



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

PROBLEMAS DE CONFIGURACIONES INDEPENDIENTES  
MAXIMALES EN AJEDREZ

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
LICENCIATURA EN ACTUARÍA

PRESENTA:  
JASON ALFORD PHILIPPE

TUTOR PRINCIPAL  
DR. RICARDO GÓMEZ AÍZA

SINODALES  
DR. JUAN JOSÉ MONTELLANO BALLESTEROS  
DR. RICARDO STRAUZS SANTIAGO  
DRA. MUCUY-KAK DEL CARMEN GUEVARA AGUIRRE  
DRA. MIKA OLSEN

MÉXICO, D. F. SEPTIEMBRE 2014



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Problemas de configuraciones independientes maximales en ajedrez

Jason Alford Philippe

27 de agosto de 2014

1.-Datos del alumno

Alford

Philippe

Jason

Tel: 5665 6054

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias

Actuaría

# de cuenta: 403000290

2.-Datos del tutor

Dr.

Ricardo

Gómez

Aíza

3.- Datos sinodal 1

Dr.

Juan José

Montellano

Ballesteros

4.- Datos sinodal 2

Dr.

Ricardo

Strausz

Santiago

5.- Datos sinodal 3

Dra.

Mika

Olsen

6.- Datos sinodal 4

Dra.

Mucuy-kak del Carmen

Guevara

Aguirre

7.-Datos de trabajo escrito

Problemas de configuraciones independientes maximales en ajedrez

137 páginas

2014

# Prefacio

Son tres los objetivos principales de la realización de este trabajo: Primero, completar el trámite de titulación del autor. Segundo, recopilar la mayor y mejor parte de información existente hoy en día con respecto al problema planteado (el problema de las  $n$ -Damas) y presentarlo de manera muy didáctica y visual. Por esta razón se advierte que el lector encontrará muchos diagramas e ilustraciones que visualizan las ideas tratadas. Y finalmente crear una oportunidad de contribuir en el desarrollo del análisis del problema, unificando los aspectos más importantes y tratando de presentar nuevos resultados y puntos de vista que pudieran ser significativos.

La motivación para realizar este trabajo de tesis fue mi gran afición por el juego del ajedrez. Al escribir estas palabras me sigo desempeñando como ajedrecista, años atrás obtuve el título de Maestro FIDE (siglas en francés para la Federación Internacional de Ajedrez). A la par de este trabajo, estoy regresando al estudio y práctica de este juego. Esto nos garantiza que el enfoque aquí mostrado es llevado a cabo por alguien experto en la materia. Aunque en su mayor parte este trabajo involucra soluciones matemáticas, el lector puede confiar plenamente en el contenido ajedrecístico presentado.

Afortunadamente para mí, el Dr. Ricardo Gómez tenía un gran interés por el problema de configuraciones de Damas en tableros de ajedrez. Tras haber realizado trabajo en la materia, seguía con las ideas en la cabeza, y un día me propuso el tema para mi trabajo de tesis.

Hemos entonces recopilado los resultados más importantes sobre el problema de las  $n$ -Damas y sus generalizaciones. Nos hemos basado principalmente en tres artículos [7, 8, 12]. Nuestras modestas contribuciones son dos: Por un lado, en la Sección 5.3 generalizamos resultados de [8] a más dimensiones, y aún cuando estas generalizaciones son esencialmente directas del caso bidimensional, no existía hasta ahora dicho compendio. Por otro lado, presentamos en el Capítulo 6 un análisis estadístico de la existencia de configuraciones in-

## II

---

dependientes que dominan a todo el tablero, para distintos tipos de tableros. Dicho análisis se realizó con búsquedas aleatorias por computadora. Lo interesante de los resultados que obtuvimos en este aspecto es la evidencia del comportamiento de las distintas distribuciones de probabilidad de la cardinalidad de configuraciones independientes que dominan tableros de distintos tipos (estándar, modular, Klein, proyectivo y reflexivo). Veremos que principalmente la evidencia de las simulaciones muestran convergencia asintótica gaussiana con un algoritmo de búsqueda aleatoria basado en distribuciones uniformes y que denominamos “El Monkey”.

# Índice general

<b>1. Introducción al juego del ajedrez</b>	<b>3</b>
1.1. Origen del ajedrez . . . . .	3
1.2. Algunas convenciones . . . . .	6
1.2.1. Letras mayúsculas para las piezas . . . . .	6
1.2.2. Es Dama, no Reina . . . . .	7
1.3. El movimiento de las piezas . . . . .	9
1.3.1. Posición inicial . . . . .	9
1.3.2. El Rey . . . . .	11
1.3.3. La Dama . . . . .	11
1.3.4. El Alfil . . . . .	12
1.3.5. El Caballo . . . . .	12
1.3.6. La Torre . . . . .	13
1.3.7. El Peón . . . . .	13
1.4. Otras reglas a considerar . . . . .	14

1.4.1.	El derecho a enrocar . . . . .	14
1.4.2.	La captura . . . . .	15
1.4.3.	Comer al paso . . . . .	15
1.4.4.	Del jaque y el jaque mate . . . . .	16
1.5.	Algunas cifras interesantes del ajedrez . . . . .	17
<b>2.</b>	<b>Configuraciones independientes maximales en el tablero normal de ajedrez</b>	<b>19</b>
2.1.	El problema general . . . . .	19
2.2.	Reyes . . . . .	20
2.2.1.	Construcción de solución para el tablero de $8 \times 8$ . . . . .	20
2.2.2.	Solución general para $n \times n$ . . . . .	20
2.3.	Torres . . . . .	21
2.3.1.	Construcción de solución para el tablero de $8 \times 8$ . . . . .	22
2.3.2.	Solución general para $n \times n$ . . . . .	22
2.4.	Peones . . . . .	23
2.4.1.	Construcción de solución para el tablero de $8 \times 8$ . . . . .	24
2.4.2.	Solución general para $n \times n$ . . . . .	24
2.5.	Caballos . . . . .	25
2.5.1.	Construcción de solución para el tablero de $8 \times 8$ . . . . .	26
2.5.2.	Solución general para $n \times n$ . . . . .	26
2.6.	Alfiles . . . . .	27

---

2.6.1.	Solución para $8 \times 8$ .	27
2.6.2.	Solución para $n \times n$ .	27
2.7.	Damas	28
2.7.1.	Origen del problema	28
2.7.2.	El problema clásico en el tablero de $8 \times 8$ .	28
2.7.3.	El problema clásico en el tablero de $n \times n$ .	29
<b>3.</b>	<b>Tableros en <math>d</math>-dimensiones y de distintos tipos</b>	<b>39</b>
3.1.	Tableros tradicionales de dimensión $d$ .	40
3.1.1.	El tablero tradicional de 2 dimensiones.	40
3.1.2.	El tablero tradicional 3-dimensional.	40
3.1.3.	Tableros tradicionales de dimensión $d \geq 2$ .	41
3.2.	Tableros modulares	44
3.2.1.	Construcción del tablero modular	44
3.3.	Problemas de configuraciones independientes maxi-males en tableros modulares.	45
3.4.	Otros posibles tableros	46
3.4.1.	El tablero en la botella de Klein.	46
3.4.2.	El tablero proyectivo.	47
3.4.3.	El tablero reflexivo.	48
<b>4.</b>	<b>Problema modular de las <math>n</math>-Damas en dimensión 2.</b>	<b>49</b>

---

4.1. Solución en 2 dimensiones. . . . .	49
4.2. Clases de soluciones del problema modular de las $n$ -Damas. . . . .	54
4.2.1. Notación y resultados básicos. . . . .	54
4.2.2. Clases de soluciones simétricas. . . . .	56
4.2.3. $p^\alpha$ -soluciones simétricas . . . . .	59
4.2.4. Búsqueda en computadora de soluciones simétricas. . . . .	65
4.2.5. Soluciones Parciales . . . . .	70
<b>5. Los problemas de Damas en mayores dimensiones.</b>	<b>75</b>
5.1. El ataque de la Dama en $d$ dimensiones. . . . .	76
5.1.1. El ataque de otras piezas en $d$ dimensiones. . . . .	76
5.2. El problema modular de codimensión 1 de las $n$ -Damas. . . . .	78
5.2.1. Caso bidimensional. . . . .	78
5.2.2. Caso multidimensional. . . . .	79
5.2.3. Construyendo una solución completa. . . . .	80
5.2.4. Condiciones de existencia de soluciones completas. . . . .	81
5.2.5. Discusión . . . . .	86
5.3. Generalizaciones de resultados de Klöve. . . . .	87
5.4. El problema estándar de codimensión uno de las $n$ -Damas . . . . .	91
<b>6. Búsqueda de soluciones por computadora</b>	<b>93</b>

6.1. Generador aleatorio (“El Monkey”). . . . .	93
6.2. Histogramas . . . . .	94
<b>A. Código de “El Monkey”</b>	<b>103</b>
A.1. Código tablero estándar . . . . .	103
A.2. Código de ataque modular. . . . .	113
A.3. Código de ataque de Klein. . . . .	113
A.4. Código de ataque proyectivo. . . . .	117
A.5. Código de ataque reflexivo. . . . .	124



# Capítulo 1

## Introducción al juego del ajedrez

En este primer capítulo nos adentramos en el fabuloso mundo del ajedrez. Dado que este trabajo de tesis habla de problemas relacionados con el movimiento de las piezas de ajedrez, es necesario conocer varios aspectos del juego-ciencia. Empezamos con una introducción histórica, que nos cuenta desde su nacimiento como chaturanga<sup>1</sup>, hasta su forma actual. Después platicamos de algunas convenciones, especialmente en la notación de jugadas, y revisamos sus reglas básicas. Concluimos el capítulo con algunas cifras impresionantes que muestran la profundidad de este juego.

### 1.1. Origen del ajedrez

Empecemos con el origen del ajedrez. Los antecedentes históricos formales nos cuentan que el ajedrez nace en la India septentrional con el nombre de chaturanga. Muy diferente al ajedrez actual, el chaturanga se juega entre 4 adversarios, 1 por cada banda del tablero cuadrangular. Cuando llega a Persia, el juego es adoptado por los antiguos árabes, alrededor de los años 600 d.C. La naturaleza bélica y estratégica del juego, lo convierte en un pasatiempo de reyes, altos militares y nobles. En estos tiempos ocurre la ampliación territorial del imperio árabe, y con ella, la propagación del juego a todos los lugares donde la espada árabe se desenfundó. Es notable, entre todos los territorios conquistados, su llegada a tierras españolas.

---

<sup>1</sup>El nombre antiguo dado por los indios.

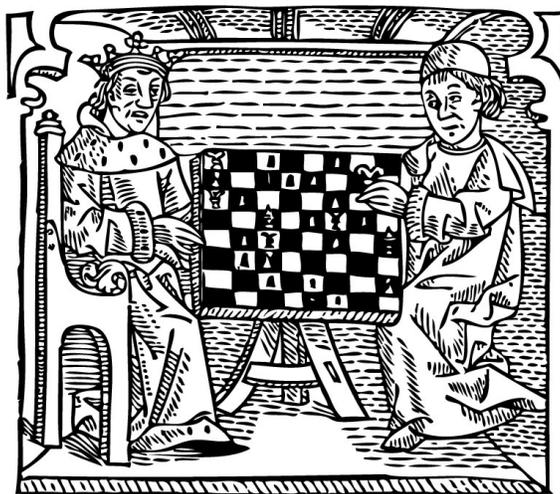


Figura 1.1: Dibujo del libro de William Caxton, en 1474.

En Valencia, entre los años 1470 y 1490, es donde el ajedrez cambia reglas, afina sus movimientos, y se convierte en el juego que hoy conocemos. Sin embargo, así como todo elemento de importancia en este mundo, al juego del ajedrez también se le construyó un mito que relata su nacimiento. La leyenda acerca de sus orígenes se puede encontrar en varios libros, revistas, y páginas de Internet, sin dejar a un lado su paso de voz en voz.

El ajedrez ha tenido varios exponentes de gran calidad. Pero son pocos los que han dejado un legado con forma y contenido, reflejado en escritos que podamos consultar. Entre estos pocos hay que destacar al G.M.<sup>2</sup> Alexander Kotov, quien fue uno de los mejores jugadores en los 60's. Aparte de sus resultados deportivos, Kotov es reconocido por ser de los primeros en formalizar el estudio de ajedrez y su trabajo escrito es el precursor por excelencia para entender cómo hay que pensar en Ajedrez. En su autobiografía, nos cuenta esta leyenda (ver [9]):

“En el primer siglo, vivía a orillas del Ganges un sabio brahmán, que inventó el ajedrez y se lo regaló al Rey de la India. Agradó tanto al Rey el nuevo juego que ofreció al inventor que pidiera lo que el quisiera como premio.

El brahmán le pidió tantos granos de trigo como resultase de poner uno en la primera casilla del tablero, dos en la segunda, el doble en la tercera, y así sucesivamente, y siempre doblando, hasta llegar a la casilla 64.

---

<sup>2</sup>Gran Maestro.

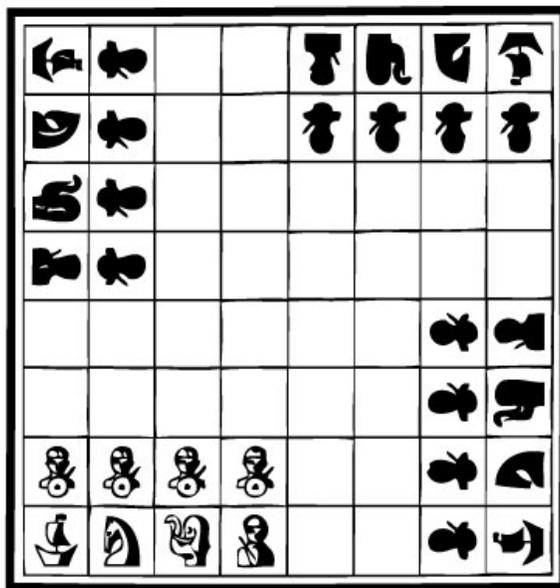


Figura 1.2: El inicio de una partida de Chaturanga.

La petición del brahmán provocó la hilaridad general, pues la creían insignificante. Pero cuando se hicieron los cálculos de los granos que había que entregarle, todos vieron que no era tan baladí como parecía. ‘Pues suponiendo un grano en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera y doblando así sucesivamente la cantidad hasta el escaque 64, resultará suponer que cada garnets (el garnets es una antigua medida rusa de granos, equivalente a 3,280 litros; el chetverts tenía 64 garnets) contuviese en cifras redondas un millón de granos, resultaría la cantidad de 288,230,376,151 con décimas de chetverts de trigo, cantidad que acaso no pueda producir todo el orbe.’

Desde entonces la humanidad lleva ya cerca de dos mil años sin dejar de disfrutar con el juego del ajedrez.”

Creo necesario complementar un poco esta versión de Kotov, con un dato extra, presente en otras versiones. Se plantea en esta variante que después de que el brahmán inventor del juego explicara el pago deseado, el Rey se ofendió, pues consideró muy insignificante la petición. Convencido de que se trataba de una burla, inmediatamente, y a la usanza de estos antiguos Reyes omnipotentes, condenó a muerte al brahmán. Afortunadamente para el brahmán (y para la sana narración de la leyenda) los matemáticos del reino no dejaron en saco roto el cálculo exacto de granos. Al llegar al resultado final, se apuraron para mostrar al Rey que la cifra insignificante no era tal, y que, de hecho, rebasaba la cantidad de granos obtenidas tras plantar maíz por miles de años, suponiendo que toda la superficie del planeta

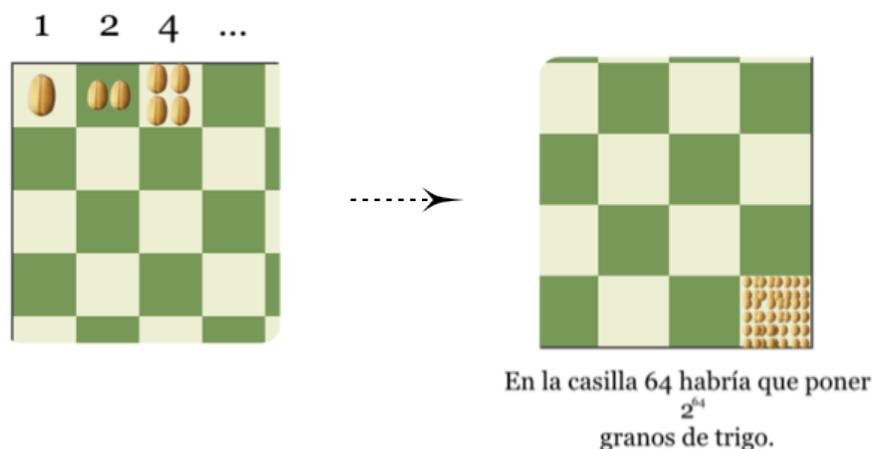


Figura 1.3: Diagrama simple que muestra la idea de ir duplicando la cantidad de granos en cada escaque (casilla o cuadro del tablero de ajedrez).

se destinara a tal fin. El Rey rectificó su decisión, e integró al brahmán entre sus consultores y su propia familia, dándole la mano de su misma hija, en matrimonio.

Esta versión más dramática e intensa se puede consultar en el libro “El hombre que calculaba” de Malba Tahan, libro famoso entre los amantes de las matemáticas. En la Figura 1.3 se puede visualizar la idea de ir duplicando la cantidad de granos por cada cuadro del tablero de ajedrez.

## 1.2. Algunas convenciones

### 1.2.1. Letras mayúsculas para las piezas

El formalismo literario me lleva a definir algunas convenciones con respecto, sobre todo, a la notación. En la práctica del ajedrez (principalmente en su estudio) se nombra a las piezas con letras mayúsculas, para diferenciar a la pieza en cuestión, de cualquier idea o concepto que se esté tratando. Por ejemplo, es común elogiar a un Caballo bien situado en el centro del tablero, y un texto al respecto puede hablar así: “Después de colocar el Caballo en el centro, la posición es aplastante para el bando blanco. El Caballo es el rey que dicta los acontecimientos de la partida. Incluso si se cambian todas las piezas, y se llega al final, el Rey blanco se unirá a su Caballo y juntos dominarán el centro del tablero”.

En conclusión, es necesario resaltar el concepto ajedrecístico de cualquier otro tema que se esté planteando. El juego de palabras, en este ejemplo, entre el Caballo y el Rey ilustra la utilidad de esta notación.

### 1.2.2. Es Dama, no Reina

Aunque formalmente el uso de la palabra Dama o Reina es indistinto y correcto en ambos casos, en el ambiente ajedrecístico rara vez se refiere a la Dama como Reina. La razón es por notación nuevamente. Las jugadas de ajedrez se escriben de la siguiente forma. Primero las coordenadas se definen como en la Figura 1.4 (los renglones se indexan con números y las columnas con letras).

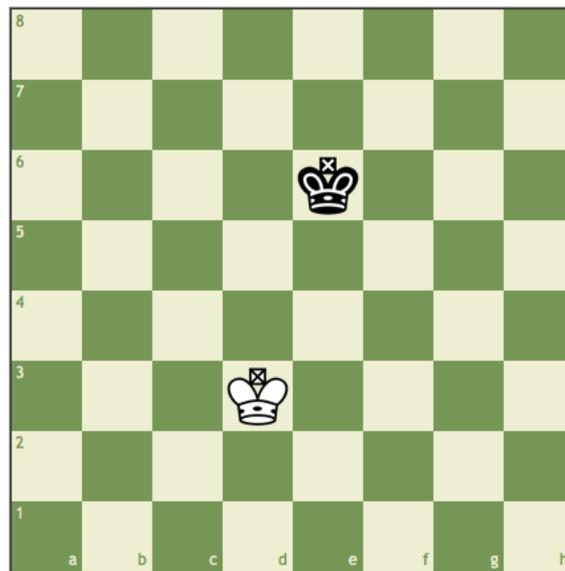


Figura 1.4: Coordenadas en el tablero de ajedrez. El Rey blanco se encuentra en d3 y el Rey negro en e6.

Por ejemplo, consideremos la siguiente serie de jugadas:

1. e4 e5
2. Cf3 Cc6
3. Ab5 ...

Aquí vemos el inicio común de una partida. (Para los más avezados en la materia, una Apertura Española o Ruy López.) En la Figura 1.5 se analiza la primer jugada del jugador

con las piezas blancas. Después en la Figura 1.6 repetimos el análisis para la segunda jugada blanca.

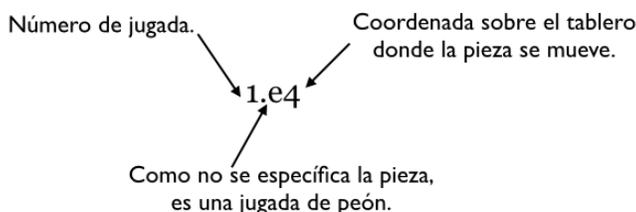


Figura 1.5: Explicación de la notación de una jugada.

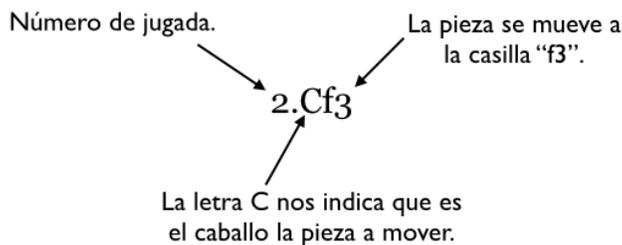


Figura 1.6: Explicación de la notación de una jugada.

Por lo tanto, cuando deseamos referirnos al Rey y a la Dama, una jugada de Rey podría ser:

28. Rh1

Refiriéndose a mover el Rey blanco a la casilla h1. Mientras que con la Dama sería:

29. De3

En caso de que se utilizara la palabra Reina, habría confusión al leer la jugada, ya que se utilizaría la misma letra R para las dos piezas (la Reina y el Rey). Por lo tanto, a lo largo de este trabajo utilizaremos la palabra Dama para referirnos a esta pieza.

## 1.3. El movimiento de las piezas

A continuación exponemos las reglas de este milenario juego. Para el desarrollo de nuestro tema es muy útil dominar el movimiento de las piezas. Por lo tanto, ayudaría que el lector ya conociera las reglas para jugar al ajedrez. En caso contrario, se advierte que aprender las reglas básicas del juego es solo el primer paso en un camino complejo y profundo, aparentemente infinito. De ahí el siguiente aviso:

“Chess is one of those games that, once you’ve learned how to play it, you know nothing.”, ver [13].

Cuánta verdad se desprende de esta frase, y cuánta verdad aplica no solamente para el ajedrez, sino también para el problema de colocación que se desarrolla en este documento.

### 1.3.1. Posición inicial

Toda partida de ajedrez debe de iniciar con la siguiente posición:

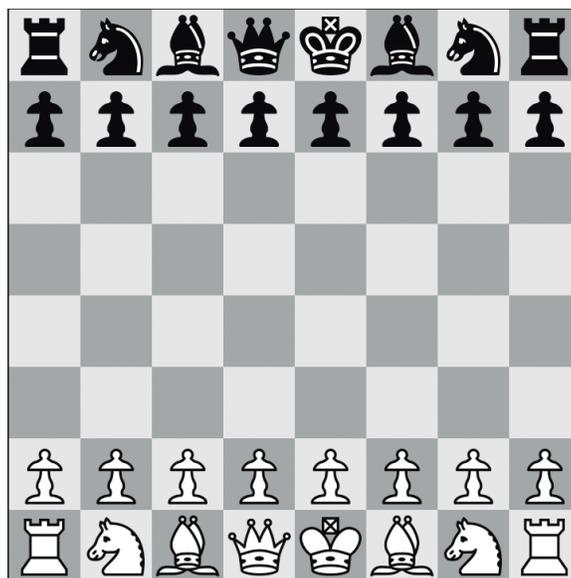


Figura 1.7: Posición inicial de una partida de ajedrez.

El primero en jugar es el blanco. Es por esto que el jugador que lleva las blancas tiene algo de ventaja. Algunos maestros se refieren a ella como el saque en el tenis.

Un periodista del Times tuvo que adentrarse en los misterios de este juego. Su maestro, Mr. Lyman, empezó la lección con un par de puntos generales:

“Each piece has different powers: It can make different movements on the 8-by-8 board”, Mr. Lyman said. “The chess board represents a terrain and space, and the pieces move over that terrain on verticals, horizontals and diagonals...”, ver [13].

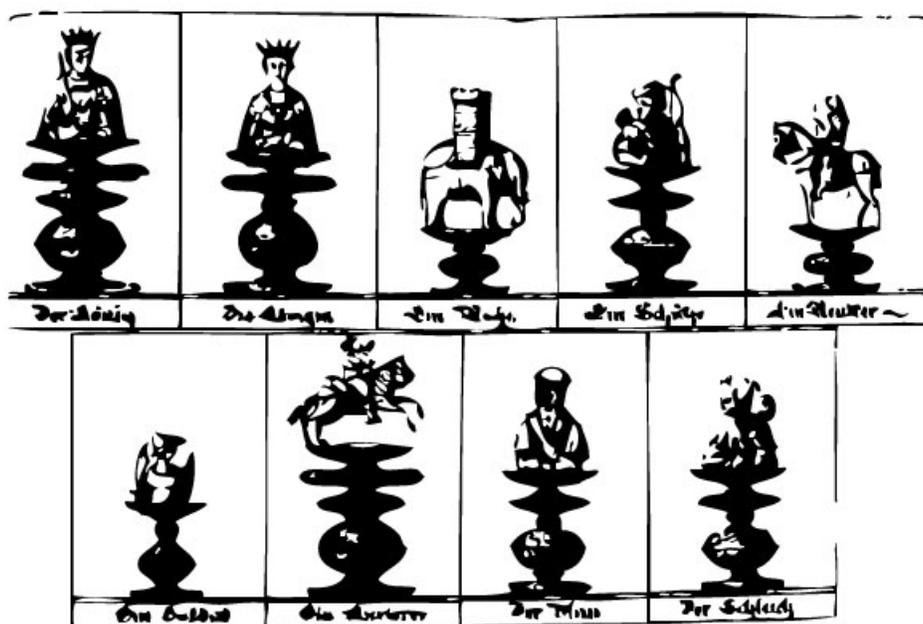


Figura 1.8: Piezas figurativas Courier representadas por Gustav Selenus, 1616.

Se le llama *jugada* al movimiento de una pieza de un cuadro a otro, con la única excepción del enroque, donde se mueven el Rey y la Torre . En la Figura 1.8 podemos ver una representación antigua de las piezas del ajedrez. Las partidas de ajedrez se desarrollan por turnos: primero las piezas blancas realizan una jugada, y después las negras contestan con otra jugada. En general las piezas son libres de moverse a donde uno quiera. Una restricción general impide, sin embargo, que una pieza blanca se mueva a otra casilla donde hay otra pieza blanca. Es decir, las piezas propias no se pueden comer o eliminar por piezas de su mismo bando.

### 1.3.2. El Rey

El Rey es la pieza más importante del tablero. El objetivo del juego es dar jaque mate al Rey contrario, o dar mate al adversario, dicho de forma más casual. De ahí su importancia. Si matan a tu Rey, pierdes. Si tú matas al Rey contrario, ganas. El Rey se mueve un cuadro en cualquier dirección, ya sea en horizontal, vertical o diagonal. En la Figura 1.9 representamos el movimiento de cada uno de los reyes con flechas.

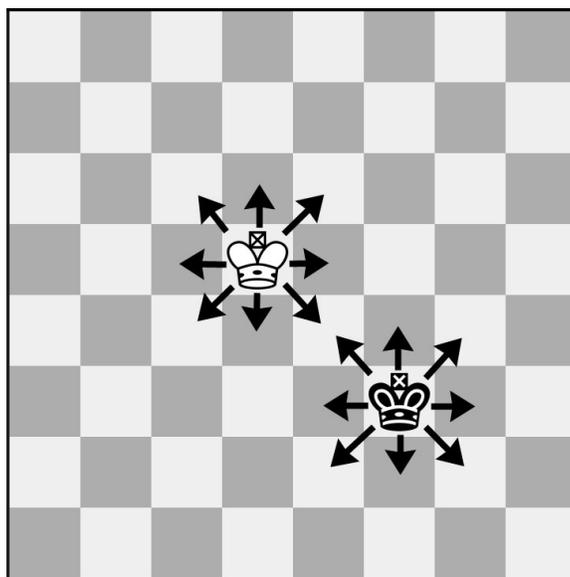


Figura 1.9: Movimiento del Rey.

Pero existe una importante restricción en el movimiento del Rey. No puede moverse a una casilla atacada por otra pieza contraria. Como más adelante veremos, esto implicaría un jaque y no se puede terminar el turno propio dejando al propio Rey en jaque.

### 1.3.3. La Dama

La pieza central en este trabajo de tesis es la Dama. Es la pieza más poderosa, ya que cuenta con la mayor movilidad entre todas las demás. En partidas magistrales, la Dama sola puede batallar contra varias piezas, a veces lo hace contra 2 Torres, contra una Torre, un Alfil y un Peón, etc. La Dama se mueve los cuadros que quiera, hacia la dirección que quiera. Es decir, se puede mover en dirección vertical, horizontal, o diagonal el número de cuadros

libres que sea. En la Figura 1.10 se indica el movimiento de cada una de las Damas con las flechas negras.

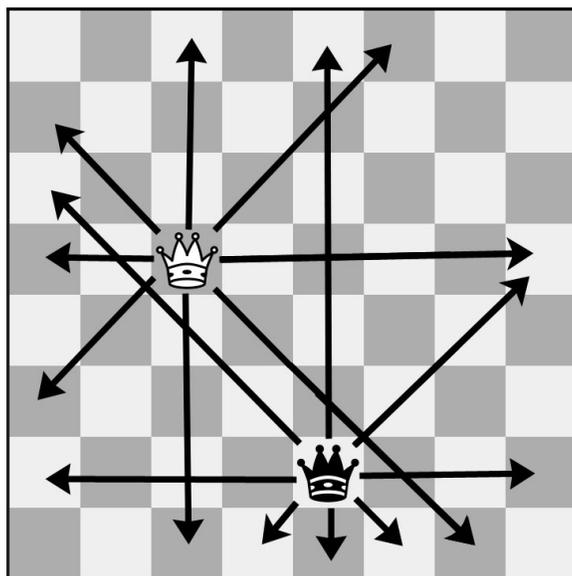


Figura 1.10: Movimiento de la Dama.

“The queen can move in any direction –vertical, horizontal or diagonal– any number of available spaces, making it the most powerful piece on the board.”, ver [13].

#### 1.3.4. El Alfil

Siguiendo el orden inicial de las piezas, continuamos con el Alfil. Esta pieza se mueve a lo largo de diagonales, por lo que nunca cambia de color de casilla. Un Alfil que nace en casilla negra, siempre atacará y se moverá en casillas negras. Se puede mover el número de casillas que quiera, a lo largo de las diagonales. En la Figura 1.11 se muestra el movimiento del Alfil.

#### 1.3.5. El Caballo

Una de las piezas más emblemáticas del ajedrez es el Caballo. Cuenta con la característica especial de ser la única pieza que puede saltar a otras. Su movimiento es en forma de L, un

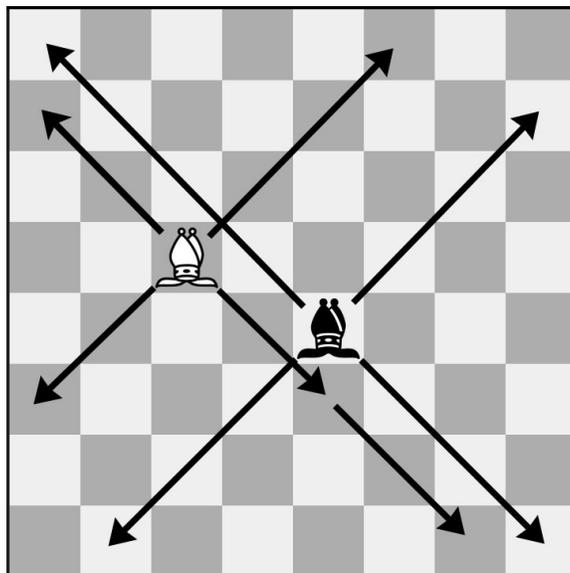


Figura 1.11: Movimiento del Alfil.

cuadro en dirección horizontal, y dos en vertical. O viceversa. Podemos ver el movimiento de un Caballo en la Figura 1.12

### 1.3.6. La Torre

La Torre es la segunda pieza con más poder de movimiento en el tablero. Se mueve a lo largo de columnas y filas, en línea recta. La Torre se siente libre en posiciones abiertas, sin muchos Peones o piezas que estorben su camino. Veamos el movimiento de la Torre en la Figura 1.13

### 1.3.7. El Peón

La pieza más pequeña es a su vez la menos poderosa: el Peón. Su movimiento se limita a un cuadro por turno, y solamente en dirección vertical, o hacia adelante, es decir, hacia la banda contraria. Cuando el Peón se encuentra en su casilla original (2a horizontal) puede mover una o dos casillas, como mejor convenga. Una vez que ya avanzó, solo puede mover una casilla. Es muy común que los Peones se bloqueen, y esto ocurre cuando otra pieza ocupa la casilla delante del Peón. El Peón es la única pieza que no come en el cuadro al que se

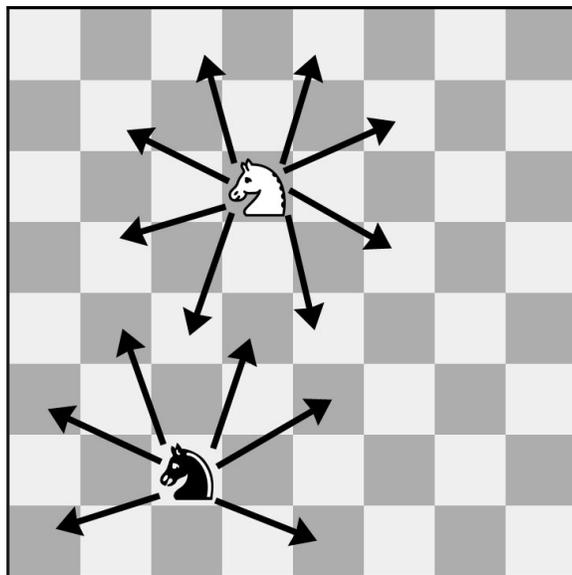


Figura 1.12: Movimiento del Caballo.

mueve. Un Peón come en diagonal, hacia adelante, y un solo cuadro. Veamos el diagrama para que quede más claro. En la Figura 1.14 podemos ver la explicación del movimiento característico de esta pieza.

