



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LA TEORÍA DE SEIBERG-WITTEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

RAÚL ALVAREZ PATIÑO



**DIRECTOR DE TESIS
DR. PABLO SUÁREZ SERRATO**

2014



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Hoja de Datos del Jurado

1 DATOS DEL ALUMNO

Apellido Paterno:
Apellido Materno:
Nombre(s):
Universidad:
Facultad:
Carrera:
Número de Cuenta:

1 DATOS DEL ALUMNO

Alvarez
Patiño
Raúl
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304794373

2 DATOS DEL TUTOR

Grado:
Nombre(s):
Apellido Paterno:
Apellido Materno:

2 DATOS DEL TUTOR

Dr.
Pablo
Suárez
Serrato

3 DATOS DEL SINODAL 1

Grado:
Nombre(s):
Apellido Paterno:
Apellido Materno:

3 DATOS DEL SINODAL 1

Dr.
Eugenio
Garnica
Vigil

4 DATOS DEL SINODAL 2

Grado:
Nombre(s):
Apellido Paterno:
Apellido Materno:

4 DATOS DEL SINODAL 2

Dr.
Héctor Hugo
García
Compeán

5 DATOS DEL SINODAL 3

Grado:
Nombre(s):
Apellido Paterno:
Apellido Materno:

5 DATOS DEL SINODAL 3

Dr.
Oscar Alfredo
Palmas
Velasco

6 DATOS DEL SINODAL 4

Grado:
Nombre(s):
Apellido Paterno:
Apellido Materno:

6 DATOS DEL SINODAL 4

Dr.
Gabriel
Ruiz
Hernández

7 DATOS DEL TRABAJO ESCRITO

Título:
Subtítulo:
Número de Páginas:
Año:

7 DATOS DEL TRABAJO ESCRITO

Sobre la Teoría de Seiberg-Witten
113
2014

Agradecimientos

En primer lugar le agradezco a todos y cada uno de los miembros de mi familia por su apoyo incondicional. A mi madre María Elena y a mi padre Raúl por su dedicación constante y por brindarme los medios que me han llevado hasta este punto de mi vida. A mi hermano Rodrigo Alberto por su compañía. De manera muy especial, quiero agradecer y dedicar este trabajo a mis primos Claudia y Roberto por la ayuda que me brindaron en momentos difíciles. Sin su apoyo seguramente hoy no estaría escribiendo esto.

En segundo lugar, me gustaría darle las gracias a todos los profesores de la Facultad de Ciencias de la UNAM que me formaron y que me mostraron el bello camino matemático que he de seguir el resto de mi vida. Un apartado muy especial en mi memoria merecen los profesores: Lic. Antonio Guzmán, Dr. Alberto Güijosa, Dr. Eduardo Nahmad, Dr. Oscar Palmas, Dr. Miguel Alcubierre, Lic. Rosa María Hernández y el Dr. Santiago López de Medrano. Gracias a todos ustedes por su generosidad intelectual y su entusiasmo al momento de transmitirme sus conocimientos.

En este mismo ánimo quiero darle las gracias a mi asesor, el Dr. Pablo Suárez, por el apoyo y paciencia que me brindó durante el tiempo en el que realicé el presente trabajo.

Por último y no por eso es menos importante mencionar a los amigos que me acompañaron durante mi estancia en la Facultad de Ciencias; Alejandra Mayorga, Aurea Nuñez, Carlos Lopez, Daniel Miranda, Edward Reyes, Fidencio Cruz, Gabriela Morales, Jatziri Chávez, Juan Carlos Castro, Juan Carlos Gil, Mariana Cabrera, Marianela Vélez, Raymundo Hernandez, Roque Veloz y Xochitl Morales.

A todos ustedes, infinitas gracias por todo.

Raúl Alvarez Patiño.

Ciudad Universitaria, México D.F. a 21 de Agosto de 2014.

Prefacio

Una variedad topológica de dimensión n es un espacio de Hausdorff M que está modelado localmente por \mathbb{R}^n dotado de la topología usual. Es decir, el espacio topológico M tiene una cubierta por subconjuntos abiertos distinguidos $\mathcal{U} \subseteq M$ junto con una colección de homeomorfismos $\Phi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \Phi_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \subseteq \mathbb{R}^n$ que sirven para describir a M mediante coordenadas locales inducidas por la aplicación $\Phi_{\mathcal{U}}$. A la pareja $(\mathcal{U}, \Phi_{\mathcal{U}})$ descrita anteriormente se le conoce como carta y a la colección de todas las cartas de M se le llama atlas. La equivalencia entre este tipo de espacios es obvia; dos variedades topológicas son equivalentes si son homeomorfas.

Algunas variedades topológicas admiten un refinamiento adicional de su atlas, llamada estructura diferenciable, la cual permite extender las nociones del cálculo a la categoría de variedades. La definición de estructura diferenciable esencialmente requiere que cada vez que dos cartas coordenadas \mathcal{U} y \mathcal{V} tengan intersección no vacía, el correspondiente cambio de coordenadas

$$\Phi_{\mathcal{V}} \circ \Phi_{\mathcal{U}}^{-1} : \Phi_{\mathcal{U}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow \Phi_{\mathcal{V}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}),$$

sea una función suave. Una variedad topológica es diferenciable, o suave, si su atlas admite una estructura diferenciable. La equivalencia entre variedades diferenciables es bastante más sutil; dos variedades suaves M y N son difeomorfas si existe un homeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ tal que al restringirlo a cualquier carta coordenada $\mathcal{U} \subseteq M$ se verifican las siguientes condiciones: primero, $\varphi(\mathcal{U})$ está contenida en una carta coordenada $\mathcal{V} \subseteq N$. En segundo lugar se pide que la representación coordenada de φ inducida por la aplicación $\Phi_{\mathcal{V}} \circ \varphi \circ \Phi_{\mathcal{U}}^{-1} : \Phi_{\mathcal{U}}(\mathcal{U}) \rightarrow \Phi_{\mathcal{V}}(\mathcal{V})$ sea un difeomorfismo entre subconjuntos abiertos del espacio euclidiano. Una equivalencia que verifica las condiciones antes mencionadas se le llama difeomorfismo.

Es fácil ver que esta noción de equivalencia entre variedades suaves implica que la dimensión es invariante bajo difeomorfismos. Bastante más complicado es verificar este hecho en la categoría topológica. Es así que llegamos a la siguiente conclusión; cualesquiera dos variedades homeomorfas tienen la misma dimensión; por lo tanto, podemos clasificar a las variedades por su dimensión. Esta primera clasificación es bastante burda ya que usualmente existe una infinidad de variedades no equivalentes de la misma dimensión. Por tanto, es natural preguntarse por otro tipo de invariantes más poderosos que permitan distinguir entre las distintas variedades de la misma dimensión.

Una de los primeros invariantes fue descubierto por el matemático suizo Georges de Rham. Este invariante, llamado cohomología de de Rham, emplea exhaustivamente la estructura diferenciable de una variedad y por tanto solo está definido en la categoría suave. La cohomología de de Rham permite en muchos casos decidir si dos variedades de la misma dimensión son o no difeomorfas. Esquemáticamente, la construcción de la cohomología de de Rham es como sigue.

Para cada variedad diferenciable M de dimensión n se define un álgebra real graduada

$$H_{dR}^*(M; \mathbb{R}) := H_{dR}^0(M; \mathbb{R}) \oplus \cdots \oplus H_{dR}^n(M; \mathbb{R}).$$

En grado p , el espacio vectorial $H_{dR}^p(M; \mathbb{R})$ es el cociente dado por el espacio vectorial de todas las p -formas ω que satisfacen a la ecuación diferencial parcial lineal $d\omega = 0$ divididas por el subespacio de todos los elementos de la forma $\omega = d\theta$. En la definición anterior el operador lineal $d : \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)$ es la derivada exterior asociada a M (ver por ejemplo [7]). La definición de $H_{dR}^*(M; \mathbb{R})$ hace uso de la identidad $d^2 = 0$ de la siguiente manera; si ω satisface $d\omega = 0$, entonces $\omega' := \omega + d\theta$ también pertenece al núcleo de d sin importar la elección de la $p-1$ forma θ .

Existe otra construcción conceptualmente distinta y mucho más general que asocia a cada espacio topológico X un álgebra real graduada

$$H^*(X; \mathbb{R}) := \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X; \mathbb{R})$$

conocida como cohomología singular de X . De nueva cuenta, $H^*(X; \mathbb{R})$ es la homología de un cierto complejo $C^*(X; \mathbb{R})$ que en grado p se construye a partir del \mathbb{R} -espacio vectorial dual de todos los mapas continuos del simplejo de dimensión p en X . Es importante resaltar que $H^*(X; \mathbb{R})$ solo depende del tipo de homotopía X . Así, la cohomología singular determina un invariante topológico en el caso en que X sea una variedad topológica. En 1931 de Rham demostró que si X es una variedad suave, $H_{dR}^*(X; \mathbb{R})$ y $H^*(X; \mathbb{R})$ son canónicamente isomorfas como álgebras reales graduadas. En particular, el supuesto invariante diferenciable $H_{dR}^*(X; \mathbb{R})$ solo detecta cambios en la estructura homotópica de la variedad y no en la estructura suave.

Empleando métodos relativamente indirectos, John Milnor encontró los primeros ejemplos explícitos de variedades homeomorfas con estructuras diferenciales inequivalentes. Lo que Milnor demostró en su famoso artículo de 1956 [29] es que la esfera de dimensión 7 admite estructuras diferenciables exóticas, es decir, estructuras suaves que no son equivalentes a la estructura diferenciable heredada de la estructura canónica de \mathbb{R}^8 .

Durante aproximadamente 30 años de investigación se encontraron otros ejemplos de variedades suaves con estructuras exóticas, así como invariantes que permitieran distinguir distintas estructuras suaves. Se han logrado avances en este sentido pero hoy en día sigue siendo un problema abierto el encontrar un procedimiento sistemático (definido para cualquier variedad suave) que permita responder las preguntas derivadas del fenómeno de exotividad.

Este trabajo pretende explicar de manera detallada una construcción particular que produce, entre otras cosas, un invariante de la estructura suave de una 4-variedad lisa. Este invariante, conocido desde entonces como invariante de Seiberg-Witten, fue introducido por el físico estadounidense Edward Witten [43, 44] en 1994 y está basado en trabajos previos que, curiosamente, surgieron como resultado de la investigación sobre teorías topológicas cuánticas de campo [42] y del estudio de algunas dualidades que presentan las teorías supersimétricas en cuatro dimensiones [45, 46]. Es importante señalar que dicha construcción, que a continuación describimos de manera breve, tiene severas limitaciones; quizá la más importante es que solamente funciona en el caso de variedades de dimensión 4 cerradas y orientable.

Las condiciones sobre la frontera y de compacidad impuestas sobre la variedad se pueden relajar pero no es posible, o por lo menos no es claro para el autor, como eliminar las restricciones sobre la dimensión y sobre la orientabilidad de la variedad en cuestión.

La idea fundamental de la construcción del invariante de Seiberg-Witten es muy similar a la construcción de la cohomología de de Rham. Supongamos que M es una 4-variedad cerrada y orientable con una métrica riemanniana g de clase C^∞ . Como antes, lo que se hace es considerar el espacio de soluciones a un sistema de ecuaciones diferenciales parciales definidas sobre la variedad riemanniana M por medio de la métrica g , módulo cierta redundancia debida a la presencia de una simetría que actúa en el espacio de configuración asociado a las ecuaciones, conocidas como ecuaciones de Seiberg-Witten.

A diferencia de la cohomología de de Rham, la teoría de Seiberg-Witten es ligeramente no lineal. Esta característica produce un espacio de soluciones generalmente no lineal. De manera un poco más precisa resulta que, bajo ciertas condiciones topológicas sobre M no muy restrictivas, uno puede elegir dentro de un conjunto denso a la métrica riemanniana de manera tal que el espacio de soluciones a las ecuaciones de Seiberg-Witten modulo redundancias sea una variedad suave, orientable, compacta y de dimensión finita. La construcción descrita produce al final un conjunto de espacios de soluciones cuya clase de cobordismo dependen únicamente de la estructura diferenciable de M . Es en este sentido decimos que existe una similitud con la teoría de de Rham. En el primer caso uno asocia a M un álgebra real graduada $H_{dR}^*(X; \mathbb{R})$, en el segundo caso, a M se le asocia una clase de cobordismo de espacios. En ambos casos, el invariante se extrae de un sistema de ecuaciones diferenciales en M módulo cierta redundancia.

Hemos redactado el presente trabajo de manera que sea accesible a los lectores con conocimientos básicos de geometría y topología diferencial. Sin embargo, el autor ha decidido discutir todos los preliminares esenciales para entender las ecuaciones de Seiberg-Witten. A lo largo del texto se proporcionan referencias suficientes para cubrir cualquier tema que el autor haya omitido. También se proporciona una gran cantidad de ejemplos de los conceptos centrales.

Esta tesis está estructurada de la siguiente manera. El primer capítulo esta dedicado a introducir una estructura lineal, conocida como álgebra de Clifford, que permite definir una de las variables presentes en las ecuaciones de Seiberg-Witten; a saber, los espinores. El primer capítulo concluye al exhibir una relación que existe entre el espacio de representación que define a los espinores en cuatro dimensiones y el espacio de bivectores auto duales de \mathbb{R}^4 . Cabe mencionar que dicha relación es fundamental para entender la definición de las ecuaciones de Seiberg-Witten.

En el segundo capítulo se ofrecen algunas nociones generales de la teoría de haces vectoriales necesarias para desarrollar la teoría de obstrucciones de haces vectoriales con estructuras especiales, de entre las cuales, la más relevante para este trabajo es la de estructura espinorial. El segundo capítulo contiene también una revisión somera del concepto de conexión en un haz vectorial y la correspondiente curvatura. Todas las nociones introducidas en el segundo capítulo son necesarias para dar la definición del operador de Dirac que interviene directamente en las ecuaciones de Seiberg-Witten. En la sección 6 del segundo capítulo se prueban algunas propiedades del operador de Dirac y se demuestra la fórmula de Weitzenböck, que será relevante para la teoría de Seiberg-Witten.

Finalmente, en el tercer y último capítulo de esta tesis se discuten las ecuaciones de Seiberg-Witten, así como la redundancia mencionada en los párrafos anteriores. Hacia la mitad del capítulo 3 se introduce el espacio móduli de monopolos (ver definición 3.1), es decir, el espacio de clases de soluciones de las ecuaciones de Seiberg-Witten relacionadas a través de la acción de cierto grupo de Lie que llamaremos grupo de norma (ver definición 2.1). En la sección 3.2 se demuestra el teorema fundamental de la teoría de Seiberg-Witten en el caso en que M sea una 4-variedad simplemente conexa. Este teorema afirma que el espacio de monopolos es, genéricamente, una variedad suave, compacta, orientable y de dimensión finita. Solo hasta el final del tercer capítulo se da una idea panorámica de la construcción del invariante de Seiberg-Witten a partir del espacio de monopolos.

Raúl Alvarez Patiño.

Ciudad Universitaria, México D.F. a 20 de Agosto de 2014.

Índice general

Agradecimientos	III
Prefacio	v
Capítulo 1. Geometría Espinorial	1
1. Motivación Física	1
2. Álgebras de Clifford	3
3. Grupos Spin y Spin ^C	11
4. La Representación Espinorial de Spin ^C	21
Capítulo 2. Estructuras Spin y el Operador de Dirac	33
1. Haces Vectoriales	33
2. Teoría de Obstrucciones y Cohomología de Čech	40
3. Obstrucciones para la Existencia de Estructuras Spin	52
4. Preliminares de Geometría Diferencial	58
4.1. Conexiones en Haces Vectoriales	58
4.2. La Curvatura de una Conexión	64
4.3. El Operador de Hodge y la Topología de las 4-Variedades	69
5. El Haz de Espinores y la Conexión Spin	74
6. El Operador de Dirac	79
Capítulo 3. Teoría de Seiberg-Witten	91
1. Las Ecuaciones de Seiberg-Witten	91
2. El Grupo de Norma y su Acción en el Espacio de Configuraciones	97
3. El Espacio Moduli de Monopolos	100
3.1. Compacidad del Espacio Moduli de Monopolos	100
3.2. El Espacio Moduli de Monopolos es una Variedad Suave	104
3.3. Comentarios Finales Sobre los Invariantes de Seiberg-Witten	108
Apéndice. Bibliografía	111

Geometría Espinorial

En la primera parte del presente capítulo se introduce el concepto de *espinor*, haciendo énfasis en el papel fundamental que juegan estos objetos en la descripción cuántica del electrón. Después se estudiarán a detalle las álgebras de Clifford con el fin de investigar las propiedades básicas de los grupos spin así como algunas de sus representaciones. A manera de ejemplo, se demostrará que la formulación espinorial de la electrodinámica cuántica tiene una interpretación geométrica natural. Asumimos que el lector está familiarizado con el concepto de variedad suave y algunas nociones básicas de álgebra lineal. En [7], [3] se cubre gran parte de este material.

1. Motivación Física

Las tres primeras décadas del siglo XX atestiguaron una revolución en la física estimulada principalmente por novedosos experimentos que confrontaban seriamente las ideas que durante siglos habían fundamentado el entendimiento de la naturaleza. Planck cuestionaba el carácter continuo de la energía, los modelos atómicos de Bohr-de Broglie comenzaban a ganar terreno y la concepción del espacio y del tiempo cambiaba radicalmente gracias a las notables contribuciones de Einstein, Minkowski y Hilbert. Todo el intenso trabajo desarrollado en este periodo encontró síntesis en los postulados de la mecánica cuántica impulsada entre otros por; Born, Heisenberg, Pauli, von Neumann y Schrödinger.

De entre los mayores logros de la teoría se destaca la completa determinación del espectro energético para el átomo de Hidrógeno así como la solución del problema de espectroscopia para algunos átomos más complicados, sin embargo, aún se estaba lejos de tener un formalismo consistente que describiera la interacción entre los átomos que constituyen la materia y campos electromagnéticos externos, en este sentido las observaciones experimentales más contundentes fueron:

- a) El *efecto Zeeman anómalo* descubierto en octubre de 1896 mostraba que las líneas de emisión y absorción de átomos se veían modificadas por campos magnéticos externos.
- b) Los experimentos de *Stern-Gerlach* en 1921 y de *Phipps-Taylor* en 1927, que consistían en dirigir un haz de átomos (de plata en el primer caso y de hidrógeno en el segundo) a una región de campo magnético. La observación fundamental fue que el haz se parte en dos al salir del campo magnético.

De los resultados antes mencionados se desprenden dos conclusiones: (a) existe una contribución al momento magnético de los átomos, adicional al momento magnético orbital, que modifica la estructura fina del espectro energético y (b) se presenta en dos polarizaciones, de manera aparentemente aleatoria para un mismo tipo de átomo.

La esencia del problema al que se enfrentaban los físicos de aquel entonces radica en que no existe una justificación teórica para este nuevo momento magnético dentro de la electrodinámica clásica. Fue hasta octubre de 1925 cuando G. E. Uhlenbeck y S. A. Goudsmit al introducir un nuevo grado de libertad para el electrón, al que llamaron *spin*, lograron un progreso significativo hacia la solución del problema [48, 38]. Este nuevo parámetro se interpretó en aquel entonces como una especie de rotación intrínseca del electrón responsable de producir el momento magnético extra. Esta hipótesis generó una problemática conceptual incluso mayor que la que pretendía resolver. Pauli en particular mostró que un electrón debía girar a una velocidad mayor que la velocidad de la luz para poder tener las propiedades magnéticas prescritas por la teoría de Uhlenbeck-Goudsmit.

Se necesitaron tres años más y uno de los más brillantes físicos de la historia para esclarecer por completo el misterio entorno al spin. La respuesta requirió la incorporación de la relatividad especial a los postulados de la mecánica cuántica, me refiero a la electrodinámica cuántica, o QED por sus siglas en inglés, desarrollada en 1928 por Paul Adrien Maurice Dirac [9]. En este artículo se propone que ψ , la función de onda ¹ del electrón, es una solución a la ecuación

$$(1.1) \quad (i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0,$$

donde \hbar es una constante con unidades de momento angular, llamada constante de Planck, m es la masa del electrón y c representa el valor de la velocidad de la luz en el vacío. Los coeficientes γ^μ , conocidos como *matrices de Dirac*, son constantes caracterizadas por la relación

$$(1.2) \quad \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = -2\eta^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

con $\eta^{\mu\nu}$ las componentes de la métrica de Minkowski $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Cabe destacar que la ecuación (1.1) es de primer orden para preservar la acción isométrica del grupo ortogonal $O(1, 3)$ en espacio de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$, simetría que relaciona sistemas de referencia inerciales en la teoría de la relatividad especial. Observe que la ecuación de Dirac solo tiene sentido si ψ es un elemento del espacio en donde el conjunto de matrices gamma actúa. A los elementos de este espacio se les conoce como *espinores de Dirac*. Por otro lado, la identidad (1.2) implica que el operador $\not{\partial} := i\gamma^\mu\partial_\mu$ está relacionado con operador de Laplace tres dimensional Δ mediante la ecuación

$$(1.3) \quad \not{\partial}^2 = -\partial_0^2 + \Delta.$$

Adelantamos que una forma ligeramente distinta de las relaciones (1.1), (1.2) y (1.3) se volverán cruciales para el desarrollo posterior de la geometría espinorial.

La ecuación de Dirac corresponde a un electrón libre, esto es, se desprecia la influencia de cualquier campo distinto a ψ . Para obtener la teoría con interacciones, es necesario introducir en la ecuación (1.1) el cuadripotencial electromagnético A_μ asociado al campo externo, esto se logra con la sustitución

$$(1.4) \quad \partial_\mu \mapsto \partial_\mu + ieA_\mu,$$

donde e denota la carga eléctrica del electrón. El lector familiarizado con el formalismo de la electrodinámica clásica reconocerá de inmediato que el término eA_μ tiene unidades de momento, lo que es de esperarse en vista del término ∂_μ , variable canónicamente conjugada al cuadrimomento p_μ . Muy importante para nosotros

¹Actualmente ψ se interpreta como un campo cuántico y no como una función de onda.

sera también la llamada *regla de acoplamiento mínimo* (1.4) que estudiaremos en secciones posteriores (secciones 1 y 6) y que en términos prácticos no es otra cosa que una corrección a la energía cinética. La sencilla sustitución (1.4) sienta la base conceptual para el desarrollo de las *teorías de norma* que en sus versiones *no abelianas*, i.e. no lineales, han demostrado ser ingredientes fundamentales en el entendimiento de la física de altas energías, ya que hasta este momento, resultan ser el mejor modelo de las interacciones materia-radiación incluso en situaciones cualitativamente distintas a la electrodinámica cuántica. En esta dirección, el ejemplo más destacado es la teoría de Yang-Mills [47] concebida originalmente para describir algunos aspectos relacionados a las interacciones nucleares.

Por último, recomendamos al lector interesado en una exposición más amplia de QED consultar [8] para un breve resumen de las propiedades básicas y [15] pp. 221-372 para una discusión detallada de la teoría. En [27] puede encontrarse un resumen en orden cronológico de la teoría del electrón dirigido a lectores de inclinación matemática.

2. Álgebras de Clifford

En la presente sección, V denotara un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión $n < \infty$ que servirá de modelo local para el espacio-tiempo. Para esto, dotaremos a V de una estructura métrica generalizada definida en términos de una forma bilineal simétrica y no degenerada. A continuación daremos un breve resumen de la teoría de formas bilineales y sus correspondientes espacios cuadráticos.

DEFINICIÓN 2.1. Una *forma bilineal real* b definida en V es una aplicación \mathbb{R} -bilineal $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos además que b es:

- *Simétrica* si para cada pareja $(v, w) \in V \times V$ se satisface la relación $b(v, w) = b(w, v)$.
- *No degenerada* si las aplicaciones lineales $b_w^1 := b(w, \cdot)$, $b_w^2 := b(\cdot, w)$ establecen isomorfismos entre V y su espacio dual $V^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ para todo elemento $w \in V$ distinto de cero.

En adelante, forma bilineal se entenderá como: real, simétrica y no degenerada.

OBSERVACIÓN 2.2. El espacio de formas bilineales simétricas suele denotarse por $\text{Sym}^2 V^*$. Mas generalmente $\text{Sym}^m V^*$ se define como el espacio de todas las aplicaciones m -lineales $f : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simétricas, es decir, que satisfacen

$$f(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_m) = f(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_m), \quad 1 \leq i \leq m.$$

A tales funcionales se les llama simplemente m -formas simétricas, estas forman un espacio vectorial real de dimensión determinada por el coeficiente binomial

$$(2.1) \quad \dim \text{Sym}^m V^* = \binom{n+m-1}{m}, \quad n = \dim V.$$

En particular $\dim \text{Sym}^2 V^* = n(n+1)/2$. Note además que a diferencia de $\Lambda^p V$ $\text{Sym}^p V \neq 0$ cuando $p > n$.

OBSERVACIÓN 2.3. Respecto a una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V la forma bilineal b tiene asociada una matriz simétrica $n \times n$ con coeficientes $B_{ij} := b(e_i, e_j)$. Así, b es no degenerada sí y solo sí la matriz $B = (B_{ij})$ tiene rango n .

Dada una forma bilineal $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ podemos construir una *forma cuadrática asociada*, denotada por q_b , mediante la correspondencia $v \mapsto b(v, v)$. Al fijar una base $\{e_1, \dots, e_n\} \hookrightarrow V$ se induce una identificación $V \simeq \mathbb{R}^n$ que realiza la forma asociada a b como un polinomio homogéneo de segundo grado cuya matriz de coeficientes es por construcción simétrica. La expresión para q_b se escribe directamente en términos de las coordenadas como

$$x^i x^j B_{ij} = v^t B v, \quad v = x^i e_i.$$

Consideremos ahora un polinomio homogéneo de segundo grado q definido en V y sea $Q = (Q_{ij})$ la correspondiente matriz de coeficientes. Si además $Q = Q^t$ decimos que q es una *forma cuadrática* en V . En esta situación definimos la forma bilineal asociada a q , denotada por b_q , mediante la *identidad de polarización*

$$(2.2) \quad 2b_q(u, v) := q(u + v) - q(u) - q(v).$$

Un cálculo simple muestra que, con las elecciones anteriores, la identidad de polarización se escribe en términos de Q como

$$2b_q(u, v) = u^t Q v + v^t Q u.$$

La discusión anterior revela que bajos las condiciones apropiadas, la teoría de formas bilineales es equivalente a la teoría de formas cuadráticas. Más precisamente, es fácil verificar que $b \mapsto q_b$, $q \mapsto b_q$ son correspondencias inversas. En resumen, hemos visto que un isomorfismo $V \simeq \mathbb{R}^n$ identifica $\text{Sym}^2 V^*$ con el conjunto de formas cuadráticas definidas en V . Por tanto, en algunas ocasiones, no haremos distinción entre los elementos de estos dos conjuntos.

La siguiente proposición caracteriza una forma bilineal b por el número de valores propios positivos y negativos. Debido a que este es un resultado ampliamente conocido, únicamente lo enunciamos y referimos al lector al texto [34] pp. 269-270 donde puede encontrar una prueba completa de esta afirmación.

PROPOSICIÓN 2.1 (Ley de inercia de Sylvester). *Existe una base de V para la cual $b = -\text{id}_r \oplus \text{id}_s$. Es decir, b está representada por la matriz*

$$(2.3) \quad \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_s \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{1}_r$ es la matriz identidad de $r \times r$, $\mathbf{1}_s$ es la identidad de $s \times s$ y $\mathbf{0}$ representa matrices de ceros de dimensiones adecuadas.

Una consecuencia inmediata de la proposición 2.1 es que dos formas bilineales b y \hat{b} definidas en V son equivalentes sobre los reales sí y solo sí $\text{Tr } b = \text{Tr } \hat{b}$. Al invariante $\text{Tr } b = s - r$ se le denomina *signatura* de b . En otras palabras, la proposición anterior asegura que una forma bilineal b está completamente determinada por la pareja de números $(\text{rk } b, \text{Tr } b) = (s + r, s - r)$ conocida como *inercia*.

DEFINICIÓN 2.4. Un *espacio cuadrático* es una pareja (V, q) , donde q representa a toda una clase de equivalencia de formas cuadráticas definidas en V ². En vista de la proposición 2.1 eventualmente usaremos la notación $V^{r,s}$ para referirnos a un espacio cuadrático de dimensión $r + s$ cuya forma bilineal asociada b_q sea la forma diagonal de inercia $(r + s, s - r)$.

²Esto quiere decir que consideraremos como iguales a dos parejas (V, q) y (V, q') siempre que q y q' sean formas equivalentes.

EJEMPLO 2.1. *El ejemplo paradigmático de espacio cuadrático es sin duda el espacio euclidiano, definido por la pareja $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|^2)$.*

EJEMPLO 2.2. *Otro ejemplo importante, bien conocido en física es el antes mencionado espacio-tiempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3} = (\mathbb{R}^4, \eta)$ cuya forma bilineal b_η está representada por la matriz diagonal*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El signo negativo en la primer entrada de b_η está relacionado con el valor de la velocidad de la luz y el hecho que es constante para todos los sistemas de referencia asociados a observadores inerciales. Otro aspecto importante de la forma bilineal η es que determina la estructura causal del espacio-tiempo [35], es decir, establece la diferencia entre presente, pasado y futuro para cada observador inercial.

Sea W un espacio vectorial y (V, q) un espacio cuadrático. Una transformación lineal $T : W \rightarrow V$ induce una forma cuadrática T^*q en W definida como $T^*q = q \circ T$ que dota a W de estructura de espacio cuadrático. Si además W tiene definida una forma cuadrática \hat{q} , decimos que T es una isomería si $\hat{q} = T^*q$. De esta definición se sigue inmediatamente que el conjunto

$$(2.4) \quad \mathrm{O}(V, q) := \left\{ T \in \mathrm{Aut}V \mid T^*q = q \right\}$$

forma un grupo bajo la composición de transformaciones conocido como grupo de isometrías de (V, q) . Cuando q se representa en forma diagonal, el grupo de isometrías de $(V, q) \simeq V^{r,s}$ se denota por $\mathrm{O}(r, s)$ y en este caso se llama grupo ortogonal generalizado de tipo (r, s) . Si Q es la matriz de coeficientes de q , es fácil ver que $q \circ T = q$ sí y solo sí

$$(2.5) \quad T^t Q T = Q, \quad \text{o equivalentemente,} \quad T^t Q = Q T^{-1}.$$

Por otra parte, recordemos que $T \in \mathrm{Aut}V$ si y solamente si $\det T \neq 0$. En consecuencia el grupo de automorfismos de V es un conjunto abierto del espacio vectorial n^2 -dimensional $\mathrm{End}V$ obtenido como el complemento de la imagen inversa de $\{0\} \subset \mathbb{R}$ bajo la función continua $\det : \mathrm{End}V \rightarrow \mathbb{R}$.

Los argumentos del párrafo anterior prueban que $\mathrm{Aut}V$ es una variedad diferenciable de dimensión n^2 . Este resultado nos sugiere la siguiente

PROPOSICIÓN 2.2. *$\mathrm{O}(V, q)$ es un grupo de Lie de dimensión $n(n-1)/2$.*

DEMOSTRACIÓN. Considere la aplicación suave $\Phi : \mathrm{Aut}V \rightarrow \mathrm{Sym}^2 V^*$ definida como $\Phi(T) = q \circ T$. Claramente $\mathrm{O}(V, q) = \Phi^{-1}(q)$, entonces debemos probar que q es un valor regular de Φ para todo elemento $T \in \mathrm{O}(V, q)$ [14]. La diferencial de Φ en T tiene la siguiente expresión

$$(2.6) \quad d_T \Phi(X) = T^t Q X + X^t Q T, \quad X \in T_T \mathrm{Aut}V \simeq \mathrm{End}V.$$

Usando la ecuación (2.5) vemos que el miembro derecho de (2.6) se re escribe como $Q T^{-1} X + X^t Q T$. Sea $A \in T_{\Phi(T)} \mathrm{Sym}^2 V^* \simeq \mathrm{Sym}^2 V^*$ arbitrario. Aplicando $d_T \Phi$ al elemento $B := T Q A$ obtenemos

$$d_T(B) = Q^2 A + A^t Q^t Q.$$

Por la proposición 2.1 podemos suponer a Q en su representación diagonal, así tenemos que $Q^t = Q$ y $Q^2 = 1$. En consecuencia $d_T\Phi(B) = A + A^t = 2A$. Entonces $1/2B$ es una solución a la ecuación $d_T(X) = A$, que es lo que buscábamos. Es claro que las operaciones del grupo, al ser funciones racionales no singulares de las componentes de T , dotan a $O(V, q)$ con una estructura de grupo compatible con la estructura diferenciable encontrada en párrafos anteriores. Por último, de (2.1) y el teorema del valor regular concluimos que

$$\frac{n(n+1)}{2} = \text{Codim}\{q\} = \text{Codim}O(V, q) = n^2 - \dim O(V, q).$$

Una ligera manipulación algebraica prueba que la dimensión del grupo de isometrías es exactamente $n(n-1)/2$ como se afirmaba. \square

COROLARIO 2.1. *El álgebra de Lie del grupo de isometrías de (V, q) , denotada por $\mathfrak{o}(V, q)$, es isomorfa a*

$$(2.7) \quad \text{Ker } d_{\text{id}}\Phi = \left\{ X \in \text{End}V \mid QX + X^tQ = 0 \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. $\mathfrak{o}(V, q) \simeq T_{\text{id}}O(V, q) \simeq \text{Ker } d_{\text{id}}\Phi$. \square

Es importante resaltar que la dimensión de $O(V, q)$ es independiente de la signatura de q , esta es una de las pocas propiedades que tienen en común los grupos de isometrías para distintas elecciones de q . Por ejemplo, cuando q es la forma euclidiana usual $\|\cdot\|^2$, el correspondiente grupo de isometrías es una variedad compacta con dos componentes conexas indicadas por el signo del determinante (Si $T \in O(V, \|\cdot\|^2)$ entonces $(\det T)^2 = 1$). En contraste, los grupos de isometrías de tipo (r, s) son siempre no compactos y con cuatro componentes conexas.

Sin embargo, hay otra propiedad topológica especial que comparten todos estos grupos, a saber, la existencia de un grupo que cubre dos veces a $O(V, q)$ mediante un homomorfismo suave. Veremos más adelante que en la mayoría de los casos, el recubrimiento se restringe a un homomorfismo entre el *grupo ortogonal especial* asociado al espacio cuadrático (V, q)

$$(2.8) \quad \text{SO}(V, q) := \left\{ T \in O(V, q) \mid \det T = 1 \right\}$$

y un recubrimiento universal que a su vez resulta ser un grupo de Lie, llamado $\text{Spin}(V, q)$. Para esto introducimos a continuación el formalismo de álgebras de Clifford, que es el contexto natural de la relación entre $\text{SO}(V, q)$ y $\text{Spin}(V, q)$.

DEFINICIÓN 2.5. Sea (V, q) un espacio cuadrático. Un álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(V, q)$ es una \mathbb{R} -álgebra asociativa y con unidad generada por V sujeta a la relación

$$(2.9) \quad v^2 + q(v)1 = 0 \quad , \quad v \in V.$$

OBSERVACIÓN 2.6. La identidad de polarización (2.2) en la página 4 implica que la ecuación (2.9) es equivalente a la ecuación

$$(2.10) \quad uv + vu + 2b_q(u, v)1 = 0.$$

Explícitamente tenemos que $(u+v)^2 + q(u+v)1$ se desarrolla como

$$u^2 + v^2 + uv + vu + q(u+v)1 = uv + vu + [q(u+v) - q(u) - q(v)]1.$$

Note además que la ecuación (1.2) en la página 2 es un caso particular de (2.10) para $q = \eta$ definida en el ejemplo 2.2. En analogía con $[u, v]$, es común denotar a la expresión $uv + vu$ como $\{u, v\}$ y llamarlo *anticonmutador* de u y v .

TEOREMA 2.2. *Para cada espacio cuadrático (V, q) existe un modelo no trivial para el álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(V, q)$ de dimensión $2^{\dim V}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T}(V)$ el álgebra tensorial de V definida como $\bigoplus_{m \geq 0} V^{\otimes m}$ donde $V^{\otimes m}$ denota al producto tensorial de m copias de V y $V^{\otimes 0} := \mathbb{R}$. Definimos $\mathcal{I}_q(V)$ como el ideal bilateral generado por elementos de la forma $v \otimes v + q(v)1$ para cada $v \in V$. Es claro que

$$(2.11) \quad \mathcal{T}(V) / \mathcal{I}_q(V)$$

es un \mathbb{R} -álgebra asociativa y con unidad en donde se satisface la relación (2.9) y en consecuencia es un candidato para $\mathcal{Cl}(V, q)$. Veamos que $V^{\otimes 1} := V$ puede identificarse con su imagen bajo la proyección canónica $\pi_q : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{Cl}(V, q)$. Para esto debemos probar que V interseca trivialmente a $\mathcal{I}_q(V)$. Sea $\theta \in \mathcal{I}_q(V) \cap V$, por un lado θ es una suma finita de la forma

$$\sum_i x_i \otimes [v_i \otimes v_i + q(v_i)1] \otimes y_i; \quad x_i \in V^{\otimes p_i}, \quad y_i \in V^{\otimes q_i},$$

que está agrupada de manera tal que a diferentes valores del índice i corresponden elementos x_i, y_i de distinto grado. También suponemos que en la suma anterior no hay términos con $v_i = 0$. Por otra parte, $\theta \in V$ implica que los términos de grado distinto a uno en la suma anterior deben ser todos iguales a cero, es decir

$$(2.12) \quad \sum_i x_i \otimes v_i \otimes v_i \otimes y_i = 0$$

$$(2.13) \quad \sum_j [q(v_j)1] x_j \otimes y_j = 0.$$

Donde j se ha elegido en (2.13) de manera que $\deg x_j + \deg y_j$ sea igual a cero o estrictamente mayor que uno. Con estas consideraciones, tenemos que

$$\theta = \sum_{k \neq j} [q(v_k)x_k 1] y_k, \quad \text{donde} \quad \deg x_k = 0, \quad \deg y_k = 1.$$

La ecuación (2.12) se satisface en el álgebra tensorial $\mathcal{T}(V)$ sí y solo sí se anula término a término. En particular $x_k \otimes v_k \otimes v_k \otimes y_k = 0$ para cada posible valor de k . Como $v_k \neq 0$ deducimos que $x_k = 0$ o bien $y_k = 0$, ambos casos implican que $\theta = 0$ como se afirmaba. Por último consideremos una base q -ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\} \hookrightarrow V$, esto es, una base que induce un isomorfismo de espacios cuadráticos $(V, q) \simeq V^{r,s}$. Como hemos visto, $\mathcal{Cl}(V, q)$ está generada como \mathbb{R} -álgebra por todos los productos de la forma $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$. Veamos que el producto anterior contiene a lo mas k factores distintos. En efecto, si hubiese elementos repetidos usamos la relación (2.10) para llevar estos elementos, mediante permutaciones sucesivas, uno al lado del otro. Dado que estos elementos forman una base q -ortonormal, al final se obtiene un factor ± 1 por cada permutación realizada así como por cada pareja de vectores básicos repetidos. Por lo tanto asumiremos de ahora y en adelante que en un monomio $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ los índices tiene el orden $i_1 < \cdots < i_k$. De lo anterior se sigue inmediatamente que

$$(2.14) \quad \dim \mathcal{Cl}(V, q) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Esto completa la prueba del teorema. \square

COROLARIO 2.3. $\mathcal{Cl}(V, q)$ está caracterizada universalmente por la relación (2.9). Es decir, para cualquier \mathbb{R} -álgebra asociativa con unidad \mathcal{A} y cada transformación lineal $\varphi : V \rightarrow \mathcal{A}$ con la propiedad

$$(2.15) \quad [\varphi(v)]^2 + q(v)1_{\mathcal{A}} = 0.$$

Existe un único morfismo de \mathbb{R} -álgebras $\varphi_* : \mathcal{Cl}(V, q) \rightarrow \mathcal{A}$ que hace conmutativo el diagrama

$$(2.16) \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{Cl}(V, q) \\ & \searrow \varphi & \downarrow \varphi_* \\ & & \mathcal{A}. \end{array}$$

En particular $\mathcal{Cl}(V, q)$ es única salvo isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Cualquier aplicación lineal $\varphi : V \rightarrow \mathcal{A}$ induce un homomorfismo de \mathbb{R} -álgebras $\hat{\varphi} : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{A}$ que extiende φ al álgebra tensorial de V [13]. Este morfismo está definido en los generadores del álgebra tensorial como

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \\ v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k} &\mapsto \varphi(v_{i_1}) \cdots \varphi(v_{i_k}). \end{aligned}$$

La ecuación (2.15) implica que $\hat{\varphi}$ se anula en el ideal $\mathcal{I}_q(V)$ y en consecuencia $\hat{\varphi}$ se factoriza a través de la proyección canónica $\pi_q : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{Cl}(V, q)$ mediante un único morfismo $\varphi_* : \mathcal{Cl}(V, q) \rightarrow \mathcal{A}$ que actúa en los generadores del álgebra de Clifford como $\varphi_*(v_{i_1} \cdots v_{i_k}) = \varphi(v_{i_1}) \cdots \varphi(v_{i_k})$. Es claro que φ_* hace conmutativo el diagrama (2.16). Supongamos ahora que $(\mathcal{Cl}(V, q), j : V \hookrightarrow \mathcal{Cl}(V, q))$ es otro modelo de álgebra de Clifford para (V, q) . Los monomorfismos lineales

$$j : V \hookrightarrow \mathcal{Cl}(V, q), \quad j_* : V \hookrightarrow \mathcal{Cl}(V, q)$$

inducen morfismos $j_* : \mathcal{Cl}(V, q) \rightarrow \mathcal{Cl}(V, q)$, $j_* : \mathcal{Cl}(V, q) \rightarrow \mathcal{Cl}(V, q)$ tales que $j \circ j_* = j$, $j \circ j_* = j$. Se sigue entonces que $j \circ (j_* \circ j_*) = j$ y $j \circ (j_* \circ j_*) = j$. Así

$$\text{Im}(j_* \circ j_* - 1) \subseteq \ker j, \quad \text{Im}(j_* \circ j_* - 1) \subseteq \ker j.$$

Esto solo es posible si j_* y j_* son morfismos inversos. \square

OBSERVACIÓN 2.4. Usando la unicidad asegurada por el corolario anterior, es sencillo verificar que $(\varphi \circ \phi)_* = \varphi_* \circ \phi_*$ para cualesquiera dos aplicaciones lineales φ y ϕ que preserven las correspondientes formas cuadráticas y es aún más fácil ver que $\text{id}_{V_*} = \text{id}_{\mathcal{Cl}(V, q)}$. En otras palabras, $\mathcal{Cl}(\)$ es un funtor covariante [13] de la categoría de espacios cuadráticos en la categoría de \mathbb{R} -álgebras.

Consideremos ahora un elemento $T \in O(V, q)$, de acuerdo con la observación anterior la acción canónica $O(V, q) \times V \rightarrow V$ se extiende naturalmente a una acción de $O(V, q)$ en $\mathcal{Cl}(V, q)$. Más aún, es fácil ver que el homomorfismo asociado $O(V, q) \rightarrow \text{Aut } \mathcal{Cl}(V, q)$ es inyectivo, esto quiere decir que podemos pensar a $O(V, q)$ como un subgrupo de $\text{Aut } \mathcal{Cl}(V, q)$. En particular la involución $P : V \rightarrow V$ definida como $P(v) = -v$ induce la descomposición

$$(2.17) \quad \mathcal{Cl}(V, q) = \mathcal{Cl}_0(V, q) \oplus \mathcal{Cl}_1(V, q)$$

donde $\mathcal{Cl}_0(V, q) := \text{Ker}(P_* - \text{id})$ se denomina *parte par* del álgebra de Clifford y $\mathcal{Cl}_1(V, q) := \text{Ker}(P_* + \text{id})$ es la *parte impar*. Observe que $\mathcal{Cl}_0(V, q)$, (resp. $\mathcal{Cl}_1(V, q)$)

está generado por productos con un número par (resp. impar) de elementos básicos en V , de ahí el nombre de estos subespacios. También se satisface

$$(2.18) \quad \mathcal{C}l_i(V, q) \cdot \mathcal{C}l_j(V, q) \subseteq \mathcal{C}l_{i+j}(V, q) \quad , i + j \pmod{2}.$$

Un álgebra con las propiedades (2.17) (2.18) se llama álgebra \mathbb{Z}_2 -graduada o brevemente *súperálgebra*. Así $\mathcal{C}l(V, q)$ es un ejemplo de súperálgebra. El siguiente resultado nos sera de utilidad más adelante.

PROPOSICIÓN 2.3. *Existe un isomorfismo de \mathbb{R} -álgebras*

$$(2.19) \quad \mathcal{C}l(r, s) \simeq \mathcal{C}l_0(r, s + 1)$$

donde $\mathcal{C}l(r, s) := \mathcal{C}l(V^{r,s})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{e_1, \dots, e_{s+1}\}$ una base q -ortonormal para $V^{r,s+1}$, se sigue entonces de la definición que

$$V^{r,0} = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1, \dots, e_r\}, \quad V^{0,s+1} = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{e_{r+1}, \dots, e_{s+1}\}.$$

Identificando $V^{r,s}$ con $\text{Span}_{\mathbb{R}}\{e_i \mid i \neq r+1\}$ podemos definir la transformación lineal $\varphi : V^{r,s} \rightarrow \mathcal{C}l_0(r, s+1)$ dada en los generadores por $\varphi(e_i) = e_{r+1}e_i$. Así para cada $v \in V^{r,s}$ se cumple

$$[\varphi(v)]^2 = \sum_{i,j \neq r+1} v^i v^j e_{r+1} e_i e_{r+1} e_j = \sum_{i,j \neq r+1} v^i v^j e_i e_j = v^2 = -q(v).$$

Donde hemos usado que $e_{r+1}^2 = -1$ y $\{e_{r+1}, e_k\} = 0$ para todo valor admisible de k . Así, la propiedad universal (2.15) implica que φ induce un morfismo de \mathbb{R} -álgebras $\varphi_* : \mathcal{C}l(r, s) \rightarrow \mathcal{C}l_0(r, s+1)$. Esta aplicación es un epimorfismo pues

$$e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} = (-1)^k e_{r+1}^{2k} (e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}}) = \pm (e_{r+1} e_{i_1}) \cdots (e_{r+1} e_{i_{2k}}) = \varphi_*(\pm e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}}).$$

La inyectividad de φ_* se verifica de manera similar. \square

Estamos ahora en condiciones de definir los grupos mas importantes de este trabajo, pero antes queremos concluir con esta sección calculando algunas de las álgebras de Clifford de espacios de dimensión baja. Para esto usaremos la convención introducida en la definición 2.4 del espacio cuadrático $V^{r,s}$.

EJEMPLO 2.3. *El primer ejemplo sale un poco del esquema establecido hasta ahora ya que si tomamos como forma cuadrática en V a la forma totalmente degenerada $q \equiv 0$, obtenemos que $\mathcal{C}l(V, 0)$ es isomorfa al álgebra exterior de V definida como*

$$\Lambda V := \bigoplus_{0 \leq p \leq n} \Lambda^p V.$$

Esto sigue inmediatamente de la relación (2.9) en la página 6. Observe que, en general, existe un isomorfismo como espacios vectoriales $\mathfrak{q} : \Lambda V \rightarrow \mathcal{C}l(V, q)$ para todo espacio cuadrático (V, q) definido en los generadores como $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mapsto e_{i_1} \cdots e_{i_k}$. Algunos autores llaman a esta aplicación isomorfismo de cuantización.

EJEMPLO 2.4. *Salvo equivalencia existe dos espacios cuadráticos unidimensionales denotados como $\mathbb{R}^{1,0}$ y $\mathbb{R}^{0,1}$. Por otra parte, resulta que el álgebra tensorial de \mathbb{R} se identifica naturalmente con el álgebra de polinomios en una variable $\mathbb{R}[x]$, por lo tanto se tiene un isomorfismo obvio $\mathcal{C}l(0, 1) \simeq \mathbb{C}$. El álgebra correspondiente a $\mathbb{R}^{1,0}$ es la suma directa de dos copias de los reales como álgebra sobre si mismo. El isomorfismo $\mathcal{C}l(1, 0) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ está inducido por $1 \mapsto (1, 1)$, $e \mapsto (1, -1)$.*

EJEMPLO 2.5. Sea $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^{0,2}$. Las correspondencias $i \mapsto e_1$, $j \mapsto e_2$ y $k \mapsto e_1 e_2$ identifican el álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(0,2)$ con los cuaternios \mathbb{H} .

EJEMPLO 2.6. $\mathcal{Cl}(0,3) \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Esto puede verificarse fácilmente notando que el morfismo de \mathbb{R} -álgebras inducido por la biyección

$$\begin{aligned} (1, 0) &\mapsto \frac{1 + e_1 e_2 e_3}{2} & (0, 1) &\mapsto \frac{1 - e_1 e_2 e_3}{2} \\ (i, 0) &\mapsto \frac{e_1 e_2 - e_3}{2} & (0, i) &\mapsto \frac{e_1 e_2 + e_3}{2} \\ (j, 0) &\mapsto \frac{e_2 e_3 - e_1}{2} & (0, j) &\mapsto \frac{e_2 e_3 + e_1}{2} \\ (k, 0) &\mapsto \frac{e_3 e_1 - e_2}{2} & (0, k) &\mapsto \frac{e_3 e_1 + e_2}{2} \end{aligned}$$

satisface las relaciones que definen el álgebra de Clifford correspondiente. Por supuesto, aquí $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{0,3}$. Observe además que respecto a la descomposición anterior, $\mathcal{Cl}_0(0,3) \simeq \mathbb{H}$ se encaja diagonalmente en $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ y la copia de $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathcal{Cl}(0,3)$ se identifica con el espacio de cuaternios puros α de la forma $(\alpha, -\alpha)$.

EJEMPLO 2.7. Sea $\{\gamma^\mu \mid 0 \leq \mu \leq 3\}$ una base ortonormal para el espacio-tiempo de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$. Entonces $\mathcal{Cl}(1,3) \simeq \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{H})$ está inducido por

$$\gamma^0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Existe otra representación que se obtiene al remplazar los elementos $1, i, j, k$ por las matrices de Pauli extendidas

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de tal manera que las matrices γ^i para $i = 1, 2, 3$ sean antisimétricas por bloques, es decir, que el bloque superior derecho sea igual a menos el bloque inferior izquierdo

$$(2.20) \quad \gamma^0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sigma^0 \\ \sigma^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\sigma^\mu = \eta^{\mu\nu} \sigma_\nu$. A esta representación, usual en textos de teoría cuántica, se le conoce con el nombre de representación quiral o representación de Weyl.

EJEMPLO 2.8. Para obtener la representación matricial del álgebra de Clifford en 4 dimensiones euclidianas $\mathcal{Cl}(0,4)$ en la base quiral o de Weyl simplemente identificamos los generadores $\{\gamma^\mu \mid 1 \leq \mu \leq 4\}$ con las matrices

$$(2.21) \quad \gamma^\mu \mapsto \begin{pmatrix} 0 & e^\mu \\ -(e^\mu)^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

donde e^μ denota el análogo euclidiano de las matrices de Pauli. Explícitamente

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e^4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Note que a diferencia de las matrices de Pauli; $(e^\mu)^2 = -\text{id}_{2 \times 2}$. De hecho, $\{e^\mu \mid 1 \leq \mu \leq 4\}$ es una base para una representación de los cuaternios $\mathbb{H} \simeq \mathcal{Cl}(0,2)$.

EJEMPLO 2.9. *El álgebra de Clifford del “tiempo-espacio” de Minkowski $\mathbb{R}^{3,1}$, generado por elementos ortonormales $\{\gamma_0, \dots, \gamma_3\}$, es isomorfa a $\text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$. La identificación se induce por la correspondencia*

$$\gamma_0 \mapsto \begin{pmatrix} -i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matemáticamente no es sorprendente observar que $\mathcal{Cl}(1, 3)$ y $\mathcal{Cl}(3, 1)$ no son isomorfas como \mathbb{R} -álgebras asociativas. Sin embargo, este resultado advierte un problema de ambigüedad desde el punto de vista de la física, en donde se usan de manera indistinta los espacios $\mathbb{R}^{1,3}$ y $\mathbb{R}^{3,1}$ como modelos del espacio-tiempo. Esto se soluciona formalmente tras notar que la *complexificación* $\mathcal{Cl}(1, 3) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ y su contraparte simétrica $\mathcal{Cl}(3, 1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ resultan isomorfas a $\text{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{C})$ como álgebras asociativas complejas. Este hecho se justifica teóricamente si se interpreta a la complexificación como una forma de asignar carga eléctrica a los campos espinoriales que describen al electrón.

Concluimos la sección mencionado que el álgebra de Clifford de cualquier espacio cuadrático $V^{r,s}$ puede calcularse usando algunos de los isomorfismos dados en los párrafos anteriores junto con un par de resultados adicionales que pueden consultarse en el capítulo I, sección 4 de [16]. De esta clasificación se sigue que todas las álgebras de Clifford se identifican ya sea con el álgebra de matrices $\text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{F})$ si $s+1 \not\equiv r \pmod{4}$ o bien con $\text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{F}) \oplus \text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{F})$ si $s+1 \equiv r \pmod{4}$ para algún valor adecuado de k , y donde \mathbb{F} es una de las tres posibles \mathbb{R} -álgebras de división $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

3. Grupos Spin y Spin^C

Comencemos notando que cualquier elemento $v \in V$ que no es anulado por q representa un elemento invertible de $\mathcal{Cl}(V, q)$. Es claro que el elemento inverso v^{-1} está dado por $-1/q(v)v$. Más generalmente podemos considerar el grupo de unidades $\mathcal{Cl}^\times(V, q)$ asociado al álgebra $\mathcal{Cl}(V, q)$. Este grupo actúa por conjugación en el álgebra de Clifford. Es decir, existe un homomorfismo de grupos

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \text{Ad} : \mathcal{Cl}^\times(V, q) &\longrightarrow \text{Aut } \mathcal{Cl}(V, q) \\ \xi &\longmapsto \text{Ad}_\xi \end{aligned}$$

llamado *representación adjunta*

$$(3.2) \quad \text{Ad}_\xi x = \xi x \xi^{-1}.$$

La siguiente proposición muestra que la restricción de esta representación a los elementos invertibles de $V \hookrightarrow \mathcal{Cl}(V, q)$ preservan este encaje y en consecuencia puede considerarse como una acción en V .

PROPOSICIÓN 3.1. *Sean $v, w \in V$ tal que $q(v) \neq 0$. Entonces $-\text{Ad}_v$ actúa como una reflexión a través del hiperespacio q -ortogonal a v , esto es*

$$(3.3) \quad -\text{Ad}_v w = w - 2 \frac{b_q(w, v)}{q(v)} v.$$

Además se satisface la ecuación $\text{Ad}_v^* q = q$.

DEMOSTRACIÓN. De las identidades; $v^{-1} = -1/q(v)v$, $\{w, v\} = -2b_q(w, v)$ se sigue inmediatamente que

$$-q(v)\text{Ad}_v w = v w v = -v^2 w - 2b_q(w, v)v = q(v)w - 2b_q(w, v)v.$$

Para ver que la acción adjunta preserva la forma cuadrática q , recordemos que $q(v)$ se obtiene de evaluar la forma bilineal asociada b_q en la diagonal de $V \times V$.

$$(\text{Ad}_v^* q)(w) = q \left[-w + 2 \frac{b_q(w, v)}{q(v)} v \right] = q(-w) - 4 \frac{[b_q(w, v)]^2}{q(v)} + q \left[2 \frac{b_q(w, v)}{q(v)} v \right].$$

□

De regreso a la discusión general, recordemos que la naturaleza funtorial de las álgebras de Clifford permite identificar a $O(V, q)$ con un subgrupo de $\text{Aut } \mathcal{C}\ell(V, q)$ que preserva el subespacio $V \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(V, q)$ así como la estructura de súperálgebra de $\mathcal{C}\ell(V, q)$ definida anteriormente por 2.17 , 2.18 en la página 9. Una consecuencia inmediata de la proposición 3.1 es que la imagen de la representación adjunta está contenida en el subgrupo antes mencionado. Observe además que $\text{Ad}_{tv} = \text{Ad}_v$ para todo $t \in \mathbb{R}^\times$ y todo elemento $v \in V$, este hecho nos conduce de manera natural a la siguiente

DEFINICIÓN 3.1. Denotamos como $\text{Pin}(V, q)$ al subgrupo de $\mathcal{C}\ell^\times(V, q)$ generado por los elementos $v \in V$ tales que $q(v) = \pm 1$, es decir por elementos en la q -esfera unitaria contenida en V . Es para nosotros de suma importancia el subgrupo

$$(3.4) \quad \text{Spin}(V, q) := \text{Pin}(V, q) \cap \mathcal{C}\ell_0(V, q).$$

En otras palabras, $\text{Pin}(V, q)$ es el grupo de todos los productos de elementos en la q -esfera unitaria mientras que $\text{Spin}(V, q)$ está generado por aquellos monomios con un número par de factores unitarios.

OBSERVACIÓN 3.2. $\text{Pin}(V, q)$ contiene una base de $\mathcal{C}\ell(V, q)$ como espacio vectorial mientras que $\text{Spin}(V, q)$ contiene una base del subespacio vectorial $\mathcal{C}\ell_0(V, q)$. En consecuencia

- Dos representaciones (reales o complejas) de $\mathcal{C}\ell_0(V, q)$ cuyas restricciones a $\text{Spin}(V, q)$ coinciden son necesariamente representaciones isomorfas.
- Si A un módulo (real o complejo) sobre $\mathcal{C}\ell_0(V, q)$ y $A' \subset A$ es invariante bajo la acción de $\text{Spin}(V, q)$, entonces A' es un $\mathcal{C}\ell_0(V, q)$ -submódulo.

