



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Estimación del umbral de
percolación en modelos de
redes de fracturas discretas en
medios porosos naturalmente
fracturados

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MATEMÁTICA

P R E S E N T A :
CARLA DANIELLA AYALA GARCÍA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. MARTIN ALBERTO DÍAZ VIERA



México, D.F. 2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Datos del jurado

1. Datos del alumno

Ayala
García
Carla Daniella
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
305552170

2. Datos del tutor

Dr.
Martín Alberto
Díaz
Viera

3. Datos del sinodal 1

Dra.
Ana
Meda
Guardiola

4. Datos del sinodal 2

Dra.
Ursula Xiomara
Iturrarán
Viveros

5. Datos del sinodal 3

Dr.
Fernando
Baltazar
Larios

6. Datos del sinodal 4

Dra.
Graciela del Socorro
Herrera
Zamarrón

7. Datos del trabajo escrito.

Estimación del umbral de percolación en modelos de redes de fracturas discretas en medios porosos naturalmente fracturados.

193 p.

2014

Dedicatoria

Mamá, papá, Bonipollito y Panchis, Carlitos y José, Tía Jackie y Tío Rafa, Tía Nena, Carmen, Rolando (Beto) y Ernesto. Este trabajo está dedicado con todo mi cariño para ustedes, que creyeron en mí siempre, incluso cuando yo más dudé, y que me acompañaron incondicionalmente y en todos los sentidos a lo largo de este camino que empezó hace años en el patio de la secundaria. Sin su ayuda para sortear los obstáculos que enfrenté cumpliendo el sueño loco de volverme Matemática, este trabajo no habría sido posible. No puedo menos que responder a su confianza y apoyo con mi mayor esfuerzo en los retos por venir.

Press on! Nothing in the world can take the place of persistence. Talent will not; nothing is more common than unsuccessful men with talent. Genius will not; unrewarded genius is almost a proverb. Education will not; the world is full of educated derelicts. Persistence and determination alone are omnipotent.

- J. Calvin Coolidge

Querida familia: ustedes son mi persistencia y mi determinación.

Agradecimientos

Muchas gracias mamá y papá, por regalarme todos los libros que quise, por el juego de química, el microscopio y el telescopio. Muchas gracias por enseñarme que ningún sueño es demasiado grande y ninguna meta inalcanzable, por respetar y apoyar sin condiciones mi vocación. Gracias Marijosé por hacer menos tristes las lágrimas y más alegres las risas, gracias por tu lealtad y por ser la mejor cómplice que cualquier hermana pudiera desear. Los amo con todo mi corazón.

Gracias Félix por tu amor y apoyo constante. Gracias por acompañarme en mis tropiezos y mis éxitos, por motivarme desde el primer día de clases hasta el día de hoy, que escribo los agradecimientos de mi tesis terminada. Gracias por pasar conmigo las noches en vela que este trabajo requirió, por darme lata cuando era necesario y por hacer que me olvidara del mundo cuando me hacía falta.

Muchas gracias José por caminar conmigo desde el momento más difícil hasta el día más feliz. He sido muy afortunada de haber contado contigo en el enfrentamiento constante con mis dudas y temores. Bien dicen que las batallas más grandes se libran contra uno mismo, y he aprendido que no hay por qué librarlas solo.

Gracias Fico por sacarme de todos los embrollos tecnológicos que me metí y por reciclarme múltiples veces el sistema operativo. Gracias Carlitos por tu apoyo indispensable para la adquisición de la máquina donde escribí esta tesis. Gracias tía Jackie y tío Rafa por proporcionarme los recursos para adquirir el software necesario. Soy afortunada de contar con ustedes.

Estoy especialmente agradecida con mi tutor, el Doctor Martín Díaz, por su disposición, su disciplina y su solidaridad. Sus propuestas hicieron que este trabajo fuera una experiencia positiva de mucho crecimiento y aprendizaje, que disfruté mucho. Su amplia orientación académica y profesional han sido un faro en el mar escabroso de posibilidades en que tantos estudiantes como yo zozobran. Muchas gracias su apoyo incondicional en mis solicitudes al posgrado, estoy segura de que su carta fue un factor determinante en mi admisión. He sido afortunada de haberlo encontrado y aprender de usted. Todavía hay mucho camino por recorrer y espero que podamos trabajar juntos nuevamete.

Gracias también a mis sinodales, el Doctor Fernando Baltazar, la Doctora Úrsula Iturrarán, la Doctora Ana Meda y la Doctora Graciela Herrera, por tomarse el tiempo de revisar y corregir este trabajo y formar parte del trayecto final para convertirme en Matemática. Me siento muy agradecida, de manera especial, con Úrsula y Fernando cuyos cursos de Análisis Numérico y Simulación Estocástica me ayudaron a elegir mi vocación dentro de esta pasión tan grande. Gracias por compartir su conocimiento conmigo y por su apoyo incondicional para el posgrado. He aprendido que es la parte humana y personal de las solicitudes la que hace que un estudiante se distinga entre cientos de candidatos con excelentes promedios e historiales. Gracias por ayudarme a alcanzar esta enorme meta.

Muchas gracias Víctor, Francisco, Eduardo, Abel, Doctor Ricardo, Doctor Arturo y todos los miembros del Grupo de Simulación Estocástica Espacial que se sentaron a discutir mi trabajo conmigo tantos miércoles, y que compartieron conmigo su experiencia y conocimiento a lo largo de todo este trabajo. Gracias en especial a Víctor y Francisco por su valioso apoyo en la implementación en R, a Abel por su paciencia e interés al discutir este trabajo y a Eduardo por su apoyo constante en todos los trámites. He sido afortunada de pertenecer a un grupo donde el compañerismo y la solidaridad son la regla.

Al Instituto Mexicano del Petróleo, muchas gracias por proporcionarme el espacio y los recursos necesarios para la elaboración de este trabajo, que me permitirá titularme, y por tener a bien otorgarme los recursos para seguir adelante con el posgrado. Gracias Maestra Leticia Mojica, por su apoyo y compañía en el demandante proceso del PCTRES.

Gracias a todos y cada uno de mis profesores y ayudantes de la Facultad de Ciencias, por ayudarme a convertirme en Matemática y por su disposición para compartir el conocimiento. Cada paso que doy hacia adelante lleva su trabajo. Muchas gracias a Paco, Bruno, Lore y Lalo y a todos mis compañeros, junto a ustedes aprendí más y mejor. Gracias en especial a Fer y a Julio por todo su apoyo cuando me dio varicela a medio semestre, a media tesis y a punto de presentar un examen de admisión. Hicieron de un mal momento una lección motivadora sobre el compañerismo en nuestra Facultad.

Resumen

La motivación fundamental de este trabajo fue la construcción de modelos estocásticos de redes de fracturas discretas a través de la aplicación de una metodología general de modelado matemático y computacional.

Para la construcción de estos modelos resulta fundamental el uso de elementos de geometría estocástica, así como de teoría de percolación. Con este fin en mente se hace una revisión de la teoría pertinente de estas dos áreas, así como de los algoritmos de simulación estocástica necesarios para implementar los modelos en el lenguaje de programación *R*.

En particular, se emplean modelos booleanos y se estiman los umbrales de percolación para los modelos planteados en términos de los parámetros empleados. En general, la estimación de estos umbrales es intratable desde el punto de vista analítico, por lo cual se emplean aproximaciones numéricas.

Los experimentos numéricos arrojaron un comportamiento consistente con el planteamiento matemático de los modelos. Los umbrales de percolación se estimaron empleando estos resultados y se compararon desde varias perspectivas. Se observó consistencia cualitativa entre los resultados de este trabajo y aquellos de trabajos similares publicados. Finalmente, se obtuvieron conclusiones sobre el comportamiento de percolación de los modelos respecto a sus parámetros, así como una jerarquía de la predominancia de estos parámetros y su interacción entre sí.

Los resultados obtenidos sobre el comportamiento de percolación de los modelos sientan precedente metodológico para el estudio de la predominancia de los parámetros y de la dirección de percolación.

Este trabajo sienta las bases para la extensión de los modelos desarrollados a un mayor número de dimensiones, así como para su aplicación a casos menos idealizados que surgen en el contexto de yacimientos naturalmente fracturados.

Abstract

The fundamental motivation behind this work was the construction of stochastic models of discrete fracture networks through the application of a general mathematical and computational methodology.

The use of stochastic geometry as well as percolation theory is fundamental for the construction of these models. To this end, the relevant theory of these mathematical topics was reviewed, as well as the stochastic simulation algorithms necessary for the implementation of these models in the *R* programming language.

In particular, boolean models are employed and the models' percolation thresholds are estimated in terms of the involved parameters. Generally speaking, the analytical estimation of these thresholds is intractable so numerical approximations are used.

The numerical experiments behaved accordingly to the mathematical approach of the models. The percolation thresholds were estimated employing these results and were compared from different perspectives. This work was qualitatively consistent with similar published papers. Finally, conclusions regarding the percolation behaviour of the models in terms of their parameters were obtained, as well as a hierarchy of the dominance of the parameters and the interaction among them.

The results obtained regarding the percolation behaviour of the models will serve as methodological background for the study of parameter hierarchy and percolation direction.

This thesis sets the groundwork for the extension of the developed models to higher dimensions, as well as their application to less idealized cases that come up in the context of naturally fractured reservoirs.

Índice general

Dedicatoria	II
Agradecimientos	V
Resumen	VI
Abstract	VIII
Índice general	XII
Lista de figuras	XVI
Lista de cuadros	XVII
Introducción	XIX
1. Introducción a la teoría de percolación	1
1.1. Nociones de percolación discreta	2
1.2. Algunas aplicaciones a medios porosos	9
1.2.1. Procesos diagenéticos	9
1.2.2. Porosimetría de mercurio	10
1.2.3. Procesos de adsorción-desorción	11
1.2.4. Fracturas y fallas en rocas heterogéneas	11
1.2.5. Modelos de percolación para procesos de gasificación en medios porosos	11
1.2.6. Desactivación de catalizadores	12
2. Elementos de geometría estocástica	13
2.1. Definición de modelo estocástico	13
2.2. Funciones aleatorias	14
2.3. Conjuntos aleatorios	15
2.3.1. Relación entre conjuntos y funciones aleatorias	19

2.4.	Procesos puntuales	20
2.4.1.	Proceso puntual de Poisson	23
3.	Revisión de modelos de percolación continua	27
3.1.	Modelos booleanos	27
3.1.1.	Construcción del modelo booleano	30
3.1.2.	El funcional que evita del modelo booleano	31
3.1.3.	Propiedades de estabilidad	32
3.1.4.	Simulación del modelo booleano	34
3.1.5.	El caso estacionario	39
3.2.	Modelos de conexión aleatoria	41
3.2.1.	Construcción del modelo de conexión aleatoria	42
3.2.2.	Unicidad de la componente no acotada	46
3.3.	Otros modelos de percolación continua	48
3.3.1.	Modelo de percolación fractal	48
3.3.2.	Modelos con dependencia	51
3.3.3.	Árboles estacionarios	52
3.3.4.	Modelo de palillos de Poisson	53
4.	Modelos estocásticos de redes de fracturas discretas	55
4.1.	Metodología aplicada al desarrollo de los modelos	55
4.2.	Modelo básico	57
4.2.1.	Modelo conceptual	57
4.2.2.	Modelo matemático básico	58
4.2.3.	Percolación en el modelo básico	60
4.2.4.	Modelo computacional básico	60
4.3.	Modelo de dos familias	63
4.3.1.	Modelo conceptual	63
4.3.2.	Modelo matemático de dos familias	64
4.3.3.	Percolación en el modelo de dos familias	66
4.3.4.	Modelo computacional de dos familias	66
4.4.	Modelo microfracturado	68
4.4.1.	Modelo conceptual del modelo microfracturado	68
4.4.2.	Modelo matemático microfracturado	70
4.4.3.	Percolación en el modelo microfracturado	70
4.4.4.	Modelo computacional microfracturado	71
4.5.	Modelo numérico general	71
5.	Experimentos numéricos y discusión de resultados	73
5.1.	Objetivos	73
5.2.	Criterios generales para la selección de parámetros	75
5.3.	Resultados para el modelo básico	76
5.3.1.	Elección de parámetros de simulación	76

5.3.2.	Funciones de percolación en términos de κ	77
5.3.3.	Funciones de percolación en términos de μ	79
5.3.4.	Criterios alternativos de conexidad	81
5.3.5.	Umbrales estimados de percolación	85
5.3.6.	Ejemplos ilustrativos de cada caso	93
5.4.	Resultados para el modelo de dos familias	94
5.4.1.	Elección de parámetros de simulación	94
5.4.2.	Funciones de percolación: caso conjugado ($\mu_1 = \frac{\pi}{12}, \mu_2 = -\frac{\pi}{12}$)	95
5.4.3.	Funciones de percolación: caso perpendicular ($\mu_1 = \frac{\pi}{12}, \mu_2 = \frac{7\pi}{12}$)	96
5.4.4.	Puntos de articulación	97
5.4.5.	Umbrales estimados de percolación	98
5.4.6.	Observaciones	99
5.4.7.	Ejemplos ilustrativos de cada caso	101
5.5.	Resultados para el modelo microfracturado	102
5.5.1.	Elección de parámetros de simulación	102
5.5.2.	Funciones de percolación: caso conjugado ($\mu_1 = \frac{\pi}{12}, \mu_2 = -\frac{\pi}{12}$)	103
5.5.3.	Funciones de percolación: caso perpendicular ($\mu_1 = \frac{\pi}{12}, \mu_2 = \frac{7\pi}{12}$)	104
5.5.4.	Puntos de articulación	105
5.5.5.	Umbrales estimados de percolación	106
5.5.6.	Observaciones	107
5.5.7.	Ejemplos ilustrativos de cada caso	110
5.6.	Discusión general de los resultados obtenidos	111
5.6.1.	Parámetros predominantes respecto a la percolación	111
5.6.2.	Obstáculos enfrentados	111
5.6.3.	Criterios alternativos	112
5.6.4.	Comparación con otros trabajos	113
5.6.5.	Sobre la unicidad del cluster que percola	114
6.	Conclusiones	115
A.	Estereología	117
A.1.	Propiedades y métodos	117
A.2.	Relaciones fundamentales	119
A.3.	Medidas estereológicas clásicas	119
A.3.1.	Fracción de área a partir de puntos	120
A.3.2.	Fracción de volumen a partir de puntos	121
A.3.3.	Perímetro de fases en dos dimensiones, a partir de intersecciones de línea	122
A.4.	Muestreo en estereología	123
A.5.	Áreas de aplicación y limitaciones	124
B.	Nociones de teoría de gráficas	125

C. Construcción del proceso puntual de Poisson	129
C.1. Primer paso: Aproximación mediante bolas	129
C.2. Segundo paso: dos cuerpos aleatorios	131
C.3. Tercer paso: m cuerpos aleatorios	131
C.4. Comentarios finales	131
D. La densidad crítica en modelos de conexión aleatoria	133
E. Modelos dirigidos por procesos generales	137
E.1. Descomposición ergódica	137
E.2. Nociones básicas de cobertura	141
E.3. Clasificación de las componentes no acotadas en modelos booleanos	143
E.4. Unicidad en modelos booleanos	145
E.5. Unicidad en modelos de conexión aleatoria	147
E.6. Construcción de procesos ergódicos y estacionarios	148
F. Códigos de R	153
F.1. Función de orientación	153
F.2. Código para determinar si dos fracturas se intersectan	154
F.3. Código para calcular la matriz de incidencias	154
F.4. Códigos para simular modelos con una familia	155
F.4.1. Código base	155
F.4.2. Simulación múltiple	158
F.5. Códigos para simular modelos de dos familias	160
F.5.1. Código base	160
F.5.2. Simulación múltiple	165
Referencias	169

Lista de figuras

1.1.	\mathbb{Z}^2	2
1.2.	Realización de un modelo de percolación discreta en \mathbb{Z}^2 . El cluster que percola se muestra en azul.	2
2.1.	Realización de una función aleatoria, realizada por J. Méndez y M. Díaz en <i>Geostatistical modeling of clay spatial distribution in siliciclastic rock samples using the plurigaussian simulation method</i> [24].	15
2.2.	Conjunto aleatorio generado a partir de conjuntos de nivel de la función aleatoria mostrada en la Figura 2.2, obtenido por J. Méndez y M. Díaz en <i>Geostatistical modeling of clay spatial distribution in siliciclastic rock samples using the plurigaussian simulation method</i>	15
2.3.	Concepto de proceso puntual.	20
2.4.	Proceso puntual de Poisson, donde $X(A_i)$ es una variable aleatoria Poisson de parámetro $\lambda\mathcal{L}(A_i)$	23
3.1.	Construcción del modelo de percolación fractal, primeros cuatro pasos.	48
3.2.	Modelo de percolación fractal en estado supercrítico.	49
3.3.	RCM con dependencia.	51
3.4.	Construcción del árbol estacionario.	52
3.5.	Árbol estacionario límite.	52
3.6.	Modelo de palillos de Poisson con dirección preferencial.	53
4.1.	Red aleatoria de fracturas discretas en dos dimensiones. La red se encuentra por debajo del umbral de percolación.	57
4.2.	Red aleatoria de fracturas discretas en dos dimensiones. Parámetros de simulación: $\lambda = 1200$, $l = 0.07$, $\kappa = 0.1$, $\mu = \frac{\pi}{4}$. La red se encuentra en estado supercrítico, percolando horizontal y verticalmente. El cluster que percola se muestra en color naranja.	60
4.3.	Dos familias de fracturas superpuestas, en el caso conjugado.	63
4.4.	Dos familias de fracturas superpuestas, en el caso perpendicular.	63

4.5. Red subcrítica de fracturas (primera familia). Parámetros: $\lambda_1 = 250$, $l = 0.08$, $\kappa = 8$, $\mu = -\frac{\pi}{5}$	66
4.6. Red subcrítica de fracturas (segunda familia). Parámetros: $\lambda_1 = 350$, $l = 0.08$, $\kappa = 8$, $\mu = \frac{\pi}{5}$	66
4.7. Red supercrítica de fracturas (familia superpuesta). El cluster que percola se muestra en naranja.	66
4.8. Fracturas en microfracturado, en el caso conjugado.	68
4.9. Fracturas en microfracturado, en el caso perpendicular.	68
5.1. Funciones estimadas de percolación horizontal (línea punteada) y vertical (línea sólida) para el modelo básico, comparadas en términos de κ	77
5.2. Funciones estimadas de percolación horizontal (línea punteada) y vertical (línea sólida) para el modelo básico, comparadas en términos de μ	79
5.3. Funciones estimadas de percolación para $\mu = \frac{\pi}{12}$. Se muestran las curvas de número de puntos de percolación (●) y tamaño relativo (●) del cluster que percola horizontalmente (línea punteada o verticalmente (línea sólida)). Se presentan, de arriba hacia abajo, los casos $\kappa = 0.1$ (●), $\kappa = 1$ (●) y $\kappa = 10$ (●).	81
5.4. Funciones estimadas de percolación para $\mu = \frac{\pi}{12}$. Se superponen las curvas de número de puntos de percolación (●) y tamaño relativo (●) del cluster que percola horizontalmente (línea punteada o verticalmente (línea sólida)). Se presentan, de arriba hacia abajo, los casos $\kappa = 0.1$ (●), $\kappa = 1$ (●) y $\kappa = 10$ (●).	82
5.5. Funciones estimadas de percolación para $\mu = \frac{\pi}{12}$. Se superponen las curvas de número de puntos de percolación (●) y tamaño relativo (●) del cluster que percola horizontalmente (línea punteada o verticalmente (línea sólida)). Se presentan, de arriba hacia abajo, los casos $\kappa = 0.1$ (●), $\kappa = 1$ (●) y $\kappa = 10$ (●).	83
5.6. Estimación de los umbrales de percolación para $\mu = \frac{\pi}{12}$, sombreados en el color correspondiente. Se presentan, de arriba hacia abajo, los casos $\kappa = 0.1$, $\kappa = 1$ y $\kappa = 10$	86
5.7. Estimación de los umbrales de percolación para $\mu = \frac{\pi}{4}$, sombreados en el color correspondiente. Se presentan, de arriba hacia abajo, los casos $\kappa = 0.1$, $\kappa = 1$ y $\kappa = 10$	87
5.8. Estimación de los umbrales de percolación para $\mu = \frac{\pi}{12}$, sombreados en el color correspondiente. Se presentan, de arriba hacia abajo, los casos $\kappa = 0.1$, $\kappa = 1$ y $\kappa = 10$	88
5.9. Intervalos del umbral de percolación horizontal (arriba) y vertical (abajo), en términos de λ contra μ para poder comparar su comportamiento respecto a κ	91
5.10. Intervalos del umbral de percolación horizontal (arriba) y vertical (abajo), en términos de λ contra κ para poder comparar su comportamiento respecto a μ	91
5.11. Ejemplos representativos del redes de fracturas discretas correspondientes al modelo básico. EN todos los casos se tiene $\lambda = 200$	93
5.12. Estimación de las funciones de percolación del el caso conjugado del modelo de dos familias, para $\kappa \in 0.01, 1, 10$, con la percolación horizontal (●) a la derecha y la vertical (●) a la izquierda. Se muestran curvas (●) al nivel 0.05 y 0.95 de probabilidad.	95

5.13.	Estimación de las funciones de percolación del el caso perpendicular del modelo de dos familias, para $\kappa \in 0.01, 1, 10$, con la percolación horizontal (●) a la derecha y la vertical (●) a la izquierda. Se muestran curvas (●) al nivel 0.05 y 0.95 de probabilidad.	96
5.14.	Número de puntos de articulación del el modelo de dos familias. Se presentan los resultados para $\kappa \in \{0.01, 1, 10\}$ en orden descendiente. La columna izquierda es corresponde al caso conjugado y la derecha el caso perpendicular.	97
5.15.	Estimación y comparación de los umbrales de percolación horizontal (●) y vertical (●) para el caso conjugado (derecha) y el perpendicular (izquierda) del modelo de dos familias. Se muestran curvas de nivel (●) al 75 % (línea punteada) y 95 % (línea sólida) del máximo de número de puntos de articulación.	98
5.16.	Redes de fracturas para el caso perpendicular (izquierda) y simétrico (derecha) del modelo de dos familias. En todos los casos se tiene $\lambda_1 = 250$ y $\lambda_2 = 150$	101
5.17.	Estimación de las funciones de percolación del el caso conjugado del modelo microfracturado, para $\kappa \in 0.01, 1, 10$, con la percolación horizontal (●) a la derecha y la vertical (●) a la izquierda. Se muestran curvas (●) al nivel 0.05 y 0.95 de probabilidad.	103
5.18.	Estimación de las funciones de percolación para el caso perpendicular del modelo microfracturado, para $\kappa \in 0.01, 1, 10$, con la percolación horizontal (●) a la derecha y la vertical (●) a la izquierda. Se muestran curvas (●) al nivel 0.05 y 0.95 de probabilidad.	104
5.19.	Número de puntos de articulación del el modelo de microfracturado. Se presentan los resultados para $\kappa \in \{0.01, 1, 10\}$ en orden descendiente. La columna izquierda es corresponde al caso conjugado y la derecha el caso perpendicular.	105
5.20.	Estimación y comparación de los umbrales de percolación horizontal (●) y vertical (●) para el caso conjugado (derecha) y el perpendicular (izquierda) del modelo microfracturado. Se muestran curvas de nivel (●) al 75 % (línea punteada) y 95 % (línea sólida) del máximo de número de puntos de articulación.	106
5.21.	Redes de fracturas para el caso perpendicular (izquierda) y simétrico (derecha) del modelo microfracturado. En todos los casos se tiene $\lambda_1 = 250$ y $\lambda_2 = 150$	110
5.22.	Realización que aparenta presentar dos clusters de percolación.	114
A.1.	Ejemplo de sonda que consiste de un plano. Imagen tomada del libro <i>Practical Stereology</i> de J. Russ, página 3 de la segunda edición.	117
A.2.	Estimación del fea de una hoja. Hay 39 puntos por unidad de área ($0.5in^2$), así que el área estimada es de $9.75in^2$. Contando los pixeles se obtienen $9.42in^2$. Imagen tomada del libro <i>Practical Stereology</i> de J. Russ, página 17 de la segunda edición.	119
A.3.	Fracción de área a partir de puntos. Imagen tomada del libro <i>Practical Stereology</i> de J. Russ, página 46 de la segunda edición.	120
A.4.	Fracción de volumen V_V a partir de puntos. Imagen tomada del libro <i>Practical Stereology</i> de J. Russ, página 25 de la segunda edición.	121
A.5.	Estimación del perímetro de una fase bidimensional a partir de intersecciones Imagen tomada del libro <i>Practical Stereology</i> de J. Russ, página 57 de la segunda edición.	122
A.6.	Perímetro de una fase en dos dimensiones, a partir de intersecciones de línea <i>Practical Stereology</i> de J. Russ, página 58 de la segunda edición.	123

B.1. Representación de una red de fracturas como gráfica. 126



Lista de cuadros

5.1. Estimación preliminar de las probabilidades de percolación para el modelo básico.	76
5.2. Umbrales estimados de percolación para el modelo básico. El número de puntos de articulación al momento de alcanzar el umbral se muestra bajo cada intervalo, normalizado respecto al máximo correspondiente.	90

Introducción

Los medios fracturados han sido objeto de estudio intensivo debido a la importancia práctica de comprender los procesos de flujo en tales sistemas. Se han empleado numerosas estrategias para conceptualizar y formular modelos matemáticos capaces de describir las propiedades geométricas de un medio fracturado, así como simular los fenómenos de transporte que ocurren dentro del medio (ver, por ejemplo, la revisión por Bear y Berkowitz [1]). Estas estrategias se pueden clasificar a grandes rasgos en dos clases: deterministas, en las cuales se asume que la información de la geometría y propiedades físicas de la red de fracturas se puede especificar [2]; y estocásticas, en las que los modelos se construyen suponiendo que las características de las fracturas, del flujo o del transporte obedecen distribuciones de probabilidad. Dentro del contexto de modelos estocásticos, es posible identificar varias técnicas para modelar el transporte en medios fracturados. Una de ellas es generar estocásticamente una red de fracturas y posteriormente tratarla de forma determinista resolviendo las ecuaciones que describen el flujo y el transporte. Otra es conceptualizar un medio fracturado como un sistema heterogéneo en el cual las propiedades de transporte se modelan considerando al medio poroso como un medio efectivo. Los modelos más exitosos combinan estos dos enfoques. Una estrategia estocástica que cae en la primera categoría está basada en el uso de la teoría de percolación. Esta teoría, a grandes rasgos, estudia el comportamiento de aglomeraciones conexas en redes aleatorias.

El modelado de medios naturalmente fracturados es particularmente importante para la industria petrolera en México ya que entre los yacimientos más grandes y productivos se hallan formaciones carbonatadas naturalmente fracturadas, como Cantarell y Ku-Maloob-Zaap. Se sabe que en este tipo de yacimientos las vías preferenciales de flujo están dominadas por las redes fracturas [3]. El modelado de este tipo de medios porosos naturalmente fracturados y del flujo a través de ellos no está resuelto de manera satisfactoria. Por esta razón es relevante plantear y estudiar modelos construidos a la medida de estas formaciones naturales, dado el gran potencial de estas herramientas matemáticas para mejorar nuestra comprensión de la topología y su impacto sobre el flujo en yacimientos.

Dentro de dicho contexto, el primer objetivo de este trabajo fue llevar a cabo una revisión de los elementos teóricos de geometría estocástica y percolación necesarios para la construcción de modelos estocásticos de percolación continua, así como una revisión de los principales mode-

los previamente desarrollados. El siguiente objetivo fue mostrar la aplicación de una metodología para construir sistemáticamente tres modelos estocásticos de redes bidimensionales de fracturas discretas, y estudiar su comportamiento desde el punto de vista de la percolación al implementarlos computacionalmente en el lenguaje de programación *R* mediante simulaciones estocásticas. En particular, estos modelos presentan transiciones de fase en términos de sus parámetros y el objetivo principal es obtener estimaciones para los rangos de los parámetros dentro de los cuales se dan estas transiciones, por su importancia para las aplicaciones.

Como se mencionó, estos modelos constan de dos ingredientes básicos: geometría estocástica para su construcción y teoría de percolación para su análisis.

De este modo, el **capítulo uno** consta de una introducción a la teoría de percolación, planteando los conceptos necesarios para el análisis de nuestros modelos. Se estudia primero la percolación discreta, pues es la base para construir modelos de percolación continua. Se discute la existencia de transiciones de fase y parámetros críticos en este tipo de modelos y se menciona la dificultad para obtener resultados analíticos en esta disciplina, motivando el uso de métodos numéricos para estimar los rangos de parámetros críticos de interés. Asimismo, se discuten brevemente algunas aplicaciones de la teoría de percolación a los medios porosos.

A continuación, en el **capítulo 2**, se presentan nociones de geometría estocástica necesarias para la construcción de los modelos. Se discute con mayor precisión en qué consiste un modelo estocástico y su relación con los espacios de probabilidad. Asimismo se presenta la herramienta fundamental para la construcción de nuestros modelos: el *proceso puntual de Poisson*. En el Apéndice C se discute con mayor formalidad la decisión de emplear este elemento en nuestros modelos.

En el **capítulo 3** se hace una revisión general, si bien no exhaustiva, de los modelos estocásticos de percolación continua existentes. Éstos se clasifican a grandes rasgos en *booleanos* y de *conexión aleatoria*. Ambas familias se presentan con ejemplos y se discute su construcción formal. Adicionalmente, se presentan en la última sección de este capítulo algunos modelos alternativos basados en los modelos convencionales, y se discuten algunos resultados teóricos para casos más generales en el Apéndice E. En particular, esa discusión intenta justificar técnicamente las hipótesis empleadas en la construcción de los modelos convencionales, y se explora hasta qué punto es posible relajar dichas hipótesis. Un resultado teórico fundamental para los modelos de conexión aleatoria se presenta en el Apéndice D.

Posteriormente, en el **capítulo 4**, se presenta el desarrollo de los modelos estocásticos de redes de fracturas discretas que son el objeto de estudio de este trabajo, siguiendo una metodología sistemática empleada ampliamente en las referencias [4, 5, 6, 7]. Los modelos se formulan en términos de esta metodología y se plantea la interpretación de los conceptos matemáticos involucrados en términos de la discretización inevitable que la implementación computacional conlleva. En el Apéndice A se presentan conceptos fundamentales de estereología, herramienta fundamental para la aplicación experimental de los modelos estocásticos de redes de fracturas discretas.

En el **capítulo 5** se presentan los experimentos numéricos realizados y se muestran y discuten los resultados obtenidos. En particular, se plantean explícitamente las preguntas que intentamos responder y se proponen medidas alternativas para detectar las transiciones de fase en nuestros modelos. Se establece la metodología general para los experimentos y la selección de parámetros. Los resultados se presentan y comparan gráficamente. Los códigos en el lenguaje de programación *R* indispensables para reproducir los resultados obtenidos se encuentran en el Apéndice F. Se proponen criterios alternativos para la detección de la transición de fase, descritos en términos de elementos de teoría de gráficas, los cuales se presentan brevemente en el Apéndice B.

Finalmente, en el **capítulo 6**, se presentan las conclusiones del trabajo tanto respecto al comportamiento crítico de nuestros modelos en términos de sus parámetros como a los obstáculos enfrentados, la comparación de nuestro trabajo con otros similares y se plantean líneas de trabajo futuro. Se determinaron los parámetros predominantes y se confirmó la consistencia del trabajo con publicaciones relevantes.

Como trabajo a futuro, se plantea extender nuestros modelos al caso tridimensional, considerando su potencial aplicación al modelado de redes de fracturas en yacimientos naturalmente fracturados.

Introducción a la teoría de percolación

Muchos fenómenos en la física, la química y la biología pueden ser modelados mediante procesos aleatorios en los cuales la aleatoriedad radica en la geometría del espacio, en lugar de en el comportamiento de un objeto en un escenario determinista.

Un ejemplo típico es el proceso de mediante el cual el suelo se humedece durante un periodo de lluvia. La aleatoriedad aquí se halla en el lugar en el cual caen las gotas de lluvia, así como en el tamaño de la región humedecida por cada gota. Otro ejemplo es la evolución de una enfermedad en una plantación de árboles donde éstos se hallan dispuestos en una cuadrícula, y donde la enfermedad se transmite de un árbol infectado a los árboles vecinos. El dueño de la plantación podría estar interesado en conocer la probabilidad de que la enfermedad se propague a todos los árboles. La estructura geométrica de este ejemplo es discreta y para dar una descripción matemática rigurosa se necesita el *modelo discreto de percolación*. Por otra parte, el primer ejemplo corresponde a un modelo continuo. En el lenguaje de la geometría estocástica, el modelo continuo de percolación es conocido como proceso de cubrimiento o *modelo booleano*.

Para obtener una idea del tipo de preguntas que se intentan contestar en el contexto de la teoría de percolación, se desarrolla el ejemplo de las gotas de lluvia: Antes de que inicie la lluvia, se supone que el suelo está completamente seco. En el punto donde ha caído una gota de lluvia el suelo absorbe el agua y se forma una marca circular. Cuando caen las primeras gotas de agua, vemos pequeñas regiones húmedas dentro de una gran región seca. La región húmeda crece conforme las gotas llegan al suelo y en algún momento han caído tantas gotas de lluvia que la imagen cambia súbitamente de “islas” húmedas dentro de una gran región seca, a “islas” secas dentro de una gran región húmeda. Este fenómeno de cambio drástico y súbito en la estructura espacial global se conoce como *transición de fase*. El parámetro del modelo no suele ser el tiempo, sino la densidad de las gotas de lluvia en el suelo. Así, por ejemplo, se dice que la transición de fase sucede a cierta densidad de gotas de lluvia, en lugar de a un tiempo dado.

La naturaleza de dichas transiciones de fase es un importante objeto de estudio de los modelos booleanos. El objetivo de esta sección es proporcionar rigor matemático a los resultados en la teoría

de percolación, y presentar las nociones generales necesarias para el desarrollo de los modelos.

1.1. Nociones de percolación discreta

Antes de introducir los modelos continuos de percolación en el Capítulo 3 es importante tratar con los modelos discretos. Esto se debe a varias razones. La primera es que la teoría de percolación se empezó a desarrollar primero de manera discreta, y muchos de los resultados en los modelos continuos son análogos a los resultados discretos. En segundo lugar, los modelos discretos de percolación son los más sencillos de describir y son adecuados para desarrollar una intuición del tipo de problemas que se intenta resolver. Finalmente, una técnica importante en la teoría de percolación continua es aproximar el modelo continuo a través uno discreto.

El primer modelo de percolación que se estudió es el modelo de percolación independiente en la retícula entera, el cual se construye del siguiente modo:

Considérese una cuadrícula regular, infinita (como si se tuviera una página de un cuaderno cuadriculado, sólo que la página se extiende infinitamente en todas direcciones). En esta cuadrícula se tendrá un sistema coordenado de tal forma que a los puntos de intersección, llamados *vértices*, se les asignan coordenadas en los enteros ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$). Los segmentos que unen a los vértices se llaman *enlaces*. La gráfica obtenida de este modo es conocida como *retícula entera*, y se le denota por \mathbb{Z}^2 .

En general, podemos hablar de una retícula entera de dimensión d , denotada por \mathbb{Z}^d , tomando el producto cartesiano del conjunto de los números enteros d veces ($\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$). Cuando dos vértices distan entre sí una unidad se les llama *vecinos* y entre cada par de vecinos hay un enlace. El conjunto de todos los enlaces se denota por \mathcal{E} . Los enlaces pueden estar *abiertos* o *cerrados*. Un *camino* es una secuencia alternante de vértices z_i y enlaces e_i , finita o infinita, denotada por $\{z_1, e_1, z_2, e_2, \dots\}$, donde $z_i \neq z_j$ y $e_i \neq e_j$ si $i \neq j$ (es decir, no es posible regresar por donde se vino). En el camino, e_i es el enlace entre los vértices vecinos z_i y z_{i+1} . La *longitud* de un camino es el número de enlaces que contiene. Un *círculo* es un camino finito que empieza y termina en el mismo vértice. Un *camino abierto* (*cerrado*) es un camino cuyos enlaces están todos abiertos (cerrados). Se dice que dos vértices están *conectados* si existe un camino abierto finito entre ellos. Un *cluster abierto* es un conjunto de vértices conectados que es maximal respecto a dicha propiedad, es decir que es el conjunto conexo “más grande” que contiene a esos vértices, y pueden ser finitos o infinitos. El cluster abierto que contiene al origen se denota por $\mathcal{C}(0)$.

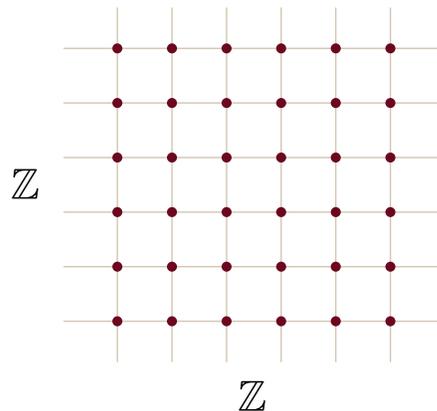
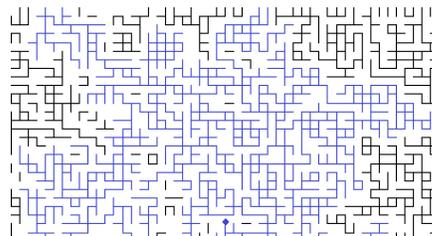


Figura 1.1: \mathbb{Z}^2

A continuación introducimos probabilidad a nuestra retícula. Necesitamos definir un espacio de probabilidad que conste de un



conjunto Ω y una medida de probabilidad \mathbb{P} (además de dar a Ω una estructura conjuntista adecuada para trabajar con probabilidades, la σ -álgebra generada). Consideremos un conjunto en el cual representamos a cada enlace abierto mediante un uno (1), y cada enlace cerrado con un cero (0), obtendremos un conjunto de unos y ceros. Siguiendo la notación usual del producto cartesiano denotamos este conjunto de unos y ceros por $\Omega = \{0, 1\}^{\mathcal{E}}$, y este será el conjunto sobre el cual se va a trabajar. Para construir una medida de probabilidad necesitamos tomar $p \in [0, 1]$, que al final será la probabilidad de que un enlace esté abierto, y así resulta natural definir la medida

$$\mathbb{P}_p\{ \omega(e) = 1 \} = p, \quad \text{para cada } e \in \mathcal{E}.$$

La expresión anterior se debe interpretar del siguiente modo: Una vez que elegimos la probabilidad p de que un enlace esté abierto, la retícula podría hallarse en muchos estados distintos, considerando todas las posibles formas en que se pueden acomodar los enlaces abiertos y cerrados. Denotamos una configuración por ω (es un elemento de la σ -álgebra mencionada previamente), y si $e \in \mathcal{E}$, decimos que $\omega(e) = 1$ si e está abierto, u $\omega(e) = 0$ en caso contrario. De este modo, la medida que definimos se lee precisamente como “la probabilidad de que un enlace e esté abierto en la configuración ω es p ”, y es en este sentido que nuestra definición resulta “natural”. Definiendo la medida de probabilidad de este modo, resulta que la probabilidad de que cada enlace esté abierto es p , de manera independiente entre enlaces.

Este es el modelo de percolación básico en la retícula entera d -dimensional. Será de interés estudiar clusters no acotados (en particular cuando $\mathcal{C}(0)$ es infinito), por la interpretación física que se les puede dar [8].

Necesitaremos algunas definiciones:

Definición 1.1.1. La función de percolación $\theta^{(d)}$ se define como:

$$\theta^{(d)}(p) = \mathbb{P}_p\{ \text{card}(\mathcal{C}(0)) = \infty \}.$$

Definición 1.1.2. Definimos la función $\chi^{(d)}$ como el valor esperado de la cardinalidad de $\mathcal{C}(0)$, es decir:

$$\chi^{(d)}(p) = \mathbb{E}_p[\text{card}(\mathcal{C}(0))],$$

donde \mathbb{E} es el operador de esperanza correspondiente a \mathbb{P}_p .

Intuitivamente es claro que estas funciones son no decrecientes respecto a p , ya que entre mayor sea p , mayor es la probabilidad de que los enlaces estén abiertos y tiene sentido que la probabilidad de que $\mathcal{C}(0)$ sea infinito se incremente. Análogamente, es de esperarse que la cardinalidad de $\mathcal{C}(0)$

sea mayor conforme p crezca.

Ya que nos interesa la existencia de un cluster infinito que contenga al origen, tiene sentido preguntarse cuál es la p “más pequeña” que hace factible que $\mathcal{C}(0)$ sea infinito. Por “factible” se entiende que la probabilidad de que $\text{card}(\mathcal{C}(0)) = \infty$ sea positiva, o que el valor esperado de $\text{card}(\mathcal{C}(0))$ sea infinito, y el valor mínimo de p en cada una de estas interpretaciones no tiene por qué ser el mismo.

Observamos que estos son valores distinguidos de p y vale la pena bautizarlos:

Definición 1.1.3. Las *probabilidades críticas* se definen como:

$$p_C(d) = \inf\{ p : \theta^{(d)}(d) > 0 \},$$

$$p_T(d) = \inf\{ p : \chi^{(d)}(d) = \infty \}.$$

Existe una tercera probabilidad crítica que no resulta natural a primera vista pero que más adelante será muy útil. Para poder definirla necesitaremos denotar por $\sigma_p\{(n_1, \dots, n_d), i\}$ la probabilidad de que el rectángulo $[0, n_1] \times \dots \times [0, n_d]$ contenga un camino abierto conectando dos caras opuestas en la i -ésima dirección.

Definición 1.1.4. Si $d \geq 2$, definimos:

$$p_S(d) = \inf\{ p : \limsup_{n \rightarrow \infty} \{\sigma_p(n, 3n, \dots, 3n), 1\} = 0 \}.$$

Estas probabilidades críticas dependen, en efecto, del número de dimensiones d en que se esté trabajando. Notemos que $p_T(d) \leq p_C(d)$, ya que si p es tal que $\chi^{(d)}(p) = \infty$, entonces $\theta^{(d)}(p) > 0$. Por otra parte, también se tiene que $p_C(1) = p_T(1) = 1$, pues en una dimensión la retícula es una línea recta donde los nodos se localizan en cada número entero, y la única manera de que $\mathcal{C}(0)$ sea infinito es si todos los enlaces están abiertos, es decir, si $p = 1$.

Otras propiedades no son tan fáciles de deducir:

Teorema 1.1.1. Para cualquier $d \geq 2$ se tiene $0 < p_C(d) < 1$.

Teorema 1.1.2. Para cualquier $d \geq 2$ se tiene $p_C(d) = p_T(d) = p_S(d)$.

Los valores de las probabilidades críticas sólo se conocen en una y dos dimensiones. Ya se comentó que $p_C(1) = 1$ y se sabe que $p_C(2) = \frac{1}{2}$, aunque este último resultado está lejos de ser trivial.

El Teorema 1.1.1 se halla en el corazón de la teoría de percolación, ya que establece la existencia de una *transición de fase* (al ser estrictamente mayor que cero). Es decir que para valores de p menores o mayores que la probabilidad crítica $p_C(d)$ el comportamiento macroscópico del sistema es muy diferente, debido a la finitud o infinitud de $\mathcal{C}(0)$. Cuando existe un cluster infinito se dice que hay **percolación**.

Ya que las ideas detrás del Teorema 1.1.1 se emplearán de nuevo, se presenta su demostración:

Primero se probará que $p_C(d) > 0$. El número de caminos distintos de longitud n que parten del origen es a lo más $2d(2d-1)^{n-1}$, ya que para el primer paso se tienen $2d$ opciones (dos opciones en cada dirección posible, y hay tantas direcciones posibles como dimensiones), y para cada uno de los siguientes $n-1$ pasos se tienen de nuevo $2d$ opciones, pero debemos considerar que no podemos volver sobre nuestros pasos, así que en realidad se tiene una opción menos $(2d-1)$. Ahora bien, cada uno de estos caminos tiene probabilidad de p^n de estar abierto, así que el número esperado de caminos abiertos de longitud n que inician en el origen es a lo más $2d(2d-1)^{n-1}p^n$. Supongamos que $p < (2d-1)^{-1}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2d(2d-1)^{n-1}p^n < \sum_{n=1}^{\infty} 2d(2d-1)^{-1} < \infty,$$

y entonces el valor esperado del número de caminos abiertos de longitud n que parten del origen es finito (ya que la primera suma representa una cota superior para dicho valor). Así que el valor esperado del número de enlaces abiertos en $\mathcal{C}(0)$ es finito. Entonces la probabilidad de que $\mathcal{C}(0)$ sea finito es necesariamente uno, y en consecuencia $\theta^{(d)}(p) = 0$ si $p < (2d-1)^{-1}$. Así que si p es tal que $\theta^{(d)}(p) > 0$, entonces $p \geq (2d-1)^{-1}$ (se tiene una cota inferior para todas las p que aseguran que $\theta^{(d)}(p)$ sea positiva) y en conclusión $p_C(d) \geq (2d-1)^{-1} > 0$.

Para la otra desigualdad notemos que basta dar la prueba para $d = 2$, ya que $p_C(d)$ es no decreciente en d . Necesitamos definir la *gráfica dual* \mathbb{Z}^{2*} : se obtiene de \mathbb{Z}^2 mediante un traslación por el vector $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. El conjunto de enlaces de la gráfica dual se denota por \mathcal{E}^* . Cada enlace de \mathcal{E}^* cruza exactamente un enlace de \mathcal{E} . Un enlace en \mathcal{E}^* estará abierto si y sólo si el enlace de \mathcal{E} que cruza está abierto, y cerrado en otro caso. Es intuitivamente evidente que existe un circuito en \mathbb{Z}^{2*} que rodea al origen si y sólo si $\mathcal{C}(0)$ es finito [9]. Ahora bien, consideremos todos los posibles circuitos de longitud n que rodean al origen. Hay a lo más $n3^n$ posibilidades, ya que tal circuito debe contener al menos un vértice en el eje horizontal, y para ello hay máximo n posibilidades. Partiendo de dicho vértice, quedan tres opciones para cada nuevo enlace.

Observemos que si para alguna $N > 0$

- I. Todos los enlaces en $[-N, N] \times [-N, N]$ están abiertos,
- II. No existe un circuito en la gráfica dual que rodee a $[-N, N] \times [-N, N]$,

entonces $\mathcal{C}(0)$ es infinito. El evento I. ciertamente tiene probabilidad positiva. Evaluemos el

segundo evento con mayor cuidado: Un circuito que rodee a $[-N, N] \times [-N, N]$ debe tener longitud de al menos $4N$. Así que si $p > \frac{2}{3}$ podemos elegir N suficientemente grande tal que:

$$\sum_{n=4N}^{\infty} n3^n(1-p)^n < 1,$$

de tal suerte que para tales p y N el evento *II*. también tiene probabilidad positiva. Ya que ambos eventos dependen de conjuntos disjuntos de enlaces, son independientes, y concluimos que $p_C(2) \leq \frac{2}{3}$.

Ya que ha quedado establecida la existencia de clusters infinitos para $p > p_C$, surge la pregunta de cuántos clusters abiertos infinitos existen. La respuesta a esa pregunta es notable. Primero observemos que la existencia de un cluster abierto no depende del estado de ningún conjunto finito de enlaces. En consecuencia se sigue de la ley 0 - 1 de Kolmogorov que la existencia de un cluster abierto infinito tiene probabilidad ya sea cero o uno. Este hecho corresponde a las diferentes transiciones del modelo de percolación: para $p > p_C(d)$ no existe un cluster infinito casi seguramente, y para $p < p_C(d)$ la probabilidad de tener un cluster abierto infinito es positiva, y por tanto igual a uno. Este resultado es conocido como *unicidad del cluster infinito* y se enuncia del siguiente modo:

Teorema 1.1.3. *Existe a lo más un cluster abierto infinito c. s.*

Para continuar con la presentación de las desigualdades básicas es necesario introducir nueva terminología. Primero observemos que en $\Omega = \{0, 1\}$ existe un orden parcial, a saber $\omega \leq \omega'$ si y sólo si $\omega(e) \leq \omega'(e)$ para todo $e \in \mathcal{E}$. Este orden se interpreta del siguiente modo: si ω y ω' son dos configuraciones de la retícula, decimos que ω es menor o igual que ω' si todo enlace abierto en ω también lo está en ω' . Es posible que ω' contenga más enlaces abiertos que ω , pero tiene al menos el mismo número. Un evento A en Ω es *creciente* si su función indicadora es creciente. Es decir, si $\omega \leq \omega'$, entonces $\mathbb{1}_A(\omega) \leq \mathbb{1}_A(\omega')$. Se puede dar la siguiente interpretación: si la configuración ω pertenece al evento A , entonces cualquier configuración ω' que contenga los mismos enlaces abiertos que ω también estará en A . Por otra parte, un evento es *decreciente* si su complemento es creciente. Un ejemplo típico de evento creciente es el evento de que dos vértices distintos estén conectados a través de un camino abierto.

Si \mathbb{P}_p y \mathbb{E}_p denotan respectivamente las probabilidades y esperanzas respecto a p , tenemos la siguiente desigualdad:

Teorema 1.1.4. Desigualdad FKG

Sean f_1 y f_2 funciones ambas crecientes o ambas decrecientes. Entonces

$$\mathbb{E}_p[f_1 f_2] \geq \mathbb{E}_p[f_1] \mathbb{E}_p[f_2].$$

En particular, si f_1 y f_2 son las funciones indicadoras de dos eventos crecientes (o decrecientes) A y B , la desigualdad anterior se reduce a

$$\mathbb{P}_p(A \cup B) \geq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B).$$

Este resultado no es sorprendente: si existe un camino abierto que conecta dos vértices distintos, entonces otro camino abierto conectando otro par de vértices es más probable, ya que el nuevo camino puede aprovechar los enlaces del anterior.

Por otra parte, también existe una desigualdad en el sentido contrario. Dada la existencia de un camino abierto que conecte dos vértices, podemos hacer que sea más “difícil” que existan otras conexiones pidiendo que sean disjuntas del primer camino. Esta idea motiva la siguiente definición: Supongamos que A y B son eventos crecientes que dependen solamente de un número finito de enlaces. Definimos $A \square B$ como el conjunto de configuraciones ω para las cuales existen dos conjuntos disjuntos de enlaces abiertos con la propiedad de que el primer conjunto garantiza la ocurrencia de A , y el segundo garantiza la ocurrencia de B . Más precisamente, $A \square B$ es el conjunto de todas las configuraciones ω para las cuales existen conjuntos finitos y disjuntos de enlaces K_A y K_B tales que cualquier configuración ω' tal que $\omega'(e) = 1$, para todo e en K_A , pertenece a A , y cualquier configuración ω'' tal que $\omega''(e) = 1$, para todo e en K_B , pertenece a B .

Teorema 1.1.5. Desigualdad BK

Sean A y B dos eventos crecientes que dependen solamente del estado de un conjunto finito de enlaces. Entonces

$$\mathbb{P}_p(A \square B) \leq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B).$$

El requisito de que los eventos dependan solamente del estado de un número finito de enlaces tiene una razón técnica que no es importante en las aplicaciones.

A continuación se discute un método para estimar la tasa de cambio de $\mathbb{P}_p(A)$ como una función de p , para eventos crecientes A . De nuevo supondremos que A depende solamente del estado de un número finito de enlaces. Necesitaremos una nueva definición: Decimos que un enlace e es *pivotal* para A si la ocurrencia o no ocurrencia de A depende crucialmente del estado del enlace e . Formalmente, un enlace e es pivotal para A si $\mathbb{1}_A(\omega) \neq \mathbb{1}_A(\omega_e)$, donde ω_e denota la configuración obtenida de ω al cambiar el estado de e ; es decir que $\omega_e(e) = 1 - \omega(e)$. La tasa de cambio de $\mathbb{P}_p(A)$ como función de p está relacionada [10] al número de enlaces pivotaes del siguiente modo:

Teorema 1.1.6. Fórmula de Russo

Sea A un evento creciente que depende solamente de un número finito de enlaces. Entonces

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) = \sum_{e \in \mathcal{E}} \mathbb{P}_p(e \text{ es pivotal para } A).$$

Hasta ahora hemos asumido que los enlaces están abiertos o cerrados con ciertas probabilidades. No había aleatoriedad en los vértices. Es por eso que a este modelo se le llama *percolación de*

enlace. Pero bien podríamos declarar los vértices como abiertos o cerrados con probabilidad p o $1 - p$, respectivamente, obteniendo un modelo de *percolación de sitio*. La discusión del modelo de sitio es similar a la discusión previa del modelo de enlace y todos los resultados presentados tienen un análogo en el contexto de sitio, sin embargo no se conoce el valor de la probabilidad crítica para el modelo de percolación de sitio independiente. Todos estos resultados se usarán libremente en la percolación de sitio.

Como se mencionó previamente, la discretización es una técnica importante en la teoría de percolación continua. Se pueden tener estructuras más complicadas que la retícula usual, o pueden haber distintos tipos de sitios que están abiertos con diferentes probabilidades. Consideremos por ejemplo la retícula entera d -dimensional. Trazaremos un enlace entre cualesquiera dos vértices v y w tales que $|v - w| \leq 2L$, donde L es alguna constante positiva. La gráfica obtenida de este modo se denota por \mathcal{G}_L . Es posible llevar a cabo percolación de sitio independiente en esta nueva gráfica, lo cual permite obtener los valores críticos $p_C(\mathcal{G}_L)$, $p_T(\mathcal{G}_L)$ y $p_S(\mathcal{G}_L)$.

El modelo de percolación de sitio se puede extender a un escenario multiparamétrico. Por ejemplo, consideremos una “gráfica de dos capas” $\mathcal{G}_{(L_1, L_2)}$ definida del siguiente modo: Colocamos una copia de \mathcal{G}_{L_2} encima de \mathcal{G}_{L_1} y trazamos un enlace entre $v \in \mathcal{G}_{L_1}$ y $w \in \mathcal{G}_{L_2}$ si $d(v, w) \leq L_1 + L_2$. Ahora llevamos a cabo percolación de sitio en $\mathcal{G}_{(L_1, L_2)}$ diciendo que un vértice en \mathcal{G}_{L_1} está abierto con probabilidad p_1 , y que un vértice en \mathcal{G}_{L_2} está abierto con probabilidad p_2 . En lugar de tener un punto crítico, definimos una región en el interior del cuadrado unitario en la cual ocurre la percolación:

$$p_C(\mathcal{G}_{(L_1, L_2)}) = \{(p_1, p_2) : \mathbb{P}_{(p_1, p_2)}(\mathcal{C}(0) = \infty) > 0\},$$

donde $\mathcal{C}(0)$ denota la unión de los clusters abiertos que contienen al origen en \mathcal{G}_{L_1} y \mathcal{G}_{L_2} . Las regiones $p_T(\mathcal{G}_{(L_1, L_2)})$ y $p_S(\mathcal{G}_{(L_1, L_2)})$ se definen similarmente. De este modo se puede generalizar el Teorema 1.1.2:

Teorema 1.1.7. *En el escenario descrito se tiene que $p_C(\mathcal{G}_L) = p_T(\mathcal{G}_L) = p_S(\mathcal{G}_L)$, y $p_C(\mathcal{G}_{(L_1, L_2)}) = p_T(\mathcal{G}_{(L_1, L_2)}) = p_S(\mathcal{G}_{(L_1, L_2)})$.*

Concluimos esta sección con una discusión sobre modelos de enlace/sitio mixtos. En tales modelos, tanto los enlaces como los vértices se encuentran ya sea abiertos o cerrados con ciertas probabilidades. En su forma más general, se tiene un parámetro p y para cada enlace o vértice, digamos w , existe una función no decreciente f_w tal que w está abierto con probabilidad $f_w(p)$, independientemente de todos los otros enlaces y vértices. Muchos de los resultados citados hasta ahora tienen análogos en el escenario mixto. En particular, el Teorema 1.1.2 sigue siendo válido. A continuación se presenta una versión de la fórmula de Russo para este escenario particular:

Teorema 1.1.8. Fórmula de Russo (versión mixta)

Considérese un modelo de enlace/sitio mixto y sea A un evento creciente que depende solamente del estado de un número finito de enlaces y vértices. Supóngase adicionalmente que existen funciones

diferenciables y no decrecientes f_b tales que el enlace o vértice b está abierto con probabilidad $f_b(p)$ independientemente de todos los demás vértices y enlaces. Entonces

$$\frac{d}{dp} \mathbb{P}_p(A) = \sum_{e \in \mathcal{E}} \mathbb{P}_p(e \text{ es pivotal para } A) \frac{d}{dp} f_e(p) + \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_p(v \text{ es pivotal para } A) \frac{d}{dp} f_v(p).$$

Concluimos esta sección mencionando que la teoría de percolación ha sido ampliamente estudiada en el campo de la física, y la literatura de referencia es vasta (ver [11, 12, 13, 14, 15, 16]). Su principal ventaja es que proporciona leyes universales que determinan las propiedades geométricas y físicas de un sistema. Ha habido varios avances en la aplicación de teoría de percolación a la comprensión del flujo en medios porosos, al demostrarse que algunos modelos de percolación pueden describir fenómenos de transporte observados en rocas (ver por ejemplo [17, 18, 19, 20]). En vista de dichos avances, parece plausible que estas ideas sean aplicables al estudio de fracturas geológicas. Las propiedades de transporte de formaciones de fracturas están asociadas con el hecho bien conocido de que, en sistemas de rocas sólidas, el flujo ocurre casi exclusivamente a través de las fracturas.