Sin embargo, cuenta con un poder único y especial al llegar a la banda contraria: la Coronación. Cuando el Peón avanza hasta la 8a fila, se corona y se intercambia por cualquier otra pieza que no sea el Rey. Es lógico y natural que en la mayoría de los casos conviene coronar el Peón en una Dama.

## 1.4. Otras reglas a considerar

### 1.4.1. El derecho a enrocar

El enroque es una jugada especial solamente posible en caso de que ni el Rey ni la Torre involucrados se hayan movido antes. También necesitamos haber limpiado el camino entre estas dos piezas, es decir, haber movido el Caballo y el Alfil que se encuentran entre el Rey y la Torre, en la posición inicial. De esta manera podemos realizar el enroque corto, moviendo dos casillas al Rey, y poniendo la Torre del otro lado del Rey. También existe el enroque

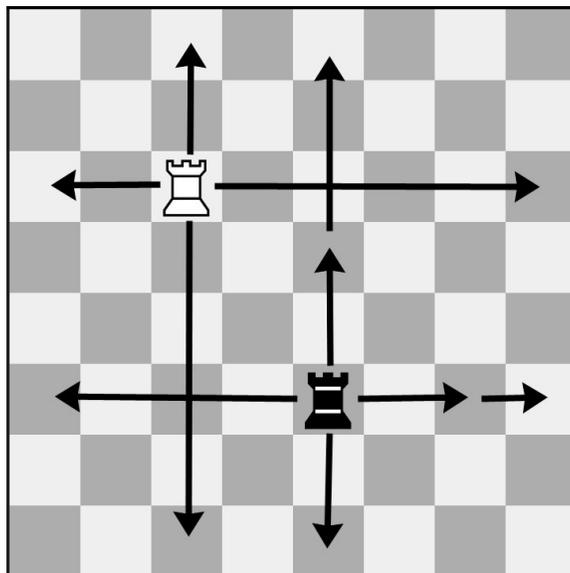


Figura 1.13: Movimiento de la Torre.

largo, para el cual se necesita además que la Dama se mueva.

### 1.4.2. La captura

Todas las piezas capturan la pieza contraria que se encuentra en la casilla a la cual llegan en su turno, menos el Peón, como ya se explicó. Por lo general, la captura involucra un cambio de piezas. Yo me como su Caballo con mi Alfil, y después el adversario toma mi Alfil con su Peón, por mencionar un ejemplo. Es importante ser consciente del valor de las piezas, para no cambiar nuestra Dama por un mero Caballo, por dar otro ejemplo.

### 1.4.3. Comer al paso

Cuando hablamos del Peón ya se mencionó el atributo especial de poder coronarse en otra pieza cualquiera que no sea el Rey. Existe otra jugada especial del Peón: Comer o capturar al paso.

El comer al paso es posible solamente cuando el lado con el turno tiene un Peón en su casilla original, y el contrario cuenta con un Peón en su quinta horizontal y en una

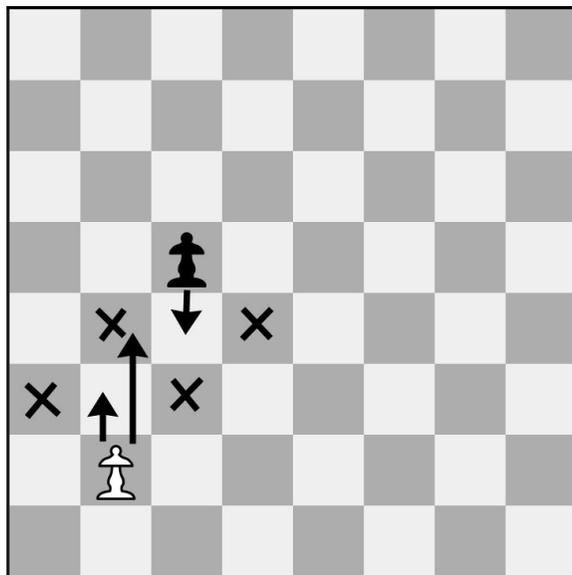


Figura 1.14: Movimiento del Peón.

columna adyacente. El lado con el turno mueve su Peón dos casillas hacia adelante, librando el enfrentamiento con el otro Peón. Sin embargo, en su siguiente turno, el Peón en quinta puede comer al paso el Peón que acaba de pasarlo, como si este último se encontrara en la sexta horizontal. Pero solamente puedes hacerlo en este siguiente turno, si en vez de comer al paso realiza otra jugada, ya no podrá hacer este movimiento en el futuro y ambos peones habrán pasado uno al otro, y ya no tendrán la posibilidad de atacarse nunca más en la partida.

#### 1.4.4. Del jaque y el jaque mate

El jaque sucede cuando una pieza contraria ataca a nuestro Rey (o viceversa, cuando una pieza nuestra ataca al Rey contrario). En este caso, es necesario escapar del jaque. Esto se logra de 3 maneras:

1. Moviendo al Rey a una casilla que no se encuentre atacada,
2. Moviendo una pieza propia que intercepte el ataque de la pieza que está atacando al Rey. (i.e. que la pieza se interponga entre la atacante y el Rey propio).
3. Capturando la pieza atacante.

Si no existe posibilidad de quitarse del jaque, entonces se obtiene un jaque mate, y el juego termina.

## 1.5. Algunas cifras interesantes del ajedrez

Se habla mucho acerca del gran número de jugadas posibles en el ajedrez. Se cuestiona hasta cuántas jugadas puede ver un maestro. En esta sección veremos unas cifras interesantes que nos hablan de la complejidad existente en este juego. Los cálculos de las primeras jugadas han sido estudiadas entre otros por Kotov, quien nos muestra así su análisis (ver [9]):

“Después de la primera jugada de las blancas, en el tablero pueden formarse 20 posiciones diferentes: los ocho Peones y los dos Caballos pueden hacer cada uno dos movimientos. A cada jugada de las blancas, las negras pueden responder también de veinte modos. De suerte que, hecha la primera jugada de ambos bandos, en el tablero pueden originarse cuatrocientos entables distintos.

Para mayor sencillez, supongamos ahora que al siguiente lance, blancas y negras no pueden hacer más que veinte movimientos con diversas piezas. En realidad, aumenta la cantidad de jugadas posibles, pues los Alfiles, la Dama, etc., pueden entrar en juego, lo que sin embargo, queda compensado por no tomar nosotros en consideración la probabilidad de que se repitan los entables.

De manera que en cada una de las cuatrocientas posiciones que pueden surgir después de la primera jugada, las blancas pueden hacer veinte movimientos diferentes, y las negras veinte respuestas distintas. A las dos jugadas de las blancas y negras pueden formarse en el tablero ¡ciento sesenta mil posiciones diversas! ¡Imagínese ahora la de posibles entables que pueden formarse después de cuarenta jugadas, que es la duración media de una partida de ajedrez! La cantidad de posiciones que pueden obtenerse a cada jugada sucesiva es el resultado de multiplicar el número de las mismas, en el momento de hacer la jugada correspondiente, por cuatrocientos. Este problema aún no ha logrado resolverlo nadie hasta el fin. Se sabe únicamente que el número de entables posibles a las diez jugadas alcanza la cifra astronómica de 165,518,829,100,544,000,000,000,000.”



# Capítulo 2

## Configuraciones independientes maximales en el tablero normal de ajedrez

En este capítulo daremos las soluciones al problema de obtener configuraciones independientes maximales para cada una de las piezas de ajedrez. Es importante aclarar que esto se hace en el tablero normal de 2 dimensiones, ya que en los siguientes capítulos esta condición cambia. Al final analizaremos a detalle el problema tradicional de colocar 8 Damas sin que se amenacen entre sí. Este problema tiene mucho material de estudio y análisis, lo que nos permite hablar desde su origen hasta su generalización para tableros de tamaño  $n$  (y colocar  $n$ -Damas).

### 2.1. El problema general

El problema de encontrar configuraciones independientes maximales es un tema de teoría de gráficas.

Primero, para nosotros una gráfica consiste de un conjunto  $V$ , cuyos elementos llamamos *vértices*, y de un conjunto  $E \subset V \times V \setminus \{(v, v) : v \in V\}$ , cuyos elementos llamamos *aristas*. Decimos que  $u, v$  son adyacentes si existe  $(u, v) \in E$ . Un *conjunto independiente*, o *estable*, es un conjunto de vértices en una gráfica tal que ninguno es adyacente a otro. Es decir, es un

conjunto  $X$  de vértices tal que para ningún par de ellos existe una arista que los relacione. En otras palabras, cada arista en la gráfica contiene a lo más un vértice en  $X$ . El tamaño de un conjunto independiente es el número de vértices que contiene.

Esto se traduce a nuestro tema de la siguiente manera: Consideramos a las casillas del tablero como el conjunto de vértices de la *gráfica de ataque* de una pieza específica (digamos la Dama), la cual tiene una arista entre dos vértices (casillas) si desde uno de los vértices, la pieza en cuestión (Dama) ataca al otro vértice. Nuestro problema es entonces encontrar conjuntos independientes maximales en gráficas de ataque. La complejidad para encontrar dichas posiciones, depende directamente de la pieza en cuestión. Vayamos analizando cada una de las piezas de ajedrez. Si el metasímbolo  $\mathfrak{S}$  denota a una pieza (R, D, T, A, C o P), entonces para cada  $n \geq 1$ ,  $\mathfrak{S}(n)$  denotará al máximo número de piezas del tipo  $\mathfrak{S}$  que podemos colocar en  $\mathcal{T}_n$  de forma que no se ataquen entre ellas, donde  $\mathcal{T}_n$  es el tablero bidimensional de  $n \times n$  definido como el producto cartesiano  $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ .

## 2.2. Reyes

El Rey tiene un radio de acción corto, por lo tanto es natural esperar que en un tablero normal podamos colocar muchos Reyes, sin que se coman unos a otros. Primero analizaremos su colocación en el tablero de  $8 \times 8$ , y al final enunciaremos una regla general para el caso del tablero de  $n \times n$ .

### 2.2.1. Construcción de solución para el tablero de $8 \times 8$ .

Podemos colocar 16 Reyes de manera que ninguno se come a otro, como se muestra en la Figura 2.1. Es relativamente sencillo observar que no es posible colocar más de 16 Reyes sin que al menos dos de ellos se ataquen el uno al otro.

### 2.2.2. Solución general para $n \times n$ .

Podemos construir fácilmente una solución general, partiendo de la solución en el tablero de  $8 \times 8$ .

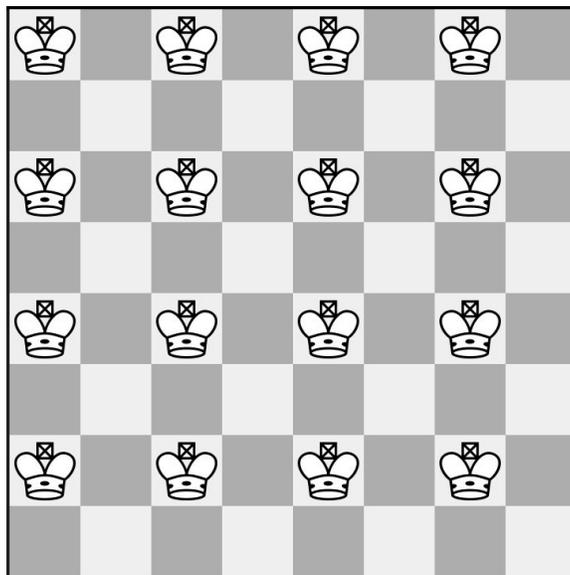


Figura 2.1: Solución de Reyes.

**Teorema 2.1** (REYES EN TABLERO ESTÁNDAR). *Para toda  $n \geq 1$ ,*

$$R(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^2.$$

*Demostración.* Simplemente colocar Reyes en los vértices de  $\mathcal{T}_n$  cuyas coordenadas son impares. □

## 2.3. Torres

Las Torres son piezas con gran movilidad. Aún así, lo lineal de su movimiento no genera ninguna dificultad para llenar el tablero de estas piezas en forma maximal. Es fácil también descubrir que al colocar 1 Torre por cada fila, siempre y cuando dos de estas Torres no se crucen por columnas, resolvemos el problema. Podemos ver una solución en la Figura 2.2.

Para no quedarnos con la idea “cuadrada” de colocación del ejemplo anterior, veamos otra posible solución en la Figura 2.3.

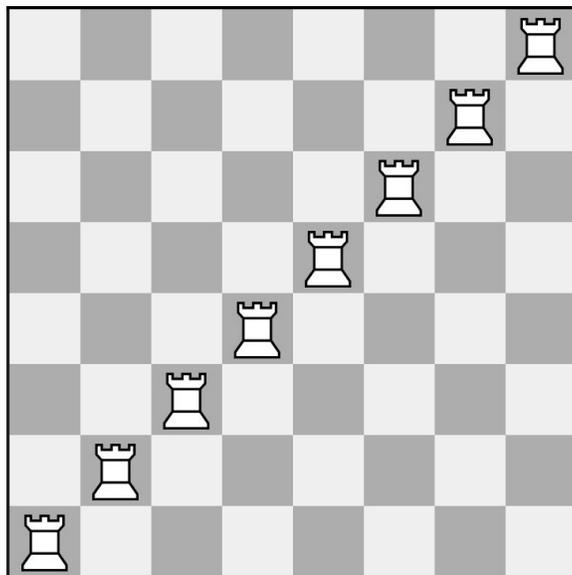


Figura 2.2: Solución de Torres.

### 2.3.1. Construcción de solución para el tablero de $8 \times 8$

8 Torres se pueden colocar en el tablero de  $8 \times 8$  sin mucha dificultad. El número exacto de soluciones distintas es de 40,320 y se obtiene de la siguiente manera:

Considerando que las 8 Torres están colocadas sobre el tablero, cada una escoge una columna distinta. Para fijar la primera tenemos 8 columnas distintas a ocupar. La siguiente por fijar tiene ahora un cuadro menos, el cuadro de la columna que ocupa la primera Torre. Por lo tanto tiene 7 opciones. y así sucesivamente, las siguientes torres tienen un cuadro menos que la previa. Por lo tanto el cálculo se reduce a

$$8! = 40,320.$$

### 2.3.2. Solución general para $n \times n$

**Teorema 2.2** (TORRES EN TABLERO ESTÁNDAR). *Para toda  $n \geq 1$ ,*

$$T(n) = n.$$

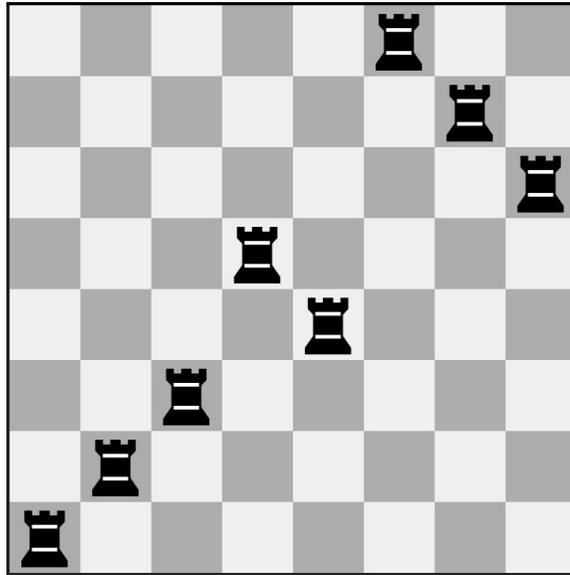


Figura 2.3: Otra solución de Torres.

*Además, el número total de soluciones maximales distintas es  $n!$ .*

*Demostración.* Es sencillo ver que si  $\sigma \in S_n$  (es decir,  $\sigma$  es una permutación del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ ), entonces colocar torres en las coordenadas  $(k, \sigma(k))_{k=1}^n$  constituye una solución maximal a nuestro problema. La demostración concluye observando que

$$|S_n| = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!.$$

□

## 2.4. Peones

Los Peones, al igual que el Rey, son piezas de corto alcance, por lo que hay que esperar nuevamente un número mayor al de columnas del tablero en cuestión.

### 2.4.1. Construcción de solución para el tablero de $8 \times 8$

Mientras no coloquemos en la fila adyacente a los Peones logramos que no se coman entre ellos. Por lo tanto colocamos los Peones en fila de manera horizontal, como se muestra en la Figura 2.4.

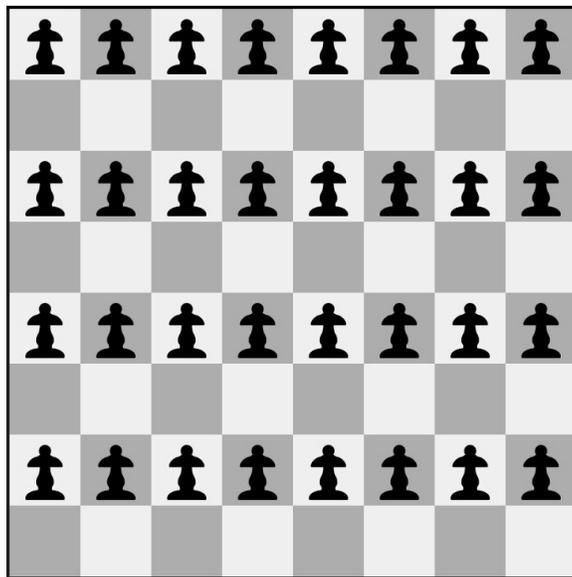


Figura 2.4: Solución horizontal de Peones.

O también de manera vertical, como se muestra en la Figura 2.5.

Observemos que se pueden colocar  $8 \times 4 = 32$  Peones para solucionar este problema.

Es necesario notar que en las reglas formales del juego, un Peón no puede ocupar ni la primera horizontal (los Peones empiezan su vida en la segunda horizontal) ni en la última (ya que cuando alcanzan la octava fila, se coronan en otra pieza).

### 2.4.2. Solución general para $n \times n$

De manera general observamos que para construir las soluciones expuestas debemos de dejar una fila desocupada. Por lo tanto el número de filas que ocupamos con los Peones es de  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ , y queda multiplicar este número por el número de columnas existentes, que es  $n$ , para obtener el número total de soluciones:

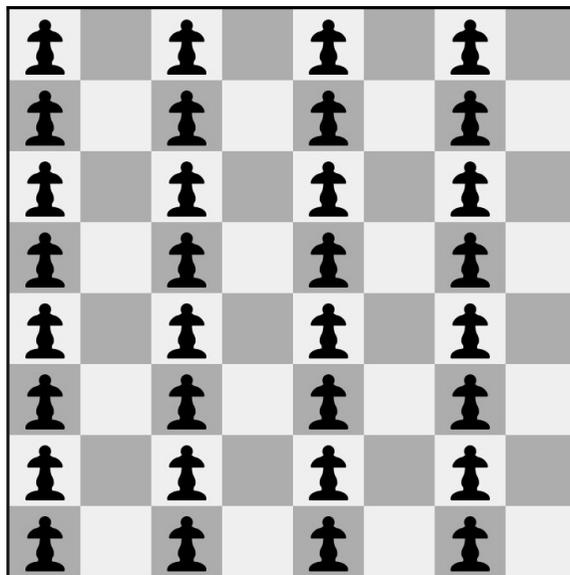


Figura 2.5: Solución vertical de Peones.

**Teorema 2.3** (PEONES EN TABLERO ESTÁNDAR). *Para todo  $n \geq 1$ ,*

$$P(n) = n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

*Demostración.* La prueba es directa de la discusión anterior. □

## 2.5. Caballos

Es curioso notar que la particularidad en el movimiento del Caballo nos lleva a buscar otras formas de colocación de las que ya vimos. Aún así, debido a ser otra pieza de corto alcance debemos esperar nuevamente que se puedan colocar más de  $n$  Caballos en un tablero de  $n \times n$ .

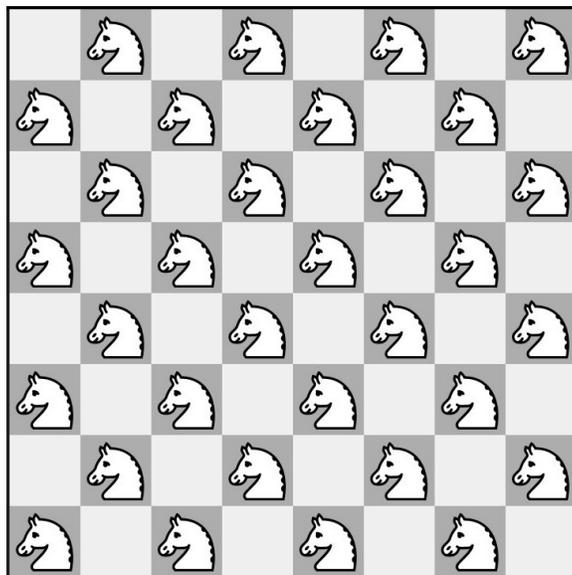


Figura 2.6: Solución de Caballos.

### 2.5.1. Construcción de solución para el tablero de $8 \times 8$ .

Observamos en la Figura 2.6 que podemos colocar 32 Caballos para resolver el problema. El algoritmo en este caso es aún más sencillo de lo que uno supondría, dado lo complejo de su salto. Solamente hay que escoger el color con más casillas, y llenar todas con Caballos. De esta manera se conectan entre sí por diagonales.

### 2.5.2. Solución general para $n \times n$ .

**Teorema 2.4** (CABALLOS EN TABLERO ESTÁNDAR).  $C(2) = 4$ , y para toda  $n \geq 1$  tal que  $n \neq 2$ ,

$$C(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2.$$

*Demostración.* Se sigue de la discusión anterior y de la observación de que para  $n$  pares,  $n \neq 2$ ,  $C(n) = n^2/2$ , y para  $n$  impar,  $C(n) = \lfloor n^2/2 \rfloor + 1$ .  $\square$

## 2.6. Alfíles

El Alfil cuenta con la particularidad de moverse en diagonales. Nuevamente, en este caso, es sencillo encontrar la solución general a partir de analizar la solución en el caso de  $8 \times 8$ .

### 2.6.1. Solución para $8 \times 8$ .

En este caso, la solución maximal está descrita en la Figura 2.7.

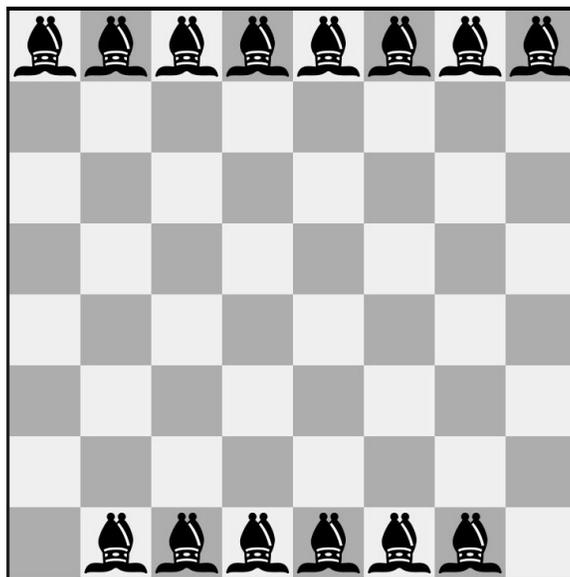


Figura 2.7: Solución de Alfíles.

### 2.6.2. Solución para $n \times n$ .

**Teorema 2.5** (ALFILES EN TABLERO ESTÁNDAR).  $A(1) = 1$  y para toda  $n \geq 2$ ,

$$A(n) = 2n - 2.$$

*Demostración.* Los casos en que  $n = 1$  y  $n = 2$  son fácilmente comprobables. Para los siguientes casos en que  $n \geq 3$  observemos que se construye el mismo patrón de la Figura 2.7.  $\square$

## 2.7. Damas

Finalmente llegamos al problema que más ha llamado la atención de los estudiosos. Debido a su gran campo de acción, la Dama es la pieza más poderosa en el tablero, y por lo tanto el problema de situar tantas como sea posible se vuelve el más difícil de entre todas las piezas. Por esto profundizaremos en este tema, comenzando con su origen histórico. Después tendremos varias observaciones.

### 2.7.1. Origen del problema

El compositor de ajedrez Max Bezzel fue el primero que publicó el problema de las 8 Damas, en 1848. Al principio, este problema cautivó al hombre. El reto de colocar 8 Damas en el tablero normal de ajedrez de  $8 \times 8$  parecía complicado, o por lo menos digno de un profundo análisis. Sin embargo, Franz Nauck publicó las primeras soluciones en 1850, y también extendió el problema para  $n$ -Damas, con  $n$  Damas en un tablero de  $n \times n$  cuadros. Desde entonces, muchos matemáticos, incluyendo a Carl Friedrich Gauss, han trabajado tanto en el problema de las 8 Damas, como en su versión generalizada de  $n$ -Damas.

### 2.7.2. El problema clásico en el tablero de $8 \times 8$

Existe mucha información de este problema y, de hecho, es un ejercicio obligatorio para computólogos. No nos desviaremos en este momento en cuestiones de análisis computacional; este tema se desarrolla en el Capítulo 6. Sin embargo mencionaremos el tiempo de uso de máquina como referente. Es notable que en el tablero de  $8 \times 8$  hay  $\binom{64}{8} = 4,426,165,368$  colocaciones distintas de 8 Damas. Analizar una por una implicaría mucho desgaste, incluso para las computadoras modernas.

Sabemos que el número total de soluciones es 92. Este total se puede explicar de la siguiente forma:

Existen 12 soluciones fundamentales (o únicas) de las cuales se pueden obtener las 80 restantes (7 nuevas soluciones de cada una) mediante una rotación de  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $270^\circ$  grados, y aparte reflejando cada una respecto a las 4 esquinas. De estas 12 soluciones fundamentales, existe 1 llamada simétrica, de la cual solo se pueden obtener 3 soluciones más al rotarla. Su reflexión en cualquiera de las 4 esquinas da la misma posición. Estas soluciones fundamentales

en el tablero común y corriente de  $8 \times 8$  se pueden ver en la Figura 2.8.

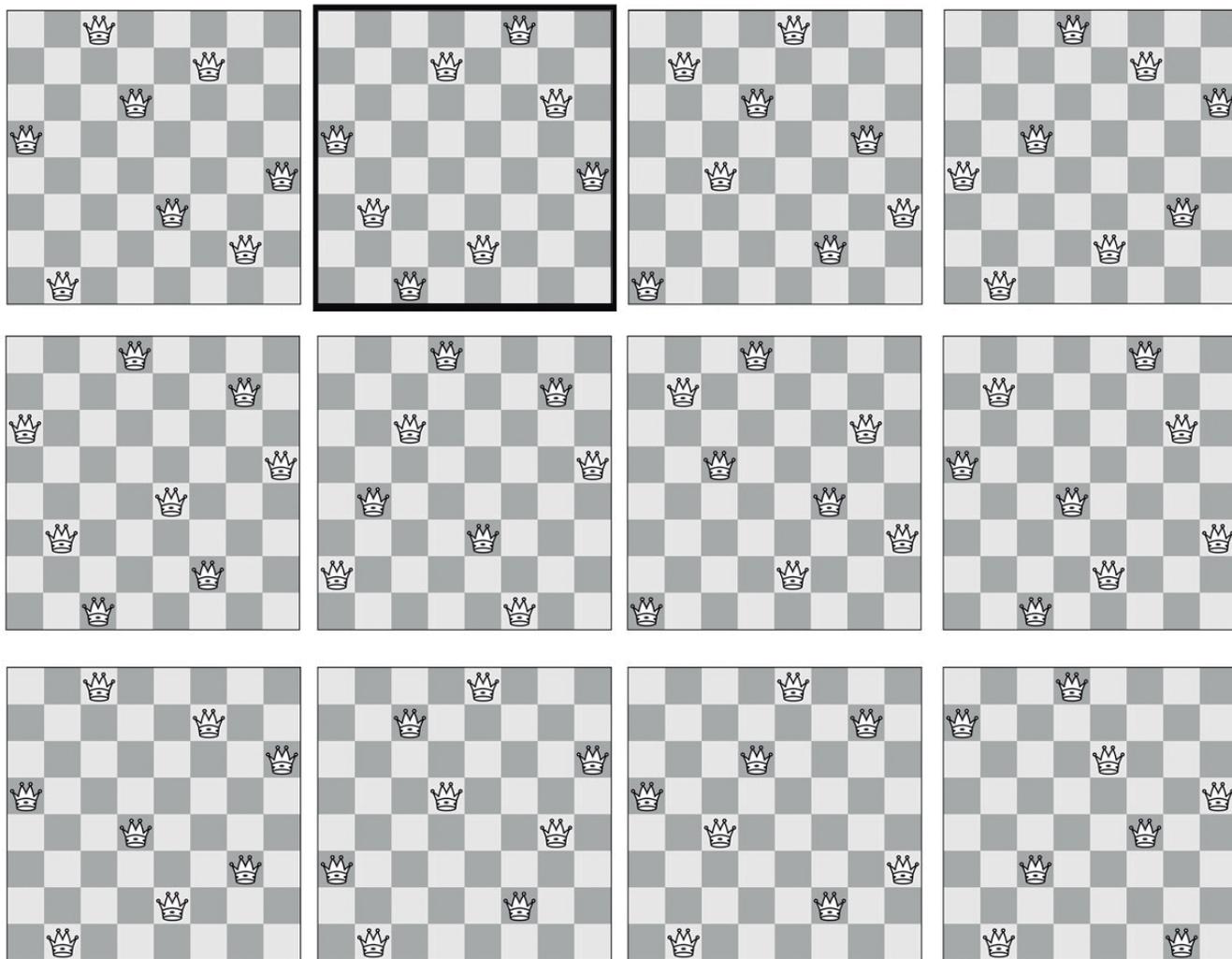


Figura 2.8: Las 12 soluciones fundamentales del problema tradicional de las 8 Damas. La solución resaltada con un marco grueso es una solución simétrica.

### 2.7.3. El problema clásico en el tablero de $n \times n$

Una vez estudiado con rigor matemático, el problema original de 8 Damas resultó obsoleto. De manera consecuente, se generalizó dicho problema a tableros de  $n \times n$  y surgió la pregunta: ¿Cómo debe de ser la  $n$  para que pueda tener solución? Seamos más precisos en lo

que queremos decir por “solución”. Existe una cota superior trivial en el máximo número de Damas que podemos colocar sin que se ataquen entre sí, a saber  $n$ , ya que a lo más podemos colocar una Dama por cada renglón, y hay  $n$  renglones. Entonces, al decir que existe una “solución”, nos referimos a que esta cota superior se alcanza.

Seamos aún más precisos. Tenemos que  $D(n)$  es el máximo número de Damas que podemos colocar en el tablero estándar de dimensiones  $n \times n$ . Como ya dijimos,  $D(n) \leq n$ , y decimos que el problema de las  $n$ -Damas tiene solución si  $D(n) = n$ .

El resto de este capítulo lo dedicaremos a demostrar el primero de nuestros teoremas principales. La demostración es constructiva, por lo que de ella se puede extraer la forma precisa de cómo construir la solución.

**Teorema 2.6** (DAMAS EN TABLERO ESTÁNDAR). *El problema estándar de las  $n$  Damas tiene solución si y sólo si  $n = 1$  ó bien  $n \geq 4$ . Por otro lado,  $D(2) = 1$  y  $D(3) = 2$ .*

*Demostración.* Primero probaremos el teorema directamente para los casos  $n = 1, 2$  y  $3$ .

**n = 1** En este caso la solución es trivial.



Figura 2.9: Tablero de 1 x 1.

**n = 2** Este caso es también trivial, se verifica fácilmente. Mientras aumentemos la  $n$ , el tablero crecerá hacia arriba y a la derecha. Para el tablero de  $2 \times 2$  se aprecia directamente del diagrama que solamente se puede colocar una Dama. Para este caso el problema no tiene solución.

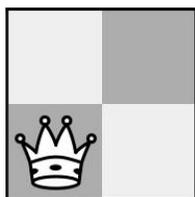


Figura 2.10: Tablero de 2 x 2.

