UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y
DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

LA REDUCCIÓN DE LA TEORÍA DE TIPOS DE HINTIKKA A LA LÓGICA DE SEGUNDO ORDEN

TESIS

QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
MAURICIO SALINAS RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE LA TESIS
FAVIO EZEQUIEL MIRANDA PEREA
FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM

MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE 2014

Índice general

Introducción III

1. La teoría de tipos de Hintikka 1
- 1.1. Símbolos y cadenas de tipo . . . 1
  - 1.1.1. Principio de inducción para C_τ . . . 3
- 1.2. Sintaxis . . . 4
- 1.3. Semántica . . . 10
- 1.4. Lógica de segundo orden . . . 11

2. Conjuntos Modelo 15
- 2.1. ¿Qué es un Conjunto Modelo? . . . 16
- 2.2. Existencia . . . 24
- 2.3. Satisfactibilidad . . . 29
- 2.4. El Teorema I de Hintikka . . . 37
- 2.5. ¿Qué es un Conjunto Modelo Fuerte? . . . 38
- 2.6. El Teorema I** de Hintikka . . . 42

3. La reconstrucción de la teoría de tipos 45
- 3.1. La fórmula δ . . . 46
- 3.2. La familia de constantes λ . . . 61
  - 3.2.1. Algunas propiedades de las constantes λ . . . 64

4. La reducción de la Teoría de los Tipos 83
- 4.1. La función de traducción ξ . . . 83
- 4.2. La construcción de Σ^* . . . 87
  - 4.2.1. Σ^* tiene a la fórmula δ . . . 103
- 4.3. La construcción de $\Delta^\#$ . . . 108

¿Para que le sirve la teoría de tipos a un matemático? 125

Conclusiones 127

Conjunto Modelo (Fuerte) **129**

La fórmula δ **131**

Bibliografía **133**

Introducción

La teoría de tipos expuesta en el presente trabajo está inspirada en la que Russell y Whitehead presentaron en *Principia Mathematica* (véase [13]). Este formalismo surgió de acoplar la idea que Cantor plasmó en la demostración de su famoso teorema:

No existe función F suprayectiva alguna entre un conjunto X y su conjunto *potencia*, $\wp(X)$[1].

a la demostración de que la colección de todos los conjuntos, V, *no* es un conjunto:

$$\text{Si } V \text{ es conjunto entonces } R = \{a \in V \mid a \notin a\} \text{ es conjunto y}$$
$$R \in R \text{ si y sólo si } R \notin R.$$

Llegando así a una contradicción. El mismo Russell intentó dar solución a su paradoja, proponiendo una teoría de tipos *jerarquizada*, la cual consiste en organizar los conjuntos en *niveles*. En esta jerarquía sólo se puede decir que un objeto de nivel n es miembro de otro si y sólo si este último es de nivel $n+1$. En otras palabras: el lenguaje de la teoría de tipos de Russell *prohibe* que los objetos sean predicados de otros del mismo nivel.

La importancia de la teoría de tipos radica en su poder expresivo que es muy superior al de la lógica de primer orden. Recordemos que en ésta resulta imposible expresar que el universo de interpretación sea *infinito*, más aún, el postulado de inducción de Peano para el universo de los números naturales cuantifica sobre *todos* los subconjuntos de $\mathbb{N}$, situación también imposible de expresar en primer orden. Esta limitación se resuelve permitiendo la cuantificación sobre conjuntos de individuos i.e. expandiendo el lenguaje de primer a segundo orden. Ahora bien,

[1] La idea de la prueba es proceder por contradicción y considerar al conjunto

$$\{a \in X|\ a \notin F(a)\} \in \wp(X).$$

el lector experimentado en lógica de segundo orden sabe que el costo de este salto expresivo es alto, dado que los teoremas de Compacidad, Corrección-Completitud y Numerabilidad son falsos ahí (véase [10]).

Por otra parte, en Matemáticas es común utilizar cuantificadores de orden mayor o igual a dos; tome por ejemplo la noción de espacio topológico (X, ρ), donde X es un conjunto y ρ un subconjunto de la potencia de X cuyos elementos se llaman abiertos y cumplen ciertas propiedades particulares. Al estudiar estos espacios, es común encontrar teoremas como (véase [16], pág. 38)

Un conjunto V es abierto si y sólo si para cada uno de sus puntos x, hay una vecindad U_x totalmente contenida en V.

Obsérvese que este es un enunciado que está implícitamente cuantificando sobre todas las topologías de un conjunto X. Por lo que estamos ante una cuantificación de orden superior a dos. Sin embargo, con la experiencia que se tiene con el brinco de primer a segundo orden, la pregunta es si el lector se arriesgaría nuevamente a "sacrificar" lo poco que queda de la lógica de segundo orden, a cambio de un poder expresivo mayor. El presente texto le mostrará que no hay más propiedades lógicas que perder, pues el costo de expresabilidad que se pagó de primer a segundo orden *incluye* el poder expresivo de cualquier salto a un lenguaje de orden superior a dos, i.e. cualquier enunciado expresable en una lógica de orden superior, lo es también en lógica de segundo orden. Para probar esta afirmación se ha retomado el artículo: *Reductions in the theory of types*, escrito por Hintikka en 1955 (véase [1]).

Nuestro objetivo es construir una *traducción* que convierte cualquier proposición de la teoría de tipos, la cual contiene a cualquier lógica de orden superior, a una fórmula del lenguaje de segundo orden. Además, dicha traducción preserva la validez universal. En otras palabras, mostraremos que en términos de validez y satisfactibilidad *toda* la teoría de tipos puede ser *efectivamente* reducida a lógica de segundo orden. El resultado principal del texto es:

La teoría de tipos y la lógica de segundo orden son *equisatisfactibles*, i.e. una fórmula de la teoría de tipos α es satisfactible *si y sólo si* su traducción al lenguaje de segundo orden es satisfactible.

Adicionalmente, este escrito fué diseñado con la intención de que sea accesible a estudiantes de Matemáticas que hayan cursado Lógica Matemática I y II. Se presuponen conceptos básicos como son: construcción recursiva de lenguajes formales, equivalencia tautológica, satisfactibilidad de conjuntos de fórmulas, lenguaje de enunciados y de primer orden, así como familiaridad con los teoremas de

Compacidad y Corrección-Completitud para lógica de primer orden. A lo largo del texto el lector encontrará ejercicios que de ser realizados correctamente contribuirán a una mejor comprensión del mismo. Con este formato, el presente trabajo puede ser considerado como material útil para un curso avanzado de lógica, a nivel licenciatura.

El contenido matemático aquí expuesto, si bien está basado en el trabajo de Hintikka, tiene como finalidad hacerlo más afable al lector contemporáneo. Pero con el interés de conservar su esencia, se ha mantenido la numeración original de sus teoremas, marcados entre paréntesis, así como algunas de las notaciones que en él aparecen. Cualquier otra notación o proposición propia de este ejemplar tiene la intención de aumentar la comprensión de la exposición original.

De cómo empecé a estudiar teoría de tipos

Es curioso cómo llegué a este tópico de la teoría de tipos. Todo empezó con los cursos de Lógica Matemática que tomé en la Facultad de Ciencias de la UNAM con el Dr. José Alfredo Amor y Montaño†. La travesía comienza con lógica de enunciados expuesta en el capítulo 1 del Enderton (véase [2]), continúa con lógica de primer orden (capítulo 2) y " termina " mostrando el teorema más bello y profundo que pude haber visto en la licenciatura: Incompletud de la Aritmética (capítulo 3). Cuando los cursos de lógica culminaron, supe que no podía dejar de lado el último capítulo: lógica de segundo orden, y de hecho mi tesis de licenciatura lleva ese nombre (véase [10]), siendo al final de esa investigación cuando encontré un artículo de Enderton titulado *Second-Order and Higher-Order Logic* (véase [11]) donde expone la importancia del siguiente resultado de Hintikka (véase [1])

For each formula φ of Higher-Order Logic (in a language with finitely many non-logical symbols), we can effectively find a sentence ψ of Second-Order Logic (in the language of equality) such that φ is valid if and only if ψ is valid.

En términos burdos, podríamos parafrasear el teorema anterior diciendo:

A nivel de *validez lógica* el salto significativo en complejidad se da de primer a segundo orden.

En otras palabras, un lógico no debería preocuparse por la aparente dificultad de fórmulas válidas expresadas en una lógica de orden 87, ya que bastará revisar el presente escrito, para poder *convertirla efectivamente* en una fórmula válida de segundo orden con igualdad.

Invito a los lectores a seguir un trabajo que me ha llevado a comprender desde sus inicios mas primitivos que: *Lógica* es aquella ciencia que se estudia a sí misma.

Capítulo 1

La teoría de tipos de Hintikka

En un intento por reconstruir lógicamente las Matemáticas, Whitehead y Russell escriben en 1910, tres tomos de los *Principia Mathematica*, donde presentan *una* teoría de tipos, con el propósito de "resolver" paradojas ocasionadas por predicados que reciben como argumentos también a predicados[1]. Mas tarde Chwistek y Ramsay retoman el concepto de *símbolo de tipo*, para puntualizar que una teoría de tipos basada en conjuntos de símbolos con una jerarquía ramificada i.e. una *Teoría Simple de Tipos*, bastaba para expresar todas las proposiciones clásicas de las Matemáticas. Así que, desde su nacimiento hasta nuestros días *las* Teorías de Tipos han ido evolucionando tanto en Matemáticas como en el ámbito de la Computación Teórica, buscando en cada caso su propósito para las que fuéron propuestas.

A lo largo de este escrito trabajaremos con la versión de la Teoría *Simple* de Tipos de Hintikka (véase [1]), para lo cual especificaremos un conjunto de símbolos, cuya construcción y entendimiento serán fundamentales a lo largo del escrito.

1.1. Símbolos y cadenas de tipo

Convengamos en que los *símbolos de tipo* sean denotados por "τ_i", los cuales serán construidos a partir de los tres simbolos : $\langle$, τ, y $\rangle$, así por una *expresión de símbolos de tipo* entenderemos una sucesión finita de estos símbolos. En este sentido la sucesión "$\langle\ \tau\ \rangle\ \tau\ \langle\ \rangle\ \langle\ \rangle$" es una *expresión* de símbolos de tipo, sin embargo, esta expresión *no* será un símbolo de tipo.

[1]Recuérdese la famosa paradoja que resulta de preguntar ¿quién rasura a aquel barbero que sólo rasura a aquellos que *no* se rasuran a sí mismos y sólo a esos.

Ahora bien, intuitivamente un símbolo de tipo nos servirá para etiquetar universos de interpretación, así que la construción de un nuevo y más complejo símbolo de tipo *supondrá* que se han construído símbolos más básicos que lo conforman a él, en otras palabras la construcción de símbolos de tipo estará intimamente ligada con las cadenas (sucesiones ordenadas) de ellos, esta relación de dependencia entre sí, puede ser expuesta de la siguiente manera: a partir de un símbolo primitivo construímos nuevas cadenas y con ellas, nuevos símbolos de tipo que a su vez sirven para construir nuevas cadenas con las cuales construímos nuevos símbolos de tipo etcétera...

Lo siguiente es una *recursión simultánea*, que construye al conjunto S_τ de símbolos de tipo y las cadenas finitas de símbolos de tipos, C_τ.

Aquí y en adelante, llamaremos símbolo de tipo *primitivo* a τ, esto se debe a que a partir de él, se construirán todos los demás.

1. $\tau \in S_\tau$

2. Si $\tau_i \in S_\tau$ entonces $(\tau_i) \in C_\tau$

3. Si $(\tau_{i_1}, ..., \tau_{i_m}) \in C_\tau$ entonces $\langle \tau_{i_1}, ..., \tau_{i_m} \rangle \in S_\tau$

4. Si $\{(\tau_1), (\tau_2, ..., \tau_k)\} \subseteq C_\tau$ entonces $(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k) \in C_\tau$.

Un ejemplo de cadena de símbolos de tipo es $(\langle\tau\rangle, \langle\tau, \langle\tau\rangle\rangle)$, contruyámosla:

Por 1 tenemos $\tau \in S_\tau$ de aquí que, por 2 $(\tau) \in C_\tau$ y por 3 $\langle\tau\rangle \in S_\tau$ y nuevamente por 2 obtenemos $(\langle\tau\rangle) \in C_\tau$.

Así que, $\tau \in S_\tau$ implica $\{(\tau), (\langle\tau\rangle)\} \subseteq C_\tau$, de aquí que por 4 , $(\tau, \langle\tau\rangle) \in C_\tau$ y por 3 $\langle\tau, \langle\tau\rangle\rangle \in S_\tau$, nuevamente por 2 $(\langle\tau, \langle\tau\rangle\rangle) \in C_\tau$.

De esta manera, si $\tau \in S_\tau$ entonces $\{(\langle\tau\rangle), (\langle\tau, \langle\tau\rangle\rangle)\} \subseteq C_\tau$, así que por 4 $(\langle\tau\rangle, \langle\tau, \langle\tau\rangle\rangle) \in C_\tau$.

Un ejemplo de una expresión que es un símbolo de tipo es:

$$\langle\langle\tau\rangle, \langle\tau, \langle\tau\rangle\rangle\rangle$$

Su construcción resulta de aplicarle 3 a la cadena construída en el ejemplo anterior.

Cabe aclarar que la definición de S_τ y C_τ anterior, es una propuesta nuestra y difiere de la tratada en el documento original, debido a que nos pareció más adecuada desde el punto de vista didáctico.

A lo largo del escrito, mostraremos proposiciones $\mathbb{P}(\tau_1, ..., \tau_k)$ que dependen de cadenas de tipos $(\tau_1, ..., \tau_k) \in C_\tau$, puesto que C_τ es conjunto, es posible tener afirmaciones del estilo:

$$\text{Para toda } (\tau_1, ..., \tau_k) \in C_\tau \text{ sucede } \mathbb{P}(\tau_1, ..., \tau_k)$$

o equivalentemente

$$\text{Para toda } k \geq 1, \text{ si } (\tau_1, ..., \tau_k) \in S_\tau \times \cdots \times S_\tau \text{ entonces } \mathbb{P}(\tau_1, ..., \tau_k)$$

Luego entonces, cabe preguntarse ¿Qué principio de inducción se usa para demostrar estos enunciados?

1.1.1. Principio de inducción para C_τ

Sea $\mathbb{P}(\tau_1, ..., \tau_k)$ una propiedad acerca de cadenas de tipos.

Si sucede 1, 2 y 3:

1. $\mathbb{P}(\tau)$ es verdadera

2. Para toda $(\tau_1, ..., \tau_k) \in C_\tau$, si $\mathbb{P}(\tau_1, ..., \tau_k)$ es verdadera entonces $\mathbb{P}(\langle\tau_1, ..., \tau_k\rangle)$ es verdadera.

3. Para toda $(\tau_1) \in C_\tau$ y para toda $(\tau_2, ..., \tau_k) \in C_\tau$, si $\mathbb{P}(\tau_1)$ y $\mathbb{P}(\tau_1, ..., \tau_k)$ son verdaderas entonces $\mathbb{P}(\langle\tau_1, ..., \tau_k\rangle)$ es verdadera.

entonces para toda $(\tau_1, ..., \tau_k) \in C_\tau$ sucede $\mathbb{P}(\tau_1, ..., \tau_k)$ es verdadera.

La demostración de este principio utiliza técnicas usuales de Teoría de Conjuntos y se omite por considerar que escapa a los fines del presente texto. Usaremos este principio en futuras demostraciones, nombrándolo *Principio de inducción para C_τ*. Notemos que este principio está basado en la construcción *simultánea* de

S_τ y C_τ, por lo que su desarrollo también es diferente al utilizado en el artículo original. Esto no representa problema alguno, pues ambos principios funcionan.

1.2. Sintaxis

Una vez que se han definido los conjuntos S_τ y C_τ, sigue designarle a cada τ_i sus respectivos *símbolos propios* los cuales estarán determinados por:

$$v_j^{\tau_i} : \text{Símbolos de variables del tipo } \tau_i$$

$$q_j^{\tau_i} : \text{Símbolos de constantes del tipo } \tau_i$$

Supondremos que el número de símbolos propios de cada tipo τ_i es fijo pero arbitrario.[2] Ahora construiremos el lenguaje de nuestra teoría de tipos.

Una *fórmula de la teoría de tipos* es el resultado de aplicar un número *finito* de veces las siguientes reglas:

i) $q_0^{\langle\tau_1,\ldots,\tau_k\rangle}\ (q_1^{\tau_1},\ldots,q_k^{\tau_k})$ es fórmula.

ii) Una expresión de la forma $(q_1^{\tau_i} = q_2^{\tau_i})$ es una fórmula. A esta clase de fórmulas las llamamos identidades.

iii) Si α es atómica o identidad entonces $(\neg\alpha)$ es fórmula.

iv) Si α y β son fórmulas entonces $(\alpha \vee \beta)$ y $(\alpha \wedge \beta)$ son fórmulas.

v) Si α tiene presencias de q^{τ_i} pero no de v^{τ_i} entonces : $\exists v^{\tau_i}\alpha(q^{\tau_i}|v^{\tau_i})$ y $\forall v^{\tau_i}\alpha(q^{\tau_i}|v^{\tau_i})$ son fórmulas.

Sólo las fórmulas que sean resultado de aplicar un número finito de veces las reglas anteriores, *serán* fórmulas de la teoría de tipos. Denotamos por τ-fórm al conjunto de *todas* las fórmulas de la teoría de tipos.

[2]La justificación de esta suposición es que dado un modelo cuyo universo sea de cierta cardinalidad, la sintaxis debe ser lo suficientemente poderosa como para construir un conjunto de fórmulas que describan a cada uno de los elementos del modelo. Si nos restringimos a lógica de primer orden, en un modelo cuyo universo de interpretación sea el conjunto de los numeros naturales, ahí la satisfactibilidad del conjunto de formulas $\{\exists v_j^{\tau_i}(v_j^{\tau_i} = q_j^{\tau_i})|j \in \mathbb{N}\}$ nos indica que al menos necesitaremos de $\aleph_0$ símbolos propios para " invocar " cualquier número natural.

Note que la igualdad *sólo* estará permitida para símbolos de constante *del mismo tipo*, i.e. la igualdad entre símbolos de constante de tipos diferentes *no* será una fórmula.

De acuerdo a la definición de fórmula, expuesta hasta aquí, resulta que expresiones como:

$$\neg\forall v^{\tau_i}\ (\neg q_0^{\langle\tau_i\rangle}(q^{\tau_i}) \wedge q_1^{\tau_i} = q^{\tau_i})(q^{\tau_i} \mid v^{\tau_i})$$

no son fórmulas, según la definición, los símbolos de negación se aplican sólo a atómicas o identidades.

Esto no representa problema alguno, dado que podemos *convertir efectivamente* expresiones como la de arriba en fórmulas cuyos símbolos de negación (si los hay), estén aplicados únicamente a atómicas o identidades:

$$\exists v^{\tau_i}\ (q_0^{\langle\tau_i\rangle}(q^{\tau_i}) \vee \neg(q_1^{\tau_i} = q^{\tau_i}))(q^{\tau_i} \mid v^{\tau_i})$$

De esta manera observamos que la sintaxis de la teoría de tipos, comprende sólo fórmulas cuyos símbolos de negación (si los hay), aparecen aplicados únicamente a atómicas o identidades, a esta manera de expresar las fórmulas la llamamos *Forma Normal Negativa*

Dada una fórmula α que no sea atómica ni identidad, definiremos cuando la fórmula β es la *Forma Normal Negativa* de la expresión $\neg\alpha$ (en notación: $fnn(\neg\alpha) = \beta$), de acuerdo a las siguientes reglas:

$$fnn(q(q_1, ..., q_k)) = q(q_1, ..., q_k)$$

$$fnn(q_1 = q_2) = (q_1 = q_2)$$

$$fnn(\neg q(q_1, ..., q_k)) = \neg q(q_1, ..., q_k)$$

$$fnn(\neg(q_1 = q_2)) = \neg(q_1 = q_2)$$

$$fnn(\alpha \wedge \beta) = fnn(\alpha) \wedge fnn(\beta)$$

$$fnn(\alpha \vee \beta) = fnn(\alpha) \vee fnn(\beta)$$

$$fnn(\neg\neg\alpha) = fnn(\alpha)$$

$$fnn(\neg(\alpha \wedge \beta)) = \neg fnn(\alpha) \vee \neg fnn(\beta)$$

$$fnn(\neg(\alpha \vee \beta)) = \neg fnn(\alpha) \wedge \neg fnn(\beta)$$

$$fnn(\forall v\ \alpha) = \forall v\ fnn(\alpha)$$

$$fnn(\exists v\ \alpha) = \exists v\ fnn(\alpha)$$

$$fnn(\neg\forall v\ \alpha) = \exists v\ fnn(\neg\alpha)$$

$$fnn(\neg\exists v\ \alpha) = \forall v\ fnn(\neg\alpha)$$

Bastan estas reglas para definir lo que llamamos *ser la Forma Normal Negativa* de una expresión $(\neg\alpha)$, aquí el principio de inducción para fórmulas hace todo el trabajo. Es por esto que es suficiente definir la negación exclusivamente para atómicas e identidades.

Adoptaremos también como fórmulas a negaciones de fórmulas que no sean atómicas ni identidades, sin olvidar que cada una de ellas esta asociada a su Forma Normal Negativa.

Aquí y en adelante $\alpha(q^{\tau_i}|v^{\tau_i})$ es una notación que significa *intercambiar* las presencias de q^{τ_i} en α por v^{τ_i}.

Como ejemplos veamos que la fórmula

$$\exists v_1^{\langle\tau\rangle}(v_1^{\langle\tau\rangle} = q_2^{\langle\tau\rangle})$$

es el resultado de la notación

$$\exists v_1^{\langle\tau\rangle}(q_1^{\langle\tau\rangle} = q_2^{\langle\tau\rangle})(q_1^{\langle\tau\rangle}|v_1^{\langle\tau\rangle}),$$

y que la fórmula

$$\forall v_1^{\tau_1}(q_0^{\langle\tau_1,\tau_2\rangle}(v_1^{\tau_1}, q_2^{\tau_2}))$$

es el resultado de la notación

$$\forall v_1^{\tau_1}(q_0^{\langle\tau_1,\tau_2\rangle}(q_1^{\tau_1}, q_2^{\tau_2}))(q_1^{\tau_1}|v_1^{\tau_1}).$$

Observe que intercambiamos *sólo* símbolos *del mismo tipo*, es por esto que el intento de sustituir símbolos de tipos distintos no tiene efecto, por ejemplo la notación $(q_1^{\tau_1} = q_2^{\tau_2})(q_1^{\tau_1}|v_1^{\langle\tau_1\rangle})$ es simplemente $(q_1^{\tau_1} = q_2^{\tau_2})$.

Definición 1.1. *Si dos fórmulas $\alpha(q_1|q_2)$, $\alpha(q_2|q_1)$ son obtenidas de una fórmula α, reemplazando las presencias de q_1 por presencias de q_2 o viceversa entonces a estas fórmulas las llamaremos variantes alfabéticas una de la otra.*

Por ejemplo las fórmulas:

$$\exists v^\tau(q_1^{\langle\tau\rangle}(v^\tau)) \text{ y } \exists v^\tau(q_2^{\langle\tau\rangle}(v^\tau))$$

son variantes alfabéticas. Mientras que

$$\exists v^\tau(q_1^{\langle\tau\rangle}(v^\tau)) \text{ y } \exists v^\tau(q_2^{\langle\tau,\tau\rangle}(v^\tau, v^\tau))$$

no lo son. La razón es que en la primer fórmula *no* es posible reemplazar $q_1^{\langle\tau\rangle}$ por $q_2^{\langle\tau,\tau\rangle}$, por ser símbolos de diferentes *tipos*.

Como es común, utilizaremos letras minúsculas del griego como α y β como fórmulas *cualesquiera* de la teoría de tipos y letras mayúsculas como Σ y Δ para conjuntos de fórmulas.

En lo sucesivo $(\alpha \to \beta)$ y $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ serán *abreviaciones* de $(\neg\alpha \vee \beta)$ y $((\alpha \wedge \beta) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\beta))$ respectivamente, esto no representa problema alguno, ya que las correspondientes abreviaturas son *equivalencias tautológicas*. Por comodidad omitiremos paréntesis redundantes de acuerdo a la siguiente prioridad de las conectivas: $\neg$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$.

El lector culto en lógica de enunciados se preguntará por que no se utilizó para la definición de las fórmulas de la teoría de tipos en iii) un conjunto de conectivos completo, como por ejemplo $\{\neg, \to\}$. Esto es debido a las condiciones de lo que definiremos como *Conjunto Modelo*, donde la conjunción y la disyunción jugarán un papel dual.

Las *subfórmulas* de de una fórmula α se definen como sigue:

- si α es atómica o identidad entonces α es su única subfórmula;

- si α es $(\neg\beta)$ entonces sus subfórmulas son $(\neg\beta)$ y las subfórmulas de β;

-si α es $(\beta \vee \delta)$ entonces sus subfórmulas son $(\beta \vee \delta)$, las subfórmulas de β y las subfórmulas de δ;

-si α es $(\beta \wedge \delta)$ entonces sus subfórmulas son $(\beta \wedge \delta)$, las subfórmulas de β y las subfórmulas de δ;

-si α es $\exists v^{\tau_i}\beta$ entonces sus subfórmulas son $\exists v^{\tau_i}\beta$ y las subfórmulas de β;

-si α es $\forall v^{\tau_i}\beta$ entonces sus subfórmulas son $\forall v^{\tau_i}\beta$ y las subfórmulas de β.

Cuando estudiamos un lenguaje formal, partimos de expresiones sencillas como las fórmulas atómicas y, *a partir de ellas* construímos recursivamente a otras nuevas y más complejas. Esta discriminación entre el poder expresivo de fórmulas, la podemos formalizar mediante una función

$$N : \tau\text{-fórm} \longrightarrow \mathbb{N}$$

la cual calculará el *nivel* de una fórmula y esta definida recursivamente como sigue:

Si α es una fórmula atómica o identidad, $N(\alpha) = 0$.

Si α es la negación de una fórmula atómica o identidad, $N(\alpha) = 1$.

Si α es una fórmula, $N(\exists v\alpha(q|v)) = N(\alpha) + 1$ y $N(\forall v\alpha(q|v)) = N(\alpha) + 1$.

Si α y β son fórmulas entonces

$$N(\alpha \wedge \beta) = \text{máx}\{N(\alpha), N(\beta)\} + 1$$

$$N(\alpha \vee \beta) = \text{máx}\{N(\alpha), N(\beta)\} + 1.$$

Por supuesto que el nivel de una fórmula α no se verá alterado por sustitución alguna entre símbolos del mismo tipo; es decir:

$$N(\alpha) = N(\alpha(q^{\tau_i} \mid v^{\tau_i}))$$

Al aplicar esta función a una fórmula, nos calcula su *nivel* de complejidad.

El lector, podrá darse cuenta que se ha omitido como calcular el nivel de cualquier negación y sólo se ha especificado el nivel de fórmulas que sean negaciones de atómicas o identidades, esto se debe a que con ayuda de la definición de Forma Normal Negativa, cualquier fórmula puede ser expresada de tal manera que los símbolos de negación (si los hay) tengan presencia únicamente en atómicas o identidades. Podríamos pensar, por ejemplo que no hay manera de calcular el nivel de la fórmula:

$$\neg\forall v_1^\tau((q_1^\tau = q_2^\tau) \vee \neg q^{\langle\tau,\tau\rangle}(q_3^\tau, q_1^\tau)))\ (q_1^\tau|v_1^\tau)$$

sin embargo la Forma Normal Negativa de esta expresión es

$$\exists v_1^\tau\neg(q_1^\tau = q_2^\tau \vee \neg q^{\langle\tau,\tau\rangle}(q_3^\tau, q_1^\tau)))\ (q_1^\tau|v_1^\tau)$$

utilizando la definición de Forma Normal Negativa, esta fórmula puede ser convertida en

$$\exists v_1^\tau(\neg(q_1^\tau = q_2^\tau) \wedge q^{\langle\tau,\tau\rangle}(q_3^\tau, q_1^\tau)))\ (q_1^\tau|v_1^\tau)$$

la cual será una fórmula que exprese lo mismo que la primera, con el distintivo de que las negaciones que en élla tienen presencia, estan aplicadas sólo a atómicas o identidades; en la literatura moderna esta fórmula es conocida como la *Forma Normal Negativa* de $\forall v_1^\tau\neg((q_1^\tau = q_2^\tau) \vee \neg q^{\langle\tau,\tau\rangle}(q_3^\tau, q_1^\tau)))\ (q_1^\tau|v_1^\tau)$.

Ahora bien, calculemos

$$N(\exists v_1^\tau(\neg(q_1^\tau = q_2^\tau) \wedge q^{\langle\tau,\tau\rangle}(q_3^\tau, q_1^\tau)))\ (q_1^\tau|v_1^\tau))$$

es por definición:

$$N(\neg(q_1^\tau = q_2^\tau) \wedge q^{\langle\tau,\tau\rangle}(q_3^\tau, q_1^\tau)) + 1$$

que a su vez es:

$$\text{máx}\ \{N(\neg(q_1^\tau = q_2^\tau)), N(q^{\langle\tau,\tau\rangle}(q_3^\tau, q_1^\tau))\} + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

Por comodidad, en lo sucesivo escribiremos fórmulas como:

$$\exists v_1^\tau(\neg(v_1^\tau = q_2^\tau) \wedge q^{\langle\tau,\tau\rangle}(q_3^\tau, v_1^\tau)))$$

en vez de :

$$\exists v_1^\tau(\neg(q_1^\tau = q_2^\tau) \wedge q^{\langle\tau,\tau\rangle}(q_3^\tau, q_1^\tau)))\ (q_1^\tau|v_1^\tau)$$

Esta convención no debiera molestar al lector culto en lógica de primer orden, pues el Lema de sustitución y el proceso de rectificación de cuantificadores son motivos suficientes para adoptar esta notación.

Ahora que ya estan construidas las fórmulas, podemos " darles significado " y evaluar la verdad o falsedad de lo que ellas dicen.

1.3. Semántica

Un *modelo* para la teoría de tipos $\{D_{\tau_i},\, s_{\tau_i}\}_{\tau_i \in S_\tau}$ consistirá de una familia de dominios D_{τ_i}, y funciones llamadas *asignaciones* $s_{\tau_i} : Q_{\tau_i} \to D_{\tau_i}$, donde Q_{τ_i} es el conjunto de constantes del tipo τ_i.

Los dominios D_{τ_i} son definidos de la siguiente manera:

D_τ será llamado dominio de *individuos* y es escogido *casi* arbitrariamente, solo pedimos que *sea un conjunto no vacío*;

$D_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}$ es el dominio de *todos* los conjuntos de k-adas cuyos miembros pertenecen a $D_{\tau_1}, \cdots, D_{\tau_k}$ respectivamente, i.e.

$$D_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle} = \{W \mid W \subseteq D_{\tau_1} \times \cdots \times D_{\tau_k}\} = \wp(D_{\tau_1} \times \cdots \times D_{\tau_k}).$$

Una *asignación* de D_{τ_i} es una función $s_{\tau_i} : Q_{\tau_i} \to D_{\tau_i}$ tal que s_{τ_i} sea suprayectiva i.e. $s_{\tau_i}[Q_{\tau_i}] = D_{\tau_i}$, [3] en otras palabras pedimos que *siempre* nos alcancen los símbolos de constante Q_{τ_i} para *nombrar* a los individuos de D_{τ_i}.

De lo expuesto anteriormente se observa que $|D_{\tau_i}| \leq |Q_{\tau_i}|$.

Por comodidad escribiremos $\mathfrak{M}$ en vez de $\{D_{\tau_i},\, s_{\tau_i}\}_{\tau_i \in S_\tau}$, además omitiremos el subíndice de la asignación cuando éste redunde con el tipo de símbolo al que se le este aplicando: $s_{\tau_i}(q^{\tau_i}) = s(q^{\tau_i})$.

Diremos que $\mathfrak{M}$ satisface a una fórmula α si y sólo si α es verdadera bajo las siguientes *reglas de verdad*:

(T.q)

$$q^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k})$$

es verdadera en $\mathfrak{M}$ si y sólo si

$$(s(q_1^{\tau_1}), \cdots, s(q_k^{\tau_k})) \in s(q^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle})$$

donde $s(q^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}) \in D_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle} = \wp(D_{\tau_1} \times \cdots \times D_{\tau_k})$

[3] Aquí estamos usando la notación conjuntista de *imagen del conjunto Q_{τ_i} bajo s_{τ_i}* definida como $\{d \in D_{\tau_i} \mid \textit{hay } q \in Q_{\tau_i} \textit{ tal que } s_{\tau_i}(q) = d\}$

(T.$\neg$) $(\neg\alpha)$ es verdadera en $\mathfrak{M}$ si y sólo si α *no* es verdadera en $\mathfrak{M}$

(T.$\wedge$) $(\alpha\wedge\beta)$ es verdadera en $\mathfrak{M}$ si y sólo si tanto α como β son verdaderas en $\mathfrak{M}$

(T.$\vee$) $(\alpha \vee \beta)$ es verdadera en $\mathfrak{M}$ si y sólo si o bien α es verdadera en $\mathfrak{M}$ o bien β es verdadera en $\mathfrak{M}$

(T.$\exists$) $\exists v^{\tau_i}\ \alpha(q^{\tau_i}|v^{\tau_i})$ es verdadera en $\mathfrak{M}$ si y sólo si *hay* $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$ tal que $\alpha(q^{\tau_i})$ es verdadera en $\mathfrak{M}$

(T.$\forall$) $\forall v^{\tau_i}\ \alpha(q^{\tau_i}|v^{\tau_i})$ es verdadera en $\mathfrak{M}$ si y sólo si *para todo* $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$ sucede que $\alpha(q^{\tau_i})$ es verdadera en $\mathfrak{M}$

(T.$=$) $(q_1^{\tau_i} = q_2^{\tau_i})$ es verdadera en $\mathfrak{M}$ si y sólo si $s_{\tau_i}(q_1^{\tau_i}) = s_{\tau_i}(q_2^{\tau_i})$

Lo anterior define lo que entenderemos por *modelo*, y nuestra notación

$$\mathfrak{M} \models \alpha$$

significará que α es verdadera en $\mathfrak{M}$ o bien $\mathfrak{M}$ es modelo de α.

Diremos que una fórmula α es *satisfactible* si y sólo si existe un modelo donde α es verdadera. En general, un conjunto de fórmulas Σ será *satisfactible* si y sólo si hay un modelo donde son verdaderas todas las fórmulas de Σ.

1.4. Lógica de segundo orden

Los lenguajes de primer orden se caracterizan por que sus cuantificadores sólo hablan de los elementos del dominio D_τ. En lógica de segundo orden es posible además, cuantificar sobre todos los subconjuntos de D_τ y en general sobre todos los elementos de $\wp(D_\tau \times \cdots \times D_\tau)$, expuesto de manera esquemática:

$$\begin{aligned} \tau &\longmapsto D_\tau \neq \varnothing \\ \langle\tau\rangle &\longmapsto D_{\langle\tau\rangle} = \wp(D_\tau) \\ \langle\tau,\tau\rangle &\longmapsto D_{\langle\tau,\tau\rangle} = \wp(D_\tau \times D_\tau) \\ \langle\tau,\cdots,\tau\rangle &\longmapsto D_{\langle\tau,\cdots,\tau\rangle} = \wp(D_\tau \times \cdots \times D_\tau) \end{aligned}$$

Se observa una relación entre los elementos del conjunto

$$S_2 = \{\ \tau,\ \langle\tau\rangle,\ \langle\tau,\tau\rangle,\ \langle\tau,\tau,\tau\rangle,\ \cdots\ \} \subseteq S_\tau$$

y los dominios D_{τ_i} .

