



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA – CONTROL

CONTROL ADAPTABLE DE ROBOTS MÓVILES  
CON RESTRICCIONES NO HOLONÓMICAS

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA

PRESENTA:  
JUAN CARLOS ALBARRÁN CASTRO

TUTOR  
DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ, FACULTAD DE INGENIERÍA

MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**JURADO ASIGNADO:**

Presidente: DR. YU TANG XU  
Secretario: DR. HÉCTOR BENÍTEZ PÉREZ  
Vocal: DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ  
1 er. Suplente: DR. PAUL ROLANDO MAYA ORTIZ  
2 do. Suplente: DR. EDUARDO ARANDA BRICAIRE

Lugar o lugares donde se realizó la tesis:

LABORATORIO DE ROBÓTICA DEL DEPARTAMENTO DE CONTROL DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNAM.

**TUTOR DE TESIS:**

DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ

-----  
**FIRMA**

---

# Dedicatoria

*A mi madre.*

---

# Agradecimientos

- A la **Universidad Nacional Autónoma de México**, al Programa de Maestría y Doctorado de la Facultad de Ingeniería y a mis profesores por haberme brindado las herramientas para continuar mi formación académica.
- A **CONACYT** por su invaluable apoyo para la realización de mis estudios de posgrado.
- Al proyecto **PAPIIT IN109611** *Control de robots con restricciones no holonómicas y modelo dinámico desconocido*, cuyo patrocinio permitió la realización de este trabajo.
- A mis padres y hermanos, por su amor y apoyo incondicional.
- Al Dr. Marco A. Arteaga, por su paciencia y dedicación a este proyecto.
- A mis sinodales quienes me ofrecieron valiosos comentarios al revisar gentilmente este escrito.
- A mis compañeros y amigos por brindarme su invaluable amistad.

---

# Índice general

<b>Dedicatoria</b>	<b>2</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>3</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>8</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	9
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	10
1.3. Objetivos . . . . .	11
1.3.1. Objetivo general . . . . .	11
1.3.2. Objetivos particulares . . . . .	11
1.4. Estructura del documento . . . . .	11
<b>2. Modelo dinámico</b>	<b>13</b>
2.1. Restricción no holonómica . . . . .	13
2.2. Ecuaciones dinámicas . . . . .	15
<b>3. Control adaptable</b>	<b>23</b>
3.1. Relaciones dinámicas . . . . .	24
3.2. Control parte cinemática . . . . .	26
3.3. Control parte dinámica . . . . .	38
<b>4. Implementación del control</b>	<b>48</b>
4.1. Robot Móvil RM-10 . . . . .	48
4.2. Resultados Experimentales . . . . .	50
4.2.1. Trayectoria de referencia: Circunferencia . . . . .	50

4.2.2. Trayectoria de referencia: Curva tipo lemniscata . . . . .	64
<b>5. Conclusiones</b>	<b>72</b>
<b>A. Teoremas auxiliares</b>	<b>74</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>76</b>

---

# Índice de figuras

2.1. Esquema de robot móvil . . . . .	14
3.1. Error de posición . . . . .	27
3.2. Dinámica del error. . . . .	29
3.3. Diagrama de bloques del control parte cinemática y dinámica. . . . .	39
3.4. Error de seguimiento $v_e, w_e$ . . . . .	40
3.5. Diagrama de bloques del controlador adaptable. . . . .	43
4.1. Robot móvil RM-10 . . . . .	49
4.2. Trayectoria de referencia . . . . .	51
4.3. Trayectoria experimental . . . . .	53
4.4. Error de posición $x_e$ . . . . .	53
4.5. Error de posición $y_e$ . . . . .	54
4.6. Error de orientación $\theta_e$ . . . . .	54
4.7. Error de velocidad lineal $v_e$ . . . . .	55
4.8. Error de velocidad angular $w_e$ . . . . .	55
4.9. Parámetros estimados . . . . .	56
4.10. Velocidades deseadas $v_{pd}$ y $\omega_d$ . . . . .	56
4.11. Velocidad angular de las ruedas . . . . .	57
4.12. Trayectoria experimental . . . . .	59
4.13. Error de posición $x_e$ . . . . .	59
4.14. Error de posición $y_e$ . . . . .	60
4.15. Error de orientación $\theta_e$ . . . . .	60
4.16. Error de velocidad lineal $v_e$ . . . . .	61
4.17. Error de velocidad angular $w_e$ . . . . .	61



---

4.18. Parámetros estimados . . . . .	62
4.19. Velocidades deseadas $v_{pd}$ y $\omega_d$ . . . . .	62
4.20. Velocidad angular de las ruedas . . . . .	63
4.21. Trayectoria de referencia . . . . .	64
4.22. Trayectoria experimental . . . . .	66
4.23. Error de posición $x_e$ . . . . .	67
4.24. Error de posición $y_e$ . . . . .	67
4.25. Error de orientación $\theta_e$ . . . . .	68
4.26. Error de velocidad lineal $v_e$ . . . . .	68
4.27. Error de velocidad angular $w_e$ . . . . .	69
4.28. Parámetros estimados . . . . .	69
4.29. Velocidades deseadas $v_{pd}$ y $\omega_d$ . . . . .	70
4.30. Velocidad angular de las ruedas . . . . .	70

---

# Capítulo 1

## Introducción

El estudio de los robots móviles ha crecido substancialmente en los últimos años. Es su capacidad de moverse de manera autónoma lo que los ha vuelto especialmente atractivos, pues los hace adecuados para una gran variedad de aplicaciones prácticas. Su aplicación en la industria es vasta como medios de transporte, inspección y operación, además de ser útiles para realizar tareas en entornos hostiles para el ser humano. Los robots móviles también se utilizan en aplicaciones militares. Un ejemplo de ello es la detección, traslado y desactivación de artefactos explosivos. En el ámbito científico se han utilizado para realizar tareas de investigación en medios en los cuales el ser humano no puede ir o son inaccesibles por tratarse de medios remotos o demasiado peligrosos (submarino, espacial, etc.) [10]. Gracias a su capacidad de movimiento, esta clase de robots pueden trabajar en conjunto con robots manipuladores, lo cual permite pensar que eventualmente estos robots reemplazarán al operario humano en las aplicaciones industriales. De ahí que estos sistemas hayan atraído el interés de diversos campos del conocimiento; el control automático es un ejemplo de ello.

Los robots móviles se pueden clasificar según el medio que usan para moverse (ruedas, patas, orugas, etc.) [16], siendo los robots móviles con ruedas los más comunes, pues en general su construcción es más simple y permiten transportar cargas mayores, aunado a muchas otras ventajas prácticas. Los robots móviles con ruedas se pueden clasificar de acuerdo a la disposición de las ruedas en la estructura del robot (diferencial, triciclo, ackerman, omnidireccional, entre otras [14]), siendo la configu-

ración diferencial una de las más sencillas y utilizadas. La configuración diferencial consiste en dos ruedas dispuestas simétricamente en un eje común perpendicular a la dirección del robot. Cada rueda es controlada por un motor, de tal modo que el desplazamiento y orientación del robot queda determinado por la diferencia de velocidad de las ruedas [1].

El problema básico de un robot móvil es el de la navegación, es decir, moverse de un lugar a otro a lo largo de una trayectoria. Dentro de los problemas de navegación que se han estudiado, uno que es particularmente relevante es el seguimiento de una trayectoria de referencia. El seguimiento de trayectoria de referencia consiste en hacer que el robot móvil siga la trayectoria impuesta por un robot móvil de referencia, real o virtual, mediante un algoritmo de control, de tal modo que el robot móvil alcance las posiciones en el espacio que el robot de referencia ha descrito.

## 1.1. Estado del arte

El problema de seguimiento de trayectoria en robots móviles con ruedas se ha abordado desde distintas perspectivas de control. En Kanayama et al. [11], se propone un esquema de control para resolver el problema de seguimiento de trayectoria usando el método directo de Lyapunov, con base en el modelo cinemático del robot. El modelo cinemático es una representación simplificada que no captura la riqueza dinámica del movimiento del robot móvil. Emplear el modelo dinámico en el diseño del controlador permite tomar en consideración los parámetros físicos del robot. Esquemas de control basados en el modelo dinámico también han sido propuestos. En Fierro y Lewis [4] se introduce una ley de control basada en el método de *backstepping* que demuestra solucionar el problema cuando los parámetros del modelo dinámico del robot son bien conocidos.

Controladores diseñados bajo los esquemas del control inteligente también se han desarrollado, como control con redes neuronales [5], y lógica difusa [13]. En Hou et al. [8], se desarrolla una estrategia de control basada en *backstepping* que hace uso de sistemas de lógica difusa para aprender el comportamiento de la dinámica del robot.

Cuando los parámetros dinámicos del robot no son bien conocidos es necesario desarrollar esquemas de control robustos ante incertidumbres paramétricas. Por lo

que esquemas de control robusto basados en la teoría de modos deslizantes también han sido reportados, [3], [18], [20]. A este respecto, se han reportado en la literatura resultados de control adaptable. En Fukao et al. [6] se desarrolla una ley de control adaptable capaz de compensar incertidumbre en los parámetros del modelo dinámico cuando las trayectorias de referencia son líneas rectas. En Zhengcai et al. [21] se resuelve el problema de seguimiento de trayectoria sin tener restricción alguna en la trayectoria de referencia, pero impone condiciones a la estructura del modelo dinámico del sistema.

## 1.2. Planteamiento del problema

Es común que un robot móvil se utilice en conjunto con un brazo manipulador para dar mayor flexibilidad a las operaciones efectuadas por éste. Cuando un robot manipulador realiza una tarea determinada, en general es difícil conocer a priori la magnitud de los parámetros envueltos en el sistema, masa, momentos de inercia, etc.; por lo que pueden existir incertidumbre paramétrica. Esto plantea la necesidad de diseñar un controlador capaz de lidiar de forma adecuada con tal incertidumbre. El control adaptable ofrece una alternativa para el control de sistemas sujetos a incertidumbres paramétricas, pues en general busca mantener un desempeño consistente del sistema en presencia de variaciones desconocidas o incertidumbres en los parámetros de la planta. Como se mencionó en la sección anterior, esquemas de control adaptable ya han sido propuestos. Sin embargo, su aplicación está restringida de algún modo a sistemas y/o trayectorias de referencias particulares. Es por lo cual surge la necesidad de proponer un esquema adaptable más general.

De acuerdo a lo antes descrito, el problema de control a resolver en este trabajo es el diseño de un esquema de control adaptable, robusto ante incertidumbres paramétricas, para seguimiento de trayectoria en robots móviles con restricciones no holonómicas.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo general

Diseñar e implementar un esquema de control adaptable, para seguimiento de trayectoria en robots móviles con restricciones no holonómicas.

### 1.3.2. Objetivos particulares

- Diseñar una ley de control no lineal que asegure el seguimiento de una trayectoria de referencia con base en el modelo cinemático de un robot móvil con restricciones no holonómicas.
- Diseñar una ley de control capaz de compensar incertidumbres en los parámetros del modelo dinámico (masa e inercia) de un robot móvil con restricciones no holonómicas mediante un esquema de control adaptable por modelo de referencia.
- Implementar el controlador desarrollado en un robot móvil de configuración diferencial.

## 1.4. Estructura del documento

El Capítulo 1 presenta una breve introducción a los robots móviles con ruedas, haciendo énfasis en los robots móviles de configuración diferencial. Se plantea el problema de navegación a resolver en este trabajo y se presenta un panorama general de cómo se ha abordado en la literatura el problema planteado. Finalmente, se definen los objetivos a cumplir en el presente escrito.

En el Capítulo 2 se desarrolla el modelo dinámico de un robot móvil no holonómico.

El Capítulo 3 inicia con el diseño de una ley de control no lineal basada en el modelo cinemático del robot móvil; y en seguida se presenta el desarrollo de una ley de control adaptable por modelo de referencia que contempla la dinámica de robot.

El Capítulo 4 reporta los resultados experimentales obtenidos de la implementación de los esquemas de control propuestos en el Capítulo 3, en el robot móvil

RM-10, del Laboratorio de Robótica del programa de Posgrado en Ingeniería de la UNAM.

Finalmente, el Capítulo 5 resume las conclusiones de este trabajo.

---

## Capítulo 2

### Modelo dinámico

Dentro de las configuraciones usuales de los robots móviles, una de las más simples es la configuración diferencial. Esta configuración básicamente consiste de dos ruedas independientemente actuadas montadas simétricamente en un eje común y dos ruedas libres montadas en un segundo eje que dan soporte al robot. De este modo el movimiento y orientación del robot se logra a través del par que entregan los actuadores a las ruedas actuadas. Un robot móvil diferencial como el mostrado en la Figura 2.1 tiene tres grados de libertad, es decir, puede moverse en dirección de ambos ejes ( $X$  e  $Y$ ) y rotar alrededor del eje vertical. Debido a que sólo se pueden controlar dos grados de libertad, es decir, sólo son posibles el movimiento normal al eje de las ruedas actuadas y el cambio de orientación, éste es considerado un sistema subactuado.

Dado que para controlar el movimiento del robot móvil se requiere determinar los pares a aplicar a las ruedas actuadas, es necesario determinar el modelo dinámico del robot, lo cual se realizará en este capítulo mediante las ecuaciones de Euler–Lagrange.

#### 2.1. Restricción no holonómica

Un robot móvil con tracción diferencial está sujeto a restricciones que limitan su movimiento. Dichas restricciones son dependientes de la velocidad del sistema por lo que se denominan no holonómicas. Para el caso bajo estudio se considera la condición

de no deslizamiento.

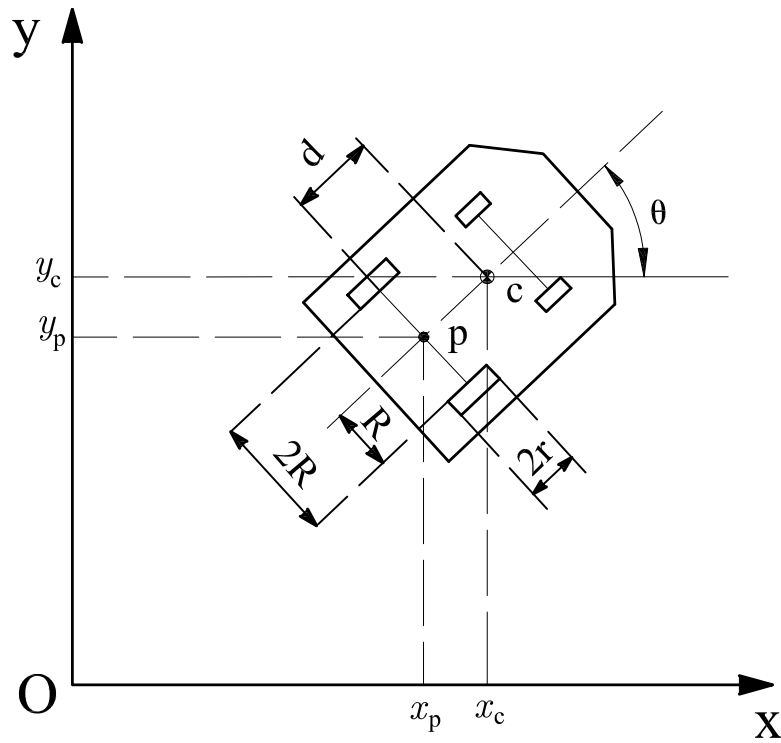


Figura 2.1: Esquema de robot móvil

Considérese un mecanismo móvil como el mostrado en la Figura 2.1, el cual se supone es un cuerpo rígido de masa  $m$  cuyo centro de masa se ubica en el punto C de coordenadas  $(x_c, y_c)$ . La tracción del mecanismo es generada por dos ruedas en configuración diferencial, es decir, dos ruedas independientemente actuadas por dos motores de corriente directa. El radio de las ruedas se define como  $r$  y la distancia entre ellas como  $2R$ . La distancia entre el centro de masa y el punto P, que identifica al punto medio del eje de las ruedas actuadas de coordenadas  $(x_p, y_p)$ , se define como  $d$ . El ángulo  $\theta$  es el ángulo de orientación del robot con respecto al eje X.

La condición de no deslizamiento establece que las ruedas no patinan y tampoco tienen desplazamientos laterales, por lo que el movimiento del sistema sólo es posible en dirección normal al eje de las ruedas actuadas. De este modo surgen las siguientes



relaciones

$$\begin{aligned}\dot{x}_p &= v_p \cos \theta \\ \dot{y}_p &= v_p \sin \theta\end{aligned}\tag{2.1}$$

que pueden reescribirse como

$$v_p = \frac{\dot{x}_p}{\cos \theta}\tag{2.2}$$

$$v_p = \frac{\dot{y}_p}{\sin \theta}\tag{2.3}$$

Igualando (2.2) y (2.3) se llega a la siguiente relación

$$\begin{aligned}\dot{x}_p \sin \theta &= \dot{y}_p \cos \theta \\ \dot{y}_p \cos \theta - \dot{x}_p \sin \theta &= 0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Por otro lado, las coordenadas de P y C están relacionadas por

$$x_p = x_c - d \cos \theta, \quad y_p = y_c - d \sin \theta.\tag{2.5}$$

Al derivar con respecto al tiempo las ecuaciones anteriores se tiene lo siguiente

$$\dot{x}_p = \dot{x}_c + d\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y}_p = \dot{y}_c - d\dot{\theta} \cos \theta.\tag{2.6}$$

Al combinar (2.4) y (2.6) finalmente se obtiene la siguiente relación

$$\dot{y}_c \cos \theta - \dot{x}_c \sin \theta - d\dot{\theta} = 0,\tag{2.7}$$

que es la ecuación de la restricción no holonómica del sistema.

## 2.2. Ecuaciones dinámicas

Para un sistema no holonómico las ecuaciones de Euler - Lagrange son descritas por la siguiente relación

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial J}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{f} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}\tag{2.8}$$

donde

$\mathbf{q}$  : Vector de coordenadas generalizadas del sistema

$L$  : Lagrangiano

$\mathbf{f}$ : Fuerzas generalizadas

$J$  : Co-contenido total en los en los disipadores

$\mathbf{A}$  : Es una matriz asociada a las restricciones no holonómicas del sistema

$\boldsymbol{\lambda}$  : Vector de multiplicadores de Lagrange

El Lagrangiano  $L$  es definido como  $L = U^*(\dot{\mathbf{q}}) - T(\mathbf{q})$ , donde

$U^*$ : Co-energía cinética

$T$ : Energía potencial

Dado que se restringe el movimiento del sistema al plano horizontal  $X - Y$  (ver Figura 2.1), su energía potencial permanece constante, por lo que su Lagrangiano queda definido sólo por la co-energía cinética  $U^*$ . De acuerdo con la Figura 2.1 se tiene

$$U^* = \frac{1}{2}mv_p^2 + \frac{1}{2}\mathcal{I}\dot{\theta}^2, \quad (2.9)$$

donde  $\mathcal{I}$  representa el momento de inercia del robot móvil alrededor del punto P.

La velocidad  $v_c$  del centro de masa del robot, de componentes  $\dot{x}_c$  e  $\dot{y}_c$ , presenta dos contribuciones, la primera es debida al movimiento de traslación y la segunda a la rotación causada por cambios en la orientación, es decir

$$\dot{x}_c = v_p \cos \theta - d\dot{\theta} \sin \theta \quad (2.10)$$

$$\dot{y}_c = v_p \sin \theta + d\dot{\theta} \cos \theta \quad (2.11)$$

De estas dos últimas relaciones es fácil determinar que la rapidez  $v_p$  del robot está dada por lo siguiente

$$v_p^2 = (\dot{x}_c + d\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (\dot{y}_c - d\dot{\theta} \cos \theta)^2. \quad (2.12)$$

Con esto, la co-energía cinética queda definida como

$$U^* = \frac{1}{2}m[(\dot{x}_c + d\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (\dot{y}_c - d\dot{\theta} \cos \theta)^2] + \frac{1}{2}\mathcal{I}\dot{\theta}^2 \quad (2.13)$$

y por lo tanto el Lagrangiano del sistema es

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + d^2\dot{\theta}^2 + 2d\dot{\theta}(\dot{x}_c \sin \theta - \dot{y}_c \cos \theta)] + \frac{1}{2}\mathcal{I}\dot{\theta}^2 \quad (2.14)$$

Con el Lagrangiano determinado, ahora es posible desarrollar las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.8). Dado que la posición del robot en el plano  $X - Y$  está completamente definida por las coordenadas del centro de masa  $(x_c, y_c)$  y la orientación  $\theta$ , éstas son las coordenadas generalizadas del sistema, es decir

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ \theta \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Por lo tanto se tendrán tres ecuaciones de Euler-Lagrange, una para cada coordenada generalizada.