Las afirmaciones análogas para $\text{Pin}(V, q)$ y $\mathcal{C}\ell(V, q)$ son igualmente ciertas.

Veamos a continuación algunos ejemplos explícitos de estos grupos asociados a las álgebras de Clifford que calculamos en la página 9.

EJEMPLO 3.1. Dado que $\mathcal{C}\ell(0, 1) \simeq \mathbb{C}$ tenemos que $\text{Pin}(0, 1)$ es el grupo cíclico de orden 4 generado por $\pm i$ mientras que $\text{Spin}(0, 1)$ es el subgrupo de orden dos generado por ± 1 . En resumen $\text{Pin}(0, 1) \simeq \mathbb{Z}_4$ y $\text{Spin}(0, 1) \simeq \mathbb{Z}_2$.

EJEMPLO 3.2. Bajo el isomorfismo $\mathcal{C}\ell(0, 2) \simeq \mathbb{H}$ el círculo unitario contenido en plano se identifica con los cuaternios de la forma $\cos \theta i + \sin \theta j$. Es fácil ver que el producto de cualesquiera dos de estos elementos pertenece al círculo unitario contenido en el plano generado por 1 y $k = ji$, por lo tanto $\text{Spin}(0, 2) \simeq \text{U}(1)$.

EJEMPLO 3.3. $\text{Spin}(0, 3) \simeq \text{SU}(2)$. Para ver esto considere la transformación lineal real

$$\Theta : \mathbb{R}^{0,4} \longrightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$$

$$(v^0, v^1, v^2, v^3) \mapsto \begin{pmatrix} v^0 + iv^3 & -v^1 + iv^2 \\ v^1 + iv^2 & v^0 - iv^3 \end{pmatrix}.$$

Un par de cálculos elementales prueban que para cada $v = (v^0, v^1, v^2, v^3)$ las siguientes relaciones se satisfacen

$$\det \Theta(v) = \|v\|^2, \quad \Theta(v)^\dagger \Theta(v) = \|v\|^2 \mathbf{1}_2$$

donde \dagger denota la conjugación hermítica en $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ y $\mathbf{1}_2$ denota la identidad de 2×2 . Por lo tanto, la esfera unitaria $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^{0,4}$ se mapea bajo Θ en el grupo unitario especial

$$(3.5) \quad \text{SU}(2) := \left\{ U \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid UU^\dagger = \mathbf{1}_2 \text{ det } U = 1 \right\}.$$

Como $\text{Spin}(0, 3) \subset \mathcal{Cl}_0(0, 3) \simeq \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^{0,4}$ está generado por la esfera unitaria, la afirmación se sigue.

De acuerdo con la proposición 3.1 la representación adjunta actúa en V por isometrías que salvo un signo (miembro izquierdo de (3.3)) son reflexiones, esto quiere decir que $\text{Ad} : \mathcal{Cl}^\times(V, q) \rightarrow \text{O}(V, q)$ no se comportan bien con respecto a la orientación. Por ejemplo, cuando la dimensión de V es impar, Ad_v preserva la orientación para cada $v \in V$. En contraste, una reflexión siempre invierte la orientación. La manera de remediar esta situación es introducir un signo adicional en la representación adjunta mediante P_* . A esta modificación, plenamente discutida en [16], se le denomina *representación adjunta torcida*. Este problema no es relevante para nosotros pues únicamente nos interesa la restricción de esta representación al subgrupo $\text{Spin}(V, q)$ que al estar contenido en la parte par de $\mathcal{Cl}(V, q)$, actúa en V mediante transformaciones que preserva orientación.

De ahora y en adelante $\text{Ad} : \text{Spin}(V, q) \rightarrow \text{SO}(V, q)$ hará referencia a esta restricción a menos que explícitamente se indique lo contrario. Para estudiar las propiedades de este mapeo, conviene introducir a la discusión una versión general del resultado clásico de la geometría euclidiana bidimensional que caracteriza a cualquier rotación como una composición de hasta dos reflexiones. La generalización de este resultado a otros espacios cuadráticos se conoce como *teorema de Cartan-Dieudonné*, que a continuación enunciamos. El lector encontrará en [1] pp. 129-130 o bien en [50] pp. 10-12 una discusión detallada de este resultado.

TEOREMA 3.1 (Cartan-Dieudonné). *Todo elemento del grupo de isometrías $\text{O}(V, q)$ se escribe como una composición de a lo mas $\dim V$ reflexiones.*

Por otra parte, es claro que el núcleo de la representación adjunta está formado de todos los elementos en $\text{Spin}(V, q)$ que conmutan con cada vector en V . Las siguientes proposiciones caracterizan al conjunto de elementos en $\mathcal{Cl}(V, q)$ que conmutan con todos los elementos de V , así como su intersección con $\text{Spin}(V, q)$.

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea $Z[\mathcal{Cl}(V, q); V] := \left\{ \xi \in \mathcal{Cl}(V, q) \mid [\xi, v] = 0 \quad \forall v \in V \right\}$. Entonces*

$$Z[\mathcal{Cl}(V, q); V] = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n = \dim V \text{ es par} \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{si } n = \dim V \text{ es impar.} \end{cases}$$

En el primer caso, \mathbb{R} está generado por 1; en el segundo caso, $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ está generado por 1 y $e_1 \cdots e_n$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que cualquier múltiplo escalar de 1 es un elemento central. Consideremos ahora una base q -ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\} \hookrightarrow V$. Dado que cualquier elemento conmuta con sí mismo, es fácil verificar mediante un cálculo directo que

$$(3.6) \quad e_j (e_{i_1} \cdots e_{i_k}) = (-1)^{s(i_1, \dots, i_k, j)} (e_{i_1} \cdots e_{i_k}) e_j$$

donde el signo $(-1)^{s(i_1, \dots, i_k, j)}$ está dado por

$$(3.7) \quad s(i_1, \dots, i_k, j) = \begin{cases} (-1)^{k-1} & \text{si } j = i_{k_0} \text{ para algún } 1 \leq k_0 \leq k \\ (-1)^k & \text{si } j \neq i_{k_0} \text{ para todo } 1 \leq k_0 \leq k. \end{cases}$$

Si la dimensión de V es par, vemos que $[e_1 \cdots e_n, e_j] \neq 0$ para cada $1 \leq j \leq n$. Así que en este caso, es imposible para un elemento en $Z[\mathcal{Cl}(V, q); V]$ tener una componente no nula de grado n . Si por el contrario V tiene dimensión impar, $e_1 \cdots e_n$ conmuta con cada generador de V , consecuentemente $[e_1 \cdots e_n, v] = 0$ para todo $v \in V$. En este caso, los elementos de $Z[\mathcal{Cl}(V, q); V]$ genéricamente pueden tener componente no cero de grado n . Supongamos ahora que existe $\xi \in Z[\mathcal{Cl}(V, q); V]$ de la forma

$$\xi^0 1 + \xi^k e_{i_1} \cdots e_{i_k} + \xi^n e_1 \cdots e_n, \quad \xi^0, \xi^k, \xi^n \in \mathbb{R};$$

con $\xi^n = 0$ si n es par y arbitrario en caso contrario. La elección de ξ implica que $\xi^k [e_{i_1} \cdots e_{i_k}, v] = 0$ para cada $v \in V$. Observando las ecuaciones (3.6), (3.7) notamos que siempre podemos elegir v de manera que $[e_{i_1} \cdots e_{i_k}, v] \neq 0$. Por lo tanto, la única manera de no entrar en contradicción con la elección de ξ es que $\xi^k = 0$. Esto prueba que $Z[\mathcal{Cl}(V, q); V]$ consta únicamente de los espacios enunciados al principio de esta proposición. \square

OBSERVACIÓN 3.2. Como $\mathcal{Cl}(V, q)$ es un álgebra asociativa generada por V notamos que $Z[\mathcal{Cl}(V, q); V]$ no es otra cosa que el *centro* del álgebra, que denotaremos por $Z[\mathcal{Cl}(V, q)]$.

Se sigue inmediatamente de la proposición 3.2 que la intersección de $Z[\mathcal{Cl}(V, q)]$ con la parte par del álgebra de Clifford está generada por los múltiplos escalares de 1. En particular, $Z[\mathcal{Cl}(V, q)] \cap \text{Spin}(V, q)$ está contenido en el grupo de elementos invertibles \mathbb{R}^\times . Específicamente se tiene la siguiente

$$\text{PROPOSICIÓN 3.3. } \text{Spin}(V, q) \cap Z[\mathcal{Cl}(V, q)] = \{\pm 1\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\cdot)^t$ la involución de $\mathcal{Cl}(V, q)$ inducida por la aplicación $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \mapsto v_k \otimes \cdots \otimes v_1$. Usando esta aplicación definimos el homomorfismo *norma* $N : \mathcal{Cl}^\times(V, q) \rightarrow \mathbb{R}^\times$ como $N(\xi) = \xi P_*(\xi^t)$. Un cálculo directo muestra que la imagen de N restringido a $\text{Spin}(V, q)$ está contenida en $\{\pm 1\}$. Adicionalmente observe que $N : \text{Spin}(V, q) \cap Z[\mathcal{Cl}(V, q)] \rightarrow \{\pm 1\}$ actúa elevando al cuadrado su argumento. Por lo tanto, cualquier elemento central contenido en $\text{Spin}(V, q)$ es un real no nulo cuyo cuadrado es igual a 1. \square

TEOREMA 3.3. *Para cada espacio cuadrático (V, q) la representación adjunta completa la sucesión exacta corta*

$$(3.8) \quad 1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Spin}(V, q) \longrightarrow \text{SO}(V, q) \longrightarrow 1.$$

Más aún, si (V, q) tiene dimensión al menos dos y es distinto al espacio hiperbólico $V^{1,1}$, Ad presenta a $\text{Spin}(V, q)$ como un recubrimiento doble no trivial de $\text{SO}(V, q)$.

DEMOSTRACIÓN. El teorema de Cartan-Dieudonné 3.1 implica que Ad es un epimorfismo. Las proposiciones 3.2 y 3.3 prueban que $\text{Ker Ad} \simeq \mathbb{Z}_2$ estableciendo así la primera parte del teorema. En [39] se demuestra, usando teoría de recubrimientos, la existencia de una única estructura diferenciable que convierte a $\text{Spin}(V, q)$ en un grupo de Lie. Con respecto a esta estructura de grupo de Lie, el recubrimiento doble $\text{Ad} : \text{Spin}(V, q) \rightarrow \text{SO}(V, q)$ resulta ser una morfismo suave entre grupos de Lie, esto es, un homomorfismo de grupos de Lie. En particular, la sucesión (3.8) induce vía diferenciación la siguiente sucesión exacta de espacio vectoriales

$$0 \longrightarrow \mathfrak{spin}(V, q) \xrightarrow{\simeq} \mathfrak{so}(V, q) \longrightarrow 0$$

que exhibe a la representación adjunta $\text{Ad} : \text{Spin}(V, q) \rightarrow \text{SO}(V, q)$ como un difeomorfismo local y en particular como un recubrimiento. Supongamos ahora que V tiene dimensión al menos 2 y es distinto al espacio hiperbólico. Para ver que este recubrimiento doble es no trivial, basta mostrar que podemos conectar 1 con -1 mediante una trayectoria $\xi : [0, 1] \rightarrow \text{Spin}(V, q)$. Nuestras hipótesis garantiza que podemos encontrar dos elementos linealmente independientes $e_1, e_2 \in V$ tales que $q(e_1) = q(e_2) = 1$ o bien $q(e_1) = q(e_2) = -1$. En función del signo que adquiere q en e_1 y e_2 , las trayectorias $\xi_{\pm}(t) := \pm \cos(\pi t) + \sin(\pi t)e_1 e_2$ comienzan en ± 1 , terminan en ∓ 1 y se factorizan como

$$\begin{aligned} \xi_+(t) &= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) e_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) e_2 \right] \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) e_2 - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) e_1 \right] \\ \xi_-(t) &= \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) e_1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) e_2 \right] \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) e_2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) e_1 \right], \end{aligned}$$

mostrando así que $\xi_{\pm}(t) \in \text{Spin}(V, q)$ para cada valor de t . \square

COROLARIO 3.4. Para $n \geq 3$, $\text{Spin}(0, n)$ es el recubrimiento universal de $\text{SO}(0, n)$.

DEMOSTRACIÓN. El teorema de clasificación de recubrimientos sobre un espacio X “suficientemente conexo”³ (ver [18, 17]) establece una biyección natural, llamada *conexión de Galois*, entre los subgrupos de índice k del grupo fundamental $\pi_1(X)$ y los recubrimientos de k hojas sobre X . Como $\pi_1(\text{SO}(0, n)) = \mathbb{Z}_2$ cuando $n \geq 3$, el corolario se sigue inmediatamente. \square

Un cálculo similar al realizado anteriormente muestra que para $1 \leq i < j \leq n$, las curvas $\xi_{ij}(\theta) := \cos \theta + \sin \theta e_i e_j$ se encuentran inmersas en $\text{Spin}(V, q)$ si $n \geq 2$ y pasan por el elemento identidad cuando $\theta = 0$. Por tanto, los $n(n-1)/2$ generadores infinitesimales de $\text{Spin}(V, q)$ determinados por $\xi'_{ij}(0)$, son $e_i e_j \in \mathfrak{spin}(V, q) \subset \mathfrak{cl}^{\times}(V, q) := \mathcal{C}\ell^{\times}(V, q)$.

Por otro lado, bajo el isomorfismo de espacios vectoriales $\mathfrak{q} : \mathcal{C}\ell(V, q) \rightarrow \Lambda V$ inducido por $e_{i_1} \cdots e_{i_k} \mapsto e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, el álgebra de Lie de $\text{Spin}(V, q)$ se identifica con el espacio de bivectores $\Lambda^2 V$. Este espacio nos da una base para el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(V, q)$ asociada al grupo $\text{SO}(V, q)$ vía la correspondencia que a cada bivector $v \wedge w$ le asocia la transformación que actúa en los elementos $x \in V$ de la siguiente forma

$$(3.9) \quad v \wedge w(x) := b_q(v, x)w - b_q(w, x)v.$$

Esta construcción establece un isomorfismo entre $\mathfrak{spin}(V, q)$ y $\mathfrak{so}(V, q)$ solo al nivel de espacios vectoriales. Para obtener el isomorfismo como álgebras de Lie,

³Por ejemplo un espacio con el tipo de homotopía de un CW complejo, o en nuestro caso, una variedad suave, satisfacen las hipótesis de este teorema.

usamos la diferencial de la representación adjunta calculada en la identidad y que denotaremos simplemente por \mathfrak{ad} .

COROLARIO 3.5. *El isomorfismo $\mathfrak{ad} : \mathfrak{spin}(V, q) \rightarrow \mathfrak{so}(V, q)$ satisface*

$$(3.10) \quad \mathfrak{ad}(e_i e_j) = 2e_i \wedge e_j, \quad \mathfrak{ad}^{-1}(e_i \wedge e_j) = \frac{1}{4} [e_i, e_j].$$

DEMOSTRACIÓN. Una sencilla aplicación de la regla de la cadena muestra que $[\xi_{ij}^{-1}]'(0) = -\xi'_{ij}(0) = -e_i e_j$. Luego, como $\mathfrak{ad}(e_i e_j) \in \mathfrak{so}(V, q) \subset \text{End}V$, evaluamos la diferencial de la representación adjunta en un elemento $w \in V$ para determinar la forma de $\mathfrak{ad}(e_i e_j)$ para $i < j \leq n$

$$\begin{aligned} \mathfrak{ad}(e_i e_j)(w) &= e_i e_j w - w e_i e_j \\ &= e_i e_j w - [-e_i w - 2b_q(w, e_i)] e_j \\ &= e_i e_j w + e_i w e_j + 2b_q(w, e_i) e_j \\ &= e_i e_j w + e_i [-e_j w - 2b_q(w, e_j)] + 2b_q(w, e_i) e_j \\ &= 2 [b_q(w, e_i) e_j - b_q(w, e_j) e_i] \\ &= 2e_i \wedge e_j(w). \end{aligned}$$

Finalmente: $[e_i, e_j] = e_i e_j - e_j e_i = 2e_i e_j = 4 \mathfrak{ad}^{-1}(e_i \wedge e_j)$. \square

Ahora vamos a usar los resultado establecidos hasta el momento para determinar el grupo más relevante para este trabajo, que es $\text{Spin}(0, 4)$.

EJEMPLO 3.4. *En el ejemplo 3.3 exhibimos un isomorfismo \mathbb{R} -lineal Θ entre el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{0,4}$ y las matrices $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$. Esta identificación induce dos acciones isométricas de $\text{SU}(2)$: una derecha $\text{SU}_+(2) \times \mathbb{R}^{0,4} \rightarrow \mathbb{R}^{0,4}$ y una izquierda $\mathbb{R}^{0,4} \times \text{SU}_-(2) \rightarrow \mathbb{R}^{0,4}$ que además preservan orientación. Así, podemos definir un homomorfismo*

$$\begin{aligned} \text{SU}_+(2) \times \text{SU}_-(2) &\rightarrow \text{SO}(0, 4) \\ (U_+, U_-) &\mapsto U_+ \Theta(\cdot) U_-^\dagger \end{aligned}$$

que evaluado en un elemento $v \in \mathbb{R}^{0,1}$ es igual a $U_+ \Theta(v) U_-^\dagger$. Es claro que esta aplicación es dos a uno con dominio $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, que es una variedad simplemente conexa. Así, este homomorfismo es el recubrimiento universal de $\text{SO}(0, 4)$ y por lo tanto, $\text{Spin}(0, 4) \simeq \text{SU}_+(2) \times \text{SU}_-(2)$.

Por razones que quedaran claras más adelante, necesario discutir la versión compleja de las construcciones que hemos realizado hasta el momento. Es decir, debemos estudiar la complexificación del álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(V, q)$, definida como $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(V, q) = \mathcal{Cl}(V, q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, así como también los análogos complejos de $\text{Pin}(V, q)$ y $\text{Spin}(V, q)$, que por consistencia denotaremos como $\text{Pin}^{\mathbb{C}}(V, q)$ y $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(V, q)$ respectivamente. En adelante, los productos tensoriales se toman sobre el campo real a menos que explícitamente se indique otra cosa.

PROPOSICIÓN 3.4. *La aplicación $J : \mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(V, q) \rightarrow \mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(V, q)$ definida en los generadores $\xi \otimes z$ como $J(\xi \otimes z) = \xi \otimes iz$ es una estructura compleja.*

DEMOSTRACIÓN. La construcción conocida como *extensión de escalares* garantiza que J es una transformación \mathbb{R} -lineal bien definida [13]. Es claro que $J^2 = -\text{id}$, por lo tanto J es una estructura compleja en $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(V, q)$. \square

La extensión \mathbb{R} -lineal de J convierte a $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(V, q)$ en un espacio vectorial sobre \mathbb{C} de dimensión compleja 2^n que contiene como subespacio real a la copia álgebra de Clifford dada por $\mathcal{C}\ell(V, q) \otimes 1$. Es por esto que de ahora y en adelante usaremos la notación reducida $z\xi$ para referirnos a $\xi \otimes z$, así $J(\xi \otimes 1) = i\xi$. Debido a la naturaleza funtorial del producto tensorial, los resultado que hemos obtenido con anterioridad para las álgebras de Clifford reales se generalizan al caso de las álgebras complexificadas. En particular, la versión compleja del corolario 2.3 implica que $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(V, q) \simeq \mathcal{C}\ell(V \otimes \mathbb{C}, q \otimes \mathbb{C})$ como álgebras complejas. Aquí, $q \otimes \mathbb{C}$ es la forma cuadrática compleja inducida por la extensión a $V \otimes \mathbb{C}$ de la forma bilineal real b_q . Observe que al escribir la forma cuadrática q en su representación diagonal $\text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$, $q \otimes \mathbb{C}$ admite una descripción diagonal equivalente a la forma cuadrática estándar $\text{diag}(1, \dots, 1)$. En otras palabras, sobre el campo de los números complejos existe un único espacio cuadrático de dimensión compleja n que puede pensarse como la complexificación del espacio euclidiano real de dimensión n . De esta manera, obtenemos como una consecuencia inmediata de la proposición 2.3 y el párrafo anterior la siguiente

PROPOSICIÓN 3.5. *Para cada n , existe un isomorfismo de \mathbb{C} -álgebras*

$$(3.11) \quad \mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(n) \simeq \mathcal{C}\ell_0^{\mathbb{C}}(n+1).$$

EJEMPLO 3.5. *En el ejemplo 2.4 mostramos que $\mathcal{C}\ell(0, 1) \simeq \mathbb{C}$, por lo tanto se tiene que $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(1) \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$. Más aún, se puede probar que la transformación lineal inducida por*

$$\begin{aligned} (1, 0) &\mapsto \frac{1}{2} (1 \otimes 1 + i \otimes i) \\ (0, 1) &\mapsto \frac{1}{2} (1 \otimes 1 - i \otimes i) \end{aligned}$$

es un isomorfismo complejo entre $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ y $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$.

EJEMPLO 3.6. *Hemos visto en el ejemplo 2.5 que $\mathcal{C}\ell(0, 2) \simeq \mathbb{H}$. Por otra parte, a cada cuaternio $\alpha 1 + \beta i + \gamma j + \delta ij = \alpha 1 + \beta i + (\gamma 1 + \delta i)j$, le podemos asociar un número hipercomplejo $z + wj$ definiendo $z = \alpha 1 + \beta i$ y $w = \gamma 1 + \delta i$. Con estas identificaciones en mente podemos pensar al álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(0, 2)$ como el conjunto de todas las matrices con entradas complejas de la forma*

$$(3.12) \quad \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Más aún, es fácil ver que la construcción anterior define un monomorfismo \mathbb{R} -lineal $\mathcal{C}\ell(0, 2) \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ que tras extender escalares, resulta ser un isomorfismo complejo. Por lo tanto $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(2) \simeq \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$.

El siguiente enunciado nos permite determinar, inductivamente y salvo isomorfismo, la serie completa de álgebras de Clifford complexificadas.

TEOREMA 3.6. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ existe un isomorfismo de álgebras complejas*

$$(3.13) \quad \mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(n+2) \simeq \mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}\ell(2).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de un subespacio complejo $W \subset V \otimes \mathbb{C}$ de codimensión dos y $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ una base ortonormal del subespacio

complementario W^\perp . Definimos $\varphi : V \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}l^\mathbb{C}(n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}l(2)$ en los generadores de acuerdo a la correspondencia

$$e_j \xrightarrow{\varphi} ie_j \otimes \epsilon_1 \epsilon_2 \quad 1 \leq j \leq n, \quad \epsilon_k \xrightarrow{\varphi} 1 \otimes \epsilon_k \quad 1 \leq k \leq 2.$$

Como la estructura de álgebra en $\mathcal{C}l^\mathbb{C}(n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}l(2)$ está dada por el producto tensorial de las estructuras en cada uno de los factores, el elemento identidad está dado por el producto de las identidades $1 \otimes 1$. Así tenemos que

$$[\varphi(e_j)]^2 = (ie_j \otimes \epsilon_1 \epsilon_2)^2 = i^2 e_j^2 \otimes (\epsilon_1 \epsilon_2)^2 = (-1)^2 \otimes -\epsilon_1^2 \epsilon_2^2 = -(q \otimes \mathbb{C})(e_j)1 \otimes 1.$$

De manera análoga se verifica que $[\varphi(\epsilon_k)]^2 + (q \otimes \mathbb{C})(\epsilon_k)1 \otimes 1 = 0$. Entonces, usando la versión compleja de la propiedad universal (2.3) y la extensión de escalares, φ induce un único morfismo de \mathbb{C} -álgebras $\varphi_* : \mathcal{C}l^\mathbb{C}(n+2) \rightarrow \mathcal{C}l^\mathbb{C}(n) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}l(2)$. Es claro de la definición de φ que φ_* es un epimorfismo más aún, como el dominio y el rango tienen dimensión compleja 2^{n+2} , concluimos que φ_* es un isomorfismo, estableciendo así el enunciado del teorema. \square

COROLARIO 3.7. *Para cada valor de $k \geq 0$ se tiene*

$$(3.14) \quad \mathcal{C}l^\mathbb{C}(n) \simeq \begin{cases} \text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C}) \oplus \text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C}) & \text{si } n = 2k + 1 \\ \text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C}) & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Las propiedades de bilinealidad de $\otimes_{\mathbb{C}}$ implican que

$$(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C}) \simeq \text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C}) \oplus \text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C}) \quad \forall k$$

$$\text{Mat}_{k \times k}(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \text{Mat}_{r \times r}(\mathbb{C}) \simeq \text{Mat}_{kr \times kr}(\mathbb{C}) \quad \forall k, r.$$

El resultado se sigue de aplicar recursivamente el teorema 3.6 partiendo de los casos básicos $k = 0$ y $k = 1$ establecidos en los ejemplos 3.5 y 3.6. \square

El lector puede comparar el teorema 3.6 con los resultados de [16] pp. 33 para convencerse de que la teoría de representaciones de las álgebras complexificadas $\mathcal{C}l^\mathbb{C}(r+s)$ es bastante más simple que la de su contraparte real $\mathcal{C}l(r,s)$, que como hemos mencionado en la página 11, queda determinada por las álgebras de división: \mathbb{R} , \mathbb{C} y \mathbb{H} de manera similar a la de la serie de álgebras complexificadas. El siguiente enunciado concreta de manera rigurosa esta afirmación.

TEOREMA 3.8. *Sea $\Upsilon_{r,s}$ y $\Upsilon_{r,s}^\mathbb{C}$ el número cardinal de los conjuntos de clases de isomorfismo de representaciones irreducibles reales de $\mathcal{C}l(r,s)$ y $\mathcal{C}l^\mathbb{C}(r+s)$ respectivamente. Entonces, ambos números son finitos e iguales a*

$$(3.15) \quad \Upsilon_{r,s} = \begin{cases} 2 & \text{si } s+1 \equiv r \pmod{4} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$(3.16) \quad \Upsilon_{r,s}^\mathbb{C} = \begin{cases} 2 & \text{si } s+r \equiv 0 \pmod{2} \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea \mathbb{F} una de las tres álgebras de división reales. El teorema de Wedderburn [13] establece que las álgebras de matrices $\text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{F})$ son, salvo isomorfismo, las únicas \mathbb{R} -álgebras simples. En particular, el espacio vectorial real \mathbb{F}^m es, salvo isomorfismo, el único módulo simple sobre $\text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{F})$.

En otras palabras, la representación tautológica $\rho^\tau : \text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{F}) \times \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^m$ es la única representación irreducible. Así, $\mathcal{A} := \text{Mat}_{m \times m}^+(\mathbb{F}) \oplus \text{Mat}_{m \times m}^-(\mathbb{F})$ es

un álgebra real semisimple con dos representaciones irreducibles $\rho^\pm := \rho^\tau \circ \pi^\pm$, donde π^\pm es la proyección de \mathcal{A} en cada uno de sus sumandos. Las representaciones ρ^+ y ρ^- son inequivalentes, puesto que cada isomorfismo de representaciones Φ cumple que $\Phi \circ \rho^+ \circ \Phi^{-1} = \rho^-$, ecuación imposible de satisfacer para el elemento $(\mathbf{1}_+, -\mathbf{1}_-) \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, ρ^\pm representa a las únicas dos clases de isomorfismo de representaciones irreducibles de \mathcal{A} .

Puesto que la serie de álgebras de Clifford reales así como sus complexificaciones están determinadas por el álgebra de matrices $\text{Mat}_{m \times m}(\mathbb{F})$ para ciertos valores particulares de m iguales a 2^k ; el teorema se sigue del corolario 3.7 para el caso complejo, y de la clasificación de las álgebras de Clifford dada en el capítulo I, sección 4 de [16] para el caso real. \square

Ahora vamos a concentrar nuestra atención en el análogo complejo de los grupos $\text{Spin}(V, q)$ que hemos estudiado hasta el momento.

DEFINICIÓN 3.3. Considere el grupo de elementos invertibles $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}^\times(n)$ contenido en $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(n)$. Definimos al subgrupo $\text{Pin}^{\mathbb{C}}(n) \subset \mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}^\times(n)$ como el grupo generado por $\text{Pin}(n)$ y $U(1)$. Análogamente, $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ está generado por $\text{Spin}(n)$ y $U(1)$. En otras palabras tenemos que, como conjuntos

$$\begin{aligned} \text{Pin}^{\mathbb{C}}(n) &= \left\{ z\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}^\times(n) \mid z \in U(1), \xi \in \text{Pin}(n) \right\} \\ \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) &= \left\{ z\xi \in \mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}^\times(n) \mid z \in U(1), \xi \in \text{Spin}(n) \right\}. \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición de $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(n)$, podemos pensar a $\text{Spin}(n) \times U(1)$ como un subgrupo de $\text{Aut}_{\mathbb{C}} \mathcal{C}\ell_{\mathbb{C}}(n)$. Con esta aclaración en mente, vamos a dar una caracterización de $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ como el espacio de órbitas de una acción de \mathbb{Z}_2 en $\text{Spin}(n) \times U(1)$.

PROPOSICIÓN 3.6. $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \simeq \text{Spin}(n) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Por definición de $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$, existe un epimorfismo natural $\text{Spin}(n) \times U(1) \rightarrow \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ definido como $(\xi, z) \mapsto z\xi$. Es claro que el núcleo de este homomorfismo consiste de las parejas (α, α^{-1}) tales que $\alpha \in \text{Spin}(n) \cap U(1)$. Una ligera modificación del argumento dado en la prueba de la proposición 3.3 muestra que también en el caso complejo $\text{Spin}(n) \cap U(1) = \{(\pm 1, \pm 1)\} \simeq \mathbb{Z}_2$. Por lo tanto, \mathbb{Z}_2 actúa como un subgrupo normal de $\text{Spin}(n) \times U(1)$. \square

El siguiente párrafo está basado en los ejemplos 3.1, 3.2 y 3.3 proporcionados en la página 12, y en el resultado 3.4 en la página 16.

EJEMPLO 3.7. Sabemos que $\text{Spin}(0, 1) \simeq \mathbb{Z}_2$, así, de acuerdo con la caracterización anterior tenemos que $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(1) \simeq \mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} U(1) \simeq U(1)$.

EJEMPLO 3.8. Como $\text{Spin}(0, 2) \simeq U(1)$, se tiene que $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(2) \simeq U(1) \times_{\mathbb{Z}_2} U(1)$.

EJEMPLO 3.9. Usando que $\text{Spin}(0, 3) \simeq \text{SU}(2)$, definimos el homomorfismo natural

$$\begin{aligned} \text{SU}(2) \times U(1) &\longrightarrow U(2) \\ (U, z) &\longmapsto zU \end{aligned}$$

de inmediato notamos que zU es un elemento del grupo unitario bidimensional, más aún, dado cualquier elemento $U' \in U(2)$ es fácil ver que la pareja $(z^{-1}U', z)$ con

$z := \sqrt{\det U'}$ va a U' bajo el homomorfismo en cuestión. Como cualquier elemento en el núcleo de este homomorfismo satisface $U = z^{-1}\mathbf{1}_2 \in U(2) \cap U(1)$, obtenemos que $1 = \det U = \det z^{-1}\mathbf{1}_2 = z^{-2}$. Por lo tanto $z = \pm 1$ y $U = \pm \mathbf{1}_2$.

EJEMPLO 3.10. Veamos que $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ se identifica con el producto de dos copias de $U(2)$ fibrado por el determinante. Para esto, recordemos la definición de producto fibrado. Dados tres grupos G, H, K y homomorfismos $\alpha : G \rightarrow K$, $\beta : H \rightarrow K$, se define el producto fibrado

$$(3.17) \quad G_{\alpha} \times_{\beta} H := \left\{ (g, h) \in G \times H \mid \alpha(g) = \beta(h) \right\}.$$

Es fácil ver que $G_{\alpha} \times_{\beta} H$ es un subgrupo del producto $G \times H$; que hace conmutar el siguiente diagrama respecto de las proyecciones $\Pi_G(g, h) := g$, $\Pi_H(g, h) := h$

$$\begin{array}{ccc} G_{\alpha} \times_{\beta} H & \xrightarrow{\Pi_H} & H \\ \Pi_G \downarrow & & \downarrow \beta \\ G & \xrightarrow{\alpha} & K. \end{array}$$

Además, $G_{\alpha} \times_{\beta} H$ es un pull-back en la categoría de grupos [13]. De regreso al ejemplo que nos compete, apliquemos la construcción anterior a los grupos $G = H = U(2)$, $K = U(1)$ y $\alpha = \beta = \det$ para verificar que la aplicación

$$\begin{aligned} \text{SU}_+(2) \times \text{SU}_-(2) \times U(1) &\longrightarrow U_+(2) \times_{\det} U_-(2) \\ ((U_+, U_-), z) &\longmapsto (zU_+, zU_-) \end{aligned}$$

es un epimorfismo con núcleo \mathbb{Z}_2 ⁴. La aplicación en cuestión es un homomorfismo bien definido ya que se satisface la identidad $\det zU_+ = z^2 \det U_+ = z^2 = \det zU_-$. Es un epimorfismo pues por el ejemplo 3.9 sabemos que coordenada a coordenada es sobre. Si (zU_+, zU_-) es el elemento identidad, se sigue inmediatamente que $U_{\pm} = \pm \mathbf{1}_2$ y $z = \pm 1$, así, el núcleo de $\text{SU}_+(2) \times \text{SU}_-(2) \times U(1) \rightarrow U_+(2) \times_{\det} U_-(2)$ es isomorfo a \mathbb{Z}_2 . Finalmente, como $\text{Spin}(0, 4) \simeq \text{SU}_+(2) \times \text{SU}_-(2)$, el enunciado al inicio de este ejemplo queda probado.

Para concluir esta sección, veamos como se relaciona $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ con los grupos de rotaciones $U(1)$ y $\text{SO}(n)$.

TEOREMA 3.9. Las siguientes sucesiones son exactas para cada $n \in \mathbb{N}$.

$$(3.18) \quad 1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \xrightarrow{\vartheta} \text{SO}(n) \times U(1) \longrightarrow 1$$

$$(3.19) \quad 1 \longrightarrow U(1) \longrightarrow \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \xrightarrow{\text{Ad}^{\mathbb{C}}} \text{SO}(n) \longrightarrow 1.$$

Si además $n \geq 2$, cada uno de estos recubrimientos⁵ es no trivial.

DEMOSTRACIÓN. El homomorfismo 3.18 está definido como $\vartheta(z\xi) = (\text{Ad}_{\xi}, z^2)$. Es claro que este es un epimorfismo dos a uno. El homomorfismo $z \mapsto z^2$ es un recubrimiento doble no trivial, igualmente lo es la representación adjunta cuando $n \geq 2$

⁴Ahora y en adelante, $U_+(2) \times_{\det} U_-(2)$ será la notación para $U_+(2)_{\det} \times_{\det} U_-(2)$

⁵Formalmente, $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ es un $U(1)$ -haz principal sobre $\text{SO}(n)$, que es no trivial si $n \geq 3$, y no un recubrimiento como afirmamos en el teorema 3.9.

como vimos en 3.4. Esto demuestra la primera parte del enunciado. El homomorfismo $\text{Ad}^{\mathbb{C}}$ en la sucesión 3.19 es la extensión compleja de la representación adjunta que actúa en $\mathcal{C}^{\ell^{\mathbb{C}}}(n)$ por conjugación. Observe que $\text{Ad}^{\mathbb{C}}$ es invariante respecto de la acción de \mathbb{C}^{\times} dada por la multiplicación escalar, es decir $\text{Ad}_{z\xi}^{\mathbb{C}} = \text{Ad}_{\xi}^{\mathbb{C}} = \text{Ad}_{\xi}$ para todo $z \in \mathbb{C}^{\times}$, pero a diferencia de su contraparte real, $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ contiene por definición a una copia de $U(1) \subset \mathbb{C}^{\times}$. La observación anterior junto con la proposición 3.3 muestran que $\text{Ker Ad}^{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{Z}_2 \times_{\mathbb{Z}_2} U(1) \simeq U(1)$. \square

OBSERVACIÓN 3.10. En el caso de $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \simeq U_+(2) \times_{\det} U_-(2)$, el homomorfismo ϑ factoriza al *homomorfismo determinante* $\det : \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4) \rightarrow U(1)$ definido como $\det(U_+, U_-) = \det U_+$, es decir, $\det = \pi \circ \vartheta$, con π la proyección canónica sobre el factor unitario de $\text{SO}(4) \times U(1)$. Para ver esto, basta reescribir un elemento dado $(U_+, U_-) \in \text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ como el producto $z(\tilde{U}_+, \tilde{U}_-)$, donde $z := \sqrt{\det U_+} \in U(1)$ y $(\tilde{U}_+, \tilde{U}_-) := (z^{-1}U_+, z^{-1}U_-) \in \text{SU}_+(2) \times \text{SU}_-(2) \simeq \text{Spin}(4)$.

4. La Representación Espinorial de $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$

A lo largo de nuestra exposición ha quedado demostrado que las álgebras de Clifford guardan una estrecha relación con el grupo de isometrías de un espacio cuadrático $V^{r,s}$. Esto en última instancia nos llevó a deducir la existencia de una versión simplificada de los grupos de rotaciones $\text{SO}(r, s)$, a saber, $\text{Spin}(r, s)$. Estos grupos gozan de la extraordinaria propiedad de contar con al menos tantas representaciones como $\text{SO}(r, s)$. Para hacer explícita esta afirmación, supongamos que $\hat{\rho} : \text{SO}(r, s) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{F}} W$ es una representación lineal sobre un campo arbitrario \mathbb{F} ; entonces la aplicación $\text{Ad} \circ \hat{\rho}$ es una representación de $\text{Spin}(r, s)$ inducida por una representación de $\text{SO}(r, s)$. En vista de la sucesión exacta 3.19, ciertamente ocurre un fenómeno análogo en el caso del grupo $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(r + s)$. Por lo tanto, una pregunta natural es si el recíproco de estos enunciados son igualmente ciertos, es decir, ¿Todas las representaciones de $\text{Spin}(r, s)$ y $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(r + s)$ estarán inducidas por representaciones de $\text{SO}(r, s)$?

La siguiente proposición nos da condiciones necesarias y suficientes para que una representación de $\text{Spin}(r, s)$ descienda a una representación de $\text{SO}(r, s)$.

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea $\rho : \text{Spin}(r, s) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}} W$ una representación no trivial. Entonces, existe una representación $\hat{\rho} : \text{SO}(r, s) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}} W$ que hace conmutativo el diagrama*

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} \text{Spin}(r, s) & \xrightarrow{\rho} & \text{Aut}_{\mathbb{R}} W \\ \text{Ad} \downarrow & \nearrow \hat{\rho} & \\ \text{SO}(r, s) & & \end{array}$$

sí y solo sí $\rho(-1) = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si ρ se factoriza a través de $\hat{\rho}$, necesariamente ocurre que $-1 \in \text{Ker } \rho$. Para probar que esta condición es también suficiente, basta notar que $\hat{\rho}([\xi]) := \rho(\xi)$ es un homomorfismo de grupos bien definido para cada miembro $[\xi] \in \text{Spin}(r, s)/\mathbb{Z}_2 \simeq \text{SO}(r, s)$. Como $[\xi]$ consta de los elementos $\pm\xi$, lo único que hay que verificar es que $\rho(-\xi) = \rho(\xi)$; pero esta última afirmación es consecuencia directa de la hipótesis $\rho(-1) = 1$. \square

OBSERVACIÓN 4.1. Un segundo de reflexión en torno a los argumentos proporcionados en la prueba anterior, revela que en realidad la afirmación contenida en 4.1 es cierta para cualquier campo $\mathbb{F} \neq \mathbb{Z}_2$. Es decir, W puede ser un espacio vectorial sobre un campo arbitrario \mathbb{F} con la obvia excepción de \mathbb{Z}_2 .

Como hemos mencionado en la página 11, cada álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(r, s)$ se identifican ya sea con un álgebra de matrices con coeficientes en $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ o bien con la suma directa de dos copias de estas mismas álgebras. Asociado a este isomorfismo, se tiene un espacio de representación $\Sigma(r, s)$ que adquiere una estructura de módulo izquierdo sobre $\mathcal{C}\ell(r, s)$. A partir de esta construcción se obtiene una representación natural

$$(4.2) \quad \Delta_{r,s} : \text{Spin}(r, s) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}} \Sigma(r, s)$$

dada por la restricción a $\text{Spin}(r, s) \subset \mathcal{C}\ell_0(r, s) \subset \mathcal{C}\ell(r, s)$ del isomorfismo en cuestión. Claramente, $\Delta_{r,s}$ es una representación genuina de $\text{Spin}(r, s)$ pues manda a -1 en sí mismo. El teorema 3.8 implica que esta representación, conocida con el nombre de *representación espinorial real*, es: irreducible si $s + 1 \equiv r \pmod{4}$, o bien una suma directa de dos representaciones irreducibles. Más aún, esta es una representación distinguida, puesto que es la única representación de $\text{Spin}(r, s)$ que automáticamente se extiende a una representación irreducible del álgebra ambiente $\mathcal{C}\ell(r, s)$. La generalización de la proposición 4.1 para el caso de los grupos $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(r + s)$ requiere de algunas precisiones.

DEFINICIÓN 4.1. De acuerdo con el teorema 3.8 y el corolario 3.7, existe una representación $\Delta_{r,s}^{\mathbb{C}} : \text{Spin}(r, s) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}} \Sigma^{\mathbb{C}}(r, s)$, llamada *representación espinorial compleja*, obtenida de restringir el isomorfismo complejo

$$\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(n) \simeq \begin{cases} \text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C}) \oplus \text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C}) & \text{si } n = 2k + 1 \\ \text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C}) & \text{si } n = 2k, \end{cases}$$

a la copia de $\text{Spin}(r, s)$ dentro de $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(r + s) \subset \mathcal{C}\ell_0^{\mathbb{C}}(r + s) \subset \mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(r + s)$.

Supongamos que W es un espacio vectorial real con una estructura compleja J y que G es un grupo. Un homomorfismo $\rho : G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{R}} W$ es una representación compleja de G si la acción $G \times W \rightarrow W$ inducida por la representación conmuta con el automorfismo real J . Análogamente, si existen aplicaciones $I, J, K \in \text{Aut}_{\mathbb{R}} W$ tales que $I^2 = J^2 = K^2 = -\text{id}_W$, se dice que W tiene una estructura quaternionica. Una representación que conmuta con las transformaciones I, J, K se llama representación quaternionica.

OBSERVACIÓN 4.2. La representación espinorial compleja $\Delta_{r,s}^{\mathbb{C}}$ es una representación compleja de $\text{Spin}(r, s)$.

PROPOSICIÓN 4.2. Sea $\rho : \text{Spin}(r, s) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}} W$ una representación compleja tal que $\rho(-1) = -1$. Entonces ρ se extiende naturalmente a una representación compleja $\rho^{\mathbb{C}} : \text{Spin}^{\mathbb{C}}(r + s) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}} W$.

DEMOSTRACIÓN. Como ρ es una representación compleja, por definición conmuta con la acción $U(1) \times W \rightarrow W$ inducida por la multiplicación escalar. Esto muestra que $\tilde{\rho}^{\mathbb{C}}(\xi, z) := z\rho(\xi)$ es una representación compleja de $\text{Spin}(r, s) \times U(1)$. Finalmente, nuestra hipótesis garantiza que $(-1, -1) \in \text{Ker } \tilde{\rho}^{\mathbb{C}}$; así, por la proposición 3.6, $\tilde{\rho}^{\mathbb{C}}$ desciende a una representación $\rho^{\mathbb{C}}$ como se buscaba. \square

La proposición anterior implica que la representación espinorial compleja $\Delta_{r,s}^{\mathbb{C}}$ se extiende automáticamente a una representación compleja de $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(r+s)$, que de nueva cuenta no se factoriza a través de $\text{SO}(n)$ vía la extensión compleja de la representación adjunta $\text{Ad}^{\mathbb{C}}$.

El resto de la sección esta dedicado a entender con lujo de detalle la escisión del álgebra de Clifford que da origen a la representación espinorial compleja en el caso particular del espacio euclidiano n -dimensional. Para esto, dotamos a $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(n)$ de una estructura adicional, en términos de una descomposición ortogonal en subespacios propios del siguiente operador

DEFINICIÓN 4.3. Considere $\{e_1, \dots, e_n\} \hookrightarrow V$ una base ortonormal orientada, y sea $[\cdot] : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ la función parte entera. Definimos el *operador de quiralidad*

$$(4.3) \quad \Gamma_{\mathbb{C}}^{n+1} := i^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} e_1 \cdots e_n,$$

que actúa por multiplicación a la izquierda en el álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(n)$.

OBSERVACIÓN 4.4. Bajo un cambio de base $\epsilon_j = T_j^k e_k$ $1 \leq j, k \leq n$ determinado por un elemento $T = (T_j^k) \in \text{GL}(n)$, los correspondientes elementos de volumen orientados están relacionados de acuerdo con $\epsilon_1 \cdots \epsilon_n = (\det T) e_1 \cdots e_n$, en particular, $\Gamma_{\mathbb{C}}^{n+1}$ es invariante bajo la acción inducida de $\text{SO}(n)$ en $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(V)$. Esto prueba que el operador de quiralidad es un objeto bien definido una vez que se ha elegido una orientación de V .

Un cálculo elemental muestra que el elemento de volumen orientado $e_1 \cdots e_n$ satisface la relación $(e_1 \cdots e_n)^2 = (-1)^{s(n)}$, donde $s(n)$ es igual a la suma de los primeros $n-1$ números naturales. En consecuencia, el operador de quiralidad satisface la relación $(\Gamma_{\mathbb{C}}^{n+1})^2 = (-1)^{s'(n)}$, donde

$$s'(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Es fácil ver que $s'(n)$ es un número par sin importar el valor de n y por lo tanto, $(\Gamma_{\mathbb{C}}^{n+1})^2 = 1$. Asociado a los valores propios del operador de quiralidad, se tiene la siguiente descomposición del álgebra de Clifford complexificada

$$(4.4) \quad \mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(n) = \mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(n)^+ \oplus \mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(n)^-$$

donde $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(n)^{\pm}$ es el subálgebra correspondiente al valor propio ± 1 . El subespacio $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(n)^+$ comúnmente se llama parte de *quiralidad derecha* del álgebra de Clifford complexificada mientras que $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(n)^-$ es la parte de *quiralidad izquierda*.

OBSERVACIÓN 4.5. De acuerdo con la ecuación 3.7 en la página 14, el operador de quiralidad pertenece al centro del álgebra de Clifford complexificada si n es impar. Si n es par, $\Gamma_{\mathbb{C}}^{n+1}$ está en el centro de $\mathcal{Cl}_0^{\mathbb{C}}(n)$ y anticonmuta con cualquier elemento en $\mathcal{Cl}_1^{\mathbb{C}}(n)$.

La observación anterior sugiere que debemos estudiar por separado la descomposición 4.4, conocida como *descomposición quiral* o *descomposición de Weyl*, en función de la paridad de n .

PROPOSICIÓN 4.3. *Supongamos que n es impar. Entonces $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(n)^{\pm}$ son subálgebras mutuamente ortogonales respecto al producto en el álgebra e isomorfas a $\mathcal{Cl}_0^{\mathbb{C}}(n)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como la acción de $\Gamma_{\mathbb{C}}^{n+1}$ en $\mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(n)$ intercambia los subespacios $\mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(n)$ y $\mathcal{C}l_1^{\mathbb{C}}(n)$ tenemos que $\mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(n) \cap \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(n)^{\pm} = 0$. En consecuencia, la restricción

$$(4.5) \quad \mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(n) \hookrightarrow \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(n) \twoheadrightarrow \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(n)^{\pm}$$

define un isomorfismo de álgebras reales. Por otra parte, si $\xi^{\pm} \in \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(n)^{\pm}$ entonces

$$\xi^+ \xi^- = (\Gamma_{\mathbb{C}}^{n+1} \xi^+) (-\Gamma_{\mathbb{C}}^{n+1} \xi^-) = -(\Gamma_{\mathbb{C}}^{n+1})^2 \xi^+ \xi^- = -\xi^+ \xi^-$$

□

COROLARIO 4.2. *La descomposición quiral de $\mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(2k+1)$ coincide con la descomposición en suma directa de álgebras de matrices dada por el corolario 3.7 en la página 18.*

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(2k+1) &\simeq \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(2k+1)^+ \oplus \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(2k+1)^- \\ &\simeq \mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(2k+1) \oplus \mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(2k+1) \\ &\simeq \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(2k) \oplus \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(2k) \\ &\simeq \text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C}) \oplus \text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 4.4. *Supongamos que n es par. Entonces $\mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(n)$ se descompone en una suma directa de sub-álgebras $\mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(n)^{\pm}$ mutuamente ortogonales respecto al producto en el álgebra e isomorfas a $\mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(n-2)$.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos $\mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(n)^{\pm} := \mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(n) \cap \text{Ker}(\Gamma_{\mathbb{C}}^{n+1} \pm 1)$. La demostración de la primera parte de esta proposición es análoga a la prueba anterior. Para establecer la segunda parte del enunciado, observe que

$$(4.6) \quad \mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(n)^+ \simeq \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(n-1)^+ \simeq \mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(n-1) \simeq \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(n-2).$$

Las identificaciones de los extremos están inducidas por el isomorfismo 2.19 en la página 9, el segundo isomorfismo es consecuencia de la proposición anterior. □

OBSERVACIÓN 4.3. Para n un número par, existe una escisión $\mathcal{C}l_1^{\mathbb{C}}(n)^{\pm}$ de $\mathcal{C}l_1^{\mathbb{C}}(n)$ análoga a la descomposición descrita en la proposición anterior.

Los siguientes resultados condensan en un par de enunciados toda la información que hasta ahora hemos obtenido.

TEOREMA 4.4. *Sea $\Delta_{2k}^{\mathbb{C}} : \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(2k) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} \Sigma^{\mathbb{C}}(2k)$ la representación subyacente a la representación espinorial compleja de $\text{Spin}(2k)$ (ver 4.1). Entonces, la acción de $\Gamma_{\mathbb{C}}^{2k+1}$ induce una descomposición ortogonal respecto del producto de Clifford*

$$(4.7) \quad \Sigma^{\mathbb{C}}(2k) = \Sigma_+^{\mathbb{C}}(2k) \oplus \Sigma_-^{\mathbb{C}}(2k)$$

invariante bajo la acción izquierda de $\mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(2k)$. Además, la multiplicación por elementos de $\mathcal{C}l_1^{\mathbb{C}}(2k)$ intercambia $\Sigma_+^{\mathbb{C}}(2k)$ y $\Sigma_-^{\mathbb{C}}(2k)$. Finalmente, la multiplicación

de Clifford induce isomorfismos

$$(4.8) \quad \text{End}_{\mathbb{C}} \Sigma_+^{\mathbb{C}}(2k) \simeq \mathcal{C}\ell_0^{\mathbb{C}}(2k)^+$$

$$(4.9) \quad \text{End}_{\mathbb{C}} \Sigma_-^{\mathbb{C}}(2k) \simeq \mathcal{C}\ell_0^{\mathbb{C}}(2k)^-$$

$$(4.10) \quad \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Sigma_-^{\mathbb{C}}(2k), \Sigma_+^{\mathbb{C}}(2k)) \simeq \mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{C}}(2k)^+$$

$$(4.11) \quad \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Sigma_+^{\mathbb{C}}(2k), \Sigma_-^{\mathbb{C}}(2k)) \simeq \mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{C}}(2k)^-.$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición de $\Sigma^{\mathbb{C}}(2k)$, $\Delta_{2k}^{\mathbb{C}}$ es un isomorfismo de álgebras. En particular se tiene que $(\Gamma_{\mathbb{C}}^{2k+1})^2 \in \text{Ker } \Delta_{2k}^{\mathbb{C}} = 1$. En otras palabras, $\Sigma_{\pm}^{\mathbb{C}}(2k)$ son espacios propios del operador de quiralidad asociados a los valores propios ± 1 . Estos subespacios son invariantes bajo la acción de la parte par del álgebra de Clifford ya que $\Gamma_{\mathbb{C}}^{2k+1}$ pertenece al centro de $\mathcal{C}\ell_0^{\mathbb{C}}(2k)$. La descomposición (4.7) es ortogonal por la proposición anterior. Finalmente, como $\Gamma_{\mathbb{C}}^{2k+1}$ anticonmuta con los elementos de $\mathcal{C}\ell_1^{\mathbb{C}}(2k)$, es fácil ver que las partes par e impar del álgebra de Clifford actúan como afirma el teorema. \square

COROLARIO 4.5. *La representación $\Delta_{2k}^{\mathbb{C}}$ se descompone como la suma de dos representaciones irreducibles inequivalentes $\Delta_{\pm}^{\mathbb{C}} : \text{Spin}(2k) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}} \Sigma_{\pm}^{\mathbb{C}}(2k)$ cada una de dimensión 2^{k-1} mientras que $\Delta_{2k+1}^{\mathbb{C}}$ es una representación irreducible de dimensión compleja 2^k para $\text{Spin}(2k+1)$.*

DEMOSTRACIÓN. Debido a que la parte par del álgebra de Clifford se identifica con el álgebra de Clifford correspondiente a un subespacio de codimensión uno, las representaciones del álgebra de Clifford relevantes para construir $\Delta_{2k}^{\mathbb{C}}$ y $\Delta_{2k+1}^{\mathbb{C}}$ son (respectivamente)

$$\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(2k-1) \simeq \text{Mat}_{2^{k-1} \times 2^{k-1}}(\mathbb{C}) \oplus \text{Mat}_{2^{k-1} \times 2^{k-1}}(\mathbb{C})$$

$$\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(2k) \simeq \text{Mat}_{2^k \times 2^k}(\mathbb{C}).$$

Por lo tanto, el corolario se sigue de la observación 3.2 en la página 12. \square

COROLARIO 4.6. *Para cualquier valor de n , el enunciado del corolario anterior también es válido para la representación compleja $\hat{\Delta}_n^{\mathbb{C}} : \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}} \Sigma^{\mathbb{C}}(n)$ definida como la extensión canónica de la representación espinorial compleja $\Delta_n^{\mathbb{C}}$.*

DEMOSTRACIÓN. En vista de la proposición 4.2, solo hay que verificar que $\Delta_n^{\mathbb{C}}(-1) = -1$, condición que se satisface trivialmente por la definición de la representación espinorial compleja. Finalmente, como $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ y $\hat{\Delta}_n^{\mathbb{C}}$ actúan sobre el mismo espacio vectorial $\Sigma^{\mathbb{C}}(n)$, la afirmación se sigue. \square

Para finalizar la sección, vamos a describir brevemente un par de propiedades geométricas adicionales que enriquecen las representaciones espinoriales que hemos estado estudiando.

PROPOSICIÓN 4.5. *Para toda representación real $\rho : \mathcal{C}\ell(n) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}} W$ existe un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que induce una acción ortogonal de $S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(n)$ en W . Más aún, si ρ es compleja o quaternionica, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ puede elegirse de manera que tanto las estructuras compleja J o quaternionica I, J, K sean isometrías.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ un producto interno, invariante bajo J si ρ es compleja o invariante bajo I, J, K si ρ es quaternionica y consideremos G el grupo

generado por una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\} \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(n)$. Como G es un grupo finito, podemos definir

$$(4.12) \quad \langle v, w \rangle := \sum_{g \in G} \langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle_0$$

para todo $(v, w) \in W \times W$. Es fácil ver que la forma bilineal definida anteriormente es un producto interno invariante bajo las mismas estructuras que $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$. Dado un generador $e_k \in G$, notamos que el miembro derecho de

$$\langle \rho(e_k)v, \rho(e_k)w \rangle = \sum_{g \in G} \langle \rho(ge_k)v, \rho(ge_k)w \rangle_0$$

tiene exactamente los mismos sumandos que el miembro derecho de (4.12) pero reagrupados de acuerdo a la biyección $g \mapsto ge_k$, es decir, $\langle \rho(e_k)v, \rho(e_k)w \rangle = \langle v, w \rangle$. Más aún, $\langle \rho(e_k)v, w \rangle = \langle \rho(e_k^2)v, \rho(e_k)w \rangle = -\langle w, \rho(e_k)w \rangle$, por tanto, los generadores $\{e_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ actúan por transformaciones anti-simétricas respecto de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Finalmente, dado un elemento arbitrario $\xi = \xi^k e_k \in S^{n-1}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \rho(\xi)v, \rho(\xi)w \rangle &= \sum_{g \in G} \langle \rho(g\xi)v, \rho(g\xi)w \rangle_0 \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{k,l=1}^n \xi^k \xi^l \Theta_{kl}(g) \\ &= \sum_{g \in G} \left[\sum_{k=1}^n (\xi^k)^2 \Theta_{kk}(g) + \sum_{k \neq l} \xi^k \xi^l \Theta_{kl}(g) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n (\xi^k)^2 \langle v, w \rangle \\ &= \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

donde $\Theta_{kl}(g) := \langle \rho(ge_k)v, \rho(ge_l)w \rangle_0$. En el argumento anterior hemos usado la antisimetría de Θ_{kl} para cancelar el segundo término en el miembro derecho de la tercera ecuación y la hipótesis $\sum_{k=1}^n (\xi^k)^2 = 1$ en la cuarta línea. \square

COROLARIO 4.7. *Para cada generador ξ de $\mathcal{C}\ell(n)$, $\rho(\xi)$ es antisimétrica.*

DEMOSTRACIÓN. Para $\xi = 0$ el resultado es trivialmente cierto. Si $\xi \neq 0$, tenemos que $\tilde{\xi} := \frac{\xi}{\|\xi\|}$ es de norma uno, en consecuencia

$$\langle \rho(\xi)v, w \rangle = \langle \rho(\tilde{\xi}\xi)v, \rho(\tilde{\xi})w \rangle = \frac{1}{\|\xi\|^2} \langle \rho(\xi^2)v, \rho(\xi)w \rangle = -\langle v, \rho(\xi)w \rangle.$$

\square

COROLARIO 4.8. *Las representaciones espinoriales complejas $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ y sus extensiones canónicas $\hat{\Delta}_n^{\mathbb{C}}$ a $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ son representaciones unitarias.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición, el grupo $\text{Spin}(n)$ está generado por productos de un número par de elementos en la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(n)$. Así, $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ es unitaria para cada $n \in \mathbb{N}$ por el resultado anterior. Finalmente, como $\Sigma^{\mathbb{C}}(n)$ es de la forma \mathbb{C}^k , es claro que el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ discutido anteriormente se construye a partir del producto hermitiano usual $\langle \psi, \chi \rangle_0 = \chi^\dagger \psi$. Esto nos permite extender

la definición de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de manera que la representación $\hat{\Delta}_n^{\mathbb{C}} : \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}} \Sigma^{\mathbb{C}}(n)$ sea también unitaria, puesto que se satisface la identidad

$$\langle \hat{\Delta}_n^{\mathbb{C}}(z\xi)\psi, \hat{\Delta}_n^{\mathbb{C}}(z\xi)\chi \rangle = z\bar{z} \langle \Delta_n^{\mathbb{C}}(\xi)\psi, \Delta_n^{\mathbb{C}}(\xi)\chi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle$$

para cada elemento $z\xi \in \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \simeq \text{Spin}(n) \times_{\mathbb{Z}_2} \text{U}(1)$. \square

Para fijar ideas, vamos a materializar la construcción descrita previamente en algunos ejemplos concretos.