**n = 3** Igual que en el caso anterior, no tenemos una solución ya que solamente podemos colocar 2 Damas.

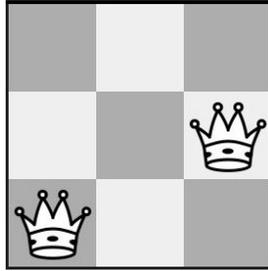


Figura 2.11: Tablero de 3 x 3.

$n \geq 4$  En este caso hay que considerar subcasos para completar la prueba.

$n \equiv 0, 4 \pmod{6}$  Esta es una restricción propia del problema, y nos deja pendiente el caso en que  $n = 6k + 2$  que analizaremos después.

Definimos la función  $f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  por la regla

$$f(k) = \begin{cases} 2k & \text{si } k \leq n/2 \\ n - 2(n - k + 1) + 1 & \text{si } k > n/2. \end{cases}$$

Entonces  $(k, f(k))_{k=1}^n$  es una solución al problema, es decir,  $D(n) = n$ . Para justificar nuestra afirmación, observamos primero que las dos “partes” que constituyen la solución son “rectas” formadas por saltos de Caballo, por lo tanto dos Damas en la misma parte no se pueden atacar. Supongamos entonces que una Dama en una de las partes ataca a otra Dama en otra de las partes. Sean  $k \in \{1, \dots, n/2\}$  y  $k' \in \{n/2 + 1, \dots, n\}$  los correspondientes parámetros que determinan la posición de dichas Damas. Claramente no están en el mismo renglón. No están en la misma columna, porque en otro caso tendríamos

$$2k = n - 2(n - k' + 1) + 1,$$

lo que implica que

$$n = -2k + 2k' - 2 + 1 = 2(k' - k) - 1,$$

lo cual es imposible por hipótesis ( $n$  es par). Luego, supongamos que se comen diagonalmente. Hay dos casos aquí. Primero, suponemos que existe un entero positivo  $r$  tal que

$$(k + r, 2k + r) = (k', n - 2(n - k' + 1) + 1),$$

lo que implica que  $r = k' - k$ , y entonces, simplificando, obtenemos

$$n = k' - k - 1,$$

## 32 Configuraciones independientes maximales en el tablero normal de ajedrez

lo cual es imposible porque  $k' - k \leq n - 1$ . El otro caso es cuando suponemos que existe un entero positivo  $r$  tal que

$$(k + r, 2k - r) = (k', n - 2(n - k' + 1) + 1),$$

lo que implica que  $r = k' - k$ , y entonces, simplificando, obtenemos

$$n = 3(k' - k) - 1.$$

Como  $n$  es par,  $k' - k$  es impar, pero entonces  $n \equiv 2 \pmod{6}$ , lo cual es una contradicción a nuestra hipótesis.

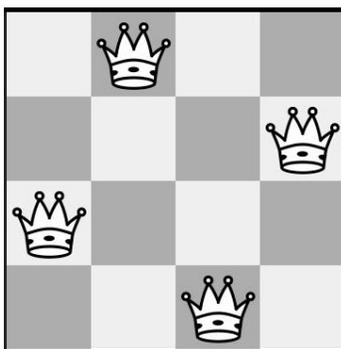


Figura 2.12: Tablero de 4 x 4

*Observación 2.1.* La solución que hemos descrito en este caso no utiliza casillas en las diagonales.

*Demostración de la Observación 2.1.* Demostremos esta observación. Para ello, consideremos la primera “parte”. En esta no hay Damas que ocupen casillas de la diagonal principal, pues en otro caso tendríamos  $k = 2k$ . Por otro lado, para la bidiagonal principal, tendríamos  $k = n - k + 1$ , lo que implica que  $n = 2k - 1$ , lo cual es una contradicción ( $n$  es par). La segunda parte se analiza de igual forma por ser simétrica.  $\square$

**$n \equiv 1, 5 \pmod{6}$**  Este caso es ahora sencillo, por el caso anterior junto con su observación. Para resolver el problema en el caso de  $n$ 's de la forma que nos compete ahora, bastará tomar la solución  $f$  del caso  $n - 1$  en el tablero  $\mathcal{T}_{n-1}$  y después añadir un renglón y una columna más para construir el tablero  $\mathcal{T}_n$  y finalmente añadir una Dama más en la casilla nueva en la diagonal.

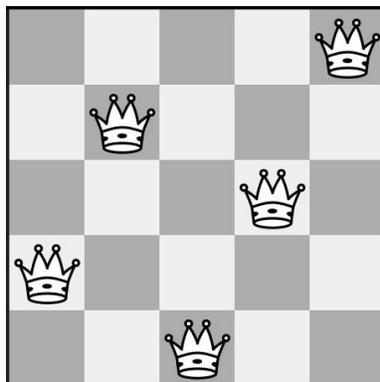


Figura 2.13: Tablero de 5 x 5.

**$n \equiv 2 \pmod{6}$**  En este caso definimos  $g: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  de la siguiente manera:

$$g(k) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 2(k-1) & \text{si } k \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 \\ 2 - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor + 2(k - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 2) & \text{si } k \in \{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 2, \dots, \frac{n}{2}\} \\ n + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor - 2(n - k - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + 1 & \text{si } k \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1\} \\ \frac{n}{2} + 1 - 2(n - k) & \text{si } k \in \{n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor, \dots, n\} \end{cases}$$

Entonces  $(k, g(k))_{k=1}^n$  es una solución al problema, es decir,  $D(n) = n$ . Para justificar nuestra afirmación, observamos primero que ahora la solución está constituida de cuatro “partes”, cada una de las cuales son “rectas” formadas por saltos de Caballo; por lo tanto, dos Damas en la misma parte no se pueden atacar (ver Figura 2.14). Supongamos entonces que una Dama en una de las partes ataca a otra Dama en otra de las partes. Denominemos por I, II, III, y IV a cada una de estas partes. Por la simetría de la solución, bastará que demos que no es posible que  $I \leftrightarrow II$  (es decir, que una Dama en la parte I ataca a una Dama en la parte II), ni  $I \leftrightarrow III$ , ni  $I \leftrightarrow IV$  ni  $II \leftrightarrow III$ .

Sean  $k \in \{1, \dots, n/2\}$  y  $k' \in \{n/2 + 1, \dots, n\}$  los correspondientes parámetros que determinan la posición de dichas Damas. Claramente no están en el mismo renglón, ni en la misma columna.

**I  $\leftrightarrow$  II** Primero veamos que no se pueden atacar por columnas. Para esto basta que veamos

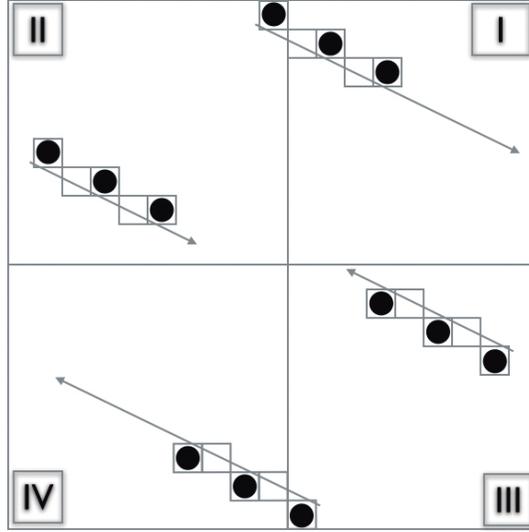


Figura 2.14: Partes de la solución para  $n \equiv 2 \pmod{6}$ .

que la columna de la primera Dama de la parte I es mayor que la última Dama de la parte II. Hay que probar entonces la desigualdad

$$\frac{n}{2} > 2 - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor + 2 \left( \frac{n}{2} - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 2 \right). \quad (2.1)$$

Como  $n = 6r + 2$  para alguna  $r \geq 1$ , consideramos la paridad de  $r$ . Si  $r$  es impar, entonces (2.1) se convierte en

$$3r + 1 > 2 - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor + 2 \left( 3r + 1 - \frac{3r + 1}{2} - 2 \right)$$

y simplificando obtenemos

$$3r + 1 > 3r - 1 - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor,$$

lo cual claramente ocurre. Para  $r$  par, (2.1) se convierte en

$$3r + 1 > 2 - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor + 2 \left( 3r + 1 - \frac{3r}{2} - 2 \right)$$

y simplificando obtenemos

$$3r + 1 > 3r - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor,$$

lo cual claramente ocurre.

Ahora las diagonales. Basta considerar bidiagonales. Supongamos que existen  $k \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$  y  $k' \in \{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1, \dots, \frac{n}{2}\}$  tales que

$$\frac{n}{2} + 2(k-1) - (k' - k) = 2 - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor + 2 \left( k' - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 2 \right).$$

Simplificando y agrupando apropiadamente obtenemos

$$\frac{n}{2} + 2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = 3(k' - k) - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor.$$

Como  $n = 6r + 2$  para alguna  $r \geq 1$ , consideramos nuevamente la paridad de  $r$ . Si  $r$  es impar, entonces obtenemos

$$6r + 2 = 3(k' - k) - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor,$$

lo cual es imposible porque, como  $r$  es impar,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor = 0.$$

Por otro lado, si  $r$  es par, entonces obtenemos

$$6r + 1 = 3(k' - k) - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor,$$

lo cual es imposible.

**I  $\leftrightarrow$  III** En este caso también empezamos viendo que no comparten la misma columna las Damas en I, con las que hay en III. Supongamos que

$$\frac{n}{2} + 2(k-1) = n + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor - 2 \left( n - k' - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right) + 1. \quad (2.2)$$

Como  $n = 6r + 2$  para alguna  $r \geq 1$ , (2.2) se convierte en

$$3(3r + 1) = 2(k' - k) + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{3r + 1}{2} \right\rfloor + 3,$$

### 36 Configuraciones independientes maximales en el tablero normal de ajedrez

y en este caso resulta que sin importar la paridad de  $r$ , la igualdad anterior se simplifica a

$$2(3r + 1) = 2(k' - k) + 3,$$

lo cual no es posible ya que el lado izquierdo de la ecuación es par, y el derecho impar.

Ahora las diagonales. De nuevo consideramos las bidiagonales. Supongamos que existen  $k \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$  y  $k' \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1\}$  tales que

$$\frac{n}{2} + 2(k - 1) - (k' - k) = n + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor - 2 \left( n - k' - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right) + 1.$$

Simplificando y agrupando apropiadamente obtenemos

$$\frac{3n}{2} = 3(k' - k) + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 3.$$

Substituimos  $n = 6r + 2$  para alguna  $r \geq 1$  y simplificando llegamos a

$$3(3r + 1) = 3(k' - k) + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}{\frac{r}{2}} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{3r + 1}{2} \right\rfloor + 3.$$

De nuevo nos topamos con que para  $r$  par o impar, la igualdad anterior se reduce a

$$2(3r + 1) = 3(k' - k + 1),$$

lo cual es imposible ya que 3 no divide ni a 2 ni a  $3r + 1$ .

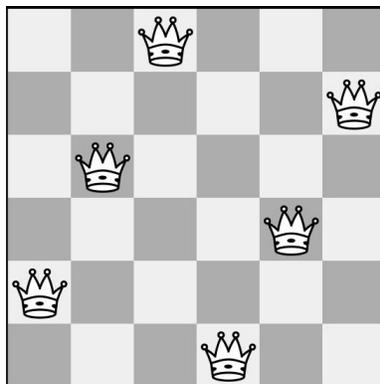


Figura 2.15: Tablero 6 x 6: Solución.

$\boxed{\text{I} \leftrightarrow \text{IV}}$  Claramente la paridad de las columnas ocupadas por las Damas en la parte I (resp. II) son la misma. Entonces para probar que las Damas en la parte I no atacan por columnas a las Damas en la parte II, bastará que probemos que la paridad de las columnas en una de estas partes es distinta a la paridad en la otra parte. Veamos, supongamos que  $n = 6r + 2$  con  $r$  impar. Entonces la parte I tiene paridad par ya que  $n/2 = 3r + 1$ . Por otro lado, la parte II tiene paridad impar ya que  $n - n/2 + 1 = 3r + 2$ . Por simetría concluimos esta parte de la prueba.

Para concluir con este caso, bastará que analicemos las bidiagonales. Sean  $k \leq \lfloor \frac{n}{4} + 1 \rfloor$  y  $k' \in \{n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor, \dots, n\}$  y supongamos que

$$\frac{n}{2} + 2(k - 1) - (k' - k) = \frac{n}{2} + 1 - 2(n - k').$$

Simplificando obtenemos que

$$2n = 3(k' - k + 1),$$

y como  $n = 6r + 2$  para alguna  $r \geq 1$ , concluimos que

$$12r + 4 = 3(k' - k + 1),$$

lo cual es imposible.

$\boxed{\text{II} \leftrightarrow \text{III}}$  Para este caso no es necesario comprobar que las Damas no se atacan por columnas, ya que las partes II y III están contenidas completamente en mitades (complementarias) de tablero. También es claro que no se pueden atacar por bidiagonales. Veamos entonces que no se atacan por diagonales. Supongamos que existen  $k \in \{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 2, \dots, \frac{n}{2}\}$  y  $k' \in \{\frac{n}{2} + 1, \dots, n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1\}$  tales que

$$2 - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor + 2 \left( k - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 2 \right) + (k' - k) = n + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor - 2 \left( n - k' - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \right) + 1.$$

Reducimos y sustituimos  $n = 6r + 2$  para alguna  $r \geq 1$  obteniendo

$$6r + 2 = k' - k + 2 \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n-2}{12} \rfloor}{\frac{n-2}{12}} \right\rfloor + 4 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 3.$$

De nuevo, considerando los casos para  $r$  par e impar y simplificando se obtiene

$$k' - k = -3,$$

lo cual es una contradicción porque  $k' - k \geq 0$ .

*Observación 2.2.* La solución que hemos descrito en este caso no utiliza casillas en las (bi)diagonal principal.

*Demostración de la Observación 2.2.* Demostremos esta observación. Para ello hay que considerara cada una de las “partes”. Para la primera, una Dama en la diagonal principal equivaldría a que para alguna  $k \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ ,

$$k = \frac{n}{2} + 2(k - 1),$$

lo que implica que  $n = 4 - 2k$ , lo cual sería posible sólo si  $k = 1$  (porque  $n \geq 1$ ), pero entonces  $n = 2$ , contradicción. Para la bidiagonal principal, tendríamos

$$k = n - \frac{n}{2} + 2(k - 1) + 1,$$

lo que implica que  $n = 2 - 2k \leq 0$ , contradicción.

Las partes faltantes se verifican en forma similar. □

**$n \equiv 3 \pmod{6}$**

Ahora repetimos el proceso de utilizar el caso anterior junto con su observación. Para resolver el problema en el caso de  $n$ 's de la forma que nos compete ahora, bastará tomar la solución  $f$  del caso  $n - 1$  en el tablero  $\mathcal{T}_{n-1}$  y después añadir un renglón y una columna más para construir el tablero  $\mathcal{T}_n$  y finalmente añadir una Dama más en la casilla nueva en la diagonal. □

# Capítulo 3

## Tableros en $d$ -dimensiones y de distintos tipos

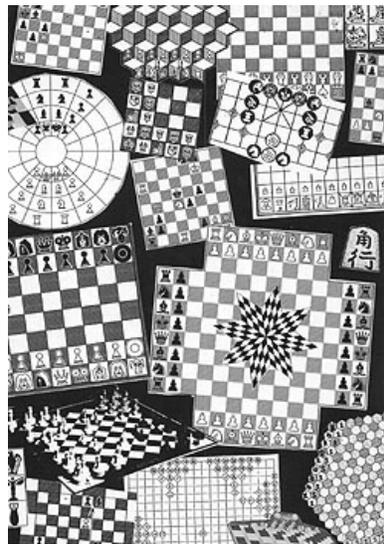


Figura 3.1: Tableros.

En este capítulo introducimos conceptos algo complicados, debido a que tratan diferentes tipos de tableros, en dimensiones mayores a 2. La idea es que la exposición de estos tipos de tableros nos brinde herramientas en el estudio de los problemas presentados más adelante. Primero trataremos los tableros  $d$ -dimensionales. Partiremos del caso tradicional, que hasta ahora ya conocemos, de 2 dimensiones. De ahí aumentamos a 3 dimensiones y

realizamos algunas observaciones importantes para este caso. Después el caso para tableros en 4 dimensiones o más se analiza de forma conjunta. Por otro lado, estudiamos 3 diferentes tipos de tablero: el tablero modular, el tablero reflectivo y el tablero en la botella de Klein. Brevemente la idea en los 3 casos es la misma, proyectar el tablero de 2 dimensiones sobre una superficie en 3 dimensiones, un toro en el caso modular, y la botella de Klein en su respectivo caso.

### 3.1. Tableros tradicionales de dimensión $d$ .

En esta primera parte de este capítulo exponemos los tableros que obtenemos al ir aumentando de dimensión. De manera práctica los dividimos en 3 grupos. El análisis realizado para 2 dimensiones puede parecer más un repaso de algunos conceptos ya vistos en este trabajo, o de dominio general. Las complicaciones empiezan cuando consideramos el tablero de 3 dimensiones, pues surgen preguntas importantes como: ¿Cómo se mueven las piezas?, lo que equivale a preguntarse ¿cómo comen las piezas ahora?

#### 3.1.1. El tablero tradicional de 2 dimensiones.

Este tablero es el que ya conocemos y en donde se ha solucionado hasta ahora. Está conformado por  $n^2$  cuadros, que mejor los llamaremos *escaques*. Este tablero lo hemos denotado por  $\mathcal{T}_n$  e identificado como  $\mathcal{T}_n = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ .

#### 3.1.2. El tablero tradicional 3-dimensional.

¿Qué obtenemos cuando un cuadrado lo subimos de dimensión? Sin muchas complicaciones podemos inferir que un cubo, y estaríamos en lo correcto. El tablero que en dos dimensiones era un “cuadro de cuadros”, ahora se vuelve un “cubo de cubos”. Lo denotaremos por  $\mathcal{T}_n^3$  e identificaremos con  $\mathcal{T}_n^3 = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ .

Consideremos una pieza situada en una casilla; tenemos que visualizar que las piezas se sitúan en el centro del cubo, que ahora hace las funciones de un escaque ajedrecístico.

Así como en el caso anterior enlistamos el número de cuadros o escaques, ahora obser-

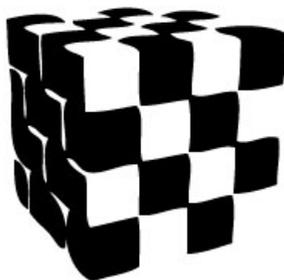


Figura 3.2: Tablero tridimensional (cubo de cubos).

vemos que hay  $n^3$  escaques.

### 3.1.3. Tableros tradicionales de dimensión $d \geq 2$ .

Podemos entonces definir el tablero tradicional de tamaño  $n \geq 1$  y de dimensión  $d \geq 2$  por

$$\mathcal{T}_n^d = \underbrace{\{1, \dots, n\} \times \dots \times \{1, \dots, n\}}_{d \text{ veces}}.$$

Entonces, en particular  $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n^2$ .

#### Dimensión 4. El Tesseract.

Para visualizar tableros en dimensiones mayores a tres, nos enfrentamos a los mismos problemas que los matemáticos al explicar estas dimensiones. ¿Cómo es que se puede ver algo en 4 dimensiones? Tal vez esto como tal no es posible. Pero veremos a continuación un ejemplo que nos permite visualizar un poco la cuarta dimensión a través de una proyección en las tres dimensiones que conocemos. En el Museo de Ciencia Universum, localizado en Ciudad Universitaria, en la UNAM, se expone en el área de matemáticas una obra por demás interesante. Se trata de una proyección en 3 dimensiones (las que podemos percibir) de un cubo en 4 dimensiones. Este ser interdimensional ha recibido el nombre de Tesseract. Un cubo en la cuarta dimensión. ¿Cómo es posible saber que un cubo en la siguiente dimensión se proyecte de esa manera? Los estudiosos del Tesseract han realizado un análisis que de manera general y breve se explica así: partimos de la dimensión 1, tomando una línea recta. Después dibujamos una segunda línea recta paralela a la original y unimos los extremos

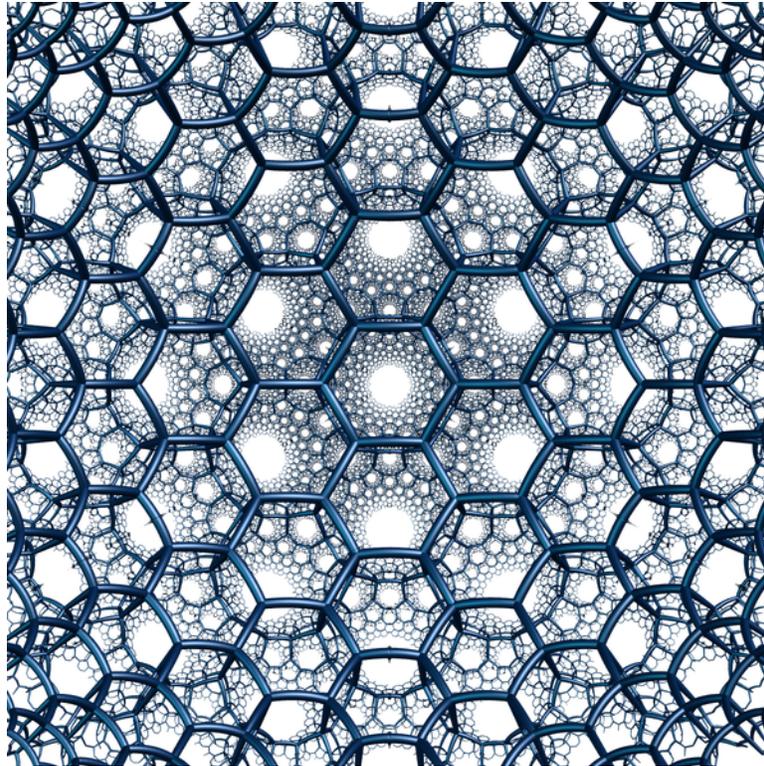


Figura 3.3: La palabra teselación viene del proceso iterado de construcción del Tesseract.

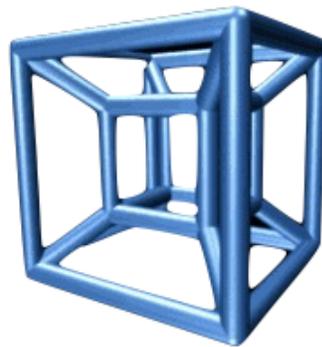


Figura 3.4: Tesseract

correspondientes con rectas perpendiculares, formando así el cuadrado en 2 dimensiones. De la misma forma si ahora empezamos colocando un cuadrado, luego tomamos una copia de él en forma “paralela”, y unimos los extremos correspondientes con rectas perpendiculares, lo que resulta en un cubo en 3 dimensiones. Ahora para saltar a la siguiente dimensión, colocamos un cubo y una copia paralela, unimos los vértices correspondientes con rectas perpendiculares y obtenemos el cubo en 4 dimensiones: el Tesseract. Esta perpendicularidad es virtual en el dibujo (que es de dos dimensiones), ya que necesita de la siguiente dimensión para completarse. Para nuestra discusión es suficiente observar que cada una de las aristas del Tesseract mide lo mismo (claramente observamos un cubo dentro de otro cubo), aún cuando en el dibujo pareciera que los lados del cubo interior miden menos que los lados del cubo que los rodea. Esta construcción es inductiva, se toma el objeto de dimensión  $d$  y la copia de él se sumerge en el espacio Euclidiano de dimensión  $d + 1$ , es decir, se toma la siguiente dimensión, o el siguiente plano. Por este motivo se proyecta este fragmento de dimensión 4, en 3 dimensiones, justo como cuando dibujamos un cubo de 3 dimensiones en una hoja de papel. Tal vez no podamos ver la cuarta dimensión, pero podemos imaginarnos la figura que se forma. Las Figuras 3.4 y 3.5, estrictamente hablando son proyecciones en  $d = 2$  de un hipercubo en  $d = 4$ . Para ver la proyección en 3 dimensiones, dejemos la tarea de visitar el Universum. El Tesseract es un tema muy interesante que nos sirve para considerar

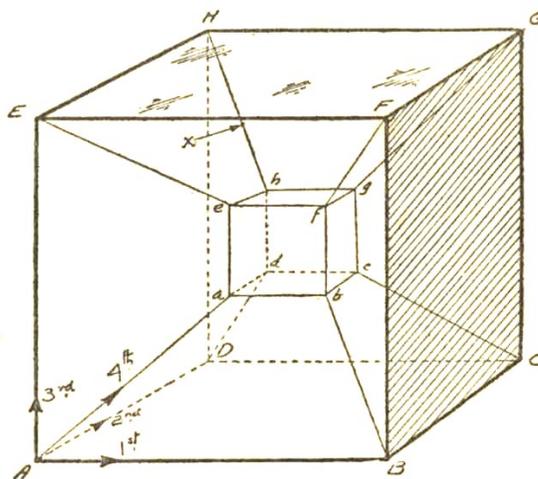


Figura 3.5: Otra representación del Tesseract.

representaciones de seres en la cuarta dimensión, y poder visualizar en la medida de lo posible los conceptos que estamos manejando. Para profundizar en el tema se puede consultar en internet con mucha facilidad y calidad de información. Para nuestro tema damos el tema por concluido y continuamos con otros tipos de tableros.

## 3.2. Tableros modulares

A continuación analizamos nuevos tipos de tableros cuyas construcciones están motivadas por “inmersiones” de tableros tradicionales en espacios de mayor dimensión. El primero y el más analizado en este documento es el tablero modular. Empezamos definiendo específicamente este nuevo ente. Después detallamos su construcción, apoyándonos en algunos visuales sencillos. Concluimos los tableros modulares con su aplicación en el tablero de ajedrez, y cómo las piezas se mueven bajo este nuevo escenario.

### 3.2.1. Construcción del tablero modular

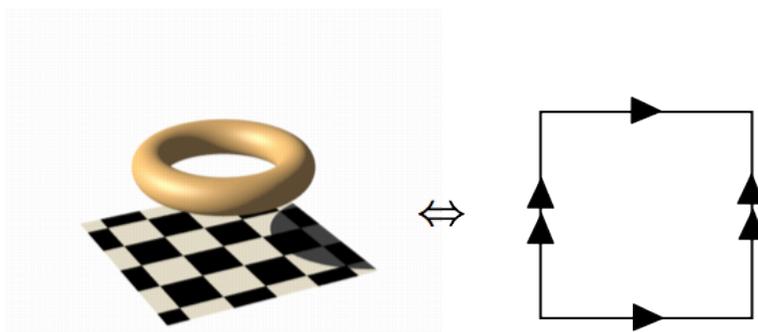


Figura 3.6: Del lado izquierdo ilustramos la idea de unir un tablero y un toro. Esto produce un nuevo tablero con la orientación mostrada del lado derecho.

El tablero modular se construye de la siguiente manera: Supongamos que tomamos la figura geométrica tridimensional conocida como toro, y la envolvemos con el mismo tablero de ajedrez común y corriente. Podría decirse que se obtiene una “dona escaquada”.

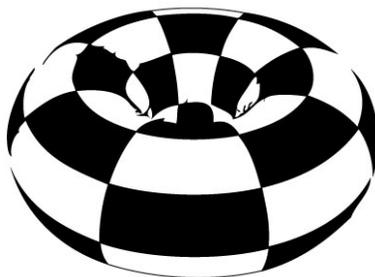


Figura 3.7: Tablero en toro: Tablero modular.

Definimos el tablero modular de tamaño  $n \geq 1$  y de dimensión  $d \geq 2$  en forma precisa como

$$\widehat{\mathcal{T}}_n^d = \underbrace{\mathbb{Z}_n \times \cdots \times \mathbb{Z}_n}_{d \text{ veces}}$$

La definición del tablero modular es muy parecida a la del tablero estándar. La diferencia es meramente técnica, pues resultará mucho más eficiente matemáticamente trabajar con el tablero modular. En el tablero modular, a diferencia del estándar, no hay “fronteras”, de forma que ahora las diagonales no se interrumpen por las bandas del tablero.

### 3.3. Problemas de configuraciones independientes maxi- males en tableros modulares.

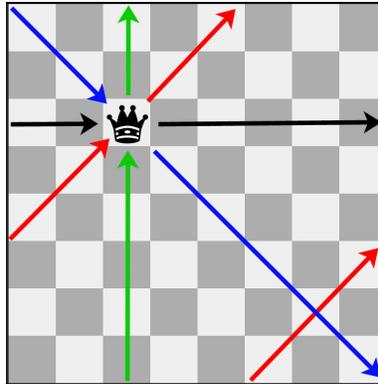


Figura 3.8: Ataque de Dama en un tablero modular.

Dada una pieza de ajedrez, podemos ahora considerar el problema de encontrar el máximo número de piezas que podemos colocar en el tablero modular sin que se ataquen. Establezcamos una notación. Anteriormente, por ejemplo,  $D(n)$  denotaba el máximo número de damas que podemos colocar en el tablero estándar bidimensional sin que se ataquen mutuamente. Si  $\mathfrak{F}$  es un metasímbolo (i.e. es un símbolo en  $\{D, R, A, T, C, P\}$ ), entonces

$$\mathfrak{F}(n, d)$$

va a denotar al máximo número de piezas del tipo  $\mathfrak{F}$  que podemos colocar en el tablero estándar  $\mathcal{T}_n^d$ , y

$$\widehat{\mathfrak{F}}(n, d)$$

va a denotar al máximo número de piezas del tipo  $\mathfrak{F}$  que podemos colocar en el tablero modular  $\widehat{\mathcal{T}}_n^d$ .

### 3.4. Otros posibles tableros

Existen varias otras alternativas de encajar el tablero estándar de dimensión dos en otras superficies. Para propósitos de análisis, convendrá mantener el concepto de tablero modular fijo y en su lugar, cambiar la definición de ataque de las piezas a considerar. En esta sección presentaremos varios posibles tableros que se pueden considerar, cada uno de los cuales abre una gama de problemas de configuraciones independientes maximales. Nos restringiremos únicamente a describir estos tableros, sin embargo nuestro objetivo central es, como ya hemos dicho, estudiar el caso modular. Incluimos esta sección para ilustrar la diversidad de posibles generalizaciones del problema.

#### 3.4.1. El tablero en la botella de Klein.

Empezamos hablando un poco de la historia este objeto, para después definir cómo se construye. Después nos enfocamos en la manera en que afecta al movimiento de la Dama sobre tablero de ajedrez.

La botella de Klein fue descrita por primera vez en 1882 por el matemático alemán Felix Klein. El dato curioso de su nombre original en alemán (Kleinsche Flache, que significa superficie de Klein) cambió al actual por su parecido: Kleinsche Flasche (botella de Klein), y al final se quedó este nombre incluso en su idioma que lo vio nacer. Hoy en día hay muchos ejemplos de botellas de Klein hechas en vidrio. Es curioso notar que en los tiempos de su inventor, no era posible crear la botella. Lamentablemente su inventor murió sin conocer su invento en tres dimensiones.

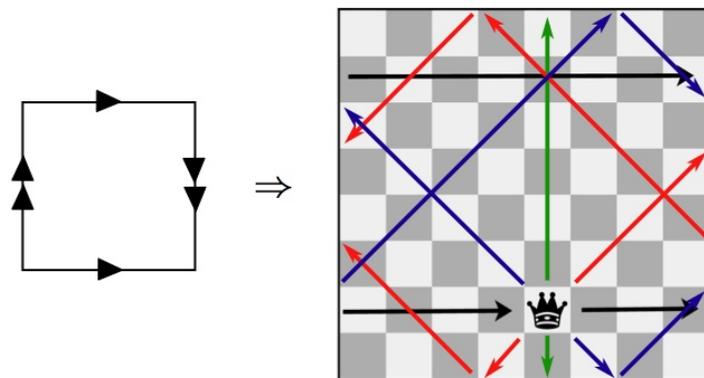


Figura 3.9: Orientaciones y movimiento de una Dama en un tablero en botella de Klein.

La idea es muy similar a la identificación de los lados que se hacen para construir el tablero modular: Empezamos con un cuadro e identificamos los lados opuestos (i.e. asignamos un color a cada par de lados opuestos), sólo que ahora asignamos una orientación contraria a uno de los pares de lados opuestos. Ahora unimos las bandas con colores iguales, y de manera que las orientaciones coincidan. Hay que notar que esto es una unión abstracta, ya que al realizar esto en 3 dimensiones resulta la botella de Klein que conocemos, la cual se interseccionaría a sí misma. Propiamente, la botella de Klein no debe de intersectarse consigo misma. La respuesta se obtiene al subirnos de dimensión. En la 4a dimensión, la intersección se puede desplazar de manera que no se intersecte. Lo que vemos, como en el caso del Tesseract, es una proyección en 3 dimensiones.

En la Figura 3.9 podemos ver el tablero de Klein de  $8 \times 8$ . La Dama en la casilla e2 puede llegar en una jugada a cualquier cuadro por el que pase alguna de las flechas. De nuevo sus desplazamientos están coloreados de forma que el horizontal corresponde al negro, el vertical es verde, y el diagonal y bi-diagonal están representados con colores rojo y azul respectivamente.

### 3.4.2. El tablero proyectivo.

La imaginación humana no tiene límites y ha creado una variante más en el movimiento de las Damas. El tablero proyectivo tiene la singularidad de no poder construirse en tres dimensiones.