Para  $q_1 = x_c$  las ecuaciones de Euler-Lagrange, despreciando los términos disipativos, quedan definidas como sigue

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} - \frac{\partial L}{\partial x_c} = f_1 + a_1 \lambda \quad (2.16)$$

donde  $f_1$  son las componentes de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema en dirección de la coordenada generalizada  $x_c$ , es decir, las fuerzas generalizadas. Recuérdese que las fuerzas externas presentes en el sistema son los pares aplicados a las ruedas actuadas, definidos como  $\tau_r$  para indicar el par aplicado a la rueda derecha y como  $\tau_l$  para el par aplicado a la rueda izquierda. De acuerdo con esto último se define  $f_1$  como

$$f_1 = \frac{1}{r}[\tau_r \cos \theta + \tau_l \sin \theta] \quad (2.17)$$

El término  $a_1$  en (2.16) corresponde a la primera fila de la matriz asociada a la

restricción no holonómica  $\mathbf{A}(\mathbf{q})^T$ , que se define de acuerdo con (2.7) como

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = -\dot{x}_c \sin \theta + \dot{y}_c \cos \theta - d\dot{\theta} = [-\sin \theta \quad \cos \theta \quad -d]\dot{\mathbf{q}} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.18)$$

Desarrollando (2.16) se tiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} = m\ddot{x}_c + dm\ddot{\theta} \sin \theta + dm\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_c} = 0. \quad (2.20)$$

Por lo tanto la ecuación (2.16) finalmente queda

$$m\ddot{x}_c + dm\ddot{\theta} \sin \theta + dm \dot{\theta}^2 \cos \theta = \frac{1}{r} [\tau_r \cos \theta + \tau_l \cos \theta] - \sin \theta \lambda \quad (2.21)$$

De manera análoga a lo hecho anteriormente, se desarrollan las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $q_2 = y_c$  y  $q_3 = \theta$ , con lo que se obtiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_c} - \frac{\partial L}{\partial y_c} = f_2 + a_2 \lambda \quad (2.22)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = f_3 + a_3 \lambda \quad (2.23)$$

con

$$f_2 = \frac{1}{r} [\tau_r \sin \theta + \tau_l \sin \theta] \quad (2.24)$$

$$f_3 = \frac{1}{r} [\tau_r R - \tau_l R] \quad (2.25)$$

Desarrollando ahora las derivadas en (2.22) y (2.23)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_c} = m\ddot{y}_c - dm\ddot{\theta} \cos \theta + dm\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_c} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m[d^2\ddot{\theta} + d(\ddot{x}_c \sin \theta + \dot{x}_c \dot{\theta} \cos \theta - \ddot{y}_c \cos \theta + \dot{y}_c \dot{\theta} \sin \theta)] + \mathcal{I}\ddot{\theta} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = md\dot{\theta}[\dot{x}_c \cos \theta + \dot{y}_c \sin \theta] \quad (2.29)$$

Finalmente las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.22) y (2.23) para  $y_c$  y  $\theta$  son

$$m\ddot{y}_c - dm\ddot{\theta} \cos \theta + dm\dot{\theta}^2 \sin \theta = \frac{1}{r}[\tau_r \sin \theta + \tau_l \sin \theta] + \cos \theta \lambda \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} m[d^2\ddot{\theta} + d(\ddot{x}_c \sin \theta + \dot{x}_c \dot{\theta} \cos \theta - \ddot{y}_c \cos \theta + \dot{y}_c \dot{\theta} \sin \theta)] + \mathcal{I}\ddot{\theta} - \\ md\dot{\theta}[\dot{x}_c \cos \theta + \dot{y}_c \sin \theta] = \frac{1}{r}[\tau_r R - \tau_l R] - d\lambda \end{aligned} \quad (2.31)$$

Con esto las ecuaciones del movimiento del robot móvil son descritas por (2.21), (2.30) y (2.31); las cuales se pueden reescribir en la siguiente forma matricial

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\lambda. \quad (2.32)$$

que es la formulación matricial de Lagrange, donde  $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^3$  es el vector de coordenadas generalizadas,  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$  es una matriz simétrica definida positiva conocida como matriz de inercia,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathcal{R}^3$  es el vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $\mathbf{g} \in \mathcal{R}^3$  es el vector de fuerzas gravitacionales,  $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{3 \times 2}$  es una matriz de transformación de entradas,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{R}^2$  es el vector de entradas,  $\mathbf{A}^T(\mathbf{q}) \in \mathcal{R}^3$  es una matriz asociada a las restricciones del sistema y  $\lambda \in \mathcal{R}$  es el vector de multiplicadores de Lagrange. Con esto, para el caso bajo análisis, (2.32) queda definida por lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 & dm \sin \theta \\ 0 & m & -dm \cos \theta \\ dm \sin \theta & -dm \cos \theta & \mathcal{I} + md^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} md\dot{\theta}^2 \cos \theta \\ md\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \theta \\ \sin \theta & \sin \theta \\ R & -R \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_l \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ -d \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Cabe destacar que debido a que el movimiento del robot se restringe al plano horizontal ( $X - Y$ ) el término  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  es nulo.

Es conveniente ahora determinar la matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  a través de los símbolos de

Christoffel, los cuales se definen a partir de la siguiente relación

$$c_{kji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{kj}}{\partial q_i} \right) = c_{jki} \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (2.34)$$

donde los términos  $h_{ij,ik,kj}$  corresponden al  $ij$ -ésimo elemento de  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ . A partir de esto último, los elementos  $c_{ij}$  de la matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  están dados por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{kji} \dot{q}_k \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.35)$$

Para el caso bajo estudio, los símbolos de Christoffel son los siguientes

$$\begin{aligned} c_{111} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial q_1} \right) = 0 & c_{112} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{21}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{21}}{\partial q_1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial q_2} \right) = 0 \\ c_{113} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{31}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{31}}{\partial q_1} - \frac{\partial h_{11}}{\partial q_3} \right) = 0 & c_{121} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{12}}{\partial q_1} \right) = 0 \\ c_{122} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{22}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{12}}{\partial q_2} \right) = 0 & c_{123} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{32}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{31}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{12}}{\partial q_3} \right) = 0 \\ c_{131} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{13}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{13}}{\partial q_1} \right) = 0 & c_{132} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{23}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{21}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{13}}{\partial q_2} \right) = 0 \\ c_{133} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{33}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{31}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{13}}{\partial q_3} \right) = 0 & c_{211} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{11}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{12}}{\partial q_1} \right) = 0 \\ c_{212} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{22}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{21}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{12}}{\partial q_2} \right) = 0 & c_{213} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{32}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{31}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{12}}{\partial q_3} \right) = 0 \\ c_{221} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{12}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{22}}{\partial q_1} \right) = 0 & c_{222} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{22}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{22}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{22}}{\partial q_2} \right) = 0 \\ c_{223} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{32}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{32}}{\partial q_2} - \frac{\partial h_{22}}{\partial q_3} \right) = 0 & c_{231} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{13}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{12}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{23}}{\partial q_1} \right) = 0 \\ c_{232} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{23}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{22}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{23}}{\partial q_2} \right) = 0 & c_{233} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{33}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{32}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{23}}{\partial q_3} \right) = 0 \\ c_{311} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{11}}{\partial q_3} + \frac{\partial h_{13}}{\partial q_1} - \frac{\partial h_{31}}{\partial q_1} \right) = 0 & c_{321} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{23}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{21}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{13}}{\partial q_2} \right) = 0 \\ c_{313} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{33}}{\partial q_1} + \frac{\partial h_{31}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{13}}{\partial q_3} \right) = 0 & c_{321} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{13}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{12}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{23}}{\partial q_1} \right) = 0 \\ c_{322} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{23}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{22}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{23}}{\partial q_2} \right) = 0 & c_{323} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{33}}{\partial q_2} + \frac{\partial h_{32}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{23}}{\partial q_3} \right) = 0 \\ c_{331} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{13}}{\partial q_3} + \frac{\partial h_{13}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{33}}{\partial q_1} \right) = md \cos \theta & c_{333} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{33}}{\partial q_3} + \frac{\partial h_{33}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{33}}{\partial q_3} \right) = 0 \\ c_{332} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{23}}{\partial q_3} + \frac{\partial h_{23}}{\partial q_3} - \frac{\partial h_{33}}{\partial q_2} \right) = md \sin \theta \end{aligned}$$

Por lo tanto, de acuerdo con (2.35) se obtiene

$$\begin{aligned}
c_{11} &= c_{111}\dot{q}_1 + c_{211}\dot{q}_2 + c_{311}\dot{q}_3 = 0 \\
c_{12} &= c_{121}\dot{q}_1 + c_{221}\dot{q}_2 + c_{321}\dot{q}_3 = 0 \\
c_{13} &= c_{131}\dot{q}_1 + c_{231}\dot{q}_2 + c_{331}\dot{q}_3 = md\dot{\theta} \cos \theta \\
c_{21} &= c_{112}\dot{q}_1 + c_{212}\dot{q}_2 + c_{312}\dot{q}_3 = 0 \\
c_{22} &= c_{122}\dot{q}_1 + c_{222}\dot{q}_2 + c_{322}\dot{q}_3 = 0 \\
c_{23} &= c_{132}\dot{q}_1 + c_{232}\dot{q}_2 + c_{332}\dot{q}_3 = md\dot{\theta} \sin \theta \\
c_{31} &= c_{113}\dot{q}_1 + c_{213}\dot{q}_2 + c_{313}\dot{q}_3 = 0 \\
c_{32} &= c_{123}\dot{q}_1 + c_{223}\dot{q}_2 + c_{323}\dot{q}_3 = 0 \\
c_{33} &= c_{133}\dot{q}_1 + c_{233}\dot{q}_2 + c_{333}\dot{q}_3 = 0
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Con lo cual la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & md\dot{\theta} \cos \theta \\ 0 & 0 & md\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.37}$$

El multiplicador de Lagrange  $\lambda$  que hasta ahora no ha sido definido se determinará a partir de la restricción no holonómica del sistema, para lo cual cabe recordar que si la restricción no holonómica no depende explícitamente del tiempo es posible escribir la siguiente relación

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0. \tag{2.38}$$

Si se deriva con respecto al tiempo (2.38) se tiene

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0 \tag{2.39}$$

De (2.32) es posible obtener  $\ddot{\mathbf{q}}$  como sigue

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1}[\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\lambda - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}]. \tag{2.40}$$

Sustituyendo (2.40) en (2.39) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}[\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\lambda - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}] + \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} &= 0 \\ \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{q})\lambda - \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Después de algunos pasos algebraicos para despejar a  $\lambda$  de (2.41), se obtiene

$$\lambda = [\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{q})]^{-1}[\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}] \quad (2.42)$$

Por cálculo directo

$$\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{m\mathcal{I}} \begin{bmatrix} \mathcal{I} - d^2m \cos^2 \theta + md^2 & -d^2m \sin \theta \cos \theta & -md \sin \theta \\ -d^2m \sin \theta \cos \theta & \mathcal{I} - d^2m \sin^2 \theta + md^2 & md \cos \theta \\ -md \sin \theta & md \cos \theta & m \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Desarrollando los términos en (2.42) se obtiene finalmente

$$\lambda = m\dot{\theta}[\dot{x}_c \cos \theta + \dot{y}_c \sin \theta] \quad (2.44)$$

Así el modelo dinámico del robot móvil es descrito completamente por las ecuaciones (2.32), (2.44)

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\lambda$$

$$\lambda = m\dot{\theta}[\dot{x}_c \cos \theta + \dot{y}_c \sin \theta]$$

y las relaciones (2.33).



---

## Capítulo 3

# Control adaptable

En algunas tareas de control, como por ejemplo aquellas relacionadas con robots manipuladores, los sistemas a controlar pueden presentar incertidumbres paramétricas en algún instante de la operación de control. Si tal incertidumbre paramétrica no es compensada adecuadamente, el desempeño del controlador podría no ser el esperado o peor aún, podría hacer inestable al sistema.

En general los robots móviles se usan en conjunto con un robot manipulador, por lo que en la práctica un sistema robot móvil - manipulador puede presentar incertidumbres paramétricas. El control adaptable ofrece una opción para el control de sistemas sujetos a incertidumbres paramétricas, pues en general busca mantener un desempeño consistente del sistema en presencia de variaciones desconocidas o incertidumbres en los parámetros de la planta.

En este capítulo se presenta el diseño de la ley de control propuesta para cumplir con el objetivo de control planteado. El diseño del controlador se divide en dos partes. En la primera se propone una ley de control no lineal tomando en consideración sólo la cinemática de la planta, y en la segunda se propone un esquema de control adaptable por modelo de referencia para la parte dinámica del robot móvil. La conjunción de estas dos leyes de control especifican el controlador del robot móvil.

### 3.1. Relaciones dinámicas

Antes de comenzar con el desarrollo del controlador para el robot móvil es importante determinar algunas relaciones dinámicas del sistema, para lo cual considérese nuevamente (2.21), (2.30) y (2.31), las cuales se reescriben a continuación

$$m\ddot{x}_c + dm\ddot{\theta} \sin \theta + dm \dot{\theta}^2 \cos \theta = \frac{1}{r}[\tau_r \cos \theta + \tau_l \cos \theta] - \sin \theta \lambda \quad (3.1)$$

$$m\ddot{y}_c - dm\ddot{\theta} \cos \theta + dm\dot{\theta}^2 \sin \theta = \frac{1}{r}[\tau_r \sin \theta + \tau_l \sin \theta] + \cos \theta \lambda \quad (3.2)$$

$$m[d^2\ddot{\theta} + d(\ddot{x}_c \sin \theta - \ddot{y}_c \cos \theta)] + \mathcal{I}\ddot{\theta} = \frac{1}{r}[\tau_r R - \tau_l R] - d\lambda. \quad (3.3)$$

Si se define

$$\tau_v = \frac{1}{r}(\tau_r + \tau_l) \quad (3.4)$$

como la fuerza que induce movimiento lineal y

$$\tau_a = \frac{R}{r}(\tau_r - \tau_l) \quad (3.5)$$

como la fuerza que produce movimiento angular; entonces (3.1), (3.2) y (3.3) se convierten en

$$m\ddot{x}_c + dm\ddot{\theta} \sin \theta + dm \dot{\theta}^2 \cos \theta = \tau_v \cos \theta - \sin \theta \lambda$$

$$m\ddot{y}_c - dm\ddot{\theta} \cos \theta + dm\dot{\theta}^2 \sin \theta = \tau_v \sin \theta + \cos \theta \lambda$$

$$m[d^2\ddot{\theta} + d(\ddot{x}_c \sin \theta - \ddot{y}_c \cos \theta)] + \mathcal{I}\ddot{\theta} = \tau_a - d\lambda,$$

o bien

$$\ddot{x}_c = \frac{\tau_v}{m} \cos \theta - \frac{\lambda}{m} \sin \theta - (d\ddot{\theta} \sin \theta + d\dot{\theta}^2 \cos \theta) \quad (3.6)$$

$$\ddot{y}_c = \frac{\tau_v}{m} \sin \theta + \frac{\lambda}{m} \cos \theta + (d\ddot{\theta} \cos \theta - d\dot{\theta}^2 \sin \theta) \quad (3.7)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{\mathcal{I} + md^2}[\tau_a - d\lambda - dm\ddot{x}_c \sin \theta + dm\ddot{y}_c \cos \theta]. \quad (3.8)$$

Por otro lado, de (2.6) puede verse que el modelo cinemático del robot es

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} v_p \\ w \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

con

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Derivando (3.9) con respecto al tiempo se tiene

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{G}}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} v_p \\ w \end{bmatrix} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{v}_p \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

es decir

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & -d\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{\theta} \cos \theta & -d\dot{\theta} \sin \theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_p \\ \dot{w} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Nótese que  $w = \dot{\theta}$ , por lo que desarrollando (3.12) se tiene

$$\ddot{x}_c = -wv_p \sin \theta - dw^2 \cos \theta + \dot{v}_p \cos \theta - d\dot{w} \sin \theta \quad (3.13)$$

$$\ddot{y}_c = wv_p \cos \theta - dw^2 \sin \theta + \dot{v}_p \sin \theta + d\dot{w} \cos \theta \quad (3.14)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{w}. \quad (3.15)$$

Igualando (3.6) y (3.7) con (3.13) y (3.14) respectivamente, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\tau_v}{m} \cos \theta - \frac{\lambda}{m} \sin \theta - (d\dot{w} \sin \theta + dw^2 \cos \theta) = \\ -wv_p \sin \theta - dw^2 \cos \theta + \dot{v}_p \cos \theta - d\dot{w} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_v}{m} \sin \theta + \frac{\lambda}{m} \cos \theta + (d\dot{v} \cos \theta - dw^2 \sin \theta) = \\ wv_p \cos \theta - dw^2 \sin \theta + \dot{v}_p \sin \theta + d\dot{v} \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si ahora se multiplica (3.16) por  $\cos \theta$  y (3.17) por  $\sin \theta$  y se suman ambos productos se tiene

$$\left(\frac{\tau_v}{m} - dw^2\right) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = (-dw^2 + \dot{v}_p)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

es decir

$$\dot{v}_p = \frac{\tau_v}{m}. \quad (3.18)$$

Ahora, igualando (3.8) con (3.15)

$$\dot{w} = \frac{1}{\mathcal{I} + md^2} [\tau_a - d\lambda - dm\ddot{x}_c \sin \theta + dm\ddot{y}_c \cos \theta] \quad (3.19)$$

y sustituyendo (3.6) y (3.7) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{w} &= \frac{1}{\mathcal{I} + md^2} [\tau_a - d\lambda + (d\lambda + d^2m\ddot{\theta})(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)] \\ &= \frac{1}{\mathcal{I} + md^2} [\tau_a + d^2m\ddot{\theta}]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

De acuerdo con (3.15) finalmente se tiene

$$\dot{w} = \frac{\tau_a}{\mathcal{I}}. \quad (3.21)$$

## 3.2. Control parte cinemática

El problema de control a resolver es el seguimiento de una trayectoria impuesta por un robot de referencia. Se considera que el robot de referencia tiene una configuración idéntica a la del robot móvil, por lo que su cinemática es definida como en (3.9). Es decir, se propone

$$\dot{q}_r = \begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r & -d \sin \theta_r \\ \sin \theta_r & d \cos \theta_r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ w_r \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

La cinemática del robot de referencia es definida por (3.22) y está sujeta a la restricción no holonómica

$$\dot{y}_r \cos \theta_r - \dot{x}_r \sin \theta_r - d\dot{\theta}_r = 0. \quad (3.23)$$

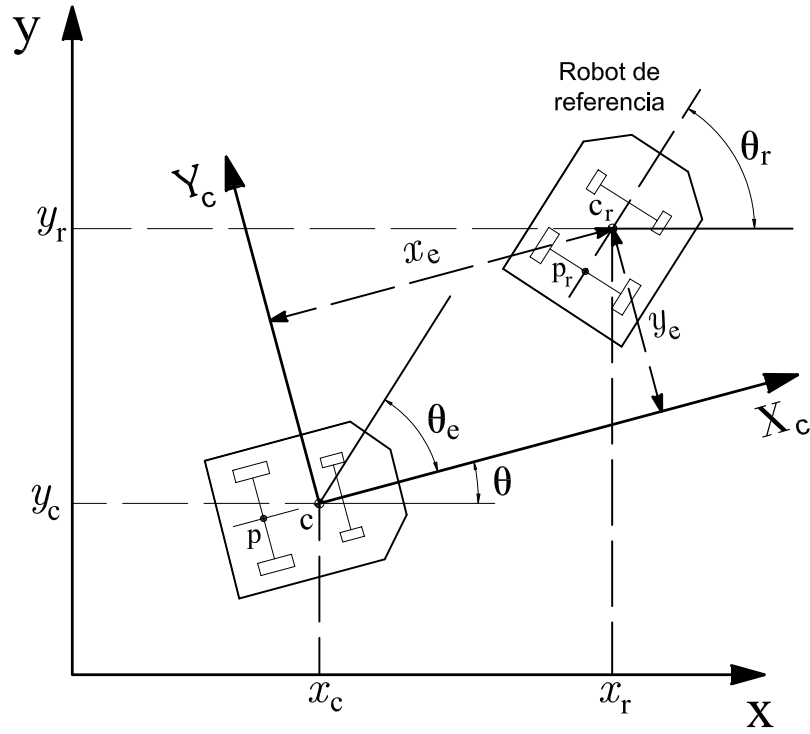


Figura 3.1: Error de posición

Ahora se define el error de posición del robot con respecto al marco de referencia  $X_c - Y_c$  montado sobre el robot, Figura 3.1, de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x_c \\ y_r - y_c \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Derivando (3.24) con respecto al tiempo se tiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_r - \dot{x}_c \\ \dot{y}_r - \dot{y}_c \\ \dot{\theta}_r - \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta & \dot{\theta} \cos \theta & 0 \\ -\dot{\theta} \cos \theta & -\dot{\theta} \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x_c \\ y_r - y_c \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= \dot{x}_r \cos \theta + \dot{y}_r \sin \theta - (\dot{x}_c \cos \theta + \dot{y}_c \sin \theta) + \\ &\quad + \dot{\theta}(y_r \cos \theta - y_c \cos \theta - x_r \sin \theta + x_c \sin \theta). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sustituyendo (3.9) y (3.22) en (3.26) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= v_r(\cos \theta_r \cos \theta + \sin \theta_r \sin \theta) - dw_r(\sin \theta_r \cos \theta - \cos \theta_r \sin \theta) \\ &\quad - v_p(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \dot{\theta}[\cos \theta(y_r - y_c) - \sin \theta(x_r - x_c)]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dadas las identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (3.28)$$

y considerando (3.24) se tiene finalmente

$$\dot{x}_e = v_r \cos \theta_e - dw_r \sin \theta_e - v_p + wy_e. \quad (3.29)$$

