g(y)) \end{aligned}$$

Definición 1.66. Un H -coespacio es un espacio topológico punteado (Q, q_0) , dotado de una aplicación punteada $\nu: (Q, q_0) \rightarrow (Q \vee Q, (q_0, q_0))$ llamada H -comultiplicación, tal que la aplicación constante $e: Q \rightarrow Q$ definida por $e(q) = q_0$ para toda $q \in Q$ es una H -coidentidad, es decir, el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccccc} & & Q & \vee & Q & & \\ & \xleftarrow{\langle e, \text{id} \rangle} & & & & \xrightarrow{\langle \text{id}, e \rangle} & \\ & \swarrow & \uparrow \nu & \searrow & \swarrow & \searrow & \\ & Q & & & Q & & \\ & \nwarrow & & & \nwarrow & \swarrow & \\ & & & & & & \end{array}$$

esto es: $\langle \text{id}, e \rangle \circ \nu \simeq \text{id} \simeq \langle e, \text{id} \rangle \circ \nu$

Decimos que ν es *H-coasociativa*, si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccc} Q \vee Q \vee Q & \xleftarrow{\nu \vee \text{id}} & Q \vee Q \\ \text{id} \vee \nu \uparrow & & \uparrow \nu \\ Q \vee Q & \xleftarrow{\nu} & Q \end{array} \quad \text{esto es: } (\nu \vee \text{id}) \circ \nu \simeq (\text{id} \vee \nu) \circ \nu$$

Decimos que una aplicación $j: (Q, q_0) \rightarrow (Q, q_0)$ es un *H-coinverso* si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccc} Q & \xleftarrow{\langle j, \text{id} \rangle} & Q \vee Q \xrightarrow{\langle \text{id}, j \rangle} Q \\ & \searrow e & \uparrow \nu \nearrow e \\ & & Q \end{array} \quad \text{esto es: } \langle \text{id}, j \rangle \circ \nu \simeq e \simeq \langle j, \text{id} \rangle \circ \nu$$

Decimos que Q es *H-coconmutativo* si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccc} Q \vee Q & \xleftarrow{T} & Q \vee Q \\ & \searrow \nu & \nearrow \nu \\ & & Q \end{array} \quad \text{esto es: } T \circ \nu \simeq \nu$$

donde $T: Q \vee Q \rightarrow Q \vee Q$ es la aplicación $T(q_1, q_2) = (q_2, q_1)$ para toda $(q_1, q_2) \in Q \times Q$.

Definición 1.67. Un *H-cogruppo*, es un *H-coespacio* con una *H-comultiplicación H-coasociativa* ν , y un *H-coinverso* j .

Sean (Q, q_0) y (Q', q'_0) *H-coespacios* con *H-comultiplicaciones* ν y ν' respectivamente. Decimos que una aplicación punteada continua $k: (Q', q'_0) \rightarrow (Q, q_0)$ es un *H-cohomomorfismo* si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía:

$$\begin{array}{ccc} Q \vee Q & \xleftarrow{\nu} & Q \\ k \vee k \uparrow & & \uparrow k \\ Q' \vee Q' & \xleftarrow{\nu'} & Q' \end{array} \quad \text{esto es: } \nu \circ k \simeq k \vee k \circ \nu'$$

Finalmente el siguiente resultado, es el análogo al Teorema 1.64.

Teorema 1.68. Si (Q, q_0) es un *H-cogruppo*, con *H-comultiplicación* ν , y *H-coinverso* j , entonces para todo espacio punteado (X, x_0) , el conjunto $[Q, X]_*$ se le puede dar una estructura de grupo, donde el producto de dos clases de homotopía $[f] * [g]$ es la clase $[fg] := [\Delta' \circ (f \vee g) \circ \nu]$, donde $\Delta': X \vee X \rightarrow X$ es la aplicación doblado definida por $\Delta'(x, x_0) = x = \Delta'(x_0, x)$. La identidad en $[Q, X]_*$ es la clase de homotopía de $[e]$, y el inverso de una clase $[f]$ es la clase $[f]^{-1} = [f \circ j]$.

Si además ν es *H-coconmutativo*, entonces $[Q, X]_*$ es un grupo abeliano. Más aún, si $k: (Q', q'_0) \rightarrow (Q, q_0)$ es un *H-cohomomorfismo* de *H-coespacios*, entonces para todo espacio topológico Y , tenemos que la aplicación

$$k_*: [Q, Y]_* \rightarrow [Q', Y]_*$$

es un homomorfismo de grupos.

1.3.4. Suspensiones

Un ejemplo de un H -cogruppo, está dado por la suspensión reducida de un espacio de la Definimos 1.50.

Notemos que la suspensión reducida de un espacio X tiene estructura de H -cogruppo, si definimos la H -comultiplicación $\nu: \Sigma X \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ de la siguiente manera:

$$\nu(x \wedge t) = \begin{cases} (x \wedge 2t, \tilde{x}_0), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (\tilde{x}_0, x \wedge (2t - 1)), & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Esta aplicación tiene el efecto de aplastar el ecuador, tal como se muestra en la Figura 1.11.

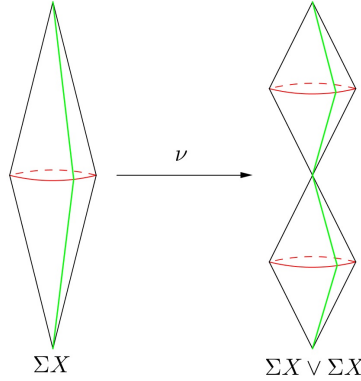


Figura 1.11: Efecto de la aplicación ν a un espacio topológico X .

Finalmente, el H -coinverso en ΣX , está dado por la aplicación $j: \Sigma X \rightarrow \Sigma X$ definida por $j(x \wedge t) = x \wedge (1 - t)$. Por lo tanto, para cada espacio punteado (X, x_0) , la suspensión reducida ΣX es un H -cogruppo. Entonces aplicando el Teorema 1.68, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.69. *Para todo espacio punteado (Y, y_0) , el conjunto de clases de homotopia $[\Sigma X, Y]_*$ es un grupo. Si $g: Y' \rightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces la aplicación inducida*

$$g_*: [\Sigma X, Y']_* \rightarrow [\Sigma X, Y]_*$$

es un homomorfismo de grupos. Finalmente, si $f: X \rightarrow X'$ es una aplicación punteada, entonces la aplicación $\Sigma f: \Sigma X \rightarrow \Sigma X'$ es un H -cohomomorfismo, lo cual implica que

$$(\Sigma f)^*: [\Sigma X', Y]_* \rightarrow [\Sigma X, Y]_*$$

es un homomorfismo de grupos.

Los funtores Ω y Σ son ejemplos de *funtores adjuntos*, es decir, para espacios topológicos punteados (X, x_0) y (Y, y_0) existe una biyección

$$M_*(\Sigma X, Y) \longleftrightarrow M_*(X, \Omega Y)$$

Esta biyección surge del Teorema de Correspondencia Exponencial (Teorema 1.30), y si $g: X \rightarrow \Omega Y$ entonces definimos $g': \Sigma X \rightarrow Y$ como $g'(x \wedge t) = g(x)(t)$ para $x \in X$ y $t \in [0, 1]$.

Esta biyección pasa a ser un isomorfismo a los conjuntos de clases de homotopia como se muestra a continuación.

Proposición 1.70. *Sea (X, x_0) (Y, y_0) espacios topológicos punteados con (X, x_0) compacto y de Hausdorff, entonces los grupos $[\Sigma X, Y]$ y $[X, \Omega Y]_*$ son isomorfos*

Demostración. Recordemos que una homotopía $G: X \times I \rightarrow Y$ en la categoría de espacio topológicos punteados, manda $x_0 \times I$ a y_0 . Podemos indentificar los espacios $\Sigma(X \times I/x_0 \times I)$ y $\Sigma X \times I/x_0 \times I$ mediante el homeomorfismo

$$(x, t) \wedge t' \longleftrightarrow (x \wedge t', t)$$

entonces existe una correspondencia entre las homotopías $F: X \times I/x_0 \times I \rightarrow \Omega Y$ y las homotopías $F': \Sigma X \times I/x_0 \times I \rightarrow Y$. Por lo tanto, la equivalencia anterior da origen a una equivalencia

$$[\Sigma X, Y] \longleftrightarrow [X\Omega Y]$$

tal que si las aplicaciones $g: X \rightarrow \Omega Y$ y $g': \Sigma X \rightarrow Y$ están relacionadas por $g'(x \wedge t) = g(x)(t)$, entonces $[g]$ y $[g']$ coinciden. \square

Nota 1.71. La proposición anterior se sigue cumpliendo para dimensiones más altas, esto es

$$[\Sigma^n X, Y]_* \cong [X, \Omega^n Y]_*$$

Teorema 1.72. *Sea G un conjunto equipado con dos multiplicaciones $*$ y $'$*

1. $*$ y $'$ tienen un elemento identidad bilateral en común.
2. $*$ y $'$ son mutuamente distributivas.

Entonces $$ y $'$ son iguales, así como ser tanto conmutativas y asociativas.*

Demostración. Tomemos x, y, z y w en G , y sea $e \in G$ la identidad. Por hipótesis tenemos que $e * x = x * e = x = e *' x = x *' e$ y $(w * x) *' (y * z) = (w *' y) * (x *' z)$, entonces

$$x * y = (x *' e) * (e *' y) = (x * e) *' (e * y) = x *' y$$

por lo cual $*$ y $'$ coinciden. Por otro lado tenemos que

$$x * y = (e *' x) * (y *' e) = (e * y) *' (x * e) = y *' x = y * x$$

y entonces la estructura es conmutativa. Finalmente

$$x * (y * z) = (x *' e) * (y *' z) = (x * y) *' (e * z) = (x * y) * z$$

lo que implica que la estructura es asociativa. \square

Corolario 1.73. *Si W es un H-grupo y Q es un H-cogrupo, entonces $[Q, W]$ es un grupo abeliano.*

Demostración. Este corolario se sigue de notar que las dos multiplicaciones definidas en $[Q, W]$, las cuales surgen de la H-multiplicación en W y la H-comultiplicación en Q cumplen con las hipótesis del Teorema 1.72. \square

1.4. Grupos de homotopía

Ahora estamos listos para generalizar a nuestro primer invariante topológico $\pi_0(X)$, definido en la sección 1.1.3.

Sea (X, x_0) un espacio topológico punteado, entonces definimos $\pi_1(X)$, como el conjunto de componentes por trayectorias del espacio de lazos $(\Omega X, \tilde{x}_0)$ de X basados en x_0 , es decir

$$\pi_1(X) := \pi_0(\Omega X)$$

En general, definimos a $\pi_n(X)$ como el conjunto de componentes por trayectorias del n -ésimo espacio de lazos de X basados en x_0 , es decir

$$\pi_n(X) := \pi_0(\Omega^n X)$$

este espacio es llamado el n -ésimo grupo de homotopía de X .

Podemos ver otra interpretación de los grupos de homotopía $\pi_n(X)$, de la siguiente manera.

Proposición 1.74. *Sea (X, x_0) un espacio punteado, entonces*

$$\pi_n(X) = [S^n, X]_*$$

Demostración. Aplicando el Lema 1.60, tenemos que

$$\pi_n(X) = \pi_0(\Omega^n X) = [S^0, \Omega^n X]_*$$

y entonces por la Proposición 1.70, tenemos que

$$\pi_n(X) = [S^0, \Omega^n X]_* = [\Sigma^n S^0, X]_* = [S^n, X]_*$$

□

Lema 1.75. *Los grupos de homotopía $\pi_n(X)$ de un espacio topológico X , son abelianos para $n \geq 2$.*

Demostración. Por definición tenemos que $\pi_n(X) = [S^n, X]_*$, entonces por la Nota 1.8 y el Teorema 1.70 tenemos que

$$\pi_n(X) = [S^n, X]_* \cong [\Sigma S^{n-1}, X]_* \cong [S^{n-1}, \Omega X]_* \cong [\Sigma S^{n-1}, \Omega X]_*$$

Por lo cual, tenemos que $\pi_n(X)$ cumple las hipótesis del Corolario 1.73

□

Ahora, podemos generalizar la Proposición 1.24.

Proposición 1.76. *La construcción π_n es funtorial, es decir, satisface las siguientes propiedades.*

1. Si $f: X \rightarrow X$ es la identidad, entonces $f_*: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X)$ es también la identidad.
2. Si $f: X \rightarrow Y$ y $g: Y \rightarrow Z$ son aplicaciones continuas, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Z)$

3. Si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces $f_*: \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ es un isomorfismo de grupos, para $n \geq 1$.

Usando la Proposición 1.35, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.77. Si X es contraíble, entonces $\pi_n(X) = 0$ para toda $n \geq 0$.

Como \mathbb{R}^n es un espacio contraíble, entonces tenemos que

$$\pi_n(\mathbb{R}^n) = 0$$

Nota 1.78. Dados X y Y espacios topológicos, entonces $\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$. En general, para una colección de espacios conexos por trayectorias $\{X_\alpha\}$ tenemos que

$$\pi_n \left(\prod_{\alpha} X_{\alpha} \right) \cong \prod_{\alpha} \pi_n(X_{\alpha})$$

Proposición 1.79.

$$\pi_r(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } r = n; \\ 0, & \text{si } r < n \end{cases}$$

Idea de Demostración. Si $r < n$, cualquier aplicación $S^r \rightarrow S^n$ se puede deformar a una aplicación que no contenga un punto de S^n en su imagen, y entonces usamos el hecho de que la esfera sin un punto es contráctil.

Si $r = n$ no hay manera de incluir una aplicación de S^n en S^n , más que envolviendo completamente a S^n , y esta “envoltura” representa un generador del grupo $\pi_n(S^n)$. \square

Ahora, veamos una herramienta para calcular grupos de homotopía, la cual la podemos ver usando teoría de espacios cubrientes.

Definición 1.80 (Espacio Cubriente). Un *espacio cubriente* de X , es un par (E, p) donde $p: E \rightarrow X$ es una aplicación con la siguiente propiedad: Toda $x \in X$ tiene una vecindad U tal que $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de conjuntos abiertos S_i de E , cada uno de los cuales es mandado homeomorfamente a U por p . En este caso, decimos que U está *uniformemente cubierta*, los conjuntos S_i son llamados *hojas* sobre U , y la aplicación p es llamada *aplicación cubriente*. Como consecuencia tenemos:

- La fibra $p^{-1}(x)$ sobre cualquier punto $x \in X$ es discreta.
- p es un homeomorfismo local.
- p manda a E suprayectivamente en X y X tiene la topología cociente. Por lo tanto E y X tienen las mismas propiedades locales.

Ejemplo 1.81. La aplicación $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $t \mapsto e^{2\pi it}$, es una aplicación cubriente con un número infinito de hojas.

Ejemplo 1.82. La aplicación $S^1 \rightarrow S^1$ dada por $z \mapsto z^n$, para $n \in \mathbb{Z}$ fijo, es una aplicación cubriente con n hojas.

Ejemplo 1.83. La aplicación canónica $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$, es una aplicación cubriente con dos hojas.

Nota 1.84. Decimos que un espacio topológico X es *simplemente conexo*, si $|\pi_0(X)| = 1$ y $\pi_1(X) = \{0\}$. Un espacio cubriente $p: (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ es un *cubriente universal* si (E, e_0) es simplemente conexo.

Teorema 1.85. Sea $p: (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ un espacio cubriente, y $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ una aplicación arbitraria con Y localmente conexo por trayectorias y simplemente conexo. Entonces existe una única aplicación $\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (E, e_0)$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} & & (E, e_0) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0) \end{array}$$

Demostración. El teorema es una consecuencia del criterio de levantamiento, ver [9, Teorema 6.1]. \square

Nota 1.86. Una aplicación continua $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induce una aplicación

$$\begin{array}{ccc} f_*: \pi_n(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_n(Y, y_0) \\ [\alpha] & \longmapsto & [f \circ \alpha] \end{array}$$

bien definida. Más aún, la aplicación f_* es un funtor de la categoría de espacios topológicos punteados, a la categoría de grupos.

Teorema 1.87. Si $p: (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ es un espacio cubriente, entonces $p_*: \pi_n(E, e_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ es un isomorfismo para $n \geq 2$.

Demostración. Recordemos que $\pi_n(E, e_0) = [(S^n, s_0), (E, e_0)]$ y $\pi_n(X, x_0) = [(S^n, s_0), (X, x_0)]$. Consideremos la aplicación inducida $p_*: \pi_n(E, e_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ definida como $[f] \mapsto [p \circ f] = [f]$, entonces $\tilde{f}: (S^n, s_0) \rightarrow (E, e_0)$ y $f: (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$. Notemos que p_* es inyectiva ya que, si $p_*([f]) = p_*([g])$ entonces $[p \circ f] = [p \circ g]$, es decir $p \circ f \simeq p \circ g$ y entonces $f \simeq g$, es decir $[f] = [g]$.

Veamos que p_* es sobre. Sea $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, que p_* sea sobre es equivalente a que exista un levantamiento $\tilde{f}: (S^n, s_0) \rightarrow (E, e_0)$ de f . Por la Proposición 1.79, $\pi_n(S^n) = \{0\}$ y entonces (S^n, s_0) es simplemente conexo, por lo tanto se cumplen las hipótesis del Teorema 1.85, y queda demostrado el Teorema. \square

Corolario 1.88. Tenemos que $\pi_n(\mathbb{R}P^m) \cong \pi_n(S^m)$ para toda $m, n \geq 2$. Y $\pi_n(S^1) \cong \pi_n(\mathbb{R}) \cong \{0\}$ para $n \geq 2$.

2

Haces vectoriales

En este capítulo definiremos el concepto de *haz vectorial*, ésta es una estructura topológica en el cual en cada punto se tiene definido un espacio vectorial. Haciendo uso de nociones de Álgebra Lineal definiremos operaciones entre haces vectoriales, luego definiremos una métrica Riemanniana entre haces vectoriales. Finalmente, definiremos la variedad de Grassmann sobre un espacio vectorial, para así definir haces vectoriales universales y poder dar una clasificación entre ellos. Para referencias consultar [2], [10], [12], [15], [23], [25].

2.1. Haces vectoriales

Definición 2.1. Definimos un *haz vectorial* de rango n sobre un campo \mathbb{F} (real o complejo), como una aplicación $p: E \rightarrow B$ tal que, para cada $b \in B$ su fibra $p^{-1}(b)$ tiene una estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{F} . Además pedimos que $p: E \rightarrow B$ sea *localmente trivial*, esto es, existe una cubierta abierta de $\{U_\alpha\}$ de B y homeomorfismos $h_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^n$ tales que, para cada $b \in B$, la restricción $h_\alpha|_{p^{-1}(b)}: p^{-1}(b) \rightarrow \{b\} \times \mathbb{F}^n$ es un isomorfismo lineal, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{h_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{F}^n \\ & \searrow p & \swarrow pr_1 \\ & & U_\alpha \end{array}$$

donde pr_1 es la proyección a la primera coordenada. A los homeomorfismos h_α se les llama *trivializaciones locales* del haz vectorial, B es llamado *espacio base* y E el *espacio total*.

Nota 2.2. Denotaremos a un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ simplemente como E , para abreviar notación.

Ejemplo 2.3. El haz producto $E = B \times \mathbb{F}^n$ donde p es la proyección sobre la primera coordenada.

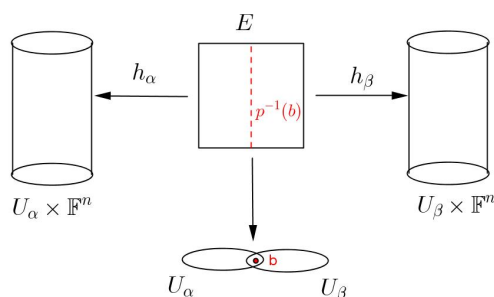
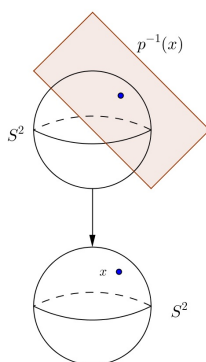


Figura 2.1: Diagrama de un haz vectorial

Ejemplo 2.4. Para haces vectoriales reales, el haz de Möbius es el haz vectorial $p: E \rightarrow S^1$ de rango 1, donde E es el espacio cociente $I \times \mathbb{R}$ bajo la identificación $(0, t) \sim (1, -t)$, $S^1 = [0, 1]/0 \sim 1$, y donde $p: I \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ es la proyección sobre el primer factor.

Ejemplo 2.5. Para haces vectoriales reales, el haz tangente sobre la esfera unitaria $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, es el haz vectorial $p: TS^n \rightarrow S^n$ donde $TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \perp v\}$, podemos pensar a v como un vector tangente a S^n si trasladamos dicho vector al punto $x \in S^n$. La aplicación $p: TS^n \rightarrow S^n$ manda $(x, v) \in TS^n$ al punto $x \in S^n$. Podemos construir las trivializaciones locales de la siguiente manera: Dado un punto $x \in S^n$ tomamos el abierto U_x como el hemisferio de la esfera que contiene al punto x y acotado por el hiperplano que pasa por el origen ortogonal a x . Definimos $h_x: p^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times p^{-1}(x) \cong U_x \times \mathbb{R}^n$ por $h_x(y, v) = (y, \pi_x(v))$ donde π_x es la proyección ortogonal al hiperplano $p^{-1}(x)$. Entonces h_x es una trivialización local puesto que π_x restringe a un isomorfismo entre $p^{-1}(y)$ y $p^{-1}(x)$ para cada $y \in U_x$.

Figura 2.2: Haz Tangente a S^2

Ejemplo 2.6. Para haces vectoriales reales, el haz normal a $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, es un haz vectorial $p: NS^n \rightarrow S^n$ donde $NS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v = tx, t \in \mathbb{R}\}$ es decir v es ortogonal a el plano tangente a S^n en x . La aplicación $p: NS^n \rightarrow S^n$ está dada por $p(x, v) = x$, y las trivializaciones locales $h_x: p^{-1}(U_x) \rightarrow U_x \times \mathbb{R}$ pueden ser obtenidas al igual que en el ejemplo anterior por proyecciones ortogonales.

Ejemplo 2.7. Sea $\mathbb{F}\mathbb{P}^n$, el n -espacio proyectivo (real ó complejo) definido como en el Ejemplo

1.5. Definimos el *haz tautológico* $p: E \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{P}^n$, donde el espacio total $E = \{(l, v) \in \mathbb{F}\mathbb{P}^n \times \mathbb{F}^{n+1} \mid v \in l\}$, y donde la proyección p está dada por $p(l, v) = l$.

Definición 2.8. Sea $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial de rango n , decimos que $p': F \rightarrow B$ es un *subhaz vectorial de rango k* , si F es un subespacio de E tal que, para cada $b \in B$, la fibra $p'^{-1}(b) \subset p^{-1}(b)$ sea un subespacio vectorial de dimensión k .

Definición 2.9. Un *morfismo* del haz vectorial $p_1: E_1 \rightarrow B_1$ al haz vectorial $p_2: E_2 \rightarrow B_2$, es un par de aplicaciones continuas $f: B_1 \rightarrow B_2$ y $\tilde{f}: E_1 \rightarrow E_2$, que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 \end{array}$$

y cuya restricción a cada fibra es una transformación lineal de $p_1^{-1}(b_1)$ a $p_2^{-1}(b_2)$.

Decimos que dos haces vectoriales $p: E \rightarrow B$ y $p': E' \rightarrow B$ sobre el mismo espacio base B son *isomorfos* si existen dos morfismos de haces vectoriales $f: E \rightarrow E'$ y $f': E' \rightarrow E$ tales que $\tilde{f} = \tilde{f}' = \text{id}_B$ y $f \circ f' = \text{id}_{E'}$, $f' \circ f = \text{id}_E$.

Definición 2.10. Decimos que un haz $p: E \rightarrow B$ es *trivial*, si es isomorfo al haz producto.

Ejemplo 2.11. Notemos que el haz normal de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es un haz trivial, puesto que es isomorfo al haz producto $S^n \times \mathbb{R}$ por el isomorfismo $(x, tx) \mapsto (x, t)$.

Por otro lado, el haz tangente a S^1 es un haz trivial, puesto que es isomorfo al haz producto $S^1 \times \mathbb{R}$ por el isomorfismo $(e^{i\theta}, ite^{i\theta}) \mapsto (e^{i\theta}, t)$, para $e^{i\theta} \in S^1$ y $t \in \mathbb{R}$.

Lema 2.12. Una aplicación continua $h: E_1 \rightarrow E_2$ entre dos haces vectoriales sobre la misma base $p_1: E_1 \rightarrow B$ y $p_2: E_2 \rightarrow B$, es un isomorfismo si manda cada fibra $p_1^{-1}(b)$ a la fibra $p_2^{-1}(b)$ por isomorfismos lineales.

Demostración. Como h manda fibras en fibras por isomorfismos lineales, entonces tenemos que h es biyectiva, definamos la inversa h^{-1} y veamos que continua. Como la continuidad es una pregunta local, podemos restringirnos a un conjunto abierto $U \subset B$ en el cual E_1 y E_2 sean triviales (es decir, existen trivializaciones locales $h_1: p_1^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{F}^n$ y $h_2: p_2^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{F}^n$). Entonces, la restricción $h: p_1^{-1}(U) \rightarrow p_2^{-1}(U)$ la podemos ver como una aplicación $h: U \times \mathbb{F}^n \rightarrow U \times \mathbb{F}^n$ definida como $h(x, v) = (x, g(x, v))$, donde $g: U \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es una aplicación tal que $g(x, v)$ es lineal en x . Sea $\text{GL}_n(\mathbb{F})$ el espacio de transformaciones lineales invertibles de \mathbb{F}^n en sí mismo, entonces podemos ver a $g(x, v)$ como una matriz de $n \times n$ cuyas entradas dependen continuamente de x , por lo cual $g: U \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ es continua si y sólo si la aplicación

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \text{GL}_n(\mathbb{F}) \\ x & \longmapsto & g(x, -) \end{array}$$

es continua. Por lo tanto $g(x, v)$ tiene una matriz inversa $g(x, v)^{-1}$ dada por $g(x, v)^{-1} = \frac{1}{\det(g(x, v))} \text{adj}(g(x, v))$, donde $\text{adj}(g(x, v))$ es la matriz adjunta de la matriz $g(x, v)$. Por lo tanto definimos la inversa $h^{-1}(x, v) = (x, g(x, v)^{-1})$, la cual es continua. \square

2.1.1. Sistema de cociclos

Sea $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial de rango n , y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ una cubierta abierta de B , tal que existe una colección de trivializaciones locales $h_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^n$ asociadas a la cubierta.

Entonces para todo $\alpha, \beta \in \Gamma$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, definimos las *aplicaciones de transición* $h_{\alpha\beta}$ como el homeomorfismo

$$\begin{aligned} h_\alpha \circ h_\beta^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{F}^n &\longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{F}^n \\ (x, v) &\longmapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)(v)) \end{aligned}$$

donde $g_{\alpha\beta}(x) \in \text{GL}_n(\mathbb{F})$ es una transformación lineal invertible, es decir, $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{F})$ es una aplicación continua que manda cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ a una transformación lineal invertible $g_{\alpha\beta}(x)$, las cuales llamamos *cociclos*. En este caso al grupo $\text{GL}_n(\mathbb{F})$ se le conoce como *grupo estructural* del haz vectorial $p: E \rightarrow B$, y a la pareja $\{\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}, g_{\alpha\beta}\}$ le llamamos *sistema de cociclos*.

Lema 2.13. *Los cociclos satisfacen que, $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$.*

Demostración. Si $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ entonces $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)(v))$, por otro lado $h_\beta \circ h_\gamma^{-1}(x, v) = (x, g_{\beta\gamma}(x)(v))$, y entonces

$$\begin{aligned} h_\alpha \circ h_\gamma^{-1}(x, v) &= h_\alpha \circ h_\beta^{-1} \circ h_\beta \circ h_\gamma^{-1}(x, v) \\ &= h_\alpha \circ h_\beta^{-1}(x, g_{\beta\gamma}(x)(v)) \\ &= (x, g_{\alpha\beta}(x) \circ g_{\beta\gamma}(x)(v)). \end{aligned}$$

por lo tanto $h_\alpha \circ h_\gamma^{-1}(x, v) = (x, g_{\alpha\gamma}(x)(v)) = (x, g_{\alpha\beta}(x) \circ g_{\beta\gamma}(x)(v))$. \square

Esta condición es conocida como la *condición de cociclo*.

Definición 2.14. Dado un sistema de cociclos $\{\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}, g_{\alpha\beta}\}$ podemos construir un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ de la siguiente manera:

Sea $\bigsqcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha \times \mathbb{F}^n$ la unión disjunta de los $U_\alpha \times \mathbb{F}^n$ con $\alpha \in \Gamma$, y consideremos la siguiente relación: Para cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ identificamos $(x, v) \in U_\alpha \times \mathbb{F}^n$ con $(x, g_{\alpha\beta}(x)(v)) \in U_\beta \times \mathbb{F}^n$, se puede probar que esta relación es una relación de equivalencia. Definimos el espacio total E como el espacio cociente

$$E = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{F}^n / \sim$$

y definimos la proyección $p: E \rightarrow B$ como $p([x, v]) = x$, donde $[x, v]$ denota la clase de (x, v) en E , entonces se puede probar que p es un haz vectorial, el cual es llamamos el *haz vectorial determinado por el sistema de cociclos* $\{\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}, g_{\alpha\beta}\}$.

Por lo tanto, para conocer la topología de un haz vectorial, es suficiente conocer el sistema de cociclos que define a dicho haz vectorial.

Nota 2.15. Los cociclos satisfacen las siguientes propiedades, las cuales surgen de la condición de cociclo.

1. $g_{\alpha\alpha}(x) = 1 \in \text{GL}_n(\mathbb{F})$, $x \in U_\alpha$
2. $g_{\alpha\beta}(x) = g_{\beta\alpha}(x)^{-1}$, $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

2.2. Secciones

En esta sección, definiremos las *secciones* de un haz vectorial, daremos algunas propiedades de la misma, y usando unos resultados anteriores, mostraremos que un haz vectorial de rango n tiene n secciones linealmente independientes si y sólo si es trivial.

Definición 2.16. Una *sección de un haz vectorial* $p: E \rightarrow B$ es una aplicación $s: B \rightarrow E$ que asigna a cada $b \in B$ un vector $s(b) \in p^{-1}(b)$, es decir, $p \circ s = id_B$.

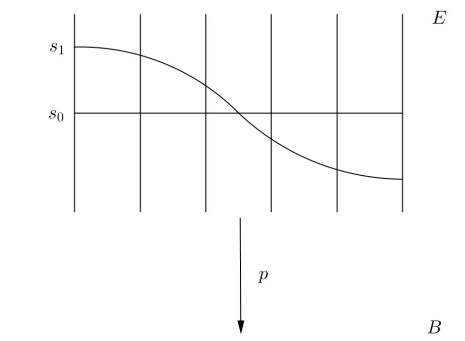


Figura 2.3: Secciones de un haz vectorial.

Notemos que cada haz vectorial tiene una sección canónica llamada *sección cero*, cuyo valor es el vector cero en cada fibra. En ocasiones identificamos la sección cero con su imagen, el cual es un subespacio de E que proyecta homeomorfamente a B por p .

Haciendo uso de la sección cero, podemos distinguir dos haces vectoriales que no son isomorfos de la siguiente manera, un isomorfismo $\tilde{f}: E_1 \rightarrow E_2$ de haces vectoriales manda la sección cero de E_1 a la sección cero de E_2 homeomorfamente, entonces los complementos de las secciones cero correspondientes a E_1 y E_2 son homeomorfos.

Ejemplo 2.17. El haz de Möbius no es isomorfo al haz producto $S^1 \times \mathbb{R}$, ésto es cierto ya que, el complemento de la sección cero en el haz de Möbius es conexo, pero el complemento de la sección cero en el producto no es conexo.

Proposición 2.18. Un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ de dimensión n es un haz trivial si y sólo si tiene n secciones s_1, \dots, s_n tal que los vectores $s_1(b), \dots, s_n(b)$ son linealmente independientes en cada fibra $p^{-1}(b)$.

Demostración. Veamos que el haz producto $B \times \mathbb{F}^n$ tiene n secciones que son linealmente independientes, en efecto, definimos las secciones $s_i: B \rightarrow E$ como $s_i(b) = (b, e_i)$ con $i = 1, \dots, n$, donde e_1, \dots, e_n es la base estándar de \mathbb{F}^n , como e_1, \dots, e_n son linealmente independientes, entonces $s_1(b), \dots, s_n(b)$ son linealmente independientes para todo $b \in B$.

Si p es un haz trivial entonces p es isomorfo al haz producto, entonces tenemos un isomorfismo lineal entre las fibras en E y las fibras en $B \times \mathbb{F}^n$, por lo cual dicho isomorfismo manda las secciones linealmente independientes del haz producto en secciones linealmente independientes del haz trivial.

Recíprocamente si tenemos n secciones linealmente independientes s_1, \dots, s_n , definimos

$$\begin{aligned} h: B \times \mathbb{F}^n &\longrightarrow E \\ (b, t_1, \dots, t_n) &\longmapsto \sum_i t_i s_i(b) \end{aligned}$$

notemos que h es una aplicación continua ya que su composición con una trivialización $p^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ es continua. Esta aplicación nos define un isomorfismo lineal en cada fibra, y entonces usando el Lema 2.12, h es un isomorfismo de haces vectoriales. \square

Definición 2.19. Un *grupo de Lie*, es una variedad diferenciable (real o compleja) que además tiene una estructura de grupo con una operación $\mu: G \times G \rightarrow G$, tal que μ y la inversa $g \mapsto g^{-1}$ son diferenciables (o analíticas en el caso complejo).

Definición 2.20. Decimos que una variedad diferenciable es *paralelizable*, si su haz tangente es isomorfo al haz producto.

Proposición 2.21. Si G es un grupo de Lie, entonces el haz tangente $\pi: TG \rightarrow G$ es trivial.

Demostración. Supongamos que $\dim(G) = n$, y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de $T_e G$. Definimos la traslación izquierda L_g como

$$\begin{aligned} L_g: G &\longrightarrow G \\ g' &\longmapsto g \cdot g' \end{aligned}$$

Entonces, definimos s_1, \dots, s_n secciones del haz tangente $\pi: TG \rightarrow G$ como

$$\begin{aligned} s_i: G &\longrightarrow TG \\ g &\longmapsto (dL_g)_e e_i \end{aligned}$$

donde $(dL_g)_e e_i$ es la diferencial de L_g en el punto $e \in G$ aplicado a $e_i \in T_e G$. Notemos que las secciones s_i son continuas ya que la diferencial es continua. Dado que $(dL_g)_e$ es un isomorfismo lineal, entonces $(dL_g)_e$ manda la base del espacio tangente $T_e G$ a una base del espacio tangente $T_g G$, lo cual implica que las secciones s_1, \dots, s_n son linealmente independientes. \square

Corolario 2.22. Todo grupo de Lie es paralelizable.

Corolario 2.23. S^1 y S^3 son paralelizables.

Demostración. Podemos ver a S^1 como los números complejos de norma igual a 1 bajo la multiplicación de números complejos, lo cual hace de S^1 un grupo de Lie, entonces S^1 es paralelizable.

Por otro lado, podemos ver a S^3 como el conjunto de cuaternios con norma igual a 1 bajo la multiplicación de cuaternios, lo cual hace de S^3 un grupo de Lie, entonces S^3 es paralelizable. \square

2.3. Operaciones con haces vectoriales

Hemos visto que los haces vectoriales son estructuras que definen un espacio vectorial en cada fibra, por lo cual podemos usar nociones de Álgebra Lineal para definir operaciones entre haces vectoriales los cuales operan en cada fibra. En la Definición 2.14, vimos que para conocer la topología de un haz vectorial, es suficiente conocer el sistema de cociclos que define a dicho haz vectorial. Por lo cual, para ver la topología en las siguientes operaciones de haces vectoriales, veremos cuales son los sistemas de cociclos que definen a dichos haces vectoriales.

Cabe mencionar que en esta sección, no definiremos las operaciones en espacios vectoriales para no perder la continuidad del trabajo. Para ver como se definen las operaciones en espacios vectoriales pueden consultar el Apéndice A.

2.3.1. Restricción y haz vectorial dual

Definición 2.24. Dados $p_1: E_1 \rightarrow B_1$ y $p_2: E_2 \rightarrow B_2$ haces vectoriales, definimos el *producto de haces vectoriales* como el haz vectorial $p_1 \times p_2: E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2$, donde la fibra está dada por el producto de las fibras $p_1^{-1}(b_1) \times p_2^{-1}(b_2)$ con $b_1 \in B_1$ y $b_2 \in B_2$. Las trivializaciones del producto de haces vectoriales es el producto de las trivializaciones de p_1 y p_2 .

Definición 2.25. Dado un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ de rango n y un subespacio $A \subset B$, entonces $p|_A: p^{-1}(A) \rightarrow A$ es un haz vectorial de rango n llamado el *haz vectorial E restringido a A* .

Si $p: E \rightarrow B$ es un haz vectorial con sistema de cociclos $\{\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}, g_{\alpha\beta}\}$, entonces $\{\{U_\alpha \cap A\}_{\alpha \in \Gamma}, g_{\alpha\beta}|_{U_\alpha \cap U_\beta \cap A}\}$ es un sistema de cociclos para el haz vectorial restringido a A .

Definición 2.26. Sea $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial de rango n . El *haz vectorial dual $p^*: E^* \rightarrow B$* , es el haz vectorial cuyas fibras son los espacios vectoriales duales de las fibras de $p: E \rightarrow B$.

En el Apéndice A.2, se puede ver que una transformación lineal $f: V \rightarrow W$ entre dos espacios vectoriales, induce una aplicación $f^*: W^* \rightarrow V^*$ entre los espacios duales. Más aún, si fijamos bases para V y W la matriz asociada a f^* es la matriz transpuesta asociada a f .

Si $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial con sistema de cociclos $\{\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}, g_{\alpha\beta}\}$, entonces podemos escoger una base para \mathbb{F}^n , y así ver a $g_{\alpha\beta}(x)$ como una matriz en $\text{GL}_n(\mathbb{F})$, y entonces $\{\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}, (g_{\alpha\beta}^t)^{-1}\}$ define un sistema de cociclos para el haz vectorial dual $p^*: E^* \rightarrow B$, donde $g_{\alpha\beta}^t(x)$ denota a la matriz transpuesta de $g_{\alpha\beta}(x)$.

2.3.2. Haz vectorial inducido y suma de Whitney

Proposición 2.27. Dada una aplicación $f: A \rightarrow B$ y un haz vectorial $p: E \rightarrow B$, existe un haz vectorial $p': f^*E \rightarrow A$ y una aplicación $f': f^*E \rightarrow E$ tal que $p \circ f' = f \circ p'$. Además, f^*E tiene la siguiente propiedad universal: Si $\pi: E' \rightarrow A$ es un haz vectorial tal que $p \circ \tilde{f} = f \circ \pi$, entonces existe un único morfismo de haces $\rho: E' \rightarrow f^*E$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{f} & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 E' & \xrightarrow{\rho} & f^*E & \xrightarrow{f'} & E \\
 & \searrow \pi & \downarrow p' & & \downarrow p \\
 & & A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Más aún, $p': f^*E \rightarrow A$ es único con respecto a esta propiedad.

Demostración. Definamos el siguiente conjunto $f^*E = \{(a, e) \in A \times E \mid f(a) = p(e)\}$ y una proyección $p': f^*E \rightarrow A$ definida por $p'(a, e) = a$, notemos que la fibra de un elemento $a \in A$ bajo p' , está dada por $p'^{-1}(a) = \{(a, e) \in A \times E \mid e \in p^{-1}(f(a))\}$. Definimos una aplicación $f': f^*E \rightarrow E$ como $f'(a, e) = e$, entonces tenemos que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc}
 f^*E & \xrightarrow{f'} & E \\
 p' \downarrow & & \downarrow p \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

en efecto, para $(a, e) \in f^*E$ tenemos que $p \circ f'(a, e) = p(e) = f(a) = f \circ p'(a, e)$.

Veamos que p' es localmente trivial. Tomemos $a \in A$, y consideremos el punto $f(a) \in B$ como $p: E \rightarrow B$ es un haz vectorial, entonces para $f(a) \in B$ existe una vecindad $U_{f(a)} \subset B$ y un homeomorfismo $h_{f(a)}: p^{-1}(U_{f(a)}) \rightarrow U_{f(a)} \times \mathbb{F}^n$. Sea $V_a = f^{-1}(U_{f(a)})$ un abierto en A , construyamos un homeomorfismo

$$h'_a: p'^{-1}(V_a) \rightarrow V_a \times \mathbb{F}^n$$

como sigue, notemos que $p'^{-1}(V_a) = \{(a', e) \in V_a \times E \mid f(a') = p(e)\}$, entonces para un punto $(a', e) \in p'^{-1}(V_a)$ tenemos que $f'(a', e) = e \in p^{-1}(U_{f(a)})$, ahora usando el homeomorfismo $h_{f(a)}$ tenemos que $h_{f(a)}(e) = (f(a), v)$ para algún $v \in \mathbb{F}^n$, si pr_2 es la proyección sobre la segunda coordenada definimos a h'_a como $h'_a(a', e) = (a', pr_2 \circ h_{f(a)} \circ f'(a', e)) = (a', v)$, donde $v \in \mathbb{F}^n$ esta descrito anteriormente, y entonces se cumple que $pr_1 \circ h'_a(a', e) = pr_1(a', v) = a' = p'(a', e)$ lo que implica que p' es localmente trivial.