EJEMPLO 4.1. Como vimos en el ejemplo 3.6 en la página 17, $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(2)$ se identifica con $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ vía el isomorfismo complejo $\Delta_2^{\mathbb{C}}$ inducido por

$$\mathcal{C}\ell(2) \simeq \mathbb{H} \ni \alpha 1 + \beta i + \gamma j + \delta ij \mapsto \begin{pmatrix} \alpha 1 + \beta i & -\gamma + \delta i \\ \gamma + \delta i & \alpha 1 - \beta i \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que bajo $\Delta_2^{\mathbb{C}}$, $e_1 e_2$ tiene autovalores $\pm i$, y que conmuta con el operador de quiralidad $\Gamma_{\mathbb{C}}^3 = ie_1 e_2$. Esto nos permite ver que $e_1 e_2$ actúa en $\Sigma_{\pm}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_{\pm}$ por $\mp i$. Por lo tanto, la descomposición quiral de la representación espinorial compleja de $\text{Spin}(2)$ es

$$\Delta_+^{\mathbb{C}}(z) = \begin{pmatrix} \bar{z} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta_-^{\mathbb{C}}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

debido a que $\text{Spin}(2) \simeq \text{U}(1)$ está generado por los elementos $1, e_1 e_2$.

EJEMPLO 4.2. De acuerdo con los resultados generales obtenidos hasta ahora, $\text{Spin}(3)$ tiene una única representación espinorial compleja de dimensión 2. Por otra parte, sabemos que $\text{Spin}(3) \simeq \text{SU}(2)$ admite una representación en \mathbb{C}^2 . Por tanto, la representación fundamental de $\text{SU}(2)$ es la representación espinorial compleja de $\text{Spin}(3)$.

EJEMPLO 4.3. Por último, la descomposición de Weyl de la representación espinorial compleja de $\text{Spin}(4) \simeq \text{SU}_+(2) \times \text{SU}_-(2)$ se obtiene de la representación fundamental de cada uno de los factores unitarios.

Existe una manera alternativa de construir directamente la representación del álgebra de Clifford complexificada en dimensiones pares que da origen a la representación espinorial compleja. Esta representación se construye a partir del isomorfismo de cuantización entre $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(2n)$ y el álgebra exterior complexificada $\Lambda_{\mathbb{C}} \mathbb{R}^{2n} := (\Lambda \mathbb{R}^{2n}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \Lambda(\mathbb{R}^{2n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \simeq \Lambda \mathbb{C}^n$. Para dotar al álgebra exterior de un producto de Clifford, se define la *contracción* $\lrcorner : \Lambda^1 \mathbb{C}^n \times \Lambda^p \mathbb{C}^n \rightarrow \Lambda^{p-1} \mathbb{C}^n$ entre vectores v y generadores $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p$ de la componente p -homogénea como

$$v \lrcorner \omega = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \langle v, \omega_k \rangle_0 \omega^{(k)}$$

donde $\omega^{(k)} = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{k-1} \wedge \omega_{k+1} \wedge \cdots \wedge \omega_p$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ es el producto hermitiano usual en \mathbb{C}^n . Es claro que $v \lrcorner$ se extiende a un operador \mathbb{C} -lineal en el álgebra exterior tal que, tras un par de cálculos, satisface la relación $v \lrcorner v \lrcorner = 0$ para todo $v \in \Lambda^1 \mathbb{C}^n$. De esta manera obtenemos una aplicación \mathbb{C} -lineal $\varphi^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} \Lambda \mathbb{C}^n$ definida como $\varphi^{\mathbb{C}}(v) = v \lrcorner -v \lrcorner$. Usando que $v \wedge v \lrcorner = 0$, se deduce que

$$\begin{aligned}
(\varphi^{\mathbb{C}}(v))^2 \omega &= -\{v_{\perp}, v\} \omega \\
&= -[v_{\perp}(v \wedge \omega) + v \wedge (v_{\perp} \omega)] \\
&= -\left[\langle v, v \rangle_0 \omega + \sum_{k=2}^p (-1)^{k+1} \langle v, \omega_k \rangle_0 v \wedge \omega^{(k)} + v \wedge \left(\sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \langle v, \omega_k \rangle_0 \omega^{(k)} \right) \right] \\
&= -\|v\|^2 \omega.
\end{aligned}$$

Es decir, $(\varphi^{\mathbb{C}}(v))^2 = -\|v\|^2 \text{id}$, en particular $\text{Ker } \varphi^{\mathbb{C}} = 0$. Por lo tanto, $\varphi^{\mathbb{C}}$ induce un isomorfismo complejo $\varphi_*^{\mathbb{C}} : \mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(2n) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} \Lambda^{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$. La dimensión compleja de la representación inducida por $\varphi^{\mathbb{C}}$ es 2^n y como este valor coincide con la dimensión compleja de la representación espinorial compleja concluimos que $\varphi_*^{\mathbb{C}} : \mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(2n) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} \Lambda^{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n$ es un isomorfismo como álgebras de Clifford. Destacamos que al remplazar el producto hermitico $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ en la fórmula que define la contracción v_{\perp} por un producto interno euclidiano obtenemos una representación real φ sin importar la dimensión del espacio euclidiano \mathbb{R}^n . Este resultado nos sugiere una conexión entre el álgebra de Clifford y el álgebra exterior. A continuación presentamos la relación que existe entre el producto de Clifford y el operador *estrella de Hodge* $\star : \Lambda^p \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^{n-p} \mathbb{R}^n$ que definiremos a continuación. Adelantamos que el operador de Hodge juega un papel fundamental en la teoría de 4-variedades gracias a la propiedad única de mapear el espacio de 2-formas en si mismo a través de un isomorfismo.

Como vimos al inicio de este capítulo, asociado a una forma cuadrática q definida en un espacio vectorial real V de dimensión n , existe una única forma bilineal b_q que satisface $q(v) = b_q(v, v)$. Con esta notación en mente, consideremos la siguiente

DEFINICIÓN 4.6. Sea (V, q) un espacio cuadrático. Para cada $1 \leq p \leq n$, se define la extensión de la forma cuadrática q en los generadores del espacio de p -vectores $\Lambda^p V$ mediante la siguiente fórmula

$$(4.13) \quad b_q(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p) := \det b_q(v_i, w_j), \quad 1 \leq i, j \leq p, \quad v_i, w_j \in V.$$

Es claro que la construcción anterior determina una estructura de espacio cuadrático para $\Lambda^p V$, más aún, si q es un producto interno positivo definido, su extensión a p -vectores lo es también. Geométricamente, la extensión de q a $\Lambda^p V$ mide el volumen del paralelogramo generado por los vectores $\{v_1, \dots, v_p\}$ ⁶.

Si $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ es una base orientada de V , entonces $Q := q(\epsilon_1 \wedge \cdots \wedge \epsilon_n)$ es el q -volumen absoluto del paralelogramo generado por los elementos básicos ϵ_k . Con esta elección de base obtenemos un generador canónico para la n -ésima potencia exterior $\Lambda^n V$ dado por el *elemento invariante de volumen* $\mu := \sqrt{|Q|} \epsilon_1 \wedge \cdots \wedge \epsilon_n$, que es independiente de coordenadas y que además representa la orientación positiva de V . En particular, para cualquier espacio vectorial real W y cualquier transformación lineal $T \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W, \Lambda^n V)$ existe una única funcional $\phi_T \in W^*$ que determina a T mediante la ecuación

$$T(w) = \phi_T(w) \mu.$$

Para un $n-p$ -vector fijo γ , la construcción anterior aplicada a la pareja $W = \Lambda^p V$, $T = \bullet \wedge \gamma$ ⁷, garantiza la existencia de una p -forma $\phi_{\gamma} \in (\Lambda^p V)^*$ tal que

⁶Hablamos del volumen relativo a la forma q en el subespacio generado por $\{v_1, \dots, v_p\}$

⁷ $\bullet \wedge \gamma$ es la transformación lineal $\alpha \mapsto \alpha \wedge \gamma$

$\alpha \wedge \gamma = \phi_\gamma(\alpha) \mu$. Como además, V tiene una forma cuadrática q , $\phi_\gamma(\alpha)$ se puede escribir como $b_q(\alpha, \beta)$ para un único $\beta \in \Lambda^p V$. Esta última afirmación se sigue del Teorema de representación de Riesz [34]. En resumen, hemos construido un isomorfismo lineal entre $\Lambda^{n-p} V$ y $\Lambda^p V$, inducido por el isomorfismo de Riesz, dado por la correspondencia $\gamma \mapsto \beta$. Este hecho motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4.7 (Dual de Hodge). Dados α y β p -vectores exteriores, definimos el dual de Hodge de β como el único elemento $\star\beta \in \Lambda^{n-p} V$ que, vía el isomorfismo descrita en el párrafo anterior, satisface la ecuación

$$(4.14) \quad \alpha \wedge \star\beta = b_q(\alpha, \beta) \mu.$$

Es claro que el isomorfismo $\Lambda^p V \simeq \Lambda^{n-p} V$ aludido previamente es precisamente el operador estrella de Hodge $\star : \Lambda^p V \rightarrow \Lambda^{n-p} V$. Note que la definición que hemos dado de este operador es independiente de coordenadas. Además, esta definición no impone restricciones adicionales sobre la signatura de la forma bilineal b_q , sin embargo, en el resto de este trabajo asumiremos que la forma cuadrática q es positivo definida, a menos que explícitamente se indique lo contrario.

La siguiente proposición nos da una expresión concreta del dual de Hodge en términos de una base ortonormal $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \mid i_1 < \cdots < i_p\} \hookrightarrow \Lambda^p V$ inducida por una base ortonormal orientada positivamente $\{e_1, \dots, e_n\} \hookrightarrow V$. Para tal efecto, recordamos que el *tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita* en n dimensiones está definido como

$$(4.15) \quad \epsilon^{i_1 \cdots i_n} := \begin{cases} +1 & \text{si } (i_1, \dots, i_n) \text{ es una permutación par de } \{1, \dots, n\} \\ -1 & \text{si } (i_1, \dots, i_n) \text{ es una permutación impar de } \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Una propiedad bien conocida de este tensor es que permite calcular el determinante de una matriz $T = (T_{ij})$ $1 \leq i, j \leq n$ mediante la fórmula

$$\det T = \epsilon^{i_1 \cdots i_n} T_{1i_1} \cdots T_{ni_n}.$$

PROPOSICIÓN 4.6. Sea $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \mid i_1 < \cdots < i_p\}$ una base ortonormal de $\Lambda^p V$ como en el párrafo anterior, y sea $\omega = \frac{1}{p!} \omega^{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ un p vector fijo. Entonces

$$(4.16) \quad \star \omega = \frac{1}{(n-p)!} \omega_{i_1 \cdots i_p} \epsilon^{i_1 \cdots i_p, j_{p+1} \cdots j_n} e_{j_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}$$

donde $q_{ij} := b_q(e_i, e_j)$ se ha usado para bajar los índices de las componentes de ω . Explícitamente $\omega_{i_1 \cdots i_p} = q_{i_1 k_1} \cdots q_{i_p k_p} \omega^{k_1 \cdots k_p}$. Además, se ha adoptado el convenio de Einstein donde índices repetidos, uno arriba y uno abajo, se suman sobre todos los valores posibles.

DEMOSTRACIÓN. Esta proposición es muy sencilla de demostrar una vez que se cuenta con las observaciones adecuadas. Comencemos notando que

$$(4.17) \quad q(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}) = \delta_{i_1 \cdots i_p, j_1 \cdots j_p}.$$

Donde el *símbolo de Kronecker generalizado* $\delta_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p}$ está definido como

$$\delta_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} := \begin{cases} +1 & \text{si } i_1, \dots, i_p \text{ son todos distintos y } (j_1, \dots, j_p) \text{ es una} \\ & \text{permutación par de } (i_1, \dots, i_p) \\ -1 & \text{si } i_1, \dots, i_p \text{ son todos distintos y } (j_1, \dots, j_p) \text{ es una} \\ & \text{permutación impar de } (i_1, \dots, i_p) \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Este es el sentido preciso en el cual la base $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \mid i_1 < \dots < i_p\}$ es ortonormal. Observe que el símbolo de Kronecker generalizado es totalmente antisimétrico en los índices i_1, \dots, i_p y por separado en j_1, \dots, j_p . En particular, $A^{i_1 \dots i_p} \delta_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} = A_{j_1 \dots j_p}$ para todo elemento totalmente antisimétrico $A^{i_1 \dots i_p}$. Finalmente, tenemos que $\epsilon^{i_1 \dots i_n} = \delta_{1 \dots n}^{i_1 \dots i_n}$ y en consecuencia

$$\epsilon^{i_1 \dots i_k j_{k+1} \dots j_n} e_{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{j_n} = (n-k)! \epsilon^{i_1 \dots i_k [j_{k+1} \dots j_n]} e_{[j_{k+1}} \wedge \dots \wedge e_{j_n]}$$

donde los índices $j_{k+1} \dots j_n$ encerrados por el símbolo $[\dots]$ deben sumarse únicamente sobre los posibles órdenes lexicográficos $j_{k+1} < \dots < j_n$. Para probar la fórmula 4.16, elegimos un p -vector $\alpha = \frac{1}{p!} \alpha^{k_1 \dots k_p} e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_p}$ y tomamos $\omega \in \Lambda^p V$ como indican las hipótesis de esta proposición. Debemos entonces mostrar que, usando la expresión (4.16) para el dual de Hodge de ω , se satisface la relación $\alpha \wedge \star \omega = b_q(\alpha, \omega) \mu$. Por un lado

$$\begin{aligned} b_q(\alpha, \omega) \mu &= \frac{1}{p!} \alpha^{k_1 \dots k_p} \omega^{i_1 \dots i_p} \delta_{k_1 \dots k_p i_1 \dots i_p} \mu \\ &= \frac{1}{p!} \alpha^{k_1 \dots k_p} \omega_{k_1 \dots k_p} \mu \\ &= \alpha^{[k_1 \dots k_p]} \omega_{[k_1 \dots k_p]} e_1 \wedge \dots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \star \omega &= \frac{1}{(n-p)! (p!)^2} \alpha^{k_1 \dots k_p} \omega_{i_1 \dots i_p} \epsilon^{i_1 \dots i_p j_{p+1} \dots j_n} e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_p} \wedge e_{j_{p+1}} \wedge \dots \wedge e_{j_n} \\ &= \alpha^{[k_1 \dots k_p]} \omega_{[i_1 \dots i_p]} \epsilon^{[i_1 \dots i_p] [j_{p+1} \dots j_n]} e_{[k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_p]} \wedge e_{[j_{p+1}} \wedge \dots \wedge e_{j_n]} \\ &= \alpha^{[k_1 \dots k_p]} \omega_{[k_1 \dots k_p]} e_1 \wedge \dots \wedge e_n. \end{aligned}$$

Para pasar del penúltimo al último renglón del cálculo anterior, hemos usado el siguiente argumento combinatorio. Los índices en el grupo de las j 's deben ser todos distintos a los índices del grupo de las k 's, ya que ambos grupos aparecen en un producto exterior con n términos. Como los índices en el grupo de las i 's aparecen en el símbolo de Levi-Civita junto a los índices j 's, estos deben diferir por completo y por tanto, la única posibilidad es que los índices i asuman, salvo permutaciones, los mismos valores que el grupo de las k 's. \square

Usando la fórmula del operador de Hodge que acabamos de dar, se demuestra con la misma lógica combinatoria, que

$$(4.18) \quad \star^2 = (-1)^{p(n-p)} \text{id} : \Lambda^p V \rightarrow \Lambda^p V.$$

Así, cuando p es par, el operador de Hodge es una involución de $\Lambda^p V$ para todo V y es una estructura compleja en p -vectores cuando p es impar y la dimensión de V es par. De esta observación se desprende la siguiente

PROPOSICIÓN 4.7. *Existe una escisión por subespacios tridimensionales $\Lambda_{\pm}^2 \mathbb{R}^4$ de los bivectores en cuatro dimensiones inducida por los autovalores del operador de Hodge $\star : \Lambda^2 \mathbb{R}^4 \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^4$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\{e_1, \dots, e_4\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^4 . Entonces el espacio de bivectores está generado por

$$\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}.$$

A manera de ejemplo, calculemos explícitamente el dual de Hodge de $e_2 \wedge e_3$ usando la fórmula 4.16.

$$\begin{aligned} \star(e_2 \wedge e_3) &= \frac{1}{2!} \epsilon_{23}^{ij} e_i \wedge e_j \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_{23}^{14} e_1 \wedge e_4 + \epsilon_{23}^{41} e_4 \wedge e_1) \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_{23}^{14} e_1 \wedge e_4 + (-1\epsilon_{23}^{14})(-1e_1 \wedge e_4)) \\ &= \epsilon_{23}^{14} e_1 \wedge e_4 \\ &= e_1 \wedge e_4. \end{aligned}$$

De manera análoga se deducen los otros duales. El resultado de este cálculo es

$$\begin{array}{ll} \star(e_1 \wedge e_2) = +e_3 \wedge e_4 & \star(e_2 \wedge e_3) = +e_1 \wedge e_4 \\ \star(e_1 \wedge e_3) = -e_2 \wedge e_4 & \star(e_2 \wedge e_4) = -e_1 \wedge e_3 \\ \star(e_1 \wedge e_4) = +e_2 \wedge e_3 & \star(e_3 \wedge e_4) = +e_1 \wedge e_2. \end{array}$$

De los cálculos anteriores se ve que, en efecto, $\star^2 = \text{id}$. En particular, vemos que los únicos autovalores posibles para el dual de Hodge son ± 1 . Definiendo $\Lambda_{\pm}^2 \mathbb{R}^4$ como los espacios propios asociados a los valores propios \pm obtenemos en resultado. Se deja al lector verificar que

$$(4.19) \quad \{e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3\}$$

es una base para $\Lambda_+^2 \mathbb{R}^4$ y que

$$(4.20) \quad \{e_1 \wedge e_2 - e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_4 - e_2 \wedge e_3\}$$

genera $\Lambda_-^2 \mathbb{R}^4$. □

DEFINICIÓN 4.8. Decimos que un bivector α es autodual si $\alpha \in \Lambda_+^2 \mathbb{R}^4$. Un bivector β es antiautodual si $\star\beta = -\beta$. La descomposición $\Lambda^2 \mathbb{R}^4 = \Lambda_+^2 \mathbb{R}^4 \oplus \Lambda_-^2 \mathbb{R}^4$ se llama descomposición de dualidad.

El siguiente corolario nos dice que, en cuatro dimensiones, podemos pensar a los espinores de quiralidad positiva como bivectores autoduales y viceversa. Esto será de suma importancia cuando escribamos las ecuaciones de Seiberg-Witten. Para esto, denotamos por μ al elemento invariante de volumen $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ inducido por una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_4\}$ de V .

COROLARIO 4.9. *Supongamos que V es el espacio euclidiano real de dimensión cuatro. Bajo el isomorfismo de cuantización complexificado $\mathfrak{q} \otimes \text{id} : \Lambda V \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(V)$ definido en los generadores como $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \mapsto e_{i_1} \cdots e_{i_k}$, el subespacio que corresponde a $\mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(4)^+$ es $(1 - \mu)\mathbb{C} \oplus \Lambda_+^2 V \otimes \mathbb{C}$ ⁸.*

DEMOSTRACIÓN. Primero vamos a encontrar una base adecuada para $\mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(4)^+$, para esto, recordamos que $\mathcal{C}l_0(4) = W_1 \oplus W_2 \oplus W_4$, donde

$$W_1 = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{1\}, \quad W_2 = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{e_{i_1}e_{i_2} \mid 1 \leq i_1 < i_2 \leq 4\}, \quad W_4 = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1e_2e_3e_4\}.$$

Es claro que la acción del operador de quiralidad $\Gamma_{\mathbb{C}}^5 = -e_1e_2e_3e_4$ deja fijo a W_2 e intercambia W_1 con W_4 . Un cálculo muy sencillo muestra que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} W_2 \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\Gamma_{\mathbb{C}}^5} & W_2 \otimes \mathbb{C} \\ \mathfrak{q} \otimes \text{id} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{q} \otimes \text{id} \\ \Lambda^2 V \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\star \otimes \text{id}} & \Lambda^2 V \otimes \mathbb{C}. \end{array}$$

Es decir, la parte de quiralidad positiva de W_2 , denotada como W_2^+ , está dada por $\mathfrak{q}^{-1}\Lambda_+^2 V$. Por último, es fácil ver que $1 - e_1e_2e_3e_4 \in W_1 \oplus W_4$ genera un subespacio W_1^+ de quiralidad positiva. Por lo tanto, $\mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(4)^+ = W_1^+ \otimes \mathbb{C} \oplus W_2^+ \otimes \mathbb{C}$ más aún, bajo el isomorfismo de cuantización complexificado, $W_1^+ \otimes \mathbb{C}$ corresponde con $(1 - \mu)\mathbb{C}$ y $W_2^+ \otimes \mathbb{C}$ corresponde con $\Lambda_+^2 V \otimes \mathbb{C}$ como se buscaba. \square

La relación descrita anteriormente, única del universo cuadrimensional, se puede llevar aún más lejos, ya que, como se vio en corolario 3.5 en la página 16, el álgebra de Lie de $\text{SO}(n)$ se identifica naturalmente con el espacio de bivectores $\Lambda^2 \mathbb{R}^n$ sin importar el valor de n . Por otra parte, sabemos que en el caso particular de $n = 4$ se tiene una descomposición dual de los bivectores. De este par de hechos, se deduce que la descomposición

$$(4.21) \quad \mathfrak{spin}(4) \simeq \mathfrak{so}(4) \simeq \Lambda^2 \mathbb{R}^4 \simeq \Lambda_+^2 \mathbb{R}^4 \oplus \Lambda_-^2 \mathbb{R}^4$$

corresponde con la descomposición del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{su}_+(2) \oplus \mathfrak{su}_-(2)$ inducida por el isomorfismo $\text{Spin}(4) \simeq \text{SU}_+(2) \times \text{SU}_-(2)$. Recordamos que $\mathfrak{su}(2)$ es el espacio de endomorfismos de \mathbb{C}^2 anti-unitarios ($U^\dagger = -U$) de traza cero. Esto nos permite interpretar a los espinores de quiralidad positiva (negativa) como ciertas rotaciones infinitesimales. Esto se puede verificar de manera explícita si se calcula el operador de quiralidad $\Gamma_{\mathbb{C}}^5 = -e_1e_2e_3e_4$ en la base de Weyl propuesta en el ejemplo 2.8 en la página 10.

⁸ $(1 - \mu)\mathbb{C}$ denota al subespacio complejo generado por el elemento $1 - \mu \in \Lambda V$

Estructuras Spin y el Operador de Dirac

Hasta ahora hemos trabajado en un espacio cuadrático (V, q) de dimensión real n . El objetivo de este capítulo es extender las construcciones geométricas que hemos descrito en secciones anteriores a la categoría de *variedades diferenciables* de dimensión n que, de ahora y en adelante, supondremos: *reales, cerradas* (i.e. compactas y sin frontera), *conexas, orientables* y dotadas de una *métrica Riemanniana* g . La manera de hacer esto es pensar en las construcciones que hemos realizado como construcciones infinitesimales; más precisamente, podemos suponer que el espacio cuadrático está dado por la pareja (V, q) , donde V es el espacio tangente a la variedad, digamos M^n , en un punto arbitrario $p \in M^n$ y q es la métrica riemanniana g evaluada en el punto en cuestión; en símbolos $(V, q) = (T_p M^n, g_p)$. Esto no es suficiente, ya que como sabemos, la aproximación de M^n dada por su espacio tangente en p es solo infinitesimal. Para pasar de una construcción lineal infinitesimal a una de carácter local, existe la noción de trivialización local. Por último, para pasar de lo local a lo global, requerimos que las funciones de transición que definen la trivialización cumplan la llamada condición de *cociclo*, esta construcción básicamente define el *haz tangente* de M^n , denotado como TM^n . Este es el orden de ideas que vamos a seguir en el futuro inmediato. A continuación describiremos algunos de los detalles fundacionales de la teoría general de haces vectoriales. El lector interesado encontrara en las referencias [7], [19], [5] una descripción detallada de esta teoría. Al final del capítulo introducimos el operador de Dirac que es uno de los ingredientes en las ecuaciones de Seiberg-Witten.

1. Haces Vectoriales

DEFINICIÓN 1.1. Un *haz vectorial* real de rango k sobre un espacio topológico conexo X es una tripleta (E, X, π) donde E es un espacio topológico y $\pi : E \rightarrow X$ es una aplicación continua sujeta a las siguientes restricciones:

- 1) $\pi^{-1}(x) := E_x$ tiene estructura de espacio vectorial real de dimensión k para todo punto $x \in X$.
- 2) Existe una cubierta abierta $\mathcal{U} := \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de X y una colección de homeomorfismos $\Phi := \{\Phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo para cada elección de $\alpha \in \mathcal{A}$

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \\ & \searrow \text{proy}_\alpha & \swarrow \pi_\alpha \\ & \mathcal{U}_\alpha & \end{array}$$

Donde π_α denota la restricción de π a \mathcal{U}_α y proy_α es la proyección obvia de $\mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k$ sobre \mathcal{U}_α .

- 3) Para todo abierto \mathcal{U}_α y todo punto $x \in \mathcal{U}_\alpha$, la función $\Phi_{\alpha,x} : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$ definida como $\Phi_{\alpha,x}(v) = \Phi_\alpha(x, v)$ es una transformación \mathbb{R} -lineal. En otras palabras, Φ_α es lineal en la segunda coordenada cada vez que se fija la primera coordenada.

OBSERVACIÓN 1.2. La pareja (\mathcal{U}, Φ) requerida por la propiedad 2) se llama *trivialización local* del haz $\pi : E \rightarrow X$, $E_x = \pi^{-1}(x)$ es la fibra sobre x y \mathbb{R}^k se llama la fibra típica del haz. Las condiciones en la definición de arriba implican que la fibra típica y la fibra sobre cada punto x en la base se identifican linealmente a través de $\Phi_{\alpha,x}$; que es un isomorfismo lineal con inversa inducida por el homeomorfismo Φ_α^{-1} . Un haz vectorial complejo de rango k se define de manera análoga, sustituyendo la fibra típica por \mathbb{C}^k y requiriendo además que $\Phi_{\alpha,x}$ sea \mathbb{C} -lineal. En adelante, \mathbb{F} denotara ya sea al campo de los número reales o al de los complejos, dependiendo del contexto. Finalmente, decimos que E es el espacio total, X es la base del haz vectorial (E, X, π) y π su proyección. A veces nos referiremos a una haz vectorial indicando únicamente su espacio total.

OBSERVACIÓN 1.3. Si requerimos que los objetos y morfismos involucrados en la definición anterior “pertenezcan” a la categoría diferenciable, diremos que el haz es suave. Explícitamente, un haz vectorial (real o complejo) de rango k es un *haz vectorial suave* si: los espacios base y total son variedades diferenciables, además se pide que tanto las trivializaciones como la proyección del haz sean aplicaciones suaves. Por supuesto, este es el concepto de interés en este trabajo, por lo que de ahora y en adelante todos los haces vectoriales que se discutan serán asumidos suaves a menos que se indique lo contrario.

Supongamos que $\pi : E \rightarrow M^n$ es un haz vectorial suave (real o complejo) de rango k sobre una variedad M^n . De las propiedades 2 y 3 en la definición de haz vectorial se sigue que para todo abierto $\mathcal{U}_{\alpha\beta} := \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ no vacío, el valor de la función $\Phi_{\alpha\beta} := \Phi_\alpha^{-1} \circ \Phi_\beta$ en una pareja (x, v) de $\mathcal{U}_{\alpha\beta} \times \mathbb{F}$ es de la forma $(x, K_{\alpha\beta}(x)v)$ para alguna función diferenciable

$$(1.2) \quad K_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \longrightarrow \text{GL}(k; \mathbb{F}),$$

llamada *función de transición*. De hecho, $K_{\alpha\beta}$ es la función definida por la relación $K_{\alpha\beta}(p)(v) := \Phi_{\alpha\beta}(p, v)$. En el párrafo anterior, $\text{GL}(k; \mathbb{F})$ es el grupo de matrices invertibles $k \times k$ con coeficientes en $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ si el haz es real o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ si $\pi : E \rightarrow M^n$ es un haz complejo. Es fácil ver que para todo abierto $\mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma} := \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma$ no vacío se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\Phi_{\alpha\beta}} & \mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\Phi_{\beta\gamma}} & \mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{R}^k \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & \Phi_{\alpha\gamma} \end{array}$$

Se tiene además la obvia relación $\Phi_{\alpha\beta}^{-1} = \Phi_{\beta\alpha}$ sobre cualquier $\mathcal{U}_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Estas ecuaciones se traducen en términos de las funciones de transición en la *condición de cociclo*

$$(1.3) \quad K_{\alpha\beta} K_{\beta\gamma} K_{\gamma\alpha} = 1 \quad \text{para todo } \mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset.$$

Esta condición es tan poderosa que de hecho determina la estructura del haz vectorial. Explícitamente, si se cuenta con una familia $\{(\mathcal{V}_{ab}, \mathbb{K}_{ab})\}_{(a,b) \in \mathcal{A}^2}$ donde \mathcal{V}_{ab} se obtiene de intersecar dos a dos los miembros \mathcal{V}_a de una cubierta abierta de M^n y $\mathbb{K}_{ab} : \mathcal{V}_{ab} \rightarrow \text{GL}(k; \mathbb{F})$ es una familia de funciones suaves que satisfacen la condición de cociclo, entonces existe un haz vectorial $E \rightarrow M^n$ con fibra típica \mathbb{F}^k , trivializado por la cubierta $\{\mathcal{V}_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ y que tiene como funciones de transición precisamente a las funciones \mathbb{K}_{ab} . Dicho haz vectorial se obtiene identificando $\mathcal{V}_a \times \mathbb{F}^k$ con $\mathcal{V}_b \times \mathbb{F}^k$ mediante \mathbb{K}_{ab} siempre que $\mathcal{V}_{ab} \neq \emptyset$.

Si G es un subgrupo de Lie de $\text{GL}(k; \mathbb{F})$, decimos que $\pi : E \rightarrow M^n$ es un G -haz vectorial si podemos encontrar una trivialización local tal que las correspondientes funciones de transición tomen todos los valores en G . En esta situación, llamamos a la familia $\{(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})\}_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}^2}$ un G -cociclo estructural de E si $K_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow G$ satisface (1.3). Este procedimiento se conoce como reducción del grupo estructural de $\text{GL}(k; \mathbb{F})$ a G . Una pregunta natural que nos sigue esta definición es; ¿Cuándo podemos reducir el grupo de estructural de un haz vectorial de rango k de $\text{GL}(k; \mathbb{F})$ a un subgrupo dado G ? Antes de abordar esta pregunta (en una formulación un poco más general), veamos algunos ejemplos de haces vectoriales que utilizaremos más adelante.

EJEMPLO 1.1. Si M^n es una variedad diferenciable, existe por definición una cubierta abierta de M^n cuyos elementos son precisamente las cartas de la estructura diferenciable. Para cualesquiera dos cartas $(\mathcal{U}, (u^1, \dots, u^n))$ $(\mathcal{V}, (v^1, \dots, v^n))$ con intersección no vacía, se tiene que

$$K_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(p) := \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j} \Big|_p \right)$$

determina un elemento bien definido en $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ para todo punto $p \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. La regla de la cadena garantiza que $K_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ satisface la condición de cociclo. El haz que determina el sistema antes mencionado es ni más ni menos que el haz tangente de M^n , denotado por TM^n . La diferenciabilidad de las funciones $K_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ es consecuencia de la correspondiente suavidad de las coordenadas locales u^1, \dots, u^n ; esto muestra que el haz tangente es un haz suave. Una sección suave del haz tangente se llama un campo vectorial sobre M^n .

EJEMPLO 1.2. Si $\{K_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow G\}_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}^2}$ son los cociclos estructurales de un G -haz vectorial $E \rightarrow M^n$, es fácil ver que las funciones $K_{\alpha\beta}^* := (K_{\alpha\beta}^{-1})^t = K_{\beta\alpha}^t$ también satisfacen la condición de cociclo y por tanto determinan un G -haz vectorial llamado el haz dual de E , denotado como $E^* \rightarrow M^n$. Un ejemplo particular muy importante de esta construcción es el haz cotangente a M^n , denotado como T^*M^n , que por definición es el haz dual del haz tangente de M^n . Los elementos de $\Gamma^\infty(T^*M^n)$ se llaman 1-formas diferenciales.

EJEMPLO 1.3. En general, es posible extender “fibra a fibra” las construcciones funcionales de la categoría de \mathbb{F} -espacios vectoriales $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ a la categoría de \mathbb{F} -haces vectoriales (que definiremos enseguida). Supongamos que $E \rightarrow M^n$ y $\mathcal{E} \rightarrow M^n$ son dos haces vectoriales (ambos reales o ambos complejos) con funciones de transición $K_{\alpha\beta}^E$ y $K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}}$ respectivamente. Considere $F : \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}} \times \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ uno de los siguientes bifuntores: $(*) \oplus (*)$, $(*) \otimes (*)$, $(*) \wedge (*)$, $\text{Sym}(*, *)$, $\text{Hom}(*, *)$, entonces se define el haz vectorial $F(E, \mathcal{E}) \rightarrow M^n$ como el haz vectorial determinado

por las funciones de transición $K_{\alpha\beta}^{F(E,\mathcal{E})} := F(K_{\alpha\beta}^E, K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}})$. Se deja al lector la tarea de verificar la condición de cociclo para estas funciones.

Supongamos que $\pi : E \rightarrow M^n$ es un haz vectorial. Una función $s : M^n \rightarrow E$ se llama una sección global de E si $\pi \circ s = \text{id} : M^n \rightarrow M^n$. En otras palabras, la sección s asigna a cada punto $p \in M^n$ un elemento $s(p) \in E_p$. El conjunto de todas las secciones del haz E se denota como $\Gamma(E)$, al subconjunto de las secciones continuas (suaves), se le denota como $\Gamma^0(E)$ ($\Gamma^\infty(E)$) respectivamente. Dado \mathcal{U} abierto en M^n , decimos que s es una sección local de M^n si s es una sección global de \mathcal{U} . Denotamos por $\Gamma_{loc}(E)$ al conjunto de todas las secciones locales, y como $\Gamma_{loc}^0(E)$, $\Gamma_{loc}^\infty(E)$ a los conjuntos análogos correspondientes. Además, observe que toda sección, global o no, es un mapeo uno a uno; y que todo elemento de $\Gamma^\infty(E)$ una inmersión inyectiva. Estas dos condiciones implican, dada la supuesta compacidad de la variedad M^n , que cada sección $s \in \Gamma^\infty(E)$ es de hecho un encaje suave [14]; esto quiere decir que s establece un difeomorfismo entre M^n su imagen dentro del espacio total E .

Como E_p es un espacio vectorial para cada punto $p \in M^n$, se tiene que todo haz vectorial tiene al menos una sección, llamada *sección cero*, definida como $0(p) = 0_p$, donde 0_p denota al neutro aditivo de la fibra sobre p . Esto permite dotar a $\Gamma(E)$ con la estructura de un módulo izquierdo sobre el anillo de funciones en M^n con valores en \mathbb{F} , usualmente denotado como $\text{Maps}(M^n; \mathbb{F})$. Las operaciones de suma y producto están definidas fibra a fibra, es decir, si $p \in M^n$, $s, s' \in \Gamma(E)$ y $f \in \text{Maps}(M^n; \mathbb{F})$ se define

$$\begin{aligned} (s + s')(p) &= s(p) + s'(p) \\ (fs)(p) &= f(p)s(p). \end{aligned}$$

Más aún, si elegimos s, s' y f continuas o diferenciables, entonces los correspondientes elementos $s + s'$ y fs resultan ser también aplicaciones continuas o diferenciables, según sea el caso. Esto quiere decir que $\Gamma^0(E)$ y $\Gamma^\infty(E)$ son módulos sobre $\mathcal{C}^0(M^n; \mathbb{F})$ y $\mathcal{C}^\infty(M^n; \mathbb{F})$ respectivamente. Note además que la construcción anterior en particular define una estructura de \mathbb{F} -espacio vectorial para $\Gamma(E)$ de dimensión infinita.

Resulta ser que la estructura algebraica de módulo descrita anteriormente está íntimamente relacionada con la estructura topológica del haz E en el sentido de la existencia de una correspondencia biyectiva entre generadores linealmente independientes $\Gamma_{loc}^0(E)$ y trivializaciones locales de E ; que además puede restringirse a $\Gamma_{loc}^\infty(E)$ si E es diferenciable. Para ser más explícitos, supongamos que $\pi : E \rightarrow M^n$ es un haz vectorial suave de rango k . Si $s_1, \dots, s_k \in \Gamma_{loc}^\infty(E)$ es un conjunto linealmente independientes respecto a la estructura de módulo, entonces cualquier $v_p \in E_p$ se escribe de manera única como combinación lineal de la forma $a^1(p)s_1(p) + \dots + a^k(p)s_k(p)$ para cada punto p en el dominio de definición \mathcal{U} de dicho conjunto de secciones locales. De esta manera obtenemos una aplicación $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U} \times \mathbb{F}^k$ dada por $v_p \mapsto (p, a^1(p), \dots, a^k(p))$ que resulta ser una trivialización local diferenciable de E . Inversamente, si $\Phi : \mathcal{U} \times \mathbb{F}^k \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ es una trivialización local de E y e_k es elemento de alguna base para \mathbb{F}^k , entonces la correspondencia $s_k(p) := \Phi(p, e_k)$ claramente define un conjunto de k secciones locales de E que son linealmente independientes respecto de la estructura de módulo. El lector puede consultar [36] para una descripción más detallada del módulo de secciones de un haz vectorial sobre una variedad.

DEFINICIÓN 1.4. Sean $\pi : E \rightarrow M^n$ y $\tilde{\pi} : \mathcal{E} \rightarrow \tilde{M}^m$ haces vectoriales. Un *morfismo de haces* entre \mathcal{E} y E es una pareja de aplicaciones $f : \tilde{M}^m \rightarrow M^n$, $\tau : \mathcal{E} \rightarrow E$ que preserve las fibras, es decir, que hace conmutativo el siguiente cuadrado

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\tau} & E \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{M}^m & \xrightarrow{f} & M^n, \end{array}$$

con la propiedad de que $\tau_p := \tau|_{\mathcal{E}_p}$ es una transformación lineal de \mathcal{E}_p en $E_{f(p)}$. Nos referimos al morfismo de haces (τ, f) diciendo que τ cubre a f .

Es claro que la definición anterior satisface todos los axiomas que hacen de la clase de todos los haces vectoriales una categoría cuyos objetos son por supuesto haces vectoriales (sobre variedades suaves) y cuyos morfismos están definidos por 1.4.

En el caso particular en que $M^n = \tilde{M}^m$ (y por tanto $m = n$) y $f = \text{id}$, decimos que τ es un morfismo de haces sobre M^n ; adicionalmente si $E = \mathcal{E}$, τ se llama un endomorfismo de E . Bajo estas mismas hipótesis, decimos que τ es un automorfismo de E si existe $\tau^{-1} : \mathcal{E} \rightarrow E$ endomorfismo de haces vectoriales que invierta la aplicación τ . Es fácil ver que un morfismo de haces sobre la misma base es un automorfismo sí y solo sí su restricción a fibras es un isomorfismo lineal. Note que existe una versión ligeramente más general de equivalencia de haces dada por aplicaciones que cubren a un difeomorfismo de la base. El siguiente concepto esclarece la distinción entre automorfismos de haces que cubren la identidad y automorfismos que cubren un difeomorfismo arbitrario de la base; veremos además que este concepto no se limita a esta situación.

DEFINICIÓN 1.5. Supongamos que $\pi : E \rightarrow M^n$ es un haz vectorial y $f : \tilde{M}^m \rightarrow M^n$ es una aplicación suave. Definimos el haz inducido por f como el haz vectorial sobre \tilde{M}^m con espacio total el subespacio de $\tilde{M}^m \times E$ dado por

$$(1.5) \quad f^*E := \left\{ (\tilde{p}, v) \in \tilde{M}^m \times E \mid f(\tilde{p}) = \pi(v) \right\}.$$

La proyección $f^*\pi : f^*E \rightarrow \tilde{M}^m$ está definida como la restricción a f^*E de la proyección $\tilde{M}^m \times E \rightarrow \tilde{M}^m$.

OBSERVACIÓN 1.6. Supongamos que E es un G -haz vectorial trivializado por la cubierta $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$, y con funciones de transición $K_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow G$. La definición anterior implica que f^*E es un G -haz vectorial trivializado por abiertos de la forma $f^{-1}\mathcal{U}_\alpha$. Las correspondientes funciones de transición $f^*K_{\alpha\beta}$ están dadas por la composición $K_{\alpha\beta} \circ f : f^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha\beta}) \rightarrow G$.

OBSERVACIÓN 1.7. La clase de isomorfismo de f^*E solo depende de la clase de homotopía de f [19].

El haz inducido f^*E está dotado de un morfismo canónico de haces vectoriales $\Pi_f : f^*E \rightarrow E$ definido como $\Pi_f(\tilde{p}, v) = v$ que cubre a f , es decir; satisface que $\pi \circ \Pi_f = f \circ f^*\pi$. El diagrama que esquematiza la propiedad antes mencionada tiene la importante característica universal de ser un *cuadrado cartesiano*, esto es;

para todo espacio X y cualesquiera funciones $q : X \rightarrow \tilde{M}^m$, $\zeta : X \rightarrow E$ tales que $f \circ q = \pi \circ \zeta$, existe una única función $(q, \zeta) : X \rightarrow f^*E$ tal que hace conmutativos todos los triángulos y cuadrados del siguiente diagrama

$$(1.6) \quad \begin{array}{ccccc} X & & & & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & (q, \zeta) & & & \\ & \downarrow & & \downarrow \Pi_f & \\ & f^*E & \xrightarrow{\quad} & E & \\ & \downarrow f^*\pi & & \downarrow \pi & \\ & \tilde{M}^m & \xrightarrow{\quad f \quad} & M^n & \end{array}$$

Más aún, si q y ζ son ambas continuas o diferenciables, entonces (q, ζ) es a su vez continua o diferenciable. Usando esta propiedad universal fácilmente se demuestra la naturalidad de esta construcción respecto a la composición de aplicaciones entre las bases, esto es; dado un haz $E \rightarrow M^n$ y funciones $f : \tilde{M}^m \rightarrow N^r$ y $h : N^r \rightarrow M^n$, existe un isomorfismo canónico entre el haz inducido por $h \circ f$ y el haz $h^*(f^*E)$. Así mismo, se cumple que $(\text{id})^* = \text{id}$. Esta importante propiedad de naturalidad es la clave para entender la diferencia entre automorfismos de haces de la forma (τ, f) con f un difeomorfismo en la base y aquellos de la forma (τ, id) . Ya que por una parte se tienen por la propiedad universal, isomorfismos: $\mathcal{E} \simeq f^*E$, $E \simeq (f^{-1})^*\mathcal{E}$. Por otro lado, la naturalidad implica que

$$E \simeq (f^{-1})^*\mathcal{E} \simeq (f^{-1})^*(f^*E) \simeq (f^{-1} \circ f)^*E = E.$$

Note que el automorfismo que se obtiene de la cadena de isomorfismos en el párrafo anterior cubre a la identidad. Es por esto que en esta sección usaremos la noción de equivalencia de haces que cubren a la identidad.

Veamos ahora como es la descripción local de un automorfismo de G -haces vectoriales en términos de las funciones de transición. Para esto, definimos la familia de difeomorfismos $\{\Phi_{\alpha\beta}^\tau := \Phi_\alpha^{-1} \circ \tau \circ \Phi_\beta : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{U}_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^k\}_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}^2}$; donde $\{(\mathcal{U}_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ es una trivialización local del haz vectorial $\pi : E \rightarrow M^n$ y τ es un automorfismo de E que cubre a la identidad de la base M^n . Un cálculo elemental muestra que $\Phi_\alpha^\tau := \Phi_{\alpha\alpha}^\tau$ es un difeomorfismo de $\mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{R}^k$ con inversa $(\Phi_\alpha^\tau)^{-1}$ dada por $\Phi_\alpha^{-1} \circ \tau^{-1} \circ \Phi_\alpha$. De hecho, las definiciones de haz vectorial y de automorfismo garantizan que Φ_α^τ es lineal una vez que se fija un punto $p \in \mathcal{U}_\alpha$ en la primera coordenada. En particular, Φ_α^τ induce funciones suaves bien definidas $\tau_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow G$ dadas por la regla de correspondencia $\tau_\alpha(p)v := \Phi_\alpha^\tau(p, v)$. Por lo tanto, la familia $\Phi^\tau := \{\Phi_\alpha^\tau\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ determina una nueva trivialización local (\mathcal{U}, Φ^τ) de $\pi : E \rightarrow M^n$. Asociadas a esta trivialización se tienen funciones de transición $K_{\alpha\beta}^\tau : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow G$.

PROPOSICIÓN 1.1. *Sea G un subgrupo de Lie de $\text{GL}(k : \mathbb{F})$ y $\pi : E \rightarrow M^n$ un G -haz vectorial con funciones de transición $K_{\alpha\beta}$. Si $\tau : E \rightarrow E$ es un automorfismo de haces vectoriales que cubre la identidad, entonces las funciones de transición $K_{\alpha\beta}^\tau$ satisfacen la condición de cofrontera*

$$(1.7) \quad K_{\alpha\beta}^\tau = \tau_\alpha^{-1} K_{\alpha\beta} \tau_\beta, \quad \text{sobre todo } \mathcal{U}_{\alpha\beta} \neq \emptyset.$$

En particular, $\{(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}^\tau)\}_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}^2}$ es un G -cociclo estructural de E . Y más aún, una familia de funciones $\{\tau_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow G\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ que satisfacen una ecuación de

la forma (1.7) determinan de manera única un automorfismo de E que cubre a la identidad de la base.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un abierto $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ no vacío. Por definición, τ_β relaciona las trivializaciones Φ y Φ^τ para todo elemento $(p, v) \in \Phi_\beta^{-1}(\mathcal{U}_{\alpha\beta})$ mediante la igualdad $\Phi_\beta^\tau(p, v) = \Phi_\beta(p, \tau_\beta(p)v)$. Usando la definición de los cocíelos estructurales $K_{\alpha\beta}$ vemos que $\Phi_\beta^\tau(p, v) = \Phi_\alpha(p, K_{\alpha\beta}(p)\tau_\beta(p)v)$. Razonando de la misma manera se obtiene que $\Phi_\alpha^\tau(p, K_{\alpha\beta}^\tau(p)v) = \Phi_\alpha(p, \tau_\alpha(p)K_{\alpha\beta}^\tau(p)v)$. Finalmente, como $\Phi_\beta^\tau(p, v) = \Phi_\alpha^\tau(p, K_{\alpha\beta}^\tau(p)v)$, deducimos que $K_{\alpha\beta}^\tau = \tau_\alpha^{-1}K_{\alpha\beta}\tau_\beta$ como se buscaba. Es claro que esta relación implica que $K_{\alpha\beta}^\tau$ satisface la condición de cocíelo (1.3) en la página 34.

Supongamos ahora que $\hat{K}_{\alpha\beta}$ son G -cocíelos estructurales asociados a otra trivialización local $\{(\mathcal{U}_\alpha, \hat{\Phi}_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de E con la propiedad $\hat{K}_{\alpha\beta} = \tau_\alpha^{-1}K_{\alpha\beta}\tau_\beta$. Para ver que $\tau_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow G$ induce un único automorfismo de E , definimos $T_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{F}^k \rightarrow \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{F}^k$ como $T_\alpha(p, v) = (p, \tau_\alpha(p)v)$. El automorfismo buscado $\tau : E \rightarrow E$ estará determinado por la condición $\tau|_{\pi(\mathcal{U}_\alpha)} = \Phi_\alpha \circ T_\alpha \circ \hat{\Phi}_\alpha^{-1}$ siempre y cuando probemos que esta definición no depende de \mathcal{U}_α ; esto ocurre precisamente cuando $\Phi_\alpha \circ T_\alpha \circ \hat{\Phi}_\alpha^{-1}$ y $\Phi_\beta \circ T_\beta \circ \hat{\Phi}_\beta^{-1}$ coincidan en $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ para todos los abiertos \mathcal{U}_α y \mathcal{U}_β con intersección no vacía. Considere $(p, v) \in \mathcal{U}_{\alpha\beta}$ y $e := \hat{\Phi}_\beta(p, v)$, por un lado tenemos que

$$\begin{aligned} (\Phi_\beta \circ T_\beta \circ \hat{\Phi}_\beta^{-1})(e) &= \Phi_\beta(p, \tau_\beta(p)v) \\ &= \Phi_\alpha(p, K_{\alpha\beta}(p)\tau_\beta(p)v) \\ &= \Phi_\alpha(p, \tau_\alpha(p)\hat{K}_{\alpha\beta}(p)v) \\ &= (\Phi_\alpha \circ T_\alpha)(p, \hat{K}_{\alpha\beta}(p)v). \end{aligned}$$

Finalmente, usando que $\hat{\Phi}_\alpha(p, \hat{K}_{\alpha\beta}(p)v) = \hat{\Phi}_\beta(p, v)$, junto con la definición de e , concluimos que $(\Phi_\beta \circ T_\beta \circ \hat{\Phi}_\beta^{-1})(e) = (\Phi_\alpha \circ T_\alpha \circ \hat{\Phi}_\alpha^{-1})(e)$. Esto muestra que τ está bien definida, lo que da por terminada esta prueba. \square

De la discusión anterior se desprende la siguiente conclusión; un G -haz vectorial $\pi : E \rightarrow M^n$ está determinado por sus G -cocíelos estructurales salvo una elección de funciones de transición relacionados a través de la ecuación (1.7). Obviamente, la condición de cofrontera establece una relación de equivalencia en el conjunto de trivializaciones de E . Esto en pocas palabras implica que la clase de isomorfismo de E está totalmente determinada por la clase de sus G -cocíelos módulo la relación de cofrontera. A continuación vamos a presentar un modelo natural que precisamente describe al conjunto de clases de isomorfismo de haces vectoriales de rango k sobre una variedad suave M^n fija. Para motivar esta definición, supongamos por un momento que G es un grupo abeliano. En notación aditiva, el neutro aditivo de G se escribe como 0 y el inverso de un elemento $g \in G$ como $-g$. Con estas convenciones, consideremos un G haz vectorial $\pi : E \rightarrow M^n$ descrito localmente por un G -cocíelo estructural $\{(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})\}_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}^2}$. En esta notación, la relación de cocíelo (1.3) en la página 34 se lee

$$(1.8) \quad K_{\beta\gamma} - K_{\alpha\gamma} + K_{\alpha\beta} = 0$$

donde se ha hecho uso explícito de la relación $K_{\gamma\alpha} = -K_{\alpha\gamma}$ junto con la hipótesis de que G es abeliano. Análogamente, si $\{(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, K_{\alpha,\beta}^\tau)\}_{(\alpha,\beta) \in \mathcal{A}^2}$ es otra

familia de G -cociclos, la relación de cofrontera (1.7) en la página 38 toma la forma

$$(1.9) \quad K_{\alpha\beta}^\tau - K_{\alpha\beta} = \tau_\beta - \tau_\alpha.$$

La manera en la que se han escrito las relaciones anteriores nos sugiere la existencia de una *teoría de cohomología* asociada a la cubierta $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Las siguientes definiciones hacen precisa esta afirmación.

2. Teoría de Obstrucciones y Cohomología de Čech

DEFINICIÓN 2.1. Sean $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una cubierta abierta de M^n y G un grupo de Lie abeliano. Dado un entero no negativo p , definimos el espacio de cocadenas de Čech de grado p , denotado por $\check{C}^p(\mathcal{U}; G)$, como

$$(2.1) \quad \prod_{(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathcal{A}^{p+1}} C^\infty(\mathcal{U}_{\alpha_0, \dots, \alpha_p}; G).$$

Arriba $C^\infty(\mathcal{U}_{\alpha_0, \dots, \alpha_p}; G)$ denota al grupo abeliano de todas las funciones suaves del abierto $\mathcal{U}_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} := \mathcal{U}_{\alpha_0} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{\alpha_p}$ con valores en G y \mathcal{A}^{p+1} denota al producto cartesiano de $p+1$ copias de \mathcal{A} .

OBSERVACIÓN 2.2. Recordemos que desde el inicio asumimos que M^n es una variedad compacta; esto nos permite suponer sin perder generalidad que la cubierta \mathcal{U} contiene un número finito de elementos. Así, $\check{C}^p(\mathcal{U}; G)$ es un grupo abeliano finitamente generado por elementos \bar{c} de la forma $(c_{\alpha_0, \dots, \alpha_p}, \dots, c_{\nu_0, \dots, \nu_p})$, donde cada una de las entradas $c_{\iota_0, \dots, \iota_p}$ es un elemento de $C^\infty(\mathcal{U}_{\iota_0, \dots, \iota_p}; G)$. Finalmente, definimos $C^\infty(\emptyset; G)$ como el grupo trivial cuyo único elemento es $0 \in G$. De esta manera asignamos el grupo trivial a una familia $\mathcal{U}_{\iota_0}, \dots, \mathcal{U}_{\iota_p}$ de abiertos ajenos entre sí.

OBSERVACIÓN 2.3. Si G es un grupo discreto como por ejemplo \mathbb{Z} o \mathbb{Z}_k , entonces para todo entero no negativo p , el conjunto de p -cocadenas de Čech $\check{C}^p(\mathcal{U}; G)$ consta de funciones localmente constante.

Dados abierto $\mathcal{U}_{\iota_0, \dots, \iota_p}, \mathcal{U}_{\iota_{p+1}}$, denotamos por $\varrho_{\iota_0, \dots, \iota_{p+1}}$ al encaje $\mathcal{U}_{\iota_0, \dots, \iota_{p+1}} \hookrightarrow \mathcal{U}_{\iota_0, \dots, \iota_p}$. Esta aplicación induce para cada $p \geq 0$ un homomorfismo de grupos

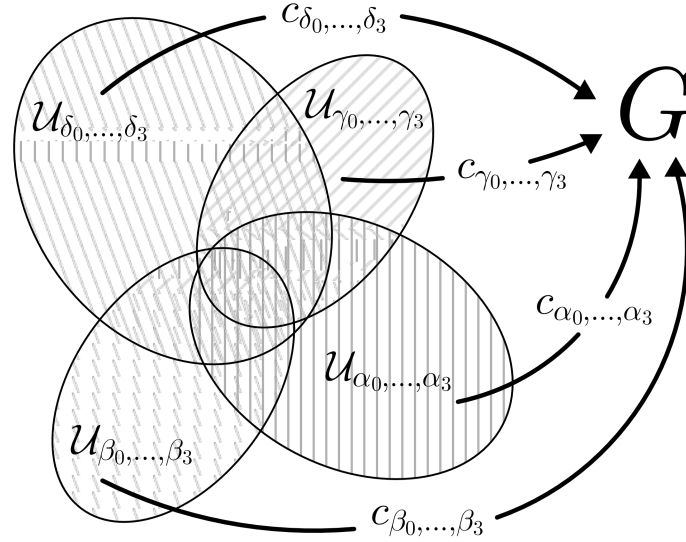
$$\varrho_{\iota_0, \dots, \iota_{p+1}}^p : C^\infty(\mathcal{U}_{\iota_0, \dots, \iota_p}; G) \rightarrow C^\infty(\mathcal{U}_{\iota_0, \dots, \iota_{p+1}}; G),$$

definido en componentes como $c_{\iota_0, \dots, \iota_p} \mapsto c_{\iota_0, \dots, \iota_p} \circ \varrho_{\iota_0, \dots, \iota_{p+1}}$. Este morfismo se llama *homomorfismo de restricción* inducido en grado p por $\varrho_{\iota_0, \dots, \iota_{p+1}}$.