Para  $y_e$  se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \dot{y}_e &= -\dot{x}_r \sin \theta + \dot{y}_r \cos \theta + (\dot{x}_c \sin \theta - \dot{y}_c \cos \theta) - \\ &\quad - \dot{\theta}(x_r \cos \theta - x_c \cos \theta + y_r \sin \theta - y_c \sin \theta). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Sustituyendo  $\dot{x}_r$  y  $\dot{y}_r$  de (3.22) y considerando la restricción no holonómica del sistema (2.7), es decir  $\dot{y}_c \cos \theta - \dot{x}_c \sin \theta - dw = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \dot{y}_e &= v_r(\sin \theta_r \cos \theta - \cos \theta_r \sin \theta) + dw_r(\cos \theta_r \cos \theta + \sin \theta_r \sin \theta) - \\ &\quad - dw - w(\cos \theta(x_r - x_c) + \sin \theta(y_r - y_c)). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dadas las identidades trigonométricas (3.28) y considerando (3.24) se tiene

$$\dot{y}_e = v_r \sin \theta_e + dw_r \cos \theta_e - (d + x_e)w. \quad (3.32)$$

Por ultimo  $\theta_e$  es

$$\dot{\theta}_e = \dot{\theta}_r - \dot{\theta} = w_r - w. \quad (3.33)$$

Con esto, la dinámica del error de posición escrita en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_r \cos \theta_e - dw_r \sin \theta_e \\ v_r \sin \theta_e + dw_r \cos \theta_e \\ w_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & y_e \\ 0 & -(d + x_e) \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_p \\ w \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

donde  $v_p$  y  $w$  se consideran entradas de control, como se puede apreciar en la siguiente figura.

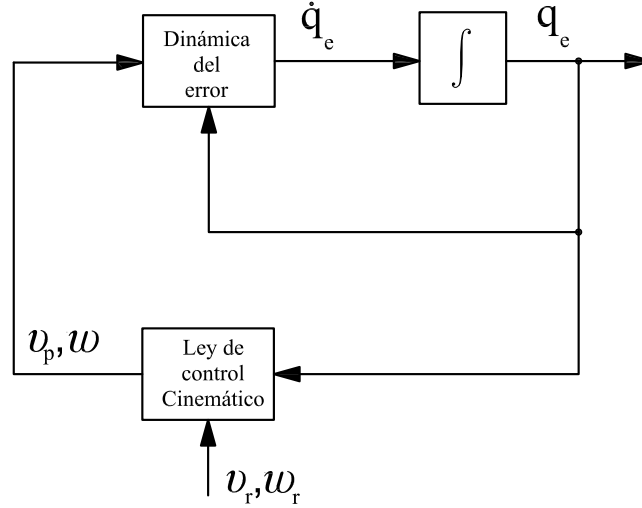


Figura 3.2: Dinámica del error.

Ahora se busca determinar las entradas de control  $v_p$  y  $w$  tal que las trayectorias  $\mathbf{q}_e$  de (3.34) tiendan alrededor del punto de operación  $\mathbf{q}_e = [x_e, y_e, \theta_e]^T = \mathbf{0}$ , para lo cual se emplea la siguiente función positiva definida

$$V = \frac{1}{2}x_e^2 + \frac{1}{2}y_e^2 + |\sin \theta_e| \quad (3.35)$$

con

$$|\sin \theta_e| = \begin{cases} \sin \theta_e & \text{si } \theta_e \geq 0 \\ -\sin \theta_e & \text{si } \theta_e < 0 \end{cases}$$

Si  $\theta_e \geq 0$ ,  $V$  será

$$V = \frac{1}{2}x_e^2 + \frac{1}{2}y_e^2 + \sin \theta_e, \quad (3.36)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (3.34) es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x_e \dot{x}_e + y_e \dot{y}_e + \cos \theta_e \dot{\theta}_e \\ &= x_e[v_r \cos \theta_e - dw_r \sin \theta_e - v_p + wy_e] + y_e[v_r \sin \theta_e + dw_r \cos \theta_e \\ &\quad - (d + x_e)w] + \cos \theta_e(w_r - w) \\ &= x_e[v_r \cos \theta_e - dw_r \sin \theta_e - v_p] + y_e v_r \sin \theta_e + dw_r y_e \cos \theta_e \\ &\quad + w_r \cos \theta_e - w(dy_e + \cos \theta_e). \end{aligned} \quad (3.37)$$

De (3.37) es claro que si

$$v_p = v_r \cos \theta_e - dw_r \sin \theta_e + k_1 x_e, \quad \text{con } k_1 > 0 \quad (3.38)$$

el primer término de (3.37) es negativo, es decir

$$\dot{V} = -k_1 x_e^2 + y_e v_r \sin \theta_e + dw_r y_e \cos \theta_e + w_r \cos \theta_e - w(dy_e + \cos \theta_e). \quad (3.39)$$

Ahora se busca de igual modo que los términos restantes de (3.39) sean negativos, por lo que se propone

$$y_e v_r \sin \theta_e + dw_r y_e \cos \theta_e + w_r \cos \theta_e - w(dy_e + \cos \theta_e) = -k_2 y_e^2 - k_3 \theta_e^2, \quad \text{con } k_2, k_3 > 0$$

para lo cual  $w$  debe ser entonces

$$w = \frac{k_2 y_e^2 + k_3 \theta_e^2 + y_e v_r \sin \theta_e + dw_r y_e \cos \theta_e + w_r \cos \theta_e}{dy_e + \cos \theta_e}. \quad (3.40)$$



De acuerdo con (3.38) y (3.40)

$$\dot{V} = -k_1 x_e^2 - k_2 y_e^2 - k_3 \theta_e^2 < 0 \quad (3.41)$$

Por otro lado, si  $\theta_e < 0$ , entonces

$$V = \frac{1}{2} x_e^2 + \frac{1}{2} y_e^2 - \sin \theta_e. \quad (3.42)$$

Derivando con respecto al tiempo se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x_e \dot{x}_e + y_e \dot{y}_e - \cos \theta_e \dot{\theta}_e \\ &= x_e [v_r \cos \theta_e - dw_r \sin \theta_e - v_p + wy_e] + y_e [v_r \sin \theta_e + dw_r \cos \theta_e \\ &\quad - (d + x_e)w] - \cos \theta_e (w_r - w) \\ &= x_e [v_r \cos \theta_e - dw_r \sin \theta_e - v_p] + y_e v_r \sin \theta_e + dw_r y_e \cos \theta_e \\ &\quad - w_r \cos \theta_e - w(dy_e - \cos \theta_e). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Nuevamente con  $v_p$  elegido como en (3.38) el primer término de (3.43) es negativo

$$\dot{V} = -k_1 x_e^2 + y_e v_r \sin \theta_e + dw_r y_e \cos \theta_e - w_r \cos \theta_e - w(dy_e - \cos \theta_e). \quad (3.44)$$

Se desea que los términos restantes de (3.44) sean negativos por lo que se busca de nuevo

$$y_e v_r \sin \theta_e + dw_r y_e \cos \theta_e - w_r \cos \theta_e - w(dy_e - \cos \theta_e) = -k_2 y_e^2 - k_3 \theta_e^2, \text{ con } k_2, k_3 > 0$$

por lo que esta vez se tiene

$$w = \frac{k_2 y_e^2 + k_3 \theta_e^2 + y_e v_r \sin \theta_e + dw_r y_e \cos \theta_e - w_r \cos \theta_e}{dy_e - \cos \theta_e}. \quad (3.45)$$

De acuerdo con (3.38) y (3.45), (3.43) queda como

$$\dot{V} = -k_1 x_e^2 - k_2 y_e^2 - k_3 \theta_e^2 < 0. \quad (3.46)$$

Con esto se prueba que las leyes de control que hacen que el punto de operación  $\mathbf{q}_e = \mathbf{0}$  de (3.34) sea asintóticamente estable son (3.38), (3.40) y (3.45), las cuales se resumen enseguida.

$$v_p = v_r \cos \theta_e - dw_r \sin \theta_e + k_1 x_e \quad (3.47)$$

$$w = \begin{cases} \frac{k_2 y_e^2 + k_3 \theta_e^2 + y_e v_r \sin \theta_e + dw_r y_e \cos \theta_e + w_r \cos \theta_e}{dy_e + \cos \theta_e} & \text{si } \theta_e \geq 0 \\ \frac{k_2 y_e^2 + k_3 \theta_e^2 + y_e v_r \sin \theta_e + dw_r y_e \cos \theta_e - w_r \cos \theta_e}{dy_e - \cos \theta_e} & \text{si } \theta_e < 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

con  $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0$ .

**Comentario 3.1** Nótese que la ley de control (3.48), tiene un denominador que puede hacerse cero. Sin embargo, cuando las condiciones iniciales  $\mathbf{q}_e(0)$  son suficientemente pequeñas esto no sucede. Cabe aclarar que suficientemente pequeñas no necesariamente significa  $\mathbf{q}_e(0) \approx \mathbf{0}$ . En seguida se verifica esta aseveración.

Considérense los denominadores de (3.48), es decir

$$dy_e + \cos \theta_e \quad \text{si } \theta_e \geq 0 \quad (3.49)$$

$$dy_e - \cos \theta_e \quad \text{si } \theta_e < 0. \quad (3.50)$$

Se busca encontrar las condiciones para que (3.49) y (3.50) no se anulen, lo cual presenta las siguiente posibilidades

$$dy_e + \cos \theta_e > 0 \quad (3.51)$$

$$dy_e + \cos \theta_e < 0 \quad (3.52)$$

y

$$dy_e - \cos \theta_e > 0 \quad (3.53)$$

$$dy_e - \cos \theta_e < 0. \quad (3.54)$$

Como existe convergencia asintótica de los errores a cero, tanto  $y_e$  como  $\theta_e$  comenzarán a moverse desde algún punto inicial  $y_e(0)$  y  $\theta_e(0)$  en el

espacio de estados, hasta llegar al origen, es decir se moverán en dirección al origen. Dado que  $\theta_e$  es el argumento de la función coseno en (3.49) y (3.50), y que la función  $\cos \theta_e$  es positiva cuando  $-\frac{\pi}{2} < \theta_e < \frac{\pi}{2}$ , entonces si se supone que el error inicial  $\theta_e(0)$  no es superior a  $90^\circ$  (i.e.  $\frac{\pi}{2}$  [rad]), es decir

$$\theta_e(0) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.55)$$

se tiene que

$$\cos \theta_e > 0. \quad (3.56)$$

Más aún, si  $\theta_e \rightarrow 0$  entonces  $\cos \theta_e \rightarrow 1$ . De acuerdo con lo anterior, las únicas alternativas posibles para que (3.49) y (3.50) no se anulen están dadas por (3.51) y (3.54), o lo que es lo mismo

$$d|y_e(0)| < \cos \theta_e(0). \quad (3.57)$$

De esta manera, si (3.57) es satisfecha, (3.49) y (3.50) no se harán cero.

Nótese que alrededor de los extremos del intervalo definido en (3.55), la magnitud de la función  $\cos \theta_e(0)$  es aproximadamente cero, lo cual de acuerdo con (3.57) limita considerablemente la magnitud de la condición inicial del error  $y_e$ , obligando prácticamente a iniciar al robot móvil en la posición deseada, esto es  $y_e(0) \approx 0$ . Es por lo anterior que se propone ahora que el error inicial  $\theta_e$  no sobrepase los  $60^\circ$  (i.e.  $\frac{\pi}{3}$  [rad]). Entonces, considerando

$$\theta_e(0) = \pm \frac{\pi}{3}, \quad (3.58)$$

el intervalo de valores de la función  $\cos \theta_e$  será

$$\cos \theta_e(0) = 0.5 \leq \cos \theta_e \leq 1 = \cos(0). \quad (3.59)$$

Con esto y de acuerdo con (3.57) finalmente es posible determinar la región de validez  $\mathcal{D}$  de las leyes de control (3.47) y (3.48)

$$\mathcal{D} = \left\{ y_e, \theta_e \in \mathcal{R} \mid -\frac{0.5}{d} < y_e < \frac{0.5}{d}; -\frac{\pi}{3} \leq \theta_e \leq \frac{\pi}{3} \right\}. \quad (3.60)$$

Cabe señalar que, de acuerdo con las dimensiones del robot móvil,  $d$  es un parámetro de magnitud menor a 1 [m], por lo que en general la magnitud del error  $y_e$  podrá ser mayor que 0.5 [m], lo cual hace aún menos restrictiva la región (3.60).

Con esto y de acuerdo con (3.41) y (3.46) las leyes de control (3.47) y (3.48) garantizan que el punto de operación  $\mathbf{q}_e = \mathbf{0}$  sea local asintóticamente estable.

□

El resultado anterior se resume en el siguiente teorema.

**Teorema 3.1** *Sea el sistema cinemático (3.34) con entradas de control  $v_p$  y  $w$ . Dadas  $v_p$  y  $w$  en (3.47) y (3.48) respectivamente, cuya región de validez está dada por (3.60), entonces el origen  $\mathbf{q}_e = \mathbf{0}$  es local asintóticamente estable.*

△

Aunque las leyes de control propuestas garantizan estabilidad asintótica local de (3.34), de manera empírica se ha observado que la dinámica en lazo cerrado de dicho sistema es demasiado lenta. Para contrarrestar este hecho se requiere inyectar amortiguamiento al sistema, por lo cual se propone ahora la siguiente variación en las leyes de control (3.47) y (3.48).

$$v_p = v_r \cos \theta_e - dw_r \sin \theta_e + k_1 x_e \quad (3.61)$$

$$w = \begin{cases} \frac{k_2 y_e^2 + k_3 \theta_e^2 + k_4 y_e + y_e v_r \sin \theta_e + dw_r y_e \cos \theta_e + w_r \cos \theta_e}{dy_e + \cos \theta_e} & \text{si } \theta_e \geq 0 \\ \frac{k_2 y_e^2 + k_3 \theta_e^2 - k_4 y_e + y_e v_r \sin \theta_e + dw_r y_e \cos \theta_e - w_r \cos \theta_e}{dy_e - \cos \theta_e} & \text{si } \theta_e < 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

con  $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0$ .

Se analiza ahora el efecto de las leyes de control (3.61) y (3.62) en (3.34), para lo cual considérese nuevamente (3.37) si  $\theta_e \geq 0$  y (3.43) si  $\theta_e < 0$ .

Si  $\theta_e \geq 0$  entonces

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x_e[v_r \cos \theta_e - dw_r \sin \theta_e - v_p] + y_e v_r \sin \theta_e + dw_r y_e \cos \theta_e \\ &\quad + w_r \cos \theta_e - w(dy_e + \cos \theta_e) \\ &= -k_1 x_e^2 - k_3 \theta_e^2 - k_2 y_e^2 - k_4 y_e,\end{aligned}\tag{3.63}$$

y si  $\theta_e < 0$  entonces

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x_e[v_r \cos \theta_e - dw_r \sin \theta_e - v_p] + y_e v_r \sin \theta_e + dw_r y_e \cos \theta_e \\ &\quad - w_r \cos \theta_e - w(dy_e - \cos \theta_e) \\ &= -k_1 x_e^2 - k_3 \theta_e^2 - k_2 y_e^2 + k_4 y_e.\end{aligned}\tag{3.64}$$

En (3.63) y (3.64) se puede ver que el último término tiene signo distinto, por lo cual se analiza ahora el peor caso que se presenta cuando tal término es positivo, es decir

$$\dot{V} \leq -k_1 x_e^2 - k_3 \theta_e^2 - k_2 y_e^2 + k_4 |y_e|\tag{3.65}$$

Para que  $\dot{V} < 0$  se requiere que la suma de los dos últimos de (3.65) sea menor que cero, es decir

$$\begin{aligned}-k_2 |y_e|^2 + k_4 |y_e| &< 0 \\ -|y_e|(k_2 |y_e| - k_4) &< 0 \\ k_2 |y_e| - k_4 &> 0 \\ |y_e| &> \frac{k_4}{k_2}.\end{aligned}\tag{3.66}$$

Con esto, si (3.66) es satisfecha, entonces  $\dot{V} < 0$ .

Ahora bien, se puede reescribir (3.65) de la siguiente forma

$$\dot{V} = -\mathbf{q}_e^T \mathbf{K} \mathbf{q}_e + k_4 |y_e|\tag{3.67}$$

donde

$$\mathbf{q}_e = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Con esto se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{q}_e^T \mathbf{K} \mathbf{q}_e + k_4 |y_e| \\ &\leq -\kappa \|\mathbf{q}_e\|^2 + k_4 |y_e| \\ &\leq -\kappa \|\mathbf{q}_e\|^2 + k_4 \|\mathbf{q}_e\| \\ &\leq -\frac{\kappa}{2} \|\mathbf{q}_e\|^2 - \frac{\kappa}{2} \|\mathbf{q}_e\|^2 + k_4 \|\mathbf{q}_e\| \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde

$$\kappa = \lambda_{\min}(\mathbf{K}). \quad (3.70)$$

Dado que se busca que  $\dot{V} < 0$  se analizan los dos últimos términos de (3.69), es decir

$$-\frac{\kappa}{2} \|\mathbf{q}_e\|^2 + k_4 \|\mathbf{q}_e\|. \quad (3.71)$$

Se desea que esta función sea negativa o cero, es decir

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa}{2} \|\mathbf{q}_e\|^2 + k_4 \|\mathbf{q}_e\| &\leq 0 \\ -\|\mathbf{q}_e\| \left( \frac{\kappa}{2} \|\mathbf{q}_e\| - k_4 \right) &\leq 0 \\ \left( \frac{\kappa}{2} \|\mathbf{q}_e\| - k_4 \right) &\geq 0, \end{aligned}$$

lo cual se cumple si

$$\|\mathbf{q}_e\| \geq \frac{2k_4}{\kappa} \triangleq \mu. \quad (3.72)$$

Por lo tanto, si  $\|\mathbf{q}_e\| \geq \mu$  se tiene que

$$\dot{V} \leq -\frac{\kappa}{2} \|\mathbf{q}_e\|^2 = -\alpha_3 \|\mathbf{q}_e\|^2 \quad (3.73)$$

donde  $\alpha_3 = \frac{1}{2}\kappa$ . De acuerdo con el Teorema 4.18 de Khalil [12] (ver Apéndice A) y considerando  $W_3 = \alpha_3 \|\mathbf{q}_e\|^2$ , se prueba que las trayectorias del sistema (3.34) están finalmente acotadas y que la cota final puede hacerse arbitrariamente pequeña.