Por otro lado, definimos el morfismo de haces $\rho: E' \rightarrow f^*E$ como $\rho(e') = (\pi(e'), \tilde{f}(e'))$, y veamos que ρ manda la fibra $\pi^{-1}(a)$ a la fibra $p'^{-1}(a)$ para toda $a \in A$. En efecto, si $e' \in \pi^{-1}(a)$ entonces $\rho(e') = (\pi(e'), \tilde{f}(e')) = (a, \tilde{f}(e'))$ y por definición $\tilde{f}(e') \subset p^{-1}(f(a))$, lo cual implica que $\rho(e') \in p'^{-1}(a)$. Notemos que ρ es único por construcción.

Mostremos que $p': f^*E \rightarrow A$ es único con respecto a esta propiedad. Supongamos que existe otro haz vectorial $q: f^*E' \rightarrow A$ que cumple con la propiedad universal, entonces por la propiedad universal de f^*E , existe un único morfismo de haces $\rho: f^*E' \rightarrow f^*E$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{f} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ f^*E' & \xrightarrow{\rho} & f^*E & \xrightarrow{f'} & E \\ & \searrow q & \downarrow p' & & \downarrow p \\ & & A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Por otro lado, por la propiedad universal de f^*E' , existe un único morfismo de haces $\psi: f^*E \rightarrow f^*E'$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} & & \tilde{f} & & \\ & & \curvearrowright & & \\ f^*E' & \xleftarrow{\psi} & f^*E & \xrightarrow{f'} & E \\ & \searrow q & \downarrow p' & & \downarrow p \\ & & A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Entonces, por la unicidad de ρ y ψ , tenemos que $\rho \circ \psi = \text{id}_{f^*E}$ y $\psi \circ \rho = \text{id}_{f^*E'}$, lo cual implica que $\rho: f^*E' \rightarrow f^*E$ es un isomorfismo de haces. \square

Definición 2.28. Al haz vectorial $p': f^*E \rightarrow A$ construido arriba, se le conoce como el *haz vectorial inducido* de p bajo la aplicación f .

Ejemplo 2.29. Sea $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial y sea A un subespacio de B , entonces el haz restringido al subespacio A , definido por $p|_A: p^{-1}(A) \rightarrow A$ puede ser visto como el haz

inducido por la inclusión $A \hookrightarrow B$.

$$\begin{array}{ccc} i^*E = p^{-1}(A) & \hookrightarrow & E \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{i} & B \end{array}$$

Definición 2.30. Sean $p_1: E_1 \rightarrow B$ y $p_2: E_2 \rightarrow B$ haces vectoriales, y consideremos el producto de haces $p_1 \times p_2: E_1 \times E_2 \rightarrow B \times B$, entonces definimos la *suma de Whitney o suma directa* como el haz inducido del producto de haces bajo la aplicación diagonal $\Delta: B \rightarrow B \times B$ definida como $\Delta(b) = (b, b)$.

$$\begin{array}{ccc} E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \\ p' \downarrow & & \downarrow p_1 \times p_2 \\ B & \xrightarrow{\Delta} & B \times B \end{array}$$

Nota 2.31. Por definición, la suma directa de dos haces vectoriales $p_1: E_1 \rightarrow B$ y $p_2: E_2 \rightarrow B$ es el haz vectorial $p: E_1 \oplus E_2 \rightarrow B$ donde $E_1 \oplus E_2 = \{(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(e_1) = p_2(e_2)\}$, y donde la proyección p está definida como $p(e_1, e_2) = p_1(e_1) = p_2(e_2)$. La fibra de esta proyección es la suma directa de las fibras de E_1 y E_2 vistos como espacios vectoriales.

Notemos que la suma directa de dos haces vectoriales triviales es un haz trivial, pero la suma directa de dos haces vectoriales que no son triviales puede ser trivial.

Ejemplo 2.32. Sea $p_1: NS^n \rightarrow S^n$ el haz normal de S^n , visto en el Ejemplo 2.6, y sea $p_2: TS^n \rightarrow S^n$ el haz tangente de S^n , visto en el Ejemplo 2.5. Para $n = 2$ el haz tangente no es trivial, pero la suma directa $p: NS^n \oplus TS^n \rightarrow B$ donde $E_1 \oplus E_2 = \{(x, v, tx) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \perp v\}$ es un haz trivial, por el isomorfismo $f: E_1 \oplus E_2 \rightarrow S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ definido por $f(x, v, tx) = (x, v + tx)$.

2.3.3. Producto tensorial y potencia exterior

Definición 2.33. Dados dos haces vectoriales $p_1: E_1 \rightarrow B$ y $p_2: E_2 \rightarrow B$ sobre la misma base, podemos construir el producto tensorial $p: E_1 \otimes E_2 \rightarrow B$ como el haz vectorial en el cual sus fibras son de la forma $p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b)$ para todo $b \in B$.

Si tenemos dos haces vectoriales $p_1: E_1 \rightarrow B$ de rango n y $p_2: E_2 \rightarrow B$ de rango m sobre la misma base B , con sistemas de cociclos $\{\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}, g_{\alpha\beta}^1\}$ y $\{\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}, g_{\alpha\beta}^2\}$ respectivamente, podemos escoger una base para \mathbb{F}^n , y así ver las transformaciones lineales $g_{\alpha\beta}^1, g_{\alpha\beta}^2$ como matrices $g_{\alpha\beta}^1(x) = (a_{ij}) \in \text{GL}_n(\mathbb{F})$ y $g_{\alpha\beta}^2(x) = (b_{kl}) \in \text{GL}_m(\mathbb{F})$. Entonces tenemos que $\{\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}, g_{\alpha\beta}^1 \otimes g_{\alpha\beta}^2\}$ es un sistema de cociclos para $p_1 \otimes p_2: E_1 \otimes E_2 \rightarrow B$, donde la matriz $g_{\alpha\beta}^1(x) \otimes g_{\alpha\beta}^2(x) \in \text{GL}_{nm}(\mathbb{F})$ está definida como

$$g_{\alpha\beta}^1(x) \otimes g_{\alpha\beta}^2(x) = \begin{pmatrix} a_{11}g_{\alpha\beta}^2(x) & \cdots & a_{1n}g_{\alpha\beta}^2(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}g_{\alpha\beta}^2(x) & \cdots & a_{nn}g_{\alpha\beta}^2(x) \end{pmatrix}$$

Definición 2.34. Sea $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial, podemos formar su k -ésima potencia exterior $\Lambda^k p: \Lambda^k E \rightarrow B$, como el haz vectorial en el cual sus fibras son de la forma $\Lambda^k p^{-1}(b)$, para todo $b \in B$.

Sea $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial con sistema de cociclos $\{\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}, g_{\alpha\beta}\}$, entonces podemos escoger una base para \mathbb{F}^n y así, cada transformación $g_{\alpha\beta}$ define una matriz $g_{\alpha\beta}(x)$ en $\text{GL}_n(\mathbb{F})$. Por lo tanto $\{\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}, \Lambda^k g_{\alpha\beta}\}$ es un sistema de cociclos para $\Lambda^k p: \Lambda^k E \rightarrow B$, donde la matriz $\Lambda^k g_{\alpha\beta}(x)$ esta definida como se muestra en el Apéndice A.4.

Nota 2.35. Si $p: E \rightarrow B$ es un haz vectorial de rango k , entonces el haz vectorial $\Lambda^k p$ es un haz vectorial lineal (haz vectorial de rango 1), con sistema de cociclos $\{\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}, \det(g_{\alpha\beta}(x))\}$.

2.4. Proyecciones y haces vectoriales

Supongamos que V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre \mathbb{F} , y denotemos por $\text{Hom}(V, V)$ al espacio de todos los homomorfismos lineales de V en V .

Supongamos que V tiene dimensión n y dotemos a $\text{Hom}(V, V)$ con la topología de \mathbb{F}^{n^2} la cual está dada por el isomorfismo de espacios vectoriales $V \cong \mathbb{F}^n$.

Definición 2.36. Un elemento $\pi \in \text{Hom}(V, V)$ es una *proyección* si es idempotente, es decir, si $\pi^2 = \pi$. Definamos $\text{Pr}(V)$ como el subespacio de $\text{Hom}(V, V)$ de todas las proyecciones.

Para cada espacio topológico B podemos considerar el espacio topológico $M(B, \text{Pr}(V))$ de aplicaciones continuas de B a $\text{Pr}(V)$ con la topología compacto abierta, y entonces a cada $\varphi \in M(B, \text{Pr}(V))$ podemos asociarle un subespacio E_φ definido como

$$E_\varphi = \{(x, v) \in B \times V \mid \varphi(x)v = v\}$$

y definimos una aplicación $p: E_\varphi \rightarrow B$ como la restricción de la proyección $B \times V \rightarrow B$ al espacio B .

Definición 2.37. A la aplicación $p: E_\varphi \rightarrow B$ se le conoce como el *haz vectorial asociado a φ* .

Proposición 2.38. La aplicación $p: E_\varphi \rightarrow B$ es localmente trivial y por lo tanto un haz vectorial.

Nota 2.39. Si dos topologías en un espacio vectorial (real ó complejo) de dimensión finita hacen continua a la suma y a la multiplicación por escalares, entonces ambas topologías coinciden. En el espacio $\text{Hom}(V, V)$ podemos considerar la topología inducida por la norma $\|\cdot\|: \text{Hom}(V, V) \rightarrow \mathbb{F}$ dada por $\|\alpha\| = \max\{|\alpha(v)| \mid v \in V \text{ y } |v| = 1\}$, donde $|\cdot|: V \rightarrow \mathbb{F}$ es alguna norma en V . Por lo tanto las topologías en $\text{Hom}(V, V)$ dadas por $\|\cdot\|$ ó por ser isomorfo a \mathbb{F}^{n^2} coinciden si $\dim(V) = n$.

Para mostrar la Proposición 2.38, necesitamos primero mostrar el siguiente lema.

Lema 2.40. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sean $\rho, \sigma \in \text{Pr}(V)$ y $R = \rho(V)$, $S = \sigma(V)$, si $\|\rho - \sigma\| < 1$ entonces $\rho: S \rightarrow R$ es un isomorfismo

Demostración. Sea $\alpha = \rho - \sigma$, entonces $\|\alpha\| < 1$ y denotemos por 1 a la aplicación identidad en V , notemos que $1 + \alpha$ es invertible puesto que, si existiera $\alpha \neq 0$ tal que $(1 + \alpha)v = 0$ entonces $\frac{(1+\alpha)v}{|v|} = 0$ lo cual implica que $\alpha(\frac{v}{|v|}) = \frac{-v}{|v|}$, y entonces

$$\|\alpha(v/|v|)\| = \|-v/|v|\|, \text{ lo que implica que } \|\alpha\| = 1$$

lo cual es una contradicción. Consideremos $(1+\alpha)\sigma = (1+\rho-\sigma)\sigma = \sigma + \rho\sigma - \sigma^2 = \sigma + \rho\sigma - \sigma = \rho\sigma$, por lo cual $(1+\sigma)|_S = \rho|_S$ y así $\rho|_S: S \rightarrow R$ es un monomorfismo lo que implica que $\dim(S) \leq \dim(R)$. De manera análoga, si ahora $\alpha = \sigma - \rho$ nos da que $\dim(R) \leq \dim(S)$, lo cual implica que $\dim(S) = \dim(R)$ y entonces $\rho: S \rightarrow R$ es un isomorfismo. \square

Demostración de la Proposición 2.38. Sea $p: E_\varphi \rightarrow B$ definido como antes, tomemos $b \in B$, y definamos el conjunto $U = \varphi^{-1}\{\gamma \in \text{Pr}(V) \mid \|\gamma - \varphi(b)\| < 1\}$ donde $\varphi \in \text{M}(B, \text{Pr}(V))$, puesto que $\{\gamma \in \text{Pr}(V) \mid \|\gamma - \varphi(b)\| < 1\}$ es un abierto en $\text{Pr}(V)$ y φ es continua, entonces U es un abierto en B que contiene a b .

Consideremos las aplicaciones continuas, $\tilde{\rho}: U \times V \rightarrow U \times V$, $(x, v) \mapsto (x, \varphi(b)(v))$ y $\tilde{\sigma}: U \times V \rightarrow U \times V$, $(x, v) \mapsto (x, \varphi(x)(v))$. Si fijamos $x, \tilde{\rho}, \tilde{\sigma}$ entonces se satisfacen fibra a fibra las hipótesis del Lema 2.40, y entonces existe un homeomorfismo

$$\tilde{\rho}: p^{-1}(U) \rightarrow U \times \varphi(b)V$$

este homomorfismo es lineal en cada fibra puesto que para cada $x \in U$ se tiene que $p^{-1}(x) = \varphi(x)V$. Notemos que el inverso de $\tilde{\rho}$ está dado por la restricción de $(1 + \varphi(x) - \varphi(b))^{-1}$ a $U \times (\varphi(b)V)$, el cual depende continuamente de $x \in U$, ya que la aplicación que manda cada isomorfismo en V a su inversa es continua. Por lo cual $\tilde{\rho}$ define una trivialización local para el haz $p: E_\varphi \rightarrow B$. \square

Ejemplo 2.41. Un haz vectorial asociado a la aplicación constante $k: B \rightarrow \text{Pr}(V)$ tal que $k(x) = 1_v$, para toda $x \in B$, determina un haz vectorial trivial.

Ejemplo 2.42. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto Hermitiano en \mathbb{C}^{n+1} . La aplicación $\varphi: \mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \text{Pr}(\mathbb{C}^{n+1})$ definida como

$$\varphi([z])v = \frac{\langle v, z \rangle z}{\langle z, z \rangle}$$

determina un haz vectorial $H^* \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ de dimension compleja 1 conocido como *dual del haz de Hopf*. Por definición, el haz de Hopf $H \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ es el haz dual de $H^* \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Ejemplo 2.43. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar usual en \mathbb{R}^n . La aplicación $\sigma: S^{n-1} \rightarrow \text{Pr}(\mathbb{R}^n)$ definida por $\sigma(x)v = v - \langle x, v \rangle x$ determina un haz vectorial $TS^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, el haz tangente a S^{n-1} .

Proposición 2.44. Para una aplicación $f: B' \rightarrow B$ consideramos la aplicación inducida $f^\# = \text{M}(B, \text{Pr}(V)) \rightarrow \text{M}(B', \text{Pr}(V))$ donde V es un espacio vectorial de dimension finita, dado $\varphi \in \text{M}(B, \text{Pr}(V))$ podemos considerar su haz asociado $p: E \rightarrow B$, entonces el haz vectorial asociado a $f^\#(\varphi) \in \text{M}(B', \text{Pr}(V))$ es el haz inducido $q: f^*E \rightarrow B'$

Demostración. El haz inducido $f^*E = \{(b', e) \in B' \times E \mid p(e) = f(b')\}$ y el haz asociado a $f^\#(\varphi)$ es $E' = \{(b', v) \in B' \times V \mid \varphi(f(b))v = v\}$. Definimos un isomorfismo de haces vectoriales

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\quad} & f^*E \\ & \searrow & \swarrow \\ & B' & \end{array}$$

$E' \rightarrow f^*E$ como $(b', v) \mapsto (b', (f(b'), v))$, notemos que $(b', (f(b'), v)) \in B' \times E \subset B' \times B \times V$.

Componiendo éste isomorfismo con la proyección en la segunda coordenada, obtenemos un morfismo de haces \tilde{f}

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

definido por $\tilde{f}(b', v) = (f(b'), v)$. □

2.5. Hazes vectoriales sobre espacios paracompactos

La noción de paracompacidad de los espacios topológicos nos permite, en primer lugar, definir una métrica Riemanniana (también conocido como producto interno) en un haz vectorial (que no es único), y mediante el uso de esta métrica Riemanniana, podemos definir ortogonalidad en los haces vectoriales, y así poder dar una noción de “haz inverso”. Finalmente daremos una propiedad importante de haces vectoriales, la cual no dice que los haces inducidos de un haz vectorial bajo dos funciones que sean homotópicas son isomorfos.

Una *métrica Riemanniana* en un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \oplus E \rightarrow \mathbb{F}$ que restringido a cada fibra, nos asocia una forma bilineal simétrica y definida positiva. Daremos una proposición, la cual nos da condiciones para la existencia de una métrica Riemanniana en un haz vectorial, para esto es necesario introducir el concepto de paracompacidad y partición de la unidad.

Definición 2.45. Sea X un espacio topológico y $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de X , decimos que una *partición de la unidad* subordinada a $\{U_\alpha\}$ es una colección de funciones continuas $\{\mu_\alpha: X \rightarrow [0, 1]\}$ que cumplen.

1. Para todo μ_α , existe $U_\alpha \in \{U_\alpha\}$ tal que, el soporte de μ_α esta contenido en U_α .
2. Para todo $x \in X$ existe una vecindad de x en la cual solo una cantidad finita de μ_α son distintos de cero y $\sum \mu_\alpha(x) = 1$.

Definición 2.46. Decimos que un espacio topológico X es *paracompacto*, si para toda cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ existe una subcubierta localmente finita que cubre a X .

Lema 2.47. Sea X un espacio paracompacto y sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de X , entonces existe una partición de la unidad en X subordinada a $\{U_\alpha\}$.

Demostración. La demostración de este lema la podemos encontrar en [18, Lema 41.7] □

Proposición 2.48. Sea $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial, si B es un espacio Hausdorff compacto (en general paracompacto), entonces existe una métrica Riemanniana.

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta de B en la cual E sea trivial, entonces para todo $\alpha \in A$ existe una trivialización local $h_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^n$, ahora usando $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{F}^n}$ el producto escalar en \mathbb{F}^n definamos la siguiente métrica Riemanniana

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_{U_\alpha}: (U_\alpha \times \mathbb{F}^n) \times (U_\alpha \times \mathbb{F}^n) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ ((x, v), (x, v')) &\longmapsto \langle v, v' \rangle_{\mathbb{F}^n} \end{aligned}$$

usando las trivializaciones h_α y la métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_{U_\alpha}$, podemos definir una métrica Riemanniana en cada fibra. Sea $v_1, v_2 \in p^{-1}(x) \subset p^{-1}(U_\alpha)$, definamos

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha: p^{-1}(x) \times p^{-1}(x) &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (v_1, v_2) &\longmapsto \langle h_\alpha(v_1), h_\alpha(v_2) \rangle_{U_\alpha} \end{aligned}$$

Como B es paracompacto, entonces existe una partición de la unidad $\{\mu_\alpha\}_{\alpha \in A}$ subordinada a la cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, es decir $\mu_\alpha: B \rightarrow [0, 1]$ con $\sum \mu_\alpha(x) = 1$, y con el soporte de μ_α contenido en U_α . Entonces, podemos definir la métrica Riemanniana deseado de la siguiente manera: Si $v_1, v_2 \in p^{-1}(x) \subset E$, definimos

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha(x) \langle v_1, v_2 \rangle_\alpha$$

notemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \oplus E \rightarrow \mathbb{F}$ es continua ya que es suma y producto de aplicaciones continuas, por construcción $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{p^{-1}(x)}$ nos asocia una forma bilineal simétrica y definida positiva \square

Proposición 2.49. *Si $p: E \rightarrow B$ es un haz vectorial con B un espacio paracompacto, y $E_0 \subset E$ es un subhaz vectorial, entonces existe un subhaz vectorial $E_0^\perp \subset E$ tal que $E_0 \oplus E_0^\perp \cong E$.*

Demostración. Por la Proposición 2.48 podemos escoger una métrica Riemanniana en E , sea E_0^\perp el subespacio de E en el que cada fibra consiste de todos los vectores ortogonales a vectores en E_0 . Mostraremos que la proyección natural $p': E_0^\perp \rightarrow B$ es un subhaz vectorial. Supongamos que $E = B \times \mathbb{F}^n$, y supongamos que E_0 tiene dimensión $m < n$, entonces por la Proposición 2.18 existen m secciones linealmente independientes, denotémosle como $\{s_1, \dots, s_m\}$. Ahora usando el espacio vectorial $p^{-1}(b)$ con algún $b \in B$, completamos las $\{s_{m+1}, \dots, s_n\}$ secciones faltantes. Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a las secciones $\{s_1, \dots, s_n\}$, obtenemos $\{s'_1, \dots, s'_n\}$ secciones linealmente independientes ortogonales, por lo cual podemos escribir cada $v \in p'^{-1}(b) \subset E_0^\perp$ como combinación lineal de $\{s'_1, \dots, s'_n\}$ digamos $v = \sum \alpha_i s'_i$, de ésta manera podemos definir trivializaciones locales

$$\begin{aligned} h: p'^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{F}^n \\ v &\longmapsto (p(v), \sum \alpha_i e_i) \end{aligned}$$

donde e_i es la i -ésima base estándar de \mathbb{F}^n , por lo tanto $p': E_0^\perp \rightarrow B$ es un haz vectorial, y por lo tanto usando el Lema 2.12, tenemos que $E_0 \oplus E_0^\perp$ es isomorfo a E por medio de la aplicación $(v, v') \mapsto v + v'$. \square

Un resultado importante en el estudio de haces vectoriales, es la existencia de un haz vectorial “inverso” con respecto a la suma directa. Éste resultado nos permitirá dar una estructura de grupo, a un conjunto de clases de equivalencia de haces vectoriales que definiremos en el Capítulo 3.

Para ésto, enunciaremos el lema de Urysohn, y junto con la Proposición 2.49 mostraremos éste resultado .

Lema 2.50 (Lema de Urysohn). *Si X es normal y C, D son cerrados ajenos de X , entonces existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(c) = 0$ para todo $c \in C$ y $f(d) = 1$ para todo $d \in D$.*

Demostración. La prueba de éste lema la podemos encontrar en [18, Teorema 33.1]. \square

Proposición 2.51. *Para cada haz vectorial $p: E \rightarrow B$ con B un espacio compacto Hausdorff, existe un haz vectorial $p': E' \rightarrow B$ tal que $E \oplus E'$ es un haz trivial.*

Demostración. Por la Proposición 2.49 es suficiente mostrar que E es isomorfo a un subhaz del haz producto $B \times \mathbb{F}^N$ para algún N . Como B es un espacio compacto Hausdorff entonces B es un espacio normal, ahora para cada $x \in B$ existe un abierto $U_x \subset B$ en el cual E es trivial, notemos que x y $B \setminus U_x$ son cerrados ajenos de B , por lo cual podemos aplicar el lema de Urysohn, lo cual nos da una aplicación $\varphi_x: B \rightarrow [0, 1]$ tal que $\varphi_x(c) = 0$ para todo $c \in B \setminus U_x$, y $\varphi_x(x) = 1$.

Notemos que el intervalo $(0, 1]$ es un abierto en $[0, 1]$, y como φ_x es continua tenemos que la preimagen $\varphi_x^{-1}((0, 1])$ es un abierto en B . Ahora, el conjunto $\{\varphi_x^{-1}((0, 1])\}_{x \in B}$ forma una cubierta abierta de B , como B es compacto existe una subcubierta finita que cubre a B , digamos $\{\varphi_1^{-1}, \dots, \varphi_m^{-1}\}$.

Definamos una aplicación $g_i: E \rightarrow \mathbb{F}^n$, como $g_i(v) = \varphi_i(p(v))[\pi_1 \circ h_i(v)]$, donde $h_i: p^{-1} \rightarrow U_i \times \mathbb{F}^n$ es la trivialización local correspondiente a U_i , y $\pi_i: U_i \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ la proyección a \mathbb{F}^n . Por construcción g_i es inyectiva en cada fibra, ahora definimos la aplicación $g: E \rightarrow \mathbb{F}^N$ como $v \mapsto (g_1(v), \dots, g_m(v))$ donde \mathbb{F}^N es el producto de m copias de \mathbb{F}^n , y como g_i es inyectiva en cada fibra, entonces g es inyectiva en cada fibra.

Sea $f: E \rightarrow B \times \mathbb{F}^N$ definida como $v \mapsto (p(v), g(v))$, notemos que la imagen de f es un subhaz vectorial del haz producto $B \times \mathbb{F}^N$, por lo tanto E es isomorfo a un subhaz de $B \times \mathbb{F}^N$, y entonces por la Proposición 2.49 existe un subhaz vectorial E' tal que $E \oplus E' \cong B \times \mathbb{F}^N$. \square

Un resultado importante que usaremos en capítulos posteriores, es que los haces inducidos de un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ bajo dos aplicaciones homotópicas son isomorfos, para mostrar éste resultado es necesario dar las siguientes propiedades.

Lema 2.52. *El haz vectorial $p: E \rightarrow B \times [a, b]$ es trivial si los haces restringidos*

$$p|_{B \times [a, c]}: p^{-1}(B \times [a, c]) \rightarrow B \times [a, c]$$

y

$$p|_{B \times [c, b]}: p^{-1}(B \times [c, b]) \rightarrow B \times [c, b]$$

con $c \in (a, b)$, son triviales.

Demostración. En efecto, para el haz restringido $p|_{B \times [a, c]}$ tenemos una trivialización local $h_1: p^{-1}(B \times [a, c]) \rightarrow B \times [a, c] \times \mathbb{F}^n$ tal que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(B \times [a, c]) & \xrightarrow{h_1} & (B \times [a, c]) \times \mathbb{F}^n \\ p \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ B \times [a, c] & & \end{array}$$

y para el haz restringido $p|_{B \times [c, b]}$ tenemos una trivialización local $h_2: p^{-1}(B \times [c, b]) \rightarrow B \times [c, b] \times \mathbb{F}^n$ tal que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(B \times [c, b]) & \xrightarrow{h_2} & (B \times [c, b]) \times \mathbb{F}^n \\ p \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ B \times [c, b] & & \end{array}$$

esto nos define una trivialización local para p si h_1 y h_2 coinciden en $p^{-1}(B \times \{c\})$, en un principio no tienen porque coincidir pero podemos componer h_2 con el isomorfismo $h: X \times [c, b] \times \mathbb{F}^n \rightarrow X \times [c, b] \times \mathbb{F}^n$ definido como $h((x, t), v) = ((x, c), v)$ y entonces h_1 y h_2 coinciden en $p^{-1}(B \times \{c\})$, por lo cual me definen una trivialización local para p . \square

Lema 2.53. *Dado un haz vectorial $p: E \rightarrow B \times I$ existe una cubierta abierta U_α de B tal que $p|_{U_\alpha \times I}: p^{-1}(U_\alpha \times I) \rightarrow U_\alpha \times I$ es trivial.*

Demostración. En efecto, para todo $x \in B$ podemos escoger un número finito de vecindades $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_k}\}$ en B y una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ del $[0, 1]$ tal que el haz restringido a $U_{x_i} \times [t_{i-1}, t_i]$ es trivial, puesto que $[0, 1]$ es compacto. Entonces usando el Lema 2.52, tenemos que el haz vectorial $p|_{U_\alpha \times I}$ donde $U_\alpha = U_{x_1} \cap \dots \cap U_{x_k}$ es trivial. \square

Lema 2.54. *Dada una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de un espacio paracompacto B , existe una cubierta abierta numerable $\{V_n\}$ tal que cada V_n es una unión disjunta de abiertos cada uno contenido en algún U_α , y existe una partición de la unidad con soporte en V_n .*

Demostración. La demostración de este lema lo podemos encontrar en [10, Lema 1.21]. \square

Éstas propiedades nos permiten enunciar la siguiente proposición, la cual nos dará las herramientas necesarias para mostrar el resultado deseado.

Proposición 2.55. *Sea $p: E \rightarrow B \times I$ un haz vectorial con B paracompacto, entonces las restricciones sobre $B \times \{1\}$, $B \times \{0\}$ son isomorfismos.*

Demostración. Por el Lema 2.53, existe U_α una cubierta abierta de B en la cual E es trivial sobre $U_\alpha \times I$. Mostremos primero la proposición para B compacto Hausdorff, entonces como B es compacto existe una subcubierta finita $\{U_1, \dots, U_m\}$ que cubren a B . De igual manera que la Proposición 2.51 existe una partición de la unidad $\{\mu_i\}$ donde el soporte de μ_i está contenido en U_i .

Sea $\psi_i = \mu_1 + \dots + \mu_i$, notemos que $\psi_0 = 0$ y $\psi_m = 1$, y sea χ_i la gráfica de ψ_i , es decir, $(x, \psi_i(x)) \in X \times I$, entonces si consideramos el haz restringido $p_i: E_i \rightarrow \chi_i$ donde $E_i = p^{-1}(\chi_i)$ podemos notar que es trivial sobre $U_i \times I$. Entonces podemos considerar la proyección natural $\chi_i \rightarrow \chi_{i-1}$ la cual induce un isomorfismo $h_i: E_i \rightarrow E_{i-1}$, por lo tanto la composición $h = h_1 \circ h_2 \circ \dots \circ h_m$ es un isomorfismo entre el haz restringido $p|_{B \times \{1\}}$ y el haz restringido $p|_{B \times \{0\}}$.

Ahora mostremos la proposición para B paracompacto. Por el Lema 2.54, dada la cubierta U_α , existe una subcubierta $\{V_n\}$ numerable que cubre a B , tal que V_n es unión disjunta de abiertos U_α , como en el caso anterior existe una partición de la unidad $\{\mu_n\}$ con soporte contenido en algún V_n , por lo cual el haz restringido $p|_{V_i \times I}$ es trivial.

Sea $\psi_i = \mu_1 + \dots + \mu_i$, y sea χ_i la gráfica de ψ_i , entonces si consideramos el haz restringido $p_i: E_i \rightarrow \chi_i$ donde $E_i = p^{-1}(\chi_i)$ podemos construir un isomorfismo $h_i: E_i \rightarrow E_{i-1}$ como antes, por lo tanto la composición numerable $h = h_1 \circ h_2 \circ h_3 \circ \dots$ está bien definida y es un isomorfismo entre el haz restringido $p|_{B \times \{1\}}$ y el haz restringido $p|_{B \times \{0\}}$, puesto que para cada $x \in B$ solo un número finito de μ_i son distinto de cero, por lo cual existe una vecindad de x en la cual solo un número finito de h_i no son la identidad. \square

Teorema 2.56. *Sea $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial, y sean $f_0, f_1: A \rightarrow B$ dos aplicaciones homotópicas con A compacto Hausdorff (o en general paracompacto), entonces los haces inducidos f_0^*E, f_1^*E son isomorfos.*

Demostración. Como f_0, f_1 son aplicaciones homotópicas, entonces existe una homotopía $F: A \times I \rightarrow B$ tal que $F|_{A \times \{0\}} = f_0$ y $F|_{A \times \{1\}} = f_1$. Ahora, podemos construir el haz inducido F^*E de $p: E \rightarrow B$ bajo la homotopía F , como A es compacto Hausdorff (o en general paracompacto) entonces por la Proposición 2.55 tenemos que las restricciones $F^*E|_{A \times \{0\}} = f_0^*E$ y $F^*E|_{A \times \{1\}} = f_1^*E$ son isomorfismos. \square

2.6. Variedades de Grassmann y haces universales

En esta sección introduciremos el concepto de variedad de Grassmann y variedad de Stiefel, las cuales utilizaremos para construir el haz vectorial universal de rango k , el cual nos permite clasificar haces vectoriales sobre una base fija.

Definición 2.57. Sea B un espacio topológico paracompacto. Denotamos por $\text{Vect}_k^{\mathbb{F}}(B)$ el conjunto de clases de isomorfismos de haces vectoriales sobre \mathbb{F} de rango k , sobre un espacio base B .

Corolario 2.58. Si $f: A \rightarrow B$ es una equivalencia homotópica de espacios paracompactos, entonces f induce una biyección $f^*: \text{Vect}_k^{\mathbb{F}}(B) \rightarrow \text{Vect}_k^{\mathbb{F}}(A)$ donde $f([E]) = [f^*E]$.

Demostración. Como f es una equivalencia homotópica, entonces existe $g: B \rightarrow A$ tal que $f \circ g \simeq \text{id}_B$ y $g \circ f \simeq \text{id}_A$, entonces por el Teorema 2.56 $f^* \circ g^* = \text{id}^* = \text{id}$ lo cual implica que g^* es inyectiva y f^* es sobre, por otro lado $g^* \circ f^* = \text{id}$ lo cual implica que f^* es inyectiva y g^* es sobre. Por lo tanto f^* es biyectiva. \square

Definiremos ahora la variedad de Grassmann y la variedad de Stiefel asociadas a un espacio vectorial V .

Definición 2.59. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{F} , definimos la *variedad de Grassmann* como $G_n(V) = \{W \subset V \mid W \text{ es subespacio lineal, } \dim(W) = n\}$. Sea $\text{Mon}(\mathbb{R}^n, V)$ el subconjunto de $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, V)$ cuyos elementos son monomorfismos, equipamos este con la topología del subespacio. Entonces tenemos una aplicación sobreyectiva $q: \text{Mon}(\mathbb{R}^n, V) \rightarrow G_n(V)$ definida como $\alpha \mapsto \alpha(\mathbb{R}^n)$. Así podemos darle a $G_n(V)$ la topología cociente.

Definición 2.60. Definimos la *variedad de Stiefel* de k -marcos ortonormales en \mathbb{F}^n , como $V_k(\mathbb{F}^n) = \{(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{F}^n \times \dots \times \mathbb{F}^n \mid \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\}$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en \mathbb{F}^n y δ_{ij} es la delta de Kronecker. Equipamos a $V_k(\mathbb{F}^n)$ con la topología del subespacio de \mathbb{F}^{nk} .

Notemos que de manera natural, podemos definir una aplicación de $V_k(\mathbb{F}^n)$ a $G_k(\mathbb{F}^n)$ que manda cada k -marco ortonormal a su subespacio generado.

$$\begin{aligned} p': V_k(\mathbb{F}^n) &\longrightarrow G_k(\mathbb{F}^n) \\ (v_1, \dots, v_k) &\longmapsto \langle v_1, \dots, v_k \rangle. \end{aligned}$$

Para definir el haz vectorial universal, es necesario definir el espacio $E_n(\mathbb{F}^n) = \{(l, v) \in G_n(\mathbb{F}^k) \times \mathbb{F}^k \mid v \in l\}$.

Lema 2.61. La proyección $p: E_n(\mathbb{F}^k) \rightarrow G_n(\mathbb{F}^k)$ definida como $p(l, v) = l$, es un haz vectorial.

Demostración. Sea $l \in G_n(\mathbb{F}^k)$, y sea $\pi_l: \mathbb{F}^k \rightarrow l$ la proyección ortogonal, definamos el conjunto $U_l = \{l' \in G_n(\mathbb{F}^k) \mid \dim(\pi_l(l')) = n\}$, notemos que $l \in U_l$, mostraremos que U_l es

un abierto en $G_n(\mathbb{F}^k)$ y que $h: p^{-1}(U_l) \rightarrow U_l \times l$ definido como $h(l', v) = (l', \pi_l(v))$ es una trivialización local de $E_n(\mathbb{F}^k)$.

Para ver que U_l es un abierto consideramos la aplicación $p': V_k(\mathbb{F}^k) \rightarrow G_k(\mathbb{F}^k)$ definida arriba, y veamos que $p'^{-1}(U_l)$ es un abierto en $V_n(\mathbb{F}^k)$, notemos que $p'^{-1}(U_l)$ consiste de todos los marcos ortonormales v_1, \dots, v_n tal que $\pi_l(v_1), \dots, \pi_l(v_n)$ sean linealmente independientes. Sea A la matriz de π_l con respecto a la base estándar en \mathbb{F}^n y alguna base fija en l , la condición sobre v_1, \dots, v_n es entonces que la matriz $n \times n$ con columnas Av_1, \dots, Av_n tenga determinante distinto de cero, este determinante nos define una aplicación continua $\rho: V_n(\mathbb{F}^k) \rightarrow \mathbb{F}$ en la cual $U_l = \rho^{-1}(\mathbb{F} \setminus \{0\})$, por lo cual U_l es abierto en $V_n(\mathbb{F}^k)$.

Ahora, por construcción, la aplicación h es biyectiva, ahora notemos que h tiene una inversa definida como $h^{-1}(l', w) = (l', (\pi_l|_{l'})^{-1}(w))$ las cuales son continuas puesto que π_l es continua y un isomorfismo local. \square

Nota 2.62. Al haz vectorial $p: E_n(\mathbb{F}^k) \rightarrow G_n(\mathbb{F}^k)$ se le conoce como *haz vectorial universal*.

Podemos notar que la inclusión $\mathbb{F}^k \subset \mathbb{F}^{k+1} \subset \mathbb{F}^{k+2} \subset \dots$ induce una inclusión en sus variedades de Grassmann $G_n(\mathbb{F}^k) \subset G_n(\mathbb{F}^{k+1}) \subset G_n(\mathbb{F}^{k+3}) \subset \dots$, entonces podemos definir $G_n(\mathbb{F}^\infty) = \bigcup_k G_n(\mathbb{F}^k)$ el conjunto de todos los subespacios vectoriales de dimensión n en \mathbb{F}^∞ . Podemos dar a $G_n(\mathbb{F}^\infty)$ la topología débil, en la cual un conjunto es abierto en $G_n(\mathbb{F}^\infty)$ si y sólo si éste intersecta cada $G_n(\mathbb{F}^k)$ en un conjunto abierto. De igual manera podemos definir $E_n(\mathbb{F}^\infty) = \bigcup_k E_n(\mathbb{F}^k)$ y dotar también con la topología débil

Recordemos de la Sección 1.1.5, que denotamos por $[X, Y]$ al conjunto de clases de homotopía de aplicaciones $f: X \rightarrow Y$.

Teorema 2.63. Si B es un espacio paracompacto, entonces la aplicación $[B, G_n(\mathbb{F}^\infty)] \rightarrow \text{Vect}_n^{\mathbb{F}}(B)$ definida como $[f] \mapsto f^* E_n(\mathbb{F}^\infty)$ es biyectiva.

Éste teorema nos permite clasificar haces vectoriales sobre una base fija, por clases de homotopía de funciones en $G_n(\mathbb{F}^\infty)$, por lo cual al espacio $G_n(\mathbb{F}^\infty)$ se le conoce como *espacio clasificante* de haces vectoriales de rango n . Para poder mostrar éste teorema, es necesario mostrar primero la siguiente proposición.

Proposición 2.64. Sea $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial de rango n , entonces existe un isomorfismo $E \rightarrow f^* E_n(\mathbb{F}^\infty)$ si y sólo si existe $g: E \rightarrow \mathbb{F}^\infty$ lineal e inyectiva en cada fibra, (donde $f^* E_n(\mathbb{F}^\infty)$ es el haz inducido del haz universal bajo alguna aplicación $f: B \rightarrow G_n(\mathbb{F}^\infty)$ como se muestra en el diagrama).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & g & & & \\
 & & & \curvearrowright & & & \\
 E & \xrightarrow{\quad} & f^* E_n(\mathbb{F}^\infty) & \xrightarrow{\quad \tilde{f} \quad} & E_n(\mathbb{F}^\infty) & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & \mathbb{F}^\infty \\
 & \searrow p & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & B & \xrightarrow{\quad f \quad} & G_n(\mathbb{F}^\infty) & &
 \end{array}$$

Demostración. Sea $f: B \rightarrow G_n(\mathbb{F}^\infty)$, supongamos primero que existe un isomorfismo $\rho: E \rightarrow f^* E_n$, entonces $g = \pi \circ \tilde{f} \circ \rho: E \rightarrow \mathbb{F}^\infty$ donde $\pi: E_n(\mathbb{F}^\infty) \rightarrow \mathbb{F}^\infty$ es la proyección $\pi(l, v) = v$, es la una aplicación lineal e inyectiva en cada fibra.

Ahora supongamos que $g: E \rightarrow \mathbb{F}^\infty$ es una aplicación lineal e inyectiva en cada fibra, supongamos que la aplicación $f: B \rightarrow G_n(\mathbb{F}^\infty)$ está definida como $x \mapsto g \circ p^{-1}(x)$, notemos que $p^{-1}(x)$ es un espacio vectorial de dimensión n , por lo cual $g \circ p^{-1}(x) \subset \mathbb{F}^\infty$ es un subespacio vectorial de dimensión n .

Recordemos que $f^* E_n(\mathbb{F}^\infty) = \{(w, (l, v)) \in B \times E_n(\mathbb{F}^\infty) \mid \pi_2(l, v) = f(w)\}$, y denotemos por $\pi_2: E_n(\mathbb{F}^\infty) \rightarrow G_n(\mathbb{F}^\infty)$, el haz universal definido por $(l, v) \mapsto l$. Definamos $\rho: E \rightarrow f^* E_n(\mathbb{F}^\infty)$ como $e \mapsto (p(e), h(e))$ donde $h(e) = (f \circ p(e), g(e))$, notemos que ρ esta bien definida puesto que $f \circ p(e) = \pi_2(f \circ p(e), g(e)) = f \circ p(e)$ y como además manda fibras en fibras por isomorfismos lineales entonces ρ es un isomorfismo. \square

Demostración del Teorema 2.63. Mostremos primero que la aplicación es sobreyectiva, sea $p: E \rightarrow B$ un haz vectorial de rango n , y sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta que trivializa a B , como B es paracompacto entonces para ésta cubierta existe una partición de la unidad $\{\mu_\alpha\}$, con soporte de μ_α contenido en U_α , si denotamos por $h_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^n$ a las trivializaciones locales de p , entonces podemos definir la aplicación $g_\alpha: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{F}^n$ como la composición $g_\alpha = \pi \circ h_\alpha$ donde $\pi: U_\alpha \times \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$.