Ahora bien, observemos como es que la lógica de segundo orden forma parte de la lógica de la teoría de tipos, cuando restringimos la sintaxis de la teoría de tipos al conjunto de fórmulas cuyos símbolos propios sean elementos de S_2. Si el lector aun no se convence de esto, tal vez le convenga emplear como *símbolos de variables* del tipo primitivo τ a letras minúsculas v_i; como *símbolos de constante individual* a letras minúsculas a_i; como símbolos de variable del tipo $\langle\tau\rangle$ a letras mayúsculas X_i^1; como símbolos de variable del tipo $\langle\tau,\tau\rangle$ con las letras mayúsculas X_i^2; como símbolos de variable del tipo $\langle\tau,\tau,\tau\rangle$ a letras mayúsculas X_i^3; ... etcétera.

Por ejemplo, una caracterización de conjuntos infinitos es:

"Hay una relación binaria que es: transitiva, antirreflexiva

y sin elemento último".

Que en lógica de segundo orden se escribe:

$$\exists X^2(\forall v_0\forall v_1\forall v_2((X^2(v_0,v_1)\wedge X^2(v_1,v_2))\rightarrow X^2(v_0,v_2))$$

$$\wedge\forall v_3(\neg X^2(v_3,v_3))\wedge\forall v_4\exists v_5(X^2(v_4,v_5)))$$

En nuestro lenguaje de la teoría de tipos este mismo enunciado se expresa así:

$$\exists v^{\langle\tau,\tau\rangle}(\forall v_0^\tau\forall v_1^\tau\forall v_2^\tau((v^{\langle\tau,\tau\rangle}(v_0^\tau,v_1^\tau)\wedge v^{\langle\tau,\tau\rangle}(v_1^\tau,v_2^\tau))\rightarrow v^{\langle\tau,\tau\rangle}(v_0^\tau,v_2^\tau))$$

$$\wedge\forall v_3^\tau(\neg v^{\langle\tau,\tau\rangle}(v_3^\tau,v_3^\tau))\wedge\forall v_4^\tau\exists v_5^\tau(v^{\langle\tau,\tau\rangle}(v_4^\tau,v_5^\tau)))$$

De hecho, la colección de todos los modelos de esta fórmula es la clase de todas las estructuras infinitas, (véase [10], pág. 13).

El lector no tiene por que temer a la aparente complejidad de la sintaxis de la teoría de tipos, ya que uno de los propósitos de ésta es " etiquetar " los objetos que en ella se cuantifican para saber a que *tipo* pertenecen.

Recordemos que podemos prescindir de símbolos propios de función por el hecho de que toda función n-aria es una relación n+1-aria.

Por supuesto que la sintaxis de la teoría de tipos tiene además del lenguaje de segundo orden, a fórmulas como:

$$\forall v^{\langle\tau,\langle\tau\rangle\rangle}\ (v^{\langle\tau,\langle\tau\rangle\rangle}(q_1^{\tau}, q_2^{\langle\tau\rangle}))$$

Dado que

$$D_{\langle\tau,\langle\tau\rangle\rangle} = \wp(D_\tau \times \wp(D_\tau))$$

entonces la fórmula anterior no es de primer ni de segundo orden, sino una fórmula de la lógica de la teoría de tipos, la cual tiene nuevas y sofisticadas fórmulas que cuantifican por ejemplo, sobre todas las relaciones que hay entre individuos y subconjuntos de ellos.

Capítulo 2

Conjuntos Modelo

En nuestra definición de $satisfactibilidad$, los elementos del conjunto de individuos D_τ son *entidades cualesquiera*, el único requisito es que $D_\tau \neq \varnothing$.

En lo subsecuente será de importancia *separar* las constantes y las variables que tengan presencias en un conjunto de fórmulas Σ, para esto $definimos$ para cada $\tau_i \in S_\tau$:

$$Q_{\tau_i}(\Sigma) = \{q_{\tau_i} \in Q_{\tau_i} \mid q_{\tau_i} \text{ tiene presencia en alguna de las fórmulas de } \Sigma\}.$$

$$V_{\tau_i}(\Sigma) = \{v_{\tau_i} \in V_{\tau_i} \mid v_{\tau_i} \text{ tiene presencia en alguna de las fórmulas de } \Sigma\}.$$

Cuando escribamos $Q(\Sigma)$ nos referiremos al conjunto de *todas* las constantes de *todos* los tipos que tengan presencia en Σ, en símbolos:

$$Q(\Sigma) = \bigcup\{Q_{\tau_i}(\Sigma) \mid \tau_i \in S_\tau\}$$

Análogamente definimos:

$$V(\Sigma) = \bigcup\{V_{\tau_i}(\Sigma) \mid \tau_i \in S_\tau\}$$

Como el conjunto de *todas* las variables de *todos* los tipos que tengan presencia en Σ,

Por ejemplo si

$\Sigma = \{q_0^\tau = q_5^\tau\ ,\ \ q_7^{\langle\tau,\langle\tau\rangle\rangle}(q_6^\tau, q_3^{\langle\tau\rangle}), \exists v_1^\tau \exists v_2^{\langle\tau\rangle} q_7^{\langle\tau,\langle\tau\rangle\rangle}(v_1^\tau, v_2^{\langle\tau\rangle})\}\}$ entonces

$$Q_\tau(\Sigma) = \{q_0^\tau, q_5^\tau, q_6^\tau\}$$

$$Q_{\langle\tau\rangle}(\Sigma) = \{q_3^{\langle\tau\rangle}\}$$

$$Q_{\langle\tau,\langle\tau\rangle\rangle}(\Sigma) = \{q_7^{\langle\tau,\langle\tau\rangle\rangle}\}$$

$$V_\tau(\Sigma) = \{v_1^\tau\},\ V_{\langle\tau\rangle}(\Sigma) = \{v_2^{\langle\tau\rangle}\}$$

$$V_{\langle\tau,\langle\tau\rangle\rangle}(\Sigma) = \varnothing$$

además si $\tau_i \notin \{\tau, \langle\tau\rangle, \langle\tau,\langle\tau\rangle\rangle\}$ entonces

$$Q_{\tau_i}(\Sigma) = \varnothing \text{ y } V_{\tau_i}(\Sigma) = \varnothing$$

por lo que $Q(\Sigma) = \{q_0^\tau,\ q_5^\tau,\ q_7^{\langle\tau,\langle\tau\rangle\rangle}\ q_6^\tau,\ q_3^{\langle\tau\rangle}\}$ y $V(\Sigma) = \{v_1^\tau,\ v_2^{\langle\tau\rangle}\}$.

Ejercicio 2.1. *Para un $\tau_i \in S_{\tau_i}$ fijo, diga si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas, justifique su respuesta.*

$$Q_{\tau_i}(\varnothing) = \varnothing$$

$$Q_{\tau_i}(\Sigma) \cap Q_{\tau_i}(\Delta) = Q_{\tau_i}(\Sigma \cap \Delta)$$

$$Q_{\tau_i}(\Sigma) \cup Q_{\tau_i}(\Delta) = Q_{\tau_i}(\Sigma \cup \Delta)$$

$$Q_{\tau_i}(\Sigma) \setminus Q_{\tau_i}(\Delta) = Q_{\tau_i}(\Sigma \setminus \Delta)$$

2.1. ¿Qué es un Conjunto Modelo?

Considere las siguientes condiciones que le podemos pedir a un conjunto de fórmulas Σ:

(C.0)(a) Si $\alpha \in \Sigma$ entonces $(\neg\alpha) \notin \Sigma$

(C.1)(a) Si $(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma$ entonces $\alpha \in \Sigma$ y $\beta \in \Sigma$

(C.2)(a) Si $(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$ entonces $\alpha \in \Sigma$ o bien $\beta \in \Sigma$

(C.3)(a) Si $\exists v^{\tau_i}\alpha \in \Sigma$ entonces *hay* $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$ tal que $\alpha(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$.

(C.4)(a) Si $\forall v^{\tau_i}\alpha \in \Sigma$ y $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Sigma)$ entonces $\alpha(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$.

(C.5) Si $q_1^{\tau_i} = q_2^{\tau_i} \in \Sigma$ y $\alpha(q_1^{\tau_i}) \in \Sigma$ entonces $\alpha(q_2^{\tau_i}) \in \Sigma$.

(C.6) Si $U \subseteq Q_{\tau_1}(\Sigma) \times \cdots \times Q_{\tau_k}(\Sigma)$

entonces existe $q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \in Q_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ que cumple las siguientes dos propiedades:

(C.6)(a) Si $(q_1^{\tau_1},\cdots,q_k^{\tau_k}) \in U$ entonces $q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_1^{\tau_1},\cdots,q_k^{\tau_k}) \in \Sigma$

(C.6)(b) Si $q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_{i_1}^{\tau_1},\cdots,q_{i_k}^{\tau_k}) \in \Sigma$ entonces existe $(q_1^{\tau_1},\cdots,q_k^{\tau_k}) \in U$ tal que

$\{q_{i_1}^{\tau_1} = q_1^{\tau_1},\cdots,q_{i_k}^{\tau_k} = q_k^{\tau_k}\} \subseteq \Sigma$

(C.7) Si $q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ y $q_1^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ cumplen con (a) y (b) de (C.6) respecto *algún mismo* U entonces

$$(q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} = q_1^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}) \in \Sigma$$

Es suficiente definir (C.0)(a) sólo para fórmulas atómicas e identidades, en virtud de que es posible convertir cualquier fórmula a su Forma Normal Negativa, es decir, a una forma donde las negaciones (si las hay), aparecen aplicadas a fórmulas atómicas o identidades.

Las condiciones (C.1)(a) , ... , (C.4)(a) reflejan de alguna manera, una relación intrínseca que existe entre *lenguaje* y *metalenguaje*.

La condición (C.5) expresa la ley de Leibniz.

La condición (C.6) es quizá la más importante de todas, ella expresa intuitivamente que " todo conjunto de constantes que tengan presencia en Σ, tiene un nombre en Σ ". Un caso particular de (C.6) es cuando U es el conjunto vacío de k-cadenas de constantes del tipo $\tau_1,\cdots,\tau_k$ respectivamente. Para éste va a existir una constante

$$q_{\varnothing}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \in Q_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$$

que representará el conjunto vacío de dichas k-cadenas.

En algún sentido (C.7) nos dice que las constantes cuya existencia afirma (C.6) "son únicas", sin embargo ambas condiciones son independientes entre si.

Si Σ satisface las condiciones (C.0)(a),...,(C.4)(a), (C.5), (C.6) y (C.7) entonces decimos que Σ es *Conjunto Modelo* .

Ejercicio 2.2. *¿Es $\Sigma = \varnothing$ un Conjunto Modelo?*

Ejercicio 2.3. *Muestre que si Σ cumple (C.6) entonces para todo $\tau_i \in S_\tau$ sucede que: si $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Sigma)$ entonces $(q^{\tau_i} = q^{\tau_i}) \in \Sigma$.*

En particular, todo Conjunto Modelo contiene a

$$\{(q^\tau = q^\tau) \mid q^\tau \in Q_\tau(\Sigma) \text{ y } \tau \text{ es del tipo individual } \}.$$

Proposición 2.4. *Las siguientes condiciones son consecuencia de la definición de Forma Normal Negativa y de las condiciones (C.1)(a), ... ,(C.4)(a):*

(C.00)(a) Si $\neg\neg\alpha \in \Sigma$ entonces $\alpha \in \Sigma$;

(C.01)(a) Si $\neg(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma$ entonces $\neg\alpha \in \Sigma$ o bien $\neg\beta \in \Sigma$;

(C.02)(a) Si $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$ entonces $\neg\alpha \in \Sigma$ y $\neg\beta \in \Sigma$;

(C.03)(a) Si $(\neg\exists v^{\tau_i}\ \alpha) \in \Sigma$ entonces para todo $q^{\tau_i}\in Q_{\tau_i}(\Sigma)\quad \neg\alpha(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$;

(C.04)(a) Si $(\neg\forall v^{\tau_i}\ \alpha) \in \Sigma$ entonces existe $q^{\tau_i}\in Q_{\tau_i}$ tal que $\neg\alpha(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$.

Demostración .

(C.00)(a) Supongamos que $\neg\neg\alpha \in \Sigma$, como la Forma Normal Negativa de $\neg\neg\alpha$ es α entonces $\alpha \in \Sigma$.

(C.01)(a) Supongamos que $\neg(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma$, como la Forma Normal Negativa de $\neg(\alpha \wedge \beta)$ es $(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ entonces $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \in \Sigma$, luego por (C.2)(a) $\neg\alpha \in \Sigma$ o bien $\neg\beta \in \Sigma$.

(C.02)(a) Supongamos que $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$, como la Forma Normal Negativa de $\neg(\alpha\vee\beta)$ es $(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$ entonces $(\neg\alpha\wedge\neg\beta) \in \Sigma$, pero por (C.1)(a) $\neg\alpha \in \Sigma$ y $\neg\beta \in \Sigma$.

(C.03)(a) Si $(\neg\exists v^{\tau_i}\ \alpha) \in \Sigma$, como la Forma Normal Negativa de $\neg\exists v^{\tau_i}\ \alpha$ es $\forall v^{\tau_i}\neg\alpha$ entonces $(\forall v^{\tau_i}\neg\alpha) \in \Sigma$, luego por (C.4)(a) tenemos que para todo $q^{\tau_i}\in Q_{\tau_i}(\Sigma)$ sucede que $\neg\alpha(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$.

(C.04)(a) Si $(\neg\forall v^\tau\ \alpha) \in \Sigma$, como la Forma Normal Negativa de $\neg\forall v\ \alpha$ es $\exists v\neg\alpha$ entonces $(\exists v\neg\alpha) \in \Sigma$ y por (C.3)(a) sabemos que existe $q^{\tau_i}\in Q_{\tau_i}$ tal que $\neg\alpha(v^{\tau_i}|q^{\tau_i})$ $\in \Sigma$.

$\dashv$

Podemos *parafrasear* la Proposición 2.4, diciendo que Σ “ reconoce ”, mediante las condiciones (C.1)(a),..., (C.4)(a), a las negaciones de fórmulas no atómicas ni identidades como sus Formas Normales Negativas.

Proposición 2.5. *Si $\alpha(q_1)$ es una fórmula y sustituímos* todas *las presencias de q_1 por la constante q_2 entonces las subfórmulas de $\alpha(q_1)$ y de $\alpha(q_2)$ estan en correspondencia biunívoca.*

Ejercicio 2.6. *Use inducción sobre el nivel de la fórmula α, para mostrar la Proposición 2.5.*

Lema 2.7 (Lema I)**.** *Si Σ satisface (C.1)(a), ... ,(C.4)(a) y $\{\alpha(q_1), \neg\alpha(q_2)\} \subseteq \Sigma$ entonces existe una fórmula atómica o identidad β tal que $\{\beta(q_1), \neg\beta(q_2)\} \subseteq \Sigma$.*

Demostración .

Demostraremos este lema por inducción sobre el nivel de la fórmula α.

Además haremos uso de las condiciones (C.00)(a), ... , (C.04)(a), en virtud de la Proposición 2.4.

Si $N(\alpha) = 0$ entonces α es atómica o identidad, tome $\beta = \alpha$ y asunto resuelto.

Supongamos que δ y φ cumplen la propiedad, esto es:

Si $\{\delta(q_1), \neg\delta(q_2)\} \subseteq \Sigma$

entonces existe una fórmula atómica o identidad β_δ

tal que $\{\beta_\delta(q_1), \neg\beta_\delta(q_2)\} \subseteq \Sigma$

Si $\{\varphi(q_1), \neg\varphi(q_2)\} \subseteq \Sigma$ entonces

existe una fórmula atómica o identidad β_φ

tal que $\{\beta_\varphi(q_1), \neg\beta_\varphi(q_2)\} \subseteq \Sigma$

Veamos que si α es de la forma $(\delta \wedge \varphi)$ entonces cumple:

Si $\{(\delta \wedge \varphi)(q_1), \neg(\delta \wedge \varphi)(q_2)\} \subseteq \Sigma$

entonces existe una fórmula atómica o identidad $\beta_{(\delta\wedge\varphi)}$

$$\text{tal que } \{\beta_{(\delta\wedge\varphi)}(q_1), \neg\beta_{(\delta\wedge\varphi)}(q_2)\} \subseteq \Sigma$$

Observación 2.8. *La fórmula $(\delta\wedge\varphi)(q_1)$ significa que q_1 tiene presencia en $(\delta\wedge\varphi)$, para lo cual es suficiente que tenga presencia en alguno de los dos conyuntos, sin embargo lo denotaremos así: $\delta(q_1) \wedge \varphi(q_1)$, indicando asi que q_1 puede tener presencia en δ o en φ o en ambos.*

De la misma manera

$$(\delta \vee \varphi)(q_j) \textit{ lo denotaremos como } (\delta(q_j) \vee \varphi(q_j))$$
$$(\exists v^{\tau_i}\ \delta)(q_j) \textit{ lo denotaremos como } (\exists v^{\tau_i}\ \delta(q_j))$$
$$(\forall v^{\tau_i}\ \varphi)(q_j) \textit{ lo denotaremos como } (\forall v^{\tau_i}\ \varphi(q_j))$$

Ahora bien, si

$$\{(\delta \wedge \varphi)(q_1), \neg(\delta \wedge \varphi)(q_2)\} \subseteq \Sigma$$

entonces por la observación de arriba y la condición (C.01)(a) tenemos que

$$\{(\delta \wedge \varphi)(q_1), \neg(\delta \wedge \varphi)(q_2)\} \subseteq \Sigma$$

y por (C.1)(a) obtenemos:

$$\delta(q_1) \in \Sigma \text{ y } \varphi(q_1) \in \Sigma$$

y también

$$\neg\delta(q_2) \in \Sigma \text{ o bien } \neg\varphi(q_2) \in \Sigma$$

distribuyendo en el metalenguaje tenemos que:

$$\delta(q_1) \in \Sigma \text{ y } \varphi(q_1) \in \Sigma \text{ y } \neg\delta(q_2) \in \Sigma$$
$$\text{o bien}$$
$$\delta(q_1) \in \Sigma \text{ y } \varphi(q_1) \in \Sigma \text{ y } \neg\varphi(q_2) \in \Sigma.$$

En el primer caso se tiene que: $\{\delta(q_1), \neg\delta(q_2)\} \subseteq \{\delta(q_1), \varphi(q_1), \neg\delta(q_2)\} \subseteq \Sigma$ entonces existe una fórmula atómica o identidad β_δ tal que $\{\beta_\delta(q_1), \neg\beta_\delta(q_2)\} \subseteq \Sigma$,

mientras que en el segundo caso: $\{\varphi(q_1), \neg\varphi(q_2)\} \subseteq \{\delta(q_1), \varphi(q_1), \neg\varphi(q_2)\} \subseteq \Sigma$ entonces existe una fórmula atómica o identidad β_φ tal que $\{\beta_\varphi(q_1), \neg\beta_\varphi(q_2)\} \subseteq \Sigma$

en cualquier caso se tiene lo deseado.

Ejercicio 2.9. *Demuestre el Lema 2.7, cuando α es de la forma $(\delta \vee \varphi)$, el cual es análogo al caso anterior, solo que aquí se usan las condiciones (C.2)(a) y (C.02)(a), en lugar de (C.1)(a) y (C.01)(a).*

Para el caso de la fórmula $(\exists v^{\tau_i}\delta)$, supongamos que δ cumple la propiedad y que

$$\{(\exists v^{\tau_i}\delta)(q_1), (\neg\exists v^{\tau_i}\delta)(q_2)\} \subseteq \Sigma$$

es decir, de la definición de Forma Normal Negativa, tenemos que:

$$\{(\exists v^{\tau_i}\delta)(q_1), (\forall v^{\tau_i}\neg\delta)(q_2)\} \subseteq \Sigma.$$

Luego, por la condición (C.3)(a) aplicada al hecho de que $(\exists v^{\tau_i}\delta)(q_1) \in \Sigma$,

$$\text{hay } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i} \text{ tal que } \delta(q_1)(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma.$$

Por su parte, la condición (C.4)(a) aplicada a $(\forall v^{\tau_i}\neg\delta(q_2)) \in \Sigma$ se tiene:

para toda $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Sigma)$ sucede que $\neg\delta(q_2)(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$.

Como el nivel de δ es menor que el nivel de $\exists v^{\tau_i}\delta$ entonces δ cumple la propiedad y como $\delta(q_1)(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$ y $\neg\delta(q_2)(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$, entonces por la hipótesis inductiva se tiene lo deseado.

Para el cuantificador universal $(\forall v^{\tau_i}\delta)$, supongamos que δ cumple la propiedad y que

$$\{(\forall v^{\tau_i}\delta)(q_1), (\neg\forall v^{\tau_i}\delta)(q_2)\} \subseteq \Sigma$$

es decir, de la definición de Forma Normal Negativa, se tiene:

$$\{(\forall v^{\tau_i}\delta)(q_1), (\exists v^{\tau_i}\neg\delta)(q_2)\} \subseteq \Sigma.$$

Por (C.4)(a) sabemos que para todo $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Sigma)$ sucede que $\delta(q_1)(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$

además por (C.3)(a) hay $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$ tal que $\neg\delta(q_2)(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$.

Dado que el nivel de δ es menor que el de $\forall v^{\tau_i}\delta$ y como $\delta(q_1)(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$ y $\neg\delta(q_2)(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$, por hipótesis inductiva, se tiene que existe una fórmula atómica o identidad β_δ tal que $\{\beta_\delta(q_1), \neg\beta_\delta(q_2)\} \subseteq \Sigma$.

$\dashv$

Para el caso particular en el que q_1 y q_2 sean idénticos, lo que el Lema 2.7 nos dice, es que si α es una fórmula de un tipo complicado y nos encontramos con el conjunto *no satisfactible* $\{\alpha(q_1), \neg\alpha(q_1)\}$ contenido en Σ entonces existe β una fórmula de nivel *cero* tal que el conjunto *no satisfactible* $\{\beta(q_1), \neg\beta(q_1)\}$ esta contenido en Σ, siempre que Σ cumpla (C.1)(a), ... , (C.4)(a), claro esta. Más aún, la demostración está basada en la inducción sobre el *nivel* de α y sugiere un *proceso efectivo* tal que dada una fórmula complicada, éste encuentre mediante un proceso reconstructivo de la misma, a " la raíz culpable " de que Σ sea no satisfactible, la cual será una fórmula atómica o identidad.

Tome por ejemplo a la fórmula $\alpha(q_1^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle})$ como:

$$\exists v^{\langle\tau\rangle}\ \forall v^{\tau}\ q_1^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}(v^{\langle\tau\rangle}, v^{\tau})$$

y por ende, la fórmula $\neg\alpha(q_2^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle})$ es:

$$\neg\exists v^{\langle\tau\rangle}\ \forall v^{\tau}\ q_2^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}(v^{\langle\tau\rangle}, v^{\tau})$$

Ahora supongamos que, Σ es un conjunto de fórmulas que cumple (C.1)(a) , ... , (C.4)(a) y además:

$$\{\alpha(q_1^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}),\ \neg\alpha(q_2^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle})\} \subseteq \Sigma$$

es decir:

$$\{\exists v^{\langle\tau\rangle}\ \forall v^{\tau}\ q_1^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}(v^{\langle\tau\rangle}, v^{\tau}),\ \neg\exists v^{\langle\tau\rangle}\ \forall v^{\tau}\ q_2^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}(v^{\langle\tau\rangle}, v^{\tau})\} \subseteq \Sigma$$

El hecho de que

$$\exists v^{\langle\tau\rangle}\ \forall v^{\tau}\ q_1^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}(v^{\langle\tau\rangle}, v^{\tau}) \in \Sigma$$

implica que

hay $q_i^{\langle\tau\rangle} \in Q_{\langle\tau\rangle}$ tal que *para toda* $q_j^{\tau} \in Q_{\tau}(\Sigma)$ se tiene que

$$q_1^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}(q_i^{\langle\tau\rangle}, q_j^{\tau}) \in \Sigma$$

Por su parte, como

$$\neg\exists v^{\langle\tau\rangle}\ \forall v^{\tau}\ q_2^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}(v^{\langle\tau\rangle}, v^{\tau}) \in \Sigma$$

en virtud de la Proposición 2.4, Σ cumple (C.03)(a) entonces

para toda $q_s^{\langle\tau\rangle} \in Q_{\langle\tau\rangle}(\Sigma)$ sucede que *hay* $q_l^{\tau} \in Q_{\tau}$ tal que

$$\neg q_2^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}(q_s^{\langle\tau\rangle}, q_l^\tau) \in \Sigma$$

Ahora bien, si *hay* $q_i^{\langle\tau\rangle} \in Q_{\langle\tau\rangle}$ tal que *para toda* $q_j^\tau \in Q_\tau(\Sigma)$ sucede que

$$q_1^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}(q_i^{\langle\tau\rangle}, q_j^\tau) \in \Sigma$$

entonces la constante $q_i^{\langle\tau\rangle}$ que **existe**, tiene presencia en Σ, en símbolos:

$$hay \quad q_i^{\langle\tau\rangle} \in Q_{\langle\tau\rangle}(\Sigma)$$

Análogamente, la constante q_l^τ que **existe**, termina también estando presente en Σ, así:

$$hay \quad q_l^\tau \in Q_\tau(\Sigma)$$

Haciendo las debidas particularizaciones en el *metalenguaje* concluímos que :

$$existen\ q_i^{\langle\tau\rangle} \in Q_{\langle\tau\rangle}(\Sigma)\ ,\ q_l^\tau \in Q_\tau(\Sigma) \text{ tales que}$$

$$\{q_1^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}(q_i^{\langle\tau\rangle}, q_l^\tau), \neg q_2^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}(q_i^{\langle\tau\rangle}, q_l^\tau)\} \subseteq \Sigma$$

Ejercicio 2.10. *Señale que particularizaciones nos llevan a concluir esto.*

Ejercicio 2.11. *Suponga que Σ es un conjunto de fórmulas que cumple (C.1)(a) , ... , (C.4)(a) y además:*

$$\exists v^{\langle\tau\rangle}\ \forall v^\tau\ \exists v^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}\ q_1^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}(v^{\langle\tau\rangle}, v^\tau) \wedge q_1^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle} = v^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle} \in \Sigma$$

$$\neg\exists v^{\langle\tau\rangle}\ \forall v^\tau\ \exists v^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}\ q_2^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle}(v^{\langle\tau\rangle}, v^\tau) \wedge q_2^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle} = v^{\langle\langle\tau\rangle,\tau\rangle} \in \Sigma$$

apóyese en la demostración del Lema 2.7, para exhibir una fórmula β atómica o identidad tal que

$$\{\beta(q_1), \neg\beta(q_2)\} \subseteq \Sigma$$

Tanto este ejercicio, como el ejemplo anterior a él, buscan fundamentar la pretensión del comentario al Lema 2.7, el cual predice la existencia de un *procedimiento efectivo* tal que dadas las fórmulas $\alpha(q_1)$ y $\neg\alpha(q_2)$, *determine* la fórmula β atómica o identidad donde la *posible* satisfactibilidad de α en q_1 y q_2, " falla " .

El siguiente ejercicio es consecuencia de las definiciónes (T.=) y (T.q).

Ejercicio 2.12. *Si $\mathfrak{M} \models q_1^{\tau_i} = q_2^{\tau_i}$ y β es atómica o identidad entonces*

$$\mathfrak{M} \models \beta(q_1^{\tau_i}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{M} \models \beta(q_2^{\tau_i}).$$

Ejercicio 2.13. *Explíque con sus propias palabras lo que el enunciado del ejercicio anterior quiere decir.*

2.2. Existencia

La teoría de un modelo $\mathfrak{M}$ se define como el conjunto:

$$Teo(\mathfrak{M}) = \{\alpha \in \tau - fórm \mid \mathfrak{M} \models \alpha\}$$

es decir, el conjunto de todo lo verdadero en $\mathfrak{M}$.

Observe que para cualquier $\mathfrak{M}$ sucede

$$\mathfrak{M} \models \forall v \ (v = v)$$

de esta manera, podemos inferir que

$$Teo(\mathfrak{M}) \neq \varnothing$$

La siguiente proposición, muestra que la colección de todos los Conjuntos Modelo es no vacía.

Proposición 2.14. *La teoría de cualquier modelo es un Conjunto Modelo.*

Demostración .

Sea $\mathfrak{M}$ un modelo y

$$\{\alpha \in \tau - fórm \mid \mathfrak{M} \models \alpha\}$$

su teoría, $Teo(\mathfrak{M})$.

Las condiciones (C.0)(a) , ... , (C.4)(a) son consecuencia de la definición de satisfactibilidad:

(C.0)(a) Supongamos que $\alpha \in Teo(\mathfrak{M})$.

esto pasa si y sólo si, por definición

$$\mathfrak{M} \models \alpha$$

si y sólo si, por (T.$\neg$)

$$\mathfrak{M} \not\models \neg\alpha$$

así que

$$\neg\alpha \notin Teo(\mathfrak{M})$$

(C.1)(a) Supongamos que $\alpha \wedge \beta \in Teo(\mathfrak{M})$.

esto pasa si y sólo si, por definición

$$\mathfrak{M} \models \alpha \wedge \beta$$

si y sólo si, por (T.$\wedge$)

$$\mathfrak{M} \models \alpha \text{ y } \mathfrak{M} \models \beta$$

si y sólo si, por definición de teoría

$$\alpha \in Teo(\mathfrak{M}) \text{ y } \beta \in Teo(\mathfrak{M})$$

(C.2)(a) Supongamos que $\alpha \vee \beta \in Teo(\mathfrak{M})$.

esto pasa si y sólo si, por definición

$$\mathfrak{M} \models \alpha \vee \beta$$

si y sólo si, por (T.$\vee$)

$$\mathfrak{M} \models \alpha \text{ o bien } \mathfrak{M} \models \beta$$

si y sólo si, por definición de teoría

$$\alpha \in Teo(\mathfrak{M}) \text{ o bien } \beta \in Teo(\mathfrak{M})$$

(C.3)(a) Supongamos que $\exists v^{\tau_i}\beta \in Teo(\mathfrak{M})$.

esto pasa si y sólo si, por definición de teoría

$$\mathfrak{M} \models \exists v^{\tau_i}\beta$$

si y sólo si, por la definición (T.$\exists$)

$$\text{hay } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i} \text{ tal que } \mathfrak{M} \models \alpha(q^{\tau_i} \mid v^{\tau_i})$$

lo cual pasa si y sólo si, por definición de teoría

$$\text{hay } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i} \text{ tal que } \alpha(q^{\tau_i} \mid v^{\tau_i}) \in Teo(\mathfrak{M})$$

(C.4)(a) Supongamos que $\forall v^{\tau_i}\beta \in Teo(\mathfrak{M})$.

esto pasa si y sólo si, por definición de teoría

$$\mathfrak{M} \models \forall v^{\tau_i}\beta$$

si y sólo si, por la definición (T.$\forall$)

$$\text{para toda } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i} \text{ sucede que } \mathfrak{M} \models \alpha(q^{\tau_i} \mid v^{\tau_i})$$

entonces, como $Q_{\tau_i}(\Sigma) \subseteq Q_{\tau_i}$

$$\text{para toda } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Sigma) \text{ sucede que } \mathfrak{M} \models \alpha(q^{\tau_i} \mid v^{\tau_i})$$

lo cual pasa si y sólo si, por definición de teoría

$$\text{para toda } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Sigma) \text{ sucede que } \alpha(q^{\tau_i} \mid v^{\tau_i}) \in Teo(\mathfrak{M}).$$

Veamos (C.5), procedamos por reducción al absurdo, para lo cual supongamos que $(q_1^{\tau_i} = q_2^{\tau_i}) \in Teo(\mathfrak{M})$ y que

$$\alpha(q_1^{\tau_i}) \in Teo(\mathfrak{M}) \ ...(*)$$

pero $\alpha(q_2^{\tau_i}) \notin Teo(\mathfrak{M})$, luego por definición de $Teo(\mathfrak{M})$

$$\mathfrak{M} \not\models \alpha(q_2^{\tau_i})$$

y por (T.$\neg$) tenemos que

$$\mathfrak{M} \models \neg\alpha(q_2^{\tau_i})$$

por lo que

$$\neg\alpha(q_2^{\tau_i}) \in Teo(\mathfrak{M}) ...(**)$$

Aplicando el Lema 2.7 a $(*)$ y $(**)$, sabemos que hay una β fórmula atómica o identidad tal que

$$\{\beta(q_1^{\tau_i}), \neg\beta(q_2^{\tau_i})\} \subseteq Teo(\mathfrak{M})... \ (***)$$

Por otra parte, dado que

$$(q_1^{\tau_i} = q_2^{\tau_i}) \in Teo(\mathfrak{M}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{M} \models q_1^{\tau_i} = q_2^{\tau_i}$$

y como

$$\beta(q_1^{\tau_i}) \in Teo(\mathfrak{M}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{M} \models \beta(q_1^{\tau_i})$$

entonces por el ejercicio 2.12

$$\mathfrak{M} \models \beta(q_2^{\tau_i}).$$

Asi que $\beta(q_2^{\tau_i}) \in Teo(\mathfrak{M})$, luego, a causa de (C.0)(a) tenemos que

$$\neg\beta(q_2^{\tau_i}) \notin Teo(\mathfrak{M}), \text{ lo cual es una contradicción con (***).}$$

Por tanto $Teo(\mathfrak{M})$ cumple (C.5).

Veamos que $Teo(\mathfrak{M})$ cumple (C.6). Sea $U \subseteq Q_{\tau_1}(Teo(\mathfrak{M})) \times \cdots \times Q_{\tau_k}(Teo(\mathfrak{M}))$ y definamos

$$s(U) = \{(s(q_1), \cdots, s(q_k)) \mid (q_1, \cdots, q_k) \in U\}$$

$$\text{y observe que } s(U) \in D_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle} = \wp(D_{\tau_1} \times \cdots \times D_{\tau_k}),$$

$$\text{como } s_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle} : Q_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle} \longrightarrow D_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle} \text{ es suprayectiva,}$$

se tiene que hay $q_0^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle} \in Q_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}$ tal que $s_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}(q_0^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}) = s(U)$.

Afirmamos que ese $q_0^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}$ que existe, cumple con las partes (a) y (b) de (C.6).

Para (a), sea $(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in U$, por demostrar que

$$q_0^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in Teo(\mathfrak{M}).$$

Si $(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in U$ entonces por como se construyó a $s(U)$, se tiene que:

$$(s(q_1^{\tau_1}), \cdots, s(q_k^{\tau_k})) \in s(U) = s_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}(q_0^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle})$$

$$\text{si y sólo si } \mathfrak{M} \models q_0^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \text{ por (T.q)}$$

$$\text{si y sólo si } q_0^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in Teo(\mathfrak{M}) \text{ por definición de } Teo(\mathfrak{M}).$$

Para la parte (b), tome $q_0^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}(q_{i_1}^{\tau_1}, \cdots, q_{i_k}^{\tau_k}) \in Teo(\mathfrak{M})$, por demostrar que

$$\text{existe } (q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in U \text{ tal que } \{q_{i_1}^{\tau_1} = q_1^{\tau_1}, \cdots, q_{i_k}^{\tau_k} = q_k^{\tau_k}\} \in Teo(\mathfrak{M}).$$

Ahora bien, $q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_{i_1}^{\tau_1},\cdots,q_{i_k}^{\tau_k}) \in Teo(\mathfrak{M})$

$$\text{si y sólo si } \mathfrak{M} \models q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_{i_1}^{\tau_1},\cdots,q_{i_k}^{\tau_k}) \text{ por definición de } Teo(\mathfrak{M})$$

$$\text{si y sólo si } (s(q_{i_1}^{\tau_1}),\cdots,s(q_{i_k}^{\tau_k})) \in s(q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}) = s(U) \text{ por (T.q)}$$

$$\text{por lo que } (s(q_{i_1}^{\tau_1}),\cdots,s(q_{i_k}^{\tau_k})) \in s(U)$$

$$\text{luego, existe } (q_1^{\tau_1},\cdots,q_k^{\tau_k}) \in U \text{ tal que } (s(q_1^{\tau_1}),\cdots,s(q_k^{\tau_k})) =(s(q_{i_1}^{\tau_1}),\cdots,s(q_{i_k}^{\tau_k}))$$

$$\text{si y sólo si } s(q_1^{\tau_1}) = s(q_{i_1}^{\tau_1}),\cdots,s(q_k^{\tau_k}) = s(q_{i_k}^{\tau_k})$$

$$\text{si y sólo si } \mathfrak{M} \models q_1^{\tau_1} = q_{i_1}^{\tau_1},\cdots,\mathfrak{M} \models q_k^{\tau_k} = q_{i_k}^{\tau_k} \text{ por (T.=)}$$

$$\text{si y sólo si } q_1^{\tau_1} = q_{i_1}^{\tau_1} \in Teo(\mathfrak{M}),\cdots,q_k^{\tau_k} = q_{i_k}^{\tau_k} \in Teo(\mathfrak{M}) \text{ por definición de } Teo(\mathfrak{M})$$

Ahora veamos (C.7), para esto supongamos que $q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ y $q_1^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ cumplen las partes (a) y (b) de (C.6) *respecto a un mismo* U$\subseteq$ $Q_{\tau_1}(Teo(\mathfrak{M})) \times \cdots \times Q_{\tau_k}(Teo(\mathfrak{M}))$, luego se tiene:

$$s(q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}) = s(U) = s(q_1^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle})$$

de aqui que: $s(q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}) = s(q_1^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle})$

$$\text{entonces } \mathfrak{M} \models q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} = q_1^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \text{ debido a (T.=)}$$

$$\text{así } q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} = q_1^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \in Teo(\mathfrak{M}) \text{ por definición de } Teo(\mathfrak{M}).$$

Completando así, la prueba de la Proposición 2.14.