1.2. Algunas aplicaciones a medios porosos

La teoría de percolación es una herramienta para interpretar datos experimentales y comprender mejor la estructura de medios porosos. Ha constituido un avance importante ya que los modelos anteriores de medios porosos basados en aglomeraciones de tubos capilares paralelos son completamente inadecuados para interpretar los datos experimentales, y en el pasado han llevado a errores serios y conclusiones erróneas [11]. La teoría de percolación abre el camino para modelar de manera significativa y exhaustiva los medios porosos y los fenómenos que ocurren en ellos. Las principales aplicaciones en el contexto de medios porosos y fracturados son en el estudio de su morfología, en los procesos que forman y modifican los poros y las fracturas, diferentes tipos de flujos a través del medio, su conductividad eléctrica y algunas reacciones químicas en el medio. Estas aplicaciones se discuten brevemente a continuación.

1.2.1. Procesos diagenéticos

La formación de rocas inicia con la deposición de sedimentos y es seguida por procesos de compactación y alteración que provocan cambios drásticos en la morfología del medio. Consideremos por ejemplo areniscas. Las areniscas son arreglos de granos discretos con una amplia variedad de componentes químicos y mezclas. Si el ambiente alrededor de las areniscas cambia, los granos de arena empiezan a reaccionar químicamente y producir nuevos compuestos que se depositan en la superficie de los granos. En consecuencia, las propiedades mecánicas de los granos, tales como su resistencia a las fracturas, también cambian. Los cambios químicos y físicos en la arena después

de esta deposición constituyen *procesos diagenéticos*.

Las principales características de un proceso diagenético son:

1. Deformación mecánica de los granos.
2. Disolución de granos minerales.
3. Alteración de los granos.
4. Precipitación de minerales que llenan los poros, cementos y otros materiales.

La diagénesis empieza inmediatamente después de la deposición y continúa a lo largo de procesos de enterramiento y levantamiento de las rocas hasta que la erosión en la superficie la reduce de nuevo a sedimento. Estos cambios generan un producto final con características diagenéticas específicas, cuya naturaleza depende de la composición mineral inicial del sistema, y también de la composición de los sedimentos circundantes.

La porosidad de las rocas de un yacimiento es ya sea *primaria* o *secundaria*. La porosidad primaria se debe al espacio de poros original del sedimento. La porosidad *secundaria* se debe al hecho de que granos inestables o cementos han pasado por cambios físicos y químicos a través de reacciones que producen agua; se han disuelto parcial o totalmente. Si el espacio de poros se regenera de algún modo, la porosidad original, protegida de la precipitación a través de la deposición de minerales, se convierte en porosidad secundaria. Se cree que los poros generados por disolución constituyen más de la mitad de todo el espacio de poros en muchas rocas sedimentarias.

Estos procesos diagenéticos llevan a una morfología cuya porosidad es más pequeña que la porosidad inicial, y en la cual los poros pueden tomar cualquier tamaño y forma. El resultado más importante de los procesos diagenéticos es tal vez que los poros permanecen conectados entre sí incluso cuando la porosidad es muy baja. Por ejemplo, a través de microscopios electrónicos de escaneo se ha determinado que hay poros que están conectados hasta con otros veinte poros. Esto implica que la porosidad crítica del sistema ϕ_c (el umbral de percolación) es muy baja. En consecuencia no es posible usar percolación aleatoria para modelar la formación de espacios de poros en las rocas y la misma porosidad, ya que predice porosidades críticas demasiado altas. Hay modelos más generales y más adecuados para los procesos diagenéticos, como el *modelo del tubo que se encoge* de Wong (1984), y el *modelo de consolidación de granos* de Roberts y Schwartz (1985).

1.2.2. Porosimetría de mercurio

La porosimetría de mercurio es un método experimental utilizado para estimar la distribución de tamaño de poro del medio. Consiste en sumergir una muestra del medio en mercurio y aumentar

la presión para forzar al mercurio a penetrar el espacio de poros del medio. Después la presión se regresa a niveles normales para permitir que el mercurio se retraiga del medio.

Aunque la porosimetría de mercurio es un experimento relativamente sencillo, interpretar los datos no es una tarea simple. Se utiliza una ecuación derivada de leyes de conservación de fuerza para expresar la presión como una función del radio efectivo de los poros y se obtienen curvas de presión que caracterizan la distribución del tamaño de los poros.

La interconexión de los poros así como su posición en el medio tiene un enorme efecto sobre las curvas de presión a través de efectos de percolación. Cuando no se toman en cuenta estos efectos de percolación, se obtienen distribuciones de tamaño de poro erróneas.

1.2.3. Procesos de adsorción-desorción

La desorción es un proceso en el cual una sustancia es liberada sobre o a través de una superficie. La adsorción es el proceso opuesto. Otra manera de determinar la distribución de tamaño de poro de un medio poroso es mediante datos obtenidos mediante experimentos que involucran este tipo de procesos, usualmente con nitrógeno líquido. La interconectividad de los poros juega nuevamente un papel importante en la interpretación de los datos. Un concepto importante es el número de coordinación del medio, que se define a grandes rasgos como el número de gargantas porosas conectadas a un poro. Este número ayuda a caracterizar topológicamente al medio. La teoría de percolación puede ser utilizada para estimar \bar{Z} y así obtener información sobre el comportamiento topológico del medio.

1.2.4. Fracturas y fallas en rocas heterogéneas

Los patrones de fracturas y fallas en rocas heterogéneas son similares a las redes que se pueden generar utilizando teoría de percolación. Eso significa que el vasto conocimiento que existe acerca de redes de percolación puede ser utilizado para modelar medios fracturados. En consecuencia, el modelado de fenómenos de flujo en medios fracturados se facilitaría (un problema importante sin resolver). Cabe mencionar que se requiere la suposición de que las redes de fractura en efecto son redes de percolación, es decir, que son significativas para el comportamiento del flujo.

1.2.5. Modelos de percolación para procesos de gasificación en medios porosos

La investigación teórica de este proceso se inició en el trabajo de Petersen (1975). Desde entonces se han desarrollado muchos tipos de modelos. Dos de ellos son modelos de percolación.

El primero se conoce como *modelo continuo híbrido*. Este modelo parte del cálculo numérico de la tasa a la cual se consumen las partículas de carbón en el medio. La porosidad del sistema

se incrementa en el tiempo y sus propiedades morfológicas varían. Dicha variación constituye un proceso de percolación. La teoría de percolación se introduce al modelo a través del modelado del espacio de poros y del cálculo de las cantidades de percolación necesarias para resolver ecuaciones relacionadas con la concentración de los componentes del medio. Este modelo se denomina híbrido por que combina las ecuaciones clásicas de transporte y reacción con modelos de percolación.

El segundo se denomina *modelo de redes* y fue desarrollado por Kerstein y Bug (1986). Se parte de una red donde una fracción de los enlaces representa a los poros y el resto al cuerpo sólido. Se identifican los enlaces en el perímetro exterior de la región de poros y se les reasigna el rol de poros. Este proceso se repite para simular el incremento de porosidad. Esta sencilla idea se puede modificar para representar detalles del proceso de gasificación, tales como procesos de difusión o presencia de impurezas en el medio.

1.2.6. Desactivación de catalizadores

Este fenómeno es provocado por compuestos químicos que se adsorben y contaminan la superficie del catalizador y sus sitios activos, donde ocurren las reacciones catalíticas que bloquean los poros. En consecuencia, la morfología del catalizador se modifica con el tiempo y su volumen de poros decrece. Después de un tiempo no existen clusters de poros, y el catalizador se desactiva y pierde efectividad. El modelado varía dependiendo del régimen de difusión presente y de nuevo se hallan modelos continuos híbridos y modelos de redes.

Elementos de geometría estocástica

La geometría estocástica es una disciplina que busca modelar matemáticamente estructuras cuya geometría no se puede formalizar de manera determinista, debido a la incertidumbre intrínseca de su naturaleza. Este tipo de estructuras surgen con frecuencia en aplicaciones en muchas áreas de la ciencia y la tecnología que involucran datos espaciales [21, 22]. Por ejemplo, estudio de estructuras geológicas, secciones de medios porosos, ciencias de materiales, tejidos biológicos y patrones que se forman naturalmente en los paisajes.

La geometría estocástica surgió como disciplina matemática al final del siglo XX, pero sus raíces y su profunda conexión con la probabilidad geométrica y técnicas de integración utilizando medidas invariantes datan de mucho antes. El famoso problema de las agujas de Buffon de 1777 se resolvió a través de lo que parece ser la primera aplicación del cálculo integral a una pregunta de probabilidad.

A continuación se presentan las herramientas empleadas y se define un modelo estocástico desde esta perspectiva.

2.1. Definición de modelo estocástico

Un modelo estocástico queda completamente especificado por un *espacio de probabilidad*. Éste consiste de una terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que satisface las siguientes propiedades:

- I. Ω es el conjunto de todos los posibles estados (o *realizaciones*) del modelo.
- II. \mathcal{A} es el conjunto de todos los *eventos*. Por evento entendemos una familia de realizaciones.
- III. \mathbb{P} es una *medida de probabilidad*. Mide la frecuencia de la ocurrencia de cada evento.

Notemos que desde el punto de vista abstracto, estamos hablando de un espacio de medida¹ en el cual la medida está normalizada. Si pensamos simplemente en el conjunto de todos los estados posibles (es decir, Ω) tendremos dificultades para definir nuestra medida de probabilidad, ya que no cualquier familia de realizaciones constituye un evento (es decir, no todo elemento de Ω es medible respecto a \mathbb{P}). Necesitamos dotar a Ω de una estructura mínima adecuada para poder “jugar” a la probabilidad.

Al momento de calcular probabilidades, es razonable pedir que la estructura de \mathcal{A} sea tal que podamos calcular la probabilidad de que no suceda nada ($\emptyset \in \mathcal{A}$) y la probabilidad de que pase cualquier cosa ($\Omega \in \mathcal{A}$). Tampoco es mucho pedir que si podemos calcular la probabilidad de un evento, también podamos calcular la probabilidad de que dicho evento *no* suceda (cerradura de \mathcal{A} bajo complementos). Finalmente, pediremos que si podemos calcular la probabilidad individual de una cantidad razonable (digamos, numerable) de eventos, entonces podamos calcular la probabilidad de que suceda cualquiera de ellos (cerradura de \mathcal{A} bajo uniones numerables). Notemos que de este modo surge de manera natural la estructura de σ -álgebra para \mathcal{A} .

La medida de probabilidad \mathbb{P} se define sobre \mathcal{A} . Satisface que $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ y $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. También se tiene que $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A)$ para cualquier evento A . Más aún, \mathbb{P} es σ -aditiva, es decir que $\mathbb{P}(\cup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$ para cualquier sucesión $\{A_n\}$ de eventos disjuntos dos a dos. Una consecuencia inmediata y útil de la σ -aditividad de \mathbb{P} es que $\mathbb{P}(\cup_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$ para cualquier sucesión creciente de eventos $\{A_n\}$. Al tomar complementos se tiene también que $\mathbb{P}(\cap_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$ para cualquier sucesión decreciente de eventos $\{A_n\}$.

En aplicaciones prácticas, \mathcal{A} se define con frecuencia como la σ -álgebra generada por una familia \mathcal{A}_0 de eventos elementales. Es decir, la σ -álgebra más pequeña que contiene a \mathcal{A}_0 . De forma similar, la medida de probabilidad \mathbb{P} queda completamente especificada por los valores que toma en \mathcal{A}_0 , siempre que \mathcal{A}_0 satisfaga ciertas propiedades de estabilidad: Se necesita que \mathcal{A}_0 sea una semi-álgebra, esto es que contenga a Ω y a \emptyset , que sea cerrada bajo intersecciones finitas y que el complemento de cualquier elemento de \mathcal{A}_0 se pueda expresar como una unión finita de elementos de \mathcal{A}_0 disjuntos dos a dos. De este modo, cualquier mapeo σ -aditivo \mathbb{P} de la semi-álgebra \mathcal{A}_0 al intervalo $[0, 1]$ con la propiedad de que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ puede extenderse de manera única a la σ -álgebra generada por \mathcal{A}_0 (ver [23]).

2.2. Funciones aleatorias

Una *función aleatoria* Z es una familia de variables aleatorias $\{Z(x)\}$ donde $x \in \mathbb{R}^d$. En el caso $d = 1$ se habla de un *proceso estocástico*. Podemos visualizar una función aleatoria del siguiente modo: a cada punto en \mathbb{R}^d le asigna toda una variable aleatoria. Entonces una realización de una función aleatoria involucra una realización de cada una de las variables aleatorias asociadas a cada punto de \mathbb{R}^d .

¹Una terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, donde Ω es un conjunto, \mathcal{A} es una σ -álgebra y μ es una *medida* definida sobre \mathcal{A} .

Las propiedades estadísticas de una función aleatoria incluyen aquellas de los vectores aleatorios que las constituyen. A cada vector aleatorio $\{Z(x_1), \dots, Z(x_n)\}$ se le asocia una función de distribución conjunta:

$$F_{x_1, \dots, x_n}(z_1, \dots, z_n) = \mathbb{P}\{Z(x_1) < z_1, \dots, Z(x_n) < z_n\}$$

Al permitir que n corra sobre \mathbb{N} y (x_1, \dots, x_n) sobre $\mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d$, obtenemos una familia de distribuciones multivariadas. Esta familia define la **distribución espacial** de Z , que si bien determina completamente el comportamiento de Z no se usa con frecuencia en aplicaciones pues resulta muy complicada de tratar.

En el caso en que Z toma valores discretos es más conveniente definir su distribución espacial empezando por la distribución multivariada de sus vectores aleatorios:

$$F_{x_1, \dots, x_n}(z_1, \dots, z_n) = \mathbb{P}\{Z(x_1) = z_1, \dots, Z(x_n) = z_n\}$$

Por la manera en que se define, la distribución espacial de Z puede interpretarse como la frecuencia de ocurrencia de eventos basados en conjuntos finitos de puntos. Denotemos dicha clase de eventos por \mathcal{A}_0 . Un teorema clásico debido a Kolmogorov (1933) asevera que la distribución espacial puede extenderse de manera única a una medida de probabilidad en la σ -álgebra \mathcal{A} generada por \mathcal{A}_0 .

Cabe mencionar que las funciones aleatorias no pertenecen en principio al campo de la geometría estocástica. Sin embargo, como se verá en la siguiente sección, pueden ser utilizadas para construir objetos matemáticos que sí se pueden estudiar desde esta perspectiva.

2.3. Conjuntos aleatorios

Un *conjunto aleatorio* es un modelo estocástico cuyas realizaciones son subconjuntos de \mathbb{R}^d . Algunos ejemplos típicos de conjuntos aleatorios incluyen aquellos obtenidos a través del conjunto de nivel λ de una función aleatoria:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Z(x) \geq \lambda\}.$$

Cualquier conjunto aleatorio puede ser caracterizado por su *función indicadora* definida como

$$\mathbb{1}_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in X \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

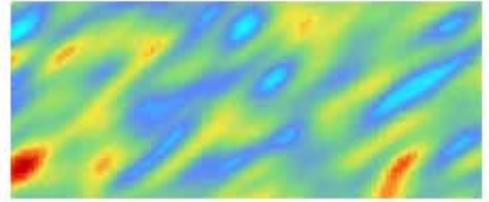


Figura 2.1: Realización de una función aleatoria, realizada por J. Méndez y M. Díaz en *Geostatistical modeling of clay spatial distribution in siliciclastic rock samples using the plurigaussian simulation method*[24].



Figura 2.2: Conjunto aleatorio generado a partir de conjuntos de nivel de la función aleatoria mostrada en la Figura 2.1, obtenido por J. Méndez y M. Díaz en *Geostatistical modeling of clay spatial distribution in siliciclastic rock samples using the plurigaussian simulation method*.

Este hecho sugiere especificar las propiedades estadísticas del conjunto aleatorio utilizando la distribución espacial de su función indicadora:

$$F_{x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_p}(1, \dots, 1; 0, \dots, 0) = \mathbb{P}\{x_1 \in X, \dots, x_n \in X; y_1 \notin X, \dots, y_p \notin X\}.$$

Desafortunadamente, esta prometedora idea no siempre funciona. Considérese por ejemplo el conjunto aleatorio que consiste de un solo punto en \mathbb{R}^d , de acuerdo a una distribución gaussiana. La distribución espacial de este conjunto aleatorio vale cero independientemente de los parámetros de la distribución gaussiana. En ese caso, el sondeo realizado con un conjunto finito de puntos es demasiado delgado para determinar la localización del punto. Es necesario tener sondeos más gruesos. Matheron propuso en 1975 utilizar subconjuntos abiertos.

Dado un conjunto abierto G , es posible considerar varios eventos para describir la posición relativa de G respecto a X :

1. G está contenido en X ($G \subset X$).
2. G le *pega* a X ($G \cap X \neq \emptyset$).
3. G le *pega* a X^c ($G \cap X^c \neq \emptyset$).
4. G *evita* a X ($G \cap X = \emptyset$ o equivalentemente $G \subset X^c$).

Ya que 1. y 3., así como 2. y 4., son complementarias, basta considerar solamente dos tipos de eventos. Por ejemplo, 1. y 4. G está contenido en X si y sólo si está contenido en el interior $\overset{\circ}{X}$ de X . De manera acorde, sondear un conjunto aleatorio utilizando esta lógica de inclusión no nos permite distinguir entre un conjunto y su interior. Esto nos lleva a la teoría de conjuntos aleatorios abiertos.

De manera similar, G evita a X si y sólo si evita a la cerradura \bar{X} de X . De este modo, sondear un conjunto aleatorio por evitación no nos permite distinguir entre un conjunto y su cerradura. En este caso se desarrolla la teoría de conjuntos aleatorios cerrados.

Ya que el complemento de un conjunto abierto es cerrado, estas teorías son duales con respecto a la complementación de conjuntos. Sin embargo, en este texto se prefiere utilizar la teoría de conjuntos aleatorios cerrados ya que incluye varias clases de modelos que son muy útiles para aplicaciones prácticas, tales como los procesos puntuales y las redes de segmentos. En adelante nos ocuparemos solamente de la teoría de conjuntos aleatorios cerrados o RACS, por sus siglas en inglés.

A continuación se presenta la notación utilizada por Matheron en 1975. La familia de subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^d se denota por \mathcal{F} . Si $A \subset \mathbb{R}^d$, escribimos \mathcal{F}_A para denotar a la familia de subconjuntos cerrados que le pegan a A , y de manera similar \mathcal{F}^A para aquellos que evitan a A :

$$\mathcal{F}_A = \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap A \neq \emptyset\},$$

$$\mathcal{F}^A = \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap A = \emptyset\}.$$

\mathcal{F} puede ser dotado de la σ -álgebra $\sigma_{\mathcal{F}}$ generada por los eventos \mathcal{F}^G con G abierto. Matheron mostró que en efecto sí existe una medida de probabilidad en $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}})$. La distribución del RACS X queda completamente especificada por tal medida de probabilidad.

Sea K un subconjunto compacto de \mathbb{R}^d . Notemos que $\mathcal{F}^K = \cup_n \mathcal{F}^{G_n}$, donde G_n es el abierto formado por los puntos que distan menos de $\frac{1}{n}$ de K . En consecuencia $\mathcal{F}^K \in \sigma_{\mathcal{F}}$. De esta manera es posible presentar el *funcional que evita*² del RACS X . Se le define sobre la familia \mathcal{K} de subconjuntos acotados de \mathbb{R}^d por medio de la siguiente fórmula:

$$\mathcal{Q}(K) = \mathbb{P}\{\mathcal{F}^K\} = \mathbb{P}\{X \cap K = \emptyset\}.$$

En ocasiones preferimos utilizar el *funcional que pega*³, que es complementario:

$$\mathcal{T}(K) = \mathbb{P}\{\mathcal{F}_K\} = \mathbb{P}\{X \cap K \neq \emptyset\}.$$

Este último satisface las siguientes propiedades:

- $0 \leq \mathcal{T} \leq 1$, con $\mathcal{T}(\emptyset) = 0$.
- $\mathcal{T}(K) \leq \mathcal{T}(K \cup K')$. Más en general, si $\{K_i\}_{i \in I}$ es una sucesión finita en \mathcal{K} tenemos que

$$\mathbb{P}\left\{\mathcal{F}^K \cap \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_{K_i}\right)\right\} \geq 0.$$

- Si $\{K_n\}$ es una sucesión monótona decreciente en \mathcal{K} con límite K , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}(K_n) = \mathcal{T}(K).$$

La razón por la cual se prefiere trabajar con el funcional que pega proviene del siguiente resultado fundamental debido a Choquet (1954), Kendall (1974) y Matheron (1975):

Teorema 2.3.1. *Sea \mathcal{T} un funcional que satisface las tres propiedades mencionadas. Entonces existe una única medida de probabilidad \mathbb{P} sobre $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}})$, y es tal que*

$$\mathbb{P}\{\mathcal{F}_K\} = \mathcal{T}(K), \quad K \in \mathcal{K}.$$

²El término en inglés es *avoiding functional*.

³El término en inglés es *hitting functional*.

En otras palabras, el funcional \mathcal{T} es para el RACS el equivalente de la función de distribución de una variable aleatoria.

Por ejemplo, si X es un RACS conformado por un solo punto distribuido uniformemente en un subconjunto compacto K_0 . El funcional que pega de X es

$$\mathcal{T}(K) = \mathbb{P}\{X \cap K \neq \emptyset\} = \frac{|K_0 \cap K|}{|K_0|}, \quad K \in \mathcal{K}.$$

Notemos que la unicidad establecida por el teorema anterior implica que un RACS con dicho funcional que pega consiste de un solo punto uniformemente distribuido en K_0 .

Matheron investigó a fondo las conexiones entre las distribuciones espaciales y los funcionales que pegan. Sus resultados se pueden enunciar del siguiente modo: Sea X un RACS con funcional que pega \mathcal{T} y distribución espacial F . Existe una infinidad de RACS con distribución espacial F . Entre éstos, solamente uno (digamos, X') es *separable*, es decir, tal que $\overline{X' \cap D} = X'$ casi seguramente para algún conjunto numerable D que es denso en \mathbb{R}^d . El funcional que pega \mathcal{T}' de X' satisface la desigualdad $\mathcal{T}'(K) \leq \mathcal{T}(K)$ para cualquier $K \in \mathcal{K}$, y se tiene la igualdad cuando K es finito.

Ahora bien, sea Z una función aleatoria definida en \mathbb{R}^d , y sea S la siguiente subgráfica:

$$S = \{(x, z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid Z(x) \geq z\}.$$

Supongamos que Z es semicontinua por arriba⁴. Entonces S es un RACS de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Del mismo modo, si $K \in \mathcal{K}$ y $z \in \mathbb{R}$, entonces $S \in \mathcal{F}^{(K, z)}$ es un evento que sucede si y sólo si $\max_{x \in K} Z(x) < z$. Entonces el máximo de Z sobre K es una función medible. Análogamente, el mínimo de una función semicontinua por abajo puede hacerse medible al considerar su supergráfica como un RACS.

En lugar de considerar conjuntos aleatorios abiertos o cerrados, también es posible considerar conjuntos aleatorios *regulares*. Estos son conjuntos que satisfacen

$$\overline{\overset{\circ}{X}} = \overline{X} \quad \overset{\circ}{\overline{X}} = \overset{\circ}{X},$$

es decir, ni X ni su complemento X^c presentan componentes infinitamente delgadas o puntos aislados, lo cual los hace muy adecuados para modelar realidades físicas tales como medios porosos. Esta clase particular de conjuntos aleatorios, que ya había sido considerada por Matheron, ha sido investigada por Schmitt (2000).

El teorema presentado puede refinarse cuando hay más información disponible sobre el RACS X . En el caso típico en que es compacto y convexo, Vitale (1983) y Molchanov (1984) han mostrado que su distribución queda determinada de manera única por los valores de $\mathbb{P}\{X \subset K\}$ para

⁴La semicontinuidad es una propiedad de las funciones reales extendidas que es más débil que la continuidad. Una función real extendida f es semicontinua por arriba (por abajo) en un punto x_0 si los valores de la función para argumentos cercanos a x_0 son ya sea cercanos a $f(x_0)$ o menores que (mayores que) $f(x_0)$.

cualquier compacto convexo K de \mathbb{R}^d .⁵

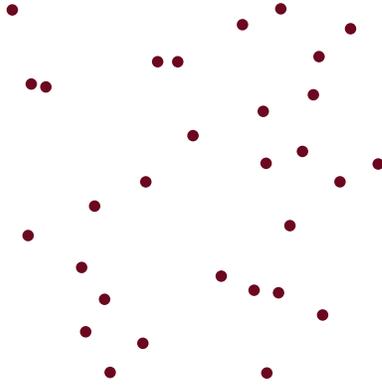
2.3.1. Relación entre conjuntos y funciones aleatorias

Dada la relevancia de estos conceptos, vale la pena comentar brevemente la relación que existe entre los conjuntos aleatorios y las funciones aleatorias.

Como se vio en la sección anterior, es posible obtener conjuntos aleatorios a través de una función aleatoria, tomando por ejemplo conjuntos de nivel. Sin embargo, no todo conjunto aleatorio se puede describir de este modo. En la siguiente sección se presentan los *procesos puntuales*, que son un ejemplo de conjunto aleatorio que no necesariamente resulta de tomar conjuntos de nivel de una función aleatoria.

⁵El estudio de este tipo de objetos matemáticos se realiza en particular desde el punto de vista de la *morfología matemática*. Una referencia fundamental es el trabajo de Matheron[25]

2.4. Procesos puntuales



En el modelo de percolación discutido al inicio del Capítulo 1 los vértices de la gráfica no eran aleatorios; estaban conformados por los elementos de la retícula entera d -dimensional. En los modelos de percolación continua este ya no es el caso. Las posiciones de los vértices son aleatorias, y están determinadas por las realizaciones de un *proceso puntual estacionario*.

Se puede pensar en un proceso puntual como un conjunto aleatorio de puntos en el espacio. Por supuesto esta no es una definición muy matemática, y hace falta precisar el significado del término *aleatorio* en este contexto.

Figura 2.3: Concepto de proceso puntual.

Sea \mathcal{B}^d la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R}^d y sea N el conjunto de todas las medidas que cuentan en \mathcal{B}^d que asignan medida finita a conjuntos de Borel acotados y tales que la medida de un punto es a lo más 1. De este modo, N se puede identificar con el conjunto de todas las configuraciones de puntos en \mathbb{R}^d sin puntos límite. Equipamos a N con la σ -álgebra \mathcal{N} generada por los conjuntos de la forma

$$\{n \in N : n(A) = k\},$$

donde $A \in \mathcal{B}^d$ y k es un entero. Un proceso puntual se define del siguiente modo:

Definición 2.4.1. Un *proceso puntual* X es un mapeo medible de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en (N, \mathcal{N}) .

La *distribución* de X es la medida μ en \mathcal{N} inducida por X ; es decir,

$$\mu(G) = \mathbb{P}(X^{-1}(G)), \text{ para todo } G \in \mathcal{N}.$$

La definición de \mathcal{N} nos permite contar el número de puntos en un conjunto $A \in \mathcal{B}^d$: el mapeo $f_A : N \rightarrow N$ definido por $f_A(n) = n(A)$ es medible por la construcción de \mathcal{N} . En consecuencia la composición $f_A \circ X : \Omega \rightarrow N$ es una variable aleatoria que denotamos por $X(A)$. Intuitivamente, $X(A)$ representa el número de puntos que “caen.^{en} A ”.

En modelos continuos no se tiene la estructura periódica de los modelos discretos, el requisito correspondiente es que el proceso puntual X sea *estacionario*. Sea T_t la traslación en \mathbb{R}^d por el

vector t : $T_t(s) = t + s$ para todo $s \in \mathbb{R}^d$. Entonces T_t induce una transformación $S_t : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ a través de la ecuación

$$(S_t n)(A) = n(T^{-1}(A)),$$

para todo $A \in \mathcal{B}^d$. A un nivel más alto, S_t induce una transformación \tilde{S}_t sobre las medidas μ en \mathcal{N} a través de la ecuación

$$(\tilde{S}_t \mu)(G) = \mu(S_t^{-1}(G)),$$

para todo $G \in \mathcal{N}$. Ahora podemos definir estacionariedad:

Definición 2.4.2. Se dice que el proceso puntual X es *estacionario* si su distribución es invariante bajo \tilde{S}_t para todo $t \in \mathbb{R}^d$.

Definición 2.4.3. Las *distribuciones finito-dimensionales (fidi)* de un proceso puntual X son las distribuciones conjuntas, para todas las familias finitas de conjuntos borelianos A_1, \dots, A_k , de las variables aleatorias $X(A_1), \dots, X(A_k)$.

Se sabe que la distribución de un proceso puntual queda completamente determinada por sus distribuciones fidi[26]. De este modo, las distribuciones fidi son una manera de especificar un proceso puntual. Cabe notar que un proceso puntual con distribución μ es estacionario si y sólo si las distribuciones fidi de μ coinciden con las distribuciones fidi de $\tilde{S}_t(\mu)$ para todo $t \in \mathbb{R}^d$.

Ya que la teoría de percolación estudia objetos infinitos requeriremos que nuestros modelos de percolación estén basados en procesos puntuales con la propiedad de que $X(\mathbb{R}^d) = \infty$. Esto es sin embargo una consecuencia de la estacionariedad como se muestra a continuación.

Proposición 2.4.1. *Sea X un proceso puntual estacionario tal que*

$$\mathbb{P}(X(\mathbb{R}^d) = 0) = 0.$$

Entonces $\mathbb{P}(X(\mathbb{R}^d) = \infty) = 1$.

Para demostrar esta afirmación, supongamos que existe un entero k tal que $\mathbb{P}(X(\mathbb{R}^d) = k) > 0$. Entonces también debe existir un entero b tal que

$$\mathbb{P} \left(X(B_b) > \frac{1}{2}k, X(\mathbb{R}^d \setminus B_b) < \frac{1}{2}k \right) =: \epsilon > 0,$$

donde B_b es el conjunto $[-b, b]^d$. Sea $r \in \mathbb{Z}^d$ un vector de entradas enteras y sea $br = (br_1, \dots, br_d)$. Considérense los eventos:

$$E_r = \left\{ X(T_{br}(B_b)) > \frac{1}{2}k, X(T_{br}(\mathbb{R}^d \setminus B_b)) < \frac{1}{2}k \right\}.$$

Se sigue de la estacionariedad de X que $\mathbb{P}(E_r) = \epsilon$, para todo $r \in \mathbb{Z}^d$. Pero los eventos E_r son disjuntos para r 's distintas, y hay una cantidad infinita numerable de vectores r con entradas enteras. Si tomamos un natural m tal que $m\epsilon > 1$, y luego tomamos m vectores distintos con entradas enteras, r_1, \dots, r_m , tendríamos que $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^m E_{r_i}) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(E_{r_i}) = m\epsilon > 1$ lo cual es una contradicción. Así que para cada entero positivo k , la probabilidad de que \mathbb{R}^d tenga k puntos según X (en otras palabras, que sea finito), es cero. Nos vemos obligados a concluir que $X(\mathbb{R}^d)$ es infinito con probabilidad 1.

Antes de pasar a los ejemplos se presentan algunas definiciones:

Definición 2.4.4. La *densidad* de un proceso estacionario X se define como $\mathbb{E}[X([0, 1]^d)]$, donde \mathbb{E} es el operador esperanza correspondiente a \mathbb{P} .

Definición 2.4.5. Dos procesos puntuales X_1 y X_2 definidos en el mismo espacio de probabilidad son *independientes* si

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_1(A_1) = k_1, \dots, X_1(A_n) = k_n, X_2(B_1) = l_1, \dots, X_2(B_m) = l_m) \\ &= \mathbb{P}(X_1(A_1) = k_1, \dots, X_1(A_n) = k_n) \mathbb{P}(X_2(B_1) = l_1, \dots, X_2(B_m) = l_m), \end{aligned}$$

para cada $n, m \geq 1$, l_i, k_j enteros no negativos y conjuntos borelianos A_i y B_j .

Definición 2.4.6. La *superposición* de dos procesos puntuales X_1 y X_2 , definidos en el mismo espacio de probabilidad, es el proceso puntual X definido por

$$X(A)(\omega) = X_1(A)(\omega) + X_2(A)(\omega),$$

para todo conjunto Boreliano A . Escribimos $X = X_1 * X_2$ o $\mu = \mu_1 * \mu_2$, donde μ , μ_1 y μ_2 son las distribuciones de X , X_1 y X_2 , respectivamente.

A continuación se presenta un ejemplo de proceso puntual.

Ejemplo 2.4.1. Sea U un vector aleatorio de dimensión d en un espacio de probabilidad distribuido uniformemente en $[0, 1]^d$. Identificando la medida que cuenta μ con el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^d : \mu(\{x\}) = 1\}$, definimos el proceso puntual X a través de la ecuación $X(\omega) = U(\omega) + \mathbb{Z}^d$. Es decir que trasladamos la retícula entera de dimensión d respecto a un vector aleatorio. Es posible ver, usando distribuciones fidi, que X es estacionario [27].

2.4.1. Proceso puntual de Poisson

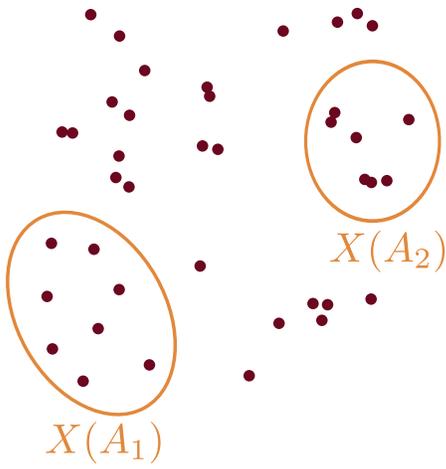


Figura 2.4: Proceso puntual de Poisson, donde $X(A_i)$ es una variable aleatoria Poisson de parámetro $\lambda \mathcal{L}(A_i)$.

Se dice que el proceso puntual X es de Poisson con densidad λ si se satisfacen las siguientes condiciones:

- I. Para conjuntos de Borel mutuamente disjuntos A_1, \dots, A_k , las variables aleatorias $X(A_1), \dots, X(A_k)$ son mutuamente independientes.
- II. Para cualquier conjunto de Borel acotado $A \in \mathcal{B}^d$ se tiene que

$$\mathbb{P}(X(A) = k) = e^{-\lambda \mathcal{L}(A)} \frac{\lambda^k \mathcal{L}(A)^k}{k!},$$

donde $\mathcal{L}(\cdot)$ denota la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^d .

Observemos que especificamos la distribución del proceso Poisson a través de sus distribuciones fidi. La segunda condición garantiza que el proceso Poisson es estacionario. También se tiene que $\mathbb{E}[X([0, 1]^d)] = \lambda$, y así decir que λ es la densidad del proceso es consistente con la Definición 2.4.4.

Ejemplo 2.4.2. Proceso Poisson no homogéneo Se dice que el proceso puntual X es un proceso Poisson no homogéneo si se satisfacen las siguientes condiciones:

- I. Para conjuntos de Borel mutuamente disjuntos A_1, \dots, A_k , las variables aleatorias $X(A_1), \dots, X(A_k)$ son mutuamente independientes.
- II. Existe una función medible $\Lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$, llamada la *función de intensidad* del proceso, tal que para cualquier conjunto Boreliano acotado $A \in \mathcal{B}^d$ se tiene que

$$\mathbb{P}(X(A) = k) = \exp\left\{-\int_A \Lambda(x) dx\right\} \frac{\left(\int_A \Lambda(x) dx\right)^k}{k!}.$$

Obtenemos un proceso Poisson al tomar $\Lambda(x) \equiv \lambda$, y ese es el único caso en el cual se obtiene un proceso estacionario.

Supongamos que se tiene una sucesión creciente de conjuntos borelianos acotados $A_n \subset \mathbb{R}^d$ que converge a A , donde no requerimos que A sea acotado. Tenemos que los eventos $\{X(A_n) \geq k\}$ se incrementan a $\{X(A) \geq k\}$ cuando $n \rightarrow \infty$, y en consecuencia $\mathbb{P}(X(A_n) = k) \rightarrow \mathbb{P}(X(A) = k)$. De la monotonía de la convergencia se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X(A) = k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X(A_n) = k) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left\{-\int_{A_n} \Lambda(x) dx\right\} \frac{\left(\int_{A_n} \Lambda(x) dx\right)^k}{k!} \\
&= \exp\left\{-\int_A \Lambda(x) dx\right\} \frac{\left(\int_A \Lambda(x) dx\right)^k}{k!},
\end{aligned}$$

donde la última expresión debe interpretarse como cero cuando $\int_A \Lambda(x) dx = \infty$.

Terminamos esta sección con algunas propiedades del proceso Poisson. En la física frecuentemente se utilizan frases como “considere una infinidad de puntos distribuidos en el espacio”. Se refieren, de hecho, a un proceso Poisson y la propiedad que dicha frase insinúa se debe de interpretar de acuerdo a la siguiente proposición.

Proposición 2.4.2. *Sea X un proceso Poisson y sea A un conjunto Boreliano con medida de Lebesgue positiva y acotada. Entonces, para todo $B \subset A$ se tiene que*

$$\mathbb{P}(X(B) = m | X(A) = m + k) = \binom{m+k}{m} \left(\frac{\mathcal{L}(B)}{\mathcal{L}(A)}\right)^m \left(1 - \frac{\mathcal{L}(B)}{\mathcal{L}(A)}\right)^k.$$

Otra propiedad útil del proceso Poisson es la siguiente: supongamos que condicionamos al evento de que haya un punto en x , para alguna $x \in \mathbb{R}^d$. La propiedad de independencia del proceso Poisson implica que, aparte del punto dado en x , la estructura probabilística del proceso condicionado es idéntica a la del proceso original. Escribiendo μ para la distribución de nuestro proceso Poisson y μ_x para la distribución del proceso condicionado a tener un punto en x , y δ_x para la distribución de un proceso Poisson independiente que solamente tiene un punto en x c.s., podemos formalizar dicha propiedad como

$$\mu_x = \mu * \delta_x.$$

La distribución μ_x es conocida como la *distribución de Palm* de μ . Si condicionamos al evento de que haya un punto en el origen, seguimos obteniendo un proceso Poisson.

La tercera propiedad a discutir es que la superposición de dos procesos de Poisson independientes, X_{λ_1} y X_{λ_2} , con densidad λ_1 y λ_2 respectivamente, es de nuevo un proceso de Poisson con densidad $\lambda_1 + \lambda_2$. Esto se debe a que la suma de variables aleatorias Poisson independientes resulta en una nueva variable aleatoria Poisson, cuyo parámetro es la suma de los parámetros de cada sumando. Es decir:

Proposición 2.4.3.

$$X_{\lambda_1} * X_{\lambda_2} = X_{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Finalmente, es posible obtener un proceso Poisson no homogéneo a partir de uno homogéneo de un modo probabilista. Sea X un proceso Poisson con densidad λ , y sea $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ un mapeo medible. Consideramos una realización $X(\omega)$ de X . Si hay un punto en x , quitaremos ese punto con probabilidad $1 - g(x)$, y lo dejaremos donde está con probabilidad $g(x)$, independientemente del resto de los puntos del proceso Poisson. Denotaremos el proceso puntual resultante por \tilde{X} . De este modo, \tilde{X} es un *adelgazamiento* del proceso original X .

Proposición 2.4.4. *El proceso \tilde{X} es un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad λg .*

La propiedad de independencia se hereda de manera inmediata de X a \tilde{X} . Por otra parte, la distribución fidi de \tilde{X} se puede construir del siguiente modo:

$$\mathbb{P}(\tilde{X}(A) = k) = \sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{P}(X(A) = i) \mathbb{P}(\tilde{X}(A) = k | X(A) = i).$$

De la Proposición 1.1.2 tenemos que dado el evento $\{X(A) = i\}$, los i puntos de X en A están uniformemente distribuidos sobre A . Entonces

$$\mathbb{P}(\tilde{X}(A) = 1 | X(A) = 1) = \mathcal{L}(A)^{-1} \int_A g(x) dx,$$

y más en general,

$$\mathbb{P}(\tilde{X}(A) = k | X(A) = i) = \binom{i}{k} \left(\mathcal{L}(A)^{-1} \int_A g(x) dx \right)^k \left(1 - \mathcal{L}(A)^{-1} \int_A g(x) dx \right)^{i-k}.$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{X}(A) = k) &= e^{-\lambda \mathcal{L}(A)} \frac{(\lambda \int_A g(x) dx)^k}{k!} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(\lambda \mathcal{L}(A) [1 - \mathcal{L}(A)^{-1} \int_A g(x) dx])^{i-k}}{(i-k)!} \\ &= e^{-\lambda \mathcal{L}(A)} \frac{(\lambda \int_A g(x) dx)^k}{k!} e^{\lambda \mathcal{L}(A) (1 - \mathcal{L}(A)^{-1} \int_A g(x) dx)} \\ &= \frac{(\lambda \int_A g(x) dx)^k}{k!} e^{\lambda \int_A g(x) dx}. \end{aligned}$$

Notemos que si g es constante, recuperamos un proceso Poisson homogéneo, con densidad menor que el proceso original.

Cerramos esta sección con un comentario acerca de la función de intensidad del proceso Poisson. Esta función puede ser, a su vez, una función aleatoria. En ese caso se le conoce como proceso de Cox (ver [28]).

Revisión de modelos de percolación continua

3.1. Modelos booleanos

Antes de dar la formalización matemática de este modelo, intentaremos describir intuitivamente un caso particular. Empezamos con algún proceso puntual estacionario X . Diremos que el modelo está *dirigido* por X . Cada punto de X es el centro de una bola cerrada (de acuerdo a la métrica Euclidiana usual) de radio aleatorio, de tal suerte que radios correspondientes a puntos distintos son independientes entre sí e idénticamente distribuidos. Los radios también son independientes de X . De este modo, se induce una partición en el espacio, la región *ocupada*, que es la región cubierta por al menos una bola, y la región *vacía*, que es simplemente el complemento de la región ocupada. La región ocupada se denota por C . Tanto la región ocupada como la vacía consisten de componentes conexas. Las componentes conexas en la región ocupada se llamarán *componentes ocupadas*. Similarmente, las componentes conexas de la región vacía se llaman *componentes vacías*. Para $A \subset \mathbb{R}^d$, denotamos por $W(A)$ a la unión de todas las componentes ocupadas cuya intersección con A es no vacía. Cuando $A = \{0\}$, escribiremos $W := W(\{0\})$, y W se llama la componente ocupada del origen. En el caso de la región vacía las definiciones son análogas, utilizando V en lugar de W . Decimos que V es la componente vacía del origen. Notemos que ya sea V o W es vacío, pero no ambos. La bola centrada en x se denota por $S(x)$ o por $S(x, r)$, donde r denota el radio (aleatorio) de la bola.

Si dos puntos x y y están en la misma componente conexa, decimos que están *conectados* y escribimos $x \overset{\circ}{\sim} y$ (o por supuesto $y \overset{\circ}{\sim} x$). La conexidad en la región vacía se define de manera similar, y se denota por $x \overset{\circ}{\rightsquigarrow} y$. Si x y y están en la misma componente ocupada (vacía) de $C \cap A$ ($C^c \cap A$) para alguna $A \subset \mathbb{R}^d$, escribimos $x \overset{\circ}{\rightsquigarrow} y$ en A ($x \overset{\circ}{\rightsquigarrow} y$ en A).

Para la teoría que se tratará más adelante, es necesario definir con precisión el espacio de probabilidad en el cual se desarrolla el modelo. Una primera construcción podría ser ordenar los puntos de X linealmente de acuerdo a alguna regla predeterminada y construir en un espacio de probabilidad el proceso puntual X y variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas Y_1, Y_2, \dots , y construir una realización asignando un radio de Y_i al i -ésimo punto de X . El

problema con este escenario es que el orden de los puntos de X no se preservará si trasladamos la configuración en el espacio, y en consecuencia esta construcción no permite la aplicación de teoremas ergódicos.

Otra posibilidad es considerar una cantidad no numerable de variables aleatorias $\{Y_x\}$ indexadas por \mathbb{R}^d , y asignar radio Y_x al punto x si éste existe. El problema de esta construcción es que incluso los eventos más simples no serán medibles.

Ahora describiremos una construcción basada solamente en una cantidad numerable de variables aleatorias de tal forma que podamos definir traslaciones. Sea X definido en algún espacio de probabilidad $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}_1)$. Sea Ω_2 el espacio producto $\prod_{n \in N} \prod_{z \in \mathbb{Z}^d} [0, \infty)$, y equipemos Ω_2 con la σ -álgebra producto y la medida producto \mathbb{P}_2 usuales, donde todas las marginales serán μ , con μ una medida de probabilidad en $[0, \infty)$. Un elemento $\omega_2 \in \Omega_2$ se denota a veces por $\omega_2(n, z)$. Finalmente, sea $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, y dotamos a Ω con la medida producto $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2$ y la σ -álgebra producto usual. Un modelo booleano es un mapeo medible de Ω en $N \times \Omega_2$ definido por $(\omega_1, \omega_2) \rightarrow (X(\omega_1), \omega_2)$, donde N se define según lo indicado al inicio de la sección anterior. La configuración de bolas en el espacio correspondiente a (ω_1, ω_2) se obtiene del siguiente modo. Considérense *cubos binarios*:

$$K(n, z) := \prod_{i=1}^d (z_i 2^{-n}, (z_i + 1) 2^{-n}], \text{ para todo } n \in N \text{ y } z \in \mathbb{Z}^d.$$

Llamamos a $K(n, z)$ el cubo binario de orden n . Cada punto $x \in X$ está contenido en un único cubo binario de orden n , digamos $K(n, z(n, x))$, y con probabilidad 1 (respecto a \mathbb{P}_1), para cada punto $x \in X$ existe un único número mínimo $n_0 = n_0(x)$ tal que $K(n_0, z(n_0, x))$ no contiene ningún otro punto de X . El radio de la bola con centro en x se define ahora como $\omega_2(n_0, z(n_0, x))$.

La estructura producto de Ω implica que los radios son independientes del proceso puntual, y la estructura producto de Ω_2 implica que diferentes puntos tienen bolas con radios independientes e idénticamente distribuidos. Resulta natural denotar este modelo por (X, μ) . Sin embargo, en la mayoría de los casos se tiene cierta variable aleatoria ρ con distribución μ y consideramos que esta variable aleatoria gobierna los radios de las bolas: es decir que los radios son aleatorios y tienen distribución ρ . Entoces el modelo se denota por (X, ρ) . En el caso en que X es un proceso Poisson con densidad λ escribiremos $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\lambda = \mathbb{P}_{(\lambda, \rho)}$ para enfatizar la dependencia del parámetro. La probabilidad de un evento A se denota por $\mathbb{P}(A)$ o $\mathbb{P}\{A\}$ dependiendo de las circunstancias.

Sean e_1, \dots, e_d los vectores unitarios en \mathbb{R}^d . La traslación $T_{e_i} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ definida por $x \rightarrow x + e_i$ induce una transformación U_{e_i} en Ω_2 a través de la ecuación

$$(U_{e_i} \omega_2)(n, z) = \omega_2(n, z - e_i).$$

Al igual que en la sección anterior, S_{e_i} se define en Ω_1 a través de la ecuación

$$(S_{e_i} \omega_1)(A) = \omega_1(T_{e_i}^{-1} A).$$

En consecuencia, T_{e_i} induce una transformación \tilde{T}_{e_i} en $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ definida por

$$\tilde{T}_{e_i}(\omega) = (S_{e_i}\omega_1, U_{e_i}\omega_2).$$

La transformación \tilde{T}_{e_i} corresponde a la traslación de una configuración de bolas en el espacio por el vector e_i . Como tal, jugará un papel crucial en la ergodicidad.

Ya que en la teoría de percolación los objetos de interés son los no acotados, estudiaremos las componentes ocupadas y vacías no acotadas. La pregunta más básica que uno se puede hacer sobre componentes no acotadas concierne a su existencia. Dado cierto modelo booleano (X, ρ) , ¿existe una probabilidad positiva de que la componente ocupada o vacía del origen sea no acotada? (Notemos que no es relevante que tomemos el origen, ya que debido a la estacionariedad de X y a la independencia de los radios no podemos distinguir probabilísticamente entre puntos distintos en el espacio). Esta pregunta es usualmente difícil de contestar, en su lugar se consideran familias de modelos booleanos y se prueba que algunos miembros permiten componentes no acotadas, pero otros no. Veamos un ejemplo de componentes ocupadas en modelos booleanos dominados por procesos Poisson. Un modelo booleano dirigido por un proceso Poisson con densidad λ y radio aleatorio ρ se denota por (X, ρ, λ) , y le llamamos *modelo booleano de Poisson*. Denotamos por $\theta_\rho(\lambda) = \theta(\lambda)$ la probabilidad de que el origen pertenezca a una componente ocupada no acotada. En otras palabras, si $d(A)$ denota el diámetro de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ (es decir, $d(A) = \sup_{x,y \in A} |x-y|$), $\theta(\lambda)$ es la probabilidad de que $d(W) = \infty$. La función θ es la *función de percolación*. Parece evidente que θ es no decreciente respecto a λ , pero en realidad no es fácil de probar y por el momento se aceptará este resultado. Podemos definir la *densidad crítica* $\lambda_C = \lambda_C(\rho)$ del siguiente modo:

$$\lambda_C(\rho) = \inf\{\lambda \geq 0 : \theta_\rho(\lambda) > 0\}.$$

Se tendrá que λ_C es no trivial en todos los casos razonables, es decir, estrictamente positiva y finita. Este hecho es fundamental para la teoría de percolación e implica de manera inmediata que $\lambda > \lambda_C$, así que las componentes ocupadas no acotadas existen con probabilidad positiva. Para λ, λ_C , el origen tiene probabilidad cero de pertenecer a una componente ocupada no acotada. y se sigue inmediatamente de la estacionariedad del proceso que lo mismo sucede para cualquier otro punto. Pero cualquier componente ocupada no acotada debe contener al menos un punto con coordenadas racionales, de las cuales sólo hay una cantidad numerable. En consecuencia, para $\lambda < \lambda_C$, con probabilidad positiva no pueden existir componentes ocupadas no acotadas. Cuando este es el caso, $\lambda < \lambda_C$, decimos que el sistema está en *fase subcrítica*, cuando $\lambda > \lambda_C$ el sistema es *supercrítico*. En el valor crítico λ_C , el sistema se llama *crítico*.

Podemos definir densidades críticas para componentes vacías no acotadas de manera similar. Escribimos $\theta_\rho^*(\lambda)$ para denotar la probabilidad de que $d(V) = \infty$ y la densidad crítica $\lambda_C^* = \lambda_C^*(\rho)$ se define como

$$\lambda_C^*(\rho) = \sup\{\lambda \geq 0 : \theta_\rho^*(\lambda) > 0\}.$$

Es posible dar una construcción más general al generar conjuntos aleatorios colocando objetos aleatorios independientes (no necesariamente bolas) y tomando su unión. Esa sencilla idea contie-

ne la definición del modelo booleano general. A pesar de su simplicidad, es importante en cuanto a métodos y aplicaciones, y ha sido el objeto de estudio de muchos trabajos (Matheron 1967, 1975; Stoyan et. al., 1987; Hall, 1988; Molchanov, 1997).

Esta sección considera únicamente modelos booleanos que constituyen conjuntos cerrados aleatorios. Primero se calcula el funcional que evita de un modelo booleano, sea estacionario o no (en el caso estacionario surgen simplificaciones reportadas en la sección 3.1.5). A partir de esto se obtienen fácilmente las propiedades algebraicas y estereológicas de estabilidad. Finalmente, se presenta un algoritmo iterativo para la simulación condicional del modelo booleano propuesto por Lantuéjoul [28].

3.1.1. Construcción del modelo booleano

Se necesitan dos ingredientes básicos e independientes para la construcción de un modelo booleano en \mathbb{R}^d :

- I) Un conjunto de *semillas*, esto es, un proceso puntual de Poisson \mathcal{P} con función de intensidad $\theta = (\theta(x), x \in \mathbb{R}^d)$.
- II) Una familia $(A(x), x \in \mathbb{R}^d)$ de subconjuntos de \mathbb{R}^d compactos, no vacíos, aleatorios e independientes. Al subconjunto $A(x)$ se le llama el *objeto implantado en x* y su funcional que pega se denota por \mathcal{T}_x .

De este modo, un modelo booleano X es la *unión de todos los objetos implantados en las semillas Poisson*

$$X = \bigcup_{x \in \mathcal{P}} A(x)$$

La apariencia de una realización del modelo depende en gran medida de la forma que tengan los objetos. Éstos pueden ser, por ejemplo, segmentos de recta, discos, polígonos, etcétera...

Ya que un modelo booleano es posiblemente la unión de una infinidad de objetos, no existe garantía de que sea cerrado. Este será ciertamente el caso si para cada punto $x \in \mathbb{R}^d$ existe una vecindad a la cual sólo le pega una cantidad finita de objetos (casi seguramente), y en particular si la población de objetos $(A(x), x \in \mathcal{P})$ es de orden finito. Específicamente, sea $N(K)$ el número de objetos que le pegan al compacto K . Entonces

$$N(K) = \sum_{x \in \mathcal{P}} \mathbb{1}_{K \cap A(x) \neq \emptyset}.$$

Un cálculo sencillo muestra que la media de $N(K)$ es

$$\vartheta(K) = \int_{\mathbb{R}^d} \theta(x) \mathcal{T}_x(K) dx \leq \infty.$$

Se dice que un modelo booleano es de **orden finito** si $\vartheta(K) < \infty \forall K \in \mathcal{K}$. A lo largo de este texto se supondrá que los modelos booleanos considerados son de orden finito.