Consideremos la aplicación $(\mu_\alpha \circ p)g_\alpha: E \rightarrow \mathbb{F}^n$ definida como $v \mapsto \mu_\alpha(p(v))g_\alpha(v)$, y notemos que $(\mu_\alpha \circ p)g_\alpha$ es cero fuera de $p^{-1}(U_\alpha)$ y cerca de un punto en $p^{-1}(U_\alpha)$ existe sólo un número finito de μ_α que no son cero. Por lo cual podemos definir una aplicación $E \rightarrow \mathbb{F}^\infty = \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \times \dots$ cuyas coordenadas están dadas por $(\mu_\alpha \circ p)g_\alpha$, la cual es inyectiva en cada fibra puesto que g_α es inyectiva.

Ahora mostremos que es inyectiva, sean $f_0, f_1: B \rightarrow G_n(\mathbb{F}^\infty) \in [B, G_n(\mathbb{F}^\infty)]$ tal que $E \cong f_0^* E_n(\mathbb{F}^n)$ y $E \cong f_1^* E_n(\mathbb{F}^n)$, por la Proposición 2.64 tenemos que existen aplicaciones $g_0, g_1: E \rightarrow \mathbb{F}^\infty$ lineales e inyectivas en cada fibra. Ahora construiremos una homotopía g_t entre g_0 y g_1 , esto nos inducirá una homotopía $f_t = g_t(p^{-1}(x))$ entre f_0 y f_1 y queda probado el teorema.

Sea $L_t: \mathbb{F}^\infty \rightarrow \mathbb{F}^\infty$ la homotopía definida por $L_t(x_1, x_2, \dots) = (1-t)(x_1, x_2, \dots) + (x_1, 0, x_2, 0, \dots)$. Para cada t esta es una aplicación lineal, y notemos que el kernel de L_t es 0, por lo cual L_t es inyectiva. Consideremos la composición $L_t \circ g_0$, la cual mueve la imagen de g_0 un numero impar de coordenadas, y consideremos $L_t \circ g_1$ la cual mueve la imagen de g_1 un numero par de coordenadas. Entonces $L_t \circ g_0$ y $L_t \circ g_1$ son homotópicas mediante la homotopía $g_t = (1-t)L_t \circ g_0 + tL_t \circ g_1$, esta homotopía es lineal e inyectiva en cada fibra, para cada t , ya que g_0 y g_1 son lineales e inyectivas en cada fibra. \square

2.7. Hazes principales

El espacio total de un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ se puede ver como una unión disjunta de la forma

$$\bigsqcup_{b \in B} p^{-1}(b)$$

donde cada $p^{-1}(b)$ es un espacio vectorial. Cuando cambiamos la condición de ser espacio vectorial por la condición de ser un grupo, lo que obtenemos es un haz principal.

En esta sección definiremos los haces principales, y enunciaremos construcciones que nos permitan definir haces principales a partir de haces vectoriales, y viceversa.

Nota 2.65. En algunos libros se denota a un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ como una triada $\xi = (E, p, B)$, donde E es el espacio total, B el espacio base y p la proyección. Por comodidad, en esta sección usaremos ésta notación para definir haces vectoriales principales

Definición 2.66. Una quintupla $\xi = (P, \pi, B, F, G)$ es un *haz principal*, con espacio total E , espacio base B , proyección π , grupo G y fibra F , si satisface las dos siguientes propiedades:

1. La fibra F y el grupo G coinciden.

2. La acción de G en $F = G$ es por traslaciones izquierdas.

Sea $\{U_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ un sistema de cociclos de un haz principal. La propiedad 2 nos dice que para cada $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $g_{\alpha\beta}(x) \in G = F$ es la traslación izquierda $Lg_{\alpha\beta}$.

Lema 2.67. *Sea $\xi = (P, \pi, B, G, G)$ un haz principal. Entonces existe una acción derecha libre de G en P , tal que $\pi(vg) = \pi(v)$ para toda $v \in E$ y $g \in G$.*

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de B y $\{\varphi_\alpha\}$ un conjunto de trivializaciones de asociadas a la cubierta. Para cada U_α consideremos la acción derecha libre de G en $U_\alpha \times G$, definida por

$$\begin{aligned} (U_\alpha \times G) \times G &\longrightarrow U_\alpha \times G \\ ((b, a), g) &\longmapsto (b, ag) \end{aligned}$$

Esta acción induce una acción derecha libre de G en $\pi^{-1}(U_\alpha)$, definida como

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_\alpha) \times G &\longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \\ (v, g) &\longmapsto \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(v)g) \end{aligned}$$

Denotemos por $\varphi_{\alpha,x}: p^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times G$ a la trivialización φ_α restringida a la fibra $p^{-1}(x)$, y veamos que si $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, entonces $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(v)g) = \varphi_\beta^{-1}(\varphi_\beta(v)g)$. En efecto, $\varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(v)g)) = (x, (\varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1})(\varphi_{\alpha,x}(v)g))$ donde $x = \pi(v)$. Como G es asociativo, tenemos que $(\varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1})(\varphi_{\alpha,x}(v)g) = ((\varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1})(\varphi_{\alpha,x}(v)))g = \varphi_{\beta,x}(v)g$, y entonces $\varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(v)g)) = (x, \varphi_{\beta,x}(v)g)$. Por otro lado $\varphi_\beta(\varphi_\beta^{-1}(\varphi_\beta(v)g)) = (x, \varphi_{\beta,x}(v)g)$, y entonces concluimos que $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(v)g) = \varphi_\beta^{-1}(\varphi_\beta(v)g)$.

Entonces la acción $P \times G \rightarrow P$ definida por $vg = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(v)g)$ está bien definida, y es claramente una acción derecha libre de G en P , tal que $\pi(vg) = \pi(v)$. \square

Podemos ver explícitamente como está definida la proyección $\pi: P \rightarrow B$. Sea (P, π, B, G, G) un haz principal, notemos que para cada $b \in B$, $\pi^{-1}(b) \cong G$. Consideremos la acción derecha libre $P \times G \rightarrow P$ descrita en el Lema 2.67, como esta acción es libre entonces todos los subgrupos de isotropía $I_v := \{g \in G \mid vg = v\} = \{e\} \subset G$ para todo $v \in P$. Veamos que la órbita $\text{Orb}(v) = \{vg \mid g \in G\}$ de $v \in P$ es precisamente el grupo G , en efecto, si restringimos la acción de G a $\text{Orb}(v)$ tenemos que la acción restringida $\text{Orb}(v) \times G \rightarrow \text{Orb}(v)$ es una acción libre y transitiva, ésto implica que $G/I_v \cong \text{Orb}(v)$, por lo tanto $G \cong \text{Orb}(v)$.

Sea $G/P := \{\text{Orb}(v) \mid v \in P\}$ el espacio de órbitas, como $\text{Orb}(v) \cong G \cong \pi^{-1}(b)$ tenemos que $G/P \cong B$. Entonces definimos la proyección $\pi: P \rightarrow B$ como la proyección al espacio de órbitas, es decir, $\pi(v) = \text{Orb}(v)$.

Lema 2.68. *Sea (P, π, B, G, G) un haz principal, con trivializaciones $\{\varphi_\alpha\}$ asociadas a una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de B . Entonces los cociclos $g_{\beta\alpha}$ del haz, se pueden expresar como*

$$g_{\beta\alpha}(x) = \varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}(v)$$

con $v \in \pi^{-1}(x)$.

Demostración. Para cualquier $v \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ con $\pi(v) = x$, consideremos el elemento $g'_{\beta\alpha}(v) := \varphi_{\beta,x}(v)\varphi_{\alpha,x}(v)^{-1}$ en G . Notemos que $g'_{\beta\alpha}(x) = g'_{\beta\alpha}(v)^{-1}$, y tomamos el producto

$$\begin{aligned} g_{\beta\alpha}(x)g'_{\beta\alpha}(v) &= (\varphi_{\alpha,x} \circ \varphi_{\beta,x}^{-1})(\varphi_{\beta,x}(v)\varphi_{\alpha,x}(v)^{-1}) \\ &= ((\varphi_{\alpha,x} \circ \varphi_{\beta,x}^{-1})(\varphi_{\beta,x}(v)))\varphi_{\alpha,x}(v)^{-1} = \varphi_{\alpha,x}(v)\varphi_{\alpha,x}(v)^{-1} = e \end{aligned}$$

donde e es la identidad en G . Análogamente, $g_{\beta\alpha}(x)g'_{\alpha\beta}(v) = e$. \square

Nota 2.69. Dado un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ de rango k , podemos asociarle un haz principal de la siguiente manera:

Un *marco* en un punto $b \in B$ es una base ordenada de el espacio vectorial $p^{-1}(b)$, por otro lado, un marco puede ser visto como un isomorfismo lineal $f: \mathbb{F}^k \rightarrow p^{-1}(b)$. Denotemos por F_b al conjunto de todos los marcos en b , podemos definir una acción derecha de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$ en F_b como,

$$\begin{aligned} F_b \times \mathrm{GL}_k(\mathbb{F}) &\longrightarrow F_b \\ (f, g) &\longmapsto f \circ g \end{aligned}$$

notemos que $f \circ g: \mathbb{F}^k \rightarrow p^{-1}(b)$. Esta acción es libre y transitiva, puesto que existe una única transformación lineal que manda una base en otra, por lo tanto tenemos que $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})/I_f \cong F_b$, donde I_f denota al subgrupo de isotropía de $f \in F_b$.

Definimos el *haz de marcos* $\pi: F(E) \rightarrow B$ de $p: E \rightarrow B$ como el haz cuyo espacio total esta dado por

$$F(E) = \coprod_{b \in B} F_b$$

cada punto en $F(E)$ es un par (b, f) con $b \in B$ y f un marco en b . La proyección $\pi: F(E) \rightarrow B$ se define por $\pi(b, f) = b$, notemos que el grupo $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F})$ actúa libremente en $F(E)$ como antes, y las órbitas $\mathrm{Orb}(f) = \pi^{-1}(b)$. Finalmente, el haz de marcos hereda la estructura de haz, del haz vectorial $p: E \rightarrow B$.

Por lo tanto, tenemos que el haz de marcos $(F(E), \pi, B, \mathrm{GL}_k(\mathbb{F}), \mathrm{GL}_k(\mathbb{F}))$ es un haz principal.

Nota 2.70. Dado un haz principal (P, π, B, G, G) , F un espacio y $G \times F \rightarrow F$ una acción izquierda, podemos construir un haz vectorial $p: E \rightarrow B$ con fibra F , de la siguiente manera:

Consideremos la acción derecha

$$\begin{aligned} (P \times F) \times G &\longrightarrow P \times F \\ ((v, y), g) &\longmapsto (vg, g^{-1}y) \end{aligned}$$

Como (P, π, B, G, G) es un haz principal, entonces la acción de G en P es libre, por lo cual $(P \times F) \times G \rightarrow P \times F$ es una acción libre. Definamos el haz vectorial $p: E \rightarrow B$, como el haz vectorial cuyo espacio total E , está dado por el espacio cociente de $P \times F$ bajo la acción de G el cual denotamos por $P \times_G F$.

Denotamos por $[v, y]$ a la clase en $P \times_G F$ de $(v, y) \in P \times F$. Definimos la proyección $p: P \times_G F \rightarrow B$ como $p([v, y]) = \pi(v)$, esta proyección está bien definida, ya que, por el Lema 2.67 tenemos que $\pi(vg) = \pi(v)$, por lo cual $p([vg, g^{-1}y]) = \pi(vg) = \pi(v) = p([v, y])$.

3

Teoría K

El objetivo de la Teoría K es transformar la suma directa de dos haces vectoriales sobre el mismo espacio base, en la aplicación “suma” de un grupo, el cual construiremos mas adelante.

Para referencias de este capítulo consultar [2], [3], [10], [12], [25].

3.1. Construcción de Grothendieck

Ésta construcción nos permite asociarle a un semigrupo abeliano (un conjunto con una operación asociativa y conmutativa), un grupo abeliano de manera única salvo isomorfismo.

Proposición 3.1. *Si A es cualquier semigrupo abeliano, se le puede asociar un grupo abeliano A' único salvo isomorfismo, y un homomorfismo de semigrupos $\alpha: A \rightarrow A'$, que cumplen la siguiente propiedad universal.*

Si G es cualquier grupo abeliano y $\gamma: A \rightarrow G$ es cualquier homomorfismo de semigrupos, entonces existe un único homomorfismo de grupos $\gamma': A' \rightarrow G$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \alpha \downarrow & \searrow \gamma & \\ A' & \xrightarrow{\gamma'} & G \end{array}$$

Demostración. Definimos A' como A union los inversos de A de la siguiente manera. Consideramos $A \times A$ bajo la siguiente relación de equivalencia $(a, b) \sim (a', b')$ si y sólo si existe $c \in A$ tal que $a + b' + c = a' + b + c$, y denotamos por $\langle a, b \rangle$ a la clase de equivalencia de un elemento (a, b) .

Veamos que $A' = (A \times A) / \sim$ es un grupo abeliano, donde la operación en A' está dada por $\langle a, b \rangle + \langle a', b' \rangle = \langle a + a', b + b' \rangle$. Mostremos primero que esta operación está bien definida, si $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ entonces existe $c \in A$ tal que $a_1 + b_2 + c = a_2 + b_1 + c$, por otro lado

si $(a'_1, b'_1) \sim (a'_2, b'_2)$ entonces existe $c' \in A$ tal que $a'_1 + b'_2 + c' = a'_2 + b'_1 + c'$, notemos que $\langle a_1, b_1 \rangle + \langle a'_1, b'_1 \rangle = \langle a_2, b_2 \rangle + \langle a'_2, b'_2 \rangle$, en efecto, tenemos que,

$$\langle a_1, b_1 \rangle + \langle a'_1, b'_1 \rangle = \langle a_1 + a'_1, b_1 + b'_1 \rangle = \langle a_2 + a'_2, b_2 + b'_2 \rangle = \langle a_2, b_2 \rangle + \langle a'_2, b'_2 \rangle$$

puesto que $a_1 + a'_1 + b_2 + b'_2 + c + c' = b_1 + b'_1 + a_2 + a'_2 + c + c'$, por lo cual la operación en A' está bien definida.

El elemento neutro del grupo está dado por la clase $\langle a, a \rangle$ con $a \in A$, en efecto $\langle a, a \rangle + \langle c, b \rangle = \langle a + c, a + b \rangle$, pero $\langle a + c, a + b \rangle = \langle c, b \rangle$ puesto que $a + c + b = c + a + b = a + c + b$. El elemento inverso de un elemento $\langle a, b \rangle$ está dado por $\langle b, a \rangle$, es decir $\langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle = \langle a + b, b + a \rangle$, por lo tanto A' es un grupo, y además es abeliano puesto que A es abeliano.

Definamos $\alpha: A \rightarrow A'$ como $a \mapsto \langle a, 0 \rangle$, y veamos que cumple la propiedad universal. Sea G un grupo y $\gamma: A \rightarrow G$ un homomorfismo de semigrupos, para $a \in A$ tenemos que $\alpha(a) = \langle a, 0 \rangle$, entonces definimos $\gamma': A' \rightarrow G$ tal que $\gamma'(\alpha(a)) = \gamma'(\langle a, 0 \rangle) = \gamma(a)$, por lo cual para $\langle a, b \rangle$ tenemos que $\gamma'(\langle a, b \rangle) = \gamma(a) - \gamma(b)$.

Para mostrar que ésta construcción es única, suponemos que existen (A'', α') distintos de (A', α) con $\alpha': A \rightarrow A''$, que cumple con la propiedad universal, entonces por la propiedad universal de la construcción de Grothendieck (A', α) , existe $\gamma: A' \rightarrow A''$ que hace conmutar el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \alpha \downarrow & \searrow \alpha' & \\ A' & \xrightarrow{\gamma} & A'' \end{array}$$

por otro lado, por la propiedad universal de la construcción de Grothendieck (A'', α') existe $\gamma': A'' \rightarrow A'$ que hace conmutar el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \alpha \downarrow & \searrow \alpha' & \\ A' & \xleftarrow{\gamma'} & A'' \end{array}$$

por lo tanto tenemos que $\gamma \circ \gamma' = \text{id}_{A''}$ y que $\gamma' \circ \gamma = \text{id}_{A'}$ lo que implica que $\gamma: A' \rightarrow A''$ es un isomorfismo de grupos. \square

Definición 3.2. A la pareja (A', α) se le llama, la *construcción de Grothendieck* asociada al semigrupo A , y a A' se le denota como $\text{Gr}(A)$

Ejemplo 3.3. Si $A = \mathbb{N}$, entonces su construcción de Grothendieck $\text{Gr}(A)$ es igual a $\text{Gr}(A) = \mathbb{Z}$ los enteros, en efecto $\text{Gr}(A) = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$ tiene como elementos a las clases definidas como $\langle a, b \rangle = a - b$ con $a, b \in \mathbb{N}$.

Nota 3.4. Para cada $a \in A$, tenemos que $\langle a, b \rangle = \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle$, lo que implica que $\langle a_1, 0 \rangle = \langle a_2, 0 \rangle$ si y sólo si existe $a \in A$ tal que $a_1 + a = a_2 + a$. Más aún, la aplicación $\alpha: A \rightarrow A'$ es inyectiva si y sólo si la ley de cancelación vale en A .

Podemos dar una construcción alternativa a la de Grothendieck como sigue. Sea A un semigrupo abeliano y consideremos $F(A)$ el grupo libre generado por los elementos de A , y definimos $M(A)$ el subgrupo de $F(A)$ generado por los elementos de la forma $a \oplus a' \ominus (a + a')$ donde \oplus es la suma en $F(A)$ y $+$ es la suma en A . Definimos $\text{Gr}(A) = F(A)/M(A)$ y $\alpha: A \rightarrow A'$ como $\alpha \mapsto \alpha + M(A)$. Ésta construcción de $\text{Gr}(A)$ tiene la propiedad universal

antes descrita.

Propiedades. La construcción de Grothendieck cumple con las siguientes propiedades.

1. Si $f: A \rightarrow B$ es un homomorfismo de semigrupos, y $(\text{Gr}(A), \alpha)$, $(\text{Gr}(B), \beta)$ sus construcciones de Grothendieck correspondientes, entonces existe un único homomorfismo de grupos $f': \text{Gr}(A) \rightarrow \text{Gr}(B)$ tal que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \text{Gr}(A) & \xrightarrow{f'} & \text{Gr}(B) \end{array}$$

En efecto, por la propiedad universal del grupo de Grothendieck aplicada a el grupo $\text{Gr}(B)$ y al homomorfismo de semigrupos $\beta \circ f$ existe un único homomorfismo de grupos $f': \text{Gr}(A) \rightarrow \text{Gr}(B)$ que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \alpha \downarrow & \searrow \beta \circ f & \\ \text{Gr}(A) & \xrightarrow{f'} & \text{Gr}(B) \end{array}$$

2. Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ homomorfismos de semigrupos, entonces $(g \circ f)' = (g' \circ f')$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ \text{Gr}(A) & \xrightarrow{f'} & \text{Gr}(B) & \xrightarrow{g'} & \text{Gr}(C) \end{array}$$

En efecto, por la propiedad anterior, tenemos que $(g \circ f)'$ y $g' \circ f'$ hacen conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \alpha \downarrow & \searrow \gamma \circ g \circ f & \\ \text{Gr}(A) & \xrightarrow{g' \circ f'} & \text{Gr}(C) \end{array}$$

entonces por la unicidad de la construcción de Grothendieck tenemos que $(g \circ f)' = g' \circ f'$.

3. Si $f = \text{id}_A: A \rightarrow A$, entonces $f' = \text{id}_{\text{Gr}(A)}: \text{Gr}(A) \rightarrow \text{Gr}(A)$. En efecto, por la propiedad 1 tenemos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \text{Gr}(A) & \xrightarrow{f'} & \text{Gr}(A) \end{array}$$

por lo cual tenemos que $f' \circ \alpha = \alpha \circ f = \alpha$, lo que implica que $f' = \text{id}_{\text{Gr}(A)}$.

Por lo tanto, la construcción de Grothendieck es un funtor de la categoría de semigrupos abelianos a la categoría de grupos abelianos. Más aún, si A es un semianillo (semigrupo con multiplicación distributiva sobre la suma), entonces la construcción de Grothendieck $(\text{Gr}(A), \alpha)$ es un anillo cuya multiplicación está dada por $\langle a, b \rangle \langle c, d \rangle = \langle ac + bd, ad + bc \rangle$, lo cual nos dice que la construcción de Grothendieck es un funtor de la categoría de semianillos a la categoría de anillos.

Ejemplo 3.5 (Anillo de Representaciones). Una *representación* de un grupo G en un espacio vectorial V de dimensión n sobre un campo \mathbb{F} , es un homomorfismo de grupos

$$\rho: G \rightarrow \text{GL}_n(V)$$

tal que $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2)$ para toda $g_1, g_2 \in G$. Denotemos por $\text{Rep}(G)$ al conjunto de todas las representaciones de un grupo G .

Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre \mathbb{F} , y sean $\rho: G \rightarrow \text{GL}_n(V)$ y $\rho': G \rightarrow \text{GL}_n(V')$ dos representaciones de G . Decimos que ρ y ρ' son *isomorfas*, si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $\alpha: V \rightarrow V'$ tal que $\alpha \circ \rho(g) \circ \alpha^{-1} = \rho'(g)$, para toda $g \in G$.

La relación de isomorfismo de representaciones de G es una relación de equivalencia, lo cual nos parte el espacio de representaciones $\text{Rep}(G)$ en clases de equivalencias llamadas clases de isomorfismos de representaciones de G . Denotemos por $\text{Rep}(G)/\sim$ al conjunto de todas las clases de isomorfismos de representaciones de G , y notemos que la suma directa y el producto tensorial inducen operaciones “suma” y “producto” en este conjunto, por lo cual tenemos que $\text{Rep}(G)/\sim$ tiene una estructura de semianillo.

Entonces, su construcción de Grothendieck $\text{Gr}(\text{Rep}(G)/\sim)$ es un anillo llamado *anillo de representaciones de G* . Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ entonces $\text{Gr}(\text{Rep}(G)/\sim)$ se denota por $R(G)$, y si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ entonces $\text{Gr}(\text{Rep}(G)/\sim)$ se denota por $RO(G)$.

3.2. Teoría K

En esta sección definiremos la Teoría K de un espacio topológico paracompacto, usando la construcción de Grothendieck vista en la sección anterior.

Sea B un espacio topológico paracompacto, recordemos de la Definición 2.57, que denotamos por $\text{Vect}_k^{\mathbb{F}}(B)$ al conjunto de clases de isomorfismos de haces vectoriales de rango k , sobre B .

Definición 3.6. Sea $\text{Vect}^{\mathbb{F}}(B)$ el semigrupo abeliano de clases de isomorfismos de haces vectoriales sobre un espacio base B paracompacto. El conjunto $\text{Vect}^{\mathbb{F}}(B)$ tiene una estructura de semigrupo, donde la operación está dada por $[E] + [E'] = [E \oplus E']$ con $[E], [E'] \in \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B)$ y la identidad en $\text{Vect}^{\mathbb{F}}(B)$ es la clase del haz trivial de rango 0.

Podemos formar la construcción de Grothendieck aplicada al semigrupo $\text{Vect}^{\mathbb{F}}(B)$, lo cual nos da un grupo abeliano llamado *Teoría K* de B . Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, entonces $\text{Gr}(\text{Vect}^{\mathbb{C}}(B))$ se denota por $K(B)$ y se le llama *Teoría K compleja* de B . Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, entonces $\text{Gr}(\text{Vect}^{\mathbb{R}}(B))$ se denota por $KO(B)$ y se le llama *Teoría K real* de B .

Nota 3.7. Para simplificar notación, en este capítulo denotaremos a la Teoría K $\text{Gr}(\text{Vect}^{\mathbb{F}}(B))$ simplemente como $K(B)$.

Dada una aplicación $f: B' \rightarrow B$ podemos construir un homomorfismo de semigrupos $f^*: \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B) \rightarrow \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B')$ definido por $[E] \mapsto [f^*E]$ y donde $[f^*E]$ es la clase del haz inducido de $p: E \rightarrow B$ bajo la aplicación f . Esto nos induce un homomorfismo $f^*: K(B) \rightarrow$

$K(B')$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B) & \xrightarrow{f^*} & \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B') \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ K(B) & \xrightarrow{f^*} & K(B') \end{array}$$

En efecto, la aplicación $f^* : \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B) \rightarrow \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B')$ es un homomorfismo de semigrupos. Recordemos que $E \oplus E' = \{(e, e') \in E \times E' \mid p(e) = p'(e')\}$ donde $p : E \rightarrow B$, $p' : E' \rightarrow B$, y entonces el haz inducido de $E \oplus E'$ bajo f está dado por

$$f^*(E \oplus E') = \{(b, (e, e')) \in B' \times E \times E' \mid f(b) = p(e) = p'(e')\}$$

por otro lado, podemos notar que la suma directa de los haces inducidos $f^*E \oplus f^*E'$ está dada por el conjunto

$$\{((b_1, e), (b_2, e')) \in f^*E \times f^*E' \mid p_1^*(b_1, e) = p_2^*(b_2, e'), f(b_1) = f(b_2) = p(e) = p'(e')\}$$

como $b_1 = p_1^*(b_1, e) = p_2^*(b_2, e') = b_2$ podemos deducir que $f^*(E \oplus E') \cong f^*E \oplus f^*E'$ por el isomorfismo $((b', e), (b', e')) \mapsto (b', e, e')$, y entonces $f^*([E] + [E']) = f^*[E] + f^*[E']$, lo que implica que f^* es un homomorfismo.

Propiedades. El anillo $K(B)$ tiene las siguientes propiedades funtoriales.

1. Si $f : B \rightarrow B'$ y $g : B' \rightarrow B''$ son aplicaciones continuas, entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : K(B'') \rightarrow K(B)$.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B'') & \xrightarrow{g^*} & \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B') & \xrightarrow{f^*} & \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B) \\ \downarrow \alpha'' & & \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ K(B'') & \xrightarrow{g^*} & K(B') & \xrightarrow{f^*} & K(B) \end{array}$$

Ésta propiedad se deduce de la unicidad de la propiedad universal de la construcción de Grothendieck aplicada en éste diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B) & & \\ \alpha'' \downarrow & \searrow \alpha \circ f^* \circ g^* & \\ K(B'') & \longrightarrow & K(B) \end{array}$$

2. Si $f = \text{id}_B : B \rightarrow B$, entonces $f^* = \text{id}_{K(B)} : K(B) \rightarrow K(B)$.

En efecto, si $f = \text{id}_B$, podemos construir el haz inducido bajo f

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{f'} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

donde $f^*E = \{(b, e) \in B \times E \mid f(b) = p(e)\}$, y $f': f^*E \rightarrow E$ está definida por $f'(b, e) = e$, notemos que f' restringido a las fibras es un isomorfismo lineal, lo que implica que $f^*: \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B) \rightarrow \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B)$, $[E] \mapsto [f^*E]$ es un isomorfismo.

Nota 3.8. Si $f: B' \rightarrow B$ es continua, el homomorfismo de grupos abelianos $f^*: K(B) \rightarrow K(B')$ es también un homomorfismo de anillos, donde la multiplicación en $K(B)$ está dada por $[E][E'] = [E \otimes E']$.

Corolario 3.9. $K(B)$ es un anillo cuya suma está dada por $[E] + [E'] = [E \oplus E']$, y su producto por $[E][E'] = [E \otimes E']$. Dada $f: B' \rightarrow B$ podemos obtener un homomorfismo de anillos $f^*: K(B) \rightarrow K(B')$ tal que $f^*([E]) = [f^*E]$, con $[E] \in K(B)$.

Entonces, podemos concluir que K es un funtor de la categoría de espacios topológicos paracompactos a la categoría de anillos.

Proposición 3.10. Denotemos por $*$ al espacio conformado por un punto, entonces tenemos que $K(*) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración. Notemos que un elemento en $\text{Vect}^{\mathbb{F}}(*)$ es una clase de un haz vectorial sobre el punto, por lo cual esté elemento lo podemos identificar con un espacio vectorial V de dimensión igual al rango del haz vectorial. Consideramos la aplicación $f: \text{Vect}^{\mathbb{F}}(*) \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $V \mapsto \dim(V)$, mostremos que f es un isomorfismo de semigrupos. Tenemos que f es un homomorfismo puesto que

$$f(V + V') = \dim(V + V') = \dim(V) + \dim(V') = f(V) + f(V')$$

Si $V, V' \in \text{Vect}^{\mathbb{F}}(*)$ tal que $\dim(V) = \dim(V')$ entonces tenemos que V es isomorfo a V' como espacios vectoriales, lo que implica que f es inyectiva. Finalmente, f es sobre puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar el haz vectorial $p: * \times \mathbb{F}^n \rightarrow *$, por lo tanto f es un isomorfismo. Entonces f induce un isomorfismo $f^*: K(*) \rightarrow \mathbb{Z}$ en su Teoría K. \square

Proposición 3.11. Sean B y B' espacio topológicos paracompactos, si $f_0, f_1: B' \rightarrow B$ son aplicaciones homotópicas, entonces $f_0^* = f_1^*: K(B) \rightarrow K(B')$.

Demostración. Puesto que f_0 es homotópica a f_1 , tenemos por el Teorema 2.56, que los haces inducidos f_0^*E, f_1^*E son isomorfos, lo que implica que sus clases $[f_0^*E], [f_1^*E]$ son iguales, y por tanto $f_0^* = f_1^*$. \square

3.3. Teoría K reducida

En ésta sección definiremos la Teoría K reducida $\tilde{K}(B)$ de un espacio topológico paracompacto B , además introduciremos el concepto de equivalencia estable de haces vectoriales sobre un espacio base B , para finalmente ver que existe una relación entre el conjunto de clases de equivalencia estable de haces vectoriales sobre B y la Teoría K reducida del espacio B .

Nota 3.12. Todo elemento en $\langle E, E' \rangle \in K(B)$ es de la forma $\langle E, E' \rangle = [E] - [E']$, notemos el hecho de que $[E] - [E'] = 0$ no implica que $[E] = [E']$, sino que existe $[E''] \in K(B)$ tal que $E \oplus E'' = E' \oplus E''$. Por otro lado, dos clases $\langle E, E' \rangle = \langle F, F' \rangle$ si y sólo si existe $[\tilde{E}] \in K(B)$ tal que $E \oplus F' \oplus \tilde{E} \cong E' \oplus F \oplus \tilde{E}$.

Definición 3.13. Sea B un espacio topológico punteado $(B, *)$, consideremos la inclusión $i: \{*\} \hookrightarrow B$, entonces i induce un homomorfismo $i^*: K(B) \rightarrow K(\{*\})$, donde hemos visto que $K(\{*\}) \cong \mathbb{Z}$. Definimos la *Teoría K reducida* del espacio punteado B denotado por $\tilde{K}(B)$, como el subgrupo $\tilde{K}(B) = \ker(i^*) \subset K(B)$.

Nota 3.14. La aplicación $i^*: K(B) \rightarrow \mathbb{Z}$ esta inducida por la aplicación que a cada haz vectorial sobre B le asocia la dimensión de la fibra sobre el punto base, por lo cual, para diferentes componentes conexas de B tenemos distintos rangos.

Proposición 3.15. $K(B) \cong \tilde{K}(B) \oplus \mathbb{Z}$

Demostración. Podemos construir la siguiente sucesión exacta corta.

$$0 \longrightarrow \tilde{K}(B) \longrightarrow K(B) \xrightarrow{i^*} K(\{*\}) \longrightarrow 0$$

Si definimos la aplicación constante $c: B \rightarrow \{*\}$, entonces podemos notar que $c \circ i = \text{id}$, y como K es un funtor tenemos que $(c \circ i)^* = i^* \circ c^* = \text{id}_{K(\{*\})}$, lo que implica que la sucesión se escinde, y entonces $K(B) \cong \tilde{K}(B) \oplus \mathbb{Z}$. \square

Los elemento en el grupo $\tilde{K}(B)$ de Teoría K reducida son diferencias de clases de haces vectoriales cuya fibra sobre el punto base tiene la misma dimension, pero si el espacio base B es compacto, entonces podemos ver al grupo $\tilde{K}(B)$ como un conjunto de clases de equivalencia de haces vectoriales, en el cual no importa el rango de los haces vectoriales.

Definición 3.16. Decimos que dos haces vectoriales $p: E \rightarrow B, p': E' \rightarrow B$ son *estáblemente equivalentes*, si existen haces vectoriales triviales $\varepsilon, \varepsilon'$ tal que $E \oplus \varepsilon \cong E' \oplus \varepsilon'$. Denotamos la equivalencia estable de dos haces vectoriales como $E \sim_S E'$.

Nota 3.17. La equivalencia estable de haces vectoriales, es una relación de equivalencia.

1. $E \sim_S E$.
2. Si $E \sim_S E'$, entonces $E' \sim_S E$.
3. Si $E \sim_S E'$ y $E' \sim_S E''$, entonces $E \sim_S E''$.

La propiedad de transitividad es cierta puesto que, si $E \sim_S E'$ entonces existen haces triviales $\varepsilon, \varepsilon'$ tal que $E \oplus \varepsilon \cong E' \oplus \varepsilon'$, y como $E' \sim_S E''$, entonces existen haces triviales $\varepsilon'', \varepsilon'''$, tal que $E' \oplus \varepsilon'' \cong E'' \oplus \varepsilon'''$, y por lo tanto $E \sim_S E''$ mediante $E \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon'' \cong E'' \oplus \varepsilon''' \oplus \varepsilon'$.

Denotemos como $S(B)$ al conjunto de clases de equivalencia estable de haces vectoriales sobre B , entonces podemos dar a $S(B)$ una estructura de grupo abeliano de la siguiente manera. Denotemos por $\{E\}$ la clase de equivalencia estable de un haz vectorial E , y definamos la operación suma como $\{E\} + \{E'\} = \{E \oplus E'\}$, ésta operación hace de $S(B)$ un semigrupo abeliano, y de la Proposición 2.51 tenemos que $S(B)$ tiene inversos, lo que implica que $S(B)$ es un grupo abeliano.

Teorema 3.18. *Sea B un espacio punteado compacto, entonces $\tilde{K}(B) \cong S(B)$.*

Demostración. Consideremos $[E] \in \text{Vect}^{\mathbb{R}}(B)$ la clase de isomorfismo de un haz vectorial E sobre B , definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \rho: \text{Vect}^{\mathbb{R}}(B) &\longrightarrow S(B) \\ [E] &\longmapsto \{E\} \end{aligned}$$

veamos que ρ es un homomorfismo de semigrupos, en efecto $\rho([E] + [E']) = \rho([E \oplus E']) = \{E \oplus E'\} = \{E\} + \{E'\} = \rho([E]) + \rho([E'])$. Puesto que $S(B)$ es un grupo abeliano tenemos, por la propiedad universal de la construcción de Grothendieck, que existe un homomorfismo de grupos $\bar{\rho}: K(B) \rightarrow S(B)$ que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B) & & \\ \alpha \downarrow & \searrow \rho & \\ K(B) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & S(B) \end{array}$$

Recordemos que $\tilde{K}(B)$ es un subgrupo de $K(B)$, y mostraremos que $\bar{\rho}|_{\tilde{K}(B)}$ es un isomorfismo.

Para ver que es sobre, tomamos $\{E\} \in S(B)$, y suponemos que sobre la componente conexa del punto base, el haz vectorial E tiene dimensión k , consideremos el haz vectorial trivial ε^k de dimensión k , y notemos que $[E] - [\varepsilon^k] \in \tilde{K}(B)$ puesto que sobre el punto base E y ε^k tienen dimensión k , entonces $\bar{\rho}([E] - [\varepsilon^k]) = \rho([E]) - \rho([\varepsilon^k]) = \{E\} - \{\varepsilon^k\} = \{E\}$, por lo tanto $\bar{\rho}|_{\tilde{K}(B)}$ es sobre.

Ahora veamos que es inyectiva. Sea $\langle E, E' \rangle = [E] - [E'] \in \tilde{K}(B)$ tal que $\bar{\rho}([E] - [E']) = 0$, ésto es, $0 = \bar{\rho}([E] - [E']) = \rho([E]) - \rho([E']) = \{E\} - \{E'\}$, por lo cual existen haces vectoriales triviales $\varepsilon^m, \varepsilon^n$ tal que $E \oplus \varepsilon^m \cong E' \oplus \varepsilon^n$, pero como $[E] - [E'] \in \tilde{K}(B)$ tenemos que E y E' tienen la misma dimensión sobre el punto base, lo que implica que $m = n$, y entonces $\langle E, E' \rangle = \langle \varepsilon^m, \varepsilon^n \rangle$ es la identidad en $\tilde{K}(B) \in K(B)$, lo que implica que $\bar{\rho}|_{\tilde{K}(B)}$ es un isomorfismo. \square

Nota 3.19. Si B es unión ajena de subespacios abiertos $B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_r$, entonces $K(B) = K(B_1) \oplus \cdots \oplus K(B_r)$.

En efecto tenemos un isomorfismo $\text{Vect}^{\mathbb{F}}(B) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B_i)$ definido por $[E] \mapsto ([E_1], \dots, [E_r])$, donde $[E_i]$ denota la restricción de el haz vectorial E a B_i .

3.4. Representaciones homotópicas de $K(B)$ y $\tilde{K}(B)$

En ésta sección mostraremos otra descomposición de $K(B)$ similar a $K(B) \cong \tilde{K}(B) \oplus \mathbb{Z}$, veremos el concepto de limite directo de un sistema dirigido, para finalmente dar algunos resultados que nos permitirán dar una representación homotópica de $K(B)$ y $\tilde{K}(B)$.

Sea B un espacio topológico y S un conjunto, decimos que una función $f: B \rightarrow S$ es *localmente constante*, si cada $x \in B$ tiene una vecindad V , en la cual $f|_V$ es constante. Si damos a S la topología discreta, entonces $f: B \rightarrow S$ es localmente constante si y sólo si f es continua, en efecto, si f es localmente constante, entonces para cada abierto A en S , la preimagen $f^{-1}(A)$ contiene un abierto V (por ser localmente constante), recíprocamente si f es continua, entonces para cada $x \in B$ tomamos $f(x)$ el cual es un abierto en S , y como f es continua la preimagen es un abierto que contiene a x .

Si $p: E \rightarrow B$ es un haz vectorial, definimos una aplicación $d_E: B \rightarrow \mathbb{N}$ como $d_E(x) = \dim(p^{-1}(x))$, notemos que d_E es localmente constante. Notemos que el conjunto $M(B, \mathbb{N})$ de funciones continuas de B a \mathbb{N} , es igual al conjunto $\{f: B \rightarrow \mathbb{N} \mid f \text{ es localmente constante}\}$

si dotamos a \mathbb{N} con la topología discreta. Más aun, $M(B, \mathbb{N}) = [B, \mathbb{N}]$, donde $[B, \mathbb{N}]$ denota al conjunto de clases de homotopía de aplicaciones de B a \mathbb{N} .

Definición 3.20. Sea $d: \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B) \rightarrow [B, \mathbb{N}]$ la aplicación definida por $[E] \mapsto d_E$, como \mathbb{N} es un semigrupo, entonces $[B, \mathbb{N}]$ tiene estructura de semigrupo bajo a operación $(f_0 + f_1)(x) = f_0(x) + f_1(x)$ con $f_0, f_1 \in [B, \mathbb{N}]$. Además, d es un homomorfismo de semigrupos puesto que $d([E] + [E']) = d_{E \oplus E'} = d_E + d_{E'}$. Entonces podemos considerar las construcciones de Grothendieck de $\text{Vect}^{\mathbb{F}}(B)$ y $[B, \mathbb{N}]$ para obtener los grupos $(K(B), \alpha')$ y $([B, \mathbb{Z}], \alpha)$ respectivamente, y entonces por functorialidad de la construcción de Grothendieck d induce un homomorfismo de grupos $\bar{d}: K(B) \rightarrow [B, \mathbb{Z}]$ que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B) & \xrightarrow{d} & [B, \mathbb{N}] \\ \alpha' \downarrow & & \downarrow \alpha \\ K(B) & \xrightarrow{\bar{d}} & [B, \mathbb{Z}] \end{array}$$

Denotamos por $\widehat{K}(B) = \ker(\bar{d})$.

Proposición 3.21. *La siguiente sucesión exacta corta se escinde*

$$0 \longrightarrow \widehat{K}(B) \hookrightarrow K(B) \xrightarrow{\bar{d}} [B, \mathbb{Z}] \longrightarrow 0$$

y en éste caso tenemos que $K(B) \cong \widehat{K}(B) \oplus [B, \mathbb{Z}]$.

