Universidad Nacional Autónoma de México

Maestría en Docencia para la Educación Media Superior

Facultad de Estudios Superiores Acatlán

“Un acercamiento al concepto de derivada usando tecnología”

TESIS

Que para optar por el grado de Maestro en Docencia

para la Educación Media Superior (Matemáticas)

PRESENTA

Marco Antonio Olivera Villa

Tutor principal:

Dr. Miguel Mercado Martínez (FES-Acatlán)

Comité tutor:

M.C. Juan B. Recio Zubieta **(FES-Acatlán)**

Mtra. Lorena Cruz Ramos **(FES-Acatlán)**

México, D.F., Septiembre de 2014

UN ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE DERIVADA USANDO TECNOLOGÍA.

AGRADECIMIENTOS:

A los profesores:

Dr. Miguel Mercado Martínez

Mtro. Juan Bautista Recio Zubieta

Mtra. Lorena Cruz Ramos

Ing. Víctor José Palencia Gómez

Dr. Carlos Hernández Garciadiego

Por revisar el trabajo

INTEGRACIÓN DEL JURADO:

Dr. Miguel Mercado Martínez (Tutor)

Mtro. Juan Bautista Recio Zubieta

Mtra. Lorena Cruz Ramos

Ing. Víctor José Palencia Gómez

Dr. Carlos Hernández Garciadiego

RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo fue investigar si mediante actividades en hoja electrónica de cálculo y Geogebra era posible contribuir a una mejor comprensión del concepto de derivada.

El trabajo se desarrolló con un grupo de 16 estudiantes de entre 17 y 20 años de edad de nivel medio superior de una escuela de la ciudad de México.

Los alumnos trabajaron en actividades computacionales, donde tenían que explorar la derivada a través de razones de cambio y también de manera gráfica.

Los datos obtenidos en esta investigación, provienen de las observaciones hechas al trabajo de los estudiantes durante las actividades, y de dos cuestionarios aplicados antes y después de las actividades didácticas. La investigación se desarrolló en dos etapas: la primera etapa consistió propiamente en la puesta en práctica de las actividades didácticas en la plataforma de aprendizaje y la segunda y consistió en la solución colectiva e individual de dichas actividades en el ambiente virtual.

A partir de las evidencias de nuestro estudio, se concluye que las actividades ofrecieron al alumno oportunidades para explorar aspectos relacionados con el concepto de la derivada. Aunque una buena comprensión del concepto de derivada requiere de algún tiempo de maduración.

ABSTRACT

The major aim of this study was to investigate the possibility of stimulating the understanding of the formal definition of derivatives through spreadsheet and Geogebra software.

The study was carried out with 16 pupils, whose ages are from 17 to 20, all of them are high school students in Mexico City.

The students worked on computer activities, where they had to explore derivatives through rates of change and graphs

The data analyzed in this study was derived from the observation of the students' work during activities and a pre- and post –test. The study was carried out in two parts: the first part consists of designing the virtual environment, the second part was about solving the math activities in a collaboratively, but also, in an individual way.

From the evidence gathered during our study, I conclude that the computer activities offered students opportunities to explore and develop aspects and understandings related to the concept derivatives. Although a good understanding of the derivative concept requires time to mature the knowledge in the student's mind.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 17

CAPÍTULO 1 : UN ENFOQUE PSICOPEDAGÓGICO EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN UN AMBIENTE A DISTANCIA. 19

1.1 Resumen del capítulo.. 19

1.2 Introducción.. 19

1.3 Los factores para alcanzar una educación de calidad 20

1.4 Motivación 22

1.4.1 Definición de motivación 22

1.4.2 Perspectivas sobre la motivación: 22

1.4.3 Conocimientos y emociones 24

1.4.4 La desmotivación docente 25

1.4.5 Trastornos emocionales ante la educación matemática 26

1.4.6 Las emociones en el aprendizaje en línea 28

1.5 El contexto interaccional en el Aula.. 29

1.6 Conclusiones del capítulo 32

CAPÍTULO 2. DERIVADAS: CONCEPTO MATEMÁTICO Y BOSQUEJO HISTÓRICO 33

2.1 Resumen del capítulo.. 33

2.2 Introducción.. 33

2.3 Definición moderna de la derivada 34

2.4 Bosquejo histórico de la derivada 36

2.4.1 Los Griegos 37

2.4.2 Newton y Leibnitz 37

2.4.3 Fermat 40

2.4.4 Bolzano y Cauchy 40

2.5 Conclusiones del capítulo 42

CAPÍTULO 3. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA DERIVADA: DIFICULTADES Y CONCEPCIONES. 43

3.1 Resumen del capítulo 43

3.2 Introducción 43

3.3 Enseñanza de la derivada: polos del estudiante, del contenido matemático y docente 43

3.3.1 El polo del contenido matemático 44

3.3.2 El polo estudiantil 45

3.3.3 El polo docente 46

3.4 Elementos didácticos 47

3.5 Elementos históricos 48

3.6 Perspectivas sobre la enseñanza de la derivada 50

3.6.1 Pre requisitos en cuanto a conocimientos 50

3.6.2 ¿Que deben aprender los estudiantes sobre la derivada? 51

3.6.3 Enfoques pedagógicos 51

3.6.4 Pre requisitos en cuanto a conocimientos 52

3.6.5 Conexión de la derivada con diferentes disciplinas. 52

3.6.6 Concepciones sobre la derivada.. 53

3.7 Obstáculos conceptuales para la comprensión de la derivada 57

3.7.1 Limitaciones en la comprensión del concepto de límite. 58

3.8 Conclusiones del capítulo 61

CAPÍTULO 4. USO DE TECNOLOGÍA, MICROMUNDOS Y APRENDIZAJE ... 63

4.1 Resumen del capítulo... 63

4.2 Introducción.. 63

4.3 La tecnología en educación matemática. 64

4.4 Los micromundos computacionales. 65

4.5 El construccionismo 66

4.6 Las hojas electrónicas de cálculo.. 69

4.7 Geogebra 70

4.8 Cálculo y tecnología 71

4.8.1 Tecnología en general para la enseñanza y aprendizaje del cálculo. 71

4.8.2 Experiencias usando tecnología para el aprendizaje y la enseñanza del cálculo. 72

4.8.3 Redefiniendo la derivada con tecnología.. 73

4.9 Trayectorias de aprendizaje 73

4.10 Conclusiones del capítulo 75

CAPÍTULO 5. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN 77

5.1 Objetivo general de la investigación 77

5.2 Diseño del estudio 77

5.2.1 Etapa 1: Construcción de la Plataforma de Aprendizaje 79

5.2.2 Etapa 2: Cuestionario Preliminar 81

5.2.3 Etapa 3: Actividades de aprendizaje del concepto de la Derivada 86

5.2.4 Etapa 4: Cuestionario Posterior 91

5.2.5 La población de estudio 92

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS 94

6.1.1 Generalidades 94

6.1.2 Trayectorias de aprendizaje seguidas por los alumnos. 95

CONCLUSIONES 108

6.2 Resumen de los resultados 108

6.3 Discusión sobre las aportaciones y limitantes del trabajo 109

REFERENCIAS 111

ANEXO A: INTERFAZ DE LA PLATAFORMA DE APRENDIZAJE 115

A.1 Video de bienvenida a la Plataforma de Aprendizaje 115

A.2 Menú central de navegación en la Plataforma de Aprendizaje 116

ANEXO B: Encuesta sobre datos estadísticos 117

ANEXO C: Cuestionario Preliminar 118

ANEXO D: ACTIVIDADES DIDÁCTICAS 120
D.1 Actividad 2: La Derivada con Excel 120
D.1.1 Video sobre el uso de Excel para explorar la derivada 120
D.1.2 Foro de Discusión sobre la derivada usando Excel 121
D.2 Actividad 3: La Derivada con Geogebra 122
D.2.1 Applet en geogebra para explorar la derivada 122
D.3 Actividad 4: Definiendo la Derivada 124
ANEXO E: Cuestionario Posterior 125

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de investigación se presenta un acercamiento al concepto de derivada a través de actividades en hoja electrónica de cálculo y Geogebra. El trabajo se desarrolla con un grupo de quinto cuatrimestre del Colegio de Ciencias y Humanidades de la UNAM.

En el capítulo 1 se analiza la problemática del aprendizaje de las matemáticas desde un enfoque psicopedagógico: en particular las carencias que tiene el profesor como motivador, se formula una propuesta que involucre este factor psicológico en su práctica docente.

En el capítulo 2, con el objetivo de entender el desarrollo del concepto de la derivada, se analiza primeramente su definición y concepción matemática actual para posteriormente analizar su evolución histórica.

En el capítulo 3 se revisan algunas de las investigaciones en torno a las concepciones y dificultades en la comprensión del concepto de la derivada.

En el capítulo 4, se exponen las ideas fundamentales de diversas investigaciones acerca del uso de la tecnología, el ambiente de programación Geogebra, las hojas electrónicas de cálculo, los micromundos computacionales y las trayectorias de aprendizaje.

En el capítulo 5 se expone la metodología de la investigación que se siguió, la cual básicamente consiste en la formulación de los objetivos de la investigación, la justificación y descripción de las actividades didácticas, así como la planificación de las preguntas para las entrevistas realizadas.

En el capítulo 6 se analizan los resultados desde la perspectiva de las trayectorias de aprendizaje: analizamos los conocimientos desarrollados por los estudiantes durante la realización de las actividades respecto al concepto de derivada y establecemos una clasificación al respecto en términos de diferentes trayectorias de conocimiento.

Finalmente en el capítulo de conclusiones se resumen los resultados de la investigación

CAPÍTULO 1 : UN ENFOQUE PSICOPEDAGÓGICO EN LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN UN AMBIENTE A DISTANCIA.

1.1 Resumen del capítulo

Se analizan diversas investigaciones sobre la enseñanza -aprendizajes vinculados al factor emocional y se formula una propuesta que contemple este factor psicológico.

1.2 Introducción

Las primeras ideas que constituyen este capítulo nacieron durante los cursos de práctica docente 2 y práctica docente 3, en la maestría en docencia para la educación media superior, en la Facultad de Estudios Superiores Acatlán de la Universidad Nacional Autónoma de México, durante los periodos escolares agosto -diciembre 2012 y enero -mayo 2013.

Durante estos cursos hubo un intercambio muy fructífero de experiencias docentes entre los estudiantes, dichas experiencias fueron principalmente el análisis de videograbaciones de clases: debía impartir al menos 3 clases sobre algún tema a elegir y contar con la participación de dos observadores para dichas sesiones; en una sesión posterior en el salón de clases los observadores realizaban una crítica sobre el trabajo del compañero que presentaba el video, adicionalmente el resto del grupo también emitía una crítica y se hacía una retroalimentación al respecto.

Durante el desarrollo de los cursos de práctica docente 2 y práctica docente 3, el profesor del curso siguió un enfoque psicoanalítico, en donde mediante el uso de esta técnica se analizaban las videograbaciones de los estudiantes, así mismo se emitían recomendaciones para corregir posibles fallas, así como para lograr una mejor calidad en la docencia.

La experiencia en el curso fue definitiva para considerar que el factor emoción es determinante en el proceso de enseñanza–aprendizaje, inclusive en un aprendizaje a distancia y en línea, por lo tanto se decidió hacer una revisión teórica al respecto que incluye los siguientes elementos:

- Los factores para alcanzar una educación de calidad
- Motivación
- Perspectivas sobre la motivación:
- Conocimientos y emociones
- La desmotivación docente
- Trastornos emocionales ante la educación matemática
- Las emociones en el aprendizaje en línea
- El contexto interaccional en el Aula

En las siguientes secciones se discutirán cada uno de estos elementos, incorporando las observaciones derivadas de las videograbaciones, el enfoque del capítulo es confrontar los elementos teóricos con los prácticos. Es importante afirmar que el factor emocional, se podría percibir como algo ajeno a una buena práctica docente, sin embargo esta apreciación surgida a partir del sentido común queda sin sustento cuando se ponen en contraste las observaciones-prácticas con los elementos teóricos involucrados.

1.3 Los factores para alcanzar una educación de calidad

En la educación uno de los principales objetivos es lograr su calidad, misma que debe enfocarse hacia la construcción de un mundo mejor:

> *La educación que imparta el Estado tenderá a desarrollar armónicamente todas las facultades del ser humano y fomentará en él, a la vez, el amor a la Patria y la conciencia de la solidaridad internacional, en la independencia y en la justicia. (Constitución política de los Estados Unidos mexicanos, 1917)*

La calidad de la educación involucra a cada uno de sus elementos: profesores, administración, estudiantes, padres de familia, etc., sin embargo tal como lo afirma Casadiego (2010), dentro de la perspectiva de la calidad de la educación los docentes son los agentes principales de las transformaciones a nivel educativo, por esta razón deben capacitarse permanente para enriquecer sus conocimientos y mejorar su práctica pedagógica. En este sentido los profesores tienen una gran responsabilidad social, ya que son el elemento con más cercanía al estudiante y por lo tanto su incidencia es mayor.

A continuación vamos a describir, según Braslavsky (2006) 10 factores que influyen en una educación de calidad:

Factor 1: la pertinencia personal y social como foco de la educación

Factor 2: la convicción, estima y autoestima de los estratos involucrados

Factor 3: la fortaleza ética y profesional de los profesores

Factor 4: la capacidad de conducción de los directores y el personal intermedio

Factor 5: el trabajo en equipo al interior de la escuela y del sistema educativo

Factor 6: las alianzas entre las escuelas y otros agentes educativos

Factor 7: el currículo en todos los niveles educativos

Factor 8: la cantidad, calidad y disponibilidad de materiales educativos

Factor 9: la pluralidad y la calidad de las didácticas

Factor 10: los mínimos materiales y los incentivos socio-económicos y culturales

En los factores para alcanzar una educación de calidad descritos arriba se destacan los relacionados con el trabajo del profesor: pues se habla de convicción, estima y autoestima, ética, capacidad de conducción, trabajo en equipo, alianzas, currículo, materiales educativos, didácticas, vemos que el profesor destaca siempre como un elemento clave para alcanzar una educación de calidad y por tanto de eficacidad que repercutirá en la disposición del alumno hacía el aprendizaje.

1.4 Motivación

1.4.1 Definición de motivación

En términos etimológicos, la palabra motivación procede del latín *motus* que se relaciona con aquello que moviliza a la persona para ejecutar una actividad, hay diversas acepciones de motivación:

La motivación es el conjunto de razones por la que las personas se comportan de las formas en que lo hace, el comportamiento motivado es vigoroso, dirigido y sostenido (Sanstrock, 2002); la motivación debe ser entendida como la trama que sostiene el desarrollo de aquellas actividades que son significativas para la persona y de las que ésta forma parte (Ajello, 2003); la motivación es un constructo teórico -hipotético que designa un proceso complejo que causa la conducta, en la motivación intervienen múltiples variables tanto biológicas como adquiridas que influyen en la activación, direccionalidad, intensidad y coordinación del comportamiento encaminado a lograr determinadas metas (Bisguerra, 2000); la motivación es una de las claves explicativas más importantes de la conducta humana respecto al porqué del comportamiento (Herrera, Ramírez, Roa & Herrera, 2004).

1.4.2 Perspectivas sobre la motivación:

A continuación vamos a resumir el trabajo de Naranjo (2009) acerca de las perspectivas de la motivación:

Existen tres perspectivas fundamentales sobre la motivación: la conductista, la humanista y la cognitiva. La perspectiva conductual se refiere a que cuando existen las recompensas hay una motivación de la conducta y de esta manera la atención de las personas se dirige hacia acciones adecuadas y la distancia ante las inadecuadas.

La perspectiva humanista enfatiza la capacidad humana para crecer, las cualidades personales y la libertad de elección. En cuanto a la teoría cognitiva, se refiere a un énfasis en las ideas y considera que lo que la persona piensa que puede ocurrir es importante porque en realidad determina lo que ocurre; es decir, lo que uno piensa lo atrae con la mente.

En el ámbito educativo, un objetivo fundamental es lograr la motivación de los estudiantes en relación con el aprendizaje. Si retomamos lo anterior acerca de la motivación, esta de manera activa dirige y mantiene la conducta hacia las metas educativas que el docente se propone, por ello debemos tomar en cuenta tres aspectos muy importantes para despertar la motivación en la educación:

1) El valor otorgado a las metas educativas y las consecuencias afectivo -emocionales resultantes del éxito o del fracaso académico.
2) Los problemas motivacionales -afectivos: la indefensión y la desesperanza aprendida, se trata de patrones de comportamientos que surgen desde la infancia, en los que las personas perciben sus fracasos como insuperables porque consideran que carecen de habilidades.
3) Comprender que es natural no poseer la misma capacidad para desempeñarse en las diversas áreas del aprendizaje; entender que equivocarse y aprender de los errores forma parte del proceso de enseñanza-aprendizaje formal y de la vida en general, comprender que la inteligencia no es un rasgo fijo, sino que más bien se puede cultivar mediante el aprendizaje en espiral y que por

lo tanto hay posibilidades de cambio y de mejoría en el desempeño académico Naranjo (2009).

Analizando esta perspectiva, el profesor debe despertar la curiosidad de los estudiantes con el objetivo de captar la atención y el interés de éstos, así mismo debe estimularlos a que consideren de mayor importancia el hecho de aprender (motivarlos de forma intrínseca) que al numerito que obtengan conocido como calificación (motivación extrínseca).

1.4.3 Conocimientos y emociones

Es importante mencionar que la tradición dice que los conocimientos y la parte emocional pudieran estar separados, en este sentido también se atribuye al conocimiento y la razón un dominio masculino, mientras que las emociones y los sentimientos están reservados para el género femenino. Según lo social del conocimiento contemporáneo existen diferentes modelos de vincular conocimiento y emoción, en particular se establece una dicotomía entre ambos conceptos (Maffia, 2005):

Al respecto, es importante analizar lo que ocurrió al interior de las prácticas docentes con mis compañeros de clase; en todas las sesiones de clase se observó que la disposición del profesor influyó de gran manera en el desarrollo de la clase, de esta manera una actitud apática provocaba que los estudiantes no se entusiasmaran por el tema y por tanto no se generaba el aprendizaje, mientras que una actitud favorable en la que el profesor reía y se notaba su alegría por impartir conocimientos impactaba de forma positiva al grupo, de tal manera que lograba captar su atención y los estudiantes respondían con la participación, externando sus dudas y a la vez realizando las actividades didácticas que el profesor había diseñado para tal fin.

Un aspecto muy importante a considerar dentro de las emociones es el sentido del humor del profesor, en ese sentido al observar las diversas videograbaciones de mis colegas, se puede constatar que las clases que se desarrollan con un cierto sentido del humor provocan que se rompa la formalidad y que favorezcan una cercanía con el profesor y se propicie el ambiente óptimo para que exista una verdadera enseñanza-aprendizaje.

1.4.4 La desmotivación docente

Un problema muy importante que aqueja a una gran cantidad de profesores es el de la desmotivación, en este sentido Silvero (2007) considera el síndrome de Burnout, en el origen de esta problemática en que se encuentra un déficit motivacional del profesor hacia su actividad profesional, provocado por el desarrollo de creencias de auto eficacia negativas, existen tres síntomas de este trastorno:

- Baja realización personal: se caracteriza por el desarrollo de un sentimiento de fracaso personal, el profesor desarrolla expectativas negativas de eficacia.
- Agotamiento emocional: la persona desarrolla la vivencia de encontrarse emocionalmente agotado, experimenta la falta de recursos emocionales y siente que nada puede ofrecer a las personas para las que trabaja.
- Despersonalización: la persona manifiesta actitudes negativas hacia las personas para las que trabaja, en el caso del profesor estas actitudes son muchas veces manifestadas con los alumnos, adoptando una relación distante y con poca receptividad hacia las demandas que estos le realizan.

Es importante mencionar esta sección porque todos los profesores podríamos estar inmersos en un proceso de desmotivación, en particular los profesores de matemáticas están inmersos en un proceso de lucha constante, en la que los estudiantes, como producto de una mala docencia durante muchos años de estudio han desarrollado una aversión hacia las matemáticas, dicha aversión según mi experiencia personal se manifiesta con un cierto grado de violencia hacía el profesor, lo cual podría desencadenar en un sentimiento de frustración y en mayor término en una desmotivación docente. A continuación hablaremos más al respecto.

1.4.5 Trastornos emocionales ante la educación matemática

El aprendizaje de las matemáticas viene condicionado por múltiples factores que han sido considerados en mayor o menor medida en diferentes investigaciones, la parte afectiva está adquiriendo una gran importancia, por lo tanto se maneja la hipótesis de que las actitudes, las creencias y las emociones influyen tanto en el éxito como en el fracaso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido Guerrero, Blanco & Castro (2001) aseguran que los pensamientos, las creencias y las actitudes determinan los sentimientos y las emociones, todas nuestras experiencias son procesadas y reciben un significado antes de experimentar una respuesta emocional. El la emoción depende del pensamiento, y éste precede a la emoción, cuando una persona está ansiosa está interpretando los sucesos como amenazantes y peligrosos, de esta manera se crea un circuito de retroalimentación negativa, lo cual influye de manera amplia en el rendimiento:

1. Un alto grado de ansiedad facilita el aprendizaje mecánico y las clases menos difíciles de aprendizaje significativo, pero tiene efecto inhibitorio sobre aprendizajes más complejos.
2. La ansiedad facilita el aprendizaje de tareas complejas bajo las siguientes circunstancias; no amenazan la autoestima personal, no son tareas exageradamente novedosas o significativas, la ansiedad

que sólo moderada y el estudiante posee mecanismos afectivos de superación de la ansiedad.

3. Los estudiantes con un alto nivel de ansiedad se benefician más de las lecciones positivas, mientras que los de un bajo nivel de ansiedad se benefician de los métodos de aprendizaje por descubrimiento.

Como resultado de la experiencia escolar los estudiantes van generando creencias acerca de la enseñanza -aprendizaje de la matemática, y creencias acerca de uno mismo en relación con la educación matemática, estas últimas tienen una fuerte componente afectivo que engloba las relacionadas con la confianza en uno mismo, su auto concepto y la auto deficiencia percibida, además estas creencias se van estabilizando y haciéndose resistentes a los cambios, conforme avanzan en niveles educativos Gairín (1990).

Los estudiantes adquieren una concepción sobre los problemas matemáticos, sobre la forma de resolverlos, sobre el papel de la enseñanza de las matemáticas que va a provocar en ellos actitudes concretas para abordarlos, el fracaso continuado ante procesos normalmente mecánicos y repetidos, la resolución de problemas también provoca una actitud de ansiedad hacia el no entendimiento de la matemática, al igual que la falta de recursos para resolver problemas más complejos que los lleva a una baja autoestima y a la consideración de que los estudiantes que resuelven de forma correcta los problemas son los estudiantes más inteligentes (Blanco, 1997).

También, como efecto de sus continuos fracasos dudan de su capacidad intelectual llegan a considerar sus esfuerzos inútiles, desarrollan un sentimiento de frustración y el deseo de abandonar rápidamente ante la dificultad, éstos determinan nuevos fracasos que refuerza la creencia de que efectivamente son incapaces de lograr el éxito y esa situación lo lleva a asumir una responsabilidad menor sobre sus éxitos, lo que puede a su vez producir un sentimiento de indefensión aprendida (Miranda, Fortes & Gil, 1998).