3.1.2. El funcional que evita del modelo booleano

Comencemos determinando la distribución del número de objetos que le pegan al subconjunto compacto K .

Se tendrá que $N(K)$ es una variable aleatoria Poisson con media $\vartheta(K)$: Para cada $D \in (K)$ consideremos el número $N_D(K)$ de objetos implantados en D que le pegan a K .

$$N_D(K) = \sum_{x \in \mathcal{P} \cap D} \mathbb{1}_{K \cap A(x) \neq \emptyset}.$$

Por definición, el número de puntos en $\mathcal{P} \cap D$ sigue una distribución Poisson con media

$$\theta(D) = \int_D \theta(x) dx.$$

Supongamos que este número es igual a n . De acuerdo a las propiedades de un proceso puntual de Poisson estos puntos están distribuidos de manera uniforme e independiente sobre D , con función de densidad de probabilidad $\frac{\theta(\cdot)}{\theta(D)}$. Más aún, un objeto implantado en x le pega a D con probabilidad $\mathcal{T}_x(K)$ y lo evita con la probabilidad complementaria $1 - \mathcal{T}_x(K)$. En consecuencia, la función generadora de $N_D(K)$ es

$$\mathbb{E} \{s^{N_D(K)}\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\theta(D)} \frac{\theta(D)^n}{n!} \left(\int_D \frac{\theta(x)}{\theta(D)} [(1 + (s-1)\mathcal{T}_x(K))] dx \right)^n,$$

donde $0 \leq s \leq 1$, y al sumar se tiene que

$$\mathbb{E} \{s^{N_D(K)}\} = \exp \left\{ (s-1) \int_D \theta(x) \mathcal{T}_x(K) dx \right\}.$$

Para extender este resultado a todo el espacio, sea $(D_n, n \in \mathbb{N})$ una sucesión creciente de compactos que cubren a \mathbb{R}^d . Entonces $(N_{D_n}(K), n \in \mathbb{N})$ también es una sucesión creciente y converge casi seguramente a $N(K)$. En consecuencia

$$\mathbb{E} \{s^{N(K)}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \{s^{N_{D_n}(K)}\} = \exp \left\{ (s-1) \int_{\mathbb{R}^d} \theta(x) \mathcal{T}_x(K) dx \right\}.$$

Esta última expresión se reconoce como la función generadora de una distribución Poisson con media $\vartheta(K)$.

Ya que $\mathbb{P}\{X \cap K = \emptyset\} = \mathbb{P}\{N(K) = 0\}$, deducimos que el funcional que evita del modelo booleano es

$$\mathbb{P}\{X \cap K = \emptyset\} = e^{-\vartheta(K)}, \quad K \in \mathcal{K}.$$

3.1.3. Propiedades de estabilidad

Para poder explorar las propiedades de estabilidad del modelo booleano es necesario echar mano de conceptos básicos de morfología, a saber el concepto de *dilatación*.

Dados $x \in \mathbb{R}^d$ y $A \subset \mathbb{R}^d$, A_x denota al conjunto obtenido al trasladar A por x . Si B es un subconjunto de \mathbb{R}^d entonces la *suma de Minkowski* de A y B es

$$A \oplus B = \bigcup_{y \in B} A_y.$$

Decimos entonces que el punto x pertenece al conjunto A *dilatado* por B si B_x le pega a A (es decir, si $B_x \cap A \neq \emptyset$).

Por otra parte, necesitaremos también el concepto de i -planos, los cuales son espacios afines de dimensión i . [Un espacio afín es el trasladado de un espacio vectorial].

Ahora sí, estamos listos para enunciar las propiedades básicas de estabilidad de un modelo booleano:

1. La unión de dos modelos booleanos independientes es un modelo booleano.
2. Un modelo booleano dilatado por un subconjunto compacto no vacío de \mathbb{R}^d es un modelo booleano.
3. La intersección de un modelo booleano con un subconjunto compacto de \mathbb{R}^d es un modelo booleano.
4. La intersección de un modelo booleano y un i -plano es un modelo booleano.

A continuación se proporcionan argumentos para justificar estas afirmaciones:

Sean X' y X'' dos modelos booleanos independientes con funciones de identidad θ' y θ'' , y funcionales que pegan \mathcal{T}' y \mathcal{T}'' . Debido a la independencia se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{(X' \cup X'') \cap K = \emptyset\} &= \mathbb{P}\{X' \cap K = \emptyset\} \mathbb{P}\{X'' \cap K = \emptyset\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} \theta'(x) \mathcal{T}'_x(K) + \theta''(x) \mathcal{T}''_x(K) dx \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} \theta(x) \mathcal{T}_x(K) dx \right\} \end{aligned}$$

donde $\theta = \theta' + \theta''$ y \mathcal{T}_x queda definido como

$$\mathcal{J}_x(K) = \frac{\theta'(x)}{\theta'(x) + \theta''(x)} \mathcal{J}'_x(K) + \frac{\theta''(x)}{\theta'(x) + \theta''(x)} \mathcal{J}''_x(K), \quad K \in \mathcal{K}.$$

Este es el funcional que pega de un objeto aleatorio igual a $A'(x)$ con probabilidad $\frac{\theta'(x)}{\theta'(x) + \theta''(x)}$, e igual a $A''(x)$ con probabilidad complementaria $\frac{\theta''(x)}{\theta'(x) + \theta''(x)}$. Este hecho prueba la primera propiedad.

Ahora bien, sea D un subconjunto de \mathbb{R} compacto y no vacío. La segunda propiedad es consecuencia directa de la distributividad de la suma de Minkowski sobre la unión de conjuntos:

$$X \oplus D = \bigcup_{x \in \mathcal{P}} A(x) \oplus D.$$

De este modo, la dilatación de un modelo booleano vuelve a ser la unión de objetos aleatorios implantados en las semillas determinadas por \mathcal{P} , lo cual determina un nuevo modelo booleano. La diferencia es que en lugar de tener los objetos aleatorios originales $A(x)$, se tienen los objetos aleatorios dilatados $A(x) \oplus D$.

En cuanto a la tercera propiedad, podemos escribir simplemente $X \cap D = \bigcup_{x \in \mathcal{P}} A(x) \cap D$. Sin embargo, esta fórmula es difícil de interpretar ya que los objetos $A(x) \cap D$ serán casi seguramente vacíos. En cambio consideraremos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{(X \cap D) \cap K = \emptyset\} &= \mathbb{P}\{X \cap (D \cap K) = \emptyset\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}} \theta(x) \mathcal{J}_x(D \cap K) dx \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}} \mathcal{J}_x(D) \frac{\theta(x) \mathcal{J}_x(D \cap K)}{\mathcal{J}_x(D)} dx \right\} \end{aligned}$$

Pero $\frac{\theta(x) \mathcal{J}_x(D \cap K)}{\mathcal{J}_x(D)}$ es el funcional que pega de $A(x) \cap D$, ya que este objeto es no vacío. En consecuencia, $X \cap D$ es un modelo booleano con función de intensidad $\theta \mathcal{J}(D)$ y funcional que pega $\frac{\theta \mathcal{J}(D \cap K)}{\mathcal{J}(D)}$.

Finalmente, sea P un i -plano de \mathbb{R}^d . La última propiedad se puede deducir de la tercera tomando una sucesión creciente de compactos no vacíos $(D_n, n \in \mathbb{N})$ que converja a P .

El modelo booleano es un caso especial de los modelos basados en objetos. Una primera extensión consiste en reemplazar el proceso puntual de Poisson que especifica la localización de los objetos a través de un proceso espacial de nacimiento y muerte (Preston, 1977; Stoyan et al., 1987). También es posible permitir dependencia entre los objetos. En ese caso, un objeto se inserta o se elimina dependiendo de una función de los objetos ya presentes (y no solamente el número de éstos). Esto lleva al concepto de un proceso de vida y muerte de objetos en el espacio. Un ejemplo típico es el modelo de interacción dos a dos considerado por Sylverseen y Omre (1994). La primera versión de este modelo incluyó un número fijo de objetos, lo cual permitía la simulación a través

de un muestreo de Gibbs. Esta restricción fue eliminada en un artículo posterior (1997). Es posible extender el modelo de muchas otras maneras, como el proceso de saltos de Markov de objetos.

3.1.4. Simulación del modelo booleano

El problema entre manos es simular el modelo booleano en D , sujeto a las condiciones de que dos subconjuntos finitos C_0 y C_1 deben estar contenidos en X^c y X , respectivamente. Este problema es importante en la industria petrolera. Los ingenieros petroleros requieren conocer la geometría del yacimiento para poder ejecutar programas de simulación de flujos. Un algoritmo desarrollado por Halderesen en 1983 fue notablemente mejorado por Chessa en 1995. Consiste en simular de manera independiente los cuerpos arenosos (los objetos) que intersecan los pozos y aquellos que no. Esta perspectiva dicotómica es posible gracias a las propiedades de independencia del proceso Poisson. La dificultad de esta estrategia es que la distribución de un objeto que interseca al pozo depende no solamente de dónde esté implantado, sino también del número y la localización de los pozos que interseca. Usualmente, el problema se vuelve intratable en cuanto este número es mayor a uno.

El algoritmo iterativo descrito a continuación fue diseñado a partir de comunicaciones privadas entre Matheron y Lantuéjoul en 1990. Posteriormente Gedler (1991) llevo a cabo el trabajo preliminar bajo la supervisión de Lantuéjoul. Ya que este algoritmo de simulación condicional es una versión modificada de un algoritmo de simulación no condicional (mediante la restricción del kernel de transición), se presenta primero el algoritmo de simulación no condicional.

Se discutió anteriormente que $X \cap D$ es un modelo booleano con función de intensidad $\theta(\cdot)\mathcal{T}_x(D)$. De manera acorde, el número de objetos de $X \cap D$ es de distribución Poisson con media

$$\vartheta(D) = \int_{\mathbb{R}^d} \theta(x)\mathcal{T}_x(D)dx.$$

El funcional que pega de un objeto de $X \cap D$ implantado en x es $\frac{\mathcal{T}_x(D \cap \cdot)}{\mathcal{T}_x}(D)$.

Un *objeto típico* de $X \cap D$ es un objeto seleccionado uniformemente entre los objetos de $X \cap D$. Un objeto típico de $X \cap D$ se implanta de acuerdo a la función de densidad $\theta(\cdot)\mathcal{T}(D)$. Su funcional que pega es

$$\mathcal{T}(K) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\theta(x)\mathcal{T}_x(D)}{\vartheta(D)} \frac{\mathcal{T}_x(D \cap K)}{\mathcal{T}_x(D)} = \frac{1}{\vartheta(D)} \int_{\mathbb{R}^d} \theta(x)\mathcal{T}_x(D \cap K)dx$$

Notemos que en particular $\mathcal{T}(D) = 1$ y $\mathcal{T}(K) = 0$ si K es disjunto de D .

Por otra parte, $X \cap D$ tiene la misma distribución que una unión de N objetos típicos independientes, donde N tiene distribución Poisson con media $\vartheta(D)$. Este hecho se prueba del siguiente

modo: Sea Y tal unión. Su funcional que evita es

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y \cap K = \emptyset\} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\vartheta(D)} \frac{\vartheta(D)^n}{n!} [1 - \mathcal{T}(K)]^n \\ &= \exp\{-\vartheta(D)\mathcal{T}(K)\} \\ &= \exp\left\{-\int_{\mathbb{R}^d} \theta(x)\mathcal{T}_x(D \cap K)dx\right\}\end{aligned}$$

el cual resulta ser exactamente el funcional que evita de $X \cap D$.

En consecuencia, una simulación no condicional del modelo booleano se puede obtener utilizando el siguiente algoritmo:

Algoritmo para el modelo booleano:

1. Hacer $X = \emptyset$.
2. Generar $N \sim \text{Poisson}(\vartheta(D))$.
3. Si $N = 0$, regresar X .
4. Generar un objeto típico $A \sim \mathcal{T}$.
5. Hacer $X = X \cup A$, $N = N - 1$ e ir al paso 3.

Este algoritmo requiere de la simulación de un objeto típico. El algoritmo estándar es:

Algoritmo para el objeto típico

1. Generar $X \sim \theta(\cdot)\mathcal{T}(D)$.
2. Generar $A \sim \frac{\mathcal{T}_x(D \cap \cdot)}{\mathcal{T}_x(D)}$.
3. Regresar A .

Si resulta difícil simular un objeto implantado en x y pegarle a D directamente, es posible emplear un algoritmo alternativo de rechazo.

Algoritmo para el objeto típico (método de rechazo)

1. Generar $X \sim \theta(\cdot)\mathcal{T}(D)$.
2. Generar $A \sim \mathcal{T}_x$.
3. Si $A \cap D = \emptyset$, ir al paso 2.

4. Regresar $A \cap D$.

Finalmente, el primer algoritmo se modifica ligeramente para volverlo iterativo. Esto no presenta dificultad alguna ya que algoritmo de Metropolis puede ser utilizado para simular una distribución Poisson. El siguiente algoritmo simula iterativamente un modelo Poisson. Específicamente, simula la población de objetos que constituye el modelo booleano. En este algoritmo el número de objetos de la población Φ se denota por $\#\Phi$.

Algoritmo para objetos de un modelo booleano

1. Hacer $\Phi = \emptyset$.
2. Generar una variable aleatoria uniforme U que tome los valores 1, -1 y 0, con probabilidades:

$$p_1 = \frac{\vartheta(D)}{\vartheta(D) + \#\Phi + 1}, \quad p_{-1} = \frac{\#\Phi}{\vartheta(D) + \#\Phi}, \quad p_0 = 1 - p_1 - p_{-1}.$$

3. a) Si $U = 1$, entonces generar $A \sim \mathcal{T}$ y hacer $\Phi = \Phi \cup A$.
b) Si $U = -1$, entonces generar $A \sim Unif(\Phi)$ y hacer $\Phi = \Phi \setminus A$.
4. Ir al paso 2.

Simulación condicional

Empezaremos con dos comentarios. En primer lugar, la cadena de Markov del segundo algoritmo presentado es reversible (hereda esta propiedad del algoritmo de Metropolis). En segundo lugar, la restricción de esta cadena de Markov al conjunto Ω_c de todas las poblaciones de objetos que respetan las condiciones en C_0 y C_1 es irreducible. Esto se deriva del hecho de que Ω_c es estable bajo concatenación, es decir que si $\Phi, \Psi \in \Omega_c$, entonces la población $\Phi + \Psi$ determinada por todos los objetos de Φ y todos los objetos de Ψ también es un elemento de Ω_c .

En consecuencia, se puede aplicar la técnica de restricción del kernel de transición¹ y el algoritmo en cuestión puede volverse condicional al pedir que las condiciones sean satisfechas en cada paso de la iteración. A continuación se presenta el algoritmo condicional:

Algoritmo condicional para el modelo booleano

1. Generar $\Phi \in \Omega_c$.

¹Esta técnica se discute en la cuarta sección del octavo capítulo del mismo libro. A grandes rasgos, consiste en prohibir excursiones fuera de Ω_c . Se toma $x \in \Omega_c$ y se simula y hasta asegurar que $y \in \Omega_c$. Luego se hace $x = y$. Esta idea fue propuesta por Lantuéjoul en 1996.

2. Generar una variable aleatoria U que tome los valores 1, -1 y 0, con probabilidades:

$$p_1 = \frac{\vartheta(D)}{\vartheta(D) + \#\Phi + 1}, \quad p_{-1} = \frac{\#\Phi}{\vartheta(D) + \#\Phi}, \quad p_0 = 1 - p_1 - p_{-1} .$$

3. a) Si $U = 1$, entonces generar $A \sim \mathcal{T}$. Si $A \cap C_0 \neq \emptyset$ entonces hacer $\Phi = \Phi \cup A$.

b) Si $U = -1$, entonces generar $A \sim Unif(\Phi)$. Si $C_1 \subset \Phi \setminus A$, entonces hacer $\Phi = \Phi \setminus A$.

4. Ir al paso 2.

Por supuesto, este algoritmo debe iniciar con una población permitida $\Phi \in \Omega_c$. Una manera en que se puede obtener es simulando una sucesión de objetos típicos independientes. Cada vez que un objeto le pega a C_0 es descartado automáticamente. El procedimiento se continúa hasta que los objetos que quedan cubran completamente C_1 . Para evitar iniciar con demasiados objetos se recomienda conservar sólo los objetos que son los primeros en cubrir puntos de C_1 .

En consecuencia se tiene el siguiente algoritmo:

Algoritmo para la inicialización del modelo booleano condicional

1. Hacer $\Phi = \emptyset$ y $C = C_1$.
2. Generar $A \sim \mathcal{T}$.
3. Si $A \cap C_0 \neq \emptyset$ o si $A \cap C = \emptyset$, ir al paso 2.
4. Hacer $\Phi = \Phi \cup A$ y $C \setminus A$.
5. Si $C \neq \emptyset$, ir al paso 2.
6. Regresar Φ .

Sea N_g el número de objetos generados para completar este procedimiento. En el caso en que $C_1 \neq \emptyset$ un cálculo sencillo muestra que el valor medio de N_g es

$$\mathbb{E}\{N_g\} = \sum_{\emptyset \neq C \subset C_1} (-1)^{|C|+1} \frac{1}{\mathcal{T}(C_0 \cup C) - \mathcal{T}(C_0)} .$$

Este valor medio es finito si y sólo si $\mathbb{P}\{C_0 \subset (X \cap D)^c, C_1 \subset X \cap D\} > 0$.

La afirmación anterior se explica del siguiente modo: Tenemos que $\mathbb{E}\{N_g\} < \infty$ si y sólo si $\mathcal{T}(C_0 \cup \{c\}) - \mathcal{T}(C_0) > 0$ para cada $c \in C_1$. Para aprovechar estas desigualdades expresaremos $X \cap D$ como la unión de $\#C_1$ modelos booleanos independientes e idénticamente distribuidos $(X(c), c \in C_1)$. Su función de identidad común es $\frac{\theta(\cdot)\mathcal{T}(D)}{\#C_1}$. Notemos que $X \cap D$ contiene a C_1 en cuanto $X(c)$ contiene a c . En consecuencia

$$\mathbb{P}\{C_0 \subset (X \cap D)^c, C_1 \subset X \cap D\} \geq \prod_{c \in C_1} \mathbb{P}\{C_0 \cap X(c) = \emptyset, C_1 \cap X(c)\}$$

$$= \exp \left\{ -\frac{\vartheta(D)}{\#C_1} \mathcal{J}(C_0) \right\} - \exp \left\{ -\frac{\vartheta(D)}{\#C_1} \mathcal{J}(C_0 \cup \{c\}) \right\} > 0.$$

La elección del criterio para detener el algoritmo depende de su tasa de convergencia. Una posibilidad es comparar el funcional que evita Q_n del conjunto aleatorio X_n producido en la n -ésima iteración y el funcional que evita Q_∞ que se quiere simular. Sin entrar en detalles es posible usar el argumento dado por Lantuéjoul (1997), el cual aprovecha el hecho de que el número de objetos en X_n evoluciona de acuerdo a una cadena de Markov con un kernel de transición de Jacobi compacto. Denotando por ψ al eigenvector normado asociado con el eigenvalor λ con el mayor módulo estrictamente mayor a 1, se puede determinar que

$$|Q_n(K) - Q_\infty(K)| \leq 2\lambda^n \mathbb{E}\{\psi(\#\Phi_0)\},$$

donde Φ_0 denota a la población inicial de objetos. Es posible obtener el valor de λ mediante la técnica de integración de rango². Explícitamente, se obtiene el valor de $\lambda = 0.993$, el cual corresponde a un rango de integración de aproximadamente 320 iteraciones. Kendall y Thönnies diseñaron un algoritmo exacto de simulación condicional para el caso en que los objetos son acotados.

Es posible aplicar el algoritmo del modelo booleano condicional cuando se tienen restricciones más generales que C_0 y C_1 . Este algoritmo funciona siempre y cuando el conjunto de estados permisibles Ω_c sea tal que $\mathbb{P}\{\Omega_c\} > 0$ y que la cadena de Markov restringida a Ω_c sea irreducible. Este hecho es útil para ingenieros petroleros que necesitan incorporar a sus simulaciones más información que sólo datos del pozo (datos dinámicos, datos sísmicos o incluso interpretaciones geológicas).

El modelo booleano es un caso especial de los modelos basados en objetos. Una primera extensión consiste en reemplazar el proceso puntual de Poisson que especifica la localización de los objetos a través de un proceso espacial de nacimiento y muerte (Preston, 1977; Stoyan et al., 1987). También es posible permitir dependencia entre los objetos. En ese caso, un objeto se inserta o se elimina dependiendo de una función de los objetos ya presentes (y no solamente el número de éstos). Esto lleva al concepto de un proceso de vida y muerte de objetos en el espacio. Un ejemplo típico es el modelo de interacción dos a dos considerado por Sylverseen y Omre (1994). La primera versión de este modelo incluyó un número fijo de objetos, lo cual permitía la simulación a través de un muestreo de Gibbs. Esta restricción fue eliminada en un artículo posterior (1997). Es posible extender el modelo de muchas otras maneras, como el proceso de saltos de Markov de objetos.

²La cuarta sección del noveno capítulo del libro discute la determinación empírica de la tasa de convergencia. La idea inicial consiste en estimar la tasa mediante una simulación para cierto número de iteraciones, permitiendo un período de calentamiento. Sin embargo, dada la interpretación de la tasa se necesita gran precisión al estimarla, y este planteamiento inicial no permite estimar el número de iteraciones necesario para obtener una precisión aceptable. Lantuéjoul propone utilizar el *rango integral* para salvar este obstáculo. Éste es una herramienta simple y poderosa que permite cuantificar las fluctuaciones estadísticas de un modelo estocástico. Se define utilizando herramientas variográficas y se discute a detalle en el cuarto capítulo.

3.1.5. El caso estacionario

Ahora se considera el caso en que:

- a. La función de intensidad θ es constante.
- b. Todos los objetos son idénticamente distribuidos salvo por traslaciones. Dicho de otro modo, sea A un objeto implantado en el origen. Entonces $A(x)$ tiene el mismo funcional que pega que A trasladado por x :

$$\mathbb{P}\{A(x) \cap K \neq \emptyset\} = \mathbb{P}\{A_x \cap K \neq \emptyset\} = \mathbb{P}\{A \cap K_{-x} \neq \emptyset\} = \mathcal{J}(K_{-x}).$$

Utilizando estas nuevas hipótesis el funcional que evita de X se convierte en

$$\mathbb{P}\{X \cap K = \emptyset\} = \exp \left\{ -\theta \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{J}(K_{-x}) dx \right\}.$$

Pero

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{J}(K_{-x}) dx &= \mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{A \cap K_{-x} \neq \emptyset} dx \right\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{-x \in A \oplus K} dx \right\}, \\ &= \mathbb{E} \{|A \oplus K|\} \end{aligned}$$

y finalmente se tiene que el funcional que evita de un modelo booleano estacionario con intensidad θ y objeto A es

$$\mathbb{P}\{X \cap K = \emptyset\} = e^{-\theta \mathbb{E}\{|A \oplus K|\}}, \quad K \in \mathcal{K}.$$

Consideremos ahora algunos casos particulares de K :

- Si $K = \{x\}$ consiste de un solo punto, entonces obtenemos la probabilidad de que x no pertenezca a ningún objeto, la cual queda determinada por $e^{-\theta \mathbb{E}\{|A|\}}$.
- Si $K = \{x, x + h\}$ es un par de puntos, entonces obtenemos la función de distribución bivariada de X^c . Ya que $|A \oplus K| = |A \cup A_h| = 2|A| - |A \cap A_h|$, es conveniente introducir el covariograma geométrico G_A de A :

Sea f la función indicadora de algún subconjunto X de \mathbb{R}^d . Suponiendo que f es integrable, se tiene que el volumen $|X|$ de X es finito. X_h denotará al conjunto que se obtiene de trasladar X por h . Entonces podemos definir el siguiente mapeo:

$$G(h) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_X(x) \mathbb{1}_X(x + h) dx.$$

Si desarrollamos la expresión anterior tenemos que

$$G(h) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_X(x) \mathbb{1}_{X-h}(x) dx = |X \cap X_{-h}|.$$

Tenemos que $G(h) = G(-h)$, y entonces definimos el covariograma geométrico de X como el mapeo $G(h) = |X \cap X_{-h}|$, $h \in \mathbb{R}^d$.

Utilizando el covariograma G_A tenemos

$$\mathbb{P}\{x \in X^c, x+h \in X^c\} = q^2 e^{\theta G_A(h)}.$$

De esta expresión derivamos lo siguiente:

$$\mathbb{P}\{x \in X, x+h \in X^c\} = q - q^2 e^{\theta G_A(h)},$$

$$\mathbb{P}\{x \in X, x+h \in X\} = 1 - 2q + q^2 e^{\theta G_A(h)}.$$

- Si $K = [x, x+h]$ es un segmento de recta, entonces $|A \oplus K|$ es tratable si y sólo si A es casi seguramente convexo. Sean $|h|$ y α el módulo y la dirección de K , entonces tenemos que $|A \oplus K| = |A| + |h| |A_\alpha|$ donde A_α denota al volumen ($d-1$ -dimensional) de A proyectado sobre el hiperplano ortogonal a α . En consecuencia

$$\mathbb{P}\{[x, x+h] \subset X^c\} = q e^{-\theta |h| \mathbb{E}\{|A_\alpha|\}}.$$

Más aún, si suponemos que A es isotrópico (es decir, que su funcional que pega es invariante bajo rotaciones) entonces la fórmula de Cauchy³ puede aplicarse y la fórmula anterior se simplifica a

$$\mathbb{P}\{[x, x+h] \subset X^c\} = q e^{-\theta |h| \frac{\omega_{d-1}}{d \omega_d} \mathbb{E}\{|\partial A|\}}.$$

Esta probabilidad se comporta como una función exponencial de módulo h .

³Esta fórmula representa el valor medio de los funcionales de Minkowski. Estos funcionales surgen en el campo de la estereología al estudiar funciones sobre los conjuntos convexos de \mathbb{R}^d . Es deseable que esta familia de funciones respete la convexidad, y los funcionales de Minkowski la generan. Están definidas salvo alguna constante multiplicativa, y convencionalmente se utiliza por constante de normalización el volumen de una esfera unitaria en \mathbb{R}^d , a saber

$$\omega_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}.$$

Los funcionales de Minkowski se denotan por W_i , donde i se denomina el grado del funcional, y varios de ellos tienen interpretaciones muy sencillas. Por ejemplo $W_0(K) = |K|$, $W_1(K) = \frac{|\partial K|}{d}$, donde $|\partial K|$ denota al volumen ($d-1$)-dimensional de la frontera de K .

- Si $K = B(x, r)$, una bola de radio r con centro en x , también es posible realizar cálculos explícitos en el caso en los objetos son casi seguramente convexos. En este caso se puede aplicar la fórmula de Steiner⁴:

$$\mathbb{E}\{|A \oplus K|\} = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \mathbb{E}\{W_i(A)\} r^i$$

y obtenemos

$$\mathbb{P}\{B(x, r) \subset X^c\} = \exp \left\{ -\theta \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \mathbb{E}\{W_i(A)\} r^i \right\}.$$

Estas fórmulas son muy útiles para comprobar la compatibilidad de un conjunto de datos experimentales con el modelo booleano, así como para inferir estadísticamente sus parámetros.

3.2. Modelos de conexión aleatoria

Dado un proceso puntual estacionario X , existe otra manera natural de construir objetos aleatorios no acotados. La siguiente es una descripción informal: En un modelo booleano, la segunda característica es una variable aleatoria ρ que gobierna el comportamiento de los radios de las bolas (la primera es el proceso X). En un modelo de conexión aleatoria (RCM, por sus siglas en inglés), la segunda característica es la llamada *función de conexión*, la cual es una función no creciente que va de los reales en el intervalo $[0, 1]$. Dada una función de conexión g , la regla es la siguiente: para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 del proceso X , insertamos un enlace entre dichos puntos con probabilidad $g(|x_1 - x_2|)$, independientemente de cualquier otra pareja de puntos de X , donde $|\cdot|$ denota la distancia Euclideana. El enlace entre x_1 y x_2 se denota por el par no ordenado $\{x_1, x_2\}$ y decimos que x_1 y x_2 son los *vértices finales* de $\{x_1, x_2\}$. Dos puntos x y y del proceso están *conectados* si existe una secuencia finita $(x =: x_1, x_2, \dots, x_n := y)$ tal que el enlace $\{x_i, x_{i+1}\}$ ha sido insertado para toda $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Una *componente* se puede definir ahora de la manera usual en la teoría de gráficas: una componente es un conjunto de puntos tal que cualesquiera dos puntos en el conjunto están conectados, y que es maximal respecto a esta propiedad. La componente ocupada que contiene el origen se denota por W . Por supuesto que para que W no sea vacía es necesario condicionar el proceso a tener un punto en el origen. Este es el análogo natural de las componentes ocupadas de los modelos booleanos. No hay analogía para las componentes vacías

⁴Si B es un convexo, definimos a \dot{B} como el conjunto obtenido de B después de una rotación aleatoria uniforme. La fórmula de Steiner proporciona la media de los funcionales de Minkowski de $K \oplus \dot{B}$:

$$\mathbb{E}\{W_i(K \oplus \dot{B})\} = \sum_{j=0}^{d-i} \binom{d-i}{j} W_{i+j}(K) W_{d-j}(B)$$

en los modelos de conexión aleatoria. Decimos nuevamente que el RCM está *dirigido* por X y el modelo se denota por (X, g) .

Hacemos notar que la percolación de enlace ordinaria en \mathbb{Z}^d es un caso especial del modelo de conexión aleatoria. Para ver esto, tómesese simplemente el Ejemplo 1.1, es decir, la traslación de la retícula entera por un vector aleatorio. La función de conexión será $g(x) = p\mathbb{1}_{\{|x| \leq 1\}}$. En este sentido, un modelo de conexión aleatoria es más general que la percolación discreta ordinaria.

3.2.1. Construcción del modelo de conexión aleatoria

Ahora se presenta una construcción matemática formal de un modelo de conexión aleatoria (X, g) [29]. Primero suponemos que el proceso puntual X está definido en un espacio de probabilidad $(\Omega_1, \mathbb{F}_1, \mathbb{P})$. A continuación consideramos un segundo espacio de probabilidad Ω_2 definido como

$$\Omega_2 = \prod_{\{K(n,z), K(m,z')\}} [0, 1],$$

donde el producto se toma sobre todos los pares no ordenados de cubos binarios. Un elemento $\omega_2 \in \Omega_2$ se escribe como $\omega_2(\{(n, z), (m, z')\})$. Equipamos Ω_2 con la medida producto \mathbb{P}_2 tal que todas las medidas marginales son la medida de Lebesgue en $[0, 1]$. Del mismo modo que antes, sea $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ y dotamos a Ω de la medida producto $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$. Un modelo de conexión aleatoria es un mapeo medible de Ω en $N \times \Omega_2$ definido por $(\omega_1, \omega_2) \rightarrow (X(\omega_1), \omega_2)$. La realización correspondiente a (ω_1, ω_2) se obtiene del siguiente modo: para cualesquiera dos puntos x y y de $X(\omega_1)$, consideramos los cubos binarios $K(n_0(x), z(n_0(x), x))$ y $K(n_0(y), z(n_0(y), y))$ definidos en la sección anterior. Conectamos x y y si y sólo si $\omega_2(\{n_0(x), z(n_0(x), x), n_0(y), z(n_0(y), y)\}) < g(|x - y|)$. Las transformaciones U_{e_i} en Ω_2 y \tilde{T}_{e_i} en Ω pueden definirse ahora de manera similar a como se hizo previamente. La transformación \tilde{T}_{e_i} corresponde de nuevo a trasladar una realización del RCM por el vector e_i en el espacio.

Ejemplo 3.2.1. En el caso en el que el proceso puntual que dirige al modelo es de Poisson, se dice que se tiene un RCM de Poisson. Si la intensidad del proceso puntual de Poisson es λ , el modelo se denota por (X, λ, g) . Siempre se supone que hay un punto en el origen. Esta suposición es para poder hacer percolación sobre el modelo. La función de conexión se definirá como una función de \mathbb{R}^d en el intervalo $[0, 1]$ que satisface:

1. $g(x) = g(y)$ cuando $|x| = |y|$,
2. $g(x) \leq g(y)$ cuando $|x| \geq |y|$.

Funciona del siguiente modo, una vez que tenemos una realización de nuestro proceso puntual de Poisson, podremos conectar parejas de puntos de manera aleatoria utilizando la función g . Por ejemplo, g podría ser inversamente proporcional a la distancia entre los puntos, de tal suerte que

entre más cerca se hallen dos puntos, es más probable que estén conectados. Ya que g toma valores entre cero y uno, se le puede interpretar como una “probabilidad de conexión”. Una realización del modelo se ve como una gráfica aleatoria.

Cabe mencionar que es importante elegir g de tal suerte que el modelo no se trivialice. En este contexto, considerando que el objeto de estudio de la teoría de percolación son las componentes conexas infinitas, se entiende que el modelo es trivial cuando g es tal que todas las componentes son siempre infinitas (casi seguramente).

Por ejemplo, supongamos que g es tal que $\int_{\mathbb{R}^d} g = \infty$. Sea Y es el número aleatorio de puntos que están conectados con el origen, entonces

$$\mathbb{P}(Y = k) = e^{-\lambda \int_{\mathbb{R}^d} g} \frac{(\lambda \int_{\mathbb{R}^d} g)^k}{k!}.$$

Lo anterior se debe a las propiedades del adelgazamiento de un proceso puntual que ya se discutieron. Observemos que bajo la suposición de que g no tiene integral finita, resulta que $\mathbb{P}(Y = k) = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y entonces $Y = \infty$ casi seguramente, sin importar el valor de λ . Así que para que el modelo sea de interés debemos pedir a g la siguiente condición:

$$0 < \int_{\mathbb{R}^d} g < \infty. \quad (3.1)$$

Observemos brevemente que si la integral de g vale cero, de nuevo $\mathbb{P}(Y = k) = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Si bien es claro que esta condición es necesaria, también resultará suficiente para asegurar que el modelo sea no trivial. La suficiencia de la condición se debe a que, cuando g la satisface, existirán las llamadas *densidades críticas*:

Teorema 3.2.1. *Sea (X, g, λ) un modelo Poisson de conexión aleatoria en \mathbb{R}^d , con $d \geq 2$. Si g satisface (2), entonces existen dos densidades $0 < \lambda_T(g) \leq \lambda_H(g) < \infty$ tales que:*

- I. $\chi(\lambda) < \infty$ si $\lambda < \lambda_T$, y $\chi(\lambda) = \infty$ si $\lambda > \lambda_T$.
- II. $\theta(\lambda) = 0$ si $\lambda < \lambda_H(g)$, y $\theta(\lambda) > 0$ si $\lambda > \lambda_H(g)$.

Para demostrar este resultado se utiliza un argumento de ramificación, combinado con elementos de apareamiento. Recordemos que denotamos por W a la componente conexas que contiene el origen. Primero hay que demostrar que para λ suficientemente pequeña, pero positiva, el valor esperado del tamaño de W es finito. Según se vio en (1), el valor esperado del número de puntos conectados con el origen es $\lambda \int_{\mathbb{R}^d} g$. Es decir, los puntos conectados con el origen forman un proceso Poisson no homogéneo con intensidad λg , que denotaremos por X_0 . A continuación se etiquetan los puntos de X_0 (x_1, x_2, \dots) y a cada uno de ellos se le “pega” un proceso puntual de Poisson no homogéneo X_1^i , al cual se le asigna una función de intensidad conveniente (lo fundamental es

que incluya al factor $g(x - x_i)$). De tal suerte que se obtiene una sucesión de procesos puntuales de Poisson no homogéneos X_1^1, X_1^2, \dots independientes entre sí, que representan las generaciones del proceso de ramificación. Gracias a la construcción de sus funciones de intensidad, estos procesos se pueden acoplar con procesos puntuales de Poisson no homogéneos \tilde{X}_1^i con funciones de intensidad $\lambda g(x - x_i)$ tales que las realizaciones de X_1^i son un subconjunto de las realizaciones de \tilde{X}_1^i . Resultará que estos procesos puntuales de Poisson acoplados son un tipo especial de proceso de ramificación, conocido como *proceso ordinario de ramificación de Galton-Watson*, tal que el valor esperado de puntos en cada generación es precisamente $\lambda \int_{\mathbb{R}^d} g$. A continuación, utilizando un resultado que Grimmet e Stirzaker publicaron en 1992⁵, y considerando que la cardinalidad de las realizaciones de los procesos acoplados provee una cota superior para la cardinalidad de las realizaciones del primer proceso de ramificación que construimos, tenemos que

$$\mathbb{E}_\lambda(|W|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_{\mathbb{R}^d} g \right)^n. \quad (3.2)$$

Así que si g satisface (2), basta elegir $\lambda < \int_{\mathbb{R}^d} g$ para que la suma en (3) converga, asegurando que W será finito.

Para demostrar la segunda parte del teorema, hay que mostrar que para λ suficientemente grande se tiene que $|W| = \infty$ con probabilidad uno. Para hacerlo se necesitará la noción de *conjunto de Lebesgue* de una función g . A este conjunto se le define como el conjunto de puntos $y \in \mathbb{R}^d$ tales que

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} (2\epsilon)^{-d} \int_{y+B_\epsilon} |g(x) - g(y)| dx = 0, \quad (3.3)$$

donde $B_\epsilon = [-\epsilon, \epsilon]^d$. Rudin demostró en 1970 que el conjunto de Lebesgue de g es tal que su complemento tiene medida cero (se dice que tiene *medida plena* de Lebesgue). Este hecho nos permite elegir d puntos linealmente independientes (y_1, \dots, y_d) en el conjunto de Lebesgue de g tales que $g(y_i) > 0$ para cada $i \in \{1, \dots, d\}$. Este hecho se puede probar considerando la función determinante, que toma d vectores y los manda al determinante de la matriz que tiene a dichos vectores por columna. Ya que esta función es Lebesgue-medible, y el conjunto de Lebesgue tiene medida plena, si suponemos que no hay d vectores linealmente independientes en el conjunto de Lebesgue de g (es decir, que la función determinante es nula en todo este conjunto), nos vemos forzados a concluir que la función determinante es idénticamente cero en todo el espacio, lo cual contradice la existencia de bases en espacios vectoriales. Así que la función determinante debe ser distinta de cero en algún punto de su dominio, dicho punto constará de d vectores linealmente independientes. Por otra parte, ya que el límite que define al conjunto de Lebesgue de g tiene a cero, podremos encontrar $\delta > 0$ tal que para cada i y para cada rectángulo B de lado no mayor a δ que contenga alguna y_i :

$$\int_B g \geq \frac{1}{2} \mathcal{L}(B) g(y_i), \quad (3.4)$$

⁵Su resultado consiste en que el valor esperado del número de puntos en la n -ésima generación de un proceso ordinario de Galton-Watson con valor esperado de μ en cada generación es igual a μ^n

para cada i . Al mismo tiempo, δ puede tomarse suficientemente pequeña para que todos los conjuntos de la forma $\sum_{i=1}^d n_i y_i + B_\delta$, con $n_i \in \mathbb{Z}$ sean mutuamente disjuntos. Es decir, que los rectángulos B_δ sean lo suficientemente pequeños para que todas las traslaciones por combinaciones lineales de los y_i 's, con coeficientes enteros, no se intersecten. Denotaremos estos rectángulos trasladados por $B_\delta(n_1, \dots, n_d)$.

Ahora nos fijaremos en los vértices “cercaños” en \mathbb{Z}^d y tomaremos los enlaces e entre ellos. Por “cercaños” entenderemos parejas de vértices (n_1, \dots, n_d) y (m_1, \dots, m_d) tales que $\sum_{i=1}^d |n_i - m_i| = 1$. Para cada uno de estos enlaces e colocaremos un proceso puntual de Poisson X_e , de densidad $(2d)^{-1}\lambda$, en los rectángulos $B_\delta(n_1, \dots, n_d)$ y $B_\delta(m_1, \dots, m_d)$. Posteriormente, colocaremos un proceso puntual de Poisson X^* de densidad λ en el complemento de la unión de todos estos rectángulos. La superposición de X^* y X_e para todos los enlaces e resulta en un proceso puntual de Poisson homogéneo con intensidad λ en \mathbb{R}^d .

Si $n = (n_1, \dots, n_d)$ y $m = (m_1, \dots, m_d)$ son tales que $\sum_{i=1}^d |n_i - m_i| = 1$ y e es el enlace entre n y m , entonces $B_\delta(m)$ se puede expresar de la forma $B_\delta(n) + y_i$, para i adecuado. Dado un punto x de X en el rectángulo $B_\delta(n)$, la probabilidad de que x no esté conectado a ningún punto de X_e en $B_\delta(m)$ es

$$e^{-\lambda(2d)^{-1} \int_{B_\delta} g(y-x) dy}$$

Si utilizamos la cota obtenida en (5), tenemos que tal probabilidad es menor o igual que

$$e^{-\lambda(2d)^{-1} \frac{1}{2} (2\epsilon)^d g(y_i)} = e^{-\lambda(4d)^{-1} (2\epsilon)^d g(y_i)} \quad (3.5)$$

donde $B_\delta = B_\delta(m_1, \dots, m_d)$. Ahora podemos llevar a cabo percolación de enlace (independiente) en \mathbb{Z}^d del siguiente modo: se construirá paso a paso el cluster C que contiene al origen. Empezamos solamente con el origen, y lo bautizamos x_0 . Supongamos que C consiste de un número infinito de vértices tales que para cada $n \in C$, elegimos un punto $x_n \in X$ dentro de $B_\delta(n)$. A continuación consideramos un enlace e entre n y m que no haya sido tomado en cuenta previamente, tal que n pertenezca a C pero m no. Si no existe tal enlace nos detenemos, pero si existe revisamos si hay algún punto de X_e en $B_\delta(m)$ que esté conectado con x_n . En caso de que exista, lo denotamos por x_m y añadimos m a C .

El cluster C puede ser visto como el cluster que contiene al origen en este modelo de percolación discreta. Debido a (6), el parámetro de este modelo debe ser al menos $\min_{1 \leq i \leq d} \{1 - e^{-\lambda(4d)^{-1} (2\epsilon)^d g(y_i)}\}$. En consecuencia, si tomamos λ suficientemente grande el parámetro del modelo se acercará mucho a 1, y en consecuencia, la probabilidad de que el cluster que contiene al origen sea infinito se vuelve positiva (lo cual significa que el proceso inductivo descrito previamente no termina). Pero si C es infinito, entonces la componente W en el modelo de conexión aleatoria subyacente también lo es. De esta manera se concluye la demostración del teorema.

Concluiremos esta sección mencionando que la condición (2) es algo laxa, en el sentido de que existe una amplia gama de funciones que la satisfacen. En consecuencia, las demostraciones relativas a este modelo se vuelven notablemente técnicas, ya que deben ser válidas para una amplia gama de funciones.

Finalmente, realizamos un breve comentario respecto a la densidad crítica en modelos de conexión aleatoria. Recordemos que en esta sección definimos dos densidades críticas: $\lambda_H(g)$ y $\lambda_T(g)$. Observemos que $\lambda_H(g)$ establece la transición de fase en términos de $\chi(\lambda)$, es decir, en términos del valor esperado de la cardinalidad de W . Por otra parte, $\lambda_T(g)$ relaciona la transición de fase con la probabilidad de que W sea infinito, $\theta(\lambda)$. Cabe preguntarse si es posible que estas dos densidades críticas coincidan, pues resulta deseable describir la transición de fase de nuestro modelo en términos de un sólo parámetro. Notemos que en el caso del modelo booleano con discos estas densidades no tienen por qué coincidir, ya que un solo punto puede generar un volumen muy grande, y de este modo no existe una relación adecuada entre la cardinalidad de W y su tamaño. Este fenómeno no ocurre en el modelo de conexión aleatoria, hecho discutido con mayor detalle en el Apéndice D.

3.2.2. Unicidad de la componente no acotada

Del mismo modo que en los modelos booleanos, en un modelo Poisson de conexión aleatoria las componentes conexas no acotadas son únicas, en el sentido de que con probabilidad uno existe solamente una de ellas en cualquier realización del modelo. La ideas detrás de esta afirmación se discuten a continuación.

Gracias a la ergodicidad del modelo, se puede garantizar que el número de componentes no acotadas en una realización del modelo es, con probabilidad uno, una constante. Después se demuestra que esta constante debe ser cero, uno o infinito (con probabilidad uno):

Supongamos que el número de componentes conexas no acotadas es, con probabilidad 1, igual a $K \geq 2$. Entonces debe existir un rectángulo B_n que las intersecte a todas. Ahora tomemos $M \leq \infty$ tal que $g(x) = 0$ para cualquier $|x| > M$ (notemos que esto es posible gracias a la condición (2), y M podría tomar el valor infinito). Partiremos el rectángulo B_n en al menos K celdas cúbicas G_j suficientemente pequeñas para que cada pareja de celdas adyacentes G_1 y G_2 ocupe una distancia menor a M . Es decir que si $x \in G_1$ y $y \in G_2$ tenemos que $d(x, y) \leq M$. Ahora bien, si tomamos $A \subset \mathbb{R}^d$ y quitamos todos los puntos del modelo que se encuentren fuera de A , así como todos los enlaces que conecten con A , obtenemos un nuevo modelo Poisson de conexión aleatoria que denotaremos por (X_A, g, λ) . Sea $G = \cup_{i=1}^K G_i$. Si tomamos celdas suficientemente pequeñas, y las etiquetamos de manera conveniente, podremos encontrar K celdas G_1, \dots, G_K tales que el siguiente evento tenga probabilidad positiva:

$$E := \{ (X_{G \cup B_n^c}, g, \lambda) \text{ contiene exactamente } K \text{ componentes no acotadas } C_1, \dots, C_k \text{ tales que cada } C_i \text{ tiene exactamente un punto del proceso Poisson } x_i \in G_i \text{ para } i = 1, \dots, K \}.$$

Por otra parte, el siguiente evento tiene probabilidad positiva:

$$F := \{ \text{cada una de las celdas } G_i \text{ en } B_n \text{ fuera de } G \text{ contiene exactamente un punto del proceso Poisson } x_j \}$$

Observemos que E y F son independientes, por que dependen de regiones disjuntas del espacio. En consecuencia:

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F) > 0.$$

Pero dado el evento $E \cap F$ podremos, con probabilidad positiva, conectar los puntos x_i y x_j si las células G_i y G_j son adyacentes, dada la elección del tamaño de las celdas. Sin embargo, después de hacerlo, la configuración resultante contiene solamente una componente no acotada.

Una de las características de los modelos de percolación continua, que no comparten con los modelos discretos, es la posibilidad de considerar una densidad arbitrariamente grande. Cuando la densidad λ del proceso puntual subyacente tiende a infinito, se espera que sucedan varias cosas. En primer lugar, una densidad mayor implica que en promedio hay más puntos por unidad de volumen, así que debería ser más fácil que el origen pertenezca a una componente no acotada. Esto implica que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \theta_g(\lambda) = 1.$$

En realidad, esta afirmación tiene implicaciones más profundas. Además de considerar la probabilidad de que el origen pertenezca a una componente no acotada, es razonable pensar que la probabilidad de que un punto se halle aislado, dado que su componente conexa es finita, tiene a uno conforme λ crece. Es decir, si pensamos en un modelo con densidad infinita habrá una infinidad de puntos muy cerca entre sí. De este modo, la única forma en que un punto se encuentre en una componente finita, es que esté aislado. Otra manera de interpretar esta idea es que “la mayoría” de las componentes finitas consistirían de puntos aislados. Estas ideas se pueden formalizar matemáticamente en la siguiente discusión.

Si $\theta_g(\lambda)$ es la probabilidad de que la componente que contiene el origen sea infinita, entonces $1 - \theta_g(\lambda)$ es la probabilidad de que la componente conexa que contiene al origen sea finita. De acuerdo a lo discutido en el párrafo anterior, cuando λ tiende a infinito la única manera de que componente conexa que contiene al origen sea finita, es que consista únicamente del mismo origen. Es decir

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} 1 - \theta_g(\lambda) = \mathbb{P}_\lambda(|W| = 1).$$

Por otra parte, que el origen esté aislado significa que no hay puntos conectados a él. Si recordamos la fórmula (1), tenemos que

$$\mathbb{P}_\lambda(|W| = 1) = \mathbb{P}(Y = 0) = e^{-\lambda \int_{\mathbb{R}^d} g}.$$

Es decir que cuando λ es suficientemente grande, se tiene que $1 - \theta_g(\lambda) \sim e^{-\lambda \int_{\mathbb{R}^d} g}$. Ya que la función logaritmo es continua, podemos aplicarla de ambos lados de esta aproximación, y de este modo concluimos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{-\log(1 - \theta_g(\lambda))}{\lambda \int_{\mathbb{R}^d} g} = 1.$$

En consecuencia, no solamente es cierto que $1 - \theta_g(\lambda)$ aproxima la probabilidad de que el origen esté aislado, sino que $\theta_g(\lambda) = \theta(\lambda)$ tiende a uno a la misma velocidad en que la probabilidad de que el origen esté aislado tiende a cero.

3.3. Otros modelos de percolación continua

3.3.1. Modelo de percolación fractal

Existe una manera natural de construir conjuntos fractales a partir de una cantidad numerable de modelos booleanos. Sea $\lambda > 0$ y consideremos los modelos booleanos bidimensionales $(X_k, 2^{1-k}, 4^{k-1}\lambda)$, para $k = 1, 2, \dots$. La razón detrás de esta elección particular de parámetros se volverá clara sobre la marcha de la construcción. Consideremos el concepto de *fracción de volumen cubierto* o FVC. Este concepto representa la “fracción” del espacio que está cubierta por nuestro proceso. Para formalizar este concepto recordemos que la probabilidad de que el origen esté cubierto en el modelo booleano de Poisson es de $1 - e^{-\lambda \pi^d \mathbb{E}(\rho^d)}$, donde π^d denota el volumen de una d -esfera unitaria. Utilizando el teorema de Fubini se sigue que la medida de Lebesgue esperada de la región ocupada en el cubo unitario es el mismo valor. Ahora bien, la ergodicidad nos garantiza que si $B_n = [-n, n]^d$ y C es la región ocupada, entonces el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(B_n \cap C)}{(2n)^d}$$

existe casi seguramente y en el caso del modelo booleano de Poisson es igual a $1 - e^{-\lambda \pi^d \mathbb{E}(\rho^d)}$. Entonces tomaremos ese límite como nuestra definición para la FVC. En el caso de los modelos booleanos bidimensionales que utilizaremos para la construcción, la FVC es la misma para todos.

A continuación superpondremos las realizaciones de estos modelos booleanos. Denotaremos la superposición de los primeros n modelos por (Y_n, ρ_n, λ_n) . Sea V_n la región vacía que queda después de la superposición de los primeros n modelos. Es evidente que tenemos la siguiente cadena de contenciones: $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots$, así que tiene sentido definir el límite

$$V_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k.$$

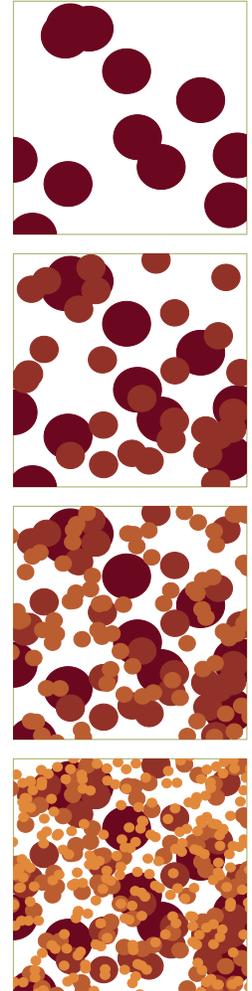


Figura 3.1: Construcción del modelo de percolación fractal, primeros cuatro pasos.

A simple vista, no podemos asegurar que V_∞ es no vacío. Consideremos la siguiente discusión: la FVC de un modelo representa la probabilidad de que un punto en particular esté cubierto. Si denotamos la FVC de uno de nuestros modelos booleanos $(X_k, 2^{1-k}, 4^{k-1}\lambda)$ por α , tendremos que la probabilidad de que el origen pertenezca a V_n es $(1 - \alpha)^n$, ya que para pertenecer a V_n debe pertenecer a cada V_i con $i \leq n$, y para cada una de esas componentes vacías la probabilidad es $(1 - \alpha)$. Entonces la probabilidad de que el origen pertenezca a V_∞ es igual a $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha)^n$, pero este límite vale cero. Sin embargo, no podemos concluir que el espacio está cubierto casi seguramente, pues en argumentos anteriores ha sido fundamental el hecho de que los modelos son localmente finitos. En esta ocasión hay casi seguramente una infinidad de bolas en el rectángulo unitario y así nuestro modelo no es localmente finito. Bastará tomar λ suficientemente pequeña para decir que V_∞ es casi seguramente no vacío.

Si $\lambda > 4 \log 4$, entonces $V_\infty = \emptyset$ casi seguramente. Por otra parte, si $\lambda < \frac{\log 4}{45}$, entonces $V_\infty \neq \emptyset$ casi seguramente. Para demostrar la primera afirmación se utiliza un proceso de ramificación:

Consideremos el cuadrado unitario I^2 , y dividámoslo en cuatro cuadrados de lado $\frac{1}{2}$. La generación cero de nuestro proceso es I^2 , y la primera generación son aquellos cuadrados S entre los cuatro sub-cuadrados tales que $X_1(S) = 0$. Notemos que si $X_1(S) \geq 1$, entonces el cuadrado se encontrará completamente cubierto, pues su lado mide $\frac{1}{2}$ y el radio de los discos del primer modelo booleano mide en promedio 1. Entonces V_1 está contenido en la unión de los sub-cuadrados de la primera generación. Por otra parte, debido a las propiedades de un proceso de ramificación, la probabilidad de que un sub-cuadrado particular pertenezca a la primera generación es de $e^{-\frac{\lambda}{4}}$. Cada uno de los cuadrados de la primera generación se divide ahora en sub-cuadrados de $\frac{1}{4}$ de lado. Cada uno de estos nuevos sub-cuadrados S se encontrará en la segunda generación si y sólo si $X_2(S) = 0$. Esto sucederá con probabilidad $e^{-\frac{4\lambda}{16}} = e^{-\frac{\lambda}{4}}$. Además, los cuadrados de la primera generación dan origen a los de la segunda de manera independiente entre sí. Entonces hemos construido un proceso de ramificación de tal suerte que cuando se extingue es por que ya no hay componentes vacías en la realización original. La extinción ocurre casi seguramente cuando el número esperado de miembros en la primera generación es menor a 1, es decir si $4e^{-\frac{\lambda}{4}} < 1$. De manera equivalente, cuando $\lambda > 4 \log 4$.