Demostración. Sea $f: B \rightarrow \mathbb{N}$ una aplicación continua, como B es compacto entonces $f(B)$ es un conjunto finito, digamos, $f(B) = \{n_1, \dots, n_k\}$, definamos $B_i = f^{-1}(n_i)$ y notemos que $B = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_k$. Definimos un haz vectorial sobre B tomando sobre cada B_i el haz vectorial trivial ε^{n_i} de rango n_i .

De ésta manera, podemos construir un homomorfismo $\varphi: [B, \mathbb{N}] \rightarrow \text{Vect}^{\mathbb{F}}(B)$, tal que $d \circ \varphi = \text{id}_{[B, \mathbb{N}]}$. Por la functorialidad de la construcción de Grothendieck, φ induce un homomorfismo $\bar{\varphi}: [B, \mathbb{Z}] \rightarrow K(B)$ tal que $\bar{d} \circ \bar{\varphi} = \text{id}_{[B, \mathbb{Z}]}$, lo que implica que la sucesión de escinde. \square

Corolario 3.22. *Si B es conexo y compacto, entonces $\tilde{K}(B) \cong \widehat{K}(B)$*

Demostración. Notemos que un elemento $\langle [E], [E'] \rangle \in K(B)$ está en $\tilde{K}(B)$ si y sólo si $\dim(p'^{-1}(x)) = \dim(p^{-1}(x))$, donde x es el punto base de B . Por otro lado $\langle [E], [E'] \rangle$ está en $\widehat{K}(B)$ si y sólo si $\dim(p'^{-1}(x)) = \dim(p^{-1}(x))$ para todo $x \in B$. Entonces existe una aplicación natural $j^*: \widehat{K}(B) \rightarrow \tilde{K}(B)$, de las sucesiones exactas vistas en la Proposición 3.15 y en la Proposición 3.21, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{K}(B) & \longrightarrow & K(B) & \xrightarrow{\bar{d}} & [B, \mathbb{Z}] \longrightarrow 0 \\ & & j^* \downarrow & & \text{id} \downarrow & & i^\# \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{K}(B) & \longrightarrow & K(B) & \xrightarrow{\delta} & [*, \mathbb{Z}] \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde δ asocia a cada haz vectorial, la dimensión de la fibra sobre el punto base. Como B es conexo $i^\#$ es un isomorfismo, lo que implica que j^* es un isomorfismo. \square

Definición 3.23 (Colímite Topológico). Dada una familia de espacios topológicos $\{X_i\}$, y encajes (homeomorfismos sobre su imagen)

$$X_1 \xrightarrow{j_2^i} X_2 \xrightarrow{j_3^2} X_3 \longrightarrow \dots$$

definimos el *colímite o límite directo topológico* como el espacio cociente

$$\text{colim}_i X_i = \left(\coprod X_i \right) / \sim$$

obtenido del coproducto de los espacios X_i identificando $x \in X_i$ con $j_{i+1}^i(x) \in X_{i+1}$ para toda i , y donde $j_k^i = j_k^{k-1} \circ \dots \circ j_{i+1}^i: X_i \rightarrow X_k$, con $k > i$. Además, para cada i tenemos aplicaciones continuas $j^i: X_i \rightarrow \text{colim}_i X_i$ tal que

$$j^k \circ j_k^i = j^i: X_i \rightarrow \text{colim}_i X_i$$

definidas como la composición de la inclusión con la aplicación cociente

$$j^i: X_i \hookrightarrow \coprod X_i \longrightarrow \text{colim}_i X_i$$

El colímite topológico cumple con la siguiente propiedad universal: Si $\{f^i: X_i \rightarrow Y \mid i \geq 1\}$ es una familia de aplicaciones, tal que $f^{i+1} \circ j_{i+1}^i = f^i$ para toda $i \geq 1$, o equivalentemente $f^k \circ j_k^i = f^i$ para toda $k > i \geq 1$, entonces existe una única aplicación $f: \text{colim}_i X_i \rightarrow Y$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{j^i} & \text{colim}_i X_i \\ & \searrow f^i & \swarrow f \\ & Y & \end{array}$$

Definición 3.24 (Colímite Algebraico). Decimos que un conjunto parcialmente ordenado (I, \leq) es *dirigido*, si para todo $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i, j \leq k$.

Dado un sistema dirigido de grupos abelianos (semigrupos, anillos, espacios vectoriales, etc.) y homomorfismos

$$A_1 \xrightarrow{h_2^1} A_2 \xrightarrow{h_3^2} A_3 \longrightarrow \dots$$

definimos el *colímite ó límite directo algebraico* como

$$\text{colim}_i(A_i) = \left(\bigoplus A_i \right) / A'$$

donde A' es el subgrupo de $\bigoplus A_i$ generado por las diferencias $h_k^i(a_i) - a_i \in A_i \oplus A_k \subset \bigoplus A_i$, $k > i$, y donde $h_k^i = h_k^{k-1} \circ h_{k-1}^{k-2} \circ \dots \circ h_{i+1}^i$. En otras palabras, identificamos cada grupo A_i con su imagen en A_k . Además, para toda i tenemos homomorfismos $h^i: A_i \rightarrow \text{colim}_i A_i$ tal que

$$h^k \circ h_k^i = h^i: A_i \rightarrow \text{colim}_i A_i.$$

definidos por la composición de la inclusión con la aplicación cociente

$$j^i: A_i \hookrightarrow \bigoplus A_i \longrightarrow \text{colim}_i A_i.$$

El colímite algebraico tiene la siguiente propiedad universal: Si $\{f^i: A_i \rightarrow B \mid i \geq 1\}$ es una familia de aplicaciones que cumplen la igualdad $f^{i+1} \circ h_{i+1}^i = f^i$ para todo $i > 0$, o equivalentemente $f^k \circ h_k^i = f^i$ para toda $k > i \geq 1$, entonces existe una única aplicación $f: \text{colim}_i A_i \rightarrow B$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{h^i} & \text{colim}_i A_i \\ & \searrow f^i & \swarrow f \\ & B & \end{array}$$

Definición 3.25. Consideramos los conjuntos $\text{Vect}_k^{\mathbb{F}}(B)$ de clases de isomorfismos de haces vectoriales de dimensión k , podemos definir la aplicación $t_k: \text{Vect}_k^{\mathbb{F}}(B) \rightarrow \text{Vect}_{k+1}^{\mathbb{F}}(B)$ como $[E] \mapsto [E \oplus \varepsilon]$, donde ε es el haz vectorial trivial de rango 1. Ésto nos forma un sistema dirigido de semigrupos

$$\text{Vect}_1^{\mathbb{F}}(B) \xrightarrow{t_1} \text{Vect}_2^{\mathbb{F}}(B) \xrightarrow{t_2} \text{Vect}_3^{\mathbb{F}}(B) \longrightarrow \dots$$

y denotamos al colímite de éste sistema como $\text{Vect}_s^{\mathbb{F}}(B) = \text{colim}_k \text{Vect}_k^{\mathbb{F}}(B)$.

Mediante la suma directa de haces vectoriales, podemos definir una operación en $\text{Vect}_s^{\mathbb{F}}(B)$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc} \text{Vect}_s^{\mathbb{F}}(B) \times \text{Vect}_s^{\mathbb{F}}(B) & \longrightarrow & \text{Vect}_s^{\mathbb{F}}(B) \\ ([E], [E']) & \longmapsto & [E \oplus E'] \end{array}$$

lo cual da a $\text{Vect}_s^{\mathbb{F}}(B)$ una estructura de grupo abeliano.

Proposición 3.26. Si B es compacto, entonces $\text{Vect}_s^{\mathbb{F}}(B) \cong \widehat{K}(B)$.

Demostración. Para cada $k \geq 0$, definimos una aplicación $\varphi_k: \text{Vect}_k^{\mathbb{F}}(B) \rightarrow \widehat{K}(B)$ como $[E] \mapsto [E] - [\varepsilon^k]$, notemos que $\varphi_{k+1} \circ t_k([E]) = \varphi_k$, en efecto

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1} \circ t_k([E]) &= \varphi_{k+1}([E \oplus \varepsilon]) = [E \oplus \varepsilon] - [\varepsilon^{k+1}] = [E] + [\varepsilon] - [\varepsilon^k] - [\varepsilon] \\ &= [E] - [\varepsilon^k] = \varphi_k([E]) \end{aligned}$$

y entonces por la propiedad universal del colímite existe una aplicación $\rho: \text{Vect}_s^{\mathbb{F}}(B) \rightarrow \widehat{K}(B)$, mostremos que ρ es un isomorfismo. Para mostrar que ρ es sobre, tomemos $[E] - [E'] \in \widehat{K}(B)$, por la Proposición 2.51, existe un haz vectorial \widetilde{E}' tal que $E' \oplus \widetilde{E}' \cong \varepsilon^n$ donde ε^n es un haz vectorial trivial de dimensión n , para algún n . Entonces $[E] - [E'] = [E] + [\widetilde{E}'] - [E'] - [\widetilde{E}'] = [E] + [\widetilde{E}'] - [E' \oplus \widetilde{E}'] = [E] + [\widetilde{E}'] - [\varepsilon^n] = [E \oplus \widetilde{E}'] - [\varepsilon^n]$. Como $[E] - [E'] \in \widehat{K}(B)$, entonces $[E \oplus \widetilde{E}'] - [\varepsilon^n] \in \widehat{K}(B)$ lo que implica que $[E \oplus \widetilde{E}']$ y $[\varepsilon^n]$ tienen el mismo rango, y así $\varphi_n([E \oplus \widetilde{E}']) = [E \oplus \widetilde{E}'] - [\varepsilon^n] = [E] - [E']$, por lo cual ρ es sobre.

Ahora veamos que ρ es inyectiva, supongamos que $[E] - [\varepsilon^k] = [E'] - [\varepsilon^l]$, por definición tenemos que $E \oplus \varepsilon^l \oplus \varepsilon^n \cong E' \oplus \varepsilon^k \oplus \varepsilon^n$ para algún n . Entonces E y E' representan el mismo elemento en $\text{Vect}_s^{\mathbb{F}}(B)$, lo que implica que ρ es inyectiva. \square

En la definición 2.59, vimos las variedades de Grassmann $G_k(V)$ de un espacio vectorial V , como el conjunto $G_n(V) = \{W \subset V \mid W \text{ es subespacio lineal, } \dim(W) = n\}$. Notemos que la inclusión nos define un sistema dirigido de espacios topológicos

$$G_k(\mathbb{F}) \hookrightarrow G_k(\mathbb{F}^2) \hookrightarrow G_k(\mathbb{F}^3) \hookrightarrow \dots$$

notemos que el colímite de éste sistema dirigido es $G_k(\mathbb{F}^\infty)$. Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ entonces denotamos al colímite $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ por BU_k , y si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ entonces denotamos al colímite $G_k(\mathbb{R}^\infty)$ por BO_k .

Para simplificar notación, denotaremos al colímite $G_k(\mathbb{R}^\infty)$ simplemente como BU_k .

Entonces podemos definir un nuevo sistema dirigido de espacios topológicos, mediante encajes $i_k: BU_k \rightarrow BU_{k+1}$ que satisfacen $i_k^*(E_{k+1}(\mathbb{F}^\infty)) \cong E_k(\mathbb{F}^\infty) \oplus \varepsilon^1$, de la siguiente manera

$$BU_1 \xrightarrow{i_1} BU_2 \xrightarrow{i_2} BU_3 \xrightarrow{i_3} \dots$$

denotamos al colímite de éste sistema dirigido como BU si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y BO si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Para simplificar notación denotamos al colímite para \mathbb{F} por BU .

Nota 3.27. Si $X = \bigcup X_i$ es un espacio topológico Hausdorff tal que $X_i \subset X_{i+1}$, y si X tiene la topología coherente con la familia $\{X_i\}$, es decir, $A \subset X$ es cerrado si y sólo si $A \cap X_i$ es cerrado para toda i . Entonces para cada compacto $C \subset X$, existe $n > 0$ tal que $C \subset X_n$.

Teorema 3.28. *Sea B un espacio compacto, entonces $\widehat{K}(B) \cong [B, BU]$.*

Demostración. Por la Proposición 3.26 tenemos que $\widehat{K}(B) \cong \text{Vect}_s^{\mathbb{F}}(B) = \text{colim}_k \text{Vect}_k^{\mathbb{F}}(B)$, mediante las aplicaciones $t_k: \text{Vect}_k^{\mathbb{F}}(B) \rightarrow \text{Vect}_{k+1}^{\mathbb{F}}(B)$. Por otro lado, definimos $BU = \text{colim}_k BU_k$ mediante las aplicaciones $i_k: BU_k \rightarrow BU_{k+1}$ definidas arriba. Como B es compacto, entonces por la nota anterior tenemos que $[B, BU] \cong \text{colim}_k [B, BU_k]$. Por el Teorema 2.63 tenemos que $[B, BU_k] \cong \text{Vect}_k^{\mathbb{F}}(B)$, entonces las aplicaciones t_k y i_k inducen un isomorfismo en los colímites $\text{colim}_k [B, BU_k] \cong \text{colim}_k \text{Vect}_k^{\mathbb{F}}(B)$. \square

Ahora, contamos con las herramientas necesarias, para dar las representaciones homotópicas de los grupos $K(B)$ y $\widetilde{K}(B)$, mencionadas al principio de ésta sección.

Corolario 3.29. *Sea B un espacio compacto, entonces*

1. $K(B) \cong [B, BU \times \mathbb{Z}]$.
2. Si además, B es conexo tenemos $\widetilde{K}(B) \cong [B, BU]$.

Demostración. Mostremos primero 1, por la Proposición 3.21 tenemos que $K(B) \cong \widehat{K}(B) \oplus [B, \mathbb{Z}]$, y por el Teorema 3.28 tenemos que $\widehat{K}(B) \cong [B, BU]$ lo que implica que $K(B) \cong [B, BU] \oplus [B, \mathbb{Z}] \cong [B, BU \times \mathbb{Z}]$.

Ahora mostremos 2, suponemos que B es conexo, entonces por el Corolario 3.22 tenemos que $\widetilde{K}(B) \cong \widehat{K}(B)$, y por el Teorema 3.28 tenemos que $\widetilde{K}(B) \cong \widehat{K}(B) \cong [B, BU]$. \square

3.5. Aplicaciones del teorema de periodicidad de Bott

En esta sección enunciaremos el teorema de periodicidad de Bott en el caso complejo, el cual es considerado como el teorema principal de la Teoría K, la demostración original de éste teorema usa resultados en teoría de Morse los cuales no incluiremos en este trabajo. Luego daremos algunos resultados que nos servirán para calcular la Teoría K de la esfera de dimensión n .

Teorema 3.30 (Periodicidad de Bott). *Se tiene una equivalencia homotópica*

$$BU \times \mathbb{Z} \simeq \Omega^2 BU$$

donde $\Omega^2 BU$ es el 2-espacio de lazos en BU basados en un punto x_0 , de la Definición 1.57.

Nota 3.31. En el caso real, el teorema de periodicidad de Bott establece que existe una equivalencia homotópica

$$BO \times \mathbb{Z} \simeq \Omega^8 BO$$

De aquí podemos deducir que los grupos de homotopía de BU están dados de la siguiente manera

$$\pi_{i+2}(\text{BU}) \cong \pi_i(\Omega^2 \text{BU}) \cong \pi_i(\text{BU} \times \mathbb{Z})$$

pero tenemos que el grupo 0 de homotopía de $\text{BU} \times \mathbb{Z}$ es isomorfo a \mathbb{Z} , por lo tanto

$$\pi_{i+2}(\text{BU}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0; \\ \pi_i(\text{BU}), & i \geq 1. \end{cases}$$

ésto nos dice que los grupos de homotopía de BU se repiten con periodo 2.

Teorema 3.32.

$$\pi_i(\text{BU}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{Si } i \text{ es par.} \\ 0, & \text{Si } i \text{ es impar ó } i = 0; \end{cases}$$

Demostración. Como $\pi_2(\text{BU}) \cong \mathbb{Z}$, tenemos por el teorema de periodicidad de Bott que $\pi_{2n}(\text{BU}) \cong \mathbb{Z}$ para $n \geq 1$, por otro lado tenemos que BU es conexo, lo que implica que $\pi_0(\text{BU}) \cong 0$. Falta obtener los grupos de homotopía impares de BU, por [2, Proposición 9.5.2] tenemos que

$$\pi_i(\text{BU}_k) \cong \pi_i(\text{BU}_{k+1}) \text{ si } i \leq 2k + 1$$

Así, tenemos que $\pi_1(\text{BU}_k) \cong \pi_1(\text{colim}_k \text{BU}_k)$, y en particular $\pi_1(\text{BU}) \cong \pi_1(\text{BU}_1)$, pero tenemos que $\text{BU}_1 = \text{G}_1(\mathbb{C}^\infty) \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$, por lo cual $\pi_1(\text{BU}) \cong \pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^\infty) \cong 0$, y por el teorema de periodicidad de Bott tenemos que $\pi_{2n+1}(\text{BU}) \cong 0$ para $n \geq 0$. \square

Corolario 3.33.

$$\tilde{\text{K}}(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{Si } n \text{ es par ó } n = 0; \\ 0, & \text{Si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Demostración. Si $n = 0$, entonces por la Proposición 3.15, tenemos que $\text{K}(S^0) \cong \tilde{\text{K}}(S^0) \oplus \mathbb{Z}$, por otro lado sabemos que S^0 es la unión ajena de dos puntos por lo cual $\text{K}(S^0) \cong \text{K}(*) \oplus \text{K}(*) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, por lo tanto $\tilde{\text{K}}(S^0) \cong \mathbb{Z}$.

Ahora, si $n > 0$ tenemos que S^n es conexo, entonces por el Corolario 3.29 tenemos que $\tilde{\text{K}}(S^n) \cong [S^n, \text{BU}]$, donde $[S^n, \text{BU}]$ es el conjunto de clases de homotopía de aplicaciones $f: S^n \rightarrow \text{BU}$, y notemos que $[S^n, \text{BU}]_* \cong \pi_n(\text{BU})$. \square

Definición 3.34. Sea X un espacio punteado compacto, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ la *Teoría K superior* como

$$\tilde{\text{K}}^{-n}(X) = \tilde{\text{K}}(\Sigma^n X)$$

Si $A \subset X$ es un subconjunto cerrado de X , definimos la *Teoría K relativa* como

$$\text{K}(X, A) = \tilde{\text{K}}(X \cup C'A)$$

$$\text{K}^{-n}(X, A) \cong \tilde{\text{K}}^{-n}(X \cup C'A)$$

donde ΣX es la suspensión reducida de X y $C'X$ es el cono reducido de X , de la Definición 1.50.

Una consecuencia inmediata del teorema de periodicidad de Bott es el siguiente teorema, el cual nos permite extender la Teoría K superior $\text{K}^n(X, A)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 3.35. $\tilde{\text{K}}^{-n}(X, A) \cong \tilde{\text{K}}^{-n+2}(X, A)$

3.6. Operaciones de Adams

En ésta sección definiremos operaciones en teoría K, para así definir las operaciones de Adams y dar algunas propiedades importantes de éstas.

Definición 3.36. Una *operación* θ en Teoría K asociada a un espacio topológico X , es una aplicación $\theta_X: K(X) \rightarrow K(X)$ tal que, para cualquier aplicación $f: X \rightarrow Y$ el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} K(Y) & \xrightarrow{\theta_Y} & K(Y) \\ f^* \downarrow & & f^* \downarrow \\ K(X) & \xrightarrow{\theta_X} & K(X) \end{array}$$

Definición 3.37. Sea R un anillo conmutativo con 1, denotamos por $R[[t]]$ al anillo de series formales con coeficientes en R . Los elementos de $R[[t]]$ son series formales $\sum_{i \geq 0} r_i t^i$, donde $r_i \in R$.

La suma en $R[[t]]$ se define por

$$\left(\sum_{i \geq 0} r_i t^i \right) + \left(\sum_{i \geq 0} r'_i t^i \right) = \left(\sum_{i \geq 0} (r_i + r'_i) t^i \right)$$

y el producto en $R[[t]]$ se define por

$$\left(\sum_{i \geq 0} r_i t^i \right) \left(\sum_{j \geq 0} r'_j t^j \right) = \left(\sum_{k \geq 0} r''_k t^k \right)$$

donde $r''_k = \sum_{i+j=k} r_i r'_j$, el $1 \in R[[t]]$ es el elemento $1 \in R$, el cual lo podemos ver como la serie $1 + 0t + 0t^2 + 0t^3 + \dots$.

Denotemos al *conjunto de series formales sobre R con termino independiente igual a 1* como $1 + tR[[t]] = \{ \sum_{i \geq 0} r_i t^i \in R[[t]] \mid r_0 = 1 \}$, notemos que éste conjunto es un grupo abeliano, bajo el producto en $R[[t]]$. En efecto, el producto es cerrado puesto que, si tomamos $1 + tk, 1 + tk' \in 1 + tR[[t]]$ donde $k, k' \in R[[t]]$ no tienen termino constante, entonces $(1 + tk)(1 + tk') = 1 + t(k + k') + t^2(kk') \in 1 + tR[[t]]$ ya que $k + k' \in R[[t]]$ no tiene termino constante, además todo elemento $1 + tk \in 1 + tR[[t]]$ tiene un inverso dado por $(1 - tk + (tk)^2 - (tk)^3 + \dots)$, esto es

$$(1 + tk)(1 - tk + (tk)^2 - (tk)^3 + \dots) = 1 - tk + (tk)^2 - (tk)^3 + \dots + tk - (tk)^2 + (tk)^3 - \dots = 1$$

por lo tanto $1 + tR[[t]]$ es un grupo abeliano.

Nota 3.38. El anillo de series formales $R[[t]]$, se comporta igual que el anillo de series de potencia con coeficientes en \mathbb{R} , es decir, podemos definir las funciones analíticas tales como \sin , \cos , \log , entre otras, además de poder definir la derivada de igual manera que en análisis. Por ejemplo, si $x(t) = \sum_{i \geq 0} r_i t^i$, entonces podemos definir $\log x(t)$ y calcular su derivada

$$\frac{d}{dt}(\log x(t)) = \frac{x'(t)}{x(t)}$$

podemos notar que ésta formula está definida si $x(t) \in 1 + tR[[t]]$.

Definición 3.39. Sea $E \rightarrow X$ un haz vectorial sobre un espacio topológico compacto X . Definimos la serie $\lambda_t[E] \in K(X)[[t]]$ como

$$\lambda_t[E] = \sum_{i=0}^{\infty} [\Lambda^i E] t^i$$

donde $\Lambda^i E$ es la i -ésima potencia exterior de E (ver Apéndice A.4).

Veamos que la aplicación $\lambda_t: \text{Vect}^{\mathbb{F}}(X) \rightarrow 1 + tK(X)[[t]]$ definida por $E \mapsto \lambda_t[E]$, es un homomorfismo del semigrupo de clases de isomorfismos de haces vectoriales sobre X , al grupo multiplicativo de series formales sobre $K(X)$ con término independiente igual a 1.

Puesto que $\dim(\Lambda^0 p^{-1}(x)) = 1$ entonces $\Lambda^0 E = 1$, donde $1: X \times \mathbb{F} \rightarrow X$ es el haz trivial de rango 1, lo cual implica que $\lambda_t[E] \in 1 + tK(X)[[t]]$, y en consecuencia $\lambda_t[E]$ tiene un inverso.

Si V, V' son espacios vectoriales, entonces la potencia exterior cumple que $\Lambda^k(V \oplus V') \cong \bigoplus_{i+j=k} (\Lambda^i V \otimes \Lambda^j V')$. Entonces si $[E], [E']$ son haces vectoriales sobre X , tenemos que $\Lambda^k(E \oplus E') \cong \bigoplus_{i+j=k} (\Lambda^i E \otimes \Lambda^j E')$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda_t[E \oplus E'] &= \sum_{k=0}^{\infty} [\Lambda^k(E \oplus E')] t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\bigoplus_{i+j=k} ([\Lambda^i E] \otimes [\Lambda^j E']) \right] t^k \\ &= \left(\sum_{i \geq 0} [\Lambda^i E] t^i \right) \left(\sum_{j \geq 0} [\Lambda^j E'] t^j \right) = \lambda_t[E] \lambda_t[E'] \end{aligned}$$

y entonces λ_t es un homomorfismo de semigrupos.

Ahora, por la propiedad universal de la construcción de Grothendieck, existe un único homomorfismo de grupos $\lambda_t: K(X) \rightarrow 1 + tK(X)[[t]]$ definido por $[E] - [E'] \mapsto \lambda_t[E] \lambda_t[E']^{-1}$, que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \text{Vect}^{\mathbb{F}}(X) & & \\ \alpha \downarrow & \searrow \lambda_t & \\ K(X) & \xrightarrow{\lambda_t} & 1 + tK(X)[[t]] \end{array}$$

Así, podemos definir la aplicación $\lambda^i: K(X) \rightarrow K(X)$ que asocia a cada elemento $[E] - [E'] \in K(X)$ el i -ésimo coeficiente de t^i en la serie $\lambda_t([E] - [E']) = \lambda_t[E] \lambda_t[E']^{-1}$, es decir,

$$\lambda_t([E] - [E']) = 1 + \sum_{i \geq 0} \lambda^i([E] - [E']) t^i.$$

Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua, consideremos la aplicación inducida $f^*: K(Y) \rightarrow K(X)$, esta aplicación f^* induce una aplicación $1 + tK(Y)[[t]] \rightarrow 1 + tK(X)[[t]]$ en los anillos de series formales, la cual abusando de la notación denotaremos por f^* , y la cual está definida como

$$\begin{aligned} f^*: 1 + tK(Y)[[t]] &\longrightarrow 1 + tK(X)[[t]] \\ 1 + \sum_{i \geq 0} c_i t^i &\longmapsto 1 + \sum_{i \geq 0} f^*(c_i) t^i \end{aligned}$$

Entonces tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}(Y) & \xrightarrow{\lambda_t} & 1 + t\mathbb{K}(Y)[[t]] \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ \mathbb{K}(X) & \xrightarrow{\lambda_t} & 1 + t\mathbb{K}(X)[[t]] \end{array} \quad (3.1)$$

en efecto, para cada $\omega \in \mathbb{K}(Y)$ tenemos que

$$f^*(\lambda_t(\omega)) = f^*\left(1 + \sum_{i \geq 0} c_i t^i\right) = 1 + \sum_{i \geq 0} f^*(c_i) t^i = \lambda_t(f^*(\omega))$$

Ahora, al considerar la aplicación $\lambda^i: \mathbb{K}(X) \rightarrow \mathbb{K}(X)$, tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}(Y) & \xrightarrow{\lambda^i} & \mathbb{K}(Y) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ \mathbb{K}(X) & \xrightarrow{\lambda^i} & \mathbb{K}(X) \end{array}$$

ya que el diagrama (3.1) conmuta. Por lo tanto $\lambda^i: \mathbb{K}(X) \rightarrow \mathbb{K}(X)$ es una operación en $\mathbb{K}(X)$.

Definición 3.40. Definimos la *operación rango* $\text{rango}: \mathbb{K}(X) \rightarrow \mathbb{K}(X)$ como sigue. Si $E \rightarrow X$ es un haz vectorial, entonces al igual que en la demostración de la Proposición 2.55, existe una cubierta abierta $\{X_i\}$ tal que $X = \cup_{i=1}^r X_i$ y cada restricción $E|_{X_i}$ es un haz vectorial de rango n_i . Definimos un haz vectorial $r(E) \rightarrow X$ tal que $r(E)|_{X_i} = \varepsilon^{n_i}$, esto nos define un homomorfismo de semianillos $r: \text{Vect}^{\mathbb{R}}(X) \rightarrow \text{Vect}^{\mathbb{R}}(X)$ definido por $[E] \mapsto [r(E)]$, entonces por la propiedad universal de la construcción de Grothendieck, r induce un homomorfismo de anillos rango: $\mathbb{K}(X) \rightarrow \mathbb{K}(X)$.

Definición 3.41 (Operaciones de Adams). Definimos las *operaciones de Adams* $\psi^i: \mathbb{K}(X) \rightarrow \mathbb{K}(X)$ como sigue. Para cada $x \in \mathbb{K}(X)$ definimos

$$\psi^0(x) = \text{rango}(x)$$

ahora, un elemento $\psi_t(x)$ en el anillo de series formales $\mathbb{K}(X)[[t]]$ es de la forma $\psi_t(x) = \sum_{i \geq 0} \psi^i(x) t^i$, definimos entonces

$$\psi_t(x) = \psi^0(x) - t \frac{d}{dt} (\log \lambda_{-t}(x))$$

donde $\frac{d}{dt}$ es la derivada formal del logaritmo de la serie $\lambda_{-t}(x)$, es decir,

$$\psi_{-t}(x) = \psi^0(x) - t \frac{\lambda'_t(x)}{\lambda_t(x)}.$$

Proposición 3.42. Para $x, y \in \mathbb{K}(X)$ se cumplen lo siguiente.

1. $\psi^k(x + y) = \psi^k(x) + \psi^k(y)$ para todo $k \geq 0$.

2. Si $x = [L]$, donde $[L]$ es un haz vectorial lineal (haz vectorial de dimensión 1), entonces $\psi^k(x) = x^k$.
3. Las propiedades 1 y 2 caracterizan las operaciones $\psi^k(x)$.

Demostración. Sean $x, y \in K(X)$. Mostremos primero 1, notemos que x, y tienen la forma $x = [E] - [E']$, $y = [F] - [F']$, entonces tenemos que $x + y = [E \oplus F] - [E' \oplus F']$, y así

$$\begin{aligned}\lambda_{-t}(x + y) &= \lambda_{-t}([E \oplus F] - [E' \oplus F']) = \lambda_{-t}([E \oplus F])\lambda_{-t}([E' \oplus F'])^{-1} \\ &= \lambda_{-t}[E]\lambda_{-t}[F]\lambda_{-t}[E']^{-1}\lambda_{-t}[F']^{-1} \\ &= \lambda_{-t}[E]\lambda_{-t}[E']^{-1}\lambda_{-t}[F]\lambda_{-t}[F']^{-1} = \lambda_{-t}(x)\lambda_{-t}(y)\end{aligned}$$

por lo tanto tenemos que,

$$\begin{aligned}\psi_t(x + y) &= \text{rango}(x + y) + t \frac{d}{dt} \log(\lambda_{-t}(x + y)) \\ &= \text{rango}(x + y) + t \frac{d}{dt} \log(\lambda_{-t}(x)\lambda_{-t}(y)) \\ &= \text{rango}(x) + \text{rango}(y) + t \frac{d}{dt} \log(\lambda_{-t}(x)) + t \frac{d}{dt} \log(\lambda_{-t}(y)) \\ &= \left(\text{rango}(x) + t \frac{d}{dt} \log(\lambda_{-t}(x)) \right) + \left(\text{rango}(y) + t \frac{d}{dt} \log(\lambda_{-t}(y)) \right) \\ &= \psi_t(x) + \psi_t(y)\end{aligned}$$

Ahora mostremos 2, supongamos que $x = [L]$ es un haz lineal, notemos que $\Lambda^0 L = 1$ y $\Lambda^1 L = L$, por otro lado $\Lambda^k L = 0$ para $k > 1$, puesto que para cualquier elemento $y \in X$, su fibra $p^{-1}(x')$ tiene $\dim(p^{-1}(y)) = 1$ y entonces $\dim(\Lambda^k p^{-1}(y)) = \binom{1}{k} = 0$, por lo tanto tenemos que $\lambda_{-t}(x) = 1 - tx$. Entonces

$$\frac{d}{dt} \log(1 - tx) = \frac{-x}{1 - tx} = -x - tx^2 - t^2 x^3 - \dots$$

ésta última igualdad se cumple puesto que la serie $\frac{-x}{1-tx}$ es una serie geométrica, por lo tanto

$$\psi_t(x) = \text{rango}(x) - t(-x - tx^2 - t^2 x^3 - \dots) = 1 + tx + t^2 x^2 + t^3 x^3 + \dots$$

lo que implica que los coeficientes $\psi^k(x) = x^k$.

La parte 3 se demuestra usando el principio de descomposición, el cual veremos a continuación. \square

3.7. Principio de descomposición

El principio de descomposición es un resultado que nos permite relacionar a un haz vectorial arbitrario con la suma directa de haces lineales. En ésta sección daremos las herramientas necesarias para poder demostrar éste importante resultado, y como consecuencia veremos otras propiedades que cumplen las operaciones de Adams, distintas a las dadas en la Proposición 3.42.

Definición 3.43. Sea $p: E \rightarrow X$ un haz vectorial. Definimos el espacio $P(E) = (E \setminus E^0) / \sim$ donde E^0 es la sección cero del haz vectorial $p: E \rightarrow X$, y la relación \sim esta definida como sigue: Dados dos elementos $e, e' \in E \setminus E^0$, $e \sim e'$ si y solo si $p(e) = p(e')$ y $e = \lambda e'$, con $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Denotamos por $[e] \in P(E)$ a la clase del elemento $e \in E \setminus E^0$.

Definimos el *haz proyectivo asociado a p* , como la aplicación $q: P(E) \rightarrow X$ dado por $[e] \mapsto p(e)$.

Veamos que el haz proyectivo asociado a p es localmente trivial. Como $p: E \rightarrow X$ es un haz vectorial entonces para una cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ existen trivializaciones locales $\varphi_{U_\alpha}: p^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^n$, como la imagen de la sección cero $E^0 \in p^{-1}(U_\alpha)$ es el elemento $0 \in \mathbb{F}^n$, entonces la aplicación $\varphi_{U_\alpha}: p^{-1}(U_\alpha) \setminus E^0 \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$ sigue siendo un homeomorfismo.

Notemos que el espacio proyectivo $\mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1}$ está definido como el espacio cociente $\mathbb{F}^n \setminus \{0\} / \sim$ donde $|\lambda| \neq 0$, entonces usando la aplicación cociente que define a $\mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1}$, podemos definir una aplicación $\tau: U_\alpha \times \mathbb{F}^n \setminus \{0\} \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1}$. Por otro lado consideramos la aplicación $\pi: p^{-1}(U_\alpha) \setminus E^0 \rightarrow q^{-1}(U_\alpha)$ que manda cada punto en su clase de equivalencia. Notemos que si $(x, v), (x, \lambda v) \in U_\alpha \times \mathbb{F}^n \setminus \{0\}$ tal que $(x, v) \sim (x, \lambda v)$ en $U_\alpha \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1}$ entonces $\pi \circ \varphi_{U_\alpha}(x, v) = \pi \circ \varphi_{U_\alpha}(x, \lambda v)$, por construcción. Por lo tanto, por la propiedad universal del cociente, existe un homeomorfismo $h_1: q^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1}$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbb{F}^n \setminus \{0\} & \xleftarrow{\varphi_{U_\alpha}} & p^{-1}(U_\alpha) \setminus E^0 \\ \tau \downarrow & & \downarrow \pi \\ U_\alpha \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1} & \xleftarrow{h_1} & q^{-1}(U_\alpha) \end{array}$$

Del mismo modo, por la propiedad universal del cociente para aplicado a $\varphi_{U_\alpha}^{-1}$, existe un homeomorfismo $h_2: U_\alpha \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow q^{-1}(U_\alpha)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times \mathbb{F}^n \setminus \{0\} & \xrightarrow{\varphi_{U_\alpha}^{-1}} & p^{-1}(U_\alpha) \setminus E^0 \\ \tau \downarrow & & \downarrow \pi \\ U_\alpha \times \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1} & \xrightarrow{h_2} & q^{-1}(U_\alpha) \end{array}$$

por lo tanto, tenemos homomorfismos h_1, h_2 tal que $h_1 \circ h_2 = \text{id}$ y $h_2 \circ h_1 = \text{id}$ y entonces por la unicidad de la propiedad universal del cociente, tenemos que h_1 es un homeomorfismo con inversa $h_1^{-1} = h_2$, y entonces h_1 define una trivialización local para el haz vectorial $q: P(E) \rightarrow X$.

Notemos que la fibra $q^{-1}(x)$ de cada elemento $x \in X$, es homeomorfa al espacio proyectivo asociado al espacio vectorial $p^{-1}(x)$.

Denotemos por $\Gamma(E)$ al espacio vectorial de secciones de un haz vectorial $p: E \rightarrow X$.

Lema 3.44. Si X es compacto, entonces existe un subespacio $W \subset \Gamma(E)$ de dimensión finita, donde la aplicación $X \times W \rightarrow E$ definida por $(x, s) \mapsto s(x)$ es sobreyectiva.

Demostración. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de X en la cual $p: E \rightarrow X$ es trivial, es decir, $p^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbb{F}^k$, como X es compacto entonces existe un número finito de elementos de $\{U_\alpha\}$ que cubren a X , digamos $\{U_1, \dots, U_l\}$. Entonces por la Proposición 2.18, para cada

$i = 1, \dots, l$ existen s_{i1}, \dots, s_{ik} secciones linealmente independientes donde $s_{ij}: U_i \rightarrow p^{-1}(U_i)$. Si fijamos un elemento $u \in U_i$ entonces tenemos que $\{s_{i1}(u), \dots, s_{ik}(u)\}$ es una base para $p^{-1}(u) \cong \mathbb{F}^k$. Sea $\{\mu_i\}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_1, \dots, U_l\}$, donde el soporte de μ_i esté contenido en U_i . Por lo tanto definimos a W como el subespacio generado por el conjunto $\{\tilde{s}_{ij} \mid \tilde{s}_{ij}(x) = \mu_i(x)s_{ij}(x), i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, k\} \subset \Gamma(E)$, notemos que $\tilde{s}_{ij}(x) = 0$ si $x \notin U_i$, y entonces la aplicación $X \times W \rightarrow E$ definida por $(x, \tilde{s}_{ij}) \mapsto \tilde{s}_{ij}(x)$ es sobre. \square

Corolario 3.45. *Sea $p: E \rightarrow X$ un haz vectorial con X compacto, entonces existe W de dimensión finita y una aplicación $\varphi: X \rightarrow \text{Pr}(W)$, tal que el haz vectorial E_φ asociado a φ de la Definición 2.37, es isomorfo a E*

Demostración. Por el Lema 3.44 existe $W \subset \Gamma(E)$, tal que la aplicación $\phi: B \times W \rightarrow E$ definida por $\phi(x, w) = w(x)$ es sobre. Definamos $\varphi: X \rightarrow \text{Pr}(W)$ donde $\varphi(x)$ es la proyección ortogonal sobre $\ker(\phi^{-1}(x))^\perp = \{w \in W \mid \langle w, v \rangle = 0, \text{ para cada } v \text{ tal que } \phi(x, v) = 0\}$, y donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto hermitiano en W . Entonces por construcción, el haz vectorial asociado $E_\varphi = \{(x, w) \in X \times W \mid \varphi(x)w = w\} \rightarrow X$ es isomorfo al haz vectorial $p: E \rightarrow X$ \square

Definición 3.46. Definimos el haz tautológico $\pi: L \rightarrow P(E)$, donde $L = \{(e', [e]) \in E \times P(E) \mid e' \in [e]\}$, definido por $\pi((e', [e])) = [e]$.

Veamos que la fibra $\pi^{-1}([e])$ de una clase $[e] \in P(E)$, tiene dimensión 1, es decir, el haz tautológico es un haz lineal. En efecto, podemos notar que $\pi: L \rightarrow P(E)$ es un subhaz vectorial de el haz inducido $q^*E \rightarrow P(E)$ ya que L es un subespacio vectorial de $q^*E = \{(e', [e]) \in E \times P(E) \mid p(e') = q([e]) = p(e)\}$. Entonces por el Corolario 3.45 existe una aplicación $\varphi: X \rightarrow \text{Pr}(\mathbb{F}^m)$ tal que el haz vectorial asociado $E \cong E_\varphi = \{(x, v \in X \times \mathbb{F}^m) \mid \varphi(x)v = v\}$, y entonces $L \cong E_\psi = \{([e], v') \in P(E) \times \mathbb{F}^m \mid \psi([e])v' = v'\}$ donde $\psi: P(E) \rightarrow \text{Pr}(\mathbb{F}^m)$ esta definida por $[e] \mapsto \varphi(x) \circ \pi_v$ donde $e = (x, v) \in X \times \mathbb{F}^m$, $\varphi(x)v = v$ y π_v es la proyección ortogonal sobre la recta generada por $v \neq 0$.

Proposición 3.47. *Sea $p: E \rightarrow X$ un haz vectorial, y $q: P(E) \rightarrow X$ su haz proyectivo asociado, entonces $q^*(E) = E' \oplus L$, donde $L \rightarrow P(E)$ es el haz tautológico, y $q^*: K(X) \rightarrow K(P(E))$.*

Demostración. Sea $E' \rightarrow P(E)$ el haz vectorial asociado a $\psi': P(E) \rightarrow \text{Pr}(\mathbb{F}^m)$ definido por $[e] \mapsto \varphi(x) \circ \pi'_v$, donde $e = (x, v)$, $\varphi(x)v = v$ y π'_v es la proyección ortogonal sobre el complemento ortogonal de $\langle v \rangle$ en $\varphi(x)\mathbb{F}^m$. Ya que cualquier elemento en $\varphi\mathbb{F}^m$ tiene una única expresión como $w + w'$ con $w \in \langle v \rangle = \psi(x)\mathbb{F}^m$ (definida arriba) y $w' \in \varphi(x) \circ \pi'_v \mathbb{F}^m = \psi'(x)\mathbb{F}^m$. \square

Ahora estamos listos para enunciar el principio de descomposición.