$\dashv$

Más aún, lo que nos dice esta proposición es que, por cada modelo $\mathfrak{M}$ hay un conjunto de fórmulas $Teo(\mathfrak{M})$ que cumple las condiciones (C.0)(a) , ... , (C.4)(a) , (C.5) (C.6) y (C.7) .

Por otra parte, a cada conjunto no vacío D_τ, podemos asignarle un modelo $\mathfrak{M} = \{D_\tau, s\}$ dado que pedimos que la cantidad de constantes q^{τ_i} siempre sean suficientes para hablar de los elementos de D_{τ_i}, siempre será posible encontrar funciones s_{τ_i}:$Q_{\tau_i}\to D_{\tau_i}$ suprayectivas. Así que hay tantos Conjuntos Modelo como conjuntos no vacíos, luego la colección:

$$\{\Sigma \subseteq \tau - fórm \mid \Sigma \text{ es Conjunto Modelo}\}$$

es una clase propia.

2.3. Satisfactibilidad

En la siguiente proposición comenzaremos con un *Conjunto Modelo* Σ y construiremos un modelo $\mathfrak{M}_\Sigma$ que lo satisfaga. Para esto se dividirá el conjunto

$$Q(\Sigma)= \bigcup\{Q_{\tau_i}(\Sigma) \mid \tau_i \in S_{\tau_i}\}$$

en clases de equivalencia, de la siguiente manera:

$$q_1^{\tau_i} \sim q_2^{\tau_i} \text{ si y sólo si } q_1^{\tau_i} = q_2^{\tau_i} \in \Sigma$$

Ejercicio 2.15. *Demuestre que esta relación es de equivalencia.*

Adoptamos la notación $\overline{q}^{\tau_i}$, para la clase de equivalencia de q^{τ_i}.

Proposición 2.16. *Si Σ es un Conjunto Modelo entonces es satisfactible*

Demostración .

Una vez, que partimos a $Q(\Sigma)$ en clases de equivalencia, definimos nuestro universo del tipo individual para el modelo que propondremos

$$D_\tau = \{\overline{q}^\tau \mid q^\tau \in Q_\tau(\Sigma)\ \}.$$

Esto determina la jerarquía de dominios $\{D_{\tau_i} \mid \tau_i \in S_\tau\}$.

En base a esta definición podemos establecer la siguiente correspondencia:

Para el símbolo primitivo τ

$$\overline{s}_\tau : \overline{Q}_\tau \longrightarrow D_\tau \cup \{\varnothing\}$$

$$\overline{q}^\tau \longmapsto \overline{s}_\tau(\overline{q}^\tau) = \overline{q}^\tau \qquad \text{si } q^\tau \in Q_\tau(\Sigma)$$

$$\overline{q}^\tau \longmapsto \overline{s}_\tau(\overline{q}^\tau) = \varnothing \qquad \text{si } q^\tau \notin Q_\tau(\Sigma)$$

Si $\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle \in S_\tau$ entonces:

$$\overline{s}_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle} : \overline{Q}_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle} \longrightarrow D_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}$$

$$\overline{q}^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle} \longmapsto \overline{s}_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}(\overline{q}^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle})$$

donde $\overline{s}_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(\overline{q}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}) \subseteq D_{\tau_1} \times \cdots \times D_{\tau_k}$ es el conjunto:

$$\left\{ (\overline{s}_{\tau_1}(\overline{q}_1^{\tau_1}), \cdots, \overline{s}_{\tau_k}(\overline{q}_k^{\tau_k})) \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{hay } q_i^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \in \overline{q}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}, q_{i_1}^{\tau_1} \in \overline{q_1}^{\tau_1}, \cdots, q_{i_k}^{\tau_k} \in \overline{q_k}^{\tau_k} \\ \text{tal que } q_i^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_{i_1}^{\tau_1}, \cdots, q_{i_k}^{\tau_k}) \in \Sigma \end{array} \right\}$$

Por comodidad omitiremos el subíndice de la función $\overline{s}$, pues el *tipo* de la constante a la que sea aplicada redunda con él.

Observemos que a toda clase de equivalencia $\overline{q}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ le corresponde al menos un miembro del dominio $D_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$, pues si para algún $q^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ sucediera que ninguna fórmula de la forma $q^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k})$ ocurre en Σ entonces $\overline{s}(\overline{q}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle})$ es el conjunto vacío de cadenas $(\overline{s}(\overline{q}_1^{\tau_1}), \cdots, \overline{s}(\overline{q}_k^{\tau_k}))$.

Por definición: si hay $q_i^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \in \overline{q}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}, q_{i_1}^{\tau_1} \in \overline{q_1}^{\tau_1}, \cdots, q_{i_k}^{\tau_k} \in \overline{q_k}^{\tau_k}$

$$\text{tal que } q_i^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_{i_1}^{\tau_1}, \cdots, q_{i_k}^{\tau_k}) \in \Sigma \text{ entonces}$$

$$(\overline{s}(\overline{q}_1^{\tau_1}), \cdots, \overline{s}(\overline{q}_k^{\tau_k})) \in \overline{s}(\overline{q}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle})$$

Inversamente: si hay $q_i^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \in \overline{q}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}, q_{i_1}^{\tau_1} \in \overline{q_1}^{\tau_1}, \cdots, q_{i_k}^{\tau_k} \in \overline{q_k}^{\tau_k}$

$$\text{tal que } (\overline{s}(\overline{q}_1^{\tau_1}), \cdots, \overline{s}(\overline{q}_k^{\tau_k})) \in \overline{s}(\overline{q}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}) \text{ entonces}$$

$$q_i^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_{i_1}^{\tau_1}, \cdots, q_{i_k}^{\tau_k}) \in \Sigma.$$

Esto se debe a que:

$$q_i^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \in \overline{q}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \text{ si y sólo si } q_i^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} = q^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \in \Sigma$$

$$q_{i_1}^{\tau_1} \in \overline{q_1}^{\tau_1} \text{ si y sólo si } q_{i_1}^{\tau_1} = q_1{}^{\tau_1} \in \Sigma$$

$$\vdots$$

$$q_{i_k}^{\tau_k} \in \overline{q_k}^{\tau_k} \text{ si y sólo si } q_{i_k}^{\tau_k} = q_k{}^{\tau_k} \in \Sigma$$

Dado que:

$$(\overline{s}(\overline{q}_1^{\tau_1}), \cdots, \overline{s}(\overline{q}_k^{\tau_k})) \in \overline{s}(\overline{q}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}) \text{ si y sólo si}$$

hay $q_l^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \in \overline{q}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}, q_{l_1}^{\tau_1} \in \overline{q_1}^{\tau_1}, \cdots, q_{l_k}^{\tau_k} \in \overline{q_k}^{\tau_k}$

$$\text{tal que } q_l^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_{l_1}^{\tau_1}, \cdots, q_{l_k}^{\tau_k}) \in \Sigma \cdots (*)$$

y, por definición de la clase de equivalencia (ejercicio 2.15), tenemos que:

$$\{q_i^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}, q_l^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}\} \subseteq \overline{q}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \text{ implica } q_i^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} = q_l{}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \in \Sigma$$

$$\{q_{i_1}^{\tau_1}, q_{l_1}^{\tau_1}\} \subseteq \overline{q_1}^{\tau_1} \text{ implica } q_{i_1}^{\tau_1} = q_{l_1}{}^{\tau_1} \in \Sigma$$

$$\vdots$$

$$\{q_{i_k}^{\tau_k}, q_{l_k}^{\tau_k}\} \subseteq \overline{q_1}^{\tau_1} \text{ implica } q_{i_k}^{\tau_k} = q_{l_k}{}^{\tau_k} \in \Sigma$$

Usando estas identidades y aplicando $k+1$ veces la condición (C.5) a la afirmación (*), obtenemos:

$$q_i^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_{i_1}^{\tau_1}, \cdots, q_{i_k}^{\tau_k}) \in \Sigma$$

Ahora bien, afirmamos que la función $\overline{s} : \overline{Q}_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \longrightarrow D_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ es *inyectiva*:

Tomemos $\overline{s}(\overline{q_0}) = \overline{s}(\overline{q_1})$ y considere los conjuntos:

$$U_0 = \{(q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \mid q_0(q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \in \Sigma\} \subseteq Q_{\tau_1}(\Sigma) \times \cdots \times Q_{\tau_k}(\Sigma)$$

$$U_1 = \{(q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \mid q_1(q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \in \Sigma\} \subseteq Q_{\tau_1}(\Sigma) \times \cdots \times Q_{\tau_k}(\Sigma)$$

Se afirma que: $U_0 = U_1$. Para esto tomemos $(q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \in U_0$, entonces

$$(q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \in U_0 \Longleftrightarrow^{Def} q_0(q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \in \Sigma$$

$$\Longleftrightarrow (\overline{s}_{\tau_1}(\overline{q}_{i_1}), \cdots, \overline{s}(\overline{q}_{i_k})) \in \overline{s}(\overline{q_0}) = \overline{s}(\overline{q_1})$$

$$\Longleftrightarrow q_1(q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \in \Sigma \Longleftrightarrow^{Def} (q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \in U_1$$

Así que:

$$(q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \in U_0 \Longleftrightarrow (q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \in U_1$$

De esta manera tenemos que tanto q_0 como q_1 cumplen (C.6) respecto a un mismo conjunto $U_0 = U_1$, entonces por (C.7):

$$q_0 = q_1 \in \Sigma$$

por definición concluímos que:

$$\overline{q_0} = \overline{q_1}$$

Así, la función $\overline{s}$ es inyectiva.

La función $\overline{s} : \overline{Q}_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \longrightarrow D_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ es suprayectiva.

Tomemos cualquier $E \in D_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ y *definamos*:

$$U = \{(q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \mid q_{i_1} \in \overline{q_1}, \cdots, q_{i_k} \in \overline{q_k}, (\overline{s}(\overline{q_1}), \cdots, \overline{s}(\overline{q_k})) \in E\}$$

Observe que $U \subseteq Q_{\tau_1}(\Sigma) \times \cdots \times Q_{\tau_k}(\Sigma)$, y como Σ cumple (C.6) entonces:

existe $q \in Q_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ tal que:

$$\text{(a) } (q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \in U \Longrightarrow q(q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \in \Sigma$$

$$\text{(b) } q(q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \in \Sigma \Longrightarrow \text{existe } (q_{j_1}, \cdots, q_{j_k}) \in U \text{ tal que}$$

$$\{q_{j_1} = q_{i_1}, \cdots, q_{j_k} = q_{i_k}\} \subseteq \Sigma$$

Afirmamos que $\overline{s}(\overline{q}) = E$

Sea $(\overline{s}(\overline{q_1}), \cdots, \overline{s}(\overline{q_k})) \in \overline{s}(\overline{q}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle})$

$\Longleftrightarrow^{def.}$ hay $q_i \in \overline{q}$, $q_{i_1} \in \overline{q_1}, \cdots, q_{i_k} \in \overline{q_k}$ tal que $q_i(q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \in \Sigma$

$\Longrightarrow^{(C,6)(b)}$ existe $(q_{j_1}, \cdots, q_{j|_k}) \in U$ tal que $\{q_{j_1} = q_{i_1}, \cdots, q_{j_k} = q_{i_k}\} \subseteq \Sigma$

$\Longrightarrow^{(q_{j_1},\cdots,q_{j_k})\in U}$ existe $(q_{j_1}, \cdots, q_{j_k}) \in U$ tal que $q_{j_1} \in \overline{q_1}, \cdots, q_{j_k} \in \overline{q_k}$

y $(\overline{s}(\overline{q_1}), \cdots, \overline{s}(\overline{q_k})) \in E$

Ahora bien, recordemos que sin pérdida de generalidad, estamos suponiendo que todo Conjunto Modelo contiene a

$$\{(q^\tau = q^\tau) \mid q^\tau \in Q_\tau(\Sigma) \text{ y } \tau \text{ es del tipo individual }\}$$

esto nos lleva a que

$$\{q_1 = q_1, \cdots, q_k = q_k\} \subseteq \Sigma$$

por lo que

$$q_1 \in \overline{q_1}, \cdots, q_k \in \overline{q_k},$$

así:

$$(\overline{s}(\overline{q_1}),\cdots,\overline{s}(\overline{q_k}))\in E \Longrightarrow^{def:U} (q_1,\cdots,q_k)\in U$$

$\Longrightarrow^{(C,6)(a)}$ existe $q^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}\in Q_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ tal que $q^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_1,\cdots,q_k)\in\Sigma$

$\Longleftrightarrow^{def:}$ $(\overline{s}(\overline{q_1}),\cdots,\overline{s}(\overline{q_k}))\in\overline{s}(\overline{q}^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle})$

La correspondencia $\overline{s_\tau}:\overline{Q_\tau}\to D_\tau$ puede ser usada para definir $s_\tau:Q_\tau\to D_\tau$.

Si q^τ tiene presencia en las fórmulas de Σ simplemente tomemos:

$$s(q^\tau)=\overline{s}(\overline{q}^\tau)$$

Si q^τ *no* tiene presencia en las fórmulas de Σ entonces

$$\overline{q}^\tau=\{q_i^\tau\mid q^\tau=q_i^\tau\in\Sigma\}=\varnothing$$

de donde:

$$s(q^\tau)=\overline{s}(\overline{q}^\tau)=\overline{s}(\varnothing)=\varnothing$$

Esta asignación determina todas las demás, es decir:

$$s_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}:Q_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(\Sigma)\longrightarrow D_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}=\wp(D_{\tau_1}\times\cdots\times D_{\tau_k})$$
$$q^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}\longmapsto s(q^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle})\subseteq D_{\tau_1}\times\cdots\times D_{\tau_k}$$

Veamos que $\mathfrak{M}$ satisface a Σ :

Mostraremos que

$$\text{Si } \alpha\in\Sigma \text{ entonces } \mathfrak{M}\models\alpha.$$

por inducción sobre el nivel de las fórmulas de Σ.

Si $N(\alpha)=0$, α es atómica o identidad:

$$q(q_1,\cdots,q_k)\in\Sigma\Longleftrightarrow(\overline{s}(\overline{q_1}),\cdots,\overline{s}(\overline{q_k}))\in\overline{s}(\overline{q})$$
$$\Longleftrightarrow^{s(q_i)=\overline{s}(\overline{q_i})}(s(q_1),\cdots,s(q_k))\in s(q)$$

$$\Longleftrightarrow^{(T.q)} \{D_\tau, s\} \models q(q_1, \cdots, q_k)$$

$$q_1 = q_2 \in \Sigma \Longleftrightarrow \overline{s}(\overline{q_1}) = \overline{s}(\overline{q_2})$$

$$\Longleftrightarrow^{s(q_i)=\overline{s}(\overline{q_i})} s(q_1) = s(q_2) \Longleftrightarrow^{(T.5)} \{D_\tau, s\} \models q_1 = q_2$$

Si $N(\alpha) = 1$, α es negación de atómica o negación de identidad:

$$\neg q(q_1, \cdots, q_k) \in \Sigma \Longrightarrow^{(C,0)(a)} q(q_1, \cdots, q_k) \notin \Sigma$$

$$\Longleftrightarrow (\overline{s}(\overline{q_1}), \cdots, \overline{s}(\overline{q_k})) \notin \overline{s}(\overline{q})$$

$$\Longleftrightarrow^{s(q_i)=\overline{s}(\overline{q_i})} (s(q_1), \cdots, s(q_k)) \notin s(q)$$

$$\Longleftrightarrow^{(T.q)} \{D_\tau, s\} \not\models q(q_1, \cdots, q_k)$$

$$\Longleftrightarrow^{(T.\neg)} \{D_\tau, s\} \models \neg q(q_1, \cdots, q_k)$$

$$q_1 \neq q_2 \in \Sigma \Longrightarrow^{(C.0)(a)} q_1 = q_2 \notin \Sigma$$

$$\Longleftrightarrow \overline{s}(\overline{q_1}) \neq \overline{s}(\overline{q_2})$$

$$\Longleftrightarrow^{s(q_i)=\overline{s}(\overline{q_i})} s(q_1) \neq s(q_2) \Longleftrightarrow^{(T.5)} \{D_\tau, s\} \models q_1 \neq q_2$$

Supongamos que α y β cumplen:

$$\text{Si } \alpha \in \Sigma \text{ entonces } \mathfrak{M} \models \alpha$$

$$\text{Si } \beta \in \Sigma \text{ entonces } \mathfrak{M} \models \beta$$

Mostremos que :

$$\alpha \wedge \beta \in \Sigma \Longrightarrow^{(C.1)(a)} \alpha \in \Sigma \text{ y } \beta \in \Sigma$$

$$\Longleftrightarrow^{Hip.} \mathfrak{M} \models \alpha \text{ y } \mathfrak{M} \models \beta$$

$$\Longleftrightarrow^{(T.\wedge)} \mathfrak{M} \models \alpha \wedge \beta$$

$$\alpha \vee \beta \in \Sigma \Longrightarrow^{(C.2)(a)} \alpha \in \Sigma \text{ o bien } \beta \in \Sigma$$

$$\Longleftrightarrow^{Hip.} \mathfrak{M} \models \alpha \text{ o bien } \mathfrak{M} \models \beta$$

$$\Longleftrightarrow^{(T.\vee)} \mathfrak{M} \models \alpha \vee \beta$$

$$\exists v^{\tau_i}\alpha \in \Sigma \Longrightarrow^{(C.3)(a)} \text{existe } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i} \text{ tal que } \alpha(q^{\tau_i}) \in \Sigma$$

$$\Longleftrightarrow^{Hip.} \text{existe } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i} \text{ tal que } \mathfrak{M} \models \alpha(q^{\tau_i})$$

$$\Longleftrightarrow^{(T.\exists)} \mathfrak{M} \models \exists v^{\tau_i}\alpha$$

$$\forall v^{\tau_i}\alpha \in \Sigma \Longrightarrow^{(C.4)(a)} \text{para toda } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Sigma) \text{ sucede que } \alpha(q^{\tau_i}) \in \Sigma$$

Ahora bien, dada $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$, tenemos dos casos:

$$q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Sigma) \text{ o bien } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i} \setminus \Sigma$$

Si $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Sigma)$ entonces $\alpha(q^{\tau_i}) \in \Sigma$ y por hipótesis inductiva $\mathfrak{M} \models \alpha(q^{\tau_i})$.

Si $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i} \setminus \Sigma$, entonces

$$s(q^{\tau_i}) = \varnothing$$

Por su parte, si hacemos uso de (C.6)(a)(b) y (C.7) tenemos que hay $q^{\tau_i}_{\varnothing} \in Q_{\tau_i}$ tal que:

$$q^{\tau_i}_{\varnothing} = q^{\tau_i}_{\varnothing} \in \Sigma$$

de donde

$$q^{\tau_i}_{\varnothing} \in Q_{\tau_i}(\Sigma) \text{ y } s(q^{\tau_i}_{\varnothing}) = \varnothing$$

por hipótesis inductiva $\mathfrak{M} \models \alpha(q^{\tau_i}_{\varnothing})$, luego

$$\mathfrak{M} \models \alpha(q^{\tau_i})$$

Concluimos que $\mathfrak{M}$ satisface a Σ.

$\dashv$

En la Proposición 2.16 no usamos (C.6) para símbolos de constante de *cualquier* tipo, sino que fué suficiente la condición para constantes de un símbolo de tipo que ya tenía presencia en Σ.

Si el lector revisa la condición (C.6), verá que el conjunto de constantes $U \subseteq Q_{\tau_1}(\Sigma) \times \cdots \times Q_{\tau_k}(\Sigma)$ es cualquiera, y *no se prohibe* que el símbolo $\langle \tau_1, ..., \tau_k \rangle$ sea símbolo de alguna constante o variable que tenga presencia en Σ. Diferenciamos de (C.6) a la condición (C.6)* que resulta de *restringir* dichos símbolos $\langle\tau_1, ..., \tau_k\rangle$ a los que tengan presencia en constantes o variables de Σ. Expuesto explícitamente:

(C.6)* Si $U \subseteq Q_{\tau_1}(\Sigma) \times \cdots \times Q_{\tau_k}(\Sigma)$ *y* el símbolo $\langle\tau_1, ..., \tau_k\rangle$ tiene presencia en alguna constante o variable de Σ

entonces existe $q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \in Q_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ que cumple las siguientes dos propiedades:

(C.6)(a) Si $(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in U$ entonces $q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in \Sigma$

(C.6)(b) Si $q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_{i_1}^{\tau_1}, \cdots, q_{i_k}^{\tau_k}) \in \Sigma$ entonces existe $(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in U$ tal que

$\{q_{i_1}^{\tau_1} = q_1^{\tau_1}, \cdots, q_{i_k}^{\tau_k} = q_k^{\tau_k}\} \subseteq \Sigma$

Decimos que un conjunto de fórmulas Σ es *Conjunto Modelo Restringido* si y sólo si cumple (C.0)(a),...,(C.4)(a), (C.5), (C.6)* y (C.7).

Nuevamente observemos que por definición, todo Conjunto Modelo es Conjunto Modelo Restringido. Sin embargo, no todo Conjunto Modelo Restringido es Conjunto Modelo. Tome por ejemplo, la teoría de cualquier modelo $Teo(\mathfrak{M})$ y restrínjala al lenguaje que utiliza únicamente los símbolos de tipo τ y $\langle\tau\rangle$, esto es:

$$Teo(\mathfrak{M}) \mid \{\tau, \langle\tau\rangle\}$$

Sea pues $U \subseteq Q_\tau(Teo(\mathfrak{M}) \mid \{\tau, \langle\tau\rangle\})$, entonces existe una constante $q_U^{\langle\tau\rangle}$ que cumple (C.6)*. Sin embargo, $Teo(\mathfrak{M}) \mid \{\tau, \langle\tau\rangle\}$ *no* es un Conjunto Modelo.

Ejercicio 2.17. *Muestre que si $\mathfrak{M}$ es cualquier modelo, $Teo(\mathfrak{M}) \mid \{\tau, \langle\tau\rangle\}$ no es Conjunto Modelo.*

El lector no debiera estar impresionado por el ejemplo anterior. Podemos pensar que un Conjunto Modelo Restringido esta limitado a los símbolos de tipo que en él aparecen; a pesar de esto, podemos siempre completarlo a un Conjunto Modelo que lo contenga.

Teorema 2.18. *Todo Conjunto Modelo Restringido está contenido en un Conjunto Modelo.*

Demostración .

Se construye un modelo $\mathfrak{M}$ para Γ el Conjunto Modelo Restringido en cuestión exactamente de la misma manera que en la Proposición 2.16. Luego por la Proposición 2.14 la teoría de $\mathfrak{M}$ es un Conjunto Modelo que contiene a Γ.

$\dashv$

La demostración de la Proposición 2.16 es similar a la que Henkin (véase [5]) dió para el Teorema de Completitud para la lógica de primer orden, en donde se parte de un conjunto de fórmulas consistente Δ y se construye un conjunto Maximal Consistente Σ *que contiene a* Δ y para él, *es construído un modelo* (véase [2]).

2.4. El Teorema I de Hintikka

Aquí presentamos el primer teorema del artículo *Reductions in type theory*, el cual relaciona los conceptos: Conjunto Modelo y Satisfactibilidad.

Teorema 2.19 (Teorema I)**.** Δ *es satisfactible si y sólo si hay un Conjunto Modelo* Σ *que contiene a* Δ*.*

Demostración .

($\Rightarrow$) Sea Δ un conjunto de fórmulas satisfactible, digamos por $\mathfrak{M}$.

Por la Proposición 2.14:

$$Teo(\mathfrak{M}) \text{ es un Conjunto Modelo}$$

y puesto que $\mathfrak{M}$ es modelo de Δ, tenemos que

$$\Delta \subseteq Teo(\mathfrak{M})$$

Por lo tanto, hay un Conjunto Modelo Σ que contiene a Δ.

($\Leftarrow$) Supongamos que Σ es un Conjunto Modelo que contiene a Δ.

Por la Proposición 2.16, hay un modelo $\mathfrak{M}$ que satisface a Σ y como $\Delta \subseteq \Sigma$, entonces $\mathfrak{M}$ satisface a Δ, de aquí que Δ es satisfactible.

$\dashv$

2.5. ¿Qué es un Conjunto Modelo Fuerte?

Si retomamos la demostración de la Proposición 2.14, veremos que en las condiciones (C.1)(a) y (C.3)(a) para $Teo(\mathfrak{M})$ se mostró suficiencia y necesidad:

(C.1) $\alpha \wedge \beta \in Teo(\mathfrak{M})$ si y sólo si $\alpha \in Teo(\mathfrak{M})$ y $\beta \in Teo(\mathfrak{M})$

(C.3) $\exists v^{\tau_i}\alpha \in Teo(\mathfrak{M})$ si y sólo si hay $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$ tal que $\alpha(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in Teo(\mathfrak{M})$.

Las siguientes condiciones son de alguna manera "el recíproco" de las condiciones (C.0)(a) , ... ,(C.4)(a):

(C.0)(b) Si todas las constantes de α tienen presencia en Σ y $\alpha \notin \Sigma$ entonces $\neg\alpha \in \Sigma$.

(C.1)(b) Si $\alpha \in \Sigma$ y $\beta \in \Sigma$ entonces $(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma$.

(C.2)(b) Si todas las constantes de $(\alpha \vee \beta)$ tienen presencias en Σ y $\alpha \in \Sigma$ o bien $\beta \in \Sigma$ entonces $(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$.

(C.3)(b) Si hay $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$ tal que $\alpha(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$ entonces $\exists v^{\tau_i}\alpha \in \Sigma$.

(C.4)(b) Si para todo $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Sigma)$ sucede que $\alpha(q^{\tau_i}|v^{\tau_i}) \in \Sigma$ entonces $\forall v^{\tau_i}\alpha \in \Sigma$.

Esto sugiere la siguiente pregunta:

¿Habrá conjuntos de fórmulas Σ que cumplan las condiciones de ser Conjunto Modelo y *además* "el recíproco" de las condiciones (C.0)(a) , ... ,(C.4)(a)? La respuesta es sí. Y el por qué, queda plasmado en la siguiente Proposición.

Proposición 2.20. *Si $\mathfrak{M}$ es un modelo en $Teo(\mathfrak{M})$ cumple las condiciones (C.0)(b), (C.1)(b),..., (C.4)(b).*

Demostración .

Sea $\mathfrak{M}$ un modelo y $Teo(\mathfrak{M})$ su teoría.

Ya hemos observado que $Teo(\mathfrak{M})$ cumple (C.1)(b) y (C.3)(b), ahora veamos:

(C.0)(b) Procedamos por reducción al absurdo, supongamos que todas las constantes de α tienen presencia en $Teo(\mathfrak{M})$ y

$$\alpha \notin Teo(\mathfrak{M}) \; ...(*)$$

y además que

$$\neg\alpha \notin Teo(\mathfrak{M})$$

así que, por definición de $Teo(\mathfrak{M})$

$$\mathfrak{M} \not\models \neg\alpha$$

de la definición de verdad (T. $\neg$) y del hecho de que todas las constantes de α tienen presencia en $Teo(\mathfrak{M})$

$$\mathfrak{M} \models \alpha$$

nuevamente por definición de $Teo(\mathfrak{M})$

$$\alpha \in Teo(\mathfrak{M})$$

lo cual contradice nuestra hipótesis (*).

Veamos (C.2)(b): tambien por reducción al absurdo, supongamos que todas las constantes de $(\alpha \vee \beta)$ tienen presencias en $Teo(\mathfrak{M})$ y

$$\alpha \in Teo(\mathfrak{M}) \text{ o bien } \beta \in Teo(\mathfrak{M}) \; ... \; (**)$$

pero que no sucede

$$(\alpha \vee \beta) \in Teo(\mathfrak{M}).$$

por (C.0)(b)

$$\neg(\alpha \vee \beta) \in Teo(\mathfrak{M})$$

por nuestra definición de Forma Normal Negativa

$$\neg\alpha \wedge \neg\beta \in Teo(\mathfrak{M})$$

recordemos que $Teo(\mathfrak{M})$ cumple (C.1)(a), así que

$$\neg\alpha \in Teo(\mathfrak{M}) \text{ y } \neg\beta \in Teo(\mathfrak{M})$$

por definición de $Teo(\mathfrak{M})$

$$\mathfrak{M} \models \neg\alpha \text{ y } \mathfrak{M} \models \neg\beta$$

por la definición de verdad (T.$\neg$)

$$\mathfrak{M} \not\models \alpha \text{ y } \mathfrak{M} \not\models \beta$$

y nuevamente por la definición de $Teo(\mathfrak{M})$

$$\alpha \notin Teo(\mathfrak{M}) \text{ y } \beta \notin Teo(\mathfrak{M})$$

contra nuestra hipótesis (**).

Mostremos (C.4)(b) también por reducción al absurdo: supongamos que

para todo $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(Teo(\mathfrak{M}))$ sucede que $\alpha(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in Teo(\mathfrak{M})$ ... (***)

sin embargo no sucede

$$\forall v^{\tau_i}\alpha \in Teo(\mathfrak{M}).$$

por (C.0)(b) y dado que todas las constantes de $\forall v^{\tau_i}\alpha$ tienen presencia en $Teo(\mathfrak{M})$

$$\neg\forall v^{\tau_i}\alpha \in Teo(\mathfrak{M}).$$

por la definición de Forma Normal Negativa

$$\exists v^{\tau_i}\neg\alpha \in Teo(\mathfrak{M}).$$

por definición de $Teo(\mathfrak{M})$

$$\mathfrak{M} \models \exists v^{\tau_i}\neg\alpha.$$

de la definición de verdad (T.$\exists$)

$$\text{hay } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i} \text{ tal que } \mathfrak{M} \models \neg\alpha\ (v^{\tau_i} \mid q^{\tau_i}).$$

de la definición de $Teo(\mathfrak{M})$

$$\text{hay } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i} \text{ tal que } \neg\alpha\ (v^{\tau_i} \mid q^{\tau_i}) \in Teo(\mathfrak{M}).$$

de aquí que q^{τ_i} sea una contante de $Teo(\mathfrak{M})$, por lo que

$$\text{hay } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(Teo(\mathfrak{M})) \text{ tal que } \neg\alpha\ (v^{\tau_i} \mid q^{\tau_i}) \in Teo(\mathfrak{M}).$$

de la definición de $Teo(\mathfrak{M})$

$$\text{hay } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(Teo(\mathfrak{M})) \text{ tal que } \alpha\ (v^{\tau_i} \mid q^{\tau_i}) \notin Teo(\mathfrak{M}).$$

contradiciendo nuestra hipótesis (***).

$\dashv$

Por lo que la respuesta a la pregunta es *sí*, la teoría de cualquier modelo cumple ser Conjunto Modelo y además las condiciones (b).

A los conjuntos que cumplan con estas condiciones les llamaremos *Conjuntos Modelo Fuertes*.

El siguiente ejercicio es análogo a la Proposición 2.4.

Ejercicio 2.21. *Demuestre que las siguientes condiciones son consecuencia de la definición de Forma Normal Negativa y de las condiciones (C.0)(b) , ... , (C.4)(b).*

(C.00)(b) Si $\alpha \in \Sigma$ entonces $\neg\neg\alpha \in \Sigma$;

(C.01)(b) Si $\neg\alpha \in \Sigma$ o bien $\neg\beta \in \Sigma$ entonces $\neg(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma$;

(C.02)(b) Si $\neg\alpha \in \Sigma$ y $\neg\beta \in \Sigma$ entonces $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$;

(C.03)(b) Si $\neg\alpha(q^\tau|v^\tau) \in \Sigma$ entonces $\neg\exists v^\tau\ \alpha \in \Sigma$ y $q^\tau \in Q_\tau(\Sigma)$;

(C.04)(b) Si $\neg\alpha(q^\tau|v^\tau) \in \Sigma$ para algún $q^\tau \in Q_\tau(\Sigma)$ entonces $\neg\forall v^\tau\ \alpha \in \Sigma$.

En resumen, un Conjunto Modelo Fuerte cumple las condiciones (C.0), ... ,(C.4) (a) y (b), (C.5), (C.6) y (C.7). Además, por la Proposición 2.4 y el ejercicio 2.21 cumplen las condiciones (C.00), ... ,(C.04) (a) y (b)[1].

Por definición, todo Conjunto Modelo Fuerte es un Conjunto Modelo. Sin embargo, no todo Conjunto Modelo es un Conjunto Modelo Fuerte. Sea $\mathfrak{M}$ un modelo cualquiera, y considere por ejemplo el conjunto:

$$\Sigma = Teo(\mathfrak{M}) \setminus \{q_0^{\langle\tau\rangle} = q_0^{\langle\tau\rangle}\}$$

Observemos que la fórmula:

[1] Se han copiado las condiciones de Conjunto Modelo (Fuerte) en el Apéndice, para una mejor localización de éstas.

$$\neg(q_0^{\langle\tau\rangle} = q_0^{\langle\tau\rangle}) \notin \Sigma$$

Pero su negación $q_0^{\langle\tau\rangle} = q_0^{\langle\tau\rangle}$ tampoco está en Σ. Por lo que Σ no cumple (C.0)(b) y no es un Conjunto Modelo Fuerte. Ahora sólo resta mostrar que:

Ejercicio 2.22. *Muestre que Σ es un Conjunto Modelo.*

2.6. El Teorema I** de Hintikka

Con lo expuesto anteriormente, y de la demostración del *Teorema* 2.19 podemos tomar una prueba de la siguiente variante:

Teorema 2.23 (Teorema I**). *Δ es satisfactible si y sólo si*

hay un Conjunto Modelo Fuerte Σ que contiene a Δ.

Demostración .

($\Rightarrow$) Sea Δ un conjunto satisfactible, digamos por $\mathfrak{M}$, de las proposiciónes 2.14 y 2.20, $Teo(\mathfrak{M})$ es un Conjunto Modelo Fuerte que contiene a Δ.

($\Leftarrow$) Supongamos que hay un Conjunto Modelo Fuerte Σ que contiene a Δ. Por definición, todo Conjunto Modelo Fuerte es Conjunto Modelo, así tenemos que: hay un Conjunto Modelo Σ que contiene a Δ, y por el Teorema I (2.19) Δ es satisfactible.

$\dashv$

De hecho podemos pensar que un conjunto de fórmulas Σ es un *Conjunto Modelo Fuerte* si y sólo si Σ es, para un modelo conveniente, la teoría de dicho modelo. Para esto es necesario pedir que la sustitución sea sólo entre constantes que tengan presencias en las fórmulas de la teoría. Lo dicho anteriormente puede resumirse así:

Si partimos de un Conjunto Modelo Fuerte Σ y observamos que él se contiene a sí mismo, tenemos que, por el *Teorema I*** (2.23), Σ es satisfactible digamos por $\mathfrak{M}$, y por las proposiciónes 2.14 y 2.20, $Teo(\mathfrak{M})$ es un Conjunto Modelo Fuerte tal que $\Sigma \subseteq Teo(\mathfrak{M})$.