DEFINICIÓN 2.4. Si $p \geq 0$, definimos la *codiferencial de Čech* en grado p $\check{\delta} : \check{C}^p(\mathcal{U}; G) \rightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}; G)$ como el homomorfismo de grupos inducido por la correspondencia que a cada generador $\bar{c} = (\dots, c_{\iota_0, \dots, \iota_p}, \dots)$ de las p cocadenas de Čech le asigna la $p+1$ -cocadena $\check{\delta}\bar{c}$ cuyas componentes están dadas por la ecuación

$$(2.2) \quad (\check{\delta}\bar{c})_{\iota_0, \dots, \iota_{p+1}} = \sum_{\mu=0}^{p+1} (-1)^\mu c_{\iota_0, \dots, \hat{\iota}_\mu, \dots, \iota_{p+1}} \circ \varrho_{\iota_0, \dots, \iota_{p+1}}$$

donde $\hat{\iota}_\mu$ denota la supresión del índice ι_μ . Si $p \leq -1$, definimos $\check{C}^p(\mathcal{U}; G) = 0$, y en consecuencia, $\check{\delta}^p = 0$.

FIGURA 1. Generador típico $\bar{c} = (c_{\alpha_0, \dots, \alpha_3}, \dots, c_{\delta_0, \dots, \delta_3})$ de $\check{C}^3(\mathcal{U}; G)$.

De esta manera obtenemos una sucesión de grupos grupos y homomorfismos graduados¹ por $p \in \mathbb{Z}$

$$(2.3) \quad \dots \longrightarrow \check{C}^{p-1}(\mathcal{U}; G) \xrightarrow{\check{\delta}} \check{C}^p(\mathcal{U}; G) \xrightarrow{\check{\delta}} \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}; G) \longrightarrow \dots,$$

denotada como $(\check{C}, \check{\delta})$.

TEOREMA 2.1. La sucesión $(\check{C}, \check{\delta})$ es un complejo de cocadenas, es decir, la composición sucesiva $\check{\delta} \circ \check{\delta} : \check{C}^p(\mathcal{U}; G) \rightarrow \check{C}^{p+2}(\mathcal{U}; G)$ es nula para toda $p \in \mathbb{Z}$. En símbolos, $\check{\delta}^2 = 0$.

DEMOSTRACIÓN. La prueba de este teorema no es más que el cálculo usual que se hace en homología singular. Sea $\bar{c} = (\dots, c_{\iota_0, \dots, \iota_p}, \dots)$ un generador de las p -cocadenas de Čech. Directamente de las definiciones se obtiene que

$$\begin{aligned} (\check{\delta}^2 \bar{c})_{\iota_0, \dots, \iota_{p+2}} &= \sum_{\nu=0}^{p+2} (-1)^\nu \left[\sum_{\mu=0}^{p+1} (-1)^\mu c_{\iota_0, \dots, \iota_\nu, \dots, \iota_\mu, \dots, \iota_{p+2}} \circ \varrho_{\iota_0, \dots, \iota_{p+1}} \circ \varrho_{\iota_0, \dots, \iota_{p+2}} \right] \\ &= \sum_{\nu=0}^{p+2} (-1)^\nu \left[\sum_{\mu=0}^{p+1} (-1)^\mu c_{\iota_0, \dots, \iota_\nu, \dots, \iota_\mu, \dots, \iota_{p+2}} \circ \varrho_{\iota_0, \dots, \iota_p} \right] \\ &= \varrho_{\iota_0, \dots, \iota_{p+2}}^p \left(\underbrace{\sum_{\nu=0}^{p+2} (-1)^\nu \left[\sum_{\mu=0}^{p+1} (-1)^\mu c_{\iota_0, \dots, \iota_\mu, \dots, \iota_\nu, \dots, \iota_{p+2}} \right]}_{\otimes} \right). \end{aligned}$$

¹Estamos usando el término graduado para referirnos a la asignación $p \mapsto \check{C}^p(\mathcal{U}; G)$ y no en el sentido de grupo \mathbb{Z} -graduado.

Afirmamos que el argumento de $\varrho_{\iota_0, \dots, \iota_{p+2}}^p$ denotado por comodidad como \circledast en la ecuación anterior se anula idénticamente. Para ver esto, realizamos el desarrollo de la suma sobre el índice ν . El resultado se lee

$$\begin{aligned} \circledast &= (-1)^0 \left[\sum_{\mu=0}^{p+1} c_{\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_\mu, \dots, \iota_{p+2}} \right] \\ &+ (-1)^1 \left[\sum_{\mu=0}^{p+1} c_{\iota_0, \iota_2, \dots, \iota_\mu, \dots, \iota_{p+2}} \right] \\ &\quad \vdots \\ &+ (-1)^{p+1} \left[\sum_{\mu=0}^{p+1} c_{\iota_0, \dots, \iota_\mu, \dots, \iota_p, \iota_{p+2}} \right] \\ &+ (-1)^{p+2} \left[\sum_{\mu=0}^{p+1} c_{\iota_0, \dots, \iota_\mu, \dots, \iota_p, \iota_{p+1}} \right]. \end{aligned}$$

Haciendo el desarrollo explícito de la suma sobre μ obtenemos

$$\begin{aligned} \circledast &= (-1)^0 [(-1)^0 c_{\iota_2, \dots, \iota_{p+2}} + \dots + (-1)^{p+1} c_{\iota_1, \dots, \iota_{p+1}}] \\ &+ (-1)^1 [(-1)^0 c_{\iota_2, \dots, \iota_{p+2}} + \dots + (-1)^{p+1} c_{\iota_0, \dots, \iota_{p+1}}] \\ &\quad \vdots \\ &+ (-1)^{p+1} [(-1)^0 c_{\iota_1, \dots, \iota_{p+2}} + \dots + (-1)^{p+1} c_{\iota_0, \dots, \iota_p}] \\ &+ (-1)^{p+2} [(-1)^0 c_{\iota_1, \dots, \iota_{p+1}} + \dots + (-1)^{p+1} c_{\iota_0, \dots, \iota_p}]. \end{aligned}$$

De este último desarrollo vemos que cada término en la suma aparece dos veces con signos contrarios, esto verifica que $\circledast = 0$ como se afirmaba. \square

DEFINICIÓN 2.5. La imagen del homomorfismo $\check{\delta} : \check{C}^{p-1}(\mathcal{U}; G) \rightarrow \check{C}^p(\mathcal{U}; G)$ se llama el grupo de *p-cofronteras de Čech* y se denota como $\check{\mathcal{B}}^p(\mathcal{U}; G)$. Similarmente, el núcleo de $\check{\delta} : \check{C}^p(\mathcal{U}; G) \rightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}; G)$ se llama el grupo de *p-cocilos de Čech* y se denota por $\check{\mathcal{Z}}^p(\mathcal{U}; G)$. El teorema anterior implica que $\check{\mathcal{B}}^p(\mathcal{U}; G)$ es un subgrupo de $\check{\mathcal{Z}}^p(\mathcal{U}; G)$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Finalmente, definimos el *p-ésimo grupo de cohomología de Čech con coeficientes en G* asociado a la cubierta \mathcal{U} como el cociente

$$(2.4) \quad \check{H}^p(\mathcal{U}; G) := \frac{\check{\mathcal{Z}}^p(\mathcal{U}; G)}{\check{\mathcal{B}}^p(\mathcal{U}; G)}.$$

OBSERVACIÓN 2.6. Es claro de las definiciones que: $\check{H}^p(\mathcal{U}; G) = 0$ para toda $p \leq -1$ y que $\check{H}^0(\mathcal{U}; G) = \text{Ker } \check{\delta}^0$ puesto que $\check{\delta}^{-1} = 0$. Considerando que un elemento $\bar{c} \in \check{C}^0(\mathcal{U}; G)$ es una colección de funciones suaves de la forma $c_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow G$, vemos que $\check{\delta}\bar{c} = 0$ si y solo si para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ se cumple que $c_\alpha \circ \varrho_{\alpha\beta} = c_\beta \circ \varrho_{\alpha\beta}$, es decir, c_α coincide con c_β en $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$. Esto implica la existencia una única función diferenciable $c : M^n \rightarrow G$ tal que c restringida a \mathcal{U}_α es precisamente la componente α de \bar{c} denotada como c_α . Por lo tanto, existe un isomorfismo canónico entre la cohomología de Čech en grado cero y el grupo de funciones suaves de M^n con valores en G

$$\check{H}^0(\mathcal{U}; G) \simeq C^\infty(M^n; G).$$

Independientemente de la elección de cubierta abierta para M^n . En particular, si G es un grupo discreto se sigue de la observación 2.3 que $\check{H}^0(M^n; G)$ es precisamente el espacio de funciones continuas localmente constantes. Es decir, $\check{H}^0(M^n; G) \simeq G^m$ donde m es el número de componentes conexas de M^n .

La interpretación de los grupos de cohomología de Čech para $p \geq 1$ de ninguna manera es obvia; de hecho en muchas ocasiones esta depende del contexto concreto y de la elección de G . Sin embargo, el caso $p = 1$ debería resultar absolutamente claro para nosotros, ya que como hemos visto, la ecuación (1.8) implica que los G -cocíelos estructurales $(\mathcal{U}, K_{\alpha\beta})$ asociados a un G - haz vectorial $E \rightarrow M^n$ son en realidad 1-cocíelos de Čech; y más aún, la proposición 1.1 junto con la ecuación (1.9) aseguran que la clase de cohomología de Čech que representan dichos cocíelos determinan la clase de isomorfismo del haz $E \rightarrow M^n$. En pocas palabras, el primer grupo de cohomología de Čech con coeficientes en G asociado a \mathcal{U} representa al conjunto de clases de isomorfismo de G -haces vectoriales que admiten una trivialización sobre la cubierta \mathcal{U} de M^n . Este último punto es una deficiencia de la construcción, ya que de las definiciones dadas hasta este momento no podemos garantizar que todos los posibles G -haces vectoriales sobre M^n puedan ser trivializados por la cubierta \mathcal{U} , la cual hemos fijado desde el inicio. Para resolver este problema, introducimos el siguiente concepto.

DEFINICIÓN 2.7. Sean $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ y $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ dos cubiertas abiertas de M^n . Un refinamiento de \mathcal{U} por \mathcal{V} es una función $r : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{V}_\beta \subseteq \mathcal{U}_{r(\beta)}$ para todo $\beta \in \mathcal{B}$. Decimos que \mathcal{V} es más fina que \mathcal{U} si existe un refinamiento r de \mathcal{U} por \mathcal{V} , y lo indicamos con la notación $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$.

Supongamos que $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ a través de un refinamiento r , entonces para cada número entero p existe un morfismo $\check{r}^p : \check{C}^p(\mathcal{U}, G) \rightarrow \check{C}^p(\mathcal{V}, G)$ definido en un elemento $\bar{c} \in \check{C}^p(\mathcal{U}, G)$ como

$$(\check{r}^p \bar{c})_{\beta_0, \dots, \beta_p} = c_{r(\beta_0), \dots, r(\beta_p)}|_{\mathcal{V}_{\beta_0, \dots, \beta_p}}.$$

PROPOSICIÓN 2.1. Sean \mathcal{V} y \mathcal{U} dos cubiertas abiertas de la variedad M^n y r un refinamiento de \mathcal{U} por \mathcal{V} . Entonces:

a) Los cuadrados en el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \check{C}^{p-1}(\mathcal{U}; G) & \xrightarrow{\check{\delta}} & \check{C}^p(\mathcal{U}; G) & \xrightarrow{\check{\delta}} & \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}; G) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \check{r}^{p-1} & & \downarrow \check{r}^p & & \downarrow \check{r}^{p+1} \\ \dots & \longrightarrow & \check{C}^{p-1}(\mathcal{V}; G) & \xrightarrow{\check{\delta}} & \check{C}^p(\mathcal{V}; G) & \xrightarrow{\check{\delta}} & \check{C}^{p+1}(\mathcal{V}; G) \longrightarrow \dots \end{array}$$

son conmutativos para todo $p \in \mathbb{Z}$.

b) Si $s : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ es otro refinamiento de \mathcal{U} por \mathcal{V} , existe una colección de homomorfismos de grupos $H^q : \check{C}^q(\mathcal{V}; G) \rightarrow \check{C}^{q-1}(\mathcal{U}; G)$ tal que

$$(2.5) \quad \check{\delta}^{p-1} H^p + H^{p+1} \check{\delta}^p = \check{r}^p - \check{s}^p$$

para todo entero p . Esta propiedad suele esquematizarse por el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \check{C}^{p-1}(\mathcal{U}; G) & \xrightarrow{\check{\delta}} & \check{C}^p(\mathcal{U}; G) & \xrightarrow{\check{\delta}} & \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}; G) & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow \check{\gamma}^{p-1} & & \downarrow \check{\gamma}^p & & \downarrow \check{\gamma}^{p+1} & & \\
& & \check{s}^{p-1} & \swarrow H^p & \check{s}^p & \swarrow H^{p+1} & \check{s}^{p+1} & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & \check{C}^{p-1}(\mathcal{V}; G) & \xrightarrow{\check{\delta}} & \check{C}^p(\mathcal{V}; G) & \xrightarrow{\check{\delta}} & \check{C}^{p+1}(\mathcal{V}; G) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{c} \in \check{C}^{p-1}(\mathcal{U}; G)$. Directamente de las definiciones se obtiene que

$$\begin{aligned}
(\check{\gamma}^p \check{\delta} \bar{c})_{\beta_0, \dots, \beta_p} &= \left[\sum_{\mu=0}^p (-1)^\mu c_{r(\beta_0), \dots, r(\hat{\beta}_\mu), \dots, r(\beta_p)} \circ \varrho_{r(\beta_0), \dots, r(\beta_p)} \right] \Big|_{\mathcal{V}_{\beta_0, \dots, \beta_p}} \\
&= \sum_{\mu=0}^p (-1)^\mu c_{r(\beta_0), \dots, r(\hat{\beta}_\mu), \dots, r(\beta_p)} \circ \varrho_{\beta_0, \dots, \beta_p}.
\end{aligned}$$

En el razonamiento anterior se ha usado que $\mathcal{V}_{\beta_0, \dots, \beta_p}$ está contenido en $\mathcal{U}_{r(\beta_0), \dots, r(\beta_p)}$ para cada posible valor de p . Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\check{\delta} \check{\gamma}^{p-1} \bar{c})_{\beta_0, \dots, \beta_p} &= \sum_{\mu=0}^p (-1)^\mu (\check{\gamma}^{p-1} \bar{c})_{\beta_0, \dots, \beta_p} \\
&= \sum_{\mu=0}^p (-1)^\mu c_{r(\beta_0), \dots, r(\hat{\beta}_\mu), \dots, r(\beta_p)} \circ \varrho_{\beta_0, \dots, \beta_p}.
\end{aligned}$$

Esto prueba el inciso a) de esta proposición. Para demostrar el inciso restante, definimos para cada $p > 0$ un homomorfismo $H^p : \check{C}^p(\mathcal{U}; G) \rightarrow \check{C}^{p-1}(\mathcal{V}; G)$ tal que a cada cocadena $\bar{c} \in \check{C}^p(\mathcal{U}; G)$ le asigna la cocadena $H^p \bar{c}$ formada por las componentes

$$(H^p \bar{c})_{\beta_0, \dots, \beta_p} = \sum_{\nu=0}^p (-1)^\nu c_{s(\beta_0), \dots, s(\beta_\nu) r(\beta_\nu), \dots, r(\beta_p)} \Big|_{\mathcal{V}_{\beta_0, \dots, \beta_p}}.$$

Para cada $p \leq 0$, definimos $H^p = 0$. Veamos que con esta elección de H^p se satisface la ecuación (2.5). Comencemos con el primer caso no trivial, esto es cuando $p = 0$. Como $H^0 = 0$, solo hay que verificar la relación $H^1 \check{\delta} \bar{c} = (\check{\gamma}^0 - \check{s}^0) \bar{c}$ para todo generador $\bar{c} \in \check{C}^0(\mathcal{U}; G)$, pero de acuerdo con la definición, el valor de $H^1 \check{\delta}$ en tal elemento está dado por $(H^1 \check{\delta} \bar{c})_{\beta_0} = (\check{\delta} \bar{c})_{s(\beta_0) r(\beta_0)}$ que claramente coincide con $(\check{\gamma}^0 - \check{s}^0) \bar{c} = c_{r(\beta_0)} - c_{s(\beta_0)}$. Consideremos ahora el caso $p = 1$, sea \bar{c} un generador de las 1-cocadenas de Čech asociado a la cubierta \mathcal{U} . Directamente de las definiciones tenemos que

$$\begin{aligned}
(\check{\delta} H^1 \bar{c})_{\beta_0 \beta_1} &= \left[(H^1 \bar{c})_{\beta_1} - (H^1 \bar{c})_{\beta_0} \right] \circ \varrho_{\beta_0 \beta_1} \\
&= \left[c_{s(\beta_1) r(\beta_1)} - c_{s(\beta_0) r(\beta_0)} \right] \Big|_{\mathcal{V}_{\beta_0 \beta_1}}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned} (H^2 \check{\delta} \bar{c})_{\beta_0 \beta_1} &= \left[(\check{\delta} \bar{c})_{s(\beta_0)r(\beta_0)r(\beta_1)} - (\check{\delta} \bar{c})_{s(\beta_0)s(\beta_1)r(\beta_1)} \right] | \mathcal{V}_{\beta_0 \beta_1} \\ &= \left[c_{r(\beta_0)r(\beta_1)} - c_{s(\beta_0)r(\beta_1)} + c_{s(\beta_0)r(\beta_0)} + \right. \\ &\quad \left. - c_{s(\beta_1)r(\beta_1)} + c_{s(\beta_0)r(\beta_1)} - c_{s(\beta_0)r(\beta_1)} \right] | \mathcal{V}_{\beta_0 \beta_1}. \end{aligned}$$

Comparando las últimas ecuaciones vemos que en efecto $(\check{\delta}^0 H^1 + H^2 \check{\delta}^1) \bar{c} = [c_{r(\beta_0)r(\beta_1)} - c_{s(\beta_0)s(\beta_1)}] | \mathcal{V}_{\beta_0 \beta_1} = (\check{r}^1 - \check{s}^1) \bar{c}$. Los casos restantes se establece de manera análoga desarrollando las expresiones de H^p junto con la expresión para la codiferencial de Čech. \square

En general, si (\mathcal{C}, δ) y (\mathcal{D}, d) son complejos de grupos, decimos que una familia de morfismos de grupos $\rho^p : \mathcal{C}^p \rightarrow \mathcal{D}^p$ indicada por $p \in \mathbb{Z}$ es una *aplicación de cocadenas* si ρ conmuta con las correspondientes codiferenciales, es decir;

$$d^{p+1} \circ \rho^p = \rho^{p+1} \circ \delta^p, \quad \text{para toda } p.$$

De manera similar, dos aplicaciones de cocadenas $\rho_1, \rho_2 : (\mathcal{C}, \delta) \rightarrow (\mathcal{D}, d)$ son *homotópicas* si existe una familia de homomorfismos $H^p : \mathcal{C}^p \rightarrow \mathcal{D}^{p-1}$, que satisfacen la *condición de homotopía*

$$\delta^{p-1} H^p + H^{p+1} d^p = \rho_1^p - \rho_2^p, \quad \text{para toda } p.$$

A tal conjunto de morfismos se le llama una *homotopía* entre los complejos (\mathcal{C}, δ) y (\mathcal{D}, d) . La importancia de estos conceptos radica en las siguientes propiedades inmediatas de las definiciones: toda aplicación de cadenas $\rho : (\mathcal{C}, \delta) \rightarrow (\mathcal{D}, d)$ induce un morfismo de módulos a nivel cohomológico $\rho^p : H^p(\mathcal{C}, \delta) \rightarrow H^p(\mathcal{D}, d)$, definido como $[c] \mapsto [\rho^p(c)]$ para cada valor de p , y además, cualesquiera dos morfismos de cocadenas homotópicos inducen exactamente el mismo morfismo entre los módulos de cohomología de grado correspondiente. Con estas consideraciones en mente, la proposición anterior implica que el morfismo

$$(2.6) \quad R_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}} : \check{H}^p(\mathcal{U}; G) \rightarrow \check{H}^p(\mathcal{V}; G)$$

está determinado de manera única por la relación $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ sin importar la elección de refinamiento. Es claro que la relación \prec es *simétrica* y *transitiva*. Esto en otras palabras quiere decir que el conjunto de cubiertas abiertas de M^n denotado como $\text{Cub}(M^n)$ es un conjunto dirigido; que como tal determina para cada p un sistema de grupos y homomorfismos $(\check{H}^p(\mathcal{U}; G), R_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}})$ definidos para toda cubierta \mathcal{V} más fina que \mathcal{U} . Este sistema de grupos y homomorfismos satisface las condiciones:

- (*) $\text{id}_{\mathcal{A}}^p = \text{id}_{\check{C}^p(\mathcal{U}; G)}$
- (**) Para cualesquiera tres cubiertas \mathcal{U}, \mathcal{V} y \mathcal{W} relacionadas por la cadena $\mathcal{V} \prec \mathcal{U} \prec \mathcal{W}$, el siguiente diagrama es conmutativo para cada $p \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccccc} \check{C}^p(\mathcal{W}; G) & \xrightarrow{R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}} & \check{C}^p(\mathcal{U}; G) & \xrightarrow{R_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}} & \check{C}^p(\mathcal{V}; G). \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & R_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} \end{array}$$

Que definen el concepto de *sistema dirigido* de grupos. Asociado a este sistema dirigido se tienen los correspondientes *límites directos* definidos para todo $p \in \mathbb{Z}$ como el siguiente cociente

$$(2.7) \quad \lim_{\mathcal{U}} \check{H}^p(\mathcal{U}; G) := \frac{\bigoplus_{\mathcal{U} \in \text{Cub}(M^n)} \check{H}^p(\mathcal{U}; G)}{G(\sim)}$$

donde $G(\sim)$ denota al grupo abeliano generado por la relación; $(\mathcal{U}, c) \sim (\mathcal{V}, c')$ si $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{W}}(\mathcal{U}, c) = R_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}(\mathcal{V}, c')$ para alguna cubierta $\mathcal{W} \in \text{Cub}(M^n)$ refinada tanto por \mathcal{U} como por \mathcal{V} . Por supuesto en la definición anterior c y c' son elementos de $\check{H}^p(\mathcal{V}; G)$ y $\check{H}^p(\mathcal{U}; G)$ respectivamente. Intuitivamente, los elementos del límite directo son clases de cohomología de Čech de grado p representadas por cocíclo $x \in \check{Z}^p(\mathcal{U}, G)$ y $y \in \check{Z}^p(\mathcal{V}, G)$ que eventualmente se vuelven iguales, en el sentido de que existe una cubierta abierta suficientemente fina para la cual x y y coinciden en cada una de las posibles intersecciones de los miembros en la cubierta. En el caso particular en que $p = 1$, lo que se obtiene con este límite es un avatar para el conjunto de clases de isomorfismo de todos los G -haces vectoriales sobre M^n . De hecho esta afirmación se puede establecer con todo rigor observando que dos G -haces vectoriales E y \mathcal{E} de rango k sobre M^n , trivializados sobre cubiertas \mathcal{U} y \mathcal{V} no necesariamente iguales son isomorfos si y solo si las correspondientes clases representadas por los cocíclo estructurales (\mathcal{U}, K^E) y $(\mathcal{V}, K^{\mathcal{E}})$ coinciden en el límite. Este hecho se verifica usando el refinamiento común de \mathcal{U} y \mathcal{V} , denotado como $\mathcal{V} \cap \mathcal{U}$, que está dado por todas las posibles intersecciones de elementos en estas cubiertas. Todo lo anterior nos motiva a hacer la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.8. Sea M^n una variedad diferenciable compacta. Para cada número entero p , definimos el p -ésimo grupo de cohomología de Čech de M^n con coeficientes en G como

$$(2.8) \quad \check{H}^p(M^n; G) := \lim_{\mathcal{U}} \check{H}^p(\mathcal{U}; G).$$

OBSERVACIÓN 2.9. Para cada grupo G , cada cubierta abierta \mathcal{U} de M^n y cada entero p , existe un morfismo canónico $\check{H}^p(\mathcal{U}; G) \rightarrow \check{H}^p(M^n; G)$ definido por el diagrama

$$(2.9) \quad \check{H}^p(\mathcal{U}; G) \hookrightarrow \bigoplus_{\mathcal{U} \in \text{Cub}(M^n)} \check{H}^p(\mathcal{U}; G) \twoheadrightarrow \check{H}^p(M^n; G).$$

OBSERVACIÓN 2.10. Una mirada detenida a la construcción que hemos dado de la cohomología de Čech de M^n revela que esta teoría es completamente functorial. Esto es, para cada variedad diferenciable hemos asociado una colección de grupos abelianos $\check{H}^*(\bullet; G)$ parametrizada por los enteros de manera tal que cada aplicación suave $f : N^m \rightarrow M^n$ induce una familia de morfismos de grupos $f^* : \check{H}^*(M^n; G) \rightarrow \check{H}^*(N^m; G)$ que preserva composiciones y manda identidades en identidades. En grado 1, el morfismo f^1 es básicamente la construcción del G -haz vectorial inducido por f .

Para fijar las ideas que hemos discutido en esta sección, veamos que la cohomología de Čech de M^n en grado uno con coeficientes en $\text{GL}(1; \mathbb{C})$ clasifica salvo isomorfismo a todos los posibles $\text{GL}(1; \mathbb{C})$ -haces vectorial complejos sobre M^n . Llamamos a este tipo de haces vectoriales simplemente como *haces de líneas complejos*.

Recordemos que $\mathrm{GL}(1; \mathbb{C})$ se identifica canónicamente con el grupo multiplicativo de los complejos no nulos \mathbb{C}^* .

Comencemos notando que el conjunto de clases de isomorfismo de haces de líneas complejos diferenciables sobre M^n , denotado usualmente como $\mathrm{Pic}^\infty(M^n)$, tiene una estructura de grupo abeliano definida de la siguiente manera: Si $[L_1], [L_2]$ son elementos de $\mathrm{Pic}^\infty(M^n)$, definimos $[L_1] \cdot [L_2]$ como la clase de isomorfismo del haz $L_1 \otimes_{\mathbb{C}} L_2$. El inverso $[L]^{-1}$ se define como la clase de isomorfismo representada por el haz asociado al cociclo estructural $(\mathcal{U}, K_{\alpha\beta}^{-1})$, donde $K_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*$ son las funciones de transición de L . Finalmente, el neutro es la clase de isomorfismo del haz trivial $\mathbb{C} \times M^n$ que corresponde al cociclo $(M^n, \mathbf{1} : M^n \rightarrow \mathbb{C}^*)$ donde $\mathbf{1}$ es la función constante con valor 1.

Para ver que el producto en $\mathrm{Pic}^\infty(M^n)$ está bien definido, basta ver que el producto $L_1 \otimes_{\mathbb{C}} L_2$ está determinado salvo cofronteras por la elección de \mathbb{C}^* -cociclos estructurales $(\mathcal{U}, K_{\alpha\beta}^{L_1})$ y $(\mathcal{V}, K_{ab}^{L_2})$ asociados a L_1 y a L_2 . Supongamos que $(\mathcal{U}, \hat{K}_{\alpha\beta}^{L_1})$, $(\mathcal{V}, \hat{K}_{ab}^{L_2})$ es otra pareja de cociclos que representan a $[L_1]$ y a $[L_2]$ respectivamente. Entonces $L_1 \otimes_{\mathbb{C}} L_2$ está representado tanto por el cociclo $(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, K_{\alpha\beta}^{L_1} K_{ab}^{L_2})$ como por el cociclo $(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, \hat{K}_{\alpha\beta}^{L_1} \hat{K}_{ab}^{L_2})$. Por otra parte, nuestras hipótesis garantizan la existencia de colecciones de funciones suaves $\tau_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^*$ y $T_a : \mathcal{V}_a \rightarrow \mathbb{C}^*$ tales que

$$\begin{aligned}\hat{K}_{\alpha\beta}^{L_1} &= \tau_\alpha^{-1} K_{\alpha\beta}^{L_1} \tau_\beta \\ \hat{K}_{ab}^{L_2} &= T_a^{-1} K_{ab}^{L_2} T_b.\end{aligned}$$

De la ecuación anterior vemos que

$$(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, \hat{K}_{\alpha\beta}^{L_1} \hat{K}_{ab}^{L_2}) = (\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, (\tau_\alpha T_a)^{-1} K_{\alpha\beta}^{L_1} K_{ab}^{L_2} (T_b \tau_\beta)).$$

Por supuesto, todas las funciones involucradas en la relación anterior deben restringirse a la intersección $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{V}_a$ para toda $(\alpha, a) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Esto prueba que distintas elecciones de representantes para $[L_1]$ y $[L_2]$ inducen representantes de $[L_1 \otimes_{\mathbb{C}} L_2]$ que difieren por una cofrontera, como se afirmaba. Es claro que $[L]^{-1}$ solo depende del representante L , y además es un inverso multiplicativo de $[L]$. Esto muestra que en efecto, $(\mathrm{Pic}^\infty(M^n), \otimes_{\mathbb{C}}, [\mathbb{C} \times M^n])$ es un grupo abeliano.

Como hemos descrito en la página 35, para cada trivialización $\Phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \times \mathbb{C} \rightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha)$ de un haz de líneas complejo $L \rightarrow M^n$ existe una correspondiente sección local $s_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow L$ que genera la fibra sobre cada punto $p \in \mathcal{U}_\alpha$. Esto implica que s_α no se anula sobre su dominio; y en particular

$$c_{\alpha\beta} := \frac{s_\alpha}{s_\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

es una función suave que trivialmente satisface la condición de cociclo sobre cada $\mathcal{U}_{\alpha\beta\gamma}$ no vacío. Por lo tanto, $c_{\alpha\beta}$ representa una clase bien definida en el primer grupo de cohomología de Čech de con coeficientes en \mathbb{C}^* asociado a la cubierta $\mathcal{U} := \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$.

DEFINICIÓN 2.11 (Primera Clase de Chern). Supongamos que $L \rightarrow M^n$ un haz de líneas complejo trivializado por la cubierta \mathcal{U} como en el párrafo anterior. La imagen de $(\mathcal{U}, [c_{\alpha\beta}]) \in \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathbb{C}^*)$ bajo el morfismo canónico $\check{H}^1(\mathcal{U}; \mathbb{C}^*) \rightarrow$

$\check{H}^1(M^n; \mathbb{C}^*)$ se llama *primera clase de Chern* de L , y se denota simplemente como $c_1(L)$.

TEOREMA 2.2 (Clasificación de Haces de Lineas Complejos). *Supongamos que M^n es una variedad lisa. La aplicación $c_1 : \text{Pic}^\infty(M^n) \rightarrow \check{H}^1(M; \mathbb{C}^*)$ definida como $[L] \mapsto c_1(L)$ es un isomorfismo de grupos abelianos.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un haz de líneas complejo $L \rightarrow M^n$ trivializado sobre la cubierta $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}$. Veamos primero que $c_1(L)$ es independiente de la elección de secciones locales $s_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^*$. Si \tilde{s}_α es cualquier otra sección local sobre \mathcal{U}_α , entonces por ser s_α un generador local de la fibra sobre cada punto en \mathcal{U}_α , existe una función $f_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $\tilde{s}_\alpha = f_\alpha s_\alpha$. La función $\tilde{c}_{\alpha\beta} := \tilde{s}_\alpha / \tilde{s}_\beta$ claramente satisface $\tilde{c}_{\alpha\beta} = (f_\alpha / f_\beta) c_{\alpha\beta}$. En otras palabras

$$\tilde{c}_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} = (\check{\delta}f)_{\alpha\beta}$$

donde $f \in \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathbb{C}^*)$ está definida por la colección de las f_α . Esto muestra que $\tilde{c}_{\alpha\beta}$ y $c_{\alpha\beta}$ son cohomologicamente equivalentes. Ahora veamos que $c_1(L)$ tampoco depende de la elección de cubierta. Dada cualquier otra cubierta $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_a\}$, sabemos que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ es un refinamiento común de \mathcal{U} y \mathcal{V} . Esto nos permite suponer sin pérdida de generalidad que \mathcal{V} es más fina que \mathcal{U} . Sea $r : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ un tal refinamiento, entonces para cualquier abierto \mathcal{V}_a existe un abierto $\mathcal{U}_{r(a)}$ tal que $\mathcal{V}_a \subseteq \mathcal{U}_{r(a)}$. Así, la primera clase de Chern de L representada por $c \in \check{H}^1(\mathcal{U}; \mathbb{C}^*)$ con componentes $c_{\alpha\beta} = (\dots, s_\alpha / s_\beta, \dots)$ satisface $(\check{r}^1 c)_{ab} = (\dots, s_{r(a)} / s_{r(b)} |_{\mathcal{V}_{ab}}, \dots)$. Luego, por la primera parte de esta proposición, tenemos que $\tilde{c}_{ab} := (\dots, s_{r(a)} / s_{r(b)} |_{\mathcal{V}_{ab}}, \dots) \in \check{H}^1(\mathcal{V}; \mathbb{C}^*)$ también representa la primera clase de Chern de L . En otras palabras $R_{\mathcal{V}}^{\mathcal{U}}(\mathcal{V}, \tilde{c}) = R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}}(\mathcal{U}, c)$, de manera que \tilde{c} y c coinciden en el límite. Esto prueba que la primera clase de Chern de L es independiente de la trivialización.

Para ver que $c_1(L_1 \otimes_{\mathbb{C}} L_2) = c_1(L_1) c_1(L_2)$ para cualesquiera dos clases $[L_1], [L_2] \in \text{Pic}^\infty(M^n)$ tomamos representantes $c_{\alpha\beta}^1 = s_\alpha^1 / s_\beta^1$ y $c_{\alpha\beta}^2 = s_\alpha^2 / s_\beta^2$ de las clases de Chern de L_1 y L_2 respectivamente. Supongamos además que L_1 y L_2 están trivializadas sobre la misma cubierta. Recordemos que la correspondencia entre secciones locales s y trivializaciones Φ está determinada por la formulada $s(p) = \Phi(p, v)$ para todo $p \in \mathcal{U}_{\alpha\beta}$. Aquí, v es un generador como espacio vectorial de la fibra típica. En particular, se tiene que $s_\gamma^i(p) = \Phi_{\alpha\beta}^{L_i}(p, 1)$ para toda $\gamma \in \mathcal{A}$ e $i = 1, 2$. Por definición de las funciones de transición se tiene que $K_{\alpha\beta}^{L_i}(p)(1) = \Phi_{\alpha\beta}^{L_i}(p, 1)$. De esta manera vemos que toda sección local $s_{\alpha\beta}^{L_1 \otimes_{\mathbb{C}} L_2}$ de $L_1 \otimes_{\mathbb{C}} L_2$ sobre $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ es de la forma $s_\alpha^{L_1} \cdot s_\alpha^{L_2}$ para algún par de secciones locales $s_\alpha^{L_1} \in \Gamma(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, L_1)$, $s_\alpha^{L_2} \in \Gamma(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, L_2)$ ². En particular, obtenemos que $c_1(L_1 \otimes_{\mathbb{C}} L_2)$ se puede representar por el elemento

$$\frac{s_\alpha^1 s_\alpha^2}{s_\beta^1 s_\beta^2} = \left(\frac{s_\alpha^1}{s_\beta^1} \right) \left(\frac{s_\alpha^2}{s_\beta^2} \right).$$

Que precisamente representa al producto de $c_1(L_1) \cdot c_1(L_2)$, tal y como se buscaba. Como el haz trivial $M^n \times \mathbb{C}$ tiene una sección global $p \mapsto (p, 1)$ no cero, se tiene trivialmente que $c_1(M^n \times \mathbb{C})$ es el neutro multiplicativo de $\check{H}^1(M^n; \mathbb{C}^*)$. Y más aún, si la clase de isomorfismo de un haz de líneas L cumple que $c_1(L)$ es trivial, entonces podemos tomar un representante de la primera clase de Chern

²Usamos la notación $\Gamma(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, L_i)$ para enfatizar que el soporte de $s_\alpha^{L_i}$ es precisamente $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$.

de L con componentes $c_{\alpha\beta} = s_\alpha/s_\beta$ tal que la condición de cofrontera $c_{\alpha\beta} = (\check{\delta}f)_{\alpha\beta}$ se satisface sobre $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ para alguna 0-cocadena de Čech f con componentes $f_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^*$. Observe que la condición de cofrontera es equivalente a que las secciones $S_\alpha := s_\alpha/f_\alpha$ coincidas dos a dos en las intersecciones $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ no vacías. Por tanto S_α define una sección global no nula de L que es además diferenciable. Esto muestra que L está en la clase de isomorfismo del haz trivial; en particular, c_1 es un monomorfismo. La correspondencia entre secciones locales y trivializaciones muestra que c_1 es también un epimorfismo. Esto concluye la prueba del teorema de clasificación. \square

Relacionado con el hecho de que todo haz de líneas complejo admite una estructura unitaria, tenemos el siguiente

COROLARIO 2.3. *El isomorfismo dado por la primera clase de Chern se factoriza a través del morfismo $\check{H}^1(M^n; S^1) \rightarrow \check{H}^1(M^n; \mathbb{C}^*)$ inducido por la inclusión de $S^1 \hookrightarrow \mathbb{C}^*$. En otras palabras, $c_1(L)$ toma valores en el grupo unitario S^1 para todo haz de líneas L .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $[L]$ una clase de isomorfismo de haz de líneas complejo. Sabemos de la prueba anterior que el representante $c_{\alpha\beta} = s_\alpha/s_\beta$ de la primera clase de Chern de $[L]$ es invariante bajo dilataciones $s_\gamma \mapsto zs_\gamma$ para $z \in \mathbb{C}^*$. Más aún, vimos que $c_1(L)$ no depende de las secciones s_α, s_β usadas para construir $c_{\alpha\beta}$. Por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que s_α y s_β son secciones locales unitarias respecto de alguna métrica hermitiana en L . Un argumento de *particiones de la unidad* [7] muestra que tales métricas siempre existen para cualquier haz vectorial complejo sobre M^n . \square

El resultado anterior sugiere la necesidad de extender la cohomología de Čech para incluir el caso de coeficientes en subgrupos de Lie $G \subseteq \mathrm{GL}(k; \mathbb{F})$ no necesariamente abelianos. Desafortunadamente esto no es posible, al menos en los términos de antes. Aún cuando en general $\check{C}^p(\mathcal{U}; G)$ es un grupo finitamente generado para cada valor de p , el problema para definir los grupos $\check{H}^p(\mathcal{U}; G)$ radica en que no existe una definición consistente que convierta a la codiferencial $\check{\delta}$ en un morfismo de grupos. Esto por supuesto está relacionado con el hecho de que en un grupo no necesariamente abeliano existe más de un orden posible para los factores de un producto de la forma $ab^{-1}cd^{-1}$, mismos que entran en la definición de la codiferencial de Čech en grados positivos. Sin embargo, es posible utilizar las relaciones de cociclo y cofrontera para construir una función $\check{\delta}^1 : \check{C}^1(\mathcal{U}; G) \rightarrow \check{C}^2(\mathcal{U}; G)$ que actúe multiplicando 1-cocadenas de Čech exactamente en el orden de la ecuación (1.3) en la página 34. De manera similar se construye un conjunto $\check{H}^1(\mathcal{U}; G)$ para grupos no abelianos cuyos elementos sirvan como parámetros de las distintas clases de isomorfismos de G -haces vectoriales. Explícitamente definimos

$$\check{Z}^1(\mathcal{U}; G) = \left\{ K_{\alpha\beta} \in \check{C}^1(\mathcal{U}; G) \mid K_{\alpha\beta}K_{\beta\gamma}K_{\gamma\alpha} = 1 \right\}$$

$$\check{H}^1(\mathcal{U}; G) = \frac{\check{Z}^1(\mathcal{U}; G)}{\sim}.$$

Donde identificamos elementos distintos de $\check{Z}^1(\mathcal{U}; G)$ si satisfacen la condición de cofrontera para haces vectoriales (1.7) en la página 38. Así, definimos $\check{H}^1(M^n; G)$ para un grupo de Lie arbitrario sustituyendo en la definición 2.7 la

Como $\check{H}^p(M^n; \mathbb{R}) = 0$ para toda $p \in \mathbb{Z}$ [6], se tiene que $\bar{\partial} : \check{H}^1(M^n; \mathbb{C}^*) \xrightarrow{\cong} \check{H}^2(M^n; 2\pi\mathbb{Z})$.³ Este isomorfismo, que de hecho es canónico, se realiza de la siguiente manera; fijamos un haz de líneas complejo L trivializado sobre una cubierta $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ cuyos miembros sean todos *simplemente conexos* (tal elección siempre es posible) y consideramos un representante de primera clase de Chern dado por $c_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow S^1$. Luego, levantamos este cociclo mediante la exponencial $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ a una cocadena de Čech $\theta_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir, escribimos $c_{\alpha\beta}$ en la forma $\exp(i\theta_{\alpha\beta})$. Así

$$1 = (\check{\delta}c)_{\alpha\beta\gamma} = e^{i\theta_{\beta\gamma}} e^{-i\theta_{\alpha\gamma}} e^{i\theta_{\alpha\beta}} = e^{i(\theta_{\beta\gamma} - \theta_{\alpha\gamma} + \theta_{\alpha\beta})}.$$

Por lo tanto, la cocadena $\Theta_{\alpha\beta\gamma} := 1/2\pi(\theta_{\beta\gamma} - \theta_{\alpha\gamma} + \theta_{\alpha\beta})$ toma valores enteros. Más aún, por la observación 2.3 en la página 40 se tiene que $\Theta_{\alpha\beta\gamma}$ es constante en componentes conexas de M^n . De hecho, $\Theta_{\alpha\beta\gamma}$ es un 2-cociclo de Čech que determina una clase en $\check{H}^2(M^n; \mathbb{Z})$ que por construcción representa a $\bar{\partial}c_1(L)$. Si M^n es conexa es fácil ver que siempre es posible elegir una rama para el logaritmo complejo de manera que

$$(2.13) \quad \Theta_{\alpha\beta\gamma} := \frac{1}{2\pi} [\log(c_{\beta\gamma}) - \log(c_{\alpha\gamma}) + \log(c_{\alpha\beta})]$$

donde cada uno de los cociclos $c_{\alpha\beta}$ está definido sobre dominios $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ simplemente conexos (esto es necesario para definir a la función \log).

Observe además que las identidades logarítmicas usuales no aplican en la definición de $\Theta_{\alpha\beta\gamma}$ ya que en general los logaritmos en cada uno de los sumandos tienen dominios distintos y por lo tanto pueden tener ambigüedades en cuanto a la elección de sus respectivas ramas.

Ahora tenemos todas las definiciones necesarias para atacar la pregunta planteado en la página 35 replanteada en los siguientes términos; dados subgrupos de Lie $G \subset \text{GL}(k; \mathbb{F})$ y $H \subset \text{GL}(r; \mathbb{F})$ y un homomorfismo $\theta : G \rightarrow H$, ¿Que relaciones existen entre la categoría de G -haces vectoriales y la categoría de H -haces?, ambas sobre una misma variedad base M^n . Es claro que esta situación incluye como casos particular a las preguntas; ¿Cuándo podemos reducir el grupo estructural de $\text{GL}(k; \mathbb{F})$ a $G \subset \text{GL}(k; \mathbb{F})$ para un G dado? y ¿Cuándo podemos levantar H -cociclos estructurales a G -cociclos a lo largo de un recubrimiento $G \rightarrow H$? Comencemos estudiando un ejemplo bien conocido en geometría riemanniana de una reducción estructural.

Dada una métrica riemanniana $g \in \Gamma(\text{Sym}^2 T^* M^n)$ (que siempre existe por un argumento de particiones de la unidad [7]), podemos reducir el grupo estructural del haz tangente TM^n del grupo general lineal $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ al grupo ortogonal $\text{O}(n; \mathbb{R})$ simplemente ortonormalizando mediante el procedimiento de Gram-Schmidt secciones locales generadoras asociadas a las distintas trivializaciones locales. Sin embargo, sabemos que existen obstrucciones topológicas relacionadas con el concepto de *orientabilidad* que no necesariamente permiten llevar esta construcción al nivel del grupo especial ortogonal $\text{SO}(n; \mathbb{R})$. A manera de ejemplo veamos que tipo de obstrucciones ocurren para los $\text{O}(k; \mathbb{R})$ -haces vectoriales. Para esto usamos la sucesión exacta asociada a la función determinante

$$(2.14) \quad 1 \rightarrow \text{SO}(k; \mathbb{R}) \rightarrow \text{O}(k; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1.$$

³Para pasar de la sucesión exacta larga asociada a una cubierta \mathcal{U} derivada del teorema 2.4 a una sucesión larga asociada a M^n se toma el límite sobre todas las cubiertas. Como el límite es un *functor exacto* [13], la sucesión obtenida de esta manera es exacta en todos sus nodos.

EJEMPLO 2.1 (Orientación de Haces). *Supongamos que un elemento $[\mathcal{U}, E]$ del espacio de cohomología de Čech con coeficientes en el grupo ortogonal*

$$\check{H}^1(M^n; \mathrm{O}(k; \mathbb{R}))$$

representa a la clase de isomorfismo de un $\mathrm{O}(k; \mathbb{R})$ -haz vectorial con funciones de transición $K_{\alpha\beta}$. Entonces $\det^1[\mathcal{U}, E]$ está representado por cocíclos $w_{\alpha\beta}^{(1)} := \det K_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ que determinan en el límite una clase $w_1(E) \in \check{H}^1(M^n; \mathbb{Z}_2)$ llamada primera clase de Stiefel-Whitney. Así, el problema de la orientabilidad del haz E se traduce en términos de la primera clase de Stiefel-Whitney en la condición $w_1(E) = 1$. En particular, vemos que una variedad M^n es orientable si y solo si $w_1(TM^n) = 1$.

3. Obstrucciones para la Existencia de Estructuras Spin

En esta sección definimos una sub-clase de variedades, llamadas *variedades spin*, que serán fundamentales para los desarrollos por venir. Supongamos que (M^n, g) es una variedad riemanianna de dimensión $n \geq 2$ con $w_1(TM^n) = 1$ (es decir, M^n es una variedad orientable). Usando la métrica riemanianna podemos trivializar al haz tangente por abiertos \mathcal{U}_α *geodésicamente convexos*. Esto en particular garantiza que $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ es simplemente conexo.⁴ De esta manera vemos que el problema de levantamiento [18]

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} & & \mathrm{Spin}(4) \\ & \nearrow & \downarrow \mathrm{Ad} \\ \mathcal{U}_{\alpha\beta} & \xrightarrow{K_{\alpha\beta}} & \mathrm{SO}(4). \end{array}$$

asociado al recubrimiento doble no trivial (ver 3.8 en la página 14)

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(n) \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{SO}(n; \mathbb{R}) \longrightarrow 1$$

tiene solución $\tilde{K}_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow \mathrm{Spin}(n)$. Esto de ninguna manera garantiza que los datos $(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, \tilde{K}_{\alpha\beta})$ determinen un $\mathrm{Spin}(n)$ -haz vectorial pues en general la función $w_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} := \tilde{K}_{\alpha\beta}\tilde{K}_{\beta\gamma}\tilde{K}_{\gamma\alpha}$ no es idénticamente 1 sobre toda la variedad. Observe que el diagrama conmutativo (3.1) implica que $w_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} \in \mathrm{Ker Ad} = \mathbb{Z}_2$. Veamos que $(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, w_{\alpha\beta\gamma}^{(2)})$ es un 2-cociclo de Čech. Primero, como todo elemento de \mathbb{Z}_2 es su

⁴La métrica riemanianna no es esencial para trivializar a TM^n por abiertos simplemente conexos. La misma definición de variedad es suficiente para hacer esto es posible.

propio inverso, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\check{\delta}w^{(2)}\right)_{\alpha\beta\gamma\delta} &= w_{\beta\gamma\delta}^{(2)} w_{\alpha\gamma\delta}^{(2)} w_{\alpha\beta\delta}^{(2)} w_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} \\
&= \left[\tilde{K}_{\beta\gamma} \tilde{K}_{\gamma\delta} \tilde{K}_{\delta\beta}\right] \left[\tilde{K}_{\alpha\gamma} \tilde{K}_{\gamma\delta} \tilde{K}_{\delta\alpha}\right] \left[\tilde{K}_{\alpha\beta} \tilde{K}_{\beta\delta} \tilde{K}_{\delta\alpha}\right] \left[\tilde{K}_{\alpha\beta} \tilde{K}_{\beta\gamma} \tilde{K}_{\gamma\alpha}\right] \\
&= \left[\pm\tilde{K}_{\beta\delta} \tilde{K}_{\delta\beta}\right] \left[\pm\tilde{K}_{\alpha\delta} \tilde{K}_{\delta\alpha}\right]^2 \left[\pm\tilde{K}_{\alpha\gamma} \tilde{K}_{\gamma\alpha}\right] \\
&= \tilde{K}_{\beta\beta} \left(\tilde{K}_{\alpha\alpha}\right)^3 \\
&= \tilde{K}_{\beta\beta} \tilde{K}_{\alpha\alpha} \\
&= (\pm 1)^2.
\end{aligned}$$

Hemos usado la relación $\text{Ad}\left(\tilde{K}_{\mu\nu} \tilde{K}_{\nu\sigma}\right) = K_{\mu\nu} K_{\nu\sigma} = K_{\mu\sigma}$ para deducir que $\tilde{K}_{\mu\nu} \tilde{K}_{\nu\sigma} = \pm\tilde{K}_{\mu\sigma}$ (la fibra sobre $K_{\nu\sigma}(p)$ es $\pm\tilde{K}_{\nu\sigma}(p)$). La clase $w_2(TM^n) \in \check{H}^2(M^n; \mathbb{Z}_2)$ inducida en el límite por el 2-cociclo $(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, w_{\alpha\beta\gamma}^{(2)})$ se llama *segunda clase de Stiefel-Whitney* de M^n . Decimos que M^n es una variedad $\text{Spin}(n)$ si su segunda clase de Stiefel-Whitney es trivial. Esta definición simplemente significa que la variedad M^n admite un $\text{Spin}(n)$ -haz vectorial bien definido cuyas funciones de transición son levantamientos a lo largo del recubrimiento doble Ad de las funciones de transición del haz tangente orto-normalizado. A una tal elección de levantamientos $\tilde{K}_{\alpha\beta}$ se le llama simplemente una estructura $\text{Spin}(n)$ para M^n .

Por supuesto, la definición de la segunda clase de Stiefel-Whitney se extiende para incluir $\text{SO}(k)$ -haces vectoriales más generales que el haz tangente. Sin embargo, el ejemplo principal que tendremos en mente será el del haz tangente a una variedad orientable.

Desafortunadamente, no todas las variedades de dimensión cuatro son $\text{Spin}(4)$. Por ejemplo, un célebre teorema debido a Rokhlin establece que las 4-variedades $\text{Spin}(4)$ tienen *signatura* divisible por dieciséis [31]. Este resultado implica que $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, y más generalmente la suma conexas de k copias del plano proyectivo complejo no es $\text{Spin}(4)$ si $k < 16$. Esto nos obliga a introducir una nueva estructura para los haces vectoriales orientables conocida como *estructura* $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$, que en cierto sentido es el análogo complejificado de una estructura $\text{Spin}(n)$. Este es el concepto más importante de esta sección, ya que este tipo de estructura siempre está presente en el haz tangente de una 4-variedad lisa.

Para motivar la definición recordemos que para todo entero $n \geq 0$, el grupo $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ completa la sucesión exacta

$$(3.2) \quad 1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \xrightarrow{\vartheta} \text{SO}(n) \times S^1 \longrightarrow 1$$

donde $\vartheta(z\xi) := (\text{Ad}_\xi, z^2)$. Observe que ϑ determina una pareja de homomorfismos $p_1 : \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ y $p_2 : \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \rightarrow S^1$ definidos como $p_1 = \text{proy}_{\text{SO}(n)} \circ \vartheta$, $p_2 := \text{proy}_{S^1} \circ \vartheta$. Supongamos que tenemos un $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ -haz vectorial $\mathcal{E} \rightarrow M^k$

con cocíclos estructurales $(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}})$. Entonces los homomorfismos anteriores completan el diagrama conmutativo

$$(3.3) \quad \begin{array}{ccc} & & \text{SO}(n) \\ & \nearrow^{K_{\alpha\beta}^{(1)}} & \\ K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} & \longrightarrow & \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \\ & \searrow_{K_{\alpha\beta}^{(2)}} & \\ & & S^1 \end{array}$$

p_1 (arrow from $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ to $\text{SO}(n)$)
 p_2 (arrow from $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ to S^1)

Es fácil ver que las funciones $K_{\alpha\beta}^{(1)}$ y $K_{\alpha\beta}^{(2)}$ satisfacen la relación de cociclo.

DEFINICIÓN 3.1. Una estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ para un $\text{SO}(n)$ -haz vectorial $E \rightarrow M^k$ con cocíclos estructurales $(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}^E)$ es un levantamiento $K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ tal que $p_1 \circ K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}} = K_{\alpha\beta}^E$ y $(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}})$ satisface las relaciones de cociclo. El $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ -haz $\mathcal{E} \rightarrow M^k$ determinado por $(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}})$ tiene asociado un haz de líneas complejo $\det \mathcal{E} \rightarrow M^k$ definido por el cociclo $(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, p_2 \circ K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}})$ que se llama *haz determinante* de la estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$. En particular, decimos que M^k es una variedad $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(k)$ si su haz tangente TM^k admite una estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(k)$.

Como hemos visto, asociado a cualquier $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ -haz vectorial \mathcal{E} se tiene una pareja de haces vectoriales $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ con grupos estructurales $\text{SO}(n)$ y S^1 respectivamente. Esta sencilla observación implica que el morfismo inducido por ϑ en el primer conjunto de cohomología de Čech

$$(3.4) \quad \vartheta^1 : \check{H}^1(M^k; \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)) \rightarrow \check{H}^1(M^k; \text{SO}(n)) \times \check{H}^1(M^k; S^1)$$

lleva la clase de isomorfismo de $[\mathcal{E}]$ en la pareja $([\mathcal{E}_1], [\mathcal{E}_2])$. Y más aún, por exactitud de la sucesión larga asociada a (3.2) vemos que $\vartheta^1[\mathcal{E}] = ([\mathcal{E}_1], [\mathcal{E}_2])$ si y solo si la clase $\bar{\vartheta}([\mathcal{E}_1], [\mathcal{E}_2])$ es trivial en $\check{H}^2(M^k; \mathbb{Z}_2)$. En otras palabras, el núcleo⁵ de la aplicación de conexión

$$\bar{\vartheta} : \check{H}^1(M^k; \text{SO}(n)) \times \check{H}^1(M^k; S^1) \rightarrow \check{H}^2(M^k; \mathbb{Z}_2)$$

es la obstrucción a la existencia de $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ -haces vectoriales sobre M^k . Analicemos la estructura del espacio de obstrucción $\text{Ker } \bar{\vartheta}$. Para esto, consideramos primero la clase de isomorfismo de un $\text{SO}(n)$ -haz vectorial $E \rightarrow M^k$ con cocíclos estructurales $(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}^E)$ con $\mathcal{U}_{\alpha\beta}$ simplemente conexo para cualquier posible elección de índices α, β . Si $[E]$ es la primera componente de $\vartheta^1[\mathcal{E}]$ para algún $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ haz vectorial \mathcal{E} con funciones de transición $K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}}$, entonces al factorizar la parte $\text{Spin}(n)$ de $K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}}$ tendríamos una nueva función $\tilde{K}_{\alpha\beta}^E$ tal que $\text{Ad} \circ \tilde{K}_{\alpha\beta}^E = K_{\alpha\beta}^E$. Es decir, la parte $\text{Spin}(n)$ del cociclo $K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}}$ levanta a $\text{Spin}(n)$ el cociclo estructural $K_{\alpha\beta}^E$. Como hemos visto antes, este tipo de levantamientos no necesariamente determinan haces $\text{Spin}(n)$ bien definidos debido a una posible falla en la elección de signos proveniente del núcleo $\mathbb{Z}_2 \simeq \text{Ker Ad}$. La segunda clase de Stiefel-Whitney $w_2(E)$ representa

⁵El núcleo de una aplicación marcada $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es la preimagen de y_0 bajo f .

precisamente esta obstrucción. De hecho, la ambigüedad en el signo del levantamiento $\tilde{K}_{\alpha\beta}^E$ se debe en este caso a que un elemento en $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \simeq \text{Spin}(n) \times_{\mathbb{Z}_2} S^1$ se representa indistintamente por ξz o bien como $-\xi - z$ para $\xi \in \text{Spin}(n)$ y $z \in S^1$.

Un fenómeno análogo ocurre cuando consideramos la clase de isomorfismo de un haz de líneas $L \rightarrow M^k$ en vez de la clase de $E \rightarrow M^k$. El recubrimiento doble en este caso es $z \mapsto z^2$ y la pregunta relevante es la siguiente: ¿Bajo que condiciones existe un haz de líneas $\sqrt{L} \rightarrow M^k$ tal que $\sqrt{L} \otimes_{\mathbb{C}} \sqrt{L} \simeq L$? Como antes, analicemos esta pregunta en términos de la sucesión exacta

$$(3.5) \quad \cdots \longrightarrow \check{H}^2(M^k; \mathbb{Z}) \xrightarrow{2\times} \check{H}^2(M^k; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{mód } 2} \check{H}^2(M^k; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \cdots$$

inducida por la sucesión exacta corta de coeficientes $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$. La existencia del haz de líneas $\sqrt{L} \rightarrow M^k$ implica que $2c_1(\sqrt{L}) = c_1(L)$ y por tanto $c_1(L) = 0 \pmod{2}$. De nuevo, la exactitud de la sucesión (3.5) implica que $c_1(L) = 0 \pmod{2}$ es también condición suficiente para la existencia de una raíz \sqrt{L} de L .