Proposición 3.48 (Principio de descomposición). *Dado un haz vectorial $p: E \rightarrow X$ de rango k , existe una aplicación $f: P(E) \rightarrow X$ tal que.*

1. La aplicación $f^*: K(X) \rightarrow K(P(E))$ es un monomorfismo.
2. El haz inducido $f^*E = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$.

Demostración. Primero mostraremos 1, consideremos el haz proyectivo asociado $q: P(E) \rightarrow X$, y consideremos la aplicación $q^*: K(X) \rightarrow K(P(E))$ definida por $[E] \mapsto q^*(E) \otimes 1$ donde $1 \in K(X)$, entonces inducimos un $K(X)$ -módulo libre

$$\begin{array}{ccc} K(X) \times K(P(E)) & \longrightarrow & K(P(E)) \\ (E, F) & \longmapsto & q^*(E) \otimes F \end{array}$$

En [3, Corolario 2.7.9], se muestra que $K(P(E))$ es un módulo libre sobre el anillo $K(X)$ con generadores $1, 1 - [L], (1 - [L])^2, \dots, (1 - [L])^{k-1}$, donde L es el haz lineal bajo $P(E)$. Y por lo tanto, como $K(P(E))$ es un $K(X)$ -módulo libre, tenemos que $f^*: K(X) \rightarrow K(P(E))$ es inyectiva.

Ahora mostremos 2, por la Proposición 3.47 tenemos que $q^*(E) = E' \oplus L$ donde L es un haz lineal, y $E' = E_{\psi'}$ es el haz vectorial asociado a ψ' . Definamos a $L_k = L$, ahora consideremos el haz vectorial $E' \rightarrow P(E)$ y el haz proyectivo asociado $q_1: P(E') \rightarrow P(E)$, apliquemos nuevamente la Proposición 3.47, lo cual nos da la descomposición $q_1^*(E') = E'' \oplus L'$, donde L' es un haz lineal, definamos entonces $L_{k-1} = L'$. Inductivamente tenemos la aplicación $q_{k-2}^*: P(E^{(k-2)}) \rightarrow P(E^{(k-3)})$ la cual cumple que $q_{k-2}^*(E^{(k-2)}) = E^{(k-1)} \oplus L_2$. Definimos entonces $f = q_{k-1} \circ q_{k-2} \circ \dots \circ q_1 \circ q$, notemos que $f: F \rightarrow X$ y $F = P(E^{(k-1)})$.

Entonces al tomar $f^*: K(X) \rightarrow K(F)$ tenemos el siguiente diagrama

$$K(X) \xrightarrow{q^*} K(P(E)) \xrightarrow{q_1^*} \dots \xrightarrow{q_{k-1}^*} K(P(E^{(k-2)}))$$

donde cada q_i^* es un monomorfismo, y entonces $f^*(E) = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_k$. \square

Teorema 3.49. *Las operaciones de Adams cumplen las siguientes propiedades, para cada $x, y \in K(X)$ se tiene*

1. $\psi^k(xy) = \psi^k(x)\psi^k(y)$ para $k = 0, 1, 2, \dots$
2. $\psi^k(\psi^l)(x) = \psi^{kl}(x)$.
3. Si p es primo, entonces $\psi^p(x) \equiv x^p \pmod{p}$.
4. Si $b \in \tilde{K}^0(S^{2n})$ es el generador, entonces $\psi^k(b) = k^n(b)$ para $k = 0, 1, 2, \dots$

Demostración. Sea $x, y \in K(X)$, y consideremos a x y y como representantes de sus clases en $K(X)$. Por el principio de descomposición tenemos que $f^*(x) = L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ y $f^*(y) = L'_1 \oplus \dots \oplus L'_m$. Para mostrar 1, veamos primero que $\psi^k(f^*(x)f^*(y)) = \psi^k(f^*(x))\psi^k(f^*(y))$, en efecto tenemos que

$$\begin{aligned} \psi^k(f^*(x))\psi^k(f^*(y)) &= \psi^k(L_1 \oplus \dots \oplus L_n) \otimes \psi^k(L'_1 \oplus \dots \oplus L'_m) \\ &= (L_1^k \oplus \dots \oplus L_n^k) \otimes ((L'_1)^k \oplus \dots \oplus (L'_m)^k) \\ &= \bigoplus_{i,j} (L_i^k \otimes (L'_j)^k) \end{aligned}$$

y por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \psi^k(f^*(x)f^*(y)) &= \psi^k((L_1 \oplus \dots \oplus L_n) \otimes (L'_1 \oplus \dots \oplus L'_m)) = \psi^k\left(\bigoplus_{i,j} (L_i \otimes L'_j)\right) \\ &= \bigoplus_{i,j} \psi^k(L_i \otimes L'_j) = \bigoplus_{i,j} (L_i \otimes L'_j)^k = \bigoplus_{i,j} (L_i^k \otimes (L'_j)^k). \end{aligned}$$

Como ψ^k es una operación en Teoría K, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\psi^k} & K(X) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ K(P(E^{(k-2)})) & \xrightarrow{\psi^k} & K(P(E^{(k-2)})) \end{array}$$

por lo tanto, como $\psi^k(f^*(x)f^*(y)) = \psi^k(f^*(x))\psi^k(f^*(y))$ entonces $\psi^k(xy) = \psi^k(x)\psi^k(y)$.

Ahora mostremos 2, veamos que para $f^*(x) = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ se cumple que

$$\begin{aligned} \psi^k(\psi^l(f^*(x))) &= \psi^k(\psi^l(L_1 \oplus \cdots \oplus L_n)) = \psi^k\left(\bigoplus_{i=1}^n L_i^l\right) \\ &= \bigoplus_{i=1}^n L_i^{lk} = \psi^{kl}\left(\bigoplus_{i=1}^n L_i\right) = \psi^{kl}(f^*(x)) \end{aligned}$$

entonces tenemos que $f^*(\psi^k(\psi^l(x))) = f^*(\psi^{kl}(x))$, como f^* es inyectiva podemos concluir que $\psi^k(\psi^l(x)) = \psi^{kl}(x)$.

Para mostrar 3, notamos que para $f^*(x) = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ se cumple que

$$\begin{aligned} (f^*(x))^p &= (L_1 \oplus \cdots \oplus L_n)^p \\ &= L_1^p \oplus \cdots \oplus L_n^p \oplus (p(p-1)L_1 \otimes L_2) \oplus \cdots \oplus (p(p-1)L_{n-1} \otimes L_n) \end{aligned}$$

y entonces módulo p , se tiene que

$$(f^*(x))^p \equiv (L_1 \oplus \cdots \oplus L_n)^p \equiv L_1^p \oplus \cdots \oplus L_n^p \equiv \psi^p(L_1 \oplus \cdots \oplus L_n) \equiv \psi^p(f^*(x))$$

y por tanto $\psi^p(x) \equiv x^p \pmod{p}$.

Mostremos ahora 4, recordemos que $K(S^2) \cong \tilde{K}(S^2) \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, y recordemos que $\tilde{K}(S^2) \cong \ker(i^*)$ donde la aplicación $i^*: K(S^2) \rightarrow K(*)$ está definida por $[E] - [F] \mapsto \dim(E) - \dim(F)$, donde $\dim(E)$ denota la dimension del rango del haz vectorial $E \rightarrow S^2$ asociado al punto base en S^2 (análogamente está definido $\dim(F)$). Entonces podemos notar que $K(S^2)$ tiene generadores $\{\varepsilon, L\}$ donde L es el haz tautológico y ε es el haz vectorial de rango 1, y entonces tenemos que $L - \varepsilon$ es el generador de $\tilde{K}(S^2)$.

Notemos que $(L \otimes L) \oplus \varepsilon = (L \otimes \varepsilon) \oplus (L \otimes \varepsilon) = L \oplus L$, es decir, $L^2 + \varepsilon = 2L$ y entonces $(L - \varepsilon)^2 = 0$. Sea $b = L - \varepsilon$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \psi^k(b) &= \psi^k(L - \varepsilon) = \psi^k(L) - \psi^k(\varepsilon) = L^k - \varepsilon = (\varepsilon + L - \varepsilon)^k - \varepsilon \\ &= (\varepsilon + b)^k - \varepsilon = \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} b^i\right) - \varepsilon = \varepsilon + kb - \varepsilon = kb. \end{aligned}$$

Usando el teorema de periodicidad de Bott (Teorema 3.30), podemos extender esta construcción de la siguiente manera. Notemos que $\tilde{K}(S^2) \otimes \tilde{K}(S^{2n-2}) \cong \tilde{K}(S^{2n})$ mediante la correspondencia $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$, donde α y β son generadores de $K(S^2)$ y $\tilde{K}(S^{2n-2})$ respectivamente, y entonces se cumple que

$$\psi^k(\alpha\beta) = \psi^k(\alpha)\psi^k(\beta) = (k\alpha)(k^{n-1}\beta) = k^n\alpha\beta$$

y por el teorema de periodicidad de Bott tenemos que $\tilde{K}(S^{2n-2}) \cong \tilde{K}^{-2}(S^{2n-2}) \cong \tilde{K}(S^{2n})$. \square

4

Campos vectoriales en esferas

Para cada n , denotamos por S^n a la esfera de dimensión n . Definimos un *campo vectorial* en S^n , como una aplicación continua $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que a cada $x \in S^n$ le asocia un vector $v(x)$ tangente a S^n , esta condición es equivalente a tener

$$\langle x, v(x) \rangle = 0$$

para toda $x \in S^n$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno estándar en \mathbb{R}^n .

Si $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es un campo vectorial no nulo, podemos suponer que los vectores $v(x)$ tienen norma igual a 1. Decimos que dos campos vectoriales v_1 y v_2 en S^n son *linealmente independientes*, si $v_1(x)$ y $v_2(x)$ son linealmente independientes para cada $x \in S^n$, esta condición es equivalente a tener

$$\langle v_i(x), v_j(x) \rangle = \delta_{ij}$$

para cada $x \in S^n$, $i, j = 1, 2$, y donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Por ejemplo en S^1 , podemos construir un campo vectorial $v: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $v(x, y) = (-y, x)$, en efecto tenemos que $\langle (x, y), v(x, y) \rangle = \langle (x, y), (-y, x) \rangle = -xy + yx = 0$, para cada $x \in S^1$. Notemos que v es una rotación por 90° , tal como se muestra en la Figura 4.1. Por otro lado, podemos construir otro campo vectorial en S^1 , definiendo $v': S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $v'(x, y) = (y, -x)$, en efecto tenemos que $\langle (x, y), v'(x, y) \rangle = \langle (x, y), (y, -x) \rangle = xy - yx = 0$, para cada $x \in S^1$. Notemos que v' es una rotación por 270° , tal como se muestra en la Figura 4.1

Sin embargo, podemos notar que los vectores $v(x, y)$ y $v'(x, y)$ no son linealmente independientes para cada $(x, y) \in S^1$, puesto que $\langle v(x, y), v'(x, y) \rangle = \langle (-y, x), (y, -x) \rangle = -y^2 - x^2 \neq 0$ para cada $x \in S^1$, por lo cual los campos vectoriales v y v' no son linealmente independientes. Esto nos lleva a hacernos la siguiente pregunta: *¿Cuántos campos vectoriales no nulos y linealmente independientes están definidos en S^n , para cada n ?*

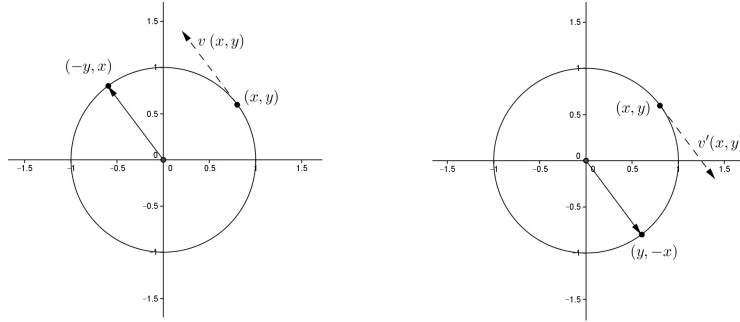


Figura 4.1: Campos vectoriales v y v' en S^1 .

En este capítulo veremos el trabajo de Hurwitz y Radon, en respuesta a ésta pregunta, el cual se refleja en el siguiente resultado.

Teorema 4.1 (Hurwitz-Radon). *Para $n = (2k - 1)2^c 16^d$ con $0 \leq c \leq 3$, sea $\rho(n) = 2^c + 8d$ entonces existen $\rho(n) - 1$ campos vectoriales linealmente independientes en S^{n-1}*

Como referencias de este capítulo consultar [12], [5], [7], [8], [14], [16] y [19].

4.1. Campos vectoriales unitarios

En primer lugar veremos cuándo una esfera S^n , tiene un campo vectorial no nulo.

Proposición 4.2. *Si S^{n-1} tiene k campos vectoriales linealmente independientes v_1, \dots, v_k , entonces S^{nq-1} tiene k campos vectoriales linealmente independientes v'_1, \dots, v'_k .*

Demostración. Sean v_1, \dots, v_k son campos vectoriales linealmente independientes en S^{n-1} , entonces podemos ver cada v_i como una aplicación $v_i: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que cumple que el producto interno $\langle x, v_i(x) \rangle = 0$ y $\langle v_i(x), v_j(x) \rangle = \delta_{ij}$ para toda $x \in S^{n-1}$ y $1 \leq i, j \leq k$, y donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Por la Nota 1.52, tenemos que la esfera S^{nq-1} es homeomorfa al join de q esferas S^{n-1} , entonces cada $x \in S^{nq-1}$ lo podemos ver como una q -tupla $x = (\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_q x_q)$, donde cada $x_i \in S^{n-1}$ y $\sum_i \alpha_i^2 = 1$.

Definamos $v'_i: S^{nq-1} \rightarrow \mathbb{R}^{nq}$ como $v'_i(x_1, \dots, x_q) = (\alpha_1 v_i(x_1) + \dots + \alpha_q v_i(x_q))$, entonces para cada $x \in S^{nq-1}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle x, v'_i(x) \rangle &= \langle x_1, \alpha_1 v_i(x_1) \rangle + \dots + \langle x_q, \alpha_q v_i(x_q) \rangle \\ &= \alpha_1 \langle x_1, v_i(x_1) \rangle + \dots + \alpha_q \langle x_q, v_i(x_q) \rangle = 0 \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \langle v'_i(x), v'_j(x) \rangle &= \alpha_1 \langle v_i(x_1), v_j(x_1) \rangle + \dots + \alpha_q \langle v_i(x_q), v_j(x_q) \rangle \\ &= \alpha_1^2 \langle v_i(x_1), v_j(x_1) \rangle + \dots + \alpha_1 \alpha_q \langle v_i(x_1), v_j(x_q) \rangle + \dots \\ &\quad + \alpha_q \alpha_1 \langle v_i(x_q), v_j(x_1) \rangle + \dots + \alpha_q^2 \langle v_i(x_q), v_j(x_q) \rangle \end{aligned}$$

Si $i \neq j$ entonces $\langle v'_i(x), v'_j(x) \rangle = 0$, puesto que cada $\langle v_i(x_k), v_j(x_l) \rangle = 0$ para cada $1 \leq k, l \leq q$. Si $i = j$ entonces $\langle v'_i(x), v'_j(x) \rangle = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_q^2 = 1$. Por lo tanto, v'_1, \dots, v'_k son campos vectoriales linealmente independientes en S^{nq-1} . \square

Corolario 4.3. *Cada esfera S^{m-1} con m par, tiene un campo vectorial no nulo.*

Demostración. Vimos que S^1 tiene un campo vectorial $v: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ no nulo definido por $v(x, y) = (-y, x)$. Entonces por la Proposición 4.2, tenemos que S^{2q-1} tiene un campo vectorial no nulo. \square

Esto nos dice que todas las esferas de dimension impar tienen un campo vectorial no nulo. En la siguiente proposición, veremos una propiedad que cumple S^n con un campo vectorial no nulo.

Proposición 4.4. *Sea S^n una esfera con un campo vectorial v no nulo. Entonces la aplicación antípoda $S^n \rightarrow S^n$ definida por $x \mapsto -x$, es homotópica a la identidad.*

Demostración. Como v es un campo vectorial no nulo, entonces podemos suponer que v es unitario, es decir, $\|v\| = 1$, si no $\bar{v} = \frac{v}{\|v\|}$ es un campo vectorial con norma igual a 1.

Definamos una homotopía $H: S^n \times [0, 1] \rightarrow S^n$ como $H(x, t) = \cos(t\pi)x + \sin(t\pi)v(x)$, notemos que

$$H(x, 0) = x \quad H(x, \pi) = -x$$

por lo tanto la aplicación antípoda de S^n es homotópica a la identidad. \square

Nota 4.5. Se puede probar que el grado de la aplicación antípoda $S^n \rightarrow S^n$ es $(-1)^{n+1}$. Entonces por el Corolario 4.3, la Proposición 4.4 y esta nota, tenemos las siguientes equivalencias.

Teorema 4.6. *Dada un esfera S^n , las siguientes son equivalentes:*

1. n es impar.
2. La aplicación antípoda $S^n \rightarrow S^n$ tiene grado 1.
3. La aplicación antípoda es homotópica a la identidad.
4. S^n tiene un campo vectorial no nulo unitario.

Negando las equivalencias anteriores, tenemos las siguientes equivalencias:

1. n es par.
2. La aplicación antípoda $S^n \rightarrow S^n$ tiene grado -1 .
3. La aplicación antípoda no es homotópica a la identidad.
4. S^n no tiene un campo vectorial no nulo unitario.

4.2. Multiplicaciones ortogonales

En esta sección definiremos aplicaciones llamadas multiplicaciones ortogonales, y veremos que éstas, están estrechamente ligadas a la existencia de campos vectoriales en esferas.

Definición 4.7. Decimos que una aplicación $\mu: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una *multiplicación ortogonal*, si μ es bilineal y

$$\|\mu(y, x)\| = \|y\|\|x\|$$

para cada $y \in \mathbb{R}^k$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 4.8. Si fijamos $x \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, entonces la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^k &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ y &\longmapsto \mu(y, x) \end{aligned}$$

es una isometría, es decir, una aplicación que preserva producto interno.

Demostración. Sabemos que $\langle y, z \rangle = \frac{1}{2}(\|y + z\|^2 - \|z\|^2 - \|y\|^2)$, entonces para $x \in S^{n-1}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \mu(y, x), \mu(z, x) \rangle &= \frac{1}{2}(\|\mu(y, x) + \mu(z, x)\|^2 - \|\mu(z, x)\|^2 - \|\mu(y, x)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|\mu(y + z, x)\|^2 - \|\mu(z, x)\|^2 - \|\mu(y, x)\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|y + z\|^2 \|x\|^2 - \|z\|^2 \|x\|^2 - \|y\|^2 \|x\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|y + z\|^2 - \|z\|^2 - \|y\|^2) = \langle y, z \rangle \end{aligned}$$

□

Sean e_1, \dots, e_k la base estándar de \mathbb{R}^k . Decimos que una multiplicación ortogonal $\mu: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *normalizada*, si $\mu(e_k, x) = x$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que cualquier multiplicación ortogonal es normalizada, si no $\mu(e_k, x) = u(x)$, y entonces $\mu(y, u^{-1}(x))$ es una multiplicación ortogonal normalizada.

Teorema 4.9. Si existe una multiplicación ortogonal $\mu: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, existen $k - 1$ campos vectoriales linealmente independientes en S^{n-1} .

Demostración. Suponemos que μ es una multiplicación ortogonal normalizada. Definamos las aplicaciones

$$\begin{aligned} v_i: S^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \mu(e_i, x) \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq k - 1$. Veamos que cada v_i es un campo vectorial en S^{n-1} , esto es

$$\langle x, v_i(x) \rangle = \langle x, \mu(e_i, x) \rangle = \langle \mu(e_k, x), \mu(e_i, x) \rangle = \langle e_k, e_i \rangle = 0$$

para cada $x \in S^{n-1}$. Finalmente, veamos que los campos vectoriales v_1, \dots, v_{k-1} son linealmente independientes para cada $x \in S^{n-1}$, esto es

$$\langle v_i(x), v_j(x) \rangle = \langle \mu(e_i, x), \mu(e_j, x) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

□

Entonces, el problema de encontrar campos vectoriales linealmente independientes en esferas, se reduce a mostrar la existencia de multiplicaciones ortogonales, el cual es un problema puramente algebraico. Entonces, es necesario dar una versión algebraica de la noción de multiplicación ortogonal.

Teorema 4.10. El conjunto de multiplicaciones ortogonales $\mu: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ normalizadas, está en correspondencia biyectiva con conjuntos $u_1, \dots, u_{k-1} \in O(n)$, tales que $u_i^2 = -\mathbb{I}$ y $u_i u_j + u_j u_i = 0$, donde \mathbb{I} es la matriz identidad.

Demostración. Sea e_1, \dots, e_k la base estándar de \mathbb{R}^k y sea $\mu: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una multiplicación ortogonal normalizada, definamos $u_i(x) = \mu(e_i, x)$ con $i = 1, \dots, k$. Veamos que cada $u_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal que preserva producto interno, en efecto, para cada $i = 1, \dots, k$ tenemos que

$$\|u_i(x)\| = \|\mu(e_i, x)\| = \|e_i\| \|x\| = \|x\|$$

recordemos que cada transformación u_i tiene asociada una matriz la cual abusando de la notación denotaremos por u_i . Por lo tanto u_i es una matriz $n \times n$ que preserva producto interno, es decir, $u_i \in O(n)$.

Veamos que u_1, \dots, u_{k-1} cumplen con las relaciones $u_i^2 = -\mathbb{I}$ y $u_i u_j + u_j u_i = 0$. Cualquier elemento $y \in \mathbb{R}^k$ lo podemos escribir como una suma $y = \sum_i a_i e_i$, por lo cual para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\mu(y, x) = \mu\left(\sum_{i=1}^k a_i e_i, x\right) = \sum_{i=1}^k a_i \mu(e_i, x) = \sum_{i=1}^k a_i u_i(x)$$

como μ es normalizada podemos suponer que $u_k = \mathbb{I}$, recordemos que evaluar una transformación lineal $u_i(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, es equivalente a multiplicar la matriz u_i con el vector coordenada x de dimensión $n \times 1$. Por hipótesis $\|\mu(y, x)\| = \|y\| \|x\|$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\|y\| = \|x\| = 1$, y entonces $\|\mu(y, x)\| = 1$. Sea u_i^* la transpuesta de u_i , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= \|\mu(y, x)\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^k a_i u_i(x) \right\|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \langle a_i u_i \cdot x, a_j u_j \cdot x \rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i a_j \langle u_i \cdot x, u_j \cdot x \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k a_i^2 \langle u_i \cdot x, u_i \cdot x \rangle + \sum_{i < j} a_i a_j (\langle u_i \cdot x, u_j \cdot x \rangle + \langle u_j \cdot x, u_i \cdot x \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i^2 (u_i \cdot x)^* (u_i \cdot x) + \sum_{i < j} a_i a_j ((u_i \cdot x)^* (u_j \cdot x) + (u_j \cdot x)^* (u_i \cdot x)) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i^2 x^* \cdot u_i^* \cdot u_i \cdot x + \sum_{i < j} a_i a_j (x^* \cdot u_i^* \cdot u_j \cdot x + x^* \cdot u_j^* \cdot u_i \cdot x) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i^2 x^* \cdot u_i^* \cdot u_i \cdot x + \sum_{i < j} a_i a_j (x^* (u_i^* \cdot u_j + u_j^* \cdot u_i) x) \end{aligned}$$

Como $u_i \in O(n)$, entonces tenemos que $u_i^* \cdot u_i = \mathbb{I}$ para toda i , y como $\|y\| = 1$ tenemos que $(a_1, \dots, a_k) \in S^k$ por lo cual $\sum_i a_i^2 = 1$, por lo tanto

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 x^* \cdot u_i^* \cdot u_i \cdot x = \sum_{i=1}^k a_i^2 x^* \cdot x = \sum_{i=1}^k a_i^2 \|x\|^2 = 1$$

y entonces $\sum_{i < j} a_i a_j (x^* (u_i \cdot u_j^* + u_j \cdot u_i^*) x) = 0$ para todo $i < j$, para todo $y \in S^k$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Consideremos $y = (0, \dots, 0, \cos(\theta), 0, \dots, 0, \sin(\theta), 0, \dots, 0) \in S^k$, entonces en este caso tenemos que $x^* (u_i u_j^* + u_j u_i^*) x = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$ lo cual implica que $u_i \cdot u_j^* + u_j \cdot u_i^* = 0$ para $i < j$.

Si $j = k$ (pues u_k es la identidad) tenemos que $u_i \cdot u_k^* + u_k \cdot u_i^* = u_i \cdot \mathbb{I} + \mathbb{I} \cdot u_i^* = u_i + u_i^* = 0$, y entonces $u_i = -u_i^*$, ya que u_i es una matriz ortogonal tenemos que $u_i^* = u_i^{-1}$ por lo cual

$u_i = -u_i^* = -u_i^{-1}$, al multiplicar por la matriz u_i en ambos lados de la igualdad obtenemos que $u_i^2 = -u_i u_i^{-1} = -\mathbb{I}$.

Si $i < j < k$, tenemos que $u_i \cdot u_j^* + u_j \cdot u_i^* = 0$ si y sólo si $u_i \cdot u_j + u_j \cdot u_i = 0$ ó $u_i \cdot (-u_j) + u_j \cdot (-u_i) = 0$, y en ambos casos se cumple la relación deseada.

Por otro lado, sean $u_1, \dots, u_{k-1} \in O(n)$ transformaciones lineales tal que $u_i^2 = -\mathbb{I}$ y $u_i u_j + u_j u_i = 0$, y definimos $u_k = \mathbb{I}$ la matriz identidad. Definimos la multiplicación ortogonal $\mu: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

Sea e_1, \dots, e_k la base estándar de \mathbb{R}^k , y notemos que cualquier elemento $y \in \mathbb{R}^k$ lo podemos escribir como una suma formal $y = \sum_i a_i e_i$, por lo cual para todo $y \in \mathbb{R}^k$ y $x \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$\mu(y, x) := \sum_{i=1}^k a_i u_i(x)$$

Veamos que μ cumple que $\|\mu(y, x)\| = \|y\| \|x\|$, para esto es suficiente probar que $\|\mu(y, x)\| = 1$ si $\|y\| = \|x\| = 1$. Supongamos que $\|y\| = \|x\| = 1$, y en consecuencia $(a_1, \dots, a_k) \in S^{k-1}$. Sea u_i^* la transpuesta de u_i para cada $i = 1, \dots, k$, entonces para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|\mu(y, x)\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^k a_i u_i(x) \right\|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \langle a_i u_i \cdot x, a_j u_j \cdot x \rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i a_j \langle u_i \cdot x, u_j \cdot x \rangle \\ &= \sum_{i=1}^k a_i^2 \langle u_i \cdot x, u_i \cdot x \rangle + \sum_{i < j} a_i a_j (\langle u_i \cdot x, u_j \cdot x \rangle + \langle u_j \cdot x, u_i \cdot x \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i^2 (u_i \cdot x)^* (u_i \cdot x) + \sum_{i < j} a_i a_j ((u_i \cdot x)^* (u_j \cdot x) + (u_j \cdot x)^* (u_i \cdot x)) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i^2 x^* \cdot u_i^* \cdot u_i \cdot x + \sum_{i < j} a_i a_j (x^* \cdot u_i^* \cdot u_j \cdot x + x^* \cdot u_j^* \cdot u_i \cdot x) \\ &= \sum_{i=1}^k a_i^2 x^* \cdot u_i^* \cdot u_i \cdot x + \sum_{i < j} a_i a_j (x^* (u_i^* \cdot u_j + u_j^* \cdot u_i) x) \end{aligned}$$

Como $u_i \in O(n)$, entonces tenemos que $u_i^* \cdot u_i = \mathbb{I}$ para toda i , y como $\|y\| = 1$ tenemos que $(a_1, \dots, a_k) \in S^k$ por lo cual $\sum_i a_i^2 = 1$, por lo tanto

$$\sum_{i=1}^k a_i^2 x^* \cdot u_i^* \cdot u_i \cdot x = \sum_{i=1}^k a_i^2 x^* \cdot x = \sum_{i=1}^k a_i^2 \|x\|^2 = 1$$

veamos que $u_i u_j^* + u_j u_i^* = 0$ para $i < j$.

Por hipótesis tenemos que $u_i^2 = -1$ lo cual implica que $u_i = -u_i^{-1}$, como u_i es una matriz ortogonal entonces $u_i^{-1} = u_i^*$, por lo cual tenemos que $u_i = -u_i^{-1} = -u_i^*$. Como $u_i \cdot u_j + u_j \cdot u_i = 0$ entonces $u_i \cdot (-u_j^*) + u_j \cdot (-u_i^*) = 0$, o bien $u_i \cdot u_j^* + u_j \cdot u_i^* = 0$. Por lo tanto $\|\mu(y, x)\| = 1$.

Finalmente, podemos ver que estas dos construcciones son inversas una de la otra. \square

En general, para transformaciones lineales u_1, \dots, u_{k-1} de un espacio vectorial real en si mismo, podemos construir un producto interno, que sea invariante con respecto a estas transformaciones.

Lema 4.11. Si u_1, \dots, u_{k-1} son transformaciones lineales de un espacio vectorial real V en sí mismo, tal que satisfacen las relaciones $u_i^2 = -\mathbb{I}$ y $u_i u_j + u_j u_i = 0$ para $i \neq j$, entonces existe un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ en V tal que $\langle x, y \rangle_* = \langle u_i(x), u_i(y) \rangle_*$.

Demostración. Sea Γ_{k-1} el grupo generado por $\pm u_i$ con $1 \leq i \leq k-1$. Un elemento en Γ_{k-1} es de la forma $(\pm u_{i_1})(\pm u_{i_2}) \cdots (\pm u_{i_r})$ donde $i_1 < \cdots < i_r$, en efecto, como las transformaciones lineales u_1, \dots, u_{k-1} cumplen las relaciones $u_i^2 = -\mathbb{I}$ y $u_i u_j = -u_j u_i$, entonces podemos acomodar cualquier elemento en Γ_{k-1} de manera ascendente usando dichas relaciones. Notemos que Γ_{k-1} es un grupo con 2^k elementos, en efecto, r a lo mas vale $k-1$, y junto con la identidad tenemos k elementos, los cuales los podemos acomodar en 0 espacios, mas los que podemos acomodar en 1 espacio, y así sucesivamente hasta sumar los que podemos acomodar en k espacios, por lo tanto

$$|\Gamma_{k-1}| = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k} = 2^k$$

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cualquier producto interno en V , construyamos entonces el producto interno

$$\langle x, y \rangle_* = \frac{1}{2^k} \sum_{\sigma \in \Gamma_{k-1}} \langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle$$

entonces, para cualquier $u_i \in \Gamma_{k-1}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle u_i(x), u_i(y) \rangle_* &= \frac{1}{2^k} \sum_{\sigma \in \Gamma_{k-1}} \langle \sigma(u_i(x)), \sigma(u_i(y)) \rangle \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{\sigma \in \Gamma_{k-1}} \langle u_j(x), u_j(y) \rangle \text{ para algún } j \\ &= \langle x, y \rangle_* \end{aligned}$$

□

Por lo tanto, resulta muy importante derivar propiedades de álgebras que tengan un conjunto de generadores e_1, \dots, e_k , que satisfagan las relaciones $e_i^2 = -1$ y $e_i e_j + e_j e_i = 0$ para $i \neq j$.

4.3. Formas cuadráticas

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión finita.

Definición 4.12. Una *forma cuadrática* es un par (V, f) , donde $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma simétrica y bilineal, es decir:

- $f(ax + a'x', y) = af(x, y) + a'f(x', y)$ para todo $a, a' \in \mathbb{R}$ y $x, x', y \in V$.
- $f(x, y) = f(y, x)$ para todo $x, y \in V$.

Dadas dos formas cuadráticas (V, f) y (W, g) , una aplicación $u: V \rightarrow W$ es un *morfismo de formas cuadráticas*, si para todo $x, y \in V$ tenemos que $f(x, y) = g(u(x), u(y))$.

Nota 4.13. Una definición alterna de forma cuadrática, está dada de la siguiente manera: Una forma cuadrática sobre un espacio vectorial real V es un par (V, q) , donde $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación tal que $q(ax) = a^2q(x)$ y $f_q(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$ es una forma simétrica y bilineal.

En nuestro caso, estas dos nociones son equivalentes.

Definición 4.14. Decimos que una forma cuadrática (V, f) es *no degenerada* si $f(x, y) = 0$ para toda $y \in V$, implica que $x = 0$.

Decimos que una forma cuadrática (V, f) es *no singular* si para cada forma lineal $u: V \rightarrow \mathbb{R}$, existe un único $y \in V$ tal que $u(x) = f(x, y)$ para toda $x \in V$.

Veamos que estas dos nociones son equivalentes. En efecto, supongamos que (V, f) es no singular y supongamos que $f(x, y) = 0$ para todo $x \in V$, consideremos la aplicación lineal $u: V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x) = 0$ para todo $x \in V$. Como (V, f) es no singular, entonces existe un único $y \in V$ tal que $f(x, y) = u(x) = 0$ para todo $x \in V$, lo cual implica que $y = 0$.

Por otro lado, supongamos que (V, f) es no degenerada. Por contradicción, suponemos que existe una aplicación lineal $u: V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $y \in V$, $f(x, y) \neq u(x)$ para todo $x \in V$. Si $f(x, y) = 0$ para todo $y \in V$ entonces $x = 0$, y entonces $0 = f(0, y) \neq u(0)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, (V, f) es no singular.

Si e_1, \dots, e_n es una base de V , los elementos $f(e_i, e_j)$ determinan completamente a f , es decir, si $x = \sum_i x_i e_i$ y $y = \sum_j y_j e_j$, entonces

$$f(x, y) = f\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) = \sum_{i,j} f(e_i, e_j) x_i y_j$$

Más aún, la simetría de f es equivalente a $f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i)$ para todo i, j .

Ejemplo 4.15. En \mathbb{R}^n el producto interno estándar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $-\langle \cdot, \cdot \rangle$ son dos formas cuadráticas.

Si (V, f) es una forma cuadrática, y si $E \subset V$ es un subespacio de V , entonces (E, f_E) es una forma cuadrática, donde $f_E := f|_{E \times E}$.

Definición 4.16. Una descomposición ortogonal de una forma cuadrática (V, f) , denotada por $V = E_1 \perp \dots \perp E_r$, es una descomposición en suma directa $V = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$, tal que $f(x, y) = 0$ para $x \in E_i$ y $y \in E_j$, con $i \neq j$ y $1 \leq i, j \leq r$.

Proposición 4.17. Sea (V, f) una forma cuadrática, y sea E un subespacio de V tal que (E, f_E) es no singular. Si $E^* = \{y \in V \mid f(x, y) = 0 \text{ para cada } x \in E\}$, entonces $V = E \perp E^*$ es una descomposición ortogonal.

Demostración. Es suficiente mostrar que $V = E \oplus E^*$, veamos que $E \cap E^* = \{0\}$. Como (E, f_E) es no singular, entonces (E, f_E) es no degenerado, entonces $f(E, y) = 0$ para cada $y \in E$ implica que $y = 0$, y en consecuencia $E \cap E^* = \{0\}$.

Fijemos $x \in V$, y definamos la aplicación $E \rightarrow \mathbb{R}$ por $y \mapsto f(x, y)$. Como (E, f_E) es no singular, entonces existe $x_1 \in E$ tal que $f(x, y) = f(x_1, y)$ para cada $y \in E$, como f es bilineal tenemos que $f(x, y) - f(x_1, y) = 0$, lo cual implica que $x - x_1 \in E^*$, por lo tanto podemos escribir $x = x_1 + (x - x_1)$ y entonces $V = E \oplus E^*$. \square

Nota 4.18. Dada una forma cuadrática (V, f) , y una descomposición ortogonal $V = E_1 \perp E_2$ de (V, f) , entonces denotamos por f_i a la restricción $f|_{E_i}$ con $i = 1, 2$. Notemos que

$(E_i, f|_{E_i})$ es también una forma cuadrática. Más aún, si $x = (x_1 + x_2) \in E_1$ y $y = (y_1 + y_2) \in E_2$, entonces

$$f(x, y) = f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = f_1((x_1, y_1)) + f_2((x_2, y_2)).$$

Podemos generalizar la Proposición 4.17, para obtener una descomposición ortogonal de una forma cuadrática (V, f) , en r formas de dimension 1.

Teorema 4.19. *Sea (V, f) una forma cuadrática, entonces $V = E_1 \cdots E_r$ donde E_i es un subespacio de dimension 1, para $1 \leq i \leq r$*

Demostración. Sea $x \in V$ con $x \neq 0$, y sea $\mathbb{R}x$ el subespacio generado por x , podemos notar que $\mathbb{R}x$ es de dimension 1. Si $\dim(V) = 2$, entonces definimos L como el complemento ortogonal de $\mathbb{R}x$, y entonces $V = \mathbb{R}x \perp L$ es una descomposición ortogonal. En general, existe $x \in V$ tal que $f(x, x) \neq 0$, si no, tendríamos que $f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y) = 0$ para todo $x, y \in V$, lo cual implicaría que $f = 0$.

Por lo tanto, (V, f) es no singular y entonces $(\mathbb{R}x, f|_{\mathbb{R}x})$ es no singular. Usando la Proposición 4.17, tenemos que $V = L_1 \perp \mathbb{R}x$ donde $L_1 = \mathbb{R}x^\perp$ es el espacio definido en la Proposición 4.17. Inductivamente, aplicamos la construcción anterior a L_1 , hasta tener una descomposición en subespacios de dimension 1. \square

Nota 4.20. En términos de bases, el Teorema 4.19 dice que existe una base e_1, \dots, e_r de V , tal que $f(e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$. En consecuencia, podemos formular el siguiente resultado.

Teorema 4.21. *Dada una forma cuadrática real (V, f) no singular, existe una base e_1, \dots, e_r de V tal que $f(x, y) = -x_1y_1 - \cdots - x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1} + \cdots + x_r y_r$, donde k es la dimension del subespacio mas grande $E \subset V$, tal que $f(x, x) < 0$ para todo $x \in E$ con $x \neq 0$. El entero k es llamado el índice de f .*

4.4. Álgebras de Clifford de formas cuadráticas

Dada una forma cuadrática (V, f) , consideramos aplicaciones lineales $u: V \rightarrow A$, con A un álgebra asociativa, tal que $u(x)^2 = f(x, x)1$ y donde 1 denota al uno del álgebra A . En esta sección definiremos las álgebras de Clifford, las cuales son álgebras que satisfacen una propiedad universal, con respecto a estas aplicaciones lineales.

Definición 4.22. El álgebra de Clifford de una forma cuadrática (V, f) , es una par $(C(f), \theta)$, donde $C(f)$ es un álgebra asociativa, y $\theta: V \rightarrow C(f)$ es una aplicación lineal, tal que $\theta(x)^2 = f(x, x)1$ para cada $x \in V$, y que satisface la siguiente propiedad universal:

Para toda aplicación lineal $u: V \rightarrow A$ con $u(x)^2 = f(x, x)1$, existe un único morfismo de álgebras $u': C(f) \rightarrow A$, que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} & C(f) & \\ \theta \nearrow & & \searrow u' \\ V & \xrightarrow{u} & A \end{array}$$

Teorema 4.23. *El álgebra de Clifford $(C(f), \theta)$ existe para cada forma cuadrática (V, f) . Si $(C(f), \theta)$ y $(C(f)', \theta')$ son dos álgebras de Clifford para (V, f) , entonces existe un único isomorfismo de álgebras $u: C(f) \rightarrow C(f)'$, tal que $\theta' = u \circ \theta$.*

Demostración. Definimos $C(f)$ como el álgebra tensorial $T(V) = \sum_{0 \leq k} T^k(V)$, módulo el ideal generado por $x \otimes x - f(x, x)1$, donde $T^k(V)$ es el producto tensorial de V consigo mismo k veces (ver Apéndice A.3).

Definimos θ como la composición de la inclusión $V \hookrightarrow T^1(V) \subset T(V)$, con la proyección al cociente $T(V) \rightarrow C(f)$. Sea $u: V \rightarrow A$ una aplicación lineal con $u(x)^2 = f(x, x)1$, definimos $u': C(f) \rightarrow A$ como $u'(x + x \oplus y + \dots) = u(x) + u(x)u(y) + \dots$ para cada elemento $x + x \oplus y + \dots \in C(f)$. Notemos que $u'(x \otimes x - f(x, x)1) = u(x)u(x) - f(x, x)1 = u(x)^2 - f(x, x) = f(x, x)1 - f(x, x)1 = 0$. Como la imagen de θ genera a $C(f)$, entonces tenemos que $u' \circ \theta = u$, y por construcción, u' es único con respecto a esta propiedad.