Para confirmar la segunda afirmación, tomamos de nuevo un proceso de ramificación. Esta vez construiremos un proceso tal que si sobrevive es por que $V_\infty \neq \emptyset$. Consideremos de nuevo I^2 y supongamos que $X_1(I^2) = X_2(I^2) = 0$. Esto sucede con probabilidad positiva. Al igual que en el proceso anterior, la generación cero de nuestro proceso consiste únicamente de I^2 . La primera generación consistirá de aquellos cuadrados entre $[0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}]$, $[0, \frac{1}{4}] \times [\frac{3}{4}, 1]$, $[\frac{3}{4}, 1] \times [0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{3}{4}, 1] \times [\frac{3}{4}, 1]$ (las “esquinas” de I^2) que no son intersectadas por ningún disco originado por X_3 o X_4 . La probabilidad de que una de estas esquinas, por ejemplo $[0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}]$, pertenezca a la primera generación es al me-

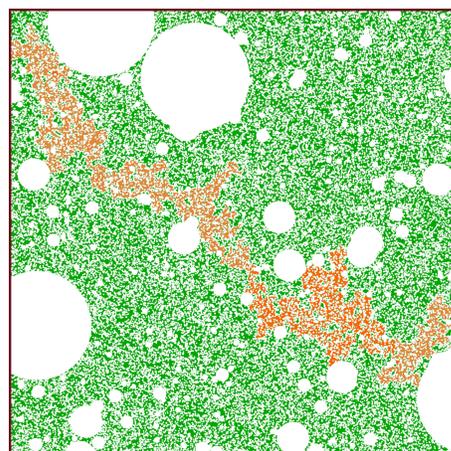


Figura 3.2: Modelo de percolación fractal en estado supercrítico.

nos tan grande como la probabilidad de que no haya ningún punto de X_3 ni X_4 en $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Esta probabilidad es igual a $e^{-16\lambda\frac{9}{16}}e^{-64\lambda\frac{9}{16}} = e^{-45\lambda}$. Las otras tres esquinas pertenecen a la primera generación con la misma probabilidad.

Ahora cada cuadrado de la primera generación se divide en 16 sub-cuadrados, y la segunda generación consiste en aquellos cuadrados “esquina” que no son intersectados por ningún disco generado por los procesos X_5 o X_6 . La probabilidad de que esto suceda es la misma que la descrita en el párrafo anterior. Notemos también que miembros de la primera generación dan origen a miembros de la segunda generación de manera independiente entre sí. Continuamos de la manera obvia. Ahora bien, notemos que si este proceso de ramificación sobrevive, tendremos una secuencia no creciente $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ de conjuntos compactos no vacíos tales que $A_n \subseteq V_n$ para toda n . Esto implica que $V_\infty \supseteq \bigcap_{n \geq 1} A_n \neq \emptyset$ por el teorema de intersección de Cantor. La supervivencia es posible con probabilidad positiva si $4e^{-45\lambda} > 1$, es decir si $\lambda < \log(4/45)$.

Desde el punto de vista de la percolación nos interesa la existencia de componentes conexas grandes de V_∞ . Estas componentes sí existen [30] y para expresar este hecho necesitamos definir una nueva densidad crítica λ_f (la λ se refiere a “fractal”) del siguiente modo:

Definición 3.3.1. Sea $\theta_f(\lambda)$ la probabilidad de que $V_\infty \cap [0, 1]^2$ contenga una componente conexa que intersecte los lados derecho e izquierdo de $[0, 1]^2$. Definimos λ_f como

$$\lambda_f = \inf\{\lambda : \theta_f(\lambda) = 0\}.$$

Tendremos entonces que $\lambda_f > 0$. Adicionalmente, esta densidad fractal está profundamente relacionada a las densidades críticas en el modelo booleano de Poisson de discos ordinario del siguiente modo: primero elegimos $n \in \mathbb{N}$ y nos fijamos en los modelos $Z_i(n) = (X_{1+(i-1)n}, 2^{-(i-1)n}, 4^{(i-1)n}\lambda)$ para $i = 1, 2, \dots$. En particular $Z_1(n)$ es $(X_1, 1, \lambda)$ y $Z_{i+1}(n)$ puede obtenerse a partir de $Z_i(n)$ escalando por un factor de 2^{-n} .

Ahora bien $V_i(n)$ denota a la región vacía correspondiente a $Z_i(n)$, en lugar de considerar V_∞ , nos fijaremos en

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i(n) =: V(n).$$

Notemos que entre más grande sea n más dominante será $Z_1(n)$, así que $V(n)$ se parecerá cada vez más a $V_1(1)$. Pero $V_1(1)$ es equivalente a la región vacía de $(X, 1, \lambda)$.

Sea $\theta_f^n(\lambda)$ la probabilidad de que $V(n)$ percole. Definimos la densidad crítica para n :

$$\lambda_f(n) = \inf\{\lambda : \theta_f^n(\lambda) = 0\}.$$

Tendremos entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_f(n) = \lambda_C(1).$$

3.3.2. Modelos con dependencia

En el modelo booleano con bolar estándar cada punto de un proceso puntual X con densidad $\lambda > 0$ es el centro de una bola con radio aleatorio. Los radios de bolas distintas son independientes entre sí y todos los radios son independientes de X . En esta sección se presenta un modelo estacionario y ergódico donde los radios ya no son independientes entre sí, ni independientes del proceso puntual.

Comenzamos con un proceso puntual de Poisson en \mathbb{R}^d de densidad λ . Considerando que este tipo de modelos pueden escalar sin perder sus propiedades, podemos tomar sin perder generalidad $\lambda = 1$. Elegiremos $k > 1$ entero como parámetro del modelo. La configuración de bolas en el espacio se construye dinámicamente del siguiente modo: al tiempo cero, todos los puntos de X con el centro de una bola con radio cero. Después, mientras el tiempo pasa el radio de cada bola crece linealmente, todos con la misma velocidad. Las bolas empezarán a intersectarse entre sí y tomaremos nota del número de bolas con las cuales cada bola se intersecta. Tan pronto como una bola alcanza k intersecciones, su radio deja de crecer. De este modo, para cada tiempo, el espacio se divide entre la región ocupada y su complemento (la región vacía). Nos interesa la configuración límite $C^d(k)$

$$C^d(k) = \bigcup_{t \geq 0} C_t^d(k).$$

Desde el punto de vista de la percolación, nos interesa la existencia de una componente no acotada en $C^d(k)$. En caso de que exista, diremos que $C^d(k)$ percola. Definamos la k crítica como $k_C(d) = \min\{k \geq 1 : C^d(k) \text{ percola con probabilidad positiva}\}$. Meester y Roy demuestran en [11] que para toda $d \geq 2$ se tiene que

$$2 \leq k_C(d) < \infty.$$

Continuamos ahora con un RCM dependiente en el mismo sentido que el ejemplo anterior. La construcción es la misma: empezamos con un proceso puntual de Poisson en \mathbb{R}^d con densidad 1. Ahora conectamos cada punto x de X con los m puntos de X más cercanos. De nuevo el parámetro del modelo es $m \geq 1$ y podemos definir $m_C(d)$ como la m más pequeña para la cual el modelo percola. En este caso se tiene el mismo resultado:

$$2 \leq m_C(d) < \infty \quad \forall d \geq 2.$$

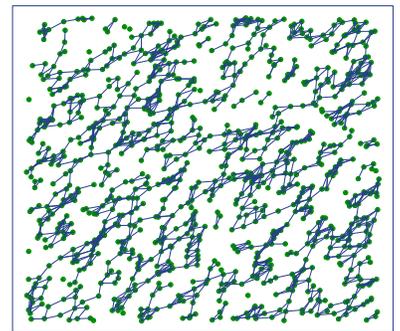


Figura 3.3: RCM con dependencia.

3.3.3. Árboles estacionarios

Supongamos que tenemos un conjunto finito de puntos $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ en un espacio euclideo de d dimensiones. Un árbol \mathcal{T} con conjunto de vértices S se llama *árbol generador* de S si cada vértice de S incide en al menos un enlace de \mathcal{T} . Un *árbol generador mínimo* (MST por sus siglas en inglés) de S es un árbol generador tal que la suma de las longitudes de los enlaces es mínima entre todos los árboles generadores. Si S es tal que las distancias $|x_i - x_j|$ son todas distintas, entonces hay un único MST para S y se puede construir del siguiente modo: Empecemos con un vértice arbitrario x_1 y definamos $T_1(x_1) = \{x_1\}$. Escojamos el punto de S más cercano a x_1 , digamos x_2 . Tracemos un enlace entre x_1 y x_2 y definamos $T_2(x_1) = \{x_1, x_2\}$. Inductivamente, después de haber definido $T_k(x_1)$ para alguna $1 \leq k \leq n-1$, elegiremos el vértice de $S \setminus T_k(x_1)$ más cercano a cualquier punto de $T_k(x_1)$, dibujaremos el enlace entre estos dos puntos y agregaremos el nuevo punto a $T_k(x_1)$ para obtener $T_{k+1}(x_1)$. Este algoritmo se conoce como *algoritmo ambicioso* y se tendrá que $T_n(x_1)$ es el mismo para toda $1 \leq i \leq n$.

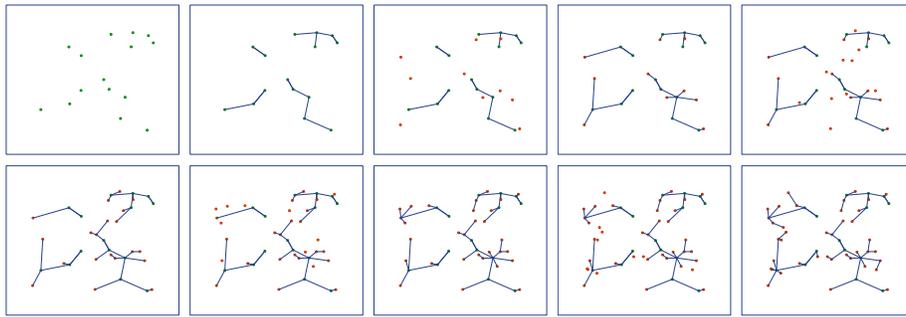


Figura 3.4: Construcción del árbol estacionario.

Ahora describiremos una versión infinita y estacionaria de este proceso. Notemos que la noción de árbol generador también tiene sentido en un conjunto infinito de vértices, pero la noción de MST típicamente no lo tiene. Sin embargo, el algoritmo ambicioso puede ser aplicado a un número infinito de vértices. Tomemos un proceso Poisson X en \mathbb{R}^d con densidad 1. Para cualquier punto $x \in X$ podemos aplicar el algoritmo ambicioso descrito arriba. Esto produce, para cualquier $n \geq 1$, un árbol $T_n(x)$. Escribimos

$$T_\infty(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n(x).$$

Ahora definimos la gráfica aleatoria \mathcal{F} como la gráfica cuyos vértices están dados por X y que contiene los enlaces (no dirigidos) $e = (x_i, x_j)$ si y sólo si $e \in T_\infty(x_i)$ o $e \in T_\infty(x_j)$. \mathcal{F} es estacionario en el sentido de que la distribución de la estructura de la gráfica es invariante bajo traslaciones. Se sabe que \mathcal{F} es casi seguramente un bosque, y que todas las componentes de \mathcal{F} son no acotadas.

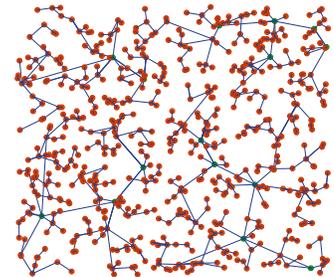


Figura 3.5: Árbol estacionario límite.

3.3.4. Modelo de palillos de Poisson

La fuerza de un objeto metálico depende de las fracturas presentes en el material. Típicamente, estas fracturas se representan como incisiones de longitud y orientación variables presentes de manera aleatoria en el objeto. En una escala más grande, tales fracturas también están presentes en objetos geológicos, por ejemplo líneas de fallas en el estudio de terremotos. A pesar de que en el primer caso se puede suponer que el material tiene una composición homogénea, para estudios geológicos se puede suponer heterogeneidad. Un modelo sencillo para estudiar estos fenómenos es el modelo booleano con “palillos”⁶.

Consideremos un proceso puntual de Poisson X en \mathbb{R}^2 y supongamos que cada punto del proceso es el centro de un segmento de recta de longitud aleatoria y orientación aleatoria θ con respecto al eje x . Estos palillos representan fracturas. Suponemos nuevamente que los palillos son independientes e idénticamente distribuidos. Más precisamente, nuestro modelo consiste de puntos x_1, x_2, \dots de un proceso puntual de Poisson con densidad λ en \mathbb{R}^2 y segmentos de recta L_1, L_2, \dots centrados en dichos puntos, respectivamente, donde L_i tiene longitud l_i y orientación θ_i con respecto al eje x . Suponemos que las l_i son independientes e idénticamente distribuidas, al igual que las θ_i , y que estas dos sucesiones de variables aleatorias son a su vez independientes entre sí.

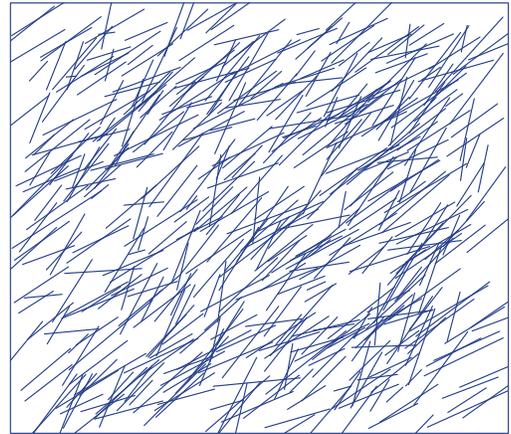


Figura 3.6: Modelo de palillos de Poisson con dirección preferencial.

Para este modelo podemos definir las densidades críticas λ_C , λ_T y λ_S del mismo modo que en el modelo booleano de bolas ordinario.

Es claro que si θ_1 tiene una distribución degenerada (es decir, todos los palillos están orientados en la misma dirección casi seguramente), entonces ningún par de palillos se intersectará c.s. y entonces nunca habrá percolación. Así que se supone que θ tiene una distribución no degenerada para que el modelo no se trivialice.

Notemos finalmente que este modelo es un caso particular del modelo booleano general, donde el objeto aleatorio es el palillo (segmentos de recta).

Se concluye este capítulo observando que es posible preguntarse qué sucede con modelos dirigidos por procesos puntuales más generales. Esta cuestión se discute en el Apéndice E, así como los límites de las hipótesis de ergodicidad y estacionariedad empleadas a lo largo de este capítulo.

⁶Traducido del inglés *sticks*.

Modelos estocásticos de redes de fracturas discretas

En el transcurso de los capítulos anteriores se ha mostrado que los modelos estocásticos con teoría de percolación son de utilidad para mejorar nuestra comprensión del comportamiento de flujos en medios porosos naturalmente fracturados. Con esta motivación, desarrollamos tres modelos estocásticos de redes de fracturas discretas con el objetivo de estimar su función de percolación, y así poder obtener información sobre el umbral de percolación de redes aleatorias de fracturas discretas en términos de los parámetros de los modelos. Estos modelos se desarrollaron en dos dimensiones y comprenden un caso con una sola familia de fracturas y dos casos con dos familias superpuestas. Para desarrollarlos se empleó una metodología general que se presenta a continuación [4].

4.1. Metodología aplicada al desarrollo de los modelos

Históricamente, las matemáticas se han utilizado para responder preguntas. Estas preguntas con frecuencia giran en torno al comportamiento de entidades en la naturaleza. Para poder dar soluciones en términos matemáticos, la pregunta y el objeto de estudio deben representarse en términos más abstractos. Este proceso nos lleva al planteamiento de un modelo conceptual que a su vez debe ser expresado en términos estrictamente matemáticos para poderse trabajar con herramientas matemáticas. El proceso de selección de estas herramientas matemáticas conlleva el planteamiento de un modelo matemático de la entidad que queremos estudiar, y planteamos nuestra pregunta en esos términos. Notemos que a pesar de que en este punto nuestro modelo matemático es con toda probabilidad menos complejo que el objeto de estudio natural, con frecuencia sigue siendo demasiado complejo para obtener soluciones analíticas a las preguntas que nos planteamos y por esta razón debemos utilizar métodos numéricos para aproximar nuestras soluciones. En ese momento, se plantea de manera explícita o implícita un modelo numérico, que a su vez puede implementarse computacionalmente pues con frecuencia los cálculos a realizar son mucho más rápidos y prácticos con el uso de una computadora. Entonces, empezamos a necesitar algo-

ritmos estables, consistentes y confiables que nos permitan implementar los métodos numéricos planteados.

La metodología implicada en esta discusión se presenta explícitamente a continuación.

1. En primer lugar se discute brevemente el **modelo conceptual** del modelo, donde se realiza el primer paso de abstracción, se decide cuáles características del medio poroso naturalmente fracturado se representarán y en qué términos. Se tiene cuidado de plantear explícitamente las hipótesis que dichas representaciones conllevan.
2. A continuación se presenta el desarrollo del **modelo matemático**, en el cual se seleccionan las herramientas adecuadas para expresar el modelo conceptual en términos matemáticos. En nuestro caso, estas herramientas se han desarrollado en los primeros tres capítulos, así como en los apéndices relevantes.
3. El tercer paso consiste en el **modelo numérico**, que siempre es una versión discretizada de nuestro modelo matemático y nos permite pasar al siguiente paso. En este trabajo el modelo numérico se desarrolló de manera implícita al elegir el lenguaje de programación en el cual se implementa el siguiente paso. De este modo, el aspecto numérico es el mismo para nuestros tres modelos estocásticos, por lo cual se le presenta en la su propia sección al final de este capítulo, por única vez.
4. Finalmente se presenta el **modelo computacional**, en el cual los modelos se implementan en el lenguaje de programación R , utilizando algoritmos de simulación estocástica. Los códigos desarrollados para implementar los modelos en R pueden hallarse en el Apéndice F.

Finalmente, en el transcurso de la implementación fue necesario representar la conectividad de las redes de fracturas discretas en términos de una matriz de incidencias (en el sentido de teoría de gráficas, ver Apéndice B). Esto nos motivó para intentar caracterizar la conectividad de la red utilizando conceptos de teoría de gráficas, con la posibilidad de hallar un criterio alternativo que permita detectar el umbral de percolación. Si bien esta idea no tuvo efecto alguno sobre la conceptualización de los modelos, ciertamente se volvió uno de los objetivos del trabajo presente.

4.2. Modelo básico

4.2.1. Modelo conceptual

Las observaciones de campo de muchas formaciones fracturadas revelan redes de fracturas que se muestran como un ensamble de delgados segmentos de recta, distribuidos al azar. Por esta razón representaremos las fracturas en nuestro modelo utilizando segmentos de recta. Estos segmentos se encontrarán dentro de una ventana de estudio que será, naturalmente, acotada y por simplicidad rectangular. Aún más, supondremos que estas fracturas están distribuidas uniformemente en nuestra ventana de estudio, de manera aleatoria. Propondremos que el número de fracturas sea también aleatorio y que la ocurrencia de una fractura en un lugar determinado no afecte a las demás, es decir, que regiones ajenas de la ventana de estudio se comporten de manera independiente.



Figura 4.1: Red aleatoria de fracturas discretas en dos dimensiones. La red se encuentra por debajo del umbral de percolación.

Nuestras fracturas, al ser representadas mediante segmentos de recta, están dotadas de longitud e inclinación. Así que será necesario establecer mecanismos mediante los cuales se puedan simular estas características. Considerando que las familias de fracturas se caracterizan con frecuencia en términos de una dirección preferencial, nuestro modelo también reflejará una dirección preferencial en mayor o menor medida.

Hipótesis del modelo

Para poder desarrollar nuestro modelo estocástico, es necesario primero tomar las expectativas expresadas en la discusión previa y volverlas hipótesis explícitas. Hasta ahora se tienen las siguientes suposiciones:

1. El modelo es bidimensional.
2. La ventana de estudio es acotada (rectangular).
3. Habrá un número finito (aleatorio) de fracturas.
4. Las fracturas (segmentos de recta) se distribuyen de manera aleatoria dentro de la ventana de estudio.

5. Las fracturas se distribuyen de manera uniforme dentro de la ventana de estudio.
6. Regiones ajenas de la ventana de estudio son independientes.

Notemos que la segunda hipótesis puede tener consecuencias importantes para la unicidad del cluster que percola. La unicidad se da cuando el cluster que percola se define como la *componente conexa no acotada*. En nuestros modelos todas las componentes conexas están acotadas, pues la ventana es acotada. De este modo, cabe esperar que en ocasiones el cluster que percola en una simulación no sea único.

4.2.2. Modelo matemático básico

Una vez discutido el modelo conceptual, se presentan varios aspectos que se podrán representar matemáticamente. El primero, y más sencillo, es la ventana de estudio. Supondremos por simplicidad que la ventana es cuadrada y unitaria. De este modo las longitudes de fractura podrán representar tamaños relativos, lo cual nos proporcionará información de la escala en la cual nos encontramos.

Localización y número de fracturas

El siguiente paso es determinar qué mecanismo regirá el número de fracturas, así como su localización. Por “localización” de una fractura, entenderemos el punto medio del segmento que la representa. Así que buscamos un mecanismo que nos permita seleccionar un conjunto aleatorio y discreto de puntos en nuestra ventana de estudio. Es decir que necesitamos un proceso puntual. Considerando la hipótesis de independencia entre regiones ajenas y uniformidad de la distribución de las fracturas en nuestra ventana de estudio, es razonable utilizar el proceso puntual de Poisson homogéneo. Adicionalmente, resulta ventajoso que el parámetro λ de intensidad de este proceso puntual coincide con su media. En realidad, las razones detrás de esta elección son más profundas, pues partiendo de hipótesis como la de independencia ya considerada, así como la convexidad de la ventana de estudio y de los segmentos de recta que representan a las fracturas se llega de manera “natural” al proceso puntual de Poisson. Esta naturalidad, como suele suceder en Matemáticas, no es inmediata y se discute con mayor detalle en el Apéndice C.

De este modo surge el primer parámetro de nuestro modelo, λ , la intensidad del proceso puntual de Poisson que dirige al modelo. Notemos que ya que λ es precisamente la media de la variable aleatoria Poisson asociada al número de fracturas (o puntos) en una realización de nuestro modelo, podemos interpretar este parámetro como el número promedio de fracturas o bien la *densidad de fracturas* de nuestro medio. Este parámetro se puede estimar experimentalmente utilizando técnicas de estereología (ver Apéndice A) En resumen, estamos utilizando un modelo booleano dirigido por un proceso puntual de Poisson, donde los convexos que se traslapan son segmentos de recta.

Inclinación de las fracturas

Ahora bien, la inclinación de las fracturas también puede ser vista como un proceso aleatorio y en este sentido podemos utilizar una variable aleatoria para simular su comportamiento. Nos interesa una variable aleatoria que pueda representar la dirección preferencial que las familias de fracturas (es decir, fracturas generadas por el mismo proceso geológico) suelen presentar. También resultará práctico tener algún control sobre la concentración de la variable alrededor de esta dirección preferencial. Finalmente, notemos que nos interesa una distribución de probabilidad sobre el círculo, pues queremos simular direcciones.

Tomando en cuenta estos factores, viene a la mente la distribución conocida como *wrapped normal distribution*, que resulta de “envolver una distribución normal alrededor del círculo. Sin embargo, por su tractabilidad matemática (ver [23]), elegimos utilizar una distribución de Von Mises. Esta distribución, también conocida como distribución normal circular, es una distribución de probabilidad continua sobre el círculo y es un análogo circular de la distribución normal. Surge de la distribución estacionaria de un proceso de difusión en el círculo, con una dirección preferencial. Este último hecho es de utilidad, ya que al momento de caracterizar medios fracturados, las fracturas se organizan en familias de acuerdo, precisamente, a su dirección preferencial.

La función de densidad de probabilidad de Von Mises para un ángulo θ está dada por

$$f(\theta|\mu, \kappa) = \frac{e^{\kappa \cos(\theta - \mu)}}{2\pi I_0(\kappa)},$$

donde I_0 es la función de Bessel modificada de orden cero. Su media es precisamente μ , y su varianza está dada por $1 - I_1(\kappa)/I_0(\kappa)$. Los parámetros μ y $1/\kappa$ son análogos a μ y σ^2 en la distribución normal, respectivamente. Para la distribución de Von Mises, μ es una medida de localización y κ es una medida de concentración. En el caso particular en que $\kappa = 0$ la distribución Von Mises se reduce a la uniforme. Por otra parte, entre más grande sea κ la distribución se concentra más alrededor de μ . Más en general, cuando κ tiende a infinito esta distribución se aproxima a una normal con media μ/κ y varianza $1/\kappa$.

Longitud de fractura

De manera consistente con el planteamiento discutido en la sección 4.2.2, que propone tomar un objeto fijo K , se decidió que la longitud de fractura será constante (en lugar de usar una variable aleatoria). Una motivación adicional para este criterio fue mantener el número de parámetros del modelo lo más tratable posible. De este modo, en nuestro modelo básico, la longitud de fractura será constante y denotaremos este parámetro por l .

4.2.3. Percolación en el modelo básico

Ahora bien, ¿cuándo diremos que una realización de nuestro modelo percola? Recordemos que desde el punto de vista teórico, una realización percola cuando existe una componente conexa no acotada. Ciertamente no podemos tomar una ventana de estudio infinita, así que necesitamos redefinir nuestro concepto de percolación tomando en cuenta las restricciones que enfrentamos al momento de simular. La convención cuando la ventana de estudio es considerar que una realización percola cuando conecta lados opuestos de la ventana de estudio (ver, por ejemplo, [31]).

De este modo, diremos que la realización percola cuando existe un cluster de fracturas que conecte lados opuestos de la ventana. Notemos que es posible hablar de dos criterios de percolación: en sentido horizontal y en sentido vertical. Ambos serán considerados durante los experimentos numéricos.

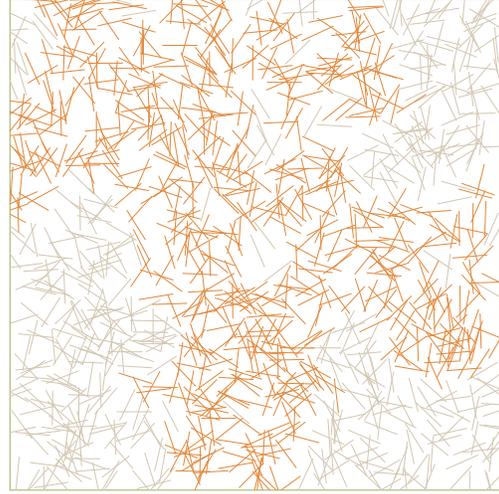


Figura 4.2: Red aleatoria de fracturas discretas en dos dimensiones. Parámetros de simulación: $\lambda = 1200$, $l = 0.07$, $\kappa = 0.1$, $\mu = \frac{\pi}{4}$. La red se encuentra en estado supercrítico, percolando horizontal y verticalmente. El cluster que percola se muestra en color naranja.

Ambos serán considerados durante los experimentos numéricos.

En conclusión, las componentes de nuestro modelo básico son:

- I. Un proceso puntual de Poisson de parámetro de intensidad λ , el cual puede ser interpretado como el número promedio de fracturas en el medio.
- II. Segmentos de recta de longitud constante l que representan a las fracturas. Corresponden a la distribución de compactos utilizada en el modelo booleano.
- III. Una variable aleatoria Von Mises, de parámetros μ (dirección preferencial) y κ (concentración alrededor de la dirección preferencial), que controla la dirección de las fracturas.

Notemos que nuestro modelo básico cuenta con cuatro parámetros: λ , l , μ y κ .

4.2.4. Modelo computacional básico

En esta sección se discute brevemente la implementación del modelo en R y el algoritmo de simulación estocástica empleado.

En primer lugar, R es un lenguaje de programación empleado para análisis estadístico, visualización de datos y desarrollo de modelos predictivos. Una gran ventaja es que es un proyecto de software libre, que se beneficia del constante monitoreo y contribución de la comunidad que lo utiliza, lo cual ha resultado en un estándar de calidad y precisión numérica muy altos. En particular, la gran variedad de paquetes de calidad disponibles facilitaron la implementación computacional del modelo. Los códigos desarrollados en este proceso se incluyen al final en el Apéndice C.

Lo primero que necesitamos simular es un proceso puntual de Poisson. La simulación de un proceso puntual de Poisson es muy sencilla (ver [32]): Sean W una ventana rectangular de tamaño $n \times m$ y sea λ la intensidad del proceso. El algoritmo consiste en:

1. Generar $k \sim \text{Poisson}(\lambda)$.
2. Para $i \in \{1, \dots, k\}$ generar $x_1^{(i)} \sim \text{Unif}(0, n)$ y $x_2^{(i)} \sim \text{Unif}(0, m)$, $x_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$.

Notemos que en nuestro caso $m = n = 1$. Una vez simulado el proceso puntual de Poisson, ya tenemos el número de fracturas así como su localización en nuestra ventana.

Supongamos que el número de fracturas es N . A continuación simulamos N realizaciones de una variable aleatoria Von Mises. Se utilizó la función `rvonmises` del paquete `circular` para R desarrollado por Claudio Agostinelli, Ulric Lund y Harry Southworth. Esta función toma por parámetros el número de realizaciones a simular, así como los parámetros μ y κ de la distribución Von Mises.

Notemos que en este punto tenemos una colección de N puntos distribuidos uniformemente en la ventana unitaria y una colección de N ángulos de inclinación. Considerando que la longitud de fractura l es constante y está dada por el usuario, nuestra red ya está completamente determinada.

El siguiente paso es determinar si en una realización particular existe un cluster que conecte lados opuestos de nuestra ventana de estudio. Para implementar esta idea fue necesario calcular las coordenadas de los extremos de cada fractura a partir de los datos simulados. Para este fin se utilizó un criterio muy sencillo que permite decidir si dos segmentos de recta se intersectan o no utilizando orientaciones de ternas de puntos obtenidas de los extremos de los segmentos. Este criterio se presenta brevemente a continuación.

Sean p_1, p_2 y p_3 son vectores en \mathbb{R}^2 . Consideremos la cantidad $c = (p_2 - p_1) \times (p_3 - p_1)$. Diremos que estos vectores (puntos) están orientados de manera

- **Positiva** (contrario a las manecillas del reloj) si $c > 0$.
- **Negativa** (como las manecillas del reloj) si $c < 0$.
- **Colineal** si $c = 0$.

Ahora bien, dos segmentos de recta con extremos p_1, q_1 y p_2, q_2 , respectivamente, se intersectan si y sólo si se satisfacen las dos siguientes condiciones:

- p_1 , q_1 y p_2 tienen orientaciones distintas.
- p_2 , q_2 y p_1 tienen orientaciones distintas.

Este criterio se implementó y se utilizó para construir una matriz de incidencias, donde las fracturas se etiquetan con los números del 1 a N , y la ij -ésima entrada vale 1 si las fracturas i y j se intersectan, o 0 en otro caso. Esta matriz es simétrica, con ceros en la diagonal pues convenimos no considerar a una fractura conectada con sí misma.

Cabe notar que en este punto la información de conectividad de la red de fracturas ha quedado codificada como una gráfica, donde los vértices representan a las fracturas y dos vértices están conectados si y sólo si las fracturas que representan se intersectan. Esta forma de codificar la red nos permitirá aplicar herramientas de teoría de gráficas para estudiar la conectividad de la red.

Una vez que se ha calculado la matriz de incidencias, se le pasa al paquete *igraph*, desarrollado para R por Gabor Csardi y Tamas Nepusz, entre otros. Este paquete proporciona rutinas para gráficas simples y análisis de redes. En particular, utilizamos la función *cluster* para calcular las componentes conexas de la gráfica, y determinar así si existían clusters que conectaran bordes opuestos de la ventana de estudio, así como la detección de vértices de corte (vértices tales que al eliminarlos de la gráfica, aumenta el número de componentes conexas) y la conexidad por vértices (a grandes rasgos, el número máximo de vértices que pueden ser retirados antes de que la gráfica se desconecte, ver Apéndice B). Estas medidas son complementarias en el sentido de que si hay vértices de corte, la conectividad por vértices vale cero.

4.3. Modelo de dos familias

4.3.1. Modelo conceptual

En una formación fracturada es posible que haya fracturas cuyo origen depende de distintos procesos geológicos. De este modo, las fracturas resultantes presentan características diferentes en términos de su longitud y dirección preferencial, y es posible clasificarlas en familias dependiendo de dichas características. Este hecho nos motiva a considerar un modelo donde se tienen dos redes de fracturas discretas superpuestas, y estudiar su conectividad desde el punto de vista de la teoría de percolación.

Cada una de estas familias (redes) será representada mediante una realización del modelo básico presentado en la sección anterior. De este modo, estamos considerando todas las hipótesis planteadas previamente. Adicionalmente, consideraremos que las familias son independientes entre sí.

Hipótesis del modelo

Con la intención de que nuestro desarrollo sea completo, se presentan las hipótesis de este modelo:

1. El modelo es bidimensional.
2. La ventana de estudio es acotada (rectangular).
3. Cada familia constará de un número finito (aleatorio) de fracturas.
4. Las fracturas (segmentos de recta) se distribuyen de manera aleatoria dentro de la ventana de estudio.
5. Las fracturas se distribuyen de manera uniforme dentro de la ventana de estudio.
6. Regiones ajenas de la ventana de estudio son independientes.

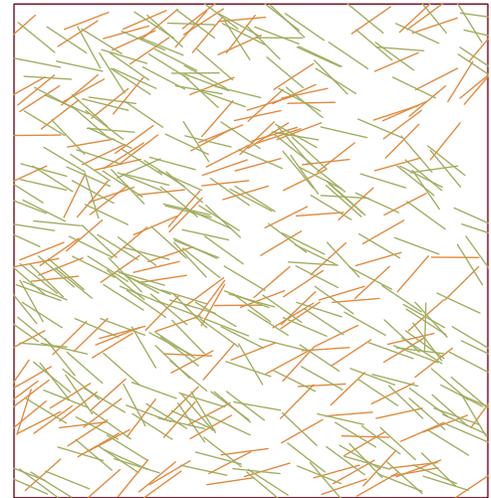


Figura 4.3: Dos familias de fracturas superpuestas, en el caso conjugado.

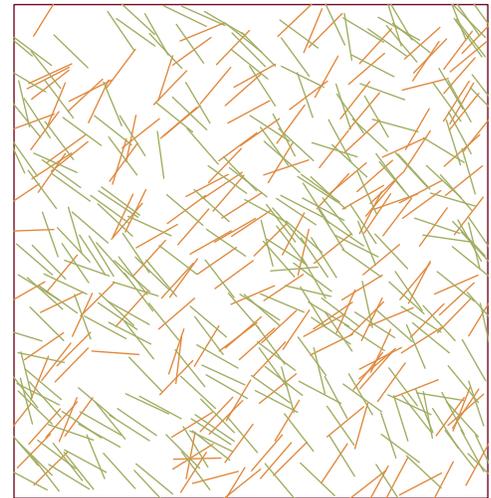


Figura 4.4: Dos familias de fracturas superpuestas, en el caso perpendicular.

7. Las familias son independientes entre sí.

En este modelo, por simplicidad¹, pensaremos que las familias tienen la misma longitud de fractura constante y lo que las distingue es su dirección preferencial. De este modo, existen dos casos de interés básicos:

- I. *Familias conjugadas*: Cuando las fracturas se intersectan en un ángulo menor a $\frac{\pi}{2}$.
- II. *Familias perpendiculares*: Cuando las fracturas se intersectan en un ángulo igual a $\frac{\pi}{2}$.

Por esta razón, se considerarán dos casos de estudio: cuando las direcciones preferenciales difieren menos de $\frac{\pi}{2}$, y cuando las direcciones preferenciales son perpendiculares.

4.3.2. Modelo matemático de dos familias

Construiremos este modelo de dos familias basándonos en el desarrollo matemático realizado para el modelo básico. De este modo, utilizaremos las mismas herramientas matemáticas para construir los diferentes elementos del modelo (procesos puntuales de Poisson, variables aleatorias de Von Mises y longitudes constantes). Cabe mencionar que, de acuerdo a las hipótesis del modelo conceptual, las componentes estocásticas del modelo serán independientes entre sí.

Localización y número de fracturas

Tendremos dos procesos puntuales de Poisson homogéneos e independientes entre sí, de parámetros de intensidad λ_1 y λ_2 , respectivamente.

Es importante recordar que la superposición de dos procesos Poisson resulta en un proceso puntual de Poisson cuya intensidad es la suma de las intensidades de cada proceso inicial (ver Proposición 2.4.3). En este sentido se tienen *tres* familias de fracturas, las dos iniciales y la tercera que resulta de la unión de las dos primeras. De este modo, es razonable esperar que la familia superpuesta se comporte como un modelo booleano dirigido por un proceso puntual de Poisson de intensidad $\lambda_1 + \lambda_2$ en los casos en que los demás parámetros no difieran mucho entre sí.

Inclinación de las fracturas

Las inclinaciones de las fracturas serán controladas por variables aleatorias Von Mises. Tendremos una variable aleatoria para cada familia, independientes entre sí, de tal suerte que μ_1 y κ_1 serán los parámetros de localización y concentración de la variable aleatoria Von Mises asociada a las inclinaciones de la primera familia; y μ_2 y κ_2 serán los parámetros de localización y concentración de la variable aleatoria Von Mises asociada a las inclinaciones de la segunda familia.

¹El caso en el cual las longitudes difieren se considera en el siguiente modelo (Sección 4.4)

Ahora bien, los casos de estudio planteados en el modelo conceptual del modelo se traducen en términos de nuestros parámetros del siguiente modo:

I. *Caso conjugado*: $|\mu_1 - \mu_2| < \frac{\pi}{2}$.

II. *Caso perpendicular*: $|\mu_1 - \mu_2| = \frac{\pi}{2}$.

Longitud de fractura

Por otra parte, las fracturas en ambas familias serán de longitud constante e igual. En consecuencia tenemos un mismo parámetro de longitud para ambas familias, que denotaremos nuevamente por l .

4.3.3. Percolación en el modelo de dos familias

Definiremos la percolación en nuestro modelo de dos familias del mismo modo que en nuestro modelo básico, tanto horizontal como verticalmente. Sin embargo, es importante notar que si una de las familias percola por si misma, la percolación en la familia superpuesta se trivializa (estamos agregando aún más fracturas a un sistema que ya se encuentra en estado supercrítico). Por esta razón consideraremos de interés únicamente los casos en que las familias iniciales no percolan individualmente, pero cuya superposición sí percola.

En conclusión, las componentes de nuestro modelo de dos familias son:

- I. Dos procesos puntuales de Poisson con parámetros de intensidad λ_1 y λ_2 , respectivamente. Estos parámetros pueden ser interpretados como el número promedio de fracturas de cada familia en el medio poroso.
- II. Segmentos de recta de longitud constante l que representan a las fracturas. Corresponden a la distribución de compactos utilizada en el modelo booleano.
- III. Dos variables aleatorias Von Mises, de parámetros μ_1 (dirección preferencial de la primera familia), κ_1 (concentración alrededor de la dirección preferencial) y μ_2 (dirección preferencial de la segunda familia), κ_2 (concentración alrededor de la dirección preferencial) respectivamente, que controlan la dirección de las fracturas de cada familia.

Notemos que nuestro modelo de dos familias cuenta con siete parámetros: λ_1 , λ_2 , l , μ_1 , μ_2 , κ_1 y κ_2 .

4.3.4. Modelo computacional de dos familias

Para implementar este modelo en R se utilizó el material desarrollado para el modelo básico, ya que el modelo de dos familias resulta de la superposición de dos modelos básicos. Los procesos puntuales de Poisson y



Figura 4.5: Red subcrítica de fracturas (primera familia). Parámetros: $\lambda_1 = 250$, $l = 0.08$, $\kappa = 8$, $\mu = -\frac{\pi}{5}$.



Figura 4.6: Red subcrítica de fracturas (segunda familia). Parámetros: $\lambda_1 = 350$, $l = 0.08$, $\kappa = 8$, $\mu = \frac{\pi}{5}$.

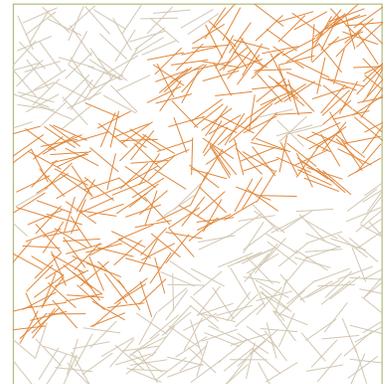


Figura 4.7: Red supercrítica de fracturas (familia superpuesta). El cluster que percola se muestra en naranja.

las variables aleatorias Von Mises se simulan por separado, asegurando la independencia planteada en las hipótesis.

La única diferencia es en que en esta ocasión se calculan tres matrices de incidencia: una para cada familia individual y otra más para la familia superpuesta. De este modo será posible llevar a cabo el análisis de percolación de manera independiente para cada familia. Es de esperar que el tiempo de cómputo para la simulación y análisis de esta familia sea sensiblemente mayor al del modelo básico.

4.4. Modelo microfracturado

4.4.1. Modelo conceptual del modelo microfracturado

El modelo presentado en esta sección está inspirado en los yacimientos de shale gas. El *shale gas* es un gas natural que se obtiene de un tipo de roca sedimentaria derivada de fuentes que con frecuencia incluyen arcillas y *siltstones*. Este tipo de roca sedimentaria se conoce como *shale*. Las rocas sedimentarias clásicas están compuestas de fragmentos de rocas preexistentes que se han erosionado, transportado, depositado y litificado para formar nuevas rocas. Los shales contienen material orgánico que se depositó con los fragmentos de roca. Las formaciones de shale se consideran no convencionales ya que debido a su baja permeabilidad el gas se explota mediante técnicas especiales, como el *fracking*.

En áreas donde se encuentran formaciones más convencionales, es posible encontrar shales en los estratos de roca subyacentes. Pueden ser fuente de hidrocarburos que han migrado hacia arriba, a la roca contenedora. Los shales contienen materia orgánica (kerógeno) que es la fuente de todos los recursos de hidrocarburos. Con el paso del tiempo, mientras la roca madura, se producen hidrocarburos a partir del kerógeno. Estos hidrocarburos pueden entonces migrar, en forma de líquido o gas, a través de fisuras existentes y fracturas en la roca hasta que alcanzan la superficie o hasta quedar atrapados bajo un estrato de roca impermeable. Las zonas porosas bajo estas “trampas” acumulan hidrocarburos en un depósito convencional, con frecuencia de arenisca.

Para que exista flujo en este tipo de formaciones es necesario que se encuentren *microfracturadas*, es decir, que haya abundantes fracturas pequeñas. Aunado al empleo del *fracking* en este tipo de formaciones se observan abundantes fracturas de corta longitud, y pocas fracturas largas. De este modo, podemos utilizar el modelo desarrollado en la sección anterior interpretando estas dos longitudes distintas como características de dos familias. De este modo el modelo microfracturado

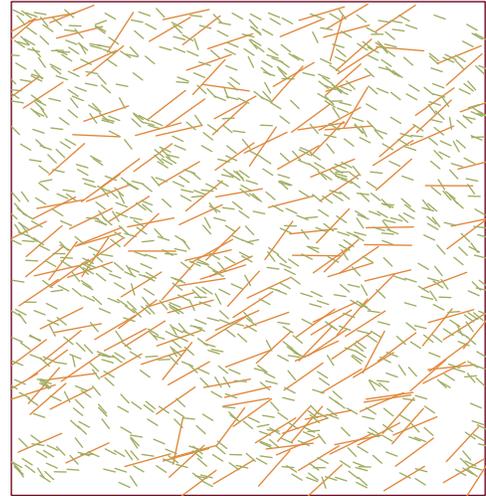


Figura 4.8: Fracturas en microfracturado, en el caso conjugado.

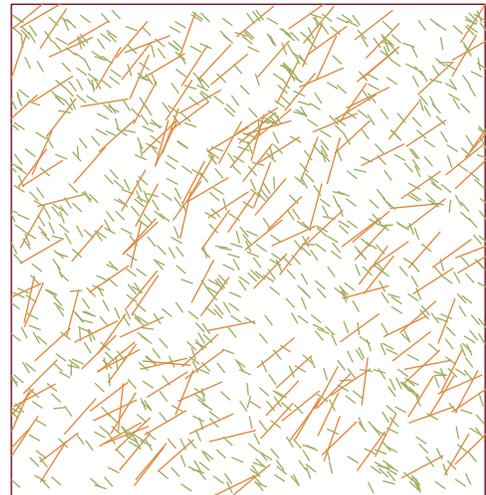


Figura 4.9: Fracturas en microfracturado, en el caso perpendicular.

es un modelo de dos familias superpuestas, donde la primera familia es escasa y de longitud larga y la segunda familia es abundante y de longitud corta. Cabe mencionar que no se pretende modelar formaciones tipo shale gas, simplemente se tomó este ejemplo como inspiración para plantear otro modelo.

Finalmente, se mantienen todas las hipótesis que en el modelo de dos familias.

Hipótesis del modelo

Nuevamente, con la intención de que nuestro desarrollo sea completo, se presentan las hipótesis de este modelo:

1. El modelo es bidimensional.
2. La ventana de estudio es acotada (rectangular).
3. Cada familia constará de un número finito (aleatorio) de fracturas.
4. Las fracturas (segmentos de recta) se distribuyen de manera aleatoria dentro de la ventana de estudio.
5. Las fracturas se distribuyen de manera uniforme dentro de la ventana de estudio.
6. Regiones ajenas de la ventana de estudio son independientes.
7. Las familias son independientes entre sí.
8. La primera familia es escasa y larga.
9. La segunda familia es abundante y corta.

Consideraremos que las familias se distinguen también por su dirección preferencial, por lo cual tenemos los mismo casos de interés que en el modelo de dos familias:

- I. *Familias conjugadas*: Cuando las fracturas se intersectan en un ángulo menor a $\frac{\pi}{2}$.
- II. *Familias perpendiculares*: Cuando las fracturas se intersectan en un ángulo igual a $\frac{\pi}{2}$.

Por esta razón, se considerarán los mismos casos de estudio: cuando las direcciones preferenciales difieren menos de $\frac{\pi}{2}$, y cuando las direcciones preferenciales son perpendiculares.

4.4.2. Modelo matemático microfracturado

La construcción matemática de este modelo es casi idéntica al modelo de dos familias, diferenciándose únicamente en la longitud de fractura.

Localización y número de fracturas

Tendremos nuevamente la superposición de dos procesos puntuales de Poisson homogéneos e independientes entre sí, de parámetros de intensidad λ_1 y λ_2 , respectivamente.

Inclinación de las fracturas

En este modelo se utiliza el mismo mecanismo para simular la inclinación de fractura que en el modelo de dos familias (ver Sección 4.3.2).

Los casos de estudio planteados en el modelo conceptual se representan nuevamente del siguiente modo:

- I. *Caso conjugado*: $|\mu_1 - \mu_2| < \frac{\pi}{2}$.
- II. *Caso perpendicular*: $|\mu_1 - \mu_2| = \frac{\pi}{2}$.

Longitud de fractura

En este caso, tendremos longitudes de fractura constantes y distintas para cada familia. De este modo, l_1 será la longitud de fractura de la primera familia y l_2 será la longitud de fractura de la segunda familia. Tendremos $l_1 \neq l_2$ y $l_1 > l_2$.

4.4.3. Percolación en el modelo microfracturado

Definiremos la percolación en nuestro modelo de dos familias del mismo modo que en el modelo de dos familias. Consideraremos de interés únicamente los casos en que las familias iniciales no percolan individualmente, pero cuya superposición sí percola.

En conclusión, las componentes de nuestro modelo microfracturado son:

- I. Dos procesos puntuales de Poisson de parámetro de intensidades λ_1 y λ_2 , respectivamente. Estos parámetros pueden ser interpretados como el número promedio de fracturas de cada familia en el medio poroso.
- II. Segmentos de recta de longitudes constantes l_1 y l_2 , respectivamente, que representan a las fracturas. Corresponden a la distribución de compactos utilizada en el modelo booleano.

- III. Dos variables aleatorias Von Mises, de parámetros μ_1 (dirección preferencial de la primera familia), κ_1 (concentración alrededor de la dirección preferencial) y μ_2 (dirección preferencial de la segunda familia), κ_2 (concentración alrededor de la dirección preferencial) respectivamente, que controlan la dirección de las fracturas de cada familia.

Notemos que nuestro modelo de dos familias cuenta con ocho parámetros: λ_1 , λ_2 , l_1 , l_2 , μ_1 , μ_2 , κ_1 y κ_2 .

4.4.4. Modelo computacional microfracturado

Para implementar este modelo en R se utilizó el material desarrollado para el modelo de dos familias, ya que el modelo microfracturado consta de la misma construcción, variando simplemente las longitudes. Los procesos puntuales de Poisson y las variables aleatorias Von Mises se simulan de nuevo por separado, asegurando la independencia planteada en las hipótesis. Finalmente, se calculan tres matrices de incidencias del modo mencionado en la Sección 4.2.4. esperando nuevamente que el tiempo de simulación y análisis sea sensiblemente mayor.

Se utilizaron los códigos desarrollados para realizar experimentos numéricos con el objetivo de estimar la función de percolación de los modelos, y así encontrar su umbral de percolación en términos de los parámetros. El desarrollo de estos experimentos, así como sus resultados y las conclusiones que obtuvimos se presentan en el siguiente capítulo.

4.5. Modelo numérico general

El aspecto numérico de nuestros modelos estocásticos surge de manera implícita al elegir utilizar el lenguaje de programación R para implementar los modelos computacionales.

La selección de este lenguaje se basó en la multitud de ventajas que ofrece. En primer lugar, es un lenguaje de programación especialmente diseñado para estadística y probabilidad, en el sentido de que la distribución estándar viene con muchas funciones relevantes implementadas. Por otra parte, al ser software libre, cuenta con las contribuciones y monitoreo de una comunidad científica muy amplia. En particular, R cuenta con estándares de calidad y precisión numérica muy altos para las contribuciones, lo que a su vez se refleja en la calidad de la implementación. Más aún, R cuenta con herramientas gráficas muy flexibles que permiten representar la información y los resultados de manera atractiva y accesible.

Estas características resultaron particularmente útiles al momento de implementar nuestros modelos, pues surgieron necesidades como la simulación de una variable aleatoria Von Mises, graficar información bidimensional tipo *raster* y la implementación de conceptos de teoría de gráficas. En todos estos casos se hallaron paquetes aprobados oficialmente por el R Core Team que nos

permitieron sortear estos obstáculos.

En el transcurso de la implementación del modelo computacional se emplearon los siguientes paquetes de *R*:

I. Paquete *circular*

Este paquete fue desarrollado por Ulric Lund y Claudio Agostinelli. Se utilizó la función *rvmises* para simular la variable aleatoria Von Mises. Esta función toma por argumentos n , μ y κ , donde n es el número de realizaciones a simular y μ y κ son respectivamente los parámetros de localización y concentración de la variable.

II. Paquete *igraph*

Este paquete fue desarrollado por Gabor Csardi, entre otros. Se utilizó la función *clusters* para calcular las componentes conexas de nuestras redes de fracturas y así poder determinar la existencia de un cluster de percolación. Adicionalmente se emplearon las funciones *articulation.points* y *vertex.connectivity* para calcular respectivamente el número de puntos de articulación y la conectividad por vértices de las redes, de acuerdo a los objetivos planteados.

III. Paquete *raster*

Este paquete, desarrollado por Robert Hijmans y Jacob van Etten, entre otros, se empleó para graficar las estimaciones de la función de percolación para el modelo de dos familias y el modelo microfracturado. Considerando que este paquete se utilizó únicamente para obtener una representación gráfica de nuestros resultados numéricos, y en ningún momento para su obtención, consideramos que no tiene impacto directo sobre el modelo numérico y se incluye aquí por formalidad.

Desafortunadamente, la documentación de estos paquetes no proporciona información adicional sobre su implementación numérica.

Experimentos numéricos y discusión de resultados

En este capítulo se presenta la motivación detrás de los experimentos numéricos realizados, así como los resultados obtenidos en forma gráfica. Cabe mencionar que al hablar de la “función de percolación” en realidad nos referimos a la función *estimada* de percolación. Adicionalmente, nos referimos a λ indistintamente como parámetro de intensidad o número promedio de fracturas, según lo que resulte conveniente dado el contexto.

5.1. Objetivos

El objetivo de los experimentos numéricos es hallar una aproximación del umbral de percolación para cada modelo y cada caso planteado en el Capítulo 4, aproximando la función de percolación en términos de los parámetros. Ahora bien, nuestros modelos constan de cuatro, siete y ocho parámetros. No sería práctico intentar hallar el umbral de percolación en espacios de parámetros con tantas dimensiones. Por esta razón decidimos fijar varios de los parámetros mientras exploramos los demás. Esta estrategia nos motiva a intentar determinar también una jerarquía sobre los parámetros en términos de la percolación. Adicionalmente, decidimos tomar $\kappa_1 = \kappa_2$ en los modelos de dos familias y de microfracturas. Esta previsión nos permite estudiar el factor de concentración de los ángulos preferenciales de manera global, así como reducir el número de parámetros a estudiar. En adelante, hablaremos simplemente del parámetro de concentración κ en todos los casos.

Adicionalmente, considerando que la información de conectividad de las redes se codificó utilizando gráficas (grafos), se pretende explorar otros criterios de conectividad y determinar si existe relación alguna con el umbral de percolación. Los criterios propuestos son el número de vértices de corte y la conectividad por vértices (ver Apéndice B). Por otra parte, se estudiará el tamaño relativo del cluster que percola en cada caso para determinar si proporciona información útil respecto al umbral de percolación, pues nos interesa saber si es posible que exista un “tamaño crítico” que afecte el umbral de percolación.

Cabe mencionar que para estimar la función de percolación tomamos la interpretación “frecuentista” de la probabilidad. Es decir, si $\theta_{l,\mu,\kappa}(\lambda)$ es la probabilidad de que el modelo percole,

con los parámetros indicados, entonces:

$$\hat{\theta}_{\mu\kappa}(\lambda) = \frac{\text{número de simulaciones que percolan}}{\text{número total de simulaciones}}$$

Al mencionar las simulaciones, se quiere decir con mayor precisión “simulaciones con parámetros λ , μ , κ ”.

En resumen, los objetivos de los experimentos numéricos fueron:

- I. Estimar la función de percolación de los modelos y aproximar el umbral de percolación.
- II. Explorar el comportamiento del número de puntos de articulación y la conectividad por vértices. Determinar si tienen relación con el umbral de percolación con la intención de proponer medidas alternativas para la predicción del umbral.
- III. Determinar si alguno de los parámetros del modelo es más dominante que los demás, en términos de la percolación.
- IV. Obtener conclusiones generales sobre el comportamiento de estos modelos desde el punto de vista de la teoría de percolación.

La metodología general para llevar a cabo los experimentos fue la siguiente:

1. Realizar un análisis exploratorio en términos de los tiempos de cómputo para determinar el número de simulaciones a realizar.
2. Realizar un análisis exploratorio, con pocas simulaciones, en términos de λ para encontrar los rangos dentro de los cuales ocurre la transición de fase (es decir, que la función estimada de percolación varíe de cero a uno).
3. Fijar el resto de los parámetros eligiendo distintos valores que varíen por orden de magnitud.
4. Una vez que se determinen los rangos potenciales para el umbral de percolación en cada modelo y en cada caso, llevar a cabo un barrido más fino en términos de λ para aproximar la función de percolación.
5. Representar los resultados gráficamente, para poderlos comparar y obtener conclusiones.

Notemos que, dada la construcción de los modelos, será necesario llevar a cabo los experimentos en primer lugar para el modelo básico, después para el modelo de dos familias y finalmente para el modelo de microfracturas. La estimación de rangos relevantes de un modelo nos permitirá hallar los rangos del modelo posterior.