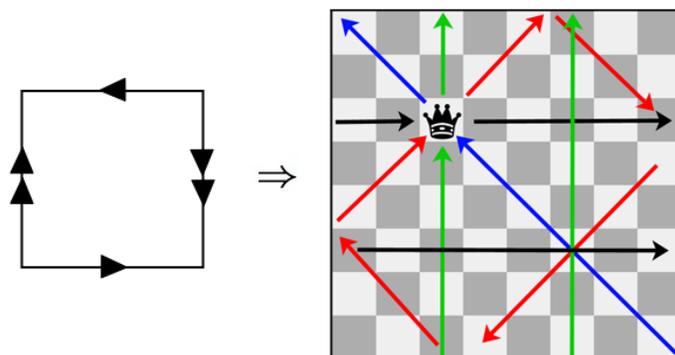


Figura 3.10: Orientaciones y movimiento de Dama en un tablero proyectivo.

En forma similar a la construcción de la botella de Klein, el tablero proyectivo resulta

de identificar en direcciones opuestas *ambos* pares de lados opuestos del tablero estándar. Esta construcción se ilustra en la Figura 3.10, en donde podemos ver cómo se comportan las piezas en este nuevo tablero.

### 3.4.3. El tablero reflexivo.

Finalizamos con un tablero que cuenta con las mismas fronteras que el tradicional. Ahora no extendemos el campo de acción sobre alguna superficie. Esto hace que ya no necesitemos considerar su orientación, como en los casos anteriores. Simplemente contamos con la singularidad de poder rebotar en los extremos del tablero, tal como si estuviéramos jugando billar. Observemos el movimiento de una Dama sobre este tipo de tablero en la Figura 3.11.

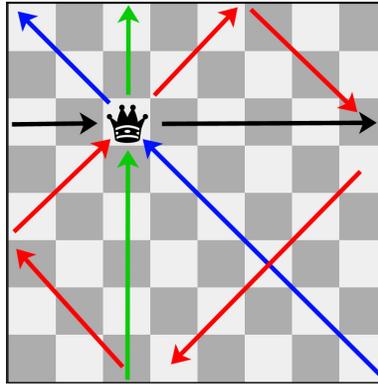


Figura 3.11: Movimiento de Dama en un tablero reflexivo.

# Capítulo 4

## Problema modular de las $n$ -Damas en dimensión 2.

En este capítulo vamos ahora sí entrando en materia al desarrollar los principales resultados que conocemos acerca del problema modular de las  $n$ -Damas en dimensión dos. Comenzamos enunciando y explicando claramente el problema. Después demostramos formalmente los teoremas establecidos para su solución. Para esto nos basamos principalmente en dos artículos de Klöve [7, 8].

### 4.1. Solución en 2 dimensiones.

La definición formal del problema de las  $n$ -Damas es entonces determinar cuándo  $\widehat{D}(n, 2) = n$ , ya que claramente  $\widehat{D}(n, 2) \leq n$ . Decimos que el problema de las  $n$ -Damas tiene solución si  $\widehat{D}(n, 2) = n$ . La existencia de una solución es entonces equivalente a la existencia de una función  $f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$  que cumple con que cada una de las siguientes funciones debe de ser inyectiva (uno a uno):

- $x \mapsto f(x)$
- $x \mapsto f(x) + x$
- $x \mapsto f(x) - x$ .

En este caso, las posiciones de las Damas en el tablero estarían dadas por  $(x, f(x))_{x \in \mathbb{Z}_n}$ .

**Teorema 4.1.** *El problema modular de las  $n$ -Damas tiene solución si y sólo si  $\text{mcd}(n, 6) = 1$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$  es una solución.

P.D.  $\text{mcd}(n, 2) = 1$ . Definimos primero

$$S_1 \equiv \sum_{x=0}^{n-1} x = \frac{n(n-1)}{2} \pmod{n}.$$

Como  $x \mapsto f(x)$  es inyectiva,

$$S_1 \equiv \sum_{x=0}^{n-1} f(x) \pmod{n},$$

y como  $x \mapsto f(x) + x$  es inyectiva,

$$S_1 \equiv \sum_{x=0}^{n-1} f(x) + x \equiv \sum_{x=0}^{n-1} f(x) + \sum_{x=0}^{n-1} x \pmod{n}.$$

Entonces

$$S_1 \equiv 2S_1,$$

lo que implica que

$$S_1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

Entonces

$$S_1 = \frac{n(n-1)}{2} = kn$$

para alguna  $k \in \mathbb{N}$ , lo que implica que

$$n-1 = 2k$$

y entonces  $n = 2k + 1$ . Por lo tanto  $n$  es impar y  $\text{mcd}(n, 2) = 1$ .

P.D.  $\text{mcd}(n, 3) = 1$ . Definimos ahora

$$S_2 \equiv \sum_{x=0}^{n-1} x^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \pmod{n}.$$

Como  $x \mapsto f(x)$  es inyectiva,

$$S_2 \equiv \sum_{x=0}^{n-1} f(x)^2 \pmod{n},$$

y como  $x \mapsto f(x) + x$  es inyectiva,

$$S_2 \equiv \sum_{x=0}^{n-1} (f(x) + x)^2 \equiv \sum_{x=0}^{n-1} f(x)^2 + \sum_{x=0}^{n-1} x^2 + \sum_{x=0}^{n-1} 2f(x)x \pmod{n}.$$

Entonces

$$S_2 \equiv 2S_2 + 2 \sum_{x=0}^{n-1} f(x)x \pmod{n} \quad (4.1)$$

y como  $x \mapsto f(x) - x$  es inyectiva,

$$S_2 \equiv \sum_{x=0}^{n-1} (f(x) - x)^2 \equiv \sum_{x=0}^{n-1} f(x)^2 + \sum_{x=0}^{n-1} x^2 - \sum_{x=0}^{n-1} 2f(x)x \pmod{n}.$$

Así,

$$S_2 \equiv 2S_2 - 2 \sum_{x=0}^{n-1} f(x)x \pmod{n}. \quad (4.2)$$

Sumando las ecuaciones (4.1) y (4.2) obtenemos

$$2S_2 \equiv 4S_2 \pmod{n}$$

y entonces

$$2S_2 \equiv 0 \pmod{n},$$

pero por definición tenemos que

$$2S_2 \equiv \frac{2n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{3} \equiv 0 \pmod{n},$$

lo que implica que existe  $k \geq 1$  tal que

$$(n-1)(2n-1) = 3k. \quad (4.3)$$

Si  $n$  fuera múltiplo de 3, es decir,  $n = 3r$  para alguna  $r \geq 1$ , entonces (4.3) se transformaría en

$$(3r-1)(3(2r)-1) = 3(6r^2 - 3r) + 1 = 3k,$$

lo cual es imposible.

Finalmente, si  $\text{mcd}(n, 6) = 1$ , entonces la función  $f: \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$  definida por

$$f(x) = 2x \pmod{n}$$

es solución del problema de las  $n$ -Damas.

P.D.  $f(x) = 2x \pmod{n}$  es solución. Sean  $x, y \in \mathbb{Z}_m$  y  $x \neq y$ . Entonces no se pueden atacar por renglones. No se pueden atacar por columnas porque esto implicaría que  $2x \equiv 2y \pmod{n}$ , pero como  $\text{mcd}(n, 2) = 1$ , entonces podemos cancelar el 2 y obtener  $x \equiv y \pmod{n}$ , lo cual contradice nuestra hipótesis. Ahora supongamos que  $x$  ataca a  $y$  por una bidiagonal. Entonces

$$2x - (x - y) \equiv 2y \pmod{n},$$

lo que se reduce a

$$x \equiv y \pmod{n},$$

contradicción. Finalmente si se atacan por una diagonal, entonces

$$2x + (x - y) \equiv 2y \pmod{n},$$

lo que se reduce a

$$3x \equiv 3y \pmod{n},$$

y como  $\text{mcd}(n, 3) = 1$ , podemos cancelar el 3 y obtener

$$x \equiv y \pmod{n},$$

contradicción. □

Más en general tenemos el siguiente teorema. Si  $n = \prod_{i=1}^d p_i^{n_i}$ , sea  $P_n = \prod_{i=1}^d p_i$  y  $n^* = nP_n^{-1}$ .

**Teorema 4.2.** *Sea  $\text{mcd}(n, 6) = 1$ . Si*

$$\text{mcd}((a_1 - 1)a_1(a_1 + 1), n) = 1$$

y

$$a_i \equiv 0 \pmod{P_n} \text{ para } i \geq 2,$$

entonces

$$f(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i$$

es una solución al problema modular de las  $n$ -Damas.

*Demostración.* Sea  $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}$  y supongamos  $f(x) + \epsilon x \equiv f(y) + \epsilon y \pmod n$ , i.e.

$$a_0 + (a_1 + \epsilon)x + \sum_{i=2}^r a_i x^i \equiv a_0 + (a_1 + \epsilon)y + \sum_{i=2}^r a_i y^i \pmod n.$$

Entonces

$$(x - y)\{(a_1 + \epsilon) + M\} \equiv 0 \pmod n,$$

donde

$$M = \sum_{i=2}^r a_i \sum_{j=0}^{i-1} x^i y^{i-1-j} \equiv 0 \pmod{P_n}.$$

Supongamos que  $p$  es un primo que divide a  $\text{mcd}(a_1 + \epsilon + M, n)$ . Entonces  $p \mid n$  y así también  $p \mid P_n \mid M$ . Más aún  $p \mid a_1 + \epsilon + M$  y así  $p \mid a_1 + \epsilon$  lo cual es imposible ya que  $\text{mcd}(a_1 + \epsilon, n) = 1$ . De ahí que  $\text{mcd}(a_1 + \epsilon + M, n) = 1$  y por lo tanto  $x \equiv y \pmod n$ . Así,  $x \mapsto f(x) + \epsilon x$  es inyectiva.  $\square$

Una solución es *lineal* si es de la forma  $f(x) = ax + b$ . En [1], Bruen y Dixon encontraron soluciones no-lineales para  $n$  si es primo  $> 11$ . El Teorema 4.2 da soluciones no-lineales para toda  $n$  que sea dividido por al menos un primo a la segunda potencia (es decir, si  $\mu(n) = 0$ , donde  $\mu$  es la función de Möbius).

**Teorema 4.3.** *El número  $N$  de soluciones distintas de la forma dada en el Teorema 4.2 es*

$$N = n \prod_{p \mid n} (p - 3) \prod_{k > 1} \frac{n^*}{\text{mcd}(n^*, k!)}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $f(x) = \sum_{i=0}^r a_i x^i$  y  $g(x) = \sum_{i=0}^s b_i x^i$  ambas son soluciones de la forma dada en el Teorema 4.2 y que  $f(x) \equiv g(x) \pmod n$  para toda  $x \in \mathbb{Z}_n$ . Podemos suponer que  $r = s$  haciendo que algunas  $a_i$ 's o algunas  $b_i$ 's sean cero. Entonces

$$a_0 = f(0) \equiv g(0) = b_0 \pmod n \quad \text{y} \quad a_1 + a_0 \equiv f(1) \equiv g(1) \equiv b_1 + b_0 \pmod{P_n}. \quad (4.4)$$

De ahí que

$$a_1 \equiv b_1 \pmod{P_n}. \quad (4.5)$$

Sea  $a_i - b_i = P_n c_i$  para  $i \geq 1$ . Entonces

$$\sum_{i=1}^r c_i x^i \equiv 0 \pmod{n^*} \text{ para todo } x \in \mathbb{Z}_n. \quad (4.6)$$

Por otro lado si (4.4), (4.5), y (4.6) se satisfacen, entonces  $f(x) \equiv g(x) \pmod{n}$  para toda  $x$ . Por lo tanto el número de opciones para  $a_0$  es  $n$ . El número de opciones para  $a_1$  es el mismo que el número de  $a_1$ 's tales que  $0 < a_1 < P_n$  y  $\text{mcd}((a_1 - 1)a_1(a_1 + 1), n) = 1$ ; este número es  $\prod_{p|P_n} (p - 3) = \prod_{p|n} (p - 3)$  (véase [4] p. 147). Finalmente el número de funciones polinomiales distintas  $\pmod{n^*}$  que tienen el término constante 0 es

$$\prod_{k \geq 1} \frac{n^*}{\text{mcd}(n^*, k!)}$$

(véase [14]). Multiplicando estos números obtenemos  $N$ . □

## 4.2. Clases de soluciones del problema modular de las $n$ -Damas.

En esta sección vamos a estudiar diferentes clases de soluciones para el problema modular de las  $n$ -Damas en dos dimensiones. Esta sección se basa principalmente en el trabajo de Klöve [8]. La parte principal del artículo trata con soluciones simétricas (soluciones invariantes bajo una rotación de  $90^\circ$ ). En la última sección estudiamos soluciones parciales maximales para aquellos valores de  $n$  para los que no existe solución.

### 4.2.1. Notación y resultados básicos.

En esta sección comenzamos estableciendo notación para entonces enunciar y probar con precisión resultados generalizados de Polya. Recordemos que  $\mathbb{Z}_n$  denotará al grupo de clases de residuo módulo  $n$ . Para cualquier entero  $a$ , denotaremos por  $[a] = [a]_n$  a la clase de residuo conteniendo módulo  $n$  de  $a$ , y  $a$  se llama un *representante de la clase de residuo*  $[a]$ . A menos de que se indique lo contrario se utilizan representantes que satisfacen  $|a| \leq \frac{1}{2}n$ . Recordemos la siguiente definición.

*Definición 4.1.* Una  $n$ -solución es un conjunto

$$S = \{([r_i], [s_i]) \mid i = 1, 2, \dots, n\} \subset \widehat{\mathcal{T}}_n^2$$

tal que si  $i \neq j$ , entonces

1.  $[r_i] \neq [r_j]$ ,

2.  $[s_i] \neq [s_j]$ ,
3.  $[s_i - r_i] \neq [s_j - r_j]$ ,
4.  $[s_i + r_i] \neq [s_j + r_j]$ .

Aunque de hecho las siguientes definiciones ya las hemos utilizado, las enunciamos formalmente.

*Definición 4.2.* Sea  $n \geq 1$ . Entonces

- $\{([a], [b]) \in \widehat{\mathcal{T}}_n^2 \mid b = 1, 2, \dots, n\}$  es una *fila*.
- $\{([a], [a + b]) \in \widehat{\mathcal{T}}_n^2 \mid a = 1, 2, \dots, n\}$  es una *columna*.
- $\{([a], [b]) \in \widehat{\mathcal{T}}_n^2 \mid a = 1, 2, \dots, n\}$  es una *diagonal principal*.
- $\{([a], [a - b]) \in \widehat{\mathcal{T}}_n^2 \mid a = 1, 2, \dots, n\}$  es una *bi-diagonal*.

La condición 1 de la Definición 4.1 establece que ninguna fila contiene dos elementos de  $S$ , lo mismo para la condición 2 para columnas, la condición 3 para diagonales principales y la condición 4 para bi-diagonales.

**Lema 4.1.** Si  $\{([r_i], [s_i]) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  es una  $n$ -solución, y  $k, l$  y  $m$  son enteros con  $\text{mcd}(k, n) = 1$ , entonces  $\{([kr_i + l], [ks_i + m]) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  es una  $n$ -solución.

*Demostración.* Si  $[kr_i + l] = [kr_j + l]$ , entonces  $[r_i] = [r_j]$  y por ende  $i = j$ . Esto prueba la condición 1, para 2, 3 y 4 la prueba es similar.  $\square$

*Definición 4.3.* Una  $n$ -solución  $\{([r_i], [s_i]) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  es *lineal* si existen enteros  $k$  y  $l$  tales que  $[s_i] = [kr_i + l]$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Teorema 4.4.** Sean  $\{([r_i]_n, [s_i]_n) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  una  $n$ -solución,  $\{([t_j]_m, [u_j]_m) \mid j = 1, 2, \dots, m\}$  una  $m$ -solución, y  $k_i, l_i, i = 1, 2, \dots, n$  enteros. Entonces

$$\{([nt_j + nk_i + r_i]_{mn}, [nu_j + nl_i + s_i]_{mn}) \mid i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}$$

es una  $mn$ -solución.

*Demostración.* Tenemos que probar que se satisfacen las condiciones 1-4. Probaremos 1, las demás son similares. Supongamos que

$$nt_j + nk_i + r_i \equiv nt_{j'} + nk_{i'} + r_{i'} \pmod{mn}. \quad (4.7)$$

Entonces

$$mn \mid (n(t_j - t_{j'} + k_i - k_{i'}) - (r_i - r_{i'})),$$

lo que nos permite deducir que

$$r_i \equiv r_{i'} \pmod{n}.$$

Por 1,  $i \equiv i' \pmod{n}$ , y también  $k_i \equiv k_{i'} \pmod{n}$  y  $r_i \equiv r_{i'} \pmod{n}$ . Al insertar esto en (4.7) obtenemos

$$nt_j + nk_i + r_i \equiv nt_{j'} + nk_i + r_i \pmod{mn}.$$

y luego dividimos por  $n$  para obtener  $t_j \equiv t_{j'} \pmod{m}$ . Por 1,  $j \equiv j' \pmod{m}$ , q.e.d.  $\square$

*Definición 4.4.* Una  $n$ -solución  $S = \{([r_i], [s_i]) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  es *simétrica* si  $([r], [s]) \in S$  implica  $([s], [-r]) \in S$ .

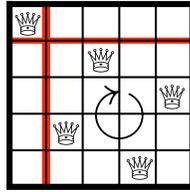


Figura 4.1: Solución simétrica

Polya nombró a estas soluciones como “doppelt-symmetrischen”. Notó que  $n \equiv 1 \pmod{4}$  es necesario para que existan  $n$ -soluciones simétricas. Sin embargo, aún es una pregunta abierta saber si  $n \equiv 1 \pmod{4}$  y  $\text{mcd}(n, 6) = 1$  son condiciones suficientes para que una  $n$ -solución simétrica exista. Pólya probó que si  $n$  es producto de primos, todos congruentes a 1 módulo 4, entonces una  $n$ -solución simétrica lineal existe, en particular  $\{([r], [kr]) \mid r = 1, 2, \dots, n\}$  donde  $k^2 \equiv -1 \pmod{n}$ .

### 4.2.2. Clases de soluciones simétricas.

En esta sección mostraremos cómo construir nuevas  $n$ -soluciones simétricas a partir de otras soluciones dadas (no necesariamente simétricas, e.g. Teorema 4.10). Si  $S$  es una  $n$ -solución simétrica, entonces  $([0], [0]) \in S$ . Más aún, si  $([r], [s]) \in S$  y  $([r], [s]) \neq ([0], [0])$ , entonces  $([r], [s]), ([s], [-r]), ([-r], [-s]), ([-s], [r]) \in S$  y estos cuatro elementos son distintos.

*Definición 4.5.* 1. Sea  $\langle 0 \rangle = ([0], [0])$ .

2. Para  $[r], [s] \in \mathbb{Z}_n - [0]$ , sea  $\langle r, s \rangle = \{([r], [s]), ([s], [-r]), ([-r], [-s]), ([-s], [r])\}$ .

*Definición 4.6.* Para cualquier entero  $a$  y  $n$ ,  $n$  impar, sea  $\tilde{a}$  el entero tal que  $0 \leq \tilde{a} < \frac{1}{2}n$  y  $a \equiv \pm \tilde{a} \pmod{n}$ .

En esta sección  $n = 4q + 1$  para algún entero positivo  $q$ .

**Lema 4.2.** Sean  $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, 2q$  enteros. Entonces

$$\bigcup_{i=1}^q \{\tilde{a}_i, \tilde{b}_i\} = \{1, 2, \dots, 2q\}$$

si y sólo si

1.  $[a_i] \neq [0] \quad \forall i$ ,
2.  $[a_i] \neq [\pm a_j]$  y  $[b_i] \neq [b_j] \quad \forall i, j, i \neq j$ ,
3.  $[a_i] \neq [\pm b_j] \quad \forall i, j$ .

*Demostración.* Tenemos  $\bigcup_{i=1}^q \{\tilde{a}_i, \tilde{b}_i\} = \{1, 2, \dots, 2q\}$  si y sólo si los enteros  $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, i = 1, 2, \dots, 2q$  son distintos y no son cero, y esto es equivalente a 1-3 del Lema 4.2 por la definición de  $\tilde{\cdot}$ .  $\square$

**Teorema 4.5.**  $S = \langle 0 \rangle \cup \bigcup_{i=1}^q \langle r_i, s_i \rangle$  es una  $n$ -solución simétrica si y sólo si

$$\bigcup_{i=1}^q \{\tilde{r}_i, \tilde{s}_i\} = \{1, 2, \dots, 2q\} \quad (4.8)$$

y

$$\bigcup_{i=1}^q \{\widetilde{s_i - r_i}, \widetilde{s_i + r_i}\} = \{1, 2, \dots, 2q\}. \quad (4.9)$$

*Demostración.* Sea  $S$  una  $n$ -solución simétrica. Entonces

$$[0], [r_1], [-s_1], [-r_1], [s_1], \dots, [r_q], [-s_q], [-r_q], [s_q]$$

son todos distintos por 1 de la Definición 4.1, y por lo tanto (4.8) se sigue del Lema 4.2.

De manera similar (4.9) sigue de 3 de la Definición 4.1 y por el Lema 4.2.

A la inversa, supongamos que  $S$  satisface (4.8) y (4.9). Entonces las condiciones 1 y 2 de la Definición 4.1 se siguen de (4.8), y las condiciones 3 y 4 se siguen de (4.9) y del Lema 4.2.  $\square$

**Teorema 4.6.** Si  $S = \langle 0 \rangle \cup \bigcup_{i=1}^q \langle r_i, s_i \rangle$  es una  $n$ -solución simétrica y para alguna  $i \leq j \leq q$ ,

$$S' = \langle 0 \rangle \cup \langle s_j, r_j \rangle \cup \bigcup_{1 \leq i \leq q; i \neq j} \langle r_i, s_i \rangle,$$

entonces  $S'$  es una  $n$ -solución simétrica.

*Demostración.* Como  $\widetilde{r_j - s_j} = \widetilde{s_j - r_j}$ , (4.8) y (4.8) son ambas simétricas en  $r_i, s_i$  y de ahí sigue el Teorema 4.6.  $\square$

**Teorema 4.7.** Si  $\bigcup_{i=1}^q \{\tilde{a}_i, \tilde{b}_i\} = \{1, 2, \dots, 2q\}$  y  $\text{mcd}(k, n) = 1$ , entonces  $\bigcup_{i=1}^q \{k\tilde{a}_i, k\tilde{b}_i\} = \{1, 2, \dots, 2q\}$ .

*Demostración.* Como  $[kx] = [ky]$  si y sólo si  $[x] = [y]$ , el Teorema 4.7 se sigue del Lema 4.2.  $\square$

**Teorema 4.8.** Si  $S = \langle 0 \rangle \cup \bigcup_{i=1}^q \langle r_i, s_i \rangle$  es una  $n$ -solución simétrica y  $\text{mcd}(k, n) = 1$ , entonces

$$D(S) = \langle 0 \rangle \cup \bigcup_{i=1}^q \langle s_i - r_i, s_i + r_i \rangle$$

y

$$C_k(S) = \langle 0 \rangle \cup \bigcup_{i=1}^q \langle kr_i, ks_i \rangle$$

son  $n$ -soluciones simétricas.

*Demostración.* El teorema se sigue directamente del Teorema 4.5 y del Teorema 4.7.  $\square$

Empezando con una  $n$ -solución simétrica y usando el Teorema 4.6 repetidamente obtenemos  $2^q$   $n$ -soluciones simétricas distintas. Usando el Teorema 4.8 aún obtenemos más soluciones. Finalmente en esta sección probamos el equivalente al Teorema 4.4 para el caso simétrico.

**Teorema 4.9.** *Sea  $S = \{([r_i]_n, [s_i]_n) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$  una  $n$ -solución simétrica donde  $r_i, s_i \in \{-2q, -2q + 1, \dots, 2q\}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $T = \{([t_j]_m, [u_j]_m) \mid j = 1, 2, \dots, m\}$  una  $m$ -solución simétrica, y  $k_i, l_i, i = 1, 2, \dots, n$  sean enteros tales que  $k_{i'} = l_i$  y  $l_{i'} = -k_i$  cuando  $r_{i'} = s_i$ . Entonces*

$$V = \{([nt_j + nk_i + r_i]_{mn}, [nu_j + nl_i + s_i]_{mn}) \mid i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}$$

*es una  $mn$ -solución simétrica.*

*Demostración.* Por el Teorema 4.4,  $V$  es una solución y por lo tanto hay que mostrar que es simétrica. Sea

$$([nt_j + nk_i + r_i]_{mn}, [nu_j + nl_i + s_i]_{mn}) \in V$$

donde  $([r_i]_n, [s_i]_n) \in S$  y  $([t_j]_m, [u_j]_m) \in T$ . Como  $S$  y  $T$  son simétricas, existen  $([r_{i'}]_n, [s_{i'}]_n) \in S$  y  $([t_{j'}]_m, [u_{j'}]_m) \in T$  tales que  $[r_{i'}]_n = [s_i]_n, [s_{i'}]_n = [-r_i]_n, [t_{j'}]_m = [u_j]_m$  y  $[u_{j'}]_m = [-t_j]_m$ . Por nuestra restricción en  $r_i$  y  $s_i, r_{i'} = s_i$  y  $s_{i'} = -r_i$ . De ahí que  $k_{i'} = l_i$  y  $l_{i'} = -k_i$ . Por lo tanto

$$([nu_j + nl_i + s_i]_{mn}, [-nt_j - nk_i - r_i]_{mn}) \in V$$

y entonces  $V$  es simétrica. □

### 4.2.3. $p^\alpha$ -soluciones simétricas

En esta sección  $p$  es un primo,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , y  $\alpha$  es un entero positivo.

*Definición 4.7.* Para cualquier entero  $N$  que no sea el cero,  $v_p(N)$  y  $v(N)$  son los enteros más grandes tales que  $p^{v_p(N)}$  divide a  $N$  y  $2^{v(N)}$  divide a  $N$ .

**Lema 4.3.** *Si  $a \equiv b \pmod{N}$ , entonces*

1.  $v(a) \geq \min\{v(b), v(N)\}$
2. Si  $v(b) < v(N)$ , entonces  $v(a) = v(b)$ .

*Demostración.* Por hipótesis existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $a = b + Nk$ . Si  $\omega = \min\{v(b), v(N)\}$ , entonces

$$a = 2^\omega(2^{v(b)-\omega}\alpha + 2^{v(N)-\omega}\beta k) \quad (4.10)$$

(donde  $\alpha = \frac{b}{2^{v(b)}}$  y  $\beta = \frac{N}{2^{v(N)}}$  son enteros impares por definición de  $v(\cdot)$ ), de donde se sigue 1 del Lema 4.3, y para el caso 2 la igualdad (4.10) se transforma en

$$a = 2^{v(b)}(\alpha + 2^{v(N)-v(b)}\beta k),$$

de donde se sigue la conclusión ya que la suma dentro del paréntesis es impar.  $\square$

Sea  $g$  una raíz primitiva módulo  $p$  tal que  $p^2 \nmid g^{p-1}$ . En [10] pág. 56 se prueba que esta  $g$  existe y que es una raíz primitiva módulo  $p^\alpha$  para cualquier  $\alpha \geq 1$ .

*Definición 4.8.* Sea

$$1. W_\beta = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta = 0 \\ p^{\beta-1}(p-1)/4 & \text{si } \beta > 0. \end{cases}$$

$$2. Z_\beta = \frac{1}{4}(p^\beta - 1).$$

*Definición 4.9.* Una tercia  $(\alpha, \kappa, V)$  de enteros donde  $\alpha \geq 1$ , es *permisible* si existen enteros  $\mu$  y  $\nu$  tales que

$$g^\kappa - 1 \equiv g^\mu \pmod{p^\alpha}, \quad (4.11)$$

$$g^\kappa + 1 \equiv g^\nu \pmod{p^\alpha}, \quad (4.12)$$

$$V \mid \kappa, \quad V \mid \mu - \nu, \quad V \mid W_\alpha, \quad (4.13)$$

$$v(V) = v(\kappa) = v(\mu - \nu) \leq v(W_\alpha). \quad (4.14)$$

**Teorema 4.10.** *Sea  $(\alpha, \kappa, V)$  permisible y sea*

$$S_{\alpha-1} = \langle 0 \rangle \cup \bigcup_{i=1}^{Z_{\alpha-1}} \langle r_i, s_i \rangle$$

una  $p^{\alpha-1}$ -solución. Entonces

$$S_\alpha = \langle 0 \rangle \cup \bigcup_{i=1}^{Z_{\alpha-1}} \langle pr_i, ps_i \rangle \cup \bigcup_{j=1}^V \bigcup_{i=1}^U \langle g^{2iV+j}, g^{2iV+j+\kappa} \rangle,$$

donde  $U = W_\alpha/V$ , es una  $p^\alpha$ -solución simétrica.

*Demostración.* La prueba se basará en el Teorema 4.5. Por lo tanto tenemos que probar que las análogas de (4.8) y (4.9) se satisfacen.

Empezamos con (4.8). Como  $a \equiv \pm b \pmod{p^{\alpha-1}}$  si y sólo si  $pa \equiv \pm pb \pmod{p^\alpha}$ , se observa que

$$\bigcup_{i=1}^{Z_{\alpha-1}} \{\widetilde{pr}_i, \widetilde{ps}_i\} = \{pl \mid 1 \leq l \leq \frac{1}{2}(p^{\alpha-1} - 1)\}$$

ya que  $S_{\alpha-1}$  es una  $p^{\alpha-1}$ -solución simétrica. Si  $a$  y  $\epsilon$  son cualquier par de enteros, entonces  $pa \not\equiv \pm g^\epsilon \pmod{p^\alpha}$ . Por lo tanto resta probar que

$$g^{2iV+j+d} \not\equiv \pm g^{2i'V+j'+d} \pmod{p^\alpha} \quad (4.15)$$

si  $d = 0$  o  $d = \kappa$  y  $(i, j) \neq (i', j')$ , y

$$g^{2iV+j+\kappa} \not\equiv \pm g^{2i'V+j'+d} \pmod{p^\alpha} \quad (4.16)$$

para todo  $(i, j), (i', j')$ . Supongamos que  $g^{2iV+j+d} \equiv \pm g^{2i'V+j'+d} \pmod{p^\alpha}$ . Como  $g$  es una raíz primitiva,

$$2iV + j + d \equiv 2i'V + j' + d \pmod{p^{\alpha-1} \frac{1}{2}(p-1)}. \quad (4.17)$$

Como  $V \mid p^{\alpha-1} \frac{1}{2}(p-1)$ , obtenemos que

$$j \equiv j' \pmod{V}.$$

Por la definición de  $S_\alpha$ ,  $1 \leq j, j' \leq V$ . Por lo tanto  $j = j'$ . Insertando esto en (4.17) obtenemos

$$2iV \equiv 2i'V \pmod{2 \cdot W_\alpha}$$

y

$$i \equiv i' \pmod{W_\alpha/V}.$$

Ya que  $W_\alpha/V = U$  y  $1 \leq i, i' \leq U$ , obtenemos que  $i = i'$ . De ahí que  $(i, j) = (i', j')$ . Esto prueba (4.15).

Ahora supongamos que

$$g^{2iV+j+k} \equiv \pm g^{2i'V+j'} \pmod{p^\alpha}. \quad (4.18)$$

Entonces

$$2iV + j + \kappa \equiv 2i'V + j' \pmod{p^{\alpha-1} \frac{1}{2}(p-1)}.$$

Por lo tanto

$$j \equiv j' \pmod{V}.$$

Así  $j = j'$ . Insertando esto en (4.18) obtenemos que

$$\kappa \equiv 2V(i' - i) \pmod{p^{\alpha-1} \frac{1}{2}(p-1)}.$$

Por el Lema 4.3,  $v(\kappa) \geq \min\{1 + v(V), 1 + v(W\alpha)\}$ . Esto contradice (4.14) y así la prueba de (4.16) está completa.

La analogía de (4.9) se prueba en forma similar. Primero obtenemos que

$$\bigcup_{i=1}^{Z_{\alpha-1}} \left\{ \widetilde{ps_i - pr_i}, \widetilde{ps_i + pr_i} \right\} = \left\{ pl \mid 1 \leq l \leq \frac{1}{2}(p^{\alpha-1} - 1) \right\}.$$

Más aún,

$$g^{2iV+j+\kappa} - g^{2iV+j} \equiv g^{2iV+j+\mu} \pmod{p^\alpha}$$

y

$$g^{2iV+j+\kappa} + g^{2iV+j} \equiv g^{2iV+j+\nu} \pmod{p^\alpha}.$$

Por lo tanto tenemos que probar que

$$g^{2iV+j+d} \not\equiv \pm g^{2i'V+j'+d} \pmod{p^\alpha}$$

si  $d = \mu$  o  $d = \nu$  y  $(i, j) \neq (i', j')$ , y

$$g^{2iV+j+\mu} \not\equiv \pm g^{2i'V+j'+\nu} \pmod{p^\alpha}$$

para todos  $(i, j), (i', j')$ . Estas pruebas son similares a las de (4.15) y (4.16).  $\square$

Para utilizar el Teorema 4.10 tenemos que conocer algunas tercias permisibles. En el siguiente teorema damos algunos resultados para tercias permisibles.

**Teorema 4.11.** 1. Si  $(\alpha, \kappa, V)$  es permisible, entonces  $(\alpha, \kappa + 2\lambda W_\alpha, V)$  es permisible para todos los enteros  $\lambda$ .