Todas estas creencias pueden llevar al alumno a exagerar la importancia de obtener respuesta y a subestimar su propia valía, su incapacidad para resolver problemas se convierte en angustia, puesto que toda su persona se siente amenazada y esto lo lleva a desencadenar unos niveles muy elevados de ansiedad de los que desea a toda costa escapar, abandonando la situación, este comportamiento refuerza la creencia de que es incapaz de resolver problemas, por lo que cuando se vuelva enfrentar a una tarea matemática lo hará con niveles aún mayores de ansiedad ya que tiene más pruebas de su incompetencia, por lo tanto esto hará que aumente la probabilidad de que abandone la situación y así sucesivamente (Miranda, Fortes & Gil, 1998).

En este sentido la intervención del profesor es básica para provocar en sus alumnos la creencia de que son seres capaces de entender problemas matemáticos y de resolverlos.

1.4.6 Las emociones en el aprendizaje en línea

Actualmente con el surgimiento de las tecnologías de la información y la comunicación se exige cada vez más frecuentemente diseñar cursos en línea, inclusive se imparten licenciaturas en la modalidad de educación a distancia (Ver http://www.unadmexico.mx), en este contexto es importante revisar el papel que juega la motivación en esta modalidad de enseñanza.

Al respecto se presentan los resultados de la investigación de Rebollo, García, Barragán, Buzón, & Vega (2008) en la que se analizaron a un grupo de estudiantes en línea, la conclusión a la que llegaron fue que se detectó una mayor presencia y variedad de emociones positivas, que de emociones negativas durante el aprendizaje en línea, ellos mencionan que hubo una fuerte presencia de lo que denominan orientación, una emoción de apoyo y guía durante el proceso de aprendizaje, por parte del profesor; también se muestra una fuerte presencia de optimismo durante el aprendizaje en la plataforma virtual, en la que se requiere la gestión del propio aprendizaje y el uso de recursos y herramientas tecnológicas; en relación con las emociones negativas las más frecuentes fueron la preocupación, tensión, desorientación y confusión, esto revela la importancia de adquirir competencias emocionales para un aprendizaje autónomo.

1.5 El contexto interaccional en el Aula

En el aula ocurren dos tipos de interacciones: alumno –profesor y alumno – alumno, en términos generales la interacción que predomina tal como lo afirma Ibañéz (2001) es de estilo autoritario instruccional por parte del profesor, él es quien determina quien dice o hace algo, así como los tiempos para realizarlo, en este sentido en el aula se dan unas relaciones de poder legítimas, que descansan en la jerarquía de que quién sabe es el profesor. Este tipo de interacciones establecen diferentes jerarquías entre los propios estudiantes: el mejor alumno es quien tiene más respuestas aceptadas por el profesor y el peor alumno es aquel que tiene menos.

En este sentido, Ibañéz (2001) considera que las emociones juegan un papel predominante: determinan el espacio de las acciones posibles de emprender en cada momento, no se puede actuar de la misma manera si uno está en una emoción u otra, por ejemplo el enojo restringe el espacio de acciones posibles de manera evidente y la satisfacción y la alegría lo amplían.

En las prácticas docentes en donde tuve la posibilidad de ser observador ya sea directamente o por videograbaciones se nota claramente que existe una interacción tal como lo señala Ibañéz (2001), es decir en diferentes momentos de una clase los estudiantes interactuaron entre ellos, así como con el profesor, siendo este último un elemento determinante.

Ibañéz (2001) realizó una investigación con un grupo de estudiantes en las que consideró una clasificación que considere interesante rescatar:

Las emociones favorables son aquellas que posibilitan la creación de dominios o espacios de acciones que se consideren deseables para el trabajo futuro de un profesor, por ejemplo interés cuando las clases han motivado horas y se nota que al profesor le gusta lo que hace.

Las emociones desfavorables son aquellas que imposibilitan la creación de dominios o acciones no deseables para el trabajo del profesor, por ejemplo enojo cuando el profesor no deja expresar su opinión a los estudiantes y los hace experimentar que sólo él tiene la verdad.

También Ibañéz (2001) establece las siguientes subcategorías relacionadas con las emociones favorables y con las desfavorables de los estudiantes, según una investigación realizada por ella:

1. Contenidos de las asignaturas: cuando los contenidos tienen aplicación práctica, cuando se aprenden cosas nuevas y se tiene oportunidad de mostrarlas (emociones favorables); cuando los temas se siente poco importantes, cuando se pide una base más sólida en conocimientos y no se da, aburrimiento, cuando la clase se va sin productivo (emociones desfavorables).

2. Cumplimiento de sus objetivos o metas: cuando se comprende la materia, cuando se obtienen buenas calificaciones (emociones favorables); inseguridad, miedo, sensación de pérdida de tiempo (emociones desfavorables)
3. Metodologías empleadas por el profesor y participación del estudiante en las clases: cuando las clases son dinámicas, contextualizadas, cuando se permite opinar, debatir (emociones favorables); cuando el profesor se molesta que se le pide que vuelva a explicar, cuando el profesor habla toda la clase y solamente se escucha y tomar apuntes (emoción desfavorable).

4. Relación con el profesor y percepción que de él o ella tiene el estudiante: alegría y satisfacción cuando el profesor muestra interés por los estudiantes, cuando sabe muy bien lo que hace, cuando los trata como colegas, cuando reconoce el esfuerzo, cuando a la hora de evaluar sacar todos los parámetros de amistad que puede haber y evalúa lo que tiene que evaluar (emociones favorables); cuando no acepta la crítica, cuando son autoritarios, prepotentes (emociones desfavorables).
5. La relación del estudiante con sus compañeros de clase: alegría y satisfacción, cuando el estudiante está con su sección sólo hay unión, cuando se ayudan (emociones favorables); cuando los compañeros se faltan el respeto, cuando hay compañeros que reclaman por cualquier cosa (emociones desfavorables).

En la descripción de emociones favorables y desfavorables, es posible observar que las emociones favorables corresponden a situaciones de aprendizaje en las que se generan ambientes de respeto y se hace sentir al estudiante que es una persona que tiene un gran valor, que lo aporta es interesante; sin embargo las emociones desfavorables surgen precisamente cuando se da la ausencia de respeto y se menosprecia en general al estudiante.

En mi práctica docente, he percibido que cuando hago sentir a los estudiantes que tienen la capacidad para aprender puesto que pueden participar con la resolución de alguna problemática, entonces las clases se convierten de forma natural en un espacio de interacción en donde se manifiesta el interés de los alumnos por aprender más.

A manera de síntesis para esta sección, Ibañéz, Barrientos, Delgado, Figueroa & Geisse (2004) consideran que los estilos de interacción en el aula que aportan un mejoramiento de la calidad en la docencia son aquellos que facilitan en los alumnos el surgimiento de emociones favorables para el aprendizaje, en este sentido todo profesor que toma conciencia que determinadas interacciones pedagógicas pueden conducir al aprendizaje de sus estudiantes mediante el uso de acciones pertinentes está colaborando en una docencia de calidad.

1.6 Conclusiones del capítulo

Hemos visto que el elemento emocional está presente en cada una de las clases que impartimos sea favorable o desfavorable y por ello es imposible desvincular la parte emocional del conocimiento, por lo que es importante desarrollar estrategias que nos permitan enfocar las emociones favorables para poder generar un aprendizaje de alta calidad; la labor del profesor no solo se debe limitar a impartir cátedra por cumplir sino que esta labor va más allá, se trata de enseñar a los estudiantes a aliviar su angustia, sus frustraciones, sus valores, para poderse incorporar en un futuro no lejano a un mundo altamente competitivo.

El aprendizaje de las matemáticas conlleva muchas emociones desafortunadamente la mayoría son negativas y generalmente son producidas por el profesor mismo, en este sentido el docente debe hacer un esfuerzo por incorporar metodologías didácticas novedosas que conlleven al despertar de un interés auténtico por aprender matemáticas, este esfuerzo debe ser aún mayor si se trata de un ambiente en línea y a distancia sobre todo para borrar el sentimiento de estar sólo en el proceso del aprendizaje, en este contexto el profesor debe hacer notar su presencia ante el estudiante.

CAPÍTULO 2. DERIVADAS: CONCEPTO MATEMÁTICO Y BOSQUEJO HISTÓRICO

2.1 Resumen del capítulo

En este capítulo se aborda el concepto matemático de la derivada, se realiza un bosquejo histórico de la misma, el cual abarca diferentes etapas: desde la antigüedad con los griegos, posteriormente en el siglo XVIII con Newton, Leibnitz y Fermat y finalmente con Bolzano y Cauchy en el siglo XIX.

2.2 Introducción

El cálculo diferencial e integral es una de las áreas de las matemáticas en las que se presta más interés en el estudio ya sea en los cursos pre-universitarios como en los universitarios, ya que por una parte es una ciencia eminentemente formativa para el desarrollo del pensamiento lógico-formal, pero también es una ciencia básica en el desarrollo de los cursos de la matemática aplicada, tales como en ingeniería y física.

En un curso de cálculo, un tópico fundamental es el estudio de la derivada, la cual puede abordarse desde diferentes perspectivas: formalismo matemático o aplicabilidad, el primer enfoque corresponde a la enseñanza de la derivada demostrando las construcciones matemáticas involucradas a través de la construcción de teoremas, mientras que el segundo enfoque es a través, del uso de la modelación matemática, para resolver problemas de física, biología, etc.

El estudio de la derivada es por tanto, fundamental para acceder a conocimientos matemáticos más avanzados, tales como ecuaciones diferenciales, sin embargo, según mi experiencia propia una gran cantidad de estudiantes presentan serios problemas para comprender cabalmente el significado de la derivada, esto debido, fundamentalmente a que en el salón de clases se privilegian la técnicas de derivación sobre diversas funciones algebraicas y trigonométricas, soslayando el estudio del concepto de la misma.

En este contexto de enseñanza-aprendizaje de la derivada hay diversos recursos que se desaprovechan, en particular las herramientas tecnológicas y el bosquejo histórico de la misma. Las herramientas tecnológicas, tales como el software matemático, pueden permitir, mediante una adecuada planeación didáctica, involucrar en un proceso más dinámico a los estudiantes, por ejemplo haciendo uso de construcciones geométricas de las derivadas. En el caso del bosquejo histórico, este generalmente se omite, sin embargo permite mostrar a los estudiantes en un contexto real el surgimiento natural de las ideas e investigaciones matemáticas que dieron origen al Cálculo, en particular a las derivadas.

En este contexto, considero que es muy importante, primeramente partir de una introducción matemática al estudio de las derivadas, para posteriormente, revisar las diversas investigaciones educativas relacionadas con el estudio de las mismas, por lo que en este capítulo se abordan:

- Definición de derivada
- Bosquejo histórico de la derivada
    - Los griegos
    - Newtón y Leibnitz
    - Fermat
    - Bolzano y Cauchy

2.3 Definición moderna de la derivada

En esta sección se presenta la definición de la derivada, la cual corresponde, según nuestra experiencia, a la definición clásica que se aborda de manera tradicional en los salones de clases actuales.

La función f es derivable en a si

$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *Existe.*

> *En este caso el limite se designa por f´(a) y recibe el nombre de derivada de f en a. (Decimos también que f es derivable si f es derivable en a para todo a del dominio de f.) (Spivak, 1995, p. 201).*

Spivak (1994) aborda el concepto de la derivada, desde dos interpretaciones: geométrica y física:

En la interpretación geométrica de la derivada, considera que:

Si en el cociente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

h≠0, entonces los puntos (a,f(a)) y (a+h, f(a+h)) determinan una recta con pendiente $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, la tangente en (a,f(a)) parece ser el límite de estas secantes cuando h se aproxima a 0.

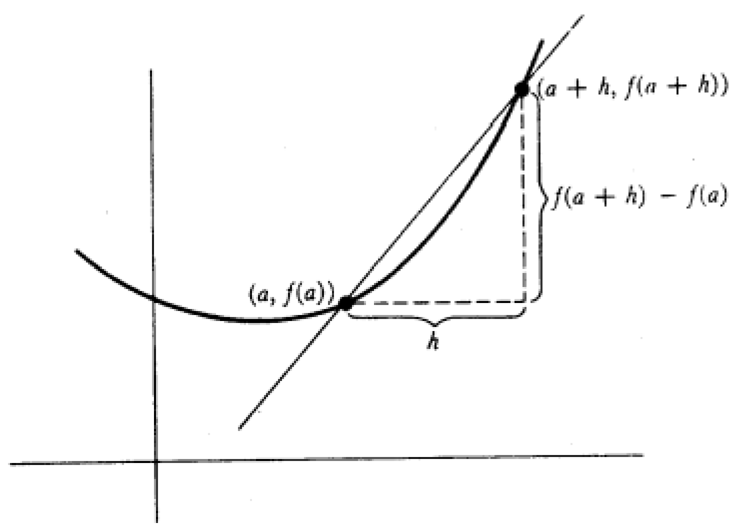


Ilustración 1: Interpretación geométrica de la derivada (Spivak, 1994)

En la interpretación física, se considera una partícula que se mueve a lo largo de una recta (ver Ilustración 2), con origen O y una dirección a partir de la cual las distancias a partir de O se consideran positivos, mientras que las distancias a partir de O de la otra dirección son negativas. Sea s (t) la distancia de la partícula a O en el tiempo t, la gráfica de s indica la distancia de la partícula a O sobre el eje vertical, el cociente: $\frac{s\ a+h\ -s(a)}{h}$ tiene una interpretación natural y es la velocidad media de la partícula durante el intervalo de tiempo (a,a+h).

El límite $\lim_{h\to 0}\frac{s\ a+h\ -s(a)}{h}$ es la velocidad instantánea en el tiempo a.

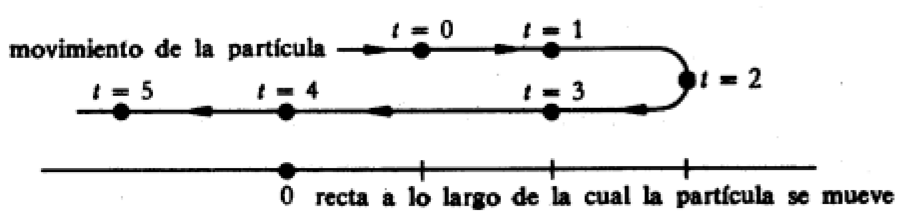


Ilustración 2: Interpretación física de la derivada (Spivak, 1994)

2.4 Bosquejo histórico de la derivada

En esta sección se realiza un recorrido del desarrollo histórico de la derivada, la cual va desde las ideas de lo “infinitamente pequeño”, tratadas primeramente por los griegos, hasta los problemas del trazado de la tangente a una curva, la obtención de máximos y mínimos y la velocidad de los cuerpos en movimiento, analizados por matemáticos como Newtón, Leibnitz, y Fermat. Finalmente se aborda la formalización del cálculo con matemáticos como Bolzano y Cauchy.

Cabe destacar que las principales ideas fueron tomadas de Chadid, Alcázar, Thomas & Jurado (2007) en el caso de las sección de los griegos y en Edwards (1994) para escribir las secciones referentes a Newton, Leibnitz, Fermat, Bolzano y Cauchy.

2.4.1 Los Griegos

Los griegos abordaron las primeras concepciones acerca del infinito a través de Pitágoras, Aristóteles, Demócrito y Arquímedes. Pitágoras de Samos (580? – 500? A.C) definió lo infinito en términos de la divinidad, Aristóteles consideraba al infinito como “lo *que no se deja recorrer y carece de límite*”

Demócrito y Arquímedes consideraron el infinito como una cantidad, es decir; lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande, afirmaron que una línea estaba constituida por segmentos de longitud infinitamente pequeña y que una circunferencia era un polígono regular con lados infinitesimales.

2.4.2 Newton y Leibnitz

2.4.2.1 Los problemas que motivaron la creación del cálculo

El desarrollo del cálculo diferencial estuvo fuertemente impulsado por la búsqueda de la solución de los siguientes problemas:

- La determinación de la velocidad y la aceleración de un cuerpo si se conoce la distancia en función del tiempo.
- El cálculo de longitudes, áreas y volúmenes determinados por curvas o superficies.
- Determinar cuándo una función alcanza un valor máximo o mínimo
- Calcular las rectas tangentes o normales a una curva en un punto

Newton y Leibniz mostraron métodos de solución de estos problemas, algunos de estos métodos se muestran en las siguientes secciones (ver las secciones2.4.2.2 y 2.4.2.3).

2.4.2.2 Newton

Newton es uno de los grandes precursores del cálculo diferencial e integral con su denominado método de fluxiones, el cual describimos a continuación:

Newton concibe las cantidades matemáticas como el movimiento continuo de un punto que traza una curva. Cada una de estas cantidades variables que aparecen x, y,. . ., las llama "fluentes" y sus velocidades, designadas por $\dot{x}$, $\dot{y}$…, las llama "fluxiones". La parte infinitesimal pequeña en la que un fluente se incrementa por unidad infinitesimal de tiempo o, es $\dot{x}o$, el momento del fluente.

El problema fundamental es, dada una relación entre fluentes hallar la relación entre sus fluxiones, y recíprocamente, dada una relación entre fluxiones hallar la correspondiente relación entre fluentes.

La relación entre fluxiones a partir de los fluentes se puede hallar si suponemos "y" es función de x, es decir: y=f(x), además si consideramos que en un pequeño intervalo "o" de tiempo "x" hay un incremento $x + x$o, entonces "y" se incrementa a $y + y$o, y al ser $y + y = f(x + x)$ será:

$$y = \frac{f(x + xo) - f(x)}{o}$$

Al ser "o" infinitamente pequeño se cancelan los términos que contienen "o" y aparece la relación entre fluxiones buscada.

Por ejemplo para $y = x^3$ se tiene:

$$\dot{y} = \frac{(x + \dot{x}o)^3 - x^3}{o}$$

$$\dot{y} = \frac{x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\,o^2\dot{x}^2 + o^3\dot{x}^3 - x^3}{o}$$

$$\dot{y} = \frac{3x^2\dot{x}o + 3x\,o^2\dot{x}^2 + o^3\dot{x}^3}{o}$$

$$\dot{y} = 3x^2\dot{x} + 3x\,o\dot{x}^2 + o^2\dot{x}^3$$

Luego se eliminan los términos que tienen o ya que se le supone infinitamente pequeño quedando: $\dot{y} = 3x^2\dot{x}$ por lo tanto la relación entre fluxiones es:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3x^2$$

2.4.2.3 Leibnitz

Leibnitz desarrolla una idea matemática clave en el desarrollo del cálculo: el concepto de infinitesimales o *“incomparables*”, los cuales considera, en comparación con las cantidades finitas, como “*como granos de arena con relación al mar”.*

Su idea de infinito queda evidenciada por su creencia acerca de varios aspectos geométricos y físicos:

- Las líneas rectas y las curvas son polígonos con un número infinito de lados, llamados “*Polígonos infiniláteros*”
- Las superficies curvas son también poliedros de infinitas caras
- El movimiento variado es una sucesión de movimientos uniformes

Su idea básica es que las cantidades se pueden descomponer en elementos más sencillos. Por otra parte Leibniz investigó el problema del cálculo de la tangente a una curva, proponiendo como una primer aproximación un método inverso al de encontrar áreas y volúmenes a través de sumas. Leibniz encontró la regla de la derivada $dx^n = nx^{n-1}$ para un entero o una fracción, posteriormente logro hallar las reglas para la diferencial de la suma, diferencia, producto y cociente dos funciones.

El método de Leibnitz se enuncia como una forma de hallar los máximos, mínimos y tangentes, sin limitarse por las cantidades fraccionarias ni por los irracionales, es en realidad, una aproximación geométrica, en vez de una cinemática, tal como lo aborda Newton.

En los escritos de Leibnitz ya hace referencia a los símbolos dx, dy, los cuales son cantidades arbitrariamente pequeñas (diferenciales o infinitesimales), asimismo formula ya de manera explícita las reglas:

$d(xy) = x\,dy + ydx$

$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - x\,dy}{y^2}$

$d(x^n) = nx^{n-1}dx$

Agrega que $dy = 0$, para valores extremos relativos y que $d^2y = 0$ para los puntos de inflexión, de hecho introduce el término de "calculo diferencial" o de diferencias.

2.4.3 Fermat

Fermat presentó un método para hallar los máximos y los mínimos en una ecuación algebraica, también propuso un procedimiento para calcular la pendiente de una recta tangente a una curva, dicha procedimiento consiste en hallar el siguiente límite:

$$\lim_{E\to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E}$$

Esta es una propuesta similar a la que Newton y Leibniz desarrollarían posteriormente.

2.4.4 Bolzano y Cauchy

En el siglo XIX la idea de la derivada se axiomatiza, principalmente con los trabajos de Bolzano (1781 -1848) y Cauchy (1789 -1857).

2.4.4.1 Bolzano

Bolzano definió por vez primera la derivada como un límite, es decir, la cantidad $f(x)$ a la que la razón:

$$\frac{f\ \ x+\Delta x\ \ - f(x)}{\Delta x}$$

Se aproxima cuando Δx tiende a 0, ya sea por la izquierda o por la derecha

2.4.4.2 Cauchy

Cauchy en el proceso de la construcción de la definición de la derivada, define:

- Infinitesimal: como una variable cuyo límite es 0, es decir que puede hacerse infinitamente pequeña, que decrece indefinidamente o equivalentemente que converge hacia cero.
- Límite: Cuando los valores de una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de forma que se diferencian muy poco de él, tal manera que la diferencia se hace tan pequeña como se desee, este valor fijo es denominado el límite.

Cauchy, por su parte considera la siguiente propuesta, en donde considera la continuidad de una función:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

Afirma que cuando la función $y = f(x)$ es continua entre dos valores de x , y si se elige un valor comprendido entre dichos valores, entonces un incremento infinitamente pequeño de la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función, de tal manera que si $\nabla x = i$, entonces tanto el divisor como el dividendo serán también muy pequeños y de hecho se aproximan a 0 o tienen límite 0.

Lo que Cauchy agrega es que la razón del dividendo entre el divisor puede convergir a un límite que de existir puede ser positivo o negativo, a la vez que es un valor específico para cada valor de x.

Propone como ejemplo a $f(x) = x^m$. , donde m es entero, afirma que la razón entre las diferencias infinitamente pequeñas es:

$$\frac{f(x+\ i)-\ f(x)}{i}=mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\ \cdot 2}x^{m-2}i+\cdots+\ i^{m-1}$$

La cual tiende a mx^{m-1}, es decir una nueva función.

2.5 Conclusiones del capítulo

Hemos visto que en este capítulo se ha revisado la definición moderna de la derivada, la cual se usa en la mayoría de los textos escolares, sin embargo la idea de la derivada ha sido construida a lo largo de la historia, siendo sus más remotas bases en la idea de infinito planteada por los griegos, la cual fue replanteada y reconstruida con las ideas de los "infinitésimos" de Newton y Leibnitz, los cuales buscaron dar solución a cuatro problemas clásicos: 1) la determinación de la velocidad y la aceleración de un cuerpo si se conoce la distancia en función del tiempo, 2) el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes determinados por curvas o superficies, 3) determinar cuándo una función alcanza un valor máximo o mínimo y 4) calcular las rectas tangentes o normales a una curva en un punto.

Un punto importante de mencionar es que estos problemas clásicos son lo que se podría denominar en nuestra época como "Problemas de aplicación", esto significa que el desarrollo histórico de la derivada estuvo ligado en un inicio con un enfoque práctico y por lo tanto una manera natural de abordar de manera inicial la derivada en los salones de clase, debería ser precisamente a través de las aplicaciones tales como la obtención de la pendiente de la recta tangente a una curva o encontrar la velocidad instantánea a partir de la función distancia.

La historia muestra que la derivada tuvo dos puntos de desarrollo importantes: primeramente con Newton y Leibnitz en la búsqueda de una solución a una serie de problemas prácticos y posteriormente Bolzano y Cauchy quienes construyeron una definición axiomatizada de derivada sobre las bases de la idea de límite.

