



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

LICENCIATURA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
FACULTAD DE CIENCIAS

Envolturas Convexas de Procesos de Lévy y su  
Aplicación a la Determinación Numérica de Opciones  
con Barrera

TESIS

Que para obtener el grado académico de:

Licenciatura en Matemáticas

presenta:

Elena Paniagua Avila

Directores de tesis:

Dr. Gerónimo Uribe Bravo



México, D.F.

Septiembre 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

- |   |  |
|---|--|
| <p>(1) Datos del alumno<br/>           Apellido paterno<br/>           Apellido materno<br/>           Nombre(s)<br/>           Teléfono<br/>           Universidad Nacional Autónoma<br/>           de México<br/>           Facultad de Ciencias<br/>           Carrera<br/>           Número de cuenta</p> | <p>(1) Datos del alumno<br/>           Paniagua<br/>           Avila<br/>           Elena<br/>           56 06 09 91<br/>           Universidad Nacional Autónoma<br/>           de México<br/>           Facultad de Ciencias<br/>           Matemáticas<br/>           304683541</p> |
| <p>(2) Datos del tutor<br/>           Grado<br/>           Nombre(s)<br/>           Apellido paterno<br/>           Apellido materno</p>  | <p>(2) Datos del tutor<br/>           Dr<br/>           Gerónimo Francisco<br/>           Uribe<br/>           Bravo</p>   |
| <p>(3) Datos del sinodal 1<br/>           Grado<br/>           Nombre(s)<br/>           Apellido paterno<br/>           Apellido materno</p>  | <p>(3) Datos del sinodal 1<br/>           Dra<br/>           Ana<br/>           Meda<br/>           Guardiola</p>  |
| <p>(4) Datos del sinodal 2<br/>           Grado<br/>           Nombre(s)<br/>           Apellido paterno<br/>           Apellido materno</p>  | <p>(4) Datos del sinodal 2<br/>           Dr<br/>           Ramsés Humberto<br/>           Mena<br/>           Chávez</p>  |
| <p>(5) Datos del sinodal 3<br/>           Grado<br/>           Nombre(s)<br/>           Apellido paterno<br/>           Apellido materno</p>  | <p>(5) Datos del sinodal 3<br/>           Dr<br/>           Juan Carlos<br/>           Pardo<br/>           Millán</p>   |
| <p>(6) Datos del sinodal 4<br/>           Grado<br/>           Nombre(s)<br/>           Apellido paterno<br/>           Apellido materno</p>  | <p>(6) Datos del sinodal 4<br/>           Dr<br/>           Fernando<br/>           Baltazar<br/>           Larios</p>   |
| <p>(7) Datos del trabajo escrito.<br/>           Título<br/>           Número de páginas<br/>           Año</p>   | <p>(7) Datos del trabajo escrito.<br/>           Envolventes convexas de procesos<br/>           de Lévy y su aplicación a la de-<br/>           terminación numérica del precio<br/>           de opciones con barrera.</p>   |



*A mis abuelos*

# Índice analítico

Introducción	1
Capítulo 1. Permutaciones aleatorias	7
1. Definición y propiedades.	7
2. PARU discreto y proceso del restaurante chino.	10
2.1. El proceso del restaurante chino	10
2.2. Proceso de asignación residual discreto	12
3. Muestreo sesgado por tamaño de los tamaños de los bloques de la permutación aleatoria.	14
4. Procesos con incrementos intercambiables	16
Capítulo 2. El minorante convexo de caminatas aleatorias	21
1. Preliminares	21
2. El minorante convexo	23
3. Primeras aplicaciones del estudio de minorantes convexos	24
4. Prueba de la primera descripción probabilística del minorante convexo de una caminata aleatoria	29
4.1. Transformación 3214	30
Capítulo 3. Minorante convexo de procesos de Lévy	35
1. Definiciones y propiedades	35
2. El minorante convexo de procesos de Lévy	39
Capítulo 4. Aplicaciones a la determinación numérica del precio de opciones con barrera	45
1. Productos financieros derivados	45
2. Algoritmos de simulación de procesos estables a tiempo fijo	47
3. Aplicaciones a la determinación numérica del precio de opciones con barrera	51

---

Anexo	57
Funciones Convexas	57
Bibliografía	63
Agradecimientos	65

# Introducción

En los últimos años el mercado de futuros y opciones ha ganado mucha importancia en el mundo financiero. Vivimos en un momento en el que se ha vuelto vital para todos los profesionales en finanzas entender cómo funcionan los mercados, cómo se usan y cómo se determinan los precios de los activos.

Sin embargo, en los mercados financieros las decisiones que se toman poseen incertidumbre acerca de los posibles resultados. Las matemáticas, en especial la probabilidad y los procesos estocásticos son las ramas de la ciencia que mejor nos ayudan a entender el comportamiento de la teoría financiera.

Los procesos de Lévy han jugado un papel central en la teoría de matemáticas financieras y estadística, y más recientemente en la teoría de riesgos de seguros. La idea básica en matemáticas financieras es que logaritmo del valor inicial de un activo sigue la misma dinámica que un proceso de Lévy.

En la Teoría de valuación, para calcular el precio de opciones, una cantidad clave de gran interés es la distribución conjunta de la posición actual y del máximo y mínimo del proceso de Lévy a un tiempo fijo, para esto la Teoría de Fluctuaciones nos brinda las bases teóricas para su desarrollo.

La Teoría de fluctuaciones tiene como objeto de estudio la relación entre un proceso de Lévy y su mínimo  $m_t$  y su máximo  $M_t$  acumulativos. Uno de los primeros en desarrollar las bases de la teoría de fluctuaciones para caminatas aleatorias fue el matemático danés Erik Sparre Andersen. A continuación daremos algunos ejemplos generales de los resultados descritos en sus artículos, y que son de gran interés para este trabajo.

Sea  $S$  una caminata aleatoria, fijamos  $n$  y definimos lo siguiente:



- la cantidad de sumas parciales positivas

$$A_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{S_i > 0}$$

- el mínimo valor que toma la caminata aleatoria entre 0 y  $n$

$$m_n = \min_{m \leq n} S_m$$

- el máximo valor que toma la caminata aleatoria entre 0 y  $n$

$$M_n = \max_{m \leq n} S_m$$

- el primer instante entre 0 y  $n$  en que la caminata es igual al mínimo

$$\rho_n = \min\{m \leq n : S_m = m_n\}$$

- el primer instante entre 0 y  $n$  en que la caminata es igual al máximo

$$\rho^n = \max\{m \leq n : S_m = M_n\}$$

Andersen también fue uno de los pioneros en el estudio del minorante convexo de las caminatas aleatorias. De nuevo, sea  $S$  una caminata aleatoria de longitud  $n$ . Utilizando una interpolación lineal de las cantidades  $(S_n, n \in \mathbb{N})$  obtenemos una función aleatoria definida en  $[0, \infty)$ . Abusando de la notación denotaremos por  $S_t$  el valor de la interpolación. Sabemos que siempre existe una función convexa menor o igual a  $S$  en  $[0, n]$  y en efecto,  $c(t) = m_n$  para  $t \in [0, n]$  es una de dichas funciones. Recordemos también que el supremo de una familia de funciones convexas acotadas superiormente en un punto es una función convexa. Entonces definimos al minorante convexo de  $S$  en  $[0, n]$  como la función convexa más grande que es menor o igual a  $S$  en  $[0, n]$ , es decir, la función  $C_t$  dada por

$$C_t = \sup\{c(t) : c \text{ es convexa y } c \leq S \text{ en } [0, n]\}$$

es convexa, acotada superiormente por  $S$  en  $[0, n]$  y si  $c$  es convexa acotada superiormente por  $S$  en  $[0, n]$ , entonces  $c \leq C_t$ . Una forma intuitiva de imaginar al minorante convexo de una caminata aleatoria es pensar en que amarramos una cuerda en los extremos inicial y final de la caminata, dejando que cuelgue por debajo para luego tensarla. El resultado es una función lineal por pedazos.

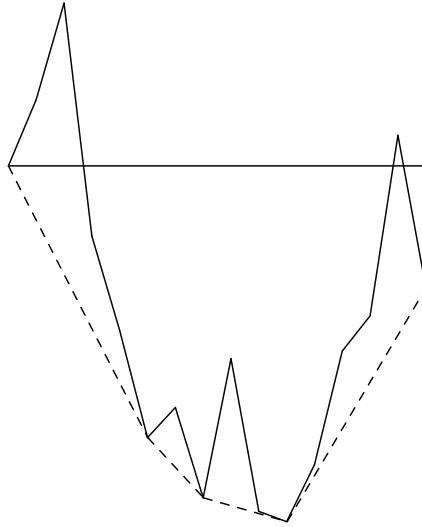


FIGURA 0.1. Minorante convexo de una caminata aleatoria en un intervalo de tiempo finito.

Generaremos una cantidad aleatoria  $F_n$  de puntos de contacto  $K_1, \dots, K_{F_n}$  que dividen al minorante convexo en lo que llamamos caras. Uno de los resultados de Andersen dice que bajo la hipótesis de continuidad en la distribución de saltos, la distribución de la cantidad de caras  $F_n$  no depende de la distribución de  $S_1$ . Además veremos que  $F_n$  es de orden  $\log(n)$ .

Una de las razones por las cuales el estudio de minorantes convexos es interesante dentro de la teoría de fluctuaciones es que es más fácil minimizar al minorante convexo que a la caminata aleatoria, ya que su derivada es no decreciente. Por lo tanto, es suficiente ver en qué punto el minorante convexo tiene la primera pendiente no negativa para encontrar el lugar en el que se minimiza la caminata aleatoria, es decir, vemos que

$$\rho_n = \sum_i [K_i - K_{i-1}] \mathbb{1}_{\frac{S_i}{i} < 0}$$

si  $K_0 = 0$ . De manera similar tenemos una representación para el mínimo de la caminata aleatoria:

$$m_n = \sum_i [C_{K_i} - C_{K_{i-1}}] \mathbb{1}_{\frac{s_i}{i} < 0}.$$

El objetivo de este trabajo es presentar una transformación trayectorial del proceso de Lévy que permite describir a su minorante convexo. Dicha transformación fue descrita por primera vez en [AP10] para caminatas aleatorias y fue analizada para procesos de Lévy y movimiento browniano en [PUB10]. Tomando [AP10] como referencia, nos basaremos en un punto de vista combinatorio, utilizando la transformación de Veervat, para estudiar la antes mencionada transformación trayectorial y analizaremos algunas consecuencias y aplicaciones numéricas sencillas pero de gran interés. Como se dice en [PUB10], esta transformación trayectorial proporciona un enfoque distinto a la teoría de fluctuaciones de procesos de Lévy, en particular de caminatas aleatorias, ya que explica la interacción e independencia de la caminata aleatoria y su mínimo.

En el primer capítulo de este trabajo sentaremos las bases de teoría combinatoria de caminatas aleatorias, en particular las permutaciones aleatorias y las particiones generadas por éstas, necesarias para entender y analizar los resultados que se presentarán posteriormente. Daremos una descripción detallada, en términos de permutaciones aleatorias, de un proceso conocido como el Proceso del Restaurante Chino, el cual, aunque es sencillo, aporta resultados de vital importancia para este trabajo.

En el segundo capítulo definiremos y analizaremos la teoría de minorantes convexos para caminatas aleatorias con distribución de salto continua y espacio de estados discreto. Daremos una representación geométrica y probabilística del minorante convexo de una caminata aleatoria y describiremos un importante resultado basado en una transformación trayectorial de la caminata aleatoria de  $n$  pasos. Esta transformación da lugar a una nueva representación de  $m_n$  y  $M_n$ , y el lugar en el que se alcanzan. Las nuevas representaciones permiten estudiar teóricamente o mediante simulaciones numéricas, a dichas variables sin la necesidad de generar toda la trayectoria de la caminata aleatoria.

Como extensión del segundo capítulo, en el tercer capítulo introduciremos el concepto de minorantes convexos de procesos de Lévy, y daremos la representación análoga continua de los resultados presentados en el capítulo previo. Nos enfocaremos principalmente en los procesos

---

$\alpha$ -estables, los cuales poseen propiedades particulares que nos ayudan al estudio de su minorante convexo.

Por último, en el cuarto capítulo desarrollaremos ciertas simulaciones numéricas para las aplicaciones financieras. Consideraremos el siguiente ejemplo, sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  un proceso de Lévy y definimos  $\bar{X}_t = \sup_{s \leq t} X_s$ , entonces la valuación del precio de una opción con barrera se reduce calcular esperanzas de la forma  $\mathbb{E}[f(x + X_t) \mathbb{1}_{\{x + \bar{X}_t > b\}}]$  para una  $f(x)$  adecuada y un umbral  $b > 0$ . Tomando  $f(x) = (K - e^x)^+$  la esperanza anterior se relaciona con el valor de una put "up-and-in". Los algoritmos de simulación serán desarrollados utilizando los resultados sobre teoría de fluctuaciones y minorantes convexos enunciados a lo largo de este trabajo.



## CAPÍTULO 1

# Permutaciones aleatorias

En este capítulo analizaremos las propiedades básicas de permutaciones aleatorias uniformes y las particiones que estas generan. El objetivo principal es estudiar las propiedades combinatorias de caminatas aleatorias y procesos de Lévy que se expresan en términos de permutaciones aleatorias. Primero, repasaremos los conceptos y propiedades de permutaciones aleatorias. En particular, la invarianza ante permutaciones fijas y la relación de esta propiedad con la medida de Haar.

Posteriormente, introduciremos el proceso del Restaurante Chino y la interpretación de su construcción en términos de permutaciones aleatorias. Daremos una descripción de un proceso de asignación residual uniforme (PARU) discreto. Finalmente, daremos una representación del PARU basada en un muestreo sesgado por los tamaños de los ciclos de la permutación aleatoria.

### 1. Definición y propiedades.

En esta sección introduciremos los conceptos y propiedades de permutaciones aleatorias importantes para nuestro estudio posterior.

DEFINICIÓN 1.1. Sea  $P_n$  el conjunto de todas las permutaciones de  $[n] := \{1, \dots, n\}$ . Sea  $\Pi \in P_n$ . Decimos que  $\Pi$  es una *permutación aleatoria uniforme* si para cualquier otro elemento  $\tau \in S_n$  se tiene que

$$\mathbb{P}(\Pi = \tau) = \frac{1}{n!}$$

DEFINICIÓN 1.2. Una partición de un número entero positivo  $n$  es una sucesión de enteros positivos  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  tal que

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \text{ y } \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = n.$$

DEFINICIÓN 1.3. Sea  $\Pi_n \in P_n$ . A los tamaños de los ciclos de  $\Pi_n$  se les conoce como la *partición de  $n$  generada por  $\Pi_n$* .

PROPOSICIÓN 1.1. Sea  $\Pi \in P_n$  una permutación uniforme. Sea  $C_n^1$  el ciclo de  $\sigma$  que contiene a 1. Entonces

$$\mathbb{P}(C_n^1 = m) = \frac{1}{n},$$

para  $1 \leq m \leq n$ .