2. Si  $(\alpha, \kappa, V)$  es permisible, entonces  $(\alpha, -\kappa, V)$  es permisible.

3. Si  $(\alpha, \kappa, V)$  es permisible,  $V' \mid V$  y  $v(V') = v(V)$ , entonces  $(\alpha, \kappa, V')$  es permisible.

4. Si  $(\alpha - 1, \kappa, V)$  es permisible, entonces  $(\alpha, \kappa, V)$  es permisible.

5. Si  $(\alpha, \kappa, V)$  es permisible y  $v_p(V) \leq \alpha - 2$ , entonces  $(\alpha - 1, \kappa, V)$  es permisible.

6. Si  $(\alpha, \kappa, V)$  es permisible y  $v_p(V) \leq \alpha - 2$ , entonces  $(\alpha - 1, \kappa, V)$  es permisible.

7.  $(\alpha, W_\alpha, W_\alpha)$  es permisible para todo  $\alpha \geq 1$ .

*Demostración.* Para probar 1, sea  $\kappa' = \kappa + 2\lambda W_\alpha$ . Por el Lema 4.3,  $v(\kappa') = v(\kappa)$ . Más aún,  $g^{\kappa'} \equiv g^\kappa (-1)^\lambda \pmod{p^\alpha}$ . Si  $\lambda$  es par, entonces

$$g^{\kappa'} - 1 \equiv g^\mu \pmod{p^\alpha},$$

y

$$g^{\kappa'} + 1 \equiv g^\nu \pmod{p^\alpha}.$$

Si  $\lambda$  es non, entonces

$$g^{\kappa'} - 1 \equiv -(g^\kappa + 1) \equiv g^{\nu+2W_\alpha} \pmod{p^\alpha}$$

y

$$g^{\kappa'} + 1 \equiv -(g^\kappa - 1) \equiv g^{\mu+2W_\alpha} \pmod{p^\alpha}.$$

Ahora es directo verificar que  $(\alpha, \kappa', V)$  es permisible.

Para probar 2, tenemos que

$$g^{-\kappa} - 1 \equiv g^{-\kappa}(1 - g^\kappa) \equiv -g^{-\kappa} \cdot g^{-\mu} \equiv g^{\mu+2W_\alpha-\kappa} \pmod{p^\alpha}$$

y

$$g^{-\kappa} + 1 \equiv g^{\nu-\kappa} \pmod{p^\alpha}.$$

Si ponemos  $\mu' = \mu + 2W_\alpha - \kappa$  y  $\nu' = \nu - \kappa$ , entonces  $\mu' - \nu' = \mu - \nu + 2W_\alpha$ . Por lo tanto  $V \mid \mu' - \nu'$  y  $\nu(\mu' - \nu') = \nu(\mu - \nu) = \nu(-\kappa) \leq \nu(W_\alpha)$  y así  $(\alpha, -\kappa, V)$  es permisible.

3 se sigue inmediatamente de la definición.

Para 4, sean

$$\begin{aligned} g^\kappa - 1 &\equiv g^{\mu'} && \pmod{p^{\alpha-1}}, \\ g^\kappa + 1 &\equiv g^{\nu'} && \pmod{p^{\alpha-1}}, \\ g^\kappa - 1 &\equiv g^\mu && \pmod{p^\alpha}, \\ g^\kappa + 1 &\equiv g^\nu && \pmod{p^\alpha}. \end{aligned}$$

Se asumió que  $V \mid \kappa, V \mid \mu' - \nu', V \mid W_{\alpha-1}$ , y  $v(V) = v(\kappa) = v(\mu' - \nu') \leq v(W_{\alpha-1})$ . Estas ecuaciones implican que

$$\mu' \equiv \mu, \nu' \equiv \nu \pmod{p^{\alpha-2}(p-1)}.$$

De ahí que

$$\mu - \nu \equiv \mu' - \nu' \pmod{4W_{\alpha-1}}.$$

De esta ecuación obtenemos que  $V \mid \mu - \nu$  y  $\nu(\mu - \nu) = \nu(\mu' - \nu')$ . Como  $V \mid W_{\alpha-1} \mid W_\alpha$  y  $v(W_\alpha) = v(W_\alpha - 1)$ ,  $(\alpha, \kappa, V)$  es permisible.

Las pruebas para 5 y 6 son similares a la prueba de 4 y serán omitidas.

Para 7, sean  $W = W_\alpha$  y

$$g^W - 1 \equiv g^\mu, g^W + 1 \equiv g^\nu \pmod{p^\alpha}.$$

Como  $g^{2W} \equiv -1 \pmod{p^\alpha}$ ,

$$g^{\mu-\nu-W} \equiv \frac{g^W - 1}{(g^W + 1)g^W} \equiv \frac{g^W - 1}{-1 + g^W} \equiv 1 \pmod{p^\alpha},$$

y así

$$\mu - \nu \equiv W_\alpha \pmod{4W_\alpha}.$$

Por lo tanto  $W_\alpha \mid \mu - \nu$  y  $v(\mu - \nu) = v(W_\alpha)$ . Entonces  $(\alpha, W_\alpha, W_\alpha)$  es permisible.  $\square$

Finalmente en esta sección usamos el Teorema 4.10 y 4.11 para construir una clase larga de soluciones simétricas explícitas.

**Teorema 4.12.** *Para  $\beta = 1, 2, \dots, \alpha$ , sean*

1.  $\delta_\beta$  un entero tal que  $1 \leq \delta_\beta \leq \beta$ .
2.  $\lambda_\beta$  un entero non.
3.  $V_\beta, U_\beta$  enteros tales que  $U_\beta$  es non y  $V_\beta U_\beta = W \delta_\beta$ .

Entonces

$$\langle 0 \rangle \cup \bigcup_{\beta=1}^{\alpha} \bigcup_{j=1}^{V_\beta} \bigcup_{i=1}^{U_\beta} \left\langle p^{\alpha-\beta} g^{2iV_\beta+j}, p^{\alpha-\beta} g^{2iV_\beta+j+\lambda_\beta W \delta_\beta} \right\rangle$$

es una  $p^\alpha$ -solución simétrica.

*Demostración.* Sea  $\beta \leq \alpha$  y  $\delta = \delta_\beta$ . En referencia con el Teorema 4.11 vemos que  $(\delta, W_\delta, W_\delta)$  es permisible por 7. Como  $v(V_\beta) = v(W_\delta) - v(U_\beta) = v(W_\delta)$  por 3,  $(\delta, W_\delta, V_\beta)$  es permisible por 3. Sea  $\lambda_\beta = 1 + 2\lambda$ . Por 1,  $(\delta, W_\delta + 2\lambda W_\delta, V_\beta) = (\delta, \lambda_\beta W_\delta, V_\beta)$  es permisible. Finalmente por 4,  $(\beta, \lambda_\beta W_\delta, V_\beta)$  es permisible. El Teorema 4.12 se deduce entonces del Teorema 4.10 por inducción.  $\square$

#### 4.2.4. Búsqueda en computadora de soluciones simétricas.

Si  $\text{mcd}(n, 6) = 1$  y  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , i.e. si  $n \equiv 1 \pmod{12}$  ó  $n \equiv 5 \pmod{12}$ , pero  $n$  tiene factores primos  $\equiv 3 \pmod{4}$ , entonces nada se sabe de las posibles soluciones. Knuth sugirió que para valores pequeños de  $n$ , se podrían encontrar soluciones simétricas mediante una búsqueda en computadora.

El método de ataque más simple sería un algoritmo simple de “backtrack” intentando todas las posibilidades. Aún para el primer caso desconocido,  $n = 49$ , esto sería mucho trabajo computacional. En esta sección describimos algunas modificaciones al algoritmo que lo acelerará. A lo largo de la sección,  $n = 4q + 1$ .

Nuestras herramientas principales son los Teoremas 4.5 y 4.6. Por el Teorema 4.6 es suficiente con buscar soluciones para las que  $1 \leq r_i < s_i \leq 2q$ . Por el Teorema 4.5 nuestro problema es encontrar enteros  $r_i, s_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, q$ , tales que

$$1 \leq r_i < s_i \leq 2q \text{ para } i = 1, 2, \dots, q, \quad (4.19)$$

$$\bigcup_{i=1}^q \{r_i, s_i\} = \{1, 2, \dots, 2q\} \quad (4.20)$$

y

$$\bigcup_{i=1}^q \{\widetilde{s_i - r_i}, \widetilde{s_i + r_i}\} = \{1, 2, \dots, 2q\} \quad (4.21)$$

se satisfacen.

*Definición 4.10.* Una solución  $\langle 0 \rangle \cup \bigcup_{i=1}^q \langle r_i, s_i \rangle$  que satisface (4.19) es *normal*.

Como  $0 < s_i + r_i < n$ , tenemos que

$$\widetilde{s_i + r_i} = \text{mín}\{s_i + r_i, n - s_i - r_i\}. \quad (4.22)$$

Mas aun,  $0 < s_i - r_i < 2q$  y así

$$\widetilde{s_i - r_i} = s_i - r_i. \quad (4.23)$$

Por lo tanto podemos reescribir (4.21) como

$$\bigcup_{i=1}^q \{r_i, s_i, \text{mín}\{s_i + r_i, n - s_i - r_i\}\} = \{1, 2, \dots, 2q\}. \quad (4.24)$$

Finalmente no es una restricción el asumir que

$$r_1 < r_2 < \dots < r_q. \quad (4.25)$$

**Teorema 4.13.** Si  $S = \langle 0 \rangle \cup \bigcup_{i=1}^q \langle r_i, s_i \rangle$  es una  $n$ -solución simétrica normal, entonces

$$\sum_{i=1}^q r_i = \frac{1}{3}q(2q+1).$$

*Demostración.* Sea  $N = \frac{1}{3}q(2q+1)$  y sea

$$\sigma(S) = \sum_{i=1}^q r_i, \rho(S) = \sum_{i=1}^q s_i.$$

Como  $S$  es una solución, satisface (4.20). De ahí que

$$\sigma(S) + \rho(S) = \sum_{i=1}^{2q} i = 2q(2q+1)/2 = 3N. \quad (4.26)$$

Sea

$$E(S) = \langle 0 \rangle \cup \bigcup_{i=1}^q \langle \widetilde{s_i - r_i}, \widetilde{s_i + r_i} \rangle.$$

Por los Teoremas 4.6 y 4.8,  $E(S)$  es una  $n$ -solución simétrica ya que se puede obtener de  $D(S)$  usando el Teorema 4.6 repetidamente (cero o más veces). Mostraremos que  $E(S)$  es normal. Como  $r_i > 0$ , tenemos que  $s_i - r_i < s_i + r_i$ , y como  $s_i \leq 2q = \frac{1}{2}(n-1)$ , tenemos que  $s_i - r_i < n - s_i - r_i$ . Por (4.22) y (4.23),

$$\widetilde{s_i - r_i} = s_i - r_i < \min\{s_i + r_i, n - s_i - r_i\} = \widetilde{s_i + r_i}.$$

Mas aun, por (4.23) y (4.26),

$$\begin{aligned} \sigma(E(S)) &= \sum_{i=1}^q (s_i - r_i) \\ &= \rho(S) - \sigma(S) \\ &= 3N - \sigma(S) - \sigma(S) \\ &= N - 2(\sigma(S) - N). \end{aligned}$$

Usando  $E$  repetidamente, tenemos, por inducción, soluciones normales  $E^k(S)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , y

$$\sigma(E^k(S)) = N + (-2)^k(\sigma(S) - N). \quad (4.27)$$

Como  $\sigma(E^k(S)) > 0$  para toda  $k$ , (4.27) implica que  $\sigma(S) = N$ .  $\square$

Del Teorema 4.13 podemos derivar algunas relaciones que restringirán más el número de casos en los que tenemos que buscar.

**Teorema 4.14.** *Sea  $S = \langle 0 \rangle \cup \bigcup_{i=1}^q \langle r_i, s_i \rangle$  una  $n$ -solución normal simétrica que satisface (4.25). Mas aun, sea  $1 \leq j \leq q$  y  $t = \sum_{i=1}^j r_i$ . Entonces*

1.  $r_j \leq 2j - 1$ .
2.  $t \geq j^2 + \frac{1}{3}(q - q^2)$ .
3. Si  $j < 9$ , entonces

$$r_{j+1} \leq -1 + \frac{\frac{1}{3}q(2q+1) - \frac{1}{2}(q-j)(q-j+1) - t}{q-j}.$$

*Demostración.* Para 1, como  $r_i < s_i$  para toda  $i$ , el conjunto  $\{1, 2, \dots, 2j-1\}$  debe contener al menos  $j$   $r_i$ 's. Por eso  $r_j \leq 2j - 1$ .

Para 2, primero notamos que por 1,

$$\sum_{i=j+1}^q r_i \leq \sum_{i=j+1}^q (2i-1) = q^2 - j^2.$$

Por lo tanto

$$t = \frac{1}{3}q(2q+1) - \sum_{i=j+1}^q r_i \geq \frac{2}{3}q^2 + \frac{1}{3}q - q^2 + j^2.$$

Para 3, sea  $r_{j+1} = k + 1$ . Entonces  $r_{j+1} \geq k + i$  para  $i = 1, 2, \dots, q-j$  y así

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}q(2q+1) &= t + \sum_{i=j+1}^q r_i \geq t + \sum_{i=j+1}^q (k+i) \\ &= t + k(q-j) + \frac{1}{2}(q-j)(q-j+1) \end{aligned}$$

Por esto

$$k \leq \frac{\frac{1}{3}q(2q+1) - \frac{1}{2}(q-j)(q-j+1) - t}{q-j},$$

lo que completa la prueba del Teorema 4.14. □

Usando los resultados de esta sección obtenemos un algoritmo que describimos informalmente con notación estándar de Teoría de Algoritmos (ver e.g. [3]).

1. Sea  $q \leftarrow \frac{1}{4}(n - 1)$ .
2. Sea  $N \leftarrow \frac{1}{3}q(2q + 1)$ ,  $M \leftarrow \frac{1}{3}(q - q^2)$ .
3. Sea  $r_1 \leftarrow 1$ ,  $s_1 \leftarrow 3$ ,  $t \leftarrow 1$ ,  $j \leftarrow 1$ .
4. Sea  $u \leftarrow$  elemento menor de  $\{1, 2, \dots, 2q\} \setminus \{r_1, s_1, \dots, r_j, s_j\}$ .
5. Si  $u < (j + 1)^2 + M - t$  ir a 15.
6. Si  $u + 1 > (N - \frac{1}{2}(q - j)(q - j + 1) - t)/(q - j)$  ir a 15.
7. Sea  $w \leftarrow$  elemento menor de  $\{1, 2, \dots, 2q\} \setminus \{r_1, s_1, \dots, r_j, s_j, u\}$ .
8. Si  $w - u \in \bigcup_{i=1}^j \{s_i - r_i, \min\{s_i + r_i, n - s_i - r_i\}\}$  ir a 12.
9. Si  $\min\{w + u, n - w - u\} \in \bigcup_{i=1}^j \{s_i - r_i, \min\{s_i + r_i, n - s_i - r_i\}\}$  ir a 12.
10.  $j \leftarrow j + 1$ ,  $r_j \leftarrow u$ ,  $s_j \leftarrow w$ ,  $t \leftarrow t + u$ .
11. Si  $j < q$  ir a 4, y si no parar.
12.  $w \leftarrow w + 1$ .
13. Si  $w \in \{r_1, s_1, \dots, r_j, s_j\}$  ir a 12.
14. Si  $w \leq 2q$  ir a 8.
15.  $j \leftarrow j - 1$ ,  $t \leftarrow t - r_{j+1}$
16. Si  $j = 0$  parar.
17.  $w \leftarrow s_j$ .
18. Ir a 12.

Si una solución simétrica es encontrada, el algoritmo se para en 11, si no existe solución simétrica se para en 16. Sólo buscamos soluciones simétricas donde  $s_1 \geq 3$ . Esto no es una restricción, porque si  $S = \langle 0 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle \cup \dots$  es una solución simétrica, entonces  $E(S) = \langle 0 \rangle \cup \langle 1, 3 \rangle \cup \dots$  es otra solución simétrica. En 5 y 6 probamos las propiedades 2 y 3 del Teorema 4.14. En 4, 7 y 13 verificamos (4.20) y en 8 y 9 verificamos (4.21), cf. (4.22) y (4.23).

El algoritmo anterior fue implementado por Klöve, y en [8] reporta que con un programa en FORTRAN basado en este algoritmo se corrió en una NORD-10 en la Universidad de Bergen. El programa se corrió para  $n = 49$  y  $n = 77$ . Para cada valor se obtuvo una solución simétrica (para  $n = 77$  se obtuvo después de un cómputo de 10 horas). Las soluciones están dadas en las siguientes dos tablas:

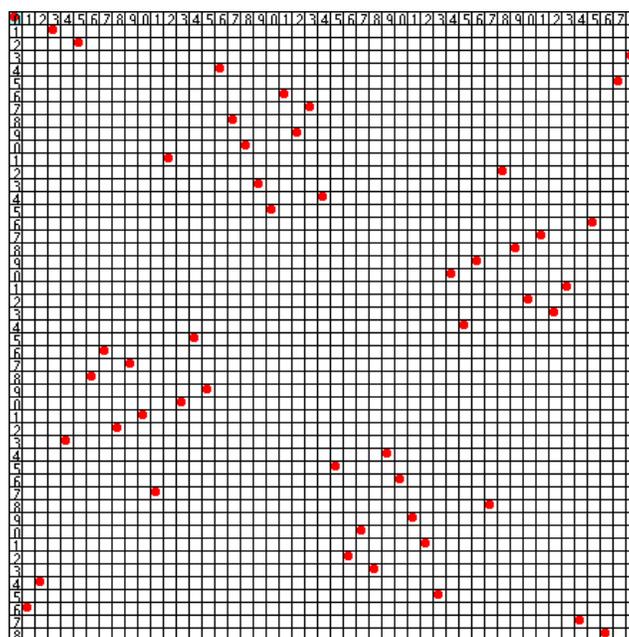


Figura 4.2: Solución simétrica de  $49 \times 49$ .

**Solución para  $n = 49$**

<b>r</b>	1	2	4	6	7	8	9	10	11	13	14	15
<b>s</b>	3	5	16	21	23	17	22	18	12	19	24	20

**Solución para  $n = 77$**

<b>r</b>	1	2	4	6	7	8	10	11	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
<b>s</b>	3	5	9	12	30	35	38	27	32	28	36	25	29	26	34	37	31	33	24

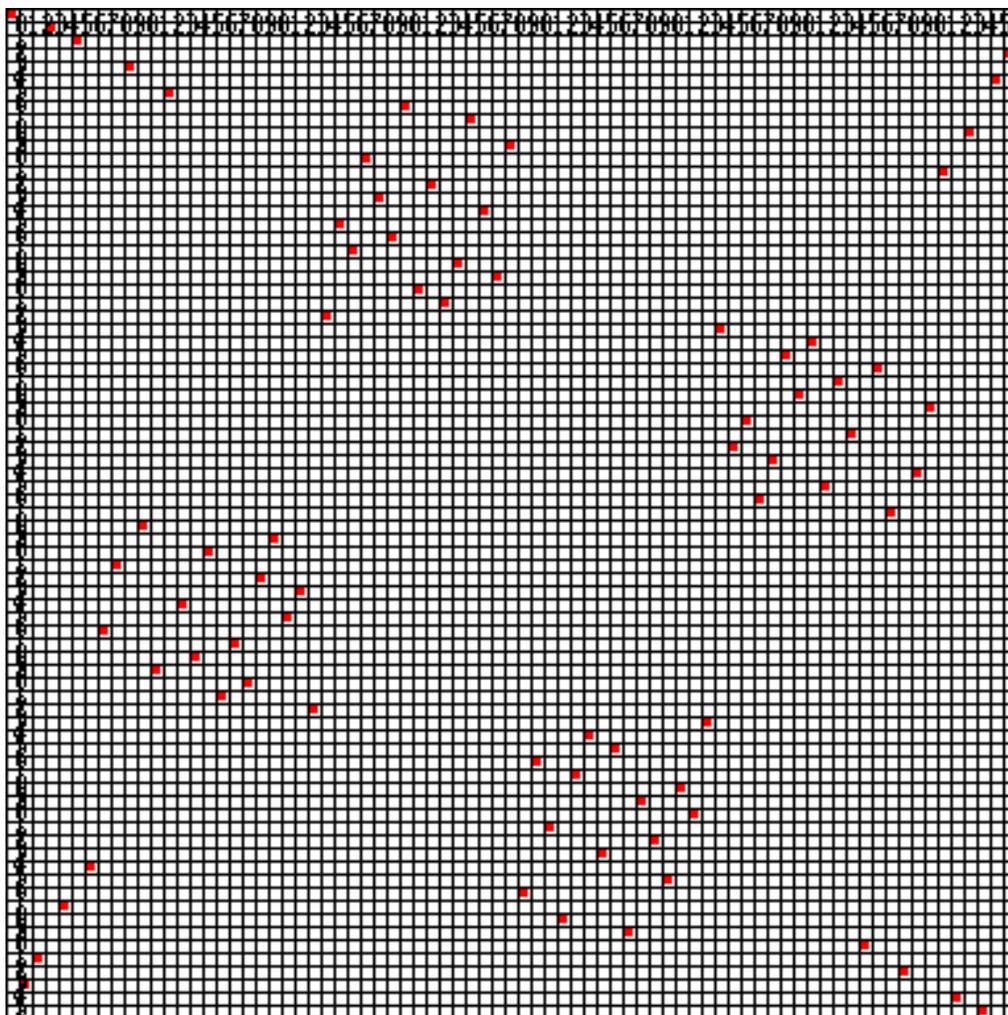


Figura 4.3: Solución simétrica de  $77 \times 77$ .

#### 4.2.5. Soluciones Parciales

En esta sección representamos a cualquier clase de residuo  $[a]_n$  por el representante  $a$  que satisface  $0 \leq a < n$ . Un conjunto  $S = \{(r_i, s_i) \mid i = 1, 2, \dots, n'\}$  donde  $n' \leq n$  y que satisface 1-4 de la Definición 4.1 le llamamos una  $n$ -solución *parcial*. Las  $n$ -soluciones parciales existen para toda  $n$ , e.g. el conjunto  $\{(0, 0)\}$ .

**Teorema 4.15.** 1.  $\widehat{D}(n) = n$  si  $\text{mcd}(n, 6) = 1$ ,

$$2. \widehat{D}(n) = n - 2 \text{ si } \text{mcd}(n, 6) = 3,$$

$$3. n - 3 \leq \widehat{D}(n) \leq n - 1 \text{ si } \text{mcd}(n, 6) = 2,$$

$$4. n - 5 \leq \widehat{D}(n) \leq n - 1 \text{ si } \text{mcd}(n, 6) = 6.$$

*Demostración.* Una solución existe si y sólo si  $\text{mcd}(n, 6) = 1$ . De ahí que  $\widehat{D}(n) = n$  si  $\text{mcd}(n, 6) = 1$  y  $\widehat{D}(n) \leq n - 2$  si  $\text{mcd}(n, 6) = 3$ . Sea  $\text{mcd}(n, 6) = 3$  y supongamos que existe una  $n$ -solución parcial  $S$  con  $n - 1$  elementos. Sea  $r$  la fila vacía,  $s$  la columna vacía,  $d$  la diagonal principal vacía y  $b$  la bi-diagonal vacía. Entonces

$$r + \sum_{i=1}^{n-1} r_i \equiv \sum_{i=1}^n i \equiv \frac{1}{2}n(n+1) \equiv 0 \pmod{n}$$

ya que  $n$  es non. Similarmente

$$s + \sum_{i=1}^{n-1} s_i \equiv 0 \pmod{n},$$

$$d + \sum_{i=1}^{n-1} (s_i - r_i) \equiv 0 \pmod{n},$$

$$b + \sum_{i=1}^{n-1} (s_i + r_i) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Combinando estas congruencias obtenemos

$$d \equiv s - r \pmod{n},$$

$$b \equiv s + r \pmod{n}.$$

Por esto  $S \cup \{(r, s)\}$  es una  $n$ -solución. Esta es una contradicción, ya que  $\widehat{D}(n) \leq n - 1$  en este caso. Por esto  $\widehat{D}(n) \leq n - 2$  cuando  $\text{mcd}(n, 6) = 3$ .

Para probar las cotas inferiores damos  $n$ -soluciones parciales explícitas:

$$\boxed{\mathbf{n = 6l + 2}}$$

$$\{(i, 2i) \mid i = 0, 1, \dots, 3l - 1\} \cup \{(3l + i, 2i + 1) \mid i = 0, 1, \dots, 3l - 2\}$$

$$\boxed{\mathbf{n = 6l + 4}}$$

$$\{(i, 2i) \mid i = 0, 1, \dots, 3l + 1\} \cup \{(3l + 2 + i, 2i + 3) \mid i = 0, 1, \dots, 3l - 2\}$$

$$\boxed{\mathbf{n = 6l + 3}}$$

$$\begin{aligned} & \{(i, 2i) \mid i = 0, 1, \dots, 2l - 1\} \\ & \cup \{(2l + i, 4l + 2 + 2i) \mid i = 0, 1, \dots, l - 2\} \\ & \cup \{(3m - 1 + i, 2i + 3) \mid i = 0, 1, \dots, l - 1\} \\ & \cup \{(4l + 3 + i, 2l + 4 + 2i) \mid i = 0, 1, \dots, 2l - 5\} \end{aligned}$$

Tenemos que mostrar que estas son soluciones parciales. Esto lo hacemos para  $n = 3l + 3$ , los otros casos son similares. Podemos entender la prueba viendo el Cuadro 4.1, donde vemos que no hay 2 elementos que ocupen la misma fila, columna, diagonal o bidiagonal. Por esto tenemos una solución parcial.  $\square$

Nuevamente Klöve reporta que con un programa en FORTRAN se hizo una búsqueda de  $n$ -soluciones parciales para  $n$  par. Para  $n \leq 18$  buscaba todas las posibilidades. La Cuadro 4.2 da  $\widehat{D}(n)$  y la  $y$ -coordenada de una  $n$ -solución parcial con  $\widehat{D}(n)$  elementos para estos valores de  $n$ .

Un  $\emptyset$  en la  $y$ -coordenada significa que la fila está vacía. La cantidad de tiempo de cómputo requerido para encontrar  $\widehat{D}(n)$  probando todos los casos aumenta rápidamente con  $n$ . Klöve reporta que para  $n = 16$  el tiempo de cómputo fue de 54 minutos. Para  $n = 18$  fue de 24 horas y 9 minutos.

Para  $n \leq 18$  las soluciones parciales que dan  $\widehat{D}(n)$  aparecieron temprano durante el cómputo. Por lo tanto el programa se corrió por algún tiempo también para  $20 \leq n \leq 30$  para buscar soluciones parciales que aumenten la cota inferior de  $\widehat{D}(n)$  dada por el Teorema 4.15. Para  $n \leq 26$  tales soluciones parciales se encontraron.

Las cotas inferiores y las soluciones parciales que prueban estas cotas inferiores están también dadas en el Cuadro 4.2. Para  $n = 28$  el programa se corrió por 10 minutos, y para  $n = 30$  por 60 minutos antes de que se interrumpiera sin haber encontrado mejores cotas inferiores para  $\widehat{D}(n)$ .

Cuadro 4.1: Demostración de caso  $n = 3l + 3$  del Teorema 4.15

Conjunto	Filas	Columnas	Diagonales	Bidiagonales
$\{(i, 2i) \mid i = 0, 1, \dots, 2l\}$	$0, 1, \dots, 2l$	$0, 2, \dots, 4l$	$0, 1, \dots, 2l$	$0, 3, \dots, 6l$
$\{(i, 2i+1) \mid i = 2l+1, \dots, 3l\}$	$2l+1, 2l+2, \dots, 3l$	$4l+3, 4l+5, \dots, 6l+1$	$2l+2, 2l+3, \dots, 3l+1$	$1, 4, \dots, 3l-2$
$\{(3l+1+i, 2i+1) \mid i = 0, 1, \dots, 2l\}$	$3l+1, 3l+2, \dots, 5l+1$	$1, 3, \dots, 4l+1$	$3l+3, 3l+4, \dots, 5l+3$	$3l+2, 3l+5, \dots, 6l+2,$ $2, 5, \dots, 3l-1$
$\{(3l+1+i, 2i) \mid i = 2l+2, \dots, 3l\}$	$5l+3, 5l+4, \dots, 6l+1$	$4l+4, 4l+6, \dots, 6l$	$5l+4, 5l+5, \dots, 6l+2$	$3l+4, 3l+7, \dots, 6l-2$

Cuadro 4.2: Soluciones parciales.

$n$	$\tilde{D}^{(n)} \geq$	$r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
20	18	1	3	5	2	8	10	12	16	18	20	4	9	19	6	14	7	$\emptyset$	13	15	$\emptyset$								
22	20	1	3	5	2	4	10	15	17	14	7	21	6	8	20	22	19	9	11	$\emptyset$	16	12	$\emptyset$						
24	21	1	3	5	2	4	9	11	13	15	17	23	7	22	8	$\emptyset$	24	6	10	12	16	$\emptyset$	19	14	$\emptyset$				
26	24	1	3	5	2	4	9	11	13	16	20	22	$\emptyset$	25	23	7	24	6	8	10	26	15	17	19	21	18	$\emptyset$		



# Capítulo 5

## Los problemas de Damas en mayores dimensiones.

En este capítulo abordaremos el problema al aumentar la dimensión y consideramos sólo los problemas estándar y el modular de Damas. Empezamos introduciendo al lector en la manera de visualizar este problema en dimensiones mayores. Después seguimos con el mismo análisis formal para las soluciones tanto del problema tradicional como el modular (es notable que para el primer caso, no tengamos referencias). Trataremos de brindar al lector un amplio panorama de la manera en que este tipo de problemas se generalizan a dimensiones mayores a las que estamos acostumbrados. Para empezar recordemos el Capítulo 3, donde ya vimos que para dimensión 3 el tablero es un cubo de cubos. Para dimensiones  $> 3$  la visualización es más complicada y debe hacerse por “secciones”.

El problema tradicional de las  $n$ -Damas en dimensión dos se analizó en el Capítulo 2, enunciando y demostrando el Teorema 2.6. Es sorprendente que para este problema en específico no existe ni una referencia en dimensiones mayores (únicamente hay referencias para el caso *modular*). El problema estándar de las  $n$ -Damas en dimensiones mayores es de hecho un problema abierto. Lo que haremos aquí es un análisis para los primeros valores de  $n$ . El caso modular lo desarrolló Nudelman en [12], y presentaremos estos resultados más adelante. Pero primero debemos entender cómo ataca una Dama en este tipo de tableros multidimensionales. Al aumentar la dimensión, aumentan las posibilidades de definir el ataque de una Dama, por ejemplo, hablaremos de conceptos como planos de ataque, que se refiere al plano por el que ahora la Dama se puede mover en una sola jugada. Uno como jugador esperaría intuitivamente que las piezas se siguieran moviendo “en líneas”, sólo que ahora existe la opción de desplazarse en un ambiente tridimensional, y la mente matemática detecta que

junto con la evolución del tablero también debe de ocurrir una para el movimiento de las piezas.

## 5.1. El ataque de la Dama en $d$ dimensiones.

La Dama en  $d = 2$  dimensiones se movía hacia todas direcciones en línea recta, ya sea horizontal, vertical o (bi)-diagonal, y lo hacía los cuadros que fueran. Podemos observar que la “dimensión” de las líneas de ataque de una Dama es  $1 = d - 1$ . Si  $d \geq 2$ , podemos requerir que la “dimensión” de las nuevas “líneas” de ataque sean de dimensión  $d - 1$ . Por ejemplo, el ataque en 3 dimensiones de una Dama es ahora por “planos” que intersectan a la pieza y entran en su dominio de acción. De hecho surge un nuevo parámetro, pues podríamos requerir que la Dama continuara atacando por líneas de dimensión 1. En general, para  $d \geq 2$ , escogemos un parámetro  $h \in \{1, \dots, d - 1\}$  como la *dimensión de ataque* (a  $d - h$  le llamamos *codimensión* de ataque). Si  $d = 2$  entonces sólo hay una opción:  $h = 1$ , que es el caso que ya tratamos en los capítulos anteriores, i.e. las Damas en 2 dimensiones atacan por líneas rectas, como ya dijimos. En la literatura, i.e. en [12], sólo se considera el caso modular de codimensión = 1. Sin embargo, es posible trabajar con tableros estándar o modulares de codimensión = 2, donde el ataque de la Dama continuaría siendo en líneas rectas. La Figura 5.1 muestra por secciones los diferentes modos de ataque de una Dama en diferentes tipos de tableros de 3 dimensiones. A menos que se indique lo contrario, vamos únicamente a considerar ataques de codimensión 1, es decir por hiperplanos, que es el caso que Scott Nudelman considera en [12].

### 5.1.1. El ataque de otras piezas en $d$ dimensiones.

Podríamos también discutir generalizaciones de ataque de otras piezas del ajedrez y no solamente la Dama. Sin embargo, en el Capítulo 2 se trató con detalle el caso bidimensional de todas las piezas, y al hacerlo observamos que, excepto por la Dama, los problemas de configuraciones maximales eran relativamente sencillos de resolver, y sería el caso en dimensiones mayores, aún cuando obviamente habría un grado de dificultad mayor. Por esto, nos enfocaremos únicamente en las Damas.