CAPÍTULO 3. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA DERIVADA: DIFICULTADES Y CONCEPCIONES.

3.1 Resumen del capítulo

En este capítulo se abordan diversas investigaciones relacionadas con la enseñanza -aprendizaje de la derivada: elementos didácticos, históricos, etc., también se explora la conexión de la derivada con diferentes disciplinas, así como las concepciones, obstáculos, carencias y dificultades que tienen los estudiantes al respecto.

3.2 Introducción

En el capítulo anterior estudiamos el desarrollo histórico de la derivada, el cual abarca desde las concepciones de infinito en la antigüedad hasta el desarrollo formal del concepto de la derivada de la época moderna.

En este capítulo exploraremos las diversas tendencias en la enseñanza de la derivada, las dificultades inherentes y las concepciones que tienen los estudiantes de este concepto.

3.3 Enseñanza de la derivada: polos del estudiante, del contenido matemático y docente

La derivada es un importante concepto presente en los cursos de cálculo diferencial e integral, tanto de nivel bachillerato como de licenciatura, en su enseñanza se dan una multitud de enfoques:

1) Introducirla a través de ejemplos de física, tales como la velocidad instantánea

2) Considerar un enfoque geométrico: como la pendiente de la recta tangente

3) Estudiarla a través de una definición formal, entrelazando los conceptos de límite

4) Una combinación de los enfoques anteriores

Con el objetivo de estudiar de una manera sistemática la enseñanza de la derivada, consideramos el enfoque de Cuevas & Pluvinage (2013), al cual denominan polos en el estudio de la enseñanza, los cuales son:

- El polo del contenido matemático
- El polo estudiantil
- El polo docente

3.3.1 El polo del contenido matemático

La derivada es uno de los conceptos fundamentales de las matemáticas, ya que es la base para construir todas las teorías relacionadas con las razones de cambio, las cuales no sólo abarcan el concepto de velocidad instantánea en física, sino también en otras áreas del conocimiento, tales como: economía, finanzas, biología, etcétera.

En este sentido, Cuevas & Pluvinage (2013) proponen, para el estudio de diversos conceptos de cálculo, la introducción de "Proyectos de acción concretos", es decir proponer proyectos, para los cuales sea necesario, en su solución, el uso de conceptos matemáticos. Agregan que un aspecto importante es el de considerar las conversaciones, ya que al transitar entre los registros de representación se avanza en la construcción de conceptos matemáticos.

Un aspecto clave en la propuesta de Cuevas & Pluvinage (2013) es la de no limitarse a sólo una cara de la disciplina matemática, sino al contrario, buscar la diversidad de la disciplina basándose en sus modos de expresión.

Finalmente, Cuevas & Pluvinage (2013) consideran que algo fundamental, tanto social como histórico, es el de señalar que las matemáticas se escriben.

En este contexto, me parece muy importante transmitir a los estudiantes, la idea sobre algún concepto matemático, como la derivada, no como una definición que se creó de manera espontánea, sino como una idea que se fue desarrollando y enriqueciendo a través de los siglos.

3.3.2 El polo estudiantil

El aprendizaje del estudiante es el objetivo máximo en cualquier curso de matemáticas, sin embargo "medir" este aprendizaje es algo sumamente complejo: existen toda una serie de teorías e investigaciones respecto a cómo evaluar o medir este aprendizaje.

Una metodología que nos parece adecuada para establecer el aprendizaje de un estudiante es a través de su dominio en las diversas formas de expresión matemática, en este tenor, Cuevas & Pluvinage (2013) proponen los siguientes estratos o "idiomas" matemáticos:

1) Estrato numérico:	Dominio de los enteros y racionales, así como también de las operaciones aritméticas básicas.
2) Estrato racional:	Dominio de las razones y proporciones, así como de la capacidad de comprensión en las operaciones de productos y cocientes.
3) Estrato algebraico:	Uso correcto del sistema de signos del álgebra.
4) Extracto funcional:	Uso de las relaciones funcionales y también del Cálculo.

En términos generales, pasar de un estrato a otro, implica un cambio de lenguaje y por tanto, según nuestro punto de vista el aprendizaje de nuevos conceptos matemáticos. El papel del profesor es convencer a los estudiantes de avanzar en nuevos estratos a través de la necesidad de adquirir un nuevo lenguaje.

En nuestro caso concreto de la derivada, la comprensión de los conceptos ligados a esta, implica un dominio de todos los lenguajes matemáticos y por lo tanto el transitar ágilmente a través de los cuatro estratos: numérico, racional, algebraico y funcional.

Sin embargo, en la propuesta de estratos de Cuevas & Pluvinage (2013), hace falta considerar el tránsito a través del lenguaje geométrico, el cual es fundamental para comprender una de las ideas de la derivada: la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado.

En este contexto es importante mencionar que la razón fundamental por la que se decidió usar Geogebra en las actividades didácticas (Ver sección 5.2.3.2), es precisamente, porque a través de este software es posible transitar de una manera versátil a través de las representaciones semióticas, incluyendo la geométrica, la cual es de una gran importancia para el estudio de la definición de la derivada.

3.3.3 El polo docente

El desarrollo de una clase de matemáticas, está marcado por las participaciones de los estudiantes, pero también de una manera muy fuerte y casi en su totalidad, según nuestra experiencia, por la planeación didáctica que llevar a cabo el profesor.

Al respecto, Cuevas & Pluvinage (2013) mencionan que muchas veces, el profesor toma decisiones basadas en un automatismo sin reflexión, en este sentido, hace una reflexión sobre el papel docente en matemáticas, basándose en las siguientes observaciones:

1) Preponderar la comprensión sobre la expresión:	Muchos profesores ven la expresión como consecuencia de la comprensión y no

	ponen atención en corregir la expresión.
2) No tomar previsiones en posibles cambios que pudiera haber en el orden de los tópicos de una clase	
3) En la planeación de una clase, no considerar que pueden haber cambios de situación, por ejemplo, ¿Cómo pasar de una etapa de indagación a otra de validación o síntesis?	

3.4 Elementos didácticos

Según nuestra experiencia docente, la enseñanza de la derivada en la mayor parte de los cursos de cálculo diferencial a nivel bachillerato, preponderar el aprendizaje de las fórmulas de derivación sobre el concepto mismo de la derivada. Es común que los estudiantes resuelvan decenas de ejercicios en donde aplican de una manera mecánica las reglas de derivación, frecuentemente el profesor, comienza un curso de cálculo diferencial, mencionando de una manera somera la definición de la derivada, así como su interpretación geométrica, para pasar de manera casi inmediata a la enunciación de las fórmulas de derivación, las cuales en muchos casos se omite su demostración.

En este contexto, los estudiantes absorben la idea de que la derivada se relaciona solamente con aplicar fórmulas de derivación y por tanto, no consideran dentro de su bagaje matemático, la idea central de lo que significa este importante concepto matemático.

Considerando lo anterior, Cuevas & Pluvinage (2013) consideran los siguientes elementos didácticos para la enseñanza de las matemáticas, los cuales, según nuestra opinión encajan perfectamente en la enseñanza de la derivada:

1)	Es básico que el estudiante desarrolle una acción, en este sentido el educando, mediante la resolución de problemas específicos, dosificados por el profesor, debe construir el

	concepto deseado
2)	Siempre que se introduzca un concepto o idea matemática, se debe partir de un contexto de interés para el estudiante, con base a algún problema o proyecto, de manera que éste genere ejercicios o sub- problemas, cuya solución, de manera estructurada, lleve al educando a definir o mostrar el concepto matemático. Se recomienda nunca introducir un concepto mediante su definición formal.
3)	Intentar, cada vez que se realicen operaciones relacionadas con conceptos matemáticos, implementar la operación inversa.
4)	Mostrar que pueden existir diversas formas para resolver un problema.
5)	Promover el tránsito entre los diversos registros de representación, cada vez que se aborde un concepto.

3.5 Elementos históricos

La enseñanza tradicional en un curso de cálculo, abarca el siguiente orden:

1)	Definiciones formales de números reales, función, límite, derivada, etc.
2)	Teoremas y demostraciones formales
3)	Mostrar un formulario
4)	Resolver ejercicios de fórmulas de derivadas

5)	Resolver aplicaciones

La consecuencia de esta dinámica, según Imaz & Moreno (2009) es que los enfoques del cálculo se preocupan más por la formalización, que por el desarrollo de las ideas dirigidas a la resolución de problemas científicos.

En este sentido, parece ser que hay una contradicción con la génesis histórica del surgimiento de la derivada, tal como lo explica Grabiner (1983):

> *La derivada, fue primeramente utilizada, después descubierta, posteriormente explotada y desarrollada y por último definida.*

Considerando lo anterior, Cuevas & Pluvinage (2013) consideran la siguiente propuesta didáctica:

1)	Iniciar con algún problema de aplicación, en particular el estudio de algún movimiento.
2)	Diseñar actividades de modelación para la enseñanza de conceptos, de acuerdo a los postulados de la educación matemática realista (Gravemeijer & Doorman, 1999)
3)	Promover el tránsito entre los diversos registros de representación semiótica (tabular, algebraico y gráfico).

3.6 Perspectivas sobre la enseñanza de la derivada

En la enseñanza de la derivada, existen múltiples perspectivas, algunas de ellas favorecen las aplicaciones de la derivada, otras el aprendizaje de las fórmulas de derivación y en un pequeño número, hay las que preponderan el aprendizaje formal del concepto de la derivada.

Bajo esta perspectiva, presentamos un estudio estructurado de Delos Santos & Thomas (2002a), el cual muestra sobre las bases de entrevistas, diferentes perspectivas de la enseñanza de la derivada:

3.6.1 Pre requisitos en cuanto a conocimientos

Con base en el estudio de Delos Santos & Thomas (2002a), se observa que los profesores consideran diferentes tipos de prerrequisitos, en cuanto a conocimientos, los cuales se pueden agrupar en:

a) Aprendizaje de todo lo anterior:	Hay una coincidencia en afirmar que la enseñanza de las matemáticas sólo es posible si se tiene una comprensión adecuada de los tópicos previos.
b) Aprendizaje de tópicos clave:	Los estudiantes deben conocer la idea de función, razón de cambio y tener un gran bagaje algebraico, además de estar familiarizados con las funciones lineal y cuadrática.
c) Tener la idea de límite:	Los estudiantes deben tener la comprensión de la idea concepto de límite.

3.6.2 ¿Que deben aprender los estudiantes sobre la derivada?

Delos Santos & Thomas (2002a) al entrevistar a un grupo de profesores obtuvieron las siguientes respuestas:

a) Las derivadas básicas y las reglas de derivación:	Los profesores involucrados coinciden en que sus estudiantes deben enfocarse en el aprendizaje de las reglas de derivación.
b) Interpretación de la derivada como una tasa de cambio:	En otra perspectiva, otro grupo de profesores privilegia el aprendizaje de la derivada como razón de cambio, soslayando su interpretación gráfica.

3.6.3 Enfoques pedagógicos

En esta etapa de la investigación, Delos Santos & Thomas (2002a) consideran los enfoques de los profesores para introducir el concepto de derivada, al respecto tenemos:

a) Introducción de manera gráfica:	Los profesores introducen la derivada a través del enfoque clásico geométrico, de una recta secante que al acercarse a algún punto se va transformando en una recta tangente, de manera que la pendiente de este recta tangente, es precisamente la derivada de la función en un punto dado.
b) Introducción a través del estudio con	En esta perspectiva, se explora la derivada a través de concentrarse en las funciones: se estudia su comportamiento en cuanto a si crecen o decrecen, etc., de tal manera que a partir de una discusión acerca de lo que significa el límite, no solamente su forma simbólica, sino también en su forma verbal, se avanza en la discusión de la

límites, antes de seguir un enfoque gráfico:	razón de cambio, para finalmente concluir con el estudio de la secante, la cual a través de un proceso límite se convierte en una recta tangente.

3.6.4 Pre requisitos en cuanto a conocimientos

Finalmente, Delos Santos & Thomas (2002a) estudia los diferentes enfoques que siguió su grupo de profesores entrevistados, respecto a las aplicaciones y solución de problemas involucrados en la enseñanza de la derivada, tenemos lo siguiente:

a) Resolver problemas no rutinarios ni familiares:	Bajo esta perspectiva, los estudiantes deben ser capaces de resolver problemas no rutinarios, entendiéndose por rutinarios, en los que no se aplica directamente una rutina, donde se debe extraer información y donde los estudiantes deben interpretar los pasos involucrados.
b) Relacionar la derivada con la cinemática:	En esta orientación, plantean problemas de cinemática, bajo el argumento de que el resolver problemas relacionados con la velocidad es algo más familiar para los estudiantes, a la vez que la cinemática proporciona una conexión fuerte con las gráficas, al hablar de velocidad y aceleración.

3.6.5 Conexión de la derivada con diferentes disciplinas.

Un aspecto importante que estudiamos en la sección 3.4, es el concerniente introducir un concepto matemático dentro de un contexto, primordialmente de realidad.

Bajo este argumento, consideramos dos contextualizaciones bajo las cuales se puede introducir el concepto de la derivada, las cuales han sido objeto de investigación.

a) Contextualización del concepto de la derivada en relación a la función marginal y su nexo con la función promedio	Esta contextualización es explicada por Dorier (2010), quien considera que en economía, cualquier función económica se relaciona con otras dos funciones: -La función marginal -la función promedio La función marginal se define como la función que mide el cambio de la función original cuando su variable independiente se incrementa una unidad, por ejemplo el costo marginal de producción, mide en cada nivel de producción, el incremento debido a la producción de una unidad más. La productividad marginal mide el incremento de producción, debido al uso de una unidad suplementaria de insumos.
b) Modelación matemática de la evaporación de un líquido contenido en un recipiente.	Se trata de una investigación conducida por Benítez & Londoño (2009) en la que a través de un fenómeno de evaporación de un líquido contenido en un recipiente, introducen a los estudiantes en un proceso de toma de datos, identificación de variables y análisis de la información, en esta última etapa se hace uso de herramientas tecnológicas, tales como calculadora gráfica y Excel. La derivada se estudia dentro de un problema totalmente contextualizado, según lo realizado en la sección 3.4, más aún surge como una sub - exploración dentro de un proyecto más amplio.

3.6.6 Concepciones sobre la derivada

La derivada se puede concebir de muy diversas maneras, al respecto Zandieh (2000), considera las siguientes concepciones:

3.6.6.1 Razón de cambio:

En este sentido se considera que un cociente de diferencias puede ser usado para medir la razón promedio de cambio de la variable dependiente con respecto al cambio en la variable independiente, esto se representa por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La tasa de cambio puede ser usada como un objeto dentro de un proceso límite, donde dicho proceso consiste en analizar una secuencia de razones promedio de cambio, cuando las diferencias en el denominador tienden a 0, es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

El proceso límite se consolida en una tasa instantánea de cambio. El proceso consolidado de la tasa instantánea de cambio es usado como un objeto en la construcción de la función derivada.

3.6.6.2 Simbolismo

El cociente de diferencias se expresa como:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

O

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Donde, x, x_0 son valores en el dominio de la función y h es la distancia entre x y x_0. El cociente se puede concebir como un proceso u objeto. Si se considera como un objeto, se puede pensar como un proceso límite:

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

o

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Las expresiones proporcionan el valor de la derivada en x_o. Este proceso límite debe ser concebido como un proceso que se repite para cada valor en el dominio de f´.

La fórmula

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Se considera que aplica al dominio de todos los posibles valores de x, lo cual es una cantidad infinita de valores.

3.6.6.3 Pendiente: una interpretación gráfica de la derivada

Si consideramos una línea que conecta dos puntos en una curva, esta línea se denomina secante, en este caso consideramos como objeto de nuestro estudio, la pendiente de dicha secante. Si ahora pensamos que uno de los puntos es fijo, y consideramos que el punto no fijó se aproxima al punto fijo, entonces lo que tenemos es una secuencia de pendientes.

En un sentido más estricto, tenemos un proceso límite que se da cuando el punto no fijó se aproximan punto fijo.

3.6.6.4 Movimiento: interpretación de la derivada como un velocímetro

El contexto de movimiento nos proporciona dos modelos sobre la derivada: velocidad si es una función de desplazamiento y aceleración si es una función de velocidad.

La idea principal es considerar la razón de cambio de la distancia (desplazamiento) con respecto al tiempo, en un proceso en el que se encuentran velocidades promedio sobre intervalos de tiempo que son cada vez más pequeños, el proceso límite culmina con la velocidad instantánea. En un segundo enfoque, es posible imaginar que este proceso límite ocurre en cada momento del tiempo, de tal manera que el resultado final es una función asociada en cada instante con su velocidad instantánea.

3.6.6.5 Un marco conceptual de análisis para la derivada

La derivada está asociada con una formalización axiomática, un conjunto de objetos y propiedades, así como también con operaciones, esto lo representa esquemáticamente Tall (2010), en la Ilustración 3.

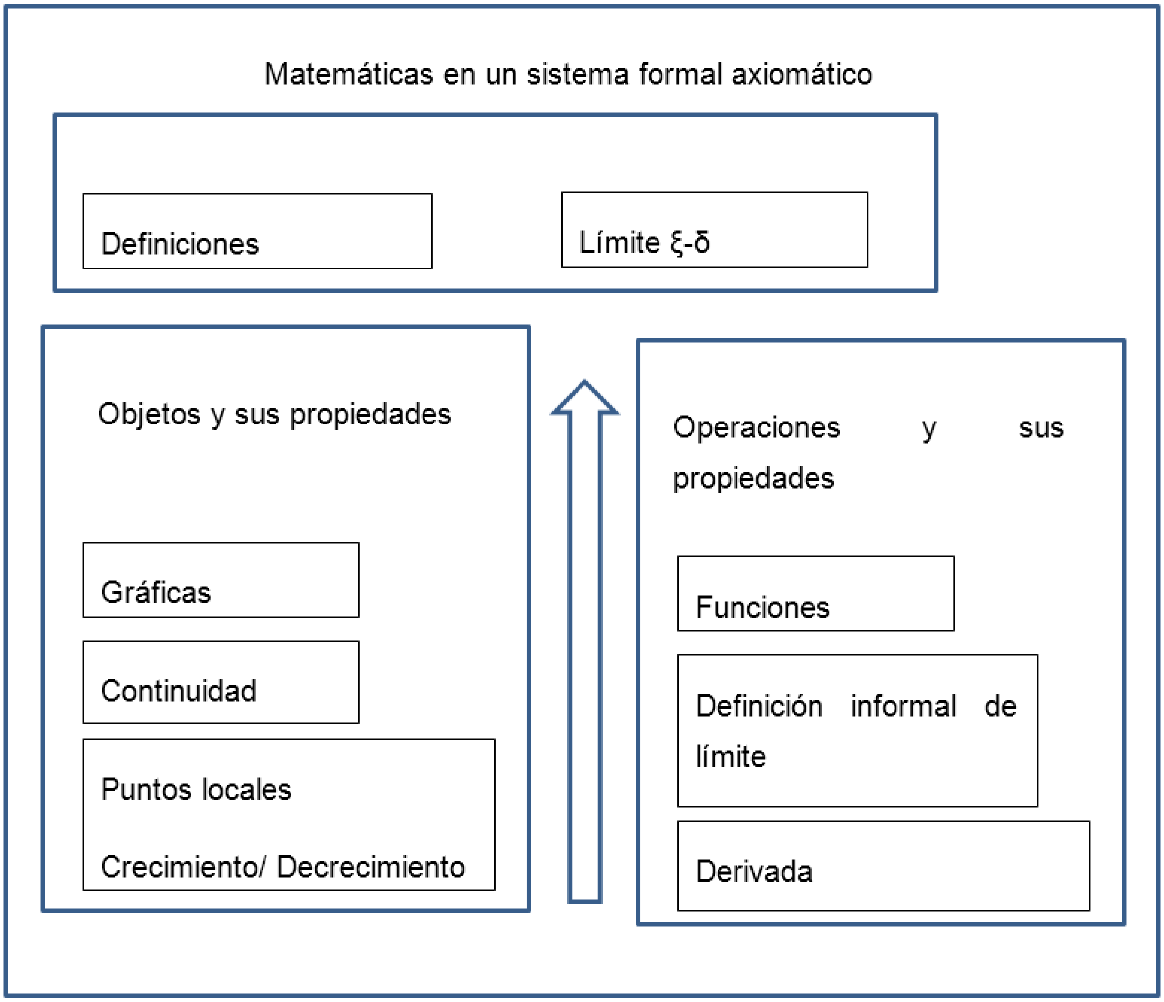


Ilustración 3: Marco conceptual de análisis para el cálculo, Tall (2010).

En este marco conceptual, las gráficas y la noción de pendiente habitan dentro del mundo de los objetos y sus propiedades. Los elementos simbólicos de función y derivada están en el terreno de las operaciones y sus propiedades; mientras que las definiciones formales están dentro de un sistema formal axiomático.

3.7 Obstáculos conceptuales para la comprensión de la derivada

Existen varios obstáculos conceptuales para lograr una cabal comprensión del significado de la derivada, tales como limitantes en la comprensión del concepto de límite, conocimientos algebraico es muy reducidos, una errónea interpretación del significado que la tangente y un entendimiento limitado sobre la variación, además de otros aspectos relacionados más con la parte administrativa. Todos estos elementos los analizaremos en esta sección:

3.7.1 Limitaciones en la comprensión del concepto de límite.

El concepto de límite está íntimamente ligado al de la derivada, puesto que esta última se puede considerar como un objeto, producto de un proceso límite.

En este sentido, es importante conocer las deficiencias que pudieran tener los estudiantes en su comprensión de límite.

Al respecto, Tall (2010) señala que la idea de una secuencia de puntos acercándose a un punto límite o el de una secuencia de gráficas acercándose una gráfica límite, puede crear un obstáculo cognitivo. La idea de una sucesión de números que tienden a un límite, muy frecuentemente nos da una visión de una variable arbitrariamente pequeña, es aquí donde entran en conflicto los aspectos visuales y simbólicos de convergencia.

Es evidente que posiblemente ningún término de la sucesión será igual al límite, pero visualmente, conforme se avanza en la sucesión de puntos, estos se hacen indistinguibles del punto límite, es lo que llama Hitt (2013) como infinito potencial infinito real.

3.7.1.1 Carencia de conocimientos algebraico

Según nuestra experiencia docente, para tener mayor probabilidad de éxito en un curso de cálculo, se requiere que los estudiantes tengan un bagaje cultural algebraico.

Esta inferencia que hemos hecho, está apoyada en una investigación de Díaz (2009), la cual menciona que al aplicar un examen diagnóstico de álgebra a estudiantes de un curso de cálculo diferencial, los resultados mostraron que los alumnos tuvieron un nivel muy bajo de conocimientos algebraicos y que aunque no se pueda afirmar concluyentemente, es posible inferir que aquellos alumnos que tienen carencias en álgebra, tendrán dificultades en aprobar un curso de cálculo.

3.7.1.2 Interpretación errónea del significado de la tangente.

La interpretación geométrica de la derivada es el de la pendiente de una recta tangente en un punto dado a una curva, donde la tangente se entiende, de una manera informal, como una recta que toca en un solo punto a una curva.

Sin embargo, tal como lo analiza Vivier (2009), el problema es la noción de tangente: una definición efectiva de tangente procede de la derivada en un punto, mientras la derivación se introduce, a partir de un trabajo sobre tangente. En este sentido hay un problema lógico, de que no se puede usar una definición de tangente, la cual no ha sido previamente construida.