Nótese que con (3.62) se ha perdido la propiedad de convergencia asintótica al

punto  $\mathbf{q}_e = \mathbf{0}$  garantizada por (3.47) y (3.48). Sin embargo, como se comentó anteriormente éste mejora significativamente la velocidad de convergencia del vector de estados  $\mathbf{q}_e$ , lo cual es imperativo de acuerdo con el objetivo de control planteado. Para mostrar lo anterior es conveniente presentar el sistema (3.34) en lazo cerrado con (3.61) y (3.62), lo cual se hace en (3.74), (3.75) y (3.76) para  $\theta_e \geq 0$ .

$$\dot{x}_e = -k_1 x_e + \left( \frac{k_2 y_e^3 + k_3 y_e \theta_e^2 + k_4 y_e^2 + y_e^2 v_r \sin \theta_e + d w_r y_e^2 \cos \theta_e + w_r y_e \cos \theta_e}{d y_e + \cos \theta_e} \right) \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_e &= v_r \sin \theta_e + d w_r \cos \theta_e \\ &\quad - (d + x_e) \left( \frac{k_2 y_e^2 + k_3 \theta_e^2 + y_e v_r \sin \theta_e + d w_r y_e \cos \theta_e + w_r \cos \theta_e}{d y_e + \cos \theta_e} \right) \\ &\quad - \frac{k_4 y_e x_e}{d y_e + \cos \theta_e} - \frac{d k_4 y_e}{d y_e + \cos \theta_e} \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\dot{\theta}_e = w_r - \left( \frac{k_2 y_e^2 + k_3 \theta_e^2 + k_4 y_e + y_e v_r \sin \theta_e + d w_r y_e \cos \theta_e + w_r \cos \theta_e}{d y_e + \cos \theta_e} \right). \quad (3.76)$$

Nótese que para (3.75), si los errores son suficientemente pequeños se obtiene la siguiente aproximación lineal

$$\dot{y}_e + d k_4 y_e \approx 0,$$

lo que muestra que se ha introducido amortiguamiento a la dinámica del error  $y_e$ . Cabe destacar que para  $\theta_e < 0$  sucede exactamente lo mismo.

De acuerdo con lo anterior es posible enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 3.2** *Sea el sistema cinemático (3.34) con entradas de control  $v_p$  y  $w$ . Dadas  $v_p$  y  $w$  en (3.61) y (3.62) respectivamente, entonces las trayectorias de (3.34) están finalmente acotadas con cota última arbitrariamente pequeña.*

△

### 3.3. Control parte dinámica

El esquema de control aquí propuesto está basado en la teoría del control adaptable por modelo de referencia, mediante el cual se busca determinar las leyes de control tales que el sistema sea capaz de seguir una señal de referencia dada.

#### Control ideal

Hasta el momento los valores  $v_p$  y  $w$  han sido considerados las entradas al subsistema cinemático (3.34). Sin embargo, no es posible elegir estos valores porque en realidad son las salidas del subsistema dinámico (2.32). De esta forma, lo conveniente es designar las definiciones de las leyes de control (3.61) y (3.62) como valores deseados para  $v_p$  y  $w$ , *i.e.*  $v_{pd}$  y  $w_d$  respectivamente, y diseñar un nuevo controlador tal que  $v_p \rightarrow v_{pd}$  y  $w \rightarrow w_d$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Esto se muestra en el diagrama de la Figura 3.3.

Se busca determinar la señal de referencia para las velocidades del robot, para lo cual se proponen los siguientes modelos (de referencia) para la dinámica del error de la velocidad lineal y angular respectivamente

$$\dot{v}_{em} + T_1 v_{em} = 0 \quad ; \quad T_1 > 0 \quad (3.77)$$

$$\dot{w}_{em} + T_2 w_{em} = 0 \quad ; \quad T_2 > 0 \quad (3.78)$$

con

$$v_{em} = v_{pd} - v_m \quad (3.79)$$

$$w_{em} = w_d - w_m \quad (3.80)$$

donde  $v_m$  y  $w_m$  son respectivamente la velocidad lineal y angular del modelo de referencia.

Con esto (3.77) y (3.78) se pueden reescribir como sigue

$$\dot{v}_{pd} - \dot{v}_m + T_1(v_{pd} - v_m) = 0 \quad (3.81)$$

$$\dot{w}_d - \dot{w}_m + T_2(w_d - w_m) = 0 \quad (3.82)$$



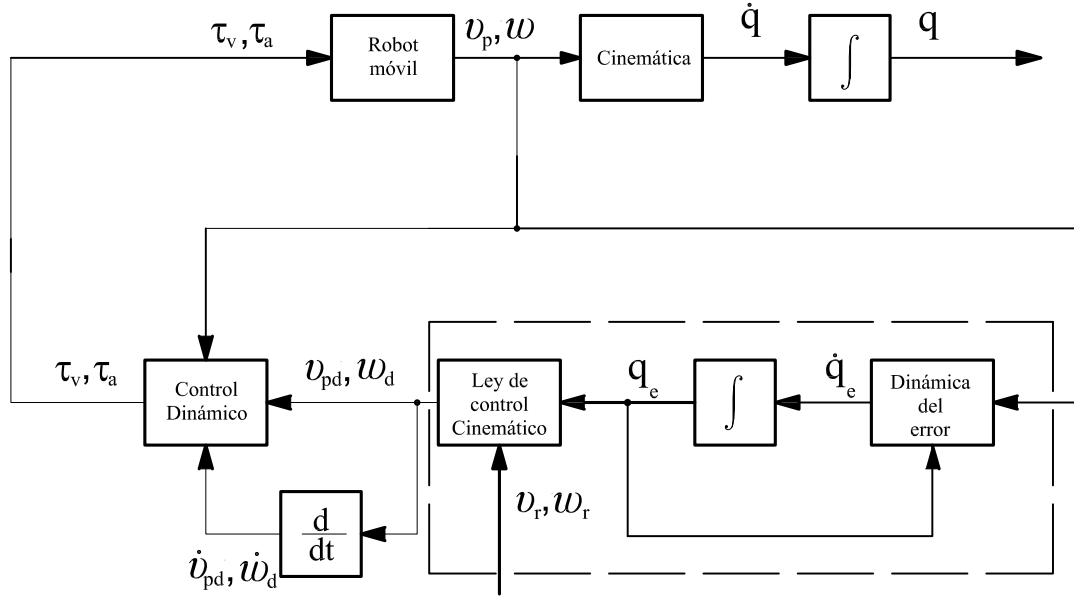


Figura 3.3: Diagrama de bloques del control parte cinemática y dinámica.

con lo cual se tiene

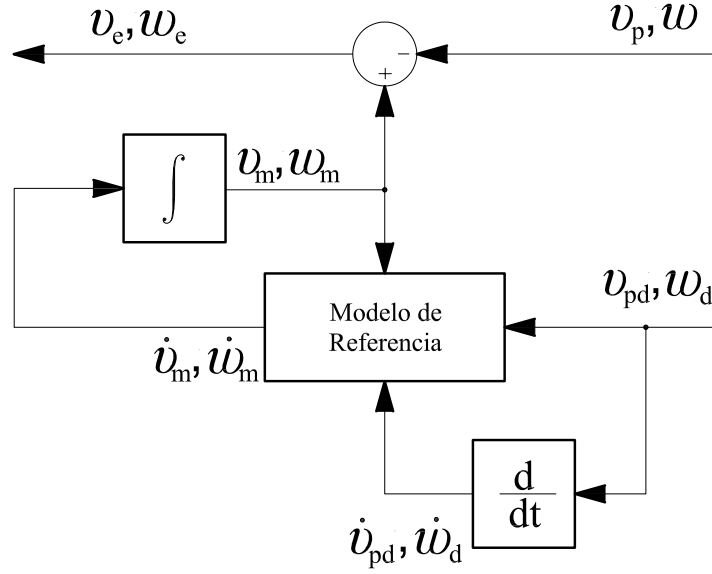
$$\dot{v}_m = \dot{v}_{pd} + T_1 v_{pd} - T_1 v_m \quad (3.83)$$

$$\dot{w}_m = \dot{w}_d + T_2 w_d - T_2 w_m \quad (3.84)$$

Se definen los errores de velocidad lineal y angular como

$$v_e = v_m - v_p \quad (3.85)$$

$$w_e = w_m - w. \quad (3.86)$$


 Figura 3.4: Error de seguimiento  $v_e, w_e$ .

Derivando con respecto al tiempo se tiene

$$\dot{v}_e = \dot{v}_m - \dot{v}_p \quad (3.87)$$

$$\dot{w}_e = \dot{w}_m - \dot{w}. \quad (3.88)$$

De acuerdo con (3.18) y (3.83), (3.87) se puede reescribir como

$$\dot{v}_e = \dot{v}_{pd} + T_1 v_{pd} - T_1 v_m - \frac{1}{m} \tau_v, \quad (3.89)$$

que es la dinámica del error de velocidad lineal. Se analiza ahora la estabilidad del punto de operación  $v_e = 0$  a partir de la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_1 = \frac{1}{2} v_e^2 \quad (3.90)$$

cuya derivada a lo largo de las trayectorias de (3.89) es

$$\dot{V}_1 = v_e \dot{v}_e = v_e \left( \dot{v}_{pd} + T_1 v_{pd} - T_1 v_m - \frac{1}{m} \tau_v \right). \quad (3.91)$$

Se sabe de (3.85) que

$$v_m = v_e + v_p. \quad (3.92)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= v_e \left( \dot{v}_{pd} + T_1 v_{pd} - T_1 v_e - T_1 v_p - \frac{1}{m} \tau_v \right) \\ &= -T_1 v_e^2 + v_e \left( \dot{v}_{pd} + T_1 v_{pd} - T_1 v_p - \frac{1}{m} \tau_v \right). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Se busca que  $\dot{V}_1 < 0$ , lo cual sucederá si el segundo término de (3.93) es nulo, es decir

$$\dot{v}_{pd} + T_1 v_{pd} - T_1 v_p - \frac{1}{m} \tau_v = 0. \quad (3.94)$$

Es claro que para satisfacer (3.94), la entrada de control  $\tau_v$  debe ser

$$\tau_v = m[\dot{v}_{pd} + T_1(v_{pd} - v_p)]. \quad (3.95)$$

Si además se añade un término lineal de  $v_e$ , es decir,

$$\tau_v = m[\dot{v}_{pd} + T_1(v_{pd} - v_p)] + k_5 v_e, \quad (3.96)$$

donde  $k_5$  es una constante positiva, se tiene un factor de ponderación más del error de velocidad lineal. Así, de acuerdo con (3.96), (3.93) se convierte en

$$\dot{V}_1 = - \left( T_1 + \frac{k_5}{m} \right) v_e^2 < 0. \quad (3.97)$$

Por otro lado, considerando ahora la dinámica del error de la velocidad angular (3.88) y tomando en consideración (3.21) y (3.84) se tiene

$$\dot{w}_e = \dot{w}_d + T_2 w_d - T_2 w_m - \frac{1}{\mathcal{I}} \tau_a. \quad (3.98)$$

Se analiza ahora la estabilidad del punto de operación  $w_e = 0$ , para lo cual considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_2 = \frac{1}{2} w_e^2. \quad (3.99)$$

La derivada de (3.99) a lo largo de las trayectorias de (3.98) es

$$\dot{V}_2 = w_e \dot{w}_e = w_e \left( \dot{w}_d + T_2 w_d - T_2 w_m - \frac{1}{\mathcal{I}} \tau_a \right). \quad (3.100)$$

De (3.86) se sabe que

$$w_m = w_e + w \quad (3.101)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= w_e \left( \dot{w}_d + T_2 w_d - T_2 w_e - T_2 w - \frac{1}{\mathcal{I}} \tau_a \right) \\ &= -T_2 w_e^2 + w_e \left( \dot{w}_d + T_2 w_d - T_2 w - \frac{1}{\mathcal{I}} \tau_a \right). \end{aligned} \quad (3.102)$$

Se busca que  $\dot{V}_2 < 0$ , lo cual sucederá si la entrada de control  $\tau_a$  es definida como

$$\tau_a = \mathcal{I}[\dot{w}_d + T_2(w_d - w)] + k_6 w_e, \quad (3.103)$$

donde  $k_6$  es una constante positiva. Así, de acuerdo con (3.103), (3.102) queda como

$$\dot{V}_2 = - \left( T_2 + \frac{k_6}{\mathcal{I}} \right) w_e^2 < 0. \quad (3.104)$$

## Control adaptable

En las leyes de control (3.96) y (3.103) se asume que los parámetros presentes son perfectamente conocidos; sin embargo, esto puede no ser el caso, pues pueden existir incertidumbres paramétricas. Para contrarrestar este hecho, ahora se propone un controlador adaptable por modelo de referencia capaz de adaptar los parámetros de las leyes de control en línea, como se muestra en la Figura 3.5.

Considérense entonces los siguientes cambios a las leyes de control (3.96) y (3.103) respectivamente

$$\tau_v = \hat{m}[\dot{v}_{pd} + T_1(v_{pd} - v_p)] + k_5 v_e \quad (3.105)$$

$$\tau_a = \hat{\mathcal{I}}[\dot{w}_d + T_2(w_d - w)] + k_6 w_e \quad (3.106)$$

donde  $\hat{m}$  es un estimado de  $m$  e  $\hat{\mathcal{I}}$  es un estimado de  $\mathcal{I}$ .

Recuérdese que la dinámica de la velocidad lineal de robot móvil  $v_p$  está dada

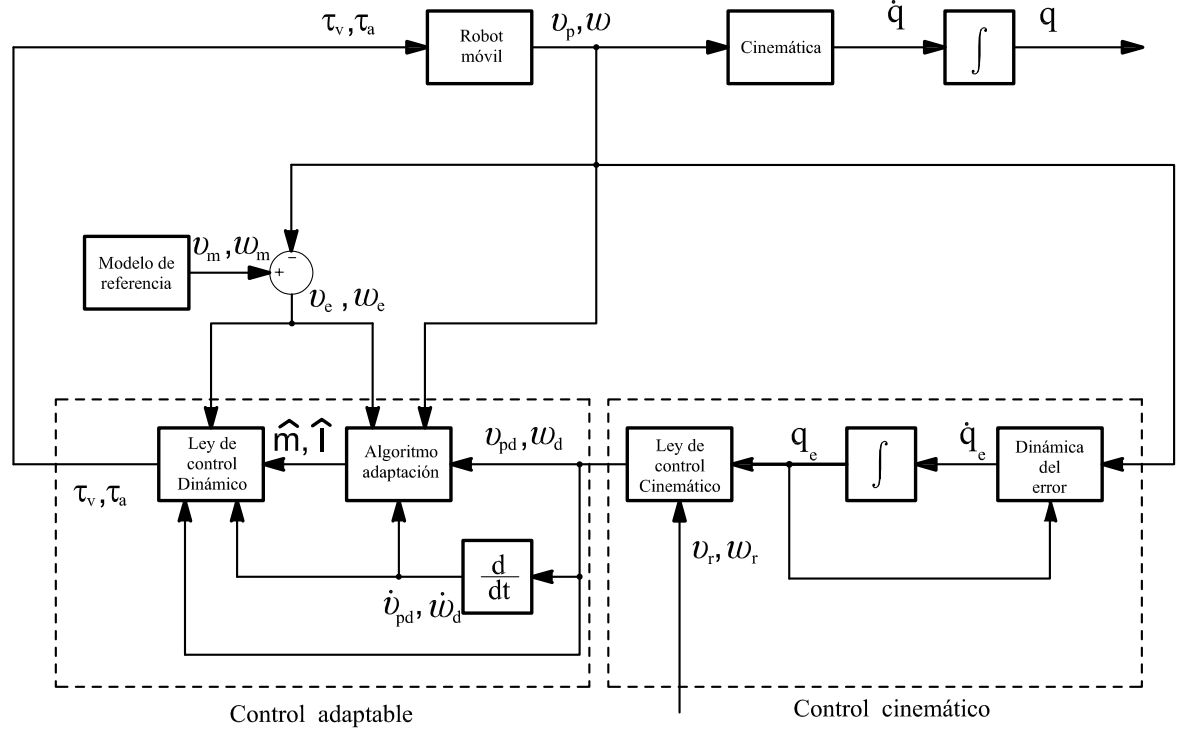


Figura 3.5: Diagrama de bloques del controlador adaptable.

por (3.18)

$$\dot{v}_p = \frac{1}{m} \tau_v,$$

de tal forma que en lazo cerrado con (3.105) se obtiene

$$\dot{v}_p = \frac{1}{m} [\hat{m} \dot{v}_{pd} + T_1 \hat{m} (v_{pd} - v_p) + k_5 v_e]. \quad (3.107)$$

Considérese nuevamente (3.87). De acuerdo con (3.83) y (3.107) se obtiene

$$\dot{v}_e = \left(1 - \frac{\hat{m}}{m}\right) \dot{v}_{pd} + T_1 \left(1 - \frac{\hat{m}}{m}\right) v_{pd} + T_1 \left(\frac{\hat{m}}{m}\right) v_p - T_1 v_m - \frac{k_5}{m} v_e. \quad (3.108)$$

Considerando ahora (3.92) se tiene

$$\dot{v}_e = \left(1 - \frac{\hat{m}}{m}\right) [\dot{v}_{pd} + T_1(v_{pd} - v_p)] - \left(T_1 + \frac{k_5}{m}\right) v_e. \quad (3.109)$$

Se desea que la dinámica de  $v_e$  tienda a cero asintóticamente. Considérese la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_3 = \frac{1}{2}v_e^2 + \frac{m}{2\gamma_1} \left(1 - \frac{\hat{m}}{m}\right)^2 \quad (3.110)$$

donde  $\gamma_1$  es un parámetro constante positivo, es decir  $\gamma_1 > 0$ . Derivando con respecto al tiempo se tiene

$$\dot{V}_3 = v_e \dot{v}_e - \frac{1}{\gamma_1} \left(1 - \frac{\hat{m}}{m}\right) \dot{\hat{m}}. \quad (3.111)$$

Sustituyendo (3.109) y agrupando términos con múltiplos comunes se llega a

$$\dot{V}_3 = - \left(T_1 + \frac{k_5}{m}\right) v_e^2 + \left(1 - \frac{\hat{m}}{m}\right) \left[ v_e \dot{v}_{pd} + T_1 v_e (v_{pd} - v_p) - \frac{1}{\gamma_1} \dot{\hat{m}} \right]. \quad (3.112)$$

Para que  $\dot{V}_3 \leq 0$ , se busca hacer que el segundo término de (3.112) sea nulo, es decir

$$v_e \dot{v}_{pd} + T_1 v_e (v_{pd} - v_p) - \frac{1}{\gamma_1} \dot{\hat{m}} = 0$$

por lo que se propone

$$\dot{\hat{m}} = \gamma_1 v_e \dot{v}_{pd} + \gamma_1 T_1 v_e (v_{pd} - v_p). \quad (3.113)$$

La ecuación (3.113) es la ley de adaptación para  $\hat{m}$ . Hasta aquí se ha demostrado que  $\dot{V}_3 = - \left(T_1 + \frac{k_5}{m}\right) v_e^2 \leq 0$ , lo cual garantiza que tanto  $v_e$  como  $\hat{m}$  están acotadas. Sin embargo, se requiere probar que  $v_e \rightarrow 0$  con el tiempo. Con base en el Lema de Barbalat se prueba lo anterior.

Para usar el Lema de Barbalat se requiere que  $\dot{V}_3$  sea uniformemente continua,

lo cual se verifica si la segunda derivada de  $V_3$  está acotada, Slotine y Li [17].

$$\begin{aligned}\ddot{V}_3 &= -2 \left( T_1 + \frac{k_5}{m} \right) v_e \dot{v}_e \\ &= -2 \left( T_1 + \frac{k_5}{m} \right) v_e \left[ \left( 1 - \frac{\hat{m}}{m} \right) [\dot{v}_{pd} + T_1(v_{pd} - v_p)] - \left( T_1 + \frac{k_5}{m} \right) v_e \right].\end{aligned}\quad (3.114)$$

Se sabe que  $v_e$  y  $\hat{m}$  están acotadas, y dado que  $v_{pd}$  y  $\dot{v}_{pd}$  dependen de  $x_e, y_e$  y  $\theta_e$  que están acotados, están por tanto también acotadas. Por otro lado, como la dinámica (3.77) de  $v_{em}$  es exponencialmente estable, está  $v_{em}$  entonces acotada, y como  $v_{pd}$  está acotada, entonces, de acuerdo con (3.79),  $v_m$  está acotada; con esto y de acuerdo (3.85) se determina finalmente que  $v_p$  está acotada. Dado que todas las señales involucradas en (3.114) están acotadas,  $\ddot{V}_3$  está entonces acotada, por lo tanto  $\dot{V}_3$  es uniformemente continua. Así por el Lema de Barbalat se garantiza que  $\dot{V}_3 \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , y por lo tanto que

$$v_e \rightarrow 0 \quad (3.115)$$

con el tiempo.