Ejercicio 2.24. *Muestre que si Σ cumple $(C.0)(b)$ y $\Sigma \subseteq Teo(\mathfrak{M})$ entonces $Teo(\mathfrak{M}) \subseteq \Sigma$*

De esta manera podemos concluir:

Teorema 2.25. *Si Σ es un Conjunto Modelo Fuerte entonces*

$$\textit{hay un modelo } \mathfrak{M} \textit{ tal que } \Sigma = Teo(\mathfrak{M})$$

La moraleja del Teorema 2.25, es simple:

" Podemos pensar a un Conjunto Modelo Fuerte como la teoría de un modelo. "

Los siguientes Lemas son válidos para Conjuntos Modelo Fuertes, y su demostración se dejan al lector.

Lema 2.26 (Lema II). *Una fórmula de la forma*

$$\forall v_1^{\tau_1} \cdots \forall v_k^{\tau_k} \ (\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \to \beta)$$

está en un Conjunto Modelo Fuerte Σ *si y sólo si*

para toda $q_1^{\tau_1} \in Q_{\tau_1}(\Sigma)$, para toda $q_2^{\tau_2} \in Q_{\tau_2}(\Sigma)$, $\cdots$, para toda $q_k^{\tau_k} \in Q_{\tau_k}(\Sigma)$,

$$\begin{gathered} \alpha_1(v_1^{\tau_1}, \cdots, v_k^{\tau_k} \mid q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in \Sigma \\ \vdots \\ \alpha_n(v_1^{\tau_1}, \cdots, v_k^{\tau_k} \mid q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in \Sigma \end{gathered}$$

implica que:

$$\beta(v_1^{\tau_1}, \cdots, v_k^{\tau_k} \mid q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in \Sigma$$

Lema 2.27 (Lema III).

Una fórmula de la forma

$$\forall v^{\tau_i} \ (\alpha \leftrightarrow \beta)$$

está en un Conjunto Modelo Fuerte Σ si y sólo si
para toda $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Sigma)$ se tiene que $\alpha(v^{\tau_i})$ y $\beta(v^{\tau_i})$ estan en Σ simultáneamente.

Ejercicio 2.28. *Demuestre los Lemas 2.26 y 2.27.*

Al revisar las demostraciones de los *Teoremas I y I*** nos daremos cuenta de que hemos implícitamente probado el siguiente:

Teorema 2.29. *Todo Conjunto Modelo puede ser encajado en un Conjunto Modelo Fuerte, sin indroducir nuevas constantes individuales.*

Demostración .

Sea Δ un Conjunto Modelo, por el Teorema I (2.19), Δ es satisfactible, digamos por $\mathfrak{M}$, por el Teorema I** (2.23) tenemos que

$$Teo(\mathfrak{M}) \text{ es un Conjunto Modelo Fuerte que contiene a } \Delta.$$

$\dashv$

Utilizaremos estos resultados en el siguiente capítulo. Veremos el poder de los Conjuntos Modelo (Fuertes) sobre todo en el teorema principal de este escrito, por lo pronto tomemos conciencia de que conjuntos de fórmulas que cumplen un número finito de ciertas condiciones son conjuntos satisfactibles.

Capítulo 3

La reconstrucción de la teoría de tipos

Recordemos que nuestro *objetivo último* es reconstruir la lógica de la teoría de tipos dentro de la lógica de segundo orden. Hablando de manera informal, el plan de nuestra reconstrucción es como sigue:

0) Pensaremos que nuestras variables individuales correrán sobre *todas* las cadenas finitas de elementos de los diferentes tipos.

1) Se usarán cinco *predicados constantes* para la reconstrucción:

$I(a)$ nos dirá que a es una cadena de exactamente un elemento que pertenece al tipo de individuos, " $a = (q^{\tau})$ ".

$F(a,b)$ dice que el tipo de b es $\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle$: $b = q^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}$; mientras que a es una k-cadena construida con elementos de los tipos $\tau_1, \cdots, \tau_k$ respectivamente; " $a = (q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k})$ ".

$G(a,b)$ dice que $F(a,b)$ y que la relación b susbsiste entre los elementos de la cadena a. Informalmente "$(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in q^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}$".

$H(a,b)$ significa que a y b son k-cadenas, cuyos respectivos elementos pertenecen al *mismo* tipo; "$a = (q_a^{\tau_1}, \cdots, q_a^{\tau_k})$" y "$b = (q_b^{\tau_1}, \cdots, q_b^{\tau_k})$".

$J(a,b,c)$ significará que a es una 1-cadena " $a = (q_a^{\tau_1})$ ", mientras que "$b = (q_b^{\tau_2}, \cdots, q_b^{\tau_k})$" y la k-cadena c es obtenida de la concatenación de las cadenas a y b, en ese orden; "$c = (q_a^{\tau_1}, q_b^{\tau_2}, \cdots, q_b^{\tau_k})$".

Estos predicados pueden ser usados para construir una familia de fórmulas que dependan sólo de una constante individual, $T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a)$, una para cada k-cadena $(\tau_1,\cdots,\tau_k)$ de tipo de símbolos. Intuitvamente $T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a)$ significará que a es una k-cadena obtenida concatenando elementos de los tipos $\tau_1,\cdots,\tau_k$, en ese orden. Esto puede ser logrado de la siguiente manera:

$T_\tau(a)$ es por definición $I(a)$;

Si $2 \leq k$ entonces $T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a)$ se define como:

$$\exists x \exists y (T_{\tau_1}(x) \wedge T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(y) \wedge J(x,y,a));$$

$T_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(a)$ se define como:

$$\exists y (T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(y) \wedge F(y,a));$$

3.1. La fórmula δ

A continuación definiremos la fórmula δ como la conjunción de las siguientes fórmulas:

$\delta_{11} : \forall x \forall y (I(x) \wedge I(y) \rightarrow H(x,y))$

$\delta_{12} : \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w (J(x,y,v) \wedge J(z,u,w) \wedge H(x,z) \wedge H(y,u) \rightarrow H(v,w))$

$\delta_{13} : \forall x \forall y \forall z \forall u (F(x,y) \wedge F(z,u) \wedge H(x,z) \rightarrow H(y,u))$

$\delta_{21} : \forall x \forall y \forall z (J(x,y,z) \rightarrow \neg I(z))$

$\delta_{22} : \forall z \forall u (I(z) \rightarrow \neg F(u,z))$

$\delta_{23} : \forall x \forall y \forall z \forall u (F(u,z) \rightarrow \neg J(x,y,z))$

$\delta_{31} : \forall x \forall y (I(x) \wedge H(x,y) \rightarrow I(y))$

$\delta_{321} : \forall x \forall y \forall v \forall w (J(x,y,v) \wedge H(v,w) \rightarrow \exists z \exists u J(z,u,w))$

$\delta_{322} : \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w (J(x,y,v) \wedge J(z,u,w) \wedge H(v,w) \rightarrow H(x,z) \wedge H(y,u))$

$\delta_{331} : \forall x \forall y \forall u (F(x,y) \wedge H(y,u) \rightarrow \exists z F(z,u))$

$\delta_{332} : \forall x \forall y \forall z \forall u (F(x,y) \wedge F(z,u) \wedge H(y,u) \rightarrow H(x,z))$

$\delta_{41} : \forall x \forall y \forall z \forall u (J(x,y,z) \wedge J(x,y,u) \rightarrow z = u)$

$\delta_{42} : \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v (J(x,y,v) \wedge J(z,u,v) \rightarrow x = z \wedge y = u)$

$\delta_{51} : \forall x \forall y (I(x) \rightarrow \exists z J(x,y,z))$

$\delta_{52} : \forall x \forall y \forall u (F(u,x) \rightarrow \exists z J(x,y,z))$

$\delta_6 : \forall x \forall y (G(x,y) \rightarrow F(x,y))$

$\delta_7 : \forall x \forall y \forall z (F(x,y) \wedge H(x,z) \rightarrow F(z,y))$

$\delta_{81} : \forall Y \ ((\exists w \, Y(w) \wedge \forall x \forall z \ (Y(x) \wedge Y(z) \rightarrow H(x,z)) \rightarrow \exists y \forall u \ (Y(u) \leftrightarrow G(u,y)))$

$\delta_{82} : \forall x \exists y \ (F(x,y) \wedge \forall z \ \neg G(z,y))$

$\delta_9 : \forall x \forall y \forall u \ (F(x,y) \wedge F(x,u) \wedge \forall z \ (G(z,y) \leftrightarrow G(z,u)) \rightarrow y = u)$

El lector no debería *asustarse* al ver la fórmula δ, al final de este capítulo tendrá la sensación de estar armando un rompecabezas lógico, donde las piezas encajan perfectamente mediante la propiedad de *cerradura bajo Modus Ponens* que tienen los Conjuntos Modelo[1].

Observe que δ es una fórmula expresada en lenguaje de segundo orden y recuerde que éste forma parte del lenguaje de la teoría de tipos, en este sentido la fórmula δ depende de una contante q_I del tipo $\langle \tau \rangle$, tres constantes q_H, q_F, q_G del tipo $\langle \tau, \tau \rangle$ y una q_J del tipo $\langle \tau, \tau, \tau \rangle$. Además δ se distingue por que todos los símbolos de variable que tienen presencia en δ son de tipo individual, excepto el símbolo de variable Y que tiene presencia en δ_{81}, el cual es del tipo $\langle \tau \rangle$.

Definición 3.1. *Se dice que un conjunto de fórmulas* Σ *es* cerrado bajo Modus Ponens *si y sólo si siempre que* $\{\alpha, (\alpha \rightarrow \beta)\} \subseteq \Sigma$ *sucede que* $\beta \in \Sigma$

Basta con que un conjunto de fórmulas Σ cumpla con las condiciones (C.0)(a) y (C.2)(a) para ser *cerrado bajo Modus Ponens*, dado que $(\alpha \rightarrow \beta)$ es una abreviatura de $(\neg\alpha \vee \beta)$, se tiene que $\{\alpha, (\neg\alpha \vee \beta)\} \subseteq \Sigma$ y por (C.2)(a) $\neg\alpha \in \Sigma$ o bien $\beta \in \Sigma$, sin embargo $\alpha \in \Sigma$ y por (C.0) $\neg\alpha \notin \Sigma$, ergo $\beta \in \Sigma$.

[1]Se ha copiado la fórmula δ en el apéndice para una localización más práctica de la misma.

Los siguientes lemas nos ayudarán a codificar k-adas de constantes de tipos cualesquiera en constantes de tipo primitivo, así que el lector no deberá considerarlos como proposiciones aisladas o fuera de contexto, sino mas bien como un preámbulo a lo que en el texto original es conocido como *Teorema II*.

Como una hipótesis general, en todos ellos supondremos que Σ es un Conjunto Modelo Fuerte que tiene a la fórmula δ como elemento suyo.

Lema 3.2. *Si* $\{T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a), T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(b)\} \subseteq \Sigma$ *entonces* $H(a,b) \in \Sigma$;

Demostración.

Utilizaremos el Principio de inducción para C_τ, para probarla. Aquí, el propio Lema 3.2 es una propiedad de cadenas de símbolos de tipo, $\mathbb{P}(\tau_1, ..., \tau_k)$.

Así que tenemos que considerar los siguientes tres casos:

Caso 3.3. *Veamos que es válido para la cadena* (τ).

Sean $a, b \in Q_\tau(\Sigma)$ y supongamos que $\{T_\tau(a), T_\tau(b)\} \subseteq \Sigma$, veamos que $H(a,b) \in \Sigma$.

Por definición sabemos que $T_\tau(a)$ es $I(a)$ y $T_\tau(b)$ es $I(b)$, luego

$$\{I(a), I(b)\} \subseteq \Sigma \qquad (*)$$

como $\delta_{11} \in \Sigma$ y $a, b \in Q_\tau(\Sigma)$ entonces aplicando dos veces (C.4)(a):

$$(I(a) \wedge I(b) \to H(a,b)) \in \Sigma$$

al aplicar (C.1)(b) a (*) tenemos que:

$$(I(a) \wedge I(b)) \in \Sigma$$

En virtud de que Σ es cerrado bajo modus ponens, tenemos que $H(a,b) \in \Sigma$, lo que se quería demostrar.

Caso 3.4. *Supongamos que el Lema 3.2 es válido para la cadena* $(\tau_1, \cdots, \tau_k)$ *y mostremos que es válido para el símbolo de tipo* $\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle$

Sean $a, b \in Q_\tau(\Sigma)$ y supongamos que $T_{\langle\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}\rangle}(a) \in \Sigma$, $T_{\langle\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}\rangle}(b) \in \Sigma$, veamos que $H(a,b) \in \Sigma$. Por definición sabemos que:

$$T_{\langle\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}\rangle}(a) \text{ es } \exists y(T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(y) \wedge F(y,a)),$$

$$T_{\langle\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}\rangle}(b) \text{ es } \exists w(T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(w) \wedge F(w,b)).$$

Por lo que:

$$\exists y(T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(y) \wedge F(y,a)) \in \Sigma$$

$$\exists w(T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(w) \wedge F(w,b)) \in \Sigma.$$

Por la condición (C.3)(a), existen constantes individuales c y d tales que:

$$(T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(c) \wedge F(c,a)) \in \Sigma$$

$$(T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(d) \wedge F(d,b)) \in \Sigma.$$

Por (C.1)(a), tenemos:

$$T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(c) \in \Sigma \qquad\qquad F(c,a) \in \Sigma,$$

$$T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(d) \in \Sigma \qquad\qquad F(d,b) \in \Sigma.$$

Por hipótesis de inducción, sabemos que $H(c,d) \in \Sigma$. Con una adecuada sustitución en la fórmula δ_{13}, obtenemos:

$$(F(c,a) \wedge F(d,b) \wedge H(c,d) \to H(a,b)) \in \Sigma$$

Como los antecedentes de esta fórmula estan en Σ, concluímos que:

$$H(a,b) \in \Sigma$$

lo que se quería mostrar.

Caso 3.5. *Supongamos que el Lema 3.2 es válido para las cadenas de símbolos de tipo (τ_1) y $(\tau_2, \cdots, \tau_k)$, y mostremos que es válido para la cadena $(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k)$.*

Sean $a, b \in Q_\tau(\Sigma)$ y supongamos que $T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a) \in \Sigma$, $T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(b) \in \Sigma$, veamos que $H(a,b) \in \Sigma$.

Por definición sabemos que:

$$T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a) \text{ es } \exists x\exists y(T_{\tau_1}(x) \wedge T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(y) \wedge J(x,y,a)),$$

$$T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(b) \text{ es } \exists u\exists v(T_{\tau_1}(u) \wedge T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(v) \wedge J(u,v,b))$$

luego

$$\exists x\exists y(T_{\tau_1}(x) \wedge T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(y) \wedge J(x,y,a)) \in \Sigma$$

$$\exists u\exists v(T_{\tau_1}(u) \wedge T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(v) \wedge J(u,v,b)) \in \Sigma$$

Por (C.3)(a), sabemos que existen constantes individuales c, d, e y f tales que:

$$(T_{\tau_1}(c) \wedge T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(d) \wedge J(c,d,a)) \in \Sigma$$

$$(T_{\tau_1}(e) \wedge T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(f) \wedge J(e,f,b)) \in \Sigma$$

Por (C.1)(a) tenemos que:

$$T_{\tau_1}(c) \in \Sigma, \qquad T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(d) \in \Sigma, \qquad J(c,d,a) \in \Sigma$$

$$T_{\tau_1}(e) \in \Sigma, \qquad T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(f) \in \Sigma, \qquad J(e,f,b) \in \Sigma$$

por hipótesis de inducción, tenemos que:

$$H(c,e) \in \Sigma, \qquad H(d,f) \in \Sigma$$

Por una adecuada sustitución en δ_{12}, se sabe que:

$$(J(c,d,a) \wedge J(e,f,b) \wedge H(c,e) \wedge H(d,f) \to H(a,b)) \in \Sigma$$

Dado que todas las premisas de esta última fórmula estan en Σ, tenemos por consecuencia:

$$H(a,b)) \in \Sigma$$

justo lo que queríamos probar.

$\dashv$

Lema 3.6. *Si* $\{H(a,b), T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a), T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(b)\} \subseteq \Sigma$ *entonces*

$$k = m \text{ y } \tau_1 = \tau_{i_1}, \cdots, \tau_k = \tau_{i_k}.$$

Demostración .

Nuevamente usaremos el Principio de inducción para C_τ. Aquí, el propio Lema 3.6 es una propiedad de cadenas de símbolos de tipo, $\mathbb{P}(\tau_1, ..., \tau_k)$.

Caso 3.7. *Veamos que es válido para la cadena $k = 1$ y $\tau_1 = \tau$.*

i.e. $\{H(a,b), T_\tau(a), T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(b)\} \subseteq \Sigma$

Por demostrar que: $m = 1$ y $\tau_{i_1} = \tau$

Para demostrar el caso 3.7 mostremos que las siguientes afirmaciones son imposibles para el índice m:

Afirmación 3.8. *$2 \leq m$;*

Si esto fuera posible para m, tendríamos que

$$T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(b) \in \Sigma$$

lo cual por definición significa:

$$\exists x \exists y\ (T_{\tau_{i_1}}(x) \wedge T_{\tau_{i_2},\cdots,\tau_{i_m}}(y) \wedge J(x,y,b)) \in \Sigma$$

Por (C.3)(a) sabemos que hay constantes individuales c, d tales que :

$$(T_{\tau_{i_1}}(c) \wedge T_{\tau_{i_2},\cdots,\tau_{i_m}}(d) \wedge J(c,d,b)) \in \Sigma$$

Por (C.1)(a), tenemos que

$$J(c,d,b) \in \Sigma$$

Por otro lado, haciendo una sustitución adecuada en δ_{31}, obtenemos:

$$(I(a) \wedge H(a,b) \rightarrow I(b)) \in \Sigma$$

En virtud de que

$$\{H(a,b), T_\tau(a), T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(b)\} \subseteq \Sigma$$

y de que $T_\tau(a)$ es por definicíon $I(a)$

$$\{H(a,b), I(a), T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(b)\} \subseteq \Sigma$$

de donde por (C.1)(b)

$$H(a,b) \wedge I(a) \in \Sigma$$

así que $I(b) \in \Sigma$

Al sustituir c, d, b en δ_{21} obtenemos:

$$(I(b) \to \neg J(c,d,b)) \in \Sigma$$

luego, tenemos

$$\neg J(c,d,b) \in \Sigma$$

Pero teníamos que

$$J(c,d,b) \in \Sigma$$

Esto contradice (C.0)(a).

Afirmación 3.9. $m = 1$ *pero* τ_{i_1} *es de la forma* $\langle \tau_{l_1}, \cdots, \tau_{l_p} \rangle$

Si esto fuera posible para m, tendríamos que

$$T_{\langle \tau_{l_1}, \cdots, \tau_{l_m} \rangle}(b) \in \Sigma$$

lo cual por definición significa:

$$\exists x \ (T_{\tau_{l_1}, \cdots, \tau_{l_m}}(x) \wedge F(x,b)) \in \Sigma$$

Por (C.3)(a) sabemos que hay una constante individual c tal que :

$$(T_{\tau_{l_1}, \cdots, \tau_{l_m}}(c) \wedge F(c,b)) \in \Sigma$$

Por (C.1)(a), tenemos que

$$F(c,b) \in \Sigma$$

Por otro lado, haciendo una sustitución adecuada en δ_{31}, obtenemos:

$$(I(a) \wedge H(a,b) \to I(b)) \in \Sigma$$

En virtud de que

$$\{H(a,b), T_\tau(a), T_{\tau_{l_1},\cdots,\tau_{l_m}}(b)\} \subseteq \Sigma$$

y de que $T_\tau(a)$ es por definiciíon $I(a)$

$$\{H(a,b), I(a), T_{\tau_{l_1},\cdots,\tau_{l_m}}(b)\} \subseteq \Sigma$$

de donde por (C.1)(b)

$$H(a,b) \wedge I(a) \in \Sigma$$

así que $I(b) \in \Sigma$

Al sustituir c, d, b en δ_{22} obtenemos:

$$(I(b) \rightarrow \neg F(c,b)) \in \Sigma$$

luego, tenemos

$$\neg F(c,b) \in \Sigma$$

Pero teníamos que

$$F(c,b) \in \Sigma$$

Esto contradice (C.0)(a).

De esta manera, tenemos que cuando $k = 1$ y $\tau_1 = \tau$ entonces $m = 1$ y $\tau_{i_1} = \tau$. Así, concluimos con el caso 3.7.

Caso 3.10. *Supongamos que el Lema 3.6 es válido para la cadena* $(\tau_{l_1}, \cdots, \tau_{l_s})$ *y mostremos que es válido para el símbolo de tipo* $\langle \tau_{l_1}, \cdots, \tau_{l_s} \rangle$

i.e. estamos suponiendo:

Si $\{H(a,b), T_{\tau_{l_1},\cdots,\tau_{l_s}}(a), T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(b)\} \subseteq \Sigma$ entonces

$$s = m \text{ y } \tau_{l_1} = \tau_{i_1}, \ \cdots \ , \tau_{l_m} = \tau_{i_m}.$$

y que

$$\{H(a,b), T_{\langle \tau_{l_1},\cdots,\tau_{l_s}\rangle}(a), T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(b)\} \subseteq \Sigma$$

dado que

$$T_{\langle\tau_{l_1},\cdots,\tau_{l_s}\rangle}(a) \in \Sigma$$

se tiene, por definición

$$\exists x(T_{\tau_{l_1},\cdots,\tau_{l_s}}(x) \wedge F(x,a)) \in \Sigma$$

y por (C.3)(a), hay una constante individual c tal que

$$(T_{\tau_{l_1},\cdots,\tau_{l_s}}(c) \wedge F(c,a)) \in \Sigma$$

por (C.1)(a)

$$T_{\tau_{l_1},\cdots,\tau_{l_s}}(c) \in \Sigma \text{ y } F(c,a) \in \Sigma$$

instanciando c, a y b en δ_{331}, tenemos:

$$F(c,a) \wedge H(a,b) \rightarrow \exists z F(z,b) \in \Sigma$$

pero el antecedente de esta fórmula está en Σ que por ser cerrado bajo modus ponens, se obtiene

$$\exists z F(z,b) \in \Sigma$$

por (C.3)(a), hay una constante individual d tal que

$$F(d,b) \in \Sigma$$

Este resultado es independiente de la cadena $(\tau_{i_1},...,\tau_{i_m})$, por lo que hay tres alternativas para esta cadena:

Subcaso 3.11. $m = 1$ *y* $\tau_{i_1} = \tau$

Tenemos por hipótesis que

$$\{H(a,b), T_{\langle\tau_{l_1},\cdots,\tau_{l_s}\rangle}(a), T_\tau(b)\} \subseteq \Sigma$$

por definición de T_τ

$$\{H(a,b), T_{\langle\tau_{l_1},\cdots,\tau_{l_s}\rangle}(a), I(b)\} \subseteq \Sigma$$

luego

$$I(b) \in \Sigma$$

pero una instancia de δ_{22} es

$$I(b) \to \neg F(d,b) \in \Sigma$$

ergo

$$\neg F(d,b) \in \Sigma$$

pero sabíamos que

$$F(d,b) \in \Sigma$$

Esto contradice (C.0)(a).

Subcaso 3.12. *$m = 1$ y $\tau_{i_1} = \langle \tau_{j_1}, ..., \tau_{j_n} \rangle$*

Tenemos por hipótesis que

$$\{H(a,b), T_{\langle \tau_{l_1}, \cdots, \tau_{l_s} \rangle}(a), T_{\langle \tau_{j_1}, ..., \tau_{j_n} \rangle}(b)\} \subseteq \Sigma$$

Luego

$$T_{\langle \tau_{j_1}, ..., \tau_{j_n} \rangle}(b) \in \Sigma$$

por definición

$$\exists w(T_{\tau_{j_1}, ..., \tau_{j_n}}(w) \wedge F(w,b)) \in \Sigma$$

por (C.3)(a), hay una constante individual e tal que

$$(T_{\tau_{j_1}, ..., \tau_{j_n}}(e) \wedge F(e,b)) \in \Sigma$$

por (C.1)(a)

$$T_{\tau_{j_1}, ..., \tau_{j_n}}(e) \in \Sigma \text{ y } F(e,b) \in \Sigma$$

recordemos que tenemos

$$F(c,a) \in \Sigma$$

luego instanciamos en δ_{332}

$$F(c,a) \wedge F(e,b) \wedge H(a,b) \to H(c,e) \in \Sigma$$

y como el antecedente de esta implicación está en Σ tenemos que

$$H(c,e) \in \Sigma$$

así que

$$\{T_{\tau_{l_1},\ldots,\tau_{l_s}}(c), T_{\tau_{j_1},\ldots,\tau_{j_n}}(e), H(c,e)\} \subseteq \Sigma$$

y por hipótesis inductiva, tenemos que

$$s = n \text{ y } \tau_{l_1} = \tau_{j_1}, \ldots, \tau_{l_n} = \tau_{j_n}$$

Subcaso 3.13. $2 \leq m$

Tenemos por hipótesis que

$$\{H(a,b), T_{\langle \tau_{l_1},\cdots,\tau_{l_s}\rangle}(a), T_{\tau_{i_1},\ldots,\tau_{i_m}}(b)\} \subseteq \Sigma$$

de donde

$$T_{\tau_{i_1},\ldots,\tau_{i_m}}(b) \in \Sigma$$

que por definición es

$$\exists x \exists y (T_{\tau_{i_1}}(x) \wedge T_{\tau_{i_2},\ldots,\tau_{i_m}}(y) \wedge J(x,y,b)) \in \Sigma$$

por (C.3)(a) sabemos que hay g, h constantes de tipo individual tales que:

$$(T_{\tau_{i_1}}(g) \wedge T_{\tau_{i_2},\ldots,\tau_{i_m}})(h) \wedge J(g,h,b) \in \Sigma$$

de aquí que

$$J(g,h,b) \in \Sigma$$

una instancia de δ_{23} es

$$J(g,h,b) \to \neg F(d,b) \in \Sigma$$

ergo

$$\neg F(d,b) \in \Sigma$$

pero sabíamos que

$$F(d,b) \in \Sigma$$

Esto contradice (C.0)(a).

Caso 3.14. *Supongamos que el Lema 3.6 es válido para las cadenas de símbolos de tipo* (τ_1) *y* $(\tau_2, \cdots, \tau_k)$*, y mostremos que es válido para la cadena* $(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_k)$*.*

Por hipótesis sabemos que

$$\exists x \exists y\ (T_{\tau_1}(x) \wedge T_{\tau_2, \cdots, \tau_k}(y) \wedge J(x, y, a)) \in \Sigma$$

Por (C.3)(a) , existen c, d constantes individuales tales que

$$(T_{\tau_1}(c) \wedge T_{\tau_2, \cdots, \tau_k}(d) \wedge J(c, d, a)) \in \Sigma$$

Por (C.1)(a), tenemos:

$$T_{\tau_1}(c) \in \Sigma, \qquad T_{\tau_2, \cdots, \tau_k}(d) \in \Sigma, \qquad J(c, d, a) \in \Sigma$$

Al sustituir adecuadamente c, d, a, b en δ_{321}

$$(J(c, d, a) \wedge H(a, b) \rightarrow \exists z \exists u J(z, u, b)) \in \Sigma$$

Pero por hipótesis del lema 3.6 sabemos que $H(a, b) \in \Sigma$, luego

$$\exists z \exists u J(z, u, b) \in \Sigma$$

Por (C.3)(a), hay constantes individuales e, f tales que:

$$J(e, f, b) \in \Sigma$$

Este resultado es independiente de la cadena $(\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m})$, por lo que hay tres alternativas para esta cadena:

Subcaso 3.15. $m = 1$ *y* $\tau_{i_1} = \tau$

En este caso tenemos por hipótesis del lema 3.6 que $T_\tau(b) \in \Sigma$, pero por definición $T_\tau(b)$ es $I(b)$ luego

$$I(b) \in \Sigma$$

Con una conveniente sustitución de las constantes individuales e, f, b en la fórmula δ_{21} obtenemos

$$(I(b) \rightarrow \neg J(e, f, b)) \in \Sigma$$

de donde

$$\neg J(e, f, b) \in \Sigma$$

Pero sabíamos que

$$J(e, f, b) \in \Sigma$$

Contradiciendo así (C.0)(a). Por lo que o bien $m \neq 1$ o $\tau_{i_1} \neq \tau$.

Subcaso 3.16. *$m = 1$ y τ_{i_1} es de la forma $\langle \tau_{j_1}, \cdots, \tau_{j_n} \rangle$*

Sabemos que:

$$\{H(a, b), T_{\tau_1, \cdots, \tau_k}(a), T_{\langle \tau_{j_1}, \cdots, \tau_{j_n} \rangle}(b)\} \subseteq \Sigma$$

pero $T_{\langle \tau_{j_1}, \cdots, \tau_{j_n} \rangle}(b)$ esta definida como

$$\exists y \ (T_{\langle \tau_{j_1}, \cdots, \tau_{j_n} \rangle}(y) \wedge F(y, b))$$

y por tanto está en Σ.

Por (C.3)(a), sabemos que hay una constante individual g tal que

$$(T_{\langle \tau_{j_1}, \cdots, \tau_{j_n} \rangle}(g) \wedge F(g, b))$$

Por (C.1)(a) tenemos

$$T_{\langle \tau_{j_1}, \cdots, \tau_{j_n} \rangle}(g) \in \Sigma \qquad \text{y} \qquad F(g, b) \in \Sigma$$

Al sustituir las constantes individuales e, f, b, g en la fórmula δ_{23} obtenemos

$$(F(g, b) \rightarrow \neg J(e, f, b)) \in \Sigma$$

Por tanto, tenemos

$$\neg J(e, f, b)) \in \Sigma$$

pero sabíamos que

$$J(e, f, b)) \in \Sigma$$

Así, se contradice a (C.0)(a). Por lo que o bien $m \neq 1$ o bien τ_{i_1} no es de la forma $\langle \tau_{j_1}, \cdots, \tau_{j_n} \rangle$

Subcaso 3.17. $2 \leq m$

En este caso mostraremos que $m = k$ y $\tau_1 = \tau_{i_1}$, $\cdots$, $\tau_k = \tau_{i_k}$. Aquí usaremos la hipótesis inductiva, i.e. que el Lema 3.6 es válido para las cadenas (τ_1) y $(\tau_2, \cdots, \tau_k)$.

Sabemos que:

$$\{H(a,b), T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a), T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(b)\} \subseteq \Sigma$$

de donde

$$\{T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a), T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(b)\} \subseteq \Sigma$$

y por definición

$$\exists x \exists y\ (T_{\tau_1}(x) \wedge T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(y) \wedge J(x,y,a)) \in \Sigma$$

y

$$\exists w \exists z\ (T_{\tau_{i_1}}(w) \wedge T_{\tau_{i_2},\cdots,\tau_{i_m}}(z) \wedge J(w,z,b)) \in \Sigma$$

Por (C.3)(a), existen c, d, e y f constantes individuales tales que

$$(T_{\tau_1}(c) \wedge T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(d) \wedge J(c,d,a)) \in \Sigma$$

$$(T_{\tau_{i_1}}(e) \wedge T_{\tau_{i_2},\cdots,\tau_{i_m}}(f) \wedge J(e,f,b)) \in \Sigma$$

Por (C.1)(a), tenemos:

$$T_{\tau_1}(c) \in \Sigma, \qquad T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(d) \in \Sigma, \qquad J(c,d,a) \in \Sigma$$

$$T_{\tau_{i_1}}(e) \in \Sigma, \qquad T_{\tau_{i_2},\cdots,\tau_{i_m}}(f) \in \Sigma, \qquad J(e,f,b) \in \Sigma$$

Al sustituir adecuadamente c, d, a, e, f y b en δ_{322}

$$(J(c,d,a) \wedge J(e,f,b) \wedge H(a,b) \rightarrow H(c,e) \wedge H(d,f)) \in \Sigma$$

Sabemos que por hipótesis del lema 3.6. $H(a,b) \in \Sigma$ asi se verifican los antecedentes de la fórmula anterior y deducimos que

$$H(c,e) \wedge H(d,f) \in \Sigma$$

En virtud de (C.1)(a) sabemos que

$$H(c,e) \in \Sigma \qquad \text{y} \qquad H(d,f) \in \Sigma$$

Por hipótesis de inducción, $\tau_1 = \tau_{i_1}$, $k-1 = m-1$ y $\tau_2 = \tau_{i_2}$, $\cdots$,$\tau_k = \tau_{i_k}$, ergo $k = m$ y $\tau_1 = \tau_{i_1}$, $\tau_2 = \tau_{i_2}$, $\cdots$,$\tau_k = \tau_{i_k}$ lo cual queríamos probar.

$\dashv$

Teorema 3.18 (Teorema II (1))**.** *Cualquier Conjunto Modelo Fuerte Σ que tenga a la fórmula δ satisface la siguiente condición:*

Si a es una constante individual, entonces:

$$T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a) \in \Sigma$$

para a lo más una cadena $(\tau_1, \cdots, \tau_k)$.

Demostración .

Supongamos que a es una constante individual tal que:

$$\{T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a) \in \Sigma, T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(a)\} \subseteq \Sigma$$

mostremos que: $k = m$ y $\tau_1 = \tau_{i_1}$ y $\cdots$ y $\tau_k = \tau_{i_k}$

Tome a $T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a) \in \Sigma$ por el lema 3.2, así se tiene que $H(a,a) \in \Sigma$, luego

$$\{H(a,a), T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a), T_{\tau_{i_1},\cdots,\tau_{i_m}}(a)\} \subseteq \Sigma$$

por el lema 3.6 tenemos que:

$k = m$ y $\tau_1 = \tau_{i_1}$ y $\cdots$ y $\tau_k = \tau_{i_k}$, justo lo que se quería mostrar.

$\dashv$

3.2. La familia de constantes λ

Uno de los puntos centrales del trabajo es traducir cualquier fórmula del lenguaje de la teoría de tipos en una del lenguaje de segundo orden; para esto será necesario *codificar* k-adas de constantes de tipos cualesquiera en constantes de tipo primitivo. Este código deberá portar la información de todos y cada uno de los símbolos de tipo de la k-ada de constantes a codificar.

El siguiente teorema, define para cada cadena $(a_1, ..., a_k)$ de símbolos de tipo *individual*, una constante $\lambda(a_1, ..., a_k)$ de tipo individual. Seguiremos trabajando con un Conjunto Modelo Fuerte Σ que tenga a nuestra fórmula δ.

Teorema 3.19 (Teorema II (2)). *Para cada k-tupla* $(a_1, \cdots, a_k)$ *de símbolos de tipo* individual *que cumplan la siguiente propiedad*

$$\{T_{\tau_1}(a_1),\ \cdots\ ,\ T_{\tau_k}(a_k)\} \subseteq \Sigma$$

existe una constante individual $\lambda(a_1, \cdots, a_k)$ *tal que :*

(A) $$\lambda(a_1) = a_1 \in \Sigma$$

(B) $$J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)) \in \Sigma$$

(C) $$J(a_1, \lambda(a_2, \cdots, a_k), b) \in \Sigma \text{ implica que } b = \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \Sigma$$

Demostración .

Considere el conjunto:

$$\{(a_1, \cdots, a_k) \in Q_\tau^k \mid \{T_{\tau_1}(a_1),\ \cdots\ ,\ T_{\tau_k}(a_k)\} \subseteq \Sigma\}$$

donde $k \geq 1$.

Para $k = 1$ definimos

$$\text{Si } T_{\tau_1}(a_1) \in \Sigma \text{ entonces } \lambda(a_1) = a_1$$

Entonces procederemos por inducción, suponiendo que $\lambda(a_2, \cdots, a_k)$ está definida. Consideremos el conjunto

$$\mathbb{B} = \{b \in Q_\tau \mid J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), b) \in \Sigma\}$$

La idea es invocar al Axioma de Elección, para elegir un elemento de $\mathbb{B}$ y definirlo como $\lambda(a_1, a_2, ..., a_k)$. Para esto es necesario que $\mathbb{B}$ sea no vacío. Para demostrar esto, distinguiremos entre cada cadena de constantes $(a_1, \cdots, a_k)$ dos casos cuando $\tau_1 = \tau$ y $\tau_1 \neq \tau$.