Tall (2010) ahonde en el asunto y presenta un contraejemplo a la definición de tangente como la recta que corta sólo una vez a una curva, (ver Ilustración 4)

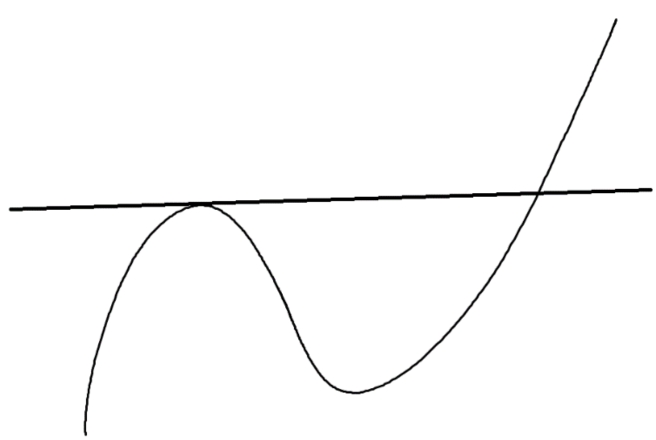


Ilustración 4: Contraejemplo de Tall (21) a la definición informal de tangente.

3.7.1.3 Carencias en el entendimiento de la variabilidad

La variación es un tema que va muy ligado con el estudio de la derivada en un curso tradicional de cálculo, principalmente en la forma de problemas de aplicación, sin embargo este tema resulta particularmente complicado para los estudiantes. En este sentido se presenta un estudio desarrollado por Benítez & Bueno (2009) en donde se aplicó una serie de problemas sobre variabilidad a un grupo de estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas. Los resultados muestran que los estudiantes tuvieron un bajo rendimiento en la identificación de la variación. Las principales carencias detectadas fueron:

-No entender el enunciado del problema

-Círculo vicioso

-Percepción inválida

-Argumentación matemática inválida

3.7.1.4 Otros obstáculos

En el aprendizaje de las matemáticas y en particular en el caso del cálculo hay otra serie de obstáculos que inciden directamente sobre el aprendizaje de los estudiantes, sin embargo estas creencias no son de índole cognitivo.

Un aspecto clave, documentado en Nava & Reyes (2009) es un estudio donde se muestra que un grupo de profesores tiene serias carencias en sus conocimientos y habilidades en cálculo.

Otro estudio de Rubí, G., Moreno M., Pou S. & Jordan A. (2010) muestra que los profesores de cálculo tienen otra serie de deficiencias:

-El perfil académico de los profesores de cálculo se corresponde con profesionistas, principalmente en ingeniería, pero sin formación docente.

-Hay una pobreza de estrategias didácticas de parte de los profesores.

Aunado a lo anterior, Vázquez, Moreno, et. al. (2010), señalan que hay otra serie de obstáculos de carácter administrativo, tales como:

-Un mal diseño curricular

-Un modelo educativo no realista

Todo lo mencionado incide de manera notoria en el aprendizaje del cálculo y en particular de la derivada.

3.8 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se ha abordado la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, enfocándose en diversos aspectos, los cuales abarcan las principales corrientes de enseñanza de este importante concepto matemático, asimismo se han estudiado los prerrequisitos que se deben tener para una adecuada comprensión del significado de la derivada. Un aspecto clave que se ha tocado es dilucidar los obstáculos que tienen los estudiantes en el aprendizaje de esta idea matemática, se ha visto que estos obstáculos son multifactoriales y abarcan una carencia de conocimientos algebraicos, una concepción errónea del significado de la tangente, carencias en la concepción del límite y también otros obstáculos relacionados, por ejemplo, con la falta de preparación de los profesores de cálculo.

El revisar los elementos anteriores nos permite hacer una adecuada planeación didáctica que tome en cuenta lo que deben aprender los estudiantes sobre la derivada, así como sugerir enfoques pedagógicos y establecer conexiones de la derivada con otras disciplinas, tales como la economía o la ingeniería. Finalmente, este capítulo nos servirá de base para formular nuestra propuesta didáctica sobre el aprendizaje de la derivada, la cual contemple los obstáculos que pudieran tener los estudiantes, así como sus posibles carencias y presentar una didáctica que involucre una conexión con elementos de la realidad.

CAPÍTULO 4. USO DE TECNOLOGÍA, MICROMUNDOS Y APRENDIZAJE

4.1 Resumen del capítulo

En este capítulo se analiza el papel de la tecnología como coadyuvante en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en este sentido, en primer término, se revisa la tecnología en general en la educación matemática, en segundo lugar se analizan los micromundos computacionales, los cuales consisten en una serie de actividades didácticas interrelacionadas conectadas a través de un ambiente de aprendizaje tecnológico, en tercer lugar, se revisa el construccionismo, la cual es una corriente de aprendizaje basada en el hecho de que el aprendiza se consolida cuando es precisamente construido por los estudiantes, esto es fundamental porque la secuencia didáctica que hemos diseñado contempla que sean los propios estudiantes, quienes a través de la exploración descubran el concepto de la derivada.

En cuarto y en quinto lugares se estudia el aprendizaje de las matemáticas a través de las hojas electrónicas de cálculo y Geogebra, la razón de esto es porque estos programas se usarán como instrumentos de exploración por parte de los estudiantes, en nuestra investigación.

Finalmente en la última sección se estudian las trayectorias de aprendizaje, las cuales son las posibles rutas cognitivas que pueden seguir los estudiantes en su exploración de la derivada.

4.2 Introducción

De acuerdo a los objetivos de investigación que van en relación a investigar la factibilidad de usar actividades con computadora para ayudar a los estudiantes en la construcción del concepto de derivada, hago a continuación una revisión de algunos elementos teóricos que sirven de soporte a esta investigación.

En primer lugar, ya que hablo de que los estudiantes construyan el concepto de derivada, es necesario que aborde la corriente del construccionismo que desarrolló Seymour Papert. Adicionalmente hago una serie de reflexiones acerca del papel de la tecnología en general y en particular en el aprendizaje del cálculo y de la derivada.

4.3 La tecnología en educación matemática.

Es indudable el apogeo de la tecnología en todos los campos del saber humano y la educación matemática no ha sido la excepción. En esta parte se analizará el papel de la tecnología refiriéndonos con este término genérico principalmente a las computadoras, las cuales se han llegado a convertir en una herramienta muy poderosa en el ámbito de la educación matemática. Al respecto es conveniente comentar una tendencia, de muchas, que ha tenido el uso de las computadoras en la matemática educativa: ésta tiene que ver con las ideas de Papert (1981) que se discutirán en la sección 4.5y es la de utilizar la computadora como un medio para construir el conocimiento.

Al respecto, también es conveniente mencionar a los llamados “Instrumentos de mediación”: Moreno & Rojano(1998) definen que un instrumento de mediación se puede pensar como una extensión de las facultades del hombre, lo cual hace ver las cosas de una manera diferente. En este sentido un instrumento de mediación es el equivalente a una prótesis mental que permite ampliar las capacidades neuronales (Moreno, 2009; comunicación personal).

Ejemplos de instrumentos de mediación son: papel y lápiz, calculadora, computadora; la elección de una determinada herramienta de mediación implica un análisis de factibilidad, de objetivos y de ventajas-desventajas de cada instrumento, así como considerar que un cambio en las herramientas de mediación implica un cambio en la forma de pensar y atacar un determinado problema matemático.

Es también conveniente analizar el papel que juega la tecnología con relación a los diferentes sistemas de representación; al respecto Hitt(2003) establece que la conversión y manipulación entre los diferentes sistemas de representación de un objeto matemático es lo que realmente permite su construcción. La computadora en este sentido es una herramienta versátil que facilita lo anterior.

Finalmente considero que la computadora es un instrumento de representación que tiene un gran potencial. Es indudable que esta herramienta engloba una gran riqueza desde las dos perspectivas: estudiante y profesor; al primero le permite analizar desde diferentes perspectivas, y de una manera no clásica, un problema matemático; en el caso del segundo debería implicar un cambio de paradigma en la forma tradicional de enseñanza – seguir enseñando desde una perspectiva instruccionista con la tecnología implica, desde mi punto de vista, un desperdicio de recursos y potencialidades.

4.4 Los micromundos computacionales.

En esta sección describiré los llamados micromundos computacionales, según la definición de Hoyles & Noss(1987). La razón de hacer mención de los micromundos computacionales es que este trabajo de investigación se centra en la creación de un micromundo computacional para ayudar a los estudiantes en su comprensión de límite. Estos autores (op. cit.) expanden la noción original del término micromundo dado por Papert (1981) y dan una definición de micromundo, como formado por los siguientes componentes:

1) Componente técnico:

Se refiere al software, es decir el programa o programas que permiten que el estudiante enfoque su atención en ideas y procesos específicos; también abarca un conjunto de herramientas que proveen un sistema de representaciones para la comprensión de una estructura matemática o un campo conceptual.

2) Componente pedagógico:

Los autores mencionan que la función de este componente es estructurar la investigación y exploración de los conceptos que están articulados en el componente técnico con el objetivo de enfocarse en aspectos particulares, indicar puntos de inicio apropiados y crear vínculos con otras actividades. Este componente lo conforman las explicaciones e intervenciones del profesor, así como toda la planeación y materiales didácticos.

3) Componente contextual:

Se relaciona con el entorno social en donde las actividades de programación toman lugar. Esto es importante ya que se ha demostrado que el desempeño de un estudiante en un problema determinado puede ser afectado por el contexto en donde se desarrolla dicho problema; al respecto hay evidencia de que la forma en que un niño conceptualiza una actividad es influenciada por una serie de factores culturales, sociales, afectivos los cuales interactúan como un todo y de hecho son moldeados por la interacción social.

4) Componente del estudiante:

El componente del estudiante se relaciona con sus entendimientos y concepciones parciales que el alumno trae a la situación de aprendizaje y que tratará de usar.

4.5 El construccionismo

La idea básica de nuestro proyecto didáctico es crear un sitio web en donde los estudiantes construyan conocimientos, por lo tanto es importante revisar la filosofía construccionista.

En esta sección expondré las ideas básicas del paradigma del construccionismo (Papert & Harel, 1991). Este paradigma, desarrollado por Seymour Papert, surge a partir de las ideas constructivistas y la teoría del desarrollo cognitivo de Piaget (Esparza, 2005). El construccionismo comparte con el constructivismo la suposición de que para aprender el sujeto debe (re-)construir sus propias estructuras del conocimiento (Papert & Harel, 1991). El construccionismo tiene por lo tanto la misma idea primordial que el constructivismo: El conocimiento no es algo que se adquiere, es algo que se construye. Para explicar el construccionismo, Papert explica:

> *Las construcciones que se dan en 'la cabeza' suceden de manera particularmente oportuna cuando son apoyadas por construcciones externas, 'en el mundo', llevando a productos que se pueden ver, discutir, examinar 'allí afuera'; por ejemplo la construcción de un castillo de arena, un pastel, una empresa, un programa de computación, un poema o la teoría del universo.*
>
> *Papert (1993, citado y traducido por Sacristán, 2000, p. 12)*

En términos generales, el construccionismo es la antítesis del llamado instruccionismo que se basa en clases expositivas para "transmitir" los conocimientos (Contreras, 2006).

En la obra de Papert, este paradigma del construccionismo es el fundamento de la utilización de la programación computacional como medio de aprendizaje (Contreras, 2006). Al respecto, Papert considera a la computadora como un laboratorio de investigación donde a través de la programación y de procesos como los de ensayo-error, depuración de errores y retroalimentación, los estudiantes pueden aprender.

Papert considera que la forma en cómo se enseña matemáticas en gran cantidad de escuelas, no toma en cuenta los intereses de los niños, siendo una forma artificial de enseñar matemáticas; en este sentido considera que la computadora es un medio óptimo para crear condiciones de aprendizaje: la computadora puede ser una especie de “país de las matemáticas” o matematilandia ya que se convierte en un instrumento para que los niños se expresen en términos matemáticos acerca de su vida.

Papert, en su libro *Desafío a la mente* (1981) menciona la factibilidad de crear ambientes de aprendizaje en los que los niños pueden establecer una comunicación ágil y versátil con la computadora, basándose en un número pequeño de instrucciones básicas y a partir de las cuales se generan otras instrucciones que ensambladas y haciendo uso de la modularidad crean programas. Papert considera a la computadora en el sentido de que el niño programe la computadora y que al hacer esto adquiera un dominio sobre la tecnología y que de esta forma pueda establecer un vínculo con las ideas más profundas de la ciencia.

También para Papert, el elemento cultural es de gran importancia ya que facilita los recursos que dan soporte a la construcción del conocimiento; entonces concluye que si la pretensión es que los alumnos construyan su aprendizaje, es fundamental que los niños tengan la habilidad para establecer nexos entre ellos y la realidad que están aprendiendo. Papert considera que este proceso lleva al niño, de forma natural, a hacerse matemático ya que se trata de enseñar a pensar al niño, reflexionando sobre lo que hace, "haciendo" matemáticas de forma creativa.

Una idea de Papert & Harel(1991) que me parece fundamental para entender el construccionismo es la del *programador-escultor*; en este sentido un artista crea su obra según los impulsos de su creatividad y al ritmo de ésta, sin seguir un plan prediseñado. Precisamente es esta idea de ir *jugando-construyendo*, a la que Papert aspira cuando el niño programe a la computadora; es decir que se convierta en un *programador-escultor*.

Finalmente, para Piaget el proceso de construir el conocimiento es fundamentalmente interno e individual. Existe un diálogo entre sujeto y objeto, y la mediación social no constituye un factor determinante, ya que la construcción de estructuras intelectuales progresivamente más potentes obedece, en último término, a una necesidad interna de la mente.

4.6 Las hojas electrónicas de cálculo

Las hojas electrónicas de cálculo pueden ser un importante auxiliar en la exploración de diversas ideas matemáticas, lo anterior por su gran versatilidad con el uso de un sistema matricial, de fórmulas y de gráficas.

Al respecto, Drier (2001) considera que las hojas interactivas de cálculo pueden promover exploraciones abiertas de conceptos matemáticos, asimismo permiten al estudiante extenderse más allá de lo que se podría hacer usando la manera tradicional de lápiz y papel, es una oportunidad de descubrir conceptos matemáticos en un ambiente tipo laboratorio y ayudar a realizar conexiones entre las representaciones numéricas, álgebra y gráfica.

En el caso de los profesores, con la interactividad que proveen las hojas electrónicas de cálculo, es relativamente fácil transformar el salón de clases en un ambiente de investigación y encausar a los estudiantes en un aprendizaje activo.

Un aspecto importante en el uso de las hojas electrónicas de cálculo para el aprendizaje de las matemáticas, es precisamente lograr un balance entre la adquisición de las habilidades informáticas para el manejo del software y la introducción de los conceptos matemáticos, en este sentido, Clarke, Ayres & Swellwer (2005) realizaron una investigación en donde mostraron que los estudiantes que ya tenían habilidades básicas en el manejo de la hoja de cálculo aprendieron matemáticas de una manera más efectiva.

El aprendizaje de las matemáticas usando hojas electrónicas de cálculo está documentado en diversas investigaciones, por ejemplo la de Niess (2005) donde muestra secuencias didácticas de aprendizaje para diversos tópicos, tales como:

- Aritmética
- Sucesiones
- Problemas relacionados con ecuaciones de primer grado

Drier (2001) también muestra ejemplos relacionados con la probabilidad y el uso de números aleatorios, así como modelos físicos tales como el movimiento de un proyectil.

4.7 Geogebra

Geogebra es un ambiente de programación que permite crear objetos matemáticos de aprendizaje de una manera dinámica, es un programa que permite transitar versátilmente entre las representaciones geométrica, gráfica y tabular de un objeto matemático, presenta una interfaz que tiene un manejo muy sencillo, ya que cada objeto geométrico tiene asociada su representación algebraica. Finalmente, el software es de uso libre.

Geogebra es un software dinámico de matemáticas con una popularidad creciente a lo largo de todo el mundo, especialmente en Europa y Norteamérica, fue desarrollado por Markus Hohenwarter. La idea básica del desarrollo de su programa fue la creación de un software dinámico que incorporara geometría, álgebra y cálculo, Hohenwarter & Lavicza (2007).

Diversos estudios demuestran las ventajas del software en el aprendizaje de las matemáticas, tales como: Haciomeroglu, Bu, Schoen, & Hohenwarter (2009) quienes consideran que el uso del software ha hecho que los estudiantes interactúen de una manera más dinámica con las computadoras.

Sin embargo, el uso del software no es suficiente para un aprendizaje efectivo de las matemáticas, tal como lo manifiestan Haciomeroglu, Bu, Schoen, & Hohenwarter (2009), quienes consideran que los profesores deben implementar ambientes de aprendizaje con una riqueza didáctica, de tal manera que planteen problemas interesantes, así como nuevas pedagogías y nuevas soluciones asociadas con el uso de la tecnología.

Las prerrogativas de usar Geogebra son múltiples, tal como lo manifiestan Hohenwarter & Lavicza (2007), el uso de este software puede inspirar un reto en la forma de abordar los problemas de un salón de clase, puede promover un nivel de pensamiento más elevado en los estudiantes, así como facilitar que los estudiantes investiguen por sí mismos diferentes ideas matemáticas.

4.8 Cálculo y tecnología

En esta sección se abordan diversas investigaciones sobre la tecnología en el aprendizaje y la enseñanza del cálculo, hemos agrupado las investigaciones en:

-Tecnología en general para la enseñanza y aprendizaje del cálculo.

-Experiencias usando tecnología para el aprendizaje y la enseñanza del cálculo.

-Redefiniendo la derivada con tecnología.

4.8.1 Tecnología en general para la enseñanza y aprendizaje del cálculo.

El uso de tecnología para mostrar conceptos clave del cálculo se ha vuelto muy frecuente en los salones de clase, donde a través de diferentes software como Cabri, Derive, etc., se resuelve problemas y se muestran visualmente demostraciones matemáticas.

Sin embargo la implementación de tecnología debe obedecer a una adecuada planeación didáctica. En este sentido, Cuevas & Pluvinage (2013), mencionan que el advenimiento de software de manipulación simbólica, de procesamiento de datos, de cálculo, etc., hace de la computadora una herramienta valiosa en la enseñanza de las matemáticas, en este contexto, un curso de cálculos y tecnología sería desaprovechar recursos, agregan que la tecnología se debe utilizar bajo un esquema didáctico muy bien planeado, de que el solo hecho de usar la no resuelve por sí mismo los problemas de enseñanza -aprendizaje.

Por otra parte, Trouche (2009) estudio de impacto de la tecnología en la enseñanza -aprendizaje del cálculo en la era digital, al respecto menciona tres aspectos clave:

a) Las nuevas herramientas tecnológicas inducen un cambio que va de las herramientas matemáticas individuales a las redes de herramientas multifuncionales.
b) Las herramientas tecnológicas actuales permiten convertir un salón de clase en un laboratorio.
c) Las nuevas tecnologías implican un gran reto

4.8.2 Experiencias usando tecnología para el aprendizaje y la enseñanza del cálculo.

Una primera experiencia es la de Madrid (2013) quien nos advierte acerca de que hay que tener cuidado con los resultados que arroja una computadora, ya que se debe considerar la llamada aritmética computacional, la cual si es ignorada, puede resultar en situaciones desafortunadas.

Un segundo grupo de experiencias, son las de Hohenwarter M., Hohenwarter J., Kreis Y., & Lavicza (2008), así como las de Kllogjeri P. & Kloogjeri Q. (2011), quienes muestran los numerosos beneficios de usar la tecnología en educación, en particular con el software Geogebra, el cual les permite presentar aplicaciones de cálculo en el nivel bachillerato y universitario, de manera que se hace accesible a los estudiantes temas como: primera derivada, monotonía, extremos, intervalos de crecimiento/decrecimiento, así como demostrar el teorema del valor medio.

En el trabajo de Delos Santos & Tomas (2002b), se explora la derivada de una calculadora gráfica, la cual permite transitar entre diversas representaciones: geográfica, tabular y gráfica, lo que redunda en una mayor comprensión sobre el significado matemático de la derivada.

Aguilar & Riestra (2007), por su parte, proponen explorar la derivada combinando una perspectiva dinámica mediante un software que permite hacer acercamientos tipo zoom, con una perspectiva que retoma el desarrollo histórico de la derivada, es decir considera la función derivada en vez de la derivada puntual. Al mismo tiempo incorpora problemas, los cuales hacen surgir de forma natural los conceptos y la teoría asociada.

4.8.3 Redefiniendo la derivada con tecnología

Un trabajo muy interesante es el de Invernizzi & Rinaldi (2002) quienes muestran cómo con el uso de la tecnología, a través del zoom de una calculadora gráfica, se puede definir la derivada considerando que no se requiere de la recta secante como un paso intermedio, se usa el concepto de límite. La idea básica es considerar el hecho de que con un acercamiento suficiente, la gráfica de una función derivable, aparece como una línea. En un nivel intuitivo, la recta tangente a la gráfica de $y=f(x)$ en el punto $P(x_0,f(x_0))$ es la misma recta que se observa al hacer un acercamiento suficiente en el punto en cuestión.

4.9 Trayectorias de aprendizaje

En esta sección hablaremos de trayectorias de aprendizaje ya que para nuestra investigación se diseñó una ruta de aprendizaje basada en un micromundo computacional desarrollado en Geogebra y Excel.

Para entender el concepto de trayectoria de aprendizaje, consideremos que en la planeación de una clase o de una actividad didáctica, es importante tomar en cuenta cómo se desarrollará el proceso de aprendizaje. Es decir, es importante tomar en cuenta cómo se apropian los conocimientos y los procesos, lo que variará de un estudiante a otro, por lo que se seguirán diferentes rutas de aprendizaje. Sin embargo, de acuerdo con lo expuesto por Simon(1995) se puede considerar una *trayectoria hipotética* o imaginaria de *aprendizaje*, la cual pueden seguir o no los estudiantes; en esta trayectoria hipotética están implícitas las suposiciones hechas por el profesor respecto a la secuencia de aprendizaje al planear una clase o una secuencia de actividades didácticas

Una trayectoria de aprendizaje se puede concebir en dos partes (ver (Clements & Sarama, 2004):

La primera parte es el objetivo matemático; aquí se debe tener en mente las ideas principales e importantes a desarrollar, así como considerar los conceptos y habilidades previas que posean los estudiantes. Sin embargo se debe considerar todo esto, no como un todo continuo, si no como fragmentaciones en la mente del estudiante.

La segunda parte de una trayectoria de aprendizaje consiste en niveles de pensamiento, cada uno más sofisticado que el anterior y teniendo en mente que se alcancen los objetivos planteados. Se debe considerar un desarrollo progresivo y tomar en cuenta la ruta típica que seguirá un estudiante al desarrollar los aprendizajes planteados y las habilidades que adquirirá

Sin embargo, como lo muestran investigaciones realizadas por (Denvir & Brown, 1986) los estudiantes usualmente aprenden cosas diferentes de las que el profesor esperaba al considerar el diseño de su clase. La manera cómo los estudiantes aprenden es la trayectoria real del aprendizaje. Denvir & Brown (op. cit.) añade que para analizar los conocimientos que los estudiantes adquieren, se debe tomar en cuenta, no solo sus experiencias, sino el aspecto cultural.

Sacristán et. al (2010) mencionan que las trayectorias de aprendizaje y los micromundos comparten características esenciales aunque de hecho responden a diferentes necesidades: la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje fue desarrollada en ambientes no computacionales, pero los micromundos computacionales involucran rutas de aprendizaje subyacentes aunque éstas no siempre son explícitas.