Juntando estas dos piezas de información, deducimos que el morfismo de conexión $\bar{\partial} : \check{H}^1(M^k; \text{SO}(n)) \times \check{H}^2(M^k; S^1) \rightarrow \check{H}^1(M^k; \mathbb{Z}_2)$ está definido como $\bar{\partial}([E], [L]) = w_2(E) + \tilde{c}_1(L)$, donde $w_2(E)$ es la segunda clase de Stiefel-Whitney de E y $\tilde{c}_1(L)$ es la reducción modulo 2 de la primera clase de Chern de L . Note que la ecuación $w_2(E) + \tilde{c}_1(L) = 0$ implica que la segunda clase de Stiefel-Whitney de E y la reducción módulo 2 de la primera clase de Chern de L son cohomólogas en $\check{H}^2(M^k; \mathbb{Z}_2)$. Esto quiere decir que al representar las clases $w_2(E)$ y $\tilde{c}_1(L)$ por cocíclos $w_{\alpha\beta\gamma}^{(2)} = \tilde{K}_{\alpha\beta}^E \tilde{K}_{\beta\gamma}^E \tilde{K}_{\gamma\alpha}^E$ y $\omega_{\alpha\beta\gamma} = K_{\alpha\beta}^{\sqrt{L}} K_{\beta\gamma}^{\sqrt{L}} K_{\gamma\alpha}^{\sqrt{L}}$ con $\tilde{K}_{\alpha\beta}^E : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow \text{Spin}(n)$ y $K_{\alpha\beta}^{\sqrt{L}} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow S^1$ tales que; $\text{Ad}(\tilde{K}_{\alpha\beta}^E) = K_{\alpha\beta}^E$ y $(K_{\alpha\beta}^{\sqrt{L}})^2 = K_{\alpha\beta}^L$; se tendría que $w_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}$ y $\omega_{\alpha\beta\gamma}$ difieren a lo más por la cofrontera de una 1-cocadena $\varepsilon_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ que permite cancelar los signos -1 en donde sea necesario. Para ver esto explícitamente se define $K'_{\alpha\beta} := \varepsilon_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}^{\sqrt{L}}$ y fácilmente se verifica que $K_{\alpha\beta}^E := K'_{\alpha\beta} \tilde{K}_{\alpha\beta}^E$ satisfacen las relaciones de cociclo y por tanto determinan un $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ -haz vectorial $\mathcal{E} \rightarrow M^k$. En resumen, hemos probado el siguiente.

TEOREMA 3.1. *Un $\text{SO}(n)$ -haz vectorial $E \rightarrow M^k$ admite una estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ si y solo si existe un haz de líneas complejo $L \rightarrow M^k$ tal que $w_1(E) \equiv c_1(L) \pmod{2}$.*

OBSERVACIÓN 3.2. De el teorema anterior se sigue que todo $\text{Spin}(n)$ -haz vectorial es un $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ -haz vectorial. De hecho, al fijar una estructura $\text{Spin}(n)$ se obtiene una estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ inducida por el morfismo

$$\text{Spin}(n) \hookrightarrow \text{Spin}(n) \times \text{U}(1) \xrightarrow{\pi} \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n).$$

El haz determinante de esta estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ canónica es trivial ya que la imagen de $\text{Spin}(n)$ bajo el morfismo antes mencionado es precisamente $\pi(\text{Spin}(n) \times 1)$.

El Teorema 3.4, resultado principal de esta sección, es consecuencia directa de algunos isomorfismos bien conocidos en topología algebraica (ver por ejemplo [6], [18]). De estos, el más importante para nosotros es el siguiente.

TEOREMA 3.3. *Si G es un grupo discreto, entonces para todo entero $p \geq 0$ se tiene que $\check{H}^p(M^n; G)$ es canónicamente isomorfa a la cohomología singular de M^n con coeficientes en G , denotada usualmente como $H^p(M^n; G)$.*

TEOREMA 3.4. [Hirzebruch-Hopf] *Toda 4-variedad lisa y orientable admite una estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 3.1 es suficiente encontrar un levantamiento entero de la segunda clase de Stiefel-Whitney $w_2(TM^4) \in \check{H}^2(M^4; \mathbb{Z}_2)$ a lo largo del morfismo inducido por el recubrimiento $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Esto ocurre precisamente cuando $w_2(TM^4)$ pertenece al núcleo del morfismo de conexión

$$\beta : \check{H}^2(M^4; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \check{H}^3(M^4; \mathbb{Z})$$

conocido con el nombre de *homomorfismo de Bockstein*. Por simplicidad, nos restringiremos al caso simplemente conexo, aún que apuntamos que el resultado es válido en total generalidad [12]. Del Teorema 3.3 se sigue que $\check{H}^3(M^4; \mathbb{Z}) \simeq H^3(M^4; \mathbb{Z})$. Finalmente, la dualidad de Poincaré y el teorema de Hurewicz implican que $H^3(M^4; \mathbb{Z}) \simeq H_1(M^4; \mathbb{Z}) = 0$ si M^4 es simplemente conexa. Lo anterior prueba que $\text{Ker } \beta = \check{H}^2(M^4; \mathbb{Z}_2)$, en particular $\beta w_2(TM^4) = 0$ como se buscaba. \square

Para finalizar la presente sección estudiamos con mayor detalle al conjunto de clases de isomorfismo de estructuras $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ para una 4-variedad M^4 denotado simplemente como $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4)$. Del teorema 3.1 vemos que existe una aplicación bien definida

$$(3.6) \quad \mathfrak{S} : \text{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4) \rightarrow \check{H}^2(M^4; \mathbb{Z})$$

$$[\mathcal{E}] \mapsto c_1(\det \mathcal{E})$$

que presenta a $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4)$ como un “espacio afín” modelado sobre $\check{H}^2(M^4; \mathbb{Z})$; esto quiere decir que, dada una estructura $[\mathcal{E}] \in \text{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4)$ y un elemento $x \in \check{H}^2(M^4; \mathbb{Z})$ podemos formar una nueva clase $z = c_1(\det \mathcal{E}) + 2x$ con la propiedad de que $z \equiv c_1(\det \mathcal{E}) \pmod{2}$. En particular, z corresponder con un haz de líneas L_z que determina un elemento en la fibra $\mathfrak{S}^{-1}(z) \in \text{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4)$. La siguiente proposición dice que cualesquiera dos puntos en una fibra de \mathfrak{S} “difieren” por un elemento en $\check{H}^2(M^4; \mathbb{Z})$. La imagen de la aplicación \mathfrak{S} es precisamente el conjunto de todas las clases $x \in \check{H}^2(M^4; \mathbb{Z})$ que satisfacen la relación $x \simeq w_2(M) \pmod{2}$. A tales elementos se les llama *característicos*.

El siguiente argumento se basa en la no existencia de clases de 2-torsión en $\check{H}^2(M^4; \mathbb{Z})$; esta condición se satisface, por ejemplo, cuando M^4 es simplemente conexa (ver [18, p. 196]).

PROPOSICIÓN 3.1. *Supongamos que $\check{H}^2(M^4; \mathbb{Z})$ no tiene clases de 2-torsión. Entonces existe una acción libre y transitiva de $\check{H}^2(M^4; \mathbb{Z})$ en $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4)$ y en $\check{H}^2(M^4; \mathbb{Z})$ que hace equivariante a la aplicación \mathfrak{S} .*

DEMOSTRACIÓN. Identificando $\check{H}^2(M^4; \mathbb{Z})$ con el grupo abeliano de clases de isomorfismo de haces vectoriales suaves $\text{Pic}^{\infty}(M^4)$ mediante el isomorfismo inducido por la primera clase de Chern podemos definir acciones

$$\text{Pic}^{\infty}(M^4) \times \text{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4) \rightarrow \text{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4)$$

$$([L], [\mathcal{E}]) \mapsto [\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} L]$$

$$\text{Pic}^{\infty}(M^4) \times \check{H}^2(M^4; \mathbb{Z}) \rightarrow \check{H}^2(M^4; \mathbb{Z})$$

$$([L], x) \mapsto x + 2c_1(L).$$

Usando cocíclos estructurales se verifica fácilmente que

$$(3.7) \quad \det(\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} L) = \det \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} L^2.$$

De hecho, la ecuación anterior implica que diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4) & \xrightarrow{\mathfrak{S}} & \check{H}^2(M^4; \mathbb{Z}) \\ \otimes_{\mathbb{C}} L \downarrow & & \downarrow +2c_1(L) \\ \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4) & \xrightarrow{\mathfrak{S}} & \check{H}^2(M^4; \mathbb{Z}). \end{array}$$

Conmuta para todo elemento $[L] \in \mathrm{Pic}^{\infty}(M^4)$. Esto prueba que la aplicación $\mathfrak{S} : \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4) \rightarrow \check{H}^2(M^4; \mathbb{Z})$ es equivariante respecto a las acciones previamente definidas. Veamos que las acciones son libres y transitivas. Para esto, observe que la acción de $\mathrm{Pic}^{\infty}(M^4)$ en $\check{H}^2(M^4; \mathbb{Z})$ es la acción de $\mathrm{Pic}^{\infty}(M^4)$ en $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4)$ bajo la identificación $\mathrm{Pic}^{\infty}(M^4) \simeq \check{H}^2(M^4; \mathbb{Z})$ y por tato una acción es libre y transitiva si y solo si la otra lo es.

Para la transitividad, trabajamos con los cocíclos estructurales $(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}^{(1)})$ $(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}^{(2)})$ correspondientes a elementos $[\mathcal{E}_1], [\mathcal{E}_2] \in \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4)$. Si $(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta}^{TM^4})$ denota el cociclo estructural de TM^4 , tenemos que $p_1 \circ K_{\alpha\beta}^{(1)} = K_{\alpha\beta}^{TM^4} = p_1 \circ K_{\alpha\beta}^{(2)}$ para cada (α, β) . En otras palabras $K_{\alpha\beta}^{(1)} \left(K_{\alpha\beta}^{(2)} \right)^{-1}$ pertenecen al núcleo de p_1 . Es fácil ver que $\mathrm{Ker} p_1 \simeq S^1 \times_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2 \simeq S^1$, esto quiere decir que $K_{\alpha\beta} := K_{\alpha\beta}^{(1)} \left(K_{\alpha\beta}^{(2)} \right)^{-1}$ es una 1-cocadena de Čech con valores en S^1 . Note que los factores $\mathrm{Spin}(4)$ de las funciones $K_{\alpha\beta}^{(1)}, K_{\alpha\beta}^{(2)}$ difieren a lo más por un signo bien definido globalmente, esto nos permite suponer que los levantamientos a $\mathrm{Spin}(4)$ asociados a estas funciones son idénticos. Así, al factorizar $K_{\alpha\beta}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) como un producto $\tilde{K}_{\alpha\beta}^{TM^4} H_{\alpha\beta}^{(i)}$, con $\tilde{K}_{\alpha\beta}^{TM^4}$ levantamiento a $\mathrm{Spin}(4)$ del cociclo $K_{\alpha\beta}^{TM^4}$ y $H_{\alpha\beta}^{(i)}$ los cocíclos estructurales del los haces determinantes $\det \mathcal{E}_i$, vemos que $K_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}^{(1)} \left(H_{\alpha\beta}^{(2)} \right)^{-1}$ cumple con relaciones de cociclo. Por tanto, el cociclo $(\mathcal{U}_{\alpha\beta}, K_{\alpha\beta})$ determinan un haz de líneas $L \rightarrow M^4$ que por construcción satisface $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \otimes_{\mathbb{C}} L$.

Finalmente, si $[L] \in \mathrm{Pic}^{\infty}(M^4)$ es tal que $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} L \simeq \mathcal{E}$ para algún elemento $[\mathcal{E}] \in \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4)$, entonces las funciones de transición de \mathcal{E} y de L denotadas como $K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}}$ y $K_{\alpha\beta}^L$ satisfacen para cada (α, β) la ecuación $K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}} K_{\alpha\beta}^L = K_{\alpha\beta}^{\mathcal{E}}$. Esta relación claramente implica que $K_{\alpha\beta}^L = 1$ para cada (α, β) . Esto muestra que L es un haz de líneas trivial. \square

OBSERVACIÓN 3.5. Supongamos que $f : M^4 \rightarrow M^4$ es un difeomorfismo tal que $\det df : \Lambda^4 TM^4 \rightarrow \mathbb{R}$ siempre tiene signo positivo, es decir, f es un difeomorfismo que preserva orientación y consideremos $\mathcal{E} \rightarrow M^4$ una estructura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$. Entonces, las propiedades de functorialidad asociadas al haz inducido por f implican que $f^* \mathcal{E} \rightarrow M^4$ es de nuevo una estructura $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$. Esto quiere decir que el grupo de difeomorfismos de M^4 que preservan orientación $\mathrm{Diff}^+(M^4)$ actúa en $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4)$

de la siguiente manera

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \text{Diff}^+(M^4) \times \text{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4) &\rightarrow \text{Spin}^{\mathbb{C}}(M^4) \\ (f, [\mathcal{E}]) &\mapsto f^* \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Esta acción sera sumamente importante hacia el final de este trabajo.

4. Preliminares de Geometría Diferencial

En esta sección estudiaremos los operadores geométricos necesarios para definir las ecuaciones de Seiberg-Witten. Asumiremos que el lector está familiarizado con las nociones básicas de geometría diferencial. En particular, con los conceptos centrales de álgebra exterior y formas diferenciales. La breve exposición que a continuación presentamos de estos temas está basada esencialmente en [7]. Para una introducción rápida a estas ideas el lector puede consultar [49]. A lo largo de la presente sección trabajaremos por completo en la categoría de objetos diferenciales. Por lo tanto, $\Gamma(E)$ denotará al módulo de secciones suaves de un haz vectorial E definido sobre una variedad diferenciable M^n . Así mismo, \mathbb{F} denotará tanto al campo de los números reales como al de los números complejos, a menos de que se indique una elección específica. Finalmente definiremos para cada entero no negativo p el espacio de p -formas diferenciales con valores en E , denotado por $\Omega^p(M^n; E)$, como el módulo de secciones suaves $\Gamma(\Lambda^p T^* M \otimes_{\mathbb{F}} E)$. Note que $\Omega^0(M; E) \simeq \Gamma(E)$ y que $\Omega^p(M; E)$ coincide con el espacio de p -formas diferenciales $\Omega^p(M)$ si E es el haz trivial $M^n \times \mathbb{R}$.

4.1. Conexiones en Haces Vectoriales. Una conexión en un $\text{GL}(k; \mathbb{F})$ -haz vectorial $E \rightarrow M^n$ es una aplicación

$$\nabla : \Omega^0(M^n; E) \rightarrow \Omega^1(M^n; E)$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. (Aditividad) Para cualesquiera dos secciones $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$,

$$\nabla(s_1 + s_2) = \nabla s_1 + \nabla s_2.$$

2. (Regla de Leibniz) Para toda $s \in \Gamma(E)$ y toda función suave $f \in \mathcal{C}^\infty(M^n; \mathbb{F})$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ en función de si E es real o complejo),

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla s.$$

La definición anterior implica que $\nabla(rs) = r \nabla s$ para cualquier función constante $r : M^n \rightarrow \mathbb{F}$. De la misma manera se verifica inmediatamente que la aditividad implica que $\nabla 0 = 0$. En otras palabras, cualquier conexión ∇ en E es \mathbb{F} -lineal respecto a la estructura de \mathbb{F} -espacio vectorial de $\Gamma(E)$. Esta sencilla observación implica que el valor de una conexión en cada punto $p \in M^n$ está determinado por la matriz asociada a la representación en coordenadas de la transformación lineal $\nabla_p : E_p \rightarrow T_p^* M^n \otimes E_p$. De hecho, esta propiedad se extiende a una trivialización local de E gracias a que la definición ?? implica que toda conexión es un *operador local*⁶. Por tanto, basta determinar la forma de una conexión sobre alguna trivialización local de E . Supongamos que $\{s_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ es un conjunto de generadores

⁶Un operador $\mathfrak{D} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ es local si para cualesquiera dos secciones $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ tales que $s_1|_{\mathcal{U}} = s_2|_{\mathcal{U}}$ para algún abierto $\mathcal{U} \subseteq M^n$ se tiene que $(\mathfrak{D}s_1)|_{\mathcal{U}} = (\mathfrak{D}s_2)|_{\mathcal{U}}$.

locales de E trivializado sobre algún abierto \mathcal{V} y (\mathcal{U}, x^μ) es un sistema de coordenadas locales de M^n totalmente contenido en \mathcal{V} , entonces sobre \mathcal{U} tenemos la relación

$$(4.1) \quad \nabla s_i = \Gamma_{i\mu}^j dx^\mu \otimes s_j$$

donde dx^μ son los generadores del haz cotangente trivializado sobre \mathcal{U} inducidos por el sistema de coordenadas locales y $\Gamma_{i\mu}^j$ es una función suave definida en \mathcal{U} con valores en \mathbb{F} para cada elección fija de los índices (i, μ, j) . Resulta conveniente organizar al conjunto de funciones $\Gamma_{i\mu}^j$, llamados *símbolos de la conexión* ∇ , en una función matricial de 1-formas

$$\omega_i^j := \Gamma_{i\mu}^j dx^\mu$$

llamada simplemente *matriz de conexión* asociada a ∇ . Con esta definición tenemos que $\nabla s_i = \omega_i^j \otimes s_j$. El valor de la conexión ∇ en cualquier otra sección local $s = f^i s_i$ definida sobre \mathcal{U} se escribe en términos de la matriz de conexión como $\nabla(f^i s_i) = (df^j + \omega_k^j f^k) \otimes s_j$. Usando la definición ?? se deduce la relación que satisface la matriz de conexión asociada a ∇ cuando cambiamos de trivialización local. Para esto, consideremos dos trivializaciones locales de E , digamos \mathcal{U} y $\tilde{\mathcal{U}}$ con intersección no vacía. Asociadas a estas trivializaciones tenemos conjuntos de generadores locales para $\Gamma(E)$ denotados como $\{s_j \mid 0 \leq j \leq k\}$ y $\{\tilde{s}_i \mid 0 \leq i \leq k\}$ respectivamente. Estas elecciones implican la existencia de una aplicación matricial A con valores en $\text{GL}(k; \mathbb{F})$ determinada por k^2 funciones suaves A_j^i tales que la relación $\tilde{s}_j = A_j^i s_i$ se satisface en $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}$. Así

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{s}_j &= \nabla(A_j^i s_i) \\ &= dA_j^i \otimes s_i + A_j^i \omega_i^r \otimes s_r \\ &= [dA_j^r + A_j^i \omega_i^r] \otimes s_r \\ &= [dA_j^r + A_j^i \omega_i^r] \otimes (A^{-1})_r^\ell \tilde{s}_\ell \\ &= [dA_j^r (A^{-1})_r^\ell + A_j^i \omega_i^r (A^{-1})_r^\ell] \otimes \tilde{s}_\ell. \end{aligned}$$

Por tanto, las matrices de conexión $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_j^i)$ y $\omega = (\omega_j^i)$ asociadas a las trivializaciones \mathcal{U} y a $\tilde{\mathcal{U}}$ satisfacen

$$(4.2) \quad \tilde{\omega} = dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1}, \quad \text{en } \mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}.$$

La formula (4.2) es fundamental en la teoría de conexiones; por ejemplo, cualquier familia de funciones suaves con valores matriciales definidas en los abiertos de una trivialización de E con valores en $\text{GL}(k; \mathbb{F})$ que satisfagan la relación anterior determinan la única conexión en E . Usando este resultado junto con un argumento de particiones de la unidad se puede demostrar que el espacio de conexiones de E , denotado por $\text{Con}_{\text{GL}(k; \mathbb{F})}(E)$, es no vacío para cualquier haz E . De hecho, la matriz de conexión nos permite entender el significado preciso de una conexión. Este se puede leer directamente del isomorfismo entre espacios vectoriales $V^* \otimes W \simeq \text{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ definido de manera que a cada generador $v^* \otimes w$ le asocia la transformación lineal dada por $V \ni v \mapsto v^*(v)w$, considerando por supuesto que en el caso de una conexión v^* corresponde con la 1-forma ω_i^j para cada elección fija de índices (i, j) . Esto quiere decir que la matriz de conexión ω nos permite comparar, al menos localmente, las fibras de E a lo largo de alguna dirección específica de

M^n determinada por un campo vectorial $X \in \Gamma(TM^n)$. Explícitamente se define la *derivada covariante* de una sección $s \in \Gamma(E)$ a lo largo de un campo vectorial $X \in \Gamma(TM^n)$ como

$$\nabla_X s = \omega(X)s.$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la expresión en coordenadas locales de $s = f^i s_i$ y evaluando la derivada covariante a lo largo del campo tangente $X = \partial_\mu$ inducido por la μ -ésima coordenada obtenemos la bien conocida fórmula para la derivada covariante en coordenadas locales

$$\nabla_\mu s = \partial_\mu f^j s_j + \Gamma_{i\mu}^j f^i s_j.$$

Las operaciones lineales usuales entre haces vectoriales son compatibles con las conexiones. Por ejemplo, si ∇^E es una conexión en E y $\nabla^\mathcal{E}$ es una conexión en \mathcal{E} , se tienen conexiones inducidas en los haces: $E \oplus \mathcal{E}$, $E \otimes \mathcal{E}$, definidas como sigue

$$(4.3) \quad \nabla^{E \oplus \mathcal{E}}(s \oplus s') := \nabla^E s \oplus \nabla^\mathcal{E} s'$$

$$(4.4) \quad \nabla^{E \otimes \mathcal{E}}(s \otimes s') := \nabla^E s \otimes s' + s \otimes \nabla^\mathcal{E} s'.$$

Es fácil ver que si ω^E y $\omega^\mathcal{E}$ son las matrices de conexión asociadas a ∇^E y $\nabla^\mathcal{E}$ respectivamente, entonces las matrices de conexión asociadas a $\nabla^{E \oplus \mathcal{E}}$ y a $\nabla^{E \otimes \mathcal{E}}$ están dadas por $\omega^E \oplus \omega^\mathcal{E}$ y por $\omega^E \otimes \text{id}_{\Gamma(E)} + \text{id}_{\Gamma(\mathcal{E})} \otimes \omega^\mathcal{E}$ respectivamente. Similarmemente, una conexión ∇ en un haz vectorial E determina de manera inductiva una única conexión en $\Lambda^k E$ denotada como $\nabla^{\wedge k}$ que satisface para todo $e \in \Gamma(E)$ y todo $f \in \Gamma(\Lambda^{k-1} E)$ la regla de Leibniz

$$(4.5) \quad \nabla^{\wedge k}(e \wedge f) = \nabla e \wedge f + e \wedge \nabla^{\wedge k-1} f.$$

Esta última definición resulta ser un caso particular de la conexión inducida en el producto tensorial de k copias de E , $\otimes^k E$, si consideramos a $\Lambda^k E$ como un subhaz del producto tensorial dado por la imagen la aplicación alternante $\text{Alt}^k : \otimes^k E \rightarrow \otimes^k E$. La acción de la aplicación alternante en un generador $e_1 \otimes \cdots \otimes e_k$ se lee

$$\text{Alt}^k(e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \text{sig} \pi e_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\pi(k)}$$

donde S_k es el grupo simétrico de orden $k!$ definido por todas las permutaciones del conjunto con k elementos $\{1, \dots, k\}$ y $\text{sig} : S_k \rightarrow \{-1, 1\}$ define la paridad de cualquier permutación $\pi \in S_k$.

Resulta natural pensar en el tipo de condiciones que es necesario imponer a una conexión para que preserve las estructuras geométricas adicionales inducidas en un haz vectorial dotado de un grupo estructural $G \subset \text{GL}(k; \mathbb{F})$. Para motivar la definición por venir supongamos que (M^n, g) es una variedad riemanniana orientable. Una conexión ∇ en TM^n es *ortogonal* si la relación

$$(4.6) \quad dg(X, Y) = g(\nabla X, Y) + g(X, \nabla Y)$$

se satisface como 1-formas diferenciales en el siguiente sentido; primero, $g(X, Y)$ es una función suave con valores en los reales positivos y por tanto el término $dg(X, Y)$ hace sentido como una 1-forma. Si $Z \in \Gamma(TM^n)$ es un campo vectorial, se define $g(\nabla X, Y)(Z)$ simplemente como $g(\nabla_Z X, Y)$. Para deducir versión local de la condición (4.6) consideramos valores particulares de $X = X_\mu$, $Y = X_\nu$, $Z = \partial_\sigma$ donde X_μ y X_ν son secciones locales ortonormales respecto de g y ∂_σ es un generador canónico del haz tangente asociado a un sistema de coordenadas locales.

La elección de los campos X y Y implica que las funciones componentes de la métrica $g_{\mu\nu} = g(X_\mu, Y_\nu)$ son localmente constantes con valores $\delta_{\mu\nu}$. En particular $dg_{\mu\nu} = 0$. Sustituyendo estos valores de vuelta en la ecuación (4.6) y notando que

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma X_\rho &= (\Gamma_{\rho k}^j dx^k \otimes X_j)(\partial_\sigma) \\ &= \Gamma_{\rho k}^j dx^k (\partial_\sigma) X_j \\ &= \Gamma_{\rho k}^j \delta_\sigma^k X_j \\ &= \Gamma_{\rho\sigma}^j X_j\end{aligned}$$

deducimos que

$$\begin{aligned}0 &= g(\nabla_\sigma X_\mu, X_\nu) + g(X_\mu, \nabla_\sigma X_\nu) \\ &= \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha g(X_\alpha, X_\nu) + \Gamma_{\nu\sigma}^\beta g(X_\mu, X_\beta) \\ &= \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha \delta_{\alpha\nu} + \Gamma_{\nu\sigma}^\beta \delta_{\mu\beta} \\ &= \Gamma_{\mu\sigma}^\nu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu.\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación anterior por la 1-forma dx^σ obtenemos finalmente que la matriz de conexión $\omega = (\omega_i^j)$ asociada a ∇ satisface $\omega_\mu^\nu + \omega_\nu^\mu = 0$. Es decir, en notación matricial $\omega = -\omega^t$. Esto demuestra que las conexiones ortogonales tienen asociadas matrices con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)$. Observe que una conexión ∇ en el haz tangente de una variedad riemanniana (M^n, g) es ortogonal si y solo si la métrica g es paralela respecto de la conexión $\nabla^{\otimes 2}$ en el haz $\text{Sym}^2(T^*M^n)$ inducida por la conexión ∇ (definición (4.3)); esto es, $\nabla^{\otimes 2}$ satisface $\nabla^{\otimes 2}g = 0$. Escribiendo la métrica $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ como una sección de $\text{Sym}^2(T^*M^n)$ es fácil ver que la ecuación $\nabla^{\otimes 2}g = 0$ es equivalente a

$$dg_{\mu\nu} = \omega_\mu^\alpha g_{\alpha\nu} + \omega_\nu^\beta g_{\beta\mu}$$

donde $\omega = (\omega_\beta^\alpha)$ es la matriz de conexión de ∇ . Para un G -haz vectorial arbitrario tenemos la siguiente

DEFINICIÓN 4.1. Decimos que una conexión $\nabla : \Omega^0(M^n; E) \rightarrow \Omega^1(M^n; E)$ en un G -haz vectorial $E \rightarrow M^n$ es una G -conexión si la matriz asociada a la conexión toma valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} asociada al grupo estructural G . El espacio de G -conexiones del haz E se denota por $\mathcal{C}on_G(E)$.

OBSERVACIÓN 4.2. A veces es conveniente pensar la definición anterior en términos más generales de una representación arbitraria $\rho : G \rightarrow \text{GL}(k; \mathbb{F})$ del grupo de Lie G . La definición de una G conexión ∇ en este contexto simplemente requiere que la matriz de conexión asociada a ∇ tome valores en la imagen de la diferencial $d\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(k; \mathbb{F})$. Recuerde que todo grupo de Lie admite al menos una representación suave, llamada representación adjunta⁷, inducida por la acción por conjugación de G en si mismo TG [7].

Razonando exactamente como en el párrafo anterior se puede demostrar que la matriz de conexión ω asociada a un haz $E \rightarrow M^n$ con grupo estructural $U(n)$ o $SU(n)$ satisface $\omega + \omega^\dagger = 0$. Como antes, $(\cdot)^\dagger$ denota al conjugado hermitico de una matriz, definido como la composición de la transposición usual seguida de

⁷La representación adjunta que hemos definido para los grupos $\text{Spin}(n)$ y $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ coincide con la representación adjunta como grupos de Lie, pero en este caso la imagen es el grupo ortogonal.

la conjugación compleja actuando en cada una de las entradas. A este tipo de conexiones se les conoce con el nombre de *conexiones unitarias*.

EJEMPLO 4.1. *Supongamos que $L \rightarrow M^n$ es un haz de líneas complejo dotado de una métrica hermitiana h . De la misma manera que en el caso riemanniano, la métrica reduce a $U(1)$ el grupo estructural de L . Por tanto, si A es la matriz asociada a una $U(1)$ -conexión entonces la ecuación $A = -A^\dagger$ significa en este caso que A es una 1-forma en M^n con valores puramente imaginarios. Esto concuerda perfectamente con el hecho de que $\mathfrak{u}(1) \simeq i\mathbb{R}$.*

Un ejemplo menos trivial de G -conexiones que además involucra una representación no trivial es el siguiente.

EJEMPLO 4.2. *Sea E un $\text{Spin}(n)$ -haz sobre una variedad riemanniana (M^k, g) . En vista de que se tiene un recubrimiento doble $\text{Ad} : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n)$ deducimos que cada conexión ortogonal $\nabla \in \text{Cons}_{\text{SO}(n)}(E)$ determina una única $\text{Spin}(n)$ -conexión $\tilde{\nabla}$ de manera tal que las correspondientes matrices de conexión están relacionadas a través del isomorfismo $\mathfrak{ad} : \mathfrak{spin}(n) \rightarrow \mathfrak{so}(n)$. Si $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}^{\mu\nu} e_\mu e_\nu$ y $\omega = \omega^{\mu\nu} e_\mu \wedge e_\nu$ son las matrices de conexión asociadas a $\tilde{\nabla}$ y a ∇ respectivamente, sabemos por el corolario 3.5 en la página 16 que*

$$(4.7) \quad \mathfrak{ad}(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}^{\mu\nu} \mathfrak{ad}(e_\mu e_\nu) = 2\tilde{\omega}^{\mu\nu} e_\mu \wedge e_\nu.$$

Por lo tanto, la relación entre las matrices de conexión es $\tilde{\omega} = \frac{1}{2}\omega$.

Una conexión geométrica muy importante es la conexión de Levi-Civita ∇^g asociada a la variedad riemanniana (M^n, g) que se distingue de cualquier otra conexión ortogonal en tanto que es la única $\text{SO}(n)$ -conexión que es *libre de torsión*. Esto significa que el tensor de torsión $T_{\nabla^g}(v, w) := \nabla_v^g w - \nabla_w^g v - [v, w]$ se anula idénticamente para cualesquiera dos campos tangentes v, w . Esta condición se reduce a una simetría en los índices de los símbolos de la conexión dada por $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$. El teorema fundamental de la geometría riemanniana establece que los símbolos de la conexión ó símbolos de Christoffel están determinados por los componentes $g_{\mu\nu}$ la métrica riemanniana [7]. De hecho, $\Gamma_{\alpha\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta$ están dados por la expresión

$$\frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu}).$$

Para finalizar esta breve discusión de la teoría de conexiones vamos a establecer un sencillo resultado que describe la estructura del espacio de G -conexiones de un G -haz vectorial arbitrario. Este resultado entrara más adelante en la discusión cuando estudiemos las ecuaciones de Seiberg-Witten. Primero, una pequeña definición. Supongamos que G es un grupo de Lie de dimensión k . Para cada $g \in G$ fijo se tiene un difeomorfismo $C_g : G \rightarrow G$ definido como la conjugación por el elemento g , esto es, $C_g(x) := g \cdot x \cdot g^{-1}$. Como cualquier otro difeomorfismo de G en si mismo que fija a la identidad $e \in G$, C_g determina un automorfismo $\text{Ad}(g)$ del álgebra de Lie \mathfrak{g} definido por la diferencial $d_e C_g$ en el elemento neutro $e \in G$. La regla de la cadena implica que $\text{Ad}(g) \circ \text{Ad}(h) = \text{Ad}(gh)$, obviamente $\text{Ad}(e) = \text{id}_{\mathfrak{g}}$. Por lo tanto la asignación $g \mapsto \text{Ad}(g)$ define una representación real $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ conocida como *representación adjunta*. No es difícil demostrar que $\text{Ad}(g)(X) = g \cdot X \cdot g^{-1}$ y que $\text{ad} := d_e \text{Ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(k)$ está dada por el corchete $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ del álgebra de Lie; explícitamente $\text{ad}(X) \cdot Y = -[X, Y]$.

Ahora, si E es un G -haz vectorial sobre la variedad M^n con funciones de transición $K_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_{\alpha\beta} \rightarrow G$, definimos el *haz adjunto de E* , denotado por $\text{Ad}(E) \rightarrow M^n$ como el G -haz vectorial asociado a los cocíclo estructurales $\{\mathcal{U}_{\alpha\beta}, \text{Ad} \circ K_{\alpha\beta}\}$ ⁸ y con fibras isomorfas a \mathfrak{g} . De hecho el corchete de Lie definido fibra a fibra admite una extensión que dota al haz adjunto $\text{Ad}(E)$ de estructura de haz de álgebras de Lie. Observe que la relación que satisface la matriz de conexión ω bajo un cambio de coordenadas representado por función $g : \mathcal{U} \subseteq M^n \rightarrow G$ se mantiene válida en caso de que ω esté asociada a una G -conexión. Más aún, con las definiciones anteriores, la relación entre la descripción de ω en las coordenadas asociadas a la trivialización \mathcal{U} y la matriz $\tilde{\omega}$ asociada a cualquier otra trivialización $\tilde{\mathcal{U}}$ tal que $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}} \neq \emptyset$ se reescribe como

$$(4.8) \quad \tilde{\omega} = dg \cdot g^{-1} + \text{Ad}(g)\omega.$$

El término $dg \cdot g^{-1}$ es la forma invariante de *Maurer-Cartan*, es una 1-forma diferencial con valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} ; es la única 1-forma que es invariante bajo la traslación por la derecha $R_g(x) = g \cdot x$ y está formada por las 1-formas duales a los campos fundamentales de G invariantes por la derecha que generan el álgebra de Lie \mathfrak{g} [7]. La manera de interpretar la expresión $dg \cdot g^{-1}$ es como sigue: el término dg es una matriz cuya (i, j) -ésima entrada está dada por dg_i^j , donde g_i^j es una función coordenada asociada al elemento $g \in G$ inducida por la aplicación $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ que presenta a G como un grupo de matrices. Por supuesto, con base en esta aclaración la multiplicación $dg \cdot g^{-1}$ está dada por el producto usual de matrices en $\text{GL}(\mathfrak{g})$.

Existe toda una teoría alternativa para describir G -haces vectoriales dotados de una G -conexión que involucra G -haces principales y ciertas representaciones equivariantes que permite entender con todo detalle el significado geométrico preciso de cada uno de los términos de la ecuación (4.8). Esta nueva formulación es equivalente a la teoría que hemos presentado en este trabajo. A grandes rasgos, la equivalencia está dada en términos de un funtor covariante que a cada G -haz vectorial E le asocia su *haz de marcos* $\text{Fr}(E)$; la fibra sobre un punto $x \in M^n$ del haz de marcos está formada por todas las bases de E_x y la acción de G que dota a $\text{Fr}(E)$ de una estructura de G -haz principal consiste en transformar cada vector en una base específica de E_x por los elementos de G . Una conexión en un G -haz principal $\pi : P \rightarrow M^n$ se obtiene a partir de cierta 1-forma G -equivariante $\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g}$ que, salvo isomorfismo, escinde el haz tangente de P como $\mathfrak{g} \oplus \pi^*TM$. Dado un G -haz principal P y una representación lineal $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ se construye el *haz asociado* $P \times_\rho V$ que tiene como espacio total al espacio de órbitas de la acción $G \times P \times V \rightarrow P \times V$ dada por $g \cdot (p, v) = (pg^{-1}, \rho(g)v)$. $P \times_\rho V$ tiene estructura de G -haz vectorial y su haz de marcos isomorfo a P . Una conexión en el haz principal P determina una G -conexión en el haz asociado $P \times_\rho V$ y vice versa esencialmente jalando las formas de conexión bajo ciertas secciones adecuadas. El lector puede encontrar todos los detalles de esta equivalencia en [37] y en [16].

PROPOSICIÓN 4.1. *El espacio de G -conexiones de un haz vectorial $E \rightarrow M^n$ es un espacio afín modelado sobre $\Omega^1(M^n; \text{Ad}(E))$.*

⁸El hecho de que Ad sea una representación garantiza que $\text{Ad} \circ K_{\alpha\beta}$ satisface la condición de cociclo.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a probar que existe una acción libre y transitiva de $\Omega^1(M^n; \text{ad}(E))$ como grupo abeliano sobre el espacio de G -conexiones $\text{Con}_G(E)$. Para este fin consideramos la aplicación

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \Omega^1(M^n; \text{Ad}(E)) \times \text{Con}_G(E) &\longrightarrow \text{Con}_G(E) \\ (A, \nabla) &\mapsto \nabla + A. \end{aligned}$$

Para ver que esta aplicación está bien definida recordemos que cualquier 1-forma A actúa en una sección s de E como $A \otimes s$. De esta observación es claro que $\nabla + A$ satisface la propiedad de aditividad. Por construcción, todo elemento $A \in \Omega^1(M^n; \text{Ad}(E))$ satisface $\text{Ad}(g)A = g \cdot A \cdot g^{-1}$ para toda $g : \mathcal{U} \rightarrow G$ definida en un abierto $\mathcal{U} \subseteq M^n$. En particular, $\nabla + A$ satisface la ley de transformación (4.8). Para ver que se satisface la regla de Leibniz elegimos una función suave $f \in C^\infty(M^n; \mathbb{F})$ y una sección $s \in \Gamma(E)$. Luego

$$\begin{aligned} (\nabla + A)(fs) &= \nabla(fs) + A \otimes (fs) \\ &= df \otimes s + f \nabla s + f(A \otimes s) \\ &= df \otimes s + f(\nabla s + A \otimes s) \\ &= df \otimes s + f(\nabla + A)s. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\nabla + A \in \text{Con}_G(E)$. Es claro que la aplicación (4.9) determina una acción de la parte aditiva de $\Omega^1(M^n; \text{Ad}(E))$ sobre el espacio de G -conexiones. Esta acción es libre puesto que dada $A \in \Omega^1(M^n; \text{Ad}(E))$ tal que $\nabla + A = \nabla$ para alguna G -conexión ∇ , entonces $\nabla s + A \otimes s = \nabla s$ y así $A \otimes s = 0$ para toda posible elección de $s \in \Gamma(E)$, lo cual implica que $A = 0$. Finalmente para demostrar la transitividad, consideremos dos conexiones $\nabla_0, \nabla_1 \in \text{Con}_G(E)$. La diferencia $\nabla_0 - \nabla_1$ actúa en una sección fs como

$$\begin{aligned} (\nabla_0 - \nabla_1)(fs) &= \nabla_0(fs) - \nabla_1(fs) \\ &= df \otimes s + f \nabla_0 s - df \otimes s - f \nabla_1 s \\ &= f(\nabla_0 - \nabla_1)s \end{aligned}$$

que por definición es la forma en la que un elemento de $A \in \Omega^1(M^n; \text{Ad}(E))$ actúa en la sección fs . Así, $A := \nabla_0 - \nabla_1 \in \Omega^1(M^n; \text{ad}(E))$ satisface $\nabla_0 = \nabla_1 + A$. Esto concluye la prueba de la proposición. \square

4.2. La Curvatura de una Conexión. Es importante resaltar que, aún cuando el resultado anterior implica que el espacio de G -conexiones de E hereda una estructura lineal una vez fija una conexión base, las G -conexiones en general no se transforman como secciones de ningún haz vectorial. Esto se debe a que la forma de Maurer-Cartan que aparece en la ecuación (4.8) vuelve inhomogénea a la ley de transformación que satisface la matriz asociada a una G -conexión. Para construir una sección local de un G -haz vectorial a partir de una conexión $\nabla \in \text{Con}_G(E)$ definimos inductivamente para cada entero $p \geq 1$ la *derivada exterior covariante* respecto de ∇

$$(4.10) \quad d_\nabla : \Omega^p(M^n; E) \rightarrow \Omega^{p+1}(M^n; E)$$

por medio de la regla de Leibniz

$$(4.11) \quad d_\nabla(\theta \otimes e) = d\theta \otimes e + (-1)^p \theta \wedge \nabla e.$$

Por ejemplo, si θ es la 1-forma que se obtiene al fijar la i -ésima columna de la matriz de conexión $\omega = (\omega_i^j)$ asociada a ∇ y $\{s_j\} \subset \Gamma(E)$ es una base local, tenemos que

$$\begin{aligned} d_{\nabla} \circ \nabla(s_i) &= d_{\nabla}(\omega_i^j \otimes s_j) \\ &= d\omega_i^j \otimes s_j - \omega_i^j \wedge \nabla s_j \\ &= \left(d\omega_i^j - \omega_i^a \wedge \omega_a^j \right) \otimes s_j \\ &= F_i^j \otimes s_j \end{aligned}$$

define un operador $F_{\nabla} = d_{\nabla} \circ \nabla : \Omega^0(M^n; E) \rightarrow \Omega^2(M^n; E)$ representado por la matriz con entradas $F_i^j \in \Omega^2(M^n)$.

La acción de una 2-forma ordinaria $\theta \wedge \kappa \in \Omega^2(M^n)$ en una pareja de campos tangentes $v, w \in \Gamma(TM^n)$ está dada por la fórmula

$$\theta \wedge \kappa(v, w) := \theta(v)\kappa(w) - \theta(w)\kappa(v).$$

Recuerde también que la matriz de 1-formas $\omega = (\omega_i^j)$ asociada a cualquier conexión ∇ se evalúa en un vector tangente ∂_{σ} inducido por un sistema de coordenadas locales $\{x^{\mu}\}$ para producir una matriz (para cada valor de σ) con coeficientes en $\mathcal{C}^{\infty}(M^n, \mathbb{R})$ dados por la expresión

$$\omega_i^j(\partial_{\sigma}) = (\Gamma_{i\mu}^j) dx^{\mu}(\partial_{\sigma}) = \Gamma_{i\mu}^j \delta_{\sigma}^{\mu} = \Gamma_{i\sigma}^j.$$

Con estas consideraciones en mente deducimos que el término $\omega \wedge \omega = (\omega_i^a \wedge \omega_a^j)$ actúa en la pareja de vectores $(\partial_{\mu}, \partial_{\nu})$ como sigue

$$\omega_i^a \wedge \omega_a^j(\partial_{\mu}, \partial_{\nu}) = \Gamma_{i\mu}^a \Gamma_{a\nu}^j - \Gamma_{i\nu}^a \Gamma_{a\mu}^j.$$

De manera análoga se verifica que

$$d\omega_i^j(\partial_{\mu}, \partial_{\nu}) = d\Gamma_{i\nu}^j(\partial_{\mu}) - d\Gamma_{i\mu}^j(\partial_{\nu}) = \partial_{\mu}\Gamma_{i\nu}^j - \partial_{\nu}\Gamma_{i\mu}^j.$$

Por lo tanto, para cada elección de índices (i, j) , las componentes de 2-forma $(F_i^j)_{\mu\nu} := F_{i\mu\nu}^j$ respecto de la base local $\{dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \mid 1 \leq \mu, \nu \leq n\}$ se leen

$$(4.12) \quad F_{i\mu\nu}^j = \partial_{\mu}\Gamma_{i\nu}^j - \partial_{\nu}\Gamma_{i\mu}^j + \Gamma_{i\nu}^a \Gamma_{a\mu}^j - \Gamma_{i\mu}^a \Gamma_{a\nu}^j.$$

Dicho de otra manera, la expresión local independiente de coordenadas para la matriz F_i^j es precisamente $1/2 F_{i\mu\nu}^j dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$.

OBSERVACIÓN 4.3. El Operador de Curvatura se define como el conmutador de derivadas covariantes, es decir:

$$(4.13) \quad [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]s_i = (\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu})s_i = F_{i\mu\nu}^j s_j.$$

Por tanto, el valor de la 2-forma F_{∇} en la pareja de campos tangentes $(\partial_{\mu}, \partial_{\nu})$ define un endomorfismo de E denotado como $(F_{\nabla})_{\mu\nu}$ ⁹. Recuerde que para haces vectoriales de rango finito, digamos $E \rightarrow M^n$ y $\mathcal{E} \rightarrow M^n$, se tiene un isomorfismo $\text{Hom}(E, \mathcal{E}) \simeq \mathcal{E} \otimes E^*$. En particular, $\text{End}(E) = E \otimes E^*$ y así

$$(F_{\nabla})_{\mu\nu} = F_{i\mu\nu}^j s_j \otimes s^i.$$

⁹En general, cada pareja de campos vectoriales suaves $(X, Y) \in TM^n \times TM^n$ define un endomorfismo $F_{\nabla}(X, Y) : E \rightarrow E$ dado por la expresión $F_{\nabla}(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$.

Donde $\{s_k\}$ y $\{s^k\}$ son marcos locales duales de E y E^* . Por lo tanto

$$(4.14) \quad (F_{\nabla})_{\mu\nu} := [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] = F_{i\mu\nu}^j s_j \otimes s^i$$

es una sección suave del haz de endomorfismos $\text{End}(E) \rightarrow M^n$. En conclusión, $(F_{\nabla})_{\mu\nu} dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}$ es la expresión local invariante que presenta a F_{∇} como un elemento de $\Omega^2(M^n; \text{End}(E))$.

De hecho, F_{∇} se transforma bajo la representación adjunto asociada a cambios de coordenadas inducidos por aplicaciones de la variedad con valores en G . Para ver esto, consideremos $\nabla \in \text{Con}_G(E)$. Observemos primero que los términos $d\omega$ y $\omega \wedge \omega$ que definen a F_{∇} son ambas 2-formas en M que punto a punto toman valores en \mathfrak{g} . Para ver que F_{∇} tiene las propiedades de transformación adecuadas bajo cambios de coordenadas, consideremos $\tilde{\omega}$ y ω las matrices de ∇ asociadas a dos trivializaciones no ajenas $\tilde{\mathcal{U}}$ y \mathcal{U} de E . Para cualquier cambio de coordenadas $g : \tilde{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U} \rightarrow G$ la ecuación (4.8) establece que la descripción de la matriz de conexión en las coordenadas asociadas a \mathcal{U} se relaciona con su contraparte $\tilde{\mathcal{U}}$ precisamente mediante la ecuación $\tilde{\omega} \cdot g = g \cdot \omega + dg$. Aplicando la deriva exterior a esta última relación y usando las relaciones $d(g \cdot \theta) = dg \wedge \theta - g \cdot d\theta$, $d(\theta \cdot g) = d\theta \cdot g + \theta \wedge dg$, válidas para cualquier 1-forma θ , obtenemos

$$d\tilde{\omega} \cdot g - \tilde{\omega} \wedge dg = dg \wedge \omega - g \cdot d\omega.$$

Sustituyendo el término $dg = \tilde{\omega} \cdot g - g \cdot \omega$, derivado de nueva cuenta de la relación (4.8), y cancelando el factor común $\tilde{\omega} \wedge g \cdot \omega = \tilde{\omega} \cdot g \wedge \omega$ deducimos finalmente que

$$(d\tilde{\omega} - \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega}) \cdot g = g \cdot (d\omega - \omega \wedge \omega).$$

En otras palabras, la descripción de la 2-forma F_{∇} respecto a las coordenadas \mathcal{U} y la correspondiente representación \tilde{F}_{∇} asociada a $\tilde{\mathcal{U}}$ están relacionadas por la representación adjunta

$$(4.15) \quad \tilde{F}_{\nabla} = g \cdot F_{\nabla} \cdot g^{-1}.$$

DEFINICIÓN 4.4. La *forma de curvatura* (o simplemente *curvatura*) de la conexión $\nabla \in \text{Con}_G(E)$ es la 2-forma $F_{\nabla} \in \Omega^2(M^n; \text{Ad}(E))$ definida por la matriz de conexión ω por medio de la relación $d\omega - \omega \wedge \omega$.

DEFINICIÓN 4.5. Decimos que una conexión $\nabla \in \text{Con}_G(E)$ es plana si su curvatura F_{∇} se anula idénticamente.

La curvatura de una conexión es un objeto privilegiado que juega un papel fundamental en geometría diferencial. Por ejemplo, el teorema fundamental de la geometría riemanniana establece que la conexión de Levi-Civita ∇^g está totalmente determinada por la métrica, de manera que resulta natural definir la curvatura de una variedad riemanniana (M^n, g) como la curvatura de su conexión de Levi-Civita. En el caso particular de la conexión ∇^g , la forma de curvatura R_{∇^g} se conoce comúnmente como *tensor de Riemann*, las componentes $R_{i\mu\nu}^j$ del tensor de Riemann se encuentran sustituyendo los símbolos de Christoffel en la ecuación (4.12). Es bien sabido que R_{∇^g} es un importante invariante que caracteriza a la geometría intrínseca de M^n .

PROPOSICIÓN 4.2 (Identidades de curvatura). *El tensor de Riemann $R_{\beta kl}^\alpha$ asociado a cualquier variedad riemanniana satisface*

$$(4.16) \quad R_{\beta kl}^\alpha + R_{\alpha kl}^\beta = 0$$

$$(4.17) \quad R_{\beta kl}^\alpha + R_{\beta lk}^\alpha = 0$$

$$(4.18) \quad R_{\beta kl}^\alpha + R_{kl\beta}^\alpha + R_{l\beta k}^\alpha = 0$$

$$(4.19) \quad R_{\beta kl}^\alpha - R_{l\alpha\beta}^k = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. El grupo estructural del haz tangente de cualquier n -variedad riemanniana se puede reducir al grupo ortogonal $O(n)$. Por lo tanto, el tensor de Riemann R_{jkl}^i es antisimétrico en los índices (i, j) y por separado en los índices (k, l) simplemente por que es una 2-forma con valores en el álgebra de matrices antisimétricas $\mathfrak{o}(n)$. Sea $\omega_\beta^\alpha = \Gamma_{\beta\nu}^\alpha dx^\nu$ la matriz asociada a la conexión de Levi-Civita. Como los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\beta\nu}^\alpha$ son simétricos en los índices (β, ν) , vemos que $dx^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha = 0$. Aplicando la derivada exterior a esta ecuación tenemos

$$dx^\beta \wedge d\omega_\beta^\alpha = dx^\beta \wedge (F_\beta^\alpha + \omega_\mu^\alpha \wedge \omega_\beta^\mu) = dx^\beta \wedge F_\beta^\alpha = 0.$$

Sustituyendo la expresión $F_\beta^\alpha = \frac{1}{2}R_{\beta kl}^\alpha dx^k \wedge dx^l$ en la ecuación anterior obtenemos la tercera identidad de la proposición. Finalmente, para demostrar la cuarta identidad de curvatura, usamos la tercera identidad en la forma

$$R_{\beta kl}^\alpha + R_{kl\beta}^\alpha + R_{l\beta k}^\alpha = 0$$

$$R_{\alpha kl}^\beta + R_{kl\alpha}^\beta + R_{l\alpha k}^\beta = 0.$$

Sustrayendo estas dos ecuaciones y usando la antisimetría del tensor de Riemann en los índices (α, β) obtenemos

$$(A) \quad 2R_{\beta kl}^\alpha + R_{kl\beta}^\alpha + R_{k\alpha l}^\beta + R_{l\beta k}^\alpha + R_{lk\alpha}^\beta = 0.$$

Similarmente se tiene la identidad

$$(B) \quad 2R_{l\alpha\beta}^k + R_{\alpha\beta l}^k + R_{\beta l\alpha}^k + R_{\alpha k\beta}^l + R_{\beta\alpha k}^l = 0.$$

Comparando las ecuaciones (A) y (B) vemos que las propiedades de antisimetría implican que $R_{\beta kl}^\alpha = R_{l\alpha\beta}^k$. \square

El tensor de Riemann es también un concepto central en la teoría de la relatividad general; las ecuaciones de campo de Einstein escritas en coordenadas locales y sin constante cosmológica

$$(4.20) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

describen la dinámica del campo gravitacional modelado por la métrica $g = g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu$ del espacio-tiempo que en este caso es una 4-variedad Lorentziana. Los términos de las ecuaciones de Einstein son de distinta naturaleza y son un ejemplo más de la perfecta simbiosis física-matemáticas. Primero, el miembro derecho de (4.20) es el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ que está asociado a la distribución de materia y que sirve como fuente de la interacción gravitacional. G es la constante introducida por Isaac Newton en su famosa ley de gravitación universal. En contraste, el miembro izquierdo de las ecuaciones de Einstein (4.20) es puramente geométrico; $R_{\mu\nu}$ representan las componentes del llamado *tensor de Ricci* o *curvatura de Ricci*. Este tensor resulta que resulta ser simétrico se construye a

partir de la forma de curvatura simplemente tomando la traza de las componentes del tensor de Riemann

$$(4.21) \quad R_{\mu\nu} := R_{\mu j \nu}^j.$$

La manera invariante de definir el tensor de Ricci es la siguiente.

DEFINICIÓN 4.6. Sea (M^n, g) una variedad riemanniana; $R_{\nabla^g} = \frac{1}{2}R_{j\mu\nu}^i dx^\mu \wedge dx^\nu$ el tensor de Riemann asociado a la conexión de Levi-Civita ∇^g y $\{e_\mu \mid 1 \leq \mu \leq n\}$ una base ortonormal. El tensor de Ricci de la variedad riemanniana (M^n, g) es la forma bilineal definida para toda pareja $(X, Y) \in TM^n \times TM^n$ por medio de la expresión

$$(4.22) \quad \text{Ricc}(X, Y) = - \sum_{k=1}^n g(R_{\nabla^g}(e_k, X)e_k, Y).$$

PROPOSICIÓN 4.3. *El tensor de Ricci no depende de la elección de marco ortonormal y es simétrico.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\{\hat{e}_\nu\}$ es cualquier otro marco ortonormal de TM^n , existe una matriz ortogonal A_j^i tal que $\hat{e}_k = A_k^j e_j$. Así

$$\sum_{k=1}^n g(R_{\nabla^g}(\hat{e}_k, X)\hat{e}_k, Y) = \sum_{k=1}^n A_k^i A_k^j g(R_{\nabla^g}(e_i, X)e_j, Y).$$

Usando que A_k^i y A_k^j son matrices ortogonales, deducimos que $\sum_k A_k^i A_k^j = \delta^{ij}$. Esto prueba que la definición (4.22) es independiente del marco ortonormal. Ahora calculamos las componentes $R_{\mu\nu} = \text{Ricc}(e_\nu, e_\mu)$ del tensor de Ricci.

$$R_{\mu\nu} = - \sum_{k=1}^n g(R_{\nabla^g}(e_k, e_\nu)e_k, e_\mu) = - \sum_{k=1}^n \delta_{\mu j} R_{k k \nu}^j = R_{\mu k \nu}^k.$$

Note que en el cálculo anterior hemos usado que la base $\{e_\mu\}$ es ortonormal junto con la propiedad de antisimetría del tensor de Riemann en los índices (μ, k) . La simetría $R_{bcd}^a = R_{dab}^c$ implica que $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Por tanto, el tensor de Ricci es simétrico como se afirmaba. \square

De manera similar, la *curvatura escalar* o *escalar de Ricci* R se obtiene tomando la traza del tensor de Ricci; esto es, $R := R_\mu^\mu = R_{\mu\mu}^{\mu\mu}$. Adelantamos que la curvatura escalar aparecerá más adelante en esta misma sección. Recientemente, LeBrun y otros [26, 25, 24] han encontrado una sorprendente relación entre la teoría de Einstein y la teoría de Seiberg-Witten; los invariantes de Seiberg-Witten detectan cuando ciertas 4-variedades admiten *métricas de Einstein* que por definición son aquellas métricas que satisfacen las ecuaciones de Einstein en el vacío, es decir con $T_{\mu\nu} \equiv 0$.

Usando ciertas funciones analíticas G -invariantes que dependen de la forma de curvatura de una conexión $\nabla \in \text{Con}_G(E)$ se pueden construir formas globales en M^n . La identidad de Bianchi implica, entre otras cosas, que todas estas formas construidas a partir de funciones analíticas de la curvatura son cerradas. Un procedimiento denominado *transgresión* establece que estas funciones de la curvatura son independientes de ∇ (salvo formas exactas) y por tanto representan invariantes topológicos de la clase de isomorfismo del G -haz vectorial $E \rightarrow M^n$. Estos invariantes se conocen como *clases características*, la *teoría de Chern-Weil* describe la

manera precisa en la que la curvatura F_{∇} da lugar a estas clases de grado par en la cohomología de de Rham de $H_{dR}^{2k}(M^n; \mathbb{F})$ [49].

