Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Problema de Neumann para la ecuación de Helmholtz en un cono convexo del plano.

T E S I S

Que para optar por el grado de Doctora en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Tanya Jannette Villalba Vega

Director: Dr. Anatoli Merzon
Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Morelia, Michoacán - Octubre, 2013.

Índice general

Agradecimientos V

INTRODUCCIÓN VII

Capítulo 1. Espacios de funciones y operadores traza 1
1.1. Espacios funcionales de Sobolev 1
1.2. Operadores traza 6
1.3. Precisión del planteamiento del problema de Neumann 10

Capítulo 2. Problema de Neumann en un ángulo y su reducción al problema semihomogéneo 13
2.1. Formulación del problema de Neumann en un ángulo 13
2.2. Extensión impar de los funcionales 14
2.3. Reducción al problema de Neumann con dato cero sobre uno de sus lados 16

Capítulo 3. Reducción del problema de Neumann a una identidad integral 21
3.1. La identidad integral 21

Capítulo 4. Transformada de Fourier 25
4.1. Transformación del problema de Neumann 25

Capítulo 5. La ecuación en diferencias 31
5.1. Reducción a la ecuación en diferencias 31
5.2. Levantamiento del dato de Neumann a una Superficie de Riemann 34
5.3. La función $T(w)$ 37
5.4. Continuación analítica de $T(w)$ y la solución de la ecuación en diferencias 42
5.5. Solución de la ecuación en diferencias 49

Capítulo 6. Sumabilidad Cuadrada de la solución 51
6.1. Propiedades de las funciones $\tilde{u}_1(z_1)$ y $\tilde{u}_2(z_2)$. 51
6.2. Estimación de la norma de la solución $u(x)$ en L_2. 53

Capítulo 7. Sumabilidad cuadrada de las derivadas de la solución. 59
7.1. Estimación de las derivadas de la solución en el espacio de Sobolev H^{ε}, $0 \leq \varepsilon < 1/2$. 59

7.2. Reducción a las variables w 60
7.3. Representación para la función U_1 62
7.4. Estimación de las funciones B_1 y B_2 en el espacio $L_2(\Sigma, P_\varepsilon)$ 63
7.5. Descomposición de la función B_3 65
7.6. Estimación de la función $B_{3,1}$ en el espacio $L_2(\Sigma, P_\varepsilon)$ 68
7.7. Estimación de la función $B_{3,2}$ en el espacio $L_2(\Sigma, P_\varepsilon)$ 72

Capítulo 8. Conclusiones 75

Apéndice A. Resultados auxiliares de la teoría de los espacios de Banach 77
A.1. Un embedimiento continuo 77
A.2. El operador de la continuación impar 80

Apéndice B. Problema de Neumann en el semiplano 83

Apéndice C. Transformación del problema de Neumann en ángulo al primer cuadrante 89

Apéndice D. Equivalencia del problema de Neumann en el ángulo Ω y el primer cuadrante K^+ 91

Apéndice E. Estimaciones auxiliares 95

Apéndice F. Estimaciones integrales 99

Apéndice G. Lemas auxiliares 103

Apéndice H. Propiedades de la Transformada de Fourier 107

Bibliografía 109

Índice alfabético 111

Agradecimientos

A mi familia por su apoyo.

A mi asesor el Dr. Anatoli Merzon por su apoyo, paciencia y todas sus enseñanzas durante mi trabajo de tesis.

A los miembros de mi comité tutorial y sinodal: Dr. Carlos Osvaldo Osuna Castro, Dr. Pierre Bayard, Dra. Tatjana Vukasinac, Dr. José Antonio Zapata Ramírez y Dr. Petr. Zhevandrov por sus sugerencias y observaciones durante la realización y revisión de este trabajo.

Al Instituto de Física y Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo y al Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México Campus Morelia por las instalaciones proporcionadas para la realización de mi trabajo doctoral.

A la CIC-UMSNH y PROMEP-UMISNH (vía Proyecto Redes).

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo otorgado para realizar mis estudios de posgrado.

INTRODUCCIÓN

La meta de este trabajo es demostrar que el problema de Neumann para la ecuación de Helmholtz en un ángulo plano de magnitud $\beta < \pi$, en el espacio de Sobolev $H^{1+\varepsilon}$ con $0 < \varepsilon < 1/2$, admite una única solución, si los datos de frontera pertenecen a cierto espacio de Sobolev, y dicha solución depende continuamente de los datos de frontera. Además se obtendrá la fórmula exacta para la solución.

Sea Ω un ángulo plano convexo, con vértice en el origen, lados

$$\Gamma_1 := \{(x, 0) : x > 0\}, \quad \Gamma_2 := \{(\tau \cos\beta, \tau \operatorname{sen}\beta) : \tau > 0\}$$

y frontera $\Gamma := \{0\} \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Para Δ el operador de Laplace, consideramos el siguiente problema de Neumann en este ángulo:

$$\text{(PN)} \qquad \begin{cases} (\triangle - 1)u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \Omega \\ \partial_n u|_{\Gamma_1} &= g_1 \\ \partial_n u|_{\Gamma_2} &= g_2. \end{cases}$$

En este sistema, la primera ecuación se llama **Ecuación de Helmholtz**, ∂_n denota las derivadas normales exteriores a $\Gamma_{1,2}$, y la pareja de funciones (g_1, g_2) forman una función sobre la frontera Γ que pertenece al espacio de Sobolev $H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)$, el cual se describirá más adelante (véase el Teorema 1.2.7). La solución u del sistema (PN) se busca en el espacio de Sobolev $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ cuando $\varepsilon \in [0, 1/2)$.

El problema (PN) pertenece a la clase de problemas de frontera en regiones que no son suaves ni acotadas. Por lo tanto este problema no es el clásico problema de frontera para la ecuación elíptica considerada usualmente en regiones suaves y acotadas o en el exterior de este tipo de regiones. Sin embargo, los conos (ángulos en el caso de planos) y sus complementos, las bolas y sus exteriores, los semiespacios, cilindros, etc., son regiones canónicas para los problemas de propagación de ondas. Este tipo de regiones se llaman canónicas porque en muchos casos se pueden encontrar las soluciones explícitas de estos problemas e investigar propiedades que supuestamente se preservan en otras regiones más complicadas a pesar de tener singularidades en sus frontera (puntos de ángulo). Sin embargo, a diferencia de otras regiones canónicas el problema de frontera para la ecuación de Helmholtz en ángulos no se resuelve por el método de separación de variables (excepto en ángulos rectos) y por lo tanto se requiere métodos más delicados. Dicho método fue propuesto por primera vez por Sommerfeld [24] para la solución del problema de difración de una onda plana sobre un semiplano (un ángulo de magnitud 2π). Más adelante, este método se generalizó por muchos autores para ángulos de magnitud menor que 2π. En los años 1950 G. D. Malyuzhinets [15, 16] desarrolló el método de Sommerfeld para las regiones exteriores de los ángulos planos menores que π. Esto le permitió resolver problemas estacionarios de diffracción para uñas del tipo impedance.

Problemas de frontera para la ecuación de Helmholtz en un ángulo convexo surgen en el estudio de la teoría lineal de propagación de ondas de agua atrapadas por una costa, y también en problemas de propagación de ondas de sonido en cuñas, ya que la ecuación de Helmholtz: $\Delta + \omega^2$ es también una ecuación de onda **estacionaria** porque las amplitudes A de las soluciones $u = e^{i\omega t}A$ de la ecuación de onda $\Box u = 0$, también satisfacen la ecuación de Helmholtz. De esta manera el estudio de las soluciones de la ecuación de Helmholtz representa un gran interés para la Física Matemática y otras áreas en las cuales se encuentran problemas dinámicos, e incluso, por ejemplo, en problemas de la matemática financiera.

Existe una gran cantidad de bibliografía dedicada a problemas de frontera para ecuaciones elípticas en regiones no suaves, (véase por ejemplo el trabajo de A. Komech [8] y la bibliografía correspondiente). En general, los problemas elípticos en regiones suaves se consideran en espacios de Sobolev ya que ellos son espacios de Hilbert y es cómodo trabajar en ellos usando técnicas de la teoría de operadores en estos espacios, para demostrar, por ejemplo: la existencia, o la propiedad de Fredholm (o de Nöter) para estos problemas. Para regiones no suaves estos espacios también son adecuados, pero a diferencia de los problemas “suaves”la definición de los operadores trazas sobre la frontera es más díficil. Ya que sí, por ejemplo la solución u del problema (PN) es continuamente diferenciable, entonces las derivadas normales sobre Γ_1 y Γ_2 tienen que tener los mismos valores en 0: $g_1(0) = g_2(0)$. Esta igualdad se llama la condición de compatibilidad. Por este motivo el planteamiento del problema sobre la frontera resulta no trivial, ya que requiere la construcción de espacios de Sobolev especiales para fronteras que no son suaves. Esta teoría se desarrollo por P. Grisvard en [4] y nuestro trabajo la utiliza en el capítulo 1.
El problema de frontera para la ecuación de Helmholtz aparece de manera natural en [8] para la demostración de que el problema elíptico en una región del tipo lente es de Nöter. Para obtener este resultado fue necesario construir la teoría completa para la ecuacón de Helmholtz en un **ángulo convexo** y proponer un algoritmo para describir las soluciones exactas. Por tal motivo se creó un método especial que después fue llamado el Método de las Características Complejas [7, 10] el cual permitió demostrar la propiedad de Nöter en el espacio de Sobolev H^s con $s > 3/2$. El caso $1 \leq s < 3/2$ no ha sido considerado. Lo que pasa es que existe una gran diferencia entre los casos $s > 3/2$ y $s < 3/2$: para $s > 3/2$ no se conoce ningún espacio apropiado de $H^s(\Gamma)$ que garantice la

existencia y unicidad de la solución, sin embargo para $s < 3/2$ dicho espacio existe y se describe en este trabajo.

Durante la década de los 80's los matemáticos de la escuela del Prof. Meister [**15**, **16**] resovieron el problema de la existencia y uncidad de los problemas de Dirichlet y Neumann para la ecuación de Helmholtz en el espacio H^1 . Este problema se resolvió solamente para ángulos rectos y sus complementos. Sin embargo, el método de operadores que ellos utilizaron no permite analizar el problema para ángulos convexos arbitarios, a pesar de esto surgió la esperanza de que el problema de frontera admitiera una solución unica en el clase H^1 para **cualquier** ángulo plano. El problema se quedó abierto y solamente en el año 2000 se resolvió en [**26**] para datos de frontera de la clase $H^{-1/2}(\Gamma)$ donde Γ es la frontera del ángulo plano.

Sin embargo el análisis de condiciones que garanticen que la solución encontrada en [**26**] es regular (pertenece a un espacio $H^{1+\varepsilon}$) no se consideró. Dicho análisis fue propuesto por el Prof. F. -O. Speck (miembro de la escuela del Prof. Meister), la idea fundamental del problema es que para garantizar la existencia y unicidad del problema en el espacio H^s con $s > 1$ es natural pedir que los datos de frontera sean "un poco" más "suaves"que en el caso de H^1. Resultó que esta condición se satisface, ya que si los datos de frontera son poquito más suaves la propiedad de existencia y unicidad se preserva en este caso. Este es el principal resultado de nuestro trabajo. Específicamente, nosotros demostramos que si $(g_1, g_2) \in H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)$ con $\varepsilon < 1/2$ entonces el problema de Neumann admite una única solución en el espacio $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$. El espacio $H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)$ es simplemente el producto cartesiano de $H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_1) \times H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_2)$ (véase la definición 1.2.6) sin ninguna condición de compatibilidad en cero (para $\varepsilon = 0 \quad g_1 - g_2 \in \tilde{H}(\mathbb{R}^+)$). De esta manera, en un sentido el problema está cerrado, ya que para $s \geq 3/2$ no hay condiciones (no se conoce el espacio de Sobolev de los datos de frontera) que garanticen la existencia y unicidad de la solución del problema de Neumann. Obviamente, el espacio de Sobolev de los datos de frontera $H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_1) \times H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_2)$ no sirve, ya que no toma en cuenta las condiciones del tipo $g_1(0) = g_2(0)$). Para s suficientemente grande, el espacio de Sobolev de los datos sobre la frontera que garantiza la existencia y unicidad es desconocido, y al parecer este problema esta lejos de su resolución. Sin embargo, nuestros resultados muestran cierta información acerca de sus condiciones de compatabilidad para $u \in H^{m+\varepsilon}, \quad \varepsilon \in [0, 1/2), \quad m \in \mathbb{N}^+$. Para generalizar los resultatos obtenidos en [**26**] también utilizamos el Método de las Características Complejas. Pero a diferencia de los métodos usados en [**26**] fue necesario desarrollar una técnica especial para estimar las cotas de las integrales dobles en espacios especiales de L^2 con pesos diferentes a los usados en [**26**] (véase el capítulo 7). Esta es la parte más complicada técnicamente. Los resultados de esta tesis están publicados en [**20**].

El plan de desarrollo del trabajo es el siguiente.

En el capítulo I se introducen los conceptos necesarios tales como espacios de Sobolev y operador traza. Formulamos y demostramos algunos hechos necesarios de la teoría de distribuciones y de los espacios de Sobolev. Precisamos el buen planteamiento del problema de Neumann en términos de los espacios de Sobolev y operadores traza y planteamos el inverso.

En el capítulo II se reduce el problema de Neumann general (con dos datos de Neumann) a un problema semihomogéneo con un dato distinto de cero, usando la solución conocida del problema de Neumann en el semiplano.

En el capítulo III se reduce el problema de Neumann semihomogéneo a una identitad integral usando una generalización de la formula de Green para las funciones generalizadas de los espacios de Sobolev.

En el capítulo IV se realiza el primer paso del Método de las Características complejas: aplicamos la transformada de Fourier al sistema con respecto a las variables del espacio y reducimos el problema a una relación algebraica para las transformadas de Fourier de los datos de Cauchy. Obtenemos la ecuacón de conexió que contiene dos datos de Cauchy desconocidos.

En el capítulo V se realiza el segundo paso del Método de las Características complejas: "levantamos" la identitad algebraica a la superficie de Riemann de los ceros del símbolo de Helmholtz, usando el método de las funciones automorfas y eliminamos un dato de Cauchy. Obtenemos y resolvemos la ecuacón en diferencias para un dato de Cauchy y escribimos la solución del problema.

En el capítulo VI se demuestran propiedades necesarias de los datos de Dirichlet que permitirán más adelante establecer la pertenencia de la solución al espacio $H^{1+\varepsilon}$ con $\varepsilon \in [0, 1/2)$. Estimamos la norma de la solución en el espacio L^2 y demostramos que la solución depende continumente de los datos de frontera.

En el capítulo VII se demuestra que las derivadas de la solución pertnecen al espacio H^{ε} con $\varepsilon \in [0, 1/2)$ y dependen continuamente de los datos de frontera. Esto concluye la demostración de la pertenencia de la solución al espacio $H^{1+\varepsilon}$ y la depedencia continua de los datos de frontera.

En los Apéndices se demuestran afirmaciones y hechos auxiliares técnicos usados en el texto sin demostración.

Capítulo 1

Espacios de funciones y operadores traza

En este capítulo introducimos los espacios funcionales de Sobolev, demostramos y formulamos algunas propiedades de los espacios funcionales de distribuciones, los cuales necesitamos para introducir y describir los operadores traza. También introducimos el espacio de Sobolev de los datos de frontera y precisamos el planteamiento del problema de Neumann (véase la sección 1.3)

1.1. Espacios funcionales de Sobolev

Para cualquier conjunto abierto $M \subset \mathbb{R}^n$, denotamos por $\mathcal{D}(M)$ al espacio lineal de las funciones suaves $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto cuya clausura de sus soportes pertenecen a M, $\mathcal{D}(\overline{M})$ es el espacio lineal de las restricciones de funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a $\overline{M}$, i.e. $\mathcal{D}(\overline{M}) := \{\overline{u}|_{\overline{M}} : \overline{u} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$. Sea $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Decimos que la sucesión $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(M)$ converge a φ en $\mathcal{D}(M)$, si existe $K \subset M$ compacto: supp $\varphi_k \subset K$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$ y $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$, $k \to \infty$ $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ denotamos al espacio de Schwartz de las funciones de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ rápidamente decrecientes, i.e. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \|\varphi\|_{\alpha,N} := \sup_{x\in\mathbf{R}}(1+x)^N |D_x^\alpha \varphi(x)| < \infty,\ \forall\ N = 1,2,\ldots\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n\}$ con la topología determinada por las normas $\|\cdot\|_{\alpha,N}$. El espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\overline{M})$ se define como de las funciones de restricciones de las funciones de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a $\overline{M}$. Los símbolos $\mathcal{D}'(M)$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ denotan los espacios duales a $\mathcal{D}(M)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ equipados con su topología estándar como espacios funcionales lineales continuos. La acción de un funcional $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ sobre $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ se denotará por $\langle \varphi, v\rangle$. El símbolo $\mathcal{S}'(\overline{M})$ denota el espacio lineal de las distribuciones temperadas cuyos soportes pertenecen a $\overline{M}$.

Definición 1.1.1. Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiremos su transformada de Fourier como

$$\hat{\varphi}(\xi) := F_{x\to\xi}[\varphi] = \int e^{i\xi x}\varphi(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1.1}$$

Si $\hat{\varphi}(\xi)$ puede continuarse analíticamente a alguna región en $\mathbb{C}^n$, entonces ξ puede ser complejo.

Observación 1.1.2. ([4]) Ya que $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ es un isomorfismo topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, y

$$\widehat{\hat{\varphi}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\varphi(x) \tag{1.1.2}$$

entonces, para $f \in \mathcal{S}'(R^n)$ su transformada de Fourier $\hat{f}$ que se define como:

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$$

induce un isomorfismo topológico de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \xrightarrow[f \longmapsto \hat{f}]{} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (equipando a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ con la topología débil). De aquí y de (1.1.2) se sigue que

$$\langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle f, \varphi \rangle. \tag{1.1.3}$$

Definición 1.1.3. Para $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ denota el espacio de Sobolev sobre $\mathbb{R}^n$ de las funciones generalizadas $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ cuya Transformada de Fourier $\widehat{u}(\xi)$ es localmente integrable en el sentido de Lebesgue y tal que

$$\|u\|_s^2 = \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi < \infty. \tag{1.1.4}$$

Notemos que esta definición implica que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n), \quad s \in \mathbb{R}$$

ya que para cada $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se satisface: $\hat{u}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (véase [3]).

Lema 1.1.4. *La norma (1.1.4) es invariante con respecto a la transformación: $u(x) \mapsto u(-x)$, es decir,*

$$\|u(x)\|_{H^s(\mathbf{R}^n)} = \|u(-x)\|_{H^s(\mathbf{R}^n)}.$$

Demostración. Sea $u_1(x) := u(-x)$, entonces $\hat{u}_1(\xi) = \hat{u}(-\xi)$ por (H.0.3). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|u_1\|^2_{H^s(\mathbf{R}^n)} &= \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\hat{u}_1(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi = \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\hat{u}(-\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi \\ &= \int\limits_{\mathbf{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi = \|u\|^2_{H^s(\mathbf{R}^n)}. \end{aligned}$$

■

Necesitaremos también las siguientes afirmaciones.

Teorema 1.1.5. (Teorema 4.1, [3]) *Para cada $s \in \mathbb{R}$, el espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Lema 1.1.6. ([3]) *Sea $\varphi \in H^{1/2}(\mathbb{R})$, entonces*

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\mathbf{R})} = \|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R})} + \int\limits_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x - y|^2} dxdy.$$

DEFINICIÓN 1.1.7. Sean $s \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ un dominio. Denotamos por $H^s(\mathcal{V})$ el espacio de restricciones de las funciones de $H^s(\mathbb{R}^n)$ a $\mathcal{V}$ con la norma

$$\|u\|^2_{H^s(\mathcal{V})} = \inf_{lu} \|lu\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \tag{1.1.5}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las extenciones $lu \in H^s(\mathbb{R}^n)$ de la función u.

OBSERVACIÓN 1.1.8. El operador de restricción que actúa de $H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathcal{V}) : \varphi \mapsto \varphi|_{\mathcal{V}}$ es continuo ya que $\|\varphi|_{\mathcal{V}}\|_{H^s(\mathcal{V})} \leq \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$. Por lo tanto, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $H^s(\mathcal{V})$ por el Teorema 1.1.5.

Denotamos $\mathbb{R}^{\pm} := \{x \in \mathbb{R} : \pm x > 0\}$.

LEMA 1.1.9. *Sea $u \in H^s(\mathbb{R}^+)$. Entonces $u(-x) \in H^s(\mathbb{R}^-)$, y*

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^+)} = \|u(-x)\|_{H^s(\mathbb{R}^-)}. \tag{1.1.6}$$

Demostración. De la Definición 1.1.7 se sigue que

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^+)} = \inf_{lu} \|(lu)(x)\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Luego, usando el Lema 1.1.4 tenemos que

$$\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^+)} = \inf_{lu} \|(lu)(-x)\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

Aquí, la expresión $(lu)(-x)$ se puede interpretar como la extensión de la función $u(-x)$ hacia "la derecha" de $\mathbb{R}$. Ya que esta extensión pertenece a $H^s(\mathbb{R})$, entonces la Definición 1.1.7 implica (1.1.6). ■

LEMA 1.1.10. ([3]) *El espacio dual al espacio $H^s(\mathbb{R}^n)$ es algebraicamente isomorfo al espacio $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ para toda $s \in \mathbb{R}$, y la acción del funcional $w \in H^{-s}$ en los elementos $u \in H^s$ se define como:*

$$\langle w, u \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{w}(\xi)\hat{u}(\xi) d\xi. \tag{1.1.7}$$

OBSERVACIÓN 1.1.11. La igualdad (1.1.7) coincide con (1.1.3) si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

DEFINICIÓN 1.1.12. Sea $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$. Denotaremos por $l_0 u$ la extensión por cero de la distribución u; es decir, $l_0 u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$ y $l_0 u\Big|_{\mathbb{R}^+} = u$. Si $l_0 u$ existe, diremos que u es extensible por cero a una distribución de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Definición 1.1.13. Para $s \in \mathbb{R}$, el espacio $\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+)$ denota el subespacio de distribuciones de $H^s(\mathbb{R}^+)$, las cuales son extensibles por cero a un elemento de $H^s(\mathbb{R})$, es decir; $\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+) := \{\varphi \in H^s(\mathbb{R}^+) : \exists\, l_0\varphi \in H^s(\mathbb{R})\}$. Equipamos este espacio con la norma

$$\|\varphi\|_{\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+)} = \|l_0\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^+)}.$$

Con esta norma inducida por $H^s(\mathbb{R})$, este espacio se convierte en un espacio de Banach, ya que es un subespacio cerrado de $H^s(\mathbb{R})$ (véase [3]).

Observación 1.1.14. En otras palabras el espacio $\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+)$ es el conjunto de las restricciones de funciones de $H^s(\mathbb{R})$ a $\mathbb{R}^+$ con soportes en $\overline{\mathbb{R}^+}$. De esta manera, el espacio $\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+)$ puede considerarse como un subespacio del espacio $\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$

De manera similar se define el espacio $\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^-)$.

Definición 1.1.15. Sea $f \in \widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+)$, $s \geq 0$. Definimos la acción:

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_0^\infty f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+}). \tag{1.1.8}$$

Ya que $s \geq 0$, entonces $f \in \widetilde{H^0}(\mathbb{R}^+) = L^2(\mathbb{R}^+)$. De aquí se sigue que la integral (1.1.8) converge y $\langle f, \varphi\rangle$ define un funcional lineal.

Lema 1.1.16. **([4], [21])** *El espacio $\widetilde{H^{1/2}}(\mathbb{R}^+)$ es el espacio lineal de las funciones $u \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ tales que*

$$\|u\|_{\widetilde{H^{1/2}}(\mathbb{R}^+)} := \left(\|u\|^2_{H^{1/2}(\mathbb{R}^+)} + \int_{\mathbb{R}^+} \frac{|u(x)|^2}{x}dx\right)^{1/2} < \infty \tag{1.1.9}$$

Lema 1.1.17. **([3])** *Para $s \in (-1/2, 1/2)$, $\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+) = H^s(\mathbb{R}^+)$. Además, si $s = 1/2$, entonces $\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+)$ es un subespacio propio denso de $H^s(\mathbb{R}^+)$.*

Lema 1.1.18. *La siguiente afirmación se cumple en el sentido algebraico*

$$[H^{1/2}(\mathbb{R}^+)]' \cong \widetilde{H^{-1/2}}(\mathbb{R}^+). \tag{1.1.10}$$

Demostración. Sea $\pi : H^{1/2}(\mathbb{R}) \to H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ la proyección de las restricciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$ (véase la Definición 1.1.7). Claramente, π es continua y suprayectiva. Consideremos la transformación $L : [H^{1/2}(\mathbb{R}^+)]' \to \widetilde{H^{-1/2}}(\mathbb{R}^+)$. Notemos que para $G \in [H^{1/2}(\mathbb{R}^+)]'$, $G \circ \pi \in [H^{1/2}(\mathbb{R}^+)]'$ y por el Lema 1.1.10 existe un único $g \in H^{-1/2}(\mathbb{R})$ tal que $G \circ \pi = g$ y

$$\langle G \circ \pi, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle = (2\pi)^{-1} \int \hat{g}(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi, \quad \forall\, \varphi \in H^{1/2}(\mathbb{R}). \tag{1.1.11}$$

Demostraremos que supp $g \subset \overline{\mathbb{R}^+}$. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^-)$. Entonces, $\varphi \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ y $\pi\varphi = 0$. De aquí,

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle G \circ \pi, \varphi \rangle = \langle G, \pi\varphi \rangle = \langle G, 0 \rangle = 0.$$

De esta manera definimos $L : [H^{1/2}(\mathbb{R}^+)]' \to \widetilde{H^{-1/2}}(\mathbb{R}^+)$ como: $LG = g$. Obviamente, L es inyectivo. Demostraremos que cada $g \in H^{-1/2}(\mathbb{R}^+)$ es un funcional sobre $H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$, i.e. $g \in [H^{1/2}(\mathbb{R}^+)]'$. Definimos

$$\langle g, \varphi \rangle = \langle g, \pi^{-1}\varphi \rangle, \quad \forall\, \varphi \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+). \tag{1.1.12}$$

Demostraremos que (1.1.12) no depende de la elección de $\pi^{-1}\varphi$ (o equivalentemente, de la extensión $l\varphi$ (véase la Definición 1.1.7)). Supongamos que $\pi\varphi_1 = \pi\varphi_2 = \varphi$. Entonces

$$\pi(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \Rightarrow \text{supp}\, \varphi_1 - \varphi_2 \subset \overline{\mathbb{R}^-} \quad \text{y} \quad \varphi_1 - \varphi_2 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^-).$$

Por otro lado, como supp $g \subset \overline{\mathbb{R}^+}$, entonces $\langle g, \varphi \rangle = 0$ para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^-)$. Ya que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^-)$ es denso en $\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^-)$ (véase [3] Lema 4.3), entonces $\langle g, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0$. De aquí, (1.1.12) esta bien definida.

La linealidad de (1.1.12) es evidente.

Demostraremos que $\langle g, \varphi \rangle$ es continuo sobre $H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$. Supongamos que $\|\varphi\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^+)} \leq 1$. Por la Definición 1.1.5 de la norma $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^+)}$, existe $\overline{\varphi} \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ tal que $\|\overline{\varphi}\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^+)} \leq 2$ y $\pi\overline{\varphi} = \varphi$. Por lo tanto, (1.1.12) implica

$$|\langle g, \varphi \rangle| = |\langle g, \overline{\varphi} \rangle| \leq 2\|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}.$$

De aquí, g es acotada sobre la bola unitaria en $H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ y por lo tanto $g \in [H^{1/2}(\mathbb{R}^+)]'$. ■

Corolario 1.1.19. *Sea $g \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$. Entonces*

$$\langle g, \varphi \rangle_{\langle \widetilde{H^{-1/2}}(\mathbb{R}^+), H^{1/2}(\mathbb{R}^+)\rangle} = \int_0^\infty g(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$$

aquí, $\langle \widetilde{H^{-1/2}}(\mathbb{R}^+), H^{1/2}(\mathbb{R}^+)\rangle$ denota la acción de dualidad entre estos espacios.

Demostración. Se sigue de (1.1.10), (1.1.11) y la igualdad de Parseval. ■

De manera similar, se demuestra el siguiente Lema.

Lema 1.1.20. ([3], Lema 4.8.) *Sea $s \in \mathbb{R}$. El espacio dual al espacio $\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+)$ es isomorfo al espacio $H^{-s}(\mathbb{R}^+)$:*

$$[\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+)]' \simeq H^{-s}(\mathbb{R}^+).$$

Además, el valor de un funcional $f \in H^{-s}(\mathbb{R}^+)$ *sobre un elemento* $u \in \widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+)$ *se determina mediante la fórmula:*

$$\langle f, u\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} \widehat{lf}(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

la cual, no depende de la extensión l. Recíprocamente, el espacio dual al espacio $H^{-s}(\mathbb{R}^+)$ *es isomorfo al espacio* $\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+)$*, y el valor del funcional* $u \in \widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+)$ *sobre un elemento* $f \in H^{-s}(\mathbb{R}^+)$ *se determina como:*

$$\langle u, f\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}} \widehat{lf}(\xi)\bar{\hat{u}}(\xi)d\xi.$$

1.2. Operadores traza

Nuestro propósito es resolver el problema de Neumann (PN) en el espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$, cuyos elementos en general no tienen derivadas sobre la frontera. Para superar este problema, utilizamos la teoría de los operadores traza, la cual permite determinar los valores de las derivadas normales de funciones no suaves. Iniciamos esta sección con la definición de los datos de Dirichlet.

Definición 1.2.1. **([4], [15], [21])** Sea Ω un ángulo plano de magnitud $\beta \in (0, \pi)$, vértice en $(0, 0)$ y lados Γ_1 y Γ_2. Para $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, definimos el operador traza

$$\begin{aligned} T_{0,\Gamma} : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\longrightarrow \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^+}) \times \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^+}) \\ \varphi &\longmapsto (\varphi_1(s), \varphi_2(t)), \qquad s, t \in \mathbb{R}^+ \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

aquí s y t son los parámetros naturales sobre Γ_1 y Γ_2 respectivamente. Las funciones φ_1 y φ_2 se llaman los datos de Dirichlet de la función φ sobre Γ_1 y Γ_2 respectivamente.
También definimos el espacio $H^{1/2}(\Gamma)$ que consiste de los pares de funciones $(f_1(s), f_2(t))$ tales que $f_1(s) \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $f_2(t) \in H^{1/2}(\Gamma_2)$ y $f_1(s) - f_2(t) \in \widetilde{H^{1/2}}(\mathbb{R}^+)$. Este espacio esta equipado con la norma:

$$\|(f_1, f_2)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} := \|f_1\|_{H^{1/2}(\mathbf{R}^+)} + \|f_2\|_{H^{1/2}(\mathbf{R}^+)} + \|f_1 - f_2\|_{\widetilde{H^{1/2}}(\mathbf{R}^+)}. \tag{1.2.2}$$

Lema 1.2.2. *Sea* $T_{0,\Gamma}$ *el operador traza definido por (1.2.1) entonces* $T_{0,\Gamma}[\mathcal{D}(\overline{\Omega})] \subset H^{1/2}(\Gamma)$.

Demostración. Sea $T_{0,\Gamma}\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, con $\varphi_{1,2} \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^+})$. Demostraremos que

$$1) \quad \varphi_l \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+), \quad l = 1, 2; \tag{1.2.3}$$

$$2) \quad \varphi_1 - \varphi_2 \in \widetilde{H^{1/2}}(\mathbb{R}). \tag{1.2.4}$$

1) Supongamos que $l = 1$. La demostración para $l = 2$ es análoga. Ya que existe $\overline{\varphi}_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \left.\overline{\varphi}_1\right|_{\mathbf{R}^+} = \varphi_1$, entonces es suficiente demostrar que $\overline{\varphi}_1 \in H^{1/2}(\mathbb{R})$. Pero esto se sigue del hecho de que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es un subespacio lineal de $H^{1/2}(\mathbb{R})$.

2) Demostraremos la afirmación (1.2.4). Sea $\varphi_3 := \varphi_1 - \varphi_2$. Ya que $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, entonces $\varphi_3(0) = 0$. Luego, desarrollando $\varphi_3(x)$ en serie de Taylor para $x \geq 0$, obtenemos

$$\varphi_3(x) = \varphi_3(0) + \varphi_3'(0)x + \alpha(x) = \varphi_3'(0)x + \alpha(x), \quad x \geq 0 \tag{1.2.5}$$

donde $\alpha(x) \in C(\overline{\mathbb{R}^+})$, y

$$|\alpha(x)| \leq Cx^2 \quad \text{para} \quad x \geq 0. \tag{1.2.6}$$

Esto implica que $|\varphi_3(x)| \leq C$ para $x \geq 0$, y

$$\int_{\mathbf{R}^+} \frac{|\varphi_3(x)|^2}{x} dx < \infty$$

ya que $\varphi_3(x) \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^+})$. Entonces: $\varphi_3(x)/x = \varphi_3'(0) + [\alpha(x)/x], \quad x > 0$, donde $\alpha(x)/x \in C(\overline{\mathbb{R}^+})$ por (1.2.6).

De aquí, el Lema 1.1.16 implica que

$$\|\varphi_3\|^2_{\widetilde{H^{1/2}}(\mathbf{R}^+)} = \|\varphi_3\|^2_{H^{1/2}(\mathbf{R}^+)} + \int \frac{|\varphi_3(x)|^2}{|x|} dx < \infty$$

ya que $\dfrac{\varphi_3(x)}{x} \in C_0(\mathbb{R})$. De aquí, (1.1.9) implica que $\varphi_3 \in \widetilde{H^{1/2}}(\mathbb{R})$. ∎

Observación 1.2.3. De manera similar se puede demostrar que

$$T_{0,\Gamma}[\mathcal{S}(\overline{\Omega})] \subset H^{1/2}(\Gamma).$$

Resulta que $T_{0,\Gamma}[\mathcal{D}(\overline{\Omega})]$ no solamente está contenido en $H^{1/2}(\Gamma)$, sino además es continuo de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ a $H^{1/2}(\Gamma)$ si equipamos a $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ con la norma de $H^1(\Omega)$ y a $H^{1/2}(\Gamma)$ con la norma (1.2.2). Este resultado se ha demostrado para dominios Lipschitz acotados (véase [4], Teorema 1.5.23) y puede generalizarse para dominios no acotados. De aquí se deduce el siguiente:

Teorema 1.2.4. *El operador traza $T_{0,\Gamma} : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{1/2}(\Gamma)$ puede extenderse a un operador continuo de $H^1(\Omega)$ a $H^{1/2}(\Gamma)$, y tiene inverso continuo $T_{0,\Gamma}^{-1}$.*

Demostración. La extensión del operador se sigue del hecho que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ usando la continuidad de $T_{0,\Gamma}$.

Definición 1.2.5. Sea $f \in H^1(\Omega)$. Los datos de Dirichlet de f sobre Γ son la pareja $(\varphi_1, \varphi_2) \in H^{1/2}(\Gamma)$ la cual es la imagen de f bajo $T_{0,\Gamma}$. De manera más precisa: por la densidad de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ en $H^{1/2}(\Gamma)$ existe $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(\overline{\Omega}) : f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ en $H^1(\overline{\Omega})$. Esto implica que

$$(\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}) := T_{0,\Gamma}(fn) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\varphi_1, \varphi_2) \in H^{1/2}(\Gamma)$$

los cuales son los datos de Dirichlet.

Ahora pasamos a los datos de Neumann.