Usaremos esta idea de trayectorias hipotéticas y reales de aprendizaje para nuestro diseño y análisis de nuestra investigación de resultados. En nuestro caso, la ruta de aprendizaje que se diseñó, contemplaba que los estudiantes, a través de actividades guiadas, desarrollarán en un principio su concepción de límite en un nivel intuitivo, para posteriormente evolucionar hacia su comprensión en la definición formal; esta es nuestra trayectoria hipotética de aprendizaje, la cual se comparó con las trayectorias reales que siguieron los estudiantes cuyo análisis se describe en la sección 4.2.

4.10 Conclusiones del capítulo

En este capítulo se ha abordado el uso de la tecnología como un medio para favorecer el aprendizaje, se ha visto que los medios tecnológicos por sí mismos no implican una mejoría en los conocimientos y habilidades matemáticas. El aprendizaje de las matemáticas a la manera tradicional, es decir usando pizarrón, lápiz y papel puede ser reproducido también con la tecnología, el reto para los profesores es crear situaciones didácticas interesantes en la que los estudiantes construyan por sí mismos el conocimiento matemático, es decir siguiendo el paradigma de Papert (1980).

Los micromundos computacionales constituyen un medio en el que los profesores pueden crear ambientes de aprendizaje con situaciones semi- construidas, de tal manera que los estudiantes exploren diversas ideas matemáticas, usando las herramientas tecnológicas disponibles en el ambiente, así como, posiblemente creando sus propios instrumentos de exploración. En esta investigación, se plantea el diseño de micromundos computacionales basados en las herramientas tecnológicas de las hojas electrónicas de cálculo y el uso del ambiente de programación Geogebra.

Las hojas electrónicas de cálculo y Geogebra permiten explorar de una manera versátil y dinámica el concepto de la derivada, creando situaciones didácticas para transitar entre diversas representaciones: algebraica, gráfica y tabular.

La revisión del aprendizaje del cálculo con tecnología nos permite tener una visión sobre nuestra propia investigación: la derivada. Finalmente las trayectorias de aprendizaje serán un importante instrumento para nuestro análisis de resultados.

CAPÍTULO 5. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

5.1 Objetivo general de la investigación

La presente investigación es con relación a investigar la factibilidad de usar actividades en computadora usando la hoja electrónica de cálculo y Geogebra para ayudar a los estudiantes en su aprendizaje del concepto de la derivada. En particular se pretendía hacer una intervención didáctica donde se crearan situaciones de exploración de la derivada en un micromundo computacional usando el software mencionado.

En base a eso, se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

1.- Como consecuencia de la intervención didáctica ¿los participantes conciben la idea de la derivada como el resultado final de un proceso infinito?

2.- ¿Cómo difieren sus concepciones de la derivada antes y después de las actividades didácticas?

3- ¿Muestran avances en la construcción formal del concepto de la derivada?

5.2 Diseño del estudio

Los instrumentos de investigación se planearon para contestar las preguntas de investigación en torno al problema matemático. A continuación se describen de forma general y se menciona su justificación; en el anexo se muestran con detalle cada una de las actividades.

La intervención didáctica se desarrolló en 4 etapas: (ver Ilustración 5),

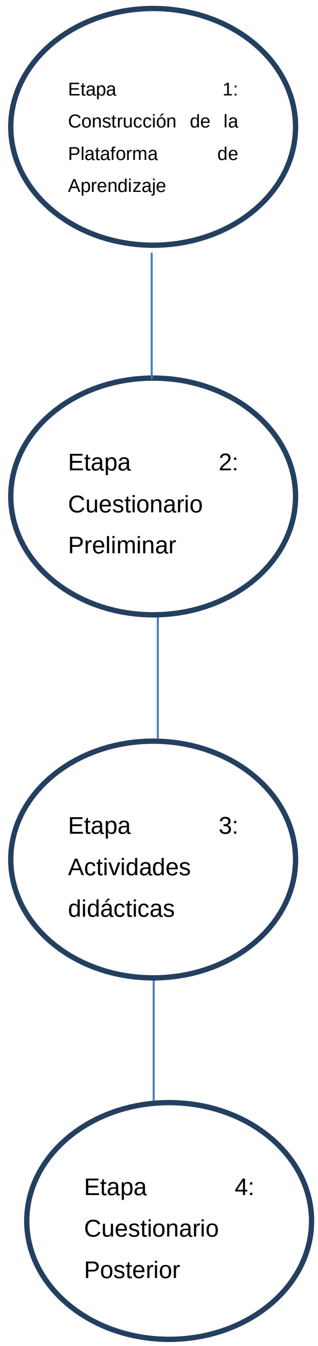


Ilustración 5: Etapas de la intervención didáctica

5.2.1 Etapa 1: Construcción de la Plataforma de Aprendizaje

La primera etapa consistió en la construcción de la plataforma de aprendizaje, (ver Anexo A), la cual se encuentra montada en la página *http://aulasvirtuales.cuaed.unam.mx/moodle/course/view.php?id=515*.

La plataforma de aprendizaje (ver Ilustración 6) tiene incorporadas las siguientes herramientas tecnológicas:

- Perfil, donde cada usuario puede subir su fotografía y mencionar sus intereses
- Blog, el cual corresponde a un espacio personal asignado al usuario
- Mensajero, una herramienta de comunicación al interior de la plataforma
- Foro, donde se pueden intercambiar diferentes ideas, así como subir archivos.
- Menú central con las actividades didácticas

La idea básica es dotar a los estudiantes de instrumentos de comunicación tecnológicos que les permitan interactuar de una manera ágil y versátil con sus compañeros, con el objetivo de que intercambien y discutan diversas ideas matemáticas relacionadas con el concepto de la derivada.

Es importante mencionar que la idea de la plataforma de aprendizaje es ofrecer a los estudiantes un medio de estudio autónomo, en donde tengan disponibles los diversos materiales didácticos, tales como: videos y applet de la derivada, así como las actividades didácticas, de tal manera que puedan consultar en cualquier momento dichos materiales.

La plataforma de aprendizaje está montada en una página de la UNAM, en un servidor Moodle, el cual permite la creación de cursos virtuales siguiendo precisamente la filosofía construccionista.

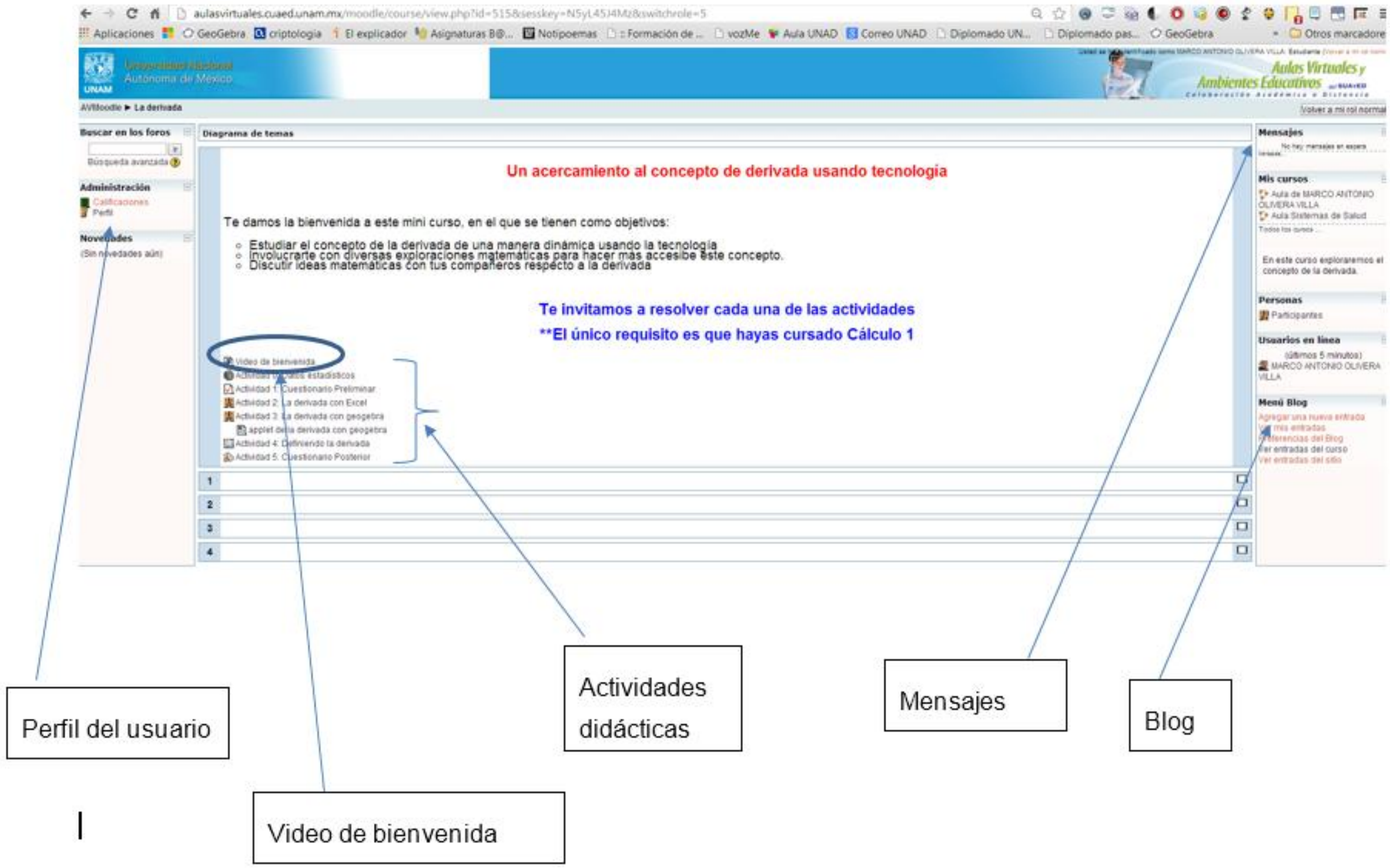


Ilustración 6: Plataforma de Aprendizaje

5.2.2 Etapa 2: Cuestionario Preliminar

El propósito de este cuestionario (ver Anexo B) era tener un instrumento de medición para determinar cómo los estudiantes entendían el concepto de derivada y poder medir los cambios en sus concepciones después de realizar las actividades didácticas. Las preguntas del cuestionario las podemos agrupar en tres bloques:

- Bloque1: Preguntas acerca de la noción de la derivada
- Bloque2: Preguntas acerca de las interpretaciones de la derivada
- Bloque3: Preguntas acerca de la visualización gráfica de la derivada

A continuación se argumenta el planteamiento de cada una de las preguntas del cuestionario, de acuerdo al bloque en que las hemos agrupado:

Bloque1: Preguntas acerca de la noción de la derivada

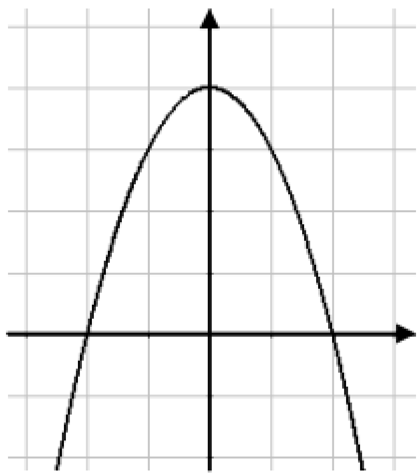
Preguntas	Argumentación
Pregunta 1: ¿Qué entiendes por la derivada de una función?	La idea básica con las preguntas 1 y 2 es indagar acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el concepto de la derivada.
2.- ¿Cuál es la definición de la derivada?	

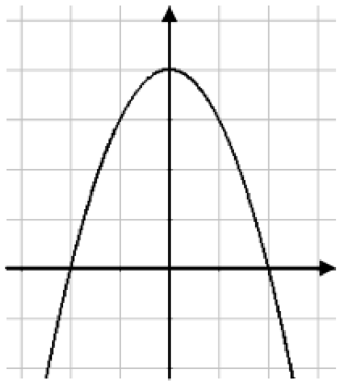
Bloque2: Preguntas acerca de las interpretaciones de la derivada

Preguntas	Argumentación
3.- ¿Cuál es la interpretación física de la derivada?	El objetivo de las preguntas 3 y 4 es conocer las diversas interpretaciones, que los estudiantes pudieran tener acerca de la derivada.
4.- ¿Cuál es la interpretación	

geométrica de la derivada?	
5.- ¿Todas las funciones tienen derivada?	Dichas interpretaciones son principalmente las relacionadas con la física y la geométrica. En la interpretación física la derivada se relaciona con la velocidad instantánea, mientras que en la interpretación geométrica corresponde a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. La pregunta 5 es para analizar si su concepción geométrica de la derivada, contempla el caso cuando la derivada no existe.

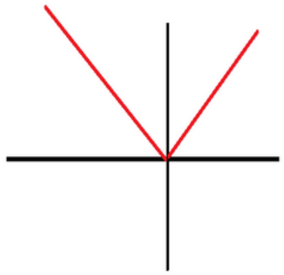
Bloque3: Preguntas acerca de la visualización gráfica de la derivada

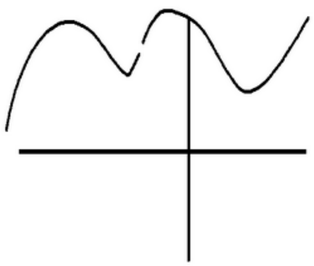
<table>
<tr><th>Preguntas</th><th>Argumentación</th></tr>
<tr><td>6.-Dada la siguiente figura, en donde cada cuadro representa una unidad: ¿En qué intervalo es positiva la derivada? ¿En qué intervalo es negativa la derivada?
</td><td rowspan="2">Las preguntas 6 y 7 son para averiguar si los estudiantes tienen entre sus concepciones la aplicación de la derivada a los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.</td></tr>
<tr><td>7.- Dada la siguiente figura, en donde cada cuadro representa una unidad: ¿Para qué valor de x, la derivada vale 0?</td></tr>
</table>

 Argumentación:	

Bloque4: Preguntas acerca de la relación entre derivada y límite

Preguntas	**Argumentación**
8.- ¿Cuál es la relación entre límite y derivada?	Las preguntas son 8, 9 y 10 son para averiguar si los estudiantes relacionan el concepto de la derivada con la idea de. Límite.
9.-Dada la siguiente figura, en donde cada cuadro representa una unidad: ¿Qué ocurre con la derivada en x=0?	

<table>
<tr>
<td></td>
<td rowspan="2">La derivada y el límite son dos conceptos matemáticos que están íntimamente ligados, ya que la derivada se puede considerar como un proceso límite.

En el caso de la pregunta 10, también queremos averiguar si el estudiante relaciona la derivada con la continuidad de una función en un punto dado.</td>
</tr>
<tr>
<td>10.- Dada la siguiente figura, en donde cada cuadro representa una unidad: ¿Existe la derivada para cualquier punto?, Explicar.
</td>
</tr>
</table>

5.2.3 Etapa 3: Actividades de aprendizaje del concepto de la Derivada

Para el aprendizaje del concepto de la derivada, contemplamos estas dos actividades (ver Anexo D).

- Actividad 2: La derivada con Excel
- Actividad 3:La derivada con Geogebra

El objetivo principal con estas actividades didácticas es introducir a los estudiantes de una manera intuitiva en el concepto de la derivada a través de situaciones en las que obtengan razones de cambio, en el caso de la actividad 2 y también donde exploren de una manera gráfica y dinámica la derivada, tal como ocurre en la actividad 3.

5.2.3.1 Actividad 2: La derivada con Excel

Esta actividad (ver anexo D, sección D.1), comienza con un video (ver Ilustración 7), en donde se explica a los estudiantes la idea básica de la derivada y también se muestra la manera de obtener velocidades promedio con base en una función distancia.

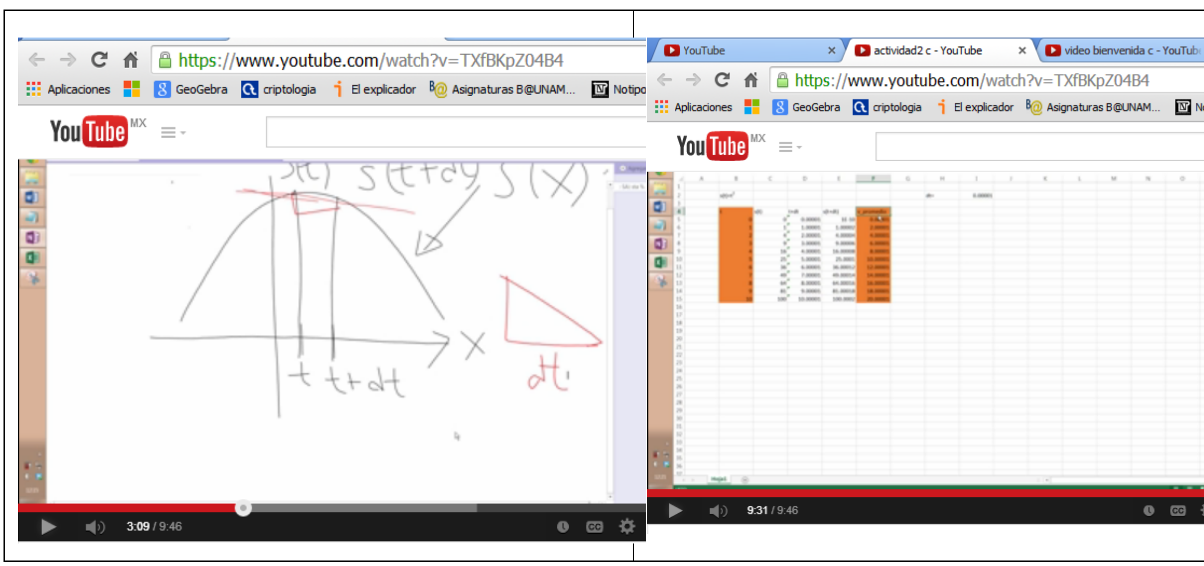


Ilustración 7: Video sobre el concepto de la derivada y el uso de Excel para obtener velocidades promedio

La idea es crear una hoja de trabajo en Excel (ver Ilustración 8), en donde los estudiantes exploren de una manera dinámica la obtención de la velocidad promedio para diferentes funciones, x^2, x3, etc.

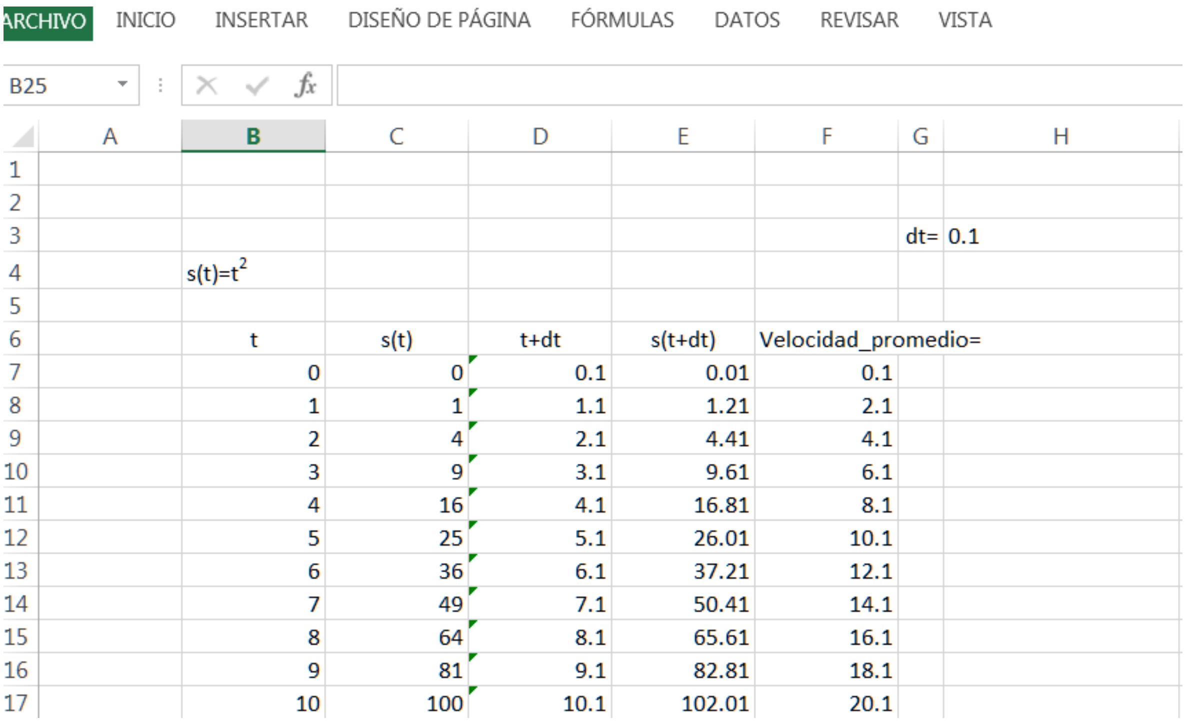
En la Ilustración 8, se observa que se puede cambiar el parámetro dt, de manera que es posible investigar la velocidad promedio para valores muy cercanos a 0, para el caso de dt.

Hay muchas preguntas que se pueden formular a los estudiantes usando esta herramienta, algunas de estas son:

- ¿Cuál sería una fórmula para relacionar los valores de las columnas t y velocidad promedio?
- ¿Qué ocurre con los valores de la velocidad promedio a medida que dt se aproxima a cero?
- ¿Qué ocurre con la velocidad promedio cuando dt=0?
- Haz otras propuestas de exploración, pero ahora considera las funciones $s(t)=t^3$ y $s(t)=t^4$
- En general, ¿cuál sería una fórmula para relacionar los valores de t y la velocidad promedio para $s(t)=t^n$

Las preguntas anteriores se plantean de manera dosificada en un foro de discusión, se pretende que los participantes se ven inmersos en una dinámica de reflexión continua, de manera que puedan entender a través de una construcción colectiva, el significado de la velocidad promedio, para posteriormente avanzar hacia un entendimiento más profundo de la velocidad instantánea, asimismo entender esta última como el resultado de un proceso límite y concebirla como la derivada de una función en un punto dado.

Además de las preguntas anteriores, se espera que los estudiantes formulen otras que les permitan reflexionar acerca de este concepto matemático, la idea es crear detonadores de reflexión.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3							dt=	0.1
4		$s(t)=t^2$						
5								
6		t	s(t)	t+dt	s(t+dt)	Velocidad_promedio=		
7		0	0	0.1	0.01	0.1		
8		1	1	1.1	1.21	2.1		
9		2	4	2.1	4.41	4.1		
10		3	9	3.1	9.61	6.1		
11		4	16	4.1	16.81	8.1		
12		5	25	5.1	26.01	10.1		
13		6	36	6.1	37.21	12.1		
14		7	49	7.1	50.41	14.1		
15		8	64	8.1	65.61	16.1		
16		9	81	9.1	82.81	18.1		
17		10	100	10.1	102.01	20.1		

Ilustración 8: Hoja de trabajo en Excel para el estudio de la derivada

5.2.3.2 Actividad 3: La derivada con Geogebra

Esta actividad (ver anexo D, sección D.2), está basada en un applet de Geogebra (ver Ilustración 9), el cual tiene el siguiente funcionamiento:

A partir de la gráfica de la función cuadrática $f(x)=x^2$, se toman dos puntos A y B sobre la curva, los cuales se pueden mover a partir de unas barras de desplazamiento, de tal manera que la distancia entre las abcisas de los puntos A y B corresponde al incremento dx y por tanto, la velocidad promedio o la pendiente de la recta secante entre dichos puntos es:

$velocidad\ promedio = \frac{Y_A - Y_B}{dx}$, donde Y_A, Y_B son las ordenadas de los puntos A y B, respectivamente.