DEMOSTRACIÓN.

$$\mathbb{P}(C_n^1 = m) = \sum_{\substack{\{i_1, \dots, i_{m-1}\} \\ i_0=1 \\ i_j \neq i_k, \forall j \neq k}} \mathbb{P}(\Pi 1) = i_1, \dots, \Pi(i_{m-2}) = i_{m-1}, \Pi(i_{m-1}) = 1) \quad (1.1)$$

Primero calculamos el número total de permutaciones de  $\tau \in P_n$  que cumplen con la siguiente configuración:

$$\tau(1) = i_1, \dots, \tau(i_{m-2}) = i_{m-1}, \tau(i_{m-1}) = 1$$

Cada una de estas permutaciones se obtiene fijando  $m$  valores y permutando libremente los restantes. Por lo tanto existen

$$(n - m)!$$

permutaciones con ésta configuración.

La siguiente parte de la ecuación 1.1 nos dice de cuantas formas podemos escoger los distintos  $m-1$  elementos de  $[n]$ , es decir, una vez escogidos los  $m$  elementos, de cuantas maneras distintas se pueden ordenar para formar el ciclo. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_n^1 = m) &= \frac{(n - m)!}{n!} \#\{(i_0, \dots, i_{m-1}) : i_0 = 1, i_j \neq i_k, \forall j \neq k\} \\ &= \frac{(n - m)!}{n!} \cdot (n - 1)(n - 2) \cdots (n - m + 1) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el tamaño del ciclo de  $\sigma$  que contiene a 1 tiene probabilidad  $1/n$  de ser de tamaño  $m$ , independiente del valor de  $m$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 1.2. Sea  $\Pi \in P_n$  una permutación uniforme. Entonces para toda  $\tau \in P_n$ , se tiene que  $\Pi \circ \tau$  es una permutación uniforme.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\tilde{\tau} \in P_n$  una permutación arbitraria. Nos interesa saber

$$\mathbb{P}(\Pi \circ \tau = \tilde{\tau}).$$

Componiendo a la derecha con  $\tau^{-1}$  por ambos lados de la igualdad tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Pi \circ \tau = \tilde{\tau}) &= \mathbb{P}(\Pi \circ \tau \circ \tau^{-1} = \tilde{\tau} \circ \tau^{-1}) \\ &= \mathbb{P}(\Pi = \tilde{\tau} \circ \tau^{-1}) \end{aligned}$$

Como  $\Pi$  es una permutación uniforme, entonces

$$\mathbb{P}(\Pi \circ \tau = \tilde{\tau}) = 1 \frac{1}{n!}.$$

Por lo tanto la composición ante permutaciones fijas es invariante.  $\square$

DEFINICIÓN 1.4. Sea  $\mu$  una medida de probabilidad en  $P_n$ . Decimos que  $\mu$  es una *Medida de Haar derecha* si cuando  $\Pi$  es una permutación aleatoria con distribución  $\mu$  se tiene que

$$\Pi \circ \tau \stackrel{d}{=} \Pi$$

para toda  $\tau \in P_n$ .

PROPOSICIÓN 1.3. *Existe una única medida de Haar derecha y es la medida uniforme.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\Pi$  una permutación cuya distribución es de Haar. Como  $\Pi \circ \tau \stackrel{d}{=} \Pi$ , para toda  $\tau \in P_n$ , entonces

$$\mathbb{P}(\Pi = \tau) = \mathbb{P}(\Pi \circ \tau = \tau)$$

Componiendo a la derecha ambos lados de la igualdad con  $\tau^{-1}$  tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Pi \circ \tau = \tau) &= \mathbb{P}(\Pi \circ \tau \circ \tau^{-1} = \tau \circ \tau^{-1}) \\ &= \mathbb{P}(\Pi = \text{Id}) \end{aligned}$$

donde  $\text{Id}$  es la permutación identidad. En conclusión

$$\mathbb{P}(\Pi = \tau) = \mathbb{P}(\Pi = \text{Id})$$

para toda  $\tau \in P_n$ . Por lo tanto para toda  $\tau \in P_n$

$$1 = \sum_{\tilde{\tau} \in P_n} \mathbb{P}(\Pi = \tilde{\tau}) = n! \mathbb{P}(\Pi = \text{Id}) = n! \mathbb{P}(\Pi = \tau).$$



$$\mathbb{P}(\Pi = \text{Id}) = \frac{1}{n!}. \quad \square$$

## 2. PARU discreto y proceso del restaurante chino.

En esta sección definiremos un proceso muy particular, conocido como el proceso del restaurante chino, el cual define una sucesión de permutaciones aleatorias. Detallaremos sus propiedades y su semejanza en distribución con un proceso de asignación residual. Finalmente daremos un resultado en el cual integraremos la importancia de ambos procesos.

**2.1. El proceso del restaurante chino.** Un restaurante inicialmente vacío cuenta con un número ilimitado de mesas redondas numeradas  $1, 2, \dots$ , cada una capaz de sentar a un número ilimitado de clientes. Los clientes, numerados  $1, 2, \dots$ , llegan uno a uno y se sientan en las mesas de acuerdo al siguiente orden aleatorio.

**Orden Aleatorio:** La persona 1 se sienta en la mesa 1. Para  $n \geq 1$  supongamos que han entrado  $n$  clientes al restaurante y que están sentados en cierto orden, con al menos un cliente sentado en cada una de las  $j$  mesas, para  $j$  en  $1 \leq j \leq k$ , donde  $k$  es el número de mesas ocupadas por los primeros  $n$  clientes en entrar al restaurante. El cliente  $n + 1$  escoge con igual probabilidad sentarse en cualquiera de los  $n + 1$  lugares: a la izquierda del cliente  $j$  para algún  $1 \leq j \leq n$ , o sólo en la mesa  $k + 1$ .

Definimos la permutación aleatoria  $\sigma_n : [n] \rightarrow [n]$  asociada al *Chinese restaurant process* como sigue: decimos que  $\sigma_n(i) = j$  si el cliente  $i$  está sentado a la derecha del cliente  $j$ . (En caso de que el cliente  $i$  se encuentre sentado sólo, definimos  $\sigma_n(i) = i$ .) Así, las distribuciones de las distintas mesas corresponden a los ciclos de la permutación  $\sigma_n$ .

**DEFINICIÓN 1.5.** Sea  $(\pi_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de permutaciones aleatorias. Se dice que son *permutaciones aleatorias consistentes* si cumplen con las siguientes condiciones:

- i)  $\pi_n$  es una permutación aleatoria uniforme en  $[n]$  para cada  $n$
- ii) Para cada  $n$ , si  $\pi_n$  se escribe como producto de ciclos, entonces  $\pi_{n-1}$  se obtiene de  $\pi_n$  mediante la eliminación de  $n$  de su ciclo.

**EJEMPLO 1.1.** Si  $\pi_5 = (134)(25)$  entonces  $\pi_4 = (134)(2)$

PROPOSICIÓN 1.4. *La permutación asociada a la construcción del proceso del restaurante chino es consistente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\sigma_n$  la permutación asociada al proceso del restaurante chino. Para demostrar que es una permutación uniforme utilizaremos inducción. Supongamos que al tiempo  $n$

$$\mathbb{P}(\sigma_n(1) = i_1, \sigma_n(2) = i_2, \dots, \sigma_n(n) = i_n) = \frac{1}{n!}.$$

Al tiempo  $n+1$  llega un nuevo cliente el cual se puede sentar a la izquierda de cualquiera de los  $n$  clientes previamente sentados o en una nueva mesa, es decir, puede escoger un lugar de los  $n+1$  lugares disponibles. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sigma_{n+1}) &:= \mathbb{P}(\sigma_{n+1}(1) = i_1, \sigma_{n+1}(2) = i_2, \dots, \sigma_{n+1}(n) = i_n, \\ &\quad \sigma_{n+1}(n+1) = i_{n+1}) \end{aligned}$$

Utilizando la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sigma_{n+1}) &= \frac{1}{n!} \cdot \mathbb{P}(\sigma_{n+1}(n+1) = i_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Es claro que  $\sigma_n$  cumple el segundo inciso de la definición de consistencia.  $\square$

PROPOSICIÓN 1.5. *Sea  $\sigma_n$  la permutación aleatoria asociada al proceso del restaurante chino. El tamaño del ciclo de  $\sigma_n$  que contiene a 1 tiene distribución uniforme en  $\{1, \dots, n\}$ .*

DEMOSTRACIÓN. En la sección anterior se demostró esta proposición, sin embargo, daremos una prueba distinta la cual sigue la dinámica del proceso del restaurante chino. La prueba se hará por el método de inducción. En términos de la construcción del proceso del restaurante chino, definimos  $C_1^n$  como el tamaño de la mesa en la que el cliente 1 está sentado después de que  $n$  clientes han entrado al restaurante, es decir,  $C_1^n$  es el tamaño del ciclo de  $\sigma_n$  que contiene a 1. Supongamos que  $C_1^n$  se distribuye uniforme en  $\{1, \dots, n\}$ . Si un nuevo cliente entra

al restaurante, entonces  $C_1^{n+1} = C_1^n + 1$  si el cliente  $n + 1$  se sienta en la mesa del cliente 1, y  $C_1^{n+1} = C_1^n$  en otro caso, es decir,

$$C_1^{n+1} = \begin{cases} C_1^n + 1 & \text{con probabilidad } \frac{C_1^n}{n+1} \\ C_1^n & \text{con probabilidad } 1 - \frac{C_1^n}{n+1} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_1^{n+1} = k) &= \mathbb{P}(C_1^n = k, C_1^{n+1} = C_1^n) \\ &\quad + \mathbb{P}(C_1^n = k - 1, C_1^{n+1} = C_1^n + 1) \end{aligned}$$

Utilizando la hipótesis de inducción y agrupando términos,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_1^{n+1} = k) &= \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{k}{n+1} \right) + \frac{1}{n} \left( \frac{k-1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned} \quad \square$$

**2.2. Proceso de asignación residual discreto.** Sean  $(C_1^n, \dots, C_{K_n}^n)$  los tamaños de las mesas de  $\sigma_n$ , donde  $K_n$  es la cantidad de mesas ocupadas y  $C_i^n$  es la cantidad de personas sentadas en la  $i$ -ésima mesa, para  $i \leq K_n$ , después de que han entrado  $n$  clientes. Por lo visto anteriormente,  $C_1^n$  tiene distribución uniforme en  $[n]$ . De forma análoga, calculemos la distribución de  $C_2^n$  dado  $C_1^n = m_1 < n$ . En el caso de que  $C_1^n = n$ , el proceso se termina.

**PROPOSICIÓN 1.6.** *Dado  $C_1^n = m_1 < n$ ,  $C_2^n$  tiene distribución uniforme en  $[n - m_1]$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La prueba se hará por el método de inducción. Nos fijaremos en la evolución de los tamaños de las primeras mesas. Dado  $C_1^n = m_1 < n$  y  $C_2^n = m_2$ ,  $m_1 + m_2 \leq n$ , si entra un nuevo cliente al restaurante tenemos tres posibles escenarios: si el cliente  $n + 1$  se sienta en la mesa uno, entonces  $C_1^{n+1} = C_1^n + 1$  y  $C_2^{n+1} = C_2^n$ ; si el cliente  $n + 1$  se sienta en la mesa dos, entonces  $C_1^{n+1} = C_1^n$  y  $C_2^{n+1} = C_2^n + 1$ ; si el cliente  $n + 1$  no se sienta en ninguna de las dos mesas, entonces  $C_1^{n+1} = C_1^n$  y  $C_2^{n+1} = C_2^n$ . Supongamos que se cumple  $\mathbb{P}(C_1^n = m_1, C_2^n = m_2) =$

$\frac{1}{n} \frac{1}{n-m_1}$  para  $n$ , entonces

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(C_1^{n+1} = m_1, C_2^{n+1} = m_2) \\ &= \mathbb{P}(C_1^{n+1} = m_1, C_2^{n+1} = m_2, C_1^n = m_1, C_2^n = m_2) \\ &+ \mathbb{P}(C_1^{n+1} = m_1, C_2^{n+1} = m_2, C_1^n = m_1 - 1, C_2^n = m_2) \\ &+ \mathbb{P}(C_1^{n+1} = m_1, C_2^{n+1} = m_2, C_1^n = m_1, C_2^n = m_2 - 1) \end{aligned}$$

Utilizando la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_1^{n+1} = m_1, C_2^{n+1} = m_2) &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-m_1} \cdot \left(1 - \frac{m_1+m_2}{n+1}\right) \\ &+ \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-(m_1-1)} \cdot \left(\frac{m_1-1}{n+1}\right) \\ &+ \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-m_1} \cdot \left(\frac{m_2-1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

sumando y agrupando términos tenemos,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_1^{n+1} = m_1, C_2^{n+1} = m_2) &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-m_1} \cdot \left(\frac{n-m_1}{n+1}\right) \\ &+ \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-m_1+1} \cdot \left(\frac{m_1-1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{n-m_1+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)-m_1}. \quad \square \end{aligned}$$

De forma similar se encuentra la distribución para el resto de las mesas. Dado  $C_1^n = m_1 < n$  y  $C_2^n = m_2 < n - m_1$ ,  $C_3^n$  tiene distribución uniforme en  $n - (m_1 + m_2)$ , y así sucesivamente. A esta partición aleatoria se le conoce como *proceso de asignación residual uniforme (PARU) discreto*. Definiremos al proceso de sumas parciales asociado:  $P_i^n = C_1^n + \dots + C_i^n$  para  $i \leq K_n$ .

DEFINICIÓN 1.6. Sea  $(U_i)$  una sucesión de variables aleatorias uniformes independientes e idénticamente distribuidas en  $(0, 1)$ . Definimos el

proceso de asignación residual uniforme (PARU) discreto  $(M_{n,1}, \dots, M_{n,K_n})$  como:

- $M_{n,1} = \lceil U_1 \cdot n \rceil$
- Para  $k \geq 1$ ,  $M_{n,k+1} = \lceil U_{k+1} \cdot (n - \sum_{i=1}^k M_{n,i}) \rceil$  si  $\sum_{i=1}^k M_{n,i} < n$
- Para  $k \geq 1$ ,  $M_{n,k+1} = 0$  si  $\sum_{i=1}^k M_{n,i} = n$

Donde  $K_n = \max\{k : M_{n,k} \neq 0\}$

PROPOSICIÓN 1.7. *La partición de  $n$  generada por un PARU discreto tiene la misma distribución que los ciclos de una permutación uniforme de  $n$  elementos.*

Dada la construcción del proceso del restaurante chino, la distribución de los tamaños de las mesas  $(C_1^n, \dots, C_{K_n}^n)$ , o los ciclos de la permutación uniforme asociada al proceso, es la misma que la distribución de un PARU discreto. Por lo que la prueba de la proposición es clara.

### 3. Muestreo sesgado por tamaño de los tamaños de los bloques de la permutación aleatoria.

En esta sección definiremos un muestreo sesgado por tamaños y veremos su importancia para la descripción del comportamiento de los ciclos del PARU.