Definición 1.2.6. Para $\varepsilon \in [0, 1/2)$, definimos el espacio

$$H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma) = \left\{(g_1, g_2) \in H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_1) \times H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_2) : g_1 + g_2 \in \tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)\right\} \tag{1.2.7}$$

aquí el espacio $H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_l)$ se identifica con el espacio $H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ usando la identificación natural de $g_l \in H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma_l)$ con una distribución en $\mathbb{R}^+$, es decir, con la función $g_l(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}^+$; $l = 1, 2$. Además, para $\varepsilon \in (0, 1/2)$, la norma en $H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)$ se define como

$$\|(g_1, g_2)\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)} = \|g_1\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)} + \|g_2\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}. \tag{1.2.8}$$

El Lema 1.1.17 implica que la última condición en (1.2.7) es redundante para $\varepsilon \in (0, 1)$ cuando $\tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+) = H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$, pero es relevante para $\varepsilon = 0$ cuando $\widetilde{H^{-1/2}}(\mathbb{R}^+)$ es un subespacio denso propio de $H^{-1/2}(\mathbb{R}^+)$ (con respecto a la norma del último espacio). Por lo tanto, la definición de la norma (1.2.8) es equivalente a la norma (1.2.7) para $\varepsilon \in (0, 1)$. Obviamente, $H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)$ es un subespacio lineal de $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Teorema 1.2.7. **([2], [15], [21])** *El espacio $H^{-1/2}(\Gamma)$ es el espacio lineal de los pares $(g_1(s), g_2(t)) \in \left[\widetilde{H^{1/2}}(\Gamma_1)\right]' \times \left[\widetilde{H^{1/2}}(\Gamma_2)\right]'$ tales que*

$$g_1(s) + g_2(s) \in \widetilde{H^{-1/2}}(\mathbb{R}^+)$$

y la prima significa el espacio dual. Equipamos el espacio $H^{-1/2}(\Gamma)$ con la norma

$$\|(g_1, g_2)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \|g_1\|_{(\widetilde{H^{1/2}}(\mathbf{R}^+))'} + \|g_2\|_{(\widetilde{H^{1/2}}(\mathbf{R}^+))'} + \|g_1 + g_2\|_{\widetilde{H^{-1/2}}(\mathbf{R}^+)} \tag{1.2.9}$$

aquí la norma en el espacio $(\widetilde{H^{1/2}}(\mathbb{R}^+))'$ es la norma estandar del espacio dual a un espacio de Banach.

En el siguiente Lema probamos que el espacio $H^{-1/2}(\Gamma)$ con la norma introducida en esta definición, puede identificarse con el espacio de todos los funcionales lineales continuos sobre $H^{1/2}(\Gamma)$ con la norma estándar del espacio dual.

Lema 1.2.8. *Sea $H^{-1/2}(\Gamma)$ el espacio de Banach introducido en la Definición 1.2.7, entonces*
(i) *$H^{-1/2}(\Gamma)$ es el espacio de todos los funcionales lineales continuos sobre $H^{1/2}(\Gamma)$ con la norma (1.2.9), la cual es equivalente a la norma estandar del espacio dual al espacio de Banach $H^{1/2}$. Además, si $g := (g_1, g_2) \in H^{-1/2}(\Gamma)$, entonces g define un funcional lineal continuo sobre $H^{1/2}(\Gamma)$ el cual actúa mediante la fórmula*

$$\langle g, f\rangle_\Gamma = \langle g_1, f_1 - f_2\rangle + \langle g_1 + g_2, f_2\rangle, \quad f = (f_1, f_2) \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{1.2.10}$$

(ii) *Si* $g_0 \in \widetilde{H^{-1/2}}(\mathbb{R}^+)$*, entonces* $(g_0, 0) \in H^{-1/2}(\Gamma)$*. Además, para todo* $f = (f_1, f_2) \in H^{1/2}(\Gamma)$ *se satisface*

$$\langle (g_0, 0), f\rangle_\Gamma = \langle g_0, f_1\rangle = (2\pi)^{-1} \int \hat{g}_0(z)\hat{f}_1(z)dz \tag{1.2.11}$$

donde $\hat{g}_0$ *es la transformada de Fourier de* g_0 *y* $\hat{f}_1$ *es la transformada de Fourier de cualquier continuación de* f_1 *a una función de* $H^{1/2}(\mathbb{R})$*.*

(iii) *Sea* $g = (g_1, g_2) = T_{0,\Gamma}G$*,* $G \in \mathcal{S}(\overline{\Omega})$ *(véase la Observación 1.2.3). Entonces*

$$\langle g, f\rangle_\Gamma = \int_{\Gamma_1} g_1(s)f_1(s)ds + \int_{\Gamma_2} g_2(s)f_2(s)ds, \quad \forall f = (f_1, f_2) \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{1.2.12}$$

Demostración. La afirmación (i) es consecuencia de la Proposición A.1.1 del Apéndice A. En efecto, Sean $A := H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ y $B := \widetilde{H^{1/2}}(\mathbb{R}^+)$, entonces

$$H^{1/2}(\Gamma) = \{(a_1, a_2) \in A \times A : a_1 - a_2 \in B\}.$$

Por la Proposición A.1.1 tenemos que

$$[H^{1/2}(\Gamma)]' = \{(b_1', b_2') \in B' \times B' : b_1' + b_2' \in A'\}.$$

De aquí, el Lema 1.1.18 implica que $A' = \widetilde{H^{-1/2}}(\mathbb{R}^+)$. Por lo tanto, $[H^{1/2}(\Gamma)]'$ se describe como en la Definición 1.2.7. Además, la norma (1.2.9) coincide con la norma (A.1.10).

Demostraremos ahora (ii). Notemos que $(g_0, 0) \in H^{1/2}(\Gamma)$, ya que $g_0 \in \widetilde{H^{1/2}}(\mathbb{R}^+)$. Además, de (A.1.5) se sigue que $\langle (g_0, 0), (f_1, f_2)\rangle = \langle g_0, f_1\rangle_\Gamma$. Finalmente, la segunda identidad se sigue de (1.1.7). Por otro lado, de (1.2.10) se sigue que para $(f_1, f_2) \in H^{1/2}(\Gamma)$

$$\langle (g_0, 0), (f_1, f_2)\rangle_\Gamma = \langle g_0, f_1 - f_2\rangle + \langle g_0, f_2\rangle = \langle g_0, f_1\rangle,$$

ya que $g_0 \in \widetilde{H^{-1/2}}(\mathbb{R}^+)$, $f_1 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ y $\operatorname{supp} g_0 \subset \overline{\mathbb{R}^+}$. De aquí (1.2.11) se cumple por la igualdad de Parseval.

Demostraremos (iii). La ecuación (1.2.10) implica que

$$\langle g, f\rangle_\Gamma = \langle g_1, f_1 - f_2\rangle + \langle g_1 + g_2, f_2\rangle. \tag{1.2.13}$$

Además, como $g_1 \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ y $f_1 - f_2 \in \widetilde{H^{1/2}}(\mathbb{R}^+)$, entonces (1.1.8) implica que

$$\langle g_1, f_1 - f_2\rangle = \int_0^\infty g_1(s)(f_1(s) - f_2(s))ds.$$

Similarmente, como $g_1 + g_2 \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}^+})$ y $f_2 \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$, entonces

$$\langle g_1 + g_2, f_2\rangle = \int_0^\infty (g_1(s) + g_2(s))f_2(s)ds. \tag{1.2.14}$$

Las igualdades (1.2.13)-(1.2.14) implican (1.2.12) por el Corolario 1.1.19. El Lema esta probado.

■

1.3. Precisión del planteamiento del problema de Neumann

A diferencia de los datos de Dirichlet los datos de Neumann no siempre existen para cualquier $u \in H^1(\Omega)$, sin embargo, si u satisface la ecuación de Helmholtz homogénea en Ω estos datos existen. En esta sección precisaremos esta afirmación. Iniciamos con la definición de los siguientes espacios.

Definición 1.3.1. Sea Δ el operador de Laplace. Entonces

$$P := \Delta - 1. \tag{1.3.1}$$

Definición 1.3.2. **([4], [21]).** El espacio $\mathcal{H}^1(\Omega)$ consiste de las funciones $u \in H^1(\Omega)$ tales que $Pu(x, y) = 0$ para $(x, y) \in \Omega$. La norma en $\mathcal{H}^1(\Omega)$ esta dada por

$$\|u\| = \|u\|_{H_1(\Omega)}.$$

Además, definimos

$$\mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega) := \mathcal{H}^1(\Omega) \cap H^{1+\varepsilon}(\Omega), \quad \varepsilon \in [0, 1/2). \tag{1.3.2}$$

Consideremos el operador traza de las derivadas normales exteriores

$$T^{\varepsilon}_{1,\Gamma} : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \longrightarrow H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma), \tag{1.3.3}$$

que actúa por la fórmula:

$$\varphi \mapsto \left(\partial_{n_1}\varphi|_{\Gamma_1}, \partial_{n_2}\varphi|_{\Gamma_2}\right) \tag{1.3.4}$$

Por la Definición 1.2.6 del espacio $H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)$ es fácil ver que

$$\left(\partial_{n_1}\varphi|_{\Gamma_1}, \partial_{n_2}\varphi|_{\Gamma_2}\right) \in H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma).$$

De manera similar al caso de los datos de Dirichlet, este operador se extiende continuamente al operador traza $T^{\varepsilon}_{1,\Gamma}$ con dominio $\mathcal{H}^{1+\varepsilon}$, es decir, se cumple el siguiente

Teorema 1.3.3. **([15], [21])** *El operador $T^{\varepsilon}_{1,\Gamma}$ en (1.3.3) puede extenderse a un operador continuo de $\mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$ en $H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)$, para $\varepsilon \in [0, 1/2)$:*

$$T^{\varepsilon}_{1,\Gamma} : \mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega) \longrightarrow H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma). \tag{1.3.5}$$

De aquí, para cualquier $u \in \mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$ denotamos por $T^{\varepsilon}_{1,\Gamma}\, u\,|_{\Gamma_1} = u^1_1$, $\quad T^{\varepsilon}_{1,\Gamma}\, u\,|_{\Gamma_2} = u^1_2$, y los llamamos ***los datos de Neumann*** sobre los lados del ángulo Ω.

La meta principal de este trabajo, es demostrar que el operador traza $T^{\varepsilon}_{1,\Gamma}$ es invertible para $\varepsilon \in [0, 1/2)$. En otras palabras, queremos demostrar que para cualquier pareja $(g_1, g_2) \in H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)$ existe una solución de la ecuación $Pu = 0$ en Ω tal que $u \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ y $T^{\varepsilon}_{1,\Gamma} u = (g_1, g_2)$. Además se dará la forma explícita de la solución u. En [26] este problema se resolvió para $\varepsilon = 0$.

Observación 1.3.4. Si $u \in \mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$, entonces por (1.3.2) $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ y por el Teorema 1.3.3 existen los datos de Neumann $(u^1_1, u^1_2) = T^0_{1,\Gamma}(u)$, aquí $(u^1_1, u^1_2) \in H^{-1/2}(\Gamma)$, ya que

$$T^{\varepsilon}_{1,\Gamma}(u) = T^0_{1,\Gamma}\Big|_{\mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)}.$$

Además,

$$T^{\varepsilon}_{1,\Gamma}(u) = (u^1_1, u^1_2), \quad \text{con} \quad (u_1, u_2) \in H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma),$$

por el Teorema 1.3.3. De esta manera, podemos denotar los datos de Neumann de $u \in \mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$ como (u^1_1, u^1_2) sin índice ε, ya que estos datos no dependen de $\varepsilon \geq 0$.

Ahora tenemos todo lo necesario para precisar el planteamiento del problema de Neumann (PN). Vamos a buscar la solución u de este problema en el espacio $\mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$, para $\varepsilon \in [0, 1/2)$ (véase la Definición 1.3.2). Por el Teorema 1.3.3 para funciones de este espacio, existen los datos de Neumann

$$T^{\varepsilon}_{1,\Gamma}(u) = \left(\partial_n u|_{\Gamma_1}, \partial_n u|_{\Gamma_2}\right) = (u^1_1, u^1_2),$$

los cuales pertenecen al espacio $H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)$. De este modo, de aquí en adelante siempre vamos a suponer que la pareja (g_1, g_2) en el problema (PN) pertenece al espacio $H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)$, es decir,

$$(g_1, g_2) \in H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma), \quad \varepsilon \in [0, 1/2) \tag{1.3.6}$$

y la solución u del problema (PN) se busca en el espacio $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$, para $\varepsilon \in [0, 1/2)$.

Observación 1.3.5. Se puede demostrar que para $\varepsilon \geq 1/2$ el operador inverso a $T^{\varepsilon}_{1,\Gamma}$ no existe. En este caso el operador $T^{\varepsilon}_{1,\Gamma}$ es de Fredhlom (véase [8]).

Capítulo 2

Problema de Neumann en un ángulo y su reducción al problema semihomogéneo

En este capítulo reducimos el problema de Neumann general al problema de Neumann semihomogéneo, es decir, cuando un dato de Neumann es cero. Esto es posible gracias a la existencia y unicidad del problema de Neumann para el semiplano en los espacios de Sobolev.

2.1. Formulación del problema de Neumann en un ángulo

Consideremos el problema de Neumann (PN). Buscamos una representación de la solución que pertenezca al espacio $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$, para $\varepsilon \in [0, 1/2)$. La ecuación de Helmholtz se entiende en el sentido generalizado, i.e. la igualdad $(\Delta - 1)u = 0$ significa que

$$\int u(\Delta - 1)\varphi dxdy = 0 \quad \forall\, \varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nuestro siguiente objetivo es reducir el problema (PN) a un problema semihomogéneo similar, es decir con uno de los datos de Neumann igual a cero. Para este fin, necesitaremos la siguiente afirmación (véase también [15], para una demostración completa).

Definición 2.1.1. Para $\varepsilon \in [0, 1/2)$, definimos el subespacio $\mathcal{H}^{1+\varepsilon}_{\Gamma_1}(\Omega)$ del espacio $\mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$ que consiste de las funciones cuyos datos de Neumann sobre el lado Γ_2 es igual a 0:

$$\mathcal{H}^{1+\varepsilon}_{\Gamma_1}(\Omega) := \{u \in \mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega) : \ T_{1,\Gamma}u = (g_1, 0)\}.$$

Esta definición implica que la restricción del operador traza (1.3.5) al espacio $\mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$ actúa en los espacios

$$T^{\varepsilon}_{1,\Gamma_1} : \mathcal{H}^{1+\varepsilon}_{\Gamma_1}(\Omega) \longrightarrow H^{-1/2+\varepsilon}_{\Gamma_1}(\Gamma)$$

y es continuo si la norma en $H^{-1/2+\varepsilon}_{\Gamma_1}(\Gamma)$:

$$\|(g, 0)\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)} = \|g\|_{\widetilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}, \quad \varepsilon \in [0, 1/2) \tag{2.1.1}$$

es la norma inducida por la norma (1.2.7). Además del Lema 1.1.17 se sigue que

$$\|g\|_{\widetilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)} = \|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}, \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

Por lo tanto, la norma (2.1.1) toma la forma

$$\|(g,0)\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)} = \|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}, \quad \varepsilon \in [0,1/2).$$

A continuación introducimos la noción de extensión impar de un funcional de $[\widetilde{H^{1/2}}(\mathbb{R}^+)]'$, para reducir el problema general al problema semihomogéneo.

2.2. Extensión impar de los funcionales

Definición 2.2.1. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Definimos

$$e(\varphi)(x) := \varphi^+(x) - \varphi^-(-x), \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.2.1}$$

donde

$$\varphi^+(x) = H(x)\varphi(x), \quad \varphi^-(x) = H(-x)\varphi(x) \tag{2.2.2}$$

con $H(x)$ la función de Heaviside.

Lema 2.2.2. *Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, y $e(\varphi)$ definido como en (2.2.1). Entonces $e(\varphi) \in \widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+)$ para $s \in (-1/2, 1/2]$, y*

$$\|e(\varphi)\|_{\widetilde{H^s}(\mathbf{R}^+)} \leq C\|\varphi\|_{H^s(\mathbf{R})}. \tag{2.2.3}$$

Demostración. **(I)** Consideremos el caso $s = 1/2$. Por el Lema 1.1.16 es suficiente demostrar que

$$\|\varphi^+(x) - \varphi^-(-x)\|^2_{H^{1/2}(\mathbf{R}^+)} + \int_{\mathbf{R}^+} \frac{|\varphi^+(x) - \varphi^-(-x)|^2}{x} dx \leq C\|\varphi\|_{H^{1/2}(\mathbf{R})}.$$

De (1.1.5) se sigue que

$$\|\varphi^+(x)\|_{H^{1/2}(\mathbf{R}^+)} = \inf_l \|l\varphi^+\|_{H^{1/2}(\mathbf{R})} \leq \|\varphi\|_{H^{1/2}(\mathbf{R})}, \tag{2.2.4}$$

ya que $\varphi^+(x) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$ por la definición de φ^+. Por el Lema 1.1.9 y (2.2.2), tenemos que

$$\|\varphi^-(-x)\|_{H^{1/2}(\mathbf{R}^+)} = \|\varphi^-\|_{H^s(\mathbf{R}^-)} = \|\varphi\|_{H^s(\mathbf{R}^-)}$$

Esto implica

$$\|\varphi^-(-x)\|_{H^{1/2}(\mathbf{R}^+)} \leq \|\varphi^-\|_{H^{1/2}(\mathbf{R})} \tag{2.2.5}$$

por la Definición 1.1.7. De aquí,

$$\|\varphi^+(x) - \varphi^-(-x)\|_{H^{1/2}(\mathbf{R}^+)} \leq C\|\varphi\|_{H^{1/2}(\mathbf{R})}$$

y nos falta demostrar que

$$\int_{\mathbf{R}^+} \frac{|\varphi^+(x) - \varphi^-(-x)|^2}{x} dx \leq C\|\varphi\|_{H^{1/2}(\mathbf{R})}.$$

El Lema 1.1.6 implica que es suficiente demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{|\varphi^+(x) - \varphi^-(-x)|^2}{x} dx \leq C \int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^2} dxdy. \tag{2.2.6}$$

Reescribimos la parte izquierda de (2.2.6) como

$$\int_0^\infty \frac{|\varphi^+(x) - \varphi^-(-x)|^2}{|x|} dx = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\varphi^+(x) - \varphi^-(-x)|^2}{|x+y|^2} dxdy. \tag{2.2.7}$$

Por otro lado, notemos que

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^2} dxdy + \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^\infty \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^2} dy \right) dx \\ &\leq \int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^2} dxdy. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Usando la desigualdad del triángulo y la desigualdad

$$|x+y| \geq |x-y|, \quad x, y \geq 0$$

obtenemos

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\varphi^+(x) - \varphi^-(-x)|^2}{|x+y|^2} dxdy$$

$$2 \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\varphi^+(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^2} dxdy + \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\varphi^-(-x) - \varphi(y)|^2}{|x+y|^2} dxdy.$$

De aquí, junto con la desigualdad (2.2.8) (después del cambio $x \mapsto -x$ en la segunda integral del lado derecho) y (2.2.7) obtenemos (2.2.6).

(II) Consideremos el caso $s \in (-1/2, 1/2)$. En este caso, $\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+) = H^s(\mathbb{R}^+)$ por el Lema 1.1.17 y es suficiente demostrar que

$$\begin{aligned} \|\varphi^+(x)\|_{H^s(\mathbf{R}^+)} &\leq \|\varphi\|_{H^s(\mathbf{R})} \\ \|\varphi^-(-x)\|_{H^s(\mathbf{R}^+)} &\leq \|\varphi\|_{H^s(\mathbf{R})}. \end{aligned}$$

Esto se hace de manera similar a (2.2.4) y (2.2.5). El Lema 2.2.2 esta demostrado.

■

Definición 2.2.3. Sea $g \in H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ para $\varepsilon \in [0, 1/2)$. La extensión impar $e'(g) := g_i$ del funcional g se define como

$$\langle e'(g), \varphi\rangle = \langle g_i, \varphi\rangle := \langle g, e(\varphi)\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{2.2.9}$$

con φ^+, φ^- como en la Definición 2.2.1.

Notemos que por el Lema 1.1.20

$$H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+) \simeq [\widetilde{H}^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^+)]', \quad \forall\, \varepsilon.$$

Ya que $\varepsilon \in [0, 1/2)$ entonces $1/2 - \varepsilon \in (0, 1/2]$ y $e(\varphi) \in \tilde{H}^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, por el Lema 2.2.2. Por lo tanto, (2.2.9) está bien definida ya que g es un funcional continuo sobre $\tilde{H}^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ por el Lema 1.1.20.

Lema 2.2.4. *Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*
(i) *La fórmula (2.2.9) define un funcional sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ continuo con respecto a la norma $\|\cdot\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})}$, y por lo tanto se extiende de manera única a un funcional sobre $H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$.*
(ii) *El mapeo e' es un mapeo continuo del espacio $H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ a $H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})$.*

Demostración. **(i)** Ya que $e : \left(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})}\right) \to \tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})$ es continuo por (2.2.3), y g es un funcional lineal continuo sobre $\tilde{H}^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ por el Lema 1.1.20, entonces $e'(g)$ es un funcional lineal continuo sobre
$\left(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{H^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R})}\right)$. Ya que el último espacio es denso en $H^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R})$ por el Teorema 1.1.5, entonces $e'(g)$ se extiende de manera única a un funcional sobre $H^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R})$.
(ii) De (i) se sigue que $e' : H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+) \to [H^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R})]'$. Por el Lema 1.1.20, e' actúa del espacio $H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ al espacio $H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})$ como un operador lineal. Este operador es el operador adjunto al operador

$$e : \left(\mathcal{D}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{H^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R})}\right) \to \tilde{H}^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^+).$$

Por lo tanto, por la teoría de operadores en espacios de Banach e' es continuo en las normas correspondientes. ■

2.3. Reducción al problema de Neumann con dato cero sobre uno de sus lados

Ahora, reducimos el problema (PN) con los datos de frontera (1.3.6) al mismo problema con $g_2 = 0$. Primero continuaremos el funcional $g_2 \in H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$, $\varepsilon \in [0, 1/2)$ a un funcional $e'(g_2)$ en $\mathbb{R}$ por medio de la fórmula (2.2.9). Notemos que del Lema 2.2.4 (i) se sigue que $e'(g_2) \in H^{-1/2}(\mathbb{R})$. De esta manera, consideremos el siguiente problema de Neumann auxiliar en el semiplano $\Omega_\beta^- := \{(x,y) \in \mathbb{R} : y < x\tan\beta\}$:

$$\begin{cases} (\triangle - 1)v(x,y) &= 0, \qquad (x,y) \in \Omega_\beta^- \\ \partial_n v\Big|_{\Omega_\beta^-} &= e'(g_2), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Por el Corolario B.0.6, este problema admite una solución única $v \in H^{1+\varepsilon}(\Omega_\beta^-)$, dada por la fórmula (B.0.20), la cual depende continuamente de $e'(g_2) \in H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})$, véase la cota (B.0.18).
Además, notemos que v también depende continuamente de $g_2 \in H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$:

$$\|v\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega_\beta^-)} \leq C\|g_2\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)}$$

ya que $e'(g_2)$ depende continuamente de g_2 por el Lema 2.2.4.
Ahora consideremos la diferencia $w = u - v|_\Omega$, la cual por (2.2.9) satisface el problema de Neumann semihomogéneo:

$$\begin{cases} (\triangle - 1)w(x_1,x_2) &= 0, \qquad (x_1,x_2) \in \Omega \\ \partial_{n_1} w(x_1,0) &= g_1(x_1) - \partial_{n_1} v(x_1,0), \qquad x_1 > 0 \\ \partial_{n_2} w(x_1,x_2)\Big|_{\Gamma_2} &= [g_2(x_2) - e'(g_2)(x_2)]\Big|_{\Gamma_2} = 0. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Lema 2.3.1. *Supongamos que podemos resolver el siguiente problema de Neumann semihomogéneo:*

$$\begin{cases} (\triangle - 1)w &= 0, \quad \text{en} \quad \Omega \\ \partial_{n_1} w &= g, \quad \text{en} \quad \Gamma_1 \\ \partial_{n_2} w &= 0, \quad \text{en} \quad \Gamma_2 \end{cases} \tag{2.3.3}$$

con $g \in \tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ y tal que $w \in \mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$ y depende continuamente de $g \in \tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$. Entonces podemos resolver cualquier problema de la forma:

$$\begin{cases} (\triangle - 1)u &= 0, \qquad \text{en} \quad \Omega \\ T_{1,\Gamma} u &= (g_1, g_2) \end{cases} \tag{2.3.4}$$

con $u \in \mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$,

$$(g_1, g_2) \in H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma),$$

y tal que u depende continuamente de (g_1, g_2).

Antes de iniciar la demostración del Lema 2.3.1 enunciaremos y demostraremos el siguiente Lema.

Lema 2.3.2. *Consideremos la función $v(x_1,x_2)$ dada por (B.0.20). Entonces, $\partial_{n_1} v(x_1,0)$ existe, pertenece al espacio $H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ y depende continuamente de la función $g_2 \in \tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$.*

Demostración. Ya que estamos considerando las derivadas normales exteriores, entonces para $(x_1, x_2) \in \Omega$, tenemos que

$$\partial_{\mathbf{n_1}} = \cos\frac{3}{2}\pi\partial_{x_1} + \operatorname{sen}\frac{3}{2}\pi\partial_{x_2} = -\partial_{x_2}. \tag{2.3.5}$$

Además, de (B.0.20) se sigue que podemos escribir la función v en la forma

$$v(x_1, x_2) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} t^{-1}(\xi)\mathrm{e}^{-(i\cos\beta\xi + t(\xi)\operatorname{sen}\beta)x_1}\mathrm{e}^{(-i\operatorname{sen}\beta\xi + \cos\beta t(\xi))x_2}\widehat{e'(g_2)}(\xi)d\xi.$$

Luego, por (2.3.5) tenemos que

$$\partial_{n_1}v(x_1, 0) = \\ = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} t^{-1}(\xi)[-i\operatorname{sen}\beta\xi + \cos\beta t(\xi)]\mathrm{e}^{-(i\cos\beta\xi + t(\xi)\operatorname{sen}\beta)x_1}\widehat{e'(g_2)}(\xi)d\xi.$$

De aquí, $\partial_{n_1}v(x_1, 0)$ depende continuamente de g_2 ya que el mapeo de la extensión $e'(g_2)$ es continua por el Lema 2.2.4. La pertenencia de la derivada al espacio $H^{-1/2}(\mathbb{R}^+)$ se sigue de la Proposición B.0.5 del Apéndice B. ∎

Demostración del Lema 2.3.1. Consideremos el sistema (2.3.4). Sea

$$g := g_1 - \partial_{n_1}v(x_1, 0) \tag{2.3.6}$$

donde $v \in \mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega_\beta^-)$ esta dada por (B.0.20) y satisface el sistema (2.3.2). De la Definición 1.3.2 se sigue que $v|_\Omega \in \mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$, y por lo tanto el Teorema 1.3.3 implica que $T_{1,\Gamma}v = (\partial_{n_1}v(x_1, 0), g_2) \in H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)$. Luego,

$$\partial_{n_1}v(x_1, 0) + g_2 \in \tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+),$$

por la definición del espacio $H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)$ (véase la Definición 1.2.6). De aquí, junto con el hecho que $g_1 + g_2 \in \tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ obtenemos que

$$g \in \tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+). \tag{2.3.7}$$

Luego, el hecho de que se satisfagan las hipótesis anteriores implica que el problema (2.3.3) es soluble, con g satisfaciendo (2.3.7). Sea $w \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ solución del sistema (2.3.3), que depende continuamente de g. Definimos $u := w + v$. Obviamente $u \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ y es solución del sistema (2.3.4) por (2.3.3), (2.3.1) y (2.3.6). Además, u depende continuamente de $(g_1, g_2) \in H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)$, ya que $w \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ depende continuamente de $g \in \tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ por hipótesis, y $v \in H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ definida por (B.0.20) depende continuamente de $g_2 \in H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ ya que la extensión $e'(g_2) \in H^{-1/2}(\mathbb{R})$ es continua por el Lema 2.2.4. ∎

De esta manera, reducimos el problema de Neumann (PN) al problema semihomogéneo (2.3.3) cambiando w por u. De aquí en adelante, siempre consideraremos el problema

$$\begin{cases} (\triangle - 1)u &= 0, \qquad \text{en} \quad \Omega \\ T_{1,\Gamma}u &= (g, 0) \end{cases} \tag{2.3.8}$$

donde

$$g \in \tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+), \quad \varepsilon \in [0, 1/2). \tag{2.3.9}$$

Como siempre $\tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+) = H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})$ para $\varepsilon \in (0, 1/2)$ por el Lema 1.1.18. La solución u de este problema se busca en el espacio $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$. Notemos que para $\varepsilon = 0$ el problema fue resuelto en [**26**]. Nuestra meta es "regularizar" la solución bajo la hipótesis de que g pertenece a un espacio "un poco más suave" que $H^{-1/2}(\mathbb{R})$.

Capítulo 3

Reducción del problema de Neumann a una identidad integral

En este capítulo reducimos el problema de Neumann semihomogéneo (2.3.8) a una identidad integral, usando una generalización de la fórmula de Green para los espacios de Sobolev.

3.1. La identidad integral

Para resolver el problema de Neumann semihomogéneo (2.3.8)-(2.2.3) vamos usar el Método de las características complejas, el cual esta basado en la transformada de Fourier del problema (PN) con respecto a las variables (x, y) de la continuación por 0 de la solución u a $\mathbb{R}^2$. Para realizar este programa es cómodo utilizar la fórmula de Green; por lo tanto

Teorema 3.1.1. (Fórmula de Green, [[21], pág. 190]). *Para cualquier función $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ (véase (1.3.2)) y cualquier función $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ la fórmula de Green*

$$\int_{\Omega} (uP\varphi - \varphi Pu)dxdy = -\langle T_{1,\Gamma}u, T_{0,\Gamma}\varphi\rangle_\Gamma + \langle T_{1,\Gamma}\varphi, T_{0,\Gamma}u\rangle_\Gamma \tag{3.1.1}$$

es válida. Aquí, P está dado por (1.3.1) y $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ se entiende en el sentido de (1.2.10).

Ahora podemos formular el siguiente resultado.

Teorema 3.1.2. *Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*
i) *Sea $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ una solución del problema (2.3.8) con la condición (2.3.9). Entonces, existen funciones $u_l \in H^{1/2}(\Gamma_l)$, $l = 1, 2$, tales que para toda función $\varphi \in \mathcal{S}(\overline{\Omega})$ con $T_{0,\Gamma}\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $T_{1,\Gamma}\varphi = (\varphi_1', \varphi_2')$ la identidad integral:*

$$\int_{\Omega} uP\varphi dxdy = -\frac{1}{2\pi}\int \hat{g}(z)\hat{\varphi}_1(z)dz + \int_{\Gamma_1} u_1(s)\varphi_1^1(s)ds + \int_{\Gamma_2} u_2(s)\varphi_2^1(s)ds. \tag{3.1.2}$$

es válida.
ii) *Sea $u \in H^1(\Omega)$ y supongamos que existe $(u_1^0, u_2^0) \in \mathcal{S}'(\overline{\Gamma}_1) \times \mathcal{S}'(\overline{\Gamma}_2)$ tal que la identidad integral:*

$$\int_{\Omega} uP\varphi dxdy = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(z)\varphi_1(z)dz + \langle u_1^0, \varphi_1^1\rangle + \langle u_2^0, \varphi_2^1\rangle \tag{3.1.3}$$

se cumple para toda función $\varphi \in \mathcal{S}(\Omega)$ con $T_{0,\Gamma}\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, $T_{1,\Gamma}\varphi = (\varphi_1^1, \varphi_2^1)$. Entonces, si u depende continuamente de g, entonces u resuelve el sistema (2.3.8) y los datos de Neumann y Dirichlet de la solución u, son las restricciones de g a Γ_1 y de u_l^0 a Γ_l para $l = 1, 2$, respectivamente, es decir, $T_{0,\Gamma}u = (u_1^0, u_2^0)$, $T_{1,\Gamma}u = (g, 0)$.

Demostración. **i)** Sea $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ una solución del sistema (2.3.8)-(2.3.9), y $\varphi \in \mathcal{S}(\overline{\Omega})$. Entonces, por el Teorema 3.1.1

$$\int_{\Omega} (uP\varphi - \varphi Pu)dxdy = -\langle T_{1,\Gamma}u, T_{0,\Gamma}\varphi\rangle_\Gamma + \langle T_{1,\Gamma}\varphi, T_{0,\Gamma}u\rangle_\Gamma, \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2). \tag{3.1.4}$$

Luego, de (2.3.8) se sigue que

$$\int_{\Omega} (Pu)\varphi dxdy = 0.$$

Además, como $g \in \widetilde{H^{-1/2}}(\mathbb{R}^+)$, por (1.2.11) tenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int \hat{g}(z)\hat{\varphi}_1(z)dz = \langle T_{1,\Gamma}u, T_{0,\Gamma}\varphi\rangle$$

ya que $T_{1,\Gamma}u = (g, 0)$ por (2.3.8).

Por otro lado, de (1.2.12) se sigue que

$$\langle T_{1,\Gamma}\varphi, T_{0,\Gamma}u\rangle_\Gamma = \int_{\Gamma_1} u_1(s)\varphi_1^1(s)ds + \int_{\Gamma_2} u_2(s)\varphi_2^1(s)ds,$$

donde

$$(u_1, u_2) = T_{0,\Gamma}u.$$

Estas dos igualdades junto con (3.1.4) implican (3.1.2) y i) esta demostrada.

ii) Sea $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ y sea $(u_1^0, u_2^0) \in \mathcal{S}'(\overline{\Gamma}_1) \times \mathcal{S}'(\overline{\Gamma}_2)$ tal que (3.1.3) se cumple para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\overline{\Omega})$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, entonces $T_{0,\Gamma}\varphi = T_{1,\Gamma}\varphi = 0$ y u satisface la ecuación de Helmholtz en el sentido débil (y de aquí, también en el sentido fuerte),

$$Pu := (\triangle - 1)u = 0 \tag{3.1.5}$$

Por los Teoremas de trazas 1.2.4 y 1.3.3 existen $T_{0,\Gamma}u \in H^{1/2}(\Gamma)$ y $T_{1,\Gamma}u \in H^{-1/2}(\Gamma)$, y la fórmula de Green (3.1.1) es válida para $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. Por (3.1.5) esta fórmula tiene la forma:

$$\int_{\Omega} uP\varphi dxdy = -\langle T_{1,\Gamma}u, T_{0,\Gamma}\varphi\rangle + \langle T_{0,\Gamma}u, T_{1,\Gamma}\varphi\rangle, \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2). \tag{3.1.6}$$

Probaremos ahora que $T_{1,\Gamma}u = (g, 0)$. Sea $T_{1,\Gamma}u = (u_1^1, u_2^1)$. Por el Teorema 1.3.3 y el Lema 1.1.20 tenemos que $u_{1,2}^1 \in \left(\widetilde{H^{1/2}}(\mathbb{R}^+)\right)'$. Demostraremos primero que

$$\langle u_2, \varphi_2\rangle = 0 \ \forall \ \varphi_2 \in \widetilde{H^{1/2}}(\mathbb{R}^+).$$

Ya que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ es denso en $\widetilde{H^{1/2}}(\mathbb{R}^+)$ (véase [4] Teorema 1.4.22), es suficiente demostrar que $\langle u_2, \varphi_2\rangle = 0$ para todo $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$. Sea φ_2 una función arbitraria de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$. Construimos una función $\overline{\varphi}(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$T_{0,\Gamma}\overline{\varphi} = (\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2}) = (0, \varphi_2); \tag{3.1.7}$$

$$T_{1,\Gamma}\overline{\varphi} = (\overline{\varphi_1^1}, \overline{\varphi_2^1}) = 0. \tag{3.1.8}$$

Luego, de (3.1.6) se sigue que

$$\int\limits_{\Omega} uP\overline{\varphi}dxdy = -\langle T_{1,\Gamma}u, T_{0,\Gamma}\overline{\varphi}\rangle = -\langle u_1^1, \varphi_2\rangle.$$

Por otro lado, (3.1.3) implica

$$\int\limits_{\Omega} uP\overline{\varphi}dxdy = 0$$

ya que $\overline{\varphi}_1(s) \equiv 0$ por (3.1.7) y $\overline{\varphi_1^1}(s) = \overline{\varphi_2^1}(s) \equiv 0$ por (3.1.8). De aquí, $u_1^1 = 0$. De manera completamente similar, $u_2^1 = g$ y $T_{0,\Gamma}u = (u_1^0, u_2^0)$. El Teorema esta probado. ■

Observación 3.1.3. Más adelante, obtendremos fórmulas explícitas para los datos de Dirichlet de la solución u, y probaremos que pertenecen al espacio $\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$. Por el Teorema de traza 1.2.4 dichos datos automáticamente pertenecen al espacio $H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$ ya que $u \in H^1(\Omega)$. Por lo tanto, no necesitamos preocuparnos por la inclusión: $T_{0,\Gamma}u \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Formularemos ahora el resultado principal de esta sección. Para resolver el problema (2.3.8) con las condiciones (2.3.9), es suficiente resolver el siguiente

Problema A:

1. En el caso $\varepsilon = 0$: encontrar $u \in H^1(\Omega)$ y $u_{1,2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^+)$ tales que (3.1.3) se cumple para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\overline{\Omega})$.
2. En el caso cuando $\varepsilon \in (0, 1/2)$, adicionalmente, hay que demostrar que la solución u obtenida en 1) pertenece al espacio $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$.

En ambos casos es necesario demostrar que la solución u depende continuamente de g.
Los capítulos 4-7 están dedicados a la solución de este problema.