Si $\tau_1 = \tau$, entonces

$$T_\tau(\lambda(a_1)) \in \Sigma$$

si y sólo si, por definición:

$$I(\lambda(a_1)) \in \Sigma$$

Al sustituir $\lambda(a_1)$ y $\lambda(a_2, \cdots, a_k)$ en δ_{51} obtenemos:

$$(I(\lambda(a_1)) \rightarrow \exists z J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), z)) \in \Sigma$$

Dado que el antecedente está en Σ, tenemos que

$$\text{(iii)} \qquad \exists z J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), z) \in \Sigma$$

Por (C.3)(a) sabemos que hay una constante individual b que satisface :

$$J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), b) \in \Sigma$$

Así que, hay una constante individual $b \in \mathbb{B}$.

Ahora bien, si $\tau_1 \neq \tau$ entonces $\tau_1 = \langle \tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m} \rangle$ por lo que

$$T_{\langle \tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m} \rangle}(\lambda(a_1)) \in \Sigma$$

Es decir, por definición sucede que

$$\exists y \ (T_{\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m}}(y) \wedge F(y, \lambda(a_1))) \in \Sigma$$

Por (C.3)(a), existe una constante individual e tal que

$$(T_{\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m}}(e) \wedge F(e, \lambda(a_1))) \in \Sigma$$

Pero por (C.1)(a), tenemos

$$T_{\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m}}(e) \in \Sigma \qquad \text{y} \qquad F(e, \lambda(a_1)) \in \Sigma$$

Al sustituir $\lambda(a_1)$, $\lambda(a_2, \cdots, a_k)$ y e en δ_{52} obtenemos

$$(F(e, \lambda(a_1)) \to \exists z J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), z)) \in \Sigma$$

como el antecedente de la implicación está en Σ, sucede que

$$\exists z J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), z)) \in \Sigma$$

Por (C.3)(a), existe una constante individual e que satisface:

$$J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), b)) \in \Sigma$$

Nuevamente, hay una constante individual $b \in \mathbb{B}$.

Ahora bien, *elegimos* con ayuda del Axioma de Elección un elemento del conjunto $\mathbb{B} \neq \varnothing$

y lo definimos como $\lambda(a_1, a_2, ..., a_k)$.

Por construcción, es claro que se cumple (A) y (B).

Para verificar (C) supongamos que

$$J(a_1, \lambda(a_2, \cdots, a_k), b) \in \Sigma$$

y sustituyamos a_1, $\lambda(a_2, \cdots, a_k)$, $\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ y b en δ_{41}

$$(J(a_1, \lambda(a_2, \cdots, a_k), \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)) \wedge J(a_1, \lambda(a_2, \cdots, a_k), b)$$
$$\to \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k) = b) \in \Sigma$$

por (B), sabemos que

$$J(a_1, \lambda(a_2, \cdots, a_k), \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)) \in \Sigma$$

por tanto se tiene el antecedente de la fórmula [2] ergo

$$\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k) = b \in \Sigma$$

Esto demuestra (C).

$\dashv$

[2] Aquí se esta usando (C.1)(b).

3.2.1. Algunas propiedades de las constantes λ

Los siguientes, resultados siguen suponiendo que Σ es un Conjunto Modelo Fuerte que tiene a δ.

Lema 3.20. *Si la cadena de constantes individuales* $(a_1, \cdots, a_k)$ *satisface*

$$\{T_{\tau_1}(a_1), \quad \cdots \quad, T_{\tau_k}(a_k)\} \subseteq \Sigma$$

entonces $$T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(\lambda(a_1, \cdots, a_k)) \in \Sigma.$$

Demostración .

Por inducción sobre k.

Para $k = 1$: sea a_1 una constante individual tal que $T_{\tau_1}(a_1) \in \Sigma$ entonces por (C.5) y la parte (A) del Teorema 3.19, tenemos $T_{\tau_1}(\lambda(a_1)) \in \Sigma$.

Supongamos que el Lema 3.20 es cierto para la cadena $(a_2, \cdots, a_k)$.

Demostremos que el resultado es válido para la cadena $(a_1, ..., a_k)$. Para esto supongamos que:

$$\{T_{\tau_1}(a_1), T_{\tau_2}(a_2) \quad \cdots \quad, \quad T_{\tau_k}(a_k)\} \subseteq \Sigma$$

Ahora bien, por la parte (B) del teorema 3.19, tenemos

$$J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)) \in \Sigma$$

y por (C.1)(b)

$$T_{\tau_1}(\lambda(a_1)) \wedge T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(\lambda(a_2, \cdots, a_k)) \wedge J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)) \in \Sigma$$

De (C.3)(b) obtenemos

$$\exists x \exists y (T_{\tau_1}(x) \wedge T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(y) \wedge J(x, y, \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k))) \in \Sigma$$

Pero por definición

$$T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)) \in \Sigma$$

Justo lo que se quería mostrar.

$\dashv$

Lema 3.21. *Si* $\lambda(a_1, \cdots, a_k) = \lambda(b_1, \cdots, b_k) \in \Sigma$

$$\textit{entonces } a_1 = b_1 \in \Sigma, \cdots, a_k = b_k \in \Sigma$$

Demostración .

Por inducción sobre k. Si $k = 1$, entonces $\lambda(a_1) = \lambda(b_1) \in \Sigma$, luego por (A), se tiene que $a_1 = b_1 \in \Sigma$.

Supongamos que el Lema 3.21 es cierto para la cadena $(a_2, \cdots, a_k)$.

Veamos que el Lema es verdadero para la cadena $(a_1, a_2, ..., a_k)$. Para esto, supongamos que:

$$\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k) = \lambda(b_1, b_2, \cdots, b_k) \in \Sigma$$

Al sustituir $\lambda(a_1)$, $\lambda(a_2, \cdots, a_k)$, $\lambda(b_1)$, $\lambda(b_2, \cdots, b_k)$ y $\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ en δ_{42} obtenemos

$$(J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)) \wedge J(\lambda(b_1), \lambda(b_2, \cdots, b_k), \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k))$$

$$\rightarrow \lambda(a_1) = \lambda(b_1) \wedge \lambda(a_2, \cdots, a_k) = \lambda(b_2, \cdots, b_k)) \in \Sigma$$

por la parte (B) del Teorema 3.19, tenemos

$$J(\lambda(b_1), \lambda(b_2, \cdots, b_k), \lambda(b_1, b_2, \cdots, b_k)) \in \Sigma$$

Por hipótesis sabemos que $\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k) = \lambda(b_1, b_2, \cdots, b_k) \in \Sigma$. De aquí que, por (C.5) tengamos

$$J(\lambda(b_1), \lambda(b_2, \cdots, b_k), \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)) \in \Sigma$$

Así mismo, por (B):

$$J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)) \in \Sigma$$

Verificando así el antecedente de la implicación de arriba [3], luego

$$\lambda(a_1) = \lambda(b_1) \wedge \lambda(a_2, \cdots, a_k) = \lambda(b_2, \cdots, b_k) \in \Sigma$$

Por (C.1)(a) se tiene que

[3] Aquí estamos utilizando implícitamente (C.1)(b).

$$\lambda(a_1) = \lambda(b_1) \in \Sigma \text{ y } \lambda(a_2, \cdots, a_k) = \lambda(b_2, \cdots, b_k) \in \Sigma$$

Por la base de inducción y la hipótesis inductiva obtenemos

$$a_1 = b_1 \in \Sigma,\ a_2 = b_2 \in \Sigma,\ \cdots\ , a_k = b_k \in \Sigma$$

Que es lo deseado.

$\dashv$

Lema 3.22. *Si* $T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a) \in \Sigma$

entonces existe una cadena $(a_1, \cdots, a_k)$ *de constantes individuales tal que*

$$T_{\tau_1}(a_1) \in \Sigma,\ \cdots\ , T_{\tau_k}(a_k) \in \Sigma$$

$$\textit{y además } a = \lambda(a_1, \cdots, a_k) \in \Sigma$$

Demostración .

Por inducción sobre k.

Si $k = 1$, $T_{\tau_1}(a_1) \in \Sigma$ implica que existe una cadena (a_1) de constantes individuales tal que

$$T_{\tau_1}(a_1) \in \Sigma$$

$$\text{y además por (A) } a_1 = \lambda(a_1) \in \Sigma$$

Supongamos que el resultado es válido para la cadena $(\tau_2, ..., \tau_k)$.

Mostremos que el resultado es válido para la cadena $(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k)$. para esto, supongamos que:

$$T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a) \in \Sigma$$

entonces por definición

$$\exists x \exists y (T_{\tau_1}(x) \wedge T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(y) \wedge J(x, y, a)) \in \Sigma$$

Por (C.3)(a), hay constantes ndividuales b y c tales que

$$(T_{\tau_1}(b) \wedge T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(c) \wedge J(b, c, a)) \in \Sigma$$

Por (C.1)(a) obtenemos

$$T_{\tau_1}(b) \in \Sigma \text{ y } T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(c) \in \Sigma \text{ y } J(b,c,a) \in \Sigma$$

Por la base de inducción,

$$b = \lambda(a_1) \in \Sigma$$

Por su parte, (A) implica que:

$$a_1 = \lambda(a_1) \in \Sigma$$

Y por (C.5) se obtiene

$$b = a_1 \in \Sigma$$

por ende

$$T_{\tau_1}(a_1) \in \Sigma$$

También por hipótesis inductiva se tiene

$$c = \lambda(a_2, \cdots, a_k) \in \Sigma$$

para alguna $(a_2, \cdots, a_k)$ cadena de constantes individuales que satisfagan

$$\{T_{\tau_2}(a_2), \cdots, T_{\tau_k}(a_k)\} \subseteq \Sigma$$

Aplicando (C.5) a

$$\{b = \lambda(a_1), c = \lambda(a_2, \cdots, a_k), J(b,c,a)\} \subseteq \Sigma$$

obtenemos

$$J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), a) \in \Sigma$$

Por la parte (C) del Teorema 3.19, tenemos

$$a = \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k) \in \Sigma$$

y durante la prueba se verificó:

$$\{T_{\tau_1}(a_1), T_{\tau_2}(a_2), \cdots, T_{\tau_k}(a_k)\} \subseteq \Sigma$$

Lo cual se quería probar.

$\dashv$

Lema 3.23. *Si* $(a_1, \cdots, a_k)$ *satisface*

$$T_{\tau_1}(a_1) \in \Sigma,\ \cdots\ ,\ T_{\tau_k}(a_k) \in \Sigma,$$

$$y\ \{a_1 = b_1\ ,\ \cdots\ ,\ a_k = b_k\} \subseteq \Sigma$$

$$\textit{entonces} \qquad \lambda(a_1, \cdots, a_k) = \lambda(b_1, \cdots, b_k) \in \Sigma$$

Demostración .

Por inducción sobre k.

Para $k = 1$ tenemos

$$(a_1) \text{ satisface } T_{\tau_1}(a_1) \in \Sigma$$

$$\text{y } a_1 = b_1 \in \Sigma$$

así que, por la parte (A)

$$\lambda(a_1) = \lambda(b_1) \in \Sigma$$

Supongamos que la afirmación es cierta para la cadena $(a_2, \cdots, a_k)$.

Y mostremos que lo es también para la cadena $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$, para esto supongamos que:

$$\{T_{\tau_1}(a_1),\ T_{\tau_2}(a_2),\ \cdots\ ,\ T_{\tau_k}(a_k)\} \subseteq \Sigma,$$

$$\text{y } \{a_1 = b_1\ ,\ a_2 = b_2 \in \Sigma\ \cdots\ ,\ a_k = b_k\} \subseteq \Sigma$$

Por el caso base y la hipótesis inductiva tenemos que

$$\{\lambda(a_1) = \lambda(b_1)\ ,\ \lambda(a_2, \cdots, a_k) = \lambda(b_2 \cdots, b_k)\} \subseteq \Sigma \text{ ... } (*)$$

Por la parte (B), tenemos

$$J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)) \in \Sigma$$

$$J(\lambda(b_1), \lambda(b_2, \cdots, b_k), \lambda(b_1, b_2, \cdots, b_k)) \in \Sigma \text{ ...(**)}$$

Y por (C.5) aplicado a (*) y (**)

$$J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), \lambda(b_1, b_2, \cdots, b_k)) \in \Sigma$$

Al sustituir $\lambda(a_1)$, $\lambda(a_2, \cdots, a_k)$, $\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ y $\lambda(b_1, b_2, \cdots, b_k)$ en δ_{41} obtenemos

$$(J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k)) \wedge J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_k), \lambda(b_1, b_2, \cdots, b_k)) \\ \to \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k) = \lambda(b_1, b_2, \cdots, b_k)) \in \Sigma$$

Pero tenemos que el antecedente de la implicación de arriba está en Σ por lo que

$$\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_k) = \lambda(b_1, b_2, \cdots, b_k) \in \Sigma$$

Justo lo que queríamos.

$\dashv$

Lo que dice el Lema 3.23 es que Σ " se da cuenta que " λ es una función, en otras palabras: dentro de Σ no es posible que una misma k-tupla tenga dos constantes λ.

Lema 3.24. *Si* $\{T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a),\ H(a,b)\} \subseteq \Sigma$ *implican que* $T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(b) \in \Sigma$.

Demostración .

Usaremos el *principio de inducción para* C_τ.

Caso 3.25. $k = 1$ *y* $\tau_1 = \tau$

Al sustituir las constantes individuales a y b en δ_{31} tenemos

$$(I(a) \wedge H(a,b) \to I(b)) \in \Sigma$$

Dado que por definición $T_\tau(a)$ es $I(a)$ y $T_\tau(b)$ es $I(b)$ se tiene

$$(T_\tau(a) \wedge H(a,b) \to T_\tau(b)) \in \Sigma$$

Pero el antecedente de esta implicación está en Σ, luego

$$T_\tau(b) \in \Sigma$$

Lo cual se quería probar.

Caso 3.26. *Suponemos que el lema 3.24 es cierto para la cadena* $(\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m})$ *y mostraremos que es válido para el símbolo* $\langle \tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m} \rangle$

Supongamos que

$$\{T_{\langle \tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m} \rangle}(a),\ H(a,b)\} \subseteq \Sigma$$

así que

$$T_{\langle \tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m} \rangle}(a) \in \Sigma$$

y por definición

$$\exists w(T_{\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m}}(w) \wedge F(w,a)) \in \Sigma$$

y por (C.3)(a), hay una constante d del tipo individual, tal que

$$(T_{\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m}}(d) \wedge F(d,a)) \in \Sigma$$

debido a (C.1)(a), tenemos

$$T_{\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m}}(d) \in \Sigma \text{ y } F(d,a) \in \Sigma$$

una instancia de la fórmula δ_{331} es

$$F(d,a) \wedge H(a,b) \rightarrow \exists z F(z,b) \in \Sigma$$

dado que los conyuntos del antecedente pertenecen a Σ, tenemos que

$$\exists z F(z,b) \in \Sigma$$

por (C.3)(a) hay una constante individual e tal que

$$F(e,b) \in \Sigma$$

instanciando adecuadamente en δ_{332}, tenemos

$$F(d,a) \wedge F(e,b) \wedge H(a,b) \rightarrow H(d,e) \in \Sigma$$

como los conyuntos del antecedente están en Σ, tenemos

$$H(d, e) \in \Sigma$$

pero recordemos que

$$T_{\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m}}(d) \in \Sigma$$

así que, por hipótesis inductiva aplicada a

$$\{T_{\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m}}(d), H(d, e)\} \subseteq \Sigma$$

tenemos :

$$T_{\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m}}(e) \in \Sigma$$

ergo

$$\{T_{\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m}}(e), F(e, b)\} \subseteq \Sigma$$

por (C.2)(b)

$$T_{\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m}}(e) \wedge F(e, b)$$

y por (C.3)(b)

$$\exists u(T_{\tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m}}(u) \wedge F(u, b)) \in \Sigma$$

pero esta fórmula es justo la definición de

$$T_{\langle \tau_{i_1}, \cdots, \tau_{i_m} \rangle}(b) \in \Sigma$$

Caso 3.27. *Supongamos que el Lema 3.24 es válido para las cadenas* (τ_1) *y* $(\tau_2, ..., \tau_k)$ *y mostremos que es válido para la cadena* $(\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k)$

Dado que por definición $T_{\tau_1, \cdots, \tau_k}(a)$ es

$$\exists x \exists y(T_{\tau_1}(x) \wedge T_{\tau_2, \cdots, \tau_k}(y) \wedge J(x, y, a)) \in \Sigma$$

Por (C.3)(a), hay constantes individuales c, d tales que

$$(T_{\tau_1}(c) \wedge T_{\tau_2, \cdots, \tau_k}(d) \wedge J(c, d, a)) \in \Sigma$$

Y por (C.1)(a)

$$T_{\tau_1}(c) \in \Sigma,\ T_{\tau_2, \cdots, \tau_k}(d) \in \Sigma,\ J(c, d, a) \in \Sigma$$

Si sustituímos c, d, a y b en δ_{321}

$$(J(c,d,a) \wedge H(a,b) \to \exists z \exists u J(z,u,b)) \in \Sigma$$

Pero el antecedente de esta implicación está en Σ, luego

$$\exists z \exists u J(z,u,b) \in \Sigma$$

Por (C.3)(a), existen constantes individuales e y f tales que

$$J(e,f,b) \in \Sigma$$

Al sustituir c, d, a, e, f y b en δ_{322}

$$(J(c,d,a) \wedge J(e,f,b) \wedge H(a,b) \to H(c,e) \wedge H(d,f)) \in \Sigma$$

Por (C.1)(b) sabemos que el antecedente de esta implicación está en Σ, luego

$$H(c,e) \wedge H(d,f) \in \Sigma$$

Por (C.1)(a)

$$H(c,e) \in \Sigma \text{ y } H(d,f) \in \Sigma$$

Por hipótesis de inducción sabemos que

$$T_{\tau_1}(e) \in \Sigma \text{ y } T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(f) \in \Sigma$$

Por (C.1)(b) tenemos

$$(T_{\tau_1}(e) \wedge T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(f) \wedge J(e,f,b)) \in \Sigma$$

Por (C.3)(b)

$$\exists u \exists w (T_{\tau_1}(u) \wedge T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(w) \wedge J(u,w,b)) \in \Sigma$$

Lo cual por definición, significa

$$T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(b) \in \Sigma$$

Que es lo que queríamos demostrar.

$\dashv$

Ahora bien, es un hecho que las k-adas de constantes codificadas por λ, aparecían *aplicadas* a constantes de un nivel superior, tome por ejemplo a la fórmula del lenguaje de la teoría de tipos:

$$q_0^{\langle\langle\tau\rangle,\langle\tau,\tau\rangle\rangle}(q_1^{\langle\tau\rangle}, q_2^{\langle\tau,\tau\rangle})$$

en el lenguaje de la teoría de tipos. la pregunta ahora es ¿como guardar la fórmula anterior dentro del lenguaje de segundo orden, sin perder información?

Los lemas anteriores nos servirán para demostrar el siguiente teorema, que nos revela más acerca del comportamiento de λ y de como ésta junto con la relación G logran " encriptar " fórmulas atómicas del estilo

$$q_0^{\langle\tau_1,\ldots,\tau_k\rangle}(q_1^{\tau_1}, \ldots, q_k^{\tau_k}) \ .$$

Como un preámbulo y de manera muy intuitiva e informal, lo que nos dirán las propiedades (a), (b) y (c) del siguiente teorema, es que

" a_0 es el nombre que codifica al conjunto de constantes A *en* Σ "

Teorema 3.28 (Teorema II (2) D). *Si Σ es un Conjunto Modelo Fuerte que tiene a nuestra fórmula δ y $A \subseteq Q_\tau(\Sigma) \times \cdots \times Q_\tau(\Sigma)$ tal que toda $(a_1, \cdots, a_k) \in A$ cumple*

$$\{T_{\tau_1}(a_1), \ldots, T_{\tau_k}(a_k)\} \subseteq \Sigma$$

entonces existe una constante individual a_0 con las siguientes tres propiedades:

(a) $(a_1, \cdots, a_k) \in A$ implica que $G(\lambda(a_1, \cdots, a_k), a_0) \in \Sigma$

(b) $G(\lambda(b_1, \cdots, b_k), a_0) \in \Sigma$ implica que existe $(a_1, \cdots, a_k) \in A$ tal que

$$a_1 = b_1 \in \Sigma, \ \cdots \ , \ a_k = b_k \in \Sigma$$

(c) $$T_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(a_0) \in \Sigma$$

Demostración .

Supongamos primero que $A \neq \varnothing$ y consideremos el conjunto:

$$\lambda[A] = \{ \ \lambda(a_1, \cdots, a_k) \in Q_\tau \mid (a_1, \cdots, a_k) \in A\} \neq \varnothing$$

Observemos que, por el Teorema 3.19, $\lambda[A] \subseteq Q_\tau(\Sigma)$. Como Σ cumple (C.6), se sigue que existe una constante monádica $q_{\lambda[A]}^{\langle\tau\rangle}$ (que por simplicidad escribiremos q) con las siguientes dos propiedades:

(C.6)(a) Si $(a_1, \cdots, a_k) \in A$ entonces $q(\lambda(a_1, \cdots, a_k)) \in \Sigma$

(C.6)(b) Si $q(b) \in \Sigma$, entonces hay $(a_1, \cdots, a_k) \in A$ tal que $b = \lambda(a_1, \cdots, a_k) \in \Sigma$

Como $\lambda[A] \neq \varnothing$, existe al menos una constante individual $\lambda(a_1, \cdots, a_k)$ tal que $q(\lambda(a_1, \cdots, a_k)) \in \Sigma$. Luego por (C.3)(b) tenemos

$$\exists x\ q(x) \in \Sigma$$

Si b, c son constantes individuales arbitrarias que satisfacen

$$q(b) \in \Sigma, \qquad\qquad q(c) \in \Sigma$$

entonces por (C.6)(b), sabemos

$$\text{hay } b_1 \in A \text{ tal que } b = \lambda(b_1) \in \Sigma$$

$$\text{hay } c_1 \in A \text{ tal que } c = \lambda(c_1) \in \Sigma$$

y por definición de $\lambda[A]$

$$\text{hay } b_1 \in A \text{ tal que } T_{\tau_1}(b_1) \in \Sigma \text{ y } b = \lambda(b_1) \in \Sigma$$

$$\text{hay } c_1 \in A \text{ tal que } T_{\tau_1}(c_1) \in \Sigma \text{ y } c = \lambda(c_1) \in \Sigma$$

pero, por definición de λ

$$\lambda(b_1) = b_1$$

$$\lambda(c_1) = c_1$$

entonces por (C.5)

$$T_{\tau_1}(b) \in \Sigma$$

$$T_{\tau_1}(c) \in \Sigma$$

entonces por el Lema 3.2 podemos concluir que

$$H(b, c) \in \Sigma$$

Luego, por el Lema 2.26

$$\forall x \forall z (q(x) \wedge q(z) \rightarrow H(x, z)) \in \Sigma$$

Al sustituir q en δ_{81} obtenemos

$$((\exists w\ q(w) \wedge \forall x \forall z\ (q(x) \wedge q(z) \to H(x,z))) \to \exists y \forall u\ (q(u) \leftrightarrow G(u,y))) \in \Sigma$$

Dado que las premisas de la implicación anterior están en Σ, se obtiene

$$\exists y \forall u\ (q(u) \leftrightarrow G(u,y)) \in \Sigma$$

De (C.3)(a), sabemos que existe una constante individual a_0 tal que

(iv) $$\forall u\ (q(u) \leftrightarrow G(u,a_0)) \in \Sigma$$

Verifiquemos que esta constante individual a_0 satisface: (a), (b) y (c).

Para mostrar (a) , sea $(a_1, \cdots, a_k) \in A$. Por la primera propiedad de q tenemos

$$q(\lambda(a_1, \cdots, a_k)) \in \Sigma$$

Por el Lema 2.27 y la afirmación (iv) tenemos

$$G(\lambda(a_1, \cdots, a_k), a_0)) \in \Sigma$$

Para demostrar (b), notemos que en general si $G(b, a_0) \in \Sigma$ entonces otra vez por el Lema 2.27 y (iv) sabemos que

$$q(b) \in \Sigma.$$

De acuerdo con la segunda propiedad de q, a saber

Si $q(b) \in \Sigma$, entonces hay $(a_1, \cdots, a_k) \in A$ tal que $b = \lambda(a_1, \cdots, a_k) \in \Sigma$

tenemos que

$$\text{hay } (a_1, \cdots, a_k) \in A \text{ tal que } b = \lambda(a_1, \cdots, a_k) \in \Sigma$$

En particular si b es de la forma $\lambda(b_1, \cdots, b_k)$ tenemos

$$\text{hay } (a_1, \cdots, a_k) \in A \text{ tal que } \lambda(b_1, \cdots, b_k) = \lambda(a_1, \cdots, a_k) \in \Sigma$$

Entonces, por el lema 3.21

$$a_1 = b_1 \in \Sigma, \ \cdots \ , a_k = b_k \in \Sigma$$

Que es lo que deseabamos mostrar.

Para verificar (c), tome $(a_1, \cdots, a_k) \in A$, sabemos por (a) que

$$G(\lambda(a_1, \cdots, a_k), a_0) \in \Sigma$$

Por otra parte, al sustituir $\lambda(a_1, \cdots, a_k)$ y a_0 en δ_6 obtenemos

$$(G(\lambda(a_1, \cdots, a_k), a_0) \to F(\lambda(a_1, \cdots, a_k), a_0)) \in \Sigma$$

Por lo que

$$F(\lambda(a_1, \cdots, a_k), a_0)) \in \Sigma$$

Por su parte, el lema 3.20 muestra que

$$T_{\tau_1, \cdots, \tau_k}(\lambda(a_1, \cdots, a_k)) \in \Sigma$$

Por (C.1)(b)

$$(T_{\tau_1, \cdots, \tau_k}(\lambda(a_1, \cdots, a_k)) \wedge F(\lambda(a_1, \cdots, a_k), a_0)) \in \Sigma$$

Por (C.3)(b)

$$(\exists y)(T_{\tau_1, \cdots, \tau_k}(y) \wedge F(y, a_0)) \in \Sigma$$

Lo cual es por definición

$$T_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}(a_0) \in \Sigma$$

Justo lo que se quería demostrar.

Para el caso en el que $A = \varnothing$, tenemos que mostrar que existe una constante individual a_0 que satisface (a), (b) y (c).

Por vacuidad, es claro que se cumple (a).

Como $A = \varnothing$, probar (b) es equivalente a ver que no existe constante individual d tal que

$$G(d, a_0) \in \Sigma$$

Si d es cualquier constante individual, podemos sustituirla en

$$\forall z \neg G(z, a_0)) \in \Sigma$$

Y obtener

$$\neg G(d, a_0)) \in \Sigma$$

De acuerdo con (C.0)(a), concluímos que

$$G(d, a_0)) \notin \Sigma$$

En otras palabras, no existe constante individual d tal que

$$G(d, a_0) \in \Sigma$$

Justo lo que queríamos.

Mostremos (c):

$$T_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}(a_0) \in \Sigma$$

Para verlo, tomemos cualquier $(a_1, \cdots, a_k)$ que satisfaga

(i) $$T_{\tau_1}(a_1) \in \Sigma, \ \cdots \ , T_{\tau_k}(a_k) \in \Sigma$$

Sustituyendo $\lambda(a_1, \cdots, a_k)$ por x en δ_{82} obtenemos

$$\exists y \ (F(\lambda(a_1, \cdots, a_k), y) \wedge \forall z \ \neg G(z, y)) \in \Sigma$$

Por (C.3), existe a_0 tal que

$$(F(\lambda(a_1, \cdots, a_k), a_0) \wedge \forall z \ \neg G(z, a_0)) \in \Sigma$$

Por (C.1)(a) tenemos

$$F(\lambda(a_1, \cdots, a_k), a_0) \in \Sigma \qquad \text{y} \qquad \forall z \ \neg G(z, a_0) \in \Sigma$$

Por otro lado, el lema 3.20 muestra que

$$T_{\tau_1, \cdots, \tau_k}(\lambda(a_1, \cdots, a_k)) \in \Sigma$$

Por (C.1)(b)

$$(T_{\tau_1, \cdots, \tau_k}(\lambda(a_1, \cdots, a_k)) \wedge F(\lambda(a_1, \cdots, a_k), a_0)) \in \Sigma$$

Por (C.3)(b)

$$\exists y (T_{\tau_1, \cdots, \tau_k}(y) \wedge F(y, a_0)) \in \Sigma$$

Lo cual por definición, es equivalente a

$$T_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(a_0) \in \Sigma$$

Que es lo que se quería demostrar.

$\dashv$

Lema 3.29. *Las propiedades (a), (b) y (c) que satisface a_0 implican la siguiente propiedad adicional:*

(d) Si $G(b, a_0) \in \Sigma$ entonces hay $(a_1, \cdots, a_k) \in A$ tal que $b = \lambda(a_1, \cdots, a_k) \in \Sigma$

Demostración .

Supongamos que

$$G(b, a_0) \in \Sigma$$

Si sustituímos b y a_0 en δ_6 tenemos

$$(G(b, a_0) \to F(b, a_0)) \in \Sigma$$

Luego, tenemos que

$$F(b, a_0) \in \Sigma$$

Por la propiedad (c) de a_0, sabemos que

$$T_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(a_0) \in \Sigma$$

Lo cual es equivalente a que

$$\exists y(T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(y) \wedge F(y, a_0)) \in \Sigma$$

Por (C.3)(a), existe una constante individual c tal que

$$(T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(c) \wedge F(c, a_0)) \in \Sigma$$

Por (C.1)(a), tenemos

$$T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(c) \in \Sigma \text{ y } F(c, a_0) \in \Sigma$$

Por el Lema 3.2

$$H(a_0, a_0) \in \Sigma$$

Si sustituímos c, a_0, b, a_0 en δ_{332} obtenemos

$$(F(c, a_0) \wedge F(b, a_0) \wedge H(a_0, a_0) \to H(c, b)) \in \Sigma$$

Sabemos por (C.1)(b) que el antecedente de la implicación anterior está en Σ, luego

$$H(c, b) \in \Sigma$$

Por el Lema 3.24 sabemos que

$$T_{\tau_1, \cdots, \tau_k}(b) \in \Sigma$$

Y por el lema 3.22, hay $(b_1, \cdots, b_k)$ de constantes individuales tal que

$$T_{\tau_1}(b_1) \in \Sigma, \ \cdots \ , T_{\tau_k}(b_k) \in \Sigma$$

$$\text{y además} \qquad b = \lambda(b_1, \cdots, b_k) \in \Sigma$$

Dado que $G(b, a_0) \in \Sigma$, por (C.5) tenemos

$$G(\lambda(b_1, \cdots, b_k), a_0) \in \Sigma$$

Por la propiedad (b) de a_0, hay $(a_1, \cdots, a_k) \in A$ tal que

$$a_1 = b_1 \in \Sigma \ , \ \cdots \ , \ a_k = b_k \in \Sigma$$

Dado que $(a_1, \cdots, a_k)$ satisface la condición (i), tenemos que, por el lema 3.23

$$\lambda(a_1, \cdots, a_k) = \lambda(b_1, \cdots, b_k) \in \Sigma$$

Como $b = \lambda(b_1, \cdots, b_k) \in \Sigma$, entonces por (C.5)

$$b = \lambda(a_1, \cdots, a_k) \in \Sigma$$

Lo cual, termina por demostrar que las condiciones (a), (b) y (c) implican (d).

$\dashv$

Una interpretación informal del Lema 3.29 es que

“ a_0 codifica sólo a elementos de A ”

en otras palabras, (d) y (b) juntos expresan que

“ a_0 codifica a los elementos de A y sólo a esos ”.

En el siguiente teorema seguimos suponiendo que Σ es un Conjunto Modelo Fuerte que tiene a la fórmula δ.

Teorema 3.30 (Teorema II (2) E)**.** *Si a_0 y a_0^* satisfacen los requerimientos (a), (b) y (c) de (D) con respecto a algún A, entonces $a_0 = a_0^* \in \Sigma$.*

Demostración .

Supongamos que a_0 y a_0^* satisfacen las condiciones (a), (b) y (c) y por el Lema 3.29 también (d) con respecto a algún conjunto A de k-adas de constantes individuales que satisfacen la condición (i).

Por (c) tenemos

$$T_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(a_0) \in \Sigma$$

$$T_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(a_0^*) \in \Sigma$$

Lo cual es equivalente a

$$\exists y(T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(y) \wedge F(y, a_0)) \in \Sigma$$

$$\exists w(T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(w) \wedge F(w, a_0^*)) \in \Sigma$$

Por (C.3)(a), existen c y d constantes individuales, tales que

$$(T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(c) \wedge F(c, a_0)) \in \Sigma$$

$$(T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(d) \wedge F(d, a_0^*)) \in \Sigma$$

Por (C.1)(a), sabemos

$$T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(c) \in \Sigma \text{ y } F(c, a_0) \in \Sigma$$

$$T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(d) \in \Sigma \text{ y } F(d, a_0^*) \in \Sigma$$

Por el lema 3.2

$$H(d,c) \in \Sigma$$

Al sustituir d, a_0^*, c en δ_7

$$(F(d,a_0^*) \wedge H(d,c) \rightarrow F(c,a_0^*)) \in \Sigma$$

Por (C.1)(b) se tiene que el antecedente de esta implicación está en Σ y por tanto

$$F(c,a_0^*) \in \Sigma$$

Si $G(b,a_0) \in \Sigma$ entonces por (d), existe $(a_0^*, \cdots, a_k) \in A$ tal que

$$b = \lambda(a_1, \cdots, a_k) \in \Sigma$$

Por (a), sucede que

$$G(\lambda(a_1, \cdots, a_k), a_0^*) \in \Sigma$$

Y por (C.5)

$$G(b,a_0^*) \in \Sigma$$

Como b fue arbitrario, entonces podemos afirmar que

Para todo b, $G(b,a_0) \in \Sigma$ y $G(b,a_0^*) \in \Sigma$ simultáneamente.

Luego, por el Lema 2.27

$$\forall z\ (G(z,a_0) \leftrightarrow G(z,a_0^*)) \in \Sigma$$

Al sustituir c, a_0, a_0^* en δ_9 obtenemos

$$(F(c,a_0) \wedge F(c,a_0^*) \wedge \forall z\ (G(z,a_0) \leftrightarrow G(z,a_0^*)) \rightarrow a_0 = a_0^*) \in \Sigma$$

Nuevamente por (C.1)(b), tenemos que

$$(F(c,a_0) \wedge F(c,a_0^*) \wedge \forall z\ (G(z,a_0) \leftrightarrow G(z,a_0^*))) \in \Sigma$$

concluyendo así que

$$a_0 = a_0^* \in \Sigma$$

Lo cual termina demostrando (E).

$\dashv$

Este teorema nos revela un hecho trascendental para el conjunto A;

a_0 no sólo codifica a A en Σ sino que además es el único que lo hace.

En síntesis, construímos recursivamente una familia de funciones λ, cuyo único propósito fué codificar los símbolos de tipo no primitivos, que pudiesen estar presentes en un Conjunto Modelo Fuerte Σ.

Esta construcción tendrá un papel fundamental en la función de traducción del siguiente capítulo, pues nos permitirá partir en clases de equivalencia las constantes con presencia en un Conjunto Modelo Fuerte Σ.

Capítulo 4

La reducción de la Teoría de los Tipos

Recordemos que nuestro objetivo es *traducir* cualquier fórmula de la teoría de tipos en una fórmula del lenguaje de segundo orden. Para esto partimos de un conjunto *fijo pero arbitrario* de fórmulas de la teoría de tipos, digamos Σ y construímos la función traducción ξ, que tome elementos de Σ y los traduzca al lenguaje de segundo orden.

Para esto, hay que definir primero como traducir los símbolos propios que tengan presencia en $\Sigma \subseteq \mathscr{L}_\tau$ en símbolos propios del tipo primitivo.