PROPOSICIÓN 1.8. *Sean  $(C_1^n, \dots, C_{K_n}^n)$  los ciclos de  $\sigma_n$ , permutación aleatoria asociada al proceso del restaurante chino. Sea  $U$  una variable aleatoria uniforme en  $\{1, \dots, n\}$  y sea  $C^*$  el ciclo de  $\sigma_n$  que contiene a  $U$ . Entonces, dado  $n$  fija,  $C^* \stackrel{d}{=} C_1^n$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\Pi_U \in P_n$ , tal que  $\Pi_u = (1U)$  dejando el resto sin permutar. Por la proposición 1.2,  $\Pi_U \circ \sigma_n$  es una permutación uniforme, es decir, la probabilidad de la selección de asientos es invariante ante permutaciones. Notamos que el ciclo que contiene a  $U$  en  $\Pi_U \circ \sigma_n$  es el mismo ciclo que contiene a 1 en  $\sigma_n$ . Entonces, dado  $U = u$ , el cliente  $u$  puede ser intercambiado con el cliente 1. Por lo tanto,

$$C^* \stackrel{d}{=} C_1^n. \quad \square$$

El primer resultado que analizamos sobre la distribución de las mesas se basa en el experimento de seleccionar una mesa aleatoriamente y registrar el número de clientes que se sientan en la mesa seleccionada. Un segundo experimento que nos podemos imaginar es similar, y no debe ser confundido con el primero, y consiste en seleccionar aleatoriamente un cliente y registrar el número de personas sentadas en la misma mesa que él. Mientras vamos muestreando a los clientes notamos que las mesas o ciclos de mayor tamaño tienen mayor probabilidad de salir sorteados, es decir, el número de personas sentadas en la misma mesa que un cliente en particular,  $C^*$ , es un muestreo sesgado por tamaño de  $C_1^n, \dots, C_{K_n}^n$  puesto que  $P(C^* = k | \sigma_n)$  es la cantidad de veces que aparece  $k$  en  $C_1^n, \dots, C_k^n$  por  $k/n$ .

**DEFINICIÓN 1.7.** Sea  $(m_1, \dots, m_k)$  un vector de números reales, tales que  $m_i \geq 1$  y  $\sum_{i=1}^k m_i = n$ , es decir, los elementos del vector forman una partición de  $n$ . Sea  $(S_n)_{n \geq 1}$ ,  $S_i = m_1 + \dots + m_i$  la sucesión de sumas parciales e  $I_i = (S_{i-1}, S_i)$  los segmentos entre ellas. Decimos que  $I_1, \dots, I_k$  es un *muestreo sesgado por tamaño* de  $(m_1, \dots, m_k)$  si para una colección  $U_1, U_2, \dots$  de variables aleatorias uniformes independientes tales que si  $U_1 = u_1$  entonces  $I_1$  es aquel segmento que contiene a  $u_1$ . Por lo que  $I_1, \dots, I_k$  están en orden aleatorio.

Si  $(M_1, \dots, M_k)$  es un vector aleatorio, entonces las variables uniformes  $(U_i)_i$  serán independientes entre sí e independientes de la composición aleatoria.

A continuación daremos un resultado importante el cual nos permite calcular de forma explícita la esperanza de un PARU.

**PROPOSICIÓN 1.9.** Sea  $M = (M_{n,1}, \dots, M_{n,K_n})$  un PARU discreto y  $f$  una función valuada en  $\mathbb{R}$ . Entonces

$$\mathbb{E} \left( \sum_i f(M_{n,i}) \right) = \sum_{k=1}^n \frac{f(k)}{k}$$

**DEMOSTRACIÓN.**

$$\mathbb{E} \left( \sum_i f(M_{n,i}) \right) = n \mathbb{E} \left( \sum_i \frac{f(M_{n,i})}{M_{n,i}} \frac{M_{n,i}}{n} \right)$$

Utilizando el hecho de que  $M_{n,1}$  se distribuye igual que un muestreo sesgado por tamaño de  $M_{n,i}$ , tenemos que

$$n \mathbb{E} \left( \sum_i \frac{f(M_{n,i})}{M_{n,i}} \frac{M_{n,i}}{n} \right) = n \mathbb{E} \left( \frac{f(M_{n,1})}{M_{n,1}} \right)$$

Como  $M_{n,1}$  es uniforme en  $\{0, 1, \dots, n\}$ , entonces

$$\begin{aligned} n \mathbb{E} \left( \frac{f(M_{n,1})}{M_{n,1}} \right) &= n \sum_{k=1}^n \frac{f(k)}{k} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{f(k)}{k}. \end{aligned} \quad \square$$

#### 4. Procesos con incrementos intercambiables

En esta sección definiremos una clase importante de procesos estocásticos y enunciaremos y demostraremos transformaciones combinatorias en relación con las permutaciones cíclicas de los incrementos de éstos.

DEFINICIÓN 1.8. Sea  $\{S_n\}_{n=0}^N$  un proceso estocástico. Decimos que tiene incrementos intercambiables si para toda permutación  $\sigma : [N] \rightarrow [N]$ , y todo incremento  $X_i = S_i - S_{i-1}$ , se tiene que

$$(X_1, \dots, X_N) \stackrel{d}{=} (X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_N}).$$

Es fácil ver que una caminata aleatoria  $\{S_n\}_{n=0}^N$  tiene un incremento intercambiables. Sea  $\sigma$  una permutación definida en  $\{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$  y sea  $\{S_n\}_{n=0}^N$  una caminata aleatoria con incrementos  $X_n =$

$S_n - S_{n-1}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P} [X_{\sigma(1)} \leq x_1, \dots, X_{\sigma(n)} \leq x_n] &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P} [X_{\sigma(i)} \leq x_i] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P} [X_1 \leq x_i] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P} [X_i \leq x_i] \\ &= \mathbb{P} [X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n]. \end{aligned}$$

Las caminatas aleatorias son una subclase propia de la clase de procesos con incrementos intercambiables. En efecto, un ejemplo bastante general es el siguiente:

**EJEMPLO 1.2.** Sean  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$  y  $\Sigma$  una permutación aleatoria uniforme en  $\{1, \dots, N\}$ , es decir,

$$\mathbb{P}(\Sigma = \sigma) = \frac{1}{N!}$$

Definamos  $X_i = x_{\sigma_i}$  y notemos que  $\Sigma \circ \sigma \stackrel{d}{=} \Sigma$  para cualquier permutación de  $\{1, \dots, N\}$ . Por lo tanto  $(X_1, \dots, X_N)$  es un vector intercambiable.

Sea  $x_1, \dots, x_n$  una sucesión de números reales. Sea  $\Pi \in P_n$ , definimos  $X_i = x_{\Pi(i)}$  y las sumas parciales  $S_n = x_1 + \dots + x_n$  con  $S_0 = 0$ . A continuación introduciremos un lema combinatorio, descrito por Spitzer [Spi56], en relación a las permutaciones cíclicas de un proceso con incrementos intercambiables.

**LEMA 1.1.** *Sea  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un vector, para  $1 \leq k \leq n$  sea  $x_{k+n} = x_k$ , y sea  $x(k) = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n})$ . Entonces existe una única  $1 \leq k^* \leq n$  tal que el vector con incrementos  $x(k^*) = (x_{k^*}, x_{k^*+1}, \dots, x_{k^*+n})$  queda por encima del segmento que une sus puntos inicial y final.*

**COROLARIO 1.1.** *Sea  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un vector de números reales y tal que  $x_1 + \dots + x_n = 0$  pero ninguna otra suma parcial de componentes distintos es igual a 0. Entonces existe un único  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  tal que  $S_i = \min_{0 \leq k \leq n} S_k$ .*



La prueba del corolario es bastante sencilla, ya que suponiendo que se alcanza el mínimo en dos lugares distintos  $i_1, i_2$ , la suma parcial de la excursión entre ambos mínimos es igual a 0,  $S_{i_2} - S_{i_1} = 0$ , contrario a lo supuesto inicialmente. Por lo tanto, el mínimo es único en  $\{0, \dots, n-1\}$ . El lema admite una prueba similar.

**DEFINICIÓN 1.9.** *Transformación de Vervaat.* Sea  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un vector que toma valores en  $\mathbb{R}$  y sea  $\Pi \in P_n$  una permutación uniforme tal que  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  la sucesión de sumas parciales tenga incrementos intercambiables. Si  $I$  es el índice de la posición del mínimo y si  $I \neq 0$ , definimos

$$V_i = \begin{cases} S_{i+I} - S_I & \text{si } 0 \leq i < n - I \\ S_{i-(n-I)} - S_I & \text{si } n - I \leq i < n \end{cases}$$

Si  $I = 0$  definimos  $V_i$  como la permutación identidad, es decir, la caminata queda invariante.

**PROPOSICIÓN 1.10.** *Sea  $x = (x_1, \dots, x_n)$  un vector de números reales tal que  $x_1 + \dots + x_n = 0$  pero ninguna otra suma parcial de componentes distintos es igual a 0. Entonces se cumplen las siguientes condiciones*

- i) *La transformación de Vervaat de  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  es independiente de la posición del mínimo.*
- ii) *El índice  $I$  se distribuye uniforme en  $\{0, \dots, n-1\}$ .*
- iii) *La distribución condicional de  $S$  dado que permanece no-negativa coincide con la distribución de  $V$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** i) Sea  $C_j$  una permutación ciclica definida como  $C_j(i) = i + j \pmod{n}$ , a la que llamaremos función de corrimiento. Sea  $A$  un camino posible para  $S$ , es decir, una trayectoria que se toma con probabilidad positiva. Sean  $I = \min\{j : \min S_n = S_j\}$  e  $I^* = \min\{j : \min S_n \circ C_j = S_j\}$ , por lo que  $I^*$  es el mínimo de la caminata recorrida. Como  $S$  tiene incrementos intercambiables, entonces

$$S \stackrel{d}{=} S \circ C_j$$

por lo tanto

$$\mathbb{P}(V = A, I = k) = \mathbb{P}(V \circ C_j = A, I \circ C_j = k)$$

ya que  $V \circ C_j = V$  e  $I \circ C_j = k - j \pmod{n}$  entonces

$$\mathbb{P}(V \circ C_j = A, I \circ C_j = k) = \mathbb{P}(V = A, I = k - j)$$

ii) Por i) sabemos que

$$\mathbb{P}(V \in A, I = i) = \mathbb{P}(V \in A, I = j)$$

hacemos  $A = S_n$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V \in \Omega, I = i) &= \mathbb{P}(V \in \Omega, I = j) \\ \mathbb{P}(I = i) &= \mathbb{P}(I = j).\end{aligned}$$

Por lo tanto  $I \sim U\{0, \dots, n-1\}$ .

iii) Sea  $U$  una variable aleatoria con distribución uniforme en  $\{0, \dots, n-1\}$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S \in A, I = 0) &= \mathbb{P}(C_U(V) \in A, U = 0) \\ &= \mathbb{P}(V \in A) \mathbb{P}(U = 0)\end{aligned}$$

Por lo que

$$\mathbb{P}(S \in A | S > 0) = \frac{\mathbb{P}(V \in A) \mathbb{P}(U = 0)}{\mathbb{P}(S > 0)}$$

Ahora, nos fijamos en el evento  $\{S > 0\}$  el cual quiere decir que la caminata original ya es positiva, por lo que si le aplicamos la transformación de Vervaat tenemos que  $V \circ S = S$ , es decir,  $\{S > 0\} = \{I = 0\}$ . Por lo tanto

$$\mathbb{P}(S \in A | S > 0) = \mathbb{P}(V \in A). \quad \square$$



## CAPÍTULO 2

# El minorante convexo de caminatas aleatorias

En este capítulo introduciremos el lenguaje de los minorantes convexos de caminatas aleatorias con distribución de salto continua y tiempo discreto. El minorante convexo resulta ser una herramienta útil para estudiar al mínimo de una caminata aleatoria, nuestro objetivo final. Primero, revisaremos los conceptos y propiedades de caminatas aleatorias. En particular, el hecho de que en la caminata existe ausencia de empates de promedios bajo la hipótesis de continuidad en la distribución de salto. Posteriormente, introduciremos el concepto de minorante convexo y la interpretación de su construcción geométrica y daremos una descripción probabilística del minorante convexo de una caminata aleatoria de  $n$  pasos. Finalmente, daremos una representación del mínimo de una caminata aleatoria de  $n$  pasos y del instante en que se alcanza en términos de su minorante convexo.

### 1. Preliminares

En esta sección introduciremos los conceptos y propiedades de caminatas aleatorias, importantes para nuestro estudio posterior de minorantes convexos.

**DEFINICIÓN 2.1.** Decimos que  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  es una caminata aleatoria si  $S_0 = 0$  y sus incrementos denotados como  $X_n = (S_n - S_{n-1})_{n=1}^{\infty}$ , conforman una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. A la distribución común de los incrementos le llamamos distribución de salto y coincide con la distribución de  $S_1$ .

A lo largo de este trabajo usaremos como hipótesis principal la continuidad de la distribución de salto, es decir,

$$\mathbb{P}(S_1 = x) = 0$$

para toda  $x \in \mathbb{R}$ . Veremos que esta propiedad implica la propiedad de que los promedios sobre conjuntos distintos de los incrementos son distintos. Más formalmente, si  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , decimos que tienen la propiedad de no tener empates en promedios si para cada  $A, B \subset \{1, \dots, n\}$  distintos, se tiene que

$$\frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} x_i \neq \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B} x_i$$

donde  $|A|$  denota la cantidad de elementos de  $A$ .

**PROPOSICIÓN 2.1.** *Si  $S = \{S_i, i \leq n\}$  es una caminata aleatoria con incrementos  $X_1, \dots, X_n$  y con distribución de saltos continua entonces casi seguramente,  $X_1, \dots, X_n$  no tienen empates de promedios.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $A, B$  subconjuntos distintos de  $\{1, \dots, n\}$ . Sin pérdida de generalidad supogamos que existe  $j \in B \setminus A$ . Sea  $B_j = B \setminus \{j\}$  Entonces

$$\frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} X_i = \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B} X_i$$

si y sólo si

$$X_j = |B| \left( \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} X_i - \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B_j} X_i \right).$$

Pero como  $X_j$  es independiente de  $X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n$ , vemos que  $X_j$  es independiente de la resta del lado derecho, por lo cual:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( X_j = |B| \left( \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} X_i - \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B_j} X_i \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \mathbb{P} \left( X_j = |B| \left( \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} X_i - \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B_j} X_i \right) \middle| X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n \right) \right) \\ &= \mathbb{E} (h(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n)) \end{aligned}$$

donde

$$h(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n) = \mathbb{P} \left( X_j = |B| \left[ \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} x_i - \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B_j} x_i \right] \right)$$

Puesto que  $X_j$  tiene la misma distribución que  $X_1$  y ésta es continua, vemos que  $h = 0$ , lo que muestra que

$$\mathbb{P} \left( \frac{1}{|A|} \sum_{i \in A} X_i = \frac{1}{|B|} \sum_{i \in B} X_i \right) = 0$$

Finalmente, puesto que hay una cantidad finita de pares de subconjuntos  $A, B$  distintos de  $\{1, \dots, n\}$ , vemos que casi seguramente,  $X_1, \dots, X_n$  no tiene empates de promedios.  $\square$

## 2. El minorante convexo

En esta sección definiremos al minorante convexo y probaremos una propiedad fundamental del minorante convexo en tiempo discreto.

**DEFINICIÓN 2.2.** Sea  $U$  un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}$ . Dada una función  $(f_u, u \in U)$  sea  $C_f$  el conjunto de todas las funciones convexas por debajo de  $f$ . El minorante convexo de  $f$  es una función convexa  $c$  tal que  $g \leq c$  para toda  $g \in C_f$ .

Notemos que el minorante convexo de una función  $f$  existe y está dado por la fórmula  $c = \sup_{g \in C_f} g$ . Por el lema 4.2, la función  $c$  así definida es convexa y claramente  $g \leq c$  para toda  $g \in C_f$ .