Capítulo 4

Transformada de Fourier

En este capítulo reducimos el problema **A** a un problema equivalente en la clase de funciones analíticas tomando la transformada de Fourier de la identidad integral (3.1.3), usando en lugar de la función prueba la función exponencial modificada (Lema 4.1). De hecho queremos pasar al espacio complejo, es decir, aplicar la transformada de Fourier compleja o la transformada de Fourier-Laplace a la función u cuyo soporte pertenece a un ángulo de magnitud menor que π. Esto se hace mediante la aplicación de un Teorema del tipo Paley-Wiener (véase [9] Teorema 1.5.2, [22] Teorema IX). Obtenemos la ecuación de conexión clave, y reducimos el problema inicial al problema equivalente **C**.

4.1. Transformación del problema de Neumann

Por conveniencia para la aplicación del Teorema de Paley-Wiener, transformamos el problema **A** en el ángulo Ω al problema **B** en el primer cuadrante:

$$K^+ := \{x_1 > 0, x_2 > 0\}, \tag{4.1.1}$$

mediante el cambio de variables (véase [12]):

$$(x_1, x_2) = \mathcal{L}(x, y) = (x - y\cot\beta, y/\operatorname{sen}\beta), \tag{4.1.2}$$

o

$$(x, y) = \mathcal{L}^{-1}(x_1, x_2) = (x_1 + \cos\beta x_2, \operatorname{sen}\beta \mathrm{x}_2). \tag{4.1.3}$$

Sea $\mathcal{A}(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ el operador $P = (\Delta - 1)$ en las nuevas coordenadas $(x_1, x_2) \in K^+$ (véase el Apéndice C):

$$\mathcal{A}(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}\left(\Delta - 2\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \operatorname{sen}^2\beta\right). \tag{4.1.4}$$

Después de algunos calculos (véase el Apéndice D), obtenemos el siguiente problema equivalente al problema **A**,

Problema B:

1. En el caso $\varepsilon = 0$, encontrar $u \in H^1(K^+)$ y $u_{1,2} \in \mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$ tales que para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ se satisfaga:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2\beta \int\limits_{K^+} u\mathcal{A}\varphi dx_1 dx_2 = \\ = & -\operatorname{sen}\beta\langle g(x_1), \varphi(x_1)\rangle + \left\langle u_1(x_1), \cos\beta\frac{d}{dx_1}\varphi_1(x_1) - \varphi_1^1(x_1)\right\rangle + \\ + & \left\langle u_2(x_2), \cos\beta\frac{d}{dx_2}\varphi_2(x_2) - \varphi_2^1(x_2)\right\rangle, \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

donde $\varphi_{1,2},\ \varphi_{1,2}^1$ son los datos de Dirichlet y Neumann (también llamados datos de Cauchy) de la función φ sobre los correspondientes lados del cuadrante K^+.

2. En el caso cuando $\varepsilon \in (0, 1/2)$, adicionalmente, hay que demostrar que la solución u obtenida en 1) pertenece al espacio $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$.

En ambos casos hay que demostrar que la solución u depende continuamente de la función g.

Enunciaremos ahora algunos hechos básicos de la transformada de Fourier compleja (de aquí en adelante la llamaremos simplemente transformada de Fourier). Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ un cono convexo con vértice en el origen y que no contiene lineas rectas; $K_* := \{\tau \in \mathbb{R}^n : \tau \cdot x \geq 0\ \forall x \in K\}$ y $\mathbb{C}K_* := \mathbb{R}^n + iK_*$. Notemos que para $K = K^+$ el conjunto $K_* = K^+$. Para una función prueba $f(x) \in \mathcal{D}(K)$ su transformada de Fourier se define como en (1.1.1). Si $f(x_1, x_2)$ y $f(x)$ son distribuciones temperadas con soporte en $\overline{K^+}$ y $\overline{\mathbb{R}^+}$ respectivamente, entonces por el teorema del tipo Paley-Wienner (véase [22] Teorema IX) las funciones $\tilde{f}(z_1, z_2)$, $\tilde{f}(z)$ son densidades locales de funcionales analíticos sobre los conjuntos

$$\mathbb{C}K^+ := \{z \in \mathbb{C}^2,\ \operatorname{Im} z_{1,2} > 0\} \text{ y } \mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z > 0\}$$

(en lo que sigue, diremos simplemente “funcionales analíticos sobre los conjuntos correspondientes”) dadas por:

$$\tilde{f}(z) = \langle f(x), e^{izx}\rangle, \quad z \in \mathbb{C}K^+ \quad \text{o} \quad \mathbb{C}^+. \tag{4.1.6}$$

Además, $f \in \mathcal{S}'(\overline{K^+})$ si y solo si (véase [22])

$$|\tilde{f}(z)| \leq C(1 + |z|)^\mu \rho^{-\nu}(z), \qquad z \in \mathbb{C}K^+$$

donde $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\rho(z)$ es la distancia de z a la frontera de $\mathbb{C}K^+$. También se cumple la siguiente afirmación.

Teorema 4.1.1. *([22]) Sea $f \in \mathcal{S}'(\overline{K^+})$. La transformada de Fourier real $\tilde{f}(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^2$, es el valor de frontera de la función analítica $\tilde{f}(z)$, $z = \sigma + i\tau$ cuando $\tau \to 0+$, $\tau \in K^+$ en el siguiente sentido:*

$$\lim_{\tau\to 0,\ \tau\in K} \tilde{f}(\sigma + i\tau) = \tilde{f}(\sigma) \quad \text{en} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2_\sigma).$$

El espacio de las transformadas de Fourier de funciones del espacio $\mathcal{S}'(\overline{K^+})$ lo denotaremos por $F\mathcal{S}'(\overline{K^+})$.
Ahora, pasamos a la transformada de Fourier de (4.1.5).

Lema 4.1.2. *La identidad integral (4.1.5) es equivalente a*

$$\mathcal{A}(z)\tilde{u}_0(z) = \tilde{f}_0(z), \tag{4.1.7}$$

donde $\mathcal{A}(z)$ es el símbolo del operador diferencial $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}\Big[-z_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2\cos\beta - \operatorname{sen}^2\beta\Big] \tag{4.1.8}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{f}_0(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}\Big[& - \operatorname{sen}\beta\tilde{\mathrm{g}}(\mathrm{z}_1) + (\mathrm{iz}_1\cos\beta - \mathrm{iz}_2)\tilde{\mathrm{u}}_1(\mathrm{z}_1) \\ & + (iz_2\cos\beta - iz_1)\tilde{u}_2(z_2)\Big], \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{C}K^+.\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Demostración. Sea $\varphi(z, x) := e^{i\langle z,x\rangle}$ para $x \in \overline{K}$ y $z \in \mathbb{C}K^+$. Dicha función existe para cualquier $z \in K^+$ por el Lema A.2.3 del Apéndice A. Sustituyendo dicha función φ en la parte izquierda de (4.1.5) obtenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2\beta\int_{\mathrm{K}^+}\mathrm{u}(\mathrm{x})[\mathcal{A}(\partial_\mathrm{x})\varphi(\mathrm{z},\mathrm{x})]\mathrm{dx}_1\mathrm{dx}_2 &= \operatorname{sen}^2\beta\int_{\mathrm{K}^+}\mathrm{u}(\mathrm{x})[\mathcal{A}(\partial_\mathrm{x})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\mathrm{z},\mathrm{x}\rangle}]\mathrm{dx}_1\mathrm{dx}_2 = \\ \operatorname{sen}^2\beta\int_{\mathrm{K}^+}\mathrm{u}(\mathrm{x})\mathcal{A}(\mathrm{z})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle\mathrm{z},\mathrm{x}\rangle}\mathrm{dx} &= \operatorname{sen}^2\beta\mathcal{A}(\mathrm{z})\tilde{\mathrm{u}}_0(\mathrm{z}), \quad \mathrm{z} \in \mathbb{C}\mathrm{K}^+\end{aligned}$$

donde,

$$u_0(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \overline{K^+} \\ 0, & x \notin \overline{K^+} \end{cases} \tag{4.1.10}$$

es la continuación por cero de la función $u \in H^1(K^+)$ a $\mathbb{R}^2$. Luego, sustituyendo $\varphi(z, x)$ en la parte derecha de (4.1.5) obtenemos

$$-\operatorname{sen}\beta\langle \mathrm{g}(\mathrm{x}_1), \varphi(\mathrm{z}, (\mathrm{x}, 0))\rangle = -\operatorname{sen}\beta\langle\mathrm{g}(\mathrm{x}_1), \mathrm{e}^{\mathrm{iz}_1\mathrm{x}_1}\rangle = -\operatorname{sen}\beta\tilde{\mathrm{g}}(\mathrm{z}_1), \quad \operatorname{Im}\mathrm{z}_1 > 0$$

$$\left\langle u_1(x_1), \cos\beta\frac{d}{dx_1}\varphi(z,(x_1,0)) - \frac{d}{dx_2}\varphi(z,(x_1,0))\right\rangle =$$

$$= \left\langle u_1(x_1), i(\cos\beta z_1 e^{iz_1x_1} - z_2 e^{iz_1x_1})\right\rangle = i(\cos\beta z_1 - z_2)\tilde{u}_1(z_1), \quad \mathrm{Im\ z_1} > 0$$

y

$$\left\langle u_2(x_2), \cos\beta\frac{d}{dx_2}\varphi(z,(x_2,0)) - \frac{d}{dx_2}\varphi(z,(x_2,0))\right\rangle =$$

$$= \left\langle u_2(x_2), i(\cos\beta z_2 e^{iz_2x_2} - z_2 e^{iz_2x_2})\right\rangle = i(\cos\beta z_2 - z_1)\tilde{u}_2(z_2), \quad \mathrm{Im\ z_2} > 0.$$

Por lo tanto, la identidad integral (4.1.5) es equivalente a

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}\ ^2\beta\tilde{\mathcal{A}}(\mathrm{z})\tilde{\mathrm{u}}_0(\mathrm{z}) &= -\ \mathrm{sen}\,\beta\tilde{\mathrm{g}}(\mathrm{z}_1) + (\mathrm{i}\cos\beta\mathrm{z}_1 - \mathrm{iz}_2)\tilde{\mathrm{u}}(\mathrm{z}_1) \\ &+ \ (i\cos\beta z_2 - iz_1)\tilde{u}(z_2). \end{aligned}$$

Sustituyendo (4.1.8) en esta expresión, obtenemos

$$(-z_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2\cos\beta - \ \mathrm{sen}\ ^2\beta)\tilde{\mathrm{u}}_0(\mathrm{z}) = -\ \mathrm{sen}\,\beta\tilde{\mathrm{g}}(\mathrm{z}_1) +$$

$$+(i\cos\beta z_1 - iz_2)\tilde{u}(z_1) + (i\cos\beta z_2 - iz_1)\tilde{u}(z_2).$$

Por lo tanto,

$$(-z_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2\cos\beta - \ \mathrm{sen}\ ^2\beta)\tilde{\mathrm{u}}_0(\mathrm{z}) = -\ \mathrm{sen}\,\beta\tilde{\mathrm{g}}(\mathrm{z}_1) +$$

$$+(i\cos\beta z_1 - iz_2)\tilde{u}(z_1) + (i\cos\beta z_2 - iz_1)\tilde{u}(z_2).$$

(4.1.7) se ha demostrado. ■

Regresemos al Problema **B**. Supongamos que $u \in H^1(K^+)$ satisface (4.1.5). Sea u_0 definida por (4.1.10). Entonces por el Lema 4.1.2 $\tilde{u}_0(z)$ satisface (4.1.7). Luego, la parte izquierda de (4.1.9) se anula para z tales que:

$$\mathcal{A}(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C}K^+.$$

Por lo tanto la parte derecha también se anula, es decir:

$$\tilde{f}_0(z) = 0 \quad \text{para} \quad z \in V^* := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}K^+ : \mathcal{A}(z) = 0\}. \tag{4.1.11}$$

En este caso,

$$\tilde{u}_0(z) = \frac{\tilde{f}_0(z)}{\tilde{\mathcal{A}}(z)}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}K^+} \tag{4.1.12}$$

y

$$\begin{aligned} u_0(x) &:= F^{-1}_{z\to x}\Big[\tilde{u}_0(z)\Big], \qquad x \in \mathbb{R}^2 \\ \mathrm{supp}\ u_0(x) &\subset \overline{K^+}. \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

Obteniendo finalmente

$$u(x) := u_0(x)\Big|_{K^+}. \tag{4.1.14}$$

La ecuación (4.1.11) es llamada **la ecuación de conexión** por que conecta los datos de Cauchy de la solución $u(x)$ por medio de una ecuación algebraica sobre la superficie de Riemann de los ceros del símbolo $\mathcal{A}(z)$. Obviamente, (4.1.11) es una condición necesaria para la solubilidad de (4.1.5). Sin embargo, para nosotros es más importante la afirmación inversa.

Teorema 4.1.3. *Supongamos que existen funciones $\tilde{u}_1(z_1), \tilde{u}_2(z_2)$ pertenecientes al espacio $F\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$ tales que (4.1.11) se cumple para $\tilde{f}_0$ definida por (4.1.9). Supongamos también que*

$$u_0(x) = F^{-1}_{z\to x}[\tilde{u}_0(z)]$$

donde $\tilde{u}_0(z)$ esta definida por (4.1.12) y $u_0(x) \in \mathcal{S}'(\overline{K^+})$. Si $u(x)$ definida por (4.1.10) pertenece al espacio $H^1(K^+)$, entonces $u(x)$ resuelve el Problema **B**.

Demostración. La igualdad (4.1.12) implica que $\tilde{\mathcal{A}}(z)\tilde{u}_0(z) = \tilde{f}_0(z)$. Además por las propiedades de la transformada de Fourier esto implica que

$$\mathcal{A}(D)u_0(x) = f_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Por lo tanto,

$$\langle \mathcal{A}(D)u_0(x), v(x)\rangle = \langle f_0(x), v(x)\rangle, \quad \forall v(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$$

ya que el operador $\mathcal{A}(D)$ dado por (4.1.4) es simétrico:

$$\langle \mathcal{A}(D)u_0(x), v(x)\rangle = \langle u_0(x), \mathcal{A}(D)v(x)\rangle, \quad \forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

De aquí,

$$\langle u_0(x), \mathcal{A}(D)v(x)\rangle = \langle f_0(x), v(x)\rangle, \quad \forall v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2). \tag{4.1.15}$$

Luego, usando que $f_0(x)$ es la transformada de Fourier inversa de $\tilde{f}_0(z)$ definida por (4.1.9), obtenemos que (4.1.15) es equivalente a la identidad integral (4.1.5). El teorema esta demostrado. ■

Este teorema nos permite reducir el problema **B** al siguiente problema equivalente:
Problema C:

1. Para $\varepsilon = 0$, encontrar funciones $\tilde{u}_1(z_1), \tilde{u}_2(z_2) \in F\mathcal{S}'(\mathbb{R}^+)$ (analíticas en $\mathbb{C}^+$) tales que la función $u(x)$ definida por (4.1.14) pertenezca al espacio $H^1(K^+)$.
2. En el caso cuando $\varepsilon \in (0, 1/2)$, adicionalmente, hay que demostrar que la solución u obtenida en 1) pertenece al espacio $H^{1+\varepsilon}(\Omega)$ y depende continuamente de g.

En el siguiente capítulo reducimos el problema **C** a una ecuación en diferencias sobre la superficie de Riemann de los ceros de $\tilde{\mathcal{A}}(z)$.

Capítulo 5

La ecuación en diferencias

En este capítulo obtenemos la ecuación en diferencias (5.1.8) sobre la superficie de Riemann de los ceros del símbolo del operador de Helmholtz. Resolvemos la ecuación en diferencias auxiliar (5.23) e investigamos sus propiedades. Obtenemos en forma explícita la solución de la ecuación en diferencias (5.61).

5.1. Reducción a la ecuación en diferencias

En esta sección reduciremos el problema **C** a una ecuación en diferencias usando la ecuación de conexión (4.1.11). Para esta reducción utilizaremos una modificación del Método de las Características complejas, expuesto en [7], [8], [14], [17]. A continuación describiremos de manera breve el algoritmo correspondiente.

Parametrizamos la superficie de Riemann $V \subset \mathbb{C}^2$ de ceros del símbolo del operador $\mathcal{A}(z)$ mediante el paramétro $w \in \mathbb{C}$, por las siguientes fórmulas:

$$z = z(w) := (z_1(w), z_2(w)) := (\operatorname{senh} w,\ \operatorname{senh}(w + i\beta)). \tag{5.1.1}$$

Para $a < b$, denotamos por Π_a^b la franja horizontal en el plano complejo definida por

$$\Pi_a^b = \{w : a < \operatorname{Im} w < b\}.$$

Obviamente, las funciones $\operatorname{senh} w$ y $\operatorname{senh}(w + i\beta)$ proveen una cubierta de 2-hojas de $\mathbb{C}^+$ por Π_0^π y $\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$ respectivamente. Sean $\check{V}_1^+ := \Pi_0^\pi$ y $\check{V}_2^+ := \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$. Consideremos los siguientes automorfismos en $\mathbb{C}$

$$\check{h}_1(w) = -w + i\pi, \quad w \in \mathbb{C}$$

y

$$\check{h}_2(w) = -w + i\pi - 2i\beta, \quad w \in \mathbb{C} \tag{5.1.2}$$

Notemos que las cubiertas Π_0^π y $\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$ son invariantes bajo $\check{h}_1$ y $\check{h}_2$ respectivamente. Además, $\check{h}_1(w)$ es simétrico en $\check{V}_1^+$ con respecto al punto $i\pi/2$, y $\check{h}_2$ es simétrico en $\check{V}_2^+$ con respecto al punto $i\pi/2 - i\beta$. Definimos las funciones $\breve{g}(w)$ y $\check{u}_{1,2}(w)$ mediante las fórmulas:

$$\check{u}_1(w) = \tilde{u}_1(z_1(w)), \qquad w \in \check{V}_1^+ \tag{5.1.3}$$

$$\check{u}_2(w) = \tilde{u}_2(z_2(w)), \qquad w \in \check{V}_2^+ \tag{5.1.4}$$

$$\check{g}(w) = \tilde{g}(z_1(w)), \qquad w \in \check{V}_1^+.$$

Obviamente, la analiticidad de $\tilde{u}_1(z_1)$ y de $\tilde{g}(z_1)$ en $\mathbb{C}^+$ es equivalente a la analiticidad de $\check{u}_1(w)$ y $\check{g}(w)$ en $\check{V}_1^+$, con la condición de automorfía (en lo sucesivo diremos simplemente la simetría de las funciones):

$$\begin{aligned} \check{u}_1(\check{h}_1(w)) &= \check{u}_1(-w + i\pi) = \check{u}_1(w) \\ \check{g}(\check{h}_1(w)) &= \check{g}(-w + i\pi) = \check{g}(w) \end{aligned} \qquad w \in \check{V}_1^+. \tag{5.1.5}$$

Y, de forma análoga, la analiticidad de $\tilde{u}_2(z_2)$ en $\mathbb{C}^+$ es equivalente a la analiticidad de $\check{u}_2(w)$ en $\check{V}_2^+$ con la condición de simetría:

$$\check{u}_2(\check{h}_2(w)) = \check{u}_2(-w + i\pi - 2i\beta) = \check{u}_2(w), \quad w \in \check{V}_2^+. \tag{5.1.6}$$

Ahora, reescribimos la ecuación de conexión (4.1.11) en la variable w usando las fórmulas (5.1.1), (5.1.3) y (5.1.4). Aquí, para el dominio V^*, el dominio correspondiente en $\check{V}$ (su levantamiento) es

$$\check{V}^* := \Pi_0^\pi \cap \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta} = \Pi_0^{\pi-\beta} = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im} < \pi - \beta\}.$$

Después de algunas manipulaciones trigonométricas, y dividiendo por $\operatorname{sen}\beta$, obtenemos

$$\check{u}_1(w)\cosh w - \check{u}_2(w)\cosh(w + i\beta) = \check{g}(w), \quad w \in \check{V}^*. \tag{5.1.7}$$

Esto prueba la siguiente afirmación.

Lema 5.1.1. *La ecuación de conexión (4.1.11), en la clase de funciones analíticas en $\mathbb{C}^+$, es equivalente al sistema (5.1.5), (5.1.6), (5.1.7) para las funciones $\check{u}_l(w)$ con $l = 1, 2$, analíticas en los dominios $\check{V}_l^+$, respectivamente.*

Ahora reducimos el sistema (5.1.5)-(5.1.7) a una ecuación en diferencias. Como $\check{u}_1$ y $\check{g}$ son analíticas en Π_0^π, entonces la función $\check{u}_2$ tiene continuación meromorfa en Π_0^π por la ecuación (5.1.7), y por lo tanto, en el dominio $\Pi_{-\beta}^\pi = \Pi_0^\pi \cup \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$; de aquí, la ecuación (5.1.7) se cumple en el dominio Π_0^π. Ya que, la función $\check{u}_2(w)$ es meromorfa en $\Pi_{-\beta}^\pi$ y simétrica con respecto al punto $i\pi/2 - i\beta$ (véase (5.1.6)), se puede continuar a una función meromorfa y simétrica en el dominio $\Pi_{-2\beta}^\pi = \Pi_{-\beta}^\pi \cup \check{h}_2 \Pi_{-\beta}^\pi$ mediante la fórmula $\check{u}_2(w) = \check{u}_2(h_2(w))$, $w \in \Pi_{-2\beta}^\pi$. Por otro lado, evaluando la ecuación (5.1.7) (considerada sobre Π_0^π), en el automorfismo $\check{h}_1$, sumando la ecuación obtenida con (5.1.7), y usando la simetría de las funciones $\check{u}_1$ y $\check{g}$ (véase (5.1.5)), es decir

$$\check{u}_2(\check{h}_1(w)) = \check{u}_2(\check{h}_2\check{h}_1 w) = \check{u}_2(w - 2i\beta)$$

obtenemos **la ecuación en diferencias**:

$$\check{u}_2(w)\cosh(w + i\beta) - \check{u}_2(w - 2i\beta)\cosh(w - i\beta) = -2\check{g}(w), \quad w \in \check{V}_1^+ \tag{5.1.8}$$

en la cual $\check{u}_2(w)$ tiene continuación meromorfa en $\Pi^{\pi}_{-2\beta}$, y

$$\check{u}_2(\check{h}_2(w)) = \check{u}_2(w), \quad w \in \Pi^{\pi}_{-2\beta}. \tag{5.1.9}$$

La ecuación (5.1.8) es la ecuación en diferencias que deseabamos obtener. Así, el sistema (5.1.5)-(5.1.7) implica el sistema (5.1.8)-(5.1.9). Investiguemos ahora la afirmación opuesta.

Lema 5.1.2. *Sea $\check{u}_2(w)$ analítica en $\Pi^{\pi-\beta}_{-\beta}$, meromorfa en $\Pi^{\pi}_{-2\beta}$ con posibles polos en los puntos donde $\cosh(w+i\beta)=0$, y tal que satisface el sistema (5.1.8), (5.1.9). Entonces la función*

$$\check{u}_1(w) = \frac{\check{g}(w) + \check{u}_2(w)\cosh(w+i\beta)}{\cosh w}, \quad w \in \check{V}_1^+ \tag{5.1.10}$$

es analítica en $\check{V}_1^+$ y el par de funciones $\check{u}_1$, $\check{u}_2$ satisface el problema (5.1.5), (5.1.6), (5.1.7).

Demostración. La igualdad (5.1.10) implica que $\check{u}_1$ y $\check{u}_2$ satisfacen (5.1.7). La función $\check{u}_2$ satisface (5.1.6) por (5.1.9). Probaremos ahora que $\check{u}_1$ satisface (5.1.5). De (5.1.10) tenemos que

$$\check{u}_1(-w+i\pi) = -\frac{1}{\cosh w}\left(\check{g}(-w+i\pi) - \check{u}_2(-w+i\pi)\cosh(w-i\beta)\right), \quad w \in \check{V}_1^+.$$

Esta igualdad, junto con (5.1.6), (5.1.7) y (5.1.8), implican que $\check{u}_1$ satisface (5.1.5). Finalmente, la analiticidad de $\check{u}_1(w)$ en $\check{V}_1^+$ se sigue de la analiticidad de $\check{g}(w)$ en $\check{V}_1^+$, la analiticidad de $\check{u}_2$ en $\check{V}_1^+$, y el hecho de que $\check{g}(i\pi/2) + \check{u}_2(i\pi/2)\cosh(i\pi/2+i\beta) = 0$. La última igualdad se sigue de (5.1.8) para $w = i\pi/2$ después de usar (5.1.9) (véase el Lema G.0.15 del Apéndice A). El Lema esta probado.

■

Los sistemas (5.1.5), (5.1.6), (5.1.7) y (5.1.8)-(5.1.9) son equivalentes en la clase de funciones analíticas en sus dominios correspondientes. Nosotros encontraremos una solución "natural"de (5.1.8)-(5.1.9) en esta clase de funciones, y checaremos que el correspondiente par de funciones (que más adelante denotaremos como: $\tilde{u}_1(z_1)$ y $\tilde{u}_2(z_2)$ es una solución del problema **C**. Es decir, las siguientes afirmaciones se cumplen:

Teorema 5.1.3. *Sea $\check{u}_2(w) \in H(\Pi^{\pi-\beta}_{-\beta})$, meromorfa en $\check{V}_2^+$, con posibles polos en los puntos donde $\cosh(w+i\beta) = 0$ y solución del problema (5.1.8), (5.1.9). Supongamos que $\tilde{u}_l(z_l)$ para $l = 1, 2$, definidas por las fórmulas (5.1.10) y (5.1.3) pertenecen a $F\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$, $u_0(x) \in \mathcal{S}'(\overline{K^+})$, y $u(x)$ definida por (4.1.14) pertenece a $H^{1+\varepsilon}(K^+)$. Entonces $u(x)$ es solución del problema* **A**.

Demostración. Por el Lema 5.1.2, $\check{u}_1$ y $\check{u}_2$ son solución de (5.1.5), (5.1.6), (5.1.7). Por el Lema 5.1.1, el último problema es equivalente a la ecuación de conexión (4.1.11) en la clase de funciones analíticas. Si, además, $\tilde{u}_l(z_l) \in F\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$ con $l = 1, 2$, $u_0(x) \in \mathcal{S}'(K^+)$ y $u(x)$ definida por (4.1.14) pertenece a $H^{1+\varepsilon}(K^+)$ para $\varepsilon \in [0, 1/2)$, entonces u es solución del problema **B**, el cual es equivalente al problema **A** por el Teorema 4.1.3. El Teorema esta probado. ■

5.2. Levantamiento del dato de Neumann a una Superficie de Riemann

En esta sección enunciaremos algunas propiedades de la función $\check{g}$ y construiremos la solución de la ecuación en diferencias (5.1.8) homogénea.
Sea

$$g \in \tilde{H}^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+), \ \varepsilon \in [0, 1/2). \tag{5.2.1}$$

Por la Observación 1.1.14 $\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+) \subset \mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$. Por lo tanto, por el Teorema de Paley-Wiener (véase [9] Teorema 1.5.2) existe la Transformada de Fourier-Laplace (véase 4.1.6):

$$\tilde{g}(z) \in H(\mathbb{C}^+) \tag{5.2.2}$$

de la funcion $g(x_1)$. Luego, para cualquier $\tilde{f}(z) \in H(\mathbb{C}^+)$ denotamos por $\check{f}(w)$ el **levantamiento** de la función $\tilde{f}(z)$ a la cubierta universal $\check{V}$:

$$\check{f}(w) := \tilde{f}(\text{ senh} w), \ w \in \Pi_0^{\pi}. \tag{5.2.3}$$

entonces, por (5.2.2) y (5.1.1)

$$\check{g} \in H(\Pi_0^{\pi}) \tag{5.2.4}$$

y es simétrico en este dominio con respecto a $i\dfrac{\pi}{2}$:

$$\check{g}(-w + i\pi) = \check{g}(w), \ w \in \Pi_0^{\pi}. \tag{5.2.5}$$

De aquí en adelante, el parámetro w se representará como:

$$w = w_1 + iw_2, \quad w_1, \ w_2 \in \mathbb{R}.$$

Probaremos la principal propiedad de la función $\check{g}$ (véase la Proposición 5.2.3). Iniciamos con un Lema auxiliar.
Sea $\sqrt{1+\xi^2}$ una rama de $\sqrt{z}$ tal que $\sqrt{1+\xi^2} \geq 0$, para $\xi \in \mathbb{R}$.

Lema 5.2.1. *Existe $C > 0$ tal que para cualquier $\alpha \in [\pi/2-1, \pi/2+1]$, se satisface la cota uniforme*

$$\|\tilde{f}(\xi \cos\alpha + i\sqrt{1+\xi^2} \text{ sen } \alpha)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^+)}, \ f \in L^2(\mathbb{R}^+).$$

Demostración. Notemos que

$$\|\tilde{f}(\xi \cos\alpha + i\sqrt{1+\xi^2} \text{ sen } \alpha)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{1+\xi^2} \text{ sen } \alpha x} |f(x)| dx.$$

Por lo tanto, es suficiente aplicar la prueba de Schur (véase el Apéndice G, Lema G.0.17) al operador generado por el kernel

$$K(x,\xi) := \begin{cases} e^{-\text{ sen } \alpha x \sqrt{1+\xi^2}}, & x,\xi \geq 0 \\ 0, & \textit{en otro caso}, \end{cases}$$

y demostrar que D y E se pueden escoger para toda $\alpha \in [\pi/2-1, \pi/2+1]$.
Sean $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ y $q(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}}$, probaremos que

$$\int_0^\infty e^{-\text{ sen } \alpha x \sqrt{1+\xi^2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{C}{\sqrt{z}} \tag{5.2.6}$$

y

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{1+z^2}} \frac{1}{\sqrt{z}} dz \leq \frac{C}{\sqrt{x}} \tag{5.2.7}$$

donde C no depende de $\alpha \in [\pi/2-1, \pi/2+1]$. Demostremos primero (5.2.6). Hacemos el cambio de variable:

$$\text{sen } \alpha x \sqrt{1+\xi^2} = s \Rightarrow dx = \frac{ds}{\text{sen } \alpha \sqrt{1+\xi^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{(1+\xi^2)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\text{sen } \alpha}}{\sqrt{s}}.$$

Sustituyendo estas expresiones en (5.2.6), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\text{ sen } \alpha x \sqrt{1+\xi^2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \frac{1}{\sqrt[4]{1+\xi^2}\sqrt{\text{sen } \alpha}} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds \leq \frac{C}{\sqrt[4]{1+\xi^2}\sqrt{\text{sen } \alpha}} \\ &\leq \frac{D}{\sqrt[4]{1+\xi^2}}, \end{aligned}$$

para $|\alpha - \pi/2| \leq 1$.
De manera similar se prueba la desigualdad (5.2.7), con ayuda del cambio de variable $x\xi \text{ sen } \alpha = s$.

■

Definición 5.2.2. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos

$$C_\alpha = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im } w = \alpha\}. \tag{5.2.8}$$

Proposición 5.2.3. *(véase [26], Lema 7.2) La función $\breve{g}(w)e^{\varepsilon|w|}$ es cuadrado integrable sobre cada línea recta $C_\alpha \subset \Pi_0^\pi$, con $|\alpha - \pi/2| \leq 1$ paralela al eje real, con la siguiente cota uniforme*

$$\int_{C_\alpha} |\breve{g}(w)|^2 e^{2\varepsilon|w|} |dw| \leq C\|g\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}, \quad |\alpha - \pi/2| \leq 1. \tag{5.2.9}$$

Demostración. Por la hipótesis (5.2.1) $g(x_1) \in H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$, de aquí, por un Teorema del tipo Paley-Wiener [3] $\tilde{g}(z_1)$ es analítica en $\mathbb{C}^+$.
Definimos

$$g_s(x_1) := F^{-1}_{z_1 \to x_1}\left[\frac{\tilde{g}(z_1)}{(z_1+i)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\right] \tag{5.2.10}$$

donde la rama de la función exponencial en (5.2.10), es tal que es analítica en $\mathbb{C}^+$. Obviamente,

$$\|g_s\|_{H^0(\mathbf{R}^+)} \le C_1 \|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}. \tag{5.2.11}$$

Por otro lado, aplicando el Lema 5.2.1 a la función $\tilde{g}_s(z_1)$, obtenemos

$$\|\tilde{g}_s(\xi_1 \cos\alpha + i\sqrt{1+\xi_1^2}\,\operatorname{sen}\alpha)\|_{L^2(\mathbf{R})} \le C_1 \|g_s\|_{L^2(\mathbf{R}^+)}, \quad |\alpha - \pi/2| \le 1$$

i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}_s(\xi_1 \cos\alpha + i\sqrt{1+\xi_1^2}\,\operatorname{sen}\alpha)|^2 d\xi_1 \le C_1 \|g_s\|^2_{L^2(\mathbf{R}^+)},\ |\alpha - \pi/2| \le 1.$$

Ya que $\operatorname{sen}(\mathrm{w}_1 + \mathrm{i}\alpha) = \operatorname{senh}\mathrm{w}_1 \cos\alpha + \mathrm{i}\cosh\mathrm{w}_1 \operatorname{sen}\alpha$ para $w_1 \in \mathbb{R}$, entonces si $\xi_1 = \operatorname{senh}\mathrm{w}_1$ la última desigualdad puede escribirse como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}_s(\operatorname{senh}(w_1 + i\alpha))|^2 |\cosh w_1| dw_1 \le C_1 \|g_s\|^2_{L^2(\mathbf{R}^+)},\ |\alpha - \pi/2| \le 1. \tag{5.2.12}$$

Por (5.2.10), $|\tilde{g}_s(\operatorname{senh}(w_1 + i\alpha))|^2 = |\tilde{g}(\operatorname{senh}(w_1 + i\alpha))|^2 (\operatorname{senh}(w_1 + i\alpha) + i)^{2\varepsilon - 1}$. Entonces, sustituyendo esta expresión en (5.2.12) y usando (5.2.11) obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(\operatorname{senh}(w_1 + i\alpha))|^2 (\operatorname{senh}(w_1 + i\alpha) + i)^{2\varepsilon - 1} |\cosh w_1| dw_1 \le C_1 \|g\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}$$

para α: $|\alpha - \pi/2| \le 1$. Como bajo esta condición se satisface que:

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen}(\mathrm{w}_1 + \mathrm{i}\alpha) + \mathrm{i}|^2 = &\ |\operatorname{senh} w_1 \cos\alpha + i\cosh w_1 \operatorname{sen}\alpha + i|^2 \\ \ge &\ (1 + \cosh w_1 \operatorname{sen}\alpha)^2 \ge \mathrm{C}^2 \cosh \mathrm{w}_1, \end{aligned}$$

entonces

$$|\operatorname{sen}(w_1 + i\alpha) + i|^{2\varepsilon - 1} |\cosh w_1| \ge C_2 e^{2\varepsilon |w_1|},\ w_1 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(\operatorname{senh}(w_1 + i\alpha))|^2 e^{2\varepsilon|w_1|} dw_1 \le C_3 \|g\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)},\ |\alpha - \pi/2| \le 1.$$

Por (5.2.3) esta expresión es equivalente a (5.2.9). ∎

5.3. La función $T(w)$

Para construir la solución del problema de Neumann (PN), el papel clave lo juega una función $T(w)$ que es solución de la ecuación en diferencias que corresponde a la ecuación en diferencias (5.1.8)

$$T(w+i\beta) - T(w-i\beta) = -2\breve{g}(w+i\pi/2), \quad w \in \Pi_{-\pi/2}^{\pi/2} \tag{5.3.1}$$

con la condición de antisimetría

$$T(-w) = -T(w), \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\beta}. \tag{5.3.2}$$

Más detalladamente, queremos encontrar una función analítica en $\Pi_{-\pi/2-\beta}^{\pi/2+\beta}$ que satisfaga (5.3.1) y (5.3.2). Para evitar complicaciones técnicas en la construcción de la continuación analítica de $T(w)$, de ahora en adelante supondremos que $\pi/2 < \beta < \pi$. La técnica correspondiente al caso $0 < \beta \leq \pi/2$ se desarrolló en [26].

Notemos que la Proposición 5.2.3 prueba, en particular que $\breve{g}(w)$ es cuadrado integrable sobre la línea recta $C_{\frac{\pi}{2}}$, y por lo tanto, sobre esta línea existe su Transformada de Fourier-Plancherel:

$$\mathcal{G}(t) := \int_{C_0} \breve{g}(w+i\pi/2)e^{iwt}dw \in L^2(\mathbb{R}). \tag{5.3.3}$$

Además,

$$\|\mathcal{G}(t)\|_{L^2(\mathbf{R})} = \|\breve{g}(w+i\pi/2)\|_{L^2(\mathbf{R})} \leq C\|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)} \tag{5.3.4}$$

por(5.2.9). Notemos también que de (5.2.5) se sigue que $\breve{g}(w+i\pi/2)$ es par sobre C_0 y por lo tanto, $\mathcal{G}$ es par sobre $\mathbb{R}$.
Introducimos el siguiente espacio.