5.2. Criterios generales para la selección de parámetros

- I. El espacio de parámetros se explorará en términos de λ , dejando fijos distintos valores de los demás parámetros y dentro de rangos relevantes para hallar el umbral de percolación determinados por los análisis exploratorios y los resultados de cada modelo. EL motivo detrás de este criterio es que estos modelos booleanos son dirigidos por procesos puntuales de Poisson, cuyo parámetro es λ .
- II. Los parámetros l (longitud de fractura), μ (dirección preferencial) y κ (concentración alrededor de el ángulo preferencial) se explorarán en términos de distintos órdenes de magnitud.
- III. El parámetro μ , al ser un ángulo, se mide respecto al eje horizontal en sentido contrario a las manecillas del reloj. Para el modelo básico, tomaremos los valores $\mu \in \{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}\}$ para abarcar casos donde μ es pequeña pero distinta de cero, grande pero distinta de $\frac{\pi}{2}$ y un caso intermedio. Los valores de μ_1 y μ_2 serán, respectivamente, $\frac{\pi}{12}$ y $-\frac{\pi}{12}$ (representando el caso conjugado, con simetría respecto al eje horizontal), y $\frac{\pi}{12}$ y $\frac{7\pi}{12}$ (representando el caso perpendicular sin simetría respecto al eje horizontal).

5.3. Resultados para el modelo básico

5.3.1. Elección de parámetros de simulación

Iniciamos nuestra exploración para el modelo básico variando $\kappa \in \{0.1, 1, 10\}$ y $l \in \{0.001, 0.01, 0.1\}$. Las probabilidades de percolación se estimaron empleando 50 simulaciones para cada combinación de parámetros. La mayoría de las simulaciones no percoló. A continuación se presentan las probabilidades aproximadas de percolación.

	$\lambda = 10$	$\lambda = 100$	$\lambda = 1000$
$l = 0.1$	0	0	0.8
	0	0	0.3
	0	0	0
$l = 0.01$	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0
$l = 0.001$	0	0	0
	0	0	0
	0	0	0

Cuadro 5.1: Estimación preliminar de las probabilidades de percolación para el modelo básico.

En particular, para el caso $l = 0.001$ se llevaron a cabo diez simulaciones con $\lambda = 10000$, sin obtener probabilidades positivas de percolación. Por esta razón se decidió llevar a cabo el resto de las simulaciones con $l = 0.1$ en todos los modelos salvo el modelo microfracturado, donde se eligieron $l_1 = 0.1$ y $l_2 = 0.01$.

Los experimentos preliminares se llevaron a cabo barriendo sobre $\lambda \in (500, 1500)$, dando intervalos de de cien en cien. Se llevaron a cabo diez simulaciones para cada caso y se calculó la proporción de simulaciones que percolaban. De acuerdo a los resultados obtenidos en este análisis previo, se decidió simular cien veces para cada $\lambda \in (100, 1600)$, dando intervalos de de cincuenta en cincuenta, para asegurarnos de hallar los umbrales de percolación para cada conjunto de parámetros.

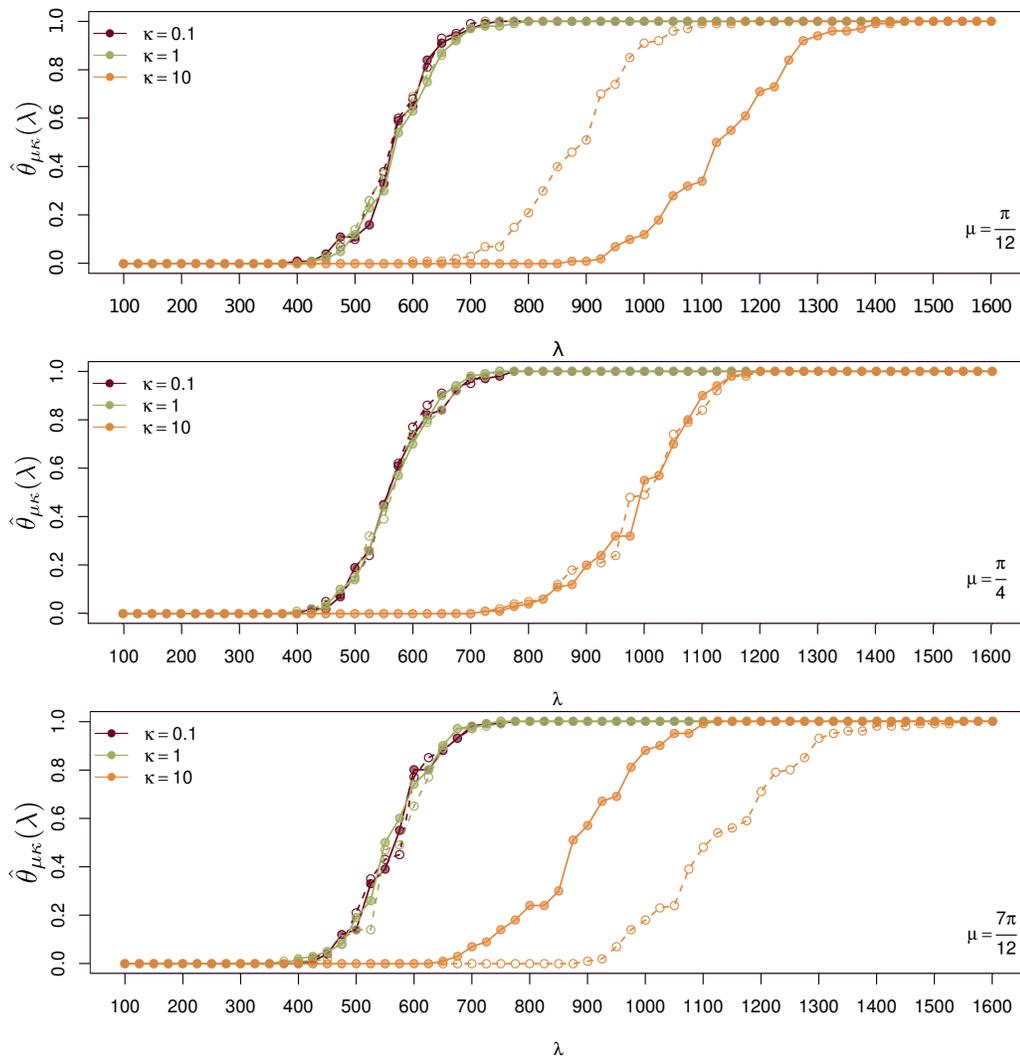
5.3.2. Funciones de percolación en términos de κ 

Figura 5.1: Funciones estimadas de percolación horizontal (línea punteada) y vertical (línea sólida) para el modelo básico, comparadas en términos de κ .

Observaciones

Las estimaciones se agrupan en términos de μ para compararlas respecto a κ . En el cuadro superior se muestran las gráficas de λ contra $\hat{\theta}_{\mu,\kappa}(\lambda)$, la función estimada de percolación, para los tres valores de κ estudiados y μ fija igual a $\frac{\pi}{12}$. En el segundo cuadro se muestran la gráficas para los tres valores de κ y μ fija igual a $\frac{\pi}{4}$. En el último cuadro se presentan las mismas gráficas para μ fija igual a $\frac{7\pi}{12}$.

La función de percolación estimada se comporta del modo esperado, creciente respecto a λ . Aparenta ser una aproximación continua de una función de percolación discontinua, donde se tiene un valor crítico. Se observa en todos los casos que en cierto valor de λ la probabilidad de percolación se vuelve positiva y crece rápidamente hasta que el modelo se halla en estado supercrítico, con probabilidad de percolación igual a uno. Este comportamiento cualitativo se da en todos los casos.

Es notorio que el comportamiento para $\kappa = 1$ y $\kappa = 0.1$ es casi idéntico. Por otra parte, para $\kappa = 10$, el modelo tarda más en alcanzar el estado supercrítico, en el sentido de que se necesitan valores de λ más grandes y en intervalo de λ dentro del cual se da la transición de probabilidad cero a probabilidad uno de percolación aparenta ser más largo. Adicionalmente, en el caso $\kappa = 10$ el comportamiento se vuelve asimétrico en términos de el ángulo de percolación (vertical u horizontal). En este sentido, se concluye κ es un parámetro relevante para la percolación del modelo.

Considerando estos resultados, nuestros umbrales de percolación para el modelo básico serán intervalos. En la Sección 5.3.5 se presentan estos intervalos.

En particular, en el caso $\kappa = 10$, $\mu = \frac{\pi}{12}$ (el ángulo preferencial más horizontal) se favorece la percolación horizontal, mientras que en el caso $\kappa = 10$, $\mu = \frac{7\pi}{12}$ (el ángulo preferencial más vertical) sucede exactamente lo contrario. Este comportamiento es consistente con los ángulos preferenciales del modelo, y podemos decir intuitivamente que el ángulo preferencial de la red de fracturas (μ) determina también una dirección preferencial en el sentido de la percolación. Sin embargo, se necesita que dicha dirección preferencial de las fracturas sea dominante, es decir, este comportamiento se da para valores altos de concentración (κ) alrededor de ésta. Para $\mu = \frac{\pi}{4}$ (dirección preferencial simétrica) todas las curvas estimadas se superponen, independientemente del valor de κ . Esto puede ser una indicación de que μ es un parámetro de simetría, independientemente del valor de κ .

A continuación se presentan nuevamente estas gráficas, agrupadas respecto κ para estudiar la relevancia del parámetro μ para la percolación en el modelo.

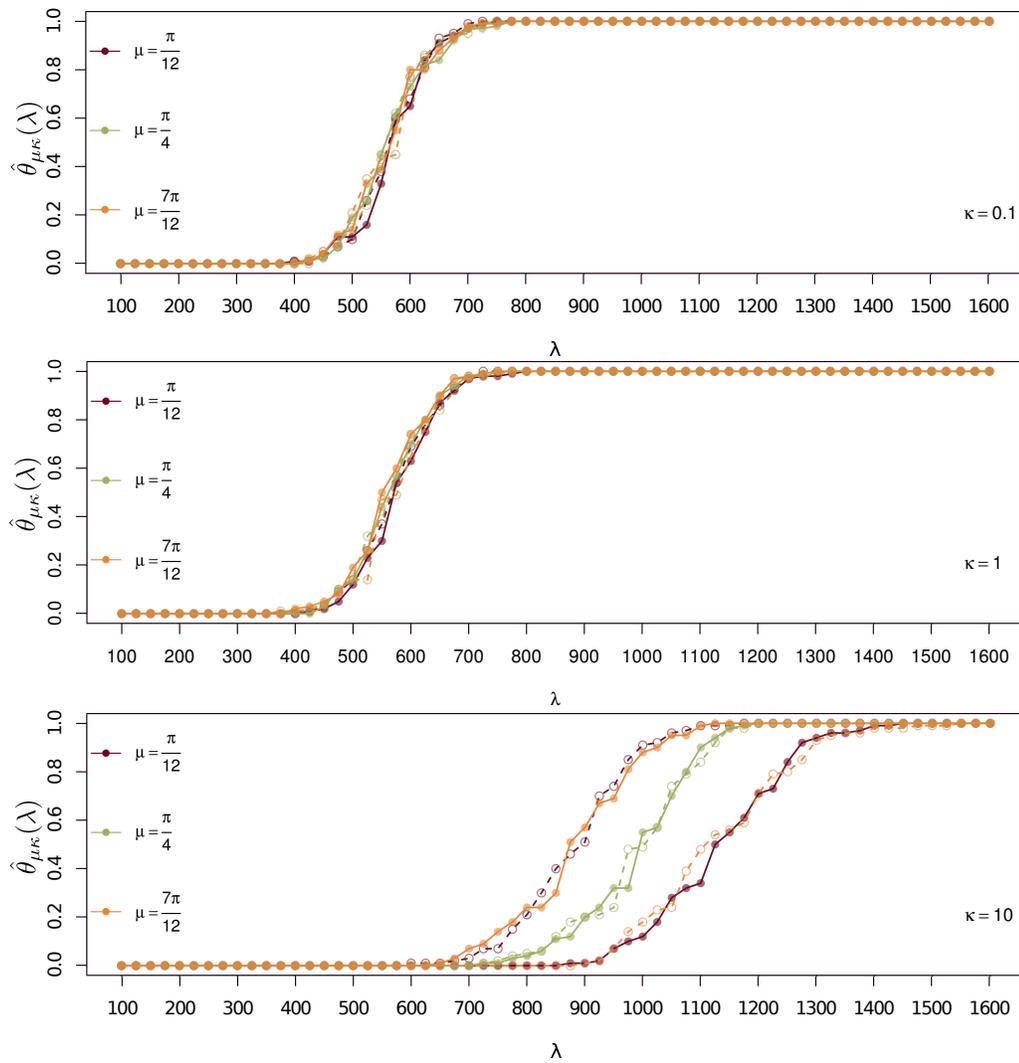
5.3.3. Funciones de percolación en términos de μ 

Figura 5.2: Funciones estimadas de percolación horizontal (línea punteada) y vertical (línea sólida) para el modelo básico, comparadas en términos de μ .

Observaciones

Para obtener la figura 5.3.3, se barrió el intervalo de $\lambda \in (100, 1600)$, tomando intervalos de veinticinco en veinticinco. Para cada una de estas λ se llevaron a cabo cien simulaciones y se registró la proporción que percolaba tanto horizontal como verticalmente. Este valor se usó para estimar el valor de $\theta_{\mu, \kappa}$ en la λ correspondiente. Las estimaciones se agrupan en términos de μ para compararlas respecto a κ . En el cuadro superior se muestran las gráficas de λ contra $\hat{\theta}_{\mu, \kappa}(\lambda)$, la función estimada de percolación, para los tres valores de μ estudiados y κ fija igual a 0.1. En el segundo cuadro se muestran las gráficas para los tres valores de μ y κ fija igual a 1. En el último cuadro se presentan las mismas gráficas para κ fija igual a 10.

Salta a la vista que para $\kappa = 0.1$ y $\kappa = 0.1$ las curvas estimadas para los tres casos de μ se superponen por completo. Este fenómeno nos indica que en estos casos el comportamiento cualitativo de las funciones de percolación es el mismo, independientemente del valor de μ . No resulta sorprendente considerando el hecho discutido previamente de que la variable aleatoria Von Mises que controla el ángulo de cada fractura tiende a una variable aleatoria uniforme conforme κ decrece. Se tiene entonces que para los órdenes de 0.1 y 1 (en κ) los ángulos de las fracturas varían de manera muy uniforme en todo el rango de direcciones, y de este modo el parámetro de dirección preferencial μ se vuelve irrelevante en el sentido de que *no hay* una dirección preferencial.

En el caso $\kappa = 10$ los ángulos se concentran mucho más alrededor de la μ correspondiente, lo cual le da más relevancia a μ en términos del comportamiento cuantitativo de la percolación en el modelo básico. Las funciones estimadas de percolación empiezan a diferenciarse entre sí y se observa un comportamiento simétrico en términos de μ en el siguiente sentido: las curvas se agrupan en tres conjuntos:

- La función de percolación vertical para $\mu = \frac{7\pi}{12}$ (●) y la función de percolación horizontal para $\mu = \frac{\pi}{12}$ (●).
- Las funciones de percolación vertical y horizontal para $\mu = \frac{\pi}{4}$ (●).
- La función de percolación horizontal para $\mu = \frac{7\pi}{12}$ y la función de percolación vertical para $\mu = \frac{\pi}{12}$.

En consecuencia, podemos concluir que para el caso $\mu = \frac{\pi}{4}$, que es simétrico respecto a las direcciones de percolación, las funciones de percolación horizontal y vertical se comportan igual. Por otra parte, es equivalente cuantificar la percolación horizontal para un ángulo μ y la percolación vertical para el ángulo perpendicular $\mu + \frac{\pi}{2}$, como se observa para los casos $\mu = \frac{\pi}{12}$ y $\mu = \frac{7\pi}{12}$. Este resultado tiene sentido considerando que las direcciones de percolación (horizontal o vertical) son perpendiculares entre sí.

En general, confirmamos que el valor de μ es irrelevante salvo para valores grandes de κ . En dicho caso, observamos comportamientos simétricos respecto a las direcciones de percolación.

5.3.4. Criterios alternativos de conexidad

- Puntos de articulación y tamaños relativos para $\mu = \frac{\pi}{12}$

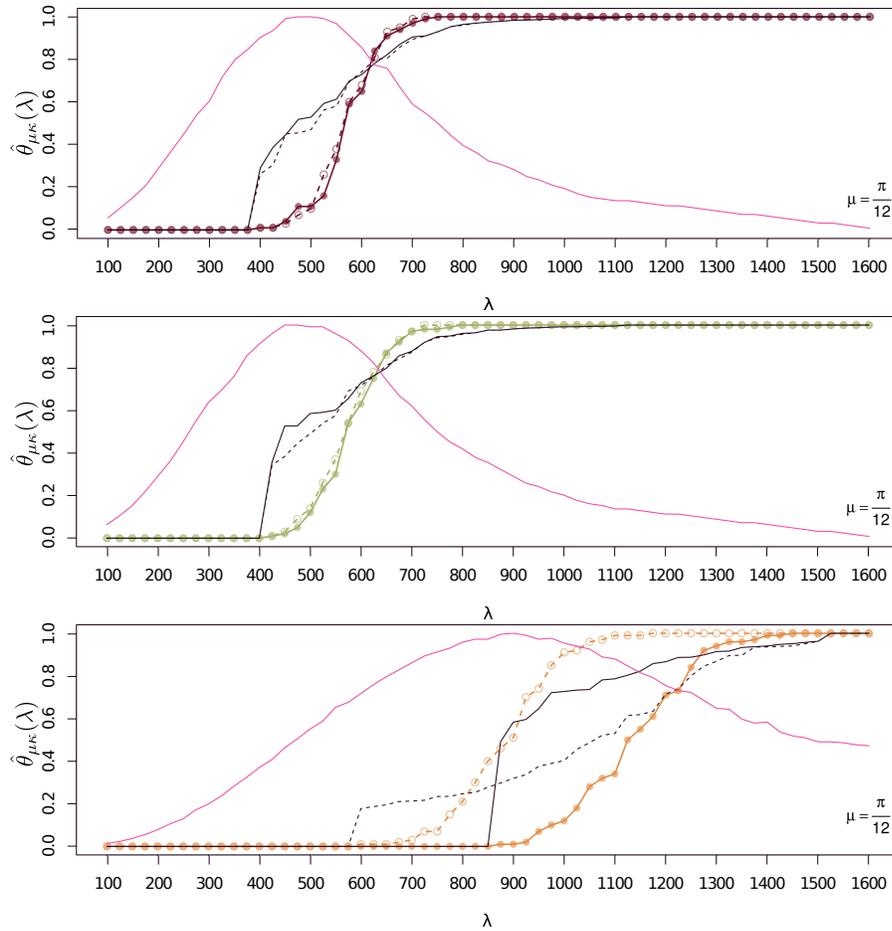


Figura 5.3: Funciones estimadas de percolación para $\mu = \frac{\pi}{12}$. Se muestran las curvas de número de puntos de percolación (●) y tamaño relativo (○) del cluster que percola horizontalmente (línea punteada) o verticalmente (línea sólida). Se presentan, de arriba hacia abajo, los casos $\kappa = 0.1$ (●), $\kappa = 1$ (●) y $\kappa = 10$ (●).

- Puntos de articulación y tamaños relativos para $\mu = \frac{\pi}{4}$

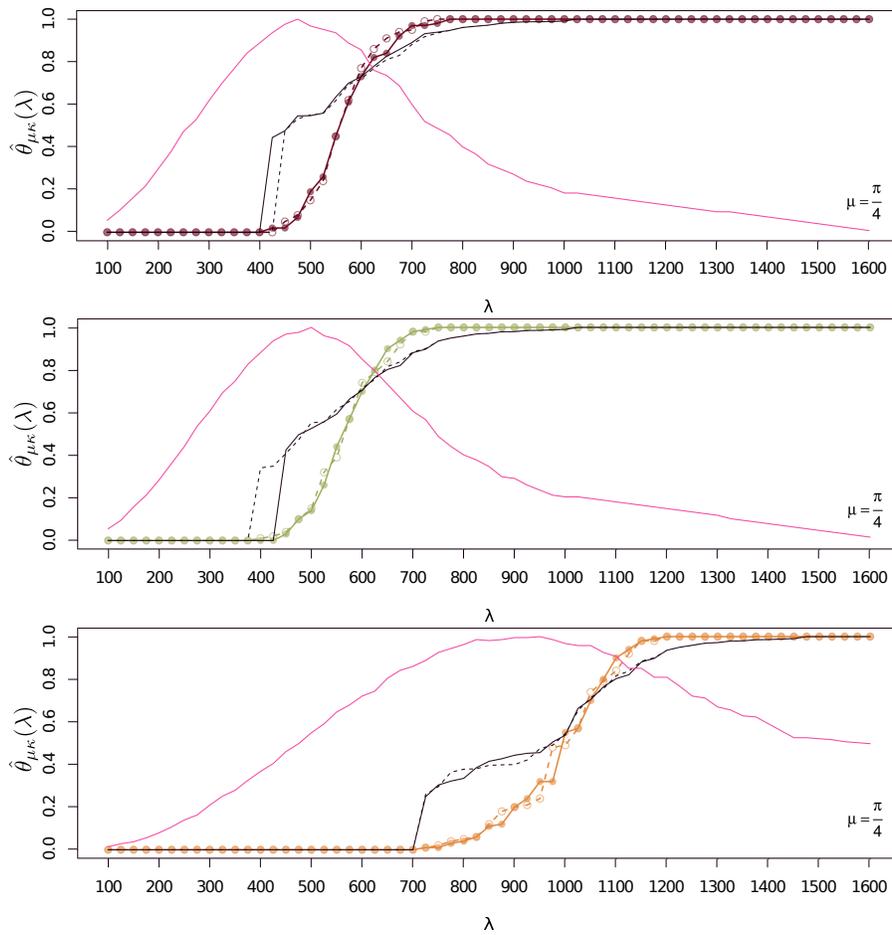


Figura 5.4: Funciones estimadas de percolación para $\mu = \frac{\pi}{12}$. Se superponen las curvas de número de puntos de percolación (●) y tamaño relativo (●) del cluster que percola horizontalmente (línea punteada) o verticalmente (línea sólida). Se presentan, de arriba hacia abajo, los casos $\kappa = 0.1$ (●), $\kappa = 1$ (●) y $\kappa = 10$ (●).

- Puntos de articulación y tamaños relativos para $\mu = \frac{7\pi}{12}$

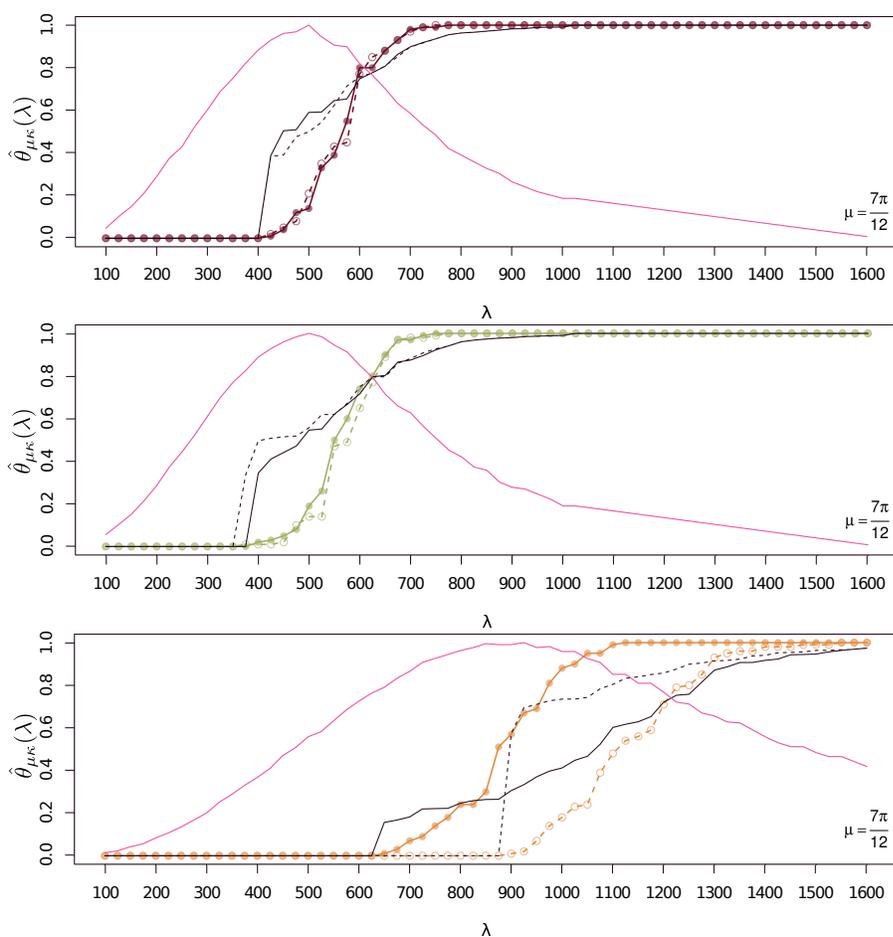


Figura 5.5: Funciones estimadas de percolación para $\mu = \frac{7\pi}{12}$. Se superponen las curvas de número de puntos de percolación (●) y tamaño relativo (●) del cluster que percola horizontalmente (línea punteada) o verticalmente (línea sólida). Se presentan, de arriba hacia abajo, los casos $\kappa = 0.1$ (●), $\kappa = 1$ (●) y $\kappa = 10$ (●).

Observaciones

Como se discutió en los objetivos de este capítulo, se intenta determinar si existen otros criterios para detectar el umbral de percolación. En particular, utilizamos el número de puntos de articulación y el tamaño relativo del cluster que percola en cada caso. Adicionalmente, se propuso la conectividad por vértices (ver Apéndice B). Para estimar el número de puntos de articulación, la conectividad por vértices y el tamaño relativo del cluster que percola se utilizó el paquete *igraph* de *R* para calcular estos valores en cada simulación. Se llevaron a cabo cien simulaciones para cada λ y en las gráficas se muestran los valores promedio de cada criterio.

La conectividad por vértices tuvo valor constante de cero en todos los casos, por lo cual concluimos inmediatamente que no es un criterio útil para detectar la percolación del modelo, al menos dentro de los rangos de parámetros estudiados. Por esta razón, no se le representó gráficamente. Sin embargo, esto no significa que este resultado no nos haya sido útil. Considerando que este criterio es una medida de la robustez de una gráfica, podemos concluir que ninguna de las redes simuladas están fuertemente conectadas.

Cabe mencionar que el número de puntos de articulación se presenta normalizado respecto a al máximo en cada caso, para poderlo comparar cuantitativamente con la función de percolación correspondiente. Notamos que este número presenta una especie de transición de fase en todos los casos, al alcanzar un máximo y luego disminuir consistentemente. Interpretamos este comportamiento del siguiente modo: cuando la red empieza a formarse, con valores de λ al inicio de nuestro intervalo de estudio, el número de puntos de articulación empieza a crecer. Este hecho contradice inicialmente nuestra intuición, pues uno esperaría que conforme se añaden fracturas a la red el número de puntos de articulación, que representan puntos débiles en nuestra red, disminuyera. Sin embargo, hay que considerar que a estas alturas hay muchas fracturas aisladas que estrictamente hablando cuentan como puntos de articulación. Conforme se añaden fracturas a la red, el número de fracturas aisladas aumenta (y con él, el número de puntos de articulación) hasta que llega un punto donde la ventana de estudio se halla cubierta de manera uniforme, y las fracturas que se van agregando conforme λ crece empiezan a intersectarse con las que ya están presentes, formando clusters pequeños que van creciendo poco a poco. En este momento, el número de puntos de articulación empieza a disminuir consistentemente, y se espera que a la larga valga cero, aunque dentro de los intervalos estudiados esto no sucedió (hecho posiblemente relacionado con el comportamiento de la conectividad por vértices). Es decir que el número de puntos de articulación alcanza un máximo en el momento en que la red de fracturas empieza a consolidarse.

Respecto al comportamiento cuantitativo del número de puntos de articulación, notamos dos hechos interesantes: el primero es que este criterio parece alcanzar su máximo cuando la probabilidad de percolación se vuelve positiva (es decir, al inicio del umbral de percolación). Por tal motivo, al momento de estimar los umbrales de percolación, determinaremos el valor (normalizado) del número de puntos de articulación al inicio de cada intervalo y compararemos estos valores para determinar si existe alguna consistencia en su comportamiento. Esperamos que esos valores se hallen cercanos a 1 (correspondiendo al máximo de los números de puntos de articulación). Adicionalmente, notamos que para $\kappa = 10$ la zona de transición descrita es más amplia que en los otros dos casos, indicando que esta transición se da más lentamente.

Finalmente, respecto al tamaño relativo de los clusters de percolación horizontal y vertical, lo primero que notamos es que conforme el valor de λ crece, las curvas de tamaños relativos horizontal y vertical se superponen y la curva resultante tiende a uno, coincidiendo lentamente con las funciones de percolación. En casi todos los casos, el comportamiento del tamaño relativo es muy errático al inicio, disparándose en cuando la probabilidad de percolación se vuelve positiva. Este hecho sugiere que el tamaño relativo puede utilizarse también como indicador del inicio del umbral de percolación. Sin embargo, este valor inicial del tamaño relativo es inconsistente a lo largo de los resultados, de tal suerte que no se podría determinar un criterio cuantitativo, y se concluye simplemente que el tamaño relativo del cluster que percola se vuelve positivo cuando el modelo empieza a percolar, hecho completamente consistente pero no útil para nuestros fines. Por esta razón, se excluirá el tamaño relativo de los clusters de percolación en el resto del análisis y los experimentos para los modelos restantes.

Por otra parte, la superposición del tamaño horizontal y vertical se superponen dependiendo, aparentemente, de los valores de μ y κ . Como es de esperarse, se observa un mayor desfase para $\kappa = 10$, salvo en el caso en que $\mu = \frac{\pi}{4}$ donde las curvas se superponen en los tres casos de κ . El comportamiento final de las curvas nos indica, naturalmente, que conforme el valor de λ aumenta el cluster que percola horizontalmente y verticalmente es el mismo y finalmente consume toda la red, en consistencia con el estado supercrítico del modelo.

5.3.5. Umbrales estimados de percolación

Dada la forma de las funciones estimadas de percolación, la transición de fase no se da instantáneamente y en lugar de un valor crítico se tiene un umbral de percolación que consta de un *intervalo* crítico y necesitamos un criterio para definirlo en términos de λ . Intuitivamente, nos interesa saber el valor de λ a partir del cual la probabilidad de percolación es positiva, así como el valor a partir del cual esta probabilidad vale 1. Proponemos el siguiente criterio simétrico:

Sea $J_{\mu,\kappa}$ el umbral de percolación para el modelo con parámetros μ y κ . Diremos que $\lambda \in J_{\mu,\kappa}$ si $0.05 < \theta_{\mu,\kappa}(\lambda) < 0.95$.

De este modo, se calculó la preimagen del intervalo $(0.05, 0.95)$ bajo las funciones estimadas de percolación, lo cual bajo su aparente continuidad resultó en intervalos sobre λ . Adicionalmente, de acuerdo a las observaciones desarrolladas en las secciones anteriores, una vez estimados los extremos iniciales de los umbrales, se proyectaron estos valores sobre la curva normalizada de número de puntos de articulación, para estimar el valor relativo de este número en el momento en que los modelos empiezan a percolar, y buscar algún patrón en su comportamiento.

En las gráficas posteriores, el intervalo de probabilidad $(0.05, 0.95)$ se representa con líneas punteadas en azul, y los umbrales de percolación se somborean bajo la función estimada. El valor correspondiente de número de puntos de articulación al extremo inicial de los umbrales se muestra en líneas rojas punteadas.

- Caso $\mu = \frac{\pi}{12}$

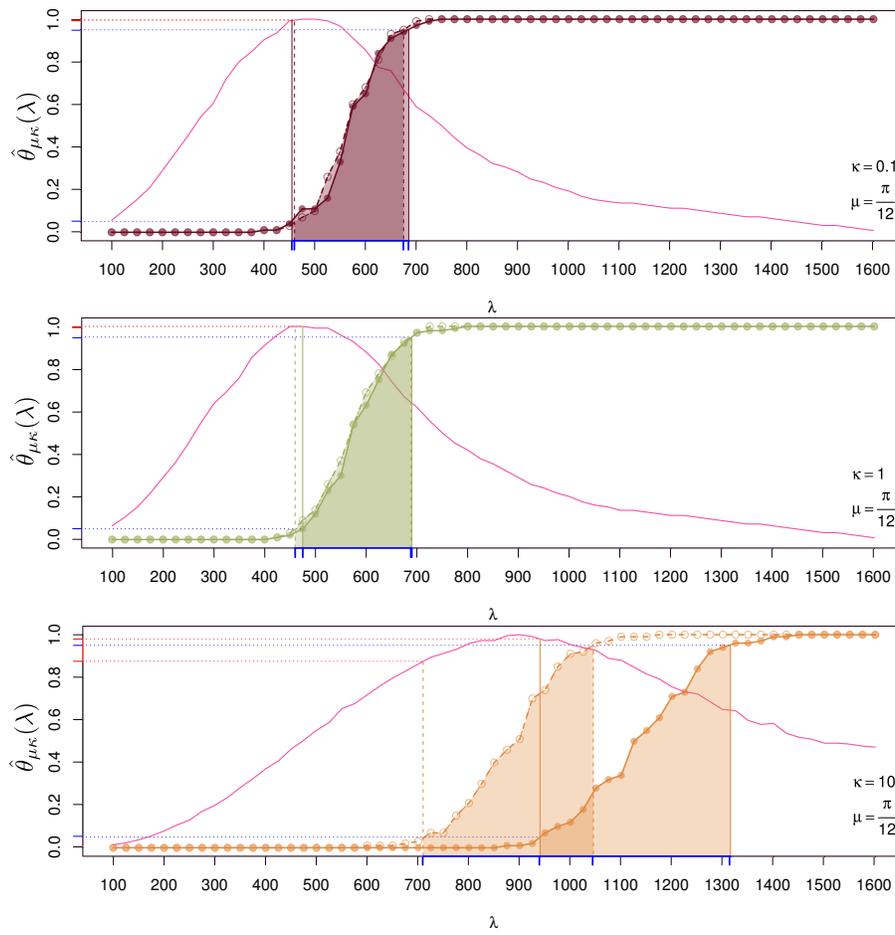


Figura 5.6: Estimación de los umbrales de percolación para $\mu = \frac{\pi}{12}$, sombreados en el color correspondiente. Se presentan, de arriba hacia abajo, los casos $\kappa = 0.1$, $\kappa = 1$ y $\kappa = 10$.

- Caso $\mu = \frac{\pi}{4}$

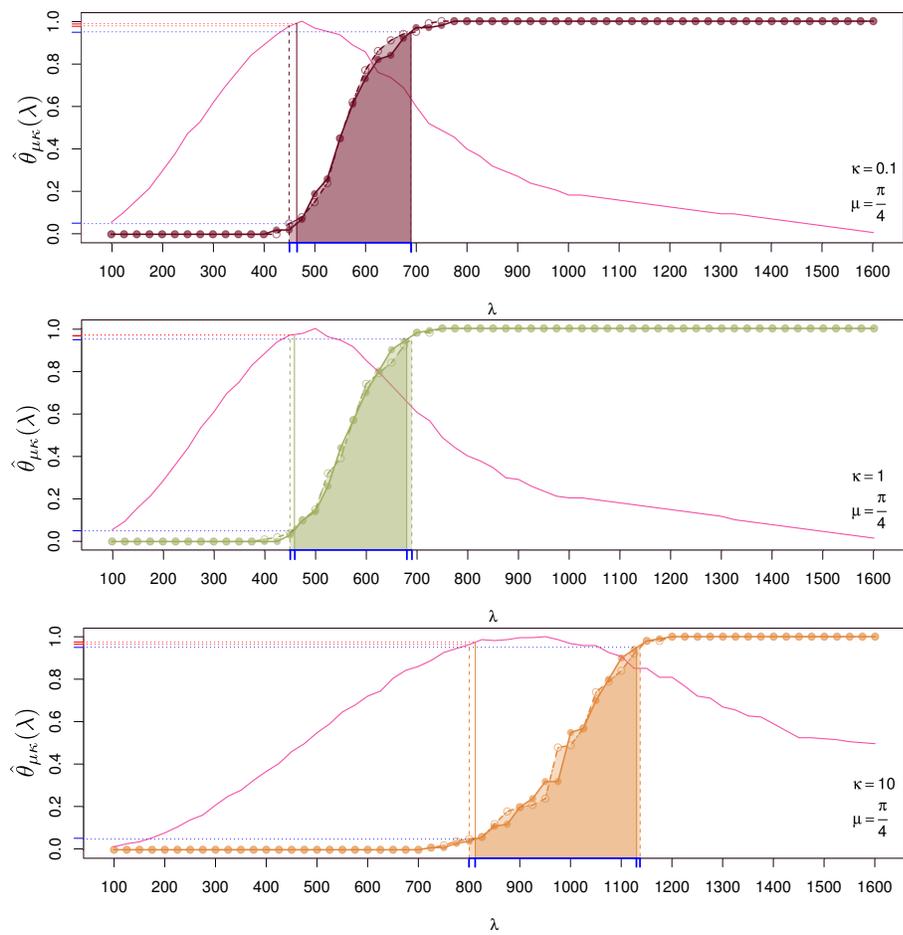


Figura 5.7: Estimación de los umbrales de percolación para $\mu = \frac{\pi}{4}$, sombreados en el color correspondiente. Se presentan, de arriba hacia abajo, los casos $\kappa = 0.1$, $\kappa = 1$ y $\kappa = 10$.

- Caso $\mu = \frac{7\pi}{12}$

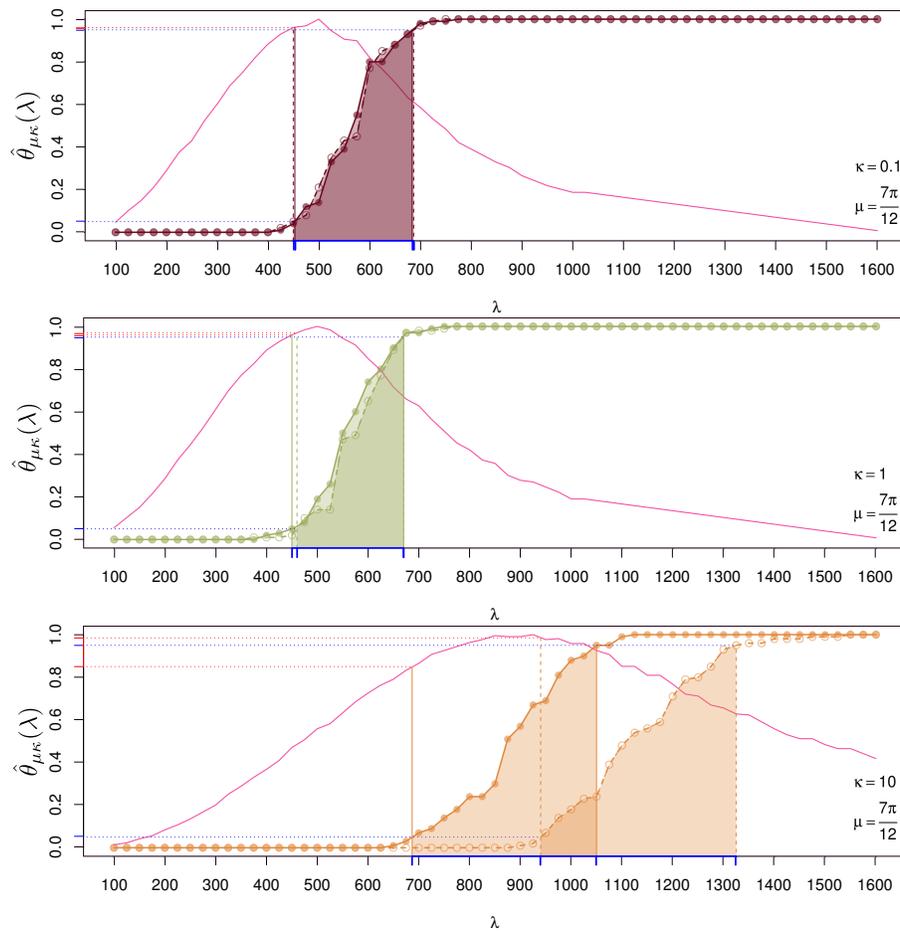


Figura 5.8: Estimación de los umbrales de percolación para $\mu = \frac{7\pi}{12}$, sombreados en el color correspondiente. Se presentan, de arriba hacia abajo, los casos $\kappa = 0.1$, $\kappa = 1$ y $\kappa = 10$.

Observaciones

Notamos en primer lugar que los intervalos se superponen casi por completo para $kappa = 0.1$ y $\kappa = 1$, independientemente del valor de μ . Asimismo, en estos casos, al determinar el valor del número de puntos de articulación correspondiente al inicio de los intervalos, se obtienen valores entre 0.96 y 0.995, variación atribuible a la aproximación numérica de nuestro modelo. Podemos concluir que, en efecto, el máximo del número de puntos de articulación se alcanza al iniciar el umbral de percolación.

Este hecho resulta de sumo interés pues considerando que los puntos de articulación son nodos débiles de la gráfica (en el sentido de que la conectividad depende fuertemente de su presencia, pues al quitarlos el número de componentes conexas aumenta y la red se “rompe”) y en consecuencia, el número de puntos de articulación es una medida de debilidad de la conectividad de la gráfica, tenemos que la red empieza a percolar cuando alcanza su estado de conectividad más frágil, después de lo cual la conectividad se fortalece conforme se atraviesa el umbral. Sin embargo, el número de puntos de articulación no nos da información útil respecto al final del umbral de percolación, cuando la red alcanza un estado supercrítico, pues dicho número continúa disminuyendo suavemente, sin presentar una fase de transición indicativa.

Por otra parte, para el caso $\kappa = 10$, el número de puntos de articulación alcanza su máximo más lentamente, hecho reflejado en que obtenemos intervalos (en rojo) más amplios para los valores de este número correspondientes al inicio de los umbrales de percolación, variando en general de 0.85 a 0.985.

Dicho comportamiento se debe, adicionalmente, al hecho de que los intervalos de transición para el caso $\kappa = 10$ se hallan desfasados. Este comportamiento era de esperarse dado que para una concentración alta alrededor de el ángulo preferencial de las redes de fracturas, las funciones de percolación se desfasan dando preferencia, según el valor de μ , a la percolación horizontal o vertical. Esto no sucede, naturalmente, para el valor $\mu = \frac{\pi}{4}$ en cuyo caso las funciones de percolación se vuelven a superponer independientemente del valor de κ .

A continuación se presentan los umbrales estimados, así como los números relativos de puntos de articulación correspondientes al extremo inicial de los umbrales. Posteriormente, se presentan comparaciones gráficas de estos umbrales, para poderlos comparar en términos de su localización y longitud.

		$\mu = \frac{\pi}{12}$	$\mu = \frac{\pi}{4}$	$\mu = \frac{7\pi}{12}$
$\kappa = 0.1$	H	(455,685)	(465,690)	(453,684)
		0.995	0.989	0.96
	V	(460,675)	(450,690)	(450,687)
		0.998	0.978	0.96
$\kappa = 1$	H	(475,690)	(459,680)	(450,670)
		1	0.97	0.96
	V	(460,690)	(450,690)	(460,670)
		1	0.968	0.97
$\kappa = 10$	H	(940,1315)	(812,1130)	(687,1050)
		0.98	0.975	0.85
	V	(710,1045)	(800,1137)	(940,1325)
		0.875	0.965	0.985

Cuadro 5.2: Umbrales estimados de percolación para el modelo básico. El número de puntos de articulación al momento de alcanzar el umbral se muestra bajo cada intervalo, normalizado respecto al máximo correspondiente.

Comparación en términos de μ y κ

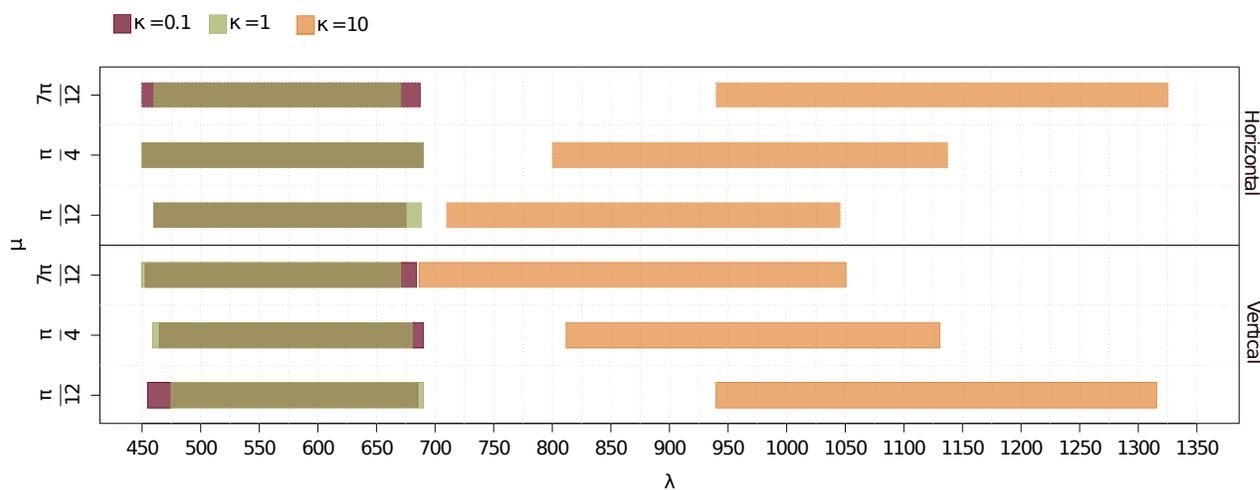


Figura 5.9: Intervalos del umbral de percolación horizontal (arriba) y vertical (abajo), en términos de λ contra μ para poder comparar su comportamiento respecto a κ .

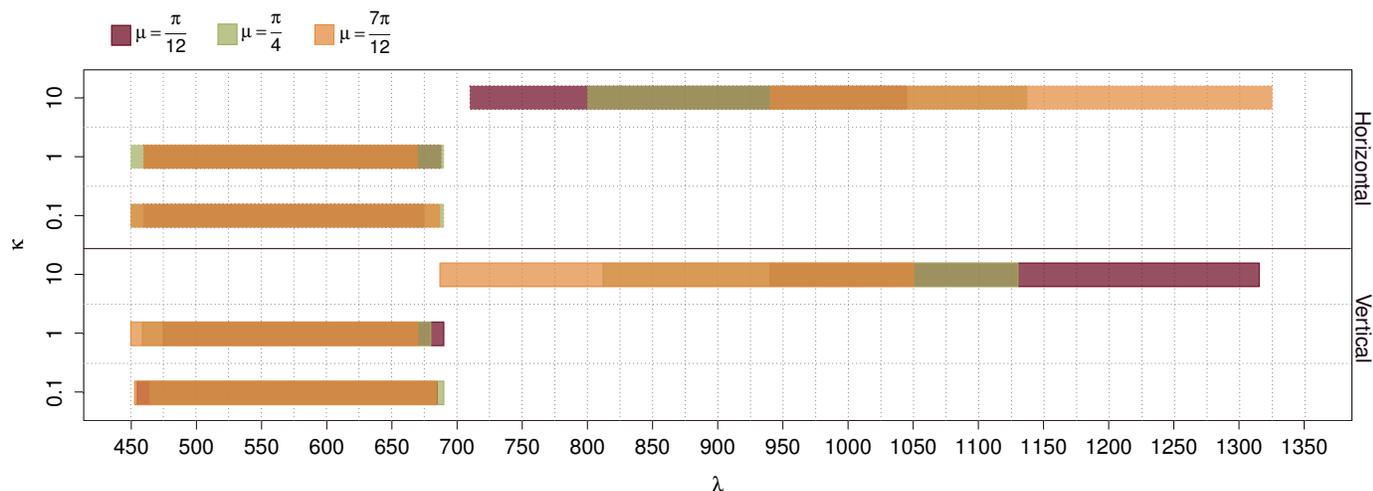


Figura 5.10: Intervalos del umbral de percolación horizontal (arriba) y vertical (abajo), en términos de λ contra κ para poder comparar su comportamiento respecto a μ .

En la primera tabla se muestran los intervalos que definen los umbrales de percolación en términos de λ , agrupados según el valor correspondiente de μ . De acuerdo a las observaciones anteriores, los intervalos correspondientes a $\kappa = 0.1$ y $\kappa = 1$ son casi idénticos. No se extraen conclusiones de las pequeñas variaciones que se observan, ya que pueden deberse a desviaciones en nuestra aproximación numérica.

Se observa claramente que la longitud de intervalo para $\kappa = 10$ es mucho mayor que en los otros casos, indicando que la transición de fase se vuelve más lenta (en términos de λ) conforme los ángulos preferenciales se vuelven más marcadas (es decir, cuando se tiene un parámetro de concentración alto alrededor de dichas direcciones).

De manera consistente con los resultados anteriores, se observa que los ángulos preferenciales favorecen el ángulo de percolación correspondiente. Es decir, entre más horizontal (vertical) sea el ángulo preferencial, más pronto se dará la percolación horizontal (vertical) en términos del número promedio de fracturas (λ). Este comportamiento se da, por supuesto, en el contexto en que los ángulos preferenciales se vuelven relevantes, es decir, cuando se tienen valores altos de κ .

Adicionalmente, observamos que la longitud de los intervalos depende fuertemente del valor de κ , hecho confirmado en la segunda tabla donde se muestran los mismos intervalos organizados en términos de κ . Podemos ver que para el mismo valor de κ la longitud del intervalo se mantiene. Entonces, qué tan fácil o difícilmente percole el intervalo depende principalmente del valor de concentración κ .

Al observar la segunda tabla confirmamos el efecto que μ tiene sobre los umbrales de percolación cuando κ tiene valores altos. Es decir, para $\kappa = 10$ el intervalo de percolación horizontal para $\mu = \frac{\pi}{12}$ aparece primero que el intervalo para $\mu = \frac{\pi}{4}$, y el intervalo para $\mu = \frac{7\pi}{12}$ llega al final. Para el caso de percolación vertical sucede exactamente en orden inverso.

Cerramos esta sección mencionando que los resultados obtenidos para el modelo básico se integran en la selección de parámetros e interpretación de resultados del modelo de dos familias.

5.3.6. Ejemplos ilustrativos de cada caso

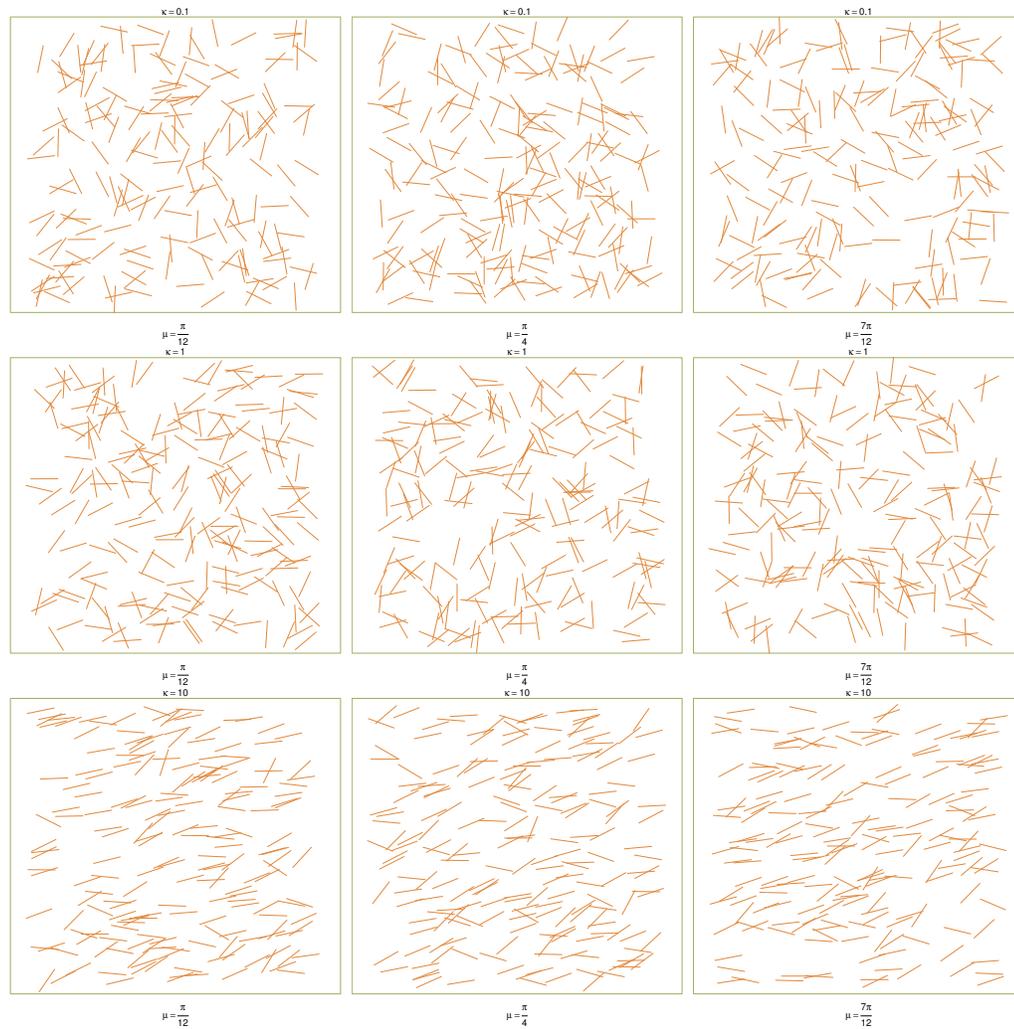


Figura 5.11: Ejemplos representativos de las redes de fracturas discretas correspondientes al modelo básico. EN todos los casos se tiene $\lambda = 200$.

5.4. Resultados para el modelo de dos familias

5.4.1. Elección de parámetros de simulación

Considerando los resultados obtenidos respecto a κ en el modelo básico, se decidió tomar $\kappa = 0.01$ en lugar de $\kappa = 0.1$ (un orden menor) para intentar obtener alguna variación en el comportamiento de los modelos. Seguiremos tomando los casos $\kappa = 1$ y $\kappa = 10$.

Adicionalmente, se intentó mantener λ_1 y λ_2 por debajo de los umbrales de percolación para cada caso. Al llevar a cabo experimentos preliminares, con diez simulaciones para $(\lambda_1, \lambda_2) \in (100, 500) \times (100, 500)$, dando intervalos de de cien en cien, se decidió tomar el intervalo $(100, 600)$ para ambos parámetros de intensidad, dando intervalos de de veinticinco en veinticinco, intentando dar la mayor resolución posible a las estimaciones dentro de un tiempo de cómputo razonable.

En cuanto a la longitud, de acuerdo al modelo conceptual de dos familias, la mantendremos constante en $l = 0.1$. Adicionalmente, la representación gráfica de las funciones estimadas de percolación y el número de puntos de articulación se llevará a cabo en una cuadrícula de 21×21 celdas, donde las coordenadas de cada celda en la cuadrícula se dan en términos de λ_1 y λ_2 . El color de la celda corresponderá al valor de la probabilidad de percolación (o número de puntos de articulación, según sea el caso), de acuerdo a una clave de color que se mostrará del lado derecho de cada gráfica.

Los parámetros de dirección preferencial serán $\mu_1 = \frac{\pi}{12}, \mu_2 = -\frac{\pi}{12}$) para el caso conjugado, y $\mu_1 = \frac{\pi}{12}, \mu_2 = \frac{7\pi}{12}$) para el caso perpendicular, de acuerdo a lo discutido en la Sección 5.2.