EJEMPLO 4.3. *Sea $L \rightarrow M^n$ un haz de líneas complejo dotado de una conexión unitaria ∇ con matriz de conexión $A \in \Omega^1(M^n; \text{Ad}(L))$ cuya única entrada está dada por la 1-forma local $A_{\mu} dx^{\mu}$. Como el grupo estructural de L es abeliano, la representación adjunta de $U(1)$ en $\mathfrak{u}(1) \simeq i\mathbb{R}$ es trivial. Por tanto, la curvatura de ∇ es una 2-forma global en M^n con valores puramente imaginarios que localmente está dada por la simple expresión $F_A = dA$. Está última relación se deduce de la fórmula (4.12) observando que $A \wedge A(\partial_{\mu}, \partial_{\nu}) = A_{\mu} A_{\nu} - A_{\nu} A_{\mu} = 0$. Más aún, F_A es cerrada ya que localmente está representada por la forma exacta dA . Esto quiere decir que $i/2\pi F_A$ representa una clase¹⁰ en $H_{dR}^2(M^n; \mathbb{R})$ que solo depende de la clase de isomorfismo de $L \rightarrow M^n$. En [31] se demuestra que bajo el morfismo de grupos $H^2(M^n; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{dR}^2(M^n; \mathbb{R})$ inducido por el morfismo de coeficientes $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, la primera clase de Chern de L , $c_1(L)$, corresponde con el elemento $[i/2\pi F_A] \in H_{dR}^2(M^n; \mathbb{R})$. Es decir, $[i/2\pi F_A]$ es una clase entera.*

4.3. El Operador de Hodge y la Topología de las 4-Varietades. Consideremos un sistema local de coordenadas $\{x^1, \dots, x^n\}$ definido en un abierto de la variedad M^n . La métrica riemanniana g induce un producto interno en el haz cotangente, denotado como g^* que está definido en los generadores $\{dx^{\mu} \mid 1 \leq \mu \leq n\}$ como $g^*(dx^{\mu}, dx^{\nu}) = g^{\mu\nu}$, donde $g^{\mu\nu}$ son las componentes de la matriz inversa de la representación en coordenadas locales de g , $g_{\mu\nu} dx^{\mu} \otimes dx^{\nu}$. En particular, cada una de las potencias exteriores $\Lambda^p T^* M^n$ recibe una forma cuadrática simétrica y positivo definida, denotada también por g^* , que actúa localmente en los generadores como

$$(4.23) \quad g^*(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_p}) = \det \begin{pmatrix} g^{\mu_1 \nu_1} & \dots & g^{\mu_1 \nu_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{\mu_p \nu_1} & \dots & g^{\mu_p \nu_p} \end{pmatrix}.$$

La métrica riemanniana también nos permite definir sobre la variedad M^n una forma de volumen global $d^n x \in \Omega^n(M^n)$ dada en coordenadas locales por la bien conocida expresión

$$(4.24) \quad d^n x = \sqrt{|\det g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Así obtenemos un isomorfismo de haces $\star : \Lambda^p T^* M^n \rightarrow \Lambda^{n-p} T^* M^n$ definido en cada punto $m \in M^n$ por el operador de Hodge asociado al espacio cuadrático $(\Lambda^p T_m^* M^n, g_m^*)$. Note que este isomorfismo depende de la elección de métrica riemanniana $g \in \text{Sym}^2 T^* M^n$. Equivalentemente, pensaremos a la estrella de Hodge como un morfismo de módulos $\star : \Omega^p(M^n) \rightarrow \Omega^{n-p}(M^n)$ caracterizado por la relación

$$(4.25) \quad \beta \wedge \star \theta = g^*(\beta, \theta) d^n x \quad \text{para toda } \beta, \theta \in \Omega^p(M^n).$$

Supongamos que $\theta \in \Omega^p(M^n)$ se expresa localmente como

$$\frac{1}{p!} \theta_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}.$$

¹⁰La forma de curvatura F_A es localmente exacta, esto no quiere decir que la clase de cohomología que representa $i/2\pi F_A$ sea trivial. Si lo fuera, la matriz de conexión A sería una 1-forma definida globalmente y este no es el caso; A_{μ} se transforma bajo cambios de coordenadas de acuerdo con la ecuación (4.8).

Entonces $\star\theta$ se escribe en coordenadas como

$$\star\theta = \frac{1}{(n-p)!} \theta_{\mu_1 \dots \mu_p} \epsilon_{\nu_{p+1} \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\nu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_n}$$

donde $\epsilon_{\nu_{p+1} \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ depende de la paridad de la permutación $(\mu_1, \dots, \nu_n) \in S_n$ de la siguiente manera

$$\epsilon_{\nu_{p+1} \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_p} = \begin{cases} \text{sig}(\mu_1, \dots, \nu_n) & \text{si todas las entradas de } (\mu_1, \dots, \nu_n) \text{ son distintas} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Hemos visto que el operador de Hodge satisface $\star^2 = (-1)^{p(n-p)} \text{id}_{\Lambda^p T^* M^n}$. En particular, el haz de 2-formas en una 4-variedad M^4 se descompone como la suma directa de dos subhaces reales de rango 3 $\Lambda_{\pm}^2 T^* M^4$ asociados a los auto-valores ± 1 del operador de Hodge. Esto a su vez implica una descomposición en suma directa del espacio de 2-formas de M^4

$$(4.26) \quad \Omega^2(M^4) = \Omega_+^2(M^4, g) \oplus \Omega_-^2(M^4, g).$$

Por supuesto $\Omega_{\pm}^2(M^4, g)$, al ser el núcleo del operador de proyección $P^{\pm} := 1/2 (\text{id}_{\Omega^2(M^4)} \pm \star)$, depende de la elección de métrica riemanniana g . Como antes, llamamos a los elementos de $\Omega_+^2(M^4, g)$ *formas autoduales* y a los elementos de $\Omega_-^2(M^4, g)$ los llamamos *formas anti-autoduales*.

La descomposición de dualidad (4.26), característica de las 4-variedades ¹¹, no solo nos da información muy valiosa de la estructura de M^4 . Los siguientes resultados nos dicen que la importancia de la descomposición de dualidad del espacio de 2-formas en una 4-variedad es de carácter topológico.

TEOREMA 4.1. *Para toda 4-variedad cerrada M^4 , la descomposición*

$$\Omega^2(M^4) = \Omega_+^2(M^4, g) \oplus \Omega_-^2(M^4, g),$$

induce una escisión $H_{dR}^2(M^4; \mathbb{R}) = H_+^2(M^4, g) \oplus H_-^2(M^4, g)$.

DEMOSTRACIÓN. Primero, para toda n -variedad suave M^n y cualquier entero no negativo p definimos la forma bilineal (que por abuso de lenguaje llamamos producto interno L^2)

$$(4.27) \quad (\cdot, \cdot)_{L^2} : \Omega^p(M^n) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^p(M^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha, \beta)_{L^2} = \int_{M^n} \alpha \wedge \star\beta \quad \alpha, \beta \in \Omega^p(M^n).$$

Se puede probar que $(\cdot, \cdot)_{L^2}$ es no degenerado en todos los casos. Note que el producto L^2 es simétrico si p es par y antisimétrico si p es impar. Como es usual, se define la “norma” L^2 de una p -forma α por medio de la expresión $\|\alpha\|_{L^2}^2 = (\alpha, \alpha)_{L^2}$. Las ecuaciones (4.23) y (4.25) garantizan que $\|\alpha\|_{L^2} \geq 0$. Más aún, $\|\alpha\|_{L^2} = 0$ si y solo si $\alpha = 0$. Esto justifica parcialmente nuestro uso abusivo de los términos producto interno y norma.

Veamos que en el caso $n = 4$ y $p = 2$, la descomposición de dualidad (4.26) es ortogonal respecto al producto L^2 recién definido. Para tal efecto, consideramos una 2-forma arbitraria θ . Sean $\theta^{\pm} = 1/2 (1 \pm \star)\theta \in \Omega_{\pm}^2(M^4, g)$ las proyecciones de θ a la parte dual y antiautodual respectivamente. Dado que el producto exterior entre formas de grado par es conmutativo, es fácil ver que $\alpha \wedge \star\beta = \star\alpha \wedge \beta$ para

¹¹Más generalmente de dimensión $4k$ para $k \in \mathbb{N}$.

cuales quiera $\alpha, \beta \in \Omega^2(M^4)$; en otras palabras, el operado de Hodge actuando en las 2-formas de una 4-variedad es auto-adjunto respecto del producto L^2 . De esto se sigue que

$$(\theta^+, \theta^-)_{L^2} = (\star\theta^+, \theta^-)_{L^2} = (\theta^+, \star\theta^-)_{L^2} = -(\theta^+, \theta^-)_{L^2}.$$

Así $(\theta^+, \theta^-)_{L^2} = 0$ como se afirmaba. En particular, si θ es una 2-forma cerrada entonces $d\theta^+ + d\theta^- = 0$. Tomando el producto interno de está expresión consigo misma obtenemos que

$$0 = \|d\theta^+ + d\theta^-\|_{L^2} = \|d\theta^+\|_{L^2} + \|d\theta^-\|_{L^2} + 2 \int_{M^4} d\theta^+ \wedge d\theta^-.$$

Es claro que $d\theta^+ \wedge d\theta^- = d(\theta^+ \wedge d\theta^-)$. Como la variedad M^4 es cerrada, el teorema de Stokes implica que la integral del término $d\theta^+ \wedge d\theta^-$ es idénticamente cero, así $\|d\theta^+\|_{L^2} + \|d\theta^-\|_{L^2} = 0$. Como el producto L^2 es positivo definido, concluimos que $d\theta^\pm = 0$. Esto quiere decir que cualquier clase de cohomología $[\theta] \in H_{dR}^2(M^4; \mathbb{R})$ se escribe como una suma de la forma $[\theta^+] + [\theta^-]$, donde θ^\pm representa la partes auto dual (anti-auto dual) de θ .

Estos resultados nos motivan a definir los subespacios $H_\pm(M^4, g)$ como las imágenes de $\Omega_\pm^2(M^4) \cap \text{Ker } d$ bajo la proyección canónica $\text{Ker } d \rightarrow H_{dR}^2(M^4; \mathbb{R})$. Solo resta probar que $H_+(M^4, g)$ interseca trivialmente a $H_-(M^4, g)$.

Supongamos que $x \in H_+(M^4, g) \cap H_-(M^4, g)$. Por definición, x admite dos representaciones distintas dadas por formas cerradas; $\alpha \in \Omega_+^2(M^4)$ y $\beta \in \Omega_-^2(M^4)$. Estas elecciones implican que $\alpha - \beta$ es una 2-forma exacta, digamos $d\lambda$. Afirmamos que bajo estás condiciones, $\alpha = \beta = 0$.

Comencemos notando que $d\lambda \wedge d\lambda$ y $d\lambda \wedge \star d\lambda$ son formas exactas. Claramente $d\lambda \wedge d\lambda = d(\lambda \wedge d\lambda)$. Por otra parte

$$d(\lambda \wedge \star d\lambda) = d\lambda \wedge \star d\lambda - \lambda \wedge d \star d\lambda = d\lambda \wedge \star d\lambda.$$

La ultima igualdad se sigue del hecho de que $d \star d\lambda = d \star (\alpha - \beta)$ es cerrada. Nuevamente, el teorema de Stokes implica que $d\lambda \wedge d\lambda$ y $d\lambda \wedge \star d\lambda$ tienen integral nula. Sustituyendo las relaciones $d\lambda = \alpha - \beta$, $\star d\lambda = \alpha + \beta$ en el enunciado del teorema de Stokes y usando que $\alpha \wedge \beta = 0$ obtenemos relaciones

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{L^2} &= \|\beta\|_{L^2} \\ \int_{M^n} \alpha \wedge \alpha &= \int_{M^n} \beta \wedge \beta. \end{aligned}$$

Como α es autodual, $\int_{M^n} \alpha \wedge \alpha = \|\alpha\|_{L^2}^2$ es no negativo. Por otro lado, $\beta \in \Omega_-^2(M^n)$ implica que

$$\int_{M^n} \beta \wedge \beta = - \int_{M^n} \beta \wedge \star \beta = -\|\beta\|_{L^2}^2 \leq 0$$

de esta manera vemos que $0 \leq \|\alpha\|_{L^2} = \|\beta\|_{L^2} \leq 0$. Por lo tanto $\alpha = \beta = 0$. Esto concluye la demostración. \square

Ahora vamos a discutir las implicaciones que tiene el resultado que acabamos de probar dentro de la teoría de 4-variedades. Para esto, consideremos primero un par de elementos $\alpha, \beta \in \Omega^2(M^4)$. La 4-forma $\alpha \wedge \beta$ es cerrada simplemente por que es una forma de dimensión 4, por lo tanto $\alpha \wedge \beta$ representa una clase en $H_{dR}^4(M^4; \mathbb{R})$ que se evalúa en la clase fundamental $[M^4] \in H_4(M^4; \mathbb{R})$ para

producir un invariante topológico de M^4 denotado por $I = I(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$. Recuerde que la evaluación de un elemento $[\mu] \in H_{dR}^4(M^4; \mathbb{R})$ con $[M^4]$ es

$$(4.28) \quad \langle [\mu], [M^4] \rangle := \int_{M^4} \mu.$$

El invariante I solo depende de la clase de cohomología de α y de β . Como el producto cuña entre formas de dimensión par es conmutativo, basta probar que I solo depende de la clase de cohomología de α . Entonces, si β es una 2-forma cerrada y $\alpha = a + d\lambda$, tenemos que $\alpha \wedge \beta = a \wedge \beta + d\lambda \wedge \beta = a \wedge \beta + d(\lambda \wedge \beta)$. Así $\alpha \wedge \beta$ y $a \wedge \beta$ son formas cohomológicamente equivalentes. De esta manera obtenemos una forma bilineal simétrica bien definida

$$(4.29) \quad \begin{aligned} Q_{M^4} : H_{dR}^2(M^4; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} H_{dR}^2(M^4; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Q_{M^4}([\alpha], [\beta]) &= \langle [\alpha \wedge \beta], [M^4] \rangle \end{aligned}$$

llamada *forma de intersección* de M^4 . La dualidad de Poincaré implica que la forma de intersección es *unimodular*, es decir, $\det Q_{M^4} = \pm 1$. Es bien sabido que para toda n -variedad M^n y para cualquier valor de $p \in \mathbb{N}$, $H_{dR}^p(M^n; \mathbb{R})$ es un espacio vectorial real de dimensión finita. Los enteros $b_p(M^n) := \dim_{\mathbb{R}} H_{dR}^p(M^n; \mathbb{R})$ se llaman *números de Betti* de la variedad. Como cualquier otra forma cuadrática en un espacio vectorial real de dimensión finita, Q_{M^4} está completamente caracterizada por los subespacios maximales $H_{\pm}(Q_{M^4})$ en donde la forma de intersección Q_{M^4} es positiva (+) o negativa (-) definida.

COROLARIO 4.2. *Para toda 4-variedad cerrada y orientable M^4 se tiene que*

$$H_{\pm}^2(M^4, g) = H_{\pm}(Q_{M^4}).$$

En particular, $H_{\pm}^2(M^4, g)$ es independiente de la métrica usada para definir el operador de Hodge que da lugar a la descomposición (4.26).

En vista del corolario anterior denotaremos de ahora y en adelante a los subespacio $H_{\pm}^2(M^4, g)$ simplemente como $H_{\pm}^2(M^4)$.

DEMOSTRACIÓN. En la prueba del teorema 4.1 vimos que $Q_{M^4}([\alpha], [\alpha]) = \|\alpha\|_{L^2}^2 \geq 0$ para todo elemento $[\alpha] \in H_+^2(M^4, g)$. De manera similar, si $[\beta] \in H_-^2(M^4, g)$ entonces $Q_{M^4}([\beta], [\beta]) = -\|\beta\|_{L^2}^2 \leq 0$. Por tanto $H_{\pm}^2(M^4, g) \subseteq H_{\pm}(Q_{M^4})$. La contención recíproca es consecuencia de la definición de los subespacios $H_{\pm}(Q_{M^4})$. \square

DEFINICIÓN 4.7. Sea M^4 una 4-variedad cerrada y orientable. Definimos $b_2^{\pm}(M^4)$ como la dimensión real de los subespacios $H_{\pm}^2(M^4) \subseteq H_{dR}^2(M^4; \mathbb{R})$. Claramente $b_2(M^4) = b_2^+(M^4) + b_2^-(M^4)$. Similarmente, definimos la *signatura* de M^4 , $\sigma(M^4)$, como la signatura de su forma de intersección, esto es

$$(4.30) \quad \sigma(M^4) := b_2^+(M^4) - b_2^-(M^4).$$

La información cohomológicamente interesante de una 4-variedad cerrada, conexa y orientable está concentrada en las dimensiones; 1, 2 y 3. La dualidad de Poincaré implica que $b_3(M^4) = b_1(M^4)$. Así, cuando M^4 es una variedad simplemente conexa, $H_{dR}^1(M^4; \mathbb{R}) = 0$. En particular, $b_3(M^4) = 0$. Es decir, la información cohomológica de una 4-variedad simplemente conexa está totalmente determinada por el segundo grupo de cohomología. La forma de intersección que hemos definido en los párrafos anteriores es tan solo una parte de esta información. Usando el

producto copa $\smile : H^p(M^4; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^q(M^4; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{p+q}(M^4; \mathbb{Z})$ se puede construir una forma de intersección en la cohomología de coeficientes enteros $H^2(M^4; \mathbb{Z})$

$$(4.31) \quad Q_{M^4}^{\mathbb{Z}} : H^2(M^4; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^2(M^4; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$Q_{M^4}^{\mathbb{Z}}(x, y) = \langle x \smile y, [M^4] \rangle.$$

Usando resultados de J. H. C. Whitehead [41], John Milnor [30] estableció que los invariantes de la forma cuadrática $Q_{M^4}^{\mathbb{Z}}$ determinan por completo el tipo de homotopía (orientado) de la 4-variedad M^4 en el caso simplemente conexo¹². Este resultado clásico de finales de los años 50's fue mejorado enormemente por M. Freedman en 1983. El célebre teorema de Freedman establece que cualquier forma bilineal simétrica y unimodular sobre los enteros es la forma de intersección de alguna 4-variedad topológica con grupo fundamental trivial. Más aún, los invariantes algebraicos de la forma de intersección $Q_{M^4}^{\mathbb{Z}}$ determinan por completo el tipo de homeomorfismo de M^4 . En resumen, la forma de intersección con coeficientes enteros es el invariante que clasifica por completo a las 4-variedades simplemente conexas.

Sorprendentemente, en el mismo año de la publicación del trabajo de Freedman, S. Donaldson [11] demostró, entre otras cosas, que esta clasificación no se puede especializar para incluir variedades diferenciables.

TEOREMA 4.3 (S. Donaldson, 1983). *Sea M^4 una 4-variedad suave, simplemente conexa y orientable con forma de intersección $Q_{M^4}^{\mathbb{Z}}$ positivo definida. Entonces $Q_{M^4}^{\mathbb{Z}}$ es equivalente, sobre los enteros, a la forma cuadrática estándar $x_1^2 + \dots + x_{b_2(M^4)}^2$.*

La prueba del teorema de Donaldson se destaca por su originalidad ya que introdujo una serie de técnicas, muy novedosas en aquel entonces y que hoy en día siguen vigentes. De hecho, estas ideas son el precedente inmediato de la teoría de Seiberg- Witten. Básicamente, Donaldson encontró que el espacio de soluciones autoduales de las ecuaciones de Yang-Mills

$$(Y-M) \quad \begin{aligned} d_A F_A &= 0 \\ d_A \star F_A &= 0 \end{aligned}$$

con número de instanton 1 permite construir un cobordismo entre la variedad M^4 donde está definido el sistema (Y-M) y una unión ajena de $b_2(M^4)$ copias de planos proyectivos complejos con orientaciones posiblemente distintas. El teorema 4.3 se sigue inmediatamente, pues la signatura es un invariante de la clase de cobordismo de una 4-variedad suave. Las ecuaciones de Yang-Mills están escritas en términos de una conexión unitaria A en un $SU(2)$ -haz vectorial suave $E \rightarrow M^4$, la extensión canónica d_A de la derivada covariante a las formas con valores en $\text{Ad}(E)$ inducida por A y la correspondiente curvatura F_A . El operador de Hodge implícito en las ecuaciones de Yang-Mills está dado por la extensión natural a las formas suaves con coeficientes en $\text{Ad}(E)$

$$\star = \star \otimes \text{id}_{\Gamma(\text{Ad}(E))} : \Omega^p(M^4; \text{Ad}(E)) \rightarrow \Omega^{n-p}(M^4; \text{Ad}(E)).$$

Es claro que esta nueva versión del operador de Hodge es un automorfismo con espectro discreto $\{\pm 1\}$. Obviamente, la extensión del operador de Hodge que hemos

¹²Cabe mencionar que el trabajo de Milnor fue presentado en el Symposium Internacional de Topología Algebraica, organizado en 1958 por S. Lefschetz en nuestra Universidad Nacional Autónoma de México.

definido en el párrafo anterior para el caso particular de $\Omega^p(M^4; \text{Ad}(E))$ tiene sentido para el modulo de formas con valores en cualquier otro G -haz vectorial sobre una variedad suave, sin importar la dimensión de esta. En adelante, tácitamente asumiremos estas extensiones y no haremos más referencia de su definición. En particular, cuando la dimensión de la variedad M^n es 4, tenemos una descomposición de dualidad análoga a (4.26) de las 2-formas con valores en E . Así, la curvatura F_{∇} de cualquier conexión en E se parte como la suma de una parte dual F_{∇}^+ y una parte antiautodual F_{∇}^- . Por supuesto, las soluciones autoduales son aquellas con $F_A^- = 0$. Este tipo de soluciones se conocen comúnmente con el nombre de *instantones*. Esta terminología fue introducida por los físicos que, durante décadas, han estudiado las ecuaciones de Yang-Mills por motivos de interés físico totalmente ajenos a la teoría de 4-variedades. Con esto damos por terminada esta pequeña excursión al fascinante mundo de las 4-variedades y regresamos al tema que nos compete en esta sección, que es el operador de Dirac.

5. El Haz de Espinores y la Conexión Spin

Cuando una variedad riemanianna (M^n, g) es $\text{Spin}(n)$ es posible construir haces vectoriales $\Sigma_n(M^n, g)$ y $\Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g)$, llamados *haces de espinores*, asociados a la representación espinorial real Δ_n en el primer caso y a la representación espinorial compleja $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ en el segundo caso. Esto se logra componiendo por la izquierda a la representación en cuestión con las funciones de transición que levantan a $\text{Spin}(n)$ los $\text{SO}(n)$ -cociclos estructurales del haz tangente TM^n . Si la variedad (M^n, g) es $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ se construyen haces vectoriales $\hat{\Sigma}_n(M^n, g)$ y $\hat{\Sigma}_n^{\mathbb{C}}(M^n, g)$ procediendo como en el caso $\text{Spin}(n)$ pero sustituyendo las representaciones $\Delta_n, \Delta_n^{\mathbb{C}}$ por las correspondientes extensiones $\hat{\Delta}_n, \hat{\Delta}_n^{\mathbb{C}} : \text{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{C}} \Sigma^{\mathbb{C}}(n)$. Aún cuando las fibras de los haces $\Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g), \hat{\Sigma}_n^{\mathbb{C}}(M^n, g)$ coinciden como espacios vectoriales complejos, estos haces se distinguen como haces vectoriales con grupos estructurales $\text{Spin}(n)$ y $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ respectivamente.

La diferencia radica en que el haz de espinores $\Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g)$ tiene una acción trivial de $U(1)$ inducida por la estructura compleja de las fibras mientras que el *haz de espinores cargados*¹³ $\hat{\Sigma}_n^{\mathbb{C}}(M^n, g)$ porta fibra a fibra una representación no trivial de $U(1)$ asociada al haz determinante de la estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ de M^n .

En cualquiera de los dos casos, la proposición 4.5 en la página 25 y un sencillo argumento de particiones de la unidad garantizan que los haces de espinores pueden ser equipados con una métrica hermitiana h invariante bajo la acción del grupo estructural. Cuando $n = 4$, la métrica unitaria h coincide con la métrica unitaria usual en \mathbb{C}^2 dada por $h(\psi, \chi) = \chi^\dagger \psi$. Asumiremos implícitamente de ahora y en adelante que los haces de espinores están dotados de tal métrica unitaria. Por supuesto, la fibra de los haces de espinores depende tanto de la elección de representación (real o compleja) así como también del del valor particular de n . Los corolarios 4.5 y 4.6 en la página 25 establecen que las representaciones espinoriales Δ_{2n} y $\hat{\Delta}_{2n}$ se escinden como la suma directa de dos representaciones irreducibles e inequivalentes cada una de dimensión compleja 2^{n-1} . Cabe recordar que esta descomposición está inducida por la acción del operador de quiralidad $\Gamma_{\mathbb{C}}^{2n+1}$ en el álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(2n)$. Esta descomposición se preserva puntualmente a través de cada fibra en el

¹³Esta terminología viene de conceptos de física que no discutiremos. En adelante, no haremos distinción entre los haces $\Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g)$ y $\hat{\Sigma}_n^{\mathbb{C}}(M^n, g)$

haz de espinores. Para obtener una descomposición del haz de espinores como suma directa de subhaces cuyas fibras correspondan con la escisión quiral se construye para cada valor de n un haz de álgebras de Clifford $\mathcal{Cl}(TM^n, g) \rightarrow M^n$ de manera que la fibra sobre cada punto $p \in M^n$ coincida exactamente con el álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(T_p M^n, g_p)$. Como haces vectoriales reales, el haz de álgebras de Clifford se define como ΛTM^n , es decir

$$(5.1) \quad \mathcal{Cl}(TM^n, g) := \bigoplus_{0 \leq j \leq n} \Lambda^j TM^n.$$

La contracción $\lrcorner: \Lambda^1 T_p M^n \times \Lambda^k T_p M^n \rightarrow \Lambda^{k-1} T_p M^n$ se extiende a ΛTM^n de la siguiente manera. Si $\{v, v_1, \dots, v_k\}$, son secciones locales de $TM^n = \Lambda^1 TM^n$ sobre un abierto de $\mathcal{U} \subseteq M^n$, consideramos el k -vector $\omega := v_1 \wedge \dots \wedge v_k \in \Gamma(\Lambda^k TM^n)$. Con estas elecciones definimos para cada punto $p \in \mathcal{U}$

$$v \lrcorner \omega(p) := \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} g_p(v(p), v_i(p)) \omega^{(i)}(p)$$

donde $\omega^{(i)}(p)$ se obtiene suprimiendo el i -ésimo vector $v_i(p) \in T_p M^n$ en el producto exterior $v_1(p) \wedge \dots \wedge v_k(p)$ y $g_p(v(p), v_i(p))$ es la evaluación de la métrica g en los vectores tangentes v, v_i basados en el punto p . Es claro que la contracción definida anteriormente depende de manera suave del punto p . De esta manera obtenemos un operador $\mathcal{C}^\infty(M^n, \mathbb{R})$ -lineal $\varphi: \Gamma(TM^n) \rightarrow \Gamma(\text{End}_{\mathbb{R}} \Lambda TM^n)$ definido como $\varphi(v) = v \wedge -v \lrcorner$ que satisface $(\varphi(v))^2 = -\|v\|^2 \text{id}$ (ver p. 28). Por lo tanto, φ determina una estructura multiplicativa suave definida en los generadores v de ΛTM^n como $v \cdot \omega := \varphi(v)(\omega)$ para todo $\omega \in \Gamma(\Lambda TM^n)$ que fibra a fibra se reduce al producto de Clifford estudiado extensivamente en las secciones anteriores. Esta multiplicación promueve a ΛTM^n a un haz suave de álgebras de Clifford con las características requeridas al inicio de esta pequeña discusión. Para determinar la forma de los cambios de coordenadas en $\mathcal{Cl}(TM^n, g)$ basta observar que la acción natural del grupo ortogonal $\text{SO}(n)$ en el haz tangente de M^n induce una acción de $\text{SO}(n)$ sobre $\mathcal{Cl}(TM^n, g)$. Si $K_{\alpha\beta}$ es un $\text{SO}(n)$ -cociclo estructural de TM^n definimos $K_{\alpha\beta} * (v_1 \cdots v_k) := K_{\alpha\beta}(v_1) \cdots K_{\alpha\beta}(v_k)$ para todo generador local $v_1 \cdots v_k \in \Gamma(\mathcal{Cl}(TM^n, g))$.

Para promover la descomposición quiral del álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(2n)^+ \oplus \mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(2n)^-$ a una descomposición por subhaces del haz de álgebras de Clifford debemos recordar que $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(2n)^{\pm}$ son subespacios asociados a los autovalores ± 1 del operador de quiralidad, que en ciertas dimensiones involucra la multiplicación por la unidad compleja i en $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(2n) \simeq \mathcal{Cl}(2n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Comenzamos definiendo para cada entero no negativo n el *haz tangente complexificado* $T_{\mathbb{C}} M^n$ de una variedad suave M^n simplemente como el producto tensorial $TM^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$; donde \mathbb{C} denota al haz de líneas trivial $M^n \times \mathbb{C}$. El producto tensorial que define al haz tangente complexificado se toma respecto de $\mathcal{C}^\infty(M^n; \mathbb{R})$. Observe que $T_{\mathbb{C}} M^n$ es un haz complejo de rango n . La acción de $z \in \mathbb{C}$ fibra a fibra es de la forma $z \cdot (v \otimes \zeta) = v \otimes z\zeta$. Con esta construcción en mente, definimos $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(TM^n, g) = \mathcal{Cl}(T_{\mathbb{C}} M^n, g^{\mathbb{C}})$; en la definición anterior, $g^{\mathbb{C}}$ denota a la obvia extensión compleja de la métrica riemanniana g . De esta manera obtenemos una acción bien definida del operador de quiralidad en $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(TM^n, g)$ para cada n y por tanto la descomposición quiral $\mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(TM^n, g)_+ \oplus \mathcal{Cl}^{\mathbb{C}}(TM^n, g)_-$ para n par.

En el caso particular en el que la dimensión de la variedad es $2n$, podemos describir explícitamente el haz tangente complexificado de manera intrínseca identificando \mathbb{R}^{2n} con \mathbb{C}^n de la manera usual $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \mapsto (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$. Este isomorfismo \mathbb{R} -lineal induce, vía las diferenciales de las cartas, una estructura casi compleja $J : TM^{2n} \rightarrow TM^{2n}$ que actúa en los generadores $\{\partial/\partial x_k, \partial/\partial y_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ asociados a un sistema de coordenadas locales de tal manera que

$$\begin{aligned} J\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) &= +\frac{\partial}{\partial y_k} \\ J\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) &= -\frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

El automorfismo real J identifica las fibras del haz tangente con \mathbb{C}^n (como espacios vectoriales complejos) y por tanto dota de estructura casi-compleja a cualquier potencia exterior $\Lambda^k T_{\mathbb{C}}M^{2n}$. Estas consideraciones implican que el operador φ se extiende a una representación compleja $\varphi_*^{\mathbb{C}} : \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(TM^{2n}, g) \rightarrow \Lambda T_{\mathbb{C}}M^{2n}$ que fibra a fibra da lugar a la representación espinorial compleja. Como antes, el operador de quiralidad $\Gamma_{\mathbb{C}}^{2n+1} : \Gamma(\mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(TM^{2n}, g)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(TM^{2n}, g))$ definido como $\Gamma_{\mathbb{C}}^{2n+1} = i^{\lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor} e_1 \cdots e_{2n}$ para una elección de secciones ortonormales $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ (respecto de g) nos permite escindir el haz de espinores como una suma

$$(5.2) \quad \Sigma_{2n}^{\mathbb{C}}(M^{2n}, g) = \Sigma_+^{\mathbb{C}}(M^{2n}, g) \oplus \Sigma_-^{\mathbb{C}}(M^{2n}, g)$$

donde $\Sigma_{\pm}^{\mathbb{C}}(M^{2n}, g)$ son subhaces del haz de espinores asociados a las funciones de transición $\Delta_{\pm}^{\mathbb{C}} \circ \tilde{K}_{\alpha\beta}$ ($\tilde{K}_{\alpha\beta}$ son levantamientos a $\text{Spin}(2n)$ de los cocíclos estructurales de TM^{2n}). Esto se debe a que el operador de quiralidad, al ser invariante bajo la acción de $\text{SO}(2n)$, es independiente de la elección de secciones ortonormales usadas para definirlo. Observemos que la construcción que hemos dado del haz de álgebras de Clifford garantiza que todos los demás resultados obtenidos en las primeras cuatro secciones del presente trabajo se “globalizan” a la categoría de haces. En particular, se tiene una acción por conjugación del grupo $\text{Spin}(2n)$ en las fibras de $\mathcal{C}l(TM^{2n}, g)$ y de $\mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(TM^{2n}, g)$. Esta acción conmuta puntualmente con la acción $\mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(TM^{2n}, g) \times \Sigma_{2n}^{\mathbb{C}}(M^{2n}, g) \rightarrow \Sigma_{2n}^{\mathbb{C}}(M^{2n}, g)$ dada por el producto de Clifford. Por ejemplo, dados $\xi \in \Gamma(\mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(TM^{2n}, g))$, $\alpha \in \text{Spin}^{\mathbb{C}}(2n)$ y $\psi \in \Gamma(\Sigma_{2n}^{\mathbb{C}}(M^{2n}, g))$ se cumple que

$$(\alpha\xi\alpha^{-1}) \cdot (\alpha\psi) = \alpha(\xi \cdot \psi).$$

Por tanto convierten a los haces de espinores en haces de módulos sobre el haz de álgebras de Clifford. A este tipo de módulos se le llama simplemente *módulos de Clifford*. De nueva cuenta recalamos que el teorema 4.4 se generaliza al caso de haces. En particular, tenemos que la parte par del haz de álgebras de Clifford $\mathcal{C}l_0^{\mathbb{C}}(TM^n, g)$ preserva la descomposición quiral de los haces de espinores mientras que la acción por producto de Clifford de la parte impar $\mathcal{C}l_1^{\mathbb{C}}(TM^n, g)$ intercambia la quiralidad de los espinores.

En el caso de una variedad $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ sabemos que localmente el haz de espinores cargados $\hat{\Sigma}_n^{\mathbb{C}}(TM^n, g)$ se ve como el el haz de espinores usuales “torcido” por el haz determinante de la estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$. El grupo $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ actúa en el haz de espinores cargados de tal manera que el factor $\text{U}(1)$ transforma las coordenadas en el haz determinante y $\text{Spin}(n)$ actúa en el resto del haz de espinores como lo hace en el haz de espinores usuales. De estas observaciones deducimos que el haz de espinores hereda la descomposición quiral del haz de espinores. Así mismo, la

acción de $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ en el haz de espinores cargados conmuta con la acción por multiplicación de Clifford de $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(TM^n, g)$ y por tanto $\hat{\Sigma}_n^{\mathbb{C}}(M^n, g)$ tiene estructura la estructura de un haz de módulos de Clifford.

DEFINICIÓN 5.1. Sea $\Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g) \rightarrow M^n$ el haz de espinores asociado a una estructura $\text{Spin}(n)$ de la variedad M^n . Definimos la *conexión spin* $\tilde{\nabla}^g$ como la única $\text{Spin}(n)$ -conexión que corresponde con la conexión de *Levi-Civita* ∇^n bajo la asociación descrita en el ejemplo 4.2 en la página 62.

Hemos probado en las primeras secciones de este trabajo que que la representación espinorial compleja Δ_n es una representación unitaria respecto a la métrica hermitiana construida en la proposición 4.5. Por lo tanto la conexión spin es una conexión unitaria para el haz de espinores $\Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g)$.

PROPOSICIÓN 5.1. *Supongamos que (M^n, g) es una variedad riemanniana dotada de la conexión de Levi-Civita ∇^g . Entonces:*

- a) *Existe una única conexión $\nabla^{\mathcal{C}\ell}$ en $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(TM^n, g)$ inducida por la conexión de Levi-Civita que es una derivación respecto del producto de Clifford, es decir, $\nabla^{\mathcal{C}\ell}$ satisface*

$$(5.3) \quad \nabla^{\mathcal{C}\ell}(v \cdot w) = (\nabla^g v) \cdot w + v \cdot (\nabla^g w)$$

para cualquier pareja de campos tangentes $v, w \in \Gamma(TM^n)$. En particular obtenemos que $\nabla^{\mathcal{C}\ell}(\xi_1 \cdot \xi_2) = (\nabla^{\mathcal{C}\ell} \xi_1) \cdot \xi_2 + \xi_1 \cdot (\nabla^{\mathcal{C}\ell} \xi_2)$ para $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(\mathcal{C}\ell(TM^n, g))$ arbitrarios.

- b) *Para todo campo espinorial $\psi \in \Gamma(\Sigma_n^{\mathbb{C}} M^n, g)$ y toda sección suave ξ del haz de álgebras de Clifford se tiene*

$$(5.4) \quad \tilde{\nabla}^g(\xi \cdot \psi) = (\nabla^{\mathcal{C}\ell} \xi) \cdot \psi + \xi \cdot (\tilde{\nabla}^g \psi).$$

DEMOSTRACIÓN. Como haces vectoriales el haz de álgebras de Clifford está definido como $\bigoplus_k \Lambda^k TM^n$. Como la cualquier conexión en un haz vectorial induce una única conexión en las potencias exteriores de dicho haz, se tiene en particular que

$$\nabla^{\mathcal{C}\ell} := \bigoplus_{0 \leq k \leq n} (\nabla^g)^{\wedge k}$$

es una conexión en $\mathcal{C}\ell(TM^n, g)$. En la definición anterior se sobre entiende que $(\nabla^g)^{\wedge 0}$ es la derivada exterior actuando en $\Lambda^0 TM^n := \mathcal{C}^\infty(M^n; \mathbb{R})$, $(\nabla^g)^{\wedge 1} := \nabla^g$ y $(\nabla^g)^{\wedge k}$ satisface la regla de Leibniz (4.5). La unicidad de $\nabla^{\mathcal{C}\ell}$ está garantizada por la definición siempre y cuando se cumpla la relación (5.3). Para cualesquiera dos campos tangentes v y w se tiene por definición de producto de Clifford que $v \cdot w = v \wedge w - g(v, w)$. Considerando que ∇^g es ortogonal tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathcal{C}\ell}(v \cdot w) &= (\nabla^g)^{\wedge 2}(v \wedge w) - dg(v, w) \\ &= (\nabla^g v) \wedge w + v \wedge (\nabla^g w) - g(\nabla^g v, w) - g(v, \nabla^g w) \\ &= (\nabla^g v) \wedge w - g(\nabla^g v, w) + v \wedge (\nabla^g w) - g(v, \nabla^g w) \\ &= \nabla^g v \cdot w + v \cdot \nabla^g w. \end{aligned}$$

Un argumento inductivo muestra que $\nabla^{\mathcal{C}\ell}(\xi_1 \cdot \xi_2) = (\nabla^{\mathcal{C}\ell} \xi_1) \cdot \xi_2 + \xi_1 \cdot (\nabla^{\mathcal{C}\ell} \xi_2)$, pues toda sección del haz de álgebras de Clifford se escribe como el producto de vectores tangentes.

Finalmente, recordemos que la representación espinorial compleja está inducida por una representación del álgebra de Clifford. Así, dado que el haz de espinores es un módulo de Clifford respecto al producto de secciones de $\mathcal{C}\ell(TM^g, g)$, se tiene que un campo espinorial arbitrario $\psi \in \Gamma(\Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g))$ es de la forma $\psi^{i_1, \dots, i_{2k}} e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}}$, donde $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{2k}}\}$ es una colección de campos vectoriales de M^n ortonormales dos a dos respecto de la métrica riemanniana g . Así, dado $\xi \in \Gamma(\mathcal{C}\ell(TM^n, g))$ se tiene que los valores de $\tilde{\nabla}^g \psi$ y de $\tilde{\nabla}^g(\xi \cdot \psi)$ están totalmente determinados por los valores de $\nabla^{\mathcal{C}\ell}$ en productos de la forma $v \cdot e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}}$, donde $v \in \Gamma(TM^n)$ es un factor en la descomposición como producto de Clifford para ξ . Por tanto la primera parte de esta proposición implica el inciso b). \square

La proposición anterior implica que en el caso de una variedad de dimensión par, el operador de quiralidad $\Gamma_{\mathbb{C}}^{2n+1} : \Gamma(\mathcal{C}\ell(TM^n, g)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{C}\ell(TM^n, g))$ es paralelo respecto de la conexión $\nabla^{\mathcal{C}\ell}$. Esto es una consecuencia inmediata del sigue del cálculo

$$\begin{aligned}
 \nabla^{\mathcal{C}\ell} e_1 \cdots e_{2n} &= (\nabla^g e_1) e_2 \cdots e_{2n} + \cdots + e_1 \cdots e_{2n-1} (\nabla^g e_{2n}) \\
 (5.5) \quad &= \omega_1^{i_1} \otimes e_{i_1} e_2 \cdots e_{2n} + \cdots + \omega_{2n}^{i_{2n}} \otimes e_1 e_2 \cdots e_{i_{2n}} \\
 &= \sum (-1)^s \omega_{i_1}^{i_2} \otimes e_{i_3} \cdots \hat{e}_{i_4} \cdots \hat{e}_{i_5} \cdots e_{i_{2n}}.
 \end{aligned}$$

La suma en la última línea del cálculo anterior toma valores en el conjunto \mathcal{P}_{2n} de las $2n(2n-1)$ permutaciones cíclicas (i_1, \dots, i_{2n}) del conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$ que tienen como primeras dos entradas a las componentes fuera de la diagonal de la matriz de conexión. La expresión $e_{i_1} \cdots \hat{e}_{i_4} \cdots \hat{e}_{i_5} \cdots e_{i_{2n}}$ denota al producto (ordenado de manera que $i_1 \leq \dots \leq i_{2n}$) de $2(n-1)$ vectores básicos obtenido a partir del elemento de volumen $e_1 \cdots e_{2n}$ suprimiendo dos factores distintos e_{i_4}, e_{i_5} . El signo de cada uno de los sumandos en la fórmula anterior está determinado por cierta función $s : \mathcal{P}_{2n} \rightarrow \{0, 1\}$ que satisface $s(i_1, i_2, \dots, i_{2n}) = s(i_2, i_1, \dots, i_{2n})$. Esta última propiedad junto con la anti-simetría de ω garantizan que el sumando indicado por a la permutación $(i_1, i_2, \dots, i_{2n})$ cancela al término correspondiente a la permutación $(i_2, i_1, \dots, i_{2n})$ en la ecuación (5.5). En particular, $\nabla^{\mathcal{C}\ell} e_1 \cdots e_{2n} = 0$ como se buscaba. A partir de este sencillo resultado deducimos que la conexión spin preserva la descomposición quiral

$$\Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^{2n}, g) = \Sigma_+^{\mathbb{C}}(M^{2n}, g) \oplus \Sigma_-^{\mathbb{C}}(M^{2n}, g)$$

en el sentido de que $\tilde{\nabla}^g$ se parte como la suma directa $\tilde{\nabla}^g = \tilde{\nabla}^{+g} \oplus \tilde{\nabla}^{-g}$ de conexiones

$$(5.6) \quad \tilde{\nabla}^{\pm g} : \Omega^0(M^n; \Sigma_{\pm}^{\mathbb{C}}(M^n, g)) \rightarrow \Omega^1(M^n; \Sigma_{\pm}^{\mathbb{C}}(M^n, g))$$

definidas en los sub-haces de quiralidad derecha a izquierda respectivamente. Esto se debe a que la ecuación $\nabla^{\mathcal{C}\ell} \Gamma_{\mathbb{C}}^{2n+1} = 0$ implica que la conexión spin $\tilde{\nabla}^g$ conmuta con los proyectores $1/2 (\text{id} \pm \Gamma_{\mathbb{C}}^{2n+1})$ asociados a la descomposición quiral del haz de espinores. La parte de quiralidad derecha $\tilde{\nabla}^{+g}$ y la de quiralidad izquierda $\tilde{\nabla}^{-g}$ de la conexión spin son conexiones unitarias pues la escisión quiral de la representación espinorial de $\text{Spin}(2n)$, $\Delta_{2n}^{\mathbb{C}} = \Delta_+^{\mathbb{C}} \oplus \Delta_-^{\mathbb{C}}$, está inducida por representaciones unitarias de $\text{Spin}(2n-1)$.

6. El Operador de Dirac

DEFINICIÓN 6.1. Supongamos que M^n es una variedad $\text{Spin}(n)$ dotada de una métrica riemanniana g . Sea $\Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g)$ el haz de espinores M^n y $\tilde{\nabla}^g$ la conexión $\text{Spin}(n)$ asociada a g . El *operador de Dirac* $\not{D} : \Gamma(\Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g)) \rightarrow \Gamma(\Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g))$ está definido por la composición

$$(6.1) \quad \Omega^0(M^4; \Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g)) \xrightarrow{\tilde{\nabla}^g} \Omega^1(M^4; \Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g)) \xrightarrow{\not{\phi}} \Omega^0(M^4; \Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g))$$

donde $\not{\phi}$ es la contracción inducida por el producto de Clifford con los elementos de una base ortonormal local de 1-formas $\{e^\mu \mid 1 \leq \mu \leq n\}$. En otras palabras, la expresión local del operador de Dirac se lee

$$(6.2) \quad \not{D}\psi = e^\mu \cdot \tilde{\nabla}_\mu^g \psi$$

para cualquier campo espinorial $\psi \in \Gamma(\Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g))$.

La definición del operador de Dirac admite diversas generalizaciones. Por ejemplo, podemos hablar del operador de Dirac para cualquier $\text{Spin}(n)$ -haz $S \rightarrow M^n$ y su correspondiente modulo de Clifford. Otra extensión posible, que de hecho es relevante para nosotros, es el de una variedad $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$. La definición requiere la siguiente precisión. Como hemos visto, un $\text{SO}(n)$ -haz vectorial $E \rightarrow M^n$ admite una estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ si y solo si existe un haz de líneas complejo $L \rightarrow M^n$, llamado haz determinante de la estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$, que satisface $w_2(E) \equiv c_1(L)$ mód 2. También hemos probado que toda 4-variedad orientable es $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ y que el haz de espinores asociado tiene la forma $\Sigma_4^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}$, donde $\sqrt{L} \rightarrow M^n$ y $\Sigma_4^{\mathbb{C}}(M^4, g)$ solo están definidos localmente. Estos espacios son ejemplos de *G-haces vectoriales virtuales*, en el sentido de que están definidos por los mismos datos que un haz vectorial pero sus funciones de transición (con valores en el grupo G) no necesariamente satisfacen las condiciones de cociclo. Como cualquier conexión en un G -haz vectorial es un operador local, podemos extender la noción de G -conexión para incluir a los G -haces vectoriales virtuales y así poder hablar de G -conexiones en haces vectoriales virtuales.

Consideremos es el haz dual al haz tangente complexificado $T_{\mathbb{C}}^*M^n$ que definimos en la página 75 y denotemos por $\Omega_{\mathbb{C}}^p(M^n; \Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g) \otimes \sqrt{L})$ al conjunto de secciones suaves del haz de formas diferenciales complejas con coeficientes en el haz de espinores, esto es

$$\Omega_{\mathbb{C}}^p(M^n; \Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g) \otimes \sqrt{L}) := \Gamma(\Lambda^p T_{\mathbb{C}}^*M^n \otimes_{\mathbb{C}} \Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n, g)).$$

Note que el conjunto de 1-formas complejas actúa por multiplicación de Clifford en el haz de espinores. Dada una 1-forma con coeficientes complejos $A = A_\mu e^\mu$ y un campo espinorial $\psi \in \Gamma(\Sigma_n^{\mathbb{C}}(M^n))$ se tiene que

$$(6.3) \quad A \cdot \psi := (A_\mu e^\mu) \cdot \psi.$$

Similarmente, se tiene una acción por multiplicación de Clifford de $\Omega^2(M^n; i\mathbb{R})$ sobre las secciones del haz de espinores. Dada una 2-forma $\omega = 1/2 \omega_{\mu\nu} e^\mu \wedge e^\nu$ y un espinor ψ definimos

$$(6.4) \quad \omega \cdot \psi := \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \mathbf{a} \mathbf{d}^{-1}(e^\mu \wedge e^\nu) \cdot \psi = \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} e^\mu e^\nu \cdot \psi.$$

El factor adicional de $1/2$ viene del isomorfismo $\mathfrak{ad} : \mathfrak{spin}(n) \rightarrow \mathfrak{so}(n)$ presentado en el corolario 3.5 en la página 16. Con estas aclaraciones en mente hacemos la siguiente

DEFINICIÓN 6.2. Supongamos que (M^4, g) es una variedad orientable con alguna estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$. Consideremos una conexión unitaria A en el haz virtual determinante $\sqrt{L} \rightarrow M^4$ asociado a la estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ de M^4 . Definimos el operador de Dirac torcido por la conexión A

$$(6.5) \quad \mathcal{D}_A : \Omega^0(M^4; \Sigma_4^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}) \longrightarrow \Omega^0(M^4; \Sigma_4^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}).$$

Como el operador de Dirac asociado a la conexión $\nabla^A := \tilde{\nabla}^g \otimes A$. Es decir, \mathcal{D}_A está definido como antes por la composición $\not{D} \circ \tilde{\nabla}^g \otimes A$.

Más adelante daremos algunos ejemplos de operadores de Dirac; pero antes vamos a establecer un resultado que nos dice que el operador de Dirac torcido por cualquier conexión es un concepto bien definido. Para esto hacemos la siguiente

OBSERVACIÓN 6.3. El haz de espinores $\Sigma_4^{\mathbb{C}}(M^4, g)$ es un haz complejo, por tanto podemos identificar una sección $\psi \otimes z$ del haz $\Sigma_4^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}$ con la sección $z\psi$. Bajo esta identificación, la matriz de conexión asociada a ∇^A toma la forma $\omega + A \text{id}_{\Gamma(\Sigma_4^{\mathbb{C}}(M^4, g))}$ ¹⁴, donde ω y A son las matrices correspondiente a las conexión spin y a la conexión unitaria en el haz determinante de la estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$. Por lo tanto, las expresiones que determinan la acción de los operadores de Dirac se leen

$$(6.6) \quad \not{D} z\psi = dz \cdot \psi + z \not{D} \psi$$

$$(6.7) \quad \not{D}_A \psi = \not{D} \psi + A \cdot \psi$$

$$(6.8) \quad \not{D}_A z\psi = dz \cdot \psi + z \not{D}_A \psi.$$

PROPOSICIÓN 6.1. *Los operadores \not{D} y \not{D}_A están bien definidos.*

DEMOSTRACIÓN. Básicamente debemos probar que los operadores de Dirac definidos arriba no dependen de la elección de base $\{e^\mu \mid 1 \leq \mu \leq n\}$ usada para determinar su expresión local. Cada forma \hat{e}^ν en cualquier otra base ortonormal está relacionado con los generadores originales mediante la relación $\hat{e}^\nu = T_\alpha^\nu e^\alpha$, donde $T = (T_\alpha^\nu)$ es una función matricial con valores en el grupo especial ortogonal $\text{SO}(n)$ que está definida en la trivialización local asociada al comarco $\{e^\mu \mid 1 \leq \mu \leq n\}$. Denotemos por un momento como $\hat{\not{D}}$ al operador de Dirac calculado en las coordenadas asociadas a \hat{e}^ν . Usando las propiedades de linealidad que tiene cualquier conexión ∇ junto con la bilinealidad del producto de Clifford vemos que

$$\begin{aligned} \hat{\not{D}} &= \hat{e}^\nu \cdot \tilde{\nabla}_{T_\beta^\nu e^\beta}^g \\ &= T_\alpha^\nu e^\alpha \cdot \left(T_\beta^\nu \tilde{\nabla}_\beta^g \right) \\ &= (T_\alpha^\nu T_\beta^\nu) e^\alpha \cdot \tilde{\nabla}_\beta^g. \end{aligned}$$

¹⁴En general, si ω y $\tilde{\omega}$ son matrices asociadas a conexiones ∇ y $\tilde{\nabla}$ en haces vectoriales E y \mathcal{E} respectivamente, entonces la matriz de conexión de $\nabla \otimes \tilde{\nabla}$ es precisamente $\omega \otimes \text{id}_{\Gamma(E)} + \text{id}_{\Gamma(E)} \otimes \tilde{\omega}$.

Ahora, es claro que $T_\alpha^\nu T_\beta^\nu$ es la componente (α, β) del producto $T^t T$. Como $T \in \text{SO}(n)$, se tiene que $T_\alpha^\nu T_\beta^\nu = \delta_{\alpha\beta}$. Por tanto

$$(T_\alpha^\nu T_\beta^\nu) e^\alpha \cdot \tilde{\nabla}_\beta^g = e^\beta \cdot \tilde{\nabla}_\beta^g.$$

Es decir, el operador de Dirac en las coordenadas con gorro coincide con el operador de Dirac en las coordenadas originales. Esto muestra que el operador de Dirac está bien definido. El cálculo para demostrar que el operador de Dirac torcido está bien definido es exactamente el mismo que acabamos de realizar. \square

Recordemos que la representación espinorial compleja $\Delta_k^{\mathbb{C}}$ se escinde como la suma directa de dos representaciones cuando k es par. Dichas representaciones definen a los espinores de quiralidad izquierda y derecha. Más aún, esta descomposición induce una escisión por subhaces

$$\Sigma_{2n}^{\mathbb{C}}(M^{2n}, g) = \Sigma_+^{\mathbb{C}}(M^{2n}, g) \oplus \Sigma_-^{\mathbb{C}}(M^{2n}, g)$$

que fibra a fibra corresponden con la descomposición quirál de la representación espinorial compleja. También hemos visto en la ecuación (5.6) en la página 78 que la conexión $\text{Spin}(n)$ se parte en la suma directa de dos conexiones que preservan la descomposición quirál del haz de espinores. Denotemos por $\tilde{\nabla}_\pm^g$ a las conexiones en $\Sigma_\pm^{\mathbb{C}}(M^{2n}, g)$. Con todo esto, podemos definir las componentes quirales \mathcal{D}^\pm y \mathcal{D}_A^\pm de los operadores de Dirac

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\pm &:= \not\phi \circ \tilde{\nabla}_\pm^g \\ \mathcal{D}_A^\pm &:= \not\phi \circ \tilde{\nabla}_\pm^g \otimes A. \end{aligned}$$

Usando que al multiplicar un espinor por cualquier elemento de la parte impar del álgebra de Clifford intercambiamos la quiralidad del espinor junto con el hecho de que las conexiones $\tilde{\nabla}_\pm^g$ preservan la quiralidad, es fácil ver que los operadores de Dirac toma la forma

$$(6.9) \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}^- \\ \mathcal{D}^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_A = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}_A^- \\ \mathcal{D}_A^+ & 0 \end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 6.1. *Supongamos que $M^4 = \mathbb{R}^4$ con coordenadas locales (x^0, \dots, x^3) está dotado de la métrica euclidiana usual*

$$g = \delta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu.$$

Como \mathbb{R}^4 es contráctil, todos los grupos de cohomología en dimensiones mayores a cero se anulan. En particular $H^2(\mathbb{R}^4) = 0$ y así \mathbb{R}^4 es trivialmente una variedad $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$. De hecho, el haz tangente de \mathbb{R}^4 es trivial. Esto implica que el haz de espinores $\Sigma_4^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^4, g)$ es isomorfo al haz trivial $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^4$. De esta manera, tenemos que los generadores $\{\gamma^0, \dots, \gamma^3\}$ del álgebra de Clifford $\text{Cl}(4)$ son constantes que se pueden identificar con las matrices

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ -\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

donde σ^μ son las matrices de Pauli

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como las componentes de la métrica euclidiana son constantes con valores $\delta_{\mu\nu}$, los símbolos de Christoffel asociados a la conexión métrica de \mathbb{R}^4 son todos nulos. En

particular, la conexión spin $\tilde{\nabla}^g$ queda determinada por la derivada exterior usual. Por lo tanto, el operador de Dirac $\not{D} = \gamma^\mu \partial_\mu$ asociado a la estructura canónica Spin(4) sobre \mathbb{R}^4 tiene la forma

$$(6.10) \quad \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \partial_\mu \\ \sigma^\mu \partial_\mu & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\sigma^\mu \partial_\mu = \begin{pmatrix} \partial_0 + \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & \partial_0 - \partial_3 \end{pmatrix}$$

determina las componentes izquierdas y derechas del operador de Dirac. La relación $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu}$ implica que

$$\begin{aligned} \not{D}^2 &= (\gamma^\mu \partial_\mu)(\gamma^\nu \partial_\nu) \\ &= \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \\ &= (\gamma^\mu)^2 \partial_\mu^2 + \sum_{\mu \neq \nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu \\ &= (\gamma^\mu)^2 \partial_\mu^2. \end{aligned}$$

Es decir, el cuadrado del operador de Dirac es igual al operador matricial

$$\begin{pmatrix} -\Delta & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\Delta \end{pmatrix}$$

donde Δ es el operador Laplaciano $\partial_1^2 + \dots + \partial_4^2$ que actúa en funciones suaves con valores reales.

EJEMPLO 6.2. Las matrices σ^1, σ^2 definidas en el ejemplo anterior generan una copia de $\mathcal{Cl}(2)$. Por lo tanto, el operador de Dirac \not{D} correspondiente al espacio euclidiano (\mathbb{R}^2, g) generado por los vectores e_1, e_2 está determinado por el operador de Cauchy-Riemann $\partial = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$ y su operador conjugado complejo $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)$. Explícitamente,

$$(6.11) \quad \not{D} = 2 \begin{pmatrix} 0 & \bar{\partial} \\ \partial & 0 \end{pmatrix}.$$

Recuerde que una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa si y solo si $\partial f = 0$; es decir, f está en el núcleo del operador de Cauchy-Riemann. Como el haz de espinores sobre \mathbb{R}^2 es el haz trivial $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$, tenemos que una sección $\psi \in \Gamma(\Sigma_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2, g))$ está determinada por una pareja de funciones suaves $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Así, la ecuación de Dirac $\not{D}\psi = 0$ para un campo espinorial libre es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \bar{\partial}\chi_1 &= 0 \\ \partial\chi_2 &= 0. \end{aligned}$$

En otras palabras, χ_1 es una función anti-holomorfa y χ_2 es holomorfa. De esta manera vemos que la geometría espinorial en \mathbb{R}^2 generaliza el cálculo diferencial de una variable compleja. Si consideramos una conexión unitaria $A = \frac{1}{2}ia$ sobre cualquier haz de líneas $L \rightarrow \mathbb{R}^2$ obtenemos que el operador de Dirac con coeficientes en L es

$$(6.12) \quad \not{D}_A = 2 \begin{pmatrix} 0 & \bar{\partial} - A \\ \partial + A & 0 \end{pmatrix}$$

El siguiente ejemplo, que enunciamos a manera de proposición por que nos sera útil más adelante, es de hecho un poco más general que los ejemplos que hemos discutido hasta el momento. Para entenderlo requerimos extender la definición que dimos del operador de Dirac torcido. Consideremos una 4-variedad riemanniana (M^4, g) . Sean $E \rightarrow M^4$ un G -haz vectorial con una G -conexión ∇ arbitraria. Definimos el operador de Dirac con coeficientes en E (o torcido por ∇) como el operador de Dirac asociado a la conexión $\tilde{\nabla}^g \otimes \nabla$.