Definición 5.3.1. Para cada $\delta > 0$ y cualquier línea recta C paralela a la línea real, definimos $L^{2,\delta}(C)$ como el espacio de las funciones cuadrado integrables sobre C con peso $\sigma(w) = (1+|w|)^{-1-\delta}$:

$$L^{2,\delta}(C) = \left\{ f : \int_C |f(w)|^2(1+|w|)^{-2-2\delta}dw < \infty \right\}. \tag{5.3.5}$$

Ahora podemos presentar la función $T(w)$.

Definición 5.3.2. Para $\mathcal{G}(t)$ definida por (5.3.3) y $\pi/2 < \beta < \pi$, definimos la función:

$$T(w) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(wt)\frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}(\beta t)}dt, \quad w \in \mathbb{R}. \tag{5.3.6}$$

Notemos que la estimación (E.0.8) del Apéndice E y la desigualdad de Cauchy-Schwartz implican que para $w \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
|T(w)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sen}(wt)}{\operatorname{senh}(\beta t)}\right||\mathcal{G}(t)|dt \leq \frac{C(w,\beta)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|t|}|\mathcal{G}(t)|dt \\
&\leq \frac{C(w,\beta)}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\beta|t|}dt\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{G}(t)|^2dt\right)^{1/2} < \infty
\end{aligned}
$$

ya que $e^{-\beta|t|} \in L^2(\mathbb{R})$ y $\mathcal{G}(t) \in L^2(\mathbb{R})$ por (5.3.3). Por lo tanto, $T(w)$ está bien definida. En el siguiente Teorema y en la siguiente sección, damos varias propiedades importantes de la función $T(w)$.

Teorema 5.3.3. *(véase [26], Lema 7.3) La función $T(w)$ posee las siguientes propiedades:*
i) *T admite continuación analítica en $\Pi_{-\beta}^{\beta}$.*
ii) *$T(w) \in L^{2,\delta}(C_m)$ para cualquier $m \in [-\beta,\beta]$ y para cualquier $\delta > \frac{1}{2}$, además*

$$
\|T(w)\|_{L^{2,\delta}(C_m)} \leq C\|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}. \tag{5.3.7}
$$

iii) *Existe el límite de la función $T(w)|_{C_m}$ cuando $m \to \pm\beta$ en $L^{2,\delta}$ para $\delta > 1/2$.*

Demostración. **i)** Consideremos la integral (5.3.6) para $w \in \Pi_{-\beta}^{\beta}$. Notemos que la estimación (E.0.1) implica la convergencia absoluta de esta integral para $w \in \Pi_{-\beta}^{\beta}$. Además, diferenciando bajo el signo de la integral (5.3.6) obtenemos la integral

$$
\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} t\cos(wt)\frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}(\beta t)}dt,
$$

la cual converge absolutamente para $|w_2| < \beta$, por (E.0.2). Por lo tanto, la integral (5.3.6) admite continuación analítica en $\Pi_{-\beta}^{\beta}$. Abusando de la notación denotaremos también esta continuación como $T(w)$. Entonces,

$$
T(w) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(wt)\frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}(\beta t)}dt, \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\beta}. \tag{5.3.8}
$$

Por lo tanto, $T(w) \in H(\Pi_{-\beta}^{\beta})$.
ii) Representemos la función $T(w)$ en la forma

$$
T(w) = T_1(w) + T_2(w) \tag{5.3.9}
$$

donde

$$T_1(w) = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{|t|\le 1} \operatorname{sen}(wt) \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}(\beta t)} dt, \; w \in \mathbb{C} \tag{5.3.10}$$

y

$$T_2(w) = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{|t|>1} \operatorname{sen}(wt) \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}(\beta t)} dt, \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\beta}. \tag{5.3.11}$$

1) Demostraremos que $T_1(w) \in L^{2,\delta}(C_m)$ para $\delta > 1/2$ y $m \in [-\beta, \beta]$, con la cota (5.3.7). Ya que, para $w \in \mathbb{C}$, $\dfrac{\operatorname{sen}(wt)}{\operatorname{senh}(\beta t)} \to \dfrac{w}{\beta}$ cuando $t \to 0$, entonces $\dfrac{\operatorname{sen}(wt)}{\operatorname{senh}(\beta t)} \in C[-1,1]$. Luego, el hecho de que $\mathcal{G}(t) \in L^2[-1,1]$ y la desigualdad de Cauchy-Schwartz implican la convergencia absoluta de la integral (5.3.10). Además, diferenciando con respecto de w bajo el signo de la integral, observando que:

$$\frac{t\cos(wt)}{\operatorname{senh}(\beta t)} \to \frac{1}{\beta} \quad \text{cuando} \quad t \to 0$$

y usando un argumento análogo al anterior, obtenemos

$$\frac{dT_1(w)}{dw} = \frac{i}{2\pi} \int\limits_{|t|\le 1} t\cos(wt) \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}(\beta t)} dt < \infty, \; w \in \mathbb{C}.$$

Por lo tanto, la función $T_1(w)$ es analítica en $\mathbb{C}$, en particular en $\Pi_{-\beta}^{\beta}$; y continua hasta la frontera. Por otro lado, el Lema E.0.8 del Apéndice E (véase la estimación (E.0.1)) implica que

$$\frac{\operatorname{sen}(wt)}{\operatorname{senh}\beta t} \in L^2[-1,1] \quad \text{para} \quad |w_2| \le \beta,$$

y

$$|T_1(w)| \le C \left\| \frac{\operatorname{sen}(wt)}{\operatorname{senh}(\beta t)} \right\|_{L^2[-1,1]} \|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)} \tag{5.3.12}$$

por (5.3.4). Calculando la norma en (5.3.12), y gracias a (E.0.1) del Apéndice E obtenemos

$$|T_1(w)| \le C|w| \|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}, \quad |w_2| \le \beta. \tag{5.3.13}$$

Esto implica que, para $\delta > 1/2$

$$T_1 \in L^{2,\delta}(C_m), \; \|T_1\|_{L^{2,\delta}(C_m)} \le C \|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}, \quad \forall\, m \in [-\beta, \beta]. \tag{5.3.14}$$

En efecto, por (5.3.5), (E.0.1), (5.3.13) y el hecho de que $\delta > 1/2$ implican

$$\|T_1\|^2_{L^{2,\delta}(C_m)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_m} \frac{|T_1(w)|^2}{(1+|w|)^{2\delta+2}} dw \le C \frac{\|g\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}}{2\pi} \int\limits_{C_m} \frac{|w|^2}{(1+|w|)^{2\delta+2}} dw$$

$$\le C_1 \|g\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)} \int\limits_{C_m} \frac{1}{(1+|w|)^{2\delta}} dw < C_1 \|g\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}$$

ya que $2\delta > 1$.

2) Demostraremos que $T_2(w) \in L^{2,\delta}(C_m)$ para $\delta > 1/2$ y $m \in [-\beta, \beta]$, con la cota (5.3.7). Ya que $\mathcal{G}(t)$ es par y $e^{-iwt} = \cos(wt) - i\,\mathrm{sen}(wt)$, entonces podemos escribir (5.3.11) como:

$$T_2(w) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t)\frac{\mathcal{G}(t)}{\mathrm{senh}(\beta t)}e^{-iwt}dt, \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\beta}.$$

Por lo tanto, $T_2(w)$ es la Transformada de Fourier inversa de la función

$$-\chi(t)\frac{e^{w_2 t}}{\mathrm{senh}(\beta t)}\mathcal{G}(t),\ |w_2| \leq \beta \tag{5.3.15}$$

es decir,

$$T_2(w) = F^{-1}_{t\to w_1}\left[-\chi(t)\frac{\mathcal{G}(t)}{\mathrm{senh}(\beta t)}e^{w_2 t}\right], \quad |w_2| \leq \beta. \tag{5.3.16}$$

Por otro lado, de (E.0.6) se sigue que

$$\left|\chi(t)\frac{e^{w_2 t}}{\mathrm{senh}(\beta t)}\mathcal{G}(t)\right| \leq C|\mathcal{G}(t)|, \quad |t| \geq 1, \quad |w_2| \leq \beta. \tag{5.3.17}$$

De aquí, por (5.3.4) la función (5.3.15) pertenece a $L^2(\mathbb{R})$. Luego, el Teorema de Plancherel establece que T_2 pertenece a L^2, y

$$\|T(w)\|_{L^2(\mathbf{R})} = \left\|\chi(t)\frac{e^{w_2 t}}{\mathrm{senh}(\beta t)}\mathcal{G}(t)\right\| \leq C|\mathcal{G}(t)|.$$

De aquí

$$\|T_2\|^2_{L^{2,\delta}(C_m)} = \frac{1}{2\pi}\int_{C_m} \frac{|T_2(w)|^2}{(1+|w|)^{2\delta+2}}dw \leq \|T_2\|^2_{L^2(\mathbf{R}^+)} \leq C\|\mathcal{G}\|_{L^2(\mathbf{R}^+)}$$

si $\delta > -1$. Ahora, (5.3.4) implica (5.3.7) para T_2. La afirmación ii) se ha demostrado.

iii) Probaremos el caso cuando $m \to \beta - 0$. El caso $m \to -\beta + 0$ se demuestra de forma similar. Sea $w \in C_0$, demostraremos primero esta afirmación para la función $T_1(w)$ de (5.3.9). De (5.3.10) se sigue que

$$\begin{aligned} |T_1(w+i\beta) \quad - \quad & T_1(w+im)| \leq \\ \leq \quad & \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} |\,\mathrm{sen}(wt+i\beta t) - \ \mathrm{sen}(wt+imt)|\frac{|\mathcal{G}(t)|}{|\,\mathrm{senh}(\beta t)|}dt. \end{aligned}$$

Representando la diferencia de senos como un producto, reescribimos la desigualdad anterior como

$$\begin{aligned} |T_1(w+i\beta) \quad - \quad & T_1(w+im)| \leq \\ \leq \quad & \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \left|\,\mathrm{sen}\frac{it(\beta-m)}{2}\cos\left(wt+\frac{it(\beta-m)}{2}\right)\right|\frac{|\mathcal{G}(t)|}{|\,\mathrm{senh}(\beta t)|}dt \end{aligned}$$

para $w \in C_0$. Usando la estimación (E.0.3) del Apéndice E con $x = t(\beta - m)/2$ para $(\beta - m)$ suficientemente pequeños, y la estimación (E.0.4) , obtenemos

$$\left| \operatorname{sen}\left(\frac{it(\beta - m)}{2}\right)\cos\left(wt + \frac{it(\beta - m)}{2}\right)\right| \leq C|\beta - m||t|, \quad |t| \leq 1, \quad w \in C_0.$$

De aquí, para $(\beta - m)$ suficientemente pequeños

$$\begin{aligned} |T_1(w + i\beta) \quad - \quad & T_1(w + im)| \leq \\ \leq \quad & C(\beta - m)\int_{-1}^{1} \frac{|t|}{|\operatorname{senh}(\beta t)|}|\mathcal{G}(t)|dt \leq C(\beta - m), \quad w \in C_0, \end{aligned}$$

ya que la función $\dfrac{t}{\operatorname{senh}(\beta t)}\mathcal{G}(t) \in L^2[-1, 1]$ por (5.3.4) y la función $t/\operatorname{senh}(\beta \mathrm{t}) \in \mathrm{C}[-1, 1]$.
De aquí

$$T_1(w + im) - T_1(w + i\beta) \longrightarrow 0 \quad \text{uniformente con respecto de} \quad w \in C_0.$$

Por lo tanto, la cota (5.3.14) y el Teorema de Lebesgue implican que para $\delta \geq 1/2$

$$T_1(w + im) - T_1(w + i\beta) \to 0 \quad \text{en} \quad L^{2,\delta}(C_0) \quad \text{cuando} \quad m \to \beta.$$

Ahora, probaremos iii) para T_2. Por (5.3.16), tenemos que

$$T_2(w + i\beta) - T_2(w + im) = F^{-1}_{t\to w}\left[-\chi(t)\frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{sen}\beta t}(e^{\beta t} - e^{mt})\right].$$

Notemos que

1. $-\chi(t)\dfrac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}(\beta t)}(e^{\beta t} - e^{mt}) \longrightarrow 0$ puntualmente cuando $m \to \beta$.
2. De (5.3.17) con $w_2 = \beta$ ó m, se sigue que

$$\left|-\chi(t)\frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}(\beta t)}(e^{\beta t} - e^{mt})\right| \leq C|\mathcal{G}(t)| \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq m \leq \beta.$$

Además, como $\mathcal{G}(t) \in L^2(\mathbb{R})$, entonces el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue implica que

$$-\chi(t)\frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}(\beta t)}(e^{\beta t} - e^{mt}) \longrightarrow 0 \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}_t) \quad \text{cuando} \quad m \to \beta - 0.$$

Por el Teorema de Plancherel, esto implica que

$$F^{-1}_{t\to w}\left[-\chi(t)\frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{sen}(\beta t)}(e^{\beta t} - e^{mt})\right] \longrightarrow 0 \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}_w) \quad \text{cuando} \quad m \to \beta - 0.$$

De aquí,

$$T_2(w + im) \longrightarrow T_2(w + i\beta) \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}_w) \quad \text{cuando} \quad m \to \beta - 0. \tag{5.3.18}$$

Ya que el embedimiento natural $L^2 \hookrightarrow L^{2,\delta}$ es continuo para $\delta \geq -1$, entonces (5.3.18) se cumple en $L^{2,\delta}$ para $\delta \geq 1/2$. Esto prueba iii).

■

5.4. Continuación analítica de $T(w)$ y la solución de la ecuación en diferencias

Iniciamos esta sección introduciendo las siguientes notaciones:

$$\alpha := \pi/(2\beta), \quad a = \alpha w, \quad b = \alpha w'. \tag{5.4.1}$$

Teorema 5.4.1. *(véase [26], Lema 7.3) La función $T(w)$ posee las siguientes propiedades:*
i) *El límite de la función $T(w)|_{C_m}$ cuando $m \to \pm\beta$ en $L^{2,\delta}$ para $\delta > 1/2$, satisface la ecuación en diferencias (5.3.1) para $w \in C_0$,*
ii) *$T(w)$ puede continuarse a una función analítica en $\Pi_{-\pi/2-\beta}^{\pi/2+\beta}$ que satisface (5.3.1) y la condición de antisimetría (5.3.2),*
iii) *$T(w)$ admite en $\overline{\Pi}_{-\beta}^{\beta}$ la siguiente representación*

$$T(w) = -\frac{i}{4\beta} \operatorname{senh} 2\mathrm{a} \int_{C_0} \frac{\hat{\mathrm{g}}(\mathrm{w}' + \mathrm{i}\pi/2)}{\cosh^2 \mathrm{b} + \operatorname{senh}^2 \mathrm{a}} \mathrm{dw}', \quad \mathrm{w} \in \Pi_{-\beta}^{\beta}. \tag{5.4.2}$$

Demostración. **i)** Primero demostraremos que

$$T_1(w + i\beta) - T_1(w - i\beta) = F_{t\to w}^{-1}\left[-2\mathcal{G}(t)(1 - \chi(t))\right], \quad \text{p.c.t} \quad w \in C_0. \tag{5.4.3}$$

De (5.3.10) se sigue que

$$T_1(w + im) - T_1(w - im) = \frac{i}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\mathcal{G}(t)}{\operatorname{senh}(\beta t)} \Big[\operatorname{sen}(w + im)t - \operatorname{sen}(w - im)t \Big] dt.$$

Ya que $\operatorname{sen}(w + im)t - \operatorname{sen}(w - im)t = 2i \operatorname{senh}(mt) \cos(wt)$, entonces la igualdad anterior se puede escribir como

$$T_1(w + im) - T_1(w - im) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{senh}(mt)}{\operatorname{senh}(\beta t)} \cos(wt) \mathcal{G}(t) dt.$$

Como $\cos(wt) = e^{-iwt} + i\,\mathrm{sen}(wt)$, y usando el hecho de que la función $\dfrac{\mathrm{senh}(mt)}{\mathrm{senh}(\beta t)}\mathrm{sen}(wt)\mathcal{G}(t)$ es impar con respecto de t (véase (5.3.3)), obtenemos

$$
\begin{aligned}
T_1(w+im) - T_1(w-im) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{senh}(mt)}{\mathrm{senh}(\beta t)} e^{-iwt}\mathcal{G}(t)(1-\chi(t))dt \\
&= F^{-1}_{t\to w}\left[-2\mathcal{G}(t)\frac{\mathrm{senh}(mt)}{\mathrm{senh}(\beta t)}(1-\chi(t))\right].
\end{aligned}
\tag{5.4.4}
$$

Por otro lado, notemos que:

$$
1)\ \lim_{m\to\beta-0} -2\frac{\mathrm{senh}(mt)}{\mathrm{senh}(\beta t)}\mathcal{G}(t)(1-\chi(t)) = -2\mathcal{G}(t)(1-\chi(t)),\ \text{p.c.t. } t\in\mathbb{R}
\tag{5.4.5}
$$

$$
2)\ \left|-2\frac{\mathrm{senh}(mt)}{\mathrm{senh}(\beta t)}\mathcal{G}(t)(1-\chi(t))\right| \le C|\mathcal{G}(t)|, \quad |m|\le\beta \quad \text{y} \quad |t|\le 1
$$

$$
3)\quad \mathcal{G}(t)\in L^2(\mathbb{R})
\tag{5.4.6}
$$

por (5.3.3). Por lo tanto, el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue implica que

$$
-2\frac{\mathrm{senh}(mt)}{\mathrm{senh}(\beta t)}\mathcal{G}(t)(1-\chi(t)) \to -2\mathcal{G}(t)(1-\chi(t)) \quad \text{cuando} \quad m\to\beta-0 \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}).
$$

De (5.4.4) se sigue que

$$
\lim_{m\to\beta-0} T_1(w+im) - T_1(w-im) = F^{-1}\left[2\mathcal{G}(t)(1-\chi(t))\right] \quad \text{en } \mathrm{L}^2(C_0)
$$

y en consequencia también en $L^{2,\delta}(C_0)$, $\delta > 1/2$. Por otro lado

$$
\lim_{m\to\beta-0} T_1(w+im) - T_1(w-im) = T_1(w+i\beta) - T_1(w-i\beta) \quad \text{en } \mathrm{L}^{2,\delta}(C_0)
$$

para $\delta > 1/2$, por el Teorema 5.3.3 (iii), entonces los límites coinciden casi siempre y (5.4.3) se ha demostrado.

Ahora demostraremos que

$$
T_2(w+i\beta) - T_2(w-i\beta) = F^{-1}_{t\to w}\left[-2\mathcal{G}(t)\chi(t)\right], \quad \text{p.c.t. } w\in C_0.
\tag{5.4.7}
$$

De (5.3.16) tenemos que

$$
T_2(w+im) - T_2(w-im) = F^{-1}_{t\to w}\left[-2\mathcal{G}(t)\frac{\mathrm{senh}(mt)}{\mathrm{senh}(\beta t)}\chi(t)\right].
$$

Similarmente a (5.4.5)-(5.4.6), por el Teorema de Lebesgue obtenemos

$$
\lim_{m\to\beta-0} -2\mathcal{G}(t)\frac{\mathrm{senh}(mt)}{\mathrm{senh}(\beta t)}\chi(t) = -2\mathcal{G}(t)\chi(t) \quad \text{en} \quad L^2(\mathbb{R}).
$$

De aquí, por el Teorema de Plancherel

$$\lim_{m\to\beta-0} F^{-1}_{t\to w}\left[-2\mathcal{G}(t)\frac{\operatorname{senh}(mt)}{\operatorname{senh}(\beta t)}\chi(t)\right] = F^{-1}_{t\to w}[-2\mathcal{G}(t)\chi(t)] \quad \text{en} \quad L^2(C_0)$$

es decir,

$$\lim_{m\to\beta-0} T_2(w+im) - T_2(w-im) = F^{-1}_{t\to w}\left[-2\mathcal{G}(t)\chi(t)\right] \quad \text{en} \quad L^2(C_0),$$

y por consecuencia en $L^{2,\delta}(C_0)$, $\delta > 1/2$. De la afirmación iii) del Teorema 5.3.3 se sigue que

$$\lim_{m\to\beta-0} T_2(w+im) - T_2(w-im) = T_2(w+i\beta) - T_2(w-i\beta) \quad \text{en} \quad L^{2,\delta}(C_0),\ \delta > 1/2.$$

Por lo tanto, (5.4.7) se cumple. Finalmente, (5.3.1) para $w \in C_0$ se sigue de 5.3.9), (5.4.3), (5.4.7) y (5.3.3). La afirmación i) se ha demostrado.

ii) Sea $w \in \Pi^{\pi/2+\beta}_{-\pi/2-\beta}$ y $w \notin C_{\pm\beta}$. Definimos una continuación de la función $T(w)$ mediante las fórmulas

$$\overline{T}(w) = \begin{cases} T(w-2i\beta) - 2\breve{g}(w-i\beta+i\pi/2), & w \in \Pi^{\pi/2+\beta}_{\beta} \\ T(w), & w \in \Pi^{\beta}_{-\beta} \\ T(w+2i\beta) + 2\breve{g}(w+i\beta+i\pi/2), & w \in \Pi^{-\beta}_{-\pi/2-\beta}. \end{cases} \tag{5.4.8}$$

1) Probaremos que $\overline{T}(w)$ es analítica en $\Pi^{\pi/2+\beta}_{-\pi/2-\beta}\backslash C_{\pm\beta}$. En $\Pi^{\beta}_{-\beta}$, $\overline{T}$ es analítica por i) del Teorema 5.3.3. Supongamos que $w \in \Pi^{\pi/2+\beta}_{\beta}$, esto implica que $w-2i\beta \in \Pi^{\pi/2-\beta}_{-\beta} \subset \Pi^{\beta}_{-\beta}$ y $w-2i\beta+i\pi/2 \in \Pi^{\pi}_{\pi/2} \subset \Pi^{\pi}_{0}$. De aquí, la analiticidad de $T(w)$ en $\Pi^{\beta}_{-\beta}$ y la analiticidad de $\breve{g}$ en Π^{π}_{0} (véase (5.2.4)), implican que $\overline{T}$ es analítica en $\Pi^{\pi/2+\beta}_{\beta}$, por la primera igualdad de (5.4.8). Un argumento análogo muestra que $\overline{T}$ es analítica en $\Pi^{-\beta}_{-\pi/2-\beta}$.

2) Ahora demostraremos que $\overline{T}(w)$ satisface la ecuación en diferencias (5.3.1) en $\Pi^{\pi/2}_{-\pi/2}$. Supongamos que $w \in \Pi^{\pi/2}_{0}$, esto implica que

a) $w+i\beta \in \Pi^{\pi/2+\beta}_{\beta}$, luego, por la primera igualdad de (5.4.8) obtenemos

$$\overline{T}(w+i\beta) = T(w-i\beta) - 2\breve{g}(w+i\pi/2)$$

b) $w-i\beta \in \Pi^{\pi/2-\beta}_{-\beta} \subset \Pi^{\beta}_{-\beta}$, por lo tanto

$$\overline{T}(w-i\beta) = T(w-i\beta).$$

De aquí, se sigue (5.3.1) para $w \in \Pi^{\pi/2}_{0}$. La demostración para el caso cuando $w \in \Pi^{0}_{-\pi/2}$ es análoga.

3) Probaremos que $\overline{T}$ satisface (5.3.2), para $w \in \Pi^{\pi/2+\beta}_{-\pi/2-\beta}\backslash C_{\pm\beta}$.

Supongamos que $w \in \Pi^{\pi/2+\beta}_{\beta}$, esto implica que $-w \in \Pi^{-\beta}_{-\pi/2-\beta}$, entonces de la segunda identidad de (5.4.8) se sigue que

$$\overline{T}(-w) = T(-(w-2i\beta)) - 2\breve{g}(-(w-i\beta)+i\pi/2). \tag{5.4.9}$$

Ya que $w-2i\beta \in \Pi^{\beta}_{-\beta}$, entonces $T(-(w-2i\beta)) = -T(w-2i\beta)$ por (5.3.8). Además, para $w-i\beta \in \Pi^{\pi/2}_{0}$, $\breve{g}(-(w-i\beta)+i\pi/2) = \breve{g}(w-i\beta+i\pi/2)$, por (5.2.5). Por lo tanto, (5.4.9) implica

$$\overline{T}(-w) = -T(w-2i\beta) + 2\breve{g}(w-i\beta+i\pi/2), \qquad w \in \Pi^{\pi/2+\beta}_{\beta}.$$

La última expresión es igual a $-\overline{T}(w)$ por la primera igualdad de (5.4.8). De forma análoga obtenemos (5.3.2) cuando $w \in \Pi^{-\beta}_{-\pi/2-\beta}$.

4) Demostraremos ahora que $\overline{T}$ es analítica sobre las líneas $C_{\pm\beta} \subset \Pi^{\pi/2+\beta}_{-\pi/2-\beta}$. Notemos que de (5.3.2) se sigue que es suficiente probar que $\overline{T}$ es analítica sobre C_β.

a) Sean $A, B \in \mathbb{R}^+, A < B$. Probaremos primero que

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \overline{T}(w+i\beta \pm i\varepsilon) = T(w+i\beta) \quad \text{en} \quad L^1[A,B], \quad \text{para} \quad w \in C_0. \tag{5.4.10}$$

Por iii) del Teorema 5.3.3 y (5.4.8) se sigue que existe el límite

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} T(w \pm i\beta \mp i\varepsilon) = T(w \pm i\beta) \quad \text{en} \quad L^{2,\delta}[A,B], \quad w \in C_0, \quad \delta > 1/2.$$

Por otro lado, de la primera igualdad de (5.4.8) tenemos que

$$\overline{T}(w+i\beta+i\varepsilon) = T(w-i\beta+i\varepsilon) - 2\breve{g}(w+i\varepsilon+i\pi/2). \tag{5.4.11}$$

Como la función $\breve{g}(w+i\pi/2) \in H(\Pi^{\pi/2}_{-\pi/2})$ entonces

1. $\breve{g}(w+i\pi/2+i\varepsilon) \longrightarrow \breve{g}(w+i\pi/2)$, cuando $\varepsilon \to 0+$ y $w \in [A,B]$,
2. Existe $C > 0$ tal que

$$|\breve{g}(w+i\pi/2+i\varepsilon)| \le C, \quad w \in [A,B], \quad \varepsilon \in [-1,1].$$

Por lo tanto, del Teorema de Lebesgue se sigue que

$$\breve{g}(w+i\pi/2+i\varepsilon) \longrightarrow \breve{g}(w+i\pi/2), \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0+, \quad \text{en} \quad L^1[A,B].$$

De aquí, por (5.4.8) obtenemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \overline{T}(w+i\beta+i\varepsilon) = T(w-i\beta) - 2\breve{g}(w+i\pi/2), \quad \text{en} \quad L^1[A,B]$$

por (5.4.11). Usando la ecuación en diferencias (5.3.1) para $w \in C_0$, obtenemos (5.4.10).

b) Demostraremos que

$$|T(w+i\beta-i\varepsilon)| \le C(w)\varepsilon^{-1/2}, \quad w \in C_0, \quad \varepsilon > 0 \tag{5.4.12}$$

y

$$|T(w+i\beta+i\varepsilon)| \le C_1(w)\varepsilon^{-1/2}, \quad w \in C_0, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.4.13}$$

Probaremos primero la desigualdad (5.4.12). La fórmula (5.3.8), la desigualdad (5.3.4) y la desigualdad de Cauchy implican

$$|T(w+i\beta-i\varepsilon)| \leq \frac{C}{2\pi}\|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}\left\|\frac{\operatorname{sen}(w+i\beta-i\varepsilon)t}{\operatorname{senh}(\beta t)}\right\|_{L^2(C_0)}. \tag{5.4.14}$$

Por otro lado, el Lema E.0.8 del Apéndice E (véase la estimación (E.0.1)) con $w_2 = \beta - \varepsilon$ se sigue que

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(w+i\beta-i\varepsilon)t}{\operatorname{senh}(\beta t)}\right| \leq C(w,\beta)\exp\{-\varepsilon|t|\} \quad t \in C_0.$$

De aquí,

$$\left\|\frac{\operatorname{sen}(w+i\beta-i\varepsilon)t}{\operatorname{senh}(\beta t)}\right\|^2_{L^2(C_0)} \leq C(w,\beta)\frac{1}{\varepsilon}. \tag{5.4.15}$$

Por lo tanto, las desigualdades (5.4.14) y (5.4.15) implican (5.4.12).
Probaremos ahora (5.4.13). De la primera igualdad de (5.4.8) tenemos que

$$\overline{T}(w+i\beta+i\varepsilon) = T(w-i\beta+i\varepsilon) - 2\breve{g}(w+i\varepsilon+i\pi/2).$$

De aquí,

$$|\overline{T}(w+i\beta+i\varepsilon)| \leq C + |T(w-i\beta+i\varepsilon)|$$

ya que $\breve{g} \in H(\Pi_0^\beta)$. Luego, de forma análoga a la demostracion de (5.4.12), obtenemos (5.4.13).
c1) Para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$, sean

$$\gamma_1(\varepsilon) = \{w + i(\beta-\varepsilon) : w \in [A,B]\}$$

$$\gamma_A(\varepsilon) = \{A + i\xi : |\xi| \leq \varepsilon\}$$

y

$$\gamma_B(\varepsilon) = \{B + i\xi : |\xi| \leq \varepsilon\}.$$

Consideremos el contorno

$$\gamma_\varepsilon = \gamma_1(\varepsilon) \cup [\gamma_1(\varepsilon) + 2i\varepsilon] \cup \gamma_A(\varepsilon) \cup \gamma_B(\varepsilon)$$

orientado en sentido positivo. Sean $w = w_1 + iw_2$, con $0 < \varepsilon < |w_2| < \varepsilon_0$; y V_ε un dominio que contenga a γ_ε, no contenga w y tal que $\overline{T}(w) \in H(V_\varepsilon \setminus \mathbb{R})$ (estamos suponiendo que ε_0 es tan pequeño, que V_ε siempre existe).
Sea

$$c_\varepsilon(w) := \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\overline{T}(w')}{w'-w}dw', \quad w \in C_0.$$

Notemos que las cotas (5.4.12) y (5.4.13) implican que $c_\varepsilon(w)$ esta bien definida.
Demostraremos que

$$c(w) = 0, \quad w \in C_0. \tag{5.4.16}$$

Ya que, $\dfrac{\overline{T}(w')}{w'-w}$ es analítica en $V_\varepsilon \setminus \mathbb{R}$ con respecto a w', entonces, por el Teorema de Cauchy $c_\varepsilon(w)$ no depende de $\varepsilon > 0$. De aquí, es suficiente demostrar que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c_\varepsilon(w) = 0. \tag{5.4.17}$$

Las integrales sobre $[A + i\beta - i\varepsilon, A + i\beta + i\varepsilon]$ y $[B + i\beta - i\varepsilon, B + i\beta + i\varepsilon]$ tienden a 0, cuando $\varepsilon \to 0$ por las cotas (5.4.12) y (5.4.13). Además

$$\int_A^B \frac{\overline{T}(w' + i\beta + i\varepsilon)}{(w' + i\beta + i\varepsilon) - w} dw' \longrightarrow \int_A^B \frac{\overline{T}(w' + i\beta)}{(w' + i\beta) - w} dw', \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0,$$

y

$$\int_A^B \frac{\overline{T}(w' + i\beta - i\varepsilon)}{(w' + i\beta - i\varepsilon) - w} dw' \longrightarrow \int_A^B \frac{\overline{T}(w' + i\beta)}{(w' + i\beta) - w} dw', \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0,$$

por (5.4.10). Esto prueba (5.4.17).

c2) Definamos la función

$$F(w) = \int_{\gamma_{\varepsilon_0}} \frac{\overline{T}(w')}{w'-w} dw', \quad w \in \mathcal{U}_{\varepsilon_0} \tag{5.4.18}$$

donde $\mathcal{U}_{\varepsilon_0}$ es el interior del contorno γ_{ε_0}. Por las cotas (5.4.12) y (5.4.13) la integral (5.4.18) converge, y por lo tanto $F(w)$ está bien definida. Además $F'(w)$ existe, ya que es posible diferenciar (5.4.18) bajo el signo de la integral por las cotas antes mencionadas.

c3) Demostraremos que

$$F(w) = \overline{T}(w), \quad w \in \mathcal{U}_{\varepsilon_0} \setminus \mathbb{R}.$$

Sea $w \in \mathcal{U}_{\varepsilon_0} \setminus \mathbb{R}$, por ejemplo, sea w tal que $\operatorname{Im} w = \beta + \varepsilon$, con $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Consideremos los siguientes contornos auxiliares:

$$\begin{aligned}\gamma_1 := \; & [A + i\beta + i\varepsilon/2, B + i\beta + i\varepsilon/2] \cup [B + i\beta + i\varepsilon/2, B + i\beta + i\varepsilon_0] \\ & \cup [B + i\beta + i\varepsilon_0, A + i\beta + i\varepsilon_0] \cup [A + i\beta + i\varepsilon_0, A + i\beta + i\varepsilon/2]\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\gamma_2 := \; & [A + i\beta - i\varepsilon_0, B + i\beta - i\varepsilon_0] \cup [B + i\beta - i\varepsilon_0, B + i\beta + i\varepsilon/2] \\ & \cup [B + i\beta + i\varepsilon/2, A + i\beta + i\varepsilon/2] \cup [A + i\beta + i\varepsilon/2, A + i\beta - i\varepsilon_0].\end{aligned}$$

Es evidente que

$$F(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{\overline{T}(w')}{w'-w} dw' + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{\overline{T}(w')}{w'-w} dw'.$$

De (5.4.16) se sigue que

$$\int_{\gamma_2} \frac{\overline{T}(w')}{w'-w}dw' = 0.$$

Además el Teorema de Cauchy implica que

$$\frac{1}{i2\pi}\int_{\gamma_2} \frac{\overline{T}(w')}{w'-w}dw' = T(w)$$

ya que $T(w)$ es analítica en $\mathcal{U}_{\varepsilon_0} \setminus \mathbb{R}$. Esto prueba 4).

iii) Usando la fórmula para la Transformada de Fourier de una convolución y (5.3.8) obtenemos:

$$T(w) = -\frac{1}{2\pi}\hat{g}(w+i\pi/2) * F^{-1}_{t\to w}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}\beta \mathrm{t}}\right]. \tag{5.4.19}$$

Ya que

$$F^{-1}_{t\to w}\left[\frac{1}{\operatorname{senh}\beta \mathrm{t}}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}\operatorname{senh}\beta \mathrm{tdt} = \mathrm{i}\frac{\pi}{\beta}\tanh(\alpha \mathrm{w})$$

entonces, sustituyendo la última igualdad en (5.4.19) obtenemos

$$T(w) = -\frac{i}{2\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\tanh(\alpha(w-w'))\breve{g}(w'+i\pi/2)dw', \quad w\in\Pi^{\beta}_{-\beta}.$$

De aquí, usando el hecho que $\mathcal{G}(t)$ es par y separando la parte par, tenemos que

$$T(w) = -\frac{i}{4\beta}\int_{-\infty}^{\infty}[\tanh(\alpha(w-w')) - \tanh(\alpha(w+w'))]\breve{g}(w'+i\pi/2)dw'. \tag{5.4.20}$$

Por otro lado, notemos que

$$\tanh(\alpha(w-w')) - \tanh(\alpha(w+w')) = \frac{1}{\cosh(\alpha w-\alpha w')\cosh(\alpha w+\alpha w')}\times$$

$$\Big[\cosh(\alpha w+\alpha w')\operatorname{senh}(\alpha \mathrm{w}-\alpha \mathrm{w}') + \cosh(\alpha \mathrm{w}-\alpha \mathrm{w}')\operatorname{senh}(\alpha \mathrm{w}+\alpha \mathrm{w}')\Big].$$

De aquí, usando el hecho que

$$\cosh(\alpha w-\alpha w')\cosh(\alpha w+\alpha w') = \cosh^2\alpha w' + \operatorname{senh}^2\alpha \mathrm{w}$$

y fórmula para el ángulo doble, obtenemos

$$\tanh(\alpha(w-w')) - \tanh(\alpha(w+w')) = \frac{\operatorname{senh} 2\mathrm{a}}{\cosh^2 b + \operatorname{senh}^2 \mathrm{a}}$$

por (5.4.1). Luego, sustituyendo esta igualdad en (5.4.20), obtenemos (5.4.2). El teorema 5.4.1 se ha demostrado.