Sea  $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$  una caminata aleatoria con incrementos  $X_1, X_2, \dots$ . Sea  $S^{[0,n]} : [0, n] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $S_k^{[0,n]} = S_k$  para  $k \leq n$  y extendemos a  $S^{[0,n]}$  por interpolación lineal en cada intervalo  $[(k-1)/n, k/n]$ . El minorante convexo de  $S^{[0,n]}$ , es una función convexa lineal por pedazos, como se verifica con la Proposición 4.4. El minorante convexo toca al proceso ya sea en puntos aislados o por intervalos; sin embargo, por la Proposición 2.1 si  $S$  tiene distribución de salto continua, el minorante convexo toca al proceso en puntos aislados, en los cuales la pendiente del minorante cambia.

Sea  $C_t$ , el minorante convexo de  $S^{[0,n]}$ . Definimos el conjunto abierto  $\mathcal{O} = \{t \leq n : S_t > C_t\}$  cuyas componentes conexas les llamaremos intervalos de excursión. En cada intervalo, el minorante convexo consiste de

segmentos lineales los cuales llamaremos *caras*, y a la pendiente de cada segmento le llamaremos pendiente de la excursión. Sea  $F_n$  el número de caras de  $C_t$ . Definimos

$$0 < N_{n,1} < N_{n,1} + N_{n,2} < \dots < N_{n,1} + \dots + N_{n,F_n} = n$$

como los índices sucesivos  $j$  para los cuales  $S_j = C_j$ . Decimos que  $N_{n,i}$  es la longitud de la  $i$ -ésima cara de  $C_t$  en el orden en el que aparecen. Sean

$$L_{n,1}, \dots, L_{n,F_n}$$

las longitudes de las caras de  $C_t$  reordenadas en forma no decreciente. En adelante, nos referiremos a esta sucesión como la *partición* de  $n$  generada por el minorante convexo de  $S^{[0,n]}$ . Por último tenemos el incremento del minorante convexo en cada excursión definido mediante  $S_{L_{n_i}} - S_{L_{n_{i-1}}}$ .

### 3. Primeras aplicaciones del estudio de minorantes convexos

En esta sección se enuncian algunos resultados sobre el minorante convexo de una caminata aleatoria de  $n$  pasos y se ilustra como se utilizan los resultados para estudiar al mínimo (o al máximo) de la caminata aleatoria.

Empezaremos con una idea visual de la representación del mínimo de la caminata aleatoria, y su posición en términos de las caras, incrementos y pendientes del minorante convexo. Teniendo las caras del minorante convexo, es fácil encontrar la posición en la que la caminata alcanza al mínimo sumando las longitudes de las caras con pendientes negativas. De forma análoga, si sumamos los incrementos negativos del minorante convexo obtendremos su valor. Para formalizar la idea anterior, introduzcamos la siguiente notación:

$$m_n = \min_{0 \leq k \leq n} S_k \quad \text{y} \quad \rho_n = \min \{j : S_j = m_n\}$$

Notamos que el par  $(m_n, \rho_n)$  se puede obtener como

$$(m_n, \rho_n) = \sum_i \left( L_{n_i}, S_{L_{n_i}} - S_{L_{n_{i-1}}} \right) \mathbb{1}_{S_{L_{n_i}} - S_{L_{n_{i-1}}} < 0}.$$

A continuación se presenta el primer resultado de la teoría de minorantes convexos, el cual permite dar una representación probabilística del mínimo y de su posición a través de las igualdades anteriores. Para enunciarlo, utilizaremos un proceso auxiliar muy importante conocido como

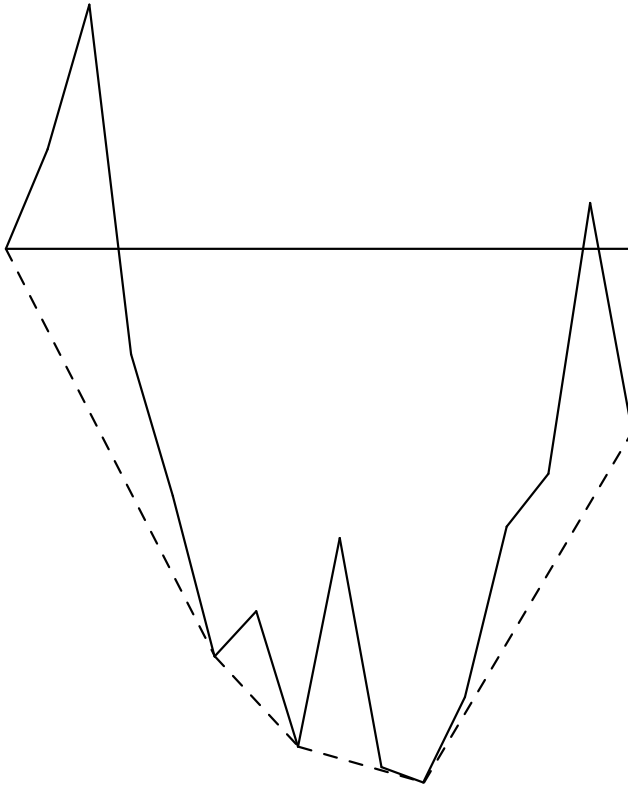


FIGURA 2.1. Ilustración del minorante convexo de una caminata aleatoria en un intervalo de tiempo finito.

el proceso de restaurante chino y la partición aleatoria que genera. Este proceso se describe a detalle en el Capítulo 1 Sección 2 .

**TEOREMA 2.1.** *Sea  $M = (M_{n,1}, \dots, M_{n,K_n})$  un PARU discreto independiente de la caminata aleatoria  $S$ . Sean  $g_i$  y  $d_i$  los índices de los puntos extremos de los intervalos excursión sobre el minorante convexo ordenados según son descubiertos por las variables uniformes. Si la distribución de salto de  $S$  es continua, entonces se tiene la siguiente igualdad*



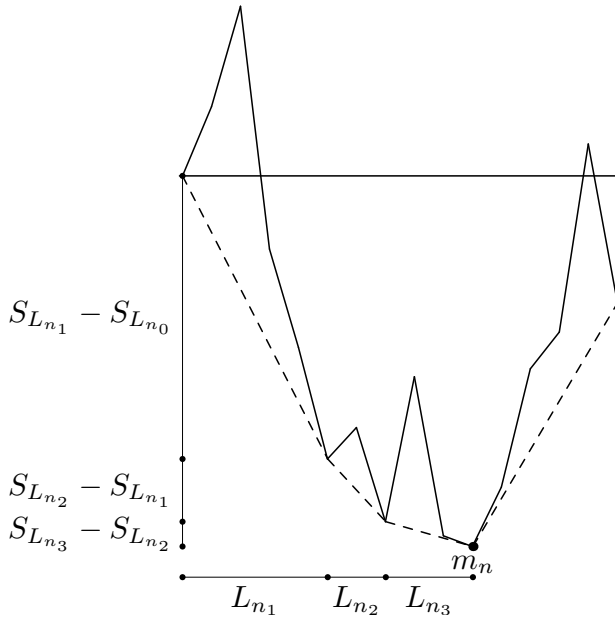


FIGURA 2.2. Representación visual para obtener el valor del mínimo de la caminata aleatoria y su posición mediante la suma de los incrementos negativos y la suma de las longitudes de las caras con pendientes negativas

en distribución:

$$\begin{aligned} & ((M_{n,1}, S_{P_1^n}), \dots, (M_{n,K_n}, S_{P_{K_n}^n} - S_{P_{K_n-1}^n})) \\ & \stackrel{d}{=} ((d_1 - g_1, S_{d_1} - S_{g_1}), \dots, (d_{F_n} - g_{F_n}, S_{d_{F_n}} - S_{g_{F_n}})). \end{aligned}$$

El teorema anterior es de gran utilidad pues la segunda sucesión se conoce perfectamente: por un lado se pueden hacer cálculos explícitos con el PARU, pues tiene una construcción probabilística sencilla, y por otro, condicionalmente al PARU, las segundas coordenadas son independientes y se distribuyen como los incrementos de la caminata aleatoria original de las longitudes correspondientes determinadas por los valores del PARU. En efecto, se tiene la siguiente distribución conjunta:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[M_{n,1} = l_1, \dots, M_{n,k} = l_k, S_{P_1^n} - S_{P_0^n} \leq x_1, \dots, S_{P_k^n} - S_{P_{k-1}^n} \leq x_k] \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{n-l_1} \cdots \frac{1}{n-l_1-\dots-l_{k-1}} F^{*l_1}(x_1) \cdots F^{*l_k}(x_k). \end{aligned}$$

donde  $l_1 + \dots + l_k = n$

Inmediatamente, obtenemos una forma no trivial de construir y simular al mínimo de una caminata aleatoria sin tener que construir (o simular) toda su trayectoria. Sea un PARU  $(M_{n,1}, \dots, M_{n,k_n})$  y condicionalmente a  $K_n = k$ ,  $M_{n,1} = l_1, \dots, M_{n,k} = l_k$  donde  $l_1 + \dots + l_k = n$ , consideramos variables independientes con distribuciones  $F^{*l_1}, \dots, F^{*l_k}$ , digamos  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$  y escribimos

$$M_n = \sum_i \Delta_i \mathbb{1}_{\Delta_i < 0}.$$

Entonces  $M_n$  tendrá la misma distribución que el mínimo de la caminata aleatoria de  $n$  pasos. Resulta conveniente cuando  $n$  es grande, pues  $K_n$  es de tamaño  $\log n$  por lo que necesitaremos simular sólo  $\log n$  incrementos y no  $n$ . Por supuesto para que esto sea de utilidad debemos ser capaces de simular  $F^{*l}$  sin tener que sumar  $l$  variables independientes con distribución  $F$ . Ejemplos de esto son: caminatas aleatorias con incrementos normales, o con incrementos Cauchy, etc...

Entonces obtenemos el siguiente corolario debido a Spitzer.

**COROLARIO 2.1.** *Sea  $S^{[0,n]} = \{(j, S_j) : 0 \leq j \leq n\}$  una caminata aleatoria con mínimo  $m_n$ . Sea  $S_i^- = S_i \wedge 0$ <sup>1</sup>, entonces*

$$\mathbb{E}(m_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}(S_i^-)}{i} \tag{2.1}$$

**DEMOSTRACIÓN.** Sean  $\Delta_{n,i}$  el incremento de la  $i$ -ésima cara del minorante convexo de la caminata aleatoria. Por las implicaciones de la Proposición 1.5 tenemos que

$$\mathbb{E}(m_n) = \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{K_n} \Delta S_{L_i}^- \right)$$

---

<sup>1</sup>En general la parte negativa  $S_i^-$  es siempre positiva.

donde el número de ciclos  $K_n = k$  está dado y  $L_1, \dots, L_k$  corresponde a los tamaños de los ciclos de la permutación aleatoria. Tomamos

$$f(i) = \mathbb{E}(S_i^-)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{K_n} \Delta S_{L_i}^- \right) &= \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{K_n} \Delta S_{L_i}^- \mid K_n = k, L_1 = l_1, \dots, L_k = l_k \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^k \mathbb{E}(\Delta S_{L_i}^-) \right) \end{aligned}$$

por la Proposición 1.5 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^{K_n} \Delta S_{L_i}^- \right) &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^k f(L_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{f(i)}{i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}(S_i^-)}{i}. \end{aligned} \quad \square$$

Por último enunciaremos un teorema relacionado con la construcción del minorante convexo de una caminata aleatoria y lo demostraremos a partir del Teorema 2.1.

**TEOREMA 2.2.** *Sea  $N_{n,1}, \dots, N_{n,F_n}$  la composición de  $n$  inducida por las longitudes ordenadas de las caras del minorante convexo de  $S^{[0,n]}$ , una caminata aleatoria con distribución continua. La distribución conjunta de  $N_{n,1}, \dots, N_{n,F_n}$  está dada por*

$$\mathbb{P}(F_n = k, N_i = n_i, 1 \leq i \leq k) = \mathbb{P} \left( \frac{S_{n_1}^{(1)}}{n_1} < \frac{S_{n_2}^{(2)}}{n_2} < \dots < \frac{S_{n_k}^{(k)}}{n_k} \right) \prod_{i=1}^k \frac{1}{n_i}$$

para toda  $n_1, \dots, n_k$  con  $n_1 + \dots + n_k = n$ , y donde para  $1 \leq i \leq k$

$$S_{n_i}^{(i)} := S_{n_1 + \dots + n_i} - S_{n_1 + \dots + n_{i-1}} \stackrel{d}{=} S_{n_i}$$

En particular, ya que  $X_i$  son independientes, también lo son  $S_{n_j}^{(j)}$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $(n_1, \dots, n_k)$  una sucesión dada de números reales, y sea  $(n_{\tau(1)}, \dots, n_{\tau(k)})$  la misma sucesión ordenada de forma no decreciente. Sea  $T$  el conjunto de permutaciones  $\tau \in \Sigma_k$  tal que  $(n_{\tau(1)}, \dots, n_{\tau(k)}) = (n_1, \dots, n_k)$ . Entonces  $|T| = \prod_{j=1}^n a_j$  donde  $a_j = \#\{i : 1 \leq i \leq k, n_i = j\}$  para  $1 \leq j \leq n$ . Queremos comparar las pendientes de las caras del minorante convexo, por lo tanto, para  $1 \leq i \leq k$  sea

$$S_{n_{\tau(i)}}^{\tau(i)} = S_{n_1 + \dots + n_{\tau(i)}} - S_{n_1 + \dots + n_{\tau(i)-1}} \stackrel{d}{=} S_{n_{\tau(i)}} = S_{n_1}$$

Entonces, los eventos  $\{F_n = k\}$  y  $\{N_{n,i} = n_1 : 1 \leq i \leq k\}$  se cumplen si y solo si pasa lo siguiente

- i)  $(L_{n,1}, \dots, L_{n,K_n}) = (n_{\tau(1)}, \dots, n_{\tau(k)})$   
 ii)  $\frac{S_{n_{\tau(1)}}^{\tau(1)}}{n_1} < \frac{S_{n_{\tau(2)}}^{\tau(2)}}{n_2} < \dots < \frac{S_{n_{\tau(k)}}^{\tau(k)}}{n_k}$  para algún  $\tau \in T$

El evento (i) tiene probabilidad

$$\left( \prod_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \right) \left( \prod_{j=1}^n \frac{1}{a_j!} \right)$$

y es independiente del evento (ii). Por hipótesis la caminata aleatoria tiene incrementos intercambiables, por lo tanto, para algún elemento de  $T$  la probabilidad del evento (ii) es

$$\mathbb{P} \left( \frac{S_{n_1}^{(1)}}{n_1} < \frac{S_{n_2}^{(2)}}{n_2} < \dots < \frac{S_{n_k}^{(k)}}{n_k} \right)$$

Por último, recordemos que  $|T| = \prod_{j=1}^n a_j$ , por lo tanto,

$$\mathbb{P}(F_n = k, N_i = n_i, 1 \leq i \leq k) = \mathbb{P} \left( \frac{S_{n_1}^{(1)}}{n_1} < \frac{S_{n_2}^{(2)}}{n_2} < \dots < \frac{S_{n_k}^{(k)}}{n_k} \right) \prod_{i=1}^k \frac{1}{n_i}. \quad \square$$

#### 4. Prueba de la primera descripción probabilística del minorante convexo de una caminata aleatoria

En esta sección se prueba uno de los resultados de mayor importancia sobre la distribución de los componentes del minorante convexo de una caminata aleatoria. Para esto introduciremos la propiedad de invarianza de la caminata aleatoria bajo la transformación de Vervaat.