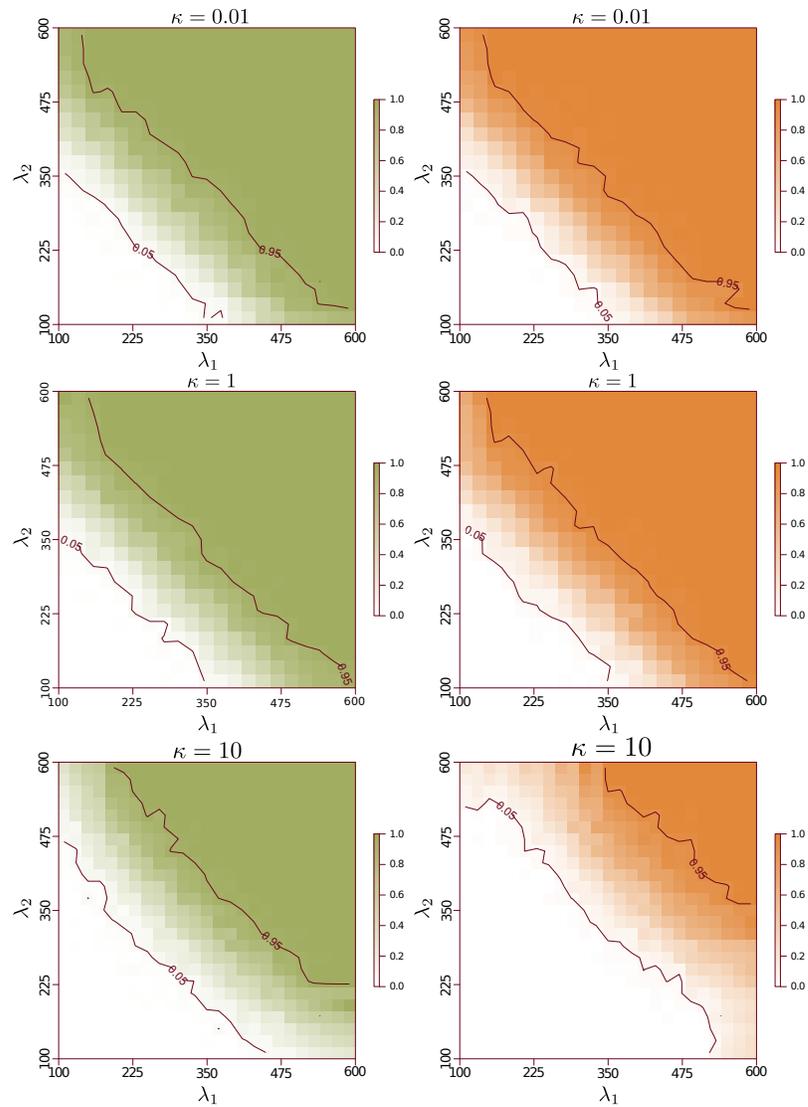
5.4.2. Funciones de percolación: caso conjugado ($\mu_1 = \frac{\pi}{12}, \mu_2 = -\frac{\pi}{12}$)

Figura 5.12: Estimación de las funciones de percolación del el caso conjugado del modelo de dos familias, para $\kappa \in 0.01, 1, 10$, con la percolación horizontal (\bullet) a la derecha y la vertical (\bullet) a la izquierda. Se muestran curvas (\bullet) al nivel 0.05 y 0.95 de probabilidad.

5.4.3. Funciones de percolación: caso perpendicular ($\mu_1 = \frac{\pi}{12}, \mu_2 = \frac{7\pi}{12}$)

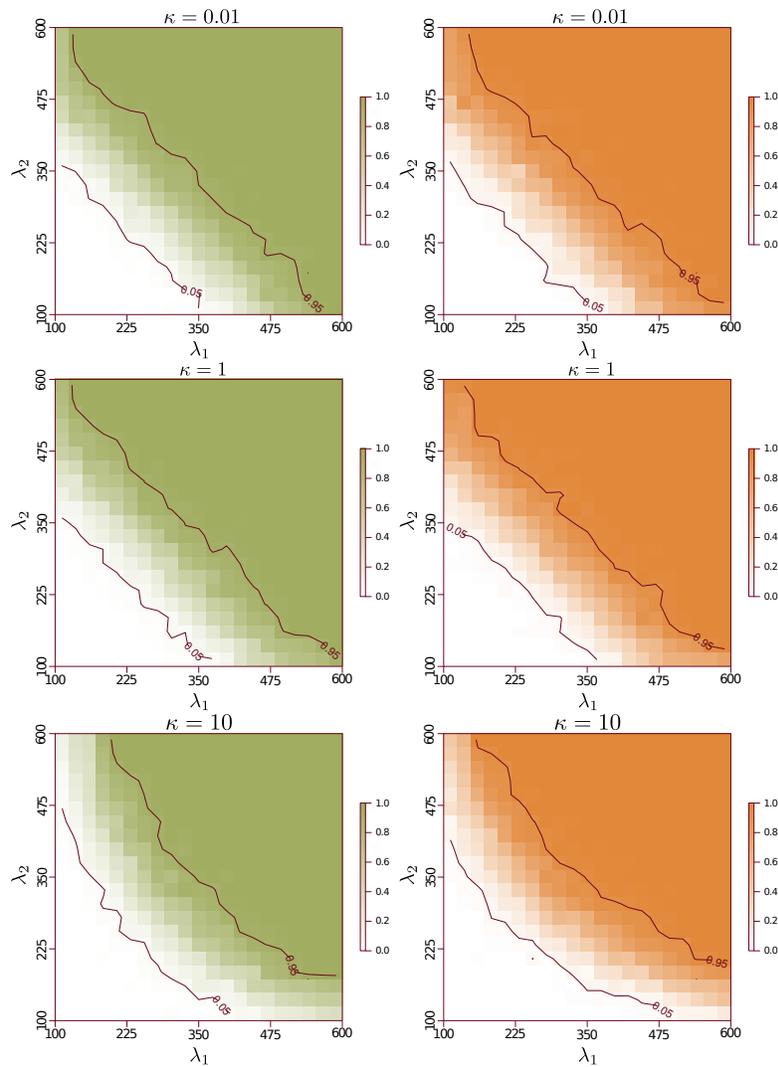


Figura 5.13: Estimación de las funciones de percolación del el caso perpendicular del modelo de dos familias, para $\kappa \in 0.01, 1, 10$, con la percolación horizontal (●) a la derecha y la vertical (●) a la izquierda. Se muestran curvas (●) al nivel 0.05 y 0.95 de probabilidad.

5.4.4. Puntos de articulación

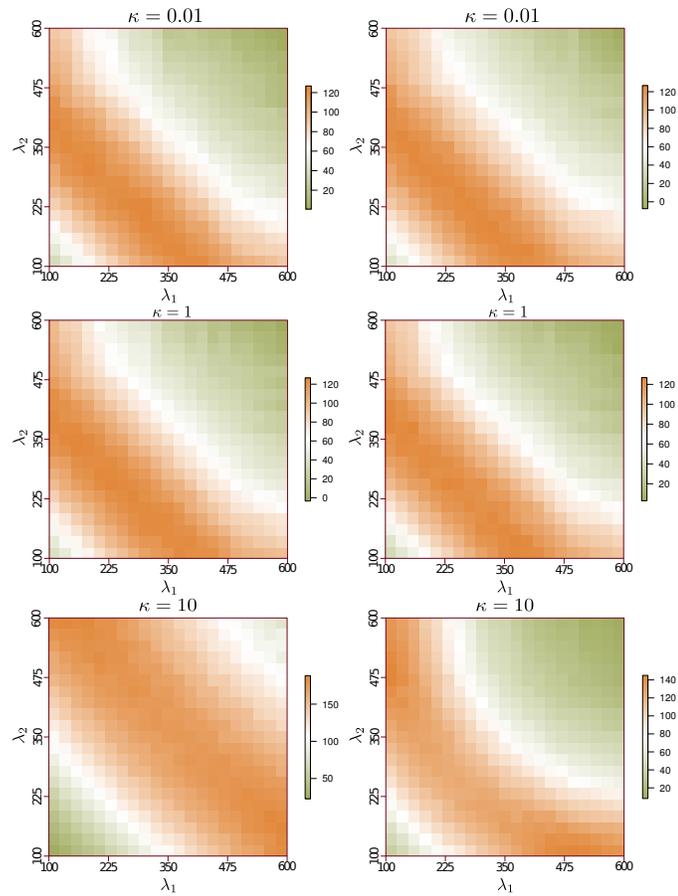


Figura 5.14: Número de puntos de articulación del el modelo de dos familias. Se presentan los resultados para $\kappa \in \{0.01, 1, 10\}$ en orden descendente. La columna izquierda es corresponde al caso conjugado y la derecha el caso perpendicular.

5.4.5. Umbrales estimados de percolación

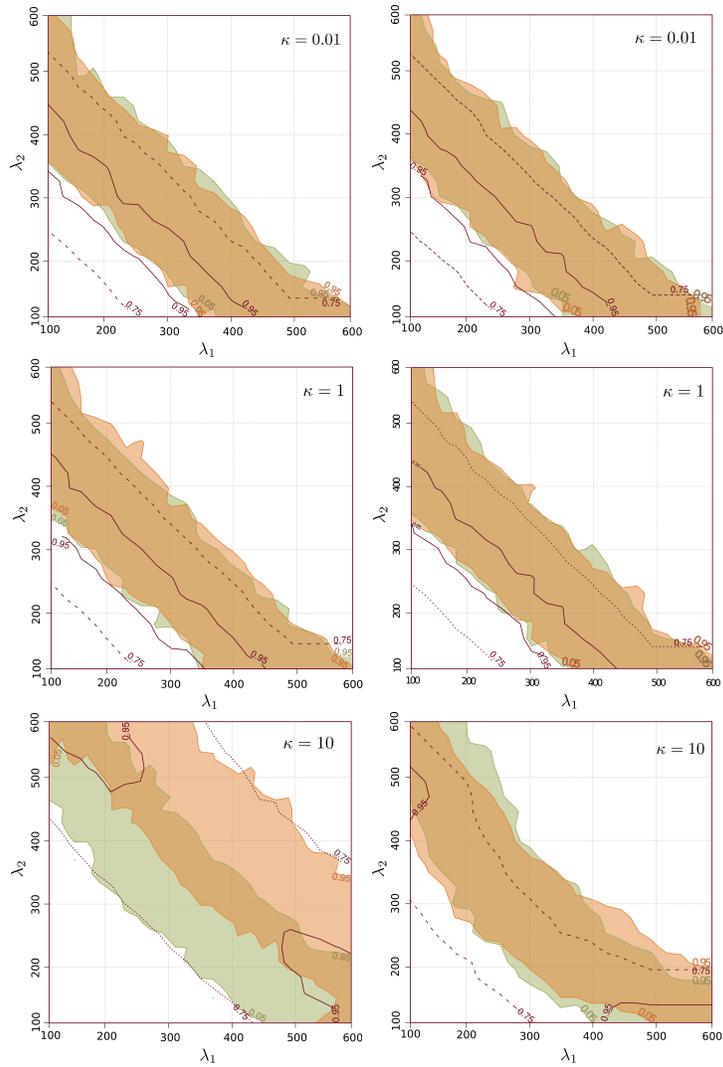


Figura 5.15: Estimación y comparación de los umbrales de percolación horizontal (●) y vertical (●) para el caso conjugado (derecha) y el perpendicular (izquierda) del modelo de dos familias. Se muestran curvas de nivel (●) al 75% (línea punteada) y 95% (línea sólida) del máximo de número de puntos de articulación.

5.4.6. Observaciones

Al evaluar las gráficas que estiman la función de percolación en el caso conjugado (Figura 5.4.2), notamos su simetría respecto a la diagonal principal de la ventana de estudio (de la esquina inferior izquierda (100,100) a la esquina superior derecha (600,600)), indicando que este caso del modelo es simétrico respecto a los parámetros de intensidad λ_1 y λ_2 . Podríamos invertir el papel que juegan en el modelo y obtendríamos estimaciones muy similares.

Observamos también que en los casos $\kappa = 0.1$ y $\kappa = 1$ las bandas son casi diagonales (en sentido contrario a la diagonal principal de la ventana de estudio) y sus fronteras son más o menos líneas rectas (considerando que tenemos entre menos una aproximación numérica). Este comportamiento indica que la percolación se da más fácilmente a lo largo de la recta $\lambda_1 = \lambda_2$. Fuera de esa diagonal la probabilidad de percolación disminuye de manera simétrica, indicando que depende más bien de la suma de los parámetros de intensidad, y no de alguno de estos parámetros individualmente. Este comportamiento tiene mucho sentido, ya que al igual que en el modelo básico, con concentraciones tan bajas la variable aleatoria Von Mises se comporta de manera muy similar a una variable aleatoria uniforme y de este modo los parámetros μ_1 y μ_2 del modelo se vuelven irrelevantes. En consecuencia, tenemos la superposición de dos modelos booleanos prácticamente idénticos, lo cual resulta en un nuevo modelo booleano de intensidad precisamente $\lambda_1 + \lambda_2$, dada la superposición de los procesos puntuales de Poisson que dirigen al modelo.

Las asimetrías se muestran nuevamente en el caso $\kappa = 10$, en el que las regiones de transición se curvan levemente. Esta curvatura es en sentido favorable para la percolación y todavía tenemos simetría respecto a la diagonal principal de la ventana de estudio (y en consecuencia, respecto a λ_1 y λ_2). Nuevamente se alcanzan los valores más altos de probabilidad de percolación a lo largo de la recta $\lambda_1 = \lambda_2$. Sin embargo, en este caso no podemos argumentar la superposición de dos modelos booleanos para obtener un solo modelo cuyo parámetro de intensidad sea $\lambda_1 + \lambda_2$, ya que el alto valor de κ provoca que los ángulos de las familias se concentren mucho más alrededor de su μ correspondiente, diferenciándose más claramente. En este caso se aprecia claramente que la zona de transición (nuestra aproximación al umbral de percolación) de la función de percolación vertical está desplazada hacia los valores más grandes de número promedio de fracturas (λ_1 y λ_2), además de que es más ancha. Este comportamiento es de esperarse ya que en el caso conjugado los valores de $\mu_1 = \frac{\pi}{12}$ y $\mu_2 = \frac{\pi}{12}$ favorecen la percolación horizontal. De este modo concluimos que tanto la localización como el ancho del umbral de percolación indican qué tan “fácilmente” percola el modelo.

En cuanto al caso perpendicular (Figura 5.4.3), el comportamiento es análogo al caso conjugado, en especial para los dos valores menores de κ , provocando que μ pierda relevancia. En particular, para $\kappa = 10$, los umbrales de percolación no presentan la discrepancia entre la percolación vertical y la horizontal que aparece en el caso conjugado, lo cual es de esperarse considerando que μ_1 y μ_2 son perpendiculares y en consecuencia no hay elementos que favorezcan la percolación en un sentido u otro.

Respecto a los puntos de articulación (Figura 5.4.4) nuevamente que el modelo es simétrico respecto a los parámetros de intensidad λ_1 y λ_2 . Los colores se eligieron de tal suerte que la zona de transición (en el sentido discutido en los resultados del modelo básico) quedan delineadas en blando. A diferencia del modelo básico, aquí se presentan los valores explícitos del número de puntos de articulación (sin normalizar). Observamos que este número alcanza un valor más alto para $\kappa = 10$.

Notamos que las zonas de transición dentro de las cuales se alcanza el máximo (en naranja) son cualitativamente muy similares a los umbrales de percolación correspondientes, incluso mostrando zonas curvas para $\kappa = 10$. En particular, la zona de transición para este valor de κ en el caso conjugado es más ancha que la correspondiente en el caso perpendicular, de manera consistente a lo observado en las estimaciones de las funciones de percolación.

Finalmente, en la Figura 5.4.5, se comparan los umbrales de transición superponiéndolos con el color correspondiente. Adicionalmente, se superponen curvas de nivel de los puntos de articulación, normalizados respecto a su máximo para poderlos comparar con las probabilidades de percolación. Confirmamos que, cualitativamente, las zonas de transición de los puntos de articulación presentan el mismo comportamiento que los umbrales de percolación. Por otra parte, cuantitativamente se encuentran desplazadas hacia los valores menores de λ_1 y λ_2 . Sin embargo, la frontera inferior del inicio de los umbrales de percolación (probabilidad de percolación al nivel 0.05) queda atrapada en la banda al nivel 0.95 de los puntos de articulación, de forma especialmente clara para los dos valores menores de κ , reproduciendo los resultados obtenidos para el modelo básico.

Adicionalmente, los umbrales de percolación coinciden casi por completo en los casos $\kappa = 0.01$ y $\kappa = 1$, indicando de nuevo que desde que κ se encuentra en el orden de 10^0 y menor, el comportamiento del modelo ya no cambia, independientemente de el ángulo preferencial de cada familia (μ). De nuevo, el impacto de dicha dirección preferencial se vuelve patente en el caso $\kappa = 10$, donde las regiones ya no se superponen y se nota una gran diferencia entre el comportamiento del modelo en el caso conjugado y en el caso perpendicular.

En el caso conjugado, los umbrales de percolación son paralelos pero están desplazados, favoreciendo notablemente la percolación horizontal (en verde). Ambas regiones quedan atrapadas por las curvas al nivel 0.75 de los puntos de articulación, y el nivel 0.95 indica parcialmente las zonas donde los umbrales horizontal y vertical se superponen. Por otra parte, en el caso perpendicular, los umbrales se encuentran menos desfasados pero ya no son paralelos. El umbral de percolación horizontal favorece¹ levemente a λ_1 (cuyo valor correspondiente de μ es $\frac{\pi}{12}$). De forma similar, el umbral vertical favorece a λ_2 . En este caso, la zona de transición del número de puntos de percolación sigue respetando la forma de los umbrales de percolación, pero presentando un desfase cuantitativo. El inicio de los umbrales de percolación sí queda atrapado, pero por las curvas a nivel 0.75, indicando que el número de puntos de articulación es buen indicador del inicio del umbral de percolación solamente para ciertos rangos de parámetros, y no un indicador general.

¹En el sentido de que se necesitan valores menores de λ para que la red percole.

5.4.7. Ejemplos ilustrativos de cada caso

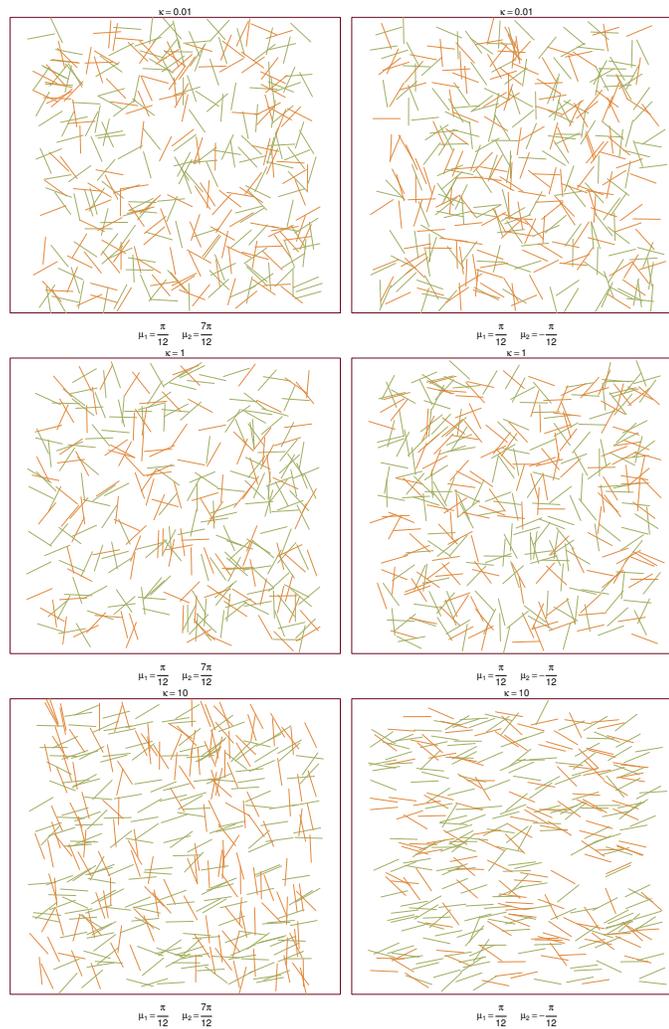


Figura 5.16: Redes de fracturas para el caso perpendicular (izquierda) y simétrico (derecha) del modelo de dos familias. En todos los casos se tiene $\lambda_1 = 250$ y $\lambda_2 = 150$.

5.5. Resultados para el modelo microfracturado

5.5.1. Elección de parámetros de simulación

En este caso, de acuerdo al modelo conceptual de microfracturas, diremos que tenemos una familia escasa y larga y otra familia de microfracturas. Requeriremos entonces que λ_1 se halle en un orden menor a λ_2 , y que ambas se encuentren por debajo de los umbrales de percolación para cada caso, evitando así que se trivialice la percolación en el modelo. Al llevar a cabo experimentos preliminares, con diez simulaciones para $(\lambda_1, \lambda_2) \in (10, 50) \times (100, 500)$, dando intervalos de diez en diez en el primer caso y de cien en cien en el segundo, se decidió tomar el intervalo $(10, 100)$ dando intervalos de cinco en cinco para λ_1 , y el intervalo $(100, 1000)$ para λ_2 , dando intervalos de cincuenta en cincuenta, intentando dar la mayor resolución posible a las estimaciones dentro de un tiempo de cómputo razonable. De este modo, λ_1 varía en un rango que es un orden menor que el rango de λ_2 . Podemos decir que, en promedio, la familia microfracturada es diez veces más abundante que su contraparte.

En cuanto a las longitudes, de acuerdo al modelo conceptual microfracturado, las mantendremos constantes en $l_1 = 0.1$ y $\lambda_2 = 0.01$, diferenciándose en un orden. Adicionalmente, la representación gráfica de las funciones estimadas de percolación y el número de puntos de articulación se llevará a cabo en una cuadrícula de 19×19 celdas, donde las coordenadas de cada celda en la cuadrícula se dan en términos de λ_1 y λ_2 . El color de la celda corresponderá al valor de la probabilidad de percolación (o número de puntos de articulación, según sea el caso), de acuerdo a una clave de color que se mostrará del lado derecho de cada gráfica. Es importante mencionar que los ejes no están graficados en la misma escala, hecho relevante al momento de interpretar los resultados.

Los parámetros de dirección preferencial serán nuevamente $(\mu_1 = \frac{\pi}{12}, \mu_2 = -\frac{\pi}{12})$ para el caso conjugado, y $(\mu_1 = \frac{\pi}{12}, \mu_2 = \frac{7\pi}{12})$ para el caso perpendicular, de acuerdo a lo discutido en la Sección 5.2.

5.5.2. Funciones de percolación: caso conjugado ($\mu_1 = \frac{\pi}{12}, \mu_2 = -\frac{\pi}{12}$)

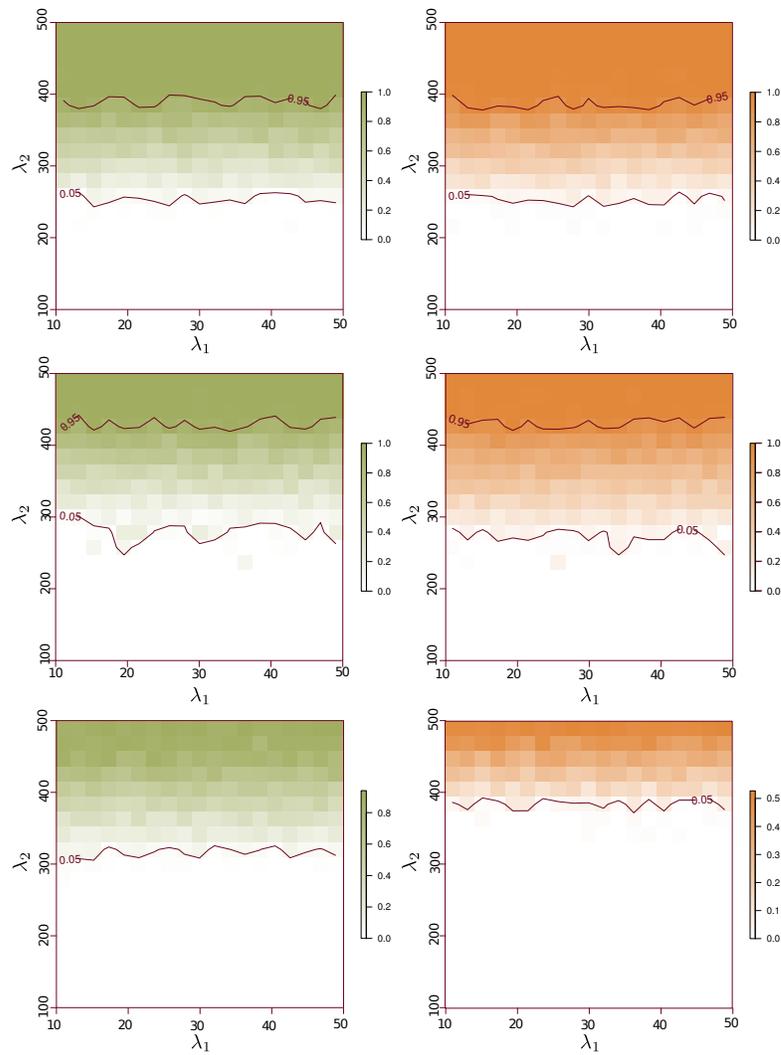


Figura 5.17: Estimación de las funciones de percolación del el caso conjugado del modelo microfracturado, para $\kappa \in 0.01, 1, 10$, con la percolación horizontal (●) a la derecha y la vertical (●) a la izquierda. Se muestran curvas (●) al nivel 0.05 y 0.95 de probabilidad.

5.5.3. Funciones de percolación: caso perpendicular ($\mu_1 = \frac{\pi}{12}, \mu_2 = \frac{7\pi}{12}$)

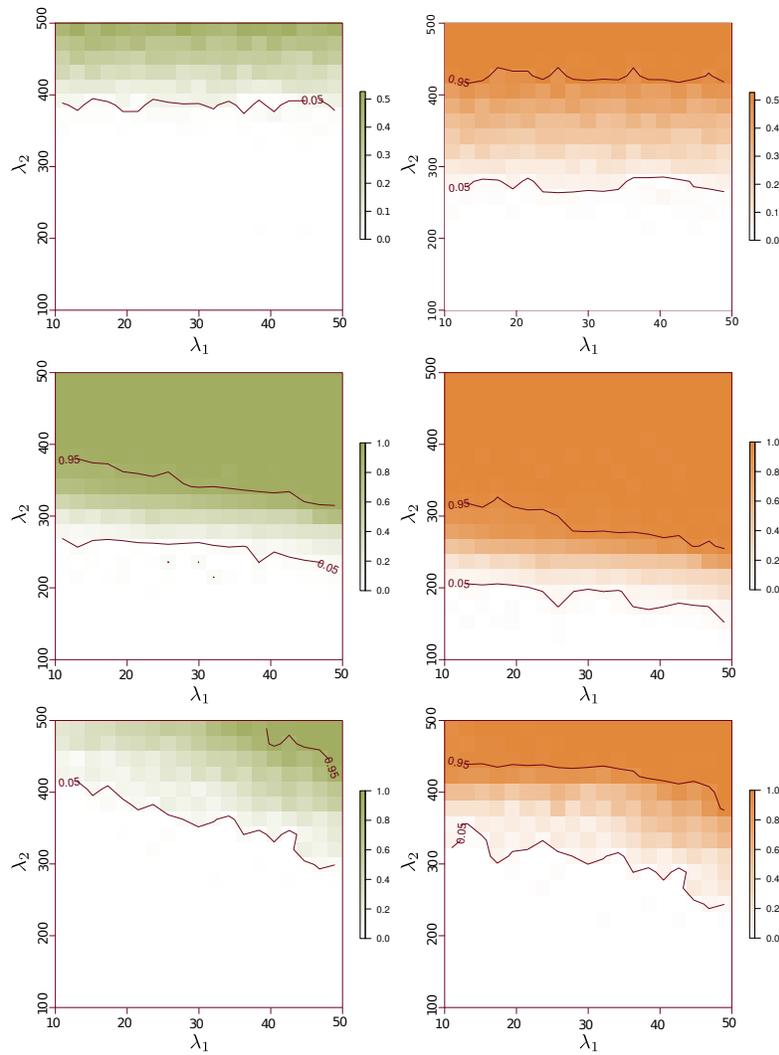


Figura 5.18: Estimación de las funciones de percolación para el caso perpendicular del modelo microfracturado, para $\kappa \in 0.01, 1, 10$, con la percolación horizontal (●) a la derecha y la vertical (●) a la izquierda. Se muestran curvas (●) al nivel 0.05 y 0.95 de probabilidad.

5.5.4. Puntos de articulación

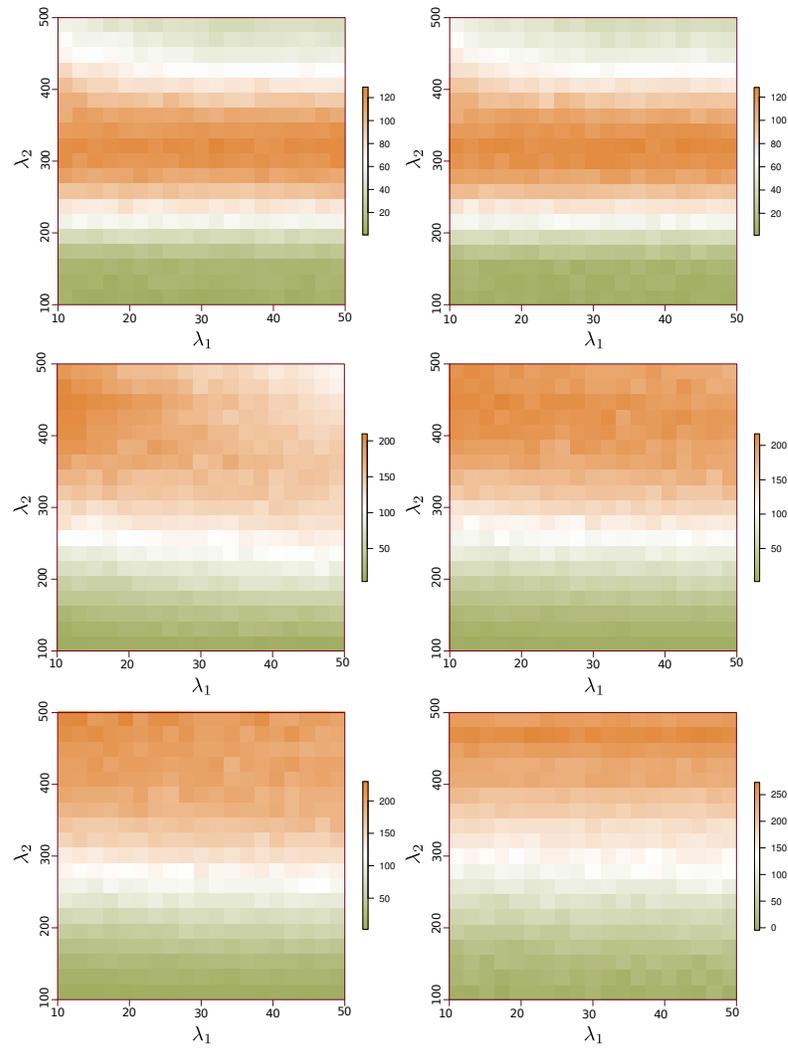


Figura 5.19: Número de puntos de articulación del el modelo de microfracturado. Se presentan los resultados para $\kappa \in \{0.01, 1, 10\}$ en orden descendiente. La columna izquierda es corresponde al caso conjugado y la derecha el caso perpendicular.

5.5.5. Umbrales estimados de percolación

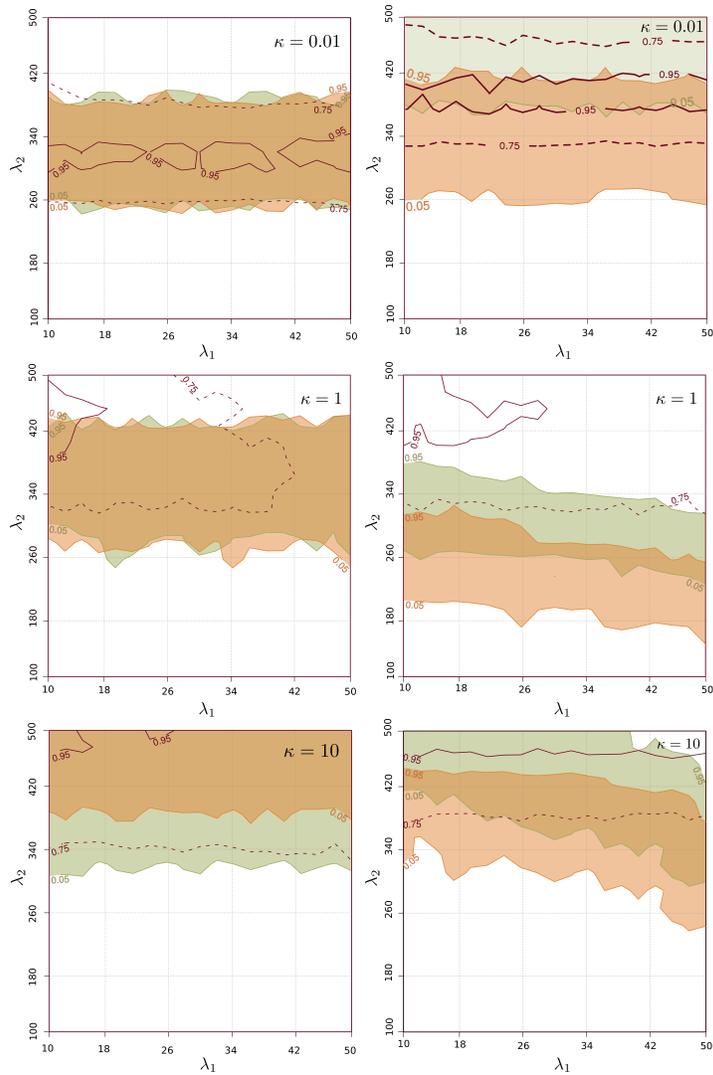


Figura 5.20: Estimación y comparación de los umbrales de percolación horizontal (●) y vertical (●) para el caso conjugado (derecha) y el perpendicular (izquierda) del modelo microfracturado. Se muestran curvas de nivel (●) al 75 % (línea punteada) y 95 % (línea sólida) del máximo de número de puntos de articulación.

5.5.6. Observaciones

Sobre el caso conjugado del modelo microfracturado

En el caso conjugado (Figura 5.5.2) salta a la vista inmediatamente que los umbrales de transición de este modelo son muy diferentes al modelo de dos familias. Observamos que estos umbrales (Figura 5.5.2) son prácticamente horizontales, indicando que dependen fuertemente de λ_2 (el parámetro de intensidad de la familia microfracturada). Sin embargo, al realizar experimentos numéricos para el caso $l = 0.01$ de manera individual, en el análisis exploratorio previo a las simulaciones del modelo básico, se halló que para valores muy altos de λ (en el orden de 10^4) el modelo apenas empezaba a percolar (probabilidades de percolación en el orden de 10^{-2}), por lo cual se descartó esta longitud para el modelo básico. En nuestro modelo microfracturado, observamos que si bien λ_1 (parámetro de intensidad correspondiente a la familia larga y escasa) no tiene un efecto cualitativo sobre los umbrales de percolación, hace que el orden dentro del cual ocurre la percolación respecto a λ_2 (parámetro de intensidad de la familia de microfracturas) disminuya muy drásticamente. De este modo, observamos que la red microfracturada no es por sí misma suficiente para que el modelo percole, sin embargo, al añadir unas cuantas fracturas largas, la percolación se favorece enormemente sin dejar de depender fuertemente de la intensidad de proceso que genera la red de microfracturas. A esta evidencia se añade el hecho de que λ_1 se halla muy por debajo de su umbral de percolación (según las estimaciones para los modelos anteriores y los experimentos preliminares para este modelo). Es decir que es λ_2 , así como su interacción con λ_1 (si bien no λ_1 directamente) el factor determinante para la percolación (desde el punto de vista de los parámetros de intensidad).

Por otra parte, observamos nuevamente que en el caso $\kappa = 10$ se favorece la percolación horizontal (de manera consistente con los valores de μ_1 y μ_2). Adicionalmente, en este caso no alcanzamos el umbral de percolación completo. Es decir que el ancho del umbral es mucho mayor que en los demás casos de κ . Incluimos la estimación completa de estos umbrales en el Apéndice ??.

Sobre el caso perpendicular del modelo micro fracturado

Ahora bien, en el caso perpendicular 5.5.3 se observa nuevamente que el umbral depende fuertemente de λ_2 , pero esta dependencia es menos dominante que en el caso conjugado y por primera vez se observan comportamientos diferentes para cada κ . Para $\kappa = 0.01$ se tienen nuevamente regiones paralelas al eje de λ_1 , pero favoreciendo fuertemente la percolación en sentido vertical. Dentro de los rangos de parámetros estudiados, no se obtiene el umbral de percolación vertical completo. Este resultado es muy interesante, pues indica que la percolación se está dando más fácilmente a través de la familia más vertical que es precisamente la familia microfracturada. En el caso $\kappa = 1$, notamos nuevamente que se favorece la percolación vertical, aunque de manera más sutil que el caso anterior. Las regiones ya no son completamente horizontales, sino que favorecen a λ_1 . Este comportamiento significa simplemente que el modelo percola más fácilmente para valores mayores de λ_2 , y en este sentido la predominancia de λ_1 sobre el umbral de percolación se debilita, en relación al caso conjugado. Las bandas en este caso son mucho más angostas, indicando que la

percolación se da más fácilmente. Consideremos que, dada la diferencia de escalas entre λ_1 y λ_2 , estos comportamientos son mucho menos sutiles de lo que aparentan en las gráficas, pues en una representación donde ambos ejes tuvieran la misma escala el eje vertical (correspondiente a λ_2) sería diez veces más largo que el eje horizontal.

Finalmente, en el caso $\kappa = 10$, se observa una tendencia todavía más favorecedora para λ_1 . La predominancia de λ_2 se debilita aún más, sin llegar a obtener un caso simétrico. El ancho del umbral de transición se vuelve más amplio que en el caso $\kappa = 10$, de manera consistente con el hecho de que la percolación se dificulta cuando el ángulo preferencial de las familias es muy dominante. Observamos también que en este caso se favorece la percolación vertical (contrario al caso $\kappa = 0.01$) indicando, posiblemente, que la percolación se da en mayor medida respecto a la familia cuya dirección preferencial es vertical (es decir, la familia microfracturada).

Sobre los puntos de articulación del modelo microfracturado

Ahora bien, respecto a los puntos de articulación, en el caso conjugado reproducen apenas el comportamiento cualitativo de los umbrales de transición. Notamos al inspeccionar las gráficas que no hay diferencias notables entre el caso conjugado y el caso perpendicular. Adicionalmente, las zonas de transición (delineadas a grandes rasgos por los valores representados en blanco) sólo se alcanzan por completo para $\kappa = 0.01$. Es aparente que el comportamiento del número de puntos de articulación es inconsistente con el comportamiento de los umbrales de percolación en ambos casos (conjugado y perpendicular). Una posible explicación es que si bien la familia de microfracturas es muy abundante respecto a la familia larga y abundante, su conectividad es muy baja y es probable que haya muchas fracturas aisladas que son contadas como puntos de articulación por definición (al constituir componentes conexas únicamente por convención), y que en realidad no contribuyen a la conectividad de la red.

Sobre la comparación de los umbrales del modelo microfracturado

Los comentarios anteriores se confirman al observar la Figura 5.5.5, donde se comparan los umbrales de percolación horizontal y vertical para cada caso de nuestro modelo microfracturado.

Para los valores de $\kappa = 0.01$ y $\kappa = 1$ del caso conjugado, los umbrales horizontal y vertical se superponen claramente. El hecho de que sean paralelos al eje correspondiente a λ_1 confirman la predominancia de λ_2 sobre la percolación para este caso del modelo microfracturado (fracturas conjugadas con alta variabilidad respecto a el ángulo preferencial), considerando que la presencia de la primera familia, si bien no es la estructura principal mediante la cual se da la percolación, la favorece enormemente.

La zona de transición del número de puntos de percolación coincide tanto cualitativamente como cuantitativamente con los umbrales de percolación en el caso conjugado $\kappa = 0.01$. Sin embargo, el máximo (curvas al nivel 0.95) queda completamente contenido en la región correspondiente a los umbrales, de tal suerte que ya no es un buen criterio para determinar la localización de la frontera

inferior de los umbrales (a diferencia de los modelos anteriores). Aún más, en el caso $\kappa = 1$ el número de puntos de articulación se comporta en todo sentido diferente a los umbrales de percolación (concentrándose en la esquina superior izquierda), como lo evidencian sus curvas al nivel 0.05 y 0.95. Este resultado sobre el número de puntos de articulación no es consistente con los obtenidos para los modelos anteriores.

Por otra parte, en el caso conjugado con $\kappa = 10$ se observa de manera consistente con los resultados para los modelos anteriores que la percolación se dificulta. El umbral se halla fuera de los rangos de parámetros elegidos pero se sigue observando la predominancia de λ_2 , así como la consistencia cualitativa entre los umbrales de percolación. Sin embargo, a diferencia de los resultados obtenidos para los dos valores menores de κ , se observa claramente que este caso favorece la percolación horizontal. Este comportamiento es consistente con los resultados obtenidos previamente, ya que ambas direcciones preferenciales (μ_1 y μ_2) son más cercanas al cero (dirección horizontal) que a $\frac{\pi}{2}$ (dirección vertical), de tal suerte que la red superpuesta favorece globalmente a el ángulo horizontal. De nuevo notamos que el comportamiento del número de puntos de articulación es cualitativamente y cuantitativamente distinto, mostrando nuevamente una concentración en la esquina superior izquierda, aunque menos drástica que en el caso conjugado con $\kappa = 1$.

En el caso perpendicular notamos que en general se favorece a la percolación vertical. Sin embargo observamos por primera vez comportamientos verdaderamente distintos entre los valores menores de κ . Para $\kappa = 0.01$ se mantiene la predominancia de λ_2 en el sentido discutido para el caso conjugado. El umbral de percolación vertical no se alcanza dentro de los rangos de intensidad (λ) estudiados.

Para el valor $\kappa = 1$ del caso perpendicular se confirma que la predominancia de λ_2 se debilita, pues λ_1 juega un papel más relevante al facilitar la percolación conforme aumenta de valor. De nuevo se observa que el número de puntos de articulación se concentra en la esquina superior izquierda y que no es un buen criterio para caracterizar los umbrales de percolación. Se sigue favoreciendo la percolación vertical.

Finalmente, para el valor $\kappa = 10$ del caso perpendicular la percolación empieza a dificultarse de nuevo, en el sentido de que se requieren valores más altos de ambos parámetros de intensidad para alcanzar el umbral de percolación. Insistimos en que este resultado es consistente con los obtenidos en los modelos anteriores. De nuevo, se favorece la percolación vertical y confirmamos la sospecha de que el número de puntos de articulación no es un criterio útil en este modelo.

5.5.7. Ejemplos ilustrativos de cada caso

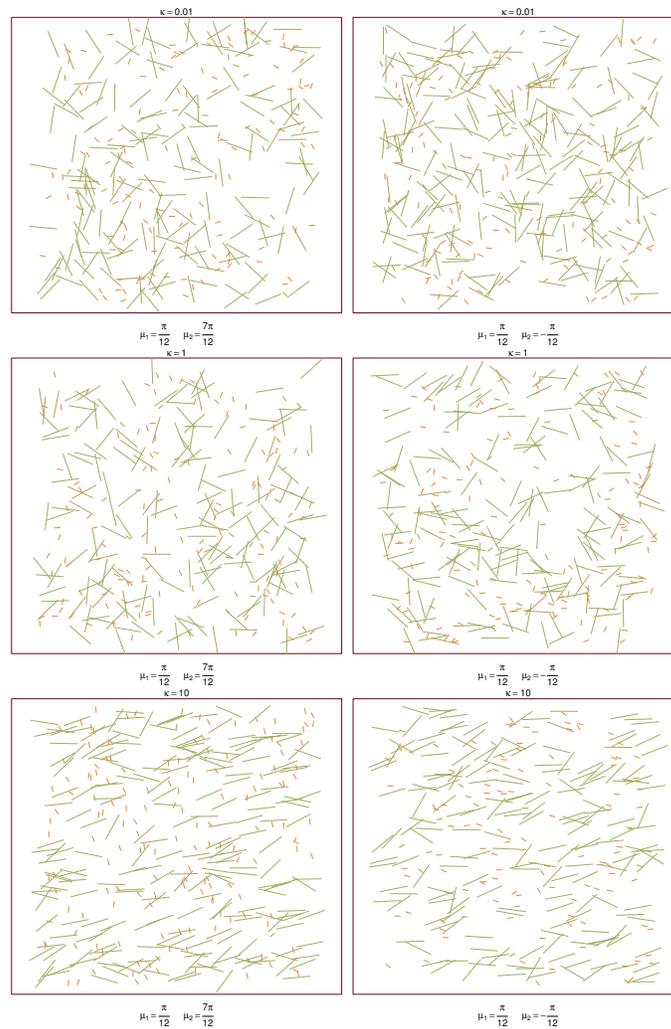


Figura 5.21: Redes de fracturas para el caso perpendicular (izquierda) y simétrico (derecha) del modelo microfracturado. En todos los casos se tiene $\lambda_1 = 250$ y $\lambda_2 = 150$.

5.6. Discusión general de los resultados obtenidos

5.6.1. Parámetros predominantes respecto a la percolación

En esta sección se discutirá el comportamiento general de los umbrales de percolación respecto a los parámetros λ , μ y κ del modelo. Dado que, en el modelo básico, las funciones de percolación se comportaron cualitativamente de manera esperada, confirmamos que λ , el parámetro de intensidad del proceso Poisson que dirige al modelo, es el parámetro predominante respecto a la percolación. El número de fracturas es fundamental para que el modelo percole. A continuación, notamos que κ , el parámetro de concentración de la variable aleatoria Von Mises que controla al modelo, es predominante y no promueve la percolación en el sentido de que cuando toma valores mayores la percolación se dificulta. En particular, notamos que al variar el orden de κ entre 0.01, 0.1 y 1, se obtienen comportamientos muy similares en todos los modelos (salvo el caso perpendicular del modelo microfracturado), hecho debido a que la variable aleatoria Von Mises tiende a una uniforme conforme κ tiende a cero. Tiene sentido pensar que cuando $\kappa \rightarrow 0$ la función de percolación tiende a una función límite, independientemente de μ pero dependiente de λ , en la cual la longitud de los intervalos de percolación decrece y tiende a un valor constante.

Por otra parte, μ se vuelve relevante solamente cuando κ es suficientemente grande como para que los ángulos preferenciales se diferencien. En nuestros experimentos, esto sucedió para $\kappa = 10$. Aún más, concluimos que el ángulo preferencial favorece el ángulo de percolación correspondiente. Entre más horizontal se halle una familia, más se favorecerá la percolación horizontal. Sucede de manera análoga para la percolación vertical. Sin embargo, en el caso límite, cuando $\kappa \rightarrow \infty$, se consideraría que no hay variación alrededor de μ y las fracturas en una familia son perfectamente paralelas. En el caso del modelo básico nunca habría percolación, pues las fracturas nunca se intersectarían. En ese caso la función de percolación tiende a cero. En los casos del modelo de dos familias y el microfracturado, se espera de acuerdo a los resultados obtenidos un desfase aún más marcado entre la percolación vertical y la horizontal. Finalmente, la función de percolación aparenta ser continua en todos los casos. Sin embargo, hay que tomar esta afirmación con precaución, considerando que empleamos aproximaciones numéricas.

5.6.2. Obstáculos enfrentados

El obstáculo más grande que se enfrentó fue hallar un criterio para la percolación que se pudiera implementar computacionalmente. Al inicio del trabajo se propuso un criterio intuitivo que intentaba hallar un camino entre las fracturas que intersectaban bordes opuestos, utilizando la función de orientación implementada (ver Apéndice F) para detectar intersecciones. Este método no funcionó pues los tiempos de cómputo crecieron exponencialmente respecto a λ , y un solo barrido de λ para el modelo básico tomaba al menos cuatro días.

Para resolver este problema se consideró convertir la red a una gráfica, mediante una matriz de incidencias de unos y ceros. Después de implementar este paquete las simulaciones para el modelo básico tardaban a lo más treinta minutos para los valores más grandes de λ . Se analizó el código

paso a paso y se determinó que el paso que por mucho consume más tiempo es el cálculo de la matriz de incidencias. Tanto la simulación de la red como el análisis de sus componentes conexas (clusters) fue muy rápido. Los casos más tardados fueron para el modelo de dos familias, para los valores mayores de los parámetros de intensidad λ_1 y λ_2 . En esos casos, cuatro simulaciones simultáneas para un barrido completo del espacio de intensidades tomaba entre dos y tres días, con cien simulaciones para cada pareja de λ_i .

Una vez representada la red en forma gráfica se utilizó el paquete *igraph* para hallar el umbral de percolación, empleando los algoritmos ya implementados en este paquete para hallar componentes conexas. Fue precisamente este proceso el que nos motivó a buscar criterios de percolación alternativos en términos de medidas de conectividad de teoría de gráficas, además del tamaño relativo del cluster.

5.6.3. Criterios alternativos

Desafortunadamente, dos de los tres criterios propuestos fueron descartados desde el modelo básico: la conectividad por vértices y el tamaño relativo del cluster que percola. Respecto al tamaño relativo, aumenta bruscamente cuando el modelo empieza a percolar, sin tomar valores de manera consistente. Este comportamiento es relativamente trivial en el sentido de que antes de que el modelo percole, no existe un cluster que percole y por lo tanto el tamaño relativo se reporta como cero. Por otra parte, confirmamos la idea muy razonable de que conforme λ crece, el cluster que percola vertical y horizontalmente es el mismo, y finalmente consta de toda la red en el estaso supercrítico del modelo. Este hecho puede ayudar a recuperar la noción de unicidad del cluster que percola, que perdimos al pasar del modelo matemático al modelo computacional (que exige una ventana acotada).

En el caso de la conectividad por vértices, se tuvo que siempre valió cero, independientemente de todos los demás parámetros. Esto indica que si bien nuestras redes alcanzan el umbral de percolación, no hay muchas conexiones redundantes e incluso para el estado supercrítico la conectividad sigue siendo relativamente débil. Estas afirmaciones son válidas dentro del rango de parámetros que estudiamos. No descartamos que esta medida sea útil al estudiar, por ejemplo, el comportamiento de las redes de fracturas discretas en estado puramente supercrítico.

Finalmente, se obtuvieron resultados marginalmente más interesantes para el número de puntos de articulación. Hallamos que este número aumenta conforme λ crece, debido al número de fracturas aisladas que por convención definen componentes conexas de cardinalidad uno, y en consecuencia son el sí mismas puntos de articulación. A continuación este número alcanzaba su máximo y la red se encuentra en sus estado de conectividad más frágil. Notemos que dado el comportamiento de las fracturas aisladas este hecho no se debe interpretar como que antes del máximo la red se encuentra más conectada. Simplemente, antes del máximo no hay conectividad relevante, pues sigue habiendo muchas fracturas aisladas. Después del máximo el número de puntos de articulación empieza a decrecer, ahora sí por que en verdad la conectividad de la red se está consolidando y no por que estemos obteniendo conteos falsos debido a fracturas aisladas. En este sentido se esperaba que el máximo del número de puntos de articulación ayudara a predecir

el inicio del umbral de percolación. Sin embargo, desde el caso $\kappa = 10$ del modelo básico, el comportamiento del número de puntos de articulación se volvió inconsistente. Estas inconsistencias continuaron a lo largo de los experimentos para los otros dos modelos, llevándonos a la conclusión de que este criterio no es completamente útil, pues se comporta de manera muy inconsistente con los umbrales de percolación dependiendo del rango de los parámetros y, en el mejor de los casos, sólo predice una frontera del umbral.

5.6.4. Comparación con otros trabajos

De las referencias consultadas, los trabajos más similares han sido realizados por Balberg y Binenbaum (1983)[33] y Mertens y Moore (2012)[31].

Balberg y Binembaum realizan un estudio de la percolación de un modelo bidimensional muy similar a nuestro modelo básico. Toman un modelo booleano donde los objetos son segmentos de recta. Al igual que en nuestro modelo básico, la longitud de los segmentos de recta es constante. Cabe notar que ellos también hallaron que el ángulo preferencial de la red favorece la percolación en el ángulo correspondiente. También utilizan un cuadrado unitario como ventana de estudio y definen las percolaciones en sentido longitudinal (vertical) y transversal (horizontal). Sin embargo, ellos toman un número fijo de segmentos, mientras que nuestro número es aleatorio. En ese sentido, nuestro modelo es un poco más general. Por otra parte, el objetivo de su trabajo es distinto, pues estudian la percolación del modelo en términos de la anisotropía de la red, y reportan sus resultados numéricos para la probabilidad estimada de percolación en términos de una medida de esta anisotropía. En ese sentido, nuestros resultados numéricos no son comparables. Sería necesario traducir nuestros resultados a los términos del trabajo de Balberg y Binenbaum para hacer una comparación cuantitativa. Finalmente, su trabajo es más amplio pues estudian el caso donde la longitud es aleatoria con distribución log-normal.

Por otra parte, el trabajo de Mertens y Moore es más amplio pues incluye modelos booleanos con cuadros y discos en dos dimensiones, además de segmentos de recta. Sus resultados son cualitativamente comparables ya que estudian la percolación en términos del producto del parámetro correspondiente a nuestro parámetro de intensidad λ y el área del objeto aleatorio en cuestión. Para los segmentos de recta, definen el área como el cuadrado de la longitud. Ellos también dejan fija la longitud de los segmentos. Obtienen gráficas de la función de percolación estimada que muestran el mismo comportamiento que nuestras estimaciones para el modelo básico. Sin embargo, Mertens y Moore comparan estas gráficas con algunos resultados analíticos obtenidos en los términos en que construyen sus modelos. Este valor coincide con los puntos de inflexión aproximados de las curvas estimadas de percolación, proporcionando un equivalente al valor crítico para funciones continuas de percolación. Adicionalmente, presentan un algoritmo para detectar el cluster de percolación y muestran que el tiempo de cómputo es lineal.

En general, dentro de la bibliografía revisada, no se hallaron planteamientos similares nuestros modelo de dos fracturas y nuestro modelo microfracturado. Es decir, modelos que resultan de la superposición de dos redes de fracturas.

5.6.5. Sobre la unicidad del cluster que percola

De acuerdo a lo discutido anteriormente, la unicidad del cluster que percola no se respeta una vez que nos restringimos a una ventana acotada y redefinimos el cluster que percola de componente conexa no acotada a componente conexa que une lados opuestos de la ventana. A lo largo de los experimentos se monitoreó la ocurrencia de clusters múltiples de percolación, lo cual si bien ocurrió con muy baja frecuencia (en total menor a 0.001), tiene probabilidad positiva. Esta aparente contradicción con la teoría no es tal, pues podemos interpretar la nueva definición del cluster de percolación como la intersección entre la componente conexa no acotada y la ventana de estudio. Esta intersección no tiene por qué ser conexa, por lo cual aparenta haber varios clusters de percolación.

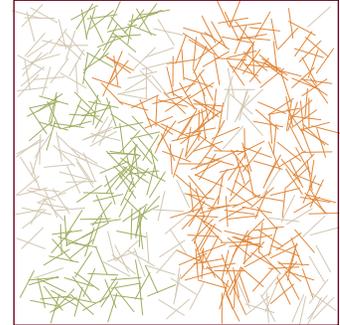


Figura 5.22: Realización que aparenta presentar dos clusters de percolación.