∎

5.5. Solución de la ecuación en diferencias

Definición 5.5.1. Definimos la función $\breve{u}_2(w)$ como

$$\breve{u}_2(w) = T(w + i\beta - i\pi/2)/\cosh(w + i\beta), \quad w \in \Pi^{\pi}_{-2\beta}. \tag{5.5.1}$$

Lema 5.5.2. *La función $\breve{u}_2(w)$ es analítica en $\Pi^{\pi-\beta}_{-\beta}$, meromorfa en $\Pi^{\pi}_{-2\beta}$ con posibles polos en los puntos donde* $\cosh(w + i\beta) = 0$*, y resuelve el sistema (5.1.8)-(5.1.9).*

Demostración. La función $T(w+i\beta-i\pi/2)$ es la translación de la función $T(w)$ por $i(\pi/2-\beta)$, luego $T(w + i\beta - i\pi/2)$ es analítica en

$$\Pi^{\pi/2+\beta}_{-\pi/2-\beta} + i\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \Pi^{\pi}_{-2\beta}$$

por ii) del Teorema 5.4.1. Por lo tanto, $\breve{u}_2(w)$ es meromorfa en $\Pi^{\pi}_{-2\beta}$, con posibles polos en los ceros de $\cosh(w + i\beta)$, por (5.5.1). Ya que $T(w)$ es impar por (5.3.2), entonces $T(w + i\beta - i\pi/2) = 0$ en $w = i(\pi/2 - \beta)$ por (5.3.8). De aquí, $\breve{u}_2(w)$ no tiene una singularidad en este punto. Ya que $\cosh(w + i\beta)$ no tiene otros ceros en $\Pi^{\pi-\beta}_{-\beta}$ entonces $\breve{u}_2(w) \in H(\Pi^{\pi-\beta}_{-\beta})$. Obviamente, el argumento anterior prueba que $\breve{u}_2(w)$ definida por (5.5.1) es meromorfa en $\Pi^{\pi}_{-2\beta}$ con posibles polos en los puntos donde $\cosh(w + i\beta) = 0$.

Probaremos (5.1.8). Sustituyendo (5.5.1) en el lado izquierdo de (5.1.8), obtenemos que (5.1.8) es equivalente a la ecuación

$$T(w + i\beta - i\pi/2) - T(w - i\beta - i\pi/2) = -2\breve{g}(w), \quad w \in \Pi^{\pi}_{0}.$$

Pero esto se cumple por ii) del Teorema 5.4.1.

Probaremos ahora (5.1.9). Sustituyendo (5.5.1) en el lado izquierdo de (5.1.9), obtenemos

$$\breve{u}_2(\breve{h}_2(w)) = \frac{T(-w - i\beta + i\pi/2)}{\cosh(-w - i\beta + i\pi)} = \frac{-T(w + i\beta - i\pi/2)}{-\cosh(w + i\beta)}$$

por (5.1.2) y la condición de antisimetría con respecto de cero de $T(w)$ en $\Pi^{\pi/2+\beta}_{-\pi/2-\beta}$. Luego, usando (5.5.1) obtenemos (5.1.9).

■

Ahora, vamos a "bajar"$\breve{u}_2(w)$ a $\mathbb{C}^+_{z_2}$. Sea $z_2 \in \mathbb{C}^+$, ya que el mapeo

$$z_2(w) = \operatorname{senh}(w + i\beta), \quad w \in \Pi^{\pi-\beta}_{-\beta}$$

es una cubierta de dos hojas de $\mathbb{C}^+$, entonces existen w' y $w'' \in \Pi^{\pi-\beta}_{-\beta}$ tales que

$$z_2 = z_2(w') = z_2(w'') \tag{5.5.2}$$

y

$$w'' = \breve{h}_2(w').$$

Definamos la función

$$\tilde{u}_2(z_2) := \check{u}_2(w), \quad z_2 \in \mathbb{C}^+ \tag{5.5.3}$$

donde w es cualquiera de los puntos w' o w'' tal que se cumple (5.5.2), y $\check{u}_2(w)$ es la función definida por (5.5.1). Ya que $\check{u}_2(w)$ es automorfa con respecto de $\check{h}_2$, entonces la función (5.5.3) esta bien definida. Además,

Corolario 5.5.3. *La función $\tilde{u}_2(z_2)$, $z_2 \in \mathbb{C}^+$ es analítica en $\mathbb{C}^+$.*

Demostración. Se sigue del Lema 5.5.2 ya que $\check{u}_2(w) \in H(\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta})$. ■

Definimos ahora $\check{u}_1(w)$ por (5.1.10) usando la función $\check{u}_2(w)$ definida por (5.5.1). Ya que $\check{u}_2(w)$ satisface las condiciones del Lema 5.1.2, entonces el par $\check{u}_1$ y $\check{u}_2$ es solución del problema (5.1.5)-(5.1.7) por el Lema 5.1.2. Además, la función

$$\tilde{u}_1(z_1) := \check{u}_1(w), \quad z_1 \in \mathbb{C}^+ \tag{5.5.4}$$

donde $w \in \Pi_0^\pi$ es tal que $z_1(w) = z_1$, está bien definida por la antisimetría de $\check{u}_1(w)$, con respecto de $\check{h}_1(w)$ (véase (5.1.5) y el Lema 5.1.2). Por lo tanto, $\tilde{u}_1(z_1) \in H(\mathbb{C}^+)$ ya que $\check{u}_1(w) \in H(\Pi_0^\pi)$ por el Lema 5.1.2. Este argumento prueba el siguiente:

Corolario 5.5.4. *La función $\tilde{u}_1(z_1)$, $z_2 \in \mathbb{C}^+$ es analítica en $\mathbb{C}^+$.*

Para usar el Teorema 5.1.3 y demostrar que $u_0(x)$ definida por (4.1.14) es solución del problema (PN), nos falta demostrar que

$$\tilde{u}_l(z_l) \in F\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+}), \quad \text{para} \quad l = 1,\ 2.$$

Esto lo haremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

Sumabilidad Cuadrada de la solución

En este capítulo establecemos las propiedades de los datos de Dirichlet que se obtienen en la representación de la “superficie de Riemann”. Demostramos que la solución pertenece al espacio L^2 y depende continuamente de los datos de frontera.

6.1. Propiedades de las funciones $\tilde{u}_1(z_1)$ y $\tilde{u}_2(z_2)$.

En esta sección y en lo que sigue recalcamos el hecho de que estamos trabajando bajo la hipótesis $\pi/2 < \beta < \pi$. El caso $\pi/2 \leq \beta < \pi$ se analiza similarmente.

Teorema 6.1.1. *Las funciones $\tilde{u}_l(z_l)$ para $l = 1, 2$, definidas por (5.5.4) y (5.5.3), pertenecen a $F\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$.*

Demostración. **(I)** Probaremos primero que $\tilde{u}_2(z_2) \in F\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$. La Definición 5.5.1 y la afirmación ii) del Teorema 5.3.3 implican que para cada $m \in [-\beta, \pi - \beta]$, $\tau > 0$ se satisface:

$$\int\limits_{C_m} |\check{u}_2(w)|^2 e^{|w|} (1 + |w|)^{-3-\tau} dw \leq C \|g\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)}. \tag{6.1.1}$$

Ahora usaremos el Teorema II de [19] (véase el Lema G.0.16 del Apéndice A). Consideremos la función

$$v(w) := \check{u}_2(w)[\cosh(w + i\beta - i\pi/2)]^{1/2}(i\pi + w)^{-2} \tag{6.1.2}$$

aquí, tomamos la rama de la raíz cuadrada de manera que sea analítica en $\Pi^{\pi-\beta}_{-\beta}$. Entonces $v(w)$ es analítica en $\Pi^{\pi-\beta}_{-\beta}$ (por que $\check{u}_2(w)$ lo es), y

$$\int\limits_{C_m} |v(w)|^2 dw \leq C \quad \forall\, m \in [-\beta, \pi - \beta]$$

por (6.1.1). Luego, el Teorema antes mencionado (intercambiando la parte real y la parte imaginaria), implica que

$$v(w) = \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{v(w_1 + i\pi - i\beta)}{w_1 + i\pi - i\beta - w} dw_1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{v(w_1 - i\beta)}{w_1 - i\beta - w} dw_1\right].$$

De aquí, por la desigualdad de Cauchy obtenemos

$$|v(w)| \le C_1\|(w_1 + i\pi - i\beta - w)^{-1}\|_{L_2(\mathbf{R}_{w_1})} + C_2\|(w_1 - i\beta - w)^{-1}\|_{L_2(\mathbf{R}_{w_1})}, \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}.$$

Calculando las normas que aparecen arriba, la expresión anterior es equivalente a

$$|v(w)| \le C\rho^{-1/2}(w, \partial\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}) \tag{6.1.3}$$

donde $\rho(w, R)$ es la distancia de w a R (véase el Lema A.2.1 del Apéndice A). Las fórmulas (6.1.2) y (6.1.3) implican que

$$|\breve{u}_2(w)| \le Ce^{-|w|/2}(1 + |w|)^2\rho^{-1}(w, \partial\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}).$$

Luego, los Lemas G.0.18 y G.0.19 del Apéndice G, y (5.1.1), implican que

$$(1 + |w|)^2 \le C(1 + |z_2|), \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$$

y

$$e^{-|w|/2}\rho^{-1/2}\Big(w, \partial\Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}\Big) \le C(\mathrm{Im} z_2)^{-1/2}, \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

Estas dos desigualdades implican la cota:

$$|\tilde{u}_2(z_2)| \le C(1 + |z_2|)(\mathrm{Im} z_2)^{-1}.$$

Por lo tanto, el Teorema de Paley-Wiener para conos y la última estimación implican que $\tilde{u}_2(z_2) \in F\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$.

(II) Probaremos ahora que $\tilde{u}_1(z_1) \in F\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$. Para esto, demostraremos primero que:

$$\int\limits_{C_m} |\breve{u}_1(w)|^2 e^{|w|}(1 + |w|)^{-3-\tau}dw \le C\|g\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}$$

para cada $m \in [0, \pi - \beta]$ y $\tau > 0$. La Definición 5.1.10 implica que

$$\int\limits_{C_m} |\breve{u}_1(w)|^2 e^{|w|}(1 + |w|)^{-3-\tau}dw \le I_1 + I_2$$

donde,

$$I_1 := \int\limits_{C_m} \left|\frac{\breve{g}(w)}{\cosh w}\right|^2 e^{|w|}(1 + |w|)^{-3-\tau}dw, \tag{6.1.4}$$

$$I_2 := \int\limits_{C_m} \left|\frac{\breve{u}_2(w)\cosh(w + i\beta)}{\cosh w}\right|^2 e^{|w|}(1 + |w|)^{-3-\tau}dw.$$

Consideremos primero la integral I_1. De (6.1.4) se sigue que

$$I_1 \le \int\limits_{C_m} \frac{|\breve{g}(w)|^2}{e^{2|w|}} e^{|w|}(1 + |w|)^{-3-\tau}dw.$$

Ya que $\tau > 0$, entonces $-3-\tau < 0$, y por lo tanto $(1+|w|)^{-3-\tau} \le 1$; de aquí

$$I_1 \le \int\limits_{C_m} |\breve{g}(w)|^2 e^{-|w|} dw \le \int\limits_{C_m} |\breve{g}(w)|^2 e^{2\varepsilon|w|} dw \le C_2 \|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}$$

por la Proposición 5.2.3. La cota análoga para la integral I_2, se sigue de (6.1.1). El resto de la demostración es similar al expuesto arriba para la función $u_2(w)$. El Teorema esta probado. ■

Corolario 6.1.2. *Las funciones $\breve{u}_l(w)$ para $l = 1,\ 2$ definidas por (5.5.3) y (5.5.4) pertenecen a los espacios $L_2(C_{-\beta})$ y $L_2(C_0)$.*

Demostración. Para la función $\breve{u}_2(w)$ la afirmación se sigue de (6.1.1). De aquí (5.1.10) y la Proposición 5.2.3 implican una cota similar a (6.1.1) para la función $\breve{u}_1(w)$, lo cual termina la demostración.

■

6.2. Estimación de la norma de la solución $u(x)$ en L_2.

En las secciones 5.1-5.5 encontramos las funciones $\tilde{u}_1(z_1)$ y $\tilde{u}_2(z_2)$ (véanse las fórmulas (5.5.3) y (5.5.4)). Estas funciones fueron encontradas a partir de la ecuación de conexión (4.1.11). Ahora sustituimos estas funciones en la expresión de la función $\tilde{f}_0(z)$ dada por la fórmula (4.1.9) y escribimos la solución $u(x)$ del problema de Neumann (PN) en la forma (4.1.14).

En correspondencia al Problema **C** nos falta demostrar que $u(x)$ dada por (4.1.14) pertenece al espacio $H^1(K^+)$.

Denotemos $\Sigma = C_0 \times C_{-\beta}$. En lo que sigue, supondremos que $\mathbf{w} := (w_1, w_2) \in \Sigma$, donde $\mathbf{w}$ esta conectado con (z_1, z_2) por las fórmulas

$$z_1 = \operatorname{senh} w_1,\ z_2 = \operatorname{senh}(w_2 + i\beta), \quad \mathbf{w} \in \Sigma. \tag{6.2.1}$$

Consideremos la función $\tilde{u}_2(z_2)$, para $z_2 = \sigma_2 + i\tau_2 \in \mathbb{C}^+_{z_2}$, definida por $\breve{u}_2(w)$ $s \in \check{V}_2^+ = \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$ (véase (5.5.3)). La función $\tilde{u}_2(z_2)$ es analítica en $C^+_{z_2}$ y pertenece al espacio $F\mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+})$. Por el Teorema de Paley-Wiener existe el valor de frontera $\tilde{u}_2(\sigma_2)$, $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ cuando $\tau_2 \to 0^+$. Sea $C_{-\beta}$ la parte (inferior) de la frontera $\Pi_{-\beta}$. Por la fórmula (5.5.3) existe el valor sobre $C_{-\beta}$ de la función $\breve{u}_2(w)$ cuando $w \to w_2 \in \mathbb{C}_{-\beta},\ w \in \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$. De esta manera obtenemos que la función $\breve{u}_2(w_2) \in \mathcal{S}'(C_{-\beta})$ y

$$\tilde{u}_2(\sigma_2) = \breve{u}_2(w_2), \quad \sigma_2 \in \mathbb{R},\ w_2 \in C_{-\beta}$$

donde

$$\sigma_2 := \sigma_2(w_2) = \operatorname{senh}(\mathrm{w}_2 + \mathrm{i}\beta).$$

De manera similar introducimos la variable $w_1 \in C_0$ tal que

$$\sigma_1 := \sigma_1(w_1) = \operatorname{senh} \mathrm{w}_1$$

y

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \ni \tilde{u}_1(\sigma_1) = \check{u}_1(w_1), \quad w_1 \in C_0,\ \sigma_1 \in \mathbb{R}.$$

La función $\tilde{f}_0(z_1, z_2),\ (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^+$ definida por (4.1.9) también admite el valor sobre la frontera de $\mathbb{C} + \times \mathbb{C}^+$:

$$\tilde{f}_0(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$$

la cual, en las variables $(w_1, w_2) \in \Sigma$ tiene la forma:

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}_0(w_1, w_2) = \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}\Big\{ -\ \operatorname{sen}\beta\check{g}(w_1) + [i\ \operatorname{senh} w_1 \cos\beta - i\ \operatorname{senh}(w_2 + i\beta)]\check{u}_1(w_1) \\
&+[i\ \operatorname{senh}(w_2 + i\beta)\cos\beta - i\ \operatorname{senh} w_1]\check{u}_2(w_2)\Big\}.
\end{aligned}$$

Teorema 6.2.1. *Sea $g \in H^{-1/2+\varepsilon}(K^+)$, y sean $\tilde{u}_1(z_1)$ y $\tilde{u}_2(z_2)$ definidas por (5.5.3) y (5.5.4) respectivamente. Entonces $u(x_1, x_2)$ definida por (4.1.9), (4.1.12) y (4.1.14) pertenece a $L_2(K^+)$, y*

$$||u||_{L_2} \leq C||g||_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}.$$

Demostración. Sustituyendo en lugar de $\check{u}_1(w_1)$ su representación obtenida en la expresión (5.1.10), tenemos que

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}_0(w_1, w_2) = \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}\Big[-\ \operatorname{sen}\beta\check{g}(w_1) + (i\ \operatorname{senh}(w_2 + i\beta)\cos\beta - i\ \operatorname{senh} w_1)\check{u}_2(w_2) \\
&(i\ \operatorname{senh} w_1 \cos\beta - i\ \operatorname{senh}(w_2 + i\beta))\left(\frac{\check{g}(w_1) + \check{u}_2(w_1)\cosh(w_1 + i\beta)}{\cosh w_1}\right)\Big].
\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Sean

$$A_1(\mathbf{w}) = i[\ \operatorname{senh} w_1 \cos\beta -\ \operatorname{senh}(w_2 + i\beta)]\cosh(w_1 + i\beta) \tag{6.2.3}$$

y

$$A_2(\mathbf{w}) = i[\ \operatorname{senh}(w_2 + i\beta)\cos\beta -\ \operatorname{senh} w_1]\cosh w_1. \tag{6.2.4}$$

Entonces, la expresión (6.2.2) puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_0(w_1, w_2) \quad &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta\cosh w_1}\Big\{i\check{g}(w_1)[\ \operatorname{senh}(w_1 + i\beta) -\ \operatorname{senh}(w_2 + i\beta)] \\
&+\check{u}_2(w_1)\mathcal{A}_1(\mathbf{w}) + \check{u}_2(w_2)\mathcal{A}_2(\mathbf{w})\Big\}.
\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Ahora, vamos a expresar el símbolo del operador de Helmholtz transformado (4.1.8) en términos de $\mathbf{w}$. Sustituyendo en lugar de z_1 y z_2 sus expresiones (6.2.1), obtenemos

$$\begin{aligned}\check{\mathcal{A}}(\mathbf{w}) &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}\Big[-\operatorname{senh}^2 w_1 - \operatorname{senh}^2(w_2+i\beta) \\ &\qquad +2\operatorname{senh} w_1 \operatorname{senh}(w_2+i\beta)\cos\beta - \operatorname{sen}^2\beta\Big].\end{aligned}$$

Factorizando esta expresión, y usando fórmulas de trigonometría hiperbólica, obtenemos la siguiente expresión equivalente

$$\check{\mathcal{A}}(\mathbf{w}) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}\Big[(\operatorname{senh} w_1 - \operatorname{senh} w_2)(\operatorname{senh} w_1 - \operatorname{senh}(w_2+2i\beta))\Big]. \tag{6.2.6}$$

Luego, la fórmula (4.1.12) implica que la solución del problema **A** en la variable $\mathbf{w}\in\Sigma$ se expresa como:

$$\begin{aligned}\check{u}(\mathbf{w}) &= \frac{i\check{g}(w_1)(\operatorname{senh}(w_1+i\beta) - \operatorname{senh}(w_2+i\beta))}{\cosh w_1 \check{\mathcal{A}}(\mathbf{w})} \\ &+ \frac{\check{u}_2(w_1)A_1(\mathbf{w}) + \check{u}_2(w_2)A_2(\mathbf{w})}{\cosh w_1 \check{\mathcal{A}}(\mathbf{w})}\end{aligned} \tag{6.2.7}$$

por (6.2.5). Luego, las fórmulas (6.2.1) implican que la inclusión $\tilde{u}_0(z_1,z_2)\in L_2(\mathbb{R}^2)$ es equivalente a la inclusión $\check{u}(\mathbf{w})\in L_2(\Sigma, P(\mathbf{w}))$, donde

$$L_2(\Sigma,P) = \left\{ f(\mathbf{w}) : \int_\Sigma |f(\mathbf{w})|^2 P(\mathbf{w})|d\mathbf{w}| < \infty \right\}; \tag{6.2.8}$$

$$P(\mathbf{w}) = e^{(|w_1|+|w_2|)}. \tag{6.2.9}$$

Ahora necesitamos la siguiente estimación del denominador en (6.2.7).

Lema 6.2.2. *Sea $\mathcal{A}(\mathbf{w})$ definido por (6.2.6), entonces*

$$|\check{\mathcal{A}}(\mathbf{w})| \geq C(e^{|w_1|}+e^{|w_2|})^2, \quad \mathbf{w}\in\Sigma. \tag{6.2.10}$$

Demostración. Ya que $w_2\in C_{-\beta}$, entonces tenemos que $w_2 = w_2' - i\beta$, $w_2'\in C_0$. De aquí

$$\begin{aligned}|\operatorname{senh} w_1 - \operatorname{senh}(w_2+2i\beta)| &= 2\left|\operatorname{senh}\left(\frac{w_1-w_2'}{2} - \frac{i\beta}{2}\right)\right| \times \\ &\qquad \left|\cosh\left(\frac{w_1+w_2'}{2} + \frac{i\beta}{2}\right)\right|.\end{aligned} \tag{6.2.11}$$

Como $\pi/2 < \beta < \pi$, la última expresión nunca se anula para $(w_1, w_2')\in C_0\times C_0$. Así, de (6.2.11) tenemos que para $(w_1,w_2')\in C_0\times C_0$:

$$|\operatorname{senh} w_1 - \operatorname{senh}(w_2+2i\beta)| \geq C\exp\{|w_1-w_2'|/2 + |w_1+w_2'|/2\}. \tag{6.2.12}$$

Similarmente,

$$|\operatorname{senh} w_1 - \operatorname{senh} w_2| \geq C \exp\{|w_1 - w_2'|/2 + |w_1 + w_2'|/2\}, \quad \mathbf{w} \in \Sigma. \tag{6.2.13}$$

De (6.2.6), (6.2.12) y (6.2.13) obtenemos que

$$|\check{\mathcal{A}}(\mathbf{w})| \geq C \exp\{|w_1 - w_2'| + |w_1 + w_2'|\}. \tag{6.2.14}$$

Considerando varias configuraciones posibles del par w_1 y w_2', obtenemos la estimación (6.2.10) de (6.2.14) y de la desigualdad

$$(a^2 + b^2) \geq C(a+b)^2,$$

para $ab \geq 0$ y algún $C > 0$. El Lema esta probado. ■

Continuamos con la demostración del Teorema 6.2.1. Sean

$$V_1(\mathbf{w}) := \frac{i\check{g}(w_1)(\operatorname{senh}(w_1 + i\beta) - \operatorname{senh}(w_2 + i\beta))}{\cosh w_1 \check{\mathcal{A}}(\mathbf{w})} \tag{6.2.15}$$

y

$$V_2(\mathbf{w}) := \frac{\check{u}_2(w_1)A_1(\mathbf{w}) + \check{u}_2(w_2)A_2(\mathbf{w})}{\cosh w_1 \check{\mathcal{A}}(\mathbf{w})}. \tag{6.2.16}$$

Entonces,

$$\check{u}(\mathbf{w}) = V_1(\mathbf{w}) + V_2(\mathbf{w}). \tag{6.2.17}$$

Probaremos primero que $V_1(\mathbf{w}) \in L_2(\Sigma, P)$. El Lema 6.2.2 y la definición (6.2.15) implican que

$$\int_\Sigma |V_1(\mathbf{w})|^2 P(\mathbf{w}) |d\mathbf{w}| \leq C_1 \int_{C_0} \frac{|\check{g}(w_1)|^2}{e^{|w_1|}} \left(\int_{C_{-\beta}} \frac{e^{|w_2|}}{(e^{|w_1|} + e^{|w_2|})^2} |dw_2| \right) |dw_1|.$$

Usando el Lema F.0.10 con $b = 1$ y $n = 2$ en la integral interior, obtenemos

$$\int_\Sigma |V_1(\mathbf{w})|^2 P(\mathbf{w}) |d\mathbf{w}| \leq C_2 \int_{C_0} \frac{|\check{g}(w_1)|^2}{e^{2|w_1|}} \leq C_3 \|g\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)},$$

por la Proposición 5.2.3. Demostraremos ahora, que la función $V_2(\mathbf{w})$ definida por (6.2.16) pertenece al espacio $L_2(\Sigma, P)$. Este término es la suma de dos funciones $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$, donde

$$\mathcal{A}_l = \frac{\check{u}_2(w_l)A_l(\mathbf{w})}{\cosh w_1 \check{\mathcal{A}}(\mathbf{w})}, \quad \text{para} \quad l = 1, 2. \tag{6.2.18}$$

Demostraremos primero que $\mathcal{A}_1 \in L_2(\Sigma, P)$. Por el Lema 6.2.2 y (6.2.3) se satisface la siguiente cota:

$$\left| \frac{A_1(\mathbf{w})}{\cosh w_1 \mathcal{A}(\mathbf{w})} \right| \leq \frac{C}{e^{|w_1|} + e^{|w_2|}}. \tag{6.2.19}$$

De aquí, por (6.2.19)

$$\int_{\Sigma} |\mathcal{A}_1(\mathbf{w})|^2 P(\mathbf{w})|d\mathbf{w}| \leq$$

(6.2.20)

$$C_1 \int_{C_0} |\check{u}_2(w_1)|^2 e^{|w_1|} \left(\int_{C_{-\beta}} \frac{e^{|w_2|}}{(e^{|w_1|}+e^{|w_2|})^2} |dw_2| \right) dw_1.$$

Estimando la integral interior con el Lema F.0.10, para $b = 1$ y $n = 2$, obtenemos

$$\int_{\Sigma} |\mathcal{A}_1(\mathbf{w})|^2 P(\mathbf{w})|d\mathbf{w}| \leq C_2 \int_{C_0} |\check{u}_2(w_1)|^2 |dw_1| \leq C_3 ||g||^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)},$$

por (6.1.1). Consideremos ahora (6.2.18) para $l = 2$. Probaremos que $\mathcal{A}_2 \in L_2(\Sigma, P)$. La fórmula (6.2.4) y (6.2.8) implican que

$$\int_{\Sigma} |\mathcal{A}_2(\mathbf{w})|^2 P(\mathbf{w})|d\mathbf{w}| \leq$$

(6.2.21)

$$\leq C_1 \int_{C_{-\beta}} |\check{u}_2(w_2)|^2 e^{|w_2|} \left(\int_{C_0} \frac{e^{|w_1|}}{(e^{|w_1|}+e^{|w_2|})^2} |dw_1| \right) |dw_2|.$$

Usando el Lema F.0.10 con $b = 1$ y $n = 2$ en la integral interior, obtenemos

$$\int_{\Sigma} |\mathcal{A}_2(\mathbf{w})|^2 P(\mathbf{w})|d\mathbf{w}| \leq C_2 \int_{C_{-\beta}} |\check{u}_2(w_2)|^2 |dw_2| \leq C_3 ||g||^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)},$$

por (6.1.1). Luego, (6.2.20) y (6.2.21) implican que $\check{u}_2(\mathbf{w}) \in L_2(\Sigma, P)$ por (6.2.18). De aquí, por (6.2.17) la función $\check{u}(\mathbf{w}) \in L_2(\Sigma, P)$ y el Teorema 6.2.1 esta probado.

■

Capítulo 7

Sumabilidad cuadrada de las derivadas de la solución.

En este capítulo demostramos que las derivadas de la solución pertenecen al espacio de Sobolev H^s con $s \in [0, 1/2)$ usando las técnica de la Prueba de Schur y los espacios con pesos. La Proposición 7.7 es central en el trabajo.

7.1. Estimación de las derivadas de la solución en el espacio de Sobolev H^ε, $0 \leq \varepsilon < 1/2$.

Esta sección está dedicada a la demostración del hecho de que las derivadas de la solución del Problema **C** definida por (4.1.13)-(4.1.14) pertenecen a $H^\varepsilon(K^+)$ cuando $0 \leq \varepsilon < 1/2$. Este hecho, en conjunto con el Teorema 6.1.1 prueban que la solución pertenece al espacio $H^{1+\varepsilon}(K^+)$, para $0 \leq \varepsilon < 1/2$.
El siguiente Teorema corresponde al Teorema 6.2.1 para $\varepsilon = 0$ (véase la demostración en [26], Problema C de la sección 5).

Teorema 7.1.1. *Existe $C > 0$ tal que para cualquier $g \in \widetilde{H^{-1/2}}(\mathbb{R}^+)$ la función $u(x)$ definida como en (4.1.14) pertenece al espacio $H^1(K^+)$, y*

$$\|u\|_{H^1(K^+)} \leq \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^+)}.$$

Nuestro plan de trabajo es el siguiente: demostraremos que $u(x_1, x_2) \in H^{1+\varepsilon}(K^+)$ y $\|u\|_{H^{1+\varepsilon}(K^+)} \leq C\|g\|_{-1/2+\varepsilon}$, si $g \in H^{-1/2+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1/2$. Para esto es suficiente demostrar que (véase [25], sección 5)

$$u \in L^2(K^+), \quad \|u\|_{L^2(K^+)} \leq C\|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)} \tag{7.1.1}$$

y

$$\partial_{x_l} u \in H^\varepsilon(K^+), \quad \|\partial_{x_l} u\|_{H^\varepsilon(K^+)} \leq C\|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)} \quad l = 1, 2. \tag{7.1.2}$$

La afirmación (7.1.1) se demostró en [26], (véase el Teorema 8.1). De esta manera, sólo necesitamos demostrar la afirmación (7.1.2).
Notemos que

$$u_l := F^{-1}_{z_l \mapsto x_l}\Big[\tilde{u}_l(z_l)\Big] \in \mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}^+}), \quad l = 1,\ 2$$

por el Teorema (6.1.1). Introducimos las siguientes distribuciones del espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$:

$$
\begin{aligned}
U_1(x_1,x_2) &= \partial_{x_1} u_0(x_1,x_2) - u_2(x_2)\times\delta(x_1),\\
U_2(x_1,x_2) &= \partial_{x_2} u_0(x_1,x_2) - u_1(x_1)\times\delta(x_2),
\end{aligned}
\qquad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \tag{7.1.3}
$$

aquí u_0 esta definida como en (2.2.7).

Lema 7.1.2. *Se satisfacen las siguientes identidades:*

$$U_l(x_1,x_2)\Big|_{K^+} = \partial_{x_l} u(x_1,x_2), \quad x\in K^+ \quad l=1,2$$

Demostración. Notemos que de (4.1.14) se sigue que

$$\partial_{x_1} u_0(x_1,x_2)\Big|_{K^+} = \partial_{x_1} u(x_1,x_2), \quad x\in K^+.$$

Además,

$$u_2(x_2)\times\delta(x_1)\Big|_{K^+} = 0$$

ya que supp $u_2(x_2)\times\delta(x_1)\subset\mathbb{R}_{x_2}$. De aquí, se sigue la afirmación para U_1 es. La afirmación para U_2 se prueba de manera similar. ■

El Lema 7.1.2 y (7.1.2) implican que, para probar el Teorema 7.1.1 para $\varepsilon\in(0,1/2)$, es suficiente probar la siguiente proposición:

Proposición 7.1.3. *Para* $0<\varepsilon<1/2$*, se satisfacen las siguientes inclusiones y estimaciones:*

$$U_l\in H^\varepsilon(\mathbb{R}^2), \quad \|U_l\|_{H^\varepsilon(\mathbb{R}^2)}\le C\|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)}, \quad l=1,2. \tag{7.1.4}$$

El resto del capítulo esta dedicada a la demostración de esta proposición. Demostraremos (7.1.4) para $l=1$. El caso $l=2$ se analiza de manera similar. Para realizar este plan, necesitamos una representación apropiada de la transformada de Fourier-Laplace de la función U_l. Esto lo haremos en la siguiente sección.

7.2. Reducción a las variables w

Para demostrar la Proposición 7.1.3 necesitamos probar que

$$\tilde U_l\in\ FH^\varepsilon(\mathbb{R}^2), \quad 0<\varepsilon<1/2, \quad l=1,2.$$

donde el espacio $FH^\varepsilon(\mathbb{R}^2)$ denota el espacio de la transformada de Fourier del espacio $H^\varepsilon(\mathbb{R}^2)$, i.e.

$$FH^\varepsilon(\mathbb{R}^2) := \left\{ g\ :\ \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\tilde g(z)|^2(1+|z|)^{2\varepsilon}dz<\infty\right\},$$

con la norma (1.1.4). Para nosotros es conveniente reescribir este espacio en términos de la variable $\mathbf{w} := (w_1, w_2)$ conectada con (z_1, z_2) mediante las fórmulas (véase (5.1.1))

$$z_1 := \operatorname{senh} \mathrm{w}_1, \quad \mathrm{z}_2 := \operatorname{senh} (\mathrm{w}_2 + \mathrm{i}\beta). \tag{7.2.1}$$

Para $\Sigma = C_0 \times C_{-\beta} \subset \mathbb{C}^2$, con C_α definida en (5.2.8). De ahora en adelante denotaremos a la función $f(z)$, $z \in \mathbb{R}^2$ como $f(\mathbf{w})$ después del cambio de variable (7.2.1). El símbolo $\mathcal{A}(z)$ en estas variables se escribe como

$$\mathcal{A}(\mathbf{w}) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}\Big[(\operatorname{senh} \mathrm{w}_1 - \operatorname{senh} \mathrm{w}_2)(\operatorname{senh} \mathrm{w}_1 - \operatorname{senh} (\mathrm{w}_2 + 2\mathrm{i}\beta))\Big] \tag{7.2.2}$$

por (4.1.8). A continuación describiremos el espacio $FH^\varepsilon(\mathbb{R}^2)$ en las variables $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \Sigma$.

Definición 7.2.1. Para $\varepsilon \in \mathbb{R}$ definimos el espacio

$$L_2\Big(\Sigma, P_\varepsilon\Big) = \left\{ f(\mathbf{w}) : \int_\Sigma |f(\mathbf{w})|^2 P_\varepsilon(\mathbf{w}) |d\mathbf{w}| < \infty \right\},$$

donde

$$P_\varepsilon(\mathbf{w}) := e^{|w_1|} e^{|w_2|} (e^{2\varepsilon|w_1|} + e^{2\varepsilon|w_2|}), \tag{7.2.3}$$

con la norma

$$\|f\|^2_{L_2(\Sigma, P_\varepsilon)} = \int_\Sigma |f(\mathbf{w})|^2 P_\varepsilon(\mathbf{w}) |d\mathbf{w}|.$$

Lema 7.2.2. *Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Entonces*

$$f(z) \in FH^\varepsilon(\mathbb{R}^2) \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{w}) \in L_2\Big(\Sigma, P_\varepsilon\Big).$$

Demostración. Por (7.2.1) es suficiente probar que existen $C_{1,2} > 0$ tales que:

$$C_1(e^{2\varepsilon|w_1|} + e^{2\varepsilon|w_2|}) \le (1 + |z|)^\varepsilon \le C_2(e^{2\varepsilon|w_1|} + e^{2\varepsilon|w_2|}), \quad \mathbf{w} \in \Sigma. \tag{7.2.4}$$

Ya que para algunas $C_{1,2} > 0$ se cumple que:

$$C_1(e^{|w_1|} + e^{|w_2|}) \le 1 + |z| \le C_2(e^{|w_1|} + e^{|w_2|}), \quad \mathbf{w} \in \Sigma$$

entonces las estimaciones (7.2.4) se siguen de las desigualdades

$$C_1(a^{2\varepsilon} + b^{2\varepsilon}) \le (a + b)^{2\varepsilon} \le C_2(a^{2\varepsilon} + b^{2\varepsilon}), \quad a, b \ge 1.$$

■

Definición 7.2.3. Definimos la función

$$U_1(\mathbf{w}) := \tilde{U}_1(z_1(w_1), z_2(w_2)), \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \Sigma, \tag{7.2.5}$$

con U_1 y $z_{1,2}$ definidas en (7.1.3) y (7.2.1) respectivamente.