**4.1. Transformación 3214.** Para demostrar el Teorema 2.1 es necesaria la propiedad de invarianza de la caminata  $S^{[0,n]}$  bajo cierta transformación, la cual proporciona una construcción de la caminata así como de su minorante convexo. La transformación que necesitamos se conoce como transformación ‘3214’ y se describe como sigue; primero se divide la caminata  $S^{[0,n]}$  en cuatro trayectorias consecutivas y posteriormente se reordenan los segmentos intercambiando el primero con el tercero, el segundo con el segundo, y así sucesivamente.

La transformación ‘3214’ de la caminata  $S^{[0,n]}$  se genera por una variable aleatoria  $U$  uniforme en  $\{1, \dots, n\}$ , independiente de  $S^{[0,n]}$ . Dado  $U = u$ , definimos  $g$  y  $d$  como los índices de los extremos izquierdo y derecho de la cara del minorante convexo de  $S^{[0,n]}$  que contiene al índice  $u$ . Se definen los cuatro segmentos de la caminata como los intervalos  $[0, g]$ ,  $[g, u]$ ,  $[u, d]$  y  $[d, n]$ . Con esta organización se define la transformación ‘3214’ mediante el reordenamiento de los cuatro segmentos de la trayectoria de  $S^{[0,n]}$  para formar una nueva caminata  $S_U^{[0,n]}$  con orden 3-2-1-4. Formalmente, definimos a  $S_j^U$ , para  $1 \leq j \leq n$ , como sigue

$$S_j^U = \begin{cases} S_{U+j} - S_U & \text{para } 0 \leq j < d - U \\ S_{g+j-(d-U)} + S_d - S_g - S_U & \text{para } d - U \leq j < d - g \\ S_{j-(d-g)} + S_d - S_g & \text{para } d - g \leq j < d \\ S_j & \text{para } d \leq j \leq n \end{cases}$$

y sea  $S_U^{[0,n]} = \{(j, S_j^U), 1 \leq j \leq n\}$ .

**TEOREMA 2.3.** *Sea  $S^{[0,n]}$  una caminata aleatoria y  $U$  una variable aleatoria uniforme en  $\{1, \dots, n\}$ . Sea  $S_U^{[0,n]}$  la transformación ‘3214’, generada por  $U$ , de  $S^{[0,n]}$ , entonces*

$$(U, S^{[0,n]}) \stackrel{d}{=} (d - g, S_U^{[0,n]})$$

La pregunta que surge naturalmente, y que es nuestro punto de partida para la prueba de la invarianza de la caminata aleatoria bajo la transformación ‘3214’ es: Cuál es la distribución de  $(S_0, \dots, S_n)$  dado que  $S_1 > 0, \dots, S_n > 0$ ?

Para demostrar la propiedad de invarianza utilizaremos un lema combinatorio, descrito por Spitzer [Spi56], enunciado y demostrado en el Capítulo 1 Sección 4, en relación con las permutaciones cíclicas de los

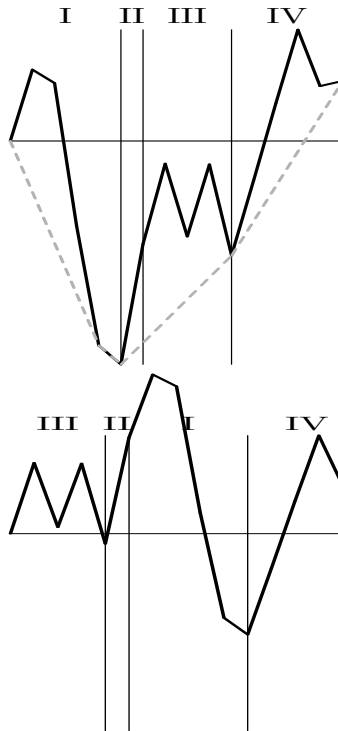


FIGURA 2.3. Ilustración de una caminata aleatoria de tamaño  $n$  y su transformación 3214'

incrementos de caminatas aleatorias. Así mismo, usaremos el concepto de transformación de Veervat descrito en dicha sección.

DEMOSTRACIÓN. (Teorema 2.3) La idea de la prueba es que una cara del minorante convexo seleccionada mediante un muestreo uniforme debe tener una longitud uniforme y el segmento de caminata encima de ésta debe ser una transformación de Vervaat de una caminata del mismo tamaño. Basta probar el teorema cuando  $X_1, \dots, X_n$  son muestras sin remplazo de  $x_1, \dots, x_n$ , suponiendo distribución de salto continua para  $X_i$ . Entonces  $S^{[0,n]}$  y  $S_U^{[0,n]}$  se pueden entender como permutaciones de

$n$ , por lo que el mapeo  $(U, S^{[0,n]}) \mapsto (d - g, S_U^{[0,n]})$  se entiende como un mapeo de  $[n] \times \Sigma_n$  a sí mismo. Ya que  $U$  es uniforme en  $[n]$  y el orden de  $X_1, \dots, X_n$  es una permutación aleatoria uniforme de  $x_1, \dots, x_n$ , basta probar que el mapeo es una biyección. Para hacer esto es suficiente ver que el mapeo es una función suprayectiva, es decir, para  $k \in [n]$  existe  $u \in [n]$  y  $\sigma \in \Sigma_n$  tal que

$$\left( u, \left\{ (0, 0), (1, x_{\sigma(1)}), (2, x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)}), \dots, \left( n, \sum_{i=1}^n x_{\sigma(i)} \right) \right\} \right) \\ \mapsto \left( k, \left\{ (0, 0), (1, x_1), (2, x_1 + x_2), \dots, \left( n, \sum_{i=1}^n x_i \right) \right\} \right)$$

Sea  $j$  el número de caras del minorante convexo del resto de la caminata, es decir, de la caminata de longitud  $n - k$  con incrementos  $x_{k+1}, \dots, x_n$  y sean las longitudes e incrementos de éstas caras, en orden de aparición,  $(l_1, s_1), \dots, (l_j, s_j)$ . Sea  $h$  el único  $h \in [k]$  tal que la caminata con incrementos

$$(x_{h+1}, x_{(h+1) \bmod k+1}, x_{(h+2) \bmod k+1}, \dots, x_{(h+k-2) \bmod k+1}, x_h)$$

quede por encima de su minorante convexo.

El siguiente paso consiste en ordenar las pendientes del minorante convexo en forma creciente. Sea  $s^* = \sum_{i=1}^k x_i$ , y sea  $m$  la única  $m \in \{1, \dots, j\}$  tal que

$$\frac{s_m}{l_m} < \frac{s^*}{k} < \frac{s_{m+1}}{l_{m+1}}$$

Por lo tanto, la permutación  $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$  que se busca, esta dada por

$$\left( k+1, k+2, \dots, k + \sum_{i=1}^m l_i, \right. \\ \left. h+1, (h+1) \bmod k+1, (h+2) \bmod k+1, \dots, h, k + \sum_{i=1}^m l_i + 1, \dots, n \right)$$

□

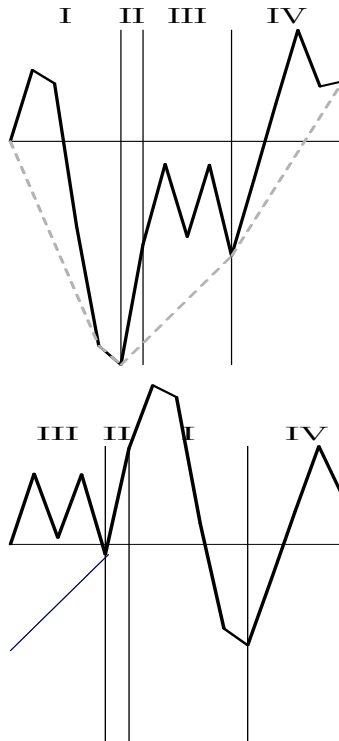


FIGURA 2.4. Ilustración de una caminata aleatoria en tiempo finito y su transformación ‘3214’. Notar que dado  $d-g$  la transformación se puede invertir fácilmente: el índice en el cual deben empezar los primeros  $d-g$  incrementos después de una permutación cíclica, es la posición del mínimo del segmento. Se encuentra bajando una recta con pendiente igual a la media de los primeros  $d-g$  incrementos.





## CAPÍTULO 3

# Minorante convexo de procesos de Lévy

En este capítulo desarrollaremos el lenguaje de los minorantes convexos de procesos de Lévy con distribución de salto continua. Primero, revisaremos los conceptos y propiedades de procesos de Lévy. En particular, analizaremos a los procesos  $\alpha$ -estables, cuyas propiedades nos permiten el estudio su minorante convexo. Posteriormente, introduciremos el concepto de minorante convexo de un proceso de Lévy y daremos la interpretación continua de los resultados vistos en el capítulo anterior. En este capítulo no daremos muchas pruebas nuevas sino que nos enfocaremos en enunciar los resultados por analogía al caso discreto.

### 1. Definiciones y propiedades

Los procesos de Lévy son los límites continuos de las caminatas aleatorias aceleradas y normalizadas generadas por incrementos independientes e idénticamente distribuidos. Por lo tanto, no es de sorprenderse que análogos continuos de los resultados descritos en el Capítulo 2 se cumplan para procesos de Lévy. Sin embargo, existen algunas variaciones interesantes que no se presentan en el caso discreto, así como detalles técnicos que hay que tener en consideración a la hora de llevar los resultados discretos al límite. Restringiremos nuestro análisis al caso en el que  $X_t$  tiene distribución continua para toda  $t > 0$ .

**DEFINICIÓN 3.1.** Sea  $X = \{X_t : t \geq 0\}$  un proceso definido en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Se dice que  $X$  es un proceso de Lévy si cumple con las siguientes propiedades:

- i) Las trayectorias de  $X$  son casi seguramente continuas por la derecha con límites por la izquierda.
- ii)  $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$ .
- iii) Para  $0 \leq s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  es igual en distribución a  $X_{t-s}$ .

iv) Para  $0 \leq s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  es independiente de  $\{X_u : u \leq s\}$ .

Algunos de los procesos de Lévy mas conocidos son el Movimiento Browniano, proceso de Poisson, proceso de Poisson compuesto y proceso de Poisson compuesto compensado.

El *Movimiento Browniano*  $B = (B_t, t \geq 0)$ , es un proceso estocástico que toma valores en los reales, cuya trayectorias son continuas casi seguramente, su ley a cualquier tiempo fijo  $t > 0$  es una distribución Gaussiana centrada con varianza  $t$ ,

$$\mathbb{P}(B_t \in dx) = (2\pi t)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} dx.$$

Sus incrementos son independientes en el sentido que para cualquier  $s, t > 0$ ,  $B_{t+s} - B_t$  es independiente de  $B_u$  para toda  $0 \leq u \leq t$ . El movimiento Browniano es el único proceso de Lévy continuo con media 0 y varianza 1 al tiempo 1. Por otro lado, los múltiplos del movimiento Browniano son los únicos procesos de Lévy continuos con media 0.

El *Proceso de Poisson*  $N = (N_t, t \geq 0)$ , es un proceso estocástico que toma valores en los naturales, tiene incrementos estacionarios e independientes, y su ley es Poisson de parámetro  $\lambda t$ , es decir,

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \exp^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

El proceso Poisson  $N = (N_t, t \geq 0)$  tiene saltos de tamaño 1 estrictamente positivos y sus trayectorias son constantes entre saltos, es decir, a tiempo  $t$  el valor  $N_t$  est dado por

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{(T_k, \infty)}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

donde  $k \geq 1$  y  $(T_k)_{k \geq 1}$  es la familia creciente de saltos de  $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} T_k = +\infty.$$

Su esperanza está dada por  $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$ , de donde se deduce que  $\mathbb{E}[N_t - \lambda t] = 0$ . El proceso  $(N_t - \lambda t, t \geq 0)$  se conoce como proceso de Poisson compensado y también tiene incrementos independientes y estacionarios, mismos que además están centrados, es decir, tienen media cero.

El proceso de Poisson es el único proceso de Lévy que es de conteo, por lo cual es muy utilizado como modelo de llegada de reclamaciones en compañías aseguradoras.

Como último ejemplo definiremos el *Proceso Poisson Compuesto*. Sean  $X_1, \dots, X_n, \dots$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas  $\nu$  en  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , y  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  la caminata aleatoria correspondiente. Sea  $N = (N_t, t \geq 0)$  un proceso Poisson de parámetro  $c > 0$ , independiente de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Decimos que  $H_t$  es un proceso Poisson Compuesto si

$$H_t = S \circ N_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \quad \text{para } t \geq 0.$$

Los procesos de Lévy están íntimamente relacionados con ciertas distribuciones con características especiales que nos son de gran interés, las cuales describiremos a continuación.

**DEFINICIÓN 3.2.** Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución  $\mu$  y función característica

$$\Phi_X(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \exp\{i\langle \lambda, \cdot \rangle x\} \mu(dx) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Decimos que  $\mu$  es *Infinitamente Divisible* si para todo entero positivo  $n$ , existe una variable aleatoria  $X^{1/n}$  con función característica  $\Psi_{X^{1/n}}$ , tal que

$$\Phi_X(\lambda) = (\Psi_{X^{1/n}}(\lambda))^n.$$

Equivalentemente, decimos que  $\mu$  es *Infinitamente Divisible* si para todo entero positivo  $n$ , existen variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas  $X_1^{1/n}, \dots, X_n^{1/n}$  tales que

$$X \stackrel{d}{=} X_1^{1/n} + \dots + X_n^{1/n}.$$

Notemos que un proceso de Lévy a tiempo  $t$  tiene la propiedad de ser infinitamente divisible ya que su distribución puede ser representada como la suma de  $n$  distribuciones de variables aleatorias independientes, las cuales son exactamente los incrementos del proceso de Lévy de tamaño  $t/n$ , los cuales son independientes e idénticamente distribuidos por hipótesis. De forma inversa, dada una distribución infinitamente divisible  $\mu$  existe un proceso de Lévy  $X$  tal que  $X_t$  tiene distribución  $\mu$ .

Se conocen dos caracterizaciones de los procesos de Lévy y de las distribuciones infinitamente divisibles llamadas *fórmula de Lévy-Khintchin* y *Descomposición de Lévy-Itô*.

**TEOREMA 3.1. *Fórmula de Lévy-Khintchin.*** *La distribución de una variable aleatoria  $X$  es infinitamente divisible si y solo si existe una terna  $(b, c, \nu)$ , donde  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}_+$ , y  $\nu$  es una medida de probabilidad que satisface  $\nu(\{0\}) = 0$  y  $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|^2) \nu(dx) < \infty$ ; tal que*

$$\Psi(\lambda) = \exp\left[ib\lambda - \frac{\lambda^2 c}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x \mathbb{1}_{\{|x| < 1\}}) \nu(dx)\right]$$

**TEOREMA 3.2. *Descomposición de Lévy-Itô.*** *Sea una terna  $(b, c, \nu)$ , donde  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}_+$ , y  $\nu$  es una medida de probabilidad que satisface  $\nu(\{0\}) = 0$  y  $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge |x|^2) \nu(dx) < \infty$ . Entonces, existe un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  en el cual existen cuatro procesos de Lévy independientes,  $L^{(1)}, L^{(2)}, L^{(3)}, L^{(4)}$ , donde  $L^{(1)}$  es una constante de deriva,  $L^{(2)}$  es un movimiento Browniano,  $L^{(3)}$  es un proceso Poisson compuesto, y  $L^{(4)}$  es una martingala, llamada de salto puro, de tamaño menor a 1 casi seguramente. El proceso  $L = L^{(1)} + L^{(2)} + L^{(3)} + L^{(4)}$  es un proceso de Lévy, entonces existe un espacio de probabilidad tal que la función característica de un proceso de Lévy  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  es  $e^{t\Psi}$ , donde*

$$\Psi(\lambda) = ib\lambda - \frac{\lambda^2 c}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x \mathbb{1}_{\{|x| < 1\}}) \nu(dx) \quad (3.1)$$

está definido para toda  $\lambda \in \mathbb{R}$

A la terna  $(b, c, \nu)$  se le conoce como *Terna de Lévy* y a **3.1** como *exponente característico*. Más aún,  $b \in \mathbb{R}$  se le conoce como *término de deriva*,  $c \in \mathbb{R}_+$  *coeficiente Gaussiano*, y  $\nu$  *medida de Lévy*.