PROPOSICIÓN 6.2. *Sea (M^4, g) una 4-variedad riemanniana cerrada y orientada. Consideremos la conexión $\hat{\nabla}^g \otimes (\hat{\nabla}^g)^*$ inducida por la conexión espinorial usual $\tilde{\nabla}^g$ en el haz de endomorfismos del haz de espinores*

$$\text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_4^{\mathbb{C}}(M^4, g)) \simeq \Sigma_4^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes_{\mathbb{C}} \Sigma_4^{\mathbb{C}}(M^4, g)^*.$$

Entonces el operador de Dirac torcido por la conexión $\hat{\nabla}^g \otimes (\hat{\nabla}^g)^$ se identifica naturalmente con el operador $d + \delta : \Lambda T^*M^4 \rightarrow \Lambda T^*M^4$.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que el teorema 4.4 nos dice que la representación espinorial compleja induce un isomorfismo entre $\mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(4)$ y el álgebra de endomorfismos $\text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma^{\mathbb{C}}(4))$. Como $\text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma^{\mathbb{C}}(4))$ se identifica naturalmente con el producto de $\Sigma_4^{\mathbb{C}}$ y su espacio dual, vemos que las posibles obstrucciones a la existencia del haz de espinores se cancelan al considerar el producto

$$\Sigma_4^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes_{\mathbb{C}} \Sigma_4^{\mathbb{C}}(M^4, g)^* \simeq \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_4^{\mathbb{C}}(M^4, g)) \simeq \mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(TM^4, g).$$

Por lo tanto, $\mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(TM^4, g) \rightarrow M^4$ es un haz bien definido para toda 4-variedad orientada. Ya que $\mathcal{C}l^{\mathbb{C}}(TM^4, g) = \Lambda TM^4$ como haces vectoriales reales, debemos identificar el haz tangente con el haz cotangente usando la métrica riemanniana. Esto se logra de la siguiente manera; si $v \in TM^4$ definimos la 1-forma $\theta_v := g(v, \circ)$ que se evalúa en un vector tangente w para producir una función suave con valores reales $\theta_v(w) = g(v, w)$. En coordenadas, este isomorfismo se reduce a bajar los índices de las componentes de $v = v^{\nu}e_{\nu}$ por medio de las entradas $g_{\mu\nu}$ del tensor métrico, es decir, θ_v tiene coordenadas $v_{\mu} = g_{\mu\nu}v^{\nu}$ respecto a la base dual $e^{\mu} = g(e_{\mu}, \circ)$.

Veamos que la derivada exterior $d : \Omega^p(M^4) \rightarrow \Omega^{p+1}(M^4)$ se puede escribir como $\theta^{\mu} \wedge \nabla_{\mu}$, donde ∇ es la conexión inducida por la conexión de Levi-Civita de (M^4, g) en la p -ésima potencia exterior del haz cotangente $\Lambda^p T^*M^4$ y θ^{ν} es una base ortonormal dual (respecto del isomorfismo inducido por la métrica) al marco local $e_{\mu} \in \Gamma(TM^4)$. Es fácil ver que esta elección de marcos garantiza que el operador $\theta^{\nu} \wedge \nabla_{\nu}$ es invariante bajo la acción de $\text{SO}(4)$, el grupo estructural del haz cotangente. En particular, $\theta^{\mu} \wedge \nabla_{\mu}$ es un operador global bien definido.

Ahora, para una 0-forma suave $f : M^4 \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene por definición que $\nabla_{\nu} f = df(e_{\nu}) = e_{\nu} f$. Pasando al marco inducido por coordenadas x^{μ} tales que dx^{μ} es un marco ortonormal, obtenemos que $dx^{\nu} \wedge \nabla_{\nu}(f) = df(\partial_{\nu})dx^{\nu} = \partial_{\nu} f dx^{\nu} = df$. Ahora notamos que ∇ es libre de torsión para cada p ; en el caso particular de $p = 1$ esto significa que todos los símbolos de la conexión $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ son simétricos respecto a los índices (μ, ν) . De manera que $dx^{\nu} \wedge \nabla_{\nu}(dx^{\alpha}) = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} dx^{\nu} \wedge dx^{\mu} = 0$ y por tanto para cualquier 1-forma $\omega = \omega_{\alpha} dx^{\alpha}$ tenemos

$$dx^{\nu} \wedge \nabla_{\nu}(\omega) = dx^{\nu} \wedge (\partial_{\nu} \omega_{\beta} + \omega_{\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}) dx^{\beta} = \partial_{\nu} \omega_{\beta} dx^{\nu} \wedge dx^{\beta} = d\omega_{\beta} \wedge dx^{\beta} = d\omega.$$

Para probar que el operador $\theta^{\nu} \wedge \nabla_{\nu}$ coincide con la derivada exterior en las formas de grado mayor a 1, factorizamos cualquier p -forma, con $p \geq 2$, como el

producto de una 1-forma ω y una $p-1$ -forma ϑ y después aplicamos el método de inducción sobre la dimensión de la forma. Este argumento inductivo nos dice que es suficiente mostrar que $\theta^\nu \wedge \nabla_\nu$ satisface la regla de Leibniz

$$d(\omega \wedge \vartheta) = d\omega + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\vartheta.$$

Esta afirmación se verifica inmediatamente

$$\begin{aligned} \theta^\nu \wedge \nabla_\nu(\omega \wedge \vartheta) &= \theta^\nu \wedge [(\nabla_\nu \omega) \wedge \vartheta + \omega \wedge (\nabla_\nu \vartheta)] \\ &= (\theta^\nu \wedge \nabla_\nu \omega) \wedge \vartheta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge (\theta^\nu \wedge \nabla_\nu \vartheta) \end{aligned}$$

El operador $\delta : \Omega^p(M^4) \rightarrow \Omega^{p-1}(M^4)$ es por definición el adjunto de la derivada exterior respecto al producto L^2 en p -formas definido por la ecuación (4.27) en la página 70. Consideremos $\alpha \in \Omega^p(M^4)$ y $\beta \in \Omega^{p+1}(M^4)$. Por la primera parte de este ejemplo, tenemos que

$$(\alpha, d\beta)_{L^2} = \int_{M^4} g(\alpha, \theta^\nu \wedge \nabla_\nu \beta).$$

Usando las definiciones se puede demostrar que para toda q -forma α , los operadores de contracción $\alpha_\perp : \Omega^p(M^4) \rightarrow \Omega^{p-q}(M^4)$ y de multiplicación exterior $\alpha \wedge : \Omega^p(M^4) \rightarrow \Omega^{p+q}(M^4)$ son adjuntos respecto de la métrica inducida en $\Omega^*(M^4)$ por la métrica riemanniana g ; esto es, $g(\alpha_\perp \omega, \beta) = g(\omega, \alpha \wedge \beta)$ para cualquier otra forma β de dimensión tal que $\deg \omega = q + \deg \beta$. De esto se sigue que ∇_ν es una derivación con respecto de la contracción con α . En efecto, como ∇ es compatible con la métrica, tenemos por una parte que

$$(6.13) \quad \partial_\nu g(\omega, \alpha \wedge \beta) = \partial_\nu g(\alpha_\perp \omega, \beta) = g(\nabla_\nu [\alpha_\perp \omega], \beta) + g(\alpha_\perp \omega, \nabla_\nu \beta).$$

La definición de ∇ garantiza que $\nabla_\nu(\alpha \wedge \beta) = (\nabla_\nu \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\nabla_\nu \beta)$. Así tenemos por otra parte que

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \partial_\nu g(\omega, \alpha \wedge \beta) &= g(\nabla_\nu \omega, \alpha \wedge \beta) + g(\omega, [\nabla_\nu \alpha] \wedge \beta) + g(\omega, \alpha \wedge [\nabla_\nu \beta]) \\ &= g(\alpha_\perp \nabla_\nu \omega, \beta) + g([\nabla_\nu \alpha]_\perp \omega, \beta) + g(\alpha_\perp \omega, \nabla_\nu \beta). \end{aligned}$$

La afirmación se sigue de comparar la ecuación (6.13) con la ecuación (6.14). Usando estos resultados podemos reescribir el producto $(\alpha, d\beta)_{L^2}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_{M^4} g(\alpha, \theta^\nu \wedge \nabla_\nu \beta) &= \int_{M^4} g(\theta^\nu \lrcorner \alpha, \nabla_\nu \beta) \\ &= \int_{M^4} \partial_\nu g(\theta^\nu \lrcorner \alpha, \beta) - g(\nabla_\nu [\theta^\nu \lrcorner \alpha], \beta) \\ &= \int_{M^4} \partial_\nu g(\theta^\nu \lrcorner \alpha, \beta) (\partial_\nu) - g([\nabla_\nu \theta^\nu] \lrcorner \alpha, \beta) - g(\theta^\nu \lrcorner [\nabla_\nu \alpha], \beta). \end{aligned}$$

Definiendo para cada $1 \leq \nu \leq 4$ la función real $\omega_\nu := g(\theta^\nu \lrcorner \alpha, \beta)$ vemos que la 1-forma $\omega = \omega_\nu dx^\nu$ determina la 4-forma exacta $d \star \omega$ que coincide con $\partial_\nu g(\theta^\nu \lrcorner \alpha, \beta) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^4$. Por tanto, la integral del primer término es idénticamente cero. La integral de $g(\nabla_\nu \theta^\nu \lrcorner \alpha, \beta)$ también se anula ya que en cada punto $p \in M^n$ existe un sistema de coordenadas tal que $\nabla_\nu \theta^\nu(p) = 0$. De esta manera vemos que $(\alpha, d\beta)_{L^2} = (-\theta^\nu \lrcorner \nabla_\nu \alpha, \beta)_{L^2}$. La unicidad de los operadores adjuntos implica que $\delta = -\theta^\nu \lrcorner \nabla_\nu$.

Finalmente, bajo el isomorfismo $\mathcal{C}\ell(TM^4, g) \simeq \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_4^{\mathbb{C}}(M^4, g))$ la conexión $\tilde{\nabla}^g \otimes (\tilde{\nabla}^g)^*$ se corresponde con la conexión de Clifford $\nabla^{\mathcal{C}\ell}$ definida en la página 77. Por lo tanto, el operador de Dirac con coeficientes en $\mathcal{C}\ell(TM^4, g)$ se lee

$$(6.15) \quad e^\nu \cdot \tilde{\nabla}_\nu^g \otimes \tilde{\nabla}_\nu^g \mapsto \theta^\nu \cdot \nabla_\nu^{\mathcal{C}\ell} = (\theta^\nu \wedge -\theta^\nu \lrcorner) \nabla_\nu = d + \delta$$

□

Los ejemplos anteriores destacan algunas de las propiedades más importantes del operador de Dirac. Primero, \mathcal{D} es un operador diferencial de primer orden definido en cualquier variedad riemanniana (M^n, g) que en coordenadas geodésicas normales toma la forma 6.10. Segundo, el operador de Dirac es la raíz de un cierto operador diferencial de segundo orden. En el caso del espacio plano, este operador está determinado por el Laplaciano escalar. Finalmente, el operador de Dirac torcido por el haz de espinores coincide con el operador $d + \delta$, que como veremos en breve, codifica cierta información cohomológica de la variedad donde está definido. Estos ejemplos particulares sugieren la posibilidad de generalizar estas propiedades.

PROPOSICIÓN 6.3. *Supongamos que (M^n, g) es una variedad riemanniana cerrada y orientable con una estructura $\text{Spin}(n)$ o $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$. Entonces los operadores de Dirac \mathcal{D} y \mathcal{D}_A son formalmente auto-adjuntos*

$$(6.16) \quad (\chi, \mathcal{D} \psi)_{L^2} = (\mathcal{D} \chi, \psi)_{L^2}$$

$$(6.17) \quad (\chi, \mathcal{D}_A \psi)_{L^2} = (\mathcal{D}_A \chi, \psi)_{L^2}$$

respecto al producto L^2 inducido en el haz de espinores por el producto interno definido fibra a fibra como en la proposición 4.5 en la página 25.

DEMOSTRACIÓN. Alrededor de cualquier punto $p \in M^n$ existe un sistema de coordenadas locales tal que los símbolos de cualquier conexión se anulan en p . En particular, los símbolos de Christoffel $\nabla_\nu^g e^\mu = 0$ en p . Denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno en las fibras del haz de espinores para el cual las representaciones espinoriales Δ_n y $\Delta_n^{\mathbb{C}}$ actúan por isometrías. Con esta elección de coordenadas tenemos que en el punto p

$$\begin{aligned} \langle \chi, \mathcal{D} \psi \rangle &= \langle \chi, e^\mu \cdot \tilde{\nabla}_\mu^g \psi \rangle \\ &= -\langle e^\mu \cdot \chi, \tilde{\nabla}_\mu^g \psi \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_\mu^g (e^\mu \cdot \chi), \psi \rangle - \partial_\mu \langle e^\nu \cdot \chi, \tilde{\nabla}_\nu^g \psi \rangle \\ &= \langle (\nabla_\mu^g e^\mu) \cdot \chi, \psi \rangle + \langle e^\mu \cdot \tilde{\nabla}_\mu^g \chi, \psi \rangle - \partial_\mu \langle e^\nu \cdot \chi, \tilde{\nabla}_\nu^g \psi \rangle \\ &= \langle \mathcal{D} \chi, \psi \rangle - \partial_\mu \langle e^\nu \cdot \chi, \tilde{\nabla}_\nu^g \psi \rangle. \end{aligned}$$

Note que hemos usado la identidad (5.4) de la proposición 5.1 en la página 77. Integrando ambos lados de la igualdad anterior y cancelando la integral del término de frontera $-\partial_\mu \langle e^\nu \cdot \chi, \tilde{\nabla}_\nu^g \psi \rangle$ se obtiene el resultado. La afirmación correspondiente para \mathcal{D}_A se deduce notando que A , al ser una conexión unitaria, está representada por una 1-forma con coeficientes A_μ puramente imaginarios, por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle \chi, A_\mu e^\mu \cdot \psi \rangle &= \overline{A_\mu} \langle \chi, e^\mu \cdot \psi \rangle \\ &= -A_\mu \langle -e^\mu \cdot \chi, \psi \rangle \\ &= \langle A_\mu e^\mu \cdot \chi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Así, $\langle \chi, \mathcal{D}_A \psi \rangle = \langle \chi, \mathcal{D} \psi \rangle + \langle \chi, A \cdot \psi \rangle = \langle \mathcal{D} \chi, \psi \rangle + \langle A \cdot \chi, \psi \rangle = \langle \mathcal{D}_A \chi, \psi \rangle$. □

COROLARIO 6.1. *Si M^n es de dimensión par y admite una estructura $\text{Spin}(n)$ o una estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$, entonces los operadores \mathcal{D}^{\pm} y \mathcal{D}_A^{\pm} asociados a la descomposición quiral del haz de espinores son mutuamente adjuntos, es decir;*

$$(6.18) \quad (\mathcal{D}^+)^\dagger = \mathcal{D}^-$$

$$(6.19) \quad (\mathcal{D}_A^+)^\dagger = \mathcal{D}_A^-.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathcal{O} : V \rightarrow V$ y $\mathcal{Q} : W \rightarrow W$ una pareja de operadores lineales. Consideremos la transformación lineal $\mathcal{L} : V \oplus W \rightarrow V \oplus W$ dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{O} \\ \mathcal{Q} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que el adjunto de \mathcal{L} , denotado por \mathcal{L}^\dagger , es igual a

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{Q}^\dagger \\ \mathcal{O}^\dagger & 0 \end{pmatrix}.$$

En particular, si \mathcal{L} es auto-adjunto, vemos que $\mathcal{Q}^\dagger = \mathcal{O}$. En dimensiones pares, los operadores de Dirac \mathcal{D} y \mathcal{D}_A tiene la forma del operador \mathcal{L} (ver (6.9)). El resultado se sigue de la proposición anterior. \square

La siguiente fórmula relaciona la curvatura de la conexión $\nabla^A = \tilde{\nabla}^g \otimes A$ con el cuadrado del operador de Dirac $\mathcal{D}_A^2 = \mathcal{D}_A^\dagger \mathcal{D}_A$. Esta identidad de tipo Bochner nos será de gran ayuda para estudiar la naturaleza de las soluciones a las ecuaciones de Seiberg-Witten.

PROPOSICIÓN 6.4 (Fórmula de Weitzenböck). *Sea (M^n, g) como en la proposición anterior. Denotemos por R a la curvatura escalar de la conexión de Levi-Civita en TM^4 y por F_A a la curvatura de una conexión unitaria A asociada al haz determinante de la estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$. Entonces para todo campo de espinores ψ , el operador de Dirac \mathcal{D}_A satisface la identidad*

$$(6.20) \quad \mathcal{D}_A^2 \psi = (\nabla^A)^\dagger \nabla^A \psi + \frac{1}{4} R \psi + \frac{1}{2} F_A \cdot \psi$$

donde $(\nabla^A)^\dagger$ es el adjunto L^2 de la conexión ∇^A y $F_A \cdot \psi$ es la acción por multiplicación de Clifford de la 2-forma de curvatura sobre ψ . En particular, si la variedad M^n solo tiene estructura $\text{Spin}(n)$ la fórmula de Weitzenböck se reduce a la identidad de Lichnerowicz

$$(6.21) \quad \mathcal{D}^2 \psi = (\tilde{\nabla}^g)^\dagger \tilde{\nabla}^g \psi + \frac{1}{4} R \psi.$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos un punto $p \in M^n$ y un sistema de coordenadas normales definidas en una vecindad \mathcal{U} de p . Consideremos $\{e_i\}$ y $\{e^i\}$ marcos ortonormales duales definidos en \mathcal{U} . Entonces para todo punto en la vecindad normal de p se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_A^2 \psi &= e^\mu \nabla_\mu^A (e^\nu \nabla_\nu^A \psi) \\ &= e^\mu [(\nabla_\mu e^\nu) \nabla_\nu^A \psi + e^\nu \nabla_\mu^A \nabla_\nu^A \psi] \\ &= \sum_\mu e^\mu e^\mu \nabla_\mu^A \nabla_\mu^A \psi + \sum_{\mu < \nu} e^\mu e^\nu [\nabla_\mu^A, \nabla_\nu^A] \psi. \end{aligned}$$

Por la observación 4.3 en la página 65 sabemos que el conmutador $[\nabla_\mu^A, \nabla_\nu^A]$ está determinado por las componentes $F_{j\mu\nu}^i$ de la curvatura F_{∇^A} asociada a la conexión ∇^A mediante la expresión

$$F_{j\mu\nu}^i s_i \otimes s^j = F_{ij\mu\nu} s^i \otimes s^j$$

donde $\{s_i \otimes s^j\}$ es una base local para el haz de endomorfismos del haz de espinores. De hecho, F_{∇^A} es una 2-forma con valores en el álgebra de Lie de $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$, que es isomorfa a $\mathcal{C}\ell_0(4) \oplus i\mathbb{R}$. En particular, los elementos $s^i \otimes s^j$ son de la forma $e^i e^j$. Como ∇^A se obtiene acoplado la conexión spin $\tilde{\nabla}^g$ con la conexión unitaria A , se tiene que la matriz de conexión asociada a ∇^A toma la forma $\tilde{\omega} + A$, con $\tilde{\omega}$ la matriz de la conexión spin; por lo tanto, $F_{ij\mu\nu}$ es la suma del tensor de curvatura $\tilde{R}_{ij\mu\nu}$ de la conexión spin y la curvatura de la conexión unitaria en el haz determinante $\delta_{ij}(F_A)_{\mu\nu}$. Como la curvatura de la conexión spin toma valores en el álgebra de Lie de $\text{Spin}(n)$, deducimos que $\tilde{R}_{ij\mu\nu}$ es anti-simétrico en los índices (i, j) . Usando que $\sum_{\mu < \nu} (F_A)_{\mu\nu} e^\mu e^\nu \cdot \psi = \frac{1}{2} F_A \cdot \psi$, obtenemos que

$$\mathcal{D}_A^2 \psi = - \sum_{\mu} \nabla_\mu^A \nabla_\mu^A \psi + \sum_{\mu < \nu} \tilde{R}_{ij\mu\nu} e^\mu e^\nu e^i e^j \psi + \frac{1}{2} F_A \cdot \psi.$$

Usando que $\tilde{R}_{ij\mu\nu}$ está relacionado con el tensor de Riemann $R_{ij\mu\nu}$ de la conexión de Levi-Civita por medio de la identidad $2\tilde{R}_{ij\mu\nu} = R_{ij\mu\nu}$ junto con las propiedades de antisimetría en los índices (i, j) y (μ, ν) así como la simetría del tensor de Riemann $R_{ij\mu\nu} = R_{\mu\nu ij}$, podemos reescribir el segundo término en la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} \sum_{\mu < \nu} \tilde{R}_{ij\mu\nu} e^\mu e^\nu e^i e^j &= -\frac{1}{8} \sum_{i,j,\nu,\mu} R_{ji\mu\nu} e^\mu e^\nu e^i e^j \\ &= -\frac{1}{8} \sum_j \left(\sum_{i \neq \mu \neq \nu} R_{ji\mu\nu} e^\mu e^\nu e^i + \sum_{\substack{i=\mu \\ \mu \neq \nu}} R_{j\mu\mu\nu} e^\mu e^\nu e^\mu \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{i=\nu \\ \mu \neq \nu}} R_{j\nu\mu\nu} e^\mu e^\nu e^\nu \right) e^j. \end{aligned}$$

Es fácil ver que la identidad $R_{jiv\mu} + R_{jv\mu i} + R_{j\mu i\nu} = 0$ implica que

$$\sum_{i \neq \mu \neq \nu} R_{jiv\mu} e^\mu e^\nu e^i = 0$$

Ahora usamos de nueva cuenta la simetría $R_{j\mu\mu\nu} = R_{\mu\nu j\mu}$ para simplificar los términos restantes. Para esto vamos a suponer que μ y ν toman valores distintos.

$$\begin{aligned}
\sum_{j,\mu,\nu} (R_{j\mu\mu\nu} e^\mu e^\nu e^\mu + R_{j\nu\mu\nu} e^\mu e^\nu e^\nu) e^j &= \sum_{j,\mu,\nu} (-R_{j\mu\mu\nu} e^\nu e^\mu e^\mu + R_{j\nu\mu\nu} e^\mu e^\nu e^\nu) e^j \\
&= \sum_{j,\mu,\nu} R_{j\mu\mu\nu} e^\nu e^j + R_{j\nu\nu\mu} e^\mu e^j \\
&= 2 \sum_{j,\mu,\nu} R_{j\mu\mu\nu} e^\nu e^j \\
&= 2 \sum_{\mu,\nu} R_{\mu\nu\mu\nu} e^\nu e^\nu \\
&= -2R.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\sum_{\mu < \nu} \tilde{R}_{ij\mu\nu} e^\mu e^\nu e^i e^j = \frac{1}{4}R$. En [32] se identificó el término $-\sum_{\mu} \nabla_{\mu}^A \nabla_{\mu}^A$ con el operador $(\nabla^A)^\dagger \nabla^A$. Finalmente, la fórmula de Lichnerowicz (6.21) se obtiene observando que el operador de Dirac \not{D} desacoplado de la conexión A tiene curvatura F_A idénticamente nula. \square

Otra propiedad analítica que comparten los operadores de Dirac \not{D} y \not{D}_A es que ambos son ejemplos de operadores *elípticos* de primer orden. Recordemos que la definición un operador diferencial de orden k , digamos $\mathcal{D} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E})$, requiere que la iteración de k conmutadores $[\dots [\mathcal{D}, f_1], \dots, f_k] \in \text{Hom}(E, \mathcal{E})$ es un morfismo no trivial de haces vectoriales para toda k -tupla de funciones suaves con valores reales (f_1, \dots, f_k) . El conmutador que aparece en arriba se define inductivamente como sigue. Para cada función suave f y cada sección $s \in \Gamma(E)$,

$$[\mathcal{D}, f]s := \mathcal{D}(fs) - f\mathcal{D}s.$$

Por ejemplo, consideremos $E = \Lambda^p T^* M^n$, $\mathcal{E} = \Lambda^{p+1} T^* M^n$ y \mathcal{D} la derivada exterior d . Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M^n, \mathbb{R})$ y ω es cualquier p -forma, entonces $[d, f]\omega = df \wedge \omega$. Por lo tanto, $[d, f]$ es el morfismo de haces $df \wedge \circ$, que es no trivial en cada dimensión. Esto muestra que la derivada exterior es un operador diferencial de primer orden. De manera análoga se verifica que cualquier conexión ∇ es un ejemplo de operador diferencial de primer orden, puesto que $[\nabla, f]s = df \otimes s$. El *símbolo* de un operador diferencial está dado por

$$(6.22) \quad \sigma_k(\mathcal{D})(f_1, \dots, f_k) := \frac{1}{k!} [\dots [\mathcal{D}, f_1], \dots, f_k].$$

Si E y \mathcal{E} son haces vectoriales complejos, el símbolo de un operador diferencial $\mathcal{D} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E})$ es

$$(6.23) \quad \sigma_k^{\mathbb{C}}(\mathcal{D}) = i^k \sigma_k(\mathcal{D}).$$

En [33] se demuestra que un operador diferencial cumple con las siguientes propiedades; a) es totalmente simétrico; es decir, es invariante bajo permutaciones de los argumentos (f_1, \dots, f_k) y b) solo depende de las 1-formas $\xi_i = df_i$. Note que (a) y (b) implican que el símbolo de cualquier operador diferencial está completamente determinado por su valor en el producto simétrico de k copias de $\xi = df$, es decir en la sección $\xi^k = \xi \odot \dots \odot \xi$. Finalmente, decimos que un operador diferencial \mathcal{D} es elíptico si su símbolo es un isomorfismo para toda $\xi \neq 0$.

Los símbolos de los operadores de Dirac \not{D} y \not{D}_A están dados por el producto de Clifford. Sea (M^n, g) una variedad riemanniana con una estructura Spin(n) o

$\text{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$, ξ una 1-forma en M^n con coeficientes complejos y ψ un campo suave de espinores. Entonces $\sigma_1^{\mathbb{C}}(\not{D})(\xi)\psi = \sigma_1^{\mathbb{C}}(\not{D}_A)(\xi)\psi = i\xi \cdot \psi$. Note que hemos usado la linealidad sobre las funciones de la 1-forma A para cancelar el término $[A, f]\psi$. Como $\xi \cdot \xi = -g(\xi, \xi)$ es distinto de cero si $\xi \neq 0$, los símbolos asociados a los operadores de Dirac son invertibles, mostrando así que \not{D} y \not{D}_A son operadores elípticos de primer orden como se había afirmado.

Los operadores elípticos asociados a haces vectoriales sobre variedades compactas son especialmente importantes, pues son ejemplos importantes de una familia de operadores llamados de Fredholm¹⁵. Supongamos que M^n es compacta y orientable. Sea $\mathcal{D} : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E})$ un operador elíptico \mathbb{F} -lineal, donde \mathbb{F} denota por igual al campo de los números reales o complejos. El *índice* de \mathcal{D} , denotado por $\text{Ind}_{\mathbb{F}} \mathcal{D}$, se define como la diferencia entre las dimensiones (respecto a \mathbb{F}) del núcleo y del conúcleo de \mathcal{D} .

$$\text{Ind}_{\mathbb{F}} \mathcal{D} = \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \mathcal{D} - \dim_{\mathbb{F}} \text{Coker } \mathcal{D}.$$

Recuerde que el conúcleo se define como el cociente $\text{Coker} := \Gamma(\mathcal{E})/\text{Im } \mathcal{D}$. Si \mathcal{D}^* es el adjunto de \mathcal{D} , existe un isomorfismo canónico entre el núcleo de \mathcal{D}^* y el conúcleo de \mathcal{D} . En particular

$$(6.24) \quad \text{Ind}_{\mathbb{F}} \mathcal{D} = \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \mathcal{D} - \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \mathcal{D}^*.$$

El célebre teorema de índice de Atiyah-Singer [2] relaciona el índice de cualquier operador elíptico \mathcal{D} con información topológica de M^n . Más precisamente, el enunciado del teorema establece que $\text{Ind}_{\mathbb{C}} \mathcal{D}$ se puede calcular evaluando en la clase fundamental $[M^n]$ el término de dimensión n que resulta de multiplicar, en el anillo de cohomología racional $H^*(M^n; \mathbb{Q})$, la clase de *Todd* $\mathfrak{T}(M^n)$ y el *cárcer de Chern* $\text{Ch}(\mathcal{D})$ asociado a \mathcal{D} . Por ejemplo, el operador de Dirac asociado al haz de álgebras de Clifford de una 4-variedad cerrada y orientada M^4 siempre es elíptico y por tanto tiene un índice bien definido. De hecho, haciendo uso de la proposición 6.2 en la página 83 vamos a demostrar que

PROPOSICIÓN 6.5. *El índice de la parte derecha de operador de Dirac, denotada por $(d + \delta)^+ : \Omega^+(M^4) \rightarrow \Omega^-(M^4)$ coincide con la característica de Euler de la variedad $\chi(M^4)$. Es decir*

$$(6.25) \quad \text{Ind}_{\mathbb{R}}(d + \delta)^+ = \sum_{k=0}^4 (-1)^k b_k(M^4).$$

DEMOSTRACIÓN. El isomorfismo $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(TM^4, g) \simeq \Lambda T^*M^4$ como haces vectoriales reales se promueve a un isomorfismo de álgebras tal que

$$\begin{aligned} \Omega^1(M^4) \cdot \Omega^{\text{par}} &\subset \Omega^{\text{impar}}(M^4) \\ \Omega^1(M^4) \cdot \Omega^{\text{impar}} &\subset \Omega^{\text{par}}(M^4). \end{aligned}$$

Es decir, la parte par (impar) del haz de álgebras de Clifford corresponde exactamente con el subespacio $\Omega^{\text{par}}(M^4)$ ($\Omega^{\text{impar}}(M^4)$) respectivamente. Definiendo

$$\Omega^+(M^4) = \Omega^0(M^4) \oplus \Omega^2(M^4) \oplus \Omega^4(M^4), \quad \Omega^-(M^4) = \Omega^0(M^4) \oplus \Omega^3(M^4).$$

¹⁵Un operador lineal entre espacios de Banach $\mathcal{O} : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ es de Fredholm si la imagen de \mathcal{O} es un subespacio cerrado y tanto el núcleo como el conúcleo son de dimensión finita.

Vemos que el operador $d + \delta$ preserva la graduación $\Omega^+(M^4) \oplus \Omega^-(M^4)$ del espacio de formas diferenciales. Así, tenemos que $d + \delta$ se escinde como la suma directa de los operadores

$$(d + \delta)^+ : \Omega^+(M^4) \rightarrow \Omega^-(M^4), \quad (d + \delta)^- : \Omega^-(M^4) \rightarrow \Omega^+(M^4).$$

Es fácil ver que $(d + \delta)^+$ es el adjunto de $(d + \delta)^-$. Más aún, las equivalencias

$$(d + \delta)\omega = 0 \iff d\omega = 0, \quad \delta\omega = 0 \iff (d + \delta)^2\omega = 0.$$

Implican que el núcleo de $(d + \delta)^+$ se identifica con el espacio de formas armónicas de dimensión par $\mathcal{H}^{\text{par}}(M^4)$. De la misma manera se tiene un isomorfismo $\text{Ker}(d + \delta)^- \simeq \mathcal{H}^{\text{impar}}(M^4)$. El teorema de Hodge establece que cada clase de cohomología admite un único representante armónico, es decir, en el núcleo de $(d + \delta)^2$. En particular, $\mathcal{H}^p(M^4) \simeq H_{dR}^p(M^4)$ para cada p . Usando la expresión (6.24) junto con la discusión anterior concluimos que

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\mathbb{R}}(d + \delta)^+ &= \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(d + \delta)^+ - \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(d + \delta)^- \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{\text{par}}(M^4) - \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{\text{impar}}(M^4) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} (\mathcal{H}^0(M^4) \oplus \mathcal{H}^2(M^4) \oplus \mathcal{H}^4(M^4)) - \dim_{\mathbb{R}} (\mathcal{H}^1(M^4) \oplus \mathcal{H}^3(M^4)) \\ &= b_0(M^4) + b_2(M^4) + b_4(M^4) - b_1(M^4) - b_3(M^4) \\ &= \chi(M^4). \end{aligned}$$

□

Para una 4-variedad orientable M^4 con una estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ asociada al haz determinante $L \rightarrow M^4$ podemos considerar el operador de Dirac con coeficientes en el haz virtual $\sqrt{L} \rightarrow M^4$

$$\mathcal{D}_A^+ : \Gamma(\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}) \rightarrow \Gamma(\hat{\Sigma}_-^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}).$$

En [31] se demuestra que el índice del operador \mathcal{D}_A^+ está dado por la signatura de la variedad, $\sigma(M^4)$, y la primera clase de Chern del haz determinante $c_1(L)$.

TEOREMA 6.2.

$$(6.26) \quad \text{Ind}_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_A^+ = -\frac{1}{8}\sigma(M^4) + \frac{1}{2} \int_{M^4} c_1(L)^2$$

En el ejemplo 6.2 vimos que la parte derecha del operador de Dirac en el plano es precisamente el operador de Cauchy-Riemann $\partial = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$, que tiene como núcleo al conjunto de funciones holomorfas. Una propiedad bien conocida de las funciones holomorfas es que satisfacen el *teorema de identidad*, que establece que una función holomorfa definida en un dominio conexo $D \subset \mathbb{R}^2$ que se anula en un abierto propiamente contenido en D debe anularse idénticamente. Este resultado se extiende al conjunto de todos los operadores de Dirac acoplados a una conexión arbitraria de cualquier haz vectorial, cualquiera que esta sea. El lector interesado puede encontrar en [4] una sección completa dedicada a probar este resultado, conocido como *propiedad de continuación única*. Más adelante usaremos el siguiente caso particular.

TEOREMA 6.3. *Cualquier solución $\Psi \in \Gamma(\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L})$ de la ecuación de Dirac $\mathcal{D}_A^+ \Psi = 0$ que se anule en un subconjunto abierto $V \subset M^4$ debe anularse idénticamente sobre la componente conexa que contiene a V .*

Teoría de Seiberg-Witten

En los capítulos anteriores hemos desarrollado la base teórica que finalmente nos permite introducir el tema central de este trabajo; las ecuaciones de Seiberg-Witten. Irónicamente, resulta particularmente difícil motivar el sistema de ecuaciones que estamos a punto de estudiar, principalmente por que este sistema tiene sus orígenes en trabajos de física teórica realizados en 1994 por Nathan Seiberg en colaboración con Edward Witten que, a primera vista, parecían estar totalmente desconectados de los avances matemáticos de la época. En cierto sentido, las ecuaciones de Seiberg-Witten describen una versión dual de la teoría de instantones derivada de las ecuaciones de Yang-Mills. En lo que resta de este trabajo abordaremos las ecuaciones de Seiberg-Witten desde un punto de vista geométrico y dejaremos de lado cualquier interpretación física posible. El lector puede encontrar en [22] y en [28] una explicación informal de como es que la teoría de Seiberg-Witten y la teoría de instantones, pensadas con el enfoque de la física teórica, se relacionan con la topología suave de las 4-variedades. Las aplicaciones de las ecuaciones de Seiberg-Witten a la teoría de 4-variedades aparecieron originalmente en [43].

1. Las Ecuaciones de Seiberg-Witten

De ahora y en adelante, (M^4, g) denota una 4-variedad riemanniana suave, cerrada, orientada, conexa y simplemente conexa, es decir, con $\pi_1(M^4) = 0$. Esta condición sobre el grupo fundamental la satisface cualquier variedad riemanniana con curvatura de Ricci no negativa [16]. Por el teorema de Hirzebruch-Hopf, existe una estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ con haz determinante $L \rightarrow M^4$ asociada M^4 . Sea A una conexión unitaria en L y consideremos un campo de espinores de quiralidad derecha ψ , es decir, una sección del haz $\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L} \rightarrow M^4$. Recuerde que $\hat{\Sigma}_4^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}$ admite una métrica suave invariante bajo la acción de $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ definida en las fibras que se restringe a una métrica hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ del haz de espinores derechos. Las ecuaciones de Seiberg-Witten determinan a la pareja (A, ψ) , que por ahora elegimos al menos de clase \mathcal{C}^1 , mediante la relación

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_A^+ \psi &= 0 \\ \text{(S-W)} \quad F_A^+ &= -\frac{1}{4} \langle e_\mu e_\nu \psi, \psi \rangle e^\mu \wedge e^\nu, \end{aligned}$$

donde F_A^+ denota la parte auto-dual de la curvatura $F_A = dA$ asociada a la conexión A y $\{e_\mu\}, \{e^\mu\}$ son marcos locales ortonormales mutuamente duales. Es fácil ver que el miembro derecho de la ecuación de curvatura es independiente de la elección de marcos ortonormales y por tanto representa un elemento de $\Omega^2(M^4)$.

PROPOSICIÓN 1.1. *La 2-forma $\eta(\psi) := -\frac{1}{4} \langle e_\mu e_\nu \psi, \psi \rangle e^\mu \wedge e^\nu$ tiene coeficientes puramente imaginarios y es auto-dual.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que $\langle e_\mu e_\nu \psi, \psi \rangle = -\overline{\langle e_\mu e_\nu \psi, \psi \rangle}$ cuando los índices μ y ν toman valores distintos. Si $\mu \neq \nu$ entonces

$$\langle e_\mu e_\nu \psi, \psi \rangle = -\langle e_\nu \psi, e_\mu \psi \rangle = \langle \psi, e_\nu e_\mu \psi \rangle = -\langle \psi, e_\mu e_\nu \psi \rangle = -\overline{\langle e_\mu e_\nu \psi, \psi \rangle}.$$

Para ver que $\eta(\psi)$ es invariante bajo el operador estrella de Hodge, hay que recordar que la acción del operador de Hodge en $\Lambda^2 TM^4$ induce un automorfismo de $\Omega^2(M^4)$ que bajo el isomorfismo de cuantización $e_\mu \wedge e_\nu \mapsto e_\mu e_\nu$, corresponde con la acción por producto de Clifford del operador de quiralidad $\Gamma_{\mathbb{C}}^5 = -e_1 \dots e_4$ en $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(4)$ (corolario 4.9 en la página 32). Así, vemos directamente de la expresión

$$\star \eta(\psi) = -\frac{1}{4} \langle \Gamma_{\mathbb{C}}^5 e_\mu e_\nu \psi, \psi \rangle \star (e^\mu \wedge e^\nu)$$

que todos los posibles signos negativos que se obtiene del operador estrella se cancelan con los signos correspondientes al operador de quiralidad. Esto prueba que $\eta(\psi)$ es aut-dual. \square

La proposición anterior garantiza que las ecuaciones de Seiberg-Witten están bien definidas globalmente. Más adelante vamos a hacer uso del siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.2. *Para todo $\psi \in \Gamma(\hat{\Sigma}_4^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L})$ se tienen las identidades*

$$(1.1) \quad |\eta(\psi)|^2 = \frac{1}{2} |\psi|^4$$

$$(1.2) \quad \eta(\psi) \cdot \psi = \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\eta(\psi)$ es autodual, tenemos que

$$\eta(\psi) \wedge \eta(\psi) = |\eta(\psi)|^2 e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4.$$

Un simple cálculo demuestra que

$$\eta(\psi) \wedge \eta(\psi) = \frac{1}{2} (\Omega_{12}\Omega_{34} - \Omega_{13}\Omega_{24} + \Omega_{14}\Omega_{23}) e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4,$$

donde $\Omega_{ij} = \langle e_i e_j \psi, \psi \rangle$ denota a la componente (i, j) de $\eta(\psi)$. Así

$$|\eta(\psi)|^2 = \frac{1}{2} (\Omega_{12}\Omega_{34} - \Omega_{13}\Omega_{24} + \Omega_{14}\Omega_{23}).$$

Recordemos que en la base Weyl (véase el ejemplo 2.8 en la página 10 y 4.21 en la página 32), la parte derecha del álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(4)$ está generada por las matrices

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

note que $\{e_2, e_3, e_4\}$ forman una base para la representación real usual del álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$. En particular, se tiene las relaciones: $e_2 e_4 = e_3$, $e_3 e_4 = -e_2$, $e_2 e_3 = -e_4$. Por tanto

$$|\eta(\psi)|^2 = -\frac{1}{2} (\langle e_2 \psi, \psi \rangle^2 + \langle e_3 \psi, \psi \rangle^2 + \langle e_4 \psi, \psi \rangle^2)$$

Escribiendo a ψ como un vector de dos componentes $(\psi^1, \psi^2)^t$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle e_2\psi, \psi \rangle &= \psi^1\bar{\psi}^2 - \bar{\psi}^1\psi^2 \\ \langle e_3\psi, \psi \rangle &= i(\psi^1\bar{\psi}^2 + \bar{\psi}^1\psi^2) \\ \langle e_4\psi, \psi \rangle &= i(|\psi^1|^2 - |\psi^2|^2).\end{aligned}$$

Así, $\sum_{\mu=2}^3 \langle e_\mu\psi, \psi \rangle^2 = -|\psi|^4$. Esto demuestra la identidad (1.1). Para demostrar la identidad (1.2) notamos que $\eta(\psi)$ corresponde con el endomorfismo $-\frac{1}{4}\sum_{\mu<\nu}\Omega_{\mu\nu}e^\mu e^\nu$. Usando de nueva cuenta las relaciones: $\Omega_{23} = -\Omega_{14}$, $\Omega_{24} = \Omega_{13}$, $\Omega_{34} = -\Omega_{12}$ junto con los cálculos hechos previamente se obtiene que

$$-\frac{1}{4}\sum_{\mu<\nu}\Omega_{\mu\nu}e^\mu e^\nu = -\frac{1}{2}[\Omega_{12}e^2 + \Omega_{13}e^3 + \Omega_{14}e^4],$$

es decir, la acción de la 2-forma $\eta(\psi)$ en las secciones del haz de espinores está dada por el endomorfismo

$$(1.3) \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |\psi^1|^2 - |\psi^2|^2 & 2\psi^1\bar{\psi}^2 \\ 2\bar{\psi}^1\psi^2 & |\psi^2|^2 - |\psi^1|^2 \end{pmatrix}.$$

De esto se sigue inmediatamente que $\eta(\psi) \cdot \psi = \frac{1}{2}|\psi|^2\psi$ como se afirmaba. \square

OBSERVACIÓN 1.1. El endomorfismo (1.3) se puede escribir como la parte libre de traza del operador $\psi \otimes \bar{\psi}$ que actúa en cualquier campo espinorial χ como $\psi \otimes \bar{\psi}(\chi) = \langle \chi, \psi \rangle \psi$. Explícitamente, la matriz (1.3) es la representación coordenada del endomorfismo

$$(1.4) \quad q(\psi) := \psi \otimes \bar{\psi} - \frac{1}{2}|\psi|^2 \text{id}.$$

Para fines de la teoría que estamos a punto de desarrollar es conveniente introducir un parámetro adicional $\tau \in \Omega^2(M^4; i\mathbb{R})$ que jugará el papel de una perturbación del sistema (S-W).

DEFINICIÓN 1.1. Sea $L \rightarrow M^n$ el haz determinante de una estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ para M^4 . Denotemos por $\text{Con}_{\text{U}(1)}(L)$ al espacio de conexiones unitarios en L y por $\Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R})$ al espacio de 2-formas auto duales con valores puramente imaginarios. Definimos la aplicación de Seiberg-Witten

$$\text{SW}_\tau : \text{Con}_{\text{U}(1)}(L) \times \Gamma(\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}) \longrightarrow \Gamma(\hat{\Sigma}_-^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}) \times \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R}),$$

mediante la regla de correspondencia

$$(1.5) \quad \text{SW}_\tau(A, \psi) = (\not{D}_A^+ \psi, F_A^+ - \eta(\psi) - \tau).$$

Por comodidad introducimos la siguiente notación. El *espacio de configuraciones* para la estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ asociada al haz determinante $L \rightarrow M^4$ se define como

$$\mathcal{C}(L) = \text{Con}_{\text{U}(1)}(L) \times \Gamma(\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}).$$

Similarmente, el *rango* del mapeo de Seiberg-Witten asociado a L es

$$\mathcal{R}(L) = \Gamma(\hat{\Sigma}_-^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}) \times \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R}).$$

Hasta el momento no hay razón alguna para creer que las ecuaciones de Seiberg-Witten tienen solución para una 4-variedad arbitraria. De hecho, el resultado más

importante en la teoría consiste en demostrar que el espacio de soluciones a las ecuaciones de Seiberg-Witten, modulo cierta simetría que presentamos en la siguiente sección, es una variedad suave, compacta y orientable de dimensión finita. Esto quiere decir que para cualquier 4-variedad lisa, las ecuaciones de Seiberg-Witten siempre admiten familias enteras de soluciones relacionadas entre si por medio de la acción de un cierto de grupo. De manera muy general, adelantamos que las técnicas que permiten demostrar la existencia de soluciones a las ecuaciones (S-W) involucran el estudio del mapeo de Seiberg-Witten en una completación adecuada del espacio de configuraciones; este análisis impone ciertas condiciones de regularidad sobre las variables de SW_τ .

Por ahora presentamos algunos resultados preliminares que nos permiten entender el espacio de soluciones a las ecuaciones de Seiberg-Witten en una clase particular de variedades riemannianas. Para esto únicamente se requieren configuraciones $(A, \psi) \in \mathcal{C}(L)$ de clase \mathcal{C}^1 .

DEFINICIÓN 1.2. Consideremos como antes una 2-forma autodual con coeficientes puramente imaginarios $\tau \in \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R})$. La energía de una configuración (A, ψ) se define como

$$(1.6) \quad E_\tau(A, \psi) = \int_{M^4} \left| \mathcal{D}_A^+ \psi \right|^2 + \left| F_A^+ - \eta(\psi) - \tau \right|^2.$$

Como M^4 es compacta, la energía de cualquier configuración (A, ψ) es finita. De esta manera tenemos definido un funcional $E_\tau : \mathcal{C}(L) \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada configuración (A, ψ) le asocia su energía $E_\tau(A, \psi)$. De ahora y en adelante nos referiremos a E_τ como el funcional de energía. Obviamente, las configuraciones que satisfacen las ecuaciones de Seiberg-Witten

$$(1.7) \quad \text{SW}_\tau(A, \psi) = 0$$

minimizan absolutamente el funcional de energía E_τ .

PROPOSICIÓN 1.3. Para la perturbación $\tau = 0$ el funcional de energía E_0 satisface la identidad

$$(1.8) \quad E_0(A, \psi) = \int_{M^4} \left| \nabla_A \psi \right|^2 + \left| F_A^+ \right|^2 + \frac{R}{4} |\psi|^2 + \frac{1}{2} |\psi|^4,$$

donde R representa la curvatura escalar de (M^4, g) .

DEMOSTRACIÓN. Por la fórmula de Weitzenböck (ecuación (6.20) en la página 86), se tiene para todo campo espinorial ψ que

$$(1.9) \quad \left| \mathcal{D}_A^+ \psi \right|^2 = \left| \nabla^A \psi \right|^2 + \frac{R}{4} |\psi|^2 + \frac{1}{2} \langle F_A \cdot \psi, \psi \rangle.$$

Recordemos que F_A se parte como suma directa de su componente dual F_A^+ y su componente anti-dual F_A^- . Además, los valores de F_A^- corresponden fibra a fibra con espinores de quiralidad izquierda. Usando que en dimensiones pares los espinores de quiralidad derecha son ortogonales (respecto del producto de Clifford) a los espinores de quiralidad izquierda (teorema 4.4 en la página 24) obtenemos que $F_A \cdot \psi = F_A^+ \cdot \psi$. Por otra parte

$$\left| F_A^+ - \eta(\psi) \right|^2 = \left| F_A^+ \right|^2 + \left| \eta(\psi) \right|^2 - 2g(F_A^+, \eta(\psi)).$$

Ahora, $-2g(F_A^+, \eta(\psi)) = -\frac{1}{4}\langle e_\mu e_\nu \psi, \psi \rangle g(F_A^+, e^\mu \wedge e^\nu)$. Observe que el término $g(F_A^+, e^\mu \wedge e^\nu)$ representa a las componentes $(F_A^+)_{\mu\nu}$ de F_A^+ respecto del marco $e^\mu \wedge e^\nu$. Así,

$$-2g(F_A^+, \eta(\psi)) = -\frac{1}{4} \sum_{\mu, \nu} \langle (F_A^+)_{\mu\nu} e_\mu e_\nu \psi, \psi \rangle = -\frac{1}{2} \langle F_A^+ \cdot \psi, \psi \rangle,$$

cancela al término $\frac{1}{2} \langle F_A^+ \cdot \psi, \psi \rangle$. Sumando la norma al cuadrado de $\mathcal{D}_A^+ \psi$ con la norma al cuadrado de $F_A^+ - \eta(\psi)$, usando que $|\eta(\psi)|^2 = \frac{1}{2} |\psi|^4$ e integrando se obtiene la expresión (1.8). \square

LEMA 1.1. *Sea (A, ψ) una solución de las ecuaciones de Seiberg-Witten $\text{SW}(A, \psi) = 0$. Supongamos que $|\psi|$ alcanza su máximo en un punto $p \in M^4$; entonces $\psi \equiv 0$, o bien si $\psi(p) \neq 0$ se tiene la desigualdad*

$$(1.10) \quad R(p) + |\psi|^2(p) \leq 0$$

donde R denota, como antes, a la curvatura escalar de (M^4, g) .

DEMOSTRACIÓN. Sea (A, ψ) es una solución a las ecuaciones de Seiberg-Witten (S-W) como en las hipótesis del lema. Usando la formula de Weitzenböck y tomando producto interno con ψ obtenemos la relación

$$\langle \psi, (\nabla^A)^\dagger \nabla^A \psi \rangle + \frac{R}{4} |\psi|^2 + \frac{1}{2} \langle \psi, \eta(\psi) \cdot \psi \rangle = 0.$$

Note que $\langle \psi, \eta(\psi) \cdot \psi \rangle = \frac{1}{2} |\psi|^4$ (identidad (1.2)) implica que el término $\langle \psi, (\nabla^A)^\dagger \nabla^A \psi \rangle$ es real. Así, $\langle \psi, (\nabla^A)^\dagger \nabla^A \psi \rangle = \langle (\nabla^A)^\dagger \nabla^A \psi, \psi \rangle$. Como ∇^A preserva el producto interno en el haz de espinores, se tiene que

$$\begin{aligned} -\sum_{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\mu} |\psi|^2 &= -\sum_{\mu} \langle \nabla_{\mu}^A \nabla_{\mu}^A \psi, \psi \rangle - \langle \psi, \nabla_{\mu}^A \nabla_{\mu}^A \psi \rangle - 2 \langle \nabla_{\mu}^A \psi, \nabla_{\mu}^A \psi \rangle \\ &= \langle (\nabla_{\mu}^A)^\dagger \nabla_{\mu}^A \psi, \psi \rangle + \langle \psi, (\nabla_{\mu}^A)^\dagger \nabla_{\mu}^A \psi \rangle - 2 \sum_{\mu} |\nabla_{\mu}^A \psi|^2 \\ &= 2 \langle (\nabla_{\mu}^A)^\dagger \nabla_{\mu}^A \psi, \psi \rangle - 2 \sum_{\mu} |\nabla_{\mu}^A \psi|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\langle (\nabla_{\mu}^A)^\dagger \nabla_{\mu}^A \psi, \psi \rangle = \Delta |\psi|^2 + 2 \sum_{\mu} |\nabla_{\mu}^A \psi|^2$ sobre toda la variedad. En la ecuación anterior, Δ denota al laplaciano de Hodge $-\star d \star d$ que en coordenadas locales está representado por el operador $-\sum_{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\mu}$. En particular, si $p \in M^4$ es un máximo de $|\psi|$ entonces $\Delta |\psi|^2(p) \geq 0$. Estas consideraciones implican que

$$\frac{R(p)}{4} |\psi|^2(p) + \frac{1}{4} |\psi|^4(p) \leq 0.$$

Como p es un máximo de $|\psi|$ y $\psi \neq 0$ podemos dividir la desigualdad anterior por el factor $|\psi|^2(p)$ para obtener la desigualdad (1.10). \square

COROLARIO 1.2. *Si (M^4, g) es de curvatura escalar no negativa todas las soluciones a las ecuaciones de Seiberg-Witten tienen $\psi \equiv 0$. Si además, $b_2^+(M^4) > 0$, para una elección genérica de métrica riemanniana g , las soluciones a las ecuaciones de Seiberg-Witten en (M^4, g) son conexiones planas y espinores $\psi \equiv 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que (A, ψ) es una configuración que satisface las ecuaciones de Seiberg-Witten $\text{SW}(A, \psi) = 0$. Si la curvatura escalar de (M^4, g) es no negativa, se sigue inmediatamente del lema anterior que $\psi \equiv 0$. Ahora, la teoría de Chern-Weil [49, 31] establece que la curvatura de cualquier conexión unitaria A representa a la primera clase de Chern $c_1(L) \in H^2(M^4; \mathbb{Z}) \subset H_{dR}^2(M^4; \mathbb{R})$ del haz determinante $L \rightarrow M^4$ (ver ejemplo 4.3 en la página 69). El factor de normalización $1/2\pi i$ hace que $c_1(L) = [1/2\pi i F_A]$ sea una clase entera. Hemos visto que bajo las hipótesis del presente corolario cualquier solución suave a las ecuaciones de Seiberg-Witten es de la forma $(A, 0)$; en este caso, la ecuación de curvatura se reduce a $F_A^+ = 0$. En particular;

$$(1.11) \quad [1/2\pi i F_A] \in H_-^2(M^4) \cap H^2(M^4; \mathbb{Z})/\text{Torsión}.$$

La intersección $H_-^2(M^4) \cap H^2(M^4; \mathbb{Z})/\text{Torsión}$ es un conjunto de puntos aislados. Esto se debe a que $H^2(M^4; \mathbb{Z})/\text{Torsión}$ es una retícula¹ que como espacio es una subvariedad de dimensión cero. En particular, $H_-^2(M^4) \cap H^2(M^4; \mathbb{Z})/\text{Torsión}$ es inestable bajo cambios en la métrica riemanniana de (M^4, g) . En contraste, la condición $R \geq 0$ es estable bajo pequeñas perturbaciones genéricas de la métrica. Dado que por hipótesis $H_-^2(M^4)$ es un subespacio de codimensión $b_2^+(M^4) > 0$, podemos elegir de manera genérica una métrica para M^4 de curvatura escalar no negativa para mover $H_-^2(M^4)$ dentro de $H_{dR}^2(M^4; \mathbb{R})$ tal manera que

$$H_-^2(M^4) \cap H^2(M^4; \mathbb{Z})/\text{Torsión} = 0.$$

Esta condición implica que $[F_A^-] = 0$ y así $[1/2\pi i F_A] = 0$. En otras palabras, F_A es una 2-forma exacta, i.e., $F_A = dB$. Así, $A - B$ es una conexión unitaria de curvatura $F_{A-B} = d(A - B) = 0$ que resuelve las ecuaciones de Seiberg-Witten $\text{SW}(A - B, 0) = 0$. \square

OBSERVACIÓN 1.3. El corolario 4.2 en la página 72 demuestra que $H_{\pm}^2(M^4)$ es independiente (como conjunto) de la elección de métrica riemanniana para M^4 ; sin embargo, al cambiar la métrica en M^4 se modifican puntualmente todos los elementos de $H_{\pm}^2(M^4)$. Por ejemplo, cambiando la métrica por un factor de escala $\lambda : M^4 \rightarrow (0, \infty) \subset \mathbb{R}$ cambiamos la longitud de las 2-formas y esto puede afectar severamente las clase de cohomología en $H_{\pm}^2(M^4)$.

Para una perturbación τ distinta de cero, se tiene el siguiente

PROPOSICIÓN 1.4. *Para toda configuración $(A, \psi) \in \mathcal{C}(L)$ se tiene la identidad*

$$(1.12) \quad E_{\tau}(A, \psi) + \frac{1}{8} \|\psi\|_{L^2}^2 = E_0(A, \psi) + \int_{M^4} F^+ \wedge \tau + |\eta(\psi) - \tau|^2.$$

DEMOSTRACIÓN. De nuevo, usando la formula de Weitzenböck y el hecho de que τ es auto-dual, se tiene tras un cálculo elemental que

$$\begin{aligned} E_{\tau}(A, \psi) &= \int_{M^4} |\nabla^A \psi|^2 + |F_A^+|^2 + \frac{R}{4} |\psi|^2 + F_A^+ \wedge \tau + |\eta(\psi) - \tau|^2 \\ &= E_0(A, \psi) - \|\psi\|_{L^2}^2 + \int_{M^4} F_A^+ \wedge \tau + |\eta(\psi) - \tau|^2 \end{aligned}$$

para toda configuración (A, ψ) . \square

¹Sea V un espacio vectorial real y $R \subset V$. Decimos que R es una retícula generada por los elementos v_1, v_2, \dots si todo elemento de R es una combinación lineal de los vectores v_1, v_2, \dots con coeficientes enteros.