El Lema 7.2.2 implica que la Proposición 7.1.3 es equivalente a la siguiente:

Proposición 7.2.4. *Para $\varepsilon \in (0, 1/2)$, se satisface la siguiente inclusión y estimación:*

$$U_1(w) \in L_2(\Sigma, P_\varepsilon), \quad \|U_1(w)\|_{L_2(\Sigma,P_\varepsilon)} \leq C\|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}. \tag{7.2.6}$$

7.3. Representación para la función U_1

Lema 7.3.1. *La función $\tilde{U}_1$ definida por (7.2.5) admite la siguiente representación:*

$$\tilde{U}_1(z) = U_{1,1}(z) + U_{1,2}(z), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^+ \tag{7.3.1}$$

donde

$$U_{1,1}(z) = \frac{iz_1 \operatorname{sen}\beta\tilde{\mathrm{g}}(\mathrm{z}_1) + \operatorname{sen}^2\beta\tilde{\mathrm{u}}_2(\mathrm{z}_2)}{\operatorname{sen}^2\beta\mathcal{A}(\mathrm{z})} \tag{7.3.2}$$

$$U_{1,2}(z) = \frac{\left[z_1\tilde{u}_1(z_1) - z_2\tilde{u}_2(z_2)\right](z_1\cos\beta - z_2)}{\operatorname{sen}^2\beta\mathcal{A}(\mathrm{z})}. \tag{7.3.3}$$

Demostración. De (7.1.3) y (4.1.12) se sigue que

$$\tilde{U}_1(z) = -iz_1\frac{\tilde{f}_0(z)}{\mathcal{A}(z)} - \tilde{u}_2(z_2).$$

De aquí, utilizando (4.1.8)-(4.1.9) y reordenando los términos, obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1(z) &= \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta\mathcal{A}(\mathrm{z})}\Big[iz_1 \operatorname{sen}\beta\tilde{\mathrm{g}}(\mathrm{z}_1) + (\mathrm{z}_1^2\cos\beta - \mathrm{z}_1\mathrm{z}_2)\tilde{\mathrm{u}}_1(\mathrm{z}_1)\\ &+ (z_2^2 - z_1z_2\cos\beta + \operatorname{sen}^2\beta)\tilde{\mathrm{u}}_2(\mathrm{z}_2)\Big].\end{aligned}$$

Esta expresión puede escribirse como (7.3.1). ■

Ahora representaremos esta función en términos de la variable $\mathbf{w} \in \Sigma$.

Lema 7.3.2. *La función $\tilde{U}_1$ definida por (7.3.1) admite la siguiente representación en la variable* $\mathbf{w}$*:*

$$U_1(\mathbf{w}) := \tilde{U}_1(z_1(w_1), z_2(w_2)) = B_1(\mathbf{w}) + B_2(\mathbf{w}) + B_3(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} \in \Sigma \tag{7.3.4}$$

donde

$$B_1(\mathbf{w}) := \frac{(i \operatorname{sen}\beta \operatorname{senh} \mathrm{w}_1 + \tanh \mathrm{w}_1 \mathrm{B}(\mathbf{w}))\breve{\mathrm{g}}(\mathrm{w}_1)}{\operatorname{sen}^2\beta\mathcal{A}(\mathbf{w})} \tag{7.3.5}$$

$$B_2(\mathbf{w}) := \frac{\breve{u}_2(w_2)}{\mathcal{A}(\mathbf{w})}, \tag{7.3.6}$$

$$B_3(\mathbf{w}) := B(\mathbf{w})\frac{\check{u}_2(w_1)\cosh(w_1 + i\beta)\,\mathrm{senh}\,\mathrm{w}_1 - \check{u}_2(\mathrm{w}_2)\cosh \mathrm{w}_1\,\mathrm{senh}\,(\mathrm{w}_2 + \mathrm{i}\beta)}{\mathrm{sen}\,^2\beta\cosh \mathrm{w}_1\mathcal{A}(\mathbf{w})} \tag{7.3.7}$$

con

$$B(\mathbf{w}) := \mathrm{senh}\,\mathrm{w}_1\cos\beta - \mathrm{senh}\,(\mathrm{w}_2 + \mathrm{i}\beta). \tag{7.3.8}$$

Demostración. Sustituyendo (7.2.1) en (7.3.2) y (7.3.3) obtenemos

$$U_{1,1}(\mathbf{w}) = \frac{i\,\mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{senh}\,\mathrm{w}_1\check{g}(\mathrm{w}_1) + \mathrm{sen}\,^2\beta\check{u}_2(\mathrm{w}_2)}{\mathrm{sen}\,^2\beta\mathcal{A}(\mathbf{w})} \tag{7.3.9}$$

$$U_{1,2}(\mathbf{w}) = \frac{\mathrm{senh}\,\mathrm{w}_1\check{u}_1(\mathrm{w}_1) - \mathrm{senh}\,(\mathrm{w}_2 + \mathrm{i}\beta)\check{u}_2(\mathrm{w}_2)}{\mathrm{sen}\,^2\beta\mathcal{A}(\mathbf{w})}B(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} \in \Sigma.$$

Expresando la función $\check{u}_1$ a través de la función $\check{u}_2$, mediante (5.1.10) tenemos que

$$\begin{aligned} U_{1,2}(\mathbf{w}) &= \frac{\mathrm{senh}\,\mathrm{w}_1\cosh(\mathrm{w}_1 + \mathrm{i}\beta)\check{u}_2(\mathrm{w}_1) - \mathrm{senh}\,(\mathrm{w}_2 + \mathrm{i}\beta)\cosh \mathrm{w}_1\check{u}_2(\mathrm{w}_2)}{\mathrm{sen}\,^2\beta\cosh \mathrm{w}_1\mathcal{A}(\mathbf{w})}B(\mathbf{w}) \\ &\quad -\frac{\tanh w_1\check{g}(w_1)}{\mathrm{sen}\,^2\beta\mathcal{A}(\mathbf{w})}B(\mathbf{w}). \end{aligned} \tag{7.3.10}$$

Ahora, (7.3.4) se obtiene de (7.3.3) por la suma de (7.3.9) y (7.3.10). ■

Este lema, junto con el Lema 7.2.2, implican que, para probar la Proposición 7.2.4, es suficiente demostrar el siguiente:

Proposición 7.3.3. *Se satisfacen las siguientes inclusiones y estimaciones:*

$$B_l \in L_2(\Sigma, P_\varepsilon), \quad \|B_l\|_{L_2(\Sigma,P_\varepsilon)} \le C\|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}, \quad l = 1, 2, 3. \tag{7.3.11}$$

El resto del capítulo está dedicado a la demostración de esta afirmación.
En la siguiente sección se demostrará (7.3.11) para $l = 1, 2$.

7.4. Estimación de las funciones B_1 y B_2 en el espacio $L_2(\Sigma, P_\varepsilon)$

Proposición 7.4.1. *La función B_1 definida por (7.3.5), pertenece al espacio $L_2(\Sigma, P_\varepsilon)$, y*

$$\|B_1\|_{L_2(\Sigma,P_\varepsilon)} \le C\|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}.$$

Demostración. De (7.3.8) se sigue que

$$|B(\mathbf{w})| \le C(e^{|w_1|} + e^{|w_2|}), \quad \mathbf{w} \in \Sigma. \tag{7.4.1}$$

Por lo tanto, por (7.3.5) tenemos

$$|B_1(\mathbf{w})| \le C\frac{(e^{|w_1|} + e^{|w_2|})|\check{g}(w_1)|}{\mathcal{A}(\mathbf{w})}, \quad \mathbf{w} \in \Sigma.$$

De aquí, de la Definición 7.2.1 y el Lema 6.2.2 obtenemos la siguiente estimación

$$\|B_1\|^2_{L_2(\Sigma,P_\varepsilon)} \leq C_1 \int\limits_{C_0} |\breve{g}(w_1)|^2 e^{|w_1|} \left(\int\limits_{C_{-\beta}} \frac{e^{|w_2|}(e^{2\varepsilon|w_1|} + e^{2\varepsilon|w_2|})}{e^{2|w_1|} + e^{2|w_2|}} |dw_2| \right) dw_1.$$

Sea $w_2 = x - i\beta$, $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\|B_1\|^2_{L_2(\Sigma,P_\varepsilon)} \leq C_2 \int\limits_{C_0} |\breve{g}(w_1)|^2 e^{|w_1|} \left(\int\limits_0^\infty \frac{e^{x}(e^{2\varepsilon|w_1|} + e^{2\varepsilon x})}{e^{2|w_1|} + e^{2x}} dx \right) dw_1.$$

Usando el Lema F.0.11 del Apéndice F con $p = 1$ y $n = 2$, tenemos que

$$\|B_1\|^2_{L_2(\Sigma,P_\varepsilon)} \leq C_3 \int\limits_{C_0} |\breve{g}(w_1)|^2 e^{2\varepsilon|w_1|} dw_1 \leq C_4 \|g\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}$$

por la Proposición 5.2.3. ■

Ahora, estimamos $\|B_2\|_{L_2(\Sigma,P_\varepsilon)}$.

Proposición 7.4.2. *La función B_2 definida por (7.3.6) pertenece al espacio $L_2(\Sigma, P_\varepsilon)$, y*

$$\|B_2\|_{L_2(\Sigma,P_\varepsilon)} \leq C\|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}.$$

Demostración. De (7.3.6), la Definición 7.2.1 y el Lema 6.2.2 obtenemos

$$\|B_2\|^2_{L_2(\Sigma,P_\varepsilon)} \leq C_1 \int\limits_{C_{-\beta}} |\breve{u}_2(w_2)|^2 e^{|w_2|} \left(\int\limits_{C_0} \frac{e^{|w_1|}(e^{2\varepsilon|w_1|} + e^{2\varepsilon|w_2|})}{e^{4|w_1|} + e^{4|w_2|}} dw_1 \right) |dw_2|.$$

Por el Lema F.0.11 del Apéndice F con $p = 1$ y $n = 4$, tenemos que

$$\|B_2\|^2_{L_2(\Sigma,P_\varepsilon)} \leq C_2 \int\limits_{C_{-\beta}} |\breve{u}_2(w_2)|^2 e^{(2\varepsilon-2)|w_2|} |dw_2| \leq C\|g\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}$$

por (6.1.1). ■

Las siguientes secciones están dedicadas a la demostración de la estimación (7.3.11) para $l = 3$. Esta parte es técnicamente más complicada, ya que esta estimación no se sigue directamente de la cota (6.1.1) como en el caso de las funciones $B_{1,2}$. Por lo tanto necesitamos usar una representación integral para la función $\breve{u}_2(w)$ la cual se sigue de (5.5.1) y (5.4.2). Sin embargo, esta representación integral tampoco es suficiente, porque el kernel decrece lentamente hacia la diagonal de $\Sigma : w_1 = w_2$. De esta manera, necesitamos descomponer el kernel en la suma de dos kernels uno de los cuales decrece rápidamente hacia la diagonal. Esto se hace en la siguiente sección.

7.5. Descomposición de la función B_3

Iniciamos esta sección introduciendo las siguientes notaciones. Sean:

$$\begin{aligned} a_1 &:= a(w_1 - i\pi/2) = \alpha(w_1 - i\pi/2) \\ a_2 &:= a(w_2 - i\pi/2) = \alpha(w_2 - i\pi/2) \end{aligned} \tag{7.5.1}$$

donde α y $a(w)$ estan definidas en (5.4.1). También, para $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \Sigma$ y $w' \in C_0$, definimos la función

$$\mathcal{R}(\mathbf{w}, w') := \frac{\tanh w_1 \text{ senh } 2\mathrm{a}_1}{\cosh^2 b - \cosh^2 a_1} - \frac{\tanh(w_2 + i\beta) \text{ senh } 2\mathrm{a}_2}{\cosh^2 b - \cosh^2 a_2} \tag{7.5.2}$$

con b definido como en (5.4.1).

Lema 7.5.1. *La función B_3 definida en (7.3.7) admite la siguiente representación:*

$$B_3(\mathbf{w}) = \frac{i}{4\beta} \frac{B(\mathbf{w})}{\text{sen }^2\beta\mathcal{A}(\mathbf{w})} \int_{C_0} \mathcal{R}(\mathbf{w}, w')\breve{g}(w' + i\pi/2)dw', \quad \mathbf{w} \in \Sigma. \tag{7.5.3}$$

Demostración. De (7.3.7) se sigue que

$$B_3(\mathbf{w}) = \frac{B(\mathbf{w})}{\text{sen }^2\beta\mathcal{A}(\mathbf{w})}\Big[B_3'(w_1) - B_3''(w_2)\Big], \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \Sigma \tag{7.5.4}$$

donde

$$B_3'(w_1) = \cosh(w_1 + i\beta)\tanh w_1 \check{u}_2(w_1), \quad B_3''(w_2) = \text{ senh } (\mathrm{w}_2 + \mathrm{i}\beta)\check{\mathrm{u}}_2(\mathrm{w}_2).$$

Sustituyendo la expresión (5.5.1) para la función $\check{u}_2$ en estas desigualdades, obtenemos

$$\begin{aligned} B_3'(w_1) &= \tanh w_1 T(w_1 + i\beta - i\pi/2), & w_1 \in C_0 \\ B_3''(w_2) &= \tanh(w_2 + i\beta)T(w_2 + i\beta - i\pi/2), & w_2 \in C_{-\beta}. \end{aligned}$$

Ya que $w_1 \in C_0$ y $\beta > \pi/2$, entonces $w_1 + i\beta - i\pi/2 \in \Pi^{\beta}_{-\beta}$. Por lo tanto, la afirmación *iii*) del Teorema 5.4.1 implica que

$$B_3'(w_1) = -\frac{i}{4\beta}\int_{C_0} \frac{\tanh w_1 \text{ senh } (2\alpha(\mathrm{w}_1 + \mathrm{i}\beta - \mathrm{i}\pi/2))}{\cosh^2 b + \text{ senh }^2(\alpha(\mathrm{w}_1 + \mathrm{i}\beta - \mathrm{i}\pi/2))}\breve{g}(w' + i\pi/2)dw'.$$

Similarmente, como $w_2 \in C_{-\beta}$ y $\beta > \pi/2$, entonces $w_2 + i\beta - i\pi/2 \in \Pi^{\beta}_{-\beta}$. De aquí, la afirmación *iii*) del Teorema 5.4.1 implica

$$B_3''(w_2) = -\frac{i}{4\beta}\int_{C_0} \frac{\tanh(w_2 + i\beta) \text{ senh } (2\alpha(\mathrm{w}_2 + \mathrm{i}\beta - \mathrm{i}\pi/2))}{\cosh^2 b + \text{ senh }^2(\alpha(\mathrm{w}_2 + \mathrm{i}\beta - \mathrm{i}\pi/2))}\breve{g}(w' + i\pi/2)dw'.$$

Además, de (5.4.1) se sigue que

$$\left.\begin{aligned} \text{senh } (2\alpha(\mathrm{w}_l + \mathrm{i}\beta - \mathrm{i}\pi/2)) &= -\text{ senh } (2\alpha(\mathrm{w}_l - \mathrm{i}\pi/2)) \\ \text{senh }^2(\alpha(\mathrm{w}_l + \mathrm{i}\beta - \mathrm{i}\pi/2)) &= -\cosh^2(\alpha(\mathrm{w}_l - \mathrm{i}\pi/2)) \end{aligned}\right. \quad l = 1, 2.$$

De esta manera, para $w_1 \in C_0$ y $w_2 \in C_{-\beta}$, tenemos

$$\begin{aligned}
B_3'(w_1) &= -\frac{i}{4\beta}\int\limits_{C_0} \frac{\tanh w_1 \ \mathrm{senh}\ 2\mathrm{a}_1}{\cosh^2 b - \cosh^2(\alpha(w_1 - i\pi/2))}\breve{g}(w' + i\pi/2)dw' \\
B_3''(w_2) &= -\frac{i}{4\beta}\int\limits_{C_0} \frac{\tanh(w_2 + i\beta)\ \mathrm{senh}\ 2\mathrm{a}_2}{\cosh^2 b - \cosh^2(\alpha(w_2 - i\pi/2))}\breve{g}(w' + i\pi/2)dw'.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas dos expresiones en (7.5.4), obtenemos (7.5.3), por (7.5.2).

■

Necesitamos la siguiente representación para la función $\mathcal{R}$.

Lema 7.5.2. *La función $\mathcal{R}$ definida (7.5.2) admite la siguiente representación:*

$$\mathcal{R}(\mathbf{w}, w') = \mathcal{R}_1(\mathbf{w}, w') - \mathcal{R}_2(\mathbf{w}, w'), \quad \mathbf{w} \in \Sigma, \quad w' \in C_0 \tag{7.5.5}$$

donde,

$$\mathcal{R}_1(\mathbf{w}, w') := \frac{\cosh^2 b[\tanh w_1 \ \mathrm{senh}\ 2\mathrm{a}_1 - \tanh(\mathrm{w}_2 + \mathrm{i}\beta)\ \mathrm{senh}\ 2\mathrm{a}_2]}{(\cosh^2 b - \cosh^2 a_1)(\cosh^2 b - \cosh^2 a_2)} \tag{7.5.6}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_2(\mathbf{w}, w') &:= \frac{\cosh^2 a_2 \tanh w_1 \ \mathrm{senh}\ 2\mathrm{a}_1}{(\cosh^2 b - \cosh^2 a_1)(\cosh^2 b - \cosh^2 a_2)} \\
&- \frac{\cosh^2 a_1 \tanh(w_2 + i\beta)\ \mathrm{senh}\ 2\mathrm{a}_2}{(\cosh^2 b - \cosh^2 a_1)(\cosh^2 b - \cosh^2 a_2)},
\end{aligned} \tag{7.5.7}$$

con $a_{1,2}$ definidas por (7.5.1) y b definida por (5.4.1).

Demostración. De (7.5.2) se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\mathbf{w}, w') &= \frac{(\cosh^2 b - \cosh^2 a_2)\tanh w_1 \ \mathrm{senh}\ 2\mathrm{a}_1}{(\cosh^2 b - \cosh^2 a_1)(\cosh^2 b - \cosh^2 a_2)} \\
&- \frac{(\cosh^2 b - \cosh^2 a_1)\tanh(w_2 + i\beta)\ \mathrm{senh}\ 2\mathrm{a}_2}{(\cosh^2 b - \cosh^2 a_1)(\cosh^2 b - \cosh^2 a_2)}.
\end{aligned}$$

De aquí, se satisfacen (7.5.5)-(7.5.7). Sean

$$B_{3,l}(\mathbf{w}) := \frac{i}{4\beta}\frac{B(\mathbf{w})}{\mathrm{sen}\ ^2\beta\mathcal{A}(\mathbf{w})}\int\limits_{C_0} \mathcal{R}_l(\mathbf{w}, w')\breve{g}(w' + i\pi/2)dw', \quad l = 1, 2. \tag{7.5.8}$$

Entonces, el lema anterior implica

$$B_3 = B_{3,1} - B_{3,2}.$$

Por lo tanto, para probar que $B_3 \in L_2(\Sigma, P_\varepsilon)$, es suficiente probar que

$$B_{3,l} \in L_2(\Sigma, P_\varepsilon), \quad l = 1, 2. \tag{7.5.9}$$

Demostraremos primero (7.5.9) para $k = 1$. Resulta que para probar esto, es más conveniente representar la función $B_{3,1}$ como un operador integral de $L_2(C_0) \to L_2(\Sigma)$ y después usar la Prueba de Schur (véase el Teorema 6.2 de [5], la sección 9 de [26] y el Lema G.0.17 del Apéndice G). Terminamos esta sección dando esta representación.

Definición 7.5.3. Para $\mathbf{w} \in \Sigma$ y $w' \in C_0$, definimos la función K_1 como

$$K_1(\mathbf{w}, w') = \frac{i}{4\beta} \frac{B_4(\mathbf{w})}{\operatorname{sen}^2 \beta \mathcal{A}(\mathbf{w})} \mathcal{R}_1(\mathbf{w}, w') \tag{7.5.10}$$

donde $\mathcal{R}_1$ está definido en (7.5.6), y

$$B_4(\mathbf{w}) := B(\mathbf{w}) e^{-\varepsilon |w'|} P_\varepsilon^{1/2}(\mathbf{w}), \quad \mathbf{w} \in \Sigma \tag{7.5.11}$$

con B definida en (7.3.8) y P_ε definido en (7.2.3).

Corolario 7.5.4. *Se satisface la siguiente representación:*

$$B_{3,1}(\mathbf{w}) P_\varepsilon^{1/2}(\mathbf{w}) = \int_{C_0} K_1(\mathbf{w}, w') \zeta(w') dw', \quad \mathbf{w} \in \Sigma$$

aquí

$$\zeta(w') = \breve{g}(w' + i\pi/2) e^{\varepsilon |w'|}, \quad w' \in C_0.$$

Lema 7.5.5. *Supongamos que el operador integral $\mathcal{K}_1$ con kernel $K_1(\mathbf{w}, w')$ es acotado como un operador del espacio $L_2(C_0)$ en el espacio $L_2(\Sigma)$. Entonces, existe $C > 0$ tal que*

$$\|B_{3,1}\|_{L_2(\Sigma, P_\varepsilon)} \leq C \|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}. \tag{7.5.12}$$

Demostración. Obviamente,

$$\|B_{3,1}(\mathbf{w})\|^2_{L_2(\Sigma, P_\varepsilon)} = \|B_{3,1}(\mathbf{w}) P_\varepsilon^{1/2}(\mathbf{w})\|^2_{L_2(\Sigma)}$$

por la definición 7.2.1. Por hipótesis y el corolario 7.5.4, tenemos

$$\|B_{3,1}\|^2_{L_2(\Sigma, P_\varepsilon)} \leq \|\mathcal{K}_1\|^2_{L_2(C_0) \to L_2(\Sigma)} \|\zeta\|^2_{L_2(C_0)}.$$

Ya que

$$\|\zeta\|^2_{L_2(C_0)} = \int_{C_0} |\breve{g}(w' + i\pi/2)|^2 e^{2\varepsilon |w'|} dw' \leq C \|g\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}$$

por (5.2.9) con $\alpha = \pi/2$. De aquí se sigue la estimación (7.5.12). ∎

En la siguiente sección probaremos que el operador $\mathcal{K}_1 : L^2(C_0) \longrightarrow L^2(C_0)$ es acotado.

7.6. Estimación de la función $B_{3,1}$ en el espacio $L_2(\Sigma, P_\varepsilon)$

El Lema 7.5.5 implica que, para probar que la función $B_{3,1} \in L_2(\Sigma, P_\varepsilon)$ con la cota (7.5.12), es suficiente verificar la acotación del operador $\mathcal{K}_1 : L_2(C_0) \to L_2(\Sigma)$. Para este fin, usaremos la prueba de Schur (véase el Lema G.0.17 del Apéndice G). Es decir, probaremos que

$$\int_\Sigma |K_1(\mathbf{w}, w')|\,|d\mathbf{w}| \leq C \quad w' \in C_0 \tag{7.6.1}$$

y

$$\int_{C_0} |K_1(\mathbf{w}, w')|\,dw' \leq C \quad \mathbf{w} \in \Sigma. \tag{7.6.2}$$

7.6.1. Estimación de la integral sobre Σ.

Proposición 7.6.1. *Se satisface la estimación (7.6.1).*

Demostración. Por la definición (7.5.10) tenemos

$$|K_1(\mathbf{w}, w')| \leq C \left| \frac{B_4(\mathbf{w})}{\mathcal{A}(\mathbf{w})} \right| |\mathcal{R}_1(\mathbf{w}, w')|. \tag{7.6.3}$$

De (7.5.11), (7.4.1) y (7.2.3) se sigue que

$$|B_4(\mathbf{w})| \leq C_1 e^{-\varepsilon|w'|}(e^{|w_1|} + e^{|w_2|})(e^{\varepsilon|w_1|} + e^{\varepsilon|w_2|})e^{|w_1|/2}e^{|w_2|/2}.$$

De aquí, tomando en cuenta la estimación 6.2.10, obtenemos

$$\left| \frac{B_4(\mathbf{w})}{\mathcal{A}(\mathbf{w})} \right| \leq C_2 e^{-\varepsilon|w'|} \frac{(e^{\varepsilon|w_1|} + e^{\varepsilon|w_2|})(e^{3|w_1|/2+|w_2|/2} + e^{|w_1|/2+3|w_2|/2})}{e^{2|w_1|} + e^{2|w_2|}}. \tag{7.6.4}$$

Por otro lado, (7.5.6) y el Lema F.0.13 del Apéndice F implican

$$|\mathcal{R}_1(\mathbf{w}, w')| \leq C e^{(2\alpha-\varepsilon)|w'|} \frac{(e^{2\alpha|w_1|} + e^{2\alpha|w_2|})}{(e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha|w_1|})(e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha|w_2|})}. \tag{7.6.5}$$

Sustituyendo (7.6.4) y (7.6.5) en (7.6.3), obtenemos

$$|K_1(\mathbf{w}, w')| \leq C e^{(2\alpha-\varepsilon)|w'|} \quad \frac{(e^{\varepsilon|w_1|} + e^{\varepsilon|w_2|})e^{|w_1|/2}e^{|w_2|/2}(e^{|w_1|} + e^{|w_2|})}{(e^{2|w_1|} + e^{2|w_2|})(e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha|w_2|})}$$

$$\frac{e^{2\alpha|w_1|} + e^{2\alpha|w_2|}}{(e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha|w_1|})(e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha|w_2|})}.$$

Además, tomando en cuenta las siguientes desigualdades:

$$C_1(a^x + b^x) \leq (a+b)^x \leq C_2(a^x + b^x), \quad a, b \geq 1, \quad x \geq 0$$

para algunas $C_{1,2} \geq 0$, la estimación anterior puede escribirse como:

$$|K_1(\mathbf{w}, w')| \leq Ce^{(2\alpha-\varepsilon)|w'|} \frac{e^{|w_1|/2} e^{|w_2|/2} [e^{(\varepsilon+2\alpha-1)|w_1|} + e^{(\varepsilon+2\alpha-1)|w_2|}]}{(e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha|w_1|})(e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha|w_2|})}. \tag{7.6.6}$$

De aquí

$$\int\limits_{\Sigma} |K_1(\mathbf{w}, w')||d\mathbf{w}| \leq C[I_1(w') + I_2(w')]$$

con

$$I_1(w') = e^{(2\alpha-\varepsilon)|w'|} \int\limits_{\Sigma} \frac{e^{(\varepsilon+2\alpha-1/2)|w_1|} e^{|w_2|/2}}{(e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha|w_1|})(e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha|w_2|})} d\mathbf{w} \tag{7.6.7}$$

$$I_2(w') = e^{(2\alpha-\varepsilon)|w'|} \int\limits_{\Sigma} \frac{e^{|w_1|/2} e^{(\varepsilon+2\alpha-1/2)|w_2|}}{(e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha|w_1|})(e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha|w_2|})} d\mathbf{w}. \tag{7.6.8}$$

Primero consideraremos la integral I_1. Ya que $\Sigma = C_0 \times C_{-\beta}$, tenemos

$$I_1(w') = e^{(2\alpha-\varepsilon)|w'|} \int\limits_{C_{-\beta}} \frac{e^{|w_2|/2}}{e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha|w_2|}} \left(\int\limits_{C_0} \frac{e^{(\varepsilon+2\alpha-1/2)|w_1|}}{e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha|w_1|}} dw_1 \right) dw_2.$$

Sean $x = \operatorname{Re} w_1$, $y = \operatorname{Re} w_2$. Entonces,

$$I_1(w') \leq Ce^{(2\alpha-\varepsilon)|w'|} \int\limits_0^\infty \frac{e^{y/2}}{e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha y}} \left(\int\limits_0^\infty \frac{e^{(\varepsilon+2\alpha-1/2)x}}{e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha x}} dx \right) dy.$$

Por el Lema F.0.12 del Apéndice F con $b = \varepsilon + 2\alpha - 1/2$ y $n = 2\alpha$, obtenemos

$$I_1(w') \leq Ce^{(2\alpha-1/2)|w'|} \int\limits_0^\infty \frac{e^{y/2}}{e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha y}} dy$$

ya que $\varepsilon < 1/2$. Por la misma razón, el Lema F.0.12 del Apéndice F con $b = 1/2$ y $n = 2\alpha$ implica

$$I_1(w') \leq C_1 e^{(2\alpha-1/2)|w'|} \frac{C_2}{e^{(-1/2+2\alpha)|w'|}} \leq C_3, \quad w' \in C_0. \tag{7.6.9}$$

Ahora consideremos la integral I_2. Ya que la integral I_2 puede escribirse como la integral I_1 después del cambio de variable $|w_1| \leftrightarrow |w_2|$ (véase (7.6.7) y (7.6.8)), entonces (7.6.9) implica

$$I_2(w') \leq C, \quad w' \in C_0. \tag{7.6.10}$$

Por lo tanto, (7.6.9) y (7.6.10) implican (7.6.1). La proposición 7.6.1 se ha demostrado. ■

7.6.2. Estimación de la integral sobre C_0.

Proposición 7.6.2. *Se satisface la estimación (7.6.2).*

Demostración. De (7.6.6) se sigue que

$$|K_1(\mathbf{w}, w')| \leq CK_3(\mathbf{w})\frac{e^{(2\alpha-\varepsilon)|w'|}}{(e^{2\alpha|w'|}+e^{2\alpha|w_1|})(e^{2\alpha|w'|}+e^{2\alpha|w_2|})}, \quad \mathbf{w} \in \Sigma$$

donde,

$$K_3(\mathbf{w}) := \frac{(e^{2\alpha|w_1|}+e^{2\alpha|w_2|})(e^{\varepsilon|w_1|}+e^{\varepsilon|w_2|})(e^{3|w_1|/2+|w_2|/2}+e^{|w_1|/2+3|w_2|/2})}{e^{2|w_1|}+e^{2|w_2|}}. \tag{7.6.11}$$

Entonces, para $\mathbf{w} \in \Sigma$

$$\begin{aligned} I_{K_1}(\mathbf{w}) &:= \int_{C_0} |K_1(\mathbf{w}, w')||dw'| \\ &\leq CK_3(\mathbf{w})\int_0^\infty \frac{e^{(2\alpha-\varepsilon)w'}}{(e^{2\alpha w'}+e^{2\alpha|w_1|})(e^{2\alpha w'}+e^{2\alpha|w_2|})}dw'. \end{aligned} \tag{7.6.12}$$

Pasando a coordenadas polares:

$$e^{|w_1|} = r\cos\varphi, \quad e^{|w_2|} = r \operatorname{sen}\varphi, \qquad 1 \leq \mathrm{r},\ 0 < \varphi < \pi/2 \tag{7.6.13}$$

y haciendo el cambio de variable $e^{2\alpha w'} = r^{2\alpha}u$, obtenemos

$$I_{K_1}(\mathbf{w}) \leq C\overline{K}_3(r,\varphi)r^{-2\alpha-\varepsilon}\int_{1/r^{2\alpha}}^\infty \frac{u^{-\varepsilon/2\alpha}}{(u+\cos^{2\alpha}\varphi)(u+\operatorname{sen}^{2\alpha}\varphi)}du, \quad \mathbf{w} \in \Sigma \tag{7.6.14}$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{K}_3(r,\varphi) &= r^{(2\alpha+\varepsilon)}(\cos^{2\alpha}\varphi + \operatorname{sen}^{2\alpha}\varphi)(\cos^{\varepsilon}\varphi+\operatorname{sen}^{\varepsilon}\varphi) \\ &\quad \cos^{1/2}\varphi \operatorname{sen}^{1/2}\varphi(\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi) \end{aligned} \tag{7.6.15}$$

por (7.6.11). Para estimar la integral (7.6.14) consideraremos dos casos: cerca y lejos de la diagonal $\{\varphi = \pi/4\}$.
Sea $0 < \delta < \pi/4$.
I) Sea $\varphi \in [\delta, \pi/2-\delta]$. Notemos que de (7.6.15) se sigue que

$$K_3(r,\varphi) \leq Cr^{2\alpha+\varepsilon} \quad \varphi \in (0,\pi/2). \tag{7.6.16}$$

Por otro lado, existe una constante $C_\delta > 0$ tal que

$$|u+\cos^{2\alpha}\varphi| \geq u + C_\delta, \quad |u + \operatorname{sen}^{2\alpha}\varphi| \geq u + C_\delta, \quad \varphi \in [\delta, \pi/2-\delta].$$

De aquí, por (7.6.14) y (7.6.16), se sigue que

$$I_{K_1}(\mathbf{w}) \leq C'_\delta \int_{1/r^{2\alpha}}^{\infty} \frac{u^{-\varepsilon/2\alpha}}{(u+C_\delta)^2}du \leq C''_\delta, \quad r>0$$

ya que $\varepsilon/2\alpha < 1$ por (5.4.1).