Conclusiones

Se aplicó una metodología sistemática de modelación matemática y computacional para la construcción de tres modelos estocásticos de redes de fracturas discretas. Los elementos principales para dicha construcción fueron nociones de geometría estocástica y de percolación. Para este fin se hizo una revisión de la teoría de estas dos poderosas herramientas matemáticas.

En particular, este tipo de construcción se ilustró múltiples veces en la revisión de modelos de percolación continua en sus dos vertientes principales: modelos booleanos y modelos de conexión aleatoria. Dentro del contexto de nuestra metodología, elegimos el planteamiento booleano para construir nuestros modelos, obteniendo resultados interesantes en términos de la teoría de percolación.

Se esperaba que las funciones estimadas de percolación dependieran primordialmente del número promedio de fracturas (el parámetro de intensidad λ de Poisson). Esta expectativa se confirmó en el sentido de que las funciones se comportaron exactamente del modo predicho por la teoría: crecientes respecto a λ y presentando una transición relativamente brusca del estado subcrítico al supercrítico. En el modelo de dos familias hallamos una simetría interesante respecto a los dos parámetros de intensidad. Por otra parte, para el modelo microfracturado, el comportamiento fue fuertemente asimétrico dando predominancia a la familia microfracturada, así como a la interacción geométrica entre las redes superpuestas. Adicionalmente, notamos que el parámetro de concentración κ no promueve la percolación, y que su interacción con el parámetro de dirección preferencial μ es un factor determinante para la simetría de los umbrales de percolación horizontal y vertical. Finalmente, se logró estimar dichos umbrales en todos los casos.

En particular, ninguno de los criterios alternativos propuestos para la detección de la transición de fase resultó efectivo. El más prometedor fue el número de puntos de articulación, sin embargo su comportamiento no fue siempre consistente con el de los umbrales de percolación, particularmente en el modelo microfracturado.

Desde el punto de vista computacional, es crítico emplear técnicas de cómputo paralelo para

mejorar la eficiencia de la implementación de nuestro algoritmo. En particular, puede ser interesante implementar el algoritmo de Mertens y Moore [31] y compararlo con este trabajo. Nótese que, estrictamente hablando, el algoritmo fundamental es el del paquete *igraph*, que encuentra todas las componentes conexas de las redes. Desafortunadamente, la documentación del paquete no especifica qué algoritmo utiliza ni cómo se implementa. Se pretende, a largo plazo, integrar este trabajo como parte de un paquete para R enfocado a modelos estocásticos espaciales de redes de fracturas discretas.

Una generalización que se puede implementar de manera inmediata sería considerar estos modelos cuando la longitud es una variable aleatoria. Para la extensión de estos modelos a tres dimensiones se pueden utilizar polígonos o elipses en el espacio para representar las fracturas, en lugar de segmentos.

Los resultados obtenidos se pueden utilizar para proporcionar criterios de selección de rangos de parámetros en generalizaciones de los modelos. Más aún, es de particular interés desarrollar modelos que tomen en cuenta la dependencia que existe entre las propiedades de las fracturas naturales (longitud, apertura, rugosidad), permitiendo así representar mejor la heterogeneidad presente en los medios porosos de las formaciones de yacimientos naturalmente fracturados.

Estereología

La estereología es la ciencia de las relaciones geométricas entre una estructura que existe en tres dimensiones e imágenes de dicha estructura que son fundamentalmente bidimensionales [34].

Nos proporciona un conjunto de técnicas que permiten obtener información tridimensional a partir de imágenes bidimensionales. Dichas imágenes se pueden obtener de muchos modos. Por ejemplo, intersectando el objeto con un plano.

En la figura, el plano juega el papel de *sonda*. Se pueden usar otros tipos de sondas como puntos, líneas, superficies y volúmenes.

A.1. Propiedades y métodos

La estereología nos permite estudiar propiedades métricas (volumen (V), área (S , A), longitud (L), curvatura (M)).y topológicas (conexidad (C) , número(N)) de los especímenes. En la mayoría de los casos, estas propiedades se miden en una muestra del espécimen y se expresan por unidad de volumen, área o longitud y se utilizan subíndices para indicar el caso.

Algunos ejemplos son:

- V_v - fracción de volumen (adimensional).
- S_v - área por unidad de volumen (m^{-1}).

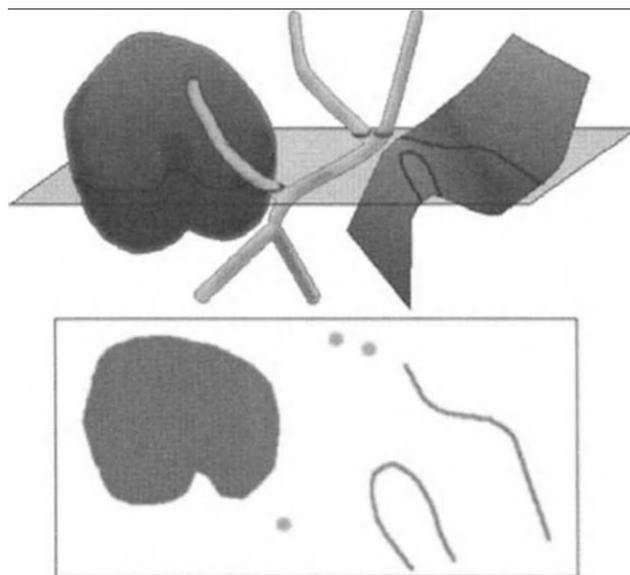


Figura A.1: Ejemplo de sonda que consiste de un plano. Imagen tomada del libro *Practical Stereology* de J. Russ, página 3 de la segunda edición.

- L_v - longitud por unidad de volumen (m^{-2}).
- A_a - fracción de área (adimensional).
- L_a - longitud por unidad de área (m^{-1}).
- P_a - longitud por unidad de área (m^{-2}).
- L_L - fracción de longitud (adimensional).
- P_L o N_L - número de puntos por unidad de longitud (m^{-1}).

Se pueden usar para obtener promedios útiles:

- $\langle V \rangle = V_v / N_v$.
- $\langle S \rangle = S_v / N_v$.
- $\langle M \rangle = M_v / S_v$.
- $\langle D \rangle = M_v / 2\pi \cdot N_v$.

Algunas otras medidas importante se enlistan a continuación:

- Intercepción lineal media - Medida útil de la proporción superficie-volumen de la estructura.

Se define como $\lambda = 4 \cdot \frac{V_v}{S_v}$.

Nos proporciona información de la escala de la estructura.

- Distancia libre media - En un medio (β) con partículas (α), se refiere a la distancia promedio entre las partículas.

Se define como $L = \lambda \cdot \frac{V_v^\beta}{V_v^\alpha}$.

Es importante, por ejemplo, en metales donde la distancia entre partículas precipitadas controla propiedades mecánicas.

El procedimiento típico consiste en obtener muestras de la estructura tridimensional mediante sondas. Estas sondas interactúan con la estructura y producen *eventos*. El método preferido es contar estos eventos, ya que es eficiente y su precisión estadística es fácil de calcular. Es importante elegir una sonda adecuada para la característica que se desea estudiar.

Es posible combinar varios métodos, usando *estereología de segundo orden*. ésta consiste en combinar varios tipos de sondas en una sola imagen. Por ejemplo, podemos colocar un arreglo de *puntos* sobre una imagen, y seleccionar las partículas que contienen un punto. En cada partícula seleccionada, se traza una línea desde el punto a la frontera y se mide el segmento resultante. Este método se conoce como *point sampled intercept lengths*, y es útil para propiedades medidas en proporción al volumen.

A.2. Relaciones fundamentales

Las *relaciones fundamentales* son reglas clásicas de la estereología que vinculan las medidas obtenidas con los parámetros de la estructura.

- $\langle A_a \rangle = V_v$.
- $N_v = N_a / \langle D \rangle$.
- $\langle P_p \rangle = V_v$.
- $\langle L_v \rangle = V_v$.

Todas las relaciones necesitan que se lleve a cabo un muestreo de la estructura, para obtener estos valores medios. La muestra debe ser:

1. Uniforme
2. Aleatoria
3. Isotrópica

A una muestra de estas características se le conoce como *muestra IUR*. Es necesario diseñar muestreos que satisfagan estas características.

A.3. Medidas estereológicas clásicas

Los ejemplos más comunes de medidas estereológicas consisten en calcular fracciones de área o volumen a partir de conteo de puntos, o perímetros a partir de conteos de intersección de línea. A continuación se presentan de manera muy sucinta ejemplos de cada caso.

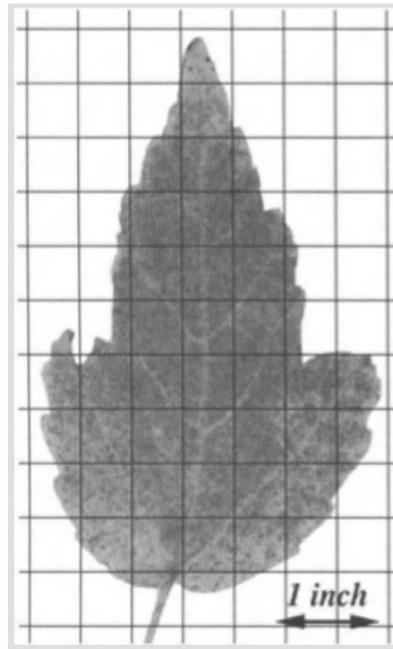


Figura A.2: Estimación del área de una hoja. Hay 39 puntos por unidad de área ($0.5in^2$), así que el área estimada es de $9.75in^2$. Contando los píxeles se obtienen $9.42in^2$. Imagen tomada del libro *Practical Stereology* de J. Russ, página 17 de la segunda edición.

A.3.1. Fracción de área a partir de puntos



Figura A.3: Fracción de área a partir de puntos. Imagen tomada del libro *Practical Stereology* de J. Russ, página 46 de la segunda edición.

En esta figura se lleva a cabo una estimación de la fracción de área de la fase gris oscuro, con los siguientes resultados:

- **Población sonda:** Puntos en el espacio bidimensional.
- **Muestra:** 25 puntos en una cuadrícula.
- **Evento:** El punto cae en la fase gris oscuro.
- **Conteo:** 8 puntos.
- **Relación:** $\langle P_P \rangle = A_A$
- **Conteo normalizado:** $P_P = 8/25 = 0.32$
- **Propiedad geométrica:** $A_A = 0.32$

A.3.2. Fracción de volumen a partir de puntos

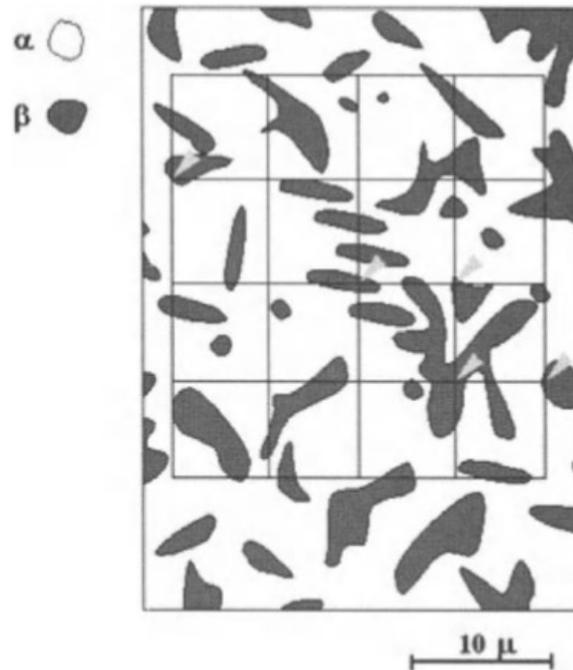


Figura A.4: Fracción de volumen V_V a partir de puntos. Imagen tomada del libro *Practical Stereology* de J. Russ, página 25 de la segunda edición.

Estimación de la fracción de volumen de la fase β .

- **Población sonda:** Puntos en el espacio tridimensional.
- **Muestra:** 25 puntos en una cuadrícula.
- **Evento:** El punto cae en la fase β .
- **Conteo:** 5 puntos caen en la fase.
- **Relación:** $\langle P_P \rangle = V_V$
- **Conteo normalizado:** $P_P = 5/25 = 0.25$
- **Propiedad geométrica:** $V_V = 0.25$

A.3.3. Perímetro de fases en dos dimensiones, a partir de intersecciones de línea

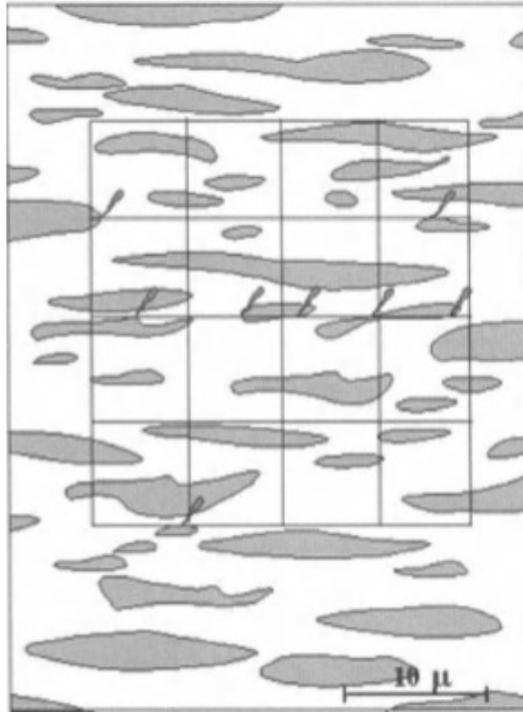


Figura A.5: Estimación del perímetro de una fase bidimensional a partir de intersecciones. Imagen tomada del libro *Practical Stereology* de J. Russ, página 57 de la segunda edición.

Estimación del perímetro de una fase bidimensional a partir de intersecciones con líneas horizontales, con los siguientes resultados:

- **Población sonda:** Líneas en el espacio bidimensional.
- **Muestra:** Cuatro líneas horizontales.
- **Calibración:** Cada línea mide $17.7\mu m$, longitud total de la sonda: $17.7 \cdot 4 = 70.8\mu m$.
- **Evento:** La línea intersecciona la frontera de la fase gris.
- **Conteo:** 17 intersecciones.
- **Relación:** $\langle P_L \rangle = \frac{\pi}{2} L_A$
- **Conteo normalizado:** $P_L = 17/70.8\mu m = 0.24$ eventos/ μm
- **Propiedad geométrica:** $P_L = 0.24$

En este caso la estimación del perímetro de la fase gris se lleva a cabo a partir de intersecciones con líneas verticales, con los siguientes resultados:

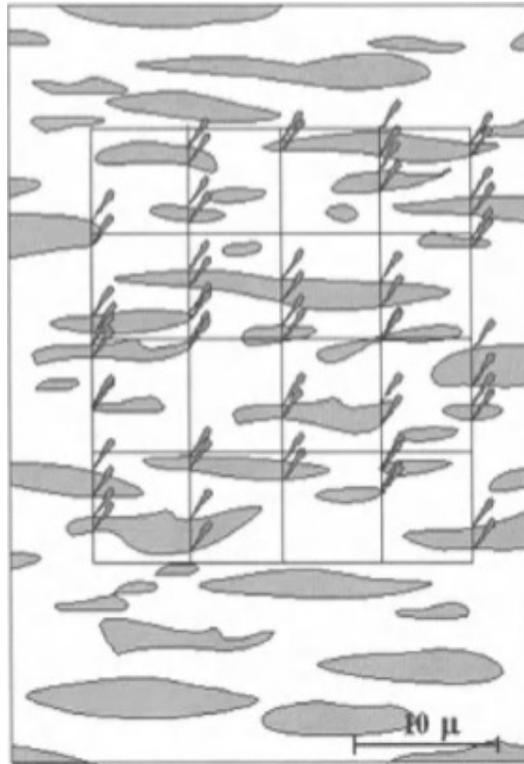


Figura A.6: Perímetro de una fase en dos dimensiones, a partir de intersecciones de línea *Practical Stereology* de J. Russ, página 58 de la segunda edición.

- **Población sonda:** Líneas en el espacio bidimensional.
- **Muestra:** Cinco líneas verticales.
- **Calibración:** Cada línea mide $23.7\mu m$, longitud total de la sonda: $17.7 \cdot 5 = 118.5\mu m$.
- **Evento:** La línea intersecta la frontera de la fase gris.
- **Conteo:** 62 intersecciones.
- **Relación:** $\langle P_L \rangle = \frac{\pi}{2} L_A$
- **Conteo normalizado:** $P_L = 62/118.5\mu m = 0.52 \text{ eventos}/\mu m$
- **Propiedad geométrica:** $P_L = 0.52$

A.4. Muestreo en estereología

El muestreo en estereología depende de la sonda que se utilice. Algunos ejemplos típicos son:

- Puntos - Deben estar distribuidos de manera uniforme en la ventana de estudio.

- Líneas - Utilizar círculos garantiza que las direcciones son uniformes.
- Disectores - Deben estar distribuidos de manera uniforme en la ventana de estudio.

Hay varias ventajas al utilizar la estereología. Una de ellas es que las cantidades involucradas en las relaciones fundamentales pueden obtenerse a través de conteos. Por otra parte, las relaciones fundamentales que involucran valores esperados son válidas independientemente de la geometría de la estructura. Finalmente, la validez de las relaciones fundamentales depende únicamente de que la muestra sea apropiada (por ejemplo, $\langle P_p \rangle = V_v$) [35].

Existen algunos criterios para obtener muestras IUR. El más sencillo de ellos es que las sondas de puntos no necesitan ser isotrópicas. Si la estructura es muy irregular, se recomienda usar retículas. Sin embargo, una retícula dará muestras sesgadas si la estructura presenta muchas regularidades. En ese caso, es mejor usar puntos aleatorios. En general, es difícil obtener muestras IUR. La metodología depende del espécimen.

A.5. Áreas de aplicación y limitaciones

Usualmente, la estereología se utiliza para interpretar información geométrica de imágenes obtenidas con microscopio (microestructuras). También se ha usado para estudiar la geometría de rocas en techos de minas. En astronomía se usa para estimar distancias y distribución de las estrellas. En general, la estereología halla usos en la geología, agronomía, ciencia de materiales, mineralogía, fisiología, botánica, patología, histología, etc.

Por otra parte, la estereología proporciona información exclusivamente cuantitativa. Las características topológicas son difíciles de estudiar con estereología. Por ejemplo, el número de objetos por unidad de volumen requiere que el objeto en cuestión sea convexo y de tamaño conocido. Si el objeto no es convexo pero de forma conocida, se requieren varios planos de muestra. En el caso general de objetos arbitrarios, o redes con conectividad compleja, no basta utilizar estereología.

Nociones de teoría de gráficas

En matemáticas y computación, la teoría de gráficas es el estudio de las *gráficas*, que son estructuras matemáticas empleadas para modelar relaciones dos a dos entre objetos. Una *gráfica* en este contexto consta de *nodos* o *vértices* conectados por líneas llamadas *enlaces*. Las gráficas pueden ser *no dirigidas*, cuando no se hace distinción alguna entre los dos vértices asociados a un enlace. En caso contrario se les llama *dirigidas*. Las gráficas son uno de los objetos de estudio primordiales de las matemáticas discretas.

Definición B.0.1. En el sentido más común, una *gráfica* es un par ordenado $G = (V, E)$ que consta de un conjunto V de *vértices* y un conjunto E de pares no ordenados (en el caso no dirigido) de vértices, conocidos como *enlaces*.

En una noción más generalizada, y relevante para el trabajo presente, E es un conjunto con una relación de incidencia que asocia parejas de vértices con enlaces.

Las gráficas pueden ser usadas para modelar muchos tipos de relaciones y procesos en sistemas físicos, biológicos, sociales y de información. Muchos problemas prácticos pueden expresarse en términos de gráficas.

En el contexto de este trabajo, utilizamos gráficas para representar y codificar la conectividad de las redes de fracturas, característica fundamental desde el punto de vista de la percolación. De este modo, utilizamos gráficas en las que los nodos correspondían a las fracturas y los enlaces a intersecciones entre las fracturas respectivas. Una vez que nuestras redes se hallaban codificadas de este modo, fue posible estudiar la conectividad de nuestras redes desde este punto de vista con la ventaja adicional de que pudimos aprovechar los algoritmos eficientes ya desarrollados para hallar componentes conexas y caminos en gráficas.

La pregunta que surgió naturalmente durante el estudio de redes discretas de fracturas fue, en términos informales, ¿qué tan conectada está la red? ¿Bastaría obstruir un par de fracturas para desconectar el cluster que percola o existen muchos caminos redundantes? Para responder estas preguntas fue necesario formalizar y caracterizar el concepto de conectividad desde el punto de vista de la teoría de gráficas, y para dicho fin es necesario presentar ciertos conceptos preliminares básicos.

Un *camino* es una sucesión finita o infinita de enlaces que unen vértices distintos entre sí. Decimos que dos vértices en una gráfica están *conectados* si existe un camino entre ellos. Así, una gráfica G está *conectada* si existe un camino entre cualesquiera dos vértices y una *componente conexa* es un conjunto maximal de vértices conectados. De este modo, presentamos las siguientes caracterizaciones de la conectividad de una gráfica:

Definición B.0.2. Una gráfica G es k -conexa si tiene más de k vértices y permanece conectada siempre que se eliminan menos de k vértices. Decimos que k es la conectividad por vértices de G .

De este modo, k es una medida directa de la fuerza de la conectividad de una gráfica. Entre más conectada esté una gráfica, más vértices habría que eliminar para desconectarla y en consecuencia el valor de k aumenta. Notemos, sin embargo, que se presupone que la gráfica está en principio conectada. Si la gráfica que representa a la red de fracturas está conectada, nuestra red ya percola. Entonces, la conectividad por vértices es un buen criterio para estudiar la conectividad en sistemas supercríticos. A este concepto se le conoce recientemente como *cohesión* de la gráfica.

Por otra parte, presentamos un concepto complementario:

Definición B.0.3. Un *punto de articulación* o *vértice de corte* de una gráfica G es aquel tal que al ser eliminado el número de componentes conexas aumenta.

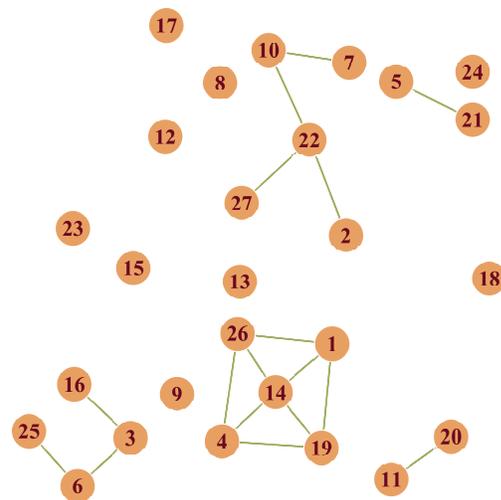
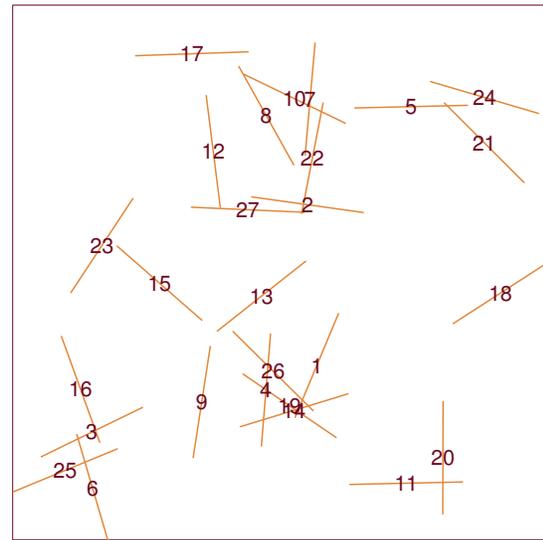


Figura B.1: Representación de una red de fracturas como gráfica.

En principio, el número de componentes conexas es un indicador inversamente proporcional de qué tan conectada se encuentra la gráfica. Cuando la gráfica está conectada sólo hay una componente conexas, y conforme la gráfica se desconecta este número aumenta. En particular, las fracturas aisladas constituyen en sí mismas, por definición, componentes conexas de la red. Notemos que el concepto de punto de articulación recuerda a los vértices pivotaes definidos en la Sección 1.1 y por esta razón empleamos también el número de puntos de articulación como medida de la conectividad de nuestras redes. Nos indica el número de fracturas de los cuales la percolación en la red depende de manera fundamental.

Es importante comentar que estas dos medidas son complementarias en el sentido de que si k es positivo, la gráfica está conectada y no hay vértices de corte. Por otra parte, si el número de vértices de corte es positivo, k vale cero pues no es posible eliminar dichos vértices sin desconectar la gráfica.

Los conceptos anteriores se propusieron como medidas alternativas para intentar caracterizar la percolación de los modelos estudiados en términos de la conectividad de las redes de fracturas discretas.

Construcción del proceso puntual de Poisson

Supongamos que se tienen dos cuerpos convexos dados, K y W en un espacio euclidiano de dimensión d , \mathbb{R}^d . El cuerpo K sirve para generar un campo aleatorio de copias congruentes de K , y el cuerpo W juega el rol de “ventana de observación”. El campo aleatorio consiste de una cantidad numerable de copias congruentes de K que se distribuyen en el espacio de manera aleatoria e independiente, permitiendo que se traslapen. El número de cuerpos en el campo cuya intersección con la ventana de observación W sea no vacía es una variable aleatoria, y nos preguntamos su distribución. Esta pregunta no es significativa mientras no se proponga un modelo estocástico específico para campo aleatorio de cuerpos convexos. Schneider propone en [21] un proceso mediante el cual, con suposiciones sencillas, se motiva el uso de un modelo específico, y se obtiene una fórmula explícita para esta distribución.

C.1. Primer paso: Aproximación mediante bolas

En el primer paso, considera una situación mucho más simple. Se toma una bola B_r de radio r , centrada en el origen, que contiene a la ventana de observación W , y se considera solamente una copia de K que se mueve aleatoriamente bajo la condición de que interseccione a B_r . Nos preguntamos ahora la probabilidad de que también interseccione a W . Existe una manera geoméricamente natural de especificar una distribución de probabilidad de un cuerpo convexo que se mueve de manera aleatoria y que satisfaga la condición que le pedimos. Una copia congruente aleatoria de K se puede representar de la forma $\tilde{g}K$, donde \tilde{g} es un elemento aleatorio del grupo G_d de movimientos rígidos. El grupo localmente compacto G_d posee una medida de Haar única (medidas de Borel localmente finitas, invariantes bajo traslaciones en el sentido de teoría de grupos, que no son idénticamente cero). Denotaremos esta medida, normalizada, por μ . Podemos utilizar esta medida para obtener la distribución de una copia congruente aleatoria de K que se intersecciona con B_r . Así definimos una medida de probabilidad \mathbb{Q} en el espacio \mathcal{K} de cuerpos convexos en \mathbb{R}^d (con la topología usual) del siguiente modo:

$$\mathbb{Q} := \frac{\mu(\{g \in G_d : gK \cap B_r \neq \emptyset, gK \in A\})}{\mu(\{g \in G_d : gK \cap B_r \neq \emptyset\})}$$

para borelianos $A \in K$. De este modo, una copia congruente aleatoria de K que intersecta a B_r es, por definición, un cuerpo convexo aleatorio con distribución \mathbb{Q} .

Ahora la probabilidad, denotada por p , de que una copia congruente aleatoria de K que intersecta a B_r también intersecte a W queda bien definida. Si escribimos

$$\mu(K, M) := \mu(\{g \in G_d : gK \cap M \neq \emptyset\})$$

para cuerpos convexos K y M , esta probabilidad queda dada por

$$p = \frac{\mu(K, W)}{\mu(K, B_r)}. \quad (\text{C.1})$$

Para calcular $\mu(K, M)$, suponemos primero que K es una bola de radio ρ . Si la medida de Haar μ se normaliza adecuadamente, la medida de todos los movimientos g que llevan a K a intersectar a M es tan sólo la medida de todas las traslaciones que llevan el centro de K al cuerpo paralelo

$$M + B_\rho := \{m + b : m \in M, b \in B_\rho\}, \quad (\text{C.2})$$

y en consecuencia es el volumen de este cuerpo. Utilizando la fórmula de Steiner de la geometría convexa, este volumen es un polinomio de grado a lo más d sobre el parámetro ρ . Es conveniente escribirlo en la forma

$$\lambda_d(M + B_\rho) = \sum_{i=0}^d \rho^{d-i} \kappa_{d-i} V_i(M), \quad (\text{C.3})$$

donde λ_d es la medida de Lebesgue en \mathbb{R} y κ_j es el volumen de la bola unitaria j dimensional. Esto define volúmenes $V_0 \dots V_d$, los cuales son funcionales importantes sobre el espacio de cuerpos convexos.

Estos volúmenes, que surgen naturalmente al calcular la medida $\mu(K, M)$ para el caso especial $K = B_\rho$ resultan suficientes para manejar el caso general. La *fórmula cinemática principal* de la geometría integral, en su caso particular para cuerpos convexos, afirma que

$$\mu(K, M) = \sum_{i=0}^d \alpha_{di} V_i(K) V_{d-i}(M), \quad (\text{C.4})$$

con ciertas constantes explícitas α_{di} . De C.1 y C.4 obtenemos

$$p = \frac{\sum_{i=0}^d \alpha_{di} V_i(K) V_{d-i}(W)}{\sum_{i=0}^d \alpha_{di} V_i(K) V_{d-i}(B_r)}, \quad (\text{C.5})$$

que depende solamente de los volúmenes de K y W (y de r).

C.2. Segundo paso: dos cuerpos aleatorios

En el segundo paso, consideramos $m \geq 2$ cuerpos convexos aleatorios, independientes e idénticamente distribuidos, cada uno con distribución \mathbb{Q} , así que cada uno es una copia congruente de K que le pega a B_r . Para $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, denotamos por p_k la probabilidad de que el cuerpo fijo W sea intersectado por exactamente k de las copias congruentes aleatorias de K . Por la independencia, obtenemos la distribución binomial, así que

$$p_k = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k},$$

con p dada por C.5.

C.3. Tercer paso: m cuerpos aleatorios

En el tercer paso, elegimos m dependiendo del radio r , y haremos que r tienda a infinito, de tal suerte que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m}{\lambda_d(B_r)} = \gamma > 0$$

con una constante γ . Ya que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mu(K, B_r)}{\lambda_d(B_r)} = 1$$

obtenemos $\lim_{r \rightarrow \infty} mp = \gamma \mu(K, W) =: \theta$, y en consecuencia

$$\lim_{r \rightarrow \infty} p_k = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} \tag{C.6}$$

con

$$\theta = \gamma \sum_{i=0}^d \alpha_{di} V_i(K) V_{d_i}(W). \tag{C.7}$$

Hemos encontrado una distribución Poisson. Su parámetro se expresa explícitamente en términos de la constante γ , que puede interpretarse como la densidad de nuestro sistema aleatorio de cuerpos convexos, y los volúmenes de K y W .

C.4. Comentarios finales

Cabe mencionar que el desarrollo original para la obtención de C.6 y C.7 se hallan en un artículo por Giger y Hadwiger [36]. Schneider comenta que esta solución no es enteramente satisfactoria. Se calcula un límite de probabilidades y se encuentra una ley Poisson. Sin embargo,

esta ley Poisson no es interpretada todavía como la distribución de una variable aleatoria bien definida. Schneider indica que sería preferible, y necesario para las aplicaciones, un modelo que nos permita considerar desde el principio sistemas numerables de cuerpos convexos localizados de manera aleatoria, con propiedades de independencia adecuadas.

Esta meta se alcanza al utilizar procesos puntuales adecuados, tomando un proceso Poisson Θ de intensidad λ en \mathbb{R}^d , con distribución invariante bajo traslaciones. Elegimos un proceso puntual de Poisson ya que sus propiedades intrínsecas de independencia reflejan las hipótesis de independencia que se utilizaron en el paso dos. A cada punto del Θ se le asocia una copia congruente de K , del siguiente modo. Podemos suponer que $\Theta = \{\psi_1, \psi_2, \dots\}$. Sea $(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots)$ una sucesión de rotaciones aleatorias independientes de \mathbb{R}^d , cada una con distribución dada por la medida de probabilidad invariante sobre el grupo de rotaciones SO_d ; sea esta sucesión independiente de Θ . Entonces $\{\psi_i + \vartheta_i K, i = 1, 2, \dots\}$ define un campo aleatorio X de cuerpos convexos que son copias congruentes de K . Para este modelo se calcula la probabilidad, digamos q_k , del evento de la ventana de observación fija W sea intersectada por exactamente k cuerpos del campo X , obteniendo que

$$q_k = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta},$$

con θ de acuerdo a C.7.

De este modo, utilizaremos un proceso puntual de Poisson para determinar las localizaciones y el número de fracturas. En específico, el número de fracturas será una variable aleatoria Poisson y en efecto la distribución de las fracturas será uniforme en la ventana de estudio. Cabe mencionar que los segmentos de recta que representan las fracturas juegan el papel de K , y W es en nuestro caso un cuadrado unitario centrado en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en \mathbb{R}^2 .

La densidad crítica en modelos de conexión aleatoria

- Para $L > 0$, la función $g_L : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ queda definida por

$$g_L(x) = 1 - \prod_{z \in \mathbb{Z}^d} (1 - g(x + 2Lz)). \quad (\text{D.1})$$

Esta función será continua casi en todas partes (es decir, salvo por un conjunto de medida cero) para cada $L > 0$, con respecto a la medida de Lebesgue. Además, g_L aproxima a g en el siguiente sentido:

- Para cada $\epsilon > 0$ se tiene, con L suficientemente grande, que $|g_L(x) - g(x)| < \epsilon$ para cada $x \in B_L$.
- $\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{B_L} g_L = \int_{\mathbb{R}^d} g$.

B_L denota al rectángulo de lado L con centro en el origen.

Volvamos ahora a las densidades críticas definidas en la Sección 3.2.1, $\lambda_H(g)$ y $\lambda_T(g)$. Observemos que $\lambda_H(g)$ establece la transición de fase en términos de $\chi(\lambda)$, es decir, en términos del valor esperado de la cardinalidad de W . Por otra parte, $\lambda_T(g)$ relaciona la transición de fase con la probabilidad de que W sea infinito, $\theta(\lambda)$. Cabe preguntarse si es posible que estas dos densidades críticas coincidan, para que describir la transición de fase de nuestro modelo en términos de un sólo parámetro. Observemos que en el caso del modelo booleano estas densidades no tienen por qué coincidir, ya que un solo punto puede generar un volumen muy grande, y de este modo no existe una relación adecuada entre la cardinalidad de W y su tamaño. Este fenómeno no ocurre en el modelo de conexión aleatoria, y en esta sección se discutirá la demostración del siguiente resultado:

$$\lambda_H(g) = \lambda_T(g)$$

En cuanto a la relación entre las densidades críticas y la condición de integrabilidad, notemos que si $\int_{\mathbb{R}^d} g = \infty$, entonces con probabilidad uno las componentes conexas de nuestro modelo serán

infinitas. En consecuencia $\chi(\lambda) = \infty$ y $\theta(\lambda) > 0$ para cualquier $\lambda > 0$. Es decir que las densidades críticas son ambas cero (y en consecuencia, iguales). Por otra parte, si $\int_{\mathbb{R}^d} g = 0$, entonces con probabilidad uno las componentes conexas de nuestro modelo serán finitas. Es decir que nunca hay percolación, así que $\chi(\lambda) < \infty$ y $\theta(\lambda) = 0$ para cualquier $\lambda > 0$. En consecuencia, $\lambda_T(g)$ y $\lambda_H(g)$ son ambas infinito (es decir que no hay densidades críticas).

Para demostrar esta igualdad, daremos una aproximación discreta del modelo.

Primero se introduce un nuevo parámetro $\gamma \in (0, 1)$ al modelo, del siguiente modo: Una vez que tenemos una realización de nuestro proceso puntual, etiquetaremos con probabilidad γ cada uno de los puntos. El conjunto (aleatorio) de puntos etiquetados se denotará por G , y la idea detrás de estos puntos es que sirvan como sustitutos del “punto en el infinito” en el siguiente sentido: La idea de que W se infinito se representa con que W contenga a algún punto etiquetado. Es de esperar que entre más pequeño sea γ , más grande necesite ser W para contener un punto etiquetado. Denotemos por $\theta(\lambda, \gamma)$ la probabilidad de que W contenga un punto etiquetado, y de manera similar denotemos por $\chi(\lambda, \gamma)$ el valor esperado de la cardinalidad de W cuando no contiene ningún punto etiquetado. Es decir $\chi(\lambda, \gamma) = \mathbb{E}(|W| \cdot \mathbb{1}_{\{|W| < \infty\}})$. Recuperamos el modelo original cuando $\gamma \rightarrow 0$ en el siguiente sentido:

- I. $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \theta(\lambda, \gamma) = \theta(\lambda)$,
- II. $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \chi(\lambda, \gamma) = \mathbb{E}(|W| \cdot \mathbb{1}_{\{|W| < \infty\}})$.

Observemos que si $|W| = \infty$, entonces W contiene con probabilidad uno algún punto etiquetado. El proceso de etiquetar es completamente independiente de la estructura de percolación y entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} \theta(\lambda, \gamma) &= \mathbb{P}(\{W \cup G \neq \emptyset\}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(W \cup G = \emptyset) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(W \cup G = \emptyset \mid |W| = n) \mathbb{P}(|W| = n) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \gamma)^n \mathbb{P}(|W| = n). \end{aligned}$$

Al tomar el límite cuando γ tiene a cero de ambos lados de la igualdad, y tomando en cuenta la última expresión, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \theta(\lambda, \gamma) &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|W| = n) \\ &= 1 - \mathbb{P}(|W| < \infty) \\ &= \mathbb{P}(|W| = \infty) \\ &= \theta(\lambda). \end{aligned}$$

Para obtener el segundo resultado, escribimos

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda, \gamma) &= \mathbb{E}(|W| \cdot \mathbb{1}_{\{W \cup G = \emptyset\}}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(W \cap G = \emptyset, |W| = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(W \cap G = \emptyset \mid |W| = n) \mathbb{P}(|W| = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n(1 - \gamma)^n \mathbb{P}(|W| = n).
\end{aligned}$$

Si tomamos el límite cuando γ tiende a cero, tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\gamma \rightarrow 0} \chi(\lambda, \gamma) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(|W| = n) \\
&= \mathbb{E}(|W| \cdot \mathbb{1}_{\{|W| < \infty\}})
\end{aligned}$$

A continuación, utilizaremos percolación discreta en un rectángulo finito para aproximar este nuevo modelo (el modelo que incluye al parámetro γ). Consideremos que tenemos una realización del modelo. Lo que haremos es tomar rectángulos de lado $2L$ centrados en el origen, es decir $[-L, L]^d$, denotados por B_L . Estos rectángulos serán subdivididos en pequeños rectángulos de longitud 2^{-n} , con $n \in \mathbb{N}$. Luego colocaremos un vértice en el centro de cada uno de los rectángulos pequeños. Estos vértices se considerarán abiertos si el rectángulo correspondiente contiene al menos un punto del proceso puntual de Poisson original, y cerrados en otro caso. El siguiente paso es conectar los vértices. Aquí nos encontramos con un problema: Es necesario tener una noción de estacionariedad en este rectángulo finito, pero los puntos se hallan en distintas posiciones respecto a la frontera del rectángulo. Es aquí donde utilizaremos la función g_L definida previamente. Resultará que g_L es invariante bajo traslaciones en el rectángulo B_L . Así conectaremos dos vértices v y v' en B_L con probabilidad $g_L(v - v')$. Esto se hará para todos los vértices, independientemente de que estén abiertos o cerrados. Nuestra notación ahora debe considerar el papel que juegan los parámetros L y n : denotaremos la componente conexas que contiene al origen por C_L^n , y el conjunto de vértices etiquetados con probabilidad γ por G_L^n . Ahora podemos describir las funciones correspondientes a χ y a θ en nuestro rectángulo. Estas funciones también dependerán de L y n :

$$\theta_L^n(\lambda, \gamma) = \mathbb{P}(C_L^n \cap G_L^n \neq \emptyset),$$

$$\chi_L^n(\lambda, \gamma) = \mathbb{E}(|C_L^n| \cdot \mathbb{1}_{\{C_L^n \cap G_L^n = \emptyset\}}).$$

Sea M_L^n el número esperado de enlaces con un extremo en el origen. El siguiente paso consiste en utilizar la fórmula de Russo (que relaciona el número de enlaces pivotaes con la derivada de la función de percolación) para obtener las siguientes desigualdades diferenciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_L^n}{\partial \lambda} &\leq 2^{-nd} \theta_L^n \cdot \chi_L^n \cdot M_L^n, \\
\theta_L^n &\leq \gamma \frac{\partial \theta_L^n}{\partial \gamma} + (\theta_L^n)^2 + 2^{nd} (e^{-\lambda 2^{nd}} - 1) \theta_L^n \frac{\partial \theta_L^n}{\partial \gamma}.
\end{aligned}$$

El siguiente paso en el argumento es utilizar un proceso límite para pasar del modelo discreto al modelo continuo, aunque todavía dentro del rectángulo acotado. Para poder hacerlo necesitamos precisar qué es un modelo de conexión aleatoria en un volumen finito. Se toman definiciones análogas a todas las anteriores, con las modificaciones pertinentes. El modelo consiste en un proceso puntual de Poisson en el rectángulo B_L , y cualesquiera dos puntos del proceso están conectados de acuerdo a la función de conexión g_L , en lugar de g . La componente que contiene el origen se denota por W_L y el conjunto de vértices etiquetados será G_L . Por supuesto definimos $\theta_L(\lambda, \gamma)$ como la probabilidad de que $W_L \cap G_L \neq \emptyset$, y $\chi_L(\lambda, \gamma)$ como el tamaño esperado de W_L cuando $W_L \cap G_L = \emptyset$. Sucederá que entre más fina sea nuestra partición de B_L en términos de n (es decir, en rectángulos cada vez más pequeños), nuestro modelo discreto se aproximará al modelo continuo en el siguiente sentido:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_L^n &= \theta_L, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial \theta_L^n}{\partial \gamma} &= \frac{\partial \theta_L}{\partial \gamma}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial \theta_L^n}{\partial \lambda} &= \frac{\partial \theta_L}{\partial \lambda}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-nd} M_L^n &= \int_{B_L} g_L.\end{aligned}$$

Naturalmente, el siguiente paso consiste en tomar límites cuando L tiene a infinito, para llevar el modelo a todo el espacio. En este caso tendremos que

$$\begin{aligned}\lim_{L \rightarrow \infty} \theta_L &= \theta, \\ \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial \theta_L}{\partial \lambda} &= \frac{\partial \theta}{\partial \lambda}.\end{aligned}$$

Finalmente, se utiliza un argumento puramente analítico para mostrar que si se toma $\lambda_0 < \lambda_H$, y se supone que $\chi(\lambda_0) = \infty$. Si esto fuera cierto, las densidades críticas λ_H y λ_T serían, en efecto, distintas. Sin embargo, combinando todos los resultados anteriores, se prueba que de existir tal λ_0 existe también $\lambda_1 \leq \lambda_H$ tal que $\theta(\lambda_1) > 0$. Este hecho contradice claramente la definición de λ_H , que es el valor crítico para la función de percolación θ . De este modo se concluye que $\chi(\lambda_0) < \infty$ para cualquier $\lambda < \lambda_H$ y de este modo las densidades críticas son iguales, independientemente de cómo decidamos caracterizar la percolación del modelo.

Modelos dirigidos por procesos generales

Después de estudiar los modelos Poisson de conexión aleatoria, resulta natural investigar modelos dirigidos por procesos más generales. Muchos de los resultados obtenidos para modelos Poisson dependen fuertemente de su estructura de independencia. Sin embargo, las características verdaderamente fundamentales son la ergodicidad y la estacionariedad. La condición de estacionariedad no es tan fuerte, y permite trabajar con una clase muy amplia de procesos puntuales. Así que tiene sentido estudiar modelos dirigidos por procesos estacionarios.

Por otra parte, la ergodicidad también es necesaria para conservar muchas de las propiedades relevantes de los modelos. Desafortunadamente, pedir ergodicidad sería una verdadera pérdida de generalidad. Sin embargo existe una técnica para “exportar” resultados de procesos ergódicos a procesos estacionarios, conocida como *descomposición ergódica*. Esta técnica se presenta a continuación, así como nociones generales de cobertura y una discusión más general de la unicidad en modelos booleanos y de conexión aleatorio (cuando son dirigidos por procesos puntuales más generales).

E.1. Descomposición ergódica

Sea (Ω, \mathcal{F}) un espacio métrico y $T : \Omega \rightarrow \Omega$ una transformación. Denotaremos por \mathcal{M}_T al conjunto de todas las medidas de probabilidad μ sobre (Ω, \mathcal{F}) tales que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ es un sistema dinámico que preserva la medida ¹.

Se tendrá que \mathcal{M}_T es un conjunto convexo. Si μ_1 y μ_2 pertenecen a \mathcal{M}_T , entonces $\mu_i(T^{-1}F) = \mu_i(F)$, para cada $F \in \mathcal{F}$ y para $i \in \{1, 2\}$. Así que al tomar $\alpha \in [0, 1]$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} (\alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2)(T^{-1}F) &= \alpha\mu_1(T^{-1}F) + (1 - \alpha)\mu_2(T^{-1}F) \\ &= \alpha\mu_1(F) + (1 - \alpha)\mu_2(F) \quad , \\ &= (\alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2)(F) \end{aligned}$$

¹Un sistema dinámico preserva la medida cuando $\mu(T^{-1}F) = \mu(F)$ para cada $F \in \mathcal{F}$.

para cada $F \in \mathcal{F}$. De este modo $\alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2 \in \mathcal{M}_T$.

Además, las medidas ergódicas respecto a T serán precisamente los puntos extremos de \mathcal{M}_T . Este hecho puede corroborarse del siguiente modo: si suponemos que $\mu \in \mathcal{M}_T$ no es ergódica, entonces la σ -álgebra de conjuntos T -invariantes respecto a μ es no trivial. Así que existe $E \in \mathcal{F}$ de medida positiva ($0 < \mu(E) < 1$) tal que $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$. Definimos nuevas medidas μ_1 y μ_2 en términos de μ y E :

$$\begin{aligned}\mu_1(A) &= \frac{\mu(A \cap E)}{\mu(E)}, \\ \mu_2(A) &= \frac{\mu(A \cap E^c)}{\mu(E^c)}.\end{aligned}$$

Observemos que estas medidas consisten en la medida relativa de los elementos de \mathcal{F} respecto a E . A continuación veremos que estas medidas se preservan bajo T (es decir, pertenecen a \mathcal{M}_T):

$$\begin{aligned}\mu_1(T^{-1}A) &= \frac{\mu(T^{-1}A \cap E)}{\mu(E)} \\ &= \frac{\mu(T^{-1}A \cap T^{-1}E)}{\mu(E)} \\ &= \frac{\mu(T^{-1}(A \cap E))}{\mu(E)} \\ &= \frac{\mu(T^{-1}(A \cap E))}{\mu(E)} \\ &= \frac{\mu(A \cap E)}{\mu(E)} \\ &= \mu_1(A)\end{aligned}$$

El desarrollo para μ_2 es idéntico. Es decir que $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(\{A \cap E\} \uplus \{A \cap E^c\}) \\ &= \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) \\ &= \frac{\mu(E)\mu(A \cap E)}{\mu(E)} + \frac{\mu(E^c)\mu(A \cap E^c)}{\mu(E^c)} \\ &= \mu(E)\mu_1(A) + \mu(E^c)\mu_2(A)\end{aligned}$$

Es decir que si bien μ se supuso no ergódica, puede expresarse como suma de medidas ergódicas. Notemos que la suma es no trivial, pues $\mu(E)$ no puede ser cero. Más aún, μ_1 y μ_2 no pueden ser iguales por que $\mu_1(E) = \frac{\mu(E)}{\mu(E)} = 1$, y $\mu_2(E) = \frac{\mu(\emptyset)}{\mu(E^c)} = 0$. Entonces μ no es un punto extremo

de \mathcal{M}_T . Equivalentemente, si μ es un punto extremo, debe ser ergódico.

Ahora supongamos que μ no es un punto extremo de \mathcal{M}_T , pero sí ergódico. Ya que no es extremo debe existir $\alpha \in (0, 1)$ tal que $\mu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$ con $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T$ distintas entre sí. Esto implica inmediatamente que μ es absolutamente continua respecto a μ_i para $i \in \{1, 2\}$. Debido al teorema de Radón-Nikodym se tiene que existe una función f integrable respecto a μ tal que

$$\mu_i(A) = \int_A f d\mu \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Ya que μ_1 y μ_2 son T -invariantes, f también lo será. De acuerdo al resultado obtenido por Petersen en 1983, al ser f T -invariante, será casi seguramente una constante. Por otra parte, si tomamos $A \in \mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \alpha\mu_1(A) + (1 - \alpha)\mu_2(A) \\ &= \alpha \int_A f d\mu + (1 - \alpha) \int_A f d\mu \\ &= \int_A f d\mu \end{aligned}$$

Por otra parte, $\mu(A) = \int_A f d\mu$, así que $f \equiv 1$ casi seguramente. En consecuencia $\mu = \mu_1$ y entonces o $\alpha = 1$ o $\mu_1 = \mu_2$. En cualquier caso se tiene una contradicción.

Dado que los puntos extremos de un conjunto convexo de medidas invariantes coinciden exactamente con los ergódicos, es posible “descomponer” cualquier medida T -invariante en medidas ergódicas.

Por ejemplo, consideremos dos procesos puntuales de Poisson independientes, X_1 y X_2 en \mathbb{R}^d con densidades λ_1 y λ_2 , respectivamente, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Definamos un nuevo proceso puntual X del siguiente modo: será igual a X_1 con probabilidad $\frac{1}{2}$, e igual a X_2 con la misma probabilidad. Resultará que este proceso es estacionario pero no ergódico. Para comprobar este hecho consideremos el evento

$$E = \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-d} X([0, t]^d) = \lambda_1 \right\}.$$

Sabemos que si se tiene un proceso estacionario ergódico de densidad finita, el número promedio de puntos por unidad de volumen en $[0, t]^d$ converge casi seguramente a la densidad del proceso, cuando $t \rightarrow \infty$.

En el caso del evento E , tenemos el cociente $\frac{X([0, t]^d)}{t^d}$, donde el numerador es precisamente el número aleatorio de puntos en el rectángulo $[0, t]^d$, y el denominador es el volumen del rectángulo. Entonces este evento se puede leer como que el número promedio de puntos por unidad de volumen converga a λ_1 cuando $t \rightarrow \infty$, en otras palabras, que $X = X_1$. Entonces E tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ (es decir, es no trivial). Por otra parte, E será invariante bajo traslaciones y en consecuencia X

no puede ser ergódico.

Tenemos que si μ es la medida en (Ω, \mathcal{F}) correspondiente a X , y μ_1, μ_2 son las medidas correspondientes a X_1 y X_2 , respectivamente, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, S_t)$ es un sistema dinámico que preserva la medida pero no es ergódico. Sin embargo $\mu = \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2$. Más aún, ya que X_i es un proceso Poisson (y en consecuencia ergódico) se tiene que $(\Omega, \mathcal{F}, \mu_i, S_t)$ es un sistema ergódico para $i \in \{1, 2\}$.

Esta construcción se puede llevar a cabo de manera mucho más general. En 1976 Denker, Grillenberger y Sigmund probaron que si $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ es un sistema dinámico que preserva la medida, y f es una función real μ -integrable sobre Ω , entonces existe un conjunto $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) = 0$ tal que para cada $\omega \in \Omega \setminus E$ existe una medida ergódica μ_ω en (Ω, \mathcal{F}, T) tal que el mapeo $\omega \rightarrow \int_\Omega f d\mu_\omega$ es \mathcal{F} -medible, f es μ_ω -integrable y

$$\int_\Omega f d\mu = \int_{\Omega \setminus E} \int_\Omega f d\mu_\omega d\mu(\omega).$$

A la familia de medidas $\{\mu_\omega\}_{\omega \in \Omega \setminus E}$ se le conoce como la *descomposición ergódica* de μ . Notemos que no se requiere que las μ_ω 's sean distintas entre sí para distintos valores de ω . En el ejemplo anterior, $\mu_\omega = \mu_1$ cada vez que $X(A)(\omega) = X_1(A)(\omega)$ para todo $A \in \mathcal{F}$, y $\mu_\omega = \mu_2$ en otro caso.

Consideremos el caso particular en que $f = \mathbb{1}_A$ para algún $A \in \mathcal{F}$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_\Omega f d\mu &= \int_\Omega \mathbb{1}_A d\mu \\ &= \\ &= \int_A d\mu \\ &= \\ &= \mu(A) \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus E} \int_\Omega f d\mu_\omega d\mu &= \int_{\Omega \setminus E} \int_\Omega \mathbb{1}_A d\mu_\omega d\mu \\ &= \\ &= \int_{\Omega \setminus E} \int_A d\mu_\omega d\mu(\omega) \\ &= \\ &= \int_{\Omega \setminus E} \mu_\omega(A) d\mu(\omega). \end{aligned}$$

Así que

$$\mu(A) = \int_{\Omega \setminus E} \mu_\omega(A) d\mu(\omega).$$

Notemos que si se toma $A = \Omega$ en esta igualdad, vemos que para casi todo $\omega \in \Omega \setminus E$ se tiene que

$$\mu_\omega(\Omega) = 1.$$

A continuación se ejemplifica una aplicación de este caso particular. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un modelo booleano, donde $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ y $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$. ¿Qué forma tiene la descomposición ergódica para este modelo? Será necesario hacer uso del siguiente resultado de teoría ergódica: Supongamos que \mathbb{R}^d actúa ergódicamente en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ a través del grupo $\{S_x : x \in \mathbb{R}^d\}$, y supongamos que la σ -álgebra \mathcal{F} es generada por un conjunto numerable. Entonces existe un conjunto numerable de hiperplanos (que no necesariamente contienen al origen) tal que para todos los elementos $x \in \mathbb{R}^d$ que no pertenecen a ninguno de estos hiperplanos el sistema dinámico $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, S_x)$ preserva la medida y es ergódico.

Este resultado nos permitirá asegurar que existe $t_0 \in \mathbb{R}^d$ con $|t_0| = 1$ tal que $(\Omega_1, \mathcal{F}, P_1, S_{t_0})$ es un sistema dinámico ergódico que preserva la medida. Consideremos entonces el proceso puntual P_1 definido en $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que el proceso es ergódico bajo la traslación por e_1 . De acuerdo a los resultados previos, este proceso tiene una descomposición ergódica $\{P_{1,\omega_1}\}_{\omega_1 \in \Omega_1 \setminus E}$, donde $E \in \mathcal{F}$ es tal que $P_1(E) = 0$. Ya que $P_{1,\omega_1}(\Omega) = 1$, se tiene que P_{1,ω_1} es un proceso puntual ergódico. Ya sabemos que si el proceso que dirige el modelo es ergódico, entonces el modelo también es ergódico. Entonces el modelo booleano $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_{1,\omega_1}) \times (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ es ergódico. Concluimos que $\{P_{1,\omega_1} \times P_2\}_{\omega_1 \in \Omega_1 \setminus E}$ es la descomposición ergódica del modelo booleano $P_1 \times P_2$. En particular, la distribución de los radios es la misma para cada componente ergódica de la descomposición. En los modelos de conexión aleatoria sucede lo análogo: la función de conexión es la misma en casi todas las componentes de la descomposición ergódica.