De manera análoga a lo hecho para la velocidad lineal, se desarrolla enseguida el caso para la velocidad angular  $w$ . Recuérdese que la dinámica de la velocidad angular del robot móvil  $w$  es determinada por (3.21)

$$\dot{w} = \frac{1}{\mathcal{I}} \tau_a$$

que en lazo cerrado con (3.106), se convierte en

$$\dot{w} = \frac{1}{\mathcal{I}} [\hat{\mathcal{I}} \dot{w}_d + T_2 \hat{\mathcal{I}} (w_d - w) + k_6 w_e]. \quad (3.116)$$

Recuérdese también que la dinámica del error de seguimiento de la velocidad angular  $w_e$  es definida por (3.88), la cual de acuerdo con (3.84) y (3.116) queda como

$$\dot{w}_e = \left( 1 - \frac{\hat{\mathcal{I}}}{\mathcal{I}} \right) \dot{w}_d + T_2 \left( 1 - \frac{\hat{\mathcal{I}}}{\mathcal{I}} \right) w_d + T_2 \left( \frac{\hat{\mathcal{I}}}{\mathcal{I}} \right) w - T_2 w_m - \frac{k_6}{\mathcal{I}} w_e. \quad (3.117)$$

Considerando ahora (3.101) se tiene

$$\dot{w}_e = \left(1 - \frac{\hat{\mathcal{I}}}{\mathcal{I}}\right) [\dot{w}_d + T_2(w_d - w)] - \left(T_2 + \frac{k_6}{\mathcal{I}}\right) w_e. \quad (3.118)$$

Se busca ahora que la dinámica de  $w_e$  tienda a cero con el tiempo. Considérese por ello la siguiente función candidata de Lyapunov

$$V_4 = \frac{1}{2} w_e^2 + \frac{\mathcal{I}}{2\gamma_2} \left(1 - \frac{\hat{\mathcal{I}}}{\mathcal{I}}\right)^2 \quad (3.119)$$

con  $\gamma_2 > 0$ . Derivando con respecto al tiempo se tiene

$$\dot{V}_4 = w_e \dot{w}_e - \frac{1}{\gamma_2} \left(1 - \frac{\hat{\mathcal{I}}}{\mathcal{I}}\right) \dot{\hat{\mathcal{I}}}. \quad (3.120)$$

Sustituyendo (3.118) y agrupando términos con múltiplos comunes se llega a

$$\dot{V}_4 = - \left(T_2 + \frac{k_6}{\mathcal{I}}\right) w_e^2 + \left(1 - \frac{\hat{\mathcal{I}}}{\mathcal{I}}\right) \left[ w_e \dot{w}_d + T_2 w_e (w_d - w) - \frac{1}{\gamma_2} \dot{\hat{\mathcal{I}}} \right]. \quad (3.121)$$

Para que  $\dot{V}_4 \leq 0$  se busca hacer que el segundo término de (3.121) sea nulo, es decir

$$w_e \dot{w}_d + T_2 w_e (w_d - w) - \frac{1}{\gamma_2} \dot{\hat{\mathcal{I}}} = 0$$

por lo que

$$\dot{\hat{\mathcal{I}}} = \gamma_2 w_e \dot{w}_d + \gamma_2 T_2 w_e (w_d - w). \quad (3.122)$$

Con esto, la ley de adaptación para  $\hat{\mathcal{I}}$  está dada por la ecuación (3.122). Nuevamente, hasta este punto se ha demostrado que  $\dot{V}_4 = - \left(T_2 + \frac{k_6}{\mathcal{I}}\right) w_e^2 \leq 0$ , lo cual garantiza que  $w_e$  e  $\hat{\mathcal{I}}$  estén acotadas, pero aún se requiere probar que  $w_e \rightarrow 0$  con el tiempo. Nuevamente con apoyo del Lema de Barbalat se prueba lo anterior.

Recuérdese que para usar el Lema de Barbalat se requiere que  $\dot{V}_4$  sea uniforme-



mente continua, lo cual se verifica si la segunda derivada de  $V_4$  está acotada.

$$\begin{aligned}\ddot{V}_4 &= -2 \left( T_2 + \frac{k_6}{\mathcal{I}} \right) w_e \dot{w}_e \\ &= -2 \left( T_2 + \frac{k_6}{\mathcal{I}} \right) w_e \left[ \left( 1 - \frac{\hat{\mathcal{I}}}{\mathcal{I}} \right) [\dot{w}_d + T_2(w_d - w)] - \left( T_2 + \frac{k_6}{\mathcal{I}} \right) w_e \right].\end{aligned}\quad (3.123)$$

Se sabe que  $w_e$  e  $\hat{\mathcal{I}}$  están acotadas, y dado que  $w_d$  y  $\dot{w}_d$  dependen de  $x_e, y_e$  y  $\theta_e$  que están acotados, están por tanto también acotadas. Por otro lado, como la dinámica (3.78) de  $w_{em}$  es exponencialmente estable, está entonces  $w_{em}$  acotada, y como  $w_d$  está acotada, entonces, de acuerdo con (3.80),  $w_m$  está acotada; con esto y de acuerdo con (3.86) se determina finalmente que  $w$  está acotada. Dado que todas las señales involucradas en (3.123) están acotadas, entonces  $\ddot{V}_4$  está acotada, por lo tanto  $\dot{V}_4$  es uniformemente continua. Así por el Lema de Barbalat se garantiza que  $\dot{V}_4 \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ , y por lo tanto que

$$w_e \rightarrow 0 \quad (3.124)$$

con el tiempo. El resultado anterior se resume en el siguiente teorema.

**Teorema 3.3** *Sea la dinámica del error de velocidad (3.89), (3.98), con entradas de control  $\tau_v$  y  $\tau_a$ , respectivamente. Dadas las entradas de control (3.105) y (3.106) con las respectivas leyes de adaptación (3.113) y (3.122), entonces  $v_e, w_e \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .*

△

El Teorema 3.3 garantiza que tanto la velocidad lineal  $v_p$  como angular  $w$  del robot móvil, seguirán adecuadamente las velocidades de referencia  $v_m$  y  $w_m$ , y por lo tanto a  $v_{pd}$  y a  $w_d$ , lo cual establece que el robot móvil seguirá la trayectoria de referencia impuesta.

---

# Capítulo 4

## Implementación del control

Este capítulo presenta los resultados experimentales obtenidos al implementar el control desarrollado en el capítulo anterior. Se analizan los resultados para dos diferentes trayectorias de referencia.

### 4.1. Robot Móvil RM-10

Para las pruebas experimentales aquí reportadas se utilizó el robot RM-10 del Laboratorio de Robótica del Posgrado de Ingeniería de la UNAM. El robot RM-10 es un robot móvil con ruedas de actuador diferencial, está construido en aluminio y sus dimensiones son: 44 [cm] de longitud frontal, 46 [cm] de longitud lateral y 102 [cm] de altura. Está equipado con una PC de tres núcleos de 3.1 GHz y 4 GB de memoria RAM. Es un robot de múltiple propósito, equipado con sensores de presencia y de proximidad, y una cámara articulada para realizar tareas de visión. Posee ruedas de hule de 125 [mm] de diámetro y 8 [mm] de banda de rodamiento. Como actuadores cuenta con dos sistemas de actuación motor-reductor EMG49, el cual se compone de un motor de corriente directa de 12 [V], un moto-reductor de relación 49:1 y un encoder magnético de 588 cuentas por revolución. Cuenta con un driver Roboclaw de Orion Robotics, que tiene dos canales capaces de entregar 30 [A] de corriente por canal y dos canales de cuadratura para encoder; es importante señalar que su comunicación con la PC se realiza de manera serial. Finalmente, cabe mencionar que el robot es alimentado por dos baterías recargables de 12 [V].

Las especificaciones de los actuadores del robot son

Parámetro	Magnitud
Voltage nominal	12 [V]
Torque nominal	0.784 [N m]
Velocidad nominal	61 [rpm]
Corriente nominal	4.2 [A]
Corriente a rotor bloqueado	13 [A]
Cuentas por revolución del encoder	588

Los parámetros físicos del robot se enlistan en la siguiente tabla.

Parámetro	Magnitud
Masa: $m$	37 [Kg]
Momento de inercia: $\mathcal{I}$	2 [Kg m <sup>2</sup> ]
Radio de las ruedas: $r$	0.0625 [m]
Distancia al centro de masa: $d$	0.1 [m]
Distancia entre ruedas: $2R$	0.37 [m]



Figura 4.1: Robot móvil RM-10

## 4.2. Resultados Experimentales

Para llevar a cabo la implementación del controlador se utilizó MATLAB a través de su modulo de programación GUIDE. Se eligió MATLAB porque ofrece un gran poder de cálculo y además permite la comunicación serial que es el protocolo de comunicación que soporta el robot móvil RM-10.

Para realizar las pruebas experimentales se consideran dos trayectorias de referencia, las cuales son impuestas por un robot móvil virtual de características idénticas al robot móvil experimental, por lo que las trayectorias de referencia son definidas a través de curvas paramétricas. La primera trayectoria de referencia es una circunferencia y la segunda es una especie de lemniscata compuesta por dos circunferencias contiguas. A continuación se presentan los resultados para ambas trayectorias.

### 4.2.1. Trayectoria de referencia: Circunferencia

#### Experimento 1

En el primer experimento realizado se consideró como trayectoria de referencia una circunferencia de radio  $R = 0.9$  [m], Figura 4.2. La prueba se realizó durante 50 [s] y se consideraron condiciones iniciales nulas,  $\mathbf{q}_e(0) = \mathbf{0}$ , es decir, que el robot inicia justo en la posición inicial del robot de referencia. Las ganancias de control consideradas para este experimento se presentan en la Tabla 1. Las primeras 4 ganancias corresponden al control cinemático (3.61), (3.62), y las siguientes 6 a las de las leyes de control adaptable (3.105), (3.106), y a las leyes de adaptación (3.113), (3.122).

Ganancia	Magnitud
$k_1$	30
$k_2$	30
$k_3$	5
$k_4$	21
$k_5$	20
$k_6$	20
$T_1$	5
$T_2$	5
$\gamma_1$	21
$\gamma_2$	15

Tabla 1 : Ganacias de control del Experimento 1

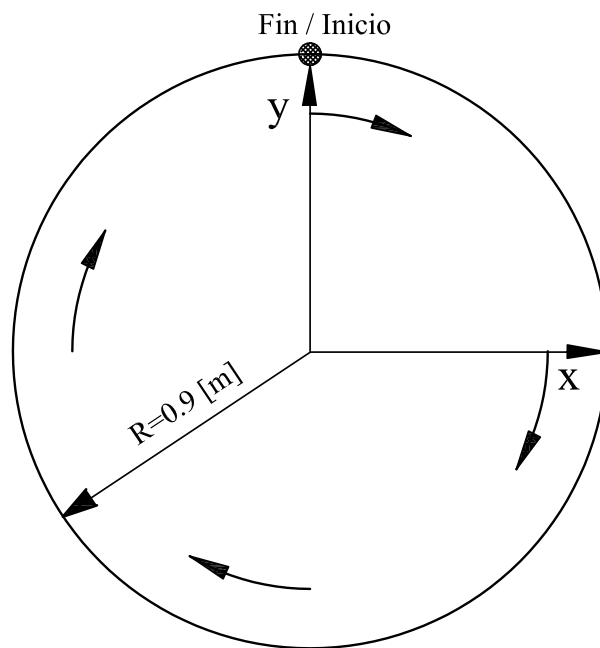


Figura 4.2: Trayectoria de referencia

Los resultados del experimento se presentan enseguida.

Las Figuras 4.4, 4.5 y 4.6 muestran los errores de posición  $x_e$ ,  $y_e$  y  $\theta_e$  respectivamente. De estas figuras se puede ver que los tres errores tienden a cero, llegando al final del experimento a los siguientes valores

Error final	Magnitud
$x_e$	$2.890 \times 10^{-3}$ [m]
$y_e$	$0.501 \times 10^{-3}$ [m]
$\theta_e$	$-1.14$ [°]

Las Figuras 4.7 y 4.8 presentan los errores de seguimiento de la velocidad lineal  $v_e$  y angular  $w_e$ , respectivamente, que son los errores inmersos en el lazo de control adaptable. Las figuras muestran nuevamente que ambos errores tienden a cero. La Figura 4.9 grafica la evolución de los parámetros estimados  $\hat{m}$  e  $\hat{\mathcal{I}}$ , y la Figura 4.10 muestra las velocidades deseadas  $v_{pd}$  y  $w_d$ . Finalmente, en la Figura 4.11 se presenta la velocidad angular de las ruedas, donde se observa que el robot se mueve con marcha suave, pues considerando que la velocidad máxima de las ruedas es de 61 [rpm], es claro que los actuadores no se saturan.

Con lo anterior se muestra que el robot móvil realizó adecuadamente el seguimiento de trayectoria deseado, lo que es posible verificar al observar la Figura 4.3 donde se grafica la trayectoria, en el plano, descrita por el robot móvil durante la prueba experimental. Es importante aclarar que la posición y orientación real del robot móvil se obtiene a partir de la cinemática del sistema con base en su velocidad lineal y angular, las cuales son determinadas a partir de la velocidad angular de las ruedas que se obtienen de los encoders del robot.