II) Sea $\varphi \in (0,\delta] \cup [\pi/2-\delta, \pi/2)$. En este caso usaremos otra representación de la integral (7.6.14). Supongamos que $\varphi \in [0,\delta]$. El caso $\varphi \in [\pi/2-\delta, \pi/2]$ se analiza similarmente. De (7.6.12), (7.6.13) y usando el cambio de variable $e^{2\alpha w'} = u$, se sigue que

$$I_{K_1}(\mathbf{w}) \leq CK_4(r,\varphi)\left[\int_1^\infty \frac{u^{-\varepsilon/2\alpha}}{u+r^{2\alpha}\cos^{2\alpha}\varphi}du - \int_1^\infty \frac{u^{-\varepsilon/2\alpha}}{u+r^{2\alpha}\operatorname{sen}^{2\alpha}\varphi}du\right] \tag{7.6.17}$$

donde

$$K_4(r,\varphi) := \frac{\overline{K}_3(r,\varphi)}{r^{2\alpha}(\operatorname{sen}^{2\alpha}\varphi - \cos^{2\alpha}\varphi)}. \tag{7.6.18}$$

Consideremos la primera integral del lado derecho en (7.6.17). Sea $u = r^{2\alpha}(\cos^{2\alpha}\varphi)t$, entonces

$$\int_1^\infty \frac{u^{-\varepsilon/2\alpha}}{u+r^{2\alpha}\cos^{2\alpha}\varphi}du = r^{-\varepsilon}\cos^{-\varepsilon}\varphi \int_{(r\cos\varphi)^{-2\alpha}}^\infty \frac{t^{-\varepsilon/2\alpha}}{1+t}dt \leq \frac{C_1}{r^\varepsilon} \tag{7.6.19}$$

ya que $r \geq 1$, $\varphi \in (0,\delta]$ y $\delta < \pi/4$. Por otro lado, por la misma razón, existe $C_\delta > 0$ tal que

$$\cos^{2\alpha}\varphi - \operatorname{sen}^{2\alpha}\varphi \geq C_\delta, \quad \varphi \in [0,\delta].$$

De aquí, por (7.6.15) y (7.6.18), se sigue que

$$K_4(r,\varphi) \leq C_\delta r^\varepsilon \operatorname{sen}^{1/2}\varphi. \tag{7.6.20}$$

Por lo tanto (7.6.19) implica que

$$K_4(r,\varphi)\int_1^\infty \frac{u^{-\varepsilon/2\alpha}}{u+r^{2\alpha}\cos^{2\alpha}\varphi}du \leq C'_\delta, \quad \varphi \in (0,\delta]. \tag{7.6.21}$$

Consideremos ahora la segunda integral del lado derecho en (7.6.17). Sea $u = r^{2\alpha}(\operatorname{sen}^{2\alpha}\varphi)t$, entonces

$$\int_1^\infty \frac{u^{-\varepsilon/2\alpha}}{u+r^{2\alpha}\operatorname{sen}^{2\alpha}\varphi}du = r^{-\varepsilon}\operatorname{sen}^{-\varepsilon}\varphi \int_{(r\operatorname{sen}\varphi)^{-2\alpha}}^\infty \frac{t^{-\varepsilon/2\alpha}}{1+t}dt \leq C\frac{\operatorname{sen}^{-\varepsilon}\varphi}{r^\varepsilon}.$$

De aquí, por (7.6.20) se sigue que

$$K_4(r,\varphi)\int_1^\infty \frac{u^{-\varepsilon/2\alpha}}{u+r^{2\alpha}\operatorname{sen}^{2\alpha}\varphi}du \le C'_\delta \operatorname{sen}^{1/2-\varepsilon}\varphi \le C_\delta \tag{7.6.22}$$

ya que $\varepsilon < 1/2$. Sustituyendo (7.6.21) y (7.6.22) en (7.6.17) obtenemos

$$I_{K_1}(\mathbf{w}) \le C_\delta, \quad \mathbf{w}\in\Sigma$$

para $\varphi \in (0,\delta]$. La Proposición 7.6.2 ha sido probada. ∎

7.7. Estimación de la función $B_{3,2}$ en el espacio $L_2(\Sigma, P_\varepsilon)$

Teorema 7.7.1. *La función $B_{3,2}$ definida por (7.5.8) pertenece al espacio $L_2(\Sigma, P_\varepsilon)$, y*

$$\|B_{3,2}\|_{L_2(\Sigma,P_\varepsilon)} \le C\|g\|_{H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}. \tag{7.7.1}$$

Demostración. Por (7.5.8) con $l=2$ y la definición 7.2.1 tenemos

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}) \;&:= \|B_{3,2}\|_{L_2(\Sigma,P_\varepsilon)} \le \\ &\le C\int_\Sigma \left|\frac{B(\mathbf{w})}{\mathcal{A}(\mathbf{w})}\right|^2 \left|\int_{C_0}\mathcal{R}_2(\mathbf{w},w')\breve{g}(w'+i\pi/2)dw'\right|^2 P_\varepsilon(\mathbf{w})d\mathbf{w}. \end{aligned} \tag{7.7.2}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz y (5.2.9) implican que

$$\left|\int_{C_0}\mathcal{R}_2(\mathbf{w},w')\breve{g}(w'+i\pi/2)dw'\right|^2 \le \|g\|_{H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}\int_{C_0}|\mathcal{R}_2(\mathbf{w},w')|^2 e^{-2\varepsilon|w'|}dw.$$

De (7.5.7) y los Lemas F.0.13 y F.0.14 del Apéndice F, se sigue que

$$|\mathcal{R}_2(\mathbf{w},w')|^2 \le C\frac{e^{4\alpha|w_1|}e^{4\alpha|w_2|}(e^{-4|w_1|}+e^{-4|w_2|})+(e^{4\alpha|w_1|}+e^{4\alpha|w_2|})}{(e^{4\alpha|w'|}+e^{4\alpha|w_1|})(e^{4\alpha|w'|}+e^{4\alpha|w_2|})}.$$

Por lo tanto

$$\left|\int_{C_0}\mathcal{R}_2(\mathbf{w},w')\breve{g}(w'+i\pi/2)dw'\right|^2 \le C\|g\|_{H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}\Big[\Big(e^{4\alpha|w_1|}e^{4\alpha|w_2|}$$

$$(e^{-4|w_1|}+e^{-4|w_2|})\Big)+(e^{4\alpha|w_1|}+e^{4\alpha|w_2|})\Big]\int_{C_0}\frac{e^{-2\varepsilon|w'|}}{(e^{4\alpha|w'|}+e^{4\alpha|w_1|})(e^{4\alpha|w'|}+e^{4\alpha|w_2|})}dw'.$$

Ya que

$$\int_{C_0}\frac{e^{-2\varepsilon|w'|}}{(e^{4\alpha|w'|}+e^{4\alpha|w_1|})(e^{4\alpha|w'|}+e^{4\alpha|w_2|})}dw' \le \frac{C}{e^{4\alpha|w_1|}e^{4\alpha|w_2|}}$$

entonces

$$\left|\int\limits_{C_0}\mathcal{R}_2(\mathbf{w}, w')\breve{g}(w' + i\pi/2)dw'\right|^2 \leq C\|g\|_{H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}\left[e^{-4|w_1|} + e^{-4|w_2|} + \frac{(e^{4\alpha|w_1|} + e^{4\alpha|w_2|})}{e^{4\alpha|w_1|}e^{4\alpha|w_2|}}\right]$$

Además, de la desigualdad:

$$\frac{e^{4\alpha|w_1|} + e^{4\alpha|w_2|}}{e^{4\alpha|w_1|}e^{4\alpha|w_2|}} \leq e^{-4\alpha|w_1|} + e^{-4\alpha|w_2|}, \quad w_1 \in C_0, \quad w_2 \in C_{-\beta}$$

obtenemos

$$\left|\int\limits_{C_0}\mathcal{R}_2(\mathbf{w}, w')\breve{g}(w' + i\pi/2)dw'\right|^2 \leq C\|g\|_{H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}\left(e^{-2|w_1|} + e^{-2|w_2|}\right). \tag{7.7.3}$$

Por otro lado, (7.4.1) y el Lema 6.2.2 implican

$$\left|\frac{B(\mathbf{w})}{\mathcal{A}(\mathbf{w})}\right|^2 \leq \frac{C}{e^{2|w_1|} + e^{2|w_2|}}. \tag{7.7.4}$$

Sustituyendo (7.7.4), (7.7.3) y (7.2.3) en (7.7.2), obtenemos

$$J(\mathbf{w}) \leq C\|g\|_{H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}\int\limits_{\Sigma}\frac{e^{|w_1|}e^{|w_2|}(e^{2\varepsilon|w_1|} + e^{2\varepsilon|w_2|})(e^{-2|w_1|} + e^{-2|w_2|})}{e^{2|w_1|} + e^{2|w_2|}}d\mathbf{w}.$$

Así,

$$J(\mathbf{w}) \leq C\|g\|_{H^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbf{R}^+)}[J_1(\mathbf{w}) + J_2(\mathbf{w})] \tag{7.7.5}$$

con

$$J_1(\mathbf{w}) = \int\limits_{\Sigma}\frac{e^{-|w_1|}e^{|w_2|}(e^{2\varepsilon|w_1|} + e^{2\varepsilon|w_2|})}{e^{2|w_1|} + e^{2|w_2|}}d\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in \Sigma \tag{7.7.6}$$

$$J_2(\mathbf{w}) = \int\limits_{\Sigma}\frac{e^{|w_1|}e^{-|w_2|}(e^{2\varepsilon|w_1|} + e^{2\varepsilon|w_2|})}{e^{2|w_1|} + e^{2|w_2|}}d\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in \Sigma. \tag{7.7.7}$$

Primero consideraremos la integral J_1. Por la definición de Σ, la integral se escribe como

$$J_1(\mathbf{w}) = \int\limits_{C_0} e^{-|w_1|}\left(\int\limits_{C_{-\beta}}\frac{e^{|w_2|}(e^{2\varepsilon|w_1|} + e^{2\varepsilon|w_2|})}{e^{2|w_1|} + e^{2|w_2|}}dw_2\right)dw_1.$$

Sean $x = \mathrm{Re}\ w_1$ y $y = \mathrm{Re}\ w_2$. Entonces

$$J_1(\mathbf{w}) \leq C\int\limits_0^\infty e^{-x}\left(\int\limits_0^\infty\frac{e^y(e^{2\varepsilon x} + e^{2\varepsilon y})}{e^{2x} + e^{2y}}dy\right)dx.$$

Por el Lema F.0.11 del Apéndice F con $p = 1$ y $n = 2$, obtenemos

$$J_1(\mathbf{w}) \leq C_1 \int_0^\infty \frac{1}{e^{(2-2\varepsilon)x}} dx \leq C_2 \tag{7.7.8}$$

ya que $\varepsilon < 1/2$. Ahora consideremos la función J_2. Ya que la integral J_2 puede escribirse como la integral J_1 después del cambio de variable $|w_1| \leftrightarrow |w_2|$ (véanse (7.7.6) y (7.7.7)), entonces (7.7.8) implica

$$J_2(\mathbf{w}) \leq C, \quad \mathbf{w} \in \Sigma. \tag{7.7.9}$$

De esta manera, (7.7.8) y (7.7.9) en (7.7.5) inmplican (7.7.1). El Teorema 7.7.1 se ha demostrado.

■

Capítulo 8

Conclusiones

En este trabajo se llena un "hueco" en la teoría del problema de Neumann en ángulos planos convexos arbitrarios en los espacios de Sobolev. Específicamente, demostramos que el problema es correcto en el sentido de Hadamar, es decir, existe una única solución que depende continuamente de los datos de frontera en el espacio H^s con $s \in [0, 1/2)$. Anteriormente, el problema se resolvió solamente para $s = 0$. Este trabajo, es una regularización de la solucion, que permite formular algunas condiciones de compatibilidad para los datos de Neumann en el caso del espacio de Sobolev con $s > 3/2$. De los problemas abiertos que se quedan alrededor de este tema es el problema de Dirichlet para el cual no aplican los métodos del problema de Neumann (no resulta claro la manera de reducir el problema diferencial al problema algrebraico).

Apéndice A

Resultados auxiliares de la teoría de los espacios de Banach

A.1. Un embedimiento continuo

Proposición A.1.1. *Sea $i : B \mapsto A$ un embedimiento continuo e inyectivo del espacio de Banach B en A y sea C el subespacio lineal del producto cartesiano $A \times A$ consistente de los pares $(a_1, a_2) \in A \times A$ tales que $a_1 - a_2 \in B$ equipados con la norma*

$$\|(a_1, a_2)\|_C := \|a_1\|_A + \|a_2\|_A + \|a_1 - a_2\|_B. \tag{A.1.1}$$

Entonces, cualquier funcional lineal continuo $c^{'} \in C^{'}$ puede representarse en la forma:

$$c' = (b'_1, b'_2), \quad con \quad b'_{1,2} \in B^{'} \quad y \quad b'_1 + b'_2 \in A^{'}, \tag{A.1.2}$$

tal que

$$\langle c', c \rangle = \langle b'_1, a_1 - a_2 \rangle + \langle b'_1 + b'_2, a_2 \rangle, \quad \forall\ c = (a_1, a_2) \in C. \tag{A.1.3}$$

La norma canónica en C' es equivalente a:

$$\|c'\|_1 = \|b'_1\|_{B'} + \|b'_2\|_{B'} + \|b'_1 + b'_2\|_{A'}. \tag{A.1.4}$$

Observación A.1.2. De (A.1.3) se sigue que

$$\langle c', c \rangle = \langle b'_2, a_2 - a_1 \rangle + \langle b'_1 + b'_2, a_1 \rangle. \tag{A.1.5}$$

Ya que,

$$\langle b'_2, a_2 - a_1 \rangle + \langle b'_1 + b'_2, a_1 \rangle = \langle b'_2, a_2 - a_1 \rangle - \langle b'_1 + b'_2, a_2 - a_1 \rangle + \langle b'_1 + b'_2, a_2 \rangle$$

$$= \langle b'_1, a_1 - a_2 \rangle + \langle b'_1 + b'_2, a_2 \rangle.$$

Demostración de la Proposición A.1.1. Definimos el espacio

$$B'_1 := \{(b'_1, b'_2) \in B' \times B' : b'_1 + b'_2 \in A'\}.$$

I. Demostraremos que cada elemento de este espacio pertenece a C', si definimos la acción de los elementos de B'_1 en C como en (A.1.3). Probaremos primero la linealidad. Sean $c := \alpha d + e$,

$d = (d_1, d_2)$ y $e = (e_1, e_2)$ con $d_{1,2},\ e_{1,2} \in A$. Demostraremos que

$$\langle c', \alpha d + e\rangle = \alpha\langle c', d\rangle + \langle c', e\rangle, \quad c' = \langle b'_1, b'_2\rangle. \tag{A.1.6}$$

De (A.1.2) y (A.1.3) se sigue que

$$\begin{aligned}
\langle c', \alpha d + e\rangle &= \langle (b'_1, b'_2), (\alpha d_1 + e_1, \alpha d_2 + e_2)\rangle \\
&= \langle b'_1, (\alpha d_1 + e_1 - \alpha d_2 - e_2)\rangle + \langle (b'_1 + b'_2), (\alpha d_2 + e_2)\rangle \\
&= \alpha\langle b'_1, d_1\rangle + \langle b'_1, e_1\rangle - \alpha\langle b'_1, d_2\rangle - \langle b'_1, e_2\rangle + \\
&\quad \alpha\langle b'_1, d_2\rangle + \alpha\langle b'_2, d_2\rangle + \langle b'_1, e_2\rangle + \langle b'_2, e_2\rangle \\
&= \alpha\langle b'_1, d_1\rangle + \langle b'_1, e_1\rangle + \alpha\langle b'_2, d_2\rangle + \langle b'_2, e_2\rangle
\end{aligned} \tag{A.1.7}$$

Por otro lado, la parte derecha de (A.1.6) se escribe como

$$\begin{aligned}
\alpha\langle c', d\rangle + \langle c', e\rangle &= \alpha\langle (b'_1, b'_2), (d_1, d_2)\rangle + \langle (b'_1, b'_2), (e_1, e_2)\rangle \\
&= \alpha\langle b'_1, d_1 - d_2\rangle + \alpha\langle (b'_1, b'_2), d_2\rangle + \\
&\quad \langle b'_1, (e_1 - e_2)\rangle + \langle (b'_1 + b'_2), e_2\rangle \\
&= \alpha\langle b'_1, d_1\rangle - \alpha\langle b'_1, d_2\rangle + \alpha\langle b'_1, d_2\rangle + \alpha\langle b'_2, d_2\rangle + \\
&\quad \langle b'_1, e_1\rangle - \langle b'_1, e_2\rangle + \langle b'_1, e_2\rangle + \langle b'_2, e_2\rangle \\
&= \alpha\langle b'_1, d_1\rangle + \alpha\langle b'_2, d_2\rangle + \langle b'_1, e_1\rangle + \langle b'_2, e_2\rangle
\end{aligned} \tag{A.1.8}$$

Luego, (A.1.7) y (A.1.8) implican (A.1.6).

Ahora demostraremos que el funcional c' dado por (A.1.3) es continuo en la norma (A.1.1). Sea $c = (a_1, a_2) \in C$ tal que $c = \|(a_1, a_2)\|_C \leq 1$. Entonces, por (A.1.1) tenemos que

$$\|a_1\|_A \leq 1, \quad \|a_2\|_A \leq 1, \quad \text{y} \quad \|a_1 - a_2\|_B \leq 1.$$

Esto implica que

$$|\langle c', c\rangle| = |\langle b'_1, a_1 - a_2\rangle + \langle b'_1 + b'_2, a_2\rangle| \leq \|b'_1\|_{B'} + \|b'_1 + b'_2\|_{A'},$$

ya que $b'_1 \in B'$ y $b'_1 + b'_2 \in A'$ por (A.1.3). Por lo tanto, c' es acotado sobre la bola unitaria, y en consecuencia es continuo sobre C. De esta manera demostramos que el espacio B'_1 pertenece a C' (en el sentido algebraico).

II. Probaremos que C' pertenece a B'_1. Primero demostraremos que C es isomorfo a $B \times A$. Sea $I : B \times A \to C$ definido como:

$$I(b, a) = (a + b, a) \in C.$$

Obviamiente, I es inyectivo, suprayectivo e

$$I^{-1}(a_1, a_2) = (a_1 - a_2, a_2). \tag{A.1.9}$$

Además, I es continuo en la topología producto $B \times A$. En efecto, de (A.1.1) se sigue que

$$\begin{aligned} \|(a + b, a)\|_C &= \|a + b\|_A + \|a\|_A + \|b\|_B \leq 2\|a\|_A + \|b\|_A + \|b\|_B \\ &\leq 2\|a\|_A + C\|b\|_B, \end{aligned}$$

ya que $i : B \to A$ es continuo. Esto implica que I es continuo. Sea $c' \in C'$, entonces $c' \circ I$ es un funcional lineal continuo sobre $B \times A$. Por lo tanto, existen y son únicos $b' \in B'$, $a' \in A'$ tales que $c' \circ I = (b', a')$. Ahora definamos la transformación $j : C' \to B'_1$ como:

$$j(c') = (a'_1, a'_2),$$

donde

$$a'_1 = b', \quad a'_2 = a' - b'.$$

Es claro que $j(c') \in B'_1$, j es lineal e inyectiva .
Demostraremos ahora (A.1.3). Para $c = (a_1, a_2) \in C$, (A.1.9) implica que

$$\begin{aligned} \langle c', c\rangle &= \langle c \circ I, I^{-1}(c)\rangle = \langle c \circ i, (a_1 - a_2, a_2)\rangle = \langle (b', a'), (a_1 - a_2, a_2)\rangle \\ &= \langle b', (a_1 - a_2)\rangle + \langle a', a_2\rangle = \langle a'_1, a_1 - a_2\rangle + \langle a'_2 + a'_1, a_2\rangle, \end{aligned}$$

por (A.1.1). De esta manera cada funcional de C' se representa en la forma (A.1.2)-(A.1.3). De aquí, $C' \subset B'_1$.
III. Demostraremos la equivalencia de la norma canónica en C' y la norma (A.1.4). Sea $\mathcal{B} = \{(a_1, a_2) \in C : \|(a_1, a_2)\|_C \leq 1\}$. Notemos que

$$\begin{aligned} \|c'\|_{C'} &= \sup_{\mathcal{B}} |\langle b'_1, a_1 - a_2\rangle + \langle b'_1 + b'_2, a_2\rangle| \leq \sup_{\|b\|_B \leq 1} |\langle b'_1, b\rangle| \\ &+ \sup_{\|a\|_A \leq 1} |\langle b'_1 + b'_2, a\rangle| \leq \|b'_1\|_{B'} + \|b'_1 + b'_2\|_{A'} \\ &\leq \|b'_1\|_{B'} + \|b'_2\|_{B'} + \|(b'_1, b'_2)\|_{A'}. \end{aligned} \tag{A.1.10}$$

Por otro lado,

$$\|b'_1\|_{B'} \leq C \sup_{\mathcal{B}} |\langle b'_1, a_1 - a_2\rangle + \langle b'_1 + b'_2, a_2\rangle|, \tag{A.1.11}$$

donde C es tal que

$$\|a_1\|_B + \|a_1\|_A \leq C\|a_1\|_B$$

(dicha C existe, puesto que el embedimiento i es continuo).
En efecto, sea $a_2 = 0$ y $a_1 \in B$, entonces

$$\begin{aligned}\sup_{\mathcal{B}} |\langle b_1', a_1 - a_2\rangle + \langle b_1' + b_2', a_2\rangle| &\geq \sup_{\|a_1\|_B + \|a_1\|_A \leq 1} |\langle b_1', a_1\rangle| \\ &\geq \sup_{\|a_1\|_B \leq 1/C} |\langle b_1', a_1\rangle| = \frac{1}{C}\|b_1'\|_{B'}.\end{aligned}$$

Similarmente, usando (A.1.5), obtenemos que

$$\|b_2'\|_{B'} \leq C \sup_{\mathcal{B}} |\langle b_1', a_1 - a_2\rangle + \langle b_1' + b_2', a_2\rangle|.$$

Estimemos ahora $\|b_1' + b_2'\|_{A'}$. Sea $a_1 = a_2 \in A$. Entonces,

$$\begin{aligned}\sup_{\mathcal{B}} |\langle b_1', a_1 - a_2\rangle + \langle b_1' + b_2', a_2\rangle| &\geq \sup_{\|a_2\|_A \leq 1/2} |\langle b_1' + b_2', a_2\rangle| \\ &= 1/2\|b_1' + b_2'\|_{A'}.\end{aligned} \tag{A.1.12}$$

Luego, (A.1.11)-(A.1.12) implican que existe $C_1 > 0$ tal que:

$$\sup_{\mathcal{B}} |\langle b_1', a_1 - a_2\rangle + \langle b_1' + b_2', a_2\rangle \geq C_1\Big(\|b_1'\|_{B'} + \|b_2'\|_{B'} + \|b_1' + b_2'\|_{A'}\Big). \tag{A.1.13}$$

De aquí, (A.1.10) y (A.1.13) prueban la equivalencia de las normas.

∎

A.2. El operador de la continuación impar

Lema A.2.1. *Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ y $e(\varphi)$ definido como en (2.2.1). Entonces $e(\varphi) \in \widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+)$ para $s \leq 1/2$.*

Demostración. **(I)** Primero consideraremos el caso $\mathbf{s = 1/2}$. Notemos que:

1. $\varphi^+ \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$, ya que $\varphi^+(x) = \varphi(x)\Big|_{\mathbb{R}^+}$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset H^{1/2}(\mathbb{R})$.
2. $\varphi^-(x) \in H^{1/2}(\mathbb{R}^+)$, ya que $\varphi^-(-x) = \varphi(-x)\Big|_{\mathbb{R}^+}$ y $\varphi(-x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset H^{1/2}(\mathbb{R})$.
3. Por el Lema 1.1.16 nos falta demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{|e(\varphi)(x)|^2}{|x|} dx < \infty.$$

Notemos que $e(\varphi) \in C(\mathbb{R}) \cap C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}^+})$ por (2.2.1). Esto implica de manera similar a (1.2.5) que

$$\frac{e(\varphi)(x)}{x} = O(1), \quad \text{cuando} \quad x \to 0+,$$

ya que supp $\frac{e(\varphi)(x)}{x}$ es compacto.

(II) Supongamos ahora que $\mathbf{s < 1/2}$. Encontraremos la derivada $\psi'(x)$ en el sentido de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Por las reglas de derivación generalizada (véase p. e. [6]), obtenemos que

$$\psi'(x) = \{\psi'(x)\} + [\psi(0+) - \psi(0-)]\delta(x),$$

donde

$$\{\psi'(x)\} = \begin{cases} \psi'(x), & x > 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

y $\delta(x)$ es la función de Dirac. De (2.2.1) se sigue que

$$\psi(0+) - \psi(0-) = \varphi^+(0+) - \varphi^-(0-) = \varphi(0) - \varphi(0) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\psi'(x) = \{\psi'(x)\} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Esto implica que

$$\psi(x) + \psi'(x) \in L^1(\mathbb{R}) \tag{A.2.1}$$

ya que $\psi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ por (2.2.1). Luego, tomando la transformada de Fourier en (A.2.1) y usando las propiedades (H.0.1) y (H.0.2) del Apéndice H, obtenemos que existe $C > 0$ tal que:

$$|\hat{\psi}(\xi) + (-i\xi)\hat{\psi}(\xi)| \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Esto implica que

$$|\hat{\psi}(\xi)| \leq \frac{C}{|1 - i\xi|} = \frac{C}{\sqrt{1+\xi^2}} \leq C(1 + |\xi|)^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$\int |\hat{\psi}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi \leq C \int (1 + |\xi|)^{-2+2s} d\xi < \infty,$$

ya que $-2 + 2s < -1$ por hipótesis.

■

Corolario A.2.2. *Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ y $e(\varphi)$ definido como en (2.2.1). Entonces $e(\varphi) \in \tilde{H}^{1/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ para $\varepsilon \in (0, 1)$.*

Lema A.2.3. *Sea* $\mathcal{H}(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$*, tal que*

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq -1. \end{cases}$$

Entonces $\varphi(x) := \mathcal{H}(x_1)\mathcal{H}(x_2)e^{i\langle z,x\rangle} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^2)$ *para* $z \in \mathbb{C}K^+$*, y*

$$\varphi(z, x) = e^{i\langle z,x\rangle}, \quad x \in \overline{K^+}.$$

Demostración. Sea $\varphi(x) = e^{i\langle z,x\rangle}$ con $x \in \overline{K^+}$, entonces por la definición de $\mathcal{H}$ tenemos que $\mathcal{H}(x_k)e^{iz_l x_k} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{x_k})$ para $z_l \in \mathbb{C}^1$, $K = 1, 2$. Esto implica que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

$\blacksquare$

Apéndice B

Problema de Neumann en el semiplano

Sea $\Pi^- := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$. Consideremos el siguiente problema de Neumann en el semiplano Π^-:

$$\text{(B.0.1)} \qquad \begin{cases} (\triangle - 1)u^-(x, y) &= 0, \qquad (x, y) \in \Pi^- \\ \partial_y u^-\Big|_{y=0} &= g(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aquí,

$$\text{(B.0.2)} \qquad g(x) \in H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}), \quad \varepsilon \in [0, 1/2).$$

Primero encontraremos la solución formal de problema (B.0.1) y después demostraremos que esta solución pertenece al espacio $H^{1+\varepsilon}(\Pi^-)$, sí g satisface la condición (B.0.2).
Aplicando la Transformada de Fourier (1.1.1) al problema anterior, con respecto de x obtenemos el problema:

$$\text{(B.0.3)} \qquad \begin{cases} (-i\xi)^2\widehat{u^-}(\xi, y) + \widehat{u^-}_{yy}(\xi, y) - \widehat{u^-}(\xi, y) &= 0, \qquad y < 0, \\ \widehat{u^-}_y(\xi, 0) &= \hat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sea $v_\xi(y) = \widehat{u^-}(\xi, y)$. Entonces el problema anterior se escribe como:

$$\text{(B.0.4)} \qquad \begin{cases} v''_\xi - v_\xi(1 + \xi^2) &= 0, \qquad y < 0 \\ \hat{v}'_\xi(0) &= \hat{g}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde v'_ξ y v''_ξ son las derivadas de $v_\xi(y)$ con respecto de y. Dicho problema tiene una solución general de la forma

$$v_\xi(y) = C_1 e^{\sqrt{1+\xi^2}\cdot y} + C_2 e^{-\sqrt{1+\xi^2}\cdot y}.$$

Eligiendo $v_\xi(y)$ acotada para $y < 0$ obtenemos $C_2 = 0$. De esta manera, obtenemos una solución formal del problema (B.0.4) en la forma:

$$v_\xi(y) = C(\xi)e^{\sqrt{1+\xi^2}\cdot y}.$$

De aquí,

$$v'_\xi(0) = C(\xi)t(\xi) = \hat{g}(\xi) \Rightarrow C(\xi) = t(\xi)^{-1}\hat{g}(\xi)$$

donde

$$\text{(B.0.5)} \qquad t(\xi) := \sqrt{1 + \xi^2}.$$

Por lo tanto, la solución del problema (B.0.1) se escribe como

$$v_\xi(y) = \widehat{u^-}(\xi, y) = t(\xi)^{-1} e^{t(\xi)y} \hat{g}(\xi). \tag{B.0.6}$$

Tomando transformada de Fourier inversa, obtenemos la solución formal del problema (B.0.1)

$$u^-(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} t(\xi)^{-1} e^{[-i\xi x + t(\xi)y]} \hat{g}(\xi) d\xi, \quad (x, y) \in \Pi^- \tag{B.0.7}$$

con $t(\xi)$ definida como en (B.0.5).

Lema B.0.4. *Sea $g \in H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}^+)$ para $\varepsilon \in [0, 1/2)$. La función u^- dada por (B.0.7) esta bien definida y satisface el sistema (B.0.3) en el cual $\partial_y u^-(x, y)\big|_{y=0} = g(x)$ se entiende en el sentido de distribuciones en $H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})$:*

$$\lim_{\delta \to 0+} \partial_y u^-(x, y)\Big|_{y=-\delta} = g(x) \quad \text{en} \quad H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R}). \tag{B.0.8}$$

Demostración. **1)** Demostraremos primero que u^- esta bien definida. De (B.0.7) y la desigualdad de Cauchy se sigue que

$$|u^-(x, y)| \leq C \left\| \frac{\hat{g}(\xi)}{[t(\xi)]^{1/2-\varepsilon}} \right\|_{L^2(\mathbf{R}_\xi)} \left\| \frac{e^{t(\xi)y}}{[t(\xi)]^{1/2+\varepsilon}} \right\|_{L^2(\mathbf{R}_\xi)}$$

con $t(\xi)$ dada por (B.0.5). Luego, (B.0.2) implica que

$$\left\| \frac{\hat{g}(\xi)}{[t(\xi)]^{1/2-\varepsilon}} \right\|^2_{L^2(\mathbf{R}_\xi)} = \int_{\mathbf{R}} \frac{|\hat{g}(\xi)|^2}{[t(\xi)]^{1-2\varepsilon}} d\xi < \infty.$$

Además, $y < 0$ implica que

$$\left\| \frac{e^{t(\xi)y}}{[t(\xi)]^{1/2+\varepsilon}} \right\|^2_{L^2(\mathbf{R}_\xi)} = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{2y\sqrt{1+\xi^2}}}{[t(\xi)]^{1+2\varepsilon}} d\xi < \infty, \quad \text{ya que} \quad y < 0.$$

Por lo tanto, $u^-(x, y)$ dada por (B.0.7) está bien definida.

2) Demostrameros que u^- satisface la primera ecuación del sistema (B.0.1). De (B.0.7) se sigue que

$$\partial^2_{xx} u^-(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \xi^2 t(\xi)^{-1} e^{[-i\xi x + t(\xi)y]} \hat{g}(\xi) d\xi \tag{B.0.9}$$

$$\partial^2_{yy} u^-(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} t(\xi) e^{[-i\xi x + t(\xi)y]} \hat{g}(\xi) d\xi. \tag{B.0.10}$$

La desigualdad de Cauchy implica que

- $|\partial^2_{xx} u^-(x, y)| \leq C \left\| \dfrac{\hat{g}(\xi)}{[t(\xi)]^{1/2-\varepsilon}} \right\|_{L^2(\mathbf{R}_\xi)} \left\| \dfrac{\xi^2 e^{t(\xi)y}}{[t(\xi)]^{1/2+\varepsilon}} \right\|_{L^2(\mathbf{R}_\xi)} < \infty$

- $|\partial^2_{yy}u^-(x,y)| \le C\left\|\frac{\hat{g}(\xi)}{[t(\xi)]^{1/2-\varepsilon}}\right\|_{L^2(\mathbf{R}_\xi)}\left\|[t(\xi)]^{3/2+\varepsilon}e^{t(\xi)y}\right\|_{L^2(\mathbf{R}_\xi)} < \infty$

ya que $g \in H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})$ y $y < 0$. Por lo tanto, (B.0.9) y (B.0.10) estan bien definidas. Luego,

$$(\triangle - 1)u^-(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbf{R}}\Big[-\xi^2 t(\xi)^{-1} + t(\xi) - t(\xi)^{-1}\Big]e^{[-i\xi x + t(\xi)y]}\hat{g}(\xi)d\xi = 0.$$

3) Checaremos ahora la segunda ecuación del sistema (B.0.1). Es decir, demostraremos la afirmación (B.0.8). De (B.0.7) se sigue que

$$\partial_y u^-(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbf{R}} e^{[-i\xi x + t(\xi)y]}\hat{g}(\xi)d\xi, \quad y < 0.$$

Luego,

$$\widehat{\partial_y u^-}(\xi,y) = \hat{g}(\xi)e^{t(\xi)y} \quad \Rightarrow \quad \hat{g}(\xi) - \widehat{\partial_y u^-}(\xi,y) = \hat{g}(\xi)[1 - e^{t(\xi)y}].$$

De aquí, la Definición 1.1.3 implica que

$$\|g(\xi) - \partial_y u^-(\xi,y)\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R})} = \int\limits_{\mathbf{R}}\frac{|\hat{g}(\xi) - \widehat{\partial_y u^-}(\xi,y)|^2}{(1+|\xi|)^{1-2\varepsilon}}d\xi = \int\limits_{\mathbf{R}}\frac{|\hat{g}(\xi)[1 - e^{t(\xi)y}]|^2}{(1+|\xi|)^{1-2\varepsilon}}d\xi$$

Notemos que

1. $\dfrac{|\hat{g}(\xi)[1 - e^{y\sqrt{1+\xi^2}}]|^2}{(1+|\xi|)^{1-2\varepsilon}} \to 0$ cuando $y \to 0-$ puntualmente cuando $\xi \in \mathbb{R}$,
2. $\dfrac{|\hat{g}(\xi)[1 - e^{y\sqrt{1+\xi^2}}]|^2}{(1+|\xi|)^{1-2\varepsilon}} \le C\dfrac{|\hat{g}(\xi)|^2}{(1+|\xi|)^{1-2\varepsilon}} \le C_1 < \infty,\ y < 0.$

ya que $g \in H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})$. De aquí, el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue implica

$$\lim_{y\to 0-}\|g(x) - \partial_y u^-(x,y)\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R})} = 0.$$

■

Proposición B.0.5. *Sea $\varepsilon \in [0, 1/2)$. La función $u^-(x,y)$ dada por (B.0.7) pertenece al espacio $H^{1+\varepsilon}(\Pi^-)$, y*

$$\|u^-\|_{H^{1+\varepsilon}(\Pi^-)} \le C\|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R})}. \tag{B.0.11}$$

Demostración. Para demostrar que $u^- \in H^1(\Pi^-)$ es suficiente demostrar que (véase [25], Sección 5)

$$\textbf{(1)} \quad u^- \in L^2(\Pi^-), \tag{B.0.12}$$

$$\textbf{(2)} \quad \partial_k u^- \in H^\varepsilon(\Pi^-), \quad k = x, y. \tag{B.0.13}$$

Probaremos primero (B.0.12). De (1.1.1) se sigue que

$$\widehat{u^-}(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\eta y}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} u^-(x,y)dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}} e^{i\eta y}\widehat{u^-}(\xi,y)dy$$

Usando (B.0.6) obtenemos:

$$\begin{aligned} \widehat{u^-}(\xi,\eta) &= \int_{-\infty}^{0} e^{i\eta y}\Big[(t(\xi)^{-1}e^{t(\xi)y}\hat{g}(\xi)\Big]dy = t(\xi)^{-1}\hat{g}(\xi)\int_{-\infty}^{0} e^{[t(\xi)+i\eta]y}dy \\ &= \frac{t(\xi)^{-1}\hat{g}(\xi)}{t(\xi)+i\eta}. \end{aligned} \tag{B.0.14}$$

Por el Teorema de Plancherel-Parseval (véase [6], Teorema 2.10) es suficiente demostrar que

$$\frac{t(\xi)^{-1}\hat{g}(\xi)}{t(\xi)+i\eta} \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Notemos que

$$|\widehat{u^-}(\xi,\eta)|^2 = \frac{|\hat{g}(\xi)|^2}{(1+\xi^2)|\sqrt{1+\xi^2}+i\eta|^2}.$$

De aquí,

$$\begin{aligned} \|\widehat{u^-}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{g}(\xi)|^2}{(1+\xi^2)|\sqrt{1+\xi^2}+i\eta|^2}d\xi d\eta \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\eta^2}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{g}(\xi)|^2}{(1+|\xi|)^2}d\xi\right)d\eta \leq C\|g\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

por (B.0.2) (véase la Definición 1.1.3). Luego, (B.0.12) está demostrada.
Probaremos ahora (B.0.13) para $k = x$. Ya que,

$$\widehat{\partial_x u^-}(x,y) = -i\xi\widehat{u^-}(\xi,\eta) = \frac{-i\xi\hat{g}(\xi)}{\sqrt{1+\xi^2}(\sqrt{1+\xi^2}+i\eta)}$$

por (B.0.14). Entonces,

$$\begin{aligned}\|\widehat{\partial_x u^-}\|^2_{H^\varepsilon(\mathbf{R}^2)} &= \int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{\xi^2|\hat{g}(\xi)|^2(1+|\xi|+|\eta|)^{2\varepsilon}}{(1+\xi^2)|\sqrt{1+\xi^2}+i\eta|^2} d\xi d\eta \\ &= \int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{\xi^2|\hat{g}(\xi)|^2(1+|\xi|+|\eta|)^{2\varepsilon}}{(1+\xi^2)(1+\xi^2+\eta^2)} d\xi d\eta \qquad \text{(B.0.15)} \\ &\leq \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\xi^2|\hat{g}(\xi)|^2}{(1+\xi^2)} \left(\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{(1+|\xi|+|\eta|)^{2\varepsilon} d\eta}{1+\xi^2+\eta^2} \right) d\xi\end{aligned}$$

Sea $\eta = t\sqrt{1+\xi^2}$, entonces

$$\int\limits_{\mathbf{R}} \frac{(1+|\xi|+|\eta|)^{2\varepsilon} d\eta}{1+\xi^2+\eta^2} \leq \frac{C}{(1+|\xi|)^{1-2\varepsilon}}. \qquad \text{(B.0.16)}$$

Usando esta cota en (B.0.15), obtenemos

$$\begin{aligned}\|\widehat{\partial_x u^-}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} &\leq C \int\limits_{\mathbf{R}} \frac{\xi^2|\hat{g}(\xi)|^2(1+|\xi|)^{-1+2\varepsilon}}{1+\xi^2} d\xi \\ &\leq C \int\limits_{\mathbf{R}} |\hat{g}(\xi)|^2(1+|\xi|)^{-1+2\varepsilon} d\xi \leq C\|g\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R})}\end{aligned}$$

por (B.0.2).

Demostraremos ahora (B.0.13) para $k = y$, es decir, probaremos que

$$\partial_y u^-(x,y) \in H^\varepsilon(\Pi^-), \quad \varepsilon \in [0, 1/2). \qquad \text{(B.0.17)}$$

Denotemos por $[\cdot]_0$ la extensión por cero de $\partial_y u^-$ a $\mathbb{R}^2$. Ya que

$$\partial_y u_0^-(x,y) = \Big[\partial_y u^-(x,y)\Big]_0 + \Big[-u^-(x,0)\delta(y)\Big]$$

entonces

$$\Big[\partial_y u^-(x,y)\Big]_0 = \partial_y u_0^-(x,y) + u^-(x,0)\delta(y).$$

Tomando la transformada de Fourier obtenemos

$$\Big[\widehat{\partial_y u^-}(x,y)\Big]_0 = -i\eta\hat{u}_0^-(\xi,\eta) + \hat{u}^-(\xi,0)\mathbb{1}_y.$$

Luego, (B.0.6) y (B.0.14) implican

$$\Big[\widehat{\partial_y u^-}(x,y)\Big]_0 = \frac{-i\eta t(\xi)^{-1}\hat{g}(\xi)}{t(\xi)+i\eta} + \frac{\hat{g}(\xi)}{t(\xi)} = \frac{\hat{g}(\xi)}{t(\xi)+i\eta}.$$

De aquí, obtenemos

$$\begin{aligned} \|[\partial_y u^-]_0\|^2_{H^\varepsilon(\mathbf{R}^2)} &= \int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{|\hat{g}(\xi)|^2(1+|\xi|+|\eta|)^{2\varepsilon}}{|\sqrt{1+\xi^2}+i\eta|^2} d\xi d\eta \\ &= \int\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{|\hat{g}(\xi)|^2(1+|\xi|+|\eta|)^{2\varepsilon}}{1+\xi^2+\eta^2} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Usando (B.0.16), obtenemos

$$\int\limits_{\mathbf{R}^2} |\hat{g}(\xi)|^2(1+|\xi|)^{-1+2\xi} d\xi \leq C\|g\|^2_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R})},$$

por (B.0.2) (véase la definición 1.1.3). Esto demuestra (B.0.17). Por lo tanto, (B.0.11) esta probada.