Para modelos booleanos en específico, supongamos que se puede probar que para todos los modelos booleanos *ergódicos* con cierta propiedad Q , un evento A ocurre casi seguramente, y que nos enfrentamos con el problema de extender este resultado a modelos booleanos estacionarios en general. Dado cualquier modelo booleano estacionario que satisfaga la propiedad Q , utilizamos los desarrollos previos para concluir que cuando $P_\omega(A) = 1$ para todo $\omega \in E$, entonces $P(A) = 1$, siempre y cuando que casi todos los elementos en la descomposición ergódica de P satisfagan la propiedad Q .

Es en este sentido que la descomposición ergódica nos proporciona una técnica para extender resultados de modelos ergódicos a modelos estacionarios. Cabe notar que se debe tener cuidado al utilizar esta técnica.

E.2. Nociones básicas de cobertura

Antes de investigar las propiedades de percolación en modelos generales, se necesitan ciertos resultados que serán útiles para las pruebas posteriores, o interesantes por sí mismos.

Se sabe que en un modelo booleano de Poisson (X, ρ, λ) en \mathbb{R}^d , el espacio está completamente cubierto (casi seguramente) si y sólo si $\mathbb{E}[\rho^d] = \infty$. Este hecho también es cierto para modelos booleanos en general. Si (X, ρ) es un modelo booleano en \mathbb{R}^d y $\mathbb{E}^d = \infty$, entonces el espacio completo

está casi seguramente cubierto por bolas. Para explicar esta afirmación, consideraremos las componentes ergódicas de (X, ρ) bajo T_{e_1} . De acuerdo a lo discutido en la sección anterior, todas estas componentes tienen la misma distribución de radios ρ y podremos asumir de este punto en adelante que el modelo es ergódico respecto a T_{e_1} (lo cual implica ergodicidad respecto al grupo de todas las traslaciones).

Si X tiene densidad infinita, podemos “adelgazar” el proceso de alguna forma estacionaria para obtener un proceso de densidad finita. Si probamos la afirmación para este proceso, también será cierta para el proceso original de densidad infinita. Así que sin pérdida de generalidad podemos suponer que la densidad de X es finita e igual a 1. Sea C_n la bola con centro en el origen y radio $2^{\frac{n}{d}}$, con $n \in \mathbb{N}$ (C_n no es aleatoria). Notemos que $\mathcal{L}(C_{n+1}) = c_d 2^{n+1} = 2\mathcal{L}(C_n)$, donde c_d es una constante que depende solamente de la dimensión. Ya que el número promedio de puntos por unidad de volumen converge al parámetro del proceso, tenemos que para n suficientemente grande (dependiendo de la realización) $\frac{3}{4}V_n \leq X(C_n) \leq \frac{5}{4}V_n$, donde $V_n = \mathcal{L}(C_n)$. Entonces para n suficientemente grande, podemos escribir $X(C_{n+1} \setminus C_n) = X(C_{n+1}) - X(C_n) \geq \frac{3}{4}V_{n+1} - \frac{5}{4}V_n = \frac{6}{4}V_n - \frac{5}{4}V_n = \frac{1}{4}V_n$. En consecuencia, para n suficientemente grande, el “anillo” $C_n \setminus C_{n+1}$ contiene al menos $b_d 2^{n+1}$ puntos del proceso puntual, donde b_d es otra constante que depende de la dimensión.

Ahora bien, sea E_n el evento de que C_0 no esté completamente cubierto por una bola con centro en $C_n \setminus C_{n+1}$. Más aún, sea A_m el evento de que m sea el primer índice tal que $X(C_n \setminus C_{n+1}) \geq b_d 2^{n+1}$ para toda $n \geq m$. Se sigue que salvo por un conjunto de medida cero, $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ forma una partición del espacio de probabilidad. Entonces

$$\begin{aligned} P(\cap_{k=m}^{\infty} E_k \mid A_m) &\leq P(\cap_{k=m}^{\infty} \text{todas las bolas centradas en } C_n \setminus C_{n+1} \\ &\quad \text{tienen radio de máximo } 2^{\frac{k}{d} + 1} \mid A_m) \\ &\leq \prod_{k=m}^{\infty} P(\rho \leq 2^{\frac{k}{d} + 1})^{b_d 2^{k+1}}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de la independencia entre los radios y el proceso puntual. Es suficiente mostrar que dicha expresión vale cero. Para k suficientemente grande se tiene que $2^{\frac{k}{d} + 1} \leq 2^{\frac{k+1}{d}}$, así que si reemplazamos $k+1$ por k , para k suficientemente grande, cada término del producto será a lo más $P(\rho \leq 2^{\frac{k}{d}})^{b_d 2^k}$. Ahora bien, para m suficientemente grande se tiene

$$\begin{aligned} \prod_{k=m}^{\infty} P(\rho \leq 2^{\frac{k}{d}})^{b_d 2^k} &= \prod_{k=m}^{\infty} P(\rho^d \leq 2^k)^{b_d 2^k} \\ &\leq \prod_{k=m}^{\infty} \{P(\rho^d \leq 2^k) \cdot P(\rho^d \leq 2^k + 1) \dots P(\rho^d \leq 2^{k+1} - 1)\}^{b_d} \\ &= \left\{ \prod_{k=2^m}^{\infty} P(\rho^d \leq k) \right\}^{b_d} \\ &= \left\{ \prod_{k=2^m}^{\infty} (1 - P(\rho^d > k)) \right\}^{b_d}. \end{aligned}$$

Esta expresión es cero si y sólo si $\sum_{k=2^m}^{\infty} P(\rho^d > k) = \infty$, lo cual es equivalente a que $\mathbb{E}(\rho^d) = \infty$.

Aunque la afirmación converso no es cierta en general, lo es en el caso Poisson. Se tiene que si $\mathbb{E}(\rho^d) < \infty$ y $\lambda(X) < \infty$, entonces el valor esperado del número de bolas que intersectan una región acotada es finito. Es necesario pedir que la densidad de X sea finita: si X fuera de densidad infinita, entonces el valor esperado del número de puntos en una región acotada es infinito, y en consecuencia también lo es el valor esperado del número de bolas que la intersectan. Sin embargo, si sólo nos interesa que el número de bolas que intersectan una región acotada sea casi seguramente infinito, la condición de densidad finita no es necesaria. Estas ideas se resumen en la siguiente afirmación:

Si (X, ρ) es un modelo booleano en \mathbb{R}^d tal que la probabilidad de que todo el espacio esté cubierto es estrictamente menor a uno (y gracias a la ergodicidad, igual a cero), entonces cualquier región acotada en \mathbb{R}^d es intersectada por un número casi seguramente finito de bolas.

La estacionariedad del proceso nos permite comprobar esta afirmación únicamente en una región acotada. Por ejemplo, el disco unitario. Recordemos que en un modelo booleano de Poisson el espacio está casi seguramente cubierto por completo si y sólo si $\mathbb{E}(\rho^d) = \infty$. Este último resultado se fundamenta que el proceso Poisson es localmente finito, y que las traslaciones actúan ergódicamente. Los procesos estacionarios y ergódicos que dirigen los modelos booleanos comparten ambas características. Entonces, si una infinidad de bolas intersectara a nuestro disco unitario (casi seguramente) y trasladamos ese disco a lo largo y ancho de todo el espacio, tendríamos que con probabilidad uno el espacio estaría completamente cubierto, lo cual contradice la hipótesis.

Notemos que la ergodicidad es indispensable en este último argumento.

E.3. Clasificación de las componentes no acotadas en modelos booleanos

Consideraremos un modelo booleano (X, ρ) , donde X es un proceso puntual estacionario en \mathbb{R}^d y ρ es la variable aleatoria asociada al radio. El objetivo de esta sección es proporcionar una posible clasificación de la estructura topológica de las componentes no acotadas de este modelo. En esta sección C denota una componente que puede estar ocupada o vacía. Con frecuencia nos interesarán las componentes conexas del complemento de C , las cuales no tiene nada que ver con las componentes conexas del modelo. Para enfatizar esta distinción estas componentes en el complemento se llamarán *conjuntos* conexos. Entonces, el complemento de una componente (ocupada o vacía) del modelo booleano es la unión de sus conjuntos conexos.

Si C es una componente del modelo booleano, entonces su *interior* se define como

$$\text{int}(C) := \cup \{K : K \text{ es un conjunto conexo acotado en } \mathbb{R}^d \setminus C\}.$$

Su *cerradura* se define como

$$cl(C) := C \cup int(C),$$

y su *exterior* se define como

$$ext(C) := \cup\{K : K \text{ es un conjunto conexo no acotado en } \mathbb{R}^d \setminus C\}.$$

Si para dos componentes C_1 y C_2 se tiene que $C_1 \subseteq cl(C_2)$, decimos que C_2 *envuelve* a C_1 y escribimos $C_1 \prec C_2$. La relación \prec define un orden parcial sobre el conjunto de todas las componentes.

Resultará que las componentes no acotadas del modelo serán precisamente las componentes maximales respecto a \prec (casi seguramente). Gracias a la descomposición ergódica basta probar esta afirmación para modelos ergódicos. Supongamos que el espacio no está completamente cubierto (en caso contrario, la afirmación se trivializa). Gracias a la discusión de la sección anterior sabemos que un número casi seguramente finito de bolas intersecta cualquier región acotada. Entonces cualquier componente ocupada acotada se encuentra casi seguramente a una distancia estrictamente positiva de la componente ocupada más cercana. En particular, para cada componente ocupada acotada C existe $\epsilon_C > 0$ tal que la distancia de C a la componente ocupada más cercana es de al menos $2\epsilon_C$. Entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^d : 0 < d(x, cl(C)) < \epsilon_C\}$ es vacío. Aún más, este conjunto es conexo y es subconjunto de alguna componente vacía C' . En consecuencia, $C \prec C'$ y así C no puede ser maximal. Si C es una componente vacía acotada, entonces la frontera de $cl(C)$ pertenece a una componente ocupada y en consecuencia C no es maximal. En pocas palabras, ninguna componente acotada puede ser maximal. Entonces toda componente maximal es no acotada. Por otra parte, una componente no acotada es, por definición, maximal.

Ahora bien, en cualquier modelo booleano las realizaciones serán de una forma muy específica, en el sentido que se discute a continuación.

Una realización se denomina *completa* si para cada componente C existe una componente no acotada C' tal que $C \prec C'$. Por otra parte, una realización se conoce como *cascada infinita* cuando todas las componentes son acotadas. La cascada infinita se puede dar, por ejemplo, en un modelo booleano de Poisson en estado crítico (sabemos que casi seguramente no existen componentes ocupadas o vacías no acotadas).

Cualquier realización de un modelo booleano en general es con probabilidad uno o completa, o cascada infinita. De nuevo basta probar el resultado para modelos ergódicos, pues la descomposición ergódica nos permitirá extenderlo a modelos estacionarios. Supongamos que con probabilidad positiva existe una sucesión infinita de componentes acotadas $C_1 \prec C_2 \prec \dots$. Resultará que $\cup_{i=1}^{\infty} cl(C_i) = \mathbb{R}^d$. Para ver esto tomemos cualquier $x \in \mathbb{R}^d$ y fijemos alguna $y \in C_1$. Si $x \in C_n$ para alguna n , ya terminamos. En caso contrario, tomemos el segmento de recta entre x y y . Imaginemos que recorremos el segmento desde y (que está en C_1) hasta x . Conforme avanzamos contamos cuántas veces cambiamos de componente C_i . Si contamos una infinidad de cambios de componente significa que hay una infinidad de bolas intersectando una vecindad acotada alrede-

dor de nuestro segmento (debido a la convexidad de las bolas). Sin embargo, ya sabemos que con probabilidad uno esto no es posible en regiones acotadas. Entonces, con probabilidad uno, cambiaremos de componente C_i un número finito de veces, digamos m . Si cambiamos de componente m veces significa que a lo más llegamos a la componente C_{m+1} . Entonces $x \in cl(C_{m+1})$. Ya que x es arbitrario, tenemos que $\mathbb{R}^d \subseteq \cup_{i=1}^{\infty} cl(C_i)$.

Notemos que la propiedad de ser completo es invariante bajo traslaciones. En consecuencia, si el modelo booleano bajo consideración es ergódico, se tiene que las realizaciones son casi seguramente todas completas, o todas cascadas infinitas. De este punto en adelante se considera que todos los modelos booleanos tratados son completos.

Para caracterizar el comportamiento de la componente ocupada que contiene al origen W , necesitamos el concepto de N -rama. Una N -rama de W es un conjunto conexo no acotado y maximal de $W \cap (B_N)^c$, donde $B_N = [-N, N]$.

Tendremos que para cada $N > 0$, la probabilidad de que W tenga más de dos N -ramas es cero. En particular, en dos dimensiones, si V es la componente vacía que contiene al origen, entonces la probabilidad de que $ext(V)$ consista de más de dos conjuntos conexos es cero. Observemos que en dos dimensiones, cada N -rama no acotada origina un conjunto conexo no acotado del tipo opuesto. En consecuencia, en los modelos booleanos bidimensionales el número de componentes no acotadas ocupadas y vacías es casi el mismo. Para ser más precisos, diferirán a lo más por uno.

E.4. Unicidad en modelos booleanos

En el caso de los modelos booleanos dirigidos por procesos Poisson, sabemos que tanto la componente ocupada no acotada como la componente vacía no acotada son únicas. Sin embargo, esto no es cierto para modelos booleanos en general. Un ejemplo muy sencillo que ilustra este punto, consiste en considerar la retícula entera con vértices en $(z_1, 2 * z_2)$, con $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, trasladada por un vector aleatorio en $[0, 1] \times [0, 2]$. De este modo, la distancia horizontal entre los vértices es de una unidad, y la vertical de dos unidades. Tomamos una distribución de radios ρ tal que $\mathbb{P}(\rho = \frac{2}{3}) = 1$. En este modelo obtenemos una infinidad de componentes no acotadas, tanto ocupadas como vacías. Las condiciones de suficiencia que se obtienen conciernen al soporte de la variable aleatoria del radio, ρ , y condiciones sobre los momentos del proceso puntual X .

Para asegurar la unicidad de la componente ocupada no acotada, basta permitir que los radios tomen valores arbitrariamente grandes. Es decir:

Si (X, ρ) es un modelo booleano en \mathbb{R}^d y para cada $M > 0$ se tiene que $\mathbb{P}(\rho > M) > 0$, entonces existe a lo más una componente ocupada no acotada, casi seguramente.

Para la unicidad de la componente vacía la condición correspondiente es permitir que los radios tomen valores arbitrariamente pequeños. Formalmente:

Si (X, ρ) es un modelo booleano en y para cada $\epsilon < 0$ se tiene que $\mathbb{P}(\rho < \epsilon) > 0$, entonces existe a lo más una componente ocupada no acotada, casi seguramente. Sin embargo, esta última condición sólo es suficiente en dos dimensiones. Para asegurar la unicidad de la componente vacía no acotada en tres dimensiones o más es necesario pedir que ρ sea de soporte acotado (es decir que el conjunto donde ρ toma valores positivos sea acotado), y prohibir que el número de puntos en conjuntos acotados sea infinito. Esta última idea se formaliza con la siguiente notación:

$$\mathbb{E}(X(B_n^d)) < \infty, \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $B_n = [-n, n]^d$.

Las ideas teóricas detrás de estos resultados se discuten a continuación:

Primero notemos que basta probar los resultados para modelos ergódicos, gracias a la descomposición ergódica y a que la distribución de radios es la misma para cada componente ergódica.

Ya sabemos que en un modelo booleano ergódico el número de componentes ocupadas no acotadas es casi seguramente una constante. Debemos mostrar que dicha constante es cero o uno. Supongamos que dicha constante es al menos tres (notemos que esta suposición cubre el caso infinito). Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ el evento

$$E := \{ \text{hay al menos tres componentes ocupadas no acotadas intersectando a } B_n \text{ y } X(B_n) \geq 1 \}$$

tiene probabilidad positiva. A continuación se obtendrá una contradicción. Elegimos un punto de X en B_n e incrementamos el radio de la bola centrada en él hasta que intersecte al menos tres componentes no acotadas, podemos hacerlo pues el ρ es arbitrariamente grande con probabilidad positiva. De este modo, obtenemos una realización con una componente no acotada con tres M -ramas para M suficientemente grande. Dada la independencia entre los radios y el proceso puntual, y el hecho de que los radios tienen soporte acotado, esta nueva realización tiene probabilidad positiva. Sin embargo, ya sabíamos que la probabilidad de que una componente no acotada tenga más de dos N -ramas vale cero para cualquier $N > 0$.

A continuación suponemos que el número de componentes ocupadas no acotadas es finito, pero mayor a uno. Entonces existe un número $K \geq 2$ tal que el número de componentes ocupadas no acotadas es K , casi seguramente. El argumento es casi análogo al anterior: existe un rectángulo B_m que intersecta al menos a dos componentes no acotadas, y que al mismo tiempo contiene un punto de X con probabilidad positiva. Incrementando el radio de la bola centrada en este punto, podemos conectar dos componentes ocupadas no acotadas distintas. En la realización obtenida de este modo, tenemos un número estrictamente menor a K de componentes ocupadas no acotadas. De nuevo esta realización tendrá probabilidad positiva, lo cual contradice el hecho de que el número de componentes ocupadas no acotadas es K , con probabilidad uno.

Para el resultado correspondiente a componentes vacías, basta de nuevo discutir el caso ergódico. El argumento es muy similar al anterior, pero se debe tener más cuidado. Suponemos primero que el número de componentes vacías no acotadas es al menos tres. Entonces existen rectángulos B_n y B_N , con $n < N$, tales que con probabilidad positiva B_n intersecta al menos a tres componentes vacías no acotadas, y el mismo tiempo todas las bolas con centros en B_n están contenidas en B_N . El hecho de que las bolas puedan ser arbitrariamente pequeñas nos permite reducir el radio de todas las bolas centradas en B_n hasta que la intersección entre cualesquiera dos de ellas sea vacía. Todas las componentes no acotadas en la realización original que intersectaron a B_n están ahora conectadas entre sí a través de la componente vacía en B_n . Sin embargo, la configuración en B_N se mantiene igual. De este modo, este proceso no crea nuevas componentes vacías no acotadas. Sin embargo, hemos creado una componente vacía cuyo exterior consiste de tres conjuntos conexos no acotados, contradiciendo el resultado previo que afirma que la probabilidad de que esto suceda es cero.

El caso en el cual el número de componentes vacías no acotadas es finito pero mayor a uno se trata de manera completamente análoga.

E.5. Unicidad en modelos de conexión aleatoria

Ya se sabe que cuando un modelo de conexión aleatoria es dirigido por un proceso Poisson, sólo puede existir una componente no acotada. El hecho de que el proceso que dirige sea Poisson sólo se utiliza en dos pasos importantes. Primero, se utiliza el hecho de que podemos “agregar” libremente puntos a una configuración existente. Sin embargo, en el caso de que la función de conexión g tome valores estrictamente positivos ya no es necesario agregar puntos.

El segundo hecho sobre procesos puntuales de Poisson fundamental para la prueba de unicidad fue su densidad finita. Así que basta que el proceso X que dirige el modelo sea de densidad finita y que g tome siempre valores estrictamente positivos para decir que existe, casi seguramente, una sola componente infinita. Que g siempre tome valores positivos implica que cualesquiera dos puntos del proceso pueden estar conectados, incluso si se encuentran muy alejados.

Sin embargo, resultará que la condición de densidad finita no es indispensable. Si g es estrictamente positiva, y se supone que hay más de una componente no acotada, se hace una construcción geométrica idéntica y se muestra que con probabilidad positiva estas componentes no acotadas (en principio distintas) se conectan unas con las otras, generando una sola componente no acotada.

Gracias a aquel resultado sabemos que si (X, g) es un modelo de conexión aleatoria tal que g es estrictamente positiva, hay casi seguramente cero, una, o una infinidad de componentes no acotadas.

Ahora bien, hay que descartar el caso en el cual hay una infinidad de componentes no acotadas.

Para ello se hace uso del siguiente resultado auxiliar: Sea (X, g) un modelo de conexión aleatoria y sea G la gráfica (casi seguramente finita) obtenida de dicho modelo al tomar todos los puntos de X en el rectángulo B_n , y todas las conexiones entre ellos. Entonces el número esperado de componentes conexas en G está acotado por arriba por $g(2n\sqrt{d})$, que además es finito.

Para probar este resultado el modelo se condiciona a que haya exactamente k puntos en B_n , es decir $X(B_n) = k$. Luego se obtiene una cota que es independiente de k . Denotemos dichos puntos por x_1, \dots, x_k . Para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ sea G_i la gráfica que obtenemos al considerar solamente los puntos x_1, \dots, x_i y las conexiones entre ellos (con $G_k = G$). Denotamos por C_i el número de componentes conexas en G_i . Es inmediato que $\mathbb{E}(C_1) = 1$. Para estimar $\mathbb{E}(C_{n+1})$ notamos que agregar un vértice x_{n+1} a $\{x_1, \dots, x_n\}$ junto con sus posibles conexiones sólo puede aumentar el número de componentes conexas si x_{n+1} no está conectado a ninguno de los vértices anteriores. En consecuencia

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(C_{n+1}) &\leq \prod_{i=1}^n (1 - g(x_{n+1} - x_i)) (\mathbb{E}(C_n) + 1) \\ &\quad + (1 - \prod_{i=1}^n (1 - g(x_{n+1} - x_i))) \mathbb{E}(C_n) \\ &= \mathbb{E}(C_n) + \prod_{i=1}^n (1 - g(x_{n+1} - x_i)) \\ &\leq \mathbb{E}(C_n) + (1 - g(2n\sqrt{d}))^n, \end{aligned}$$

En el desarrollo anterior, tenemos que en el rectángulo B_n dos puntos cualesquiera pueden distar a lo más la longitud de la diagonal del rectángulo, que es $2n\sqrt{d}$. Recordando que g es decreciente obtenemos la última desigualdad.

En consecuencia

$$\mathbb{E}(C_{n+1}) \leq \sum_{i=0}^n (1 - g(2n\sqrt{d}))^i \leq g(2n\sqrt{d})^{-1},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que esta cota no depende de k , así que es válida para cualquier B_n , independientemente del valor $X(B_n)$.

Una vez que tenemos este argumento a la mano, vemos que podemos repetir el argumento de unicidad dado anteriormente: Si existiera una infinidad de componentes no acotadas, existiría una N tal que la componente no acotada que contiene al origen tiene más de dos N -ramas, lo cual es una contradicción.

E.6. Construcción de procesos ergódicos y estacionarios

Es momento de estudiar la construcción de procesos ergódicos y estacionarios. Esta construcción se utiliza específicamente para obtener contraejemplos que ilustran la necesidad de todas las condiciones discutidas en las secciones anteriores.

Se explicará la construcción en el caso bidimensional, ya que en dimensiones mayores se generaliza directamente. El espacio de probabilidad que utilizaremos es $\Omega = [0, 1]^3$, con la medida

de Lebesgue ordinaria denotada por \mathbb{P} . Un elemento ω en Ω se denota por (u, x) con $u \in [0, 1)^2$ y $x \in [0, 1)$. Este método nos permite construir un proceso puntual ergódico y estacionario para *casi* cada $A \subset \Omega$.

Definimos la siguiente transformación en Ω :

$$S_v(u, x) = (u + v, x),$$

siempre y cuando (u, x) y $(u + v, x)$ pertenezcan a Ω .

Notemos que S_v no está necesariamente definida para todo Ω . No podrá aplicarse a aquellos puntos que queden fuera de Ω al ser trasladados. A la larga este detalle perderá importancia.

Ahora queremos extender esta definición a un subconjunto más grande de Ω . Para este fin cortaremos Ω en cuatro rebanadas de $\frac{1}{4}$ de grosor:

$$A_1^k := [0, 1)^2 \times \left[\frac{k}{4}, \frac{k+1}{4} \right), \quad k \in \{0, \dots, 3\}.$$

El siguiente paso es acomodar las rebanadas de forma adyacente entre sí para formar un cuadrado de dos unidades por lado, y $\frac{1}{4}$ de grosor. Utilizaremos el mapeo $f_1 : \Omega \rightarrow \Omega_1$, con $\Omega_1 := [0, 2)^2 \times [0, \frac{1}{4})$.

$$f_1(a, b, x) = \begin{cases} (a, 1 + b, x) & \text{para } (a, b, x) \in A_1^0 \\ (1 + a, 1 + b, x - \frac{1}{4}) & \text{para } (a, b, x) \in A_1^1 \\ (a, b, x - \frac{1}{2}) & \text{para } (a, b, x) \in A_1^2 \\ (1 + a, b, x - \frac{3}{4}) & \text{para } (a, b, x) \in A_1^3 \end{cases}$$

La función f_1 simplemente toma la rebanada A_1^k y la mueve a $f_1(A_1^k)$. Ahora podemos extender la definición de S_v a Ω_1 :

$$S_v(f^{-1}(u, x)) = f^{-1}(u + v, x).$$

A continuación repetimos el proceso. Dividimos Ω_1 en cuatro rebanadas de $\frac{1}{16}$ de grosor:

$$A_2^k := [0, 2)^2 \times \left[\frac{k}{16}, \frac{k+1}{16} \right), \quad k \in \{0, \dots, 3\}.$$

Después acomodamos las rebanadas para obtener un cuadrado de lado cuatro y $\frac{1}{16}$ de grosor, mediante la función $f_2 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$, con $\Omega_2 := [0, 4)^2 \times [0, \frac{1}{16})$.

$$f_2(A_2^0) = [0, 2) \times [2, 4) \times [0, \frac{1}{16})$$

$$f_2(A_2^1) = [2, 4) \times [2, 4) \times [0, \frac{1}{16})$$

$$f_2(A_2^2) = [0, 2) \times [0, 2) \times [0, \frac{1}{16})$$

$$f_2(A_2^3) = [2, 4) \times [0, 2) \times [0, \frac{1}{16}).$$

Extendemos de nuevo la definición de S_v a Ω_2 :

$$S_v((f_2 \circ f_1)^{-1}(u, x)) = (f_2 \circ f_1)^{-1}(u + v, x).$$

Este proceso se continúa iterativamente, obteniendo conjuntos Ω_n y mapeos $f_n : \Omega_{n-1} \rightarrow \Omega_n$ para cada $n \geq 1$ (con $\Omega_0 = \Omega$).

En cada paso extendemos la definición de S_v .

El conjunto de puntos para los cuales S_v está bien definido ahora tiene medida de Lebesgue uno. Este hecho se ilustra en el siguiente argumento: Sea E_M el conjunto de puntos (u, x) de Ω para los cuales S_v está bien definida para toda $v \in \mathbb{R}^2$ con $|v| < M$. Más aún, consideremos los eventos

$$E_M^n := \{\omega \in \Omega : d(f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(\omega), \partial(\Omega)) \geq M\}.$$

El evento E_M^n considera los puntos de ω que distan al menos M de Ω_n después de n pasos en la iteración. Si ese es el caso para cierto ω , entonces seguirá distando al menos M de Ω_{n+1} en el siguiente paso de la iteración, es decir que $E_M^n \subset E_M^{n+1}$. De este modo

$$E_M = \cup_{n=1}^{\infty} E_M^n.$$

Por otra parte, $\mathbb{P}(E_M^n) = \frac{1}{2^{2n}}(2^n - 2M)^2$, lo cual tiende a uno cuando $n \rightarrow \infty$. Gracias a las propiedades de continuidad de la medida concluimos que $\mathbb{P}(E_M) = 1$.

Así que ya podemos considerar que S_v está bien definida.

Ahora definimos X_A para $A \subset \Omega$. Para cada $B \subset \mathbb{R}^2$ medible consideramos el conjunto

$$U_B(\omega) := \{u \in B : S_u(\omega) \in A\}.$$

Sólo necesitamos que A sea tal que $U_B(\omega)$ sea casi seguramente finito para cada B medible y acotado.

Definimos X_A mediante la relación

$$X_A(B)(\omega) = \text{card}(U_B(\omega)).$$

Es decir, hay un punto en x si y sólo si $S_x(\omega) \in A$. Bajo estas condiciones, X_A será estacionario y ergódico, ya que el grupo $\{S_v : v \in \mathbb{R}^2\}$ preserva la medida y actúa ergódicamente.

Si A es, por ejemplo, un conjunto numerable, entonces $X_A(\mathbb{R}^d) = 0$ casi seguramente.

Supongamos ahora que A es de la forma $(x_1, x_2) \times [0, 1]$ para $x_1, x_2 \geq 0$. El proceso obtenido de este modo consiste en la retícula entera \mathbb{Z}^2 trasladada por un vector aleatorio distribuido uniformemente en el cuadro unitario.

Podemos generalizar nuestra construcción permitiendo que al momento de apilar las rebandas quede entre ellas un marco, de grosor variable dependiendo del paso en que nos encontremos. Podríamos determinar este grosor mediante una sucesión de reales positivos $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde pedimos que la sucesión no crezca demasiado rápido (es decir, que crezca máximo polinomialmente respecto a n).

Códigos de *R*

En este apéndice se presentan los códigos *esenciales* para la implementación de los modelos desarrollados. No se incluyen códigos auxiliares empleados en el proceso de implementación (por ejemplo, funciones para representar gráficamente las redes de fracturas que fueron utilizadas para generar las figuras representativas de cada modelo). El orden en que se presentan las funciones representa a grandes rasgos el flujo de trabajo conjunto, pues cada función depende de las anteriores.

Es necesario instalar y cargar los paquetes *igraph*, para manipulación de grafos, y *circular* para simular variables aleatorias Von Mises.

Estos códigos se implementaron en *R* 3.1.0 (2014-04-10) "Spring Dance", en un equipo Dell Precision T5500 Workstation con procesador Intel®Xeon(R) @ 2.67GGz × 4 con sistema operativo Ubuntu 12.04 Precise Pangolin LTS.

F.1. Función de orientación

```
# This function determines the orientation of three points in a plane.  
# It takes as entry three two-dimensional vectors in cartesian coordinates,  
# and outputs either 1 (positive orientation) or -1 (negative orientation).  
# Since these points are assumed to come from a random point process, the  
# colinearity case is not considered, since the probability of this eventuality  
# is certainly zero.
```

```
orientation<-function(p,q,r){  
  
  k=(q[2] - p[2])*(r[1] - q[1])-(q[1] - p[1]) * (r[2] - q[2])  
  
  if(k>0) return(1)  
  
  else return(-1)  
}
```

 }

F.2. Código para determinar si dos fracturas se intersectan

```
# This function determines whether two fractures intersect, using the criteria of
# opposing orientations in the two-dimensional case. Since it is specifically designed
# to work with the rest of the functions in the model, it takes as parameter the tags
# of the fractures which correspond to the row they occupy in the endpoints matrix, as
# well as the matrix itself. It doesn't consider cases of colinearity, since given the
# measures defined the probability of this eventuality is zero.
```

```
inter.check<-function(a,b,m){

  c1<-as.vector(m[a,])
  p1<-c1[1:2]
  p1<-as.vector(p1)
  q1<-c1[3:4]
  q1<-as.vector(q1)

  c2<-as.vector(m[b,])
  p2<-c2[1:2]
  p2<-as.vector(p2)
  q2<-c2[3:4]
  q2<-as.vector(q2)

  if(orientation(p1, q1, p2)!= orientation(p1, q1, q2)
  && orientation(p2, q2, p1)!=orientation(p2, q2, q1)) return(1)

  else return(0)      }
```

F.3. Código para calcular la matriz de incidencias

```
# This functions calculates the incidence matrix of the simulated fracture network
# (in the graph theory sense). It takes as entry a matrix with four columns where the
# first and last two entries of every row are the cartesian coordinates of a single
# fracture's endpoints. Thus, the number of rows corresponds to the number of
# simulated
# fractures. It depends on the function inter.check to determine whether two fractures
```

```

# intersect. Finally, it produces a symmetric matrix of ones and zeroes, where a one
  (1)
# in any given entry indicates that the fractures corresponding to the entry's indices
# intersect. This function takes as parameter a four-row matrix containing the
  cartesian
# coordinates of the endpoints of a segment the fractures in a simulated network.
# Interpreting this network as a non-oriented random graph, where every fracture is a
  node
# and two nodes are connected if the corresponding fractures intersect,
  incidence.matrix()
# builds the symmetrical ones-and-zeroes matrix of adjacency. This matrix is later
  fed to
# the igraph package for further analysis.

incidence.matrix<-function(m){

  n<-nrow(m)

  in.mat<-mat.or.vec(n,n)

  for(i in 1:(n-1)){

    for(j in (1+i):n){

      if(inter.check(i,j,m)==1)in.mat[i,j]<-1

    }

  }

  in.mat<-in.mat+t(in.mat)

  return(in.mat)    }

```

F.4. Códigos para simular modelos con una familia

F.4.1. Código base

```

# This function simulates a fracture network in a 1x1 window, and checks whether the
# network percolates or not. In this version, the lengths of the fractures is fixed.
# This version of the code DOES NOT implement the previous data treatment discussed
# (eliminating isolated fractures and fractures within the network's body with a

```

```

# connectivity degree less than two). The user must specify the following parameters:

# - Intensity of the Poisson point process that determines both the number and
#   location of the fractures (lambda).
# - Constant length of the fractures (l).
# - Parameters mu (mu) and kappa (kappa) of the Von Mises distribution of angles,
#   which control the mean and the concentration of the fracture's angle, respectively.

# These are the necessary libraries:
# library(circular)
# library(igraph)

single.sim.nopb<-function(lambda,l,mu,kappa){

  # Generate the fracture data:

  n<-rpois(1,lambda) # number of fractures
  locs<-matrix(c(runif(n,0,1),runif(n,0,1)),ncol=2) # midpoint locations
  lengths<-rep(l,n) # constant length vector
  angles<-rvonmises(n,circular(mu),kappa) # angle vector

  # Use the previous data to calculate the endpoints of every fracture:
  endpts<-suppressWarnings(polar.to.rect(n,locs,lengths,angles))

  # Identify the fractures that intersect the boundary.
  # Edges for vertical percolation.
  lower.edge<-which(endpts[,2]<0|endpts[,4]<0)
  upper.edge<-which(endpts[,2]>1|endpts[,4]>1)

  # Edges for horizontal percolation.
  left.edge<-which(endpts[,1]<0|endpts[,3]<0)
  right.edge<-which(endpts[,1]>1|endpts[,3]>1)

  # Build the incidence matrix:
  in.mat<-incidence.matrix.nopb(endpts)

  # Feed the incidence matrix to igraph:
  G<-graph.adjacency(in.mat)

  # Use igraph's "cluster" function to find and store clusters:
  C<-clusters(G)

```

```

clust<-as.vector(clusters(G)[[1]])
clust.num<-C[[3]]

# Create a matrix to store percolation information and cluster sizes.
percolation.info<-cbind(mat.or.vec(clust.num,2),C[[2]])
colnames(percolation.info)<-c("V","H","Size")
rownames(percolation.info)<-c(1:clust.num)

# Check for vertical percolation:
if(length(left.edge)>0||length(right.edge)>0){

  for(i in 1:clust.num){

    current.cluster=which(clust==i)

    if(length(intersect(current.cluster,left.edge))>0

    && length(intersect(current.cluster,right.edge))>0) percolation.info[i,1]<-1

  }

}

#Check for horizontal percolation:
if(length(lower.edge)>0||length(upper.edge)>0){

  for(i in 1:clust.num){

    current.cluster=which(clust==i)

    if(length(intersect(current.cluster,lower.edge))>0

    && length(intersect(current.cluster,upper.edge))>0) percolation.info[i,2]<-1

  }

}

# Add connectivity information:

connectivity.info<-c(length(articulation.points(G)),graph.cohesion(G))

percolation.info<-percolation.info

return(list(percolation.info,connectivity.info)) }

```

F.4.2. Simulación múltiple

```
# This code implements the previous function (single.sim.nopb) multiple times in
# order to estimate the percolation function. It also organizes the information
# for an easily readable output.
```

```
multiple.sim<-function(N, lambda,l,mu, kappa, progBar=FALSE, experiment=TRUE){

  t<-proc.time()

  vertical.perco<-0

  horizontal.perco<-0

  multiple.vertical.clusters<-0

  multiple.horizontal.clusters<-0

  vertical.cluster.sizes<-vector()

  rel.vertical.cluster.sizes<-vector()

  horizontal.cluster.sizes<-vector()

  rel.horizontal.cluster.sizes<-vector()

  art.points<-vector()

  ver.connect<-vector()

  if(progBar) progress.bar <- txtProgressBar(min = 0, max = N, style = 3)

  for (i in 1:N){

    simulation=single.sim.nopb(lambda,l,mu,kappa)

    m=simulation[[1]]

    n=sum(m[,3])

    connect=simulation[[2]]

    rownames(m)=NULL
    colnames(m)=NULL
```

```

vert.clust.num=sum(m[,1])
hor.clust.num=sum(m[,2])

if (vert.clust.num>0) vertical.perco=vertical.perco+1

if (hor.clust.num>0) horizontal.perco=horizontal.perco+1

if (vert.clust.num>1) multiple.vertical.clusters=multiple.vertical.clusters+1

if (hor.clust.num>1) multiple.horizontal.clusters=multiple.horizontal.clusters+1

vertical.cluster.sizes=append(vertical.cluster.sizes,m[which(m[,1]==1),3])

rel.vertical.cluster.sizes=append(rel.vertical.cluster.sizes,m[which(m[,1]==1),3]/n)

horizontal.cluster.sizes=append(horizontal.cluster.sizes,m[which(m[,2]==1),3])

rel.horizontal.cluster.sizes=append(rel.horizontal.cluster.sizes,m[which(m[,2]==1),3]/n)

art.points=append(art.points,connect[1])

ver.connect=append(ver.connect,connect[2])

if(progBar)setTxtProgressBar(progress.bar, i)

}

# To avoid NaNs:

if(length(vertical.cluster.sizes)==0)vertical.cluster.sizes=0
if(length(horizontal.cluster.sizes)==0)horizontal.cluster.sizes=0
if(length(rel.vertical.cluster.sizes)==0)rel.vertical.cluster.sizes=0
if(length(rel.horizontal.cluster.sizes)==0)rel.horizontal.cluster.sizes=0

# Percolation Data

perco.data<-matrix(c(
  vertical.perco/N, mean(vertical.cluster.sizes), var(vertical.cluster.sizes),
  mean(rel.vertical.cluster.sizes),
  horizontal.perco/N, mean(horizontal.cluster.sizes), var(horizontal.cluster.sizes),
  mean(rel.horizontal.cluster.sizes)),

  byrow=TRUE,ncol=4)

if(!experiment){

```

```

rownames(perco.data)=c("Vertical Percolation","Horizontal Percolation")
colnames(perco.data)=c(" Estimated probability"," Mean size"," Size
  variance"," Relative size")}

# Multiple Percolating Clusters Data:
multiple.data<-matrix(c(multiple.vertical.clusters/N,multiple.horizontal.clusters/N),byrow=TRUE,n
if(!experiment){
colnames(multiple.data)=c(" Vertical"," Horizontal")
rownames(multiple.data)=c("Estimated Probability")}]

# Connectivity Data
connect.data<-matrix(c(round(mean(art.points)),var(art.points),mean(ver.connect),var(ver.connect)
if(!experiment){
colnames(connect.data)=c(" Articulation Points"," Variance"," Vertex
  Connectivity", " Variance")
rownames(connect.data)=c("Means")}]

#Parameters Data

parameters<-matrix(c(lambda,l,as.pi.fraction(mu),kappa),byrow=TRUE,ncol=4)
if(!experiment){
colnames(parameters)=c(" Intensity"," Length"," Mu"," Kappa")
rownames(parameters)=" "}

output<-list(parameters,proc.time()-t,perco.data,multiple.data,connect.data)

if(!experiment){
names(output)=c(" PARAMETERS","SIMULATION TIME","PERCOLATING CLUSTERS
  DATA","MULTIPLE PERCOLATING CLUSTERS","CONNECTIVITY DATA")}]

return(output)
}

```

F.5. Códigos para simular modelos de dos familias

F.5.1. Código base

```

two.fam.singlesim<-function(lambda1,lambda2,l1,l2,mu1,mu2,kappa1,kappa2,experiment=TRUE){

```

```

n1<-rpois(1,lambda1) # number of fractures
n2<-rpois(1,lambda2)

locs1<-matrix(c(runif(n1,0,1),runif(n1,0,1)),ncol=2) # midpoint locations
locs2<-matrix(c(runif(n2,0,1),runif(n2,0,1)),ncol=2) # midpoint locations

lengths1<-rep(l1,n1) # constant length vector
lengths2<-rep(l2,n2) # constant length vector

angles1<-rvonmises(n1,circular(mu1),kappa1) # angle vector
angles2<-rvonmises(n2,circular(mu2),kappa2) # angle vector

# Use the previous data to calculate the endpoints of every fracture:
endpts1<-suppressWarnings(polar.to.rect(n1,locs1,lengths1,angles1))
endpts2<-suppressWarnings(polar.to.rect(n2,locs2,lengths2,angles2))
endpts.all<-suppressWarnings(polar.to.rect((n1+n2),rbind(locs1,locs2),cbind(lengths1,lengths2),
rbind(angles1,angles2)))

# Identify the fractures that intersect the boundary.
# Edges for vertical percolation.
lower.edge1<-which(endpts1[,2]<0|endpts1[,4]<0)
upper.edge1<-which(endpts1[,2]>1|endpts1[,4]>1)

lower.edge2<-which(endpts2[,2]<0|endpts2[,4]<0)
upper.edge2<-which(endpts2[,2]>1|endpts2[,4]>1)

lower.edge.all<-which(endpts.all[,2]<0|endpts.all[,4]<0)
upper.edge.all<-which(endpts.all[,2]>1|endpts.all[,4]>1)

# Edges for horizontal percolation.
left.edge1<-which(endpts1[,1]<0|endpts1[,3]<0)
right.edge1<-which(endpts1[,1]>1|endpts1[,3]>1)

left.edge2<-which(endpts2[,1]<0|endpts2[,3]<0)
right.edge2<-which(endpts2[,1]>1|endpts2[,3]>1)

left.edge.all<-which(endpts.all[,1]<0|endpts.all[,3]<0)
right.edge.all<-which(endpts.all[,1]>1|endpts.all[,3]>1)

# Build the incidence matrix:
in.mat1<-incidence.matrix.nopb(endpts1)
in.mat2<-incidence.matrix.nopb(endpts2)
in.mat.all<-incidence.matrix.nopb(endpts.all)

# Feed the incidence matrix to igraph:

```

```

G1<-graph.adjacency(in.mat1)
G2<-graph.adjacency(in.mat2)
G.all<-graph.adjacency(in.mat.all)

# Use igraph's "cluster" function to find and store clusters:
C1<-clusters(G1)
clust1<-as.vector(clusters(G1)[[1]])
clust.num1<-C1[[3]]

C2<-clusters(G2)
clust2<-as.vector(clusters(G2)[[1]])
clust.num2<-C2[[3]]

C.all<-clusters(G.all)
clust.all<-as.vector(clusters(G.all)[[1]])
clust.num.all<-C.all[[3]]

# Create a matrix to store percolation information and cluster sizes.
percolation.info1<-cbind(mat.or.vec(clust.num1,2),C1[[2]])
colnames(percolation.info1)<-c("V", "H", "Size")
rownames(percolation.info1)<-c(1:clust.num1)

percolation.info2<-cbind(mat.or.vec(clust.num2,2),C2[[2]])
colnames(percolation.info2)<-c("V", "H", "Size")
rownames(percolation.info2)<-c(1:clust.num2)

percolation.info.all<-cbind(mat.or.vec(clust.num.all,2),C.all[[2]])
colnames(percolation.info.all)<-c("V", "H", "Size")
rownames(percolation.info.all)<-c(1:clust.num.all)
#####
# Check for vertical percolation (FIRST FAMILY):
if(length(left.edge1)>0||length(right.edge1)>0)
{ for(i in 1:clust.num1)
{ current.cluster=which(clust1==i)
  if(length(intersect(current.cluster,left.edge1))>0&&length(intersect(current.cluster,right.e
}
}

#Check for horizontal percolation:
if(length(lower.edge1)>0||length(upper.edge1)>0)
{ for(i in 1:clust.num1)
{ current.cluster=which(clust1==i)
  if(length(intersect(current.cluster,lower.edge1))>0&&length(intersect(current.cluster,upper.e
}
}
#####

```

```

# Check for vertical percolation (SECOND FAMILY):
if(length(left.edge2)>0||length(right.edge2)>0)
{ for(i in 1:clust.num2)
{ current.cluster=which(clust2==i)
  if(length(intersect(current.cluster,left.edge2))>0&&length(intersect(current.cluster,righ
}
}

#Check for horizontal percolation:
if(length(lower.edge2)>0||length(upper.edge2)>0)
{ for(i in 1:clust.num2)
{ current.cluster=which(clust2==i)
  if(length(intersect(current.cluster,lower.edge2))>0&&length(intersect(current.cluster,upp
}
}

#####
# Check for vertical percolation (SUPERIMPOSED FAMILY):
if(length(left.edge.all)>0||length(right.edge.all)>0)
{ for(i in 1:clust.num.all)
{ current.cluster=which(clust.all==i)
  if(length(intersect(current.cluster,left.edge.all))>0&&length(intersect(current.cluster,r
}
}

#Check for horizontal percolation:
if(length(lower.edge.all)>0||length(upper.edge.all)>0)
{ for(i in 1:clust.num.all)
{ current.cluster=which(clust.all==i)
  if(length(intersect(current.cluster,lower.edge.all))>0&&length(intersect(current.cluster,
}
}

#####
# Add connectivity information:

connectivity.info1<-c(length(articulation.points(G1)),graph.cohesion(G1))
percolation.info1<-percolation.info1

connectivity.info2<-c(length(articulation.points(G2)),graph.cohesion(G2))
percolation.info2<-percolation.info2

connectivity.info.all<-c(length(articulation.points(G.all)),graph.cohesion(G.all))
percolation.info.all<-percolation.info.all

#####

```

```
# Output for FIRST FAMILY
```

```
fam1.info<-c(0,0)
vertical.perco1<-sum(percolation.info1[,1])
horizontal.perco1<-sum(percolation.info1[,2])
if(vertical.perco1>0)fam1.info[1]=1
if(horizontal.perco1>0)fam1.info[2]=1
fam1.info=append(fam1.info,max(percolation.info1[,3]))
if(vertical.perco1==1||horizontal.perco1==1)fam1.info[3]=unique(c(percolation.info1[which(percol
fam1.info=append(fam1.info,connectivity.info1)
```

```
#####
# Output for SECOND FAMILY
```

```
fam2.info<-c(0,0)
vertical.perco2<-sum(percolation.info2[,1])
horizontal.perco2<-sum(percolation.info2[,2])
if(vertical.perco2>0)fam2.info[1]=1
if(horizontal.perco2>0)fam2.info[2]=1
fam2.info=append(fam2.info,max(percolation.info2[,3]))
if(vertical.perco2==1||horizontal.perco2==1)fam2.info[3]=unique(c(percolation.info2[which(percol
fam2.info=append(fam2.info,connectivity.info2)
```

```
#####
# Output for SUPERIMPOSED FAMILY
```

```
fam.all.info<-c(0,0)
vertical.perco.all<-sum(percolation.info.all[,1])
horizontal.perco.all<-sum(percolation.info.all[,2])
if(vertical.perco.all>0)fam.all.info[1]=1
if(horizontal.perco.all>0)fam.all.info[2]=1
fam.all.info=append(fam.all.info,max(percolation.info.all[,3]))
if(vertical.perco.all==1||horizontal.perco.all==1)fam.all.info[3]=unique(c(percolation.info.all[
))
fam.all.info=append(fam.all.info,connectivity.info.all)
```

```
lambda.all=lambda1+lambda2
```

```
if(!experiment){
  output<-matrix(c(lambda1,l1,mu1,kappa1,fam1.info,lambda2,l2,mu2,kappa2,fam2.info,lambda.all,(1
  colnames(output)=c(" Lambda", " Length", " Mu", " Kappa", " Vertical Perco", "
    Horizontal Perco", " Cluster Size", " Articulation Points", " Vertex
    Connectivity")
  rownames(output)=c("1st Family", "2nd Family", "Superimposed Family")
}
```

```
else {  
  output<-matrix(c(lambda1,l1,mu1,kappa1,fam1.info,lambda2,l2,mu2,kappa2,fam2.info,lambda.all  
}  
return(output)  
}
```

F.5.2. Simulación múltiple

```
two.fam.multiplesim<-function(N,lambda1,lambda2,l1,l2,mu1,mu2,kappa1,kappa2){  
  
  final.sim<-mat.or.vec(3,9)  
  
  #progress.bar <- txtProgressBar(min = 0, max = N, style = 3)  
  
  for(i in 1:N)  
  {current.sim<-as.matrix(two.fam.singlesim(lambda1,lambda2,l1,l2,mu1,mu2,kappa1,kappa2))  
    final.sim=final.sim+current.sim  
    #setTxtProgressBar(progress.bar, i)  
  }  
  return(final.sim/N)  
}
```

Bibliografía

- [1] J. Bear and B. Berkowitz, *Groundwater flow and pollution in fractured rock aquifers*, *Developments in Hydraulic Engineering*. No. vol. 4 in Developments series. Applied Science Publishers, 1987.
- [2] M. A. Díaz-Viera and O. Cázarez Candia, *Modelo matemático de aire fractura-medio poroso*, *Instituto Nacional del Derecho de Autor* **No.** (Noviembre, 2013).
- [3] I. Balberg, B. Berkowitz, and G. E. Drachler, *Application of a percolation model to flow in fractured hard rocks*, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* **96** (1991), no. B6 10015–10021.
- [4] P. Dietrich, *Flow and transport in fractured porous media*. Springer, 2005.
- [5] R. Casar-González, M. A. Díaz-Viera, V. Hernández-Maldonado, J. Méndez-Venegas, F. Mendoza-Torres, and P. Checa-Rojas, *Metodología para obtener modelos geológicos-petrofísicos basados en la aplicación de métodos geoestadísticos*, *Instituto Nacional del Derecho de Autor* **No.** (Julio, 2012).
- [6] M. A. Díaz-Viera, R. Casar-González, V. Hernández-Maldonado, J. Méndez-Venegas, F. Mendoza-Torres, and P. Checa-Rojas, *Metodología para la modelación geológica-petrofísica usando métodos geoestadísticos fractales*, *Instituto Nacional del Derecho de Autor* **No.** (Septiembre, 2013).
- [7] R. Casar-González, M. A. Díaz-Viera, J. Méndez-Venegas, V. Hernández-Maldonado, P. Checa-Rojas, and F. Mendoza-Torres, *Modelo geológico-petrofísico del análogo en afloramiento de yacimiento areno-arcilloso en acatepec, hidalgo*, *Reporte de Técnico de Investigación del Proyecto SENER-CONACyT No. 143935, IMP-UNAM-CIMAT* (Mayo, 2014).
- [8] F. Chung, P. Horn, and L. Lu, *Percolation in general graphs*, *Internet Mathematics* **6** (2009), no. 3 331–347, [<http://dx.doi.org/10.1080/15427951.2009.10390644>].

- [9] L. Russo, *On the critical percolation probabilities*, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* **56** (1981), no. 2 229–237.
- [10] A. Bagchi, *Lecture 5: Russo's formula*, *Curse: Percolation and Random Graphs IIT Delhi* (sep, 2007) [http://www.cse.iitd.ernet.in/~bagchi/courses/CSL866_07-08/lec5.ps].
- [11] R. Meester and R. Roy, *Continuum Percolation*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1996.
- [12] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction To Percolation Theory*. Taylor & Francis, 1994.
- [13] A. Hunt and R. Ewing, *Percolation Theory for Flow in Porous Media*. Lecture notes in physics. Springer, 2009.
- [14] M. Sahini and M. Sahimi, *Applications Of Percolation Theory*. Taylor & Francis, 1994.
- [15] V. Selyakov and V. Kadet, *Percolation Models for Transport in Porous Media: with Applications to Reservoir Engineering*. Theory and Applications of Transport in Porous Media. Springer, 1997.
- [16] K. Christensen, *Percolation theory*, *Imperial College London* (oct, 2002) [http://www.mit.edu/~levitov/8.334/notes/percol_notes.pdf].
- [17] I. Balberg, *Excluded-volume explanation of archie's law*, *Phys. Rev. B* **33** (Mar, 1986) 3618–3620.
- [18] S. Wilke, E. Guyon, and G. de Marsily, *Water penetration through fractured rocks: Test of a tridimensional percolation description*, *Journal of the International Association for Mathematical Geology* **17** (1985), no. 1 17–27.
- [19] E. Charlaix, E. Guyon, and S. Roux, *Permeability of a random array of fractures of widely varying apertures*, *Transport in Porous Media* **2** (1987), no. 1 31–43.
- [20] Y. Gueguen and J. Dienes, *Transport properties of rocks from statistics and percolation*, *Mathematical Geology* **21** (1989), no. 1 1–13.
- [21] R. Schneider and W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry*. Probability and Its Applications. Springer, 2008.
- [22] D. Stoyan, W. S. Kendall, and J. Mecke, *Stochastic geometry and its applications*. Wiley series in probability and mathematical statistics. Wiley, Chichester, W. Sussex, New York, 1987. Rev. translation of: Stochastische Geometrie.
- [23] J. Neveu, *Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*. Holden-Day Series in Probability and Statistics. Holden-Day, 1965.
- [24] J. M. y M. Diaz, *Geostatistical modeling of clay spatial distribution in siliciclastic rock samples using the plurigaussian simulation method*, *Geofisica internacional* (2013).

- [25] G. Matheron, *Random sets and integral geometry*. Wiley, 1975.
- [26] D. J. Daley and D. Vere-Jones, *An introduction to the theory of point processes. vol. I. , Elementary theory and methods*. Probability and its applications. Springer, New York, Berlin, Paris, 2003.
- [27] D. Daley and D. Vere-Jones, *An Introduction to the Theory of Point Processes: Volume II: General Theory and Structure*. An Introduction to the Theory of Point Processes. Springer, 2008.
- [28] C. Lantuejoul, *Geostatistical Simulation: Models and Algorithms*. Collezione legale Pirola. Springer, 2002.
- [29] T. van de Brug, *The poisson random connection model: Construction, central limit theorem and asymptotic connectivity*, master of science thesis, VU University Amsterdam, 2003.
- [30] E. Broman and F. Camia, *Large-n limit of crossing probabilities, discontinuity, and asymptotic behavior of threshold values in mandelbrot's fractal percolation process*, *Electron. J. Probab.* **13** (2008) no. 33, 980–999.
- [31] S. Mertens and C. Moore, *Continuum percolation thresholds in two dimensions*, *Phys. Rev. E* **86** (dec, 2012) 061109, [[arXiv:1209.4936](#)].
- [32] A. M. Gallego and A. Simó, *Random closed set models: Estimating and simulating binary images*, *Image Analysis and Stereology* **22** (2011), no. 3 133–145.
- [33] I. Balberg and N. Binenbaum, *Computer study of the percolation threshold in a two-dimensional anisotropic system of conducting sticks*, *Phys. Rev. B* **28** (Oct, 1983) 3799–3812.
- [34] J. C. Russ and R. DeHoff, *Practical Stereology*. No. v. 1 in Practical Stereology. Kluwer Academic/Plenum, 2000.
- [35] A. Baddeley and E. Vedel-Jensen, *Stereology for statisticians*. Chapman and Hall; London, 2005.
- [36] H. Giger and H. Hadwiger, *Über treffzahlwahrscheinlichkeiten im eikorperfeld.*, .