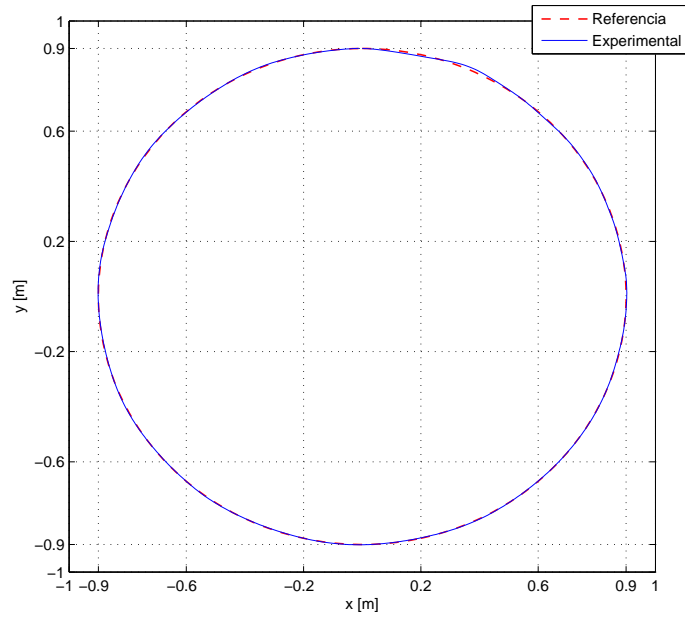


Figura 4.3: Trayectoria experimental

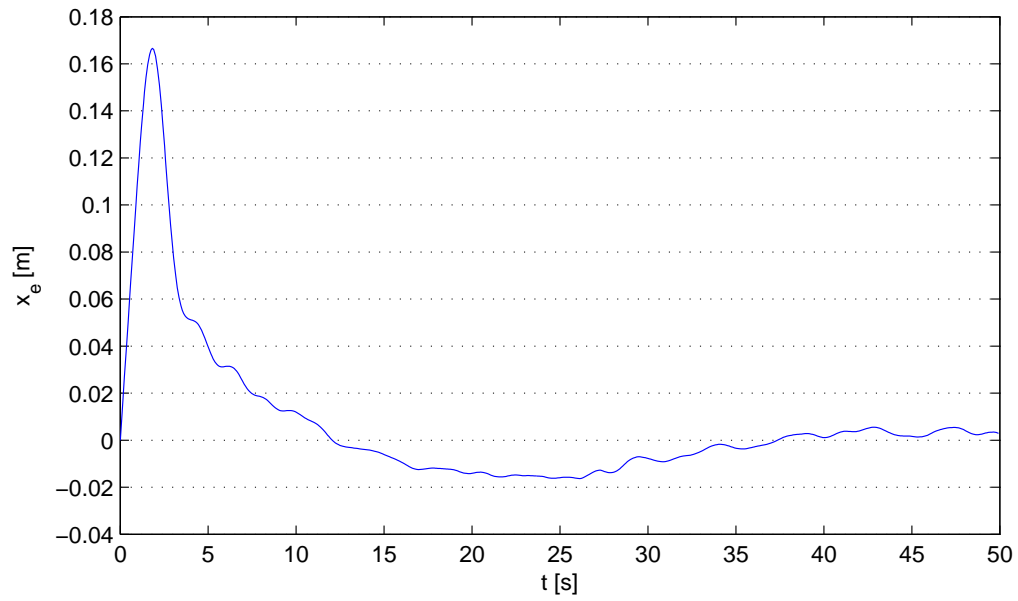


Figura 4.4: Error de posición  $x_e$

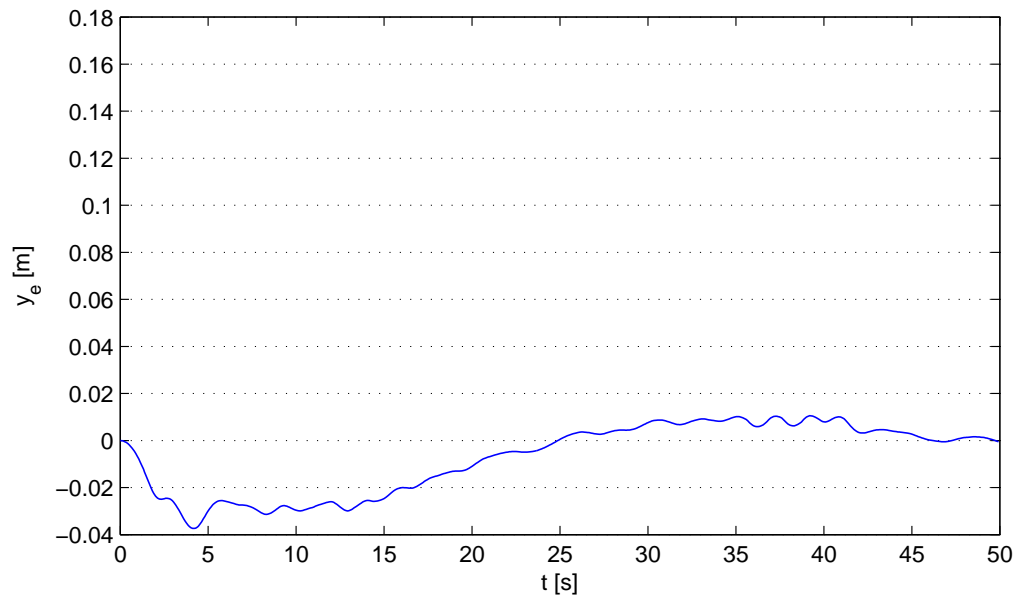


Figura 4.5: Error de posición  $y_e$

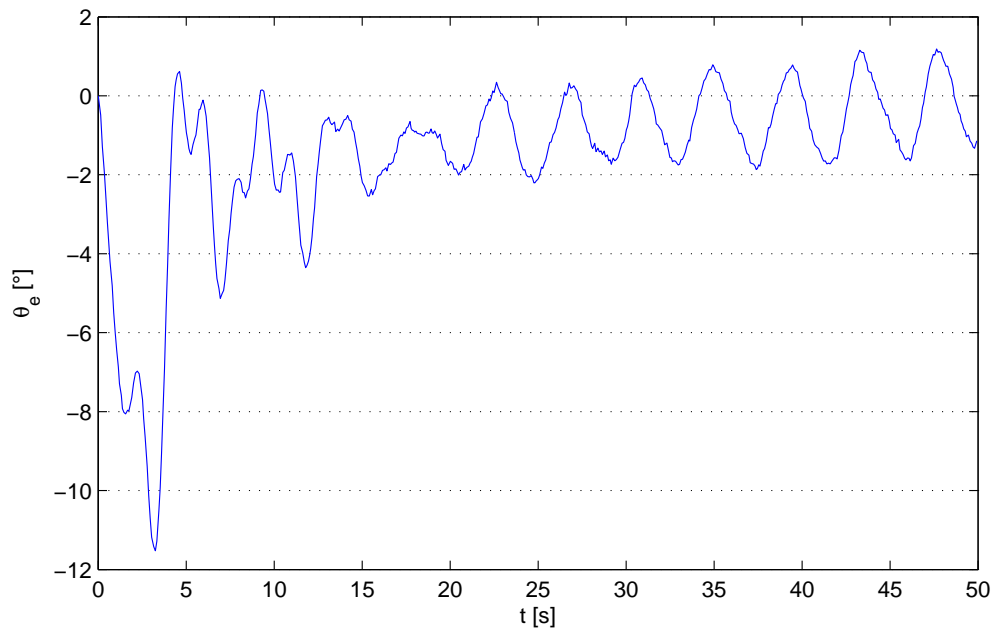


Figura 4.6: Error de orientación  $\theta_e$



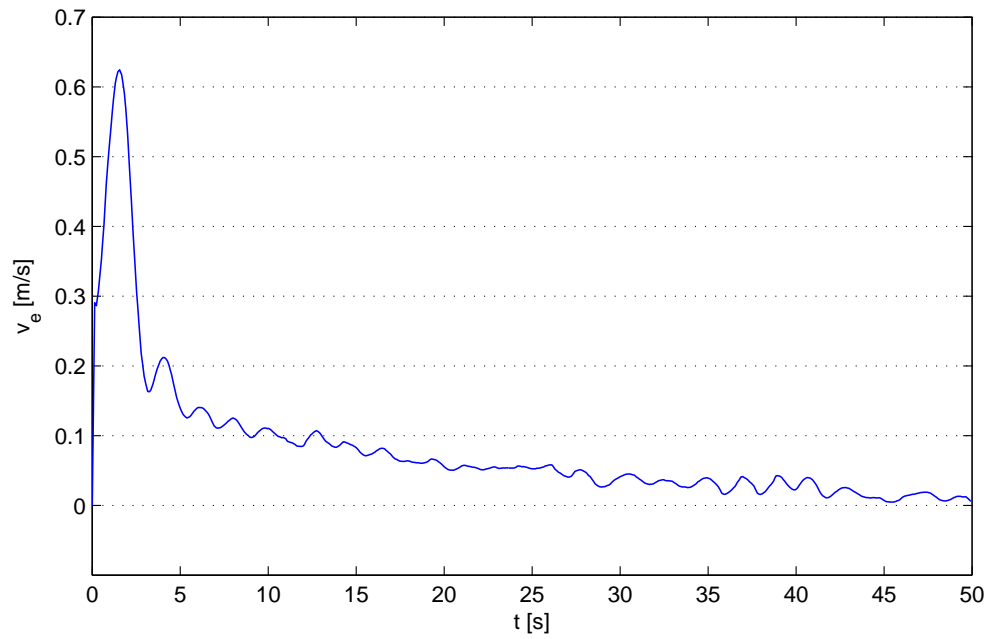


Figura 4.7: Error de velocidad lineal  $v_e$

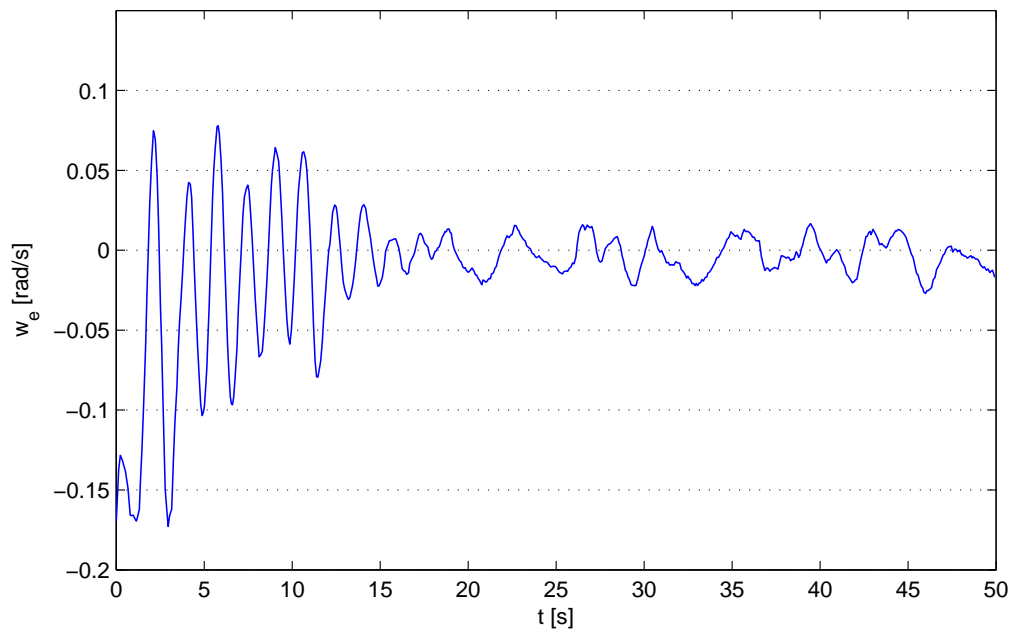
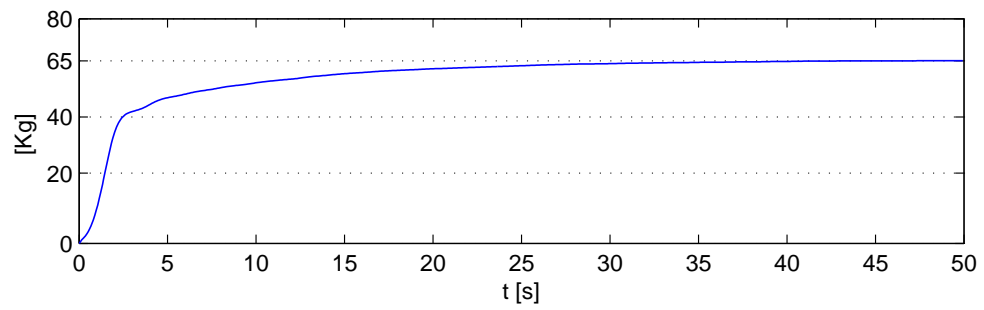
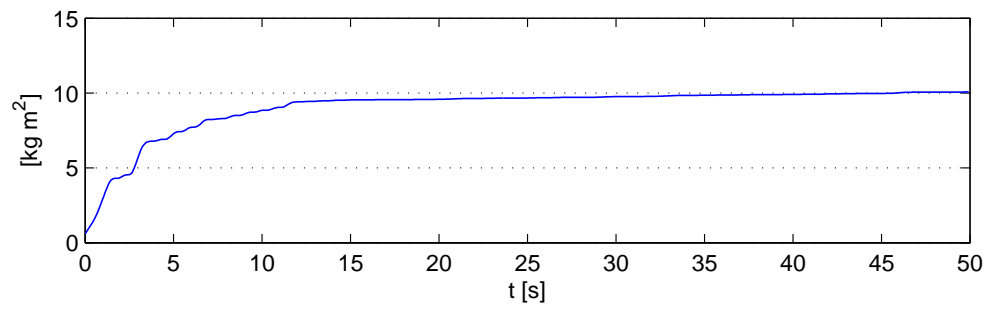


Figura 4.8: Error de velocidad angular  $w_e$



(a) Masa estimada  $\hat{m}$



(b) Momento de inercia estimado  $\hat{I}$

Figura 4.9: Parámetros estimados

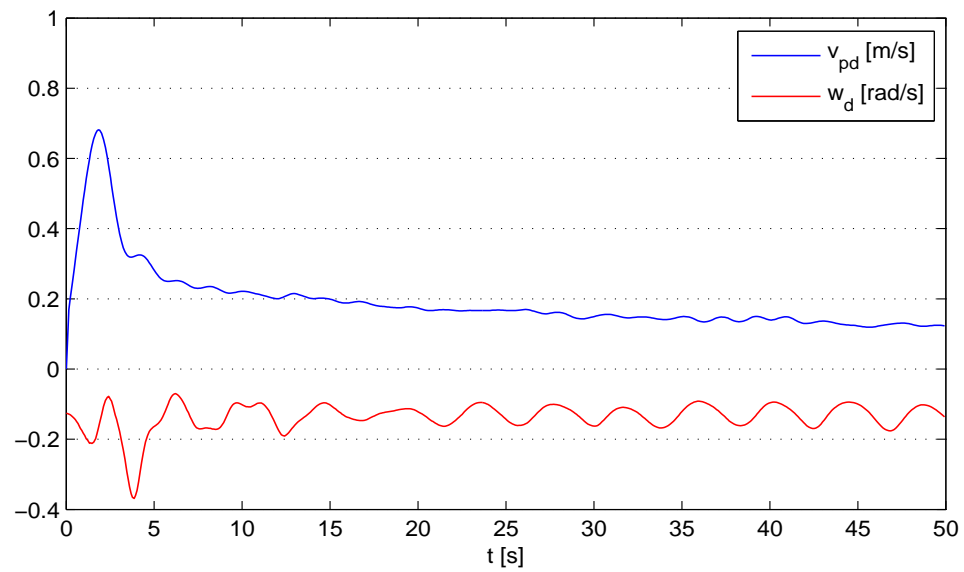


Figura 4.10: Velocidades deseadas  $v_{pd}$  y  $\omega_d$

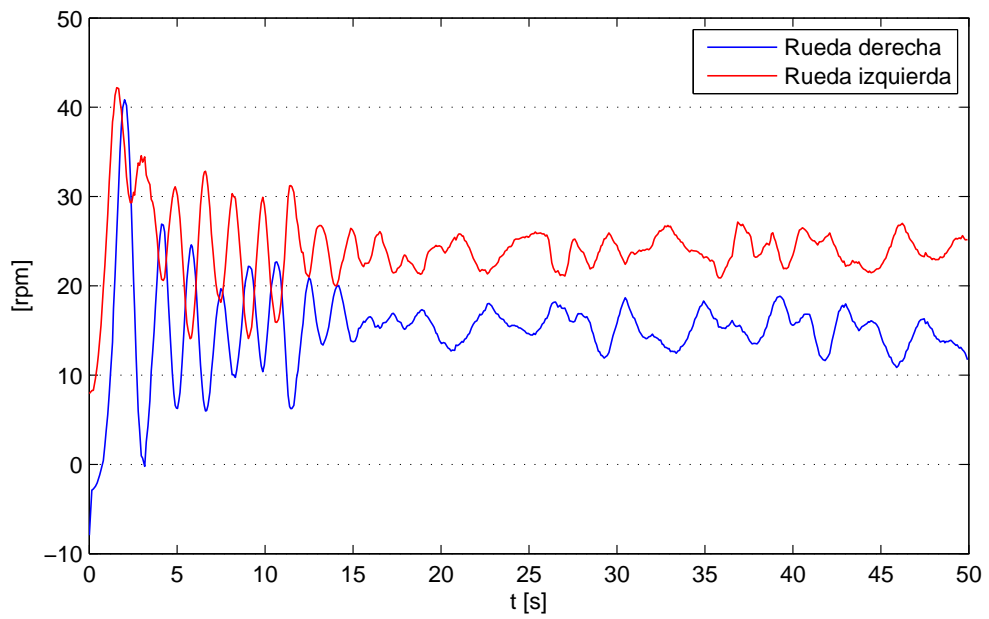


Figura 4.11: Velocidad angular de las ruedas

## Experimento 2

Para probar la región de validez de la ley de control cinemática (3.61), (3.62), se realizó un segundo experimento con la circunferencia como trayectoria de referencia, pero considerando ahora condiciones iniciales no nulas. Las condiciones iniciales consideradas fueron:  $x_e = 0$ ,  $y_e = 0.1$  [m], y  $\theta_e = 0$ . Las ganancias de control usadas en este experimento se tabulan enseguida.

Ganancia	Magnitud	Ganancia	Magnitud
$k_1$	15	$k_6$	6
$k_2$	5	$T_1$	5
$k_3$	1	$T_2$	5
$k_4$	7	$\gamma_1$	4
$k_5$	5	$\gamma_2$	5

Tabla 2 : Ganancias de control del Experimento 2

Los resultados obtenidos se presentan a continuación.

Los errores de posición  $x_e$ ,  $y_e$  y  $\theta_e$  se muestran respectivamente en las Figuras 4.13, 4.14 y 4.15, donde puede verse que nuevamente todos los errores tienden a cero, llegando al final del experimento a las magnitudes

Error final	Magnitud
$x_e$	$2.120 \times 10^{-3}$ [m]
$y_e$	$0.861 \times 10^{-3}$ [m]
$\theta_e$	0.77 [°]

En las Figuras 4.16 y 4.17 se presentan respectivamente los errores de seguimiento de la velocidad lineal  $v_e$  y angular  $w_e$ , donde se muestra con claridad que ambos errores tienden a cero. La Figura 4.18 muestra la evolución de los parámetros estimados  $\hat{m}$  e  $\hat{L}$ , y la Figura 4.19 muestra las velocidades deseadas  $v_{pd}$  y  $w_d$ . Por último, la Figura 4.20 presenta las velocidades de ambas ruedas del robot móvil, donde se aprecia que nuevamente no se presentó saturación en los actuadores.

Nuevamente estos resultados muestran que el robot móvil realizó adecuadamente el seguimiento de trayectoria deseado, como se observa en la Figura 4.12 donde se grafica la trayectoria, en el plano, descrita por el robot móvil durante el experimento.