4.1. La función de traducción ξ

La idea central del trabajo es, definir una función de traducción ξ que convierta efectivamente fórmulas del lenguaje de la teoría de tipos al lenguaje de segundo orden, y con esto, valernos de los teoremas I y I** (2.19 y 2.23) de Hintikka, para poder *reconstruir* la teoría de tipos dentro de la lógica de segundo orden. El siguiente diagrama ilustra la presente idea:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Hay } \underset{CM}{\Delta^{\#}} \ni \alpha & \Longleftarrow & \text{Hay } \underset{CMF}{\Delta} \ni (\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)) \\
\Big\Updownarrow{\scriptstyle Teo.I} & \Big\Downarrow & \Big\Updownarrow{\scriptstyle Teo.I^{**}} \\
\alpha \text{ satisfactible} & \overset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow} & (\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)) \text{ satisfactible} \\
\Big\Updownarrow{\scriptstyle Teo.I^{**}} & \Big\Uparrow & \Big\Updownarrow{\scriptstyle Teo.I} \\
\text{Hay } \underset{CMF}{\Sigma} \ni \alpha & \Longrightarrow & \text{Hay } \underset{CM}{\Sigma^{*}} \ni (\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha))
\end{array}
$$

Ahora bien, para definir nuestra traducción, consideremos el conjunto de los símbolos de constante de cualquier tipo que tengan presencia en Σ, $Q(\Sigma)$; así como también al conjunto de variables de cualquier tipo con presencia en Σ, $V(\Sigma)$.

Para que la traducción de los símbolos en $Q(\Sigma) \cup V(\Sigma)$ sea exitosa, ésta debe de cumplir las siguientes condiciones:

Si q^{τ_i} es un símbolo de constante de tipo τ_i entonces $\xi(q^{\tau_i})$ será un símbolo de constante del tipo primitivo τ.

Si v^{τ_i} es un símbolo de variable de tipo τ_i entonces $\xi(v^{\tau_i})$ será un símbolo de variable del tipo primitivo τ.

Si p_1 y p_2 son símbolos propios distintos entonces $\xi(p_1) \neq \xi(p_2)$.

En otras palabras una traducción para los símbolos propios de Σ, es una función *inyectiva* que *traduce* símbolos de constante de cualquier tipo con presencia en Σ en símbolos de constante *individual* y símbolos de variable de cualquier tipo con presencia en Σ en símbolos de variable *individual*:

$$\xi : Q(\Sigma) \cup V(\Sigma) \longrightarrow Q_\tau \cup V_\tau.$$

Esta función, debe ser cuidadosamente escogida, y en general depende de los tipos de las constantes con presencia en Σ.

Ahora bien, extendemos la traducción ξ a cualquier fórmula α de la teoría de tipos, de manera que $\overline{\xi}(\alpha)$ sea una fórmula del lenguaje de segundo orden, determinada por las siguientes reglas:

$$\overline{\xi}(\neg\alpha) \longmapsto \neg\overline{\xi}(\alpha)$$

$$\overline{\xi}(\alpha \wedge \beta) \longmapsto \overline{\xi}(\alpha) \wedge \overline{\xi}(\beta)$$

$$\overline{\xi}(\alpha \vee \beta) \longmapsto \overline{\xi}(\alpha) \vee \overline{\xi}(\beta)$$

$$\overline{\xi}(\exists v^\tau \alpha(q^\tau|v^\tau)) \longmapsto \exists\overline{\xi}(v^\tau)\ (T_\tau(\xi(v^\tau)) \wedge \overline{\xi}(\alpha)(\xi(q^\tau)|\xi(v^\tau)))$$

$$\overline{\xi}(\forall v^\tau\ \alpha(q^\tau|v^\tau)) \longmapsto \forall\overline{\xi}(v^\tau)\ (T_\tau(\xi(v^\tau)) \rightarrow \overline{\xi}(\alpha)(\xi(q^\tau)|\xi(v^\tau)))$$

$$\overline{\xi}(q_1 = q_2) \longmapsto \xi(q_1) = \xi(q_2)$$

$$\overline{\xi}(q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_1^{\tau_1},\cdots,q_k^{\tau_k})) \longmapsto$$

$\exists y_1 \cdots \exists y_{k-1} \big(J(\xi(q_1), y_2, y_1) \wedge \cdots \wedge J(\xi(q_{k-2}), y_{k-1}, y_{k-2}) \wedge J(\xi(q_{k-1}), \xi(q_k), y_{k-1}) \wedge G(y_1, \xi(q_0))\big)$

con la condición de que los símbolos de variable y_i *son nuevos*, por lo que, *no son* símbolos de V_τ.

Por supuesto que, aunque $\overline{\xi}$ y ξ son funciones diferentes entre sí, una es la extensión de la otra, la diferencia es que una traduce símbolos propios y otra traduce fórmulas, sin perder formalidad, prescindiremos de la notación $\overline{\xi}$ y sólo usaremos ξ con el entendido de que $\xi(\alpha)$ depende de los valores que ξ asigne a los símbolos propios que figuran en α.

Las primeras cinco reglas reducen el problema de traducir una fórmula de nivel mayor que 0 a una fórmula de un nivel menor. Las dos últimas reglas tienen especial cuidado con las fórmulas de nivel 0.

Una vez que la traducción entre los símbolos propios queda determinada, podemos mostrar mediante inducción sobre el nivel de las fórmulas que cada α tiene una única traducción $\xi(\alpha)$.

Veamos por ejemplo:

$$\Sigma = \{\exists v_1^{\langle\tau\rangle}\ q_0^{\langle\langle\tau\rangle,\tau,\langle\langle\tau\rangle\rangle\rangle}(q_1^{\langle\tau\rangle}, q_2^\tau, q_3^{\langle\langle\tau\rangle\rangle})(q_1^{\langle\tau\rangle}|v_1^{\langle\tau\rangle})\}$$

los símbolos de constante de cualquier tipo que tienen presencia en Σ son:

$$Q(\Sigma) = \{q_0^{\langle\langle\tau\rangle,\tau,\langle\langle\tau\rangle\rangle\rangle}, q_1^{\langle\tau\rangle}, q_2^\tau, q_3^{\langle\langle\tau\rangle\rangle}\}$$

los símbolos de variable de cualquier tipo presentes en Σ son:

$$V(\Sigma) = \{v_1^{\langle\tau\rangle}\}$$

así que para este ejemplo *escogeremos* la siguiente función inyectiva:

$$\xi : V(\Sigma) \cup Q(\Sigma) \longrightarrow V_\tau \cup Q_\tau$$

$$\begin{aligned} v_1^{\langle\tau\rangle} &\longmapsto v_1^\tau \\ q_0^{\langle\langle\tau\rangle,\tau,\langle\langle\tau\rangle\rangle\rangle} &\longmapsto q_0^\tau = \xi(q_0^{\langle\langle\tau\rangle,\tau,\langle\langle\tau\rangle\rangle\rangle}) \\ q_1^{\langle\tau\rangle} &\longmapsto q_1^\tau \\ q_2^\tau &\longmapsto q_2^\tau \\ q_3^{\langle\langle\tau\rangle\rangle} &\longmapsto q_3^\tau \end{aligned}$$

entonces la traducción de la fórmula que está en Σ es :

$$\exists\xi(v_1^{\langle\tau\rangle})(T_\tau(\xi(v_1^{\langle\tau\rangle}))) \wedge \exists y_1 \exists y_2 (J(\xi(v_1^{\langle\tau\rangle}), y_2, y_1) \wedge J(\xi(q_2^\tau), \xi(q_3^{\langle\langle\tau\rangle\rangle}), y_2) \wedge \\ G(y_1, \xi(q_0^{\langle\langle\tau\rangle,\tau,\langle\langle\tau\rangle\rangle\rangle})))$$

de acuerdo a la función ξ, la traducción final queda:

$$\exists v_1^\tau(T_\tau(v_1^\tau) \wedge \exists y_1 \exists y_2 (J(v_1^\tau, y_2, y_1) \wedge J(q_2^\tau, q_3^\tau, y_2) \wedge G(y_1, q_0^\tau))$$

la cual es una fórmula de lenguaje de segundo orden.

En general esta traducción no tendrá mas símbolos de predicado que I, F, G, H, J, en particular no tiene variables de predicado. Sin tomar en cuenta los símbolos de variable $y_1, \cdots, y_{k-1}$ que aparecen en la penúltima regla, los símbolos propios de α y $\xi(\alpha)$ se corresponden uno a uno de manera natural, de aquí se sigue que:

$$\xi(\alpha(p_1|p_2)) = \xi(\alpha)(\xi(p_1)|\xi(p_2))$$

y por tanto, variantes alfabéticas de una fórmula $\alpha(q_1)$ y $\alpha(q_2)$ serán traducidas en variantes alfabéticas $\xi(\alpha)(\xi(q_1))$ y $\xi(\alpha)(\xi(q_2))$.

Dada una fórmula α de la teoría de tipos. Denotamos por $\chi(\alpha)$ la siguiente fórmula

$$(T_{\tau_1}(\xi(q_1^{\tau_1})) \wedge \cdots \wedge T_{\tau_k}(\xi(q_k^{\tau_k})))$$

expresada en el lenguaje de la lógica de segundo orden, donde $q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}$ son todas constantes de α.

En la siguiente sección se comienza con un Conjunto Modelo Fuerte Σ y se construye un particular Conjunto Modelo Σ^* que contiene a todas las traducciones de Σ.

4.2. La construcción de Σ^*

El propósito de esta sección es construir un Conjunto Modelo Fuerte Σ^* a partir de un Conjunto Modelo Σ, pero esto no es todo, queremos también que $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma^*$. El lector no debe entender esto como un simple capricho, tal vez en este momento el diagrama de la Sección 4.1 le recuerde el camino a seguir en este trabajo.

Lema 4.1. *Si Σ es un Conjunto Modelo Fuerte entonces hay un conjunto de fórmulas Σ_2 tal que $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma_2$ y cumple (C.0)(b) aplicado sólo a fórmulas atómicas e identidades.*

Demostración .

Sea Σ un Conjunto Modelo Fuerte , tomemos el conjunto de traducciones de las fórmulas de Σ, así obtenemos el conjunto $\xi[\Sigma]$ de fórmulas cuyas constantes individuales son de la forma $\xi(q^{\tau_i})$, observe que, por como se definió la traducción, las constantes de $\xi[\Sigma]$ son todas del tipo primitivo, por lo que:

$$Q_\tau(\xi[\Sigma]) = Q(\xi[\Sigma]).$$

Denotemos por $Q(\xi[\Sigma])^k$ al conjunto $Q(\xi[\Sigma]) \times \cdots \times Q(\xi[\Sigma])$

Definición 4.2. *Decimos que $(a_1, \cdots, a_k) \sim (b_1, \cdots, b_m)$ si y sólo si*

$$k = m \geq 2,\ (a_1 = b_1) \in \xi[\Sigma]\ ,\ \cdots\ ,\ (a_k = b_k) \in \xi[\Sigma]$$

Ejercicio 4.3. *Demuestre que si Σ es Conjunto Modelo Fuerte entonces $\sim$ es una relación de equivalencia en $Q(\xi[\Sigma])^k$.*

Definimos:

Si $a_1 \in Q(\xi[\Sigma])$, $\lambda(a_1)$ es simplemente a_1.

Ahora bien, si $(a_1, \cdots, a_k) \in Q(\xi[\Sigma])^k$ donde $k \geq 2$, le podemos asociar una *nueva* constante individual

(i) $$\lambda(a_1, \cdots, a_k) \in Q_\tau \setminus Q(\xi[\Sigma])$$

determinada por la clase de equivalencia de la k-ada $(a_1, ..., a_k)$:

(ii) $$[a_1, ..., a_k]_\sim \longmapsto \lambda(a_1, \cdots, a_k)$$

La idea es que estas nuevas constantes se comportarán como las definidas en el Capítulo 3.

Ahora, extendamos a $\xi[\Sigma]$ uniéndole el conjunto Γ de todas las fórmulas de las siguientes formas:

$$\lambda(a_1, \cdots a_k) = \lambda(a_1, \cdots a_k)$$

$$T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(\lambda(\xi(q_1^{\tau_1}), \cdots, \xi(q_k^{\tau_k})))$$

$$F(\lambda(\xi(q_1^{\tau_1}), \cdots, \xi(q_k^{\tau_k})), \xi(q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}))$$

$$H(\lambda(\xi(q_{i_1}^{\tau_1}), \cdots, \xi(q_{i_k}^{\tau_k})), \lambda(\xi(q_{j_1}^{\tau_1}), \cdots, \xi(q_{j_k}^{\tau_k})))$$

$$J(\lambda(a_1), \lambda(a_2, \cdots, a_m), \lambda(a_1, a_2, \cdots, a_m))$$

$$\text{si } q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in \Sigma \text{ entonces}$$

$$G(\lambda(\xi(q_1^{\tau_1}), \cdots, \xi(q_k^{\tau_k})), \xi(q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}))$$

donde $1 \leq k \in \mathbb{N}$, $2 \leq m \in \mathbb{N}$, $q_k^{\tau_k}, q_{i_k}^{\tau_k}, q_{j_k}^{\tau_k} \in Q(\Sigma)$, $a_m \in Q(\xi[\Sigma])$.

Ahora bien, considere:

$$\Lambda_1 = \{\lambda(a_1) \mid a_1 \in Q(\xi[\Sigma])\}$$

$$\Lambda_n = \{\lambda(a_1, ..., a_n) \mid (a_1, \cdots, a_n) \in Q(\xi[\Sigma])^n\}$$

$$\Lambda = \bigcup \{\Lambda_n \mid 1 \leq n \in \mathbb{N}\}$$

Para cada $a, b, c \in \Lambda$ definimos los siguientes conjuntos de fórmulas, :

$$\{\neg T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a) \mid T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a) \notin \Gamma\}$$

$$\{\neg J(a, b, c) \mid J(a, b, c) \notin \Gamma\}$$

$$\{\neg F(a, b) \mid F(a, b) \notin \Gamma\}$$

$$\{\neg H(a, b) \mid H(a, b) \notin \Gamma\}$$

$$\{\neg G(a,b) \mid G(a,b) \notin \Gamma\}$$

$$\{\neg(a=b) \mid (a=b) \notin \Gamma\}$$

A la unión de estos conjuntos la denotaremos por $n(\Gamma)$, observe que sus elementos son negaciones de fórmulas *que no tienen presencia en* Γ y cuyas constantes pertenecen a Λ. El lector *no debe confundir* $n(\Gamma)$ con el conjunto $\{\neg\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$.

Ahora concentrémonos en los conjuntos $W \subseteq \Lambda$, que cumplan la siguiente propiedad:

$\mathbb{P}(W)$: Si $(a=b) \in \xi[\Sigma]$ entonces: $a \in W$ si y sólo si $b \in W$

Y para cada uno de ellos considere:

$$\Delta_W = \{A_W(a) \mid a \in W\} \bigcup \{\neg A_W(b) \mid b \notin W\}$$

donde A_W son *nuevos* símbolos de constante del tipo $\langle\tau\rangle$.

Definimos :

$$\Delta = \bigcup\{\Delta_W \mid \mathbb{P}(W)\}$$

Para fijar ideas, tome en cuenta el siguiente ejemplo, donde $\{a=b, c=d\} \subseteq \xi[\Sigma]$, entonces

$$\begin{gathered} W_0 = \varnothing \\ W_1 = \{a,b\} \\ W_2 = \{c,d\} \end{gathered}$$

son ejemplos de conjuntos que cumplen $\mathbb{P}$, para los cuales tenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta_{W_0} &= \varnothing && \subseteq \Delta \\
\Delta_{W_1} &= \{A_{W_1}(a), A_{W_1}(b)\} \bigcup \{\neg A_{W_1}(c), \neg A_{W_1}(d)\} && \subseteq \Delta \\
\Delta_{W_2} &= \{A_{W_2}(c), A_{W_2}(d)\} \bigcup \{\neg A_{W_2}(a), \neg A_{W_2}(b)\} && \subseteq \Delta
\end{aligned}$$

Finalmente consideremos el conjunto de fórmulas:

$$\begin{aligned}
\Theta = {} & \{A_W \neq A_U \mid \mathbb{P}(W) \text{ y } \mathbb{P}(U) \text{ y } W \neq U\} \bigcup \\
& \{A_W = A_W \mid \mathbb{P}(W)\} \bigcup \{I \neq A_W \mid \mathbb{P}(W)\} \bigcup \{I = I\}.
\end{aligned}$$

Así, *afirmamos que* el conjunto extendido:

$$\Sigma_2 = \xi[\Sigma] \cup \Gamma \cup n(\Gamma) \cup \Delta \cup \Theta$$

satisface (C.0)(b), aplicándolo sólo a fórmulas atómicas e identidades.

Para esto, recordemos que las constantes *de cualquier tipo* con presencia en Σ_2 son aquellas que pertenecen a Λ o bien alguna de las nuevas constantes A_W o bien la constante I , en símbolos:

$$Q(\Sigma_2) = \Lambda \cup \{A_W \mid \mathbb{P}(W)\} \cup \{I\}$$

y veamos primero quienes son las fórmulas atómicas o identidades que tienen presencia en Σ_2:

$$\mathrm{Id}(\Sigma_2) = \{a = a \mid a \in Q(\Sigma_2)\}$$

$$\text{Átom}(\Sigma_2) = (\Gamma \cap \{I(a), F(b,c), G(d,e), H(f,g), J(h,i,k) \mid a, b, ..., k \in \Lambda\}) \cup \\ \{A_W(a) \mid \mathbb{P}(W) \text{ y } a \in W\}$$

Ahora bien, ¿cómo son las fórmulas atómicas o identidades que *no pertenecen* a Σ_2 pero cuyas constantes pertenecen a $Q(\Sigma_2)$?

El análisis anterior nos permite deducir que son fórmulas atómicas o identidades que *no pertenecen* a Γ pero sus constantes *si pertenecen* a $Q(\Sigma_2)$, esto implica que *las negaciones* de esas fórmulas pertenecen a $n(\Gamma) \subseteq \Sigma_2$, pues así se definió $n(\Gamma)$.

$\dashv$

Antes de ver (C.6)*, pedimos al lector se dé cuenta de la veracidad de las siguientes afirmaciones

$$Q_\tau(\xi[\Sigma]) \subseteq Q_\tau(\Gamma) = Q_\tau(n(\Gamma))$$

$$Q_\tau(\Delta) \subseteq Q_\tau(\xi[\Sigma]) \subseteq \Lambda$$

$$Q_\tau(\Theta) = \varnothing$$

con esto, el lector podrá mostrar que:

$$Q_\tau(\Sigma_2) = \Lambda$$

Proposición 4.4. Σ_2 satisface *(C.6)* para sus subconjuntos de constantes del tipo* τ.

Demostración .

Sea pues $W \subseteq Q_\tau(\Sigma_2) = \Lambda$.

Si $W = \varnothing$, entonces W satisface la propiedad

$$\mathbb{P}(W)\colon\ \xi(q_i) = \xi(q_j) \in \xi[\Sigma] \Rightarrow (\xi(q_i) \in \varnothing \Leftrightarrow \xi(q_j) \in \varnothing)$$

(C.6)(a) Se cumple porque $W = \varnothing$.

(C.6)(b) Se cumple porque para cualquier constante b sucede que $A_W(b) \notin \Sigma_2$.

Si $W \neq \varnothing$, tome $a \in W \subseteq Q_\tau(\Sigma_2) = \Lambda$, entonces hay dos casos:

Caso 4.5. $a \in \Lambda_1$

de aquí se sigue que existe $q \in Q(\Sigma)$ tal que $a = \lambda(\xi(q)) = \xi(q)$,

por definición de Δ, existe $A_W \in Q_{\langle\tau\rangle}$ tal que:

$$a \in W \Longrightarrow A_W(a) \in \Sigma_2$$

$$A_W(b) \in \Sigma_2 \Longrightarrow \text{existe } a \in W \text{ tal que } a = b \in \xi[\Sigma] \subseteq \Sigma_2.$$

Caso 4.6. $a \in \Lambda_k$ *con* $k \geq 2$

Por definición, existen $q_1 \in Q(\Sigma)$, . . . , $q_k \in Q(\Sigma)$ tales que

$$a = \lambda(\xi(q_1), ..., \xi(q_k))$$

así que existe $A_W \in Q(\Delta) \subseteq Q_{\langle\tau\rangle}$ tal que:

$$\lambda(\xi(q_1), ..., \xi(q_k)) \in W \Longrightarrow A_W(\lambda(\xi(q_1), ..., \xi(q_k))) \in \Sigma_2$$

$$A_W(\lambda(\xi(q_1), ..., \xi(q_k))) \in \Sigma_2 \Longrightarrow \text{existe } \lambda(\xi(q_1), ..., \xi(q_k)) \in W \text{ tal que}$$

$$\lambda(\xi(q_1), ..., \xi(q_k)) = \lambda(\xi(q_1), ..., \xi(q_k)) \in \Gamma \subseteq \Sigma_2.$$

Con esto se completa la prueba de que Σ_2 cumple (C.6)*.

$\dashv$

No olvidemos que el propósito de este capítulo es construir para un Conjunto Modelo Fuerte Σ, un conjunto de fórmulas Σ^* que sea *Conjunto Modelo* y que $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$. Para esto, vamos a extender a Σ_2 como sigue.

Considere los conjuntos de fórmulas:

$\Sigma_\wedge = \{\alpha \wedge \beta \mid \alpha\ ,\ \beta \in \Sigma_2\ \}$

$\Sigma_\vee = \{\alpha \vee \beta \mid Q(\alpha \vee \beta) \subseteq Q(\Sigma_2) \text{ y } \alpha \in \Sigma_2\}$

$\Sigma_\exists = \{\ \exists v^\tau \alpha \in \Sigma_2 \mid \text{hay } q^\tau \in Q_\tau \text{ tal que } \alpha(v^\tau | q^\tau) \in \Sigma_2\ \}$

$\Sigma_\forall = \{\ \forall v^\tau \alpha \in \Sigma_2 \mid \text{para todo } q^\tau \in Q_\tau(\Sigma_2) \text{ sucede que } \alpha(v^\tau | q^\tau) \in \Sigma_2\ \}$

Definimos

$$\Sigma^* = \Sigma_2 \cup \Sigma_\wedge \cup \Sigma_\vee \cup \Sigma_\exists \cup \Sigma_\forall$$

El siguiente ejercicio será utilizado para mostrar que Σ^* cumple (C.1)(a). Su demostración es elemental y obliga al lector a revisar la construcción hasta aquí hecha.

Ejercicio 4.7. *Si* $(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma^*$ *entonces* $(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma^* \setminus (\Gamma \cup n(\Gamma) \cup \Delta \cup \Theta)$

Empezaremos demostrando las condiciones (C.1)(a),..., (C.4)(a), no se debe pensar que olvidamos la condición (C.0)(a), lo que pasa es que, por la naturaleza de la prueba ésta será retomada al final del Lema 4.14.

Lema 4.8. *Si Σ es un Conjunto Modelo Fuerte entonces hay un conjunto de fórmulas Σ^* tal que $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$ y cumple (C.1)(a).*

Demostración .

Sea $(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma^*$, por el ejercicio 4.7 tenemos que

$$(\alpha \wedge \beta) \in \xi[\Sigma] \cup \Sigma_\wedge$$

Si $(\alpha \wedge \beta) \in \xi[\Sigma]$, entonces hay $\gamma \in \Sigma$ tal que:

$$\xi(\gamma) = \alpha \wedge \beta$$

de la definición de ξ, es claro que γ es una conjunción $\varphi \wedge \psi$, de aquí que

$$\xi(\varphi \wedge \psi) = \xi(\varphi) \wedge \xi(\psi) = \alpha \wedge \beta$$

Por ser Σ un Conjunto Modelo, cumple (C.1)(a), así

$$\{\varphi, \psi\} \subseteq \Sigma$$

y por tanto

$$\{\xi(\varphi), \xi(\psi)\} \subseteq \xi[\Sigma]$$

como $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma^*$

$$\{\alpha, \beta\} \subseteq \Sigma^*$$

Si $(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma_\wedge$ entonces (por definición de $\Sigma_\wedge$) $\{\alpha, \beta\} \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$

$\dashv$

El siguiente ejercicio es análogo al ejercicio 4.7, y sirve para demostrar que Σ^* cumple (C.2)(a).

Ejercicio 4.9. *Si* $(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma^*$ *entonces* $(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma^* \setminus (\Gamma \cup n(\Gamma) \cup \Delta \cup \Theta)$

Lema 4.10. *Si Σ es un Conjunto Modelo Fuerte entonces hay un conjunto de fórmulas Σ^* tal que $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$ y cumple (C.2)(a).*

Demostración .

Sea $(\alpha \vee \beta) \in \Sigma^*$, por el ejercicio 4.9 tenemos que

$$(\alpha \vee \beta) \in \xi[\Sigma] \cup \Sigma_\vee$$

Si $(\alpha \vee \beta) \in \xi[\Sigma]$, entonces por un razonamiento análogo al caso de la conjunción, sabemos que hay $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ tal que:

$$\xi(\varphi \vee \psi) = \xi(\varphi) \vee \xi(\psi) = \alpha \vee \beta$$

Por ser Σ un Conjunto Modelo, cumple (C.2)(a), así que

$$\varphi \in \Sigma \text{ o bien } \psi \in \Sigma$$

y por tanto

$$\xi(\varphi) \in \xi[\Sigma] \text{ o bien } \xi(\psi) \in \xi[\Sigma]$$

pero por construcción sabemos que $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma^*$, ergo

$$\alpha \in \Sigma^* \text{ o bien } \beta \in \Sigma^*.$$

Si $(\alpha \vee \beta) \in \Sigma_\vee$ entonces (por definición del conjunto $\Sigma_\vee$) sucede que $Q(\alpha \vee \beta) \subseteq Q(\Sigma_2)$ y $\alpha \in \Sigma_2$ o bien $\beta \in \Sigma_2$.

$\dashv$

Como en los lemas anteriores, los siguientes ejercicios serán utilizados para verificar la validez de (C.4)(a) en Σ^*.

Ejercicio 4.11. *Si* $(\forall v^\tau \alpha) \in \Sigma^*$ *entonces* $(\forall v^\tau \alpha) \in \Sigma^* \setminus (\Gamma \cup \Delta \cup \Theta)$.

Ejercicio 4.12. *Si* $(\forall v^\tau \alpha) \in \xi[\Sigma]$ *entonces*

existe $(\forall v^{\tau_i} \beta) \in \Sigma$ *tal que* $(\forall v^\tau \alpha) = \xi(\forall v^{\tau_i} \beta)$ *o bien*

existe $\neg q(q_1, \cdots, q_k) \in \Sigma$ *tal que* $(\forall v^\tau \alpha) = \xi(\neg q(q_1, \cdots, q_k))$.

Ejercicio 4.13. *Si* $(\forall v^\tau \alpha) \in n(\Gamma)$ *entonces*

existe $a \in \Lambda$ *tal que* $(\forall v^\tau \alpha) = \neg T_{\tau_1, \cdots, \tau_k}(a)$ *o bien*

existe $b \in \Lambda$ *tal que* $(\forall v^\tau \alpha) = \neg T_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}(b)$.

Lema 4.14. *Si* Σ *es un Conjunto Modelo Fuerte entonces hay un conjunto de fórmulas* Σ^* *tal que* $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$ *y cumple (C.4)(a).*

Demostración .

Sea $(\forall v^\tau \alpha) \in \Sigma^*$ entonces, por los ejercicios anteriores tenemos que considerar sólo los siguientes casos:

$(\forall_0)$: existe $(\forall v^{\tau_i} \beta) \in \Sigma$ tal que $(\forall v^\tau \alpha) = \xi(\forall v^{\tau_i} \beta)$

Sea $q^\tau \in Q_\tau(\Sigma^*) \subseteq \Lambda = \xi(Q(\Sigma)) \cup \bigcup\{\Lambda_k \mid 2 \leq k \in \mathbb{N}\}$ entonces

(a) $q^\tau \in \xi(Q(\Sigma))$ o bien

(b) $q^\tau \in \bigcup\{\Lambda_k \mid 2 \leq k \in \mathbb{N}\}$

Veamos el caso (a):

Dado que Σ es Conjunto Modelo y existe $(\forall v^{\tau_i}\beta) \in \Sigma$ entonces:

(+) para cualquier $q^{\tau_i} \in Q(\Sigma)$ se tiene que $\beta(q^{\tau_i}) \in \Sigma$

como ξ traduce cualquier constante de Σ, como una constante del tipo primitivo:

$$\xi : Q(\Sigma) \longrightarrow \xi[Q(\Sigma)] \subseteq Q_\tau$$

entonces (+) implica que:

para cualquier $\xi(q^{\tau_i}) \in \xi[Q(\Sigma)]$ se tiene que $\xi(\beta)(\xi(q^{\tau_i})) \in \xi[\Sigma] \subseteq \Sigma^*$

Como $\Sigma_\vee \subseteq \Sigma^*$ y $Q(\neg T_{\tau_i}(\xi(q^{\tau_i}))\vee\ \xi(\beta)(\xi(q^{\tau_i}))) \subseteq (\xi[\Sigma]) \subseteq Q(\Sigma_2)$ entonces tenemos que

$\neg T_{\tau_i}(\xi(q^{\tau_i}))\vee\ \xi(\beta)(\xi(q^{\tau_i})) \in \Sigma_\vee \subseteq \Sigma^*$. Lo que se quería mostrar.

Para el caso (b).

Si $q^\tau \in \bigcup\{\Lambda^k \mid 2 \leq k \in \mathbb{N}\}$ entonces existe $2 \leq k \in \mathbb{N}$ tal que

$$q^\tau = \lambda(\xi(q_1), \cdots, \xi(q_k))$$

es por esta razón que

$$T_\tau(q^\tau) \notin \Gamma$$

y de aquí que

$$\neg T_\tau(q^\tau) \in n(\Gamma) \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*.$$

Como $\Sigma_\vee \subseteq \Sigma^*$ y $Q(\neg T_\tau(q^\tau)\vee\ \xi(\beta)(q^\tau)) \subseteq Q(\Sigma_2)$ entonces tenemos que

$\neg T_\tau(q^\tau)\vee\ \xi(\beta)(q^\tau) \in \Sigma^*$. Lo que se quería mostrar.

$(\forall_1)$: existe $\neg q(q_1, \cdots, q_k) \in \Sigma$ tal que $(\forall v^\tau\alpha) = \xi(\neg q(q_1, \cdots, q_k))$

Por definición de ξ, esto pasa si y sólo si existe $\neg q(q_1, \cdots, q_k) \in \Sigma$ tal que :

$(\forall v^\tau \alpha) = \forall y_1 \cdots \forall y_{k-1}$

$(\neg J(\xi(q_1), y_2, y_1) \vee \cdots \vee \neg J(\xi(q_{k-2}), y_{k-1}, y_{k-2}) \vee \neg J(\xi(q_{k-1}), \xi(q_k), y_{k-1}) \vee \neg G(y_1, \xi(q_0)))$

Sean pues, $c_1, \cdots, c_{k-1} \in Q_\tau(\Sigma^*)$.

Si $\neg J(\xi(q_1), c_2, c_1) \in n(\Gamma) \subseteq \Sigma^*$ y como $\Sigma_\vee \subseteq \Sigma^*$, se tiene que:

$$(\neg J(\xi(q_1), c_2, c_1) \vee \cdots \vee \neg J(\xi(q_{k-2}), c_{k-1}, c_{k-2}) \vee \neg J(\xi(q_{k-1}), \xi(q_k), c_{k-1}) \vee \neg G(c_1, \xi(q_0)))$$

es un elemento de Σ^*

Si $\neg J(\xi(q_1), c_2, c_1) \notin n(\Gamma) \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$, y por el 4.1: Σ_2 *satisface* (C.0)(b), aplicándolo sólo a fórmulas atómicas e identidades, es por esto que se tiene:

$$J(\xi(q_1), c_2, c_1) \in \Gamma \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*.$$

Aplicando $k-1$ veces un razonamiento análogo al anterior, concluímos que: o bien *algún* elemento de

$\{\neg J(\xi(q_1), c_2, c_1), \cdots, \neg J(\xi(q_{k-2}), c_{k-1}, c_{k-2}), \neg J(\xi(q_{k-1}), \xi(q_k), c_{k-1})\}$

está en Σ^* o bien *todos* los elementos de

$$\{J(\xi(q_1), c_2, c_1), \cdots, J(\xi(q_{k-2}), c_{k-1}, c_{k-2}), J(\xi(q_{k-1}), \xi(q_k), c_{k-1})\}$$

están en Σ^*.

Si sucede lo primero, entonces se tiene el resultado. Si sucede lo segundo entonces, por construcción de Γ:

$$c_1 = \lambda(\xi(q_1), \cdots, \xi(q_k))$$

$$c_2 = \lambda(\xi(q_2), \cdots, \xi(q_k))$$

$$\vdots$$

$$c_{k-1} = \lambda(\xi(q_{k-1}), \xi(q_k))$$

y dado que $q \in Q_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}$, afirmamos que:

$$G(c_1, \xi(q)) \notin \Sigma^*$$

Para verlo, supongamos que

$$G(c_1, \xi(q)) \in \Sigma^*$$

ergo, por la construcción de Σ^*

$$G(c_1, \xi(q)) \in \Gamma$$

lo cual contradice el hecho de que $\neg q(q_1, \cdots, q_k) \in \Sigma$. Veamos por qué:

Sabemos por definición de Γ:

$$G(c_1, \xi(q)) \in \Gamma \Longrightarrow q(q_1, \cdots, q_k) \in \Sigma$$

Sin embargo, sabemos que:

$$\neg q(q_1, \cdots, q_k) \in \Sigma, \text{ de donde:}$$

$$\{q(q_1, \cdots, q_k), \neg q(q_1, \cdots, q_k)\} \subseteq \Sigma$$

por lo que Σ no cumpliría con (C.0)(a), pero esto *no* pasa, pues Σ es un Conjunto Modelo.

($\forall_2$): existe $a \in \Lambda$ tal que $(\forall v^\tau \alpha) = \neg T_{\tau_1, \cdots, \tau_k}(a)$

Por definición de $T_{\tau_1, \cdots, \tau_k}$ esto pasa si y sólo si:

existe $a \in \Lambda$ tal que $(\forall v^\tau \alpha) = \forall x \forall y((T_{\tau_1}(x) \wedge T_{\tau_2, \cdots, \tau_k}(y)) \to \neg J(x, y, a))$

Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que *existen* $c, d \in Q_\tau(\Sigma^*)$ tales que

$$((T_{\tau_1}(c) \wedge T_{\tau_2, \cdots, \tau_k}(d)) \to \neg J(c, d, a)) \notin \Sigma^*.$$

como Σ^* satisface (C.0)(b), sucede que:

$$\neg((T_{\tau_1}(c) \wedge T_{\tau_2, \cdots, \tau_k}(d)) \to \neg J(c, d, a)) \in \Sigma^*.$$

de donde

$$T_{\tau_1}(c) \wedge T_{\tau_2,\cdots,\tau_k}(d) \wedge J(c,d,a) \in \Sigma^*.$$

Nuevamente, por definición de Γ:

Existen $q_1 \in Q_{\tau_1}(\Sigma)$, $q_2 \in Q_{\tau_2}(\Sigma)$, $\cdots$, $q_k \in Q_{\tau_k}(\Sigma)$ tales que:

$$c = \lambda(\xi(q_1))$$

$$d = \lambda(\xi(q_2),\cdots,\xi(q_k))$$

$$a = \lambda(\xi(q_1),\xi(q_2),\cdots,\xi(q_k))$$

contradiciendo el hecho de que $\neg T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a) \in \Sigma^*$.

Recuerde que $\neg T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(a) \in \Sigma^* \Longrightarrow a \notin Im(\lambda^k)$.

$(\forall_3)$: existe $b \in \Lambda$ tal que $(\forall v^\tau \alpha) = \neg T_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(b)$

Por definición de $T_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ esto pasa si y sólo si:

existe $b \in \Lambda$ tal que $(\forall v^\tau \alpha) = \forall y((T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(y) \to \neg F(y,b))$

Procedamos por reducción al absurdo. Sea $c \in \Lambda$ tal que

$$(T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(c) \wedge F(c,b)) \in \Sigma^*$$ [1]

Nuevamente, por definición de Γ:

Existen $q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \in Q_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(\Sigma)$, $q_1 \in Q_{\tau_1}(\Sigma)$, $\cdots$, $q_k \in Q_{\tau_k}(\Sigma)$ tales que:

$$c = \lambda(\xi(q_1),\cdots,\xi(q_k))$$

$$b = \xi(q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle})$$

contradiciendo el hecho de que $\neg T_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(a) \in \Sigma^*$.