En el applet se calcula de manera aproximada y dinámica, f´(x) para cada valor de x, entre 0 y 10, también se muestra el valor del incremento dx a medida que se mueven los puntos A y B.

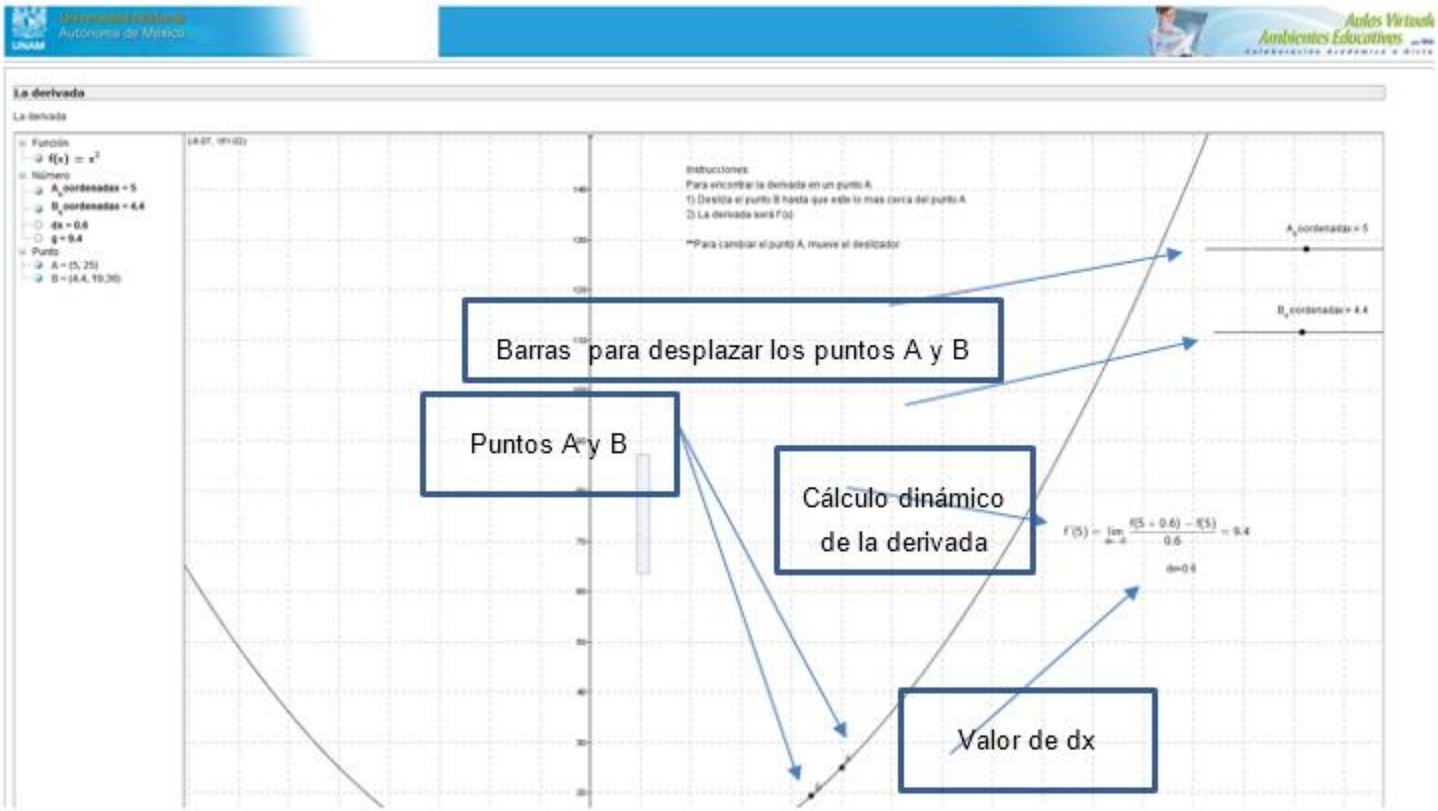


Ilustración 9: Applet de Geogebra para explorar la derivada

Hay muchas preguntas que se pueden formular usando esta herramienta matemática:

- Comparar los valores de la derivada obtenida con Excel con los valores obtenidos con el applet
- ¿Qué ocurre cuando dt=0?
- ¿Qué relación existe entre el signo de f´(x) y los intervalos de crecimiento o de crecimiento de la función?

Al igual que en la actividad desarrollada con Excel, las preguntas anteriores se plantean en un foro de discusión, aquí la ventaja que tiene la herramienta tecnológica es que los estudiantes puedan analizar en tiempo real diversas exploraciones matemáticas, al mismo tiempo que prueban sus conjeturas, lo anterior se podrá ver enriquecido en una discusión colectiva con los compañeros.

5.2.3.3 Actividad 4: Definiendo la Derivada

Una vez que los estudiantes han realizado las actividades de aprendizaje del concepto de la derivada con Excel y Geogebra (ver secciones 5.2.3.1 y 5.2.3.2), ahora se les solicita que de manera grupal, en un Wiki[1](ver Anexo D, sección D.3 e Ilustración 10), escriban una definición de la derivada, la cual sea consensuada por todos los compañeros.

El objetivo clave de esta actividad es investigar acerca de una construcción colectiva del concepto de derivada por parte de los estudiantes, en particular se persigue averiguar si las actividades didácticas de Excel y Geogebra les permitieron tener una visión más clara sobre el concepto matemático de la derivada. El hecho de llevar a cabo esta actividad en un Wiki implica que los estudiantes se pongan de acuerdo para aportar ideas, resumir, reflexionar y

[1] Un Wiki es un documento en línea que es escrito de manera colaborativa, se puede editar por una sola persona a la vez, de esta manera cada integrante puede aportar ideas y colaborar en la redacción e integración del producto final.

redactar de una manera precisa y consensuada una definición del concepto de la derivada.

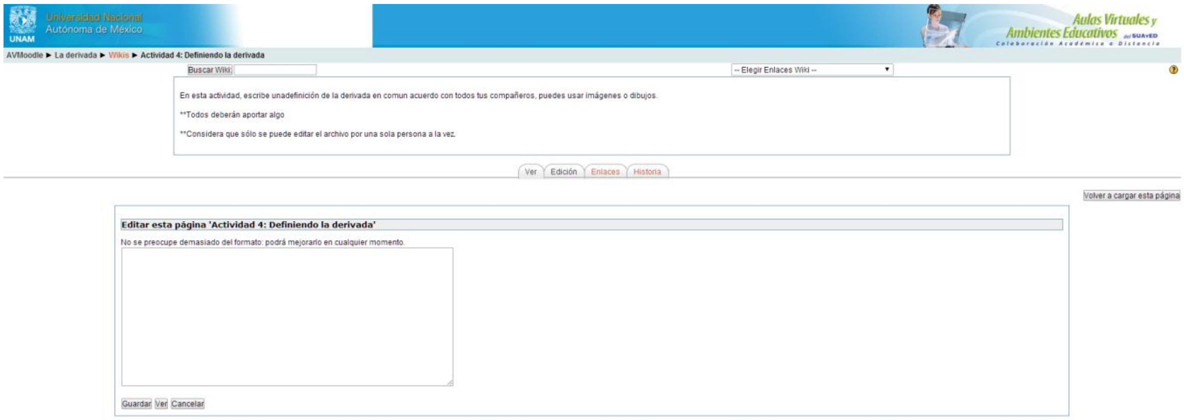


Ilustración 10: Wiki para escribir una definición de la derivada, consensuada por el grupo

5.2.4 Etapa 4: Cuestionario Posterior

La última actividad (ver Anexo E) propuesta a los estudiantes es que escriban e ilustren de manera individual, su definición particular de la derivada, se les solicita que realicen esta actividad en un archivo de Word y lo suban a la plataforma.

La idea básica es contrastar su concepción de la derivada después de haber realizado las actividades didácticas (ver secciones 5.2.3.1 y 5.2.3.3), así como el ejercicio de la construcción colectiva del concepto (ver sección 5.2.3.3).

Lo que pretendemos es también averiguar si los participantes conciben en su definición de derivada, que ésta es el resultado de un proceso límite. Nos interesa también si en su definición particular está presente el tránsito entre las diversas representaciones: tabular, gráfica y algebraica.

Un aspecto importante de comentar es que el cuestionario final no se concibió como una serie de preguntas, tal como se hizo con el cuestionario preliminar, la razón de esto es que nos interesó que los estudiantes pudieran explicar de una manera más libre, e inclusive, ilustrándola, su definición particular de derivada.

5.2.5 La población de estudio

El estudio experimental se aplicó a un grupo de 16 estudiantes de quinto semestre del Colegio de Ciencias y Humanidades plantel Vallejo de la UNAM. Dichos alumnos cursaron la materia de Cálculo Diferencial e Integral I; por tanto, ya habían revisado en clase el concepto de derivada. En la tabla siguiente se muestran los participantes, cabe destacar que los datos se recabaron a partir de una encuesta montada en la plataforma (ver anexo B).

Astrid Luna	DF	México
Tatiana	DF	México
Mauricio	DF	México
Pedro	DF	México
Sandria	DF	México
Carlos	DF	México
Lorelei	DF	México
Febe	DF	México
Paola	DF	México
Julieta	DF	México
Erandi	DF	México
Patricia	DF	México
Sofia Pacheco	DF	México
Carmen	DF	México
Alicia	DF	México
Marcos	DF	México

Nombre	Sexo	Edad	Conocimientos de Hoja de cálculo	Conocimientos de Geogebra
Astrid	Femenino	18	Avanzados	Intermedios
Tatiana	Femenino	18	Intermedios	Avanzados
Mauricio	Masculino	18	Básicos	Básicos
Pedro	Masculino	21	Intermedios	Intermedios
Sandria	Femenino	18	Básicos	Avanzados
Carlos	Masculino	19	Avanzados	Avanzados
Lorelei	Femenino	18	Avanzados	Básicos
Febe	Femenino	19	Intermedios	Intermedios
Paola	Femenino	20	Básicos	Básicos
Julieta	Femenino	18	Intermedios	Intermedios
Erandi	Femenino	18	Básicos	Básicos

Patricia	Femenino	18	Avanzados	Avanzados
Sofía	Femenino	20	Básicos	Básicos
Carmen	Femenino	18	Intermedios	Avanzados
Alicia	Femenino	19	Avanzados	Intermedios
Marcos	Masculino	17	Avanzados	Avanzados

En términos generales se observa que hay las edades fluctúan de los 17 a los 20 años y que mayoría de los participantes corresponden a mujeres. También es importante mencionar que en su mayoría tienen conocimientos de intermedios a avanzados en la hoja de cálculo y en Geogebra.

CAPÍTULO 6. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

6.1.1 Generalidades

Se recuerda que se pretende contestar las preguntas de investigación a través de los resultados de la secuencia didáctica y de los cuestionarios preliminar y final que se plantearon a los estudiantes:

1.- Como consecuencia de la intervención didáctica ¿los participantes conciben la idea de la derivada como el resultado final de un proceso infinito?

2.- ¿Cómo difieren sus concepciones de la derivada antes y después de las actividades didácticas?

3- ¿Muestran avances en la construcción formal del concepto de la derivada?

Primeramente es conveniente recordar que en este trabajo de investigación la trayectoria hipotética de aprendizaje que se pretendía siguieran los estudiantes es la siguiente:

1) Al realizar la actividad en Excel, los estudiantes exploran la idea de una función mediante la obtención de sus valores en una tabla.
2) Relacionan los valores de la tabla (Representación tabular de una función) con distancias, si como es el caso, la función involucrada tiene como variable independiente al tiempo y como variable dependiente la distancia.
3) Obtienen los valores de la velocidad promedio a partir de los valores de distancia y tiempo.
4) Exploran las velocidades promedio a medida que el incremento dx se hace cada vez más pequeño.

5) Relacionan la velocidad promedio con la velocidad instantánea, a medida que el valor dx tiende a cero.
6) En la actividad con el applet de Geogebra para explorar la derivada, hacen uso de los deslizadores gráficos de los puntos A y B sobre la curva para explorar la velocidad promedio entre dichos puntos.
7) Relacionan la idea de la derivada como un proceso infinito: en nuestro caso al usar los deslizadores gráficos los estudiantes perciben que el cociente de incrementos no existe cuando dx=0, pero se acerca a un valor para valores de dx cercanos a 0.

En contraste con esto, las diferentes trayectorias actuales de aprendizaje que se encontraron son las siguientes:

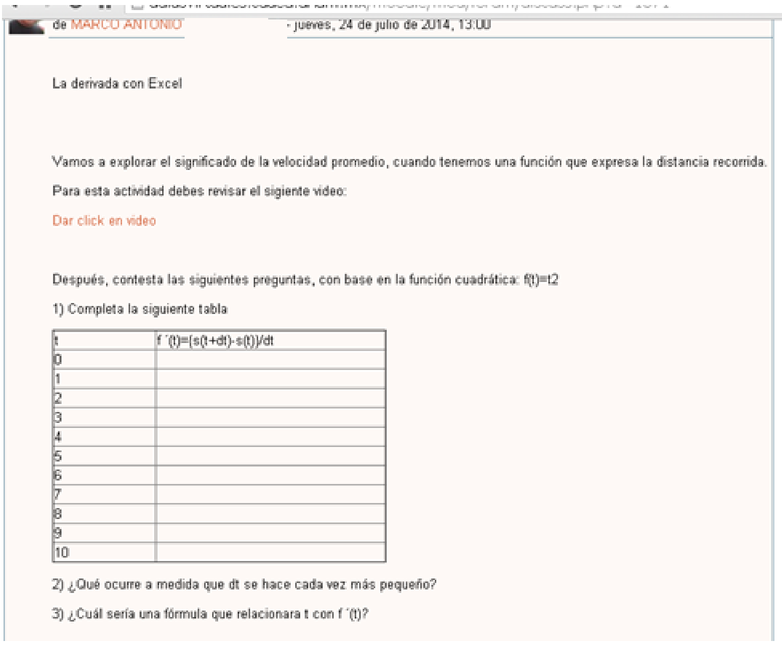
6.1.2 Trayectorias de aprendizaje seguidas por los alumnos.

6.1.2.1 Trayectoria1: Aprendizaje de la derivada estableciendo una conexión con límite.

Los aprendizajes de los alumnos en esta categoría se caracterizan por un avance en los conocimientos de acuerdo a lo arriba mencionado. Es decir se realizan de forma lineal todas las actividades desde la 1 hasta la 7.

Los conocimientos que se adquieren son el reconocimiento de un proceso infinito, la comprensión de su límite y el entendimiento de la definición formal de derivada. Los alumnos que siguieron esta trayectoria fueron Marcos, Alicia, Carmen, Sofía y Patricia. A continuación presentamos evidencia de su trabajo para dar soporte a lo que mencionamos respecto a su aprendizaje.

En el foro de Excel para explorar la derivada se inició con la siguiente aportación del Profesor (ver Ilustración 11).



de MARCO ANTONIO - jueves, 24 de julio de 2014, 13:00

La derivada con Excel

Vamos a explorar el significado de la velocidad promedio, cuando tenemos una función que expresa la distancia recorrida.

Para esta actividad debes revisar el sigiente video:

Dar click en video

Después, contesta las siguientes preguntas, con base en la función cuadrática: f(t)=t2

1) Completa la siguiente tabla

t	f ´(t)=(s(t+dt)-s(t))/dt
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2) ¿Qué ocurre a medida que dt se hace cada vez más pequeño?

3) ¿Cuál sería una fórmula que relacionara t con f ´(t)?

Ilustración 11: Aportación inicial en el foro de Excel

En la aportación inicial el profesor les solicita construir una tabla de las derivadas, así como explorar lo que ocurre cuando dx=0 y relacionar t con f´(t) mediante una fórmula para la función $f(t)=t^2$.

Al respecto, Marcos y Alicia respondieron que no tuvieron dificultades en realizar la actividad (ver Ilustración 12). Marcos construye una tabla para la derivada desde x =0 hasta x=10, cabe destacar que en dicha tabla es notorio que sólo copio los valores obtenidos con Excel, pero su nivel de razonamiento todavía es pobre. Alicia, va más allá e infiere una fórmula para relacionar los valores de x y f´(x).

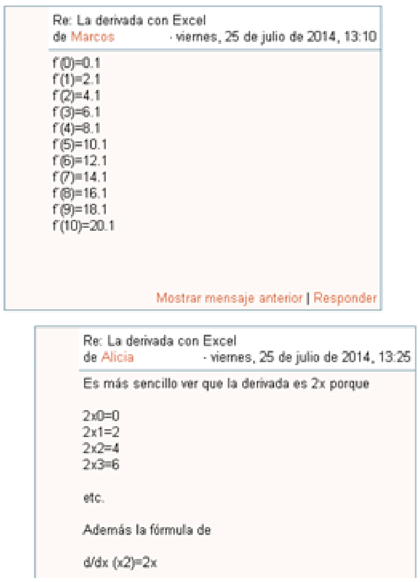


Ilustración 12: Aportaciones iniciales de Marco y Alicia a la actividad en Excel

En otro nivel de la exploración, el profesor lanza la pregunta acerca de lo que ocurre cuando dx=0, (ver Ilustración 13).


Re: La derivada con Excel
de MARCO ANTONIO - viernes, 25 de julio de 2014, 13:35

En la hoja de cálculo hagan dx=0

¿Qué ocurre?

¿Qué ocurre si en vez de hacer dx=0, se acercan a 0, por ejemplo 0.00001?

Mostrar mensaje anterior | Responder

Re: La derivada con Excel
de Sofia - viernes, 25 de julio de 2014, 13:43

Si se hace dx=0,aparece error en la fórmula porque la división entre 0 no está permitida.

Mostrar mensaje anterior | Responder

Re: La derivada con Excel
de Patricia - viernes, 25 de julio de 2014, 14:01

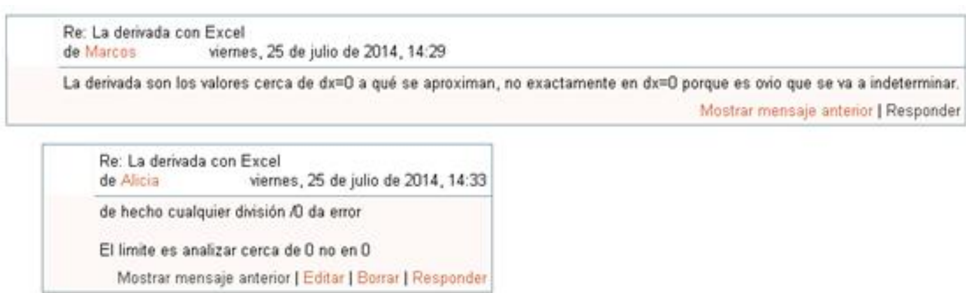
Los valores verdaderos no son estos:

f'(0)=0.1
f'(1)=2.1
f'(2)=4.1
f'(3)=6.1
f'(4)=8.1
f'(5)=10.1
f'(6)=12.1
f'(7)=14.1
f'(8)=16.1
f'(9)=18.1
f'(10)=20.1

son sólo aproximaciones, los verdaderos son:
f'(0)=0

Ilustración 13: Pregunta del profesor acerca de lo que ocurre cuando dx=0

Al respecto hay un debate entre varios estudiantes: Sofía afirma que al hacer dx=0 hay un error porque la división entre 0 no está permitida, mientras que Patricia considera que es irrelevante estudiar lo que ocurre cuando dx=0, porque lo verdaderamente importante es analizar lo ocurrido en las cercanías de dx=0., esta opinión también es compartida por Marcos y Alicia (ver Ilustración 13).


Re: La derivada con Excel
de Marcos viernes, 25 de julio de 2014, 14:29

La derivada son los valores cerca de dx=0 a qué se aproximan, no exactamente en dx=0 porque es ovio que se va a indeterminar.

Mostrar mensaje anterior | Responder

Re: La derivada con Excel
de Alicia viernes, 25 de julio de 2014, 14:33

de hecho cualquier división /0 da error

El limite es analizar cerca de 0 no en 0

Mostrar mensaje anterior | Editar | Borrar | Responder

Asimismo al realizar la actividad con el applet de exploración de la derivada con Geogebra, parece ser que hay un reforzamiento en la comprensión de la derivada (ver Ilustración 14). Nuevamente Alicia, Sofía, Patricia y Marcos hablan de procesos infinitos involucrados en la exploración de la derivada, mencionan que cuando dx=0, la derivada parece desaparecer, porque la división entre 0 no está definida, pero que el límite se refiere a lo que ocurre para valores muy cercanos de 0.


Re: La derivada con geogebra
de Marcos - viernes, 25 de julio de 2014, 13:12
1)No tuve ninguna dificultad en usar el programa
2)dx se va haciendo 0, es lógico porque entre más cerca esten A y B, dx se va haciendo 0.
Mostrar mensaje anterior | Responder

Re: La derivada con geogebra
de Alicia - viernes, 25 de julio de 2014, 13:27
1)El applet es muy sencillo
2)Si A se aproxima a B, dx acerca a 0, de aproxima a la derivada en cada punto de x
Mostrar mensaje anterior | Responder

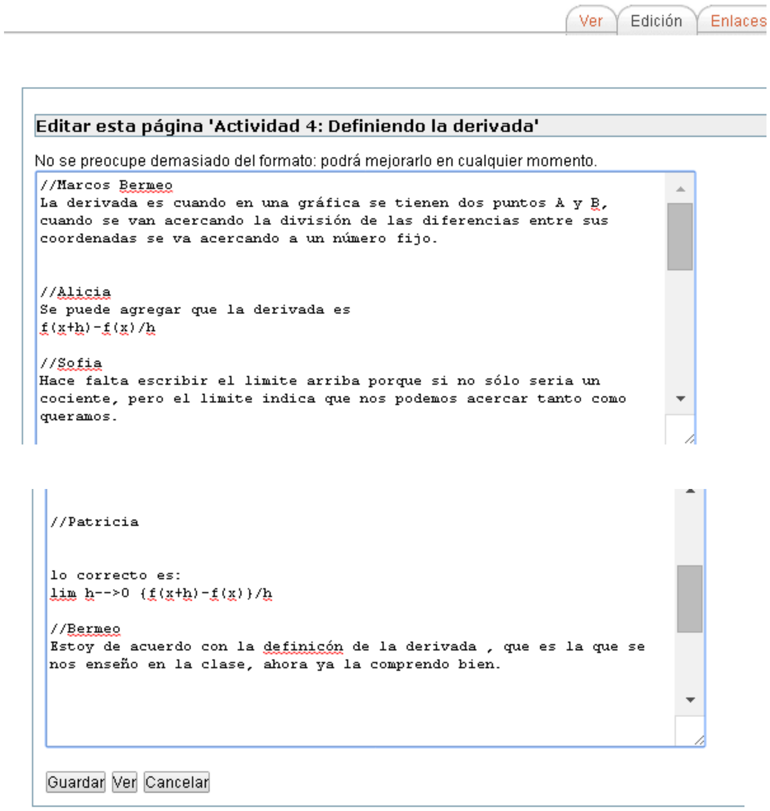
Re: La derivada con geogebra
de MARCO ANTONIO - viernes, 25 de julio de 2014, 13:37
¿Qué ocurre en el applet si ponen el punto A exactamente en el punto B?
¿Qué ocurre con f'(x)?
Mostrar mensaje anterior | Responder

Re: La derivada con geogebra
de Sofia - viernes, 25 de julio de 2014, 13:49
f'(x) desparece, esto es porque el programa no sabe interpretar que la división entre 0 no está permitida y que es error.
Mostrar mensaje anterior | Responder

Re: La derivada con geogebra
de Patricia - viernes, 25 de julio de 2014, 14:03
Exacto, cualquier división entre 0 da error, por eso hay que fijarse que ocurre muy cerca del 0.
y se van acercando a los valores de:
f'(0)=0
f'(1)=2
f'(2)=4
f'(3)=6
f'(4)=8
f'(5)=10

Ilustración 14: discusiones en torno a la derivada con el applet de geogebra

Ahora analizaremos la actividad acerca de la construcción colectiva del concepto de la derivada en el Wiki (ver Ilustración 15).