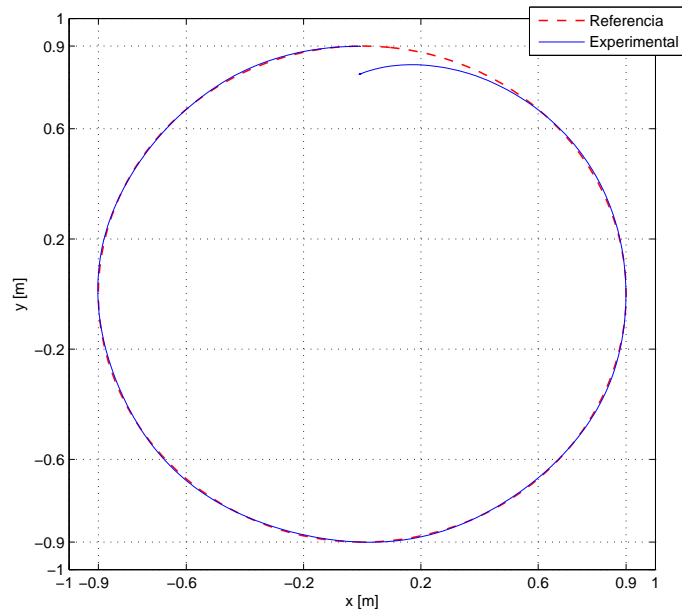


Figura 4.12: Trayectoria experimental

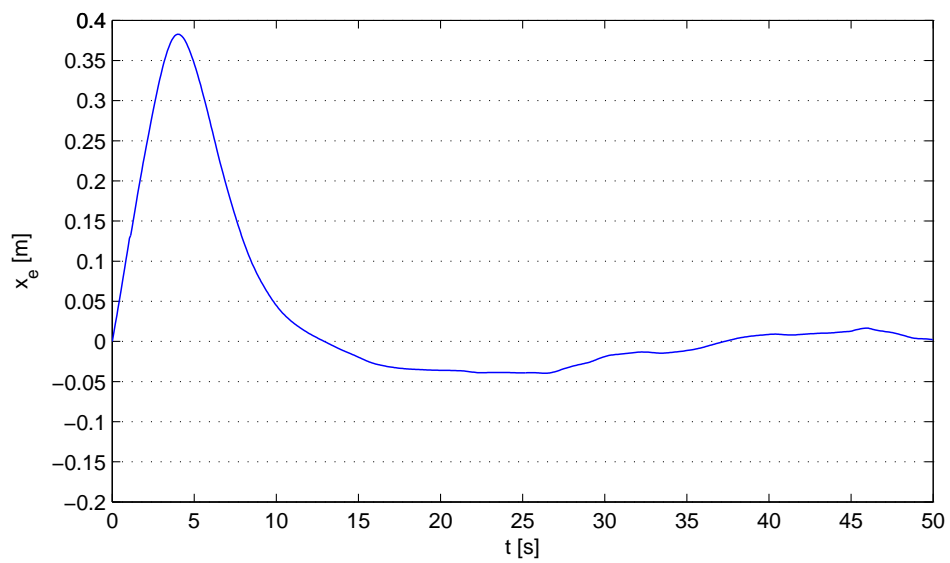


Figura 4.13: Error de posición  $x_e$

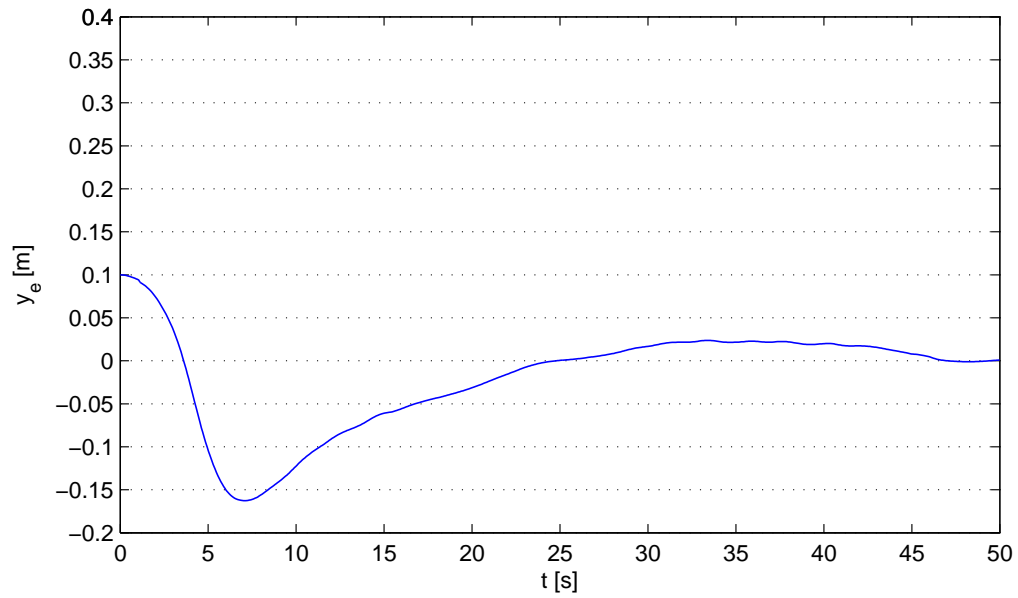


Figura 4.14: Error de posición  $y_e$

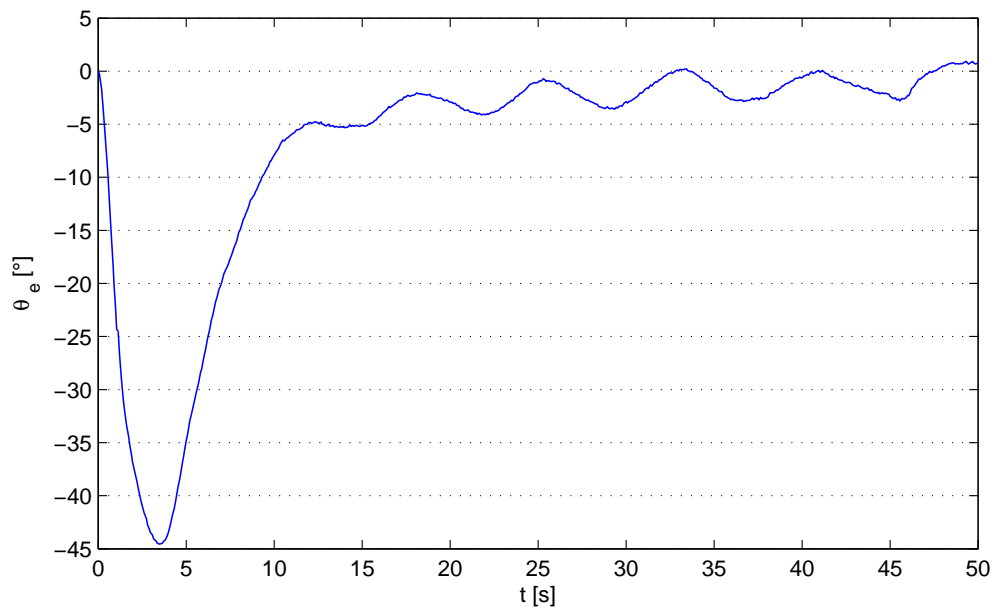


Figura 4.15: Error de orientación  $\theta_e$

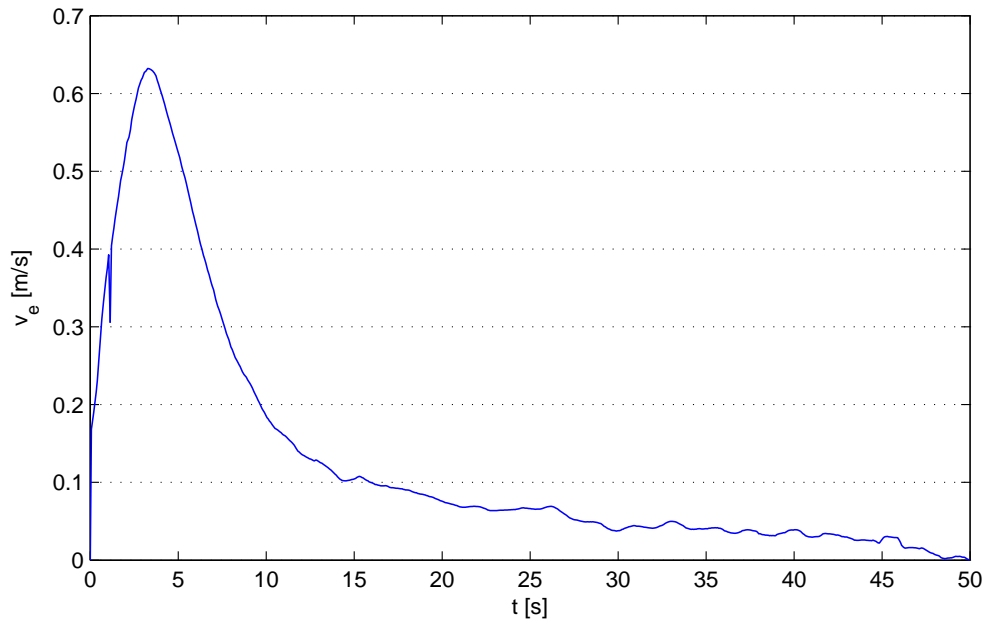


Figura 4.16: Error de velocidad lineal  $v_e$

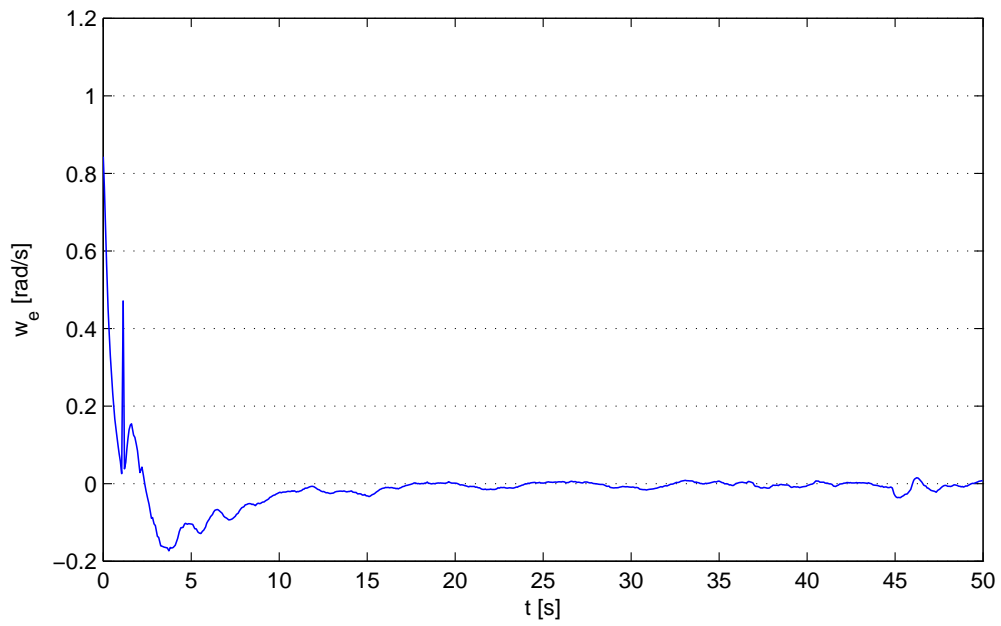
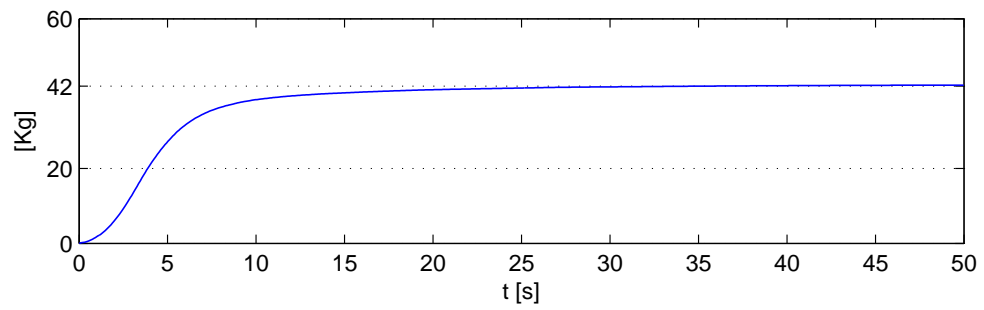
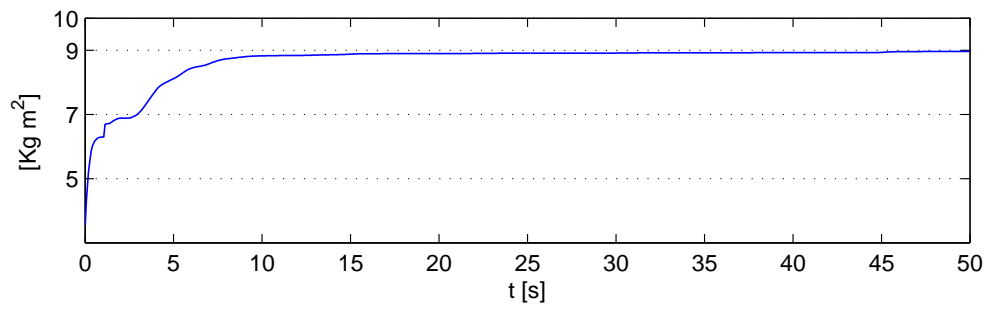


Figura 4.17: Error de velocidad angular  $w_e$



(a) Masa estimada  $\hat{m}$



(b) Momento de inercia estimado  $\hat{I}$

Figura 4.18: Parámetros estimados

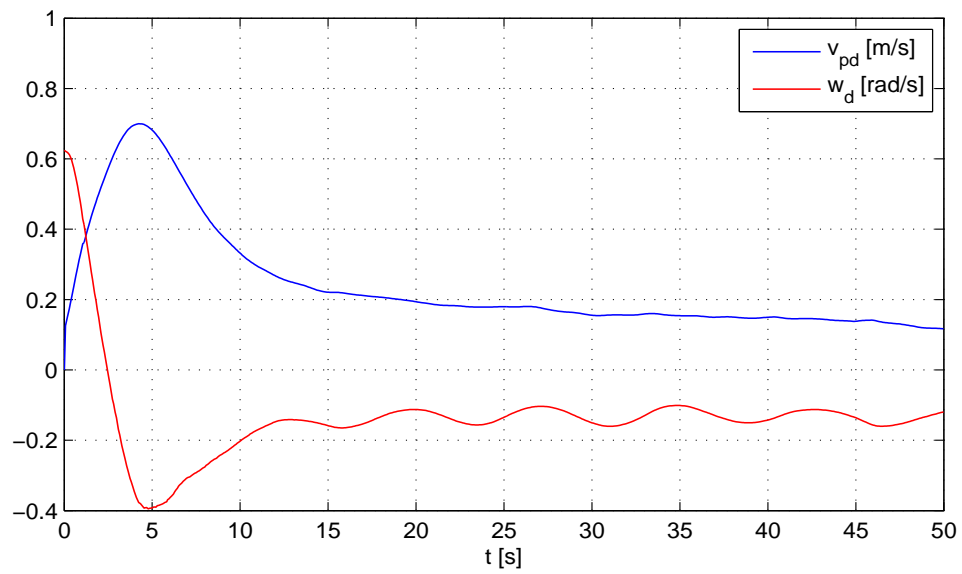


Figura 4.19: Velocidades deseadas  $v_{pd}$  y  $\omega_d$



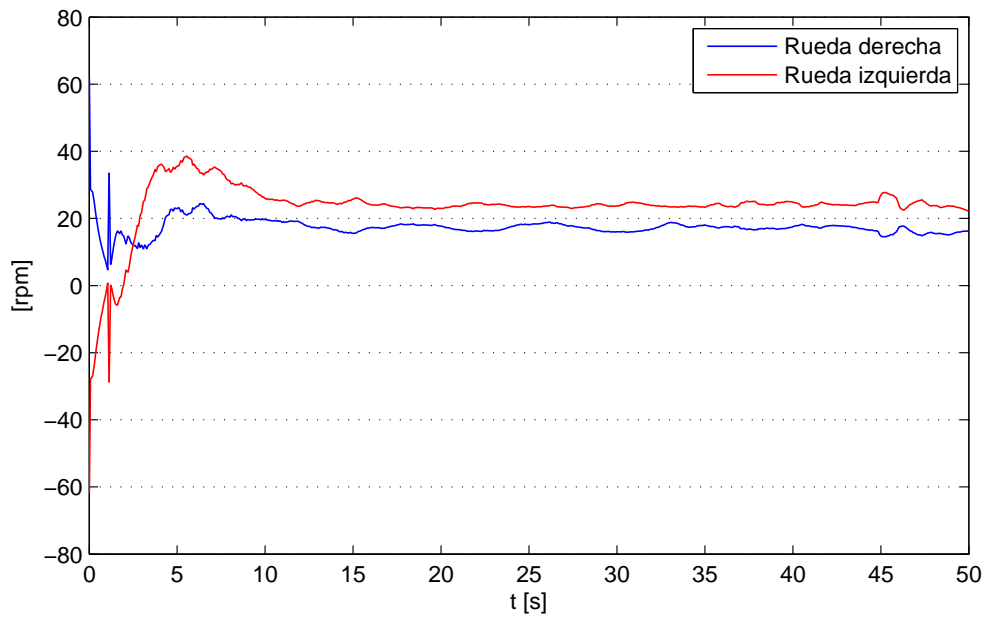


Figura 4.20: Velocidad angular de las ruedas

### 4.2.2. Trayectoria de referencia: Curva tipo lemniscata

#### Experimento 3

La segunda trayectoria de referencia considerada para las pruebas experimentales es una trayectoria tipo lemniscata compuesta por dos circunferencias contiguas de radio  $R = 0.9$  [m] (ver Figura 4.21). Esta trayectoria representa un desafío fuerte porque demanda un cambio drástico en la orientación del robot al pasar a la trayectoria de la segunda circunferencia. Esta prueba tuvo una duración de 100 [s] y se consideraron las siguientes condiciones iniciales:  $x_e = 0$ ,  $y_e = 0.1$  [m], y  $\theta_e = 0$ , es decir, el robot móvil inicia su movimiento 100 [mm] por debajo del punto de inicio del robot de referencia. Las ganancias de control utilizadas en este experimento se muestran en la Tabla 3.

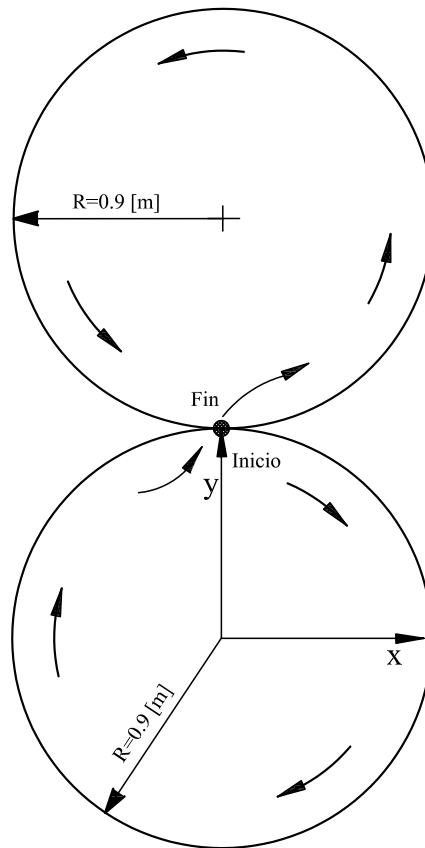


Figura 4.21: Trayectoria de referencia

Ganancia	Magnitud	Ganancia	Magnitud
$k_1$	10	$k_6$	2
$k_2$	4	$T_1$	5
$k_3$	1	$T_2$	5
$k_4$	6	$\gamma_1$	1
$k_5$	2	$\gamma_2$	5

Tabla 3 : Ganancias de control del Experimento 3

Los resultados obtenidos se presentan enseguida.

Las Figuras 4.23, 4.24 y 4.25 muestran los errores de posición  $x_e$ ,  $y_e$  y  $\theta_e$  respectivamente. De las figuras se aprecia que los tres errores tienden a cero, llegando al final del experimento a los valores

Error final	Magnitud
$x_e$	$0.434 \times 10^{-3}$ [m]
$y_e$	$7.880 \times 10^{-3}$ [m]
$\theta_e$	-0.679 [°]

Las Figuras 4.26 y 4.27 presentan los errores de seguimiento de la velocidad lineal  $v_e$  y angular  $w_e$ , respectivamente; donde se observa que ambos errores tienden a cero. En la Figura 4.28 se grafica la evolución de los parámetros estimados  $\hat{m}$  e  $\hat{I}$ , y la Figura 4.29 muestra las velocidades deseadas  $v_{pd}$  y  $w_d$ . Finalmente, la Figura 4.30 presenta la velocidad angular de ambas ruedas del robot móvil, donde se aprecia que no se presenta saturación en los actuadores.

Dado que todos los errores presentes en el lazo de control tienden a cero, se muestra que el robot móvil realizó adecuadamente el seguimiento de trayectoria deseado, hecho que es posible verificar al observar la Figura 4.22 donde se grafica la trayectoria descrita por el robot móvil durante la prueba experimental.