Recuerde que $\neg T_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(b) \in \Sigma^* \Rightarrow b \notin \xi[Q_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(\Sigma)]$.

[1] Aquí estamos implícitamente usando que Σ^* cumple (C.0)(b), ¿Por qué?

$\dashv$

Lema 4.15. *Si Σ es un Conjunto Modelo Fuerte entonces hay un conjunto de fórmulas Σ^* tal que $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$ y cumple (C.3)(a).*

Demostración .

Ejercicio 4.16. *La demostración de (C.3)(Σ^*) es análoga a (C.4)(Σ^*), y se deja al lector.*

Hasta aquí, hemos mostrado las condiciones (C.1)(a),...,(C.4)(a) para Σ^*, ahora veamos que se cumple (C.0)(a) aplicado a atómicas e identidades de Σ^*.

Proposición 4.17. *Si Σ es un Conjunto Modelo Fuerte entonces hay un conjunto de fórmulas Σ^* tal que $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$ y cumple (C.0)(a) aplicado a atómicas e identidades de Σ^*.*

Demostración .

Dado que Σ^* fué construído agregando *nuevas* fórmulas *no atómicas* a Σ_2 tenemos que las fórmulas atómicas o identidades de Σ^* o bien

(1) *son* traducciones de identidades de Σ o bien

(2) *son* atómicas o identidades de Σ_2:

En el caso (1) procedamos por reducción al absurdo, sea $q_1 = q_2 \in \Sigma$ y suponga que

$$\{\xi(q_1) = \xi(q_2), \neg(\xi(q_1) = \xi(q_2))\} \subseteq \xi[\Sigma] \subseteq \Sigma^*$$

entonces $\{q_1 = q_2, \neg(q_1 = q_2)\} \subseteq \Sigma$, contra la hipótesis de que Σ es un Conjunto Modelo Fuerte, i.e. cumple (C.0)(a).

Para el caso (2), también por reducción al absurdo, sea α una fórmula atómica o identidad de $\Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$ y *supongamos* que $\neg\alpha$ *también* pertenece a Σ^*, entonces $\neg\alpha \in n(\Gamma) \cup \Delta \cup \Theta$, (esto se debe a que las negaciones de atómicas o identidades que fueron introducidas en la transición de $\xi[\Sigma]$ a Σ_2 pertenecen a los conjuntos $n(\Gamma)$, Δ, Θ), lo cual contradice la definición de los conjuntos $n(\Gamma)$, Δ y Θ respectivamente.

$\dashv$

Ahora nos valdremos de que Σ^* cumple (C.1)(a), (C.2)(a), (C.3)(a) y (C.4)(a), así como de los Lemas 2.7 y 4.17, para mostrar que Σ^* cumple (C.0)(a).

Proposición 4.18. *Si Σ es un Conjunto Modelo Fuerte entonces hay un conjunto de fórmulas Σ^* tal que $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$ y cumple (C.0)(a).*

Demostración .

Ahora bien, sea β *cualquier* fórmula en Σ^* y supongamos que

$$\{\beta, \neg\beta\} \subseteq \Sigma^*$$

como Σ^* cumple (C.1)(a),...,(C.4)(a), entonces por el *Lema* 2.7 existe δ fórmula *atómica o identidad* tal que

$$\{\delta, \neg\delta\} \subseteq \Sigma^*$$

lo cual no puede ser, por el Lema 4.17. Por lo que Σ^* cumple (C.0)(a).

$\dashv$

Ahora veamos que Σ^* satisface (C.5) aplicado sólo a fórmulas atómicas e identidades.

Lema 4.19. *Si Σ satisface (C.5) entonces Σ^* satisface (C.5) aplicado sólo a fórmulas atómicas e identidades.*

Demostración .

Para esto, recuerde que las fórmulas atómicas e identidades de Σ^* son las mismas que las de Σ_2, así que:

$$Id(\Sigma^*) = \{\xi(q_i) = \xi(q_j), \lambda(a_1, \cdots a_k) = \lambda(a_1, \cdots a_k), A_W = A_W, I = I\},$$

mientras que $Atóm(\Sigma^*)$ son los predicados agregados en Γ y Δ

Sea

$$\{a_i = a_j, \alpha(a_i)\} \subseteq \Sigma^*$$

Veamos que $\alpha(a_j) \in \Sigma^*$

el caso interesante de $a_i = a_j \in Id(\Sigma^*)$ es cuando $a_i = a_j$ es $\xi(q_i) = \xi(q_j)$, los otros casos no representan problema alguno.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_i = a_j$ es $\xi(q_i) = \xi(q_j)$, de aquí que $q_i = q_j \in \Sigma$

Caso 4.20. *$\alpha(a_i)$ es $\xi(q_k) = a_i$*

entonces $q_k = q_i \in \Sigma$ luego

$$\{q_i = q_j, q_k = q_i\} \subseteq \Sigma$$

como Σ cumple (C.5)

$$q_k = q_j \in \Sigma$$

ergo

$$\xi(q_k) = a_j \in \Sigma^*$$

Caso 4.21. *$\alpha(a_i)$ es $T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(\lambda(\xi(q_1^{\tau_1}),\cdots,a_i,\cdots,\xi(q_k^{\tau_k})))$*

como $\xi(q_i) = \xi(q_j) \in \xi[\Sigma] \subseteq \Sigma^*$, entonces por construcción de las constantes λ

$\lambda(\xi(q_1^{\tau_1}),\cdots,a_i,\cdots,\xi(q_k^{\tau_k}))$ y $\lambda(\xi(q_1^{\tau_1}),\cdots,a_j,\cdots,\xi(q_k^{\tau_k}))$ son idénticos

así que

$$T_{\tau_1,\cdots,\tau_k}(\lambda(\xi(q_1^{\tau_1}),\cdots,a_j,\cdots,\xi(q_k^{\tau_k}))) \in \Sigma^*$$

Los casos de los predicados F, H, J, G son añálogos y se dejan al lector.

Caso 4.22. *$\alpha(a_i)$ es $A_W(a_i)$*

En este caso la propiedad $\mathbb{P}(W)$ dice que

$a_i = a_j \in \xi[\Sigma] \subseteq \Sigma^*$ entonces o bien ambas a_i, a_j están en W o bien ninguna.

pero $A_W(a_i) \in \Sigma^*$, implica que $A_W(a_j) \in \Sigma^*$.

Y con esto concluímos que Σ^* satisface (C.5) aplicado sólo a fórmulas atómicas e identidades.

$\dashv$

Lema 4.23. *Si Σ es un Conjunto Modelo Fuerte entonces hay un conjunto de fórmulas Σ^* tal que $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$ y cumple (C.5).*

Demostración .

Sea α *cualquier* fórmula en Σ^* y supongamos que

$$\{\xi(q_i) = \xi(q_j), \alpha(\xi(q_i)), \neg\alpha(\xi(q_j))\} \subseteq \Sigma^*$$

como Σ^* cumple (C.1)(a),...,(C.4)(a), entonces por el *Lema* 2.7 existe δ fórmula *atómica o identidad* tal que

$$\{\xi(q_i) = \xi(q_j), \delta(\xi(q_i)), \neg\delta(\xi(q_j))\} \subseteq \Sigma^*$$

lo cual no puede ser, por el Lema 4.19. Por lo que Σ^* cumple (C.5).

$\dashv$

En la Proposición 4.4 vimos que (C.6)* se cumple para Σ_2, basta reescribirlo, tomando en cuenta que $\Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$, para verificar que Σ^* cumple (C.6)*.

Lema 4.24. *Si Σ es un Conjunto Modelo Fuerte entonces hay un conjunto de fórmulas Σ^* tal que $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$ y cumple (C.6)*.*

Demostración .

Sea $a \in Q_\tau(\Sigma^*) = Q_\tau(\Sigma_2) = \Lambda$, entonces hay W que cumple $\mathbb{P}(W)$ y $a \in W$, así que, existe $A_W \in Q_{\langle\tau\rangle}(\Sigma_2)$ tal que:

$$a \in W \Longrightarrow A_W(a) \in \Delta \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$$

$$A_W(b) \in \Sigma_2 \subseteq \Sigma^* \Longrightarrow \text{existe } a \in W \text{ tal que } a = b \in \xi[\Sigma] \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*.$$

$\dashv$

Lema 4.25. *Si Σ es un Conjunto Modelo Fuerte entonces hay un conjunto de fórmulas Σ^* tal que $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$ y cumple (C.7) .*

Demostración .

Si A_W y A_W^* cumplen (C.6)*, respecto a *un mismo* W entonces

$$A_W = A_W^* \in \Delta \subseteq \Sigma_2 \subseteq \Sigma^*$$

$\dashv$

Concluímos así con el siguiente Teorema.

Teorema 4.26. *Si Σ es un Conjunto Modelo Fuerte entonces hay un Conjunto Modelo Restringido Σ^* tal que $\xi[\Sigma] \subseteq \Sigma^*$.*

4.2.1. Σ^* tiene a la fórmula δ

Proposición 4.27. *Si $\alpha \in \Sigma$ entonces Σ^* tiene a la fórmula $\chi(\alpha)$.*

Demostración .

Por definición, si $q_1^{\tau_1}$,..., $q_k^{\tau_k}$ son *todas* las constantes de α, entonces $\chi(\alpha)$ es

$$(T_{\tau_1}(\xi(q_1^{\tau_1})) \wedge \cdots \wedge T_{\tau_k}(\xi(q_k^{\tau_k})))$$

pero cada uno de los conyuntos pertenece a $\Gamma \subseteq \Sigma_2$ y $\Sigma_\wedge \subseteq \Sigma_2$, así que:

$$\chi(\alpha) \in \Sigma^*.$$

$\dashv$

Recordemos que los *Lemas* 2.26 y 2.27 dependen sólamente de las condiciones (C.0)(a),...,(C.4)(a), (C.0)(b),...,(C.4)(b), la cuales son satisfechas por Σ^*, por lo que podemos usarlos.

Afirmación 4.28. $\delta_{11} \in \Sigma^*$

Demostración .

Sea $\{a, b\} \subseteq Q(\Sigma^*)$ y supongamos que $\{I(a) , I(b)\} \subseteq \Sigma^*$, entonces se sigue de la definición de Γ y T_τ que:

$$\{T_\tau(a), T_\tau(b)\} \subseteq \Gamma \subseteq \Sigma^*$$

de donde a y b tienen que ser las traducciones de $\xi(q_1^\tau)$ y $\xi(q_2^\tau)$ dos constantes individuales de Σ.

Así, tenemos que

$$H(\lambda(\xi(q_1^{\tau})), \lambda(\xi(q_2^{\tau}))) \in \Gamma \subseteq \Sigma^*$$

Sin embargo, esto es equivalente a que $H(a, b) \in \Sigma^*$, ergo por el *Lema* 2.26 $\delta_{11} \in \Sigma^*$.

$\dashv$

Afirmación 4.29. $\delta_{12} \in \Sigma^*$

Demostración .

Sea $\{a, b, c, d, e, f\} \subseteq Q(\Sigma^*)$ y supongamos que

$\{J(a, b, e)\ ,\ J(c, d, f), H(a, c), H(b, d)\} \subseteq \Sigma^*$, entonces se sigue de la definición de Γ que hay $q_1, ..., q_k, q_{i_1}, ..., q_{i_k} \in Q(\Sigma)$ tales que:

$$a = \xi(q_1) \qquad c = \xi(q_{i_1})$$

$$b = \lambda(\xi(q_2), ..., \xi(q_k)) \qquad d = \lambda(\xi(q_{i_2}), ..., \xi(q_{i_k}))$$

$$e = \lambda(\xi(q_1), \xi(q_2), ..., \xi(q_k)) \qquad f = \lambda(\xi(q_{i_1}), \xi(q_{i_2}), ..., \xi(q_{i_k}))$$

ergo: $H(e, f) \in \Gamma \subseteq \Sigma^*$.

$\dashv$

De manera análoga se puede ver que las formulas δ_{13} ,..., δ_7 están en Σ^*. Los detalles se dejan al lector.

Para ver el resto, mostraremos primero el siguiente:

Lema 4.30. $q_0^{\langle \tau_1, \ldots, \tau_k \rangle}(q_1^{\tau_1}, \ldots, q_k^{\tau_k}) \in \Sigma$ si y sólo si

$$G(\lambda(\xi(q_1), \ldots, \xi(q_k)), \xi(q_0)) \in \Sigma^*$$

Demostración .

Si $q_0^{\langle \tau_1, \ldots, \tau_k \rangle}(q_1^{\tau_1}, \ldots, q_k^{\tau_k}) \in \Sigma$ entonces en Γ está $G(\lambda(\xi(q_1), \ldots, \xi(q_k)), \xi(q_0))$, pero $\Gamma \subseteq \Sigma^*$.

Ahora bien, si $G(\lambda(\xi(q_1), \ldots, \xi(q_k)), \xi(q_0)) \in \Sigma^*$ entonces está en Γ (solo ahí agregamos fórmulas de ese estilo), asi que $q_0^{\langle \tau_1, \ldots, \tau_k \rangle}(q_1^{\tau_1}, \ldots, q_k^{\tau_k}) \in \Sigma$, si $q_0^{\langle\tau_1,\ldots,\tau_k\rangle}(q_1^{\tau_1},\ldots,q_k^{\tau_k}) \notin \Sigma$, no hubiésemos agregado $G(\lambda(\xi(q_1),\ldots,\xi(q_k)),\xi(q_0))$ en Γ.

$\dashv$

Ahora, comprobemos que $\delta_{81} \in \Sigma^*$. Sea $A \in Q_{\langle\tau\rangle}$ *cualquiera* y supongamos

$(\cdot)\quad \exists x\, A(x) \in \Sigma^*$

$(\cdot\,\cdot)\ \forall x \forall z (A(x) \wedge A(z) \to H(x,z)) \in \Sigma^*$

Consideremos el conjunto:

$$U = \{(q_1^{\tau_1},...,q_k^{\tau_k}) \mid A(\lambda(\xi(q_1^{\tau_1}),...,\xi(q_k^{\tau_k}))) \in \Sigma^*\}$$

Y observemos que $U \neq \varnothing$, aplicando (C.3)(a) a $(\cdot)$, hay $c \in Q(\Sigma^*)$ tal que $A(c) \in \Sigma^*$. Como $Q(\Sigma^*) = Q_\Lambda(\Sigma)$, existen $q_{i_1},...,q_{i_k} \in Q(\Sigma)$ tales que

$$c = \lambda(\xi(q_{i_1}),\ldots,\xi(q_{i_k})).$$

Ahora bien, $\varnothing \neq U \subseteq Q_{\tau_1}(\Sigma) \times \cdots \times Q_{\tau_k}(\Sigma)$ y Σ cumple (C.6), ergo

hay $q \in Q_{\langle\tau_1,...,\tau_k\rangle}$ tal que

$(q_1,...,q_k) \in U \Longrightarrow q(q_1,...,q_k) \in \Sigma$

$q(q_1,...,q_k) \in \Sigma \Longrightarrow$ hay $(q_{j_1},...,q_{j_k}) \in U$ tal que

$$\{q_1 = q_{j_1},...,q_k = q_{j_k}\} \subseteq \Sigma$$

Afirmamos que para todo $\lambda(\xi(q_{i_1}),\ldots,\xi(q_{i_k})) \in \Lambda = Q(\Sigma^*)$

$A(\lambda(\xi(q_1),...,\xi(q_k))) \in \Sigma^*$ si y sólo si $G(\lambda(\xi(q_1),...,\xi(q_k)),\xi(q))) \in \Sigma^*$.

Si $A(\lambda(\xi(q_1),...,\xi(q_k))) \in \Sigma^*$ entonces por definición de U, $(q_1,...,q_k) \in U$ luego

$q(q_1,...,q_k) \in \Sigma$, así por el *Lema* 4.30 $G(\lambda(\xi(q_1),...,\xi(q_k)),\xi(q))) \in \Sigma^*$.

Inversamente, si $G(\lambda(\xi(q_1),...,\xi(q_k)),\xi(q))) \in \Sigma^*$ entonces por el *Lema* 4.30

$q(q_1,...,q_k) \in \Sigma$, de donde

hay $(q_{j_1}, ..., q_{j_k}) \in U$ tal que $\{q_1 = q_{j_1}, ..., q_k = q_{j_k}\} \subseteq \Sigma$

$\Longleftrightarrow A(\lambda(\xi(q_{j_1}), ..., \xi(q_{j_k}))) \in \Sigma^*$ y $\lambda(\xi(q_{j_1}), ..., \xi(q_{j_k})) = \lambda(\xi(q_1), ..., \xi(q_k))$

como Σ^* cumple (C.5) entonces

$A(\lambda(\xi(q_1), ..., \xi(q_k))) \in \Sigma^*$, lo cual muestra la afirmación.

Haciendo uso del *Lema* 2.27, tenemos que:

$$\forall x(A(x) \leftrightarrow G(x, \xi(q))) \in \Sigma^*$$

y por (C.3)(b)

$$\exists y \forall x(A(x) \leftrightarrow G(x, y)) \in \Sigma^*$$

dado que $A \in Q_{\langle \tau_1, ..., \tau_k \rangle}$ *fué cualquiera* y el tipo $\langle \tau_1, ..., \tau_k \rangle$ *fué fijo pero arbitrario*, por (C.4)(b) se tiene que $\delta_{81} \in \Sigma^*$.

Analicemos ahora, por que $\delta_{82} \in \Sigma^*$:

Sea $b \in Q_\tau(\Sigma^*) = \Lambda$ cualquiera, entonces existen $q_1, ..., q_k \in Q(\Sigma)$ tales que:

$$b = \lambda(\xi(q_1), ..., \xi(q_k)).$$

Considere a $q_{\varnothing}^{\langle \tau_1, ..., \tau_k \rangle}$ el símbolo de constante que *nombra* mediante (C.6) al conjunto :

$$\varnothing \subseteq Q_{\tau_1}(\Sigma) \times \cdots \times Q_{\tau_k}(\Sigma)$$

por definición de Γ:

$$F(\lambda(\xi(q_1), ..., \xi(q_k)), \xi(q_{\varnothing}^{\langle \tau_1, ..., \tau_k \rangle})) \in \Gamma \subseteq \Sigma^*.$$

Ahora bien, tomemos cualquier $\lambda(\xi(q_{i_1}), ..., \xi(q_{i_k})) \in Q(\Sigma^*) = \Lambda$

y veamos que $\neg G(\lambda(\xi(q_{i_1}), ..., \xi(q_{i_k})), \xi(q_{\varnothing}^{\langle \tau_1, ..., \tau_k \rangle})) \in \Sigma^*$.

sabemos que

$$(q_1, ..., q_k) \in \varnothing \Longleftrightarrow q_{\varnothing}^{\langle \tau_1, ..., \tau_k \rangle}(q_1, ..., q_k) \in \Sigma$$

dado que el conjunto $\varnothing$ *no* tiene elemento alguno, entonces sucede que

$$q_{\varnothing}^{\langle \tau_1, ..., \tau_k \rangle}(q_1, ..., q_k) \notin \Sigma$$

lo cual por el *Lema* 4.30 es equivalente a

$$G(\lambda(\xi(q_{i_1}),...,\xi(q_{i_k})),\xi(q_{\varnothing}^{\langle\tau_1,...,\tau_k\rangle}))\notin\Sigma^*$$

como Σ^* cumple (C.0)(b) para fórmulas atómicas,

$$\neg G(\lambda(\xi(q_{i_1}),...,\xi(q_{i_k})),\xi(q_{\varnothing}^{\langle\tau_1,...,\tau_k\rangle}))\in\Sigma^*$$

justo lo que se quería ver.

$\dashv$

Ejercicio 4.31. *Usando las condiciones (C), concluya que* $\delta_{82}\in\Sigma^*$

Teorema 4.32. *Si* Σ *es un Conjunto Modelo Fuerte y* $\alpha\in\Sigma$ *entonces hay un Conjunto Modelo Restringido* Σ^* *tal que* $\delta\wedge\chi(\alpha)\wedge\xi(\alpha)\in\Sigma^*$.

Demostración .

Hasta aquí hemos visto que *todos* los conyuntos de δ estan en Σ^*, así, por (C.1)(b) concluímos que

$$\delta\in\Sigma^*$$

y por la misma razón dado que

$$\{\xi(\alpha),\chi(\alpha),\delta\}\subseteq\Sigma^*$$

sucede que

$$\delta\wedge\chi(\alpha)\wedge\xi(\alpha)\in\Sigma^*$$

con lo que culminamos la demostración.

$\dashv$

Finalmente por el Teorema 2.18 el cual asegura que todo Conjunto Modelo Restringido está contenido en un Conjunto Modelo, tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 4.33. *Si* Σ *es un Conjunto Modelo Fuerte y* $\alpha\in\Sigma$ *entonces hay un Conjunto Modelo* Σ^* *tal que* $\delta\wedge\chi(\alpha)\wedge\xi(\alpha)\in\Sigma^*$.

Teorema 4.34. *Si* α *es satisfactible entonces* $\delta\wedge\chi(\alpha)\wedge\xi(\alpha)$ *es satisfactible*

Demostración .

Nos apoyaremos en los Teoremas 4.33, 2.23 y 2.19 y en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\alpha \text{ satisfactible} & \Longrightarrow & (\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)) \text{ satisfactible} \\
\Big\Updownarrow {\scriptstyle Teo.I^{**}} & \Big\Updownarrow & \Big\Updownarrow {\scriptstyle Teo.I} \\
\text{Hay } \sum\limits_{CMF} \ni \alpha & \Longrightarrow & \text{Hay } \sum\limits^{*}_{CM} \ni (\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha))
\end{array}$$

$\dashv$

4.3. La construcción de $\Delta^{\#}$

Lema 4.35. *Si Δ es un Conjunto Modelo Fuerte y $(\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)) \in \Delta$ entonces existe una traducción $\xi^{\#}$ tal que*

($1^{\#}$) *ξ coincide con $\xi^{\#}$ en $V(\alpha) \cup Q(\alpha)$*
($2^{\#}$) *$\xi^{\#}$ es inyectiva*
($3^{\#}$) *La traducción $\xi^{\#}(q^{\tau_i})$ de una constante $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$*

tiene la propiedad $T_{\tau_i}(\xi^{\#}(q^{\tau_i})) \in \Delta$

($4^{\#}$) *Si $T_{\tau_i}(a) \in \Delta$ entonces* existe al menos una *constante $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$*

tal que $a = \xi^{\#}(q^{\tau_i})$.

Demostración .

Aquí se esta dando implícitamente una traducción ξ, de las constantes y variables que tienen presencia en α en constantes y variables del tipo individual, es decir

$$\xi : V(\alpha) \cup Q(\alpha) \longrightarrow V_\tau \cup Q_\tau$$

extenderemos esta función para que involucre *otras* constantes, de tal manera que cumpla con las condiciones del Lema 4.35.

Para esto, recuerde que *siempre* se pueden tener tantas constantes de tipo τ_i como se necesite, en particular podemos suponder que $|Q_{\tau_i}|$ es igual al cardinal de las constantes individuales $a \in Q_\tau$ que satisfacen $T_{\tau_i}(a) \in \Delta$ para un Conjunto

Modelo Fuerte *fijo* Δ, dicho de otra forma:

para cada $\tau_i \in S_\tau$

$$\text{si } \Pi_{\tau_i}(\Delta) = \{a \in Q_\tau \mid T_{\tau_i}(a) \in \Delta\} \text{ entonces } |\Pi_{\tau_i}(\Delta)| = |Q_{\tau_i}|$$

Por lo tanto podemos correlacionar a cada una de dichas a, una constante $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$, mediante una función biyectiva $\xi^{\#}_{\tau_i}$

$$\xi^{\#}_{\tau_i} : Q_{\tau_i} \longrightarrow \Pi_{\tau_i}(\Delta)$$

De esta manera, la extensión buscada para el conjunto de constantes, es

$$\bigcup_{\tau_i \in S_\tau} \xi^{\#}_{\tau_i} : \bigcup_{\tau_i \in S_\tau} Q_{\tau_i} \longrightarrow \bigcup_{\tau_i \in S_\tau} \Pi_{\tau_i}(\Delta)$$

Observe que, puesto que $\delta \in \Delta$. tenemos por el Teorema 3.18

$$\text{Si } \tau_i \neq \tau_j \text{ entonces } \Pi_{\tau_i}(\Delta) \cap \Pi_{\tau_j}(\Delta) = \varnothing$$

Por su parte, es claro que

$$\text{Si } \tau_i \neq \tau_j \text{ entonces } Q_{\tau_i} \cap Q_{\tau_j} = \varnothing$$

Así que tenemos la unión de funciones biyectivas cuyos dominios son ajenos entre sí y sus imágenes también ajenas entre sí.

De aquí que

$$\bigcup_{\tau_i \in S_\tau} \xi^{\#}_{\tau_i} : Q \to Q_\tau \text{ es biyectiva.}$$

Extender a ξ para las variables, no representa problema alguno, se dispone también de suficientes símbolos de variables del tipo τ para cada elemento del conjunto:

$$V = \bigcup_{\tau_i \in S_\tau} V_{\tau_i}$$

Construímos una función biyectiva

$$\xi^{\#} : V \longrightarrow V_\tau$$

que cumpla :

$$\text{si } v^{\tau_i} \in V(\alpha) \text{ entonces } \xi^{\#}(v^{\tau_i}) = \xi(v^{\tau_i})$$

Esto siempre es posible dado que α es fórmula, y por tanto tiene una cantidad finita de variables.

La función buscada $\xi^{\#}$ es $\bigcup_{\tau_i \in S_\tau} \xi^{\#}_{\tau_i}$.

$$\xi^{\#} : V \cup Q \longrightarrow V_\tau \cup Q_\tau$$

Veamos que $\xi^{\#}$ satisface ($1^{\#}$): sea $p^{\tau_i} \in V(\alpha) \cup Q(\alpha)$, si $p^{\tau_i} \in V(\alpha)$ entonces por construcción

$$\xi^{\#}(p^{\tau_i}) = \xi(p^{\tau_i})$$

Ahora bien, si $p^{\tau_i} \in Q(\alpha)$ entonces, dado que $\chi(\alpha) \in \Delta$

$$T_{\tau_i}(\xi(p^{\tau_i})) \in \Delta$$

y como $\xi^{\#}_{\tau_i}$ es biyección, existe $q_{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$ tal que

$$\xi^{\#}_{\tau_i}(q^{\tau_i}) = \xi(p^{\tau_i}) = \xi^{\#}_{\tau_i}(p^{\tau_i})$$

de aquí que

$$q^{\tau_i} = p^{\tau_i}$$

pero $\xi^{\#}_{\tau_i} \subseteq \xi^{\#}$, ergo

$$\xi^{\#}(q^{\tau_i}) = \xi(q^{\tau_i})$$

Por otra parte $\xi^{\#}$ satisface ($2^{\#}$) por ser biyectiva.

Veamos que $\xi^{\#}$ satisface ($3^{\#}$): sea $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$ entonces

$$\xi^{\#}(q^{\tau_i}) \in \Pi_{\tau_i}(\Delta)$$

y por definición de $\Pi_{\tau_i}(\Delta)$

$$T_{\tau_i}(\xi^{\#}(q^{\tau_i})) \in \Delta$$

Falta ver que se cumple ($4^{\#}$): sea $T_{\tau_i}(a) \in \Delta$ entonces

$$a \in \Pi_{\tau_i}(\Delta) \subseteq Q_\tau$$

y dado que $\xi^{\#}_{\tau_i}$ es suprayectiva, hay una constante $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$ tal que

$$a = \xi^{\#}_{\tau_i}(q^{\tau_i})$$

pero $\xi^{\#}_{\tau_i} \subseteq \xi^{\#}$, ergo hay una constante $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$ tal que

$$a = \xi^{\#}(q^{\tau_i})$$

$\dashv$

Dado que ξ y $\xi^{\#}$ coinciden en $V(\alpha) \cup Q(\alpha)$, entonces, se tiene el siguiente:

Corolario 4.36. $\xi(\alpha) = \xi^{\#}(\alpha)$

La construcción de $\Delta^{\#}$, fué diseñada para que tenga a la fórmula α como elemento suyo. En el siguiente resultado mostraremos además que $\Delta^{\#}$ cumple algunas condiciones (C).

Lema 4.37. *Si Δ es un Conjunto Modelo Fuerte y $(\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)) \in \Delta$ entonces existe un conjunto $\Delta^{\#}$ tal que $\alpha \in \Delta^{\#}$ y satisface (C.0), (C.1) , (C.2) (a),(b) , (C.3)(a), (C.4)(a) y (C.5).*

Demostración .

Sea Δ un Conjunto Modelo Fuerte y $(\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)) \in \Delta$ entonces por el Lema 4.35 existe una traducción $\xi^{\#} : V \cup Q \to V_\tau \cup Q_\tau$.

Después de haber fijado la traducción $\xi^{\#}$, podemos *decidir* si una fórmula de la teoría de tipos tiene o no una traducción en Δ.

$\Delta^{\#}$ puede ahora ser definido como el conjunto:

$$\{\beta \in \tau\text{−fórm} \mid \xi^{\#}(\beta) \in \Delta\}$$

Por el Corolario 4.36,

$$\alpha \in \Delta^{\#} \neq \varnothing$$

$\Delta^{\#}$ satisface (C.0)(a):

Por reducción al absurdo, supongamos que existe $\varphi \in \tau$- fórm tal que

$$\{\varphi, \neg\varphi\} \subseteq \Delta^{\#}$$

lo cual por definición implica

$$\{\xi^{\#}(\varphi), \neg\xi^{\#}(\varphi)\} \subseteq \Delta$$

Pero esto no puede ser, ya que Δ es un Conjunto Modelo Fuerte.

Ejercicio 4.38. *Muestre que $\Delta^{\#}$ satisface (C.0)(b).*

$\Delta^{\#}$ satisface (C.1)(a): Nuevamente por reducción al absurdo, supongamos que existen $\varphi, \beta \in \tau$- fórm tal que

$$\varphi \wedge \beta \in \Delta^{\#}$$

pero

$$\varphi \notin \Delta^{\#} \text{ o bien } \beta \notin \Delta^{\#}$$

por definición tenemos que

$$\xi^{\#}(\varphi) \wedge \xi^{\#}(\beta) \in \Delta$$

pero

$$\xi^{\#}(\varphi) \notin \Delta \text{ o bien } \xi^{\#}(\beta) \notin \Delta$$

Lo cual no puede ser, ya que Δ es un Conjunto Modelo Fuerte.

Ejercicio 4.39. *Muestre que $\Delta^{\#}$ satisface (C.1)(b).*

Ejercicio 4.40. *Muestre que $\Delta^{\#}$ satisface (C.2)(a).*

Ejercicio 4.41. *Muestre que $\Delta^{\#}$ satisface (C.2)(b).*

Veamos que $\Delta^{\#}$ cumple (C.3)(a): supongamos que $\exists v^{\tau_i}\varphi \in \Delta^{\#}$. Esto significa que tiene una traducción

$$(\exists\xi^{\#}(v^{\tau_i}))(T_{\tau_i}(\xi^{\#}(v^{\tau_i})) \wedge \xi^{\#}(\varphi)(\xi^{\#}(v^{\tau_i}))) \in \Delta$$

Como Δ satisface la condición (C.3)(a), hay una constante individual $c \in Q_\tau$ tal que

$$(T_{\tau_i}(c) \wedge \xi^{\#}(\varphi)(c)) \in \Delta$$

y como Δ cumple (C.1)(a)

$$T_{\tau_i}(c) \in \Delta \qquad y \qquad \xi^{\#}(\varphi)(c) \in \Delta$$

Aplicando ($4^{\#}$) a $T_{\tau_i}(c) \in \Delta$ sabemos que hay $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$ tal que $c = \xi^{\#}(q^{\tau_i})$ ergo

$$\text{existe } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i} \text{ tal que } \xi^{\#}(\varphi)(\xi^{\#}(q^{\tau_i})) \in \Delta$$

pero, por definición de traducción

$$\xi^{\#}(\varphi)(\xi^{\#}(q^{\tau_i})) = \xi^{\#}(\varphi(q^{\tau_i}))$$

por lo cual

$$\xi^{\#}(\varphi(q^{\tau_i})) \in \Delta$$

que es equivalente a que

$$\varphi(q^{\tau_i}) \in \Delta^{\#}$$

Ergo

$$\text{existe } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i} \text{ tal que } \varphi(q^{\tau_i}) \in \Delta^{\#}$$

justo lo deseado.

Del mismo modo, si $\forall v^{\tau_i}\varphi \in \Delta^{\#}$ y $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Delta^{\#})$ entonces la traducción

$$\forall \xi^{\#}(v^{\tau_i})(T_{\tau_i}(\xi^{\#}(v^{\tau_i})) \rightarrow \xi^{\#}(\varphi)) \in \Delta$$

como Δ es Conjunto Modelo Fuerte, cumple (C.4)(a)

$$\text{Para toda } c \in Q_{\tau}(\Delta) \text{ sucede que } (T_{\tau_i}(c)) \rightarrow \xi^{\#}(\varphi)(c)) \in \Delta$$

Por otro lado :

$$q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Delta^{\#})$$

implica, por ($3^{\#}$)

$$T_{\tau_i}(\xi^{\#}(q^{\tau_i})) \in \Delta$$

Δ es cerrado bajo Modus Ponens, por ser Conjunto Modelo, de aquí que

$$\xi^{\#}(\varphi)(\xi^{\#}(q^{\tau_i}))) \in \Delta$$

pero por defición:

$$\xi^{\#}(\varphi)(\xi^{\#}(q^{\tau_i}))) = \xi^{\#}(\varphi(q^{\tau_i}))$$

así que

$$\varphi(q^{\tau_i}) \in \Delta^{\#}$$

Así, hemos mostrado que:

$$\text{Para toda } q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Delta^{\#})\ \varphi(q^{\tau_i}) \in \Delta^{\#}$$

Comprobando asi, que $\Delta^{\#}$ cumple (C.4)(a).

Ahora veamos (C.5)($\Delta^{\#}$): supongamos que

$$\{q_1 = q_2, \varphi(q_1)\} \subseteq \Delta^{\#}$$

luego por definición de $\Delta^{\#}$

$$\{\xi^{\#}(q_1) = \xi^{\#}(q_2), \xi^{\#}(\varphi)(\xi^{\#}(q_1))\} \subseteq \Delta$$

como Δ cumple (C.5)

$$\xi^{\#}(\varphi)(\xi^{\#}(q_2)) \in \Delta$$

por definición de traducción

$$\xi^{\#}(\varphi)(\xi^{\#}(q_2)) = \xi^{\#}(\varphi(q_2))$$

y por definición de $\Delta^{\#}$

$$\varphi(q_2) \in \Delta^{\#}$$

que termina demostrando (C.5)($\Delta^{\#}$).

$\dashv$

Sigamos suponiendo que Δ es un Conjunto Modelo Fuerte que tiene a

$$\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)$$

y con la misma construcción de $\Delta^{\#}$, veamos el siguiente resultado, que será de utilidad para mostrar que $\Delta^{\#}$ cumple (C.6) y (C.7).

Lema 4.42. *$q(q_1, \ldots, q_k) \in \Delta^{\#}$ si y sólo si $G(\lambda(\xi^{\#}(q_1), \ldots, \xi^{\#}(q_k)), \xi^{\#}(q)) \in \Delta$*

Demostración .