La fórmula (1.12) nos dice que una configuración de la forma $(A, 0)$, con A una conexión de curvatura anti-auto dual (instanton abeliano), no puede ser solución de las ecuaciones de Seiberg-Witten $\text{SW}_\tau(A, 0) = 0$ si τ es distinta de cero. De hecho, podemos asegurar que

COROLARIO 1.4. *Supongamos que M^4 tiene $b_2^+(M^4) > 0$. Entonces para toda elección de $\tau \neq 0$, las ecuaciones (1.7) perturbadas por τ no admiten soluciones con $\psi \equiv 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Para llegar a una contradicción supongamos que existe una solución de las ecuaciones $\text{SW}_\tau(A, 0) = 0$ de la forma $(A, 0)$, con τ no cero. En estas condiciones la ecuación de curvatura derivada de las ecuaciones de Seiberg-Witten dice que $F_A^+ = \tau$. Si además, $b_2^+(M^4) > 0$, concluimos que τ representa una clase no trivial en la misma clase de cohomología que F_A^+ ; que es una clase entera. Por tanto, podemos elegir τ de manera que $[\tau]$ no forme parte de la retícula $H^2(M^4; \mathbb{Z}) \subset H_{dR}^2(M^4; \mathbb{R})$, lo que es absurdo. \square

2. El Grupo de Norma y su Acción en el Espacio de Configuraciones

Toda teoría en física está definida por un conjunto de ecuaciones escritas en un lenguaje independiente de coordenadas; sin embargo, en muchas ocasiones uno debe elegir un sistema de referencia particular para describir una situación dentro de la teoría. Más aún, distintas elecciones de sistemas coordenadas usualmente están relacionados por transformaciones que conforman el llamado *grupo de simetría de la teoría*. La teoría de Seiberg-Witten, al igual que la teoría de Yang-Mills, son ejemplos de una sub-familia de teorías, llamadas de norma, asociadas a un cierto G -haz principal. La acción del grupo en el haz principal induce una acción en el espacio de configuraciones de la teoría. Requerir que la teoría sea independiente de coordenadas es equivalente a pedir que las ecuaciones sean invariantes bajo la acción en el espacio de configuraciones inducida por el grupo de norma.

DEFINICIÓN 2.1 (Grupo de Norma). Sea $q : L \rightarrow M^4$ el haz determinante asociado a una estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$. El grupo de norma de L , denotado por $\mathcal{G}(L)$, es el grupo automorfismos del haz L .

De acuerdo con la definición anterior, un elemento $\lambda \in \text{Diff}(L)$ es una *transformación de norma*² si $\lambda : L \rightarrow L$ preserva las fibras de $q : L \rightarrow M^4$. Es decir, si el diagrama de abajo es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\lambda} & L \\
 & \searrow q & \swarrow q \\
 & & M^4,
 \end{array}$$

Además se requiere que $\lambda \in \mathcal{G}(L)$ actúe por automorfismos lineales en cada fibra de $q : L \rightarrow M^4$.

OBSERVACIÓN 2.2. El grupo de norma de $L \rightarrow M^4$ es abeliano. Más aún, si L tiene una métrica hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathcal{G}(L)$ contiene un subgrupo normal $\mathcal{G}(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

²Del ingles *Gauge transformation*. Otros autores emplean como un sinónimo el término *transformación de calibración*.

que consiste de todos los automorfismos de L que preservan $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Los elementos de $\mathcal{G}(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se representan por funciones locales con valores en $U(1)$.

El grupo de norma que nos será útil para desarrollar la teoría de Seiberg-Witten es precisamente el grupo normal $\mathcal{G}(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, que de ahora y en adelante denotaremos simplemente como $\mathcal{G}(L)$. Este grupo actúa naturalmente en el espacio de configuraciones $\mathcal{C}(L)$ así como en el contradominio $\mathcal{R}(L)$ del mapeo de Seiberg-Witten.

DEFINICIÓN 2.3 (Acciones del Grupo de Norma). Dado $\lambda \in \mathcal{G}(L)$, $(A, \psi) \in \mathcal{C}(L)$ y $(\chi, \omega) \in \mathcal{R}(L)$ denotamos por $\lambda \cdot (A, \psi)$ y $\lambda \cdot (\chi, \omega)$ a las aplicaciones

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{G}(L) \times \mathcal{C}(L) &\longrightarrow \mathcal{C}(L), & \mathcal{G}(L) \times \mathcal{R}(L) &\longrightarrow \mathcal{R}(L) \\ (\lambda, (A, \psi)) &\mapsto (A - \lambda^{-1}d\lambda, \lambda\psi), & (\lambda, (\chi, \omega)) &\mapsto (\lambda\chi, \omega). \end{aligned}$$

Note que las correspondencias definidas arriba determinan acciones izquierdas del grupo grupo de norma $\mathcal{G}(L)$ en el espacio de configuraciones $\mathcal{C}(L)$ así como en el codominio del mapeo de Seiberg-Witten $\mathcal{R}(L)$.

Sea X un espacio y G un grupo topológico. Supongamos que existe una acción continua $G \curvearrowright X$. El *estabilizador* de un punto $x \in X$ bajo la acción $G \curvearrowright X$, denotada como G_x , es el conjunto de todos los elementos en G que tienen a x como punto fijo. Es fácil ver que G_x es un subgrupo de G para toda $x \in X$. La órbita de x es el conjunto de todos los elementos de la forma $g \cdot x$ con $g \in G$.

Es bien conocido que los estabilizadores de una acción $G \curvearrowright X$ determinan en buena medida la topología del espacio de órbitas X/G . Por ejemplo, la acción de \mathbb{Z}_2 en la 3-bola unitaria $D^3 \subset \mathbb{R}^3$ generada por la reflexión $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ es suave; además, el estabilizador de cualquier punto de la forma $(x, y, 0)$ es todo \mathbb{Z}_2 . Sin embargo, el espacio de órbitas D^3/\mathbb{Z}_2 no es una variedad diferenciable por que tiene esquinas en la clase de puntos representados por $(x, y, 0)$. En contraste, la acción antipodal de \mathbb{Z}_2 en la 2-esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ es suave y sin puntos fijos. El espacio de orbitas es una variedad suave difeomorfa al plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$. Decimos que una acción $G \curvearrowright X$ es *libre* si tiene estabilizadores triviales en todos los puntos de X . Una acción $G \curvearrowright X$ es *propriadamente discontinua* si la proyección canónica $X \rightarrow X/G$ es un recubrimiento. Es fácil ver que toda acción propriadamente discontinua es libre. En [10] se demuestra que

TEOREMA 2.1. *Si X es una variedad suave, G es un grupo de Lie y $G \curvearrowright X$ es suave y propriadamente discontinua, el espacio de órbitas X/G es una variedad diferenciable.*

La discusión anterior nos conduce naturalmente a estudiar los estabilizadores de la acción $\mathcal{G}(L) \curvearrowright \mathcal{C}(L)$.

PROPOSICIÓN 2.1. *Supongamos que M^4 es conexa. Sea $L \rightarrow M^4$ el haz determinante de alguna estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$. Entonces los estabilizadores de la acción del grupo de norma $\mathcal{G}(L)$ en el espacio de configuraciones $\mathcal{C}(L)$ satisfacen*

$$(2.2) \quad \mathcal{G}(L)_{(A, \psi)} \simeq \begin{cases} U(1) & \text{si } \psi = 0 \\ 0 & \text{si } \psi \neq 0. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un elemento $\lambda : M^4 \rightarrow U(1)$ en el estabilizador de una configuración (A, ψ) . Por definición, tenemos que $A - \lambda^{-1}d\lambda = A$. Está

condición implica que $d\lambda = 0$; es decir, λ es localmente constante y por tanto constante por la hipótesis de conexidad impuesta sobre M^4 . La segunda coordenada de $\lambda \cdot (A, \psi)$ nos dice que $\lambda\psi = \psi$. Entonces, si ψ no se anula idénticamente, existe un punto $x \in M^m$ tal que la ecuación $\lambda(x)\psi(x) = \psi(x)$ tiene por solución $\lambda(x) = 1$. Esto prueba que λ es constante con valor 1. Si ψ se anula en todos los puntos de M^4 , solo podemos concluir que λ es constante. En este caso, el isomorfismo $\mathcal{G}(L)_{(A,0)} \rightarrow \text{U}(1)$ está inducido por la evaluación en un punto $x \in M^4$ cualquiera, es decir, por $\lambda \mapsto \lambda(x)$. \square

DEFINICIÓN 2.4. Una configuración $(A, \psi) \in \mathcal{C}(L)$ es irreducible si $\psi \neq 0$. En otro caso, (A, ψ) es una configuración reducible.

El teorema 2.1 nos dice que las configuraciones deseables son las irreducibles. Estas configuraciones forman un conjunto abierto dentro del espacio de configuraciones $\mathcal{C}(L)$. El corolario 1.4 nos dice que bajo la hipótesis $b_2^+(M^4) > 0$, el espacio de soluciones a las ecuaciones de Seiberg-Witten perturbadas por una 2-forma no nula está totalmente contenido en el subespacio de configuraciones irreducibles.

PROPOSICIÓN 2.2. El mapeo de Seiberg-Witten SW_τ es equivariante bajo las acciones del grupo de norma $\mathcal{G}(L)$ definidas arriba. En otras palabras, el diagrama

$$(2.3) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(L) & \xrightarrow{\text{SW}_\tau} & \mathcal{R}(L) \\ \lambda \cdot \downarrow & & \downarrow \lambda \cdot \\ \mathcal{C}(L) & \xrightarrow{\text{SW}_\tau} & \mathcal{R}(L) \end{array}$$

es conmutativo para toda $\lambda \in \mathcal{G}(L)$.

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar la proposición basta hacer un cálculo muy simple. Por un lado,

$$\lambda \cdot \text{SW}_\tau(A, \psi) = \lambda \cdot (D_A^+ \psi, F_A^+ - \eta(\psi) - \tau) = (\lambda D_A^+ \psi, F_A^+ - \eta(\psi) - \tau),$$

por otra parte,

$$\text{SW}_\tau \circ \lambda \cdot (A, \psi) = \text{SW}_\tau(A - \lambda^{-1} d\lambda, \lambda\psi) = (\not{D}_{A - \lambda^{-1} d\lambda}^+ (\lambda\psi), F_{A - \lambda^{-1} d\lambda}^+ - \eta(\lambda\psi) - \tau).$$

La curvatura de una conexión unitaria B en L está dada por dB , en particular

$$F_{A - \lambda^{-1} d\lambda} = dA - d(\lambda^{-1} d\lambda) = F_A + \lambda^{-2} d\lambda \wedge d\lambda = F_A.$$

Por tanto la parte autodual de la curvatura asociada a la conexión $A - \lambda^{-1} d\lambda$ coincide con F_A^+ . La 2-forma η es claramente invariante bajo acción del grupo de norma. Finalmente usamos las identidades (6.6) en la página 80 para deducir que

$$\not{D}_{A - \lambda^{-1} d\lambda}^+ (\lambda\psi) = \not{D}(\lambda\psi) + (A - \lambda^{-1} d\lambda) \cdot (\lambda\psi) = \lambda(\not{D}\psi + A \cdot \psi) + d\lambda \cdot \psi - d\lambda \cdot \psi = \lambda \not{D}_A^+ \psi.$$

Como \not{D}_A^+ se obtiene del operador de Dirac \not{D}_A aplicando una proyección lineal, concluimos que $D_{A - \lambda^{-1} d\lambda}^+ (\lambda\psi) = \lambda \not{D}_A^+ \psi$. Esto concluye la prueba. \square

De la proposición anterior se sigue que, en caso de existir, las soluciones a las ecuaciones de Seiberg-Witten forman un conjunto invariante bajo la acción del grupo de norma en el espacio de configuración. Una consecuencia inmediata del corolario 1.4 es que

COROLARIO 2.2. *La acción del grupo de norma en el espacio de soluciones a las ecuaciones $\text{SW}_\tau(A, \psi) = 0$ es libre si $\tau \neq 0$ y $b_2^+(M^4) > 0$.*

3. El Espacio Moduli de Monopolos

Esta sección está dedicada a probar que, bajo ciertas condiciones sobre el invariante topológico $b_2^+(M^4)$, el espacio de soluciones a las ecuaciones de Seiberg-Witten perturbadas es una variedad suave orientable y compacta de dimensión finita.

3.1. Compacidad del Espacio Moduli de Monopolos.

DEFINICIÓN 3.1. Sea $L \rightarrow M^4$ el haz determinante asociado a una estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ y $\tau \in \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R})$ una 2-forma auto-dual. Definimos el *espacio moduli de Monopolos* $\mathcal{M}_\tau(L)$ como

$$(3.1) \quad \mathcal{M}_\tau(L) := \text{SW}_\tau^{-1}(0)/\mathcal{G}(L).$$

OBSERVACIÓN 3.2. El espacio moduli de monopolos es un subconjunto del espacio ambiente $\mathcal{C}(L)/\mathcal{G}(L)$. La topología que elegimos para el espacio moduli de monopolos es la topología de subespacio heredada de la topología de identificación inducida por las *normas de Sobolev* en el espacio de configuración.

La compacidad del espacio del moduli de monopolos también se basa en ciertas propiedades de los espacios de Sobolev asociados a las normas de Sobolev. Para introducir estos conceptos es necesario recordar que la conexión ∇^A definida en el haz de espinores derechos $\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}$ define una sección suave $\nabla^A \psi \in \Gamma(T^*M^4 \otimes \hat{\Sigma}_-^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L})$. Por otra parte, la conexión de Levi-Civita ∇^g asociada a la métrica g induce una conexión $(\nabla^g)^t$ en el haz cotangente de M^4 . Con estas consideraciones en mente podemos definir una nueva conexión en el haz $T^*M^4 \otimes \hat{\Sigma}_-^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}$ dada por $(\nabla^g)^t \otimes \nabla^A$. De esta manera, definimos

$$(3.2) \quad (\nabla^A)^2 \psi := ((\nabla^g)^t \otimes \nabla^A) \circ \nabla^A \psi.$$

De manera inductiva se define para cada entero $k > 0$ el operador

$$(\nabla^A)^k : \Gamma(\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}) \rightarrow \Gamma(\otimes^k T^*M^4 \otimes \hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}).$$

DEFINICIÓN 3.3 (Normas de Sobolev). Sean p y k enteros positivos, y ψ un campo espinorial derecho. La *norma de Sobolev* $\|\cdot\|_{p,k} : \hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L} \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$(3.3) \quad \|\psi\|_{p,k} := \left(\int_{M^4} |\psi|^p + |\nabla^A \psi|^p + \dots + |(\nabla^A)^k \psi|^p \right)^{1/p}.$$

La aplicación $\|\cdot\|_{p,k}$ satisface los axiomas que la convierten en una norma. La completación del módulo de secciones del haz de espinores derechos $\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}$ en la norma de Sobolev se llama *espacio de Sobolev* y se denota

$$(3.4) \quad \Gamma_k^p \left(\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L} \right).$$

Para todo valor admisible de la pareja (p, k) , el espacio de Sobolev asociado al módulo de secciones del haz de espinores derechos es un espacio de Banach de dimensión infinita. De hecho, $\Gamma_k^2 \left(\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L} \right)$ es un espacio de Hilbert para

toda k . De ahora y en adelante, la topología en cualquier espacio de Sobolev será la topología inducida por la correspondiente norma de Sobolev.

La importancia de los espacios de Sobolev se debe a los siguientes teoremas que a continuación enunciamos y que usaremos más adelante. El lector interesado encontrará en [16] una sección completa dedicada a presentar detalladamente la teoría de espacios de Sobolev para haces vectoriales hermitianos dotados de una conexión unitaria; así como las pruebas de los siguientes resultados.

TEOREMA 3.1 (De encaje de Sobolev). *Sea (M^4, g) una variedad riemanniana compacta y orientable. Supongamos que $E \rightarrow M^4$ es un haz vectorial suave. Sean $\Gamma_k^p(E)$ el espacio de Sobolev correspondiente y $C^q(E)$ el espacio de secciones de E de clase C^q . Entonces existe un encaje continuo*

$$(3.5) \quad \Gamma_k^p(E) \rightarrow C^q(E),$$

para toda pareja (p, k) tal que $k - 4/p > q$.

TEOREMA 3.2 (De Rellich). *Sean (M^4, g) y E como en el teorema de encaje de Sobolev. Entonces, la inclusión $\Gamma_{k+1}^p(E) \hookrightarrow \Gamma_k^p(E)$ es compacta para todo (p, k) .*

OBSERVACIÓN 3.3. La compacidad de la inclusión $\Gamma_{k+1}^p(E) \hookrightarrow \Gamma_k^p(E)$ significa lo siguiente; dada una sucesión $\{\psi_n\}$ tal que $\|\psi_n\|_{p, k+1} \leq C$ para toda n , existe una subsucesión $\{\psi'_n\} \subseteq \{\psi_n\}$ que es de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_{p, k}$ y por tanto converge en $\Gamma_k^p(E)$. En pocas palabras, basta acotar uniformemente una sucesión en $\Gamma_{k+1}^p(E)$ para extraer una subsucesión convergente en $\Gamma_k^p(E)$.

La proposición 4.1 en la página 63 nos dice que el espacio de conexiones unitarias del haz determinante $L \rightarrow M^4$ es un espacio afín modelado sobre el espacio vectorial $\Omega^1(M^4; \text{Ad}(L)) = \Omega^1(M^4; i\mathbb{R})$. Esto quiere decir que si elegimos de una vez por todas una conexión base $A \in \text{Conn}_{\text{U}(1)}(L)$ podemos obtener cualquier otra conexión sumando a A una 1-forma adecuada $a \in \Omega^1(M^4; i\mathbb{R})$. Esta elección de conexión base nos permite trasladar la estructura de espacio vectorial al conjunto de conexiones unitarias en L . Asumiremos esta identificación hasta terminar esta sección.

Las consideraciones anteriores nos permiten definir una norma de Sobolev para el espacio de conexiones $\|\cdot\|_{p, k} : \Omega^1(M^4; i\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Así, tenemos para cada pareja de enteros positivos (p, k) un espacio de Banach definido por la completación en la norma de Sobolev del espacio de conexiones unitarias en L , denotado como $\text{Conn}_{\text{U}(1)_k^p}(L)$. Esto nos permite definir

$$(3.6) \quad \mathcal{C}_k^p(L) := \Gamma_k^p(\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L}) \times \text{Conn}_{\text{U}(1)_k^p}(L).$$

De manera similar se tiene el espacio de Banach de todas las transformaciones de norma $\mathcal{G}_k^p(L)$. El siguiente resultado de análisis nos dice que el grupo de norma $\mathcal{G}_k^p(L)$ actúa en el espacio de configuraciones $\mathcal{C}_k^p(L)$.

TEOREMA 3.4. *Sean (M^4, g) como en el Teorema 3.1, $E \rightarrow M^4$ y $F \rightarrow M^4$ haces vectoriales suaves. Entonces para $k - 4/p > 0$ existe una multiplicación continua*

$$(3.7) \quad \Gamma_k^p(E) \otimes \Gamma_k^p(F) \rightarrow \Gamma_k^p(E \otimes F).$$

Note que si E es isomorfo al haz trivial $\mathbb{C} \times M^4 \rightarrow M^4$ y F es un haz complejo, entonces $E \otimes F \simeq F$. En particular, $\Gamma_k^p(F)$ es un álgebra de Banach compleja si $k - 4/p > 0$. Como un caso particular del teorema anterior tenemos el siguiente.

COROLARIO 3.5. *La acción del grupo de norma $\mathcal{G}_k^p(L)$ definida como en (2.1) dota al espacio de Sobolev $\Gamma_k^p(\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L})$ de estructura de álgebra de Banach compleja para todo (p, k) tal que $k - 4/p > 0$.*

Finalmente, vamos a hacer uso del siguiente resultado, conocido como *desigualdad elíptica fundamental*.

TEOREMA 3.6. *Considere $E \rightarrow M^n$ y $F \rightarrow M^n$ dos haces vectoriales sobre una variedad riemanniana, compacta y orientable M^n . Sea $D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ un operador elíptico. Entonces para toda $s \in \Gamma(E)$ existe una constante C independiente de s tal que*

$$(3.8) \quad \|s\|_{p, k+1} \leq C \left[\|s\|_{p, k} + \|Ds\|_{p, k} \right].$$

Si además D tiene núcleo trivial, entonces el término $\|Ds\|_{p, k}$ puede omitirse en la desigualdad (3.8).

OBSERVACIÓN 3.7. Los teoremas de encaje de Sobolev junto con la desigualdad elíptica fundamental permiten controlar la regularidad de las soluciones a la ecuación $Ds = \sigma$. Por ejemplo; si σ es una sección suave de $F \rightarrow M^n$ y podemos acotar $\|s\|_{p, k_0}$ para alguna pareja (p, k_0) entonces la desigualdad (3.8) implica que la norma L_k^p de s está acotada para toda (p, k) con $k > k_0$. En particular, si (p, k_0) están en un rango en el que se satisfacen las hipótesis del teorema de encaje de Sobolev, entonces $s \in C^K$ para alguna $K = K(p, k_0)$. A este fenómeno se le conoce como *regularidad elíptica*.

Ahora estamos listos para demostrar la primera parte del teorema fundamental de la teoría de Seiberg-Witten.

TEOREMA 3.8 (De compacidad). *Sea M^4 una 4-variedad suave, cerrada y orientada. Adicionalmente, supongamos que M^4 es simplemente conexa, es decir, que $\pi_1(M^4) = 0$. Si $\tau \in \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R})$ es no nula, entonces toda sucesión $\{(A_n, \psi_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de soluciones a las ecuaciones de Seiberg-Witten (1.7) perturbadas por τ admite una subsucesión que converge a una solución suave.*

La demostración del teorema anterior se basa en el siguiente.

LEMA 3.1. *Con las hipótesis del teorema de compacidad se tiene que toda conexión unitaria en $\text{Conn}_{\text{U}(1)}(L)$ es equivalente bajo la acción del grupo de norma a una conexión de la forma $A + a$, con A suave y $a \in \Omega^1(M^4; i\mathbb{R})$ cocerrada, es decir, tal que $\delta a = 0$.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE COMPACIDAD. Las ecuaciones de Seiberg-Witten perturbadas por una 2-forma suave $\tau \neq 0$ en la norma donde la conexión $A + a$ tiene $\delta a = 0$ (Norma de Coulomb) se leen

$$(S-W-C) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_A^+ \psi &= a \cdot \psi \\ (da)^+ &= \eta(\psi) - F_A^+ + \tau \\ \delta a &= 0. \end{aligned}$$

Supongamos que $\{(\psi_n, a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de soluciones a las ecuaciones (S-W-C). El lema 1.1 implica que ψ_n está acotado en la norma L^p para toda $n \in \mathbb{N}$

sin importar el valor de p . Observe que las ultimas dos ecuaciones de Seiberg-Witten relacionan las variables (ψ_n, a_n) por medio del operador de Dirac

$$(d + \delta)^+ : \Omega^1(M^4; i\mathbb{R}) \rightarrow \Omega^0(M^4; i\mathbb{R}) \oplus \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R})$$

estudiado en la proposición 6.5. La desigualdad elíptica fundamental implica que a_n está acotado en la norma L_1^p para toda p y toda n . En efecto,

$$\|a_n\|_{p,1} \leq C \left[\|a_n\|_p + \|(d + \delta)^+ a_n\|_p \right] = C \left[\|a_n\|_p + \|\eta(\psi_n) - F_A^+ + \tau\|_p \right],$$

como el termino $\eta(\psi_n) - F_A^+ + \tau$ es por lo menos continuo tenemos que $\|a_n\|_{p,1}$ está acotado. Recuerde que a_n es de clase C^0 , esto significa en particular que $a_n \cdot \psi_n \in \Gamma_0^p \left(\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g) \otimes \sqrt{L} \right)$ por el corolario 3.5. Esto nos permite usar la desigualdad elíptica fundamental aplicada a la primera ecuación del sistema (S-W-C) para acotar la norma $\|\psi\|_{p,1}$ para todo valor de p . De nuevo, $\mathcal{C}_1^p(L)$ es un álgebra de Banach respecto de la multiplicación inducida por la acción del grupo de norma si $p > 4$; así tenemos que $a_n \cdot \psi_n$ está acotado en L_1^p . Como $\eta(\psi_n)$ es por lo menos de clase C^1 , vemos que $\|a_n\|_{p,2}$ está acotado para toda p . Esto implica de nueva cuenta que ψ_n está acotado en L_2^p .

Solo hasta este punto podemos valernos de la regularidad del termino $\eta(\psi_n) - F_A^+ + \tau$ para acotar las normas sucesivas de las variables (ψ_n, a_n) . Para continuar con el procedimiento de regularización usamos que el operador $(d + \delta)^+$ tiene núcleo trivial por hipótesis ($b_1(M^4) = 0$.) Esto nos permite omitir en la desigualdad fundamental la contribución adicional asociada con las normas de $\eta(\psi_n) - F_A^+ + \tau$. De esta manera vemos que (ψ_n, a_n) está acotado en L_k^p para todo k , todo n y todo $p > 4$. Por el teorema de Rellich, podemos extraer de $\{(\psi_n, a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una subsucesión que, por los teoremas de encaje de Sobolev, converge a una solución suave de (S-W-C). \square

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3.1. Sea A una conexión unitaria cualquiera definida en el haz determinante $L \rightarrow M^4$. Como M^4 es simplemente conexa, toda transformación de norma $\lambda : M^4 \rightarrow S^1$ queda determinada por un levantamiento $u : M^4 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la relación $\lambda = \exp(2\pi i u)$. Usando tal levantamiento la acción del grupo de norma en el espacio de conexiones unitarias se simplifica, tomando la forma $A \in \text{Conn}_{U(1)}(L) \mapsto A - 2\pi i du$. Por tanto, para probar la existencia de una transformación de norma λ tal que $\lambda \cdot A$ tenga una matriz de conexión cocerrada basta encontrar una aplicación suave $u : M^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\delta(A + du) = 0$. En otras palabras, debemos resolver la *ecuación de Poisson*

$$\Delta u = -\delta A.$$

La condición necesaria y suficiente para resolver la ecuación escalar $\Delta f = g$ en una variedad riemanniana arbitraria es que $g \in \Omega^0(M^4)$ sea ortogonal al espacio de funciones armónicas $\mathcal{H}^0(M^4)$ con respecto al producto L^2 [39]. Recuerde que $\mathcal{H}^0(M^4)$ está generado por la función constante $c_1 : M^4 \rightarrow \mathbb{R}$ con valor 1. El valor del producto interno $(1, \delta A)_{L^2}$ es igual a

$$\int_{M^4} c_1 \wedge \star \delta A = - \int_{M^4} d \star A,$$

que es idénticamente cero por el teorema de Stokes. Esto significa que la ecuación de Poisson $\Delta u = -\delta A$ admite al menos una solución. Ahora pasamos a demostrar la unicidad de las soluciones. Supongamos que $A + a_0$ y $A + a_1$ son dos conexiones

unitarias equivalentes bajo la acción del grupo de norma tales que $\delta a_0 = \delta a_1 = 0$. Esta última ecuación es equivalente a la condición $d(a_0 - a_1) = 0$. Ahora, como M^4 es simplemente conexa, se tiene que $b_1(M^4) = 0$; así, $a_0 - a_1 = df$ para alguna función suave f con valores reales. Pero

$$\|a_0 - a_1\|_{L^2}^2 = (df, a_0 - a_1)_{L^2} = (f, \delta[a_0 - a_1])_{L^2} = 0.$$

Por lo tanto, $a_0 = a_1$. Esto demuestra la unicidad y concluye la prueba del lema 3.1. \square

OBSERVACIÓN 3.9. La compacidad de \mathcal{M}_τ es independiente de cualquier condición adicional sobre el grupo fundamental $\pi_1(M^4)$. Hemos elegido discutir el caso simplemente conexo por que los argumentos que demuestran la compacidad del espacio moduli de monopolos se simplifican enormemente. El argumento para una 4-variedad con grupo fundamental arbitrario puede consultarse en [32].

3.2. El Espacio Moduli de Monopolos es una Variedad Suave. A lo largo de esta sección implícitamente asumimos que el espacio de configuraciones $\mathcal{C}_k^p(L)$, el contradominio de la aplicación de Seiberg-Witten $\mathcal{R}_k^p(L)$ y el grupo de norma $\mathcal{G}_k^p(L)$, para $p \geq 2$, son variedades suaves modeladas sobre un espacio de Banach de dimensión infinita y que las acciones del grupo de norma $\mathcal{G}_k^p(L)$ definidas en estos espacios son suaves. En lo subsecuente omitimos los índices (p, k) en los espacios $\mathcal{C}(L)$, $\mathcal{G}(L)$, $\mathcal{R}(L)$ y en cualquier otro en el que tenga sentido la notación de índices (p, k) teniendo en cuenta que siempre se tratan con las completaciones asociadas a la normas de Sobolev. En [20] se demuestra que $\mathcal{G}(L) \curvearrowright \mathcal{C}(L)$ es una acción suave. Una excelente referencia que presenta la teoría clásica de variedades suaves sin asumir que están modeladas en espacios de Banach de dimensión finita es [23].

Para probar que el espacio moduli de monopolos \mathcal{M}_τ es una variedad suave, vamos a demostrar que $0 \in \mathcal{R}(L)$ es un valor regular de la aplicación de Seiberg-Witten $\text{SW}_\tau : \mathcal{C}(L) \rightarrow \mathcal{R}(L)$. Este hecho, junto con el *teorema de Sard-Smale* implican que \mathcal{M}_τ es una variedad suave para una elección genérica de perturbaciones $\tau \in \Omega^1(M^4; i\mathbb{R})$. En el enunciado anterior, un elemento es *genérico* si pertenece a un *conjunto residual*, que es por definición una intersección numerable de abiertos densos. Este programa requiere una extensión del teorema del valor regular para incluir mapeos entre variedades de dimensión infinita. La manera de hacer esto es introduciendo la noción de *aplicación de Fredholm*, que juegan el papel de las sumersiones.

DEFINICIÓN 3.4. Supongamos que M y N son variedades de Banach y que $F : M \rightarrow N$ es un mapeo suave. Decimos que F es de Fredholm en un punto $p \in M$ si la diferencial de F en p , $d_p F : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$, es una aplicación de Fredholm.

OBSERVACIÓN 3.5. Una aplicación lineal real $\mathcal{O} : V \rightarrow W$ es Fredholm si:

- i) El núcleo $\text{Ker } \mathcal{O}$ es de dimensión finita.
- ii) La imagen $\text{Im } \mathcal{O}$ es cerrada.
- iii) La codimensión de $\text{Im } \mathcal{O}$ en W es finita.

El índice de \mathcal{O} se define como $\dim_{\mathbb{R}} \text{Ker } \mathcal{O} - \dim_{\mathbb{R}} \text{Coker } \mathcal{O}$.

El teorema del valor regular para variedades de dimensión infinita establece que si $F : M \rightarrow N$ es de Fredholm y $q \in N$ es un valor regular, entonces $F^{-1}(q)$

es una subvariedad de M de dimensión finita dada por el índice de Fredholm de la aplicación $d_p F$, donde $p \in F^{-1}(q)$.

La discusión anterior implica que debemos estudiar el espacio tangente de las variedades $\mathcal{C}(L)$, $\mathcal{G}(L)$ y $\mathcal{R}(L)$. Comencemos esta investigación notando que el espacio tangente al espacio de configuraciones en un punto arbitrario (ψ, A) se parte como la suma directa

$$T_\psi \Gamma(\hat{\Sigma}_4^{\mathbb{C}}(M^4, g)) \oplus T_A \Gamma(i\Lambda^1 T^* M^4),$$

donde $\Gamma(i\Lambda^1 T^* M^4)$ denota a las 1-formas en M^4 con valores puramente imaginarios. Como ambos factores son espacios vectoriales complejos, podemos identificar estos espacios tangentes con sus espacios vectoriales subyacentes mediante traslaciones. Es decir, todo vector tangente en el punto (A, ψ) es de la forma $(\psi + t\chi, A + tB)$ con $(\chi, B) \in \mathcal{C}(L)$. De manera similar se tiene una identificación del espacio tangente al espacio vectorial $\mathcal{R}(L)$ con la variedad base.

PROPOSICIÓN 3.1. *La diferencial de la aplicación de Seiberg-Witten en una configuración arbitraria (ψ, A) ,*

$$d_{(\psi, A)} \text{SW}_\tau : T_{(A, \psi)} \mathcal{C}(L) \rightarrow T_{\text{SW}_\tau(A, \psi)} \mathcal{R}(L),$$

está dada por la aplicación lineal

$$(3.9) \quad (\psi + t\chi, A + tB) \mapsto \left(\not{D}_A \chi + B \cdot \psi, F_B^+ - \frac{1}{2} \text{Im}(\langle e_\mu e_\nu \psi, \chi \rangle) e^\mu \wedge e^\nu \right).$$

DEMOSTRACIÓN. La diferencial $d_{(\psi, A)} \text{SW}_\tau$ evaluada en un vector tangente de la forma $(\psi + t\chi, A + tB)$ es simplemente $\frac{d}{dt} \text{SW}_\tau(\psi + t\chi, A + tB)|_{t=0}$. Desarrollando esta última expresión se obtiene el resultado. \square

Dado que estamos interesados en soluciones a las ecuaciones de Seiberg-Witten salvo una transformación de norma, es necesario encontrar la expresión precisa de la linealización de acción del grupo de norma en el espacio de configuraciones. De nueva cuenta, como el grupo de norma es un grupo de Lie de dimensión infinita, basta determinar el espacio tangente en la identidad para conocer el espacio tangente $T_\lambda \mathcal{G}(L)$ para cualquier otra transformación de norma no trivial λ . Pero el grupo de norma $\mathcal{G}(L)$ admite un recubrimiento $\text{Maps}(M^4; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Maps}(M^4; S^1)$ inducido por el recubrimiento universal $\mathbb{R} \rightarrow S^1$. Como $\text{Maps}(M^4; \mathbb{R}) \simeq \Omega^0(M^4; i\mathbb{R})$ es un espacio vectorial de dimensión infinita, vemos que el espacio tangente a la identidad del grupo de norma se identifica con el espacio vectorial de las funciones con valores puramente imaginarios definidas en M^4 . Con respecto a esta identificación, la acción infinitesimal del grupo de norma en el espacio tangente al espacio de configuración está dada por la aplicación

$$L : \Omega^0(M^4; i\mathbb{R}) \rightarrow \Gamma(\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g)) \oplus \Omega^1(M^4; i\mathbb{R})$$

$$f \mapsto (f\psi, -df).$$

Ahora estamos listos para dar un modelo local del espacio tangente del espacio moduli en un monopolo $[\psi, A] \in \mathcal{M}_\tau(L)$.

PROPOSICIÓN 3.2. *Supongamos que (ψ, A) satisface la ecuación $\text{SW}_\tau(\psi, A) = 0$. Denotemos por S a la diferencial de la aplicación de Seiberg-Witten evaluada en la configuración (ψ, A) . Entonces, la siguiente sucesión de espacios vectoriales y transformaciones lineales*

$$(3.10) \quad 0 \rightarrow \Omega^0(M^4; i\mathbb{R}) \xrightarrow{L} \mathcal{C}(L) \xrightarrow{S} \mathcal{R}(L) \rightarrow 0$$

es un complejo de cadenas.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $L \circ 0 = 0$ y que $0 \circ S = 0$. Veamos ahora que $S \circ L = 0$ para toda solución (ψ, A) de las ecuaciones de Seiberg-Witten. Esto se sigue del cálculo

$$\begin{aligned} S \circ L(f\psi, -df) &= \left(\not{D}_A(f\psi) - df \cdot \psi, F_{-df}^+ - \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\langle e_\mu e_\nu \psi, f\psi \rangle) e^\mu \wedge e^\nu \right) \\ &= \left(f \not{D}_A \psi, -\frac{1}{2} \operatorname{Im}(-f \langle e_\mu e_\nu \psi, \psi \rangle) e^\mu \wedge e^\nu \right). \end{aligned}$$

En el argumento anterior hemos usado que $F_{-df} = -d^2 f = 0$. Ahora, como $\langle e_\mu e_\nu \psi, \psi \rangle$ es puramente imaginario, el término $\operatorname{Im}(-f \langle e_\mu e_\nu \psi, \psi \rangle)$ es idénticamente cero ya que f asume valores puramente imaginarios. Por lo tanto, si (ψ, A) satisface las ecuaciones de Seiberg-Witten entonces $\not{D}_A \psi = 0$ y se tiene que $S \circ L = 0$. \square

DEFINICIÓN 3.6. El complejo de cadenas (3.10) se llama *complejo de deformación* y se denota por $C_{\text{SW}}^*(\psi, A)$. La homología del complejo de deformación se denota como $H_{\text{SW}}^*(\psi, A)$ y está dada por

$$H_{\text{SW}}^0(\psi, A) = \operatorname{Ker} L, \quad H_{\text{SW}}^1(\psi, A) = \operatorname{Ker} S / \operatorname{Im} L, \quad H_{\text{SW}}^2(\psi, A) = \operatorname{Coker} S.$$

Note que $H_{\text{SW}}^2(\psi, A) = 0$ implica que \mathcal{M}_τ es una variedad suave.

OBSERVACIÓN 3.10. La interpretación geométrica del complejo de deformación es muy sencilla. Como hemos visto, la aplicación L es precisamente la linealización de la acción del grupo de norma en el espacio de configuraciones. Así, la condición $S \circ L = 0$ determina (a primer orden) las órbitas de la acción del grupo de norma que pasan por soluciones de las ecuaciones de Seiberg-Witten. Este tipo de órbitas corresponden con los puntos del espacio moduli de monopolos y las direcciones tangentes a estas órbitas son las direcciones en el espacio tangente de \mathcal{M}_τ .

De la proposición anterior solo podemos garantizar que $\operatorname{Im} L \subset \operatorname{Ker} S$. La homología del complejo de deformación en grado 1, $H_{\text{SW}}^1(\psi, A)$, no dice exactamente cuales direcciones corresponden a órbitas de la acción $\mathcal{G}(L) \curvearrowright \mathcal{C}(L)$ que no pasan por soluciones de las ecuaciones de Seiberg-Witten y cuales otras direcciones si lo hacen. En este sentido, podríamos afirmar que el espacio tangente a \mathcal{M}_τ en un monopolo arbitrario es precisamente $H_{\text{SW}}^1(\psi, A)$. Esto no es del todo cierto; los términos de $H_{\text{SW}}^*(\psi, A)$ en grado 0 y 2 representan obstrucciones a este hecho. Esta obstrucción se distingue incluso al nivel de las dimensiones, para ver esto basta calcular la característica de Euler del complejo de deformación $C_{\text{SW}}^*(\psi, A)$:

$$(3.11) \quad -\chi(C_{\text{SW}}^*(\psi, A)) = \dim_{\mathbb{R}} H_{\text{SW}}^1(\psi, A) - (\dim_{\mathbb{R}} H_{\text{SW}}^0(\psi, A) + \dim_{\mathbb{R}} H_{\text{SW}}^2(\psi, A))$$

que en general es distinta de $\dim_{\mathbb{R}} H_{\text{SW}}^1(\psi, A) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_\tau$.

TEOREMA 3.11 (De Transversalidad). $H_{\text{SW}}^0(\psi, A) = 0$. Además, si $b_2^+(M^4) > 0$ el espacio de obstrucción $H_{\text{SW}}^2(\psi, A)$ es trivial para una elección genérica de perturbación $\tau \in \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R})$ distinta de la perturbación cero.

DEMOSTRACIÓN. Una función $f \in \Omega^0(M^4)$ pertenece al núcleo de L si y solo si $df = 0$ y $f\psi = 0$ para todo $\psi \in \Gamma(\hat{\Sigma}_+^{\mathbb{C}}(M^4, g))$. Esto quiere decir que f es constante. Dado un punto cualquiera $x \in M^4$ siempre es posible construir un campo de espinores ψ tal que $\psi(x) \neq 0$. En vista de la ecuación $f(x)\psi(x) = 0$, la única posibilidad es que $f(x) = 0$ y así $f \equiv 0$. Esto prueba que $H_{\text{SW}}^0(\psi, A) = \operatorname{Ker} L = 0$ para toda configuración $(\psi, A) \in \mathcal{C}(L)$.

Consideremos ahora una 2 forma auto-dual $\tau \neq 0$. Por el corolario 1.4, sabemos que la condición topológica $b_2^+(M^4) > 0$ garantiza que todas las soluciones de $\text{SW}_\tau(\psi, A) = 0$ tiene $\psi \neq 0$. Afirmamos que bajo estas condiciones la diferencial de la aplicación

$$F : \mathcal{C}(L) \times \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R}) \rightarrow \Gamma(\hat{\Sigma}_-^{\mathbb{C}}(M^4, g)) \times \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R})$$

$$F(\psi, A, \tau) = (\text{SW}_\tau(\psi, A), \tau)$$

en una solución (ψ, A) de las ecuaciones de Seiberg-Witten es un epimorfismo. Denotemos por f a la diferencial de F calculada en el punto (ψ, A, τ) tal que (ψ, A) es una solución de las ecuaciones de Seiberg-Witten perturbadas por la 2-forma τ . Para cualquier vector tangente $(\chi, B, \omega) \in T_{(\psi, A, \tau)}\mathcal{C}(L) \times \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R})$ se tiene que $f(\chi, B, \omega) = (S(\chi, B), \omega)$. Note que la imagen de f está foliada por copias del subespacio $\{0\} \times \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R})$ obtenidas mediante traslaciones afines del parámetro ω . Por lo tanto, para probar que $\text{Coker } f = 0$ podemos suponer que $\omega \equiv 0$. Sea $(\Psi, 0) \in \Gamma(\hat{\Sigma}_-^{\mathbb{C}}(M^4, g)) \times \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R})$ ortogonal a la imagen de f restringida al subespacio $\mathcal{C}(L) \times \{0\}$ con respecto del producto L^2 dado por

$$\int_{M^4} \langle \mathcal{D}_A^+ \chi + B \cdot \psi, \Psi \rangle.$$

Usando las propiedades de los operadores \mathcal{D}_A^+ y $B \cdot$ con respecto al producto interno definido arriba, vemos que

$$\int_{M^4} \langle \mathcal{D}_A^+ \chi + B \cdot \psi, \Psi \rangle = (\chi + \psi, (\mathcal{D}_A^- + B \cdot) \Psi)_{L^2}.$$

Como $(\chi + \psi, (\mathcal{D}_A^- + B \cdot) \Psi)_{L^2} = 0$ para toda elección de χ y de B , podemos tomar $\chi \equiv 0$ y $B \equiv 0$. Así, $\mathcal{D}_A^- \Psi = 0$ en todos los puntos de M^4 . Como ψ no se anula idénticamente, vemos que $\mathcal{U} := M^4 \setminus \text{Supp } \psi$ es un abierto no vacío de M^4 sobre el cual se cumple la relación $\Psi = 0$. Esto se debe a que $\mathcal{D}_A^+ \psi = 0$ en todo M^4 y así

$$0 = (\psi, \mathcal{D}_A^- \Psi)_{L^2} = (\mathcal{D}_A^+ \psi, \Psi)_{L^2} \Rightarrow \Psi = 0 \text{ en } \mathcal{U}.$$

El teorema de identidad 6.3 implica que $\Psi \equiv 0$. Esto prueba que la $(0, 0) \in \Gamma(\hat{\Sigma}_-^{\mathbb{C}}(M^4, g)) \times \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R})$ es el único vector ortogonal a la imagen de f restringida a $\mathcal{C}(L) \times \{0\}$; por lo tanto la imagen de f cubre todo su contradominio. \square

COROLARIO 3.12. *Para una elección genérica de $\tau \in \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R})$, el espacio moduli de monopolos \mathcal{M}_τ es una variedad suave. El espacio tangente a \mathcal{M}_τ en un monopolo $[\psi, A]$ es isomorfo a $H_{\text{SW}}^1(\psi, A)$. Además*

$$(3.12) \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_\tau = \frac{c_1(L)^2[M^4] - 2\chi(M^4) - 3\sigma(M^4)}{4}.$$

DEMOSTRACIÓN. Lo único que hace falta demostrar es que la dimensión del espacio moduli de monopolos está dada por la ecuación (3.12). Supongamos que (ψ, A) es una solución de las ecuaciones de Seiberg-Witten. El complejo de deformación $C_{\text{SW}}^*(\psi, A)$ está formado por operadores elípticos. Más aún, $C_{\text{SW}}^*(\psi, A)$ es un ejemplo de *complejo elíptico*. Esto quiere decir que la sucesión de símbolos inducida por las diferenciales del complejo de deformación es exacta lejos de la sección cero de todos sus términos. Una extensión del teorema de índice de Atiyah-Singer permite calcular la característica de euler $\chi(C_{\text{SW}}^*(\psi, A))$ en términos del índice de

los operadores que conforman el complejo $C_{\text{SW}}^*(\psi, A)$. Note que podemos descartar los términos de orden cero en las diferenciales S y L de $C_{\text{SW}}^*(\psi, A)$ para obtener nuevos complejos

$$C_1^* : 0 \rightarrow \Omega^0(M^4; i\mathbb{R}) \xrightarrow{d} \Omega^1(M^4; i\mathbb{R}) \xrightarrow{d^+} \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R}) \rightarrow 0$$

$$C_2^* : 0 \rightarrow 0 \rightarrow \Gamma(\Sigma_+^{\mathbb{C}}(M^4, g)) \xrightarrow{\mathcal{D}_A^+} \Gamma(\Sigma_-^{\mathbb{C}}(M^4, g)) \rightarrow 0$$

tales que $C_1^* \oplus C_2^*$ es homotópico a $C_{\text{SW}}^*(\psi, A)$. En particular,

$$\chi(C_{\text{SW}}^*(\psi, A)) = \chi(C_1^* \oplus C_2^*) = \chi(C_1^*) + \chi(C_2^*).$$

Es claro que $\chi(C_2^*) = -\text{Ind}_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_A^+ = -2\text{Ind}_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_A^+$. Usando el teorema de índice para el operador de Dirac \mathcal{D}_A^+ 6.2 deducimos que

$$\chi(C_2^*) = \frac{\sigma(M^4) - c_1(L)^2[M^4]}{4}.$$

La homología del complejo C_1^* es

$$H_0(C_1^*) = \text{Ker } d$$

$$H_1(C_1^*) = \text{Ker } d^+ / \text{Im } d$$

$$H_2(C_1^*) = \Omega_+^2(M^4; i\mathbb{R}) / \text{Im } d^+.$$

Por lo tanto se tiene que $H_0(C_1^*) = H^0(M^4; \mathbb{R})$ y que $H_2(C_2^*)$ se identifica naturalmente con $H_+^2(M^4; \mathbb{R})$. Resulta que $H_1(C_1^*) \simeq H^1(M^4; \mathbb{R})$. Así

$$\begin{aligned} \chi(C_1^*) &= b^0(M^4) + b_+^2(M^4) - b^1(M^4) \\ &= \frac{1}{2} [\chi(M^4) + \sigma(M^4)]. \end{aligned}$$

En el cálculo anterior hemos usado la dualidad de Poincaré para identificar los números de Betti complementarios. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_\tau &= \frac{\sigma(M^4) - c_1(L)^2[M^4]}{4} - \frac{1}{2} [\chi(M^4) + \sigma(M^4)] \\ &= \frac{c_1(L)^2[M^4] - 2\chi(M^4) - 3\sigma(M^4)}{4}. \end{aligned}$$

□

3.3. Comentarios Finales Sobre los Invariantes de Seiberg-Witten.

Hemos visto que a cada 4-variedad riemanniana, cerrada y orientable (M^4, g) corresponde una familia de espacios \mathcal{M}_τ parametrizados por $\Omega^2(M^4; i\mathbb{R})$ dotados de una estructura de variedad suave de dimensión finita que además son compactos para una elección genérica de perturbación $\tau \in \Omega^2(M^4; i\mathbb{R})$. Una investigación detallada revela que \mathcal{M}_τ admite una orientación independiente de la elección del parámetro de perturbación [31], [32].

Supondremos de ahora y en adelante que la 2-forma τ se elige de tal manera que \mathcal{M}_τ tenga todas las características descritas anteriormente. Las propiedades de orientabilidad y compacidad simplifican enormemente el estudio de algunos invariantes topológicos clásicos del espacio moduli de monopolos como son: $H_*(\mathcal{M}_\tau)$, $H^*(\mathcal{M}_\tau)$ y la clase de cobordismo orientado $|\mathcal{M}_\tau|$ que, apropiadamente tratados, producen invariantes de la estructura diferenciable de M^4 . Una objeción a esta última afirmación es que la asociación $M^4 \rightsquigarrow \mathcal{M}_\tau$ depende implícitamente de varias

estructuras adicionales impuestas sobre M^4 y elegidas de manera aparentemente arbitraria; por ejemplo, uno puede preguntarse sobre la dependencia de \mathcal{M}_τ con respecto de la elección de: métrica riemanniana, orientación, y de manera más fundamental, de la elección de estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$. La respuesta a estas preguntas depende esencialmente del valor de $b_+^2(M^4)$. El caso más sencillo ocurre cuando $b_+^2(M^4) \geq 2$; en estas condiciones el espacio moduli de monopolos \mathcal{M}_τ varía por cobordismos cuando se perturba la métrica a lo largo de una trayectoria genérica en el espacio de métricas riemannianas de M^4 . Este hecho implica en particular que la clase de cobordismo de \mathcal{M}_τ permanece constante como función de la métrica riemanniana definida en M^4 ; por tanto, un primer invariante de la tripleta $(M^4, O(M^4), \mathfrak{s})$, donde $O(M^4)$ denota una orientación de M^4 y \mathfrak{s} es una estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$ en M^4 , es precisamente la clase de cobordismo orientado $|\mathcal{M}_\tau|$. Aún cuando esta asociación define un invariante, resulta un tanto inútil en la práctica. Una manera más inteligente de aprovechar las características fundamentales del espacio moduli de monopolos consiste en construir ciertas formas diferenciales que representen clases no triviales $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k \in H^*(\mathcal{M}_\tau; \mathbb{R})$. De esta construcción se obtiene invariantes numéricos de la forma

$$\langle \mathcal{O}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{O}_{i_r}; [\mathcal{M}_\tau] \rangle = \int_{\mathcal{M}_\tau} \mathcal{O}_{i_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{O}_{i_r}$$

que cambian de signo al cambiar la orientación de M^4 y que por lo demás solo dependen de la estructura $\text{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$. Para una estructura $\text{Spin}(4)$ fija, se tiene un número finito de espacios moduli no vacíos y por tanto un número finito de invariantes, que de hecho detectan cambios en la estructura diferenciable de M^4 . Este es el enfoque original propuesto por Witten en [43] y es un caso particular de un programa mucho más ambicioso para construir invariantes topológicos de una n -variedad N a partir de una teoría de norma definida en N . Este tipo de teorías se conocen como *teorías topológicas cuánticas de campo* y fueron propuestas por Witten en su artículo de 1988 [42]. En [21] se discute detalladamente la construcción de invariantes topológicos a partir de teorías topológicas cuánticas de campo.

Bibliografía

- [1] E. Artin. *Geometric Algebra*. Interscience Publishers, Inc., 250 Fifth Avenue, New York 1957.
- [2] M. F. Atiyah and M. F. Singer. The index of elliptic operators on compact manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, pages 422–433, May 196. 1963.
- [3] J. Baez and J. P. Muniain. *Gauge Fields, Knots, and Gravity*, volume 4 of *Knots and Everything*. World Scientific, 57 Shelton Street, Covent Garden, London, October 1994.
- [4] B. BooB-BavnbeK and K. P. Wojciechowski. *Elliptic Boundary Problems For Dirac Operatos*. Mathematics: Theory and Applications. Birkhäuser, 675 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA, 1st edition, August 1993.
- [5] T. Bröcker and K. Jänich. *Introduction to Differential Topology*. Cambridge University Press, UPH, Shaftesbury Road, Cambridge, 1st edition, October 1982.
- [6] J.-L. Brylinski. *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*, volume 107 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 675 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA, 2nd edition, 1993.
- [7] S. S. Chern, W. H. Chen, and J. S. Lam. *Lectures on Differential Geometry*, volume 1 of *Series on University Mathematics*. World Scientific, 57 Shelton Street, Covent Garden, London, 1st edition, November 1999.
- [8] E. de Faria and W. de Melo. *Mathematical Aspects of Quantum Field Theory*, volume 127 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, UPH, Shaftesbury Road, Cambridge, August 2010.
- [9] P. A. M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society A*, 117(778):610–624, February 1928.
- [10] M. P. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Theory and Applications. Birkhäuser, 675 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA, 1st edition, 1992.
- [11] S. K. Donaldson. An application of gauge theory to the topology of four manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 18(2):279–315, 1983.
- [12] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz. *4-Manifolds and Kirby Calculus*, volume 20 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1st edition, August 1999.
- [13] P. A. Grillet. *Abstract Algebra*, volume 242 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer, 233 Spring Street, NY, 2nd edition, July 2007.
- [14] V. Guillemin and A. Pollack. *Differential Topology*, volume 370 of *AMS Chelsea Publishing*. American Mathematical Society, reprint edition, August 2010.
- [15] A. Güijosa. Teoria cuantica de campos. <http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes/indice.html>, 2010. Notas de Curso.
- [16] J. H. Blaine Lawson and M.-L. Michelsohn. *Spin Geometry*, volume 38 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey, 1989.
- [17] A. Hatcher. Cornell’s official website. <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/>. Lecture Notes and Books.
- [18] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Geometry and Topology. Cambridge University Press, Ruiz de Alracon 13, Madrid, 1st edition, February 2002.
- [19] D. Husemoller. *Fiber Bundles*, volume 20 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 3rd edition, Dicember 1999.
- [20] J. Jost, X. Peng, and G. Wang. Variational aspects of the seiberg-witten functional. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 4(3):205–218, April 1996.
- [21] J. Labastida and M. Marino. *Topological Quantum Field Theory and Four Manifolds*, volume 25 of *Mathematical Physics Studies*. Springer, 3300 AA Dordrecht, The Netherlands, 1st edition, April 2005.

- [22] J. M. F. Labastida and C. Lozano. Lectures in topological quantum field theory. [arXiv: hep-th/9709192v1](https://arxiv.org/abs/hep-th/9709192v1), September 1997.
- [23] S. Lang. *Differential and Riemannian Manifolds*, volume 160 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer-Verlag, 175 Fifth Avenue, N. Y., 3^{ed} edition, May 1996.
- [24] C. LeBrun. Weyl curvature, einstein metrics, and seiberg-witten theory. *Mathematical Research Letters*, 5(4):423–438, 1998.
- [25] C. LeBrun. Ricci curvature, minimal volumes, and seiberg-witten theory. *Inventiones Mathematicae*, 145(2):279–316, August 2001.
- [26] C. LeBrun. Edges, orbifolds, and seiberg-witten theory. <http://arxiv.org/abs/1305.1960>, May 2013.
- [27] P. Lounesto. *Clifford Algebras and Spinors*, volume 286 of *London Mathematical Society Lecture Notes Series*. Cambridge University Press, Ruiz de Alracon 13, Madrid, 2nd edition, 2001.
- [28] M. Marcolli. *Seiberg-Witten Gauge Theory*, volume 17 of *Texts and Readings in Mathematics*. Hindustan Book Agency, O-131, The Shopping Mall Arjun Marg, DLF Phase 1, Gurgaon-122002, 1st edition, July 1999.
- [29] J. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Annals of Mathematics*, 64(2):399–405, September 1956.
- [30] J. Milnor. On simply connected 4-manifolds. *Symposium Internacional de Topología Algebraica*, pages 122–128, 1958.
- [31] J. D. Moore. *Lectures on Seiberg-Witten Invariants*, volume 1629 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2nd edition, May 2001.
- [32] J. W. Morgan. *The Seiberg-Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds*. Mathematical Notes. Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey, December 1995.
- [33] L. I. Nicolaescu. *Lectures on the Geometry of Manifolds*. 201 Charles Street, Providence, Rhode Island, 2nd edition, October 2000.
- [34] S. Roman. *Advanced Linear Algebra*, volume 135 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2nd edition, 2005.
- [35] B. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, Ruiz de Alracon 13, Madrid, 1st edition, February 1985.
- [36] R. G. Swan. Vector bundles and projective modules. *Transactions of the American Mathematical Society*, 105(2):264–277, November 1962.
- [37] C. H. Taubes. *Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature*, volume 23 of *Oxford Graduate Text in Mathematics*. Oxford University Press, New York, 1st edition, December 2011.
- [38] P. A. Tipler and R. A. Llewellyn. *Modern Physics*. W. H. Freeman, 41 Madison Avenue, New York, 5th edition, September 2007.
- [39] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, volume 94 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, reprint edition.
- [40] C. A. Weibel. *An introduction to Homological Algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 1st edition, October 1995.
- [41] J. H. C. Whitehead. On simply connected 4-dimensional polyhedra. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 22:48–92, 1949.
- [42] E. Witten. Topological quantum field theory. *Communications in Mathematical Physics*, 117(3):353–386, September 1988.
- [43] E. Witten. Monopoles and four manifolds. *Communications in Mathematical Physics*, 234(5):153–186, November 1994.
- [44] E. Witten. Supersymmetric yang-mills theory on a four-manifold. *Journal of Mathematical Physics*, 35(10):5101–5136, October 1994.
- [45] E. Witten and N. Seiberg. Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric yang-mills theory. *Nuclear Physics B*, 426(1):19–52, September 1994.
- [46] E. Witten and N. Seiberg. Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N = 2$ supersymmetric QCD. *Nuclear Physics B*, 431(3):484–550, December 1994.
- [47] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical Review*, 96(1):191–195, October 1954.

- [48] H. D. Young and R. A. Freedman. *University Physics*, volume 3. Pearson Addison Wesley, 1301 Sansome St., San Francisco, CA, 12th edition, March 2007.
- [49] W. Zhang. *Lectures on Chern-Weil Theory and Witten Deformations*, volume 4 of *Nankai Tracts in Mathematics*. World Scientific, Faner Road, Singapor, 1st edition, September 2001.
- [50] Élie Cartan. *The Theory of Spinors*. Dover Publications, 31 East 2nd Street, Mineola, New York, February 1981.