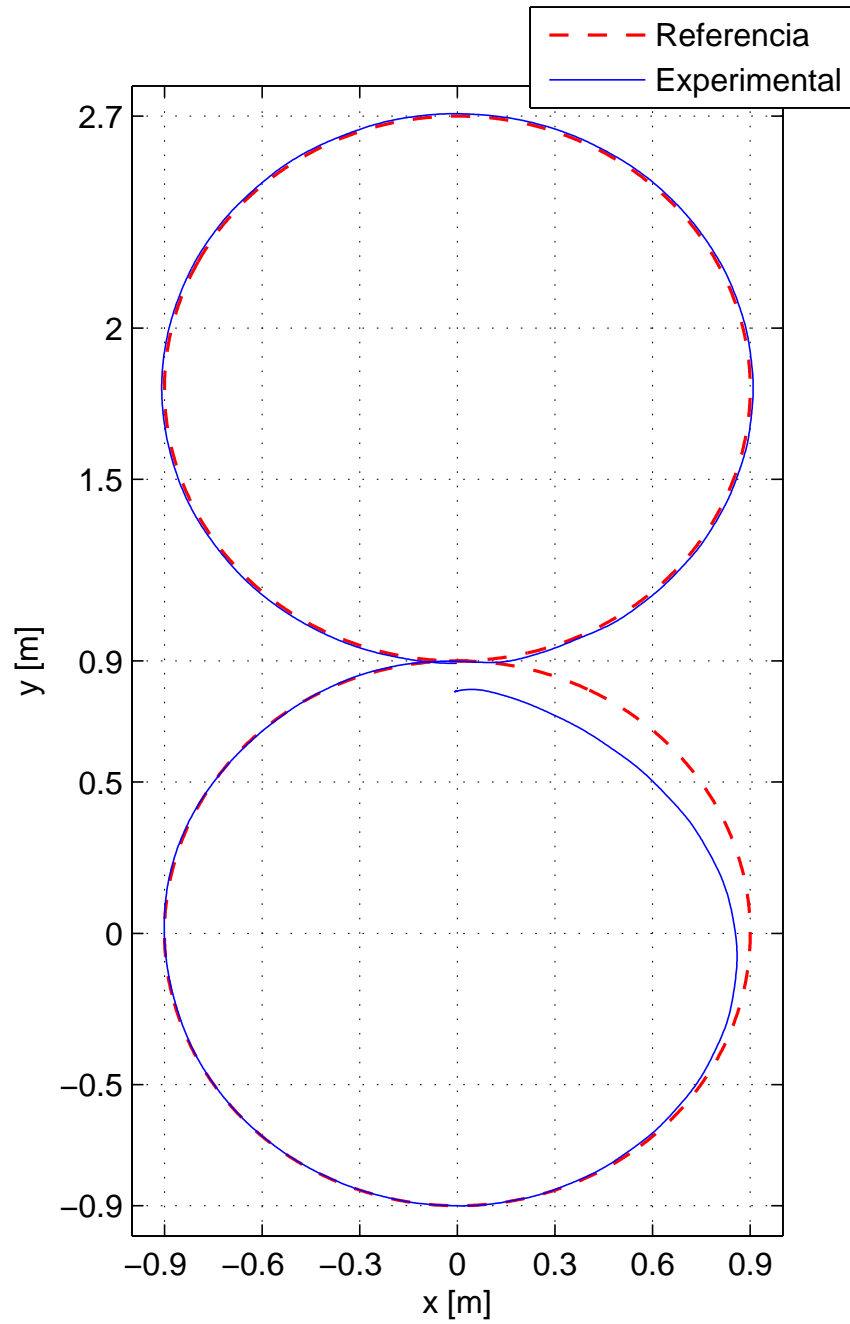


Figura 4.22: Trayectoria experimental

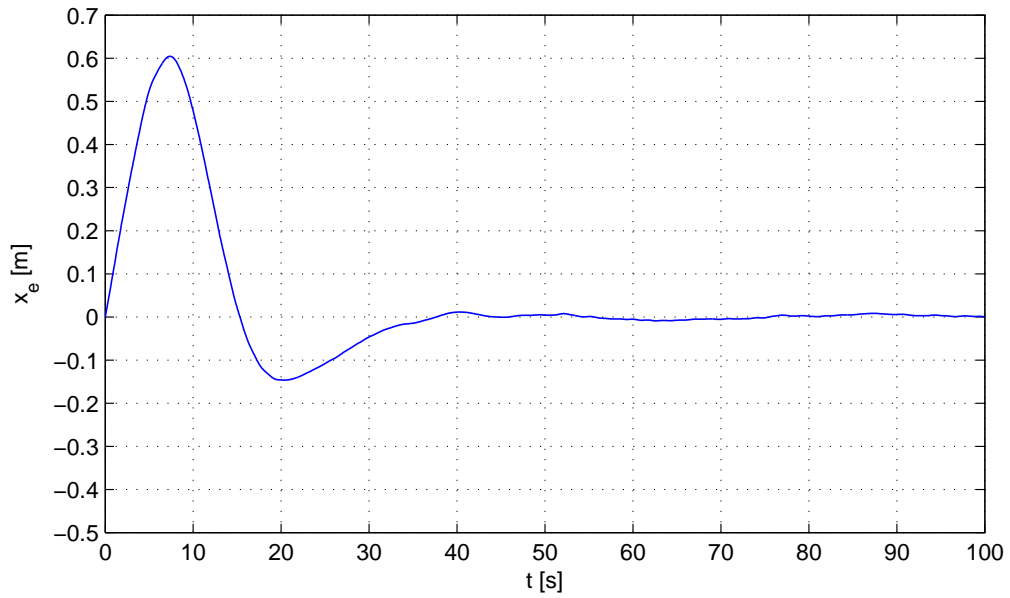


Figura 4.23: Error de posición  $x_e$

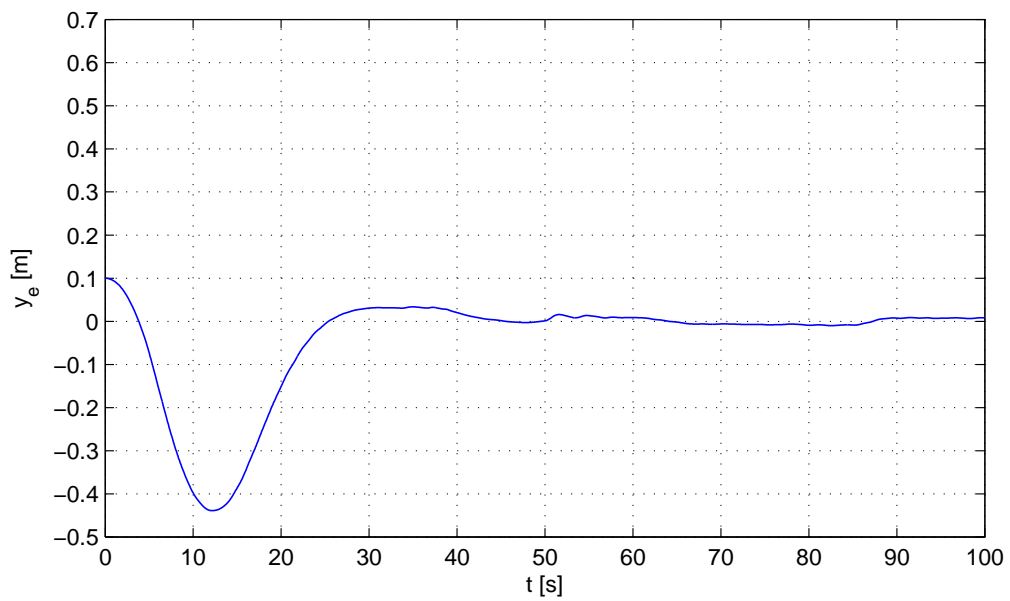


Figura 4.24: Error de posición  $y_e$

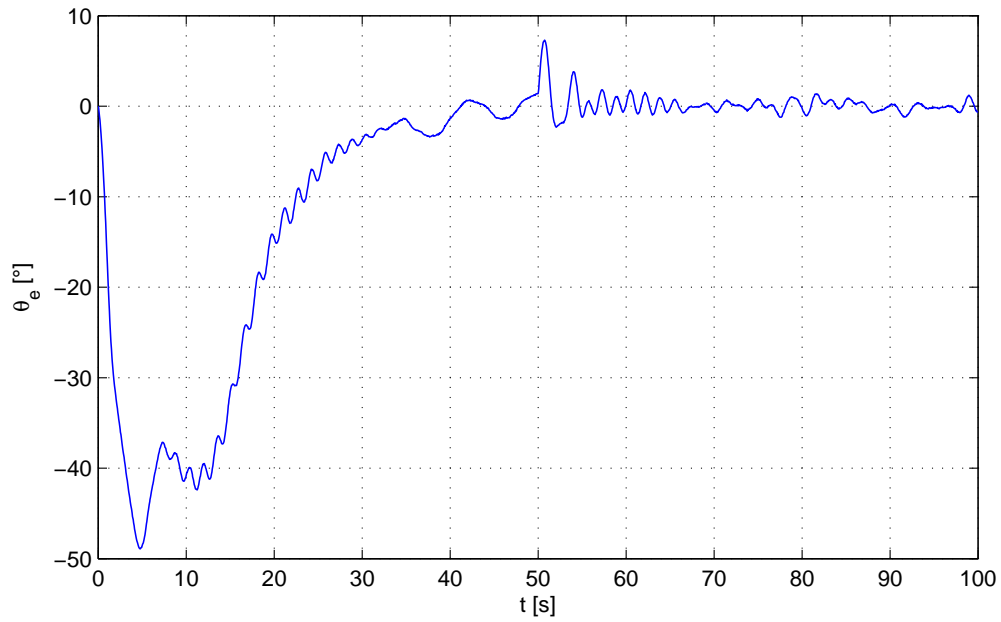


Figura 4.25: Error de orientación  $\theta_e$

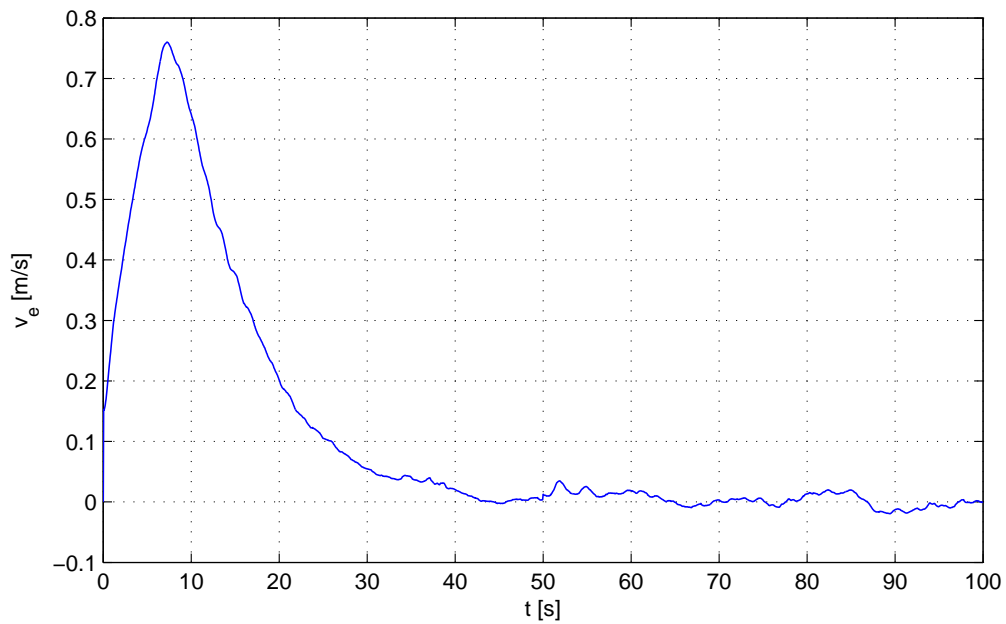


Figura 4.26: Error de velocidad lineal  $v_e$

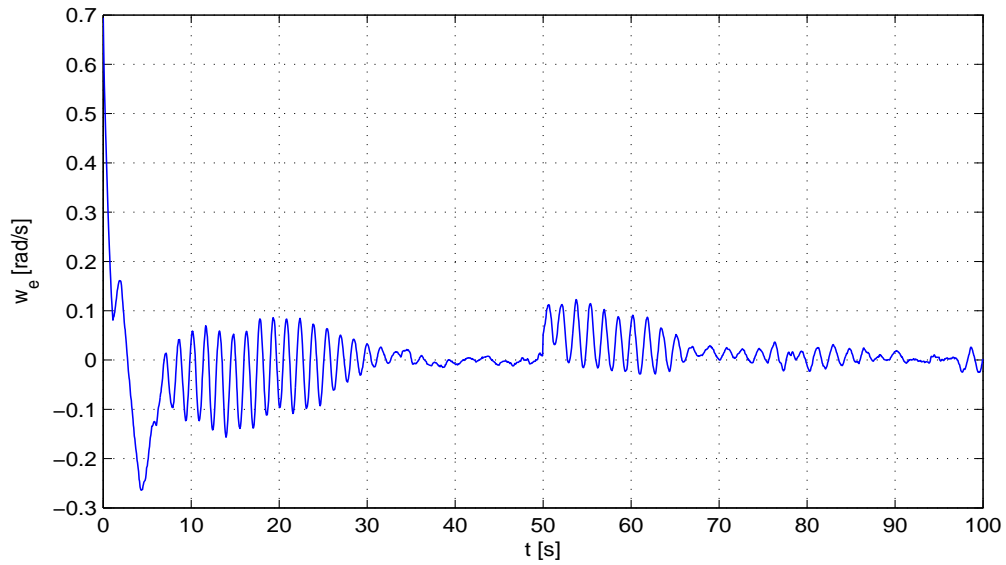
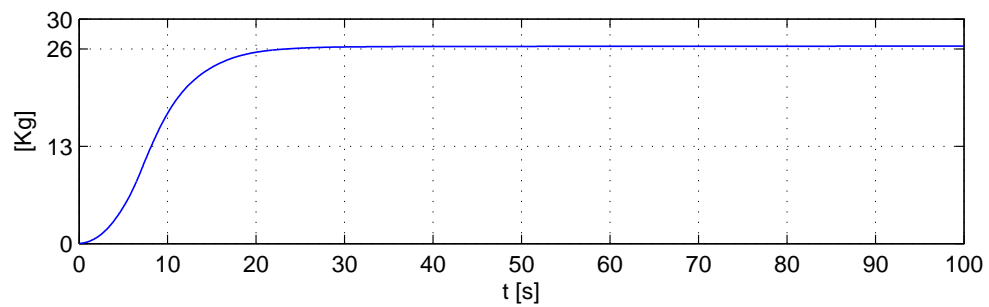
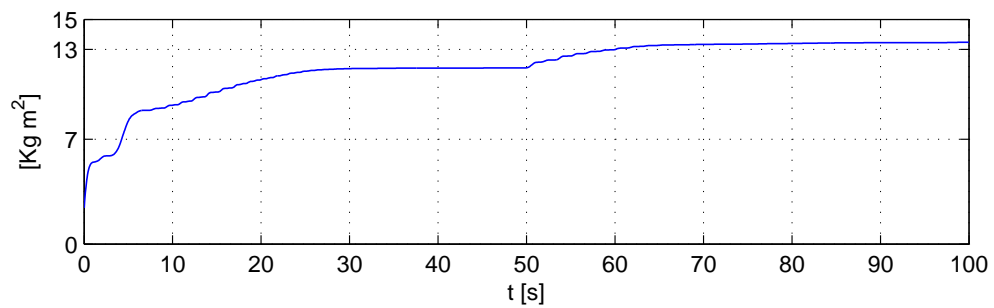


Figura 4.27: Error de velocidad angular  $w_e$



(a) Masa estimada  $\hat{m}$



(b) Momento de inercia estimado  $\hat{I}$

Figura 4.28: Parámetros estimados

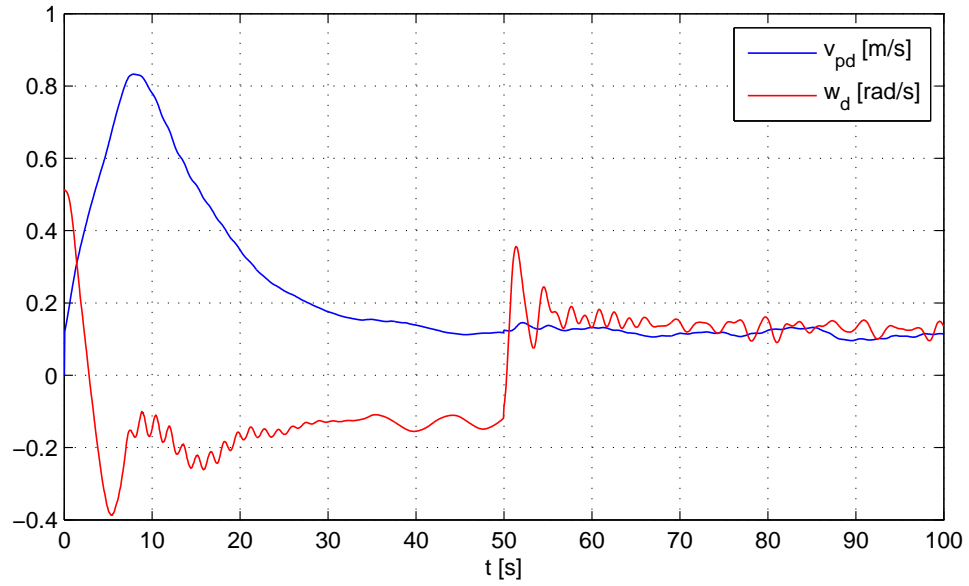


Figura 4.29: Velocidades deseadas  $v_{pd}$  y  $w_d$

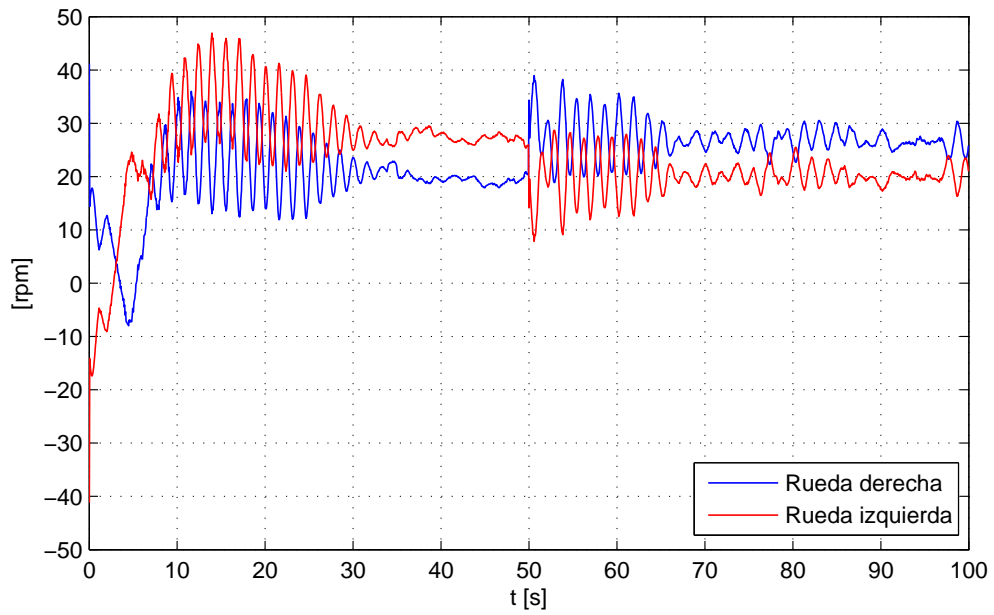


Figura 4.30: Velocidad angular de las ruedas



De acuerdo con lo anteriormente presentado, es posible afirmar que los resultados obtenidos de los tres experimentos han sido satisfactorios, pues los errores reportados son despreciables en términos prácticos, lo cual implica que el robot móvil sigue adecuadamente la trayectoria de referencia, incluso cuando cambios drásticos en la orientación son exigidos. Con esto, se ha demostrado experimentalmente que las leyes de control cumplen con los objetivos propuestos.

---

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se propone una solución al problema de seguimiento de trayectoria de referencia en robots móviles con restricciones no holonómicas. La solución a este problema plantea dos nuevos problemas particulares, relacionados uno a la cinemática (seguimiento de trayectoria) y otro a la dinámica del robot móvil (seguimiento de velocidad de referencia); por lo cual este trabajo reporta dos resultados principales.

El primero de ellos es el desarrollo de una ley de control no lineal basada en el modelo cinemático del robot, que garantiza localmente que las trayectorias de la dinámica del error de posición sean finalmente acotadas, con cota final arbitrariamente pequeña.

El segundo es el diseño de un controlador adaptable por modelo de referencia, robusto ante incertidumbres en los parámetros de masa e inercia para la dinámica del robot, que garantiza que los errores de seguimiento de las velocidades lineal y angular del robot móvil tienden a cero.

El desempeño conjunto de estos dos controladores permite resolver el problema de seguimiento de trayectoria de referencia en robots móviles con restricciones no holonómicas. Para comprobar esto, ambos algoritmos se implementaron en el robot móvil no holonómico RM-10. Los resultados obtenidos de las pruebas experimentales demuestran la eficiencia de las leyes de control propuestas.

Es importante mencionar que este problema ya se ha abordado en la literatura bajo la consideración de que el centro de masa del robot se localiza en el punto medio

del eje de las ruedas actuadas. En este trabajo se contempla el hecho de que el centro de masa del robot puede no estar en tal posición, haciendo que la solución propuesta sea menos restrictiva.

El robot móvil RM-10 es un robot de propósito general equipado con sensores para detectar obstáculos y realizar tareas de visión. Por tal motivo se plantea como trabajo futuro desarrollar un algoritmo de planeación de trayectorias que permita al robot, mediante el seguimiento de tales trayectorias, sortear obstáculos propios del entorno que restrinjan o impidan llevar a cabo las tareas de navegación dispuestas.

---

# Apéndice A

## Teoremas auxiliares

**Teorema A.1** (Teorema 4.18, Khalil [12] pp.172)

Sea  $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^n$  una región que contiene el origen y sea  $V : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$  una función diferenciable tal que

$$\alpha_1(\|\mathbf{x}\|) \leq V(t, \mathbf{x}) \leq \alpha_2(\|\mathbf{x}\|) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq -W_3(\mathbf{x}), \quad \forall \|\mathbf{x}\| \geq \mu > 0 \quad (\text{A.2})$$

$\forall t \geq 0$  y  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}$ , donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son funciones clase  $\mathcal{K}$ ,  $W_3(\mathbf{x})$  es una función positiva definida y sea  $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}^n$  continua por intervalos en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$  sobre  $[0, \infty) \times \mathcal{D}$ . Sea  $r > 0$ , tal que  $\mathcal{B}_r = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\} \subset \mathcal{D}$ . Supóngase que

$$\mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_2(r)). \quad (\text{A.3})$$

Entonces, existe una función  $\beta$  de clase  $\mathcal{KL}$  y para cada estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  que satisface

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)), \quad (\text{A.4})$$

existe  $T \geq 0$  (que depende de  $\mathbf{x}(t_0)$  y  $\mu$ ) tal que la solución de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  satisface

$$\|\mathbf{x}\| \leq \beta(\|\mathbf{x}(t_0)\|, t - t_0) \quad \forall t_0 \leq t \leq t_0 + T \quad (\text{A.5})$$

$$\|\mathbf{x}\| \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)) \quad \forall t \leq t_0 + T. \quad (\text{A.6})$$

Más aún, si  $\mathcal{D} = \mathcal{R}^n$  y  $\alpha_1$  pertenece a la clase de funciones  $\mathcal{K}_\infty$ , entonces (A.5) y (A.6) se satisfacen para cualquier estado inicial  $\|\mathbf{x}(t_0)\|$  sin importar que tan grande sea  $\mu$ .

△

**Lemma A.1** (Lema 4.3, Slotine y Li [17] pp.125)

Si una función escalar  $V(t, \mathbf{x})$  satisface las siguientes condiciones

- $V(t, \mathbf{x})$  está acotada por abajo
- $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  es semidefinida negativa
- $\dot{V}(t, \mathbf{x})$  es uniformemente continua en el tiempo

entonces  $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$ .

△

---

# Bibliografía

- [1] Guy Campion, Georges Bastin, y Brigitte D'Andrea-Novel. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(4):47–62, 1998.
- [2] Y. Chang y B. Chen. Adaptive tracking control design of nonholonomic mechanical systems. En *35th Conference on Decision and Control*. 1996.
- [3] D. Chwa. Sliding-mode tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots in polar coordinates. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12(4):637–644, 2004.
- [4] R. Fierro y F. Lewis. Control of a nonholonomic mobile robot: Backstepping kinematics into dynamics. En *34th IEEE Conference on Decision and Control*. 1995.
- [5] R. Fierro y L. Lewis. Control of a nonholonomic mobile robot using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9(4):589–600, 1998.
- [6] Takanori Fukao, Hiroshi Nakagawa, y Norihiko Adachi. Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 16(5):609–615, 2000.
- [7] Ali Gholipour y M.J. Yazdanpanah. Dynamic tracking control of nonholonomic mobile robot with model reference adaptation for uncertain parameters. En *EEC2003, European Control Conference*. 2003.
- [8] Z. Hou, A. Zou, L. Cheng, y M. Tan. Adaptive control of an electrically dri-

- ven nonholonomic mobile robot via backstepping and fuzzy approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 17(4):803–815, 2009.
- [9] Zhong-Ping Jiang, Erjen Lefeber, y Henk Nijmeijer. Saturated stabilization and tracking of a nonholonomic mobile robot. *Systems and Control Letters*, 42:327–332, 2001.
- [10] Joseph L. Jones, Anita M. Flynn, y Bruce A. Seiger. *Mobile Robots: Inspiration to implementation*. A. K. Peters, 1993.
- [11] Y. Kanayama, Y. Kimura, y T. Noguchi F. Miyazaki. A stable tracking control scheme for an autonomous mobile robot. En *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1990.
- [12] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, 2002.
- [13] Y. Liang, L. Xu, R. Wei, y H. Hu. Adaptive fuzzy control for trajectory tracking of mobile robot. En *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. 2010.
- [14] Patrick F. Muir y Charles P. Neuman. *Kinematic Modeling of Wheeled Mobile Robots*. Camegie-Mellon University, 1986.
- [15] W. Nelson y L. Coxi. Local path control for an autonomous vehicle. En *IEEE Conference on Robotics and Automation*. 1988.
- [16] Roland Siegwart, Illah R. Nourbakhsh, y Davide Scaramuzza. *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. The MIT Press, 2004.
- [17] Jean-Jacques E. Slotine y Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, 1991.
- [18] Razvan Solea, Adrian Filipescu, y Urbano Nunes. SMC: Sliding-mode control for trajectory-tracking of a wheeled mobile robot in presence of uncertainties. En *7th Asian Control Conference*. 2009.

- 
- [19] H. Wang, T. Fukao, y N. Adachi. Adaptive tracking control of nonholonomic mobile robots: A backstepping approach. En *1998 Japan-USA Symposium Flexible Automation*. 1998.
- [20] J. M. Yang y J. H. Kim. Sliding-mode control for trajectory tracking of nonholonomic wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(3):578–587, 1999.
- [21] CAO Zhengcai, Zhao Yingtao, y WU Qidi. Adaptive trajectory tracking control for a nonholonomic mobile robot. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 24(3):1–7, 2011.