■

Corolario B.0.6. *Sea* $\Omega_\beta^- = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < x_1 \tan\beta\}$. *Entonces, la solución del problema de Neumann semihomogéneo (2.3.1) en* Ω_β^- *existe, se escribe como en (B.0.20), pertenece al espacio* $H^{1+\varepsilon}(\Omega_\beta^-)$ *y admite la cota:*

$$\|v\|_{H^{1+\varepsilon}(\Omega_\beta^-)} \leq C\|lg_2\|_{H^{-1/2+\varepsilon}(\mathbf{R})}. \tag{B.0.18}$$

Demostración. Sean u^- definida por (B.0.7), y

$$\begin{aligned} x &= x_1\cos\beta + x_2 \operatorname{sen}\beta \\ y &= -x_1 \operatorname{sen}\beta + \cos\beta \end{aligned} \quad \text{con} \quad (x,y) \in \Pi^-, \quad (x_1,x_2) \in \Omega_\beta^-. \tag{B.0.19}$$

Definimos

$$v(x_1,x_2) = u^-(x(x_1,x_2), y(x_1,x_2)).$$

Entonces, la solución (B.0.1) en Ω_β^- esta dada por:

$$\begin{aligned} &v(x_1,x_2) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} t^{-1}(\xi) e^{[-i\xi(x_1\cos\beta+x_2 \operatorname{sen}\beta)+\mathrm{t}(\xi)(-\mathrm{x}_1 \operatorname{sen}\beta+\mathrm{x}_2\cos\beta)]}\widehat{e'(g_2)}(\xi)d\xi, \end{aligned} \tag{B.0.20}$$

con $t(\xi) := \sqrt{1+\xi^2}$. Además, $v^-(x_1,x_2) \in H^{1+\varepsilon}(\Omega_\beta^-)$ ya que $u^-(x,y) \in H^{1+\varepsilon}(\Pi^-)$ y (B.0.19) es lineal. De manera análoga, obtenemos (B.0.18) de la cota (B.0.11).

■

Apéndice C

Transformación del problema de Neumann en ángulo al primer cuadrante

En este apéndice reduciremos el problema de Neumann (PN) en el ángulo Ω, al problema en el primer cuadrante K^+.
Sea $(x_1, x_2) \in K^+$, entonces

$$(x_1, x_2) = (x_1(x, y), x_2(x, y)) = \left(x - y\cot\beta, \frac{y}{\operatorname{sen}\beta}\right).$$

Consideremos la primera ecuación de (PN). De la igualdad (4.1.2) y la regla de la cadena se sigue que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

por (4.1.2). De aquí,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}.$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y} = -\cot\beta\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial x_2}. \tag{C.0.1}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \cot^2\beta\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}^2\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
(\triangle - 1) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 1 \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cot^2\beta\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}^2\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - 1 \qquad \text{(C.0.2)} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - 2\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} - \operatorname{sen}^2\beta\right).
\end{aligned}$$

De la última igualdad de la expresión anterior se sigue la primera ecuación de (PN). Transformemos ahora las derivadas normales del problema de Neumann (PN). Ya que estamos considerando las derivadas normales exteriores, entonces, para (x_1, x_2) definido por (4.1.2) tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\vec{n}_1} &= \cos\frac{3\pi}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} = \\
&= -\left(-\cot\beta\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\left(\cos\beta\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}\right)
\end{aligned}$$

por (C.0.1). Análogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\vec{n}_2} &= [\cos(\beta+\pi/2)]\frac{\partial}{\partial x} + [\operatorname{sen}(\beta+\pi/2)]\frac{\partial}{\partial y} \\
&= -\operatorname{sen}\beta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} \\
&= -\operatorname{sen}\beta\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\beta\left(-\cot\beta\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \qquad \text{(C.0.3)} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\operatorname{sen}\beta + \frac{\cos^2\beta}{\operatorname{sen}\beta}\right) + \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial x_2} \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\left(-\frac{\partial}{\partial x_1} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial x_2}\right)
\end{aligned}$$

por (C.0.1). Luego, de (C.0.2)-(C.0.3) se sigue que el problema de Neumann (PN) después de la transformación (4.1.2), pasa al siguiente problema en el cuadrante K^+:

$$\begin{cases}
\mathcal{A}(i\partial_{x_1}, i\partial_{x_2})\,u(x_1,x_2) = 0, & (x_1,x_2)\in K^+ \\
\dfrac{1}{\operatorname{sen}\beta}(\cos\beta\partial_{x_1} - \partial_{x_2})\,u(x_1,0) = g(x_1), & x_1 > 0 \\
(-\partial_{x_1} + \cos\beta\partial_{x_2})\,u(0,x_2) = 0. & x_2 > 0.
\end{cases}$$

Apéndice D

Equivalencia del problema de Neumann en el ángulo Ω y el primer cuadrante K^+

Lema D.0.7. *Supongamos que se satisface la identidad integral (3.1.2), bajo las hipótesis del Teorema 3.1.2, entonces la identidad (4.1.5) se cumple.*

Demostración. Haciendo el cambio de variable (4.1.2) y utilizando que $dxdy = \operatorname{sen}\beta \mathrm{dx_1 dx_2}$ por (4.1.3), la parte izquierda de (3.1.2) se escribe como

$$\int_{\Omega} u(x,y)P\varphi(x,y)dxdy = \operatorname{sen}\beta \int_{\mathrm{K}^+} \mathrm{u(x_1,x_2)}\mathcal{A}\varphi(\mathrm{x_1,x_2})\mathrm{dx_1 dx_2}, \tag{D.0.1}$$

donde $\mathcal{A}$ esta definido por (4.1.4). Consideremos el primer término de la parte derecha de la identidad integral (3.1.2). Nuevamente el cambio de variable (4.1.3) y (1.2.1) implican que

$$\langle g(x), \varphi_1(x)\rangle = \langle g(x), \varphi(x,0)\rangle = \langle g(x_1), \varphi(x_1,0)\rangle = \langle g(x_1), \varphi_1(x_1)\rangle. \tag{D.0.2}$$

Consideremos ahora la primera integral del lado derecho de (3.1.2). De (1.3.4) se sigue que

$$\int_{\Gamma_1} u_1(s)\varphi_1^1(s)ds = \int_{\Gamma_1} u_1(x)\frac{\partial}{\partial n_1}\varphi(x,0)dx,$$

donde n_1 es la normal exterior a Γ_1. Luego, el cambio de variable (4.1.2) implica

$$\frac{\partial}{\partial n_1} = -\frac{\partial}{\partial y} = -\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y}\right] = \cot\beta\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

Por lo tanto, usando la definición de los operadores traza (1.2.1) y (1.3.4), obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_1} u_1(s)\varphi_1^1(s)ds = \\
&= \int_{\mathcal{L}(\Gamma_1)} u_1(x_1)\left[\cot\beta\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x_1,0) - \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(x_1,0)\right]dx_1 \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\int_{\mathcal{L}(\Gamma_1)} u_1(x_1)\left[\cos\beta\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1(x_1) - \varphi_1^1(x_1)\right]dx_1 \\
&= \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\left\langle u_1(x_1), \cos\beta\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1(x_1) - \varphi_1^1(x_1)\right\rangle.
\end{aligned}
\tag{D.0.3}
$$

Consideremos ahora la integral sobre Γ_2 en el lado derecho de (3.1.2). Por (1.3.4) tenemos que

$$
\int_{\Gamma_2} u_2(s)\varphi_1^1(s)ds = \int_{\Gamma_2} u_2(0,y)\left(\frac{\partial}{\partial n_2}\varphi(0,y)\right)dy
\tag{D.0.4}
$$

donde $n_2 = (-\operatorname{sen}\beta, \cos\beta)$ es la normal exterior a Γ_2, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n_2} &= \left[-\operatorname{sen}\beta\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\right] \\
&= -\operatorname{sen}\beta\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}\frac{\partial \mathrm{x}_1}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2}\frac{\partial \mathrm{x}_2}{\partial \mathrm{x}}\right) + \\
&+ \cos\beta\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y}\right) \\
&= -\operatorname{sen}\beta\left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}\right) + \cos\beta\left(-\cot\beta\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1} + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_2}\right) \\
&= -\frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cot\beta\frac{\partial}{\partial x_2}
\end{aligned}
$$

por el cambio de variable (4.1.3). Luego, usando que $s = x_2$, $ds = dx_2$ y sustituyendo la expresión anterior en (D.0.4), obtenemos

$$\int_{\Gamma_2} u_2(s)\varphi_2^1(s)ds =$$

$$= \int_{\mathcal{L}(\Gamma_2)} u_2(x_2)\left[-\frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(0,x_2) + \cot\beta\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(0,x_2)\right]dx_2$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\int_{\mathcal{L}(\Gamma_2)} u_2(x_2)\left[-\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(0,x_2) + \cos\beta\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi(0,x_2)\right]dx_2 \tag{D.0.5}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\int_{\mathcal{L}(\Gamma_2)} u_2(x_2)\left[-\varphi_2^1(x_2) + \cos\beta\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_2(x_2)\right]dx_2$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\left\langle u_2(x_2), \cos\beta\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_2(x_2) - \varphi_2^1(x_2)\right\rangle.$$

Luego, sustituyendo (D.0.2), (D.0.3) y (D.0.5) en la parte derecha de (3.1.2) y utilizando (D.0.1) obtenemos:

$$\operatorname{sen}\beta\int_{\mathrm{K}^+} \mathrm{u}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\mathcal{A}\varphi(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)\mathrm{dx}_1\mathrm{dx}_2 =$$

$$= \int_{\Omega} u(x,y)P\varphi(x,y)dxdy$$

$$= -\langle g(x),\varphi_1(x)\rangle + \int_{\Gamma_1} u_1(s)\varphi_1^1(s)ds + \int_{\Gamma_2} u_2(s)\varphi_2^1(s)ds$$

$$= -\langle g(x_1),\varphi_1(x_1)\rangle + \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\left\langle u_1(x_1), \cos\beta\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1(x_1) - \varphi_1^1(x_1)\right\rangle$$

$$+ \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\left\langle u_2(x_2), \cos\beta\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_2(x_2) - \varphi_2^1(x_2)\right\rangle.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}^2\beta \int\limits_{K^+} u(x_1, x_2)\mathcal{A}\varphi(x_1, x_2)dx_1dx_2 = -\operatorname{sen}\beta\langle g(x_1), \varphi_1(x_1)\rangle +$$

$$+\left\langle u_1(x_1), \cos\beta\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1(x_1) - \varphi_1^1(x_1)\right\rangle + \left\langle u_2(x_2), \cos\beta\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi_2(x_2) - \varphi_2^1(x_2)\right\rangle.$$

Apéndice E

Estimaciones auxiliares

Esta sección esta dedicada a la demostración de algunas estimaciones importantes para la construcción de la función $T(w)$ (véase la sección 5.3).

Lema E.0.8. *Sean $\chi(t) := char(|t| \geq 1)$, $w =: w_1 + iw_2$ con $|w_2| \leq \beta$, $w_1 \in \mathbb{R}$ y α definida como en (5.4.1). Entonces, existe $C(\beta) > 0$ tal que*

$$\text{(E.0.1)} \qquad \textbf{I)} \quad \left|\frac{\operatorname{sen}(wt)}{\operatorname{senh}\beta t}\right| \leq C(\beta)\Big\{|w|(1-\chi(t)) + e^{(|w_2|-\beta)|t|}\chi(t)\Big\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{(E.0.2)} \qquad \textbf{II)} \quad \left|\frac{t\cos(wt)}{\operatorname{senh}\beta t}\right| \leq C(\beta)e^{(|w_2|-\beta)|t|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{(E.0.3)} \qquad \textbf{III)} \quad |\operatorname{sen}(ix)| \leq 2|x|, \quad |x| \leq 1$$

$$\text{(E.0.4)} \qquad \textbf{IV)} \quad |\cos(wt + i\alpha t)| \leq C(\alpha), \quad |t| \leq 1, \quad w \in \mathbb{R}.$$

Demostración. I) Probaremos primero la desigualdad (E.0.1).
Ia) Consideremos el caso $|t| \leq 1$. Ya que $1 - \chi(t) = char(|t| \leq 1)$, definimos

$$\text{(E.0.5)} \qquad f_t(w) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} wt}{\operatorname{senh}(\beta t)}, & t \neq 0,\ t \in [-1,1] \\[2ex] \dfrac{w}{\beta}, & t = 0. \end{cases}$$

La cota (E.0.1) para $t = 0$ es obvia. Sea $t \neq 0$, $t \in [-1, 1]$. En este caso la función $f_t(w)$ es entera en $\mathbb{C}_w$ y $f_t(0) = 0$, por lo tanto, usamos la representación integral:

$$f_t(w) = \int_0^w \frac{d}{d\xi} f_t(\xi) d\xi.$$

De aquí,

$$|f_t(w)| \leq |w| \operatorname{máx}\left\{\left|\frac{d}{d\xi} f_t(\xi)\right| : \xi \in [0, w]\right\}.$$

Por otro lado, de (E.0.5) se sigue que

$$\left|\frac{d}{d\xi} f_t(\xi)\right| = \left|\frac{t}{\operatorname{senh}(\beta t)}\right| |\cos \xi t| \leq C |\cos \xi t|, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, nos falta demostrar que

$$|\cos \xi t| \leq C(\beta), \quad \xi \in \overline{\Pi}_{-\beta}^{\beta}, \quad |t| \leq 1.$$

Esto se sigue de la representación

$$\cos \xi t = \cos(\xi_1 + i\xi_2)t = \cos \xi_1 t \cosh \xi_2 t - i \operatorname{sen}\xi_1 t \operatorname{senh}\xi_2 t.$$

La cota (E.0.1), esta probada para $|t| \leq 1$.

Ib) Consideremos ahora el caso $|t| \geq 1$. Ya que la función $|\operatorname{sen}(wt)/\operatorname{senh}(\beta t)|$ es par, es suficiente demostrar (E.0.1) para $t \geq 1$. Además, como $\left|\frac{\operatorname{sen}(wt)}{\operatorname{senh}\beta t}\right| \leq \frac{e^{|w_2|t}}{|\operatorname{senh}\beta t|}$ entonces, es suficiente demostrar que existe $C > 0$ tal que

$$\frac{e^{|w_2|t}}{\operatorname{senh}\beta t} \leq C e^{(|w_2|-\beta)t}, \; t \geq 1, \; |w_2| \leq \beta. \tag{E.0.6}$$

Esta desigualdad es equivalente a

$$e^{-\beta t} \operatorname{senh}(\beta t) \geq C_1, \; t \geq 1.$$

Ya que

$$e^{-\beta t} \operatorname{senh}(\beta t) = \frac{1}{2} e^{-\beta t}(e^{\beta t} - e^{-\beta t}) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\beta t}\right) \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{1}{2}$$

entonces, existe $t_{1/2} > 1$:

$$e^{-\beta t} \operatorname{senh}(\beta t) \geq \frac{1}{4}, \; t > t_{1/2}.$$

Por otro lado, como $e^{-\beta t} \operatorname{senh}(\beta t) > 0$ y continua sobre $[1, t_{1/2}]$, entonces existe $C_0 > 0$:

$$e^{-\beta t} \operatorname{senh}(\beta t) \geq C_0 \geq 0, \; t \in [1, t_{1/2}].$$

Luego, para $C = \min\{C_0, 1/4\}$, obtenemos (E.0.1).

II) La prueba de (E.0.2) es análoga a la demostración Ib) de (E.0.1).

III) Demostraremos ahora la desigualdad (E.0.3). Ya que $|\operatorname{sen} ix| = |\operatorname{senh} x|$, entonces es suficiente demostrar que

$$\operatorname{senh} x \leq 2x, \quad x \in [0, 1].$$

Consideremos la función

$$f(x) := \operatorname{senh} x - 2x, \; x \in [0, 1].$$

Notemos que

1. $f(0) = 0$
2. $f'(x) = \cosh x - 2 < 0, \, x \in [0, 1].$

Entonces, (1) y (2) implican que

$$f(x) \leq 0, \text{ para } x \in [0, 1]$$

lo cual demuestra la afirmación.

IV) Ahora demostraremos la desigualdad (E.0.4). Sea $t \in [-1, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} |\cos(wt + i\alpha t)| &= |\cos(wt)\cosh i\alpha t - i \operatorname{sen}(wt) \operatorname{senh}\alpha t| \\ &\leq \cosh \alpha t + |\operatorname{senh}\alpha t| \leq C(\alpha), \qquad |t| \leq 1 \end{aligned} \tag{E.0.7}$$

ya que la función $\cos \alpha t + |\operatorname{senh}\alpha t|$ es continua. ■

Corolario E.0.9. *Existe* $C(w, \beta) > 0$*, tal que*

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(wt)}{\operatorname{senh}\beta t}\right| \leq C(w, \beta) e^{-\beta|t|}, \; w, t \in \mathbb{R}. \tag{E.0.8}$$

Demostración. Se sigue de (E.0.1), cuando $w_2 = 0$. ■

Apéndice F

Estimaciones integrales

Lema F.0.10. *Sean $n \geq 1$, $0 \leq b < n$. Entonces, existe $C > 0$ tal que*

$$\int_0^\infty \frac{e^{bx}}{(e^x + a)^n} dx \leq \frac{C}{a^{n-b}}, \quad a \geq 1, \quad b \neq 0 \tag{F.0.1}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(e^x + a)^n} \leq \frac{C_\delta}{a^{n-\delta}}, \quad b = 0, \quad \delta > 0. \tag{F.0.2}$$

Demostración. Haciendo el cambio de variable

$$\xi a = e^x,$$

obtenemos que la integral del lado izquierdo de (F.0.1) se estima como

$$\frac{1}{a^{n-b}} \int_{1/a}^\infty \frac{d\xi}{\xi^{1-b}(\xi + 1)^n} \leq \frac{1}{a^{n-b}} \left(\int_{1/a}^1 \frac{1}{\xi^{1-b}} d\xi + \int_1^\infty \frac{1}{\xi^{n+1-b}} d\xi \right). \tag{F.0.3}$$

De aquí, obtenemos (F.0.1) ya que $b > 0$ y $b < n$.
Para $b = 0$, obtenemos (F.0.2) integrando (4.1.9). ∎

Lema F.0.11. *Sea $p \in [0, 3/2]$, $n \geq 2$ y $0 < \varepsilon < 1/2$. La siguiente estimación es válida:*

$$I(y, \varepsilon, p, n) := \int_0^\infty \frac{e^{px}(e^{q(p)\varepsilon y} + e^{q(p)\varepsilon x})}{e^{ny} + e^{nx}} dx \leq \frac{C(\varepsilon, p, n)}{e^{(n-q(p)\varepsilon-p)y}}, \tag{F.0.4}$$

donde

$$q(p) := \begin{cases} 2, & p = 1 \\ 1, & p = 1/2,\ 3/2. \end{cases}$$

Demostración. Haciendo el cambio de variable $e^x = e^y u$ tenemos que

$$I(y, \varepsilon, q(p), n) = \frac{1}{e^{(n-q(p)\varepsilon-p)y}} \int_{e^{-y}}^\infty \frac{u^{p-1}(1 + u^{q(p)\varepsilon})}{1 + u^n} du.$$

De aquí se sigue (F.0.4). ∎

Lema F.0.12. *Para $1 \le n$, $0 \le b < n$ la siguiente estimación es válida:*

$$\int_0^\infty \frac{e^{bs}}{e^{ns} + a^n} ds \le \frac{C}{a^{n-b}}, \quad a \ge 1. \tag{F.0.5}$$

Demostración. Haciendo el cambio de variable $\xi a = e^s$, obtenemos que la integral del lado derecho en (F.0.5) puede estimarse como

$$\frac{1}{a^{n-b}} \int_{1/a}^\infty \frac{d\xi}{\xi^{1-b}(\xi^n + 1)} \le \frac{1}{a^{n-b}} \left(\int_{1/a}^1 \frac{1}{\xi^{1-b}} d\xi + \int_1^\infty \frac{1}{\xi^{n+1-b}} d\xi \right).$$

De aquí, obtenemos (F.0.5) ya que $0 < b < n$. ∎

Lema F.0.13. *Sean b y α definidas como en (5.4.1). Para $p = 1, 2$ las siguientes estimaciones son válidas:*

$$\left|\cosh^2 b - \cosh^2 \alpha(w_p - i\pi/2)\right| \ge C(e^{2\alpha|w'|} + e^{2\alpha|w_p|}), \qquad \begin{array}{l} w',\ w_1 \in \mathcal{C}_0 \\ w_2 \in \mathcal{C}_{-\beta}. \end{array} \tag{F.0.6}$$

Demostración. Probaremos (F.0.6) para $p = 1$; la estimación para $p = 2$ se obtiene de manera similar. La fórmula

$$\cosh^2 x - \cosh^2 y = \text{ senh (x - y) senh (x + y)}$$

implica que

$$\begin{aligned} \cosh^2(\alpha w') - \cosh^2(\alpha(w_1 - i\pi/2)) = \ & \text{senh } (\alpha(\mathrm{w}' - \mathrm{w}_1 + \mathrm{i}\pi/2)) \times \\ & \text{senh } (\alpha(\mathrm{w}' + \mathrm{w}_1 - \mathrm{i}\pi/2)) \end{aligned} \quad w', w_1 \in \mathcal{C}_0.$$

Por otro lado,

$$|\text{ senh } (\alpha(\mathrm{w}' \mp \mathrm{w}_1 \pm \mathrm{i}\pi/2))| \ge \mathrm{C} > 0 \quad \forall\ \mathrm{w}',\ \mathrm{w}_1 \in \mathcal{C}_0, \quad \beta > \pi/2,$$

entonces

$$|\cosh^2(\alpha w') - \cosh^2(\alpha(w_1 - i\pi/2))| \ge C e^{(\alpha|w'-w_1| + \alpha|w'+w_1|)}.$$

De aquí, para la demostración de la estimación (F.0.6), debido a la simetría $w' \leftrightarrow w_1$ es suficiente considerar los siguientes tres casos: 1) $0 \le w_1 \le w'$, 2) $w_1 \le w' \le 0$, y 3) $w_1 \le 0 \le w'$, con $|w_1| \ge |w'|$.

∎

Lema F.0.14. *La siguiente estimación es válida:*

$$\begin{aligned} | \ & \tanh w_1 \text{ senh } 2\mathrm{a}_1 \cosh^2 \mathrm{a}_2 - \tanh(\mathrm{w}_2 + \mathrm{i}\beta) \text{ senh } 2\mathrm{a}_2 \cosh^2 \mathrm{a}_1| \\ & \le C\left[e^{2\alpha|w_1|} e^{2\alpha|w_2|}(e^{-2|w_1|} + e^{-2|w_2|}) + (e^{2\alpha|w_1|} + e^{2\alpha|w_2|})\right] \end{aligned} \tag{F.0.7}$$

con $a_{1,2}$ definidas en (7.3.1).

Demostración. Para $w_1 \in C_0$ y $w_2 \in C_{-\beta}$, tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcll} \tanh w_p & = & 1 + \varphi_p(w_p), & |\varphi_p(w_p)| \leq Ce^{-2|w_p|} \\ \mathrm{senh}\ 2\mathrm{a_p} & = & 1/2e^{2\alpha(w_p - i\pi/2)} + \psi_p(w_p), & |\psi_p(w_p)| \leq Ce^{-2\alpha|w_p|} \\ \cosh^2 a_p & = & \frac{1}{4}e^{2\alpha(w_p - i\pi/2)} + \phi_p(w_p), & |\phi_p(w_p)| \leq C \end{array}\right| \quad p = 1, 2$$

De aquí, obtenemos (F.0.7). ∎

Apéndice G

Lemas auxiliares

Lema G.0.15. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio simétrico con respecto de $a \in \Omega$. Si $f \in H(\Omega)$ y es antisimétrica con respecto a $a \in \Omega$, entonces*

$$f(a) = 0 \tag{G.0.1}$$

Demostración. Ya que

$$f(-w + 2a) = -f(w) \quad \forall\, w \in \Omega,$$

por ser f antisimétrica con respecto de a. Entonces, en particular

$$f(-a + 2a) = -f(a) \quad \Leftrightarrow \quad f(-a) = -f(a) \quad \Rightarrow \quad 2f(a) = 0,$$

lo cual prueba (G.0.1). ■

Lema G.0.16. ([19], Teorema II). *Sea $F(s)$ una función de variable compleja $s = \sigma + it$. Supongamos que $F(s)$ es analítica sobre $-\lambda \le \sigma \le \mu$, y tal que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma + it)|^2 dt < C$$

sobre la región $-\lambda \le \sigma \le \mu$. Luego, si s está en el interior de esta región, entonces

$$F(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\mu + iy)}{\mu + iy - s} dy - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(-\lambda + iy)}{-\lambda + iy - s} ds.$$

Lema G.0.17. *(**Lema de Schur, [5] Teorema 6.2**) Sea T un operador integral con kernel de Schwartz no negativo $K(x, z)$, para $x \in X$ y $z \in Z$:*

$$Tf(z) = \int_Y K(x, z) f(x)\, dx.$$

Si existen funciones $p(x) > 0$ y $q(z) > 0$, y números $D > 0$, y $E > 0$ tales que

$$\int_Y K(x, z) q(z)\, dz \le Dp(x), \quad p.c.t. \quad x \in X$$

y

$$\int_X p(x) K(x, z)\, dx \le Eq(z), \quad p.c.t. \quad z \in Z$$

entonces, T es continuo de $L^2(Y)$ a $L^2(X)$, con norma acotada por

$$\|T\|_{L^2\to L^2} \leq \sqrt{DE}.$$

LEMA G.0.18. *Existe $C > 0$ tal que para cada $w \in \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}$ se cumple la siguiente desigualdad*

$$(1+|w|)^2 \leq C(1+|\operatorname{senh}(w+i\beta)|), \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}. \tag{G.0.2}$$

Demostración. Haciendo el cambio de variables $w + i\beta \longleftrightarrow w$ reducimos (G.0.2) a la desigualdad

$$(1+|w-i\beta|)^2 \leq C(1+|\operatorname{senh} w|), \quad w \in \Pi_0^{\pi}.$$

Es evidente que existe $C_1 > 0$ tal que

$$(1+|w-i\beta|)^2 \leq C_1(1+|w|)^2, \quad w \in \mathbb{C}^+.$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que

$$(1+|w|)^2 \leq C(1+|\operatorname{senh} w|), \quad w \in \Pi_0^{\pi},$$

para algún $C > 0$.
Notemos que para $w := w_1 + iw_2$

$$|\operatorname{senh} w| = \cosh^2 w_1 - \cos^2 w_2 \geq \cosh^2 w_1 - 1,$$

de aquí

$$1 + |\operatorname{senh} w| \geq \cosh^2 w_1, \quad w \in \mathbb{C}^+.$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que existe $C > 0$ tal que

$$(1+|w|)^2 \leq C\cosh^2 w_1, \quad w \in \Pi_0^{\pi}.$$

Ya que, para $w \in \Pi_0^{\pi}$ se cumple que

$$1+|w| = 1+|w_1+iw_2| \leq 1+|w_1|+\pi,$$

entonces es suficiente demostrar que existe $C > 0$ tal que

$$(1+|w_1|+\pi)^2 \leq C\cosh^2 w_1, \quad w_1 \in \mathbb{R}.$$

Este hecho se sigue de las siguentes afirmaciones:

1. $\dfrac{\cosh w}{C+|w|} \longrightarrow \infty$, cuando $w \to \infty$;
2. Para cada $N > 0$ existe C_N tal que

$$1+|w|+\pi \leq C_N \cosh w, \quad |w| \leq N;$$

   ya que $\cosh w \geq 1$, para $w \in \mathbb{R}$.

Luego, el Lema esta probado. ∎

LEMA G.0.19. *Sea* $z_2 : \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta} \longrightarrow \mathbb{C}^+$ *la transformación definida como:*

$$z_2(w) = \operatorname{senh}(w + i\beta).$$

Entonces, existe $C > 0$ *tal que*

$$|\mathrm{Im} z_2(w)| \leq (1 + e^{|w|})\rho\Big(w, \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}\Big), \quad w \in \Pi_{-\beta}^{\pi-\beta}. \tag{G.0.3}$$

Demostración. Con el cambio de variable $w \longleftrightarrow w + i\beta$, la cota (G.0.3) se reduce a la siguiente expresión:

$$|\mathrm{Im} z_1(w)| \leq Ce^{|w|}\rho\Big(w, \Pi_0^{\pi}\Big), \tag{G.0.4}$$

donde,

$$z_1(w) = \operatorname{senh} w.$$

Ya que, para $w = w_1 + iw_2 \in \Pi_0^{\pi}$ se cumple que

$$|\mathrm{Im} z(w)| = \cosh w_1 | \operatorname{sen} w_2| \leq Ce^{w_1} \operatorname{mín}(w_2, \pi - w_2) = Ce^{w_1}\rho\Big(w, \partial\Pi_0^{\pi}\Big).$$

Como $e^{|w_1|} \leq e^{|w|}$, para $w \in \Pi_0^{\pi}$, entonces la cota (G.0.4) esta demostrada.

■

Apéndice H

Propiedades de la Transformada de Fourier

Para la demostración de las siguientes afirmaciones véase [9].

Afirmación H.0.20.
(1) Si $\psi,\ \psi' \in L^1(\mathbb{R})$, entonces

$$\hat{\psi}'(\xi) = (i\xi)\hat{\psi}(\xi). \tag{H.0.1}$$

(2) Si $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\hat{\psi} \in L^\infty(\mathbb{R})$, es decir, existe $C > 0$ tal que

$$|\hat{\psi}(\xi)| \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{H.0.2}$$

(3) $F : \varphi \mapsto \hat{\varphi}$ es un isomorfismo topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
(4) Sea $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\widehat{\psi(-x)}(\xi) = \hat{\psi}(-\xi). \tag{H.0.3}$$

Bibliografía

[1] Castro L., Speck F. -O., Teixiera F. *Mixed boundary value problems for Helmholtz equation in a quadrant*. Integral Equation Operator Theory 56: 1-44, 2006.

[2] Costabel M., Stephan E. *Boundary integral equations for mixed boundary value problems in polygonal domains and Galerkin approximation*. Banach Center Publication 15: 175-251, 1985.

[3] Eskin G. I. *Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations*. American Mathematical Society. Providence R.I., 1981.

[4] Grisvard P. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman. Boston-London-Melbourne, 1985.

[5] Halmos P. R. Sunder V. S. *Bounded integral operators on L^2 spaces*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[6] Komech A. I. *Lectures on elliptic partial differential equations (Method of pseudodifferential operators)*. Undergraduate course given at Vienna University, October-December 2006.

[7] Komech A. I., Merzon A. E., Zhevandrov P. *A method of complex characteristics for elliptics problem in angles and its applications*. American Mathematical Society Transl. 2202: 125-159.

[8] Komech A. I. *Elliptic boundary value problems on manifolds with piecewise smooth boundary*. Math. USSR Sbornik 21: 91-135, 1973.

[9] Komech A. I. *Linear partial differential equations with constant coefficients*. Partial Differential Equations II: Encyclopedia of Mathematical Sciences (Springer) 31: 127-260, 1994.

[10] Komech A. I., Merzon A. E. *Relation between Cauchy data for the scattering by a wedge*. Russian Journal of Mathematical Physics 14 (No. 3): 279-303, ISSN 1061-9208, Pleiades Publishing, Ltd., 2007.

[11] Komech A. I., Merzon A. E. *Stationary diffraction problems on the wedges with general boundary value conditions*. Abstracts of the Conference ”Partial Differential Equations”. Potsdam, Alemania. September, 1993.

[12] Komech A. I., Merzon A. E., Zhevandrov P. N. *On the completeness of Ursell's trapping modes*. Russian Journal Mathematical Physics 4: 457-486, 1996.

[13] Maljuzhinetz G. D. *Excitation, reflection and emission of the surface waves on a wedge with given impedances of the sides*. Doklady Academii Nauk SSSR 121 (No. 3): 436-439, 1958.

[14] Malyshev V. *Random walks, Wiener-Hopf equations in the quadrant of plane, Galois automorphisms*. Moscow University, 1970.

[15] Meister E., Penzel F., Speck F.-O., Teixeira F. S. *Some interior and exterior boundary-value problems for the Helmholtz equaton in a quadrant*. Operator Theory: Advances and Applications 102: 169-178, 1998.

[16] Meister E., Penzel F., Speck F.-O., Teixeira F. S. *Wiener-Hopf-Hankel operator for some wedge diffraction problems with mixed boundary conditions*. Journal of Integral Equations and Applications (2) 4: 229-255, 1992.

[17] Merzon A. E. *General boundary value problems for the Helmholtz equations in a plane angle*. Uspekhi Matemat. Nauk 32: 219-220, 1977 (in Russian).

[18] Merzon A. E., Zhevandrov P. N. *High-frequency asymptotics of edge waves on a beach of nonconstant slope*. SIAM J. Appl. Math. 59 (No. 2): 529-546.

[19] Paley R. E. A. C., Wiener N. *Fourier transforms in the complex domain*. American Mathematical Society, Providence RI. 1934.

[20] Merzon A. E., Speck F.-O., Villalba-Vega T. J. *On the weak solution of the Neumann problem for the 2D Helmholtz equation in a convex cone and H^s regularity*. Mathematical Methods in the Applied Sciences 34: 24-43, 2011.

[21] Petersdorff T. Von *Boundary integral equations for mixed Dirichlet, Neumann and transmission problems*. Mathematical Methods in the Applied Sciences 11: 185-213, 1989.

[22] Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical physics, II: Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press, 1975.

[23] Sobolev S. L. *Applications of functional analysis in mathematical physics*. American Mathematical Society, Providence R.I. 1963.

[24] Sommerfeld A. *Mathematische theorie der diffraction*. Mathematische Annalen 47: 317-341, 1896.

[25] Wloka J.*Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 1982.

[26] Zhevandrov P. N., Merzon A. E. *On the Neumann Problem for the Helmholtz Equation in a Plane Angle*. Mathematical Methods in the Applied Sciences 23: 1401-1446, 2000.

[27] Zhevandrov P. N., Merzon A. E. *Stability of entrained surface waves under small perturbations of the density of the upper layer*. Mathematical Notes (Translated from Matematicheskie Zametki) 64: 814-817, 1998.

Índice alfabético

$FH^{\varepsilon}(\mathbb{R}^2)$, 60
$H^s(\mathbb{R}^n)$, 2
$H^s(\mathcal{V})$, 3
$H^{-1/2+\varepsilon}(\Gamma)$, 8
$H^{-1/2}(\Gamma)$, 8
$H^{1/2}(\Gamma)$, 6
K^+, 25
K_*, 26
$L^{2,\delta}(C)$, 37
$L_2(\Sigma, P)$, 55
$L_2\big(\Sigma, P_\varepsilon\big)$, 61
P, 10
$P(\mathbf{w})$, 55
$P_\varepsilon(\mathbf{w})$, 61
$T(w)$, 37
$T^{\varepsilon}_{1,\Gamma_1}$, 13
$T^{\varepsilon}_{1,\Gamma}$, 10
$T_{0,\Gamma}$, 6
$\mathcal{A}(\mathbf{w})$, 61
$\complement K^+$, 26
$\complement K_*$, 26
C_α, 35
$\mathcal{D}'(M)$, 1
$\mathcal{D}(M)$, 1
$\mathcal{D}(\overline{M})$, 1
$\mathcal{G}(t)$, 37
$\mathcal{H}^1(\Omega)$, 10
$\mathcal{H}^{1+\varepsilon}(\Omega)$, 10
$\mathcal{H}^{1+\varepsilon}_{\Gamma_1}(\Omega)$, 13
$\mathcal{L}(x, y)$, 25
$\Pi^- := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$, 83
Π^b_a, 31
$\mathbb{R}^\pm := \{x \in \mathbb{R} : \pm x > 0\}$, 3
Σ, 53
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 1
$\mathcal{S}'(\overline{M})$, 1
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 1
$\mathcal{S}(\overline{M})$, 1
α, 42
$\check{u}_2(w)$, 49
$\widetilde{H^s}(\mathbb{R}^+)$, 4
a, 42
b, 42
$\mathbf{w}$, 61

datos de Dirichlet, 6, 7
datos de Neumann, 11

ecuación de conexión, 29
ecuación en diferencias, 32
espacio de Schwartz, 1
espacio de Sobolev, 2
extensión impar, 16
extensión por cero, 3

fórmula de Green, 21

lema de Schur, 103
levantamiento, 34

operador traza, 6, 10, 13

problema A, 23
problema B, 25
problema C, 29

transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 1
transformada de Fourier-Plancherel, 37