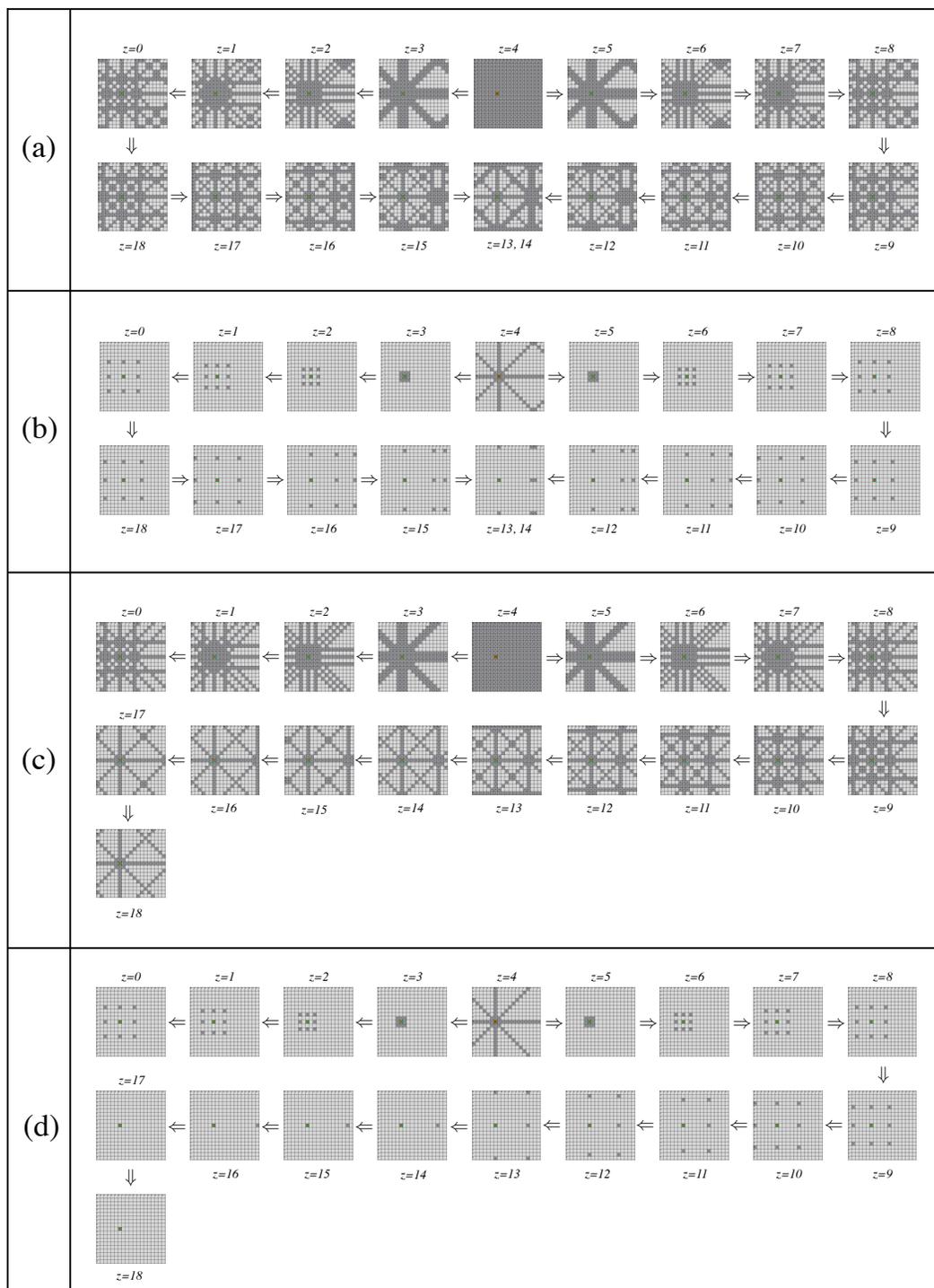


Figura 5.1: Diferentes ataques de una Dama en un tablero tridimensional de  $19 \times 19 \times 19$ , colocada en la posición  $(6, 9, 4)$ . Los tableros son de distintos tipos: (a) Modular, codimensión 1. (b) Modular, codimensión 2. (c) Estándar, codimensión 1. (d) Estándar, codimensión 2.

## 5.2. El problema modular de codimensión 1 de las $n$ -Damas.

En esta sección vamos a presentar los resultados que se conocen en dimensiones mayores. Nos basamos principalmente en [12]. También daremos algunas generalizaciones de resultados de Klöve que presentamos para dos dimensiones en capítulos anteriores.

### 5.2.1. Caso bidimensional.

Enunciemos como resumen los resultados de Klöve de los capítulos anteriores de configuraciones maximales de Damas en tableros modulares de dimensión 2, es decir, el Teorema 4.15.

**Teorema 5.1.** 1.  $\widehat{D}(n, 2) = n$  si  $\text{mcd}(n, 6) = 1$ .

2.  $\widehat{D}(n, 2) = n - 1$  si  $\text{mcd}(n, 12) = 2$ .

3.  $\widehat{D}(n, 2) = n - 2$  en otro caso.

Recordemos también cómo se caracterizaba el que dos Damas se atacaran mutuamente. En el problema bidimensional modular de las  $n$ -Damas, dos Damas localizadas en  $(x_1, x_2)$  y  $(y_1, y_2)$  respectivamente, se atacan una a la otra si alguna de las siguientes condiciones se satisface:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv y_1 \pmod{n} \\ x_2 &\equiv y_2 \pmod{n} \\ x_1 + x_2 &\equiv y_1 + y_2 \pmod{n} \\ x_1 - x_2 &\equiv y_1 - y_2 \pmod{n} \end{aligned}$$

En otras palabras, las dos Damas se atacan entre sí si son colineales en alguna de las cuatro líneas estándar. Podemos resumir estas cuatro ecuaciones diciendo que una Dama localizada en  $(x_1, x_2)$  ataca a  $(y_1, y_2)$  si para alguna elección de  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 0, 1\}$  donde ambas no sean cero, obtenemos lo siguiente:

$$\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 \equiv \varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 y_2 \pmod{n}.$$

### 5.2.2. Caso multidimensional.

La compacta formulación de ataque de la subsección anterior nos lleva a una útil generalización del problema de Damas en dimensiones mayores, a saber, la que define como ataque a la *subdivisión baricéntrica del octaedro*, que corresponde a la que anteriormente denominamos *codimensión 1* y que será la que asumiremos en esta sección. El octaedro de dimensión dos es un cuadrado. Su subdivisión baricéntrica consiste en enviar del centro del octaedro vectores a los baricentros de las caras de dimensiones menores, y los hiperplanos perpendiculares son los que corresponden a los hiperplanos de ataque, como se muestra en la Figura 5.2.

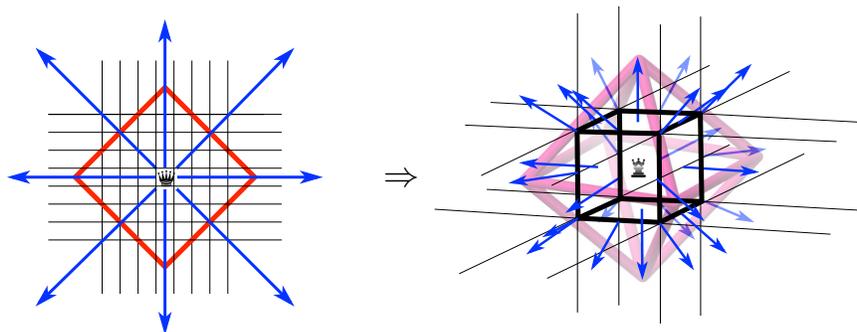


Figura 5.2: Los vectores perpendiculares a los planos de ataque de una Dama en dos y tres dimensiones forman como un “asterisco”.

Decimos que dos Damas se atacan una a la otra en  $d$ -dimensiones si se localizan en un hiperplano en común. En otras palabras las Damas localizadas en  $x = (x_1, \dots, x_d)$  y  $y = (y_1, \dots, y_d)$  se atacan entre sí si existe algún  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$  distinto del vector cero, con  $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ , tal que

$$\varepsilon \cdot x \equiv \varepsilon \cdot y \pmod{n}$$

donde

$$\varepsilon \cdot x = \sum_{i=1}^d \varepsilon_i x_i.$$

De esta definición vemos que el número de hiperplanos atacados por una Dama aumenta a medida que aumentan las dimensiones. Denotemos por  $O_d$  al conjunto de  $\varepsilon$ 's distintos de cero, es decir,

$$O_d = \{-1, 0, 1\}^d \setminus \{(0, \dots, 0)\}.$$

En particular tenemos el resultado siguiente.

**Proposición 5.1.** *Una Dama en un tablero modular  $d$ -dimensional ataca en  $\frac{1}{2}(3^d - 1)$  hiperplanos.*

*Demostración.* Consideremos todos los  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ . Claramente hay  $3^d - 1$  posibilidades, sin embargo  $\varepsilon$  y  $-\varepsilon$  definen al mismo hiperplano de ataque.  $\square$

Ya que cada hiperplano de ataque puede ser representado por dos  $\varepsilon$  diferentes, solamente trataremos con el vector cuya primer  $\varepsilon_i$  distinta a cero es 1.

*Definición 5.1.* Una *solución lineal completa* del problema de las  $n$ -Damas en  $d$ -dimensiones es un conjunto de  $n$  Damas no atacantes en  $\widehat{\mathcal{T}}_n^d$ , donde la  $i$ -ésima Dama está localizada en  $(c_1 i + e_1, \dots, c_d i + e_d)$ , con  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que todos los  $e_i$ 's son cero por la propiedad invariante del tablero modular. Con estas definiciones podemos ahora considerar el problema de maximizar el número de Damas no-atacantes que se pueden poner en un tablero  $d$ -dimensional modular de tamaño  $n$ . Empezamos notando que,

$$\widehat{D}(n, d) \leq n$$

debido al principio del palomar. Además

$$\widehat{D}(n, d + 1) \leq \widehat{D}(n, d) \quad (5.1)$$

ya que cualquier conjunto de Damas no-atacantes en  $(d + 1)$  dimensiones es también un conjunto de Damas no-atacantes en  $d$ -dimensiones simplemente ignorando la última coordenada (i.e. proyectando)

### 5.2.3. Construyendo una solución completa.

**Teorema 5.2.** *Si  $\text{mcd}(n, (2^d - 1)!) = 1$ , entonces  $\widehat{D}(n, d) = n$ .*

*Demostración.* Considérese el conjunto de  $n$  Damas localizadas en  $(i, 2i, \dots, 2^{d-1}i)$ , donde  $i = 1, 2, \dots, n$ . Afirmamos que ninguna de estas Damas ataca a otra. Supóngase más bien que existen  $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$  distintas y algún  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$  tales que

$$\left( \sum_{i=1}^d \varepsilon_i 2^{i-1} \right) j \equiv \left( \sum_{i=1}^d \varepsilon_i 2^{i-1} \right) k \pmod{n}. \quad (5.2)$$

Ya que

$$\left| \sum_{i=1}^d \varepsilon_i 2^{i-1} \right| \leq 2^d - 1,$$

vemos que la suma anterior es prima relativa con  $n$ , por lo que la podemos cancelar de la Ecuación (5.2) para obtener

$$j \equiv k \pmod{n},$$

una contradicción. □

### 5.2.4. Condiciones de existencia de soluciones completas.

En la subsección precedente vimos que una solución lineal completa existe para ciertos valores de  $n$ . En esta sección encontramos restricciones para la existencia de soluciones completas en todos los casos no construidos previamente. Para hacer esto, necesitaremos el siguiente lema.

**Lema 5.1.** *Sea  $S$  cualquier subconjunto de  $k$  elementos de  $\{1, 2, \dots, m\}$ . Si  $2^k > m$ , entonces 2 conjuntos disjuntos de  $S$  tienen la misma suma módulo  $m$ .*

*Demostración.* Hay  $2^k$  subconjuntos de  $S$ . Como  $2^k > m$ , por el principio del palomar, dos subconjuntos de  $S$  tendrán la misma suma módulo  $m$ . Si removemos todos los elementos en común de estos dos subconjuntos, van a ser disjuntos y aún serán congruentes módulo  $m$ . □

El Lema 5.1 nos lleva directamente a dos resultados. El primero muestra que si  $n$  es lo suficientemente chica, entonces no se pueden colocar dos Damas no-atacantes en el tablero. Esto tendrá implicaciones más profundas que serán discutidas más adelante en este artículo.

**Teorema 5.3.** *Si  $n \leq 2^d - 1$ , entonces  $\widehat{D}(n, d) = 1$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, colocamos a la primera Dama en el origen. Asumamos que podemos colocar una segunda Dama no-atacante en el tablero. La locación de la segunda Dama la denotamos con  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ . Ya que  $n \leq 2^d - 1$ , del Lema 5 tenemos que hay dos subconjuntos disjuntos de  $x_i$ 's cuyas sumas son congruentes módulo  $m$ . Denotemos estos dos subconjuntos como  $A$  y  $B$ . Considérese el hiperplano generado por  $\varepsilon$ , en donde  $\varepsilon_i$  es 1 si  $x_i \in A$ , -1 si  $x_i \in B$  y 0 en otro caso. Entonces las dos Damas se atacan entre sí en este hiperplano, ya que  $\varepsilon \cdot x \equiv 0 \pmod{n}$ . De ahí que  $\widehat{D}(n, d) = 1$ . □

Una segunda consecuencia del Lema 5.1 nos provee con una versión inversa débil del Teorema 5.3. Los casos construidos en este teorema son los únicos casos constructibles por este método. Más aún, si una solución completa existe para cualquier otro valor de  $n$ , la solución sería no-lineal. Veamos.

**Teorema 5.4.** *Si  $\text{mcd}(n, (2^d - 1)!) > 1$ , entonces no existe una solución lineal completa en el tablero modular de tamaño  $n$  en  $d$ -dimensiones.*

*Demostración.* Sea  $p$  un primo que divide a  $\text{mcd}(n, (2^d - 1)!)$ . Entonces  $p \mid n$  y  $p \leq 2^d - 1$ . Supongamos que hay una solución lineal completa,  $(c_1i, c_2i, \dots, c_di)$  donde  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sabemos que todas las  $c$ 's son distintas. Si no, existirían  $j$  y  $k$  tales que  $c_j = c_k$ , y todas las Damas estarían en el hiperplano definido por

$$x_j - x_k \equiv 0 \pmod{n}.$$

Consideremos el conjunto  $C = \{c_1, \dots, c_d\}$ . Ya que  $p \leq 2^d - 1$ , dos subconjuntos disjuntos de  $C$  tienen la misma suma módulo  $p$ . Los denotaremos con  $A$  y  $B$ . Ahora definimos el hiperplano tal que  $\varepsilon_j = 1$  si  $c_j \in A$ ,  $= -1$  si  $c_j \in B$ , e  $= 0$  en otro caso. En este hiperplano para alguna  $m$  ocurre

$$\sum_{i=1}^d \varepsilon_i c_j \equiv mp \pmod{n}.$$

Consideremos cualquier Dama en la solución lineal donde  $i = \frac{an}{p}$ ,  $a = 1, 2, \dots, p$ . Entonces tenemos que

$$\sum_{i=1}^d \varepsilon_i c_j \equiv 0 \pmod{n}.$$

Por lo tanto todas las  $p$  Damas se atacan entre sí. Por lo tanto no puede haber una solución lineal completa en este caso.  $\square$

Ahora enfoquemos nuestra atención a un resultado más fuerte que nos advierte cuándo no existe solución completa. Pero primero necesitamos los siguientes lemas

**Lema 5.2.** *Si  $p$  es un primo non, entonces para toda  $\alpha$ ,*

$$\sum_{i=1}^{p^\alpha} i^{p-1} \not\equiv 0 \pmod{p^\alpha}.$$

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre  $\alpha$ . Para  $\alpha = 1$ , por el Teorema Pequeño de Fermat<sup>1</sup>, tenemos que si  $p \nmid i$ , entonces

$$i^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

De ahí que

$$\sum_{i=1}^p i^{p-1} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} i^{p-1} \equiv \sum_{i=1}^{p-1} 1 \equiv p-1 \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Supongamos que la afirmación es verdadera para  $\alpha - 1$ . Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p^\alpha} i^{p-1} &\equiv \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=1}^{p^{\alpha-1}} (i + jp^{\alpha-1})^{p-1} && \pmod{p^\alpha} \\ &\equiv \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=1}^{p^{\alpha-1}} \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} j^k p^{k(\alpha-1)} i^{p-1-k} && \pmod{p^\alpha} \end{aligned}$$

y si  $\alpha \geq 2$  y  $k \geq 2$ , entonces

$$p^{k(\alpha-1)} \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$$

y la suma se simplifica a

$$\sum_{i=1}^{p^\alpha} i^{p-1} \equiv \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=1}^{p^{\alpha-1}} (i^{p-1} + j(p-1)p^{\alpha-1}i^{p-2}) \pmod{p^\alpha}.$$

Sumando sobre el índice  $j$  obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p^\alpha} i^{p-1} &\equiv p \sum_{i=1}^{p^{\alpha-1}} i^{p-1} + \frac{1}{2}(p-1)^2 p^\alpha \sum_{i=1}^{p^{\alpha-1}} i^{p-2} && \pmod{p^\alpha} \\ &\equiv p \sum_{i=1}^{p^{\alpha-1}} i^{p-1} && \pmod{p^\alpha}. \end{aligned}$$

Por inducción sabemos que

$$\sum_{i=1}^{p^{\alpha-1}} i^{p-1} \not\equiv 0 \pmod{p^{\alpha-1}},$$

por lo que obtenemos

$$\sum_{i=1}^{p^\alpha} i^{p-1} \not\equiv 0 \pmod{p^\alpha}.$$

□

<sup>1</sup>Pequeño Teorema de Fermat. Si  $p$  es primo, entonces  $a^p \equiv a \pmod{p}$ .

**Lema 5.3.** Si  $p$  es un primo no n y  $\sum_{i=1}^n i^{p-1} \equiv 0 \pmod{n}$ , entonces  $p \nmid n$ .

*Demostración.* Supongamos que  $p \mid n$  y escribamos  $n = p^\alpha m$  donde  $p \nmid m$ . Entonces,

$$0 \equiv \sum_{i=1}^n i^{p-1} \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{p^\alpha} (i + jp^\alpha)^{p-1} \equiv m \sum_{i=1}^{p^\alpha} i^{p-1} \pmod{p^\alpha}.$$

Como  $m$  es primo relativo con  $p$ , podemos cancelar la  $m$  para obtener

$$\sum_{i=1}^{p^\alpha} i^{p-1} \equiv 0 \pmod{p^\alpha},$$

lo que contradice el Lema 5.2. □

El Lema 5.3 es un ingrediente esencial en la prueba del teorema final de esta sección. Ahora nos es necesario romper al conjunto de hiperplanos de ataque en varias familias, basándose en el número de  $\varepsilon_i$ 's distintos de cero en su representación.  $\tau_s$  denota al conjunto de todas las  $\varepsilon$  tales que exactamente  $s$  de los componentes de  $\varepsilon$  no son cero. El último paso en la preparación de la prueba es la siguiente identidad algebraica.

**Lema 5.4.** Sea  $x = (x_1, \dots, x_d)$ , entonces

$$\sum_{i=1}^d (-2)^{d-1} \sum_{\forall \varepsilon \in \tau_i} (\varepsilon \cdot x)^{2d-2} = 0$$

*Demostración.* Considérese el polinomio dado por la suma interna:

$$\sum_{\forall \varepsilon \in \tau_i} (\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_d x_d)^{2d-2}.$$

Solamente contiene términos de la forma  $x_{j_1}^{\alpha_1}, \dots, x_{j_k}^{\alpha_k}$ , donde todos los exponentes son pares. Cualquier término con exponente no ocurre exactamente las mismas veces con signo positivo así como con signo negativo, y suman cero. Pero un término con todos sus exponentes pares siempre ocurre con signo positivo en esta suma. Considérese el término  $x_{j_1}^{2\alpha_1}, \dots, x_{j_k}^{2\alpha_k}$ , donde  $\alpha_i > 0$ , y  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = d - 1$ . Siempre ocurrirá con el mismo coeficiente en la expansión

de  $\binom{d-k}{i-k}2^{i-1}$  términos de la suma. Cada uno de estos términos es multiplicado por  $(-2)^{d-i}$  de la suma exterior. Por lo tanto el número de veces que el término ocurre es

$$\sum_{i=1}^d (-2)^{d-1} \binom{d-k}{i-k} 2^{i-1} = (-1)^i 2^{d-1} \sum_{i=k}^d (-1)^i \binom{d-k}{i-k} = 0,$$

de donde sigue que la suma total es cero.  $\square$

Mencionamos un punto final antes de probar el siguiente teorema. Considérese cualquier hiperplano de ataque perpendicular a  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$  y un conjunto de  $n$  Damas no-atacantes donde la  $i$ -ésima Dama está localizada en  $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_d^{(i)})$ . Entonces para  $i \neq j$ ,

$$\varepsilon \cdot x^{(i)} \neq \varepsilon \cdot x^{(j)},$$

ya que no hay dos que se ataquen entre sí. Entonces el conjunto

$$\{\varepsilon \cdot x^{(i)} \pmod n, i = 1, \dots, n\}$$

es meramente una permutación de los números  $1, \dots, n$ .

**Teorema 5.5.** Si  $\widehat{D}(n, d) = n$ , entonces  $\text{mcd}(n, (2d-1)!) = 1$ .

*Demostración.* Procederemos por inducción sobre  $d$ . El caso base  $d = 2$  es el resultado bien conocido del problema original modular de las  $n$ -Damas que vimos anteriormente. Asumamos que la afirmación es verdadera para  $d-1$ . Consideramos dos casos: (i)  $2d-1$  es compuesto y (ii)  $2d-1$  es primo.

Caso (i). Por la ecuación (5.1), sabemos que como  $\widehat{D}(n, d) = n$ , entonces  $\widehat{D}(n, d-1) = n$ . Entonces por hipótesis inductiva  $\text{mcd}(n, (2d-3)!) = 1$ . Pero como  $2d-1$  no es primo, todos los factores primos de  $(2d-1)!$  han ocurrido en  $(2d-3)!$ , por lo tanto obtenemos la condición deseada  $\text{mcd}(n, (2d-1)!) = 1$ .

Caso (ii). De manera casi idéntica al caso (i), obtenemos el resultado de  $\text{mcd}(n, (2d-2)!) = 1$ . Entonces lo único que falta por mostrar es que  $2d-1$  es primo y  $\widehat{D}(n, d) = n$ , entonces  $2d-1$  no divide a  $n$ . Considérese la siguiente ecuación. Del Lema 5.4 sabemos que la suma sobre el índice  $i$  es cero. De ahí que

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^d (-2)^{d-i} \sum_{\forall \varepsilon \in \tau_i} (\varepsilon \cdot x^{(j)})^{2d-2} = 0.$$

Cambiando el orden de la sumatoria, vemos que

$$\sum_{i=1}^d (-2)^{d-i} \sum_{\forall \epsilon \in \tau_i} \sum_{j=1}^n (\epsilon \cdot x^{(j)})^{2d-2} \equiv 0 \pmod{n}.$$

Ya que los números  $\epsilon \cdot x^{(j)}$ , para  $j = 1, \dots, n$  representan una permutación de  $1, \dots, n$ , la suma más interna se simplifica a

$$\sum_{j=1}^n (\epsilon \cdot x^{(j)})^{2d-2} \equiv \sum_{j=1}^n j^{2d-2} \pmod{n}.$$

Combinando el resultado anterior con el hecho de que existen  $\binom{d}{i} 2^{i-1}$  elementos en  $\tau_i$ , obtenemos

$$\sum_{i=1}^d (-2)^{d-i} \binom{d}{i} 2^{i-1} \equiv \sum_{j=1}^n j^{2d-2} \equiv 0 \pmod{n}.$$

Pero sabemos, por el caso base, que  $n$  es non, por lo que

$$\sum_{j=1}^n j^{2d-2} \equiv 0 \pmod{n}.$$

Por lo tanto, por el Lema 5.3,  $2d - 1$  no divide a  $n$ . Concluimos entonces que

$$\text{mcd}(n, (2^d - 1)!) = 1.$$

□

### 5.2.5. Discusión

Los resultados previos sirven para darnos un conocimiento para cuándo una solución completa puede existir. Si una solución completa existe para el problema modular de las  $n$ -Damas en  $d$  dimensiones, ningún primo menor que  $2d$  puede dividir a  $n$ . En dos dimensiones,  $2 \cdot 2 = 2^2$ , por lo que tenemos una caracterización completa de cuándo existe una solución completa. En dimensiones mayores estos dos casos divergen, y existe una clase de enteros  $n$  donde una solución puede existir, pero no fue posible generar una. Sin embargo, pudimos mostrar que no existen soluciones lineales para esta clase de  $n$ 's. Como en dos dimensiones vimos que cuando una solución existe, entonces también existe una solución lineal, entonces uno podría creer que esto sigue ocurriendo en dimensiones mayores, es decir, no confiar en que para alguna  $n$  pueda existir una solución completa sin que exista una solución lineal. Esto llevó a Nudelman a enunciar la conjetura siguiente:

*Conjetura 5.1* (S. NUDELMAN).  $\widehat{D}(n, d) = n$  si y sólo si  $\text{mcd}(n, (2^d - 1)!) = 1$ .

En el caso bidimensional existen soluciones completas si y sólo si 2 y 3 no dividen a  $n$ . Si este tipo de requerimientos de divisibilidad se generalizaran a dimensiones mayores, el Teorema 5.5 implicaría la conjetura anterior. Quedan aún varias preguntas abiertas. La determinación de  $\widehat{D}(n, d)$  en el caso de soluciones incompletas está aún muy abierta:

¿Para algún entero  $m_d$  dependiente de  $d$ , se puede determinar  $\widehat{D}(n, d)$  con base en el valor de  $n$  módulo  $m_d$ , en una manera similar a la del caso bidimensional [7, 8, 6, 11]?

También será interesante determinar una cota inferior para  $\widehat{D}(n, d)$ , independiente de cualquier valor modular de  $n$ . Por ejemplo, en dos dimensiones sabemos que  $\widehat{D}(n, 2) \geq n - 2$  (ver [11]). ¿Acaso existe algún  $\delta_d$  tal que  $\widehat{D}(n, d) \geq n - \delta_d$ ? Si lo hay, el Teorema 5.5 implica que  $\delta_d \leq 2^d - 2$ .

Otra interesante línea de investigación sería generalizar el problema original de las  $n$ -Damas a dimensiones mayores, usando hiperplanos de ataque análogos. ¿Existe algún entero  $n_d$ , tal que si  $n \geq n_d$ , entonces  $n$  Damas no atacantes pueden colocarse en el tablero no modular en  $d$ -dimensiones? Ya vimos que en dos dimensiones esto ocurre<sup>2</sup>. Sólo sabemos que una solución completa al problema modular también sirve como una solución al problema no modular también.

La última sección de este capítulo tratará el caso del último párrafo de esta discusión, es decir, el caso estándar en más dimensiones. Pero primero veremos algunos resultados de Klöve, principalmente de [8], que se generalizan en forma relativamente directa a dimensiones mayores.

### 5.3. Generalizaciones de resultados de Klöve.

Ya hemos visto la generalización de Nudelman [12] del problema modular de las  $n$ -Damas a dimensiones mayores. En el Capítulo 4 vimos principalmente resultados bidimensionales del problema modular de las  $n$ -Damas, desarrollados por Klöve [7, 8] y es natural preguntarse cuáles de estos resultados admiten una generalización a dimensiones mayores. Por ejemplo, el Teorema 4.1 hasta ahora no ha sido posible probarlo en dimensiones mayores a dos (es

<sup>2</sup>Nudelman reporta que Ahrens mostró  $n_2 = 4$ . La demostración que dimos del Teorema 2.6 es independiente de la de Ahrens.

esencialmente la Conjetura de Nudelman). En esta sección presentamos algunos resultados de Klöve, principalmente de [8], que admiten una generalización a dimensiones arbitrarias. Observaremos que la Conjetura de Nudelman es verdadera para la clase más grande de soluciones polinomiales, que son soluciones que presentamos como una generalización natural de las soluciones bidimensionales desarrolladas por Klöve en [7].

El primer resultado que generalizamos es el Teorema 4.2.

**Teorema 5.6.** *Sean  $r$  y  $s$  dos enteros positivos. Supongamos que  $n = \prod_{k=1}^s p_k^{\alpha_k}$ , con  $\alpha_k \geq 1$  para todo  $k \in [s]$ , y sea  $P_n = \prod_{k=1}^s p_k$ . Para cada  $j = 0, \dots, r$ , sea  $a^{(j)} = (a_1^{(j)}, \dots, a_d^{(j)}) \in \mathbb{Z}_n^d$  sea tal que*

1.  $\text{mcd}(\epsilon \cdot a^{(1)}, n) = 1$  para todo  $\epsilon \in O_d$ .
2.  $a_i^{(j)} \equiv 0 \pmod{P_n}$  para cada  $i \in [d]$  y  $j \geq 2$ .

Para cada  $i \in [d]$ , sea  $f_i(x) = \sum_{j=0}^r a_i^{(j)} x^j$  y sea

$$S = \{f(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x)) \in \mathbb{Z}_n^d : x \in \mathbb{Z}_n\}.$$

Entonces  $S$  es una  $(n, d)$ -solución completa.

*Demostración.* Supongamos que para  $x, y \in \mathbb{Z}_n$  y  $\epsilon \in O_d$ , sucede que

$$\epsilon \cdot f(x) \equiv \epsilon \cdot f(y) \pmod{n}.$$

Entonces  $\sum_{i=1}^d \epsilon_i f_i(x) \equiv \sum_{i=1}^d \epsilon_i f_i(y) \pmod{n}$ , lo que implica que

$$\sum_{i=1}^d \epsilon_i \left( \sum_{j=0}^r a_i^{(j)} x^j \right) \equiv \sum_{i=1}^d \epsilon_i \left( \sum_{j=0}^r a_i^{(j)} y^j \right) \pmod{n}$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^d \epsilon_i \left( \sum_{j=0}^r a_i^{(j)} (x^j - y^j) \right) \pmod{n}. \quad (5.3)$$

Si

$$M_j = \sum_{j=2}^r \left( \sum_{k=0}^{j-1} x^k y^{j-k-1} \right),$$

entonces (5.3) implica

$$(x - y) \sum_{i=1}^d \epsilon_i (a_i^{(1)}) + M_i \equiv 0 \pmod{n}$$

lo que implica que

$$(x - y)(\epsilon_i \cdot a^{(1)}) + \sum_{i=1}^d \epsilon_i M_i \equiv 0 \pmod{n}. \quad (5.4)$$

Si  $p$  es un primo tal que  $p \mid \text{mcd}(\epsilon \cdot a^{(1)} + \sum_{i=1}^d \epsilon_i M_i, n)$ , entonces  $p \mid n$ , y de ahí  $p \mid P_n$  y  $P_n \mid M_i$  para cada  $i \in [d]$ . Entonces  $p \mid \sum_{i=1}^d \epsilon_i M_i$ , lo que implica que  $p \mid \epsilon \cdot a^{(1)}$ , pero esto es imposible ya que  $\text{mcd}(\epsilon \cdot a^{(1)}, n) = 1$ . Entonces

$$\text{mcd}(\epsilon \cdot a^{(1)} + \sum_{i=1}^d \epsilon_i M_i, n) = 1$$

y por lo tanto (5.4) implica que  $x \equiv y \pmod{n}$ .  $\square$

*Definición 5.2.* Una  $(n, d)$ -solución completa  $S \subset \mathbb{Z}_n^d$  del tipo descrito en el Teorema 5.6, se dice que es una *solución polinomial*. Si, además,  $a_i^j \equiv 0 \pmod{n}$  para todo  $j \geq 2$  y  $i \in [d]$ , entonces se dice que  $S$  es una *solución lineal*.

Una solución lineal existe si y sólo si  $\text{mcd}((2^d - 1)!, n) = 1$  (ver Teorema 5.4). Una solución polinomial existe si y sólo si existe  $a^{(1)} \in \mathbb{Z}^d$  tal que  $\text{mcd}(\epsilon \cdot a^{(1)}, n) = 1$  para todo  $\epsilon \in O_d$ , esto es, si y sólo si una solución lineal existe. Por lo tanto una solución polinomial existe si y sólo si  $\text{mcd}((2^d - 1)!, n) = 1$ . Se mostró en el Teorema 4.3 que el número  $N_n$  de  $(n, 2)$ -soluciones distintas que son polinomiales es

$$N_n = n \prod_{p|n} (p - 3) \prod_{k \geq 1} \frac{n^*}{\text{mcd}(n^*, k!)},$$

donde  $n^* = n/P_n$ . Por ejemplo,  $N_{13} = 130$ . Con un algoritmo de búsqueda exhaustiva encontramos que el número de todas las  $(13, 2)$ -soluciones completas es 4524, por lo tanto existen soluciones no-polinomiales. Para  $n = 5, 7$  y  $11$ , todas las  $(n, 2)$ -soluciones son polinomiales.