Ver Edición Enlaces

Editar esta página 'Actividad 4: Definiendo la derivada'

No se preocupe demasiado del formato: podrá mejorarlo en cualquier momento.

//Marcos Bermeo
La derivada es cuando en una gráfica se tienen dos puntos A y B, cuando se van acercando la división de las diferencias entre sus coordenadas se va acercando a un número fijo.

//Alicia
Se puede agregar que la derivada es
f(x+h)-f(x)/h

//Sofia
Hace falta escribir el limite arriba porque si no sólo seria un cociente, pero el limite indica que nos podemos acercar tanto como queramos.

//Patricia

lo correcto es:
lim h-->0 (f(x+h)-f(x))/h

//Bermeo
Estoy de acuerdo con la definicón de la derivada , que es la que se nos enseño en la clase, ahora ya la comprendo bien.

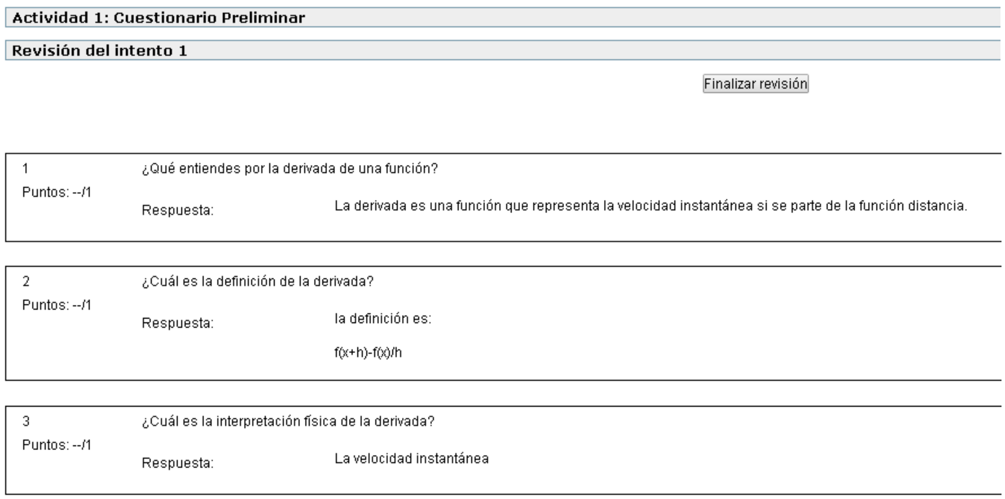
Guardar Ver Cancelar

Ilustración 15: Construcción colectiva del concepto de derivada en el Wiki

Se observa que los estudiantes involucrados avanzan en la construcción del concepto de derivada en un proceso colectivo que involucra el entretejido de diversos conceptos: representación gráfica, cociente de incrementos y límite. Es notorio como su definición final involucra a la derivada como un proceso limite.

Finalmente, para tener más elementos de análisis vamos a contrastar las respuestas a los cuestionarios preliminar y final, en este caso consideramos la alumna Alicia, ya que sus respuestas nos parecieron representativas respecto a este subgrupo de estudiantes.

En el caso de Alicia, las respuestas al cuestionario preliminar fueron las siguientes (ver ilustraciones 16 a la 18):


Actividad 1: Cuestionario Preliminar

Revisión del intento 1

Finalizar revisión

1 Puntos: --/1	¿Qué entiendes por la derivada de una función? Respuesta:	La derivada es una función que representa la velocidad instantánea si se parte de la función distancia.
2 Puntos: --/1	¿Cuál es la definición de la derivada? Respuesta:	la definición es: f(x+h)-f(x)/h
3 Puntos: --/1	¿Cuál es la interpretación física de la derivada? Respuesta:	La velocidad instantánea

Ilustración 16: Respuestas de Alicia a las primeras tres preguntas del Cuestionario Preliminar

En el caso de las primeras tres preguntas referentes a la concepción de la derivada (ver Ilustración 16), Alicia parece tener muy clara una definición que involucra razones de cambio y velocidad instantánea.

En las preguntas 4 a 6 (ver Ilustración 17), referentes a las interpretaciones de la derivada, Alicia también parece tener una cierta claridad en relacionar la velocidad instantánea con la derivada, así como el signo de la derivada con el hecho de ser creciente o decreciente.

4
Puntos: --/1

¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada?

Respuesta: La interpretación geométrica es que si la derivada vale 0 se trata de un mínimo o un máximo

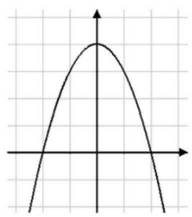
5
Puntos: --/1

¿Todas las funciones tienen derivada?
Explicar

Respuesta: Si , todas tienen derivada

6
Puntos: --/1

Dada la siguiente figura, en donde cada cuadro representa una unidad: ¿En qué intervalo es positiva la derivada? ¿En qué intervalo es negativa la derivada?



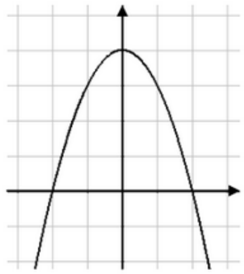
Respuesta: La gráfica dice que es positiva donde la curva es creciente, es después del 0.

Ilustración 17 Respuestas de Alicia a las preguntas 4 a 6, del Cuestionario Preliminar

Continuando con nuestro análisis en las preguntas 7 a la 10 (ver Ilustración 18), Alicia reconoce la correspondencia entre el máximo y el valor crítico de la derivada, sin embargo en la pregunta 8 menciona que no hay relación entre límite y derivada, esta respuesta es congruente con las preguntas 9 y 10, en donde tampoco reconoce la codependencia entre límite, derivada y funciones continuas.

7
Puntos: --/1

Dada la siguiente figura, en donde cada cuadro representa una unidad:
¿Para que valor de x, la derivada vale 0?



Respuesta: Es o en x=0 en el máximo

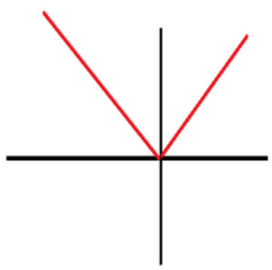
8
Puntos: --/1

¿Cuál es la relación entre límite y derivada?

Respuesta: No hay relación

9
Puntos: --/1

Dada la siguiente figura, en donde cada cuadro representa una unidad:
¿Qué ocurre con la derivada en x=0?



Respuesta: La derivada es 0

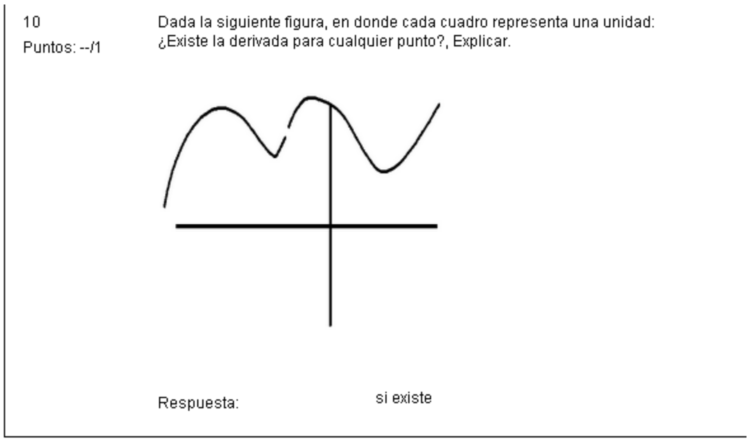


Ilustración 18: de Alicia a las preguntas 7 a 10, del Cuestionario Preliminar

Respecto al cuestionario posterior, Alicia, parece tener una mejoría en su comprensión de la derivada, ya que menciona la definición de la derivada haciendo alusión a elementos geométricos: “La velocidad instantánea ocurre cuando los puntos A y B se aproximan”, “La derivada es un límite”, “Nos interesa que ocurre en la cercanía de dx=0”.

En términos generales en esta trayectoria de aprendizaje, los participantes tuvieron una alta comprensión del concepto de la derivada.

6.1.2.2 Trayectoria2: Aprendizaje de la derivada en un nivel algorítmico.

Los aprendizajes de los alumnos en esta categoría se caracterizan por un casi nulo avance en la comprensión cabal de la definición de la derivada (ver Ilustración 19), las alumnas que se circunscriben en esta trayectoria de aprendizaje son Erandi, Julieta y Paola.

Ilustración 19: Aportaciones de Erandi, Julieta y Paola en la discusión de la derivada

Se observa que las citadas estudiantes al solicitarles sus reflexiones en torno a la derivada, se restringen a un uso logarítmico, mencionan los términos: fórmulas, y calcular, pero no relacionan la exploración de Excel con las velocidades promedio con la velocidad instantánea ni con la derivada.

Respecto a los cuestionarios preliminar y posterior en este subgrupo de estudiantes, siempre hacen referencia a la derivada como algo logarítmico (ver Ilustración 20), sin considerar los elementos relevantes en su análisis, tales como que la derivada es el resultado de un proceso limite.

Actividad 1: Cuestionario Preliminar

Revisión del intento 1

Finalizar revisión

Comenzado el	viernes, 25 de julio de 2014, 13:02
Completado el	viernes, 25 de julio de 2014, 13:07
Tiempo empleado	4 minutos 20 segundos
Calificación	**0** de un máximo de 10 (**0**%)

1 ¿Qué entiendes por la derivada de una función?

Puntos: --/1

Respuesta: La derivada es calcular mediante fórmulas:

d/dx(xn)=nxn-1
d/dx(senx)=cosx
d/dx(tanx)=sec2x

Después simplificar

2 ¿Cuál es la definición de la derivada?

Puntos: --/1

Respuesta: Entiendo lo mismoq ue la pregunta 1

d/dx(xn)=nxn-1
d/dx(senx)=cosx
d/dx(tanx)=sec2x

Después simplificar

Ilustración 20: Algunas respuestas de Erandi al cuestionario preliminar

CONCLUSIONES

Resumen de los resultados

La serie de actividades didácticas aplicadas a un grupo de 16 estudiantes para el aprendizaje del concepto de la derivada muestran que el hecho de haber incluido la tecnología como vehículo de comunicación a través de los foros en la plataforma y también como medio de construcción a través de la hoja de cálculo y de Geogebra, al contrario de lo que hubiéramos podido imaginar, no despertó un gran interés de parte de los estudiantes, ya que solamente hubo 11 estudiantes que participaron del grupo original de 16, de estos cinco tuvieron estuvieron inmiscuidos en una trayectoria de aprendizaje destacada al construir de una manera colectiva una definición de derivada que incorporo elementos matemáticos tales como: cociente de incrementos y limite.

Otros tres estudiantes que participaron en el estudio, los clasificamos en una trayectoria de aprendizaje en la que sólo usaron sus conocimientos previos de la derivada, los cuales abarcaron solamente procesos algorítmicos de derivación, pero sin ir más allá de una comprensión cabal de la derivada, cabe destacar que este grupo de estudiantes mostró un interés muy bajo en realizar las actividades didácticas.

Finalmente, el resto de los estudiantes tuvieron una participación muy esporádica en las actividades didácticas, por lo que no hubo elementos para clasificarlos en una trayectoria de aprendizaje

Con respecto a las preguntas de investigación, tenemos los siguientes resultados:

1.- ¿Los participantes conciben la idea de la derivada como el resultado final de un proceso infinito como consecuencia de la intervención didáctica?

Respecto a los alumnos involucrados en la trayectoria de aprendizaje 1: Aprendizaje de la derivada estableciendo una conexión con límite, me parece que la evidencia muestra que efectivamente, los estudiantes pudieron concebir la idea de la derivada como un proceso limite, el cual corresponde a la manipulación de los valores dx en la hoja de cálculo y al acercamiento de los puntos A y B en el applet de Geogebra.

2.- ¿Cómo difieren sus concepciones intuitivas de la derivada antes y después de la intervención didáctica?

En el grupo de la trayectoria de aprendizaje 1: Aprendizaje de la derivada estableciendo una conexión con límite, hubo cambios sustanciales, ya que antes de la exploración tenían una concepción de la derivada con relación a procesos algorítmicos, mientras que después de la intervención didáctica pudieron relacionar la derivada con un proceso límite.

Sin embargo los alumnos de la trayectoria 2: Aprendizaje de la derivada en un nivel algorítmico, no tuvieron cambios en su concepción de la derivada, quedándose al nivel de derivar usando las fórmulas.

3.- ¿Muestran avances en la construcción formal del concepto de la derivada?

Los estudiantes de la trayectoria 1, indudablemente muestran avances, ya que consideran la derivada como el resultado de un límite.

Discusión sobre las aportaciones y limitantes del trabajo

Considero que actividades didácticas como las presentadas en este trabajo, pueden constituir una alternativa – a diferencia de la mayoría de los cursos de cálculo a nivel bachillerato donde el estudio de límite se acota a manipulaciones algebraicas – al estudio de la derivada en su definición formal. Al respecto, este estudio provee un ejemplo de cómo la computadora y en particular el micromundo computacional desarrollado pueden permitir acercarse al concepto de la derivada a través de, como en este caso, transitar entre diversas representaciones. En nuestra investigación se analizaron diversas concepciones que tienen los estudiantes respecto al concepto de derivada y cómo dichas concepciones son susceptibles de cambiar, cuando los estudiantes se involucran con situaciones didácticas en las que deben analizar procesos infinitos.

Sin embargo, es claro que la presente investigación fue un estudio muy limitado; en particular:

- La actividad didáctica que se escogió fue una sola y muy específica; en este caso.
- La investigación se llevó a cabo con un número muy limitado de estudiantes.

En general, sería interesante poder extender este trabajo para reformular las actividades didácticas que realizamos y desarrollar muchas más; por ejemplo, simulaciones físicas. Considero que una de las dificultades en el aprendizaje de la derivada, es de índole esencialmente didáctico, por lo que hace falta encontrar situaciones didácticas que faciliten su comprensión.

REFERENCIAS

Aguilar, A. M., & Riestra, J. A. (2007).*Una introducción algebraica y dinámica al concepto de derivada* (Doctoral dissertation, Tesis de maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México. DF).

Benítez, D. & Bueno A. (2009). Diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas. *El Cálculo y su Enseñanza*, 4, (pp. 33-43)

Benítez, D. & Londoño N. (2009). Situaciones problemáticas en contexto en el aprendizaje del cálculo. *El Cálculo y su Enseñanza*, 4, (pp. 33-43)

Brasiavsky, C. (2006). Diez factores para una educación de calidad para todos en el siglo XXI. REICE: *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 4(2), 84-101.

Casadiego, D. J. M. Educación con calidad.

Chadid, I. C., Alcázar, J. H. P., Thomas, N. M., & Jurado, M. F. S. (2007).*Un paseo finito por lo infinito. El infinito en Matemáticas*. Pontificia Universidad Javeriana.

Clarke, T., Ayres, P., & Sweller, J. (2005). The impact of sequencing and prior knowledge on learning mathematics through spreadsheet applications. *Educational Technology Research and Development*, *53*(3), 15-24.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). "Hypothetical Learning Trajectories". *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2).

Contreras, V. (2006). *"Sistemas numéricos con Logo"*. Tesis de maestría, CINVESTAV-IPN, Departamento de matemática educativa.

Cuevas, C. A. & Pluvinage F., (2013). Investigaciones sobre la enseñanza del cálculo. *El Cálculo y su Enseñanza*, 4, (pp. 57-82)

Delos Santos, A. G., & Thomas, M. (2002a). Teacher perspectives on derivative. In *Mathematics Education in the South Pacific, Proceedings of the 25 annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 211-218).

Delos Santos, A. G., & Thomas, M. O. (2002b). Teaching derivative with graphic calculators: The role of a representational perspective. In *Proceedings of the 7th Asian Technology Conference in Mathematic* (pp. 349-358).

Denvir, B., & Brown, M. (1986). "Understanding Number Concepts in Low Attaining 7-9 Years Old: Part II*". Educational Studies in Mathematics*, 17 (2), 143-164.

Dorier, J. L. (2010). Mathematics in its relation to other disciplines some examples related to economics and physics. In *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education ICME*, 10.

Drier, H. S. (2001). Teaching and learning mathematics with interactive spreadsheets. *School science and mathematics*, *101*(4), 170-179.

Edwards, C. J. (1994).*The historical development of the calculus*. Springer.

Esparza, E. (2005). *"Estimulación de las Relaciones Euclidianas a través de Actividades de Programación en Logo"*. Tesis de maestría, CINVESTAV-IPN, Departamento de Matemática Educativa, México.

Díaz G., J.L. (2009) Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos. *El Cálculo y su Enseñanza, (pp. 91-97).*

Gravemeijer, K. & Doorman, M. (1999) Context problems in realistic mathematics Education: a Calculus course as an example, *Educational Studies in Mathematics* 39, Kluwer Academic Publishers, Netherlands

Haciomeroglu, E. S., Bu, L., Schoen, R. C., & Hohenwarter, M. (2009). Learning to develop mathematics lessons with Geogebra. *MSOR Connections*, *9*(2), 24-26.

Hitt, F. (2003). "Una Reflexión sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes de Programación con Tecnología*". Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10 (2), 213-223.

Hitt, F. (2013) El infinito en matemáticas y el aprendizaje del cálculo: Infinito potencial versus infinito real. *El Cálculo y su Enseñanza*, 4, (pp. 103, 122)

Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2007). Mathematics teacher development with ICT: towards an International Geogebra Institute. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *27*(3), 49-54.

Hoyles, C., & Noss, r. (1987). "Synthetizing Mathematical Conceptions and their Formalization through the Construction of a Logo Mathematics Curriculum*". International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 18 (4), 581-595.

Ibañez Salgado, N. (2001). El contexto interaccional en el aula: una nueva dimensión evaluativa. *Estudios pedagógicos* (Valdivia), (27), 43-53.

Ibáñez, N. (2002). Las emociones en el aula. *Estudios pedagógicos* (Valdivia), (28), 31-45.

Ibañez, Barrientos, F., Delgado, T, Figueroa, A. M., & Geisse, G. (2004). Las emociones en el aula y la calidad de la educación. *Pensamiento Educativo*, (35), 292-310.

Imáz J., C. & Moreno L. (2009). Sobre el desarrollo del cálculo y su enseñanza. *El Cálculo y su Enseñanza, 4, (pp. 99-112).*

Invernizzi, S., & Rinaldi, M. (2002, Julio). A limit–free approach to derivatives: Report on a Classroom Project. ICTM2, 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, Hersonissos, Crete, Greece.

Kllogjeri, P., & Kllogjeri, Q. Geogebra–a very effective tool for teaching mathematical concepts and properties. In *International Geogebra Conference for Southeast Europe Međunarodna GeoGebra Konferencija Novi Sad, 15-16, January, 2011*(p. 90).

Madrid J., C. & Moreno L. (2013). ¡Ojos que no ven, computadoras que mienten! *El Cálculo y su Enseñanza, 4, (pp. 45-55).*

Maffia, D. H. (2005). Conocimiento y emoción. *Arbor*, 181(716), 515-521.

Mojica, D. B., & Millán, N. L. (2009). Situaciones problemáticas en contexto en el aprendizaje del Cálculo. *El Cálculo y su Enseñanza, (pp. 33-43).*

Mojica, D. B., & Tokunaga, A. B. Diagnóstico sobre el reconocimiento de la variación con estudiantes de primer semestre de matemáticas aplicadas.

Moreno, L., & Rojano, T. (1998). "Las nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas y Ciencias". *Avance y Perspectiva*, 17, 175-181.

Nava, A. & Reyes A. (2009). Carencias y conocimientos acerca de precálculo y cálculo de un grupo de profesores de bachillerato. *El Cálculo y su Enseñanza*, 4, (pp. 127-136)

Niess, M. L. (2005). Scaffolding Math Learning with Spreadsheets. Learning Connections--Mathematics. *Learning & Leading with Technology*, *32*(5), 24.

Papert, S. (1981). *"Desafío a la Mente".* (L. Espinosa de Matheu, Trad.) Buenos Aires: Galápago.

Papert, S., & Harel, I. (1991). "Situating Constructionism". En S. Papert, & I. Harel, *"Constructionism".* Ablex Publishing Corporation.

Pereira, M. L. N. (2009). Motivación: Perspectivas teóricas y algunas consideraciones de su importancia en el ámbito educativo. *Revista Educación*, 33(2), 153-170.

Pintrich, P. R., Schunk, D. H., & Luque, M. L. (2006).*Motivación en contextos educativos: teoría, investigación y aplicaciones*. Pearson Prentice Hall.

Rubí, G., Moreno M., Pou S., Jordan A. (2010) Problemática persistente en el aprendizaje del cálculo. Caso de la Facultad de Ciencias, UABC. *El Cálculo y su Enseñanza*, 2, (pp. 1-29)

Sacristán, A. I. (2000). *"Investigación del aprendizaje matemático mediante micromundos computacionales".* Torreón, Coahuila.

Sacristán, A. I., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., & Perrusquía, E. (2010). The Influence and Shaping of Digital Technologies on the Learning–and Learning Trajectories–of Mathematical Concepts. In *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (pp. 179-226). Springer US.

Silvero-Miramön, M. (2007). Estrés y desmotivación docente: el síndrome del profesor quemado" en educación secundaria

Simon, M. A. (1995). "Reconstructing Mathematics Pedagogy from Constructivist Perspective". *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 114-145.

Segarra, D., & Gayan, J. (1985). *"Logo para maestros. El ordenador en la escuela: Propuesta de uso"*. Gustavo Gili S.A.

Tall, D. (2010). A sensible approach to the calculus. In *Plenary at The National and International Meeting on the Teaching of Calculus*. *El Cálculo y su Enseñanza, (pp. 33-43).*

Tapia, J. A. (1998), *Motivar para el aprendizaje*. Edeb

Trouche, L. (2009), Recursos para procesar, aprender, enseñar el cálculo: nuevos modos de concepción y difusión, *Tercer Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo*. Noviembre de 2009, Saltillo.

Valero Díaz, A. (2007). La risa, el humor y las emociones.

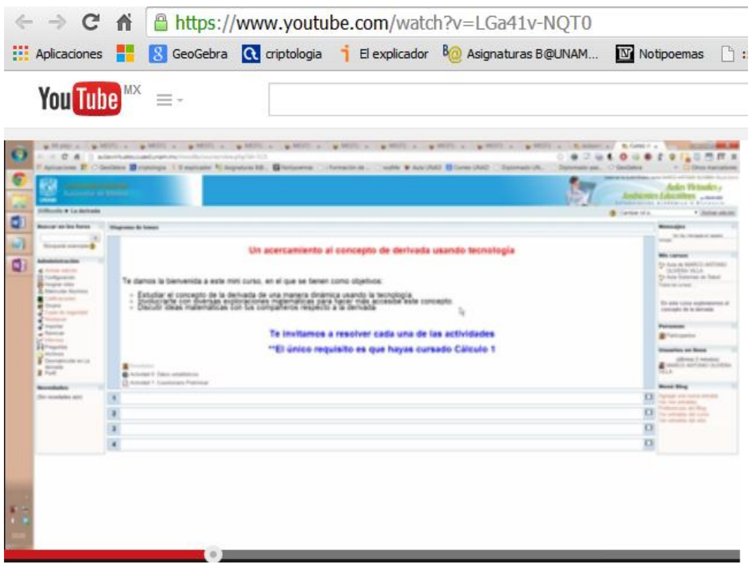
Vivier, L. (2009) La noción de tangente en la educación media superior. *El Cálculo y su Enseñanza*, 4, (pp. 1-29)

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *8*, (pp. 13-31).