Supongamos que existen dos álgebras de Clifford $(C(f), \theta)$ y $(C(f)', \theta')$ correspondientes a (V, f) . Como $(C(f), \theta)$ es un álgebra de Clifford, entonces por la propiedad universal, para el álgebra $C(f)'$ y la aplicación lineal $\theta': V \rightarrow C(f)'$, existe un único morfismo de álgebras $u: C(f) \rightarrow C(f)'$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & C(f) & \\ \theta \nearrow & & \searrow u \\ V & \xrightarrow{\theta'} & C(f)' \end{array}$$

por otro lado, como $(C(f)', \theta')$ es un álgebra de Clifford, entonces por la propiedad universal, para el álgebra $C(f)$ y la aplicación lineal $\theta: V \rightarrow C(f)$, existe un único morfismo de álgebras $v: C(f)' \rightarrow C(f)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & C(f) & \\ \theta \nearrow & & \nwarrow v \\ V & \xrightarrow{\theta'} & C(f)' \end{array}$$

Por unicidad de u y v tenemos que, $u \circ v = \text{id}_{C(f)'}$ y $v \circ u = \text{id}_{C(f)}$, por lo tanto u es un isomorfismo de álgebras. \square

Definición 4.24. Decimos que un álgebra A es \mathbb{Z}_2 -graduada, si existe una descomposición en suma directa

$$A = A^0 \oplus A^1$$

y una multiplicación bilineal $A \times A \rightarrow A$ tal que

$$A^i A^j \subset A^{i+j}$$

donde los índices $i, j \in \mathbb{Z}_2$.

Un morfismo $f: A \rightarrow B$ entre dos álgebras \mathbb{Z}_2 -graduadas, es un morfismo de álgebras tal que $f(A^i) \subset B^i$. El producto tensorial de dos álgebras \mathbb{Z}_2 -graduadas A y B , denotado por $A \widehat{\otimes} B$, es la suma directa de las subálgebras $(A \widehat{\otimes} B)^0 = (A^0 \otimes B^0) \oplus (A^1 \otimes B^1)$ y $(A \widehat{\otimes} B)^1 = (A^1 \otimes B^0) \oplus (A^0 \otimes B^1)$.

Podemos definir una multiplicación en $A \widehat{\otimes} B$ como

$$(x \widehat{\otimes} y)(x' \widehat{\otimes} y') = (-1)^{ij}(xx') \widehat{\otimes} (yy')$$

para $x' \in A^i$ y $y \in B^j$. Finalmente, dos elementos $x \in A^i$ y $y \in A^j$ conmutan, si $xy = (-1)^{ij}yx$.

Ejemplo 4.25 (\mathbb{Z}_2 -Graduación de $C(f)$). Sea $(C(f), \theta)$ un álgebra de Clifford de una forma cuadrática (V, f) . Definimos la subálgebra $C^0(f)$ como la imagen de $\sum_{0 \leq k} T^{2k}(V)$ en $C(f)$, y definimos la subálgebra $C^1(f)$ como la imagen de $\sum_{0 \leq k} T^{2k+1}(V)$ en $C(f)$. Entonces, tenemos que $C(f) = C^0(f) \oplus C^1(f)$ y $C^i(f)C^j(f) \subset C^{i+j}$, por lo tanto, $C(f)$ es un álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada.

Sean (V, f) y (W, g) dos formas cuadráticas, y sea $u: V \rightarrow W$ un morfismo de formas cuadráticas. Entonces, u induce un morfismo de álgebras $C(u): C(f) \rightarrow C(g)$ en las álgebras de Clifford $(C(f), \theta_f)$ y $(C(g), \theta_g)$, de la siguiente manera: Notemos que $(\theta_g(u(x)))^2 = g(u(x), u(x))1 = f(x, x)1$, entonces por la propiedad universal del álgebra de Clifford $(C(f), \theta_f)$, tenemos que para el álgebra $C(g)$ y la aplicación lineal $\theta_g \circ u: V \rightarrow C(g)$, existe una única aplicación $C(u): C(f) \rightarrow C(g)$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} & & C(f) & & \\ & & \uparrow \theta_f & \dashrightarrow^{C(u)} & \\ & & V & \xrightarrow{u} & W \xrightarrow{\theta_g} C(g) \end{array}$$

Lema 4.26. La aplicación $C(u): C(f) \rightarrow C(g)$ tiene las siguientes propiedades functoriales:

1. Sea (V, f) una forma cuadrática, y sea $u: V \rightarrow V$ es la identidad en V , entonces $C(u): C(f) \rightarrow C(f)$ es la identidad en $C(f)$.
2. Sean (V, f) , (W, g) y (Z, h) formas cuadráticas, y sean $u: V \rightarrow W$ y $v: W \rightarrow Z$ morfismos de formas cuadráticas, entonces $C(v \circ u) = C(v) \circ C(u): C(f) \rightarrow C(h)$.
3. Si $u: V \rightarrow W$ es isomorfismo de formas cuadráticas, entonces $C(u)$ es un isomorfismo de álgebras.

Demostración. Sean (V, f) , (W, g) y (Z, h) formas cuadráticas.

1. Supongamos que $u: V \rightarrow W$ es la identidad, entonces para todo $x \in C(f)$ tenemos que $C(u)(x) = \theta_g \circ u(x) = \theta_g(x) = x$.
2. Tomemos $u: V \rightarrow W$ y $v: W \rightarrow Z$ dos morfismos de formas cuadráticas, y consideremos las aplicaciones inducidas $C(u): C(f) \rightarrow C(g)$ y $C(v): C(g) \rightarrow C(h)$. Entonces para todo $x \in C(f)$, tenemos que $C(v \circ u)(x) = \theta_h \circ v \circ u(x) = \theta_h \circ v \circ \theta_g \circ u(x) = C(v) \circ C(u)(x)$.
3. Supongamos que $u: V \rightarrow W$ es un isomorfismo de formas cuadráticas, entonces existe un morfismo de formas cuadráticas $u': W \rightarrow V$, tal que $u \circ u' = \text{id}_W$ y $u' \circ u = \text{id}_V$. Entonces por la propiedad 1 y 2, tenemos que

$$\text{id}_{C(f)} = C(\text{id}_V) = C(u' \circ u) = C(u') \circ C(u)$$

y

$$\text{id}_{C(g)} = C(\text{id}_W) = C(u \circ u') = C(u) \circ C(u')$$

Por lo tanto, $C(u)$ es un isomorfismo de álgebras.

□

Por lo tanto, C es un funtor de la categoría de formas cuadráticas, a la categoría de álgebras.

Proposición 4.27. Sean $f: A \rightarrow C$ y $g: B \rightarrow C$ dos morfismos de álgebras \mathbb{Z}_2 -graduadas, tal que $f(x)$ conmuta con $g(y)$ para cada $x \in A$ y $y \in B$. Entonces la aplicación $h: A \otimes B \rightarrow C$ definida por $x \otimes y \mapsto f(x)g(y)$, es un morfismo de álgebras \mathbb{Z}_2 -graduadas.

Demostración. Sea $x \otimes y_i \in A \otimes B^i$ y sea $x_j \otimes y \in A^j \otimes B$ con $i, j \in \mathbb{Z}_2$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} h((x \otimes y_i)(x_j \otimes y)) &= (-1)^{i \cdot j} h((x x_j) \otimes (y_i y)) = (-1)^{i \cdot j} f(x)g(x_j)g(y_i)g(y) \\ &= f(x)g(y_i)f(x_j)g(y) = h(x \otimes y_i)h(x_j \otimes y) \end{aligned}$$

Como f y g son morfismos de álgebras \mathbb{Z}_2 -graduadas, entonces tenemos que $f(A^i) \subset C^i$ y $g(B^i) \subset C^i$ para $i = \{0, 1\}$, lo cual implica que $h((A \otimes B)^i) \subset C^i$. En efecto, si $x \otimes y \in (A \otimes B)^0 = (A^0 \otimes B^0) \oplus (A^1 \otimes B^1)$, entonces $x \in A^0$ y $y \in B^0$ ó $x \in A^1$ y $y \in B^1$, y en este caso $f(x)g(y) \in C^0$ ó $f(x)g(y) \in C^{1+1} = C^0$, por otro lado, si $x \otimes y \in (A \otimes B)^1$, entonces $x \in A^1$ y $y \in B^0$ ó $x \in A^0$ y $y \in B^1$, y en este caso $f(x)g(y) \in C^{0+1} = C^1$ ó $f(x)g(y) \in C^{1+0} = C^1$.

Por lo tanto h es un morfismo de álgebras \mathbb{Z}_2 -graduadas. \square

Sea (V, f) una forma cuadrática, y sea $V = E_1 \perp E_2$ una descomposición ortogonal de (V, f) . Recordemos de la Nota 4.18, que (E_i, f_i) es una forma cuadrática para $i = 1, 2$. Sea $(C(f_i), \theta_i)$ el álgebra de Clifford para la forma cuadrática (E_i, f_i) , definamos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi: V &\longrightarrow C(f_1) \widehat{\otimes} C(f_2) \\ (x_1, x_2) &\longmapsto (\theta_1(x_1) \widehat{\otimes} 1) + (1 \widehat{\otimes} \theta_2(x_2)) \end{aligned}$$

Notemos que $\phi(x_1, x_2)^2 = f((x_1, x_2), (x_1, x_2))$, en efecto tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2)^2 &= ((\theta_1(x_1) \widehat{\otimes} 1) + (1 \widehat{\otimes} \theta_2(x_2)))((\theta_1(x_1) \widehat{\otimes} 1) + (1 \widehat{\otimes} \theta_2(x_2))) \\ &= \theta_1(x_1)^2 \widehat{\otimes} 1 + \theta_1(x_1) \widehat{\otimes} \theta_2(x_2) - \theta_1(x_1) \widehat{\otimes} \theta_2(x_2) + 1 \widehat{\otimes} \theta_2(x_2)^2 \\ &= \theta_1(x_1)^2 \widehat{\otimes} 1 + 1 \widehat{\otimes} \theta_2(x_2)^2 \\ &= f(x_1, x_1) 1 \widehat{\otimes} 1 + 1 \widehat{\otimes} f_2(x_2, x_2) 1 \\ &= f_1(x_1, x_1) (1 \widehat{\otimes} 1) + f_2(x_2, x_2) (1 \widehat{\otimes} 1) \\ &= (f_1(x_1, x_1) + f_2(x_2, x_2)) (1 \widehat{\otimes} 1) \\ &= f((x_1, x_2), (x_1, x_2)) (1 \widehat{\otimes} 1) \end{aligned}$$

Entonces, por la propiedad universal del álgebra de Clifford $(C(f), \theta)$, tenemos que para el álgebra $C(f_1) \widehat{\otimes} C(f_2)$ y la aplicación $\phi: V \rightarrow C(f_1) \widehat{\otimes} C(f_2)$, existe un único morfismo de álgebras $u: C(f) \rightarrow C(f_1) \widehat{\otimes} C(f_2)$ que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc} & C(f) & \\ \theta \nearrow & & \dashrightarrow u \\ V & \longrightarrow & C(f_1) \widehat{\otimes} C(f_2) \end{array}$$

Teorema 4.28. El morfismo de álgebras $u: C(f) \rightarrow C(f_1) \widehat{\otimes} C(f_2)$ anterior, es un isomorfismo de álgebras.

Demostración. Construyamos la inversa $v: C(f_1) \widehat{\otimes} C(f_2) \rightarrow C(f)$ de u . Sean $q_i: E_i \rightarrow V$ las inclusiones $q_1(x_1) = (x_1, 0)$ y $q_2(x_2) = (0, x_2)$, éstas inducen un morfismo de álgebras \mathbb{Z}_2 -graduadas $C(q_i): C(f_i) \rightarrow C(f)$ para $i = 1, 2$.

Si $f(z, z') = 0$ en V , entonces $\theta(z)\theta(z') + \theta(z+)\theta(z) = 0$, en efecto:

Por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} (\theta(z) + \theta(z'))^2 &= \theta(z + z')^2 = f(z + z', z + z') = f(z, z) + f(z, z') + f(z', z) + f(z', z') \\ &= f(z, z) + f(z', z') = \theta(z)^2 + \theta(z')^2 \end{aligned}$$

por otro lado, tenemos que

$$(\theta(z) + \theta(z'))^2 = \theta(z)^2 + \theta(z)\theta(z') + \theta(z')\theta(z) + \theta(z')^2$$

lo cual implica que $\theta(z)^2 + \theta(z')^2 = \theta(z)^2 + \theta(z)\theta(z') + \theta(z')\theta(z) + \theta(z')^2$, por lo tanto $\theta(z)\theta(z') + \theta(z')\theta(z) = 0$.

Entonces, tenemos que $C(q_1)(x_1)C(q_2)(x_2) = -C(q_2)(x_2)C(q_1)(x_1)$ para $x_i = \theta_i(y_i)$ con $y_i \in E_i$, $i = 1, 2$, entonces $C(q_1)$ y $C(q_2)$, satisface la hipótesis de la Proposición 4.27, por lo cual existe un morfismo de álgebras \mathbb{Z}_2 -graduadas $v: C(f_1) \widehat{\otimes} C(f_2) \rightarrow C(f)$, tal que $v(x_1 \widehat{\otimes} x_2) = C(f_1)(\theta_1(x_1))C(f_2)(\theta_2(x_2))$. Veamos que v es inversa de u y viceversa.

Notemos que los elementos de la forma $\theta(x_1, 0)$ y $\theta(0, x_2)$ generan a $C(f)$, entonces para estos elementos tenemos que

$$v \circ u \circ \theta(x_1, 0) = v \circ \phi(x_1, 0) = v(\theta_1(x_1) \widehat{\otimes} 1) = C(f_1)(\theta_1(x_1))C(f_2)(1) = \theta(x_1, 0)$$

análogamente tenemos que $v \circ u \circ \theta(0, x_2) = \theta(0, x_2)$, por lo tanto $v \circ u = 1$.

Por otro lado, los elementos de la forma $\theta_1(x_1) \widehat{\otimes} 1$ y $1 \widehat{\otimes} \theta_2(x_2)$ generan a $C(f_1) \widehat{\otimes} C(f_2)$, entonces para estos elementos tenemos que

$$u \circ v(\theta_1(x_1) \widehat{\otimes} 1) = u \circ (\theta(x_1, 0)) = \phi(x_1, 0) = \theta_1(x_1) \widehat{\otimes} 1$$

análogamente tenemos que $u \circ v(1 \widehat{\otimes} \theta_2(x_2)) = 1 \widehat{\otimes} \theta_2(x_2)$, por lo tanto $u \circ v = 1$. Y entonces v es la inversa de u y viceversa. \square

Podemos generalizar este resultado, si tenemos una descomposición ortogonal $V = E_1 \perp \dots \perp E_r$ en r subespacios, entonces tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.29. *Existe un isomorfismo $u: C(f) \rightarrow C(f_1) \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} C(f_r)$, tal que*

$$u(\theta(0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0)) = 1 \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} \theta_j(x_j) \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} 1$$

para $1 < j < r$.

Teorema 4.30. *Sea (V, f) una forma cuadrática, donde V tiene una base e_1, \dots, e_r con $f(e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$ y $a_i = f(e_i, e_i)$. Entonces $C(f)$ es generado por e_1, \dots, e_r con relaciones $e_i^2 = a_i$ y $e_i e_j + e_j e_i = 0$ para $i \neq j$. Los elementos de la forma $e_{i_1} \dots e_{i_s}$, con $i_1 < \dots < i_s$ y $1 \leq s \leq r$ junto con 1, forman una base de $C(f)$. Más aún, la dimensión de $C(f)$ es 2^r .*

Demostración. Tomemos el elemento $e_i \otimes e_i - f(e_i, e_i)$ para cada $i = 1, \dots, r$, y notemos que en $C(f)$ $e_i \otimes e_i - f(e_i, e_i) = 0$, entonces $e_i^2 - f(e_i, e_i) = 0$, por lo cual $e_i^2 = f(e_i, e_i) = a_i$.

La relación $e_i e_j + e_j e_i = 0$, surge como en la demostración de la Proposición 4.28, puesto que $f(e_i, e_j) = 0$.

Como en la demostración del Lema 4.11, los elementos en $C(f)$ son de la forma $e_{i_1} \cdots e_{i_s}$, donde $i_1 < \cdots < i_s$ y $1 \leq s \leq r$. Del isomorfismo $u: C(f) \rightarrow C(f_1) \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} C(f_r)$, tenemos que $u(e_{i_1} \cdots e_{i_s}) = x_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_s$, donde $x_i = e_{i_j}$ con $i = i_j$ y $x_i = 1$ para $i \neq i_j$, para toda $1 \leq j \leq s$. Finalmente, estos elementos junto con 1 forman una base para $C(f)$ de dimensión $\dim(C(f)) = 2^r$. \square

4.5. El teorema de Hurwitz-Radon

Definición 4.31. Sea C_k el álgebra de Clifford $C(-\langle \cdot, \cdot \rangle)$ asociada a la forma cuadrática $(\mathbb{R}^k, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno estándar en \mathbb{R}^k . Y sea C'_k el álgebra de Clifford $C(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ asociada a la forma cuadrática $(\mathbb{R}^k, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno estándar en \mathbb{R}^k .

Ejemplo 4.32. Calculemos, con el Teorema 4.30, algunas álgebras de Clifford de formas cuadráticas reales.

- Si $V = \mathbb{R}^0$, el álgebra de Clifford C_0 , está generado por cero elementos básicos y el 1. Por lo tanto $C_0 = \mathbb{R}$.
- Si $V = \mathbb{R}^1$, el álgebra de Clifford C_1 , está generado por un elemento básico e y el 1, con la relación $e^2 = -\langle e, e \rangle = -1$. Por lo tanto $C_1 = \mathbb{C}$.
- Si $V = \mathbb{R}^2$, el álgebra de Clifford C_2 , está generado por dos elementos básicos e_1, e_2 y el 1, con relaciones $e_1^2 = e_2^2 = -1$ y $e_1 e_2 = -e_2 e_1$, esto es $(e_1 e_2)^2 = e_1 e_2 e_1 e_2 = -e_1^2 e_2^2 = -1$. Por lo tanto $C_2 = \mathbb{H}$ los cuaternios.

Denotemos por $\text{Mat}_k(\mathbb{F})$ al conjunto de matrices de $k \times k$ con entradas en \mathbb{F} el campo real, complejo ó cuaternionico. En dimensiones más altas, tenemos el siguiente cuadro de valores de C_k .

Cuadro 4.1: Valores de C_k

k	0	1	2	3	4	5	6	7
C_k	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\text{Mat}_2(\mathbb{H})$	$\text{Mat}_4(\mathbb{C})$	$\text{Mat}_8(\mathbb{R})$	$\text{Mat}_8(\mathbb{R}) \oplus \text{Mat}_8(\mathbb{R})$

Teorema 4.33. Existe un isomorfismo $u: C_{k+2} \rightarrow C'_k \otimes C_2$ y $v: C'_{k+2} \rightarrow C_k \otimes C'_2$.

Demostración. Sea e_1, \dots, e_k una base generadora para C_k y e'_1, \dots, e'_k una base generadora para C'_k . Definamos $u': \mathbb{R}^{k+2} \rightarrow C'_k \otimes C_2$ como $u'(e_i) = 1 \otimes e_i$ para $1 \leq i \leq 2$ y $u'(e_i) = e'_{i-2} \otimes e_1 e_2$ para $3 \leq i \leq k+2$. Ya que $u'(e_i)^2 = (1 \otimes e_i)(1 \otimes e_i) = 1 \otimes e_i^2 = -1$ para $i \leq 2$ y $u'(e_i)^2 = e'^2_{i-2} \otimes e_1 e_2 e_1 e_2 = 1 \otimes 1(-1) = -1$, además notemos que $u'(e_i)u'(e_j) + u'(e_j)u'(e_i) = 0$ para $i \neq j$, entonces podemos extender u' a $u: C_{k+2} \rightarrow C'_k \otimes C_2$. Notemos que u es inyectiva, ya que manda distintos elementos básicos en distintos elementos básicos. Y por razones de dimensión es sobre, por lo cual u es isomorfismo.

Definamos v' por $v'(e'_i) = 1 \otimes e_i$ para $1 \leq i \leq 2$ y $v'(e'_i) = e_{i-2} \otimes e'_i e'_2$ para $3 \leq i \leq k+2$. Análogamente al caso anterior, tenemos que podemos extender v' a un isomorfismo $v: C'_{k+2} \rightarrow C_k \otimes C'_2$. \square

Corolario 4.34. Existen isomorfismos $C_{k+4} \rightarrow C_k \otimes_{\mathbb{R}} C_4$ y $C'_{k+4} \rightarrow C'_k \otimes_{\mathbb{R}} C'_4$, donde $C_4 \cong C'_4 \cong C_2 \otimes C'_2 \cong \text{Mat}_2(\mathbb{H})$.

Demostración. Del Teorema 4.33 tomamos $k = 2$, entonces existe un isomorfismo $C_4 \cong C_2 \otimes C'_2 \cong C'_4$ y $C_2 \otimes C'_2 \cong \mathbb{H} \otimes \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \cong \text{Mat}_2(\mathbb{H})$. Entonces tenemos un isomorfismo $C_{k+4} \rightarrow C'_{k+2} \otimes C_2 \rightarrow C'_k \otimes (C'_2 \otimes C_2) \cong C'_k \otimes C_4$, y análogamente existe un isomorfismo $C'_{k+4} \rightarrow C_{k+2} \otimes C'_2 \rightarrow C'_k \otimes C'_4$. \square

Corolario 4.35. *Existen isomorfismos $C_{k+8} \rightarrow C_k \otimes \text{Mat}_{16}(\mathbb{R})$ y $C'_{k+8} \rightarrow C'_k \otimes \text{Mat}_{16}(\mathbb{R})$.*

Demostración. La demostración de este corolario surge iterando el Corolario 4.34, y usando que $\text{Mat}_2(\mathbb{H}) \otimes \text{Mat}_2(\mathbb{H}) \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \otimes \text{Mat}_2(\mathbb{R}) \cong \text{Mat}_4(\mathbb{R}) \otimes \text{Mat}_4(\mathbb{R}) \cong \text{Mat}_{16}(\mathbb{R})$. \square

Definición 4.36. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K y consideremos una forma cuadrática (V, f) . Sea A un campo tal que $K \subseteq A$, definimos una A -representación del álgebra de Clifford $C(f)$ como un homomorfismo de álgebras

$$\rho: C(f) \longrightarrow \text{Hom}_K(W, W)$$

donde $\text{Hom}_K(W, W)$, es el algebra de transformaciones lineales de un espacio vectorial W de dimensión finita sobre A . El espacio W es llamado un $C(f)$ -módulo sobre K .

Definición 4.37. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K y consideremos una forma cuadrática (V, f) . Sea A un campo tal que $K \subseteq A$, una A -representación se dice *reducible* si el espacio vectorial W se puede escribir como una suma directa (no trivial)

$$W = W_1 \oplus W_2$$

tal que $\rho(\varphi)(W_j) \subseteq W_j$ para $j = 1, 2$ y para todo $\varphi \in C(f)$. Una representación es llamada *irreducible* si no es reducible.

Definición 4.38. Un $C(f)$ -módulo W es *irreducible*, si su representación $\rho: C(f) \rightarrow \text{Hom}(W, W)$ es una representación irreducible.

Definición 4.39. Dos representaciones $\rho_j: C(f) \rightarrow \text{Hom}_K(W_j, W_j)$ para $j = 1, 2$, son *equivalentes*, si existe un isomorfismo lineal $F: W_1 \rightarrow W_2$ tal que $F \circ \rho_1(\varphi) \circ F^{-1} = \rho_2(\varphi)$, para todo $\varphi \in C(f)$.

Teorema 4.40. *Consideremos la forma cuadrática $(\mathbb{R}^k, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$ y consideremos su álgebra de Clifford C_k . Sea ν_k el numero de representaciones reales irreducibles de C_k salvo equivalencias, entonces*

$$\nu_k = \begin{cases} 2, & \text{si } k + 1 \equiv 0 \pmod{4}; \\ 1, & \text{si no.} \end{cases}$$

Demostración. Este teorema es una consecuencia de [14, Teorema 5.7]. \square

Entonces, tenemos el siguiente cuadro de valores de ν_k , el cual podemos encontrar en [14, Teorema 5.8].

Cuadro 4.2: Valores de ν_k

k	0	1	2	3	4	5	6	7
C_k	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\text{Mat}_2(\mathbb{H})$	$\text{Mat}_4(\mathbb{C})$	$\text{Mat}_8(\mathbb{R})$	$\text{Mat}_8(\mathbb{R}) \oplus \text{Mat}_8(\mathbb{R})$
ν_k	1	1	1	2	1	1	1	2

Nota 4.41. Podemos notar que para $k = 0, 1, 2, 4, 5, 6$, C_k solo tiene una representación irreducible, por lo tanto cualquier otra representación tendrá dimensión un múltiplo de la dimensión de la representación irreducible.

Proposición 4.42. *Existen transformaciones lineales $u_1, \dots, u_{k-1} \in O(n)$ tal que $u_i^2 = -\mathbb{I}$ y $u_i u_j + u_j u_i = 0$, si y sólo si \mathbb{R}^n es un C_{k-1} -módulo.*

Demostración. Supongamos que existen transformaciones lineales $u_1, \dots, u_{k-1} \in O(n)$ tal que $u_i = -\mathbb{I}$ y $u_i u_j + u_j u_i = 0$. Consideremos $\langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle$ el espacio vectorial generado por u_1, \dots, u_{k-1} y notemos que $\langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle \cong \mathbb{R}^{k-1}$. Ahora, si consideramos la forma cuadrática $(\mathbb{R}^{k-1}, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota al producto interno en \mathbb{R}^{k-1} , entonces $(\mathbb{R}^{k-1}, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$ sigue cumpliendo las relaciones $u_i = -\mathbb{I}$ y $u_i u_j + u_j u_i = 0$. Como cada u_i es un elemento en $O(n)$, entonces u_i actúa en \mathbb{R}^n por multiplicación de matrices, entonces tenemos la siguiente transformación lineal

$$\begin{aligned} T: \langle u_1, \dots, u_{k-1} \rangle &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ u_i &\longmapsto T(u_i) \end{aligned}$$

donde $T(u_i) = u_i$ visto como una matriz en $O(n)$.

Consideremos el álgebra de Clifford C_{k-1} asociada a $(\mathbb{R}^{k-1}, -\langle \cdot, \cdot \rangle)$ y notemos que $T(u_i)^2 = -\langle u_i, u_i \rangle 1 = -1$, entonces aplicando la propiedad universal del álgebra de Clifford C_{k-1} , existe un homomorfismo de álgebras $\rho: C_{k-1} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{k-1} & \xrightarrow{T} & \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \\ \downarrow \theta & \nearrow \rho & \\ C_{k-1} & & \end{array}$$

por lo cual \mathbb{R}^n es un C_{k-1} -módulo.

Supongamos ahora que \mathbb{R}^n es un C_{k-1} -módulo, entonces existe un homomorfismo de álgebras $\rho: C_{k-1} \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Sea e_1, \dots, e_{k-1} una base de \mathbb{R}^{k-1} , definamos

$$u_i := \rho(e_i)$$

Puesto que cada e_i cumple las relaciones $e_i^2 = -1$ y $e_i e_j + e_j e_i = 0$ para $i \neq j$, entonces cada $u_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ cumple con las relaciones $u_i^2 = -1$ y $u_i u_j + u_j u_i = 0$ para $i \neq j$. Por el Lema 4.11, tenemos que existe un producto interno en \mathbb{R}^n que es invariante bajo cada u_i . Por lo tanto $u_i \in O(n)$ para cada $i = 1, \dots, k-1$. \square

Corolario 4.43. *Si \mathbb{R}^n es un C_{k-1} -módulo, entonces S^{n-1} admite $k-1$ campos vectoriales linealmente independientes.*

Demostración. Sea \mathbb{R}^n un C_{k-1} -módulo, por la Proposición 4.42 tenemos que existen transformaciones lineales $u_1, \dots, u_{k-1} \in O(n)$ tal que $u_i^2 = -1$ y $u_i u_j + u_j u_i = 0$. Por el Teorema 4.10, existe una multiplicación ortogonal normalizada $\mu: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Finalmente, el Teorema 4.9 nos dice que si existe una multiplicación ortogonal $\mu: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces existen $k-1$ campos vectoriales linealmente independientes en S^{n-1} . \square

Sea b_k la dimensión mínima tal que \mathbb{R}^{b_k} tiene la estructura de un C_{k-1} -módulo irreducible. Entonces tenemos el siguiente cuadro de valores de b_k .

Cuadro 4.3: Valores de b_k

k	1	2	3	4	5	6	7	8
C_{k-1}	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\text{Mat}_2(\mathbb{H})$	$\text{Mat}_4(\mathbb{C})$	$\text{Mat}_8(\mathbb{R})$	$\text{Mat}_8(\mathbb{R}) \oplus \text{Mat}_8(\mathbb{R})$
b_k	1	2	4	4	8	8	8	8

Ahora, estamos preparados para mostrar el Teorema 4.1. Sea $n = (2k - 1)2^c 16^d$ con k impar $0 \leq c \leq 3$, y sea $\rho(n) = 2^c + 8d$, veamos que S^{n-1} tiene $\rho(n) - 1$ campos vectoriales linealmente independientes.

Demostración del Teorema 4.1. Veamos que la formula funciona para $1 \leq b_k \leq 8$.

- Si $b_k = 1$ entonces $k = 1$, por lo cual \mathbb{R}^1 es un C_0 -módulo irreducible, y entonces S^0 tiene 0 campos vectoriales linealmente independientes.

Como $n = 1 = 1 \cdot 2^0 \cdot 16^0$, entonces $\rho(1) = 2^0 + 8 \cdot 0 = 1$. En efecto, S^0 admite $\rho(1) - 1 = 0$ campos vectoriales linealmente independientes.
- Si $b_k = 2$ entonces $k = 2$, por lo cual \mathbb{R}^2 es un C_1 -módulo irreducible, y entonces S^1 tiene 1 campo vectorial linealmente independiente.

Como $n = 2 = 1 \cdot 2^1 \cdot 16^0$, entonces $\rho(2) = 2^1 + 8 \cdot 0 = 2$. En efecto S^1 admite $\rho(2) - 1 = 1$ campo vectorial linealmente independiente.
- Si $b_k = 3$ notemos que $1|3$ y entonces por la Nota 4.41 tenemos que $k = 1$, por lo cual \mathbb{R}^3 es un C_0 -módulo, y entonces S^2 tiene 0 campos vectoriales linealmente independientes.

Como $n = 3 = 3 \cdot 2^0 \cdot 16^0$, entonces $\rho(3) = 2^0 + 8 \cdot 0 = 1$. En efecto, S^2 admite $\rho(3) - 1 = 0$ campos vectoriales linealmente independientes.

En otras palabras, no puedes construir un campo vectorial no nulo en S^2 (ver el Teorema 4.6).
- Si $b_k = 4$ entonces $k = 4$, por lo cual \mathbb{R}^4 es un C_3 -módulo irreducible, y entonces S^3 tiene 3 campos vectoriales linealmente independientes.

Como $n = 4 = 1 \cdot 2^2 \cdot 16^0$, entonces $\rho(4) = 2^2 + 8 \cdot 0 = 4$. En efecto, S^3 admite $\rho(4) - 1 = 3$ campos vectoriales linealmente independientes.

Por el Corolario 2.23, tenemos que S^3 es paralelizable.
- Si $b_k = 5$ entonces $1|5$ y entonces por la Nota 4.41 tenemos que $k = 1$, por lo cual \mathbb{R}^5 es un C_0 -módulo, y entonces S^4 tiene 0 campos vectoriales linealmente independientes.

Como $n = 5 = 5 \cdot 2^0 \cdot 16^0$, entonces $\rho(5) = 2^0 + 8 \cdot 0 = 1$. En efecto, S^4 admite $\rho(5) - 1 = 0$ campos vectoriales linealmente independientes.

Es decir, no puedes construir un campo vectoriales no nulos en S^5 (ver el Teorema 4.6).
- Si $b_k = 6$ entonces $2|6$ y entonces por la Nota 4.41 tenemos que $k = 2$, por lo cual \mathbb{R}^6 es un C_1 -módulo, y entonces S^5 tiene 1 campo vectorial linealmente independiente.

Como $n = 6 = 3 \cdot 2^1 \cdot 16^0$, entonces $\rho(6) = 2^1 + 8 \cdot 0 = 2$. En efecto, S^5 admite $\rho(6) - 1 = 1$ campo vectorial linealmente independiente, (ver el Corolario 4.3).

- Si $b_k = 7$ entonces $1|7$ y entonces por la Nota 4.41 tenemos que $k = 1$, por lo cual \mathbb{R}^6 es un C_0 -módulo, y entonces S^6 tiene 0 campos vectoriales linealmente independientes. Como $n = 7 = 7 \cdot 2^0 \cdot 16^0$, entonces $\rho(7) = 2^0 + 8 \cdot 0 = 1$. En efecto S^6 admite $\rho(7) - 1 = 0$ campos vectoriales linealmente independientes, (ver el Teorema 4.6).
- Si $b_k = 8$ entonces $k = 8$, por lo cual \mathbb{R}^8 es un C_7 -módulo irreducible, y entonces S^7 tiene 7 campos vectoriales linealmente independientes. Como $n = 8 = 1 \cdot 2^3 \cdot 16^0$, entonces $\rho(8) = 2^3 + 8 \cdot 0 = 8$. En efecto, S^7 admite $\rho(8) - 1 = 7$ campos vectoriales linealmente independientes. Podemos notar que S^7 es paralelizable (ver [8, Corolario 2]).

Para $b_k > 8$, por el Corolario 4.35, tenemos que $C_{k+8} = C_k \otimes \text{Mat}_{16}(\mathbb{R})$ entonces $b_{k+8} = 16b_k$. Por ejemplo, para \mathbb{R}^{2048} tenemos que $b_{24} = b_{16+8} = 16b_{16} = 16^2 b_8 = 16^2 \cdot 8 = 2048$, entonces \mathbb{R}^{2048} es un C_{23} -módulo, y por lo tanto S^{2047} tiene 23 campos vectoriales linealmente independientes. Como $2048 = 1 \cdot 2^3 \cdot 16^2$ entonces $\rho(2048) = 2^3 + 8 \cdot 2 = 24$, en efecto S^{2047} admite $\rho(2048) - 1 = 23$ campos vectoriales linealmente independientes.

Notemos que $b_{23} = b_{8+15} = 16b_{15} = 16^2 b_7 = 2048$, por lo cual \mathbb{R}^{2048} también es un C_{22} -módulo, y entonces S^{2047} admite 22 campos vectoriales linealmente independientes. En estos casos, tomamos el b_k más grande pues éste nos va a generar una cantidad mayor de campos vectoriales linealmente independientes. \square

5

Número máximo de campos vectoriales linealmente independientes en esferas

En el Capítulo 4, mostramos que S^{n-1} tiene $\rho(n) - 1$ campos vectoriales linealmente independientes. En éste capítulo desarrollaremos las herramientas necesarias para probar que S^{n-1} , no tiene $\rho(n)$ campos vectoriales linealmente independientes. Este problema fue resuelto por John Frank Adams, y publicado en el artículo [1] en 1961, sin embargo seguiremos la demostración dada en el libro [12], que utiliza herramienta desarrollada por Raoul Bott. Otras referencias se puede consultar [2], [4], [5], [14], [17], [20], [22] y [6].

En este capítulo usaremos la teoría de haces vectoriales reales, vista en el Capítulo 2, como motivación a esto veamos lo siguiente: Una sección del haz tangente TS^n a S^n , es una aplicación $v: S^n \rightarrow TS^n$, que asigna a cada $x \in S^n$ un vector $v(x)$ tangente a S^n , por lo tanto tenemos que:

Un campo vectorial en S^n es una sección del haz tangente. Encontrar un campo vectorial no nulo en S^n , equivale a encontrar una sección del haz tangente a S^n que no intersekte a la sección cero. Y entonces la pregunta: ¿Es posible encontrar r campos vectoriales no nulos y linealmente independientes en S^n ?, la podemos formular como: *¿Es posible encontrar r secciones del haz tangente a S^n , linealmente independientes en todo punto y que no intersecten a la sección cero?*

El Teorema 2.18 nos da condiciones necesarias y suficientes para que un haz vectorial sea isomorfo al haz producto, en particular el haz tangente a S^n es isomorfo al haz producto, si tiene n secciones linealmente independientes. En este caso, se puede mostrar que las únicas esferas en las cuales su haz tangente es trivial (también llamadas paralelizables), son S^1 , S^3 y S^7 (ver [2, Teorema 10.6.15]). Por otro lado, en el Capítulo 4, vimos que los \mathbb{R}^n que admiten una estructura de C_{n-1} -módulo, son \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^4 y \mathbb{R}^8 .

En este capítulo, denotaremos los haces vectoriales $p: E \rightarrow B$, como triadas $\xi = (E, p, B)$, denotaremos por $E(\xi)$ al espacio total de ξ , y por $B(\xi)$ al espacio base de ξ .

5.1. Espacios de Thom de haces vectoriales

Sea ξ un haz vectorial real sobre un espacio paracompacto, por la Proposición 2.48 tenemos que existe una métrica Riemanniana en ξ , lo cual implica que podemos medir los vectores en la fibra $E(\xi)_x$ de $x \in B(\xi)$ bajo p . Entonces podemos dar las siguiente definiciones.

Definición 5.1. Definimos el *haz de esferas* $S(\xi)$ asociado a ξ , como el haz donde la fibra sobre cada punto $x \in B(\xi)$ es el conjunto de todos los vectores unitarios en $E(\xi)_x$.

Definimos el *haz de discos* $D(\xi)$ asociado a ξ , como el haz donde la fibra sobre cada punto $x \in B(\xi)$, es el conjunto de todos los vectores con norma menor o igual a 1.

Definición 5.2. Definimos el *espacio de Thom* de un haz vectorial real ξ , denotado por $\text{Th}(\xi)$, como el espacio cociente $D(\xi)/S(\xi)$.

Nota 5.3. El espacio de Thom de un haz vectorial, no depende de la métrica Riemanniana que escojamos, esto se debe a que existe un homeomorfismo entre $D(\xi)/S(\xi)$ y $P(\xi \oplus \varepsilon^1)/P(\xi)$, donde $P(\xi)$ denota al *haz proyectivo asociado* a ξ de la Definición 3.43, y donde ε^1 denota al haz trivial de dimension 1 (Ver [12, Capítulo 16, Proposición 1.1]), y entonces, podemos notar que el espacio $P(\xi \oplus \varepsilon^1)/P(\xi)$ no involucra métricas por lo cual $D(\xi)/S(\xi)$ tampoco.

Proposición 5.4. Si ξ es un haz vectorial real con espacio base compacto, $\text{Th}(\xi)$ es homeomorfo a la compactificación en un punto del espacio total $E(\xi)$ de ξ .

Demostración. Observemos que los espacios $D(\xi) - S(\xi)$ y $E(\xi)$ son homeomorfos, entonces las compactificaciones en un punto de $D(\xi) - S(\xi)$ y $E(\xi)$ son homeomorfas. Pero la compactificación en un punto de $D(\xi) - S(\xi)$ es homeomorfa a $D(\xi)/S(\xi)$, por lo tanto $\text{Th}(\xi)$ es homeomorfa a la compactificación en un punto de $E(\xi)$. \square

Ejemplo 5.5. Si ξ es el haz trivial de rango n sobre un punto, entonces tenemos que $\text{Th}(\xi) = S^n$. Si ε^n es el haz vectorial trivial de rango n sobre un espacio topológico X , entonces $\text{Th}(\varepsilon^n) \cong \Sigma^n(X \cup \{\infty\})$, donde $\Sigma(X)$ denota la n -ésima suspensión reducida de un espacio X de la Definición 1.50. Por lo tanto, podemos ver al espacio de Thom como una suspensión generalizada. En la Figura 5.1 se muestran algunos ejemplos de espacios de Thom de haces vectoriales de rango 1.

Proposición 5.6. Sea ξ y η dos haces vectoriales reales sobre un espacio compacto, entonces los espacios de Thom $\text{Th}(\xi \times \eta)$ y $\text{Th}(\xi) \wedge \text{Th}(\eta)$ son homeomorfos, donde \wedge denota al producto smash de la Definición 1.47.

Demostración. Recordemos que el espacio total de un producto de haces vectoriales $E(\xi \times \eta)$ es igual al producto de los espacios totales $E(\xi) \times E(\eta)$. Usando la Proposición 5.4, tenemos que el espacio de Thom $\text{Th}(\xi \times \eta)$, es homeomorfo a la compactificación en un punto del espacio $E(\xi \times \eta)$, y que el espacio de Thom $\text{Th}(\xi) \wedge \text{Th}(\eta)$ es homeomorfo a la compactificación en un punto de $E(\xi) \times E(\eta)$. Por lo tanto $\text{Th}(\xi \times \eta) \cong \text{Th}(\xi) \wedge \text{Th}(\eta)$. \square

Corolario 5.7. El espacio de Thom $\text{Th}(\xi \oplus \varepsilon^n)$ es homeomorfo a la n -ésima suspensión reducida $\Sigma^n(\text{Th}(\xi))$.