La función característica de un proceso de Lévy, para cualquier número racional  $t \geq 0$ , está dada por

$$\mathbb{E}(\exp\{i\langle \lambda, X_t \rangle\}) = \exp\{-t\Psi(\lambda)\} \quad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Éste caracteriza la distribución del proceso en el sentido de que si dos procesos de Lévy tienen el mismo exponente característico, entonces tienen la misma distribución.

El exponente característico  $\Psi$  del movimiento Browniano está dado por

$$\Psi(\lambda) = \frac{1}{2} |\lambda|^2$$

por lo que su función característica es

$$\mathbb{E}(\exp\{i\langle\lambda, X_t\rangle\}) = \exp\left(-\frac{t}{2}|\lambda|^2\right)$$

La función característica de un proceso Poisson compuesto está dada por

$$\mathbb{E}(\exp\{i\langle\lambda, S \circ N_t\rangle\}) = \exp\{-t\psi(\lambda)\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

donde

$$\psi(\lambda) = c \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\langle\lambda, x\rangle}) \nu(dx)$$

Además del movimiento Browniano, el proceso Poisson y el Proceso Poisson compuesto, los procesos estables, que definiremos a continuación, forman una familia importante de procesos de Lévy, ya que son los únicos procesos obtenidos como límites de una sola caminata aleatoria acelerada y normalizada.

**DEFINICIÓN 3.3.** Sea  $X = (X_t, t \geq 0)$  un proceso estocástico tal que toma valores en  $\mathbb{R}$ . Decimos que  $X$  tiene la *Propiedad de Escalamiento* si para cada  $k > 0$ , el proceso reescalado  $(k^{-1}Y_{kt}, t \geq 0)$  tiene la misma distribución que  $X$ .

Un proceso de Lévy  $X$  tiene la propiedad de escalamiento si y solo si para cada  $t > 0$ , las variables  $X_t$  y  $t^{1/\alpha}X_t$  tienen la misma distribución. En este caso se dice que  $X$  es un *proceso estrictamente estable con índice*  $\alpha$ .

**DEFINICIÓN 3.4.** Para toda  $\alpha \in (0, 2]$ , un proceso de Lévy con función característica  $\Psi$  se le llama *Proceso Estable con índice*  $\alpha$  si

$$\Psi(k\lambda) = k^\alpha \Psi(\lambda)$$

para cada  $k > 0$  y  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ .

## 2. El minorante convexo de procesos de Lévy

El **minorante convexo** de una función  $f$  continua en el intervalo  $[0, t]$  es la mayor función convexa  $\underline{C}$  tal que  $\underline{C} \leq f$ . Sabemos que el supremo de una familia de funciones convexas que están acotadas superiormente en un punto es una función convexa. Se van a considerar funciones  $f$  que sean cádlág, es decir, funciones continuas por la

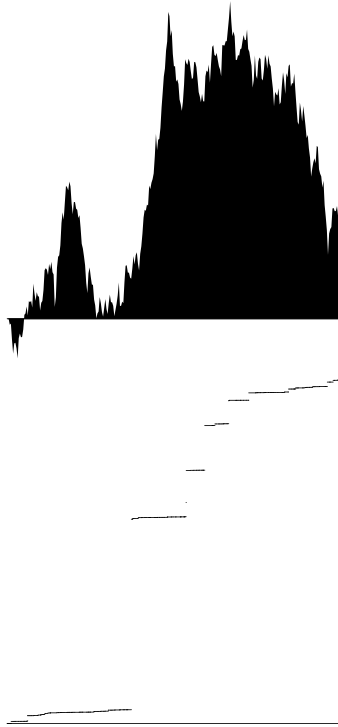


FIGURA 3.1. Ilustración de un movimiento Browniano y un proceso estable.

derecha,  $\lim_{h \rightarrow 0_+} f(t+h) = f(t)$ , y tales que el límite por la izquierda  $\lim_{h \rightarrow 0_-} f(t-h)$  existe. A este límite lo denotaremos como  $f_-$ .

Análogamente al caso de caminatas aleatorias, nos fijamos en los intervalos en los que el proceso de Lévy es estrictamente mayor a su minorante convexo en  $[0, 1]$  y los pensamos como una partición del intervalo unitario. La siguiente proposición formaliza la idea anterior.

**PROPOSICIÓN 3.1.** *Sea  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Lévy con distribución de salto continua y sea  $\underline{C}$  el minorante convexo de  $X$  en  $[0, 1]$ . Entonces*

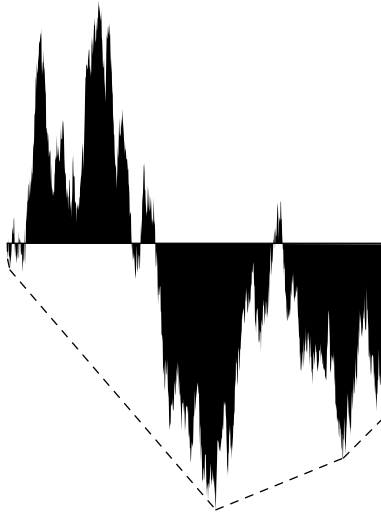


FIGURA 3.2. Ilustración del minorante convexo de un movimiento Browniano en un intervalo de tiempo finito

- 1) El conjunto abierto  $\mathcal{O} = \{s \in (0, 1) : C_s < X_s \wedge X_{s-}\}$  tiene medida de Lebesgue 1.
- 2) Para cada intervalo  $(g, d)$  elemento de  $\mathcal{O}$ , los saltos que  $X$  pueda tener en  $g$  y  $d$ , tienen el mismo signo.
- 3) Si  $(g_1, d_1)$  y  $(g_2, d_2)$  son dos elementos distintos de  $\mathcal{O}$ , entonces sus pendientes difieren.

$$\frac{\underline{C}(d_1) - \underline{C}(g_1)}{d_1 - g_1} \neq \frac{\underline{C}(d_2) - \underline{C}(g_2)}{d_2 - g_2}$$

Sea  $\mathcal{I}$  el conjunto de los elementos conectados de  $\mathcal{O}$ . Para cada intervalo  $(g, d)$  elemento de  $\mathcal{O}$ , se tienen los **vértices**  $g$  y  $d$ , la **longitud**  $d - g$ , el **incremento**  $\underline{C}(d) - \underline{C}(g)$ , y la **pendiente**

$$\frac{\underline{C}(d) - \underline{C}(g)}{d - g}$$

A continuación se dará una descripción del minorante convexo parecida a la descripción discreta que se dió en el capítulo anterior. Antes



de entrar en detalle sobre el minorante convexo empezaremos con la construcción del Proceso de Asignación residual.

Se construye el *Proceso de Asignación Residual*,  $PARU$ , en  $[0, 1]$   $R_1, R_2, \dots$  como sigue: sea  $R_1$  uniforme en  $[0, 1]$ . Condicionalmente al evento  $R_1 = m_1 < 1$ ,  $R_2$  es uniforme en  $[0, 1 - m_1]$ . Si  $R_1 + R_2 = 1$  entonces  $R_3 = R_4 = \dots = 0$ . En otro caso, condicionalmente a  $R_1 = m_1$ ,  $R_2 = m_2$  donde  $m_1 + m_2 < 1$ ,  $R_3$  es uniforme en  $[0, 1 - m_1 - m_2]$ . Así continuamos recursivamente. Dado que una variable uniforme en  $[0, x]$  tiene la misma distribución que  $X_U$  donde  $U$  es uniforme en  $[0, 1]$ , la anterior descripción se puede formalizar como sigue.

**DEFINICIÓN 3.5.** Sea  $(V_i)$  una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas uniformes en  $(0, 1)$ . Decimos  $L_1, L_2, \dots$  es un *PARU Continuo* si

$$L_1 = tV_1 \quad \text{y para } i \geq 1 \quad L_{i+1} = V_{i+1}(t - S_i),$$

donde

$$S_0 = 0 \quad \text{y para } i \geq 1 \quad S_i = L_1 + \dots + L_i.$$

Decimos que las variables  $L_1, L_2, \dots$ , reordenadas en forma no decreciente, forman una partición de  $[0, 1]$  generada por el proceso de stick-breaking continuo. Existe un resultado análogo al caso discreto el cual enunciaremos a continuación.

**TEOREMA 3.3.** *Sea  $X$  un proceso de Lévy con distribución continua y sea  $\{(g_i, d_i)\}_{i \geq 1}$  la sucesión de los distintos intervalos de excursiones de  $\underline{C}$  seleccionados por el proceso uniforme  $U$  independiente del proceso de Lévy. Sea  $L_1, L_2, \dots$  una sucesión generada por un proceso de stick-breaking continuo, y  $(S_i)_{i \geq 1}$  como se definió anteriormente. Entonces se tiene la siguiente igualdad en distribución*

$$\left( (d_i - g_i, \underline{C}_{d_i} - \underline{C}_{g_i}), i \geq 1 \right) \stackrel{d}{=} \left( (L_i, X_{S_i} - X_{S_{i-1}}), i \geq 1 \right)$$

El Teorema 3.3 da una construcción del minorante convexo por medio de un muestreo aleatorio del proceso de Lévy hecho a partir de un proceso de stick-breaking uniforme, independiente del proceso de Lévy. La prueba del teorema da una visión detallada de las excursiones de  $X$  sobre su minorante convexo basada en la siguiente transformación de las trayectorias. Sea  $u$  un elemento del conjunto de excursiones  $\mathcal{O}$  y sea  $(g, d)$

el intervalo de excursión que contiene a  $u$ . Definimos un nuevo proceso estocástico  $X^u = (X_t^u)_{t \leq 1}$  como sigue:

$$X_t^u = \begin{cases} X_{u+t} - X_u & \text{para } 0 \leq t < d - u \\ C_d - C_+ X_{g+t-(d-u)} - X_u & \text{para } d - U \leq t < d - g \\ C_d - C_g + X_{t-(d-g)} & \text{para } d - g \leq t < d \\ X_t & \text{para } d \leq t \leq 1 \end{cases}$$

La idea de la transformación es que la gráfica del minorante convexo de  $X^u$  en  $[d - g, 1]$  se obtiene de la gráfica de  $C$  mediante la eliminación del intervalo  $(g, d)$  y cerrando el espacio ajustando el proceso por continuidad, así en  $[0, d - g]$ ,  $X^u$  va de 0 a  $C_d - C_u$ . El Teorema 3.3 se sigue de una propiedad de invarianza análoga a la del Teorema 2.3. Si se aplica la transformación recursivamente, se obtiene un muestreo sesgado por tamaño de los intervalos de excursión. En particular, el intervalo de excursión que contiene una variable uniforme independiente tiene una longitud uniforme, lo cual da una idea de porque aparece un proceso de stick-breaking en el Teorema 3.3.

**TEOREMA 3.4.** *Si  $U$  es una variable uniforme en  $(0, 1)$  e independiente de  $X$  un proceso de Lévy con distribución continua, entonces*

$$(U, X) \stackrel{d}{=} (d - g, X^U)$$

La prueba del Teorema 3.4 se basa en el resultado análogo de caminatas aleatorias enunciado en el Teorema 2.3. El resultado en tiempo discreto es la exacta propiedad de invarianza de una transformación similar aplicada a la aproximación poligonal de  $X^n$  de  $X$  dada por  $X^n = X_{[nt]/n}([nt]/n - t) + X_{[nt]/n}([nt]/n)$ . La demostración de la convergencia en el límite es muy técnica, sin embargo se simplifica bajo la hipótesis de continuidad de las trayectorias del proceso. El resultado en tiempo discreto se basa en hechos combinatorios relacionados con permutaciones de los incrementos.

El Teorema 3.4 da un resultado más fuerte que el Teorema 3.3, ya que da acceso al comportamiento de  $X$  entre los vértices del minorante convexo. Para tener una idea más clara consideraremos lo siguiente:

**DEFINICIÓN 3.6.** Para cada  $t > 0$  y cada función cádlág  $f$ , sea  $\rho_t = \rho_t(f)$  la posición del último mínimo  $\underline{f}(t)$  de  $f$  en  $[0, 1]$ . Definimos la

*Transformación de Vervaat* como sigue

$$V_t f(s) = f(\rho_t + s \bmod t) - \underline{f}(t), \text{ para } s \in [0, t]$$

Para cada intervalo de excursión  $(g, d)$  de  $\mathcal{O}$ , le asociamos una excursión  $e^{(g,d)}$  dada por

$$e^{(g,d)}(s) = X_{g+s} - C_{g+s}, \text{ para } s \in [0, d - g]$$

donde  $e^{(g,d)}(0)$  es positivo si  $X_g > C_g$ .

Se deduce que sobre cada una de las caras del minorante convexo del proceso de Lévy  $X$  se deben aplicar transformaciones de Veervat para obtener una analogía con la transformación descrita en el caso discreto.

## CAPÍTULO 4

# Aplicaciones a la determinación numérica del precio de opciones con barrera

En este capítulo desarrollaremos algunos ejemplos de las aplicaciones numéricas de la teoría de minorantes convexos descrita a detalle en los capítulos anteriores. Primero, enunciaremos algunas definiciones básicas sobre productos financieros derivados. Posteriormente, revisaremos los resultados necesarios para generar los algoritmos de simulación de variables aleatorias  $\alpha$ -estables y un PARU. Finalmente desarrollaremos el algoritmo que nos permite conocer la posición y el valor del máximo de la distribución del precio de una opción call. El algoritmo será desarrollado utilizando los resultados sobre el PARU y minorantes convexos y lo compararemos con los resultados expuestos en [KKPvS10].

### 1. Productos financieros derivados

Empezaremos enunciando algunos conceptos básicos sobre la teoría de productos financieros derivados, los cuales son necesarios para comprender las aplicaciones sobre minorantes convexos que desarrollaremos posteriormente.

**DEFINICIÓN 4.1.** Un **producto financiero derivado** es un instrumento cuyo valor depende de una o más variables o parámetros llamados subyacentes, es decir, depende del valor de otro activo.

**DEFINICIÓN 4.2.** Se dice que existe **arbitraje** cuando es posible asegurar una ganancia libre de riesgo al realizar transacciones simultáneas en dos o más mercados.

En la teoría básica de valuación de instrumentos derivados consideramos una economía en la que hay ausencia de arbitraje. Si no hay oportunidades de arbitraje y dos cosas tienen el mismo valor en una fecha

futura, entonces sus valores el día de hoy deben ser iguales. La hipótesis del mercado eficiente es la que sustenta la hipótesis de que en los mercados no haya arbitraje, ya que si lo hubiera, la gente compraría barato y vendería caro, haciendo que la demanda subiera y la oferta bajara por lo que se modificarán los precios, evitando así el arbitraje.