Las siguientes dos proposiciones y sus pruebas son generalizaciones directas de las encontradas. La primera generaliza el Lema 4.1.

**Proposición 5.2.** Si  $\{x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_d^{(j)}) : j \in [n]\}$  es una  $(n, d)$ -solución completa y  $k, l_1, \dots, l_d \in \mathbb{Z}$ , con  $\text{mcd}(k, n) = 1$ , entonces

$$\{y^{(j)} = (kx_1^{(j)} + l_1, \dots, kx_d^{(j)} + l_d) : j \in [n]\}$$

es una  $(n, d)$ -solución completa.

*Demostración.* Si  $\epsilon \cdot y^{(j)} \equiv \epsilon \cdot y^{(j')} \pmod{n}$  para algunas  $j, j' \in [n]$  y  $\epsilon \in O_d$ , entonces

$$\sum_{i=1}^d \epsilon_i (kx_i^{(j)} + l_i) \equiv \sum_{i=1}^d \epsilon_i (kx_i^{(j')} + l_i) \pmod{n},$$

lo que implica que

$$\sum_{i=1}^d \epsilon_i kx_i^{(j)} \equiv \sum_{i=1}^d \epsilon_i kx_i^{(j')} \pmod{n},$$

esto es,  $\epsilon \cdot x^{(j)} \equiv \epsilon \cdot x^{(j')} \pmod{n}$ , y por lo tanto  $j = j'$ . □

Para terminar, generalizaremos el Teorema 4.4.

**Proposición 5.3.** Sea

$$S_1 = \{x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_d^{(j)}) : j \in [n]\}$$

una  $(n, d)$ -solución completa y

$$S_2 = \{y^{(k)} = (y_1^{(k)}, \dots, y_d^{(k)}) : k \in [m]\}$$

una  $(m, d)$ -solución completa. Para  $l_r^{(j)} \in \mathbb{Z}$ , con  $j \in [n]$  y  $r \in [d]$ , sea

$$z^{(j,k)} = (n(y_1^{(k)} + l_1^{(j)}) + x_1^{(j)}, \dots, n(y_d^{(k)} + l_d^{(j)}) + x_d^{(j)}).$$

Entonces

$$S_1 \times S_2 = \{z^{(j,k)} : j \in [n] \text{ y } k \in [m]\}$$

es una  $(nm, d)$ -solución completa

*Demostración.* Si  $\epsilon \cdot z^{(j,k)} \equiv \epsilon \cdot z^{(j',k')} \pmod{mn}$  para algunas  $j, j' \in [n]$ ,  $k, k' \in [m]$  y  $\epsilon \in O_d$ , entonces

$$\sum_{i=1}^d \epsilon_i (ny_i^{(k)} + nl_i^{(j)} + x_i^{(j)}) \equiv \sum_{i=1}^d \epsilon_i (ny_i^{(k')} + nl_i^{(j')} + x_i^{(j')}) \pmod{mn}. \quad (5.5)$$

De aquí que

$$n \sum_{i=1}^d \epsilon_i (y_i^{(k)} + l_i^{(j)}) + \sum_{i=1}^d \epsilon_i x_i^{(j)} \equiv n \sum_{i=1}^d \epsilon_i (y_i^{(k')} + l_i^{(j')}) + \sum_{i=1}^d \epsilon_i x_i^{(j')} \pmod{mn},$$

lo que implica que

$$\sum_{i=1}^d \epsilon_i x_i^{(j)} \equiv \sum_{i=1}^d \epsilon_i x_i^{(j')} \pmod{n},$$

y de ahí  $\epsilon \cdot x^{(j)} \equiv \epsilon \cdot x^{(j')} \pmod{n}$ . Entonces  $j = j'$ ,  $x_i^{(j)} = x_i^{(j')}$  y  $l_i^{(j)} = l_i^{(j')}$  para toda  $i \in d$ . Substituyendo en (5.5), y cancelando tenemos

$$n \sum_{i=1}^d \epsilon_i y_i^{(k)} \equiv n \sum_{i=1}^d \epsilon_i y_i^{(k')} \pmod{mn},$$

y de ahí que  $\epsilon \cdot y^{(k)} \equiv \epsilon \cdot y^{(k')} \pmod{m}$ , implicando que  $k = k'$ , y por lo tanto obtenemos que  $z^{(j,k)} = z^{(j',k')}$ .  $\square$

## 5.4. El problema estándar de codimensión uno de las $n$ -Damas

Concluimos este capítulo con una breve sección en donde consideramos el problema de encontrar el máximo número de Damas que podemos colocar en un tablero estándar de dimensiones mayores a 2. De hecho este problema no ha sido resuelto para dimensiones  $\geq 3$ . El resolverlo equivaldría a encontrar un teorema como el Teorema 2.6. Lo que haremos aquí será simplemente exhibir soluciones para los primeros casos, y veremos a partir de ellas cómo aparecen obstrucciones. En la Figura 5.3 observamos las distintas soluciones que hemos encontrado para los primeros valores de  $n$ .

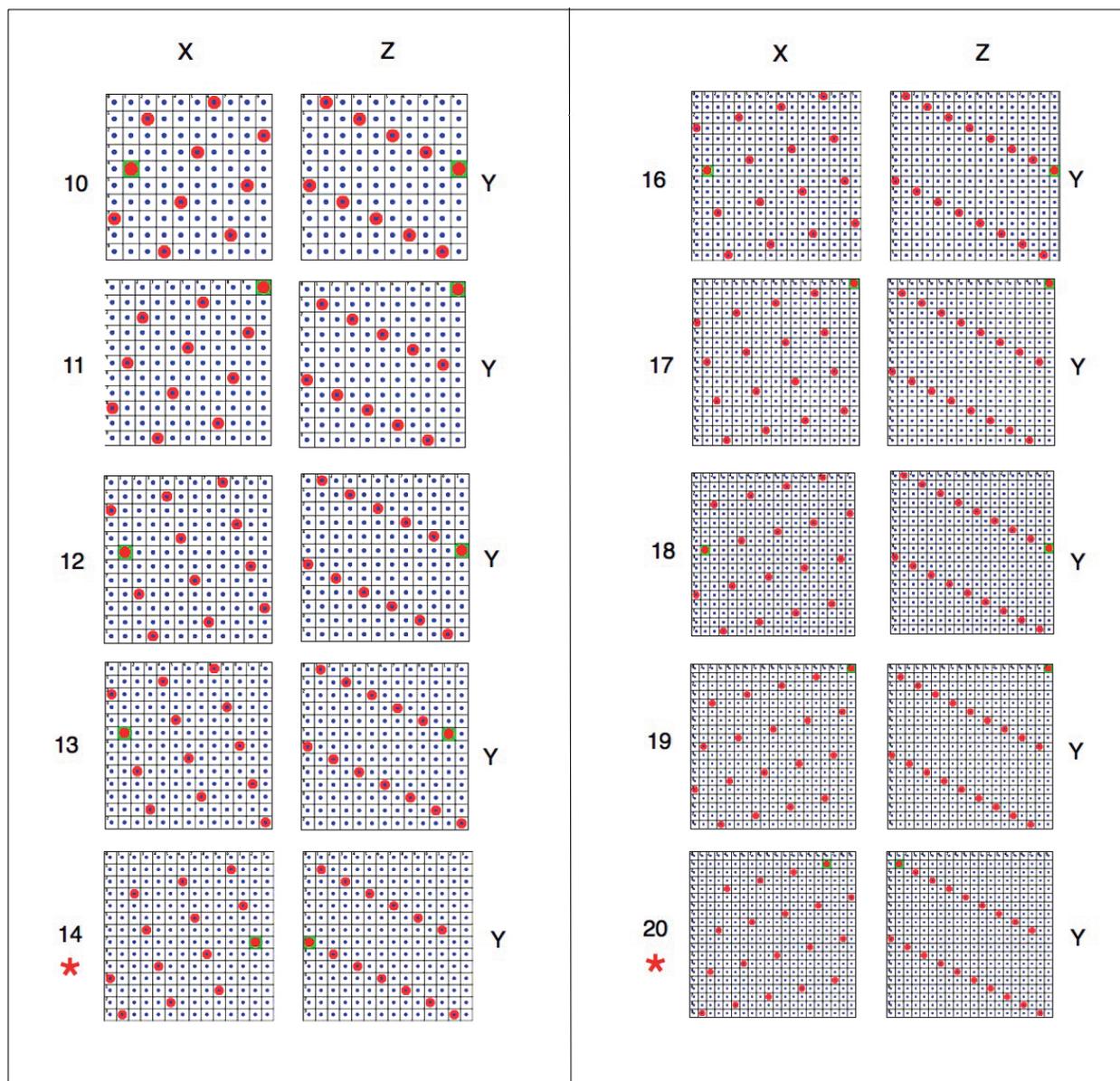


Figura 5.3: Soluciones maximales de Damas en el tablero tridimensional estándar para  $n = 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19$ . Para  $n = 14, 20$  logramos encontrar configuraciones de 13 y 19 Damas respectivamente.

# Capítulo 6

## Búsqueda de soluciones por computadora

Para cualquier problema que se desea resolver utilizando análisis computacional, se considera el método Manhattan para empezar a dimensionar el problema mismo. Este método Manhattan se refiere al análisis exhaustivo de todas las posibilidades requeridas en el problema dado. Para nuestro tema, y en específico para el problema tradicional original, sabemos que el número de posiciones posibles de colocar 8 damas en el tablero tradicional es 4,426,165,368. Si consideramos que en nuestro trabajo obtuvimos una velocidad media de 1.5 millones de posiciones por minuto (para el caso de  $n = 8$ , lo que resulta en analizar 100,000 posiciones cada 4 segundos), entonces analizar por completo todas las posiciones para el problema tradicional (de  $8 \times 8$ ) nos tomaría poco menos que 50 horas de análisis computacional (aparte del invertido en programación). Esto nos lleva a a buscar una heurística que de alguna forma reduzca el desgaste analítico en la búsqueda de soluciones.

### 6.1. Generador aleatorio (“El Monkey”).

En esta sección vamos a hacer análisis por computadora utilizando una propuesta meramente aleatoria con distribución uniforme, método que referimos como el “Monkey”. La idea es simplemente la de colocar una Dama al azar bajo una distribución de probabilidad uniforme en un primer renglón, y después colocar una Dama al azar en el siguiente renglón bajo una distribución uniforme sobre las casillas (o escaques) libres (si no hay casillas libres

en el renglón correspondiente, seguimos avanzando en los renglones siguientes). Hacemos esto hasta que no quedan casillas libres, de forma que obtenemos configuraciones independientes (de cardinalidad no necesariamente máxima). La idea de este algoritmo se ilustra en la Figura 6.1.

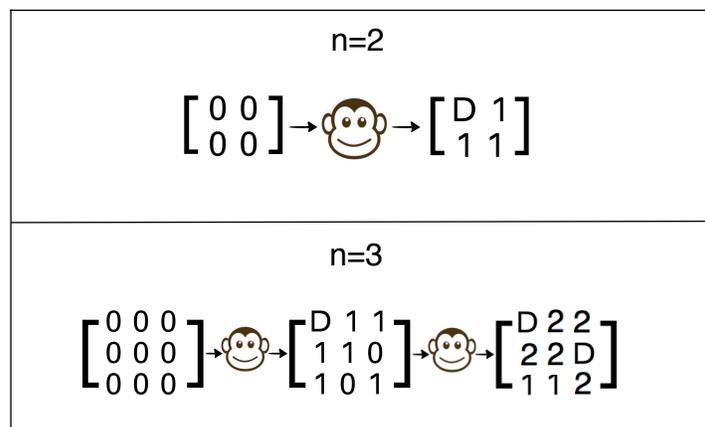


Figura 6.1: Algoritmo “Monkey” en tablero estándar.

## 6.2. Histogramas

Se ejecutó repetidamente el algoritmo aleatorio anterior (“El Monkey”), de forma que pudimos generar histogramas de las cardinalidades de las configuraciones independientes para distintos tamaños y tipos de tableros. Estos histogramas muestran el comportamiento probabilístico de las configuraciones independientes que dominan todo el tablero (no son necesariamente maximales) bajo la ley de distribución uniforme que utiliza “El Monkey”. Cambiar la distribución de los algoritmos de búsqueda aleatoria (i.e. hacer más *inteligente* a “El Monkey”) sería un posible trabajo a futuro. Además se consideraron los distintos tableros descritos en el Capítulo 3.

Antes de hacer los histogramas se hizo un análisis del número de iteraciones necesarias para que el resultado fuera una buena representación de la distribución. Sin embargo, en términos computacionales el realizar un gran número de iteraciones no representó un obstáculo, de forma que los histogramas los pudimos obtener con un número suficiente de iteraciones. Para ilustrar este punto, véase la siguiente Figura 6.2. Las Figuras 6.4, 6.5, 6.7, 6.8 y 6.9 muestran histogramas para distintos valores de  $n$  en tableros estándar, modular, Klein, proyectivo y reflexivo respectivamente, hechos con datos que obtuvo “El Moneky”.

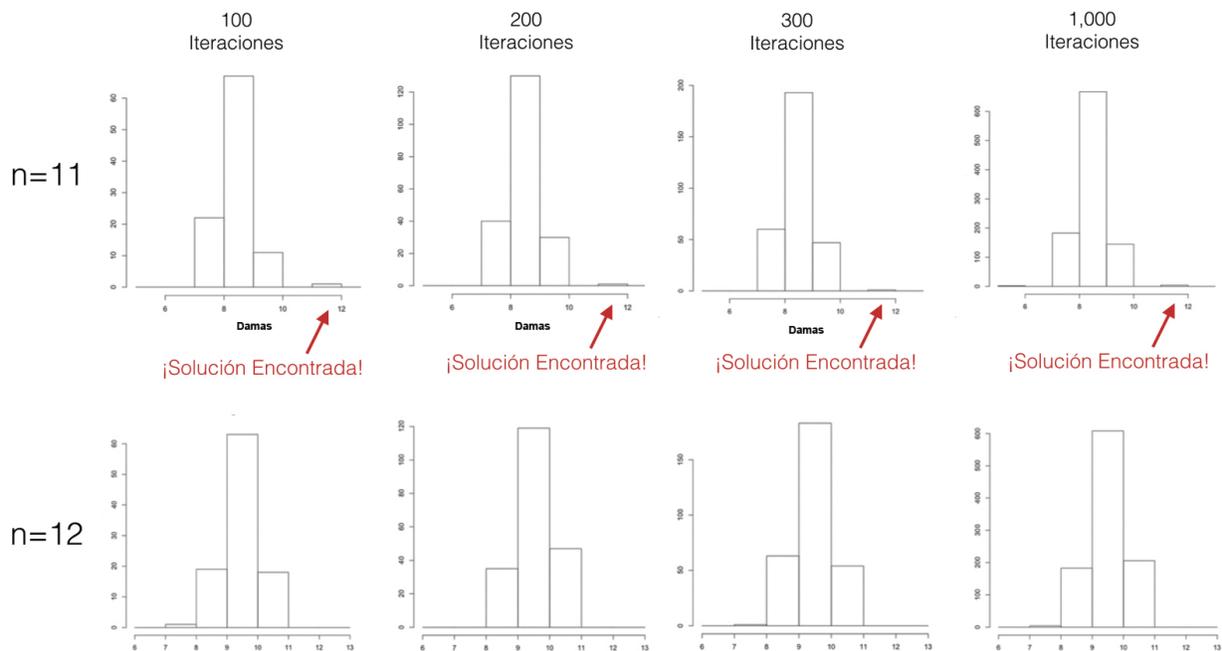


Figura 6.2: Histogramas obtenidos con distintos números de iteraciones (tablero modular bidimensional). La finalidad de esta ilustración es entonces mostrar la convergencia al variar el número de iteraciones.

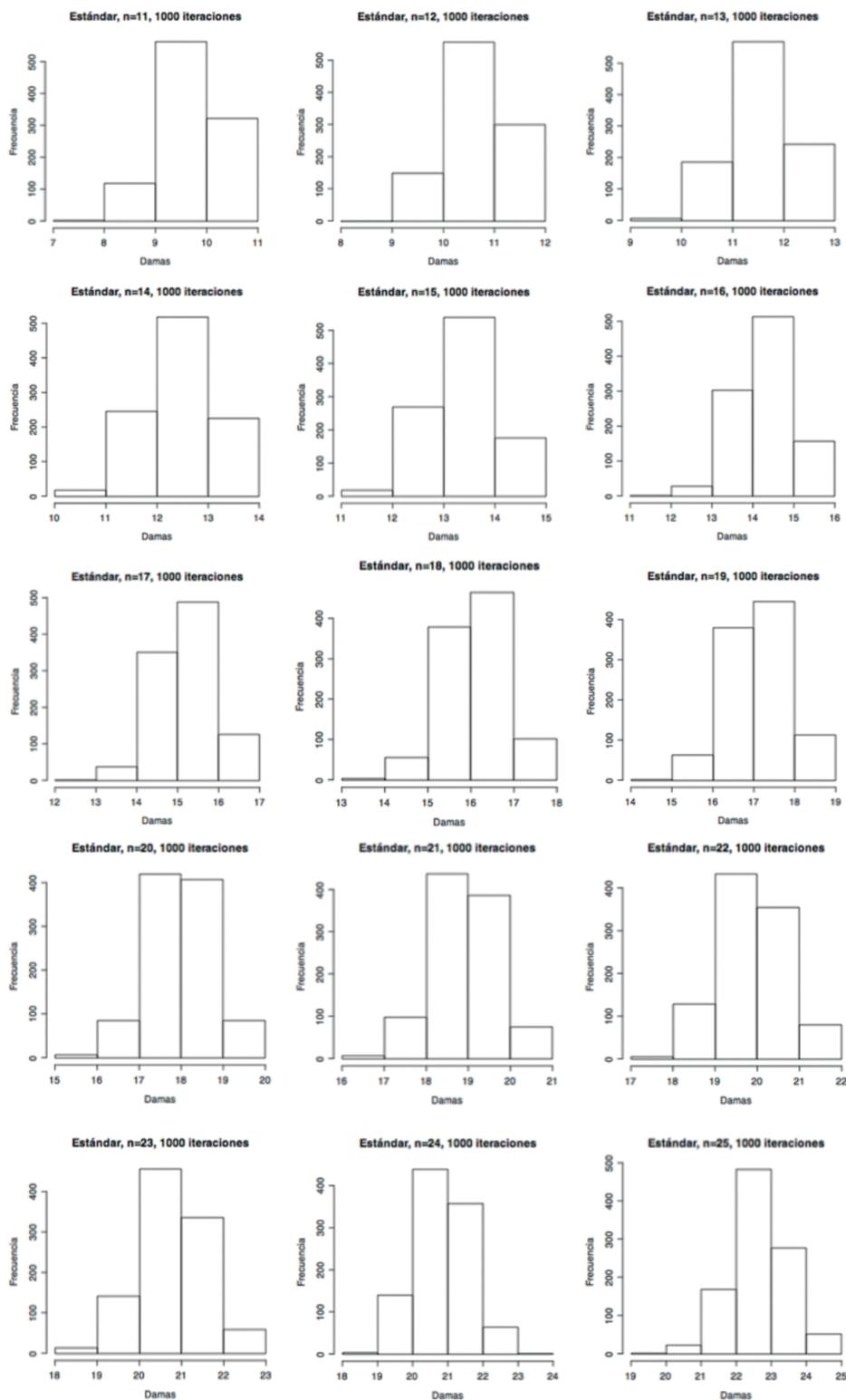


Figura 6.3: Histogramas de configuraciones independientes que dominan al tablero estándar bidimensional para distintos valores de  $n$  (11 – 25). Ver siguiente Figura.

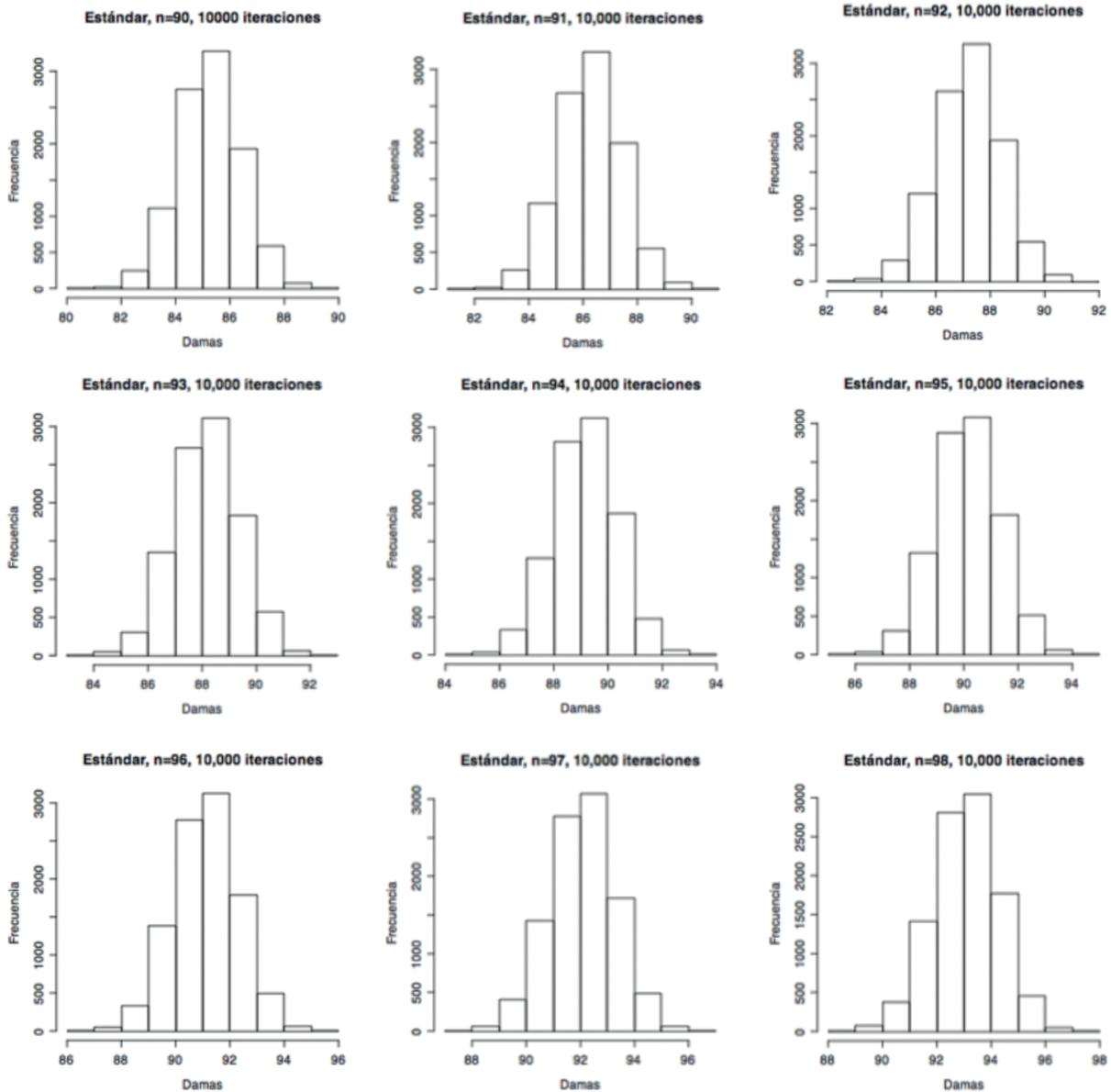


Figura 6.4: Histogramas de configuraciones independientes que dominan al tablero estándar bidimensional para distintos valores de  $n$  (90 – 99). En este caso, y en el anterior para valores menores de  $n$ , vemos claramente que “El Monkey” obedece un comportamiento asintótico gaussiano.

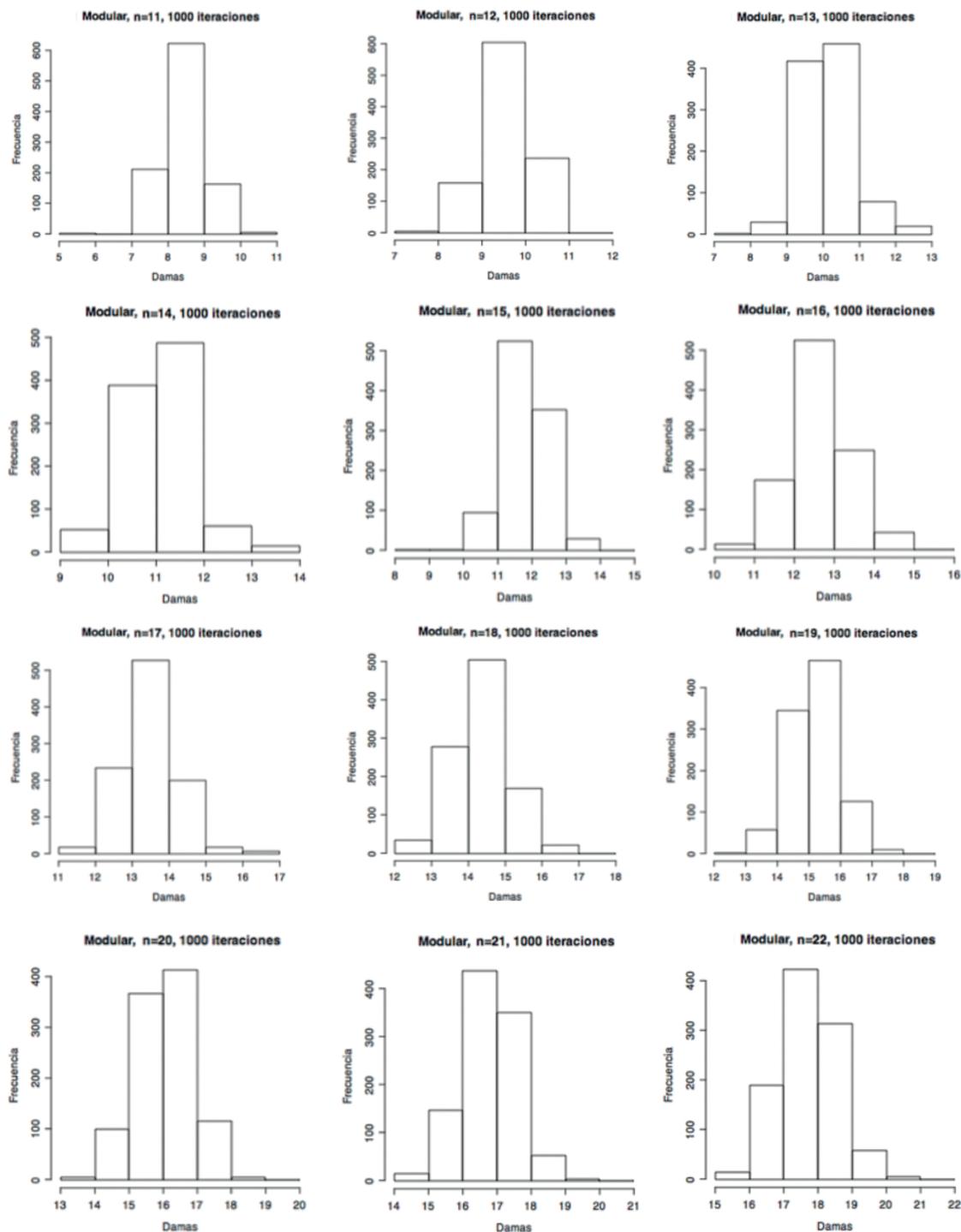


Figura 6.5: Histogramas de configuraciones independientes que dominan al tablero modular bidimensional para valores de  $n$  menores a 23. Observemos ahora que “El Monkey” sigue mostrando un comportamiento gaussiano.

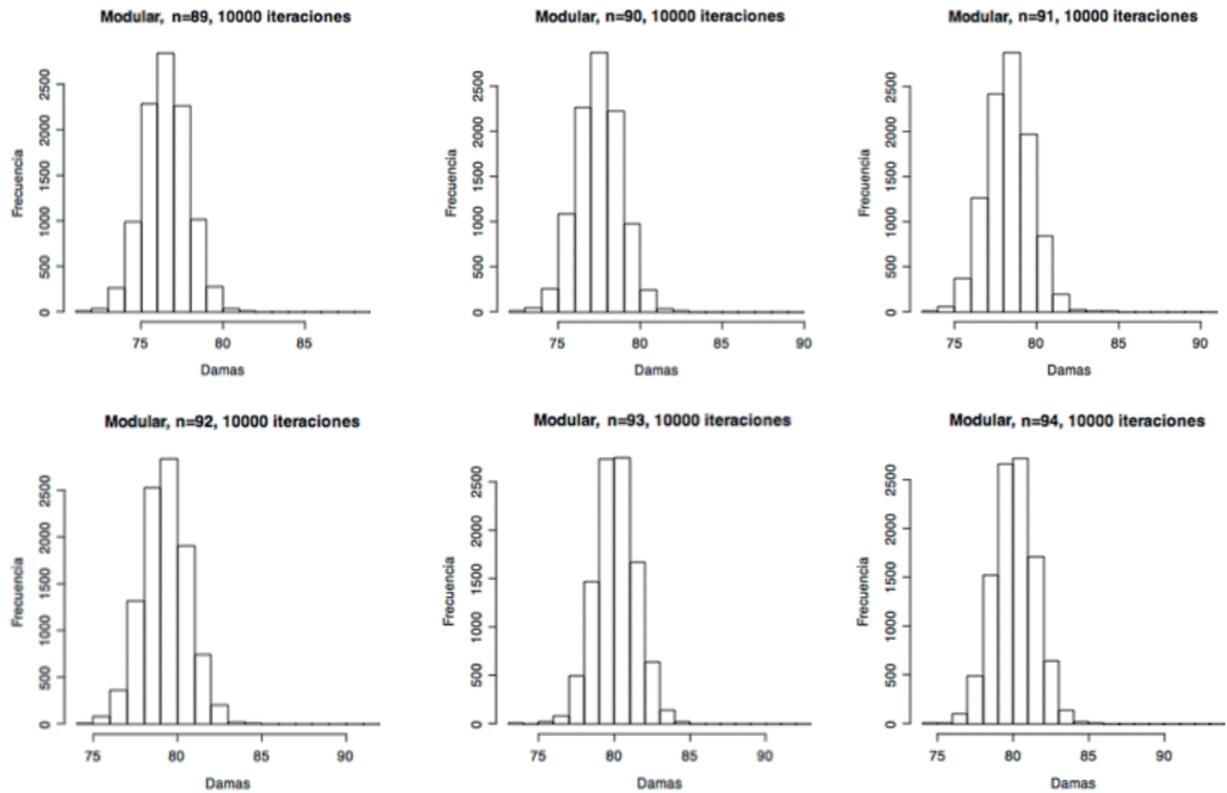


Figura 6.6: Histogramas de configuraciones independientes que dominan al tablero modular bidimensional para distintos valores grandes de  $n$ . “El Monkey” sigue mostrando un comportamiento gaussiano, pero la modularidad disminuye su eficiencia ya que deja de encontrar soluciones para  $n$ 's grandes (aún cuando sabemos que hay soluciones, e.g.  $n = 89$ ).

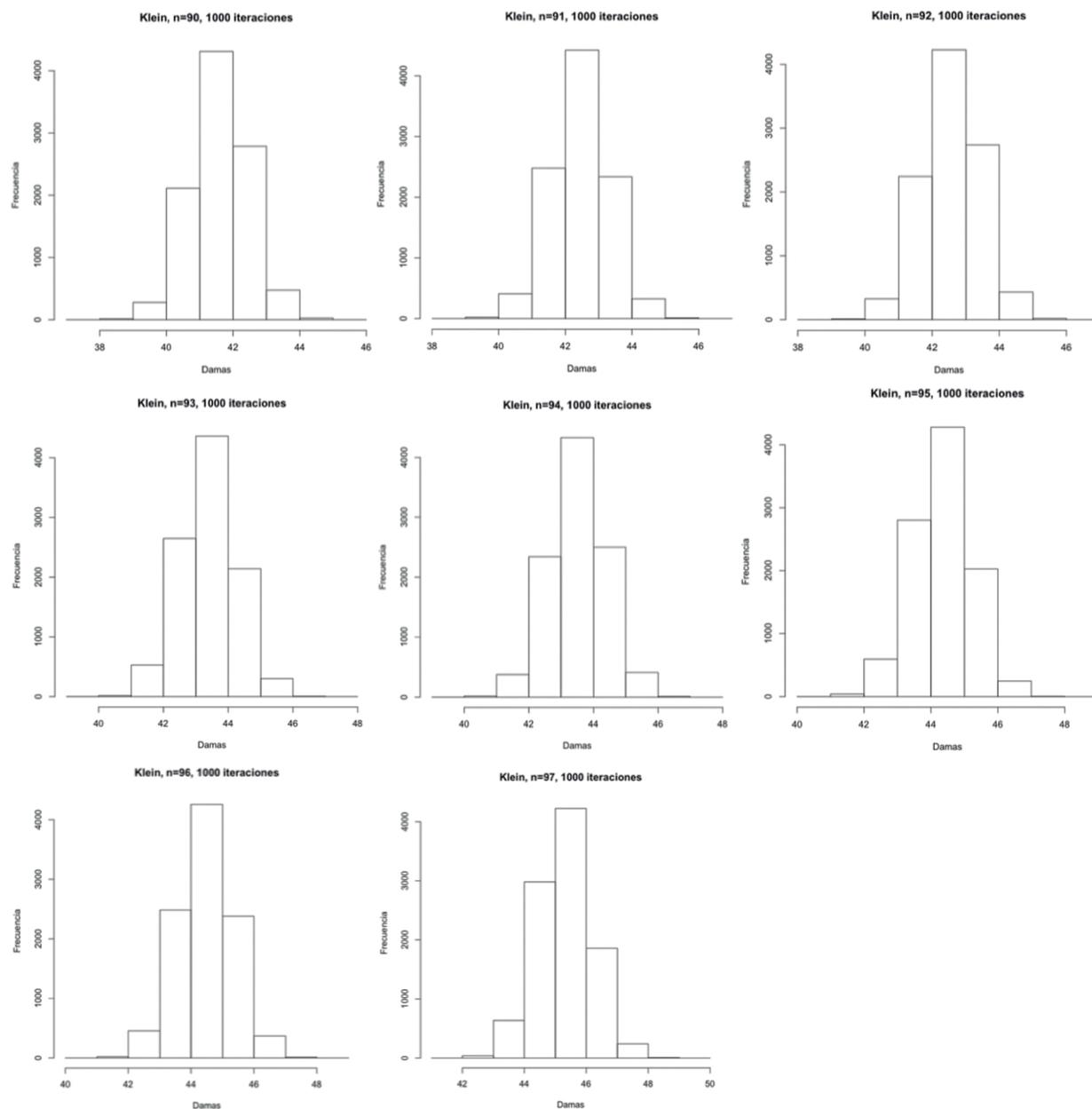


Figura 6.7: Histogramas de configuraciones independientes que dominan al tablero Klein bidimensional para distintos valores de  $n$ . Observemos nuevamente que en botellas de Klein “El Monkey” vuelve a exhibir un comportamiento gaussiano (cerca de  $n/2$ ). Nota: El número máximo de Damas para este problema aún no ha sido resuelto.