Demostración. Notemos que el haz vectorial $\xi \oplus \varepsilon^n$, es isomorfo al haz vectorial $\xi \times \mathbb{R}^n$ donde \mathbb{R}^n denota al haz vectorial trivial de rango n sobre un punto. Por lo tanto, tenemos que los espacios de Thom $\text{Th}(\xi \oplus \varepsilon)$ y $\text{Th}(\xi \times \mathbb{R}^n)$ son homeomorfos. Finalmente, usando

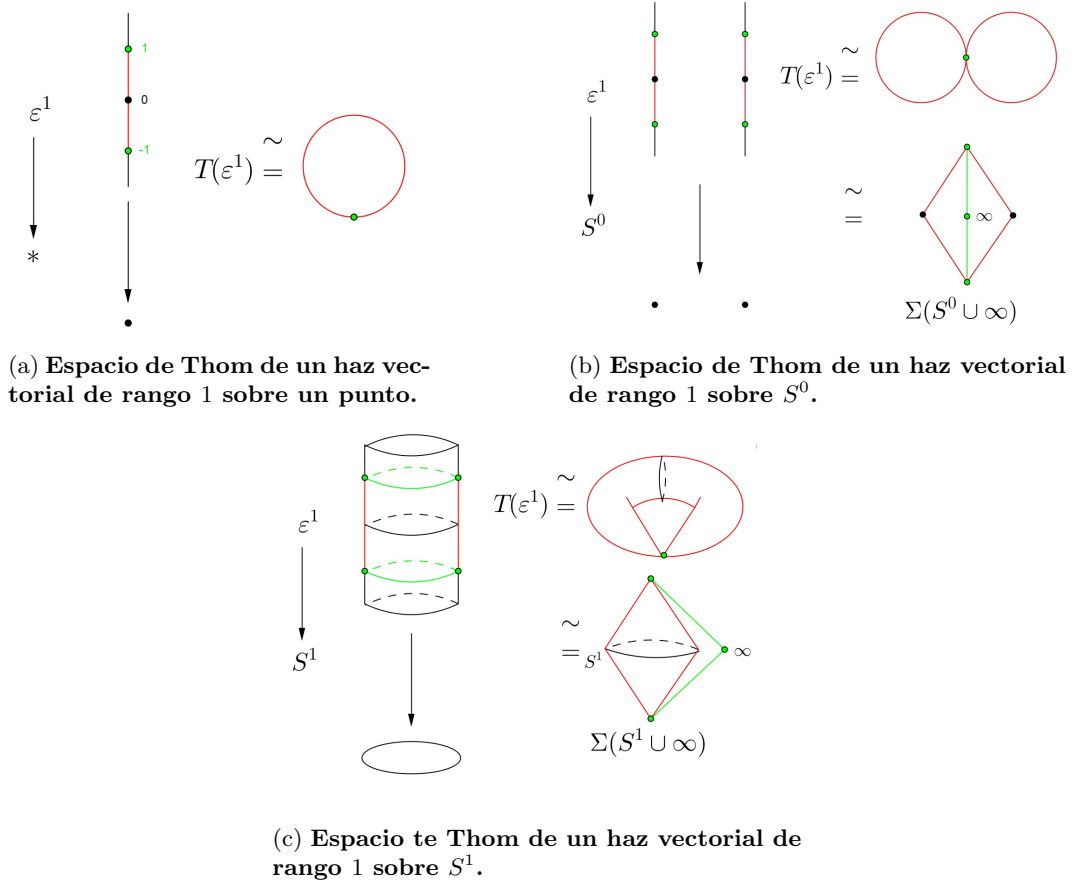


Figura 5.1: Ejemplos de Espacios de Thom de Haces Vectoriales de Rango 1

la Proposición 5.6, el Ejemplo 5.5 y propiedades del producto smash de la Definición 1.47, tenemos que

$$\text{Th}(\xi \times \mathbb{R}^n) \cong \text{Th}(\xi) \wedge \text{Th}(\mathbb{R}^n) \cong \text{Th}(\xi) \wedge S^n \cong \Sigma^n(\text{Th}(\xi))$$

□

El k -espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^k$, es el espacio cociente de S^k módulo la relación $x \sim -x$ para todo $x \in S^k$. Denotemos por ξ_k al haz tautológico definido en el Ejemplo 2.7, y denotemos por $m\xi_k$ a la suma directa de ξ_k consigo mismo m veces. Notemos que el espacio total $E(m\xi_k)$ es el espacio cociente de $S^k \times \mathbb{R}^m$, módulo la relación $(x, y) \sim (-x, -y)$ para todo $(x, y) \in S^k \times \mathbb{R}^m$.

Más aún, el haz de discos $D(m\xi_k)$ es el espacio cociente de $S^k \times D^m$, módulo la relación $(x, y) \sim (-x, -y)$ para todo $(x, y) \in S^k \times D^m$. Denotemos por $\langle x, y \rangle$ a la clase de (x, y) en $D(m\xi_k)$, entonces tenemos que $\langle x, y \rangle \in S(m\xi_k)$ si y sólo si $\|y\| = 1$.

Ejemplo 5.8. Definamos una aplicación $f: S^k \times D^m \rightarrow S^{k+m}$ como

$$f(x, y) = (y, (1 - \|y\|^2)x)$$

notemos que $f(S^k \times S^{m-1}) = S^{m-1}$ donde $S^{m-1} \subset S^{k+m}$. Como $f(-x, -y) = (-y, 1 - \| -y \|^2 - x) = -(y, 1 - \|y\|^2 x) = -f(x, y)$, entonces la aplicación f define una aplicación $g: D(m\xi_k) \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{k+m}$ en $\mathbb{R}\mathbb{P}^{k+m}$, tal que $g(S(m\xi_k)) = \mathbb{R}\mathbb{P}^{m-1}$. Observemos que $g: D(m\xi_k) - S(m\xi_k) \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{k+m} - \mathbb{R}\mathbb{P}^{m-1}$ es un homeomorfismo. Por lo tanto g induce una aplicación al cociente

$$h: \text{Th}(m\xi_k) \longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{k+m}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{m-1}$$

que es un homeomorfismo.

En general, como una consecuencia del Corolario 5.7 y el Ejemplo 5.8, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5.9. *El espacio de Thom $\text{Th}(m\xi_k \oplus \varepsilon^n)$, es homeomorfo a la n -ésima suspensión reducida $\Sigma^n(\mathbb{R}\mathbb{P}^{k+m}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{m-1})$.*

5.2. S-categoría

En ésta sección, vamos a considerar a los espacios topológicos con punto base, y todas las aplicaciones y homotopías van a preservar punto base. Recordemos que denotamos por $[X, Y]$, al conjunto de clases de homotopía de aplicaciones de X a Y . La suspensión reducida Σ , define una aplicación funtorial $\Sigma: [X, Y] \rightarrow [\Sigma(X), \Sigma(Y)]$ tal que $\Sigma[f] = [\Sigma f]$. Más aún, el Teorema 1.68 muestra que $[\Sigma(X), \Sigma(Y)]$ es un grupo, y entonces la aplicación $\Sigma: [\Sigma^k(X), \Sigma^k(Y)] \rightarrow [\Sigma^{k+1}(X), \Sigma^{k+1}(Y)]$ es un homomorfismo de grupos.

Definición 5.10. Consideremos la siguiente sucesión de grupos abelianos.

$$[\Sigma^2(X), \Sigma^2(Y)] \longrightarrow [\Sigma^3(X), \Sigma^3(Y)] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [\Sigma^n(X), \Sigma^n(Y)] \longrightarrow \cdots$$

y denotamos por $\{X, Y\}$ al colímite de esta sucesión. Un elemento en $\{X, Y\}$ es llamado una *S-aplicación* de X a Y . Definimos la *S-categoría* como la categoría que tiene por objetos a los espacios topológicos punteados y por morfismos a las *S-aplicaciones*.

Proposición 5.11. *La aplicación natural $[X, Y] \rightarrow \{X, Y\}$ es una biyección, si X es un complejo CW de dimensión n y Y es r -conexo, es decir, los grupos de homotopía $\pi_i(X) = 0$ para $0 \leq i \leq r$.*

Demostración. La demostración de esta proposición es una consecuencia de [23, Capítulo 8, Sección 5, Teorema 11] \square

Podemos definir una composición $\{X, Y\} \times \{Y, Z\} \rightarrow \{X, Z\}$, usando la composición dada en las clases de homotopía $[\Sigma^n(X), \Sigma^n(Y)] \times [\Sigma^n(Y), \Sigma^n(Z)] \rightarrow [\Sigma^n(X), \Sigma^n(Z)]$. Mostremos que dicha composición es biaditiva, es decir, separa sumas en ambas coordenadas.

Proposición 5.12. *La composición $\{X, Y\} \times \{Y, Z\} \rightarrow \{X, Z\}$ es biaditiva.*

Demostración. Como $\Sigma^n(X)$ es un H -coespacio, entonces $[\Sigma^n(X), \Sigma^n(Y)]$ tiene estructura de grupo, y entonces

$$[\Sigma^n(X), \Sigma^n(Y)] \times [\Sigma^n(Y), \Sigma^n(Z)] \rightarrow [\Sigma^n(X), \Sigma^n(Z)]$$

separa sumas en la primera coordenada, lo que implica que en el colímite $\{X, Y\} \times \{Y, Z\} \rightarrow \{X, Z\}$ es aditiva en la primera coordenada.

Por otro lado, tenemos que $\Omega(\Sigma^{n-1}(Z))$ es un H -espacio, por lo cual $[\Sigma^n(Y), \Sigma^n(Z)] = [\Sigma^{n-1}(Y), \Omega(\Sigma^n(Z))]$ tiene estructura de grupo, y entonces

$$[\Sigma^{n-1}(X), \Sigma^{n-1}(Y)] \times [\Sigma^{n-1}(Y), \Omega(\Sigma^n(Z))] \rightarrow [\Sigma^{n-1}(X), \Omega(\Sigma^n(Z))]$$

separa sumas en la segunda coordenada, lo que implica que en el colímite $\{X, Y\} \times \{Y, Z\} \rightarrow \{X, Z\}$ es aditiva en la segunda coordenada. \square

El siguiente teorema nos da una versión de la sucesión de Barratt-Puppe de la Definición 1.54, vista en la S-categoría.

Teorema 5.13. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Entonces para cada espacio Z , la siguiente sucesión es exacta.*

$$\{X, Z\} \longleftarrow \{Y, Z\} \longleftarrow \{C_f, Z\} \longleftarrow \{\Sigma(X), Z\} \longleftarrow \{\Sigma(Y), Z\}$$

Demostración. La sucesión deseada surge tomando el colímite de la sucesión de Puppe

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha_f} C_f \xrightarrow{\beta_f} \Sigma(X) \xrightarrow{\Sigma(f)} \Sigma(Y)$$

inducida a sus clases de homotopía. \square

Consideremos una aplicación $u: X \wedge X' \rightarrow S^n$, ésta aplicación induce dos morfismos de grupos $u_Z: \{Z, X'\} \rightarrow \{X \wedge Z, S^n\}$ y $u^Z: \{Z, X\} \rightarrow \{Z \wedge X', S^n\}$, definidos como $u_Z(\{f\}) = \{u(1 \wedge f)\}$ y $u^Z(\{g\}) = \{u(g \wedge 1)\}$.

Si $Z = S^k$, denotamos a estos dos morfismos como u_k y u^k respectivamente. Definamos la siguiente noción de S-dualidad en la S-categoría.

Definición 5.14. Una aplicación $u: X \wedge X' \rightarrow S^n$ es una n -dualidad, si los morfismos de grupos u_k y u^k son isomorfismos de grupos. Si existe una n -dualidad $u: X \wedge X' \rightarrow S^n$, entonces decimos que X' es n -dual a X . Decimos que X' es S -dual a X , si alguna suspensión de X' es n -dual a alguna suspensión de X , para algún n .

Recordemos que ν es un haz normal de una variedad X , con haz tangente TX , si $TX \oplus \nu$ es un haz trivial.

Teorema 5.15. *Sea ν el haz normal de una variedad compacta X , entonces el espacio de Thom $\text{Th}(\nu)$ es S -dual a $X/\partial X$, donde ∂X es la frontera de X .*

El teorema se muestra encajando el espacio X en un cubo en \mathbb{R}^n , de manera que mande la frontera de X a la frontera del cubo. Este resultado se debe a Atiyah, y está demostrado en [4, Proposición 3.2].

Nota 5.16. Los espacios de Thom pueden ser vistos como suspensiones generalizadas, por lo cual tiene sentido hablar de ellos como espacios S-duales.

Recordemos de la Definición 3.16, que dos haces vectoriales ξ y η son *establemente equivalentes* si existen haces vectoriales triviales ε^n y ε^m , tal que $\xi \oplus \varepsilon^n \cong \eta \oplus \varepsilon^m$, para algún n y m . En particular decimos que un haz vectorial ξ es *establemente trivial*, si ξ es establemente equivalente a 0, es decir, existen ε^n y ε^m tal que $\xi \oplus \varepsilon^n \cong \varepsilon^m$, para algún m y n .

Entonces usando el Teorema 5.15, tenemos el siguiente *teorema de dualidad de Atiyah*.

Teorema 5.17 (Teorema de Dualidad de Atiyah). *Sean ξ y η dos haces vectoriales reales sobre una variedad compacta X , tal que $\xi \oplus \eta \oplus TX$ es establemente trivial. Entonces $\text{Th}(\xi)$ y $\text{Th}(\eta)$ son S-duales.*

Demostración. Supongamos que $\xi = (E(\xi), \pi, X)$ es un haz vectorial diferenciable con métrica Riemanniana suave, esto es, un haz vectorial en el cual las trivializaciones locales son diferenciables, y con una métrica Riemanniana diferenciable. Consideremos el haz de discos $D(\xi)$, el cual es una variedad diferenciable y compacta, con frontera $\partial D(\xi)$ igual al haz de esferas $S(\xi)$.

El haz tangente a $D(\xi)$ es el haz inducido $\pi^*(E(\xi) \oplus TX)$. En efecto, sea $p: TX \rightarrow X$ el haz tangente a X y consideremos la suma directa $p': E(\xi) \oplus TX \rightarrow X$ donde $E(\xi) \oplus TX = \{(e, v) \in E(\xi) \times TX \mid \pi(e) = p(v)\}$, consideremos el haz inducido $\pi^*(E(\xi) \oplus TX)$ bajo $\pi: D(\xi) \rightarrow X$, esto es

$$\begin{aligned} \pi^*(E(\xi) \oplus TX) &= \{(e', (e, v)) \in D(\xi) \times E(\xi) \oplus TX \mid \pi(e') = p'(e, v)\} \\ &= \{(e', (e, v)) \in D(\xi) \times E(\xi) \oplus TX \mid \pi(e') = \pi(e) = p(v)\} \end{aligned}$$

y entonces es el haz tangente a $D(\xi)$.

Por otro lado $\pi^*(E(\eta))$ es el haz normal a $D(\xi)$, puesto que $\pi^*(E(\xi) \oplus TX) \oplus \pi^*(E(\eta))$ es un haz trivial. Notemos que $\text{Th}(\pi^*E(\eta)) = \Sigma^n \text{Th}(\eta)$ para algún n . Entonces por el Teorema 5.15, tenemos que $\text{Th}(\pi^*E(\eta))$ es S-dual a $D(\xi)/S(\xi)$, lo cual implica que $\text{Th}(\eta)$ es S-dual a $\text{Th}(\xi)$. \square

5.3. Tipo de homotopía fibrada

Definición 5.18. Sea $p: E \rightarrow X$ y $p': E' \rightarrow X$ dos haces fibrados sobre el mismo espacio base X . Una homotopía $f_t: E \rightarrow E'$ es una *homotopía fibrada*, si $p \circ f_t = p'$ para todo $t \in [0, 1]$. Dos morfismos de haces $f, g: E \rightarrow E'$ son *homotópicos fibrados*, si existe una homotopía fibrada $f_t: E \rightarrow E'$ con $f_0 = f$ y $f_1 = g$. Un morfismo de haces $f: E \rightarrow E'$ es una *equivalencia homotópica fibrada*, si existe un morfismo de haces $g: E' \rightarrow E$ tal que $f \circ g$ y $g \circ f$ sean homotópicas fibradas a la identidad, en este caso decimos que los haces E y E' tienen el mismo tipo de homotopía fibrada.

Teorema 5.19. *Sean $p: E \rightarrow X$ y $p': E' \rightarrow X$, dos haces localmente triviales sobre un complejo CW finito X con fibras localmente compactas. Sea $f': E \rightarrow E'$ una aplicación tal que $f: E_x \rightarrow E'_x$ es una equivalencia homotópica para todo $x \in X$. Entonces f es una equivalencia homotópica fibrada.*

Demostración. El teorema se demuestra usando inducción en el número de celdas de X , y [12, Cap. 16, Teorema 4.2]. \square

Corolario 5.20. *Sea $p: E \rightarrow X$ un haz localmente trivial sobre un complejo CW finito, y sea $u: E \rightarrow Y$ una aplicación tal que la restricción $u: E_x \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica para cada $x \in X$. Entonces $p: E \rightarrow B$ es del mismo tipo de homotopía fibrada que el haz trivial $X \times Y \rightarrow X$.*

Demostración. Notemos que la aplicación

$$\begin{aligned} (p, u): E &\longrightarrow X \times Y \\ e &\longmapsto (p(e), u(e)) \end{aligned}$$

satisface las hipótesis del Teorema 5.19. \square

Definición 5.21. Sean ξ y η dos haces vectoriales sobre un mismo espacio topológico para-compacto X . Decimos que los haces de esferas $S(\xi)$ y $S(\eta)$ son del mismo tipo de homotopía fibrada estable, si $S(\xi \oplus \varepsilon^n)$ y $S(\eta \oplus \varepsilon^m)$ tienen el mismo tipo de homotopía fibrada, para algún n y m .

Lema 5.22. La relación de equivalencia homotópica fibrada estable, es una relación de equivalencia.

Demostración. Denotemos a la relación de homotopía fibrada estable por \sim_{st} .

- Reflexiva: $S(\xi) \sim_{st} S(\xi)$ por la homotopía identidad $f: S(\xi) \rightarrow S(\xi)$.
- Simétrica: Si $S(\xi) \sim_{st} S(\eta)$, existen n y m tal que $f: S(\xi \oplus \varepsilon^n) \rightarrow S(\eta \oplus \varepsilon^m)$ es una equivalencia homotópica fibrada, entonces existe un morfismo de haces $g: S(\eta \oplus \varepsilon^m) \rightarrow S(\xi \oplus \varepsilon^n)$ tal que $f \circ g$ y $g \circ f$ son homotópicas fibradas a la identidad, lo cual implica que $S(\eta) \sim_{st} S(\xi)$.
- Transitiva: Si $S(\xi) \sim_{st} S(\eta)$, existen n y m tal que $f: S(\xi \oplus \varepsilon^n) \rightarrow S(\eta \oplus \varepsilon^m)$ es una equivalencia homotópica fibrada. Si $S(\eta) \sim_{st} S(\nu)$, existen n' y m' tal que $g: S(\eta \oplus \varepsilon^{n'}) \rightarrow S(\nu \oplus \varepsilon^{m'})$ es una equivalencia homotópica fibrada. Entonces la aplicación

$$S(\xi \oplus \varepsilon^{n+n'}) \rightarrow S(\eta \oplus \varepsilon^{m+n'}) \rightarrow S(\nu \oplus \varepsilon^{m'+m})$$

es una equivalencia homotópica fibrada.

□

Denotamos por $J(\xi)$ a la clase de equivalencia homotópica fibrada estable de ξ y denotamos por $J(X)$ al conjunto de todas las clases de equivalencia homotópica fibrada estables de haces vectoriales en un espacio base X .

Recordemos de la Definición 3.6, que la Teoría K real de un espacio topológico X es denotada por $\widetilde{KO}(X)$. Del Teorema 3.18, tenemos que la Teoría K real $KO(X)$ podemos verla como el conjunto de clases de equivalencia estable de haces vectoriales reales sobre X , vista en la Definición 3.16, cuando X es compacto.

Nota 5.23. De manera natural, tenemos una aplicación sobreyectiva

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{KO}(X) & \longrightarrow & J(X) \\ [\xi] & \longmapsto & J(\xi) \end{array}$$

Si X un espacio sobre el cual, cada haz vectorial sea de tipo finito, entonces al conjunto $J(X)$ podemos darle una estructura de grupo, por lo cual la aplicación anterior sería un epimorfismo de grupos.

Proposición 5.24. La suma directa de haces vectoriales, induce en $J(X)$ una estructura de grupo abeliano, y la aplicación $\widetilde{KO}(X) \rightarrow J(X)$ es un epimorfismo de grupos.

Demostración. Definamos la operación en $J(X)$ como $J(\xi) + J(\eta) := J(\xi \oplus \eta)$, donde \oplus es la suma directa de haces en $\widetilde{KO}(X)$. Mostremos que esta operación está bien definida, es decir, si $J(\xi) = J(\xi')$ entonces $J(\xi \oplus \eta) = J(\xi' \oplus \eta)$. Si $J(\xi) = J(\eta)$, existe una equivalencia homotópica fibrada $f: S(\xi) \rightarrow S(\xi')$, y entonces existe un morfismo de haces $f': S(\xi') \rightarrow S(\xi)$ tal que $f \circ f'$ y $f' \circ f$ son homotópicas fibradas a la identidad. Sean $h_t: S(\xi) \rightarrow S(\xi)$

y $h'_t: S(\xi') \rightarrow S(\xi')$ las homotopías fibradas anteriores, es decir, $h_0 = f' \circ f$, $h_1 = \text{id}_{S(\xi)}$ y $h'_0 = f \circ f'$, $h'_1 = \text{id}_{S(\xi')}$.

Definamos las aplicaciones

$$\begin{aligned} g: S(\xi \oplus \eta) &\longrightarrow S(\xi' \oplus \eta) \\ (x \cos(\theta), y \sin(\theta)) &\longmapsto (f(x) \cos(\theta), y \sin(\theta)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g: S(\xi' \oplus \eta) &\longrightarrow S(\xi \oplus \eta) \\ (x' \cos(\theta), y \sin(\theta)) &\longmapsto (f'(x') \cos(\theta), y \sin(\theta)) \end{aligned}$$

para $x \in S(\xi)$, $x' \in S(\xi')$, $y \in S(\eta)$ y $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Así, podemos definir homotopías fibradas

$$\begin{aligned} k_t: S(\xi \oplus \eta) &\longrightarrow S(\xi \oplus \eta) \\ (x \cos(\theta), y \sin(\theta)) &\longmapsto (h_t(x) \cos(\theta), y \sin(\theta)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} k'_t: S(\xi' \oplus \eta) &\longrightarrow S(\xi' \oplus \eta) \\ (x' \cos(\theta), y \sin(\theta)) &\longmapsto (h'_t(x') \cos(\theta), y \sin(\theta)) \end{aligned}$$

tal que $k_0 = g' \circ g$, $k_1 = \text{id}_{S(\xi \oplus \eta)}$ y $k'_0 = g \circ g'$, $k'_1 = \text{id}_{S(\xi' \oplus \eta)}$. Por lo tanto $J(\xi \oplus \eta) = J(\xi' \oplus \eta)$.

Como $\widetilde{\text{KO}}(X)$ es un grupo abeliano, entonces $J(X)$ también es un grupo abeliano. La aplicación $\widetilde{\text{KO}}(X) \rightarrow J(X)$ es un homomorfismo de grupos abelianos, esto es, $[\xi \oplus \eta] \mapsto J(\xi \oplus \eta) = J(\xi) + J(\eta)$ y como esta aplicación es sobre, entonces $\widetilde{\text{KO}}(X) \rightarrow J(X)$ es un epimorfismo de grupos abelianos. \square

5.4. Espacios de Thom y tipo de homotopía fibrada

Hay una relación entre equivalencia homotópicas fibradas estable, y espacios isomorfos en la S-categoría, la cual podemos ver en la siguiente proposición.

Proposición 5.25. *Sean ξ y η dos haces vectoriales sobre un espacio topológico paracompacto X . Si $S(\xi)$ y $S(\eta)$ tienen el mismo tipo de homotopía fibrada, entonces $\text{Th}(\xi)$ y $\text{Th}(\eta)$ tienen el mismo tipo de homotopía. Si $J(\xi) = J(\eta)$, entonces $\text{Th}(\xi)$ y $\text{Th}(\eta)$ son isomorfos en la S-categoría.*

Demostración. Notemos que $\partial D(\xi) = S(\xi)$ y $\partial D(\eta) = S(\eta)$. Sea $f: S(\xi) \rightarrow S(\eta)$ una equivalencia homotópica fibrada y sea $g: S(\eta) \rightarrow S(\xi)$ el inverso homotópico fibrado. Entonces podemos extender radialmente a f y g a aplicaciones de pareja

$$F: (D(\xi), S(\xi)) \rightarrow (D(\eta), S(\eta)) \quad G: (D(\eta), S(\eta)) \rightarrow (D(\xi), S(\xi))$$

estas aplicaciones inducen aplicaciones en el cociente

$$\bar{F}: D(\xi)/S(\xi) \rightarrow D(\eta)/S(\eta) \quad \bar{G}: D(\eta)/S(\eta) \rightarrow D(\xi)/S(\xi)$$

Sean $h: S(\xi) \times I \rightarrow S(\xi)$ y $k: S(\eta) \rightarrow S(\eta)$ las homotopías fibradas de $g \circ f \simeq \text{id}_{S(\xi)}$ y $f \circ g \simeq \text{id}_{S(\eta)}$ respectivamente. Entonces estas homotopías fibradas se extienden a homotopías de parejas

$$H: (D(\xi) \times I, S(\xi) \times I) \rightarrow (D(\xi), S(\xi)) \quad K: (D(\eta) \times I, S(\eta) \times I) \rightarrow (D(\eta), S(\eta))$$

de $G \circ F \simeq \text{id}_{(D(\xi), S(\xi))}$ y $F \circ G \simeq \text{id}_{(D(\eta), S(\eta))}$. Estas homotopías inducen homotopías en el cociente

$$\bar{H}: D(\xi)/S(\xi) \times I \rightarrow D(\xi)/S(\xi) \quad \bar{K}: D(\eta)/S(\eta) \times I \rightarrow D(\eta)/S(\eta)$$

de $\bar{G} \circ \bar{F} \simeq \text{id}_{D(\xi)/S(\xi)}$ y $\bar{F} \circ \bar{G} \simeq \text{id}_{D(\eta)/S(\eta)}$, lo cual implica que $\text{Th}(\xi)$ y $\text{Th}(\eta)$ tienen el mismo tipo de homotopía.

Supongamos que $J(\xi) = J(\eta)$, entonces existen n y m tal que $S(\xi \oplus \varepsilon^n)$ y $S(\eta \oplus \varepsilon^m)$ tienen el mismo tipo de homotopía fibrada. Entonces por el Corolario 5.7 y lo anterior, tenemos que $\text{Th}(\xi \oplus \varepsilon^n) \cong \Sigma^n(\text{Th}(\xi))$ y $\text{Th}(\eta \oplus \varepsilon^m) \cong \Sigma^m(\text{Th}(\eta))$ tienen el mismo tipo de homotopía, lo cual implica que $\text{Th}(\xi)$ y $\text{Th}(\eta)$ son isomorfos en la S -categoría. \square

El recíproco de esta proposición no es del todo cierta, pero podemos dar una versión parcial de éste. Para esto es necesario definir el concepto de espacio reducible y espacio correducible.

Definición 5.26. Un espacio topológico punteado (X, x_0) es *reducible*, si existe una aplicación $f: S^n \rightarrow X$, tal que la aplicación inducida a los grupos de homología $f_*: \tilde{H}_i(S^n) \rightarrow \tilde{H}_i(X)$, es un isomorfismo para $i \geq n$. En particular, decimos que X es *S-reducible* si $\Sigma^k X$ es reducible para algún k .

Un espacio X es *correducible*, si existe una aplicación $g: X \rightarrow S^n$ tal que la aplicación inducida a los grupos de cohomología $g^*: \tilde{H}^i(S^n) \rightarrow \tilde{H}^i(X)$, es un isomorfismo para $i \leq n$. En particular, decimos que X es *S-correducible* si $\Sigma^k X$ es correducible para algún k .

Proposición 5.27. Sea X un complejo CW con una n -celda, y sea $\nu: X \rightarrow X/X^{n-1} \cong S^n$ la proyección natural, donde X^{n-1} denota al $n-1$ -esqueleto. El espacio X es reducible si y sólo si existe $f: S^n \rightarrow X$ tal que $\nu \circ f$ es homotópico a la identidad.

Demostración. Si X es reducible, existe una aplicación $f: S^n \rightarrow X$ tal que $f_*: \tilde{H}_i(S^n) \rightarrow \tilde{H}_i(X)$ es un isomorfismo para todo $i \geq n$. Para probar que $\nu \circ f$ es homotópico a la identidad, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & \tilde{H}_n(S^n) & & & & \\ & & \downarrow f_* & \searrow (\nu \circ f)_* & & & \\ \tilde{H}_n(X^{n-1}) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(X) & \xrightarrow{\nu_*} & \tilde{H}_n(S^n) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) \end{array}$$

Como $\tilde{H}_n(X^{n-1}) = 0$ tenemos que ν_* es inyectiva, y como $\tilde{H}_{n-1}(X^{n-1})$ es abeliano libre tenemos que ν_* es sobre, entonces ν_* es un isomorfismo. Como f_* es un isomorfismo entonces $(\nu \circ f)_*: \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(X)$ es un isomorfismo, por lo cual a un generador de $\tilde{H}_n(S^n)$ lo manda al mismo generador en $\tilde{H}_n(X)$, lo cual implica que $\nu \circ f$ tiene grado 1, y entonces $\nu \circ f$ es homotópica a la identidad.

Recíprocamente, si existe $f: S^n \rightarrow X$ tal que $\nu \circ f$ es homotópica a la identidad, entonces $\nu \circ f$ tiene grado 1, lo cual implica que $\tilde{H}_n(X)$ tiene a lo mas 1 generador, y entonces $f_*: \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(X)$ es un isomorfismo. \square

Proposición 5.28. Sea X un complejo CW con n -esqueleto $X^n = S^n$, y sea $u: S^n \rightarrow X$ la inclusión. Entonces el espacio X es correducible si y sólo si, existe una aplicación $g: X \rightarrow S^n$ tal que $g \circ u$ es homotópica a la identidad.

Demostración. Si X es correducible, existe una aplicación $g: X \rightarrow S^n$ tal que $g^*: \tilde{H}^n(S^n) \rightarrow \tilde{H}^n(X)$ es un isomorfismo para $i \leq n$. Como $\tilde{H}^n(X)$ es un grupo abeliano libre, entonces $g \circ u$ es homotópica a la identidad como en la Proposición 5.27. El recíproco se sigue como en la Proposición 5.27, puesto que $\tilde{H}^n(X)$ tiene a lo mas 1 generador. \square

Nota 5.29. Sea ξ un haz vectorial real sobre un espacio topológico paracompacto X , y sea

$$u_x: (D(\xi_x), S(\xi_x)) \rightarrow (D(\xi), S(\xi))$$

la inclusión para $x \in X$. Como en la Proposición 5.28, el espacio $\text{Th}(\xi) = D(\xi)/S(\xi)$ es correducible si y sólo si, existe una aplicación $g: (D(\xi), S(\xi)) \rightarrow (S^n, *)$ tal que $u^* \circ g^*: \tilde{H}^n(S^n) \rightarrow \tilde{H}^n((D(\xi_x), S(\xi_x)))$ es un isomorfismo. La aplicación $g^*: \tilde{H}^n(S^n) \rightarrow \tilde{H}^n((D(\xi), S(\xi)))$ define una orientación para el haz vectorial ξ , la *clase de Thom* de ξ es el elemento $g^*(s) \in \tilde{H}^n((D(\xi), S(\xi)))$ donde s es el generador de $\tilde{H}^n(S^n)$, cuando $\text{Th}(\xi)$ es correducible.

Teorema 5.30. *Sea ξ un haz vectorial sobre un complejo CW finito X . Entonces las siguientes son equivalentes:*

1. $J(\xi) = 0$ en $J(X)$.
2. $\text{Th}(\xi)$ es S -correducible
3. $\text{Th}(\xi)$ y $\text{Th}(0) = X^+$ son isomorfos en la S -categoría, donde $X^+ = X \sqcup \{*\}$.

Demostración. Por la Proposición 5.25, tenemos que (1) implica (3). Supongamos (3), y mostremos (2). Supongamos que $\text{Th}(\xi)$ y $\text{Th}(0) = X^+$ son isomorfos en la S -categoría, notemos que X^+ es correducible con la aplicación $g: X^+ \rightarrow S^0$ definida por $g(X) = -1$ y $g(\infty) = 1$, entonces $g^*: \tilde{H}^i(S^0) \rightarrow \tilde{H}^i(X^+)$ es un isomorfismo para $i \leq 0$. Por lo tanto $\text{Th}(\xi)$ es correducible.

Mostremos que (2) implica (1). Sea m el entero mas grande tal que el haz vectorial $\eta = \xi \oplus \varepsilon^m$ cumple que el espacio $\text{Th}(\eta) = \text{Th}(\xi \oplus \varepsilon^m) = \Sigma^m \text{Th}(\xi)$ sea correducible. Sea $g: (D(\eta), S(\eta)) \rightarrow (S^n, *)$ la correducción de $\text{Th}(\xi)$. Por la nota 5.11 y la sucesión 5.13, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} [S(\xi), S^{n-1}] & \xrightarrow{\cong} & [D(\xi)/S(\xi), S^n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ [S(\xi_x), S^{n-1}] & \xrightarrow{\cong} & [D(\xi_x)/S(\xi_x), S^n] \end{array}$$

Entonces la aplicación g , define una aplicación $f: S(\eta) \rightarrow S^{n-1}$ tal que $f|_{S(\eta_x)}: S(\eta_x) \rightarrow S^{n-1}$ es una equivalencia homotópica para cada $x \in X$. Y entonces el teorema se sigue del Corolario 5.20. \square

Nota 5.31. De hecho, existe una relación directa, entre S -dualidad y S -reducibilidad: Si X y X' son complejos CW finitos, tal que X es S -dual a X' , entonces X es S -reducible si y solo si X' es S -correducible. Este resultado lo podemos ver en [12, Capítulo 16, Teorema 8.4].

5.5. Campos vectoriales y correducibilidad

Sea $O(n)$ el grupo ortogonal de dimension n . Definamos una aplicación $\theta': \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow O(n)$ tal que $\theta'(L)$ es una reflexión a través del plano perpendicular a L , es decir, si $L = \{x, -x\}$ es la línea que pasa por x y $-x$, $\theta'(\{x, -x\})(y) = y - 2\langle x, y \rangle x$ para $x \in S^{n-1}$ y $y \in \mathbb{R}^n$.

La aplicación θ' es compatible con la inclusión $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-k-1} \hookrightarrow O(n-k)$, entonces θ' induce una aplicación en el cociente $\theta: \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-k-1} \rightarrow O(n)/O(n-k)$, definida como $\theta(L) = (v_1, \dots, v_k)$, donde $v_i = \theta'(\{x, -x\})(e_{n-k+i})$ para $1 \leq i \leq k$ y $L = \{x, -x\}$. Notemos que $O(n)/O(n-k)$ es homeomorfa a la variedad de Stiefel $V_k(\mathbb{R}^n)$ de la Definición 2.60.

Proposición 5.32. *La aplicación $\theta: \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-2} \rightarrow V_1(\mathbb{R}^n)$, es un homeomorfismo.*

Demostración. Notemos que $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-2} \cong S^{n-1}$, y $V_1(\mathbb{R}^n) = S^{n-1}$. Sea e_1, \dots, e_n la base estándar de \mathbb{R}^n , y tomemos $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si $\theta(\{x, -x\})(y) = y - 2\langle x, y \rangle x = 0$, entonces $y = 2\langle x, y \rangle x$, como $x \neq 0$ entonces $y = 0$, por lo cual θ es inyectiva. Consideremos $\theta(\{x, -x\})(e_n) = e_n - 2\langle x, e_n \rangle x = e_n - 2x_n x = (-2x_1 x_n, \dots, -2x_{n-1} x_n, 1 - x_n^2)$. Si $y = (y_1, \dots, y_n) \in S^{n-1}$ y $y_n \neq 0$, entonces existe un único elemento $x \in S^{n-1}$ con $x_n > 0$ tal que $\theta(\{x, -x\})(e_n) = y$. Para $x_n = 0$ tenemos que $\theta(\{x, -x\})(e_n) = (0, \dots, 0, 1)$, por lo tanto θ es sobre y entonces θ es un isomorfismo. \square

Nota 5.33. De hecho, la aplicación θ induce un isomorfismo en los grupos de homotopía $\theta_*: \pi_i(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-k-1}) \rightarrow \pi_i(V_k(\mathbb{R}^n))$, para $i < 2n - 2k - 1$ (ver [12, Capítulo 16, Teorema 9.2]).

Nota 5.34. Recordemos del Teorema 4.1, que si $n = k2^c 16^d$ con $0 \leq c \leq 3$, entonces existen $\rho(n) - 1$ campos vectoriales linealmente independientes en S^{n-1} donde $\rho(n) = 2^c + 8d$. Si $n \neq 1, 2, 3, 4, 6, 8, 16$ tenemos que $n - 1 < 2n - 2(\rho(n) + 1) - 1$ ó $2\rho(n) + 2 < n$. Por la Nota 5.33, tenemos que $\pi_{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-\rho(n)-2}) \rightarrow \pi_{n-1}(V_{\rho(n)+1}(\mathbb{R}^n))$ es un isomorfismo, por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.35. *La proyección $q: V_{\rho(n)+1}(\mathbb{R}^n) \rightarrow S^{n-1}$ tiene una sección si y sólo si, la aplicación $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-\rho(n)-2}$ compuesta con la aplicación $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-\rho(n)-2} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-2} = S^{n-1}$ es de grado 1.*

Demostración. Si $s: S^{n-1} \rightarrow V_{\rho(n)+1}(\mathbb{R}^n)$ es una sección, entonces, $q \circ s = \text{id}_{S^{n-1}}$. Por la Nota 5.34, existe una aplicación $g: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-\rho(n)-2}$ tal que la composición $\theta \circ g$ donde $\theta: \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-\rho(n)-2} \rightarrow V_{\rho(n)+1}(\mathbb{R}^n)$ es homotópica a s . Luego, $\text{Pr}_{S^{n-1}} \circ \theta \circ g$ donde $\text{Pr}_{S^{n-1}}$ es la proyección de $V_{\rho(n)+1}(\mathbb{R}^n)$ sobre S^{n-1} , es homotópica a la identidad.

Recíprocamente, supongamos que existe una aplicación $f: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-\rho(n)-2}$ que compuesta con la aplicación $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-\rho(n)-2} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-2} = S^{n-1}$ es de grado 1. Sea $s' = \theta \circ f: S^{n-1} \rightarrow V_{\rho(n)+1}(\mathbb{R}^n)$, entonces $q \circ s': S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ es homotópica a la identidad por una homotopía $f_t: S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow S^{n-1}$, donde $f_0 = q \circ s'$ y $f_1 = \text{id}_{S^{n-1}}$, esta homotopía se levanta a una homotopía $\tilde{f}_t: S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow V_{\rho(n)+1}(\mathbb{R}^n)$, por lo cual $\tilde{f}_0: S^{n-1} \rightarrow V_{\rho(n)+1}$ define una sección de q . \square

Proposición 5.36. *Sea r el orden de $J(\xi_{k-1})$ en $J(\mathbb{R}\mathbb{P}^{k-1})$. Entonces $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+rp}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-k+rp}$ y $\mathbb{R}\mathbb{P}^n/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-k}$ son isomorfos en la S -categoría, y para $rp > n+1$ el espacio $\mathbb{R}\mathbb{P}^{rp-k-2}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{rp-n-2}$ es S -dual a $\mathbb{R}\mathbb{P}^n/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-k}$.*

Demostración. Por el Ejemplo 5.8, tenemos que $\text{Th}((n-k+1)\xi_{k-1}) \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^n/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-k}$. Por el Teorema 5.9 y la Proposición 5.25, tenemos que los espacios $\text{Th}((n-k+1)\xi_{k-1} \oplus rp\xi_{k-1})$, $\text{Th}((n-k+1)\xi_{k-1} \oplus \varepsilon^{rp})$, $\Sigma^{rp}(\text{Th}((n-k+1)\xi_{k-1}))$ y $\Sigma^{rp}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-k})$ tienen el mismo tipo de homotopía.

Para lo segundo, aplicaremos el teorema de dualidad de Atiyah (Teorema 5.17) para el haz vectorial $(n-k+1)\xi_{k-1}$. Existe un isomorfismo $T\mathbb{R}\mathbb{P}^{k-1} \oplus \varepsilon^1 \cong k\xi_{k-1}$ donde $T\mathbb{R}\mathbb{P}^{k-1}$ es el haz tangente a $\mathbb{R}\mathbb{P}^{k-1}$ (ver [12, Capítulo 2, Ejemplo 4.8]), por lo cual necesitamos un haz vectorial tal que $T\mathbb{R}\mathbb{P}^{k-1} \oplus (n-k+1)\xi_{k-1} \oplus k\xi_{k-1}$ sea establemente trivial. Consideremos el haz vectorial $-(n-k+1)\xi_{k-1} - k\xi_{k-1} = (-n-1)\xi_{k-1}$, por el teorema de dualidad de Atiyah, tenemos que los espacios de Thom $\text{Th}((n-k+1)\xi_{k-1})$ y $\text{Th}((-n-1)\xi_{k-1})$ son S-duales, pero $\text{Th}((-n-1)\xi_{k-1}) = \text{Th}((rp-n-1)\xi_{k-1})$ para $rp > n+1$. Por lo tanto $\text{Th}((rp-n-1)\xi_{k-1}) \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^{rp-k-2}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{rp-n-2}$ es S-dual a $\text{Th}((n-k+1)\xi_{k-1}) \cong \mathbb{R}\mathbb{P}^n/\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-k}$. \square

Un primer acercamiento al problema de Adams, es el siguiente teorema de Atiyah y James, en el cual la no existencia de campos vectoriales linealmente independientes, se reduce a un problema de no existencia de una correducción de un espacio proyectivo.