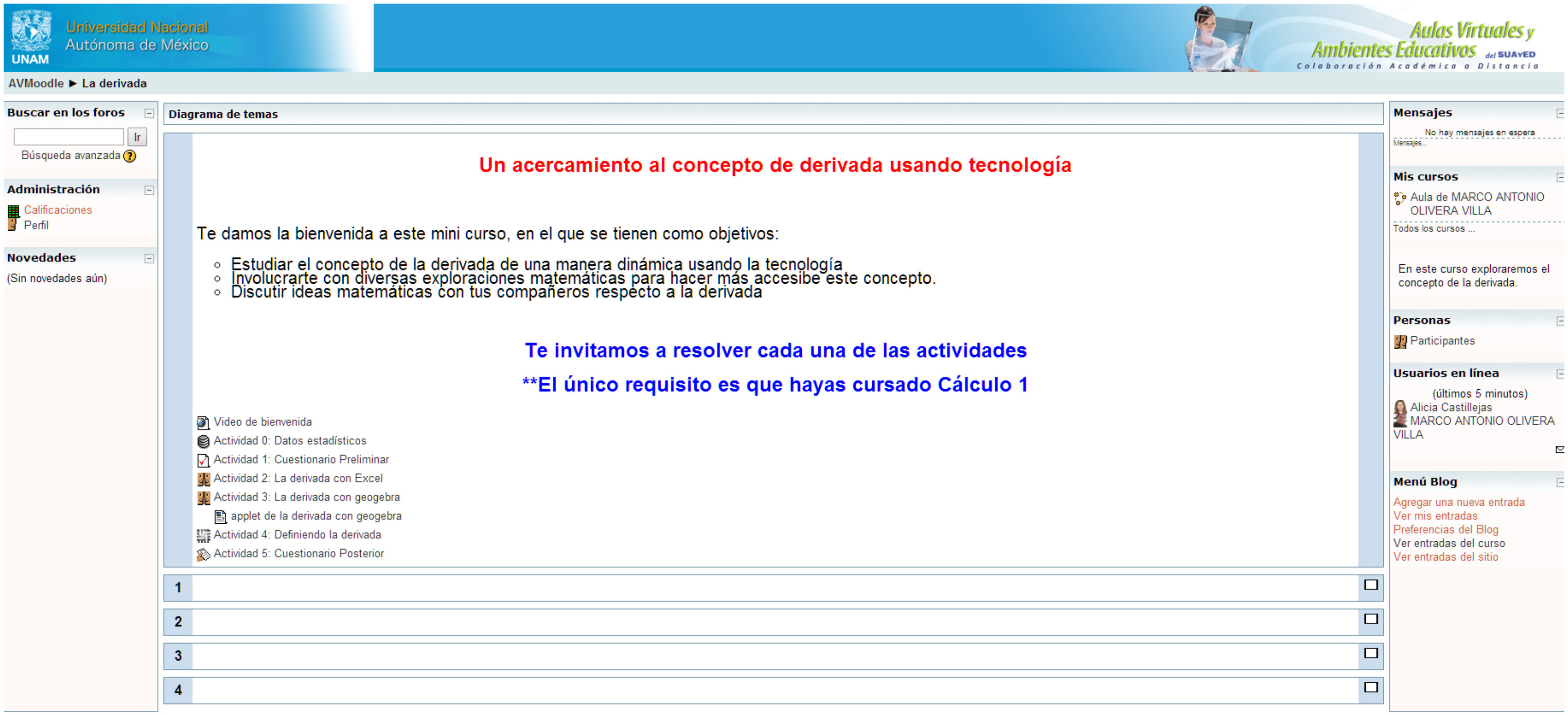
ANEXO A: INTERFAZ DE LA PLATAFORMA DE APRENDIZAJE

La interfaz de la Plataforma de Aprendizaje consta de un video de bienvenida, un menú central de navegación con las actividades didácticas y diversas herramientas de comunicación, tales como blog y mensajero.

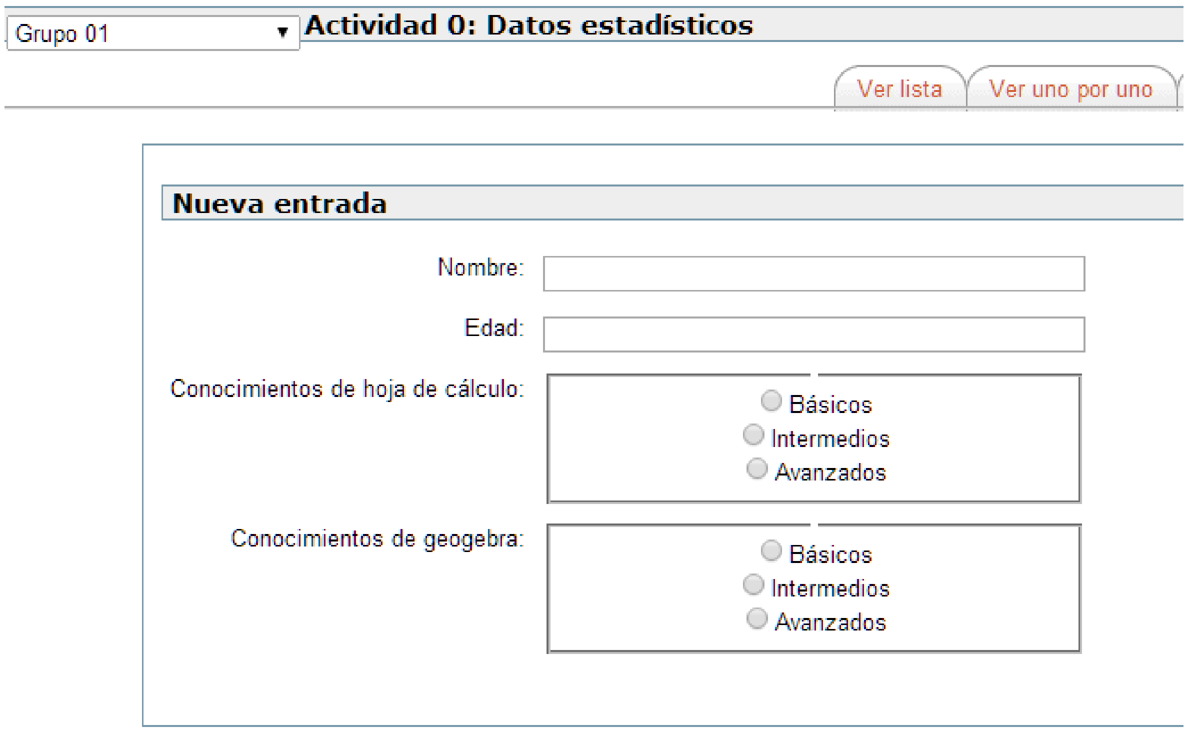
A.1 Video de bienvenida a la Plataforma de Aprendizaje



A.2 Menú central de navegación en la Plataforma de Aprendizaje



ANEXO B: Encuesta sobre datos estadísticos


Grupo 01 **Actividad 0: Datos estadísticos**

Ver lista | Ver uno por uno

Nueva entrada

Nombre:

Edad:

Conocimientos de hoja de cálculo: Básicos / Intermedios / Avanzados

Conocimientos de geogebra: Básicos / Intermedios / Avanzados

ANEXO C: Cuestionario Preliminar

1 ¿Qué entiendes por la derivada de una función?

Puntos: --/1

2 ¿Cuál es la definición de la derivada?

Puntos: --/1

3 ¿Cuál es la interpretación física de la derivada?

Puntos: --/1

4 ¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada?

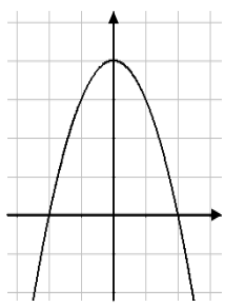
Puntos: --/1

5 ¿Todas las funciones tienen derivada? Explicar

Puntos: --/1

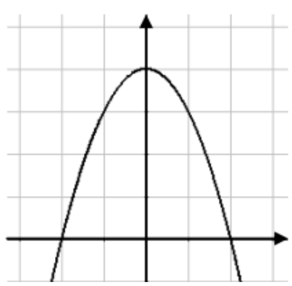
6 Dada la siguiente figura, en donde cada cuadro representa una unidad: ¿En qué intervalo es positiva la derivada? ¿En qué intervalo es negativa la derivada?

Puntos: --/1



7 Dada la siguiente figura, en donde cada cuadro representa una unidad: ¿Para que valor de x, la derivada vale 0?

Puntos: --/1



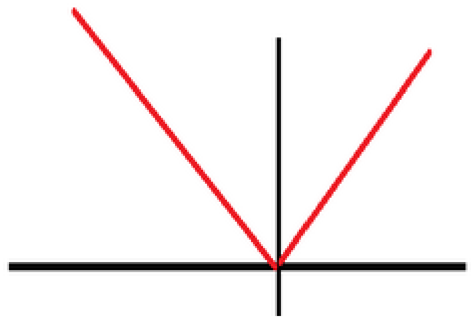
8 ¿Cuál es la relación entre límite y derivada?

Puntos: --/1

9

Puntos: --/1

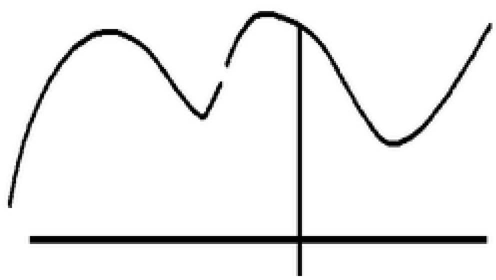
Dada la siguiente figura, en donde cada cuadro representa una unidad:
¿Qué ocurre con la derivada en x=0?



10

Puntos: --/1

Dada la siguiente figura, en donde cada cuadro representa una unidad:
¿Existe la derivada para cualquier punto?, Explicar.



Vista previa del cuestionario

Comenzar de nuevo

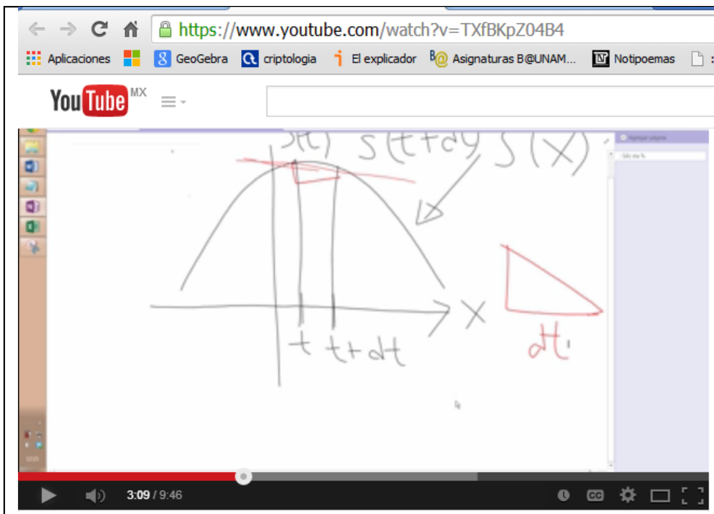
ANEXO D: ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

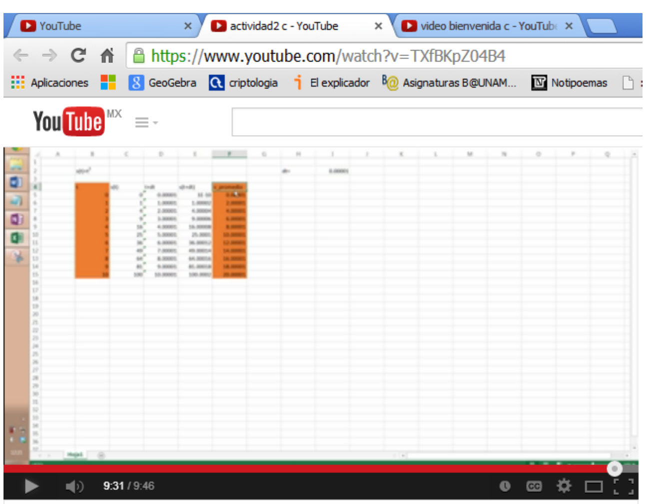
D.1 Actividad 2: La Derivada con Excel

Esta actividad consta de un video y un foro de discusión.

D.1.1 Video sobre el uso de Excel para explorar la derivada

Se presenta un video sobre la manera de usar Excel para explorar la derivada.





D.1.2 Foro de Discusión sobre la derivada usando Excel

Posteriormente en el foro de discusión se hacen preguntas de reflexión acerca de la derivada, usando Excel como instrumento de exploración.

UNAM Universidad Nacional Autónoma de México

AVMoodle ► La derivada ► Foros ► Actividad 2: La derivada con Excel ► La derivada con Excel

La derivada con Excel
de MARCO ANTONIO OLIVERA VILLA - miércoles, 23 de julio de 2014, 18:39

La derivada con Excel

Vamos a explorar el significado de la velocidad promedio, cuando tenemos una función que expresa la distancia recorrida.

Para esta actividad debes revisar el sigiente video:

Dar click en video

Después, contesta las siguientes preguntas, con base en la función cuadrática: f(t)=t2

1) Completa la siguiente tabla

t	f ´(t)={s(t+dt)-s(t)}/dt
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

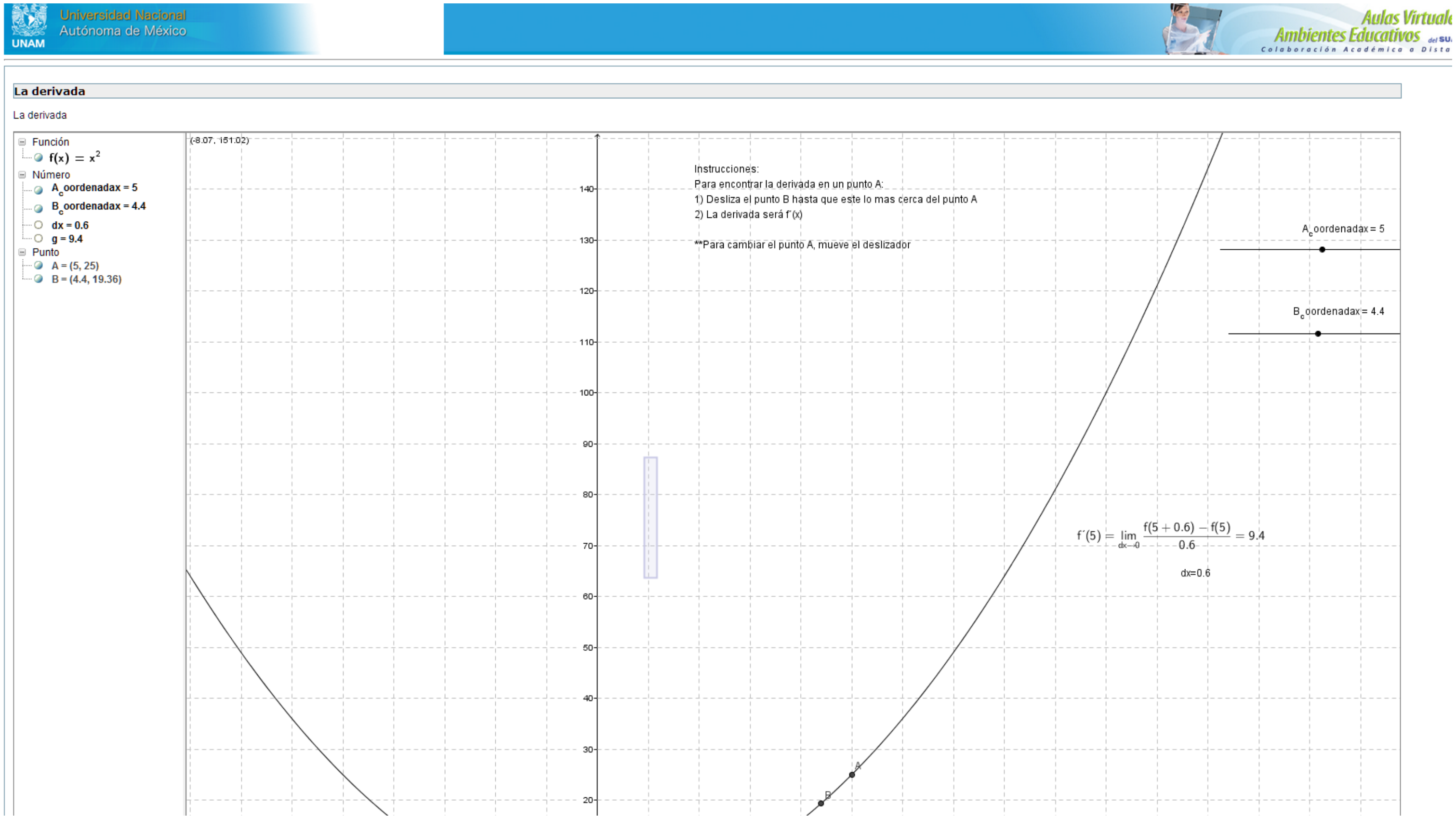
2) ¿Qué ocurre a medida que dt se hace cada vez más pequeño?

3) ¿Cuál sería una fórmula que relacionara t con f ´(t)?

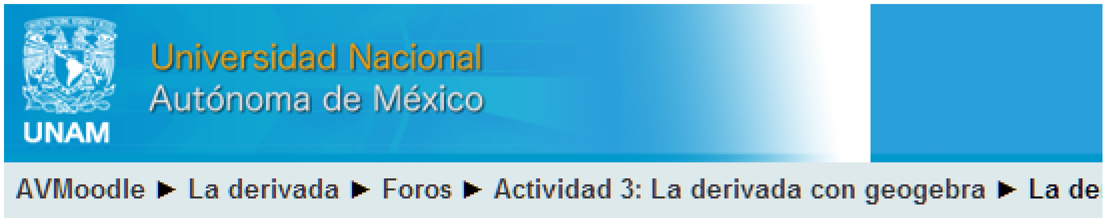
D.2 Actividad 3: La Derivada con Geogebra

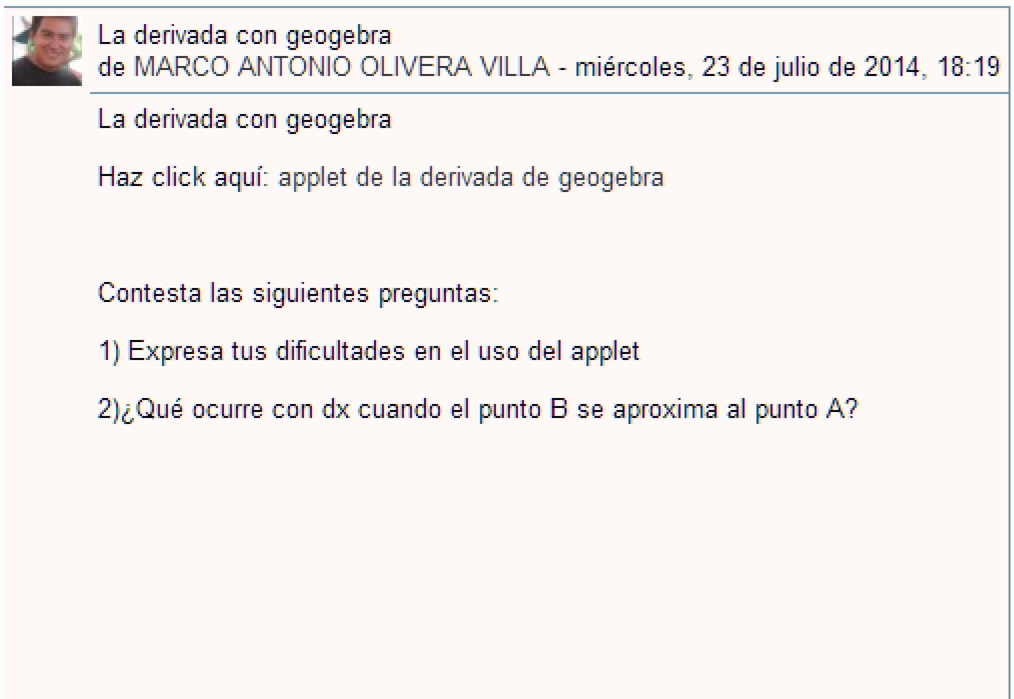
Esta actividad consta de un applet para explorar la derivada y un foro de discusión.

D.2.1 Applet en Geogebra para explorar la derivada

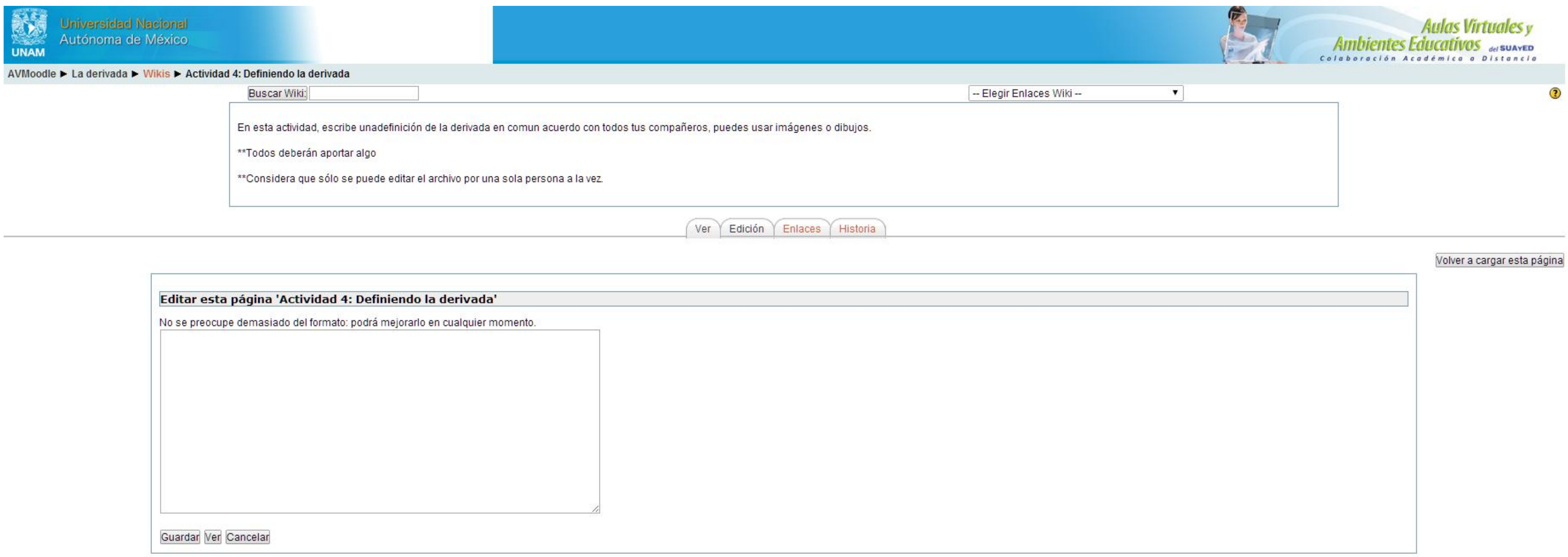


D.2.2 Foro de Discusión de la derivada con Geogebra





D.3 Actividad 4: Definiendo la Derivada



ANEXO E: Cuestionario Posterior