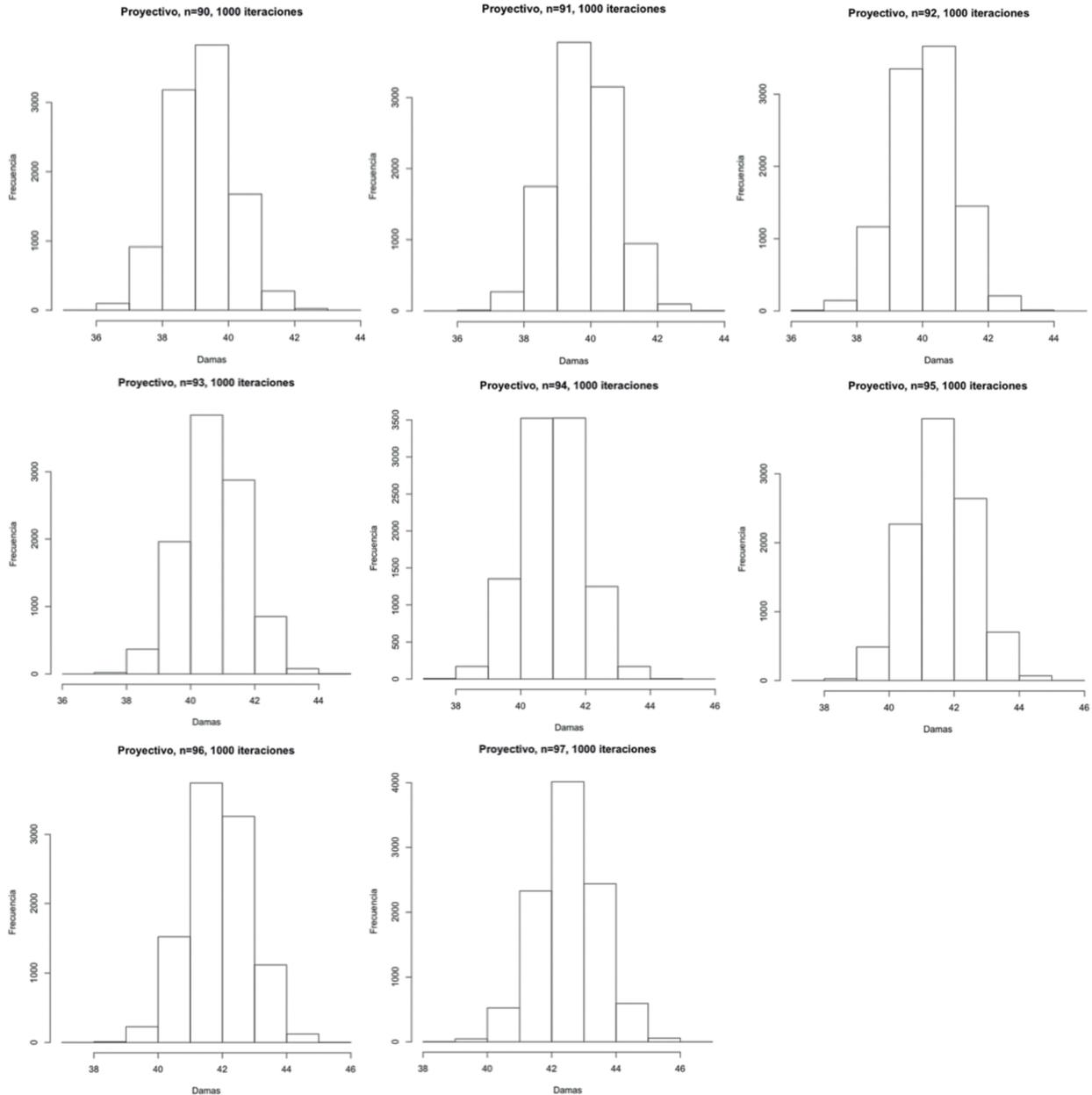


Figura 6.8: Histogramas de configuraciones independientes que dominan al tablero proyectivo bidimensional para distintos valores de  $n$ . Nuevamente “El Monkey” muestra convergencia asintótica gaussiana (cerca de  $n/2$ ). Nota: El número máximo de Damas para este problema aún no ha sido resuelto.

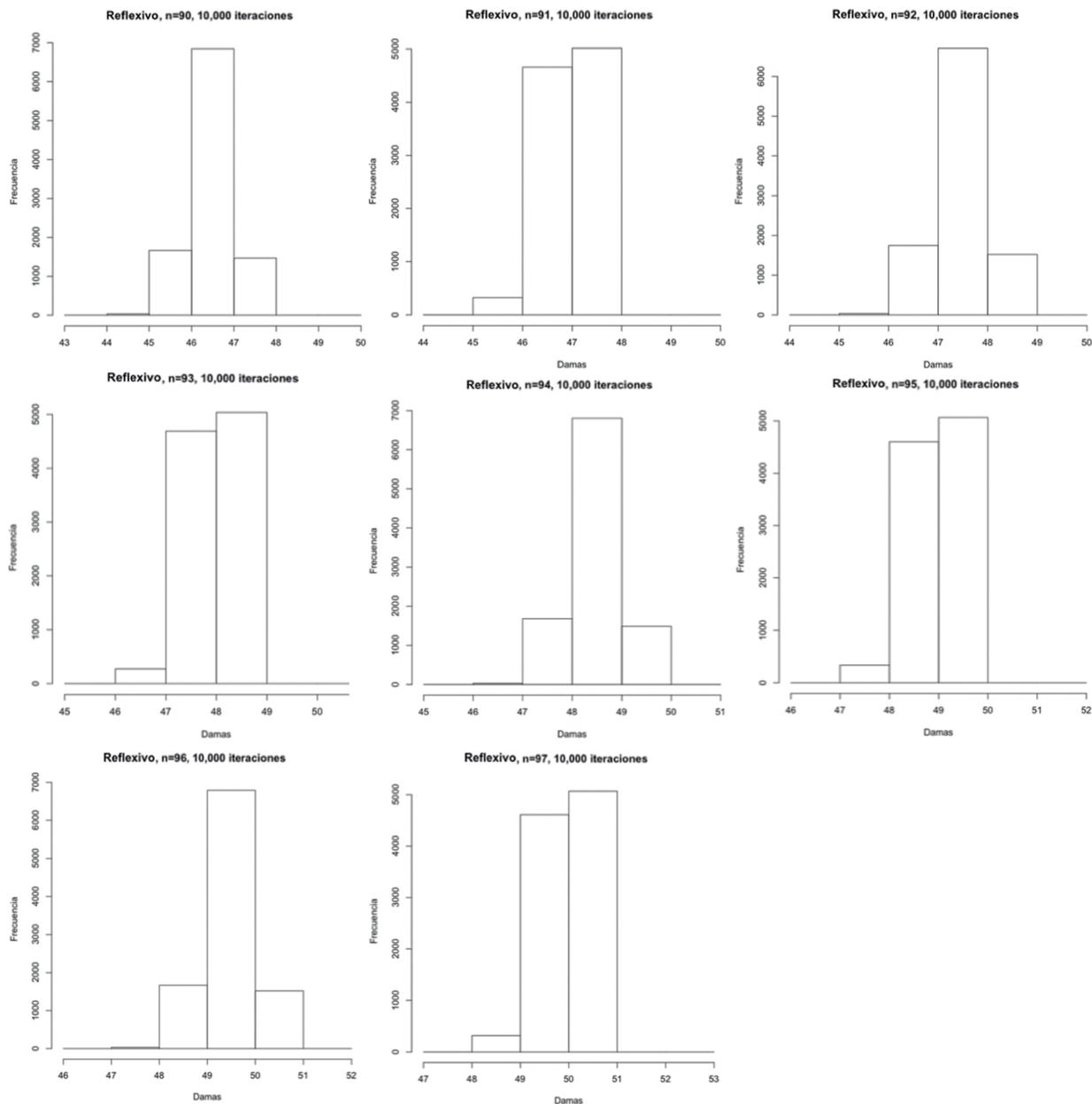


Figura 6.9: Histogramas de configuraciones independientes que dominan al tablero reflexivo bidimensional para distintos valores de  $n$ . Observemos que en este caso “El Monkey” se comporta de forma que las  $n$  pares tienen una convergencia similar, mientras que las impares tienen otra distinta. Nota: El número máximo de Damas para este problema aún no ha sido resuelto.

# Apéndice A

## Código de “El Monkey”

En este apéndice incluimos el código en C que utilizamos para generar los datos con los que se hicieron los histogramas del Capítulo 6. Se hizo un programa para cada caso, por lo que cada caso es similar excepto por la función que corresponde al ataque de las Damas. Presentamos entonces el código de la siguiente manera. Primero transcribimos el código completo tal cual para el caso estándar, y luego presentamos para los otros casos únicamente la parte del código que corresponde al ataque.

### A.1. Código tablero estándar

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
#include <iostream.h>

#define RESET 0
#define BRIGHT 1
#define DIM 2
#define UNDERLINE 3
#define BLINK 4
#define REVERSE 7
```

```
#define HIDDEN 8

#define BLACK 0
#define RED 1
#define GREEN 2
#define YELLOW 3
#define BLUE 4
#define MAGENTA 5
#define CYAN 6
#define WHITE 7

void put2D(int n, int m, int x, int y, int board[][100]);
void printBoard(int n, int m, int board[][100]);
void search(int n, int m, int board[][100]);
void textcolor(int attr, int fg, int bg);
void resetTerminal();
void resetHome();
void cursorUp(int c);

main() {

    static int MAX = 100;

    int n, m;
    int board[100][100];

    resetTerminal();

    resetHome();

    textcolor(BRIGHT, RED, WHITE);
    printf("=====\n");
    textcolor(BRIGHT, BLACK, WHITE);
    printf(" Maximal standard configurations \n");
    textcolor(BRIGHT, RED, WHITE);
    printf("=====\n");
    textcolor(RESET, BLACK, WHITE);

    n = MAX;
    while (n >= MAX) {
```

```
    printf("\nEnter n: ");
    scanf("%d", &n);
    if (n >= MAX) {
        printf("Too large, sorry!\n");
    }
}

m = MAX;
while (m >= MAX) {
    printf("\nEnter m: ");
    scanf("%d", &m);
    if (m >= MAX) {
        printf("Too large, sorry!\n");
    }
}

search(n, m, board);
}

void search(int n, int m, int board[][100]) {

    int i;
    int j;
    int k;
    int monkey;
    int maximum;
    int minimum;
    int sup;
    int free;
    int countFree;
    int iterations;
    int X[10000];
    int Y[10000];

    iterations = 100000;
    while (iterations >= 100000) {
        printf("\nNumber of iterations: ");
        scanf("%d", &iterations);
        if (iterations >= 100000) {
            printf("Too large, sorry!\n");
        }
    }
}
```

```
    }  
}  
  
resetTerminal();  
  
srand((unsigned int)time(NULL));  
  
maximum = 0;  
minimum = n * m;  
  
for(k = 0; k < iterations; k++) {  
  
    for(i = 0; i < n; i++) {  
        for(j = 0; j < m; j++) {  
            board[i][j] = 0;  
        }  
    }  
  
    for(i = 0; i < n; i++) {  
        for(j = 0; j < m; j++) {  
            X[m * i + j] = i;  
            Y[m * i + j] = j;  
        }  
    }  
  
    free = n * m;  
  
    sup = 0;  
  
    while (free > 0) {  
        monkey = rand() % free;  
        put2D(n, m, X[monkey], Y[monkey], board);  
        sup++;  
        countFree = 0;  
        for(i = 0; i < free; i++) {  
            if(board[X[i]][Y[i]] == 0) {  
                X[countFree] = X[i];  
                Y[countFree] = Y[i];  
                countFree++;  
            }  
        }  
    }  
}
```

```
    }

    /* If you want a single queen:
    free = 0;
    /* */

    /* If you want to saturate the board with queens: */
    free = countFree;
    /* */

}

if(sup > maximum) {
    maximum = sup;
}
if(sup < minimum) {
    minimum = sup;
}

/* If you want the maximal configurations painted: */
if(sup == maximum){
    printBoard(n, m, board);
    textcolor(BRIGHT, RED, WHITE);
    printf("\n===== \n");
    textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
    printf("Values found: ");
    textcolor(BRIGHT, BLUE, WHITE);
    printf("(Min = %2d, Max = %2d)", minimum, maximum);
    textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
    printf("    Iterations left: ");
    textcolor(BRIGHT, BLUE, WHITE);
    printf("%6d ", iterations - k);
    textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
    printf("\n");
    textcolor(BRIGHT, RED, WHITE);
    printf("===== \n\n");
    textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
}
/* */
else {
```

```

        cursorUp(5);
        textcolor(BRIGHT, RED, WHITE);
        printf("\n===== \n");
        textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
        printf("Values found: ");
        textcolor(BRIGHT, BLUE, WHITE);
        printf("(Min = %2d, Max = %2d)", minimum, maximum);
        textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
        printf("      Iterations left: ");
        textcolor(BRIGHT, BLUE, WHITE);
        printf("%6d ", iterations - k);
        textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
        printf("\n");
        textcolor(BRIGHT, RED, WHITE);
        printf("===== \n\n");
        textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
    }
}
cursorUp(5);
textcolor(BRIGHT, RED, WHITE);
printf("\n===== \n");
textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
printf("Values found: ");
textcolor(BRIGHT, BLUE, WHITE);
printf("(Min = %2d, Max = %2d)", minimum, maximum);
textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
printf("      Total iterations: ");
textcolor(BRIGHT, BLUE, WHITE);
printf("%6d ", iterations);
textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
printf("\n");
textcolor(BRIGHT, RED, WHITE);
printf("===== \n\n");
textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
}

void printBoard(int n, int m, int board[][100]) {

    int i, j;

```

```
resetHome();

textcolor(BRIGHT, RED, WHITE);
printf("=====\n");
textcolor(BRIGHT, BLACK, WHITE);
printf(" Maximal standard configurations \n");
textcolor(BRIGHT, RED, WHITE);
printf("=====\n");
textcolor(RESET, BLACK, WHITE);

printf("\n");
textcolor(BRIGHT, GREEN, BLACK);
printf("  ");
for(j = 0 ; j < m; j++) {
    printf("  %d ", (j + 1) % 10);
}
printf("  ");
textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
printf("\n");
textcolor(BRIGHT, GREEN, BLACK);
printf("  ");
textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
for(j = 0 ; j < m; j++) {
    printf("----");
}
printf("-");
textcolor(BRIGHT, GREEN, BLACK);
printf("  ");
textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
printf("\n");
for(i = 0 ; i < n; i++) {
    textcolor(BRIGHT, GREEN, BLACK);
    printf("%d ", (i + 1) % 10);
    textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
    for(j = 0 ; j < m; j++) {
        if(board[i][j] == -1) {
            printf("| ");
            textcolor(BRIGHT, RED, WHITE);
            printf("0");
        }
    }
}
```

```
        textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
        printf(" ");
    }
    else if(board[i][j] > 0) {

        /* If you want the attacking painted:
        printf("| ");
        textcolor(BRIGHT, YELLOW, WHITE);
        printf("X");
        textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
        printf(" ");
        /* */

        /* If you don't want the attacking painted: */
        printf("|  ");
        /* */

    }
    else {
        printf("|  ");
    }
}
printf("|");
textcolor(BRIGHT, GREEN, BLACK);
printf(" %d", (i + 1) % 10);
textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
printf("\n");
textcolor(BRIGHT, GREEN, BLACK);
printf(" ");
textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
for(j=0 ; j < m; j++) {
    printf("----");
}
printf("-");
textcolor(BRIGHT, GREEN, BLACK);
printf(" ");
textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
printf("\n");
}
textcolor(BRIGHT, GREEN, BLACK);
```

```
printf(" ");
for(j = 0 ; j < m; j++) {
    printf("  %d ", (j + 1) % 10);
}
printf(" ");
textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
printf("\n");
}

void put2D(int n, int m, int x, int y, int board[][100]) {

    int i = 0;
    int max = n;

    if(m > n) {
        max = m;
    }

    for(i = 0; i < max; i++) {

        board[x][i % m]++;
        board[i % n][y]++;

        if((x + i) < n) {
            if((y + i) < m) {
                board[x + i][y + i]++;
            }
            if((y - i) > -1) {
                board[x + i][y - i]++;
            }
        }
        if((x - i) > -1) {
            if((y + i) < m) {
                board[x - i][y + i]++;
            }
            if((y - i) > -1) {
                board[x - i][y - i]++;
            }
        }
    }
}
```

```
    }

    board[x][y] = -1;
}

void textcolor(int attr, int fg, int bg)
{ char command[13];

/* Command is the control command to the terminal */
sprintf(command, "%c[%d;%d;%dm", 0x1B, attr, fg + 30, bg + 40);
printf("%s", command);
}

void resetTerminal()
{ char command[10];

/* Command is the control command to the terminal */
sprintf(command, "%c%c[71", 0x1B, 0x1B);
printf("%s", command);
textcolor(RESET, BLACK, WHITE);
}

void resetHome()
{ char command[10];

/* Command is the control command to the terminal */
sprintf(command, "%c[H", 0x1B);
printf("%s", command);
}

void cursorUp(int c)
{ char command[10];

/* Command is the control command to the terminal */
sprintf(command, "%c[%dA", 0x1B, c);
printf("%s", command);
}
```

## A.2. Código de ataque modular.

```
void put2DM(int n, int m, int x, int y, int board[][100]) {  
  
    int i = 0;  
  
    do {  
  
        board[x][i % m]++;  
        board[i % n][y]++;  
  
        board[(x + i) % n][(y + i) % m]++;  
        board[(x + i) % n][(n * m + y - i) % m]++;  
  
        i++;  
  
    } while (i % n != 0 | i % m != 0);  
  
    board[x][y] = -1;  
}
```

## A.3. Código de ataque de Klein.

```
void put2DK(int n, int m, int x, int y, int board[][100]) {  
  
    int i;  
    int iD, jD;  
    int iB, jB;  
    int switchDX;  
    int switchDY;  
    int switchBX;  
    int switchBY;  
    int tempDX;  
    int tempDY;  
    int tempBX;  
    int tempBY;
```

```
i = 1;

do {

    board[x][(y + i) % m]++;
    board[n - x - 1][(y + i) % m]++;
    board[(x + i) % n][y]++;

    i++;

} while(i < n + m);

iD = 1;
jD = 1;
switchDX = 1;
switchDY = 1;
tempDX = x;
tempDY = y;

do {

    while ((x + iD) < 0 | (x + iD) > n - 1) {
        if(x + iD < 0) {
            iD = iD + n;
        }
        else {
            iD = iD - n;
        }
    }

    if(y + jD == m) {
        jD = jD - m;
        iD = n - x - 1 - (n + x + iD) % n;
        switchDX = -switchDX;
    }

    tempDX = x + iD;
```

```
tempDY = y + jD;
board[tempDX][tempDY]++;

iD = iD + switchDX;
jD = jD + switchDY;

} while(tempDX != x | tempDY != y);

iD = -1;
jD = -1;
switchDX = -1;
switchDY = -1;
tempDX = x;
tempDY = y;

do {

    while ((x + iD) < 0 | (x + iD) > n - 1) {
        if(x + iD < 0) {
            iD = iD + n;
        }
        else {
            iD = iD - n;
        }
    }

    if(y + jD == -1) {
        jD = jD + m;
        iD = n - x - 1 - (n + x + iD) % n;
        switchDX = -switchDX;
    }

    tempDX = x + iD;
    tempDY = y + jD;
    board[tempDX][tempDY]++;

    iD = iD + switchDX;
    jD = jD + switchDY;
```

```
} while(tempDX != x | tempDY != y);

iB = 1;
jB = -1;
switchBX = 1;
switchBY = -1;
tempBX = x;
tempBY = y;

do {

    while ((x + iB) < 0 | (x + iB) > n - 1) {
        if(x + iB < 0) {
            iB = iB + n;
        }
        else {
            iB = iB - n;
        }
    }

    if(y + jB == -1) {
        jB = jB + m;
        iB = n - x - 1 - (n + x + iB) % n;
        switchBX = -switchBX;
    }

    tempBX = x + iB;
    tempBY = y + jB;
    board[tempBX][tempBY]++;

    iB = iB + switchBX;
    jB = jB + switchBY;

} while(tempBX != x | tempBY != y);

iB = -1;
jB = 1;
switchBX = -1;
```

```
switchBY = 1;
tempBX = x;
tempBY = y;

do {

    while ((x + iB) < 0 | (x + iB) > n - 1) {
        if(x + iB < 0) {
            iB = iB + n;
        }
        else {
            iB = iB - n;
        }
    }

    if(y + jB == m) {
        jB = jB - m;
        iB = n - x - 1 - (n + x + iB) % n;
        switchBX = -switchBX;
    }

    tempBX = x + iB;
    tempBY = y + jB;
    board[tempBX][tempBY]++;

    iB = iB + switchBX;
    jB = jB + switchBY;

} while(tempBX != x | tempBY != y);

board[x][y] = -1;
}
```

## A.4. Código de ataque proyectivo.

```
void put2DP(int n, int m, int x, int y, int board[][100]) {
```

```
int i;
int iD, jD;
int iB, jB;
int switchDX;
int switchDY;
int switchBX;
int switchBY;
int tempDX;
int tempDY;
int tempBX;
int tempBY;
int aux;
int auxSwitch;
i = 1;

do {

    board[x][(y + i) % m]++;
    board[n - x - 1][(y + i) % m]++;
    board[(x + i) % n][y]++;
    board[(x + i) % n][m - y - 1]++;

    i++;

} while(i < n + m);

iD = 1;
jD = 1;
switchDX = 1;
switchDY = 1;
tempDX = x;
tempDY = y;

do {

    while ((x + iD) < 0 | (x + iD) > n - 1) {
        if(x + iD < 0) {
            iD = iD + n;
        }
    }
}
```

```
    else {
        iD = iD - n;
    }
}

while ((y + jD) < 0 | (y + jD) > m - 1) {
    if(y + jD < 0) {
        jD = jD + m;
    }
    else {
        jD = jD - m;
    }
}

aux = iD;
auxSwitch = switchDX;

if(y + jD == 0 && switchDY == 1) {
    iD = n - x - 1 - (n + x + iD) % n;
    switchDX = -switchDX;
}

if(y + jD == m - 1 && switchDY == -1) {
    iD = n - x - 1 - (n + x + iD) % n;
    switchDX = -switchDX;
}

if(x + aux == 0 && auxSwitch == 1) {
    jD = m - y - 1 - (m + y + jD) % m;
    switchDY = -switchDY;
}

if(x + aux == n - 1 && auxSwitch == -1) {
    jD = m - y - 1 - (m + y + jD) % m;
    switchDY = -switchDY;
}

tempDX = x + iD;
tempDY = y + jD;
board[tempDX][tempDY]++;

iD = iD + switchDX;
```

```
    jD = jD + switchDY;

} while(tempDX != x | tempDY != y);

iD = -1;
jD = -1;
switchDX = -1;
switchDY = -1;
tempDX = x;
tempDY = y;

do {

    while ((x + iD) < 0 | (x + iD) > n - 1) {
        if(x + iD < 0) {
            iD = iD + n;
        }
        else {
            iD = iD - n;
        }
    }

    while ((y + jD) < 0 | (y + jD) > m - 1) {
        if(y + jD < 0) {
            jD = jD + m;
        }
        else {
            jD = jD - m;
        }
    }

    aux = iD;
    auxSwitch = switchDX;

    if(y + jD == 0 && switchDY == 1) {
        iD = n - x - 1 - (n + x + iD) % n;
        switchDX = -switchDX;
    }

    if(y + jD == m - 1 && switchDY == -1) {
        iD = n - x - 1 - (n + x + iD) % n;
    }
}
```

```
    switchDX = -switchDX;
}

if(x + aux == 0 && auxSwitch == 1) {
    jD = m - y - 1 - (m + y + jD) % m;
    switchDY = -switchDY;
}
if(x + aux == n - 1 && auxSwitch == -1) {
    jD = m - y - 1 - (m + y + jD) % m;
    switchDY = -switchDY;
}

tempDX = x + iD;
tempDY = y + jD;
board[tempDX][tempDY]++;

iD = iD + switchDX;
jD = jD + switchDY;

} while(tempDX != x | tempDY != y);

iB = 1;
jB = -1;
switchBX = 1;
switchBY = -1;
tempBX = x;
tempBY = y;

do {

    while ((x + iB) < 0 | (x + iB) > n - 1) {
        if(x + iB < 0) {
            iB = iB + n;
        }
        else {
            iB = iB - n;
        }
    }
}
```

```
while ((y + jB) < 0 | (y + jB) > m - 1) {
    if(y + jB < 0) {
        jB = jB + m;
    }
    else {
        jB = jB - m;
    }
}

aux = iB;
auxSwitch = switchBX;

if(y + jB == 0 && switchBY == 1) {
    iB = n - x - 1 - (n + x + iB) % n;
    switchBX = -switchBX;
}
if(y + jB == m - 1 && switchBY == -1) {
    iB = n - x - 1 - (n + x + iB) % n;
    switchBX = -switchBX;
}

if(x + aux == 0 && auxSwitch == 1) {
    jB = m - y - 1 - (m + y + jB) % m;
    switchBY = -switchBY;
}
if(x + aux == n - 1 && auxSwitch == -1) {
    jB = m - y - 1 - (m + y + jB) % m;
    switchBY = -switchBY;
}

tempBX = x + iB;
tempBY = y + jB;
board[tempBX][tempBY]++;

iB = iB + switchBX;
jB = jB + switchBY;

} while(tempBX != x | tempBY != y);

iB = -1;
```

```
jB = 1;
switchBX = -1;
switchBY = 1;
tempBX = x;
tempBY = y;

do {

    while ((x + iB) < 0 | (x + iB) > n - 1) {
        if(x + iB < 0) {
            iB = iB + n;
        }
        else {
            iB = iB - n;
        }
    }

    while ((y + jB) < 0 | (y + jB) > m - 1) {
        if(y + jB < 0) {
            jB = jB + m;
        }
        else {
            jB = jB - m;
        }
    }

    aux = iB;
    auxSwitch = switchBX;

    if(y + jB == 0 && switchBY == 1) {
        iB = n - x - 1 - (n + x + iB) % n;
        switchBX = -switchBX;
    }
    if(y + jB == m - 1 && switchBY == -1) {
        iB = n - x - 1 - (n + x + iB) % n;
        switchBX = -switchBX;
    }

    if(x + aux == 0 && auxSwitch == 1) {
        jB = m - y - 1 - (m + y + jB) % m;
    }
}
```

```
        switchBY = -switchBY;
    }
    if(x + aux == n - 1 && auxSwitch == -1) {
        jB = m - y - 1 - (m + y + jB) % m;
        switchBY = -switchBY;
    }

    tempBX = x + iB;
    tempBY = y + jB;
    board[tempBX][tempBY]++;

    iB = iB + switchBX;
    jB = jB + switchBY;

} while(tempBX != x | tempBY != y);

board[x][y] = -1;
}
```

## A.5. Código de ataque reflexivo.

```
void put2DR(int n, int m, int x, int y, int board[][100]) {

    int i;
    int iD, jD;
    int iB, jB;
    int switchDX;
    int switchDY;
    int switchBX;
    int switchBY;
    int tempDX;
    int tempDY;
    int tempBX;
    int tempBY;

    i = 1;
```

```
do {

    board[x][(y + i) % m]++;
    board[(x + i) % n][y]++;

    i++;

} while(i < n + m);

iD = 1;
jD = 1;
switchDX = 1;
switchDY = 1;
tempDX = x;
tempDY = y;

do {

    if((x + iD) == -1 | (x + iD) == n) {
        switchDX = -switchDX;
        iD = iD + 2 * switchDX;
    }
    if((y + jD) == -1 | (y + jD) == m) {
        switchDY = -switchDY;
        jD = jD + 2 * switchDY;
    }

    tempDX = x + iD;
    tempDY = y + jD;
    board[tempDX][tempDY]++;

    iD = iD + switchDX;
    jD = jD + switchDY;

} while(tempDX != x | tempDY != y);

iD = -1;
jD = -1;
```

```
switchDX = -1;
switchDY = -1;
tempDX = x;
tempDY = y;

do {

    if((x + iD) == -1 | (x + iD) == n) {
        switchDX = -switchDX;
        iD = iD + 2 * switchDX;
    }
    if((y + jD) == -1 | (y + jD) == m) {
        switchDY = -switchDY;
        jD = jD + 2 * switchDY;
    }

    tempDX = x + iD;
    tempDY = y + jD;
    board[tempDX][tempDY]++;

    iD = iD + switchDX;
    jD = jD + switchDY;

} while(tempDX != x | tempDY != y);
```

```
iB = 1;
jB = -1;
switchBX = 1;
switchBY = -1;
tempBX = x;
tempBY = y;

do {

    if((x + iB) == -1 | (x + iB) == n) {
        switchBX = -switchBX;
        iB = iB + 2 * switchBX;
    }
    if((y + jB) == -1 | (y + jB) == m) {
```

```
        switchBY = -switchBY;
        jB = jB + 2 * switchBY;
    }

    tempBX = x + iB;
    tempBY = y + jB;
    board[tempBX][tempBY]++;

    iB = iB + switchBX;
    jB = jB + switchBY;

} while(tempBX != x | tempBY != y);

iB = -1;
jB = 1;
switchBX = -1;
switchBY = 1;
tempBX = x;
tempBY = y;

do {

    if((x + iB) == -1 | (x + iB) == n) {
        switchBX = -switchBX;
        iB = iB + 2 * switchBX;
    }
    if((y + jB) == -1 | (y + jB) == m) {
        switchBY = -switchBY;
        jB = jB + 2 * switchBY;
    }

    tempBX = x + iB;
    tempBY = y + jB;
    board[tempBX][tempBY]++;

    iB = iB + switchBX;
    jB = jB + switchBY;

} while(tempBX != x | tempBY != y);
```

```
    board[x][y] = -1;  
}
```

# Bibliografía

- [1] A. Bruen, R. Dixon. The  $n$ -queen problem. *Discrete Math.* 12, (1975), 393-395.
- [2] Bonsdorff, et al. *Ajedrez y matemáticas.* (1974), 159-167.
- [3] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest y C. Stein. *Introduction to Algorithms.* Cambridge University Press. 3a edición, 2009.
- [4] L.F..Dickson. *History of the Theory of Numbers.* Vol I, (Chelsea, New York, 1952).
- [5] N.J. Fine. Solution to D 1899. *Amer. Math. Monthly*, 72 (1965), pp. 552-553.
- [6] O. Heden. On the modular  $n$ -queen problem. *Discrete Math.* 102 (1992) 155-161.
- [7] T. Kløve. The modular  $n$ -queen problem. *Discrete Mathematics.* 19, (1977), 289-291.
- [8] T. Kløve. The modular  $n$ -queen problem II. *Discrete Mathematics.* 36, (1981), 33-48.
- [9] A. Kotov. *Apuntes de un ajedrecista.* (1959), 159-167.
- [10] W.J. LeVeque. *Topics in Number Theory*, Vol. 1 (Addison-Wesley. Reading, MA, 1956).
- [11] P. Monsky. Solution of problem E3162, *Amer. Math. Monthly* 96 (1989) 258-259.
- [12] S. P. Nudelman. The modular  $n$ -queens problem in higher dimensions. *Discrete Mathematics.* 146, (1995), 159-167.
- [13] R. Roberts. Fischer/Spassky. The New York Times report on the chess match of the century. (1972), 159-167.
- [14] D. Singmaster. On polynomial functions (mod  $m$ ). *J. Number Theory*, 6 (1974), pp. 345-352.