Definiremos a continuación algunos instrumentos derivados.

**DEFINICIÓN 4.3.** Una **opción call** es aquella que le da a su poseedor el derecho de comprar el activo subyacente en una fecha  $T$ , a un precio  $K$ .

**DEFINICIÓN 4.4.** Una **opción put** es aquella que le da a su poseedor el derecho de vender el activo subyacente en una fecha  $T$ , a un precio  $K$ .

Al precio del contrato se le conoce como *precio de ejercicio o precio strike* y a la fecha del contrato se le conoce como *fecha de maduración*. Una *opción Europea* puede ser ejercida solamente en la fecha de maduración, mientras que una *opción Americana* se puede ejercer en cualquier tiempo  $t$  donde  $0 \leq t \leq T$ . Es importante señalar que el poseedor de una opción tiene el derecho de comprar (call) o vender (put), pero no es obligatorio ejercer este derecho.

El payoff de las opciones Europeas es

- Call  $(S_T - K)_+$
- Put  $(K - S_T)_+$

Un *derivado exótico* es aquel que involucra transacciones más complicadas que las de un derivado normal, generalmente en la determinación del precio. A pesar de que el término no tiene un significado preciso, la definición depende del lugar y el tiempo. Por ejemplo, las tasas de interés eran consideradas exóticas cuando recién aparecieron en 1980, sin embargo, ahora se consideran como herramientas financieras estándares.

Las *opciones con barrera* son derivados trayectorialmente dependientes de manera similar a las opciones comunes. Las opciones con barrera se activan o se extinguen si y solo si el subyacente alcanza un determinado valor, la barrera. Las opciones "In" nacen sin valor y solo se activan en el caso de que la barrera del precio sea cruzada. Análogamente, las opciones "Out" nacen activas y se extinguen en el caso de que la barrera del precio se cruce.

Existen cuatro tipos principales de opciones con barrera:

- *In-and-out*: El precio empieza por debajo del nivel barrera y tiene que moverse hacia arriba para que la opción se extinga.
- *Down-and-out*: El precio empieza por encima del nivel barrera y tiene que moverse hacia abajo para que la opción se vuelva nula y sin efecto.
- *Up-and-in*: El precio empieza por debajo del nivel barrera y tiene que moverse hacia arriba para que la opción sea ejercida.
- *Down-and-in*: El precio empieza por encima del nivel barrera y tiene que moverse hacia abajo para que la opción sea ejercida.

Analicemos el siguiente ejemplo. Sea una opción call Europea con precio de subyacente \$100 y barrera en \$120. Esta opción se comporta exactamente igual a una call Europea común excepto si el precio se mueve por encima de \$120, en cuyo caso la opción no es ejercida y se vuelve nula y sin valor. Es importante hacer notar que la opción no se reactiva si el precio del subyacente cae debajo de \$120. Una vez que la opción se anula, se anula por siempre.

Para las aplicaciones financieras valdremos una opción con barrera simulando la distribución conjunta de la trayectoria y el máximo del proceso mediante un PARU. En las siguientes secciones describiremos los algoritmos utilizados para llevar a cabo la simulación.

## 2. Algoritmos de simulación de procesos estables a tiempo fijo

A pesar de haber definido a los procesos estables por la propiedad de escalamiento es más conveniente describirlos mediante su función característica. La siguiente fórmula se obtiene de la representación de Lévy de la función característica de una distribución infinitamente divisible, dada por Lévy en 1934 [Ber96].

DEFINICIÓN 4.5. Una variable aleatoria  $X$  es  $\alpha$ -estable si y solo si su función característica está dada por

$$\log \Psi(t) = \begin{cases} \sigma_2^\alpha |t|^\alpha \{1 - i\beta \operatorname{signo}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\} + i\mu t, & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \sigma_2 |t| \{1 + i\beta \operatorname{signo}(t) \frac{2}{\pi} \log |t|\} + i\mu t, & \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

donde  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Escribiremos  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  para indicar que  $X$  tiene una distribución estable con índice  $\alpha$ , parámetro de escalamiento  $\sigma$ , coeficiente

de asimetría  $\beta$  y parámetro de desplazamiento  $\mu$ . Sin embargo, esta representación tiene un inconveniente y es que las funciones características no son continuas en los parámetros que las determinan. La función característica tiene discontinuidades en todos los puntos de la forma  $\alpha = 1$ ,  $\beta \neq 0$ . Para solucionar este inconveniente Zolotarev (1986) sugiere la siguiente transformación.

$$\mu_1 = \begin{cases} \mu + \beta\sigma^\alpha \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \alpha \neq 1, \\ \mu & \alpha = 1. \end{cases}$$

que lleva a la expresión

$$\log \Psi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha \{ |t|^\alpha - it\beta(|t|^{\alpha-1} - 1) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \} + i\mu_1 t & \text{si } \alpha \neq 1, \\ -\sigma |t| \{ 1 + i\beta \operatorname{signo}(t) \frac{2}{\pi} \log |t| \} + i\mu t & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

la cual es una función conjunta continua de  $\alpha$  y  $\beta$ .

Otra forma de representar a la función característica de distribuciones estables es la siguiente.

*PROPOSICIÓN 4.1. Una variable aleatoria  $X$  es  $\alpha$ -estable si y solo si su función característica está dada por*

$$\log \Psi(t) = \begin{cases} -\sigma_2^\alpha |t|^\alpha \exp\{-i\beta_2 \operatorname{signo}(t) \frac{\pi}{2} K(\alpha)\} + i\mu t & \alpha \neq 1, \\ -\sigma_2 |t| \{ \frac{\pi}{2} + i\beta_2 \operatorname{signo}(t) \log |t| \} + i\mu t & \alpha = 1. \end{cases}$$

donde

$$K(\alpha) = \alpha - 1 + \operatorname{signo}(1 - \alpha) = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha < 1, \\ \alpha - 2 & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Los parámetros  $\alpha_2$  y  $\beta_2$  se relacionan de la siguiente manera, para  $\alpha = 1$ ,  $\beta_2$  es tal que

$$\tan \left( \beta_2 \frac{\pi K(\alpha)}{2} \right) = \beta \tan \frac{\pi\alpha}{2},$$

y el nuevo parámetro de escalamiento

$$\sigma_2 = \sigma \left( 1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi K(\alpha)}{2} \right)^{\frac{1}{2\alpha}}.$$

Para  $\alpha = 1$ ,  $\beta_2 = \beta$  y  $\sigma_2 = \frac{2}{\pi}\sigma$ .

Salvo en el caso Gaussiano, Cauchy y Lévy no se conoce una expresión explícita para la densidad. Esto dificulta implementar los métodos clásicos

de simulación (función de cuantiles, Von Neumann), para simular variables estables. Chambers-Mallows-Stuck [BDP08] proponen el siguiente método para simular variables aleatorias estables  $X \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$ .

TEOREMA 4.1. *Sea  $\gamma$  una variable aleatoria uniforme en  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $W$  una variable aleatoria exponencial con media 1 independiente de  $\gamma$ , y*

$$\gamma_0 = -\frac{\pi}{2}\beta_2 \frac{K(\alpha)}{\alpha},$$

entonces,

- para  $\alpha \neq 1$

$$X = \frac{\sin \alpha(\gamma - \gamma_0)}{(\cos \gamma)^{1/\alpha}} \left( \frac{\cos(\gamma - \alpha(\gamma - \gamma_0))}{W} \right)^{(1-\alpha)/\alpha},$$

es  $S_\alpha(1, \beta_2, 0)$  y

- para  $\alpha = 1$

$$X = \left( \frac{\pi}{2} + \beta_2 \gamma \right) \tan \gamma - \beta_2 \log \left( \frac{W \cos \gamma}{\frac{\pi}{2} + \beta_2 \gamma} \right)$$

es  $S_1(1, \beta_2, 0)$ .

definidas como en la proposición 4.1.

Con este teorema es sencillo construir un algoritmo numérico para generar variables aleatorias  $S_\alpha(1, \beta, 0)$ , acorde a la definición 4.5, para  $\alpha \in (0, 2]$  y  $\beta \in [-1, 1]$ .

- generar una variable aleatoria  $V$  uniforme en  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  y  $W$  exponencial de media 1 independiente.
- para  $\alpha \neq 1$

$$X = S_{\alpha,\beta} \cdot \frac{\sin(\alpha(V - B_{\alpha,\beta}))}{(\cos(V))^{1/\alpha}} \cdot \left( \frac{\cos(V - \alpha(V - B_{\alpha,\beta}))}{W} \right)^{(1-\alpha)/\alpha},$$

donde

$$B_{\alpha,\beta} = \frac{\arctan(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2})}{\alpha},$$

$$S_{\alpha,\beta} = \left( 1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2} \right)^{1/2\alpha}.$$



- para  $\alpha = 1$  calcular

$$X = \frac{2}{\pi} \left[ \left( \frac{\pi}{2} + \beta V \right) \tan V - \beta \log \left( \frac{W \cos V}{\frac{\pi}{2} + \beta V} \right) \right].$$

Se puede generar una variable aleatoria estable para todo valor admisible de los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  y  $\mu$  usando la siguiente transformación, Si  $X \sim S_\alpha(1, \beta, 0)$  entonces

$$Y = \begin{cases} \sigma X + \mu, & \alpha \neq 1 \\ \sigma X + \left(\frac{2}{\pi}\beta\sigma \log \sigma + \mu\right) & \alpha = 1, \end{cases}$$

es  $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ .

El código de simulación de una variable aleatoria  $\alpha$ -estable en lenguaje MatLab se muestra a continuación.

```
%Generamos una funcion estable con par metros alpha, beta, mu,sigma.
    Simulamos un vector de 1x1000 y aplicamos la transformacion
    tomando en cuenta los valores de los par metros.

function [SY] = alpha_stablep(alpha,beta,mu,sigma)

m = 1000;
n = 1;
S = (1+beta^2*tan(pi*alpha/2)^2)^(1/(2*alpha));
B = atan(beta*tan(pi*alpha/2))/alpha;
V = -pi/2 + pi.*rand(m,n);
W = exprnd(1,m,n);

if alpha == 1
    X = (2/pi)*((pi/2 + beta.*V).*tan(V) - beta.*
        log(((pi/2).*W.*cos(V))./((pi/2)+beta.*V)));

    Y = sigma.*X + (2/pi)*beta*sigma*log(sigma)
        + mu;
else
    X = S.*sin(alpha.*(V+B))./cos(V).^((1/alpha).*
        (cos(V-alpha*(V+B))./W).^((1-alpha)/alpha));

    Y = sigma.*X + mu;
end

SY = sort(Y);
plot(SY,(1:m)/m);
```

### 3. Aplicaciones a la determinación numérica del precio de opciones con barrera

Empezaremos con el algoritmo para simular un proceso Stick-breaking para posteriormente utilizarlo como parte de nuestro método de simulación del valor y posición del máximo y mínimo de un proceso de Lévy.

A continuación se presenta el código de simulación en lenguaje Matlab. Con este método para simular el proceso de stick-breaking se necesitan generar muy pocos pasos para que el proceso supere el umbral.

```
%Simulamos variables uniformes hasta que se supera el umbral e=0.001 y
graficamos la suma acumulativa.
l=[rand];
s=sum(l);
e=.001;
while(s<1-e)
l=[l;(1-l(length(l)))*rand];
s=s+l(length(l));
end
l
plot(cumsum(v))
```

Para la simulación del máximo del proceso de Lévy hacemos 100000 aproximaciones al máximo al utilizar un stick-breaking hasta que se supera el umbral  $1 - \epsilon$ , donde  $\epsilon = 0.0001$ . Se desarrolló el algoritmo en el caso Browniano ya que existen expresiones explícitas para la densidad conjunta del movimiento Browniano y su máximo, la cual se utiliza como benchmark. Para el caso general de variables  $\alpha$ -estables no se conocen expresiones explícitas.

```
%Simulación del máximo de un movimiento Browniano

tcomp=(1:100000)/100000;
comp=abs(randn(10000,1));
comps=sort(comp);

t=linspace(0, 3,100000);
benchmark=erf(t/sqrt(2));

%Valor del umbral
e=.0001;

tic;
n=100000;
M=zeros(n,1);
```

```

for i=1:n
    l=0;
    s=0;
    d=0;
    x=0;

% Simulaci?n de Stick-braking para generar el m?ximo del proceso
    while(s<=1-e)
        l=[l;(1-s(length(s)))*rand];
        s=[s;s(length(s))+1(length(l))];
        d=[d;sqrt(1(length(l)))*randn];
        x=[x;x(length(x))+d(length(d))];
        if(d(length(d))>0)
            M(i)=M(i)+d(length(d));
        end
    end
end
toc;
Ms=sort(M);
p1=plot(Ms,tcomp,t,benchmark);
set(p1,'Color','black','LineWidth',0.20)
pause

%Gr?fica de los errores
p2=plot(Ms,(1:n)/n-erf(Ms'/sqrt(2)));
set(gca,'XTick',0:0.5:4)
set(p2,'Color','black','LineWidth',0.50)

[h,p,ks2stat]=kstest2(M,comp)
    
```

El tiempo total de ejecución del algoritmo de simulación del máximo mediante un proceso de stick-breaking es de 24.994 segundos. Como se observa en la figura 3 los errores de simulación son de orden  $10^{-3}$ . Se utilizó además el coeficiente de Kolmogorov-Smirnov como prueba de bondad de ajuste con una  $p=0.2992$ , con lo que se acepta la hipótesis de que ambas muestras provienen de la misma distribución.

Consideremos ahora el problema de valuar una opción call con barrera up-and-out, con tiempo de maduración igual a 1, lo que es equivalente a calcular la siguiente esperanza:

$$\pi^{uo}(s) = e^{-r} \mathbb{E} \left[ (se^X - K)^+ \mathbb{1}_{s \exp(\bar{X}) < b} \right].$$

Tomaremos  $s \in [0, b]$  como el precio inicial de subjacente. Fijamos el precio de ejercicio  $K = 3$ , y el nivel de barrera  $b = 2$ . Fijamos  $r = 0.05$  para tener un escenario de riesgo neutral en el cual el proceso  $\{\exp(X_t -$

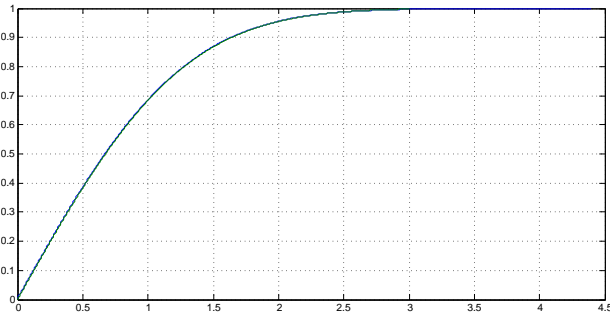


FIGURA 4.1. Distribución del máximo un movimiento Browniano generado por un proceso Stick-breaking vs la distribución del benchmark.

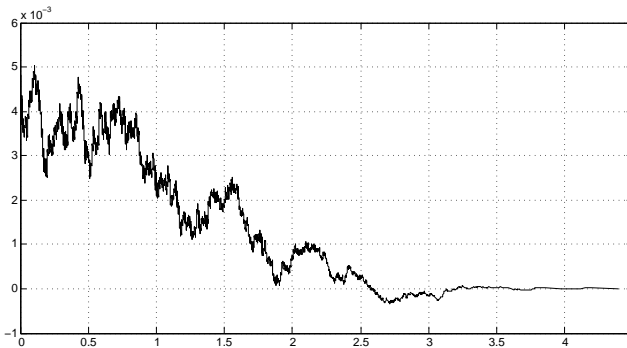


FIGURA 4.2. Errores entre la simulación del máximo mediante stick-breaking y el benchmark.