Teorema 5.37. *Si existen $\rho(n)$ campos vectoriales linealmente independientes en S^{n-1} , entonces existe un entero $m \geq 1$ con $\rho(m) = \rho(n)$, tal que $\mathbb{R}\mathbb{P}^{m+\rho(m)}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{m-1}$ es correducible.*

Demostración. Supongamos que existen $\rho(n)$ campos vectoriales linealmente independientes en S^{n-1} , entonces por la Proposición 4.2, existen $\rho(n)$ campos vectoriales linealmente independientes en S^{qn-1} . Por el Teorema 5.35, si $qn \geq 2(\rho(n) + 1)$ entonces la aplicación $S^{qn-1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{qn-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{qn-\rho(n)-2}$ compuesta con la aplicación $\mathbb{R}\mathbb{P}^{qn-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{qn-\rho(n)-2} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{qn-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{qn-2} = S^{qn-1}$ tiene grado 1, y entonces por la Proposición 5.27, el espacio $\mathbb{R}\mathbb{P}^{qn-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{qn-\rho(n)-2}$ es reducible.

Sea r el orden de $J(\xi_{\rho(n)})$ en $J(\mathbb{R}\mathbb{P}^{\rho(n)})$, definamos $m = rp - qn$ con p un entero positivo. Por la Proposición 5.36, tenemos que para todo entero p tal que $m \geq 1$, el espacio $\mathbb{R}\mathbb{P}^{m+\rho(m)}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{m-1}$ es S-dual a $\mathbb{R}\mathbb{P}^{qn-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{qn-\rho(n)-2}$, y como $\mathbb{R}\mathbb{P}^{qn-1}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{qn-\rho(n)-2}$ es reducible, entonces por la Nota 5.31, el espacio $\mathbb{R}\mathbb{P}^{m+\rho(m)}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{m-1}$ es correducible.

Finalmente, tomemos $n = k2^c 16^d$ con k impar, consideremos a q impar, y tomamos $m = tn = t(k2^c 16^d)$ con t impar. Como tk es impar, entonces $\rho(m) = \rho(n)$. \square

Nota 5.38. En la sección 4.2 consideramos aplicaciones bilineales $\mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ llamadas multiplicaciones ortogonales. Usando la Nota 4.42, mostramos que cada C_k -módulo (de la Definición 4.31) surge de una multiplicación ortogonal, y en este caso existen k campos vectoriales linealmente independientes en S^{n-1} .

Podemos ver en el Cuadro 4.3 y la Nota 4.41 que si existe una multiplicación ortogonal $\mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces n es divisible por b_{k+1} , donde b_{k+1} es la dimensión mínima tal que $\mathbb{R}^{b_{k+1}}$ admite una estructura de C_k -módulo irreducible. Si definimos $c_k = b_{k+1}$, podemos notar que c_k satisface la relación $c_{k+8} = 16c_k$. De hecho, $\rho(n)$ es el número mas grande de todos los $k+1$ tal que c_k divide a n .

Teorema 5.39. *Si el orden de $J(\xi_k)$ en $J(\mathbb{R}\mathbb{P}^k)$ es igual a c_k para cada k , entonces no existen $\rho(n)$ campos vectoriales linealmente independientes en S^{n-1} , para cada n .*

Demostración. Supongamos que existen $\rho(n)$ campos vectoriales linealmente independientes en S^{n-1} para cada n . Entonces por el Teorema 5.37, existe un entero $m \geq 1$ con $\rho(m) = \rho(n)$, tal que $\mathbb{R}\mathbb{P}^{m+\rho(m)}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{m-1}$ es correducible. Por el Ejemplo 5.8, $\mathbb{R}\mathbb{P}^{m+\rho(m)}/\mathbb{R}\mathbb{P}^{m-1} \cong \text{Th}(m\xi_{\rho(m)})$, y por el Teorema 5.30, $J(m\xi_{\rho(m)}) = 0$ en $J(\mathbb{R}\mathbb{P}^{\rho(m)})$.

Por la Nota 5.38, $c_{\rho(m)}$ divide a m , lo cual mostraremos que es imposible. Notemos que $c_{\rho(1)} = c_1 = 2$, $c_{\rho(2)} = c_2 = 4$, $c_{\rho(4)} = c_4 = 8$ y $c_{\rho(8)} = c_8 = 16$; en este caso $c_{\rho(m)} = 2m$ y entonces $c_{\rho(m)}$ no divide a m . En general, si $m = (2a+1)2^b16^d$ con $0 \leq b \leq 3$, entonces $\rho(m) = 2^b + 8d$ y $c_{\rho(m)} = c_{2^b+8d} = 16^d c_{2^b} = 16^d 2^b 2$, por lo tanto $c_{\rho(m)}$ tiene una potencia de 2 mas que m , y por lo tanto $c_{\rho(m)}$ no divide a m . \square

Finalmente, tenemos el siguiente teorema el cual se demuestra en [12, Teorema 12.7].

Teorema 5.40. *El grupo $\widehat{KO}(\mathbb{RP}^k)$ es cíclico de orden c_k con generador $u = \xi_k - 1$, donde ξ_k denota al haz tautológico sobre \mathbb{RP}^k .*

5.6. Campos vectoriales linealmente independientes en esferas

En esta sección mostraremos que S^{n-1} no tiene $\rho(n)$ campos vectoriales linealmente independientes en el.

5.6.1. Formas cuadráticas y el grupo Spin

Sea (V, q) una forma cuadrática real, definida como en la Nota 4.13, y consideremos su álgebra de Clifford $(C(q), \theta)$. Sea $C(q)^* = \{\varphi \in C(q) \mid \text{existe } \varphi^{-1} \text{ con } \varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = 1\}$ el grupo de unidades multiplicativo en el álgebra de Clifford. Este grupo contiene a todos los elementos $v \in V$ tal que $q(v) \neq 0$.

Notemos que el grupo de unidades actúa en los automorfismo de el álgebra de Clifford $C(q)$. Es decir, existe un homomorfismo

$$\begin{aligned} Ad: C(q)^* &\longrightarrow \text{Aut}(C(q)) \\ \varphi &\longmapsto Ad_\varphi(x) = \varphi x \varphi^{-1} \end{aligned}$$

llamado *representación adjunta*.

Proposición 5.41. *Sea $v \in V \subset C(q)$ tal que $q(v) \neq 0$. Entonces $Ad_v(V) = V$. Más aún, para toda $w \in V$, la siguiente ecuación se cumple:*

$$-Ad_v(w) = w - 2\frac{q(v, w)}{q(v)}v$$

donde $2q(v, w) = q(v+w) - q(v) - q(w)$.

Demostración. En el álgebra de Clifford tenemos que $\theta(v)^2 = -q(v)1$, por lo cual en $C(q)$ tenemos que $v \cdot v = -q(v)1$, y entonces $v^{-1} = \frac{-v}{q(v)}$. Como $vw + wv = -2q(v, w)$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} -q(v)Ad_v(w) &= -q(v)v w v^{-1} = -q(v)v w \frac{-v}{q(v)} = v w v \\ &= -v^2 w - 2q(v, w)v = q(v)w - 2q(v, w)v \end{aligned}$$

\square

Entonces podemos considerar el subgrupo de todos los elementos $\varphi \in C(q)^*$ tal que $Ad_\varphi(V) = V$. Por la Proposición 5.41, este grupo contiene todos los elementos $v \in V$ con $q(v) \neq 0$. Más aún, cuando $q(v) \neq 0$ la transformación Ad_v preserva la forma cuadrática q . Por lo tanto, podemos definir $P(V, q)$ el subgrupo de $C(q)$ generado por los elementos $v \in V$ con $q(v) \neq 0$, y notemos que existe una representación

$$Ad: P(V, q) \longrightarrow O(V, q)$$

donde $O(V, q) = \{\lambda \in GL(V) \mid q \circ \lambda = q\}$ es el grupo ortogonal de la forma cuadrática (V, q) .

Definición 5.42. Definimos el *grupo Pin* de (V, q) , como el subgrupo $\text{Pin}(V, q)$ de $P(V, q)$ generado por los elementos $v \in V$ tal que $q(v) = \pm 1$. Definimos el *grupo Spin* de (V, q) como el grupo

$$\text{Spin}(V, q) = \text{Pin}(V, q) \cap C(q)^0$$

Si denotamos por $V^* = \{v \in V \mid q(v) \neq 0\}$, tenemos que $P(V, q) = \{v_1 \cdots v_r \in C(q) \mid v_1, \dots, v_r \text{ es una sucesión finita de } V^*\}$, y por lo tanto tenemos que

$$\text{Pin}(V, q) = \{v_1 \cdots v_r \in P(V, q) \mid q(v_j) = \pm 1 \text{ para toda } j\}$$

$$\text{Spin}(V, q) = \{v_1 \cdots v_r \in \text{Pin}(V, q) \mid r \text{ es par}\}$$

Notemos que $\text{Pin}(V, q) \cap C(q)^0$, es exactamente la aplicación $\rho_v: V \rightarrow V$ definida como la reflexión a través del hiperplano $v^\perp = \{w \in V \mid q(w, v) = 0\}$. Es decir, ρ_v fija el hiperplano v^\perp y manda v en $-v$. Podemos notar de la Proposición 5.41, que Ad_v preserva orientación sólo cuando V es impar. Para solucionar este problema, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \widetilde{Ad}: C(q)^* &\longrightarrow GL(C(q)) \\ y &\longmapsto \widetilde{Ad}_\varphi(y) = \alpha(\varphi)y\varphi^{-1} \end{aligned}$$

donde $\alpha: V \rightarrow C(q)$ esta definido como $\alpha(v) = -\theta(v)$.

Claramente, $\widetilde{Ad}_{\varphi_1\varphi_2} = \widetilde{Ad}_{\varphi_1} \circ \widetilde{Ad}_{\varphi_2}$, lo cual implica que \widetilde{Ad} es un homomorfismo, y notemos que $\widetilde{Ad}_\varphi = Ad_\varphi$ para elementos φ pares, es decir, para $\varphi \in C(q)^0$. Entonces, de la Proposición 5.41, tenemos que

$$\widetilde{Ad}_v(w) = w - 2\frac{q(v, w)}{q(v)}v$$

Sea $\text{SO}(V, q) = \{\lambda \in O(V, q) \mid \det(\lambda) = 1\}$ el *grupo especial ortogonal*.

Nota 5.43. El homomorfismo \widetilde{Ad} restringido a $\text{Pin}(V, q)$ y $\text{Spin}(V, q)$, aplica sobre $O(V, q)$ y $\text{SO}(V, q)$ respectivamente. Más aún, estas restricciones son epimorfismos, y la restricción $\widetilde{Ad}: \text{Spin}(V, q) \rightarrow \text{SO}(V, q)$ es 2 a 1.

5.6.2. Relación entre $\text{KO}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$ y $\text{J}(\mathbb{R}\mathbb{P}^n)$

Denotemos por $\text{Pin}(m)$ al subgrupo $\text{Pin}(\mathbb{R}^m, -\langle, \rangle)$, y denotemos por $\text{Spin}(m)$ al subgrupo $\text{Pin}(m) \cap C_m^0$ de $\text{Pin}(m)$.

Definición 5.44. Una *representación spinorial* de $\text{Spin}(m)$ es la restricción de una representación irreducible de C_m^0

Nota 5.45. Como $\text{Spin}(2m+1)$ es un subgrupo de el grupo de unidades en C_{2m+1}^0 , entonces cada C_{2m} -módulo determina un $\text{Spin}(2m+1)$ -módulo real. Para una base e_1, \dots, e_{2m} de C_{2m} definimos Δ^\pm , el módulo donde $i^r e_1 \cdots e_{2m}$ actúa como una multiplicación por ± 1 , respectivamente.

Podemos ver al anillo de representaciones $RSO(m)$ contenido en el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}]$, y al anillo de representaciones $R\text{Spin}(m)$ contenido en el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_r, \alpha_r^{-1}, (\alpha_1, \dots, \alpha_r)^{1/2}]$, donde $m = 2r$ o $m = 2r+1$ (ver [12, Capítulo 14, Nota 9.2]).

Entonces tenemos la siguiente proposición, la cual la podemos consultar en [12, Capítulo 14, Proposición 9.4].

Proposición 5.46. En $R\text{Spin}(2m)$,

$$\Delta^+ = \prod_{1 \leq j \leq m} (\alpha_j^{1/2} + \alpha_j^{-1/2}) = \sum_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_r = 1} \alpha_1^{\epsilon_1/2} \cdots \alpha_r^{\epsilon_r/2}$$

$$\Delta^- = \prod_{1 \leq j \leq m} (\alpha_j^{1/2} - \alpha_j^{-1/2}) = \sum_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_r = -1} \alpha_1^{\epsilon_1/2} \cdots \alpha_r^{\epsilon_r/2}$$

Definición 5.47. Sea ξ un haz vectorial de rango k orientado con métrica Riemanniana sobre un espacio paracompacto X , sea $\tilde{\xi} = (P, \pi, X, \text{SO}(k), \text{SO}(k))$ el haz principal asociado a ξ (ver Nota 2.69) y sea $\phi: \text{Spin}(k) \rightarrow \text{SO}(k)$ la aplicación definida por $\phi(u)(x) = uxu^*$ donde u^* es la transpuesta de u . Decimos que ξ tiene una estructura $\text{Spin}(k)$ si existe un haz principal $(Q, \pi', X, \text{Spin}(k), \text{Spin}(k))$ sobre X , y una aplicación $f: Q \rightarrow P$ tal que $f(b \cdot g) = f(b) \cdot \phi(g)$ y que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{f} & P \\ & \searrow \pi' & \swarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

Teorema 5.48. Sea ξ un haz vectorial real sobre un espacio topológico paracompacto X con grupo estructural $\text{Spin}(8m+1)$, sea $S(\xi)$ el haz de esferas asociado a ξ , entonces $S(\xi)$ es un haz principal con grupo estructural $\text{Spin}(8m)$. Si además $\Delta^+(S(\xi))$ es el haz vectorial asociado a $S(\xi)$ por una de las representaciones Spinoriales reales Δ^+ de $\text{Spin}(8m)$, entonces $\text{KO}(S(\xi))$ es un módulo libre sobre $\text{KO}(X)$ con dos generadores, 1 y $\Delta^+(S(\xi))$.

Este teorema fue demostrado por Bott en [6, Teorema I].

Una consecuencia inmediata del Teorema 5.48, es que

$$\psi^k \Delta^+(S(\xi)) = \theta_k(\xi) \Delta^+(S(\xi)) + b$$

donde ψ^k denota a las operaciones de Adams de la Definición 3.41, y θ_k es un invariante de tipo de homotopía fibrada de $S(\xi)$ que calcularemos.

Para simplificar notación, denotemos por Δ^+ a $\Delta^+(S(\xi))$. De la formula $\psi^k \Delta^+ = \theta_k(\xi) \Delta^+ + b$ tenemos que

$$\psi^k(\Delta^+ - \Delta^-) = \theta_k(\xi)(\Delta^+ - \Delta^-) \quad (5.1)$$

Por la Proposición 5.46, se tiene que en $RO(\text{Spin}(8m))$

$$\Delta^+ - \Delta^- = \prod_{1 \leq j \leq 4m} (\alpha_j^{1/2} - \alpha_j^{-1/2})$$

y entonces

$$\psi^k(\Delta^+ - \Delta^-) = \prod_{i \leq i \leq 4m} (\alpha_j^{k/2} - \alpha_j^{-k/2})$$

Por lo tanto, despejando θ_k de la Ecuación (5.1), obtenemos la siguiente formula para $r = (k - 1)/2$

$$\begin{aligned} \theta_k(\xi) &= \prod_{1 \leq j \leq 4m} \frac{\alpha_j^{k/2} - \alpha_j^{-k/2}}{\alpha_j^{1/2} - \alpha_j^{-1/2}} \\ &= \prod_{1 \leq j \leq 4m} (\alpha_j^r + \alpha_j^{r-1} + \cdots + 1 + \cdots + \alpha_j^{-r}) \\ &= \prod_{1 \leq j \leq 4m} (1 + \psi^1(\alpha_j) + \cdots + \psi^r(\alpha_j)) \end{aligned}$$

Podemos notar que estas formulas solo involucran a las operaciones ψ^k de α_j y α_j^{-1} . Por lo tanto, estas formulas pueden ser utilizadas para definir $\theta_k(\eta)$, para cualquier haz vectorial real η de rango $2m$.

Nota 5.49. Sea ζ un haz de líneas con $\zeta^2 = 1$, calculemos $\theta_k(2\zeta)$.

$$\begin{aligned} \theta_k(2\zeta) &= 1 + \psi^1(2\zeta) + \cdots + \psi^r(2\zeta) \\ &= 1 + 2(\zeta + 1 + \zeta + \cdots + \zeta + 1) \\ &= (2r + 1) + r(\zeta - 1) \end{aligned}$$

para $r = (k - 1)/2$.

Nota 5.50. Sea ζ un haz de líneas, y recordemos que $(\zeta - 1)^2 = -2(\zeta - 1)$. Entonces tenemos que

$$\theta_k(2n\zeta) = ((2r + 1) + r(\zeta - 1))^n = (2r + 1)^n + a(\zeta - 1)$$

si sustituimos $\zeta - 1 = -2$ en esta expresión, obtenemos la relación

$$1^n = (2r + 1)^n - 2a$$

donde $r = (k - 1)/2$ y $2r + 1 = k$. Entonces tenemos la siguiente relación

$$\theta_k(2n\zeta) = k^n + ((k^n - 1)/2)(\zeta - 1)$$

Nota 5.51. La clase $\theta_k(\xi)$ es un invariante del tipo de homotopía fibrada de $S(\xi)$. En consecuencia, si $J(2n\zeta) = 0$ entonces tenemos que $((k^n - 1)/2)(\zeta - 1) = 0$.

Ahora, podemos probar el teorema principal de esta sección.

Teorema 5.52. *Sea X un complejo CW tal que $\text{KO}(X)$ es generado por un haz de líneas. Entonces, el epimorfismo $J: \widetilde{\text{KO}}(X) \rightarrow J(X)$, de la Nota 5.23, es un isomorfismo.*

Demostración. Se puede mostrar que el orden de $\zeta - 1$ es una potencia de 2 para el haz de líneas ζ . Sea 2^r el orden de $\zeta - 1$ en $\widetilde{\text{KO}}(X)$ y $J(2n\zeta) = 0$ en $J(X)$. Entonces, por la Nota 5.51, tenemos que $(k^n - 1)/2 = 0 \pmod{2^r}$.

Para $k = 5$, tenemos que $5^n - 1 = 0 \pmod{2^{r-1}}$, entonces tenemos que $2^{r-1} | n$ ó $2^r | 2n$. Por lo tanto $2n(\zeta - 1) = 0$ en $\widetilde{\text{KO}}(X)$. \square

Teorema 5.53. *En la esfera S^{n-1} , existen a lo mas $\rho(n) - 1$ campos vectoriales linealmente independientes.*

Demostración. Usando el Teorema 5.40, tenemos que el grupo $\widetilde{\text{KO}}(\mathbb{RP}^k)$ es cíclico de orden c_k con generador $u = \xi_k - 1$, donde ξ_k denota al haz tautológico sobre \mathbb{RP}^k . Por el Teorema 5.52, $\widetilde{\text{KO}}(\mathbb{RP}^k)$ es isomorfo a $J(\mathbb{RP}^k)$.

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del Teorema 5.39, lo cual demuestra el teorema. \square



Operaciones de espacios vectoriales

Esta sección fue incluida para definir las operaciones vistas en la Sección 2.3 en espacios vectoriales. En general operar dos o mas espacios vectoriales no siempre nos da como resultado otro espacio vectorial, tal es el caso de la unión. Entonces, dados dos espacios vectoriales, ¿cuales operaciones entre ellos da como resultado otro espacio vectorial? En este capítulo consideraremos los espacios vectoriales sobre el campo de los numeros reales \mathbb{R} .

A.1. Suma directa

Definición A.1. Sean W y W' dos subespacios vectoriales de un espacio vectorial V , definimos la *suma de subespacios vectoriales* como,

$$W_1 + W_2 = \{x \in V \mid x = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

Si además, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ entonces a $W_1 + W_2$ se le llama *suma directa de subespacios vectoriales* y se denota por $W_1 \oplus W_2$.

Nota A.2. En efecto, la suma directa de dos espacios vectoriales es un espacio vectorial de dimension igual a la suma de las dimensiones de ambos espacios. Esta ultima afirmación es una consecuencia de la formula $\dim(W + W') = \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W')$.

Si tenemos aplicaciones lineales $g: V \rightarrow W$ y $g': V' \rightarrow W'$ entre espacios vectoriales, entonces podemos construir la aplicación $g \oplus g': V \oplus V' \rightarrow W \oplus W'$ definida por $v \oplus v' \mapsto g(v) \oplus g'(v')$, si escogemos bases ordenadas $\alpha_i, \alpha'_j, \beta_k, \beta'_l$ para V, V', W, W' respectivamente, podemos formar las matrices A y B asociadas a las aplicaciones g y g' . Ahora, éstas bases inducen bases $\alpha_i \cup \alpha'_j$ y $\beta_k \cup \beta'_l$ para $V \oplus V'$ y $W \oplus W'$ respectivamente, para así formar la matriz asociada a $g \oplus g'$ la cual esta dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

A.2. Espacio dual

Definición A.3. Sea V un espacio vectorial, definimos el *espacio dual* V^* como el conjunto de todas las aplicaciones lineales $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Si $f, g \in V^*$, $v \in V$ y $a \in \mathbb{R}$, definimos la operación suma en V^* como $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ y la multiplicación por escalar en V^* definida por $(af)(v) = af(v)$.

Si $f: V \rightarrow W$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales, entonces podemos construir una aplicación $f^*: W^* \rightarrow V^*$ definiendo $f^*(\alpha)(v) = \alpha(f(v))$. Si v_1, \dots, v_n es una base ordenada de V , entonces podemos construir una base ordenada v_1^*, \dots, v_n^* de V^* definiendo $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Tomemos $f: V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales, y tomemos $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n$ bases ordenadas de V y W respectivamente, entonces podemos construir la matriz $A = (a_{ij})$ asociada a f , con $f(v_i) = \sum_j a_{ij} w_j$. Para construir la matriz $B = (b_{ij})$ asociada a f^* , con $f^*(w_i^*) = \sum_j b_{ij} v_j^*$, evaluamos $f^*(\alpha)(v) = \alpha(f(v))$ en las bases dadas. Entonces por un lado tenemos que $f^*(w_i^*)(v_k) = \sum_j b_{ij} v_j^*(v_k) = b_{ik}$, y por otro lado tenemos que $w_i^*(f(v_k)) = w_i^*(\sum_j a_{kj} w_j) = \sum_j a_{kj} w_i^*(w_j) = a_{ki}$, por lo tanto concluimos que $b_{ik} = a_{ki}$, lo cual implica que la matriz B es la matriz transpuesta de A .

A.3. Producto tensorial

Definición A.4. Decimos que una aplicación $f: V \times W \rightarrow Z$ entre espacios vectoriales es *bilineal* si

- $f(av, w) = af(v, w)$
- $f(v_1 + v_2, w) = f(v_1, w) + f(v_2, w)$
- $f(v, aw) = af(v, w)$
- $f(v, w_1 + w_2) = f(v, w_1) + f(v, w_2)$

Sean $f_1, f_2: V \times W \rightarrow Z$ dos aplicaciones bilineales entre espacios vectoriales, definamos la suma de funciones como $(f_1 + f_2)(v, w) = f_1(v, w) + f_2(v, w)$ y la multiplicación por escalar como $(af)(v, w) = af(v, w)$, por lo cual el conjunto de aplicaciones bilineales define un espacio vectorial.

Proposición A.5. Sean V, W espacios vectoriales, entonces existe un único espacio vectorial $V \otimes W$ y una aplicación bilineal $f: V \times W \rightarrow V \otimes W$ que cumplen la siguiente propiedad universal. Para todo espacio vectorial Z y toda aplicación bilineal $g: V \times W \rightarrow Z$ existe una única aplicación lineal $\tilde{g}: V \otimes W \rightarrow Z$ tal que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 & V \otimes W & \\
 f \nearrow & & \searrow g \\
 V \times W & \xrightarrow{\quad g \quad} & Z
 \end{array}$$

Al espacio vectorial $V \otimes W$ se le llama el *producto tensorial* de V y W .

Demostración. Definimos el espacio vectorial generado por un conjunto S como el espacio

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i s_i \mid a_i \in \mathbb{R}, s_i \in S \right\}$$

Sean $V \subset W$ espacios vectoriales, decimos que $w \sim w'$ si $w - w' \in V$, ésta es una relación de equivalencia, denotemos por $[w]$ a la clase de equivalencia de $w \in W$, y llamemos W/V al conjunto de clases de equivalencia.

Notemos que W/V es un espacio vectorial, definamos la suma en W/V como $[w_1] + [w_2] = [w_1 + w_2]$ y el producto por escalar en W/V como $a[w] = [aw]$. Veamos que la suma esté bien definida, si $w_1 \sim w'_1$ y $w_2 \sim w'_2$ entonces $(w_1 + w_2) - (w'_1 + w'_2) = (w_1 - w'_1) + (w_2 - w'_2)$ implica que $[w_1 + w_2] = [w'_1 + w'_2]$, y por lo tanto tenemos que $[w'_1] + [w'_2] = [w'_1 + w'_2] = [w_1 + w_2] = [w_1] + [w_2]$.

Tomemos $\langle V \times W \rangle$ el espacio vectorial generado por $V \times W$, y consideremos los siguientes subconjuntos,

$$T_1 = \{(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \mid v_1, v_2 \in V, w \in W\}.$$

$$T_2 = \{(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \mid v \in V, w_1, w_2 \in W\}$$

$$T_3 = \{c(v, w) - (cv, w) \mid c \in \mathbb{R}, v \in V, w \in W\}$$

$$T_4 = \{c(v, w) - (v, cw) \mid c \in \mathbb{R}, v \in V, w \in W\}$$

y tomemos R el espacio vectorial generado por la unión de estos subconjuntos, es decir,

$$R = \left\langle \bigcup_{i=1}^4 T_i \right\rangle \subseteq \langle V \times W \rangle$$

Definimos el espacio vectorial $V \otimes W := \langle V \times W \rangle / R$, y denotemos por $v \otimes w$ a la clase de (v, w) en $V \otimes W$. Definamos la aplicación $f: V \times W \rightarrow V \otimes W$ por $f(v, w) = v \otimes w$, veamos que f es bilineal. En efecto, usando la propiedad en el subconjunto T_3 tenemos que, $f(av, w) = (av) \otimes w = a(v \otimes w)$, y por la propiedad en el subconjunto T_1 tenemos que, $f(v_1 + v_2, w) = (v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$, análogamente usando las propiedades en los subconjuntos T_2 y T_4 obtenemos las otras dos igualdades, lo cual implica que f es bilineal.

Ahora mostremos que $V \otimes W$ y f cumplen con la propiedad universal antes descrita. Sea $g: V \times W \rightarrow Z$ una aplicación bilineal, definamos $\bar{g}: \langle V \times W \rangle \rightarrow Z$ como $\bar{g}(v, w) = g(v, w)$, notemos que \bar{g} es lineal y \bar{g} restringida a R es igual a cero, en efecto, en la propiedad en T_1 tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{g}((v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)) &= \bar{g}(v_1 + v_2, w) - \bar{g}(v_1, w) - \bar{g}(v_2, w) \\ &= g(v_1 + v_2, w) - g(v_1, w) - g(v_2, w) = 0 \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos la propiedad en T_2 , por otro lado para la propiedad en T_3 tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{g}(c(v, w) - (cv, w)) &= c\bar{g}(v, w) - \bar{g}(cv, w) \\ &= cg(v, w) - g(cv, w) = 0 \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos la propiedad en T_4 . Por lo tanto \bar{g} induce una aplicación lineal $\tilde{g}: V \otimes W \rightarrow Z$ en el cociente bien definida, la cual cumple que $g = \tilde{g} \circ f$.

Por construcción \tilde{g} es única. Veamos que el espacio vectorial $V \otimes W$ es único, supongamos que existe otro espacio vectorial $V \otimes' W$ que cumple la propiedad universal, entonces obtenemos el siguiente diagrama con triángulos conmutativos

$$\begin{array}{ccccc} & & V \times W & & \\ & f \swarrow & \downarrow f' & \searrow f & \\ V \otimes W & \xrightarrow{h'} & V \otimes' W & \xrightarrow{h} & V \otimes W \end{array}$$

por lo cual tenemos que la identidad $\text{id}: V \otimes W \rightarrow V \otimes W$ y la composición $h \circ h'$ hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} V \times W & & \\ \downarrow f & \searrow f & \\ V \otimes W & \xrightarrow{\text{id}} & V \otimes W \end{array}$$

y por unicidad tenemos que id y $h \circ h'$ son iguales. □

Sean V, W espacios vectoriales, si $\{v_i\}_{i \in I}, \{w_j\}_{j \in J}$ son bases de V y W respectivamente, afirmamos que $\mathcal{B} = \{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$ es una base para $V \otimes W$. En efecto, tenemos que

$$v \otimes w = \left(\sum \alpha_i v_i \right) \otimes \left(\sum \beta_j w_j \right) = \sum \beta_j \left(\sum \alpha_i v_i \right) \otimes w = \sum \sum \beta_j \alpha_i v_i \otimes w_j$$

por lo cual \mathcal{B} genera a $V \otimes W$. Supongamos que $\sum \alpha_{ij} v_i \otimes w_j = 0$ y definimos $g_{ij}: V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ como $g_{ij}(v, w) = v_i^*(v)w_j^*(w)$ donde v_i^* y w_j^* son elementos en las bases duales de $\{v_i\}$ y $\{w_j\}$ respectivamente, la aplicación g_{ij} induce una aplicación $\tilde{g}_{kl}: V \otimes W \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\tilde{g}_{kl}(v \otimes w) = v_k^*(v)w_l^*(w)$. Entonces tenemos que $\tilde{g}_{kl}(\sum \alpha_{ij} v_i \otimes w_j) = g_{kl}(0) = 0$, y por otro lado tenemos que

$$\tilde{g}_{kl}(\sum \alpha_{ij} v_i \otimes w_j) = \sum \alpha_{ij} v_k^*(v_i)w_l^*(w_j) = \alpha_{kl}$$

lo cual implica que $\alpha_{kl} = 0$ y entonces \mathcal{B} es linealmente independiente. Por lo tanto \mathcal{B} es una base de $V \otimes W$.

Sean $g: V \rightarrow V, g': W \rightarrow W$ dos aplicaciones entre espacios vectoriales, podemos escoger bases ordenadas $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $\{w_1, \dots, w_m\}$ para V y W respectivamente, y considerar las matrices A y B asociadas a g y g' , supongamos que A y B son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

Construimos la aplicación $g \otimes g': V \otimes W \rightarrow V \otimes W$ definiendo

$$g \otimes g'(v_k \otimes w_l) = g(v_k) \otimes g'(w_l) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ik} b_{jl} (v_i \otimes w_j)$$

usando las bases ordenadas de V y W podemos formar una base para $V \otimes W$ como arriba, y entonces la matriz asociada a $g \otimes g'$ esta dada por

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

A.4. Potencia exterior

Sea S_n el grupo de permutaciones de n elementos, y tomemos el subgrupo $A_n \subset S_n$ de permutaciones pares, sea $\sigma: S_n \rightarrow \{1, -1\}$ una aplicación definida como

$$\sigma(\rho) = \begin{cases} 1, & \text{si } \rho \text{ es alternante;} \\ -1, & \text{si no.} \end{cases}$$

Sea V un espacio vectorial, consideremos $V^{\otimes n}$ el producto tensorial de V consigo mismo n veces y definamos una acción

$$\begin{aligned} \phi: S_n \times V^{\otimes n} &\longrightarrow V^{\otimes n} \\ (\rho, v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n) &\longmapsto v_{\rho(1)} \otimes v_{\rho(2)} \otimes \dots \otimes v_{\rho(n)} \end{aligned}$$

Definición A.6. Decimos que $\alpha \in V^{\otimes n}$ es

- Simétrico: Si $\phi(\rho, \alpha) = \alpha$ para todo $\rho \in S_n$.
- Alternante: Si $\phi(\rho, \alpha) = \sigma(\rho)\alpha$ para todo $\rho \in S_n$.

Entonces definimos la *potencia simétrica* de V como $\text{Sym}^n(V) = \{\alpha \in V^{\otimes n} \mid \alpha \text{ es simetrico}\}$ y definimos la *potencia exterior* de V como $\Lambda^n(V) = \{\alpha \in V^{\otimes n} \mid \alpha \text{ es alternante}\}$. A los elementos $v_1 \otimes \dots \otimes v_r \in \Lambda^n(V)$ se le llama productos exteriores y se les denota por $v_1 \wedge \dots \wedge v_r$.

Sea V un espacio vectorial y sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ordenada de V , entonces el conjunto

$$\{v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_k} \mid 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$$

es una base de $\Lambda^k(V)$. Ahora, dado algún producto exterior de la forma $x_i \wedge \dots \wedge x_k$ entonces cada vector v_j puede ser escrito como una combinación lineal de los vectores bases $\{v_i\}$, como la potencia exterior es bilineal, entonces la podemos separar en una combinación lineal de productos exteriores en cada vector base, cada producto exterior en el cual aparece el mismo vector base mas de una vez es igual a cero; cada producto exterior en el cual los vectores base no aparezcan en el orden establecido, puede ser re-ordenado si cambiamos el signo cada vez que dos vectores bases cambien de lugar. En general, los coeficientes resultantes de este proceso pueden ser calculados como menores de la matriz que describe los vectores x_j en términos de la base $\{v_i\}$.

Si contamos el número de elementos de la base de $\Lambda^k(V)$ tenemos que es igual al número de combinaciones posibles de n elementos en k , por lo cual se tiene que

$$\dim(\Lambda^k(V)) = \binom{n}{k}$$

en particular tenemos que $\Lambda^k(V) = \{0\}$ para $k > n$.

Si $g: V \rightarrow W$ es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales V de dimension n y W de dimension m , entonces podemos construir una aplicación $\Lambda^k g: \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^k(W)$ definida por $\Lambda^k g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = g(v_1) \wedge \cdots \wedge g(v_k)$. Si tomamos bases ordenadas de V y W podemos formar la matriz $A = (a_{ij})$ asociada a g con $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$, entonces la matriz M asociada a $\Lambda^k g$ con respecto a las bases de $\Lambda^k(V)$ y $\Lambda^k(W)$ es la matriz cuya entrada (μ, ν) es el determinante de la submatriz de tamaño $k \times k$ de la matriz A con los renglones y columnas indexadas por las entradas de μ y ν respectivamente.

Índice alfabético

- $C(f)$ -Módulo, 93
- H -Cogrupo, 31
- H -Grupo, 28
- S -Aplicación, 100
- Álgebra
 - \mathbb{Z}_2 -Graduada, 88
 - de Clifford, 87
- Aplicación de Transición, 40
- Campos Vectoriales, 79
- Colímite, 66
- Construcción de Grothendieck, 58
- Cuña de Espacios Topológicos, 22
- Cubriente Universal, 35
- Equivalencia
 - Estable de Haces, 63
 - Homotópica, 15
 - Homotópica Fibrada Estable, 103
- Espacio
 - Clasificante, 53
 - Cubriente, 35
 - de Funciones, 17
 - de Thom, 98
 - Vectorial Dual, 116
- Forma Cuadrática, 85
- Función Localmente Constante, 64
- Grupo
 - de Lie, 42
 - de Unidades Multiplicativo, 109
 - Estructural de un Haz, 40
 - Spin, 110
- Grupos de Homotopia, 34
- Haz de Marcos, 56
- Haz Principal, 55
- Haz Vectorial, 37
 - Asociado, 46
 - Dual, 43
- Inducido, 44
- Proyectivo Asociado, 74
- Restringido, 43
- Tangente a S^n , 38
- Tautológico, 39
- Trivial, 39
- Universal, 53
- Homotopía, 14
 - de Parejas, 21
 - Fibrada, 102
- Join, 13
- Lema de Urysohn, 49
- Ley Exponencial, 18
- Métrica Riemanniana, 48
- Morfismo de Haces, 39
- Multiplicación Ortogonal, 81
- Operaciones
 - de Adams, 72
 - en Teoría K, 70
- Partición de la Unidad, 48
- Periodicidad de Bott, 68
- Potencia Exterior
 - de Espacios Vectoriales, 119
 - de Haces Vectoriales, 46
- Principio de Descomposición, 75
- Producto
 - de Haces Vectoriales, 43
- Producto Smash, 22
- Producto Tensorial
 - de Espacios Vectoriales, 116
 - de Haces Vectoriales, 45
- Proyección, 46
- Representación, 60
 - Adjunta, 109
 - Irreducible, 93

- Sección de un Haz Vectorial, 41
- Suma Directa
 - de Espacios Vectoriales, 115
 - de Haces Vectoriales, 45
- Suspensión, 12

- Teoría K, 60
 - Reducida, 63
- Topología Compacto-Abierta, 17

- Variedad
 - de Grassmann, 52
 - de Stiefel, 52
 - Paralelizable, 42

Bibliografía

- [1] Adams, John Frank. *Vector Fields on Spheres*, Ann. Math. 2nd Ser., Vol 75, No. 3. 1962. pp.603-632.
- [2] Aguilar, Marcelo; Gitler, Samuel; Prieto Carlos. *Algebraic Topology From a Homotopical Viewpoint*, Springer-Verlag New York, Inc., 2002.
- [3] Atiyah, Michael Francis. *K-Theory*, W.A. Benjamin, Inc., New York, 1964.
- [4] Atiyah, Michael Francis. *Thom Complexes*, Proc London Math. Soc.,(3), Vol. 11, pp.291-310.
- [5] Atiyah, Michael Francis; Bott, Raoul; Shapiro, Arnold. *Clifford Modules*, Topology. Vol.3 Supplement 1, July 1964, pp. 3-38.
- [6] Bott, Raoul. *A Note On The KO-Theory Of Sphere-Bundles*, Bull. Amer. Math. Soc. 68. 1962 pp. 395-400.
- [7] Bott, Raoul. *Vector Field on Spheres and Allied Problems*, Monographies de L'Enseignement mathématique, Genève, Suisse, No. 11, pp. 25-38.
- [8] Bott, Raoul; Milnor, John. *On The Parallelizability Of The Spheres*. Bull. Amer. Math. Soc. 64. 1958 pp. 87-89.
- [9] Greenberg, Marvin; Harper, John. *Algebraic Topology a First Course*. Massachusetts USA. The benjamin/cummings publishing company.(1981).
- [10] Hatcher, Allen. *Vector Bundles and K-Theory*, Paper or electronic copies for noncommercial use may be made without explicit permission from the author, 2003.
- [11] Hatcher, Allen. *Algebraic Topology*. Cambridge UK., Cambridge University Press, 2002.
- [12] Husemoller, Dale. *Fibre Bundles*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1994.
- [13] Cisneros Molina, José Luis. *Gupos de Hmotopia*, Notas del minicurso "Grupos de homotopia" impartido en la XIX Semana de Investigación y Docencia en Matemáticas en la UNISON. 2009 <http://www.matcuer.unam.mx/jlcm/homotopy.pdf>
- [14] Lawson, Herbert; Michelsohn Marie-Louise. *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1989.
- [15] Lie, John. *Introduction To Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, New York, Inc. 1950.
- [16] Milnor John; Husemoller Dale. *Symmetric Bilinear Forms*, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [17] Morin, Bernard. *Champs De Vecteurs Sur Les Sphères D'Après J. F. Adams*, Séminaire N. Bourbaki, 1961-1962, exp. n°233, pp.163-189.

-
- [18] Munkres, James. *Topology*. Massachusetts Institute of Technology, Pearson Prentice Hall, 2000.
 - [19] Porteous, Ian. *Clifford Algebras and the Classical Groups*, Cambridge University Press, 1955.
 - [20] Porteous, Ian. *Topological Geometry*, Van Nostrand Reinhold Company., 1969.
 - [21] Sergey Matveev. *Lectures on Algebraic Topology*, European Mathematical Society, Zürich Switzerland, 2006.
 - [22] Serre, Jean-Pierre. *Homologie Singuliere Des Espaces Fibres*, Ann. Math. 2nd Ser., Vol 54, No. 3. Nov., 1951. pp.425-505.
 - [23] Spanier, Edwin. *Algebraic Topology*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.
 - [24] Steenrod, Norman. *Topology of Fibre Bundles*, 5th printing, Princeton Univ. Press., Princeton, New Jersey.
 - [25] Switzer, Robert. *Algebraic Topology Homology and Homotpy*, Springer-Verlag, New York, 2002.