Supongamos que $q(q_1^{\tau_1}, \ldots,\ q_k^{\tau_k}) \in \Delta^{\#}$, entonces tenemos
$\exists y_1 \ldots \exists y_{k-1}\ (J(\xi^{\#}(q_1), y_2, y_1) \wedge J(\xi^{\#}(q_2), y_3, y_2) \wedge \ldots$
$\wedge\ J(\xi^{\#}(q_{k-2}), y_{k-1}, y_{k-2}) \wedge\ \ J(\xi^{\#}(q_{k-1}), \xi^{\#}(q_k), y_{k-1}) \wedge\ \ G(y_1, \xi^{\#}(q))) \in \Delta$

por (C.3)(a)(Δ), existen constantes individuales $b_1, ..., b_{k-1} \in Q_\tau$ tales que

$J(\xi^{\#}(q_1), b_2, b_1) \wedge \cdots \wedge\ \ J(\xi^{\#}(q_{k-2}), b_{k-1}, b_{k-2}) \wedge\ \ J(\xi^{\#}(q_{k-1}), \xi^{\#}(q_k), b_{k-1}) \wedge$ $G(b_1, \xi^{\#}(q))$
pertenece a Δ

como Δ cumple con (C.1)(a)

$$J(\xi^{\#}(q_1), b_2, b_1) \in \Delta$$

$$\vdots$$

$$J(\xi^{\#}(q_{k-2}), b_{k-1}, b_{k-2}) \in \Delta$$

$$J(\xi^{\#}(q_{k-1}), \xi^{\#}(q_k), b_{k-1}) \in \Delta$$

$$G(b_1, \xi^{\#}(q)) \in \Delta$$

Como Δ es Conjunto Modelo Fuerte, podemos usar la parte (A) y $k-1$ veces la parte (C) del *Teorema* 3.19 para deducir que

$$b_{k-1} = \lambda(\xi^{\#}(q_{k-1}), \xi^{\#}(q_k)) \in \Delta$$

$$b_{k-2} = \lambda(\xi^{\#}(q_{k-2}), \xi^{\#}(q_{k-1}), \xi^{\#}(q_k)) \in \Delta$$

$$\vdots$$

$$b_1 = \lambda(\xi^{\#}(q_1), ..., \xi^{\#}(q_k)) \in \Delta$$

como (C.5)(Δ) y $G(b_1, \xi^{\#}(q)) \in \Delta$, se tiene que

$$G(\lambda(\xi^{\#}(q_1), ..., \xi^{\#}(q_k)), \xi^{\#}(q)) \in \Delta$$

completando la primera parte del *Lema* 4.42.

Ahora, supongamos que

$$G(\lambda(\xi^{\#}(q_1), ..., \xi^{\#}(q_k)), \xi^{\#}(q)) \in \Delta$$

Como $\xi^{\#}(q_1), ..., \xi^{\#}(q_k)$ son constantes individuales que cumplen

$$\{T_{\tau_1}(\xi^{\#}(q_1)), ..., T_{\tau_k}(\xi^{\#}(q_k))\} \subseteq \Delta$$

podemos utilizar las partes (A) y (B) del *Teorema* 3.19 para afirmar que

$$J(\xi^{\#}(q_1), \lambda(\xi^{\#}(q_2), ..., \xi^{\#}(q_k)), \lambda(\xi^{\#}(q_1), ..., \xi^{\#}(q_k))) \in \Delta$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$J(\xi^{\#}(q_{k-2}), \lambda(\xi^{\#}(q_{k-1}), \xi^{\#}(q_k)), \lambda(\xi^{\#}(q_{k-2}), \xi^{\#}(q_{k-1}), \xi^{\#}(q_k))) \in \Delta$$

$$J(\xi^{\#}(q_{k-1}), \xi^{\#}(q_k), \lambda(\xi^{\#}(q_{k-1}), \xi^{\#}(q_k)) \in \Delta$$

por (C.1)(b)(Δ), la conjunción de $G(\lambda(\xi^{\#}(q_1), ..., \xi^{\#}(q_k)), \xi^{\#}(q))$ y cada uno de estos J esta en Δ

y finalmente por (C.3)(b)(Δ)

$\exists y_1 \ldots \exists y_{k-1}\ (J(\xi^{\#}(q_1), y_2, y_1) \wedge J(\xi^{\#}(q_2), y_3, y_2) \wedge \ldots$
$\wedge\ J(\xi^{\#}(q_{k-2}), y_{k-1}, y_{k-2}) \wedge\ \ J(\xi^{\#}(q_{k-1}), \xi^{\#}(q_{k-1}), y_{k-1}) \wedge\ \ G(y_1, \xi^{\#}(q))) \in \Delta$

ergo

$$\xi^{\#}(q(q_1^{\tau_1}, \ldots,\ q_k^{\tau_k})) \in \Delta$$

equivalentemente:

$$q(q_1^{\tau_1}, \ldots,\ q_k^{\tau_k}) \in \Delta^{\#}$$

terminando con esto la prueba del *Lema* 4.42.

$\dashv$

Lema 4.43. $\Delta^{\#}$ *satisface (C.6) .*

Demostración .

Sea $U \subseteq Q(\Delta^{\#}) \times \cdots \times Q(\Delta^{\#})$

Considere

$$A = \{(a_1, ..., a_k) \in Q_\tau \times \cdots \times Q_\tau \mid \{T_{\tau_1}(a_1), ..., T_{\tau_k}(a_k)\} \subseteq \Delta \text{ y } (\xi^{\#})^{-1}(a_1) \in U \}$$

entonces por el Teorema 3.28, existe una constante individual a_0 con las siguientes tres propiedades:

(a) $(a_1, \cdots, a_k) \in A$ implica que $G(\lambda(a_1, \cdots, a_k), a_0) \in \Delta$

(b) $G(\lambda(b_1, \cdots, b_k), a_0) \in \Delta$ implica que existe $(a_1, \cdots, a_k) \in A$ tal que

$$a_1 = b_1 \in \Delta, \cdots, a_k = b_k \in \Delta$$

(c)
$$T_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}(a_0) \in \Delta$$

de (c) y ($4^{\#}$) sabemos que, hay una constante $q_0^{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle} \in Q_{\langle \tau_1, \cdots, \tau_k \rangle}$ tal que

$$a_0 = \xi^{\#}(q_0)$$

Veamos que $\Delta^{\#}$ satisface (C.6)(a): sea

$$(q_1, ..., q_k) \in U \subseteq Q(\Delta^{\#}) \times \cdots \times Q(\Delta^{\#})$$

lo cual pasa si y sólo si, por definición de $\Delta^{\#}$

$$\{T_{\tau_1}(\xi^{\#}(q_1)), \cdots, T_{\tau_k}(\xi^{\#}(q_k))\} \subseteq \Delta$$

por definición de A, sabemos

$$(\xi^{\#}(q_1), \cdots, \xi^{\#}(q_k)) \in A$$

luego por (a) del Teorema 3.28, escrito arriba

$$G(\lambda(\xi^{\#}(q_1), \cdots, \xi^{\#}(q_k)), \xi^{\#}(q_0)) \in \Delta$$

y por el Lema 4.42

$$q_0(q_1, \cdots, q_k) \in \Delta^{\#}$$

Por lo que $\Delta^{\#}$ cumple (C.6)(a).

Ahora veamos que $\Delta^{\#}$ cumple (C.6)(b): sea

$$q_0(q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}) \in \Delta^{\#}$$

por el Lema 4.42

$$G(\lambda(\xi^{\#}(q_{i_1}), \cdots, \xi^{\#}(q_{i_k})), \xi^{\#}(q_0)) \in \Delta$$

y por la parte (b) del Teorema 3.28, escrito arriba

$$\text{hay } (a_1, ..., a_k) \in A \text{ tal que } \{a_1 = \xi^{\#}(q_{i_1}) \ , \ ... \ , \ a_k = \xi^{\#}(q_{i_k})\} \subseteq \Delta$$

luego entonces, por ($4^{\#}$)

$$\text{hay } (q_1, ..., q_k) \in U \text{ tal que } \{\xi^{\#}(q_1) = \xi^{\#}(q_{i_1}) \ , \ ... \ , \ \xi^{\#}(q_k) = \xi^{\#}(q_{i_k})\} \subseteq \Delta$$

y finalmente por definición de $\Delta^{\#}$

$$\text{hay } (q_1, ..., q_k) \in U \text{ tal que } \{q_1 = q_{i_1} \ , \ ... \ , \ q_k = q_{i_k}\} \subseteq \Delta^{\#}$$

y con esto concluímos que $\Delta^{\#}$ cumple (C.6)(b).

$\dashv$

Lema 4.44. $\Delta^{\#}$ *satisface (C.7) .*

Demostración .

Sean $\{q_0, q_0^*\} \subseteq Q_{\langle\tau_1,...,\tau_k\rangle}$ constantes que satisfacen (C.6)(a)(b) respecto a un mismo $U \subseteq Q(\Delta^{\#}) \times \cdots \times Q(\Delta^{\#})$

Considere, nuevamente

$$A = \{(a_1, ..., a_k) \in Q_\tau \times \cdots \times Q_\tau \mid \{T_{\tau_1}(a_1), ..., T_{\tau_k}(a_k) \text{ y } (\xi^{\#})^{-1}(a_i) \in U\ \} \subseteq \Delta\}$$

Por ($3^{\#}$), tenemos que

$$T_{\langle\tau_1,\ldots,\tau_k\rangle}(\xi^{\#}(q_0)) \in \Delta$$

$$T_{\langle\tau_1,\ldots,\tau_k\rangle}(\xi^{\#}(q_0^*)) \in \Delta$$

así que $\xi^{\#}(q_0)$ y $\xi^{\#}(q_0^*)$ cumplen con la parte (c) del Teorema 3.28, veamos que cumplen también con las partes (a) y (b).

Sea

$$(\xi^{\#}(q_{i_1}), ..., \xi^{\#}(q_{i_k})) \in A$$

como $U \subseteq Q(\Delta^{\#}) \times \cdots \times Q(\Delta^{\#})$, esto pasa si y sólo si

$$(q_1, ..., q_k) \in U$$

como q_0 y q_0^* satisfacen (C.6)(a)

$$\{q_0(q_1, ..., q_k),\ q_0^*(q_1, ..., q_k)\} \subseteq \Delta^{\#}$$

y por el Lema 4.42

$$\{G(\lambda(\xi^{\#}(q_1), ..., \xi^{\#}(q_k)), \xi^{\#}(q_0)), G(\lambda(\xi^{\#}(q_1), ..., \xi^{\#}(q_k)), \xi^{\#}(q_0^*))\} \subseteq \Delta$$

por lo que, $\xi^{\#}(q_0)$ y $\xi^{\#}(q_0^*)$ cumplen (C.6)(a) respecto a A.

Ahora, tome

$$\{G(\lambda(\xi^{\#}(q_{i_1}), ..., \xi^{\#}(q_{i_k})), \xi^{\#}(q_0)), G(\lambda(\xi^{\#}(q_{i_1}), ..., \xi^{\#}(q_{i_k})), \xi^{\#}(q_0^*))\} \subseteq \Delta$$

por el Lema 4.42

$$\{q_0(q_{i_1}, ..., q_{i_k}),\ q_0^*(q_{i_1}, ..., q_{i_k})\} \subseteq \Delta^{\#}$$

como q_0 y q_0^* satisfacen (C.6)(b), existe $(q_1, ..., q_k) \in U$

$$\{q_1 = q_{i_1}, ..., q_k = q_{i_k}\} \subseteq \Delta^{\#}$$

de aquí que, existe $(\xi^{\#}(q_1), ..., \xi^{\#}(q_k)) \in A$

$$\{\xi^{\#}(q_1) = \xi^{\#}(q_{i_1}), ..., \xi^{\#}(q_k) = \xi^{\#}(q_{i_k})\} \subseteq \Delta$$

Por lo que $\xi^{\#}(q_0)$ y $\xi^{\#}(q_0^*)$ cumplen (C.6)(b).

Por el Teorema 3.30

$$\xi^{\#}(q_0) = \xi^{\#}(q_0^*) \in \Delta.$$

por definición de traducción:

$$\xi^{\#}(q_0 = q_0^*) \in \Delta.$$

luego, de la definición de $\Delta^{\#}$

$$(q_0 = q_0^*) \in \Delta^{\#}.$$

Concluímos así que, $\Delta^{\#}$ cumple (C.7).

$\dashv$

Teorema 4.45. *Si Δ es un Conjunto Modelo Fuerte y $(\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)) \in \Delta$ entonces existe un Conjunto Modelo $\Delta^{\#}$ tal que $\alpha \in \Delta^{\#}$.*

Demostración .

Sea Δ un Conjunto Modelo Fuerte tal que $(\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)) \in \Delta$ entonces por el Lema 4.37 existe un Conjunto Modelo $\Delta^{\#}$ tal que $\alpha \in \Delta^{\#}$ y satisface (C.0)(a), (C.1)(a) , (C.2) (a) , (C.3)(a), (C.4)(a) y (C.5). Por los Lemas 4.43 y 4.44 también satisface (C.6) y (C.7). Por lo que $\Delta^{\#}$ es un Conjunto Modelo.

$\dashv$

Teorema 4.46. *Si $\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)$ es satisfactible entonces α es satisfactible*

Demostración .

Nos apoyaremos en los Teoremas 4.45, 2.19 y 2.23 y en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Hay } \underset{CM}{\Delta^{\#}} \ni \alpha & \Longleftarrow & \text{Hay } \underset{CMF}{\Delta} \ni (\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)) \\
\Updownarrow{\scriptstyle Teo.I} & \Downarrow & \Updownarrow{\scriptstyle Teo.I^{**}} \\
\alpha \text{ satisfactible} & \Longleftarrow & (\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)) \text{ satisfactible}
\end{array}$$

$\dashv$

Teorema 4.47. *α es satisfactible si y sólo si $\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)$ es satisfactible*

Demostración .

Nos apoyaremos en los Teoremas 4.34, 4.46 y en la unión de sus diagramas:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Hay } \underset{CM}{\Delta^{\#}} \ni \alpha & \Longleftarrow & \text{Hay } \underset{CMF}{\Delta} \ni (\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)) \\
\Updownarrow \scriptstyle{Teo.I} & \Downarrow & \Updownarrow \scriptstyle{Teo.I^{**}} \\
\alpha \text{ satisfactible} & \overset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow} & (\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha)) \text{ satisfactible} \\
\Updownarrow \scriptstyle{Teo.I^{**}} & \Uparrow & \Updownarrow \scriptstyle{Teo.I} \\
\text{Hay } \underset{CMF}{\Sigma} \ni \alpha & \Longrightarrow & \text{Hay } \underset{CM}{\Sigma^{*}} \ni (\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \xi(\alpha))
\end{array}
$$

$\dashv$

Con el *Teorema* 4.47 demostrado podemos concluir nuestro trabajo, recuerde que una fórmula es universalmente válida si y sólo si todo modelo la hace verdadera. Denotaremos por $\models \alpha$ al hecho de que α sea universalmente válida.

Teorema 4.48 (Teorema III). *$\models \alpha$ si y sólo si $\models \delta \wedge \chi(\alpha) \to \xi(\alpha)$*

Demostración .

Supongamos que

$$\not\models \delta \wedge \chi(\alpha) \to \xi(\alpha)$$

esto pasa si y sólo si

$$\textit{hay } \mathfrak{M} \text{ tal que } \mathfrak{M} \not\models \delta \wedge \chi(\alpha) \to \xi(\alpha)$$

por definición de verdad, tenemos que

$$\textit{hay } \mathfrak{M} \text{ tal que } \mathfrak{M} \models \neg(\delta \wedge \chi(\alpha) \to \xi(\alpha))$$

lo cual equivale a que

$$\textit{hay } \mathfrak{M} \text{ tal que } \mathfrak{M} \models (\delta \wedge \chi(\alpha) \wedge \neg\xi(\alpha))$$

por definición

$$\neg\xi(\alpha) = \xi(\neg\alpha)$$

y como el símbolo de negación *no* aporta nuevos símbolos de constante a α.

$$\chi(\alpha) = \chi(\neg\alpha).$$

de aquí que

$$\textit{hay } \mathfrak{M} \text{ tal que } \mathfrak{M} \models (\delta \wedge \chi(\neg\alpha) \wedge \xi(\neg\alpha))$$

esto es,

$$\delta \wedge \chi(\neg\alpha) \wedge \xi(\neg\alpha) \text{ es satisfactible}$$

por el *Teorema* 4.47 esto pasa si y sólo si

$$\neg\alpha \text{ es satisfactible}$$

así que

$$\textit{hay } \mathfrak{M} \text{ tal que } \mathfrak{M} \models \neg\alpha$$

por definición de verdad

$$\textit{hay } \mathfrak{M} \text{ tal que } \mathfrak{M} \not\models \alpha$$

en otras palabras

$$\not\models \alpha$$

Ejercicio 4.49. *Revíse la demostración y demuestre que*

$$\not\models \alpha \textit{ implica } \not\models \delta \wedge \chi(\alpha) \to \xi(\alpha)$$

$\dashv$

Con este teorema, hemos llegado al propósito final del trabajo, en términos de validez una fórmula α universalmente válida de la teoría de tipos es *efectivamente* transformada en una fórmula φ_α del lenguaje de segundo orden que es también universalmente válida.

Más aún, el Teorema 4.48, nos debe de hacer reflexionar más acerca de la manera tradicional de desarrollar las Matemáticas en el aula, primero se establecen los objetos de estudio (números, grupos, anillos, funciones entre números reales,...), después se dictan axiomas que *se suponen* como verdaderos para poder partir de ellos. El juego puede empezar ahora, mediante nociones básicas de lógica formal, como generalización, particularización, y las definiciones de verdad de los conectivos así como del conocimiento de silogismos que nos llevan de verdadero a verdadero, como *modus ponendo ponens*, comenzamos demostrando proposiciones que hablan de nuestros objetos de estudio. Inmersos en un mar de interpretaciones, relacionamos objetos de estudio del Álgebra con los de la Topología para poder vislumbrar nuevas y fascinantes ramas de las Matemáticas.

Absortos en nuestras interpretaciones de dichos objetos, relajamos el formalismo sintáctico que se presupone en cualquier lenguaje formal (en particular en el lenguaje matemático), para poder así mostrar nuevos e interesantes teoremas... tal vez en ese momento es necesario hacer una pausa y tomar conciencia que en términos lógicos lo que se ha hecho es

$$\{Axioma\ 1, Axioma\ 2, ..., Axioma\ k\} \models Teorema$$

lo cual equivale a

$$\models Axioma\ 1 \wedge Axioma\ 2 \wedge ... \wedge Axioma\ k \rightarrow Teorema$$

no importa lo complicado que sean los axiomas, el teorema o los objetos matemáticos que se cuantifiquen en la fórmula anterior, existe una fórmula de segundo orden que traduce a ésta y que también es *universalmente válida.*

¿Para que le sirve la teoría de tipos a un matemático?

Seguramente el lector culto en Matemáticas, se pregunta por el pragmatismo de la teoría de tipos. Me adelantaré a decir que desde mi particular punto de vista considero que sólo un matemático aficionado al *formalismo lógico* y en mayor medida también devoto del *Logicismo*, querrán cuestionarse el *tipo* de objetos sobre los que cuantifica en muchas de las proposiciones matemáticas que se le presenten en Álgebra, Topología, Teoría de Gráficas, ...

Un ejemplo explícito de esto, es la definición de *topología* dada en cursos introductorios de licenciatura, a saber:

Definición .50. *Un espacio topológico es un par* $\langle X, \rho \rangle$*, donde* X *es un conjunto (posiblemente vacío) y* $\rho \in \wp\ (\ \wp(X)\ )$ *tal que:*

$\{\varnothing, X\} \subseteq \rho$

Si $\{U, V\} \subseteq \rho$ *entonces* $U \cap V \in \rho$.

Si $I \subseteq \rho$ *entonces* $\bigcup\{V \mid V \in I\} \in \rho$

Ahora bien, si $D_\tau = X \neq \varnothing$ es fijo, entonces cuantificar sobre *todas* las posibles *topologías* de X significará cuantificar sobre

$$\wp\ (\ \wp(D_\tau)\ )$$

lo cual es el cuantificador del *tipo*

$$\langle\langle\tau\rangle\rangle$$

Un teorema que relacione dos topologías para un mismo conjunto $D_\tau \neq \varnothing$, tendrá un cuantificador del *tipo*

$$\langle\ \langle\langle\tau\rangle\rangle, \langle\langle\tau\rangle\rangle\ \rangle$$

Sin embargo este último *símbolo de tipo* me refiere a una lógica que no es de primer orden, ni de segundo, pero sí forma parte de la sintaxis de la teoría de tipos y por tanto se puedrá *transformar efectivamente* en una fórmula de segundo orden que sea *equisatisfactible*, véase teorema III.

La pretensión no es hacer dependiente al lector de " *tipotizar* " las proposiciones de Matemáticas, sino más bien hacerle ver que ellas son un preciso lenguaje que, por muy sofisticado que se crea, no es más complejo que el lenguaje de segundo orden.

Conclusiones

En este texto se desarrolló lo que se conoce como la versión de Hintikka de la teoría simple de los tipos, la cual difiere de la visión tradicional de los lenguajes formales de primer y segundo orden, en que no hay propiamente un conjunto de parámetros esperando para sí una interpretación, sino más bien hay tantas constantes de cualquier tipo como se requieran, formando así un lenguaje sujeto a las asignaciones que le demos a estos símbolos de constante. En este sentido se podría decir que el lenguaje de la teoría de tipos prescinde de una *signatura* por que ésta esta implícitamente supuesta en la construcción del lenguaje.

Empezamos construyendo un conjunto de *símbolos de tipo* después definimos de manera ordenada y precisa el lenguaje y la semántica de nuestra teoría de tipos siendo esta última una generalización de la noción de verdad de Tarski.

La técnica utilizada en la prueba del teorema 2.19 es producto de ideas empleadas en la demostración del teorema de Completitud dada por Henkin en 1949 (véase [2]), en donde se parte de un conjunto consistente de fórmulas Δ y se muestra que está contenido en un conjunto de fórmulas que es maximal consistente Σ, que además es cerrado bajo Modus Ponens, para el que de una manera parecida a nuestra demostración del teorema 2.19, *se da un modelo.*

Por alguna extraña razón, a veces es más fácil demostrar que ciertas propiedades de conjuntos de fórmulas (como la de ser satisfactible), son compartidas por un conjunto más grande, que las contiene.

De esta manera, mostramos que la satisfactibilidad de un conjunto de fórmulas *es equivalente* a la existencia de Conjuntos Modelo (Fuertes) que lo contengan.

Se propuso una traducción que nos lleva de τ-fórmulas a fórmulas de segundo orden y que preserva *satisfactibilidad.* Con la ayuda de los predicados T_{τ_i}, nunca perdemos de vista *la complejidad* de los símbolos de tipo que tienen presencia en α, ésta se queda "guardada" en

$$\chi(\alpha) : T_{\tau_1}(\xi(q_1^{\tau_1})) \wedge \cdots \wedge T_{\tau_k}(\xi(q_k^{\tau_k}))$$

Dicho coloquialmente:

"$\xi(\alpha)$ almacena la complejidad de las constantes que tienen presencia en α"

Todo esto sin olvidar a nuestra gran fórmula δ que es la encargada de "codificar" la información que traen consigo las fórmulas de la teoría de tipos cinco símbolos de constante predicativos I, H, G, F, J y una cuantificación de una variable predicativa uno-aria, en símbolos

$$\delta \text{ es de la forma: } \forall Y\ \alpha(I, F, G, H, J, Y)$$

En este sentido, el teorema III nos dice que todo modelo que satisface a δ y a $\chi(\alpha)$ deberá satisfacer a $\xi(\alpha)$ siempre y cuando α sea satisfactible.

Un lenguaje construído para evitar paradojas como la de Russell combinado con la noción general de verdad de Tarski y el concepto de Conjunto Modelo, nos permitió *reducir* cualquier fórmula de teoría de tipos a una de segundo orden. Sin embargo el asunto no termina aquí, la teoría simple de los tipos abrió nuevas interrogantes en el campo de teoría de la prueba para lógicas de orden superior, recientes estudios han probado la impredecible aparición de variables de tipos de orden superior en las demostraciones dentro de la teoría de tipos, el siguiente teorema (véase [15]), refleja la imposibilidad de acotarlas:

No bound on the orders of the types of the variables which may occur in the proof of a theorem of higher-order logic can be determined from the orders of the types of the variables in the theorem.

La imposibilidad de acotar los tipos de dichas variables, es consecuencia del 2do teorema de Gödel. Resulta sorprendente ver como ningún orden superior junto con toda su riqueza expresiva puede "completar " a la Aritmética. Los detalles de este resultado, escapan a los propósitos del trabajo pero invitan al lector moderno a continuar investigando acerca de la *teoría simple de los tipos.*

Conjunto Modelo (Fuerte)

A continuación rescribimos las condiciones que definen a un Conjunto Modelo (Fuerte) con la intención de que sean accesibles para el lector a lo largo del trabajo.

(C.0)(a) Si $\alpha \in \Sigma$ entonces $(\neg\alpha) \notin \Sigma$

(C.1)(a) Si $(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma$ entonces $\alpha \in \Sigma$ y $\beta \in \Sigma$

(C.2)(a) Si $(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$ entonces $\alpha \in \Sigma$ o bien $\beta \in \Sigma$

(C.3)(a) Si $\exists v^{\tau_i}\alpha \in \Sigma$ entonces *hay* $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$ tal que $\alpha(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$.

(C.4)(a) Si $\forall v^{\tau_i}\alpha \in \Sigma$ y $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Sigma)$ entonces $\alpha(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$.

(C.5) Si $q_1^{\tau_i} = q_2^{\tau_i} \in \Sigma$ y $\alpha(q_1^{\tau_i}) \in \Sigma$ entonces $\alpha(q_2^{\tau_i}) \in \Sigma$.

(C.6) Si $U \subseteq Q_{\tau_1}(\Sigma) \times \cdots \times Q_{\tau_k}(\Sigma)$

entonces existe $q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} \in Q_{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ que cumple las siguientes dos propiedades:

(C.6)(a) Si $(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in U$ entonces $q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in \Sigma$

(C.6)(b) Si $q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}(q_{i_1}^{\tau_1}, \cdots, q_{i_k}^{\tau_k}) \in \Sigma$ entonces existe $(q_1^{\tau_1}, \cdots, q_k^{\tau_k}) \in U$ tal que

$\{q_{i_1}^{\tau_1} = q_1^{\tau_1}, \cdots, q_{i_k}^{\tau_k} = q_k^{\tau_k}\} \subseteq \Sigma$

(C.7) Si $q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ y $q_1^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}$ cumplen con (a) y (b) de (C.6) respecto *algún mismo* U entonces

$$(q_0^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle} = q_1^{\langle\tau_1,\cdots,\tau_k\rangle}) \in \Sigma$$

Si además, Σ cumple las siguientes condiciones, se dice que Σ es un Conjunto Modelo Fuerte:

(C.0)(b) Si todas las constantes de α tienen presencia en Σ y $\alpha \notin \Sigma$ entonces $\neg\alpha \in \Sigma$.

(C.1)(b) Si $\alpha \in \Sigma$ y $\beta \in \Sigma$ entonces $(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma$.

(C.2)(b) Si todas las constantes de $(\alpha \vee \beta)$ tienen presencias en Σ y $\alpha \in \Sigma$ o bien $\beta \in \Sigma$ entonces $(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$.

(C.3)(b) Si hay $q^\tau \in Q_\tau$ tal que $\alpha(v^\tau|q^\tau) \in \Sigma$ entonces $\exists v^\tau \alpha \in \Sigma$.

(C.4)(b) Si para todo $q^\tau \in Q_\tau(\Sigma)$ tal que $\alpha(v^\tau|q^\tau) \in \Sigma$ entonces $\forall v^\tau \alpha \in \Sigma$.

En adición, por la Proposición 2.4 y el ejercicio 2.21, sabemos que un Conjunto Modelo Fuerte cumple:

(C.00)(a) Si $\neg\neg\alpha \in \Sigma$ entonces $\alpha \in \Sigma$;

(C.01)(a) Si $\neg(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma$ entonces $\neg\alpha \in \Sigma$ o bien $\neg\beta \in \Sigma$;

(C.02)(a) Si $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$ entonces $\neg\alpha \in \Sigma$ y $\neg\beta \in \Sigma$;

(C.03)(a) Si $(\neg\exists v^{\tau_i}\ \alpha) \in \Sigma$ entonces para todo $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}(\Sigma) \quad \neg\alpha(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$;

(C.04)(a) Si $(\neg\forall v^{\tau_i}\ \alpha) \in \Sigma$ entonces existe $q^{\tau_i} \in Q_{\tau_i}$ tal que $\neg\alpha(v^{\tau_i}|q^{\tau_i}) \in \Sigma$.

(C.00)(b) Si $\alpha \in \Sigma$ entonces $\neg\neg\alpha \in \Sigma$;

(C.01)(b) Si $\neg\alpha \in \Sigma$ o bien $\neg\beta \in \Sigma$ entonces $\neg(\alpha \wedge \beta) \in \Sigma$;

(C.02)(b) Si $\neg\alpha \in \Sigma$ y $\neg\beta \in \Sigma$ entonces $\neg(\alpha \vee \beta) \in \Sigma$;

(C.03)(b) Si $\neg\alpha(q^\tau|v^\tau) \in \Sigma$ entonces $\neg\exists v^\tau\ \alpha \in \Sigma$ y $q^\tau \in Q_\tau(\Sigma)$;

(C.04)(b) Si $\neg\alpha(q^\tau|v^\tau) \in \Sigma$ para algún $q^\tau \in Q_\tau(\Sigma)$ entonces $\neg\forall v^\tau\ \alpha \in \Sigma$.

La fórmula δ

A continuación rescribimos la fórmula δ con la intención de que sea accesible para el lector a lo largo del trabajo.

$\delta_{11} : \forall x \forall y (I(x) \wedge I(y) \rightarrow H(x,y))$

$\delta_{12} : \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w (J(x,y,v) \wedge J(z,u,w) \wedge H(x,z) \wedge H(y,u) \rightarrow H(v,w))$

$\delta_{13} : \forall x \forall y \forall z \forall u (F(x,y) \wedge F(z,u) \wedge H(x,z) \rightarrow H(y,u))$

$\delta_{21} : \forall x \forall y \forall z (J(x,y,z) \rightarrow \neg I(z))$

$\delta_{22} : \forall z \forall u (I(z) \rightarrow \neg F(u,z))$

$\delta_{23} : \forall x \forall y \forall z \forall u (F(u,z) \rightarrow \neg J(x,y,z))$

$\delta_{31} : \forall x \forall y (I(x) \wedge H(x,y) \rightarrow I(y))$

$\delta_{321} : \forall x \forall y \forall v \forall w (J(x,y,v) \wedge H(v,w) \rightarrow \exists z \exists u J(z,u,w))$

$\delta_{322} : \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w (J(x,y,v) \wedge J(z,u,w) \wedge H(v,w) \rightarrow H(x,z) \wedge H(y,u))$

$\delta_{331} : \forall x \forall y \forall u (F(x,y) \wedge H(y,u) \rightarrow \exists z F(z,u))$

$\delta_{332} : \forall x \forall y \forall z \forall u (F(x,y) \wedge F(z,u) \wedge H(y,u) \rightarrow H(x,z))$

$\delta_{41} : \forall x \forall y \forall z \forall u (J(x,y,z) \wedge J(x,y,u) \rightarrow z = u)$

$\delta_{42} : \forall x \forall y \forall z \forall u \forall v (J(x,y,v) \wedge J(z,u,v) \rightarrow x = z \wedge y = u)$

$\delta_{51} : \forall x \forall y (I(x) \rightarrow \exists z J(x,y,z))$

$\delta_{52} : \forall x \forall y \forall u (F(u, x) \to \exists z J(x, y, z))$

$\delta_6 : \forall x \forall y (G(x, y) \to F(x, y))$

$\delta_7 : \forall x \forall y \forall z (F(x, y) \wedge H(x, z) \to F(z, y))$

$\delta_{81} : \forall Y\ (\exists w\, Y(w) \wedge \forall x \forall z\ (Y(x) \wedge Y(z) \to H(x, z))) \to \exists y \forall u\ (Y(u) \leftrightarrow G(u, y)))$

$\delta_{82} : \forall x \exists y\ (F(x, y) \wedge \forall z\ \neg G(z, y))$

$\delta_9 : \forall x \forall y \forall u\ (F(x, y) \wedge F(x, u) \wedge \forall z\ (G(z, y) \leftrightarrow G(z, u)) \to y = u)$

Bibliografía

[1] Hintikka, K. Jaakko, 1955. *Reductions in the Theory of Types*, in Two Papers on Symbolic Logic, Acta Philosophica Fennica, No. 8, Helsinki

[2] Enderton, Herbert B., 2001. *A Mathematical Introduction to Logic*, second edition. San Diego: Academic Press.

[3] G. Birkhoff, *Lattice Theory* (Am. Math. Soc. Colloquium Publications 25, Revised Edition, New York 1948).

[4] Montague, Richard, 1965. *Reductions of Higher-Order Logic*, in The Theory of Models, J. W. Addison, Leon Henkin, and Alfred Tarski (eds.), Amsterdam: North-Holland Publishing Co., pp. 251–264.

[5] Henkin, Leon, 1950. *Completeness in the Theory of Types*, The Journal of Symbolic Logic, 15: 81–91.

[6] Shapiro, Stewart, 1991. *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*, Oxford: Oxford University Press.

[7] Simpson, Stephen, 1999. *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Berlin: Springer.

[8] Väänänen, Jouko, 2001. *Second-Order Logic and Foundations of Mathematics* The Bulletin of Symbolic Logic, 7: 504–520.

[9] Boolos, George, 1975. *On Second-Order Logic*, The Journal of Philosophy, 72: 509–527. También está en *Logic, Logic, and Logic*, by George Boolos, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1998, pp. 37–53.

[10] Salinas, Mauricio, 2008 *Lógica de segundo orden y ω-modelos*, Tesis de Licenciatura, para obtener el título de Matemático, Director de Tesis José Alfredo

Amor y Montaño, Facultad de Ciencias UNAM.

[11] Enderton, Herbert. *Second-order and Higher-order Logic* First published Thu Dec 20, 2007; substantive revision Wed Mar 4, 2009, Stanford Enciclopedia of Philosophy,
http://plato.stanford.edu/entries/logic-higher-order/

[12] Amor y Montaño, José A. *Teoría de Conjuntos para estudiantes de Ciencias*, 2da Edición, Universidad Nacional Autonóma de México. Facultad de Ciencias, 2005 - 117 págs.

[13] Whitehead, A.N., and Bertrand Russell, *Principia Mathematica*, 3 vols., Cambrige England, 1910 - 1913; 2nd edition., 1925-1927.

[13] Chwistek, Leon, *The theory of constructive types*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique, vol. 2, 1924 pp. 9 - 48; vol. 3 (1925), pp 92 - 141.

[15] Peter B. Andrews, *Classical Type Theory*, Handbook of Automated Reasoning, 2001.

[16] Jhon L. Kelley, *General Topology*, Springer, Graduate Text in Mathematics.

[17] Jean van Heijenoort *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931* , Mathematical logic as based on the theory of types, Bertrand, Rusell, 1908a. Harvard University Press (February 14, 2002)

Índice alfabético

$Q(\Sigma)$, 15
$Q_{\tau_i}(\Sigma)$, 15
$V_{\tau_i}(\Sigma)$, 15
Λ, 90
$\mathfrak{M} \models \alpha$, 11

asignación, 10

Conjunto Modelo, 37
Conjunto Modelo Fuerte, 38, 41, 87
Conjunto Modelo Restringido, 36
Conjunto Modelo, definición, 16
Conjunto Modelo, definición de , 17
constantes de cualquier tipo en Σ, $Q(\Sigma)$, 15
constantes del tipo τ_i en Σ, $Q_{\tau_i}(\Sigma)$, 15

dominio individual, 10

fórmula de la teoría de tipos, 4
fórmula, nivel de una, 8
fórmula, satisfactibilidad de una, 10
fórmulas atómicas, 5
fórmulas, variantes alfabéticas, 7

modelo para fórmulas la teoría de tipos, 10

reglas de verdad, 10

símbolos propios de tipo, 4
símbolos de tipo, 1

variables de cualquier tipo en Σ, $V(\Sigma)$, 15
variables del tipo τ_i con presencia en Σ: $V_{\tau_i}(\Sigma)$, 15
verdad de Tarski para la teoría de tipos, 10