$rt)|t \geq 0\}$  es una martingala. Para la simulación del proceso estable fijamos  $\beta = 1$ ,  $\sigma = 1$  y  $\alpha = 1.25, 1.50, 1.75$  para obtener un comparativo

de los cambios en las distribuciones de los precios de las opciones. Se utilizaron 2000 aproximaciones al máximo al utilizar un stick-breaking.

```

n=2000;
tcomp=(1:n)/n;
e=.0001;

M=zeros(n,1);
MX=zeros(n,1);

%simulaci'on de la variable aleatoria alpha-estable
beta=1;
alpha=1.5;
S = (1+beta^2*tan(pi*alpha/2)^2)^(1/(2*alpha));
B = atan(beta*tan(pi*alpha/2))/alpha;
Z = -pi/2 + pi.*rand(n,1);
W = exprnd(1,n,1);
E = S.*sin(alpha.*(Z+B))./cos(Z).^((1/alpha).*(cos(Z-alpha*(Z+B))./W)
    .^((1-alpha)/alpha));
SE = sort(E);

for i=1:n
l=0;
s=0;
d=0;
x=0;

%stick- para generar el m'aximo del proceso
while(s<=1-e)
l=[l;(1-s(length(s)))*rand];
s=[s;s(length(s)+l(length(l))];
d=[d;((l(length(l)))^(1/alpha))*randn];
x=[x;x(length(x)+d(length(d))];
    if(d(length(d))>0)
        M(i)=M(i)+d(length(d));
    else
        MX(i)=MX(i)+d(length(d));
    end
end
end

%valuaci'on de la la opci'on con barrera
%definimos los par'ámetros
X=M-MX;
b=2;
k=3;
r=0.05;
% s1=0.00002:0.00002:b;
s1=0.001:0.001:b;

```

```
for i=1:n
V(i)=exp(-r).*mean(max((s1(i)'.*exp(X))-k,0).*(M<b));
end
```

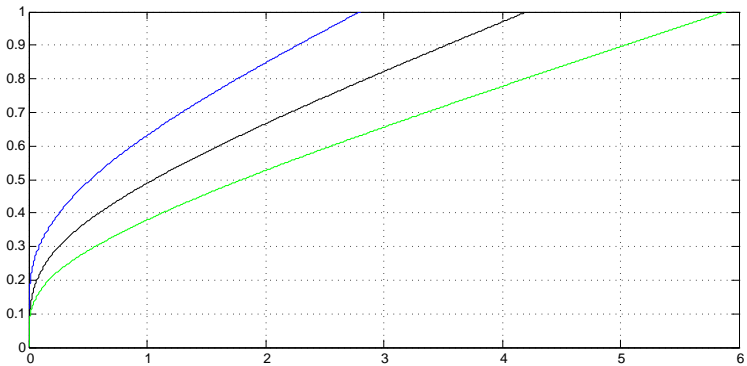


FIGURA 4.3. Comparativo de las diferentes distribuciones del precio de la opción al modificar el valor de  $\alpha$ .  $\alpha = 1.25$  en azul,  $\alpha = 1.50$  en negro,  $\alpha = 1.75$  en verde.



# Anexo

## Funciones Convexas

Las funciones convexas se suelen definir geométriamente de la siguiente forma:

DEFINICIÓN 4.6. Se dice que una función  $f$  es convexa en un intervalo, si para todo  $a$  y  $b$  de ese intervalo, el segmento de recta que une a  $(a, f(a))$  con  $(b, f(b))$  queda por encima de la gráfica de  $f$

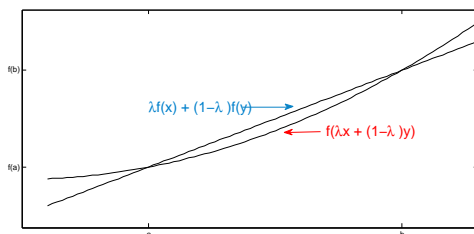


FIGURA 4.4. Descripción geométrica de una función convexa

La condición geométrica que se define anteriormente puede expresarse de forma analítica, lo cual resulta de mayor utilidad en las demostraciones. El segmento de recta que une  $(a, f(a))$  con  $(b, f(b))$  es la ecuación de la recta  $g$  definida por

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$



Esta recta queda por encima de la gráfica de  $f$  en  $x$  si  $g(x) \geq f(x)$ , es decir, si

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \geq f(x)$$

o

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Por lo que tenemos la siguiente definición equivalente de convexidad.

**DEFINICIÓN 4.7.** Una función  $f$  es convexa en un intervalo si para  $a, x$  y  $b$  del intervalo con  $a < x < b$  se tiene

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Por lo tanto, si  $f$  es convexa para todo  $[a, b]$  en el intervalo, y  $x$  cumple que  $a < x < b$ , entonces, ya que  $x - b < 0$ , se llega a que la desigualdad anterior adopta la forma

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

**PROPOSICIÓN 4.2.** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa, y  $x \in (a, b)$  se cumple:

- 1) Si  $x < b$ , la función  $t \rightarrow m(x, t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$  es creciente en el intervalo  $(x, b]$ .
- 2) Si  $a < x$ , la función  $t \rightarrow m(x, t)$  es creciente en el intervalo  $[a, x)$ .

**DEMOSTRACIÓN.** La propiedad 1) es consecuencia de la desigualdad

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Mientras que la propiedad 2) es consecuencia de la desigualdad

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

teniendo en cuenta que  $m(x, t) = m(t, x)$ .

Por otra parte, si  $f$  es convexa según la segunda definición, y  $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$ , donde  $\lambda$  es un número real positivo del intervalo  $[0, 1]$ . De

acuerdo con la desigualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} - \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \frac{f(b) - f(x)}{\lambda(b - a)} - \frac{f(x) - f(a)}{(1 - \lambda)(b - a)} \\ &= \frac{\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b) - f(x)}{\lambda(1 - \lambda)(b - a)} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f(x) = f(\lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

□

**PROPOSICIÓN 4.3.** *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es convexa, se cumple que en cada  $x \in (a, b)$ , existen las derivadas laterales,  $f'_i(x) \leq f'_d(x)$  y las funciones  $f'_i, f'_d$  son crecientes en  $(a, b)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Según la Proposición 1, la función  $t \rightarrow m(x, t)$  es creciente en el intervalo  $(x, b]$ . Si tomamos un punto  $s$  tal que  $a < s < x$  tenemos que  $m(s, x)$  es una cota inferior de  $\{m(x, t) : x < t < b\}$ , por lo que el siguiente límite existe y es finito

$$f'_d(x) = \lim_{t \rightarrow x^+} m(x, t) = \inf \{m(x, t) : x < t < b\} \geq m(s, x)$$

Como la desigualdad  $m(s, x) \leq f'_d(x)$  es cierta para todo  $s \in (a, x)$ , y la función  $s \rightarrow m(x, s) = m(s, x)$  es creciente en  $[a, x)$ , entonces el siguiente límite existe y es acotado

$$f'_i(x) = \lim_{s \rightarrow x^-} m(x, s) = \sup \{m(x, s) : a < s < x\} \leq f'_d(x)$$

Por otra parte, si  $a < x < y < b$ , y gracias a lo que acabamos de ver tenemos que

$$f'_i(x) \leq f'_d(x) \leq m(x, y) = m(y, x) \leq f'_i(y) \leq f'_d(y)$$

Por lo tanto, las funciones  $f'_i, f'_d$  son crecientes en  $(a, b)$ . □

**COROLARIO 4.1.** *Toda función convexa  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $(a, b) \in \mathbb{R}$*

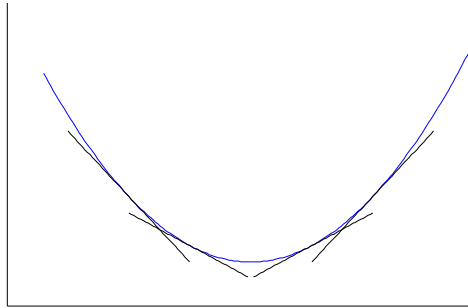


FIGURA 4.5. Función convexa y sus derivadas crecientes

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2 sabemos que las derivadas laterales  $f'_i$ ,  $f'_d$  existen, por lo que la función es continua por la derecha y por la izquierda en cada  $x \in (a, b)$ .  $\square$

LEMA 4.1. Si  $f$  es derivable y un intervalo  $I \in \mathbb{R}$ , y  $f'$  es creciente, sea  $a < b$  donde  $a, b \in I$ , y  $f(a) = f(b)$ , entonces  $f(x) < f(a) = f(b)$  para  $a < x < b$ .

TEOREMA 4.2. Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable, y la derivada  $f'$  es creciente en  $[a, b]$ , entonces  $f$  es convexa.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $a < b$ . Definimos la función  $g$  como

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Es fácil ver que  $g'$  también es creciente, además,  $g(a) = g(b) = f(a)$ . Aplicando el lema anterior a  $g$ , tenemos que

$$g(x) < f(a) \text{ si } a < x < b$$

Es decir, si se cumple que  $a < x < b$ , entonces

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) < f(a)$$

o

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Por lo tanto,  $f$  es convexa.  $\square$

**TEOREMA 4.3.** *Una función dos veces derivable  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f''(t) > 0$  para cada  $t \in [a, b]$ , entonces  $f$  es convexa.*

**DEMOSTRACIÓN.** Por hipótesis  $f''(t) > 0$  para cada  $t \in [a, b]$ , es decir,

$$f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t+h) - f'(t)}{h} > 0$$

Por lo que

$$f'(t+h) - f'(t) > 0.$$

Si  $h$  es un número real positivo, entonces

$$f'(t+h) > f'(t).$$

Si  $h$  es un número real negativo, entonces,

$$f'(t+h) < f'(t).$$

Por lo tanto  $f'$  es creciente. Aplicando el Teorema 1, concluimos que  $f$  es convexa.  $\square$

**LEMA 4.2.** *Sea  $\{f_i\}_i \in I$  una familia de funciones definidas en  $\mathbb{R}$ , tal que son continuas y convexas. Si  $f_i(x) \leq M$  para toda  $x \in \mathbb{R}$ , definimos a  $f(x) = \sup f_i(x)$ , entonces  $f$  es convexa.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $z$ , tal que  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$  donde  $x, y \in \mathbb{R}$ . Entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \sup f_i(z) \\ &= \sup f_i(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ &\leq \sup (\lambda f_i(x) + (1 - \lambda) f_i(y)) \\ &\leq \lambda \sup f_i(x) + (1 - \lambda) \sup f_i(y) \\ &= \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f$  es convexa.  $\square$

**PROPOSICIÓN 4.4.** *El minorante convexo de una función lineal por pedazos es lineal por pedazos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea el intervalo  $(g, d)$  donde  $g, d \in [0, 1]$ . Sea  $\underline{C}$  una función convexa tal que no es lineal en  $x = \lambda g + (1 - \lambda)d$ . Entonces

$$\underline{C}(\lambda g + (1 - \lambda)d) < \lambda \underline{C}(g) + (1 - \lambda)\underline{C}(d)$$

Sea  $f(x)$  definida como

$$f(x) = \frac{\underline{C}(d) - \underline{C}(g)}{d - g}(x - g) + \underline{C}(g)$$

Vemos que  $f(g) = \underline{C}(g)$  y  $f(d) = \underline{C}(d)$ . Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\underline{C}(d) - \underline{C}(g)}{d - g}(\lambda g + (1 - \lambda)d - g) + \underline{C}(g) \\ &= \underline{C}(d) - \underline{C}(g)(1 - \lambda) + \underline{C}(g) \\ &= \lambda \underline{C}(g) + (1 - \lambda)\underline{C}(d) \\ &> \underline{C}(x) \end{aligned}$$

Entonces  $f$  es una función convexa tal que  $\underline{C} < f$  para  $x \in (g, d)$ . Por lo que  $\underline{C}$  no es la máxima función convexa entre  $(g, d)$ . Por lo tanto,  $\underline{C}$  es lineal por pedazos.  $\square$

## Bibliografía

- [AP10] Josh Abramson and Jim Pitman, *Concave majorants of random walks and related poisson processes*, <http://arxiv.org/abs/1011.3262v1>, 03 2010.
- [BDP08] Violetta Bernyk, Robert C. Dalang, and Goran Peskir, *The law of the supremum of a stable Lévy process with no negative jumps*, Ann. Probab. **36** (2008), no. 5, 1777–1789. MR 2440923 (2009j:60102)
- [Ber96] Jean Bertoin, *Lévy processes*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 121, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. MR 1406564 (98e:60117)
- [DE56] D. A. Darling and P. Erdős, *A limit theorem for the maximum of normalized sums of independent random variables*, Duke Math. J. **23** (1956), 143–155. MR 0074712 (17,635c)
- [Don87] R. A. Doney, *On Wiener-Hopf factorisation and the distribution of extrema for certain stable processes*, Ann. Probab. **15** (1987), no. 4, 1352–1362. MR 905336 (88k:60136)
- [Kal97] Olav Kallenberg, *Foundations of modern probability*, Probability and its Applications (New York), Springer-Verlag, New York, 1997. MR 1464694 (99e:60001)
- [KKPvS10] A. Kuznetsov, A.E. Kyprianou, J.C. Pardo, and K. van Schaik, *A Wiener-Hopf Monte-Carlo simulation technique for Lévy processes*, <http://arxiv.org/abs/0912.4743v2>, 03 2010.
- [Pit06] J. Pitman, *Combinatorial stochastic processes*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1875, Springer-Verlag, Berlin, 2006, Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 7–24, 2002, With a foreword by Jean Picard. MR 2245368 (2008c:60001)
- [PRUBA11] Jim Pitman, Nathan Ross, Gerónimo Uribe Bravo, and Josh Abramson, *Convex Minorants of Random Walks and Lévy process*, <http://arxiv.org/abs/1102.0818v1>, 02 2011.
- [PUB10] Jim Pitman and Gerónimo Uribe Bravo, *The convex minorant of a Lévy process*, <http://arxiv.org/abs/1011.3069v2>, 03 2010.
- [Spi56] Frank Spitzer, *A combinatorial lemma and its application to probability theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 323–339. MR 0079851 (18,156e)



## Agradecimientos

Quiero finalizar esta tesis agradeciendo a Gero, mi asesor, por haberme aguantado durante tanto tiempo, por haberme brindado no solamente su diestra orientación académica sino también sus consejos y experiencias, siempre con una sonrisa.

Les estoy infinitamente agradecida a mis papás y a mi hermano por todo lo que me han dado y por lo que no, por acompañarme en momentos de crisis, y sobre todo por su inagotable apoyo en todo momento. La familia sí es lo más importante.

Agradezco a todos los que tuvieron que ver con este trabajo, directa o indirectamente. A todos los que estuvieron conmigo en esta etapa de trabajo académico, personal y más que nada de autoconocimiento.

Finalmente, agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México, mi escuela, mi universidad, mi máxima casa de estudios. Me llena de profundo orgullo formar parte esta institución que me ha brindado tanto en todos los aspectos del espíritu humano.

Muchas gracias, sin ustedes este trabajo no habría sido posible, y yo no sería quien soy.